



HAL
open science

Structures affines complexes sur les surfaces de Riemann

Selim Ghazouani

► **To cite this version:**

Selim Ghazouani. Structures affines complexes sur les surfaces de Riemann. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paris sciences et lettres, 2017. Français. NNT : 2017PSLEE022 . tel-01661290

HAL Id: tel-01661290

<https://theses.hal.science/tel-01661290>

Submitted on 11 Dec 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT
de l'Université de recherche
Paris Sciences Lettres –
PSL Research University

préparée à
l'École normale supérieure

Structures affines complexes sur les surfaces de Riemann

Complex affine structures on Riemann surfaces

par Selim Ghazouani

École doctorale n°386
Spécialité: Mathématiques
Soutenue le 29.05.2017

Composition du Jury :

M John Parker
University of Durham
Rapporteur

Mme Ursula Hamenstädt
Universität Bonn
Rapporteure

M Pascal Hubert
Université d'Aix-Marseille
Rapporteur

M Bertrand Deroin
CNRS-Université de Cergy-Pontoise
Directeur de thèse

M Frank Loray
CNRS-Université de Rennes
Membre du Jury

Mme Fanny Kassel
CNRS-IHES
Membre du Jury

M Olivier Biquard
École normale supérieure
Président du jury

Remerciements

Il est de bon ton de remercier son directeur/sa directrice de thèse dès la première ligne de ses remerciements. Se plier à cet usage me permet malheureusement de n'exprimer qu'une infime partie de la gratitude que j'éprouve envers Bertrand tant son implication, sa générosité et sa bienveillance à mon égard durant cette thèse ont été grands. Je n'ai jamais su compter les heures qu'il a passé, dès le premier jour du stage de Licence effectué sous sa direction jusqu'aux derniers moments de ma thèse à m'abreuver de jolis théorèmes, de possibles sujets de thèse, d'idées de preuves et de problèmes ouverts à n'en plus finir et ce malgré son emploi du temps des plus chargés. Je ne peux que souhaiter aux futurs jeunes thésards le bonheur de faire une thèse sous la direction de Bertrand.

Ensuite, je ne saurais sous-estimer l'importance qu'ont eu Bénédicte et Zaïna dans le bon déroulement de cette thèse. Leur redoutable efficacité, leur patience bienveillante et leur infinie gentillesse ont fini par mettre en valeur mes modestes talents administratifs.

Je remercie chaleureusement Pascal Hubert qui a accepté la tâche ingrate de rapporter cette thèse. La bienveillance spontanée qu'il montre à l'endroit des jeunes qui viennent le solliciter est pour moi une grande source d'admiration. I am extremely grateful to John Parker for accepting the ungrateful task of being a referee to my thesis. A conversation with him at a conference in Michigan back in 2014 has been the starting point of an intense year of work that was to lead to what I consider my most achieved piece of work. I am equally thankful to Ursula Hamenstädt for undertaking this task and I feel particularly honoured by her presence in this jury.

Je suis aussi très reconnaissant à l'égard de Frank Loray, Fanny Kassel et Olivier Biquard pour avoir accepté de participer au jury de cette thèse.

Je tiens à remercier ici les mathématiciens auprès de qui j'ai tant appris durant cette thèse. En premier lieu, Maxime Bourrigan qui a accompagné mes premiers pas dans le monde de la recherche. De ses TDs de surfaces de Riemann à Lyon (qui ne sont certainement pas étranger à mon orientation mathématique) au millier de questions, souvent stupides, que je venais lui poser dans son bureau durant ses trois

années au DMA en passant par les livres empruntés à sa formidable bibliothèque, il a partagé sans compter sa grande culture mathématique et sa gentillesse.

Ensuite, mon co-auteur Luc Pirio. En plus des mathématiques passionnantes sur lesquels nous avons eu la chance de travailler ensemble, il m'a beaucoup appris sur la rigueur dans la rédaction (bien qu'il pense probablement que j'ai été un assez mauvais élève de ce point de vue). Je lui suis très reconnaissant d'avoir eu la patience d'écrire deux articles avec moi.

Enfin, je tiens à exprimer ma gratitude au père Tholozan pour sa grande gentillesse, son amitié, les diners mondains avec chemise et bien sûr, pour toutes les mathématiques qu'il partage au quotidien. Et j'ai aussi une pensée pour Julien Marché, Gilles Courtois, Jean-Marc Schlenker, Maxime Wolff qui ont chacun, d'une manière ou d'une autre eu une importance dans ma découverte de la recherche mathématique.

Un grand merci à mes collègues des toits Diego, Omid, Zoé, Laurent, Lara et Olivier pour les pauses cafés politiques enflammées ; à mes amis doctorants (ou docteurs d'ailleurs) Valentin, Père César, Louis, Nicolas MB, Hsueh-Yung, Nicolina, Maylis, Léo, Lorenzo, Bac, Carlos, Boulanger et Eduard. Je me dois d'ajouter une mention spéciale pour mon coloc râleur professionnel et malgré tout ami Jérémy et aussi au Père Toulisse qui arrive, depuis Los Angeles, à me divertir de ses plaisanteries les plus raffinées. Je m'excuse auprès des personnes que j'ai oublié de mentionner.

Pour finir, je voudrais remercier ma famille, qui m'a toujours soutenu dans mes aventures mathématiques. J'ai une pensée émue pour mes grands-parents, dont la gentillesse et la bienveillance ont toujours été pour moi des modèles. Ils sont pour beaucoup dans la personne que je suis devenue.

Enfin, je ne saurais trouver les mots pour remercier celle qui partage quotidiennement mes joies et mes peines. Tu as redonné à ma vie la couleur qui lui manquait.

Table des matières

0.1	Structures géométriques sur les surfaces.	7
0.1.1	Structures hyperboliques et leur espace de modules.	7
0.1.2	Structures projectives complexes.	8
0.1.3	Structures avec points de branchements.	10
0.1.4	Groupe modulaire et variétés de caractères.	11
0.2	Structures affines branchées.	13
0.2.1	Holonomie	14
0.2.2	Variété des caractères affines.	15
0.2.3	Action du groupe modulaire et groupe de Torelli.	16
0.2.4	Holonomie des structures affines branchées.	17
0.3	Métriques plates sur les surfaces.	17
0.3.1	Métriques plates à singularité sur la sphères, d'après Thurston.	18
0.3.2	Feuilletages isoholonomiques de Veech.	19
0.3.3	Métriques plates à singularités sur le tore.	21
0.3.4	Lien avec les fonctions hypergéométriques.	22
0.4	Surfaces de dilatation.	25
0.4.1	Surfaces de translation et échanges d'intervalles.	25
0.4.2	Géométrie des surfaces de dilatation.	26
0.4.3	Aspects dynamiques.	28
1	Structures affines branchées.	32
1.1	Premiers exemples et définitions.	32
1.1.1	Des chirurgies.	33
1.1.2	Développante et holonomie.	34
1.1.3	Structures affines sur le tore.	35
1.1.4	Nombre de points de branchements d'une structure affine.	35
1.2	Variété de caractères et action du groupe modulaire.	37
1.2.1	Variété de caractères.	37
1.2.2	Action du groupe modulaire.	39
1.2.3	La représentation symplectique et le groupe de Torelli.	39
1.2.4	Représentation de Chueshev du groupe de Torelli.	40
1.2.5	Volume des représentations euclidiennes.	41

1.2.6	Action sur les parties linéaires et théorème de Ratner. . . .	42
1.2.7	Image de la représentation de Chueshev.	48
1.2.8	Résultats sur l'action de $\text{Mod}(\Sigma)$ sur $\chi(\Gamma, \text{Aff}(\mathbb{C}))$	60
1.3	Holonomie des structures affines.	62
1.3.1	L'argument d'Erhermann-Thurston.	62
1.3.2	Le théorème de Haupt.	63
1.3.3	Représentations abéliennes.	64
1.3.4	Représentations strictement affines.	65
1.3.5	Représentations euclidiennes.	65
1.4	Perspectives.	68
2	Feuilletages de Veech et espaces des modules de tores plats.	70
2.1	Le théorème de Troyanov et le feuilletage de Veech.	70
2.1.1	Surfaces plates et théorème d'uniformisation de Troyanov.	70
2.1.2	Propriétés élémentaires des surfaces plates.	71
2.1.3	Le feuilletage isoholonomique de Veech.	73
2.1.4	Paramétrisations linéaires des \mathcal{F}	74
2.1.5	Forme volume de Veech sur $\mathcal{M}_{g,n}$	80
2.2	Complex hyperbolic structures on certain algebraic leaves.	81
2.2.1	Geometry of flat surfaces	81
2.2.2	Characteristic functions.	81
2.2.3	Surgeries	90
2.2.4	The metric completion	104
2.2.5	Finiteness of the volume of \mathcal{F}	115
2.2.6	The metric completion is a cone-manifold	120
2.2.7	Listing the \mathcal{F} 's and their codimension 1 strata	123
2.2.8	The 'discrete holonomy' problem.	127
2.3	Perspectives.	131
2.3.1	On the question of lattices in $\text{PU}(1, n)$	131
2.3.2	On the volume of $\mathcal{M}_{g,n}(\theta)$	131
2.3.3	On other pseudo-Riemannian structures.	132
3	Surfaces de dilatation et leur groupe de Veech.	133
3.1	Surfaces de dilatation.	133
3.1.1	Feuilletages transversalement affines.	134
3.1.2	Échanges d'intervalles affines.	136
3.1.3	Structures de dilatation sur le tore.	136
3.1.4	Géométrie des surfaces de dilatation.	137
3.1.5	L'action de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ sur l'espace des modules de surfaces de dilatations.	141
3.2	Groupe de Veech des surfaces affines.	141
3.2.1	Groupe de Veech.	141

3.2.2	Les surfaces de Hopf.	143
3.2.3	Le théorème de structure	144
3.3	Perspectives et problèmes ouverts.	146
4	Cascades in the dynamics of affine interval exchange transformations.	148
4.1	Affine surfaces.	152
4.1.1	Affine surfaces.	152
4.1.2	Foliations and saddle connections.	152
4.1.3	Cylinders.	153
4.1.4	Affine interval exchange transformations.	154
4.1.5	The Veech group of an affine surface.	154
4.1.6	The 'Disco' surface.	154
4.1.7	About the Veech group of Σ	155
4.1.8	A word about the directional foliations of Σ	157
4.2	The Veech group of Σ	157
4.2.1	The Veech group acting on the set of directional foliations .	157
4.2.2	The subgroup Γ	158
4.2.3	The action of the group Γ on \mathbb{H}	159
4.2.4	The limit set and the discontinuity set.	159
4.2.5	The action on the discontinuity set and the fundamental interval	160
4.3	Generic directions and Rauzy induction.	165
4.3.1	Reduction to an AIET	165
4.3.2	Rauzy-Veech induction	166
4.3.3	Directions with attractive closed leaf	169
4.3.4	AIET with infinite Rauzy-Veech induction	172
4.4	The global picture.	173
4.5	On the Veech group of Σ	176
4.5.1	Thurston's theorem on multi-twists.	177
4.5.2	Topological type of elements of the Veech group of Σ	178
A	Les représentations de Magnus et de Chueshev.	180
A.1	Homologie du revêtement abélien de Σ	180
A.2	La représentation de Magnus du groupe de Torelli.	181
A.3	La représentation de Chueshev du groupe de Torelli.	181
B	Complex hyperbolic geometry.	182
C	Cone-manifolds	186

Introduction.

Les surfaces topologiques et les structures géométriques qu'elles portent occupent une place majeure dans la géométrie moderne dont le point de départ est probablement à dater des découvertes, aux alentours de la moitié du XIX^{ème} siècle, de la géométrie hyperbolique d'une part et parallèlement des surfaces de Riemann.

Ces dernières, de part ce qu'elles sont le carrefour naturel auquel se rencontrent la topologie des surfaces, l'analyse complexe, la géométrie hyperbolique et la géométrie algébrique, ont été l'objet d'un très grand intérêt de la part des mathématiciens de l'époque, dont le point culminant est probablement la démonstration du *théorème d'uniformisation* par Poincaré et Koebe en 1907 (on pourra consulter [dSG10] pour un aperçu historique de cette période fascinante). Plus précisément, les surfaces de Riemann apparaissent comme les bons ensembles de définition des fonctions spéciales issues de l'analyse complexe (comme par exemples les solutions d'équations différentielles linéaires) ou alors comme la structure conforme sous-jacente à une métrique hyperbolique ou encore comme le lieu des zéros d'un polynôme à deux variables complexes.

Le début de la deuxième moitié du XX^{ème} siècle voit le développement de plusieurs thématiques. On citera l'étude des espaces des modules de surface de Riemann, les travaux de Hopf sur le flot géodésique des surfaces hyperboliques et la classification des difféomorphismes des surfaces par Thurston ([Thu97]). Le développement de la géométrie hyperbolique en dimension 3 via la conjecture de géométrisation (voir [Thu82]) va mettre en lumière des liens forts avec la géométrie des surfaces. En particulier, la démonstration du théorème d'hyperbolisation des variétés fibrant sur le cercle fait émerger la notion de variété quasi-Fuchsienne, elle même intimement lié aux structures projectives complexes sur les surfaces. Ces dernières vont être au centre de travaux majeurs du début des années 90 à aujourd'hui, on citera en particulier le théorème de réalisation des holonomies non-élémentaires dû à Gallo, Kapovich et Marden ([GKM00]).

Parallèlement, l'étude des systèmes dynamiques unidimensionnels que sont les *échanges d'intervalles linéaires* et des *billards polygonaux*, à travers les flots de

renormalisation sur les espaces de modules, fournit une application très spectaculaire de la théorie des surfaces de Riemann. Parmi ses grandes réussites, on peut citer les travaux de Veech et Masur ([Vee82, Mas82]) des années 80 prédisant l'unique ergodicité génériques des systèmes dynamiques en question et, plus récemment, la classification par Eskin, Mirzakhani et Mohammadi de la fermeture des orbites de l'action de $SL(2, \mathbb{R})$ sur les espaces de modules de surfaces de translation (voir [EMM15]).

0.1 Structures géométriques sur les surfaces.

0.1.1 Structures hyperboliques et leur espace de modules.

On dit qu'une surface Σ de genre $g \geq 2$ est munie d'une *structure hyperbolique* si elle peut-être munie d'un atlas à valeurs dans \mathbb{H} dont les changements de cartes sont des éléments de $PSL(2, \mathbb{R})$ le groupe des isométries positives de $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ le demi-plan supérieur muni de la métrique de Poincaré $\frac{dz^2}{\Im(z)^2}$. Une telle structure est équivalente à la donnée d'une métrique riemannienne à courbure constante -1 sur Σ et d'après le théorème de Cartan-Hadamard, une telle structure se réalise toujours comme un quotient

$$\mathbb{H}/\Gamma$$

où Γ est un sous-groupe de $PSL(2, \mathbb{R})$ agissant proprement et librement sur \mathbb{H} tel que \mathbb{H}/Γ est homéomorphe à Σ . La donnée d'une structure hyperbolique est donc en fait équivalente à la donnée d'une représentation

$$\rho : \pi_1 \Sigma \longrightarrow PSL(2, \mathbb{R})$$

fidèle et discrète et deux telles représentations ρ et ρ' sont équivalentes si et seulement si il existe un élément de $f \in \text{Aut}(\pi_1 \Sigma)$ tel que $\rho \circ f$ et ρ' sont conjuguées.

D'un certain point de vue, les structures hyperboliques sont assez simples car toute l'information géométrique qu'une telle structure recèle est encodée dans un objet algébrique, son holonomie. Un autre aspect important est que l'espace de déformation de telles structures admet une description assez plaisante.

L'*espace des modules* des structures hyperboliques s'identifie donc au quotient d'un espace de représentations par l'action d'un groupe discret. Plus précisément c'est le quotient de l'ensemble des représentations *fidèles et discrètes* de $\pi_1 \Sigma$ dans $PSL(2, \mathbb{R})$ à conjugaison près

$$\mathcal{T} = \text{Hom}_{fd}(\pi_1 \Sigma, PSL(2, \mathbb{R})) / PSL(2, \mathbb{R})$$

par l'action de $\text{Mod}(\Sigma) = \text{Out}(\pi_1 \Sigma)$ le groupe modulaire de Σ qui est l'ensemble des automorphismes extérieurs de $\pi_1 \Sigma$. Ce quotient noté \mathcal{M} est l'espace de mo-

dules des structures hyperboliques. Il est possible de montrer que \mathcal{T} est isomorphe à \mathbb{R}^{6g-6} et que l'action $\text{Out}(\pi_1\Sigma)$ sur \mathcal{T} est propre. Le quotient

$$\mathcal{M} = \mathcal{T}/\text{Mod}(\Sigma)$$

est donc un orbifold.

0.1.2 Structures projectives complexes.

Les structures projectives complexes sont celles qui sont modélées sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ avec comme groupe de transformations le groupe des applications projectives $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$. Autrement dit, une structure projective complexe est un atlas sur Σ à valeurs dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ dont les changements de cartes sont la restriction d'éléments de $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$. Les faits suivants permettent d'illustrer la richesse de cette famille.

- Les structures projectives contiennent les structures hyperboliques, car $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ et $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) \subset \text{PGL}(2, \mathbb{C})$.
- Il existe des sous-groupes de $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ agissant proprement, librement et cocompactement sur un ouvert de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ essentiellement différents des sous-groupes de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$.
- Toutes les structures projectives ne sont pas le quotient d'un ouvert de l'espace modèle $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ par un sous-groupe de $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ agissant proprement et librement sur un tel ouvert.
- Presque (et nous précisons ça dans la suite) toute représentation est l'holonomie d'une structure projective complexe.
- L'invariant **holonomie** n'est pas classifiant.

Chirurgies Des structures projectives complexes non triviales s'obtiennent aisément par l'intermédiaire d'opérations géométriques appelées chirurgies. Un exemple simple est le suivant : le quotient d'un secteur angulaire de sommet 0 inclut dans $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ par une dilatation $z \mapsto \lambda z$ (avec λ réel positif différent de 1) est muni d'une structure hyperbolique et par conséquent projective. Cette chirurgie s'appelle le *greffage* (ou *grafting* en anglais).

Ce quotient est un cylindre à bord, dont les composantes de bord sont *projectivement* (mais pas *hyperboliquement*) équivalentes à une géodésique fermée simple dans une surface hyperbolique. Si on prend n'importe quelle surface qu'on coupe le long d'une géodésique fermée simple, on peut insérer le cylindre décrit ci-dessus à la place de la géodésique et la nouvelle surface est munie d'une structure projective qui n'est certainement pas hyperbolique.

Si de plus on prend le secteur angulaire qui définit le cylindre égal à 2π , la chirurgie décrite ci-dessus ne modifie pas l'holonomie. Cette remarque relativement simple crée des familles de surfaces projective non triviales et fourni de plus

un exemple de surfaces dont l'holonomie $\rho : \pi_1 \Sigma \longrightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \subset \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ est *fuchsienne* (i.e. fidèle et discrète à valeurs dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$) qui n'est pas une surface hyperbolique.

Géométrie hyperbolique et groupes quasi-fuchsien. La géométrie hyperbolique de dimension 3 fournit aussi des exemples intéressants de surfaces projectives. Le groupe d'isométries (positives) de \mathbb{H}^3 l'espace hyperbolique de dimension 3 est égal à $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ et son bord à l'infini est conformément équivalent à \mathbb{CP}^1 , et son action sur $\partial\mathbb{H}^3 \simeq \mathbb{CP}^1$ est l'action projective standard.

Soit $\Gamma \subset \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ un sous-groupe discret. Si x est un point quelconque de \mathbb{H}^3 , on définit $\Lambda(\Gamma)$ comme l'ensemble des points d'accumulations de $\Gamma \cdot x$ dans $\mathbb{H}^3 \cup \partial\mathbb{H}^3$. Cet ensemble fermé ne dépend pas du choix de x et comme Γ est discret, $\Lambda(x) \subset \partial\mathbb{H}^3$. L'action de Γ sur $\Omega(\Gamma) = \mathbb{CP}^1 \setminus \Lambda$ est propre (et libre si Γ est sans torsion). Le théorème de finitude d'Ahlfors affirme le fait suivant :

Théorème 1 (Ahlfors [Ahl64]). *Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ de présentation finie. Alors l'ensemble $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ à un nombre fini de composantes connexes, chacune étant une surface compacte avec un nombre fini de trous.*

Les composantes connexes d'un tel ensemble sont alors munies de structures projectives naturelles dont l'holonomie est un sous-groupe de Γ . Cela indique une manière générale pour construire des structures projectives complexes intéressantes. Nous l'illustrons de ce pas. Une représentation $\rho : \pi_1 \Sigma \longrightarrow \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ fidèle d'image discrète est dite *quasi-Fuchsienne* si son ensemble limite est un *quasi-cercle* c'est à dire l'image de S^1 dans \mathbb{CP}^1 par une application quasi-conforme.

Théorème 2 (Bers). *L'ensemble des représentations quasi-fuchsienne est isomorphe à deux copies de l'espace de Teichmüller \mathcal{T} .*

L'isomorphisme en question est facile à expliciter : l'ensemble limite étant un quasi-cercle, il découpe \mathbb{CP}^1 en deux ouverts simplement connexe Ω^+ et Ω^- sur lesquels $\rho(\pi_1 \Sigma)$ agit proprement et librement et les quotients $\Omega^+/\rho(\pi_1 \Sigma)$ et $\Omega^-/\rho(\pi_1 \Sigma)$ sont deux surfaces de Riemann qui fournissent la paramétrisation. Cela fournit des structures projectives dont les holonomies sont des déformations des représentations fuchsienues provenant du plongement trivial de l'ensemble des structures hyperboliques dans l'ensemble des structures projectives complexes.

Holonomie des structures projectives complexes On poursuit ce court survol de la théorie des structures projectives complexes en évoquant le problème de l'holonomie. Il est naturel de se demander quel est l'obstruction à ce qu'une représentation $\rho : \pi_1 \Sigma \longrightarrow \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ se réalise comme l'holonomie d'une structure projective. Il y a trois obstructions (assez faciles à mettre en évidence) :

- $\rho(\Sigma)$ ne doit pas être à valeurs dans le groupe des matrices triangulaires supérieures ;
- $\rho(\Sigma)$ ne doit pas être conjugué à un sous-groupe de $SU(2)$;
- ρ doit se relever à $SL(2, \mathbb{C})$.

Un des théorèmes majeurs de la théorie, dû à Gallo, Kapovich et Marden est que ces trois obstructions sont les seules.

Théorème 3 (Gallo-Kapovich-Marden, [GKM00]). *Soit $\rho : \pi_1 \Sigma \rightarrow PGL(2, \mathbb{C})$ une représentation non élémentaire qui se relève à $SL(2, \mathbb{C})$. Il existe alors une structure projective complexe sur Σ dont l'holonomie est ρ .*

Lien entre les structures hyperboliques et les structures projectives complexes. Comme l'action de $PGL(2, \mathbb{C})$ se fait par biholomorphismes, une structure projective complexe induit une structure complexe sur Σ . Par le théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann, une telle structure complexe est en fait équivalente à une structure hyperbolique. On note $\mathcal{P}(\Sigma)$ l'ensemble des structures projectives complexes marquées sur Σ . On a défini une projection :

$$\pi : \mathcal{P}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{T}(\Sigma).$$

La fibre d'une telle application peut-être explicitée. Soit $\text{dev} : \mathbb{H} \simeq \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathbb{C}$ la développante d'une structure projective complexe sur Σ , c'est une application holomorphe pour la structure complexe induite équivariante par rapport à la représentation d'holonomie, qui est à valeurs dans $PGL(2, \mathbb{C})$. La *dérivée schwartzienne* de dev , qui mesure le défaut de dev à être une homographie, définit une différentielle quadratique sur la courbe complexe induite. Réciproquement, la donnée d'une différentielle quadratique sur une surface de Riemann définit, par "intégration schwartzienne" une structure projective sur Σ . L'espace $\mathcal{P}(\Sigma)$ s'identifie donc au fibré vectoriel holomorphe des différentielles quadratiques au dessus de l'espace de Teichmüller.

Il n'est pas clair que la compréhension de l'invariant holonomie s'accouple bien avec cette description. Un théorème de Baba-Gupta (voir [BG15]) assure que pour n'importe quelle représentation ρ , l'ensemble des éléments de $\mathcal{T}(\Sigma)$ ayant une structure projective complexe compatible d'holonomie ρ est dense dans $\mathcal{T}(\Sigma)$.

0.1.3 Structures avec points de branchements.

Une manière d'ajouter de la richesse à la théorie est d'autoriser à nos structures d'avoir des *points de branchement*, c'est à dire des points où la structure est équivalente à un revêtement ramifié de l'espace modèle. Dans la définition formelle de structure géométrique, il faut demander non pas que la développante soit un difféomorphisme local, mais un revêtement ramifié d'ordre fini en tout point. Une

surface muni d'une structure hyperbolique ou projective complexe *branchée* a alors un nombre fini de points spéciaux qui sont la projection des points où la développante ramifie, et ce sont ces points qu'on appelle *points de branchement*.

L'existence de tels points permet une plus grande flexibilité : par exemple n'importe quelle représentation $\rho : \pi_1 \Sigma \longrightarrow \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ se réalise comme l'holonomie d'une structure projective complexe branchée. Dans le cas des structures hyperboliques branchées, l'holonomie peut-être à image non-discrète, ou non-injective.

0.1.4 Groupe modulaire et variétés de caractères.

Nous terminons cette section sur les structures géométriques par une discussion sur les différents espaces de modules qui apparaissent et leur interaction avec les applications d'holonomie.

Lorsqu'on traite de structures géométriques, la chose la plus naturelle à faire est de considérer sur une surface donnée l'ensemble des structures qui sont isomorphes, c'est à dire qui diffèrent d'un difféomorphisme. Par exemple

$$\mathcal{M}(\Sigma) = \{\text{structures hyperboliques sur } \Sigma\} / \mathrm{Diff}^+(\Sigma).$$

C'est très certainement le bon espace à considérer pour comprendre "la géométrie" des structures hyperboliques : deux points dans $\mathcal{M}(\Sigma)$ sont distingués **uniquement** par leurs propriétés géométriques. Un désavantage cependant est qu'il n'est pas possible de définir à proprement parler l'**holonomie** d'un point de $\mathcal{M}(\Sigma)$. Le problème est simple, deux représentants effectifs d'une certaine classe, qui diffèrent donc de l'action d'un certain difféomorphisme f , peuvent définir des holonomies différentes. En effet, si f n'agit pas trivialement sur $\pi_1 \Sigma$, les deux holonomies diffèrent de la composition de f^* (ou $(f^*)^{-1}$) à la source.

Le bon espace à considérer pour bien définir l'holonomie est l'espace de *Teichmüller* des structures hyperboliques, c'est à dire

$$\mathcal{T}(\Sigma) = \{\text{structures hyperboliques sur } \Sigma\} / \mathrm{Diff}_0^+(\Sigma)$$

où $\mathrm{Diff}_0^+(\Sigma)$ est le sous-groupe de $\mathrm{Diff}^+(\Sigma)$ des difféomorphismes isotopes à l'identité. Dans $\mathcal{T}(\Sigma)$, un point est la donnée d'une structure géométrique et d'une "manière topologique de l'appliquer sur Σ ". Les surfaces sont des objets qui comportent énormément de symétries topologiques, et l'espace de Teichmüller est une sorte de doublon de l'espace de module avec des copies de chaque point de $\mathcal{M}(\Sigma)$ pour chaque symétrie topologique de Σ . Sur l'espace de Teichmüller, l'application holonomie hol est bien définie. De manière générale, si $\mathcal{T}(\Sigma)$ est *un espace de Teichmüller* de structures géométriques (c'est à dire un couple structure géométrique = marquage topologique) dont le groupe de transformations est un groupe de Lie G , l'holonomie est un morphisme

$$\text{hol} : \mathcal{T}(\Sigma) \longrightarrow \chi(\pi_1\Sigma, G)$$

où $\chi(\pi_1\Sigma, G)$ est grossièrement l'ensemble des représentations $\pi_1\Sigma \longrightarrow G$ à conjugaison près. On passe sur les légères difficultés techniques liées à la définition de $\chi(\pi_1\Sigma, G)$, il faut juste être un peu prudent et enlever les représentations "dégénérées" qui empêcheraient $\chi(\pi_1\Sigma, G)$ d'être une variété. On appelle $\chi(\pi_1\Sigma, G)$ la *variété de caractères*. Un argument d'Ehressman popularisé par Thurston assure que si notre géométrie satisfait des hypothèses de rigidité raisonnable (et qui seront toujours satisfaites dans les exemples qu'on considère), hol est un difféomorphisme local.

On n'a cependant pas complètement abandonné l'espoir de donner du sens à l'holonomie d'une structure géométrique sans marquage. Ce qu'on entend par là, c'est qu'il est naturel de vouloir comprendre comment l'holonomie se transforme sous l'action d'un "changement de base topologique". L'*espace de module* de nos structures est le quotient de l'espace de Teichmüller par l'action du *groupe modulaire*

$$\text{Mod}(\Sigma) = \text{Diff}^+(\Sigma)/\text{Diff}_0^+(\Sigma).$$

Ce dernier agit aussi naturellement sur $\chi(\pi_1\Sigma, G)$ par précomposition sur les représentations via les automorphismes de $\pi_1\Sigma$ que les difféomorphismes de Σ induisent. Ces deux actions sont directement liées par l'application holonomie au sens la fonction hol est *équivariante* par rapport à ces actions c'est-à-dire que si φ est un élément de Σ ,

$$\forall S \in \mathcal{T}(\Sigma), \text{hol}(\varphi \cdot S) = \varphi \cdot \text{hol}(S).$$

Cette remarque (entre autres) motive l'étude de l'action du groupe modulaire sur les variétés de caractères en général.

Action du groupe modulaire sur les $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ -caractères. Dans le cas de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$, on peut expliciter facilement la construction de $\chi(\pi_1\Sigma, \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$. C'est le quotient de

$$\text{Hom}_{\text{irr}}(\pi_1\Sigma, \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$$

le sous ensemble de $\text{Hom}(\pi_1\Sigma, \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ fait de représentation irréductibles (ou *non-élémentaire*) par l'action des conjugaisons. Le travail fondateur contenu dans la thèse Goldman classe les composantes connexes de $\chi(\pi_1\Sigma, \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$. Á toute représentation

$$\rho : \pi_1\Sigma \longrightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$$

on peut associer un entier appelé sa *classe d'Euler* qui est la classe d'Euler induite par l'unique fibré plat en $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$ au-dessus de Σ de monodromie ρ . Cette classe d'Euler est invariante par conjugaison, continue et définit donc une application

$$\text{eu} : \chi(\pi_1\Sigma, \text{PSL}(2, \mathbb{R})) \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Elle est de plus, au vu de la nature topologique de sa définition, invariante par l'action de $\text{Mod}(\Sigma)$.

Théorème 4 (Goldman, [Gol80, Gol88]). — *Les composantes connexes de $\chi(\pi_1\Sigma, \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ sont exactement les niveaux $\text{eu}^{-1}(k)$ pour $|k| \leq 2g - 2$.*

— *Les composantes connexes $\text{eu}^{-1}(2g - 2)$ et $\text{eu}^{-1}(2 - 2g)$ correspondent à l'espace de Teichmüller (chacune correspond à une orientation de Σ).*

L'action de $\text{Mod}(\Sigma)$ sur les composantes dites *de classe d'Euler maximale* est bien comprise. Ces dernières s'identifiant à l'espace de Teichmüller, l'action de $\text{Mod}(\Sigma)$ est conjuguée à l'action sur l'espace de Teichmüller donc le quotient est un orbifold. L'action est donc propre.

Il est conjecturé que l'action restreinte aux autres composantes connexes est ergodique. Un théorème récent de Maxime Wolff et Julien Marché démontre cette conjecture en genre 2 :

Théorème 5 (Marché-Wolff, [MWa, MWb]). *On suppose que Σ est de genre 2. Alors*

- *l'action de $\text{Mod}(\Sigma)$ sur les composantes connexes de $\chi(\pi_1\Sigma, \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ de niveau $\text{eu}^{-1}(1)$ et $\text{eu}^{-1}(-1)$ est ergodique ;*
- *l'action de $\text{Mod}(\Sigma)$ sur la composante connexe de $\chi(\pi_1\Sigma, \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ de niveau $\text{eu}^{-1}(0)$ a deux ouverts invariants dont l'union est de mesure pleine, et les actions de $\text{Mod}(\Sigma)$ restreintes à ces ouverts sont ergodiques.*

Un corollaire remarquable de ce théorème est qu'en genre 2, presque toute représentation $\rho : \pi_1\Sigma \longrightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ est l'holonomie d'une structure hyperbolique branchée. En effet l'ensemble des représentation "*géométriques*" est un ouvert invariant par l'action de $\text{Mod}(\Sigma)$ et l'ergodicité sur les composantes non-maximale donne donc le résultat.

0.2 Structures affines branchées.

L'objet du premier chapitre de cette thèse est l'étude partielle des structures *affines branchées*, qui sont un cas particulier de structures projectives branchées. Elles sont par définition les structures dont l'espace modèle est le plan complexe \mathbb{C} et dont le groupe de transformation est le groupe affine complexe $\text{Aff}(\mathbb{C})$. Une fait très plaisant est qu'il est très facile de construire de telles structures. Un polygone plongé dans \mathbb{C} dont on recolle les côtés deux à deux à l'aide d'une application affine donne gratuitement une structure affine sur une surface compacte.

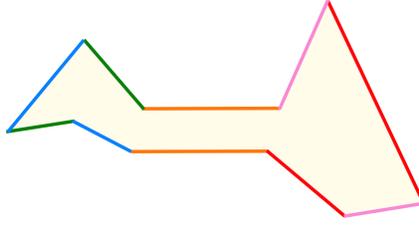


FIGURE 1 – Un modèle polygonal pour une surface de genre 2.

Les deux points de branchement dans la surface construite à partir du polygone de la figure 1 sont la projection sur la surface des sommets du polygone. Chacun de ces points a un angle égal à 4π et est donc un point de branchement d'ordre 1.

Bien qu'étant un sous cas de la géométrie projective complexe branchée, les structures affines semblent avoir une saveur plus euclidiennes, plus "plates". Cette intuition est en partie confirmée par l'existence d'une "formule de Gauss-Bonnet" pour les surfaces affines. On rappelle que si p est un point de branchement, son ordre $o(p)$ est le degré du revêtement ramifié en p qui lui donne sa structure affine.

Proposition 1 (Formule de Gauss-Bonnet). *Soit Σ une surface affine branchée de genre g et \mathcal{S} l'ensemble de ses points de branchements. Alors*

$$\sum_{p \in \mathcal{S}} o(p) = 2g - 2$$

On distingue deux autres moyen efficaces de produire des structures :

- les exponentielles de structures de structures de translations ;
- les chirurgies, comme nous l'avons vu dans le cas des structures projectives.

La géométrie des structures affines complexe est encore assez mal comprise. Il serait intéressant de savoir s'il existe des décompositions naturelles des surfaces affines basées sur l'hybridation à l'aide de chirurgies simples de blocs de petit genre (des tores à bord géodésique, tores fermés par exemple).

0.2.1 Holonomie

L'holonomie des structures affines est un premier invariant à regarder. En particulier, il est intéressant de regarder l'action du groupe modulaire sur la variété des caractères pour savoir si il existe des invariants de structures affines définis à travers l'holonomie, comme la classe d'Euler dans le cas des structures hyperboliques branchées. Et tout simplement de se poser la question suivante :

Question 1. *Quelles sont les représentations $\rho : \pi_1 \Sigma \longrightarrow \text{Aff}(\mathbb{C})$ qui se réalisent comme l'holonomie d'une structure affine branchée ?*

Nous allons voir que cette question est liée à la question plus algébrique-dynamique suivante :

Question 2. *Quelles sont les propriétés de l'action du groupe modulaire sur $\chi(\pi_1\Sigma, \text{Aff}(\mathbb{C}))$ la variété des caractères affines ?*

Nous pensons qu'expliquer brièvement le cas des structures de translation donne un éclairage intéressant sur ce lien. L'holonomie d'une surface de translation est un morphisme

$$p : H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Ce morphisme de "période" est un élément du $H^1(\Sigma, \mathbb{C})$. C'est un joli théorème de Otto Haupt publié en 1920 qui indique quels éléments de $H^1(\Sigma, \mathbb{C})$ se réalisent comme l'holonomie d'une surface de translation.

Théorème 6 (Haupt, [Hau20]). *Soit $p \in H^1(\Sigma, \mathbb{C})$. Cet élément peut être réalisé comme l'holonomie d'une surface de translation si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *le volume de p est positif ;*
2. *si l'image de p est un réseau Λ dans \mathbb{C} , alors $\text{vol}(p) > \text{vol}(\mathbb{C}/\Lambda)$.*

M. Kapovich a donné dans la note non-publiée [Kap] une preuve de ce théorème remarquable basée sur la description de l'action du groupe modulaire sur l'espace des périodes. Cette dernière se réduit à l'action du réseau $\text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ de $G = \text{Sp}(2g, \mathbb{R})$ sur un quotient homogène G/H et les théorèmes de Ratner permettent de décrire complètement les fermés invariants par cette action. L'ensemble des $p \in H^1(\Sigma, \mathbb{C})$ "non-géométriques" étant fermé par l'argument d'Ehresmann, Kapovich peut conclure.

0.2.2 Variété des caractères affines.

On explique rapidement la construction et quelques propriétés de la variété des caractères affines. Pour que la construction marche bien, il faut exclure les représentations dont l'image est abélienne. On pose donc

$$\text{Hom}^*(\pi_1\Sigma, \text{Aff}(\mathbb{C})) = \{\text{morphisme } \rho : \pi_1\Sigma \longrightarrow \text{Aff}(\mathbb{C}) \mid \text{Im}(\rho) \text{ n'est pas abélien}\}$$

et on définit la variété des caractères affines comme

$$\chi(\pi_1\Sigma, \text{Aff}(\mathbb{C})) = \text{Hom}^*(\pi_1\Sigma, \text{Aff}(\mathbb{C}))/\text{Aff}(\mathbb{C})$$

où $\text{Aff}(\mathbb{C})$ agit par conjugaison au but. Si pour une représentation ρ et un élément $\gamma \in \pi_1\Sigma$ on écrit

$$\rho(\gamma) = z \mapsto \alpha(\gamma)z + \lambda(\gamma)$$

où α est un morphisme de groupe $\pi_1\Sigma \rightarrow \mathbb{C}^*$ et λ vérifie la relation de cocycle suivante

$$\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \pi_1\Sigma, \lambda(\gamma_1 \cdot \gamma_2) = \lambda(\gamma_1) + \alpha(\gamma_1)\lambda(\gamma_2).$$

On déduit en facilement que la variété des caractères affines a une structure de fibré de base $H^1(\Sigma, \mathbb{C}^*) \setminus \{1\}$ dont la fibre au-dessus d'un point $\alpha \in H^1(\Sigma, \mathbb{C}^*) \setminus \{1\}$ est le projectifié du groupe d'homologie tordue $H_\alpha^1(\pi_1\Sigma, \mathbb{C})$, ce dernier étant de dimension $2g - 2$.

0.2.3 Action du groupe modulaire et groupe de Torelli.

Une des principales réalisations de cette thèse est la description de l'action du groupe modulaire sur la variété des caractères affines. On prouve entre autres les résultats suivants.

Théorème 7. *L'action de $\text{Mod}(\Sigma)$ sur $x \in \chi(\pi_1\Sigma, \text{Aff}(\mathbb{C}))$ est ergodique par rapport à la mesure de Lebesgue.*

On arrive aussi à une description de type "Ratner" des adhérences d'orbites. Plus précisément, à part quelques exceptions, l'adhérence d'un point de $\chi(\pi_1\Sigma, \text{Aff}(\mathbb{C}))$ par l'action de $\text{Mod}(\Sigma)$ est une sous-variété.

Théorème 8. *Soit $x \in \chi(\pi_1\Sigma, \text{Aff}(\mathbb{C}))$ tel que l'image de la partie linéaire de χ n'est pas à valeurs dans un groupe fini de racines de l'unité d'ordre 2, 3, 4 ou 6. Alors l'adhérence de $\text{Mod}(\Sigma) \cdot x$ est une sous-variété analytique de $\chi(\pi_1\Sigma, \text{Aff}(\mathbb{C}))$.*

Grâce à la structure de fibré de $\chi(\pi_1\Sigma, \text{Aff}(\mathbb{C}))$, il nous est possible de "dévisser" l'action du groupe modulaire. Ce dernier agit en préservant la fibration et induit donc une action sur la base, qui s'identifie facilement à l'action de $\text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ sur $(\mathbb{C}^*)^{2g}$. On dispose de tout les outils pour comprendre cette action via la théorie de Ratner.

La partie intéressante est certainement de comprendre ce qui se passe dans les fibres. Le sous-groupe de Torelli $\mathcal{I}(\Sigma) < \text{Mod}(\Sigma)$ est le plus grand sous-groupe agissant trivialement sur la base. Son action dans chaque fibre est projective et fournit pour chaque α une représentation (appelée *représentation de Chueshev*)

$$\tau_\alpha : \mathcal{I}(\Sigma) \longrightarrow \text{PGL}(H_\alpha^1(\pi_1\Sigma, \mathbb{C})) \simeq \text{PGL}(2g - 2, \mathbb{C}).$$

Notre contribution est de fournir une description de l'adhérence de l'image de τ_α en fonction de α . De cette description nous déduisons les théorèmes présentés ci-dessus.

0.2.4 Holonomie des structures affines branchées.

La compréhension de l'action de $\text{Mod}(\Sigma)$ fournit un outil puissant pour l'étude de la question de l'holonomie. En effet, l'ensemble des représentations non-géométriques est un fermé de la variété des caractères, invariant par l'action du groupe modulaire. Une première remarque est que, cette action étant ergodique et l'ensemble des structures affines étant non-vide, l'ensemble des représentations géométriques est un ouvert de mesure pleine de $\chi(\pi_1\Sigma, \text{Aff}(\mathbb{C}))$.

Ce corollaire, plaisant d'un point de vue conceptuel, est loin de caractériser les obstructions à être l'holonomie d'une structure affine branchée. Par ailleurs, il existe une obstruction facile à mettre en évidence. Si Σ est muni d'une structure affine branchée *euclidienne*, c'est à dont l'holonomie ρ est à valeurs dans le groupe des isométries de \mathbb{C} pour la métrique euclidienne, son volume s'exprime uniquement en fonction de ρ . Plus précisément, la fonction volume est une forme hermitienne sur $H_\alpha^1(\pi_1\Sigma, \mathbb{C})$ non dégénérée de signature $(g-1, g-1)$. Le volume d'une structure euclidienne étant strictement positif, le volume d'une représentation euclidienne géométrique doit lui aussi être positif.

Remarque 1. *La différence entre une représentation de volume positif ou négatif, c'est une affaire d'orientation. En effet un élément du groupe modulaire non-orienté envoie une représentation de volume positif sur une représentation de volume négatif et réciproquement. Finalement la vraie différence de nature se fait entre les représentations de volume nul ou non nul.*

En utilisant la description de l'action de $\text{Mod}(\Sigma)$ qu'on a obtenu, ainsi que quelques constructions géométriques pour régler les cas hors de portée via l'action du groupe modulaire, on arrive au théorème suivant

Théorème 9. *Soit $\rho : \pi_1\Sigma \rightarrow \text{Aff}(\mathbb{C})$ une représentation non-abélienne.*

- *Si ρ est non-euclidienne alors il existe une structure affine branchée dont elle est l'holonomie.*
- *Si ρ est euclidienne, il existe une structure affine branchée dont elle est l'holonomie si et seulement si le volume de ρ est strictement positif.*

0.3 Métriques plates sur les surfaces.

Le cas particulier des structures affines euclidiennes revêt un intérêt certain. Les travaux fondateurs de Thurston et Veech ouvrent un certain nombre de directions de recherche que nous décrivons, et nous expliquons les résultats originaux obtenus en collaboration avec Luc Pirio sur le cas des métriques à singularités sur les tores dans [GPb].

0.3.1 Métriques plates à singularité sur la sphères, d'après Thurston.

Dans l'article fondateur *Shapes of polyhedra and triangulations of the sphere*, Thurston explique comment munir l'espace de module des structures conformes sur la sphère S^2 avec n points marqués, $\mathcal{M}_{0,n}$, de structures hyperboliques complexes naturelles. En fixant une donnée $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ satisfaisant

$$\sum_{i=1}^n (2\pi - \theta_i) = 4\pi$$

$\mathcal{M}_{0,n}$ s'identifie naturellement à l'espace des métriques plates à n singularités coniques sur S^2 dont les angles coniques sont respectivement $\theta_1, \dots, \theta_n$. On notera qu'on fait cette identification en notant cet espace $\mathcal{M}_{0,n}(\theta)$.

Polygones et structures hyperbolique complexes La remarque cruciale de Thurston est que $\mathcal{M}_{0,n}(\theta)$ s'identifie localement à un espace de polygones dont les angles que forment des côtés consécutifs sont contraints. En désignant par des variables complexes z_1, \dots, z_k les affixes des côtés d'un tel polygone on observe que :

- les contraintes sur les $(z_i)_{i \leq k}$ sont des équations linéaires dont les coefficients ne dépendent que de θ ;
- la fonction qui à $(z_i)_{i \leq k}$ associe l'aire du polygone est une forme hermitienne de signature $(1, n-3)$ restreinte au sous-espace dans lequel vivent les paramètres $(z_i)_{i \leq k}$.

Un polygone et son image par une rotation/dilatation de \mathbb{C} sont identifiés dans $\mathcal{M}_{0,n}(\theta)$; ainsi les paramétrisations *polygonales* décrite ci-dessus munissent $\mathcal{M}_{0,n}(\theta)$ d'une *structure hyperbolique complexe*, c'est-à-dire modelée sur l'espace hyperbolique complexe $\mathbb{C}\mathbb{H}^{n-3}$ à travers son groupe d'isométrie $\text{PU}(1, n-3)$.

Complétions métriques et construction d'orbifolds. Les structures hyperboliques de Thurston sur $\mathcal{M}_{0,n}(\theta)$ ne sont pas complètes, et le défaut de complétude peut-être complètement caractérisée par les collisions entre points singuliers. Au niveau des polygones, cela correspond tout simplement à la dégénérescence d'une suite de polygones vers un polygone avec un nombre strictement inférieur de côtés.

Thurston explique qu'on peut compléter récursivement $\mathcal{M}_{0,n}(\theta)$ en ajoutant des *strates* qui sont des espaces de modules de la forme $\mathcal{M}_{0,n-1}(\theta')$ où θ' est une nouvelle donnée d'angle correspondant à une collision.

La structure hyperbolique complexe s'étend près des strates en une structure de *cone-manifold*. Grossièrement la strate est une sous-variété hyperbolique complexe de dimension complexe $n-1$ et transversalement à cette strate la métrique

est un cône hyperbolique d'un certain angle α . Si α est en plus un diviseur de 2π , on retrouve la structure locale plus familière d'*orbifold*.

Les angles α apparaissant s'expriment facilement en fonction des angles intervenant dans la collision associée, il est donc facile de déterminer les valeurs θ pour lesquelles la complétion métrique de $\mathcal{M}_{0,n}(\theta)$ est un orbifold. Plus précisément, Thurston montre le théorème suivant :

Théorème 10 (Thurston, [Thu88]). *Supposons que θ soit tel que pour tout $i \neq j$*

- *si $\theta_i \neq \theta_j$ alors $(\theta_i + \theta_j) - 2\pi$ est un diviseur de 2π ;*
- *si $\theta_i = \theta_j$ alors $\theta_i - 2\pi$ est un diviseur de 2π .*

Alors la complétion métrique de $\mathcal{M}_{0,n}(\theta)$ est un orbifold hyperbolique complexe de volume fini, et est isométrique à $\mathbb{C}\mathbb{H}^{n-3}/\Gamma$ où $\Gamma < \text{PU}(1, n-3)$ est un réseau.

Le critère du théorème est vérifié par 94 données d'angles θ pour des valeurs de n comprise entre 5 et 12. Parmi les 94 réseaux correspondants, 15 sont des réseaux non-arithmétiques de $\text{PU}(1, 2)$ et un seul est un réseau non-arithmétique de $\text{PU}(1, 3)$.

0.3.2 Feuilletages isoholonomiques de Veech.

Il est naturel de vouloir généraliser ce qu'a fait Thurston au genre plus grand. C'est ce qu'a fait Veech dans son remarquable article *Flat surfaces* ([Vee93]). La construction est cependant plus complexe car la topologie plus riche des surfaces de genre $g \geq 1$ apporte une richesse supplémentaire. On peut résumer cette difficulté de la manière suivante :

si $g \geq 1$, l'holonomie linéaire d'une métrique plate à singularité sur une surface de genre g n'est pas uniquement déterminée par la valeurs des angles aux points singuliers.

Construction des feuilletages de Veech. Un théorème de Troyanov (voir [Tro86]) assure que l'espace des métriques plates à singularités coniques sur une surface de genre g avec un type singulier $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)^1$ fixé s'identifie naturellement à l'espace de module $\mathcal{M}_{g,n}$ et on note $\mathcal{M}_{g,n}(\theta)$ cet espace de métriques plates.

De la même manière l'espace des structures plates marquées avec type singulier fixé θ s'identifie à l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}_{g,n}$ et on le note $\mathcal{T}_{g,n}(\theta)$. C'est le revêtement orbifold de $\mathcal{M}_{g,n}(\theta)$ et son groupe fondamental est le groupe modulaire $\text{Mod}(\Sigma_{g,n})$, où $\Sigma_{g,n}$ est une surface topologique modèle de genre g avec n points marqués.

1. Il faut bien sûr que θ vérifie la condition de Gauss-Bonnet $\sum_i 2\pi - \theta_i = 2\pi(2 - 2g)$.

On considère $(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g)$ une famille de courbe évitant les points marqués et qui forme une base symplectique de l'homologie de $\Sigma_{g,n}$. Si on fixe une métrique plate à singularités sur $\Sigma_{g,n}$, le transport parallèle le long des courbes de cette base définit un $2g$ -uplet

$$(\rho(a_1), \rho(b_1), \dots, \rho(a_g), \rho(b_g)) \in \mathbb{U}^{2g}$$

qui caractérise complètement le transport parallèle de cette métrique. Cette remarque permet de définir une application

$$\text{Lin} : \mathcal{T}_{g,n}(\theta) \longrightarrow \mathbb{U}^{2g}.$$

Veech montre dans l'article fondateur *Flat surfaces* que si les θ_i ne sont pas tous des multiples entiers de 2π , cette application est partout une submersion. Ainsi les lignes de niveau de Lin définissent-elles un feuilletage de $\mathcal{T}_{g,n}(\theta)$ invariant par l'action de $\text{Mod}(\Sigma_{g,n})$. Ce feuilletage passe donc au quotient et définit ce qu'on appelle le *feuilletage isoholonomique de Veech* de l'espace des modules $\mathcal{M}_{g,n}(\theta) \simeq \mathcal{M}_{g,n}$.

