



HAL
open science

Numerical approximation of hyperbolic stochastic scalar conservation laws

Sylvain Dotti

► **To cite this version:**

Sylvain Dotti. Numerical approximation of hyperbolic stochastic scalar conservation laws. Analysis of PDEs [math.AP]. Aix-Marseille Université (AMU), 2017. English. NNT: . tel-01661124v2

HAL Id: tel-01661124

<https://theses.hal.science/tel-01661124v2>

Submitted on 19 Dec 2017 (v2), last revised 18 May 2018 (v4)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE MARSEILLE

ED-184 MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES

Thèse

présentée pour obtenir le grade universitaire de docteur

Discipline : MATHÉMATIQUE

Spécialité : ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Sylvain DOTTI

Approximation numérique de lois de conservation hyperboliques
stochastiques scalaires

Numerical approximation of hyperbolic stochastic scalar
conservation laws

Soutenue le 04/12/2017 devant le jury présidé par Frédéric Lagoutière :

Benoît Merlet	Professeur, Université de Lille 1	Rapporteur
Petra Wittbold	Professeur, Université de Duisburg- Essen, Allemagne	Rapporteuse
Fabienne Castell	Professeur, Université d'Aix-Marseille	Examinatrice
Frédéric Lagoutière	Professeur, Université de Lyon 1	Examineur
Guy Vallet	Maître de Conférences HDR, Université de Pau	Examineur
Julia Charrier	Maître de Conférences, Université d'Aix-Marseille	Invitée
Thierry Gallouët	Professeur, Université d'Aix-Marseille	Directeur de thèse
Julien Vovelle	Chargé de Recherches HDR, Université de Lyon 1	Directeur de thèse



Cette oeuvre est mise à disposition selon les termes de la [Licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France](#).

Résumé

Nous étudions dans cette thèse, une loi de conservation scalaire hyperbolique d'ordre un avec terme source stochastique et flux non-linéaire.

Le terme source stochastique peut être considéré comme la superposition d'une infinité de bruits Gaussiens dépendants de la quantité conservée.

Nous donnons une définition de solution de cette équation aux dérivées partielles stochastiques (EDPS) d'un point de vue intermédiaire entre celui de l'analyste (solution non régulière en espace, introduction d'une variable supplémentaire dite cinétique) et celui du probabiliste (solution processus stochastique continu à droite limité à gauche en temps). L'unicité de la solution est prouvée grâce à un dédoublement des variables à la Kruzkov.

Nous étudions la stabilité de la loi de conservation pour donner un théorème général donnant les conditions d'existence d'une solution et les conditions de convergence d'une suite de solutions approchées vers la solution de la loi de conservation. Cette étude se fait grâce à des outils probabilistes : représentation des martingales sous forme d'intégrales stochastiques, existence d'un espace probabilisé sur lequel la convergence de lois de probabilités est équivalente à la convergence presque sûre de variables aléatoires.

Pour finir l'étude, nous prouvons l'existence d'une solution grâce aux propriétés de l'approximation de l'EDPS par un schéma numérique des Volumes Finis explicite en temps, puis la convergence de cette approximation vers la solution de l'EDPS. Les outils utilisés sont ceux de l'analyse, spécifiquement ceux de la méthode des Volumes Finis en déterministe, auxquels il faut ajouter ceux du calcul stochastique (outils probabilistes).

Abstract

In this thesis, we study a scalar hyperbolic conservation law of order one, with stochastic source term and non-linear flux. The source term can be seen as the superposition of an infinity of Gaussian noises depending on the conserved quantity.

We give a definition of solution of this stochastic partial differential equation (SPDE) with an intermediate point of view between that of the analyst (non-regular solution in space, introduction of an additional kinetic variable) and that of the probabilist (right continuous with left limits in time stochastic process solution). Uniqueness of the solution is proved thanks to a doubling of variables à la Kruzkov.

We study the stability of the conservation law, in order to give a general theorem where the conditions of existence of a solution and conditions of convergence of a sequence of approximate solutions towards the solution of the conservation law are given. This study is done thanks to probabilistic tools : representation of martingales in the form of stochastic integrals, existence of a probability space on which the convergence of probability measures is equivalent to the almost sure convergence of random variables.

To finish the study, we prove the existence of a solution thanks to the properties of the approximation of the SPDE given by an explicit in time Finite Volumes numerical scheme, then the convergence of this approximation towards the solution of the SPDE. The tools used are those of the numerical analysis, especially those of the Finite Volume Method, and those of the stochastic calculus (probabilistic tools).

Remerciements

Comment exprimer la reconnaissance, la gratitude et l'admiration que j'éprouve pour mes deux directeurs de thèse Thierry Gallouët et Julien Vovelle ?

J'ai rencontré Thierry, il y a déjà quelques années, lorsque j'étais son étudiant en Licence et en maîtrise, je l'ai recroisé quand j'ai repris mes études à l'université, désireux d'étudier ce qui me passionne le plus en mathématique : la probabilité, il était chargé de TD. Il a accepté avec bienveillance de devenir mon directeur de thèse, et m'a présenté son ancien étudiant Julien Vovelle, spécialiste en équations aux dérivées partielles stochastiques. Le choix du sujet élaboré par Julien était le meilleur compromis entre mon désir d'étudier avec Thierry et ma passion pour la probabilité.

Ma situation professionnelle ayant évolué en début de thèse, j'ai obtenu un poste de PRAG à la faculté d'économie de La Réunion, j'ai donc moins rencontré mes deux directeurs physiquement. Je pense être resté très proche de leurs pensées. Je les remercie pour leur patience, disponibilité, encouragements, et conseils qui m'ont permis de progresser ces dernières années. Finalement, je me suis senti comme un apprenti, côtoyant deux grands mathématiciens et essayant de progresser à leurs côtés pour apprendre leur art. Plus poétiquement, je les vois au sommet d'une montagne, la montagne mathématique, et moi, en bas de la vallée, essayant de trouver le meilleur chemin pour atteindre cette montagne. Quoi qu'il en soit, cette thèse fut d'une grande saveur intellectuelle, et j'espère pouvoir continuer dans cette voie qu'est la recherche mathématique, ces quinze ou vingt prochaines années.

Mon éloignement du Laboratoire d'analyse ne m'a pas permis d'échanger avec d'autres mathématiciens ou thésards, mais internet, Wikipédia, Skype, les e-mails, les centaines d'articles de recherche mis en ligne gratuitement, les centaines de cours d'excellente qualité mis en ligne gratuitement, m'ont grandement aidé à étudier et faire avancer ma thèse. Je tiens à souligner le désintéressement total de tous ces auteurs que je ne peux citer, dont le seul but est le partage de la connaissance mathématique.

Les nombreux livres qui m'entourent, qui créent cette atmosphère d'étude et qui me soutiennent dès que le besoin s'en fait sentir, ont finalement été mes compagnons indispensables à mes travaux, à mes progrès.

Partageant le point de vue de Martin Andler introduisant le cycle des conférences « un texte, un mathématicien », je me permets de retranscrire ses mots :

« *Les mathématiques s'écartent des autres sciences par le rôle essentiel qu'y jouent les textes ; contrairement aux sciences expérimentales de la nature, où les articles et livres décrivent une réalité extérieure et un dispositif expérimental, interprétés*

par les scientifiques, le texte mathématique constitue à lui seul la totalité de ce qui a été produit par le mathématicien : un mathématicien est un écrivain » .

Je vais donc citer et remercier les auteurs des livres (papier ou numérique) dont j'ai pu lire, relire, étudier chaque détail au cours de ces dernières années :

- Daniel Revuz [[Rev97](#)] pour son excellent « Probabilités » aux éditions Hermann
- Etienne Pardoux [[Par](#)] pour son style et la clarté de ses démonstrations dans son polycopié de Probabilités destiné aux étudiants de Master
- Jean-Yves Oувrard [[Ouv04](#)] pour son « Probabilités 2 » aux éditions Cassini
- Patrick Billingsley [[Bil13](#)] pour son colossal « Convergence of probability measures » aux éditions Wiley-Interscience
- Thierry Gallouët et Raphaèle Herbin [[GH](#)] pour leur monument en ligne « Mesure, intégration, probabilités »
- André Gramain [[Gra94](#)] pour son « Intégration » aux éditions Hermann
- Haïm Brézis [[Bre99](#)] pour son « Analyse fonctionnelle, théorie et applications » aux éditions Dunod
- Michel Willem [[Wil03](#)] pour son « Principes d'analyse fonctionnelle » aux éditions Cassini
- Luigi Ambrosio, Nicola Fusco, Diego Pallara [[AFP00](#)] pour leur talentueux « Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems » aux éditions Oxford University Press
- Laurent Di Menza [[Di 09](#)] pour son « Analyse numérique des équations aux dérivées partielles » aux éditions Cassini
- Robert Eymard, Thierry Gallouët et Raphaèle Herbin [[EGH03](#)] pour leur « Finite Volume Methods » en ligne
- Julien Vovelle [[Vov11](#)] pour la clarté de son cours de M2 « Méthode Volume Fini » en ligne
- Benoît Perthame [[Per02](#)] pour son excellent « Kinetic Formulation of Conservation Laws » aux éditions Oxford University Press
- Charalambos Makridakis et Benoît Perthame [[MP03](#)] pour leur article « Sharp CFL, Discrete Kinetic Formulation and Entropic Schemes for Scalar Conservation Laws »

- Lawrence C. Evans et Ronald F. Gariepy [EG15] pour leur très utile « Measure Theory and Fine Properties of Functions » aux éditions Chapman and Hall/CRC Press
- Charles Castaing, Paul Raynaud de Fitte et Michel Valadier [CFV04] pour leur brillant « Young Measures on Topological Spaces » aux éditions Kluwer Academic Publishers
- Katja Frieler et Claudia Knoche [FK01] pour l'exceptionnelle rigueur de leur mémoire de Diplomarbeit intitulé « Solutions of Stochastic Differential Equations in Infinite Dimensional Hilbert Spaces and their Dependence on Initial Data »
- Claudia Prévôt et Michael Röckner [PR07] pour leur efficace « A concise Course on Stochastic Partial Differential Equations » aux éditions Springer
- Giuseppe Da Prato et Jerzy Zabczyk [DZ92] « Stochastic Equations in Infinite Dimensions » aux éditions Cambridge
- Leszek Gawarecki et Vidyadhar Mandrekar [GM10] pour leur « Stochastic Differential Equations in Infinite Dimensions » aux éditions Springer
- Léonard Gallardo [Gal08] pour son très pédagogique « Mouvement Brownien et calcul d'Itô » aux éditions Hermann
- Daniel Revuz et Marc Yor [RY13] pour leur « Continuous Martingales and Brownian Motion » aux éditions Springer
- Caroline Bauzet, Julia Charrier et Thierry Gallouët pour leurs articles [BCG16a] « Convergence of flux-splitting finite volume schemes for hyperbolic scalar conservation laws with a multiplicative stochastic perturbation » et [BCG16b] « Convergence of monotone finite volume schemes for hyperbolic scalar conservation laws with multiplicative noise »
- Arnaud Debussche et Julien Vovelle [DV10b] ou [DV14] pour leur article de référence, base de réflexion pour mon mémoire de M2 et origine de cette thèse « Scalar conservation laws with stochastic forcing » .

Je tiens à remercier les rapporteurs pour leur travail fastidieux de relecture, pour leurs corrections et leurs encouragements. Je remercie également les membres du jury pour leur bienveillance, leur gentillesse malgré le froid (-8°C), la neige et une salle chauffée par quelques rayons de soleil.

Il me reste à remercier Lallbaba, sadhu de l'Inde, pour ses conseils philosophiques, mes parents, pour leurs ravitaillements indispensables et ma femme Soirifat, pour son excellente cuisine épicée.

Table des matières

Résumé	4
Abstract	6
Remerciements	9
Introduction	16
1 Rappel des faits : état de l'art	16
1.1 Historique des définitions de solutions de lois de conservation scalaires, résultats d'existence et d'unicité	16
1.2 Idées mathématiques donnant les définitions de solutions entropiques et cinétiques de lois de conservation scalaires, lien avec le théorème de Clausius	33
1.2.1 Cas de la loi de conservation hyperbolique sans terme source	33
1.2.2 Cas de la loi de conservation hyperbolique avec terme source déterministe	35
1.2.3 Cas de la loi de conservation hyperbolique avec terme source stochastique	37
1.3 Résultats de convergence et vitesses de convergence de schémas Volumes Finis, une histoire récente	41
2 Convergence d'approximations pour les lois de conservation stochastiques scalaires	63
2.1 Le premier article soumis à la revue Archive for Rational Mechanics and Analysis, le 5 septembre 2017	63
2.1.1 Introduction	64
2.1.2 Kinetic solution	66
2.1.3 Comparison, uniqueness and reduction of generalized solutions	82
2.1.4 Convergence of approximate solutions	91
2.1.5 Some applications	117
2.2 Détails des démonstrations du premier article	119
2.2.1 Sur l'introduction 2.1.1	119
2.2.2 Sur la mesurabilité des solutions (cf § 2.1.2.1)	121
2.2.3 Sur la tension des mesures (cf formule (2.7))	123
2.2.4 A propos des mesures aléatoires (cf § 2.1.2.1)	124
2.2.5 A propos de la définition 3	125

2.2.6	Sur la proposition 5 « mass of the random measure »	130
2.2.7	Concernant les mesures de Young (cf définition 6)	132
2.2.8	Au sujet du théorème 10 et de son corollaire 11	134
2.2.9	Au sujet du lemme 12	138
2.2.10	A propos de la définition de solution généralisée	142
2.2.11	Sur la proposition 15	148
2.2.12	Sur le lemme 16 « distance à un équilibre »	149
2.2.13	Sur la preuve de la proposition 17	151
2.2.14	Sur la remarque 19 « uniform bound »	152
2.2.15	Sur la remarque 20 « équation pour f^- »	154
2.2.16	A propos de la proposition 21 « the case of equilibrium »	155
2.2.17	Sur la proposition 23	156
2.2.18	Sur la proposition 24	157
2.2.19	Sur la démonstration de la proposition 24	161
2.2.20	A propos du théorème 26 (unicité et réduction)	173
2.2.21	A propos de la preuve du théorème 26 (unicité et réduction)	174
2.2.22	A propos du théorème 29	186
2.2.23	Sur la définition de convergence en probabilité	186
2.2.24	Sur l'intégrale stochastique vue comme une martingale et sa réciproque (paragraphe 2.1.4.2)	186
2.2.25	Utilisation de la tension des mesures de Young et du théorème de Skorokhod	192
2.2.26	Sur la preuve de la proposition 33	193
2.2.27	Sur la preuve de la proposition 34	196
2.2.28	Sur la tension dans les espaces de Skorokhod (cf paragraphe 2.1.4.3 et [Bil13])	199
2.2.29	Sur la preuve de la proposition 35	202
2.2.30	Sur l'énoncé du théorème 36, convergence des solutions généralisées approchées	207
2.2.31	Sur la preuve du théorème 36	208
2.2.32	A propos du paragraphe 2.1.4.6	239
3	Convergence de la méthode des volumes finis pour les lois de conservation stochastiques scalaires démontrée par une formulation cinétique	243
3.1	Le deuxième article soumis à la revue Stochastics and Partial Differential Equations : Analysis and Computations, le 29 août 2017	243
3.1.1	Introduction	244
3.1.2	Generalized solutions, approximate solutions	246
3.1.3	The finite volume scheme	251
3.1.4	The kinetic formulation of the finite volume scheme	253
3.1.5	Energy estimates	256
3.1.6	Approximate kinetic equation	265

3.1.7	Convergence	277
3.2	Détails des démonstrations du deuxième article	284
3.2.1	Au sujet du paragraphe 3.1.3 « The Finite Volume Scheme »	284
3.2.2	Sur le paragraphe 3.1.4	286
3.2.3	Sur la proposition 58, choix du flux cinétique discret et de la mesure de défaut discrète	292
3.2.4	Sur le paragraphe 3.1.5, estimations d'énergies	298
3.2.5	Sur la proposition 60 (estimation d'énergie)	302
3.2.6	Sur la preuve de la proposition 60	303
3.2.7	Sur la preuve de la proposition 61	307
3.2.8	Concernant la remarque 64	319
3.2.9	Sur le corollaire 62 (weak derivative estimate)	319
3.2.10	Sur l'introduction du paragraphe 3.1.6	321
3.2.11	Sur la preuve du lemme 65	322
3.2.12	Sur l'équation cinétique discrète (proposition 67)	324
3.2.13	Sur la preuve de la proposition 68 (f_δ est une solution cinétique approchée)	327
3.2.14	Sur la consistance en espace (preuve du lemme 69)	331
3.2.15	Sur la preuve du lemme 70	339
3.2.16	Sur la tension des mesures de Young numériques ν^δ	352
3.2.17	Sur la tension des m_δ (lemme 72)	362
3.2.18	Sur le théorème 74, le paragraphe 3.1.7.2 et la convergence du schéma Volumes Finis	362
3.2.19	Au sujet de la formule (3.167)	364
	Conclusion	366
	Bibliographie	374

Introduction

Qu'est-ce qu'une loi de conservation ?

C'est une loi physique qui dit d'une certaine quantité mesurable (énergie, masse, quantité de mouvement, flux magnétique, charge électrique ...) dans un système donné, qu'elle ne change au cours du temps que par les quantités entrantes, les quantités sortantes à travers les frontières du système et par la quantité créée à l'intérieur du système.

Elle s'exprime mathématiquement grâce à une équation aux dérivées partielles qui donne l'évolution au cours du temps de cette quantité mesurée dans un système donné.

Plus précisément, soit U la fonction donnant la quantité mesurée à chaque instant $t \in \mathbb{R}^+$, c'est à dire la mesure d'un sous-ensemble de l'espace \mathbb{R}^d (où d est appelée la dimension de l'espace) à chaque instant $t \in \mathbb{R}_*^+$, autrement dit

$$U : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

(où $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est la tribu borélienne de \mathbb{R}^d)

et u la fonction donnant la densité de cette quantité à chaque instant $t \in \mathbb{R}^+$,

$$u : (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \mapsto u(x, t) \in \mathbb{R}$$

alors cette loi de conservation peut s'écrire

$$\partial_t u(x, t) + \operatorname{div}_x(F(x, t)) = G(x, t, u(x, t))$$

grâce à la fonction densité u , à une fonction F exprimant le flux de quantité à travers un système donné, et à une fonction G exprimant la quantité créée ou absorbée par le système ($G(t, x, u(x, t))$ est appelé terme source).

Elle peut aussi s'écrire sous sa forme intégrale, grâce au sous-ensemble ouvert borné régulier $D \subset \mathbb{R}^d$ qui représente le système donné et sa frontière notée ∂D :

$$\int_{t_1}^{t_2} \partial_t \int_D u(x, t) dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_D \operatorname{div}_x(F(x, t)) dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_D G(x, t, u(x, t)) dx dt$$

soit, en supposant F et u suffisamment régulières

$$\int_D u(x, t_2) dx - \int_D u(x, t_1) dx + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial D} F(x, t) \cdot n(x) d\mathcal{H}^{d-1}(x) dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_D G(x, t, u(x, t)) dx dt$$

où $n(x)$ est le vecteur normal extérieur à l'ouvert D , $F(x, t) \cdot n(x)$ le produit scalaire euclidien entre $F(x, t)$ et $n(x)$, \mathcal{H}^{d-1} la mesure de Hausdorff de dimension $d - 1$. On peut aussi l'écrire

$$U(D, t_2) - U(D, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \int_D G(x, t, u(x, t)) dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial D} F(x, t) \cdot n(x) d\mathcal{H}^{d-1}(x) dt$$

Cela signifie donc que la différence de quantité présente dans le système entre les temps t_1 et t_2 est égale à la quantité créée dans le laps de temps, moins la quantité qui est sortie du système (celle qui passe à travers la frontière ∂D dans le sens de $n(x)$) plus la quantité qui est entrée dans le système (celle qui passe à travers la frontière ∂D dans le sens de $-n(x)$).

On se limitera dans cette thèse à des lois de conservation qui sont des équations aux dérivées partielles du premier ordre, c'est à dire telles que le flux F s'écrit

$$F(x, t) = A(x, t, u(x, t))$$

La loi de conservation étudiée s'écrira donc

$$\partial_t u(x, t) + \operatorname{div}_x (A(x, t, u(x, t))) = G(x, t, u(x, t)) \quad (0.1)$$

Si la fonction $(x, t, \zeta) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_\zeta \mapsto G(x, t, \zeta)$ ne dépend pas de la dernière variable, alors l'équation (0.1) modélise une situation où le terme source ne dépend pas de la densité de la quantité conservée u .

Si le terme source est stochastique, on remplacera $G(x, t, u(x, t))$ par

$$\Phi(x, t, u(x, t)) \frac{dW(t)}{dt}$$

avec W processus de Wiener réel, de dimension finie ou cylindrique. Mais il ne faudra pas oublier que le terme source et la densité u dépendent du hasard $\omega \in \Omega$, où $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé; et aussi que W n'est nulle part dérivable par rapport à t .

L'équation (0.1) pourra alors s'écrire

$$\partial_t u(x, t) + \operatorname{div}_x (A(x, t, u(x, t))) = \Phi(x, t, u(x, t)) \frac{dW(t)}{dt}$$

ou bien

$$du(x, t) + \operatorname{div}_x (A(x, t, u(x, t))) dt = \Phi(x, t, u(x, t)) dW(t)$$

ou encore

$$du(x, t, \omega) + \operatorname{div}_x (A(x, t, u(x, t, \omega))) dt = \Phi(x, t, u(x, t, \omega)) dW(t, \omega),$$

la variable ω étant souvent omise.

Rappelons que la divergence (suivant la variable x) d'une fonction

$A : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_\zeta \rightarrow \mathbb{R}^d$ est

$$\operatorname{div}_x (A(x, t, \zeta)) = \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} A_i(x, t, \zeta)$$

et donc par composition

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}_x (A(x, t, u(x, t))) \\ &= \sum_{i=1}^d \left((\partial_i A_i)(x, t, u(x, t)) + (\partial_\zeta A_i)(x, t, u(x, t)) \times \partial_{x_i} (u(x, t)) \right) \end{aligned}$$

pour des fonctions A et u suffisamment régulières.

Remarque :

Dans le cadre de l'équation (0.1), comme u est à valeurs réelles, on dit que la loi de conservation est scalaire. Si u était à valeurs dans \mathbb{R}^p (et donc G aussi), alors que A serait à valeurs dans $(\mathbb{R}^d)^p$, on parlerait de système de lois de conservation, et chaque fonction composante de u vérifierait une égalité (0.1) avec les fonctions composantes de G et de A .

Remarque économique :

U pourrait aussi mesurer la quantité d'argent présente dans un pays donné, une région donnée, une entreprise donnée, A représenter le flux d'argent, G la source d'argent.

Autres remarques :

Une bonne introduction et de très bons exemples sont donnés dans le premier chapitre du cours en ligne [Vov11] de Julien Vovelle « Méthode Volumes finis ». Pour des exemples « concrets » issus de la mécanique des fluides, on pourra consulter le mémoire HDR de Sébastien Martin [Mar12].

Pour définir ce qu'on appellera solution de l'équation aux dérivées partielles (0.1), dans le sens où on espère qu'il existe une et une seule fonction u vérifiant l'égalité (0.1) à A et G fixés, il faut immédiatement rajouter une condition à l'équation (0.1) : la condition initiale (la connaissance de u au temps $t = 0$, ou à un autre temps $t = t_0$), ou la condition au bord (la connaissance de u pour x appartenant à la frontière d'un ouvert régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^d$) ou un mélange de conditions de ces types.

1 Rappel des faits : état de l'art

1.1 Historique des définitions de solutions de lois de conservation scalaires, résultats d'existence et d'unicité

Première définition de solution :

La solution naturelle de (0.1) est une solution $u \in C^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+; \mathbb{R})$ qui permet aux dérivées partielles d'exister. Cette solution s'appelle solution au sens classique.

Deux exemples :

Si $d = 1$, $A(x, t, \zeta) = \frac{\zeta^2}{2}$, $G(x, t, \zeta) = 0 \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}$, alors l'équation de Burgers

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + \frac{1}{2} \partial_x (u(x, t))^2 = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

avec la condition initiale $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ croissante, admet pour unique solution u définie $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ par

$$u(x, t) = u_0(\xi(x, t))$$

où ξ est l'unique fonction de classe C^1 vérifiant

$$u_0(\xi(x, t))t + \xi(x, t) - x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+$$

On pourra consulter [Di 09] pages 82/83 pour la démonstration.

Si $\forall \zeta \in \mathbb{R}$, $A(x, t, \zeta) = \zeta b$ avec $b \in \mathbb{R}^d$ fixé, et $G \in C(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+; \mathbb{R})$ alors l'équation de transport

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + \operatorname{div}_x (u(x, t) b) = G(x, t), & \forall x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_*^+ \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

avec la condition initiale $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$

admet pour unique solution u définie $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ par

$$u(x, t) = u_0(x - tb) + \int_0^t G(x + (s - t)b, s) ds$$

On pourra consulter [Eva10] page 19 pour la démonstration.

Dans le cas où la condition initiale u_0 est discontinue, on comprend bien que la

loi de conservation scalaire ne peut pas avoir de solution au sens classique.

Deuxième définition de solution :

La notion de solution faible fut introduite par Jean Leray (qu'il appelle « solution turbulente ») dans son article [Ler33] de 1933. Grâce à des fonctions tests $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$ multipliées à (0.1), et à deux intégrations par parties, on dira que $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_*^+)$ est solution faible de (0.1) si $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_*^+)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_*^+} (u(x, t) \partial_t \varphi(x, t) + A(x, t, u(x, t)) \cdot \nabla \varphi(x, t)) dx dt = - \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_*^+} G(x, t, u(x, t)) \varphi(x, t) dx$$

avec A, G tels que $(x, t) \mapsto A(x, t, u(x, t))$ et $(x, t) \mapsto G(x, t, u(x, t))$ appartiennent à $L_{loc}^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_*^+)$.

Si on considère Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + \operatorname{div}_x (A(x, t, u(x, t))) = G(x, t, u(x, t)), & \forall (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \quad (1.1)$$

on dira que $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$ est solution faible du problème de Cauchy si $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} (u(x, t) \partial_t \varphi(x, t) + A(x, t, u(x, t)) \cdot \nabla \varphi(x, t)) dx dt + \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x) \varphi(x, 0) dx = - \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} G(x, t, u(x, t)) \varphi(x, t) dx$$

avec A, G telles que $(x, t) \mapsto A(x, t, u(x, t))$ et $(x, t) \mapsto G(x, t, u(x, t))$ appartiennent à $L_{loc}^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$.

On peut remplacer \mathbb{R}^d par un ouvert Ω de \mathbb{R}^d dans les définitions précédentes, on peut aussi remplacer \mathbb{R}^d par le tore de dimension d noté $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$.

Troisième définition de solution :

Les solutions faibles ne sont en général pas uniques. Kruzkov (1970) dans son article [Kru70] introduit une solution faible généralisée (appelée maintenant solution faible entropique) définie de la manière suivante :

une fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+; \mathbb{R})$ est dite solution faible entropique de (0.1) si

$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_*^+; \mathbb{R}^+)$ et $\forall k \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_*^+} \left(|u(x, t) - k| \partial_t \varphi(x, t) \right. \\ & \quad \left. + \operatorname{sgn}(u(x, t) - k) (A(x, t, u(x, t)) - A(x, t, k)) \cdot \nabla \varphi(x, t) \right) dx dt \\ & - \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_*^+} \operatorname{sgn}(u(x, t) - k) (\operatorname{div}_x A(x, t, k) - G(x, t, u(x, t))) \varphi(x, t) dx \geq 0 \end{aligned}$$

qui devient, en tenant compte de la condition initiale

$$u(x, 0) = u_0(x), \forall x \in \mathbb{R}^d, \text{ avec } u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d) :$$

une fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+; \mathbb{R})$ est dite solution faible entropique de (1.1) si

$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+)$ et $\forall k \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \left(|u(x, t) - k| \partial_t \varphi(x, t) \right. \\ & \quad \left. + \operatorname{sgn}(u(x, t) - k) (A(x, t, u(x, t)) - A(x, t, k)) \cdot \nabla \varphi(x, t) \right) dx dt \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^d} |u_0(x) - k| \varphi(x, 0) dx \\ & - \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \operatorname{sgn}(u(x, t) - k) (\operatorname{div}_x A(x, t, k) - G(x, t, u(x, t))) \varphi(x, t) dx \geq 0. \end{aligned}$$

On a le théorème d'existence et d'unicité donné par Kruzkov (1970) :
sous les hypothèses suivantes

- $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$
- $A \in C^3(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_\zeta)$
- $\sup\{|\partial_\zeta A(x, t, \zeta)|, x \in \mathbb{R}^d, t \in [0, T], \zeta \in [-M, M]\} < +\infty, \quad \forall M \in \mathbb{R}^+$
- $G \in C^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_\zeta)$
- $\sup\{|G(x, t, 0) - \operatorname{div}_x A(x, t, 0)|, x \in \mathbb{R}^d, t \in [0, T]\} < +\infty$
- $\sup\{|\partial_\zeta (G - \operatorname{div}_x A)(x, t, \zeta)|, x \in \mathbb{R}^d, t \in [0, T], \zeta \in \mathbb{R}\} < +\infty,$

il existe une unique solution faible entropique $u \in C(\mathbb{R}^+; L_{loc}^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}))$ au problème de Cauchy (1.1).

Les discussions sur les hypothèses du théorème de Kruzkov et la définition de solution faible entropique des articles [GH94] et [CMR09] sont particulièrement intéressantes.

Des considérations physiques permettent de dire que la solution faible entropique est la « bonne solution » du point de vue physique. On pourra consulter le livre de Lawrence C. Evans [Eva10] pages 135-161 puis pages 641-653 pour la préparation et la construction de la définition de solution entropique, et pour les démonstrations d'existence et d'unicité.

Voici une définition équivalente de solution faible entropique de (1.1) dans le cas où $A(x, t, \zeta) = A(\zeta)$:
soit $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe appelée entropie, soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ appelée « flux d'entropie η » définie sur \mathbb{R} par

$$\phi(u) = \int_0^u \eta'(s) A'(s) ds,$$

une fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+; \mathbb{R})$ est dite solution faible entropique de (1.1) si $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+)$ et pour tout couple entropie/flux d'entropie (η, ϕ) on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \left(\eta(u(x, t)) \partial_t \varphi(x, t) + \phi(u(x, t)) \cdot \nabla \varphi(x, t) \right) dx dt \\ & + \int_{\mathbb{R}^d} \eta(u_0(x)) \varphi(x, 0) dx + \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \eta'(u(x, t)) G(x, t, u(x, t)) \varphi(x, t) dx \geq 0. \end{aligned}$$

Une variante du théorème de Kruzkov est donnée dans le cas où

- $G \equiv 0$
- $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ est localement Lipschitzienne
- $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$

Sous ces hypothèses, il existe une unique solution faible entropique au problème de Cauchy (1.1) qui vérifie $u \in C(\mathbb{R}^+, L^1(\mathbb{R}^d))$.

Quatrième définition de solution :

Pour définir correctement la « measure valued solution » introduite par Di Perna dans son article « measure-valued solution to conservation laws » [DiP85] qu'on peut traduire par « solution à valeur mesure », commençons par rappeler ce qu'est une mesure de Young :

soit $T \in \mathbb{R}_*^+$, on appelle mesure de Young ν sur $\mathbb{R}^d \times (0, T) \times \mathbb{R}$ associée à la

mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}^d \times (0, T)$, toute mesure positive sur les boréliens de $\mathbb{R}^d \times (0, T) \times \mathbb{R}$ qui vérifie

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times (0, T)), \quad \nu(B \times \mathbb{R}) = \lambda(B)$$

Si $u : \mathbb{R}^d \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ est borélienne, alors l'unique mesure définie par

$$(B, C) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times (0, T)) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mapsto \int_B \delta_{u(x,t)}(C) dxdt$$

est une mesure de Young, dite associée à u et notée $dxdt.\delta_{u(x,t)}$ ou $dxdt \otimes \delta_{u(x,t)}$ sur $\mathbb{R}^d \times (0, T) \times \mathbb{R}$.

Le théorème de désintégration suivant permettra de définir la solution à valeur mesure de (0.1) :

à chaque mesure de Young ν sur $\mathbb{R}^d \times (0, T) \times \mathbb{R}$, on peut associer une famille de mesures de probabilité $\tau_{x,t}$ indexées sur $\mathbb{R}^d \times (0, T)$, telle que $\forall C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : (x, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, T) \mapsto \tau_{x,t}(C)$ soit mesurable et vérifie

$$\forall (B, C) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times (0, T)) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad \int_B \tau_{x,t}(C) dxdt = \nu(B \times C)$$

On notera $\nu = dxdt.\tau_{x,t}$ ou $dxdt \otimes \tau_{x,t}$

On pourra consulter [AFPOO] pages 56-57 pour plus de détails.

Une mesure de Young $\nu = dxdt \otimes \tau_{x,t}$ est une solution à valeur mesure du problème de Cauchy (1.1) avec

- $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$
- $A(x, t, \zeta) = A(\zeta)$ et $\zeta \mapsto A(\zeta) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$
- $G \equiv 0$

si les probabilités $\tau_{x,t}$ sont uniformément supportées par un compact de \mathbb{R} , et si $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d \times (0, T)} \partial_t \varphi(x, t) \int_{\mathbb{R}} r \tau_{x,t}(dr) dxdt \\ + \int_{\mathbb{R}^d \times (0, T)} \nabla_x \varphi(x, t) \cdot \int_{\mathbb{R}} A(r) \tau_{x,t}(dr) dxdt \\ + \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x) \varphi(x, 0) dx = 0 \end{aligned}$$

que l'on peut aussi écrire

$$\int_{\mathbb{R}^d \times (0, T) \times \mathbb{R}} \partial_t \varphi(x, t) r d\nu(x, t, r) + \int_{\mathbb{R}^d \times (0, T) \times \mathbb{R}} \nabla_x \varphi(x, t) \cdot A(r) d\nu(x, t, r) + \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x) \varphi(x, 0) dx = 0.$$

Une mesure de Young $\nu = dxdt \otimes \tau_{x,t}$ est une solution à valeur mesure du problème de Cauchy (1.1) avec

- $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$
- $A(x, t, \zeta) = A(\zeta)$ et $\zeta \mapsto A(\zeta) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$
- $G \equiv 0$

si les probabilités $\tau_{x,t}$ sont uniformément supportées par un compact de \mathbb{R} , et si $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+)$ et pour tout couple entropie/flux d'entropie (η, ϕ) de classe C^1

$$\int_{\mathbb{R}^d \times (0, T) \times \mathbb{R}} \partial_t \varphi(x, t) \eta(r) d\nu(x, t, r) + \int_{\mathbb{R}^d \times (0, T) \times \mathbb{R}} \nabla_x \varphi(x, t) \cdot \phi(r) d\nu(x, t, r) + \int_{\mathbb{R}^d} \eta(u_0(x)) \varphi(x, 0) dx \geq 0$$

L'existence d'une telle « entropic measure valued solution » a été prouvée par Di Perna.

Pour l'unicité, on a le résultat suivant :

On sait qu'il existe une unique solution faible entropique u au problème de Cauchy (1.1) sous les mêmes hypothèses que celles de l'existence d'une solution à valeur mesure. DiPerna a démontré que toute solution à valeur mesure $\nu = dxdt \otimes \tau_{x,t}$ vérifiant

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^s \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}} |r - u_0(x)| \tau_{x,t}(dr) dxdt = 0$$

est égale à $dxdt \otimes \delta_{u(x,t)}$.

Cette définition est utile pour la stabilité des schémas numériques. On pourra consulter [Fjo+15] pour plus de détails.

Cinquième définition :

La notion de processus d'entropie fut définie par Eymard, Gallouët et Herbin [EGH95] dans le cadre de la loi de conservation scalaire (1.1) avec

- $A(x, t, \zeta) = V(x, t) f(\zeta)$ où $V \in C_b^1(\mathbb{R}^d \times [0, T]; \mathbb{R}^d)$
- $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$
- $G \equiv 0$
- $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$

Un processus d'entropie $\mu \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times (0, T) \times (0, 1); \mathbb{R}^d)$ est une solution processus entropique du problème de Cauchy (1.1) si et seulement si μ vérifie pour tout couple d'entropie/flux d'entropie $(\eta, \phi) \in (C^1(\mathbb{R}))^2$ et $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times [0, T]; \mathbb{R}^+)$:

$$\int_{\mathbb{R}^d \times (0, T) \times (0, 1)} (\eta(\mu(x, t, \alpha)) \partial_t \varphi(x, t) + \phi(\mu(x, t, \alpha)) V(x, t) \cdot \nabla \varphi(x, t)) d\alpha dx dt + \int_{\mathbb{R}^d} \eta(u_0(x)) \varphi(x, 0) dx \geq 0$$

Une solution processus entropique μ telle que

$$\text{pour presque tout } (x, t, \alpha) \in \mathbb{R}^d \times (0, T) \times (0, 1), \quad \mu(x, t, \alpha) = u(x, t)$$

implique que u est une solution faible entropique.

De manière réciproque, une solution faible entropique u donne une solution processus entropique μ définie par

$$\forall (x, t, \alpha) \in \mathbb{R}^d \times (0, T) \times (0, 1), \quad \mu(x, t, \alpha) = u(x, t)$$

Ils ont prouvé dans l'article [EGH95] l'existence et l'unicité de la solution processus entropique. Cette solution a un représentant qui ne dépend pas de α . L'existence d'une solution est prouvée grâce à la convergence d'une approximation numérique donnée par un schéma volume fini.

Paraphrasant [EGH95], on peut donner le lien entre « solution à valeur mesure » et « solution processus entropique » :

Soit $\nu = dx dt \otimes \tau_{x,t}$ une mesure de Young sur $\mathbb{R}^d \times (0, T) \times \mathbb{R}$, et soit $F_{x,t}$ la fonction de répartition de la probabilité $\tau_{x,t}$, alors on peut définir

$$\mu(x, t, \alpha) = \inf \{s \in \mathbb{R} : F_{x,t}(s) > \alpha\}$$

qui sera dans $L^\infty(\mathbb{R}^d \times (0, T) \times (0, 1))$ dès que le support des $\tau_{x,t}$ sera uniformément dans un compact de \mathbb{R}

et vérifiera $\forall g \in C(\mathbb{R})$ et $\forall h \in L^1(\mathbb{R}^d \times (0, T))$

$$\int_{\mathbb{R}^d \times (0, T) \times \mathbb{R}} h(x, t) g(r) d\nu(x, t, r) = \int_{\mathbb{R}^d \times (0, T) \times (0, 1)} h(x, t) g(\mu(x, t, \alpha)) dx dt d\alpha$$

On peut ainsi associer à toute « solution à valeur mesure » ν une « solution processus entropique » μ .

Sixième définition :

$u \in L^\infty(\Omega \times (0, T))$ est dite solution entropique (le mot faible étant sous-jacent) au problème de Cauchy /Dirichlet

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + \operatorname{div}_x (A(u(x, t))) = G(x, t), & \forall (x, t) \in \Omega \times (0, T) \\ u(x, t) = b(x, t), & \forall (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in \Omega \end{cases}$$

avec

- Ω ouvert bornée de \mathbb{R}^d à frontière lipschitzienne si $d > 1$
- $A \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$
- $u_0 \in L^\infty(\Omega)$
- $G \in L^\infty(\Omega \times (0, T))$
- $b \in L^\infty(\partial\Omega \times (0, T))$

si et seulement si $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times [0, T]; \mathbb{R}^+)$ et $\forall k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & - \int_{\partial\Omega \times (0, T)} \varphi(x, t) \times \max_{k \leq r; s \leq b(x, t) \vee k} |(A(r) - A(s)) \cdot n(x)| dx dt \\ & \leq \int_{\Omega \times (0, T)} (u(x, t) - k)^+ \partial_t \varphi(x, t) dx dt \\ & + \int_{\Omega \times (0, T)} \left(\mathbf{1}_{u(x, t) > k} (A(u(x, t)) - A(k)) \cdot \nabla_x \varphi(x, t) + G(x, t) \varphi(x, t) \right) dx dt \\ & \quad + \int_{\Omega} (u_0(x) - k)^+ \varphi(x, 0) dx \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & - \int_{\partial\Omega \times (0, T)} \varphi(x, t) \times \max_{b(x, t) \wedge k \leq r; s \leq k} |(A(r) - A(s)) \cdot n(x)| dx dt \\ & \leq \int_{\Omega \times (0, T)} (u(x, t) - k)^- \partial_t \varphi(x, t) dx dt \\ & + \int_{\Omega \times (0, T)} \left(\mathbf{1}_{u(x, t) < k} (-A(u(x, t)) + A(k)) \cdot \nabla_x \varphi(x, t) - G(x, t) \varphi(x, t) \right) dx dt + \\ & \quad \int_{\Omega} (u_0(x) - k)^- \varphi(x, 0) dx \end{aligned}$$

où $n(x)$ est la normale extérieure à la frontière $\partial\Omega$.

Cette définition se trouve dans l'article d'Ammar, Wittbold et Carrillo [AWC06],

et suit un travail antérieur de Carrillo qui traitait le cas $b \equiv 0$.
Ils prouvent l'existence et l'unicité d'une telle solution entropique.

Septième définition :

Commençons par donner la définition de la fonction χ suivante :

$$\chi(\xi, u) = \begin{cases} +1 & \text{si } 0 < \xi < u \\ -1 & \text{si } u < \xi < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans leur article fondateur Lions, Perthame et Tadmor [LPT94b] introduisent une variable supplémentaire (qu'ils appellent vitesse) à la loi de conservation (0.1) avec $A(x, t, \zeta) = A(\zeta)$ et $G \equiv 0$ pour obtenir une formulation cinétique de la loi de conservation scalaire :

$$\partial_t f(x, t, \xi) + A'(\xi) \cdot \nabla_x f(x, t, \xi) = \partial_\xi m(x, t, \xi), \quad (1.2)$$

où m est une mesure positive finie sur $(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_\xi, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_\xi))$ appelée mesure cinétique de défaut d'entropie car elle compense en quelque sorte l'inégalité de la formulation entropique pour en faire une égalité.

Si on rajoute la condition initiale $f(0, x, \xi) = \chi(\xi, u_0(x))$ où $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors une fonction $f(x, t, \xi) = \chi(\xi, u(x, t))$ avec $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$ est solution cinétique du problème de Cauchy composé de l'égalité (1.2) et de la condition initiale précédente si $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_\xi)$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d \times (0, +\infty) \times \mathbb{R}} \partial_t \varphi(x, t, \xi) f(x, t, \xi) dx dt d\xi \\ & + \int_{\mathbb{R}^d \times (0, +\infty) \times \mathbb{R}} \nabla_x \varphi(x, t, \xi) \cdot A'(\xi) dx dt d\xi \\ & + \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \chi(\xi, u_0(x)) \varphi(x, 0, \xi) dx d\xi \\ & = \int_{\mathbb{R}^d \times (0, +\infty) \times \mathbb{R}} \partial_\xi \varphi(x, t, \xi) m(x, t, \xi) dx dt d\xi \end{aligned}$$

Benoît Perthame, dans son livre « Kinetic formulation of conservation laws » [Per02] prouve que si

- A est localement lipschitzienne
- $m \in C_0(\mathbb{R}_\xi; w - M^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+))$ (où $w - M^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$ est l'ensemble des mesures boréliennes positives bornées sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ muni de la topologie faible)

alors il existe une unique solution $f(x, t, \xi) = \chi(\xi, u(x, t))$ cinétique avec $u \in C(\mathbb{R}^+; L^1(\mathbb{R}^d))$. C'est la solution faible entropique du problème de Cauchy correspondant.

Remarque : Si $f(x, t, \xi) \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_\xi)) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_\xi)$ vérifie $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_\xi)$,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d \times (0, +\infty) \times \mathbb{R}} \partial_t \varphi(x, t, \xi) f(x, t, \xi) dx dt d\xi \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^d \times (0, +\infty) \times \mathbb{R}} \nabla_x \varphi(x, t, \xi) \cdot A'(\xi) dx dt d\xi \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \chi(\xi, u_0(x)) \varphi(x, 0, \xi) dx d\xi \\ & \quad = \int_{\mathbb{R}^d \times (0, +\infty) \times \mathbb{R}} \partial_\xi \varphi(x, t, \xi) m(x, t, \xi) dx dt d\xi \end{aligned}$$

sans être forcément égale à $\chi(\xi, u(x, t))$, on parle de solution cinétique généralisée. Mais sous les hypothèses supplémentaires :

- m est une mesure positive, telle qu'il existe $\mu \in L_0^\infty(\mathbb{R})$ (fonction bornée qui s'annule à l'infini)
- $\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} m(x, t, \xi) dt dx \leq \mu(\xi)$
- $|f(x, t, \xi)| = \text{sgn}(\xi) f(x, t, \xi) \leq 1$
- il existe une mesure borélienne positive ν sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_\xi$ vérifiant

$$\partial_\xi f = \delta_0 - \nu$$

alors il existe $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$ telle que $f(x, t, \xi) = \chi(\xi, u(x, t))$ soit la solution cinétique du problème de Cauchy.

Notons que l'idée de résoudre une EDP en introduisant une variable supplémentaire vient de Brenier dans son article [Bre83].

Introduisons maintenant différentes définitions de solutions de lois de conservation avec terme source stochastique.

Remarque financière : Les lois de conservation avec terme source stochastique pourraient décrire la dynamique du prix d'un actif financier.

Citons en premier Holden et Risebro pour leur article [HR93] d'où est tirée la Huitième définition :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ complète, continue à droite, pour laquelle le mouvement brownien réel continu $(W_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est adapté.

Notons *Prog* la tribu de $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ constituée par les sous-ensembles $A \subset \mathbb{R}^+ \times \Omega$ vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \mathbf{1}_A \text{ est } \mathcal{B}[0, t] \otimes \mathcal{F}_t\text{-mesurable}$$

Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t, \omega) + \partial_x (A(u(x, t, \omega))) = G(x, t, u(x, t, \omega)) + \Phi(u(x, t, \omega)) \partial_t W(\omega, t), \\ u(x, 0, \omega) = u_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \forall (x, t, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+ \times \Omega$$

qui s'écrit aussi sous forme plus probabiliste

$$\begin{cases} du(x, t, \omega) + \operatorname{div}_x (A(u(x, t, \omega))) dt = G(x, t, u(x, t, \omega)) dt + \Phi(u(x, t, \omega)) dW, \\ u(x, 0, \omega) = u_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \forall (x, t, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+ \times \Omega$$

admet pour solution le processus mesurable

$$u : (\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^+ \times \Omega), \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \text{Prog}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

si et seulement si $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$

$$\begin{aligned} \int_{(0, +\infty) \times \mathbb{R}} \partial_t \varphi(x, t) u(x, t, \omega) dx dt + \int_{(0, +\infty) \times \mathbb{R}} \partial_x \varphi(x, t) A(u(x, t, \omega)) dx dt \\ + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(x, 0) dx = - \int_{(0, +\infty) \times \mathbb{R}} \varphi(x, t) G(x, t, u(x, t, \omega)) dx dt \\ - \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \varphi(x, t) \Phi(u(x, t, \omega)) dW(t) dx \quad p.s. \end{aligned}$$

Ils ont prouvé l'existence de telles solutions sous les conditions

- $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, ayant un représentant à support compact qui a un nombre fini d'extrema
- A lipschitzienne
- Φ lipschitzienne, à support compact
- $(x, t, u) \mapsto G(x, t, u)$ lipschitzienne à support compact dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times K$ où K est un compact de \mathbb{R}

Neuvième définition :

L'unicité et l'existence furent prouvées dans le cas particulier de l'équation de Burgers non-visqueuse en 2000 par Weinan E, Khanin, Mazel, Sinai [Wei+00] : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ complète, continue à droite, pour laquelle les mouvements browniens réels continus $((\beta_k(t))_{t \in \mathbb{R}^+})_{k \in \mathbb{N}^*}$ sont adaptés.

Les β_k sont supposés indépendants. Soit H un espace de Hilbert réel, $(e_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une base hilbertienne de H , le processus de Wiener cylindrique W s'écrit

$$W(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k(t) e_k$$

Notons \mathbb{T}_x le tore de dimension 1, il peut être identifié à $[0, 1)$.

Φ est une fonction définie sur \mathbb{R} périodique, de période 1 et à valeurs dans $L_2(H, \mathbb{R})$, c'est à dire

$\forall x \in \mathbb{T}_x$, $\Phi(x)$ est l'opérateur de Hilbert-Schmidt défini sur H par

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \Phi(x)(e_k) = f_k(x)$$

où f_k est périodique, de période 1, et telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f_k \in C^r(\mathbb{T}_x)$ pour $r \geq 3$ et vérifiant

$$\sup_{x \in \mathbb{T}} |f_k^{(i)}(x)| \leq \frac{C}{k^2}, \quad \forall i \in \{0, \dots, r\}, \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

On note D l'espace des fonctions définies sur \mathbb{T}_x à valeurs réelles càdlàg munies de la topologie de Skorokhod.

Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t, \omega) + \frac{1}{2} \partial_x \left((u(x, t, \omega))^2 \right) = \Phi(x) \partial_t W(\omega, t), & \forall (x, t, \omega) \in \mathbb{T}_x \times \mathbb{R}_*^+ \times \Omega \\ u(x, 0, \omega) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

admet pour solution faible entropique $u : \mathbb{T}_x \times \mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ si et seulement si

- presque sûrement et $\forall t \in \mathbb{R}_*^+$, $x \mapsto u(x, t, \omega) \in D$
- le processus u est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$
- presque sûrement, $(x, t) \mapsto u(x, t, \omega) \in L_{loc}^1(\mathbb{T} \times \mathbb{R}^+)$

- $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{T} \times \mathbb{R}^+)$, on a

$$\int_{(0,+\infty) \times \mathbb{T}} \partial_t \varphi(x, t) u(x, t, \omega) dx dt + \int_{(0,+\infty) \times \mathbb{T}} \partial_x \varphi(x, t) (u(x, t, \omega))^2 dx dt + \int_{\mathbb{T}} u_0(x) \varphi(x, 0) dx = \int_{\mathbb{T}} \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, t) \int_0^x \Phi(r) dr dW(t) dx \quad p.s.$$

- presque sûrement et $\forall (x, t) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}_*^+$, $u(x+, t, \omega) \leq u(x-, t, \omega)$.

Si $u_0 \in D$ alors il existe une unique solution faible entropique u définie presque sûrement, et donnée $\forall t > 0$ par

$$u(x, t, \omega) = \partial_x \left(\inf_{\xi(t)=x} \left\{ \int_0^t \frac{1}{2} \xi'(s)^2 ds + \int_0^t \left(\int_0^{\xi(s)} \Phi(u) du \right) dW(s) + \int_0^{\xi(0)} u_0(z) dz \right\} \right)$$

où l'infimum est pris sur toutes les fonctions lipschitziennes $\xi : [0, t] \rightarrow \mathbb{T}_x$ telles que $\xi(t) = x$.

Dixième définition :

L'existence et l'unicité furent prouvées par Kim [Kim03a] avec un flux plus général, mais avec un terme source stochastique qui n'est dirigé que par un Mouvement Brownien réel :

soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ complète, continue à droite, pour laquelle le mouvement brownien réel continu $(\beta_t)_{t \in [0, T]}$, avec $T \in \mathbb{R}_*^+$, est adapté.

Sous les hypothèses

- $\Phi : \mathbb{R}_x \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ ayant son support dans $[-L, L] \times [0, T]$ pour un certain $L > 0$
- $\Phi \in C([0, T], W^{1, \infty}(\mathbb{R}))$
- $A \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ vérifiant pour une certaine constante $C > 0$ et un certain entier $N \geq 2$:

$$|A(y)| + |A'(y)| + |A''(y)| \leq C|y|^N + C, \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

- $\{y \in \mathbb{R} : A''(y) = 0\}$ est de mesure de Lebesgue nulle
- presque sûrement et $\forall \gamma \in]0; \frac{1}{2}[$:

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} \Phi(x, t) d\beta(t) \right\|_{W^{1, \infty}(\mathbb{R}_x)} \leq C(\omega, \gamma, T) |t_2 - t_1|^\gamma, \quad \forall t_1, t_2 \in [0, T]$$

Terminons par une définition de solution de loi de conservation scalaire stochastique dont le terme source est un bruit multiplicatif.

Onzième définition :

Cette onzième définition est tirée de l'article écrit par Caroline Bauzet, Guy Vallet, Petra Wittbold [BVW12], puis reformulée dans l'article [BCG16b] et enfin, généralisée dans le mémoire de Master de Vincent Castel sous la direction de Caroline Bauzet, Julia Charrier et Thierry Gallouët.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ complète, continue à droite, pour laquelle le Mouvement Brownien réel continu $(\beta_t)_{t \in [0, T]}$, avec $T \in \mathbb{R}_*^+$, est adapté.

Soit $d \in \mathbb{N}^*$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t, \omega) + \operatorname{div}_x (A(x, t, u(x, t, \omega))) = \Phi(u(x, t, \omega)) \partial_t \beta(\omega, t) \\ u(x, 0, \omega) = u_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \quad \forall (x, t, \omega) \in \mathbb{R}_x^d \times (0, T) \times \Omega$$

admet pour solution entropique le processus prévisible $u : [0, T] \times \Omega \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$, vérifiant

$$\mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} (u(x, t, \omega))^2 dx dt < +\infty$$

si et seulement si

- $u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega \times \mathbb{R}^d))$
- $\forall \varphi \in C_c^\infty([0, T] \times \mathbb{R}_x^d; \mathbb{R}^+)$, $\forall \eta \in C^3(\mathbb{R})$ convexe, telle que η', η'' et η''' soient bornées, on a

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d \times [0, T]} \left(\eta(u(x, t, \omega)) \partial_t \varphi(x, t) \right. \\ & \quad \left. + \nabla_x (\varphi(x, t)) \cdot \int_0^{u(x, t, \omega)} \eta'(r) \partial_r A(x, t, r) dr \right) dx dt \\ & + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \eta'(u(x, t, \omega)) \Phi(u(x, t, \omega)) \varphi(x, t) dx d\beta(t) \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^d} \eta(u_0(x)) \varphi(x, 0) dx \\ & + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times [0, T]} \eta''(u(x, t, \omega)) |\Phi(u(x, t, \omega))|^2 \varphi(x, t) dx dt \geq 0 \quad \text{p.s.} \end{aligned}$$

L'existence et l'unicité sont prouvées sous les hypothèses

- Φ lipschitzienne telle que $\Phi(0) = 0$

$\forall \eta \in C^3(\mathbb{R})$ convexe, telle que η' , η'' et η''' soient bornées :

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^d \times (0,1) \times [0,T]} \left(\eta(u(x,t,\omega,\alpha)) \partial_t \varphi(x,t) \right. \\
& \quad \left. + \nabla_x(\varphi(x,t)) \cdot \int_0^{u(x,t,\omega,\alpha)} \eta'(r) \partial_r A(x,t,r) dr \right) dx d\alpha dt \\
& + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d \times (0,1)} \eta'(u(x,t,\omega,\alpha)) \Phi(u(x,t,\omega,\alpha)) \varphi(x,t) dx d\alpha d\beta(t) \\
& \quad + \int_{\mathbb{R}^d} \eta(u_0(x)) \varphi(x,0) dx \\
& + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times (0,1) \times [0,T]} \eta''(u(x,t,\omega,\alpha)) |\Phi(u(x,t,\omega,\alpha))|^2 \varphi(x,t) dx d\alpha dt \geq 0 \quad \text{p.s.}
\end{aligned}$$

Remarque : je ne cite pas la définition de Debussche-Vovelle [DV10b], ni sa version modifiée Debussche-Vovelle [DV14], parce que la définition de solution des deux articles de cette thèse les remplace.

1.2 Idées mathématiques donnant les définitions de solutions entropiques et cinétiques de lois de conservation scalaires, lien avec le théorème de Clausius

1.2.1 Cas de la loi de conservation hyperbolique sans terme source

Voici ce que je comprends du théorème de Clausius pour la loi de conservation

$$\partial_t (u(x, t)) + \operatorname{div}_x (A(u(x, t))) = 0$$

Quand le processus est réversible, c'est à dire quand u est régulière, la quantité d'entropie $\eta(u(x, t))$ est conservée donc

$$\partial_t (\eta(u(x, t))) + \operatorname{div}_x (\phi(u(x, t))) = 0.$$

Avec A , η et ϕ régulières, ces deux lois de conservation s'écrivent

$$\partial_t (u(x, t)) + A'(u(x, t)) \cdot \nabla_x (u(x, t)) = 0$$

et

$$\eta'(u(x, t)) \partial_t (u(x, t)) + \phi'(u(x, t)) \cdot \nabla_x (u(x, t)) = 0.$$

Par identification des deux lois de conservation, cela donne la définition (à une constante près) du flux d'entropie

$$\phi'(\xi) = A'(\xi) \eta'(\xi)$$

Mais quand le processus n'est pas réversible, c'est à dire quand u n'est pas régulière, cela crée un défaut d'entropie qui s'écrit

$$\partial_t (\eta(u(x, t))) + \operatorname{div}_x (\phi(u(x, t))) \leq 0$$

Pour introduire une variable ξ à la loi de conservation

$$\partial_t (u(x, t)) + \operatorname{div}_x (A(u(x, t))) = 0$$

il est naturel d'effectuer l'opération $\otimes \delta_{u(x,t)} (d\xi)$ pour obtenir

$$\partial_t (\chi(\xi, u(x, t))) + A'(\xi) \cdot \nabla_x (\chi(\xi, u(x, t))) = 0$$

lorsque u est régulière (et A aussi), grâce aux égalités

$$\frac{d\chi(\xi, u(x, t))}{dt} = \frac{du(x, t)}{dt} \otimes \delta_{u(x, t)}(d\xi)$$

$$A'(\xi) \cdot \nabla_x (\chi(\xi, u(x, t))) = A'(u(x, t)) \cdot \nabla_x (u(x, t)) \otimes \delta_{u(x, t)}(d\xi).$$

Lorsque le processus n'est pas réversible, c'est à dire lorsque u n'est pas régulière, il est difficile d'effectuer l'opération $\otimes \delta_{u(x, t)}(d\xi)$ sur l'inégalité entropique. L'idée de Lions, Perthame et Tadmor est d'introduire une mesure m qui mesure le défaut d'entropie.

Quand la quantité d'entropie est conservée, c'est à dire quand

$$\partial_t (\eta(u(x, t))) + \operatorname{div}_x (\phi(u(x, t))) = 0$$

en effectuant l'opération $\otimes \delta_{u(x, t)}(d\xi)$, cela s'écrit

$$\eta'(\xi) \partial_t (\chi(\xi, u(x, t))) + \phi'(\xi) \cdot \nabla_x (\chi(\xi, u(x, t))) = 0$$

En intégrant sur \mathbb{R} par rapport à ξ , on obtient de manière plus formelle

$$-\left\langle \int_{-\infty}^{\xi} \left(\partial_t (\chi(\zeta, u(x, t))) + A'(\zeta) \cdot \nabla_x (\chi(\zeta, u(x, t))) \right) d\zeta d\xi, \eta''(\xi) \right\rangle = 0$$

Le défaut d'entropie s'écrit donc de manière formelle, grâce à la fonction entropie $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe

$$-\left\langle \int_{-\infty}^{\xi} \left(\partial_t (\chi(\zeta, u(x, t))) + A'(\zeta) \cdot \nabla_x (\chi(\zeta, u(x, t))) \right) d\zeta d\xi, \eta''(\xi) \right\rangle \leq 0$$

ou bien en définissant m la mesure de défaut d'entropie et en écrivant

$$-m(\eta''(\xi)) \leq 0.$$

En découle, la formulation cinétique de l'inégalité entropique :

$$\partial_t (\chi(\xi, u(x, t))) + A'(\xi) \cdot \nabla_x (\chi(\xi, u(x, t))) = \partial_\xi m$$

avec m la mesure (positive) de défaut d'entropie.

1.2.2 Cas de la loi de conservation hyperbolique avec terme source déterministe

Si maintenant, on s'intéresse à la loi de conservation avec terme source

$$\partial_t (u(x, t)) + \operatorname{div}_x (A(u(x, t))) = G(u(x, t))$$

Voici ce que je comprends du théorème de Clausius.

Quand le processus est réversible, c'est à dire quand u est régulière, la quantité d'entropie $\eta(u(x, t))$ est conservée donc

$$\partial_t (\eta(u(x, t))) + \operatorname{div}_x (\phi(u(x, t))) = H(u(x, t))$$

où $H(u(x, t))$ est la source d'entropie.

Avec A , η et ϕ régulières, ces deux lois de conservation s'écrivent

$$\partial_t (u(x, t)) + A'(u(x, t)) \cdot \nabla_x (u(x, t)) = G(u(x, t))$$

et

$$\eta'(u(x, t)) \partial_t (u(x, t)) + \phi'(u(x, t)) \cdot \nabla_x (u(x, t)) = H(u(x, t))$$

Par identification des deux lois de conservation, cela donne la définition de la source d'entropie

$$H(\xi) = G(\xi) \eta'(\xi)$$

Mais quand le processus n'est pas réversible, c'est à dire quand u n'est pas régulière, cela crée un défaut d'entropie qui s'écrit

$$\partial_t (\eta(u(x, t))) + \operatorname{div}_x (\phi(u(x, t))) - \eta'(u(x, t)) G(u(x, t)) \leq 0$$

Quand la quantité d'entropie est conservée, c'est à dire quand

$$\partial_t (\eta(u(x, t))) + \operatorname{div}_x (\phi(u(x, t))) = \eta'(u(x, t)) G(u(x, t))$$

en effectuant l'opération $\otimes \delta_{u(x,t)}(d\xi)$, cela s'écrit

$$\eta'(\xi) \partial_t (\chi(\xi, u(x, t))) + \phi'(\xi) \cdot \nabla_x (\chi(\xi, u(x, t))) = \eta'(\xi) G(\xi) \otimes \delta_{u(x,t)}(d\xi)$$

En intégrant sur \mathbb{R} par rapport à ξ , on obtient de manière plus formelle

$$- \left\langle \int_{-\infty}^{\xi} \left(\partial_t (\chi(\zeta, u(x, t))) + A'(\zeta) \nabla_x (\chi(\zeta, u(x, t))) \right) d\zeta - \int_{-\infty}^{\xi} G(\zeta) \delta_{u(x, t)}(d\zeta), \eta''(\xi) \right\rangle = 0.$$

Quand le processus n'est pas réversible, c'est à dire quand u n'est pas régulière, le défaut d'entropie s'écrit donc de manière formelle, grâce à la fonction entropie $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe

$$- \left\langle \int_{-\infty}^{\xi} \left(\partial_t (\chi(\zeta, u(x, t))) + A'(\zeta) \nabla_x (\chi(\zeta, u(x, t))) \right) d\zeta - \int_{-\infty}^{\xi} G(\zeta) \delta_{u(x, t)}(d\zeta), \eta''(\xi) \right\rangle \leq 0$$

ou bien en définissant m la mesure de défaut d'entropie et en écrivant

$$-m(\eta''(\xi)) \leq 0$$

En découle, la formulation cinétique de l'inégalité entropique :

$$\partial_t (\chi(\xi, u(x, t))) + A'(\xi) \nabla_x (\chi(\xi, u(x, t))) - G(\xi) \delta_{u(x, t)}(d\xi) = \partial_\xi m$$

avec m la mesure (positive) de défaut d'entropie.

Remarque : si à la place de

$$\eta'(\xi) G(\xi) \delta_{u(x, t)}(d\xi)$$

j'avais écrit

$$\eta'(\xi) G(\xi) (\delta_0(d\xi) - \partial_\xi (\chi(\xi, u(x, t))))$$

j'aurais obtenu la formulation cinétique sous la forme

$$\partial_t (\chi(\xi, u(x, t))) + A'(\xi) \cdot \nabla_x (\chi(\xi, u(x, t))) + G(\xi) \partial_\xi (\chi(\xi, u(x, t))) - G(\xi) \delta_0(d\xi) = \partial_\xi m$$

1.2.3 Cas de la loi de conservation hyperbolique avec terme source stochastique

Si on s'intéresse à la loi de conservation avec terme source stochastique

$$\partial_t (u(x, t, \omega)) + \operatorname{div}_x (A(u(x, t, \omega))) = \Phi(x, u(x, t, \omega)) \partial_t W(t)$$

que l'on peut écrire aussi grâce à la différentielle stochastique

$$d(u(x, t, \omega)) + \operatorname{div}_x (A(u(x, t, \omega))) dt = \Phi(x, u(x, t, \omega)) dW(t)$$

Voici ce que je comprends du théorème de Clausius.

Si le processus était réversible, c'est à dire si u était régulière, la quantité d'entropie $\eta(u(x, t, \omega))$ serait conservée donc

$$d(\eta(u(x, t, \omega))) + \operatorname{div}_x (\phi(u(x, t, \omega))) dt = G(u(x, t, \omega)) dt$$

où $G(u(x, t, \omega))$ est la source d'entropie.

Avec A , η et ϕ régulières, ces deux lois de conservation s'écriraient

$$d(u(x, t, \omega)) + A'(u(x, t, \omega)) \cdot \nabla_x (u(x, t, \omega)) dt = \Phi(x, u(x, t, \omega)) dW(t)$$

et

$$d(\eta(u(x, t, \omega))) + \phi'(u(x, t, \omega)) \cdot \nabla_x (u(x, t, \omega)) dt = G(u(x, t, \omega)) dt.$$

Pour identifier ces deux lois de conservation, il faut remarquer que la « chain rule » en temps n'est pas valable pour les processus d'Itô. C'est la formule d'Itô qui marche.

Autrement dit, on n'a pas $d(\eta(u(x, t, \omega))) = \eta'(u(x, t, \omega)) d(u(x, t, \omega))$ mais

$$d(\eta(u(x, t, \omega))) = \eta'(u(x, t, \omega)) d(u(x, t, \omega)) + \frac{1}{2} \eta''(u(x, t, \omega)) \|\Phi(x, u(x, t, \omega))\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 dt$$

avec $\eta \in C^2(\mathbb{R})$ convexe.

La loi de conservation de l'entropie s'écrirait donc

$$\eta'(u(x, t, \omega)) d(u(x, t, \omega)) + \frac{1}{2} \eta''(u(x, t, \omega)) \|\Phi(x, u(x, t, \omega))\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 dt + \phi'(u(x, t, \omega)) \cdot \nabla_x (u(x, t, \omega)) dt = G(u(x, t, \omega)) dt$$

Par identification des deux lois de conservation, cela donne la source d'entropie

$$G(u(x, t, \omega)) dt = \frac{1}{2} \eta''(u(x, t, \omega)) \|\Phi(x, u(x, t, \omega))\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 dt + \eta'(u(x, t, \omega)) \Phi(x, u(x, t, \omega)) dW(t)$$

Mais lorsque le processus n'est pas réversible, c'est à dire lorsque u n'est pas régulière, cela crée un défaut d'entropie qui s'écrit

$$d(\eta(u(x, t, \omega))) - \frac{1}{2} \eta''(u(x, t, \omega)) \|\Phi(x, u(x, t, \omega))\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 dt + \operatorname{div}_x(\phi(u(x, t, \omega))) dt - \eta'(u(x, t, \omega)) \Phi(x, u(x, t, \omega)) dW(t) \leq 0$$

ou alors

$$\frac{d}{dt}(\eta(u(x, t, \omega))) - \frac{1}{2} \eta''(u(x, t, \omega)) \|\Phi(x, u(x, t, \omega))\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 + \operatorname{div}_x(\phi(u(x, t, \omega))) - \eta'(u(x, t, \omega)) \Phi(x, u(x, t, \omega)) \frac{dW(t)}{dt} \leq 0$$

Dans le premier cas, elle peut être interprétée comme une formulation faible en espace; dans le deuxième cas, elle peut être interprétée comme une formulation faible en espace et en temps.

Si la quantité d'entropie était conservée, c'est à dire si

$$d(u(x, t, \omega)) + \operatorname{div}_x(A(u(x, t, \omega))) dt = \Phi(x, u(x, t, \omega)) dW(t),$$

en effectuant l'opération $\otimes \delta_{u(x, t, \omega)}(d\xi)$, cela s'écrirait

$$\begin{aligned} & (d(u(x, t, \omega)) + A'(u(x, t, \omega)) \cdot \nabla_x(u(x, t, \omega)) dt) \otimes \delta_{u(x, t, \omega)}(d\xi) \\ & = \Phi(x, u(x, t, \omega)) dW(t) \otimes \delta_{u(x, t, \omega)}(d\xi). \end{aligned}$$

Attention, la « chain rule » en temps n'est pas valable pour les processus d'Itô, ici c'est la formule d'Itô (faible en ξ) qui marche.

Autrement dit, on n'a pas $d\chi(\xi, u(x, t, \omega)) = du(x, t, \omega) \otimes \delta_{u(x, t, \omega)}(d\xi)$ mais

$$\begin{aligned} d\chi(\xi, u(x, t, \omega)) & = du(x, t, \omega) \otimes \delta_{u(x, t, \omega)}(d\xi) \\ & \quad - \frac{1}{2} \partial_\xi \left(\|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 dt \otimes \delta_{u(x, t, \omega)}(d\xi) \right) \end{aligned}$$

Petite digression sur la formule d'Itô faible où j'omet l'écriture de la variable ω :
Si $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, alors la formule d'Itô appliquée au processus u donne

$$d\varphi(u(x, t)) = \varphi'(u(x, t)) du(x, t) + \frac{1}{2} \varphi''(u(x, t)) \|\Phi(x, u(x, t))\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 dt$$

qui s'écrit aussi

$$d\left(\int_{\mathbb{R}} \varphi'(\xi) \chi(\xi, u(x, t)) d\xi\right) = \int_{\mathbb{R}} \varphi'(\xi) du(x, t) \otimes \delta_{u(x, t)}(\xi) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \varphi''(\xi) \|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 dt \otimes \delta_{u(x, t)}(d\xi)$$

c'est à dire

$$d\left(\int_{\mathbb{R}} \varphi'(\xi) \chi(\xi, u(x, t)) d\xi\right) = \int_{\mathbb{R}} \varphi'(\xi) du(x, t) \otimes \delta_{u(x, t)}(\xi) - \frac{1}{2} \left\langle \partial_\xi \left(\|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 dt \otimes \delta_{u(x, t)}(d\xi) \right), \varphi'(\xi) \right\rangle$$

ce qui donne la formule d'Itô faible (en ξ) suivante

$$d(\chi(\xi, u(x, t))) = du(x, t) \otimes \delta_{u(x, t)}(d\xi) - \frac{1}{2} \partial_\xi \left(\|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 dt \otimes \delta_{u(x, t)}(d\xi) \right)$$

Notre équation s'écrirait donc

$$d(\chi(\xi, u(x, t, \omega))) + A'(\xi) \cdot \nabla_x (\chi(\xi, u(x, t, \omega))) dt - \Phi(x, \xi) \otimes \delta_{u(x, t, \omega)}(d\xi) dW(t) + \frac{1}{2} \partial_\xi \left(\|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \otimes \delta_{u(x, t, \omega)}(d\xi) \right) dt = 0.$$

Lorsque le processus n'est pas réversible, c'est à dire lorsque u n'est pas régulière, le défaut d'entropie s'écrit donc

$$d(\chi(\xi, u(x, t, \omega))) + A'(\xi) \cdot \nabla_x (\chi(\xi, u(x, t, \omega))) dt - \Phi(x, \xi) \otimes \delta_{u(x, t, \omega)}(d\xi) dW(t) + \frac{1}{2} \partial_\xi \left(\|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \otimes \delta_{u(x, t, \omega)}(d\xi) \right) dt = \partial_\xi m_\omega(x, dt, \xi)$$

avec m_ω mesure de défaut d'entropie positive

Conclusion : Si on veut écrire la formulation cinétique faible en espace et en ξ (mais pas en temps) de la loi de conservation scalaire avec terme source stochastique, on aura $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}_\xi)$, $\forall 0 \leq s \leq t \leq T$

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}_\xi} \chi(\xi, u(x, t)) \varphi(x, \xi) dx d\xi - \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}_\xi} \chi(\xi, u(x, s)) \varphi(x, \xi) dx d\xi \\
&= \int_s^t \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}_\xi} A'(\xi) \cdot \nabla_x (\varphi(x, \xi)) \chi(\xi, u(x, t)) dx d\xi dr \\
&\quad + \int_s^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}_\xi} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) \delta_{u(x, t)}(d\xi) dx dW(r) \\
&+ \frac{1}{2} \int_s^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}_\xi} \partial_\xi \varphi(x, \xi) \|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \delta_{u(x, t)}(d\xi) dx dr - m(\partial_\xi \varphi(x, \xi)) [s, t].
\end{aligned}$$

1.3 Résultats de convergence et vitesses de convergence de schémas Volumes Finis, une histoire récente

Expliquer ou décrire en quelques mots la méthode des volumes finis (parfois appelée Box Method) ne peut débuter qu'en citant les références les plus complètes sur le sujet :

- le livre de Robert Eymard, Thierry Gallouët, Raphaèle Herbin [EGH03] « Finite Volume Method »
- le livre de Randall J. Leveque [LeV02] « Finite-Volume Method for Hyperbolic Problems »
- le cours de M2 de Julien Vovelle [Vov11]

La méthode numérique consiste à approcher la solution d'une équation aux dérivées partielles par une fonction constante par morceaux, plus exactement constante sur chaque volume fini K (dont la réunion recouvre l'espace tout entier), et sur chaque intervalle de temps $[t_n, t_{n+1})$ (dont la réunion recouvre l'intervalle de temps $[0, T)$), puis à faire tendre le pas d'espace $\sup_K |K|$ et le pas de temps $\sup_n (t_{n+1} - t_n)$ vers 0 pour approcher au mieux la solution de l'EDP ($|K|$ est la mesure de Lebesgue du volume fini K).

Cette méthode fut d'abord utilisée en mécanique des fluides numérique, citons par exemple McDonald [McD71], Rizzi et Inouye [RI73], Denton [Den75]. Pour l'étude de transferts thermiques numériques, on peut aussi citer Patankar [Pat80], Ni [Ni81].

L'étude théorique de la convergence de tels schémas ne s'est faite que des années plus tard (en dimension $N > 1$ d'espace).

Au vu du nombre colossal d'articles publiés sur le sujet, je me contenterai de donner sept résultats de convergence de schémas Volumes Finis explicites vers la solution d'une loi de conservation hyperbolique scalaire.

La méthode consiste à discrétiser en temps grâce au schéma d'Euler, puis à intégrer sur des volumes finis K dont la réunion constitue le maillage de l'espace, à utiliser le théorème de la divergence pour obtenir des intégrales sur la frontière ∂K des volumes K , et enfin approcher ces intégrales par un flux numérique sur chaque frontière commune à deux volumes finis K et L , dépendant du temps et des valeurs approchées de la densité u dans les volumes K et L .

La solution approchée du schéma Volumes Finis consiste en une fonction constante par morceaux, définie presque partout, égale à la valeur approchée

$u_K^n \in \mathbb{R}$ (ou $u_K^{n+1} \in \mathbb{R}$) donnée par le schéma explicite, et ce $\forall (x, t) \in K \setminus \partial K \times [t_n, t_{n+1})$. C'est elle qui va converger vers la solution u du problème de Cauchy (1.1).

Il est intéressant de noter que les trois premiers résultats que je vais citer sont issus d'articles soumis au cours de l'année 1991.

Premier résultat : Champier, Gallouët tiré de l'article [CG92]

Convergence d'un schéma décentré amont sur un maillage triangulaire pour un problème hyperbolique linéaire

Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + v(x) \cdot \nabla_x u(x, t) = 0, & \forall x \in \mathbb{R}^2, \forall t \in [0, T] \\ u(0, x) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

avec

- $T, M \in (0, +\infty)$,
- $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, le support de u_0 est un compact de \mathbb{R}^2 ,
- $v \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ telle que $\operatorname{div}_x(v(x)) = 0$,

est discrétisé grâce à un maillage triangulaire de \mathbb{R}^2 .

Le pas de temps est noté k , le nombre de pas de temps en noté N , de sorte que $kN = T$.

On note \mathcal{T} l'ensemble des triangles du maillage.

Soit $K \in \mathcal{T}$, on note $|K|$ l'aire du triangle. Soit I_K un côté quelconque de K , on note $|I_K|$ sa longueur.

Soit $n \in \{0, \dots, N-1\}$, à l'instant $t_n = nk$, pour $x \in K \setminus \partial K$,

on approche $\partial_t u(x, t_n)$ par $\frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{k}$ où $u_K^n \in \mathbb{R}$ est une valeur approchée de $u(x, t_n)$.

A l'instant t_n , on intègre l'équation sur K pour obtenir grâce au théorème de la divergence

$$|K| \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{k} + \int_{\partial K} (u(x, t_n) v(x)) \cdot n_K(x) d\mathcal{H}^1(x) = 0$$

où \mathcal{H}^1 est la mesure de Hausdorff de dimension 1 et où n_K est le vecteur normal extérieur au triangle K . On notera $n_K(x) = n_{I_K}$ si $x \in I_K$.

Pour $x \in I_K$, $v(x)$ est approché par

$$v_{I_K} = \frac{1}{|I_K|} \int_{I_K} v(x) d\mathcal{H}^1(x)$$

Pour $x \in I_K$, où I_K est un côté quelconque du maillage, c'est à dire appartenant à deux triangles du maillage, on notera

- K^m le triangle K tel que $v_{I_K} \cdot n_{I_K} \geq 0$ (m pour amont)
- K^a le triangle K tel que $v_{I_K} \cdot n_{I_K} \leq 0$ (a pour aval)

$u(x, t_n)$ sera approché par $u_{I_K}^n = u_{K^m}^n$.

Ainsi, l'équation en continu est approchée pour $x \in K$ et $t = t_n$ par

$$|K| \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{k} + \sum_{I_K \in \mathcal{K}} |I_K| u_{I_K}^n v_{I_K} \cdot n_{I_K} = 0, \quad \forall K \in \mathcal{T}, \forall n \in \{0, \dots, N-1\}$$

sous la condition initiale

$$u_K^0 = \frac{1}{|K|} \int_K u_0(x) dx, \quad \forall K \in \mathcal{T}$$

ce qui donne le schéma décentré amont.

La solution approchée du problème de Cauchy est définie sur le maillage (\mathcal{T}, k) pour presque tout x par

$$u_{(\mathcal{T}, k)}(x, t) = u_K^n, \quad \forall x \in K \setminus \partial K, \forall t \in [t_n, t_{n+1})$$

Sous les hypothèses du maillage \mathcal{T} suivantes : $\exists a, b, h \in \mathbb{R}_*^+$ tels que

- $ah \leq |I_K| \leq bh, \quad \forall I_K \text{ tel que } K \in \mathcal{T}$
- $ah^2 \leq |K| \leq bh^2, \quad \forall K \in \mathcal{T}$

et sous la condition CFL

$$\exists \eta > 0 : k < \frac{ah}{2b\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}} (1 - \eta)$$

la solution approchée $u_{(\mathcal{T}, k)}$ converge vers la solution faible u du problème de Cauchy lorsque $h \rightarrow 0$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ faible*.

Remarques :

La condition CFL de l'article [CG92] est un peu plus faible.

Le schéma est monotone dans le sens où $u_K^n \leq v_K^n$ implique $u_K^{n+1} \leq v_K^{n+1}, \forall K \in \mathcal{T}$.

Avec les notations du deuxième article de cette thèse, le flux numérique s'écrirait $\forall K, L \in \mathcal{T}$ ayant le côté $I_K = I_L$ commun

$$\begin{cases} A_{K \rightarrow L}(u, v) = |I_K| v_{I_K} \cdot n_{I_K} u & \text{si } v_{I_K} \cdot n_{I_K} \geq 0 \\ A_{K \rightarrow L}(u, v) = |I_K| v_{I_K} \cdot n_{I_K} v & \text{si } v_{I_K} \cdot n_{I_K} \leq 0 \end{cases}$$

ce qui rend le flux numérique monotone au sens de l'article de cette thèse, à savoir croissant en u et décroissant en v .

La démonstration de la convergence utilise les estimations

$$\sup_{K \in \mathcal{T}} |u_K^{n+1}| \leq \sup_{K \in \mathcal{T}} |u_K^n|$$

Il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de u_0, η, a, b, v telle que

$$\sum_{n=0}^N \sum_{\{I_K: K \in \mathcal{T}\}} k |I_K| |v_{I_K} \cdot n_{I_K}| |u_{K^m}^n - u_{K^v}^n|^2 \leq C$$

où les I_K arrêtes du maillages ne sont comptées qu'une et une seule fois. Soit B_r la boule fermée (munie de la norme euclidienne) de rayon r , il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de r, u_0, η, a, b, v telle que

$$h^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^N \sum_{\{I_K: K \in \mathcal{T}, K \subset B_r\}} k |I_K| |v_{I_K} \cdot n_{I_K}| |u_{K^m}^n - u_{K^v}^n| \leq C$$

où les I_K arrêtes du maillage ne sont comptées qu'une et une seule fois.

Deuxième résultat : Champier, Gallouët, Herbin tiré de l'article [CGH93] :

Convergence d'un schéma décentré amont sur un maillage triangulaire pour un problème hyperbolique non-linéaire

Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + \operatorname{div}_x (v(x, t) f(u(x, t))) = 0, & \forall t \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^2 \\ u(0, x) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

avec

- $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, le support de u_0 est un compact de \mathbb{R}^2 ,
- $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ croissante,

- $v \in C^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2)$ telle que $\operatorname{div}_x(v(x, t)) = 0$ et $\sup_{x \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+} |v(x, t)| = V < +\infty$ où $|v(x, t)|$ désigne la norme euclidienne de $v(x, t) \in \mathbb{R}^2$

est discrétisé grâce à un maillage triangulaire de \mathbb{R}^2 .

Le pas de temps est noté k .

On note \mathcal{T} l'ensemble des triangles du maillage.

Soit $K \in \mathcal{T}$, on note $|K|$ l'aire du triangle. Soit I_K un côté quelconque de K , on note $|I_K|$ sa longueur.

Soit $n \in \mathbb{N}$, à l'instant $t_n = nk$, pour $x \in K \setminus \partial K$,

on approche $\partial_t u(x, t_n)$ par $\frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{k}$ où $u_K^n \in \mathbb{R}$ est une valeur approchée de $u(x, t_n)$.

A l'instant t_n , on intègre l'équation sur K pour obtenir grâce au théorème de la divergence

$$|K| \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{k} + \int_{\partial K} (v(x, t_n) \cdot f(u(x, t_n))) \cdot n_K(x) d\mathcal{H}^1(x) = 0$$

où \mathcal{H}^1 est la mesure de Hausdorff de dimension 1 et où n_K est le vecteur normal extérieur au triangle K . On notera $n_K(x) = n_{I_K}$ si $x \in I_K$.

Pour $x \in I_K$, $v(x, t_n)$ est approché par

$$v_{I_K}^n = \frac{1}{|I_K|} \int_{I_K} v(x, t_n) d\mathcal{H}^1(x)$$

Pour $x \in I_K$, où I_K est un côté quelconque du maillage, c'est à dire appartenant à deux triangles du maillage, on notera

- K^m le triangle K tel que $v_{I_K}^n \cdot n_{I_K} \geq 0$ (m pour amont)
- K^a le triangle K tel que $v_{I_K}^n \cdot n_{I_K} \leq 0$ (a pour aval)

$u(x, t_n)$ sera approché par $u_{I_K}^n = u_{K^m}^n$.

Ainsi, l'équation en continu est approchée pour $x \in K$ et $t = t_n$ par

$$|K| \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{k} + \sum_{I_K \in K} |I_K| f(u_{I_K}^n) v_{I_K}^n \cdot n_{I_K} = 0, \quad \forall K \in \mathcal{T}, \forall n \in \mathbb{N}$$

sous la condition initiale

$$u_K^0 = \frac{1}{|K|} \int_K u_0(x) dx, \quad \forall K \in \mathcal{T}$$

ce qui donne le schéma décentré amont.

La solution approchée du problème de Cauchy est définie sur le maillage (\mathcal{T}, k) pour presque tout x par

$$u_{(\mathcal{T},k)}(x, t) = u_K^n \quad \forall x \in K \setminus \partial K, \forall t \in [t_n, t_{n+1})$$

Sous les hypothèses du maillage \mathcal{T} suivantes : $\exists a, b, h \in \mathbb{R}_*^+$ tels que

- $ah \leq |I_K| \leq bh \quad \forall I_K \text{ tel que } K \in \mathcal{T}$
- $ah^2 \leq |K| \leq bh^2 \quad \forall K \in \mathcal{T}$

et sous la condition CFL :

$$\exists \eta > 0 : k < \frac{ah}{2bVM} (1 - \eta)$$

où

$$M = \sup\{|f'(s)| : s \in [-\|u_0\|_\infty, \|u_0\|_\infty]\}$$

avec $|f'(s)|$ la norme euclidienne de $f'(s) \in \mathbb{R}^2$,

la solution approchée $u_{(\mathcal{T},k)}$ converge vers la solution faible u du problème de Cauchy lorsque $h \rightarrow 0$ dans $L_{loc}^p(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+)$, $\forall p \in [1, +\infty)$.

Remarques :

La condition CFL de l'article [CGH93] est un peu plus faible.

Avec les notations du deuxième article de cette thèse, le flux numérique s'écrirait $\forall K, L \in \mathcal{T}$ ayant le côté $I_K = I_L$ commun

$$\begin{cases} A_{K \rightarrow L}(u, v) = |I_K| v_{I_K} \cdot n_{I_K} f(u) & \text{si } v_{I_K} \cdot n_{I_K} \geq 0 \\ A_{K \rightarrow L}(u, v) = |I_K| v_{I_K} \cdot n_{I_K} f(v) & \text{si } v_{I_K} \cdot n_{I_K} \leq 0 \end{cases}$$

ce qui rend le flux numérique monotone au sens de l'article de cette thèse, à savoir croissant en u et décroissant en v .

La démonstration de la convergence utilise les estimations

$$\min_{K \in \mathcal{T}} u_K^n \leq \min_{K \in \mathcal{T}} u_K^{n+1} \leq \max_{K \in \mathcal{T}} u_K^{n+1} \leq \max_{K \in \mathcal{T}} u_K^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de u_0, η, a, b, v, f telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\{I_K : K \in \mathcal{T}\}} k |I_K| |v_{I_K} \cdot n_{I_K}| |f(u_{K^m}^n) - f(u_{K^v}^n)|^2 \leq C$$

où les I_K arrêtes du maillages ne sont comptées qu'une et une seule fois.

Soit B_r la boule fermée (munie de la norme euclidienne) de rayon r , il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de $r, u_0, \eta, a, b, v, f, T$ telle que

$$h^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{\{I_K: K \in \mathcal{T}, I_K \cap B_{r+b} \neq \emptyset\}} k|I_K| |v_{I_K} \cdot n_{I_K}| |f(u_{K^m}^n) - f(u_{K^v}^n)| \leq C$$

où les I_K arrêtes du maillage ne sont comptées qu'une et une seule fois,
 où N_T est un entier vérifiant $k(N_T - 1) < T \leq kN_T$, c'est à dire la partie entière par excès de $\frac{T}{k}$.

Troisième résultat : Cockburn, Coquel, Le Floch tiré de l'article [CCL95]

Convergence de la méthode des Volumes Finis pour une loi de conservation multidimensionnelle

Le problème de Cauchy/Dirichlet

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + \operatorname{div}_x (A(u(x, t))) = 0, & \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, \forall t \in \mathbb{R}_*^+ \\ u(0, x) = u_0(x), & \forall x \in \Omega \\ N(x, t) (\phi(u(x, t)) - \phi(u_1(x, t)) - \eta'(u_1(x, t)) (A(u(x, t)) - A(u_1(x, t)))) \geq 0 \end{cases}$$

où la troisième condition est vérifiée $\forall t \in \mathbb{R}_*^+$, pour \mathcal{H}^{d-1} -presque tout $x \in \partial\Omega$ et \forall couple (η, ϕ) entropie/flux d'entropie (cf troisième définition de solution de loi de conservation scalaire),
 avec

- Ω ouvert (non nécessairement borné) de \mathbb{R}^d , à frontière $\partial\Omega$ polyédrale
- $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$
- $u_1 \in L^1(\mathbb{R}^+, L^1(\partial\Omega)) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+, L^\infty(\partial\Omega))$
- $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ localement lipschitzienne

est discrétisé grâce à un maillage polyédral de \mathbb{R}^d .

Plus exactement, soit \mathcal{T} l'ensemble des polyèdres ouverts du maillage, vérifiant

$$\bigcup_{K \in \mathcal{T}} K = \Omega$$

et $\forall (K, K') \in \mathcal{T}^2$ tels que $K \cap K' \neq \emptyset$,

$$\begin{cases} \text{soit } K \cap K' \in \partial K \cap \partial K' \text{ et } \mathcal{H}^{d-1}(K \cap K') \neq 0 \\ \text{soit } \exists d' \leq d-2 : \mathcal{H}^{d'}(K \cap K') \in \mathbb{R}_*^+ \end{cases}$$

Si $K \in \mathcal{T}$, on note $|K|$ la mesure de Lebesgue de K .

Soit I_K une face quelconque de K , c'est à dire :

$$\begin{cases} \text{soit } \exists L_{I_K} \in \mathcal{T} \text{ telle que } I_K = K \cap L_{I_K} \text{ et } \mathcal{H}^{d-1}(K \cap L_{I_K}) \in \mathbb{R}_*^+ \\ \text{soit la face } I_K \in \partial\Omega \cap K \end{cases}$$

On note $|I_K| = \mathcal{H}^{d-1}(I_K)$ sa mesure de Hausdorff de dimension $d-1$, et

$$|\partial K| = \sum_{I_K \in \partial K} |I_K|$$

Le pas d'espace h vérifie

$$h = \sup_{K \in \mathcal{T}} \text{diam}(K) < +\infty$$

où $\text{diam}(K)$ est le diamètre de K .

Le pas de temps k vérifie les deux conditions

$$\lim_{h \rightarrow 0} k = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{k} = 0$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, à l'instant $t_n = nk$, pour $x \in K \setminus \partial K$,

on approche $\partial_t u(x, t_n)$ par $\frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{k}$ où $u_K^n \in \mathbb{R}$ est une valeur approchée de $u(x, t_n)$.

A l'instant t_n , on intègre l'équation sur K pour obtenir grâce au théorème de la divergence

$$|K| \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{k} + \int_{\partial K} A(u(x, t_n)) \cdot n_K(x) d\mathcal{H}^{d-1}(x) = 0$$

où n_K est le vecteur normal extérieur au volume K . On notera $n_K(x) = n_{I_K}$ si $x \in I_K$ de sorte que

$$|K| \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{k} + \sum_{I_K \in \partial K} \int_{I_K} A(u(x, t_n)) \cdot n_{I_K} d\mathcal{H}^{d-1}(x) = 0$$

Pour $x \in I_K$, $A(u(x, t_n)) \cdot n_{I_K}$ est approché par

$$\frac{1}{|I_K|} A_{n_{I_K}} \left(u_K^n, u_{L_{I_K}}^n \right) \text{ si } I_K \notin \partial\Omega$$

ou par

$$\frac{1}{|I_K|} A_{n_{I_K}} \left(u_K^n, u_{I_K}^n \right) \text{ si } I_K \in \partial\Omega$$

$\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto A_{n_{I_K}}(u, v) \in \mathbb{R} : K \in \mathcal{T}\}$ est une famille de fonctions localement lipschitziennes, vérifiant

- $A_{n_{I_K}}(v, u) = -A_{-n_{I_K}}(u, v), \quad \forall u, v, K$
- $A_{n_{I_K}}(u, u) = |I_K| A(u) \cdot n_{I_K}, \quad \forall u, K$
- $(u, v) \mapsto A_{n_{I_K}}(u, v)$ est croissante en u , décroissante en v

Ainsi, l'équation en continu est approchée pour $x \in K$ et $t = t_n$ par

$$|K| \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{k} + \sum_{I_K \in \partial K} A_{n_{I_K}} \left(u_K^n, u_{L_{I_K}}^n \right) = 0, \quad \forall K \in \mathcal{T}, \forall n \in \mathbb{N}$$

sous la condition initiale

$$u_K^0 = \frac{1}{|K|} \int_K u_0(x) dx, \quad \forall K \in \mathcal{T}$$

et la condition aux bords

$$u_{I_K}^n = \frac{1}{k|I_K|} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{I_K} u(x, t) d\mathcal{H}^{d-1}(x) dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall K \in \mathcal{T}$$

ce qui donne le schéma volumes finis.

La solution approchée du problème de Cauchy est définie sur le maillage (\mathcal{T}, k) pour presque tout x par

$$u_{(\mathcal{T}, k)}(x, t) = u_K^n \quad \forall x \in K \setminus \partial K, \forall t \in [t_n, t_{n+1})$$

Sous la condition CFL :

$$\frac{k|\partial K|}{|K|} M < 1, \quad \forall K \in \mathcal{T}$$

où

$$M = \sup \left(|A'(s)| : s \in \left[\min \left(-\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}, -\|u_1\|_{L^\infty(\partial\Omega \times \mathbb{R}^+)} \right), \max \left(\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \|u_1\|_{L^\infty(\partial\Omega \times \mathbb{R}^+)} \right) \right] \right)$$

avec $|A'(s)|$ la norme euclidienne de $A'(s) \in \mathbb{R}^d$, la solution approchée $u_{(T,k)}$ converge vers la solution faible entropique u du problème de Cauchy/Dirichlet lorsque $h \rightarrow 0$ dans $L^p(\Omega \times (0, T))$, $\forall p \in [1, +\infty)$, $\forall T \in \mathbb{R}_*^+$.

Quatrième résultat : Vila tiré de l'article [Vil94]

Convergence et estimations d'erreurs d'un schéma Volumes Finis pour une loi de conservation multidimensionnelle scalaire. Schémas monotones explicites.

Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + \operatorname{div}_x (A(u(x, t))) = 0, & \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall t \in \mathbb{R}_*^+ \\ u(0, x) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

avec

- $A \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$
- $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$

est discrétisé grâce à un maillage polyédral de \mathbb{R}^d .

Plus exactement, soit \mathcal{T} l'ensemble des polyèdres ouverts du maillage, vérifiant

$$\bigcup_{K \in \mathcal{T}} K = \Omega$$

et $\forall (K, K') \in \mathcal{T}^2$ tels que $K \cap K' \neq \emptyset$,

$$\begin{cases} \text{soit } K \cap K' \in \partial K \cap \partial K' \text{ et } \mathcal{H}^{d-1}(K \cap K') \neq 0 \\ \text{soit } \exists d' \leq d-2 : \mathcal{H}^{d'}(K \cap K') \in \mathbb{R}_*^+ \end{cases}$$

Si $K \in \mathcal{T}$, on note $|K|$ la mesure de Lebesgue de K .

Soit I_K une face quelconque de K , c'est à dire qu'il existe $L_K \in \mathcal{T}$ telle que $I_K = K \cap L_K$ et $\mathcal{H}^{d-1}(K \cap L_K) \in \mathbb{R}_*^+$. On note $|I_K| = \mathcal{H}^{d-1}(I_K)$ sa mesure de Hausdorff de dimension $d-1$.

On suppose de plus, que le maillage \mathcal{T} vérifie les hypothèses suivantes :

$\exists a, b, h \in \mathbb{R}_*^+$ tels que

- $ah^{d-1} \leq |I_K| \leq bh^{d-1}, \quad \forall I_K \text{ tel que } K \in \mathcal{T}$
- $ah^d \leq |K| \leq bh^d, \quad \forall K \in \mathcal{T}$

Le pas de temps $k_n = t_{n+1} - t_n$ est tel qu'il existe deux fonctions k^+ et k^- de h , strictement positives, vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$0 < k^-(h) \leq k_n \leq k^+(h)$$

et

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h + k^+(h)}{\sqrt{k^-(h)}} = 0$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, à l'instant t_n , pour $x \in K \setminus \partial K$,

on approche $\partial_t u(x, t_n)$ par $\frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{k_n}$ où $u_K^n \in \mathbb{R}$ est une valeur approchée de $u(x, t_n)$.

A l'instant t_n , on intègre l'équation sur K pour obtenir grâce au théorème de la divergence

$$|K| \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{k_n} + \int_{\partial K} A(u(x, t_n)) \cdot n_K(x) d\mathcal{H}^{d-1}(x) = 0$$

où n_K est le vecteur normal extérieur au volume K . On notera $n_K(x) = n_{I_K}$ si $x \in I_K$ de sorte que

$$|K| \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{k_n} + \sum_{I_K \in \partial K} \int_{I_K} A(u(x, t_n)) \cdot n_{I_K} d\mathcal{H}^{d-1}(x) = 0$$

Pour $x \in I_K$, $A(u(x, t_n)) \cdot n_{I_K}$ est approché par

$$\frac{1}{|I_K|} A_{n_{I_K}}(u_K^n, u_{L_{I_K}}^n)$$

où $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto A_{n_{I_K}}(u, v) \in \mathbb{R} : K \in \mathcal{T}\}$ est une famille de fonctions localement lipschitziennes, vérifiant :

- $\forall M > 0, \exists Q > 0 : \forall (u, u', v, v') \in [-M, M]^4, \forall K \in \mathcal{T},$
 $|A_{n_{I_K}}(u, u') - A_{n_{I_K}}(v, v')| \leq Q (|u - u'| + |v - v'|)$

- $A_{n_{I_K}}(v, u) = -A_{-n_{I_K}}(u, v), \quad \forall u, v, K$
- $A_{n_{I_K}}(u, u) = |I_K|A(u) \cdot n_{I_K}, \quad \forall u, K$
- $(u, v) \mapsto A_{n_{I_K}}(u, v)$ est croissante en u , décroissante en v

Ainsi, l'équation en continu est approchée pour $x \in K$ et $t = t_n$ par

$$|K| \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{k} + \sum_{I_K \in \partial K} A_{n_{I_K}}(u_K^n, u_{L_{I_K}}^n) = 0, \quad \forall K \in \mathcal{T}, \forall n \in \mathbb{N}$$

sous la condition initiale

$$u_K^0 = \frac{1}{|K|} \int_K u_0(x) dx, \quad \forall K \in \mathcal{T}$$

ce qui donne le schéma volumes finis.

La solution approchée du problème de Cauchy est définie sur le maillage (\mathcal{T}, k) pour presque tout x par

$$u_{(\mathcal{T}, k)}(x, t) = u_K^n, \quad \forall x \in K \setminus \partial K, \forall t \in [t_n, t_{n+1})$$

Sous la condition CFL :

$$\begin{aligned} \exists \eta > 0 : \sup_{I_K: K \in \mathcal{T}} \left(k^+(h) \times \max \left(\frac{|\partial K|}{|K|}, \frac{|\partial L_{I_K}|}{|L_{I_K}|} \right) \right. \\ \left. \times \sup_{|u|, |v| \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}} \frac{A(v) \cdot n_{I_K} - 2A_{n_{I_K}}(u, v) + A(u) \cdot n_{I_K}}{v - u} \right) < (1 - \eta) \end{aligned}$$

la solution approchée $u_{(\mathcal{T}, k)}$ converge vers la solution faible entropique u du problème de Cauchy lorsque $h \rightarrow 0$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, uniformément en $t \in [0, T]$, quel que soit $T > 0$ i.e.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T]} \|u_{(\mathcal{T}, k)}(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 0$$

Remarque :

Si $u_0 \in BV(\mathbb{R}^d)$ et que $h \mapsto \frac{h}{k^\pm(h)}$ est bornée, la vitesse de convergence est de l'ordre $h^{\frac{1}{4}}$ dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, uniformément en $t \in [0, T]$, quel que soit $T > 0$.

Cinquième résultat : Chaisnais, Champier tiré de l'article [CC01]

Schéma Volumes Finis pour une loi de conservation multidimensionnelle
scalaire non-homogène : estimation d'erreur

Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + \operatorname{div}_x (A(x, t, u(x, t))) = G(x, t, u(x, t)) & \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall t \in \mathbb{R}_*^+ \\ u(0, x) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

avec

- $A \in C^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$
- $\frac{\partial}{\partial \zeta} A(x, t, \zeta)$ localement lipschitzienne et appartenant à $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$
- $\operatorname{div}_x A(x, t, \zeta)$ localement lipschitzienne et telle que $\operatorname{div}_x A(x, t, 0)$ et $\frac{\partial}{\partial \zeta} \operatorname{div}_x (A(x, t, \zeta))$ soient bornées
- $G \in C^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$
- $G(x, t, \zeta)$ localement lipschitzienne et telle que $G(x, t, 0)$ et $\frac{\partial}{\partial \zeta} (G(x, t, \zeta))$ soient bornées
- $u_0 \in BV_{loc}(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$

est discrétisé grâce à un maillage polyédral de \mathbb{R}^d .

Plus exactement, soit \mathcal{T} l'ensemble des polyèdres ouverts du maillage, vérifiant :

$$\bigcup_{K \in \mathcal{T}} K = \Omega$$

et $\forall (K, K') \in \mathcal{T}^2$ tels que $K \cap K' \neq \emptyset$,

$$\begin{cases} \text{soit } K \cap K' \in \partial K \cap \partial K' \text{ et } \mathcal{H}^{d-1}(K \cap K') \neq 0 \\ \text{soit } \exists d' \leq d-2 : \mathcal{H}^{d'}(K \cap K') \in \mathbb{R}_*^+ \end{cases}$$

Si $K \in \mathcal{T}$, on note $|K|$ la mesure de Lebesgue de K .

Soit I_K une face quelconque de K , c'est à dire qu'il existe $L_K \in \mathcal{T}$ telle que $I_K = K \cap L_K$ et $\mathcal{H}^{d-1}(K \cap L_K) \in \mathbb{R}_*^+$. On note $|I_K| = \mathcal{H}^{d-1}(I_K)$ sa mesure de Hausdorff de dimension $d-1$.

On suppose de plus, que le maillage \mathcal{T} vérifie les hypothèses suivantes :

$\exists a, h \in \mathbb{R}_*^+$ tels que

- $|I_K| \leq \frac{1}{a} h^{d-1}, \quad \forall I_K \text{ tel que } K \in \mathcal{T}$
- $ah^d \leq |K|, \quad \forall K \in \mathcal{T}$
- $\text{diam}(K) \leq h, \quad \forall K \in \mathcal{T}$

où $\text{diam}(K)$ est le diamètre de K .

Le pas de temps se note $k > 0$. Soient $n \in \mathbb{N}, t_n = nk, t_{n+1} = (n+1)k$,

$\forall t \in [t_n, t_{n+1}), \forall x \in K \setminus \partial K$,

on approche $\partial_t u(x, t)$ par $\frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{k}$ où $u_K^n \in \mathbb{R}$ est une valeur approchée de $u(x, t_n)$.

On intègre l'équation sur K pour obtenir grâce au théorème de la divergence

$$|K| \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{k} + \int_{\partial K} A(x, t, u(x, t)) \cdot n_K(x) d\mathcal{H}^{d-1}(x) = \int_K G(x, t, u(x, t)) dx$$

où n_K est le vecteur normal extérieur au volume K . On notera $n_K(x) = n_{I_K}$ si $x \in I_K$ de sorte que

$$|K| \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{k} + \sum_{I_K \in \partial K} \int_{I_K} A(x, t, u(x, t)) \cdot n_{I_K} d\mathcal{H}^{d-1}(x) = \int_K G(x, t, u(x, t)) dx$$

puis on intègre sur $[t_n, t_{n+1})$ pour obtenir

$$\begin{aligned} |K| (u_K^{n+1} - u_K^n) + \sum_{I_K \in \partial K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{I_K} A(x, t, u(x, t)) \cdot n_{I_K} d\mathcal{H}^{d-1}(x) dt \\ = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K G(x, t, u(x, t)) dx dt \end{aligned}$$

On approche

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{I_K} A(x, t, u(x, t)) \cdot n_{I_K} d\mathcal{H}^{d-1}(x) dt$$

par

$$k \times A_{n_{I_K}}^n(u_K^n, u_{I_K}^n)$$

où $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto A_{n_{I_K}}^n(u, v) \in \mathbb{R} : K \in \mathcal{T}, n \in \mathbb{N}\}$ est une famille de fonctions lipschitziennes ayant la même constante de Lipschitz $|I_K|M$ ($M > 0$ ne dépend que de A et u_0), vérifiant

- $A_{n_{I_K}}^n(v, u) = -A_{-n_{I_K}}^n(u, v), \quad \forall u, v, K$
- $A_{n_{I_K}}^n(u, u) = \frac{1}{k} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{I_K} A(x, t, u) \cdot n_{I_K} d\mathcal{H}^{d-1}(x) dt, \quad \forall u, K$
- $(u, v) \mapsto A_{n_{I_K}}^n(u, v)$ est croissante en u , décroissante en v

On approche

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K G(x, t, u(x, t)) dx dt$$

par

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K G(x, t, u_K^n) dx dt$$

Ainsi, l'équation en continu est approchée pour $x \in K$ et $t \in [t_n, t_{n+1})$ par

$$|K| \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{k} + \sum_{I_K \in \partial K} A_{nI_K}^n (u_K^n, u_{LI_K}^n) = \frac{1}{k} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K G(x, t, u_K^n) dx dt, \quad \forall K \in \mathcal{T}, \forall n \in \mathbb{N}$$

sous la condition initiale

$$u_K^0 = \frac{1}{|K|} \int_K u_0(x) dx, \quad \forall K \in \mathcal{T}$$

ce qui donne le schéma volumes finis.

La solution approchée du problème de Cauchy est définie sur le maillage (\mathcal{T}, k) pour presque tout x par

$$u_{(\mathcal{T}, k)}(x, t) = u_K^{n+1}, \quad \forall x \in K \setminus \partial K, \forall t \in [t_n, t_{n+1})$$

Sous la condition CFL :

$$\exists \eta > 0 : k \leq \frac{\alpha^2 (1 - \eta) h}{4M}$$

la solution approchée $u_{(\mathcal{T}, k)}$ converge vers la solution faible entropique u du problème de Cauchy lorsque $h \rightarrow 0$ dans $L_{loc}^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$.

Plus exactement, $\forall E \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$, E compact, il existe une constante C ne dépendant que de E , A , G , u_0 , α , η , M telle que

$$\|u_{(\mathcal{T}, k)} - u\|_{L^1(E)} \leq Ch^{\frac{1}{4}}$$

Sixième résultat : Makridakis, Perthame tiré de l'article [\[MP03\]](#)

Condition CFL fine, formulation cinétique discrète et schémas entropiques pour une loi de conservation scalaire

Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + \partial_x (A(u(x, t))) = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}_*^+ \\ u(0, x) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

avec

- $A \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $A(0) = 0$
- $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$

est discrétisé grâce à un maillage $\mathcal{T} = \{K_i, i \in \mathbb{Z}\}$ uniforme de \mathbb{R} .

Plus exactement, soit $h > 0$ le pas d'espace, $\{x_{i+\frac{1}{2}} = (i + \frac{1}{2})h, i \in \mathbb{Z}\}$ les nœuds du maillage, $\{K_i = (x_{i-\frac{1}{2}}; x_{i+\frac{1}{2}}), i \in \mathbb{Z}\}$ les volumes finis ou cellules du maillage.

Le pas de temps se note $k > 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, à l'instant $t_n = nk$, pour $x \in K_i$,

on approche $\partial_t u(x, t_n)$ par $\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k}$ où $u_i^n \in \mathbb{R}$ est une valeur approchée de $u(x, t_n)$.

À l'instant t_n , on intègre l'équation sur K_i pour obtenir

$$h \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + A(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n)) - A(u(x_{i-\frac{1}{2}}, t_n)) = 0$$

Pour $i \in \mathbb{Z}$, $A(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n))$ est approché par $A_{i+\frac{1}{2}}^n = \mathcal{A}(u_i^n, u_{i+1}^n)$,

où $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \mathcal{A}(u, v) \in \mathbb{R}$ est un E-flux numérique, c'est à dire vérifiant les propriétés :

- \mathcal{A} est lipschitzienne
- $\mathcal{A}(u, u) = A(u), \quad \forall u \in \mathbb{R}$
- $\mathcal{A}(u, v) \leq A(\xi), \quad \forall u \leq \xi \leq v$
- $\mathcal{A}(u, v) \geq A(\xi), \quad \forall v \leq \xi \leq u$

Ainsi, l'équation en continu est approchée pour $x \in K_i$ et $t = t_n$ par

$$h \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + A_{i+\frac{1}{2}}^n - A_{i-\frac{1}{2}}^n = 0$$

sous la condition initiale

$$u_i^0 = \frac{1}{h} \int_{K_i} u_0(x) dx, \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

ce qui donne le schéma volumes finis.

La solution approchée du problème de Cauchy est définie sur le maillage (\mathcal{T}, k) par

$$u_{(\mathcal{T},k)}(x, t) = u_i^n, \quad \forall x \in [x_{i-\frac{1}{2}}; x_{i+\frac{1}{2}}), \quad \forall t \in [t_n, t_{n+1})$$

Sous les conditions CFL :

$$k \times \max_{\xi \in [-\|u_0\|_\infty; \|u_0\|_\infty]} |A'(\xi)| \leq h$$

et

$$k \times \frac{A(u_i^n) + A(u_{i+1}^n) + A_{i+\frac{1}{2}}^n}{u_{i+1}^n - u_i^n} \leq h, \quad \forall i, n$$

il existe un flux numérique cinétique $a_{\frac{k}{h}}(\xi, u, v)$ associé à $\mathcal{A}(u, v)$ dépendant des pas de temps et d'espace k et h , et des mesures positives à support compact m_i^n de $(\mathbb{R}_\xi, \mathcal{B}(\mathbb{R}_\xi))$ tels que le schéma volumes finis

$$\begin{cases} h \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + A_{i+\frac{1}{2}}^n - A_{i-\frac{1}{2}}^n = 0 \\ u_i^0 = \frac{1}{h} \int_{K_i} u_0(x) dx, \quad \forall i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

soit équivalent à sa formulation cinétique

$$\begin{cases} h \frac{\chi(\xi, u_i^{n+1}) - \chi(\xi, u_i^n)}{k} + a_{\frac{k}{h}}(\xi, u_i^n, u_i^{n+1}) - a_{\frac{k}{h}}(\xi, u_{i-1}^n, u_i^n) = \frac{\partial}{\partial \xi} m_i^n(\xi) \\ u_i^0 = \frac{1}{h} \int_{K_i} u_0(x) dx, \quad \forall i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

où

$a_{\frac{k}{h}}(\xi, u, v)$ vérifie les conditions

- $\xi \mapsto a_{\frac{k}{h}}(\xi, u, v) \in L^1(\mathbb{R}_\xi), \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$ fixés
- $\xi \mapsto a_{\frac{k}{h}}(\xi, u, v)$ est à support compact, $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$ fixés
- $\int_{\mathbb{R}} a_{\frac{k}{h}}(\xi, u, v) d\xi = \mathcal{A}(u, v), \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$
- $a_{\frac{k}{h}}(\xi, u, u) = \chi(\xi, u) A'(\xi), \quad \forall (\xi, u) \in \mathbb{R}^2$

avec, rappelons-le

$$\chi(\xi, u) = \begin{cases} +1 & \text{si } 0 < \xi < u \\ -1 & \text{si } u < \xi < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

qui, grâce la propriété

$$\int_{\mathbb{R}} \chi(\xi, u) d\xi = u$$

permet de passer de la formulation cinétique à la formulation première du schéma Volumes Finis par une intégration sur \mathbb{R}_ξ .

Ils prouvent que sous les conditions CFL précédentes, une inégalité entropique discrète existe, c'est à dire :

$\forall \eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe, il existe un flux d'entropie discret

$$(u, v) \mapsto \phi_\eta(u, v) = \int_{\mathbb{R}} \eta'(\xi) a_{\frac{k}{h}}(\xi, u, v) d\xi$$

vérifiant l'inégalité entropique discrète

$$h \frac{\eta(u_i^{n+1}) - \eta(u_i^n)}{k} + \phi_\eta(u_i^n, u_{i+1}^n) - \phi_\eta(u_{i-1}^n, u_i^n) \leq 0$$

Remarques :

la classe des E-flux numériques est plus large que la classe des flux numériques monotones utilisés dans les cinq premiers résultats et dans le schéma volumes finis du deuxième article de cette thèse. En effet,

$$(u, v) \mapsto \mathcal{A}(u, v) \text{ croissante en } u \text{ et décroissante en } v$$

implique

$$\mathcal{A}(u, v) \leq \mathcal{A}(\xi), \forall u \leq \xi \leq v \text{ et } \mathcal{A}(u, v) \geq \mathcal{A}(\xi), \forall v \leq \xi \leq u.$$

Dans leur article, Makridakis et Perthame prennent la condition initiale numérique plus générale

$$(u_i^0)_{i \in \mathbb{Z}} \in l^1(\mathbb{Z}).$$

$a_{\frac{k}{h}}(\xi, u, v)$ est définie de manière explicite, et dépend bien de $\frac{h}{k}$.

En se limitant à un schéma Volumes Finis avec flux numérique d'Enquist-Osher, à savoir

$$\mathcal{A}(u, v) = \int_{\mathbb{R}} \max(0, A'(\xi)) \chi(\xi, u) d\xi - \int_{\mathbb{R}} \max(0, -A'(\xi)) \chi(\xi, v) d\xi$$

qui est bien un flux numérique monotone, ils ont aussi prouvé que le résultat précédent est vrai sous la seule condition CFL

$$k \times \max_{\xi \in [-\|u_0\|_\infty; \|u_0\|_\infty]} |A'(\xi)| \leq h$$

et avec un flux numérique cinétique égal à

$$a(\xi, u, v) = \max(0, A'(\xi)) \chi(\xi, u) - \max(0, -A'(\xi)) \chi(\xi, v)$$

indépendant des pas de temps et d'espace k et h .

La condition CFL de Makridakis, Perthame améliore celle des articles de Tadmor [Tad84] ou Cocquel, Lefloch [CL91] qui donne des inégalités entropiques discrètes pour prouver la convergence d'un schéma aux différences finies pour Tadmor et d'un schéma Volumes Finis pour Cocquel-LeFloch.

Ce septième résultat a pour origine les articles Bauzet, Charrier, Gallouët [BCG16a] et [BCG16b], qui a été généralisé dans le mémoire de Master de Vicent Castel sous la direction de Caroline Bauzet, Julia Charrier, Thierry Gallouët.

Septième résultat : Bauzet, Castel, Charrier, Gallouët 2014/2016

Convergence d'un schéma Volumes Finis monotone pour une loi de conservation scalaire hyperbolique avec bruit multiplicatif

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ complète, continue à droite, pour laquelle le Mouvement Brownien réel continu $(\beta_t)_{t \in [0, T]}$, avec $T \in \mathbb{R}_*^+$, est adapté.

Soit $d \in \mathbb{N}^*$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} du(\omega, x, t) + \operatorname{div}_x (A(x, t, u(\omega, x, t))) dt = \Phi(u(\omega, x, t)) d\beta(t), \\ \quad \forall \omega \in \Omega, \forall t \in (0, T), \forall x \in \mathbb{R}^d \\ u(\omega, x, 0) = u_0(x), \quad \forall \omega \in \Omega, \forall x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

avec

- $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$, bornée et à support compact
- $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne, bornée et telle que $\Phi(0) = 0$
- $A : \mathbb{R}^d \times [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^d, \exists C_x, R_x > 0 :$
 $\forall (y, t, \xi) \in B(x, R_x) \times [0, T] \times \mathbb{R}, |A(x, t, \xi) - A(y, t, \xi)| \leq C_x |x - y|$
 où $|\cdot|$ est la norme euclidienne de \mathbb{R}^d
- $\exists C_T > 0 : \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, \forall (t, t') \in [0, T]^2,$
 $|A(x, t, \xi) - A(x, t', \xi)| \leq C_T |t - t'|$
- $\exists C > 0 : \forall (x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, T], \forall (\xi, \xi') \in \mathbb{R}^2,$
 $|A(x, t, \xi) - A(x, t, \xi')| \leq C |\xi - \xi'|$
- $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, T], A(x, t, 0) = 0$

- $\forall (x, t, \xi) \in \mathbb{R}^d \times [0, T] \times \mathbb{R}, \operatorname{div}_x (A(x, t, \xi)) = 0$

est discrétisé grâce à un maillage polyédral de \mathbb{R}^d .

Plus exactement, soit \mathcal{T} l'ensemble des polyèdres ouverts du maillage, vérifiant :

$$\bigcup_{K \in \mathcal{T}} K = \Omega$$

et $\forall (K, K') \in \mathcal{T}^2$ tels que $K \cap K' \neq \emptyset$,

$$\begin{cases} \text{soit } K \cap K' \in \partial K \cap \partial K' \text{ et } \mathcal{H}^{d-1}(K \cap K') \neq 0 \\ \text{soit } \exists d' \leq d-2 : \mathcal{H}^{d'}(K \cap K') \in \mathbb{R}_*^+ \end{cases}$$

Si $K \in \mathcal{T}$, on note $|K|$ la mesure de Lebesgue de K .

Soit I_K une face quelconque de K , c'est à dire qu'il existe $L_K \in \mathcal{T}$ telle que $I_K = K \cap L_K$ et $\mathcal{H}^{d-1}(K \cap L_K) \in \mathbb{R}_*^+$. On note $|I_K| = \mathcal{H}^{d-1}(I_K)$ sa mesure de Hausdorff de dimension $d-1$.

Soit h le pas d'espace défini par

$$h = \sup_{K \in \mathcal{T}} |K| < +\infty$$

On suppose de plus, que le maillage \mathcal{T} vérifie les hypothèses suivantes :

$\exists a \in \mathbb{R}_*^+$ tel que

- $|I_K| \leq \frac{1}{a} h^{d-1}, \quad \forall I_K \text{ tel que } K \in \mathcal{T}$
- $ah^d \leq |K|, \quad \forall K \in \mathcal{T}$

Le pas de temps se note $k = \frac{T}{N}$ pour un certain $N \in \mathbb{N}^*$ et doit vérifier l'hypothèse

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k}{h} = 0$$

Soient $n \in \{0, \dots, N-1\}, t_n = nk, t_{n+1} = (n+1)k$,

$\forall t \in [t_n, t_{n+1}), \forall x \in K \setminus \partial K$, on approche $\partial_t u(x, t)$ par $\frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{k}$ où $u_K^n \in \mathbb{R}$ est une valeur approchée de $u(x, t_n)$.

On approche $\Phi(u(x, t)) \partial_t \beta(t)$ par $\Phi(u_K^n) \frac{\beta(t_{n+1}) - \beta(t_n)}{k}$.

On intègre l'équation sur K pour obtenir grâce au théorème de la divergence

$$|K| \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{k} + \int_{\partial K} A(x, t, u(x, t)) \cdot n_K(x) d\mathcal{H}^{d-1}(x) = |K| \Phi(u_K^n) \frac{\beta(t_{n+1}) - \beta(t_n)}{k}$$

où n_K est le vecteur normal extérieur au volume K . On notera $n_K(x) = n_{I_K}$ si

$x \in I_K$ de sorte que

$$\begin{aligned} |K| \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{k} + \sum_{I_K \in \partial K} \int_{I_K} A(x, t, u(x, t)) \cdot n_{I_K} d\mathcal{H}^{d-1}(x) \\ = |K| \Phi(u_K^n) \frac{\beta(t_{n+1}) - \beta(t_n)}{k}, \end{aligned}$$

puis on intègre sur $[t_n, t_{n+1})$ pour obtenir

$$\begin{aligned} |K| (u_K^{n+1} - u_K^n) + \sum_{I_K \in \partial K} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{I_K} A(x, t, u(x, t)) \cdot n_{I_K} d\mathcal{H}^{d-1}(x) dt \\ = |K| \Phi(u_K^n) (\beta(t_{n+1}) - \beta(t_n)). \end{aligned}$$

On approche

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{I_K} A(x, t, u(x, t)) \cdot n_{I_K} d\mathcal{H}^{d-1}(x) dt$$

par

$$k \times A_{n_{I_K}}^n(u_K^n, u_{L_{I_K}}^n)$$

où $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto A_{n_{I_K}}^n(u, v) \in \mathbb{R} : K \in \mathcal{T}, n \in \mathbb{N}\}$ est une famille de fonctions vérifiant

- $A_{n_{I_K}}^n(v, u) = -A_{-n_{I_K}}^n(u, v), \quad \forall u, v, K$
- $A_{n_{I_K}}^n(u, u) = \frac{1}{k} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{I_K} A(x, t, u) \cdot n_{I_K} d\mathcal{H}^{d-1}(x) dt, \quad \forall u, K$
- $(u, v) \mapsto A_{n_{I_K}}^n(u, v)$ est croissante en u , décroissante en v
- $\exists C_1 > 0 : \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, \forall K \in \mathcal{T},$
 $|A_{n_{I_K}}^n(v, u) - A_{n_{I_K}}^n(u, u)| \leq C_1 |u - v|$
- $\exists C_2 > 0 : \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, \forall K \in \mathcal{T},$
 $|A_{n_{I_K}}^n(u, v) - A_{n_{I_K}}^n(u, u)| \leq C_2 |u - v|$

Ainsi, l'équation en continu est approchée pour $x \in K$ et $t \in [t_n, t_{n+1})$ par

$$\begin{aligned} |K| \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{k} + \sum_{I_K \in \partial K} A_{n_{I_K}}^n(u_K^n, u_{L_{I_K}}^n) = \frac{1}{k} |K| \Phi(u_K^n) (\beta(t_{n+1}) - \beta(t_n)), \\ \forall K \in \mathcal{T}, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

sous la condition initiale

$$u_K^0 = \frac{1}{|K|} \int_K u_0(x) dx, \quad \forall K \in \mathcal{T}$$

ce qui donne le schéma volumes finis.

La solution approchée du problème de Cauchy est définie sur le maillage (\mathcal{T}, k) pour presque tout x par

$$u_{(\mathcal{T},k)}(x, t) = u_K^n, \quad \forall x \in K \setminus \partial K, \forall t \in [t_n, t_{n+1})$$

Sous la condition CFL :

$$\exists \eta > 0 : k \leq \frac{\alpha^2 (1 - \eta) h}{C_1 + C_2}$$

la solution approchée $u_{(\mathcal{T},k)}$ converge vers la solution faible entropique stochastique u du problème de Cauchy (au sens de la onzième définition de mon historique précédent) lorsque $h \rightarrow 0$ dans $L_{loc}^p(\Omega \times \mathbb{R}^d \times (0, T))$, $\forall p \in [1, 2)$.

2 Convergence d'approximations pour les lois de conservation stochastiques scalaires

2.1 Le premier article soumis à la revue *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, le 5 septembre 2017

Convergence of approximations to stochastic scalar conservation laws

Sylvain Dotti^a and Julien Vovelle^b

Abstract

We develop a general framework for the analysis of approximations to stochastic scalar conservation laws. Our aim is to prove, under minimal consistency properties and bounds, that such approximations are converging to the solution to a stochastic scalar conservation law. The weak probabilistic convergence mode is convergence in law, the most natural in this context. We use also a kinetic formulation and martingale methods. Our result is applied to the convergence of the Finite Volume Method in the next chapter.

Keywords : stochastic conservation laws, kinetic formulation, martingale methods

MSC Number : 60H15 (35L65 35R60)

a. Aix-Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, I2M, UMR 7373, 13453 Marseille France

b. Univ Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1, CNRS UMR 5208, Institut Camille Jordan, 43 blvd. du 11 novembre 1918, F-69622 Villeurbanne cedex, France. Julien Vovelle was supported by ANR projects STOSYMAP and STAB.

2.1.1 Introduction

Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t), (\beta_k(t)))$ be a stochastic basis and let $T > 0$. Consider the first-order scalar conservation law with stochastic forcing

$$du(x, t) + \operatorname{div}(A(u(x, t)))dt = \Phi(x, u(x, t))dW(t), \quad x \in \mathbb{T}^N, t \in (0, T). \quad (2.1)$$

Equation (2.1) is periodic in the space variable : $x \in \mathbb{T}^N$ where \mathbb{T}^N is the N -dimensional torus. The flux function A in (2.1) is supposed to be of class C^2 : $A \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)$. We assume that A and its derivatives have at most polynomial growth. The right-hand side of (2.1) is a stochastic increment in infinite dimension. It is defined as follows (see [DZ92] for the general theory) : W is a cylindrical Wiener process, $W = \sum_{k \geq 1} \beta_k e_k$, where the coefficients β_k are independent Brownian processes and $(e_k)_{k \geq 1}$ is a complete orthonormal system in a Hilbert space H . For each $x \in \mathbb{T}^N$, $u \in \mathbb{R}$, $\Phi(x, u) \in L_2(H, \mathbb{R})$ is defined by $\Phi(x, u)e_k = g_k(x, u)$ where $g_k(\cdot, u)$ is a regular function on \mathbb{T}^N . Here, $L_2(H, K)$ denotes the set of Hilbert-Schmidt operator from the Hilbert space H to an other Hilbert space K . Since $K = \mathbb{R}$ in our case, this set is isomorphic to H , thus we may also define

$$\Phi(x, u) = \sum_{k \geq 1} g_k(x, u)e_k, \quad (2.2)$$

the action of $\Phi(x, u)$ on $e \in H$ being given by $\langle \Phi(x, u), e \rangle_H$. We assume $g_k \in C(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, with the bounds

$$\mathbf{G}^2(x, u) = \|\Phi(x, u)\|_H^2 = \sum_{k \geq 1} |g_k(x, u)|^2 \leq D_0(1 + |u|^2), \quad (2.3)$$

$$\|\Phi(x, u) - \Phi(y, v)\|_H^2 = \sum_{k \geq 1} |g_k(x, u) - g_k(y, v)|^2 \leq D_1(|x - y|^2 + |u - v|h(|u - v|)), \quad (2.4)$$

where $x, y \in \mathbb{T}^N$, $u, v \in \mathbb{R}$, and h is a continuous non-decreasing function on \mathbb{R}_+ such that $h(0) = 0$. We assume also $0 \leq h(z) \leq 1$ for all $z \in \mathbb{R}_+$.

Notation : in what follows, we will use the convention of summation over repeated indices k . For example, we write $W = \beta_k e_k$ for the cylindrical Wiener process in (2.1).

This paper is a preliminary work to the analysis of convergence of the numerical approximation to (2.1) by the Finite Volume method with monotone fluxes, which is done in 3.1. We give a general notion of family of approximate solutions, see Definition 30, and explain what kind of convergence of such family can be expected. Our main results in this regard are the theorem 36, about convergence to martingale solutions, and the theorem 47, which gives criteria for convergence to pathwise solutions.

Problem (2.1) has already been studied in a series of papers. Like in the deterministic case, the approach to the existence of solutions has been the vanishing viscosity method, see [Wei+00; Kim03b; FN08; VW09; DV10a; CDK12; BVW12; BVW14; KS17] in particular. Approximation by the BGK method has been considered by M. Hofmanová in [Hof15]. Some results of convergence of numerical approximations to (2.1) (by the Finite Volume method in particular) have also been obtained in [KR12; BCG16a; BCG16b; Bau15; KS16; Ujj40].

The main difference between this present paper and all the works cited above is in the way to answer to the following question : when considering the convergence of approximations to (2.46), which mode of convergence regarding the sample variable ω is used? Here, we develop an approach based on convergence in law, while in the work referred to ^c, weak convergence (in Lebesgue spaces, or in the sense of Young measures, cf. Section 2.1.2.2) is considered. Convergence in law is the natural mode of convergence for the random variables which manifest in the approximation to (2.1). Our approach based on convergence in law is successful because we work in the context of càdlàg processes. This is an other difference between this present paper and the references already quoted : our formulation of solution is weak in the space variable, but not weak in the time variable, see (2.10), (2.27) for example. This allows to obtain convergence of approximation for each time t (this is the last statement in Theorem 47), without making any regularity hypothesis on the initial datum at any moment. This paper is also a further development of the approach by kinetic formulation initiated in [DV10a]. We need it crucially in the companion paper given in 3.1 to obtain the convergence of The Finite Volume method with a standard CFL condition (cf. our comment on the Kinetic formulation in the introduction section of 3.1).

To complete this introduction, let us mention that the approximation of scalar conservation laws with stochastic flux has also been considered in [GPS16] (time-discrete scheme) and [MSZ13] (space discrete scheme). For the corresponding Cauchy Problem, see [LPS12; LPS13; LPS14; GS14; GS16; Hof16].

The plan of the paper is the following one : Section 2.1.2 to Section 2.1.4 are devoted to the analysis of the Cauchy Problem for (2.1) : we introduce the kinetic formulation of the problem in Section 2.1.2, and prove a uniqueness result in Section 2.1.3. In Section 2.1.4, we develop a general approach to the analysis of convergence of approximate solutions to (2.1) based on martingale methods. Note that Section 2.1.2 and Section 2.1.3 are for a large part identical to Section 2 and Section 3 in [DV10a]. There are however a lot of modifications, which were needed to prepare Section 2.1.4. In Section 2.1.5, we give some applications of our results of convergence of approximation.

c. with the exception of [FN08], where quite a strong notion of solution is used however

2.1.2 Kinetic solution

2.1.2.1 Definition

Predictable sets and functions

For $T > 0$, we denote by $\mathcal{B}([0, T])$ the Borel σ -algebra on $[0, T]$ and we denote by $\mathcal{P}_T \subset \mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{F}$ the predictable σ -algebra, [CW90, Section 2.2]. If E is a Banach space, a process $(f(t))$ with values in E is said to be weakly-predictable if the process $(\langle f(t), \varphi \rangle_{E, E'})$ is predictable for every φ in the topological dual E' . This is equivalent to say that f is weakly \mathcal{P}_T -measurable, in the sense of [Yos80, Definition 1, p.130]. Similarly, we can define the notion of strong predictability : the process $(f(t))$ is said to be strongly predictable if there exists a sequence of E -valued, \mathcal{P}_T -measurable simple functions which converges to f at every point (t, ω) in a set of full measure in $[0, T] \times \Omega$. By Pettis' Theorem, [Yos80, Theorem p.131], the two notions of measurability coincide if E is separable : in this case we say simply "predictable".

Let us assume that E is separable to introduce the following notations. Let $p \in [1, +\infty)$. The set $L^p([0, T] \times \Omega; E)$ is the set of E -valued, $\mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{F}$ -measurable, Bochner integrable functions f which satisfy

$$\iint_{[0, T] \times \Omega} \|f(t, \omega)\|_E^p d(\mathcal{L} \times \mathbb{P})(t, \omega) < +\infty,$$

where \mathcal{L} is the Lebesgue measure on $[0, T]$. Equivalently, by definition of the product measure $\mathcal{L} \times \mathbb{P}$,

$$\mathbb{E} \int_0^T \|f(t)\|_E^p dt < +\infty.$$

We denote by $L^p_{\mathcal{P}}([0, T] \times \Omega; E)$ the set of functions g in $L^p([0, T] \times \Omega; E)$ which are equal $\mathcal{L} \times \mathbb{P}$ -almost everywhere to a predictable function f . This is the case if, and only if, $\langle g, \varphi \rangle$ is equal $\mathcal{L} \times \mathbb{P}$ -almost everywhere to $\langle f, \varphi \rangle$ for all $\varphi \in E'$ (we use the following fact : E being separable, there is a countable subset of E' that separates points in E , see [Yos80, Lemma (1) p. 131]), so let us briefly consider the case $E = \mathbb{R}$. The class of processes in $L^p_{\mathcal{P}}([0, T] \times \Omega; \mathbb{R})$ is analysed in [CW90, p. 66] or [RY13, p. 172]. In particular, if $X(t)$ is an adapted process with

$$\mathbb{E} \int_0^T |X(t)|^p dt < +\infty,$$

then $X \in L^p_{\mathcal{P}}([0, T] \times \Omega; \mathbb{R})$. A progressively measurable process X in $L^p([0, T] \times \Omega; \mathbb{R})$ also is in $L^p_{\mathcal{P}}([0, T] \times \Omega; \mathbb{R})$.

Let $m \in \mathbb{N}^*$. In the case where E is itself a Lebesgue space $E = L^p(D)$, where D is an open subset of \mathbb{R}^m , we have $L^p([0, T] \times \Omega; L^p(D)) = L^p(D \times [0, T] \times \Omega)$, where $D \times [0, T] \times \Omega$ is endowed with the product measure $\mathcal{L}_{m+1} \times \mathbb{P}$ (\mathcal{L}_m being

the m -dimensional Lebesgue measure), see [Dro01, Section 1.8.1]. Similarly, we have

$$L_{\mathcal{P}}^p([0, T] \times \Omega; L^p(D)) = L_{\mathcal{P}}^p(D \times [0, T] \times \Omega),$$

where $L_{\mathcal{P}}^p(D \times [0, T] \times \Omega)$ is the set of functions in $L^p(D \times [0, T] \times \Omega)$ which are equal $\mathcal{L}_m \times \mathcal{L} \times \mathbb{P}$ -almost everywhere to a $\mathcal{B}(D) \times \mathcal{P}_T$ -measurable function (here $\mathcal{B}(D)$ is the Borel σ -algebra on D). We will apply these results with $D = (0, 1)^N$, in which case, by periodic extension, we obtain

$$L^p([0, T] \times \Omega; L^p(\mathbb{T}^N)) = L^p(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \Omega), \quad (2.5)$$

and similarly for spaces $L_{\mathcal{P}}^p$.

Random measure, solution

Let $\mathcal{M}_b(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R})$ be the set of bounded Borel signed measures on $\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}$. We denote by $\mathcal{M}_b^+(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R})$ the subset of non-negative measures.

Definition 1 (Random measure). *A map m from Ω to $\mathcal{M}_b(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R})$ is said to be a random signed measure (on $\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}$) if, for each $\phi \in C_b(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R})$, $\langle m, \phi \rangle: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ is a random variable. If almost surely $m \in \mathcal{M}_b^+(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R})$, we simply speak of random measure.*

Let m be a random measure such that

$$\mathbb{E}m(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}) < +\infty. \quad (2.6)$$

Then $\mathbb{E}m$ is well defined and this is a bounded measure on $\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}$. In particular, it satisfies the following tightness condition

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \mathbb{E}m(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times B_R^c) = 0, \quad (2.7)$$

where $B_R^c = \{\xi \in \mathbb{R}, |\xi| \geq R\}$. We note this fact here, since uniform versions of (2.7) will be required when considering sequences of random measures, see (2.84). We will also need the following result.

Lemma 2 (Atomic points). *Let m be a random measure with first moment (2.6). Let $\pi: \mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow [0, T]$ denote the projection $(x, t, \xi) \mapsto t$. Let $\pi_{\#}m$ denote the push-forward of m by π . Let B_{at} denote the set of times t such that the event “ t is an atom of $\pi_{\#}m$ ” has positive probability :*

$$B_{\text{at}} = \{t \in [0, T]; \mathbb{P}(\pi_{\#}m(\{t\}) > 0) > 0\}. \quad (2.8)$$

Then B_{at} is at most countable.

Proof of Lemma 2. We have also

$$B_{\text{at}} = \{t \in [0, T]; \mathbb{E}\pi_{\#}m(\{t\}) > 0\}.$$

The set B_{at} is the set of atomic points of the measure $\mathbb{E}\pi_{\#}m$. It is therefore at most countable. \square

The notion of solution which we introduce below is based on the kinetic formulation of conservation laws introduced in [LPT94b]. In particular, for a given function u of the variables (x, t) , we will need to consider the function

$$\mathbf{f}(x, t, \xi) := \mathbf{1}_{u(x,t) > \xi},$$

which is the characteristic function of the subgraph of u . We often write $\mathbf{f} := \mathbf{1}_{u > \xi}$ for short.

To be flexible enough, we have to impose a càdlàg property on solutions to (2.1) (see Item 2 in the following Definition 3). We will show however in Corollary 27 that solutions to (2.1) have continuous trajectories.

Definition 3 (Solution). *Let $u_0 \in L^\infty(\mathbb{T}^N)$. An $L^1(\mathbb{T}^N)$ -valued stochastic process $(u(t))_{t \in [0, T]}$ is said to be a solution to (2.1) with initial datum u_0 if u and $\mathbf{f} := \mathbf{1}_{u > \xi}$ have the following properties :*

1. $u \in L^1_{\mathcal{P}}(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \Omega)$,
2. for all $\varphi \in C^1_c(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, almost surely, $t \mapsto \langle \mathbf{f}(t), \varphi \rangle$ is càdlàg,
3. for all $p \in [1, +\infty)$, there exists $C_p \geq 0$ such that

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p \right) \leq C_p, \quad (2.9)$$

4. there exists a random measure m with first moment (2.6), such that for all $\varphi \in C^1_c(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, for all $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}(t), \varphi \rangle &= \langle \mathbf{f}_0, \varphi \rangle + \int_0^t \langle \mathbf{f}(s), a(\xi) \cdot \nabla \varphi \rangle ds \\ &\quad + \sum_{k \geq 1} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} g_k(x, u(x, s)) \varphi(x, u(x, s)) dx d\beta_k(s) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \partial_\xi \varphi(x, u(x, s)) \mathbf{G}^2(x, u(x, s)) dx ds - m(\partial_\xi \varphi)([0, t]), \end{aligned} \quad (2.10)$$

a.s., where $\mathbf{f}_0(x, \xi) = \mathbf{1}_{u_0(x) > \xi}$, $\mathbf{G}^2 := \sum_{k=1}^{\infty} |g_k|^2$ and $a(\xi) := A'(\xi)$.

In (2.10), we have used the brackets $\langle \cdot, \cdot \rangle$ to denote the duality between $C_c^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ and the space of distributions over $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}$. In what follows, we will denote similarly the integral

$$\langle F, G \rangle = \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} F(x, \xi) G(x, \xi) dx d\xi, \quad F \in L^p(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}), G \in L^q(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}),$$

where $1 \leq p \leq +\infty$ and q is the conjugate exponent of p . In (2.10) also, we have used (with $\phi = \partial_\xi \varphi$) the shorthand $m(\phi)$ to denote the Borel measure on $[0, T]$ defined by

$$m(\phi): A \mapsto \int_{\mathbb{T}^N \times A \times \mathbb{R}} \phi(x, \xi) dm(x, t, \xi), \quad \phi \in C_b(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}),$$

for all A Borel subset of $[0, T]$.

There is a last point to comment in Definition 3, which is the measurability of the function $\sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}$ in (2.9). Let us denote by $\bar{\mathbf{f}} = 1 - \mathbf{f} = \mathbf{1}_{u \leq \xi}$ the conjugate function of \mathbf{f} . By the identity

$$|u|^p = \int_{\mathbb{R}} [\mathbf{f} \mathbf{1}_{\xi > 0} + \bar{\mathbf{f}} \mathbf{1}_{\xi < 0}] p |\xi|^{p-1} d\xi, \quad (2.11)$$

we have, for $p \in [1, +\infty)$,

$$\|u(t)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p = \sup_{\psi_+ \in F_+, \psi_- \in F_-} \langle \mathbf{f}(t), \psi_+ \rangle + \langle \bar{\mathbf{f}}(t), \psi_- \rangle, \quad (2.12)$$

where the sup is taken over some countable sets F_+ and F_- of functions ψ chosen as follows : $F_\pm = \{\psi_n; n \geq 1\}$, where (ψ_n) is a sequence of non-negative functions in $C_c^\infty(\mathbb{R})$ which converges point-wise monotonically to $\xi \mapsto p |\xi^\pm|^{p-1}$ if $p > 1$ and to $\xi \mapsto \text{sgn}_\pm(\xi)$ if $p = 1$. By (2.12), we have

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p = \sup_{\psi_\pm \in F_\pm} \sup_{t \in [0, T]} \langle \mathbf{f}(t), \psi_+ \rangle + \langle \bar{\mathbf{f}}(t), \psi_- \rangle. \quad (2.13)$$

By Item (2) in Definition 3, we know that the function

$$\sup_{t \in [0, T]} \langle \mathbf{f}(t), \psi_+ \rangle + \langle \bar{\mathbf{f}}(t), \psi_- \rangle$$

is \mathcal{F} -measurable for all $\psi_\pm \in F_\pm$. Indeed, the sup over $[0, T]$ of a càdlàg function is the sup of the function on any dense countable subset of $[0, T]$ containing the terminal point T . By (2.13), the function $\sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}$ is measurable.

Remark 4 (Initial condition). *A limiting argument based on (2.10) leads to the following initial condition for $\mathbf{f}(t)$:*

$$\mathbf{f}(0) = \mathbf{f}_0 + \partial_\xi m_0, \quad a.s.,$$

where m_0 is the restriction of m to $\mathbb{T}^N \times \{0\} \times \mathbb{R}$. It is not obvious thus, that (2.10) entails the expected initial condition $\mathbf{f}(0) = \mathbf{f}_0$. This is the case however (and, therefore, $m_0 \equiv 0$ a.s.), due to Proposition 21 and Corollary 22. See also the discussion on the same topic in Section 5 of [CP03].

Proposition 5 (Mass of the random measure). *Let $u_0 \in L^\infty(\mathbb{T}^N)$. Let $(u(t))_{t \in [0, T]}$ be a solution to (2.1) with initial datum u_0 . Then the total mass of the measure m in (2.10) is*

$$\begin{aligned} m(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}) &= \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 - \frac{1}{2} \|u(T)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 \\ &+ \sum_{k \geq 1} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} g_k(x, u(x, t)) u(x, t) dx d\beta_k(t) + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \mathbf{G}^2(x, u(x, t)) dx dt, \end{aligned} \quad (2.14)$$

almost surely.

Proof of Proposition 5. We start from (2.10), which we apply with a test function φ independent on x . By subtracting $\langle \mathbf{1}_{0 > \xi}, \varphi \rangle$ from both sides of the equation, we obtain

$$\begin{aligned} \langle \chi(t), \varphi \rangle &= \langle \chi_0, \varphi \rangle + \sum_{k \geq 1} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} g_k(x, u(x, s)) \varphi(x, u(x, s)) dx d\beta_k(s) \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \partial_\xi \varphi(x, u(x, s)) \mathbf{G}^2(x, u(x, s)) dx ds - m(\partial_\xi \varphi)([0, t]), \end{aligned} \quad (2.15)$$

where $\chi(x, t, \xi) = \mathbf{f}(x, t, \xi) - \mathbf{1}_{0 > \xi}$, $\chi_0(x, \xi) = \mathbf{f}_0(x, \xi) - \mathbf{1}_{0 > \xi}$ are the traditional kinetic functions used in [Per02] for example. We use then an approximation argument to apply (2.15) with $\varphi(x, \xi) = \xi$. This gives (2.14). \square

2.1.2.2 Generalized solutions

With the purpose to prepare the proof of existence of solution, we introduce the following definitions.

Definition 6 (Young measure). *Let $(X, \mathcal{A}, \lambda)$ be a finite measure space. Let $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ denote the set of probability measures on \mathbb{R} . We say that a map $\nu: X \rightarrow \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ is a Young measure on X if, for all $\phi \in C_b(\mathbb{R})$, the map $z \mapsto \langle \nu_z, \phi \rangle$ from X to \mathbb{R} is measurable. We say that a Young measure ν vanishes at infinity if, for every $p \geq 1$,*

$$\int_X \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\nu_z(\xi) d\lambda(z) < +\infty. \quad (2.16)$$

Proposition 7 (An alternative definition of Young measures). *Let $(X, \mathcal{A}, \lambda)$ be a measure space with $\lambda(X) = 1$. Let \mathcal{L} be the Lebesgue measure on \mathbb{R} and let \mathcal{Y}^1 be the set of probability measures ν on $(X \times \mathbb{R}, \mathcal{A} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ such that $\pi_{\#} \nu = \lambda$, where*

$\pi_{\#}\nu$ is the push forward of ν by the projection $\pi: X \times \mathbb{R} \rightarrow X$. Then \mathcal{Y}^1 is the set of Young measures as defined in Definition 6.

For the proof of this result, which uses the Disintegration Theorem, we refer to the discussion in [CFV04, p.19-20] on the spaces \mathcal{Y}^1 and $\mathcal{Y}_{\text{dis}}^1$ ("dis" for "disintegration" : this corresponds to the Definition 6). Note that there is no loss in generality in assuming $\lambda(X) = 1$.

Definition 8 (Kinetic function). *Let $(X, \mathcal{A}, \lambda)$ be a finite measure space. A measurable function $f: X \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ is said to be a kinetic function if there exists a Young measure ν on X that vanishes at infinity such that, for λ -a.e. $z \in X$, for all $\xi \in \mathbb{R}$,*

$$f(z, \xi) = \nu_z(\xi, +\infty).$$

We say that f is an equilibrium if there exists a measurable function $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ such that $f(z, \xi) = \mathbf{f}(z, \xi) = \mathbf{1}_{u(z) > \xi}$ a.e., or, equivalently, $\nu_z = \delta_{\xi=u(z)}$ for a.e. $z \in X$.

Definition 9 (Conjugate function). *If $f: X \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ is a kinetic function, we denote by \bar{f} the conjugate function $\bar{f} := 1 - f$.*

We also denote by χ_f the function defined by $\chi_f(z, \xi) = f(z, \xi) - \mathbf{1}_{0 > \xi}$. This correction to f is integrable on \mathbb{R} . Actually, it is decreasing faster than any power of $|\xi|$ at infinity. Indeed, we have $\chi_f(z, \xi) = -\nu_z(-\infty, \xi)$ when $\xi < 0$ and $\chi_f(z, \xi) = \nu_z(\xi, +\infty)$ when $\xi > 0$. Therefore

$$|\xi|^p \int_X |\chi_f(z, \xi)| d\lambda(z) \leq \int_X \int_{\mathbb{R}} |\zeta|^p d\nu_z(\zeta) d\lambda(z) < \infty, \quad (2.17)$$

for all $\xi \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < +\infty$.

The so-called kinetic functions appear naturally when one examines the stability of a sequence of solutions to (2.1). We discuss this topic in details in Section 2.1.4, but let us already mention the following compactness results.

Theorem 10 (Compactness of Young measures). *Let $(X, \mathcal{A}, \lambda)$ be a finite measure space such that \mathcal{A} is countably generated. Let (ν^n) be a sequence of Young measures on X satisfying (2.16) uniformly for some $p \geq 1$:*

$$\sup_n \int_X \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\nu_z^n(\xi) d\lambda(z) < +\infty. \quad (2.18)$$

Then there exists a Young measure ν on X and a subsequence still denoted (ν^n) such that, for all $h \in L^1(X)$, for all $\phi \in C_b(\mathbb{R})$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X h(z) \int_{\mathbb{R}} \phi(\xi) d\nu_z^n(\xi) d\lambda(z) = \int_X h(z) \int_{\mathbb{R}} \phi(\xi) d\nu_z(\xi) d\lambda(z). \quad (2.19)$$

The convergence (2.19) is the convergence for the $\tau_{\mathcal{Y}^1}^W$ topology defined in [CFV04, p.21]. By [CFV04, Corollary 4.3.7], (2.18) implies that the set $\{\nu_n; n \in \mathbb{N}\}$ is $\tau_{\mathcal{Y}^1}^W$ -relatively compact, and for this result, it is not necessary to assume that \mathcal{A} is countably generated. This latter hypothesis is used as a criteria of metrization of $\tau_{\mathcal{Y}^1}^W$, [CFV04, Proposition 2.3.1]. A consequence of Theorem 10 is the following proposition.

Corollary 11 (Compactness of kinetic functions). *Let $(X, \mathcal{A}, \lambda)$ be a finite measure space such that \mathcal{A} is countably generated. Let (f_n) be a sequence of kinetic functions on $X \times \mathbb{R} : f_n(z, \xi) = \nu_z^n(\xi, +\infty)$ where ν^n are Young measures on X satisfying (2.18). Then there exists a kinetic function f on $X \times \mathbb{R}$ (related to the Young measure ν in Theorem 10 by the formula $f(z, \xi) = \nu_z(\xi, +\infty)$) such that, up to a subsequence, $f_n \rightharpoonup f$ in $L^\infty(X \times \mathbb{R})$ weak-**.

We will also need the following result.

Lemma 12 (Convergence to an equilibrium). *Let $(X, \mathcal{A}, \lambda)$ be a finite measure space. Let $p > 1$. Let (f_n) be a sequence of kinetic functions on $X \times \mathbb{R} : f_n(z, \xi) = \nu_z^n(\xi, +\infty)$ where ν^n are Young measures on X satisfying (2.18). Let f be a kinetic function on $X \times \mathbb{R}$ such that $f_n \rightharpoonup f$ in $L^\infty(X \times \mathbb{R})$ weak-*. Assume that f is an equilibrium : $f(z, \xi) = \mathbf{f}(z, \xi) = \mathbf{1}_{u(z) > \xi}$ and let*

$$u_n(z) = \int_{\mathbb{R}} \xi d\nu_z^n(\xi).$$

Then, for all $1 \leq q < p$, $u_n \rightarrow u$ in $L^q(X)$ strong.

Proof of Corollary 11. We apply the theorem 10. The convergence of (ν^n) , which means that

$$(z \mapsto \langle \nu_z^n, \phi \rangle) \rightarrow (z \mapsto \langle \nu_z, \phi \rangle) \text{ in } L^\infty(X) \text{ weak} - *, \quad (2.20)$$

for all $\phi \in C_b(\mathbb{R})$, has the consequence that

$$\int_X \int_{\mathbb{R}} \alpha(z, \xi) d\nu_z^n(\xi) d\lambda(z) \rightarrow \int_X \int_{\mathbb{R}} \alpha(z, \xi) d\nu_z(\xi) d\lambda(z), \quad (2.21)$$

for every bounded Carathéodory integrand α . This is a consequence of the identity $\tau_{\mathcal{Y}^1}^M = \tau_{\mathcal{Y}^1}^W$ in the Portmanteau Theorem [CFV04, Theorem 2.1.3] (see also [CFV04, Lemma 1.2.3] about Carathéodory integrands). We apply (2.21) to

$$\alpha(z, \xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \varphi(z, \zeta) d\zeta,$$

where $\varphi \in L^1 \cap L^\infty(X \times \mathbb{R})$, and apply also the Fubini theorem to obtain

$$\iint_{X \times \mathbb{R}} f_n(z, \xi) \varphi(z, \xi) d\lambda(z) d\xi \rightarrow \iint_{X \times \mathbb{R}} f(z, \xi) \varphi(z, \xi) d\lambda(z) d\xi. \quad (2.22)$$

Using the bound by 1 on the L^∞ norm of f_n and f , we deduce by an argument of density that (2.22) holds true when $\varphi \in L^1(X \times \mathbb{R})$. \square

Proof of Lemma 12. Let $r \in [1, +\infty]$. By choosing $\theta = \phi$ and γ as a test function in z in (2.20), and by use of a standard approximation procedure, we have

$$\int_X \int_{\mathbb{R}} \theta(\xi) d\nu_z^n(\xi) \gamma(z) d\lambda(z) \rightarrow \int_X \theta(u(z)) \gamma(z) d\lambda(z) \quad (2.23)$$

for all $\theta \in C(\mathbb{R})$ and $\gamma \in L^r(X)$ such that

$$\sup_n \left\| \int_{\mathbb{R}} \theta(\xi) d\nu_z^n(\xi) \right\|_{L^{r'}(X)} < +\infty,$$

where r' is the conjugate exponent to r . Let us assume first that $p > 2$ and let us prove the convergence of (u_n) to u in $L^2(X)$. By (2.23), taking $r = 2$, $\theta(\xi) = \xi$ and $\gamma \in L^2(X)$, we obtain the weak convergence of (u_n) to u in $L^2(X)$. By developing the scalar product

$$\|u - u_n\|_{L^2(X)}^2 = \|u\|_{L^2(X)}^2 + \|u_n\|_{L^2(X)}^2 - 2\langle u, u_n \rangle_{L^2(X)},$$

we see that it is sufficient, in order to establish the strong convergence, to prove that

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_{L^2(X)}^2 \leq \|u\|_{L^2(X)}^2. \quad (2.24)$$

We obtain (2.24) by the Jensen inequality, which gives

$$\|u_n\|_{L^2(X)}^2 = \int_X \left| \int_{\mathbb{R}} \xi d\nu_z^n(\xi) \right|^2 d\lambda(z) \leq \int_X \int_{\mathbb{R}} |\xi|^2 d\nu_x^n(\xi) d\lambda(z). \quad (2.25)$$

Indeed the right-hand side of (2.25) is converging to $\|u\|_{L^2(X)}^2$ (here, we apply (2.23) with $\theta(\xi) = \xi^2$ and $\gamma(z) = 1$). Still assuming $p > 2$, the remaining cases $1 \leq q < p$ are deduced from the result for $p = 2$ by interpolation and by the uniform bound on $\|u_n\|_{L^p(X)}$. Let us consider the case $p \leq 2$ now. Let us introduce the truncate functions and truncate sequence (u_n^R) as follows :

$$T_R(\xi) := \min(R, \max(-R, \xi)), \quad u_n^R(z) = \int_{\mathbb{R}} T_R(\xi) d\nu_z^n(\xi).$$

One checks that the study done for $p > 2$ can be applied to establish the strong convergence $u_n^R \rightarrow T_R(u)$ in $L^r(X)$ for every $r < +\infty$. Then we use the estimate

$$|u_n^R(z) - u_n(z)| \leq \int_{|\xi| > R} |R - \xi| d\nu_z^n(\xi) \leq 2 \int_{|\xi| > R} |\xi| d\nu_z^n(\xi),$$

from which follows, for $1 \leq q < p$, by the Jensen inequality,

$$\|u_n^R - u_n\|_{L^q(X)}^q \leq 2^q \int_X \int_{|\xi| > R} |\xi|^q d\nu_z^n(\xi) d\lambda(z) \leq \frac{2^q}{R^{p-q}} \int_X \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\nu_z^n(\xi) d\lambda(z),$$

and, thanks to (2.18), the uniform bound

$$\|u_n^R - u_n\|_{L^q(X)} \leq \frac{2}{R^{p/q-1}} \left(\sup_n \int_X \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\nu_z^n(\xi) d\lambda(z) \right)^{1/q}.$$

We have also $T_R(u) \rightarrow u$ in $L^q(X)$ when $R \rightarrow +\infty$. Gathering the different results of convergence, we obtain $u_n \rightarrow u$ in $L^q(X)$. \square

In the *deterministic setting*, if $(u_n(t))$ is a sequence of solutions to (2.1), then, due to natural bounds and to Theorem 10, the sequence of Young measures $\delta_{u_n(x,t)}$ on $X := \mathbb{T}^N$ (consider that t is fixed here) has, up to a subsequence, a limit ν_t . Then every non-linear expression $\phi(u_n(t))$ for $\phi \in C_b(\mathbb{R})$ will converge to $\langle \nu_t, \phi \rangle$ in the sense of (2.19). This is why it is natural (cf. [DiP83]), for such non-linear problems as (2.1), to introduce the following generalization to Definition 3.

Definition 13 (Generalized solution). *Let $f_0: \mathbb{T}^N \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ be a kinetic function. An $L^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}; [0, 1])$ -valued process $(f(t))_{t \in [0, T]}$ is said to be a generalized solution to (2.1) with initial datum f_0 if $f(t)$ and $\nu_t := -\partial_\xi f(t)$ have the following properties :*

1. for all $t \in [0, T]$, almost surely, $f(t)$ is a kinetic function, and, for all $R > 0$, $f \in L^1_{\mathcal{P}}(\mathbb{T}^N \times (0, T) \times (-R, R) \times \Omega)$,
2. for all $\varphi \in C^1_c(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, almost surely, the map $t \mapsto \langle f(t), \varphi \rangle$ is càdlàg,
3. for all $p \in [1, +\infty)$, there exists $C_p \geq 0$ such that

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\nu_{x,t}(\xi) dx \right) \leq C_p, \quad (2.26)$$

4. there exists a random measure m with first moment (2.6), such that for all $\varphi \in C^1_c(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, for all $t \in [0, T]$, almost surely,

$$\begin{aligned} \langle f(t), \varphi \rangle &= \langle f_0, \varphi \rangle + \int_0^t \langle f(s), a(\xi) \cdot \nabla_x \varphi \rangle ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} g_k(x, \xi) \varphi(x, \xi) d\nu_{x,s}(\xi) dx d\beta_k(s) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{G}^2(x, \xi) \partial_\xi \varphi(x, \xi) d\nu_{x,s}(\xi) dx ds - m(\partial_\xi \varphi)([0, t]). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Let us make a comment about notations : for each $t \in [0, T]$, we have a Young measure ν_t on \mathbb{T}^N . This gives us a set of probability measures $(\nu_{x,t})_{x \in \mathbb{T}^N}$, as they appear in the second line of (2.27). There is something misleading in the use of the notation $\nu_{x,t}$, which conveys the idea that we are considering a Young measure ν with index space $\mathbb{T}^N \times (0, T)$. Such a modification of the point of view is admissible however, and we will use it fully in Section 2.1.4.3 to obtain the convergence of sequences of Young measures. Indeed, due to item 1 and to the fact that, for all $t \in (0, T)$, for a.e. $x \in \mathbb{T}^N$, a.s.,

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(\xi) d\nu_{x,t}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x, t, \xi) \phi'(\xi) d\xi$$

if $\phi \in C_c^1(\mathbb{R})$, the map $(\omega, x, t) \mapsto \langle \nu_{x,t}, \phi \rangle$ is measurable (and in $L_p^1(\mathbb{T}^N \times (0, T) \times \Omega)$ actually). By the Fubini theorem, we deduce that, almost surely, $(x, t) \mapsto \langle \nu_{x,t}, \phi \rangle$ is measurable when $\phi \in C_c^1(\mathbb{R})$. By an argument of density, this holds true when $\phi \in C_b(\mathbb{R})$.

This point about the status of $\nu_{x,t}$ being clear, we have now also to justify that the stochastic integral in (2.27) is well-defined : the bound (2.26) implies

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\nu_{x,t}(\xi) dx \right) \leq C_p T. \quad (2.28)$$

Using successively Jensen's Inequality, the growth hypothesis (2.3), and (2.28) with $p = 2$, we obtain, for $\varphi \in C_c^1(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_0^T \sum_{k \geq 1} \left| \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} g_k(x, \xi) \varphi(x, \xi) d\nu_{x,t}(\xi) dx \right|^2 \\ \leq \mathbb{E} \int_0^T \sum_{k \geq 1} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |g_k(x, \xi) \varphi(x, \xi)|^2 d\nu_{x,t}(\xi) dx \\ = \mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{G}^2(x, \xi) |\varphi(x, \xi)|^2 d\nu_{x,t}(\xi) dx \\ \leq \|\varphi\|_{L_{x,\xi}^\infty}^2 D_0 (1 + C_2 T). \end{aligned} \quad (2.29)$$

The fact that

$$t \mapsto \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} g_k(x, \xi) \varphi(x, \xi) d\nu_{x,t}(\xi) dx$$

is predictable is a consequence of item 1. To sum up, we have proved the following result.

Lemma 14 (Admissible integrand). *Let $f_0: \mathbb{T}^N \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ be a kinetic function. Let $(f(t))_{t \in [0, T]}$ be a generalized solution to (2.1) with initial datum f_0 . Then, for all $\varphi \in C_c^1(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ the $l^2(\mathbb{N}^*)$ -valued process*

$$t \mapsto \left(\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} g_k(x, \xi) \varphi(x, \xi) d\nu_{x,t}(\xi) dx \right)_{k \geq 1}$$

is in $L^2_{\mathcal{P}}([0, T] \times \Omega; l^2(\mathbb{N}^*))$.

Let us now state a simple result of reduction from generalized solution to mere solution.

Proposition 15. *Let $u_0 \in L^\infty(\mathbb{T}^N)$. Let $(f(t))_{t \in [0, T]}$ be a generalized solution to (2.1) with initial datum $\mathbf{1}_{u_0 > \xi}$. If for all $t \in [0, T]$, $f(t)$ is an equilibrium :*

$$f(x, t, \xi, \omega) = \mathbf{f}(x, t, \xi, \omega) = \mathbf{1}_{u(x, t, \omega) > \xi}, \quad (2.30)$$

for a.e. $(x, \xi, \omega) \in \mathbb{T}^N \times \mathbb{R} \times \Omega$, then $(u(t))_{t \in [0, T]}$ is a solution to (2.1) with initial datum u_0 .

Proof of Proposition 15. Under (2.30), we have $\nu_t = \delta_{u(t)}$ a.s. From (2.28) with $p = 1$, we deduce that $u \in L^1(\mathbb{T}^N \times (0, T) \times \Omega)$. Since

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \xi d\nu_{x, t}(\xi),$$

we obtain $u \in L^1_{\mathcal{P}}(\mathbb{T}^N \times (0, T) \times \Omega)$ as a consequence of Item 1 in Definition 13. We have also

$$\langle \mathbf{f}(t), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \psi d\nu_t, \quad \psi(x, \xi) := \int_{-\infty}^{\xi} \varphi(x, \zeta) d\zeta,$$

for all $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$. Therefore Item 2 in Definition 3 follows from Item 2 in Definition 13. Using the identity

$$\int_{\mathbb{T}^N} |u(t, x)|^p dx = \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\nu_{x, t}(\xi) dx,$$

we obtain Item 3 in Definition 3. Item 4 in Definition 3 follows from Item 4 in Definition 13. \square

We will show in Theorem 26 that (2.30), which we give as an hypothesis in Proposition 15, is automatically satisfied by any generalized solution starting from an equilibrium $f_0 = \mathbf{f}_0 = \mathbf{1}_{u_0 > \xi}$.

We conclude this paragraph with the following result, used in the proof of Corollary 27.

Lemma 16 (Distance to equilibrium). *Let (X, λ) be a finite measure space. Let $f: X \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ be a kinetic function. Then*

$$m(\xi) := \int_{-\infty}^{\xi} (\mathbf{1}_{u > \zeta} - f(\zeta)) d\zeta, \quad \text{where } u := \int_{\mathbb{R}} \chi_f(\zeta) d\zeta,$$

is well defined and non-negative.

Note in particular that the difference $f(\xi) - \mathbf{1}_{u>\xi}$ writes $\partial_\xi m$ where $m \geq 0$.

Proof of Lemma 16. Let $\nu_z = -\partial_\xi f(z, \cdot)$, $z \in X$. By Jensen's Inequality, we have

$$H\left(\int_{\mathbb{R}} \zeta d\nu_z(\zeta)\right) \leq \int_{\mathbb{R}} H(\zeta) d\nu_z(\zeta) \quad (2.31)$$

for all convex sub-linear function $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Note that

$$u(z) = \int_{\mathbb{R}} f(z, \zeta) - \mathbf{1}_{0>\zeta} d\zeta = \int_{\mathbb{R}} \zeta d\nu_z(\zeta)$$

by integration by parts. By integration by parts, we also have, for all sub-linear function $H \in C^1(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} H(\zeta) d\nu_z(\zeta) = H(0) + \int_{\mathbb{R}} H'(\zeta)(f(z, \zeta) - \mathbf{1}_{0>\zeta}) d\zeta$$

and

$$H(u(z)) = \int_{\mathbb{R}} H(\zeta) d\delta_{u(z)}(\zeta) = H(0) + \int_{\mathbb{R}} H'(\zeta)(\mathbf{1}_{u(z)>\zeta} - \mathbf{1}_{0>\zeta}) d\zeta.$$

By (2.31), it follows that

$$\int_{\mathbb{R}} H'(\zeta)(f(z, \zeta) - \mathbf{1}_{u(z)>\zeta}) d\zeta \geq 0$$

for all convex and sub-linear $H \in C^1(\mathbb{R})$. Approximating $\zeta \mapsto (\zeta - \xi)^-$ by such functions H , we obtain $m(\xi) \geq 0$. \square

2.1.2.3 Left limits of generalized solutions

If $(f(t))_{t \in [0, T]}$ is a generalized solution to (2.1) and $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, then, a.s., $t \mapsto \langle f(t), \varphi \rangle$ is càdlàg. In the next proposition, we show that the a.s.-property to be càdlàg is independent on φ and that the limit from the left at any point $t_* \in (0, T]$ is represented by a kinetic function.

Proposition 17. *Let f_0 be a kinetic initial datum. Let $(f(t))_{t \in [0, T]}$ be a generalized solution to (2.1) with initial datum f_0 . Then*

1. *there exists a measurable subset $\hat{\Omega} \subset \Omega$ of probability 1 such that, for all $\omega \in \hat{\Omega}$, for all $\varphi \in C_c(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, $t \mapsto \langle f(\omega, t), \varphi \rangle$ is càdlàg,*
2. *there exists an $L^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}; [0, 1])$ -valued process $(f^-(t))_{t \in (0, T]}$ such that : for all $t \in (0, T]$, for all $\omega \in \hat{\Omega}$, for all $\varphi \in C_c(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, $f^-(t)$ is a kinetic function on \mathbb{T}^N which represents the left limit of $s \mapsto \langle f(s), \varphi \rangle$ at t :*

$$\langle f^-(t), \varphi \rangle = \lim_{s \rightarrow t^-} \langle f(s), \varphi \rangle. \quad (2.32)$$

Proof of Proposition 17. The set of test functions $C_c^1(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ (endowed with the topology of the uniform convergence of the functions and their first derivatives) is separable and we fix a dense countable subset \mathcal{D}_1 (see the argument about Γ in Section 2.1.4.5 for a proof of the existence of \mathcal{D}_1). For all $\varphi \in C_c^1(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, a.s., the map

$$J_\varphi: t \mapsto \int_0^t \langle f(s), a(\xi) \cdot \nabla \varphi \rangle ds + \sum_{k \geq 1} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} g_k(x, \xi) \varphi(x, \xi) d\nu_{x,s}(\xi) dx d\beta_k(s) \\ + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi \varphi(x, \xi) \mathbf{G}^2(x, \xi) d\nu_{x,s}(\xi) dx ds \quad (2.33)$$

is continuous on $[0, T]$. Consequently : a.s., say for $\omega \in \Omega_1$ where Ω_1 is of full measure, for all $\varphi \in \mathcal{D}_1$, J_φ is continuous on $[0, T]$. If $\varphi \in \mathcal{D}_1$, (2.27) gives $\langle f(t), \varphi \rangle$ as a sum (up to the constant $\langle f_0, \varphi \rangle$) of $J_\varphi(t)$ with $m(\partial_\xi \varphi)([0, t])$. This latter expression defines a function càdlàg in t for all $\omega \in \Omega_2$, hence $t \mapsto \langle f(t), \varphi \rangle$ is càdlàg if $\omega \in \Omega_1 \cap \Omega_2$. Here, $\Omega_2 \subset \Omega$ is of full measure. Next, we use the estimate (2.26) : there exists a set of full measure Ω_3 in Ω such that, for every $\omega \in \Omega_3$,

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\nu_{x,t}(\xi) dx \leq C_p(\omega) < +\infty. \quad (2.34)$$

Let $\omega \in \hat{\Omega} := \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3$ be fixed. If $\varphi \in C_c(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, then

$$\langle f(t), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} \psi(x, \xi) d\nu_{x,t}(\xi) dx, \quad \psi(x, \xi) := \int_{-\infty}^{\xi} \varphi(x, \zeta) d\zeta. \quad (2.35)$$

Let $R_\varphi > 0$ be such that φ is supported in $[-R_\varphi, R_\varphi]$. Since $|\psi(x, \xi)| \leq \|\varphi\|_{L^\infty}(R_\varphi + |\xi|)$, we obtain the bound $\sup_{t \in [0, T]} |\langle f(t), \varphi \rangle| \leq \|\varphi\|_{L^\infty}(R_\varphi + C_1(\omega))$. This gives the continuity of $\langle f(t), \varphi \rangle$ with respect to φ . Since the space of càdlàg functions is closed under uniform convergence, an argument of density shows that $t \mapsto \langle f(t), \varphi \rangle$ is càdlàg for all $\varphi \in C_c(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$. To prove the second assertion of the proposition, let us fix $\omega \in \hat{\Omega}$ and consider an increasing sequence (t_n) in $[0, T]$ converging to a point $t_* \in (0, T]$. Then, by means of (2.34) and since the Borel σ -algebra of \mathbb{T}^N is countably generated (\mathbb{T}^N being separable), we can apply Corollary 11 : there exist a kinetic function $f^{*, -}$ on $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}$ and a subsequence (n_k) such that $f(t_{n_k}) \rightharpoonup f^{*, -}$ weakly-* in $L^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ as $k \rightarrow +\infty$. If an other subsequence (\tilde{n}_k) provides an other weak limit $\tilde{f}^{*, -}$, then we have

$$\langle f^{*, -}, \varphi \rangle = \lim_{t \rightarrow t_*^-} \langle f(t), \varphi \rangle = \langle \tilde{f}^{*, -}, \varphi \rangle$$

for all $\varphi \in C_c(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$. Therefore $f^{*, -} = \tilde{f}^{*, -}$: there is only one possible limit. It follows that the whole sequence $(f(t_n))$ is converging to $f^{*, -}$ in $L^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ weak-*. We establish this fact to ensure that the subsequence (n_k) is independent on ω . Indeed, this shows that, viewed as a function of (ω, x, ξ) , $f^{*, -}$ is measurable.

We set $f^-(t_*) = f^{*,-}$ to conclude. \square

Remark 18 (Left and right limits). *Note that we prove a little bit more than what is stated in Proposition 17. Indeed, for $\omega \in \hat{\Omega}$, we have $f(s) \rightarrow f^-(t)$ in $L^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ for the weak-* topology, when $s \uparrow t$, which implies (2.32). By similar arguments, we can show that $f(s) \rightarrow f(t)$ in $L^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ weak-* when $s \downarrow t$.*

Remark 19 (Uniform bound). *Note that, by construction, $\nu^- = -\partial_\xi f^-$ satisfies the following bounds : for all $\omega \in \hat{\Omega}$,*

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\nu_{x,t}^-(\xi) dx \leq C_p(\omega), \quad \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\nu_{x,t}^-(\xi) dx \right) \leq C_p. \quad (2.36)$$

We obtain (2.36) using (2.26)-(2.34) and Fatou's Lemma.

Remark 20 (Equation for f^-). *Passing to the limit in (2.27) for an increasing sequence of times t , we obtain the following equation on f^- :*

$$\begin{aligned} \langle f^-(t), \varphi \rangle &= \langle f(0), \varphi \rangle + \int_0^t \langle f(s), a(\xi) \cdot \nabla_x \varphi \rangle ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} g_k(x, \xi) \varphi(x, \xi) d\nu_{x,s}(\xi) dx d\beta_k(s) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{G}^2(x, \xi) \partial_\xi \varphi(x, \xi) d\nu_{x,s}(\xi) dx ds - m(\partial_\xi \varphi)([0, t]). \end{aligned} \quad (2.37)$$

In particular, we have

$$\langle f(t) - f^-(t), \varphi \rangle = -m(\partial_\xi \varphi)(\{t\}). \quad (2.38)$$

Outside the set of atomic points of $A \mapsto m(\partial_\xi \varphi)(A)$, which is at most countable, we have $\langle f(t), \varphi \rangle = \langle f^-(t), \varphi \rangle$. It follows that $f = f^-$ a.e. In particular, (2.37) gives us the following equation on f^- :

$$\begin{aligned} \langle f^-(t), \varphi \rangle &= \langle f(0), \varphi \rangle + \int_0^t \langle f^-(s), a(\xi) \cdot \nabla_x \varphi \rangle ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} g_k(x, \xi) \varphi(x, \xi) d\nu_{x,s}^-(\xi) dx d\beta_k(s) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{G}^2(x, \xi) \partial_\xi \varphi(x, \xi) d\nu_{x,s}^-(\xi) dx ds - m(\partial_\xi \varphi)([0, t]), \end{aligned} \quad (2.39)$$

equation which is also valid for $t = 0$ if we set $f^-(0) = f_0$.

In the next proposition, we give a criterion for the continuity of $t \mapsto \langle f(t), \varphi \rangle$ at a given point.

Proposition 21 (The case of equilibrium). *Let f_0 be a kinetic initial datum. Let $(f(t))_{t \in [0, T]}$ be a generalized solution to (2.1) with initial datum f_0 . Let $t \in (0, T]$.*

Assume that $f^-(t)$ is at equilibrium : there exists a random variable $v \in L^1(\mathbb{T}^N)$ such that $f^-(t, \xi) = \mathbf{1}_{v > \xi}$ a.s. Then $f^-(t) = f(t)$.

Proof of Proposition 21. Let m^* denote the restriction of m to $\mathbb{T}^N \times \{t\} \times \mathbb{R}$. Let us also set $f^+ = f(t)$. By (2.38), we thus have

$$f^+ - \mathbf{1}_{v > \xi} = \partial_\xi m^*. \quad (2.40)$$

There exists a subset Ω_4 of Ω of probability 1 such that, for all $\omega \in \Omega_4$, m , and thus m^* , are finite measures on $\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}$ respectively. Let ψ be a smooth non-negative function such that $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi \equiv 1$ on $[-1, 1]$, ψ being supported in $[-2, 2]$. Define the cut-off function $\psi_\varepsilon(\xi) = \psi(\varepsilon\xi)$. Let also $\varphi \in C(\mathbb{T}^N)$. By (2.40), we have

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} (f^+(x, \xi) - \mathbf{1}_{v(x) > \xi}) \varphi(x) \psi_\varepsilon(\xi) dx d\xi &= -\varepsilon \iint_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} \varphi(x) \psi'(\varepsilon\xi) dm^* \\ &\leq \varepsilon \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{T}^N)} \|\psi'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} m^*(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Taking the limit $\varepsilon \rightarrow 0$, and taking in consideration the fact that φ is arbitrary, we deduce that, for all $\omega \in \hat{\Omega} \cap \Omega_4$, for a.e. $x \in \mathbb{T}^N$,

$$\int_{\mathbb{R}} (f^+(x, \xi) - \mathbf{1}_{0 > \xi}) d\xi = \int_{\mathbb{R}} (\mathbf{1}_{v(x) > \xi} - \mathbf{1}_{0 > \xi}) d\xi = v(x).$$

Introduce now

$$p^* : \xi \mapsto \int_{-\infty}^{\xi} (\mathbf{1}_{v > \zeta} - f^+(\zeta)) d\zeta.$$

By Lemma 16, p^* is non-negative. In addition, $\partial_\xi(m^* + p^*) = 0$ due to (2.40) and the definition of p^* . Therefore $m^* + p^*$ is constant, and actually vanishes by the condition at infinity (2.7) and the obvious fact that $p^*(\mathbb{T}^N \times B_R^c)$ also vanishes when $R \rightarrow +\infty$. Since $m^*, p^* \geq 0$, we finally obtain $m^* = 0$ and conclude to the identity $f^-(t) = f(t)$. \square

Let us consider also the special case $t = 0$. By letting $t \rightarrow 0+$ in (2.27), we have $f(0) - f_0 = \partial_\xi m_0$, where m_0 is the restriction of m to $\mathbb{T}^N \times \{0\} \times \mathbb{R}$. Consequently, we have the following corollary to Proposition 21.

Corollary 22. *Let f_0 be a kinetic initial datum. Let $(f(t))_{t \in [0, T]}$ be a generalized solution to (2.1) with initial datum f_0 . Assume that f_0 is at equilibrium. Then $f(0) = f_0$ and m does not charge the line $\{t = 0\} : m(\mathbb{T}^N \times \{0\} \times \mathbb{R}) = 0$ a.s.*

Our final result in this section is about trajectories of solutions to (2.1). It is an intermediate statement, before the full continuity result given in Corollary 27.

Proposition 23. *Let $u_0 \in L^\infty(\mathbb{T}^N)$. Let $(u(t))_{t \in [0, T]}$ be a solution to (2.1) with initial datum u_0 . Then, for all $p \in [1, +\infty)$, for all $\omega \in \hat{\Omega}$ (given in Proposition 17), the map $t \mapsto u(t)$ from $[0, T]$ to $L^p(\mathbb{T}^N)$ is continuous from the right.*

Proof of Proposition 23. We apply Proposition 17 (and also use some facts established in the proof of Proposition 17) to $f(t) = \mathbf{f}(t) = \mathbf{1}_{u(t) > \xi}$. For $\omega \in \hat{\Omega}$, $\varphi \in C_c(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, the map

$$t \mapsto \langle \mathbf{f}(t), \varphi \rangle$$

is càdlàg. We will show first that this can be generalized to (2.45) below, for a test function φ satisfying a growth hypothesis like (2.42). Using (2.34) (with $2p$ instead of p), we have

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N} |u(x, t)|^{2p} dx = \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2p} d\nu_{x, t}(\xi) dx \leq C_{2p}(\omega) < +\infty. \quad (2.41)$$

Let $\varphi \in C(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ satisfy

$$|\varphi(x, \xi)| \leq C_1(1 + |\xi|^{p-1}). \quad (2.42)$$

Let $\varphi_\varepsilon \in C_c(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ be an approximation obtained as a truncate of φ , for example $\varphi_\varepsilon = \varphi \chi_\varepsilon$, where $\chi_\varepsilon(\xi) = \chi(\varepsilon\xi)$. Here, χ is a smooth, compactly supported function on \mathbb{R} such that $\chi(\xi) \equiv 1$ for $|\xi| \leq 1$ and $\chi(\xi) = 0$ for $|\xi| \geq 2$. Set $\chi_{u(t)}(x, \xi) = \mathbf{f}(t) - \mathbf{1}_{0 > \xi}$. We will show the estimate

$$\sup_{t \in [0, T]} |\langle \chi_{u(t)}, \varphi \rangle - \langle \chi_{u(t)}, \varphi_\varepsilon \rangle| \leq \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \psi_\varepsilon(\xi) d\nu_{x, t}(\xi) dx \quad (2.43)$$

$$\leq C_2(C_p(\omega) + C_{2p}(\omega))\varepsilon^p. \quad (2.44)$$

In (2.43), the function ψ_ε is defined by

$$\psi_\varepsilon(\xi) = \left| \int_0^\xi |\varphi(\zeta)| |1 - \chi_\varepsilon(\zeta)| d\zeta \right|.$$

We bound $|\psi_\varepsilon(\xi)|$ as follows :

$$|\psi_\varepsilon(\xi)| \leq C_2(1 + |\xi|^p) \mathbf{1}_{|\xi| > \varepsilon^{-1}} \leq C_2(1 + |\xi|^p) |\xi|^p \varepsilon^p,$$

for a constant C_2 depending on C_1 and p to deduce (2.44) from (2.43) and (2.41). By uniform convergence hence, the map

$$t \mapsto \langle \chi_{u(t)}, \varphi \rangle \text{ is càdlàg.} \quad (2.45)$$

In particular, $t \mapsto \langle \chi_{u(t)}, \varphi \rangle$ is continuous from the right : if $t_* \in [0, T]$ and $(t_n) \downarrow t_*$, then

$$\langle \chi_{u(t_n)}, \varphi \rangle \rightarrow \langle \chi_{u(t_*)}, \varphi \rangle,$$

for all φ satisfying (2.42). By Lemma 12 and its proof, this implies $u(t_n) \rightarrow u(t_*)$ in $L^p(\mathbb{T}^N)$. \square

2.1.3 Comparison, uniqueness and reduction of generalized solutions

2.1.3.1 Doubling of variables

In this paragraph, we prove a technical proposition relating two generalized solutions f_i , $i = 1, 2$ of the equation

$$du_i(x, t) + \operatorname{div}(A(u_i(x, t)))dt = \Phi_i(x, u_i(x, t))dW(t). \quad (2.46)$$

We use the following convention of notations : if $(f(t))_{t \in [0, T]}$ is a generalized solution to (2.1), we denote by f^- the left limit defined in Proposition 17, and we denote by f^+ the right limit, which is simply $f : f^+(t) := f(t)$. This gives more homogeneity to the different statements in this part. Recall also the notation $\bar{f} = 1 - f$ for the conjugate to f , introduced in Definition 9.

Proposition 24. *Let f_i , $i = 1, 2$, be generalized solution to (2.46). Then, for $0 \leq t \leq T$, and non-negative test functions $\rho \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$, $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, we have*

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \rho(x-y) \psi(\xi-\zeta) f_1^\pm(x, t, \xi) \bar{f}_2^\pm(y, t, \zeta) d\xi d\zeta dx dy \\ & \leq \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \rho(x-y) \psi(\xi-\zeta) f_{1,0}(x, \xi) \bar{f}_{2,0}(y, \zeta) d\xi d\zeta dx dy + I_\rho + I_\psi, \end{aligned} \quad (2.47)$$

where

$$I_\rho = \mathbb{E} \int_0^t \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} f_1(x, s, \xi) \bar{f}_2(y, s, \zeta) (a(\xi) - a(\zeta)) \psi(\xi - \zeta) d\xi d\zeta \cdot \nabla_x \rho(x-y) dx dy ds$$

and

$$I_\psi = \frac{1}{2} \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \rho(x-y) \mathbb{E} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\xi-\zeta) \sum_{k \geq 1} |g_{k,1}(x, \xi) - g_{k,2}(y, \zeta)|^2 d\nu_{x,s}^1 \otimes \nu_{y,s}^2(\xi, \zeta) dx dy ds.$$

Remark 25. *Each term in (2.47) is finite. Let us for instance consider the left-hand side of (2.47). Introduce the auxiliary functions*

$$\psi_1(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \psi(s) ds, \quad \psi_2(\zeta) = \int_{-\infty}^{\zeta} \psi_1(\xi) d\xi.$$

Since ψ is compactly supported, both ψ_1 and ψ_2 vanish at $-\infty$. When $\xi \rightarrow +\infty$, ψ_1 remains bounded while ψ_2 has linear growth. More precisely, if ψ is supported in $[-R, R]$, then

$$|\psi_2(\zeta)| \leq (|\zeta| + R) \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R})}. \quad (2.48)$$

Since

$$f_1^\pm(x, t, \xi) = \int_{(\xi, +\infty)} d\nu_{x,t}^{1,\pm}(\xi), \quad \bar{f}_2^\pm(y, t, \zeta) = \int_{(-\infty, \zeta)} d\nu_{y,t}^{2,\pm}(\zeta),$$

for a.e. $\xi, \zeta \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{T}^N$, $t \in [0, T]$, the Fubini Theorem gives us the formula

$$\int_{\mathbb{R}^2} \psi(\xi - \zeta) f_1^\pm(x, t, \xi) \bar{f}_2^\pm(y, t, \zeta) d\xi d\zeta = \int_{\mathbb{R}^2} \psi_2(u - v) d\nu_{x,t}^{1,\pm}(u) d\nu_{y,t}^{2,\pm}(v). \quad (2.49)$$

By (2.48), we deduce that

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\xi - \zeta) f_1^\pm(x, t, \xi) \bar{f}_2^\pm(y, t, \zeta) d\xi d\zeta \right| \\ & \leq \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R})} \left[R + \int_{\mathbb{R}} |\xi| d\nu_{x,t}^{1,\pm}(\xi) + \int_{\mathbb{R}} |\xi| d\nu_{y,t}^{2,\pm}(\xi) \right], \end{aligned}$$

for a.e. $x, y \in \mathbb{T}^N$, for all $t \in [0, T]$. Using the Young inequality for convolution with indices 1, 1, 1, we obtain

$$\begin{aligned} & \left| \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \rho(x - y) \psi(\xi - \zeta) f_1^\pm(x, t, \xi) \bar{f}_2^\pm(y, t, \zeta) d\xi d\zeta dx dy \right| \\ & \leq \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R})} \|\rho\|_{L^1(\mathbb{T}^N)} (R + C_{1,1}(\omega) + C_{1,2}(\omega)), \quad (2.50) \end{aligned}$$

where

$$C_{1,i}(\omega) := \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi| d\nu_{x,t}^{i,\pm}(\xi) dx$$

is in $L^1(\Omega)$ thanks to (2.26)-(2.36).

Proof of Proposition 24. Set

$$G_i^2(x, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} |g_{k,i}(x, \xi)|^2, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Let $\varphi_1 \in C_c^\infty(\mathbb{T}_x^N \times \mathbb{R}_\xi)$ and $\varphi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{T}_y^N \times \mathbb{R}_\zeta)$ be some given test functions. Equation (2.27) for $f_1 = f_1^+$ reads $\langle f_1^+(t), \varphi_1 \rangle = \mu_1([0, t]) + F_1(t)$, where F_1 is the stochastic integral

$$F_1(t) = \sum_{k \geq 1} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} g_{k,1} \varphi_1 d\nu_{x,s}^1(\xi) dx d\beta_k(s)$$

and $t \mapsto \mu_1([0, t])$ is the function of finite variation on $[0, T]$ (cf. [RY13, p. 5]) defined by

$$\begin{aligned} \mu_1([0, t]) &= \langle f_{1,0}, \varphi_1 \rangle \delta_0([0, t]) + \int_0^t \langle f_1, a \cdot \nabla \varphi_1 \rangle ds \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi \varphi_1 \mathbf{G}_1^2 d\nu_{x,s}^1(\xi) dx ds - m_1(\partial_\xi \varphi_1)([0, t]). \end{aligned}$$

Note that, by Corollary 22, $m_1(\partial_\xi \varphi_1)(\{0\}) = 0$ and thus the value of $\mu_1(\{0\})$ is $\langle f_{1,0}, \varphi_1 \rangle$. Similarly, we write $\langle f_2^+(t), \varphi_2 \rangle$ as continuous semimartingale, sum of

the stochastic integral

$$\bar{F}_2(t) = - \sum_{k \geq 1} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} g_{k,2} \varphi_2 d\nu_{y,s}^2(\zeta) dy d\beta_k(s)$$

with the function with finite variation given by

$$\begin{aligned} \mu_2([0, t]) &= \langle \bar{f}_{2,0}, \varphi_2 \rangle \delta_0([0, t]) + \int_0^t \langle \bar{f}_2, a \cdot \nabla \varphi_2 \rangle ds \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi \varphi_2 \mathbf{G}_2^2 d\nu_{y,s}^2(\zeta) dy ds + m_2(\partial_\zeta \varphi_2)([0, t]). \end{aligned}$$

Again, we note that $\mu_2(\{0\}) = \langle \bar{f}_{2,0}, \varphi_2 \rangle$. Let us define the test function

$$\alpha(x, \xi, y, \zeta) = \varphi_1(x, \xi) \varphi_2(y, \zeta).$$

We want to compute

$$\langle \langle f_1^+(t) \bar{f}_2^+(t), \alpha \rangle \rangle = \langle f_1^+(t), \varphi_1 \rangle \langle \bar{f}_2^+(t), \varphi_2 \rangle, \quad (2.51)$$

where $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ denotes the duality product over $\mathbb{T}_x^N \times \mathbb{R}_\xi \times \mathbb{T}_y^N \times \mathbb{R}_\zeta$. By the Itô formula for continuous semimartingales, [RY13, p. 146], taking expectation, we obtain the following identity :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \langle \langle f_1^+(t) \bar{f}_2^+(t), \alpha \rangle \rangle &= \langle \langle f_{1,0} \bar{f}_{2,0}, \alpha \rangle \rangle \\ &+ \mathbb{E} \int_0^t \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} f_1 \bar{f}_2 (a(\xi) \cdot \nabla_x + a(\zeta) \cdot \nabla_y) \alpha d\xi d\zeta dx dy ds \\ &+ \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_0^t \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \partial_\xi \alpha \bar{f}_2(s) \mathbf{G}_1^2 d\nu_{x,s}^1(\xi) d\zeta dx dy ds \\ &- \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_0^t \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \partial_\zeta \alpha f_1(s) \mathbf{G}_2^2 d\nu_{y,s}^2(\zeta) d\xi dy dx ds \\ &- \mathbb{E} \int_0^t \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{G}_{1,2} \alpha d\nu_{x,s}^1(\xi) d\nu_{y,s}^2(\zeta) dx dy ds \\ &- \mathbb{E} \int_{(0,t]} \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \bar{f}_2^+(s) \partial_\xi \alpha dm_1(x, s, \xi) d\zeta dy \\ &\quad + \mathbb{E} \int_{(0,t]} \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} f_1^-(s) \partial_\zeta \alpha dm_2(y, s, \zeta) d\xi dx \quad (2.52) \end{aligned}$$

where $\mathbf{G}_{1,2}(x, y; \xi, \zeta) := \sum_{k \geq 1} g_{k,1}(x, \xi) g_{k,2}(y, \zeta)$. By a density argument, (2.52) remains true for any test function $\alpha \in C_c^\infty(\mathbb{T}_x^N \times \mathbb{R}_\xi \times \mathbb{T}_y^N \times \mathbb{R}_\zeta)$. Using similar arguments as in Remark 25, the assumption that α is compactly supported can be relaxed using the condition at infinity (2.7) on m_i and (2.16) on ν^i , $i = 1, 2$. Using truncates of α , we obtain that (2.52) remains true if $\alpha \in C_b^\infty(\mathbb{T}_x^N \times \mathbb{R}_\xi \times \mathbb{T}_y^N \times \mathbb{R}_\zeta)$

is supported in a neighbourhood of the diagonal

$$\{(x, \xi, x, \xi); x \in \mathbb{T}^N, \xi \in \mathbb{R}\}.$$

We then take $\alpha = \rho\psi$ where $\rho = \rho(x - y)$, $\psi = \psi(\xi - \zeta)$. Note the remarkable identities

$$(\nabla_x + \nabla_y)\alpha = 0, \quad (\partial_\xi + \partial_\zeta)\alpha = 0. \quad (2.53)$$

In particular, the last term in (2.52) is

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \int_{(0,t]} \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} f_1^-(s) \partial_\zeta \alpha d\xi dx dm_2(y, s, \zeta) \\ &= - \mathbb{E} \int_{(0,t]} \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} f_1^-(s) \partial_\xi \alpha d\xi dx dm_2(y, s, \zeta) \\ &= - \mathbb{E} \int_{(0,t]} \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \alpha d\nu_{x,s}^{1,-}(\xi) dx dm_2(y, s, \zeta) \leq 0 \end{aligned}$$

since $\alpha \geq 0$. The symmetric term

$$\begin{aligned} & -\mathbb{E} \int_{(0,t]} \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \bar{f}_2^+(s) \partial_\xi \alpha dm_1(x, s, \xi) d\zeta dy \\ &= - \mathbb{E} \int_{(0,t]} \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \alpha d\nu_{y,s}^{2,+}(\zeta) dy dm_1(x, s, \xi) \end{aligned}$$

is, similarly, non-positive. Consequently, we have

$$\mathbb{E} \langle \langle f_1^+(t) \bar{f}_2^+(t), \alpha \rangle \rangle \leq \langle \langle f_{1,0} \bar{f}_{2,0}, \alpha \rangle \rangle + \mathbf{I}_\rho + \mathbf{I}_\psi, \quad (2.54)$$

where

$$\mathbf{I}_\rho := \mathbb{E} \int_0^t \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} f_1 \bar{f}_2 (a(\xi) \cdot \nabla_x + a(\zeta) \cdot \nabla_y) \alpha d\xi d\zeta dx dy ds$$

and

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_\psi &= \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_0^t \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \partial_\xi \alpha \bar{f}_2(s) \mathbf{G}_1^2 d\nu_{x,s}^1(\xi) d\zeta dx dy ds \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_0^t \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \partial_\zeta \alpha f_1(s) \mathbf{G}_2^2 d\nu_{y,s}^2(\zeta) d\xi dy dx ds \\ &\quad - \mathbb{E} \int_0^t \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{G}_{1,2} \alpha d\nu_{x,s}^1(\xi) d\nu_{y,s}^2(\zeta) dx dy ds. \end{aligned}$$

Equation (2.54) is indeed equation (2.47) for f_i^+ since, by (2.53),

$$\mathbf{I}_\rho = \mathbb{E} \int_0^t \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} f_1 \bar{f}_2 (a(\xi) - a(\zeta)) \cdot \nabla_x \alpha d\xi d\zeta dx dy ds$$

and, by (2.53) also and integration by parts,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_\psi &= \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_0^t \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \alpha (\mathbf{G}_1^2 + \mathbf{G}_2^2 - 2\mathbf{G}_{1,2}) d\nu_{x,s}^1 \otimes \nu_{y,s}^2(\xi, \zeta) dx dy ds \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_0^t \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \alpha \sum_{k \geq 0} |g_{k,1}(x, \xi) - g_{k,2}(y, \zeta)|^2 d\nu_{x,s}^1 \otimes \nu_{y,s}^2(\xi, \zeta) dx dy ds. \end{aligned}$$

To obtain the result for f_i^- , we take $t_n \uparrow t$, write (2.47) for $f_i^+(t_n)$ and let $n \rightarrow \infty$. \square

2.1.3.2 Uniqueness, reduction of generalized solution

In this section we use Proposition 24 above to deduce the uniqueness of solutions and the reduction of generalized solutions to solutions.

Theorem 26 (Uniqueness, Reduction). *Let $u_0 \in L^\infty(\mathbb{T}^N)$. Assume (2.3)-(2.4). Then we have the following results :*

1. *there is at most one solution with initial datum u_0 to (2.1).*
2. *If f is a generalized solution to (2.1) with initial datum f_0 at equilibrium : $f_0 = \mathbf{1}_{u_0 > \xi}$, then there exists a solution u to (2.1) with initial datum u_0 such that $f(x, t, \xi) = \mathbf{1}_{u(x,t) > \xi}$ a.s., for a.e. (x, t, ξ) .*
3. *if u_1, u_2 are two solutions to (2.1) associated with the initial data $u_{1,0}, u_{2,0} \in L^\infty(\mathbb{T}^N)$ respectively, then*

$$\mathbb{E} \|(u_1(t) - u_2(t))^+\|_{L^1(\mathbb{T}^N)} \leq \|(u_{1,0} - u_{2,0})^+\|_{L^1(\mathbb{T}^N)}, \quad (2.55)$$

for all $t \in [0, T]$. This implies the L^1 -contraction property, and the comparison principle for solutions.

Corollary 27 (Continuity in time). *Let $u_0 \in L^\infty(\mathbb{T}^N)$. Assume (2.3)-(2.4). Then, for every $p \in [1, +\infty)$, the solution u to (2.1) with initial datum u_0 has a representative in $L^p(\Omega; L^\infty(0, T; L^p(\mathbb{T}^N)))$ with almost sure continuous trajectories in $L^p(\mathbb{T}^N)$.*

Remark 28 (Uniqueness of the kinetic measure). *Let f and \check{f} be two generalized solution to (2.1) with initial datum f_0 at equilibrium, $f_0 = \mathbf{1}_{u_0 > \xi}$. By Theorem 26, we have $f = \check{f}$. It follows from (2.27) that the associated random measures m and \check{m} satisfy : for all $\varphi \in C_c^1(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, for all $t \in [0, T]$, almost surely,*

$$m(\partial_\xi \varphi)([0, t]) = \check{m}(\partial_\xi \varphi)([0, t]). \quad (2.56)$$

At fixed φ , the two functions of t in (2.56) are càdlàg. Therefore (2.56) is satisfied for all $\varphi \in C_c^1(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, almost surely, for all $t \in [0, T]$. By an argument of

density (as in the proof of Proposition 17), we obtain (2.56) almost surely, for all $\varphi \in C_c^1(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, for all $t \in [0, T]$. This implies : almost surely, $\partial_\xi m = \partial_\xi \check{m}$. By (2.14), the two measures have the same total mass almost surely. Consequently, almost surely, $m = \check{m}$.

Proof of Theorem 26. Consider first the additive case : $\Phi(x, u(x))$ independent on $u(x)$. Let $f_i, i = 1, 2$ be two generalized solutions to (2.1). Then, we use (2.47) with g_k independent on ξ and ζ . By (2.4), the last term I_ψ is bounded by

$$\frac{tD_1}{2} \|\psi\|_{L^\infty} \int_{(\mathbb{T}^N)^2} |x - y|^2 \rho(x - y) dx dy.$$

We then take $\psi := \psi_\delta$ and $\rho = \rho_\varepsilon$ where (ψ_δ) and (ρ_ε) are approximations of the identity on \mathbb{R} and \mathbb{T}^N respectively, i.e.

$$\psi_\delta(\xi) = \frac{1}{\delta} \psi\left(\frac{\xi}{\delta}\right), \quad \rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

where ψ and ρ are some given smooth probability densities on \mathbb{R} and \mathbb{T}^N respectively, to obtain

$$I_\psi \leq \frac{tD_1}{2} \varepsilon^2 \delta^{-1}. \quad (2.57)$$

Denote by $\nu_{x,t}^{i,\pm}$ the Young measures associated to $f_i^\pm, i \in \{1, 2\}$. By a computation similar to (2.49), we have, almost surely, for almost all $x, y \in \mathbb{T}^N$,

$$\int_{\mathbb{R}} f_1^\pm(x, t, \xi) \bar{f}_2^\pm(y, t, \xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} (u - v)^+ d\nu_{x,t}^{1,\pm}(u) d\nu_{y,t}^{2,\pm}(v). \quad (2.58)$$

By (2.49), we have also

$$\int_{\mathbb{R}^2} \psi_\delta(\xi - \zeta) f_1^\pm(x, t, \xi) \bar{f}_2^\pm(y, t, \zeta) d\xi d\zeta = \int_{\mathbb{R}^2} \psi_{2,\delta}(u - v) d\nu_{x,t}^{1,\pm}(u) d\nu_{y,t}^{2,\pm}(v), \quad (2.59)$$

where

$$\psi_{2,\delta}(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \psi_{1,\delta}(\zeta) d\zeta, \quad \psi_{1,\delta}(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \psi_\delta(\zeta) d\zeta.$$

Assume that ψ is supported in $(0, 1)$. Then $\psi_{2,\delta}(\xi) = 0$ if $\xi \leq 0$ and, for $\xi > 0$,

$$\xi^+ - \psi_{2,\delta}(\xi) = \int_0^{\xi^+} \int_{\zeta/\delta}^{+\infty} \psi(u) du d\zeta = \int_0^{+\infty} \xi^+ \wedge (\delta u) \psi(u) du. \quad (2.60)$$

Using (2.60) in (2.58), (2.59) gives

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathbb{R}} f_1^\pm(x, t, \xi) \bar{f}_2^\pm(y, t, \xi) d\xi - \int_{\mathbb{R}^2} \psi_\delta(\xi - \zeta) f_1^\pm(x, t, \xi) \bar{f}_2^\pm(y, t, \zeta) d\xi d\zeta \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (u - v)^+ \wedge (\delta \zeta) \psi(\zeta) d\zeta d\nu_{x,t}^{1,\pm}(u) d\nu_{y,t}^{2,\pm}(v). \end{aligned}$$

Since $(u - v)^+ \wedge (\delta\zeta) \leq |u| \wedge (\delta\zeta) + |v| \wedge (\delta\zeta)$, we have

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathbb{R}} f_1^\pm(x, t, \xi) \bar{f}_2^\pm(y, t, \xi) d\xi - \int_{\mathbb{R}^2} \psi_\delta(\xi - \zeta) f_1^\pm(x, t, \xi) \bar{f}_2^\pm(y, t, \zeta) d\xi d\zeta \\ &\leq \int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} |\xi| d\nu_{x,t}^{1,\pm}(\xi) + \int_{\mathbb{R}} |\xi| d\nu_{y,t}^{2,\pm}(\xi) \right) \wedge (\delta\zeta) \psi(\zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

It follows that

$$\begin{aligned} &\left| \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(x - y) f_1^\pm(x, t, \xi) \bar{f}_2^\pm(y, t, \xi) d\xi dx dy \right. \\ &\quad \left. - \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \rho_\varepsilon(x - y) \psi_\delta(\xi - \zeta) f_1^\pm(x, t, \xi) \bar{f}_2^\pm(y, t, \zeta) d\xi d\zeta dx dy \right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi| (d\nu_{x,t}^{1,\pm}(\xi) + d\nu_{x,t}^{2,\pm}(\xi)) dx \right) \wedge (2\delta\zeta) \psi(\zeta) d\zeta \\ &\leq \int_0^{+\infty} \left(C_{1,1}^\pm(\omega) + C_{1,2}^\pm(\omega) \right) \wedge (2\delta\zeta) \psi(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (2.61)$$

We have used (2.26)-(2.36) (with a constant $C_{1,i}^\pm$ for $\nu^{i,\pm}$) to obtain (2.61). When $\varepsilon \rightarrow 0$, we have

$$\begin{aligned} &\left| \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(x - y) f_1^\pm(x, t, \xi) \bar{f}_2^\pm(y, t, \xi) d\xi dx dy - \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} f_1^\pm(x, t, \xi) \bar{f}_2^\pm(x, t, \xi) d\xi dx \right| \\ &\leq \sup_{|z| < \varepsilon} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} f_1^\pm(x, t, \xi) \left| \bar{f}_2^\pm(x - z, t, \xi) - \bar{f}_2^\pm(x, t, \xi) \right| d\xi dx \\ &\leq \sup_{|z| < \varepsilon} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \left| \chi_{f_2^\pm}(x - z, t, \xi) - \chi_{f_2^\pm}(x, t, \xi) \right| d\xi dx. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Consequently (see (2.61), (2.62)),

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon, \delta \rightarrow 0} \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \rho_\varepsilon(x - y) \psi_\delta(\xi - \zeta) f_1^\pm(x, t, \xi) \bar{f}_2^\pm(y, t, \zeta) d\xi d\zeta dx dy \\ &\quad = \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} f_1^\pm(x, t, \xi) \bar{f}_2^\pm(x, t, \xi) d\xi dx, \end{aligned}$$

for all $\omega \in \hat{\Omega}$. We apply the estimate (2.50). We have the uniform bounds

$$\|\rho_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{T}^N)} = 1, \quad \|\psi_\delta\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1, \quad R = \delta \leq 1.$$

Consequently, we may apply the Lebesgue dominated convergence theorem : we

obtain

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} f_1^\pm(x, t, \xi) \bar{f}_2^\pm(x, t, \xi) dx d\xi \\ & \leq \mathbb{E} \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \rho_\varepsilon(x - y) \psi_\delta(\xi - \zeta) f_1^\pm(x, t, \xi) \bar{f}_2^\pm(y, t, \zeta) d\xi d\zeta dx dy + \eta_t(\varepsilon, \delta), \end{aligned}$$

where $\lim_{\varepsilon, \delta \rightarrow 0} \eta_t(\varepsilon, \delta) = 0$. We need now a bound on the term I_ρ . Since $a' = A''$ has at most polynomial growth, there exists $C \geq 0, p \geq 1$, such that

$$|a(\xi) - a(\zeta)| \leq \Gamma(\xi, \zeta) |\xi - \zeta|, \quad \Gamma(\xi, \zeta) = C(1 + |\xi|^{p-1} + |\zeta|^{p-1}).$$

This gives

$$|I_\rho| \leq \mathbb{E} \int_0^t \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} f_1 \bar{f}_2 \Gamma(\xi, \zeta) |\xi - \zeta| \psi_\delta(\xi - \zeta) |\nabla_x \rho_\varepsilon(x - y)| d\xi d\zeta dx dy d\sigma.$$

By integration by parts with respect to (ξ, ζ) , we deduce

$$|I_\rho| \leq \mathbb{E} \int_0^t \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \Upsilon(\xi, \zeta) d\nu_{x,\sigma}^1 \otimes \nu_{y,\sigma}^2(\xi, \zeta) |\nabla_x \rho_\varepsilon(x - y)| dx dy d\sigma,$$

where

$$\Upsilon(\xi, \zeta) = \int_\zeta^{+\infty} \int_{-\infty}^\xi \Gamma(\xi', \zeta') |\xi' - \zeta'| \psi_\delta(\xi' - \zeta') d\xi' d\zeta'.$$

It is shown below that Υ admits the bound

$$\Upsilon(\xi, \zeta) \leq C(1 + |\xi|^p + |\zeta|^p) \delta. \quad (2.63)$$

Since ν^1 and ν^2 vanish at infinity, cf. (2.26), we then obtain, for a given constant C_p ,

$$|I_\rho| \leq t C_p \delta \left(\int_{\mathbb{T}^N} |\nabla_x \rho_\varepsilon(x)| dx \right).$$

It follows that, for possibly a different C_p ,

$$|I_\rho| \leq t C_p \delta \varepsilon^{-1}. \quad (2.64)$$

We then gather (2.57), (2.64) and (2.47) to deduce for $t \in [0, T]$

$$\mathbb{E} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} f_1^\pm(t) \bar{f}_2^\pm(t) dx d\xi \leq \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} f_{1,0} \bar{f}_{2,0} dx d\xi + r(\varepsilon, \delta), \quad (2.65)$$

where the remainder $r(\varepsilon, \delta)$ is $r(\varepsilon, \delta) = T C_p \delta \varepsilon^{-1} + \frac{T D_1}{2} \varepsilon^2 \delta^{-1} + \eta_t(\varepsilon, \delta) - \eta_0(\varepsilon, \delta)$.

Taking $\delta = \varepsilon^{4/3}$ and letting $\varepsilon \rightarrow 0$ gives

$$\mathbb{E} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} f_1^\pm(t) \bar{f}_2^\pm(t) dx d\xi \leq \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} f_{1,0} \bar{f}_{2,0} dx d\xi. \quad (2.66)$$

Assume that f is a generalized solution to (2.1) with initial datum $\mathbf{1}_{u_0 > \xi}$. Since f_0 is the (translated) Heavyside function $\mathbf{1}_{u_0 > \xi}$, we have the identity $f_0 f_0^- = 0$. Taking $f_1 = f_2 = f$ in (2.66), we deduce $f^+(1 - f^+) = 0$ a.e., i.e. $f^+ \in \{0, 1\}$ a.e. The fact that $-\partial_\xi f^+$ is a Young measure then gives the conclusion : indeed, by Fubini's Theorem, for any $t \in [0, T]$, there is a set E_t of full measure in $\mathbb{T}^N \times \Omega$ such that, for $(x, \omega) \in E_t$, $f^+(x, t, \xi, \omega) \in \{0, 1\}$ for a.e. $\xi \in \mathbb{R}$. Let

$$\tilde{E}_t = E_t \cap (\mathbb{T}^N \times \hat{\Omega}).$$

The set \tilde{E}_t is of full measure in $\mathbb{T}^N \times \Omega$. For $(x, \omega) \in \tilde{E}_t$, $-\partial_\xi f^+(x, t, \cdot, \omega)$ is a probability measure on \mathbb{R} . Therefore $f^+(t, x, \xi, \omega) = \mathbf{1}_{u(x, t, \omega) > \xi}$ for a.e. $\xi \in \mathbb{R}$, where $u(x, t, \omega) = \int_{\mathbb{R}} (f^+(x, t, \xi, \omega) - \mathbf{1}_{0 > \xi}) d\xi$. We have a similar result for f^- (this will be used in the proof of Corollary 27). Proposition 15 implies that u is a solution in the sense of Definition 3. Since $f = f^+$ (recall the convention of notation introduced at the beginning of Section 2.1.3.1), this shows the reduction of generalized solutions to solutions. If now u_1 and u_2 are two solutions to (2.1), we deduce from (2.66) with $f_i = \mathbf{1}_{u_i > \xi}$ and from the identity

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{u_1 > \xi} \overline{\mathbf{1}_{u_2 > \xi}} d\xi = (u_1 - u_2)^+,$$

the contraction property (2.55).

In the multiplicative case (Φ depending on u), the reasoning is similar, except that there is an additional term in the bound on I_ψ . More precisely, by the hypothesis (2.4) we obtain in place of (2.57) the estimate

$$I_\psi \leq \frac{TD_1}{2} \varepsilon^2 \delta^{-1} + \frac{D_1}{2} I_\psi^h,$$

where

$$I_\psi^h = \mathbb{E} \int_0^t \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \rho_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} \psi_\delta(\xi - \zeta) |\xi - \zeta| h(|\xi - \zeta|) d\nu_{x, \sigma}^1 \otimes \nu_{y, \sigma}^2(\xi, \zeta) dx dy d\sigma.$$

Choosing $\psi_\delta(\xi) = \delta^{-1} \bar{\Psi}(\delta^{-1} \xi)$ with $\bar{\Psi}$ compactly supported in $(0, 1)$ gives

$$I_\psi \leq \frac{TD_1}{2} \varepsilon^2 \delta^{-1} + \frac{TD_1 C_\psi h(\delta)}{2}, \quad C_\psi := \sup_{\xi \in (0, 1)} \|\xi \bar{\Psi}(\xi)\|. \quad (2.67)$$

We deduce (2.65) with a remainder term $r'(\varepsilon, \delta) := r(\varepsilon, \delta) + \frac{TD_1 C_\psi h(\delta)}{2}$ and conclude the proof as in the additive case. There remains to prove (2.63) : setting

$\xi'' = \xi' - \zeta'$, we have

$$\begin{aligned} \Upsilon(\xi, \zeta) &= \int_{\zeta}^{+\infty} \int_{|\xi''| < \delta, \xi'' < \xi - \zeta'} \Gamma(\xi'' + \zeta', \zeta') |\xi''| \psi_{\delta}(\xi'') d\xi'' d\zeta' \\ &\leq C \int_{\zeta}^{\xi + \delta} \max_{|\xi''| < \delta, \xi'' < \xi - \zeta'} \Gamma(\xi'' + \zeta', \zeta') d\zeta' \delta \\ &\leq C \int_{\zeta}^{\xi + \delta} (1 + |\xi|^{p-1} + |\zeta'|^{p-1}) d\zeta' \delta, \end{aligned}$$

which gives (2.63). \square

Proof of Corollary 27. We use the notations and the results of Proposition 17. We fix $p \in [1, +\infty)$. Both $(f(t))_{t \in [0, T]}$ and $(f^-(t))_{t \in [0, T]}$ are generalized solutions to (2.1) associated to the initial datum $\mathbf{1}_{u_0 > \xi}$ (we use (2.39) here). By Theorem 26, they are at equilibrium : $f(t) = \mathbf{1}_{u(t) > \xi}$, $f^-(t) = \mathbf{1}_{u^-(t) > \xi}$. By Proposition 23, for all $\omega \in \hat{\Omega}$, the map $t \mapsto u(t)$ from $[0, T]$ to $L^p(\mathbb{T}^N)$ is continuous from the right. Similarly, $t \mapsto u^-(t)$ is continuous from the left. By Proposition 21, the fact that f^- is at equilibrium has the following consequence : at every $t \in (0, T]$, $f(t) = f^-(t)$. In particular, we have $u = u^-$ and thus, almost surely, u is continuous from $[0, T]$ to $L^p(\mathbb{T}^N)$. \square

We apply (2.55) to infer an L^∞ bound on solutions to (2.1) in the particular case of a multiplicative noise with compact support.

Theorem 29 (L^∞ bounds). *Assume (2.3)-(2.4) and*

$$g_k(x, u) = 0, \quad \forall |u| \geq 1, \quad (2.68)$$

for all $x \in \mathbb{T}^N$, $k \geq 1$. Let $u_0 \in L^\infty(\mathbb{T}^N)$ satisfy $-1 \leq u_0 \leq 1$ almost everywhere. Then, for all $t \geq 0$, the solution u to (2.1) with initial datum u_0 satisfies : almost surely,

$$-1 \leq u(x, t) \leq 1, \quad (2.69)$$

a.e. in \mathbb{T}^N .

Proof of Theorem 29. We use (2.55) to compare u to the two particular constant solutions $(x, t) \mapsto -1$ and $(x, t) \mapsto 1$. \square

2.1.4 Convergence of approximate solutions

In this section, we develop the tools required for the proof of convergence of a certain type of approximate solutions to (2.1). The basic principle is to generalize the notion of solution introduced in Definition 3. Indeed, this facilitates the proof of existence/convergence. In a second step a result of reduction (or "rigidity result"), which asserts that a generalized solution is a solution is used. This principle is of much use in the deterministic theory of conservation laws

(cf. [DiP83] with the use of “measure-valued entropy solutions”, [EGH03] with the use of “entropy process solutions”, [Per02] with the use of kinetic solutions as defined here). We have already introduced a generalization of the notion of solution in Definition 13, and have proved a result of reduction in Theorem 26. Here we will work mainly on the probabilistic aspects of the questions. We will have to consider “solutions in law”, or “martingale solutions” (see the comment after Theorem 36 for more explanations about the terminology). The plan of this section is the following one : in Section 2.1.4.1, we define the notion of approximate generalized solution. In Section 2.1.4.2, we give a martingale characterization of the stochastic integral. In Section 2.1.4.3, we give some tightness results on sequences of approximate generalized solutions. The main result, Theorem 36, which shows the convergence of a sequence of approximate generalized solutions to a martingale generalized solution, is proved in Section 2.1.4.5. Eventually, we obtain a result of pathwise convergence in Section 2.1.4.6.

2.1.4.1 Approximate generalized solutions

Let d be an integer fixed once and for all.

Definition 30 (Approximate generalized solutions). *Let $f_0^n: \mathbb{T}^N \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ be some kinetic functions. Let $(f^n(t))_{t \in [0, T]}$ be a sequence of $L^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}; [0, 1])$ -valued processes. Assume that the functions $f^n(t)$, and the associated Young measures $\nu_t^n = -\partial_\xi \varphi f^n(t)$ are satisfying item 1, 2, 3, in Definition 13 and Equation (2.27) up to an error term, i.e. : for all $\varphi \in C_c^d(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, there exists an adapted process $\varepsilon^n(t, \varphi)$, with $t \mapsto \varepsilon^n(t, \varphi)$ almost surely continuous such that*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{t \in [0, T]} |\varepsilon^n(t, \varphi)| = 0 \text{ in probability,} \quad (2.70)$$

and there exists some random measures m^n with first moment (2.6), such that, for all n , for all $\varphi \in C_c^d(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, for all $t \in [0, T]$, almost surely,

$$\begin{aligned} \langle f^n(t), \varphi \rangle &= \langle f_0^n, \varphi \rangle + \int_0^t \langle f^n(s), a(\xi) \cdot \nabla_x \varphi \rangle ds \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} g_k(x, \xi) \varphi(x, \xi) d\nu_{x,s}^n(\xi) dx d\beta_k(s) + \varepsilon^n(t, \varphi) \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{G}^2(x, \xi) \partial_\xi \varphi(x, \xi) d\nu_{x,s}^n(\xi) dx ds - m^n(\partial_\xi \varphi)([0, t]). \end{aligned} \quad (2.71)$$

Assume also $f^n(0) = f_0^n$. Then we say that (f^n) is a sequence of approximate generalized solutions to (2.1) with initial datum f_0^n .

2.1.4.2 Martingale characterization of the stochastic integral

In order to pass to the limit in an equation such as (2.71), we will first characterize (2.71) in terms of a martingale problem, and then we will use martingale methods to pass to the limit. In the present section, we give the characterization of (2.71) in terms of a martingale problem, see Proposition 31 and Proposition 32 below. We refer to [JS13, Example 1.4, p.143] for characterization of the standard Wiener Process in terms of a martingale problem. In the context of SDEs and SPDEs, such kind of characterizations have been applied in [Ond10; BO11; HS12; Hof13; D+16] in particular.

Let us define the stochastic integrands

$$h_{\varphi,k}^n(t) = \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} g_k(x, \xi) \varphi(x, \xi) d\nu_{x,t}^n(\xi) dx, \quad h_{\varphi}^n(t) = \left(h_{\varphi,k}^n(t) \right)_{k \geq 1}, \quad (2.72)$$

and the stochastic integrals

$$M_{\varphi}^n(t) = \sum_{k \geq 1} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} g_k(x, \xi) \varphi(x, \xi) d\nu_{x,s}^n(\xi) dx d\beta_k(s). \quad (2.73)$$

By Lemma 14, we have $h_{\varphi}^n \in L_{\mathcal{P}}^2([0, T] \times \Omega; l^2(\mathbb{N}^*))$ for all n, φ . Using Itô's Formula, we deduce from (2.73) the following statement.

Proposition 31. *Let (f^n) be a sequence of approximate generalized solutions to (2.1) with initial datum f_0^n . Let $\varphi \in C_c^d(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$. Let $M_{\varphi}^n(t)$ be defined by (2.73) and $h_{\varphi,k}^n(t)$ by (2.72). Then the processes*

$$M_{\varphi}^n(t), \quad M_{\varphi}^n(t) \beta_k(t) - \int_0^t h_{\varphi,k}^n(s) ds, \quad |M_{\varphi}^n(t)|^2 - \int_0^t \|h_{\varphi}^n(s)\|_{l^2(\mathbb{N}^*)}^2 ds, \quad (2.74)$$

are (\mathcal{F}_t) -martingales.

What will interest us is the reciprocal statement.

Proposition 32. *Let $h \in L_{\mathcal{P}}^2([0, T] \times \Omega; l^2(\mathbb{N}^*))$. Let $X(t)$ be a stochastic process starting from 0 such that the processes*

$$X(t), \quad X(t) \beta_k(t) - \int_0^t h_k(s) ds, \quad |X(t)|^2 - \int_0^t \|h(s)\|_{l^2(\mathbb{N}^*)}^2 ds \quad (2.75)$$

are (\mathcal{F}_t) -martingales. Then

$$X(t) = \sum_{k \geq 1} \int_0^t h_k(s) d\beta_k(s), \quad (2.76)$$

for all $t \in [0, T]$.

Proof of Proposition 32. The proof can be found in [Hof13, Proposition A.1]. Let us give some details about it. We first claim that the following identity is satisfied :

$$\mathbb{E} \left[(X(t) - X(s)) \int_s^t \theta(\sigma) d\beta_k(\sigma) d\sigma - \int_s^t h_k(\sigma) \theta(\sigma) d\sigma \middle| \mathcal{F}_s \right] = 0 \quad (2.77)$$

for all $0 \leq s \leq t \leq T$, all $k \geq 1$ and all $\theta \in L^2_{\mathcal{P}}([0, T] \times \Omega)$. The proof consists in approximating θ on the interval $[s, t]$ by predictable simple functions. It is similar to a computation of quadratic variation. Note that (2.77) uses only the fact that

$$X(t), \quad X(t)\beta_k(t) - \int_0^t h_k(s) ds$$

are (\mathcal{F}_t) -martingales. We apply (2.77) with $s = 0$ and $\theta = h_k$ and sum over k to obtain

$$\mathbb{E}[X(t)\bar{X}(t)] = \mathbb{E} \int_0^t \|h(s)\|_{l^2(\mathbb{N}^*)}^2 ds, \quad \bar{X}(t) := \sum_{k \geq 1} \int_0^t h_k(s) d\beta_k(s). \quad (2.78)$$

This gives the expression of the cross-product when we expand the term $\mathbb{E}|X(t) - \bar{X}(t)|^2$. Using the fact that

$$|X(t)|^2 - \int_0^t \|h(s)\|_{l^2(\mathbb{N}^*)}^2 ds$$

is a (\mathcal{F}_t) -martingale and applying Itô's Isometry to $\mathbb{E}|\bar{X}(t)|^2$ shows that the square terms are also given by

$$\mathbb{E}|X(t)|^2 = \mathbb{E}|\bar{X}(t)|^2 = \int_0^t \|h(s)\|_{l^2(\mathbb{N}^*)}^2 ds.$$

It follows that $X(t) = \bar{X}(t)$. □

2.1.4.3 Tightness

Let (f^n) be a sequence of approximate generalized solutions, in the sense of Definition 30. Recall that \mathcal{Y}^1 is the notation for the set of Young measures on $\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}$ (cf. Proposition 7) and that $\mathcal{M}_b(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R})$ is the notation for the set of bounded Borel measures on $\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}$ while $\mathcal{M}_b^+(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R})$ is the subset of non-negative measures. Let ν^n be the Young measure associated to f^n ($\nu^n = -\partial_\xi f^n$). The law of ν^n is a probability measure on the space \mathcal{Y}^1 . We will see in Section 2.1.4.3 that, under a natural a priori bound, see (2.79), the sequence $(\text{Law}(\nu^n))$ is tight in \mathcal{Y}^1 . In Section 2.1.4.3, this is the sequence $(\text{Law}(m^n))$ that we will analyse. We show under (2.83) and (2.84) that it is tight in $\mathcal{M}_b^+(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R})$ (see, more specifically, Proposition 34).

We also need to analyse the tightness of $(\langle f_n(t), \varphi \rangle)$ in the Skorokhod space $D([0, T])$: this is done in Section 2.1.4.3.

Compactness of the Young measures

In this section, we will use the following notions : we say that a sequence (ν^n) of \mathcal{Y}^1 converges to ν in \mathcal{Y}^1 if (2.19) is satisfied. A **random Young measure** is by definition a \mathcal{Y}^1 -valued random variable.

Proposition 33. *Let (f^n) be a sequence of approximate generalized solutions to (2.1) with initial datum f_0^n . Assume that the following bound is satisfied : for all $p \in [1, +\infty)$, there exists $C_p \geq 0$ independent on n such that $\nu^n := -\partial_\xi f^n$ satisfies*

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\nu_{x,t}^n(\xi) dx \right] \leq C_p, \quad (2.79)$$

Then, there exists a probability space $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ and some random Young measures $\tilde{\nu}^n, \tilde{\nu}$, such that

1. $\tilde{\nu}^n$ has the same law as ν^n ,
2. $\tilde{\nu}$ satisfies

$$\tilde{\mathbb{E}} \left(\sup_{J \subset [0, T]} \frac{1}{|J|} \int_J \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\tilde{\nu}_{x,t}(\xi) dx dt \right) \leq C_p, \quad (2.80)$$

where the supremum in (2.80) is a countable supremum over all open intervals $J \subset [0, T]$ with rational extremities,

3. up to a subsequence still denoted $(\tilde{\nu}^n)$, there is $\tilde{\mathbb{P}}$ -almost sure convergence of $(\tilde{\nu}^n)$ to $\tilde{\nu}$ in \mathcal{Y}^1 .

Furthermore, if $\tilde{f}^n, \tilde{f} : \mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R} \times \tilde{\Omega} \rightarrow [0, 1]$ are defined by

$$\tilde{f}^n(x, t, \xi) = \tilde{\nu}_{x,t}^n(\xi, +\infty), \quad \tilde{f}(x, t, \xi) = \tilde{\nu}_{x,t}(\xi, +\infty),$$

then $\tilde{f}^n \rightarrow \tilde{f}$ in $L^\infty(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R})$ -weak- $*$ $\tilde{\mathbb{P}}$ -almost surely, \tilde{f} being a kinetic function.

Proof of Proposition 33. Note first that (2.79) yields

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\nu_{x,t}^n(\xi) dx dt \right) \leq C_p T. \quad (2.81)$$

For $R > 0, p \geq 1$, let us denote by $K_{R,p}$ the set of Young measures $\nu \in \mathcal{Y}^1$ such that

$$\int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\nu_{x,t}(\xi) dx dt \leq R.$$

By [CFV04, Theorem 4.3.2, Theorem 4.3.8, Theorem 2.1.3], the set $K_{R,p}$ is compact in \mathcal{Y}^1 for the $\tau_{\mathcal{Y}^1}^W$ -topology, which is metrizable, [CFV04, Theorem 2.3.1] and corresponds to the convergence (2.19). By (2.81), we have

$$\mathbb{P}(\nu^n \notin K_{R,p}) \leq \frac{C_p T}{R},$$

which shows that the sequence (ν^n) of \mathcal{Y}^1 -valued random variables is tight. The set \mathcal{Y}^1 endowed with the $\tau_{\mathcal{Y}^1}^W$ -topology is Polish, [CFV04, Theorem 2.3.3] : we can use the Prokhorov's metric, [Bil13, p. 72]. By Prokhorov's Theorem, [Bil13, Theorem 5.1], there exists a \mathcal{Y}^1 -valued random variable ν and a subsequence still denoted (ν^n) such that (ν^n) converges in probability to ν . Since the map

$$\psi_p: \mathcal{Y}^1 \rightarrow [0, +\infty], \quad \nu \mapsto \sup_{J \subset [0, T]} \frac{1}{|J|} \int_J \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\nu_{x,t}(\xi) dx dt,$$

are lower semi-continuous, we have

$$\mathbb{E}\psi_p(\nu) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}\psi_p(\nu^n) \leq C_p$$

by (2.79) and, consequently, ν satisfies the condition

$$\mathbb{E} \left(\sup_{J \subset [0, T]} \frac{1}{|J|} \int_J \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\nu_{x,t}(\xi) dx dt \right) \leq C_p. \quad (2.82)$$

Let us now apply the Skorokhod Theorem [Bil13, p. 70] : there exists a probability space $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ and some random variables $\tilde{\nu}^n, \tilde{\nu}$, such that

1. $\tilde{\nu}^n$ and $\tilde{\nu}$ have the same laws as ν^n and ν respectively,
2. up to a subsequence still denoted $(\tilde{\nu}^n)$, there is $\tilde{\mathbb{P}}$ -almost sure convergence of $(\tilde{\nu}^n)$ to $\tilde{\nu}$ in \mathcal{Y}^1 .

Since $\tilde{\nu}$ and ν have same laws, $\tilde{\nu}$ satisfies the bound (2.80). If we apply Corollary 11, we obtain that $\tilde{f}^n \rightarrow \tilde{f}$ in $L^\infty(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R})$ -weak-* $\tilde{\mathbb{P}}$ -almost surely, \tilde{f} being a kinetic function. \square

Compactness of the random measures

Proposition 34. *Let (f^n) be a sequence of approximate generalized solutions to (2.1) with initial datum f_0^n . Assume that*

$$\mathbb{E} m^n(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}) \text{ is uniformly bounded,} \quad (2.83)$$

and that m^n vanishes for large ξ uniformly in n : if $B_R^c = \{\xi \in \mathbb{R}, |\xi| \geq R\}$, then

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \mathbb{E}m^n(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times B_R^c) = 0, \quad (2.84)$$

uniformly in n . Then, there exists a probability space $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ and some random measures $\tilde{m}^n, \tilde{m} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathcal{M}_b(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R})$ such that

1. \tilde{m}^n has the same law as m^n ,
2. up to a subsequence still denoted (\tilde{m}^n) , there is $\tilde{\mathbb{P}}$ -almost sure convergence of (\tilde{m}^n) to \tilde{m} in $\mathcal{M}_b(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R})$ -weak- $*$.

Proof of Proposition 34. Let $\eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ be defined by

$$\eta(R) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}m^n(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times B_R^c).$$

Let h be a fixed function on $\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}$, h continuous, positive, integrable. Proving the statement for the sequence of measures

$$B \mapsto m^n(B) + \int_B h(x, t, \xi) dx dt d\xi$$

is equivalent to prove the statement for the original sequence (m^n) . We will assume therefore that $\eta(R) > 0$ for all $R \geq 0$ and that

$$\|m^n\| := m^n(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}) \geq \delta > 0,$$

where δ is independent on n . Let $\mu^n := \frac{m^n}{\|m^n\|}$. We consider the random variables $X^n = (\mu^n, \|m^n\|)$, taking values in $\mathcal{P}^1(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_+$, where $\mathcal{P}^1(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R})$ is the set of probability measures on $\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}$. For $A > 0$, let K_A be the set of probability measures $\mu \in \mathcal{P}^1(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R})$ such that

$$\sup_{R > 1} \frac{\mu(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times B_R^c)}{\eta(R)} \leq A.$$

Then K_A is compact in $\mathcal{P}^1(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R})$ -weak- $*$ by Prokhorov's Theorem and (2.84). Using the Markov Inequality, and the definition of $\eta(R)$, we obtain

$$\mathbb{P}(\mu^n \notin K_A) \leq \frac{C}{A},$$

where C is independent on n : this shows that (μ^n) is tight in $\mathcal{P}^1(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R})$ endowed with the topology of the weak convergence of probability measures. Similarly, using (2.83) and the Markov Inequality, we have

$$\mathbb{P}(\|m^n\| > A) \leq \frac{C}{A},$$

where C is independent on n ; therefore $(\|m^n\|)$ is tight in \mathbb{R} . It follows that (X^n) is tight in $\mathcal{P}^1(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_+$ endowed with the product topology. This topology is separable, metrizable and there exists a compatible metric which turns the space into a complete space (we can take the sum of the Prokhorov's metric and of the usual metric on \mathbb{R}_+). Therefore we can apply the Skorokhod Theorem : there exists a probability space $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ and some random variables $\tilde{X}^n = (\tilde{\mu}^n, \tilde{\alpha}^n)$, $\tilde{X} = (\tilde{\mu}, \tilde{\alpha})$ such that \tilde{X}^n has same law as X^n and, $\tilde{\mathbb{P}}$ -almost surely, $\tilde{X}^n \rightarrow \tilde{X}$ in $\mathcal{P}^1(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_+$. Set $\tilde{m}^n = \tilde{\alpha}^n \tilde{\mu}^n$ and $\tilde{m} = \tilde{\alpha} \tilde{\mu}$. Then \tilde{m}^n has the same law as m^n and there is $\tilde{\mathbb{P}}$ -almost sure convergence of (\tilde{m}^n) to \tilde{m} in $\mathcal{M}_b(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R})$ -weak-*. \square

Tightness in the Skorokhod space

Let $D([0, T])$ denote the space of càdlàg functions on $[0, T]$. See [JS13, p. VI.1] and [Bil13, Chapter 3] for the definition of $D([0, T])$. Let (f^n) be a sequence of approximate generalized solutions to (2.1) with initial datum f_0^n . In Section 2.1.4.4 below, where we analyse the convergence of (f_n) , it would be desirable to have a result of tightness of the processes $t \mapsto \langle f^n(t), \varphi \rangle$ since they are random variables in $D([0, T])$ (here, φ is a given test function). It seems difficult to obtain such a result. The only fact which we can infer naturally from (2.79), (2.83), (2.84), is that the sequence of processes

$$t \mapsto \langle f^n(t), \varphi \rangle + A_\varphi^n(t), \quad A_\varphi^n(t) := \langle m^n, \partial_\xi \varphi \rangle([0, t]),$$

is tight in $D([0, T])$, see Proposition 35 below. Showing additionally that (A_φ^n) is tight in $D([0, T])$ seems impossible, however, if no additional properties of (m^n) are known. Indeed, the weak convergence of $\mu^n := \langle m^n, \partial_\xi \varphi \rangle$ to a measure μ on $[0, T]$ is not a sufficient condition for the convergence of A_φ^n to $A(t) = \mu([0, t])$ in $D([0, T])$. Consider for example the case

$$\mu^n = \delta_{t_* - s_n} + \delta_{t_* - \sigma_n},$$

where $t_* \in (0, T)$ and $(s_n) \downarrow 0$, $(\sigma_n) \downarrow 0$ with $s_n < \sigma_n$ for all n . Then (μ_n) converges weakly to $\mu = 2\delta_{t_*}$, we have

$$\alpha_n(t) := \mu_n([0, t]) \rightarrow \alpha(t) := \mu([0, t])$$

for every $t \in [0, T]$, but (α_n) , or any subsequence of (α_n) , does not converge to α in $D([0, T])$. This example should be compared to [JS13, Example 1.20, p.329]. See also Theorem 2.15, p.342 in [JS13].

As asserted above, we will show that the sequence of processes

$$t \mapsto \langle f^n(t), \varphi \rangle + A_\varphi^n(t), \quad A_\varphi^n(t) := \langle m^n, \partial_\xi \varphi \rangle([0, t]),$$

where

$$\langle m^n, \partial_\xi \varphi \rangle([0, t]) := \iiint_{\mathbb{T}^N \times [0, t] \times \mathbb{R}} \partial_\xi \varphi(x, s, \xi) dm^n(x, s, \xi),$$

is tight in $D([0, T])$. It is sufficient to show that

$$t \mapsto \langle f^n(t), \varphi \rangle + B_\varphi^n(t), \quad B_\varphi^n(t) := \langle m^n, \partial_\xi \varphi \rangle([0, t]) - \varepsilon^n(t, \varphi) \quad (2.85)$$

is tight in $D([0, T])$ since each function $t \mapsto \varepsilon^n(t, \varphi)$ converges in probability to 0 in $C([0, T])$ by (2.70). Since $f^n(0) = f_0^n$, we have

$$\langle f^n(t), \varphi \rangle + B_\varphi^n(t) = \langle f_0^n, \varphi \rangle + J_\varphi^n(t), \quad (2.86)$$

\mathbb{P} -almost surely, where

$$\begin{aligned} J_\varphi^n : t \mapsto & \int_0^t \langle f^n(s), a(\xi) \cdot \nabla \varphi \rangle ds + \sum_{k \geq 1} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} g_k(x, \xi) \varphi(x, \xi) d\nu_{x,s}^n(\xi) dx d\beta_k(s) \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi \varphi(x, \xi) \mathbf{G}^2(x, \xi) d\nu_{x,s}^n(\xi) dx ds. \end{aligned} \quad (2.87)$$

We will show that $(J_\varphi^n(t))$ is tight in $C([0, T])$.

Proposition 35. *Let (f^n) be a sequence of approximate generalized solutions to (2.1) with initial datum f_0^n . For $\varphi \in C^d(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, set*

$$\begin{aligned} D_\varphi^n(t) &= \int_0^t \langle f^n(s), a(\xi) \cdot \nabla \varphi \rangle ds, \\ M_\varphi^n(t) &= \sum_{k \geq 1} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} g_k(x, \xi) \varphi(x, \xi) d\nu_{x,s}^n(\xi) dx d\beta_k(s), \\ I_\varphi^n(t) &= \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi \varphi(x, \xi) \mathbf{G}^2(x, \xi) d\nu_{x,s}^n(\xi) dx ds. \end{aligned}$$

Assume that (2.79) is satisfied. Then each sequence (D_φ^n) , (M_φ^n) , (I_φ^n) is tight in $C([0, T])$. In particular, the sequence (J_φ^n) defined by (2.87) is tight in $C([0, T])$.

Proof of Proposition 35. Note first the trivial uniform bounds

$$\mathbb{E}|D_\varphi^n(t)|, \mathbb{E}|M_\varphi^n(t)|, \mathbb{E}|I_\varphi^n(t)| = \mathcal{O}(1),$$

obtained for $t = 0$ since all three terms vanish. We then use the Kolmogorov's criterion to obtain some bounds in some Hölder space $C^\alpha([0, T])$. We have the following estimate on the square of the increments of D_φ^n :

$$\mathbb{E}|D_\varphi^n(t) - D_\varphi^n(\sigma)|^2 \leq \|a \cdot \nabla \varphi\|_{L^1(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})}^2 |t - \sigma|^2, \quad (2.88)$$

since $|f_n| \leq 1$ almost surely. Similarly, using (2.3) and (2.79), we have

$$\mathbb{E}|I_\varphi^n(t) - I_\varphi^n(\sigma)|^2 \leq D_0(1 + TC_4)\|\partial_\xi\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})}^2|t - \sigma|^2. \quad (2.89)$$

The estimates (2.88) and (2.89) give some bounds on $\mathbb{E}\|D_\varphi^n\|_{C^\alpha([0,T])}$ and $\mathbb{E}\|I_\varphi^n\|_{C^\alpha([0,T])}$ respectively, for $\alpha < \frac{1}{2}$. Furthermore, the Burkholder - Davis - Gundy Inequality gives, for $p > 2$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|M_\varphi^n(t) - M_\varphi^n(\sigma)|^p &\leq \mathbb{E}\left[\sup_{\sigma \leq r \leq t} |M_\varphi^n(r) - M_\varphi^n(\sigma)|\right]^p \\ &\leq C_{\text{BDG}}(p)\mathbb{E}\left[\sum_{k \geq 1} \int_\sigma^t \left|\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} g_k(x, \xi)\varphi(x, \xi)d\nu_{x,s}^n(\xi)dx\right|^2 ds\right]^{p/2}. \end{aligned}$$

By Jensen's Inequality, and a bound analogous to (2.29), we obtain

$$\mathbb{E}|M_\varphi^n(t) - M_\varphi^n(\sigma)|^p \leq C_{\text{BDG}}(p) [D_0(1 + C_2)]^{p/2} \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})}^p |t - \sigma|^{p/2}, \quad (2.90)$$

and (2.90) gives a bound on $\mathbb{E}\|M_\varphi^n\|_{C^\alpha([0,T])}$ for $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$. We obtain in this way some tightness conditions on the laws of D^n , M^n , I^n respectively on $C([0, T])$. \square

2.1.4.4 Convergence of approximate generalized solutions

We conclude here this section about the stability of generalized solutions by the following statement.

Theorem 36 (Convergence to martingale solutions). *Let (f^n) be a sequence of approximate generalized solutions to (2.1) with initial datum f_0^n , satisfying (2.79), (2.83) and (2.84). We suppose that there exists a kinetic function f_0 on $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}$ such that $f_0^n \rightarrow f_0$ in $L^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ -weak-*. Then there exists a probability space $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$, a filtration $\tilde{\mathcal{F}}_t$, some $\tilde{\mathcal{F}}_t$ -adapted independent Brownian motions $(\tilde{\beta}_k)_{k \geq 1}$, some random Young measures $\tilde{\nu}^n, \tilde{\nu}$, some random measures \tilde{m}^n, \tilde{m} on $\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}$ such that*

1. $\tilde{\nu}^n$ has the same law as ν^n ,
2. up to a subsequence still denoted $(\tilde{\nu}^n)$, there is $\tilde{\mathbb{P}}$ -almost sure convergence of $(\tilde{\nu}^n)$ to $\tilde{\nu}$ in \mathcal{Y}^1 .
3. for all $\psi \in C_b(\mathbb{R})$, the random map $(x, t) \mapsto \langle \psi, \tilde{\nu}_{x,t} \rangle$ belongs to $L^2_{\tilde{\mathbb{P}}}(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \tilde{\Omega})$,
4. \tilde{m}^n has the same law as m^n ,

5. up to a subsequence still denoted (\tilde{m}^n) , there is $\tilde{\mathbb{P}}$ -almost sure convergence of (\tilde{m}^n) to \tilde{m} in $\mathcal{M}_b(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R})$ -weak- * .

Let \tilde{f} be defined by $\tilde{f}(x, t, \xi) = \tilde{\nu}_{x,t}(\xi, +\infty)$, then, $\tilde{\mathbb{P}}$ -almost surely, \tilde{f} is a kinetic function and

6. up to a subsequence, and $\tilde{\mathbb{P}}$ -almost surely, \tilde{f}^n converges in $L^\infty(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R})$ -weak- * to \tilde{f}

7. $\tilde{\mathbb{P}}$ -almost surely, for all φ in $C_c(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, $t \mapsto \langle \tilde{f}(t), \varphi \rangle$ is càdlàg,

8. $\tilde{\nu}$ satisfies

$$\tilde{\mathbb{E}} \left(\sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\tilde{\nu}_{x,t}(\xi) dx \right) \leq C_p, \quad (2.91)$$

for all $1 \leq p < +\infty$, where C_p is a finite constant,

9. for all $\varphi \in C_c^1(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, for all $t \in [0, T]$, $\tilde{\mathbb{P}}$ -almost surely, \tilde{f} satisfies

$$\begin{aligned} \langle \tilde{f}(t), \varphi \rangle &= \langle f_0, \varphi \rangle + \int_0^t \langle \tilde{f}(s), a(\xi) \cdot \nabla_x \varphi \rangle ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} g_k(x, \xi) \varphi(x, \xi) d\tilde{\nu}_{x,s}(\xi) dx d\tilde{\beta}_k(s) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{G}^2(x, \xi) \partial_\xi \varphi(x, \xi) d\tilde{\nu}_{x,s}(\xi) dx ds - \tilde{m}(\partial_\xi \varphi)([0, t]). \end{aligned} \quad (2.92)$$

After one does the substitution

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t, \beta_k(t)) \leftarrow (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}, \tilde{\mathcal{F}}_t, \tilde{\beta}_k(t)),$$

which is a substitution of the probabilistic data in the Cauchy Problem for Equation (2.1), the points 3, 7, 8, 9 in Theorem 36 show that \tilde{f} is a generalized solution associated to the initial datum f_0 . Such a function \tilde{f} , which turns out to be a generalized solution to (2.1) after a substitution of the probabilistic data, is called a martingale generalized solution. The term martingale refers to the martingale characterization of (2.92), cf. Proposition 31 and Proposition 32, which we will use to prove Theorem 36.

2.1.4.5 Proof of Theorem 36

In this section, we will give the proof of Theorem 36. We will use the results (and the proofs) of Proposition 33, Proposition 34, see Section 2.1.4.3 and Section 2.1.4.3 respectively.

State space and Skorokhod's Theorem

Recall that

$$W(t) = \sum_{k \geq 1} \beta_k(t) e_k,$$

where $(e_k)_{k \geq 1}$ is the orthonormal basis of the Hilbert space H . Let \mathfrak{U} be an other separable Hilbert space such that $H \hookrightarrow \mathfrak{U}$ with Hilbert-Schmidt injection. Then the trajectories of W are \mathbb{P} -a.s. in the path-space $\mathcal{X}_W = C([0, T]; \mathfrak{U})$ (see [DZ92, Theorem 4.3]). We consider the C^d -norm

$$\|\varphi\|_{C^d} = \sup\{\|D^m \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})}; m \in \{0, \dots, d\}^{N+1}\}$$

on $C_c^d(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$. Let

$$\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$$

be a dense countable subset of $C_c^d(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ for this norm. We can construct Γ as follows : let

$$\rho_\varepsilon(x, \xi) := \frac{1}{\varepsilon^{N+1}} \rho(\varepsilon^{-N} x, \varepsilon^{-1} \xi)$$

be a compactly supported approximation of the unit on $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}$. Let $\{\theta_p; p \in \mathbb{N}\}$ be a dense subset of $L^1(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$. We can assume that all the functions θ_p are compactly supported (otherwise, we use a process of truncation). Then any function in $C_c^d(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ can be approximated by functions in

$$\Gamma := \{\rho_{k^{-1}} * \theta_p; p \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^*\} \subset C_c^d(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$$

for the convergence measured by the C^d -norm. Indeed, given $\varphi \in C_c^d(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, $a > 0$, and $m \in \{0, \dots, d\}^{N+1}$, we have, by the triangular inequality,

$$\begin{aligned} \|D^m \varphi - D^m \rho_\varepsilon * \theta_p\|_{L^\infty} &\leq \|D^m \varphi - D^m \rho_\varepsilon * \varphi\|_{L^\infty} + \|D^m \rho_\varepsilon * (\varphi - \theta_p)\|_{L^\infty} \\ &\leq \omega_{D^m \varphi}(\varepsilon) + \frac{\|\rho\|_{L^\infty}}{\varepsilon^{N+1+|m|}} \|\varphi - \theta_p\|_{L^1}, \end{aligned} \quad (2.93)$$

since the norm of $D^m \rho_\varepsilon$ in L^∞ is bounded by $\frac{\|\rho\|_{L^\infty}}{\varepsilon^{N+1+|m|}}$. In (2.93), $\omega_{D^m \varphi}$ denotes the modulus of continuity of $D^m \varphi$. We choose $\varepsilon = k^{-1}$ with k large enough to ensure $\omega_{D^m \varphi}(\varepsilon) < a$ for all $m \in \{0, \dots, d\}^{N+1}$. Taking then $p \in \mathbb{N}$ such that $\|\varphi - \theta_p\|_{L^1} < a \varepsilon^{(d+1)(N+1)}$, we obtain $\|\varphi - \rho_{k^{-1}} * \theta_p\|_{C^d} < 2a$.