Structures géométriques sur les feuilles du feuilletage de Veech. Les feuilles du feuilletage de Veech sont des espaces de modules de métriques plates à *holonomie linéaire fixée*. Lorsqu'on identifie localement des espaces de métriques plates à des espaces de polygones (comme on l'explique dans le paragraphe 0.3.1), cette hypothèse se traduit par le fait que les paramètres z_i décrivant les feuilles forment un sous-espace vectoriel de l'espace des polygones.

La forme d'aire restreinte à ce sous-espace vectoriel est une forme hermitienne (c'est assez facile à montrer quand on sait exprimer l'aire d'un polygone en fonction des nombres complexes définis par ses côtés). Veech montre dans *Flat surfaces* que

- cette forme hermitienne est non dégénérée si aucun des θ_i n'est un multiple entier de 2π ;
- la signature (p, q) de cette forme ne dépend que de θ .

Les feuilles des feuilletages de Veech sont donc toutes munies d'une $(\mathbb{C}\mathbb{H}^{p-1,q}, \text{PU}(p, q))$ -structure. L'étude de ces structures demeure à ce jour largement ouverte. Le cas bien connu est le cas $g = 0$, où le feuilletage est trivial et n'a qu'une feuille. Si de plus tous les θ_i sont strictement inférieurs à 2π , la signature de la forme d'aire est $(1, n)$ et la structure de la feuille (qui est égale à tout $\mathcal{M}_{0,n}(\theta)$) est hyperbolique complexe. On retrouve ici le cas traité par Thurston.

Forme volume de Veech. Les feuilles des feuilletages de Veech sont naturellement munies de la forme volume induite par sa $(\mathbb{C}\mathbb{H}^{p-1,q}, \text{PU}(p, q))$ -structure.

D'autre part, le feuilletage porte une structure symplectique transverse, héritée de ce que le feuilletage est localement défini par une fonction à valeur dans un certain groupe de cohomologie, qui lui porte une structure symplectique. Elle induit ainsi une forme volume transverse au feuilletage.

Le couplage des formes volumes des feuilles avec la structure symplectique transverse définit une forme volume sur $\mathcal{M}_{g,n}$ qu'on appelle la *forme volume de Veech* et qu'on note Ω_θ . Toujours dans l'article *Flat surfaces*, Veech conjecture que

Conjecture 1. *Soit θ tel qu'aucun des θ_i n'est un multiple de 2π . Le volume de $\mathcal{M}_{g,n}$ pour la forme volume de Veech est fini, i.e.*

$$\int_{\mathcal{M}_{g,n}} \Omega_\theta < +\infty.$$

Nous prouvons dans [GPa] cette conjecture dans quelques cas particuliers, à l'aide de méthodes qui semblent difficilement généralisables. La conjecture est largement ouverte dans le cas général. En particulier dans les cas où $g = 0$ et θ est tel que la forme hermitienne d'aire n'induit par une structure hyperbolique complexe, le calcul du volume n'est pas connu.

0.3.3 Métriques plates à singularités sur le tore.

Une des principales contributions originales contenues dans cette thèse est l'étude de la structure géométrique décrite ci-dessus de certaines feuilles dans le cas des tores ($g = 1$) avec une donnée d'angles satisfaisant les conditions suivantes :

- $2\pi < \theta_1 < 4\pi$;
- pour tout $i \neq 1$, $\theta_i < 2\pi$;
- pour tout i , $\theta_i \in 2\pi\mathbb{Q}$.

Le choix d'étudier ce cas est motivé par le fait que c'est le seul cas où la structure homogène de la feuille est hyperbolique complexe, autre que celui des sphères déjà étudié par Thurston. On suppose dans la suite que ces hypothèses sont satisfaites par θ .

On note \mathcal{F}_ρ la feuille de $\mathcal{M}_{1,n}(\theta)$ correspondant à la donnée d'holonomie $\rho \in H^1(\Sigma_{1,n}, \mathbb{U})^2$. Dans ce cas \mathcal{F}_ρ est munie d'une structure hyperbolique complexe de dimension $n - 1$. On montre le théorème suivant

Théorème 11. *Supposons que $\text{Im}(\rho)$ est un sous-groupe fini de \mathbb{U} . Alors*

2. Pour être parfaitement rigoureux, il faudrait dire que \mathcal{F}_ρ est la **projection** dans $\mathcal{M}_{1,n}(\theta)$ de la feuille de $\mathcal{T}_{1,n}(\theta)$ correspondant à l'holonomie ρ .

- la complétion métrique de \mathcal{F}_ρ a une structure analytique stratifiée dont les strates sont des revêtements d'ordre fini de certaines feuilles $\mathcal{F}_{\rho'}$ du feuilletage de Veech pour $g' = 1$ et $n' \leq n - 1$ ou $g' = 0$ et $n' \leq n + 1$;
- cette complétion métrique notée $\overline{\mathcal{F}_\rho}$ est un cone-manifold hyperbolique complexe de volume fini ;
- les angles coniques autour des strates de codimension 1 de $\overline{\mathcal{F}_\rho}$ peuvent être calculé à l'aide de chirurgies appropriées.

L'énoncé de ce théorème est assez lourd. La première partie pourrait être résumée de la manière suivante : une suite de tores plats qui ne converge pas dans \mathcal{F}_ρ dégénère géométriquement et converge vers un espace métrique qui est :

- soit un tore avec un point conique en moins, qui est le résultat d'une collision entre deux points coniques ;
- soit une sphère avec un point en plus, qui est le résultat du pincement géométrique d'une courbe fermée simple sur le tore.

On comprend à l'aide d'opérations géométriques simples (qu'on appelle *chirurgies*) comment s'obtiennent ces espaces métriques dégénérés par rapport aux éléments de \mathcal{F}_ρ . Ces opérations géométriques nous permettent aussi de décrire la structure hyperbolique complexe près de ces strates, comme l'indiquent les deux derniers points du théorème.

On extrait de cette analyse une construction originale de réseaux arithmétiques du groupe d'isométrie de l'espace hyperbolique complexe.

Corollaire 1. *Pour un nombre fini de \mathcal{F}_ρ , l'image de l'holonomie de la structure hyperbolique complexe est un réseau arithmétique de $\text{PU}(1, n)$.*

Cela nous amène naturellement à poser la question suivante, complètement ouverte à ce jour :

Question 3. *Pour quels \mathcal{F}_ρ le groupe d'holonomie de sa structure hyperbolique complexe est un réseau de $\text{PU}(1, n)$? En particulier, existe-t-il \mathcal{F}_ρ tel que ce groupe est un réseau non-arithmétique ?*

0.3.4 Lien avec les fonctions hypergéométriques.

Les travaux de Thurston évoqués dans le paragraphe 0.3.1 peuvent être pensés comme une interprétation géométrique des travaux fondateurs de Deligne et Mostow ([DM86]) sur la monodromie de certaines équations différentielles particulières, les équations *hypergéométriques*. Nous expliquons ci-après la correspondance entre les deux points de vue.

L'équation hypergéométrique.

L'équation différentielle suivante

$$x(x-1)F''(x) + (c - (a+b+1)x)F'(x) - abF(x) = 0 \quad (1)$$

est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 définie sur $X = \mathbb{CP}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$. Via la continuation analytique d'une base de solutions F_1 et F_2 à un point $p \in X$, on définit classiquement la représentation d'holonomie de l'équation

$$\rho : \pi_1(X, p) \longrightarrow \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$$

et le rapport $\frac{F_1}{F_2}$ des continuations analytiques de F_1 et F_2 définit une application

$$f : \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{CP}^1$$

qui est équivariante par rapport à la projection de ρ sur $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$.

Il est possible de vérifier (péniblement !) que la fonction

$$F(x) = \int_0^1 z^{b-1}(z-1)^{c-b-1}(z-x)^{-a} dz$$

est solution de 1. La forme multivaluée

$$\omega_x = z^{b-1}(z-1)^{c-b-1}(z-x)^{-a} dz$$

s'avère être la différentielle de la développante de l'unique métrique plate à quatre singularités coniques sur \mathbb{CP}^1

1. dont la structure complexe induite est $\mathbb{CP}^1 \setminus \{0, 1, x, \infty\}$;
2. dont les angles coniques sont $2\pi b$, $2\pi(c-b)$, $2\pi(1-a)$ et $2\pi(1-c)$ en 0 , 1 , x et ∞ respectivement.

Cela nous dit en substance que si on regarde un espace de module de métriques plates sur S^2 à quatre singularités dont les angles sont fixés, qu'on regarde la valeur d'un segment entre singularités développé dans \mathbb{C} et qu'on fait varier la métrique plate, on obtient un germe de solution à l'équation hypergéométrique. En regardant un autre segment bien choisi entre les éléments d'un autre couple de points conique, on obtient une base de solutions de l'équation hypergéométrique.

Un travail analytique approfondi montre que l'image de f est dans \mathbb{H} et celle de ρ dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ dès lors que $0 < b < 1$, $0 < c - b < 1$ et $-2 < a < -1$ et on retrouve par là la structure hyperbolique de Thurston.

Fonctions elliptiques hypergéométriques.

Nous avons, en parallèle de [GPb], développé une approche analytique aux espaces de modules de tores plats évoqués dans la section précédente qui fait apparaître la développante de la structure hyperbolique complexe de Veech comme une fonction vérifiant une équation différentielle linéaire d'ordre 2. On appelle de telles fonctions spéciales *fonction elliptiques hypergéométriques*.

L'approche que nous développons se trouve être particulièrement fructueuse pour le cas des métriques sur le tore avec *deux* points coniques. On fixe un paramètre $\alpha \in [0, 1[$ qui est tel que l'ensemble des tores plats que nous considérons à deux points coniques d'angles respectifs $\theta = 2\pi(1 - \alpha)$ et $4\pi - \theta = 2\pi(1 + \alpha)$. Dans ce cas, l'espace des modules des structures conformes sur le tore avec deux points marqués $\mathcal{M}_{1,2} = \mathcal{M}(\theta)$ peut-être paramétré (de manière non-injective) par

$$\{(\tau, z) \mid \tau \in \mathbb{H} \text{ et } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}\}^3.$$

À un élément (τ, z) correspond une unique métrique plate à singularité $(\theta, 4\pi - \theta)$. Notre approche repose sur le fait qu'on peut écrire explicitement cette métrique ω en terme des fonctions θ sur $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$

$$\omega(\tau, z) = |e^{2i\pi a_0} \theta(\tau, u)^\alpha \theta(\tau, u - z)^{-\alpha} du|^2$$

où $a_0 = \frac{\Im(\alpha z)}{\Im(\tau)}$. Il est ensuite facile de déduire de cette description les équations du feuilletage de Veech : les feuilles sont données localement par l'équation suivante

$$a_0\tau - \alpha z = a_\infty$$

qui décrit une feuille dont l'holonomie linéaire sur une base symplectique du tore vaut $(e^{2i\pi a_0}, e^{2i\pi a_\infty})$. On obtient en suivant cette approche le théorème suivant :

Théorème 12 (G.-Pirio, [GPa]). — *Le feuilletage de Veech sur $\mathcal{M}_{1,2}$ ne dépend pas de α .*

— *Les feuilles algébriques du feuilletage de Veech sur $\mathcal{M}_{1,2}$ sont indexées par $N \geq 2$ et la feuille d'indice N est conformétement équivalente à*

$$\mathbb{H}/\Gamma_1(N)$$

où $\Gamma_1(N)$ est le groupe modulaire de niveau N .

La structure hyperbolique des feuilles dépend elle de α . On montre que cette dernière est donnée par l'équation différentielle suivante, à la manière de la structure donnée par l'équation hypergéométrique :

3. Cette paramétrisation est en fait une paramétrisation univoque de l'espace de Torelli associé.

$$F'' + (2i\pi \frac{a_0^2}{\alpha})F' + \varphi F = 0 \tag{2}$$

où φ est une certaine fonction holomorphe **explicite** sur \mathbb{H} . Établir cette équation différentielle est un point délicat et crucial de notre travail. Elle nous permet de décrire explicitement les structures hyperbolique de Veech près des cusps des feuilles algébriques. On retrouve par là le théorème 36 dans le cas particulier des tores à deux points coniques, avec en prime une description de la topologie des feuilles \mathcal{F} ainsi qu’une description complète du feuilletage de Veech.

Les outils utilisés pour établir l’équation différentielle 2, à savoir le calcul explicite de la connexion de Gauss-Manin associée à notre espace de module de tores plats, permettent aussi de calculer les matrices de monodromie de la structure hyperbolique à coin des feuilles algébriques.

Nous avons décidé de ne pas consacrer de chapitre dans cette thèse à ce travail, compte tenu de sa taille conséquente et du fait qu’il est un peu en marge du thème de cette thèse du fait de sa nature très analytique. Nous invitons le lecteur intéressé à se référer à l’article [GPa].

0.4 Surfaces de dilatation.

Le dernier aspect des structures affines abordé dans cette thèse est leur aspect dynamique. En se restreignant aux surfaces affines dont l’holonomie linéaire est totalement réelle, on découvre des objets en bien des points semblables aux surfaces de translations, qui en sont d’ailleurs un cas particulier.

0.4.1 Surfaces de translation et échanges d’intervalles.

Une surface de translation est une structure affine branchée dont l’image de l’holonomie est contenue dans le groupe des translations. Ces surfaces sont remarquables car leur structure définit une famille à paramètre de feuilletages mesurés dont la dynamique est très intéressante.

Historiquement, l’intérêt pour ces surfaces vient du fait que les sections de Birkhoff des feuilletages associés sont des *échanges d’intervalles*, des bijections continues par morceaux de $[0, 1]$ qui en restriction à leurs intervalles de continuité sont des translations. Les surfaces de translations sont un pont entre le monde des systèmes dynamiques unidimensionnels que sont les échanges d’intervalles et la théorie de Teichmüller qui fournit des outils d’étude très puissants.

Je pense que deux théorèmes fondateurs du début de cette théorie sont à mettre en relief. Le tout premier, qui est assez élémentaire puisque sa preuve tient en quelques pages et n’utilise que la théorie des fonctions continue, est le suivant

Théorème 13 (Keane, [Kea75]). — (*version échanges d'intervalles*) *Presque tout échange d'intervalle est minimal.*

— (*version surfaces de translations*) *Pour presque toute surface de translation et presque toute direction, le feuilletage directionnel est minimal.*

Ce théorème décrit le comportement topologique d'un échange d'intervalle générique. Un échange d'intervalle préserve la mesure de Lebesgue de $[0, 1]$ et il est naturel pour mieux en comprendre la dynamique de tenter d'en comprendre les mesures invariantes. Le second théorème qu'on présente est un résultat très fort dans cette direction :

Théorème 14 (Masur, [Mas82]). *Presque tout échange d'intervalle est uniquement ergodique par rapport à la mesure de Lebesgue.*

La preuve de ce théorème utilise de manière profonde la connexion entre le monde des échanges d'intervalles et celui des surfaces de translations, et exploite les outils de renormalisation que fournit la théorie de Teichmüller. On peut le qualifier de premier succès d'une longue série dans le développement de cette connexion.

0.4.2 Géométrie des surfaces de dilatation.

Les *surfaces de dilatation* peuvent être pensées comme des généralisations des surfaces de translation. Formellement, une surface de dilatation est une surface munie d'une structure affine branchée dont l'holonomie linéaire est à valeurs dans \mathbb{R}_+^* (le cas translation correspondant à l'holonomie linéaire triviale). On donne ci-après deux exemples de surfaces de dilatation qui nous semblent être une bonne et douce introduction à nos objets.

- *Le tore de Hopf.* Il s'agit du quotient de \mathbb{C}^* par l'action par multiplication par un réel positif $\lambda \neq 1$. Cette surface s'obtient en recollant par dilatation les composantes de bord d'un anneau de \mathbb{C} . Les feuilletages directionnels sont tous les mêmes : ils possèdent deux feuilles fermées, l'une est attractive et l'autre est répulsive.
- *Une surface à deux chambres.* C'est la surface induite par le collage ci-dessous. C'est une surface de genre 2 avec un point de branchement.

Les feuilletages directionnels de la surface à deux chambres sont tous "*simples*" au sens où, à part la direction verticale qui est totalement périodique, ils ont une unique feuille fermée qui attire toutes les autres.

Cylindres. Il nous semble important, pour faire l'analyse de la géométrie des surfaces de dilatations, de dégager la notion de *cylindre affine*. Un tel cylindre est

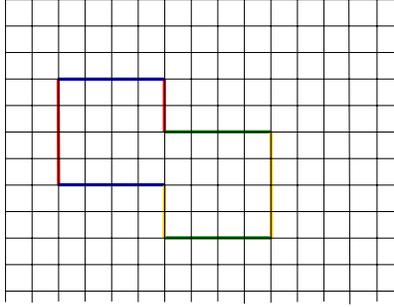


FIGURE 2 – La surface à deux chambres.

le quotient d'un secteur angulaire de \mathbb{C}^* par une dilatation. Un cylindre est caractérisé par son facteur de dilatation $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et son angle $\theta \in \mathbb{R}_+^*$. Nous distinguons cette notion car il est équivalent pour une géodésique d'être fermée ou d'appartenir à un cylindre. On y lit de plus aisément le caractère dynamique *hyperbolique* des feuilletages ayant une feuille fermée dans un cylindre. Nous faisons d'ailleurs la conjecture suivante

Conjecture 2. *Toute surface de dilatation possède un cylindre.*

Travaux de Veech sur les triangulations. Une contribution un peu oubliée de Veech à la géométrie des surfaces affines est l'article [Vee97], complété par les notes non-publiées [Vee08]. Il y prouve (entre autres) qu'une surface de dilatation admet une triangulation totalement géodésique si et seulement si elle ne contient pas de cylindre affine d'angle plus grand que π . Si la réciproque est facile, la construction d'une telle triangulation repose sur une jolie généralisation de la construction des triangulations dites de Delaunay.

Un certain nombre de constructions et de lemmes techniques extraits des travaux sus-mentionnés sont résumés dans la partie 3.1.4.

Groupe de Veech. Á l'instar du cas des surfaces de translations, nous pouvons définir pour toute surface de dilatation Σ son groupe de difféomorphismes affines, c'est à dire qui agissent en coordonnées comme des éléments du groupe affine $\text{Aff}^+(\mathbb{R}^2) = \text{GL}^+(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$. La projection (projective) sur les parties linéaires permet de définir le groupe de Veech de Σ , qui est un sous-groupe de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ (voir 3.2 pour les détails de la construction).

Ce groupe est un outil puissant pour l'étude de la dynamique des feuilletages directionnel en ce qu'il permet d'implémenter des techniques de renormalisation desdits feuilletages. Nous pensons que l'analyse de l'exemple de la surface Disco faite dans le chapitre 4 en est une belle illustration.

Structure des groupes de Veech et surfaces de Hopf. Le groupe de Veech d'une surface de translation est toujours un sous-groupe discret de $SL(2, \mathbb{R})$. Ce n'est pas toujours le cas pour une surface de dilatation. Par exemple, le groupe de Veech d'un tore de Hopf est tout $SL(2, \mathbb{R})$. Il est ainsi naturel de se demander à quoi peut ressembler le groupe de Veech d'une surface de dilatation.

Pour ce faire, nous introduisons une classe de surfaces qui généralise le tore de Hopf et que nous appelons les *surfaces de Hopf*. Ce sont, grossièrement, les surfaces qu'on peut construire en recollant ensemble des cylindres d'angle π . Il est facile de voir que le groupe de Veech d'une surface de Hopf est égal au groupe des matrices triangulaires supérieures. On prouve alors le théorème de structure suivant

Théorème 15 (Duryev-Fougeroc-G., [DFG]). *Soit Σ une surface affine de genre au moins 2.*

- *Si Σ est une surface de Hopf alors $\mathbf{V}(\Sigma)$ est conjugué au sous-groupe des matrices triangulaires supérieures ;*
- *Si Σ n'est pas une surface de Hopf alors $\mathbf{V}(\Sigma)$ est discret.*

0.4.3 Aspects dynamiques.

Feuilletages sur les surfaces d'après Levitt et Liousse. Les feuilletages directionnels des surfaces de dilatations sont des cas particuliers de feuilletages *transversalement affines*. Ces feuilletages ont déjà été partiellement étudiés par Liousse dans l'article [Lio95]. Elle y prouve en particulier qu'un tel feuilletage est génériquement trivial au sens topologique.

Théorème 16 (Liousse, [Lio95]). *Un feuilletage est dit dynamiquement trivial si l' ω -limite de toute feuille est une feuille fermée hyperbolique. L'ensemble des feuilletages dynamiquement triviaux est un ouvert dense de l'ensemble des feuilletages transversalement affines.*

La preuve de ce théorème repose entre autres sur l'étude profonde des feuilletages des surfaces menée par Levitt dans la série d'article [Lev82a, Lev82b, Lev87] qu'il est bon d'avoir en tête au moment d'entamer l'étude des surfaces de dilatation.

Échanges d'intervalles affines Les surfaces de dilatations ont un lien étroit avec les *échanges d'intervalles affines*. En effet, la suspension d'un tel échange d'intervalle est naturellement munie d'une structure de dilatation dont le feuilletage vertical admet cet échange d'intervalle comme section de Birkhoff. Les questions de nature dynamique sur les feuilletages directionnels des surfaces de dilatation sont en quelque sorte duales à l'étude des échanges d'intervalles affines.

Il nous semble que l'étude de la dynamique des échanges d'intervalles affines est à ce jour incomplète. Le théorème de Liousse sur les feuilletages transversalement

affines (doit) naturellement se traduire dans le langage des échanges d'intervalles affines et impliquer que génériquement, un tel échange d'intervalle est dynamiquement trivial. En ce sens, ce théorème nous semble être un analogue du théorème de Keane pour les échanges d'intervalles standards et est un encouragement à se lancer dans une étude systématique de ces objets. D'autant plus que les travaux de Camelier-Gutierrez [CG97], Bressaud-Hubert-Mass [BHM10] et Marmi-Moussa-Yoccoz [MMY10] promettent l'existence de comportements dynamiques riches et variés dans le monde des échanges d'intervalles affines.

Famille à paramètre d'échanges d'intervalles et la surface Discoswag. On présente maintenant les résultats de l'article [BFG]. On s'intéresse à l'échange d'intervalles affine $F : [0, 1[\rightarrow [0, 1[$ défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \text{si } x \in [0, \frac{1}{6}[& \text{ alors } & F(x) = 2x + \frac{1}{6} \\ \text{si } x \in [\frac{1}{6}, \frac{1}{2}[& \text{ alors } & F(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{6}) \\ \text{si } x \in [\frac{1}{2}, \frac{5}{6}[& \text{ alors } & F(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}) + \frac{5}{6} \\ \text{si } x \in [\frac{5}{6}, 1[& \text{ alors } & F(x) = 2x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On vérifie aisément que pour tout $x \in [0, 1[$, $F^2(x) = x$. Son comportement dynamique est très simple. On considère maintenant la famille à un paramètre $(F_t)_{t \in I=[0,1]}$ définie par

$$F_t = F \circ r_t$$

où $r_t : [0, 1[\rightarrow [0, 1[$ est la translation de t modulo 1. L'étude de cette famille faite dans le chapitre 4 nous montre, à travers les théorèmes expliqués ci-après, qu'elle recèle des comportements dynamiques variés.

Théorème 17. *Pour presque tout $t \in I = [0, 1[$ dans un ouvert dense de mesure pleine, F_t est dynamiquement trivial. Plus précisément, il existe $x^+, x^- \in [0, 1[$ périodiques d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ tel que*

- $(F_t^p)'(x^+) < 1$;
- $(F_t^p)'(x^+) > 1$
- pour tout $z \in [0, 1[$ n'étant pas dans l'orbite de x^- , l' ω -limite de z est égale à $\{x, F_t(x), F_t^2(x), \dots, F_t^{p-1}(x)\}$.

Grossièrement, ce théorème veut dire qu'un élément générique de cette famille a un comportement dynamique "simple", il a une orbite périodique qui attire toutes les autres. Un fait remarquable est que cette généricité est à la fois de nature topologique et mesurable. D'une certaine manière, cela renforce le résultat de Lioussé discuté précédemment pour cette famille spécifique.

Un autre aspect remarquable de cette famille est l'existence de beaucoup de paramètres ayant des comportements dynamiques "exceptionnels".

Théorème 18. — Il existe un ensemble de Cantor de mesure nulle $\mathcal{H} \subset I$ tel que pour tout $t \in \mathcal{H}$ on ait la chose suivante

il existe un Cantor $\mathcal{C}_t \subset [0, 1]$ tel que pour tout $x \in [0, 1]$, l' ω -limit pour F_t de x est égale à \mathcal{C}_t .

— Il y a un nombre dénombrable de paramètres $t \in [0, 1[$ pour lesquels F_t est totalement périodique, c'est à dire qu'il existe $p(t) \in \mathbb{N}^*$ tel que $F_t^{p(t)} = \text{Id}$.

L'ensemble des paramètres non décrit par les deux précédents théorèmes forment un ensemble de Cantor $\Lambda \subset I$. Nous sommes pour le moment incapables de décrire la dynamique pour ces paramètres, mais des simulations numériques suggèrent la conjecture suivante :

Conjecture 3. Pour tout paramètre $t \in \Lambda$, F_t est minimal.

Il est naturel d'associer à la famille $(F_t)_{t \in I=[0,1]}$ la surface de dilatation Σ_D obtenue par le collage suivant :

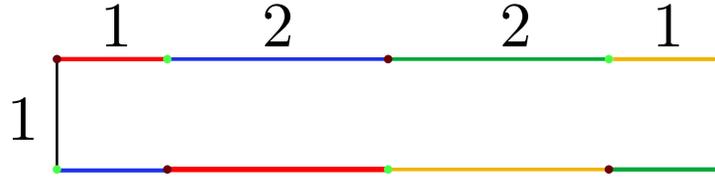


FIGURE 3 – La surface Disco Σ_D .

Le feuilletage directionnel de Σ_D en direction θ admet F_t comme section de Birkhoff, pour $t = \frac{6}{\tan \theta}$. Ils ont en particuliers les mêmes propriétés dynamiques et l'étude de la famille F_t peut donc se réduire à l'étude des feuilletages directionnels de Σ_D . Le principal gain lié à ce changement de point de vue est l'apparition de symétries cachées. En effet, le groupe de Veech de Σ_D est assez gros, et les directions équivalentes via ce sous-groupe de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ ont le même comportement dynamique. Cela nous permet de réduire considérablement le nombre de paramètres θ à étudier.

Ce groupe de Veech $\mathbf{V}(\Sigma_D)$ est discret et contient le groupe

$$\Gamma = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

La projection de Γ sur $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ est un groupe discret de covolume infini. C'est aussi un groupe de Schottky de rang 2 et l'analyse de son action sur \mathbb{RP}^1 , l'ensemble des directions de \mathbb{R}^2 , nous amène aux conclusions suivantes :

- Il y a un ensemble de Cantor $\Lambda_\Gamma \subset \mathbb{RP}^1$ de mesure nulle sur lequel Γ agit de manière minimale. Les directions $\theta \in \Lambda_\Gamma$ sont *conjecturalement* minimales.
- L'action de Γ sur $\Omega_\Gamma = \mathbb{RP}^1 \setminus \Lambda_\Gamma$ est proprement discontinue et le quotient est homéomorphe à un cercle. Cela nous permet d'identifier un petit domaine fondamental $D \subset \mathbb{RP}^1$ pour lequel la compréhension de la dynamique des feuilletages directionnels pour des valeurs de $\theta \in D$ implique la compréhension pour tous les paramètres de Ω_Γ (qui est un ouvert de mesure pleine de \mathbb{RP}^1).

Induction de Rauzy-Veech affine. Un regard bien posé sur la Figure 4.3 nous permet de réduire l'étude des feuilletages de Σ_D en direction $\theta \in D$ à l'étude d'applications contractantes affines par morceaux avec une seule discontinuité. On utilise alors une forme adaptée à notre problème de l'induction de Rauzy-Veech (algorithme au centre de la renormalisation des échanges d'intervalles standards) pour montrer que

- il existe un ensemble de Cantor de paramètres $\theta \in D$ pour lesquels les feuilletages associés s'accroissent sur un Cantor (transversalement) ;
- les autres directions sont dynamiquement triviales.

Chapitre 1

Structures affines branchées.

1.1 Premiers exemples et définitions.

Une géométrie au sens de Klein est la donnée d'une certaine variété modèle X et d'un sous-groupe de difféomorphismes $G < \text{Diff}(X)$; et une variété M portant une (X, G) -structure est un atlas de cartes à valeurs dans X dont les changements de cartes sont à valeurs dans G . Tout les objets de X invariants par G sont alors bien définis sur M .

Par exemple, la géométrie affine complexe est celle induite par le couple $X = \mathbb{C}^n$, $G = \text{Aff}_n(\mathbb{C}) = \text{GL}(n, \mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^n$. Les droites, les plans et autres cercles sont les objets de la géométrie affine. C'est le cas $n = 1$, déjà très riche, qui va concentrer notre attention dans ce chapitre.

Une manière très simple de tenter de construire des structures affines est de considérer des polygones euclidiens (plongés dans le plan complexe \mathbb{C}) et d'en recoller les cotés deux par deux en utilisant des transformations affines. La structure affine de \mathbb{C} s'étend naturellement à la surface construite par de tel recollement, sauf peut-être aux points sur lesquels se projettent les sommets du polygone. Malheureusement, à moins que la surface topologique sous-jacente à un tel recollement soit un tore, la structure affine ne se prolonge pas à ces points spéciaux. Le mieux que l'on puisse faire est d'imposer le *type singulier* de la structure à ces points. De manière générale, un voisinage d'un tel point a une structure de *cone affine* d'angle complexe $\theta = x + iy$ avec $x > 0$. Nous allons dans ce chapitre faire l'hypothèse restrictive que ces angles sont réels et multiples entiers de 2π , ce qui nous amène à la définition ci-dessous. Ce choix sera en partie justifié, et d'autres cas seront traités dans le chapitre 2.

Definition 1 (Structure affine branchée). *Une structure affine sur Σ est la donnée d'un ensemble fini $S \subset \Sigma$ et d'un atlas de cartes (U_i, φ_i) à valeurs dans \mathbb{C} sur $\Sigma \setminus S$ tel que :*

1. les changements de carte $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ sont la restriction d'un élément de $\text{Aff}(\mathbb{C})$ sur chacune des composantes connexes de leurs ensembles de définition ;
2. chaque élément $s \in S$ a un voisinage épointé dont la structure affine définie par l'atlas (U_i, φ_i) est isomorphe à celle définie sur un voisinage de 0 en tirant en arrière le revêtement ramifié $z \mapsto z^k$ pour un certain $k \geq 2$.

Nous illustrons maintenant cette définition par quelques exemples et constructions.

Le tore de Hopf. Les tores de Hopf résultent d'une construction générale, dont le cas qui nous intéresse est le cas unidimensionnel. Si λ est un réel strictement positif, différent de 1, le tore de Hopf T_λ^n est le quotient de $\mathbb{C}^n \setminus \{\vec{0}\}$ par l'action linéaire de l'application linéaire $\lambda \cdot \text{Id}$. La variété quotient est homéomorphe à $S^1 \times S^{2n-1}$ et est munie d'une structure affine naturellement héritée de celle de $\mathbb{C}^n \setminus \{\vec{0}\}$.

Le cas $n = 1$ fournit une structure affine sur le tore $S^1 \times S^1$ à laquelle nous référerons abusivement comme *le tore de Hopf de paramètre λ* .

Un modèle polygonal. Une manière très naturelle de procéder pour construire des structures affines est de recoller les cotés d'un polygone deux à deux à l'aide de transformations affines. Prenons l'exemple du polygone de la Figure 1.1 : il existe une unique transformation affine envoyant un coté d'une certaine couleur sur celui de même couleur. En identifiant à l'aide de ces transformations, on construit une structure affine sur la surface de genre 2.

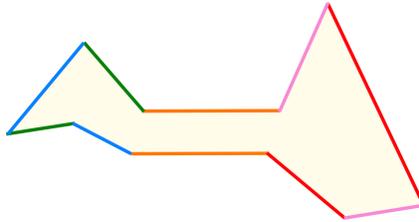


FIGURE 1.1 – Un modèle polygonal pour une surface de genre 2.

1.1.1 Des chirurgies.

On décrit dans cette sous-section des procédures que nous appelons *chirurgies*, qui consistent à découper des surfaces affines le long de segments géodésiques et à les recoller le long de ces segments avec des combinaisons diverses dans le but de construire de nouvelles structures affines.

La somme connexe.

Une droite géodésique (resp. un segment) sur une surface affine est un chemin qui regardé dans une carte affine est une droite (resp. un segment de droite). Soit Σ_1 et Σ_2 deux surfaces affines et soit $a \subset \Sigma_1$ et $b \subset \Sigma_2$ deux segments géodésiques. On coupe Σ_1 le long de a (resp. b) et on obtient une surface Σ'_1 (resp. Σ'_2) avec un bord géodésique par morceau, avec une unique composante de bord $a^+ \cup a^-$ (resp. $b^+ \cup b^-$). La chirurgie consiste à coller a^+ à b^- et b^+ à a^- en respectant la structure affine locale. On obtient ainsi une nouvelle structure affine sur $\Sigma_1 \# \Sigma_2$ avec deux nouveaux points de branchements d'angle 4π .

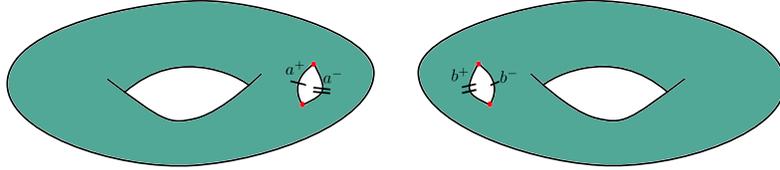


FIGURE 1.2 – La chirurgie "somme connexe".

Bien que nous n'ayons pas encore abordé la notion d'holonomie (voir les sections 1.1.2 et 1.2), nous faisons la remarque suivante.

Remarque 2. *L'holonomie linéaire α d'une telle structure peut être facilement exprimée en fonction de celle de Σ_1 et Σ_2 . Le premier groupe d'homologie $H_1(\Sigma_1 \# \Sigma_2, \mathbb{Z})$ est égal au produit $H_1(\Sigma_1, \mathbb{Z}) \times H_1(\Sigma_2, \mathbb{Z})$ et $\alpha : H_1(\Sigma_1 \# \Sigma_2, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}^*$ est égal au produit $\alpha_1 \times \alpha_2$.*

L'ajout d'une anse.

On présente une seconde chirurgie, similaire à la précédente. Elle consiste à créer une anse supplémentaire sur une surface affine initiale Σ de genre g . Soit a et b deux segments disjoints de Σ . On coupe le long de ces deux segments pour obtenir une nouvelle surface avec deux composantes de bord $a^+ \cup a^-$ et $b^+ \cup b^-$. En recollant a^+ à b^- et a^- à b^+ on obtient une structure affine sur une surface Σ' de genre $g' = g + 1$ avec deux points de branchement d'angle 4π en plus. Remarquons que sur l'anse ajoutée, une courbe est d'holonomie linéaire triviale (celle qui fait le tour de $a^+ \cup a^- = b^+ \cup b^-$).

1.1.2 Développante et holonomie.

N'importe quel carte affine peut être prolongé analytiquement à une sorte de "supercarte" sur le revêtement universel de Σ qui est équivariante par rapport à une représentation de $\Gamma = \pi_1 \Sigma$ dans le groupe affine $\text{Aff}(\mathbb{C})$. Cette remarque nous

permet de donner une définition formelle alternative de ce qu'est une structure affine branchée.

Definition 2. Une structure affine branchée sur une surface de Riemann Σ est la donnée d'une fonction holomorphe non-constante $\text{dev} : \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathbb{C}$ et un morphisme de groupe $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Aff}(\mathbb{C})$ tel dev est ρ -équivariante, i.e. vérifie que pour tout $z \in \tilde{\Sigma}$ et tout $\gamma \in \Gamma$, on a

$$\text{dev}(\gamma \cdot z) = \rho(\gamma)(\text{dev}(z))$$

dev s'appelle la développante de la structure et ρ son morphisme d'holonomie (ou tout simplement holonomie).

Un tel couple développante/holonomie détermine complètement la structure et est unique à l'action d'un élément de $\text{Aff}(\mathbb{C})$ près.

1.1.3 Structures affines sur le tore.

On explique ici rapidement comment classifier les structures affines sur le tore. Les métriques plates sur le tore \mathbb{T} (i.e. les quotients de \mathbb{C} par un réseau $\Lambda = \omega_1\mathbb{Z} \oplus \omega_2\mathbb{Z}$) fournissent une famille de structures affines. Si f est la développante d'une telle structure, l'exponentielle de f définit aussi une structure affine sur \mathbb{T} , qu'on appelle l'exponentielle de la structure plate.

On prouve ci-après qu'une structure affine sur \mathbb{T} est soit une structure plate, soit l'exponentielle d'une structure plate. Soit \mathcal{A} une structure plate sur \mathbb{T} . L'holonomie de cette structure est déterminée par deux applications affines qui commutent.

1. Soit ces deux applications sont des translations et dans ce cas la métrique plate de \mathbb{C} se tirent en arrière sur \mathbb{T} via la développante. La structure \mathcal{A} est donc celle induite par une métrique plate, c'est donc un quotient \mathbb{C}/Λ ;
2. soit ces deux applications sont strictement affine et ont le même point fixe $p \in \mathbb{C}$. Quitte à changer de développante, on peut supposer que $p = 0$. Si f est une telle développante, $\eta = \frac{df}{f}$ définit une forme méromorphe sur \mathbb{T} . Les pôles de η sont en correspondances avec les zéros de f et le résidu en un tel zéro est l'ordre d'annulation de f , en particulier est strictement positif. La formule des résidus implique par ailleurs que la somme de tels résidus doit être nul. La forme η n'a donc pas de pôles, et donc pas de zéros et définit une structure plate donc \mathcal{A} est l'exponentielle.

1.1.4 Nombre de points de branchements d'une structure affine.

Les structures affines branchées ressemblent aux structures plates au sens où elles vérifient un analogue de la formule de Gauss-Bonnet. En effet, si \mathcal{A} est une

structure affine sur Σ , $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ est l'ensemble de ses points de branchement et si $o(s_i)$ est l'ordre de branchement en s_i (c'est à dire que la structure est localement un revêtement ramifié de \mathbb{C} d'ordre $o(s_i) + 1$) alors

$$\sum_{i=1}^n o(s_i) = 2g - 2.$$

Nous connaissons deux preuves essentiellement différentes de ce résultats.

La première consiste à trianguler Σ de telle sorte que les arêtes soient des segments géodésiques et que l'ensemble des points singuliers soit inclu dans l'ensemble des sommets. L'existence d'une telle triangulation n'est pas très difficile à obtenir (il faut juste trouver un atlas affine pour lequel les ouverts de cartes s'intersecte raisonnablement). On citera aussi Veech ([Vee97]) qui généralise la construction des décomposition de Delaunay au cas affine. A partir de la, la formule se réduit à un simple calcul de caractéristique d'Euler.

Il y a aussi une preuve de nature homologique. En effet, on peut penser à une structure affine comme une section du fibré plat en $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ de monodromie l'holonomie de la structure qui

- n'intersecte pas la section à l'infini ;
- qui est transverse au feuilletage induit par le fibré plat à part au dessus des points de S et à ces points l'ordre de tangence est égal à l'ordre de branchement.

La preuve se réduit ensuite à des calculs d'intersections.

1.2 Variété de caractères et action du groupe modulaire.

1.2.1 Variété de caractères.

On définit dans cette section la variété des caractères, qui est à peu de chose près l'espace des représentations de Γ dans $\text{Aff}(\mathbb{C})$ à post-conjugaison près. La petite difficulté vient du fait que le quotient $\text{Hom}(\Gamma, \text{Aff}(\mathbb{C}))/\text{Aff}(\mathbb{C})$ pour l'action naturelle de $\text{Aff}(\mathbb{C})$ par conjugaison (qui est l'espace le plus naturel à regarder) n'est pas très joli. En effet ce quotient n'est pas une variété et n'est même pas séparé. Ce petit problème peut être contourné en analysant un peu plus en détail la structure de $\text{Hom}(\Gamma, \text{Aff}(\mathbb{C}))$ et l'action de $\text{Aff}(\mathbb{C})$.

Rappelons que groupe $\text{Aff}(\mathbb{C})$ est canoniquement isomorphe au produit semi-direct $\mathbb{C}^* \ltimes \mathbb{C}$ où \mathbb{C}^* agit linéairement sur \mathbb{C} . Ainsi n'importe quelle représentation $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Aff}(\mathbb{C})$ est la donnée de deux fonctions Li_ρ and Tr_ρ telle que :

1. $\text{Li}_\rho : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^*$ est un morphisme de groupes ;
2. $\text{Tr}_\rho : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ satisfait la relation de cocycle suivante $\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$,

$$\text{Tr}_\rho(\gamma_1 \cdot \gamma_2) = \text{Tr}_\rho(\gamma_1) + \text{Li}_\rho(\gamma_1)\text{Tr}_\rho(\gamma_2).$$

Comme \mathbb{C}^* est abélien, Li_ρ passe au quotient

$$\text{Li}_\rho : H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}^*$$

car $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ est l'abélianisé de Γ . Li_ρ peut alors être vu comme un élément de $H^1(\Sigma, \mathbb{C}^*) \simeq \text{Hom}(H_1(\Sigma, \mathbb{Z}), \mathbb{C}^*)$.

Soit α un élément de $H^1(\Sigma, \mathbb{C}^*)$. On définit

$$Z_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C}) = \{\lambda : \Gamma \rightarrow \mathbb{C} \mid \forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma, \lambda(\gamma_1 \cdot \gamma_2) = \lambda(\gamma_1) + \alpha(\gamma_1)\lambda(\gamma_2)\}$$

$Z_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$ est un espace vectoriel complexe. Nous expliquons comment calculer sa dimension : Γ est un groupe de type fini dont une présentation est donnée par les générateurs $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ et l'unique relation $\prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1$. Un élément $\lambda \in Z_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$ est caractérisé par ses valeurs $\lambda(a_1), \lambda(b_1), \dots, \lambda(a_g), \lambda(b_g)$ et ces nombres doivent satisfaire la relation suivante (qui résulte simplement de la relation sur les générateurs) :

$$\sum_{i=1}^g \lambda(a_i)(1 - \alpha(a_i)) + \lambda(b_i)(1 - \alpha(b_i)) = 0$$

Réciproquement la donnée de $2g$ nombres complexes satisfaisant la relation ci-dessus définit un élément de $Z_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$. Cette relation est triviale si et seulement

si $\alpha \equiv 1$. Ainsi la dimension complexe de $Z_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$ est $2g$ si $\alpha \equiv 1$ and $2g - 1$ sinon. Pour toute représentation $\rho \in \text{Hom}(\Gamma, \text{Aff}(\mathbb{C}))$, Tr_ρ appartient à $Z_{\text{Li}_\rho}^1(\Gamma, \mathbb{C})$.

L'analyse précédente peut être résumée en :

Proposition 2. *La projection*

$$\pi : \text{Hom}(\Gamma, \text{Aff}(\mathbb{C})) \longrightarrow \text{H}^1(\Sigma, \mathbb{C}^*)$$

muni $\text{Hom}(\Gamma, \text{Aff}(\mathbb{C})) \setminus \pi^{-1}(\{1\})$ *d'une structure de fibré vectoriel dont les fibres ont dimension* $2g - 1$.

Le groupe $\text{Aff}(\mathbb{C})$ agit par conjugaison sur $\text{Hom}(\Gamma, \text{Aff}(\mathbb{C}))$: soit $f \in \text{Aff}(\mathbb{C})$ et $\rho \in \text{Hom}(\Gamma, \text{Aff}(\mathbb{C}))$, $(f \cdot \rho)(\gamma) = f \circ \rho(\gamma) \circ f^{-1}$. Remarquons que

1. $\forall f \in \text{Aff}(\mathbb{C}), \pi(f \cdot \rho) = \pi(\rho)$;
2. $\forall \alpha \in \text{H}^1(\Sigma, \mathbb{C}^*), 1 - \alpha \in Z_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$;
3. If $f = z \mapsto az + b$, $\text{Tr}_{f \cdot \rho} = a\text{Tr}_\rho + b(1 - \text{Li}_\rho)$.

On introduit la notation $\text{H}_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C}) = Z_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})/\mathbb{C} \cdot (1 - \alpha)$. Elle provient de ce que $\text{H}_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$ est le premier groupe de la cohomologie de Γ tordue par α . On introduit aussi $\text{Hom}'(\Gamma, \text{Aff}(\mathbb{C}))$ le sous-ensemble de $\text{Hom}(\Gamma, \text{Aff}(\mathbb{C}))$ des représentations dont l'image n'est pas un sous-groupe abélien de $\text{Aff}(\mathbb{C})$. On définit *la variété des caractères* comme étant le quotient par l'action $\text{Aff}(\mathbb{C})$ de l'ensemble des représentations non-abélienne :

$$\chi(\Gamma, \text{Aff}(\mathbb{C})) = \text{Hom}'(\Gamma, \text{Aff}(\mathbb{C}))/\text{Aff}(\mathbb{C})$$

On a alors la description suivante de la structure de $\chi(\Gamma, \text{Aff}(\mathbb{C}))$:

Proposition 3. *La projection*

$$\pi : \chi(\Gamma, \text{Aff}(\mathbb{C})) \longrightarrow \text{H}^1(\Sigma, \mathbb{C}^*)$$

muni $\chi(\Gamma, \text{Aff}(\mathbb{C}))$ *d'une structure de fibré en* $\mathbb{C}\mathbb{P}^{2g-3}$ *au-dessus de* $\text{H}^1(\Sigma, \mathbb{C}^*) \setminus \{1\} \simeq (\mathbb{C}^*)^{2g} \setminus \{1, \dots, 1\}$.

Démonstration. L'action de $\text{Aff}(\mathbb{C})$ par conjugaison laisse stable la fibre $l^{-1}(\{\alpha\}) = Z_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$. Soit $\rho := z \mapsto az + b$ et $\lambda \in Z_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$. $\rho \cdot \lambda = b(1 - \alpha) + a\lambda$, donc le quotient de $Z_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$ par l'action de $\text{Aff}(\mathbb{C})$ est le projectivisé de $Z_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})/\mathbb{C} \cdot (1 - \alpha) = \text{H}_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$. Comme $Z_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$ a dimension $2g - 1$ si $\alpha \neq 1$, la fibre de π au dessus de α est toujours $\mathbb{C}\mathbb{P}^{2g-3} \simeq \mathbf{P}(\text{H}_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C}))$. □

1.2.2 Action du groupe modulaire.

Le groupe modulaire $\text{Mod}(\Sigma)$ est le groupe des composantes connexes de $\text{Diff}^+(\Sigma)$ le groupe de difféomorphismes de Σ préservant l'orientation. Formellement

$$\text{Mod}(\Sigma) = \text{Diff}^+(\Sigma)/\text{Diff}_0(\Sigma) = \text{H}_0(\text{Diff}^+(\Sigma))$$

Rappelons que $\Gamma = \pi_1(\Sigma, *)$. Un difféomorphisme $f \in \text{Diff}^+(\Sigma)$ induit un isomorphisme de groupes

$$f_* : \pi_1(\Sigma, *) \longrightarrow \pi_1(\Sigma, f(*))$$

Un choix arbitraire de chemin c allant de $*$ à $f(*)$ réalise une identification entre $\pi_1(\Sigma, *)$ et $\pi_1(\Sigma, f(*))$, et composer au but par une telle identification nous donne $f'_* : \Gamma \longrightarrow \Gamma$. Un choix différent de chemin donne un nouvel automorphisme de Γ qui est conjugué à f'_* , f définit donc un élément de $\text{Out}(\Gamma)$. Comme f préserve l'orientation, tout $f'_* : \Gamma \longrightarrow \Gamma$ préserve la classe fondamentale de $\text{H}^2(\Gamma, \mathbb{Z})$. Nous avons donc défini un morphisme de groupes :

$$\varphi : \text{Mod}(\Sigma) \longrightarrow \text{Out}^+(\Gamma)$$

où $\text{Out}^+(\Gamma)$ est le sous-groupe de $\text{Out}(\Gamma)$ préservant la classe fondamentale de $\text{H}^2(\Gamma, \mathbb{Z})$. Un célèbre théorème de Dehn, Nielsen et Baer garantit que φ est un isomorphisme (voir [FM12, p.232]).

Le groupe $\text{Aut}(\Gamma)$ agit naturellement sur $\text{Hom}(\Gamma, \text{Aff}(\mathbb{C}))$ par pré-composition. Nous allons prouver dans ce paragraphe que cette action induit une action de $\text{Out}(\Gamma)$ sur $\chi(\Gamma, \text{Aff}(\mathbb{C}))$. Considérons $\phi, \psi \in \text{Aut}(\Gamma)$, et notons $[\phi], [\psi]$ leurs classes respectives dans $\text{Out}(\Gamma)$. Supposons que $[\phi] = [\psi]$, autrement dit qu'il existe $g \in \Gamma$ tel que $\phi = g \cdot \psi \cdot g^{-1}$. Soit $\rho \in \text{Hom}'(\Gamma, \text{Aff}(\mathbb{C}))$ alors $\forall \gamma \in \Gamma$ on a

$$\rho \circ \phi(\gamma) = \rho(g\psi(\gamma)g^{-1}) = \rho(g) \cdot \rho \circ \psi(\gamma) \cdot \rho(g)^{-1}$$

Ainsi pour tout $\rho \in \text{Hom}'(\Gamma, \text{Aff}(\mathbb{C}))$, $\rho \circ \phi$ et $\rho \circ \psi$ appartiennent à la même classe dans $\chi(\Gamma, \text{Aff}(\mathbb{C}))$. Cela prouve que l'action de $\text{Aut}(\Gamma)$ induit une action de $\text{Out}(\Gamma) = \text{Mod}(\Sigma)$ sur $\chi(\Gamma, \text{Aff}(\mathbb{C}))$. Nous appellerons cette action *l'action de $\text{Mod}(\Sigma)$ par pré-composition*.