Let also \mathbb{R}^∞ denote the product space $\prod_{\varphi \in \Gamma} \mathbb{R}$ endowed with the topology of point-wise convergence. As such, \mathbb{R}^∞ is separable, complete and admits a compatible metric. Define the Polish space

$$\mathcal{E} := C([0, T]; \mathbb{R}^\infty) \times C([0, T]; \mathbb{R}^\infty) \times C([0, T]; \mathbb{R}^\infty) \times \mathbb{R}^\infty,$$

and

$$\varepsilon_\varphi^n(t) = \varepsilon^n(t, \varphi), \quad J_\varphi^n(t) = \langle f^n(t), \varphi \rangle - \langle f_0^n, \varphi \rangle + \langle m^n, \partial_\xi \varphi \rangle([0, t]) - \varepsilon_\varphi^n(t), \quad (2.94)$$

for all $\varphi \in C_c^d(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$. Note that, as a consequence of Equation (2.86) and Proposition 35, we know that, for all $\varphi \in C_c^d(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$,

$$(J_\varphi^n) \text{ is tight in } C([0, T]). \quad (2.95)$$

By (2.70), we also have $\varepsilon_\varphi^n \rightarrow 0$ in $C([0, T])$ in probability, for all $\varphi \in C_c^d(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$. We introduce the four following sequences :

$$\{J^n(t)\} := (J_\varphi^n(t))_{\varphi \in \Gamma}, \quad \{M^n(t)\} := (M_\varphi^n(t))_{\varphi \in \Gamma}, \quad \{\varepsilon^n(t)\} := (\varepsilon_\varphi^n(t))_{\varphi \in \Gamma},$$

and $\{f_{\text{in}}^n\} := (\langle f_0^n, \varphi \rangle)_{\varphi \in \Gamma}$, where M_φ^n is defined by (2.73). We will consider the multiplet

$$Z^n = (\nu^n, \{J^n\}, \{M^n\}, \{\varepsilon^n\}, \{f_{\text{in}}^n\}, \mu^n, \|m^n\|, W) \in \mathcal{X},$$

where the state space \mathcal{X} is

$$\mathcal{X} := \mathcal{Y}^1 \times \mathcal{E} \times \mathcal{P}^1(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{X}_W.$$

Let $\varepsilon > 0$. By (2.95), there exists for each $j \in \mathbb{N}$ a compact K_j in $C([0, T])$ such that

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P} \left(J_{\varphi_j}^n \in K_j \right) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Let $K = \prod_{j \in \mathbb{N}} K_j$. Then K is compact^d in $C([0, T]; \mathbb{R}^\infty)$ and

$$\mathbb{P}(\{J^n\} \in K^c) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{P} \left(J_{\varphi_j}^n \in K_j^c \right) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^j} = 2\varepsilon,$$

for all $n \in \mathbb{N}$. This shows that $(\{J^n\})$ is tight in $C([0, T]; \mathbb{R}^\infty)$. We have similar results about $(\{M^n\})$ and $(\{\varepsilon^n\})$ by Proposition 35. On \mathcal{X}_W we consider the topology induced by the norm

$$\|v\| = \sup_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_{\mathfrak{M}}$$

Then \mathcal{X}_W is separable and complete. A first consequence of this is the fact that the law of the single random variable W is tight in \mathcal{X}_W . A second consequence is the fact that \mathcal{X} is a separable completely-metrizable space. By Section 2.1.4.3 and Section 2.1.4.3, we conclude that (Z^n) is tight in the Polish space \mathcal{X} . We may thus apply Skorokhod's Theorem to (Z^n) : there exists a probability space $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ and some random variable \tilde{Z}^n, \tilde{Z} such that \tilde{Z}^n has the same law as Z^n

d. since $C([0, T]; \mathbb{R}^\infty)$ is homeomorphic to the countable product, over Γ , of copies of $C([0, T]; \mathbb{R})$

and, up to a subsequence, $\tilde{\mathbb{P}}$ -almost surely, \tilde{Z}^n converges to \tilde{Z} in \mathcal{X} .

Identification of the limit : càdlàg version

Let us denote the component of \tilde{Z} as follows :

$$\tilde{Z} = (\tilde{\nu}, \{\tilde{J}\}, \{\tilde{M}\}, \{\tilde{\varepsilon}\}, \{\tilde{f}_{\text{in}}\}, \tilde{\mu}, \tilde{\alpha}, \tilde{W}).$$

Note first that $\tilde{\varepsilon} = 0$ by (2.70). We have also

$$\{\tilde{f}_{\text{in}}\} = (\langle f_0, \varphi \rangle)_{\varphi \in \Gamma}$$

since $f_0^n \rightarrow f_0$ in $L^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ -weak-* by hypothesis. Recall (see Proposition 33 and Proposition 34) that $\tilde{f}(x, t, \xi) = \tilde{\nu}_{x,t}(\xi, +\infty)$ and $\tilde{m} = \tilde{\alpha}\tilde{\mu}$. It was shown in the proof of Proposition 33 that item 1, 2, 6 of Theorem 36 are satisfied and that the moments of $\tilde{\nu}$ are bounded as in (2.80). By the proof of Proposition 34, we have also 4, 5 of Theorem 36. We will first establish the following result.

Lemma 37. *We have the following identities : $\tilde{\mathbb{P}}$ -almost surely,*

$$\text{for all } t \in [0, T], \text{ for all } \varphi \in \Gamma, \langle \tilde{f}^n(t), \varphi \rangle = \langle f_0, \varphi \rangle + \tilde{J}_\varphi^n(t) - \langle \tilde{m}^n, \partial_\xi \varphi \rangle([0, t]) - \tilde{\varepsilon}_\varphi^n(t), \quad (2.96)$$

and : $\tilde{\mathbb{P}}$ -almost surely, there exists a negligible set $N_0 \subset [0, T]$ such that,

$$\text{for all } t \in [0, T] \setminus N_0, \text{ for all } \varphi \in \Gamma, \langle \tilde{f}(t), \varphi \rangle = \langle f_0, \varphi \rangle + \tilde{J}_\varphi(t) - \langle \tilde{m}, \partial_\xi \varphi \rangle([0, t]). \quad (2.97)$$

We will use (2.97) to prove Proposition 38, where we obtain a càdlàg version of \tilde{f} (càdlàg in the sense that $\tilde{\mathbb{P}}$ -almost surely, for all $\varphi \in C_c(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, $t \mapsto \langle \tilde{f}(t), \varphi \rangle$ is càdlàg).

Proof of Lemma 37. Let $\theta \in C([0, T])$. Let us integrate the identity (2.94) against θ . Using the Fubini theorem, we obtain : \mathbb{P} -almost surely,

$$\int_0^T (J_\varphi^n(t) + \langle f_0^n, \varphi \rangle + \varepsilon_\varphi^n(t))\theta(t)dt - \langle \nu^n, \Phi \rangle - \langle m^n, \Psi \rangle = 0, \quad (2.98)$$

where

$$\Psi(x, t, \xi) = \partial_\xi \varphi(x, \xi) \int_t^T \theta(s)ds, \quad \Phi(x, t, \xi) = \int_{-\infty}^\xi \varphi(x, \zeta)d\zeta\theta(t).$$

Note that Ψ and Φ are continuous and bounded functions. Taking the square, then expectancy in (2.98) gives $\mathbb{E}F(Z^n) = 0$, where $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$F(Z^n) = \left| \int_0^T (J_\varphi^n(t) + \langle f_0^n, \varphi \rangle + \varepsilon_\varphi^n(t))\theta(t)dt - \langle \nu^n, \Phi \rangle - \langle m^n, \Psi \rangle \right|^2$$

is a continuous function. By identity of the laws of Z^n and \tilde{Z}^n , we have $\tilde{\mathbb{E}}F(\tilde{Z}^n) = 0$ for all n . Taking the limit on n , we obtain, by the Vitali theorem, $\tilde{\mathbb{E}}F(\tilde{Z}) = 0$. Since θ is arbitrary, this gives : $\tilde{\mathbb{P}}$ -almost surely, for all $\varphi \in \Gamma$, for a.e. $t \in (0, T)$,

$$\langle \tilde{f}(t), \varphi \rangle = \langle f_0, \varphi \rangle + \tilde{J}_\varphi(t) - \langle \tilde{m}, \partial_\xi \varphi \rangle([0, t]).$$

Since Γ is countable, we have (2.97). Using the identity $\tilde{\mathbb{E}}F(\tilde{Z}^n) = 0$, we obtain (2.96) in a similar way. There is no negligible set in (2.96) because both sides of the identity are càdlàg functions : if they coincide a.e. on $[0, T]$, then they coincide everywhere. \square

Proposition 38. *There exists a measurable subset $\tilde{\Omega}^+$ of $\tilde{\Omega}$ of probability one, a random Young measure $\tilde{\nu}^+$ on $\mathbb{T}^N \times (0, T)$ such that*

1. *for all $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}^+$, for a.e. $(x, t) \in \mathbb{T}^N \times (0, T)$, the probability measures $\tilde{\nu}_{x,t}^+$ and $\tilde{\nu}_{x,t}$ coincide,*
2. *the kinetic function $\tilde{f}^+(x, t, \xi) := \tilde{\nu}_{x,t}^+(\xi, +\infty)$ satisfies : for all $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}^+$, for all $\varphi \in C_c(\mathbb{T}^N \times (0, T))$, $t \mapsto \langle \tilde{f}^+(t), \varphi \rangle$ is càdlàg,*
3. *the random Young measure $\tilde{\nu}^+$ satisfies (2.91).*

Proof of Proposition 38. The proof is quite similar to the proof of Proposition 17. For $\varphi \in \Gamma$, let $F_\varphi(t)$ denote the right-hand side of (2.97) :

$$F_\varphi(t) = \langle f_0, \varphi \rangle + \tilde{J}_\varphi(t) - \langle \tilde{m}, \partial_\xi \varphi \rangle([0, t]). \quad (2.99)$$

We define $\tilde{\Omega}^+$ as the intersection of the three following events : first (2.97), second : “for all $\varphi \in \Gamma$, F_φ is càdlàg”, third the event

$$\sup_{J \subset [0, T]} \frac{1}{|J|} \int_J \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\tilde{\nu}_{x,t}(\xi) dx dt < +\infty,$$

where the supremum over intervals J is as in (2.80) (a countable supremum over all open intervals $J \subset [0, T]$ with rational extremities). Assume that $\tilde{\Omega}^+$ is realized (say we draw a particular $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}^+$). Assume in particular that

$$\frac{1}{|J|} \int_J \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\tilde{\nu}_{x,t}(\xi) dx dt \leq C_p(\tilde{\omega}), \quad (2.100)$$

for all open intervals $J \subset [0, T]$ with rational extremities. Then the map

$$t \mapsto \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\tilde{\nu}_{x,t}(\xi) dx$$

is integrable on $(0, T)$. A simple approximation procedure shows then that (2.100) holds true when J is any interval in $[0, T]$.

Let $t_* \in [0, T)$. Let (ε_l) be a sequence of positive numbers decreasing to 0 such that $t_* + \varepsilon_1 < T$. Let $J_l = (t_*, t_* + \varepsilon_l)$. Consider the sequence of Young measures, and corresponding kinetic functions

$$\tilde{\nu}_x^{(l)} = \frac{1}{|J_l|} \int_{J_l} \tilde{\nu}_{x,t} dt, \quad \tilde{f}^{(l)}(x, \xi) = \tilde{\nu}_x^{(l)}(\xi, +\infty) = \frac{1}{|J_l|} \int_{J_l} \tilde{f}(x, t, \xi) dt.$$

Since the Borel σ -algebra of \mathbb{T}^N is countably generated (\mathbb{T}^N being separable), we can apply Theorem 10 and Corollary 11. There exists a subsequence (l_m) and a Young measure $\tilde{\nu}^*$ such that $\tilde{\nu}^{(l_m)} \rightarrow \tilde{\nu}^*$ in the sense of (2.19) and $\tilde{f}^{(l_m)} \rightarrow \tilde{f}^*$ in $L^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ weak-*, where $\tilde{f}^*(x, \xi) = \tilde{\nu}_x^*(\xi, +\infty)$. The limit \tilde{f}^* is unique. Indeed, if $\varphi \in \Gamma$, then, due to (2.97) and to the Fubini theorem, and due to the right-continuity of F_φ , we have

$$\langle \tilde{f}^{(l)}, \varphi \rangle = \frac{1}{|J_l|} \int_{J_l} F_\varphi(t) dt \rightarrow F_\varphi(t_*).$$

This implies

$$\langle \tilde{f}^*, \varphi \rangle = F_\varphi(t_*). \quad (2.101)$$

Since Γ is dense, \tilde{f}^* and $\tilde{\nu}^* = -\partial_\xi \tilde{f}^*$ are unique. We deduce that the convergence holds along the whole sequence $l = 1, 2, \dots$, independently on $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}^+$ and on $t_* \in [0, T)$. Consequently, setting

$$\tilde{\nu}_{x,t_*}^+ = \tilde{\nu}_x^*, \quad \tilde{f}^+(x, t_*, \xi) = \tilde{\nu}_{x,t_*}^+(\xi, +\infty),$$

we have : for all $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}^+$, for all $t \in [0, T)$, for all $\phi \in C_b(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$,

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} \iint_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} \phi(x, \xi) d\tilde{\nu}_{x,s}(\xi) dx ds \rightarrow \iint_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} \phi(x, \xi) d\tilde{\nu}_{x,t}^+(\xi) dx. \quad (2.102)$$

Since T is arbitrary, we can as well work on $[0, T + 1]$, instead of $[0, T]$. In that way, we can give a meaning to $\tilde{\nu}_{x,t}^+$ for $t = T$ also. By (2.97) and (2.101), we have $\tilde{f}^+(x, t, \xi) = \tilde{f}(x, t, \xi)$ and $\tilde{\nu}_{x,t}^+ = \tilde{\nu}_{x,t}$ for all $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}^+$, for all $t \in (0, T) \setminus N_0$, for a.e. $(x, \xi) \in \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}$. If $\phi \in C_b(\mathbb{R})$ and $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}^+$, then $(x, t) \mapsto \langle \tilde{\nu}_{x,t}, \phi \rangle$ is measurable and $(x, t) \mapsto \langle \tilde{\nu}_{x,t}^+, \phi \rangle$ differs from the latter function on a negligible subset of $\mathbb{T}^N \times (0, T)$. Therefore $(x, t) \mapsto \langle \tilde{\nu}_{x,t}^+, \phi \rangle$ itself is measurable. We deduce that $\tilde{\nu}^+$ and \tilde{f}^+ satisfy the measurability properties of a random Young measure and a random kinetic function respectively, and point 1 of the proposition is proved. The point 2 of the proposition follows from (2.101), which gives $\langle \tilde{f}(t), \varphi \rangle = F_\varphi(t)$ for all t . We have established item 7 of the proposition for $\varphi \in \Gamma$ only. By density the results remains true for all $\varphi \in C_c(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$. To obtain the last point 3 of the

proposition. We note first that $\tilde{\nu}^+$, like $\tilde{\nu}$, satisfies (2.80). If

$$\sup_{J \subset [0, T]} \frac{1}{|J|} \int_J \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\tilde{\nu}_{x,t}^+(\xi) dx dt < +\infty,$$

which happen $\tilde{\mathbb{P}}$ -almost surely, then

$$\sup_{J \subset [0, T]} \frac{1}{|J|} \int_J \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\tilde{\nu}_{x,t}^+(\xi) dx dt = \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\tilde{\nu}_{x,t}^+(\xi) dx$$

by right-continuity of $t \mapsto \tilde{\nu}_t^+$. This gives the desired result. \square

We will now consider only the càdlàg versions : we replace $\tilde{\nu}$ by $\tilde{\nu}^+$ and \tilde{f} by \tilde{f}^+ . This amounts to a modification on a negligible set. Therefore, this does not affect the results 1, 2, 4, 5, 6 in Theorem 36. We have now also items 7 and 8 of the theorem. There remains to define the filtration $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$, the Wiener processes $\tilde{\beta}_k$ and to prove the points 3 and 9 of the theorem. We define $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$, $\tilde{\beta}_k$ and show item 3 in the proof of convergence of the stochastic integral in the next section 2.1.4.5. The equation (2.92) is established in Section 2.1.4.5. To finish the current section, let us first record the fact that (2.97) is now true for all t , due to our re-definition of \tilde{f} and to (2.101) : $\tilde{\mathbb{P}}$ -almost surely,

$$\text{for all } t \in [0, T], \text{ for all } \varphi \in \Gamma, \langle \tilde{f}(t), \varphi \rangle = \langle f_0, \varphi \rangle + \tilde{J}_\varphi(t) - \langle \tilde{m}, \partial_\xi \varphi \rangle([0, t]). \quad (2.103)$$

We deduce from (2.103) the following lemma.

Proposition 39. *There exists a countable subset $\tilde{B} \subset [0, T]$ such that, $\tilde{\mathbb{P}}$ -almost surely, for all $t \in [0, T] \setminus \tilde{B}$, for all $\varphi \in C_c(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, $\langle \tilde{f}^n(t), \varphi \rangle \rightarrow \langle \tilde{f}(t), \varphi \rangle$.*

Proof of Proposition 39. It is sufficient to obtain the convergence for $\varphi \in \Gamma$. We apply Lemma 2. Let

$$\tilde{B} = \left\{ t \in [0, T]; \tilde{\mathbb{P}}(\pi_{\#} \tilde{m}(\{t\}) > 0) > 0 \right\}. \quad (2.104)$$

Then \tilde{B} is countable. Since $|\langle \tilde{m}, \partial_\xi \varphi \rangle(\{t\})| \leq \|\partial_\xi \varphi\|_{L^\infty} \pi_{\#} \tilde{m}(\{t\})$, $\tilde{\mathbb{P}}$ -almost surely, we have $\langle \tilde{m}, \partial_\xi \varphi \rangle(\{t\}) = 0$ for all $t \in [0, T] \setminus \tilde{B}$. For $t \in [0, T] \setminus \tilde{B}$ then, the right-hand side of (2.96) is converging to the right-hand side of (2.103). We deduce the convergence of the left-hand sides, i.e. $\langle \tilde{f}^n(t), \varphi \rangle \rightarrow \langle \tilde{f}(t), \varphi \rangle$. \square

Identification of the limit : convergence of the stochastic integral

Let us set

$$M_\varphi^*(t) = \sum_{k \geq 1} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} g_k(x, \xi) \varphi(x, \xi) d\tilde{\nu}_{x,s}(\xi) dx d\tilde{\beta}_k(s), \quad (2.105)$$

($\tilde{\beta}_k$ is defined in Lemma 43 below). Our aim is to prove the identification $\{\tilde{M}\} = \{M^*\}$. To obtain this result, we will use the martingale characterization developed in Section 2.1.4. The proof is decomposed in several steps.

Step 1. Filtration The approximation procedures to (2.1) (vanishing viscosity method, Finite Volume method as here) construct approximate solutions on arbitrary time intervals $[0, T]$. We will therefore consider the functions as defined on the whole time interval \mathbb{R}_+ . This is simply to avoid the special case of the final time in the definition of the Skorokhod space $D([0, T])$, cf. [Bil13], [JS13, Remark 1.10, p. 326]. Let E be a Polish space. Let us introduce the following notations (see [JS13, Definition 1.1 p. 325] in the case $E = \mathbb{R}^m$): on the space $D(\mathbb{R}_+; E)$, $\mathcal{D}_t^0(E)$ is the σ -algebra generated by the maps $\alpha \mapsto \alpha(s)$, $s \leq t$;

$$\mathcal{D}_t(E) = \bigcap_{t < s} \mathcal{D}_s^0(E), \quad \mathcal{D}_{t-}(E) = \bigvee_{s < t} \mathcal{D}_s(E).$$

Note that $\mathcal{D}_t(E) \neq \mathcal{D}_t^0(E)$: the time of entrance in an open subset U of E ,

$$\tau_U(\alpha) = \inf \{t \geq 0; \alpha(t) \in U\}$$

is a stopping time with respect to $(\mathcal{D}_t(E))$, but not with respect to $(\mathcal{D}_t^0(E))$ [RY13, Proposition I.4.6].

Proposition 40. *Let $t > 0$. Given a continuous bounded function $\theta: E \rightarrow \mathbb{R}$, $s \in [0, t)$ and $\varepsilon > 0$, let $\theta_{\#s}$ denote the evaluation map $\alpha \mapsto \theta(\alpha(s))$ on $D(\mathbb{R}_+; E)$, and let $\theta_{\#s}^\varepsilon$ denote the regularization*

$$\theta_{\#s}^\varepsilon: \alpha \rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \int_s^{t \wedge (s+\varepsilon)} \theta(\alpha(\sigma)) d\sigma \quad (2.106)$$

of $\theta_{\#s}$. Then $\theta_{\#s}^\varepsilon$ is a $\mathcal{D}_{t-}(E)$ -measurable bounded function, continuous for the Skorokhod topology. Let \mathcal{H} denote the set of functions

$$H = \theta_{\#s_1}^{1, \varepsilon_1} \cdots \theta_{\#s_k}^{k, \varepsilon_k}, \quad (2.107)$$

where $k \geq 1$, $0 \leq s_1 < \cdots < s_k < t$, $0 < \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$, $\theta^1, \dots, \theta^k \in C_b(E)$. Then every characteristic function $\mathbf{1}_A$ of a cylindrical set $A \in \mathcal{D}_{t-}(E)$ of the form

$$A = \{\alpha \in D(\mathbb{R}_+; E); \alpha(\tau_1) \in B_1, \dots, \alpha(\tau_k) \in B_k\}, \quad (2.108)$$

for B_1, \dots, B_k closed subsets of E and $0 \leq \tau_1 < \cdots < \tau_k < t$, is the bounded pointwise limit of a sequence of functions in \mathcal{H} .

Proof of Proposition 40. This is essentially the proof of [JS13, Lemma 1.45 p.335]. Let $\alpha \in D(\mathbb{R}_+; E)$ and let (α_n) be a sequence in $D(\mathbb{R}_+; E)$ such that

$\alpha_n \rightarrow \alpha$ a.e. on $[0, t]$: this is the case if $\alpha_n \rightarrow \alpha$ in $D(\mathbb{R}_+; E)$ since $\alpha_n(\sigma) \rightarrow \alpha(\sigma)$ for every σ not in the (countable) jump set of α . Then, by the dominated convergence theorem, $\theta_{\#s}^\varepsilon(\alpha_n) \rightarrow \theta_{\#s}^\varepsilon(\alpha)$. Therefore $\theta_{\#s}^\varepsilon$ is a bounded function, continuous for the Skorokhod topology. It is $\mathcal{D}_{t-}(E)$ -measurable since it is the bounded pointwise limit when $\eta \rightarrow 0$ of the sequence of $\mathcal{D}_{t-}(E)$ -measurable functions

$$\alpha \rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \int_s^{(t-\eta) \wedge (s+\varepsilon)} \theta(\alpha(\sigma)) d\sigma.$$

Let us prove the last point. We can choose some sequences of continuous bounded functions $\theta_1^n, \dots, \theta_k^n : E \rightarrow \mathbb{R}$ converging pointwise to the characteristic functions $\mathbf{1}_{B_1}, \dots, \mathbf{1}_{B_k}$ (by considering, for example, the function distance to B_j , which is continuous). Since $\theta_{\#s}^\varepsilon$ is approaching $\theta_{\#s}$ for the bounded pointwise convergence, the result follows. \square

Remark 41. Note that the function H defined by (2.107) is more than merely continuous for the Skorokhod topology. Indeed, what we have seen in the proof of Proposition 40 is that, for any $\alpha \in D(\mathbb{R}_+; E)$ and any sequence (α_n) in $D(\mathbb{R}_+; E)$ such that $\alpha_n \rightarrow \alpha$ a.e. on $[0, t]$, we have $H(\alpha_n) \rightarrow H(\alpha)$.

Let us set

$$\{\tilde{f}\} = (\langle \tilde{f}, \varphi_j \rangle)_{j \in \mathbb{N}}, \quad E = \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty \times \mathfrak{U}.$$

Recall that \mathbb{R}^∞ is the product space $\prod_{\varphi \in \Gamma} \mathbb{R}$ endowed with the topology of pointwise convergence. Since E is a product of Polish spaces, it is a Polish space. Since the product of $D(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^\infty)$ with $C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^\infty \times \mathfrak{U})$ is, topologically, a subset of $D(\mathbb{R}_+; E)$, the triplet $(\{\tilde{f}\}, \{\tilde{M}\}, \tilde{W})$ is an element of $D(\mathbb{R}_+; E)$.

Definition 42. The filtration $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ is the completion of the filtration generated by the triplet $(\{\tilde{f}\}, \{\tilde{M}\}, \tilde{W})$:

$$\tilde{\mathcal{F}}_t = \sigma\left(\left(\{\tilde{f}\}, \{\tilde{M}\}, \tilde{W}\right)^{-1}(\mathcal{D}_t(E)) \cup \{N \in \tilde{\mathcal{F}}; \tilde{\mathbb{P}}(N) = 0\}\right), \quad t \in [0, T]. \quad (2.109)$$

Note that $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ is right-continuous since $(\mathcal{D}_t(E))$ is, and complete by definition.

Step 2. Wiener process Let $j : H \rightarrow \mathfrak{U}$ denote the injection of H into \mathfrak{U} . Note that $j \circ j^*$ is a Trace-class operator on \mathfrak{U} . The Brownian motions $\tilde{\beta}_k(t)$ are the components of $\tilde{W}(t)$ on the orthonormal basis (e_k) :

Lemma 43. The process \tilde{W} has a modification which is a $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ -adapted $j \circ j^*$ -Wiener process, and there exists a collection of mutually independent real-valued $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ -Brownian motions $\{\tilde{\beta}_k\}_{k \geq 1}$ such that

$$\tilde{W} = \sum_{k \geq 1} \tilde{\beta}_k e_k \quad (2.110)$$

in $C([0, T]; \mathfrak{U})$.

Note : see [DZ92, Paragraph 4.1] for the definition of a Q -Wiener process.

Proof of Lemma 43. It is clear that \tilde{W} is a $j \circ j^*$ -cylindrical Wiener process (this notion is stable by convergence in law; actually it can be characterized in terms of the law of \tilde{W} uniquely if we drop the usual hypothesis of a.s. continuity of the trajectories. This latter property of continuity can be recovered, after a possible modification of the process, by using Kolmogorov's Theorem). Also \tilde{W} is $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ -adapted by definition of the filtration $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$. By [DZ92, Proposition 4.1], we obtain the decomposition (2.110). The $\tilde{\mathbb{P}}$ -a.s. convergence of the sum in (2.110) in the space $C([0, T]; \mathfrak{U})$ is proved as in [DZ92, Theorem 4.3]. \square

Note that the last component \tilde{W}^n of \tilde{Z}^n depends a priori on n . Without loss of generality, we will replace \tilde{W}^n by \tilde{W} . Of course, this does not affect the almost sure convergence of \tilde{Z}^n to \tilde{Z} , and Lemma 43 asserts that this does not modify the law of \tilde{Z}^n . This operation is not mandatory for the validity of what follows, and quite natural since the original sequence (Z^n) is stationary (as a sequence) with respect to its last argument.

Step 3. Martingales

Proposition 44. Let $\varphi_j \in \Gamma$. Let $\tilde{h}_{j,k}(t)$ be defined by

$$\tilde{h}_{j,k}(t) = \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} g_k(x, \xi) \varphi_j(x, \xi) d\tilde{\nu}_{x,t}(\xi) dx.$$

Then, for $j \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, the processes

$$\tilde{M}_j(t), \quad \tilde{M}_j(t) \tilde{\beta}_k(t) - \int_0^t \tilde{h}_{j,k}(s) ds, \quad |\tilde{M}_j(t)|^2 - \int_0^t \|\tilde{h}_j(s)\|_{l^2(\mathbb{N}^*)}^2 ds, \quad (2.111)$$

and $(\tilde{W}(t))$ are $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ -martingales.

Proof of Proposition 44. The proof is similar to the proof of [JS13, Proposition 1.1 p.522], except that we do not use any hypothesis of boundedness here since we use the $\tilde{\mathbb{P}}$ -almost sure convergence and the Vitali Theorem to pass to the limit in the expectation of the quantities of interest (an other minor difference with the proof of [JS13, Proposition 1.1 p.522] is that \tilde{M} is known to be continuous $\tilde{\mathbb{P}}$ -a.s., not only càdlàg).

Let $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$, $t_1 < t_2$ and let H be a $\mathcal{D}_{t_1-}(E)$ -measurable bounded function as in (2.107). By identities of the laws of M_φ^n and \tilde{M}_φ^n , we have

$$\tilde{\mathbb{E}} |\tilde{M}_{\varphi_j}^n(t_2) - \tilde{M}_{\varphi_j}^n(t_1)|^2 = \mathbb{E} |M_{\varphi_j}^n(t_2) - M_{\varphi_j}^n(t_1)|^2.$$

Using (2.90), it follows that

$$\sup_n \tilde{\mathbb{E}} \left| H \left(\{\tilde{f}^n\}, \{\tilde{M}^n\}, \tilde{W} \right) \left[\tilde{M}_{\varphi_j}^n(t_2) - \tilde{M}_{\varphi_j}^n(t_1) \right] \right|^2 < +\infty,$$

since H is bounded. We have in addition

$$\left(\{\tilde{f}^n\}, \{\tilde{M}^n\}, \tilde{W}\right) \rightarrow \left(\{\tilde{f}\}, \{\tilde{M}\}, \tilde{W}\right) \quad (2.112)$$

a.e., $\tilde{\mathbb{P}}$ -almost surely by Proposition 39 and thus,

$$H\left(\{\tilde{f}^n\}, \{\tilde{M}^n\}, \tilde{W}\right) \rightarrow H\left(\{\tilde{f}\}, \{\tilde{M}\}, \tilde{W}\right),$$

$\tilde{\mathbb{P}}$ -almost surely. There is also convergence

$$\tilde{M}_{\varphi_j}^n(t_2) - \tilde{M}_{\varphi_j}^n(t_1) \rightarrow \tilde{M}_j(t_2) - \tilde{M}_j(t_1)$$

$\tilde{\mathbb{P}}$ -almost surely. By Vitali's Theorem, we obtain

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}} \left[H\left(\{\tilde{f}^n\}, \{\tilde{M}^n\}, \tilde{W}\right) \left(\tilde{M}_{\varphi_j}^n(t_2) - \tilde{M}_{\varphi_j}^n(t_1)\right) \right] \\ \rightarrow \tilde{\mathbb{E}} \left[H\left(\{\tilde{f}\}, \{\tilde{M}\}, \tilde{W}\right) \left(\tilde{M}_j(t_2) - \tilde{M}_j(t_1)\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.113)$$

By identities of the laws, the left-hand side of (2.113) is

$$\mathbb{E} \left[H\left(\{f^n\}, \{M^n\}, W\right) \left(M_{\varphi_j}^n(t_2) - M_{\varphi_j}^n(t_1)\right) \right] = 0,$$

since M_{φ}^n is a (\mathcal{F}_t) -martingale. We deduce from (2.113) thus that

$$\tilde{\mathbb{E}} \left[H\left(\{\tilde{f}\}, \{\tilde{M}\}, \tilde{W}\right) \left(\tilde{M}_j(t_2) - \tilde{M}_j(t_1)\right) \right] = 0. \quad (2.114)$$

Due to Proposition 40, we deduce from (2.114) that

$$\tilde{\mathbb{E}} \left[\mathbf{1}_A\left(\{\tilde{f}\}, \{\tilde{M}\}, \tilde{W}\right) \left(\tilde{M}_j(t_2) - \tilde{M}_j(t_1)\right) \right] = 0, \quad (2.115)$$

for all cylindrical sets A as in (2.108). The left-hand side of (2.115) defines a finite measure (due to (2.90)) which coincides with the trivial measure $A \mapsto 0$ for sets A as in (2.108). Since such sets form a π -system which generates $\mathcal{D}_{t_1-}(E)$, hence a separating class, we deduce that (2.115) holds true for all $A \in \mathcal{D}_{t_1-}(E)$. It follows then also that (2.114) is satisfied for all $\mathcal{D}_{t_1-}(E)$ -measurable bounded function H . Let now $s, t \in [0, T)$ with $s < t$. Let (s_n) and (t_n) be some decreasing sequences in \mathbb{R}_+ , converging to s and t respectively. Let H be a $\mathcal{D}_s(E)$ -measurable bounded function. Then H is a $\mathcal{D}_{s_n-}(\mathbb{R}^{2+m})$ -measurable bounded function since $s < s_n$. By passing to the limit in (2.114) written with $t_1 = s_n, t_2 = t_n$ (we use the right-continuity of the processes here), we obtain

$$\tilde{\mathbb{E}} \left[H\left(\{\tilde{f}\}, \{\tilde{M}\}, \tilde{W}\right) \left(\tilde{M}_j(t) - \tilde{M}_j(s)\right) \right] = 0. \quad (2.116)$$

This shows that $(\tilde{M}_j(t))$ is a $\tilde{\mathcal{F}}_t$ -martingale. The proof that $(\tilde{W}(t))$ is a $\tilde{\mathcal{F}}_t$ -

martingale is similar, we do not give the details of that point. To go on, let us define now the processes

$$\tilde{H}_{j,k}^n(t) = \int_0^t \tilde{h}_{j,k}^n(s) ds, \quad \tilde{H}_{j,k}(t) = \int_0^t \tilde{h}_{j,k}(s) ds,$$

and

$$\tilde{\mathcal{H}}_j^n(t) = \int_0^t \|\tilde{h}_j^n(s)\|_{l^2(\mathbb{N}^*)}^2 ds, \quad \tilde{\mathcal{H}}_j(t) = \int_0^t \|\tilde{h}_j(s)\|_{l^2(\mathbb{N}^*)}^2 ds,$$

and the processes

$$\begin{cases} \tilde{Y}_{j,k}^n(t) = \tilde{M}_j^n(t)\tilde{\beta}_k(t) - \tilde{H}_{j,k}^n(t), & \tilde{Y}_{j,k}(t) = \tilde{M}_j(t)\tilde{\beta}_k(t) - \tilde{H}_{j,k}(t), \\ \tilde{V}_j^n(t) = |\tilde{M}_j^n(t)|^2 - \tilde{\mathcal{H}}_j^n(t), & \tilde{V}_j(t) = |\tilde{M}_j(t)|^2 - \tilde{\mathcal{H}}_j(t). \end{cases}$$

To complete the proof of Proposition 44, we have to show that $(\tilde{Y}_k(t))$ and $(\tilde{V}_j(t))$ are $\tilde{\mathcal{F}}_t$ -martingale. We will use the following result.

Lemma 45. *Let $T > 0$. Then, up to a subsequence, for all $j \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$, $\tilde{\mathbb{P}}$ -almost surely, $\tilde{h}_{j,k}^n \rightarrow \tilde{h}_{j,k}$ and $\|\tilde{h}_j^n(\cdot)\|_{l^2(\mathbb{N}^*)}^2 \rightarrow \|\tilde{h}_j(\cdot)\|_{l^2(\mathbb{N}^*)}^2$ in $L^1(0, T)$, when $n \rightarrow +\infty$.*

Lemma 45 implies that, $\tilde{\mathbb{P}}$ -almost surely, for every $t \in [0, T]$, $\tilde{H}_{j,k}^n(t)$ and $\tilde{\mathcal{H}}_j^n(t)$ are converging to $\tilde{H}_{j,k}(t)$ and $\tilde{\mathcal{H}}_j(t)$ respectively. We have also $\tilde{M}_j^n \rightarrow \tilde{M}_j$ in $C(\mathbb{R}_+)$, from which follows the convergences $\tilde{M}_j^n \tilde{\beta}_k \rightarrow \tilde{M}_j \tilde{\beta}_k$ and $|\tilde{M}_j^n|^2 \rightarrow |\tilde{M}_j|^2$ in $C(\mathbb{R}_+)$, $\tilde{\mathbb{P}}$ -almost surely. We deduce that, $\tilde{\mathbb{P}}$ -almost surely,

$$\tilde{Y}_{j,k}^n(t) \rightarrow \tilde{Y}_{j,k}(t), \quad \tilde{V}_j^n(t) \rightarrow \tilde{V}_j(t), \quad (2.117)$$

for all $t \geq 0$. With the estimate (2.90), it is easy to obtain the bounds

$$\tilde{\mathbb{E}}|\tilde{Y}_{j,k}^n(t) - \tilde{Y}_{j,k}^n(s)|^2 \leq C, \quad \tilde{\mathbb{E}}|\tilde{V}_j^n(t) - \tilde{V}_j^n(s)|^2 \leq C, \quad (2.118)$$

where the constant C depend on $s, t \in [0, T]$, k , but not on n . By (2.117) and (2.118) (this last condition shows the equi-integrability of $(\tilde{Y}_{j,k}^n(t) - \tilde{Y}_{j,k}^n(s))$ and $(\tilde{V}_j^n(t) - \tilde{V}_j^n(s))$ respectively), we can use the arguments applied to the martingale $\tilde{M}_\varphi^n(t)$ in the first part of the proof : it will establish that $\tilde{Y}_{j,k}(t)$ and $\tilde{V}_j(t)$ are $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ -martingales. \square

Let us now give the

Proof of Lemma 45. Let us first show that, for all j, k , we have the following convergence :

$$\tilde{h}_{j,k}^n \rightarrow \tilde{h}_{j,k} \quad \text{in } L^2((0, T) \times \tilde{\Omega}). \quad (2.119)$$

Define, for every $\psi \in C_b(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$,

$$\tilde{h}_\psi^n(t) = \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \psi(x, \xi) d\tilde{\nu}_{x,t}^n(\xi) dx, \quad \tilde{h}_\psi(t) = \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \psi(x, \xi) d\tilde{\nu}_{x,t}(\xi) dx. \quad (2.120)$$

If $\psi \in C_c^1(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, then $\tilde{h}_\psi^n(t) = \langle \tilde{f}^n(t), \partial_\xi \psi \rangle$. By Proposition 39, we have then, $\tilde{\mathbb{P}}$ -almost surely,

$$\text{for all } t \in [0, T] \setminus \tilde{B}, \quad \tilde{h}_\psi^n(t) \rightarrow \tilde{h}_\psi(t). \quad (2.121)$$

Using the Jensen inequality, we have

$$\|\tilde{h}_\psi^n - \tilde{h}_\psi\|_{L^2((0, T) \times \tilde{\Omega})}^2 \leq 4T \|\psi\|_{C_b(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})}^2. \quad (2.122)$$

By the Vitali Theorem, we obtain the convergence $\tilde{h}_\psi^n \rightarrow \tilde{h}_\psi$ in $L^1((0, T) \times \tilde{\Omega})$. Using (2.122) also, we see that this convergence can be extended to the case of a general integrand $\psi \in C_b(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$. Let us then take $\psi = g_k \varphi_j$. We obtain first $\tilde{h}_{j,k}^n \rightarrow \tilde{h}_{j,k}$ in $L^2((0, T) \times \tilde{\Omega})$. It follows that, up to a subsequence, $\tilde{\mathbb{P}}$ -almost surely, $\tilde{h}_{j,k}^n \rightarrow \tilde{h}_{j,k}$ in $L^2(0, T)$, hence in $L^1(0, T)$. The subsequence and the $\tilde{\mathbb{P}}$ -almost sure property can be made independent on j, k since $\Gamma \times \mathbb{N}^*$ is countable. The growth hypothesis (2.3) also shows that

$$\sum_k \|\tilde{h}_{j,k}^n - \tilde{h}_{j,k}\|_{L^2((0, T) \times \tilde{\Omega})}^2 \leq 4D_0(1 + C_2)T \|\varphi_j\|_{C_b(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})}^2.$$

Again, using the dominated convergence theorem, we deduce that

$$\|\tilde{h}_j^n\|_{l^2(\mathbb{N}^*)}^2 \rightarrow \|\tilde{h}_j\|_{l^2(\mathbb{N}^*)}^2$$

in $L^1((0, T) \times \tilde{\Omega})$, which allows to conclude the proof of the lemma. \square

Step 4. Conclusion of the martingale method Let us first prove that $M_\varphi^*(t)$ given in (2.105) is well-defined.

Lemma 46. *Item 3 in Theorem 36 is satisfied, i.e. : for all $\psi \in C_b(\mathbb{R})$, $(x, t) \mapsto \langle \psi, \tilde{\nu}_{x,t} \rangle$ belongs to $L^2_{\tilde{\mathbb{P}}}(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \tilde{\Omega})$.*

Proof of Lemma 46. For $\psi \in C_b(\mathbb{R})$, set $\tilde{X}_\psi(x, t) = \langle \psi, \tilde{\nu}_{x,t} \rangle$. We have $\tilde{X}_\psi \in L^2(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \tilde{\Omega})$, with

$$\tilde{\mathbb{E}} \|\tilde{X}_\psi\|_{L^2(\mathbb{T}^N \times [0, T])}^2 \leq \|\psi\|_{C_b(\mathbb{R})}^2 T. \quad (2.123)$$

If $\theta \in C(\mathbb{T}^N)$, and if ψ is C^1 , vanishes in the neighbourhood of $-\infty$ and satisfies $\psi' \in C_c(\mathbb{R})$, then, due to (2.35), we have

$$\langle \tilde{X}_\psi(t), \theta \rangle_{L^2(\mathbb{T}^N)} = \langle \tilde{f}(t), \varphi \rangle, \quad \varphi(x, \xi) := \theta(x) \psi'(\xi).$$

By Item 7 of Theorem 36, the process $Y_t := \langle \tilde{X}_\psi(t), \theta \rangle_{L^2(\mathbb{T}^N)}$ is càdlàg. Since (Y_t) is adapted by definition of $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$, it is an optional process [RY13, p. 172]. In particular, (Y_t) is progressively measurable [RY13, Proposition 4.8], hence $Y \in L^2_{\tilde{\mathbb{P}}}([0, T] \times \tilde{\Omega})$. A limiting argument (by approximation and truncation of

the function ψ in particular), using (2.123) and the fact that \tilde{v} vanishes at infinity shows that the result holds true when ψ is merely a function in $C_b(\mathbb{R})$ and θ any function in $L^2(\mathbb{T}^N)$. We obtain, therefore, that, for all $\psi \in C_b(\mathbb{R})$, X_ψ belongs to $L^2_{\tilde{\mathbb{P}}}([0, T] \times \tilde{\Omega}; L^2(\mathbb{T}^N) - \text{weak})$. Since being weakly or strongly $\tilde{\mathbb{P}}$ -measurable is the same thing, (cf. Section 2.1.2.1), we have established the result. \square

We can apply now Proposition 32. Indeed, due to Lemma 46, the processes $\tilde{h}_{j,k}$ in Proposition 44 are in $L^2_{\tilde{\mathbb{P}}}([0, T] \times \tilde{\Omega})$. By the martingale property (2.111), we conclude that $\tilde{M}_\varphi(t) = M_\varphi^*(t)$, with $M_\varphi^*(t)$ defined by (2.105), for every $\varphi \in \Gamma$.

Identification of the limit : equation

We prove now (2.92). Let $\varphi \in \Gamma$. By item 2 and item 6 of Theorem 36, using also the identity $\tilde{M}_\varphi(t) = M_\varphi^*(t)$, we have the identification

$$\begin{aligned} \tilde{J}_\varphi(t) &= \int_0^t \langle \tilde{f}(s), a(\xi) \cdot \nabla \varphi \rangle ds + \sum_{k \geq 1} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} g_k(x, \xi) \varphi(x, \xi) d\tilde{\nu}_{x,s}(\xi) dx d\tilde{\beta}_k(s) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi \varphi(x, \xi) \mathbf{G}^2(x, \xi) d\tilde{\nu}_{x,s}(\xi) dx ds. \end{aligned}$$

The equation (2.92) follows therefore from the identity (2.103).

2.1.4.6 Pathwise solutions and almost sure convergence

If f_0 is at equilibrium in Theorem 36, then we have seen in Theorem 26 that (2.1) admits a unique solution for a given initial datum. We can use this uniqueness result to obtain existence of pathwise solution and convergence in L^p of the sequence of approximate solutions in that case.

Theorem 47 (Pathwise solution). *Suppose that there exists a sequence of approximate generalized solutions (f^n) to (2.1) with initial datum f_0^n satisfying (2.79), (2.83) and the tightness condition (2.84) and such that (f_0^n) converges to the equilibrium function $\mathbf{f}_0(\xi) = \mathbf{1}_{u_0 > \xi}$ in $L^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ -weak-*, where $u_0 \in L^\infty(\mathbb{T}^N)$. We have then*

1. *there exists a unique solution $u \in L^1(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \Omega)$ to (2.1) with initial datum u_0 ;*

2. *let*

$$u^n(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \xi d\nu_{x,t}^n(\xi) = \int_{\mathbb{R}} (f^n(x, t, \xi) - \mathbf{1}_{0 > \xi}) d\xi.$$

Then, for all $p \in [1, \infty]$, (u^n) is converging to u with the following two different modes of convergence : $u_n \rightarrow u$ in $L^p(\mathbb{T}^N \times (0, T) \times \Omega)$ and, for a subsequence (n_k) , almost surely, for all $t \in [0, T]$, $u^{n_k}(t) \rightarrow u(t)$ in $L^p(\mathbb{T}^N)$.

Proof of Theorem 47. We use the Gyöngy-Krylov argument, [GK96, Lemma 1.1] (the basis of the Gyöngy-Krylov argument is this simple fact : if a couple (X_n, Y_n) of random variables converges in law to a random variable written (Z, Z) , i.e. concentrated on the diagonal, then $X_n - Y_n$ converges to 0 in probability). Let us go back to Section 2.1.4.5. We introduce the random variable

$$Z^{n,q} = (\nu^n, \{J^n\}, \{M^n\}, \{\varepsilon^n\}, \{f_{\text{in}}^n\}, \mu^n, \|m^n\|, \nu^q, \{J^q\}, \{M^q\}, \{\varepsilon^q\}, \{f_{\text{in}}^q\}, \mu^q, \|m^q\|, W)$$

in the state space \mathcal{Z} equal to

$$\mathcal{Y}^1 \times \mathcal{E} \times \mathcal{P}^1(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{Y}^1 \times \mathcal{E} \times \mathcal{P}^1(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{X}_W.$$

We repeat the arguments used in Section 2.1.4.5 to show that $Z^{n,q}$ is tight in \mathcal{Z} and that there exists a probability space $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ and a new random variable $\tilde{Z}^{n,q}$ with the same law as $Z^{n,q}$, such that a subsequence $(\tilde{Z}^{n_i, q_i})_i$ is converging $\tilde{\mathbb{P}}$ -almost surely in \mathcal{Z} to a random variable \tilde{Z} . Let $\tilde{\nu}$ be the first component of \tilde{Z} and $\check{\nu}$ be the seventh component of \tilde{Z} . Repeating all steps from Section 2.1.4.5, 2.1.4.5, 2.1.4.5, we obtain two generalized solutions

$$\tilde{f}(x, t, \xi) = \tilde{\nu}_{(x,t)}(\xi, +\infty), \quad \check{f}(x, t, \xi) = \check{\nu}_{(x,t)}(\xi, +\infty),$$

to Equation (2.1) with probabilistic data $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}, (\tilde{\mathcal{F}}_t), \tilde{W})$, where $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ is the completion of the filtration generated by the five-uplet $(\{\tilde{f}\}, \{\tilde{M}\}, \{\check{f}\}, \{\check{M}\}, \tilde{W})$:

$$\tilde{\mathcal{F}}_t = \sigma((\{\tilde{f}\}, \{\tilde{M}\}, \{\check{f}\}, \{\check{M}\}, \tilde{W})^{-1}(\mathcal{D}_t(E) \times \mathcal{D}_t(\check{E})) \cup \{N \in \tilde{\mathcal{F}}; \tilde{\mathbb{P}}(N) = 0\}),$$

for $t \in [0, T]$, with

$$E := \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty, \quad \check{E} := \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty \times \mathfrak{U}.$$

Note that $\mathcal{D}_t(E) \times \mathcal{D}_t(\check{E}) \neq \mathcal{D}_t(E \times \check{E})$ since the natural topologies of $D(\mathbb{R}_+; E) \times D(\mathbb{R}_+; \check{E})$ and $D(\mathbb{R}_+; E \times \check{E})$ are different (the topology of the former is the product topology of the Skorokhod topologies on each space : this authorizes two changes of times, one for each coordinate ; for the Skorokhod topology on $D(\mathbb{R}_+; E \times \check{E})$, only one change of time is admissible). The solutions \tilde{f} and \check{f} have the same initial condition f_0 , which is an equilibrium function \mathfrak{f}_0 . By Theorem 26, we have

$$\tilde{f} = \check{f} = \mathfrak{f}, \tag{2.124}$$

where \mathfrak{f} is the equilibrium function $\mathbf{1}_{\tilde{u} > \xi}$, where

$$\tilde{u}(x, t) := \int_{\mathbb{R}} \xi d\tilde{\nu}_{(x,t)}(\xi).$$

A first consequence of (2.124) is that $\tilde{\nu} = \check{\nu}$, $\tilde{\mathbb{P}}$ -almost surely. By Remark 28 on the

uniqueness of the kinetic measure, we have also $\tilde{m} = \check{m}$, $\tilde{\mathbb{P}}$ -almost surely. We apply the Gyöngy-Krylov argument : we obtain that (ν^n) is converging in probability in \mathcal{Y}^1 and (m^n) is converging in probability in $\mathcal{M}_b(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R})$ -weak-*. Extracting an additional subsequence if necessary, we can assume that the convergences are also \mathbb{P} -almost sure. By the arguments of the sections 2.1.4.5, 2.1.4.5, 2.1.4.5, it follows that $f(t, x, \xi) := \nu_{x,t}(\xi, +\infty)$ is a generalized solution to (2.1). Note, to give few details, that we do not need to follow Step 1. and Step 2. of Section 2.1.4.5 here, since the filtration (\mathcal{F}_t) and the Wiener processes $\beta_k(t)$ are already known here. The convergence of the stochastic integral in $J_\varphi^n(t)$ does not require the martingale method of Step 3. of Section 2.1.4.5 either. Using the L^2 convergence of the integrand and (cf. Lemma 45) is sufficient by the Itô isometry.

We use the second identity in (2.124) now. It states, equivalently, that $\tilde{\mathbb{P}}$ -almost surely, for a.e. (x, t) , $\tilde{\nu}_{(x,t)} = \delta_{\tilde{u}(x,t)}$. The fact that $\tilde{\nu}$ is a Dirac mass can be characterized in terms of equality in the Jensen Inequality :

$$\tilde{\mathbb{E}} \iint_{\mathbb{T}^N \times (0, T)} \Phi \left(\int_{\mathbb{R}} \xi d\tilde{\nu}_{(x,t)}(\xi) \right) dxdt = \tilde{\mathbb{E}} \iint_{\mathbb{T}^N \times (0, T)} \int_{\mathbb{R}} \Phi(\xi) d\tilde{\nu}_{(x,t)}(\xi) dxdt, \quad (2.125)$$

where Φ is a strictly convex, polynomially bounded function, like $\Phi(\xi) = \xi^2$ for example. The identity (2.125) depends on $\text{Law}(\tilde{\nu}) = \text{Law}(\nu)$ uniquely. Therefore ν also is almost surely a Dirac mass : \mathbb{P} -almost surely, for a.e. (x, t) , $\nu_{(x,t)} = \delta_{u(x,t)}$, where

$$u(x, t) := \int_{\mathbb{R}} \xi d\nu_{(x,t)}(\xi).$$

(Remark that $\nu_{(x,t)} = \delta_{u(x,t)}$ a.s., a.e., is also a consequence of Theorem 26. However this theorem is difficult to show, and, although we have already used Theorem 26, the argument based on (2.125) is simple and natural). By Proposition 15, u is a solution to (2.1) : it is the unique solution by Theorem 26. Using Lemma 12, also, we have $\|u^n - u\|_{L^p(\mathbb{T}^N \times (0, T))}^p \rightarrow 0$ in probability. We also have the uniform bound

$$\mathbb{E} \|u^n - u\|_{L^p(\mathbb{T}^N \times (0, T))}^{pr} \leq C, \quad (2.126)$$

where $r > 1$ and C is independent on n . Taking (2.126) for granted, we deduce, with the convergence in probability, that $\mathbb{E} \|u^n - u\|_{L^p(\mathbb{T}^N \times (0, T))}^p \rightarrow 0$ and we obtain the first part of the second point of Theorem 47. The bound (2.126) follows from the estimate

$$\mathbb{E} \|u^n - u\|_{L^p(\mathbb{T}^N \times (0, T))}^{pr} \leq \mathbb{E} \|u^n - u\|_{L^{pr}(\mathbb{T}^N \times (0, T))}^{pr} T^{r-1},$$

and (2.9), (2.79). To prove that almost surely, for all $t \in [0, T]$, $u_n(t) \rightarrow u(t)$ in $L^p(\mathbb{T}^N)$, we use Lemma 12 and Proposition 39. It gives : almost surely, for all $t \in [0, T] \setminus B_{\text{at}}$, $u_n(t) \rightarrow u(t)$ in $L^p(\mathbb{T}^N)$, where B_{at} is defined in Lemma 2. Since, almost surely, u is continuous in time with values in $L^p(\mathbb{T}^N)$ by Corollary 27, it follows from (2.38) that B_{at} is empty. This gives the desired result. \square

2.1.5 Some applications

2.1.5.1 Vanishing viscosity method

Assume that (2.3) and (2.4) are satisfied. Consider the parabolic approximation to (2.1) :

$$du^\eta + \operatorname{div}(A(u^\eta))dt - \eta \Delta u^\eta dt = \Phi^\eta(x, u^\eta)dW(t). \quad (2.127)$$

For $\eta > 0$ and $u_0^\eta \in L^\infty(\mathbb{T}^N)$, the existence of solutions to (2.127) under the initial condition $u^\eta(0) = u_0^\eta$ has been proved in [GR00] provided the noise has a finite number of components. Therefore, we assume (compare to (2.2))

$$\Phi^\eta(x, u) = \sum_{1 \leq k \leq K_\eta} g_k(x, u)e_k, \quad (2.128)$$

where K_η is finite, $K_\eta \rightarrow +\infty$ when $\eta \rightarrow 0$. Let $(\eta_n) \downarrow 0$. In [DV10a], we have shown that the sequence (u^{η_n}) gives rise to a sequence of approximate generalized solutions (f^n) , with random measure m^n , given by

$$\begin{aligned} f^n &= \mathbf{f}^n = \mathbf{1}_{u^{\eta_n} > \xi}, \\ \langle m^n, \varphi \rangle &= \iint_{\mathbb{T}^N \times (0, T)} \varphi(x, t) \eta_n |\nabla_x u^{\eta_n}(x, t)|^2 dx dt, \\ \varepsilon_n(t, \varphi) &= \eta_n \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \mathbf{f}^n(x, s, \xi) \Delta \varphi(x, \xi) d\xi dx ds. \end{aligned}$$

Here the order is $d = 2$. Let $p \in [1, +\infty)$. By Theorem 47, we recover the result given in [DV10a] of convergence $u^\eta \rightarrow u$ in $L^p(\mathbb{T}^N \times (0, T) \times \Omega)$, where u is the solution to (2.1) with initial datum u_0 . We also obtain that, if $(\eta_n) \downarrow 0$, then, for a subsequence (n_k) , almost surely, for all $t \in [0, T]$, $u^{\eta_{n_k}}(t) \rightarrow u(t)$ in $L^p(\mathbb{T}^N)$.

2.1.5.2 BGK approximation

We consider now the following BGK approximation to (2.1) :

$$df^\eta + a(\xi) \cdot \nabla_x f^\eta dt = \frac{\mathbf{f}^\eta - f^\eta}{\eta} dt - \partial_\xi f^\eta \Phi^\eta dW(t) - \frac{1}{2} \partial_\xi (\mathbf{G}^2 \partial_\xi (-f^\eta)), \quad (2.129)$$

$$\mathbf{f}^\eta := \mathbf{1}_{u^\eta > \xi}, \quad u^\eta = \int_{\mathbb{R}} (f^\eta(\xi) - \mathbf{1}_{0 > \xi}) d\xi. \quad (2.130)$$

Assume (2.128), assume that (2.4) is satisfied and that (instead of (2.3)), either $\mathbf{G}^2(x, \xi) \leq D_0 |\xi^2|$ or $\mathbf{G}^2(x, \xi) \leq D_0$ is satisfied. M. Hofmanová has proved in [Hof15] the existence of solutions to (2.129)-(2.130) with given initial datum $f_0^\eta = \mathbf{f}_0^\eta = \mathbf{1}_{u_0^\eta > \xi}$ (the fact that the initial datum is at equilibrium can be relaxed). Let $(\eta_n) \downarrow 0$. Then $f^n := f^{\eta_n}$ provides a sequence of generalized approximate

solutions of order $d = 0$, with

$$\begin{aligned}\partial_\xi m^n &= \frac{\mathbf{f}^n - f^n}{\eta_n}, \\ \varepsilon_n(t, \varphi) &= 0.\end{aligned}$$

Let $u_0 \in L^\infty(\mathbb{T}^N)$. Assume $u_0^{n_k} \rightarrow u_0$ in $L^p(\mathbb{T}^N)$ for all $p \in [1, +\infty)$, and let u be the solution to (2.1) with initial datum u_0 . By Theorem 47, we recover the convergence $u^n \rightarrow u$ proved in [Hof15]. We have also : for a subsequence (n_k) , almost surely, for all $t \in [0, T]$, $u^{n_k}(t) \rightarrow u(t)$ in $L^p(\mathbb{T}^N)$

2.1.5.3 Approximation by the Finite Volume method

The approximation of (2.1) by the Finite Volume method is considered in 3.1.

Le paragraphe qui suit a plusieurs fonctions.

- La première et sans doute la principale : il donne le détail des démonstrations de l'article. En effet, la longueur, la difficulté de l'article et la tradition mathématique font que les démonstrations des différents lemmes, propriétés, corollaires et théorèmes de l'article sont souvent réduites à leurs étapes essentielles.
- La seconde : les démonstrations sont écrites avec $\int_0^T .dW(t)$ et non pas $\sum_k \int_0^T .d\beta(t)$, avec $\|\cdot\|_{L_2(H,\mathbb{R})}$ et non pas $\|\cdot\|_H$ ou $\|\cdot\|_{l^2(\mathbb{N})}$, avec $\Phi(x, u)$ et non pas $\Phi(x, u)e_k = g_k(x, u)$. Je pense que cette façon de faire est plus simple, plus pratique et donne une lecture plus aisée, même si dans l'article nous avons gardé les notations utilisées par Arnaud Debussche et Julien Vovelle dans [DV10b].
- La troisième : j'ai rappelé des notions importantes utilisées dans les démonstrations.
- La quatrième : j'ai essayé par moments, de donner des idées, des réflexions précédant ou accompagnant les démonstrations de l'article.

Il faut bien comprendre que ces détails sont une aide à la lecture. Je pense qu'il serait intéressant de lire l'article avec les détails et commentaires qui suivent, simultanément.

2.2 Détails des démonstrations du premier article

2.2.1 Sur l'introduction 2.1.1

$W(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(t) e_k$ n'est pas défini dans l'espace de Hilbert H , il est défini grâce à $J : H \rightarrow \mathfrak{U}$ injection de Hilbert-Schmidt (où \mathfrak{U} est un espace de Hilbert séparable quelconque) par

$$W(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(t) J e_k.$$

C'est la raison pour laquelle on appelle $W(t)$ un processus de Wiener cylindrique. C'est l'hypothèse (2.3)

$$\mathbf{G}^2(x, u) = \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x, u)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\Phi(x, u) e_k|^2 = \|\Phi(x, u)\|_{L_2(H,\mathbb{R})}^2 \leq D_0 (1 + |u|^2)$$

qui permet d'avoir $\Phi(x, u)$ opérateur de Hilbert-Schmidt, c'est à dire $\Phi(x, u) \in L_2(H, \mathbb{R})$.

En effet, $\Phi(x, u)$ est un opérateur linéaire qui vérifie $\Phi(x, u) e_k = g_k(x, u)$.

L'hypothèse (2.4)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x, u) - g_k(y, v)|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |(\Phi(x, u) - \Phi(y, v)) e_k|^2 \\ &= \|\Phi(x, u) - \Phi(y, v)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \leq D_1 (|x - y|^2 + |u - v|h(|u - v|)) \end{aligned}$$

permet d'avoir

$$\Phi : (x, u) \in \mathbb{T}^N \times \mathbb{R} \mapsto \Phi(x, u) \in L_2(H, \mathbb{R})$$

continue donc borélienne.

Nous avons suivi l'écriture utilisée dans l'article [DV10a] pour écrire l'équation étudiée :

$$du(x, t) + \operatorname{div}_x (A(u(x, t))) dt = \Phi(x, u(x, t)) dW(t).$$

C'est une écriture intermédiaire entre celle d'une EDP, à savoir

$$\frac{du(x, t)}{dt} + \operatorname{div}_x (A(u(x, t))) = \Phi(x, u(x, t)) \frac{dW(t)}{dt}$$

où

$$\frac{du(x, t)}{dt} + \operatorname{div}_x (A(u(x, t))) = 0$$

est la loi de conservation homogène et

$$\Phi(x, u(x, t)) \frac{dW(t)}{dt}$$

le terme source stochastique, et celle de la « différentielle stochastique », à savoir

$$du(x, t) = -\operatorname{div}_x (A(u(x, t))) dt + \Phi(x, u(x, t)) dW(t).$$

Le but est d'étudier le processus stochastique u qui dépend du temps t , de l'espace x et du hasard ω .

$\Phi(x, u(x, t)) dW(t)$ est appelé bruit multiplicatif car Φ dépend de la variable u . Un bruit additif serait $\Phi(x, t) dW(t)$ avec Φ ne dépendant pas de la variable u . Dans l'article sur la convergence du schéma volume fini, le bruit sera aussi à support compact, c'est à dire que $\Phi(x, u)$ sera nulle en dehors du compact $\mathbb{T}^N \times [-1, 1]$ de $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}$.

Notons que la définition de base stochastique de l'article est un peu inhabituelle. Dans beaucoup d'ouvrages, une base stochastique est la donnée d'un espace probabilisé et d'une filtration, c'est à dire

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}\right).$$

Ici, nous suivons l'article de Debussche et Vovelle [DV10a] où la base stochastique, qu'on peut écrire

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, (W(t))_{t \in [0, T]}\right)$$

signifie en plus que le processus de Wiener cylindrique W est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ et que W est une martingale pour cette filtration. Autrement dit, W est un $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ -processus de Wiener cylindrique. Cela veut dire aussi que $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ peut être plus fine que la filtration engendrée par W .

2.2.2 Sur la mesurabilité des solutions (cf § 2.1.2.1)

Pour commencer, la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ de \mathcal{F} est supposée continue à droite et complète, c'est à dire

- $\{A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A) = 0\} \Rightarrow \{A \in \mathcal{F}_0\}$
- $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s, \quad \forall t \in [0, T]$

La tribu \mathcal{P}_T des évènements prévisibles est la sous-tribu de $\mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{F}$ engendrée par les ensembles $]s, t] \times A$ où $A \in \mathcal{F}_s$ et par les ensembles les ensembles $\{0\} \times A$ où $A \in \mathcal{F}_0$. Plus formellement, on écrit

$$\mathcal{P}_T = \sigma\left(\left\{]s, t] \times A : 0 \leq s < t \leq T, A \in \mathcal{F}_s \right\} \cup \left\{ \{0\} \times A : A \in \mathcal{F}_0 \right\}\right)$$

On aurait pu prendre la définition équivalente, et peut-être plus intuitive

$$\mathcal{P}_T = \sigma\left(X : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}; X \text{ est càg sur }]0, T] \text{ et adapté à } (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}\right)$$

ou bien

$$\mathcal{P}_T = \sigma\left(X : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}; X \text{ est continu sur } [0, T] \text{ et adapté à } (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}\right)$$

Un processus stochastique $X : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est dit prévisible s'il est \mathcal{P}_T -mesurable.

En tout cas, un processus stochastique prévisible a les conditions de mesurabilités suffisantes pour être intégré au sens d'Itô contre un mouvement brownien (réel ou Hilbertien), et même contre une martingale de carré intégrable.

Selon Prévôt et Röckner (remarque 2.5.3 de [PR07]), on pourrait dans cet article considérer une classe plus grande d'intégrables : les processus progressivement mesurables. La restriction de l'intégrale d'Itô à des processus prévisibles est obligatoire si on veut intégrer contre des martingales de carrés intégrables, pas si on veut intégrer seulement contre des mouvements Browniens.

Un processus stochastique $X : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est dit progressivement mesurable s'il vérifie

$$\forall t \in [0, T], (s, \omega) \in [0, t] \times \Omega \mapsto X(s, \omega) \text{ est } \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t\text{-mesurable}$$

La sous-tribu de $\mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{F}$ engendrée par les processus progressivement mesurables se note $\mathcal{P}rog$. Nous avons l'inclusion stricte

$$\mathcal{P}_T \subset \mathcal{P}rog.$$

Nous affirmons dans l'article :

« We denote by $L^p_{\mathcal{P}}([0, T] \times \Omega; E)$ the set of functions g in $L^p([0, T] \times \Omega; E)$ which are equal $\mathcal{L} \otimes \mathbb{P}$ -almost everywhere to a predictable function f . This is the case if, and only if, $\langle g, \varphi \rangle$ is equal $\mathcal{L} \otimes \mathbb{P}$ -almost everywhere to $\langle f, \varphi \rangle$ for all $\varphi \in E'$ (we use the following fact : E being separable, there is a countable subset of E' that separates points in E) ».

Bien entendu, quand on parle d'ensemble de fonctions g , c'est un abus de langage.

Chaque élément de $L^p(\Omega \times [0, T]; E)$ est une classe de fonctions, toutes égales sauf sur un ensemble négligeable pour la mesure $\mathcal{L} \otimes \mathbb{P}$. Dans chaque classe, au moins une fonction est $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, T]$ -mesurable. Donc $g \in L^p(\Omega \times [0, T]; E)$ si $g \in L^p(\Omega \times [0, T]; E)$ et qu'il existe un élément de la classe g qui soit \mathcal{P} -mesurable.

Prouvons l'équivalence annoncée.

Supposons que f et g soient deux fonctions d'une même classe, et que f soit prévisible, c'est à dire $f : \Omega \times [0, T] \rightarrow E$, telle que $f^{-1}(O) \in \mathcal{P}$ pour tout ouvert $O \subset E$. Alors $\langle f, \varphi \rangle = \varphi \circ f : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est aussi prévisible, pour chaque $\varphi \in E'$. Comme $f(\omega, t) = g(\omega, t)$ sauf si $(\omega, t) \in N$ avec $\mathcal{L} \otimes \mathbb{P}(N) = 0$, alors $\varphi \circ f(\omega, t) = \varphi \circ g(\omega, t)$ sauf si $(\omega, t) \in N$ avec $\mathcal{L} \otimes \mathbb{P}(N) = 0$, donc $\varphi \circ f$ et $\varphi \circ g$ appartiennent à la même classe d'équivalence dont un élément est prévisible.

Réciproquement, supposons que $\varphi \circ g = \varphi \circ f$ sauf sur N_φ avec $\mathcal{L} \otimes \mathbb{P}(N_\varphi) = 0$, et que f soit prévisible. Si $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E'$ sépare les points de E , on a bien $\varphi_n \circ g = \varphi_n \circ f$ sauf sur $\bigcup_n N_{\varphi_n}$ avec $\mathcal{L} \otimes \mathbb{P}(\bigcup_n N_{\varphi_n}) = 0$. Donc $f = g$ sauf sur $\bigcup_n N_{\varphi_n}$ avec $\mathcal{L} \otimes \mathbb{P}(\bigcup_n N_{\varphi_n}) = 0$. Comme f est prévisible, le résultat annoncé est vrai.

2.2.3 Sur la tension des mesures (cf formule (2.7))

Ce qu'en dit Revuz [Rev97] :

Soit une suite de mesures $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ boréliennes uniformément bornées sur \mathbb{R}^d , on peut en extraire une sous-suite convergeant faiblement, c'est à dire qu'il existe une sous-suite et une mesure bornée m telles que

$$\langle m_{n_k}, \phi \rangle \rightarrow_{k \rightarrow +\infty} \langle m, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in C_0(\mathbb{R}^d)$$

Cette propriété de compacité faible n'étant pas vraie pour la convergence étroite des mesures, il a fallu rajouter l'argument de tension de la suite de mesures pour le garder :

Une suite de mesures $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ boréliennes sur \mathbb{R}^d est dite tendue si elle est uniformément bornée et si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K \text{ compact } \subset \mathbb{R}^d, \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, m_n(K^c) \leq \varepsilon$$

C'est le cas d'une suite dont toutes les mesures sont à support dans le même compact, ou d'une suite convergeant étroitement.

On a alors la propriété suivante :

Si une suite de mesures $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ boréliennes sur \mathbb{R}^d est tendue, on peut en extraire une sous-suite convergeant étroitement, c'est à dire qu'il existe une sous-suite et une mesure bornée m telles que

$$\langle m_{n_k}, \phi \rangle \rightarrow_{k \rightarrow +\infty} \langle m, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in C_b(\mathbb{R}^d)$$

On peut remplacer \mathbb{R}^d par un espace polonais S (espace métrique, séparable, complet) dans les propriétés précédentes, ce théorème est dû à Youri Prokhorov. On peut aussi remplacer les mesures (positives) boréliennes par mesures signées ou mesures de Radon finies (si l'espace polonais S est localement compact).

Parfois seule la propriété qui donne $m_n(K^c) \leq \varepsilon$ uniformément en dehors d'un compact sert à définir la tension d'une suite de mesures.

Un exemple utile d'espace polonais est l'espace de Wiener classique $S = C([0, T], E)$, muni de la norme infini, où E est aussi un espace polonais. Dans cet espace, on a une caractérisation de suites de mesures de probabilité tendues. Elle sera donnée (et utilisée) dans un paragraphe ultérieur.

Un autre exemple d'espace polonais, contenant $C([0, T], E)$ est l'espace $D([0, T], E)$ des fonctions continues à droite, limitées à gauche, muni d'une métrique adéquate (cf [Bil13] ou [JS13]).

C'est l'espace de Skorokhod.

2.2.4 A propos des mesures aléatoires (cf § 2.1.2.1)

Soit m une mesure aléatoire définie en 1 (donc positive et bornée), l'application $\mathbf{1}_{\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}} \in C_b(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R})$, donc

$$\omega \in \Omega \mapsto \langle m_\omega, \mathbf{1}_{\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}} \rangle = \int_{\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}} 1 dm_\omega(x, t, \xi) \in \mathbb{R}^+$$

est une variable aléatoire. $\mathbb{E}\langle m_\omega, \mathbf{1}_{\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}} \rangle$ est bien définie.

Supposons de plus que ce moment d'ordre 1 soit fini. Soit $\Phi \in C_b(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R})$, et supposons que $\|\Phi\|_\infty < M < +\infty$, alors la variable aléatoire $\omega \in \Omega \mapsto \langle m_\omega, \Phi \rangle$ vérifie

$$|\langle m_\omega, \Phi \rangle| \leq M \times \langle m_\omega, \mathbf{1}_{\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}} \rangle$$

donc

$$|\mathbb{E}\langle m_\omega, \Phi \rangle| \leq M \times \mathbb{E}\langle m_\omega, \mathbf{1}_{\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}} \rangle.$$

En particulier, l'application linéaire

$$\Phi \in C_0(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}) \mapsto \mathbb{E}\langle m_\omega, \Phi \rangle$$

est continue, donc $\mathbb{E}m \in (C_0(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}))'$, c'est à dire que $\mathbb{E}m$ est une mesure de Radon finie de l'espace $\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}$.

La mesure image définie sur les boréliens B de $[0, T]$ par

$$\pi_{\#}m(B) = m(\pi^{-1}(B)) = m(\mathbb{T}^N \times B \times \mathbb{R})$$

avec $m : \Omega \rightarrow \mathcal{M}_b(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R})$ mesure aléatoire, définit une autre mesure aléatoire, à savoir

$$\pi_{\#}m : \Omega \rightarrow \mathcal{M}_b([0, T])$$

qui vérifie $\forall \Phi \in C_b([0, T])$

$$\begin{aligned} \langle \pi_{\#}m_\omega, \Phi \rangle &= \int_{[0, T]} \Phi(t) \pi_{\#}m_\omega(dt) \\ &= \int_{\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}} \Phi \circ \pi(x, t, \xi) dm_\omega(x, t, \xi) = \langle m_\omega, \Phi \circ \pi \rangle \end{aligned}$$

Le lemme 2 dit que l'ensemble des atomes de $\pi_{\#}m_\omega$ ayant une probabilité non

nulle est au plus dénombrable, c'est à dire que

$$B_{\text{at}} = \left\{ t \in [0, T] : \mathbb{P} \left(\left\{ \omega \in \Omega : \pi_{\#} m_{\omega} (\{t\}) > 0 \right\} \right) > 0 \right\}$$

est au plus dénombrable.

La démonstration est évidente car

$$B_{\text{at}} = \{ t \in [0, T] : \mathbb{E} \pi_{\#} m (\{t\}) > 0 \}$$

c'est à dire que B_{at} est l'ensemble des atomes de la mesure de Radon finie $\mathbb{E} \pi_{\#} m$.

2.2.5 A propos de la définition 3

L'item 2 est intéressant si l'on réfléchit à l'historique des définitions depuis l'article de Debussche et Vovelle, ou même si on se place dans le contexte historique des EDPS.

D'une part, historiquement les probabilistes ont résolu les premières EDPS ou EDS en cherchant des solutions qui sont des processus stochastiques continus en temps ou au moins càdlàg ou bien càglàd. L'idée de Debussche et Vovelle fut d'utiliser des méthodes d'analyse en cherchant des solutions moins régulières, à savoir faibles en espace et en temps (faible au sens des distributions, donc faible au sens des analystes). Dans la mesure où leur solution s'est avérée finalement continue en temps, il fut naturel de se ranger du côté de la vision des probabilistes, à savoir définir une solution tout de suite càdlàg (on aurait aussi pu choisir continue) en temps, tout en restant faible en espace.

D'autre part, leur démonstration repose sur une formulation cinétique inventée par Lions, Perthame, Tadmor où une variable supplémentaire $\xi \in \mathbb{R}$ est introduite. C'est à dire qu'au lieu de chercher la solution u , Lions, Perthame et Tadmor ont cherché la solution cinétique $\chi(\xi, u) = \mathbf{1}_{0 < \xi < u} - \mathbf{1}_{u < \xi < 0}$. Debussche et Vovelle ont préféré chercher la solution cinétique $\mathbf{1}_{u > \xi}$. On a en fait l'égalité vraie pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$\chi(\xi, u) = \mathbf{1}_{u > \xi} - \mathbf{1}_{0 > \xi}$$

Pour bien comprendre qui est l'inconnue, réécrivons l'EDPS

$$du(x, t) + \text{div}_x (A(u(x, t))) dt = \Phi(x, u(x, t)) dW(t)$$

On pourrait croire que l'inconnue est u ou bien l'inconnue cinétique $\mathbf{1}_{u > \xi}$. En fait,

je dirais que l'inconnue est le processus

$$(\omega, t) \in \Omega \times [0, T] \mapsto \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} \mathbf{1}_{u(\omega, x, t) > \xi} \times \phi(x, \xi) dx d\xi$$

à $\phi \in C_c^1(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ fixé. C'est la raison pour laquelle, ce processus doit être càdlàg en temps : c'est notre processus inconnu.

En réalité, l'ensemble de tels processus, lorsque ϕ parcourt $C_c^1(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, détermine de manière unique le processus

$$(\omega, t) \in \Omega \times [0, T] \mapsto \mathbf{1}_{u(\omega, x, t) > \xi}$$

qui détermine lui aussi de manière unique le processus

$$(\omega, t) \in \Omega \times [0, T] \mapsto u(\omega, x, t)$$

car

$$\int_{\mathbb{R}} (\mathbf{1}_{u(\omega, x, t) > \xi} - \mathbf{1}_{0 > \xi}) d\xi = u(\omega, x, t)$$

Dans la formule donnée par l'item 4, il est intéressant de vérifier que le terme suivant ait bien un sens :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} g_k(x, u(x, s)) \varphi(x, u(x, s)) dx d\beta_k(s)$$

Pour cela, écrivons et étudions plutôt ce terme sous la forme

$$\int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \varphi(x, u(x, s)) \Phi(x, u(x, s)) dx dW(s)$$

et intéressons-nous au processus intégrande

$$(t, \omega) \mapsto \int_{\mathbb{T}^N} \varphi(x, u(x, t, \omega)) \Phi(x, u(x, t, \omega)) dx$$

Comme

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{T}^N \times \mathbb{R} \rightarrow L_2(H, \mathbb{R}) \\ (x, u) \mapsto \Phi(x, u) \end{cases}$$

est continue et que

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{T}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, u) \mapsto \varphi(x, u) \end{cases}$$

est de classe C^1 à support compact, on a

$$\varphi \otimes \Phi : \begin{cases} \mathbb{T}^N \times \mathbb{R} \rightarrow L_2(H, \mathbb{R}) \\ (x, u) \mapsto \phi(x, u) \Phi(x, u) \end{cases}$$

continue, avec

$$\begin{aligned} \|\varphi(x, u) \Phi(x, u)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 &= \sum_{k \geq 1} |\varphi(x, u) \Phi(x, u) e_k|^2 \\ &\leq \|\varphi\|_\infty^2 \sum_{k \geq 1} |g_k(x, u)|^2 \leq \|\varphi\|_\infty^2 D_0 (1 + |u|^2) \end{aligned}$$

Si $(x, t, \omega) \mapsto u(x, t, \omega)$ est $\mathcal{B}(\mathbb{T}^N) \otimes \mathcal{P}_T$ -mesurable, il en de même pour $(x, t, \omega) \mapsto (x, u(x, t, \omega))$ donc $(x, t, \omega) \mapsto \varphi(x, u(x, t, \omega)) \Phi(x, u(x, t, \omega))$ est $\mathcal{B}(\mathbb{T}^N) \otimes \mathcal{P}_T$ -mesurable. De plus

$$\varphi(x, u(x, t, \omega)) \Phi(x, u(x, t, \omega)) \in L_2(H, \mathbb{R})$$

car

$$\begin{aligned} &\|\varphi(x, u(x, t, \omega)) \Phi(x, u(x, t, \omega))\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x, u(x, t, \omega)) \times \Phi(x, u(x, t, \omega)) e_k|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x, u(x, t, \omega))|^2 |g_k(x, u(x, t, \omega))|^2 \\ &\leq \|\varphi\|_\infty^2 \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x, u(x, t, \omega))|^2 \\ &= \|\varphi\|_\infty^2 \mathbf{G}^2(x, u(x, t, \omega)) \\ &\leq \|\varphi\|_\infty^2 D_0 (1 + |u(x, t, \omega)|^2) < +\infty, \text{ ps et pp en } (x, t) \end{aligned}$$

avec u solution de (2.1) donc appartenant à $L^2(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \Omega)$ (conséquence du troisième point de la définition de solution).

Ainsi,

$$\int_{\mathbb{T}^N} \|\varphi(x, u(x, t, \omega)) \Phi(x, u(x, t, \omega))\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 dx < +\infty$$

$$\int_{\mathbb{T}^N} \varphi(x, u(x, t, \omega)) \Phi(x, u(x, t, \omega)) dx \in L_2(H, \mathbb{R}), \quad \text{ps et pp en } t$$

et

$$(t, \omega) \mapsto \int_{\mathbb{T}^N} \varphi(x, u(x, t, \omega)) \Phi(x, u(x, t, \omega)) dx$$

est \mathcal{P}_T -mesurable (i.e. est prévisible).

De plus,

$$\mathbb{E} \int_0^T \|\varphi(x, u(x, t, \omega)) \times \Phi(x, u(x, t, \omega))\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 dx < +\infty$$

donc

$$\int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \varphi(x, u(x, t, \omega)) \Phi(x, u(x, t, \omega)) dx dW(t)$$

est bien définie.

Remarquons que l'item 4 de la définition de solution peut aussi s'écrire (comme je l'ai fait dans le paragraphe 1.2.3)

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}_\xi), \forall 0 \leq t \leq T, \\ \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}_\xi} \chi(\xi, u(x, t)) \varphi(x, \xi) dx d\xi - \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}_\xi} \chi(\xi, u(x, 0)) \varphi(x, \xi) dx d\xi \\ = \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}_\xi} A'(\xi) \cdot \nabla_x (\varphi(x, \xi)) \chi(\xi, u(x, r)) dx d\xi dr \\ + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}_\xi} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) \delta_{u(x, r)}(d\xi) dx dW(r) \\ + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}_\xi} \partial_\xi \varphi(x, \xi) \|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \delta_{u(x, r)}(d\xi) dx dr \\ - m(\partial_\xi \varphi(x, \xi)) [0, t] \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}_\xi} \mathbf{1}_{u(x, t) > \xi} \times \varphi(x, \xi) dx d\xi - \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}_\xi} \mathbf{1}_{u(x, 0) > \xi} \times \varphi(x, \xi) dx d\xi \\ = \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}_\xi} A'(\xi) \cdot \nabla_x (\varphi(x, \xi)) \mathbf{1}_{u(x, t) > \xi} dx d\xi dr \\ + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}_\xi} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) \delta_{u(x, r)}(d\xi) dx dW(r) \\ + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}_\xi} \partial_\xi \varphi(x, \xi) \|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \delta_{u(x, r)}(d\xi) dx dr \\ - m(\partial_\xi \varphi(x, \xi)) [0, t] \end{aligned}$$

Sur l'item 3 de la définition de solution et son commentaire

$(x, t, \omega) \mapsto u(x, t, \omega)$ est $\mathcal{B}(\mathbb{T}^N) \otimes \mathcal{P}_T$ -mesurable donc

$$(t, \omega) \mapsto \int_{\mathbb{T}^N} |u(x, t, \omega)|^p dx$$

est \mathcal{P}_T -mesurable, donc en particulier $\mathcal{B}[0, T] \otimes \mathcal{F}$ -mesurable. Mais comme $[0, T]$ n'est pas dénombrable, il n'est pas évident que

$$\omega \mapsto \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N} |u(x, t, \omega)|^p dx$$

soit \mathcal{F} -mesurable. Par contre le fait que $\forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ et presque tout $\omega \in \Omega$

$$t \mapsto \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} \mathbf{1}_{u(x, t) > \xi} \times \varphi(x, \xi) dx d\xi$$

soit càdlàg, va nous permettre de le démontrer.

En utilisant la formule

$$\int_{\mathbb{R}} (\mathbf{1}_{u(x, t) > \xi}) \theta'(\xi) d\xi = \theta(u(x, t))$$

valable pour toute fonction θ localement lipschitzienne (i.e. $\theta' \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$) nulle en $-\infty$, puis en prenant $\theta(\xi) = |\xi^+|^p$ pour $p \in [1, +\infty)$ et $\varphi_n(x, \xi) = \mathbf{1}_{\mathbb{T}^N}(x) \times \psi_n(\xi)$ où $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonction positives d'éléments de $C_c^\infty(\mathbb{R})$ qui tend en croissant simplement vers θ' , on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $\omega \in \Omega$

$$L_n : t \mapsto \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} \mathbf{1}_{u(x, t) > \xi} \times \varphi_n(x, \xi) dx d\xi$$

soit càdlàg. Il existe donc un sous-ensemble dénombrable D_n de $[0, T]$ indépendant de ω , tel que

$$\sup_{t \in [0, T]} L_n(t) = \sup_{t \in D_n} L_n(t)$$

En posant $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$, on a aussi

$$\sup_{t \in [0, T]} L_n(t) = \sup_{t \in D} L_n(t)$$

Or

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N} |u^+(x, t, \omega)|^p dx = \sup_{t \in [0, T]} \sup_n L_n(t) = \sup_n \sup_{t \in [0, T]} L_n(t) = \sup_n \sup_{t \in D} L_n(t)$$

presque sûrement, on peut donc affirmer que

$$\omega \mapsto \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N} |u^+(x, t, \omega)|^p dx$$

est \mathcal{F} -mesurable.

On fait le même raisonnement avec $\theta(\xi) = |\xi^-|^p$ et $\varphi_n(x, \xi) = \mathbf{1}_{\mathbb{T}^N}(x) \times \psi_n(\xi)$

où $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonction négatives d'éléments de $C_c^\infty(\mathbb{R})$ qui tend en décroissant simplement vers θ' , on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $\omega \in \Omega$

$$H_n : t \mapsto \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} -\mathbf{1}_{u(x,t) \leq \xi} \times \varphi_n(x, \xi) dx d\xi$$

soit càdlàg, et

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N} |u^-(x, t, \omega)|^p dx = \sup_{t \in [0, T]} \sup_n H_n(t) = \sup_n \sup_{t \in [0, T]} H_n(t) = \sup_n \sup_{t \in D} H_n(t)$$

Grâce à la croissance de H_n et L_n , on a

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N} |u(x, t, \omega)|^p dx &= \sup_{t \in [0, T]} \sup_n (L_n(t) + H_n(t)) \\ &= \sup_n \sup_{t \in [0, T]} (L_n(t) + H_n(t)) = \sup_n \sup_{t \in D} (L_n(t) + H_n(t)) \end{aligned}$$

On peut donc affirmer que

$$\omega \mapsto \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N} |u(x, t, \omega)|^p dx$$

est \mathcal{F} -mesurable.

2.2.6 Sur la proposition 5 « mass of the random measure »

On peut choisir $\varphi_k(x, \xi) \in C_c^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ telle que $\varphi_k(x, \xi) = \xi$, $\forall \xi \in [-k, k]$ et donc telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi_k(x, \xi) = \xi, \quad \forall (x, \xi) \in \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}$$

Cette limite est croissante si on se restreint à $(x, \xi) \in \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^+$, et décroissante si on se limite à $(x, \xi) \in \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^-$.

Cela signifie aussi que $\partial_\xi \varphi_k(x, \xi) = 1$, $\forall \xi \in [-k, k]$ et donc vérifie

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \partial_\xi \varphi_k(x, \xi) = 1, \quad \forall (x, \xi) \in \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}$$

Cette limite est croissante si on se restreint à $(x, \xi) \in \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^+$, et décroissante si on se limite à $(x, \xi) \in \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^-$.

J'applique l'égalité donnée dans l'item 4 de la définition de solution, à $t = T$ et à

φ_k dans sa version

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}_\xi} \chi(\xi, u(x, T)) \varphi_k(x, \xi) dx d\xi - \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}_\xi} \chi(\xi, u(x, 0)) \varphi_k(x, \xi) dx d\xi \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}_\xi} A'(\xi) \cdot \nabla_x (\varphi_k(x, \xi)) \chi(\xi, u(x, r)) dx d\xi dr \\
&\quad + \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}_\xi} \varphi_k(x, \xi) \Phi(x, \xi) \delta_{u(x, r)}(d\xi) dx dW(r) \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}_\xi} \partial_\xi \varphi_k(x, \xi) \|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \delta_{u(x, r)}(d\xi) dx dr \\
&\hspace{15em} - m(\partial_\xi \varphi_k(x, \xi)) [0, T]
\end{aligned}$$

je peux alors appliquer aux premier, deuxième termes de gauche, et aux troisième, quatrième termes de droite le théorème de convergence dominée en faisant tendre $k \rightarrow +\infty$ (pour le troisième terme on a besoin du deuxième item de la définition de solution et de la majoration de $\|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2$ donnée en début d'article). Le premier terme à droite du signe égal est nul.

Pour le deuxième terme à droite du signe égal, l'isométrie d'Itô me donne

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\left| \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}_\xi} \varphi_k(x, \xi) \Phi(x, \xi) \delta_{u(x, r)}(d\xi) dx dW(r) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}_\xi} \xi \Phi(x, \xi) \delta_{u(x, r)}(d\xi) dx dW(r) \right|^2 \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}_\xi} \|\varphi_k(x, \xi) - \xi\| \|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 dx dr \right) \\
&\leq E \left(\int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \|(\varphi_k(x, u(x, r)) - u(x, r)) \Phi(x, u(x, r))\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 dx dr \right) \\
&\leq \mathbb{E} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} |\varphi_k(x, u(x, r)) - u(x, r)|^2 D_0 (1 + |u(x, r)|^2) dx dr \right)
\end{aligned}$$

qui tend bien vers 0 lorsque $k \rightarrow +\infty$ grâce au théorème de convergence dominée (et le deuxième item de la définition de solution). Cela signifie que pour une sous-suite, on a presque sûrement

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}_\xi} \varphi_k(x, \xi) \Phi(x, \xi) \delta_{u(x, r)}(d\xi) dx dW(r) \\
&\hspace{15em} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}_\xi} \xi \Phi(x, \xi) \delta_{u(x, r)}(d\xi) dx dW(r)
\end{aligned}$$

et donc on obtient l'égalité annoncée

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|u(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 - \frac{1}{2} \|u(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}_\xi} \xi \Phi(x, \xi) \delta_{u(x,r)}(d\xi) dx dW(r) \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}_\xi} \|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \delta_{u(x,r)}(d\xi) dx dr \\
&\qquad\qquad\qquad - m(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}_\xi)
\end{aligned}$$

2.2.7 Concernant les mesures de Young (cf définition 6)

Dans notre article, une mesure de Young est définie comme l'application faiblement mesurable

$$\nu : (X, \mathcal{A}, \lambda) \rightarrow \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$$

où $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ est l'ensemble des mesures de probabilité sur la tribu borélienne de \mathbb{R} . Dans les ouvrages, on peut aussi rencontrer l'écriture

$$\mu = (\nu_z)_{z \in X} \cdot \lambda = \nu \cdot \lambda$$

ou bien

$$\mu = (\nu_z)_{z \in X} \otimes \lambda = \nu \otimes \lambda$$

à la place de ν qui signifie que la mesure de Young μ est l'unique mesure positive finie définie sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\mu(A \times B) = (\nu_z)_{z \in X} \cdot \lambda(A \times B) = \int_A \nu_z(B) d\lambda(z), \forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

avec

- $\nu_z \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}), \forall z \in X$
- $z \in X \mapsto \nu_z(B)$ mesurable $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ fixé.

D'ailleurs, si les notations ou les définitions peuvent varier, le nom même peut varier, ainsi mesure de Young se nomme aussi probabilité de transition ou encore noyau de probabilité.

L'idée qu'il faut retenir est la suivante : intégrer contre la mesure $(\nu_z)_{z \in X} \cdot \lambda$ signifie intégrer contre la mesure ν_z à z fixé, PUIS contre la mesure λ . C'est encore plus visible grâce au théorème de Fubini généralisé suivant :

Soit $f : (X \times \mathbb{R}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable positive ou μ -intégrable, on a

$$\int_{X \times \mathbb{R}} f(z, \xi) d\nu \cdot \lambda = \int_X \left(\int_{\mathbb{R}} f(z, \xi) d\nu_z(\xi) \right) d\lambda(z)$$

Une autre définition (équivalente) de mesure de Young est la suivante :

μ est une mesure de Young si et seulement si μ est une mesure (positive) finie sur $(X \times \mathbb{R}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ qui vérifie $\mu(A \times \mathbb{R}) = \lambda(A) \forall A \in \mathcal{A}$.

Ainsi, en notant $\pi : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ la projection, la mesure-image de μ par π est λ . De plus, il est possible de créer une famille de mesures de probabilités $(\nu_z)_{z \in X}$ vérifiant $\mu = (\nu_z)_{z \in X} \cdot \lambda$; ce sont des « tranches » de μ , on dit aussi que $(\nu_z)_{z \in X}$ est une désintégration de μ .

Remarques :

On dit que la mesure de Young μ est associée à une fonction mesurable $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ lorsque $\nu_z = \delta_{u(z)}$, λ -pp. On note parfois μ^u cette mesure de Young.

Une fonction cinétique telle que définie dans l'article est l'opposé de la primitive qui s'annule en $+\infty$ d'une mesure de Young (qui elle aussi s'annule en l'infini au sens des mesures de Young ou simplement au sens des mesures)

Sur la compacité des mesures de Young :

La convergence faible au sens des mesures de Young, est la convergence étroite des mesures : une suite (μ_n) de mesures de Young converge faiblement vers une mesure de Young μ si et seulement si

$$\forall g \in C_b(X \times \mathbb{R}), \mu_n(g) \rightarrow \mu(g)$$

Bien entendu, cette définition n'est valable que si X a une topologie, la définition générale utilise ce qu'on appelle les intégrandes de Carathéodory :

Si $g : (z, \xi) \in X \times \mathbb{R} \mapsto g(z, \xi) \in \mathbb{R}$ est mesurable en la variable z et continue en la variable ξ , alors g est dite intégrande de Carathéodory. L'ensemble des intégrandes de Carathéodory bornées est noté $Cth^b(X \times \mathbb{R})$.

Ainsi, une suite (μ_n) de mesures de Young converge faiblement vers une mesure de Young μ si et seulement si

$$\forall g \in Cth^b(X \times \mathbb{R}), \mu_n(g) \rightarrow \mu(g)$$

La notion de tension d'une suite de mesure de Young est donc importante pour avoir une sous-suite qui converge faiblement :

une suite de mesures de Young est dite tendue (ou bien strictement tendue) si et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon \text{ compact } \subset \mathbb{R}, \text{ tel que } \sup_n \mu_n(X \times K_\varepsilon^c) \leq \varepsilon.$$

Une telle suite admet une sous-suite convergeant faiblement vers une mesure de Young.

Voici un critère important concernant la tension d'une suite de mesures de Young. Supposons que la suite $(\mu_n) = (\nu^n \cdot \lambda)$ vérifie pour un certain $p \in [1; +\infty)$

$$\sup_n \int_{X \times \mathbb{R}} |\xi|^p d\nu^n \cdot \lambda < +\infty$$

alors elle est tendue.

En effet, soit $(\nu^n \cdot \lambda)$ une telle suite de mesures de Young vérifiant

$$\int_{X \times \mathbb{R}} |\xi|^p d\nu^n \cdot \lambda \leq C < +\infty$$

alors $\forall M > 0$,

$$M^p \nu^n \cdot \lambda (X \times [-M, M]^c) \leq \int_{X \times [-M, M]^c} |\xi|^p d\nu^n \cdot \lambda \leq C$$

donc

$$\nu^n \cdot \lambda (X \times [-M, M]^c) \leq \frac{C}{M^p}.$$

2.2.8 Au sujet du théorème 10 et de son corollaire 11

Il est à noter que dans le théorème 10 et le corollaire 11, les sous-suites sont les mêmes.

Voici les démonstrations (inspirées de l'article de Debussche, Vovelle [DV10b]) :

Soit $(X, \mathcal{A}, \lambda)$ un espace mesuré, si λ est σ -finie, et si \mathcal{A} est une tribu engendrée par un ensemble dénombrable, et si $1 \leq p < +\infty$ alors $L^p(X)$ est séparable. (Billingsley)

Soit $h \in L^1(X) \cap L^\infty(X)$ telle que $h(z) \geq 0$ pour λ -presque tout $z \in X$, la suite de mesures $(\nu_h^n)_n$ définie par

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(\xi) d\nu_h^n(\xi) = \int_X h(z) \int_{\mathbb{R}} \Phi(\xi) d\nu_z^n(\xi) d\lambda(z)$$

est bien définie car

$$\Phi \in C_0(\mathbb{R}) \mapsto \int_X h(z) \int_{\mathbb{R}} \Phi(\xi) d\nu_z^n(\xi) d\lambda(z)$$

est une forme linéaire continue sur $C_0(\mathbb{R})$, elle détermine donc de manière unique une mesure signée (ici positive) sur les boréliens de \mathbb{R} .

La suite (ν_h^n) est tendue car

- en choisissant une suite croissante $(f_i)_i$ d'éléments de $C_0(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in \mathbb{N}, 1 \geq f_i \geq 0, f_i = 1$ sur $[-i, i], f_i = 0$ sur $[-i-1, i+1]^c$, et en utilisant le Théorème de convergence monotone, on a

$$\begin{aligned} (\nu_h^n)(1) &= \lim_{i \rightarrow +\infty} (\nu_h^n)(f_i) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \int_X h(z) \int_{\mathbb{R}} f_i(\xi) d\nu_z^n(\xi) d\lambda(z) \\ &= \int_X h(z) \int_{\mathbb{R}} 1 d\nu_z^n(\xi) d\lambda(z) = \|h\|_{L^1(X)} \end{aligned}$$

- je peux utiliser ce que j'ai prouvé dans le paragraphe précédent, à savoir

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon \text{ compact } \subset \mathbb{R}, \text{ tel que } \sup_n \nu^n \cdot \lambda(X \times K_\varepsilon^c) \leq \varepsilon$$

ce qui donne

$$\nu_h^n(K_\varepsilon^c) \leq \|h\|_\infty \sup_n \nu^n \cdot \lambda(X \times K_\varepsilon^c) \leq \varepsilon$$

donc le théorème de Prokhorov affirme qu'on peut extraire une sous-suite de (ν_h^n) à h fixé, (encore notée $(\nu_h^{n_k})$) qui converge étroitement vers une mesure ν_h , c'est à dire

$$\forall f \in C_b(\mathbb{R}), \nu_h^{n_k}(f) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \nu_h(f)$$

On a donc

$$\nu_h^{n_k}(1) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \nu_h(1) = \|h\|_{L^1(X)}$$

Puis $\forall h_1, h_2 \in L^1(X, \mathbb{R}^+), \forall \Phi \in C_b(\mathbb{R}),$

$$|\nu_{h_1}^{n_k}(\Phi) - \nu_{h_2}^{n_k}(\Phi)| \leq \|h_1 - h_2\|_{L^1(X)} \|\Phi\|_\infty$$

donc, si on se donne $(h_i)_i$ suite dense de fonctions bornées positives de $L^1(X, \mathbb{R}^+)$, et la suite extraite par procédé diagonal $\nu_{h_i}^{n_k}$ qui fait converger chaque $\nu_{h_i}^{n_k}(\Phi)$ vers $\nu_{h_i}(\Phi)$ (n_k ne dépendant pas de i), on a $\forall h \in L^1(X, \mathbb{R}^+)$

$$|\nu_h(\Phi) - \nu_h^{n_k}(\Phi)| \leq |\nu_h(\Phi) - \nu_{h_i}(\Phi)| + |\nu_{h_i}(\Phi) - \nu_{h_i}^{n_k}(\Phi)| + |\nu_{h_i}^{n_k}(\Phi) - \nu_h^{n_k}(\Phi)| < \varepsilon$$

pour h_i suffisamment proche de h , puis n_k suffisamment grand.

Donc $\nu_h^{n_k} \rightarrow \nu_h$, et la sous-suite ne dépend pas de h . Ainsi

$$|\nu_{h_1}(\Phi) - \nu_{h_2}(\Phi)| \leq \|h_1 - h_2\|_{L^1(X)} \|\Phi\|_\infty, \forall \Phi \in C_0(\mathbb{R}), \forall h_1, h_2 \in L^1(X, \mathbb{R}^+)$$

Soit $h \in L^1(X)$, on peut appliquer le raisonnement précédent à h^+ et h^- pour

obtenir

- $\nu_h^n = \nu_{h^+}^n - \nu_{h^-}^n$
- $\nu_h^{n_k} \rightarrow \nu_h$ et la sous-suite ne dépend pas de h
- $\nu_h^{n_k}(1) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \nu_h(1)$
- $\forall f \in C_b(\mathbb{R}), \nu_h^{n_k}(f) \rightarrow_{k \rightarrow +\infty} \nu_h(f)$
- $\forall \Phi \in C_b(\mathbb{R}), \forall h_1, h_2 \in L^1(X),$
 $|\nu_{h_1}(\Phi) - \nu_{h_2}(\Phi)| \leq (\|h_1^+ - h_2^+\|_{L^1(X)} + \|h_1^- - h_2^-\|_{L^1(X)}) \|\Phi\|_\infty$
- $|\nu_h(\Phi)| \leq \|h\|_{L^1(X)} \|\Phi\|_\infty$

Ecrivons dorénavant la sous-suite $(\nu_h^{n_k})$ simplement (ν_h^n) .

A $\Phi \in C_b(\mathbb{R})$ fixé, $h \mapsto \nu_h(\Phi)$ est linéaire, positive, continue donc il existe une fonction $g_\Phi \in L^\infty(X, \mathbb{R}^+)$ telle que $\|g_\Phi\|_{L^\infty(X)} \leq \|\Phi\|_\infty$ qui vérifie :

pour presque tout $z \in X, g(z, \cdot) : \Phi \in C_0(\mathbb{R}) \mapsto g_\Phi(z)$ est linéaire, positive et continue,

donc pour presque tout $z \in X$, il existe une mesure positive finie ν_z telle que

$$g(z, \Phi) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(\xi) d\nu_z(\xi)$$

Soit $h \in L^1(X, \mathbb{R}^+)$, on prend comme précédemment une suite $(f_i) \subset C_0(\mathbb{R})$ qui tend en croissant vers la fonction identiquement égale à 1, alors par le théorème de convergence monotone $\nu_z(f_i)$ tend en croissant vers $\nu_z(1)$, c'est à dire pour presque tout $z, h(z) \nu_z(f_i)$ tend en croissant vers $h(z) \nu_z(1)$, donc encore une fois par le théorème de convergence monotone, $\nu_h(f_i)$ tend en croissant vers $\nu_h(1) = \int_X h(z) d\lambda(z)$ mais aussi vers $\int_X h(z) \nu_z(1) d\lambda(z)$.

Ainsi,

$$\forall h \in L^1(X, \mathbb{R}^+), \int_X h(z) d\lambda(z) = \int_X h(z) \nu_z(1) d\lambda(z)$$

donc

$$\nu_z(1) = 1 \quad \text{pp en } z$$

On a $\forall \Phi \in C_b(\mathbb{R})$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \nu_h^n(\Phi) = \nu_h(\Phi).$$

Si $\Phi \in C_0(\mathbb{R})$, cela s'écrit

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X h(z) \int_{\mathbb{R}} \Phi(\xi) d\nu_z^n(\xi) d\lambda(z) \\ = \int_X h(z) g(z, \Phi) d\lambda(z) = \int_X h(z) \int_{\mathbb{R}} \Phi(\xi) d\nu_z(\xi) d\lambda(z) \end{aligned}$$

donc

$$\forall \Phi \in C_0(\mathbb{R}), \nu_h(\Phi) = \int_X h(z) \int_{\mathbb{R}} \Phi(\xi) d\nu_z(\xi) d\lambda(z)$$

donc $\forall \Phi \in C_b(\mathbb{R}), h \in L^1(X)$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X h(z) \int_{\mathbb{R}} \Phi(\xi) d\nu_z^n(\xi) d\lambda(z) = \int_X h(z) \int_{\mathbb{R}} \Phi(\xi) d\nu_z(\xi) d\lambda(z)$$

Pour prouver que ν s'annule à l'infini, on va se servir de l'égalité précédente avec $h = 1$ et une fonction $\Phi_M(\xi) = |\xi|^p$ sur $[-M, M]$, et égale à M^p ailleurs. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_X \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\nu_z(\xi) d\lambda(z) &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_X \int_{\mathbb{R}} \Phi_M(\xi) d\nu_z(\xi) d\lambda(z) \\ &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X \int_{\mathbb{R}} \Phi_M(\xi) d\nu_z^n(\xi) d\lambda(z) \leq \lim_{M \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_X \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\nu_z^n(\xi) d\lambda(z) \\ &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_X \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\nu_z^n(\xi) d\lambda(z) < +\infty \end{aligned}$$

Pour le corollaire :

Si ξ est de masse 0 pour ν_h alors $(\xi, +\infty)$ est de ν_h -continuité (car sa frontière est de mesure nulle, cf Ambrosio, Fusco, Pallara p28 [AFP00]), et donc comme ν_h^n converge faiblement vers ν_h , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \nu_h^n(\xi, +\infty) = \nu_h(\xi, +\infty)$$

Comme ν_h est une mesure finie sur les boréliens de \mathbb{R} , les points de masse non nulle sont au plus dénombrables donc de mesure de Lebesgue nulle. Donc par convergence dominée, $\forall g \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} \nu_h^n(\xi, +\infty) g(\xi) d\xi \rightarrow \int_{\mathbb{R}} \nu_h(\xi, +\infty) g(\xi) d\xi$$

La fin est simple car on utilise la densité des fonctions tensorielles que je vais démontrer.

Lemme :

l'ensemble des combinaisons linéaires des fonctions tensorielles i.e. de la forme

$$h \otimes g : (z, \xi) \in (X \times \mathbb{R}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda \otimes d\xi) \mapsto h(z) g(\xi)$$

est dense dans $L^1(X \times \mathbb{R})$

Preuve :

Comme les ensembles $A_i \times B_i$ avec $A_i \in \mathcal{A}$ et $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ engendrent la tribu

$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$, il suffit d'utiliser le théorème des classes monotones pour les fonctions (cf poly Pardoux page 25 [Par]).

$$\mathcal{H} = \left\{ \bigcap_{i \in I \text{ fini}} A_i \times B_i; A_i \in \mathcal{A}, B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \right\}$$

est un π -système tel que $\sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$$\mathcal{L}^+ = \left\{ (z, \xi) \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{k_n} d_i^{m_i} 1_{A_i^n \times B_i^n}(z, \xi) \text{ telles que } (A_i^n)_n \subset \mathcal{A}, \right. \\ \left. (B_i^n)_n \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}), (k_n)_n \subset \mathbb{N}^*, (d_i^n)_n \subset \mathbb{R}^+ \text{ sont 4 suites croissantes} \right\}$$

est une classe d'applications à valeurs dans \mathbb{R}^+ qui vérifie

- $1 \in \mathcal{L}^+$; $1_D \in \mathcal{L}^+$, $\forall D \in \mathcal{H}$
- $f, g \in \mathcal{L}^+$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ impliquent $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^+$
- Si $(f_n)_n \subset \mathcal{L}^+$ tend en croissant vers f , alors $f \in \mathcal{L}^+$

donc \mathcal{L}^+ contient toutes les applications $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -mesurables, à valeurs dans \mathbb{R}^+ , en particulier $L^1(X \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^+)$.

Soit $h^+ \in L^1(X \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^+)$, il existe une suite $(s_n)_n$ croissante de fonctions simples positives, s'écrivant

$$s_n = \sum_{i=1}^{k_n} d_i^{m_i} 1_{A_i^n \times B_i^n}(z, \xi)$$

qui converge simplement vers h^+ , donc aussi dans $L^1(X \times \mathbb{R})$.

Si $h \in L^1(X \times \mathbb{R})$, on peut conclure car $h = h^+ - h^-$.

2.2.9 Au sujet du lemme 12

Le lemme 12 dit que

si une suite de fonctions cinétiques (f_n) associée à une suite de mesures de Young (ν^n) vérifiant pour un certain $p > 1$,

$$\sup_n \int_{X \times \mathbb{R}} |\xi|^p d\nu^n \cdot \lambda < +\infty$$

converge dans $L^\infty(X \times \mathbb{R})$ faible* vers une fonction cinétique f associée à la mesure de Young ν vérifiant

$$f(z, \xi) = \mathbf{1}_{u(z) > \xi}$$

autrement dit, la mesure de Young ν est associée à la fonction mesurable $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ (car dans ce cas $\partial_\xi f(z, \xi) = -\delta_{u(z)} = -\nu_z$), alors la suite de terme général u_n défini par

$$u_n(z) = \int_{\mathbb{R}} \xi d\nu_z^n(\xi), \quad \forall z \in X$$

converge vers u dans $L^q(X)$, $\forall 1 \leq q < p$.

Dans la preuve du lemme, on peut déjà remarquer que $u \in L^p(X)$, $\forall p \in [1, +\infty)$, car f étant une fonction cinétique, $\delta_{u(z)} \cdot \lambda$ s'annule à l'infini.

Pour prouver (2.23), il suffit de faire la preuve avec $\theta \geq 0$. Dans ce cas, il existe une suite de fonctions continues (θ_k) à supports compacts, positives, convergeant simplement (en croissant) vers θ telles que

$$\theta_k(\xi) = \theta(\xi), \quad \forall \xi \in [-k, k]$$

Notons $\gamma \otimes \theta : (z, \xi) \mapsto \gamma(z) \theta(\xi)$ et $\gamma \otimes \theta_k : (z, \xi) \mapsto \gamma(z) \theta_k(\xi)$. On a

$$\begin{aligned} |\nu_z^n \cdot \lambda(\gamma \otimes \theta) - \delta_{u(z)} \cdot \lambda(\gamma \otimes \theta)| &\leq |\nu_z^n \cdot \lambda(\gamma \otimes \theta) - \nu_z^n \cdot \lambda(\gamma \otimes \theta_k)| \\ &+ |\nu_z^n \cdot \lambda(\gamma \otimes \theta_k) - \delta_{u(z)} \cdot \lambda(\gamma \otimes \theta_k)| + |\delta_{u(z)} \cdot \lambda(\gamma \otimes \theta_k) - \delta_{u(z)} \cdot \lambda(\gamma \otimes \theta)| \end{aligned}$$

Comme $(\nu^n \cdot \lambda)_n$ est une suite tendue au sens des mesures de Young,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon \text{ compact } \subset \mathbb{R}, \text{ tel que } \sup_n \nu^n \cdot \lambda(X \times K_\varepsilon^c) \leq \varepsilon$$

On peut même rajouter $\delta_{u(z)} \cdot \lambda$ à ce sup, le résultat est encore vrai.

Donc pour k assez grand, le premier et le troisième terme à droite de l'inégalité peuvent être rendus aussi petit que l'on veut (indépendamment de n). Une fois le k fixé, comme $\gamma \otimes \theta_k$ est une intégrande de Carathéodory, on peut rendre le deuxième terme à droite de l'inégalité aussi petit que l'on veut pour n suffisamment grand. On a donc

$$\nu_z^n \cdot \lambda(\gamma \otimes \theta) \rightarrow \delta_{u(z)} \cdot \lambda(\gamma \otimes \theta)$$

Notons que si $1 \leq r' \leq p$

$$\begin{aligned} \sup_n \left(\int_X \left(\int_{\mathbb{R}} |\xi| \nu_z^n(d\xi) \right)^{r'} \lambda(dz) \right) &\leq \sup_n \left(\int_X \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{r'} \nu_z^n(d\xi) \lambda(dz) \right) \\ &\leq \sup_n \left(\int_X \int_{\mathbb{R}} \max(1, |\xi|^p) \nu_z^n(d\xi) \lambda(dz) \right) \leq Cste < +\infty \end{aligned}$$

où $Cste$ ne dépend pas de n , donc

$$\sup_n \left(\int_X |u_n|^{r'} \lambda(dz) \right) \leq Cste$$

Donc si $p \geq 2$, on peut prendre $r = r' = 2$, on obtient comme indiqué dans l'article

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\|_{L^2(X)} = 0.$$

Comme on a l'inégalité d'interpolation vraie $\forall s \in [1, 2]$,

$$\|u_n - u\|_{L^s(X)} \leq \|u_n - u\|_{L^2(X)}^{2-\frac{2}{s}} \|u_n - u\|_{L^1(X)}^{\frac{2}{s}-1},$$

on a $\forall s \in [1, 2]$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\|_{L^s(X)} = 0.$$

Puis, si $p > 2$, on a $\forall q \in [2, p)$ et $\alpha = \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}$ l'inégalité d'interpolation

$$\|u_n - u\|_{L^q(X)} \leq \|u_n - u\|_{L^2(X)}^\alpha \|u_n - u\|_{L^p(X)}^{1-\alpha}$$

qui donne $\|u_n - u\|_{L^q(X)} \rightarrow 0$.

Supposons maintenant que $1 < p < 2$.

D'après le théorème 10, le corollaire 11 et l'hypothèse $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^\infty(X \times \mathbb{R})$ faible*, on a

$$\nu_z^n \cdot \lambda(\gamma \otimes T_R) \rightarrow \delta_{u(z)} \cdot \lambda(\gamma \otimes T_R), \quad \forall \gamma \in L^r(X), \forall r \in [1, +\infty],$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}} T_R(\xi) d\nu_z^n(\xi) \rightharpoonup u(z)$$

dans $L^{r'}(X)$, quel que soit $r' \in (1, +\infty)$. Grâce à l'inégalité,

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\mathbb{R}} T_R(\xi) d\nu_z^n(\xi) \right\|_{L^{r'}(X)}^{r'} &= \int_X \left(\int_{\mathbb{R}} |T_R(\xi)| d\nu_z^n(\xi) \right)^{r'} d\lambda(z) \\ &\leq \int_X \int_{\mathbb{R}} |T_R(\xi)|^{r'} d\nu_z^n(\xi) d\lambda(z), \end{aligned}$$

on obtient

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left\| \int_{\mathbb{R}} T_R(\xi) d\nu_z^n(\xi) \right\|_{L^{r'}(X)} \leq \|T_R(u)\|_{L^{r'}(X)},$$

donc

$$\|u_n^R - T_R(u)\|_{L^{r'}(X)} = \left\| \int_{\mathbb{R}} T_R(\xi) d\nu_z^n(\xi) - T_R(u(z)) \right\|_{L^{r'}(X)} \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$, quel que soit $r' \in (1, +\infty)$.

$T_R(u(z))$ converge simplement vers $u(z)$ pour λ -presque tout $z \in X$, lorsque $R \rightarrow +\infty$. On a aussi $|T_R(u(z))| \leq |u(z)|$ avec $u \in L^p(X)$.

Donc par le théorème de convergence dominée,

$$\|u - T_R(u)\|_{L^q(X)} \rightarrow 0, \quad \forall q \in [1, p].$$

Pour prouver que $\forall q \in [1, p)$,

$$\|u_n - u_n^R\|_{L^q(X)}^q \rightarrow_{R \rightarrow +\infty} 0$$

uniformément en n , les détails sont clairs dans l'article, je rajoute simplement une étape :

$$\begin{aligned} \|u_n - u_n^R\|_{L^q(X)}^q &\leq 2^q \int_X \int_{|\xi| > R} |\xi|^q d\nu_z^n(\xi) d\lambda(z) \\ &= 2^q \int_X \int_{|\xi| > R} \frac{|\xi|^q \times |\xi|^{p-q}}{R^{p-q}} d\nu_z^n(\xi) d\lambda(z) \leq \frac{2^q}{R^{p-q}} \int_X \int_R |\xi|^p d\nu_z^n(\xi) d\lambda(z) \\ &\leq \frac{2^q}{R^{p-q}} \sup_n \int_X \int_R |\xi|^p d\nu_z^n(\xi) d\lambda(z) < +\infty. \end{aligned}$$

Ce qui permet d'avoir $\forall q \in [1, p)$,

$$\|u_n - u\|_{L^q(X)} \leq \|u_n - u_n^R\|_{L^q(X)} + \|T_R(u) - u_n^R\|_{L^q(X)} + \|T_R(u) - u\|_{L^q(X)}$$

avec le premier et le troisième terme à droite de l'inégalité qui peuvent être rendus aussi petit que l'on veut (indépendamment de n) en faisant tendre R vers $+\infty$. Puis, une fois R fixé, le deuxième terme peut être rendu aussi petit que l'on veut en faisant tendre n vers $+\infty$.

2.2.10 A propos de la définition de solution généralisée 13

Partons de la définition de solution, mais surtout de la formule de son quatrième item.

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}_\xi} \mathbf{1}_{u(x,t) > \xi} \times \varphi(x, \xi) dx d\xi - \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}_\xi} \mathbf{1}_{u(x,t) > \xi} \times \varphi(x, \xi) dx d\xi \\
&= \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}_\xi} A'(\xi) \cdot \nabla_x (\varphi(x, \xi)) \mathbf{1}_{u(x,t) > \xi} dx d\xi dr \\
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}_\xi} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) \delta_{u(x,r)}(d\xi) dx dW(r) \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}_\xi} \partial_\xi \varphi(x, \xi) \|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \delta_{u(x,r)}(d\xi) dx dr \\
&\qquad\qquad\qquad - m(\partial_\xi \varphi(x, \xi)) [0, t]
\end{aligned}$$

Il se trouve que $\forall t \in [0, T]$, et presque sûrement, $x \mapsto \delta_{u(x,t,\omega)}(d\xi)$ est une mesure de Young (car u est mesurable) qui s'annule à l'infini.

En effet, $\forall t \in [0, T]$, et presque sûrement, $x \mapsto u(x, t, \omega)$ est mesurable (grâce au premier item de la définition de solution), et

$$\int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}_\xi} |\xi|^p \delta_{u(x,t,\omega)}(d\xi) = \|u(x, t, \omega)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p < +\infty$$

grâce à l'item 3 de la définition de solution.

Donc $\forall t \in [0, T]$, et presque sûrement,

$$(x, \xi) \in \mathbb{T}^N \times \mathbb{R} \mapsto f(\omega, x, t) = \mathbf{1}_{u(x,t) > \xi} = \delta_{u(x,t,\omega)}(\xi; +\infty)$$

est une fonction cinétique.

Il faut remplacer $\mathbf{1}_{u(x,t) > \xi}$ par f fonction cinétique et $\delta_{u(x,t)}(d\xi)$ par $\nu_{x,t}(d\xi)$ pour comprendre la définition de solution généralisée.

Remarque : S'il avait été décidé que f généralise $\chi(\xi, u(x, t))$ alors, dans l'item 1 de la définition de solution généralisée, on aurait pu remplacer $(-R, R)$ par \mathbb{R}_ξ .

Prouvons que

$$\int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, t, \xi) \Phi(x, \xi) \nu_{\omega, x, t}(d\xi) dx dW(t)$$

est bien définie.

En utilisant la remarque suivant la définition de solution généralisée de l'article, on peut affirmer que

$$(x, t, \omega) \mapsto \nu_{x,t,\omega}(d\xi)$$

est une mesure de Young. De plus,

$$\varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) \in L_2(H, \mathbb{R})$$

car

$$\begin{aligned} \|\varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x, \xi) \times \Phi(x, \xi) e_k|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x, \xi)|^2 |g_k(x, \xi)|^2 \leq \mathbf{1}_{\text{supp}(\varphi)}(x, \xi) \|\varphi\|_{\infty}^2 \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x, \xi)|^2 \\ &= \mathbf{1}_{\text{supp}(\varphi)}(x, \xi) \|\varphi\|_{\infty}^2 \mathbf{G}^2(x, \xi) \leq \mathbf{1}_{\text{supp}(\varphi)}(x, \xi) \|\varphi\|_{\infty}^2 D_0 (1 + \xi^2) \end{aligned}$$

Comme $\xi \mapsto \|\varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}$ est continue et bornée,

$$(x, t, \omega) \mapsto \int_{\mathbb{R}} \|\varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})} \nu_{\omega, x, t}(d\xi)$$

est $\mathcal{B}(\mathbb{T}^N) \otimes \mathcal{P}_T$ -mesurable et finie, donc l'intégrale de Bochner

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) \nu_{\omega, x, t}(d\xi)$$

existe, appartient à $L_2(H, \mathbb{R})$ et

$$(x, t, \omega) \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) \nu_{\omega, x, t}(d\xi)$$

est $\mathcal{B}(\mathbb{T}^N) \otimes \mathcal{P}_T$ -mesurable. De plus,

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) \nu_{\omega, x, t}(d\xi) \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \|\varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})} \nu_{\omega, x, t}(d\xi) \right)^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \|\varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \nu_{\omega, x, t}(d\xi) \leq M < +\infty, \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) \nu_{\omega, x, t}(d\xi) dx$$

est bien définie et appartient à $L_2(H, \mathbb{R})$.

Comme

$$(t, \omega) \mapsto \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) \nu_{\omega, x, t}(d\xi) dx$$

est \mathcal{P}_T -mesurable (i.e. est prévisible), et comme

$$\mathbb{E} \int_0^T \left\| \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) \nu_{\omega, x, t}(d\xi) dx \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 dt < +\infty$$

on peut affirmer que

$$\int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) \nu_{\omega, x, t}(d\xi) dx dW(t)$$

est bien définie.

Au sujet de l'item 3 de la définition de solution généralisée :

Parlons maintenant de la \mathcal{F} -mesurabilité de

$$\omega \mapsto \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} |\xi|^p d\nu_{x, t}(\xi) dx$$

$(x, t, \xi, \omega) \mapsto f(x, t, \xi, \omega)$ est $\mathcal{B}(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}_\xi) \otimes \mathcal{P}_T$ -mesurable donc

$$(t, \omega) \mapsto \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}_\xi} f(x, t, \xi, \omega) d\xi dx$$

est \mathcal{P}_T -mesurable, donc en particulier $\mathcal{B}[0, T] \otimes \mathcal{F}$ -mesurable.

Remarques importantes :

Si $p > 1$, $\xi \mapsto |\xi|^p$ est dérivable. Pour chaque $p > 1$, il existe une suite de fonctions positives $g_n^p \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ qui converge simplement vers $\xi \mapsto |\xi|^p$ en croissant, ce qui démontre grâce au fait que $\forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \nu_{\omega, x, t}(d\xi) dx = \langle f(\omega, x, t, \xi), \partial_\xi \varphi(x, \xi) \rangle,$$

l'égalité

$$\int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}_\xi} |\xi|^p d\nu_{x, t}(\xi) dx = \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}_\xi} f(\omega, x, t, \xi) (\partial_\xi |\xi|^p) d\xi dx.$$

Si $p = 1$, Notons $|\cdot|_\zeta$ la fonction affine par morceaux dont la courbe se trace en reliant les points de coordonnées $(-\infty, 0); (-2\zeta, 0); (-\zeta, \zeta); (0, 0); (\zeta, \zeta); (2\zeta, 0); (+\infty, 0)$. En régularisant grâce à une suite (ρ_n) bien choisie, on a

$$\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\cdot|_\zeta * \rho_n(x, \xi) \nu_{\omega, x, t}(d\xi) dx = \langle f(\omega, x, t, \xi), \partial_\xi (|\cdot|_\zeta * \rho_n)(x, \xi) \rangle$$

d'où

$$\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\cdot|_{\zeta} * \rho_n(x, \xi) \nu_{\omega, x, t}(d\xi) dx = \langle f(\omega, x, t, \xi), ((\partial_{\xi} |\cdot|_{\zeta}) * \rho_n)(x, \xi) \rangle.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient

$$\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|_{\zeta} \nu_{\omega, x, t}(d\xi) dx = \langle f(\omega, x, t, \xi), (\partial_{\xi} |\cdot|_{\zeta})(x, \xi) \rangle.$$

Grâce au théorème de convergence monotone, le terme de gauche tend lorsque $\zeta \rightarrow +\infty$ vers

$$\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi| \nu_{\omega, x, t}(d\xi) dx.$$

Mais pour le terme de droite, on ne peut utiliser le théorème de convergence dominée que localement, on obtient donc $\forall R > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{(-R, R)} |\xi| \nu_{\omega, x, t}(d\xi) dx \\ = \int_{\mathbb{T}^N} \int_{(-R, 0)} -f(\omega, x, t, \xi) d\xi dx + \int_{\mathbb{T}^N} \int_{(0, R)} f(\omega, x, t, \xi) d\xi dx \end{aligned}$$

On va utiliser le fait que $\forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ et presque tout $\omega \in \Omega$,

$$t \mapsto \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} f(\omega, x, t, \xi) \varphi(x, \xi) dx d\xi$$

soit càdlàg, pour démontrer la mesurabilité de

$$\omega \mapsto \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} |\xi|^p d\nu_{x, t}(\xi) dx.$$

Pour $p > 1$, les remarques précédentes montrent que

$$(t, \omega) \mapsto \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}_{\xi}} |\xi|^p d\nu_{x, t}(\xi) dx$$

est $\mathcal{B}[0, T] \otimes \mathcal{F}$ -mesurable. Or avec les notations de la remarque, à $\omega \in \Omega$ fixé,

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} |\xi|^p d\nu_{x, t}(\xi) dx &= \sup_{t \in [0, T]} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} g_n^p(x, \xi) \nu_{\omega, x, t}(d\xi) dx \\ &= \sup_{t \in [0, T]} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} g_n^p(x, \xi) \nu_{\omega, x, t}(d\xi) dx = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} g_n^p(x, \xi) \nu_{\omega, x, t}(d\xi) dx; \end{aligned}$$

et comme

$$t \in [0, T] \mapsto \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} g_n^p(x, \xi) \nu_{\omega, x, t}(d\xi) dx$$

est càdlàg, il existe un sous-ensemble $D \subset [0, T]$ dénombrable, indépendant de ω et de n tel que

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} g_n^p(x, \xi) \nu_{\omega, x, t}(d\xi) dx = \sup_{t \in D} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} g_n^p(x, \xi) \nu_{\omega, x, t}(d\xi) dx.$$

Ainsi

$$\omega \mapsto \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} |\xi|^p d\nu_{x, t, \omega}(\xi) dx = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{t \in D} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} g_n^p(x, \xi) \nu_{\omega, x, t}(d\xi) dx$$

est \mathcal{F} -mesurable.

Si $p = 1$, grâce à la remarque précédente, on peut affirmer que

$$(t, \omega) \mapsto \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi| \nu_{\omega, x, t}(d\xi) dx$$

est $\mathcal{B}[0, T] \otimes \mathcal{F}$ -mesurable. Avec une démonstration similaire, on a aussi

$$(t, \omega) \mapsto \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi^+| \nu_{\omega, x, t}(d\xi) dx$$

$\mathcal{B}[0, T] \otimes \mathcal{F}$ -mesurable.

Comme il existe $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions positives d'éléments de $C_c^\infty(\mathbb{R})$ qui tend en croissant simplement vers $\mathbf{1}_{(0, R)}(\xi)$,

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} |\xi^+| d\nu_{x, t}(\xi) dx &= \sup_{t \in [0, T]} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{T}^N \times (0, R)} |\xi^+| d\nu_{x, t}(\xi) dx \\ &= \sup_{t \in [0, T]} \sup_{R > 0} \int_{\mathbb{T}^N \times (0, R)} |\xi^+| d\nu_{x, t}(\xi) dx \\ &= \sup_{t \in [0, T]} \sup_{R > 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{(0, R)} f(\omega, x, t, \xi) \psi_n(\xi) d\xi dx \\ &= \sup_{t \in [0, T]} \sup_{R > 0} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{(0, R)} f(\omega, x, t, \xi) \psi_n(\xi) d\xi dx ; \end{aligned}$$

et comme

$$t \in [0, T] \mapsto \int_{\mathbb{T}^N} \int_{(0, R)} f(\omega, x, t, \xi) \psi_n(\xi) d\xi dx$$

est càdlàg, il existe un sous-ensemble $D \subset [0, T]$ dénombrable, indépendant de

ω , n et R tel que

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{(0, R)} f(\omega, x, t, \xi) \psi_n(\xi) d\xi dx = \sup_{t \in D} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{(0, R)} f(\omega, x, t, \xi) \psi_n(\xi) d\xi dx.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \omega \mapsto \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} |\xi^+| d\nu_{x, t, \omega}(\xi) dx \\ = \sup_{R > 0} \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{t \in D} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{(0, R)} f(\omega, x, t, \xi) \psi_n(\xi) d\xi dx \end{aligned}$$

est \mathcal{F} -mesurable. En prenant une suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions négatives d'éléments de $C_c^\infty(\mathbb{R})$ qui tend en croissant simplement vers $\mathbf{1}_{[-R, 0]}(\xi)$, on arrive à

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} |\xi^-| d\nu_{x, t}(\xi) dx &= \sup_{t \in [0, T]} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{T}^N \times (-R, 0)} |\xi^-| d\nu_{x, t}(\xi) dx \\ &= \sup_{t \in [0, T]} \sup_{R > 0} \int_{\mathbb{T}^N \times (-R, 0)} |\xi^-| d\nu_{x, t}(\xi) dx \\ &= \sup_{t \in [0, T]} \sup_{R > 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{(-R, 0)} f(\omega, x, t, \xi) h_n(\xi) d\xi dx \\ &= \sup_{t \in [0, T]} \sup_{R > 0} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{(-R, 0)} f(\omega, x, t, \xi) h_n(\xi) d\xi dx ; \end{aligned}$$

et comme

$$t \in [0, T] \mapsto \int_{\mathbb{T}^N} \int_{(-R, 0)} f(\omega, x, t, \xi) h_n(\xi) d\xi dx$$

est càdlàg, il existe un sous-ensemble $D \subset [0, T]$ dénombrable, indépendant de ω , n et R tel que

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{(-R, 0)} f(\omega, x, t, \xi) h_n(\xi) d\xi dx = \sup_{t \in D} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{(-R, 0)} f(\omega, x, t, \xi) h_n(\xi) d\xi dx.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \omega \mapsto \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} |\xi^-| d\nu_{x, t, \omega}(\xi) dx \\ = \sup_{R > 0} \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{t \in D} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{(-R, 0)} f(\omega, x, t, \xi) h_n(\xi) d\xi dx \end{aligned}$$

est \mathcal{F} -mesurable, et donc

$$\begin{aligned} \omega \mapsto & \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} |\xi^+| + |\xi^-| d\nu_{x, t, \omega}(\xi) dx \\ & = \sup_{R > 0} \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{t \in D} \left(\int_{\mathbb{T}^N} \int_{(0, R)} f(\omega, x, t, \xi) \psi_n(\xi) d\xi dx \right. \\ & \quad \left. + \int_{\mathbb{T}^N} \int_{(-R, 0)} f(\omega, x, t, \xi) h_n(\xi) d\xi dx \right) \end{aligned}$$

est \mathcal{F} -mesurable.

2.2.11 Sur la proposition 15

Presque sûrement et pour tout $t \in [0, T]$,

$$(x, \xi) \mapsto f(x, t, \omega) = \mathbf{1}_{u(x, t, \omega) > \xi} = \delta_{u(x, t, \omega)}(\xi; +\infty)$$

est une fonction cinétique, donc presque sûrement et pour tout $t \in [0, T]$,

$$x \in \mathbb{T}^N \mapsto \delta_{u(x, t, \omega)}(d\xi)$$

est une mesure de Young qui s'annule à l'infini. On a grâce à l'item 3 de la définition de solution généralisée

$$\forall p \in [1; +\infty), \quad \mathbb{E} \int_{\mathbb{T}^N \times [0, T]} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p \delta_{u(x, t, \omega)}(d\xi) dx dt < +\infty$$

i.e.

$$\forall p \in [1; +\infty), \quad \mathbb{E} \int_{\mathbb{T}^N \times [0, T]} |u(x, t, \omega)|^p dx dt < +\infty$$

i.e.

$$\forall p \in [1, +\infty), \quad u \in L^p(\Omega \times \mathbb{T}^N \times [0, T]).$$

Soit $g \in L^\infty(\mathbb{T}^N)$ et $\Phi_n(\xi) = \mathbf{1}_{[-n, n]}(\xi)$, alors par hypothèse, chaque processus

$$(\omega, t) \mapsto \langle f(x, t, \omega, \xi), g(x) \Phi_n(\xi) \rangle$$

est prévisible. Il en va de même des processus constants

$$(\omega, t) \mapsto \langle \mathbf{1}_{0 > \xi}, g(x) \Phi_n(\xi) \rangle$$

et donc des processus

$$(\omega, t) \mapsto \langle f(x, t, \omega, \xi) - \mathbf{1}_{0 > \xi}, g(x) \Phi_n(\xi) \rangle$$

qui tendent vers le processus

$$(\omega, t) \mapsto \int_{\mathbb{T}^N} u(x, t, \omega) g(x) dx.$$

Cela montre qu'il est prévisible, tout comme le processus

$$(\omega, t) \mapsto u(x, t, \omega) \in L^1(\mathbb{T}^N),$$

donc $u \in L^1_{\mathcal{P}}(\Omega \times \mathbb{T}^N \times [0, T])$.

Les items 2, 3 et 4 de la proposition sont évidents.

2.2.12 Sur le lemme 16 « distance à un équilibre »

Il est intéressant de le comparer au lemme 2.2.1 du livre de Benoît Perthame [Per02] page 47 qui dit :

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est telle que $\text{sgn}(\xi) f(\xi) = |f(\xi)| \leq 1$, en posant $u = \int_{\mathbb{R}} f(\xi) d\xi$, il existe une unique fonction positive $m(\xi) \in C_0(\mathbb{R})$ telle que

$$\chi(\xi, u) - f(\xi) = \partial_{\xi} m(\xi)$$

et

$$\|m\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

Rappelons que $\chi(\xi, u) = \mathbf{1}_{u > \xi} - \mathbf{1}_{0 > \xi}$.

Dans le lemme de notre article, $f : X \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ est une fonction cinétique et (X, λ) un espace mesuré fini; cela implique que

$$m(z, \xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \mathbf{1}_{u(z) > \zeta} - f(z, \zeta) d\zeta$$

est bien définie et positive, avec

$$u(z) = \int_{\mathbb{R}} \chi_f(z, \zeta) d\zeta = \int_{\mathbb{R}} f(z, \zeta) - \mathbf{1}_{0 > \zeta} d\zeta.$$

Montrons que $f : X \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ cinétique, avec (X, λ) espace mesuré fini, impliquent

$$\operatorname{sgn}(\xi) (f(z, \xi) - \mathbf{1}_{0 > \xi}) = |f(z, \xi) - \mathbf{1}_{0 > \xi}| \leq 1$$

et

$$f(z, \xi) - \mathbf{1}_{0 > \xi} \in L^1(\mathbb{R}) \quad \text{pp en } z.$$

En effet,

$$f(z, \xi) - \mathbf{1}_{0 > \xi} = \nu_z(\xi, +\infty) - \mathbf{1}_{0 > \xi} = \begin{cases} \nu_z(\xi, +\infty) & \text{si } \xi \geq 0 \\ \nu_z(\xi, +\infty) - 1 & \text{si } \xi < 0 \end{cases}$$

donc

$$\operatorname{sgn}(\xi) (f(z, \xi) - \mathbf{1}_{0 > \xi}) = |f(z, \xi) - \mathbf{1}_{0 > \xi}| \leq 1.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f(z, \xi) - \mathbf{1}_{0 > \xi}| d\xi &= \int_{\mathbb{R}^+} \nu_z(\xi, +\infty) d\xi + \int_{\mathbb{R}_*^-} \nu_z(-\infty, \xi] d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{0 \leq \xi} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\zeta > \xi} \nu_z(d\zeta) d\xi + \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{0 > \xi} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\zeta \leq \xi} \nu_z(d\zeta) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{0 < \zeta} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\zeta > \xi \geq 0} d\xi \nu_z(d\zeta) + \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{0 > \zeta} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\zeta \leq \xi < 0} d\xi \nu_z(d\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \zeta \times \mathbf{1}_{0 < \zeta} \nu_z(d\zeta) + \int_{\mathbb{R}} (-\zeta) \times \mathbf{1}_{0 > \zeta} \nu_z(d\zeta) = \int_{\mathbb{R}} |\zeta| \nu_z(d\zeta), \end{aligned}$$

et comme

$$\int_X \int_{\mathbb{R}} |\zeta| \nu_z(d\zeta) d\lambda(z) < +\infty,$$

on a pour presque tout $z \in X$,

$$\int_{\mathbb{R}} |\zeta| \nu_z(d\zeta) < +\infty.$$

Le lemme 2.2.1 du Perthame permet d'affirmer que

$$\xi \mapsto \int_{-\infty}^{\xi} \mathbf{1}_{u(z) > \zeta} - f(z, \zeta) d\zeta \in C_0(\mathbb{R}) \quad \text{pp en } z,$$

que

$$m(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \mathbf{1}_{u(z) > \zeta} - f(z, \zeta) d\zeta \geq 0 \quad \text{pp en } z,$$

et que

$$\|m\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \int_{\mathbb{R}} |\zeta| \nu_z(d\zeta) \quad \text{pp en } z.$$

2.2.13 Sur la preuve de la proposition 17

$C_c^1(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ est séparable pour la topologie induite par la norme définie dans la preuve de cette proposition, cela signifie qu'il existe un ensemble dénombrable $D_1 \subset C_c^1(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ tel que $\forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, il existe un compact $K \subset \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}$ et une suite de fonctions $(\varphi_n) \subset D_1$ à support dans K (cf Droniou p72 [Dro01]) vérifiant

$$\begin{cases} \|\phi_n - \phi\|_\infty \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0 \\ \|\partial_i \phi_n - \partial_i \phi\|_\infty \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, N+1\} \end{cases}$$

Remarque : l'intégrale stochastique

$$t \mapsto \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) \nu_{\omega, x, s}(d\xi) dx dW(s)$$

est continue (presque sûrement) car elle appartient à l'ensemble des martingales continues de carré intégrable.

L'application J_φ peut se réécrire

$$\begin{aligned} J_\varphi : t \mapsto & \int_0^t \langle f(s), a(\xi) \cdot \nabla_x \varphi(x, \xi) \rangle ds \\ & + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x, s}(\xi) dx dW(s) \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi \varphi(x, \xi) \|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 d\nu_{x, s}(\xi) dx ds. \end{aligned}$$

Il existe $\Omega_3 \subset \Omega$ vérifiant $\mathbb{P}(\Omega_3) = 1$, tel que $\forall \omega \in \Omega_3$, $m_\omega(\partial_\xi \varphi)$ soit une mesure finie de $[0, T]$, donc $\forall \omega \in \Omega_3$, $t \mapsto m_\omega(\partial_\xi \varphi)([0, t])$ est croissante, donc limitée à gauche.

Si $(t_n) \subset [t, T]$ et $t_n \rightarrow t$ en décroissant alors la suite de segments $[0, t_n]$ est décroissante et vérifie

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [0, t_n] = [0, t]$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} m_\omega(\partial_\xi \varphi)([0, t_n]) = m_\omega(\partial_\xi \varphi) \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [0, t_n] \right) = m_\omega(\partial_\xi \varphi)([0, t])$$

et $\forall \omega \in \Omega_3$, $t \mapsto m_\omega(\partial_\xi \varphi)([0, t])$ est continue à droite.

Comme ν est une mesure finie de $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}$, si on l'applique à une fonction test

$g \in C_c^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, on a

$$\langle \nu_t, g \rangle = \langle -\partial_\xi f(t), g \rangle = \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} f(t, x, \xi) \partial_\xi g(x, \xi) dx d\xi$$

qui peut s'écrire

$$\int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} g(x, \xi) \nu_{x,t}(d\xi) dx = \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} f(t, x, \xi) \partial_\xi g(x, \xi) dx d\xi.$$

Soit maintenant ψ définie par

$$\psi(x, \xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \varphi(x, \zeta) d\zeta$$

avec $\varphi \in C_c(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, on peut trouver une suite $(g_n)_n \subset C_c^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ convergent vers ψ de manière uniforme sur tout compact et telle que $(\partial_\xi g_n)_n$ converge vers $\partial_\xi \psi$ de manière uniforme sur tout compact. Cela permet de prouver

$$\int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} \psi(x, \xi) \nu_{x,t}(d\xi) dx = \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} f(t, x, \xi) \partial_\xi \psi(x, \xi) dx d\xi = \langle f(t), \varphi \rangle.$$

2.2.14 Sur la remarque 19 « uniform bound »

L'item 3 de la proposition 17 affirme que $\forall p \in [1, +\infty)$,

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\nu_{x,t}(\xi) dx \right) < +\infty$$

On a donc presque sûrement,

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\nu_{\omega, x, t}(\xi) dx \leq C_p(\omega).$$

De plus, si $(t_k) \subset [0, T]$ tend en croissant vers $t \in (0, T]$ alors $\forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \nu_{\omega, x, t_k}(d\xi) dx &= \langle f(\omega, x, t_k, \xi), \partial_\xi \varphi(x, \xi) \rangle \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \\ \langle f^-(\omega, x, t, \xi), \partial_\xi \varphi(x, \xi) \rangle &= \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} f^-(\omega, x, t, \xi) \partial_\xi \varphi(x, \xi) dx d\xi \\ &= - \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} \partial_\xi f^-(\omega, x, t, \xi) \varphi(x, \xi) dx d\xi = \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \nu_{\omega, x, t}^-(d\xi) dx. \end{aligned}$$

Soit $\zeta > 0$ fixé, et soit la fonction $\alpha_\zeta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ positive, de classe C^1 telle que

- $\alpha_\zeta(s) = 0 \quad \forall s \notin]-\zeta - \varepsilon, \zeta + \varepsilon[$
- $\alpha_\zeta(s) = |s|^p \quad \forall s \in [-\zeta, \zeta]$
- $|\alpha_\zeta(\xi)| \leq |\xi|^p$ sur $]-\zeta - \varepsilon, -\zeta[$ et sur $]\zeta, \zeta + \varepsilon[$.

Comme $\forall \omega \in \hat{\Omega}$,

$$\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p \nu_{\omega, x, t_k}(d\xi) dx \leq C_p(\omega)$$

avec $C_p(\omega)$ indépendant de k , et que

$$\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \alpha_\zeta(\xi) \nu_{\omega, x, t_k}(d\xi) dx \leq \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p \nu_{\omega, x, t_k}(d\xi) dx ;$$

en faisant tendre k vers l'infini, puis ζ vers l'infini, on obtient

$$\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \alpha_\zeta(\xi) \nu_{\omega, x, t}^-(d\xi) dx \leq C_p(\omega)$$

puis

$$\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p \nu_{\omega, x, t}^-(d\xi) dx \leq C_p(\omega).$$

Or $C_p(\omega)$ ne dépend pas de la variable t , donc

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p \nu_{\omega, x, t}^-(d\xi) dx \leq C_p(\omega)$$

Remarquons aussi que comme $\forall \varphi \in C_c(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, $t \mapsto \langle f^-(t), \varphi \rangle$ est càglàd et comme $\omega \mapsto f^-(x, t, \xi)$ est \mathcal{F} -mesurable pour chaque $t \in [0, T]$, on a

$$\omega \mapsto \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p \nu_{\omega, x, t}^-(d\xi) dx$$

qui est \mathcal{F} -mesurable.

En écrivant ce sup comme une limite (je l'ai déjà fait pour f et ν , la méthode est la même) alors je peux utiliser le lemme de Fatou pour finir.

Si je pars de

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p \nu_{\omega, x, t}(d\xi) dx \right) \leq C_p,$$

j'obtiens

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \alpha_\zeta(\xi) \nu_{\omega, x, t}(d\xi) dx \right) \leq C_p$$

quel que soit k , avec C_p indépendant de k et de t limite des t_k . Puis

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \alpha_\zeta(\xi) \nu_{\omega, x, t}^- (d\xi) dx \right) \\ \leq \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \alpha_\zeta(\xi) \nu_{\omega, x, t} (d\xi) dx \right) \leq C_p, \end{aligned}$$

donc

$$\mathbb{E} \left(\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \alpha_\zeta(\xi) \nu_{\omega, x, t}^- (d\xi) dx \right) \leq C_p$$

avec C_p qui ne dépend ni de t , ni de ζ .

Je peux ensuite faire tendre ζ vers l'infini pour avoir grâce au théorème de convergence monotone

$$\mathbb{E} \left(\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p \nu_{\omega, x, t}^- (d\xi) dx \right) \leq C_p.$$

En utilisant le lemme de Fatou, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} |\xi|^p \nu_{\omega, x, t}^- (d\xi) dx \right) &= \mathbb{E} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} |\xi|^p \nu_{\omega, x, t_n}^- (d\xi) dx \right) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left(\int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} |\xi|^p \nu_{\omega, x, t_n}^- (d\xi) dx \right) \leq C_p \end{aligned}$$

2.2.15 Sur la remarque 20 « équation pour f^- »

Pour obtenir l'égalité (2.37), il suffit d'utiliser (2.27) et (2.32) pour le premier terme à gauche de l'égalité, (2.27) et le théorème de convergence dominée pour tous les autres termes sauf pour le terme stochastique (3e terme à droite de l'égalité). Soit une suite $(t_n) \subset [0, T]$ croissante convergant vers $t \in (0, T]$, le troisième terme de droite de l'égalité de (2.27) s'écrit

$$\int_0^T \mathbf{1}_{[0, t_n]}(s) \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x, s} (d\xi) dx dW(s).$$

On utilise l'isométrie d'Itô, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\left| \int_0^T \mathbf{1}_{]0, t_n]}(s) \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x,s}(d\xi) dx dW(s) \right|^2 \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\int_0^T \left\| \mathbf{1}_{]0, t_n]}(s) \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x,s}(d\xi) dx \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds \right), \end{aligned}$$

et on montre grâce au théorème de convergence dominée que le terme de droite tend vers

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\int_0^T \left\| \mathbf{1}_{]0, t]}(s) \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x,s}(d\xi) dx \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\left| \int_0^T \mathbf{1}_{]0, t]}(s) \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x,s}(d\xi) dx dW(s) \right|^2 \right); \end{aligned}$$

ce qui donne la convergence presque sûre de

$$\int_0^T \mathbf{1}_{]0, t_n]}(s) \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x,s}(d\xi) dx dW(s)$$

vers

$$\int_0^T \mathbf{1}_{]0, t]}(s) \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x,s}(d\xi) dx dW(s).$$

Pour obtenir (2.39), on remarque que si presque sûrement

$$f(t) = f^-(t), \quad \forall t \in [0, T] \setminus D$$

où D est un sous-ensemble dénombrable de $[0, T]$, il en va de même pour $\partial_\xi f(t) = \partial_\xi f^-(t)$ et donc pour $\nu_t = \nu_t^-$.

2.2.16 A propos de la proposition 21 « the case of equilibrium »

(2.7) dit que la suite de variables aléatoires $\left(\omega \mapsto m \left(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times B_{R_n}^c \right) \right)_n$ converge dans $L^1(\Omega)$, il existe donc une sous-suite pour laquelle elle converge presque sûrement.

Appliquons l'égalité (2.38) à une suite de fonctions tests

$((x, \xi) \mapsto \psi(x) g_n(\xi))_n \subset C_c^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^+)$ où les g_n sont positives, égales à 1 sur $[-R_n, R_n]$ et égales à 0 sur $[-R_n - 1, R_n + 1]$. La suite converge simplement en croissant vers $\psi(x) \mathbf{1}_{\mathbb{R}}(\xi)$. Comme on peut choisir la suite $(\partial_\xi g_n)$ uniformé-

ment bornée, qu'elle converge simplement vers 0, et que chaque terme vaut 0 pour $\xi \in B_{R_n}$, en faisant tendre n vers l'infini, l'égalité (2.38) devient

$$\int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} \psi(x) (f^+(t) - \mathbf{1}_{0 > \xi}) d\xi dx - \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} \psi(x) (\mathbf{1}_{v > \xi} - \mathbf{1}_{0 > \xi}) d\xi dx = 0.$$

Cette égalité étant vraie quelle que soit la fonction test $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^+)$, on en déduit que pour presque tout $x \in \mathbb{T}^N$,

$$\int_{\mathbb{R}} f^+(t) - \mathbf{1}_{0 > \xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{v(x) > \xi} - \mathbf{1}_{0 > \xi} d\xi = v(x),$$

ce qui permet d'utiliser le lemme 16 pour obtenir le fait que

$$\int_{-\infty}^{\xi} f^+(t) - \mathbf{1}_{0 > \zeta} d\zeta \leq 0,$$

c'est à dire que la mesure positive m^* (qui est la restriction de m à $\mathbb{T}^N \times \{t\} \times \mathbb{R}$) est égale à $\int_{-\infty}^{\xi} f^+(t) - \mathbf{1}_{0 > \zeta} d\zeta d\xi dx \leq 0$ donc $m^* = 0$. L'égalité

$$f^+ - \mathbf{1}_{v > \xi} = \partial_{\xi} m^*$$

permet de conclure.

2.2.17 Sur la proposition 23

Remarque :

dans la preuve, la notation $\chi_{u(t)}(x, \xi)$ aurait pu être celle du livre de Benoît Perthame [Per02], à savoir

$$\chi_{u(t)}(x, \xi) = \chi(\xi, u(x, t)).$$

Si u est une solution de (2.1), de condition initiale u_0 , on a $\mathbf{1}_{u(x,t) > \xi}$ solution généralisée de (2.1). Donc $\forall \omega \in \Omega, \forall \varphi \in C_c(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}), t \mapsto \langle \mathbf{1}_{u(x,t) > \xi}, \varphi \rangle$ est càdlàg. L'ajout de la constante $\langle \mathbf{1}_{0 > \xi}, \varphi \rangle$ ne change pas le caractère càdlàg donc presque sûrement, $t \mapsto \langle \mathbf{1}_{u(x,t) > \xi} - \mathbf{1}_{0 > \xi}, \varphi \rangle$ est càdlàg. C'est à dire avec les notations de l'article $t \mapsto \langle \chi_{u(t)}(x, \xi), \varphi \rangle$ est càdlàg.

Soit $(t_n) \subset [0, T]$ une suite décroissante qui tend vers $t_* \in [0, T)$ alors

$$\forall \varphi \in C_c(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}), \quad \langle \chi_{u(t_n)}(x, \xi), \varphi \rangle \rightarrow \langle \chi_{u(t_*)}(x, \xi), \varphi \rangle.$$

Soit $g \in L^1(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, il existe une suite $(\varphi_k) \subset C_c(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ qui converge vers g

dans $L^1(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$. Grâce à l'inégalité

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} \chi_{u(t_n)}(x, \xi) g(x, \xi) dx d\xi - \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} \chi_{u(t_*)}(x, \xi) g(x, \xi) dx d\xi \right| \\ & \leq \left| \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} \chi_{u(t_n)}(x, \xi) (g(x, \xi) - \varphi_k(x, \xi)) dx d\xi \right| \\ & + \left| \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} (\chi_{u(t_n)}(x, \xi) - \chi_{u(t_*)}(x, \xi)) \varphi_k(x, \xi) dx d\xi \right| \\ & + \left| \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} \chi_{u(t_*)}(x, \xi) (g(x, \xi) - \varphi_k(x, \xi)) dx d\xi \right|, \end{aligned}$$

on peut rendre le premier et le troisième terme à droite du signe \leq aussi petit que l'on veut pour un k suffisamment grand, puis une fois ce k fixé, le deuxième terme est rendu aussi petit que l'on veut en prenant n suffisamment grand.

On a donc $f_n(t) = 1_{u(x, t_n) > \xi}$ qui tend vers $f(t) = 1_{u(x, t) > \xi}$ dans $L^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ faible*, le lemme 12 et l'item 3 de la définition de solution permettent de conclure.

2.2.18 Sur la proposition 24

On peut se poser la question suivante : pourquoi se contente-t-on de fonctions test positives ?

Il y a deux réponses possibles :

1. les fonctions ρ et ψ utilisée dans la preuve du théorème 26 (unicité et réduction) sont des approximations de l'identité
2. Pour les inégalités au sens des distributions, les fonctions tests sont positives.

On peut décrire simplement ψ_1 et ψ_2 :

elles appartiennent à $C^\infty(\mathbb{R})$, sont nulles sur $] -\infty; -R]$,

ψ_1 est croissante sur $[-R, R]$,

ψ_2 est convexe sur $[-R, R]$,

ψ_1 est constante égale à $\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R})}$ sur $[R, +\infty[$,

ψ_2 est affine de coefficient directeur $\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R})}$ sur $[R, +\infty[$.

Plus exactement, pour $\zeta \in [R, +\infty[$,

$$\psi_2(\zeta) = \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R})}\zeta - \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R})}R + \int_{-\infty}^R \psi_1(\xi) d\xi = \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R})}\zeta + A.$$

Pour prouver

$$\psi_2(\zeta) \leq (|\zeta| + R) \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

il suffit de distinguer les cas $\zeta \in [-R, 0]$; $\zeta \in [0, R]$; $\zeta \in [R; +\infty)$.

Grâce au théorème de Tonelli (égalité à prendre soit avec des exposant + pour les limites à droite ou – pour les limites à gauche de f_1, f_2, ν^1, ν^2), on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} f_1(x, s, \xi) \bar{f}_2(y, s, \zeta) \psi(\xi - \zeta) d\xi d\zeta \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1_{(\xi, +\infty)}(u) \nu_{x,s}^1(du) \int_{\mathbb{R}} 1_{(-\infty, \zeta]}(v) \nu_{y,s}^2(dv) \psi(\xi - \zeta) d\xi d\zeta \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1_{(-\infty, \zeta]}(v) \int_{\mathbb{R}} 1_{(\xi, +\infty)}(u) \psi(\xi - \zeta) d\xi d\zeta \nu_{x,s}^1(du) \nu_{y,s}^2(dv) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1_{[v, +\infty)}(\zeta) \int_{\mathbb{R}} 1_{(-\infty, u)}(\xi) \psi(\xi - \zeta) d\xi d\zeta \nu_{x,s}^1(du) \nu_{y,s}^2(dv) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1_{[v, +\infty)}(\zeta) \psi_1(u - \zeta) d\zeta \nu_{x,s}^1(du) \nu_{y,s}^2(dv) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \psi_2(u - v) \nu_{x,s}^1(du) \nu_{y,s}^2(dv). \end{aligned}$$

Finalement, il vient

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} f_1(x, s, \xi) \bar{f}_2(y, s, \zeta) \psi(\xi - \zeta) d\xi d\zeta \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \psi_2(u - v) \nu_{x,s}^1(du) \right) \nu_{y,s}^2(dv) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} (|u| + |v| + R) \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R})} \nu_{x,s}^1(du) \right) \nu_{y,s}^2(dv) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} (\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R})} |v|) \nu_{y,s}^2(dv) + \int_{\mathbb{R}} (\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R})} |u|) \nu_{x,s}^1(du) + \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R})} R. \end{aligned}$$

Vérifions que les autres termes de l'inégalité 2.47 sont finis :

Je commence par

$$\begin{aligned} I_\psi &= \frac{1}{2} \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \rho(x - y) \mathbb{E} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\xi - \zeta) \\ &\quad \times \sum_{k \geq 1} |g_k(x, \xi) - g_k(y, \zeta)|^2 d\nu_{x,s}^1 \otimes \nu_{y,s}^2(\xi, \zeta) ds dx dy, \end{aligned}$$

qu'on peut écrire aussi

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \rho(x-y) \mathbb{E} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\xi - \zeta) \\
& \quad \times \|\Phi(x, \xi) - \Phi(y, \zeta)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 d\nu_{x,s}^1 \otimes \nu_{y,s}^2(\xi, \zeta) ds dx dy \\
& \leq \frac{1}{2} \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \rho(x-y) \mathbb{E} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\xi - \zeta) \\
& \quad \times D_1(|x-y|^2 + |\xi - \zeta|) d\nu_{x,s}^1 \otimes \nu_{y,s}^2(\xi, \zeta) ds dx dy \\
& \leq \frac{1}{2} \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \|\rho\|_\infty \mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\xi - \zeta) D_1(1 + |\xi - \zeta|) d\nu_{x,s}^1 \otimes \nu_{y,s}^2(\xi, \zeta) ds dx dy \\
& \leq \frac{1}{2} \|\rho\|_\infty D_1 \left(\int_{(\mathbb{T}^N)^2} \mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \|\psi\|_\infty d\nu_{x,s}^1 \otimes \nu_{y,s}^2(\xi, \zeta) ds dx dy \right. \\
& \quad \left. + \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \|\psi\|_\infty (1 + 2|\xi|^2 + 2|\zeta|^2) d\nu_{x,s}^1 \otimes \nu_{y,s}^2(\xi, \zeta) ds dx dy \right) \\
& \leq \frac{1}{2} \|\rho\|_\infty D_1 2 \|\psi\|_\infty \left(T + \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (|\xi|^2 + |\zeta|^2) d\nu_{x,s}^1 \otimes \nu_{y,s}^2(\xi, \zeta) ds dx dy \right)
\end{aligned}$$

Le troisième item de la définition de solution généralisée permet de conclure et d'avoir la majoration suivante

$$I_\psi \leq \frac{1}{2} \|\rho\|_\infty D_1 2 \|\psi\|_\infty (T + 2C_2 T) = \|\rho\|_\infty D_1 \|\psi\|_\infty T (1 + 2C_2).$$

Regardons ensuite le terme

$$\begin{aligned}
I_\rho = \mathbb{E} \left(\int_0^t \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} f_1(x, s, \xi) \bar{f}_2(y, s, \zeta) \right. \\
\left. \times (a(\xi) - a(\zeta)) \psi(\xi - \zeta) d\xi d\zeta \cdot \nabla_x \rho(x-y) dx dy ds \right)
\end{aligned}$$

Pour cela, reprenons les calculs de la remarque 25 :

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^2} f_1(x, s, \xi) \bar{f}_2(y, s, \zeta) \psi(\xi - \zeta) d\xi d\zeta \\
& \leq \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R})} \left(\int_{\mathbb{R}} (|v|) \nu_{y,s}^2(dv) + \int_{\mathbb{R}} (|u|) \nu_{x,s}^1(du) - R \right).
\end{aligned}$$

Reprenons ces calculs pour majorer I_ρ , ou plutôt

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\int_0^t \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} f_1(x, s, \xi) \bar{f}_2(y, s, \zeta) \right. \\
& \quad \left. \times (a_i(\xi) - a_i(\zeta)) \psi(\xi - \zeta) d\xi d\zeta \partial_i \rho(x-y) dx dy ds \right)
\end{aligned}$$

pour $i \in \{1, \dots, N\}$ fixé.

$$\begin{aligned}
& \left| \mathbb{E} \left(\int_0^t \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} f_1(x, s, \xi) \bar{f}_2(y, s, \zeta) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \times (a_i(\xi) - a_i(\zeta)) \psi(\xi - \zeta) d\xi d\zeta \partial_i \rho(x - y) dx dy ds \right) \right| \\
& \leq \mathbb{E} \left(\int_0^T \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} f_1(x, s, \xi) \bar{f}_2(y, s, \zeta) \right. \\
& \quad \left. \times |a_i(\xi) - a_i(\zeta)| \psi(\xi - \zeta) d\xi d\zeta \partial_i \rho(x - y) dx dy ds \right) \\
& \leq \|\partial_i \rho\|_\infty \mathbb{E} \left(\int_0^T \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} f_1(x, s, \xi) \bar{f}_2(y, s, \zeta) \right. \\
& \quad \left. \times L (1 + |\xi|^{d_i} + |\zeta|^{d_i}) \psi(\xi - \zeta) d\xi d\zeta dx dy ds \right)
\end{aligned}$$

où d_i est un entier naturel fixé et L une constante positive car a_i est à croissance au plus polynomiale.

Prenons $d_i \geq 2$ pour rendre $\xi \mapsto |\xi|^{d_i}$ de classe C^1 et étudions

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\int_0^T \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} f_1(x, s, \xi) \bar{f}_2(y, s, \zeta) |\xi|^{d_i} \psi(\xi - \zeta) d\xi d\zeta dx dy ds \right) \\
& = \mathbb{E} \left(\int_0^T \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[v, +\infty)}(\zeta) \right. \\
& \quad \left. \times \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{(-\infty, u)}(\xi) |\xi|^{d_i} \psi(\xi - \zeta) d\xi d\zeta \nu_{x,s}^1(du) \nu_{y,s}^2(dv) dx dy ds \right) \\
& = \mathbb{E} \left(\int_0^T \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[v, +\infty)}(\zeta) \mathbf{1}_{(-\infty, u+R)}(\zeta) \right. \\
& \quad \left. \times \int_{(-R, (u-\zeta) \wedge R)} (|u|^{d_i} + |R|^{d_i}) \psi(\xi) d\xi d\zeta \nu_{x,s}^1(du) \nu_{y,s}^2(dv) dx dy ds \right) \\
& \leq \mathbb{E} \left(\int_0^T \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[v, +\infty)}(\zeta) \right. \\
& \quad \left. \times (|u|^{d_i} + |R|^{d_i}) \psi_1(u - \zeta) d\zeta \nu_{x,s}^1(du) \nu_{y,s}^2(dv) dx dy ds \right) \\
& = \mathbb{E} \left(\int_0^T \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (|u|^{d_i} + |R|^{d_i}) \psi_2(u - v) \nu_{x,s}^1(du) \nu_{y,s}^2(dv) dx dy ds \right) \\
& \leq \left(\sup_{x \in [-R, R]} \psi_2(x) + A \right) \mathbb{E} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |u|^{d_i} \nu_{x,s}^1(du) dx ds \right) \\
& \quad + 2\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R})} \mathbb{E} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |u|^{d_i+1} \nu_{x,s}^1(du) dx ds \right) + Cste \\
& \leq (3\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R})} R) d_i T + 2\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R})} (d_i + 1) T + Cste.
\end{aligned}$$

Une étude similaire montre que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\int_0^T \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} f_1(x, s, \xi) \bar{f}_2(y, s, \zeta) |\zeta|^{d_i} \psi(\xi - \zeta) d\xi d\zeta dx dy ds \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\int_0^T \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[v, +\infty)}(\zeta) |\zeta|^{d_i} \psi_1(u - \zeta) d\zeta \nu_{x,s}^1(du) \nu_{y,s}^2(dv) dx dy ds \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\int_0^T \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{v < u - R} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[v, u - R)}(\zeta) |\zeta|^{d_i} \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R})} d\zeta \nu_{x,s}^1(du) \nu_{y,s}^2(dv) dx dy ds \right) \\
&\quad + \mathbb{E} \left(\int_0^T \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[v, +\infty)}(\zeta) \right. \\
&\quad \times \left. \mathbf{1}_{(u - R, u + R)}(\zeta) |\zeta|^{d_i} \psi_1(u - \zeta) d\zeta \nu_{x,s}^1(du) \nu_{y,s}^2(dv) dx dy ds \right) \\
&\leq \mathbb{E} \left(\int_0^T \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{v < u - R} \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R})} \right. \\
&\quad \times \left. \left(\frac{|u - R|^{d_i + 1}}{d_i + 1} + \frac{|v|^{d_i + 1}}{d_i + 1} \right) \nu_{x,s}^1(du) \nu_{y,s}^2(dv) dx dy ds \right) \\
&\quad + \mathbb{E} \left(\int_0^T \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R})} \right. \\
&\quad \times \left. \left(\frac{|u + R|^{d_i + 1}}{d_i + 1} + \frac{|v|^{d_i + 1}}{d_i + 1} + \frac{|u - R|^{d_i + 1}}{d_i + 1} \right) \nu_{x,s}^1(du) \nu_{y,s}^2(dv) dx dy ds \right) \\
&\leq \frac{5 \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R})} T}{d_i + 1} C_{d_i + 1}
\end{aligned}$$

Il est maintenant facile de voir que I_ρ est majoré.

La même démonstration montre que le premier terme de droite de l'inégalité 2.47 est bien fini.

2.2.19 Sur la démonstration de la proposition 24

L'item 4 de la définition de solution généralisée s'écrivait dans la preuve de la proposition 17

$$\langle f^+(t), \varphi \rangle = J_\varphi(t) + \langle f(0), \varphi \rangle - \langle m, \partial_\xi \varphi \rangle([0, t])$$

avec

$$\begin{aligned}
J_\varphi(t) &= \int_0^t \langle f(s), a(\xi) \cdot \nabla_x \varphi(x, \xi) \rangle ds \\
&\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x,s}(\xi) dx dW(s) \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi \varphi(x, \xi) \|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 d\nu_{x,s}(\xi) dx ds
\end{aligned}$$

Ici, nous l'écrivons

$$\langle f^+(t), \varphi \rangle = \mu([0, t]) + F(t)$$

avec

$$F(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x,s}(\xi) dx dW(s).$$

Notons que $\langle f_0, \varphi \rangle$ s'écrit $\langle f_0, \varphi \rangle \delta_0([0, t])$, ce qui n'est autre que $\langle f(0), \varphi \rangle \times 1$, $\forall t \in [0, T]$.

Remarque : Si on prolonge la fonction $t \mapsto \delta_0([0, t])$ à tout $t \in \mathbb{R}$, il faut la prolonger en lui donnant la valeur 0 pour tout $t \in (-\infty, 0)$. Ainsi, sa dérivée faible sera égale à la mesure δ_0 .

On a vu que, $t \mapsto \langle f^+(t), \varphi \rangle$ est càdlàg, $t \mapsto J_\varphi(t)$ est continue et $t \mapsto \langle m, \partial_\xi \varphi \rangle([0, t])$ est càdlàg. Il est facile de voir que $t \mapsto \delta_0([0, t])$ est càdlàg. Il en va donc de même pour $t \mapsto \mu([0, t])$ dont la dérivée faible sur \mathbb{R} est

$$\begin{aligned}
&\langle f(0), \varphi \rangle \delta_0(\cdot) + \langle f(t), a(\xi) \cdot \nabla_x \varphi(x, \xi) \rangle dt \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi \varphi(x, \xi) \|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 d\nu_{x,t}(\xi) dx dt \\
&\quad - \langle m, \partial_\xi \varphi \rangle(\cdot) + \langle m, \partial_\xi \varphi \rangle([0, T]) \delta_T;
\end{aligned}$$

$t \mapsto \mu([0, t])$ est donc à variations bornées sur \mathbb{R} .

Le premier et le dernier terme de cette dérivée faible sont à enlever si on dérive sur $(0, T)$.

L'écriture $\delta_0([0, t])$ servira par la suite lorsqu'on aura à écrire $d\mu(s)$, alors

$$d\langle f(0), \varphi \rangle \delta_0(\cdot) = \langle f(0), \varphi \rangle d\delta_0(\cdot)$$

aura un sens, alors que $d\langle f(0), \varphi \rangle$ n'en a pas.

Grâce à l'égalité

$$\langle f^+(t), \varphi \rangle = J_\varphi(t) + \langle f(0), \varphi \rangle - \langle m, \partial_\xi \varphi \rangle([0, t])$$

et au fait que $\bar{f} = 1 - f$ (remarquons aussi que $\partial_\xi f = -\nu$ et donc $\partial_\xi \bar{f} = \nu$), on

obtient

$$\begin{aligned}
\langle \bar{f}^+(t), \varphi \rangle &= \langle 1 - f^+(t), \varphi \rangle = \langle 1, \varphi \rangle - \langle f^+(t), \varphi \rangle = \langle 1, \varphi \rangle \\
&- \left(\int_0^t \langle f(s), a(\xi) \cdot \nabla_x \varphi(x, \xi) \rangle ds + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x,s}(\xi) dx dW(s) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi \varphi(x, \xi) \|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 d\nu_{x,s}(\xi) dx ds \right. \\
&\quad \left. + \langle f(0), \varphi \rangle - \langle m, \partial_\xi \varphi \rangle([0, t]) \right) \\
&= - \int_0^t \langle f(s), a(\xi) \cdot \nabla_x \varphi(x, \xi) \rangle ds - \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x,s}(\xi) dx dW(s) \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi \varphi(x, \xi) \|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 d\nu_{x,s}(\xi) dx ds \\
&\quad + \langle \bar{f}(0), \varphi \rangle + \langle m, \partial_\xi \varphi \rangle([0, t]) \\
&= \int_0^t \langle \bar{f}(s), a(\xi) \cdot \nabla_x \varphi(x, \xi) \rangle ds - \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x,s}(\xi) dx dW(s) \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi \varphi(x, \xi) \|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 d\nu_{x,s}(\xi) dx ds \\
&\quad + \langle \bar{f}(0), \varphi \rangle + \langle m, \partial_\xi \varphi \rangle([0, t])
\end{aligned}$$

car

$$\int_0^t \langle 1, a(\xi) \cdot \nabla_x \varphi(x, \xi) \rangle ds = \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_{\mathbb{R}} a_i(\xi) \int_{\mathbb{T}^N} \partial_{x_i} \varphi(x, \xi) dx d\xi ds = 0$$

donc

$$\langle \bar{f}^+(t), \varphi \rangle = \bar{F}(t) + \bar{\mu}([0, t]).$$

Remarque : par commodité, dans les calculs précédents, je n'ai pas mis les indices 1 et 2, $\bar{\mu}$ correspond donc à μ_2 de l'article et μ correspond à μ_1 de l'article.

Notons maintenant comme dans l'article

$$\begin{aligned}
\langle \langle f_1^+(t) \bar{f}_2^+(t), \alpha \rangle \rangle &= \langle f_1^+(t), \varphi_1 \rangle \langle \bar{f}_2^+(t), \varphi_2 \rangle \\
&= F_1(t) \bar{F}_2(t) + F_1(t) \bar{\mu}_2([0, t]) + \mu_1([0, t]) \bar{F}_2(t) + \mu_1([0, t]) \bar{\mu}_2([0, t]).
\end{aligned}$$

Remarque :

La formule d'intégration par parties des fonctions à variations bornées donnée par le Revuz-Yor est utilisée pour faire apparaître le premier terme de gauche de l'inégalité 2.47. Elle est une conséquence du théorème de Fubini et de propriétés élémentaires des mesures.

Si les intégrales sont prises sur $[0, t]$ et non pas sur $(0, t]$, nous ne pouvons pas faire apparaître les données initiales $f_{1,0}$, $\bar{f}_{2,0}$.

On a grâce au théorème de Fubini

$$\int_{[0,T]} \mu_1 [0, t] d\bar{\mu}_2 (t) = \mu_1 [0, T] \bar{\mu}_2 [0, T] - \int_{[0,T]} \bar{\mu}_2 [0, s] d\mu_1 (s)$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} \int_{(0,T]} \mu_1 [0, t] d\bar{\mu}_2 (t) + \mu_1 (\{0\}) \bar{\mu}_2 (\{0\}) \\ = \mu_1 [0, T] \bar{\mu}_2 [0, T] - \int_{[0,T]} \mathbf{1}_{(0,T]} (s) \bar{\mu}_2 [0, s] d\mu_1 (s), \end{aligned}$$

soit

$$\int_{(0,T]} \mu_1 [0, t] d\bar{\mu}_2 (t) + \mu_1 (\{0\}) \bar{\mu}_2 (\{0\}) = \mu_1 [0, T] \bar{\mu}_2 [0, T] - \int_{(0,T]} \bar{\mu}_2 [0, s] d\mu_1 (s).$$

L'intégration par parties stochastique, appelée aussi première formule d'Itô, ou simplement formule d'Itô s'écrit dans notre cas

$$\begin{aligned} F_1 (t) \bar{F}_2 (t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi_1 (x, \xi) \Phi (x, \xi) d\nu_{x,s}^1 (\xi) dx dW (s) \\ &\quad \times \left(- \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi_2 (y, \zeta) \Phi (y, \zeta) d\nu_{y,s}^2 (\zeta) dy dW (s) \right) \\ &= F_1 (0) \bar{F}_2 (0) - \int_0^t \left(F_1 (s) \times \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi_2 (y, \zeta) \Phi (y, \zeta) d\nu_{y,s}^2 (\zeta) dy \right) dW (s) \\ &\quad + \int_0^t \left(\bar{F}_2 (s) \times \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi_1 (x, \xi) \Phi (x, \xi) d\nu_{x,s}^1 (\xi) dx \right) dW (s) + \langle F_1, \bar{F}_2 \rangle_t. \end{aligned}$$

En se servant de la définition du crochet, on trouve :

$$\begin{aligned} \langle F_1, \bar{F}_2 \rangle_t &= \frac{1}{4} \left(\langle F_1 + \bar{F}_2, F_1 + \bar{F}_2 \rangle_t - \langle F_1 - \bar{F}_2, F_1 - \bar{F}_2 \rangle_t \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\int_0^t \left\| \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi_1 (x, \xi) \Phi (x, \xi) d\nu_{x,s}^1 (\xi) dx \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi_2 (y, \zeta) \Phi (y, \zeta) d\nu_{y,s}^2 (\zeta) dy \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t \left\| \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi_1 (x, \xi) \Phi (x, \xi) d\nu_{x,s}^1 (\xi) dx \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi_2 (y, \zeta) \Phi (y, \zeta) d\nu_{y,s}^2 (\zeta) dy \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds \right) \\ &= \int_0^t \left\langle \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi_1 (x, \xi) \Phi (x, \xi) d\nu_{x,s}^1 (\xi) dx, \right. \\ &\quad \left. - \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi_2 (y, \zeta) \Phi (y, \zeta) d\nu_{y,s}^2 (\zeta) dy \right\rangle_{L_2(H, \mathbb{R})} ds, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
& \left\langle \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi_1(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x,s}^1(\xi) dx, - \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi_2(y, \zeta) \Phi(y, \zeta) d\nu_{y,s}^2(\zeta) dy \right\rangle_{L_2(H, \mathbb{R})} \\
&= - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi_1(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x,s}^1(\xi) dx \right) e_k \\
&\quad \times \left(\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi_2(y, \zeta) \Phi(y, \zeta) d\nu_{y,s}^2(\zeta) dy \right) e_k \\
&= - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi_1(x, \xi) \Phi(x, \xi) e_k d\nu_{x,s}^1(\xi) dx \right) \\
&\quad \times \left(\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi_2(y, \zeta) \Phi(y, \zeta) e_k d\nu_{y,s}^2(\zeta) dy \right) \\
&= - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi_1(x, \xi) g_k(x, \xi) d\nu_{x,s}^1(\xi) dx \right) \\
&\quad \times \left(\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi_2(y, \zeta) g_k(y, \zeta) d\nu_{y,s}^2(\zeta) dy \right) \\
&= - \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_1(x, \xi) \varphi_2(y, \zeta) \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x, \xi) g_k(y, \zeta) d\nu_{x,s}^1(\xi) d\nu_{y,s}^2(\zeta) dx dy \\
&= - \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_1(x, \xi) \varphi_2(y, \zeta) \langle \Phi(x, \xi), \Phi(y, \zeta) \rangle_{L_2(H, \mathbb{R})} d\nu_{x,s}^1(\xi) d\nu_{y,s}^2(\zeta) dx dy,
\end{aligned}$$

grâce à la formule $|a||b| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ et à l'hypothèse 2.3 de l'article.

Soit M une mesure signée sur $[0, T]$ et

$$F(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x,s}(\xi) dx dW(s)$$

Considérons l'application

$$\begin{aligned}
& (s, \omega, l) \in [0, T] \times \Omega \times [0, T] \\
& \mapsto \mathbf{1}_{[0,s]}(l) \times \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x,s}(\xi) dx \in L_2(H; \mathbb{R}),
\end{aligned}$$

elle est mesurable car

$$(s, \omega) \mapsto \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x,s}(\xi) dx$$

l'est, et que

$$(s, l) \mapsto \mathbf{1}_{[0,s]}(l)$$

l'est aussi (l'image réciproque de $\{1\}$ est un triangle rectangle isocèle).

Comme

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\int_0^T \left\| \mathbf{1}_{[0,s]}(l) \times \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x,s}(\xi) dx \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \mathbb{E} \left(\int_0^T \mathbf{1}_{[0,s]}(l) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) g_k(x, \xi) d\nu_{x,s}(\xi) dx \right)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \mathbb{E} \left(\int_0^T \mathbf{1}_{[0,s]}(l) \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x, \xi)|^2 |g_k(x, \xi)|^2 d\nu_{x,s}(\xi) dx ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \mathbb{E} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x, \xi)|^2 (D_0 (1 + \xi^2)) d\nu_{x,s}(\xi) dx ds \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty
\end{aligned}$$

indépendamment de l et que M est une mesure signée, on peut appliquer le théorème de Fubini stochastique (Da Prato-Zabczyk page 109 [DZ92]) pour obtenir

$$\begin{aligned}
& \int_0^T M[0, s] dF(s) \\
&= \int_0^T \int_0^T \mathbf{1}_{[0,s]}(l) \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x,s}(\xi) dx dW(s) dM(l) \\
&= \int_0^T \int_0^T \mathbf{1}_{[l,T]}(s) \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x,s}(\xi) dx dW(s) dM(l) \\
&= \int_0^T \int_0^T (\mathbf{1}_{[0,T]}(s) - \mathbf{1}_{[0,l]}(s)) \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x,s}(\xi) dx dW(s) dM(l) \\
&= F(t) M[0, T] - \int_0^T F^-(l) dM(l) = F(t) M[0, T] - \int_0^T F(l) dM(l)
\end{aligned}$$

car F est continue.

Cette formule s'applique donc pour F_1 et \bar{F}_2 à la place de F et pour μ_1 et $\bar{\mu}_2$ à la place de M . Se servant des formules précédentes, appliquées à chaque terme à droite de l'égalité

$$\begin{aligned}
\langle \langle f_1^+(t) \bar{f}_2^+(t), \alpha \rangle \rangle &= \langle f_1^+(t), \varphi_1 \rangle \langle \bar{f}_2^+(t), \varphi_2 \rangle \\
&= F_1(t) \bar{F}_2(t) + F_1(t) \bar{\mu}_2([0, t]) + \mu_1([0, t]) \bar{F}_2(t) + \mu_1([0, t]) \bar{\mu}_2([0, t])
\end{aligned}$$

puis en prenant l'espérance, et sachant que

$$\mathbb{E} (F_1(t) \bar{F}_2(t)) = \mathbb{E} (\langle F_1, \bar{F}_2 \rangle_t)$$

et

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T \mu[0, s] dF(s) \right) = 0,$$

on trouve

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\langle \langle f_1^+ (t) \bar{f}_2^+ (t), \alpha \rangle \rangle \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\langle F_1, \bar{F}_2 \rangle_t \right) + \mathbb{E} \int_0^t F_1 (s) d\bar{\mu}_2 (s) + \mathbb{E} \int_0^t \bar{F}_2 (s) d\mu_1 (s) \\
&+ \mathbb{E} \left(\int_{(0,t]} \mu_1 [0, s] d\bar{\mu}_2 (s) + \int_{(0,t]} \bar{\mu}_2 ([0, s]) d\mu_1 (s) + \langle f_{1,0}, \varphi_1 \rangle \langle \bar{f}_{2,0}, \varphi_2 \rangle \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\langle F_1, F_2 \rangle_t \right) + \langle f_{1,0}, \varphi_1 \rangle \langle \bar{f}_{2,0}, \varphi_2 \rangle \\
&+ \mathbb{E} \left(\int_{(0,t]} \langle f_1^- (s), \varphi_1 \rangle d\bar{\mu}_2 (s) + \int_{(0,t]} \langle \bar{f}_2^+ (s), \varphi_2 \rangle d\mu_1 (s) \right).
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\mu_1 ([0, t]) &= \int_0^t \langle f_1 (s), a (\xi) \cdot \nabla_x \varphi_1 (x, \xi) \rangle ds \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi \varphi_1 (x, \xi) \|\Phi (x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 d\nu_{x,s}^1 (\xi) dx ds \\
&+ \langle f_{1,0}, \varphi_1 \rangle \delta_0 ([0, t]) - \langle m_1, \partial_\xi \varphi_1 \rangle ([0, t]),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_{(0,t]} \langle \bar{f}_2^+ (s), \varphi_2 \rangle d\mu_1 &= \int_{(0,t]} \langle \bar{f}_2^+ (s), \varphi_2 \rangle \langle f_1 (s), a (\xi) \cdot \nabla_x \varphi_1 (x, \xi) \rangle ds \\
&+ \frac{1}{2} \int_{(0,t]} \langle \bar{f}_2^+ (s), \varphi_2 \rangle \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi \varphi_1 (x, \xi) \|\Phi (x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 d\nu_{x,s}^1 (\xi) dx ds \\
&+ 0 - \int_{(0,t]} \langle \bar{f}_2^+ (s), \varphi_2 \rangle d\langle m_1, \partial_\xi \varphi_1 \rangle (s).
\end{aligned}$$

Et comme $\forall A \in \mathcal{B}([0, T])$,

$$\langle m_1, \partial_\xi \varphi_1 \rangle (A) = \int_{\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}} \partial_\xi \varphi_1 (x, \xi) \mathbf{1}_A (s) dm_1 (x, s, \xi),$$

on a

$$\int_{(0,t]} \langle \bar{f}_2^+ (s), \varphi_2 \rangle d\langle m_1, \partial_\xi \varphi_1 \rangle (s) = \int_{\mathbb{T}^N \times (0, t] \times \mathbb{R}} \partial_\xi \varphi_1 (x, \xi) \langle \bar{f}_2^+ (s), \varphi_2 \rangle dm_1 (x, s, \xi).$$

De même, comme

$$\begin{aligned}
\bar{\mu}_2 ([0, t]) &= \int_0^t \langle \bar{f}_2 (s), a (\zeta) \cdot \nabla_y \varphi_2 (y, \zeta) \rangle ds \\
&- \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \partial_\zeta \varphi_2 (y, \zeta) \|\Phi (y, \zeta)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 d\nu_{y,s}^2 (\zeta) dy ds \\
&+ \langle \bar{f}_{2,0}, \varphi_2 \rangle \delta_0 ([0, t]) + \langle m_2, \partial_\zeta \varphi_2 \rangle ([0, t]),
\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
& \int_{(0,t]} \langle f_1^-(s), \varphi_1 \rangle d\bar{\mu}_2(s) \\
&= \int_{(0,t]} \langle f_1^-(s), \varphi_1 \rangle \langle \bar{f}_2^-(s), a(\zeta) \cdot \nabla_y \varphi_2(y, \zeta) \rangle ds \\
&- \frac{1}{2} \int_{(0,t]} \langle f_1^-(s), \varphi_1 \rangle \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \partial_\zeta \varphi_2(y, \zeta) \|\Phi(y, \zeta)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 d\nu_{x,s}^2(\zeta) dy ds \\
&\quad + 0 + \int_{\mathbb{T}^N \times (0,t] \times \mathbb{R}} \partial_\zeta \varphi_2(y, \zeta) \langle f_1^-(s), \varphi_1 \rangle dm_2(y, s, \zeta).
\end{aligned}$$

Comme $f_1^- = f_1$ et $\bar{f}_2^+ = \bar{f}_2$ presque partout (pour la mesure de Lebesgue) sur $[0, T]$ d'après la proposition 17, la formule (2.52) est démontrée.

Remarque :

Dans cette formule (2.52), on aurait pu tout aussi bien trouver \bar{f}_2^- à la place de \bar{f}_2^+ à condition d'avoir remplacé f_1^- par f_1^+ .

L'égalité (2.52) est vraie pour toute combinaison linéaire de fonctions $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ où $\varphi_1 \in C_c^\infty(\mathbb{T}_x^N \times \mathbb{R}_\xi)$ et $\varphi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{T}_y^N \times \mathbb{R}_\zeta)$. Or l'ensemble des combinaisons linéaires de telles fonctions est dense dans $C_c^\infty(\mathbb{T}_x^N \times \mathbb{R}_\xi \times \mathbb{T}_y^N \times \mathbb{R}_\zeta)$ (cf Droniou [Dro01] page 68), dans le sens où :

pour tout élément $\bar{\alpha} \in C_c^\infty(\mathbb{T}_x^N \times \mathbb{R}_\xi \times \mathbb{T}_y^N \times \mathbb{R}_\zeta)$, il existe une suite de telles combinaisons linéaires $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et un compact $K \subset \mathbb{T}_x^N \times \mathbb{R}_\xi \times \mathbb{T}_y^N \times \mathbb{R}_\zeta$ tels que

1. chaque α_n et $\bar{\alpha}$ ont leurs supports dans K
2. $\alpha_n \rightarrow \bar{\alpha}$ uniformément
3. $\partial_i \alpha_n \rightarrow \partial_i \bar{\alpha}$ uniformément pour tout i
4. La convergence est encore uniforme en remplaçant ∂_i par n'importe quelle dérivée partielle de n'importe quel ordre .

Le théorème de convergence dominée permet d'établir (2.52) pour toute fonction test appartenant à $C_c^\infty(\mathbb{T}_x^N \times \mathbb{R}_\xi \times \mathbb{T}_y^N \times \mathbb{R}_\zeta)$.

L'article dit qu'ensuite on peut généraliser la formule (2.52) à toutes les fonctions $\alpha \in C_b^\infty(\mathbb{T}_x^N \times \mathbb{R}_\xi \times \mathbb{T}_y^N \times \mathbb{R}_\zeta)$ à condition qu'en dehors d'un voisinage de la diagonale $\{(x, \xi, x, \xi) \in \mathbb{T}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}, x \in \mathbb{T}^N, \xi \in \mathbb{R}\}$, le support de α soit compact.

Notons que le but est de montrer que la formule (2.52) est vraie pour l'application

$$\alpha : (x, \xi, y, \zeta) \mapsto \rho(x - y) \psi(\xi - \zeta)$$

avec $\rho \in C^\infty(\mathbb{T}^N; \mathbb{R}^+)$ et $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^+)$. Si le support de ψ est inclus dans un intervalle $[-M, M]$ alors le support de $(\xi, \zeta) \mapsto \psi(\xi - \zeta)$ est inclus dans le fermé du plan situé entre les deux droites parallèles d'équations $\zeta = \xi - M$ et $\zeta = \xi + M$. C'est un voisinage fermé de la droite diagonale d'équation $\zeta = \xi$. Je vais donc simplement généraliser la formule (2.52) à cette fonction.

Pour ce faire, je vais montrer que chaque terme de (2.52) est fini avec un tel α , puis appliquer (2.52) aux fonctions $h_n \times \alpha \in C_b^\infty(\mathbb{T}_x^N \times \mathbb{R}_\xi \times \mathbb{T}_y^N \times \mathbb{R}_\zeta)$, faire tendre n vers l'infini et utiliser le théorème de convergence dominée pour conclure; chaque fonction $h_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}_\xi \times \mathbb{R}_\zeta; \mathbb{R}^+)$ est égale à 1 sur $[-n, n]^2$, égale à 0 en dehors de $[-n-1, n+1]^2$, et comprise entre 0 et 1 sur $[-n-1, n+1]^2 \setminus [-n, n]^2$.

Il est simple de vérifier que

$$(\nabla_x + \nabla_y)(\rho(x-y)) = \begin{pmatrix} \partial_1 \rho(x-y) \\ \partial_2 \rho(x-y) \\ \vdots \\ \partial_N \rho(x-y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\partial_1 \rho(x-y) \\ -\partial_2 \rho(x-y) \\ \vdots \\ -\partial_N \rho(x-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui montre que le deuxième terme à gauche du signe égal dans (2.52) est I_ρ pour la fonction

$$\alpha : (x, \xi, y, \zeta) \mapsto \rho(x-y) \psi(\xi - \zeta).$$

Il est donc fini d'après la remarque 25.

On peut aussi remarquer que le premier terme à droite de l'inégalité (2.47) est égal au premier terme à droite de l'égalité (2.52) pour la fonction

$$\alpha : (x, \xi, y, \zeta) \mapsto \rho(x-y) \psi(\xi - \zeta).$$

Il est donc fini d'après la remarque 25.

On peut en dire autant pour les termes à droite de l'égalité (2.52) et à droite de l'inégalité (2.47) (dans le cas où considère f_1^+ et \bar{f}_2^+), ils sont donc finis pour la fonction

$$\alpha : (x, \xi, y, \zeta) \mapsto \rho(x-y) \psi(\xi - \zeta).$$

d'après la remarque 25.

Remarquons aussi que

$$\begin{aligned}
I_\psi &= \frac{1}{2} \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \rho(x-y) \mathbb{E} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\xi - \zeta) \\
&\quad \times \|\Phi(x, \xi) - \Phi(y, \zeta)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 d\nu_{x,s}^1 \otimes \nu_{y,s}^2(\xi, \zeta) ds dx dy \\
&= \frac{1}{2} \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \rho(x-y) \mathbb{E} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\xi - \zeta) \left(\|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \right. \\
&\quad \left. - 2\langle \Phi(x, \xi), \Phi(y, \zeta) \rangle_{L_2(H, \mathbb{R})} + \|\Phi(y, \zeta)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \right) d\nu_{x,s}^1 \otimes \nu_{y,s}^2(\xi, \zeta) ds dx dy \\
&= \frac{1}{2} \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \rho(x-y) \mathbb{E} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\xi - \zeta) \\
&\quad \times \|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 d\nu_{x,s}^1 \otimes \nu_{y,s}^2(\xi, \zeta) ds dx dy \\
&\quad - \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \rho(x-y) \mathbb{E} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\xi - \zeta) \\
&\quad \times \langle \Phi(x, \xi), \Phi(y, \zeta) \rangle_{L_2(H, \mathbb{R})} d\nu_{x,s}^1 \otimes \nu_{y,s}^2(\xi, \zeta) ds dx dy \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \rho(x-y) \mathbb{E} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\xi - \zeta) \\
&\quad \times \|\Phi(y, \zeta)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 d\nu_{x,s}^1 \otimes \nu_{y,s}^2(\xi, \zeta) ds dx dy.
\end{aligned}$$

I_ψ est bien fini grâce à la remarque 25, et de la même manière chacun des trois derniers termes est fini grâce à la méthode faite dans la remarque 25, l'hypothèse (2.3), et l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Puis remarquons que

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(\xi - \zeta) d\nu_{x,s}^1(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi \psi(\xi - \zeta) f_1(\xi) d\xi,$$

que

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(\xi - \zeta) d\nu_{y,s}^2(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} h(\zeta) d\nu_{y,s}^2(\zeta) = - \int_{\mathbb{R}} \partial_\zeta h(\zeta) \bar{f}_2(\zeta) d\zeta,$$

et que

$$\partial_\xi \psi(\xi - \zeta) + \partial_\zeta h(\zeta) = \psi'(\xi - \zeta) - \psi'(\xi - \zeta) = 0,$$

pour voir que

I_ψ est la somme des troisième, quatrième et cinquième termes de droite de l'égalité (2.52) pour la fonction

$$\alpha : (x, \xi, y, \zeta) \mapsto \rho(x-y) \psi(\xi - \zeta).$$

Chacun de ces termes est bien fini d'après ce qui précède. Grâce aux calculs

précédents, on peut remarquer que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \int_{(\mathbb{T}^N)^2 \times (0,t] \times \mathbb{R}^2} f_1^-(s) \partial_\zeta \alpha(x, \xi, y, \zeta) dm_2(y, s, \zeta) d\xi dx \\
&= -\mathbb{E} \int_{(\mathbb{T}^N)^2 \times (0,t] \times \mathbb{R}^2} f_1^-(s) \partial_\xi \alpha(x, \xi, y, \zeta) dm_2(y, s, \zeta) d\xi dx \\
&= -\mathbb{E} \int_{(\mathbb{T}^N)^2 \times (0,t] \times \mathbb{R}^2} \alpha(x, \xi, y, \zeta) dm_2(y, s, \zeta) d\nu_{x,s}^{1,-}(\xi) dx.
\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{E}m_2$ est une mesure finie,

$$-\infty < -\mathbb{E} \int_{(\mathbb{T}^N)^2 \times (0,t] \times \mathbb{R}^2} \alpha(x, \xi, y, \zeta) dm_2(y, s, \zeta) d\nu_{x,s}^{1,-}(\xi) dx \leq 0.$$

De même,

$$\begin{aligned}
& -\mathbb{E} \int_{(\mathbb{T}^N)^2 \times (0,t] \times \mathbb{R}^2} \bar{f}_2^+(s) \partial_\xi \alpha(x, \xi, y, \zeta) dm_1(x, s, \xi) d\zeta dy \\
&= \mathbb{E} \int_{(\mathbb{T}^N)^2 \times (0,t] \times \mathbb{R}^2} \bar{f}_2^+(s) \partial_\zeta \alpha(x, \xi, y, \zeta) dm_1(x, s, \xi) d\zeta dy \\
&= -\mathbb{E} \int_{(\mathbb{T}^N)^2 \times (0,t] \times \mathbb{R}^2} \alpha(x, \xi, y, \zeta) dm_1(x, s, \xi) d\nu_{y,s}^{2,+}(\zeta) dy.
\end{aligned}$$

Et comme $\mathbb{E}m_1$ est une mesure finie,

$$-\infty < -\mathbb{E} \int_{(\mathbb{T}^N)^2 \times (0,t] \times \mathbb{R}^2} \alpha(x, \xi, y, \zeta) dm_1(x, s, \xi) d\nu_{y,s}^{2,+}(\zeta) dy \leq 0$$

Remarque :

Pour utiliser le théorème de convergence dominée à chaque terme de (2.52), on vérifie qu'on a lorsque $n \rightarrow +\infty$ pour la convergence simple

1. $\alpha \times h_n \rightarrow \alpha$
2. $\partial_\xi(\alpha \times h_n) \rightarrow \partial_\xi \alpha$
3. $\partial_\zeta(\alpha \times h_n) \rightarrow \partial_\zeta \alpha$

car

$$\begin{aligned}
\partial_\xi h_n &= \partial_\xi \left(\mathbf{1}_{]-n-\epsilon, n+\epsilon[} * \rho_m \right) = \left(\mathbf{1}_{]-n-\epsilon, n+\epsilon[} \right) * \partial_\xi \rho_m \\
&= \left(\mathbf{1}_{]-n-\epsilon, n+\epsilon[}(\zeta) (\delta_{-n-\epsilon} - \delta_{n+\epsilon})(\xi) \right) * \rho_m
\end{aligned}$$

pour un certain $\epsilon > 0$ fixé, m entier suffisamment grand fixé et ρ_m le terme d'une suite régularisante bien choisie (cf Michel Willem [Wil03] page 78).

Et donc $\partial_\xi h_n(\xi, \zeta) \rightarrow 0$ en restant majorée uniformément par une constante (ne dépendant pas de n). Reste à prouver que les termes de (2.52) où on remplace

$\partial_\xi \alpha$ et $\partial_\zeta \alpha$ par α sont finis pour pouvoir appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \rho(x-y) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\xi-\zeta) f_1(s) \|\Phi(y, \zeta)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 d\nu_{y,s}^2(\zeta) d\xi ds dx dy \\ &= \mathbb{E} \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \rho(x-y) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \psi_1(\xi-\zeta) \|\Phi(y, \zeta)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 d\nu_{x,s}^1 \otimes \nu_{y,s}^2(\xi, \zeta) ds dx dy \\ &\leq \|\psi_1\|_\infty \mathbb{E} \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \rho(x-y) \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} D_0(1+\zeta^2) d\nu_{x,s}^1 \otimes \nu_{y,s}^2(\xi, \zeta) ds dx dy < +\infty \end{aligned}$$

car

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\zeta|^p \nu_{y,s}^2(d\zeta) dy ds \right) \leq C_p T.$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \rho(x-y) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\xi-\zeta) \bar{f}_2(s) \|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 d\nu_{x,s}^1(\xi) d\zeta ds dx dy \\ &= \mathbb{E} \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \rho(x-y) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \psi_1(\xi-\zeta) \|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 d\nu_{x,s}^1 \otimes \nu_{y,s}^2(\xi, \zeta) ds dx dy \\ &\leq \|\psi_1\|_\infty \mathbb{E} \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \rho(x-y) \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} D_0(1+\xi^2) d\nu_{x,s}^1 \otimes \nu_{y,s}^2(\xi, \zeta) ds dx dy < +\infty \end{aligned}$$

car

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p \nu_{x,s}^1(d\xi) dx ds \right) \leq C_p T.$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \int_{(\mathbb{T}^N)^2 \times (0,t] \times \mathbb{R}^2} f_1^-(s) \alpha(x, \xi, y, \zeta) dm_2(y, s, \zeta) d\xi dx \\ &= \mathbb{E} \int_{(\mathbb{T}^N)^2 \times (0,t] \times \mathbb{R}^2} \rho(x-y) \psi_1(\xi-\zeta) dm_2(y, s, \zeta) d\nu_{x,s}^{1,-}(\xi) dx < +\infty \end{aligned}$$

car $\mathbb{E}m_2$ est une mesure finie.

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \int_{(\mathbb{T}^N)^2 \times (0,t] \times \mathbb{R}^2} \bar{f}_2^+(s) \alpha(x, \xi, y, \zeta) dm_1(x, s, \xi) d\zeta dy \\ &= \mathbb{E} \int_{(\mathbb{T}^N)^2 \times (0,t] \times \mathbb{R}^2} \rho(x-y) \psi_1(\xi-\zeta) dm_1(x, s, \xi) d\nu_{y,s}^{2,+}(\zeta) dy < +\infty \end{aligned}$$

car $\mathbb{E}m_1$ est une mesure finie.

L'égalité (2.52) est ainsi démontrée pour tout $\alpha : (x, \xi, y, \zeta) \mapsto \rho(x-y) \psi(\xi-\zeta)$, et on a du même coup, l'inégalité (2.47) qui est démontrée dans le cas où on considère f_1^+ et \bar{f}_2^+ .

Soit maintenant une suite croissante $(t_n)_n \subset [0, T]$ telle que $t_n \rightarrow t \in (0, T)$ alors

le terme de gauche de l'inégalité (2.47) avec f_1^+ et \bar{f}_2^+ tend vers

$$\mathbb{E} \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \rho(x-y) \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\xi-\zeta) f_1^-(t) \bar{f}_2^-(t) d\xi d\zeta dx dy$$

alors que les termes de droite de l'inégalité (2.47) restent inchangés (on aura juste remplacé t_n par t).

La proposition 24 est donc démontrée.

2.2.20 A propos du théorème 26 (unicité et réduction)

Soient u_1 et u_2 deux solutions de (2.1), de conditions initiales $u_{1,0}$ et $u_{2,0}$, le théorème affirme que

$$\forall t \in [0, T], \quad \mathbb{E} \| (u_1(t) - u_2(t))^+ \|_{L^1(\mathbb{T}^N)} \leq \| (u_{1,0} - u_{2,0})^+ \|_{L^1(\mathbb{T}^N)}.$$

En inversant u_1 et u_2 , on obtient

$$\forall t \in [0, T], \quad \mathbb{E} \| (u_2(t) - u_1(t))^+ \|_{L^1(\mathbb{T}^N)} \leq \| (u_{2,0} - u_{1,0})^+ \|_{L^1(\mathbb{T}^N)}$$

c'est à dire

$$\forall t \in [0, T], \quad \mathbb{E} \| (u_1(t) - u_2(t))^- \|_{L^1(\mathbb{T}^N)} \leq \| (u_{1,0} - u_{2,0})^- \|_{L^1(\mathbb{T}^N)}.$$

Par addition, on obtient le principe de contraction L^1 qui s'écrit

$$\forall t \in [0, T], \quad \mathbb{E} \| u_1(t) - u_2(t) \|_{L^1(\mathbb{T}^N)} \leq \| u_{1,0} - u_{2,0} \|_{L^1(\mathbb{T}^N)}.$$

Supposons maintenant que pour presque tout $x \in \mathbb{T}^N$, $u_{1,0}(x) \leq u_{2,0}(x)$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{T}^N$

$$(u_{1,0} - u_{2,0})^+ = 0$$

donc

$$\| (u_{1,0} - u_{2,0})^+ \|_{L^1(\mathbb{T}^N)} = 0$$

donc

$$\mathbb{E} \| (u_1(t) - u_2(t))^+ \|_{L^1(\mathbb{T}^N)} = 0$$

donc presque sûrement et pour presque tout $x \in \mathbb{T}^N$,

$$(u_1(x, t) - u_2(x, t))^+ = 0,$$

c'est à dire

$$u_1(x, t) \leq u_2(x, t).$$

C'est le principe de comparaison annoncé par le théorème.

2.2.21 A propos de la preuve du théorème 26 (unicité et réduction)

Le cas additif considéré est le cas où $\Phi(x, u(x, t))$ ne dépend pas de $u(x, t)$, et dépend donc seulement de x (c'est à dire ni du temps t , ni du hasard ω).

Ainsi l'hypothèse 2.4 s'écrit

$$\|\Phi(x, \xi) - \Phi(y, \zeta)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 = \|\Phi(x, \xi) - \Phi(y, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \leq D_1 (|x - y|^2)$$

et on a

$$\begin{aligned} I_\psi &= \frac{1}{2} \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \rho(x - y) \mathbb{E} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\xi - \zeta) \\ &\quad \times \|\Phi(x, \xi) - \Phi(y, \zeta)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 d\nu_{x,s}^1 \otimes \nu_{y,s}^2(\xi, \zeta) ds dx dy \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \rho(x - y) \mathbb{E} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \|\psi\|_\infty D_1 (|x - y|^2) d\nu_{x,s}^1 \otimes \nu_{y,s}^2(\xi, \zeta) ds dx dy \\ &\leq \frac{1}{2} \|\psi\|_\infty D_1 t \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \rho(x - y) (|x - y|^2) dx dy. \end{aligned}$$

Les densités de probabilité ψ et ρ peuvent être par exemple :

$$\psi(\xi) = \begin{cases} c^{-1} \exp\left(\frac{1}{|\xi-1|^2-1}\right) & \text{si } |\xi - 1| < 1 \\ 0 & \text{si } |\xi - 1| \geq 1 \end{cases}$$

avec

$$c = \int_{\{\xi \in \mathbb{R} : |\xi-1| < 1\}} \psi(\xi) d\xi \approx 0,44.$$

Puis

$$\psi_\delta(\xi) = \frac{1}{\delta} \psi\left(\frac{\xi}{\delta}\right).$$

Comme $\|\psi\|_\infty \leq c^{-1}e^{-1} < 1$,

$$\|\psi\|_\infty \leq \frac{1}{\delta}.$$

On peut définir $\forall y \in \mathbb{R}^N$,

$$\tilde{\rho}(y) = \begin{cases} 2^N c^{-1} \exp\left(\frac{1}{|2y|^2-1}\right) & \text{si } |y| < 1/2 \\ 0 & \text{si } |y| \geq 1/2 \end{cases}$$

avec

$$c = \int_{\{y \in \mathbb{R}^N : \|y\| < 1/2\}} 2^N \exp\left(\frac{1}{|2y|^2 - 1}\right) dy.$$

Puis définissons la fonction ρ sur \mathbb{T}^N de la manière suivante :
Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N) \in \mathbb{T}^N$,

$$\forall i \in \{1, \dots, N\}, \exists k_i \in \{0, 1\} \text{ tel que } x_i - k_i \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Notons

$$\tilde{x} = (x_1 + k_1, x_2 + k_2, \dots, x_i + k_i, \dots, x_N + k_N) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^N$$

alors

$$\forall x \in \mathbb{T}^N, \rho(x) = \tilde{\rho}(\tilde{x}).$$

C'est une densité de probabilité sur \mathbb{T}^N car

$$\int_{\mathbb{T}^N} \rho(x) dx = \int_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^N} \tilde{\rho}(\tilde{x}) d\tilde{x} = 1.$$

Soient maintenant les fonctions définies sur \mathbb{T}^N par

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \tilde{\rho}\left(\frac{\tilde{x}}{\varepsilon}\right),$$

on a bien

$$\int_{\mathbb{T}^N} \rho_\varepsilon(x) dx = \int_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^N} \tilde{\rho}\left(\frac{\tilde{x}}{\varepsilon}\right) \frac{1}{\varepsilon^N} d\tilde{x} = \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{\rho}(z) dz = 1.$$

Remarque :

j'ai légèrement changé la définition de ρ_ε pour ne pas avoir de problème avec $\frac{x}{\varepsilon}$ en dehors de \mathbb{T}^N . Pour définir ρ_ε , j'aurais pu aussi écrire

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^N, \rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \tilde{\rho}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

puis prolonger ρ_ε sur \mathbb{R}^N en la rendant périodique par rapport à chacune de ses variables, toutes les périodes étant égales à 1.

D'ailleurs, dans l'introduction, il est dit que les solutions sont périodiques, sans donner la période, ni le type de périodicité. Les lois de conservation modélisent

les phénomènes périodiques. En mathématiques, on « normalise » en écrivant l'équation avec 1 pour période.

$$\begin{aligned} \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \rho_\varepsilon(x-y) |x-y|^2 dx dy &= \int_{\mathbb{T}^N} \rho_\varepsilon(z) |z|^2 dz \\ &= \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^N} |\tilde{z}|^2 \tilde{\rho}\left(\frac{\tilde{z}}{\varepsilon}\right) \frac{1}{\varepsilon^N} d\tilde{z} \leq \frac{\varepsilon^2}{4} \times 1, \end{aligned}$$

d'où l'inégalité

$$I_\psi \leq \frac{1}{2} D_1 t \frac{\varepsilon^2}{\delta}.$$

Grâce au théorème de Tonelli

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f_1(x, s, \xi) \bar{f}_2(y, s, \xi) d\xi &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{(\xi, +\infty)}(u) \nu_{x,s}^1(du) \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{(-\infty, \xi]}(v) \nu_{y,s}^2(dv) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[v, +\infty)}(\xi) \mathbf{1}_{(-\infty, u)}(\xi) d\xi \nu_{x,s}^1(du) \nu_{y,s}^2(dv) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (u-v)^+ \nu_{x,s}^1(du) \nu_{y,s}^2(dv). \end{aligned}$$

Les calculs sont identiques avec f_1^+ , \bar{f}_2^+ ou bien avec f_1^- , \bar{f}_2^- , d'où (2.58). (2.59) a déjà été détaillé dans la remarque 25.

$$\psi_{1,\delta}(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \frac{1}{\delta} \psi\left(\frac{\zeta}{\delta}\right) d\zeta = \mathbf{1}_{\xi > 0} \int_0^{\xi} \frac{1}{\delta} \psi\left(\frac{\zeta}{\delta}\right) d\zeta = \mathbf{1}_{\xi > 0} \int_0^{\frac{\xi}{\delta}} \psi(u) du,$$

$$\psi_{2,\delta}(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \psi_{1,\delta}(\zeta) d\zeta = \mathbf{1}_{\xi > 0} \int_0^{\xi} \psi_{1,\delta}(\zeta) d\zeta = \mathbf{1}_{\xi > 0} \int_0^{\xi} \int_0^{\frac{\zeta}{\delta}} \psi(u) dud\zeta,$$

donc

$$\begin{aligned} \xi^+ - \psi_{2,\delta}(\xi) &= \mathbf{1}_{\xi > 0} \int_0^{\xi} 1 d\zeta + \mathbf{1}_{\xi > 0} \int_0^{\xi} \left(- \int_0^{\frac{\zeta}{\delta}} \psi(u) du \right) d\zeta \\ &= \mathbf{1}_{\xi > 0} \int_0^{\xi} \left(1 - \int_0^{\frac{\zeta}{\delta}} \psi(u) du \right) d\zeta = \mathbf{1}_{\xi > 0} \int_0^{\xi} \left(\int_0^{+\infty} \psi_\delta(u) du - \int_0^{\frac{\zeta}{\delta}} \psi(u) du \right) d\zeta \\ &= \mathbf{1}_{\xi > 0} \int_0^{\xi} \int_{\frac{\zeta}{\delta}}^{+\infty} \psi(u) dud\zeta = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{0 \leq \zeta \leq \xi} \mathbf{1}_{\frac{\zeta}{\delta} \leq u < +\infty} \psi(u) dud\zeta \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{u \geq 0} \psi(u) \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{0 \leq \zeta \leq \xi \wedge (\delta u)} d\zeta du = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{u \geq 0} \psi(u) (\xi^+ \wedge (\delta u)) du \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \psi(u) (\xi^+ \wedge (\delta u)) du. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} f_1^+(x, t, \xi) \bar{f}_2^+(y, t, \xi) d\xi - \int_{\mathbb{R}^2} \psi_{\delta}(\xi - \zeta) f_1^+(x, t, \xi) \bar{f}_2^+(y, t, \zeta) d\xi d\zeta \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (u - v)^+ \nu_{x,t}^{1,+}(du) \nu_{y,t}^{2,+}(dv) - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \psi_{2,\delta}(u - v) \nu_{x,t}^{1,+}(du) \nu_{y,t}^{2,+}(dv) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left((u - v)^+ - \psi_{2,\delta}(u - v) \right) \nu_{x,t}^{1,+}(du) \nu_{y,t}^{2,+}(dv) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^+} \psi(\zeta) \left((u - v)^+ \wedge (\delta\zeta) \right) d\zeta \right) \nu_{x,t}^{1,+}(du) \nu_{y,t}^{2,+}(dv)
\end{aligned}$$

est évidemment positive.

Vérifions (de manière un peu laborieuse) que pour $\delta\zeta \geq 0$, on a

$$(u - v)^+ \wedge (\delta\zeta) \leq |u| \wedge (\delta\zeta) + |v| \wedge (\delta\zeta)$$

Premier cas :

Si $u < v$ alors $(u - v)^+ = 0$ et donc l'inégalité est triviale.

Deuxième cas :

Si $u \geq v$ alors $(u - v)^+ = u - v$. Supposons de plus que $u - v < \delta\zeta$ alors on a bien

1. $u - v \leq |u| + |v|$
2. $u - v \leq (\delta\zeta) + |v| \wedge (\delta\zeta)$
3. $u - v \leq |u| + (\delta\zeta)$

Troisième cas :

Si $u \geq v$ alors $(u - v)^+ = u - v$. Supposons de plus que $u - v > \delta\zeta$ alors on a bien

1. $\delta\zeta \leq |u| + |v|$
2. $\delta\zeta \leq (\delta\zeta) + |v| \wedge (\delta\zeta)$
3. $\delta\zeta \leq |u| + (\delta\zeta)$

Ainsi

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} f_1^+(x, t, \xi) \bar{f}_2^+(y, t, \xi) d\xi - \int_{\mathbb{R}^2} \psi_\delta(\xi - \zeta) f_1^+(x, t, \xi) \bar{f}_2^+(y, t, \zeta) d\xi d\zeta \\
& \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^+} \psi(\zeta) (|u| \wedge (\delta\zeta) + |v| \wedge (\delta\zeta)) d\zeta \right) \nu_{x,t}^{1,+}(du) \nu_{y,t}^{2,+}(dv) \\
& = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \psi(\zeta) (|u| \wedge (\delta\zeta)) d\zeta \nu_{x,t}^{1,+}(du) + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \psi(\zeta) (|v| \wedge (\delta\zeta)) d\zeta \nu_{y,t}^{2,+}(dv) \\
& = \int_{\mathbb{R}^+} \psi(\zeta) \int_{\mathbb{R}} (|u| \wedge (\delta\zeta)) \nu_{x,t}^{1,+}(du) d\zeta + \int_{\mathbb{R}^+} \psi(\zeta) \int_{\mathbb{R}} (|v| \wedge (\delta\zeta)) \nu_{y,t}^{2,+}(dv) d\zeta.
\end{aligned}$$

Or par exemple,

$$\int_{\mathbb{R}} (|u| \wedge (\delta\zeta)) \nu_{x,t}^{1,+}(du)$$

est à la fois plus petit ou égal à

$$\int_{\mathbb{R}} |u| \nu_{x,t}^{1,+}(du)$$

et à

$$\delta\zeta,$$

donc est plus petit ou égal à

$$\delta\zeta \wedge \int_{\mathbb{R}} |u| \nu_{x,t}^{1,+}(du),$$

donc

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} f_1^+(x, t, \xi) \bar{f}_2^+(y, t, \xi) d\xi - \int_{\mathbb{R}^2} \psi_\delta(\xi - \zeta) f_1^+(x, t, \xi) \bar{f}_2^+(y, t, \zeta) d\xi d\zeta \\
& \leq \int_{\mathbb{R}^+} \psi(\zeta) \left(2\delta\zeta \wedge \left(\int_{\mathbb{R}} |u| \nu_{x,t}^{1,+}(du) + \int_{\mathbb{R}} |v| \nu_{y,t}^{2,+}(dv) \right) \right) d\zeta.
\end{aligned}$$

Comme ρ_ε est définie sur \mathbb{T}^N , puis prolongée à \mathbb{R}^N de manière à la rendre périodique, de période 1 par rapport à chacune de ses variables,

$$\int_{\mathbb{T}^N} \rho_\varepsilon(x - y) dx = \int_{\mathbb{T}^N - y} \rho_\varepsilon(z) dz = \int_{\mathbb{T}^N} \rho_\varepsilon(z) dz = 1.$$

Comme $\tilde{\rho}$ est paire, il en va de même de ρ_ε et donc

$$\int_{\mathbb{T}^N} \rho_\varepsilon(x - y) dy = \int_{\mathbb{T}^N} \rho_\varepsilon(y - x) dy = 1.$$

Ce qui donne $\forall \omega \in \tilde{\Omega}$,

$$\begin{aligned}
& \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \rho_\varepsilon(x-y) \int_{\mathbb{R}} f_1^+(x, t, \xi) \bar{f}_2^+(y, t, \xi) d\xi dx dy \\
& \quad - \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \rho_\varepsilon(x-y) \int_{\mathbb{R}^2} \psi_\delta(\xi - \zeta) f_1^+(x, t, \xi) \bar{f}_2^+(y, t, \zeta) d\xi d\zeta dx dy \\
& \leq \int_{\mathbb{R}^+} \psi(\zeta) \left(2\delta\zeta \wedge \left(\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |u| \nu_{x,t}^{1,+}(du) dx + \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |u| \nu_{y,t}^{2,+}(du) dy \right) \right) d\zeta \\
& = \int_{\mathbb{R}^+} \psi(\zeta) \left(2\delta\zeta \wedge \left(\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi| \nu_{x,t}^{1,+}(d\xi) dx + \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi| \nu_{x,t}^{2,+}(d\xi) dx \right) \right) d\zeta \\
& \leq \int_{\mathbb{R}^+} \psi(\zeta) \left(2\delta\zeta \wedge (C_{1,1}(\omega) + C_{1,2}(\omega)) \right) d\zeta.
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \rho_\varepsilon(x-y) \int_{\mathbb{R}} f_1^+(x, t, \xi) \bar{f}_2^+(y, t, \xi) d\xi dx dy \right. \\
& \quad \left. - \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} f_1^+(x, t, \xi) \bar{f}_2^+(x, t, \xi) d\xi dx \right| \\
& = \left| \int_{\mathbb{T}^N} \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^N} \rho_\varepsilon(y-x) \int_{\mathbb{R}} f_1^+(x, t, \xi) \bar{f}_2^+(y, t, \xi) d\xi dy dx \right. \\
& \quad \left. - \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} f_1^+(x, t, \xi) \bar{f}_2^+(x, t, \xi) d\xi dx \right| \\
& = \left| \int_{\mathbb{T}^N} \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^N} \rho_\varepsilon(z) \int_{\mathbb{R}} f_1^+(x, t, \xi) \bar{f}_2^+(x+z, t, \xi) d\xi dz dx \right. \\
& \quad \left. - \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} f_1^+(x, t, \xi) \bar{f}_2^+(x, t, \xi) d\xi dx \right| \\
& = \left| \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} f_1^+(x, t, \xi) \left(\int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^N} \rho_\varepsilon(z) \bar{f}_2^+(x+z, t, \xi) dz - \bar{f}_2^+(x, t, \xi) \right) d\xi dx \right| \\
& \leq \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} f_1^+(x, t, \xi) \left| \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^N} \rho_\varepsilon(z) \bar{f}_2^+(x+z, t, \xi) dz \right. \\
& \quad \left. - \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^N} \rho_\varepsilon(z) \bar{f}_2^+(x, t, \xi) dz \right| d\xi dx \\
& \leq \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} f_1^+(x, t, \xi) \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^N} \rho_\varepsilon(z) \left| \bar{f}_2^+(x+z, t, \xi) - \bar{f}_2^+(x, t, \xi) \right| dz d\xi dx \\
& \leq \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^N} \rho_\varepsilon(z) \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \left| \bar{f}_2^+(x+z, t, \xi) - \bar{f}_2^+(x, t, \xi) \right| f_1^+(x, t, \xi) d\xi dx dz,
\end{aligned}$$

or $\text{supp}(\rho_\varepsilon) \subset B(0, \varepsilon)$, donc

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \rho_\varepsilon(x-y) \int_{\mathbb{R}} f_1^+(x, t, \xi) \bar{f}_2^+(y, t, \xi) d\xi dx dy \right. \\
& \quad \left. - \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} f_1^+(x, t, \xi) \bar{f}_2^+(x, t, \xi) d\xi dx \right| \\
& \leq \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^N} \rho_\varepsilon(z) \sup_{|z| < \varepsilon} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\bar{f}_2^+(x+z, t, \xi) - \bar{f}_2^+(x, t, \xi)| f_1^+(x, t, \xi) d\xi dx dz \\
& \quad = \sup_{|z| < \varepsilon} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\bar{f}_2^+(x+z, t, \xi) - \bar{f}_2^+(x, t, \xi)| f_1^+(x, t, \xi) d\xi dx \\
& \quad = \sup_{|z| < \varepsilon} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\bar{f}_2^+(x-z, t, \xi) - \bar{f}_2^+(x, t, \xi)| f_1^+(x, t, \xi) d\xi dx \\
& = \sup_{|z| < \varepsilon} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\bar{f}_2^+(x-z, t, \xi) - 1 + \mathbf{1}_{\xi < 0} - \mathbf{1}_{\xi < 0} + 1 - \bar{f}_2^+(x, t, \xi)| f_1^+(x, t, \xi) d\xi dx \\
& \quad = \sup_{|z| < \varepsilon} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |-\chi_{f_2^+}(x-z, t, \xi) + \chi_{f_2^+}(x, t, \xi)| d\xi dx,
\end{aligned}$$

d'où (2.62).

L'inégalité triangulaire, ainsi que (2.61) et (2.62) donnent

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \rho_\varepsilon(x-y) \int_{\mathbb{R}^2} \psi_\delta(\xi - \zeta) f_1^+(x, t, \xi) \bar{f}_2^+(y, t, \zeta) d\xi d\zeta dx dy \right. \\
& \quad \left. - \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} f_1^+(x, t, \xi) \bar{f}_2^+(x, t, \xi) d\xi dx \right| \\
& \leq \int_{\mathbb{R}^+} \psi(\zeta) \left(2\delta\zeta \wedge (C_{1,1}(\omega) + C_{1,2}(\omega)) \right) d\zeta \\
& \quad + \sup_{|z| < \varepsilon} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |-\chi_{f_2^+}(x-z, t, \xi) + \chi_{f_2^+}(x, t, \xi)| d\xi dx.
\end{aligned}$$

Le terme

$$\int_{\mathbb{R}^+} \psi(\zeta) \left(2\delta\zeta \wedge (C_{1,1}(\omega) + C_{1,2}(\omega)) \right) d\zeta \leq \int_{\mathbb{R}^+} \psi(\zeta) 2\delta\zeta d\zeta = 2\delta \int_0^1 \psi(u) u du$$

tend bien vers 0 lorsque $\delta \rightarrow 0$.

Grâce au théorème de Fubini et au fait que la mesure de Young ν s'annule à l'infini, $\chi_{f_2^+}(\cdot, t, \cdot) \in L^1(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, donc le terme

$$\sup_{|z| < \varepsilon} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |-\chi_{f_2^+}(x-z, t, \xi) + \chi_{f_2^+}(x, t, \xi)| d\xi dx \rightarrow_{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

d'après le théorème de continuité en moyenne (cf poly Th. Gallouët [GH]).
Il a été prouvé que presque sûrement et pour presque tout x, y :

$$\int_{\mathbb{R}} f_1^+(x, t, \xi) \bar{f}_2^+(y, t, \xi) d\xi - \int_{\mathbb{R}^2} \psi_\delta(\xi - \zeta) f_1^+(x, t, \xi) \bar{f}_2^+(y, t, \zeta) d\xi d\zeta \geq 0$$

i.e.

$$\int_{\mathbb{R}} f_1^+(x, t, \xi) \bar{f}_2^+(y, t, \xi) d\xi \geq \int_{\mathbb{R}^2} \psi_\delta(\xi - \zeta) f_1^+(x, t, \xi) \bar{f}_2^+(y, t, \zeta) d\xi d\zeta$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \rho_\varepsilon(x - y) \int_{\mathbb{R}} f_1^+(x, t, \xi) \bar{f}_2^+(y, t, \xi) d\xi dx dy \\ \geq \mathbb{E} \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \rho_\varepsilon(x - y) \int_{\mathbb{R}^2} \psi_\delta(\xi - \zeta) f_1^+(x, t, \xi) \bar{f}_2^+(y, t, \zeta) d\xi d\zeta dx dy. \end{aligned}$$

Soit une suite $(\delta_n, \varepsilon_n)_n \subset (\mathbb{R}^+)^2$ tendant vers $(0, 0)$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}} f_1^+(x, t, \xi) \bar{f}_2^+(y, t, \xi) d\xi \\ = \mathbb{E} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \rho_{\varepsilon_n}(x - y) \int_{\mathbb{R}^2} \psi_{\delta_n}(\xi - \zeta) f_1^+(x, t, \xi) \bar{f}_2^+(y, t, \zeta) d\xi d\zeta dx dy \right) \\ \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \rho_{\varepsilon_n}(x - y) \int_{\mathbb{R}^2} \psi_{\delta_n}(\xi - \zeta) f_1^+(x, t, \xi) \bar{f}_2^+(y, t, \zeta) d\xi d\zeta dx dy \\ \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \rho_{\varepsilon_n}(x - y) \int_{\mathbb{R}^2} \psi_{\delta_n}(\xi - \zeta) f_1^+(x, t, \xi) \bar{f}_2^+(y, t, \zeta) d\xi d\zeta dx dy \\ \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \rho_{\varepsilon_n}(x - y) \int_{\mathbb{R}} f_1^+(x, t, \xi) \bar{f}_2^+(y, t, \xi) d\xi dx dy \\ \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} f_1^+(x, t, \xi) \bar{f}_2^+(x, t, \xi) d\xi dx \\ + \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sup_{|z| < \varepsilon_n} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |-\chi_{f_2^+}(x - z, t, \xi) + \chi_{f_2^+}(x, t, \xi)| d\xi dx \\ = \mathbb{E} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} f_1^+(x, t, \xi) \bar{f}_2^+(x, t, \xi) d\xi dx + 0. \end{aligned}$$

Ce qui prouve que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \rho_{\varepsilon_n}(x - y) \int_{\mathbb{R}^2} \psi_{\delta_n}(\xi - \zeta) f_1^+(x, t, \xi) \bar{f}_2^+(y, t, \zeta) d\xi d\zeta dx dy \\ = \mathbb{E} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} f_1^+(x, t, \xi) \bar{f}_2^+(x, t, \xi) d\xi dx, \end{aligned}$$

puis que

$$\begin{aligned} \lim_{(\delta, \varepsilon) \rightarrow (0, 0)} \mathbb{E} \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \rho_\varepsilon(x - y) \int_{\mathbb{R}^2} \psi_\delta(\xi - \zeta) f_1^+(x, t, \xi) \bar{f}_2^+(y, t, \zeta) d\xi d\zeta dx dy \\ = \mathbb{E} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} f_1^+(x, t, \xi) \bar{f}_2^+(x, t, \xi) d\xi dx. \end{aligned}$$

Comme a' est à croissance au plus polynômiale, on peut utiliser l'inégalité des accroissements finis car

$$\forall s \in \mathbb{R}, \exists C > 0, n \in \mathbb{N}^* : |a'(s)| \leq C(1 + |s|^n) := g'(s),$$

et donc en particulier sur l'intervalle $[\zeta, \xi]$, on a

$$\begin{aligned} |a(\xi) - a(\zeta)| &\leq C(g(\xi) - g(\zeta)) \\ &= \begin{cases} C \left(\xi - \zeta + \frac{1}{n+1} (\xi^{n+1} - \zeta^{n+1}) \right) & \text{si } \xi > \zeta \geq 0 \\ C \left(\xi - \zeta + \frac{1}{n+1} (|\zeta|^{n+1} - |\xi|^{n+1}) \right) & \text{si } 0 \geq \xi > \zeta \\ C \left(\xi - \zeta + \frac{1}{n+1} (\xi^{n+1} - \zeta^{n+1}) \right) & \text{si } \xi \geq 0 \geq \zeta \text{ et si } n+1 \text{ est impair} \\ C \left(\xi - \zeta + \frac{1}{n+1} (\xi^{n+1} + |\zeta|^{n+1}) \right) & \text{si } \xi \geq 0 \geq \zeta \text{ et si } n+1 \text{ est pair.} \end{cases} \end{aligned}$$

Mais dans le cas où $\xi \geq 0 \geq \zeta$ et $n+1$ est pair,

$$\begin{aligned} C \left(\xi - \zeta + \frac{1}{n+1} (\xi^{n+1} + |\zeta|^{n+1}) \right) &= C \left(\xi - \zeta + \frac{1}{n+1} (\xi^{n+1} + (-\zeta)^{n+1}) \right) \\ &\leq C \left(\xi - \zeta + \frac{1}{n+1} ((\xi - \zeta)^{n+1}) \right), \end{aligned}$$

donc dans tous les cas, on peut mettre $C(\xi - \zeta)$ en facteur d'un polynôme de degré $n+1$ de 2 variables ξ et ζ . Finalement, quitte à augmenter la constante C et le degré p du polynôme $\Gamma(\xi, \zeta)$, on a bien

$$|a(\xi) - a(\zeta)| \leq C(\xi - \zeta) (1 + |\xi|^{p-1} + |\zeta|^{p-1}).$$

$$\begin{aligned} I_\rho &= \mathbb{E} \left(\int_0^t \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} f_1(x, s, \xi) \bar{f}_2(y, s, \zeta) \right. \\ &\quad \left. \times (a(\xi) - a(\zeta)) \psi_\delta(\xi - \zeta) d\xi d\zeta \cdot \nabla_x \rho_\varepsilon(x - y) dx dy ds \right) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
|I_\rho| &\leq \mathbb{E} \left(\int_0^t \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} f_1(x, s, \xi) \bar{f}_2(y, s, \zeta) \right. \\
&\quad \times |a(\xi) - a(\zeta)| \psi_\delta(\xi - \zeta) d\xi d\zeta |\nabla_x \rho_\varepsilon(x - y)| dx dy ds \Big) \\
&\leq \mathbb{E} \left(\int_0^t \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} f_1(x, s, \xi) \bar{f}_2(y, s, \zeta) \right. \\
&\quad \times |\xi - \zeta| \Gamma(\xi, \zeta) \psi_\delta(\xi - \zeta) d\xi d\zeta |\nabla_x \rho_\varepsilon(x - y)| dx dy ds \Big) \\
&= \mathbb{E} \left(\int_0^t \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \bar{f}_2(y, s, \zeta) \int_{-\infty}^\xi |\xi' - \zeta| \Gamma(\xi', \zeta) \right. \\
&\quad \times \psi_\delta(\xi' - \zeta) d\xi' d\nu_{x,s}^1(\xi) d\zeta |\nabla_x \rho_\varepsilon(x - y)| dx dy ds \Big) \\
&= \mathbb{E} \left(\int_0^t \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{-\infty}^\xi |\xi' - \zeta| \Gamma(\xi', \zeta) \right. \\
&\quad \times \psi_\delta(\xi' - \zeta) d\xi' d\nu_{x,s}^1(\xi) d\zeta |\nabla_x \rho_\varepsilon(x - y)| dx dy ds \Big)
\end{aligned}$$

parce que

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^\xi \tilde{\psi}(\xi') d\xi' d\nu_{x,s}^1(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{\psi}(\xi) f_1(\xi) d\xi$$

est vraie $\forall \tilde{\psi} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, grâce au théorème de Tonelli et au fait que $f_1(\xi) = \nu_1(\xi, +\infty)$. Puis

$$\begin{aligned}
|I_\rho| &\leq \mathbb{E} \left(\int_0^t \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^\xi \int_{\mathbb{R}} |\xi' - \zeta| \Gamma(\xi', \zeta) \right. \\
&\quad \times \psi_\delta(\xi' - \zeta) \bar{f}_2(y, s, \zeta) d\zeta d\xi' d\nu_{x,s}^1(\xi) |\nabla_x \rho_\varepsilon(x - y)| dx dy ds \Big) \\
&= \mathbb{E} \left(\int_0^t \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^\xi \int_{\mathbb{R}} \int_{\zeta}^{+\infty} |\xi' - \zeta'| \Gamma(\xi', \zeta') \right. \\
&\quad \times \psi_\delta(\xi' - \zeta') d\zeta' d\nu_{y,s}^2(\zeta) d\xi' d\nu_{x,s}^1(\xi) |\nabla_x \rho_\varepsilon(x - y)| dx dy ds \Big) \\
&= \mathbb{E} \left(\int_0^t \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \Upsilon(\xi, \zeta) d\nu_{y,s}^2(\zeta) d\nu_{x,s}^1(\xi) |\nabla_x \rho_\varepsilon(x - y)| dx dy ds \right),
\end{aligned}$$

parce que

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\zeta}^{+\infty} h(\zeta') d\zeta' d\nu_{y,s}^2(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} h(\zeta) \bar{f}_2(\zeta) d\zeta$$

est vraie $\forall h \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, grâce au théorème de Tonelli et au fait que $\bar{f}_2(\zeta) = \nu_2(-\infty, \zeta]$.

$$\begin{aligned}
\Upsilon(\xi, \zeta) &= \int_{-\infty}^{\xi} \int_{\zeta}^{+\infty} |\xi' - \zeta'| \Gamma(\xi', \zeta') \psi_{\delta}(\xi' - \zeta') d\zeta' d\xi' \\
&= \int_{\zeta}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\xi} |\xi' - \zeta'| C(1 + |\xi'|^{p-1} + |\zeta'|^{p-1}) \psi_{\delta}(\xi' - \zeta') d\xi' d\zeta' \\
&= \int_{\zeta}^{\xi} \int_{-\infty}^{\xi - \zeta'} |\xi''| C(1 + |\xi'' + \zeta'|^{p-1} + |\zeta'|^{p-1}) \mathbf{1}_{(0, \delta)}(\xi'') \psi_{\delta}(\xi'') d\xi'' d\zeta'
\end{aligned}$$

Comme le support de ψ est dans $(0 ; 1)$, on a effectué le changement de variable $\xi' - \zeta' = \xi''$.

$$\begin{aligned}
\Upsilon(\xi, \zeta) &\leq \delta \int_{\zeta}^{\xi + \delta} \max_{\xi'' \in (0, \delta) \cap (-\infty, \xi - \zeta')} C(1 + |\xi'' + \zeta'|^{p-1} + |\zeta'|^{p-1}) d\zeta' \\
&\leq \delta \int_{\zeta}^{\xi + \delta} C(1 + |\xi|^{p-1} + |\zeta'|^{p-1}) d\zeta' \leq \delta \times Cste(1 + |\xi|^p + |\zeta|^p)
\end{aligned}$$

pour une certaine constante $Cste$, la formule (2.63) est ainsi prouvée.

Reprenons la majoration de I_{ρ} : nous avons donc

$$\begin{aligned}
|I_{\rho}| &\leq \mathbb{E} \left(\int_0^t \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \Upsilon(\xi, \zeta) d\nu_{y,s}^2(\zeta) d\nu_{x,s}^1(\xi) |\nabla_x \rho_{\varepsilon}(x - y)| dx dy ds \right) \\
&\leq \delta \times Cste \mathbb{E} \left(\int_0^t \int_{(\mathbb{T}^N)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^p + |\zeta|^p) d\nu_{y,s}^2(\zeta) d\nu_{x,s}^1(\xi) \right. \\
&\quad \left. \times |\nabla_x \rho_{\varepsilon}(x - y)| dx dy ds \right).
\end{aligned}$$

Or $\forall t \in [0, T]$ et $\forall p \in [1, +\infty)$,

$$\mathbb{E} \int_0^t \left(\int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} |\xi|^p \nu_{\omega, x, s}(d\xi) dx \right) dt \leq C_p t,$$

ainsi

$$|I_{\rho}| \leq \delta \times Cste \times 3C_p t \int_{(\mathbb{T}^N)^2} |\nabla_x \rho_{\varepsilon}(x - y)| dx dy.$$

Grâce au changement de variable $z = x - y$ et à la périodicité de ρ_{ε} , on trouve

$$\begin{aligned}
|I_{\rho}| &\leq \delta \times Cste \times 3C_p t \int_{\mathbb{T}^N} |\nabla_z \rho_{\varepsilon}(z)| dz \\
&= \delta \times Cste \times 3C_p t \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^N} |\nabla_z \rho_{\varepsilon}(z)| dz = \delta \times Cste \times 3C_p t \int_{B(0, \varepsilon)} |\nabla_z \rho_{\varepsilon}(z)| dz \\
&= \delta \times Cste \times 3C_p t \int_{B(0, \varepsilon)} \left| \nabla_z \left(\rho \left(\frac{1}{\varepsilon} z \right) \right) \right| \times \frac{1}{\varepsilon^N} dz \\
&= \delta \times Cste \times 3C_p t \frac{1}{\varepsilon} \int_{B(0, 1)} |\nabla_u \rho(u)| du,
\end{aligned}$$

d'où (2.64).

A $t \in [0, T]$ fixé, et pour tout $(x, \omega) \in E_t$, $f^+(t, x, \xi, \omega) = \nu_{t,x,\omega}^+(\xi, +\infty)$ est décroissante en ξ . Mais comme $f^+(t, x, \xi, \omega) \in \{0, 1\}$, forcément, il existe une valeur de ξ (qui dépend de (t, x, ω)) pour laquelle $\xi \mapsto f^+(t, x, \xi, \omega)$ passe de la valeur 1 à la valeur 0. En notant $u^+(t, x, \omega)$ cette valeur, on a bien

$$f^+(t, x, \xi, \omega) = \nu_{t,x,\omega}^+(\xi, +\infty) = \mathbf{1}_{u^+(t,x,\omega) > \xi}$$

pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$. Donc

$$\int_{\mathbb{R}} (\mathbf{1}_{u^+(t,x,\omega) > \xi} - \mathbf{1}_{0 > \xi}) d\xi = u^+(t, x, \omega).$$

Comme $f^+ = f$ est une solution généralisée de (2.1) et que f^+ est un équilibre, la proposition 15 permet d'affirmer que u^+ est une solution de (2.1).

L'intérêt d'avoir un résultat similaire pour f^- servira dans la preuve du corollaire 27 sur la continuité en temps.

Remarque : on a

$$I_{\psi}^h = \int_{(\mathbb{T}^N)_0^2} \rho_{\varepsilon}(x - y) \mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \psi_{\delta}(\xi - \zeta) \times (|\xi - \zeta| h(|\xi - \zeta|)) d\nu_{x,s}^1 \otimes \nu_{y,s}^2(\xi, \zeta) ds dx dy$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{\xi - \zeta}{\delta}\right) \left| \frac{\xi - \zeta}{\delta} \right| d\nu_{x,s}^1(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \partial_{\xi} \left(\psi\left(\frac{\xi - \zeta}{\delta}\right) \left| \frac{\xi - \zeta}{\delta} \right| \right) f_1(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\delta} \psi' \left(\frac{\xi - \zeta}{\delta} \right) \left| \frac{\xi - \zeta}{\delta} \right| f_1(\xi) d\xi + \int_{(\zeta; +\infty)} \frac{1}{\delta} \psi \left(\frac{\xi - \zeta}{\delta} \right) f_1(\xi) d\xi \\ &\quad + \int_{(-\infty; \zeta)} -\frac{1}{\delta} \psi \left(\frac{\xi - \zeta}{\delta} \right) f_1(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\delta} \psi' \left(\frac{\xi - \zeta}{\delta} \right) \left| \frac{\xi - \zeta}{\delta} \right| f_1(\xi) d\xi + \int_{(\zeta; +\infty)} \frac{1}{\delta} \psi \left(\frac{\xi - \zeta}{\delta} \right) f_1(\xi) d\xi \\ &\quad + \int_{(-\infty; \zeta)} -\frac{1}{\delta} \psi \left(\frac{\xi - \zeta}{\delta} \right) f_1(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\delta} \psi' \left(\frac{\xi - \zeta}{\delta} \right) \left| \frac{\xi - \zeta}{\delta} \right| f_1(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Pour avoir une inégalité convenable, on voit donc que l'hypothèse (2.4) et la fonction h sont bien nécessaires.

2.2.22 A propos du théorème 29

L'hypothèse de ce théorème peut s'écrire

$$\forall x \in \mathbb{T}^N, \quad \Phi(x, 1) = \Phi(x, -1) \equiv 0 \in L_2(H, \mathbb{R})$$

ainsi, les fonctions constantes $u \equiv 1$ et $u \equiv -1$ sont des solutions de (2.1).

2.2.23 Sur la définition de convergence en probabilité

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{t \in [0, T]} |\varepsilon^n(t, \phi)| = 0 \text{ en probabilité,}$$

se note aussi

$$\sup_{t \in [0, T]} |\varepsilon^n(t, \phi)| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

et signifie

$$\forall \alpha > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} |\varepsilon^n(t, \phi)| > \alpha \right) = 0.$$

2.2.24 Sur l'intégrale stochastique vue comme une martingale et sa réciproque (paragraphe 2.1.4.2)

Sur la formule (2.72), on peut aussi écrire l'intégrande

$$\begin{aligned} h_{\varphi, k}^n(t) &= \left(\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) \nu_{\omega, x, t}^n(d\xi) dx \right) e_k \\ &= \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) (\Phi(x, \xi) e_k) \nu_{\omega, x, t}^n(d\xi) dx \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

car

$$h_{\varphi}^n(t) = \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) \nu_{\omega, x, t}^n(d\xi) dx \in L_2(H, \mathbb{R}) ;$$

et l'intégrale stochastique (2.73) peut s'écrire

$$M_{\varphi}^n(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) \nu_{\omega, x, s}^n(d\xi) dx dW(s).$$

La proposition 31 peut s'écrire de la manière suivante :

Soit (f^n) une suite de solutions généralisées approchées de (2.1) avec données initiales (f_0^n) . Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, et soit M_φ^n et h_φ^n définies par les deux formules précédentes, alors le processus M_φ^n appartient à l'espace des \mathcal{F}_t -martingales continues de carré intégrable noté $\mathcal{M}_T^2(\mathbb{R})$, muni de la norme

$$\|M\|_{\mathcal{M}_T^2(\mathbb{R})} = \sup_{t \in [0, T]} \left(\mathbb{E} (|M(t)|^2) \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\mathbb{E} (|M(T)|^2) \right)^{\frac{1}{2}}$$

car

$$\mathbb{E} \int_0^T \left\| \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, t, \xi) \Phi(x, \xi) \nu_{\omega, x, t}^n(d\xi) dx \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 dt < +\infty.$$

Pour le troisième processus (que je noterai aussi $N(t) = N_1(t) - N_2(t)$), on peut aussi l'écrire

$$N(t) = \left(\int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) \nu_{\omega, x, s}^n(d\xi) dx dW(s) \right)^2 - \int_0^t \left\| \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) \nu_{\omega, x, s}^n(d\xi) dx \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds$$

car

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) \nu_{\omega, x, s}^n(d\xi) dx \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \left(\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) \nu_{\omega, x, s}^n(d\xi) dx \right) e_k \right|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) e_k \nu_{\omega, x, s}^n(d\xi) dx \right|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) g_k(x, \xi) \nu_{\omega, x, s}^n(d\xi) dx \right|^2. \end{aligned}$$

Démontrons que c'est une martingale continue :

D'après le lemme 2.4.3 du Röckner [PRO7], $N(t)$ est une martingale locale. Comme

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} |N_1(t)| \right) = \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} |M_\varphi^n(t)|^2 \right) \leq 4 \mathbb{E} |M_\varphi^n(T)|^2 < +\infty,$$

et que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} |N_2(t)| \right) \\ = \mathbb{E} \int_0^T \left\| \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, t, \xi) \Phi(x, \xi) \nu_{\omega, x, t}^n(d\xi) dx \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 dt < +\infty, \end{aligned}$$

$N(t)$ est une martingale.

Le deuxième processus peut s'écrire

$$M_\varphi^n(t) \langle W(t), e_k \rangle_H - \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) (\Phi(x, \xi) e_k) \nu_{\omega, x, s}^n(d\xi) dx ds.$$

Démontrons que c'est une martingale continue.

Il suffit d'utiliser la co-variation quadratique de deux martingales continues de carrés intégrables (appelée aussi crochet). La plupart des auteurs la notent $\langle M_1(t), M_2(t) \rangle$, en tout cas quand les martingales sont réelles, mais Da Prato et Zabczyk la notent $\ll M_1(t), M_2(t) \gg$ pour ne pas confondre avec le produit scalaire Hilbertien. Dans notre cas, ils affirment que

$$\langle M_\varphi^n(t), a \rangle_{\mathbb{R}} \langle W(t), e_k \rangle_H - \ll M_\varphi^n(t), W(t) \gg a, e_k \rangle_H$$

est une martingale continue $\forall a \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}^*$. Donc en prenant $a = 1$,

$$M_\varphi^n(t) \langle W(t), e_k \rangle_H - \ll M_\varphi^n(t), W(t) \gg, e_k \rangle_H$$

est une martingale continue. Comme

$$\begin{aligned} \ll M_\varphi^n(t), W(t) \gg &= \sum_{k=1}^{+\infty} \ll M_\varphi^n(t), \beta_k(t) \gg \langle \cdot, e_k \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \ll M_\varphi^n(t), \beta_k(t) \gg e_k, \end{aligned}$$

et que

$$\ll \ll M_\varphi^n(t), W(t) \gg, e_k \rangle_H = \ll M_\varphi^n(t), \beta_k(t) \gg,$$

on a

$$\begin{aligned}
& \ll M_\varphi^n(t), \beta_k(t) \gg \\
&= \ll \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) \nu_{\omega, x, s}^n(d\xi) dx dW(s), \beta_k(t) \gg \\
&= \ll \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) g_i(x, \xi) \nu_{\omega, x, s}^n(d\xi) dx d\beta_i(s), \beta_k(t) \gg \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \ll \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) g_i(x, \xi) \nu_{\omega, x, s}^n(d\xi) dx d\beta_i(s), \beta_k(t) \gg \\
&= \ll \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) g_k(x, \xi) \nu_{\omega, x, s}^n(d\xi) dx d\beta_k(s), \beta_k(t) \gg \\
&= \ll \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) g_k(x, \xi) \nu_{\omega, x, s}^n(d\xi) dx d\beta_k(s), \int_0^t 1 d\beta_k(s) \gg \\
&= \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) g_k(x, \xi) \nu_{\omega, x, s}^n(d\xi) dx \times 1d \ll \beta_k(s), \beta_k(s) \gg \\
&= \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) g_k(x, \xi) \nu_{\omega, x, s}^n(d\xi) dx ds.
\end{aligned}$$

On a pu sortir la somme du crochet par continuité du crochet dans l'espace des martingales continues de carré intégrable. A noter aussi que le crochet de deux martingales indépendantes vaut 0.

On peut donc affirmer que

$$M_\varphi^n(t) \langle W(t), e_k \rangle_H - \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) (\Phi(x, \xi) e_k) \nu_{\omega, x, s}^n(d\xi) dx ds$$

est une \mathcal{F}_t -martingale continue.

La proposition 32 peut se réécrire de la manière suivante : soit $h : \Omega \times [0, T] \rightarrow L_2(H, \mathbb{R})$ processus prévisible tel que

$$\mathbb{E} \int_0^T \|h(s)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds < +\infty,$$

et soit $X(t)$ une \mathcal{F}_t -martingale réelle de carré intégrable i.e. telle que

$$\forall t \in [0, T], \quad \mathbb{E}(|X(t)|^2) < +\infty,$$

et telle que les processus

$$X(t) \langle W(t), e_k \rangle_H - \int_0^t h(s) e_k ds$$

et

$$(X(t))^2 - \int_0^t \|h(s)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds$$

soient aussi des \mathcal{F}_t -martingales. Alors $\forall t \in [0, T]$,

$$X(t) = X(0) + \int_0^t h(s) dW(s).$$

Un intérêt de cette proposition est que nous n'avons pas d'information sur la continuité de X au départ, mais sa représentation sous la forme d'une intégrale d'Itô permet d'obtenir l'existence d'une version continue de ce processus X . Cela implique aussi que

$$X(t) - \langle W(t), e_k \rangle_H - \int_0^t h(s) e_k ds$$

et

$$(X(t))^2 - \int_0^t \|h(s)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds$$

sont des martingales continues.

Remarques sur le mot version :

J'ai presque toujours trouvé la même définition de deux processus stochastiques qui sont des versions l'un de l'autre. En général version est synonyme de modification, c'est à dire :

si on a un espace probabilisé muni d'une filtration $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+})$, si possible vérifiant les conditions habituelles, c'est à dire que \mathcal{F}_0 contient tous les ensembles négligeables de \mathcal{F} (pour \mathbb{P}) et que la filtration est continue à droite dans le sens où

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s,$$

alors deux processus stochastiques $X : [0, +\infty) \times \Omega \rightarrow (E, \mathcal{B}(E))$ et $Y : [0, +\infty) \times \Omega \rightarrow (E, \mathcal{B}(E))$ sont des versions l'un de l'autre si pour chaque $t \in [0, +\infty)$, $X_t = Y_t$ presque sûrement.

Cela veut dire que si un processus est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$, alors l'autre aussi (grâce au premier item des conditions habituelles). Notons que pour Marc Yor et Daniel Revuz [RY13], dire que X et Y sont deux versions l'un de l'autre ne signifie pas modification l'un de l'autre, mais simplement ayant les mêmes lois fini-dimensionnelles (et donc à priori pas le même espace probabilisé).