1.2.3 La représentation symplectique et le groupe de Torelli.

Le groupe modulaire agit naturellement sur l'homologie de Σ . En particulier cette action est linéaire et définit une représentation

$$\text{Mod}(\Sigma) \longrightarrow \text{GL}(\text{H}_1(\Sigma, \mathbb{Z})).$$

Cette action préserve le produit d'intersection de $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ qui est une forme symplectique. Un choix de base de $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ permet d'identifier l'image de cette représentation à $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$. Un fait remarquable (mais assez facile à établir) est que cette l'image de cette représentation est tout le groupe $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$. Cette représentation est connue sous le nom de *représentation symplectique* du groupe modulaire. Son noyau, qui jouera un rôle important dans la description de l'action de $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ sur $\chi(\Gamma, \mathrm{Aff}(\mathbb{C}))$, est communément appelé *groupe de Torelli* et se note $\mathcal{I}(\Sigma)$.

Le groupe de Torelli. Le groupe de Torelli encode d'une certaine manière la complexité du groupe modulaire, car le quotient de $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ pour $\mathcal{I}(\Sigma)$ est le groupe linéaire arithmétique $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$. Nous décrivons ci-après des éléments remarquables du groupe de Torelli :

- si $c \subset \Sigma$ est une courbe fermée simple séparante (*i.e.* tel que $\Sigma \setminus c$ n'est pas connexe) non homotope à un point, le twist de Dehn le long de c appartient à $\mathcal{I}(\Sigma)$;
- si a et b sont deux courbes fermées simples cohomologues et non homotopes, le produit des twists de Dehn $T_a \circ T_b^{-1}$ appartient aussi à $\mathcal{I}(\Sigma)$.

1.2.4 Représentation de Chueshev du groupe de Torelli.

On fixe $\alpha \in H^1(\Sigma, \mathbb{C}^*)$ pour le reste de la section. Nous allons montrer dans cette section que le groupe de Torelli induit une action projective sur $H_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$. Soit $f \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ tel que la classe de f dans $\mathrm{Mod}(\Sigma) \simeq \mathrm{Out}(\Gamma)$ appartiennent à $\mathcal{I}(\Sigma)$.

Tout d'abord $f^*\alpha = \alpha$ car f agit trivialement sur l'homologie par définition. Cela signifie en particulier que $Z_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$ est préservé par l'action de f par pré-composition. Cette action est évidemment linéaire. Enfin comme $f^*\alpha = \alpha$, la droite $\mathbb{C} \cdot (1 - \alpha)$ est fixée par f et f induit une action linéaire sur $H_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$.

Remarque 3. *Il semble intéressant de remarquer qu'à ce point, un élément $f \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ seul induit une action **linéaire** sur $H_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$. Ce fait sera utilisé plus tard de manière cruciale pour calculer explicitement l'action du groupe de Torelli sur $\chi(\Gamma, \mathrm{Aff}(\mathbb{C}))$, et plus spécifiquement sur $\mathbf{P}(H_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C}))$.*

Considérons $\gamma \in \Gamma$. L'action de $\gamma \cdot f \cdot \gamma^{-1}$ sur $H_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$ est telle que

$$\forall \mu \in H_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C}), (\gamma \cdot f \cdot \gamma^{-1}) \cdot \mu = \alpha(\gamma)\mu.$$

Cela implique que $\mathrm{Mod}(\Sigma) \simeq \mathrm{Out}^+(\Gamma)$ induit une action projective sur $\mathbf{P}(H_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C}))$. En particulier, à une identification de $\mathbf{P}(H_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C}))$ avec $\mathbb{C}\mathbb{P}^{2g-3}$ près, une représentation

$$\tau_\alpha : \mathcal{I}(\Sigma) \longrightarrow \mathrm{PGL}(2g - 2, \mathbb{C})$$

appelée *représentation de Chueshev* du groupe de Torelli. Elle semble apparaître pour la première fois dans l'article [Chu90]. Une des nos contributions principales est de décrire l'image de cette représentation pour presque tout α , voir section 1.2.7 et les articles [Gha16] et [Gha].

Remarque 4. *Pour un α fixé, la représentation de Chueshev s'étend en fait à tout le sous-groupe $\mathrm{Stab}(\alpha) \subset \mathrm{Mod}(\Sigma)$. Pour un $\alpha : \mathrm{H}_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{C}^*$ injectif, $\mathrm{Stab}(\alpha)$ est réduit au groupe de Torelli. Par contre dans le cas où α n'est pas injectif, $\mathrm{Stab}(\alpha)$ contient tout les twists de Dehn le long de courbes dont la classe d'homologie appartient à $\mathrm{Ker}(\alpha)$.*

Nous décrivons dans un court appendice à cette thèse (voir Appendice A) le lien qui existe entre la représentation de Chueshev et une représentation de nature plus cohomologique appelée la représentation de Magnus (voir [Suz05] et [CP11] pour une exposition complète de cette représentation). Il résulte de cette description le lemme suivant qui nous sera utile dans la suite.

Lemme 1. *Il existe une base de \mathbb{C}^{2g-2} et un relevé de l'action de τ_α à $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^{2g-2})$ tel que les matrices des images de $\mathrm{Stab}(\alpha)$ par τ_α dans cette base appartiennent à $\mathrm{GL}(2g - 2, \mathbb{Z}[\mathrm{Im}(\alpha)])$, i.e. sont à coefficients dans le \mathbb{Z} -module engendré par les éléments de l'image de α .*

1.2.5 Volume des représentations euclidiennes.

Soit α un élément de $\mathrm{H}^1(\Sigma, \mathbb{C}^*)$ dont l'image est contenue dans \mathbb{U} . On dit qu'un tel morphisme est *euclidien*. On définit dans cette section une fonction sur $\mathrm{H}_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$ à valeurs dans \mathbb{R} dont le signe est un invariant par l'action du groupe modulaire.

Une construction homologique du volume.

Le produit d'intersection

$$\wedge : \mathrm{H}_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C}) \times \mathrm{H}_{\bar{\alpha}}^1(\Gamma, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{H}_{\alpha \cdot \bar{\alpha}}^2(\Gamma, \mathbb{C}) = \mathrm{H}^2(\Gamma, \alpha) \simeq \mathbb{C}$$

définit par l'intermédiaire de $\alpha \cdot \beta = \alpha \wedge \bar{\beta}$ une forme hermitienne non dégénérée sur $\mathrm{H}_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$.

Une construction géométrique du volume.

On présente une construction alternative du volume d'une représentation euclidienne $\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{Aff}(\mathbb{C}))$, qui coïncide avec celui défini précédemment. On considère une application ρ -équivariante $f : \tilde{\Sigma} \longrightarrow \mathbb{C}$; c'est à dire telle que

$$\forall \gamma \in \Gamma, \forall z \in \tilde{\Sigma} \quad f(\gamma \cdot z) = \rho(\gamma)f(z).$$

Comme ρ est euclidienne, le tiré en arrière par f de la forme volume standard de \mathbb{C} définit une 2-forme ω dont l'intégrale $\int_{\Sigma} \omega$ est le **volume** de ρ . Une telle application f existe toujours car Σ est un $K\pi_1$, et il faut vérifier que le volume ne dépend pas du choix d'une telle application f .

L'action du groupe de Torelli.

Le sous-groupe de $\text{Aut}(\Gamma)$ qui agit trivialement sur $H^1(\Sigma, \mathbb{Z})$ agit sur $H^1_{\alpha}(\Gamma, \mathbb{C})$ en préservant la forme volume définie ci-dessus, et l'action du groupe de Torelli factorise par le projectivisé de cette action. Toujours à un choix de base près, cela définit à travers la représentation de Chueshev, une famille de représentations :

$$\tau_{\alpha} : \mathcal{I}(\Sigma) \subset \text{Stab}(\alpha) \longrightarrow \text{PU}(g-1, g-1).$$

1.2.6 Action sur les parties linéaires et théorème de Ratner.

L'action du groupe modulaire sur $H^1(\Sigma, \mathbb{C}^*)$ est l'action par pré-composition sur $\text{Hom}(H_1(\Sigma, \mathbb{Z}), \mathbb{C}^*) \simeq H^1(\Sigma, \mathbb{C}^*)$. À un choix de base symplectique de $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ près, cette action s'identifie à l'action de $\text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ sur $(\mathbb{C}^*)^{2g} = \mathbb{R}^{2g} \times \mathbb{R}^{2g} / \mathbb{Z}^{2g} \simeq H^1(\Sigma, \mathbb{C}^*)$.

Dans cette section nous décrivons les adhérences possible des orbites de cette action.

Sous-groupes fermés de \mathbb{C}^* sous-ensembles fermés invariants de $H^1(\Sigma, \mathbb{C}^*)$.

Considérons H un sous-groupe fermé de \mathbb{C}^* . Le sous-ensembles de $H^1(\Sigma, \mathbb{C}^*)$ constitué des éléments α tels que $\text{Im}(\alpha) \subset H$ est à la fois fermé et invariant par l'action de $\text{Mod}(\Sigma)$. Une première étape vers la classification des adhérences des orbites de l'action de $\text{Mod}(\Sigma)$ sur $H^1(\Sigma, \mathbb{C}^*)$ est de lister ces sous-groupes fermés de \mathbb{C}^* .

Proposition 4. *Les sous-groupes fermés de H sont les suivants :*

1. les sous-groupes finis engendrés par une racine de l'unité ;
2. les sous-groupes discrets de la forme $\{e^{na} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ où a est un nombre complexe quelconque ;
3. les sous-groupes à un paramètre de la forme $H_a = \{e^{ta} \mid t \in \mathbb{R}\}$;
4. les produits d'un des deux derniers types par un sous-groupe finis ;
5. tout \mathbb{C}^* .

Démonstration. \mathbb{C}^* est groupe de Lie de dimension réelle 2, et la classification découle directement de ce que les sous-groupes fermés d'un groupe de Lie sont des sous-groupes de Lie. □

Chaque sous-groupe de cette liste enfante un sous-ensemble fermé invariant par l'action de $\text{Mod}(\Sigma)$. À l'addition près d'une famille de sous-ensemble de caractères non-unitaire dont l'image est discrète, nous allons prouver que ces derniers sont les seuls fermés invariants de $H^1(\Sigma, \mathbb{C}^*)$.

D'autres fermés invariants. Dans le cas où $\text{Im}(|\alpha|)$ est discret mais non trivial, il existe $m > 0$ tel que le caractère $\mu \in H^1(\Sigma, \mathbb{R})$, qui est le relevé de $|\alpha|$, prend ses valeurs dans $m\mathbb{Z}$. Soit $\tilde{\theta} \in H^1(\Sigma, \mathbb{R})$ un relevé de $\theta = \arg(\alpha)$. Un tel relevé est unique à l'addition d'un élément de $H^1(\Sigma, \mathbb{Z})$ près. La valeur de $v = \mu \wedge \tilde{\theta}$ modulo $m\mathbb{Z}$ ne dépend donc pas du choix d'un relevé de θ et est invariant par l'action de $\text{Mod}(\Sigma)$ sur $H^1(\Sigma, \mathbb{C}^*)$. Les lignes de niveau de la fonction $\mu \wedge \cdot$ sont fermés, ils définissent donc des fermés invariants pour l'action du groupe modulaire. Dans la suite du texte, le niveau $\{\mu \wedge \tilde{\theta} = v\}$ sera noté $H_{m,v}$.

Nous allons maintenant prouver la proposition ci-dessous, qui dit en substance que les seuls fermés invariants par l'action de $\text{Mod}(\Sigma)$ sont en substance ceux que nous avons déjà décrits.

Proposition 5. — *Si $\text{Im}(|\alpha|)$ est discret, non-trivial, et égal à $\langle e^m \rangle$ avec $m > 0$ et qu'en plus $\text{Im}(\alpha)$ n'est pas discret, alors $\overline{\text{Mod}(\Sigma) \cdot \alpha} = H_{m,v}$ où v est la valeur modulo m du produit d'intersection des relevés du module et de l'argument de α .*

— *Si α est unitaire ou si $\text{Im}(|\alpha|)$ est non discret alors $\overline{\text{Mod}(\Sigma) \cdot \alpha}$ est l'ensemble des caractères β tel que $\text{Im}(\beta) \subset \overline{\text{Im}(\alpha)}$.*

Le reste de la section est dédié à la preuve de cette proposition.

Le théorème de Ratner.

Les théorèmes de Ratner décrivent de manière précise la dynamique d'un sous-groupe unipotent U d'un groupe de Lie G (ou seulement générés par des unipotents) sur le quotient de G par un réseau Γ , ou de manière équivalente l'action d'un réseau Γ sur l'espace homogène G/H . En particulier,

1. ils stipulent que les fermés invariants (en particulier les adhérences d'orbites) sont les sous variétés de G/Γ (ou G/U);
2. classifient complètement les mesures invariantes.

Nous allons utiliser le premier levier pour décrire l'action de $\text{Mod}(\Sigma)$ sur $H^1(\Sigma, \mathbb{C}^*)$. Plus précisément, nous sommes intéressés par la classification des fermés invariants de $\mathbb{R}^{2g} \times \mathbb{R}^{2g}/\mathbb{Z}^{2g}$ sous l'action diagonale de $\text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$. Pour ce faire remarquons qu'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^{2g} \times \mathbb{R}^{2g}$ est invariant par l'action de $\text{Sp}(2g, \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^{2g}$ si et seulement si sa projection sur $\mathbb{R}^{2g} \times \mathbb{R}^{2g}/\mathbb{Z}^{2g}$ est invariante par l'action de $\text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$.

Remarquons de plus que puisque $G = \text{Sp}(2g, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{2g}$ agit transitivement sur $X = \mathbb{R}^{2g} \times \mathbb{R}^{2g}$, il y a une identification naturelle entre X et G/U où U est le stabilisateur dans G d'un point dans X . Comme $\Gamma = \text{Sp}(2g, \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^{2g}$ est un réseau dans G , on peut appliquer le théorème de Ratner évoqué ci-dessus dans notre cas. Nous donnons un énoncé précis du théorème dans notre cas :

Théorème 19 (Ratner, [Rat91]). *Soit G, U et Γ comme ci-dessus et p un point de $X = G/U$ tels que $p = gU$. Il existe alors un sous-groupe de Lie fermé $H_g < G$ tel que*

- $U^g = gUg^{-1} \subset H_g$;
- $\Gamma \cap H_g$ est un réseau dans H_g ;
- $\overline{\Gamma \cdot p} = \Gamma H_g p$.

Le théorème de Ratner nous dit immédiatement que les orbites de l'action de $\text{Mod}(\Sigma)$ s'accumulent vers des sous-variétés algébriques de $H^1(\Sigma, \mathbb{C}^*)$. Nous allons dédié le reste de notre analyse à établir la description précise esquissée précédemment. La première étape de cette classification est de faire la liste des sous groupes $H < \text{Sp}(2g, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{2g}$ qui contiennent $U = U' \times \{0\}$ où $U' < \text{Sp}(2g, \mathbb{R})$ est le stabilisateur de $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, car ainsi U est le stabilisateur dans $\text{Sp}(2g, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{2g}$ du point $(\vec{e}, \vec{0})$.

Fixons les notations suivantes : $p = (\vec{x}, \vec{u}) \in \mathbb{R}^{2g} \times \mathbb{R}^{2g}/\mathbb{Z}^{2g}$ et g est tel que $p = gU$, autrement dit $(\vec{x}, \vec{u}) = g \cdot (\vec{e}, \vec{0})$. Aussi H_g est le sous groupe de G donné par le théorème de Ratner. Notons $A_g < \text{Sp}(2g, \mathbb{R})$ l'image de H_g par la projection $\text{Sp}(2g, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{2g} \rightarrow \text{Sp}(2g, \mathbb{R})$ et $B_g < \mathbb{R}^{2g}$ le noyau de cette projection. Nous prouvons tout d'abord deux lemmes qui nous aideront à traduire les deux premières conclusions du théorème de Ratner en terme de A_g et B_g .

Lemme 2. *B_g est soit $\vec{0}$, $\mathbb{R}\vec{x}$, \vec{x}^\perp ou \mathbb{R}^{2g} .*

Démonstration. Remarquons que B_g est invariant par l'action de $U_g = \text{Stab}(g) < G$ par conjugaison, qui n'est autre que l'action linéaire de $U_{\vec{x}} = \text{Stab}(\vec{x}) < \text{Sp}(2g, \mathbb{R})$. Soit V un sous-espace invariant par l'action de $U_{\vec{x}}$. Il y a quatre possibilités :

1. $V = \vec{0}$;

2. $V = \vec{x}$;
3. V contient \vec{y} tel que $\vec{x} \wedge \vec{y} \neq 0$. U_g agit transitivement sur l'ensemble des droites sur lesquelles $\vec{x} \wedge \cdot$ est non nul, qui est dense dans l'ensemble des droites de \mathbb{R}^{2g} et ainsi $V = \mathbb{R}^{2g}$.
4. $V \subset \vec{x}^\perp$ et $V \neq \vec{x}$. Comme U_g agit transitivement sur les vecteurs orthogonaux à \vec{x} qui ne sont pas sur la droite dirigée par \vec{x} , $V = \vec{x}^\perp$.

□

Lemme 3. *Soit H un sous-groupe de Lie fermé de $G = \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{2g}$. Alors $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^{2g} \cap H$ est un réseau dans H si et seulement si $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}) \cap A$ est un réseau dans A et $\mathbb{Z}^{2g} \cap B$ est un réseau dans B .*

Démonstration. Notons π la projection naturelle :

$$H/(H \cap \Gamma) \longrightarrow A/\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}) \cap A$$

Cette projection donne à $H/(H \cap \Gamma)$ une structure de fibré dont la fibre est isomorphe à $B/(\mathbb{Z}^{2g} \cap B)$. La mesure de Haar sur H est le produit de la mesure de Lebesgue de la fibre avec la mesure de Haar de $A/(A \cap \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}))$. Le volume de H est donc exactement le produit $\mathrm{vol}(A/(A \cap \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}))) \cdot \mathrm{vol}(B/(\mathbb{Z}^{2g} \cap B))$, ce qui prouve la proposition.

□

Ce lemme nous dit que si H_g est associé à l'orbite de $p \in X$, A_g est unimodulaire et contient $\pi(U_g) = \mathrm{Stab}(\vec{x})$. La classification des sous-groupes de Lie de $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{R})$ garanti que A_g est soit U_g , le stabilisateur de la droite engendrée par \vec{x} ou $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{R})$ tout entier. Comme A_g est unimodulaire, c'est soit U_g ou $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{R})$.

Proposition 6.

$$H_g = A_g \times B_g$$

Démonstration. Sans nuire à la généralité, on peut supposer que $p = (\vec{e}, \vec{0})$ et $U = \mathrm{Stab}(p)$. Si $A_g = U$, le résultat est évident (car H_g contient $U \times \{\vec{0}\}$). On suppose désormais que $A_g = \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{R})$. Nous allons tout d'abord faire la preuve dans le cas où $B_g = \vec{0}$. Dans ce cas la projection $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{2g} \longrightarrow \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{R})$ restreinte à H_g est injective et son inverse défini en projetant sur le facteur \mathbb{R}^{2g} une fonction continue $\varphi : \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{2g}$ telle que

$$\forall A, B \in \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{R}), \quad \varphi(AB) = \varphi(A) + A\varphi(B).$$

Prouver la proposition dans ce cas particulier revient à prouver que φ est nulle partout. La fonction φ s'annule sur U , et donc φ se factorise en $\varphi : \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{R})/U \simeq \mathbb{R}^{2g} \setminus 0 \longrightarrow \mathbb{R}^{2g}$ telle que

$$\forall A \in \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{R}) \text{ and } \forall y \in \mathbb{R}^{2g} \setminus 0, \quad \varphi(Ay) = \varphi(A) + A\varphi(y)$$

et $\varphi(\vec{e}) = 0$, ou A_1 est la première colonne de la matrice A . Considérons \vec{z} tel que $\vec{z} \wedge p \neq 0$. On peut trouver un élément $A \in U$ tel que $\text{Ker}(A - \text{Id}) = \text{Span}(\vec{y}, \vec{e})$. Comme $\varphi(A) = 0$, $\varphi(\vec{y})$ est un point fixe de A et donc appartient à $\text{Span}(\vec{y}, \vec{e})$. Comme l'ensemble des \vec{y} tels que $\vec{z} \wedge \vec{y} \neq 0$ est dense, tout $\varphi(\vec{y})$ appartient à $\text{Span}(\vec{y}, \vec{e})$.

On veut montrer que $\varphi(\vec{y}) = 0$ pour tout \vec{y} . Considérons $A \in \text{Sp}(2g, \mathbb{R})$ tel que $A\vec{e} = \vec{y}$, *i.e.* $A_1 = \vec{y}$. Considérons aussi \vec{z} tel que $A\vec{z}$ n'appartient pas à $\text{Span}(\vec{e}, \vec{y})$. D'un côté

$$\varphi(A\vec{z}) = \varphi(\vec{y}) + A\varphi(\vec{z})$$

mais aussi

$$\varphi(A\vec{z}) = \lambda A\vec{z} + \mu \vec{e}.$$

Cela implique que $\varphi(\vec{y})$ est un multiple de \vec{e} , pour tout \vec{y} . Mais alors $\varphi(A\vec{y}) = \varphi(A_1) + A\varphi(\vec{y})$ et donc $\varphi(\vec{y})$ doit être nul car $\varphi(A\vec{y})$ est aussi un multiple de \vec{e} . Quand $B_g \neq 0$, on peut faire la même chose. Remarquons juste que l'ensemble des \vec{z} tels que (A, \vec{z}) appartient à H_g est un sous espace affine d'espace tangent B_g ce qui nous permet de définir $\varphi : \text{Sp}(2g, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{2g}/B_g$ qui est nulle sur U_g . Un argument similaire laissé au lecteur prouve que φ est nulle partout ce qui prouve la proposition. \square

On déduit du lemme ci-dessus qu'un sous-groupe de G qui contient $U_g \times \{\vec{0}\} = \text{Stab}(p)$ avec $p = (\vec{x}, \vec{u})$ est soit $U_g \times \{0\}$, $U_g \times \mathbb{R}\vec{x}$, $U_g \times \vec{x}^\perp$, $\text{Sp}(2g, \mathbb{R}) \times \{0\}$ ou $\text{Sp}(2g, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{2g}$. Pour rendre l'exposition plus claire, on notera dans ce qui suit $H_0 = A_0 \times B_0$ un sous-groupe arbitraire de cet liste dans le cas $\vec{x} = \vec{e}$.

Classification des adhérences d'orbites.

Nous sommes maintenant près pour classifier les adhérences possibles des orbites de l'action de $\text{Mod}(\Sigma)$ sur $\text{H}^1(\Sigma, \mathbb{C}^*)$. Soit $\tilde{p} = (\vec{x}, \vec{u}) \in \mathbb{R}^{2g} \times \mathbb{R}^{2g}$ représentant un point $p \in \text{H}^1(\Sigma, \mathbb{C}^*)$; on fait l'hypothèse que $\vec{x} \neq 0$. Dans ce cas on peut appliquer le théorème de Ratner (voir Théorème 19) à $\tilde{p} = gU$ où $g : \vec{z} \mapsto C\vec{z} + \vec{u}$ et $C \in \text{Sp}(2g, \mathbb{R})$ est tel que sa première colonne est \vec{x} . Pour l'un des sous groupe $H_0 = A_0 \times B_0$ listés ci-dessus, on a que $\overline{\Gamma\tilde{p}} = \Gamma g H_0 g^{-1} \tilde{p}$ et que $\Gamma \cap g H_0 g^{-1}$ est un réseau dans $g H_0 g^{-1} = H_g$. La conjugaison $H_0 \rightarrow H_g$ par g s'écrit explicitement

$$(M, \vec{y}) \mapsto (CMC^{-1}, \vec{u} - CMC^{-1}\vec{u} + C\vec{y}).$$

Ainsi $U_g = gUg^{-1} = \text{Stab}(\vec{x})$ et $B_g = C \cdot B_0$. On classifie maintenant les orbites selon que $A_g = \text{Stab}(\vec{x})$ or $\text{Sp}(2g, \mathbb{R})$.

1) Si $A_g = \text{Stab}(\vec{x})$. Comme $\text{Sp}(2g, \mathbb{Z}) \cap A_g$ doit être un réseau dans A_g (voir Lemme 3), \vec{x} doit appartenir à une droite rationnelle. En effet par Zariski densité des réseaux, il existe un élément de $\text{Sp}(2g, \mathbb{Z}) \cap A_g$ dont l'espace propre de valeur propre 1 est seulement la droite engendré par \vec{x} , ce qui implique qu'il existe $\vec{x}' \in \mathbb{Z}^n$ such that $\vec{x} = \lambda \vec{x}'$ for a constant $\lambda > 0$. C'est équivalent à dire que la valeur absolue des éléments de $\text{Im}(p)$ engendre un groupe discret engendré par e^λ si \vec{x}' a été choisi primitif. Dans ce cas quatre possibilités se présentent :

- $B_g = 0$. Dans ce cas $\overline{\gamma \tilde{p}} = \gamma \tilde{p}$ ce qui est équivalent à ce que $\text{Im}(p)$ est un sous-groupe discret de \mathbb{C}^* .
- $B_g = \mathbb{R}\vec{x}$. Comme $A_g = \text{Stab}(\vec{x})$, l'image dans $\mathbb{R}^{2g} \times \mathbb{R}^{2g}$ de $H_g \cdot p$ est égale à $\{\vec{x}\} \times \{\text{Stab}(\vec{x})\vec{u} + \mathbb{R}\vec{x}\} = \{\vec{x}\} \times \{\vec{u} + \vec{x}^\perp\}$. Si \vec{u} n'appartient pas à $\mathbb{R}\vec{x}$, alors $H_g \cdot p = \{\vec{x}\} \times \{\vec{y} \mid \vec{y} \wedge \vec{x} = \vec{u} \wedge \vec{x}\}$ et donc $\Gamma \cdot p = H_{\lambda, v}$ où $v = \vec{u} \wedge \vec{x} \bmod \lambda$. Si $\vec{u} \in \mathbb{R}\vec{x}$ alors $\text{Im}(p)$ est un sous-groupe discret de la forme $\{e^{n\lambda + n2i\pi\mu} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ avec μ irrationnel.
- $B_g = \vec{x}^\perp$ marche comme le cas précédent, on remarque que la projection $H_g \rightarrow \text{H}^1(\Sigma, \mathbb{C}^*)$ a pour image $\overline{\{\vec{x}\} \times \{\vec{u} + \vec{x}^\perp\}}$ et dans ce cas l'image de p n'est pas discrète et $\text{Mod}(\Sigma) \cdot p = H_{\lambda, v}$.
- Le dernier sous-cas $B_g = \mathbb{R}^{2g}$ ne peut pas arriver car l'adhérence d'une orbite doit être contenue dans un sous-ensemble de type $H_{m, v}$.

Ceci nous permet de conclure que dans le cas où le module de p a une image discrète deux situations peuvent se produire :

1. l'image de p est un sous-groupe discret isomorphe à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ à travers $(k, k') \mapsto e^{kz_0 + \frac{2i\pi k'}{n}}$ pour un certain $z_0 \in \mathbb{C}^*$ et dans ce cas l'orbite de p est **discrète** ;
2. l'image de p n'est pas discrète et dans ce cas l'adhérence de $\text{Mod}(\Sigma) \cdot p$ est tout l'ensemble $H_{\lambda, v}$ pour λ et v comme ci-dessus.

2) Si $A_g = \text{Sp}(2g, \mathbb{R})$. Dans ce cas, B_0 est soit $\{0\}$ ou \mathbb{R}^{2g} . On déduit facilement du fait que $A_g = \text{Sp}(2g, \mathbb{R})$ que le module de p a image dense dans \mathbb{R}_+^* . Un argumentaire similaire à la discussion précédente permet de conclure que :

1. soit $\overline{\text{Im}(p)} = L \times \langle e^{\frac{2i\pi}{n}} \rangle$ où L est un sous-groupe à un paramètre de \mathbb{C}^* de la forme $\{e^{tz_0} \mid t \in \mathbb{R}\}$ et dans ce cas l'adhérence de $\text{Mod}(\Sigma) \cdot p$ est l'ensemble des caractères dont l'image est de la forme $L' \times \langle e^{\frac{2i\pi}{n}} \rangle$ avec $L' \subset L$;
2. soit l'argument de p a pour image un sous-groupe dense de \mathbb{U} et dans ce cas l'orbite de p est dense dans $\text{H}^1(\Sigma, \mathbb{C}^*)$.

Le dernier cas est le cas générique pour la mesure de Lebesgue.

3) Si le module de p est trivial, i.e. p est euclidien. Ce cas est le plus facile. On laisse le lecteur vérifier qu'une application directe du théorème de Ratner au cas $\mathbb{R}^{2g} \setminus \{0\} = \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{R})/\mathrm{Stab}(\vec{e})$ pour l'action de $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ donne la dichotomie suivante :

1. soit $\mathrm{Im}(p)$ est un sous-groupe fini de \mathbb{U} et dans ce cas l'orbite de p est discrète et consiste des caractères ayant la même image ;
2. soit $\mathrm{Im}(p)$ est dense dans \mathbb{U} et dans ce cas l'adhérence de $\mathrm{Mod}(\Sigma) \cdot p$ est l'ensemble des caractères euclidiens de $\mathrm{H}^1(\Sigma, \mathbb{C}^*)$.

1.2.7 Image de la représentation de Chueshev.

On décrit dans cette section l'adhérence dans $\mathrm{PGL}(\mathrm{H}_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})) \simeq \mathrm{PGL}(2g - 2, \mathbb{C})$ de la représentation de Chueshev

$$\tau_\alpha : \mathrm{Stab}(\alpha) \longrightarrow \mathrm{PGL}(2g - 2, \mathbb{C}).$$

en fonction de $\alpha \in \mathrm{H}^1(\Sigma, \mathbb{C}^*)$.

Formellement, il faudrait faire la différence entre cette représentation et sa restriction au groupe de Torelli $\mathcal{I}(\Sigma)$ (voir Remarque 38). Les théorèmes que nous présentons dans cette section ne valent que pour la représentation étendue à Stab .

Théorème 20. *Soit $\alpha \in \mathrm{H}^1(\Sigma, \mathbb{C}^*)$ euclidien et tel que $\mathrm{Im}(\alpha)$ est différent de $\langle e^{\frac{2i\pi}{n}} \rangle$ pour $n = 1, 2, 3, 4$ ou 6 . Alors l'image de τ_α est dense dans $\mathrm{PU}(\mathrm{vol}) \simeq \mathrm{PU}(g - 1, g - 1) \subset \mathrm{PGL}(2g - 2, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{PGL}(\mathrm{H}_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C}))$.*

Théorème 21. *Soit $\alpha \in \mathrm{H}^1(\Sigma, \mathbb{C}^*)$ tel que $\mathrm{Im}(\alpha) \subset \mathbb{R}^*$ et est infini. Alors l'image de τ_α est dense dans $\simeq \mathrm{PGL}(2g - 2, \mathbb{R}) \subset \mathrm{PGL}(2g - 2, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{PGL}(\mathrm{H}_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C}))$.*

Théorème 22. *Soit $\alpha \in \mathrm{H}^1(\Sigma, \mathbb{C}^*)$ dont l'image est un sous groupe qui n'est contenu ni dans \mathbb{U} ni dans \mathbb{R}^* . Alors l'image de τ_α est dense dans $\mathrm{PGL}(2g - 2, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{PGL}(\mathrm{H}_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C}))$.*

Ces théorèmes prouvent qu'à l'exception des cas exceptionnels où l'image de α est incluse dans un sous-groupe fini d'ordre 1, 2, 3, 4 ou 6, l'adhérence de l'image de la représentation de Chueshev est aussi grande qu'on peut l'espérer. Plus précisément :

1. si α est totalement réel, l'image de la représentation de Chueshev est à coefficients dans \mathbb{R} et on prouve que son adhérence est tout $\mathrm{PGL}(2g - 2, \mathbb{R})$;
2. si α est unitaire, l'action des éléments de $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ se projetant sur $\mathrm{Stab}(\alpha) \subset \mathrm{Mod}(\Sigma)$ agissent en préservant la forme hermitienne vol (voir 1.2.5), l'image de τ_α est donc incluse dans $\mathrm{PU}(\mathrm{vol})$ et on prouve qu'à l'exception des cas mentionnés ci-dessus l'image de τ_α est dense dans ce groupe.

Des éléments remarquables de $H_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$.

La principale difficulté dans la description de l'action de $\mathcal{I}(\Sigma)$ (ou $\text{Stab}(\alpha)$) est de comprendre comment agissent des éléments relativement simples de $\mathcal{I}(\Sigma)$ sur $\mathbf{P}(H_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C}))$. Ce qu'on va montrer, c'est que les twists de Dehn le long de courbes séparantes agissent comme des transvections, et que le vecteur de transvection à une interprétation géométrique simple, de manière analogue aux twists de Dehn pour l'action symplectique de $\text{Mod}(\Sigma)$ sur $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$.

Considérons δ une courbe fermée simple séparante, et $\alpha \in H^1(\Sigma, \mathbb{C}^*)$ non-trivial. On définit alors un élément $\mu_\delta \in H_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$ associé de manière naturelle à δ . Choisissons un point base $p \in \Sigma$ pour $\pi_1(\Sigma)$ de telle sorte qu'on identifie Γ à $\pi_1(\Sigma, p)$, et on suppose que p appartient à δ . Toute classe $[\gamma] \in \Gamma$ peut être représentée par une courbe fermée γ réalisant le minimum (fini) d'intersections avec δ , toutes transverses.

La courbe δ sépare Σ en deux composantes Σ_+ et Σ_- . γ peut être décomposée (dans l'ordre) en un nombre fini de courbes $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ dont les points extrémaux appartiennent à δ et dont les intérieurs sont entièrement contenus dans Σ_+ ou Σ_- . Soit β_i une courbe obtenue en refermant γ_i en utilisant un arc de δ . Remarquons que la classe d'homologie de β_i ne dépend pas du choix d'arc pour refermé γ_i car δ est séparante et donc homologiquement nulle. On pose par définition

$$\mu_\delta(\gamma) = (-1)^\epsilon + \sum_{i=1}^k (-1)^{\epsilon+i} \prod_{j \leq i} \alpha(\beta_j).$$

Cette formule définit un élément μ_δ de $Z_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$ qui est trivial dans $H_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$ si et seulement si la restriction de α à Σ_+ ou Σ_- est triviale. Cette construction peut-être étendue à une courbe δ telle que $\alpha(\delta) = 1$, mais la construction est explicite et complexe et faite en détail dans [Gha16, Lemma 3.2]. Il est très possible qu'il existe une manière plus générale de définir μ_δ qui englobe ce cas, mais nous ne savons pas le faire.

On donne ici une construction plus conceptuelle de μ_δ , où est supposée séparante et Σ_+ et Σ_- sont telles que $\Sigma_+ \cap \Sigma_- = \delta$. La suite de Mayer-Vietoris en cohomologie tordue associée à la partition $\Sigma = \Sigma_+ \cup \Sigma_-$ est la suivante :

$$0 \rightarrow H_\alpha^0(\Sigma) \rightarrow H_\alpha^0(\Sigma_+) \oplus H_\alpha^0(\Sigma_-) \rightarrow H_\alpha^0(\delta) \rightarrow H_\alpha^1(\Sigma) \rightarrow H_\alpha^1(\Sigma_+) \oplus H_\alpha^1(\Sigma_-) \rightarrow H_\alpha^1(\delta) \rightarrow H_\alpha^2(\Sigma) \rightarrow \dots$$

Si α est non-trivial restreint à Σ_+ et Σ_- respectivement, les deux premiers facteurs de la suite sont nul. On se retrouve avec une injection

$$H_\alpha^0(\delta) \rightarrow H_\alpha^1(\Sigma)$$

dont l'image de la classe fondamentale de $H_\alpha^0(\delta)$ dans $H_\alpha^1(\Sigma)$ est μ_δ .

Nous sommes très reconnaissant à Julien Marché de nous avoir expliqué (plusieurs fois) cette construction, qui rend beaucoup moins mystérieuse la construction de μ_δ que nous avons donné en premier lieu dans [Gha16].

Formule pour l'action d'un twist de Dehn.

Comme nous l'avions annoncé au début de la sous-section précédente, on décrit ici l'action d'un twist de Dehn le long d'une courbe fermée simple sur laquelle α est égal à 1.

Proposition 7. *Soit $\delta \subset \Sigma$ une courbe fermée simple telle $\alpha(\delta) = 1$. Soit μ_δ comme défini précédemment, l'action de T_δ sur $H_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$ est une transvection de vecteur μ_δ . Plus précisément, pour tout $\lambda \in Z_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$,*

$$T_\delta \cdot \lambda = \lambda + \lambda(\delta)\mu_\delta$$

Remarque 5. *On fait dans l'énoncé de ce lemme et souvent dans la suite du texte un petit abus de notation. L'action élément de $\text{Mod}(\Sigma)$, comme T_δ , n'est bien définie que sur $\mathbf{P}(H_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C}))$ et non sur $H_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$. C'est l'action de $\text{Aut}(\Gamma)$ qui est bien définie sur $H_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$ et il faut lire rigoureusement dans l'énoncé **il existe un relevé à $\text{Aut}(\Gamma)$ de l'action de T_δ tel que...***

On se permet de faire cet abus sans gravité pour fluidifier l'exposition des résultats.

Démonstration. Soit $p \in \Sigma$ le point base de $\pi_1 \Sigma = \Gamma$. On suppose que toutes les courbes fermées simples sont basés en p , à moins d'une mention explicite du contraire.

Soit $[\gamma]$ une classe dans Γ , et γ un représentant de cette classe tel que γ intersecte δ transversalement. Soit q_1, \dots, q_k les points d'intersection de γ avec δ dans l'ordre. Posons $q_0 = p$.

Soit β_i la courbe fermée obtenue de la manière suivante : on parcourt γ de p à q_i puis en parcourant δ de q_i à p dans le sens correspondant au signe de l'intersection en q_i . Ainsi

$$T_\delta([\gamma]) = [\gamma][\beta_k]^{-1}[\delta]^{(-1)^{k+1}}[\beta_k] \cdots [\beta_2]^{-1}[\delta]^{-1}[\beta_2][\beta_1]^{-1}[\delta][\beta_1]$$

$$T_\delta([\gamma]) = [\gamma] \prod_{i=k}^1 [\beta_i]^{-1}[\delta]^{(-1)^{i+1}}[\beta_i]$$

Pour se convaincre de l'exactitude de cette formule, on remarque que l'image de γ par T_δ est une courbe fermée obtenue en suivant γ de p à q_1 son premier point d'intersection avec δ , puis en parcourant δ dans le sens correspondant au signe de l'intersection en q_1 jusqu'à revenir à q_1 , puis en parcourant γ entre q_1 et q_2 et ainsi de suite. Ce chemin peut être déformé en $\gamma\beta_k^{-1}\delta^{(-1)^{k+1}}\beta_k \cdots \beta_2^{-1}\delta^{-1}\beta_1\beta_1^{-1}\delta\beta_1$, en

rajoutant un chemin allant de q_i à p le long de γ dans le sens inverse puis revenant à q_i en dans le sens positif à chaque fois que ce chemin intersecte δ .

On peut donc maintenant calculer $\lambda(T_\delta([\gamma]))$:

$$\lambda(T_\delta([\gamma])) = \lambda([\delta] \prod_{i=k}^1 [\beta_i]^{-1} [\delta]^{(-1)^{i+1}} [\beta_i])$$

Comme $\alpha(\delta) = 1$, $\alpha([\delta]) = 1$. Comme λ est un cocycle (*i.e.* pour toutes classes $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \Gamma$, $\lambda([\gamma_1] \cdot [\gamma_2]) = \lambda([\gamma_1]) + \alpha([\gamma_1])\lambda([\gamma_2])$), on trouve que

$$\lambda(T_\delta([\gamma])) = \lambda([\gamma]) + \lambda([\delta])\alpha([\gamma]) \cdot \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \alpha([\beta_i])$$

et $\mu(\gamma) = \alpha(\gamma) \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \alpha^{-1}([\beta_i])$. On retrouve le μ_δ défini précédemment et ça conclut la preuve de la proposition. \square

Le cas du genre 2.

Le cas du genre 2 est important à bien comprendre, car il contient toute la difficulté ; et le genre supérieur ce déduit assez facilement par un argument récursif. On fait donc l'hypothèse pour le reste de cette section que Σ est une surface de genre 2.

Dans ce cas, selon que α est réel, unitaire ou générique, l'image de $\text{Stab}(\alpha)$ par la représentation tombe dans trois sous-groupes de $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ différents, respectivement $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$, $\text{PU}(1, 1)$ ou $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$. On veut décrire plus précisément l'image en fonction de α . On va prouver qu'à l'exception d'un nombre fini de cas, l'image de $\text{Stab}(\alpha)$ par τ_α est dense dans le sous-groupe dans lequel elle est contenue. E

- Lemme 4.**
1. Si $\alpha \in \mathbb{H}^1(\Sigma, \mathbb{C}^*)$ a pour image un sous-groupe non-trivial de \mathbb{R}^* , alors l'image de $\text{Stab}(\alpha)$ de la représentation de Chueshev est dense dans $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) \subset \text{PSL}(2, \mathbb{C}) \simeq \text{PGL}(\mathbb{H}_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C}))$.
 2. Si $\alpha \in \mathbb{H}^1(\Sigma, \mathbb{C}^*)$ a pour image un sous groupe non-trivial de \mathbb{C}^* non contenu dans \mathbb{U} ou \mathbb{R}^* , alors l'image de $\text{Stab}(\alpha)$ par la représentation de Chueshev est dense dans $\text{PSL}(2, \mathbb{C}) \simeq \text{PGL}(\mathbb{H}_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C}))$.
 3. Si $\alpha \in \mathbb{H}^1(\Sigma, \mathbb{C}^*)$ a pour image un sous-groupe de \mathbb{U} qui est différent de $\langle \exp(\frac{2i\pi}{n}) \rangle$ pour $n = 1, 2, 3, 4, 6$, alors l'image de $\text{Stab}(\alpha)$ par la représentation de Chueshev est dense dans $\text{PU}(1, 1) \subset \text{PSL}(2, \mathbb{C}) \simeq \text{PGL}(\mathbb{H}_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C}))$.
 4. Si $\alpha \in \mathbb{H}^1(\Sigma, \mathbb{C}^*)$ a pour image $\langle \exp(\frac{2i\pi}{n}) \rangle$ pour $n = 1, 2, 3, 4, 6$, alors l'image de $\text{Stab}(\alpha)$ par la représentation de Chueshev est dense dans $\text{PU}(1, 1) \subset \text{PSL}(2, \mathbb{C}) \simeq \text{PGL}(\mathbb{H}_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C}))$.

On dédie le reste de cette sous-section à la preuve du Lemme 4, qui nécessite l'examen de plusieurs sous-cas. On règlera la plupart d'entre eux en examinant l'action de deux twists de Dehn le long de courbes séparantes.

L'action d'un groupe engendré par deux twists de Dehn. On explique dans cette section que bien souvent, l'action de deux twists de Dehn bien choisis engendre un groupe qui est non-discret dans $\mathbf{P}(H_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C}))$.

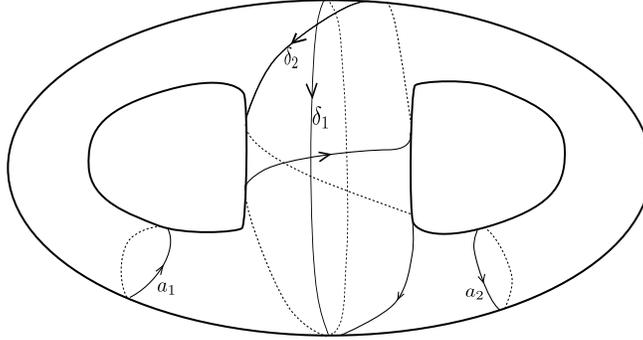


FIGURE 1.3 – Les courbes δ_1, δ_2, a_1 et a_2 .

Considérons les deux courbes δ_1 et δ_2 de la Figure ?? . Notons $G \subset \mathcal{I}(\Sigma)$ le sous-groupe que les twists de Dehn le long de ces courbes engendrent. Soit T_i l'automorphisme Γ induit pas le twist de Dehn le long de δ_i . Il agit sur $Z_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$ en préservant $(1 - \alpha)$. La Proposition 7 assure que l'action de T_i^{-1} est $T_i^{-1} \cdot \lambda = \lambda \circ T_i = \lambda + \varphi_i \cdot \mu_i$ où $\mu_i \in Z_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$ et φ_i est la forme linéaire $\lambda \mapsto \lambda([\delta_i])$, qui vérifie $\varphi_i(\mu_i) = 0$. Les courbes a_1 et a_2 sont celles dessinées sur la Figure ??.

Proposition 8.

1. $\mu_1(\delta_1) = (1 - \alpha(a_1))^{-1} \cdot (1 - \alpha(a_2))^{-1}$
2. $\mu_2(\delta_2) = (1 - \alpha(a_1)) \cdot (1 - \alpha(a_2))$
3. $\mu_1(\delta_2) = 0$
4. $\mu_2(\delta_1) = 0$

Démonstration. Les deux dernières égalités sont la conséquence directe du fait qu'une courbe fermée ne s'auto-intersecte pas.

Écrivons $\mu_1(\delta_2) = \sum_{i=1}^n \epsilon(i) \alpha^{-1}([\beta_i])$ comme dans la preuve de la Proposition 8. On calcule β_i en utilisant l'algorithme de la preuve de la Proposition 7. β_1 est homologiquement trivial car δ_1 et δ_2 s'intersectent d'abord en p .

β_2 se construit en suivant δ_2 de p à q_2 puis en allant à p le long de δ_1 . Cela donne la courbe suivante :

Cette courbe β_2 est homologue à a_1^{-1} . En continuant l'algorithme, on trouve que :

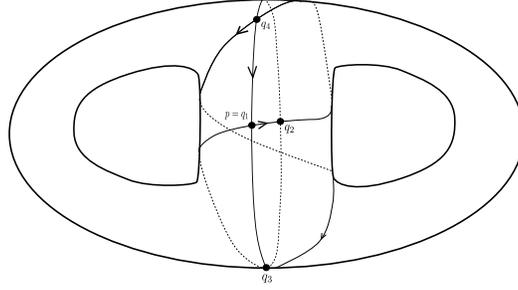


FIGURE 1.4 – Combinatoire des intersections entre δ_1 et δ_2

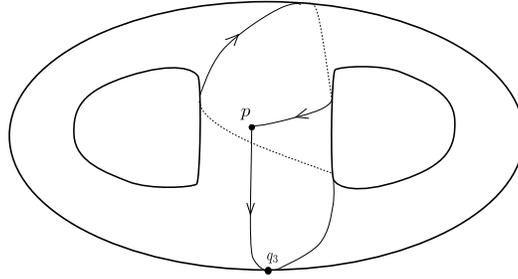


FIGURE 1.5 – La courbe β_2

- β_1 est homologue à 0.
- β_2 est homologue à a_1^{-1} .
- β_3 est homologue à $a_1^{-1}a_2^{-1}$.
- β_4 est homologue à a_2^{-1} .

On peut alors conclure que $\mu_1(\delta_2) = 1 - \alpha(a_1) + \alpha(a_1)\alpha(a_2) - \alpha(a_2)$. Un calcul similaire donne la valeur de $\mu_2(\delta_1)$ annoncée dans l'énoncé. □

Proposition 9. *Si $\alpha(a_1)$ et $\alpha(a_2)$ sont différents de 1, les classes $[\mu_1]$ et $[\mu_2] \in H_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$ forment une base de $H_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que

$$a\mu_1 + b\mu_2 + c(1 - \alpha) = 0$$

En évaluant en δ_1 et δ_2 , on trouve que $0 = a\mu_1(\delta_2) = b\mu_2(\delta_1)$. L'hypothèse de la proposition implique que $a = b = 0$ ce qui implique que $c = 0$. La famille $([\mu_1], [\mu_2])$ est donc libre et comme $\dim(H_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})) = 2$, c'est une base de $H_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$. □

La proposition 8 donne l'écriture des matrices de l'action de T_1 et T_2 dans cette base :

$$\begin{pmatrix} 1 & (1 - \alpha^{-1}(a_1))(1 - \alpha(a_2)^{-1}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (1 - \alpha(a_1))(1 - \alpha(a_2)) & 1 \end{pmatrix}$$

Lemme 5 (Jorgensen). *Si deux matrices A et B engendrent un sous groupe non-élémentaire discret de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ alors*

$$|\mathrm{Tr}(A)^2 - 4| + |\mathrm{Tr}(ABA^{-1}B^{-1}) - 2| \geq 1.$$

On trouvera la preuve de ce lemme classique dans [Jør76].

Calculons la quantité du lemme pour les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(ABA^{-1}B^{-1}) &= 2 + (ab)^2 \\ \mathrm{Tr}(A) &= 2 \end{aligned}$$

Il est clair que si a et b sont tout les deux non nuls, le groupe engendré par A et B est non-élémentaire. Si de plus $|ab| < 1$, $\langle A, B \rangle$ n'est pas discret.

Revenons à l'action de T_1 et T_2 . Si les courbes a_1 et a_2 sont telles que $A = \alpha(a_1)$ et $B = \alpha(a_2)$ sont tout deux différents de 1, les matrices de T_1 et T_2 dans la base $([\mu_1], [\mu_2])$ sont donc

$$\begin{pmatrix} 1 & (1 - A)(1 - B) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (1 - A^{-1})(1 - B^{-1}) & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi dès lors que le produit $(2 - A - A^{-1})(2 - B - B^{-1})$ est strictement plus petit que 1, ces deux matrices engendrent un sous-groupe de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ non-discret et non-élémentaire d'après le lemme de Jorgensen. Son adhérence est donc un sous-groupe de Lie non élémentaire dont la composante connexe de l'identité est soit $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ ou $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ (qui est lui-même conjugué à $\mathrm{PU}(1, 1)$). Distinguer l'un de l'autre peut se faire en regardant les traces des éléments du groupe, qui sont forcément réelles dans le cas $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Dans les cas suivants :

- $\mathrm{Im}(\alpha)$ est dense dans \mathbb{C}^* ,
- $\mathrm{Im}(\alpha)$ est dense dans \mathbb{R}^* ,
- $\mathrm{Im}(\alpha)$ contient un sous groupe dense dans \mathbb{U} ,

on peut trouver une configuration (à l'action du groupe modulaire près) telle que A et B satisfont les hypothèses pour appliquer le lemme de Jorgensen. L'adhérence de l'image du groupe de Torelli dans $\mathrm{PGL}(\mathbb{H}_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})) \simeq \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ est

- tout $\mathrm{PGL}(\mathbb{H}_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C}))$ si $\mathrm{Im}(\alpha)$ est dense \mathbb{C}^* ;
- le stabilisateur dans $\mathrm{PGL}(\mathbb{H}_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C}))$ de la projectivisation des éléments de $\mathbb{H}_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$ qui sont totalement réels si $\mathrm{Im}(\alpha)$ est dense dans \mathbb{R}^* ;
- si $\mathrm{Im}(\alpha)$ est contenu et dense dans \mathbb{U} , la projectivisation des isométries de la forme volume définie en 1.2.5 (qui a signature $(1, 1)$) ; ou tout $\mathrm{PGL}(\mathbb{H}_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C}))$ si $\mathrm{Im}(\alpha)$ contient un sous-groupe dense dans \mathbb{U} et $\mathrm{Im}(|\alpha|)$ est discret dans \mathbb{R}_+^* .

Le dernier cas peut être raffiné. On a juste besoin de trouver A et B dans $\mathrm{Im}(\alpha)$ tel que $(2 - A - A^{-1})(2 - B - B^{-1}) < 1$, l'image du groupe de Torelli est donc dense dans $\mathrm{PU}(1, 1)$ quand $\mathrm{Im}(\alpha) = \langle \exp(\frac{2i\pi}{n}) \rangle$ pour $n \neq 1, 2, 3, 4, 6$. Cela vient du fait que $(2 - \exp(\frac{2ik\pi}{n}) - \exp(\frac{2ik\pi}{n})^{-1}) = 2(1 - \cos(\frac{2ik\pi}{n}))$ qui peut-être rendu plus petit que 1 si et seulement si n n'est pas dans la liste 1, 2, 3, 4, 6. En fait, si n appartient à cette liste, l'image de $\mathrm{Stab}(\alpha)$ par la représentation de Chueshev est incluse dans $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{Z})$ si $n = 1$ ou 2, $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{Z}[i])$ si $n = 4$ et $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{Z}[\omega])$ si $n = 3$ ou 6.

Pour traiter les cas restants, nous allons avoir besoin d'utiliser des éléments de $\mathrm{Stab}(\alpha)$ qui ne sont pas dans le groupe de Torelli. On ne sait pas si l'image de $\mathcal{I}(\Sigma)$ peut être discrète dans d'autres cas que ceux sus-mentionnés.

Quand les courbes séparantes ne suffisent pas. On considère ici α tel que $\mathrm{Im}(\alpha)$ est (à indice fini près) le sous-groupe discret cyclique \mathbb{R}_+^* engendré par $r > 1$, une paire de twists de Dehn comme dans le paragraphe précédent engendre un groupe isomorphe au groupe engendré par les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & (1 - r^n)(1 - r^m) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (1 - r^{-n})(1 - r^{-m}) & 1 \end{pmatrix}$$

pour des entiers $n, m \in \mathbb{Z}$ tout deux non nuls. Dès lors que r est suffisamment grand, ce groupe est discret. La méthode précédente ne marche donc pas directement et la manière dont nous allons nous en sortir est de considérer des twists de Dehn le long de courbes non séparantes sur lesquelles α est trivial.

Considérons donc α une courbe fermée simple appartenant à $\mathrm{Ker}(\delta)$. Ainsi $T_a \in \mathrm{Mod}(\Sigma)$ le twist de Dehn le long de a appartient à $\mathrm{Stab}(\alpha)$. Soit δ une courbe séparatrice telle que δ et ν sont les courbes bleues et rouge de la Figure 1.6.

Lemme 6. *Le groupe engendré par l'action de T_δ et T_a , où δ et a sont comme dans la Figure 1.6, est un sous-groupe parabolique de $\mathrm{PGL}(\mathbb{H}_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C}))$ dont les matrices dans la base μ_δ, λ où λ est tel que $\lambda(\delta) = 1$ sont*

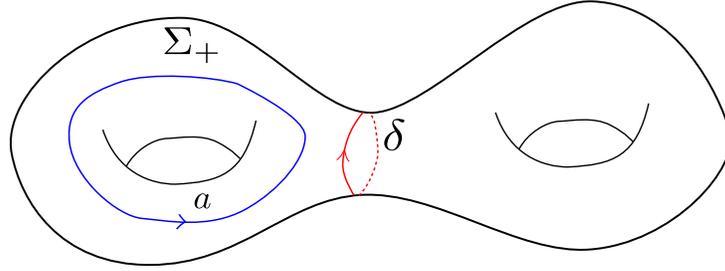


FIGURE 1.6 – Les courbes a et δ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 - \alpha(b) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec b n'importe quelle courbe de Σ_+ telle que $a \wedge b = 1$.

Démonstration. Ce lemme est la conséquence de deux remarques

- μ_δ et μ_a sont égaux. Il suffit de calculer leur valeurs sur une base et du fait que $\alpha(a) = 1$ se déduit l'égalité.
- Soit \tilde{a}, \tilde{b} et $\tilde{\delta}$ des relevés de a, b et δ à $\pi_1\Sigma$, tels que $\tilde{\delta} = [\tilde{a}, \tilde{b}]$. Alors pour tout $\lambda \in Z_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$, $\lambda(\tilde{\delta}) = (1 - \alpha(b))\lambda(\tilde{a}) - (1 - \alpha(a))\lambda(\tilde{b}) = (1 - \alpha(b))\lambda(\tilde{a})$.

Le lemme est alors une conséquence directe de la Proposition 7. □

Si r est irrationnel, pour un choix de configuration tel que $\alpha(b) = r$, ces deux matrices engendrent un sous-groupe dense dans le sous-groupe à un paramètre dans lequel elles sont contenues. Si $r = \frac{p}{q}$ avec p et q des entiers premiers entre eux, elles engendrent le groupe cyclique engendré par $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{q} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et comme $r \neq 1$, $q \geq 2$ et en faisant la même chose avec la courbe δ , on se retrouve avec deux matrices nous permettant d'appliquer le lemme de Jorgensen et de conclure que l'action de $\text{Stab}(\alpha)$ a pour image un sous groupe dense dans $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Passer au cas où $\text{Im}(\alpha)$ a un sous groupe d'indice fini discret dans \mathbb{R}^* ne présente pas de difficulté supplémentaire. Cela conclut la preuve du Lemme 4.

En genre quelconque.

Dans cette sous-section, on complète la preuve des théorèmes annoncés au début de la Section 1.2.7. L'idée générale de la preuve est la suivante : des sous-surfaces de genre 2 plongé dans Σ permettent de voir des copies de $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$, $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ ou $\text{PU}(1, 1)$ dans $\text{PGL}(H_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})) \simeq \text{PGL}(2g-2, \mathbb{C})$ (en fonction de la nature de α)

et tous ces plongements engendrent tout le groupe $\mathrm{PGL}(2g-2, \mathbb{R}), \mathrm{PGL}(2g-2, \mathbb{C})$ ou $\mathrm{PU}(g-1, g-1)$.

Le lemme suivant de théorie des groupes de Lie indique clairement la marche à suivre :

Lemme 7. *Soit $G < \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ un sous-groupe de Lie semi-simple, connexe, agissant de manière irréductible sur \mathbb{C}^n et contenant une copie de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ qui préserve une décomposition $\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^{n-2}$, en agissant naturellement sur \mathbb{C}^2 et fixant \mathbb{C}^{n-2} . Alors $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ ou $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$.*

Ce lemme et sa preuve sont dans [BH89, Proposition 6.4, p345]. L'énoncé est d'ailleurs plus général et la version qu'on présente est une spécialisation du l'énoncé à leur cas $c = +1$. Maintenant, on peut dérouler : on montre que l'action de $\mathrm{Stab}(\alpha) \subset \mathrm{Aut}(\Gamma)$ est irréductible sur $H_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$, et on y trouve des copies de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ (ou $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ ou $\mathrm{PU}(1, 1)$ pour les cas non-générique) agissant comme dans le lemme grâce aux sous-représentations provenant du genre 2.

Lemme 8. *Pour tout $\alpha \in H^1(\Sigma, \mathbb{C}^*)$, $r_\alpha(\mathrm{Stab}(\alpha)) \subset \mathrm{GL}(H_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C}))$ agit sur $H_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$.*

Démonstration. Soit V un sous-espace vectoriel strict de $H_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$. Il existe alors une courbe δ fermée simple séparante telle que :

- $\exists \varphi \in V$ telle que $\varphi([\delta]) \neq 0$;
- μ_δ (cf. Section 1.2.7) n'appartient pas à V .

Pour voir ça il suffit de prendre une base $(\mu_{\delta_i}, \mu_{\nu_i})_{1 \leq i \leq g}$ où les δ_i et μ_i sont comme dans Figure 1.7

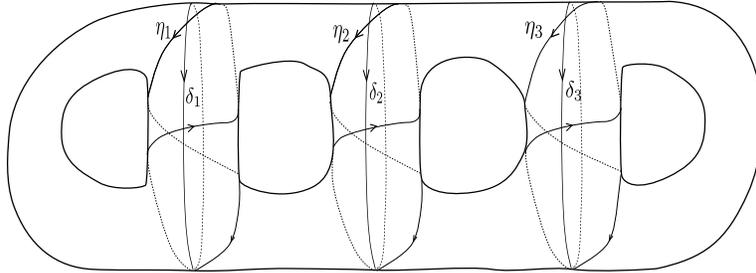


FIGURE 1.7 – La base $(\mu_{\delta_i}, \mu_{\nu_i})$ en genre 3.

Soit un des δ_i satisfait aux hypothèses du lemme, soit une sous-famille $(\mu_{\delta_i}, \mu_{\nu_i})_{i \in I}$ est une base de V auquel cas il est facile de trouver une courbe séparante satisfaisant aux hypothèses du lemme, juste en s'assurant qu'elle intersecte non trivialement toutes les courbes δ_i par exemple. Ainsi T_δ envoie φ en dehors de V car

$T_\delta \cdot \varphi = \varphi + \varphi([\delta])\mu_\delta$. Ceci implique que l'action de $\mathrm{Stab}(\alpha)$ est irréductible sur $H_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$. \square

- Lemme 9.** 1. Si $\text{Im}(\alpha) \subset \mathbb{U}$ et est différent de $\langle \exp(\frac{2i\pi}{n}) \rangle$ pour $n = 1, 2, 3, 4, 6$, alors l'adhérence de $r_\alpha(\text{Stab}(\alpha)) \subset \text{PGL}(\mathbb{H}_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})) \simeq \text{PGL}(2g-2, \mathbb{C})$ contient une copie $\text{PU}(1, 1)$ dont le relevé à $\text{SL}(2g-2, \mathbb{C})$ préserve une décomposition $\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^{2g-4}$, en agissant comme $\text{U}(1, 1)$ sur le facteur \mathbb{C}^2 et trivialement sur l'autre.
2. Si $\text{Im}(\alpha) \subset \mathbb{R}$ et α n'est pas unitaire, alors l'adhérence de $r_\alpha(\text{Stab}(\alpha)) \subset \text{PGL}(\mathbb{H}_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})) \simeq \text{PGL}(2g-2, \mathbb{C})$ contient une copie de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ dont le relevé à $\text{SL}(2g-2, \mathbb{C})$ préserve une décomposition $\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^{2g-4}$, en agissant comme $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ sur le facteur \mathbb{C}^2 et trivialement sur l'autre.
3. Si $\text{Im}(\alpha)$ est n'importe quel autre sous-groupe de \mathbb{C}^* , alors l'adhérence de $r_\alpha(\text{Stab}(\alpha)) \subset \text{PGL}(\mathbb{H}_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})) \simeq \text{PGL}(2g-2, \mathbb{C})$ contient une copie de $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ dont le relevé à $\text{SL}(2g-2, \mathbb{C})$ préserve une décomposition $\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^{2g-4}$, en agissant comme $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ sur le facteur \mathbb{C}^2 et trivialement sur l'autre.

Démonstration. La stratégie consiste à choisir un couple approprié de twists de Dehn dont l'action génère le sous groupe voulu. Pour un α générique, le couple de courbe δ et ν comme dans la Figure ci-dessous fera l'affaire.

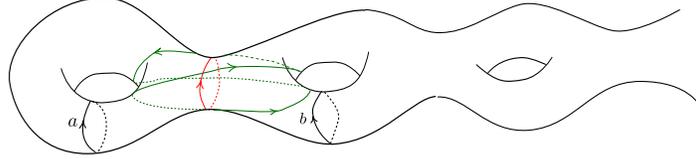


FIGURE 1.8 – Les courbes δ et ν en rouge et vert.

Les mauvais cas sont ceux pour lesquels a et b tels que $(2 - A - A^{-1})(2 - B - B^{-1}) < 1$ où $A = \alpha(a)$ et $B = \alpha(b)$, cf. Section 1.2.7. Cela correspond, comme nous l'avons vu dans la Section précédente, au cas suivants

- α est unitaire avec pour image $\langle \exp(\frac{2i\pi}{n}) \rangle$ et $n = 1, 2, 3, 4, 6$;
- $\text{Im}(|\alpha|)$ est discret et $\arg(\alpha)$ est discret.

On ne peut rien faire pour le premier cas, car nous avons vu dans ce cas que l'image de la représentation de Chueshev est dans ce cas incluse dans un sous-groupe arithmétique discret de $\text{PGL}(\mathbb{H}_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C}))$.

Dans le second, l'astuce du genre 2 continue de marcher, en considérant des twists de Dehn le long de courbes fermées simples le long de courbes séparantes ; on s'assure ainsi d'engendrer un sous-groupe dense dans $\text{U}(1, 1)$, $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ ou $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ pour l'action induite sur le sous-espace engendré par μ_δ et μ_ν . En considérant une famille de courbes fermées simples $(\eta_i)_{1 \leq i \leq 2g-4}$ telles que

- les η_i sont séparantes ;

- les η_i sont toutes disjointes de δ et ν ;
- les μ_{δ_i} complètent μ_δ et μ_ν en une base de $H_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$.

Le sous-espace engendré par les η_i est donc fixé par l'action du sous-groupe qu'on a construit ce qui finit la preuve du lemme. \square

Nous sommes maintenant armés pour terminer la preuve des Théorèmes 20, 21 et 22 annoncé en début de section. Soit G la composante connexe de l'identité du relevé à $SL(2g-2, \mathbb{C})$ de l'adhérence de l'image de $\text{Stab}(\alpha)$ dans $\text{PGL}(H_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})) \simeq \text{PGL}(2g-2, \mathbb{C})$; c'est un sous-groupe de Lie réel de $SL(2g-2, \mathbb{C})$. On distingue trois cas.

1. α est générique, i.e. son image n'est contenue ni dans U ou \mathbb{R}^* .

Considérons le sous-groupe donné par le lemme 9. L'adhérence d'un tel groupe appartient à G . Par ailleurs l'action de G est irréductible sur \mathbb{C}^n , d'après le lemme 8. Ainsi le lemme 7 implique que G est tout $SL(2g-2, \mathbb{C})$ car G ne préserve aucune forme symplectique.

2. α est totalement réel et non unitaire.

En complexifiant, on se ramène au cas précédent. Si G était un sous-groupe strict de $SL(2g-2, \mathbb{R})$, sa complexification $G_{\mathbb{C}} \subset \text{PGL}(2g-2, \mathbb{C})$ serait aussi un sous-groupe strict. Mais alors $G_{\mathbb{C}}$ serait tel que

- son action sur \mathbb{C}^n est irréductible ;
- il contient une copie de $SL(2, \mathbb{C})$ satisfaisant les hypothèses du lemme 7.

On peut alors conclure que $G = SL(2g-2, \mathbb{R})$.

3. α est unitaire non exceptionnel.

$SU(g-1, g-1)$ étant une autre forme réelle de $SL(2g-2, \mathbb{C})$, l'opération de complexification opérée dans le cas réel se généralise et on peut conclure que G est tout $PU(g-1, g-1)$.

La représentation de Chueshev dans les cas exceptionnels.

On l'a déjà mentionné un certain nombre de fois, les cas $\text{Im}(\alpha) = \langle \exp(\frac{2i\pi}{n}) \rangle$ pour $n = 1, 2, 3, 4$ ou 6 sont exceptionnels car l'image de la représentation de Chueshev y est discrète.

Le cas du genre 2. En genre 2, la dimension complexe de $H_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$ est 2 et la représentation de Chueshev définit donc

$$\tau_\alpha : \text{Stab}(\alpha) \longrightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{C})$$

Dans les cas exceptionnels, l'image de cette représentation est discrète. Plus précisément, l'image de τ_α tombe dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$, $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}[i])$ ou $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}[\omega])$ selon que $n = 2$, $n = 4$ ou $n = 3, 6$ respectivement.

Le feuilletage isopériodique de l'espace des surfaces de demi-translation.

Une surface de demi-translation est une surface affine branchée dont l'holonomie linéaire prend ses valeurs dans $\{-1, 1\}$. Pour des raisons culturelles liées au développement de l'étude de ces structures en marge de celui des structures de translation, on appelle la partie de translation d'une telle surface ses *périodes*, voir [Zor06] pour un joli survol du domaine.

Théorème 23 (Calsamiglia-Deroin-Francaviglia, [CDF14]). *Le feuilletage isopériodique de l'espace des surfaces de translations est ergodique. Plus précisément, il y a une correspondance entre ses propriétés dynamiques et celle de l'action de $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ sur l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^{2g} \times \mathbb{R}^{2g}$ tels que $x \wedge y = 1$.*

L'analyse des section précédente implique la remarque suivante

Remarque 6. *Si $g = 2$, l'action du groupe modulaire sur l'espace des périodes des surfaces de demi-translation dont les angles sont des multiples de 2π est propre.*

Genre arbitraire.

1.2.8 Résultats sur l'action de $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ sur $\chi(\Gamma, \mathrm{Aff}(\mathbb{C}))$.

De la description de l'action de $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ sur $H^1(\Sigma, \mathbb{C}^*)$ faite en section 1.2.6, et de celle de l'image de la représentation de Chueshev faite en section 1.2.7 on déduit les deux corollaires suivants. Le premier est un théorème d'ergodicité et le second de régularité des fermés invariants de l'action de $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ sur χ . On peut y penser comme des généralisations des théorèmes de Howe-Moore pour le premier et de Ratner pour le second.

Corollaire 2. *L'action du groupe modulaire sur χ est ergodique relativement à la mesure de Lebesgue.*

Démonstration. L'action de $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ sur $H^1(\Sigma, \mathbb{C}^*)$ est ergodique, c'est une application directe du théorème de Howe-Moore. Comme pour presque tout $\alpha \in H^1(\Sigma, \mathbb{C}^*)$, $\tau_\alpha(\mathrm{Stab}(\alpha))$ est dense dans $\mathrm{PGL}(H_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C}))$, l'ergodicité résulte directement du théorème de Fubini, car la structure de fibré de χ est analytique. □

Corollaire 3. *Soit $x \in \chi$ tel que l'image de la partie linéaire de χ n'est pas un groupe fini de racines de l'unité d'ordre 2, 3, 4 ou 6. Alors l'adhérence de $\mathrm{Mod}(\Sigma) \cdot x$ est une sous-variété analytique de χ .*

Démonstration. Soit x satisfaisant les hypothèses du corollaire. La projection de $\overline{\text{Mod}(\Sigma) \cdot x}$ sur $H^1(\Sigma, \mathbb{C}^*)$ est l'adhérence de l'orbite α de la partie linéaire de x , qui est une sous-variété analytique en vertu de l'application du théorème de Ratner expliquée dans la section 1.2.6. La pré-image dans $\mathbf{P}(H_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C}))$ de $\overline{\text{Mod}(\Sigma) \cdot x}$ est l'image de la partie de translation de x par $\overline{\tau_\alpha(\text{Stab}(\alpha))}$ qui est une sous-variété analytique. Ainsi $\overline{\text{Mod}(\Sigma) \cdot x}$ est localement le produit d'une sous-variété analytique de la fibre avec une sous-variété analytique de la base.

□

1.3 Holonomie des structures affines.

On étudie dans cette section la question de la réalisation des représentations de Γ dans $\text{Aff}(\mathbb{C})$ par une structure affine branchée. On prouve le théorème suivant :

Théorème 24. *Soit $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Aff}(\mathbb{C})$ une représentation non-abélienne.*

- *Si ρ est strictement affine, alors ρ est la représentation d'holonomie d'une structure affine branchée.*
- *Si ρ est euclidienne, ρ est la représentation d'holonomie d'une structure affine branchée si et seulement si son volume est strictement positif.*

La preuve repose essentiellement sur deux arguments :

1. en vertu du principe d'Erhessmann-Thurston, l'ensemble des représentations géométrique est un ouvert de la χ ;
2. cet ensemble est $\text{Mod}(\Sigma)$ -invariant, et son complémentaire est un fermé invariant que la classification opérée dans la section d'avant va permettre de facilement identifier.

Reste qu'un petit nombre de cas ne seront pas complètement à notre portée en utilisant l'action du groupe modulaire, en nous gèrerons ces cas à la main, en les réalisant par des modèles explicites.

1.3.1 L'argument d'Erhessmann-Thurston.

L'argument d'Erhessmann-Thurston est un principe général dans la théorie des (G, X) -structure qui assure que toute (G, X) -structure d'holonomie ρ_0 peut-être déformée en une structure d'holonomie ρ , pour toute représentation ρ proche de ρ_0 . En particulier, l'ensemble des représentations géométriques est ouvert. Il repose sur une application du théorème de fibration d'Erhessmann popularisée par Thurston.

Nous expliquons comment ce principe marche dans le cas des structures affines branchées, car l'existence des points de branchements demande un léger raffinement des arguments.

Proposition 10. *L'ensemble des représentations géométriques est un ouvert de $\text{Hom}(\Gamma, \text{Aff}(\mathbb{C}))$. Sa projection est donc ouverte dans $\chi(\Gamma, \text{Aff}(\mathbb{C}))$ et invariante par l'action de $\text{Mod}(\Sigma)$.*

Démonstration. L'invariance par $\text{Mod}(\Sigma)$ est facile. Considérons une structure affine dont l'holonomie est ρ et f un difféomorphisme de Σ . Le tiré en arrière par f de cette structure affine a pour holonomie $[\rho \circ f^*]$, et $[\rho \circ f^*]$ est donc géométrique.

On explique maintenant comment appliqué le théorème de fibration d'Ehresmann pour déformer une structure affine donnée en réalisant toute les représentations proches comme holonomie de cette structure déformée. Soit ρ_0 l'holonomie d'une structure affine branchée sur Σ et $U \subset \text{Hom}(\Gamma, \text{Aff}(\mathbb{C}))$ un ouvert contenant ρ_0 . Le groupe Γ agit proprement et discontinument sur $U \times \tilde{\Sigma} \times \mathbb{CP}^1$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} U \times \tilde{\Sigma} \times \mathbb{CP}^1 &\longrightarrow U \times \tilde{\Sigma} \times \mathbb{CP}^1 \\ (\rho, x, z) &\longmapsto (\rho, \gamma \cdot x, \rho(\gamma) \cdot z) \end{aligned}$$

On note le quotient de cette action E . La projection naturelle $E \rightarrow U$ est une submersion dont les fibres sont compactes (elles sont toutes difféomorphes à $\Sigma \times \mathbb{CP}^1$). Le théorème d'Ehresmann nous assure que c'est un fibré, et on note M_ρ la fibre au-dessus de $\rho \in U$. M_ρ est lui même un fibré plat en \mathbb{CP}^1 au-dessus de Σ dont la monodromie est exactement ρ . On note \mathcal{F}_ρ le feuilletage associé à cette connexion plate.

La projection sur le facteur Σ donne aussi une structure de fibré à E dont la fibre est $U \times \mathbb{CP}^1$. Le théorème d'Ehresmann combiné à la famille continue de feuilletage \mathcal{F}_ρ nous permet de trouver pour tout point $p \in \Sigma$ un voisinage $\Omega_p \ni p$ tel que tout voisinage de $(\rho_0, p) \times \mathbb{CP}^1$ dans E a une structure produit de la forme $U' \times \Omega \times \mathbb{CP}^1$ tels que les ensembles $\rho \times \Omega \times \{z\}$ sont inclus dans des feuilles de \mathcal{F}_ρ .

On est maintenant près à prouver qu'une structure affine d'holonomie ρ_0 peut être déformée en une structure d'holonomie ρ pour tout ρ suffisamment proche de ρ_0 . Une structure affine sur Σ d'holonomie ρ est la donnée d'une section de M_ρ qui est transverse à \mathcal{F}_ρ , à part en un nombre fini de point où elle est tangente au feuilletage à un ordre fini. Considérons une trivialisations arbitraire $V \times M_{\rho_0}$ de E au dessus d'un voisinage V de ρ_0 . Le graphe de la section s_0 de M_{ρ_0} peut être poussé à tout M_ρ pour tout $\rho \in V$ dans en utilisant cette trivialisations. En utilisant aussi les trivialisations définies dans le paragraphe précédent, il est facile de voir que si s_0 était transverse à \mathcal{F}_ρ à l'exception d'un nombre fini de points il en va de même pour les poussés en avant qu'on vient de décrire. De plus, à ces points exceptionnels de tangence, les poussés en avant doivent avoir le même ordre de tangence, ils définissent donc bien des structures affines d'holonomie ρ pour tout $\rho \in V$. □

1.3.2 Le théorème de Haupt.

Le problème de l'holonomie dans le cas des structures de translations branchées est déjà non trivial. C'est au mathématicien allemand Otto Haupt qu'on doit la description des morphismes de périodes apparaissant comme l'holonomie

d'une structure de translation (ou de manière équivalente comme le morphisme de période d'une différentielle holomorphe sur une surface de Riemann).

Théorème 25 (Haupt, [Hau20]). *Soit $\omega \in H^1(\Sigma, \mathbb{C})$. Cet élément peut être réalisé comme l'holonomie d'une surface de translation si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *le volume d' ω est positif;*
2. *si l'image d' ω est un réseau Λ dans \mathbb{C} , alors $\text{vol}(\omega) > \text{vol}(\mathbb{C}/\Lambda)$.*

Ce théorème a été reprouvé par M. Kapovich dans une note remarquable qui demeure non-publié (voir [Kap]). Il remarque que l'espace des périodes de volume 1 admet une description comme le quotient d'un groupe de Lie semi-simple G par un sous-groupe de Lie N engendré par des unipotents, et que l'action du groupe modulaire transite par l'action d'un réseau de G . En remarquant que l'ensemble des périodes "géométrique" est ouvert, il utilise le théorème de Ratner pour en décrire le complémentaire

1.3.3 Représentations abéliennes.

On traite d'abord le cas des représentations abéliennes. Il y a deux possibilités pour un sous-groupe abélien de $\text{Aff}(\mathbb{C})$: soit il contient une translation et est dans ce cas complètement contenu dans le sous-groupe des translations, soit il contient un élément qui n'est pas une translation et est dans ce cas contenu dans le stabilisateur d'un point.

Le théorème de Haupt présenté traite la question de la géométrisation des représentations dont l'image est contenu dans le groupe des translations. Par l'intermédiaire de l'opération d'*exponentiation*, il va nous permettre de résoudre l'autre cas. Cette opération marche de la manière suivante : en partant d'une surface affine branchée dont l'image de l'holonomie est contenue dans les translations (autrement une surface de translation), on considère la structure affine branchée obtenue en considérant l'exponentielle des cartes de la structure de translation initiale. Si l'holonomie de la structure de translation était $\gamma \mapsto (z \mapsto z + t(\gamma))$, l'holonomie de son exponentielle est $\gamma \mapsto (z \mapsto e^{t(\gamma)} \cdot z)$ et est commutative du deuxième type. Réciproquement on prouve que toute surface affine branchée dont l'holonomie est abélienne du deuxième type est l'exponentielle d'une surface de translation :

Proposition 11. *Soit (Σ, \mathcal{A}) une structure affine branchée dont l'holonomie est abélienne et telle que \mathcal{A} n'est pas une surface de translation (ou de manière équivalente dont l'image de l'holonomie tombe dans le stabilisateur d'un point). Il existe une (unique) structure de translation \mathcal{T} sur Σ telle que $\mathcal{A} = \exp(\mathcal{T})$.*

Démonstration. Soit f une développante pour \mathcal{A} dont l'holonomie correspondante fixe 0. Alors $\omega = \frac{df}{f}$ définit une forme méromorphe sur la surface de Riemann correspondante. Les pôles de ω sont exactement aux points d'annulation de f et son résidu à chacun de ces points est l'ordre d'annulation de f en ce point. La formule des résidus implique que la somme des résidus doit être nulle, ce qui implique qu'il n'y a pas de pôle, car leurs résidus sont nécessairement strictement positifs. En particulier f ne s'annule pas et ω est en fait holomorphe. Elle définit donc une structure de translation dont l'exponentielle est \mathcal{A} car $\omega = \frac{df}{f}$ est la différentielle du logarithme (défini seulement localement) de f . □

De cette proposition on déduit

Corollaire 4. *Une représentation abélienne qui n'est pas de translation est l'holonomie d'une structure affine branchée si et seulement si elle n'est pas unitaire.*

Démonstration. Soit ρ une telle représentation, il suffit de trouver une période p satisfaisant aux hypothèses du théorème de Hopf tel que $\exp(p) = \rho$. Une telle période est unique à l'ajout de morphismes $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \rightarrow 2i\pi\mathbb{Z}$ et à moins que p soit imaginaire pur, il est possible quitte à rajouter un élément de $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \rightarrow 2i\pi\mathbb{Z}$ pour rendre p admissible. □

1.3.4 Représentations strictement affines.

En s'appuyant sur la Proposition 10, il est facile de prouver que toute représentation strictement affine (*i.e.* dont la partie linéaire est non-unitaire) est géométrique. En effet si $\alpha : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^*$ est non-unitaire il existe une structure de translation dont l'exponentielle a pour holonomie α . Ce α représente le point 0 dans $H_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$ et d'après la Proposition 10, l'ensemble des représentations géométriques avec holonomie α est un ouvert de $H_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C})$ contenant 0, sa projection sur $\mathbf{P}(H_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C}))$ est donc surjective ce qui termine la preuve.

Cette astuce ne marche plus pour les représentations euclidiennes que les seules représentations abéliennes unitaires et géométriques sont les celles ayant holonomie linéaire triviale. C'est pour géométriser ces représentations que nous allons faire appel à l'action du groupe modulaire sur χ .

1.3.5 Représentations euclidiennes.

Si presque tous les cas de représentations euclidiennes peuvent être gérées en utilisant l'action de $\text{Stab}(\alpha) < \text{Mod}(\Sigma)$, les quelques cas exceptionnels seront gérés "à la main". On fera donc la distinction entre les cas où $\text{Im}(\alpha)$ est $\langle \exp(\frac{2i\pi}{n}) \rangle$ pour $n = 1, 2, 3, 4, 6$ (**cas exceptionnels**) et les autres (**cas génériques**).

Parties linéaires.

L'ensemble des parties linéaires euclidiennes non-géométriques est un fermé invariant par l'action de $\text{Mod}(\Sigma)$. C'est donc soit toutes les parties linéaires, ce qui impliquerait qu'il n'y a pas de structures affines branchées euclidiennes qui ne sont pas de translations, ce qui est aisément démenti par une construction géométrique simple. Ou alors il s'agit d'un ensemble discret de surface dont l'image de l'holonomie linéaire est un groupe fini fixé, et là encore on construit facilement des surfaces réalisant les cas donnés. Donc il n'y a pas de partie linéaire qui ne soit pas réalisée par une structure euclidienne branchée.

Le cas générique.

Si α est générique, on a vu que (voir Théorème 21) $\text{Stab}(\alpha) < \text{Mod}(\Sigma)$ agit sur $\mathbf{P}(H_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C}))$ via un sous-groupe dense dans $\text{PU}(g-1, g-1)$. Comme $\text{PU}(g-1, g-1)$ agit transitivement sur l'ensemble des représentations de volume positif (pensé comme un sous-ensemble de $\mathbf{P}(H_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C}))$), toute représentation de volume positif dont la partie linéaire est générique peut-être réalisée par une structure affine branchée.

Réalisations explicites des cas exceptionnels.

Si $\text{Im}(\alpha)$ est engendré par $-1, i, \omega_3 = \exp(\frac{2i\pi}{3})$ ou $\omega_6 = \exp(\frac{i\pi}{3})$, l'image de $\text{Stab}(\alpha)$ est discrète dans $\text{PGL}(H_\alpha^1(\Gamma, \mathbb{C}))$ et les arguments que l'on a donné dans tous les autres cas ne peuvent être utilisés. On va donc donner des modèles explicites de surfaces affines branchées réalisant ces cas en utilisant les chirurgies définies en section 1.1.1. On prouve d'abord un petit lemme donnant une forme normale pour les représentations dont la partie linéaire est d'image finie.

Lemme 10. *Soit $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Aff}(\mathbb{C})$ une représentation telle que $\text{Im}(\alpha)$ est fini de cardinal n , où α est la partie linéaire de ρ . Il existe alors un système de générateurs $\{A_1, B_1, \dots, A_g, B_g\}$ de $\Gamma = \pi_1\Sigma$ avec $\prod_{i=1}^g [A_i, B_i] = 1$ tel que*

- $\{A_1, B_1, \dots, A_g, B_g\}$ se projette en une base symplectique de $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$;
- $\rho(A_1) = z \mapsto e^{\frac{2i\pi}{n}} z + k$;
- $\rho(B_1) = z \mapsto z$;
- quel que soit $i > 1$, $\rho(A_i)$ et $\rho(B_i)$ sont des translations.

Démonstration. La preuve est élémentaire. Comme α est cyclique, on peut trouver une base symplectique $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ de $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ telle que $\alpha(a_1) = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $\alpha(b_1) = \alpha(a_2) = \dots = \alpha(b_g) = 1$.

La base $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ peut être relevée en un système de générateurs $\{A_1, B_1, \dots, A_g, B_g\}$ de $\pi_1\Sigma$ tel que $[A_1, B_1]^{-1} = \prod_{i=2}^g [A_i, B_i]$. Comme pour $i > 2$, $\rho(A_i)$ est une

translation, $\rho(\prod_{i=2}^g [A_g, B_g]) = \prod_{i=2}^g [\rho(A_g), \rho(B_g)]$ doit être trivial, ainsi $\rho(A_1)$ et $\rho(B_1)$ doivent commuter. Mais comme $\rho(A_1)$ est une rotation non-triviale et $\rho(B_1)$ est une translation, $\rho(B_1)$ est trivial. Ça termine la preuve du lemme. \square

On explique maintenant la stratégie que l'on va suivre. Pour le reste de la section, ρ est une représentation euclidienne dont la partie linéaire est d'image finie et a un volume positif. D'une forme normale de la représentation on déduit une représentation abélienne faite de translation sur une surface Σ' de genre $g-1$, qui passe au quotient en $p : H_1(\Sigma', \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{C}$. Si on peut trouver une structure de translation dont les périodes sont p , on peut géométriser ρ : il n'y a qu'à lui faire une chirurgie "ajout d'une anse" (voir le paragraphe 1.1.1) le long de deux segments formant un angle $\frac{2i\pi}{n}$ pour avoir une surface dont l'holonomie est ρ .

D'après le lemme 10, ρ se scinde en deux représentations : l'une du groupe fondamental d'une surface de genre $g-1$ et l'autre d'un tore. L'image de la représentation induite sur le tore est de volume nul car d'image cyclique ce qui implique que le volume de p est strictement positif, égal à celui de ρ . Si p peut-être réalisé par une surface de translation, on a gagné. Le théorème de Haupt rappelé précédemment nous assure qu'une telle représentation peut être réalisée à moins d'avoir image discrète et de violer la condition du théorème. Dans ce dernier cas, quitte à renormaliser on peut supposer que l'image de p est $\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}$. Notre stratégie va être de mettre ρ dans une forme telle qu'on va pouvoir la réaliser en partant du tore plat $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}$ et en réalisant un certain nombre de chirurgie successives.

D'après [CDF, Proposition 2.7], p doit avoir volume 1 et dans ce cas on peut trouver une base symplectique $a'_2, b'_2, \dots, a'_g, b'_g$ de Σ' telle que $p(a'_g) = 1, p(b'_g) = 1$ et $p(a'_i) = p(b'_i) = 0$ pour tout $1 < i < g$. On déduit de cette remarque qu'il existe une présentation de $\Gamma = \{A'_1, B'_1, \dots, A'_g, B'_g \mid \prod_{i=1}^g [A'_g, B'_g]\}$ telle que :

- $\rho(A'_1) = z \mapsto \exp(\frac{2i\pi}{n})z$;
- $\rho(B'_1) = z \mapsto z$;
- $\rho(A'_i) = \rho(B'_i) = z \mapsto z$ for $1 < i < g$;
- $\rho(A'_g) = z \mapsto z + 1$;
- $\rho(B'_g) = z \mapsto z + i$.

En utilisant certains Dehn twists de la sous-surface de genre $g-1$ avec une composante de bord dont le groupe fondamental est engendré par $A'_1, B'_1, \dots, A'_{g-1}, B'_{g-1}$, on déduit une présentation $\Gamma = \{A''_1, B''_1, \dots, A''_g, B''_g \mid \prod_{i=1}^g [A''_g, B''_g]\}$ telle que

- $\rho(A''_i) = z \mapsto \exp(\frac{2i\pi}{n})z$ for $1 \leq i < g$;
- $\rho(B''_i) = z \mapsto z$ pour tout $1 \leq i < g$;
- $\rho(A''_g) = z \mapsto z + 1$;
- $\rho(B''_g) = z \mapsto z + i$.

Une telle représentation se réalise en partant du tore plat $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}$ et en réalisant $g - 1$ chirurgies "ajout d'une anse" successives. Ceci conclut la preuve du théorème 24.

1.4 Perspectives.

Les structures affines branchées sur les surfaces de Riemann demeurent relativement mystérieuses. Le Théorème 24 donne une mesure grossière de la complexité de l'ensemble de telles structures : il en existe au moins autant que de représentations admissible $\Gamma \rightarrow \text{Aff}(\mathbb{C})$. Si on connaît quelques constructions efficaces de structures affines (chirurgies, recollements de polygones), on a finalement assez peu d'idées sur ce à quoi ressemble une surface affine "typique". On donne ici deux directions de recherches possibles pour aller dans ce sens.

Feuilletages isomonodromiques. On peut par exemple se poser la question suivante :

Question 4. *Soit Σ et Σ' deux surfaces affines ayant la même holonomie ρ . Est-il possible de déformer continument Σ en Σ' sans changer l'holonomie ?*

Cette question suggère l'existence d'un feuilletage de l'espace des modules des structures affines dont les feuilles sont localement définies par les lignes de niveau de l'application "holonomie". Un tel feuilletage est classiquement appelé *feuilletage isomonodromique* ou *isoholonomique*. De tels feuilletages dans le cas des structures de translations ou des structures projectives a déjà été bien étudiés (voir [CDF], [CDF14]) et il serait intéressant d'en entamer l'étude dans le cas des structures affines branchées.

Dégénérescence de structures affines, fonctions propres et espaces de modules. Une autre question importante me semble être la thématique générale de la dégénérescence de structures affines. Il faut d'abord définir une structure topologique raisonnable sur l'espace des modules de structures affines, travail à venir mais qui à l'aide soit de la théorie de Teichmüller, soit de paramétrisations "*polygones*" (expliquées dans le chapitre suivant dans le cas de certaines structures plates) semble être une affaire routinière. Ensuite, il nous semble intéressant d'essayer de caractériser le défaut de compacité d'un tel espace par des propriétés géométriques des surfaces affines sous-jacentes. En effet, dans les cas bien compris comme l'espace des métriques hyperboliques et ou des surfaces de translation, le défaut de compacité est compris par des fonctions de type "*systole*" ou "*diamètre*" : grossièrement, une suite de telles structures dégénère dans l'espace de module si la longueur d'une courbe fermée simple non triviale le long de cette suite tend vers 0 ou si le diamètre tend vers l'infini.

Dans le cas des structures affines il faudrait

1. comprendre si des quantités géométriques analogues encodent la dégénérescence, et expliciter de telles *fonctions propres* ;
2. comprendre quels sont les modèles géométriques, via des renormalisations par exemple, qui apparaissent comme limites de structures affines dégénérées.

Ce dernier point s'identifie à la question de la *compactification* de l'espace de module. En d'autres termes, on cherche à trouver une compactification raisonnable au sens où chaque point du bord encode une manière unique de dégénérer géométriquement dans l'espace des modules.

Chapitre 2

Feuilletages de Veech et espaces des modules de tores plats.

2.1 Le théorème de Troyanov et le feuilletage de Veech.

On présente dans cette section une famille de feuilletage découverts par Veech (voir [Vee93].).

2.1.1 Surfaces plates et théorème d'uniformisation de Troyanov.

Une *structure plate* sur Σ est la donnée d'une métrique euclidienne plate sur Σ privé d'un ensemble fini de points S telle que la structure plate au voisinage de ces points soit celle d'un cône euclidien. C'est un cas particulier de structure affine introduite dans le premier chapitre de cette thèse, dont les singularités ne sont pas nécessairement branchées mais sont des cônes d'angle arbitraire.

Une structure plate sur Σ induit naturellement une structure conforme sur Σ : là où la structure est régulière la structure est donnée par les cartes plates et au voisinage d'un point singulier d'angle θ , elle est donnée par la carte z dans laquelle la structure est définie par la forme multivaluée $z^{\frac{\theta}{2\pi}-1}dz$.

On rappelle que $\mathcal{M}_{g,n}$ est l'espace des modules de structures conformes sur Σ_g avec n points marqués.

Théorème 26 (Troyanov, [Tro86]). *Soit $g \geq 0$ et $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ une donnée d'angles vérifiant la condition de Gauss-Bonnet $\sum_i 2\pi - \theta_i = 2\pi(2 - 2g)$. Alors pour toute structure conforme sur Σ_g avec n points marqués p_1, \dots, p_n il existe une unique structure plate sur Σ_g compatible avec cette structure conforme ayant en p_i une singularité conique d'angle θ_i et régulière partout ailleurs.*

Ce théorème permet d'identifier l'espace des modules de structures conformes sur Σ_g avec n points marqués avec l'ensemble des structures plates sur Σ_g ayant comme donnée d'angles singuliers $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$; et ce pour tout θ vérifiant la formule de Gauss-Bonnet discrète.

2.1.2 Propriétés élémentaires des surfaces plates.

Surfaces plates et métrique des longueurs.

Les surfaces plates qu'on a défini ci-dessus sont des variétés munies d'une métrique naturelle qui est celle des chemins. En effet, une surface plate Σ est munie d'une métrique riemannienne singulière en un nombre fini de points, la longueur d'un chemin γ de classe \mathcal{C}^1 par morceau est donc bien définie, comme l'intégrale

$$L(\gamma) = \int |\gamma'(t)| dt.$$

Ceci nous permet de définir la distance entre deux points x et y comme

$$d(x, y) = \inf_{\gamma} L(\gamma)$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des chemins γ continus, \mathcal{C}^1 par morceaux allant de x à y . On a les propriétés suivantes :

1. la fonction $d : \Sigma \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une distance ;
2. pour tout couple de points $x, y \in \Sigma$, il existe un chemin γ géodésique par morceaux tel que $d(x, y) = L(\gamma)$;
3. pour chaque classe d'homotopie libre de courbe fermée $[c]$, il existe un courbe fermée simple $\eta \in [c]$ tel que $L(\eta) = \inf_{\gamma \in [c]} L(\gamma)$;
4. il existe une courbe fermée simple s non homotopiquement triviale telle que $L(s) = \inf_{\{\gamma \mid [\gamma] \neq 0\}} L(\gamma)$.

Ces propriétés résultent de ce que Σ est un espace de longueurs, voir [BH99] ou [Gro99] pour une exposition de la théorie dont elles découlent.

Le formule de Gauss-Bonnet.

La courbure κ_h d'une métrique riemannienne régulière h sur une surface Σ satisfait la formule suivante :

$$\int_{\Sigma} \kappa_h d\mu_h = 2\pi\chi(\Sigma)$$

où μ_h est la mesure induite sur Σ par la métrique h et $\chi(\Sigma)$ est la caractéristique d'Euler de Σ . Cette superbe formule reliant la géométrie d'une métrique à la

topologie de l'espace ambiant est connue sous le nom de formule de Gauss-Bonnet, et se généralise au cas des métriques plates singulières. Ces dernières doivent être pensées comme des métriques dont tout la courbure est concentrée dans les points singuliers, et penser par la même à la fonction de courbures comme une somme de masses de Dirac aux points singuliers.

Soit Σ est une surface plate compacte et orientable dont les n points singuliers ont pour angles coniques respectifs les $\theta_1, \dots, \theta_n$. On a alors la **formule de Gauss-Bonnet** suivante :

$$\sum_{i=1}^n 2\pi - \theta_i = 2\pi\chi(\Sigma).$$

Une preuve simple de cette formule passe par l'existence de triangulations totalement géodésique de la surface dont l'ensemble des points singuliers est inclut dans l'ensemble des sommets. La formule découle d'un simple décompte en partant de la définition ancestrale de la caractéristique d'Euler. On pourra se référer à [Tro86] ou [Vee93] pour de plus amples détails.

Fonctions exponentielles.

Soit p un point régulier d'une surface plate Σ . On note r_p le rayon d'injectivité à p . On note $D(r)$ le disque euclidien de rayon $r > 0$ centré à l'origine. On appellera **carte exponentielle** en p l'application i_p bien définie et unique à composition par une rotation près

$$i_p : D(r_p) \longrightarrow \Sigma$$

telle que $i_p(0) = p$ et qui est une isométrie locale. Cette carte locale peut-être étendue en une application de tout le plan euclidien privé d'une union dénombrable de demi-droites, correspondant aux segments issus de p rencontrant un point singulier, les "*connexions de selles*". La preuve de ce fait est élémentaire et laissée au lecteur.

Cette définition se généralise facilement à un point singulier p , il suffit de remplacer le disque euclidien par un disque de rayon r_p au point singulier d'un cone d'angle θ l'angle à la singularité. Cela nous permet de définir

$$i_p : C_\theta(r_p) \longrightarrow \Sigma$$

qui jouit des même propriétés que la fonction exponentielle à un point régulier.

Développante et holonomie.

On reprend dans cette sous-section le traitement de 1.1.2 dans le cas légèrement différent des surfaces plates à singularités. Si Σ est une surface plate et S

l'ensemble de ses points singuliers, la surface $\Sigma^* = \Sigma \setminus S$ est munie d'une métrique riemannienne plate non-complète sans points singuliers. Autrement dit, Σ^* porte une $(\mathbb{C}, \text{Iso}^+(\mathbb{C}))$ -structure où $\text{Iso}^+(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des isométries de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ préservant l'orientation.

Avec une telle structure vient une représentation d'holonomie

$$\text{Hol} : \pi_1(\Sigma^*) \longrightarrow \text{Iso}^+(\mathbb{C})$$

dont la classe par rapport à l'action par conjugaison de $\text{Iso}^+(\mathbb{C})$ est un invariant de la structure. Cette représentation est telle qu'il existe un homéomorphisme local

$$\text{dev} : \widetilde{\Sigma}^* \longrightarrow \mathbb{C}$$

appelé la *développante* de la structure qui est Hol-équivariant.

Le groupe $\text{Iso}^+(\mathbb{C})$ est canoniquement isomorphe au produit semi-direct $\mathbb{U} \ltimes \mathbb{C}$ et la projection sur le premier facteur détermine un morphisme d'*holonomie linéaire* ρ .

2.1.3 Le feuilletage isoholonomique de Veech.

On fixe dans cette section $\theta \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ vérifiant la condition de Gauss-Bonnet. Le théorème de Troyanov (voir Théorème 26) nous a permis d'identifier l'espace des métriques plates dont les angles coniques sont ceux donnés par θ avec $\mathcal{M}_{g,n}$. On note alors

- $\mathcal{T}(\theta)$ l'espace des structures plates marquées sur une surface de genre g avec angles coniques θ , qui est naturellement isomorphe à $\mathcal{T}_{g,n}$;
- $\mathcal{M}(\theta)$ l'espace des structures plates non-marquées sur une surface de genre g avec angles coniques θ , qui est naturellement isomorphe à $\mathcal{M}_{g,n}$.

En considérant des structures marquées, l'application d'**holonomie linéaire** suivante

$$\text{hol} = \text{hol}_\theta : \mathcal{T}_{g,n} \simeq \mathcal{T}(\theta) \longrightarrow \text{H}^1(\Sigma_{g,n}, \mathbb{U}) \quad (2.1)$$

qui associe à chaque structure plate son holonomie linéaire est bien définie. hol envoie $\mathcal{T}_{g,n}$ sur $\text{H}^1(\Sigma_{g,n}, \mathbb{U}, \theta)$ le sous-ensemble des caractères $\varphi \in \text{H}^1(\Sigma_{g,n}, \mathbb{U})$ qui envoient la courbe δ_j qui fait le tour du $j^{\text{ème}}$ point marqué sur $e^{i\theta_j}$.

Si on fait de plus l'hypothèse qu'au moins un des θ_i n'est pas un multiple de 2π , le caractère trivial n'appartient pas à $\text{H}^1(N_{g,n}, \mathbb{U}, \theta)$. Dans ce cas, on a le théorème suivant du à Veech.

Théorème 27 ([Vee93]). *L'application d'holonomie linéaire (2.1) est une submersion analytique. De plus, pour tout $\rho \in \text{Im}(\text{hol})$, la ligne de niveau $\text{hol}^{-1}(\rho)$ est une sous-variété complexe de $\mathcal{T}_{g,n}$ de dimension complexe $2g - 3 + n$.*

Ce résultat implique en particulier que les lignes de niveau $\mathcal{F}_\rho = \text{hol}^{-1}(\rho)$ pour $\rho \in \text{Im}(\text{hol})$ induisent un feuilletage analytique réel par sous-variétés complexes de $\mathcal{T}_{g,n} = \mathcal{T}(\theta)$. Ce feuilletage est noté $\mathcal{F}(\theta)$ et on l'appelle le **feuilletage de Veech de $\mathcal{T}_{g,n}$ associé à θ** .

Invariance par le groupe modulaire. On explique maintenant comment ce feuilletage descend sur $\mathcal{M}_{g,n} = \mathcal{M}(\theta)$. Le groupe modulaire "pur" $\text{PMod}_{g,n}$ agit sur $\mathcal{T}_{g,n}$ en préservant le feuilletage de Veech : un élément $f \in \text{PMod}_{g,n}$ envoie \mathcal{F}_ρ sur $\mathcal{F}_{f^*\rho}$. Ainsi le feuilletage $\mathcal{F}(\theta)$ induit un feuilletage via la projection

$$\mathcal{T}_{g,n} \longrightarrow \mathcal{M}_{g,n} = \mathcal{T}_{g,n}/\text{PMod}_{g,n} \quad (2.2)$$

qui est un feuilletage singulier de $\mathcal{M}_{g,n}$. On note ce dernier $\mathcal{F}(\theta)$ qu'on appellera aussi **feuilletage de Veech**. A proprement parler, comme $\text{PMod}_{g,n}$ n'agit pas librement sur $\mathcal{T}_{g,n}$, on devrait parler d' "*orbifeuilletage*" sur $\mathcal{M}_{g,n}$. Cependant, cette subtilité ne sera pas source de problèmes et nous l'ignorons dans la suite.