Pour la preuve, on aurait pu faire tout autrement si la filtration était celle engendrée par le processus de Wiener W :

en fait, toute \mathcal{F}_t -martingale admet une version (ici modification) continue (cf Revuz-Yor [RY13] p200), donc c'est le cas de la martingale $X(t)$. Le théorème de représentation martingale page 51 de Gawarecki, Mandrekar [GM10] affirme qu'il existe un unique processus $L(t) \in L^2([0, T] \times \Omega, \mathcal{P}_T, dt \otimes \mathbb{P}; L_2(H, \mathbb{R}))$ tel

que

$$X(t) = \mathbb{E}(X(0)) + \int_0^t L(s) dW(s).$$

Dans la mesure où $X(0) = 0$, cela donne $\forall t \in [0, T]$,

$$X(t) = \int_0^t L(s) dW(s).$$

Le lemme 2.4.3 du Röckner [PR07] affirme que

$$t \in [0, T] \mapsto \int_0^t \|L(s)\|_{L_2(H; \mathbb{R})}^2 ds$$

est l'unique processus croissant, continu, \mathcal{F}_t -adapté tel que

$$t \in [0, T] \mapsto \left(\int_0^t L(s) dW(s) \right)^2 - \int_0^t \|L(s)\|_{L_2(H; \mathbb{R})}^2 ds$$

soit une martingale locale. Donc

$$\forall t \in [0, T], \int_0^t \|L(s)\|_{L_2(H; \mathbb{R})}^2 ds = \int_0^t \|h(s)\|_{L_2(H; \mathbb{R})}^2 ds.$$

En utilisant la co-variation quadratique des deux martingales continues de carrés intégrables (cf DaPrato, Zabczyk p80 [DZ92]), il est clair que

$$\ll H(t), \beta_k(t) \gg = \int_0^t h(s) e_k ds.$$

Or

$$\begin{aligned} \ll \int_0^t L(s) dW(s), \beta_k(t) \gg &= \ll \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t L(s) e_i d\beta_i(s), \beta_k(t) \gg \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \ll \int_0^t L(s) e_i d\beta_i(s), \beta_k(t) \gg = \ll \int_0^t L(s) e_k d\beta_k(s), \beta_k(t) \gg \\ &= \ll \int_0^t L(s) e_k d\beta_k(s), \int_0^t 1 d\beta_k(s) \gg = \int_0^t L(s) e_k \times 1 d\beta_k(s) \\ &= \int_0^t L(s) e_k ds. \end{aligned}$$

On a pu sortir la somme du crochet par continuité du crochet dans l'espace des martingales continues de carré intégrable. Finalement, $\forall t \in [0, T], \forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^t h(s) e_k ds = \int_0^t L(s) e_k ds,$$

donc presque sûrement et pour presque tout $t \in [0, T]$, $h(s) = L(s)$. Et donc

$\forall t \in [0, T],$

$$X(t) = \int_0^t h(s) dW(s)$$

La troisième hypothèse de la proposition 32 n'est donc pas nécessaire avec cette filtration, mais si on n'utilise pas le théorème de représentation martingale alors cette hypothèse aide à la démonstration.

2.2.25 Utilisation de la tension des mesures de Young et du théorème de Skorokhod

Soit f^n une solution approchée de (2.1), f^n est en particulier une fonction cinétique associée à une mesure de Young ν^n . L'idée n'est pas de travailler avec les mesures de Young définies sur $\Omega \times \mathbb{T}^N \times [0, T] \rightarrow \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ car Ω n'a pas de topologie, n'est pas séparable, pas complet...mais avec les mesures de Young

$$\nu^n(\omega) : \mathbb{T}^N \times [0, T] \rightarrow \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$$

et avec la variable aléatoire

$$\begin{cases} \Omega \rightarrow \mathcal{Y}_1 \\ \omega \mapsto \nu^n(\omega) \end{cases} .$$

Quand on parle de loi de la mesure de Young ν^n , c'est donc la mesure de probabilité définie par

$$\mathbb{P}_{\nu^n}(A) = \mathbb{P}\left((\nu^n)^{-1}(A)\right), \quad \forall A \in \mathcal{Y}_1.$$

\mathcal{Y}_1 est muni de la topologie de la convergence faible, c'est à dire rendant continue les applications $\nu \mapsto \nu(\phi)$ quelle que soit ϕ intégrande de la forme

$$(x, t, \xi) \in \mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R} \mapsto \mathbf{1}_A(x, t) \times f(\xi)$$

avec $f \in C_b(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{T}^N \times [0, T])$.

Dans son « a course on Young measure » [Val94], Michel Valadier affirme que dans notre cas, la topologie est la même si on remplace ces intégrandes par les intégrandes de Carathéodory (mesurables en (x, t, ξ) et continues en ξ) bornées ou par les fonctions continues à support compact sur $\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}$. \mathcal{Y}_1 est muni de la tribu borélienne associée à cette topologie. La proposition 2.3.1 p 42 du livre de Castaing, Raynaud de Fitte et Valadier [CFV04] indique que dans notre cas, \mathcal{Y}^1 est métrisable. Cela signifie qu'un sous-ensemble de \mathcal{Y}^1 est compact si et seulement s'il est séquentiellement compact.

Les propositions qui suivent utilisent la philosophie du théorème de Skorokhod : de variables aléatoires qui convergent en loi, on peut créer un espace de probabilité dans lequel des variables aléatoires de même loi convergent presque sûrement. Pour résumer, on peut passer grâce à un nouvel espace de probabilité, de la convergence en loi à la convergence presque sûre.

Plus précisément, pour notre article, cela permettra d'utiliser la méthode de Benoît Perthame pour prouver la convergence du schéma numérique donné par la méthode des volumes finis (cf, [Per02] preuve du théorème 6.3.1 page 131), c'est à dire avoir une suite de solutions approchées $(f_{h,k})$ qui converge dans L^∞ faible-* et une suite de mesures cinétiques de défaut $(m_{h,k})$ qui converge faiblement.

2.2.26 Sur la preuve de la proposition 33

On a

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\nu_{\omega,x,t}^n(\xi) dx dt \right) \leq TC_p.$$

Soit $R > 0$, soit $p \in [1; +\infty)$,

$$K_{R,p} = \left\{ y \in \mathcal{Y}^1 \left(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R} \right) : y(|\xi|^p) \leq R \right\}.$$

Pour chaque $p \in [1, +\infty)$, la fonction $\xi \mapsto |\xi|^p$ est inf-compact, dans le sens où

$$\forall M \geq 0, \{ \xi \in \mathbb{R} : |\xi|^p \leq M \} \text{ est un sous-ensemble compact de } \mathbb{R}.$$

Donc toute suite (y_n) d'éléments de $K_{R,p}$ est tendue (au sens des mesures de Young). Il existe donc une sous-suite (y_{n_k}) de (y_n) qui converge faiblement vers un élément $y \in \mathcal{Y}^1$. En notant $g_L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction continue égale à $\xi \mapsto |\xi|^p$ sur $[-L, L]$ et à L^p sur $[L, L]^c$, on a

$$y_{n_k}(g_L) \leq R,$$

qui donne en faisant tendre $n_k \rightarrow +\infty$,

$$y(g_L) \leq R.$$

En faisant tendre $L \rightarrow +\infty$, et en utilisant le théorème de convergence monotone, on obtient

$$y(|\xi|^p) \leq R,$$

donc $K_{R,p}$ est un sous-ensemble compact de \mathcal{Y}^1 .

(2.81) donne

$$\int_{\{\nu^n \notin K_{R,p}\}} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\nu_{\omega,x,t}^n(\xi) dx dt d\mathbb{P} \leq TC_p$$

donc

$$R\mathbb{P}(\{\nu^n \notin K_{R,p}\}) \leq TC_p$$

donc

$$\mathbb{P}(\{\nu^n \notin K_R\}) \leq \frac{TC_p}{R}$$

donc (ν^n) est tendue, donc il existe une sous-suite encore notée (ν^n) et une variable aléatoire $\nu : \Omega \rightarrow \mathcal{Y}_1$ telle que $\nu^n \rightarrow \nu$ en probabilité (cf p 369 « a course on Young Measure » de M. Valadier [Val94]).

Démontrons que pour chaque $\omega \in \Omega$,

$$\begin{cases} \psi_p(\omega) : \mathcal{Y}_1 \rightarrow [0, +\infty] \\ \nu \mapsto \sup_{J \subset [0,T]} \frac{1}{|J|} \int_J \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\nu_{\omega,x,t}^n(\xi) dx dt \end{cases}$$

est semi-continue inférieurement.

Comme la borne supérieure d'une famille de fonctions semi-continues inférieurement est semi-continue inférieurement, il suffit de montrer que $\forall J$,

$$\nu \mapsto \int_J \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\nu_{\omega,x,t}^n(\xi) dx dt$$

est semi-continue inférieurement. C'est vrai car on peut écrire cette fonction

$$\begin{cases} \mathcal{Y}_1 \rightarrow [0, +\infty] \\ \nu \mapsto \sup_{L>1, L \in \mathbb{Q}} \int_J \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} g_L(\xi) d\nu_{\omega,x,t}^n(\xi) dx dt \end{cases}$$

et parce que

$$\nu \in \mathcal{Y}_1 \mapsto \int_J \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} g_L(\xi) d\nu_{\omega,x,t}^n(\xi) dx dt$$

est continue.

$\nu^n \rightarrow \nu$ en probabilité donc il existe une sous-suite encore notée (ν^n) telle que $\nu^n \rightarrow \nu$ presque sûrement. Comme ψ_p est semi-continue inférieurement,

$$\psi_p(\nu) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \psi_p(\nu^n), \quad \text{ps.}$$

On prend l'espérance et on utilise le lemme de Fatou pour conclure

$$\mathbb{E}\psi_p(\nu) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}\psi_p(\nu^n) \leq C_p.$$

Remarque :

Le sup sur \mathcal{J} est bien nécessaire nous semble-t-il, car \mathcal{Y}^1 est l'ensemble des mesures de Young sur $\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}$. On aurait aimé avoir directement

$$\tilde{\mathbb{E}} \left(\sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\tilde{\nu}_{\omega, x, t}(\xi) dx \right) \leq C_p$$

grâce au théorème de Skorokhod. Mais si on a bien

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\nu_{\omega, x, t}(\xi) dx \right) \leq C_p$$

que l'on peut écrire

$$\int_{\Omega} f(\nu) d\mathbb{P} \leq C_p$$

avec

$$f : \nu \in \mathcal{Y}^1 \rightarrow f(\nu) = \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\nu_{\omega, x, t}(\xi) dx \in \mathbb{R},$$

il faudrait f mesurable pour utiliser le théorème de transfert qui nous donnerait

$$\int_{\Omega} f(\nu) d\mathbb{P} = \int_{\mathcal{Y}^1} f(y) d\mathbb{P}_{\nu} = \int_{\mathcal{Y}^1} f(y) d\tilde{\mathbb{P}}_{\nu} = \int_{\tilde{\Omega}} f(\tilde{\nu}) d\tilde{\mathbb{P}}.$$

Il n'est pas facile de démontrer que f est mesurable, et je ne suis pas sûr qu'elle le soit.

On peut appliquer le théorème de Skorokhod car $\nu^n \rightarrow \nu$ en probabilité et parce que \mathcal{Y}_1 est séparable. La convergence simple de $\tilde{\nu}^n(\omega) \rightarrow \tilde{\nu}(\omega)$ a lieu quel que soit ω , mais, comme on travaille avec des classes de fonction, la convergence presque sûre suffit.

On peut appliquer le corollaire 11 sur la compacité des fonctions cinétiques car

1. $(\mathbb{T}^N \times [0, T], dxdt)$ est fini
2. $L^1(\mathbb{T}^N \times [0, T])$ est séparable
3. $\tilde{f}_n(\omega)(x, t, \xi) = \tilde{\nu}^n(\omega)_{(x, t)}(\xi, +\infty)$.

2.2.27 Sur la preuve de la proposition 34

Si on prouve la proposition pour les mesures

$$B \in \mathcal{B}(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}) \mapsto m^n(B) + \int_B h(x, t, \xi) dx dt d\xi$$

alors la proposition sera vraie pour les mesures m^n . En effet, Soit $(x, t, \xi) \mapsto h(x, t, \xi)$ continue, strictement positive telle que

$$0 < \int_{\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}} h(x, t, \xi) dx dt d\xi < +\infty,$$

alors forcément

$$\mathbb{E} \int_{\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}} h(x, t, \xi) dx dt d\xi < +\infty.$$

De plus, comme

$$\mathbf{1}_{\mathbb{T}^N \times [0, T] \times B_R^c}(x, t, \xi) h(x, t, \xi) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$$

et que

$$\mathbf{1}_{\mathbb{T}^N \times [0, T] \times B_R^c}(x, t, \xi) h(x, t, \xi) \leq h(x, t, \xi),$$

le théorème de convergence dominée peut être utilisé, ainsi

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \int_{\mathbb{T}^N \times [0, T] \times B_R^c} h(x, t, \xi) dx dt d\xi = 0.$$

Je peux parler indifféremment de $\omega \mapsto (B \mapsto \int_B h(x, t, \xi) dx dt d\xi)$, de $\tilde{\omega} \mapsto (B \mapsto \int_B h(x, t, \xi) dx dt d\xi)$ qui sont mesurables (ce sont des fonctions constantes) et de loi $\delta_{B \mapsto \int_B h(x, t, \xi) dx dt d\xi}$, et écrire simplement $B \mapsto \int_B h(x, t, \xi) dx dt d\xi$ ou même $h(x, t, \xi) dx dt d\xi$.

Si \tilde{m}^n a la même loi que $m^n + h(x, t, \xi) dx dt d\xi$ alors $\tilde{m}^n - h(x, t, \xi) dx dt d\xi$ a la même loi que m^n . Si $\tilde{m}^n \rightarrow \tilde{m}$ p.s. (dans $\mathcal{M}_b(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times B_R^c)$) alors

$\tilde{m}^n - h(x, t, \xi) dx dt d\xi \rightarrow \tilde{m} - h(x, t, \xi) dx dt d\xi$ p.s. (dans $\mathcal{M}_b(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times B_R^c)$).

On peut prendre par exemple

$$\delta = \int_{\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}} h(x, t, \xi) dx dt d\xi > 0$$

dans la formule

$$\|m^n\|_{\mathcal{M}_b(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R})} = m^n(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}) \geq \delta > 0.$$

Soit K_A le sous-ensemble de $\mathcal{P}^1(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R})$ muni de la topologie faible, tel que ses éléments μ vérifient

$$\sup_{R>1} \frac{\mu(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times B_R^c)}{\eta(R)} \leq A,$$

où

$$\eta(R) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E} m^n(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times B_R^c).$$

Chaque $\mu \in K_A$ vérifie

$$\forall R > 1, \quad \frac{\mu(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times B_R^c)}{\eta(R)} \leq A,$$

donc

$$\forall R > 1, \quad \mu(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times B_R^c) \leq A \eta(R),$$

et comme $\eta(R) \rightarrow_{R \rightarrow +\infty} 0$, d'après l'hypothèse (2.84), on obtient la tension du sous-ensemble K_A . Donc d'après le théorème de Prokhorov, K_A est une partie compacte de $\mathcal{P}^1(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R})$ muni de sa topologie faible.

Par l'inégalité de Markov, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mu^n \notin K_A) &= P\left(\sup_{R>1} \frac{\mu^n(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times B_R^c)}{\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E} m^n(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times B_R^c)} > A\right) \\ &\leq \frac{1}{A} \mathbb{E}\left(\sup_{R>1} \frac{\mu^n(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times B_R^c)}{\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E} m^n(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times B_R^c)}\right) \\ &= \frac{1}{A} \mathbb{E}\left(\sup_{R>1} \frac{m^n(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times B_R^c)}{\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E} m^n(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times B_R^c)} \times \frac{1}{m^n(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R})}\right) \\ &\leq \frac{1}{A} \times \frac{1}{\delta} \mathbb{E}\left(\sup_{R>1} \frac{m^n(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times B_R^c)}{\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E} m^n(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times B_R^c)}\right) \\ &= \frac{1}{A} \times \frac{1}{\delta} \mathbb{E}\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{m^n(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times B_{R_k}^c)}{\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E} m^n(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times B_{R_k}^c)}\right) \end{aligned}$$

pour une certaine suite $(R_k)_{k \in \mathbb{N}}$ bien choisie. Puis par le lemme de Fatou, on

obtient

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\sup_{R>1} \frac{\mu^n (\mathbb{T}^N \times [0, T] \times B_R^c)}{\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E} m^n (\mathbb{T}^N \times [0, T] \times B_R^c)} > A \right) \\ & \leq \frac{1}{A} \times \frac{1}{\delta} \liminf_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left(\frac{m^n (\mathbb{T}^N \times [0, T] \times B_{R_k}^c)}{\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E} m^n (\mathbb{T}^N \times [0, T] \times B_{R_k}^c)} \right) \leq \frac{1}{A} \times \frac{1}{\delta}. \end{aligned}$$

On peut donc prendre $C = \frac{1}{\delta}$.

De même, par l'inégalité de Markov, on a

$$\mathbb{P} (\|m^n\| > A) \leq \frac{1}{A} \mathbb{E} (\|m^n\|) = \frac{1}{A} \mathbb{E} (m^n (\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R})) \leq \frac{C}{A}$$

d'après (2.83).

(X^n) est tendue car

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} (X^n \in (K_A \times [0, A])^c) \\ & = \mathbb{P} (X^n \in K_A^c \times [0, +\infty) \cup \mathcal{P}^1 (\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}) \times [0, A]^c) \\ & \leq \mathbb{P} (X^n \in K_A^c \times [0, +\infty)) + \mathbb{P} (X^n \in \mathcal{P}^1 (\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}) \times [0, A]^c) \\ & = \mathbb{P} (\mu^n \notin K_A) + \mathbb{P} (\|m^n\| > A) \leq \frac{1}{A} \left(\frac{1}{\delta} + C \right). \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}$ est métrique, séparable et complet, la topologie de la convergence faible sur $\mathcal{P}^1 (\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R})$ est équivalente à la topologie induite par la métrique de Prokhorov (cf Billingsley [Bil13] théorème 6.8), ainsi

$$\phi : \begin{cases} \mathcal{P}^1 (\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{M}^b (\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}) \\ (m, \alpha) \mapsto \alpha.m \end{cases}$$

est bilinéaire symétrique continue car

$$\|\alpha.m\| = |\alpha| \|m\|,$$

donc mesurable.

Cela justifie le calcul suivant qui prouve que m^n et \tilde{m}^n ont même loi :

$$\begin{aligned} & \forall A \in \mathcal{B} (\mathcal{M}^b (\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R})), \\ & \mathbb{P}_{\tilde{m}^n} (A) = \mathbb{P} (\tilde{\alpha}^n \tilde{\mu}^n \in A) = \mathbb{P} (\phi (\tilde{X}^n) \in A) = \mathbb{P} (\tilde{X}^n \in \phi^{-1} (A)) \\ & = \mathbb{P}_{\tilde{X}^n} (\phi^{-1} (A)) = \mathbb{P}_{X^n} (\phi^{-1} (A)) = \mathbb{P} (\phi (X^n) \in A) = \mathbb{P}_{m^n} (A). \end{aligned}$$

Autre point à vérifier :

$\tilde{X}^n \rightarrow \tilde{X}$ $\tilde{\mathbb{P}}$ -ps, implique $\phi(\tilde{\mu}^n, \tilde{\alpha}^n) \rightarrow \phi(\tilde{\mu}, \tilde{\alpha})$ $\tilde{\mathbb{P}}$ -ps, implique $\tilde{m}^n \rightarrow \tilde{m}$ $\tilde{\mathbb{P}}$ -ps.

2.2.28 Sur la tension dans les espaces de Skorokhod (cf paragraphe 2.1.4.3 et [Bil13])

L'espace $D[0, T]$ des fonctions numériques continues à droite, limitées à gauche est un espace dont les fonctions ont des points de discontinuité au plus dénombrables. Ces fonctions sont bornées. Elles sont boréliennes car limites uniformes de fonctions en escalier.

Si on munit cet espace de la topologie de Skorokhod, il en devient métrique, séparable et complet.

Si on restreint $D[0, T]$ à $C[0, T]$ alors la topologie de Skorokhod et la topologie de la convergence uniforme coïncident.

Une caractérisation intéressante de la tension d'une suite de probabilités de $C[0, T]$ est la suivante :

Une suite (\mathbb{P}^n) de probabilités de $C[0, T]$ est tendue si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées

$$\forall \eta > 0, \exists a, n_0 \text{ tels que } n \geq n_0 \Rightarrow \mathbb{P}^n(x \in C[0, T] : |x(0)| \geq a) \leq \eta$$

et

$$\forall \varepsilon, \eta > 0, \exists \delta \in]0, 1[\text{ et } n_0 \text{ tels que } n \geq n_0$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}^n \left(x \in C[0, T] : \sup_{s, t: |s-t| < \delta} |x(s) - x(t)| \geq \varepsilon \right) \leq \eta$$

i.e.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}^n \left(x \in C[0, T] : \sup_{s, t: |s-t| < \delta} |x(s) - x(t)| \geq \varepsilon \right) = 0.$$

Cette caractérisation est à rapprocher du théorème d'Arzela-Ascoli (avec $[0, T]$ compact, connexe) :

A est une partie relativement compacte de $C[0, T]$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées

$$\exists M > 0 : \sup_{x \in A} |x(0)| \leq M$$

et

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{x \in A} \sup_{s,t: |s-t| < \delta} |x(s) - x(t)| = 0.$$

Dans $D[0, T]$, on a cette caractérisation de la tension des mesures de probabilités :

Une suite (\mathbb{P}^n) de probabilités de $D[0, T]$ est tendue si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}^n(x \in D[0, T] : \|x\|_\infty \geq a) = 0$$

et

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}^n\left(x \in D[0, T] : \inf_{\pi_\delta} \max_i \sup_{s,t \in [t_{i-1}, t_i]} |x(s) - x(t)| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Cette caractérisation est à rapprocher du théorème suivant (généralisant celui d'Ascoli) :

A est une partie relativement compacte de $D[0, T]$ si et seulement si

$$\exists M > 0 : \sup_{x \in A} \|x\|_\infty \leq M$$

et

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{x \in A} \inf_{\pi_\delta} \max_i \sup_{s,t \in [t_{i-1}, t_i]} |x(s) - x(t)| = 0,$$

où π_δ est l'ensemble des subdivisions de $[0, T]$ s'écrivant $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_N = T$ vérifiant $|t_i - t_{i-1}| > \delta$.

Quand on parlera d'un processus stochastique tendu, que ce soit

$$X : \Omega \rightarrow C[0, T] \text{ ou } Y : \Omega \rightarrow D[0, T]$$

cela voudra dire que la loi de ce processus est tendue.

Détaillons le contre-exemple indiquant que la convergence faible de $\mu^n = \langle m^n, \partial_\xi \varphi \rangle$ vers une mesure μ sur $[0, T]$ n'implique pas la convergence de $A_\varphi^n(t) = \langle m^n, \partial_\xi \varphi \rangle [0, t]$ vers $A(t) = \mu[0, t]$ dans $D[0, T]$.

$\mu^n = \langle m^n, \partial_\xi \varphi \rangle$ est la mesure signée sur les boréliens de $[0, T]$ définie par

$$A \in \mathcal{B}[0, T] \mapsto \int_{\mathbb{T}^n \times A \times \mathbb{R}} \partial_\xi \varphi(x, \xi) dm^n(x, s, \xi).$$

Dire qu'elle converge faiblement vers μ signifie que

$$\forall \phi \in C[0, T], \mu^n(\phi) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \mu(\phi).$$

La convergence faible entraîne $\mu^n [0, t] \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \mu [0, t]$ à condition que $\mu\{t\} = 0$; les points $t \in [0, T]$ tels que $\mu\{t\} \neq 0$ sont au plus dénombrables.

Montrons que $\{t \mapsto \mu^n [0, t]\} \in D [0, T]$.

Prenons une suite décroissante (t_k) telle que $t_k \rightarrow t$ alors $[0, t_k] \rightarrow [0, t]$ et donc $\mu^n [0, t_k] \rightarrow \mu^n [0, t]$. Chaque $t \mapsto \mu^n [0, t]$ est donc continue à droite.

Prenons une suite croissante (t_k) telle que $t_k \rightarrow t$ alors $[0, t_k] \rightarrow [0, t[$ et donc $\mu^n [0, t_k] \rightarrow \mu^n [0, t[$. Chaque $t \mapsto \mu^n [0, t]$ est donc limitée à gauche.

Une suite (x_n) converge vers x dans $D [0, T]$ si et seulement s'il existe une suite (λ_n) de fonctions strictement croissantes, bijectives, continues $\lambda_n : [0, T] \rightarrow [0, T]$ telles que

$$\|\lambda_n(t) - t\|_\infty \rightarrow 0 \text{ et } \|x_n \circ \lambda_n(t) - x(t)\|_\infty \rightarrow 0.$$

Dans l'exemple proposé,

$$\mu^n [0, t] = \begin{cases} 2 & \text{si } t \geq t_* - s_n \\ 1 & \text{si } t_* - s_n > t \geq t_* - \sigma_n \\ 0 & \text{si } t_* - \sigma_n > t \end{cases}$$

et

$$\mu [0, t] = \begin{cases} 2 & \text{si } t \geq t_* \\ 0 & \text{si } t < t_* \end{cases} ;$$

on voit bien, peu importe la suite (λ_n) choisie, qu'on pourra toujours trouver un t tel que

$$|\mu^n [0, \lambda_n(t)] - \mu [0, t]| = 1,$$

c'est à dire que

$$\|\mu^n [0, \lambda_n(t)] - \mu [0, t]\|_\infty \geq 1.$$

La convergence (uniforme) dans $C [0, T]$ entraîne la convergence dans $D [0, T]$. Ainsi l'hypothèse

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{t \in [0, T]} |\varepsilon^n(t, \varphi)| = 0 \text{ en probabilité}$$

c'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon^n(t, \varphi) = 0 \text{ dans } C [0, T] \text{ en probabilité}$$

entraîne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon^n(t, \varphi) = 0 \text{ dans } D [0, T] \text{ en probabilité}$$

car les $t \mapsto \varepsilon^n(t, \varphi)$ sont presque sûrement continues. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon^n(t, \varphi) = 0 \text{ dans } D [0, T] \text{ en loi}$$

donc la suite des processus $t \mapsto \varepsilon^n(t, \varphi)$ est tendue dans $D[0, T]$.

2.2.29 Sur la preuve de la proposition 35

Remarquons tout d'abord que presque sûrement,

$$t \mapsto \int_0^t \langle f^n(s), a(\xi) \nabla_x \varphi \rangle ds \in C[0, T],$$

$$t \mapsto \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{G}^2(x, \xi) \partial_\xi \varphi(x, \xi) \nu_{\omega, x, s}(d\xi) dx ds \in C[0, T],$$

et enfin

$$t \mapsto \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) \nu_{\omega, x, s}(d\xi) dx dW(s) \in \mathcal{M}_T^2(\mathbb{R}) \subset C[0, T].$$

Montrons ensuite la tension de

$$\begin{cases} \Omega \rightarrow C[0, T] \\ \omega \mapsto (t \mapsto \langle f^n(0), \varphi \rangle) \end{cases}$$

Cette fonction est constante (déterministe) et a pour loi

$$\delta_{(t \mapsto \langle f^n(0), \varphi \rangle)}.$$

$A = \{(t \mapsto \langle f^n(0), \varphi \rangle) : n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans $C[0, T]$ (théorème d'Ascoli) car

$$\sup_n \|(t \mapsto \langle f^n(0), \varphi \rangle)\|_\infty \leq \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} |\varphi(x, \xi)| dx d\xi < +\infty,$$

et

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_n \sup_{s, t: |s-t| < \delta} |\langle f^n(0), \varphi \rangle - \langle f^n(0), \varphi \rangle| = 0$$

donc

$$\delta_{(t \mapsto \langle f^n(0), \varphi \rangle)}(\bar{A}^c) = 0.$$

Quand on aura prouvé la borne uniforme de

$$\mathbb{E}\|D_\varphi^n\|_{C^\alpha[0, T]}, \mathbb{E}\|M_\varphi^n\|_{C^\alpha[0, T]}, \mathbb{E}\|I_\varphi^n\|_{C^\alpha[0, T]},$$

et donc de

$$\mathbb{E}\|D_\varphi^n\|_\infty, \mathbb{E}\|M_\varphi^n\|_\infty, \mathbb{E}\|I_\varphi^n\|_\infty,$$

on pourra par exemple écrire (pour une certaine constante $M > 0$),

$$\begin{aligned} M > \mathbb{E}\|D_\varphi^n\|_\infty &= \int_{C[0,T]} \|x\|_\infty d\mathbb{P}_{D_\varphi^n} \\ &= \int_{\{x : |x(0)| \geq a\}} \|x\|_\infty d\mathbb{P}_{D_\varphi^n} + \int_{\{x : |x(0)| < a\}} \|x\|_\infty d\mathbb{P}_{D_\varphi^n}, \end{aligned}$$

d'où

$$M > a\mathbb{P}_{D_\varphi^n}(\{x : |x(0)| \geq a\}),$$

donc la condition (rappelée plus haut) (i) du théorème 7.3. de Billingsley [Bil13] page 82 sera vérifiée.

Une fois les trois inégalités de la démonstration de la proposition 35 démontrées, qui s'écrivent

$$\mathbb{E}|D_\varphi^n(t) - D_\varphi^n(s)|^\beta \leq M|t - s|^{1+\alpha} \quad \text{avec } \alpha, \beta > 0,$$

un théorème de Kolmogorov (cf Gallardo p9 [Gal08]) affirme qu'il existe une version \tilde{D}_φ^n de D_φ^n , à trajectoires höldériennes d'exposant $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$ (donc continues), c'est à dire que

$$\forall \omega \in \Omega, \exists K_\omega > 0 : \forall s, t \in [0, T], |\tilde{D}_\varphi^n(s) - \tilde{D}_\varphi^n(t)| \leq K_\omega |s - t|^\gamma.$$

Or comme dans nos trois cas, D_φ^n est à trajectoires continues, \tilde{D}_φ^n et D_φ^n sont indiscernables, c'est à dire

$$\tilde{D}_\varphi^n(\omega) = D_\varphi^n(\omega) \quad \text{dans } C[0, T] \quad \text{ps.}$$

Ainsi

$$\sup_{|s-t| \leq \delta} |\tilde{D}_\varphi^n(s) - \tilde{D}_\varphi^n(t)| \leq K_\omega \sup_{|s-t| \leq \delta} |s - t|^\gamma = K_\omega \delta^\gamma.$$

Mais comme

$$\mathbb{E}\|D_\varphi^n\|_{C^\alpha[0,T]} = \mathbb{E}\|D_\varphi^n\|_\infty + \mathbb{E} \sup_{s \neq t} \frac{|\tilde{D}_\varphi^n(s) - \tilde{D}_\varphi^n(t)|}{|s - t|^\gamma} = \mathbb{E}\|D_\varphi^n\|_\infty + \mathbb{E}K_\omega < M,$$

on a

$$\mathbb{E} \sup_{|s-t| \leq \delta} |\tilde{D}_\varphi^n(s) - \tilde{D}_\varphi^n(t)| \leq M\delta^\gamma,$$

donc

$$\varepsilon \times \mathbb{P} \left(\sup_{|s-t| \leq \delta} |\tilde{D}_\varphi^n(s) - \tilde{D}_\varphi^n(t)| > \varepsilon \right) \leq M\delta^\gamma,$$

autrement dit

$$\varepsilon \times \mathbb{P}_{D_\varphi^n} \left(x \in C[0, T] : \sup_{|s-t| \leq \delta} |x(s) - x(t)| > \varepsilon \right) \leq M\delta^\gamma.$$

Donc la condition (rappelée plus haut) (ii) du théorème 7.3. de Billingsley [Bil13] page 82 est vérifiée, et la suite de processus (D_φ^n) est tendue.

Remarque :

$x \in C[0, T] \mapsto \sup_{|s-t| \leq \delta} |x(s) - x(t)| \in \mathbb{R}$ est continue (à δ fixé) donc mesurable.

Il reste à détailler les affirmations de la démonstration de la proposition 35 :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|D_\varphi^n(t) - D_\varphi^n(\sigma)|^2 &= \mathbb{E} \left| \int_\sigma^t \langle f^n(s), a(\xi) \nabla_x \varphi \rangle ds \right|^2 \\ &\leq \mathbb{E} \left| \int_{\sigma \wedge t}^{\sigma \vee t} \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} |a(\xi) \nabla_x \varphi(x, \xi)| dx d\xi ds \right|^2 \\ &= \left| \int_{\sigma \wedge t}^{\sigma \vee t} \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} |a(\xi) \nabla_x \varphi(x, \xi)| dx d\xi ds \right|^2 \\ &= (t - \sigma)^2 \left(\int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} |a(\xi) \nabla_x \varphi(x, \xi)| dx d\xi \right)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|I_\varphi^n(t) - I_\varphi^n(\sigma)|^2 &= \mathbb{E} \left| \frac{1}{2} \int_\sigma^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{G}^2(x, \xi) \partial_\xi \varphi(x, \xi) \nu_{\omega, x, s}(d\xi) dx ds \right|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} TD_0^2 (1 + C_4) \|\partial_\xi \varphi\|_\infty^2 (t - \sigma)^2. \end{aligned}$$

Grâce au théorème de continuité de Kolmogorov déjà utilisé, on a par exemple

$$\forall \omega \in \Omega, \exists K_\omega > 0 : \forall s, t \in [0, T], |\tilde{D}_\varphi^n(s) - \tilde{D}_\varphi^n(t)| \leq K_\omega |s - t|^\gamma$$

avec \tilde{D}_φ^n et D_φ^n indiscernables et $\gamma < \frac{1}{2}$. Autrement dit, presque sûrement,

$$\exists K_\omega > 0 : \forall s, t \in [0, T], |D_\varphi^n(s) - D_\varphi^n(t)| \leq K_\omega |s - t|^\gamma.$$

Mais comme les trajectoire de D_φ^n sont « ω -uniformément continues » car

$$\begin{aligned} |D_\varphi^n(t) - D_\varphi^n(\sigma)| &= \left| \int_\sigma^t \langle f^n(s), a(\xi) \nabla_x \varphi \rangle ds \right| \\ &\leq |t - \sigma| \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} |a(\xi) \nabla_x \varphi(x, \xi)| dx d\xi, \end{aligned}$$

le $K_\omega = K$ du Gallardo [Gal08] page 9 ne dépend pas de ω (regarder sa démon-

tration pour s'en convaincre). Ainsi

$$\sup_{s \neq t} \frac{|D_\varphi^n(s) - D_\varphi^n(t)|}{|s - t|^\gamma} \leq K$$

donc

$$\mathbb{E} \sup_{s \neq t} \frac{|D_\varphi^n(s) - D_\varphi^n(t)|}{|s - t|^\gamma} \leq K.$$

En prenant $s = 0$ dans

$$|D_\varphi^n(s) - D_\varphi^n(t)| \leq K_\omega |s - t|^\gamma,$$

on obtient aussi

$$|D_\varphi^n(t)| \leq KT^\gamma$$

donc

$$\mathbb{E} \|D_\varphi^n\|_\infty \leq KT^\gamma$$

et donc

$$\mathbb{E} \|D_\varphi^n\|_{C^\gamma[0,T]} \leq K + KT^\gamma.$$

On procède de même avec I_φ^n .

L'inégalité de Burkholder, Davis, Gundy appliquée à la martingale continue (de carré intégrable)

$$t \in [\sigma, T] \mapsto M_t = \int_\sigma^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) \nu_{\omega, x, s}(d\xi) dx dW(s)$$

s'écrit

$$c_{BDG} \mathbb{E} \left([M]_t^{\frac{p}{2}} \right) \leq \mathbb{E} \left(\sup_{\sigma \leq r \leq t} |M_r| \right)^p \leq C_{BDG} \mathbb{E} \left([M]_t^{\frac{p}{2}} \right)$$

pour certaines constantes $c_{BDG}, C_{BDG} > 0$ dépendant de $p \in (0; +\infty)$.

Or M étant une martingale continue,

$$[M]_t = \ll M_t \gg = \int_\sigma^t \left\| \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) \nu_{\omega, x, s}(d\xi) dx \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds$$

et

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) \nu_{\omega, x, s}(d\xi) dx \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) \nu_{\omega, x, s}(d\xi) dx e_k \right)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) e_k \nu_{\omega, x, s}(d\xi) dx \right)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) g_k(x, \xi) \nu_{\omega, x, s}(d\xi) dx \right)^2,
\end{aligned}$$

donc

$$[M]_t^{\frac{p}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\sigma}^t \left(\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) g_k(x, \xi) \nu_{\omega, x, s}(d\xi) dx \right)^2 ds \right)^{\frac{p}{2}}.$$

En réalité dans l'article, ce n'est que la deuxième inégalité qui est utilisée. La première inégalité (écrite dans l'article, précédant C_{BDG}) est une simple conséquence de

$$|M_t| \leq \sup_{\sigma \leq r \leq t} |M_r|.$$

Ensuite, par l'inégalité de Jensen

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\sigma}^t \left(\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) g_k(x, \xi) \nu_{\omega, x, s}(d\xi) dx \right)^2 ds \\
& \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\sigma}^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} (\varphi(x, \xi) g_k(x, \xi))^2 \nu_{\omega, x, s}(d\xi) dx ds \\
& \leq \|\varphi\|_{\infty}^2 D_0 (1 + C_2) |t - \sigma|,
\end{aligned}$$

d'où (2.90) qu'on utilise avec un $p > 2$ pour que le théorème de continuité de Kolmogorov s'applique et prouver que les trajectoires de M_{φ}^n sont γ -Höldériennes avec

$$\gamma < \frac{\frac{p}{2} - 1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}.$$

Tout le reste marche comme pour D_{φ}^n car dans le théorème de continuité de Kolmogorov on a aussi le résultat suivant :

$$\mathbb{E}|K_{\omega}|^{\beta} < +\infty.$$

Comme ici $\beta = p > 2$, on a aussi $E|K_{\omega}| < +\infty$, donc le résultat demandé. Si j'avais utilisé ce résultat avant, j'aurais moins souffert pour trouver les bornes de $\mathbb{E}\|D_{\varphi}^n\|_{C^{\gamma}[0, T]}$ et $E\|I_{\varphi}^n\|_{C^{\gamma}[0, T]}$.

2.2.30 Sur l'énoncé du théorème 36, convergence des solutions généralisées approchées

Soit (f^n) une suite de solutions approchées de (2.1) dont chaque terme a pour condition initiale f_0^n . Il est à noter dans les hypothèses du théorème 36, les conditions initiales sont des conditions initiales approchées du problème (2.1). C'est naturel dans le sens où on cherche aussi à connaître la stabilité de la solution généralisée face à des perturbations de la condition initiale. Ces conditions initiales approchées doivent converger vers la condition initiale de (2.1) en ce sens :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_0^n = f_0 \quad L^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}) \text{ faible-},$$

ce qui signifie que la suite de fonctions cinétiques (f_0^n) sur $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}$ converge vers la fonction cinétique f_0 sur $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R} : \forall g \in L^1(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} f_0^n(x, \xi) g(x, \xi) dx d\xi \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} f_0(x, \xi) g(x, \xi) dx d\xi.$$

La suite de solutions généralisées approchées doit vérifier (2.79), (2.83) et (2.84), c'est à dire

1. $\forall p \in [1; +\infty)$, $\exists C_p > 0$ indépendante de n telle que $\nu^n = -\partial_\xi f^n$ vérifie

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\nu_{\omega, x, t}^n(\xi) dx \right) \leq C_p$$

2. $\mathbb{E} \left(m^n(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}) \right) \leq M$ pour une certaine constante $M > 0$ indépendante de n ,
3. $\lim_{R \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left(m^n(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times]-R; R[) \right) = 0$ uniformément en n .

Remarques :

Le théorème 36 va permettre en fait de changer de base stochastique, c'est à dire de passer de la base stochastique

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, (\beta_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \right)$$

à la base stochastique

$$\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}, (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in [0, T]}, (\tilde{\beta}_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \right).$$

En général, les bases stochastiques s'écrivent seulement $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]})$, le fait de rajouter $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ signifie que les mouvements browniens β_k sont adaptés

à la filtration \mathcal{F}_t et que les variables aléatoires $\beta_k(t) - \beta_k(s)$ sont indépendantes de \mathcal{F}_s quels que soient $T \geq t \geq s \geq 0$.

On aurait pu, de manière équivalente parler de la base stochastique

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, W\right).$$

Dans ce cas, cela signifie que le processus de Wiener cylindrique W est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ et que les vecteurs aléatoires $W(t) - W(s)$ sont indépendants de \mathcal{F}_s quels que soient $T \geq t \geq s \geq 0$.

En quelque sorte, le théorème 36 permet de changer de base stochastique et de processus de Wiener adapté à cette base. On peut dire aussi que le théorème 36 permet de changer de processus de Wiener (la filtration liée au processus de Wiener étant sous-jacente).

A noter qu'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ est toujours (dans notre article) continue à droite i.e.

$$\bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t \quad \forall t \in [0, T)$$

et que \mathcal{F}_0 contient tous les éléments $A \in \mathcal{F}$ tels que $\mathbb{P}(A) = 0$.

Grâce au théorème de Skorokhod, la nouvelle suite de solutions approchées (\tilde{f}^n) pourra converger presque sûrement vers une solution généralisée \tilde{f} (dans $L^\infty(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R})$ -faible*).

\tilde{f} n'est pas une martingale, les proposition 31 et 32 concernant les martingales seront utilisées pour prouver le théorème 36 d'où le mot « martingale » dans le nom de \tilde{f} .

2.2.31 Sur la preuve du théorème 36

2.2.31.1 Sur le § 2.1.4.5

Nous rappelons que le processus de Wiener cylindrique de covariance Id_H ,

$$W(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k(t) e_k$$

n'est pas un processus de Wiener sur H , mais sur \mathfrak{U} (espace de Hilbert séparable quelconque) grâce à l'injection (linéaire) de Hilbert-Schmidt

$$j : H \rightarrow \mathfrak{U}$$

c'est en fait le processus de Wiener sur \mathfrak{U} ,

$$W(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k(t) j(e_k)$$

de covariance $j \circ j^*$ (où j^* est l'adjoint de l'opérateur j).

$C_c^d(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ muni de la norme

$$\max \left\{ \|D^m \varphi\|_\infty, m \in \{0, 1, \dots, d\}^{N+1} \right\}$$

est séparable (cf étapes 1 et 2 de la démo de Droniou p72 dans son cours « intégration et espaces de Sobolev à valeurs vectorielles » [Dro01]), mais pas complet.

\mathbb{R}^∞ est le produit dénombrable $\prod_{\varphi_j \in \Gamma} \mathbb{R}_j$, cet espace est métrisable, séparable et complet. Il peut être vu comme l'ensemble des suites numériques indexées par Γ . Sa topologie est la moins fine rendant les projections sur \mathbb{R}_j continues. Elle admet pour base d'ouverts

$$\left\{ \prod_{k=1}^n U_{i_k} \times \prod_{j \in \Gamma, j \notin \{i_1, i_2, \dots, i_n\}} \mathbb{R}_j; n \in \mathbb{N}^*, i_1, i_2, \dots, i_n \in \Gamma, U_{i_k} \text{ ouverts de } \mathbb{R}_{i_k} \right\}$$

C'est la topologie de la convergence simple dans le sens où une suite $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\prod_{\varphi_j \in \Gamma} \mathbb{R}_j$ converge vers $g \in \prod_{\varphi_j \in \Gamma} \mathbb{R}_j$ si et seulement si chaque suite

de coordonnées $(g_m^j)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers g^j quel que soit $j \in \Gamma$.

\mathbb{R}^∞ étant polonais, il en est de même pour $C([0, T], \mathbb{R}^\infty)$ et pour $D([0, T], \mathbb{R}^\infty)$ (cf Kotelenez pages 360-361 [Kot07] ou Métivier p 26-27 [Mét88]). Comme un produit d'espaces polonais l'est aussi, c'est valable pour

$$\mathcal{E} = C([0, T], \mathbb{R}^\infty) \times C([0, T], \mathbb{R}^\infty) \times D([0, T], \mathbb{R}^\infty).$$

Rappelons que

$$J_\varphi^n(t) = \langle f^n(t), \varphi \rangle + B_\varphi^n(t) - \langle f^n(0), \varphi \rangle$$

a été défini en (2.87) et que la suite de processus dont les trajectoires sont $t \mapsto J_\varphi^n(t)$ est tendue dans $C[0, T]$ grâce à la proposition 35.

J'ai déjà montré précédemment que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon^n(t, \varphi) = 0 \text{ dans } C[0, T] \text{ en probabilité}$$

entraîne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon^n(t, \varphi) = 0 \text{ dans } C[0, T] \text{ en loi}$$

donc la suite des processus $t \mapsto \varepsilon^n(t, \varphi)$ est tendue dans $C[0, T]$.

$\{J_{\varphi_j}^n(t)\}_{j \in \Gamma} = (J_{\varphi_j}^n(t))_{j \in \Gamma}$ est une suite indexée par j d'éléments de $C[0, T]$, on pourrait donc l'écrire

$$\{J_{\varphi_j}^n\} = (J_{\varphi_j}^n)_{j \in \Gamma} \in C([0, T]; \mathbb{R})^{\mathbb{N}} = C([0, T], \mathbb{R}^{\infty}).$$

J'ai écrit $j \in \Gamma$, mais je peux de manière équivalente écrire $j \in \mathbb{N}$, c'est ce que je vais faire pour ce qui suit. De même,

$$\{M^n(t)\}_{j \in \mathbb{N}} = (M_{\varphi_j}^n(t))_{j \in \mathbb{N}} = \left(\int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi_j(x, \xi) \Phi(x, \xi) \nu_{\omega, x, s}(d\xi) dx dW(s) \right)_{j \in \mathbb{N}}$$

est une suite indexée par j d'éléments de $C[0, T]$, on pourrait donc l'écrire

$$\{M^n\} = (M_{\varphi_j}^n)_{j \in \mathbb{N}} \in C([0, T]; \mathbb{R})^{\mathbb{N}} = C([0, T], \mathbb{R}^{\infty})$$

Et enfin,

$$\{\varepsilon^n(t)\}_{j \in \mathbb{N}} = (\varepsilon^n(t, \varphi_j))_{j \in \mathbb{N}} = (\varepsilon_{\varphi_j}^n(t))_{j \in \mathbb{N}}$$

est une suite indexée par j d'éléments de $C[0, T]$, on pourrait donc l'écrire

$$\{\varepsilon^n\} = (\varepsilon_{\varphi_j}^n)_{j \in \mathbb{N}} \in C([0, T]; \mathbb{R})^{\mathbb{N}} = C([0, T], \mathbb{R}^{\infty}).$$

ν^n est la mesure de Young associée à la fonction cinétique f^n donc $\nu^n(\omega)$ appartient à $\mathcal{Y}^1 = \mathcal{Y}^1(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R})$.

$$\|m^n\| = m^n(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}) \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \mu^n = \frac{m^n}{\|m^n\|} \in \mathcal{P}^1(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}).$$

Comme $\mu^n = \frac{m^n}{\|m^n\|}$, on a bien $\|m^n\| = m^n(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}) \in \mathbb{R}_*^+$.

Remarques :

On préfère \mathbb{R}^+ à \mathbb{R}_*^+ parce qu'il est complet et donc polonais.

On a bien $W \in \mathcal{X}_W = C([0, T]; \mathfrak{U})$ ps

Comme la suite (indexée sur n) de processus dont les trajectoires sont $t \mapsto$

$J_{\varphi_j}^n(t)$ est tendue dans $C[0, T]$, par définition de la tension, il existe un compact $K_j \subset C[0, T]$ tel que

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P} \left(J_{\varphi_j}^n \in K_j \right) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

D'après le théorème de Tykhonov, $K = \prod_{j \in \mathbb{N}} K_j$ est un compact de $\prod_{j \in \mathbb{N}} (C[0, T])_j$ muni de la topologie produit, c'est à dire de $C([0, T], \mathbb{R}^\infty)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\{J_{\varphi_j}^n\} \in K \right) &= \mathbb{P} \left(J_{\varphi_j}^n \in K_j, \forall j \in \mathbb{N} \right) = \mathbb{P} \left(\bigcap_{j \in \mathbb{N}} J_{\varphi_j}^n \in K_j \right) \\ &= 1 - \mathbb{P} \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} J_{\varphi_j}^n \notin K_j \right) \geq 1 - \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{P} \left(J_{\varphi_j}^n \notin K_j \right) \geq 1 - \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^j} = 1 - 2\varepsilon \end{aligned}$$

car

$$-\mathbb{P} \left(J_{\varphi_j}^n \notin K_j \right) = -1 + \mathbb{P} \left(J_{\varphi_j}^n \in K_j \right) \geq -1 + 1 - \frac{\varepsilon}{2^j} = -\frac{\varepsilon}{2^j}$$

donc

$$\mathbb{P} \left(\{J_{\varphi_j}^n\} \in K^c \right) < 2\varepsilon.$$

Pour $\{M^n\}$ et $\{\varepsilon^n\}$, c'est la même démonstration.

$\mathcal{X}_W = C([0, T]; \mathfrak{U})$ muni de la norme uniforme est séparable et complet (car \mathfrak{U} est séparable et complet). Si on considère le processus de Wiener

$$W : \Omega \rightarrow C([0, T]; \mathfrak{U})$$

alors la loi de W est tendue dans $C([0, T]; \mathfrak{U})$. En effet,

$$\mathbb{P}_W \left(x \in C[0, T] : |x(0)|_{\mathfrak{U}} \geq a \right) = \mathbb{P} \left(\omega \in \Omega : |W_\omega(0)|_{\mathfrak{U}} \geq a \right) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_W \left(x \in C[0, T] : \sup_{s, t: |s-t| < \delta} |x(s) - x(t)| \geq \varepsilon \right) \\ = \mathbb{P} \left(\omega \in \Omega : \sup_{s, t: |s-t| < \delta} |W_\omega(s) - W_\omega(t)| \geq \varepsilon \right) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

prouvent notre affirmation.

Le produit d'espaces polonais est polonais, donc \mathcal{X} est polonais ($\mathcal{P}^1(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R})$ muni de la distance de Prokhorod est polonais).

Remarque : si on avait pu démontrer que la suite des processus $t \mapsto \langle f^n(t), \varphi \rangle$ était tendue dans $D[0, T]$, on aurait eu les items 7 et 8 plus facilement.

La variable aléatoire constante $\omega \in \Omega \mapsto f_{in}^n \in \mathbb{R}^\infty$ a pour loi $\delta_{f_{in}^n}$, de même la variable aléatoire constante $\omega \in \Omega \mapsto f_{in} \in \mathbb{R}^\infty$ a pour loi $\delta_{f_{in}}$. La convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(\omega \in \Omega \mapsto f_{in}^n \in \mathbb{R}^\infty)_n$ vers $\omega \in \Omega \mapsto f_{in} \in \mathbb{R}^\infty$ équivaut à la convergence de $(\delta_{f_{in}^n}(g))$ vers $\delta_{f_{in}}(g)$ quel que soit $g \in C_b(\mathbb{R}^\infty, \mathbb{R})$, c'est à dire de $(g(f_{in}^n))_n$ vers $g(f_{in})$. Mais comme $(f_{in}^n)_n$ converge vers f_{in} dans \mathbb{R}^∞ , la continuité séquentielle de g nous donne la convergence en loi souhaitée.

C'est la raison pour laquelle

$$\{\tilde{f}_{in}\} = \{f_{in}\} = (\langle f_0, \varphi_j \rangle)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty$$

2.2.31.2 Sur le § 2.1.4.5

Comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon^n(t, \varphi) = 0 \text{ dans } C[0, T] \text{ en loi,}$$

et que la loi de la variable aléatoire $\omega \mapsto (t \mapsto 0)$ est la masse de Dirac $\delta_{(t \mapsto 0)}$, c'est aussi la loi de $\{\tilde{\varepsilon}\}$, on peut donc dire que la variable aléatoire $\{\tilde{\varepsilon}\}$ est la variable aléatoire qui à tout $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ associe la fonction nulle de $C[0, T]$.

Les items 1 et 2 du théorème 36 viennent du théorème de Skorokhod qui vient d'être appliqué à la fin du paragraphe précédent, mais la tension de la suite (ν^n) a été prouvée dans la démonstration de la proposition 33

L'item 6 vient du corollaire 11

Le fait que ν vérifie (2.80) vient aussi de la proposition 33.

Les items 4 et 5 du théorème 36 viennent du théorème de Skorokhod qui vient d'être appliqué à la fin du paragraphe précédent, mais la tension des suites (μ^n) et $(\|m^n\|)$ a été prouvée dans la démonstration de la proposition 34

A noter, qu'on obtient les items 4 et 5 du théo 36 de la manière suivante :

$(\mu^n, \|m^n\|)$ a la même loi que $(\tilde{\mu}^n, \tilde{\alpha}^n)$, $(\tilde{\mu}^n, \tilde{\alpha}^n)_n$ converge $\tilde{\mathbb{P}}$ -ps vers $(\tilde{\mu}, \tilde{\alpha})$, (à une sous-suite près)

donc $\tilde{m}^n = \tilde{\mu}^n \times \tilde{\alpha}^n$ a même loi que $m^n = \mu^n \times \|m^n\|$ et $(\tilde{m}^n)_n$ converge $\tilde{\mathbb{P}}$ -ps vers $\tilde{m} = \tilde{\mu} \times \tilde{\alpha}$ (à une sous-suite près).

Sur la preuve du lemme 37

A noter que la i^e projection

$$(g_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \prod_{j=1}^{+\infty} C([0, T], \mathbb{R}_j) \mapsto g_i \in C([0, T], \mathbb{R}_i)$$

est continue, ainsi que l'application linéaire

$$g \in C([0, T], \mathbb{R}) \mapsto \int_0^T g(t) \theta(t) dt.$$

Cela rend la fonction F continue. Une fois qu'on a $F(Z^n) = 0$, \mathbb{P} -ps, on a bien sûr $F(\tilde{Z}^n) = 0$, $\tilde{\mathbb{P}}$ -ps. On a ainsi (2.96) grâce au fait que les parties droite et gauche de l'égalité sont càdlàg.

Comme $\tilde{\mathbb{P}}$ -ps, $F(\tilde{Z}^n) \rightarrow F(\tilde{Z})$ et que $F(\tilde{Z}^n) = 0$, on a bien $F(\tilde{Z}) = 0$ et on obtient (2.97).

Sur la preuve de la proposition 38

Soit $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, T]$ une suite de rationnels qui tend en croissant vers T . L'inégalité

$$\frac{1}{|J|} \int_J \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p \tilde{\nu}_{\tilde{\omega}, x, t}(d\xi) dx dt \leq C_p(\tilde{\omega})$$

est vraie $\forall \tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}^+$. Elle est vraie en particulier $\forall J_n = [0, q_n]$. En faisant tendre $n \rightarrow +\infty$, et en utilisant le théorème de convergence monotone, on obtient

$$\int_{[0, T]} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p \tilde{\nu}_{\tilde{\omega}, x, t}(d\xi) dx dt \leq TC_p(\tilde{\omega}).$$

Le théorème de Fubini montre que

$$t \mapsto \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p \tilde{\nu}_{\tilde{\omega}, x, t}(d\xi) dx$$

est mesurable, et intégrable sur $[0, T]$.

Soit $[a, b] \subset [0, T]$, il existe deux suites de rationnels (a_n) et (b_n) , la première décroissante et convergeant vers a , la deuxième croissante et convergeant vers b . Le théorème de convergence monotone appliqué à

$$\int_{[a_n, b_n]} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p \tilde{\nu}_{\tilde{\omega}, x, t}(d\xi) dx dt$$

montre que

$$\int_{[a,b]} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p \tilde{\nu}_{\tilde{\omega},x,t} (d\xi) dx dt \leq (b-a) C_p(\tilde{\omega});$$

t_* et la suite (ε_l) sont choisis de telle sorte que $J_l = [t_*, t_* + \varepsilon_l] \subset [0, T]$.
Vérifions que les $\tilde{\nu}^{(l)}$ ($\tilde{\omega}$) sont des mesures de Young sur $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}$.
Comme $\tilde{\nu}$ ($\tilde{\omega}$) est une mesure de Young sur $\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}$, on a

$$\frac{1}{|J_l|} \int_{\mathbb{T}^N \times J_l} \tilde{\nu}_{x,t}(\mathbb{R}) dx dt = 1.$$

Soit maintenant $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$; comme

$$0 \leq \frac{1}{|J_l|} \int_{\mathbb{T}^N \times J_l} \tilde{\nu}_{x,t}(B) dx dt \leq 1,$$

le théorème de Fubini montre que

$$x \mapsto \frac{1}{|J_l|} \int_{J_l} \tilde{\nu}_{x,t}(B) dt$$

est $\mathcal{B}(\mathbb{T}^N)$ -mesurable. Comme $\tilde{\nu}_{x,t}(\mathbb{R}) = 1$, il va de même ($\forall x \in \mathbb{T}^N$) pour

$$\frac{1}{|J_l|} \int_{J_l} \tilde{\nu}_{x,t}(\mathbb{R}) dt = 1.$$

Ainsi $dx \cdot \tilde{\nu}^{(l)}$ ou tout simplement $\tilde{\nu}^{(l)}$ est une mesure de Young sur $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}$.

On a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} |\xi|^p (dx \cdot \tilde{\nu}^{(l)}(d\xi)) &= \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p \tilde{\nu}^{(l)}(d\xi) dx = \int_{\mathbb{T}^N} \tilde{\nu}^{(l)}(|\xi|^p) dx \\ &= \int_{\mathbb{T}^N} \frac{1}{|J_l|} \int_{J_l} \tilde{\nu}_{x,t}(|\xi|^p) dt dx = \frac{1}{|J_l|} \int_{J_l} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p \tilde{\nu}_{\tilde{\omega},x,t}(d\xi) dx dt \leq C_p(\tilde{\omega}), \end{aligned}$$

donc on peut appliquer le théorème 10 : il existe une sous-suite $(\tilde{\nu}_{l_m})_m$ et une mesure de Young $\tilde{\nu}^*$ sur $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}$ telles que $\tilde{\nu}_{l_m} \rightarrow \tilde{\nu}^*$ dans $\mathcal{Y}^1(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$,
et son corollaire : la suite $(\tilde{f}_{l_m})_m$ converge dans $L^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ faible-* vers la fonction cinétique $\tilde{f}^* : (x, \xi) \mapsto \tilde{\nu}_x^*(\xi; +\infty)$.

À φ et $\tilde{\omega}$ fixés, $F_\varphi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est càdlàg donc si on se donne $\varepsilon > 0$,

$$\left| \frac{1}{|J_l|} \int_{J_l} F_\varphi(t) dt - F_\varphi(t_*) \right| \leq \frac{1}{|J_l|} \int_{J_l} |F_\varphi(t) - F_\varphi(t_*)| dt < \varepsilon$$

dès que l est suffisamment grand. De plus, on a bien

$$\begin{aligned} \frac{1}{|J_l|} \int_{J_l} F_\varphi(t) dt &= \frac{1}{|J_l|} \int_{J_l} \langle \tilde{f}(t), \varphi \rangle dt \\ &= \frac{1}{|J_l|} \int_{J_l} \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} \tilde{f}(x, t, \xi) \varphi(x, \xi) dx d\xi dt = \langle \tilde{f}^{(l)}, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\langle \tilde{f}^{(l)}, \varphi \rangle \rightarrow_{l \rightarrow +\infty} F_\varphi(t_*),$$

et enfin, par identification des limites

$$\langle \tilde{f}^*, \varphi \rangle = F_\varphi(t_*).$$

Comme c'est vrai $\forall \varphi \in \Gamma$, et que Γ est dense dans $C_c^d(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, la connaissance de $\langle \tilde{f}^*, \varphi_j \rangle \forall j \in \mathbb{N}$ donne la connaissance de $\langle \tilde{f}^*, \varphi \rangle \forall \varphi \in C_c^d(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ ce qui détermine de manière unique \tilde{f}^* . \tilde{f}^* est unique signifie qu'elle est la seule valeur d'adhérence de la suite $(\tilde{f}^{(l)})_l$. Donc ce n'est pas que la sous-suite $(\tilde{f}^{(l_m)})_m$ qui converge vers \tilde{f}^* , mais la suite toute entière. Grâce à l'égalité

$$\tilde{v}^*(\varphi) = \langle \tilde{f}^*, \partial_\xi \varphi \rangle, \forall \varphi \in C_c^d(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}),$$

\tilde{v}^* est aussi déterminée de manière unique, et est la seule valeur d'adhérence de la suite $(\tilde{v}^{(l)})_l$, c'est donc la limite de cette suite.

La formule (2.102) est la réécriture de ce fait (en prenant $\varepsilon = \varepsilon_l$ et $t = t_*$) :

$$\tilde{v}_{t_*}^{(l)}(\phi) \rightarrow \tilde{v}_{t_*}^+(\phi) = \tilde{v}^*(\phi), \forall \phi \in C_b(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}).$$

L'égalité

$$\langle \tilde{f}^+(t_*), \partial_\xi \varphi \rangle = \tilde{v}_{t_*}^+(\varphi) = \tilde{v}^*(\varphi) = \langle \tilde{f}^*, \partial_\xi \varphi \rangle, \forall \varphi \in C_c^d(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$$

montre que $\tilde{f}^+(t_*) = \tilde{f}^*, \forall t_* \in [0, T)$.

On a $\tilde{f}^+(t_*) = \tilde{f}^* \forall t_* \in [0, T)$. Pas besoin d'enlever l'ensemble de mesure nulle N_0 . L'égalité (2.101) implique directement que $t \mapsto \langle \tilde{f}^+(t_*), \varphi \rangle$ est càdlàg.

Comme $\tilde{v}_{t_*}^{(l)} \rightarrow \tilde{v}_{t_*}^+$ dans $\mathcal{Y}^1(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, on applique cette convergence à la fonction g_M telle que $g_M(x, \xi)$ est égale à $|\xi|^p$ si $\xi \in [-M, M]$ et égale à M^p si $\xi \in [-M, M]^c$.

Cela donne $\tilde{v}_{t_*}^{(l)}(g_M) \rightarrow \tilde{v}_{t_*}^+(g_M)$ et donc grâce à (2.100)

$$\tilde{v}_{t_*}^+(g_M) \leq C_p(\tilde{\omega}).$$

Il reste à faire tendre M vers l'infini et utiliser le théorème de convergence monotone pour obtenir

$$\tilde{\nu}_{t_*}^+ (|\xi|^p) \leq C_p (\tilde{\omega}).$$

Comme $C_p (\tilde{\omega})$ ne dépend pas de t_* , on a

$$\sup_{t_* \in [0, T]} \tilde{\nu}_{t_*}^+ (|\xi|^p) \leq C_p (\tilde{\omega}).$$

Si on se donne une suite $(t_l)_{l \in \mathbb{N}} \subset [0, T)$ qui tend en décroissant vers $t \in [0, T)$, la suite de mesures de Young $(\tilde{\nu}_{t_l}^+)_{l \in \mathbb{N}}$ sur $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}$ vérifie les conditions du théorème de compacité des mesures de Young, il existe donc une sous-suite qui converge vers la mesure de Young $\tilde{\nu}_t^{++}$. Pour les mêmes raisons, la suite de fonctions cinétiques $(\tilde{f}^+(t_l))_{l \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite (la même que $(\tilde{\nu}_{t_l}^+)_{l \in \mathbb{N}}$) qui converge dans $L^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ faible* vers la fonction cinétique $\tilde{f}^{++}(x, t, \xi) = \tilde{\nu}_{x,t}^{++}(\xi; +\infty)$.

En notant (t_{l_k}) la suite-extraite de (t_l) qui rend $(\tilde{f}^+(t_l))_{l \in \mathbb{N}}$ convergente, on a :

$$\langle \tilde{f}^+(t_{l_k}), \varphi \rangle = \langle \tilde{f}(t_{l_k}), \varphi \rangle = F_\varphi(t_{l_k})$$

et en faisant tendre $k \rightarrow +\infty$, cela donne

$$\langle \tilde{f}^{++}(t), \varphi \rangle = F_\varphi(t) = \langle \tilde{f}(t), \varphi \rangle.$$

Il n'y a qu'une seule valeur d'adhérence à $(\tilde{f}^+(t_l))_{l \in \mathbb{N}}$ qui converge donc vers $\tilde{f}(t)$. Comme la limite est indépendante de la suite décroissante $(t_l)_{l \in \mathbb{N}}$ choisie, on a $t \mapsto \langle \tilde{f}^+(t), \varphi \rangle$ qui est càd. On procède de la même manière pour montrer que le processus est làg.

Pour l'item 3 de la proposition, on peut se servir de la démonstration faite quelques lignes plus haut pour voir que

$$\sup_{t_* \in [0, T]} \tilde{\nu}_{t_*}^+ (|\xi|^p) \leq \sup_J \frac{1}{|J|} \int_J \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p \tilde{\nu}_{\tilde{\omega}, x, t}^+ (d\xi) dx dt.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
& \sup_J \frac{1}{|J|} \int_J \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p \tilde{\nu}_{\tilde{\omega},x,t}^+ (d\xi) dx dt \\
& \leq \sup_J \frac{1}{|J|} \int_J \sup_{t \in [0,T)} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p \tilde{\nu}_{\tilde{\omega},x,t}^+ (d\xi) dx dt \\
& = \sup_{t \in [0,T)} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p \tilde{\nu}_{\tilde{\omega},x,t}^+ (d\xi) dx,
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\sup_{t \in [0,T)} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p \tilde{\nu}_{\tilde{\omega},x,t}^+ (d\xi) dx = \sup_J \frac{1}{|J|} \int_J \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p \tilde{\nu}_{\tilde{\omega},x,t}^+ (d\xi) dx dt,$$

puis grâce à (2.80)

$$\begin{aligned}
& \tilde{\mathbb{E}} \left(\sup_{t \in [0,T)} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p \tilde{\nu}_{\tilde{\omega},x,t}^+ (d\xi) dx \right) \\
& = \tilde{\mathbb{E}} \left(\sup_J \frac{1}{|J|} \int_J \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p \tilde{\nu}_{\tilde{\omega},x,t}^+ (d\xi) dx dt \right) \leq C_p.
\end{aligned}$$

Remarque : j'ai pris le sup sur $[0, T)$, mais comme $\tilde{\nu}_{\tilde{\omega},x,T}^+$ est bien définie grâce à l'astuce de l'article (tout reprendre depuis le début avec $T + 1$ à la place de T), on peut prendre le sup sur $[0, T]$.

Sur preuve de la proposition 39

Pour utiliser le lemme 2, il faut vérifier que

$$\tilde{\mathbb{E}} \left(\tilde{m} \left(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R} \right) \right) < +\infty.$$

Soit $f^k : \mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}_\xi \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction positive, affine par morceaux égale à 1 pour tout $\xi \in [-k, k]$ et égale à 0 pour tout $\xi \in [-k, k]^c$, et qui tend en croissant lorsque $k \rightarrow +\infty$ vers la fonction identiquement égale à 1. Comme

$$\mathbb{E} \left(m^n \left(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R} \right) \right) \leq A < +\infty,$$

avec A indépendant de n , et comme \tilde{m}^n a la même loi que m^n , on a

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{E}}\left(\tilde{m}\left(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}\right)\right) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbb{E}}\left(\tilde{m}\left(f^k\right)\right) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbb{E}}\left(\tilde{m}^n\left(f^k\right)\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}\left(m^n\left(f^k\right)\right) \leq A < +\infty.\end{aligned}$$

2.2.31.3 Sur le § 2.1.4.5

Réécrivons (2.105) de la manière suivante :

$$M_\varphi^*(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) \tilde{\nu}_{\tilde{\omega}, x, s}(d\xi) dx d\tilde{W}(s).$$

Nous avons déjà l'espace probabilisé $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ donné par le théorème de Skorokhod à la fin du paragraphe 2.1.4.5. Pour que (2.105) existe, il faut déjà se donner une filtration à notre espace probabilisé pour que le processus de Wiener \tilde{W} soit adapté à cette filtration.

Les idées sont celles du livre de Jacod et Shiryaev [JS13] : en premier lieu, se donner une filtration continue à droite sur $D([0, +\infty); E)$ avec E polonais, puis s'en servir pour définir une filtration sur $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ pour laquelle $(\{\tilde{f}\}, \{\tilde{M}\}, \{\tilde{W}\})$ est adaptée.

Notons qu'avec cette méthode, Jacod et Shiryaev (cf [JS13] proposition 1.10 ou 1.17 chap9) ne nous donnent pas une simple filtration sur $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$, mais une filtration pour laquelle $\{\tilde{W}\}$ et $\{\tilde{M}\}$ sont des martingales. Nous avons besoin que $\{\tilde{W}\}$ soit une martingale pour que l'intégrale d'Itô contre $\{\tilde{W}\}$ existe. Nous avons besoin que $\{\tilde{M}\}$ soit une martingale pour identifier ses composantes à

$$t \mapsto \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi_j(x, \xi) \Phi(x, \xi) \tilde{\nu}_{\tilde{\omega}, x, s}(d\xi) dx d\tilde{W}(s).$$

Step one :

Les notations sont celles du livre de Jacod et Shiryaev [JS13], les résultats sont ceux de leur chapitre 6. Le but étant de construire une filtration sur $D([0, +\infty); E)$ avec E polonais, continue à droite telle que la tribu terminale soit la tribu borélienne engendrée par la distance ayant rendu $D([0, +\infty); E)$ polonais (cf Théo 1.14 p328 du Jacod, Shiryaev).

$\mathcal{D}_t^0(E)$ est la plus petite tribu sur $D([0, +\infty); E)$ rendant mesurables toutes les projections

$$\phi_s : \alpha \in D([0, +\infty); E) \mapsto \alpha(s) \in E$$

quel que soit $0 \leq s \leq t$, c'est à dire

$$\mathcal{D}_t^0(E) = \bigvee_{0 \leq s \leq t} \sigma\{\phi_s^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(E)\}.$$

$\mathcal{D}_t(E)$ est la limite à droite en t des tribus $\mathcal{D}_t^0(E)$, autrement dit la plus grande tribu contenue dans toutes les $\mathcal{D}_r^0(E)$ pour tout $r > t$, c'est à dire

$$\mathcal{D}_t(E) = \bigcap_{r>t} \mathcal{D}_r^0(E)$$

Ce qui veut dire que si la filtration $(\mathcal{D}_t^0(E))_{t \in [0, +\infty)}$ est continue à droite, on aura $\mathcal{D}_t(E) = \mathcal{D}_t^0(E)$. $\mathcal{D}_{t-}(E)$ est la limite à gauche en t des tribus $\mathcal{D}_t(E)$, autrement dit la plus petite tribu contenant toutes les $\mathcal{D}_s(E)$ pour tout $s < t$, c'est à dire

$$\mathcal{D}_{t-}(E) = \bigvee_{s<t} \mathcal{D}_s(E).$$

Bien évidemment,

$$\mathcal{D}_{t-}(E) \subset \mathcal{D}_t^0(E) \subset \mathcal{D}_t(E),$$

ce qui veut dire qu'on a aussi

$$\mathcal{D}_{t-}(E) = \bigvee_{s<t} \mathcal{D}_s^0(E).$$

Remarques :

En général $\mathcal{D}_t(E)$ se note $\mathcal{D}_{t+}^0(E)$. La filtration $(\mathcal{D}_t^0(E))_{t \in [0, +\infty)}$ n'est pas continue à droite car

$$(\mathcal{D}_t^0(E))_{t \in [0, +\infty)} \neq (\mathcal{D}_t(E))_{t \in [0, +\infty)},$$

mais la filtration $(\mathcal{D}_t(E))_{t \in [0, +\infty)}$ est continue à droite.

Le temps de retour (hitting time) dans U ouvert de E défini par

$$\tau_U : \begin{cases} D([0, +\infty); E) \rightarrow [0; +\infty] \\ \alpha \mapsto \inf\{r > 0 : \alpha(r) \in U\} \end{cases}$$

est un temps d'arrêt si $D([0, +\infty); E)$ est muni de $(\mathcal{D}_t(E))_{t \in [0, +\infty)}$, mais n'est pas

un temps d'arrêt si $D([0, +\infty); E)$ est muni de $(\mathcal{D}_t^0(E))_{t \in [0, +\infty)}$. Cela prouve que

$$(\mathcal{D}_t^0(E))_{t \in [0, +\infty)} \neq (\mathcal{D}_t(E))_{t \in [0, +\infty)}$$

(cf Revuz, Yor [RY13] pages 43-44).

Remarque sur la proposition 40 :

Le fait que (à s fixé)

$$\theta_{\#s}^\varepsilon : \alpha \in D([0, +\infty); E) \mapsto \frac{1}{\varepsilon} \int_s^{t \wedge (s+\varepsilon)} \theta(\alpha(\sigma)) d\sigma \in \mathbb{R}$$

soit la régularisée de

$$\theta_{\#s} : \alpha \in D([0, +\infty); E) \mapsto \theta(\alpha(s)) \in \mathbb{R}$$

signifie à la fois que $\theta_{\#s}^\varepsilon$ est continue (c'est prouvé dans la première partie de la démonstration de la proposition 40 grâce au fait que $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D([0, +\infty); E)$ converge vers $\alpha \in D([0, +\infty); E)$ dans $D([0, +\infty); E)$, implique que $(\alpha_n(\sigma))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\alpha(\sigma)$ pour tout σ qui soit un point de continuité de α , cf Billingsley [Bil13] page 124) et que (à α fixé),

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\theta_{\#s}^\varepsilon(\alpha) - \theta_{\#s}(\alpha)| = 0$$

car

$$\begin{aligned} |\theta_{\#s}^\varepsilon(\alpha) - \theta_{\#s}(\alpha)| &= \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_s^{t \wedge (s+\varepsilon)} \theta(\alpha(\sigma)) d\sigma - \frac{1}{\varepsilon} \int_s^{t \wedge (s+\varepsilon)} \theta(\alpha(s)) d\sigma \right| \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_s^{t \wedge (s+\varepsilon)} |\theta(\alpha(\sigma)) - \theta(\alpha(s))| d\sigma. \end{aligned}$$

Prenons $\eta > 0$, comme $\alpha \in D([0, +\infty); E)$, en particulier α est continue à droite en s donc il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\forall \sigma \in [s, s + \varepsilon]$, on ait

$$|\alpha(\sigma) - \alpha(s)| < \eta.$$

Par continuité de θ , on peut rendre $|\theta(\alpha(\sigma)) - \theta(\alpha(s))|$ aussi petit que l'on veut.

Avec mes notations,

$$A = \bigcap_{i=1}^k \phi_{s_i}^{-1}(B_i) \in \mathcal{D}_{s_k}^0(E) \subset \mathcal{D}_{t-}(E)$$

donc $\mathbf{1}_A$ est mesurable si $D([0, +\infty); E)$ est munie de $\mathcal{D}_{t-}(E)$, donc la tribu engendrée par les $\mathbf{1}_A$ est incluse dans $\mathcal{D}_{t-}(E)$.

Le cas particulier où $k = 1$ indique que l'ensemble des

$$\{\phi_s^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(E), s < t\}$$

est inclus dans de tels A . Mais comme cet ensemble génère $\mathcal{D}_{t-}(E)$, on a

$$\mathcal{D}_{t-}(E) \subset \text{la tribu engendrée par les } \mathbf{1}_A.$$

En prenant B fermé de E , définissons

$$f_n(x) = \max(0, 1 - nd_E(x, B)),$$

c'est une suite de fonctions continues qui converge simplement vers $\mathbf{1}_B$.

$\mathcal{D}_{t-}(E)$ est engendrée par les fonctions caractéristiques $\mathbf{1}_A$ des ensembles cylindriques

$$A = \{\alpha \in D([0, +\infty); E) : \alpha(s_1) \in B_1, \dots, \alpha(s_k) \in B_k\}$$

où B_1, \dots, B_k sont des fermés de E .

Du coup on a bien les suites de fonctions continues bornées $\theta_n^1, \dots, \theta_n^k : E \rightarrow \mathbb{R}$ qui convergent simplement vers $\mathbf{1}_{B_1}, \dots, \mathbf{1}_{B_k}$. Or

$$\theta_{\#s}^\varepsilon : \alpha \in D([0, +\infty); E) \mapsto \frac{1}{\varepsilon} \int_s^{t \wedge (s+\varepsilon)} \theta(\alpha(\sigma)) d\sigma$$

et

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_s^{t \wedge (s+\varepsilon)} \theta(\alpha(\sigma)) d\sigma = \frac{1}{\varepsilon} \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{k-1} (s_{i+1} - s_i) \theta(\alpha(s_i))$$

où

$$s = s_0 < s_1 < \dots < s_k = t \wedge (s + \varepsilon).$$

Pour montrer que $\theta_{\#s}^\varepsilon$ est $\mathcal{D}_{t-}(E)$ -mesurable, il suffit de montrer que

$$\alpha \in D([0, +\infty); E) \mapsto \theta(\alpha(s_i))$$

est $\mathcal{D}_{t-}(E)$ -mesurable.

C'est bien le cas car si on prend un fermé F de \mathbb{R} alors $\theta^{-1}(F)$ est un fermé de E et

$$\{\alpha : \theta(\alpha(s_i)) \in F\} = \{\alpha : \alpha(s_i) \in \theta^{-1}(F)\} = \Phi_{s_i}^{-1}(\theta^{-1}(F)) \in \mathcal{D}_{t-}(E).$$

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_A(\alpha) = 1 &\Leftrightarrow \alpha(s_1) \in B_1, \dots, \alpha(s_k) \in B_k \Leftrightarrow \mathbf{1}_{B_1}(\alpha(s_1)) \times \dots \times \mathbf{1}_{B_k}(\alpha(s_k)) = 1 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{1}_{B_1} \circ \phi_{s_1}(\alpha) \times \dots \times \mathbf{1}_{B_k} \circ \phi_{s_k}(\alpha) = 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{B_1} \circ \phi_{s_1}(\alpha) \times \dots \times \mathbf{1}_{B_k} \circ \phi_{s_k}(\alpha) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n^1 \circ \phi_{s_1}(\alpha) \times \dots \times \theta_n^k \circ \phi_{s_k}(\alpha) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_{n, \#s_1}^1(\alpha) \times \dots \times \theta_{n, \#s_k}^k(\alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \theta_{n, \#s_1}^{1, \varepsilon}(\alpha) \times \dots \times \theta_{n, \#s_k}^{k, \varepsilon}(\alpha) \end{aligned}$$

montrent que les $\theta_{n, \#s_1}^{1, \varepsilon} \times \dots \times \theta_{n, \#s_k}^{k, \varepsilon}$ engendrent $\mathcal{D}_{t-}(E)$. D'où la conclusion de la proposition 40.

Rappelons qu'on a déjà prouvé que \tilde{f} est une fonction cinétique sur $\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}$ telle que $\tilde{\mathbb{P}}\text{-ps}, t \mapsto \langle \tilde{f}(t), \varphi_j \rangle$ est càdlàg, autrement dit

$$\tilde{\mathbb{P}}\text{ ps}, \langle \tilde{f}, \varphi_j \rangle \in D[0, T]$$

donc

$$\tilde{\mathbb{P}}\text{ ps}, \{\tilde{f}\} = \left(\langle \tilde{f}, \varphi_j \rangle \right)_{j \in \mathbb{N}} \in (D([0, T]; \mathbb{R}))^{\mathbb{N}} = \prod_{j \in \mathbb{N}} (D[0, T])_j = D([0, T], \mathbb{R}^{\infty}).$$

Remarques importantes :

Si on muni les espaces produits \mathbb{R}^{∞} et $(C([0, T]; \mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ de la topologie de la convergence simple, $C([0, T]; \mathbb{R})$ et $C([0, T], \mathbb{R}^{\infty})$ de la topologie uniforme, alors la topologie de $(C([0, T]; \mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ est équivalente à la topologie de $C([0, T], \mathbb{R}^{\infty})$.

Si on muni les espaces produits \mathbb{R}^{∞} et $(D([0, T]; \mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ de la topologie de la convergence simple, $D([0, T]; \mathbb{R})$ et $D([0, T], \mathbb{R}^{\infty})$ de la topologie de Skorokhod, alors la topologie de $D([0, T], \mathbb{R}^{\infty})$ est plus fine que la topologie de $(D([0, T]; \mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$. Ces topologies ne sont pas équivalentes (cf remarque 1.21 p329 Jacod Shiryaev [JS13])

Il est à noter aussi que la topologie de $D([0, T], E)$ est plus fine que celle de $D([0, T], \mathbb{R}^{\infty}) \times D([0, T], \mathbb{R}^{\infty}) \times D([0, T], \mathfrak{U})$.

Dans (2.109) on choisit $\mathcal{D}_t(E)$ car $(\mathcal{D}_t(E))$ est continue à droite, donc il en va de même pour $\tilde{F}(t)$. En effet, l'image réciproque d'une filtration continue à droite par une application mesurable est une filtration continue à droite.

Prenons par exemple l'application

$$\{\tilde{f}\} : \tilde{\Omega} \rightarrow D([0, T]; \mathbb{R}^{\infty}),$$

et la filtration continue à droite

$$\mathcal{D}_t(\mathbb{R}^\infty) = \bigcap_{r>t} \mathcal{D}_r^0(\mathbb{R}^\infty)$$

pour $t \in [0, T]$, alors

$$\begin{aligned} \bigcap_{s>t} \{\tilde{f}\}^{-1}(\mathcal{D}_s(\mathbb{R}^\infty)) &= \bigcap_{s>t} \{\tilde{f}\}^{-1} \left(\bigcap_{r>s} \mathcal{D}_r^0(\mathbb{R}^\infty) \right) \\ &= \{\tilde{f}\}^{-1} \left(\bigcap_{r>t} \mathcal{D}_r^0(\mathbb{R}^\infty) \right) = \{\tilde{f}\}^{-1}(\mathcal{D}_t(\mathbb{R}^\infty)). \end{aligned}$$

La démonstration est identique pour l'application

$$(\{\tilde{f}\}, \{\tilde{M}\}, \{\tilde{W}\}) : \tilde{\Omega} \rightarrow D([0, T]; E).$$

L'intérêt de travailler avec $D([0, T]; E)$ et non pas $D([0, T]; \mathbb{R}^\infty) \times D([0, T]; \mathbb{R}^\infty) \times D([0, T]; \mathfrak{U})$ est justement d'avoir une seule filtration continue à droite puis son image réciproque.

On aurait pu travailler avec

$$D([0, T]; \mathbb{R}^\infty) \times D([0, T]; \mathbb{R}^\infty) \times D([0, T]; \mathfrak{U})$$

et la filtration

$$\tilde{\mathcal{F}}_t = \sigma \left(\{\tilde{f}\}^{-1}(\mathcal{D}_t(\mathbb{R}^\infty)) \cup \{\tilde{M}\}^{-1}(\mathcal{D}_t(\mathbb{R}^\infty)) \cup \{\tilde{W}\}^{-1}(\mathcal{D}_t(\mathfrak{U})) \right) \quad \forall t \in [0, T]$$

que l'on peut rendre complète et continue à droite en prenant l'intersection des $s > t$ et à laquelle on rajoute les événements de probabilités $\tilde{\mathbb{P}}$ nulles.

Step 2 (et la construction du processus de Wiener \tilde{W} sur $\tilde{\Omega}$) :

Rappelons que le processus de Wiener cylindrique de covariance Id_H

$$W(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k(t) e_k$$

n'est pas un processus de Wiener sur H , mais sur \mathfrak{U} (espace de Hilbert séparable quelconque) grâce à l'injection (linéaire) de Hilbert-Schmidt

$$j : H \rightarrow \mathfrak{U}.$$

C'est en fait le processus de Wiener sur \mathfrak{U}

$$W(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k(t) j(e_k)$$

de covariance $j \circ j^*$ (où j^* est l'adjoint de l'opérateur j). Par définition d'un processus de Wiener, on a

$$\mathbb{P}_W(g_0^{-1}(\{0\})) = 1$$

où g_0 est l'application linéaire continue

$$g_0 : f \in C([0, T], \mathfrak{U}) \mapsto f(0).$$

Si $0 \leq s \leq t \leq T$ alors

$$\mathbb{P}_W \circ g_{s,t}^{-1} = \mathcal{N}(0, (t-s)j \circ j^*)$$

où $g_{s,t}$ est l'application linéaire continue

$$g_{s,t} : f \in C([0, T], \mathfrak{U}) \mapsto f(t) - f(s).$$

Si $n \in \mathbb{N}$, et $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq T$ alors $\forall (A_1, \dots, A_n) \in (\mathcal{B}(\mathfrak{U}))^n$,

$$\mathbb{P}_W \left(\bigcap_{i=1}^N g_{t_{i-1}, t_i}^{-1}(A_i) \right) = \prod_{i=1}^N \mathbb{P}_W(g_{t_{i-1}, t_i}^{-1}(A_i)).$$

Le processus \tilde{W} est défini sur $\tilde{\Omega}$, il est à valeurs dans l'espace $C([0, T], \mathfrak{U})$ comme W , et a même loi que W .

Il vérifie les propriétés précédentes qui en font un processus de Wiener de covariance $j \circ j^*$. Une injection possible $j : H \rightarrow \mathfrak{U}$ est la suivante :

$$j : \begin{cases} H \rightarrow H \\ x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \langle x, e_k \rangle e_k \end{cases}$$

(j'ai pris $\mathfrak{U} = H$). Ainsi

$$W(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \beta_k(t) e_k.$$

Les e_k sont des vecteurs propres de $j \circ j^*$ associés aux valeurs propres $\frac{1}{k^2}$, donc d'après le théorème de représentation des processus de Wiener (cf Röckner [PR07] p13) il existe des mouvements Browniens $(\tilde{\beta}_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ indépendants tels

que

$$\tilde{W}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \tilde{\beta}_k(t) e_k,$$

ça fait de \tilde{W} un processus de Wiener cylindrique sur H qu'on peut noter

$$\tilde{W}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{\beta}_k(t) e_k.$$

La filtration $(\tilde{\mathcal{F}}(t))_{t \in [0, T]}$ a été construite pour que \tilde{W} soit adapté à cette filtration. Il en va de même pour $k < \tilde{W}(t)$, $e_k \in \tilde{\beta}_k(t)$.

Montrons enfin que \tilde{W} est une martingale sur $(\tilde{\mathcal{F}}(t))_{t \in [0, T]}$ en utilisant la démarche expliquée dans le step 3 un peu plus loin.

\tilde{W} et W ont même loi sur $C([0, T], \mathfrak{U})$ donc $\tilde{W}(t_2) - \tilde{W}(t_1)$ et $W(t_2) - W(t_1)$ ont même loi sur \mathfrak{U} donc

$$\tilde{\mathbb{E}}(|\tilde{W}(t_2) - \tilde{W}(t_1)|_{\mathfrak{U}}) = E(|W(t_2) - W(t_1)|_{\mathfrak{U}}) < +\infty.$$

Ensuite, on peut dire aussi que $\tilde{\mathbb{P}}$ -presque sûrement

$$\begin{aligned} (\{\tilde{M}^n\}, \tilde{W}) &\rightarrow (\{\tilde{M}\}, \tilde{W}) \text{ dans } C([0, T], \mathbb{R}^\infty) \times C([0, T], \mathfrak{U}) \\ &= C([0, T], \mathbb{R}^\infty \times \mathfrak{U}) \subset D([0, T], \mathbb{R}^\infty \times \mathfrak{U}) \subset D(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^\infty \times \mathfrak{U}). \end{aligned}$$

La dernière inclusion a lieu de la manière suivante :

Si $g \in D([0, T], \mathbb{R}^\infty \times \mathfrak{U})$ alors on peut définir $g(t) = g(T) \forall t > T$ pour que $g \in D(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^\infty \times \mathfrak{U})$. Ainsi

$$(\{M^n\}, \tilde{W}) \rightarrow (\{M\}, \tilde{W})$$

converge $\tilde{\mathbb{P}}$ -presque sûrement et pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^\infty \times \mathfrak{U}$.

En utilisant le résultat de la proposition 39 et le même ensemble dénombrable $\tilde{B} \subset [0, T]$, on a $\tilde{\mathbb{P}}$ -presque sûrement, pour presque tout $t \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $\varphi \in \Gamma$,

$$(\langle \tilde{f}^n, \varphi \rangle(t), \tilde{M}_\varphi^n(t), \tilde{W}(t)) \rightarrow (\langle \tilde{f}, \varphi \rangle(t), \tilde{M}_\varphi(t), \tilde{W}(t))$$

et donc $\tilde{\mathbb{P}}$ -presque sûrement

$$H_I^m(\{\tilde{f}^n\}, \{\tilde{M}^n\}, \{\tilde{W}\}) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} H_I^m(\{\tilde{f}\}, \{\tilde{M}\}, \{\tilde{W}\}),$$

donc par le théorème de convergence dominée

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}} \left(H_I^m \left(\{\tilde{f}^n\}, \{\tilde{M}^n\}, \{\tilde{W}\} \right) \left(\tilde{W}(t_2) - \tilde{W}(t_1) \right) \right) \\ \rightarrow \tilde{\mathbb{E}} \left(H_I^m \left(\{\tilde{f}\}, \{\tilde{M}\}, \{\tilde{W}\} \right) \left(\tilde{W}(t_2) - \tilde{W}(t_1) \right) \right). \end{aligned}$$

Par l'identité des lois

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}} \left(H_I^m \left(\{\tilde{f}^n\}, \{\tilde{M}^n\}, \{\tilde{W}\} \right) \left(\tilde{W}(t_2) - \tilde{W}(t_1) \right) \right) \\ = \mathbb{E} \left(H_I^m \left(\{f^n\}, \{M^n\}, \{W\} \right) \left(W(t_2) - W(t_1) \right) \right). \end{aligned}$$

Ce dernier terme est bien égal à 0 car W est une \mathcal{F}_t -martingale.

Notons que le résultat précédent est vrai car la tribu borélienne de $D(\mathbb{R}^+, E)$ est la tribu terminale

$$\bigvee_{s \in \mathbb{R}^+} \mathcal{D}_s.$$

On a donc

$$\tilde{\mathbb{E}} \left(H_I^m \left(\{\tilde{f}\}, \{\tilde{M}\}, \{\tilde{W}\} \right) \left(\tilde{W}(t_2) - \tilde{W}(t_1) \right) \right) = 0$$

donc \tilde{W} est une $\tilde{\mathcal{F}}_t$ -martingale.

Step 3 :

Dans la proposition 44, $\tilde{h}_{j,k}(t)$ peut aussi s'écrire

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{j,k}(t) &= \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi_j(x, \xi) (\Phi(x, \xi) e_k) \tilde{\nu}_{\tilde{\omega}, x, t}(d\xi) dx \\ &= \left(\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi_j(x, \xi) \Phi(x, \xi) \tilde{\nu}_{\tilde{\omega}, x, t}(d\xi) dx \right) e_k \end{aligned}$$

car $\tilde{\mathbb{P}}$ -ps

$$\tilde{h}_j(t) = \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi_j(x, \xi) \Phi(x, \xi) \tilde{\nu}_{\tilde{\omega}, x, t}(d\xi) dx \in L_2(H, \mathbb{R})$$

grâce à l'item 8 qui est déjà prouvé.

On a aussi

$$\begin{aligned} \|\tilde{h}_j(t)\|_{l^2(\mathbb{N}^*)}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tilde{h}_{j,k}(t) \right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi_j(x, \xi) \Phi(x, \xi) \tilde{\nu}_{\tilde{\omega}, x, t}(d\xi) dx \right) e_k \right)^2 = \|\tilde{h}_j(t)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2, \end{aligned}$$

tout dépend de quelle écriture on choisit.

La proposition 44 a pour but d'être d'utiliser la proposition 32 que l'on pourrait appeler « théorème de représentation d'une martingale sous forme d'intégrale d'Itô » et de prouver que $\tilde{M}_{\varphi_j} = M_{\varphi_j}^* \forall j$. Elle démontre aussi que

$$\forall j, \tilde{M}_{\varphi_j}^n \rightarrow \tilde{M}_{\varphi_j} \quad \tilde{\mathbb{P}} - \text{ps dans } C([0, T], \mathbb{R}).$$

Etudions en détail la preuve de la proposition 44.

Soit $H : D(\mathbb{R}^+, E) \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_{t_1-}(E)$ -mesurable et bornée. Rappelons que $\mathcal{D}_{t_1-}(E)$ est engendré par les fonctions

$$\theta_{\#s_1}^{1, \varepsilon_1} \times \dots \times \theta_{\#s_k}^{k, \varepsilon_k} : D(\mathbb{R}^+, E) \rightarrow \mathbb{R}$$

qui sont continues lorsque $D(\mathbb{R}^+, E)$ est muni de la topologie de Skorokhod, et vérifient lorsque $\alpha_n(t) \rightarrow \alpha(t)$ dans E pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$\theta_{\#s_1}^{1, \varepsilon_1} \times \dots \times \theta_{\#s_k}^{k, \varepsilon_k}(\alpha_n) \rightarrow \theta_{\#s_1}^{1, \varepsilon_1} \times \dots \times \theta_{\#s_k}^{k, \varepsilon_k}(\alpha).$$

Le premier point de la démonstration est la preuve du fait que \tilde{M}_j est une $\tilde{\mathcal{F}}_t$ -martingale. Il faut donc prouver que

$$\tilde{\mathbb{E}}(\tilde{M}_j(t) | \tilde{\mathcal{F}}_s) = \tilde{M}_j(s), \quad \forall 0 \leq s < t$$

par exemple en démontrant que $\forall A \in \tilde{\mathcal{F}}_s$ et $\forall 0 \leq s < t$,

$$\tilde{\mathbb{E}}(\mathbf{1}_A(\tilde{\omega}) \tilde{M}_j(\tilde{\omega})(t)) = \tilde{\mathbb{E}}(\mathbf{1}_A(\tilde{\omega}) \tilde{M}_j(\tilde{\omega})(s)).$$

Or

$$\tilde{\mathcal{F}}_s = \sigma\left(\left(\{\tilde{f}\}, \{\tilde{M}\}, \{\tilde{W}\}\right)^{-1}(\mathcal{D}_s(E)) \cup \{N \in \tilde{\mathcal{F}} : \tilde{\mathbb{P}}(N) = 0\}\right)$$

donc $\forall 0 \leq s < t$,

$$\tilde{\mathcal{F}}_s \subset \sigma\left(\left(\{\tilde{f}\}, \{\tilde{M}\}, \{\tilde{W}\}\right)^{-1}(\mathcal{D}_{t-}(E)) \cup \{N \in \tilde{\mathcal{F}} : \tilde{\mathbb{P}}(N) = 0\}\right) \subset \tilde{\mathcal{F}}_t,$$

donc si on prouve que $\forall 0 \leq r < t$,

$$\begin{aligned} \forall A \in \sigma\left(\left(\{\tilde{f}\}, \{\tilde{M}\}, \{\tilde{W}\}\right)^{-1}(\mathcal{D}_{r-}(E)) \cup \{N \in \tilde{\mathcal{F}} : \tilde{\mathbb{P}}(N) = 0\}\right), \\ \tilde{\mathbb{E}}(\mathbf{1}_A(\tilde{\omega}) \tilde{M}_j(\tilde{\omega})(t)) = \tilde{\mathbb{E}}(\mathbf{1}_A(\tilde{\omega}) \tilde{M}_j(\tilde{\omega})(s)) \end{aligned}$$

alors on aura $\forall A \in \tilde{\mathcal{F}}_s$:

$$\tilde{\mathbb{E}}(\mathbf{1}_A(\tilde{\omega}) \tilde{M}_j(\tilde{\omega})(t)) = \tilde{\mathbb{E}}(\mathbf{1}_A(\tilde{\omega}) \tilde{M}_j(\tilde{\omega})(s)) \quad \forall 0 \leq s < r$$

donc aussi $\forall A \in \tilde{\mathcal{F}}_s$:

$$\tilde{\mathbb{E}}(\mathbf{1}_A(\tilde{\omega}) \tilde{M}_j(\tilde{\omega})(t)) = \tilde{\mathbb{E}}(\mathbf{1}_A(\tilde{\omega}) \tilde{M}_j(\tilde{\omega})(s)) \quad \forall 0 \leq s < t.$$

Or,

$$\begin{aligned} & \sigma\left(\left(\{\tilde{f}\}, \{\tilde{M}\}, \{\tilde{W}\}\right)^{-1}(\mathcal{D}_{s-}(E)) \cup \{N \in \tilde{\mathcal{F}} : \tilde{\mathbb{P}}(N) = 0\}\right) \\ &= \sigma\left(\left(\{\tilde{f}\}, \{\tilde{M}\}, \{\tilde{W}\}\right)^{-1}\left(\bigcap_{i \in I \text{ fini}} \left(\theta_{i, \#s_{i,1}}^{1, \varepsilon_{i,1}} \times \dots \times \theta_{i, \#s_{i,k}}^{k, \varepsilon_{i,k}}\right)^{-1}(B_i)\right) : \right. \\ & \quad \left. B_i \text{ fermé de } \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}^*, 0 \leq s_{i,1} < \dots < s_{i,k} < s, \theta_i^1, \dots, \theta_i^k \in C_b(E), \right. \\ & \quad \left. 0 < \varepsilon_{i,1}, \dots, \varepsilon_{i,k}\right) \cup \{N \in \tilde{\mathcal{F}} : \tilde{\mathbb{P}}(N) = 0\}, \end{aligned}$$

et l'ensemble des générateurs de cette tribu forme un π -système donc il suffit de prouver

$$\tilde{\mathbb{E}}(\mathbf{1}_A(\tilde{\omega}) \tilde{M}_j(\tilde{\omega})(t)) = \tilde{\mathbb{E}}(\mathbf{1}_A(\tilde{\omega}) \tilde{M}_j(\tilde{\omega})(s)), \quad \forall 0 \leq s < t$$

pour un

$$A \subset \left\{ \left(\{\tilde{f}\}, \{\tilde{M}\}, \{\tilde{W}\}\right)^{-1}\left(\bigcap_{i \in I \text{ fini}} H_i^{-1}(B_i)\right) : B_i \text{ fermé de } \mathbb{R}, H_i \right\}$$

(en ayant noté $H_i = \theta_{i, \#s_{i,1}}^{1, \varepsilon_{i,1}} \times \dots \times \theta_{i, \#s_{i,k}}^{k, \varepsilon_{i,k}}$).
De tels $\mathbf{1}_A$ s'écrivent

$$\mathbf{1}_A = \left(\prod_{i \in I \text{ fini}} \mathbf{1}_{B_i} \circ H_i \circ \left(\{\tilde{f}\}, \{\tilde{M}\}, \{\tilde{W}\}\right) \right).$$

Or $\mathbf{1}_{B_i}(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} f_i^m(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ où les f_i^m sont continues et uniformément bornées, donc si on a

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbb{E}}\left(H_I^m \circ \left(\{\tilde{f}\}, \{\tilde{M}\}, \{\tilde{W}\}\right)(\tilde{\omega}) M_j(\tilde{\omega})(t)\right) \\ &= \tilde{\mathbb{E}}\left(H_I^m \circ \left(\{\tilde{f}\}, \{\tilde{M}\}, \{\tilde{W}\}\right)(\tilde{\omega}) M_j(\tilde{\omega})(s)\right), \quad \forall 0 \leq s < t \end{aligned}$$

avec

$$\left(\prod_{i \in I \text{ fini}} f_i^m \circ H_i \circ \left(\{\tilde{f}\}, \{\tilde{M}\}, \{\tilde{W}\}\right) \right) = H_I^m \circ \left(\{\tilde{f}\}, \{\tilde{M}\}, \{\tilde{W}\}\right),$$

on aura aussi

$$\tilde{\mathbb{E}} \left(\mathbf{1}_A(\tilde{\omega}) \tilde{M}_j(\tilde{\omega})(t) \right) = \tilde{\mathbb{E}} \left(\mathbf{1}_A(\tilde{\omega}) \tilde{M}_j(\tilde{\omega})(s) \right), \forall 0 \leq s < t.$$

De tels $H_i : D(\mathbb{R}^+, E) \rightarrow \mathbb{R}$ sont continus lorsque $D(\mathbb{R}^+, E)$ est muni de la topologie de Skorokhod, et vérifient lorsque $\alpha_n(t) \rightarrow \alpha(t)$ dans E pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$H_i(\alpha_n) \rightarrow H_i(\alpha).$$

\tilde{M}^n et M^n ont même loi sur

$$C([0, T], \mathbb{R}^\infty) = \prod_{i \in \Gamma} C([0, T], \mathbb{R}_i)$$

donc $\tilde{M}_{\varphi_j}^n = p_j \circ \tilde{M}^n$ et $M_{\varphi_j}^n = p_j \circ M^n$ aussi (p_j étant la $j^{\text{ème}}$ projection de $\prod_{i \in \Gamma} C([0, T], \mathbb{R}_i)$ sur $C([0, T], \mathbb{R}_j)$) donc $\tilde{M}_{\varphi_j}^n(t_2) - \tilde{M}_{\varphi_j}^n(t_1)$ et $M_{\varphi_j}^n(t_2) - M_{\varphi_j}^n(t_1)$ ont même loi sur \mathbb{R}_j donc

$$\mathbb{E} \left(|M_{\varphi}^n(t_2) - M_{\varphi}^n(t_1)|^2 \right) = \tilde{\mathbb{E}} \left(|\tilde{M}_{\varphi}^n(t_2) - \tilde{M}_{\varphi}^n(t_1)|^2 \right).$$

(2.90) dit que $\forall p > 2$,

$$\mathbb{E} \left(|M_{\varphi}^n(t_2) - M_{\varphi}^n(t_1)|^p \right) \leq C_{BDG}(p) \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})}^p (D_0(1 + C_2))^{\frac{p}{2}} |t_2 - t_1|^{\frac{p}{2}};$$

comme $p \mapsto C_{BDG}(p)$ peut être prise croissante dans l'inégalité de Burkholder, Davis, Gundy (cf Peskir 1996 [Pes96]), en faisant tendre p vers 2, on a

$$\mathbb{E} \left(|M_{\varphi}^n(t_2) - M_{\varphi}^n(t_1)|^2 \right) \leq C_{ste} < +\infty$$

et la constante ne dépend pas de n , donc

$$\tilde{\mathbb{E}} \left(\left(H_I^m(\{\tilde{f}^n\}, \{\tilde{M}^n\}, \{\tilde{W}\}) |\tilde{M}_{\varphi}^n(t_2) - \tilde{M}_{\varphi}^n(t_1)| \right)^2 \right) \leq C_{ste} < +\infty$$

et la constante ne dépend pas de n , donc la suite

$$\left(H_I^m(\{\tilde{f}^n\}, \{\tilde{M}^n\}, \{\tilde{W}\}) |\tilde{M}_{\varphi}^n(t_2) - \varphi M_{\varphi}^n(t_1)| \right)_n$$

est uniformément intégrable.

Ensuite, on peut dire aussi que $\tilde{\mathbb{P}}$ -presque sûrement,

$$\begin{aligned} (\{\tilde{M}^n\}, \tilde{W}) &\rightarrow (\{\tilde{M}\}, \tilde{W}) \text{ dans } C([0, T], \mathbb{R}^\infty) \times C([0, T], \mathfrak{U}) \\ &= C([0, T], \mathbb{R}^\infty \times \mathfrak{U}) \subset D([0, T], \mathbb{R}^\infty \times \mathfrak{U}) \subset D(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^\infty \times \mathfrak{U}). \end{aligned}$$

La dernière inclusion a lieu de la manière suivante :

Si $g \in D([0, T], \mathbb{R}^\infty \times \mathfrak{U})$ alors on peut définir $g(t) = g(T) \forall t > T$ pour que $g \in D(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^\infty \times \mathfrak{U})$. Ainsi

$$(\{\tilde{M}^n\}, \tilde{W}) \rightarrow (\{\tilde{M}\}, \tilde{W})$$

converge $\tilde{\mathbb{P}}$ -presque sûrement et pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^\infty \times \mathfrak{U}$.

En utilisant le résultat de la proposition 39 et le même ensemble dénombrable $\tilde{B} \subset [0, T]$, on a $\tilde{\mathbb{P}}$ -presque sûrement, pour presque tout $t \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $\varphi \in \Gamma$,

$$(\langle \tilde{f}^n, \varphi \rangle(t), \tilde{M}_\varphi^n(t), \tilde{W}(t)) \rightarrow (\langle \tilde{f}, \varphi \rangle(t), \tilde{M}_\varphi(t), \tilde{W}(t)),$$

et donc $\tilde{\mathbb{P}}$ -presque sûrement

$$H_I^m(\{\tilde{f}^n\}, \{\tilde{M}^n\}, \{\tilde{W}\}) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} H_I^m(\{\tilde{f}\}, \{\tilde{M}\}, \{\tilde{W}\}).$$

Comme on a $\tilde{\mathbb{P}}$ -presque sûrement

$$\tilde{M}^n \rightarrow \tilde{M} \text{ dans } C([0, T], \mathbb{R}^\infty) = \prod_{i \in \Gamma} C([0, T], \mathbb{R}_i),$$

cela veut dire que $\tilde{\mathbb{P}}$ -presque sûrement, $\forall j \in \Gamma$,

$$\tilde{M}_{\varphi_j}^n \rightarrow \tilde{M}_{\varphi_j}, \text{ dans } C([0, T], \mathbb{R})$$

donc $\tilde{\mathbb{P}}$ -presque sûrement, $\forall t_1, t_2 \in [0, T]$ et $\forall j \in \Gamma$,

$$\tilde{M}_{\varphi_j}^n(t_2) - \tilde{M}_{\varphi_j}^n(t_1) \rightarrow \tilde{M}_{\varphi_j}(t_2) - \tilde{M}_{\varphi_j}(t_1);$$

donc par le théorème de convergence de Vitali

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathbb{E}} \left(H_I^m(\{\tilde{f}^n\}, \{\tilde{M}^n\}, \{\tilde{W}\}) (\tilde{M}_{\varphi}^n(t_2) - \tilde{M}_{\varphi}^n(t_1)) \right) \\ &\rightarrow \tilde{\mathbb{E}} \left(H_I^m(\{\tilde{f}\}, \{\tilde{M}\}, \{\tilde{W}\}) (\tilde{M}_{\varphi_j}(t_2) - \tilde{M}_{\varphi_j}(t_1)) \right). \end{aligned}$$

Par l'identité des lois

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbb{E}} \left(H_I^m (\{\tilde{f}^n\}, \{\tilde{M}^n\}, \{\tilde{W}\}) (\tilde{M}_\varphi^n(t_2) - \tilde{M}_\varphi^n(t_1)) \right) \\ &= \mathbb{E} \left(H_I^m (\{f^n\}, \{M^n\}, \{W\}) (M_\varphi^n(t_2) - M_\varphi^n(t_1)) \right). \end{aligned}$$

Ce dernier terme est bien égal à 0 car M_φ^n est une \mathcal{F}_t -martingale. Notons que le résultat précédent est vrai car la tribu borélienne sur $D(\mathbb{R}^+, E)$ est la tribu terminale

$$\bigvee_{s \in \mathbb{R}^+} \mathcal{D}_s.$$

On a donc

$$\tilde{\mathbb{E}} \left(H_I^m (\{\tilde{f}\}, \{\tilde{M}\}, \{\tilde{W}\}) (\tilde{M}_{\varphi_j}(t_2) - \tilde{M}_{\varphi_j}(t_1)) \right) = 0,$$

donc $\forall j \in \Gamma$, \tilde{M}_{φ_j} est une $\tilde{\mathcal{F}}_t$ -martingale.

Montrons que

$$\tilde{\mathbb{E}} \left(|\tilde{Y}_{j,k}^n(t_2) - \tilde{Y}_{j,k}^n(t_1)|^2 \right) \leq Cste.$$

Tout d'abord, notons

$$Y_{j,k}^n(t) = M_j^n(t) \beta_k(t) - H_{j,k}^n(t) = M_j^n(t) \beta_k(t) - \ll M_j^n, \beta_k \gg_t$$

avec

$$H_{j,k}^n(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} g_k(x, \xi) \varphi_j(x, \xi) d\nu_{x,s}^n(\xi) dx ds$$

et

$$M_j^n(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) \nu_{\omega, x, s}(d\xi) dx dW(s).$$

Comme \tilde{Z}^n a même loi que Z^n alors $\tilde{Y}_{j,k}^n$ a même loi que $Y_{j,k}^n$ donc

$$\tilde{\mathbb{E}} \left(|\tilde{Y}_{j,k}^n(t_2) - \tilde{Y}_{j,k}^n(t_1)|^2 \right) = \mathbb{E} \left(|Y_{j,k}^n(t_2) - Y_{j,k}^n(t_1)|^2 \right).$$

De plus pour $t \in [t_1, T]$,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(|Y_{j,k}^n(t) - Y_{j,k}^n(t_1)|^2 \right) \\
& \leq 2 \left(\mathbb{E} \left(|M_j^n(t) \beta_k(t) - M_j^n(t_1) \beta_k(t_1)|^2 \right) + \mathbb{E} \left(|H_{j,k}^n(t) - H_{j,k}^n(t_1)|^2 \right) \right) \\
& \leq 4 \left(\mathbb{E} \left(|M_j^n(t) \beta_k(t) - M_j^n(t_1) \beta_k(t)|^2 \right) + \mathbb{E} \left(|M_j^n(t_1) \beta_k(t) - M_j^n(t_1) \beta_k(t_1)|^2 \right) \right) \\
& \quad + 2(t-t_1) \mathbb{E} \left(\int_{t_1}^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} g_k^2(x, \xi) \varphi_j^2(x, \xi) d\nu_{x,s}^n(\xi) dx ds \right) \\
& \leq 4 \left(\mathbb{E} \left(|M_j^n(t) - M_j^n(t_1)|^2 |\beta_k(t)|^2 \right) + \mathbb{E} \left(M_j^n(t_1) \right)^2 \mathbb{E} \left(|\beta_k(t) - \beta_k(t_1)|^2 \right) \right) \\
& \quad + 2(t-t_1)^2 \|\varphi_j^2\|_\infty \left(D_0 \sup_{\xi \in \text{supp}(\varphi)} (1 + \xi^2) \right) \\
& \leq 4 \left(\mathbb{E} \left(|M_j^n(t) - M_j^n(t_1)|^4 \right)^{\frac{1}{2}} \mathbb{E} \left(|\beta_k(t)|^4 \right)^{\frac{1}{2}} + \mathbb{E} \left(M_j^n(t_1) \right)^2 (t-t_1)^2 \right) \\
& \quad + 2(t-t_1)^2 \|\varphi_j^2\|_\infty \left(D_0 \sup_{\xi \in \text{supp}(\varphi)} (1 + \xi^2) \right) \leq Cste
\end{aligned}$$

d'après (2.90), avec la $Cste$ qui ne dépend pas de n . D'où comme annoncé,

$$\tilde{\mathbb{E}} \left(|\tilde{Y}_{j,k}^n(t_2) - \tilde{Y}_{j,k}^n(t_1)|^2 \right) \leq Cste.$$

Appelons

$$V^n(t) = |M_j^n(t)|^2 - \mathcal{H}_j^n(t),$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_j^n(t) &= \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} g_k(x, \xi) \varphi_j(x, \xi) d\nu_{x,s}^n(\xi) dx \right)^2 ds \\
&= \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi_j(x, \xi) \Phi(x, \xi) e_k d\nu_{x,s}^n(\xi) dx \right)^2 ds \\
&= \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi_j(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x,s}^n(\xi) dx e_k \right)^2 ds \\
&= \int_0^t \left\| \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi_j(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x,s}^n(\xi) dx \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds = \ll M_j^n \gg_t.
\end{aligned}$$

$\ll M_j^n \gg_t$ est le processus continu croissant \mathcal{F}_t -adapté tel que

$$V^n(t) = |M_j^n(t)|^2 - \ll M_j^n \gg_t$$

soit une martingale locale. Ce processus est une martingale continue (cf propo-

sition 2.74). Comme \tilde{Z}^n a même loi que Z^n alors

$$\begin{aligned}
& \tilde{\mathbb{E}} \left(|\tilde{V}^n(t_2) - \tilde{V}^n(t_1)|^2 \right) \\
&= \tilde{\mathbb{E}} \left(\left| |\tilde{M}_j^n(t_2)|^2 - \tilde{\mathcal{H}}_j^n(t_2) - \left(|\tilde{M}_j^n(t_1)|^2 - \tilde{\mathcal{H}}_j^n(t_1) \right) \right|^2 \right) \\
&\leq 2\tilde{\mathbb{E}} \left(\left| |\tilde{M}_j^n(t_2)|^2 - |\tilde{M}_j^n(t_1)|^2 \right|^2 \right) + 2\tilde{\mathbb{E}} \left(\left| \tilde{\mathcal{H}}_j^n(t_1) - \tilde{\mathcal{H}}_j^n(t_2) \right|^2 \right) \\
&\leq 4\tilde{\mathbb{E}} \left(|\tilde{M}_j^n(t_2)|^4 \right) + 4\tilde{\mathbb{E}} \left(|\tilde{M}_j^n(t_1)|^4 \right) \\
&+ 2(t_2 - t_1) \tilde{\mathbb{E}} \left(\int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \|\varphi_j(x, \xi) \Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^4 d\nu_{x,s}^n(\xi) dx ds \right) \\
&= 4\mathbb{E} \left(|M_j^n(t_2)|^4 \right) + 4\mathbb{E} \left(|M_j^n(t_1)|^4 \right) \\
&+ 2(t_2 - t_1) \mathbb{E} \left(\int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \|\varphi_j(x, \xi) \Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^4 d\nu_{x,s}^n(\xi) dx ds \right) \leq Cste
\end{aligned}$$

où $Cste$ ne dépend pas de n (grâce à (2.90) et (2.3)), comme annoncé dans l'article.

Le lemme 45 peut se réécrire ainsi :

Soit $T > 0$, $\forall j \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\tilde{\mathbb{P}}$ -ps,

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \left| \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} g_k(x, \xi) \varphi_j(x, \xi) d\tilde{\nu}_{x,t}^n(\xi) dx \right. \\
& \quad \left. - \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} g_k(x, \xi) \varphi_j(x, \xi) d\nu_{x,t}(\xi) dx \right| dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \left\| \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi_j(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\tilde{\nu}_{x,s}^n(\xi) dx \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \\
& \quad - \left\| \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi_j(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x,t}(\xi) dx \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \Big| dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.
\end{aligned}$$

Comme on a

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\nu_{\omega, x, t}^n(\xi) dx dt \right) \leq TC_p$$

avec C_p indépendant de n , comme

$$\omega \in \Omega \mapsto dx dt \cdot \nu_{\omega, x, t}^n$$

a la même loi que

$$\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} \mapsto dxdt.\tilde{\nu}_{\tilde{\omega},x,t}^n,$$

on a aussi

$$\tilde{\mathbb{E}} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\tilde{\nu}_{\tilde{\omega},x,t}^n(\xi) dxdt \right) \leq TC_p,$$

et $\tilde{\mathbb{P}}$ -presque sûrement, $\forall \psi \in C_c^1(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}), \forall t \in [0, T] \setminus \tilde{B}$,

$$\langle \tilde{f}^n(t), \partial_\xi \psi \rangle \rightarrow \langle \tilde{f}(t), \partial_\xi \psi \rangle,$$

c'est à dire

$$\tilde{h}_{\psi}^n(t) \rightarrow \langle \tilde{f}(t), \partial_\xi \psi \rangle = \tilde{h}_{\psi}(t).$$

Ainsi

$$\tilde{\mathbb{E}} \int_0^T \left(\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \psi(x, \xi) d\tilde{\nu}_{\tilde{\omega},x,t}^n(\xi) dx - \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \psi(x, \xi) d\tilde{\nu}_{\tilde{\omega},x,t}(\xi) dx \right)^2 dt \leq 4T \|\psi\|_\infty^2.$$

On n'est pas obligé d'étendre la convergence

$$\tilde{h}_{\psi}^n(t) \rightarrow \tilde{h}_{\psi}(t),$$

à tout $\psi \in C_b(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, il suffit de l'étendre aux $\psi = g_k \varphi_j$:

on a $\tilde{\mathbb{P}}$ -presque sûrement et $\forall t \in [0, T] \setminus \tilde{B}$,

$$\langle \tilde{f}^n(t), \varphi_j \rangle \rightarrow \langle \tilde{f}(t), \varphi_j \rangle,$$

c'est à dire

$$\tilde{h}_{\varphi_j}^n(t) \rightarrow \langle \tilde{f}(t), \varphi_j \rangle = \tilde{h}_{\varphi_j}(t)$$

avec

$$\psi_j(x, \xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \varphi_j(x, \zeta) d\zeta.$$

Rappelons que $\{\varphi_j, j \in \Gamma\}$ est dense dans $C_c^d(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$. Soit $g_k \varphi \in C_c(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ avec $\varphi \in \Gamma$,

$$\int_{-\infty}^{\xi} (g_k \varphi * \partial_\zeta \rho^m)(x, \zeta) d\zeta = (g_k \varphi * \rho^m)(x, \xi) \rightarrow_{m \rightarrow +\infty} g_k \varphi$$

uniformément sur $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}$, en ayant pris une suite régularisante (ρ^m) convenable.

Par densité, il existe une suite d'éléments de $\{\varphi_j, j \in \Gamma\}$ telle que

$$\varphi_{j_s}^m \rightarrow_{s \rightarrow +\infty} g_k \varphi * \partial_\zeta \rho^m$$

uniformément sur $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}$ donc

$$\psi_{j_s^m}(x, \xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \varphi_{j_s^m}(x, \zeta) d\zeta \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\xi} (g_k \varphi * \partial_{\zeta} \rho^m)(x, \zeta) d\zeta$$

uniformément sur $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}$. En utilisant l'inégalité

$$\begin{aligned} & |\tilde{h}_{g_k \varphi}^n(t) - \tilde{h}_{g_k \varphi}(t)| \\ & \leq |\tilde{h}_{g_k \varphi}^n(t) - \tilde{h}_{\psi_{j_s^m}^n}^n(t)| + |\tilde{h}_{\psi_{j_s^m}^n}^n(t) - \tilde{h}_{\psi_{j_s^m}}(t)| + |\tilde{h}_{\psi_{j_s^m}}(t) - \tilde{h}_{g_k \varphi}(t)|, \end{aligned}$$

on peut conclure que $\tilde{\mathbb{P}}$ -presque sûrement et $\forall t \in [0, T] \setminus \tilde{B}$,

$$\tilde{h}_{g_k \varphi}^n(t) \rightarrow \tilde{h}_{g_k \varphi}(t).$$

De la même manière, on peut prouver que $\tilde{\mathbb{P}}$ -presque sûrement et $\forall t \in [0, T] \setminus \tilde{B}$,

$$\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \Phi(x, \xi) \varphi_j(x, \xi) d\tilde{\nu}_{x,t}^n(\xi) dx \rightarrow \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \Phi(x, \xi) \varphi_j(x, \xi) d\tilde{\nu}_{x,t}(\xi) dx$$

dans $L_2(H, \mathbb{R})$. On a donc aussi la convergence de

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi_j(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x,s}^n(\xi) dx \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \\ & \rightarrow \left\| \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi_j(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x,s}(\xi) dx \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2. \end{aligned}$$

Remarquons aussi qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} \|\tilde{h}_j^n\|_{l^2(\mathbb{N}^*)}^2 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi_j(x, \xi) \Phi(x, \xi) e_k d\tilde{\nu}_{x,s}^n(\xi) dx \right)^2 \\ &= \left\| \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi_j(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x,s}^n(\xi) dx \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \leq D_0 \|\varphi_j\|_{\infty}^2 \sup_{\xi \in \text{supp}(\varphi_j)} (1 + |\xi|^2). \end{aligned}$$

Cela suffit pour utiliser le théorème de convergence dominée et conclure.

Step 4 :

Sur la preuve du lemme 46 :

Grâce à l'item 7 du théorème, $\forall \varphi \in C_c(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$

$$X_\varphi : (t, \tilde{\omega}) \in [0, T] \times \tilde{\Omega} \mapsto \langle \tilde{f}(t, \tilde{\omega}), \varphi \rangle$$

est càdlàg, adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ donc progressivement mesurable, donc prévisible.

Soit

$$X_\psi : (t, \tilde{\omega}) \in [0, T] \times \tilde{\Omega} \mapsto \left(x \in \mathbb{T}^N \mapsto \int_{\mathbb{R}} \psi(\xi) d\tilde{\nu}_{x,t}(\xi) \right) \in L^2(\mathbb{T}^N)$$

avec $\psi \in C_b(\mathbb{R})$. Remarquons que

$$\tilde{\mathbb{E}} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} (\psi(\xi))^2 \tilde{\nu}_{x,t}(d\xi) dx dt \right) \leq \|\psi\|_\infty^2 T < +\infty$$

donc on a bien

$$X_\psi \in L^2(\tilde{\Omega} \times [0, T]; L^2(\mathbb{T}^N)) = L^2(\tilde{\Omega} \times [0, T] \times \mathbb{T}^N).$$

Soit $\psi \in C_b(\mathbb{R})$ et $\theta \in L^2(\mathbb{T}^N)$, pour montrer que

$$(t, \tilde{\omega}) \in [0, T] \times \tilde{\Omega} \mapsto \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} \theta(x) \psi(\xi) \tilde{\nu}_{x,t}(d\xi) dx$$

est prévisible, on se sert du fait que

$$(t, \tilde{\omega}) \in [0, T] \times \tilde{\Omega} \mapsto \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} \int_{-\infty}^{\xi} \varphi(\zeta) d\zeta \tilde{\nu}_{x,t}(d\xi) dx$$

est prévisible quel que soit $\varphi \in C_c(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$. On en déduit que

$$(t, \tilde{\omega}) \in [0, T] \times \tilde{\Omega} \mapsto \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} s(x) \psi(\xi) \tilde{\nu}_{x,t}(d\xi) dx$$

est prévisible quelles que soient $s : \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{R}$ fonction simple et $\psi \in C_b^1(\mathbb{R})$, en utilisant la suite $\varphi_n \in C_c(\mathbb{R})$ égale à $\psi'(\xi)$ sur $[-n, n]$. Puis on utilise ce résultat à $\psi * \rho_s$ où (ρ_s) est une suite régularisante bien choisie pour obtenir :

$$(t, \tilde{\omega}) \in [0, T] \times \tilde{\Omega} \mapsto \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} \theta(x) \psi(\xi) \tilde{\nu}_{x,t}(d\xi) dx$$

est prévisible quelles que soient $\theta \in L^2(\mathbb{T}^N)$ et $\psi \in C_b(\mathbb{R})$, donc

$$X_\psi \in L^2_{\mathcal{P}}(\tilde{\Omega} \times [0, T] \times \mathbb{T}^N).$$

Sur l'identification de \tilde{M}_φ et M_φ^* :

En fait, je peux utiliser la démonstration du lemme en disant que

$$(t, \tilde{\omega}) \in [0, T] \times \tilde{\Omega} \mapsto \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} g_k(x, \xi) \varphi(x, \xi) \tilde{\nu}_{x,t}(d\xi) dx$$

est prévisible car

$$(x, \xi) \mapsto g_k(x, \xi) \varphi(x, \xi) \in C_c(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$$

peut être approchée par une suite de combinaisons linéaires de fonctions tensorielles (i.e. du type $(x, \xi) \mapsto \theta(x) \psi(\xi)$). Cela signifie que $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$(t, \tilde{\omega}) \in [0, T] \times \tilde{\Omega} \mapsto \left(\int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) \tilde{\nu}_{x,t}(d\xi) dx \right) (e_k)$$

est prévisible, donc que

$$(t, \tilde{\omega}) \in [0, T] \times \tilde{\Omega} \mapsto \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) \tilde{\nu}_{x,t}(d\xi) dx$$

est prévisible. L'appartenance de ce processus à $L^2([0, T] \times \tilde{\Omega}, dt \otimes \mathbb{P}, L_2(H, \mathbb{R}))$ est facile à prouver. Donc l'intégrale d'Itô

$$M_\varphi^*(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) \tilde{\nu}_{\tilde{\omega}, x, s}(d\xi) dx d\tilde{W}(s)$$

est bien définie.

On va utiliser la proposition 32 que je peux réécrire :

Soit $h : \tilde{\Omega} \times [0, T] \rightarrow L_2(H, \mathbb{R})$ processus prévisible et tel que

$$\tilde{\mathbb{E}} \int_0^T \|h(s)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds < +\infty,$$

et soit $X(t)$ une $\tilde{\mathcal{F}}_t$ -martingale réelle de carré intégrable i.e. telle que $\forall t \in [0, T]$,

$$\tilde{\mathbb{E}}(|X(t)|^2) < +\infty,$$

et telle que les processus

$$X(t) < \tilde{W}(t), e_k >_H - \int_0^t h(s) e_k ds$$

et

$$(X(t))^2 - \int_0^t \|h(s)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds$$

soient aussi des $\tilde{\mathcal{F}}_t$ -martingales, alors $\forall t \in [0, T]$,

$$X(t) = X(0) + \int_0^t h(s) d\tilde{W}(s).$$

Pour $X(s) = \tilde{M}_j(s)$ et

$$h(s) = \tilde{h}_j(s) = \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi_j(x, \xi) \Phi(x, \xi) \tilde{\nu}_{\tilde{\omega}, x, s}(d\xi) dx,$$

la proposition 44 prouve qu'on peut bien utiliser la proposition 32, et affirmer que $\forall j \in \mathbb{N}$,

$$\tilde{M}_j(s) = \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi_j(x, \xi) \Phi(x, \xi) \tilde{\nu}_{\tilde{\omega}, x, s}(d\xi) dx d\tilde{W}(s).$$

2.2.31.4 Sur le § 2.1.4.5 « identification de la limite : équation »

Pour prouver l'item 9 du théorème, il reste à passer de l'égalité (2.103) vraie $\forall \varphi \in \Gamma$ à l'égalité (2.103) vraie $\forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$.

Γ est dense dans $C_c^1(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, ainsi, il existe une suite $(\varphi_{j_m})_m \subset \Gamma$ qui converge vers $\varphi \in C_c^1(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ quelconque, c'est à dire qu'il existe un compact K de $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}$ tel que toutes les φ_{j_m} soient à support dans K et

1. $\varphi_{j_m} \rightarrow \varphi$ uniformément sur $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}$
2. $\partial_\xi \varphi_{j_m} \rightarrow \partial_\xi \varphi$ uniformément sur $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}$

3. $\nabla_x \varphi_{j_m} \rightarrow \nabla_x \varphi$ uniformément sur $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}$.

Grâce au théorème de convergence dominée, grâce au fait que

$$\mathbb{E} \int_0^T \left\| \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi_{j_m}(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\tilde{\nu}_{x,s}(\xi) dx - \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\tilde{\nu}_{x,s}(\xi) dx \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 dt \rightarrow 0$$

et grâce à l'isométrie d'Itô, on peut passer à la limite quand $m \rightarrow +\infty$ dans (2.103) qui est donc vraie $\forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$.

2.2.32 A propos du paragraphe 2.1.4.6

Remarque : « pathwise solution » peut se traduire par « solution trajectorielle ».

Le théorème 36 nous dit que f est une solution généralisée de (2.1), ou plutôt de (2.1) qui s'écrit

$$du(x, t) + \operatorname{div}_x (A(u(x, t))) dt = \Phi(x, u(x, t)) d\tilde{W}(t).$$

Il faut quand même vérifier que \tilde{m} est une mesure aléatoire

$$\tilde{m} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathcal{M}_b(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R})$$

telle que

$$\tilde{\mathbb{E}}(\tilde{m}(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R})) < +\infty$$

(j'en ai fait la démonstration dans mes commentaires à la fin du paragraphe 2.1.4.5), et que

$$\forall R > 0, \tilde{f} \in L^1_{\tilde{\mathcal{P}}}(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times (-R, R) \times \tilde{\Omega}).$$

J'ai déjà prouvé que $\forall \varphi \in C_c(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}} \left(\int_0^T (\langle \tilde{f}(t), \varphi \rangle)^2 dt \right) &= \tilde{\mathbb{E}} \left(\int_0^T \left(\int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} \int_{-\infty}^{\xi} \varphi(\zeta) d\zeta \tilde{\nu}_{x,t}(d\xi) dx \right)^2 dt \right) \\ &\leq \tilde{\mathbb{E}} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^{\xi} \varphi(\zeta) d\zeta \right)^2 \tilde{\nu}_{x,t}(d\xi) dx dt \right) < +\infty. \end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $\varphi(x, \xi) = 1$ pour $\xi \in (-R; R)$ pour avoir

$$\tilde{f} \in L^2(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times (-R, R) \times \tilde{\Omega}) \subset L^1(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times (-R, R) \times \tilde{\Omega}).$$

Pour la prévisibilité de \tilde{f} , on sait déjà que $\forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{T}^N \times (-R, R))$,

$$(t, \tilde{\omega}) \in [0, T] \times \tilde{\Omega} \mapsto \langle \tilde{f}(t), \varphi \rangle$$

est càdlàg donc prévisible. Soit $g \in L^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ et une suite $(g_n)_n \subset C(\mathbb{T}^N \times (-R, R))$ qui converge dans $L^1(\mathbb{T}^N \times (-R, R))$ vers g , on a la convergence presque sûre et pour presque tous t de $\langle \tilde{f}(t), g_n \rangle$ vers $\langle \tilde{f}(t), g \rangle$ dans $L^1(\mathbb{T}^N \times (-R, R))$. Cela donne la prévisibilité du processus

$$(t, \tilde{\omega}) \in [0, T] \times \tilde{\Omega} \mapsto \tilde{f}(t, \tilde{\omega}) \in L^1(\mathbb{T}^N \times (-R, R)).$$

Plus exactement,

$$\tilde{f} \in L^1_{\tilde{\mathbb{P}}}(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times (-R, R) \times \tilde{\Omega}).$$

Le théorème 26 dit que si \tilde{f} est une solution généralisée de (2.1) et si f_0 est un équilibre (et que les hypothèses (2.3) et (2.4) sont vérifiées) alors il existe une unique solution u de (2.1) qui vérifie $\tilde{f}(x, t, \xi) = \mathbf{1}_{u(x,t) > \xi}$ $\tilde{\mathbb{P}}$ -presque sûrement et pour presque tout (x, t, ξ) . En fait, on a

$$\int_{\mathbb{R}} (\tilde{f}(x, t, \xi) - \mathbf{1}_{0 > \xi}) d\xi = \int_{\mathbb{R}} (\mathbf{1}_{u(x,t) > \xi} - \mathbf{1}_{0 > \xi}) d\xi = u(x, t),$$

et comme on a aussi $\tilde{\nu}_{x,t}(d\xi) = \delta_{u(x,t)}(d\xi)$, cela donne aussi

$$\int_{\mathbb{R}} \xi \tilde{\nu}_{x,t}(d\xi) = u(x, t).$$

Le théorème 47 donne les conditions sous lesquelles, une suite de solutions généralisées approchées (ou plutôt la suite de solutions approchées associées (u^n)) converge vers la solution de (2.1) (et avec quel type de convergence). La dé-

monstration permet de passer à nouveau de l'ensemble $\tilde{\Omega}$ à l'ensemble Ω , c'est à dire que la solution généralisée de (2.1) sera le support nécessaire pour arriver à la solution de (2.1).

2.2.32.1 Sur la preuve du théorème 47

Soient X_n et Y_n des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé et à valeurs dans l'espace métrique (E, d) , la variable aléatoire (X_n, Y_n) est à valeurs dans $E \times E$. Dire qu'elle converge en loi vers la variable aléatoire (Z, Z) signifie que pour toute fonction continue bornée $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\varphi(X_n, Y_n)) = \mathbb{E}(\varphi(Z, Z)).$$

Si on prend en particulier la fonction continue et bornée

$$\varphi : (x, y) \in E \times E \rightarrow \min(|x - y|, 1),$$

on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\min(|X_n - Y_n|, 1)) = \mathbb{E}(\min(|Z - Z|, 1)) = 0,$$

c'est à dire $(X_n, Y_n) \rightarrow (Z, Z)$ en probabilité (j'ai utilisé la métrique de Ky Fan qui caractérise la convergence en probabilité).

Dans notre démonstration, le couple $(\tilde{\nu}^{n_i}, \check{\nu}^{q_i})$ converge en loi vers $(\tilde{\nu}, \tilde{\nu})$, donc (ν^{n_i}, ν^{q_i}) converge en loi vers $(\tilde{\nu}, \tilde{\nu})$, donc $\nu^{n_i} - \nu^{q_i}$ converge en probabilité vers 0, autrement dit la suite formée des ν^{n_i} et des ν^{q_i} est de Cauchy en probabilité, donc converge en probabilité (car \mathcal{Y}^1 est polonais).

Je peux faire le même raisonnement avec (μ^{n_i}, μ^{q_i}) car $\mathcal{P}^1(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R})$ est polonais et avec $(\|m\|^{n_i}, \|m\|^{q_i})$ car \mathbb{R}^+ est polonais, ou plutôt avec

$$((\mu^{n_i}, \|m\|^{n_i}), (\mu^{q_i}, \|m\|^{q_i})),$$

ce qui implique que la suite formée des $(\mu^{n_i}, \|m\|^{n_i})$ et des $(\mu^{q_i}, \|m\|^{q_i})$ est de Cauchy en probabilité, donc converge en probabilité, et donc la suite formée des $m^{n_i} = \mu^{n_i} \times \|m\|^{n_i}$ et des $m^{q_i} = \mu^{q_i} \times \|m\|^{q_i}$ converge en probabilité dans $\mathcal{M}_b^+(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R})$ muni de la topologie faible*.

En fait, la convergence en probabilité de la suite formée des μ^{n_i} et des μ^{q_i} dans $\mathcal{P}^1(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R})$ et la convergence en probabilité de la suite formée des

$\|m\|^{n_i}$ et des $\|m\|^{q_i}$ dans \mathbb{R}^+ suffisent pour le reste de la démonstration.

Si f est une solution généralisée de (2.1), la condition initiale est $\mathbf{1}_{u_0 > \xi}$, donc f est un équilibre, donc $\nu = \delta_u$.

Détaillons le dernier point de la démonstration :

Soit $(t_k) \subset [0, T]$ une suite qui tend en croissant vers $t_* \in (0, T]$, on a donc \mathbb{P} -presque sûrement,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{T}^N} |u(x, t_k) - u(x, t_*)| dx = 0$$

par continuité de u , donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\mathbf{1}_{u(x, t_k) > \xi} - \mathbf{1}_{u(x, t_*) > \xi}| d\xi dx = 0,$$

donc $(\mathbf{1}_{u(x, t_k) > \xi} - \mathbf{1}_{u(x, t_*) > \xi})_k$ converge vers 0 dans $L^1(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$,
donc $\forall \varphi \in C_c(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ on a

$$\langle \mathbf{1}_{u(x, t_k) > \xi}, \varphi \rangle \rightarrow \langle \mathbf{1}_{u(x, t_*) > \xi}, \varphi \rangle,$$

donc $\forall t_* \in (0, T]$,

$$(\mathbf{1}_{u(x, t_*) > \xi})^- = \mathbf{1}_{u(x, t_*) > \xi}$$

où $(\mathbf{1}_{u(x, t_*) > \xi})^-$ est définie dans la proposition 17.

Donc grâce à l'égalité vraie $\forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \left\langle (\mathbf{1}_{u(x, t_*) > \xi})^- - \mathbf{1}_{u(x, t_*) > \xi}, \varphi \right\rangle &= -m(\partial_\xi \varphi) \{t\} \\ &= - \int_{\mathbb{T}^N \times \{t\} \times \mathbb{R}} \partial_\xi \varphi(x, \xi) dm(x, t, \xi), \end{aligned}$$

on a $\forall t \in (0, T]$,

$$\pi \# m(\{t\}) = 0, \mathbb{P}\text{-ps}$$

(le cas $t = 0$ a déjà été traité dans le corollaire 22).

Ainsi le B_{at} du lemme 2 qui est aussi le \tilde{B} de la proposition 39 est vide.

3 Convergence de la méthode des volumes finis pour les lois de conservation stochastiques scalaires démontrée par une formulation cinétique

3.1 Le deuxième article soumis à la revue Stochastics and Partial Differential Equations : Analysis and Computations, le 29 août 2017

Convergence of the Finite Volume Method for scalar conservation laws with multiplicative noise : an approach by kinetic formulation

Sylvain Dotti^a and Julien Vovelle^b

Abstract

We prove the convergence of the explicit-in-time Finite Volume method with monotone fluxes for the approximation of scalar first-order conservation laws with multiplicative, compactly supported noise.

Keywords : Finite Volume Method, stochastic scalar conservation law, kinetic formulation

MSC Number : 65M08 (35L60 35L65 35R60 60H15 65M12)

a. Aix-Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, I2M, UMR 7373, 13453 Marseille France

b. Univ Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1, CNRS UMR 5208, Institut Camille Jordan, 43 blvd. du 11 novembre 1918, F-69622 Villeurbanne cedex, France. Julien Vovelle was supported by ANR projects STOSYMAP and STAB.

3.1.1 Introduction

Stochastic first-order scalar conservation law. Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t), (\beta_k(t)))$ be a stochastic basis and let $T > 0$. Consider the first-order scalar conservation law with stochastic forcing

$$du(x, t) + \operatorname{div}(A(u(x, t)))dt = \Phi(x, u(x, t))dW(t), \quad x \in \mathbb{T}^N, t \in (0, T). \quad (3.1)$$

Equation (3.1) is periodic in the space variable : $x \in \mathbb{T}^N$ where \mathbb{T}^N is the N -dimensional torus. The flux function A in (3.1) is supposed to be of class C^2 : $A \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)$. We assume that A and its derivatives have at most polynomial growth. Without loss of generality, we will assume also that $A(0) = 0$. The right-hand side of (3.1) is a stochastic increment in infinite dimension. It is defined as follows (see [DZ92] for the general theory) : W is a cylindrical Wiener process, $W = \sum_{k \geq 1} \beta_k e_k$, where the coefficients β_k are independent Brownian processes and $(e_k)_{k \geq 1}$ is a complete orthonormal system in a Hilbert space H . For each $x \in \mathbb{T}^N$, $u \in \mathbb{R}$, $\Phi(x, u) \in L_2(H, \mathbb{R})$ is defined by $\Phi(x, u)e_k = g_k(x, u)$ where $g_k(\cdot, u)$ is a regular function on \mathbb{T}^N . Here, $L_2(H, K)$ denotes the set of Hilbert-Schmidt operators from the Hilbert space H to an other Hilbert space K . Since $K = \mathbb{R}$ in our case, this set is isomorphic to H , thus we may also define

$$\Phi(x, u) = \sum_{k \geq 1} g_k(x, u)e_k,$$

the action of $\Phi(x, u)$ on $e \in H$ being given by $\langle \Phi(x, u), e \rangle_H$. We assume $g_k \in C(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, with the bounds

$$\mathbf{G}^2(x, u) = \|\Phi(x, u)\|_H^2 = \sum_{k \geq 1} |g_k(x, u)|^2 \leq D_0(1 + |u|^2), \quad (3.2)$$

$$\|\Phi(x, u) - \Phi(y, v)\|_H^2 = \sum_{k \geq 1} |g_k(x, u) - g_k(y, v)|^2 \leq D_1(|x - y|^2 + |u - v|h(|u - v|)), \quad (3.3)$$

where $x, y \in \mathbb{T}^N$, $u, v \in \mathbb{R}$, and h is a continuous non-decreasing function on \mathbb{R}_+ such that $h(0) = 0$. We assume also $0 \leq h(z) \leq 1$ for all $z \in \mathbb{R}_+$.

Notation : in what follows, we will use the convention of summation over repeated indices k . For example, we write $W = \beta_k e_k$.

Compactly supported multiplicative noise. In this paper, we study the numerical approximation of (3.1) : our aim is to prove the convergence of the Finite Volume method with monotone fluxes, see Theorem 74. Our analysis will be restricted to the case of *multiplicative noise with compact support*. Indeed, from Section 3.1.3 to Section 3.1.7, we will work under the following hypothesis : there exists $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, such that $g_k(x, u) = 0$ for all u outside the compact

$[a, b]$, for all $x \in \mathbb{T}^N$, $k \geq 1$. For simplicity, we will take $a = -1$, $b = 1$. We will assume therefore that

$$\text{for all } u \in \mathbb{R}, |u| \geq 1 \Rightarrow g_k(x, u) = 0, \quad (3.4)$$

for all $x \in \mathbb{T}^N$, $k \geq 1$, and consider initial data with values in $[-1, 1]$. The solution of the continuous equation (3.1) then takes values in $[-1, 1]$ almost surely (see Theorem 29). There is no loss in generality in considering that A is globally Lipschitz continuous then :

$$\text{Lip}(A) := \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |A'(\xi)| < +\infty. \quad (3.5)$$

In that framework, we will build a stable and convergent approximation to (3.1) by an explicit-in-time Finite Volume method. Under (3.4), it is also natural to assume

$$\mathbf{G}^2(x, u) = \|\Phi(x, u)\|_H^2 = \sum_{k \geq 1} |g_k(x, u)|^2 \leq D_0, \quad (3.6)$$

which is of course stronger than (3.2). We may also perform the analysis of convergence of the Finite Volume method under (3.2) instead of (3.6), but this puts exponential factors in various estimates, whereas these factors are close to 1 in the real implementation of the scheme.

Numerical approximation. Let us give a brief summary of the theory of (3.1) and of its approximation. Different approximation schemes to stochastically forced first-order conservation laws have already been analysed : time-discrete schemes, [HR90; Bau15; KS17], space-discrete scheme [Ujj40], space-time Finite Volume discrete schemes :

- in space dimension 1, with strongly monotone fluxes, [KR12]
- in space dimension $N \geq 1$, by a flux-splitting scheme, [BCG16a],
- in space dimension $N \geq 1$, for general schemes with monotone fluxes, [BCG16b],

The Cauchy or the Cauchy-Dirichlet problem associated to (3.1) have been studied in [Wei+00; Kim03b; FN08; VW09; DV10a; CDK12; BVW12; BVW14; KS17].

The approximation of scalar conservation laws with stochastic flux has also been considered in [GPS16] (time-discrete scheme) and [MSZ13] (space discrete scheme). For the corresponding Cauchy Problem, see [LPS12; LPS13; LPS14; GS14; GS16; Hof16].

Kinetic formulation. To prove the convergence of the Finite Volume method with monotone fluxes, we will use the companion paper 2.1 and a kinetic formulation of the Finite Volume Scheme. The subject of 2.1 is the convergence

of approximations to (3.1) in the context of the kinetic formulation of scalar conservation laws. Such kinetic formulations have been developed in [LPT94b; LPT94a; MP03; Per98; Per02]. In [MP03], a kinetic formulation of Finite Volume E-schemes is given (and applied in particular to obtain sharp CFL criteria). For Finite Volume schemes with monotone fluxes, the kinetic formulation is simpler, we give it explicitly in Proposition 58. Based on the kinetic formulation and an energy estimate, we derive some a priori bounds on the numerical approximation (these are “weak BV estimates” in the terminology of [EGH03, Lemma 25.2]), see Section 3.1.5. These estimates are used in the proof of consistency of the scheme when we show that it gives rise to an approximate solution to (3.1) in the sense of Definition 54. Our final result, cf. Theorem 74, should be compared to [BCG16b, Theorem 2]. This latter gives the convergence of the Finite Volume method with monotone fluxes in a very similar context, under the slightly stronger hypothesis that the ratio of the time step Δt with the spatial characteristic size h of the mesh tends to 0 when h tends to 0.

Plan of the paper. The plan of the paper is the following one. In the preliminary section 3.1.2, we give a brief summary of the notion of solution and approximate solution to (3.1) developed in 2.1. In Section 3.1.3 is described the kind of approximation to (3.1) by the Finite Volume method which we consider here. In Section 3.1.4 we establish the kinetic formulation of the scheme. This numerical kinetic formulation is analysed as follows : energy estimates are derived in Section 3.1.5, then we show in Section 3.1.6 that this gives rise to an approximate generalized solution in the sense of Definition 54. We show some additional estimates and then conclude to the convergence of the scheme in Section 3.1.7. This result is stated in Theorem 74.

3.1.2 Generalized solutions, approximate solutions

The object of this section is to recall several results concerning the solutions to the Cauchy Problem associated to (3.1) and their approximations. We give the main statements, without much explanations or comments ; those latter can be found in 2.1 : we give the precise references when needed.

3.1.2.1 Solutions

Definition 48 (Random measure). *Let X be a topological space. If m is a map from Ω into the set of non-negative finite Borel measures on X such that, for each continuous and bounded function ϕ on X , $\langle m, \phi \rangle$ is a random variable, then we say that m is a random measure on X .*

A random measure m is said to have a finite first moment if

$$\mathbb{E}m(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}) < +\infty. \quad (3.7)$$

Definition 49 (Solution). Let $u_0 \in L^\infty(\mathbb{T}^N)$. An $L^1(\mathbb{T}^N)$ -valued stochastic process $(u(t))_{t \in [0, T]}$ is said to be a solution to (3.1) with initial datum u_0 if u and $\mathbf{f} := \mathbf{1}_{u > \xi}$ have the following properties :

1. $u \in L^1_{\mathcal{P}}(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \Omega)$,
2. for all $\varphi \in C^1_c(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, almost surely, $t \mapsto \langle \mathbf{f}(t), \varphi \rangle$ is càdlàg,
3. for all $p \in [1, +\infty)$, there exists $C_p \geq 0$ such that

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p \right) \leq C_p, \quad (3.8)$$

4. there exists a random measure m with first moment (3.7), such that for all $\varphi \in C^1_c(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, for all $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}(t), \varphi \rangle &= \langle \mathbf{f}_0, \varphi \rangle + \int_0^t \langle \mathbf{f}(s), a(\xi) \cdot \nabla \varphi \rangle ds \\ &\quad + \sum_{k \geq 1} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} g_k(x, u(x, s)) \varphi(x, u(x, s)) dx d\beta_k(s) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \partial_\xi \varphi(x, u(x, s)) \mathbf{G}^2(x, u(x, s)) dx ds - m(\partial_\xi \varphi)([0, t]), \end{aligned} \quad (3.9)$$

a.s., where $\mathbf{f}_0(x, \xi) = \mathbf{1}_{u_0(x) > \xi}$, $\mathbf{G}^2 := \sum_{k=1}^{\infty} |g_k|^2$ and $a(\xi) := A'(\xi)$.

In item 1, the index \mathcal{P} in $u \in L^1_{\mathcal{P}}(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \Omega)$ means that u is predictable. See section 2.1.2.1. The function denoted $\mathbf{f} := \mathbf{1}_{u > \xi}$ is given more precisely by

$$(x, t, \xi) \mapsto \mathbf{1}_{u(x, t) > \xi}.$$

This is the characteristic function of the subgraph of u . To study the stability of solutions, or the convergence of approximate solutions (these are two similar problems), we have to consider the stability of this property, the fact of being the “characteristic function of the subgraph of a function”. If (u_n) is a sequence of functions, say on a finite measure space X , $p \in (1, \infty)$ and (u_n) is bounded in $L^p(X)$, then there is a subsequence still denoted (u_n) which converges to a function u in $L^p(X)$ -weak. Up to a subsequence, the sequence of equilibrium functions $\mathbf{f}_n := \mathbf{1}_{u_n > \xi}$ is converging to a function f in $L^\infty(X \times \mathbb{R})$ -weak star. The limit f is equal to $\mathbf{f} := \mathbf{1}_{u > \xi}$ if, and only if, (u_n) is converging strongly, see Lemma 12. When strong convergence remains a priori unknown, the limit f still keeps some structural properties. This is a kinetic function in the sense of Definition 51 below, see Corollary 11. Our notion of generalized solution is based on this notion.

3.1.2.2 Generalized solutions

Definition 50 (Young measure). *Let $(X, \mathcal{A}, \lambda)$ be a finite measure space. Let $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ denote the set of probability measures on \mathbb{R} . We say that a map $\nu: X \rightarrow \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ is a Young measure on X if, for all $\phi \in C_b(\mathbb{R})$, the map $z \mapsto \nu_z(\phi)$ from X to \mathbb{R} is measurable. We say that a Young measure ν vanishes at infinity if, for every $p \geq 1$,*

$$\int_X \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\nu_z(\xi) d\lambda(z) < +\infty. \quad (3.10)$$

Definition 51 (Kinetic function). *Let $(X, \mathcal{A}, \lambda)$ be a finite measure space. A measurable function $f: X \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ is said to be a kinetic function if there exists a Young measure ν on X that vanishes at infinity such that, for λ -a.e. $z \in X$, for all $\xi \in \mathbb{R}$,*

$$f(z, \xi) = \nu_z(\xi, +\infty).$$

We say that f is an equilibrium if there exists a measurable function $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ such that $f(z, \xi) = \mathbf{f}(z, \xi) = \mathbf{1}_{u(z) > \xi}$ a.e., or, equivalently, $\nu_z = \delta_{\xi=u(z)}$ for a.e. $z \in X$.

Definition 52 (Generalized solution). *Let $f_0: \mathbb{T}^N \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ be a kinetic function. An $L^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}; [0, 1])$ -valued process $(f(t))_{t \in [0, T]}$ is said to be a generalized solution to (3.1) with initial datum f_0 if $f(t)$ and $\nu_t := -\partial_\xi f(t)$ have the following properties :*

1. *for all $t \in [0, T]$, almost surely, $f(t)$ is a kinetic function, and, for all $R > 0$, $f \in L^1_{\mathcal{P}}(\mathbb{T}^N \times (0, T) \times (-R, R) \times \Omega)$,*
2. *for all $\varphi \in C^1_c(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, almost surely, the map $t \mapsto \langle f(t), \varphi \rangle$ is càdlàg,*
3. *for all $p \in [1, +\infty)$, there exists $C_p \geq 0$ such that*

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\nu_{x,t}(\xi) dx \right) \leq C_p, \quad (3.11)$$

4. *there exists a random measure m with first moment (3.7), such that for all $\varphi \in C^1_c(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, for all $t \in [0, T]$, almost surely,*

$$\begin{aligned} \langle f(t), \varphi \rangle &= \langle f_0, \varphi \rangle + \int_0^t \langle f(s), a(\xi) \cdot \nabla_x \varphi \rangle ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} g_k(x, \xi) \varphi(x, \xi) d\nu_{x,s}(\xi) dx d\beta_k(s) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{G}^2(x, \xi) \partial_\xi \varphi(x, \xi) d\nu_{x,s}(\xi) dx ds - m(\partial_\xi \varphi)([0, t]). \end{aligned} \quad (3.12)$$

The following statement is Theorem 26.

Theorem 53 (Uniqueness, Reduction). *Let $u_0 \in L^\infty(\mathbb{T}^N)$. Assume (3.2)-(3.3). Then we have the following results :*

1. *there is at most one solution with initial datum u_0 to (3.1).*
2. *If f is a generalized solution to (3.1) with initial datum f_0 at equilibrium : $f_0 = \mathbf{1}_{u_0 > \xi}$, then there exists a solution u to (3.1) with initial datum u_0 such that $f(x, t, \xi) = \mathbf{1}_{u(x, t) > \xi}$ a.s., for a.e. (x, t, ξ) .*
3. *if u_1, u_2 are two solutions to (3.1) associated to the initial data $u_{1,0}, u_{2,0} \in L^\infty(\mathbb{T}^N)$ respectively, then*

$$\mathbb{E}\|(u_1(t) - u_2(t))^+\|_{L^1(\mathbb{T}^N)} \leq \mathbb{E}\|(u_{1,0} - u_{2,0})^+\|_{L^1(\mathbb{T}^N)}. \quad (3.13)$$

This implies the L^1 -contraction property, and comparison principle for solutions.

3.1.2.3 Approximate solutions

In 2.1, we prove the convergence of solutions to different problems, which are approximations of (3.1). The solutions of these approximate problems give rise to approximate solutions and, more precisely, of approximate generalized solutions, according to the following definition (see Definition 54 and Section 2.1.5).

Definition 54 (Approximate generalized solutions). *Let $f_0^n: \mathbb{T}^N \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ be some kinetic functions. Let $(f^n(t))_{t \in [0, T]}$ be a sequence of $L^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}; [0, 1])$ -valued processes. Assume that the functions $f^n(t)$, and the associated Young measures $\nu_t^n = -\partial_\xi \varphi f^n(t)$ are satisfying item 1, 2, 3, in Definition 52 and Equation (3.12) up to an error term, i.e. : for all $\varphi \in C_c^d(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, there exists an adapted process $\varepsilon^n(t, \varphi)$, with $t \mapsto \varepsilon^n(t, \varphi)$ almost surely continuous such that*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{t \in [0, T]} |\varepsilon^n(t, \varphi)| = 0 \text{ in probability}, \quad (3.14)$$

and there exists some random measures m^n with first moment (3.7), such that, for all n , for all $\varphi \in C_c^d(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, for all $t \in [0, T]$, almost surely,

$$\begin{aligned} \langle f^n(t), \varphi \rangle &= \langle f_0^n, \varphi \rangle + \int_0^t \langle f^n(s), a(\xi) \cdot \nabla_x \varphi \rangle ds \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} g_k(x, \xi) \varphi(x, \xi) d\nu_{x,s}^n(\xi) dx d\beta_k(s) + \varepsilon^n(t, \varphi) \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{G}^2(x, \xi) \partial_\xi \varphi(x, \xi) d\nu_{x,s}^n(\xi) dx ds - m^n(\partial_\xi \varphi)([0, t]). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Then we say that (f^n) is a sequence of approximate generalized solutions to (3.1) with initial datum f_0^n .

Consider a sequence (f_n) of approximate solutions to (3.1) satisfying the following (minimal) bounds.

1. There exists $C_p \geq 0$ independent on n such that $\nu^n := -\partial_\xi f^n$ satisfies

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\nu_{x,t}^n(\xi) dx \right] \leq C_p, \quad (3.16)$$

2. the measures $\mathbb{E}m^n$ satisfy the bound

$$\sup_n \mathbb{E}m^n(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}) < +\infty, \quad (3.17)$$

and the following tightness condition : if $B_R^c = \{\xi \in \mathbb{R}, |\xi| \geq R\}$, then

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \sup_n \mathbb{E}m^n(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times B_R^c) = 0. \quad (3.18)$$

We give in 2.1 the proof of the following convergence result, see Theorem 47.

Theorem 55 (Convergence). *Suppose that there exists a sequence of approximate generalized solutions (f^n) to (3.1) with initial datum f_0^n satisfying (3.16), (3.17) and the tightness condition (3.18) and such that (f_0^n) converges to the equilibrium function $\mathbf{f}_0(\xi) = \mathbf{1}_{u_0 > \xi}$ in $L^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ -weak-*, where $u_0 \in L^\infty(\mathbb{T}^N)$. We have then*

1. there exists a unique solution $u \in L^1(\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \Omega)$ to (3.1) with initial datum u_0 ;
2. let

$$u^n(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \xi d\nu_{x,t}^n(\xi) = \int_{\mathbb{R}} (f^n(x, t, \xi) - \mathbf{1}_{0 > \xi}) d\xi.$$

Then, for all $p \in [1, \infty[$, (u^n) is converging to u with the following two different modes of convergence : $u_n \rightarrow u$ in $L^p(\mathbb{T}^N \times (0, T) \times \Omega)$ and, for a subsequence (n_k) , almost surely, for all $t \in [0, T]$, $u_{n_k}(t) \rightarrow u(t)$ in $L^p(\mathbb{T}^N)$.

In the next section, we define the numerical approximation to (3.1) by the Finite Volume method. To prove the convergence of the method, we will show that the hypotheses of Theorem 55 are satisfied. The most difficult part in this programme is to prove that the numerical approximations generate a sequence of approximate generalized solutions, see Section 3.1.6.

3.1.3 The finite volume scheme

Mesh A mesh of \mathbb{T}^N is a family \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N of disjoint connected open subsets $K \in (0, 1)^N$ which form a partition of $(0, 1)^N$ up to a negligible set. We denote by \mathcal{T} the mesh

$$\{K + l; l \in \mathbb{Z}^N, K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N\}$$

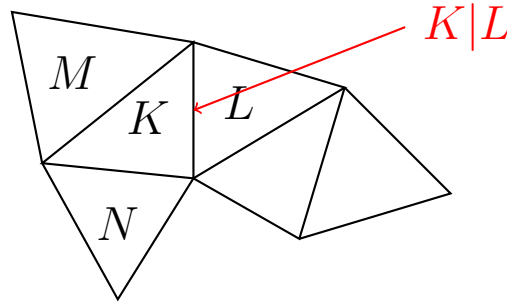
deduced on \mathbb{R}^N . For all distinct $K, L \in \mathcal{T}$, we assume that $\overline{K} \cap \overline{L}$ is contained in an hyperplane; the interface between K and L is denoted $K|L := \overline{K} \cap \overline{L}$. The set of neighbours of K is

$$\mathcal{N}(K) = \{L \in \mathcal{T}; L \neq K, K|L \neq \emptyset\}.$$

We use also the notation

$$\partial K = \bigcup_{L \in \mathcal{N}(K)} K|L.$$

In general, there should be no confusion between ∂K and the topological boundary $\overline{K} \setminus K$.



We also denote by $|K|$ the N -dimensional Lebesgue Measure of K and by $|\partial K|$ (respectively $|K|L|$) the $(N - 1)$ -dimensional Hausdorff measure of ∂K (respectively of $K|L$) (the $(N - 1)$ -dimensional Hausdorff measure is normalized to coincide with the $(N - 1)$ -dimensional Lebesgue measure on hyperplanes).

Scheme Let $(A_{K \rightarrow L})_{K \in \mathcal{T}, L \in \mathcal{N}(K)}$ be a family of monotone, Lipschitz continuous numerical fluxes, consistent with A : we assume that each function $A_{K \rightarrow L}$ satisfies the following properties.

- monotonicity : $A_{K \rightarrow L}(v, w) \leq A_{K \rightarrow L}(v', w)$ for all $v, v', w \in \mathbb{R}$ with $v \leq v'$ and $A_{K \rightarrow L}(v, w) \geq A_{K \rightarrow L}(v, w')$ for all $v, w, w' \in \mathbb{R}$ with $w \leq w'$.
- Lipschitz regularity : there exists $L_A \geq 0$ such that

$$|A_{K \rightarrow L}(v, w) - A_{K \rightarrow L}(v', w')| \leq |K|L|L_A \max(|v - v'|, |w - w'|), \quad (3.19)$$

for all $v, v', w, w' \in \mathbb{R}$.

- Consistency :

$$A_{K \rightarrow L}(v, v) = \int_{K|L} A(v) \cdot n_{K,L} d\mathcal{H}^{N-1} = |K|L|A(v) \cdot n_{K,L}, \quad (3.20)$$

for all $v \in \mathbb{R}$, where $n_{K,L}$ is the outward unit normal to K on $K|L$.

- Conservative symmetry :

$$A_{K \rightarrow L}(v, w) = -A_{L \rightarrow K}(w, v), \quad (3.21)$$

for all $K, L \in \mathcal{T}$, $v, w \in \mathbb{R}$.

The conservative symmetry property ensures that the numerical flux $Q_{K \rightarrow L}^n$ defined below in (3.24) satisfies $Q_{K \rightarrow L}^n = -Q_{L \rightarrow K}^n$ for all K, L .

Let $t_n < t_{n+1}$ be two given discrete time. Let $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$. Knowing v_K^n , an approximation of the value of the solution u to (3.1) in the cell K at time t_n , we compute v_K^{n+1} , the approximation to the value of u in K at the next time step t_{n+1} , by the formula

$$|K|(v_K^{n+1} - v_K^n) + \Delta t_n \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} Q_{K \rightarrow L}^n = |K|(\Delta t_n)^{1/2} g_{k,K}(v_K^n) X_k^{n+1}, \quad (3.22)$$

where $K \in \mathcal{T}$, with the initialization

$$v_K^0 = \frac{1}{|K|} \int_K u_0(x) dx, \quad K \in \mathcal{T}. \quad (3.23)$$

In (3.22), $\Delta t_n Q_{K \rightarrow L}^n$ is the numerical flux at the interface $K|L$ on the range of time $[t_n, t_{n+1}]$, where $Q_{K \rightarrow L}^n$ is given by

$$Q_{K \rightarrow L}^n = A_{K \rightarrow L}(v_K^n, v_L^n). \quad (3.24)$$

We have also defined

$$X_k^{n+1} = \frac{\beta_k(t_{n+1}) - \beta_k(t_n)}{(\Delta t_n)^{1/2}}. \quad (3.25)$$

Then, the $(X_k^{n+1})_{k \geq 1, n \in \mathbb{N}}$ are i.i.d. random variables with normalized centred normal law $\mathcal{N}(0, 1)$. Besides, for each $n \geq 1$, the sequence $(X_k^{n+1})_{k \geq 1}$ is independent on \mathcal{F}_n , the sigma-algebra generated by $\{X_k^{m+1}; k \geq 1, m < n\}$. The numerical functions $g_{k,K}$ are defined by the average

$$g_{k,K}(v) = \frac{1}{|K|} \int_K g_k(x, v) dx. \quad (3.26)$$

Then, in virtue of (3.6) we have

$$\mathbf{G}_K^2(v) := \sum_{k \geq 1} |g_{k,K}(v)|^2 \leq D_0, \quad (3.27)$$

where $v \in \mathbb{R}$, $K \in \mathcal{T}$. We deduce (3.27) from (3.6) and Jensen's Inequality. Similarly, we deduce from (3.3) and Jensen's Inequality that

$$\sum_{k \geq 1} |g_{k,K}(\xi) - g_k(y, \xi)|^2 \leq D_1 \frac{1}{|K|} \int_K |x - y|^2 dx,$$

for all $y \in \mathbb{T}^N$. In particular (switching from the variable y to the variable x), and assuming $\text{diam}(K) \leq h$ (this is the hypothesis (3.53), which we will make later), we have the following consistency estimate

$$\sum_{k \geq 1} |g_{k,K}(\xi) - g_k(x, \xi)|^2 \leq D_1 h^2, \quad (3.28)$$

for all $x \in K$, which will be used later (see (3.151) for example).

Remark 56 (Approximation in law). *In effective computations, the random variables X_k^{n+1} are drawn at each time step. They are i.i.d. random variables with normalized centred normal law $\mathcal{N}(0, 1)$. In this situation, we will prove the convergence in law of the Finite Volume scheme to the solution to (3.1), see Remark 75 after Theorem 74.*

Remark 57 (Global Lipschitz Numerical Flux). *We assume in (3.19) that the numerical fluxes $A_{K \rightarrow L}$ are globally Lipschitz continuous. This is consistent with (3.5). Both (3.19) and (3.5) are strong hypotheses, except if a priori L^∞ -bounds are known on the solutions to (3.1), which is the case here, thanks to the hypothesis of compact support (3.4). Without loss of generality, we will assume that $\text{Lip}(A) \leq L_A$.*

3.1.4 The kinetic formulation of the finite volume scheme

The kinetic formulation of the Finite Volume method has been introduced by Makridakis and Perthame in [MP03]. The principle is the following one. For linear transport equations, which corresponds to a linear flux function $A(u) = au$, $a \in \mathbb{R}^N$, the upwind numerical flux $A_{K \rightarrow L}$ in (3.24) is given by

$$A_{K \rightarrow L}(v, w) = [a_{K \rightarrow L}^*]^+ v - [a_{K \rightarrow L}^*]^- w, \quad (3.29)$$

where

$$a_{K \rightarrow L}^* := \int_{K|L} a \cdot n_{K|L} d\mathcal{H}^{N-1} = |K|L|a \cdot n_{K,L}, \quad (3.30)$$

with the usual notation $v^+ = \max(v, 0)$, $w^- = (-w)^+$. The discrete approximation of the transport equation

$$\partial_t f + a(\xi) \cdot \nabla_x f = 0$$

by the Finite Volume method is therefore

$$|K|(f_K^{n+1} - f_K^n) + \Delta t_n \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}^n(\xi) = 0, \quad (3.31)$$

where

$$a_{K \rightarrow L}^n(\xi) = [a_{K|L}^*(\xi)]^+ f_K^n - [a_{K|L}^*(\xi)]^- f_L^n.$$

Recall that \mathbf{G}_K is defined by (3.27). A kinetic formulation of (3.22) consistent with (3.31) would be

$$\begin{aligned} & |K|(\mathbf{f}_K^{n+1} - \mathbf{f}_K^n) + \Delta t_n \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}^n(\xi) \\ &= |K|(\Delta t_n)^{1/2} \delta_{v_K^n = \xi} g_{k,K}(\xi) X_k^{n+1} + |K| \Delta t_n \partial_\xi \left(m_K^n(\xi) - \frac{1}{2} \mathbf{G}_K^2(\xi) \delta_{v_K^n = \xi} \right), \end{aligned} \quad (3.32)$$

where, for $K \in \mathcal{T}$, $n \in \mathbb{N}$, $\xi \in \mathbb{R}$, $m_K^n(\xi) \geq 0$, and where

$$\mathbf{f}_K^n(\xi) := \mathbf{1}_{v_K^n > \xi}. \quad (3.33)$$

This is not exactly the kinetic formulation that we will consider. See (3.112) for a correct version of (3.32). We will mainly work with a kinetic formulation (see (3.40)), obtained thanks to the following splitting method. For $K \in \mathcal{T}$ and $n \in \mathbb{N}$, let us define $v_K^{n+1/2}$ as the solution to

$$|K|(v_K^{n+1/2} - v_K^n) + \Delta t_n \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} A_{K \rightarrow L}(v_K^n, v_L^n) = 0. \quad (3.34)$$

Then $v_K^{n+1/2}$ is the state reached after a step of deterministic evolution, by the discrete approximation of the equation $u_t + \operatorname{div}(A(u)) = 0$. To this step corresponds the kinetic formulation

$$|K|(\mathbf{f}_K^{n+1/2} - \mathbf{f}_K^n) + \Delta t_n \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}^n(\xi) = |K| \Delta t_n \partial_\xi m_K^n(\xi), \quad (3.35)$$

where $\mathbf{f}_K^m(\xi) = \mathbf{1}_{v_K^m > \xi}$, $m \in \{n, n + 1/2\}$ and

$$m_K^n \geq 0. \quad (3.36)$$

In (3.35), $a_{K \rightarrow L}^n(\xi)$ is a function

$$a_{K \rightarrow L}^n(\xi) = a_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n), \quad (3.37)$$

where $(\xi, v, w) \mapsto a_{K \rightarrow L}(\xi, v, w)$ satisfies the following consistency conditions :

$$\int_{\mathbb{R}} [a_{K \rightarrow L}(\xi, v, w) - a_{K \rightarrow L}^*(\xi) \mathbf{1}_{0 > \xi}] d\xi = A_{K \rightarrow L}(v, w), \quad (3.38)$$

$$a_{K \rightarrow L}(\xi, v, v) = a_{K \rightarrow L}^*(\xi) \mathbf{1}_{v > \xi}, \quad (3.39)$$

for all $\xi, v, w \in \mathbb{R}$, where $a_{K \rightarrow L}^*$ is defined by (3.30). Before we prove the existence of the kinetic formulation (3.35)-(3.36)-(3.38)-(3.39), see Proposition 58, let us first deduce from (3.35) the kinetic formulation of the whole scheme (3.22). This is the equation

$$\begin{aligned} & |K|(\mathbf{f}_K^{n+1}(\xi) - \mathbf{f}_K^n(\xi)) + \Delta t_n \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}^n(\xi) \\ &= |K| \Delta t_n \partial_\xi m_K^n(\xi) + |K| \left[\mathbf{f}_K^{n+1}(\xi) - \mathbf{f}_K^{n+1/2}(\xi) \right]. \end{aligned} \quad (3.40)$$

We may try to develop the term $\mathbf{f}_K^{n+1}(\xi) - \mathbf{f}_K^{n+1/2}(\xi)$ (this is done in (3.116) to obtain (3.112)), but (3.40) will be sufficient for the moment. It will be sufficient in particular to obtain the so-called energy estimates of Section 3.1.5.

Proposition 58 (Kinetic formulation of the Finite Volume method). *Set*

$$a_{K \rightarrow L}(\xi, v, w) = a_{K \rightarrow L}^*(\xi) \mathbf{1}_{\xi < v \wedge w} + [\partial_2 A_{K \rightarrow L}(v, \xi) \mathbf{1}_{v \leq \xi \leq w} + \partial_1 A_{K \rightarrow L}(\xi, w) \mathbf{1}_{w \leq \xi \leq v}] \quad (3.41)$$

and

$$m_K^n(\xi) = -\frac{1}{\Delta t_n} \left[(v_K^{n+1/2} - \xi)^+ - (v_K^n - \xi)^+ \right] - \frac{1}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{\xi}^{+\infty} a_{K \rightarrow L}^n(\zeta) d\zeta. \quad (3.42)$$

Let us also assume that

$$\Delta t_n \frac{|\partial K|}{|K|} L_A \leq 1, \quad \forall K \in \mathcal{T}, \quad (3.43)$$

for all $n \in \mathbb{N}$, $K \in \mathcal{T}$. Then the equations (3.35)-(3.36)-(3.38)-(3.39) are satisfied and, besides, we have

$$a_{K \rightarrow L}(\xi, v, w) = 0, \quad \text{when } \xi \geq v \vee w, \quad (3.44)$$

for all $K, L \in \mathcal{T}$.

Remark 59 (Support of m_K^n). By (3.42), the definition (3.41) of $a_{K \rightarrow L}$ and the equation (3.34), $\xi \mapsto m_K^n(\xi)$ is compactly supported in the convex envelope of

$v_K^{n+1/2}, v_K^n, \{v_L^n; L \in \mathcal{N}(K)\}$.

Proof of Proposition 58. We check at once (3.35) and (3.38), (3.39), (3.44). To show that $m_K^n(\xi) \geq 0$, let us introduce

$$\Phi_{K \rightarrow L}(\xi, v, w) = \int_{\xi}^{+\infty} a_{K \rightarrow L}(\zeta, v, w) d\zeta \quad (3.45)$$

$$\Phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) = \Phi_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) = \int_{\xi}^{+\infty} a_{K \rightarrow L}^n(\zeta) d\zeta. \quad (3.46)$$

A simple computation gives the formula

$$\Phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) = A_{K \rightarrow L}(v_K^n, v_L^n) - A_{K \rightarrow L}(v_K^n \wedge \xi, v_L^n \wedge \xi). \quad (3.47)$$

By comparison with the identity $(v - \xi)^+ = v - v \wedge \xi$, the quantities $\Phi_{K \rightarrow L}^n(\xi)$ appears, in virtue of (3.47), as the numerical entropy fluxes associated to the entropy $\eta(v) := (v - \xi)^+$. Then $m_K^n(\xi) \geq 0$ is equivalent to the discrete entropy inequality

$$\frac{1}{\Delta t_n} [\eta(v_K^{n+1/2}) - \eta(v_K^n)] + \frac{1}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \Phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) \leq 0. \quad (3.48)$$

It is a classical fact that, under the CFL condition (3.43), the deterministic Finite Volume scheme (3.34) has the following monotonicity property : $v_K^{n+1/2}$ in (3.34) is a non-decreasing function of each of the entries $v_K^n, v_L^n, L \in \mathcal{N}(K)$. This implies (3.48) then. See Lemma 25.1 and Lemma 27.1 in [EGH03]. \square

3.1.5 Energy estimates

The Finite Volume scheme (3.22) may be compared to the stochastic parabolic equation

$$du^\varepsilon(x, t) + \operatorname{div}(A(u^\varepsilon(x, t)))dt - \varepsilon \Delta u^\varepsilon(x, t)dt = \Phi(x, u^\varepsilon(x, t))dW(t). \quad (3.49)$$

For (3.49), we have the energy estimate

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathbb{E} \|u^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 + \varepsilon \mathbb{E} \|\nabla u^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 = \frac{1}{2} \mathbb{E} \|\mathbf{G}(\cdot, u^\varepsilon(\cdot, t))\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2. \quad (3.50)$$

(Recall that \mathbf{G} is defined by (3.2)). In the following Proposition 60, we obtain an analogous result for the Finite Volume scheme (3.22). To state Proposition 60, we need first some notations.

3.1.5.1 Notations

For a fixed final time $T > 0$, we denote by \mathfrak{d}_T the set of admissible space-step and time-steps, defined as follows : if $h > 0$ and $(\Delta t) = (\Delta t_0, \dots, \Delta t_{N_T-1})$, $N_T \in \mathbb{N}^*$, then we say that $\delta := (h, (\Delta t)) \in \mathfrak{d}_T$ if

$$\frac{1}{h} \in \mathbb{N}^*, \quad t_{N_T} := \sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t_n = T, \quad \sup_{0 \leq n < N_T} \Delta t_n \leq 1. \quad (3.51)$$

We say that $\delta \rightarrow 0$ if

$$|\delta| := h + \sup_{0 \leq n < N_T} \Delta t_n \rightarrow 0. \quad (3.52)$$

For a given mesh parameter $\delta = (h, (\Delta t)) \in \mathfrak{d}_T$, we assume that a mesh \mathcal{T} is given, with the following properties :

$$\text{diam}(K) \leq h, \quad (3.53)$$

$$\alpha_N h^N \leq |K|, \quad (3.54)$$

$$|\partial K| \leq \frac{1}{\alpha_N} h^{N-1}, \quad (3.55)$$

for all $K \in \mathcal{T}$, where

$$\text{diam}(K) = \max_{x, y \in K} |x - y|$$

is the diameter of K and α_N is a given positive absolute constant depending on the dimension N only. Note the following consequence of (3.54)-(3.55) :

$$h|\partial K| \leq \frac{1}{\alpha_N^2} |K|, \quad (3.56)$$

for all $K \in \mathcal{T}$. We introduce then the discrete unknown $v_\delta(t)$ defined a.e. by

$$v_\delta(x, t) = v_K^n, \quad x \in K, t_n \leq t < t_{n+1}. \quad (3.57)$$

We will also need the intermediary discrete function

$$v_\delta^\flat(x, t_{n+1}) = v_K^{n+1/2}, \quad x \in K, \quad (3.58)$$

defined for $n \in \mathbb{N}$. Let us define the conjugate function $\bar{f} = 1 - f$. We introduce the following conjugate quantities :

$$\bar{a}_{K \rightarrow L}(\xi, v, w) = a_{K \rightarrow L}^*(\xi) - a_{K \rightarrow L}(\xi, v, w), \quad \bar{\Phi}_{K \rightarrow L}(\xi, v, w) = \int_{-\infty}^{\xi} \bar{a}_{K \rightarrow L}(\zeta, v, w) d\zeta. \quad (3.59)$$

We compute

$$\bar{\Phi}_{K \rightarrow L}(\xi, v, w) = A_{K \rightarrow L}(\xi, \xi) - A_{K \rightarrow L}(v \wedge \xi, w \wedge \xi). \quad (3.60)$$

We recognize in (3.60) a numerical flux associated to the entropy

$$v \mapsto (v - \xi)^- = \xi - v \wedge \xi.$$

From the explicit formula (3.41), we obtain the identity

$$\begin{aligned} \bar{a}_{K \rightarrow L}(\xi, v, w) &= a_{K \rightarrow L}^*(\xi) \mathbf{1}_{\xi > v \vee w} + (a_{K \rightarrow L}^*(\xi) - \partial_2 A_{K \rightarrow L}(v, \xi)) \mathbf{1}_{v \leq \xi \leq w} \\ &\quad + (a_{K \rightarrow L}^*(\xi) - \partial_1 A_{K \rightarrow L}(\xi, w)) \mathbf{1}_{w \leq \xi \leq v}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Note that, for $a_{K \rightarrow L}$ defined by (3.41), we have (using the fact that $\text{Lip}(A) \leq L_A$),

$$\sup\{|a_{K \rightarrow L}(\xi, v, w)|; \xi, v, w \in \mathbb{R}\} \leq L_A |K|L. \quad (3.62)$$

Formula (3.61) gives the estimate

$$\sup\{|\bar{a}_{K \rightarrow L}(\xi, v, w)|; \xi, v, w \in \mathbb{R}\} \leq 2L_A |K|L, \quad (3.63)$$

which is not optimal as (3.62) may be, since it has an additional factor 2. Consequently, we will use a slightly different formulation for $\bar{\Phi}_{K \rightarrow L}$:

$$\bar{\Phi}_{K \rightarrow L}(\xi, v, w) = \int_{-\infty}^{\xi} \bar{b}_{K \rightarrow L}(\zeta, \xi, v, w) d\zeta, \quad (3.64)$$

where

$$\bar{b}_{K \rightarrow L}(\zeta, \xi, v, w) := a_{K \rightarrow L}^*(\xi) \mathbf{1}_{\xi > v \vee w} + \partial_1 A_{K \rightarrow L}(\zeta, \xi) \mathbf{1}_{v \leq \xi \leq w} + \partial_2 A_{K \rightarrow L}(\xi, \zeta) \mathbf{1}_{w \leq \xi \leq v}. \quad (3.65)$$

We also introduce

$$\bar{b}_{K \rightarrow L}^n(\zeta, \xi) = \bar{b}_{K \rightarrow L}(\zeta, \xi, v_K^n, v_L^n). \quad (3.66)$$

Now for $\bar{b}_{K \rightarrow L}$, we have an estimate similar to (3.62) :

$$\sup\{|\bar{b}_{K \rightarrow L}(\xi, v, w)|; \xi, \zeta, v, w \in \mathbb{R}\} \leq L_A |K|L. \quad (3.67)$$

3.1.5.2 Energy estimate and controls by the dissipation

Proposition 60 (Energy estimate for the Finite Volume Scheme). *Let $u_0 \in L^\infty(\mathbb{T})$, $T > 0$ and $\delta \in \mathfrak{D}_T$. Let $(v_\delta(t))$ be the numerical unknown defined by*

(3.22)-(3.23)-(3.57). Set

$$\mathcal{E}(T) = \sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \int_{\mathbb{R}} m_K^n(\xi) d\xi. \quad (3.68)$$

Then, under the CFL condition (3.43), we have the energy estimate

$$\frac{1}{2} \mathbb{E} \|v_\delta(T)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 + \mathbb{E} \mathcal{E}(T) = \frac{1}{2} \|v_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 + \frac{1}{2} \mathbb{E} \sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \sum_{k \geq 1} |g_{k,K}(v_K^n)|^2. \quad (3.69)$$

In the following proposition we derive various estimates, where the right-hand side is controlled by the dissipation term $\mathcal{E}(T)$ introduced in (3.68).

Proposition 61 (Control by the dissipation). *Let $u_0 \in L^\infty(\mathbb{T}^N)$, $T > 0$ and $\delta \in \mathfrak{d}_T$. Let $(v_\delta(t))$ be the numerical unknown defined by (3.22)-(3.23)-(3.57). Let v_δ^b be defined by (3.58). Then, under the CFL condition*

$$2\Delta t_n \frac{|\partial K|}{|K|} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{|a_{K \rightarrow L}^n(\xi)|}{|K| |L|} \leq (1 - \theta), \quad 0 \leq n < N, \quad K, L \in \mathcal{T}, \quad (3.70)$$

where $\theta \in (0, 1)$, we have the following control :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{\mathbb{R}} (\bar{f}_L^n - \bar{f}_K^n) \Phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi \\ \leq \frac{2}{\theta} \sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \int_{\mathbb{R}} \bar{f}_K^n(\xi) m_K^n(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (3.71)$$

and

$$\sum_{n=0}^{N_T-1} \left\| \left[v_\delta^b(t_{n+1}) - v_\delta(t_n) \right]_+ \right\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 \leq \frac{2}{\theta} \sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \int_{\mathbb{R}} \bar{f}_K^n(\xi) m_K^n(\xi) d\xi. \quad (3.72)$$

Under the CFL condition

$$2\Delta t_n \frac{|\partial K|}{|K|} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{|\bar{b}_{K \rightarrow L}^n(\xi, \xi)|}{|K| |L|} \leq (1 - \theta), \quad 0 \leq n < N, \quad K, L \in \mathcal{T}, \quad (3.73)$$

where $\theta \in (0, 1)$, (and where $\bar{b}_{K \rightarrow L}^n$ is defined by (3.66)) we have the following

control :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{\mathbb{R}} (\mathbf{f}_L^n - \mathbf{f}_K^n) \bar{\Phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi \\ \leq \frac{2}{\theta} \sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \int_{\mathbb{R}} \mathbf{f}_K^n(\xi) m_K^n(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (3.74)$$

and

$$\sum_{n=0}^{N_T-1} \left\| \left[v_\delta^b(t_{n+1}) - v_\delta(t_n) \right]_- \right\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 \leq \frac{2}{\theta} \sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \int_{\mathbb{R}} \mathbf{f}_K^n(\xi) m_K^n(\xi) d\xi. \quad (3.75)$$

Eventually, as a corollary to Proposition 61, we obtain the following estimates.

Corollary 62 (Weak derivative estimates). *Let $u_0 \in L^\infty(\mathbb{T}^N)$, $T > 0$ and $\delta \in \mathfrak{d}_T$. Assume that (3.4), (3.6), (3.19), (3.53), (3.54) and (3.55) are satisfied and that*

$$\Delta t_n \leq (1 - \theta) \frac{\alpha_N^2}{2L_A} h, \quad 0 \leq n < N_T, \quad (3.76)$$

where $\theta \in (0, 1)$. Let $(v_\delta(t))$ be the numerical unknown defined by (3.22)-(3.23)-(3.57). Let v_δ^b be defined by (3.58). Then we have the spatial estimate

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{\mathbb{R}} \left[(\bar{\mathbf{f}}_L^n - \bar{\mathbf{f}}_K^n) \Phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) + (\mathbf{f}_L^n - \mathbf{f}_K^n) \bar{\Phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi) \right] d\xi \\ \leq \frac{1}{\theta} \|v_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 + \frac{D_0 T}{\theta}, \end{aligned} \quad (3.77)$$

and the two following temporal estimates :

$$\mathbb{E} \sum_{n=0}^{N_T-1} \left\| v_\delta^b(t_{n+1}) - v_\delta(t_n) \right\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 \leq \frac{1}{\theta} \|v_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 + \frac{D_0 T}{\theta}, \quad (3.78)$$

and

$$\mathbb{E} \sum_{n=0}^{N_T-1} \|v_\delta(t_{n+1}) - v_\delta(t_n)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 \leq \frac{1}{\theta} \|v_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 + \frac{2D_0 T}{\theta}. \quad (3.79)$$

3.1.5.3 Proof of Proposition 60, Proposition 61, Corollary 62

Proof of Proposition 60. We multiply first (3.35) by ξ and sum the result over $K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N$ and $\xi \in \mathbb{R}$ to get the following balance equation

$$\frac{1}{2} \|v_\delta^b(t_{n+1})\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 + \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \int_{\mathbb{R}} m_K^n(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \|v_\delta(t_n)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2. \quad (3.80)$$

We have used Remark 59 to justify the integration by parts in the term with the measure m_K^n . The term

$$\sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}^n(\xi) \quad (3.81)$$

related to the flux term in (3.35) has vanished. Indeed, (3.81) is equal to

$$\frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}^n(\xi) + a_{L \rightarrow K}^n(\xi) \quad (3.82)$$

by relabelling of the indexes of summation. All the arguments in (3.82) cancel individually in virtue of the conservative symmetry property (3.21) of $A_{K \rightarrow L}(v, w)$. Indeed, one can check that $a_{K \rightarrow L}$ inherits this property, *i.e.*

$$a_{K \rightarrow L}(\xi, v, w) = -a_{L \rightarrow K}(\xi, w, v), \quad K, L \in \mathcal{T}, v, w \in \mathbb{R}, \quad (3.83)$$

thanks to the explicit formula (3.41). To obtain the equation for the balance of energy corresponding to the stochastic forcing, we use the equation

$$v_K^{n+1} = v_K^{n+1/2} + (\Delta t_n)^{1/2} g_{k,K}(v_K^n) X_k^{n+1}, \quad (3.84)$$

which follows from the equation of the scheme (3.22) and the definition of $v_K^{n+1/2}$ by (3.34). Taking the square of both sides of (3.84) and using the independence of X_k^{n+1} and $v_K^{n+1/2}$, we obtain the identity

$$\frac{1}{2} \mathbb{E} \|v_\delta(t_{n+1})\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 = \frac{1}{2} \mathbb{E} \|v_\delta^b(t_{n+1})\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 + \frac{\Delta t_n}{2} \mathbb{E} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \sum_{k \geq 1} |g_{k,K}(v_K^n)|^2. \quad (3.85)$$

Adding (3.80) to (3.85) gives (3.69). \square

Remark 63. Note that (3.84) also gives

$$\frac{1}{2} \mathbb{E} \|v_\delta(t_{n+1}) - v_\delta^b(t_{n+1})\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 = \frac{\Delta t_n}{2} \mathbb{E} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \sum_{k \geq 1} |g_{k,K}(v_K^n)|^2, \quad (3.86)$$

for all $0 \leq n \leq N_T$.

Proof of Proposition 61. We begin with the proof of the estimates (3.71) and (3.72). Multiplying Equation (3.35) by $\bar{\mathbf{f}}_K^n := 1 - \mathbf{f}_K^n$, we obtain

$$|K|\bar{\mathbf{f}}_K^n(\xi)\mathbf{f}_K^{n+1/2}(\xi) + \Delta t_n \bar{\mathbf{f}}_K^n(\xi) \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}^n(\xi) = |K|\Delta t_n \bar{\mathbf{f}}_K^n(\xi) \partial_\xi m_K^n(\xi). \quad (3.87)$$

Next, we multiply (3.87) by $(\xi - v_K^n)$ and sum the result over ξ, K . We use the first identity

$$\int_{\mathbb{R}} (\xi - v_K^n) \bar{\mathbf{f}}_K^n(\xi) \partial_\xi m_K^n(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} (\xi - v_K^n)_+ \partial_\xi m_K^n(\xi) d\xi = - \int_{\mathbb{R}} \bar{\mathbf{f}}_K^n(\xi) m_K^n(\xi) d\xi, \quad (3.88)$$

(once again, we use the fact that m_K^n is compactly supported to do the integration by parts in (3.88), cf. Remark 59) and the second identity

$$\int_{\mathbb{R}} (\xi - v_K^n) \bar{\mathbf{f}}_K^n(\xi) \mathbf{f}_K^{n+1/2}(\xi) d\xi = \frac{1}{2} (v_K^{n+1/2} - v_K^n)_+^2,$$

to obtain

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\| \left[v_\delta^b(t_{n+1}) - v_\delta(t_n) \right]_+ \right\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 + \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \int_{\mathbb{R}} \bar{\mathbf{f}}_K^n(\xi) m_K^n(\xi) d\xi \\ = -\Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{\mathbb{R}} (\xi - v_K^n)_+ a_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.89)$$

We transform the right-hand side of (3.89) by integration by parts in ξ : this gives, thanks to (3.45)-(3.46), the term

$$-\Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{\mathbb{R}} \bar{\mathbf{f}}_K^n(\xi) \Phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi. \quad (3.90)$$

Then we can relabel the indices in (3.90) and use the conservative symmetry relation (consequence of (3.83))

$$\Phi_{K \rightarrow L}(\xi, v, w) = -\Phi_{L \rightarrow K}(\xi, w, v), \quad (3.91)$$

to see that

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\| \left[v_\delta^b(t_{n+1}) - v_\delta(t_n) \right]_+ \right\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 + \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \int_{\mathbb{R}} \bar{\mathbf{f}}_K^n(\xi) m_K^n(\xi) d\xi \\ = \frac{1}{2} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{\mathbb{R}} (\bar{\mathbf{f}}_L^n(\xi) - \bar{\mathbf{f}}_K^n(\xi)) \Phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Note that the integrand $(\bar{\mathbf{f}}_L^n(\xi) - \bar{\mathbf{f}}_K^n(\xi)) \Phi_{K \rightarrow L}^n(\xi)$ is non-negative thanks to the monotonicity properties of $A_{K \rightarrow L}$ and (3.47). At this stage, in order to deduce

(3.71) from (3.92), we have to prove that, under the CFL condition (3.70), a fraction of the right-hand side of (3.92) controls the term

$$\frac{1}{2} \left\| \left[v_\delta^\flat(t_{n+1}) - v_\delta(t_n) \right]_+ \right\|_{L^2(\mathbb{T})}^2,$$

(see the estimate (3.97) below). To this end, we integrate Equation (3.87) over $\xi \in \mathbb{R}$. This gives

$$|K| \left[v_K^{n+1/2} - v_K^n \right]_+ + \Delta t_n \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{\mathbb{R}} \bar{\mathbf{f}}_K^n(\xi) a_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi \leq 0, \quad (3.93)$$

which reads also

$$|K| \left[v_K^{n+1/2} - v_K^n \right]_+ \leq -\Delta t_n \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \Phi_{K \rightarrow L}^n(v_K^n)$$

by (3.46) (note that it is also the discrete entropy inequality (3.48) with $\xi = v_K^n$). Taking the square, using the Cauchy-Schwarz Inequality and summing over $K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N$, we deduce that

$$\left\| \left[v_\delta^\flat(t_{n+1}) - v_\delta(t_n) \right]_+ \right\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 \leq \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \Delta t_n \frac{|\partial K|}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \frac{|\Phi_{K \rightarrow L}^n(v_K^n)|^2}{|K| |L|}. \quad (3.94)$$

Next, we note that $|\Phi_{K \rightarrow L}^n(v_K^n)|^2$ is non-trivial only if $v_K^n < v_L^n$. In that case, it can be decomposed as

$$|\Phi_{K \rightarrow L}^n(v_K^n)|^2 = -2 \int_{v_K^n}^{v_L^n} \Phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) \partial_\xi \Phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi = 2 \int_{v_K^n}^{v_L^n} \Phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) a_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi, \quad (3.95)$$

which is bounded by

$$2 \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |a_{K \rightarrow L}^n(\xi)| \int_{v_K^n}^{v_L^n} |\Phi_{K \rightarrow L}^n(\xi)| d\xi = 2 \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |a_{K \rightarrow L}^n(\xi)| \int_{\mathbb{R}} (\bar{\mathbf{f}}_L^n - \bar{\mathbf{f}}_K^n) \Phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi. \quad (3.96)$$

Under the CFL condition (3.70), the estimate (3.94) can be completed into

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\| \left[v_\delta^\flat(t_{n+1}) - v_\delta(t_n) \right]_+ \right\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 \\ & \leq (1 - \theta) \frac{1}{2} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{\mathbb{R}} (\bar{\mathbf{f}}_L^n(\xi) - \bar{\mathbf{f}}_K^n(\xi)) \Phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Using (3.92) then, we deduce the two estimates (3.71)-(3.72).

To prove the estimates (3.74) and (3.75), we proceed similarly : we start from the

following equation on $\bar{\mathbf{f}}_K^n$, which is equivalent to (3.35) :

$$|K|(\bar{\mathbf{f}}_K^{n+1/2}(\xi) - \bar{\mathbf{f}}_K^n(\xi)) + \Delta t_n \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \bar{a}_{K \rightarrow L}^n(\xi) = -|K| \Delta t_n \partial_\xi m_K^n(\xi). \quad (3.98)$$

Then we multiply Eq. (3.98) by \mathbf{f}_K^n , to obtain

$$|K| \mathbf{f}_K^n \bar{\mathbf{f}}_K^{n+1/2}(\xi) + \Delta t_n \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \mathbf{f}_K^n \bar{a}_{K \rightarrow L}^n(\xi) = -|K| \Delta t_n \mathbf{f}_K^n \partial_\xi m_K^n(\xi), \quad (3.99)$$

which is the analogue to (3.87). In a first step, we multiply (3.99) by $(v_K^n - \xi)$ and sum the result over $\xi \in \mathbb{R}$, $K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N$. This gives (compare to (3.89)-(3.92))

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\| [v_\delta^b(t_{n+1}) - v_\delta(t_n)]_- \right\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 &+ \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \int_{\mathbb{R}} \mathbf{f}_K^n(\xi) m_K^n(\xi) d\xi \\ &= -\Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \mathbf{f}_K^n \bar{\Phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi) \\ &= \frac{1}{2} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} (\mathbf{f}_L^n - \mathbf{f}_K^n) \bar{\Phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi). \end{aligned} \quad (3.100)$$

To conclude to (3.74)-(3.75) under the CFL condition (3.73), we proceed as in (3.93)-(3.97) above, with the minor difference that, instead of the identity $\partial_\xi \bar{\Phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi) = \bar{a}_{K \rightarrow L}^n(\xi)$, we use the formula $\partial_\xi \bar{\Phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi) = \bar{b}_{K \rightarrow L}^n(\xi, \xi)$ (see (3.66)) when we develop $|\bar{\Phi}_{K \rightarrow L}^n(v_K^n)|^2$. \square

Remark 64. A slight modification of the lines (3.95)-(3.96) in the proof above shows that

$$|\Phi_{K \rightarrow L}^n(\xi \vee v_K^n)|^2 \leq 2 \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |a_{K \rightarrow L}^n(\xi)| \int_{\mathbb{R}} (\bar{\mathbf{f}}_L^n - \bar{\mathbf{f}}_K^n) \bar{\Phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi, \quad (3.101)$$

for all $\xi \in \mathbb{R}$. This estimate will be used in the proof of Lemma 69 below.

Proof of Corollary 62. Assume that (3.76) is satisfied. It is clear, in virtue of the estimate (3.56) and the bound (3.62) and (3.67) on $a_{K \rightarrow L}^n$ and $\bar{b}_{K \rightarrow L}^n$, that (3.76) implies the CFL conditions (3.70) and (3.73). Besides, due to (3.27), we have the bound

$$\sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \sum_{k \geq 1} |g_{k,K}(v_K^n)|^2 \leq D_0. \quad (3.102)$$

This gives

$$\sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \sum_{k \geq 1} |g_{k,K}(v_K^n)|^2 \leq D_0 T,$$

which, inserted in the energy estimate (3.69), shows that

$$\mathbb{E}\mathcal{E}(T) \leq \frac{1}{2}\|v_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 + \frac{1}{2}D_0T.$$

By addition of the estimates (3.71)-(3.74) and (3.72)-(3.75) respectively, we obtain therefore (3.77) and (3.78). There remains to prove (3.79). For that purpose, we use (3.86) and (3.102) to obtain

$$\mathbb{E}\|v_\delta(t_{n+1}) - v_\delta^b(t_{n+1})\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 = \mathbb{E}\|v_\delta(t_{n+1})\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 - \mathbb{E}\|v_\delta^b(t_{n+1})\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 \leq D_0\Delta t_n. \quad (3.103)$$

Summing (3.103) over $0 \leq n < N_T$ and using (3.78) yields (3.79). \square

3.1.6 Approximate kinetic equation

3.1.6.1 Discrete unknown

In this section we will show that, when $\delta \rightarrow 0$, some discrete kinetic unknowns f_δ associated to the scheme (3.22) are approximate kinetic solutions. There may be several ways to define f_δ : it depends for example on the manner in which the discrete data f_K^n are assembled by interpolation. One of the constraints due to our definition of approximate kinetic solution is the formulation “at fixed t ” (3.15) (in opposition to a formulation which would be weak in time). To establish such a formulation in our context, a minimal amount of regularity of the function $t \mapsto f_\delta(t)$ is required (in particular, for all φ , $\langle f_\delta(t), \varphi \rangle$ should be a càdlàg process). For $t \in [t_n, t_{n+1})$, we will therefore consider the function $f_\delta(t)$ defined as the interpolation

$$f_\delta(x, t, \xi) = \frac{t - t_n}{\Delta t_n} \mathbf{1}_{v_\delta^\sharp(x, t) > \xi} + \frac{t_{n+1} - t}{\Delta t_n} \mathbf{1}_{v_\delta(x, t) > \xi}, \quad \xi \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{T}^N \quad (3.104)$$

where $v_\delta^\sharp(x, t)$ is given by

$$v_\delta^\sharp(x, t) = v_K^{n+1/2} + g_{k,K}(v_K^n)(\beta_k(t) - \beta_k(t_n)), \quad t_n \leq t < t_{n+1}, x \in K. \quad (3.105)$$

We set $v_K^\sharp(t) = v_\delta^\sharp(x, t)$, $x \in K$. Then, for $t \in [t_n, t_{n+1})$, $t \mapsto v_K^\sharp(t)$ is itself an interpolation between $v_K^{n+1/2}$ and v_K^{n+1} . We also denote by \mathbf{f}_δ the piecewise constant function

$$\mathbf{f}_\delta(x, t, \xi) = \mathbf{f}_K^n = \mathbf{1}_{v_\delta(x, t) > \xi}, \quad x \in K, t \in [t_n, t_{n+1}). \quad (3.106)$$

We check first that f_δ and \mathbf{f}_δ are close to each other.

Lemma 65. *Let $u_0 \in L^\infty(\mathbb{T}^N)$, $T > 0$. Assume that (3.3), (3.4), (3.6), (3.19), and (3.76) are satisfied. For $\delta \in \mathfrak{D}_T$, assume (3.54) and (3.55). Let $(v_\delta(t))$ be*

the numerical unknown defined by (3.22)-(3.23)-(3.57) and let $f_\delta, \mathbf{f}_\delta$ be defined by (3.104)-(3.106). Then

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \left| \int_{\mathbb{R}} |f_\delta(x, t, \xi) - \mathbf{f}_\delta(x, t, \xi)| d\xi \right|^2 dx dt \\ \leq \left[\theta^{-1} \|v_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 + D_0 T (1 + \theta^{-1}) \right] \left[\sup_{0 \leq n < N_T} \Delta t_n \right]. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Proof of Lemma 65. Since

$$f_\delta(t) - \mathbf{f}_\delta(t) = \frac{t - t_n}{\Delta t_n} (\mathbf{1}_{v_\delta^\sharp(t) > \xi} - \mathbf{1}_{v_\delta(t) > \xi}),$$

for $t \in [t_n, t_{n+1})$ and since the factor $\frac{t-t_n}{\Delta t_n}$ is less than 1, the quantity we want to estimate is bounded by the following L^2 -norm :

$$\mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \left| \int_{\mathbb{R}} |f_\delta(x, t, \xi) - \mathbf{f}_\delta(x, t, \xi)| d\xi \right|^2 dx dt \leq \mathbb{E} \int_0^T \|v_\delta^\sharp(t) - v_\delta(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 dt. \quad (3.108)$$

By definition of $v_\delta^\sharp(t)$ and independence and (3.27), we obtain

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \left| \int_{\mathbb{R}} |f_\delta(x, t, \xi) - \mathbf{f}_\delta(x, t, \xi)| d\xi \right|^2 dx dt \leq D_0 \sum_{n=0}^{N_T-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} |t - t_n| dt \\ + \mathbb{E} \sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t_n \|v_\delta^\flat(t_{n+1}) - v_\delta(t_n)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2. \end{aligned}$$

Using the temporal estimate (3.78), we deduce (3.107). \square

Remark 66. Note for a future use (cf. (3.149)) that we have just proved the estimate

$$\mathbb{E} \int_0^T \|v_\delta^\sharp(t) - v_\delta(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 dt \leq \left[\theta^{-1} \|v_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 + D_0 T (1 + \theta^{-1}) \right] \left[\sup_{0 \leq n < N_T} \Delta t_n \right] \quad (3.109)$$

To f_δ we will associate the Young measure

$$\nu_{x,t}^\delta(\xi) := -\partial_\xi f_\delta(x, t, \xi) = \frac{t - t_n}{\Delta t_n} \delta(\xi = v_\delta^\sharp(x, t)) + \frac{t_{n+1} - t}{\Delta t_n} \delta(\xi = v_\delta(x, t)), \quad (3.110)$$

We also denote by m_δ the discrete random measure given by

$$dm_\delta(x, t, \xi) = \sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{K \in \mathcal{T}} \mathbf{1}_{K \times [t_n, t_{n+1})}(x, t) m_K^n(\xi) dx dt d\xi. \quad (3.111)$$

Recall the definitions (3.51)-(3.52) (definition of the set of mesh parameter \mathfrak{d}_T in particular), that we will use in all the section.

Proposition 67 (Discrete kinetic equation). *Let $u_0 \in L^\infty(\mathbb{T}^N)$, $T > 0$. Assume that (3.3), (3.4), (3.6), (3.19) and (3.76) are satisfied. For $\delta \in \mathfrak{d}_T$, assume (3.54) and (3.55). Let $(v_\delta(t))$ be the numerical unknown defined by (3.22)-(3.23)-(3.57) and let f_δ , ν^δ , m_δ be defined by (3.104), (3.110), (3.111) respectively. Then f_δ satisfies the following discrete kinetic formulation : for all $t \in [t_n, t_{n+1}]$, $x \in K$, for all $\psi \in C_c^1(\mathbb{R})$,*

$$\begin{aligned} & \langle f_\delta(x, t), \psi \rangle - \langle f_\delta(x, t_n), \psi \rangle \\ &= -\frac{1}{|K|} \int_{t_n}^t \int_{\mathbb{R}} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}^n(\xi) \psi(\xi) d\xi ds - \int_{t_n}^t \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi \psi(\xi) m_K^n(\xi) d\xi ds \\ &+ \frac{t - t_n}{\Delta t_n} \int_{t_n}^t g_{k,K}(v_K^n) \psi(v_\delta^\sharp(x, s)) d\beta_k(s) + \frac{1}{2} \frac{t - t_n}{\Delta t_n} \int_{t_n}^t \mathbf{G}_K^2(v_K^n) \partial_\xi \psi(v_\delta^\sharp(x, s)) ds. \end{aligned} \quad (3.112)$$

In (3.112), $\langle f_\delta(x, t), \psi \rangle$ stands for the product

$$\int_{\mathbb{R}} f_\delta(x, t, \xi) \psi(\xi) d\xi.$$

Proof of Proposition 67. Let Ψ be a primitive of ψ and let $x \in K$, $t \in [t_n, t_{n+1})$. By definition of f_δ , see Equation (3.104), we have

$$\langle f_\delta(x, t), \psi \rangle - \langle f_\delta(x, t_n), \psi \rangle = \frac{t - t_n}{\Delta t_n} \left[\Psi(v^\sharp(x, t)) - \Psi(v_\delta(x, t)) \right],$$

which we decompose as the sum of two terms :

$$\frac{t - t_n}{\Delta t_n} \left[\Psi(v^\sharp(x, t)) - \Psi(v^\flat(x, t_{n+1})) \right], \quad (3.113)$$

and

$$\frac{t - t_n}{\Delta t_n} \left[\Psi(v^\flat(x, t_{n+1})) - \Psi(v_\delta(x, t)) \right]. \quad (3.114)$$

We use first the deterministic kinetic formulation (3.35), which we multiply by $\psi(\xi)$. By integration over $\xi \in \mathbb{R}$, it gives

$$(3.114) = -\frac{1}{|K|} \int_{t_n}^t \int_{\mathbb{R}} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}^n(\xi) \psi(\xi) d\xi ds - \int_{t_n}^t \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi \psi(\xi) m_K^n(\xi) d\xi ds. \quad (3.115)$$

By Itô's Formula on the other hand (cf. (3.105)), the term (3.113) is equal to

$$\frac{t - t_n}{\Delta t_n} \int_{t_n}^t g_{k,K}(v_K^n) \psi(v_\delta^\sharp(x, s)) d\beta_k(s) + \frac{1}{2} \frac{t - t_n}{\Delta t_n} \int_{t_n}^t \mathbf{G}_K^2(v_K^n) \partial_\xi \psi(v_\delta^\sharp(x, s)) ds. \quad (3.116)$$

Summing (3.115) and (3.116), we obtain (3.112). \square

We will prove now that the Finite Volume scheme (3.22) is consistent with (3.1). Indeed, we will show, thanks to the estimates obtained in Section 3.1.5, that an approximate kinetic equation for f_δ in the sense of (3.15) can be deduced from the discrete kinetic formulation (3.112).

Proposition 68 (Approximate kinetic equation). *Let $u_0 \in L^\infty(\mathbb{T}^N)$, $T > 0$. Assume that (3.3), (3.4), (3.6), (3.19) and (3.76) are satisfied. For $\delta \in \mathfrak{d}_T$, assume (3.54) and (3.55). Let $(v_\delta(t))$ be the numerical unknown defined by (3.22)-(3.23)-(3.57) and let $f_\delta, \nu^\delta, m_\delta$ be defined by (3.104), (3.110), (3.111) respectively. If (δ_m) is a sequence in \mathfrak{d}_T which tends to zero according to (3.52), then (f_{δ_m}) is a sequence of approximate solutions to (3.1) of order $d = 2$. Besides, $(f_{\delta_m}(0))$ converges to the equilibrium function $\mathbf{f}_0 = \mathbf{1}_{u_0 > \xi}$ in $L^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ -weak-**.

Proof of Proposition 68. The last assertion is clear : $(f_{\delta_m}(0))$ converges to the equilibrium function $\mathbf{f}_0 = \mathbf{1}_{u_0 > \xi}$ in $L^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ -weak-* since, by (3.23), $v^{\delta_m}(0) \rightarrow u_0$ a.e. on \mathbb{T}^N . We will show for all $t \in [0, T]$, for all $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, the equality called

$$(3.117)$$

$$\begin{aligned} \langle f_\delta(t), \varphi \rangle &= \langle f_\delta(0), \varphi \rangle - \iiint_{\mathbb{T}^N \times [0, t] \times \mathbb{R}} \partial_\xi \varphi(x, \xi) dm_\delta(x, s, \xi) + \varepsilon^\delta(t, \varphi) \\ &\quad + \int_0^t \langle f_\delta(s), a(\xi) \nabla_x \varphi \rangle ds \end{aligned} \quad (3.118)$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} g_k(x, \xi) \varphi(x, \xi) d\nu_{x,s}^\delta(\xi) dx d\beta_k(s) \quad (3.119)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{G}^2(x, \xi) \partial_\xi \varphi(x, \xi) d\nu_{x,s}^\delta(\xi) dx ds, \quad (3.120)$$

where the error term $\varepsilon^\delta(t, \varphi)$ satisfies

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |\varepsilon^\delta(t, \varphi)|^2 \right] = 0, \quad (3.121)$$

for all $\varphi \in C_c^2(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$. Note that the convergence in probability (3.14) follows from (3.121). Given $\varphi \in C_c^2(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, we introduce the averages over the cells $K \in \mathcal{T}$

$$\varphi_K(\xi) = \frac{1}{|K|} \int_{|K|} \varphi(x, \xi) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (3.122)$$

To prove (3.117), we apply the discrete kinetic equation (3.112) to $\xi \mapsto \varphi(x, \xi)$ for a fixed $x \in K$. Then we sum the result over $x \in \mathbb{T}^N$. By the telescopic formula

$$\langle f_\delta(x, t), \varphi \rangle - \langle f_\delta(x, 0), \varphi \rangle = \sum_{n=0}^{N_T-1} \langle f_\delta(x, t \wedge t_{n+1}), \varphi \rangle - \langle f_\delta(x, t \wedge t_n), \varphi \rangle,$$

we obtain

$$\begin{aligned} \langle f_\delta(t), \varphi \rangle &= \langle f_\delta(x, 0), \varphi \rangle - \iiint_{\mathbb{T}^N \times [0, t] \times \mathbb{R}} \partial_\xi \varphi(\xi) dm_\delta(x, s, \xi) \\ &\quad - \sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_{t \wedge t_n}^{t \wedge t_{n+1}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}^n(\xi) \varphi_K(\xi) ds d\xi \end{aligned} \quad (3.123)$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} g_{k, \delta}(x, \xi) \varphi(x, \zeta) d\mu_{x, s, t}^\delta(\xi, \zeta) d\beta_k(s) \quad (3.124)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \mathbf{G}_\delta^2(x, \xi) \partial_\xi \varphi(x, \zeta) d\mu_{x, s, t}^\delta(\xi, \zeta) ds, \quad (3.125)$$

where the measure $\mu_{x, s, t}^\delta$ on $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ is defined by

$$\langle \mu_{x, s, t}^\delta, \psi \rangle = \sum_{n=0}^{N_T-1} \frac{t \wedge t_{n+1} - t \wedge t_n}{\Delta t_n} \mathbf{1}_{[t_n, t_{n+1})}(s) \psi(v_\delta(x, s), v_\delta^\sharp(x, s)), \quad \psi \in C_b(\mathbb{R}^2), \quad (3.126)$$

and the discrete coefficient $g_{k, \delta}(x, \xi)$ is equal to $g_{k, K}(\xi)$ (cf. (3.26)) when $x \in K$ (similarly, $\mathbf{G}_\delta(x, \xi) := \mathbf{G}_K(\xi)$, $x \in K$). Note that $\mu_{x, s, t}^\delta$ is simply the Dirac mass at $(v_\delta(x, s), v_\delta^\sharp(x, s))$, except when $t_l \leq s \leq t$ (where l is the index such that $t_l \leq t < t_{l+1}$), in which case it is the same Dirac mass, with an additional multiplicative factor $\frac{t-t_l}{\Delta t_l}$.

The term (3.123) is a discrete space derivative : we will show that it is an approximation of the term (3.118). The two terms (3.124) and (3.125) are close to (3.119) and (3.120) respectively. We analyse those terms separately (see Section 3.1.6.2, Section 3.1.6.3). The conclusion of the proof of Proposition 68 is given in Section 3.1.6.4.

3.1.6.2 Space consistency

Lemma 69. *Let $u_0 \in L^\infty(\mathbb{T}^N)$, $T > 0$ and $\delta \in \mathfrak{D}_T$. Assume that (3.4), (3.6), (3.19), (3.54), (3.55) and (3.76) are satisfied. Then, for all $\varphi \in C_c^2(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, we*

have

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{T}^N} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} a(\xi) \cdot \nabla_x \varphi f_\delta(s) dx ds d\xi \\
&= - \sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_{t \wedge t_n}^{t \wedge t_{n+1}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}^n(\xi) \varphi_K(\xi) d\xi + \varepsilon_{\text{space},0}^\delta(t, \varphi) + \varepsilon_{\text{space},1}^\delta(t, \varphi),
\end{aligned} \tag{3.127}$$

for all $t \in [0, T]$, with the estimates

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} |\varepsilon_{\text{space},0}^\delta(t, \varphi)|^2 \\
& \leq T |L_A|^2 \|\nabla_x \varphi\|_{L_{x,\xi}^\infty}^2 \left[\frac{1}{\theta} \|v_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 + D_0 T \left(1 + \frac{1}{\theta}\right) \right] \sup_{0 \leq n < N_T} \Delta t_n,
\end{aligned} \tag{3.128}$$

and, for all compact $\Lambda \subset \mathbb{R}$, for all $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ supported in $\mathbb{T}^N \times \Lambda$,

$$\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} |\varepsilon_{\text{space},1}^\delta(t, \varphi)|^2 \leq \frac{16L_A T}{\alpha_N^2} |\Lambda|^2 \|\partial_\xi \nabla_x \varphi\|_{L_{x,\xi}^\infty}^2 \left[\frac{1}{\theta} \|v_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 + \frac{2D_0 T}{\theta} \right] h. \tag{3.129}$$

Proof of Lemma 69. To begin with, we replace f_δ by \mathbf{f}_δ in the left-hand side of (3.127). This accounts for the first error term

$$\varepsilon_{\text{space},0}^\delta(t, \varphi) = \int_{\mathbb{T}^N} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} a(\xi) \cdot \nabla_x \varphi (f_\delta(s) - \mathbf{f}_\delta(s)) dx ds d\xi.$$

Thanks to Lemma 65, we have the estimate (3.128) for $\varepsilon_{\text{space},0}^\delta(t, \varphi)$. Then, we use the following development :

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{T}^N} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} a(\xi) \cdot \nabla_x \varphi \mathbf{f}_\delta(s) dx ds d\xi \\
&= \sum_{n=0}^{N_T-1} \int_{t \wedge t_n}^{t \wedge t_{n+1}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{K \in \mathcal{N}(K)} \int_K a(\xi) \cdot \nabla_x \varphi \mathbf{f}_\delta(s) dx ds d\xi,
\end{aligned} \tag{3.130}$$

Since $\mathbf{f}_\delta(s)$ has a constant value \mathbf{f}_K^n in $K \times [t_n, t_{n+1})$, we obtain, thanks to the Stokes formula,

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{T}^N} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} a(\xi) \cdot \nabla_x \varphi \mathbf{f}_\delta(s) dx ds d\xi \\
&= \sum_{n=0}^{N_T-1} \int_{t \wedge t_n}^{t \wedge t_{n+1}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{K \in \mathcal{N}(K)} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}^*(\xi) \varphi_{K|L} \mathbf{f}_K^n ds d\xi,
\end{aligned} \tag{3.131}$$

where $a_{K \rightarrow L}^*(\xi)$ is defined by (3.30) and $\varphi_{K|L}$ is the mean-value of φ over $K|L$:

$$\varphi_{K|L}(\xi) = \frac{1}{|K|L|} \int_{K|L} \varphi(x, \xi) d\mathcal{H}^{N-1}(x).$$

We add a corrective term to (3.131) to obtain

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}^N} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} a(\xi) \cdot \nabla_x \varphi \mathbf{f}_\delta(s) dx ds d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{N_T-1} \int_{t \wedge t_n}^{t \wedge t_{n+1}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{K \in \mathcal{N}(K)} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}^*(\xi) (\varphi_{K|L} - \varphi_K) \mathbf{f}_K^n ds d\xi. \end{aligned} \quad (3.132)$$

Equation (3.132) follows indeed from (3.131) by the anti-symmetry property (3.83) of $a_{K \rightarrow L}$. Note that Equation (3.132) is more natural than Equation (3.131) (when one has in mind the decomposition of a volume integral over each cell K), by use of the correspondence

$$a(\xi) \cdot \nabla_x \varphi \simeq \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}^*(\xi) (\varphi_{K|L} - \varphi_K) \text{ in } K.$$

By (3.83), the discrete convective term in (3.123) is

$$\sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_{t \wedge t_n}^{t \wedge t_{n+1}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}^n(\xi) (\varphi_{K|L} - \varphi_K) ds d\xi. \quad (3.133)$$

To estimate how close is the right-hand side of (3.132) to (3.133), we have to compare $a_{K \rightarrow L}^n(\xi)$ and $a_{K \rightarrow L}^*(\xi) \mathbf{f}_K^n(\xi)$. Let $\gamma \in W^{1,1}(\mathbb{R}_\xi)$. If $v_K^n \leq v_L^n$, then

$$\int_{\mathbb{R}} \gamma(\xi) [a_{K \rightarrow L}^*(\xi) \mathbf{f}_K^n(\xi) - a_{K \rightarrow L}^n(\xi)] d\xi = - \int_{\mathbb{R}} \gamma(\xi) \bar{\mathbf{f}}_K^n(\xi) a_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi \quad (3.134)$$

by the consistency hypothesis (3.39) and the support condition (3.44). Using an integration by parts and (3.45), we obtain

$$\int_{\mathbb{R}} \gamma(\xi) [a_{K \rightarrow L}^*(\xi) \mathbf{f}_K^n(\xi) - a_{K \rightarrow L}^n(\xi)] d\xi = \int_{\mathbb{R}} \gamma'(\xi) \Phi_{K \rightarrow L}^n(\xi \vee v_K^n) d\xi. \quad (3.135)$$

Similarly, if $v_L^n \leq v_K^n$, then

$$\int_{\mathbb{R}} \gamma(\xi) [a_{K \rightarrow L}^*(\xi) \mathbf{f}_K^n(\xi) - a_{K \rightarrow L}^n(\xi)] d\xi = - \int_{\mathbb{R}} \gamma'(\xi) \bar{\Phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi \wedge v_K^n) d\xi. \quad (3.136)$$

We deduce that (3.127) is satisfied with an error term

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{space},1}^\delta(t, \varphi) &:= \int_{\mathbb{T}^N} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} a(\xi) \cdot \nabla_x \varphi \mathbf{f}_\delta(s) dx ds d\xi \\ &\quad + \sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_{t \wedge t_n}^{t \wedge t_{n+1}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}^n(\xi) \varphi_K(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (3.137)$$

which is bounded as follows :

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{\text{space},1}^\delta(t, \varphi)| &\leq \sum_{n=0}^{N_T-1} \int_{t \wedge t_n}^{t \wedge t_{n+1}} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_{\mathbb{R}} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} |\partial_\xi \varphi_{K|L} - \partial_\xi \varphi_K| \\ &\quad \times \left[\mathbf{1}_{v_K^n \leq v_L^n} |\Phi_{K \rightarrow L}^n(\xi \vee v_K^n)| + \mathbf{1}_{v_L^n < v_K^n} |\overline{\Phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi \wedge v_K^n)| \right] d\xi, \end{aligned} \quad (3.138)$$

By (3.53), we have

$$|\partial_\xi \varphi_{K|L}(\xi) - \partial_\xi \varphi_K(\xi)| \leq \|\partial_\xi \nabla_x \varphi(\cdot, \xi)\|_{L_x^\infty} h,$$

for all $\xi \in \mathbb{R}$. If φ is compactly supported in $\mathbb{T}^N \times \Lambda$, we obtain thus the bound

$$|\varepsilon_{\text{space},1}^\delta(t, \varphi)| \leq \|\partial_\xi \nabla_x \varphi\|_{L_{x,\xi}^\infty} |\Lambda| B_{\text{space}} h, \quad (3.139)$$

where B_{space} is equal to

$$\sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \left[\mathbf{1}_{v_K^n \leq v_L^n} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\Phi_{K \rightarrow L}^n(\xi \vee v_K^n)| + \mathbf{1}_{v_L^n < v_K^n} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\overline{\Phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi \wedge v_K^n)| \right].$$

We seek for a bound of order $h^{-1/2}$ on B_{space} . For notational convenience we will estimate only the first part

$$B_{\text{space}}^1 := \sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \mathbf{1}_{v_K^n \leq v_L^n} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\Phi_{K \rightarrow L}^n(\xi \vee v_K^n)|,$$

since the bound on the second part in B_{space} will be similar. By the Cauchy Schwarz inequality, we have

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|B_{\text{space}}^1|^2 &\leq \sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |\partial K| \\ &\quad \times \mathbb{E} \sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \frac{\mathbf{1}_{v_K^n \leq v_L^n}}{|K| |L|} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\Phi_{K \rightarrow L}^n(\xi \vee v_K^n)|^2. \end{aligned}$$

We use the estimate (3.101), which gives

$$|\Phi_{K \rightarrow L}^n(\xi \vee v_K^n)|^2 \leq 2L_A |K| |L| \int_{\mathbb{R}} (\bar{\mathbf{f}}_L^n - \bar{\mathbf{f}}_K^n) \Phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi,$$

thanks to (3.62). We also use (3.56), and get

$$\mathbb{E} |B_{\text{space}}^1|^2 \leq \frac{2L_A T}{\alpha_N^2 h} \mathbb{E} \sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{\mathbb{R}} (\bar{\mathbf{f}}_L^n - \bar{\mathbf{f}}_K^n) \Phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi.$$

With (3.77) and (3.139), we conclude to (3.129). \square

3.1.6.3 Stochastic terms

Lemma 70. *Let $u_0 \in L^\infty(\mathbb{T}^N)$, $T > 0$ and $\delta \in \mathfrak{D}_T$. Assume that (3.4), (3.6), (3.19) and (3.76) are satisfied. Then, for all $\varphi \in C_c^2(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, we have*

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} g_{k,\delta}(x, \xi) \varphi(x, \zeta) d\mu_{x,s,t}^\delta(\xi, \zeta) d\beta_k(s) \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} g_k(x, \xi) \varphi(x, \xi) d\nu_{x,s}^\delta(\xi) dx d\beta_k(s) + \varepsilon_{\mathbb{W},1}^\delta(t, \varphi) + \varepsilon_{\mathbb{W},2}^\delta(t, \varphi), \end{aligned} \quad (3.140)$$

and

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \mathbf{G}_\delta^2(x, \xi) \partial_\xi \varphi(x, \zeta) d\mu_{x,s,t}^\delta(\xi, \zeta) ds \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{G}^2(x, \xi) \partial_\xi \varphi(x, \xi) d\nu_{x,s}^\delta(\xi) dx ds + \varepsilon_{\mathbb{W},3}^\delta(t, \varphi) + \varepsilon_{\mathbb{W},4}^\delta(t, \varphi), \end{aligned} \quad (3.141)$$

where

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |\varepsilon_{\mathbb{W},1}^\delta(t, \varphi)|^2 \right] \leq 4D_1 T \|\varphi\|_{L_{x,\xi}^\infty}^2 h^2 + 2D_0 \|\varphi\|_{L_{x,\xi}^\infty}^2 \left[\sup_{0 \leq n < N_T} \Delta t_n \right], \quad (3.142)$$

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |\varepsilon_{\mathbb{W},3}^\delta(t, \varphi)|^2 \right] \leq 4D_1 T \|\partial_\xi \varphi\|_{L_{x,\xi}^\infty}^2 h^2 + 2D_0 \|\partial_\xi \varphi\|_{L_{x,\xi}^\infty}^2 \left[\sup_{0 \leq n < N_T} \Delta t_n \right], \quad (3.143)$$

and

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |\varepsilon_{\mathbb{W},2}^\delta(t, \varphi)|^2 \right] &\leq 2D_0 \|\varphi\|_{L_{x,\xi}^\infty}^2 \left[\sup_{0 \leq n < N_T} \Delta t_n \right] \\ &\quad + 8 \left\{ D_1 \|\varphi\|_{L_{x,v}^\infty}^2 + D_0 \|\partial_\xi \varphi\|_{L_{x,\xi}^\infty}^2 \right\} \\ &\quad \times \left[\frac{1}{\theta} \|v_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + \frac{3D_0 T}{\theta} \right] \left[\sup_{0 \leq n < N_T} \Delta t_n \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.144)$$

Eventually, $\varepsilon_{\mathbb{W},4}^\delta(t, \varphi)$ satisfies the same estimate as $\varepsilon_{\mathbb{W},2}^\delta(t, \varphi)$ with $\partial_\xi \varphi$ instead of φ in the right-hand side of (3.144).

Proof of Lemma 70. Define

$$\varepsilon_{\mathbb{W},1}^\delta(t, \varphi) = \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} [g_{k,\delta}(x, \xi) - g_k(x, \xi)] \varphi(x, \zeta) d\mu_{x,s,t}^\delta(\xi, \zeta) dx d\beta_k(s),$$

and let $\varepsilon_{\mathbb{W},2}^\delta(t, \varphi)$ be equal to

$$\int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \left[\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} g_k(x, \xi) \varphi(x, \zeta) d\mu_{x,s,t}^\delta(\xi, \zeta) - \int_{\mathbb{R}} g_k(x, \xi) \varphi(x, \xi) d\nu_{x,s}^\delta(\xi) \right] dx d\beta_k(s).$$

Then (3.140) is satisfied. Note that $n \mapsto \varepsilon_{\mathbb{W},1}^\delta(t_n, \varphi)$ is a (\mathcal{F}_{t_n}) -martingale. By Doob's Inequality, Jensen's Inequality (note that $\mu_{x,s,t}^\delta(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \leq 1$) and (3.28), we deduce

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq n < N_T} |\varepsilon_{\mathbb{W},1}^\delta(t_n, \varphi)|^2 \right] \\ & \leq 4\mathbb{E} \int_0^{t_{N_T}} \left| \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} [g_{k,\delta}(x, \xi) - g_k(x, \xi)] \varphi(x, \zeta) d\mu_{x,s,t_{N_T}}^\delta(\xi, \zeta) \right|^2 dx ds \\ & \leq 4\mathbb{E} \int_0^{t_{N_T}} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} |g_{k,\delta}(x, \xi) - g_k(x, \xi)|^2 d\mu_{x,s,t}^\delta(\xi, \zeta) dx ds \|\varphi\|_{L_{x,\xi}^\infty}^2 \\ & \leq 4D_1 T \|\varphi\|_{L_{x,\xi}^\infty}^2 h^2. \end{aligned}$$

Besides, we see, using Itô's Isometry, and (3.2), (3.27), that

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [t_n, t_{n+1})} |\varepsilon_{\mathbb{W},1}^\delta(t, \varphi) - \varepsilon_{\mathbb{W},1}^\delta(t_n, \varphi)|^2 \right] \\ & \leq \mathbb{E} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left| \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} [g_{k,\delta}(x, v_\delta(s, x)) - g_k(x, v_\delta(s, x))] \varphi(x, v_\delta^\#(s, x)) \right|^2 dx ds \\ & \leq 2D_0 \|\varphi\|_{L_{x,\xi}^\infty}^2 \left[\sup_{0 \leq n < N_T} \Delta t_n \right]. \end{aligned}$$

Similarly, we have

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |\varepsilon_{\mathbb{W},2}^\delta(t, \varphi)|^2 \right] \leq 2D_0 \|\varphi\|_{L_{x,\xi}^\infty}^2 \left[\sup_{0 \leq n < N_T} \Delta t_n \right] + \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq n < N_T} |\varepsilon_{\mathbb{W},2}^\delta(t_n, \varphi)|^2 \right].$$

Using Doob's Inequality, we obtain

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |\varepsilon_{\mathbb{W},2}^\delta(t, \varphi)|^2 \right] \leq 2D_0 \|\varphi\|_{L_{x,\xi}^\infty}^2 \left[\sup_{0 \leq n < N_T} \Delta t_n \right] + 4\mathbb{E} |\varepsilon_{\mathbb{W},2}^\delta(t_{N_T}, \varphi)|^2.$$

By Itô's Formula, $\mathbb{E}|\varepsilon_{W,2}^\delta(t_{N_T}, \varphi)|^2$ is bounded from above by

$$\mathbb{E} \int_0^{t_{N_T}} \int_{\mathbb{T}^N} \sum_{k \geq 1} \left| \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} g_k(x, \xi) \varphi(x, \zeta) d\mu_{x,s,t_{N_T}}^\delta(\xi, \zeta) - \int_{\mathbb{R}} g_k(x, \xi) \varphi(x, \xi) d\nu_{x,s}^\delta(\xi) \right|^2 dx ds. \quad (3.145)$$

We have, for $t \in [0, T)$, $t \in [t_n, t_{n+1})$, $n < N_T$, and $\psi \in C_b(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \langle \mu_{x,t,t_{N_T}}^\delta, \psi \rangle &= \langle \nu_{x,t} \otimes \nu_{x,t}, \psi \rangle - \frac{t - t_n}{\Delta t_n} \left[\psi(v_\delta^\#(x, t), v_\delta^\#(x, t)) - \psi(v_\delta(x, t), v_\delta^\#(x, t)) \right] \\ &\quad - \frac{t_{n+1} - t}{\Delta t_n} \left[\psi(v_\delta(x, t), v_\delta(x, t)) - \psi(v_\delta(x, t), v_\delta^\#(x, t)) \right]. \end{aligned}$$

We estimate therefore (3.145) by the two terms

$$2\mathbb{E} \sum_{0 \leq n < N_T} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\mathbb{T}^N} \sum_{k \geq 1} \left| g_k(x, v_\delta^\#(x, t)) - g_k(x, v_\delta(x, t)) \right|^2 |\varphi(x, \xi)|^2 dx dt, \quad (3.146)$$

and

$$2\mathbb{E} \sum_{0 \leq n < N_T} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\mathbb{T}^N} \sum_{k \geq 1} \left| \varphi(x, v_\delta^\#(x, t)) - \varphi(x, v_\delta(x, t)) \right|^2 |g_k(x, v_\delta(x, t))|^2 dx dt. \quad (3.147)$$

Note that (3.3) gives, for all $\eta > 0$, and $\bar{v}, v \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k \geq 1} |g_k(x, \bar{v}) - g_k(x, v)|^2 \leq D_1 |\bar{v} - v| \leq D_1 \left(\eta + \frac{1}{\eta} |\bar{v} - v|^2 \right). \quad (3.148)$$

In virtue of (3.148), we can bound (3.146) by

$$2D_1 \|\varphi\|_{L_{x,v}^\infty}^2 \left[\eta + \frac{1}{\eta} \mathbb{E} \int_0^T \|v_\delta^\#(t) - v_\delta(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)^2}^2 dt \right].$$

Using (3.109) and taking $\eta = \left[\sup_{0 \leq n < N_T} \Delta t_n \right]^{1/2}$, we deduce that (3.146) is bounded by

$$2D_1 \|\varphi\|_{L_{x,\xi}^\infty}^2 \left[\frac{1}{\theta} \|v_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 + \frac{3D_0 T}{\theta} \right] \left[\sup_{0 \leq n < N_T} \Delta t_n \right]^{1/2}. \quad (3.149)$$

An estimate on (3.147) is obtained as follows : (3.147) is bounded by

$$2D_0 \|\partial_\xi \varphi\|_{L_{x,\xi}^\infty}^2 \mathbb{E} \int_0^T \|v_\delta^\#(t) - v_\delta(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)^2}^2 dt.$$

Using (3.109) gives an estimate on (3.147) from above by

$$2D_0 \|\partial_\xi \varphi\|_{L^\infty_{x,\xi}}^2 \left[\frac{1}{\theta} \|v_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 + \frac{3D_0 T}{\theta} \right] \left[\sup_{0 \leq n < N_T} \Delta t_n \right]. \quad (3.150)$$

Next, we denote by $\varepsilon_{W,3}^\delta(t, \varphi)$ and $\varepsilon_{W,4}^\delta(t, \varphi)$ the error terms

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \left[\mathbf{G}_{k,\delta}^2(x, \xi) - \mathbf{G}_k^2(x, \xi) \right] \partial_\xi \varphi(x, \zeta) d\mu_{x,s,t}^\delta(\xi, \zeta) dx ds, \\ & \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \left[\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \mathbf{G}_k^2(x, \xi) \partial_\xi \varphi(x, \zeta) d\mu_{x,s,t}^\delta(\xi, \zeta) - \int_{\mathbb{R}} \mathbf{G}_k^2(x, \xi) \partial_\xi \varphi(x, \xi) d\nu_{x,s}^\delta(\xi) \right] dx ds. \end{aligned}$$

We have, for $x \in K$, $\eta > 0$,

$$\begin{aligned} |\mathbf{G}_{k,\delta}^2(x, \xi) - \mathbf{G}_k^2(x, \xi)| &= \left| \sum_{k \geq 1} (g_{k,K}(\xi) - g_k(x, \xi))(g_{k,K}(\xi) + g_k(x, \xi)) \right| \\ &\leq \frac{1}{2\eta} \sum_{k \geq 1} |g_{k,K}(\xi) - g_k(x, \xi)|^2 + \eta \sum_{k \geq 1} |g_{k,K}(\xi)|^2 + |g_k(x, \xi)|^2. \end{aligned}$$

Using (3.28), (3.2) and (3.27) and taking $\eta = h$, we see that

$$|\mathbf{G}_{k,\delta}^2(x, \xi) - \mathbf{G}_k^2(x, \xi)| \leq (D_0 + D_1)h. \quad (3.151)$$

This is sufficient to obtain (3.143) and the last statement of the lemma (estimate on $\varepsilon_{W,4}^\delta(t, \varphi)$). \square

3.1.6.4 Conclusion

To conclude, let us set

$$\varepsilon_\delta(\varphi) = \sum_{j=1}^4 \varepsilon_{W,j}^\delta(t, \varphi) - \varepsilon_{\text{space},0}^\delta(t, \varphi) - \varepsilon_{\text{space},1}^\delta(t, \varphi).$$

Then the approximate kinetic equation (3.117) follows from the discrete kinetic equation (3.125) and from the consistency estimates (3.127)-(3.140)-(3.141). Since $\|v_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)} \leq \|u_0\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}$ (the projection (3.23) onto piecewise-constant functions is an orthogonal projection in $L^2(\mathbb{T}^N)$), it follows from the error estimates (3.128), (3.129), (3.142), (3.143), (3.144) and from the CFL condition (3.76) that

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |\varepsilon^\delta(t, \varphi)|^2 \right] \leq C(\varphi) |\delta|^{1/2},$$

where $C(\varphi)$ is a constant that depends on $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}$, on D_0 , D_1 , L_A , on the parameter θ in (3.76), on T , on $|\Lambda|$, where Λ is the support of φ , and on the

norms $\|\partial_{x_i}^{j_i} \partial_\xi^k \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})}$ with $j_i + k \leq 2$.

3.1.7 Convergence

To apply Theorem 55 on the basis of Proposition 68, we need to establish some additional estimates on the numerical Young measure ν^δ and on the numerical random measure m^δ . This is done in Section 3.1.7.1. We conclude with the convergence of the Finite Volume method in Section 3.1.7, Theorem 74.

3.1.7.1 Additional estimates

Tightness of (ν^δ)

Lemma 71 (Tightness of (ν^δ)). *Let $u_0 \in L^\infty(\mathbb{T}^N)$, $T > 0$ and $\delta \in \mathfrak{D}_T$. Assume that (3.4), (3.6), (3.19) and (3.76) are satisfied. Let $(v_\delta(t))$ be the numerical unknown defined by (3.22)-(3.23)-(3.57) and let ν^δ be defined by (3.110). Let $p \in [1, +\infty)$. We have*

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^p) d\nu_{x,t}^\delta(\xi) dx \right) \leq C_p, \quad (3.152)$$

where C_p is a constant depending on D_0 , p , T and $\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{T}^N)}$ only.

Proof of Lemma 71. It is sufficient to do the proof for $p \in 2\mathbb{N}^*$ since $1 + |\xi|^p \leq 2(1 + |\xi|^q)$ for all $\xi \in \mathbb{R}$ if $q \geq p$. Note that

$$\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^p d\nu_{x,t}^\delta(\xi) dx = \frac{t - t_n}{\Delta t_n} \|v_\delta^\sharp(t)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p + \frac{t_{n+1} - t}{\Delta t_n} \|v_\delta(t)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p,$$

for $t \in [t_n, t_{n+1})$. Recall also that v_δ^\sharp is defined by (3.105). Let

$$\varphi_p(\xi) = p\xi^{p-1} = \partial_\xi \xi^p \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

We multiply Equation (3.35) by $\varphi_p(\xi)$ and sum the result over K, ξ . We obtain then, thanks to (3.83),

$$\|v_\delta^\flat(t_{n+1})\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p + p(p-1)\Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \int_{\mathbb{R}} \xi^{p-2} m_K^n(\xi) d\xi = \|v_\delta(t_n)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p. \quad (3.153)$$

In particular, we have the L^p estimate

$$\|v_\delta^\flat(t_{n+1})\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p \leq \|v_\delta(t_n)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p. \quad (3.154)$$

Let us now estimate the increase of L^p -norm due to the stochastic evolution. By

Itô's Formula and (3.105), we have

$$\begin{aligned} & |v_K^{n+1}|^p \\ &= |v_K^{n+1/2}|^{p+p} \int_{t_n}^{t_{n+1}} v_K^\sharp(t)^{p-1} g_{k,K}(v_K^n) d\beta_k(t) + \frac{1}{2} p(p-1) \int_{t_n}^{t_{n+1}} v_K^\sharp(t)^{p-2} \mathbf{G}_K^2(v_K^n) dt, \end{aligned}$$

and thus

$$\begin{aligned} \|v_\delta(t_{n+1})\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p &= \|v_\delta^\flat(t_{n+1})\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p + p \int_{t_n}^{t_{n+1}} \langle v_\delta^\sharp(t)^{p-1}, \gamma_k^n \rangle_{L^2(\mathbb{T}^N)} d\beta_k(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} p(p-1) \int_{t_n}^{t_{n+1}} \langle v_\delta^\sharp(t)^{p-2}, \Gamma^n \rangle_{L^2(\mathbb{T}^N)} dt, \end{aligned} \quad (3.155)$$

where

$$\gamma_k^n(x) = g_{k,K}(v_K^n), \quad \Gamma^n(x) = \mathbf{G}_K^2(v_K^n), \quad x \in K.$$

Using (3.154) and induction, we obtain

$$\|v_\delta(T)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p \leq \|v_\delta(0)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p + M_{N_T} + B_{N_T}, \quad (3.156)$$

where (M_N) is the martingale

$$M_N = p \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \langle v_\delta^\sharp(t)^{p-1}, \gamma_k^n \rangle_{L^2(\mathbb{T}^N)} d\beta_k(t)$$

and

$$B_N = \frac{1}{2} p(p-1) \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \langle v_\delta^\sharp(t)^{p-2}, \Gamma^n \rangle_{L^2(\mathbb{T}^N)} dt.$$

Note that the argument $\langle v_\delta^\sharp(t)^{p-2}, \Gamma^n \rangle_{L^2(\mathbb{T}^N)}$ in B_N is non-negative since $\Gamma^n \geq 0$ and $p-2 \in 2\mathbb{N}$. Consequently, $\mathbb{E} \sup_{0 \leq n \leq N_T} B_n = \mathbb{E} B_{N_T}$ and we deduce the following bound

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq n \leq N_T} B_n \leq \frac{1}{2} p(p-1) D_0 \sum_{n=0}^{N_T-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbb{E} \|v_\delta^\sharp(t)\|_{L^{p-2}(\mathbb{T}^N)}^{p-2} dt. \quad (3.157)$$

We have used (3.27) to obtain (3.157). If $p = 2$, then $\mathbb{E} \|v_\delta^\sharp(t)\|_{L^{p-2}(\mathbb{T}^N)}^{p-2} = 1$ and is therefore bounded. To estimate $\mathbb{E} \|v_\delta^\sharp(t)\|_{L^{p-2}(\mathbb{T}^N)}^{p-2}$ when $p \geq 4$, note that $v_\delta^\sharp(t) = v_\delta^\flat(t_{n+1}) + z_\delta^n(t)$ for $t \in (t_n, t_{n+1})$, where $z_\delta^n(x, t) := \gamma_k^n(x)(\beta_k(t) - \beta_k(t_n))$ is, conditionally to \mathcal{F}_n , a Gaussian random variable with variance, for $x \in K$,

$$\mathbb{E} \left[|z_K^n(t)|^2 | \mathcal{F}_n \right] = (t - t_n) \mathbf{G}_K^2(v_K^n) \leq D_0 \Delta t_n$$

by (3.27). In particular, we have the bound

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\|z_\delta^n(t)\|_{L^{p-2}(\mathbb{T}^N)}^{p-2} &= \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left[|z_K^n(t)|^{p-2} | \mathcal{F}_n \right] \right) \\ &= C(p) \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left[|z_K^n(t)|^2 | \mathcal{F}_n \right] \right)^{(p-2)/2} \leq C(p) (D_0 \Delta t_n)^{(p-2)/2},\end{aligned}$$

where $C(p)$ is a constant depending on p . It follows, using (3.154), that we have the estimate

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\|v_\delta^\sharp(t)\|_{L^{p-2}(\mathbb{T}^N)}^{p-2} &\leq C(p, D_0) \left(1 + \mathbb{E}\|v_\delta^\flat(t_{n+1})\|_{L^{p-2}(\mathbb{T}^N)}^{p-2} \right) \\ &\leq C(p, D_0) \left(1 + \mathbb{E}\|v_\delta(t_n)\|_{L^{p-2}(\mathbb{T}^N)}^{p-2} \right),\end{aligned}$$

where $C(p, D_0)$ is a constant depending on p and D_0 . In particular, we have

$$\sup_{0 \leq n < N_T} \sup_{t \in (t_n, t_{n+1})} \mathbb{E}\|v_\delta^\sharp(t)\|_{L^{p-2}(\mathbb{T}^N)}^{p-2} \leq C(p, D_0) \left(1 + \sup_{0 \leq n < N_T} \mathbb{E}\|v_\delta(t_n)\|_{L^{p-2}(\mathbb{T}^N)}^{p-2} \right). \quad (3.158)$$

By (3.157), we conclude that

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq n \leq N_T} B_n \leq C(p, D_0) T \left(1 + \sup_{0 \leq n < N_T} \mathbb{E}\|v_\delta(t_n)\|_{L^{p-2}(\mathbb{T}^N)}^{p-2} \right), \quad (3.159)$$

for possibly a different constant $C(p, D_0)$. Let us now turn to the estimate of the quantity $\mathbb{E} \sup_{0 \leq n \leq N_T} |M_n|$. The martingale (M_N) can be rewritten as a stochastic integral (with an integrand which is a simple function). Consequently, the quadratic variation of M_{N_T} is

$$\begin{aligned}\langle M_{N_T} \rangle &= p^2 \sum_{n=0}^{N_T-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_k \langle |v_\delta^\sharp(t)|^{p-1}, \gamma_k^n \rangle_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 dt \\ &\leq p^2 \sum_{n=0}^{N_T-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_k \| |v_\delta^\sharp(t)|^{p-1} \|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 \| \gamma_k^n \|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 dt \\ &= p^2 \sum_{n=0}^{N_T-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \| v_\delta^\sharp(t) \|_{L^{2(p-1)}(\mathbb{T}^N)}^{2(p-1)} \| \Gamma^n \|_{L^1(\mathbb{T}^N)} dt \\ &\leq p^2 D_0 \sum_{n=0}^{N_T-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \| v_\delta^\sharp(t) \|_{L^{2(p-1)}(\mathbb{T}^N)}^{2(p-1)} dt,\end{aligned}$$

by (3.27). Using (3.158) (with $2p$ instead of p) gives thus

$$\mathbb{E}\langle M_{N_T} \rangle \leq p^2 D_0 T C(2p, D_0) \left(1 + \sup_{0 \leq n < N_T} \mathbb{E}\|v_\delta(t_n)\|_{L^{2p-2}(\mathbb{T}^N)}^{2p-2} \right). \quad (3.160)$$

By Burkholder - Davis - Gundy's Inequality, there exists a constant C_{BDG} such that

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq n \leq N_T} |M_n| \leq C_{\text{BDG}} \mathbb{E} \langle M_{N_T} \rangle^{1/2}.$$

By Jensen's Inequality and the estimate (3.160), we obtain

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sup_{0 \leq n \leq N_T} |M_n| &\leq C_{\text{BDG}} (\mathbb{E} \langle M_{N_T} \rangle)^{1/2} \\ &\leq C_{\text{BDG}} p (D_0 T C(2p, D_0))^{1/2} \left(1 + \sup_{0 \leq n < N_T} \mathbb{E} \|v_\delta(t_n)\|_{L^{2p-2}(\mathbb{T}^N)}^{2p-2} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.161)$$

We can conclude now. Since $\mathbb{E} M_{N_T} = 0$, taking expectation in (3.156) (where we replace N_T by n) gives

$$\mathbb{E} \|v_\delta(t_n)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p \leq \|v_\delta(0)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p + \mathbb{E} B_n.$$

Note (see Section 3.1.6.4) that

$$\|v_\delta(0)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)} \leq \|u_0\|_{L^p(\mathbb{T}^N)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{T}^N)}.$$

By (3.159), this gives

$$\sup_{0 \leq n < N_T} \mathbb{E} \|v_\delta(t_n)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{T}^N)}^p + C(p, D_0) T \left(1 + \sup_{0 \leq n < N_T} \mathbb{E} \|v_\delta(t_n)\|_{L^{p-2}(\mathbb{T}^N)}^{p-2} \right).$$

By iteration on $p \in 2\mathbb{N}^*$, we deduce, for every such p , that

$$\sup_{0 \leq n < N_T} \mathbb{E} \|v_\delta(t_n)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p \leq C_p, \quad (3.162)$$

where the constant C_p depends on p , D_0 , T and $\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{T}^N)}$. Denote generally by C_p any such constant, possibly different from line to line, depending only on p , D_0 , T and $\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{T}^N)}$. By (3.162) with $2p - 2$ instead of p , we have $\mathbb{E} \sup_{0 \leq n \leq N_T} |M_n| \leq C_p$. Then we use (3.159) with $p - 2$ instead of p to obtain $\mathbb{E} \sup_{0 \leq n \leq N_T} B_n \leq C_p$. By (3.156), we deduce

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq n < N_T} \|v_\delta(t_n)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p \leq C_p, \quad (3.163)$$

which concludes the proof of the lemma. \square

Tightness of (m_δ)

Lemma 72 (Tightness of (m_δ)). *Let $u_0 \in L^\infty(\mathbb{T}^N)$, $T > 0$ and $\delta \in \mathfrak{D}_T$. Assume that (3.4), (3.6), (3.19) and (3.76) are satisfied. Let $(v_\delta(t))$ be the numerical unknown*

defined by (3.22)-(3.23)-(3.57) and let m_δ be defined by (3.111). Then, for all $p \geq 1$, we have

$$\mathbb{E} \left| \iiint_{\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}} (1 + |\xi|^p) dm_\delta(x, t, \xi) \right|^2 \leq C_p, \quad (3.164)$$

where C_p is a constant depending on D_0 , p , T and $\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{T}^N)}$ only.