- On fera maintenant référence à une feuille spécifique comme une $\mathcal{F}_{[\rho]}$ où $[\rho]$ est l'orbite d'un élément de $H^1(\Sigma_{g,n}, \mathbb{U}, \theta)$ sous l'action de $\text{PMod}_{g,n}$. C'est l'image de $\mathcal{F}_\rho \subset \mathcal{T}_{g,n}$ par l'application quotient (2.2).
- Comme $\text{PMod}_{g,n}$ agit sur $H^1(N_{g,n}, \mathbb{U}, \theta)$ en préservant sa forme symplectique naturelle, le feuilletage admet une structure symplectique transverse de dimension $2g$.
- Nous dirons que $\mathcal{F}_{[\rho]}$ est une feuille du feuilletage de Veech. Ce n'est pas correct à proprement parler, car en théorie des feuilletages on impose qu'une feuille soit connexe. On prouve d'ailleurs dans [GPa, §4.2.5] à travers de calculs analytiques explicites que $\mathcal{F}_{[\rho]}$ peut avoir plusieurs composantes connexes distinctes. Nous continuerons d'appeler $\mathcal{F}_{[\rho]}$ une feuille par souci de concision.

2.1.4 Paramétrisations linéaires des \mathcal{F} .

On présente dans cette section en détail des paramétrisations locales des feuilles du feuilletage de Veech. On désire en donner une présentation intrinsèque et nous regarderons donc ces feuilles comme des variétés à part entière en ignorant leur appartenance au feuilletage de Veech. C'est à Veech que l'on doit l'essentiel des résultats de cette section (voir [Vee93, Sections 9,10 and 11]), mais nous avons décidé de les réécrire en suivant un point de vue moins formel, plus dans l'esprit de Thurston (voir [Thu88]) qui n'a considéré que le cas des sphères.

Ces paramétrisations permettront de mettre en évidence leur structure homogène annoncée précédemment. Enfin nous donnerons un cadre abstrait utilisant la cohomologie tordue pour donner une définition plus formelle de ces paramétrisations.

Pour le reste de la section, g , n et la représentation $\rho : H_1(N_{g,n}, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{U}$ sont fixés. On suppose aussi que $2g + n - 3 > 0$ de telle sorte que \mathcal{F} soit de dimension strictement positive.

Modèles polygonaux.

On donne ici une description de paramétrisations géométriquement intuitive de \mathcal{F}_ρ . On considère N une surface plate appartenant à \mathcal{F}_ρ telle que N peut être construite en recollant isométriquement les côtés d'un polygone P avec $2k$ côtés. L'idée est que les surfaces proches de N peuvent aussi être construites par une telle opération, avec des polygones proches de P et la même combinatoire de recollement. On va ainsi identifier un voisinage de N dans \mathcal{F}_ρ avec un voisinage d'un sous-espace de l'ensemble des polygones à $2k$ côtés, espace qui a une structure d'espace vectoriel naturelle dont va venir la structure homogène des feuilles du feuilletage de Veech.

Rentrons dans le détail de cette paramétrisation. Tout d'abord, remarquons que $k = 2g - 1 + n$, il s'agit d'un simple argument de caractéristique d'Euler. On identifie à \mathbb{C} le plan euclidien dans lequel P est dessiné et associe à chacun de ses côtés le nombre complexe qui lui correspond à savoir la différence entre les affixes de ses extrémités. Par définition

$z_i =$ affixe du point final du côté $-$ affixe du point initial du côté.

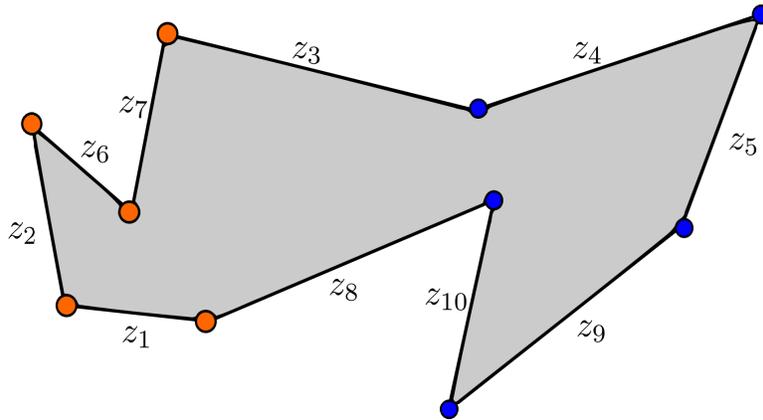


FIGURE 2.1 – Modèle polygonal d'une surface de genre 2 avec deux points singuliers.

Par convention, le côté associé au nombre complexe z_j est recollé avec le côté associé à z_{k+j} de telle sorte que le $2k$ -uplet (z_1, \dots, z_{2k}) satisfait les relations suivantes

$$\sum_{i=1}^{2k} z_i = 0 \quad \text{and} \quad |z_i| = |z_{k+i}| \quad \text{for } i = 1, \dots, k.$$

Comme on suppose que z_i est recollé à z_{i+k} , les z_j n'apparaissent pas nécessairement en ordre cyclique sur le dessin (voir la figure 2.1) par exemple). Les nombres complexes $\rho_i = z_i/z_{k+i} \in \mathbb{U}$ sont l'holonomie d'une courbe, fermée dans la surface plate associée N , qui joint le milieu de z_i au milieu de z_{k+i} ; ces nombres appartiennent par conséquent à $\text{Im}(\rho)$. Le jeu d'équation précédent se réécrit :

$$\sum_{i=1}^{2k} z_i = 0 \quad \text{and} \quad z_i = \rho_i z_{k+i} \quad \text{for } i = 1, \dots, k. \quad (2.3)$$

En éliminant $z_k, z_{k+1}, \dots, z_{2k}$, on voit que le $(k-1)$ -uplet $z = (z_1, \dots, z_{k-1}) \in \mathbb{C}^{k-1}$ caractérise complètement le polygone Pet par conséquent la surface plate associée N .

N'importe quel $(k-1)$ -uplet $u = (u_1, \dots, u_{k-1})$ proche de z dans \mathbb{C}^{k-1} définit un polygone P_u dont les cotés vérifient le jeu d'équation 2.3. En réalisant le collage associé, on construit un nouvel élément de \mathcal{F}_ρ .

Soit $U \subset \mathbb{C}^{k-1}$ un petit ouvert contenant z tel que tout les $2k$ -gones correspondant à des éléments de U sont non-dégénérés. On peut alors définir une application

$$\varphi : U \longrightarrow \mathcal{F}_\rho$$

associant à chaque $u \in U$ la **surface plate renormalisée associée à P_u** , c'est à dire celle d'aire 1. Remarquons que φ n'est pas localement injective car $\varphi(\lambda u) = \varphi(u)$ pour tout $(\lambda, u) \in \mathbb{C}^* \times U$ tel que $\lambda u \in U$. Ceci étant, φ induit une application $\psi : V \longrightarrow \mathcal{F}_\rho$ où $V = \mathbf{P}U$ est l'image de U dans $\mathbf{P}(\mathbb{C}^{k-1})$. Il est possible de prouver que ψ est un biholomorphisme local pour la structure héritée en tant que feuille d'un feuilletage de $\mathcal{T}eich_{g,n}$, voir pour cela l'article de Veech [Vee93, Lemma 10.23].

Nous voulons cependant adopter un point de vue intrinsèque sur la géométrie des \mathcal{F}_ρ et nous ignorerons donc les résultats de Veech.

Remarquons que $\psi : V \longrightarrow \mathcal{F}_\rho$ est un homeomorphisme local :

- Le fait que ψ soit injectif provient de ce que nous regardons des structures marquées : toute isométrie entre deux surfaces proches dans la paramétrisation V préservant de plus le marquage doit venir d'une isométrie du polygone lui même : il doit donc être l'identité sur le bord.
- Le fait que ψ soit surjective provient du fait que le modèle polygonal survit à des petites déformations.

Dans les faits, nous ignorerons aussi le second point pour définir directement une structure de variété (complexe) sur \mathcal{F}_ρ en poussant en avant celle de V par ψ . Il nous reste à ce point deux détails à régler :

1. nous n'avons pu construire ψ que si N provenait d'une construction polygonale : il nous faut étendre cette construction au cas général ;
2. il faut ensuite prouver que si les images de deux telles cartes s'intersectent, les fonctions de transitions sont bien des biholomorphismes.

La première difficulté peut facilement être contournée en introduisant la notion de *pseudo-polygone*. On suit ici l'exposition de [Sch]. Un **pseudo-polygone** est une métrique plate sur un disque fermé dont le bord est localement isométrique à un chemin géodésique par morceau dans \mathbb{C} . Une définition alternative est de dire qu'un pseudo-polygone est une immersion du d'un disque fermé dont l'image du bord est géodésique par morceau.

Proposition 12. *Toute surface plate peut être construite en recollant isométriquement les cotés d'un pseudo-polygone.*

La preuve de cette proposition est faite proprement dans le cas $g = 0$ dans [Sch] et pour le cas général nous référons à [Vee93]. Le point crucial est l'existence d'une triangulation totalement géodésique pour toute surface plate (voir Lemma 6.23 dans [Vee93] ou la construction des décompositions de Delaunay que nous détaillons dans la section 2.2.1). Il est ensuite facile de vérifier que pour tout graphe Γ dans le 1-squelette d'une telle triangulation tel que $N \setminus \Gamma$ est simplement connexe, la complétion métrique pour la métrique des chemins de ce dernier est le pseudo-polygone recherché.

Nous remarquons maintenant que la paramétrisation locale de \mathcal{F}_ρ en N que nous avons construit quand N a un modèle polygonal se généralise directement au cas où N a un modèle pseudo-polygonal. Il suffit d'immerger un tel pseudo-polygone dans \mathbb{C} et prendre comme coordonnées les nombres complexes définis par ses cotés. D'après la proposition 12, toute surface plate a un modèle pseudo-polygonal ; les cartes construites ainsi forment un atlas de \mathcal{F}_ρ .

Désormais, on appelle un telle paramétrisation locale (z_1, \dots, z_{k-1}) une **paramétrisation polygonale**.

Forme d'aire et paramétrisation locales.

À ce point, il est important de remarquer qu'une paramétrisation polygonale vient avec une forme hermitienne naturelle qui est l'aire de la surface plate correspondante. Si U est un ouvert de \mathbb{C}^{k-1} sur lequel est défini une paramétrisation polygonal φ de \mathcal{F}_ρ , on notera $A_{\varphi,U}$ la forme hermitienne correspondante.

On prouve que $A_{\varphi,U}$ est bien une forme hermitienne en $z = (z_1, \dots, z_{k-1})$. Tout pseudo-polygone immergé peut être triangulé de manière à ce que chaque coté de la triangulation est un segment géodésique joignant deux sommets. Soit

T_1, \dots, T_L les triangles de la triangulation. Pour tout I , l'aire de T_I est

$$A(T_I) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(z_{T_I} z'_{T_I})$$

où z_{T_I} et z'_{T_I} sont les nombres complexes associés à deux côtés consécutifs de T_I , orientés de telle manière qu'ils forment une base directe de \mathbb{C} vu comme un espace vectoriel réel. Les nombres z_{T_I} et z'_{T_I} sont tout deux une combinaison linéaire à coefficients entiers des z_1, \dots, z_{2k} et donc des z_1, \dots, z_{k-1} grâce à (2.3). Pour tout I , l'aire $A(T_I)$ est une forme hermitienne en les z_1, \dots, z_{k-1} . Comme l'aire de la surface entière est donnée par

$$A_{\varphi, U}(N) = \sum_{l=1}^L A(T_l),$$

il s'en suit que $A_{\varphi, U}$ est bien une forme hermitienne en $z = (z_1, \dots, z_{k-1})$.

La proposition à venir décrit la régularité des changements de cartes de l'atlas fournit par les paramétrisations polygonales et règle de le point (2) évoqué dans la section 2.1.4.

Proposition 13. *Soit (φ_1, U_1) et (φ_2, U_2) deux paramétrisations polygonales de \mathcal{F}_ρ tels que $W = \varphi_1(U_1) \cap \varphi_2(U_2) \subset \mathcal{F}_\rho$ est non vide et connexe. Alors*

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(W) \longrightarrow \varphi_2^{-1}(W)$$

est la restriction d'un élément de $\operatorname{GL}_{k-1}(\mathbb{C})$ tel que $(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)^ A_{U_1} = A_{U_2}$.*

Démonstration. Soit P et Q deux modèles polygonaux d'une surface plate N . Immergeons P dans \mathbb{C} . Soit z_1, \dots, z_{2k} les nombres complexes associés aux côtés de P . Considérons maintenant un côté (dont le nombre complexe associé est w_i) de Q et développons le dans \mathbb{C} en partant d'une copie initiale de P (disons P_0) et en collant une copie P_{j+1} à un coté de P_j chaque fois que c'est nécessaire pour suivre le côté w_i . On peut ainsi exprimer w_i comme une combinaison linéaire des nombres complexes associés aux côtés de P et trouver une expression de w_i de la forme

$$w_i = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{i,j} z_j$$

où les nombres $\alpha_{i,j}$ sont des constantes ne dépendant que de ρ est de la combinatoire des intersections des bords de P et Q tracés sur N . De plus, on trouve que les $\alpha_{i,j}$ appartiennent à l'anneau $\mathbb{Z}[\operatorname{Im}(\rho)]$. Les coordonnées (w_1, \dots, w_{k-1}) dépendent donc linéairement des (z_1, \dots, z_{k-1}) . L'aire ne dépendant que de la surface sous-jacente, elle est donc invariante par la transformation linéaire qui envoie (z_1, \dots, z_{k-1}) sur (w_1, \dots, w_{k-1}) . □

Cette proposition nous dit que les paramétrisations polygonales munissent \mathcal{F}_ρ d'une structure projective complexe (et même un peu plus grâce à la forme d'aire, nous en dirons plus très bientôt). Cela nous invite à définir une classe plus générale de paramétrisations :

Definition 3. Une paramétrisation locale holomorphe (z_1, \dots, z_{k-1}) de \mathcal{F}_ρ est appelée **paramétrisation linéaire** si elle dépend linéairement d'une paramétrisation polygonale.

Cette classe est un peu plus facile à manipuler, c'est la plus grande classe pour laquelle la forme d'aire est hermitienne en coordonnées. Nous verrons aussi dans la section 2.1.4 qu'il est possible de construire facilement de telles paramétrisations linéaires dont il sera fait un usage intensif tout au long de ce chapitre.

Projection sur \mathcal{F} .

On a construit dans cette section des cartes de $\mathcal{F}_\rho \subset \mathcal{T}eich_{g,n}$ à valeurs dans $\mathbf{P}(\mathbb{C}k - 1)$. Si $N \in \mathcal{F}$ est un point régulier de \mathcal{F} i.e. si la projection $\pi : \mathcal{F}_\rho \rightarrow \mathcal{F}$ est un homéomorphisme local en N , toute carte en $\tilde{N} \in \pi^{-1}(N)$ peut être poussé en avant et défini une carte en N . Le fait que N n'est pas un point régulier se traduit par le fait que son groupe d'isométries pures n'est pas trivial. Dans ce cas toute carte en \tilde{N} donne une paramétrisation locale non-injective en N dont le groupe de transformation est isomorphe au groupe des isométries pures de N .

Paramétrisations provenant de collages topologiques.

On décrit ici des paramétrisations qui sont des généralisations des paramétrisations polygonales : nous cessons simplement de demander que les cotés des (pseudo-)polygones que nous recollons soient géodésiques.

Considérons \mathcal{T} une triangulation **topologique** de N telle que l'ensemble des sommets est exactement l'ensemble des points coniques de N . Comme on l'a déjà vu, on peut trouver dans le 1-squelette de \mathcal{T} un graphe dont le complémentaire Q dans N est simplement connexe. Ainsi Q est-il un disque topologique muni d'une métrique plate dont le bord est fait de copies consécutives de cotés de la triangulation. Soit $F : Q \rightarrow \mathbb{C}$ une développante de la métrique plate sur Q et soit $q_1, \dots, q_{2k}, q_{2k+1} = q_1$ les points de ∂Q se projetant sur des sommets de la triangulation, où ∂Q est le bord de \overline{Q} la complétion métrique de Q pour la métrique des longueurs induite par la métrique plate. F s'étend continuellement à \overline{Q} et on pose $\xi_i = F(q_{i+1}) - F(q_i)$ pour $i = 1, \dots, 2k$. On a alors la proposition suivante :

Proposition 14. Pour un choix approprié des indices suivants i_1, \dots, i_k dans $\{1, \dots, 2k\}$, les paramètres $(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k})$ forment une paramétrisation linéaire de \mathcal{F}_ρ .

Remarquons que si la triangulation \mathcal{T} utilisée pour construire cette paramétrisation était isotope à une paramétrisation polygonale, on retrouverait la paramétrisation polygonale associée. La preuve utilise les mêmes arguments de développement que la preuve de la proposition 13 et nous la laissons au lecteur.

2.1.5 Forme volume de Veech sur $\mathcal{M}_{g,n}$.

Pour toute donnée d'angle θ admissible telle qu'aucun des θ_i n'est un multiple de 2π , on peut définir une forme volume θ comme suit sur $\mathcal{M}_{g,n} = \mathcal{M}(\theta)$:

- transversalement, le feuilletage de Veech admet une structure symplectique et par conséquent une forme volume ;
- par ailleurs chaque feuille admet une forme volume qui provient de sa structure homogène projective définie dans la section précédente et cette forme volume varie différemment par rapport aux feuilles ;
- le couplage de ces deux mesures définit une forme volume Ω_θ sur $\mathcal{M}_{g,n}$ qui dépend bien sûr de θ .

Cette forme volume est dans la classe de la mesure de Lebesgue. Veech formule la conjecture suivante :

Conjecture 4. *Pour tout θ admissible pour lequel aucun θ_i n'est un multiple de 2π ,*

$$\int_{\mathcal{M}_{g,n}} \Omega_\theta$$

est fini.

2.2 Complex hyperbolic structures on certain algebraic leaves.

In this section, we narrow our focus on the case $g = 1$.

The results presented in this section are joint work with Luc Pirio, and can also be found in the article [GPb].

2.2.1 Geometry of flat surfaces

In this section we develop material and prove several technical lemmas about the intrinsic geometry of flat surfaces which will be used in Sections 2.2.4 and 2.2.5 in order to understand the geometry of the moduli spaces \mathcal{F} . Most of the work done in this paper is about reinterpreting questions regarding the geometry of these moduli spaces, in terms of how flat surfaces can degenerate. The material developed below goes some way to answering these questions.

We denote by h the flat metric on a given flat surface N and by d_h (or just by d for short) the induced distance (see Section 2.1.2). We also denote by $S \subset N$ the set of conical points of N (for the flat structure induced by h).

2.2.2 Characteristic functions.

We define four quantities associated to N :

- its **systole**¹ :

$$\sigma(N) = \sigma(N, h) = \inf \left\{ L_h(\gamma) \mid \gamma \text{ simple essential closed curve} \right\};$$

- its **relative systole** :

$$\delta(N) = \delta(N, h) = \inf \left\{ L_h(\gamma) \mid \gamma \text{ joining two distinct singular points} \right\};$$

- its **diameter** :

$$D(N) = D(N, h) = \sup_{x, y \in N} d_h(x, y);$$

- its **relative diameter** :

$$s(N) = s(N, h) = \sup_{x \in N} d_h(x, S).$$

(The terminology *relative* is inspired by the terminology used for translation surfaces, where a *relative period* of an abelian form on a Riemann surface is the value of the integral of this 1-form on a path linking two of its zeroes).

1. There is no systole when $g = 0$.

Note that these four quantities all depend linearly on a rescaling of h . Most of the time, we will consider them under the supplementary assumption that the area of N is 1. In this case, one gets geometric invariants attached to N .

A classical fact from Riemannian geometry (see Section 2.1.2) is that σ, δ, D and s all are realised by piecewise geodesic paths, singular only at points where they cross singular points of N .

Proposition 15. *The following four inequalities hold true :*

$$\begin{aligned} (1) \quad D(N) &\geq \delta(N); & (2) \quad D(N) &\geq \sigma(N)/2; \\ (3) \quad D(N) &\geq s(N); & (4) \quad s(N) &\geq D(N)/(2n). \end{aligned}$$

Démonstration. The first and third inequalities are obvious. We now prove the second one. Consider c a curve realising $\sigma(N)$. Let p and q be two points on c diametrically opposed (by this we mean that they cut c into two parts of equal length). We claim that $d(p, q) = \sigma(N)/2$. Otherwise there would be a path of length strictly smaller than $\sigma(N)/2$ going from p to q . This path completed with one of the parts of c going from p to q would form an essential closed curve of length smaller than $\sigma(N)$. Since $d(p, q) = \sigma(N)/2$, we have $D(N) \geq \sigma(N)/2$.

Finally we prove (4). Let now p and q be two points realising $D(N)$. The point p can be joined to a point $s_1 \in S$ by a path of length at most $s(N)$, and q to $s_\infty \in S$ by a path of length at most $s(N)$. But a singular point can always be joined to another singular point by a path of length at most $2s(N)$. Join then s_1 and s_∞ by a path going from singular point to singular point. Remark that we can make sure that such a path visits each singular point only once. Such a path has length at most $2ns(N)$, hence $D(N) \leq 2ns(N)$. \square

Voronoi decomposition and Delaunay triangulation.

We explain briefly a well-known but important construction in the realm of flat surfaces. We omit the proofs below and refer to [MS91] for a careful and detailed treatment.

The **Voronoi decomposition** of N is defined as follows :

- the 2-cells are the connected components of the set of points $p \in N$ such that $d(p, S)$ is realised by a unique geodesic path ;
- the 1-cells are the connected components of the set of points $p \in N$ such that $d(p, S)$ is realised by exactly two distinct geodesic paths ;
- the 0-cells are the connected components of the set of points $p \in N$ such that $d(p, S)$ is realised by at least three distinct geodesic paths.

It is checked in [MS91] (see Proposition 4.1) that 0-cells are points and 1-cells are totally geodesic paths.

The **Delaunay decomposition** is defined as the polygonal decomposition which is dual to the Voronoi decomposition in the following way. One checks that D_p , the Euclidean disk of radius $d(p, S)$, injects at p for any p being a 0-cell of the Voronoi decomposition. A Delaunay 2-cell is defined as the convex hull of the elements of S belonging to ∂D_p . A 1-cell is a connected component of the boundary in $N \setminus S$ of such a convex hull and a 0-cell is a element of S .

In [MS91, Lemma 4.3 and Theorem 4.4], it is checked that :

- the set of 0-cells is exactly S ;
- 1-cells are saddle connections ;
- for each 1-cell C_1 , there are two distinct 2-cells C_2 and C'_2 such that $C_1 \sqcup C_2 \sqcup C'_2$ is a neighbourhood of C_1 in N ;
- a Delaunay 2-cell is isometric to a convex Euclidean polygon inscribed in a circle of radius less than $s(N)$;
- Delaunay 1-cells have length smaller than or equal to $2s(N)$.

From the Delaunay decomposition (which is unique and only depends on the geometry of N) one can get a **Delaunay triangulation** by subdividing the 2-cells into triangles. Notice that a Delaunay triangulation is not necessarily a simplicial triangulation since a triangle might not be determined by its vertices. We have now as an immediate corollary of this construction and of Proposition 15 :

Proposition 16. *The length of any 1-cell of any Delaunay triangulation of N is always smaller than $2D(N)$.*

We also prove the following lemma :

Lemme 11. *The interior of any path in N realising $\delta(N)$ is a 1-cell of the Delaunay decomposition of N (hence is a 1-cell of any Delaunay triangulation of N).*

Démonstration. Remark that if a saddle connection is such that the only paths realising the distance of its middle point to S are the two paths connecting the middle point to the end points, then it is a 1-cell of the Delaunay decomposition. This is a direct consequence of the construction of the latter. We now check that such a saddle connection γ realising $\delta(N)$ must verify the above property.

Assume that there is a second path u going from $p \in S$ to the middle point of γ whose length is less than $\delta(N)/2$. The point p must be different from one of the two endpoints of γ , and if concatenating the half of γ starting from this point and u , one gets a path v of length less than $\delta(N)$ going from two distinct elements of

S. Being singular at the middle of γ , v can be shortened in order to get a path whose length is strictly less than $\delta(N)$ which is impossible. Therefore γ must be a 1-cell of the Delaunay decomposition. \square

Surfaces with large diameter.

The aim of this subsection is to prove that flat surfaces with large diameter and finite linear holonomy must necessarily contain long flat cylinders. If one dismisses the hypothesis that the linear holonomy is finite, one can build counterexamples by gluing cones of very small angle. This was already known for spheres (see [Thu88]) or when the linear monodromy ranges in $\{-1, 1\}$ (see [MS91, Corollary 5.5]). The proof of Proposition 18 below is highly inspired by the techniques developed in [MS91].

Elementary facts about cones. We remind the reader that C_θ stands for the (Euclidean) cone of angle $\theta \in]0, +\infty[$, namely the metric space obtained by gluing the sides of a plane sector of angle θ . Its vertex is denoted by 0 and one sets $C_\theta^* = C_\theta^* \setminus \{0\}$. The latter does not carry closed regular geodesic but, if $\theta < \pi$, it carries piecewise geodesic paths with only one angular point. More precisely :

Proposition 17. *If $\theta < \pi$ then for any point $p \in C_\theta^*$:*

- *there exists a unique closed simple piecewise geodesic path in C_θ^* singular only at p ;*
- *the interior angle of the latter at the angular point is $\pi - \theta$;*
- *the length of this piecewise geodesic path is $2 \sin(\theta/2) \cdot d(0, p)$.*

Démonstration. The proof of the proposition is straightforward after noticing that such a cone is obtained after doing the gluing pictured just below.

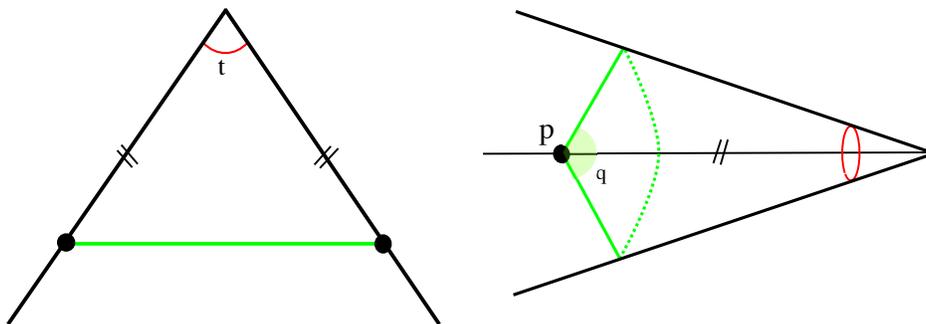


FIGURE 2.2 – The simple closed piecewise geodesic path with one angular point at p on C_θ (in green). \square

Lemme 12. *Let N be a flat surface and γ be a piecewise geodesic path of length $L(\gamma)$ on N with one angular point which avoids conical points. Assume that in a small neighborhood of its angular point, γ cuts N into two angular sectors of angles $\pi + \theta$ and $\pi - \theta$ respectively, with $0 < \theta < \pi$. Then*

1. *the linear holonomy along γ is $e^{i\theta}$ or $e^{-i\theta}$;*
2. *there is a cone point q of N such that $d(q, \gamma) \leq L(\gamma)/(2 \tan(\theta/2))$.*

Démonstration. The point is that such a geodesic γ has a neighbourhood that is isometric to a neighbourhood of the unique (up to isometry) closed geodesic of length $L(\gamma)$ of the cone of angle θ . The only obstruction for this isometry to extend to the whole cone is that the boundary of its definition domain meets a singular point of N (one can use the exponential map along γ). Otherwise γ is on the cone of a cone point of N whose associated conical angle is θ . In any case, there is a singular point of N , whose distance to γ is less than the distance from the geodesic of length $L(\gamma)$ in C_θ to the cone point of C_θ . This distance is exactly $L(\gamma)/(2 \tan(\theta/2))$. \square

Proposition 18. *Let $\rho \in H^1(N, \mathbb{U}, \theta)$ be such that $\text{Im}(\rho)$ is finite. There exist two positive constants $K_1(\rho)$ and $K_2(\rho)$ such that for every flat surface $N \in \mathcal{F}_\rho$ normalised such that its area is 1, if $D(N) \geq K_1(\rho)$ then N contains an embedded flat cylinder of length at least $K_2(\rho)D(N)$.*

Démonstration. Let N be an element of \mathcal{F}_ρ . Let $p \in N$ be a point maximizing the distance s to S the set of singularities, *i.e.* such that $s = s(N) = d(p, S)$ where $S \subset N$ stands for the set of singular points of N .

Let r_p be the injectivity radius at p . Then $r_p < 1/\sqrt{\pi}$ since the area of N is one. If $s > r_p$ then $\overline{D(r_p)}$, the closed Euclidean disk of radius r_p , can be immersed in N at p (since s is realised at p). There are two distinct points a and b on the boundary of $\overline{D(r_p)}$ which project onto the same point in N and the immersion $i : \overline{D(r_p)} \rightarrow N$ is injective on $D(r_p)$, by definition of r_p . Therefore the chord joining a and b maps to a piecewise closed geodesic γ path in N , with one angular point at $i(a) = i(b)$.

We claim that if s is large enough, then the linear holonomy along γ must be trivial. This is a corollary of Lemma 12. More precisely, if $\text{Im}(\rho) = \langle e^{2i\pi/m} \rangle$ and $s > r_p(1 + \tan(\pi/m)^{-1})$, γ cuts N at $i(a)$ into two angular sectors both of angles π . Hence γ is a closed regular geodesic which belongs to a flat cylinder C and the holonomy along γ is 1. Moreover, a and b must be diametrically opposed and γ must have length $2r_p$. Otherwise one side of the cylinder C would be covered by $D(r_p)$. But then r_p would not be the injectivity radius at p . The closed geodesic γ contains p and the cylinder C containing γ has length at least $2\sqrt{s^2 - r_p^2}$, because any cylinder on a flat surface can be extended until its boundary meets a singular point.

If one assumes that $s \geq 2/\sqrt{\pi} \geq 2r_p$, then the cylinder we have found has length at least $s\sqrt{3}$ hence at least $D(N)\sqrt{3}/2n$ according to Proposition 15. It follows that statement of the lemma holds true if one takes $K_1(\rho) = \frac{2n}{\sqrt{\pi}} \max(1, 1 + \tan(\pi/m)^{-1})/\sqrt{\pi}$ and $K_2(\rho) = \sqrt{3}/(2n)$. \square

Collisions.

A very important feature of the description of the metric completion of the moduli spaces \mathcal{F} is to characterize geometrically what happens when two singular points collide, *i.e* when $\delta(N)$ goes to zero. We prove below two results describing situations when such a collision cannot occur, at least without the diameter going to infinity.

Lemme 13. *Let θ_1 and θ_2 be two positive angles such that $\theta_1 + \theta_2 < 2\pi$. There exists a constant $K(\theta_1, \theta_2) > 0$ such that if Σ is any flat sphere with n conical singularities satisfying the three following conditions :*

- *all the cone points p_1, \dots, p_n of Σ have positive curvature ;*
- *the cone angles of Σ at p_1 and p_2 are θ_1 and θ_2 respectively ;*
- *the area of Σ is 1 ;*

then the following holds true : $d(p_1, p_2) \geq K(\theta_1, \theta_2)$.

This lemma tells us that two too positively curved singular points cannot collide. We would like to draw attention to the fact that, in the authors' opinion, this lemma is missing in [Thu88].

Démonstration. The idea of the proof is to compare this situation to the case of the sphere Σ^0 with three cone points, of respective angles θ_1 , θ_2 and $2\pi - \theta_1 - \theta_2$. Such a sphere is unique up to dilatation of the flat metric and is built by gluing two isometric triangles of angles $\theta_1/2$, $\theta_2/2$ and $(2\pi - \theta_1 - \theta_2)/2$.

Let p_1^0 , p_2^0 and p_3^0 be the cone points on Σ^0 of respective angles θ_1, θ_2 and $2\pi - \theta_1 - \theta_2$. Normalise Σ^0 so that the length of the unique geodesic l^0 from p_1^0 to p_2^0 has same the length as the one from p_1 to p_2 on Σ , denoted by l . Remark that Σ^0 is the disjoint union of geodesic paths going from p_3^0 to points of l^0 .

A neighbourhood of l^0 in Σ^0 is isometric to a neighbourhood of l in Σ . We extend such an isometric identification using the remark above, developing the geodesics of the decomposition. The only obstruction to do so appears if such a geodesic meets a singular point, which can only happen for a finite number of such geodesics. We denote by A the finite union of those parts of geodesics on which the isometry cannot be extended.

We have thus defined a local isometry

$$i : \Sigma^0 \setminus A \longrightarrow \Sigma.$$

Since all the singular points of Σ have positive curvature, the closure of $i(\Sigma^0)$ must also be open and since i is a local isometry, one gets

$$\text{area}(\Sigma^0) \geq \text{area}(\Sigma) = 1.$$

The uniform bound on the area of Σ^0 gives a uniform bound on $d(p_1^0, p_2^0)$ which equals $d(p_1, p_2)$ by construction. \square

Lemme 14. *Let M be a flat torus with two cone points p_1 and p_2 . There exists a pseudo-hexagon P such that M is isometric to P/\sim where \sim is one of the three gluing patterns of Figure 2.3.*

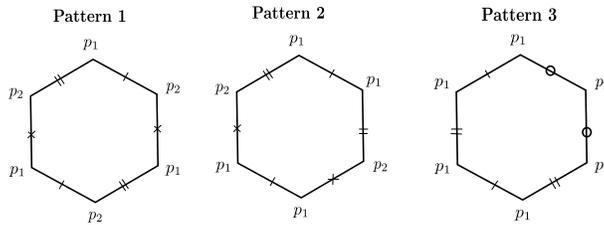


FIGURE 2.3 – Gluing patterns for a flat torus with two cone points.

Démonstration. Let Γ be a connected graph in the 1-skeleton of the Delaunay decomposition of M such that $M \setminus \Gamma$ is connected and simply connected. Γ has exactly for vertices the two cone points of M . By a Euler characteristic argument, its number of edges e must satisfy $2 - e + 1 = \chi(M) = 0$ and therefore $e = 3$.

One easily checks that the only connected graphs with two vertices and three edges that one can draw on a torus are the three graphs represented on Figure ?? below.

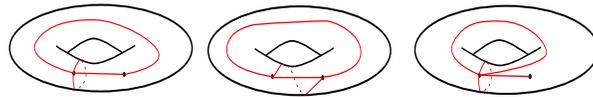


FIGURE 2.4 – Graphs on a torus.

Then cutting along Γ gives the expected pseudo-polygonal model for M . \square

Proposition 19. *Let $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of flat tori with two cone points belonging to a leaf \mathcal{F} with $\text{Im}(\rho)$ finite. Assume that for all $n \in \mathbb{N}$, M_n has area 1. If $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta(M_n) = 0$ then $D(M_n) \rightarrow +\infty$ as n goes to infinity.*

Démonstration. Suppose that $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ and ρ are as in the statement and assume that $D(M_n)$ does not go to infinity although $\delta(M_n)$ tends to zero when $n \rightarrow$

$+\infty$. Then, up to extracting an appropriate subsequence, we can assume that the $D(M_n)$'s are bounded. For any n , consider the Delaunay decomposition of M_n and take in its 1-skeleton a graph Γ_n such that

- Γ_n contains a curve realising $\delta(M_n)$, as guaranteed by Lemma 11 ;
- the set of vertices of Γ_n is equal to S the set of singular points ;
- $Q_n = M_n \setminus \Gamma_n$ is simply connected.

According to Lemma 14, for any $n \in \mathbb{N}$, the metric completion $\overline{Q_n}$ of Q_n is a pseudo-hexagon (*i.e.* a pseudo-polygon with six sides) whose lengths of the sides are uniformly bounded (according to Proposition 16) and the gluing pattern to recover M_n is one of the three patterns of Figure 2.3.

Again up to extracting a subsequence, we can assume that for any $n \in \mathbb{N}$:

1. M_n can be obtained from $\overline{Q_n}$ by using the same gluing pattern ;
2. the sides glued together always form the same angle ;
3. the length of each side converges.

(To assume (2), one has to use that ρ has finite image. That one can assume that (3) holds true as well follows from Proposition 16.)

Since the lengths of two sides go to zero (the ones which are identified by the gluing with the curve realising $\delta(M_n)$ in M_n), the sequence of pseudo-hexagons $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converges to a quadrilateral whose opposite sides have the same length and therefore are parallel. Since $\text{Im}(\rho)$ is finite, this implies that the corresponding sides in $\partial Q_n = \overline{Q_n} \setminus Q_n$ were parallel for all n sufficiently large. This forces the gluing pattern to be Pattern 1 or 2 of Figure 2.3. But a hexagon glued with one of these pattern and having two pair of sides glued together parallel must be a regular torus with no singular point (this is an easy exercise left to the reader). This would force \mathcal{F} to contain regular tori, which is impossible since we have supposed that its elements have exactly two singular points. Therefore the sequence of diameters $(D(M_n))_{n \in \mathbb{N}}$ must go to infinity as n does. \square

Closed curves realising the systole.

As well as collisions, the ways in which simple closed curves can collapse are also very important to characterise.

Lemme 15. *Let N be a flat torus with $n \geq 2$ cone points and suppose that p_1 is the only cone point which has a negative curvature. The systole $\sigma(N)$ is realised by a simple closed piecewise geodesic which meets the set of cone-points only once at p_1 . Moreover, the only point at which it might not be smooth is p_1 .*

Démonstration. Consider the set of non homotopically trivial closed curves. Classical Riemannian geometry (see Section 2.1.2) ensures there exists a minimiser of the length functional on this set and that it is piecewise geodesic.

We claim that such a minimiser is simple. Otherwise it could be decomposed into two closed curves of strictly shorter length with at least one of these two being essential.

A minimiser cannot pass through a point of positive curvature because otherwise one can deform it in order that it avoids the cone point and that its length is shorter. Therefore the only cone point it might pass through is p_1 , and one can always make sure that there is a minimising path passing through p_1 : otherwise the path is actually totally geodesic and a neighbourhood of this path is a flat cylinder which can be extended until meeting a cone point which must be p_1 . Any boundary component of this extended flat cylinder would be a required path. \square

A path realising $\sigma(N)$ cuts the surface at p_1 in two angle sectors, whose angle must be bigger than π (otherwise one can shorten the path by passing on the side where the angle is smaller than π). Two eventualities can occur :

1. one of the angle equals π ; in this case such a path bounds a flat cylinder ;
2. both angles are strictly bigger than π .

For our purpose, it is important to distinguish these two situations.

In the case we are mostly interested in (when $g = 1$ and $\theta = (\theta_i)_{i=1}^n$ is such that only the point of cone angle θ_1 carries negative curvature), they actually correspond to two geometric aspects of \mathcal{F} : flat tori verifying (1) are in a cusp while those verifying (2) are close to a stratum corresponding to the devil's surgery \mathcal{S}_3 , see Section 2.2.3. The proposition below proves that, in the very specific case when $g = 1$ and ρ is rational, if the diameter remains bounded and the systole goes to zero, we are in situation (2).

Proposition 20. *Assume that $g = 1$, $\theta = (\theta_i)_{i=1}^n$ is such that only θ_1 is bigger than 2π and $\rho \in H^1(N, \mathbb{U}, \theta)$ has finite image. For all $K > 0$, there exists a constant $\epsilon(K) > 0$ such that for $N \in \mathcal{F}$ normalised such that its area equals 1 the following holds true. If $D(N) \leq K$ and $\sigma(N) \leq \epsilon(K)$, then any curve c realising the systole and passing through p_1 the point of negative curvature of N cuts p into two angular sectors whose angles both are strictly larger than π .*

Démonstration. We argue by contradiction. Assume that there exist a constant K and a sequence $(N_m)_{m \in \mathbb{N}}$ of flat tori such that for all $m \in \mathbb{N}$, one has :

- $N_m \in \mathcal{F}$ and its area is equal to 1 ;
- $\sigma(N_m) \leq \frac{1}{m}$;

- N_m contains a cylinder C_m of width $\sigma(N_m)$ (*i.e.* we are in situation (1) described above);
- $D(N_m) \leq K$.

For all $m \in \mathbb{N}$, $N_m \setminus C_m$ is a sphere whose boundary is the union of two piecewise geodesic closed curves of the same length $\sigma(N_m)$ touching at the only point where they both are singular, namely $p_1(m)$ the cone point of negative curvature of N_m . One can cut at the point where the two boundary circles touch, and glue together the two geodesic parts of the new boundary circles (which have the same length) to get a flat sphere S_m . Since the cone angle θ_1 at $p_1(m)$ is supposed to belong to $]2\pi, 4\pi[$, the resulting sphere has only positively curved cone points. The angles $\theta'_1(m)$ and $\theta'_2(m)$ at the two ‘new’ cone points of S_m created by the previous cutting and pasting operation, must satisfy $\theta'_1(m) + \theta'_2(m) + \pi + \pi = \theta_1$. Since θ_1 is strictly smaller than 4π , we get :

$$\theta'_1(m) + \theta'_2(m) < 2\pi .$$

For $k = 1, 2$, the cone angle $\theta'_k(m)$ must be such that $e^{i\theta'_k(m)} \in \text{Im}(\rho)$ because $e^{i\theta'_k(m)}$ is the linear holonomy of a curve in the free homotopy class of the curve realising the systole. Therefore these two angles can take only a finite number of values. So, up to extracting a subsequence, one can assume that these two cone angles are independent of m . The fact that the sequence of diameters $(D(M_m))_{m \in \mathbb{N}}$ is bounded by K implies that the length of C_m is bounded by $2K$. Therefore the area of S_m , which is larger than $1 - 2\sigma(N_m)K$, is bigger than $1/2$ provided that m is large enough. Hence $\theta'_1(m) + \theta'_2(m) < 2\pi$ and the distance between the associated cone points, which equals $\sigma(N_m)$ by construction, goes to zero. This contradicts Lemma 13 and proves the proposition. \square

2.2.3 Surgeries

A **surgery** is a procedure through which a new flat surface with conical singularities is produced from another one by means of geometrical gluing and pasting relying on elementary Euclidean geometry. This notion naturally appears when studying moduli spaces of flat surfaces (implicitly in [Thu88] but also more explicitly in [KZ03]). In the previous section, we have studied different ways for flat surfaces to degenerate, namely sequences of surfaces containing very large embedded flat cylinders, essential curves which collapse or cone points colliding. In the present section, we introduce several surgeries which are to be seen as the inverse processes of the aforementioned degenerations. We will distinguish five distinct types of surgeries :

- the first one, denoted by \mathcal{S}_1 , was known and implicitly considered by Thurston in [Thu88]. It consists in blowing up a singular point of positive curvature into two singular points of positive curvature.

- the second surgery, denoted by \mathcal{S}_2 , is a straightforward generalisation of the first one, which allows to blow up points of negative curvature. We will therefore refer to both \mathcal{S}_1 and \mathcal{S}_2 as **Thurston’s surgeries**.
- it seems to us that the third surgery \mathcal{S}_3 is new. We call it the **Devil’s surgery**. It consists in creating a handle by removing the neighbourhoods of two singular points and gluing their boundaries together.
- the fourth surgery \mathcal{S}_4 consists in blowing up a regular point into three singular points. We call it the **Kite surgery**.
- the last surgery \mathcal{S}_5 consists in creating a handle by adding a long flat cylinder to any flat surface having two isometric totally geodesic boundary components.

Surgeries \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 and \mathcal{S}_4 could have been seen as the same in a more general presentation but we find more convenient to differentiate them for our purpose. At the end of this Section, we compute the signature of the area form in the case we are interested by using surgeries and we give a definition of the notion of *geometric convergence* which will be central in the description of the metric completion of \mathcal{F} carried on in Section 2.2.4.

Thurston’s surgery \mathcal{S}_1 for a cone angle smaller than 2π .

Let N be a flat surface of genus g with cone angles $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ at $p_1, \dots, p_n \in N$. Let \mathcal{F} be the leaf of Veech’s foliation to which N belongs. Suppose that $\theta_1 < 2\pi$ and let θ'_1 and θ''_1 be two angles smaller than 2π such that

$$2\pi - \theta_1 = (2\pi - \theta'_1) + (2\pi - \theta''_1). \quad (2.4)$$

In this subsection, we describe a surgery building out flat surfaces of genus g with $n + 1$ singular points of cone angle $\theta' = (\theta'_1, \theta''_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ from N (note that because we have assumed (2.4), the new angle datum θ' still satisfies Gauß-Bonnet formula). The surgery is local on N , in the sense that it is performed on a small neighbourhood of p_1 without modifying the rest of the surface.

Choose a point p in a small neighbourhood C of p_1 isomorphic to the truncated cone $C_{\theta_1}(\epsilon)$ for a certain $\epsilon > 0$. As θ'_1 is bigger than θ_1 , there are exactly two distinct segments of the same length issuing from p which meet at their endpoints and form an interior angle equal to $2\pi - \theta'_1$ at p (see Figure 2.5).

The surgery works the following way : delete the bigon on C which corresponds to the quadrilateral B in grey on Figure 2.5. Its sides are two geodesics which have the same length and the same endpoints p'_1 and p''_1 . Removing the bigon and gluing these two segments together, one gets a new flat surface N' having two cone points of angle θ'_1 and θ''_1 at p'_1 and p''_1 .

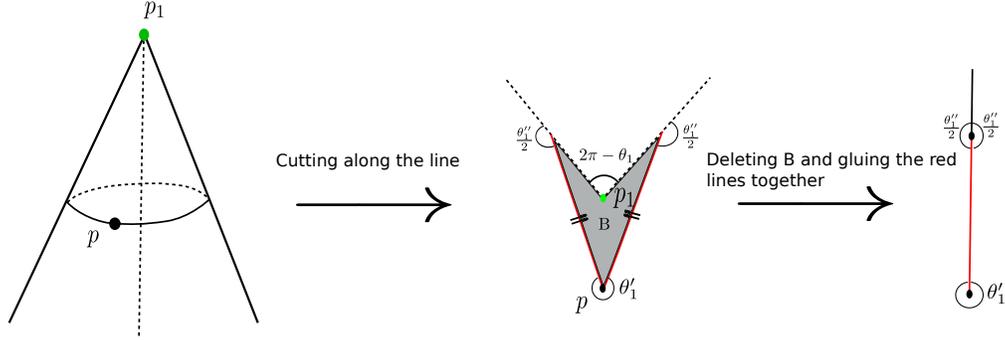


FIGURE 2.5 – Thurston’s surgery \mathcal{S}_1 .

Recall that $\mathcal{F}_{[\rho]}$ is the leaf of Veech’s foliation to which N belongs. There exists a neighbourhood U of N in $\mathcal{F}_{[\rho]}$ and $\epsilon > 0$ sufficiently small so that for all flat surfaces in U , the previous surgery can be performed for all p in a disc of radius ϵ centered at p_1 , the cone point of angle θ_1 . Remark that the class $[\rho']$ such that $N' \in \mathcal{F}_{[\rho']}$ does not depend on the choice of N in U .

This allows us to define a map

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 : C_{\theta_1}^*(\epsilon) \times U &\longrightarrow \mathcal{F}_{[\rho']} \\ (p, N) &\longmapsto N', \end{aligned} \tag{2.5}$$

where $C_{\theta_1}^*(\epsilon)$ is $C_{\theta_1}(\epsilon)$ minus its apex. This definition requires an identification of $C_{\theta_1}(\epsilon)$ in each element of U . We do this by choosing a geodesic path c joining p_1 and p_2 . This path survives in a neighbourhood of N in U . We decide that $C_{\theta_1}(\epsilon)$ is embedded in an element of U in such a way that it always meets the previous geodesic path in the same locus - this latter requirement defining unambiguously such an embedding. Let $z_0 \in \mathbb{C}$ be a (germ of) linear parametrisation of $C_{\theta_1}^*(\epsilon)$ such that $z_0 \in \mathbb{R}_+$ if and only if the corresponding point p belongs to the aforementioned geodesic path joining p_1 to p_2 .

There is a little ambiguity for the choice of the path c whenever some elements of U have non-trivial isometries; in that case the identification of $C_{\theta_1}^*(\epsilon)$ on elements of U cannot be made continuous. We chose to ignore this difficulty for a moment and then we will address it in Remark 7 below.

Proposition 21. *We use the notations introduced just above.*

1. *If (z_1, \dots, z_m) is a linear parametrisation of U then (z_0, z_1, \dots, z_m) is a linear parametrisation of $U' \subset \mathcal{F}_{[\rho']}$.*
2. *The map \mathcal{S}_1 is a local biholomorphism.*
3. *If all elements of U have no non-trivial isometry then \mathcal{S}_1 is one-to-one.*

Démonstration. Consider a topological polygonal model of $N \in U$ which is such that c is an edge of this polygon. This model can be extended to a model of N' by adding a point on the side representing the class of c , see Figure 2.6.

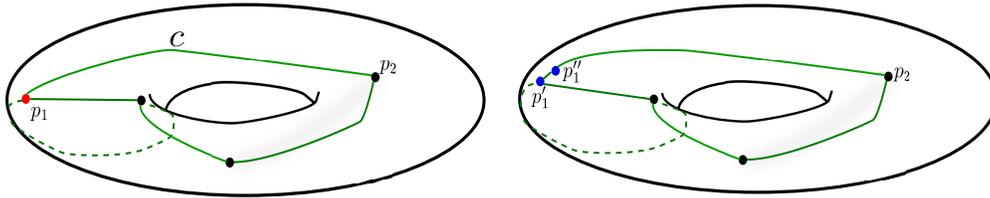


FIGURE 2.6 – The surface N before surgery \mathcal{S}_1 on the left and N' after surgery on the right.

Let (z_1, \dots, z_m) be a linear parametrisation of U such that the geodesic path c from p_1 to p_2 develops on z_1 , and let z_0 be the complex number on which the geodesic path from p_1 to p develops. Let N' be a flat surface obtained after applying a \mathcal{S}_1 surgery to N . Let (w_0, \dots, w_m) be a linear parametrisation of a neighbourhood of N' in $\mathcal{F}_{[\rho']}$ associated to the extended polygonal model of N such that w_0 represents the shortest geodesic path from p'_1 to p''_1 on N' and w_1 represents a path joining p'_1 to p_2 , w_2 a path joining p''_1 to p_3 .