Proof of Lemma 72. Let $p \in 2\mathbb{N}^*$. By (3.153), we have

$$\sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_{\mathbb{R}} \xi^{p-2} m_K^n(\xi) d\xi \leq \|v_\delta(t_n)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p.$$

We multiply this inequality by Δt_n . Summing over $n \in \{0, \dots, N_T - 1\}$, we obtain

$$\iiint_{\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}} \xi^{p-2} dm_\delta(x, t, \xi) \leq T \sup_{0 \leq n < N_T} \|v_\delta(t_n)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p.$$

Since $\|v_\delta(t_n)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^{2p} \leq \|v_\delta(t_n)\|_{L^{2p}(\mathbb{T}^N)}^{2p}$, we have

$$\mathbb{E} \left| \iiint_{\mathbb{T}^N \times [0, T] \times \mathbb{R}} \xi^{p-2} dm_\delta(x, t, \xi) \right|^2 \leq T^2 \mathbb{E} \sup_{0 \leq n < N_T} \|v_\delta(t_n)\|_{L^{2p}(\mathbb{T}^N)}^{2p} \leq T^2 C_p$$

by (3.163). Taking first $p = 2$, then $p \in 2\mathbb{N}^*$ arbitrary, we obtain (3.164). \square

3.1.7.2 Convergence

We may now apply the theorem 55, to obtain the following results.

Theorem 73. Let $u_0 \in L^\infty(\mathbb{T}^N)$, $T > 0$. Assume that the hypotheses (3.3), (3.4), (3.6), are satisfied. Then there exists a unique solution u to (3.1) with initial datum u_0 , in the sense of Definition 49. Besides, for all $1 \leq p < +\infty$, almost surely, $u \in C([0, T]; L^p(\mathbb{T}^N))$.

Theorem 74. Let $u_0 \in L^\infty(\mathbb{T}^N)$, $T > 0$. Assume that the hypotheses (3.3), (3.4), (3.6), (3.19), (3.54), (3.55) and (3.76) are satisfied. Let u be the solution to (3.1) with initial datum u_0 and let v_δ be the solution to the Finite Volume scheme (3.22)-(3.23)-(3.24)-(3.25). Then we have the convergence

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{E} \|v_\delta - u\|_{L^p(\mathbb{T}^N \times (0, T))}^p = 0, \quad (3.165)$$

for all $p \in [1, \infty)$.

Remark 75. If the X_k^{n+1} are merely i.i.d. random variables with normalized centered normal law $\mathcal{N}(0, 1)$, then (v_δ) is converging to u in $L^p(\mathbb{T}^N \times (0, T))$ in law when $\delta \rightarrow 0$. Indeed, the identity (3.25) is only satisfied in law now, hence v_δ has the same law as the function \tilde{v}_δ defined by (3.22)-(3.23)-(3.24), with X_k^{n+1} replaced

by the right-hand side of (3.25). We apply the conclusion of Theorem 74 to \tilde{v}_δ . As a corollary, we obtain the convergence in law of (\tilde{v}_δ) to u in $L^p(\mathbb{T}^N \times (0, T))$. A slightly different manner of expressing the same thing is to notice that, when the discrete increments (X_k^{n+1}) are some given normal law $\mathcal{N}(0, 1)$, then we can construct a set of Brownian motions $\tilde{\beta}_k(t)$ such that

$$X_k^{n+1} = \frac{\tilde{\beta}_k(t_{n+1}) - \tilde{\beta}_k(t_n)}{(\Delta t_n)^{1/2}}. \quad (3.166)$$

Indeed, without loss of generality, we can restrict ourselves to the case $\Delta t_n = 1$ in (3.166) and use the Lévy-Ciesielski construction of the Brownian motion, [SP14, Section 3.2] on $[0, 1]$ as follows : we define (cf. [SP14, Formula (3.1)])

$$G_0 = X_k^{n+1}, G_1 = X_1^{n+1}, \dots, G_{k-1} = X_{k-1}^{n+1}, G_k = X_{k+1}^{n+1}, G_{k+1} = X_{k+2}^{n+1}, \dots$$

and we set

$$\tilde{\beta}(t) = \sum_{p=0}^{\infty} G_p \langle \mathbf{1}_{[0,t]}, H_p \rangle,$$

where the H_p 's are the Haar basis of $L^2(0, 1)$. Then (3.166) follows from the fact that

$$\int_0^1 H_p(t) dt = \langle H_p, H_0 \rangle = \delta_{p0}.$$

Remark 76. Theorem 73 has already been proved in [DV10a] (see also Section 2.1.5) under less restrictive hypotheses (having a compactly supported noise is unnecessary). We give the statement together with Theorem 74, however, to emphasize the fact that the convergence of the Finite Volume method, in the framework which we use, give both the existence-uniqueness of the solution to the limit continuous problem, and the convergence of the numerical method to this solution. It is not necessary to provide the existence of the solution u to (3.1) by an external means.

Proof of Theorem 73 and Theorem 74. Let us first prove the theorem 74. We take the existence of u , solution to (3.1) with initial datum u_0 for granted. By Proposition 68, Lemma 71 and Lemma 72, we may apply Theorem 55 to f_δ : we obtain (3.165) with z_δ instead of v_δ , where

$$z_\delta(x, t) := \int_{\mathbb{R}} \xi d\nu_{x,t}^\delta(\xi) = \frac{t - t_n}{\Delta t_n} \bar{v}_\delta(x, t) + \frac{t_{n+1} - t}{\Delta t_n} v_\delta(x, t),$$

for $t \in [t_n, t_{n+1}]$. By (3.109), we have the estimate

$$\mathbb{E} \int_0^T \|z_\delta - v_\delta\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 dt = \mathcal{O}(|\delta|)$$

on the difference between z_δ and v_δ . This gives (3.165) for $p \leq 2$. If $p > 2$, we use

the inequality

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|v_\delta - u\|_{L^p(\mathbb{T}^N \times (0, T))}^p &\leq \|v_\delta - u\|_{L^2(\Omega \times \mathbb{T}^N \times (0, T))} \|v_\delta - u\|_{L^{2(p-1)}(\Omega \times \mathbb{T}^N \times (0, T))}^{p-1} \\ &\leq \frac{1}{\eta} \mathbb{E} \|v_\delta - u\|_{L^2(\mathbb{T}^N \times (0, T))}^2 + \eta \mathbb{E} \|v_\delta - u\|_{L^{2(p-1)}(\mathbb{T}^N \times (0, T))}^{2(p-1)}, \end{aligned} \quad (3.167)$$

where η is a positive parameter. Thanks to the uniform bounds (3.8)-(3.163), we can choose η independent on δ to have the second term in (3.167) smaller than an arbitrary threshold. By the convergence result for $p = 2$ the first term in (3.167) is then also small for δ close to 0. This concludes the proof of theorem 74. To prove 73, we just need to construct an approximation scheme satisfying (3.19), (3.54), (3.55) and (3.76) and to compute v_δ by (3.22)-(3.23)-(3.24)-(3.25). We can use a cartesian grid for this purpose : let $h_m = \frac{1}{m}$, where $m \in \mathbb{N}^*$. Let \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N be the set of open hypercubes of length h_m obtained by translates of the original hypercube $(0, h_m)^N$ by vectors $h_m x$, x having components in $\{0, 1, \dots, m-1\}$. Then (3.54), (3.55) are satisfied with $\alpha_N = 2^{-N}$ since a hypercube has 2^N sides. We can choose the Godunov numerical fluxes, defined as follows :

$$A_{K \rightarrow L}(v, w) = \begin{cases} |K|L| \min_{v \leq \xi \leq w} A(\xi) \cdot n_{K,L} & \text{if } v \leq w, \\ |K|L| \max_{w \leq \xi \leq v} A(\xi) \cdot n_{K,L} & \text{if } w \leq v. \end{cases}$$

These fluxes $A_{K \rightarrow L}$ are monotone (non-increasing in the first variable, non-increasing in the second variable). They satisfy the hypotheses of regularity, consistency (3.19) and (3.20) respectively with $L_A = \text{Lip}(A)$. The conservative symmetry property (3.21) is also satisfied. At last, to ensure (3.76), we just need to take a uniform time step Δt like

$$\Delta t = \frac{1}{2} \frac{\alpha_N^2}{2L_A} h_m.$$

We have then (3.76) with $\theta = \frac{1}{2}$. At this stage, Proposition 68 provides a sequence of approximate solutions (f_m) . Thanks to the uniform bounds established in Section 3.1.7.1, we can apply Theorem 55 : this gives the existence of a unique solution u to (3.1) with initial datum u_0 . By Corollary 27, we have $u \in C([0, T]; L^p(\mathbb{T}^N))$ almost surely.

Le paragraphe qui suit a plusieurs fonctions.

- La première et sans doute la principale : il donne le détail des démonstrations de l'article. En effet, la longueur, la difficulté de l'article et la tradition mathématique font que les démonstrations des différents lemmes, propriétés, corollaires et théorèmes de l'article sont souvent réduites à leurs étapes essentielles.
- La seconde : les démonstrations sont écrites avec $\int_0^T .dW(t)$ et non pas $\sum_k \int_0^T .d\beta(t)$, avec $\|\cdot\|_{L_2(H,\mathbb{R})}$ et non pas $\|\cdot\|_H$ ou $\|\cdot\|_{l^2(\mathbb{N})}$, avec $\Phi(x, u)$ et non pas $\Phi(x, u)e_k = g_k(x, u)$. Je pense que cette façon de faire est plus simple, plus pratique et donne une lecture plus aisée, même si dans l'article nous avons gardé les notations utilisées par Arnaud Debussche et Julien Vovelle dans [DV10b].
- La troisième : j'ai rappelé des notions importantes utilisées dans les démonstrations.
- La quatrième : j'ai essayé par moments, de donner des idées, des réflexions précédant ou accompagnant les démonstrations de l'article.

Il faut bien comprendre que ces détails sont une aide à la lecture. Je pense qu'il serait intéressant de lire l'article avec les détails et commentaires qui suivent, simultanément.

3.2 Détails des démonstrations du deuxième article

3.2.1 Au sujet du paragraphe 3.1.3 « The Finite Volume Scheme »

A propos du maillage :

Comme K est un ouvert, sa frontière topologique s'écrit :

$$\bar{K} \setminus K = \partial K \cup N$$

avec $|N| = 0$.

$K|L$ inclus dans un hyperplan $\forall L \in \mathcal{N}(K)$ implique que K est un polyèdre, c'est même équivalent. En effet, un polyèdre est l'intersection d'un nombre fini de

demi-espaces. Cela implique que $n_{K|L}$ est constant donc l'hypothèse de consistance (3.20) est bien écrite.

Notons que le schéma VF, c'est à dire la formule (3.22) s'écrit aussi

$$\begin{aligned}
|K| (v_K^{n+1} - v_K^n) + \Delta t_n \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} Q_{K \rightarrow L}^n &= |K| (\Delta t_n)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} g_{k,K} (v_K^n) X_k^{n+1} \\
&= |K| (\Delta t_n)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|K|} \int_K g_k (x, v_K^n) dx \times \frac{\beta_k (t_{n+1}) - \beta_k (t_n)}{(\Delta t_n)^{\frac{1}{2}}} \\
&= |K| (\Delta t_n)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|K|} \int_K \Phi (x, v_K^n) e_k dx \times \frac{W (t_{n+1}) e_k - W (t_n) e_k}{(\Delta t_n)^{\frac{1}{2}}} \\
&= |K| (\Delta t_n)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|K|} \int_K \Phi (x, v_K^n) dx e_k \times \frac{W (t_{n+1}) - W (t_n)}{(\Delta t_n)^{\frac{1}{2}}} e_k \\
&= |K| (\Delta t_n)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{|K| (\Delta t_n)^{\frac{1}{2}}} \int_K \Phi (x, v_K^n) dx (W (t_{n+1}) - W (t_n)) \\
&= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \Phi (x, v_K^n) dx dW (s).
\end{aligned}$$

$W (t_{n+1}) - W (t_n)$ est indépendant de $\mathcal{F} (t_n)$ qui contient tous les $\mathcal{F} (t_i)$ pour i entier naturel plus petit que n , et est aussi indépendant de chaque $W (t_i) - W (t_{i-1})$.

Remarque :

$$\int_K \Phi (x, v_K^n) dx (W (t_{n+1}) - W (t_n))$$

est un léger abus de notation qui signifie en fait

$$\int_K \Phi (x, v_K^n) dx \circ j^{-1} (jW (t_{n+1}) - jW (t_n))$$

où j est l'injection de Hilbert-Schmidt $j : H \rightarrow \mathfrak{U}$ qui permet de définir correctement le processus de Wiener cylindrique W (\mathfrak{U} étant un espace de Hilbert séparable quelconque).

L'hypothèse (3.6) s'écrit

$$\|\Phi (x, u)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \leq D_0, \quad \forall (x, u) \in \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}$$

donc

$$\begin{aligned} \left\| \int_K \Phi(x, v_K^n) dx \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 &\leq \left(\int_K \|\Phi(x, v_K^n)\|_{L_2(H, \mathbb{R})} dx \right)^2 \\ &\leq |K| \int_K \|\Phi(x, v_K^n)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 dx \leq |K|^2 D_0, \quad \forall n, K. \end{aligned}$$

Cela donne l'inégalité (3.27) :

$$\mathbf{G}_K^2(v_K^n) = \left\| \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(x, v_K^n) dx \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \leq D_0, \quad \forall n, K.$$

L'hypothèse (3.3) s'écrit : $\forall (x, y, u, v) \in \mathbb{T}^N \times \mathbb{T}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$\|\Phi(x, u) - \Phi(y, v)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \leq D_1 (|x - y|^2 + |u - v|h(|u - v|)),$$

donc $\forall y \in \mathbb{T}^N, \xi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |g_{k,K}(\xi) - g_k(y, \xi)|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(x, \xi) dx e_k - \Phi(y, \xi) e_k \right|^2 \\ &= \left\| \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(x, \xi) dx - \Phi(y, \xi) \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 = \left\| \frac{1}{|K|} \int_K (\Phi(x, \xi) - \Phi(y, \xi)) dx \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \\ &\leq \frac{1}{|K|^2} |K| \int_K \|\Phi(x, \xi) - \Phi(y, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 dx \leq \frac{1}{|K|} \int_K D_1 |x - y|^2 dx \leq D_1 h^2. \end{aligned}$$

3.2.2 Sur le paragraphe 3.1.4

En (3.29) et (3.30), c'est le schéma d'Engquist-Osher.

Pour expliquer le schéma volume fini, on prend l'équation de transport

$$\partial_t u + \operatorname{div}(A(u)) = 0;$$

on intègre l'équation de transport sur la cellule K , on approche $\partial_t u$ par $\frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{t_{n+1} - t_n}$,

on approche la solution sur $[t_n, t_{n+1}) \times K$ par la constante u_K^n :

$$\begin{aligned} \int_K \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{t_{n+1} - t_n} dx + \int_K \operatorname{div}(A(u)) dx &= |K| \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{t_{n+1} - t_n} + \int_{\partial K} A(u) \cdot n_K d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= |K| \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{t_{n+1} - t_n} + \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{K|L} A(u) \cdot n_{K,L} d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\approx |K| \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{t_{n+1} - t_n} + \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} A_{K \rightarrow L}(u_K^n, u_L^n). \end{aligned}$$

On obtient donc le schéma

$$|K| \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{t_{n+1} - t_n} + \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} A_{K \rightarrow L}(u_K^n, u_L^n) = 0,$$

avec par exemple le flux d'Engquist-Osher

$$\begin{aligned} A_{K \rightarrow L}(v, w) &= \frac{|K|L|}{2} \left(A(v) \cdot n_{K,L} + A(w) \cdot n_{K,L} - \int_v^w |a(\xi) \cdot n_{K,L}| d\xi \right) \\ &= |K|L| \left(\int_0^v (a(\xi) \cdot n_{K,L})^+ d\xi - \int_0^w (a(\xi) \cdot n_{K,L})^- d\xi + A(0) \cdot n_{K,L} \right) \\ &= \int_0^v \left(\int_{K|L} a(\xi) \cdot n_{K,L} d\mathcal{H}^{n-1} \right)^+ d\xi - \int_0^w \left(\int_{K|L} a(\xi) \cdot n_{K,L} d\mathcal{H}^{n-1} \right)^- d\xi \\ &\quad + |K|L|A(0) \cdot n_{K,L} \end{aligned}$$

Dans le cas du flux linéaire $A(u) = au$ avec $a \in \mathbb{R}^N$ fixé, on a $A(0) = 0$.

Dans notre article, il n'y a pas de perte de généralité à travailler comme dans le livre de Benoît Perthame [Per02], avec A vérifiant $A(0) = 0$.

Grâce à la fonction $\chi(\xi, u)$ définie dans le Perthame par

$$\chi(\xi, u) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < \xi < u \\ -1 & \text{si } u < \xi < 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

on peut encore écrire le flux d'Engquist-Osher

$$\begin{aligned} &A_{K \rightarrow L}(v, w) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{K|L} a(\xi) \cdot n_{K,L} d\mathcal{H}^{n-1} \right)^+ \chi(\xi, v) d\xi - \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{K|L} a(\xi) \cdot n_{K,L} d\mathcal{H}^{n-1} \right)^- \chi(\xi, w) d\xi \end{aligned}$$

qu'on a écrit dans l'article

$$A_{K \rightarrow L}(v, w) = \int_{\mathbb{R}} (a_{K \rightarrow L}^*(\xi))^+ \chi(\xi, v) d\xi - \int_{\mathbb{R}} (a_{K \rightarrow L}^*(\xi))^- \chi(\xi, w) d\xi.$$

Dans son livre, Benoît Perthame utilise cette écriture pour en déduire la version cinétique du flux discret d'Engquist-Osher :

$$(v, w, \xi) \mapsto (a_{K \rightarrow L}^*(\xi))^+ \chi(\xi, v) - (a_{K \rightarrow L}^*(\xi))^- \chi(\xi, w).$$

Debussche et Vovelle ont décidé dans leur article d'utiliser $f(\xi, u) = \mathbf{1}_{u > \xi}$ plutôt que $\chi(\xi, u)$, ces fonctions sont liées par la relation

$$\chi(\xi, u) = \mathbf{1}_{u > \xi} - \mathbf{1}_{0 > \xi} \text{ pp en } \xi.$$

On continue dans notre article à préférer la version cinétique du flux discret d'Engquist-Osher

$$(v, w, \xi) \mapsto (a_{K \rightarrow L}^*(\xi))^+ \mathbf{1}_{v > \xi} - (a_{K \rightarrow L}^*(\xi))^- \mathbf{1}_{w > \xi}$$

ou plus exactement

$$a_{K \rightarrow L}^n(\xi) = (a_{K \rightarrow L}^*(\xi))^+ f_K^n - (a_{K \rightarrow L}^*(\xi))^- f_L^n.$$

Remarque : l'équation de transport

$$\partial_t f + a(\xi) \cdot \nabla_x f = 0$$

est une version cinétique de l'équation de transport

$$\partial_t u + a(u) \cdot \nabla_x u = 0.$$

La version cinétique s'obtient en « multipliant » de part et d'autre de l'égalité précédente par $dt dx \otimes \delta_u(d\xi)$ pour obtenir une égalité au sens des mesures de Young (avec u suffisamment régulière)

$$\partial_t u dt dx \otimes \delta_u(d\xi) = -a(u) \cdot \nabla_x u dx dt \otimes \delta_u(d\xi)$$

qui s'écrit aussi

$$\partial_t \chi(\xi, u) = -a(\xi) \cdot \nabla_x \chi(\xi, u).$$

Si, comme dans l'article Debussche-Vovelle, on préfère utiliser $\mathbf{1}_{u > \xi}$, on a aussi :

$$\partial_t \mathbf{1}_{u > \xi} = -a(\xi) \cdot \nabla_x \mathbf{1}_{u > \xi}$$

Benoît Perthame prouve (en 1D) l'existence de fonctions positives $m_K^n(\xi)$ à support compact telles que le schéma volume fini avec flux numérique d'Engquist-Osher

$$|K| \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{t_{n+1} - t_n} + \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} A_{K \rightarrow L}(u_K^n, u_L^n) = 0$$

soit équivalent au schéma

$$\begin{aligned} & \chi(\xi, u_K^{n+1}) - \chi(\xi, u_K^n) \\ & + \frac{t_{n+1} - t_n}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \left((a_{K \rightarrow L}^*(\xi))^+ \chi(\xi, u_K^n) - (a_{K \rightarrow L}^*(\xi))^- \chi(\xi, u_L^n) \right) \\ & = (t_{n+1} - t_n) \partial_\xi m_K^n(\xi). \end{aligned}$$

La construction d'un flux cinétique discret est faite dans l'article de Makridakis, Perthame [MP03].

Il est à noter que la version cinétique du schéma VF de Perthame permet de calculer les éléments de la suite (u_K^n) à chaque étape grâce aux conditions initiales

$$u_K^0 = \frac{1}{|K|} \int_K u_0(x) dx,$$

c'est à dire aux fonctions

$$\xi \mapsto \chi(\xi, u_K^0),$$

puis en écrivant le schéma

$$\begin{aligned} & f_K^{n+1}(\xi) - \chi(\xi, u_K^n) \\ & + \frac{t_{n+1} - t_n}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \left((a_{K \rightarrow L}^*(\xi))^+ \chi(\xi, u_K^n) - (a_{K \rightarrow L}^*(\xi))^- \chi(\xi, u_L^n) \right) \\ & = (t_{n+1} - t_n) \partial_\xi m_K^n(\xi), \end{aligned}$$

et enfin grâce aux calculs

$$u_K^{n+1} = \int_{\mathbb{R}} f_K^{n+1}(\xi) d\xi.$$

Dans notre cas, pour utiliser les idées de Makridakis et Perthame en déterministe, c'est à chaque temps n que nous aurons une formulation cinétique du schéma VF, c'est à dire que les u_K^{n+1} seront calculés, non pas grâce à la formulation cinétique

du schéma, mais grâce au schéma VF

$$|K| \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{t_{n+1} - t_n} + \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} A_{K \rightarrow L}(u_K^n, u_L^n) = \frac{1}{t_{n+1} - t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \Phi(x, u_K^n) dx dW(s) \quad (3.168)$$

que l'on écrit dans l'article sous la forme

$$|K| \frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{t_{n+1} - t_n} + \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} A_{K \rightarrow L}(u_K^n, u_L^n) = \frac{|K| (\Delta t_n)^{\frac{1}{2}}}{t_{n+1} - t_n} \sum_{k=1}^{\infty} g_{k,K}(u_K^n) X_k^{n+1}.$$

Ainsi, le temps discret est divisé en deux (time-splitting) dans le schéma cinétique discret.

Premier temps, on ne considère pas le terme source stochastique :

$$\begin{aligned} & \chi\left(\xi, u_K^{n+\frac{1}{2}}\right) - \chi\left(\xi, u_K^n\right) \\ & + \frac{t_{n+1} - t_n}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \left((a_{K \rightarrow L}^*(\xi))^+ \chi\left(\xi, u_K^n\right) - (a_{K \rightarrow L}^*(\xi))^- \chi\left(\xi, u_L^n\right) \right) \\ & = (t_{n+1} - t_n) \partial_\xi m_K^n(\xi) \end{aligned}$$

avec

$$u_K^{n+\frac{1}{2}} = u_K^n - \frac{t_{n+1} - t_n}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} A_{K \rightarrow L}(u_K^n, u_L^n).$$

Deuxième temps, on considère le terme source stochastique en ajoutant

$$\mathbf{f}_K^{n+1}(\xi) - \mathbf{f}_K^{n+\frac{1}{2}}(\xi) = \chi\left(\xi, u_K^{n+1}\right) - \chi\left(\xi, u_K^{n+\frac{1}{2}}\right),$$

sans l'écrire explicitement, car u_K^{n+1} est calculé grâce au schéma VF (3.168), ainsi

$$\begin{aligned} & \mathbf{f}_K^{n+1}(\xi) - \mathbf{f}_K^n(\xi) \\ & + \frac{t_{n+1} - t_n}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \left((a_{K \rightarrow L}^*(\xi))^+ \chi\left(\xi, u_K^n\right) - (a_{K \rightarrow L}^*(\xi))^- \chi\left(\xi, u_L^n\right) \right) \\ & = (t_{n+1} - t_n) \partial_\xi m_K^n(\xi) + \mathbf{f}_K^{n+1}(\xi) - \mathbf{f}_K^{n+\frac{1}{2}}(\xi). \end{aligned}$$

Ce schéma avec flux cinétique d'Engquist-Osher se généralise comme dans le Perthame [Per02] ou le Makridakis, Perthame [MP03] à un flux cinétique discret noté $a(\xi, v, w)$ chez Perthame, et $a_{K \rightarrow L}(\xi, v, w)$ dans notre article (cf quelques lignes plus bas pour la comparaison des deux) pour donner le schéma suivant : Premier temps, on ne considère pas le terme source stochastique :

$$\begin{aligned} \chi\left(\xi, u_K^{n+\frac{1}{2}}\right) - \chi\left(\xi, u_K^n\right) + \frac{t_{n+1} - t_n}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}\left(\xi, u_K^n, u_L^n\right) \\ = (t_{n+1} - t_n) \partial_\xi m_K^n(\xi). \end{aligned}$$

Deuxième temps, on considère le terme source stochastique en ajoutant

$$\mathbf{f}_K^{n+1}(\xi) - \mathbf{f}_K^{n+\frac{1}{2}}(\xi) = \chi\left(\xi, u_K^{n+1}\right) - \chi\left(\xi, u_K^{n+\frac{1}{2}}\right)$$

des deux côtés de l'égalité :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_K^{n+1}(\xi) - \mathbf{f}_K^n(\xi) + \frac{t_{n+1} - t_n}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}\left(\xi, u_K^n, u_L^n\right) \\ = (t_{n+1} - t_n) \partial_\xi m_K^n(\xi) + \mathbf{f}_K^{n+1}(\xi) - \mathbf{f}_K^{n+\frac{1}{2}}(\xi). \end{aligned}$$

Remarquez que je peux indifféremment prendre les notations « Perthame »

$$\chi\left(\xi, u_K^{n+1}\right) - \chi\left(\xi, u_K^n\right)$$

ou les notations « Debussche-Vovelle »

$$\mathbf{f}_K^{n+1}(\xi) - \mathbf{f}_K^n(\xi) = \mathbf{1}_{u_K^{n+1} > \xi} - \mathbf{1}_{u_K^n > \xi}$$

car pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{1}_{u_K^{n+1} > \xi} - \mathbf{1}_{u_K^n > \xi} = \mathbf{1}_{u_K^{n+1} > \xi} - \mathbf{1}_{0 > \xi} + \mathbf{1}_{0 > \xi} - \mathbf{1}_{u_K^n > \xi} = \chi\left(\xi, u_K^{n+1}\right) - \chi\left(\xi, u_K^n\right).$$

J'en profite pour comparer les notations choisies dans notre article et celles de Benoît Perthame :

Le flux cinétique discret en 1D est noté $a(\xi, v, w)$ chez Perthame et Vovelle. Je vais écrire $a^P(\xi, v, w)$ celui de Perthame, et $a^V(\xi, v, w)$ celui de Vovelle.

Le flux numérique est noté chez Perthame et Vovelle $\mathcal{A}(v, w)$. C'est le même. Le flux continu A a pour dérivée $A' = a$.

Dans la mesure où

$$\chi(\xi, u) = \mathbf{1}_{u > \xi} - \mathbf{1}_{0 > \xi}, \quad \text{pp en } \xi$$

le lien entre les flux discrets (en 1D) est

$$a^V(\xi, v, w) - a(\xi) \mathbf{1}_{0 > \xi} = a^P(\xi, v, w).$$

Les conditions de cohérence entre le flux cinétique discret de Vovelle et de Perthame et le flux discret $\mathcal{A}(v, w)$ ne s'écrivent donc pas de la même façon.

Chez Perthame en dimension 1 d'espace :

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}} a^P(\xi, v, w) d\xi = \mathcal{A}(v, w) \\ a^P(\xi, v, v) = a(\xi) \chi(\xi, v) \end{cases}$$

Chez Dotti-Vovelle en dimension 1 d'espace :

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}} [a^V(\xi, v, w) - a(\xi) \mathbf{1}_{0 > \xi}] d\xi = \mathcal{A}(v, w) \\ a^V(\xi, v, v) = a(\xi) \mathbf{1}_{v > \xi} \end{cases}$$

qui s'écrivent en dimension N d'espace :

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}} [a_{K \rightarrow L}(\xi, v, w) - a_{K \rightarrow L}^*(\xi) \mathbf{1}_{0 > \xi}] d\xi = A_{K \rightarrow L}(v, w) \\ a_{K \rightarrow L}(\xi, v, v) = a_{K \rightarrow L}^*(\xi) \mathbf{1}_{v > \xi} \end{cases}$$

Notons bien que l'idée de généraliser $a(\xi)$ en $a_{K \rightarrow L}^*(\xi)$ vient des versions cinétiques des formules d'Engquist-Osher en dimension 1 et en dimension N d'espace.

3.2.3 Sur la proposition 58, choix du flux cinétique discret et de la mesure de défaut discrète

L'idée de l'écriture du flux cinétique discret en dimension N d'espace vient de la construction de ce flux en dimension 1 d'espace dans l'article de Makridakis-Perthame [MPO3] :

- $a^P(\xi, v, w) = a(\xi) \chi(\xi, v) = a(\xi) \chi(\xi, w)$, $\forall \xi \notin [\min(v, w), \max(v, w)]$
- $a^P(\xi, v, w) = \partial_{\xi} (\max(\mathcal{A}(v, \xi), \mathcal{A}(v, w))) - a(\xi) \mathbf{1}_{0 > \xi}$, $\forall \xi : v \leq \xi \leq w$
- $a^P(\xi, v, w) = \partial_{\xi} (\min(\mathcal{A}(\xi, w), \mathcal{A}(v, w))) - a(\xi) \mathbf{1}_{0 > \xi}$, $\forall \xi : v \leq \xi \leq w$

que l'on peut écrire dans le cas où \mathcal{A} est un flux monotone (c'est le cas dans notre article)

$$\begin{aligned} a^P(\xi, v, w) &= (\partial_2 \mathcal{A}(v, \xi) - a(\xi) \mathbf{1}_{\xi < 0}) \mathbf{1}_{v \leq \xi \leq w} \\ &\quad + (\partial_1 \mathcal{A}(\xi, w) - a(\xi) \mathbf{1}_{\xi < 0}) \mathbf{1}_{w \leq \xi \leq v} + a(\xi) \chi(\xi, v) \mathbf{1}_{\xi < (w \wedge v)} \\ &\quad \quad \quad + a(\xi) \chi(\xi, v) \mathbf{1}_{\xi > (w \vee v)}, \end{aligned}$$

ce qui donne en notations « Vovelle »

$$\begin{aligned} a^V(\xi, v, w) &= (\partial_2 \mathcal{A}(v, \xi) - a(\xi) \mathbf{1}_{\xi < 0}) \mathbf{1}_{v \leq \xi \leq w} \\ &\quad + (\partial_1 \mathcal{A}(\xi, w) - a(\xi) \mathbf{1}_{\xi < 0}) \mathbf{1}_{w \leq \xi \leq v} + a(\xi) \chi(\xi, v) \mathbf{1}_{\xi < (w \wedge v)} \\ &\quad \quad \quad + a(\xi) \chi(\xi, v) \mathbf{1}_{\xi > (w \vee v)} + a(\xi) \mathbf{1}_{\xi < 0} \\ &= (\partial_2 \mathcal{A}(v, \xi)) \mathbf{1}_{v \leq \xi \leq w} + (\partial_1 \mathcal{A}(\xi, w)) \mathbf{1}_{w \leq \xi \leq v} + a(\xi) \chi(\xi, v) \mathbf{1}_{\xi < (w \wedge v)} \\ &\quad \quad \quad + a(\xi) \chi(\xi, v) \mathbf{1}_{\xi > (w \vee v)} + a(\xi) \mathbf{1}_{\xi < 0} \mathbf{1}_{\xi \notin [v \wedge w, v \vee w]} \\ &= (\partial_2 \mathcal{A}(v, \xi)) \mathbf{1}_{v \leq \xi \leq w} + (\partial_1 \mathcal{A}(\xi, w)) \mathbf{1}_{w \leq \xi \leq v} \\ &\quad \quad \quad + a(\xi) (\mathbf{1}_{v > \xi} - \mathbf{1}_{0 > \xi}) \mathbf{1}_{\xi \notin [v \wedge w, v \vee w]} + a(\xi) \mathbf{1}_{\xi < 0} \mathbf{1}_{\xi \notin [v \wedge w, v \vee w]} \\ &= (\partial_2 \mathcal{A}(v, \xi)) \mathbf{1}_{v \leq \xi \leq w} + (\partial_1 \mathcal{A}(\xi, w)) \mathbf{1}_{w \leq \xi \leq v} + a(\xi) \mathbf{1}_{v > \xi} \mathbf{1}_{\xi \notin [v \wedge w, v \vee w]} \\ &\quad \quad \quad = \partial_2 \mathcal{A}(v, \xi) \mathbf{1}_{v \leq \xi \leq w} + \partial_1 \mathcal{A}(\xi, w) \mathbf{1}_{w \leq \xi \leq v} + a(\xi) \mathbf{1}_{\xi < (w \wedge v)} \end{aligned}$$

et qui se généralise bien en

$$a_{K \rightarrow L}(\xi, v, w) = \partial_2 A_{K \rightarrow L}(v, \xi) \mathbf{1}_{v \leq \xi \leq w} + \partial_1 A_{K \rightarrow L}(\xi, w) \mathbf{1}_{w \leq \xi \leq v} + a_{K \rightarrow L}^*(\xi) \mathbf{1}_{\xi < (w \wedge v)}$$

Vérifions les conditions de consistance (3.38) et (3.39) :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} (a_{K \rightarrow L}(\xi, v, w) - a_{K \rightarrow L}^*(\xi) \mathbf{1}_{0 > \xi}) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(a_{K \rightarrow L}^*(\xi) \mathbf{1}_{\xi < (w \wedge v)} - a_{K \rightarrow L}^*(\xi) \mathbf{1}_{0 > \xi} \right. \\ &\quad \left. + \partial_2 A_{K \rightarrow L}(v, \xi) \mathbf{1}_{v \leq \xi \leq w} + \partial_1 A_{K \rightarrow L}(\xi, w) \mathbf{1}_{w \leq \xi \leq v} \right) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^0 \left(-a_{K \rightarrow L}^*(\xi) \mathbf{1}_{\xi \geq (w \wedge v)} + \partial_2 A_{K \rightarrow L}(v, \xi) \mathbf{1}_{v \leq \xi \leq w} + \partial_1 A_{K \rightarrow L}(\xi, w) \mathbf{1}_{w \leq \xi \leq v} \right) d\xi \\ &\quad + \int_0^{+\infty} \left(a_{K \rightarrow L}^*(\xi) \mathbf{1}_{\xi < (w \wedge v)} + \partial_2 A_{K \rightarrow L}(v, \xi) \mathbf{1}_{v \leq \xi \leq w} + \partial_1 A_{K \rightarrow L}(\xi, w) \mathbf{1}_{w \leq \xi \leq v} \right) d\xi \\ &= -|K|L|A(0) \cdot n_{K,L} + |K|L|A(w \wedge v) \cdot n_{K,L} + \mathbf{1}_{v \leq w} (A_{K \rightarrow L}(v, w) - A_{K \rightarrow L}(v, v)) \\ &\quad \quad \quad + \mathbf{1}_{v \geq w} (A_{K \rightarrow L}(v, w) - A_{K \rightarrow L}(w, w)) \\ &= -|K|L|A(0) \cdot n_{K,L} + A_{K \rightarrow L}(v, w) = A_{K \rightarrow L}(v, w) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} a_{K \rightarrow L}(\xi, v, v) &= \partial_2 A_{K \rightarrow L}(v, \xi) \mathbf{1}_{\{v\}}(\xi) + \partial_1 A_{K \rightarrow L}(\xi, v) \mathbf{1}_{\{v\}}(\xi) + a_{K \rightarrow L}^*(\xi) \mathbf{1}_{\xi < v} \\ &= a_{K \rightarrow L}^*(\xi) \mathbf{1}_{\xi < v} \quad \text{pp en } \xi. \end{aligned}$$

La formule (3.35) expliquée précédemment impose une définition des m_K^n :

$$\begin{aligned} \chi\left(\xi, v_K^{n+\frac{1}{2}}\right) - \chi\left(\xi, v_K^n\right) + \frac{t_{n+1} - t_n}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) \\ = (t_{n+1} - t_n) \partial_\xi m_K^n(\xi) \end{aligned}$$

donc par exemple

$$\begin{aligned} -m_K^n(\xi) &= \int_\xi^{+\infty} \left(\frac{1}{t_{n+1} - t_n} \left(\chi\left(\zeta, v_K^{n+\frac{1}{2}}\right) - \chi\left(\zeta, v_K^n\right) \right) + \frac{1}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}(\zeta, v_K^n, v_L^n) \right) d\zeta \end{aligned}$$

c'est à dire

$$-m_K^n(\xi) = \frac{1}{\Delta t_n} \left(\left(v_K^{n+\frac{1}{2}} - \xi \right)^+ - \left(v_K^n - \xi \right)^+ \right) + \frac{1}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_\xi^{+\infty} a_{K \rightarrow L}^n(\zeta) d\zeta$$

à condition que m_K^n soit à support compact. C'est l'objet de la remarque 59 :

Si

$$\xi > \sup \left(v_K^n, \{v_L^n : L \in \mathcal{N}(K)\}, v_K^{n+\frac{1}{2}} \right)$$

alors

$$\begin{aligned} m_K^n(\xi) &= -\frac{1}{\Delta t_n} \left(\left(v_K^{n+\frac{1}{2}} - \xi \right)^+ - \left(v_K^n - \xi \right)^+ \right) \\ &\quad - \frac{1}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_\xi^{+\infty} a_{K \rightarrow L}^n(\zeta) d\zeta = 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Si

$$\xi < \inf \left(v_K^n, \{v_L^n : L \in \mathcal{N}(K)\}, v_K^{n+\frac{1}{2}} \right)$$

alors

$$\begin{aligned}
m_K^n(\xi) &= -\frac{1}{\Delta t_n} \left(\left(v_K^{n+\frac{1}{2}} - \xi \right)^+ - \left(v_K^n - \xi \right)^+ \right) - \frac{1}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{\xi}^{+\infty} a_{K \rightarrow L}^n(\zeta) d\zeta \\
&= -\frac{1}{\Delta t_n} \left(v_K^{n+\frac{1}{2}} - v_K^n \right) - \frac{1}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{\xi}^{+\infty} a_{K \rightarrow L}^n(\zeta) d\zeta \\
&= \frac{1}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} A_{K \rightarrow L}(v_K^n, v_L^n) - \frac{1}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{\xi}^{+\infty} a_{K \rightarrow L}^n(\zeta) d\zeta \\
&= \frac{1}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} A_{K \rightarrow L}(v_K^n, v_L^n) - \frac{1}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \left(A_{K \rightarrow L}(v_K^n, v_L^n) - |K|L|A(\xi) \cdot n_{K,L} \right) \\
&= \frac{1}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} |K|L|A(\xi) \cdot n_{K,L} = \frac{1}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{K|L} A(\xi) \cdot n_{K,L} d\mathcal{H}^{n-1} \\
&= \int_K \operatorname{div}(A(\xi)) dx = 0.
\end{aligned}$$

Remarque :

comme $\mathcal{H}^{N-1}(\partial K) < +\infty$ alors $\mathcal{H}^{N-1}(\partial^* K) < +\infty$, donc K est de périmètre fini et on peut appliquer le théorème de la divergence à $A \in C^1(\bar{K})$ (cf Evans Gariépy [EG15] page 236).

Remarque importante :
l'écriture

$$\begin{aligned}
&-m_K^n(\xi) \\
&= \int_{\xi}^{+\infty} \left(\frac{1}{t_{n+1} - t_n} \left(\chi\left(\zeta, v_K^{n+\frac{1}{2}}\right) - \chi\left(\zeta, v_K^n\right) \right) + \frac{1}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}(\zeta, v_K^n, v_L^n) \right) d\zeta
\end{aligned}$$

montre que m_K^n est absolument continue sur \mathbb{R} , donc $\partial_{\xi} m_K^n$ existe presque partout (pour la mesure de Lebesgue) au sens classique, et est égale à $\partial_{\xi} m_K^n$ au sens faible.

Reprenons les idées de la résolution des lois de conservation :

1. les solutions ne sont pas forcément régulières, il faut une écriture faible de l'équation pour la résoudre
2. L'unicité de la solution n'est vraie que si on rajoute une inégalité dite entropique cohérente avec la physique
3. La résolution d'une loi de conservation est la recherche d'une densité physique. En y ajoutant une variable $\xi \in \mathbb{R}$, la formulation cinétique d'une loi

de conservation permet de chercher en quelque sorte, la densité de la densité de la loi de conservation. L'inégalité entropique est remplacée par une égalité. Le terme ajouté pour passer de l'inégalité (entropique) à l'égalité (cinétique) est appelé mesure de défaut d'entropie.

Ici l'inégalité discrète entropique $m_K^n(\xi) \geq 0$ s'écrit grâce aux demi-entropies de Kruzhkov

$$\eta(v) = (v - \xi)^+ = v - v \wedge \xi, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Les flux correspondants vérifient

$$\phi'(v) = \eta'(v) A'(v) = \left(1 - \mathbf{1}_{(-\infty; \xi)}(v)\right) a(v) = \mathbf{1}_{[\xi; +\infty)}(v) a(v)$$

d'où par exemple

$$\phi(v) = \int_{-\infty}^v \mathbf{1}_{[\xi; +\infty)}(z) a(z) dz = A(v \vee \xi) - A(\xi) = A(v) - A(v \wedge \xi)$$

ce qui donne l'idée de l'écriture d'une famille de flux entropiques numériques associés à ϕ qui peuvent s'écrire

$$\tilde{\phi}_{K \rightarrow L}(\xi, v, w) = A_{K \rightarrow L}(v \vee \xi, w \vee \xi) - A_{K \rightarrow L}(\xi, \xi)$$

ou bien

$$\phi_{K \rightarrow L}(\xi, v, w) = A_{K \rightarrow L}(v, w) - A_{K \rightarrow L}(v \wedge \xi, w \wedge \xi).$$

Notons bien que « la famille de flux entropiques numériques » n'est pas unique, en l'occurrence, ici

$$\{\tilde{\phi}_{K \rightarrow L}(\xi, v, w) : \xi \in \mathbb{R}\} \neq \{\phi_{K \rightarrow L}(\xi, v, w) : \xi \in \mathbb{R}\}.$$

La définition de $m_K^n(\xi)$ suggère la famille de flux entropiques numériques

$$\begin{aligned} \phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \eta'(\zeta) a_{K \rightarrow L}^n(\zeta) d\zeta \\ &= \int_{\xi}^{+\infty} a_{K \rightarrow L}^n(\zeta) d\zeta = A_{K \rightarrow L}(v_K^n, v_L^n) - A_{K \rightarrow L}(v_K^n \wedge \xi, v_L^n \wedge \xi). \end{aligned}$$

Remarque : si on avait pris pour définition de $m_K^n(\xi)$

$$\begin{aligned} m_K^n(\xi) &= \int_{-\infty}^{\xi} \left(\frac{1}{t_{n+1} - t_n} \left(\chi\left(\zeta, v_K^{n+\frac{1}{2}}\right) - \chi\left(\zeta, v_K^n\right) \right) + \frac{1}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}(\zeta, v_K^n, v_L^n) \right) d\zeta \\ &= -\frac{1}{\Delta t_n} \left(\left(v_K^{n+\frac{1}{2}} - \xi \right)^- - \left(v_K^n - \xi \right)^- \right) + \frac{1}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{-\infty}^{\xi} a_{K \rightarrow L}(\zeta, v_K^n, v_L^n) d\zeta, \end{aligned}$$

on aurait été embêté par le terme

$$\int_{-\infty}^{\xi} a_{K \rightarrow L}^*(\zeta) \mathbf{1}_{\zeta < (v_K^n \wedge v_L^n)} d\zeta$$

pas forcément fini.

Pour finir la démonstration de cette propriété 58, écrivons

$$v_K^{n+\frac{1}{2}} = v_K^n - \frac{\Delta t_n}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} A_{K \rightarrow L}(v_K^n, v_L^n) = H\left(v_K^n, \{v_L^n\}_{L \in \mathcal{N}(K)}\right).$$

H est une fonction croissante en chaque variable v_L^n car $A_{K \rightarrow L}(v_K^n, v_L^n)$ est décroissante en sa deuxième variable. H est aussi croissante en sa première variable. En effet, soit $b > a$

$$\begin{aligned} H\left(b, \{v_L^n\}_{L \in \mathcal{N}(K)}\right) - H\left(a, \{v_L^n\}_{L \in \mathcal{N}(K)}\right) &= b - a + \frac{\Delta t_n}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} (A_{K \rightarrow L}(a, v_L^n) - A_{K \rightarrow L}(b, v_L^n)) \\ &\geq (b - a) \left(1 - \frac{\Delta t_n}{|K|} L_A \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} |K| |L| \right) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$H\left(b, \{v_L^n\}_{L \in \mathcal{N}(K)}\right) - H\left(a, \{v_L^n\}_{L \in \mathcal{N}(K)}\right) \geq (b - a) \left(1 - \frac{\Delta t_n}{|K|} L_A |\partial K| \right) \geq 0.$$

Prouver (3.48) revient à prouver

$$-v_K^{n+\frac{1}{2}} \wedge \xi + v_K^n \wedge \xi - \frac{\Delta t_n}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} A_{K \rightarrow L}(v_K^n \wedge \xi, v_L^n \wedge \xi) \leq 0.$$

Or H est croissante par rapport à chacune de ses variables donc

$$v_K^{n+\frac{1}{2}} \geq H \left(v_K^n \wedge \xi, \{v_L^n \wedge \xi\}_{L \in \mathcal{N}(K)} \right)$$

et

$$\xi = \xi - \frac{\Delta t_n}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} A_{K \rightarrow L}(\xi, \xi) \geq H \left(v_K^n \wedge \xi, \{v_L^n \wedge \xi\}_{L \in \mathcal{N}(K)} \right)$$

donc

$$v_K^{n+\frac{1}{2}} \wedge \xi \geq H \left(v_K^n \wedge \xi, \{v_L^n \wedge \xi\}_{L \in \mathcal{N}(K)} \right)$$

c'est à dire (3.48).

3.2.4 Sur le paragraphe 3.1.5, estimations d'énergies

Remarque :

les estimations d'énergie correspondent au passage « estimations faibles » du livre d'Eymard, Gallouët, Herbin [EGH03] que Thierry Gallouët appellerait plutôt « inégalités BV faibles ».

Le schéma volume fini (3.168) est comparé à l'équation parabolique stochastique (3.49)

$$du^\epsilon(x, t) + \operatorname{div}(A(u^\epsilon(x, t))) dt - \epsilon \Delta(u^\epsilon(x, t)) dt = \Phi(x, u^\epsilon(x, t)) dW(t).$$

En effet, la solution u^ϵ de (3.49) est une solution approchée de l'équation hyperbolique stochastique (3.1)

$$du(x, t) + \operatorname{div}(A(u(x, t))) dt = \Phi(x, u(x, t)) dW(t)$$

et va tendre vers cette solution lorsque $\epsilon \rightarrow 0$.

L'existence et l'unicité de cette équation parabolique stochastique ont été prouvées pour un processus de Wiener W à valeurs dans \mathbb{R}^k par Gyöngy et Rovira (2000) [GR00]. La solution, continue en temps, est à valeur dans $L^\rho(\mathbb{T}^N)$ (pour $u_0 \in L^\rho(\mathbb{T}^N)$ et ρ suffisamment grand, $\rho \geq 2$). Il en existe aussi une modification continue en temps et en espace.

L'égalité (3.50) est donnée par la formule d'Itô. Regardons-la de plus près. Appliquons la formule d'Itô donnée dans [DZ92] à la fonction

$$F : y \in \mathbb{R} \mapsto y^2$$

qui vérifie

1. $DF(y) \cdot h = 2yh$
2. $D^2F(y) \cdot (h, k) = 2kh$

et au processus

$$du^\epsilon(x, t) = -\operatorname{div}(A(u^\epsilon(x, t))) dt + \epsilon \Delta(u^\epsilon(x, t)) dt + \Phi(x, u^\epsilon(x, t)) dW(t)$$

défini pour presque tout $x \in \mathbb{T}^N$, pour donner

$$\begin{aligned} |u^\epsilon(x, t)|^2 &= |u^\epsilon(x, 0)|^2 + \\ &\int_0^t \left(2u^\epsilon(x, s) (-\operatorname{div}(A(u^\epsilon(x, s)))) ds + \epsilon \Delta(u^\epsilon(x, s)) ds + \Phi(x, u^\epsilon(x, s)) \right) dW(s) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t 2 \|\Phi(x, u^\epsilon(x, s))\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds \end{aligned}$$

pour presque tout $x \in \mathbb{T}^N$ et $\forall t \in [0, T]$.

En intégrant par rapport à x , en utilisant le théorème de Fubini stochastique et en prenant l'espérance cela donne

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|u^\epsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 &= \mathbb{E} \|u^\epsilon(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 \\ &\quad + \int_0^t \mathbb{E} \left(2 \langle -\operatorname{div}(A(u^\epsilon(x, s))) + \epsilon \Delta(u^\epsilon(x, s)), u^\epsilon(x, s) \rangle_{L^2(\mathbb{T}^N)} \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{T}^N} \|\Phi(x, u^\epsilon(x, s))\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 dx \right) ds. \end{aligned}$$

Or

$$\|\Phi(x, u^\epsilon(x, s))\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 = \mathbf{G}^2(x, u^\epsilon(x, s))$$

donc en utilisant l'écriture des différentielles stochastiques :

$$\begin{aligned} d(\mathbb{E} \|u^\epsilon(x, t)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2) &= \mathbb{E} \left(2 \langle -\operatorname{div}(A(u^\epsilon(x, t))) + \epsilon \Delta(u^\epsilon(x, t)), u^\epsilon(x, t) \rangle_{L^2(\mathbb{T}^N)} \right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{G}(x, u^\epsilon(x, s))\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 \right) dt, \end{aligned}$$

on a de plus,

$$\begin{aligned} \langle \Delta(u^\epsilon(x, s)), u^\epsilon(x, s) \rangle_{L^2(\mathbb{T}^N)} &= - \int_{\mathbb{T}^N} \nabla(u^\epsilon(x, s)) \cdot \nabla(u^\epsilon(x, s)) dx = - \|\nabla(u^\epsilon(x, s))\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{div} (A(u^\epsilon(x, s))), u^\epsilon(x, s) \rangle_{L^2(\mathbb{T}^N)} &= - \langle A(u^\epsilon(x, s)) \cdot \nabla (u^\epsilon(x, s)) \rangle_{L^2(\mathbb{T}^N)} \\ &= - \int_{\mathbb{T}^N} A(u^\epsilon(x, s)) \cdot \nabla (u^\epsilon(x, s)) \, dx = 0 ; \end{aligned}$$

d'où l'égalité (3.50) :

$$d \left(\mathbb{E} \|u^\epsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 \right) = \mathbb{E} \left(-2 \|\nabla (u^\epsilon(t))\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 + \|\mathbf{G}(\cdot, u^\epsilon(t, \cdot))\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 \right) dt.$$

Ces derniers calculs, tout comme l'existence de $\operatorname{div} (A(u^\epsilon(x, t))) \in L^2(\mathbb{T}^N)$ et $\Delta (u^\epsilon(x, t)) \in L^2(\mathbb{T}^N)$ demandent une certaine régularité à u^ϵ . Elle est donnée dans l'article de Gyöngy et Rovira [GR00].

Remarque : l'égalité (3.50) s'écrit aussi

$$d \left(\mathbb{E} \|u^\epsilon(x, t)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 \right) = \mathbb{E} \left(-2 \|\nabla (u^\epsilon(x, s))\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 + \|\Phi(\cdot, u^\epsilon(\cdot, s))\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 \right) dt.$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_{K \rightarrow L}(\xi, v, w) &= a_{K \rightarrow L}^*(\xi) \\ &- \left(a_{K \rightarrow L}^*(\xi) \mathbf{1}_{\xi < (w \wedge v)} + \partial_2 A_{K \rightarrow L}(v, \xi) \mathbf{1}_{v \leq \xi \leq w} + \partial_1 A_{K \rightarrow L}(\xi, w) \mathbf{1}_{w \leq \xi \leq v} \right) \\ &= a_{K \rightarrow L}^*(\xi) \mathbf{1}_{\xi \geq (w \wedge v)} - \partial_2 A_{K \rightarrow L}(v, \xi) \mathbf{1}_{v \leq \xi \leq w} - \partial_1 A_{K \rightarrow L}(\xi, w) \mathbf{1}_{w \leq \xi \leq v} \\ &= a_{K \rightarrow L}^*(\xi) \mathbf{1}_{\xi > (w \vee v)} + (a_{K \rightarrow L}^*(\xi) - \partial_2 A_{K \rightarrow L}(v, \xi)) \mathbf{1}_{v \leq \xi \leq w} \\ &\quad + (a_{K \rightarrow L}^*(\xi) - \partial_1 A_{K \rightarrow L}(\xi, w)) \mathbf{1}_{w \leq \xi \leq v} \end{aligned}$$

donc

$$\bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi, v, w) = \int_{-\infty}^{\xi} \bar{a}_{K \rightarrow L}(\zeta) \, d\zeta = A_{K \rightarrow L}(\xi, \xi) - A_{K \rightarrow L}(v_K^n \wedge \xi, v_L^n \wedge \xi)$$

est une famille de flux entropiques discrets liés aux demi-entropies de Kruzhkov

$$\eta(v) = (v - \xi)^- = \xi - v \wedge \xi, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Les flux correspondants vérifient

$$\phi'(v) = \eta'(v) A'(v) = -\mathbf{1}_{(-\infty; \xi)}(v) a(v)$$

d'où par exemple

$$\begin{aligned}\phi(v) &= - \int_v^{+\infty} -\mathbf{1}_{(-\infty; \xi)}(z) a(z) dz \\ &= A(v \vee \xi) - A(v) = A(\xi) - A(v \wedge \xi).\end{aligned}$$

La famille $\bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi, v, w)$ est bien consistante avec

$$v \mapsto |K|L| (A(\xi) - A(v \wedge \xi)) .n_{K,L},$$

c'est à dire vérifie bien

$$\bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi, v, v) = |K|L| (A(\xi) - A(v \wedge \xi)) .n_{K,L}$$

Remarque : on n'a pas

$$\bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi, v, w) \neq \int_{\mathbb{R}} \eta'(\zeta) \bar{a}_{K \rightarrow L}(\zeta, v, w) d\zeta = - \int_{-\infty}^{\xi} \bar{a}_{K \rightarrow L}(\zeta, v, w) d\zeta$$

mais bien

$$\bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi, v, w) = \int_{-\infty}^{\xi} \bar{a}_{K \rightarrow L}(\zeta, v, w) d\zeta.$$

Attention, le $\bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n$ utilisé dans l'article n'est pas

$$\bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi, v, w) = \int_{-\infty}^{\xi} \bar{a}_{K \rightarrow L}(\zeta, v, w) d\zeta$$

mais bien

$$\bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi, v, w) = \int_{-\infty}^{\xi} \bar{b}_{K \rightarrow L}(\zeta, \xi, v, w) d\zeta$$

avec

$$\begin{aligned}\bar{b}_{K \rightarrow L}(\zeta, \xi, v, w) \\ = a_{K \rightarrow L}^*(\xi) \mathbf{1}_{\xi > (w \vee v)} + \partial_1 A_{K \rightarrow L}(\zeta, \xi) \mathbf{1}_{v \leq \xi \leq w} + \partial_2 A_{K \rightarrow L}(\xi, \zeta) \mathbf{1}_{w \leq \xi \leq v}.\end{aligned}$$

Après calcul, on voit que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\xi} \bar{a}_{K \rightarrow L}(\zeta, v, w) d\zeta &= \mathbf{1}_{v \leq \xi \leq w} (A_{K \rightarrow L}(\xi, \xi) - A_{K \rightarrow L}(v, \xi)) \\ &\quad + \mathbf{1}_{w \leq \xi \leq v} (A_{K \rightarrow L}(\xi, \xi) - A_{K \rightarrow L}(\xi, w))\end{aligned}$$

et

$$\int_{-\infty}^{\xi} \bar{b}_{K \rightarrow L}(\zeta, \xi, v, w) d\zeta = \mathbf{1}_{v \leq \xi \leq w} (A_{K \rightarrow L}(\xi, \xi) - A_{K \rightarrow L}(v, \xi)) \\ + \mathbf{1}_{w \leq \xi \leq v} (A_{K \rightarrow L}(\xi, \xi) - A_{K \rightarrow L}(\xi, w)) + a_{K \rightarrow L}^*(\xi) \mathbf{1}_{\xi > (w \vee v)} (\xi - (w \vee v)).$$

Ces deux fonctions de ξ coïncident sur $(-\infty; w \vee v)$, c'est ce qui va nous intéresser dans la preuve de la proposition 61.

3.2.5 Sur la proposition 60 (estimation d'énergie)

L'énergie (discrète) s'écrit au temps T

$$\mathcal{E}(T) = \sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \int_{\mathbb{R}} m_K^n(\xi) d\xi$$

et peut s'écrire grâce à une définition similaire de la fonction v_δ ,

$$m_\delta(\xi, x, t) = m_K^n(\xi), \quad \forall x \in K, \forall t \in [t_n, t_{n+1}), \forall \xi \in \mathbb{R}, \text{ ps}$$

de la manière suivante

$$\mathcal{E}(T) = \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} m_\delta(\xi, x, t) d\xi dx dt$$

Le terme

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \mathbb{E} \sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \sum_{k \geq 1} |g_{k,K}(v_K^n)|^2 \\
&= \frac{1}{2} \mathbb{E} \sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \sum_{k \geq 1} \left| \frac{1}{|K|} \int_K g_k(x, v_K^n) dx \right|^2 \\
&= \frac{1}{2} \mathbb{E} \sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \frac{1}{|K|} \sum_{k \geq 1} \left| \int_K \Phi(x, v_K^n) e_k dx \right|^2 \\
&= \frac{1}{2} \mathbb{E} \sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \frac{1}{|K|} \sum_{k \geq 1} \left| \int_K \Phi(x, v_K^n) dx e_k \right|^2 \\
&= \frac{1}{2} \mathbb{E} \sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \frac{1}{|K|} \left\| \int_K \Phi(x, v_K^n) dx \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \\
&= \frac{1}{2} \mathbb{E} \sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \left\| \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(x, v_K^n) dx \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \\
&= \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_0^T \int_{T^N} |\mathbf{G}_\delta(x, t)|^2 dx dt
\end{aligned}$$

où \mathbf{G}_δ est définie de la manière suivante

$$\mathbf{G}_\delta(x, t) = \left\| \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(x, v_K^n) dx \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}, \quad \forall x \in K, \forall t \in [t_n, t_{n+1}), \forall \xi \in \mathbb{R}, \text{ ps}$$

3.2.6 Sur la preuve de la proposition 60

(3.35) s'écrit

$$\mathbf{f}_K^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{f}_K^n + \frac{\Delta t_n}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) = \Delta t_n \partial_\xi m_K^n(\xi)$$

donc (3.35) s'écrit

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} \xi \left(\mathbf{f}_K^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{f}_K^n \right) d\xi + \int_{\mathbb{R}} \xi \frac{\Delta t_n}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) d\xi \\
&= \Delta t_n \int_{\mathbb{R}} \xi \partial_\xi m_K^n(\xi) d\xi
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\left(v_K^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 - (v_K^n)^2 \right) + \int_{\mathbb{R}} \xi \frac{\Delta t_n}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) d\xi \\ = -\Delta t_n \int_{\mathbb{R}} m_K^n(\xi) d\xi \end{aligned}$$

(j'ai détaillé les IPP dans la preuve de la proposition suivante, la proposition 61).
Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \frac{1}{2} \left(|K| \left(v_K^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 - |K| (v_K^n)^2 \right) \\ + \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \int_{\mathbb{R}} \xi \frac{\Delta t_n}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) d\xi \\ = - \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \Delta t_n \int_{\mathbb{R}} m_K^n(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \int_{\mathbb{R}} \xi \frac{\Delta t_n}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) d\xi \\ = \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \int_{\mathbb{R}} \xi \frac{\Delta t_n}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} (a_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) + a_{L \rightarrow K}(\xi, v_L^n, v_K^n)) d\xi \\ = \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \int_{\mathbb{R}} \xi \frac{\Delta t_n}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \left(a_{K \rightarrow L}^*(\xi) \mathbf{1}_{\xi < (v_K^n \wedge v_L^n)} \right. \\ + \partial_2 A_{K \rightarrow L}(v_K^n, \xi) \mathbf{1}_{v_K^n \leq \xi \leq v_L^n} + \partial_1 A_{K \rightarrow L}(\xi, v_L^n) \mathbf{1}_{v_L^n \leq \xi \leq v_K^n} \\ + a_{L \rightarrow K}^*(\xi) \mathbf{1}_{\xi < (v_K^n \wedge v_L^n)} + \partial_2 A_{L \rightarrow K}(v_L^n, \xi) \mathbf{1}_{v_L^n \leq \xi \leq v_K^n} \\ \left. + \partial_1 A_{L \rightarrow K}(\xi, v_K^n) \mathbf{1}_{v_K^n \leq \xi \leq v_L^n} \right) d\xi = 0, \end{aligned}$$

car

- $a_{L \rightarrow K}^*(\xi) = |K|L|a(\xi) \cdot n_{L,K} = |K|L|a(\xi) \cdot (-n_{K,L}) = -a_{K \rightarrow L}^*(\xi)$
- $\partial_2 A_{L \rightarrow K}(v_L^n, \xi) = \lim_{s \rightarrow \xi} \frac{A_{L \rightarrow K}(v_L^n, s) - A_{L \rightarrow K}(v_L^n, \xi)}{s - \xi}$
 $= \lim_{s \rightarrow \xi} \frac{-A_{K \rightarrow L}(s, v_L^n) + A_{K \rightarrow L}(\xi, v_L^n)}{s - \xi} = -\partial_1 A_{K \rightarrow L}(\xi, v_L^n)$
- $\partial_1 A_{L \rightarrow K}(\xi, v_K^n) = -\partial_2 A_{K \rightarrow L}(v_K^n, \xi)$.

$A_{K \rightarrow L}$ étant Lipschitzienne, les deux dernières égalités sont vraies pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$. Donc notre égalité s'écrit

$$\sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \frac{1}{2} |K| \left(\left(v_K^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 - (v_K^n)^2 \right) + \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \Delta t_n |K| \int_{\mathbb{R}} m_K^n(\xi) d\xi = 0$$

c'est à dire

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^N} \left(v_\delta^\flat(t_{n+1}) \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^N} \left(v_\delta(x, t_n) \right)^2 dx + \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \Delta t_n |K| \int_{\mathbb{R}} m_K^n(\xi) d\xi = 0,$$

soit (3.80).

La formule (3.168)

$$\begin{aligned} |K| \left(v_K^{n+1} - v_K^n \right) + \Delta t_n \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} A_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) \\ = |K| (\Delta t_n)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} g_{k,K}(v_K^n) X_k^{n+1} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \Phi(x, v_K^n) dx dW(s) \end{aligned}$$

et la définition de $v_K^{n+\frac{1}{2}}$ donnent

$$\begin{aligned} |K| \left(v_K^{n+1} - v_K^{n+\frac{1}{2}} \right) = |K| (\Delta t_n)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} g_{k,K}(v_K^n) X_k^{n+1} \\ = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \Phi(x, v_K^n) dx dW(s) \end{aligned}$$

c'est à dire

$$v_K^{n+1} = v_K^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{|K|} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \Phi(x, v_K^n) dx dW(s).$$

Cela implique

$$\begin{aligned} \left(v_K^{n+1} \right)^2 = \left(v_K^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 + 2v_K^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{|K|} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \Phi(x, v_K^n) dx dW(s) \\ + \left(\frac{1}{|K|} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \Phi(x, v_K^n) dx dW(s) \right)^2. \end{aligned}$$

En sommant sur $K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N$ et en divisant par 2, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^N} (v_\delta(x, t_n))^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^N} (v_\delta^\flat(t_{n+1}))^2 dx + \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} v_K^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{|K|} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \Phi(x, v_K^n) dx dW(s) \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \left(\frac{1}{|K|} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \Phi(x, v_K^n) dx dW(s) \right)^2. \end{aligned} \quad (3.169)$$

Or

$$v_K^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{|K|} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \Phi(x, v_K^n) dx dW(s) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} v_K^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(x, v_K^n) dx dW(s)$$

car tous les v_K^n pour $K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N$ sont $\mathcal{F}(t_n)$ -mesurable, il en va donc de même de tous les $v_K^{n+\frac{1}{2}}$ pour $K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N$, c'est à dire que les processus élémentaires

$$v_K^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(x, v_K^n) dx$$

sont intégrables par rapport au processus de Wiener cylindrique W . Ainsi

$$\mathbb{E} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} v_K^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(x, v_K^n) dx dW(s) \right) = 0.$$

Les propriétés de l'intégrale stochastique (isométrie d'Itô) disent aussi que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \mathbb{E} \left(\frac{1}{|K|} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \Phi(x, v_K^n) dx dW(s) \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{E} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\| \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(x, v_K^n) dx \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds \right) \end{aligned}$$

soit, avec les notations introduites précédemment

$$\frac{1}{2} \mathbb{E} \left(\frac{1}{|K|} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \Phi(x, v_K^n) dx dW(s) \right)^2 = \frac{1}{2} \mathbb{E} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} |\mathbf{G}_\delta(x, s)|^2 ds \right).$$

En prenant l'espérance dans (3.169), on obtient (3.85).

En ajoutant (3.80), puis en sommant sur n , on obtient (3.69).

3.2.7 Sur la preuve de la proposition 61

(3.35) s'écrit

$$\mathbf{f}_K^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{f}_K^n + \frac{\Delta t_n}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) = \Delta t_n \partial_\xi m_K^n(\xi)$$

d'où (3.87)

$$\bar{\mathbf{f}}_K^n \mathbf{f}_K^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t_n \bar{\mathbf{f}}_K^n}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) = \Delta t_n \bar{\mathbf{f}}_K^n \partial_\xi m_K^n(\xi)$$

car

$$\bar{\mathbf{f}}_K^n \mathbf{f}_K^n = \mathbf{1}_{v_K^n \leq \xi} \mathbf{1}_{v_K^n > \xi} = 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \left[\int_{\mathbb{R}} (\xi - v_K^n) \bar{\mathbf{f}}_K^n \mathbf{f}_K^{n+\frac{1}{2}} d\xi + \int_{\mathbb{R}} \frac{\Delta t_n \bar{\mathbf{f}}_K^n}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} (\xi - v_K^n) a_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) d\xi \right] \\ = \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_{\mathbb{R}} \Delta t_n \bar{\mathbf{f}}_K^n (\xi - v_K^n) \partial_\xi m_K^n(\xi) d\xi \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \left(\mathbf{1}_{v_K^n \leq v_K^{n+\frac{1}{2}}} \times \frac{1}{2} \left(v_K^{n+\frac{1}{2}} - v_K^n \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{\Delta t_n}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{v_K^n}^{v_K^n \vee v_L^n} (\xi - v_K^n) a_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) d\xi \right) \\ = \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_{\mathbb{R}} \Delta t_n \bar{\mathbf{f}}_K^n (\xi - v_K^n) \partial_\xi m_K^n(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Dans la mesure où $m_K^n(\xi)$ est absolument continue sur \mathbb{R} , $(\xi - v_K^n) m_K^n(\xi)$ l'est aussi sur le support compact de m_K^n (prenons ce support inclus dans $(-\infty; M]$ pour un certain $M \in \mathbb{R}$). Ainsi,

$$((\xi - v_K^n) m_K^n(\xi))' = (\xi - v_K^n) \partial_\xi m_K^n(\xi) + m_K^n(\xi), \quad \text{pp}$$

donc

$$\int_{v_K^n}^M ((\xi - v_K^n) m_K^n(\xi))' d\xi = \int_{v_K^n}^M (\xi - v_K^n) \partial_\xi m_K^n(\xi) d\xi + \int_{v_K^n}^M m_K^n(\xi) d\xi$$

c'est à dire

$$0 = \int_{v_K^n}^M (\xi - v_K^n) \partial_\xi m_K^n(\xi) d\xi + \int_{v_K^n}^M m_K^n(\xi) d\xi.$$

Ainsi

$$\int_{\mathbb{R}} \bar{f}_K^n (\xi - v_K^n) \partial_\xi m_K^n(\xi) d\xi = - \int_{v_K^n}^M m_K^n(\xi) d\xi = - \int_{\mathbb{R}} \bar{f}_K^n m_K^n(\xi) d\xi.$$

Remarque :

dans la mesure où $\xi \mapsto \bar{f}_K^n (\xi - v_K^n) = (\xi - v_K^n)_+$ est Lipschitzienne et que m_K^n est BV, la formule d'intégration par parties est vraie, d'où

$$\int_{\mathbb{R}} \bar{f}_K^n (\xi - v_K^n) \partial_\xi m_K^n(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} (\xi - v_K^n)_+ \partial_\xi m_K^n(\xi) d\xi = - \int_{\mathbb{R}} \bar{f}_K^n m_K^n(\xi) d\xi.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \left(\frac{1}{2} \left((v_K^{n+\frac{1}{2}} - v_K^n)_+ \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{\Delta t_n}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{v_K^n}^{v_K^n \vee v_L^n} (\xi - v_K^n) a_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) d\xi \right) \\ = \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} -\Delta t_n \int_{\mathbb{R}} \bar{f}_K^n m_K^n(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

c'est à dire (3.89) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\| (v_\delta^\flat(t_{n+1}) - v_\delta(t_n))_+ \right\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 + \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \int_{\mathbb{R}} \bar{f}_K^n m_K^n(\xi) d\xi \\ = -\Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \left[\sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{v_K^n}^{v_K^n \vee v_L^n} (\xi - v_K^n) a_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) d\xi \right]. \end{aligned}$$

Dans la mesure où $\phi_{K \rightarrow L}^n(\xi)$ est absolument continue sur $[v_K^n, v_K^n \vee v_L^n]$,

$(\xi - v_K^n) \phi_{K \rightarrow L}^n(\xi)$ l'est aussi sur $[v_K^n, v_K^n \vee v_L^n]$.

Ainsi pour presque tout $\xi \in [v_K^n, v_K^n \vee v_L^n]$,

$$((\xi - v_K^n) \phi_{K \rightarrow L}^n(\xi))' = (\xi - v_K^n) (-a_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n)) + \phi_{K \rightarrow L}^n(\xi)$$

donc

$$\begin{aligned} & \int_{v_K^n}^{v_K^n \vee v_L^n} ((\xi - v_K^n) \phi_{K \rightarrow L}^n(\xi))' d\xi \\ &= \int_{v_K^n}^{v_K^n \vee v_L^n} (\xi - v_K^n) (-a_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n)) d\xi + \int_{v_K^n}^{v_K^n \vee v_L^n} \phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi \end{aligned}$$

c'est à dire

$$0 = \int_{v_K^n}^{v_K^n \vee v_L^n} (\xi - v_K^n) (-a_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n)) d\xi + \int_{v_K^n}^{v_K^n \vee v_L^n} \phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi.$$

Ainsi

$$\int_{v_K^n}^{v_K^n \vee v_L^n} (\xi - v_K^n) a_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) d\xi = \int_{v_K^n}^{v_K^n \vee v_L^n} \phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi,$$

c'est à dire

$$\int_{\mathbb{R}} (\xi - v_K^n)_+ a_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \bar{\mathbf{f}}_K^n \phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi.$$

On obtient l'égalité

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\| (v_\delta^b(t_{n+1}) - v_\delta(t_n))_+ \right\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 + \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \int_{\mathbb{R}} \bar{\mathbf{f}}_K^n m_K^n(\xi) d\xi \\ &= -\Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \left[\sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{\mathbb{R}} \bar{\mathbf{f}}_K^n \phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi \right]. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \left[\sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{\mathbb{R}} \bar{\mathbf{f}}_K^n \phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \left[\sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{\mathbb{R}} \bar{\mathbf{f}}_K^n \phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi + \int_{\mathbb{R}} \bar{\mathbf{f}}_L^n \phi_{L \rightarrow K}^n(\xi) d\xi \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \left[\sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{\mathbb{R}} \bar{\mathbf{f}}_K^n \phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi - \int_{\mathbb{R}} \bar{\mathbf{f}}_L^n \phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \left[\sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{\mathbb{R}} (\bar{\mathbf{f}}_K^n - \bar{\mathbf{f}}_L^n) \phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi \right] \end{aligned}$$

d'où l'égalité (3.92) :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\| \left(v_\delta^\flat(t_{n+1}) - v_\delta(t_n) \right)_+ \right\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 + \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \int_{\mathbb{R}} \bar{\mathbf{f}}_K^n m_K^n(\xi) d\xi \\ &= \Delta t_n \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \left[\sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{\mathbb{R}} (\bar{\mathbf{f}}_L^n - \bar{\mathbf{f}}_K^n) \phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi \right]. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{f}}_L^n - \bar{\mathbf{f}}_K^n) \phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) &= \mathbf{1}_{v_K^n \leq \xi \leq v_L^n} (A_{K \rightarrow L}(v_K^n, \xi) - A_{K \rightarrow L}(v_K^n, v_L^n)) \\ &+ \mathbf{1}_{v_L^n \leq \xi \leq v_K^n} (A_{K \rightarrow L}(v_K^n, v_L^n) - A_{K \rightarrow L}(\xi, v_L^n)) \geq 0. \end{aligned}$$

Repartons de (3.87)

$$\bar{\mathbf{f}}_K^n \mathbf{f}_K^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t_n \bar{\mathbf{f}}_K^n}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) = \Delta t_n \bar{\mathbf{f}}_K^n \partial_\xi m_K^n(\xi)$$

et intégrons sur \mathbb{R} par rapport à ξ pour obtenir

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{v_K^n \leq \xi} \mathbf{1}_{v_K^{n+\frac{1}{2}} > \xi} d\xi + \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{v_K^n \leq \xi} \frac{\Delta t_n}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Delta t_n \mathbf{1}_{v_K^n \leq \xi} \partial_\xi m_K^n(\xi) d\xi \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} & \mathbf{1}_{v_K^n \leq v_K^{n+\frac{1}{2}}} \left(v_K^{n+\frac{1}{2}} - v_K^n \right) + \frac{\Delta t_n}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{v_K^n \leq \xi} \left(a_{K \rightarrow L}^*(\xi) \mathbf{1}_{\xi < (v_K^n \wedge v_L^n)} \right. \\ & \quad \left. + \partial_2 A_{K \rightarrow L}(v_K^n, \xi) \mathbf{1}_{v_K^n \leq \xi \leq v_L^n} + \partial_1 A_{K \rightarrow L}(\xi, v_L^n) \mathbf{1}_{v_L^n \leq \xi \leq v_K^n} \right) d\xi \\ &= -\Delta t_n m_K^n(v_K^n) \leq 0. \end{aligned}$$

Autrement dit

$$\left(v_K^{n+\frac{1}{2}} - v_K^n \right)_+ + \frac{\Delta t_n}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{\mathbb{R}} \partial_2 A_{K \rightarrow L}(v_K^n, \xi) \mathbf{1}_{v_K^n \leq \xi \leq v_L^n} d\xi \leq 0,$$

c'est à dire

$$\left(v_K^{n+\frac{1}{2}} - v_K^n \right)_+ + \frac{\Delta t_n}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \mathbf{1}_{v_K^n \leq v_L^n} (A_{K \rightarrow L}(v_K^n, v_L^n) - A_{K \rightarrow L}(v_K^n, v_K^n)) \leq 0$$

ou encore

$$|K| \left(v_K^{n+\frac{1}{2}} - v_K^n \right)_+ + \Delta t_n \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \phi_{K \rightarrow L}^n(v_K^n) \leq 0.$$

Remarque :

on aurait pu simplement appliquer l'inégalité entropique discrète (3.48) à $\xi = v_K^n$ pour obtenir l'inégalité précédente.

En utilisant le premier CFL modifié et en élevant au carré, on obtient :

$$|K|^2 \left(v_K^{n+\frac{1}{2}} - v_K^n \right)_+^2 \leq (\Delta t_n)^2 \left(\sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \phi_{K \rightarrow L}^n(v_K^n) \right)^2.$$

A partir de

$$\int_K \left(v_K^{n+\frac{1}{2}} - v_K^n \right)_+^2 dx \leq \frac{(\Delta t_n)^2}{|K|} \left(\sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \phi_{K \rightarrow L}^n(v_K^n) \right)^2,$$

on introduit artificiellement un facteur $|K|L|^{\frac{1}{2}}$ pour utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\int_K \left(v_K^{n+\frac{1}{2}} - v_K^n \right)_+^2 dx \leq \frac{(\Delta t_n)^2}{|K|} \left(\sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \frac{\phi_{K \rightarrow L}^n(v_K^n)}{|K|L|^{\frac{1}{2}}} \times |K|L|^{\frac{1}{2}} \right)^2$$

donc

$$\int_K \left(v_K^{n+\frac{1}{2}} - v_K^n \right)_+^2 dx \leq \frac{(\Delta t_n)^2}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \frac{|\phi_{K \rightarrow L}^n(v_K^n)|^2}{|K|L|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} |K|L|$$

c'est à dire

$$\int_K \left(v_K^{n+\frac{1}{2}} - v_K^n \right)_+^2 dx \leq \frac{(\Delta t_n)^2}{|K|} |\partial K| \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \frac{|\phi_{K \rightarrow L}^n(v_K^n)|^2}{|K|L|}.$$

Grâce à l'égalité

$$\phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) = \int_{\xi}^{+\infty} a_{K \rightarrow L}^n(\zeta) d\zeta,$$

$\phi_{K \rightarrow L}^n$ est absolument continue sur $[v_K^n, +\infty)$ donc est $d\xi$ -presque partout déri-

vable. On a

$$\begin{aligned}\phi_{K \rightarrow L}^n(v_K^n) &= \int_{\mathbb{R}} \partial_2 A_{K \rightarrow L}(v_K^n, \xi) \mathbf{1}_{v_K^n \leq \xi \leq v_L^n} d\xi \\ &= \mathbf{1}_{v_K^n \leq v_L^n} (A_{K \rightarrow L}(v_K^n, v_L^n) - A_{K \rightarrow L}(v_K^n, v_K^n))\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}|\phi_{K \rightarrow L}^n(v_K^n)|^2 &= -2 \int_{v_K^n}^{v_L^n \vee v_K^n} \phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) \partial_\xi \phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi \\ &= 2 \int_{v_K^n}^{v_L^n \vee v_K^n} \phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) a_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi \leq 2 \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |a_{K \rightarrow L}^n(\xi)| \int_{v_K^n}^{v_L^n \vee v_K^n} -\phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi.\end{aligned}$$

Comme

$$\int_{v_K^n}^{v_L^n \vee v_K^n} -\phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi = \mathbf{1}_{v_L^n > v_K^n} \int_{\mathbb{R}} (\bar{\mathbf{f}}_L^n - \bar{\mathbf{f}}_K^n) \phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi,$$

il vient

$$\begin{aligned}& \int_{\mathbb{T}^N} \left(v_\delta^\flat(t_{n+1}) - v_\delta(t_n) \right)_+^2 dx \\ & \leq \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \left[\frac{(\Delta t_n)^2}{|K|} \times \frac{|\partial K|}{|K|L} 2 \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |a_{K \rightarrow L}^n(\xi)| \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{\mathbb{R}} (\bar{\mathbf{f}}_L^n - \bar{\mathbf{f}}_K^n) \phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi \right]\end{aligned}$$

puis en sommant sur les $K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N$ et en utilisant la condition CFL on obtient (3.97) :

$$\begin{aligned}& \int_{\mathbb{T}^N} \left(v_\delta^\flat(t_{n+1}) - v_\delta(t_n) \right)_+^2 dx \\ & \leq (1 - \theta) \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \left[\sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{\mathbb{R}} (\bar{\mathbf{f}}_L^n - \bar{\mathbf{f}}_K^n) \phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi \right].\end{aligned}$$

Pour conclure et trouver les inégalités (3.71) et (3.72), je vais prendre quelques lettres :

$$\begin{aligned}a &= \int_{\mathbb{T}^N} \left(v_\delta^\flat(t_{n+1}) - v_\delta(t_n) \right)_+^2 dx \\ b &= \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \int_{\mathbb{R}} \bar{\mathbf{f}}_K^n m_K^n(\xi) d\xi \\ c &= \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \left[\sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{\mathbb{R}} (\bar{\mathbf{f}}_L^n - \bar{\mathbf{f}}_K^n) \phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi \right]\end{aligned}$$

L'égalité (3.92) s'écrit

$$a + 2b = c,$$

l'inégalité (3.97) s'écrit

$$a \leq (1 - \theta) c \Leftrightarrow \theta c \leq c - a \Leftrightarrow \theta c \leq 2b \Leftrightarrow c \leq \frac{2}{\theta} b$$

qui entraîne bien (3.72) en sommant sur n .

Reprenons (3.97) :

$$\begin{aligned} a \leq (1 - \theta) c &\Leftrightarrow a \leq (1 - \theta) (a + 2b) \\ &\Leftrightarrow a [1 - (1 - \theta)] \leq (1 - \theta) 2b \Leftrightarrow a \leq (1 - \theta) \frac{2}{\theta} b \end{aligned}$$

qui entraîne bien (3.71) en sommant sur n . C'est même un peu mieux que (3.71) puisque je trouve un facteur $(1 - \theta)$ en plus à gauche de l'inégalité.

(3.35) s'écrit

$$|K| \left(\mathbf{f}_K^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{f}_K^n \right) + \Delta t_n \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) = \Delta t_n |K| \partial_\xi m_K^n(\xi)$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} |K| \left(1 - \bar{\mathbf{f}}_K^{n+\frac{1}{2}} - (1 - \bar{\mathbf{f}}_K^n) \right) + \Delta t_n \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} (a_{K \rightarrow L}^*(\xi) - \bar{a}_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n)) \\ = \Delta t_n |K| \partial_\xi m_K^n(\xi) \\ \Leftrightarrow -|K| \left(\bar{\mathbf{f}}_K^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{f}}_K^n \right) - \Delta t_n \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \bar{a}_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) = \Delta t_n |K| \partial_\xi m_K^n(\xi) \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}^*(\xi) &= \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} |K|L| a(\xi) \cdot n_{K,L} = \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{|K|L|} a(\xi) \cdot n_{K,L} d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{|K|L|} a(\xi) \cdot n_{K,L} d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{|\partial K|} a(\xi) \cdot n_K d\mathcal{H}^{n-1} = \int_K \operatorname{div}(a(\xi)) dx = 0. \end{aligned}$$

On a donc (3.98), que l'on multiplie par \mathbf{f}_K^n pour obtenir

$$-|K| \bar{\mathbf{f}}_K^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{f}_K^n - \Delta t_n \mathbf{f}_K^n \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \bar{a}_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) = \Delta t_n \mathbf{f}_K^n |K| \partial_\xi m_K^n(\xi).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \left(\int_{\mathbb{R}} (\xi - v_K^n) \left(-|K| \bar{\mathbf{f}}_K^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{f}_K^n \right) d\xi \right. \\ & \quad \left. - \int_{\mathbb{R}} \Delta t_n \mathbf{f}_K^n \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} (\xi - v_K^n) \bar{a}_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) d\xi \right) \\ & = \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_{\mathbb{R}} \Delta t_n \mathbf{f}_K^n |K| (\xi - v_K^n) \partial_{\xi} m_K^n(\xi) d\xi \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \left(\mathbf{1}_{v_K^n \geq v_K^{n+\frac{1}{2}}} \times |K| \frac{1}{2} \left(v_K^{n+\frac{1}{2}} - v_K^n \right)^2 \right. \\ & \quad \left. - \Delta t_n \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{v_K^n \wedge v_L^n}^{v_K^n} (\xi - v_K^n) \bar{a}_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) d\xi \right) \\ & = \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_{\mathbb{R}} \Delta t_n |K| \mathbf{f}_K^n (\xi - v_K^n) \partial_{\xi} m_K^n(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Dans la mesure où $m_K^n(\xi)$ est absolument continue sur \mathbb{R} , $(\xi - v_K^n) m_K^n(\xi)$ l'est aussi sur le support compact de m_K^n (prenons ce support inclus dans $[M; +\infty)$ pour un certain $M \in \mathbb{R}$). Ainsi,

$$((\xi - v_K^n) m_K^n(\xi))' = (\xi - v_K^n) \partial_{\xi} m_K^n(\xi) + m_K^n(\xi), \quad \text{pp}$$

donc

$$\int_M^{v_K^n} ((\xi - v_K^n) m_K^n(\xi))' d\xi = \int_M^{v_K^n} (\xi - v_K^n) \partial_{\xi} m_K^n(\xi) d\xi + \int_M^{v_K^n} m_K^n(\xi) d\xi$$

c'est à dire

$$0 = \int_M^{v_K^n} (\xi - v_K^n) \partial_{\xi} m_K^n(\xi) d\xi + \int_M^{v_K^n} m_K^n(\xi) d\xi.$$

Ainsi

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{f}_K^n (\xi - v_K^n) \partial_{\xi} m_K^n(\xi) d\xi = - \int_M^{v_K^n} m_K^n(\xi) d\xi = - \int_{\mathbb{R}} \mathbf{f}_K^n m_K^n(\xi) d\xi.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \left(\frac{1}{2} |K| \left(\left(v_K^{n+\frac{1}{2}} - v_K^n \right)_- \right)^2 \right. \\ & \quad \left. - \Delta t_n \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{v_K^n \wedge v_L^n}^{v_K^n} (\xi - v_K^n) \bar{a}_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) d\xi \right) \\ & \qquad \qquad \qquad = \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} -\Delta t_n |K| \int_{\mathbb{R}} \mathbf{f}_K^n m_K^n(\xi) d\xi \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\| \left(v_\delta^\flat(t_{n+1}) - v_\delta(t_n) \right)_- \right\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 + \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \int_{\mathbb{R}} \mathbf{f}_K^n m_K^n(\xi) d\xi \\ & \qquad \qquad \qquad = \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \left[\sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{v_K^n \wedge v_L^n}^{v_K^n} (\xi - v_K^n) \bar{a}_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) d\xi \right]. \end{aligned}$$

Remarquons tout de suite que $\forall \xi \in [v_K^n \wedge v_L^n, v_K^n]$,

$$\int_{-\infty}^{\xi} \bar{a}_{K \rightarrow L}(\zeta, v_K^n, v_L^n) d\zeta = \int_{-\infty}^{\xi} \bar{b}_{K \rightarrow L}(\zeta, \xi, v_K^n, v_L^n) d\zeta.$$

Dans la mesure où

$$\xi \mapsto \int_{-\infty}^{\xi} a_{K \rightarrow L}(\zeta, v_K^n, v_L^n) d\zeta$$

est absolument continue sur $[v_K^n \wedge v_L^n, v_K^n]$,

$$(\xi - v_K^n) \int_{-\infty}^{\xi} \bar{a}_{K \rightarrow L}(\zeta, v_K^n, v_L^n) d\zeta$$

l'est aussi sur $[v_K^n \wedge v_L^n, v_K^n]$. Ainsi, pour presque tout $\xi \in [v_K^n \wedge v_L^n, v_K^n]$,

$$\begin{aligned} & \left((\xi - v_K^n) \int_{-\infty}^{\xi} \bar{a}_{K \rightarrow L}(\zeta, v_K^n, v_L^n) d\zeta \right)' \\ & \qquad \qquad \qquad = (\xi - v_K^n) (\bar{a}_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n)) + \int_{-\infty}^{\xi} \bar{a}_{K \rightarrow L}(\zeta, v_K^n, v_L^n) d\zeta \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & \int_{v_K^n \wedge v_L^n}^{v_K^n} \left((\xi - v_K^n) \int_{-\infty}^{\xi} \bar{a}_{K \rightarrow L}(\zeta, v_K^n, v_L^n) d\zeta \right)' d\xi \\ &= \int_{v_K^n \wedge v_L^n}^{v_K^n} (\xi - v_K^n) (\bar{a}_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n)) d\xi + \int_{v_K^n \wedge v_L^n}^{v_K^n} \int_{-\infty}^{\xi} \bar{a}_{K \rightarrow L}(\zeta, v_K^n, v_L^n) d\zeta d\xi \end{aligned}$$

c'est à dire

$$0 = \int_{v_K^n \wedge v_L^n}^{v_K^n} (\xi - v_K^n) (\bar{a}_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n)) d\xi + \int_{v_K^n \wedge v_L^n}^{v_K^n} \int_{-\infty}^{\xi} \bar{b}_{K \rightarrow L}(\zeta, \xi, v_K^n, v_L^n) d\zeta d\xi.$$

Ainsi

$$\int_{v_K^n \wedge v_L^n}^{v_K^n} (\xi - v_K^n) (\bar{a}_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n)) d\xi = - \int_{v_K^n \wedge v_L^n}^{v_K^n} \int_{-\infty}^{\xi} \bar{b}_{K \rightarrow L}(\zeta, \xi, v_K^n, v_L^n) d\zeta d\xi$$

c'est à dire

$$\int_{v_K^n \wedge v_L^n}^{v_K^n} (\xi - v_K^n) (\bar{a}_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n)) d\xi = - \int_{\mathbb{R}} \mathbf{f}_K^n \bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi.$$

On obtient l'égalité

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\| \left(v_{\delta}^b(t_{n+1}) - v_{\delta}(t_n) \right)_- \right\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 + \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \int_{\mathbb{R}} \mathbf{f}_K^n m_K^n(\xi) d\xi \\ = -\Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \left[\sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{f}_K^n \bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi \right]. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \left[\sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{f}_K^n \bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \left[\sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{f}_K^n \bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi + \int_{\mathbb{R}} \mathbf{f}_L^n \bar{\phi}_{L \rightarrow K}^n(\xi) d\xi \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \left[\sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{f}_K^n \bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi - \int_{\mathbb{R}} \mathbf{f}_L^n \bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \left[\sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{\mathbb{R}} (\mathbf{f}_K^n - \mathbf{f}_L^n) \bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi \right], \end{aligned}$$

d'où l'égalité (3.100) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\| \left(v_\delta^\flat(t_{n+1}) - v_\delta(t_n) \right)_- \right\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 + \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \int_{\mathbb{R}} \mathbf{f}_K^n m_K^n(\xi) d\xi \\ = \Delta t_n \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \left[\sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{\mathbb{R}} (\mathbf{f}_L^n - \mathbf{f}_K^n) \bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi \right]. \end{aligned}$$

A partir de

$$|K| \left(\bar{\mathbf{f}}_K^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{f}}_K^n \right) + \Delta t_n \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \bar{a}_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) = -\Delta t_n |K| \partial_\xi m_K^n(\xi),$$

on intègre par rapport à ξ sur $(-\infty, v_K^n]$ pour obtenir

$$|K| \left(v_K^{n+\frac{1}{2}} - v_K^n \right)_- + \Delta t_n |K| m_K^n(v_K^n) = -\Delta t_n \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(v_K^n)$$

donc

$$|K| \left(v_K^{n+\frac{1}{2}} - v_K^n \right)_- \leq -\Delta t_n \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(v_K^n).$$

On élève au carré, puis on introduit artificiellement un facteur $|K|L|^{\frac{1}{2}}$ pour utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\int_K \left(v_K^{n+\frac{1}{2}} - v_K^n \right)_-^2 dx \leq \frac{(\Delta t_n)^2}{|K|} \left(\sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \frac{\bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(v_K^n)}{|K|L|^{\frac{1}{2}}} \times |K|L|^{\frac{1}{2}} \right)^2$$

donc

$$\int_K \left(v_K^{n+\frac{1}{2}} - v_K^n \right)_-^2 dx \leq \frac{(\Delta t_n)^2}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \frac{|\bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(v_K^n)|^2}{|K|L|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} |K|L|,$$

c'est à dire

$$\int_K \left(v_K^{n+\frac{1}{2}} - v_K^n \right)_-^2 dx \leq \frac{(\Delta t_n)^2}{|K|} |\partial K| \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \frac{|\bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(v_K^n)|^2}{|K|L|}.$$

Grâce à l'égalité

$$\bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \bar{b}_{K \rightarrow L}^n(\zeta) d\zeta,$$

$\bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n$ est absolument continue sur $(-\infty, v_K^n]$ donc est $d\xi$ -presque partout déri-

vable. On a

$$\bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(v_K^n) = \mathbf{1}_{v_K^n \geq v_L^n} (A_{K \rightarrow L}(v_K^n, v_K^n) - A_{K \rightarrow L}(v_K^n, v_L^n))$$

et

$$\begin{aligned} |\bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(v_K^n)|^2 &= -2 \int_{v_K^n \wedge v_L^n}^{v_K^n} \bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi) \partial_\xi \bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi \\ &= 2 \int_{v_K^n \wedge v_L^n}^{v_K^n} \bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi) \bar{b}_{K \rightarrow L}^n(\xi, \xi) d\xi \leq 2 \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\bar{b}_{K \rightarrow L}^n(\xi, \xi)| \int_{v_K^n \wedge v_L^n}^{v_K^n} -\bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Comme

$$\int_{v_K^n \wedge v_L^n}^{v_K^n} -\bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi = \mathbf{1}_{v_L^n < v_K^n} \int_{\mathbb{R}} (\mathbf{f}_L^n - \mathbf{f}_K^n) \bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi$$

et que

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}_L^n - \mathbf{f}_K^n) \bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi) &= -\mathbf{1}_{v_L^n \leq \xi \leq v_K^n} (A_{K \rightarrow L}(\xi, \xi) - A_{K \rightarrow L}(\xi, v_L^n)) \\ &\quad + \mathbf{1}_{v_K^n \leq \xi \leq v_L^n} (A_{K \rightarrow L}(\xi, \xi) - A_{K \rightarrow L}(v_K^n, \xi)) \geq 0, \end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{T}^N} \left(v_\delta^\flat(t_{n+1}) - v_\delta(t_n) \right)_-^2 dx \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \left[\frac{(\Delta t_n)^2}{|K|} \times \frac{|\partial K|}{|K|L} 2 \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\bar{b}_{K \rightarrow L}^n(\xi, \xi)| \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{\mathbb{R}} (\mathbf{f}_L^n - \mathbf{f}_K^n) \bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi \right] \end{aligned}$$

puis en utilisant la condition CFL on obtient :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{T}^N} \left(v_\delta^\flat(t_{n+1}) - v_\delta(t_n) \right)_-^2 dx \\ &\leq (1 - \theta) \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \left[\sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{\mathbb{R}} (\mathbf{f}_L^n - \mathbf{f}_K^n) \bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi \right]. \end{aligned}$$

Pour conclure et trouver les inégalités (3.74) et (3.75), on réitère les calculs prouvant les inégalités (3.71) et (3.72).

3.2.8 Concernant la remarque 64

Grâce à l'égalité

$$\phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) = \int_{\xi}^{+\infty} a_{K \rightarrow L}^n(\zeta) d\zeta,$$

on peut affirmer que

1. si $\xi \geq v_L^n \geq v_K^n$, alors $\phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) = 0$,
2. si $v_L^n \geq \xi \geq v_K^n$ alors

$$\begin{aligned} \phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \partial_2 A_{K \rightarrow L}(v_K^n, \zeta) \mathbf{1}_{\xi \leq \zeta \leq v_L^n} d\zeta \\ &= \mathbf{1}_{v_K^n \leq v_L^n} (A_{K \rightarrow L}(v_K^n, v_L^n) - A_{K \rightarrow L}(v_K^n, \xi)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |\phi_{K \rightarrow L}^n(\xi)|^2 &= -2 \int_{\xi}^{v_L^n} \phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) \partial_{\zeta} \phi_{K \rightarrow L}^n(\zeta) d\zeta \\ &= 2 \int_{\xi}^{v_L^n} \phi_{K \rightarrow L}^n(\zeta) a_{K \rightarrow L}^n(\zeta) d\zeta \\ &\leq 2 \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |a_{K \rightarrow L}^n(\xi)| \int_{\xi}^{v_L^n} -\phi_{K \rightarrow L}^n(\zeta) d\zeta \\ &\leq 2 \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |a_{K \rightarrow L}^n(\xi)| \int_{v_K^n}^{v_L^n} -\phi_{K \rightarrow L}^n(\zeta) d\zeta \\ &\leq 2 \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |a_{K \rightarrow L}^n(\xi)| \int_{\mathbb{R}} (\bar{\mathbf{f}}_L^n - \bar{\mathbf{f}}_K^n) \phi_{K \rightarrow L}^n(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

La preuve de

$$|\phi_{K \rightarrow L}^n(v_K^n)|^2 \leq 2 \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |a_{K \rightarrow L}^n(\xi)| \int_{\mathbb{R}} (\bar{\mathbf{f}}_L^n - \bar{\mathbf{f}}_K^n) \phi_{K \rightarrow L}^n(\zeta) d\zeta$$

ayant déjà été faite, le résultat de la remarque suit aisément.

3.2.9 Sur le corollaire 62 (weak derivative estimate)

La condition

$$\Delta t_n \leq \frac{(1 - \theta) \alpha_N^2 h}{2L_A}$$

s'écrit aussi

$$\frac{2\Delta t_n}{(1-\theta)} \leq \frac{\alpha_N^2}{L_A} h.$$

Pour montrer qu'elle implique la condition CFL 3.70, il suffit de prouver que

$$\frac{\alpha_N^2}{L_A} h \leq |K| \times \frac{|K|L|}{|\partial K|} \times \frac{1}{\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |a_{K \rightarrow L}^n(\xi)|}.$$

Ceci est vrai grâce à (3.56) et (3.62) qui disent que

$$h|\partial K| \leq \frac{|K|}{\alpha_N^2}$$

et que

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |a_{K \rightarrow L}^n(\xi)| \leq |K|L|L_A.$$

On fait de même pour montrer qu'elle implique la condition CFL (3.73) en remplaçant $\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |a_{K \rightarrow L}^n(\xi)|$ par $\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\bar{b}_{K \rightarrow L}^n(\xi, \xi)|$.

(3.27) nous dit que

$$\mathbf{G}_K^2(v_K^n) = \left\| \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(x, v_K^n) dx \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \leq D_0.$$

Pour obtenir (3.102), il faut multiplier par $|K|$, puis sommer sur les $K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N$, ainsi

$$\sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \mathbf{G}_K^2(v_K^n) \leq \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| D_0 = D_0.$$

Puis

$$\sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \mathbf{G}_K^2(v_K^n) \leq D_0 T.$$

On doit alors utiliser (3.69) pour obtenir

$$\frac{1}{2} \mathbb{E} \|v_\delta(T)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 + \mathbb{E}(\mathcal{E}(T)) \leq \frac{1}{2} \mathbb{E} \|v_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 + \frac{D_0 T}{2}$$

ce qui donne l'estimation (3.77) où on peut même majorer par

$$\frac{1}{\theta} \left(\mathbb{E} \|v_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 + D_0 T - \mathbb{E} \|v_\delta(T)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 \right).$$

Idem pour (3.78).

Si on somme (3.103) sur n , on trouve

$$\mathbb{E} \sum_{n=0}^{N_T-1} \left\| v_\delta(t_{n+1}) - v_\delta^\flat(t_{n+1}) \right\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 \leq D_0 T.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sum_{n=0}^{N_T-1} \left\| v_\delta(t_{n+1}) - v_\delta(t_n) \right\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 \\ &= \mathbb{E} \sum_{n=0}^{N_T-1} \left\| v_\delta(t_{n+1}) - v_\delta^\flat(t_{n+1}) + v_\delta^\flat(t_{n+1}) - v_\delta(t_n) \right\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 \\ &\leq 2\mathbb{E} \sum_{n=0}^{N_T-1} \left(\left\| v_\delta(t_{n+1}) - v_\delta^\flat(t_{n+1}) \right\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 + \left\| v_\delta^\flat(t_{n+1}) - v_\delta(t_n) \right\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 \right) \\ &\leq 2D_0 T + 2\frac{1}{\theta} \left(\mathbb{E} \left\| v_\delta(0) \right\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 + D_0 T - \mathbb{E} \left\| v_\delta(T) \right\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 \right) \\ &\leq 2\frac{1}{\theta} \left(\mathbb{E} \left\| v_\delta(0) \right\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 + 2D_0 T - \mathbb{E} \left\| v_\delta(T) \right\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 \right). \end{aligned}$$

3.2.10 Sur l'introduction du paragraphe 3.1.6

Notons que la formule vraie $\forall t \in [t_n, t_{n+1}), \forall x \in K$,

$$\begin{aligned} v_K^\#(t) &= v_\delta^\#(x, t) = v_K^{n+\frac{1}{2}} + \sum_k g_{k,K}(v_K^n)(\beta_k(t) - \beta_k(t_n)) \\ &= v_K^{n+\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|K|} \int_K g_k(x, v_K^n) dx \times (\beta_k(t) - \beta_k(t_n)) \\ &= v_K^{n+\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(x, v_K^n) e_k dx \times (W(t) e_k - W(t_n) e_k) \\ &= v_K^{n+\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(x, v_K^n) dx e_k \times (W(t) - W(t_n)) e_k \\ &= v_K^{n+\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(x, v_K^n) dx \circ j^{-1}(jW(t) - jW(t_n)) \\ &= v_K^{n+\frac{1}{2}} + \int_{t_n}^t \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(x, v_K^n(\omega)) dx dW(s) \end{aligned}$$

signifie que $v_K^\#(t)$ est égale à $v_K^{n+\frac{1}{2}}$ pour $t = t_n$, qu'elle est continue en temps sur chaque intervalle $[t_n, t_{n+1})$, dépend du hasard ω et donc peut être vue comme un processus stochastique, et est telle que

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_{n+1} \\ t < t_{n+1}}} v_K^\#(t) = v_K^{n+1}.$$

Remarque : la solution approchée

$$v_\delta^\#(x, t) = v_K^\#(t), \quad \forall t \in [0, T], \forall x \in K$$

n'est pas constante par morceau (en temps) comme dans le livre de Thierry Gallouët [EGH03], elle n'est même pas polynomiale par morceaux.

La formule (3.104) vraie $\forall \xi \in \mathbb{R}, \forall x \in K, \forall t \in [t_n, t_{n+1})$,

$$f_\delta(x, t, \xi) = \frac{t - t_n}{\Delta t_n} \mathbf{1}_{v_\delta^\#(x, t) > \xi} + \frac{t_{n+1} - t}{\Delta t_n} \mathbf{1}_{v_\delta(x, t) > \xi}$$

signifie que $f_\delta(x, t, \xi)$ est égale à $\mathbf{f}_K^n(\xi) = \mathbf{1}_{v_K^n > \xi}$ pour $t = t_n$, et que

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_{n+1} \\ t < t_{n+1}}} f_\delta(x, t, \xi) = \mathbf{1}_{v_K^{n+1} > \xi} = \mathbf{f}_K^{n+1}(\xi).$$

Elle est continue en chaque t_n à ξ et x fixé.

3.2.11 Sur la preuve du lemme 65

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \left(\int_{\mathbb{R}} |f_\delta(x, t, \xi) - \mathbf{f}_\delta(x, t, \xi)| d\xi \right)^2 dx dt \\ &= \mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{t - t_n}{\Delta t_n} \mathbf{1}_{v_\delta^\#(x, t) > \xi} + \frac{t_{n+1} - t}{\Delta t_n} \mathbf{f}_\delta(x, t, \xi) - \mathbf{f}_\delta(x, t, \xi) \right| d\xi \right)^2 dx dt \\ &= \mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{t - t_n}{\Delta t_n} \mathbf{1}_{v_\delta^\#(x, t) > \xi} - \frac{t - t_n}{\Delta t_n} \mathbf{f}_\delta(x, t, \xi) \right| d\xi \right)^2 dx dt \\ &\leq \mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \mathbf{1}_{v_\delta^\#(x, t) > \xi} - \mathbf{f}_\delta(x, t, \xi) \right| d\xi \right)^2 dx dt \\ &\leq \mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} |v_\delta^\#(t) - v_\delta(t)|^2 dx dt \leq \mathbb{E} \int_0^T \|v_\delta^\#(t) - v_\delta(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 dt. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \left(\int_{\mathbb{R}} |f_\delta(x, t, \xi) - \mathbf{f}_\delta(x, t, \xi)| d\xi \right)^2 dx dt \\
& \leq \mathbb{E} \int_0^T \left\| v_\delta^\#(t) - v_\delta(t) \right\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 dt \\
& = \sum_{n=0}^{N_T-1} \mathbb{E} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\| v_\delta^\#(t) - v_\delta^b(t_{n+1}) + v_\delta^b(t_{n+1}) - v_\delta(t_n) \right\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 dt \\
& = \sum_{n=0}^{N_T-1} \mathbb{E} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\| v_\delta^\#(t) - v_\delta^b(t_{n+1}) \right\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 dt \\
& \quad + \sum_{n=0}^{N_T-1} \mathbb{E} \Delta t_n \left\| v_\delta^b(t_{n+1}) - v_\delta(t_n) \right\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 \\
& + \sum_{n=0}^{N_T-1} 2 \mathbb{E} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_K \left(-\frac{\Delta t_n}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} A_{K \rightarrow L}(v_K^n, v_L^n) \right) \\
& \quad \times \int_{t_n}^t \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(x, v_K^n(\omega)) dx dW(s) dy dt
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{N_T-1} \mathbb{E} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\| v_\delta^\#(t) - v_\delta^b(t_{n+1}) \right\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 dt \\
& = \sum_{n=0}^{N_T-1} \mathbb{E} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_K \left| \int_{t_n}^t \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(x, v_K^n(\omega)) dx dW(s) \right|^2 dt \\
& = \sum_{n=0}^{N_T-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_K \mathbb{E} \int_{t_n}^t \left\| \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(x, v_K^n(\omega)) dx \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds dy dt \\
& \leq \sum_{n=0}^{N_T-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_K \mathbb{E} \int_{t_n}^t D_0 ds dy dt = \sum_{n=0}^{N_T-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} D_0(t - t_n) dt
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(A_{K \rightarrow L}(v_K^n, v_L^n) \int_{t_n}^t \int_K \Phi(x, v_K^n(\omega)) dx dW(s) \right) \\
& = \mathbb{E} \left(\int_{t_n}^t A_{K \rightarrow L}(v_K^n, v_L^n) \int_K \Phi(x, v_K^n(\omega)) dx dW(s) \right) = 0
\end{aligned}$$

car $A_{K \rightarrow L}(v_K^n, v_L^n)$ est \mathcal{F}_{t_n} -mesurable.

Il reste à utiliser l'estimation (3.78) :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N_T-1} \mathbb{E} \Delta t_n \left\| v_\delta^b(t_{n+1}) - v_\delta(t_n) \right\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 \\ \leq \sup_{n \in \{0, \dots, N_T-1\}} \Delta t_n \times \left(\frac{1}{\theta} \left(\|v_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 + D_0 T \right) \right) \end{aligned}$$

pour arriver à (3.107).

3.2.12 Sur l'équation cinétique discrète (proposition 67)

Elle peut se réécrire ainsi : $\forall t \in [t_n, t_{n+1})$,

$$\begin{aligned} \langle f_\delta(x, t), \psi \rangle - \langle f_\delta(x, t_n), \psi \rangle \\ = -\frac{1}{|K|} \int_{t_n}^t \int_{\mathbb{R}} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}^n(\xi) \psi(\xi) d\xi ds - \int_{t_n}^t \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi \psi(\xi) m_K^n(\xi) d\xi ds \\ + \frac{t - t_n}{\Delta t_n} \int_{t_n}^t \psi(v_\delta^\#(x, s, \omega)) \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(y, v_K^n(\omega)) dy dW(s) \\ + \frac{1}{2} \frac{t - t_n}{\Delta t_n} \int_{t_n}^t \partial_\xi \psi(v_\delta^\#(x, s, \omega)) \left\| \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(y, v_K^n(\omega)) dy \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds. \end{aligned}$$

En effet

$$\frac{1}{|K|} \int_K \Phi(y, v_K^n(\omega)) dy \in L_2(H, \mathbb{R})$$

car d'après (3.6)

$$\begin{aligned} \sum_k \left| \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(y, v_K^n(\omega)) dy e_k \right|^2 &= \sum_k \left| \frac{1}{|K|} \int_K g_k(y, v_K^n(\omega)) dy \right|^2 \\ &\leq \frac{1}{|K|^2} |K| \sum_k \int_K (g_k(y, v_K^n(\omega)))^2 dy \leq D_0. \end{aligned}$$

$v_\delta^\#(x, \cdot, \omega)$ étant continue sur $[t_n, t_{n+1})$, ψ étant à valeurs réelles et bornée, on a aussi

$$\psi(v_\delta^\#(x, s, \omega)) \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(y, v_K^n(\omega)) dy \in L_2(H, \mathbb{R})$$

et

$$\mathbb{E} \int_{t_n}^t \left\| \psi \left(v_\delta^\#(x, s, \omega) \right) \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(y, v_K^n(\omega)) dy \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds < +\infty.$$

De plus,

$$s \in [t_n, t_{n+1}) \mapsto \psi \left(v_\delta^\#(x, s, \omega) \right) \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(y, v_K^n(\omega)) dy$$

est continue donc prévisible. L'intégrale d'Itô est bien définie $\forall t \in [t_n, t_{n+1})$, et on peut écrire

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t_n}^t g_{k,K}(v_K^n(\omega)) \psi \left(v_\delta^\#(x, s, \omega) \right) d\beta_k(s) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t_n}^t \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(y, v_K^n(\omega)) e_k dy \psi \left(v_\delta^\#(x, s, \omega) \right) d\beta_k(s) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t_n}^t \psi \left(v_\delta^\#(x, s, \omega) \right) \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(y, v_K^n(\omega)) dy e_k d\beta(s) \\ &= \int_{t_n}^t \psi \left(v_\delta^\#(x, s, \omega) \right) \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(y, v_K^n(\omega)) dy dW(s). \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_K^2(v_K^n(\omega)) &= \sum_k \left| \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(x, v_K^n(\omega)) dx e_k \right|^2 \\ &= \left\| \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(x, v_K^n(\omega)) dx \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2. \end{aligned}$$

Pour la preuve, on a

$$\begin{aligned} \langle f_\delta(x, t), \psi \rangle - \langle f_\delta(x, t_n), \psi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} (f_\delta(x, t, \xi) - f_\delta(x, t_n, \xi)) \psi(\xi) d\xi \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi (f_\delta(x, t, \xi) - f_\delta(x, t_n, \xi)) \Psi(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\nu_{x,t}^\delta(\xi) - \nu_{x,t_n}^\delta(\xi) \right) \Psi(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{t-t_n}{\Delta t_n} \delta_{v_K^\#(t)} + \frac{t_{n+1}-t}{\Delta t_n} \delta_{v_K^n} - \delta_{v_K^n} \right) \Psi(\xi) d\xi \\ &= \frac{t-t_n}{\Delta t_n} \Psi(v_K^\#(t)) - \frac{t-t_n}{\Delta t_n} \Psi(v_K^n) \\ &= \frac{t-t_n}{\Delta t_n} \left(\Psi(v_K^\#(t)) - \Psi(v_K^{n+\frac{1}{2}}) \right) + \frac{t-t_n}{\Delta t_n} \left(\Psi(v_K^{n+\frac{1}{2}}) - \Psi(v_K^n) \right) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\frac{t-t_n}{\Delta t_n} \left(\Psi \left(v_K^{n+\frac{1}{2}} \right) - \Psi \left(v_K^n \right) \right) &= \frac{t-t_n}{\Delta t_n} \int_{\mathbb{R}} \psi(\xi) \left(\mathbf{f}_K^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{f}_K^n \right) d\xi \\
&= \frac{t-t_n}{\Delta t_n} \int_{\mathbb{R}} \psi(\xi) \left(-\frac{\Delta t_n}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) + \Delta t_n \partial_\xi m_K^n(\xi) \right) d\xi \\
&= - \int_{\mathbb{R}} \frac{t-t_n}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) \psi(\xi) d\xi - (t-t_n) \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi \psi(\xi) m_K^n(\xi) d\xi \\
&= - \int_{t_n}^t \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) \psi(\xi) d\xi ds - \int_{t_n}^t \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi \psi(\xi) m_K^n(\xi) d\xi ds
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{t-t_n}{\Delta t_n} \left(\Psi \left(v_K^\#(t) \right) - \Psi \left(v_K^{n+\frac{1}{2}} \right) \right) &= \frac{t-t_n}{\Delta t_n} \left(\Psi \left(v_K^{n+\frac{1}{2}} + \int_{t_n}^t \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(y, v_K^n(\omega)) dy dW(s) \right) - \Psi \left(v_K^{n+\frac{1}{2}} \right) \right) \\
&= \frac{t-t_n}{\Delta t_n} \left(\int_{t_n}^t \psi \left(v_K^\#(s) \right) \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(y, v_K^n(\omega)) dy dW(s) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \int_{t_n}^t \partial_\xi \psi \left(v_K^\#(s) \right) \left\| \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(y, v_K^n(\omega)) dy \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds \right)
\end{aligned}$$

grâce à la formule d'Itô appliquée au processus

$$v_K^\#(t) = v_K^{n+\frac{1}{2}} + \int_{t_n}^t \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(y, v_K^n(\omega)) dy dW(s)$$

et à la fonction $\Psi \in C_c^2(\mathbb{R})$,
c'est à dire $\forall x \in K$:

$$\begin{aligned}
\frac{t-t_n}{\Delta t_n} \left(\Psi \left(v_K^\#(t) \right) - \Psi \left(v_K^{n+\frac{1}{2}} \right) \right) &= \frac{t-t_n}{\Delta t_n} \int_{t_n}^t \psi \left(v_\delta^\#(x, s, \omega) \right) \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(y, v_K^n(\omega)) dy dW(s) \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{t-t_n}{\Delta t_n} \int_{t_n}^t \partial_\xi \psi \left(v_\delta^\#(x, s, \omega) \right) \left\| \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(y, v_K^n(\omega)) dy \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds.
\end{aligned}$$

3.2.13 Sur la preuve de la proposition 68 (f_δ est une solution cinétique approchée)

Comme on a l'hypothèse (3.54) : $h^N \alpha_N \leq |K|$, on peut appeler $\mathcal{T}_h/\mathbb{Z}^N$ le maillage associé à la valeur $h = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi

$$\bigcup_{\mathcal{T}_h: \frac{1}{h} \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h/\mathbb{Z}^N} K$$

peut être appelée (au sens de Rudin p146, cf [Rud75]) famille substantielle car $\forall y \in K$, on a

$$K \subset B(y, h) \text{ et } |B(y, h)| = h^N |B(y, 1)| \leq \frac{|B(y, 1)|}{\alpha_N} |K|.$$

On peut alors appliquer le théorème de différentiation de Lebesgue pour presque tout $y \in K$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{|K|} \int_K u_0(x) dx - u_0(y) = 0$$

ou plus précisément (cf W. Rudin p151 [Rud75]),

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \left\{ \forall K : \text{diam}(K) < \delta \text{ et pour presque tout } y \in K, \right. \\ \left. \frac{1}{|K|} \int_K |u_0(x) - u_0(y)| dx < \varepsilon \right\}.$$

Ainsi grâce à l'hypothèse (3.53) $\forall K \in \mathcal{T}_h/\mathbb{Z}^N$, $\text{diam}(K) < h$, on a pour h suffisamment petit :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \left| \frac{1}{|K|} \int_K u_0(x) dx - u_0(y) \right| dy < \varepsilon$$

et donc, $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} (f_{\delta_m}(x, 0, \xi) - \mathbf{1}_{u_0(x) > \xi}) \varphi(x, \xi) dx d\xi \\ &= \int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} (\mathbf{1}_{v_{\delta_m}(0) > \xi} - \mathbf{1}_{u_0(x) > \xi}) \varphi(x, \xi) dx d\xi \\ &= \int_{\mathbb{T}^N} \int_{u_0(x)}^{v_{\delta_m}(0)} \varphi(x, \xi) d\xi dx \leq \|\varphi\|_\infty \int_{\mathbb{T}^N} |v_{\delta_m}(0) - u_0(y)| dy \\ &= \|\varphi\|_\infty \sum_{K \in \mathcal{T}_h/\mathbb{Z}^N} \int_K \left| \frac{1}{|K|} \int_K u_0(x) dx - u_0(y) \right| dy < \|\varphi\|_\infty \varepsilon \end{aligned}$$

si h est suffisamment petit (c'est le cas si m tend vers l'infini).

Par densité de $C_c^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$,

on prouve aussi que $\forall \varphi \in L^1(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}} (f_{\delta_m}(x, 0, \xi) - \mathbf{1}_{u_0(x) > \xi}) \varphi(x, \xi) dx d\xi \rightarrow_{m \rightarrow +\infty} 0.$$

J'ai donc bien détaillé l'utilité des hypothèses (3.53) et (3.54).

Une fois qu'on aura prouvé que $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} & \langle f_\delta(t), \varphi \rangle - \langle f_\delta(t_n), \varphi \rangle \\ &= - \int_{\mathbb{T}^N \times [0, t] \times \mathbb{R}} \partial_\xi \varphi(\xi) dm_\delta(x, s, \xi) + \varepsilon^\delta(t, \varphi) + \int_0^t \langle f_\delta(s), a(\xi) \cdot \nabla_x \varphi \rangle ds \\ & \quad + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x,s}^\delta(\xi) dx dW(s) \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi \varphi(x, \xi) \|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 d\nu_{x,s}^\delta(\xi) dx ds \end{aligned}$$

avec $\forall \varphi \in C_c^2(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} (|\varepsilon^\delta(t, \varphi)|^2) \right) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{E} \left(\left(\sup_{t \in [0, T]} |\varepsilon^\delta(t, \varphi)| \right)^2 \right) = 0,$$

on aura aussi

$$\sup_{t \in [0, T]} |\varepsilon^\delta(t, \varphi)| \rightarrow_{\delta \rightarrow 0} 0 \text{ en probabilité}$$

car la convergence dans $L^2(\Omega)$ implique la convergence en probabilité.

Pour la prouver, appliquons l'équation cinétique discrète à $\xi \mapsto \varphi(x, \xi)$, $x \in K$ fixé et $t \in [t_n, t_{n+1}]$:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} f_\delta(x, t, \xi) \varphi(x, \xi) d\xi - \int_{\mathbb{R}} f_\delta(x, t_n, \xi) \varphi(x, \xi) d\xi \\ &= - \frac{1}{|K|} \int_{t_n}^t \int_{\mathbb{R}} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}^n(\xi) \varphi(x, \xi) d\xi ds - \int_{t_n}^t \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi \varphi(x, \xi) m_K^n(\xi) d\xi ds \\ & \quad + \frac{t - t_n}{\Delta t_n} \int_{t_n}^t \varphi(x, v_K^\#(s, \omega)) \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(y, v_K^n(\omega)) dy dW(s) \\ & \quad + \frac{1}{2} \frac{t - t_n}{\Delta t_n} \int_{t_n}^t \partial_\xi \varphi(x, v_K^\#(s, \omega)) \left\| \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(y, v_K^n(\omega)) dy \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds \end{aligned}$$

qu'on intègre sur $K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N$, puis on somme sur les $K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N$:

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} f_\delta(x, t, \xi) \varphi(x, \xi) d\xi dx - \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} f_\delta(x, t_n, \xi) \varphi(x, \xi) d\xi dx \\
&= - \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_K \frac{1}{|K|} \int_{t_n}^t \int_{\mathbb{R}} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}^n(\xi) \varphi(x, \xi) d\xi ds dx \\
&\quad - \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_K \frac{1}{|K|} \int_{t_n}^t \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi \varphi(x, \xi) m_K^n(\xi) d\xi ds dx \\
&\quad + \frac{t - t_n}{\Delta t_n} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_K \int_{t_n}^t \varphi(x, v_K^\#(s, \omega)) \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(y, v_K^n(\omega)) dy dW(s) dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{t - t_n}{\Delta t_n} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_K \int_{t_n}^t \partial_\xi \varphi(x, v_K^\#(s, \omega)) \left\| \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(y, v_K^n(\omega)) dy \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds dx.
\end{aligned}$$

On peut inverser \int_K et $\int_{t_n}^t$ grâce au théorème de Fubini pour les premier, deuxième et quatrième termes à droite de l'égalité précédente, et grâce au théorème de Fubini stochastique pour le troisième terme à droite de l'égalité précédente.

Pour le quatrième terme, on utilise le fait que

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(y, v_K^n(\omega)) dy \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \\
& \leq \frac{1}{|K|} \int_K \|\Phi(y, v_K^n(\omega))\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 dy \leq D_0 (1 + 1^2) = 2D_0
\end{aligned}$$

car $\Phi(x, \cdot)$ a son support dans $[-1, 1]$.

Pour le troisième terme, on utilise le fait que

$$\begin{aligned}
& \int_K \mathbb{E} \int_{t_n}^t \left\| \varphi(x, v_K^\#(s, \omega)) \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(y, v_K^n(\omega)) dy \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds dx \\
& \leq \int_K \mathbb{E} \int_{t_n}^t (\varphi(x, v_K^\#(s, \omega)))^2 2D_0 ds dx < +\infty.
\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} f_\delta(x, t, \xi) \varphi(x, \xi) d\xi dx - \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} f_\delta(x, t_n, \xi) \varphi(x, \xi) d\xi dx \\
&= - \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_{t_n}^t \int_K \frac{1}{|K|} \int_{\mathbb{R}} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}^n(\xi) \varphi(x, \xi) d\xi dx ds \\
&\quad - \int_{t_n}^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi \varphi(x, \xi) m_\delta(x, s, \xi) d\xi dx ds \\
&+ \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_{t_n}^t \int_K \frac{1}{|K|} \int_K \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, \zeta) \Phi(y, \xi) d\mu_{x,s,t}^\delta(\xi, \zeta) dy dx dW(s) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_{t_n}^t \int_K \int_{\mathbb{R}^2} \partial_\zeta \varphi(x, \zeta) \mathbf{G}_\delta^2(x, \xi) d\mu_{x,s,t}^\delta(\xi, \zeta) dx ds,
\end{aligned}$$

où $\mu_{x,s,t}^\delta$ est la mesure sur \mathbb{R}^2 définie dans l'article que l'on peut aussi écrire

$$\forall x \in K, \forall t \in [t_n, t_{n+1}), \quad \mu_{x,s,t}^\delta(d\xi, d\zeta) = \frac{t - t_n}{\Delta t_n} \delta_{v_\delta(x,s,\omega)} \otimes \delta_{v_\delta^\#(x,s,\omega)}(d\xi, d\zeta)$$

ou plus exactement

$$\begin{aligned}
& \mu_{x,s,t}^\delta(d\xi, d\zeta) \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{n=0}^{N_T-1} \mathbf{1}_K(x) \mathbf{1}_{[t_n, t_{n+1})}(t) \mathbf{1}_{[t_n, t)}(s) \frac{t - t_n}{\Delta t_n} \delta_{v_\delta(x,s,\omega)} \otimes \delta_{v_\delta^\#(x,s,\omega)}(d\xi, d\zeta),
\end{aligned}$$

puis sommer sur les n allant de 0 à l'entier l tel que $t \in [t_l, t_{l+1})$ pour obtenir (en utilisant la formule précédente à $t = t_{n+1}$ pour $n < l$ et à t quelconque appartenant à $[t_l, t_{l+1})$)

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} f_\delta(x, t, \xi) \varphi(x, \xi) d\xi dx - \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} f_\delta(x, 0, \xi) \varphi(x, \xi) d\xi dx \\
&= - \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi \varphi(x, \xi) m_\delta(x, s, \xi) d\xi dx ds \\
&\quad - \sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_{t_n \wedge t}^{t_{n+1} \wedge t} \int_{\mathbb{R}} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}^n(\xi) \varphi_K(\xi) d\xi ds \\
&+ \int_0^t \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_K \frac{1}{|K|} \int_K \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, \zeta) \Phi(y, \xi) d\mu_{x,s,t}^\delta(\zeta, \xi) dy dx dW(s) \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}^2} \partial_\zeta \varphi(x, \zeta) \mathbf{G}_\delta^2(x, \xi) d\mu_{x,s,t}^\delta(\zeta, \xi) dx ds.
\end{aligned}$$

Remarque : Si je définis

$$\Phi_\delta : (x, \xi) \in \mathbb{T}^N \times \mathbb{R} \mapsto \Phi_\delta(x, \xi) \in L_2(H, \mathbb{R})$$

par la formule

$$\Phi_\delta(x, \xi) = \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(y, \xi) dy, \quad \forall x \in K$$

j'obtiens

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} f_\delta(x, t, \xi) \varphi(x, \xi) d\xi dx - \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} f_\delta(x, 0, \xi) \varphi(x, \xi) d\xi dx \\ &= - \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi \varphi(x, \xi) m_\delta(x, s, \xi) d\xi dx ds \\ & - \sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_{t_n \wedge t}^{t_{n+1} \wedge t} \int_{\mathbb{R}} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}^n(\xi) \varphi_K(\xi) d\xi ds \\ & + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, \zeta) \Phi_\delta(x, \xi) d\mu_{x,s,t}^\delta(\zeta, \xi) dx dW(s) \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}^2} \partial_\zeta \varphi(x, \zeta) \mathbf{G}_\delta^2(x, \xi) d\mu_{x,s,t}^\delta(\zeta, \xi) dx ds \end{aligned}$$

qui se rapproche plus de la formule de l'article.

3.2.14 Sur la consistance en espace (preuve du lemme 69)

Le but est de montrer que

$$- \sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_{t_n \wedge t}^{t_{n+1} \wedge t} \int_{\mathbb{R}} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}^n(\xi) \varphi_K(\xi) d\xi ds$$

est proche de

$$\int_0^t \langle f_\delta(s), a(\xi) \cdot \nabla_x \varphi \rangle ds = \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} f_\delta(x, s, \xi) \times a(\xi) \cdot \nabla_x \varphi(x, \xi) d\xi dx ds.$$

Commençons par montrer que

$$\int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} f_\delta(x, s, \xi) \times a(\xi) \cdot \nabla_x \varphi(x, \xi) d\xi dx ds$$

est proche de

$$\int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{f}_\delta(x, s, \xi) \times a(\xi) \cdot \nabla_x \varphi(x, \xi) d\xi dx ds.$$

Le lemme 65 dit que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} (f_\delta(x, s, \xi) - \mathbf{f}_\delta(x, s, \xi)) \times a(\xi) \cdot \nabla_x \varphi(x, \xi) d\xi dx ds \right)^2 \\ & \leq \mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} t \int_0^t \left(\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} (f_\delta(x, s, \xi) - \mathbf{f}_\delta(x, s, \xi)) \times a(\xi) \cdot \nabla_x \varphi(x, \xi) d\xi dx \right)^2 ds \\ & \leq T \times \mathbb{E} \int_0^T \left(\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} (f_\delta(x, s, \xi) - \mathbf{f}_\delta(x, s, \xi)) \times a(\xi) \cdot \nabla_x \varphi(x, \xi) d\xi dx \right)^2 ds \\ & \leq T \times \mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \left(\int_{\mathbb{R}} |f_\delta(x, s, \xi) - \mathbf{f}_\delta(x, s, \xi)| \times |a(\xi) \cdot \nabla_x \varphi(x, \xi)| d\xi \right)^2 dx ds \\ & \leq T \times L_A^2 \|\nabla_x \varphi\|_\infty^2 \times \mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \left(\int_{\mathbb{R}} |f_\delta(x, s, \xi) - \mathbf{f}_\delta(x, s, \xi)| d\xi \right)^2 dx ds \\ & \leq T \times L_A^2 \|\nabla_x \varphi\|_\infty^2 \left(\sup_{n \in \{0..N_T-1\}} \Delta t_n \times \left(\frac{\|v_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2}{\theta} + D_0 T \left(1 + \frac{1}{\theta}\right) \right) \right) \end{aligned}$$

Pour montrer que

$$\int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{f}_\delta(x, s, \xi) \times a(\xi) \cdot \nabla_x \varphi(x, \xi) d\xi dx ds$$

est proche de

$$- \sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_{t_n \wedge t}^{t_{n+1} \wedge t} \int_{\mathbb{R}} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}^n(\xi) \varphi_K(\xi) d\xi ds$$

on utilise l'écriture suivante :

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{f}_\delta(x, s, \xi) \times a(\xi) \cdot \nabla_x \varphi(x, \xi) d\xi dx ds \\
&= \sum_{n=0}^{N_T-1} \int_{t_n \wedge t}^{t_{n+1} \wedge t} \int_{\mathbb{R}} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \mathbf{1}_{v_K^n > \xi} \times a(\xi) \cdot \int_K \nabla_x \varphi(x, \xi) dx d\xi ds \\
&= \sum_{n=0}^{N_T-1} \int_{t_n \wedge t}^{t_{n+1} \wedge t} \int_{\mathbb{R}} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \mathbf{1}_{v_K^n > \xi} \times a(\xi) \cdot \int_{\partial K} \varphi(x, \xi) n_K d\mathcal{H}^{N-1}(x) d\xi ds \\
&= \sum_{n=0}^{N_T-1} \int_{t_n \wedge t}^{t_{n+1} \wedge t} \int_{\mathbb{R}} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \mathbf{1}_{v_K^n > \xi} \\
&\quad \times \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} |K|L| a(\xi) \cdot \frac{1}{|K|L|} \int_{|K|L|} \varphi(x, \xi) n_{K,L} d\mathcal{H}^{N-1}(x) d\xi ds \\
&= \sum_{n=0}^{N_T-1} \int_{t_n \wedge t}^{t_{n+1} \wedge t} \int_{\mathbb{R}} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \mathbf{1}_{v_K^n > \xi} \times \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}^*(\xi) \varphi_{K|L} d\xi ds,
\end{aligned}$$

et on remarque que

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_{t_n \wedge t}^{t_{n+1} \wedge t} \int_{\mathbb{R}} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}^n(\xi) \varphi_{K|L}(\xi) d\xi ds \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_{t_n \wedge t}^{t_{n+1} \wedge t} \int_{\mathbb{R}} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \left(a_{K \rightarrow L}^n(\xi) \varphi_{K|L}(\xi) + a_{L \rightarrow K}^n(\xi) \varphi_{L|K}(\xi) \right) d\xi ds \\
&= 0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{N_T-1} \int_{t_n \wedge t}^{t_{n+1} \wedge t} \int_{\mathbb{R}} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \mathbf{1}_{v_K^n > \xi} \times \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}^*(\xi) \varphi_K(\xi) d\xi ds \\
&= \sum_{n=0}^{N_T-1} \int_{t_n \wedge t}^{t_{n+1} \wedge t} \int_{\mathbb{R}} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \mathbf{1}_{v_K^n > \xi} \varphi_K(\xi) \times \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \int_{|K|L|} a(\xi) \cdot n_{K,L} d\mathcal{H}^{N-1}(y) d\xi ds \\
&= \sum_{n=0}^{N_T-1} \int_{t_n \wedge t}^{t_{n+1} \wedge t} \int_{\mathbb{R}} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \mathbf{1}_{v_K^n > \xi} \varphi_K(\xi) \times \int_{\partial K} a(\xi) \cdot n_K d\mathcal{H}^{N-1}(y) d\xi ds \\
&= \sum_{n=0}^{N_T-1} \int_{t_n \wedge t}^{t_{n+1} \wedge t} \int_{\mathbb{R}} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \mathbf{1}_{v_K^n > \xi} \varphi_K(\xi) \times \int_K \operatorname{div}(a(\xi)) dy d\xi ds = 0,
\end{aligned}$$

pour comparer

$$\sum_{n=0}^{N_T-1} \int_{t_n \wedge t}^{t_{n+1} \wedge t} \int_{\mathbb{R}} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \mathbf{1}_{v_K^n > \xi} \times \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}^*(\xi) (\varphi_{K|L}(\xi) - \varphi_K(\xi)) d\xi ds$$

et

$$- \sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_{t_n \wedge t}^{t_{n+1} \wedge t} \int_{\mathbb{R}} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}^n(\xi) (\varphi_{K|L}(\xi) - \varphi_K(\xi)) d\xi ds.$$

Pour cela, comparons, comme indiqué dans l'article $a_{K \rightarrow L}^n(\xi)$ et $a_{K \rightarrow L}^*(\xi) \mathbf{1}_{v_K^n > \xi}$: dans la mesure où $\varphi \in C_c^2(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$, les fonctions $\xi \mapsto \varphi_{K|L}(\xi)$ et $\xi \mapsto \varphi_K(\xi)$ sont aussi $C_c^2(\mathbb{R}) \subset W^{1,1}(\mathbb{R}_\xi)$.

Je continue avec $\gamma \in C_c^2(\mathbb{R})$:

Si $v_K^n \leq v_L^n$,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \gamma(\xi) (a_{K \rightarrow L}^*(\xi) \mathbf{1}_{v_K^n > \xi} - a_{K \rightarrow L}^n(\xi)) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \gamma(\xi) (a_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) \mathbf{1}_{v_K^n > \xi} - a_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n)) d\xi \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \gamma(\xi) \bar{f}_K^n(\xi) a_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) d\xi \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} & a_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) \\ &= a_{K \rightarrow L}^*(\xi) \mathbf{1}_{v_K^n \wedge v_L^n > \xi} + \partial_2 A(v_K^n, \xi) \mathbf{1}_{v_K^n \leq \xi \leq v_L^n} + \partial_1 A(\xi, v_L^n) \mathbf{1}_{v_L^n \leq \xi \leq v_K^n}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \gamma(\xi) (a_{K \rightarrow L}^*(\xi) \mathbf{1}_{v_K^n > \xi} - a_{K \rightarrow L}^n(\xi)) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \gamma'(\xi) \int_{\xi}^{+\infty} \bar{f}_K^n(\zeta) a_{K \rightarrow L}(\zeta, v_K^n, v_L^n) d\zeta d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \gamma'(\xi) \phi_{K \rightarrow L}^n(v_K^n \vee \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Si $v_K^n \geq v_L^n$

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} \gamma(\xi) \left(a_{K \rightarrow L}^*(\xi) \mathbf{1}_{v_K^n > \xi} - a_{K \rightarrow L}^n(\xi) \right) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \gamma(\xi) \left(a_{K \rightarrow L}^*(\xi) \mathbf{1}_{v_K^n > \xi} - a_{K \rightarrow L}^n(\xi) \mathbf{1}_{v_K^n > \xi} \right) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \gamma(\xi) \mathbf{1}_{v_K^n > \xi} \bar{a}_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi = - \int_{\mathbb{R}} \gamma(\xi) \int_{-\infty}^{\xi} \mathbf{1}_{v_K^n > \zeta} \bar{a}_{K \rightarrow L}^n(\zeta) d\zeta d\xi \\
&= - \int_{\mathbb{R}} \gamma(\xi) \int_{-\infty}^{\xi} \mathbf{1}_{v_K^n > \zeta} \bar{b}_{K \rightarrow L}^n(\zeta, \xi) d\zeta d\xi = - \int_{\mathbb{R}} \gamma(\xi) \bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi \wedge v_K^n) d\xi.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{f}_\delta(x, s, \xi) \times a(\xi) \cdot \nabla_x \varphi(x, \xi) d\xi dx ds \right. \\
& \quad \left. - \left(- \sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_{t_n \wedge t}^{t_{n+1} \wedge t} \int_{\mathbb{R}} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}^n(\xi) \varphi_K(\xi) d\xi ds \right) \right| \\
& \leq \sum_{n=0}^{N_T-1} \int_{t_n \wedge t}^{t_{n+1} \wedge t} \int_{\mathbb{R}} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} |\partial_\xi (\varphi_{K|L}(\xi) - \varphi_K(\xi))| \\
& \quad \times |\mathbf{1}_{v_K^n \leq v_L^n} \bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(v_K^n \vee \xi) - \mathbf{1}_{v_K^n \geq v_L^n} \bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi \wedge v_K^n)| d\xi ds.
\end{aligned}$$

$\forall \xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
& \left| \partial_\xi (\varphi_{K|L}(\xi) - \varphi_K(\xi)) \right| \\
&= \left| \frac{1}{|K|L|} \int_{K|L} \partial_\xi \varphi(x, \xi) d\mathcal{H}^{N-1}(x) - \frac{1}{|K|} \int_K \partial_\xi \varphi(x, \xi) dx \right| \\
&= \left| \frac{1}{|K|} \int_K \frac{1}{|K|L|} \int_{K|L} \partial_\xi \varphi(x, \xi) d\mathcal{H}^{N-1}(x) dy \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{|K|L|} \int_{K|L} \frac{1}{|K|} \int_K \partial_\xi \varphi(y, \xi) dy d\mathcal{H}^{N-1}(x) \right| \\
&\leq \frac{1}{|K|} \int_K \frac{1}{|K|L|} \int_{K|L} |\partial_\xi \varphi(x, \xi) - \partial_\xi \varphi(y, \xi)| d\mathcal{H}^{N-1}(x) dy \\
& \leq \sup_{x \in \mathbb{T}^N} |\partial_\xi \nabla_x \varphi(x, \xi)| h.
\end{aligned}$$

Si le support de φ est inclus dans $\mathbb{T}^N \times \Lambda$ alors

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{f}_\delta(x, s, \xi) \times a(\xi) \cdot \nabla_x \varphi(x, \xi) d\xi dx ds \right. \\
& \quad \left. - \left(- \sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_{t_n \wedge t}^{t_{n+1} \wedge t} \int_{\mathbb{R}} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}^n(\xi) \varphi_K(\xi) d\xi ds \right) \right| \\
& \leq \sup_{x \in \mathbb{T}^N, \xi \in \mathbb{R}} |\partial_2 \nabla_x \varphi(x, \xi)| h |\Lambda| \sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \left(\mathbf{1}_{v_K^n \leq v_L^n} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\phi_{K \rightarrow L}^n(v_K^n \vee \xi)| \right. \\
& \quad \left. + \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi \wedge v_K^n)| \mathbf{1}_{v_K^n \geq v_L^n} \right).
\end{aligned}$$

Majorons, comme dans l'article

$$\sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \mathbf{1}_{v_K^n \leq v_L^n} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\phi_{K \rightarrow L}^n(v_K^n \vee \xi)|$$

grâce à

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \mathbf{1}_{v_K^n \leq v_L^n} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\phi_{K \rightarrow L}^n(v_K^n \vee \xi)| \right)^2 \\
& = \mathbb{E} \left(\sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \mathbf{1}_{v_K^n \leq v_L^n} \times (\Delta t_n)^{\frac{1}{2}} \right. \\
& \quad \left. \times \frac{\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\phi_{K \rightarrow L}^n(v_K^n \vee \xi)|}{|K|L|^{\frac{1}{2}}} |K|L|^{\frac{1}{2}} (\Delta t_n)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\
& \leq \mathbb{E} \left(\sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \mathbf{1}_{v_K^n \leq v_L^n} \times \Delta t_n \frac{\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\phi_{K \rightarrow L}^n(v_K^n \vee \xi)|^2}{|K|L|} \right) \\
& \quad \times \left(\sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} |K|L| \right) \\
& \quad \leq \left(\sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |\partial K| \right) \\
& \quad \times \mathbb{E} \left(\sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \mathbf{1}_{v_K^n \leq v_L^n} \times \Delta t_n \frac{\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\phi_{K \rightarrow L}^n(v_K^n \vee \xi)|^2}{|K|L|} \right).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \mathbf{1}_{v_K^n \leq v_L^n} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\phi_{K \rightarrow L}^n(v_K^n \vee \xi)| \right)^2 \\
& \leq \left(\sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \frac{|K|}{h\alpha_N^2} \right) \\
& \times \mathbb{E} \left(\sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \mathbf{1}_{v_K^n \leq v_L^n} \times \Delta t_n \frac{2L_A |K| |L| \int_{\mathbb{R}} (\bar{\mathbf{f}}_L^n - \bar{\mathbf{f}}_K^n) \phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi}{|K| |L|} \right) \\
& \leq \frac{2L_A}{h\alpha_N^2} T \mathbb{E} \left(\sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \mathbf{1}_{v_K^n \leq v_L^n} \times \Delta t_n \int_{\mathbb{R}} (\bar{\mathbf{f}}_L^n - \bar{\mathbf{f}}_K^n) \phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi \right) \\
& \leq \frac{2L_A}{h\alpha_N^2} T \mathbb{E} \left(\sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \Delta t_n \int_{\mathbb{R}} (\bar{\mathbf{f}}_L^n - \bar{\mathbf{f}}_K^n) \phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi \right)
\end{aligned}$$

car

$$(\bar{\mathbf{f}}_L^n - \bar{\mathbf{f}}_K^n) \phi_{K \rightarrow L}^n(\xi) \geq 0.$$

De même, majorons

$$\sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi \wedge v_K^n)| \mathbf{1}_{v_K^n \geq v_L^n}$$

grâce à

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \mathbf{1}_{v_K^n \geq v_L^n} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi \wedge v_K^n)|^2 \right)^2 \\
& \leq \left(\sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |\partial K| \right) \\
& \quad \times \mathbb{E} \left(\sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \times \Delta t_n \frac{\mathbf{1}_{v_K^n \geq v_L^n} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi \wedge v_K^n)|^2}{|K|L} \right) \\
& \leq \left(\sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |\partial K| \right) \\
& \quad \times \mathbb{E} \left(\sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \times \Delta t_n \frac{\mathbf{1}_{v_K^n \geq v_L^n} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(v_K^n)|^2}{|K|L} \right) \\
& \leq \left(\sum_{n=0}^{N_T-1} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \frac{|K|}{h\alpha_N^2} \right) \\
& \quad \times \mathbb{E} \left(\sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \mathbf{1}_{v_K^n \geq v_L^n} \times \Delta t_n \frac{2L_A |K|L| \int_{\mathbb{R}} (\mathbf{f}_L^n - \mathbf{f}_K^n) \bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi}{|K|L} \right) \\
& \leq \frac{2L_A}{h\alpha_N^2} T \mathbb{E} \left(\sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \mathbf{1}_{v_K^n \geq v_L^n} \times \Delta t_n \int_{\mathbb{R}} (\mathbf{f}_L^n - \mathbf{f}_K^n) \bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi \right) \\
& \leq \frac{2L_A}{h\alpha_N^2} T \mathbb{E} \left(\sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} \Delta t_n \int_{\mathbb{R}} (\mathbf{f}_L^n - \mathbf{f}_K^n) \bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi) d\xi \right)
\end{aligned}$$

car

$$(\mathbf{f}_L^n - \mathbf{f}_K^n) \bar{\phi}_{K \rightarrow L}^n(\xi).$$

En sommant les deux majorations et en utilisant

$$(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2),$$

on trouve

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} & \left| \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{f}_\delta(x, s, \xi) \times a(\xi) \cdot \nabla_x \varphi(x, \xi) d\xi dx ds \right. \\ & \left. - \left(- \sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_{t_n \wedge t}^{t_{n+1} \wedge t} \int_{\mathbb{R}} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}^n(\xi) \varphi_K(\xi) d\xi ds \right) \right|^2 \\ & \leq \sup_{x \in \mathbb{T}^N, \xi \in \mathbb{R}} |\partial_2 \nabla_x \varphi(x, \xi)|^2 h^2 |\Lambda|^2 \frac{2L_A T}{h\alpha_N^2} 2 \left(\frac{1}{\theta} \|v_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 + \frac{D_0 T}{\theta} \right). \end{aligned}$$

3.2.15 Sur la preuve du lemme 70

Je reprends les notations de la preuve de la proposition 68, pour écrire (3.140) de la manière suivante

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, \zeta) \Phi_\delta(x, \xi) d\mu_{x,s,t}^\delta(\zeta, \xi) dx dW(s) \\ & = \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x,s}^\delta(\xi) dx dW(s) + \varepsilon_{W,1}^\delta(t, \varphi) + \varepsilon_{W,2}^\delta(t, \varphi) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \varepsilon_{W,1}^\delta(t, \varphi) & = \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, \zeta) (\Phi_\delta(x, \xi) - \Phi(x, \xi)) d\mu_{x,s,t}^\delta(\zeta, \xi) dx dW(s) \\ & = \frac{t - t_l}{\Delta t_l} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, \zeta) (\Phi_\delta(x, \xi) - \Phi(x, \xi)) d\delta_{v_\delta^\#(x,s,\omega)} \otimes \delta_{v_\delta(x,s,\omega)}(\zeta, \xi) dx dW(s) \end{aligned}$$

si $t \in [t_l, t_{l+1})$, et

$$\begin{aligned} \varepsilon_{W,2}^\delta(t, \varphi) & = \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, \zeta) \Phi(x, \xi) d\mu_{x,s,t}^\delta(\zeta, \xi) dx dW(s) \\ & \quad - \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x,s}^\delta(\xi) dx dW(s). \end{aligned}$$

$$t \mapsto \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, \zeta) (\Phi_\delta(x, \xi) - \Phi(x, \xi)) d\delta_{v_\delta^\#(x,s,\omega)} \otimes \delta_{v_\delta(x,s,\omega)}(\zeta, \xi) dx dW(s)$$

est une \mathcal{F}_t -martingale continue, de carré intégrable. Par une inégalité maximale, on a

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} |\varepsilon_{W,1}^\delta(t, \varphi)|^2 \right) \leq \\
& 4\mathbb{E} \left| \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, \zeta) (\Phi_\delta(x, \xi) - \Phi(x, \xi)) d\delta_{v_\delta^\#(x,s,\omega)} \otimes \delta_{v_\delta(x,s,\omega)}(\zeta, \xi) dx dW(s) \right|^2 \\
& = 4\mathbb{E} \int_0^T \left\| \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, \zeta) (\Phi_\delta(x, \xi) - \Phi(x, \xi)) \right. \\
& \quad \left. d\delta_{v_\delta^\#(x,s,\omega)} \otimes \delta_{v_\delta(x,s,\omega)}(\zeta, \xi) dx \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds \\
& \leq 4\mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \left\| \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, \zeta) (\Phi_\delta(x, \xi) - \Phi(x, \xi)) \right. \\
& \quad \left. d\delta_{v_\delta^\#(x,s,\omega)} \otimes \delta_{v_\delta(x,s,\omega)}(\zeta, \xi) \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 dx ds \\
& \leq 4\mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}^2} \|\varphi(x, \zeta) (\Phi_\delta(x, \xi) - \Phi(x, \xi))\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \\
& \quad d\delta_{v_\delta^\#(x,s,\omega)} \otimes \delta_{v_\delta(x,s,\omega)}(\zeta, \xi) dx ds \\
& \leq 4\|\varphi\|_\infty^2 \mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}^2} \|\Phi_\delta(x, \xi) - \Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 d\delta_{v_\delta^\#(x,s,\omega)} \otimes \delta_{v_\delta(x,s,\omega)}(\zeta, \xi) dx ds \\
& \leq 4\|\varphi\|_\infty^2 \sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \mathbb{E} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \left\| \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(y, v_K^n) dy - \Phi(x, v_K^n) \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 dx ds \\
& \leq 4\|\varphi\|_\infty^2 \sum_{n=0}^{N_T-1} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \mathbb{E} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K D_1 h^2 dx ds = 4\|\varphi\|_\infty^2 T D_1 h^2
\end{aligned}$$

car $\mu_{x,s,t}^\delta$ est la mesure sur \mathbb{R}^2 définie $\forall t \in [t_n, t_{n+1})$ par

$$\mu_{x,s,t}^\delta(d\zeta, d\xi) = \frac{t - t_n}{\Delta t_n} \delta_{v_\delta^\#(x,s,\omega)} \otimes \delta_{v_\delta(x,s,\omega)}(d\zeta, d\xi).$$

On a bien

$$\mu_{x,s,T}^\delta(\mathbb{R}^2) = \delta_{v_\delta^\#(x,s,\omega)} \otimes \delta_{v_\delta(x,s,\omega)}(\mathbb{R}^2) = 1.$$

Remarque : cette démonstration est un peu plus simple que dans l'article car je ne passe pas par t_n puis $t \dots$

Pour $\varepsilon_{W,2}^\delta(t, \varphi)$, on voit que $n \mapsto \varepsilon_{W,2}^\delta(t_n, \varphi)$ est une \mathcal{F}_{t_n} -martingale. On effectue

la décomposition

$$\begin{aligned}\varepsilon_{W,2}^\delta(t, \varphi) &= \varepsilon_{W,2}^\delta(t_l, \varphi) \\ &+ \int_{t_l}^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, \zeta) \Phi(x, \xi) d\mu_{x,s,t}^\delta(\zeta, \xi) dx dW(s) \\ &- \int_{t_l}^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x,s}^\delta(\xi) dx dW(s)\end{aligned}$$

si $t \in [t_l, t_{l+1})$.

Puis par une inégalité maximale, on a

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\sup_{l \in \{0..N_T-1\}} |\varepsilon_{W,2}^\delta(t_l, \varphi)|^2 \right) \leq 4 \sup_{l \in \{0..N_T-1\}} \mathbb{E} \left(|\varepsilon_{W,2}^\delta(t_l, \varphi)|^2 \right) \\
& = 4 \sup_{l \in \{0..N_T-1\}} \mathbb{E} \left| \int_0^{t_l} \int_{\mathbb{T}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, \zeta) \Phi(x, \xi) d\delta_{v_\delta^\#(x,s,\omega)} \otimes \delta_{v_\delta(x,s,\omega)}(\zeta, \xi) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x,s}^\delta(\xi) \right) dx dW(s) \right|^2 \\
& = 4 \sup_{l \in \{0..N_T-1\}} \mathbb{E} \int_0^{t_l} \left\| \int_{\mathbb{T}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, \zeta) \Phi(x, \xi) d\delta_{v_\delta^\#(x,s,\omega)} \otimes \delta_{v_\delta(x,s,\omega)}(\zeta, \xi) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x,s}^\delta(\xi) \right) dx \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds \\
& \leq 4 \mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \left\| \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, \zeta) \Phi(x, \xi) d\delta_{v_\delta^\#(x,s,\omega)} \otimes \delta_{v_\delta(x,s,\omega)}(\zeta, \xi) \right. \\
& \quad \left. - \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x,s}^\delta(\xi) \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 dx ds \\
& \leq 4 \mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \left\| \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, \zeta) \Phi(x, \xi) d\delta_{v_\delta^\#(x,s,\omega)} \otimes \delta_{v_\delta(x,s,\omega)}(\zeta, \xi) \right. \\
& \quad \left. - \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\mu_{x,s,T}^\delta(\zeta, \xi) \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 dx ds \\
& \quad + 4 \mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \left\| \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\delta_{v_\delta^\#(x,s,\omega)} \otimes \delta_{v_\delta(x,s,\omega)}(\zeta, \xi) \right. \\
& \quad \left. - \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x,s}^\delta(\xi) \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 dx ds \\
& \leq 4 \|\partial_\xi \varphi\|_\infty^2 \mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}^2} |\zeta - \xi|^2 D_0 d\delta_{v_\delta^\#(x,s,\omega)} \otimes \delta_{v_\delta(x,s,\omega)}(\zeta, \xi) dx ds \\
& \quad + 4 \mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \left\| \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\delta_{v_\delta(x,s,\omega)}(\xi) \right. \\
& \quad \left. - \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x,s}^\delta(\xi) \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 dx ds \\
& \leq 4 D_0 \|\partial_\xi \varphi\|_\infty^2 \mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} |v_\delta^\#(x, s) - v_\delta(x, s)|^2 dx ds \\
& \quad + 4 \mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \left\| \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) \frac{t - t_n}{\Delta t_n} (\delta_{v_\delta(x,t)}(d\xi) - \delta_{v_\delta^\#(x,t)}(d\xi)) \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 dx dt
\end{aligned}$$

car $v_{x,t}^\delta$ est la mesure sur \mathbb{R} définie par

$$v_{x,t}^\delta(d\xi) = \frac{t - t_n}{\Delta t_n} \delta_{v_\delta^\#(x,t)}(d\xi) + \frac{t_{n+1} - t}{\Delta t_n} \delta_{v_\delta(x,t)}(d\xi),$$

et donc

$$\delta_{v_\delta(x,t)}(d\xi) - v_{x,t}^\delta(d\xi) = \frac{t - t_n}{\Delta t_n} \left(\delta_{v_\delta(x,t)}(d\xi) - \delta_{v_\delta^\#(x,t)}(d\xi) \right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\sup_{l \in \{0..N_T-1\}} |\varepsilon_{W,2}^\delta(t_l, \varphi)|^2 \right) \\
& \leq 4D_0 \|\partial_\xi \varphi\|_\infty^2 \mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} |v_\delta^\#(x, s) - v_\delta(x, s)|^2 dx ds \\
& \quad + 4\mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \left\| \varphi(x, v_\delta^\#(x, s)) \Phi(x, v_\delta^\#(x, s)) \right. \\
& \quad \left. - \varphi(x, v_\delta(x, s)) \Phi(x, v_\delta(x, s)) \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 dx ds \\
& \leq 4D_0 \|\partial_\xi \varphi\|_\infty^2 \sup_{n \in \{0..N_T-1\}} \Delta t_n \times \left(\frac{\|v_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2}{\theta} + D_0 T \left(1 + \frac{1}{\theta}\right) \right) \\
& \quad + 4\mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \left\| \varphi(x, v_\delta^\#(x, s)) \Phi(x, v_\delta^\#(x, s)) \right. \\
& \quad \left. - \varphi(x, v_\delta^\#(x, s)) \Phi(x, v_\delta(x, s)) \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 dx ds \\
& \quad + 4\mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \left\| \varphi(x, v_\delta^\#(x, s)) \Phi(x, v_\delta(x, s)) \right. \\
& \quad \left. - \varphi(x, v_\delta(x, s)) \Phi(x, v_\delta(x, s)) \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 dx ds \\
& \leq 4D_0 \|\partial_\xi \varphi\|_\infty^2 \sup_{n \in \{0..N_T-1\}} \Delta t_n \times \left(\frac{\|v_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2}{\theta} + D_0 T \left(1 + \frac{1}{\theta}\right) \right) \\
& \quad + 4\|\varphi\|_\infty^2 \mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \left\| \Phi(x, v_\delta^\#(x, s)) - \Phi(x, v_\delta(x, s)) \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 dx ds \\
& + 4\|\partial_\xi \varphi\|_\infty^2 \mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} |v_\delta^\#(x, s) - v_\delta(x, s)|^2 \|\Phi(x, v_\delta(x, s))\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 dx ds \\
& \leq 4D_0 \|\partial_\xi \varphi\|_\infty^2 \sup_{n \in \{0..N_T-1\}} \Delta t_n \times \left(\frac{\|v_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2}{\theta} + D_0 T \left(1 + \frac{1}{\theta}\right) \right) \\
& \quad + 4\|\varphi\|_\infty^2 \mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} D_1 |v_\delta^\#(x, s) - v_\delta(x, s)| dx ds \\
& \quad + 4\|\partial_\xi \varphi\|_\infty^2 \mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} |v_\delta^\#(x, s) - v_\delta(x, s)|^2 D_0 dx ds \\
& \leq 4D_0 \|\partial_\xi \varphi\|_\infty^2 \sup_{n \in \{0..N_T-1\}} \Delta t_n \times \left(\frac{\|v_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2}{\theta} + D_0 T \left(1 + \frac{1}{\theta}\right) \right) \\
& \quad + 4\|\varphi\|_\infty^2 D_1 \sqrt{T} \left(\mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} |v_\delta^\#(x, s) - v_\delta(x, s)|^2 dx ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \quad + 4\|\partial_\xi \varphi\|_\infty^2 D_0 \sup_{n \in \{0..N_T-1\}} \Delta t_n \times \left(\frac{\|v_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2}{\theta} + D_0 T \left(1 + \frac{1}{\theta}\right) \right) \\
& \leq 8\|\partial_\xi \varphi\|_\infty^2 D_0 \sup_{n \in \{0..N_T-1\}} \Delta t_n \times \left(\frac{\|v_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2}{\theta} + D_0 T \left(1 + \frac{1}{\theta}\right) \right) \\
& \quad + 4\|\varphi\|_\infty^2 D_1 \sqrt{T} \left(\sup_{n \in \{0..N_T-1\}} \Delta t_n \times \left(\frac{\|v_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2}{\theta} + D_0 T \left(1 + \frac{1}{\theta}\right) \right) \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Si j'utilise l'astuce

$$|v_\delta^\#(x, s) - v_\delta(x, s)| \leq \left(\sup_{n \in \{0..N_T-1\}} \Delta t_n \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\left(\sup_{n \in \{0..N_T-1\}} \Delta t_n \right)^{\frac{1}{2}}} |v_\delta^\#(x, s) - v_\delta(x, s)|^2,$$

je majore par

$$8 \|\partial_\xi \varphi\|_\infty^2 D_0 \sup_{n \in \{0..N_T-1\}} \Delta t_n \times \left(\frac{\|v_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2}{\theta} + \frac{D_0 T}{\theta} 2 \right) + 4 \|\varphi\|_\infty^2 D_1 \left(\sup_{n \in \{0..N_T-1\}} \Delta t_n \right)^{\frac{1}{2}} \left(T + \left(\frac{\|v_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2}{\theta} + \frac{D_0 T}{\theta} 2 \right) \right).$$

Remarque : dans ce calcul, je trouve $\frac{D_0 T}{\theta} 2 + T$ à la place de $\frac{D_0 T}{\theta} 3$. C'est une légère différence par rapport à l'article, mais la vitesse de convergence est la même.

N'oublions pas

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [t_i, t_{i+1})} |\varepsilon_{W,2}^\delta(t, \varphi) - \varepsilon_{W,2}^\delta(t_i, \varphi)|^2 \right) \\
&= \mathbb{E} \sup_{t \in [t_i, t_{i+1})} \left| \int_{t_i}^t \left(\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, \zeta) \Phi(x, \xi) d\mu_{x,s,t}^\delta(\zeta, \xi) dx \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x,s}^\delta(\xi) dx \right) dW(s) \right|^2 \\
&\leq 4\mathbb{E} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, \zeta) \Phi(x, \xi) d\mu_{x,s,t}^\delta(\zeta, \xi) dx \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x,s}^\delta(\xi) dx \right) dW(s) \right|^2 \\
&= 4\mathbb{E} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, \zeta) \Phi(x, \xi) d\mu_{x,s,t}^\delta(\zeta, \xi) dx \right. \\
&\quad \left. - \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, \xi) \Phi(x, \xi) d\nu_{x,s}^\delta(\xi) dx \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds \\
&= 4\mathbb{E} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| \int_{\mathbb{T}^N} \varphi(x, v_\delta^\#(x, s)) \Phi(x, v_\delta(x, s)) dx \right. \\
&\quad \left. - \int_{\mathbb{T}^N} \varphi(x, v_\delta(x, s)) \Phi(x, v_\delta(x, s)) dx \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds \\
&\leq 4D_0 \|\partial_\xi \varphi\|_\infty^2 \sup_{n \in \{0, \dots, N_T-1\}} \Delta t_n \times \left(\frac{\|v_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2}{\theta} + D_0 T \left(1 + \frac{1}{\theta}\right) \right).
\end{aligned}$$

Remarque : la majoration n'est pas la même que dans l'article, même si l'ordre de grandeur y est.

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}^2} \partial_\zeta \varphi(x, \zeta) \mathbf{G}_\delta^2(x, \xi) d\mu_{x,s,t}^\delta(\zeta, \xi) dx ds \\
&\quad - \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi \varphi(x, \xi) \|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 d\nu_{x,s}^\delta(\xi) dx ds = \varepsilon_{W,3}^\delta(t, \varphi) + \varepsilon_{W,4}^\delta(t, \varphi)
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{W,3}^\delta(t, \varphi) &= \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}^2} \partial_\zeta \varphi(x, \zeta) \mathbf{G}_\delta^2(x, \xi) d\mu_{x,s,t}^\delta(\zeta, \xi) dx ds \\
&\quad - \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}^2} \partial_\zeta \varphi(x, \zeta) \|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 d\mu_{x,s,t}^\delta(\zeta, \xi) dx ds
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varepsilon_{W,4}^\delta(t, \varphi) &= \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}^2} \partial_\zeta \varphi(x, \zeta) \|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 d\mu_{x,s,t}^\delta(\zeta, \xi) dx ds \\ &\quad - \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi \varphi(x, \xi) \|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 d\nu_{x,s}^\delta(\xi) dx ds . \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} |\varepsilon_{W,3}^\delta(t, \varphi)|^2 \right) \\ &\leq \mathbb{E} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_\zeta \varphi(x, \zeta)| \left| \mathbf{G}_\delta^2(x, \xi) - \|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \right| d\mu_{x,s,t}^\delta(\zeta, \xi) dx ds \right)^2 \\ &= \mathbb{E} \left(\int_0^T \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_K \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_\zeta \varphi(x, \zeta)| \right. \\ &\quad \times \left. \left\| \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(y, v_K^n(\omega)) dy \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 - \|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \right| d\mu_{x,s,t}^\delta(\zeta, \xi) dx ds \right)^2 \\ &= \mathbb{E} \left(\int_0^T \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_K \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_\zeta \varphi(x, \zeta)| \left| \left\langle \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(y, v_K^n(\omega)) dy - \Phi(x, \xi), \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(y, v_K^n(\omega)) dy + \Phi(x, \xi) \right\rangle_{L_2(H, \mathbb{R})} \right| d\mu_{x,s,t}^\delta(\zeta, \xi) dx ds \right)^2 \\ &\leq \|\partial_\xi \varphi\|_\infty^2 \mathbb{E} \left(\int_0^T \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_K \int_{\mathbb{R}^2} \left\| \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(y, v_K^n(\omega)) dy - \Phi(x, \xi) \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})} \right. \\ &\quad \left. \times \left\| \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(y, v_K^n(\omega)) dy + \Phi(x, \xi) \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})} \right| d\mu_{x,s,t}^\delta(\zeta, \xi) dx ds \right)^2 \\ &\leq \|\partial_\xi \varphi\|_\infty^2 \mathbb{E} \left(\int_0^T \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_K \int_{\mathbb{R}^2} \sqrt{D_1(h^2 + |v_K^n - \xi|)} 2\sqrt{D_0} d\mu_{x,s,t}^\delta(\zeta, \xi) dx ds \right)^2 \\ &\leq \|\partial_\xi \varphi\|_\infty^2 4D_0 D_1 h^2 T^2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} |\varepsilon_{W,4}^\delta(t, \varphi)|^2 \right) \\
&= \mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}^2} \partial_\zeta \varphi(x, \zeta) \|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 d\mu_{x,s,t}^\delta(\zeta, \xi) dx ds \right. \\
&\quad \left. - \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi \varphi(x, \xi) \|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 d\nu_{x,s}^\delta(\xi) dx ds \right)^2 \\
&\leq 2\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}^2} \partial_\zeta \varphi(x, \zeta) \|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 d\mu_{x,s,t}^\delta(\zeta, \xi) dx ds \right. \\
&\quad \left. - \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}^2} \partial_\xi \varphi(x, \xi) \|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 d\mu_{x,s,t}^\delta(\zeta, \xi) dx ds \right)^2 \\
&+ 2\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}^2} \partial_\xi \varphi(x, \xi) \|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 d\mu_{x,s,t}^\delta(\zeta, \xi) dx ds \right. \\
&\quad \left. - \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi \varphi(x, \xi) \|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 d\nu_{x,s}^\delta(\xi) dx ds \right)^2 \\
&\leq 2\|\partial_\xi \varphi\|_\infty^2 \mathbb{E} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}^2} |\zeta - \xi| \|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 d\mu_{x,s,t}^\delta(\zeta, \xi) dx ds \right)^2 \\
&+ 2\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi \varphi(x, \xi) \|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \frac{t - t_n}{\Delta t_n} d\delta_{v_\delta(x,s,\omega)}(\xi) dx ds \right. \\
&\quad \left. - \int_0^t \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi \varphi(x, \xi) \|\Phi(x, \xi)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 d\nu_{x,s}^\delta(\xi) dx ds \right)^2.
\end{aligned}$$

Comme

$$\mu_{x,s,t}^\delta(d\zeta, d\xi) = \frac{t - t_n}{\Delta t_n} \delta_{v_\delta^\#(x,s,\omega)} \otimes \delta_{v_\delta(x,s,\omega)}(d\zeta, d\xi)$$

et

$$v_{x,t}^\delta(d\xi) = \frac{t - t_n}{\Delta t_n} \delta_{v_\delta^\#(x,t)}(d\xi) + \frac{t_{n+1} - t}{\Delta t_n} \delta_{v_\delta(x,t)}(d\xi),$$

on a

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} |\varepsilon_{W,4}^\delta(t, \varphi)|^2 \right) \\
& \leq 2D_0 \|\partial_\xi \varphi\|_\infty^2 \mathbb{E} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} |v_\delta^\#(x, s) - v_\delta(x, s)| dx ds \right)^2 \\
& + 2\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} \left(\int_0^{t_l} \int_{\mathbb{T}^N} \left| \partial_\xi \varphi(x, v_\delta(x, s)) \|\Phi(x, v_\delta(x, s))\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \right. \right. \\
& \quad - \partial_2 \varphi(x, v_\delta^\#(x, s)) \|\Phi(x, v_\delta^\#(x, s))\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \left. \left. dx ds \right. \right. \\
& \quad + \int_{t_l}^t \int_{\mathbb{T}^N} \left| \partial_\xi \varphi(x, v_\delta(x, s)) \|\Phi(x, v_\delta(x, s))\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \right. \\
& \quad \quad \left. \left. + \partial_2 \varphi(x, v_\delta^\#(x, s)) \|\Phi(x, v_\delta^\#(x, s))\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \right| dx ds \right)^2
\end{aligned}$$

avec $t \in [t_l, t_{l+1})$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} |\varepsilon_{W,4}^\delta(t, \varphi)|^2 \right) \\
& \leq 2D_0 \|\partial_\xi \varphi\|_\infty^2 T \mathbb{E} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} |v_\delta^\#(x, s) - v_\delta(x, s)|^2 dx ds \right) \\
& + 4\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} \left(\int_0^{t_i} \int_{\mathbb{T}^N} \left| \partial_2 \varphi(x, v_\delta(x, s)) \|\Phi(x, v_\delta(x, s))\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \partial_2 \varphi(x, v_\delta^\#(x, s)) \|\Phi(x, v_\delta^\#(x, s))\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \right| dx ds \right)^2 \\
& \quad + 8\|\partial_\xi \varphi\|_\infty^2 D_0^2 \left(\sup_{n \in \{0..N_T-1\}} \Delta t_n \right)^2 \\
& \leq 2D_0 \|\partial_\xi \varphi\|_\infty^2 \sup_{n \in \{0..N_T-1\}} \Delta t_n \times \left(\frac{\|v_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2}{\theta} + D_0 T \left(1 + \frac{1}{\theta} \right) \right) \\
& + 8\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} \left(\int_0^{t_i} \int_{\mathbb{T}^N} \left| \partial_2 \varphi(x, v_\delta(x, s)) \|\Phi(x, v_\delta(x, s))\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \partial_2 \varphi(x, v_\delta^\#(x, s)) \|\Phi(x, v_\delta(x, s))\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \right| dx ds \right)^2 \\
& + 8\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} \left(\int_0^{t_i} \int_{\mathbb{T}^N} \left| \partial_2 \varphi(x, v_\delta^\#(x, s)) \|\Phi(x, v_\delta(x, s))\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \partial_2 \varphi(x, v_\delta^\#(x, s)) \|\Phi(x, v_\delta^\#(x, s))\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \right| dx ds \right)^2 \\
& \quad + 8\|\partial_\xi \varphi\|_\infty^2 D_0^2 \left(\sup_{n \in \{0..N_T-1\}} \Delta t_n \right)^2 \\
& \leq 2D_0 \|\partial_\xi \varphi\|_\infty^2 \sup_{n \in \{0..N_T-1\}} \Delta t_n \times \left(\frac{\|v_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2}{\theta} + D_0 T \left(1 + \frac{1}{\theta} \right) \right) \\
& + 8\|\partial_\xi \varphi\|_\infty^2 D_0^2 \mathbb{E} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} |v_\delta^\#(x, s) - v_\delta(x, s)| dx ds \right)^2 \\
& + 8\|\partial_\xi \varphi\|_\infty^2 \mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} \left(\int_0^{t_i} \int_{\mathbb{T}^N} \left| \|\Phi(x, v_\delta(x, s))\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \|\Phi(x, v_\delta^\#(x, s))\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \right| dx ds \right)^2 \\
& \quad + 8\|\partial_\xi \varphi\|_\infty^2 D_0^2 \left(\sup_{n \in \{0..N_T-1\}} \Delta t_n \right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2D_0 \|\partial_\xi \varphi\|_\infty^2 \sup_{n \in \{0..N_T-1\}} \Delta t_n \times \left(\frac{\|v_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2}{\theta} + D_0 T \left(1 + \frac{1}{\theta}\right) \right) \\
&\quad + 8 \|\partial_\xi \varphi\|_\infty^2 D_0^2 T \sup_{n \in \{0..N_T-1\}} \Delta t_n \times \left(\frac{\|v_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2}{\theta} + D_0 T \left(1 + \frac{1}{\theta}\right) \right) \\
&\quad + 8 \|\partial_\xi \varphi\|_\infty^2 \mathbb{E} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} \left\| \Phi(x, v_\delta(x, s)) - \Phi(x, v_\delta^\#(x, s)) \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})} \right. \\
&\quad \quad \left. \times \left\| \Phi(x, v_\delta(x, s)) + \Phi(x, v_\delta^\#(x, s)) \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})} dx ds \right)^2 \\
&\quad \quad + 8 \|\partial_\xi \varphi\|_\infty^2 D_0^2 \left(\sup_{n \in \{0..N_T-1\}} \Delta t_n \right)^2
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} |\varepsilon_{W,4}^\delta(t, \varphi)|^2 \right) \\
&\leq (2D_0 + 8D_0^2 T) \|\partial_\xi \varphi\|_\infty^2 \sup_{n \in \{0..N_T-1\}} \Delta t_n \times \left(\frac{\|v_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2}{\theta} + D_0 T \left(1 + \frac{1}{\theta}\right) \right) \\
&\quad + 8 \|\partial_\xi \varphi\|_\infty^2 T 4 D_0 \left(\mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^N} D_1 |v_\delta^\#(x, s) - v_\delta(x, s)| dx ds \right) \\
&\quad \quad + 8 \|\partial_\xi \varphi\|_\infty^2 D_0^2 \left(\sup_{n \in \{0..N_T-1\}} \Delta t_n \right)^2 \\
&\leq (2D_0 + 8D_0^2 T) \|\partial_\xi \varphi\|_\infty^2 \sup_{n \in \{0..N_T-1\}} \Delta t_n \times \left(\frac{\|v_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2}{\theta} + D_0 T \left(1 + \frac{1}{\theta}\right) \right) \\
&\quad + 8 \|\partial_\xi \varphi\|_\infty^2 T 4 D_0 D_1 \sqrt{T} \left(\sup_{n \in \{0..N_T-1\}} \Delta t_n \times \left(\frac{\|v_\delta(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2}{\theta} + D_0 T \left(1 + \frac{1}{\theta}\right) \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \quad + 8 \|\partial_\xi \varphi\|_\infty^2 D_0^2 \left(\sup_{n \in \{0..N_T-1\}} \Delta t_n \right)^2.
\end{aligned}$$

Remarque : ce calcul ne donne pas la même majoration que dans l'article, mais c'est du même ordre.

3.2.16 Sur la tension des mesures de Young numériques ν^δ

Rappelons tout d'abord que

$$\nu_{x,t}^\delta(\xi) = \frac{t - t_n}{\Delta t_n} \delta_{v_\delta^\#(x,t)}(\xi) + \frac{t_{n+1} - t}{\Delta t_n} \delta_{v_\delta(x,t)}(\xi)$$

et détaillons, sous les hypothèses du lemme 71, la preuve de

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^p) d\nu_{x,t}^\delta(\xi) dx \right) \leq C_p, \quad \forall p \in [1; +\infty).$$

Si $q \geq p$ et que $|\xi| \leq 1$ alors $|\xi|^p \leq 1$ donc $|\xi|^p \leq 1 + |\xi|^q$.

Si $q \geq p$ et que $|\xi| > 1$ alors $|\xi|^p \leq |\xi|^q$ donc $|\xi|^p \leq 1 + |\xi|^q$.

Donc dans tous les cas

$$1 + |\xi|^p \leq 2(1 + |\xi|^q),$$

ce qui permet de limiter la preuve aux p pairs, non nuls et d'avoir $\xi \mapsto |\xi|^p \in C^\infty(\mathbb{R})$ avec ses dérivées premières et secondes uniformément continues sur les compacts de \mathbb{R} .

Pour $t \in [t_n, t_{n+1})$ fixé,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^p) d\nu_{x,t}^\delta(\xi) dx \\ &= \frac{t - t_n}{\Delta t_n} \int_{\mathbb{T}^N} (1 + |v_\delta^\#(x,t)|^p) dx + \frac{t_{n+1} - t}{\Delta t_n} \int_{\mathbb{T}^N} (1 + |v_\delta(x,t)|^p) dx \\ &= 1 + \frac{t - t_n}{\Delta t_n} \|v_\delta^\#(t)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p + \frac{t_{n+1} - t}{\Delta t_n} \|v_\delta(t)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p \\ &\leq 1 + \|v_\delta^\#(t)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p + \|v_\delta(t)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p. \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} v_K^\#(t) &= \sum_{n \in \{0, \dots, N_T - 1\}} \mathbf{1}_{[t_n, t_{n+1})}(t) \left(v_K^{n+\frac{1}{2}} + \int_{t_n}^t \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(x, v_K^n) dx dW(s) \right) \\ &= \sum_{n \in \{0, \dots, N_T - 1\}} \mathbf{1}_{[t_n, t_{n+1})}(t) \left(v_K^{n+\frac{1}{2}} + \int_{t_n}^t \Phi_K(x, v_K^n) dW(s) \right), \end{aligned}$$

grâce à la formule d'Itô appliquée au processus $v_K^\#(t)$ pour $t \in [t_n, t_{n+1})$ et à la

fonction $\xi \mapsto |\xi|^p$ on a

$$\begin{aligned}
|v_K^\#(t)|^p &= \left|v_K^{n+\frac{1}{2}}\right|^p + \int_{t_n}^t p v_K^\#(s)^{p-1} \Phi_K(x, v_K^n) dW(s) \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{t_n}^t p(p-1) v_K^\#(s)^{p-2} \|\Phi_K(x, v_K^n)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds \\
&= \left|v_K^{n+\frac{1}{2}}\right|^p + \int_{t_n}^t p v_K^\#(s)^{p-1} \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(y, v_K^n(\omega)) dy dW(s) \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{t_n}^t p(p-1) v_K^\#(s)^{p-2} \left\| \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(y, v_K^n(\omega)) dy \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds.
\end{aligned}$$

Je multiplie par $|K|$, et je somme sur les $K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N$ pour obtenir $\forall t \in [t_n, t_{n+1})$

$$\begin{aligned}
\|v_\delta^\#(t)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p &= \|v_\delta^b(t_{n+1})\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p \\
&\quad + p \int_{t_n}^t \int_{\mathbb{T}^N} v_\delta^\#(y, s)^{p-1} \Phi(y, v_\delta(y, t_n)) dy dW(s) \\
&\quad + \frac{1}{2} p(p-1) \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_{t_n}^t v_K^\#(s)^{p-2} \frac{1}{|K|} \left\| \int_K \Phi(y, v_K^n(\omega)) dy \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds \quad (3.170)
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\sup_{t \in [0, T]} \|v_\delta^\#(t)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p &\leq \sup_{n \in \{0, \dots, N_T-1\}} \|v_\delta^b(t_{n+1})\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p \\
&\quad + \sup_{n \in \{0, \dots, N_T-1\}} \sup_{t \in [t_n, t_{n+1})} p \int_{t_n}^t \int_{\mathbb{T}^N} v_\delta^\#(y, s)^{p-1} \Phi(y, v_\delta(y, t_n)) dy dW(s) \\
&\quad + \sup_{n \in \{0, \dots, N_T-1\}} \frac{1}{2} p(p-1) \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_{t_n}^{t_{n+1}} v_K^\#(s)^{p-2} \frac{1}{|K|} \left\| \int_K \Phi(y, v_K^n(\omega)) dy \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds.
\end{aligned}$$

Dans l'article, la formule est légèrement différente car on a intégré sur K , alors qu'ici j'ai multiplié par $|K|$. Voici ce que ça donne :

En notant

$$A_l = \left\{ \omega \in \Omega : \right. \\ \left. \sup_{n \in \{0, \dots, N_T - 1\}} \left(\sup_{t \in [t_n, t_{n+1})} \left| \int_{t_n}^t \int_{\mathbb{T}^N} v_\delta^\#(y, s)^{p-1} \Phi(y, v_\delta(y, t_n)) dy dW(s) \right| \right) \right. \\ \left. = \sup_{t \in [t_l, t_{l+1})} \left| \int_{t_l}^t \int_{\mathbb{T}^N} v_\delta^\#(y, s)^{p-1} \Phi(y, v_\delta(y, t_l)) dy dW(s) \right| \right\},$$

on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \|v_\delta^\#(t)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p \right) &= \mathbb{E} \left(\sup_{n \in \{0, \dots, N_T-1\}} \sup_{t \in [t_n, t_{n+1})} \|v_\delta^\#(t)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p \right) \\
&\leq \mathbb{E} \sup_{n \in \{0, \dots, N_T-1\}} \|v_\delta^b(t_{n+1})\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p \\
&+ \mathbb{E} \sup_{n \in \{0, \dots, N_T-1\}} \left(\sup_{t \in [t_n, t_{n+1})} \left| \int_{t_n}^t \int_{\mathbb{T}^N} v_\delta^\#(y, s)^{p-1} \Phi(y, v_\delta(y, t_n)) dy dW(s) \right| \right) \\
&+ \frac{1}{2} p(p-1) \mathbb{E} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sup_n \int_{t_n}^{t_{n+1}} v_K^\#(s)^{p-2} \frac{1}{|K|} \left\| \int_K \Phi(y, v_K^n(\omega)) dy \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds \\
&\leq \mathbb{E} \sup_{n \in \{0, \dots, N_T-1\}} \|v_\delta^b(t_{n+1})\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p \\
&+ \sum_{l \in \{0, \dots, N_T-1\}} \int_{A_l} \sup_{t \in [t_l, t_{l+1})} \left| \int_{t_l}^t \int_{\mathbb{T}^N} v_\delta^\#(y, s)^{p-1} \Phi(y, v_\delta(y, t_l)) dy dW(s) \right| d\mathbb{P} \\
&+ \frac{1}{2} p(p-1) \mathbb{E} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sup_n \int_{t_n}^{t_{n+1}} v_K^\#(s)^{p-2} \frac{1}{|K|} \left\| \int_K \Phi(y, v_K^n(\omega)) dy \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds \\
&\leq \mathbb{E} \sup_{n \in \{0, \dots, N_T-1\}} \|v_\delta^b(t_{n+1})\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p \\
&+ \sum_{l \in \{0, \dots, N_T-1\}} \int_{A_l} 1 + \sup_{t \in [t_l, t_{l+1})} \left| \int_{t_l}^t \int_{\mathbb{T}^N} v_\delta^\#(y, s)^{p-1} \Phi(y, v_\delta(y, t_l)) dy dW(s) \right|^2 d\mathbb{P} \\
&+ \frac{1}{2} p(p-1) \mathbb{E} \sum_{K \in \mathcal{T}} \sup_n \int_{t_n}^{t_{n+1}} |K| v_K^\#(s)^{p-2} \left\| \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(y, v_K^n(\omega)) dy \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds \\
&\leq \mathbb{E} \sup_{n \in \{0, \dots, N_T-1\}} \|v_\delta^b(t_{n+1})\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p + 1 \\
&+ \sum_{l \in \{0, \dots, N_T-1\}} \mathbb{E} \sup_{t \in [t_l, t_{l+1})} \left| \int_{t_l}^t \int_{\mathbb{T}^N} v_\delta^\#(y, s)^{p-1} \Phi(y, v_\delta(y, t_l)) dy dW(s) \right|^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} p(p-1) D_0 \mathbb{E} \sup_{n \in \{0, \dots, N_T-1\}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\mathbb{T}^N} v_\delta^\#(x, s)^{p-2} dx ds \\
&\leq \mathbb{E} \sup_{n \in \{0, \dots, N_T-1\}} \|v_\delta^b(t_{n+1})\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p + 1 \\
&+ 4 \sum_{l \in \{0, \dots, N_T-1\}} \mathbb{E} \left| \int_{t_l}^{t_{l+1}} \int_{\mathbb{T}^N} v_\delta^\#(y, s)^{p-1} \Phi(y, v_\delta(y, t_l)) dy dW(s) \right|^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} p(p-1) D_0 \mathbb{E} \sup_{n \in \{0, \dots, N_T-1\}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\mathbb{T}^N} v_\delta^\#(x, s)^{p-2} dx ds \\
&\leq \mathbb{E} \sup_{n \in \{0, \dots, N_T-1\}} \|v_\delta^b(t_{n+1})\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p + 1 \\
&+ 4 \sum_{l \in \{0, \dots, N_T-1\}} \mathbb{E} \int_{t_l}^{t_{l+1}} \left\| \int_{\mathbb{T}^N} v_\delta^\#(y, s)^{p-1} \Phi(y, v_\delta(y, t_l)) dy \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds \\
&\quad + \frac{1}{2} p(p-1) D_0 \mathbb{E} \sup_{n \in \{0, \dots, N_T-1\}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\mathbb{T}^N} v_\delta^\#(x, s)^{p-2} dx ds
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \left\| v_{\delta}^{\#}(t) \right\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p \right) &\leq \mathbb{E} \sup_{n \in \{0, \dots, N_T - 1\}} \left\| v_{\delta}^b(t_{n+1}) \right\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p + 1 \\
&\quad + 4D_0 \sum_{l \in \{0, \dots, N_T - 1\}} \mathbb{E} \int_{t_l}^{t_{l+1}} \int_{\mathbb{T}^N} v_{\delta}^{\#}(y, s)^{2p-2} dy ds \\
&\quad + \frac{1}{2} p(p-1) D_0 \mathbb{E} \sup_{n \in \{0, \dots, N_T - 1\}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\mathbb{T}^N} v_{\delta}^{\#}(x, s)^{p-2} dx ds \\
&\leq \mathbb{E} \sup_{n \in \{0, \dots, N_T - 1\}} \left\| v_{\delta}^b(t_{n+1}) \right\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p + 1 \\
&\quad + 4D_0 T \sup_{l \in \{0, \dots, N_T - 1\}} \sup_{s \in [t_l, t_{l+1})} \mathbb{E} \int_{\mathbb{T}^N} v_{\delta}^{\#}(y, s)^{2p-2} dy \\
&\quad + \frac{1}{2} p(p-1) D_0 \mathbb{E} \sup_{n \in \{0, \dots, N_T - 1\}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\mathbb{T}^N} v_{\delta}^{\#}(x, s)^{p-2} dx ds \\
&\leq \mathbb{E} \sup_{n \in \{0, \dots, N_T - 1\}} \left\| v_{\delta}^b(t_{n+1}) \right\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p + 1 \\
&\quad + 4D_0 T \sup_{l \in \{0, \dots, N_T - 1\}} \sup_{s \in [t_l, t_{l+1})} \mathbb{E} \int_{\mathbb{T}^N} v_{\delta}^{\#}(y, s)^{2p-2} dy \\
&\quad + \frac{1}{2} p(p-1) D_0 \sup_{l \in \{0, \dots, N_T - 1\}} \sup_{s \in [t_l, t_{l+1})} \mathbb{E} \int_{\mathbb{T}^N} v_{\delta}^{\#}(y, s)^{p-2} dy.
\end{aligned}$$

On doit donc majorer pour q pair, positif non nul

$$\sup_{l \in \{0, \dots, N_T - 1\}} \sup_{s \in [t_l, t_{l+1})} \mathbb{E} \int_{\mathbb{T}^N} v_{\delta}^{\#}(y, s)^q dy.$$

Soit $t \in [t_l, t_{l+1})$ pour un $l \in \{0, \dots, N_T - 1\}$ fixé,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \int_{\mathbb{T}^N} v_{\delta}^{\#}(y, t)^q dy &= \mathbb{E} \int_{\mathbb{T}^N} v_{\delta}^{\#}(y, t)^q dy \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \mathbb{E} \int_K \left(v_K^{l+\frac{1}{2}} + \int_{t_l}^t \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(x, v_K^l) dx dW(s) \right)^q dy \\
&\leq \sum_{r=0}^q \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| Cste \mathbb{E} \left(\left| v_K^{l+\frac{1}{2}} \right|^r \right) = Cste + \sum_{r=1}^q Cste \mathbb{E} \left\| v_{\delta}^b(t_{l+1}) \right\|_{L^r(\mathbb{T}^N)}^r
\end{aligned}$$

car pour r entier naturel tel que $0 \leq r < q$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\left| v_K^{l+\frac{1}{2}} \right|^r \left(\int_{t_l}^t \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(x, v_K^l) dx dW(s) \right)^{q-r} \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\left(\left| v_K^{l+\frac{1}{2}} \right|^{\frac{r}{q-r}} \int_{t_l}^t \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(x, v_K^l) dx dW(s) \right)^{q-r} \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\left(\int_{t_l}^t \left| v_K^{l+\frac{1}{2}} \right|^{\frac{r}{q-r}} \frac{1}{|K|} \int_K \Phi(x, v_K^l) dx dW(s) \right)^{q-r} \right) \\
&\leq C_{q-r} D_0^{\frac{(q-r)}{2}} (\Delta t_l)^{\frac{(q-r)}{2}} \mathbb{E} \left(\left| v_K^{l+\frac{1}{2}} \right|^r \right).
\end{aligned}$$

On a la majoration (évidente si $r = 0$)

$$\sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \mathbb{E} \left(\left(v_K^{l+\frac{1}{2}} \right)^r \right) \leq \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \mathbb{E} \left(\left(v_K^l \right)^r \right).$$

On a même mieux :

on peut remarquer grâce à une formule similaire à (3.80) (début de la preuve de la proposition 60) que pour $p = 1$ ou $p \geq 2$,

$$\left\| v_\delta^l(t_{n+1}) \right\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p \leq \left\| v_\delta(t_n) \right\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p ;$$

pour $p \geq 2$, on part de (3.35) et on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} p \xi^{p-1} \left(\mathbf{f}_K^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{f}_K^n \right) d\xi + \int_{\mathbb{R}} p \xi^{p-1} \frac{\Delta t_n}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) d\xi \\
&= \Delta t_n \int_{\mathbb{R}} p \xi^{p-1} \partial_\xi m_K^n(\xi) d\xi
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned}
& \left(v_K^{n+\frac{1}{2}} \right)^p - \left(v_K^n \right)^p + \int_{\mathbb{R}} p \xi^{p-1} \frac{\Delta t_n}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) d\xi \\
&= -\Delta t_n \int_{\mathbb{R}} p(p-1) \xi^{p-2} m_K^n(\xi) d\xi
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \left(|K| \left(v_K^{n+\frac{1}{2}} \right)^p - |K| (v_K^n)^p \right) \\ & + \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \int_{\mathbb{R}} p \xi^{p-1} \frac{\Delta t_n}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) d\xi \\ & = \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} -\Delta t_n |K| \int_{\mathbb{R}} p(p-1) \xi^{p-2} m_K^n(\xi) d\xi \end{aligned}$$

donc (cf preuve de la proposition 60 pour les détails)

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} |K| \left(v_K^{n+\frac{1}{2}} \right)^p + \sum_{K \in \mathcal{T}} \Delta t_n |K| \int_{\mathbb{R}} p(p-1) \xi^{p-2} m_K^n(\xi) d\xi = \sum_{K \in \mathcal{T}} |K| (v_K^n)^p$$

et donc

$$\left\| v_\delta^b(t_{n+1}) \right\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p + \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \Delta t_n |K| \int_{\mathbb{R}} p(p-1) \xi^{p-2} m_K^n(\xi) d\xi = \left\| v_\delta(t_n) \right\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p.$$

Pour $p = 1$, on part à nouveau de (3.35)

$$\mathbf{f}_K^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{f}_K^n + \frac{\Delta t_n}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) = \Delta t_n \partial_\xi m_K^n(\xi),$$

grâce à la fonction

$$\operatorname{sgn}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi > 0 \\ -1 & \text{si } \xi < 0 \end{cases}$$

on a

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(\xi) \left(\mathbf{f}_K^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{f}_K^n \right) d\xi + \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(\xi) \frac{\Delta t_n}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) d\xi \\ & = \Delta t_n \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(\xi) \partial_\xi m_K^n(\xi) d\xi \end{aligned}$$

donc

$$\left| v_K^{n+\frac{1}{2}} \right| - |v_K^n| + \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(\xi) \frac{\Delta t_n}{|K|} \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} a_{K \rightarrow L}(\xi, v_K^n, v_L^n) d\xi = -2\Delta t_n m_K^n(0)$$

donc

$$\sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| \left| v_K^{n+\frac{1}{2}} \right| \leq \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} |K| |v_K^n|.$$

Notons aussi que

$$\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} \|v_\delta(t)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p = \mathbb{E} \sup_{n \in \{0, \dots, N_T - 1\}} \|v_\delta(t_n)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p.$$

Il reste donc pour terminer la démonstration à majorer

$$\mathbb{E} \sup_{n \in \{0, \dots, N_T - 1\}} \|v_\delta(t_n)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p$$

pour $p \geq 2$ pair, et

$$\sup_{l \in \{0, \dots, N_T - 1\}} \mathbb{E} \|v_\delta(t_l)\|_{L^r(\mathbb{T}^N)}^r$$

pour $r \in \mathbb{N}^*$.

Commençons pas majorer $\sup_{l \in \{0, \dots, N_T - 1\}} \mathbb{E} \|v_\delta(t_l)\|_{L^r(\mathbb{T}^N)}^r$ pour $r \in \mathbb{N}^*$:

Grâce à la formule (3.170) où on a fait tendre $t \rightarrow t_{n+1}$, on a

$$\begin{aligned} \|v_\delta(t_{n+1})\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p &= \|v_\delta^\flat(t_{n+1})\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p \\ &\quad + p \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\mathbb{T}^N} v_\delta^\#(y, s)^{p-1} \Phi(y, v_\delta(y, t_n)) dy dW(s) \\ &\quad + \frac{1}{2} p(p-1) \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_{t_n}^{t_{n+1}} v_K^\#(s)^{p-2} \frac{1}{|K|} \left\| \int_K \Phi(y, v_K^n(\omega)) dy \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds \end{aligned}$$

puis, prenant l'espérance, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|v_\delta(t_{n+1})\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p &\leq \mathbb{E} \|v_\delta(t_n)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p \\ &\quad + \frac{1}{2} p(p-1) D_0 \Delta t_n \sup_{s \in [t_n, t_{n+1}]} \mathbb{E} \|v_\delta^\#(s)\|_{L^{p-2}(\mathbb{T}^N)}^{p-2} \\ &\leq \mathbb{E} \|v_\delta(0)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p \\ &\quad + \frac{1}{2} p(p-1) D_0 T \sup_n \sup_{s \in [t_n, t_{n+1}]} \mathbb{E} \|v_\delta^\#(s)\|_{L^{p-2}(\mathbb{T}^N)}^{p-2}. \end{aligned}$$

Si $p = 2$, on s'arrête là. Si $p \geq 4$, on continue pour avoir

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|v_\delta(t_{n+1})\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p &\leq \mathbb{E} \|v_\delta(0)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p \\ &+ \frac{1}{2} p(p-1) D_0 T \sup_{n \in \{0, \dots, N_T-1\}} \sup_{s \in [t_n, t_{n+1})} \mathbb{E} \|v_\delta^\#(s)\|_{L^{p-2}(\mathbb{T}^N)}^{p-2} \\ &\leq \mathbb{E} \|v_\delta(0)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p + \frac{1}{2} p(p-1) D_0 T \left(\mathbb{E} \|v_\delta(0)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (p-3)(p-4) D_0 T \sup_{n \in \{0, \dots, N_T-1\}} \sup_{s \in [t_n, t_{n+1})} \mathbb{E} \|v_\delta^\#(s)\|_{L^{p-4}(\mathbb{T}^N)}^{p-4} \right), \end{aligned}$$

ce qui donne par récurrence

$$\sup_{n \in \{0, \dots, N_T-1\}} \mathbb{E} \|v_\delta(t_n)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p \leq Cste.$$

Le cas $p = 1$ est une conséquence de la formule

$$\mathbb{E} \|v_\delta(t_n)\|_{L^1(\mathbb{T}^N)} \leq \left(\mathbb{E} \|v_\delta(t_n)\|_{L^2(\mathbb{T}^N)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour majorer

$$\mathbb{E} \sup_{n \in \{0, \dots, N_T-1\}} \|v_\delta(t_n)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p,$$

pour $p \geq 2$ entier et pair, utilisons comme dans l'article la formule à $n \in \{0, \dots, N_T-1\}$ fixé :

$$\begin{aligned} \|v_\delta(t_{n+1})\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p &\leq \|v_\delta(t_n)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p \\ &+ p \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\mathbb{T}^N} v_\delta^\#(y, s)^{p-1} \Phi(y, v_\delta(y, t_n)) dy dW(s) \\ &+ \frac{1}{2} p(p-1) \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_{t_n}^{t_{n+1}} v_K^\#(s)^{p-2} \frac{1}{|K|} \left\| \int_K \Phi(y, v_K^n(\omega)) dy \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds \\ &\leq \|v_\delta(0)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p + p \sum_{l=0}^n \int_{t_l}^{t_{l+1}} \int_{\mathbb{T}^N} v_\delta^\#(y, s)^{p-1} \Phi(y, v_\delta(y, t_l)) dy dW(s) \\ &+ \frac{1}{2} p(p-1) \sum_{l=0}^n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_{t_l}^{t_{l+1}} v_K^\#(s)^{p-2} \frac{1}{|K|} \left\| \int_K \Phi(y, v_K^l(\omega)) dy \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds \end{aligned}$$

et majorons

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \sup_{n \in \{0, \dots, N_T - 1\}} \sum_{l=0}^n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_{t_l}^{t_{l+1}} v_K^\#(s)^{p-2} \frac{1}{|K|} \left\| \int_K \Phi(y, v_K^l(\omega)) dy \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds \\
&= \mathbb{E} \sum_{l=0}^{N_T-1} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_{t_l}^{t_{l+1}} v_K^\#(s)^{p-2} \frac{1}{|K|} \left\| \int_K \Phi(y, v_K^l(\omega)) dy \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds \\
&\leq D_0 T \sup_{n \in \{0, \dots, N_T - 1\}} \sup_{s \in [t_n, t_{n+1}]} \mathbb{E} \left\| v_\delta^\#(s) \right\|_{L^{p-2}(\mathbb{T}^N)}^{p-2} \leq Cste.
\end{aligned}$$

Puis, en remarquant que

$$n \in \{0, \dots, N_T - 1\} \mapsto \sum_{l=0}^n \int_{t_l}^{t_{l+1}} \int_{\mathbb{T}^N} v_\delta^\#(y, s)^{p-1} \Phi(y, v_\delta(y, t_l)) dy dW(s)$$

est une \mathcal{F}_n -martingale, et en utilisant l'inégalité de Burkholder, Davis, Gundy pour les martingales à temps discret, puis l'isométrie d'Itô, on a

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \sup_{n \in \{0, \dots, N_T - 1\}} \left| \sum_{l=0}^n \int_{t_l}^{t_{l+1}} \int_{\mathbb{T}^N} v_\delta^\#(y, s)^{p-1} \Phi(y, v_\delta(y, t_l)) dy dW(s) \right| \\
&\leq Cste \mathbb{E} \left(\sum_{l=0}^{N_T-1} \left(\int_{t_l}^{t_{l+1}} \int_{\mathbb{T}^N} v_\delta^\#(y, s)^{p-1} \Phi(y, v_\delta(y, t_l)) dy dW(s) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq Cste \left(\sum_{l=0}^{N_T-1} \mathbb{E} \left(\int_{t_l}^{t_{l+1}} \int_{\mathbb{T}^N} v_\delta^\#(y, s)^{p-1} \Phi(y, v_\delta(y, t_l)) dy dW(s) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq Cste \left(\sum_{l=0}^{N_T-1} \left(\mathbb{E} \int_{t_l}^{t_{l+1}} \int_{\mathbb{T}^N} v_\delta^\#(y, s)^{2p-2} D_0 dy ds \right) \right)^{\frac{1}{2}} \leq Cste
\end{aligned}$$

car

$$\sup_{n \in \{0, \dots, N_T - 1\}} \sup_{s \in [t_n, t_{n+1}]} \mathbb{E} \left\| v_\delta^\#(s) \right\|_{L^{2p-2}(\mathbb{T}^N)}^{2p-2}$$

est borné.

La preuve du lemme 71 est ainsi achevée.

3.2.17 Sur la tension des m_δ (lemme 72)

Remarque :

$$m_\delta(1) = \mathcal{E}(T).$$

3.2.18 Sur le théorème 74, le paragraphe 3.1.7.2 et la convergence du schéma Volumes Finis

Le cas $p > 2$ mérite d'être détaillé :

Il suffit de traiter le cas $p \geq 4$ entier pair

$$\mathbb{E} \int_0^T \|z_\delta(s) - v_\delta(s)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p ds \leq \sum_{n \in \{0, \dots, N_T-1\}} \mathbb{E} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|v_\delta^\#(s) - v_\delta(s)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p ds.$$

Si on applique la fomule d'Itô au processus $t \in [t_n, t_{n+1}) \mapsto v_K^\#(t) - v_K(t)$ et à la fonction $\xi \mapsto \xi^p$, on obtient (regarder la preuve du lemme 71 pour les détails) pour tout $t \in [t_n, t_{n+1})$,

$$\begin{aligned} \|v_\delta^\#(t) - v_\delta(t)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p &= \|v_\delta^\flat(t_{n+1}) - v_\delta(t_n)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p \\ &\quad + p \int_{t_n}^t \int_{\mathbb{T}^N} (v_\delta^\#(y, s) - v_\delta(y, s))^{p-1} \Phi(y, v_\delta(y, t_n)) dy dW(s) \\ &\quad + \frac{1}{2} p(p-1) \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \int_{t_n}^t (v_K^\#(s) - v_K(s))^{p-2} \frac{1}{|K|} \left\| \int_K \Phi(y, v_K^n(\omega)) dy \right\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 ds. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_0^T \|z_\delta(s) - v_\delta(s)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p ds &\leq \sum_{n \in \{0, \dots, N_T-1\}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbb{E} \|v_\delta^\flat(t_{n+1}) - v_\delta(t_n)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p ds \\ &\quad + \frac{1}{2} p(p-1) \sum_{n \in \{0, \dots, N_T-1\}} \Delta t_n \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \mathbb{E} \int_{t_n}^{t_{n+1}} |v_K^\#(s) - v_K(s)|^{p-2} |K| D_0 ds \\ &\leq \sum_{n \in \{0, \dots, N_T-1\}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbb{E} \|v_\delta^\flat(t_{n+1}) - v_\delta(t_n)\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p ds \\ &\quad + C \text{ste} \mathbb{E} \int_0^T \|v_\delta^\#(s) - v_\delta(s)\|_{L^{p-2}(\mathbb{T}^N)}^{p-2} ds. \end{aligned}$$

Il suffit donc de majorer convenablement

$$\sum_{n \in \{0, \dots, N_T-1\}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbb{E} \left\| v_\delta^\flat(t_{n+1}) - v_\delta(t_n) \right\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p ds$$

et d'utiliser une récurrence pour obtenir le résultat voulu.

$$\begin{aligned} & \sum_{n \in \{0, \dots, N_T-1\}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbb{E} \left\| v_\delta^\flat(t_{n+1}) - v_\delta(t_n) \right\|_{L^p(\mathbb{T}^N)}^p ds \\ &= \mathbb{E} \sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{n \in \{0, \dots, N_T-1\}} \Delta t_n |K| \left| v_K^{n+\frac{1}{2}} - v_K^n \right|^p \\ &\leq \mathbb{E} \left(\left(\sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{n \in \{0, \dots, N_T-1\}} \Delta t_n |K| \left| v_K^{n+\frac{1}{2}} - v_K^n \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \times \left. \left(\sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{n \in \{0, \dots, N_T-1\}} \Delta t_n |K| \left| v_K^{n+\frac{1}{2}} - v_K^n \right|^{2p-2} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\leq \left(\mathbb{E} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{n \in \{0, \dots, N_T-1\}} \Delta t_n |K| \left| v_K^{n+\frac{1}{2}} - v_K^n \right|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left(\mathbb{E} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{n \in \{0, \dots, N_T-1\}} \Delta t_n |K| \left| v_K^{n+\frac{1}{2}} - v_K^n \right|^{2p-2} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\mathbb{E} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{n \in \{0, \dots, N_T-1\}} \Delta t_n |K| \left| v_K^{n+\frac{1}{2}} - v_K^n \right|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left(\mathbb{E} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{n \in \{0, \dots, N_T-1\}} \Delta t_n |K| \left| v_K^{n+\frac{1}{2}} - v_K^n \right|^{2p-2} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq Cste \sup_{n \in \{0, \dots, N_T-1\}} \Delta t_n Cste \left(\mathbb{E} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}/\mathbb{Z}^N} \sum_{n \in \{0, \dots, N_T-1\}} \Delta t_n |K| \left| v_K^n \right|^{2p-2} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq Cste \sup_{n \in \{0, \dots, N_T-1\}} \Delta t_n \end{aligned}$$

grâce à (3.77) et à (3.163).

3.2.19 Au sujet de la formule (3.167)

Si $p > 2$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \int_{\mathbb{T}^N \times (0, T)} |v_\delta(x, t) - u(x, t)|^p dx dt \\
 &= \mathbb{E} \int_{\mathbb{T}^N \times (0, T)} |v_\delta(x, t) - u(x, t)| \times |v_\delta(x, t) - u(x, t)|^{p-1} dx dt \\
 &\leq \left(\mathbb{E} \int_{\mathbb{T}^N \times (0, T)} |v_\delta(x, t) - u(x, t)|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad \times \left(\mathbb{E} \int_{\mathbb{T}^N \times (0, T)} |v_\delta(x, t) - u(x, t)|^{2(p-1)} dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \|v_\delta - u\|_{L^2(\Omega \times \mathbb{T}^N \times (0, T))} \|v_\delta - u\|_{L^{2(p-1)}(\Omega \times \mathbb{T}^N \times (0, T))}^{p-1}.
 \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young vraie $\forall A, B, \eta > 0$,

$$AB \leq \eta B^2 + \frac{1}{\eta} A^2$$

à

$$A = \left(\mathbb{E} \int_{\mathbb{T}^N \times (0, T)} |v_\delta(x, t) - u(x, t)|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$B = \left(\mathbb{E} \int_{\mathbb{T}^N \times (0, T)} |v_\delta(x, t) - u(x, t)|^{2(p-1)} dx dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

j'obtiens bien

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \int_{\mathbb{T}^N \times (0, T)} |v_\delta(x, t) - u(x, t)|^p dx dt \\
 &\leq \frac{1}{\eta} \mathbb{E} \int_{\mathbb{T}^N \times (0, T)} |v_\delta(x, t) - u(x, t)|^2 dx dt \\
 &\quad + \eta \mathbb{E} \int_{\mathbb{T}^N \times (0, T)} |v_\delta(x, t) - u(x, t)|^{2(p-1)} dx dt
 \end{aligned}$$

c'est à dire (3.167).

Remarque : pour utiliser les bornes uniformes (3.8) et (3.163), il faut utiliser les inégalités de convexité (vraies pour $A \geq 1$)

$$\left(\frac{|v_\delta| + |u|}{2}\right)^A \leq \frac{1}{2}|v_\delta|^A + \frac{1}{2}|u|^A$$

qui s'écrivent aussi

$$(|v_\delta| + |u|)^A \leq 2^{A-1} (|v_\delta|^A + |u|^A).$$

Conclusion et perspectives

Pour situer le contexte de cette thèse ou de ces deux articles, il faut bien comprendre qu'ils suivent l'article fondateur de Debussche-Vovelle [DV10b] de 2010, corrigé en 2014 [DV14].

La loi de conservation scalaire fut écrite

$$du + \operatorname{div} (A(u)) = \Phi(u) dW(t), \quad x \in \mathbb{T}^N, t \in (0, T),$$

H étant un espace de Hilbert de base hilbertienne $(e_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$. Φ (linéaire) fut définie comme suit

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathbb{R}, \quad \Phi(u) &: H \rightarrow L^2(\mathbb{T}^N) \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \Phi(u) e_k &= g_k(\cdot, u) \end{aligned}$$

avec $g_k \in C(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ vérifiant

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x, u)|^2 \leq D_0 (1 + |u|^2), \quad \forall (x, u) \in \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x, u) - g_k(y, v)|^2 &\leq D_1 (|x - y|^2 + |u - v| h(|u - v|)), \\ \forall (x, u, y, v) &\in \mathbb{T}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}, \end{aligned}$$

où $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est continue, croissante, vérifiant $h(0) = 0$. D_0 et D_1 sont des constantes positives.

Grâce à ces hypothèses, Φ est un opérateur de Hilbert-Schmidt pour chaque $u \in \mathbb{R}$ que l'on note

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \Phi(u) \in L_2(H; L^2(\mathbb{T}^N)).$$

Ces hypothèses écrites à l'aide de sommes (pour k allant de 1 à $+\infty$) viennent de ce que les auteurs ont utilisé une définition et une écriture de l'intégrale stochastique à l'aide de sommes, à savoir, pour le processus de Wiener cylindrique

$$W(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k(t) e_k$$

avec des mouvements Browniens β_k mutuellement indépendants, et $f \in L^2_{\mathcal{P}}([0, T]; L_2(H; \mathbb{R}))$:

$$\int_0^t f(s) dW(s) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \int_0^t f(s) e_k d\beta_k(t).$$

Dans le détail de leur article, si on écrit les variables (au moins celles du temps et de l'espace), c'est en fait

$$du(x, t) + \operatorname{div}(A(u(x, t))) = \Phi(x, u(x, t)) dW(t), \quad x \in \mathbb{T}^N, t \in (0, T)$$

qui est étudié. Pour pallier à ce petit problème de x qui est le même dans la première et la deuxième coordonnée de $\Phi(x, u(x, t))$, Martina Hofmanova dans son article [Hof13] « degenerate parabolic SPDE » change légèrement les hypothèses sur Φ (linéaire), à savoir

$$\forall z \in L^2(\mathbb{T}^N), \quad \Phi(z) : H \rightarrow L^2(\mathbb{T}^N)$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \Phi(z) e_k = g_k(\cdot, z(\cdot))$$

en gardant les mêmes hypothèses, c'est à dire $g_k \in C(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R})$ vérifiant

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x, u)|^2 \leq D_0 (1 + |u|^2), \quad \forall (x, u) \in \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}$$

et

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x, u) - g_k(y, v)|^2 \leq D_1 (|x - y|^2 + |u - v|h(|u - v|)),$$

$$\forall (x, u, y, v) \in \mathbb{T}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^N \times \mathbb{R},$$

où $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est continue, croissante, vérifie $h(0) = 0$, et satisfait pour un certain $\alpha > 0$,

$$h(\delta) < C\delta^\alpha, \quad \forall \delta \in [0, 1[.$$

Grâce à ces hypothèses, $\Phi(z)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt pour chaque $z \in L^2(\mathbb{T}^N)$ que l'on note

$$\forall z \in L^2(\mathbb{T}^N), \quad \Phi(z) \in L_2(H; L^2(\mathbb{T}^N)).$$

Mais suivant les idées développées par Benoît Perthame dans son livre [Per02], la voie tracée pour passer d'une formulation entropique d'une loi de conservation (parabolique ou hyperbolique) à une formulation cinétique d'une loi de conservation serait (formellement)

- d'effectuer de part et d'autre de l'égalité l'opération $\otimes \delta_{u(x,t)}(d\xi)$ avec u régulière,
- d'écrire l'égalité avec $\chi(\xi, u(x, t))$, $\partial_t \chi(\xi, u(x, t))$, $\partial_{x_i} \chi(\xi, u(x, t))$ à la place de $u(x, t)$, $\partial_t u(x, t)$, $\partial_{x_i} u(x, t)$, la fonction χ étant définie par

$$\chi(\xi, u) = \begin{cases} +1 & \text{si } 0 < \xi < u \\ -1 & \text{si } u < \xi < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

puis d'écrire l'égalité avec $f(x, t, \xi)$, $\partial_t f(x, t, \xi)$, $\partial_{x_i} f(x, t, \xi)$ à la place de $\chi(\xi, u(x, t))$, $\partial_t \chi(\xi, u(x, t))$, $\partial_{x_i} \chi(\xi, u(x, t))$ dans le cadre d'une solution dite généralisée,

- de remplacer $A'(u(x, t))$ par $A'(\xi)$, de remplacer $\Phi(x, u(x, t))$ par $\Phi(x, \xi)$ ou bien $G(x, t, u(x, t))$ par $G(x, t, \xi)$,
- d'introduire une mesure positive (de défaut d'entropie) pour que l'inégalité entropique s'écrive sous forme d'une égalité.

Il me semble que la formulation cinétique devient moins naturelle et plus problématique avec la définition de Martina Hofmanova.

Dans ce contexte, suivant la définition commune donnée dans le livre de Da Prato et Zabczyk [DZ92], ou dans celui de Prévôt et Röckner [PR07], ou dans le mémoire de Frieler et Knoche [FK01], je pense que la meilleure définition de Φ est la suivante :

$$\Phi : \mathbb{T}_x^N \times \mathbb{R} \rightarrow L_2(H, \mathbb{R})$$

est une fonction périodique, de période 1 par rapport à chaque variable $x_i \in \mathbb{T}$, telle que $\forall (x, u) \in \mathbb{T}_x^N \times \mathbb{R}$, $\Phi(x, u)$ est l'opérateur linéaire défini sur H par

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \Phi(x, u) e_k = g_k(x, u)$$

où g_k est telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $g_k \in C(\mathbb{T}_x^N \times \mathbb{R})$. g_k vérifie aussi

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x, u)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\Phi(x, u) e_k|^2 = \|\Phi(x, u)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \leq D_0 (1 + |u|^2),$$

$$\forall (x, u) \in \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}$$

pour que $\Phi(x, u)$ soit un opérateur de Hilbert-Schmidt, c'est à dire $\Phi(x, u) \in$

$L_2(H, \mathbb{R})$. g_k vérifie

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x, u) - g_k(y, v)|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |(\Phi(x, u) - \Phi(y, v)) e_k|^2 \\ &= \|\Phi(x, u) - \Phi(y, v)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \leq D_1 \left(|x - y|^2 + |u - v| h(|u - v|) \right), \\ &\quad \forall (x, u, y, v) \in \mathbb{T}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}, \end{aligned}$$

où $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est continue, croissante, et vérifie $h(0) = 0$, pour que

$$\Phi : (x, u) \in \mathbb{T}^N \times \mathbb{R} \mapsto \phi(x, u) \in L_2(H, \mathbb{R})$$

soit continue donc borélienne.

Remplacer $\Phi(x, u)$ par $\Phi(x, \xi)$ ne pose plus aucun problème pour obtenir la formulation cinétique de la loi de conservation scalaire avec terme source stochastique.

Même si les démonstrations de nos deux articles ont continué à être écrites avec des intégrales stochastiques sous forme de sommes (pour k allant de 1 à $+\infty$), je pense que la notation

$$\int_0^t \Phi(x, u(t, x)) dW(t)$$

est préférable.

Tout d'abord parce que l'objet est parfaitement défini (par Da Prato-Zabczyk), et qu'on ne se pose pas sans arrêt la question de la convergence de la somme.

Ensuite, cela allège les notations, et parfois facilite les démonstrations. Les lecteurs de cette thèse peuvent comparer les démonstrations des deux articles faites avec les sommes et les démonstrations faites dans les paragraphes consacrés aux détails de ces démonstrations où j'ai utilisé le symbole intégral.

Puis, les hypothèses écrites de la manière suivante

$$\|\Phi(x, u)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \leq D_0 (1 + |u|^2), \quad \forall (x, u) \in \mathbb{T}^N \times \mathbb{R},$$

et

$$\begin{aligned} \|\Phi(x, u) - \Phi(y, v)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 &\leq D_1 \left(|x - y|^2 + |u - v| h(|u - v|) \right), \\ &\quad \forall (x, u, y, v) \in \mathbb{T}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}, \end{aligned}$$

permettent de voir que ces hypothèses ne sont pas si éloignées de celles donnant l'existence et l'unicité d'une solution d'une équation différentielle stochastique.

Par exemple ce résultat d'existence et d'unicité est démontré dans le livre de Gallardo [Gal08] pages 162-167 : Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} du(t, \omega) = \mu(t, u(t, \omega)) dt + \sigma(t, u(t, \omega)) d\beta(t), & \forall t \in [0, T] \\ u(0, \omega) = u_0(\omega) \end{cases}$$

où u_0 est une variable aléatoire réelle possédant un moment d'ordre 2.
Sous les hypothèses

- les fonctions $(t, u) \in [0, T] \times \mathbb{R} \mapsto \sigma(t, u) \in \mathbb{R}$
et $(t, u) \in [0, T] \times \mathbb{R} \mapsto \mu(t, u) \in \mathbb{R}$ sont boréliennes
- $\sup_{t \in [0, T]} \sigma(t, 0) < +\infty$ et $\sup_{t \in [0, T]} \mu(t, 0) < +\infty$
- $\forall t \in [0, T], \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, |\sigma(t, u) - \sigma(t, v)| \leq D_1 |u - v|$
et $|\mu(t, u) - \mu(t, v)| \leq D_1 |u - v|$

il existe une unique solution $u \in L^2([0, T] \times \Omega, Prog, dt d\mathbb{P})$ qui s'écrit

$$\forall t \in [0, T], \quad u(t, \omega) = u_0(\omega) + \int_0^t \mu(s, u(s, \omega)) ds + \int_0^t \sigma(s, u(s, \omega)) d\beta(s).$$

D'ailleurs, les deux dernières hypothèses impliquent l'existence d'une constante K telle que

$$|\sigma(t, u)| \leq K(1 + |u|), \quad \forall (t, u) \in [0, T] \times \mathbb{R}.$$

Enfin et surtout, je pense que les hypothèses

$$\|\Phi(x, u)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \leq D_0(1 + |u|^2), \quad \forall (x, u) \in \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}$$

et

$$\|\Phi(x, u) - \Phi(y, v)\|_{L_2(H, \mathbb{R})}^2 \leq D_1(|x - y|^2 + |u - v|h(|u - v|)),$$

$$\forall (x, u, y, v) \in \mathbb{T}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^N \times \mathbb{R},$$

se généraliseront pour résoudre un système de lois de conservation stochastiques : il suffira de remplacer \mathbb{R} par K espace vectoriel de dimension finie ou K espace de Hilbert dans $L_2(H, \mathbb{R})$ pour avoir

$$\|\Phi(x, u)\|_{L_2(H, K)}^2 \leq D_0(1 + |u|_K^2), \quad \forall (x, u) \in \mathbb{T}^N \times K$$

et

$$\|\Phi(x, u) - \Phi(y, v)\|_{L_2(H, K)}^2 \leq D_1(|x - y|^2 + |u - v|_K h(|u - v|_K)),$$

$$\forall (x, u, y, v) \in \mathbb{T}^N \times K \times \mathbb{T}^N \times K$$

ou un type d'hypothèses similaires. Les démonstrations avec les intégrales

$$\int_0^t \Phi(x, u(x, s)) dW(s) \in \mathbb{R}$$

dans le cas scalaire seront remplacées par

$$\int_0^t \Phi(x, u(x, s)) dW(s) \in K.$$

Je reviens sur le paragraphe 2.1.5 du premier article.

En effet, l'article [DV10b] prouve l'existence et l'unicité de la solution de l'équation hyperbolique stochastique scalaire (2.1). L'existence est prouvée grâce à la convergence de la solution de l'équation parabolique correspondante, en faisant tendre le coefficient de viscosité vers 0.

Notre paragraphe 2.1.5 annonce et donne une suite de solutions généralisées approchées qui doit converger vers l'unique solution de notre SPDE.

N'oublions pas que les hypothèses de notre article sont écrites différemment de celles de l'article [DV10b], n'oublions pas non plus que notre définition de solution est différente de celle de l'article [DV10b], il faudra donc selon moi vérifier toutes les hypothèses du théorème 47 en détail pour prouver l'existence d'une solution à notre SPDE avec les hypothèses écrites comme dans notre article, et surtout avec notre définition de solution.

Ce que je viens d'écrire vaut aussi pour l'article de Martina Hofmanova [Hof15]. Finalement, nous avons l'unicité de notre solution, aucun doute. Mais avec les hypothèses écrites comme dans notre article, et la solution définie comme dans notre article, nous n'avons prouvé l'existence que sous l'hypothèse forte d'un bruit multiplicatif $\Phi(x, u(x, t))dW(t)$ avec Φ à support compact. C'est donc un résultat un peu plus faible qu'espéré.

Un futur article devra prouver l'existence (comme l'ont fait Arnaud Debussche et Julien Vovelle dans [DV10b]) d'une solution sans rajouter l'hypothèse Φ à support compact.

L'idéal serait de prouver la convergence du schéma Volumes Finis sans cette hypothèse.

Une première étape serait par exemple de prouver la convergence du schéma Volumes Finis explicite avec un bruit additif $\Phi(x, t)dW(t)$;

la deuxième étape serait de prouver cette même convergence avec le bruit multiplicatif $\Phi(x, u(x, t))dW(t)$.

Cela permettra, comme dans notre article, de construire une suite de solutions généralisées approchées vérifiant les hypothèses du théorème 47, et donc d'avoir l'existence d'une solution de notre EDPS. Bien sûr, cela améliorera aussi le résultat de convergence du schéma Volumes Finis explicite donné dans notre article.

Il serait aussi intéressant selon moi, d'écrire en détail les démonstrations des convergences annoncées dans le paragraphe 2.1.5.

Autre perspective intéressante : la convergence du schéma Volumes Finis implicite.

Première chose à dire sur le schéma lui-même, seul le flux numérique peut être implicite, le terme source numérique doit être explicite si on veut utiliser l'inté-

grale d'Itô. Ce schéma s'écrirait donc

$$|K| (v_K^{n+1} - v_K^n) + \Delta t_n \sum_{L \in N(K)} A_{K \rightarrow L} (v_K^{n+1}, v_L^{n+1}) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \Phi(x, v_K^n) dx dW(t). \quad (3.171)$$

Le terme source numérique

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_K \Phi(x, v_K^{n+1}) dx dW(t)$$

n'existerait qu'avec l'intégrale de Stratonovitch généralisée, mais dans ce cas on aurait peu de chance de voir le schéma converger vers la solution de (2.1) qui utilise l'intégrale d'Itô.

Deuxième point important : il faudra aussi prouver l'existence d'une unique solution à ce schéma implicite. Ce n'était pas le cas pour le schéma explicite.

Troisième point : il reste à écrire une formulation cinétique à ce schéma implicite. La méthode élaborée dans notre article, à savoir donner une formulation cinétique à chaque étape, c'est à dire une formulation cinétique de (3.171) pour chaque $n \in \mathbb{N}$ semble intéressante. Le fait de partager le passage du temps t_n au temps t_{n+1} en deux étapes aussi. Pour ce schéma implicite, la première étape sera l'ajout du terme source stochastique, la deuxième étape sera l'ajout du flux numérique (les étapes seront donc inversées par rapport au schéma explicite).

Quatrième point : le choix du flux cinétique discret $a(\xi, v, w)$ devrait être le même que dans le deuxième article de cette thèse.

Cinquième point : la définition de la mesure de défaut discrète devrait être donnée grâce à une inégalité entropique discrète. En effet, cette mesure de défaut doit être positive, et cette propriété doit être équivalente à une inégalité entropique discrète.

Autres perspectives : l'étude de la loi de conservation hyperbolique avec terme source stochastique, mais cette fois avec un bruit défini grâce à une intégrale de Stratonovitch généralisée, ou grâce à un bruit non-Gaussien, par exemple un bruit blanc de Lévy.

Bibliographie

- [AFP00] Luigi AMBROSIO, Nicola FUSCO et Diego PALLARA. *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*. Oxford university press, 2000 (cf. p. [7](#), [20](#), [137](#)).
- [AWC06] Kaouther AMMAR, Petra WITTBOLD et Jose CARRILLO. « Scalar conservation laws with general boundary condition and continuous flux function ». In : *Journal of Differential Equations* 228.1 (2006), p. 111–139 (cf. p. [23](#)).
- [Bau15] Caroline BAUZET. « Time-splitting approximation of the Cauchy problem for a stochastic conservation law ». In : *Journal of Mathematics and Computers in Simulation* 118 (2015), p. 73–86 (cf. p. [65](#), [245](#)).
- [BCG16a] Caroline BAUZET, Julia CHARRIER et Thierry GALLOUËT. « Convergence of flux-splitting finite volume schemes for hyperbolic scalar conservation laws with a multiplicative stochastic perturbation ». In : *Mathematics of Computation* 85 (2016), p. 2777–2813 (cf. p. [8](#), [59](#), [65](#), [245](#)).
- [BCG16b] Caroline BAUZET, Julia CHARRIER et Thierry GALLOUËT. « Convergence of monotone finite volume schemes for hyperbolic scalar conservation laws with multiplicative noise ». In : *Stochastics and Partial Differential Equations Analysis and Computations* 4.1 (2016), p. 150–223 (cf. p. [8](#), [30](#), [59](#), [65](#), [245](#), [246](#)).
- [BVW12] Caroline BAUZET, Guy VALLET et Petra WITTBOLD. « The Cauchy problem for conservation laws with a multiplicative stochastic perturbation ». In : *Journal of Hyperbolic Differential Equations* 9 (2012), p. 661–709 (cf. p. [30](#), [65](#), [245](#)).
- [BVW14] Caroline BAUZET, Guy VALLET et Petra WITTBOLD. « The Dirichlet problem for a conservation law with a multiplicative stochastic perturbation ». In : *Journal of Functional Analysis* 266.4 (2014), p. 2503–2545 (cf. p. [65](#), [245](#)).
- [Bil13] Patrick BILLINGSLEY. *Convergence of probability measures*. John Wiley & Sons, 2013 (cf. p. [7](#), [96](#), [98](#), [108](#), [123](#), [198](#), [199](#), [203](#), [204](#), [220](#)).
- [Bre83] Yann BRENIER. « Résolution d'équations d'évolution quasilinéaires en dimension N d'espace à l'aide d'équations linéaires en dimension $N+1$ ». In : *Journal of Differential Equations* 50.3 (1983), p. 375–390 (cf. p. [25](#)).
- [Bre99] Haïm BREZIS. *Analyse fonctionnelle*. Dunod, 1999 (cf. p. [7](#)).

Bibliographie

- [BO11] Z BRZEŹNIAK et Martin ONDREJÁT. « Weak solutions to stochastic wave equations with values in Riemannian manifolds ». In : *Communications in Partial Differential Equations* 36.9 (2011), p. 1624–1653 (cf. p. 93).
- [CFV04] Charles CASTAING, Paul Raynaud de FITTE et Michel VALADIER. *Young measures on topological spaces : with applications in control theory and probability theory*. T. 571. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004 (cf. p. 8, 71, 72, 96, 192).
- [CC01] Claire CHAINAIS-HILLAIRET et Sylvie CHAMPIER. « Finite volume schemes for nonhomogeneous scalar conservation laws : error estimate ». In : *Numerische Mathematik* 88.4 (2001), p. 607–639 (cf. p. 53).
- [CG92] S CHAMPIER et T GALLOUËT. « Convergence d'un schéma décentré amont sur un maillage triangulaire pour un problème hyperbolique linéaire ». In : *RAIRO-Modélisation mathématique et analyse numérique* 26.7 (1992), p. 835–853 (cf. p. 42, 43).
- [CGH93] S CHAMPIER, T GALLOUËT et R HERBIN. « Convergence of an upstream finite volume scheme for a nonlinear hyperbolic equation on a triangular mesh ». In : *Numerische Mathematik* 66.1 (1993), p. 139–157 (cf. p. 44, 46).
- [CDK12] Gui-Qiang CHEN, Qian DING et Kenneth H KARLSEN. « On nonlinear stochastic balance laws ». In : *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 204.3 (2012), p. 707–743 (cf. p. 65, 245).
- [CP03] Gui-Qiang CHEN et Benoît PERTHAME. « Well-posedness for non-isotropic degenerate parabolic-hyperbolic equations ». In : *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*. T. 20. 4. Elsevier, 2003, p. 645–668 (cf. p. 70).
- [CW90] KL CHUNG et RJ WILLIAMS. *Introduction to Stochastic Integration*. Birkhauser, 1990 (cf. p. 66).
- [CCL95] Bernardo COCKBURN, Frédéric COQUEL et Philippe G LEFLOCH. « Convergence of the finite volume method for multidimensional conservation laws ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 32.3 (1995), p. 687–705 (cf. p. 47).
- [CMR09] Rinaldo M COLOMBO, Magali MERCIER et Massimiliano D ROSINI. « Stability and total variation estimates on general scalar balance laws ». In : *Communications in Mathematical Sciences* 7.1 (2009), p. 37–65 (cf. p. 19).

Bibliographie

- [CL91] Frédéric COQUEL et Philippe LEFLOCH. « Convergence of finite difference schemes for conservation laws in several space dimensions : the corrected antidiffusive flux approach ». In : *Mathematics of computation* 57.195 (1991), p. 169–210 (cf. p. 59).
- [DZ92] Giuseppe DA PRATO et Jerzy ZABCZYK. *Stochastic equations in infinite dimensions*. T. v. 45. Encyclopedia of mathematics and its applications. Cambridge : Cambridge University Press, 1992. ISBN : 0521385296 (hardback). URL : <http://www.loc.gov/catdir/description/cam026/93118317.html> (cf. p. 8, 64, 102, 110, 166, 191, 244, 298, 368).
- [DV14] A DEBUSSCHE et J VOVELLE. *Scalar conservation laws with stochastic forcing (revised version)*. 2014. URL : <https://hal.inria.fr/hal-00451641v2/document> (cf. p. 8, 32, 366).
- [DV10a] Arnaud DEBUSSCHE et Julien VOVELLE. « Scalar conservation laws with stochastic forcing ». In : *arXiv preprint arXiv :1001.5415* (2010) (cf. p. 65, 117, 120, 121, 245, 282).
- [DV10b] Arnaud DEBUSSCHE et Julien VOVELLE. « Scalar conservation laws with stochastic forcing ». In : *Journal of Functional Analysis* 259.4 (2010), p. 1014–1042 (cf. p. 8, 32, 119, 134, 284, 366, 372).
- [D+16] Arnaud DEBUSSCHE, Martina HOFMANOVÁ, Julien VOVELLE et al. « Degenerate parabolic stochastic partial differential equations : Quasilinear case ». In : *The Annals of Probability* 44.3 (2016), p. 1916–1955 (cf. p. 93).
- [Den75] JD DENTON. *A time marching method for two-and three-dimensional blade to blade flows*. Citeseer, 1975 (cf. p. 41).
- [Di 09] Laurent DI MENZA. *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Cassini, 2009 (cf. p. 7, 16).
- [DiP83] Ronald J DiPERNA. « Convergence of approximate solutions to conservation laws ». In : *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 82.1 (1983), p. 27–70 (cf. p. 74, 92).
- [DiP85] Ronald J DiPERNA. « Measure-valued solutions to conservation laws ». In : *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 88.3 (1985), p. 223–270 (cf. p. 19).
- [Dro01] Jérôme DRONIOU. *Intégration et Espaces de Sobolev à Valeurs Vectorielles*. 2001. URL : <http://concur03.univ-mrs.fr/polys/gm3-02/gm3-02.pdf> (cf. p. 67, 151, 168, 209).
- [Eva10] Lawrence C EVANS. *Partial differential equations*. American Mathematical Society, 2010 (cf. p. 16, 19).

Bibliographie

- [EG15] Lawrence Craig EVANS et Ronald F GARIEPY. *Measure theory and fine properties of functions*. CRC press, 2015 (cf. p. 8, 295).
- [EGH95] Robert EYMARD, Thierry GALLOUËT et Raphaèle HERBIN. « Existence and uniqueness of the entropy solution to a nonlinear hyperbolic equation ». In : *Chinese Annals of Mathematics* 16.1 (1995), p. 1–14 (cf. p. 21, 22).
- [EGH03] Robert EYMARD, Thierry GALLOUËT et Raphaèle HERBIN. *Finite Volume Methods*. 2003. URL : <https://www.cmi.univ-mrs.fr/~herbin/PUBLI/bookevol.pdf> (cf. p. 7, 41, 92, 246, 256, 298, 322).
- [FN08] Jin FENG et David NUALART. « Stochastic scalar conservation laws ». In : *Journal of Functional Analysis* 255.2 (2008), p. 313–373 (cf. p. 65, 245).
- [Fjo+15] Ulrik S FJORDHOLM, Roger KÄPPELI, Siddhartha MISHRA et Eitan TADMOR. « Construction of approximate entropy measure-valued solutions for hyperbolic systems of conservation laws ». In : *Foundations of Computational Mathematics* (2015), p. 1–65 (cf. p. 21).
- [FK01] Katja FRIELER et Claudia KNOCHÉ. « Solutions of stochastic differential equations in infinite dimensional Hilbert spaces and their dependence on initial data ». In : *Bielefeld University* (2001) (cf. p. 8, 368).
- [Gal08] Léonard GALLARDO. *Mouvement brownien et calcul d'Itô : cours et exercices corrigés*. Hermann, 2008 (cf. p. 8, 203, 204, 369).
- [GH] T GALLOUËT et R HERBIN. *Mesures, Intégration, Probabilités*. URL : <http://www-gm3.univ-mrs.fr/~gallouet/licence.d/mes-int-pro.pdf> (cf. p. 7, 181).
- [GH94] Thierry GALLOUËT et Raphaelé HERBIN. « A uniqueness result for measure valued solutions of a nonlinear hyperbolic equations ». In : *Differential and Integral Equations* 6.6 (1994), p. 1383–1394 (cf. p. 19).
- [GM10] Leszek GAWARECKI et Vidyadhar MANDREKAR. *Stochastic differential equations in infinite dimensions : with applications to stochastic partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010 (cf. p. 8, 190).
- [GPS16] Benjamin GESS, Benoît PERTHAME et Panagiotis E SOUGANIDIS. « Semi-discretization for stochastic scalar conservation laws with multiple rough fluxes ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 54.4 (2016), p. 2187–2209. DOI : [doi/abs/10.1137/15M1053670](https://doi.org/10.1137/15M1053670) (cf. p. 65, 245).

Bibliographie

- [GS14] Benjamin GESS et Panagiotis E. SOUGANIDIS. « Scalar conservation laws with multiple rough fluxes ». In : *arXiv preprint arXiv :1406.2978* (juin 2014). eprint : 1406 . 2978. URL : <https://arxiv.org/abs/1406.2978> (cf. p. 65, 245).
- [GS16] Benjamin GESS et Panagiotis E SOUGANIDIS. « Long-Time Behavior, Invariant Measures, and Regularizing Effects for Stochastic Scalar Conservation Laws ». In : *Communications on Pure and Applied Mathematics* (2016) (cf. p. 65, 245).
- [Gra94] André GRAMAIN. *Integration*. Hermann, 1994 (cf. p. 7).
- [GK96] István GYÖNGY et Nicolai KRYLOV. « Existence of strong solutions for Itô's stochastic equations via approximations ». In : *Probability theory and related fields* 105.2 (1996), p. 143–158 (cf. p. 115).
- [GR00] István GYÖNGY et Carles ROVIRA. « On L p-solutions of semilinear stochastic partial differential equations ». In : *Stochastic Processes and their Applications* 90.1 (2000), p. 83–108 (cf. p. 117, 298, 300).
- [Hof16] Martina HOFMANOVA. « Scalar conservation laws with rough flux and stochastic forcing ». In : *Stochastics and Partial Differential Equations : Analysis and Computations* 4.3 (2016), p. 635–690 (cf. p. 65, 245).
- [Hof13] Martina HOFMANOVÁ. « Degenerate parabolic stochastic partial differential equations ». In : *Stochastic Processes and their Applications* 123.12 (2013), p. 4294–4336 (cf. p. 93, 94, 367).
- [Hof15] Martina HOFMANOVÁ. « A Bhatnagar–Gross–Krook approximation to stochastic scalar conservation laws ». In : *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*. T. 51. 4. Institut Henri Poincaré. 2015, p. 1500–1528 (cf. p. 65, 117, 118, 372).
- [HS12] Martina HOFMANOVÁ et Jan SEIDLER. « On weak solutions of stochastic differential equations ». In : *Stochastic Analysis and Applications* 30.1 (2012), p. 100–121 (cf. p. 93).
- [HR90] Helge HOLDEN et Nils Henrik RISEBRO. « A stochastic approach to conservation laws ». In : *Third International Conference on Hyperbolic Problems* 1 (1990), p. 575–587 (cf. p. 245).
- [HR93] Helge HOLDEN et Nils Henrik RISEBRO. « Conservation laws with a random source ». In : *Preprint series : Pure mathematics* <http://urn.nb.no/URN:NBN:no-8076> (1993) (cf. p. 26, 29).
- [JS13] Jean JACOD et Albert N SHIRYAEV. *Limit theorems for stochastic processes*. T. 288. Springer Science & Business Media, 2013 (cf. p. 93, 98, 108, 110, 123, 218, 222).

Bibliographie

- [KS17] Kenneth Hvistendahl KARLSEN et Erlend Briseid STORRØSTEN. « On stochastic conservation laws and malliavin calculus ». In : *Journal of Functional Analysis* 272.2 (2017), p. 421–497 (cf. p. 65, 245).
- [KS16] KH KARLSEN et EB STORRØSTEN. « Analysis of a splitting method for stochastic balance laws ». In : *arXiv preprint arXiv :1601.02428* (2016) (cf. p. 65).
- [Kim03a] Jong Uhn KIM. « On a stochastic scalar conservation law ». In : *Indiana University mathematics journal* 52.1 (2003), p. 227–256 (cf. p. 28, 29).
- [Kim03b] Yong Jung KIM. « Asymptotic behavior of solutions to scalar conservation laws and optimal convergence orders to N-waves ». In : *Journal of Differential Equations* 192.1 (2003), p. 202–224 (cf. p. 65, 245).
- [Kot07] Peter KOTELENEZ. *Stochastic ordinary and stochastic partial differential equations : transition from microscopic to macroscopic equations*. T. 58. Springer Science & Business Media, 2007 (cf. p. 209).
- [KR12] Ilja KRÖKER et Christian ROHDE. « Finite volume schemes for hyperbolic balance laws with multiplicative noise ». In : *Applied Numerical Mathematics* 62.4 (2012), p. 441–456 (cf. p. 65, 245).
- [Kru70] Stanislav N KRUŽKOV. « First order quasilinear equations in several independent variables ». In : *Mathematics of the USSR-Sbornik* 10.2 (1970), p. 217 (cf. p. 17).
- [Ler33] Jean LERAY. « Etude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique ». In : *Thèses françaises de l'entre-deux-guerres* 142 (1933), p. 1–82 (cf. p. 17).
- [LeV02] Randall J LEVEQUE. *Finite volume methods for hyperbolic problems*. T. 31. Cambridge university press, 2002 (cf. p. 41).
- [LPS12] Pierre-Louis LIONS, Benoît PERTHAME et Panagiotis E SOUGANIDIS. « Stochastic averaging lemmas for kinetic equations ». In : *arXiv preprint arXiv :1204.0317* (2012) (cf. p. 65, 245).
- [LPS13] Pierre-Louis LIONS, Benoît PERTHAME et Panagiotis E SOUGANIDIS. « Scalar conservation laws with rough (stochastic) fluxes ». In : *Stochastic partial differential equations : analysis and computations* 1.4 (2013), p. 664–686 (cf. p. 65, 245).
- [LPS14] Pierre-Louis LIONS, Benoît PERTHAME et Panagiotis E SOUGANIDIS. « Scalar conservation laws with rough (stochastic) fluxes : the spatially dependent case ». In : *Stochastic Partial Differential Equations : Analysis and Computations* 2.4 (2014), p. 517–538 (cf. p. 65, 245).

Bibliographie

- [LPT94a] Pierre-Louis LIONS, Benoît PERTHAME et Eitan TADMOR. « Kinetic formulation of the isentropic gas dynamics and p-systems ». In : *Communications in mathematical physics* 163.2 (1994), p. 415–431 (cf. p. 246).
- [LPT94b] P-L LIONS, Benoît PERTHAME et Eitan TADMOR. « A kinetic formulation of multidimensional scalar conservation laws and related equations ». In : *Journal of the American Mathematical Society* 7.1 (1994), p. 169–191 (cf. p. 24, 68, 246).
- [MP03] Charalambos MAKRIDAKIS et Benoît PERTHAME. « Sharp CFL, discrete kinetic formulation, and entropic schemes for scalar conservation laws ». In : *SIAM journal on numerical analysis* 41.3 (2003), p. 1032–1051 (cf. p. 7, 55, 246, 253, 289, 290, 292).
- [Mar12] Sébastien MARTIN. *Modélisation et analyse mathématique de problèmes issus de la mécanique des fluides : applications à la tribologie et aux sciences du vivant*. 2012. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00765580v2/document> (cf. p. 15).
- [McD71] PW McDONALD. « The computation of transonic flow through two-dimensional gas turbine cascades ». In : *ASME 1971 International Gas Turbine Conference and Products Show*. American Society of Mechanical Engineers. 1971, V001T01A089–V001T01A089 (cf. p. 41).
- [Mét88] Michel MÉTIVIER. *Stochastic partial differential equations in infinite dimensional spaces*. Scuola normale superiore, Classe di scienze, 1988 (cf. p. 209).
- [MSZ13] Kamel MOHAMED, Mohammed SEAID et Mostafa ZAHRI. « A finite volume method for scalar conservation laws with stochastic time-space dependent flux functions ». In : *Journal of Computational and Applied Mathematics* 237.1 (2013), p. 614–632 (cf. p. 65, 245).
- [Ni81] R-H NI. « A multiple grid scheme for solving the Euler equations ». In : *5th Computational Fluid Dynamics Conference*. 1981, p. 257–264 (cf. p. 41).
- [Ond10] Martin ONDREJÁT. « Stochastic nonlinear wave equations in local Sobolev spaces ». In : *Electronic Journal of Probability* 15 (2010), p. 1041–1091 (cf. p. 93).
- [Ouv04] Jean-Yves OUVRARD. *Probabilités. Tome II, master-agrégation*. Cassini, 2004 (cf. p. 7).
- [Par] Etienne PARDOUX. *Intégration et Probabilités*. URL : <https://old.i2m.univ-amu.fr/~pardoux/M1proba2015.pdf> (cf. p. 7, 138).
- [Pat80] SV PATANKAR. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. McGraw Hill, 1980 (cf. p. 41).

Bibliographie

- [Per98] Benoît PERTHAME. « Uniqueness and error estimates in first order quasilinear conservation laws via the kinetic entropy defect measure ». In : *Journal de mathématiques pures et appliquées* 77.10 (1998), p. 1055–1064 (cf. p. 246).
- [Per02] Benoît PERTHAME. *Kinetic formulation of conservation laws*. T. 21. Oxford University Press, 2002 (cf. p. 7, 24, 70, 92, 149, 156, 193, 246, 287, 290, 367).
- [Pes96] Goran PESKIR. « On the exponential Orlicz norms of stopped Brownian motion ». In : *Studia Math* 117.3 (1996), p. 253–273 (cf. p. 229).
- [PR07] Claudia PRÉVÔT et Michael RÖCKNER. *A concise course on stochastic partial differential equations*. T. 1905. Springer, 2007 (cf. p. 8, 122, 187, 191, 224, 368).
- [Rev97] Daniel REVUZ. *Probabilités*. Hermann, 1997 (cf. p. 7, 123).
- [RY13] Daniel REVUZ et Marc YOR. *Continuous martingales and Brownian motion*. T. 293. Springer Science & Business Media, 2013 (cf. p. 8, 66, 83, 84, 108, 113, 190, 220).
- [RI73] Arthur W RIZZI et Mamoru INOUE. « Time-split finite-volume method for three-dimensional blunt-body flow ». In : *AIAA journal* 11.11 (1973), p. 1478–1485 (cf. p. 41).
- [Rud75] Walter RUDIN. *Analyse réelle et complexe*. Masson, 1975 (cf. p. 327).
- [SP14] René L SCHILLING et Lothar PARTZSCH. *Brownian motion : an introduction to stochastic processes*. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2014 (cf. p. 282).
- [Tad84] Eitan TADMOR. « Numerical viscosity and the entropy condition for conservative difference schemes ». In : *Mathematics of Computation* 43.168 (1984), p. 369–381 (cf. p. 59).
- [Ujj40] Guy Vallet UJJWAL KOLEY Ananta K Majee. « A finite difference scheme for conservation laws driven by Levy noise ». In : 2016 (arXiv preprint arXiv :1604.07840) (cf. p. 65, 245).
- [Val94] Michel VALDIER. *A course on Young measures*. 1994. URL : <http://rendiconti.dmi.units.it/volumi/26s/09.pdf> (cf. p. 192, 194).
- [VW09] Guy VALLET et Petra WITTBOLD. « On a stochastic first-order hyperbolic equation in a bounded domain ». In : *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics* 12.04 (2009), p. 613–651 (cf. p. 65, 245).

Bibliographie

- [Vil94] J-P VILA. « Convergence and error estimates in finite volume schemes for general multidimensional scalar conservation laws. I. Explicite monotone schemes ». In : *RAIRO-Modélisation mathématique et analyse numérique* 28.3 (1994), p. 267–295 (cf. p. 50).
- [Vov11] Julien VOVELLE. 2011. URL : <http://math.univ-lyon1.fr/~vovelle/coursM2Rennes.html> (cf. p. 7, 15, 41).
- [Wei+00] E WEINAN, K KHANIN, A MAZEL et Y SINAI. « Invariant measure for Burgers equation with stochastic forcing ». In : *Annals of Mathematics-Second Series* 151.3 (2000), p. 877–960 (cf. p. 27, 29, 65, 245).
- [Wil03] Michel WILLEM. *principes d'analyse fonctionnelle*. Cassini, 2003 (cf. p. 7, 171).
- [Yos80] Kôsaku YOSIDA. « Functional analysis, volume 123 of grundlehren der mathematischen wissenschaften [fundamental principles of mathematical sciences] ». In : *Springer-Verlag, Berlin* 56 (1980), p. 100 (cf. p. 66).