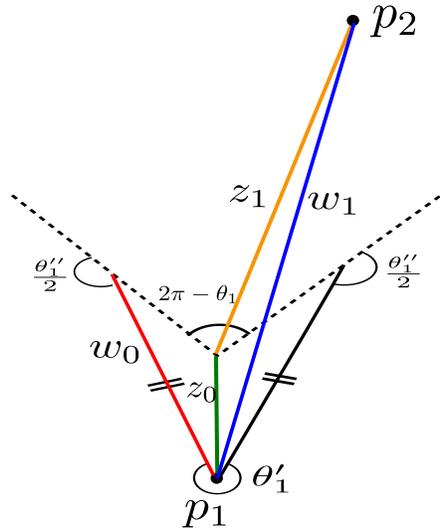


FIGURE 2.7

According to Figure 2.7, the following relations hold true

$$w_0 = \rho_0 z_0, \quad w_1 = z_1 + z_0 \quad \text{and} \quad w_2 = z_2 + \rho_1 z_0,$$

where ρ_0 and ρ_1 are constants (which can be made explicit) depending only on θ_1, θ'_1 and θ''_1 . All the other w_i s can be expressed in a similar fashion. Furthermore, if w_i does not represent a path involving end points different from p'_1 and p''_1 , it is equal to one of the z_j 's.

Therefore (z_0, z_1, \dots, z_m) is a linear parametrisation of a neighbourhood of N' in $\mathcal{F}_{[\rho']}$. This implies directly the two first points of the proposition, in particular the fact that \mathcal{S}_1 is a local biholomorphism. It remains to prove the injectivity of \mathcal{S}_1 under the additional hypothesis that all the elements of U have a trivial isometry group. The length of the shortest path from p'_1 to p''_1 (which equals $|z_0|$ provided that the latter is small enough in the area 1 normalisation) is a geometric invariant. The surface N from which N' is obtained from also is a geometric invariant. Assume that there exist two points p and p' on $C_{\theta_1}^*(\epsilon)$ such that the resulting surfaces from the surgery at p and p' are the same. This would imply that the initial surface has an isometry fixing p_1 and sending p to p' . The (pure) isometry group of a surface being finite, \mathcal{S}_1 is a local biholomorphism which is one-to-one if all the elements of U are all isometry free. \square

Remarque 7. (1) It is worth giving a more abstract and intrinsic definition of the surgery introduced above. Let $U \subset \mathcal{F}$ as above and assume that none of its elements admits a nontrivial isometry. Then there exists a ‘*universal flat curve*’ over U , namely a map $\nu_U : \mathcal{T}_U \rightarrow U$ such that the fiber over a flat surface N viewed as a point of U is N itself, but this time viewed as a 2-dimensional flat surface with conical singularities. This family of surfaces comes with n sections $p_i : U \rightarrow \mathcal{T}_U$ which are such that $p_i(N)$ is the i -th cone point of N for every $i = 1, \dots, n$. One denotes by P_i the image of p_i for every i and by $\mathcal{T}_U^* = \mathcal{T}_U \setminus \cup_{i=1}^n P_i$ the ‘*n-punctured universal flat curve over U*’

Within this formalism, one can verify that Thurston’s surgery \mathcal{S}_1 admits an intrinsic definition as the (germ of) map $(\mathcal{T}_U^*, P_1) \rightarrow \mathcal{F}_{[\rho]}$ which, for any $p \in \mathcal{T}_U^*$ sufficiently close to P_1 associates the flat surface N' obtained by performing the surgery described by Figure 2.5 above on the surface $N = \nu_U(p)$ with respect to p and the cone point $p_1(N)$. Clearly, obtaining the more explicit definition (2.5) just amounts to trivializing $\mathcal{T}_U \rightarrow U$ along P_1 .

(2) The interest of the preceding, more conceptual, approach is that it points out the main issue when some of the elements of U admit nontrivial isometries and how to deal with it. Indeed, in this case, there is no universal curve over U but one will exist over a non-trivial orbifold cover \tilde{U} of U and working with the latter, one can define Thurston’s surgery the same way than above.

For instance and more concretely, if $N_0 \in U$ is such that $\text{PIso}^+(N_0)$ is non-trivial, then it is necessarily cyclic of finite order, say m . In this case there exists $\tilde{U} \rightarrow U$ an orbifold cover of order m of U , whose deck transformation group is isomorphic to the isometry group of N_0 , on which the identification of $C_{\theta_1}^*(\epsilon)$ in

elements U can be made in a continuous way.

Therefore the surgery still defines a map

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 : C_{\theta_1}^*(\epsilon) \times \tilde{U} &\longrightarrow \mathcal{F}_{[\rho']} \\ (p, N) &\longmapsto N' \end{aligned}$$

which is equivariant under the action of the isometry group of N_0 .

Thurston's surgery \mathcal{S}_2 for a cone angle greater than 2π .

Assume now that $\theta_1 > 2\pi$. Let $\theta'_1 > 2\pi$ and $\theta''_1 < 2\pi$ be such that

$$2\pi - \theta_1 = (2\pi - \theta'_1) + (2\pi - \theta''_1).$$

Let V_1 be a neighbourhood of p_1 isometric to a portion of cone $C_{\theta_1}(\epsilon)$ for a certain $\epsilon > 0$. Define $\eta = \theta_1 - 2\pi$ and let p be a point of V_1 . If p is close enough to the singular point p_1 there is a unique 4-gon P in V_1 having the following properties (see Figure 2.8) :

- p and p_1 are opposite vertices of P and the external angles of the latter at these two points are θ''_1 and η respectively ;
- the external angles at the two other vertices of P both are $\theta'_1/2$;
- the sides of P meeting at p (resp. at p_1) have the same length ;

A neighbourhood of the singular point p_1 .

Surgery creating two points with cone angle θ'_1 and θ''_1 .

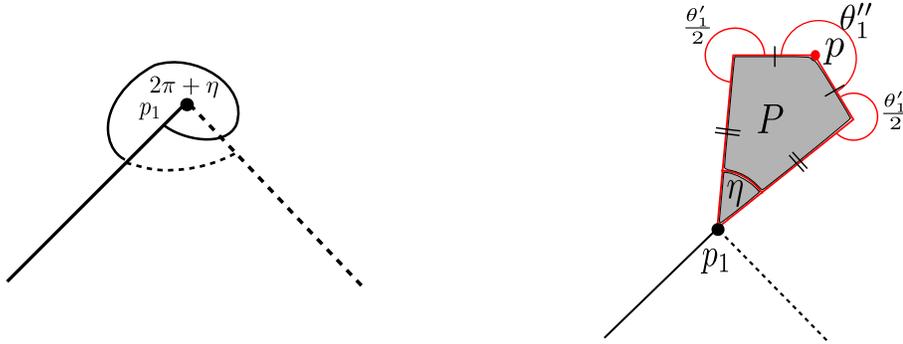


FIGURE 2.8 – Thurston's surgery \mathcal{S}_2 .

We build a new flat surface N' in the following way : we remove the interior of P and glue together the sides meeting at p_1 and p . We obtain a flat surface with a singularity of angle θ''_1 and another singularity of angle θ'_1 . As when $\theta_1 < 2\pi$,

the class $[\rho']$ such that $N' \in \mathcal{F}_{[\rho']}$ does not depend on the choice of N . For a neighbourhood U in \mathcal{F} , this allows us to define a map

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 : C_{\theta_1}^*(\epsilon) \times U &\longrightarrow \mathcal{F}_{[\rho']} \\ (p, N) &\longmapsto N'. \end{aligned}$$

Similarly to the case when $\theta_1 < 2\pi$, the map \mathcal{S}_2 is a local biholomorphism on its image, and for any linear parametrisation (z_1, \dots, z_m) of U , (z_0, z_1, \dots, z_m) is a linear parametrisation of the image of \mathcal{S}_2 , where z_0 is the complex number on which the segment $[p_1, p]$ develops. The proof is exactly the same as in the $\theta_1 < 2\pi$ case and is left to the reader. A similar remark to Remark 7 also holds true for \mathcal{S}_2 as well.

The following remark will play a crucial role in the proof of Proposition 28 which is one of the main result of the paper.

Remark 8. If l is the length of the segment between the points of angle θ'_1 and θ''_1 and L the length between p_1 and the point of angle θ'_1 (after surgery), then

$$L = \frac{\sin\left(\frac{\theta''_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta'_1 + \theta''_1}{2}\right)} l. \quad (2.6)$$

Given a flat surface N with two conical points p'_1 and p''_1 of angles $\theta'_1 > 2\pi$ and $\theta''_1 < 2\pi$ which are linked by a saddle connection c of length l , one can wonder when it is possible to reverse Thurston's surgery \mathcal{S}_2 . The only obstruction to doing so is that c can be extended on the side of p'_1 (the point of negative curvature) on a distance equal to the right-hand side of (2.6), while cutting θ'_1 in half. The proof of this claim is elementary and left to the reader.

The Devil's surgery \mathcal{S}_3

Let $\theta'_1, \theta''_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ be the respective cone angles at the cone points $p'_1, p''_1, p_2, \dots, p_n$ of a flat surface N . We make the simplifying assumption that θ'_1 and θ''_1 are (strictly) less than π , but we will see later on that the surgery we are going to describe can still be performed for θ'_1 and θ''_1 less than 2π .

Let C'_1 and C''_1 be two neighbourhoods of p'_1 and p''_1 , isometric to $C_{\theta'_1}(\epsilon)$ and $C_{\theta''_1}(\epsilon)$ respectively, with $\epsilon > 0$ sufficiently small. Consider two points q' and q'' in C'_1 and C''_1 respectively such that the unique closed geodesic paths c' and c'' in C'_1 and C''_1 respectively, singular only at q' and q'' have the same length (see Proposition 17). Remove the upper part of the two cones C'_1 and C''_1 by cutting along c' and c'' respectively. Then glue c' and c'' isometrically in such a way that q' and q'' are glued together. One gets a flat surface of genus $g + 1$ with n cone points of angle $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ with $\theta_1 = 2\pi + \theta'_1 + \theta''_1$.

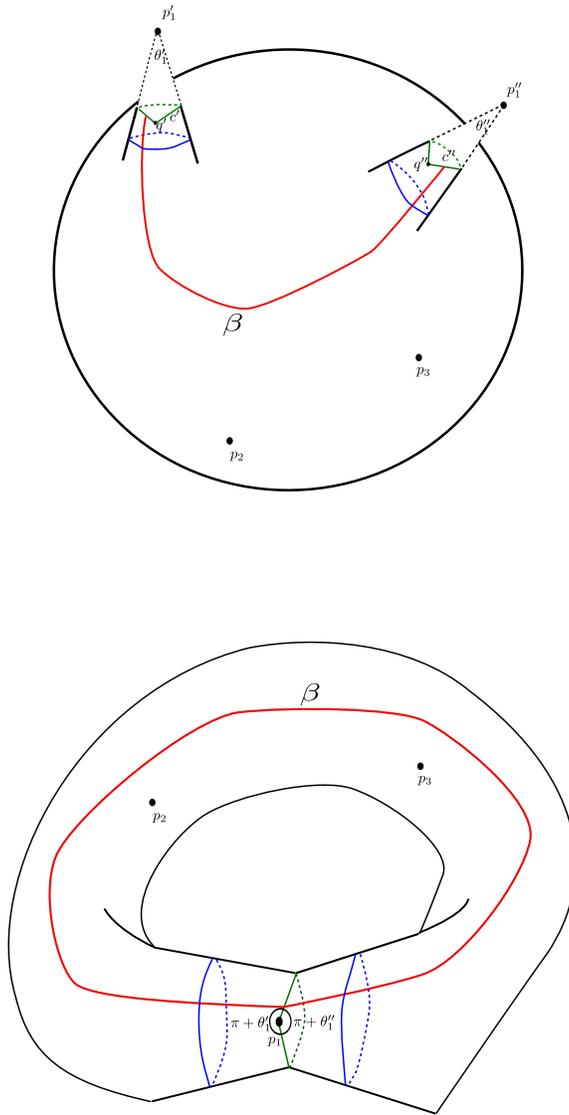


FIGURE 2.9 – The Devil's surgery from a flat sphere to a flat torus.

Let β be a simple curve, avoiding singular points, joining two regular points of c' and c'' which are glued together. Now allow q' and q'' to vary on two circles centred at p_1' and p_1'' which are such that c' and c'' are the same length. We want to perform the surgery in such a way that the linear holonomy of the resulting surface does not change and equals a certain (class under the action of the pure mapping class group) ρ' . It is equivalent to the fact that the holonomy along β does not vary, because the holonomy of the resulting flat surface is totally determined by

the holonomy of the original surface and the holonomy along β . When q' moves on the circle it belongs to (namely the set of points of C'_1 whose distance to the apex p'_1 is the same as the one of q'), the linear holonomy along β increases exactly by the angle that q' makes relatively to its initial position. Hence if we want to keep the linear holonomy around β constant, we have to move q'' by the same angle as q' . This allows us to build a map :

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{S}}_3 : \widetilde{C_{\theta'_1}^*}(\epsilon) \times U &\longrightarrow \mathcal{F}_{[\rho']} \\ (p, N) &\longmapsto N' \end{aligned}$$

where U is an open subset of \mathcal{F} , the moduli space to which the original surface belongs.

Proposition 22. *Suppose that every element of U has no non-trivial isometry. Then $\widetilde{\mathcal{S}}_3$ is a covering map onto its image. If θ'_1 and θ''_1 are not commensurable (i.e. if $\theta'_1/\theta''_1 \notin \mathbb{Q}$) then it is a biholomorphism onto its image.*

However, if $\theta'_1/\theta''_1 = k/l$ for some coprime positive integers k and l , then the deck group is the group generated by the rotation of angle $l\theta'_1 = k\theta''_1$. In particular $\widetilde{\mathcal{S}}_3$ factors through

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_3 : C_{l\theta'_1}^*(\epsilon) \times U &\longrightarrow \mathcal{F}_{[\rho']} \\ (p, \Sigma) &\longmapsto \Sigma' \end{aligned}$$

which is a biholomorphism onto its image.

Démonstration. The fact that $\widetilde{\mathcal{S}}_3$ is a local biholomorphism just relies on the fact that one can get a linear parametrisation of $\mathcal{F}_{[\rho']}$ by adding the parameter z_0 to any linear parametrisation of U , with z_0 a linear parametrisation of $C_{l\theta'_1}^*(\epsilon)$.

The key fact is that two surfaces resulting from the surgery under consideration are isometric if and only if the two points q' and q'' are the same because we have supposed that the elements of U do not have non-trivial isometries (see the proof of Proposition 21). When q' varies in the universal covering of $C_{\theta'_1}^*(\epsilon)$, the point q'' eventually comes back to its initial position if and only if the two cone angles θ'_1 and θ''_1 are rationally related : the lack of injectivity appears when q' and q'' come back for the first time to their initial position as q' turns around p'_1 and q'' follows, which happens if and only if an equation of the form $k\theta'_1 = l\theta''_1$ (for some non-trivial pair of coprime integers (k, l)) is satisfied. In this case, l is the exact number of times q'' turns around p''_1 while q' turns k times around p'_1 . \square

When θ'_1 (resp. θ''_1) is greater than π , we cannot cut the cone of angle θ'_1 (resp. θ''_1) in the way it has been done previously. We let the reader verify that one only has to replace the truncated cone of angle θ'_1 at p'_1 (resp. of angle θ''_1 at p''_1) by

the metric space obtained by gluing the sides a and b on Figure 2.10 below. This metric space is the cone of angle θ'_1 (resp. θ''_1) to which one has added the triangle T appearing on Figure 2.10 with the aforementioned identifications.

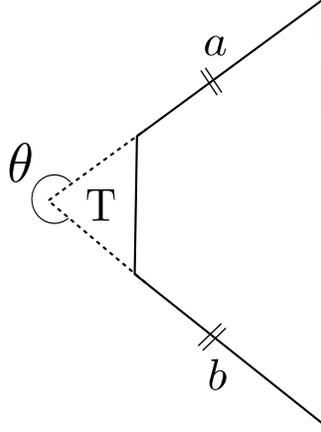


FIGURE 2.10 – The modified cone of angle $\theta > \pi$.

Regarding the lack of injectivity of the map $\widetilde{\mathcal{S}}_3$ (or \mathcal{S}_3) when some elements of U have non-trivial isometries, one can make a statement similar to Remark 7 to address the question.

The kite surgery \mathcal{S}_4

Fix $\theta_1 \in]2\pi, 4\pi[$ and $\theta_2, \theta_3 \in]0, 2\pi[$ such that

$$(2\pi - \theta_1) + (2\pi - \theta_2) + (2\pi - \theta_3) = 0.$$

We describe in this section a local surgery building from a regular flat torus a new one with three conical points of respective angles θ_1, θ_2 and θ_3 .

Let T be a regular flat torus (*i.e.* without singular points for the flat metric), and p_2 a point on T . If p_3 is a point close enough to p_2 , there exists a unique kite with opposite vertices p_2 and p_3 and such that the external angle at these points are θ_2 and θ_3 respectively. The external angles at the two other vertices are necessarily equal to the half of θ_1 , see Figure 2.11.

The **kite surgery** consists in removing the kite (in grey on the above picture) and gluing the adjacent sides in order to get three singular points of respective angles θ_1, θ_2 and θ_3 . Since the flat torus T is determined by a lattice in \mathbb{C} , *i.e.* by two \mathbb{R} -linearly independent complex numbers z_1, z_2 such that $T = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}z_1 + \mathbb{Z}z_2)$. One can perform the kite surgery on T by placing p_2 at 0 and p_3 at z_0 for any given z_0 sufficiently small.

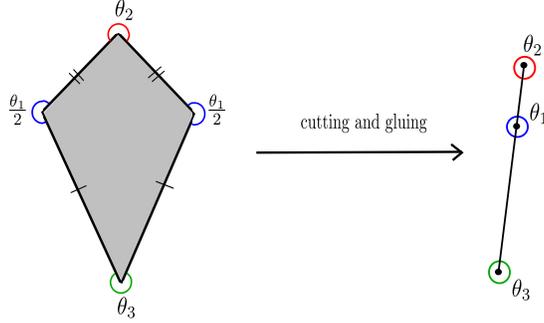


FIGURE 2.11 – Performing the kite surgery

Up to renormalisation, we can assume that $z_1 = 1$ and $z_2 = \tau \in \mathbb{H}$. Let T' be the resulting torus (more precisely the class of tori up to renormalisation by an element of \mathbb{C}). Let $\mathcal{F}_{[\rho']}$ be the leaf to which this surgery makes T' come. Because z_0 and $-z_0$ are equivalent under the action of the hyperelliptic involution, the kite surgery performed at these two parameters gives isometric surfaces. Similarly to the previous cases, one can build a map

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_4 : C_\pi^*(\epsilon) \times \mathbb{H} &\longrightarrow \mathcal{F}_{[\rho']} \\ (z_0, \tau) &\longmapsto T' \end{aligned}$$

which is a local biholomorphism onto its image, except at points having exceptional symmetries where it is an orbifold covering onto its image. The proof is similar to the proof of Proposition 21, one just has to take a suitable topological model for T that makes (z_0, z_1, z_2) a linear parametrisation of $\mathcal{F}_{[\rho']}$.

The surgery \mathcal{S}_5 : Building flat surfaces with a Euclidean cylinder.

In this section we do not make any assumptions on the cone angles $\theta_1, \dots, \theta_n$. We explain a simple surgery (to which we shall refer as \mathcal{S}_5) building flat surfaces of genus $g + 1$ and with $n - 1$ cone points having an arbitrarily long Euclidean cylinder out of an initial flat surface N of genus g and with n cone points.

Let γ be a geodesic path joining p_1 and p_2 the conical points of N , of respective angles θ_1 and θ_2 . Cut along γ to get a flat surface with one boundary component and then glue p_1 and p_2 together. The resulting surface has a boundary consisting of two simple closed geodesics touching at one point where they are singular. Then we glue a flat cylinder along these two boundary components to get a new flat surface N' of genus $g + 1$ with an embedded cylinder (see Figure 2.12). Note that the cone angle of N' at its new singular point (namely the one obtained after having identified p_1 and p_2) is easily seen to be $\theta_1 + \theta_2 + 2\pi$.

There are two real parameters for the aforementioned gluing of the flat cylinder : its length and a twisting parameter. Both can be encoded by a single complex number z_0 whose imaginary part is positive, such that the cylinder we glue identifies with the one of base 1 and height z_0 . This makes sense because there always exists a normalization of N such that the the geodesic joining p_1 and p_2 in the initial surface develops onto the segment $[0, 1]$.

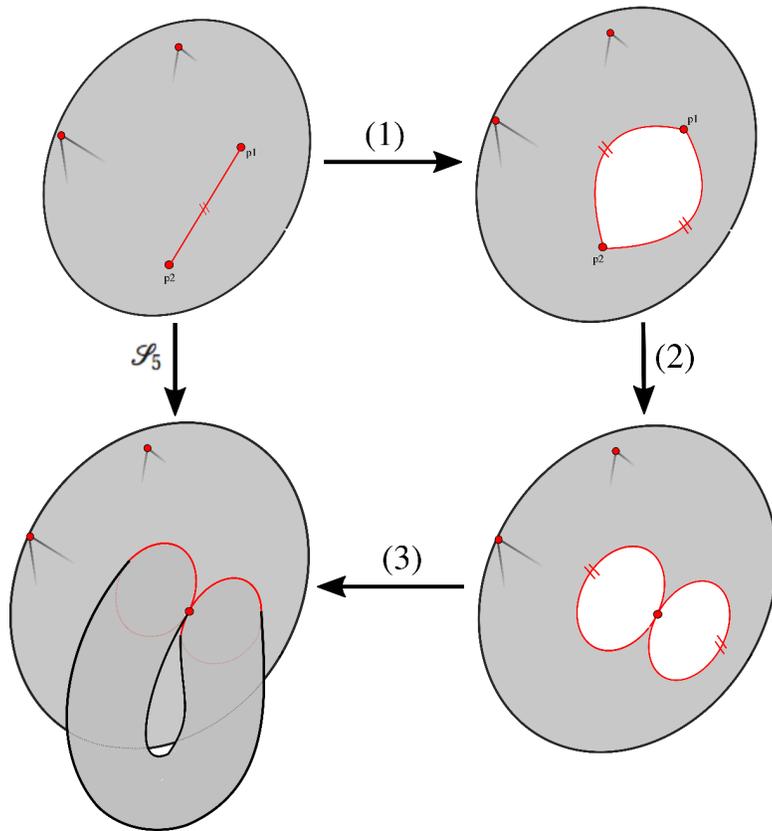


FIGURE 2.12 – The surgery \mathcal{S}_5 performed on a flat sphere with four cone points : (1) we cut along the geodesic segment between two of them ; (2) we identify the two corresponding points on the boundary ; (3) then we glue a flat cylinder in order to obtain a flat tori with three cone points.

If $U \subset$ is a neighbourhood of the initial surface in \mathcal{F} , we can build a natural map

$$\mathcal{S}_5 : \mathbb{A} \times U \longrightarrow \mathcal{F}_{[\rho']}$$

$$(z_0, N) \longmapsto N'$$

where \mathbb{A} stands for the infinite cylinder $\mathbb{H}/(z \sim z + 1)$.

The surgery \mathcal{S}_5 associates to N and z_0 the surface obtained after gluing the flat cylinder of height the parameter z_0 to (the good normalisation of) N .

Proposition 23. *The surgery \mathcal{S}_5 is a local biholomorphism onto its image.*

Démonstration. Let (z_1, \dots, z_m) be a linear parametrisation of U such that z_1 parametrises the geodesic segment along which the surgery is performed. Then one verifies that $(z_0 z_1, z_1, \dots, z_m)$ is a linear parametrisation of the image of \mathcal{S}_5 . The proof works in the same way as in Proposition 21. \square

Calculation of the signature of the area form in particular cases.

A corollary of the description of these surgeries is an easy inductive computation of the signature of the Veech form in the specific cases we are interested in.

Proposition 24. *1. Suppose that $g = 0$, $n \geq 3$ and that $0 < \theta_i < 2\pi$ for all $i = 1, \dots, n$. Then Veech's area form has signature $(1, n - 3)$.*

2. Suppose that $g = 1$, $n \geq 2$, $2\pi < \theta_1 < 4\pi$ and that $0 < \theta_i < 2\pi$ for all i such that $1 < i \leq n$. Then Veech's area form has signature $(1, n - 1)$.

Démonstration. The proof goes by induction in both cases. We explain only (2) since the proof of (1) is basically the same but simpler and roughly sketched in [Thu88]. We suppose that $g = 1$ and $n \geq 3$, and $\rho \in \mathbb{H}^1(N, \mathbb{U}, \theta)$. Let ρ' be the reduction (see Section 2.2.4) associated to a collision between two points of angles θ_i and θ_j . Such a collision can actually happen if and only if $(2\pi - \theta_i) + (2\pi - \theta_j) < 2\pi$, and two such points always exist since there is initially only one conical point of negative curvature which is also smaller than 4π , provided that $n \geq 3$. Therefore the leaf associated to ρ' is not empty and one can perform Thurston's surgery on elements of $\mathcal{F}_{[\rho']}$ to get elements of \mathcal{F} . Let $(z_0, z_1, \dots, z_{n-1})$ be a linear parametrisation of $\mathcal{F}_{[\rho]}$ such that (z_1, \dots, z_{n-1}) is a linear parametrisation of $\mathcal{F}_{[\rho']}$ and z_0 is such that $(z_0, z_1, \dots, z_{n-1})$ represents the element that one gets after performing Thurston's surgery with parameter z_0 on the surface represented by (z_1, \dots, z_{n-1}) . If A is the area form for the parametrisation $(z_0, z_1, \dots, z_{n-1})$ and A' the one for (z_1, \dots, z_{n-1}) , then one has

$$A(z_0, \dots, z_{n-1}) = A'(z_1, \dots, z_{n-1}) - \mu|z_0|^2$$

for a certain positive constant μ which depends only on the value of the angle of the cone point on which the surgery is performed. Indeed, $\mu|z_0|^2$ is the area of the portion of cone removed when proceeding to the surgery which is an isosceles triangle with fixed centre angle and whose base has length linearly depending

on $|z_0|$. The induction hypothesis ensures that A' has signature $(1, n - 2)$ and therefore A has signature $(1, n - 1)$.

The case $n = 2$ remains to be handled. By the same argument in the case of the Devil's surgery we find that in that case the signature is $(1, 1)$. One starts with a flat sphere with three cone points. The set of such flat spheres can be parametrised by a complex number z_1 such that the area of the associated sphere is $|z_1|^2$ (and recovering that up to projectivising, there is only one such flat sphere). The Devil's surgery consists in removing two portions of cones in a sphere. If z_0 is the parameter of the surgery, the area of the resulting torus will be of the form

$$|z_1|^2 - \mu|z_0|^2$$

for a certain $\mu > 0$. This completes the proof of the proposition. \square

Cone angle around a codimension 1 stratum.

As we will see in detail later, the surgery maps \mathcal{S}_i (for $i = 1, \dots, 4$) describe the cone-manifold structure of the metric completion of \mathcal{F} close to a codimension 1 stratum, when Veech's area form endows \mathcal{F} with a complex hyperbolic structure. In particular, they allow the computation of the associated cone-manifold angles.

1. In case of both Thurston's surgeries \mathcal{S}_1 of \mathcal{S}_2 , the cone-manifold angle around the codimension 1 stratum is the angle of the Euclidean cone angle on which the surgery is performed.
2. In the case of Devil's surgery, when both angles are rational multiples of 2π , say $2\pi m'/n$ and $2\pi m''/n$, the cone-manifold angle is $\frac{2\pi \text{lcm}(m', m'')}{n}$.
3. In the case of the Kite surgery \mathcal{S}_4 , the cone angle always equals π since the parameter space for the surgery is the neighbourhood of a regular point of angle 2π on which the hyperelliptic involution acts.

Geometric convergence.

We end this section dedicated to surgeries by a paragraph on a notion of geometric convergence for flat surfaces. Whether two Riemannian manifolds (in a moduli space) are close or not depends on an *a priori* definition.

Definition 4. Let N' be a flat surface of area 1 obtained from a surgery \mathcal{S} on a surface N . The **width** of this surgery at N is :

- the distance between the two new cone points in N' if $\mathcal{S} \in \{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2\}$;
- the length of the short essential curve created on N' if $\mathcal{S} = \mathcal{S}_3$;
- the distance between p_2 and p_3 in N' (see §2.2.3 for the notations) if $\mathcal{S} = \mathcal{S}_4$.

The width of a surgery is a positive parameter which depends linearly on the size of the removed part of the initial surface on which one performs the surgery. When g and θ are such that \mathcal{F} has a complex hyperbolic structure, this width has a geometric interpretation in terms of the distance to the strata of the metric completion which will be made explicit in the following section (see Lemma 18).

Definition 5 (Geometric convergence). *A sequence of flat surfaces $(M_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{F})^{\mathbb{N}}$ is said to be **geometrically converging** either if it converges in \mathcal{F} or if there exist*

- a flat surface M_∞ belonging to a leaf $\mathcal{F}_{[\rho']}$ for a reduction ρ' of ρ ;
- a small neighbourhood U of M_∞ in $\mathcal{F}_{[\rho']}$ on which a surgery map $\mathcal{S} = \mathcal{S}_i$ (for some $i = 1, 2, 3, 4$) is well defined;
- $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sequence of positive numbers going to 0;
- a truncated sequence $(M'_q)_{n \gg 1}$ of flat surfaces elements of U which converge to M_∞ in $U \subset \mathcal{F}_{[\rho']}$,

such that M_n is obtained after a surgery \mathcal{S} of width ϵ_n on M'_q for $n \gg 1$.

We say that the sequence $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **geometrically converges** to the pair (M_∞, \mathcal{S}) , or just to M_∞ if $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converges in \mathcal{F} .

The true interest of this definition is that it will allow us to make the difference between two sequences of surfaces in \mathcal{F} whose limits are isometric metric spaces but lying at different places in (the metric completion of) \mathcal{F} .

2.2.4 The metric completion

For the remainder of the section, N is a surface of genus $g = 0$ with $n + 3$ marked points or of genus 1 with $n + 1$ marked points (we write the number of marked points this way in order that \mathcal{F} has complex dimension n).

We also make the assumption that

- if $g = 0$ all the angles $\theta_1, \dots, \theta_{n+3}$ belong to $]0, 2\pi[$;
- if $g = 1$ then $\theta_1 \in]2\pi, 4\pi[$ and all the other cone angles θ_i are in $]0, 2\pi[$.

Therefore, for any $\rho \in \mathbb{H}^1(N, \mathbb{U}, \theta)$ in the image of the linear holonomy map, the leaf $\mathcal{F}_{[\rho]}$ of Veech's foliation in the corresponding moduli space of marked curves is endowed with a complex hyperbolic structure of dimension $2g + n - 3$ (see [Thu88] for the case $g = 0$ and Proposition 24 or [Vee93] for the case $g = 1$). In the present section, we are interested in the structure of the metric completion of \mathcal{F} endowed with this complex hyperbolic structure. Therefore every mention of a geometric property of $\mathcal{F}_{[\rho]}$ will now be relative to this structure.

This section is dedicated to the proof of the following theorem :

Théorème 28. *Let X be the metric completion of \mathcal{F} . If $\text{Im}(\rho)$ is finite then :*

- (1) X has a stratified structure $X = X_0 \sqcup X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n$ with $X_0 = \mathcal{F}$;
- (3) the topological closure of X_i in X is $X_i \sqcup X_{i+1} \sqcup \dots \sqcup X_n$;
- (3) for $i = 0, \dots, n$, X_i is a smooth complex hyperbolic manifold of complex dimension $n - i$ which carries a natural $\mathbb{C}\mathbb{H}^{n-i}$ -structure ;
- (4) each X_i is a finite union of finite covers of $\mathcal{F}_{[\tilde{\rho}]}$ for some reductions $\tilde{\rho}$ of ρ .

The definition of a *reduction* of a representation ρ is given in the section below.

From now on, we assume that $\text{Im}(\rho)$ is finite.

Strata

In Section 2.2.3, we have introduced various surgeries, describing different ways flat surfaces can degenerate and how to parametrise these surgeries. The degenerate flat surfaces we see appearing in these ways belong to the metric completion of $X_0 = \mathcal{F}$. More precisely, they appear in copies of (finite coverings of) $\mathcal{F}_{\tilde{\rho}}$ of complex dimension $n - 1$ where $\tilde{\rho}$ is a reduction of ρ in the following sense :

Definition 6. *A unitary character $\tilde{\rho} \in \text{H}^1(M, \mathbb{U})$ is a **reduction** of $\rho \in \text{H}^1(N, \mathbb{U})$ if there exists an injective diffeomorphism $i : M \rightarrow N$ such that $\tilde{\rho} = i^* \rho$.*

We define inductively the strata X_1, \dots, X_n appearing in the description of X . The first stratum X_1 is the set of couples pairs surface/surgery (N, \mathcal{S}) such that there exists a sequence of elements of $X_0 = \mathcal{F}$ geometrically converging (in the sense of Definition 5) to a pair (N, \mathcal{S}) not already in X_0 .

Lemme 16. *The stratum X_1 is a union of $\mathcal{F}_{[\tilde{\rho}]} s^2$ for some reductions $\tilde{\rho}$ of ρ and such that the complex dimension of $\mathcal{F}_{[\tilde{\rho}]}$ is $n - 1$.*

Démonstration. The holonomy $\tilde{\rho}$ of the limit of a sequence geometrically converging is a reduction of ρ . Since $\text{Im}(\rho)$ is finite, there are only finitely many such reductions and therefore only finitely $\mathcal{F}_{[\tilde{\rho}]}$ to which such a limit can belong.

Now let $\mathcal{F}_{[\tilde{\rho}]}$ be such that one of its elements (N_0, \mathcal{S}_0) appears as the limit of a geometrically converging sequence. We claim that Z , the connected component of X_1 to which (N_0, \mathcal{S}_0) belongs, is a finite cover of a connected component of $\mathcal{F}_{[\tilde{\rho}]}$. One can define a local homeomorphism from a neighbourhood of (N_0, \mathcal{S}_0) in Z to the component of $\mathcal{F}_{[\tilde{\rho}]}$ containing N_0 associating to any couple $(N, \mathcal{S}_0) \in Z$

2. For $\mathcal{F}_{[\tilde{\rho}]}$ corresponding to a devil's surgery, it is actually a finite cover of $\mathcal{F}_{[\tilde{\rho}]}$ that appears. This comes from the fact that there is a finite number of different combinatorics in which one can perform the same devil's surgery, see Section 2.2.3.

sufficiently close to (N_0, \mathcal{S}_0) the associated flat surface N . This map is a covering map which is finite since the fiber over a point is included in the set of different ways to perform the corresponding surgery, which is finite (see Section 2.2.3). This fiber is actually trivial for surgeries different from the Devil surgery.

More precisely let $\tilde{\rho}$, be such that one element N_0 of $\mathcal{F}_{[\tilde{\rho}]}$ appears as the limit of a geometrically converging sequence along a surgery \mathcal{S} . The set of elements of X_1 whose associated flat surface belongs to $\mathcal{F}_{[\tilde{\rho}]}$ is exactly the covering map over $\mathcal{F}_{[\tilde{\rho}]}$ whose fiber over a point is the number of ways to perform the surgery \mathcal{S} at this point. \square

The next step is to prove that the disjoint union $X_0 \sqcup X_1$ embeds into the metric completion of $X_0 = \mathcal{F}$. This is a direct consequence of the following proposition :

Proposition 25. *If $(M_q)_{q \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{F})^{\mathbb{N}}$ geometrically converges, then it is a Cauchy sequence for the metric induced by the complex hyperbolic structure on \mathcal{F} .*

Démonstration. The statement is clear if $(M_q)_{q \in \mathbb{N}}$ converges in \mathcal{F} so we assume that it is not the case. We consider a linear parametrisation (z_0, z_1, \dots, z_n) such that

- z_0 is the surgery parameter (*i.e.* the small segment linking the two new cone points after Thurston's surgery, or the small closed broken geodesic segment appearing after a Devil's surgery which is such that the width of the surgery is $|z_0|$ in a normalisation of area 1, etc.); and
- (z_1, \dots, z_n) is a linear parametrisation of the leaf to which the surface on which the surgery is done belongs.

For any $q \in \mathbb{N}$, let $z(q) = (z_i(q))_{i=0}^n$ stand for the coordinates of M_q in the considered linear parametrisation, normalised so that the corresponding area of M_q is 1. From the very definition of metric convergence, we have that $(z_0(q))_{q \in \mathbb{N}}$ goes to 0 and $((z_i(q))_{i=1}^n)_{q \in \mathbb{N}}$ converges in \mathbb{C}^n since the associated sequence of flat surfaces in the corresponding stratum converges. It follows that $z(q)$ converges in \mathbb{C}^{n+1} as q tends to infinity.

On the other hand, the normalisation of the areas of the M_q 's ensures that the $z(q)$'s stay away from the boundary of the model of the complex hyperbolic space associated with the considered linear parametrisation (z_0, \dots, z_n) . The proposition follows. \square

Thanks to the preceding result, one has a map :

$$i_1 : X_0 \sqcup X_1 \longrightarrow \overline{\mathcal{F}}.$$

Proposition 26. *The map i_1 defined just above is injective.*

Démonstration. Clearly, the restriction of i_1 to $X_0 = \mathcal{F}$ is the identity. Since $i_1(X_1) \cap \mathcal{F} = \emptyset$, it suffices to show that $i_1|_{X_1}$ is injective to get the proposition.

Let (A_1, \mathcal{S}_1) and (A_2, \mathcal{S}_2) be two distinct points in X_1 . The surgery maps

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_i & : C_{\theta_1}^*(\epsilon_i) \times U_i & \longrightarrow & \mathcal{F}_{[\rho]} \\ & (z_0, N) & \longmapsto & N', \end{aligned}$$

defined in Section 2.2.3, where U_i is a neighbourhood of A_i for $i = 1, 2$, extend continuously to $\overline{\mathcal{S}_i} : C_{\theta_1}(\epsilon_i) \times U_i \longrightarrow \overline{\mathcal{F}_{[\rho]}}$ which are homeomorphisms onto their images and whose respective images are neighbourhoods of $i_1(A_1)$ and $i_1(A_2)$ in X . If U_i and ϵ_i are chosen small enough, the images of \mathcal{S}_1 and \mathcal{S}_2 do not overlap which implies that $i(A_1)$ and $i(A_2)$ are separated and therefore different. \square

The distance induced on X_1 by this embedding is nothing else but the one induced by its natural complex hyperbolic structure : a neighbourhood of X_1 in $X = \overline{\mathcal{F}}$ can be described by a finite number of linear parametrisations of the form (z_0, \dots, z_n) in which X_1 corresponds to the locus $\{z_0 = 0\}$.

Remarque 9. We would like to stress that in the preceding assertion, one has to be aware that (z_0, \dots, z_n) does not induce a local system of coordinates on a neighbourhood in X of a small open subset of X_1 . Actually, what must be understood is that the equation $z_0 = 0$ cuts out something (a piece of X_1 as it happens) in the boundary of the definition domain of the chart induced by the linear parametrisation (z_0, \dots, z_n) . We will not dwell again on this subtlety in what follows but will only make reference to the present remark.

The definition of X_2 is slightly more subtle because it is possible that two essentially different geometrically converging sequences in X_1 converge to the same point in $\overline{\mathcal{F}}$: consider for instance a case when $g = 1$ and $n = 3$. We can distinguish two types of components in X_1 : the one which are moduli spaces of tori with two cone points, and those which are Thurston-Deligne-Mostow's moduli spaces of flat spheres with four cone points. Both can degenerate on flat spheres with three cone points. It can happen that these a priori different limits are identified in $\overline{\mathcal{F}}$. One must think of such points as parts of the intersection locus of the closures of two connected components of X_1 on which two different surgeries can be performed, each leading to a different component of X_1 .

In order to define correctly X_2 , we proceed in two steps : we first define in an analogous way Y_2 , that one shall think to be roughly the set of pairs flat surface/surgery (M, \mathcal{S}) such that there exists a sequence in X_1 geometrically converging to (M, \mathcal{S}) . However, the fact that we are dealing with finite covers of leaves prevents us from giving such a straightforward definition. Bypassing this difficulty is rather easy : X_1 is a finite union of finite covers of some leaves $\mathcal{F}_{[\rho]}$,

for some reductions $\tilde{\rho}$ of ρ . Such a finite cover Z_0 can be partially metrically completed by adjoining a codimension 1 stratum Z_1 (possibly with several connected components) in order that the covering map $\pi : Z_0 \rightarrow \mathcal{F}_{[\tilde{\rho}]}$ extends to a map

$$\tilde{\pi} : Z_0 \sqcup Z_1 \rightarrow \mathcal{F}_{[\tilde{\rho}]} \sqcup X'_1$$

which is a covering map, possibly ramified along X'_1 , where X'_1 is analogous to X_1 associated to $\mathcal{F}_{[\tilde{\rho}]}$ and such that $\tilde{\pi}^{-1}(X'_1) = Z_1 : X'_1$ is a finite union of some unramified finite covers of some leaves $\mathcal{F}_{[\tilde{\rho}']}$ for some reduction $\tilde{\rho}'$ of $\tilde{\rho}$. Then one defines Y_2 as the (finite) union of all such Z_1 's associated to all the finite covers appearing in X_1 and is itself a finite union of finite covers of some leaves $\mathcal{F}_{[\hat{\rho}]}$ for some reduction $\hat{\rho}$ of ρ (a reduction of a reduction of ρ is again a reduction of ρ as it follows immediately from Definition 6).

Defined this way, $X_1 \sqcup Y_2$ maps into the metric completion of X_1 as a complex hyperbolic manifold with each of its connected components endowed with the induced complex hyperbolic distance. But note that this construction does not take into account how close these connected components can be in $\overline{\mathcal{F}}$.

As we did for X_1 , we define a map :

$$i_2 : X_1 \sqcup Y_2 \rightarrow \overline{\mathcal{F}} \tag{2.7}$$

whose restriction to X_1 coincides with the one of i_1 . The main difference between the maps i_1 and i_2 is that the latter is not injective : some components of Y_2 are identified. We define X_2 as the image of Y_2 under that map or equivalently, Y_2 with the aforementioned components identified. The crucial point is that X_0 has a distance only defined on each of its connected components by the complex hyperbolic metric, while the distance on X_1 takes into account the way in which X_1 is embedded in X .

The following property allows to identify the irreducible components of X_2 with some unramified coverings of some reductions of \mathcal{F} .

Proposition 27. *If A and B are distinct points of Y_2 such that $i_2(A) = i_2(B)$ then*

1. *the flat surfaces associated to A and B are isometric ;*
2. *there exists $\hat{\rho}$, a reduction of ρ , and a connected component Z of $\mathcal{F}_{[\hat{\rho}]}$ such that the images by i_2 of the components of Y_2 containing A and B are both equal to the same finite cover of Z .*

Démonstration. Let N_A and N_B the two flat surfaces associated to A and B respectively.

Assume that N_A and N_B are not isometric. Consider two sequences in X_1 geometrically converging to A and B respectively. They can be approximated

by two Cauchy sequences in \mathcal{F} converging to the same point in $\overline{\mathcal{F}}$. But their associated flat surfaces converge towards two different metric spaces, which is impossible. This proves (1).

Let Z be the component of $\mathcal{F}_{[\tilde{\rho}]}$ to which $N = N_A = N_B$ belongs. We first remark that there are neighbourhoods of A and B in Y_2 which are identified under i_2 : there are two surgeries \mathcal{S}_A and \mathcal{S}_B on N which produce images under i_2 of neighbourhoods of A and B in Y_2 . This identification can be extended to a cover of Z . This cover must be finite since it is covered by a component of Y_2 which is finite according to Lemma 16. \square

From the map (2.7) and by the very definition of X_2 , one deduces an injective map $j_2 : X_1 \sqcup X_2 \rightarrow \overline{\mathcal{F}}$. Since the restrictions of i_1 and j_2 to X_1 coincide, one can consider their fiber product over X_1 in order to get an injective map :

$$X_0 \sqcup X_1 \sqcup X_2 \longrightarrow \overline{\mathcal{F}}.$$

Inductively, one defines Y_{j+1} from X_j in exactly the same way we defined Y_2 from X_1 . Then one defines X_{j+1} by identifying some components of Y_{j+1} using the natural map $i_{j+1} : X_j \sqcup Y_{j+1} \rightarrow \overline{\mathcal{F}}$. Note at this point that the analog of Proposition 27 for Y_j holds true, the proof being completely similar. Since a reduction $\hat{\rho}$ of a reduction $\tilde{\rho}$ of ρ is still a reduction of ρ , we get that X_i is a complex hyperbolic manifold of dimension $n - i$ whose connected components are some coverings of some leaves $\mathcal{F}_{[\tilde{\rho}]}$ for some reduction $\tilde{\rho}$ of ρ .

Putting all pieces together we get that

- $X_0 \sqcup X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n$ embeds into the metric completion X of $X_0 = \mathcal{F}$;
- $\forall i$, X_i is a finite union of finite covers of $\mathcal{F}_{\tilde{\rho}}$ for some reductions $\tilde{\rho}$ of ρ ;
- $\forall i$, the distance of X induces on X_i its natural structure of complex hyperbolic manifold of dimension $\dim(X_0) - i$.

Proof of the surjectivity

Proposition 28. *Assume that $\text{Im}(\rho)$ is finite. Then the embedding*

$$X_0 \sqcup X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n \longrightarrow X = \overline{\mathcal{F}}$$

is onto.

This proposition says in substance that the metric space obtained by adding to \mathcal{F} the degenerate surfaces that one sees when reversing the surgeries studied in Section 2.2.3 is complete. Before giving the proof, we have to state two technical lemmas relating the complex hyperbolic geometry of \mathcal{F} to the geometry of the underlying flat surfaces parametrized by this leaf.

Lemme 17. *If $\text{Im}(\rho)$ is finite then the two following assertions hold true for any sequence $(M_q)_{q \in \mathbb{N}}$ of flat surfaces in \mathcal{F} normalised so that their area is 1 :*

1. *If $(M_q)_{q \in \mathbb{N}}$ is a Cauchy sequence then $(D(M_q))_{q \in \mathbb{N}}$ is bounded.*
2. *If $(D(M_q))_{q \in \mathbb{N}}$ is bounded then $(M_q)_{q \in \mathbb{N}}$ is a Cauchy sequence (up to passing to a subsequence).*

Démonstration. We postpone the proof of (1) to Section 2.2.5 in which we provide a description of the parts of \mathcal{F} on which the diameter function D is large.

The proof of (2) consists in remarking that using the Delaunay decomposition of M_q , we can assume that, up to passing to a subsequence :

- all the M_q 's are recovered by gluing the sides of a pseudo-polygon through the same gluing pattern ;
- the side glued together always form the same angle (that this can be assumed follows from the fact that $\text{Im}(\rho)$ is finite by assumption) ;
- the lengths of each side converge (since the lengths of the edges of the Delaunay triangulation are smaller than $2D(M_q)$ by Proposition 16).

In the chart defined by the gluing pattern, the coordinates of the M_q 's form a Cauchy sequence. Then using the fact that their areas all have been assumed to be 1, one can argue in the same way as at the end of the proof of Proposition 25 and get that $(M_q)_{q \in \mathbb{N}}$ is a Cauchy sequence for the metric on \mathcal{F} induced by the complex hyperbolic structure it carries. \square

Lemme 18. *There exists a positive constant $K = K_{[\rho]}$ such that if $M \in X_0 = \mathcal{F}$ (which is supposed to be normalised such that its area equals 1) is obtained from a surgery \mathcal{S} of width ϵ from an element of X_1 then*

$$d(M, X_1) \leq K \epsilon ,$$

where d denotes the extension of the complex hyperbolic distance on X_0 to X .

Démonstration. Let (z_0, z_1, \dots, z_n) be a linear parametrisation compatible with the surgery \mathcal{S} (see Section 2.2.3) which is such that

- the parameter z_0 is the surgery parameter, in particular $|z_0| = \epsilon$ is the width of the surgery ;
- (z_1, \dots, z_n) is a linear parametrisation of $U \subset X_1$;
- in the coordinates z_0, \dots, z_n , the area form A writes down

$$A(z_0, z_1, \dots, z_n) = A'(z_1, \dots, z_n) - \mu |z_0|^2$$

where

- $\mu = \mu_{\mathcal{S}}$ is a positive constant depending on the surgery \mathcal{S} (it is the constant such that $\mu|z_0|^2$ is the area of the part of the surface removed while processing the surgery);
- A' is the area form on U expressed in the coordinates z_1, \dots, z_n .

Note that since the image of ρ is assumed to be finite, the set of such $\mu_{\mathcal{S}}$'s is finite and thus $\mu_{\mathcal{S}}$ is uniformly bounded from above.

One can compute the complex hyperbolic distance between two points in the complex hyperbolic space using formulas involving A (see [Gol99, p.77] for instance). If $a : \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ stands for the polarisation of A , namely the Hermitian form such that $A(X) = a(X, X)$ for every $X \in \mathbb{C}^{n+1}$, the complex hyperbolic distance $d(X, Y)$ between two points $[X], [Y] \in \mathbb{C}\mathbb{H}^n \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ satisfies

$$\cosh^2\left(\frac{d(X, Y)}{2}\right) = \frac{a(X, Y)a(Y, X)}{a(X, X)a(Y, Y)}.$$

If $X = (x_0, X') \in \mathbb{C}^{n+1}$ and $Y = (y_0, Y') \in \mathbb{C}^{n+1}$ with $X' = (x_1, \dots, x_n)$ and $Y' = (y_1, \dots, y_n)$, the formula for $a(X, Y)$ is

$$a(X, Y) = a'(X', Y') - \mu x_0 \bar{y}_0$$

where a' stands for the polarisation of A' .

We want to estimate $\alpha = d((z_0, z_1, \dots, z_n), (0, z_1, \dots, z_n))$. Since M is supposed to have area 1 therefore according to the discussion above, we have

$$\cosh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{(1 + \mu \epsilon^2)^2}{1 \cdot (1 + \mu \epsilon^2)} = 1 + \mu \epsilon^2.$$

Since for all $a > 0$, one has $1 + \frac{a^2}{2} \leq \cosh(a)$, it comes

$$1 + \frac{\alpha^2}{8} \leq \sqrt{1 + \mu \epsilon^2} \leq 1 + \frac{\mu}{2} \epsilon^2$$

from which we deduce that $\alpha \leq 2\sqrt{\mu}\epsilon$. Since μ is bounded from above by a constant only depending on the image of ρ , the proposition is proved. \square

We end this section with the proof of Proposition 28. We still suppose that $\text{Im}(\rho)$ is finite, which is the crucial hypothesis on which everything done in this paper relies on. We just say a word on the general strategy. In order to show that any Cauchy sequence accumulates to one point in a stratum, we first prove that, since the diameter along a Cauchy sequence is bounded, if such a Cauchy sequence does not converge in \mathcal{F} , it implies that it degenerates in the sense that either its systole or its relative systole goes to zero. If the latter occurs, we show that such a

surface having a sufficiently short systole or relative systole is obtained from one of the four surgeries described in Section 2.2.3 and therefore is very close to X_1 . Then we conclude with an inductive argument.

Proof of Proposition 28. Let $M_\bullet = (M_q)_{q \in \mathbb{N}}$ be a Cauchy sequence in $X_0 = \mathcal{F}$ for the complex hyperbolic metric. For the remainder of the proof, we set

$$D_q = D(M_q), \quad \sigma_q = \sigma(M_q) \quad \text{and} \quad \delta_q = \delta(M_q)$$

for any $q \in \mathbb{N}$. We aim at proving that M_\bullet converges in $\overline{\mathcal{F}}$ to a point belonging to the image of the embedding $X_0 \sqcup \dots \sqcup X_n \rightarrow \overline{\mathcal{F}}$.

The proof goes by induction on $\dim(X_0)$. Recall that the following inequalities hold true (see Proposition 15) :

$$\delta_q \leq D_q \text{ and } \sigma_q \leq 2D_q.$$

We distinguish three cases :

(1). **The two sequences $(\delta_q)_{q \in \mathbb{N}}$ and $(\sigma_q)_{q \in \mathbb{N}}$ both do not converge to zero.**

According to Lemma 17, the sequence of diameters $(D_q)_{q \in \mathbb{N}}$ is bounded. The Delaunay decomposition provides polygonal models of M_q such that the length of each side is bounded (see Proposition 16). One can extract a subsequence such that all polygonal models have the same gluing pattern, and therefore, since $\text{Im}(\rho)$ is finite, extract a subsequence whose polygonal model converges towards a non degenerate pseudo-polygon whose associated surface in X_0 is the limit of the Cauchy sequence M_\bullet .

(2). **The sequence $(\delta_q)_{q \in \mathbb{N}}$ converges to zero while $(\sigma_q)_{q \in \mathbb{N}}$ does not.**

In that case, one proves that $(d(M_q, X_1))_{q \in \mathbb{N}}$ converges to zero. First remark that in that case necessarily $\dim(X_0) \geq 2$. Indeed, according to Proposition 19, if $\dim(X_0) = 1$ we have that δ_q converging to zero implies that D_q goes to infinity which would contradict Lemma 17. For every $q \in \mathbb{N}$, consider two singular points p_q, q_q of M_q of respective cone angles θ_q and θ'_q , such that $d(p_q, q_q) = \delta_q$. Three subcases are to be distinguished in this situation :

- both curvatures $(2\pi - \theta_q)$ and $(2\pi - \theta'_q)$ are positive (*i.e.* p_q and q_q carry positive curvature). In that case one can always reverse Thurston's surgery \mathcal{S}_1 , with width of order δ_q (see Section 2.2.3) ;
- one of the two curvatures $(2\pi - \theta_q)$ or $(2\pi - \theta'_q)$, say the former, is negative : one has $\theta_q > 2\pi$ while $\theta'_q < 2\pi$. In this case $(2\pi - \theta_q) + (2\pi - \theta'_q)$ is negative since there is at least one other cone point which must have positive curvature. We want to verify if there is enough room to reverse Thurston's

surgery \mathcal{S}_2 , which means that one can extend the geodesic line from q_q to p_q after the point of negative curvature on a distance of

$$\frac{\sin\left(\frac{\theta'_q}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_q+\theta'_q}{2}\right)} \cdot \delta_q \quad (2.8)$$

so that the extended line cuts the angle at p_q into two equal angles (see Remark 8). If this is possible, one can cut along the extended line and fill with an appropriate Euclidean kite, and therefore reverse Thurston's surgery \mathcal{S}_2 with small width of order δ_q .

- we now prove that if the two latter cases do not occur, we are in a situation where the kite surgery \mathcal{S}_4 can be reversed. If we cannot extend the geodesic line from q_q to p_q , it must be either because it meets another cone point or that the line self-intersects. The latter case cannot happen if q is large enough otherwise the systole would be smaller than (2.8). The fact that the line self-intersecting gives rise to a non-essential curve is not totally obvious. Actually this very curve could turn around a singular point r_q of cone angle smaller than π . But since there can be only one such point whose cone angle is smaller than π^3 , we can play the same game with r_q and p_q being sure that this situation will not occur. Since θ_q and θ'_q range in a finite set, that would imply that σ_q goes to zero. So the extended line meets a singular point r_q . One can try to reverse Thurston's surgery with p_q and r_q . If $[p_q, q_q]$ is long enough we are brought back to the previous case. In the case when it is not long enough, we are going to prove that

$$(2\pi - \theta_q) + (2\pi - \theta'_q) + (2\pi - \theta''_q) = 0.$$

In that case $\dim(X_0) = 2$ and one can reverse the kite surgery with very small width.

Assume that Thurston's surgery \mathcal{S}_2 cannot be reversed neither with p_q and q_q nor with p_q and r_q . Let $l_q = \delta_q$ be the length of the geodesic segment from q_q to p_q and l'_q the length of the one from r_q to p_q (see Figure 3.1). As a consequence of Lemma 19, we have the following trichotomy :

1. if

$$l'_q > \frac{\sin\left(\frac{\theta'_q}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_q+\theta'_q}{2}\right)} l_q$$

then perform the surgery \mathcal{S}_2 on the pair of points p_q, q_q ;

3. Indeed, since we have supposed that the cone point of negative curvature has cone angle $< 4\pi$, there cannot be two cone points of angles $< \pi$, for otherwise the total curvature would exceed 0 and violate the Gauss-Bonnet equality.

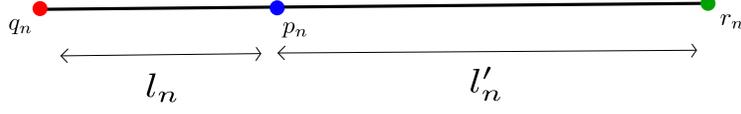


FIGURE 2.13 – The three points p_q , q_q and r_q .

2. if

$$l_q > \frac{\sin\left(\frac{\theta''_q}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_q + \theta''_q}{2}\right)} l'_q$$

then perform the surgery \mathcal{S}_2 on the pair of points p_q, r_q ;

3. if

$$l'_q \leq \frac{\sin\left(\frac{\theta'_q}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_q + \theta'_q}{2}\right)} l_q \quad \text{and} \quad l_q \leq \frac{\sin\left(\frac{\theta''_q}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_q + \theta''_q}{2}\right)} l'_q$$

then perform the kite surgery on the points p_q, q_q and r_q .

(3). **The sequence $(\sigma_q)_{q \in \mathbb{N}}$ converges to zero.**

This case is the easiest. Since $(D_q)_{q \in \mathbb{N}}$ is bounded and $\sigma_q \rightarrow 0$ as n goes to infinity, Proposition 20 applies for q large enough. This implies that a devil's surgery \mathcal{S}_3 of small width can be reversed.

We have proven so far that either $(M_q)_{q \in \mathbb{N}}$ converges to a point in X_0 or that for q large enough M_q can be recovered from a point of X_1 by a surgery of width going to zero as q goes to infinity. In that latter case, Proposition 18 ensures that $d(M_q, X_1)$ converges to zero. Applying the induction hypothesis to a sequence $(M'_q)_{q \in \mathbb{N}}$ of flat surfaces $M'_q \in X_1$ which are such that $d(M'_q, M_q) \leq d(M_q, X_1) \leq 1/q$ for any $q \gg 1$, one gets that the limit of the sequence $(M_q)_{q \in \mathbb{N}}$ in $\overline{\mathcal{F}}$ belongs to $X_0 \sqcup X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n \subset \overline{\mathcal{F}}$.

The proof of Proposition 28 is over. □

Lemme 19. *Let T be a flat torus and p_1, p_2 and p_3 three distinct singular points on it, of respective cone angles θ_1, θ_2 and θ_3 . Assume that p_1 is the only point of negative curvature among all the cone points of T and that p_2, p_1 and p_3 sit, in this order, on a geodesic line broken at p_1 , cutting the cone angle θ_1 into two equal angles. Denote by l the length of the part of the line from p_1 to p_2 , and l' the length of the part of the line from p_1 to p_3 . Assume also that*

$$l' \leq \frac{\sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)} l \quad \text{and} \quad l \leq \frac{\sin\left(\frac{\theta_3}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_3}{2}\right)} l'. \quad (2.9)$$

Then the four following assertions hold true :

1. $(2\pi - \theta_1) + (2\pi - \theta_2) + (2\pi - \theta_3) = 0$;
2. T has no other cone point than p_1, p_2 and p_3 ;
3. both inequalities in (2.9) actually are equalities ;
4. T can be recovered by a kite surgery from a regular flat torus.

Démonstration. The two inequalities of (2.9) together yield to

$$\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_3}{2}\right) \leq \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_3}{2}\right)$$

or equivalently $\cos\left(\theta_1 + \frac{\theta_2 + \theta_3}{2}\right) - \cos\left(\frac{\theta_2 + \theta_3}{2}\right) \geq 0$ which in its turn is equivalent to

$$\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \leq 0. \quad (2.10)$$

On the one hand, we have $-2\pi < (2\pi - \theta_1) + (2\pi - \theta_2) + (2\pi - \theta_3) \leq 0$ because of the Gauß-Bonnet formula. This implies that $4\pi > (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)/2 \geq 3\pi$ and therefore that $\sin((\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)/2) \leq 0$, with equality if and only if θ_1, θ_2 and θ_3 sum up to 6π . But on the other hand, $2\pi < \theta_1 < 4\pi$ according to our hypothesis hence $\pi < \theta_1/2 < 2\pi$ and $\sin(\theta_1/2) < 0$. Inequality (2.10) forces $\sin((\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)/2)$ to vanish. Therefore $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 6\pi$ or equivalently

$$(2\pi - \theta_1) + (2\pi - \theta_2) + (2\pi - \theta_3) = 0.$$

This implies in particular that

$$\frac{\sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)} = \left(\frac{\sin\left(\frac{\theta_3}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_3}{2}\right)}\right)^{-1}$$

and therefore one obtains that the inequalities in (2.9) actually are equalities.

Note that the lengths of two consecutive sides of a kite of external angles $\theta_1/2, \theta_2, \theta_3$ satisfy the above equalities and therefore one can cut along the aforementioned geodesic line and fill with the appropriate kite to reverse the kite surgery. \square

2.2.5 Finiteness of the volume of \mathcal{F}

We prove in this section that the volume of \mathcal{F} is finite under the hypothesis that ρ has finite image. Without the latter assumption (that we shall assume to hold true for the remainder of the section), it is possible to prove that the volume of \mathcal{F} must be infinite. We will only be interested in the genus 1 case, the genus 0 case having already been dealt with by Thurston in [Thu88].

Proposition 18 essentially tells us that the lack of compactness of the metric completion of $\mathcal{F}_{[\rho]}$ is characterised by the property of having large embedded cylinders. Surfaces satisfying this property can be recovered by performing a surgery on a flat sphere along a distinguished geodesic segment between two conical points, see Section 2.2.3.

Cylindrical coordinates.

Let $T_0 \in \mathcal{F}$ be a torus containing a flat embedded systolic cylinder. It is built up from a flat sphere S_0 on which has been performed surgery \mathcal{S}_5 described in Section 2.2.3 along a geodesic segment between two conical points of S_0 . Let $\tilde{\rho}$ be such that $S_0 \in \mathcal{F}_{[\tilde{\rho}]}$ and let (z_0, \dots, z_{n-1}) be a local linear parametrisation of $\mathcal{F}_{[\tilde{\rho}]}$ at S_0 such that z_0 represent the geodesic path along which the surgery is performed, and let z_n be the complex number such that the inserted cylinder has sides z_0, z_n . Then (z_0, \dots, z_n) is a linear parametrisation of $\mathcal{F}_{[\rho]}$. We call any such parametrisation a **cylindrical parametrisation** whose existence is guaranteed by Proposition 14.

Let A be the area form of the flat tori in \mathcal{F} close to T_0 expressed in the coordinates z_0, \dots, z_n and denote by B the area form of the associated flat spheres in $\mathcal{F}_{[\tilde{\rho}]}$, expressed in the coordinates z_0, \dots, z_{n-1} .

The (signed) area of the aforementioned embedded flat cylinder is $\text{Im}(z_n \bar{z}_0)$ therefore the two area forms A and B are linked by the following relation :

$$A(z_0, \dots, z_n) = B(z_0, \dots, z_{n-1}) + \text{Im}(z_n \bar{z}_0).$$

Normalising with $z_0 = 1$, we get a genuine parametrisation of $\mathcal{F}_{[\rho]}$ (resp. $\mathcal{F}_{[\tilde{\rho}]}$) (z_1, \dots, z_n) (resp. (z_1, \dots, z_{n-1})) and the preceding relation becomes

$$A(1, z_1, \dots, z_n) = B(1, z_1, \dots, z_{n-1}) + \text{Im}(z_n).$$

Finiteness of the volume.

The strategy to estimate the complex hyperbolic volume of \mathcal{F} is to restrict ourselves to parts of \mathcal{F} where the diameter is large (*i.e.* where corresponding flat tori have large embedded flat cylinders, see Proposition 18) and use the cylindrical coordinates defined above to perform some quasi-explicit estimations.

For every positive ϵ , one sets

$$A_\epsilon = \{ T \in \mathcal{F} \mid \sigma(T) = \epsilon \text{ and } T \text{ contains a flat cylinder of width } \epsilon \}$$

and $B_\epsilon = \{ T \in \mathcal{F} \mid \sigma(T) \leq \epsilon \text{ and } T \text{ contains a flat cylinder of width } \sigma(T) \}$.

As is it often implicitly assumed in a large part of the paper, the points of \mathcal{F} are flat surfaces which are supposed to be normalised in order that their area is 1. In particular we assume this hypothesis in the definitions above.

Both A_ϵ and B_ϵ are closed subsets of \mathcal{F} . Moreover, from Section 2.2.3, it comes that when non-empty, A_ϵ is a smooth real-analytic hypersurface in \mathcal{F} .

For a given $\epsilon > 0$, the elements of A_ϵ can be modified by thickening of a length t the embedded flat cylinder of width ϵ (by thickening, we mean replacing the cylinder of length l by a cylinder of length $l+t$). When renormalising in order that the area is equal to 1, the width of the cylinder becomes smaller than ϵ . This defines a map

$$A_\epsilon \times \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow B_\epsilon, \quad (2.11)$$

which is a local diffeomorphism (see Section 2.2.3). The fact that this map is well-defined relies on the uniqueness of the cylinder of width ϵ in any $T \in A_\epsilon$ for ϵ small enough. A proof of this fact is given at the end of the section, in Lemma 20. Note that this also shows that A_ϵ is precisely the boundary of B_ϵ .

Proposition 29. *For any ϵ sufficiently small, the map $A_\epsilon \times \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow B_\epsilon$ is onto.*

Démonstration. First remark that it is sufficient to prove the proposition for a fixed $\epsilon_0 > 0$, because the statement will then hold true for every smaller ϵ .

Second, since B_ϵ is the disjoint union of the A_η 's for $\eta \in]0, \epsilon]$, the proposition follows from the fact that, for every $t > 0$, the image of $A_\epsilon \times \{t\}$ by (2.11) is the whole hypersurface $A_{\epsilon/\sqrt{1+et}}$, as soon as ϵ is taken sufficiently small. This technical assertion is proved in Subsection 2.2.5 below. \square

For the remainder of this section, we fix ϵ such that (2.11) is surjective. Now remark that the closure of $\mathcal{F} \setminus B_\epsilon$ in $\overline{\mathcal{F}}$ is compact. Indeed, a sequence in $\mathcal{F} \setminus B_\epsilon$ must have bounded diameter according to Proposition 18. But then, up to passing to a subsequence, it is a Cauchy sequence by Lemma 17 and therefore converges in $\overline{\mathcal{F}}$. Since $A_\epsilon = \partial B_\epsilon$, its closure in $\overline{\mathcal{F}}$ must be compact as well.

We are now able to prove the

Proposition 30. *The volume of B_ϵ is finite.*

Démonstration. Since the closure of A_ϵ in $\overline{\mathcal{F}}$ is compact, A_ϵ can be recovered by a finite union of simply-connected open sets $(U_i)_{i \in I}$ such that for each $i \in I$:

1. the diameter of U_i for the complex hyperbolic metric is finite;
2. there are cylindrical coordinates defined on U_i .

More precisely, each element in U_i can be recovered from surgery \mathcal{S}_5 on a sphere of a certain leaf $\mathcal{F}_{[\rho]}$ along a geodesic joining two singular points and we have a linear parametrisation (z_0, \dots, z_n) of U_i such that

- z_0 parametrises the geodesic along which the surgery is performed;
- (z_0, z_n) parametrises the added cylinder;

— (z_0, \dots, z_{n-1}) is a linear parametrisation of $\mathcal{F}_{[\tilde{\rho}]}$.

The area form therefore writes down the following way

$$A(z_0, \dots, z_n) = B(z_0, \dots, z_{n-1}) + \text{Im}(z_n \bar{z}_0). \quad (2.12)$$

Normalising with $z_0 = 1$, we get a parametrisation of $\mathcal{F}_{[\rho]}$ (resp. of $\mathcal{F}_{[\tilde{\rho}]}$) by (z_1, \dots, z_n) (resp. by (z_1, \dots, z_{n-1})) and the preceding relation becomes

$$A(1, z_1, \dots, z_n) = B(1, z_1, \dots, z_{n-1}) + \text{Im}(z_n).$$

In this chart the local diffeomorphism $A_\epsilon \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow B_\epsilon$ is given by

$$((z_1, \dots, z_n, \theta), t) \mapsto (z_1, \dots, z_{n-1}, z_n + it + \theta).$$

where θ is the twist parameter of the cylinder of width ϵ in A_ϵ . At this point, we would like to stress that $(z_1, \dots, z_n, \theta)$ is not a system of coordinates on A_ϵ , but the latter written in these coordinates is a real-analytic submanifold of codimension 2.

In view of (2.12), $(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n + it + \theta)$ is a system of pseudo-horospherical coordinates on B_ϵ (see Appendix B where this notion is introduced and discussed). Since the diameter of each U_i is finite, the image of such a map restricted to $B_i = (A_\epsilon \cap U_i) \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ is included into a domain U_{K_i, λ_i} introduced in Appendix B, for some $K_i, \lambda_i > 0$. It follows (from Lemma A.3) that the complex hyperbolic volume $\text{vol}(B_i)$ of B_i is finite for any $i \in I$. There are only a finite number of U_i 's covering A_ϵ and since ϵ has been taken such that the map (2.11) is onto, one gets

$$\text{vol}(B_\epsilon) \leq \sum_{i \in I} \text{vol}(B_i),$$

which implies that the complex hyperbolic volume of B_ϵ is finite. \square

As mentioned above, the finiteness of the volume of \mathcal{F} follows from the preceding proposition, hence we have proved the following theorem :

Théorème 29. *Assume $g = 1$ and θ is such that $2\pi < \theta_1 < 4\pi$ and $\theta_i < 2\pi$ for $i \geq 2$. If ρ has finite image, then the volume of \mathcal{F} for its complex hyperbolic structure is finite.*

Uniqueness of the ‘systolic cylinder’

We prove the following lemma announced in Subsection 2.2.5.

Lemme 20. *There exists $\epsilon_1 > 0$ such that for any flat torus T with only one point of negative curvature and associated cone angle less than 4π , the following holds true : if T has an embedded flat cylinder of width $\epsilon < \epsilon_1$ then the latter is unique.*

Démonstration. Assume that T contains two distinct embedded cylinders C_1 and C_2 , both of width ϵ .

First assume that these two cylinders intersect. Without loss of generality, we can suppose that a component A of ∂C_1 intersects C_2 . Since A is totally geodesic, it must enter C_2 through one of its boundary component and exit by the other. But A has length ϵ so C_2 has length at most ϵ . But considering the proof of Lemma 21 below, this can be seen to be impossible if ϵ is small enough.

If C_1 and C_2 do not intersect, one gets two embedded cylinders in T whose interiors are disjoint. This implies that their boundary components are homotopic. $T \setminus C_1 \cup C_2$ has two connected components. Because the boundary components are homotopic, the total curvature in each of these components must be an integer of 2π (because of Gauss-Bonnet formula). Which is impossible because of the condition on the cone angles of T . \square

A technical lemma

We fix $\epsilon > 0$. For any positive $\eta < \epsilon$, it is easily seen that the preimage of $A_\eta \subset B_\epsilon$ by (2.11) is $A_\epsilon \times \{t_\eta\}$ with $t_\eta = (\epsilon^2 - \eta^2)/(\epsilon\eta^2) > 0$.

Lemma 21. *For ϵ sufficiently small, any map $A_\epsilon \times \{t_\eta\} \rightarrow A_\eta$ is surjective.*

Démonstration. Since $\text{Im}(\rho)$ is finite, the number of genus 0 moduli spaces $\mathcal{M}_{0,\theta'}$ that can be obtained from elements of \mathcal{F} by reversing the surgery \mathcal{S}_5 is finite. Consequently, the minima κ of the set of constants $K(\theta'_1, \theta'_2)$ given by Lemma 13 for the corresponding angle data θ' (of course each time with respect to the two cone points involved in the surgery), is positive.

We claim that the statement of the lemma holds true for any $\epsilon < \kappa$. Indeed, if it were not the case, there would exist $T \in A_\eta$ for some $\eta < \epsilon$, which was not in the image of $A_\epsilon \times \{t_\eta\} \rightarrow A_\eta$. For such a T , one verifies that the length of the systolic flat cylinder of T (of width η) is necessarily less than or equal to $\eta t_\eta / \epsilon$. Then removing this cylinder from T and inverting the surgery \mathcal{S}_5 would give a flat sphere with a short geodesic between two of its cone points. After renormalization of the area, this sphere and this geodesic together would contradict Lemma 13 since $\epsilon < \kappa$ (the computational details are left to the reader). \square

Proof of Lemma 17

We finally explain how the above description of the parts of \mathcal{F} consisting of tori with long embedded cylinders gives a proof of the first point of Lemma 17, namely that the diameters of the elements of any Cauchy sequence in \mathcal{F} are uniformly bounded.

Consider a path $\gamma : [0, 1] \rightarrow B_\epsilon$. We have the following estimate

$$L(\gamma) \geq \left| \log(c(\gamma(1))) - \log(c(\gamma(0))) \right|.$$

where $c(T)$ is the length of the cylinder of width at most ϵ (with $T \in B_\epsilon$). This is a direct consequence of Lemma 36 of Appendix A.

Assume that we have a Cauchy sequence whose diameter goes to infinity. We can assume that all its elements belong to a subset B_ϵ of \mathcal{F} considered above (this follows from Proposition 18). Applying the above estimate to paths linking elements of the sequence leads to a contradiction.

2.2.6 The metric completion is a cone-manifold

In this section, we prove a theorem describing the structure of the metric completion of \mathcal{F} . We refer to Appendix C for further precisions and references on the notion of cone-manifold.

We assume that either

- $g = 0$ and $\theta_i \in]0, 2\pi[$ for all $i = 1, \dots, n$; or
- $g = 1$, $\theta_1 \in]2\pi, 4\pi[$ and $\theta_i \in]0, 2\pi[$ for $i = 2, \dots, n$,

so that Veech's geometric structure on \mathcal{F} is complex hyperbolic.

Théorème 30. *Let $\rho \in H^1(N, \mathbb{U}, \theta)$ be such that $\text{Im}(\rho)$ is finite. The metric completion of $\mathcal{F}_{[\rho]}$ is a complex hyperbolic cone-manifold.*

The proof goes by induction on $m = \dim(\mathcal{F}_{[\rho]})$. Assume that it has been proven that the theorem holds true for all \mathcal{F} carrying a complex hyperbolic structure such that $2g + n - 3 = \dim(\mathcal{F}_{[\rho]}) \leq m - 1$. The case $g = 0$ has been dealt with by Thurston in [Thu88]. The base case of the induction is when $m = 0$ that is $\mathcal{F}_{[\rho]}$ is a point in which case the theorem holds. Note that $m = 0$ can only happen if $g = 0$ and $n = 3$.

Consider $\rho \in H^1(N, \mathbb{U}, \theta)$ such that $2g + n - 3 = m$. We have proven in Section 2.2.4 (see Theorem 28) that $\overline{\mathcal{F}_{[\rho]}} = X$ is a disjoint union of X_0, \dots, X_m such that

- $X_0 = \mathcal{F}_{[\rho]}$;
- X_i is a complex hyperbolic manifold of dimension $m - i$;
- the metric completion of X_i in X is $X_{i+1} \sqcup \dots \sqcup X_m$.

We prove by induction on i that any point in X_i has a neighbourhood in X isometric to a complex hyperbolic cone-manifold. Let p be a point of X_i . It has a neighbourhood U_p in X_i which is isometric to an open subset of $\mathbb{C}\mathbb{H}^{m-i}$. Following Thurston in [Thu88], we define an ‘orthogonal projection’ $\pi : V_p \rightarrow U_p$ from a neighbourhood V_p of p in X onto U_p the following way : we have seen in Section

2.2.4 that there exists a neighbourhood V_p of p in X such that for any $q \in V_p$ there exists a unique $r \in U_p$ such that q can be recovered from r by performing a finite number of the four surgeries $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ and \mathcal{S}_4 described in Section 2.2.3, and one has $\pi(q) = r$.

Thurston calls this map 'orthogonal projection' because, in a sense which is made precise in Appendix C, the fibers of π are orthogonal to its image U_p .

Lemme 22. *Let p, U_p, V_p and π be defined as above.*

1. *For all $r \in U_p$, $V(r) = \pi^{-1}(r) \setminus \{r\}$ is foliated by geodesics ending at r .*
2. *For all $r \in U_p$, the intersection $V(r) \cap (X_0 \sqcup \dots \sqcup X_{i-1})$ is a totally geodesic sub-cone-manifold of $X_0 \sqcup \dots \sqcup X_{i-1}$.*
3. *For all $r \in U_p$, $V(r)$ is orthogonal to U_p .*

Démonstration. We fix $r \in U_p$ and consider an element q of $V(r) = \pi^{-1}(r)$. By using an appropriate topological polygonation (cf. Proposition 14), one can find a linear parametrisation (z_1, \dots, z_m) at q such that

- if $(\xi_0, \dots, \xi_{m-i}, \dots, \xi_m)$ are the coordinates of q in this parametrisation, then $\pi(q)$ has coordinates $(\xi_0, \dots, \xi_{m-i}, 0, \dots, 0)$;
- the area form A in the z_i 's can be written out

$$A(z_0, \dots, z_m) = A_1(z_0, \dots, z_{m-i}) - A_2(z_{m-i+1}, \dots, z_m) \quad (2.13)$$

where A_1 has signature $(1, m-i)$ and A_2 is positive-definite (A_2 is the total area removed by the successive surgeries).

- in the local coordinates z_1, \dots, z_m , the stratum X_j for $j > i$ is cut out by the equations $z_{m-(j+1)} = z_{m-j+2} = \dots = z_m = 0$ (there is a subtlety here about the precise location of the locus cut out by these equations with respect to the definition domain of the considered linear parametrisation. We leave the reader state a remark analogous to Remark 9 for the case under scrutiny).

The image of $[0, 1] \ni t \longrightarrow (\xi_0, \dots, \xi_{m-i}, t\xi_{m-i-1}, \dots, t\xi_m) \in \mathbb{C}^{m+1}$ projects onto a geodesic path in V_p joining q to $r = \pi(q)$ (see Lemma A.1.(2)). Remark that this geodesic does not depend on the choice of the z_i 's : it is the one pointing in the direction of r hence it is intrinsic (because there is a unique geodesic segment linking to distinct points in a complex hyperbolic space). The collection of those geodesics for all $q \in V(r)$ gives the announced foliation of $V(r)$. Taking V_p small enough, one can ensure that the foliation is globally well defined by using for instance a finite number of linear parametrisation whose pairwise intersections are 1-connected. The first point of the lemma is proved.

A neighbourhood of q in $V(r) \cap X_0$ consists of the submanifold parametrised by z'_1, \dots, z'_m such that $z'_1 = \xi_1, \dots, z'_{m-i} = \xi_{m-i}$ and therefore projects onto a totally geodesic subspace $\mathbb{C}\mathbb{H}^i$ ⁴.

Finally, the splitting (2.13) of A gives us that $V(r)$ and U_p are orthogonal. \square

We continue to use the notations of the previous lemma.

Proposition 31. *$V(r)$ is a $\mathbb{C}\mathbb{H}^i$ -cone-manifold with r as its unique cone point.*

Démonstration. Define

$$B(\epsilon) = \{q \in V(r) \mid \exists \text{ a geodesic of length } \leq \epsilon \text{ joining } q \text{ to } r\}$$

$$\text{and } S(\epsilon) = \partial B(\epsilon) = \{q \in V(r) \mid \exists \text{ a geodesic of length } \epsilon \text{ joining } q \text{ to } r\}$$

For ϵ small enough, $S(\epsilon)$ does not meet X_j for $j \geq i$ then it lives in

$$X \setminus \cup_{j \geq i} X_j = X_0 \sqcup X_1 \sqcup \dots \sqcup X_{i-1}$$

which is a complex hyperbolic cone-manifold according to the induction hypothesis.

In particular $S(\epsilon)$ is locally a totally geodesic sub-cone-manifold intersected with a piece of a complex hyperbolic sphere whose centre belongs to $V(r)$. It is therefore, according to Lemma 38, a $(S^{2i-1}, U(i))$ -cone-manifold. According to the previous lemma, $B(\epsilon)$ is a cone over this cone-manifold and the proposition is proved. \square

Proposition 32. *For any $r \in U_p$, there exists a neighbourhood of r in X which is a complex hyperbolic cone-manifold.*

Démonstration. There exists an ϵ such that for all $r \in U$, the ball of radius ϵ at r in V_r is an embedded cone. There is a neighbourhood of U in X which has the product structure $U \times B(\epsilon)$ satisfying the hypothesis of Proposition 45. Hence $U \times B(\epsilon)$ is a complex hyperbolic cone-manifold and this proves the proposition. \square

The induction process can be carried on which proves that $X = \overline{\mathcal{F}_{[\rho]}}$ is a complete complex hyperbolic cone-manifold.

4. We use the fact that a complex affine submanifold of the complex hyperbolic space is totally geodesic.

2.2.7 Listing the \mathcal{F} 's and their codimension 1 strata

We have given so far a rather abstract analysis of the geometric structure of a leaf \mathcal{F} when $\text{Im}(\rho)$ is finite. We now give a list of all such \mathcal{F} associated to a rational angle datum θ when $g = 1$. Let $G_\theta \subset \mathbb{U}$ the subgroup generated by $e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}$ and ω_ρ a root of unity such that $\text{Im}(\rho) = \langle \omega_\rho \rangle$.

Let M be the smallest positive integer such that $G_\theta = \langle \omega_\rho^M \rangle$.

Listing the \mathcal{F} 's associated to θ .

The starting point of our description is the following lemma :

Lemme 23. *Consider ρ and ρ' two elements of $H^1(N, \mathbb{U}, \theta)$ such that :*

1. $\text{Im}(\rho) = \text{Im}(\rho')$;
2. $\text{Im}(\rho)$ (and therefore $\text{Im}(\rho')$) is finite.

Then ρ and ρ' are equivalent under the action of the pure mapping class group.

Démonstration. Let a, b be two simple closed curves avoiding the marked points of N which form a symplectic basis of the homology of the unmarked torus N , and $\delta_1, \dots, \delta_n$ curves that circle the marked points, in order that $\rho(\delta_i) = \theta_i$ for $i = 1, \dots, n$. Up to an element of the pure mapping class group, we can replace

1. first a and b by $a^k b^l$ and $a^m b^n$ with $\begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$. We can this way arrange that $\rho(a) = 1$ and $\rho(b)$ is such that $\langle G_\theta, \rho(b) \rangle = \text{Im}(\rho)$;
2. then b by $b \prod_{i=1}^n \delta_i^{k_i}$ where the k_i 's are arbitrary integers. An appropriate choice gives that $\rho(b)$ generates $\text{Im}(\rho)$.

As an immediate consequence of these facts we get that the class of $\rho \in H^1(N, \mathbb{U}, \theta)$ under the action of the pure mapping class group only depends on its image, if the latter is finite. \square

A leaf \mathcal{F} is therefore only determined by its associated angle data θ and the smallest integer $M \geq 1$ which is such that G_θ is generated by ω_ρ^M . From now on, we refer to such a leaf/moduli space as $\mathcal{F}_\theta(M)$. We are now going to give a description of its codimension 1 strata.

We distinguish three types of such strata :

- the **P-strata** which are obtained from a devil surgery. Here ‘P’ stands for *pinching* ;
- the **C-strata** which are obtained from a Thurston’s type surgery. Here ‘C’ stands for *colliding* ;

- the **K-strata** which are obtained from a kite surgery. Here ‘K’ stands for *kite*. We remark that such a K-stratum appears in the metric completion of \mathcal{F} if and only if $n = 3$ and $G_\theta = \text{Im}(\rho)$.

(Note that since a K-stratum appears when three cone points collide together, it can be considered as a particular kind of C-stratum.)

At this point we must mention an aspect of the description that we have so far ignored : we have been using throughout the article the terminology ‘*leaf*’ in a non-standard way. While in foliation theory, a leaf is automatically supposed to be connected, the definition we use allows $\mathcal{F}_\theta(M)$ not to be. This can indeed happen if N has genus 1 as the explicit description of the case $g = 1, n = 2$ carried on in [GPa] reveals such non connectedness phenomena (see [GPa, §4.2.5] for an explicit example). The determination of the connected components in the general case is an open problem that seems interesting to the authors for the reasons explained in Section 2.2.8.

In what follows, we fix a leaf \mathcal{F} with $\text{Im}(\rho)$ finite and we explain below several algorithms to determine the strata of complex codimension 1 appearing in the completion $\overline{\mathcal{F}}$. We denote by M the integer such that $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\theta(M)$.

Finding the *P*-strata.

Let m be the positive integer such that G_θ is the subgroup of \mathbb{U} generated by $e^{\frac{2i\pi}{m}}$. With these notations, one has

$$\text{Im}(\rho) = \left\langle e^{\frac{2i\pi}{mM}} \right\rangle.$$

Since $\theta_1 > 2\pi$ there exists p such that

$$\theta_1 = 2\pi \left(1 + \frac{p}{m} \right).$$

A *P*-stratum is a (finite cover) of a moduli space of flat spheres whose angles datum is $(\theta'_1, \theta''_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ with θ'_1 and θ''_1 such that

1. $\theta'_1 + \theta''_1 = \theta_1 - 2\pi$;
2. both $e^{i\theta'_1}$ and $e^{i\theta''_1}$ belong to $\text{Im}(\rho) = \langle e^{\frac{2i\pi}{mM}} \rangle$.

This condition is sufficient for such a moduli space of flat spheres to appear as a stratum of the metric completion of \mathcal{F} . There is therefore a *P*-stratum for each way of decomposing the integer pM as a sum of two positive integers.

The stratum associated to a decomposition

$$pM = r' + r'' \tag{\mathcal{D}}$$

with $r', r'' > 0$ is a finite cover of the moduli space of flat spheres whose angles datum is

$$\left(e^{\frac{2i\pi r'}{mM}}, e^{\frac{2i\pi r''}{mM}}, \theta_2, \dots, \theta_n \right).$$

According to Section 2.2.3, the cone angle around the stratum associated to the decomposition (\mathcal{D}) is

$$2\pi \frac{\text{lcm}(r', r'')}{mM}.$$

Finding the C -strata.

A C -stratum of codimension 1 is a moduli space of flat tori with $n - 1$ cone points corresponding to the collision of two cone points p_i and p_j of respective angles θ_i and θ_j . The new angle datum θ' is such that θ_i and θ_j have been replaced by $\theta_i + \theta_j - 2\pi$.

A holonomy character $\rho' \in \mathbb{H}^1(N, \mathbb{U}, \theta')$ is such that a finite cover of $\mathcal{F}_{[\rho']}$ is a stratum of \mathcal{F} if and only if $\text{Im}(\rho)$ is generated by $\text{Im}(\rho')$, $e^{i\theta_i}$ and $e^{i\theta_j}$ (see Subsection 2.2.3). We describe now the positive integers M' which are such that $\mathcal{F}_{\theta'}(M')$ appears as a C -stratum of the metric completion of $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\theta(M)$.

Let m' be the positive integer such that $G_{\theta'}$ is generated by $e^{2i\pi/m'}$. Remark that m' divides m . We are trying to find the integers M' such that $e^{\frac{2i\pi}{M'm'}}$ and $e^{\frac{2i\pi}{m}}$ generate $\text{Im}(\rho) = \langle e^{\frac{2i\pi}{Mm}} \rangle$. This is equivalent to find the integers M' such that

$$\text{lcm}(M'm', m) = Mm,$$

Since $m'|m$, this is equivalent to determine the positive integers M' verifying

$$\text{lcm}\left(M', \frac{m}{m'}\right) = M \frac{m}{m'}.$$

The list of solutions to the preceding relation viewed as an equation in M' , provides the list of leaves $\mathcal{F}_{\theta'}(M')$, associated to the collision between θ_i and θ_j which appear as C -strata of \mathcal{F} .

The 1-dimensional case.

We now consider the case when $n = 2$. We assume $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in 2\pi\mathbb{Q}^2$ with $\theta_1 + \theta_2 = 4\pi$. A leaf $\mathcal{F}_\theta(M)$ is a 1-dimensional complex hyperbolic manifold or equivalently, a real hyperbolic surface.

According to Theorem 30, the metric completion of $\mathcal{F}_\theta(M)$ is a hyperbolic surface of finite volume, with a finite number of cone points and a finite number of cusps. We give in this section a refinement of the description of the P -strata appearing in $\overline{\mathcal{F}_\theta(M)}$ (there is actually no C -stratum in the metric completion of

$\mathcal{F}_\theta(M)$ when $n = 2$ according to Proposition 19) and give a list of the cusps by geometric means. We finally give explicit details in the case when $\theta = (3\pi, \pi)$.

A leaf $\mathcal{F}_\theta(M)$ when $n = 2$ shall be thought of as a generalisation of the modular surface $\mathbb{H}/\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ which is the moduli space of regular flat tori. Veech's hyperbolic structure matches its standard one. It is not very surprising that the analytical analysis carried on in [GPa] shows that the connected components of $\mathcal{F}_\theta(M)$ are conformally equivalent to modular curves of the form $Y_1(N) = \mathbb{H}/\Gamma_1(N)$ for some certain integers $N \geq 2$, see [GPa, §4.2.4] for more details.

Cone points. Strata of $\mathcal{F}_\theta(M)$ correspond to flat spheres S with three cone points of angles $\theta' = (\theta'_1, \theta''_1, \theta_2)$ such that $\theta'_1 + \theta''_1 = \theta_1 - 2\pi$. Listing such flat spheres has been done in the preceding section. We also saw that P -strata are finite covers of moduli spaces of flat spheres, in this specific case such a finite cover is a union of points. There are as much copies of S appearing in the metric completion $\overline{\mathcal{F}_\theta(M)}$ as ways of performing the Devil surgery on S .

Let $T \in \mathcal{F}_\theta(M)$ be a torus build by a Devil surgery on S . Let γ be a simple curve on T avoiding the singular points that intersects the systole only once (see Section 2.2.3 for more details and pictures). We remark that $\rho(\gamma)$ has to be such that $\langle e^{i\theta'_1}, e^{i\theta''_1}, e^{i\theta_2}, \rho(\gamma) \rangle = \mathrm{Im}(\rho)$.

With the notation of the previous section, if

$$\theta'_1 = \frac{2\pi r'}{mM} \quad \text{and} \quad \theta''_1 = \frac{2\pi r''}{mM},$$

then there are exactly $\mathrm{gcd}(r', r'')$ different ways to perform the Devil's surgery in such a way that that the holonomy around γ belongs to $\mathrm{Im}(\rho)$. Amongst these ways, only $\varphi(\mathrm{gcd}(r', r''))$ (where φ is Euler's totient function) are such that $\langle e^{i\theta'_1}, e^{i\theta''_1}, e^{i\theta_2} \rangle = \mathrm{Im}(\rho)$ and this number is the exact number of times that S appears in the metric completion of $\mathcal{F}_\theta(M)$. The cone angle around such a point is $2\pi \mathrm{lcm}(r', r'') / (mM)$.

Cusps According to Subsection 2.2.3, the cusps of $\mathcal{F}_\theta(M)$ are in one-to-one correspondence with pairs (S, γ) where

1. S is a flat sphere with three cone points of angles θ'_1 , θ''_1 and θ_2 , such that $\theta'_1 + \theta''_1 = \theta_1 - 2\pi$ and $\mathrm{Im}(\rho) = \langle e^{i\theta'_1}, e^{i\theta''_1}, e^{i\theta_2} \rangle$;
2. γ is a regular geodesic in S between the cone point of angle θ'_1 and the one of angle θ''_1 .

Such a geodesic always exists and is unique, we are therefore reduced to count the number of flat spheres with three cone points such that $\mathrm{Im}(\rho) = \langle e^{i\theta'_1}, e^{i\theta''_1}, e^{i\theta_2} \rangle$. This reduces to counting the number of pairs of positive integers (r', r'') such that $r' + r'' = pM$ and $\mathrm{gcd}(r', r'') = 1$.

An example : $\theta = (3\pi, \pi)$

We are now going to compute the number of conical points and cusps of $\mathcal{F}_\theta(M)$ in the special case when $\theta = (3\pi, \pi)$. In this case $p = 1$ and $m = 2$.

- Each cone point corresponds to a partition $r + s = M$ with $r, s > 0$. There are $\lfloor \frac{M-1}{2} \rfloor$ such partitions. To a partition (r, s) is associated $\varphi(\gcd(r, s) = \gcd(r, M))$ cone points, all of the same angle $2\pi \text{lcm}(r, M - r)/M$.
- In particular the number of cone points is

$$\frac{1}{2} \sum_{r=1}^{M-1} \varphi(\gcd(r, M)).$$

- There are as many cusps as unordered partitions of $r + s = M$ such that r and M are coprime. Thus the number of cusps is exactly

$$\frac{1}{2} \varphi(M).$$

The number of cusps and cone points put together gives us the number of punctures of $\mathcal{F}_{(3\pi, \pi)}(M)$ which is

$$\frac{1}{2} \sum_{r=1}^M \varphi(\gcd(r, M)).$$

A reordering of this sum gives that the total number of punctures of $\mathcal{F}_{(3\pi, \pi)}(M)$ is actually

$$\frac{1}{2} \sum_{d|M, d \neq M} \varphi(d) \varphi(M/d).$$

This number is equal to the number of cusps of the modular curve $X_1(M) = \mathbb{H}/\Gamma_1(M)$ (see [DS05]). This is not a coincidence : it is proved in [GPa, §4.2.5.3] that the conformal type of $\mathcal{F}_{(3\pi, \pi)}(M)$ is actually the same as the one of $Y_1(M)$.

2.2.8 The 'discrete holonomy' problem.

Previous works in the genus 0 case.

Thurston proves in [Thu88] (recovering by geometric methods results of Deligne and Mostow from [DM86]) that when $g = 0$ and $n \geq 4$, if the angle datum $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in]0, 2\pi[^n$ verifies

$$\forall i, j = 1, \dots, i \neq j, \quad 2\pi < \theta_i + \theta_j \implies \theta_i + \theta_j - 2\pi \text{ divides } 2\pi, \quad (\text{INT})$$

then the metric completion of $\mathcal{F} \simeq \mathcal{M}_{0,n}$ (the unique leaf of Veech's foliation in this case) is a connected complex hyperbolic orbifold of finite volume and therefore

a quotient $\mathbb{C}\mathbb{H}^{n-3}/\Gamma_\theta$ where Γ_θ is a lattice in $\mathrm{PU}(1, n-3)$. This lattice Γ_θ is exactly the image of holonomy morphism

$$\mathrm{hol} : \pi_1(\mathcal{M}_{0,n}) \longrightarrow \mathrm{PU}(1, n-3)$$

of the $(\mathbb{C}\mathbb{H}^{n-3}, \mathrm{PU}(1, n-3))$ -structure of \mathcal{F} . Sometimes it happens that the image $\Gamma_\theta = \mathrm{hol}(\pi_1\mathcal{F})$ of the holonomy is a lattice in $\mathrm{PU}(1, n-3)$ even if the metric completion of \mathcal{F} is not an orbifold. The combined works of Picard, LeVavasseur, Terada, Deligne-Mostow, Mostow, Thurston and Sauter (see [LV93, Ter73, Thu88, DM86, Mos88, Sau90]) lead to the following results :

1. there exists 94 angles data θ for which \mathcal{F} is an orbifold, and therefore $\Gamma_\theta = \mathrm{hol}(\pi_1\mathcal{F})$ is a lattice ;
2. this builds lattices in $\mathrm{PU}(1, N)$ for all $N = n-3 = 1, \dots, 9$, some of them being non-arithmetic for $N = 1, 2$ and 3 (these have been for a long time the only known examples of non-arithmetic complex hyperbolic lattices until the recent work of Deraux, Parker and Paupert [DPP15]) ;
3. if $N \geq 3$, Γ_θ is a lattice if and only if θ verifies $(\Sigma\mathrm{INT})$, apart from one exception, where $(\Sigma\mathrm{INT})$ is a refinement of the criterion (INT) (see [Mos86, §1] or [Thu88, Theorem 0.2] for a precise definition of this condition) ;
4. when $N = 2$, there exist 9 angles data failing $(\Sigma\mathrm{INT})$ for which $\Gamma_\theta = \mathrm{hol}(\pi_1\mathcal{F})$ is a lattice.

Genus 1 and $n = 3$.

We now address the following question, which must seem natural at this point :

Question 5. *Let T be a torus with three marked points, and θ an admissible rational angle datum. Does there exist $\rho \in \mathbb{H}^1(T, \mathbb{U}, \theta)$ such that $\mathrm{hol}(\pi_1\mathcal{F}_{[\rho]})$ is a lattice in $\mathrm{PU}(1, 2)$?*

As we have seen in Section 2.2.7, such a leaf \mathcal{F} is only determined by θ and an integer M . We denote such a leaf by $\mathcal{F}_\theta(M)$. The first difficulty to address is the question of the connectedness of the leaves $\mathcal{F} : \mathcal{F}_\theta(M)$ may have several connected components (see Subsection 2.1.3 for a short discussion of this matter) and it is possible that the holonomy of one of these is a lattice and that it is not the case for the others.

The following lemma, whose proof in the genus 0 case can be found in [Mos88], outlines a strategy to search for connected components of $\mathcal{F}_\theta(M)$ whose holonomy is a lattice :

Lemme 24. *Let \mathcal{F} be a connected component of $\mathcal{F}_\theta(M)$ whose complex hyperbolic holonomy is a lattice in $\mathrm{PU}(1, 2)$. Then the complex hyperbolic holonomy of every codimension 1 stratum is a lattice in $\mathrm{PU}(1, 1)$.*

This lemma provides necessary conditions on such a connected component \mathcal{F} to have discrete holonomy in $\mathrm{PU}(1, 2)$, conditions which hold true in several cases. To find candidates to have holonomy a lattice in $\mathrm{PU}(1, 2)$, the strategy goes the following way :

1. identify the different connected components of $\mathcal{F}_\theta(M)$;
2. verify if the criterion given by Lemma 24 is verified, using the list of Thurston-Deligne-Mostow for genus 0 type codimension 1 strata or the strategy suggested in the next paragraph for genus 1 codimension 1 strata;
3. amongst the isolated candidates, compute the complex hyperbolic holonomy and verify that it is discrete.

(We call ‘*genus g strata*’ a strata whose elements are flat surfaces of genus g).

The last step seems to be the most difficult to achieve so far, since the methods used in the genus 0 case (see for example [Par06]) tends to become algorithmically too complicated in our case and strongly rely on the knowledge of simple generators of the fundamental group of $\mathcal{M}_{0,n}$ (a finite family of distinguished Dehn twists).

Some cases when the holonomy is an arithmetic lattice.

We remark that for a certain number of connected components \mathcal{F} of leaves of Veech’s foliation, the holonomy is an arithmetic lattice in $\mathrm{PU}(1, 2)$.

This follows from the following lemma :

Lemme 25. *Let \mathcal{F} be a connected component of a leaf \mathcal{F} . Then, up to a suitable conjugation, the coefficients of the matrices of $\mathrm{hol}(\pi_1\mathcal{F})$ lie in $\mathbb{Z}[\mathrm{Im}(\rho)]$.*

This lemma is an easy consequence of the fact that the matrices of the transitions maps of an atlas of linear parametrisations coming from topological polygonations must have coefficients in $\mathbb{Z}[\mathrm{Im}(\rho)]$, see Section 2.1.4 and the proof of Proposition 13. In particular if $\mathbb{Z}[\mathrm{Im}(\rho)]$ is discrete in \mathbb{C} , then for any connected component \mathcal{F} of \mathcal{F} , the image of its holonomy is discrete in $\mathrm{PU}(1, 2)$.

The developing map $\widetilde{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{C}\mathrm{H}^2$ of such a \mathcal{F} factors through a local isometry $\mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}\mathrm{H}^2/\mathrm{hol}(\mathcal{F})$. Since \mathcal{F} has finite volume (*cf.* Section 8), $\mathrm{hol}(\mathcal{F})$ is necessarily a lattice which must be arithmetic since it belongs to $\mathrm{PU}(1, 2) \cap \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}[\mathrm{Im}(\rho)])$.

This situation actually happens : if $\mathrm{Im}(\rho) = \langle e^{\frac{2i\pi}{n}} \rangle$ for $n = 3, 4$ or 6 then $\mathbb{Z}[\mathrm{Im}(\rho)]$ is discrete. Note that the argument does apply to higher dimensions as well. These cases are exactly the followings :

- $n = 3$, $M = 1$: $(\frac{7\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \pi)$, $(3\pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, $(\frac{8\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$, $(\frac{9\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$, $(\frac{10\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$, $(\frac{10\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \pi)$, $(\frac{11\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ and $(\frac{11\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \pi)$;

- $n = 3, M = 2 : (\frac{10\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$;
- $n = 4, M = 1 : (\frac{7\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}), (\frac{9\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}), (\frac{10\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}), (\frac{11\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}), (\frac{11\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \pi)$;
- $n = 4, M = 1 : (\frac{11\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$;
- $n = 4, M = 1 : (\frac{11\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$.

2.3 Perspectives.

2.3.1 On the question of lattices in $\mathrm{PU}(1, n)$.

The natural step at this point is to try to understand the monodromy groups that arise. These new groups bring the hope of making a step towards the understanding of non-arithmetic lattices, not only by discovering new ones but also by possibly identifying a class different from the class of triangle groups containing non-arithmetic lattices. We outline hereafter a strategy, that restricts to the (complex) two dimensional case, that is to the case of flat tori with only three cone points.

Finding generators for the monodromy groups. The first difficulty to overcome is to pass from the abstract definition of the moduli spaces $\mathcal{F}_\rho(\theta)$ to an explicit generating set of their monodromy groups in $\mathrm{PU}(1, 2)$. I think that imitating the method of [Par06] should produce generating sets for a certain number of $\mathcal{F}_\rho(\theta)$ (those of "*little complexity*", that is for which $\mathrm{Im}(\rho)$ is small). It consists in identifying locally $\mathcal{F}_\rho(\theta)$ with a set of (pseudo)-polygons and identify the action of the complex hyperbolic monodromy on this space of polygons with geometric "moves", allowing to give explicit matrices for its action.

Building fundamental domains. Once that we would have identified a generating set of matrices for the monodromy using the method described above, we hope to be able to build nice fundamental domains for their action. In the set of pseudo-polygons that we would have used to compute these matrices lie totally geodesic subsets of "degenerated" polygons corresponding to degenerated flat tori, and which would be good candidates to be the 2-facets of a fundamental domain.

2.3.2 On the volume of $\mathcal{M}_{g,n}(\theta)$.

We have introduced in Section 2.1.5 a natural volume form on $\mathcal{M}(\theta)$ for an admissible θ such that none of the θ_i is a multiple of 2π . Veech conjectures in [Vee93] that the volume for this volume form is always finite. In a work not discussed in this text, my co-author Luc Piroio and I analyse in details, via explicit analytical computations close in spirit to the work of Deligne-Mostow, the Veech foliation on $\mathcal{M}_{1,2}(\theta)$. Inspired by an idea of Zorich to compute the volume of strata of holomorphic 1-forms combined with a explicit calculation of the volume of the algebraic leaves of the Veech foliation, we compute the volume for rational value of θ . More precisely

Théorème 31 (G.-Piroio, [GPa]). *For all $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in (\pi\mathbb{Q})^2$,*

$$\int_{\mathcal{M}_{1,2}} \Omega_\theta = \frac{1}{12}(4\pi - \theta).$$

Unfortunately, it is very unlikely that the methods we used to prove this theorem extends to more general cases. At best, we think we might be able to perform a similar computation in the case $g = 1$ and $n = 3$ and when the homogeneous structure of the leaves is actually Riemannian.

The proof of the volume finiteness would amount to finding good estimates of the growth of the volume of algebraic leaves, and this question provides an exciting research project in view of proving the "volume conjecture".

2.3.3 On other pseudo-Riemannian structures.

We hope that this chapter highlights the deep links between the complex hyperbolic geometry of certain moduli spaces of flat tori and the geometry of the underlying flat surfaces :

- cone singularities for the complex hyperbolic geometry corresponds to localised degenerations, such as a curve collapsing or two singular point colliding on the flat surfaces ;
- default of compactness and cusps can be identified with explosion of the diameter on the underlying flat surfaces.

As it is a distinguished matter of interest to understand how flat structures on surfaces degenerate, it would be natural to explore arbitrary moduli spaces with prescribed holonomy. We think it very likely that with other restriction on the cone-angles, new type of degenerations will appear and will be characterised by the nature of the singularities in the pseudo-Riemannian geometry associated.

Chapitre 3

Surfaces de dilatation et leur groupe de Veech.

On présente dans ce dernier chapitre des problèmes de nature dynamique concernant une classe de surfaces affines introduites dans le premier chapitre. Une grande partie des résultats exposés sont les fruits d'un projet collaboratif naissant entamé avec Adrien Boulanger, Eduard Duryev et Charles Fougeron.

3.1 Surfaces de dilatation.

Les surfaces auxquelles nous allons nous intéresser dans ce chapitre sont les surfaces affines dont l'holonomie linéaire est à valeurs réelles.

Definition 7. — Une *surface de dilatation* est une surface affine dont l'holonomie linéaire ρ est telle que $\text{Im}(\rho) \subset \mathbb{R}_+^*$.

— Une *surface de demi-dilatation* est une surface affine dont l'holonomie linéaire ρ est telle que $\text{Im}(\rho) \subset \mathbb{R}^*$.

Il est facile d'obtenir des exemples de surfaces de dilatations, il suffit de considérer un polygone bien choisi et de coller deux à deux des côtés parallèles.

Feuilletages directionnels. Le feuilletage de \mathbb{C} par droites orientées selon un angle θ est invariant par l'action du sous-groupe de $\text{Aff}(\mathbb{C})$ dont les parties linéaires sont réelles, ce dernier définit donc pour chaque surface de demi-dilatation Σ un *feuilletage directionnel* en direction θ qu'on note \mathcal{F}_θ .

On fait les remarques suivantes.

1. Un tel feuilletage est singulier aux points de branchements de Σ , la singularité est de type selle et son ordre est l'ordre du point de branchement.

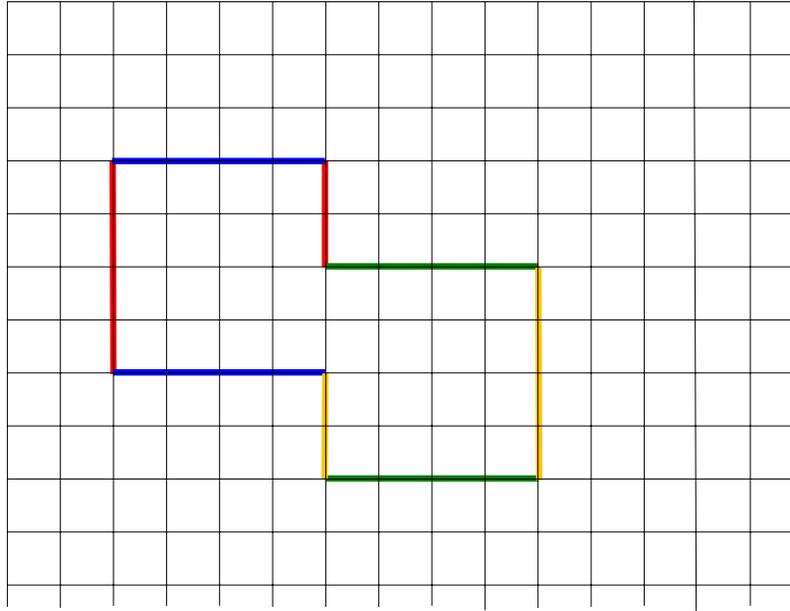


FIGURE 3.1 – Un exemple de surface affine de genre 2.

2. Si Σ est une surface de dilatation (et pas seulement de demi-dilatation), les feuilletages directionnels sont orientés.
3. Il y a une petite ambiguïté par rapport à la définition de la direction des feuilletages directionnels : deux choix différents de développante pour Σ assignent des valeurs θ différentes à un feuilletage directionnel donné. Le moyen de remédier à cette difficulté est de décréter qu'une surface de dilatation est en fait la donnée de la surface avec en plus, la spécification d'une direction horizontale.
4. La structure affine ambiante de Σ donne aux feuilletages directionnels une structure affine transverse, voir 3.1.1.

La principale motivation pour une étude spécifique des surfaces de dilatation est l'existence de ces feuilletages directionnels.

3.1.1 Feuilletages transversalement affines.

Définitions. Un feuilletage *transversalement affine* est la donnée d'un feuilletage et d'une classe affine de mesures transverses invariante par le feuilletage. Par classe affine de mesure transverse, on entend la donnée pour toute transversale au feuilletage d'une mesure définie à multiplication par une constante positive près.

De manière équivalente, un feuilletage transversalement affine sur Σ est la donnée d'une fonction

$$f : \tilde{\Sigma} \longrightarrow \mathbb{R}$$

équivariante par rapport à une représentation $\alpha : \pi_1 \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ et telle que les points critiques f sont isolés et de type selle.

Si Σ est une surface de dilatation et $\text{dev} : \tilde{\Sigma} \longrightarrow \mathbb{C}$ une développante de Σ d'holonomie $\rho : \pi_1 \Sigma \longrightarrow \text{Aff}(\mathbb{C})$ de partie linéaire $\alpha \in H^1(\Sigma, \mathbb{R}_+^*)$, le feuilletage directionnel \mathcal{F}_θ est défini par les lignes de niveau de l'application $x \mapsto \text{Im}(e^{i\theta} \text{dev}(x))$, et l'holonomie de \mathcal{F}_θ est toujours égale à α . Il est naturel de se poser la question suivante :

Question 6. *Soit \mathcal{F} un feuilletage transversalement affine. Existe-t-il une surface de dilatation Σ pour laquelle \mathcal{F} se réalise comme le feuilletage horizontal de Σ ?*

Nous allons voir dans la section suivante que cette question admet une reformulation naturelle en terme de formes harmoniques à valeurs dans certains fibrés plats.

Point de vue des fibrés tordus. Soit $\alpha : \pi_1 \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ un morphisme de groupe, on note E_α le fibré plat de rang 1 réel au dessus de Σ . Si Σ est muni d'une structure conforme, la connexion plate nous permet de donner du sens à la notion d'harmonicité relativement à cette structure conforme.

Un feuilletage transversalement affine sur Σ d'holonomie α est exactement la donnée d'une 1-forme sur Σ à valeur dans E_α dont les points critiques sont isolés et de type selle. On passe de cette définition à celle donnée par les lignes de niveau d'une fonction simplement en considérant la différentielle de la fonction définissant le feuillage et réciproquement, en intégrant la 1-forme.

Si Σ est une surface affine, les 1-formes définissant les feuilletages directionnels sont harmoniques pour la structure conforme induite par la structure affine. Réciproquement si ω est une 1-forme harmonique à valeurs dans E_α , l'intégrale de la 1-forme à valeur dans $E_\alpha \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$

$$\omega + i * \omega$$

définit la développante d'une structure affine d'holonomie linéaire α dont le feuilletage horizontal est le feuilletage induit par ω , structure affine induisant la structure conforme pour laquelle ω est harmonique. Ceci nous permet de reformuler la question 6 en

Question 7. *Soit ω une 1-forme sur Σ à valeur dans E_α dont les points critiques sont isolés et de type selle. Existe-t-il une structure conforme sur Σ telle que ω est harmonique ?*

Théorème de Lioussse sur les feuilletages transversalement affines. Il existe déjà une littérature sur la question de la dynamique générique de feuilletages ayant des propriétés de nature "affine". Tout d'abord, il convient de mentionner la série de trois articles [Lev82a], [Lev82b] et [Lev87] qui analyse en détail la structure des feuilletages sur les surfaces. Le théorème remarquable suivant indique le comportement générique (d'un point de vue topologique) d'un feuilletage transversalement affine.

Théorème 32 (Lioussse, [Lio95]). *L'ensemble des feuilletages dynamiquement triviaux est un ouvert dense de l'ensemble des feuilletages transversalement affines.*

3.1.2 Échanges d'intervalles affines.

Un *échange d'intervalle affine* est une bijection de $[0, 1[$ dans lui-même continue par morceaux, avec un nombre fini de points de discontinuité, continue à gauche à ses points de discontinuité, préservant l'orientation et affine en restriction à ses intervalles de continuité.

3.1.3 Structures de dilatation sur le tore.

Lemme 26. *Un tore de dilatation est l'exponentielle d'un tore plat $\mathbb{C}/\tau\mathbb{Z} \oplus \tau'\mathbb{Z}$ où $\Im(\tau)$ et $\Im(\tau') \equiv 0 \pmod{2\pi}$.*

Démonstration. Considérons un tore de dilatation. Sa développante est une application holomorphe $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (où le \mathbb{C} de la source est l'uniformisante de la structure complexe induite pas la structure de dilatation) et son holonomie est commutative. L'image de son groupe d'holonomie est donc engendré par :

- deux translations ;
- deux transformations "strictement" affines qui ont même point fixe".

Dans le premier cas la structure induite est plate et n'est donc pas strictement de dilatation. On est donc dans le second cas. Dans ce cas $\omega = \frac{df}{f}$ défini une forme méromorphe sur \mathbb{C} et comme f est une immersion locale ω n'a pas de zéro. D'après la formule des résidus, elle n'a donc pas de pôles et ω est holomorphe. Cette 1-forme défini donc la structure plate dont notre structure affine est l'exponentielle. Cette structure plate après renormalisation peut s'écrire $\mathbb{C}/\tau\mathbb{Z} \oplus \tau'\mathbb{Z}$ pour $\tau, \tau' \in \mathbb{C}^*$ et $\frac{\tau}{\tau'} \notin \mathbb{R}$. □

Les tores de Hopfs. Le quotient H_λ de \mathbb{C}^* par l'action d'une dilatation $z \mapsto \lambda z$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda \neq 1$ est une surface homéomorphe à un tore qui porte une structure de dilatation naturelle. On a déjà aperçu cet exemple dans le chapitre 1. Il correspondent à l'exponentielle de tores plates de la forme $\mathbb{C}/\log(\lambda)\mathbb{Z} \oplus 2i\pi\mathbb{Z}$.

3.1.4 Géométrie des surfaces de dilatation.

Une partie des résultats de cette section sont extraits de l'article [Vee97] et des notes non-publiées [Vee08]. Je suis très reconnaissant à W. Veech d'avoir discuté les détails de ses travaux avec la plus grande bienveillance et je ne peux qu'être affreusement désolé de son décès soudain survenu au début de l'année scolaire de 2016-2017. Comme il s'agit d'une redite, nous nous permettrons de donner des preuves parfois incomplètes.

Cylindres. Il nous a semblé important de distinguer la notion de *cylindre affine*. Le quotient d'un secteur angulaire d'angle $\theta < 2\pi$ par une dilatation $z \mapsto \lambda z$ avec λ un réel strictement positif plus grand que 1 est un cylindre topologique, muni d'une structure affine à bord totalement géodésique. Cette construction se généralise à des valeurs d'angles θ quelconque en considérant des revêtements cycliques de \mathbb{C}^* et on note $C_\lambda(\theta)$ la cylindre d'angle $\theta \in \mathbb{R}_+^*$ et de dilatation λ .

Nous croyons que cette notion est fondamentale car d'une part les cylindres affines semblent être les briques de bases dans la compréhension de la géométrie des surfaces de dilatation, et d'autre part ils correspondent à des feuilles fermées attractives des feuilletages directionnels.

La propriété \mathcal{H} . On dit qu'une surface de dilatation Σ satisfait la *propriété \mathcal{H}* si il n'existe pas d'immersion affine de \mathbb{H} dans Σ . Cette propriété est, comme nous allons le voir dans quelques paragraphes, équivalente à la non-existence de cylindres affines plongés dans Σ d'angle supérieur à π .

Théorème 33 (Veech, [Vee08]). *Une formulation équivalente de la propriété \mathcal{H} est la suivante :*

(\mathcal{H}') *Toute immersion du disque ouvert $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ dans Σ s'étend continument en une application $\bar{\mathbb{D}} \rightarrow \Sigma$.*

Nous ne donnons la preuve que d'un seul sens de l'équivalence, que la propriété \mathcal{H} implique la propriété \mathcal{H}' . Cela suffira aux applications.

Lemme 27. *Soit φ une immersion affine du disque ouvert $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ dans Σ qui ne s'étend pas continument à $\bar{\mathbb{D}}$. Alors φ s'étend en une immersion affine $\mathbb{H} \rightarrow \Sigma$.*

Démonstration. Comme φ ne s'étend pas à $\partial\mathbb{D}$, il existe $z \in \partial\mathbb{D}$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow 1} \varphi(tz)$$

n'existe pas. Soit γ le chemin $t \mapsto \varphi(tz)$ et soit x un point d'accumulation de γ . Comme $[0, 1]$ est connexe, on peut supposer que x n'est pas singulier (si x est singulier, tout point voisinage de x contient des points d'accumulation différent de x). Soit $t_k \rightarrow 1$ une suite croissante telle que $\gamma(t_k) \rightarrow x$ et f une carte affine en

$x, f : U \mapsto \Delta$ où Δ est le disque unité centré en 0 et U un ouvert contenant x tel que $f(x) = 0$. On note $\frac{1}{2}U$ la pré-image par f dans Σ du disque centré en 0 et de rayon $\frac{1}{2}$.

Pour k suffisamment grand on peut supposer que $\gamma(t_k)$ appartient à $\frac{1}{2}U$. Soit V_k la préimage dans Σ du disque de rayon $\frac{1}{2}$ centré en $\varphi(\gamma(t_k))$. En particulier V_k contient x . We avance que l'image par φ de D_k le disque ouvert centré en $t_k z \in \mathbb{U}$ tangent à ∂U en z contient V_k . Comme φ ne s'étend pas en z , il y a un disque fermé centré en $t_k z$ contenu strictement dans D_k dont l'image par φ n'est pas contenue dans V_k . Comme cette image est un disque centré en $t_k z$ elle doit contenir V_k et x en particulier. Soit w_k une préimage de x dans D_k .

Soit E_k le plus grand disque centré en w_k auquel φ admet une continuation analytique. Comme $w_k \rightarrow z$, le rayon de E_k tend vers 0. Nécessairement $\varphi(E_k)$ contient $U = f^{-1}(\Delta)$ car $\varphi(E_k)$ est un disque plongé maximal de centre x . En étendant l'application $f^{-1} : \Delta \rightarrow U \subset \Sigma$ à l'aide de φ , on définit $F_k : \Delta_k \rightarrow \Sigma$. Les fonctions $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ont les propriétés suivantes :

- Δ_k est un disque ;
- $\Delta \subset \Delta_k$;
- $\forall \zeta \in \Delta$ on a que $F_k(\zeta) = f^{-1}(\zeta)$;
- $\forall k, k' \in \mathbb{N}, F_k = F_{k'}$ sur $\Delta_k \cap \Delta_{k'}$;
- le rayon de Δ_k tend vers $+\infty$ car le rayon de E_k tend vers 0.

Comme tous les D_k sont connexes et que $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \Delta_k$ est non vide, les F_k définissent une immersion affine

$$F : \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Delta_k \longrightarrow \Sigma$$

et $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Delta_k$ contient un demi plan car c'est l'union de disques dont les rayons tendent vers l'infini et dont l'intersection est non-vide. Ca prouve le lemme. □

Lemme 28. *Toute immersion affine $\varphi : \mathbb{H} \longrightarrow \Sigma$ peut-être étendue en $\varphi' : \mathbb{H}' \longrightarrow \Sigma$ de telle manière que φ' est invariant par la multiplication par un réel $\lambda > 1$. L'image de φ est donc un cylindre hyperbolique d'angle π .*

Démonstration. On montre d'abord qu'une telle immersion ne peut être injective. Considérons la géodésique $\gamma[0, \infty[\rightarrow [i, i\infty[\subset \mathbb{H}$. Son image par φ ne peut avoir de limite dans Σ car elle à une longueur relative infinie dans \mathbb{H} . Soit $x \in \Sigma$ un point d'accumulation de cette image et soit $U \subset \Sigma$ un disque fermé plongé de centre x tel que $\varphi(\gamma)$ n'est pas complètement contenu dans U . Comme $\varphi(\gamma)$ est une feuille d'un feuilletage directionnel de Σ , elle doit croiser U au moins deux fois le long de segments parallèles ce qui empêche φ d'être injective (l'image de bandes horizontales infinies à gauche ou à droites devraient s'intersecter).

Il existe alors $v \neq w \in \mathbb{H}$ tels que $\varphi(z) = \varphi(w)$ et de fait une fonction affine $z \mapsto \lambda z + a$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \in \mathbb{C}$ tels que $w = \lambda v + a$ et pour tout z dans un voisinage de v

$$\varphi(z) = \varphi(\lambda z + a).$$

L'union des images itérées de \mathbb{H} par $z \mapsto \lambda z + a$ est un demi-plan \mathbb{H}' auquel φ s'étend par continuation analytique et sur lequel la relation d'invariance $\varphi(z) = \varphi(\lambda z + a)$ est vraie pour tout z . Si $\lambda = 1$, l'image de φ est un cylindre plat infini, ce qui est impossible car Σ est compacte et donc $\lambda \neq 1$. Le point fixe de $z \mapsto \lambda z + a$ appartient au bord de \mathbb{H}' , et on peut supposer que $b = 0$ quitte à précomposer par une translation. Ceci termine la preuve du lemme. □

Triangulations de Delaunay. Le résultat principal de [Vee97] et [Vee08] combiné est l'établissement de l'existence de triangulations géodésiques (dont les sommets sont des points singuliers et les arêtes des géodésiques) pour les surfaces ne vérifiant pas l'unique obstruction à l'existence d'une telle triangulation.

Théorème 34 (Veech). *Une surface de dilatation contient une triangulation géodésique si et seulement si elle ne contient pas de cylindre affine plongé d'angle au moins π . De manière équivalente, une surface admet une telle triangulation si et seulement si elle vérifie la propriété \mathcal{H} .*

Ce théorème est un corollaire de l'existence de telles *partitions de Delaunay* pour une classe très générale de surfaces affines à singularités (voir [Vee97] pour plus de détails). On explique dans la suite la construction de ces partitions. Soit Σ une surface de dilatation satisfaisant la propriété \mathcal{H} et soit $x \in \Sigma$ un point régulier. On va distinguer selon le nombre de points singuliers sur le bord du plus grand disque immergé en x , on note $\nu(x)$ ce nombre. L'ensemble $\{\nu(x) = 1\}$ est un ouvert dense de Σ . Les points spéciaux sont ceux tels que $\nu(x) \geq 3$, qui forment un ensemble discret et donc fini dans la surface. À ces points on considère le plus grand disque immergé dans la surface et on regarde dans ce disque l'enveloppe convexe des (au moins) trois points singuliers qui se situent sur le bord de ce disque. Les points cruciaux (mais pas nécessairement complètement évidents) sont que :

- cette enveloppe convexe se projette sur un polygone convexe **plongé** dans la surface ;
- l'union de la collection de polygones plongés recouvre ainsi toute la surface ;
- deux tels polygones plongés ne s'intersectent que le long de leur frontière ;
- l'intersection de deux tels polygones est une union de certains de leur côtés ;
- l'ensemble des sommets de tous ces polygones est exactement l'ensemble des points singuliers de Σ ;

- l’union de l’intérieur des ces polygones est exactement l’ensemble $\{\nu(x) = 1\}$;
- l’union de l’intérieur des côtés de ces polygones est exactement l’ensemble $\{\nu(x) = 2\}$.

La décomposition de la surface en ces polygones convexes est appelée **polygonation de Delaunay** ou *partition de Delaunay*, est unique et ne dépend que de sa géométrie. Une triangulation de chacun de ces polygones fournit une *triangulation géodésique* de Σ .

Le point crucial est qu’avoir la propriété \mathcal{H} implique qu’un plongement affine maximal d’un disque s’étend continument à son bord. C’est le point technique qu’il faut pour s’assurer que la construction indiquée ci-dessus fonctionne. On réfère à [Vee97] pour plus de détails.

Remarque 10. *La contraposée du théorème de triangulation géodésique est assez facile. Tout cylindre d’angle plus grand que π se comporte comme un piège, toute géodésique qui y entre n’en sort jamais. Une surface contenant un tel cylindre ne peut donc pas être géodésiquement triangulée, car le complémentaire du 1-squelette d’une telle triangulation devrait contenir le cylindre et de ce fait ne pourrait être une union de cellules.*

Géodésiques fermées et immersions sauvages du disque. On considère dans cette sous-section une surface Σ qui ne satisfait pas la propriété \mathcal{H} . Ceci implique l’existence d’une immersion affine $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \Sigma$ qui ne s’étend pas à $\partial\mathbb{D}$ le bord de \mathbb{D} . Cela implique aussi qu’il existe un cylindre affine et par la même des géodésiques fermées simples. On donne dans cette sous-section un moyen de localiser ces géodésiques fermées en partant de φ . Je pense que ce résultat devrait être attribué à Veech. Bien qu’il ne soit pas formulé explicitement dans [Vee08], probablement parce que Veech n’avait pas en tête les questions d’ordre dynamique qui nous intéressent ici, l’énoncé est très clair pour qui a lu attentivement les sections 23 et 24 de [Vee08].

Proposition 33 (Veech, [Vee08]). *Soit $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \Sigma$ une immersion sauvage du disque, i.e. qui ne s’étend pas $\partial\mathbb{D}$. Soit $z \in \partial\mathbb{D}$ tel que le chemin $\gamma : t \mapsto \varphi(tz)$ n’a pas de limite dans Σ quand $t \rightarrow 1$. Alors $\gamma([0, 1))$ est une géodésique fermée de Σ le long de laquelle l’holonomie linéaire est différente de 1.*

Démonstration. D’après les lemmes 27 et 28, φ s’étend en une application maximale $\varphi' : \mathbb{H} \rightarrow \Sigma$ qui est invariante par l’action par multiplication par un réel positif $\lambda \neq 1$. La géodésique γ dans cette extension doit tendre vers $0 \in \partial\mathbb{H}$ car autrement elle aurait une limite dans Σ , et l’image d’une telle géodésique est fermée dans Σ .

□

La formule de Gauss-Bonnet De l'existence de ces triangulations (quitte à rajouter artificiellement des points singuliers à l'intérieur des triangles) on déduit une formule de Gauss-Bonnet pour les surfaces affines. Pour toute surface de dilatation Σ dont l'ensemble des points singulier est \mathcal{S} , on a

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} 2\pi - \theta(s) = 2\pi\chi(\Sigma)$$

où $\theta(s)$ est l'angle singulier en s .

3.1.5 L'action de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ sur l'espace des modules de surfaces de dilatations.

Soit \mathcal{A} l'espace de module de toutes les surfaces de dilatation à isomorphisme près. On peut munir \mathcal{A} d'une structure d'orbifold analytique mais nous ne nous étendrons pas sur ce point. De la même manière que dans le cas des surfaces de translations, on peut définir une action analytique de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ sur \mathcal{A} . La question de la description de cette dynamique et du lien avec la dynamique des feuilletages directionnels des surfaces de dilatation est aujourd'hui largement ouverte.

3.2 Groupe de Veech des surfaces affines.

On décrit dans cette section les résultats obtenus dans [DFG], en collaboration avec Eduard Duryev et Charles Fougerson. Notre théorème principal est un résultat de structure des groupes de Veech des surfaces de dilatations. On prouve que le groupe de Veech d'une telle surface est discret à moins qu'elle appartienne à une classe que nous avons nommé *les surfaces de Hopf*.

3.2.1 Groupe de Veech.

On considère une surface dilatation Σ . On dit que $g \in \mathrm{Diff}^+(\Sigma)$ est un *automorphisme affine* de Σ si en coordonnées g s'écrit comme un élément de $\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$, pour l'identification standard de \mathbb{C} avec \mathbb{R}^2 . On note $\mathrm{Affine}(\Sigma)$ le sous-groupe de $\mathrm{Diff}^+(\Sigma)$ des automorphismes affines et $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ le groupe modulaire de Σ . La partie linéaire en coordonnées de $\mathrm{Affine}(\Sigma)$ est bien définie à la multiplication par des constantes $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ près. On a donc un morphisme de groupe bien défini

$$\rho : \mathrm{Affine}(\Sigma) \longrightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$$

qui associe à tout automorphisme sa partie linéaire normalisée. On appelle ρ la *représentation fuchsienne* de Σ . Son image $\rho(\mathrm{Affine}(\Sigma))$ est appelé le *groupe de Veech* de Σ et on le note $\mathbf{V}(\Sigma)$.

Dans cette section, Σ est toujours une surface de dilatation fermée. Notre but est ici de clarifier la relation entre la matrice de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ associée à un élément du groupe de Veech et le difféomorphisme qui la réalise. Il y a deux manière formelle (et je qui je pense traduisent dans leur essence deux points de vue différents) de définir le groupe de Veech : soit on dit qu'il s'agit du groupe des dérivées de difféomorphismes affines de Σ ou soit on le définit comme étant le stabilisateur de Σ par l'action de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ sur l'espace de module des structures affines.

Afin de comprendre les difficultés/subtilités liées à la confusion entre ces points de vue, nous allons formaliser au maximum la discussion. Nous introduisons les définitions suivantes :

1. $\mathrm{Affine}(\Sigma)$ est le sous-groupe de $\mathrm{Diff}^+(\Sigma)$ qui est affine en coordonnées (*i.e.* s'écrit comme un élément de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$);
2. $\rho : \mathrm{Affine}(\Sigma) \rightarrow \mathrm{SL}$ est la projection naturelle obtenue de la manière suivante : $f \in \mathrm{Affine}(\Sigma)$ s'écrit en coordonnées comme un élément de $\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$. Sa partie linéaire dans $\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$ ne change, pour un choix différent de coordonnées, que par l'action par multiplication d'un certain réel $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Par conséquent sa classe dans $\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})/\mathbb{R}_+^* = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ est bien définie et est par définition $\rho(f)$. On appelle ρ la *représentation Fuchsienne*.
3. $\tau : \mathrm{Affine}(\Sigma) \rightarrow \mathrm{Mod}(\Sigma)$ est la projection naturelle sur le groupe modulaire.

Remarque 11. *Il est important de remarquer que le fait que l'image de ρ soit dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ est d'une certaine manière artificiel et que l'ensemble dans lequel elle vit naturellement est $\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})/\mathbb{R}_+^*$. En particulier, un élément du groupe de Veech regardé en coordonnées n'a aucune raison d'avoir déterminant, aussi naturelles soit les coordonnées choisies.*

Remarquons tout d'abord que le noyau de ρ n'est pas nécessairement trivial. Prenons par exemple $\widehat{\Sigma}$ un revêtement ramifié d'une surface de dilatation Σ muni de la structure de dilatation tirée en arrière. Les automorphismes de ce revêtement sont des automorphismes affines qui sont dans le noyau de la représentation fuchsienne associée à $\widehat{\Sigma}$. Réciproquement, le quotient d'une surface de dilatation par le noyau de sa représentation Fuchsienne est toujours une surface de dilatation, dont la représentation fuchsienne est fidèle. Le *groupe de Veech* $\mathbf{V}(\Sigma)$ de Σ est par définition $\rho(\mathrm{Affine}(\Sigma)) \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

On dit qu'une surface de dilatation est *irréductible* si sa représentation fuchsienne est fidèle ou de manière équivalente si elle n'est pas le revêtement ramifié d'une surface plus simple. On fait dans la suite l'hypothèse que les surfaces que nous considérons sont irréductibles. C'est une hypothèse assez faible car le revêtement ramifié d'une surface affine partage globalement les mêmes propriétés dynamiques et géométrique que la surface de base.

3.2.2 Les surfaces de Hopf.

On présente dans cette section une construction générale de surfaces dont le groupe de Veech est conjugué à

$$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda & t \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}_+^* \right\}$$

Nous prouverons de surcroît que ce sont les seules surfaces de dilatations avec les tores affines dont le groupe de Veech n'est pas discret.

Definition 8. *Un graphe enrubanné est un graphe fini avec pour chaque sommet un ordre cyclique sur les semi arêtes qui en sont issus.*

On peut penser à un graphe enrubanné comme un graphe tracé sur une surface orientée : l'ordre cyclique à chaque sommet provient de l'orientation de la surface. La structure de variété à bord d'un voisinage tubulaire d'un tel plongement détermine complètement la structure de graphe enrubanné.

Étant donné un graphe enrubanné Γ , on fait la construction suivante : on colle à chaque composante de bord d'un épaississement infinitésimal de Γ un cylindre affine d'angle un multiple de π de telle sorte d'obtenir une surface compacte. Attention, n'importe quel recollement ne donne pas une surface de dilatation au sens où on l'a défini :

- il faut bien choisir les multiplicateurs des cylindres pour que les points singuliers créés par le recollement, aux sommets de Γ soient euclidiens ;
- il faut aussi choisir les angles des cylindres intelligemment, autrement la surface construite ne sera qu'un surface de demi-dilatation.

On donne un exemple ci-dessous qui illustre cette construction.

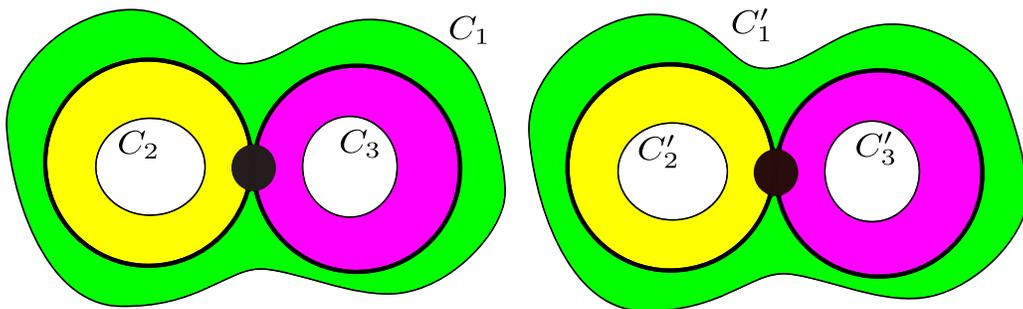


FIGURE 3.2 – Un graphe enrubanné non-connexe à deux sommets.

qu'on transforme en une surface de genre 2 en collant trois cylindres D_i aux composantes de bord, chacune joignant C_i à C'_i pour $i = 1, 2, 3$.

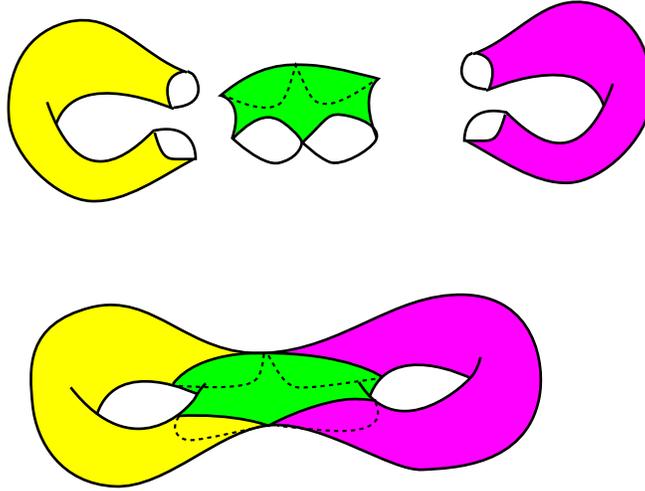


FIGURE 3.3 – La décomposition en cylindre de notre surface de genre 2.

Soit λ_i le facteur de dilatation de D_i . Pour les points singuliers de Σ soient euclidien, il faut et suffit que le produit des facteurs des cylindres adjacents à chaque points soit égal à 1. Dans notre cas, pour le bon choix d'orientation des cylindres cela donne

$$\lambda_1 = \lambda_2 \lambda_3.$$

Cette contrainte s'étend directement au cas général et est l'unique obstruction pour que la construction donne une "vraie" surface de dilatation. On appelle une telle surface de dilatation une *surface de Hopf*.

3.2.3 Le théorème de structure

On prouve dans cette section un théorème de structure sur le groupe de Veech des surfaces de dilatation.

Théorème 35 (Duryev-Fougeroc-G.). *Soit Σ une surface affine de genre au moins 2.*

- *Si Σ est une surface de Hopf alors $\mathbf{V}(\Sigma)$ est conjugué au sous-groupe des matrices triangulaires supérieures ;*
- *Si Σ n'est pas une surface de Hopf alors $\mathbf{V}(\Sigma)$ est discret.*

Cette section est dédiée à la preuve du théorème 44. Commentons en rapidement la structure. Le point crucial est qu'on peut distinguer les surfaces de dilatations selon qu'elles ont des connexions de selle dans au moins deux directions ou pas. Si tel est le cas, leur groupe de Veech est automatiquement discret,

grâce à un argument directement emprunté au cas des surfaces de translation (voir section 3.1 de [HS06]). La principale difficulté revient donc à caractériser les surfaces n'ayant des connexions de selle que dans une unique direction.

Lemme 29. *Soit Σ une surface affine ayant deux connexions de selles dans des directions différentes. Alors $\mathbf{V}(\Sigma)$ est un sous-groupe discret de $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Soit $\mathrm{Affine}_0(\Sigma)$ le sous-groupe de $\mathrm{Affine}(\Sigma)$ qui fixe l'ensemble des points singuliers de Σ . Ce l'image de ce sous-groupe par la représentation fuchsienne $\mathbf{V}_0(\Sigma)$ est d'indice fini dans $\mathbf{V}(\Sigma)$ et montrer qu'il est discret implique que $\mathbf{V}(\Sigma)$ est discret.

Choisissons un sous-ensemble simplement connexe $U \subset \Sigma$ contenant toutes les singularités et un développant de la structure affine sur U . Grâce à cette dernière, on peut associer à chaque connexion de selle orientée un vecteur de \mathbb{R}^2 . Remarquons qu'un élément de $\mathbf{V}(\Sigma)$ appartient au quotient $\mathrm{Gl}_2^+(\mathbb{R})/\mathbb{R}_+^*$ et la matrice de son action dépend d'une trivialisations à la source et au but. L'ensemble E de tels vecteurs possède les deux propriétés suivantes :

- il est discret ;
- il est invariant par l'action de la normalisation de $\mathbf{V}_0(\Sigma)$ à valeurs $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ induite par U .

Nous avons fait l'hypothèse qu'un paire (v_1, v_2) de ces vecteurs forme une base de \mathbb{R}^2 . Soit (a_n) est une suite d'éléments de $\mathbf{V}_0(\Sigma)$ qui tend vers l'identité et $A_n \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ la normalisation de a_n induite par U . Il existe une suite $\lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $\lambda_n \cdot A_n \rightarrow \mathrm{Id}$. Comme A_n préserve E , nécessairement $\lambda_n \rightarrow 1$ et donc $A_n \cdot v_1 \rightarrow v_1$ et $A_n \cdot v_2 \rightarrow v_2$. Comme l'ensemble des connexions de selles est discrets, cela implique que pour n suffisamment grand, $A_n = \mathrm{Id}$. Ceci prouve que $\mathbf{V}(\Sigma)$ est discret. □

On caractérise maintenant les surfaces n'ayant des connexions de selles que dans une direction au plus.

Lemme 30. *Si toutes les connexions de selles d'une surface de dilatation de genre $g \geq 2$ sont dans la même direction, alors c'est une surface de Hopf.*

Démonstration. Comme Σ est de genre au moins 2, Σ a au moins un point singulier. On va prouver que chaque point singulier a au moins une connexion selle dans chaque secteur ouvert d'angle π ce qui impliquera que toutes les séparatrices dans une certaine direction sont en fait des connexions de selles. Une telle surface est par définition une surface de Hopf (cf. section 3.2.2).

On considère la fonction exponentielle à un point p singulier associée à une normalisation affine locale. Soit $r > 0$ le plus petit nombre tel que Δ_r le demi-disque ouvert, bordé en bas par deux séparatrices horizontale et contenant une

unique séparatrice verticale, s'immerge dans Σ par l'exponentielle. Si $r = \infty$, cela nous donnerais une immersion affine maximale de \mathbb{H} . D'après le lemme 28, l'image de l'exponentielle est un cylindre affine d'angle π dont le bord est une union de deux feuilles fermées dans une même direction, contenant tout les deux p . Il s'agit donc de deux connexions de selles. On suppose désormais que $r < \infty$. Il y a deux possibilités dans ce cas de figure :

1. soit l'immersion $\Delta_r \rightarrow \Sigma$ s'étend continument au bord de Δ_r auquel cas l'image de cette extension contient un point singulier. Ce point singulier est nécessairement dans l'unique direction contenant des connexions de selles (disons la direction verticale) et la séparatrice verticale est donc une connexion de selle ;
2. soit $\Delta_r \rightarrow \Sigma$ ne s'étend pas au bord de Δ_r .

On prouve que cette situation ne peut se produire. Autrement il y aurait une géodésique γ issue de p paramétrisée par $[0, r[$ telle que $\gamma(t)$ n'a pas de limite dans Σ quand $t \rightarrow r$. On confondra γ le sous-ensemble de Σ et sa pré-image dans Δ_r . Considérons un disque ouvert dans Δ_r qui est tangent au bord au point de $\partial\Delta_r$ vers lequel γ se dirige et dont le centre appartient à γ . Grâce à l'immersion affine de Δ_r dans Σ , on obtient une immersion affine de \mathbb{D} satisfaisant les hypothèses de la proposition 33. Le chemin γ se projette donc sur une géodésique fermée simple hyperbolique ce qui contredit le fait que γ est une séparatrice.

□

3.3 Perspectives et problèmes ouverts.

On donne ici une liste non-exhaustive de problèmes ouverts/conjectures sur les surfaces de dilatations et leurs feuilletages.

Sur la géométrie des surfaces.

1. Est-ce que toute surface de dilatation possède un cylindre affine ?
2. Quelles sont les géodésiques de longueurs finies des surfaces de dilatation ? En particulier en existe-t-il qui ne sont pas des géodésique fermées ?
3. (Visibilité) Est-ce que tout point d'une surface affine appartient à un cylindre ?

Sur les groupes de Veech.

4. Est-il possible que le groupe de Veech d'une surface de dilatation soit un réseau ?
5. Existe-t-il des groupes de Veech qui ne sont pas de type fini ?
6. Existe-t-il des groupes de Veech non triviaux sans paraboliques ?

Sur la dynamique des feuilletages directionnels.

7. L'ensemble des couples surface + directions dynamiquement triviaux est-il dense ? de mesure pleine ?
8. Étant donné une surface, l'ensemble des directions dynamiquement trivial est-il dense dans S^1 ? De mesure pleine ?
9. Quelles sont les surfaces admettant des directions pour lequel le feuilletage admet un minimal exceptionnel ?

Sur la géométrie des espaces de modules.

10. Est-ce qu'une surface de dilatation générique contient des directions exceptionnelles ?
11. Á quoi ressemble l'action de $SL(2, \mathbb{R})$ sur l'espace de module des surfaces de dilatation ?
12. Quels sont les liens entre le flot de Teichmüller sur l'espace de module et la dynamique des feuilletages directionnels ?
13. Existe-t-il des feuilletages non-minimaux qui sont récurrents pour l'action du flot de Teichmüller ?

Chapitre 4

Cascades in the dynamics of affine interval exchange transformations.

Ce chapitre est une reproduction d'un article en collaboration avec Adrien Boulanger et Charles Fougeron, écrit en langue anglaise.

We consider the map $F : D \rightarrow D$, where $D = [0, 1[$, defined the following way :

$$\begin{aligned} \text{if } x \in \left[0, \frac{1}{6}\right[& \text{ then } F(x) = 2x + \frac{1}{6} \\ \text{if } x \in \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right[& \text{ then } F(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{6}) \\ \text{if } x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right[& \text{ then } F(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}) + \frac{5}{6} \\ \text{if } x \in \left[\frac{5}{6}, 1\right[& \text{ then } F(x) = 2(x - \frac{5}{6}) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

The map F is an *affine interval exchange transformation* (AIET) and one easily verifies that for all $x \in D$, $F^2(x) = x$. Its dynamical behaviour is therefore as simple as can be. We consider a family $(F_t)_{t \in S^1}$, parametrised by $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, defined by

$$F_t = F \circ r_t$$

where $r_t : [0, 1[\rightarrow [0, 1[$ is the translation by t modulo 1.

This article aims at highlighting that this one-parameter family of AIETs displays rich and various dynamical behaviours. The analysis developed in it, using tools borrowed from the theory of geometric structures on surfaces, leads to the following theorems.

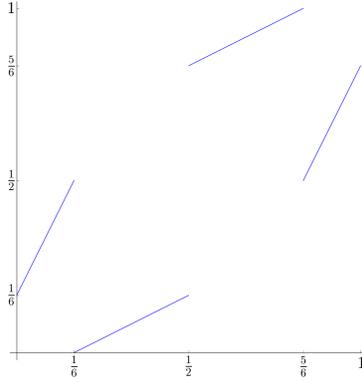


FIGURE 4.1 – The graph of F .

Théorème 36. *For Lebesgue-almost all $t \in S^1$, F_t is dynamically trivial.*

We use the terminology of Liousse (see [Lio95]) who introduced it and proved that this dynamically trivial behaviour is topologically generic for transversely affine foliations on surfaces. As such, this theorem is somewhat a strengthening of Liousse’s theorem for this 1-parameter family of AIETs. Indeed, we prove that this genericity is also of measure theoretical nature. We say that F_t is dynamically trivial if there exists two periodic points $x^+, x^- \in D$ of orders $p, q \in \mathbb{N}$ such that

- $(F_t^p)'(x^+) < 1$
- $(F_t^q)'(x^-) > 1$
- for all $z \in D$ which is not in the orbit of x^- , the ω -limit of z is equal to $\mathcal{O}(x^+)$ the orbit of x^+ .

Roughly speaking, it means that the map F_t has two periodic orbits, one of which is attracting all the other orbits but the other periodic orbit which is repulsive.

A remarkable feature of this family is that there also are a lot of parameters for which the dynamics has an attracting *exceptional minimal set*. The existence of such a dynamical behavior for AIETs has been known since the work of Levitt [Lev87] (see also [CG97], [BHM10] and [MMY10] for further developments on this construction).

Théorème 37.

- For all t in a Cantor set of parameters in S^1 there exists a Cantor set $\mathcal{C}_t \subset D$ for which for all $x \in D$, the F_t ω -limit of x is equal to \mathcal{C}_t .
- There are countably infinitely many parameters $t \in S^1$ for which F_t is completely periodic, that is there exists $p(t) \in \mathbb{N}^*$ such that $F_t^{p(t)} = \text{Id}$.

The remaining parameters form a Cantor set $\Lambda_\Gamma \subset S^1$ which is the limit set of a Zariski dense subgroup $\Gamma < \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ of infinite covolume. For the parameters in Λ_Γ , we only have partial results in section 4.4. However, numerical experiments suggest the following conjecture :

Conjecture 5. *For every parameter $t \in \Lambda_\Gamma$, F_t is minimal.*

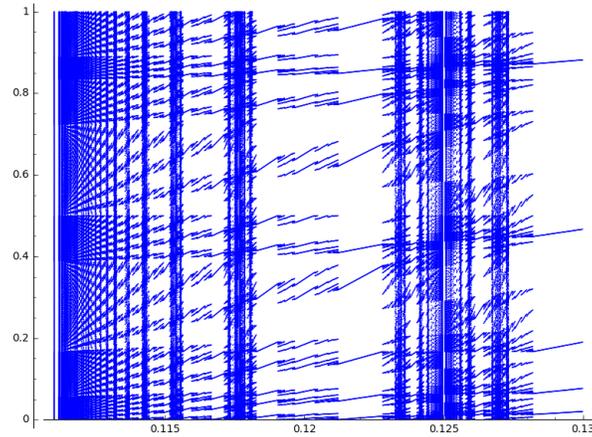


FIGURE 4.2 – The ω -limit of a random point depending on F_t , for $0.11 \leq t \leq 0.13$

The associated affine surface Σ .

We associate to the family $(F_t)_{t \in S^1}$ the affine surface Σ obtained by the following gluing :



FIGURE 4.3 – The surface Σ .

Those are linked by the fact that the directional foliation in direction θ admits F_t as their first return map on a cross-section, for $t = \frac{6}{\tan \theta}$. In particular they share the exact same dynamical properties and the study of the family F_t reduces to the study of the directional foliations of Σ .

The Veech group of Σ .

The major outcome of this change of viewpoint is the appearance of hidden symmetries. Indeed, the surface Σ has a large group of affine symmetries which is called its Veech group and that we denote by $\mathbf{V}(\Sigma)$. It is precisely the group of diffeomorphisms which writes in coordinates as an element of $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. As a consequence we get that directions θ which are SL-equivalent through \mathbf{V}_Σ have same dynamical behaviour and this remark allow us to reduce considerably the number of parameters θ (equivalently t) that we need to analyse.

The group \mathbf{V}_Σ seen as a subgroup of SL is discrete and contains the following group, see Section 4.2

$$\Gamma = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

The projection of Γ on $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ is a discrete group of infinite covolume. It is also a Schottky group of rank 2, and the analysis of its action on \mathbb{RP}^1 the set of directions of \mathbb{R}^2 leads to the following.

- There is a Cantor set $\Lambda_\Gamma \subset \mathbb{RP}^1$ of zero measure on which Γ acts minimally (Λ_Γ is the limit set of Γ). The directions $\theta \in \Gamma$ are *conjecturally* minimal.
- The action of Γ on $\Omega_\Gamma = \mathbb{RP}^1 \setminus \Lambda_\Gamma$ is properly discontinuous and the quotient is homeomorphic to a circle (Ω_Γ is the discontinuity set of Γ). It allows us to identify a narrow fundamental domain $I \subset \mathbb{RP}^1$ such that the understanding of the dynamics of foliations in directions $\theta \in I$ implies the understanding for the whole Ω_Γ (which is an open set of full measure).

Affine Rauzy-Veech induction.

A careful look at the Figure 4.3 gives that the study of the dynamics of the directional foliations for $\theta \in I$ reduces to the understanding of the dynamics of contracting affine 2-intervals transformations. We use in Section 4.3 an adapted form of Rauzy-Veech induction to show that

- there is a Cantor set of zero measure of parameters $\theta \in \Omega_\Gamma$ for which the associated foliation accumulates on a (transversely) Cantor set ;
- the rest of directions in Ω_Γ are dynamically trivial.

A remarkable corollary of the understanding of the dynamics of the directions in I is the complete description of $\mathbf{V}(\Sigma)$:

Théorème 38. *The Veech group of Σ is exactly Γ .*

4.1 Affine surfaces.

We introduce in this section the various objects and concepts which will play a role in this paper, and recall or prove few structural results about affine surfaces.

4.1.1 Affine surfaces.

Definition 9. *An affine surface is a surface Σ together with a finite set $S \subset \Sigma$ and an atlas of charts $\mathcal{A} = (U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ on $\Sigma \setminus S$ whose charts take values in \mathbb{C} such that*

- *the transition maps are locally restriction of elements of $\text{Aff}_{\mathbb{R}_+^*}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b \mid a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{C}\}$;*
- *each point of S has a punctured neighborhood which is affinely equivalent to a punctured neighborhood of the cone point of a euclidean cone of angle a multiple of 2π .*

We call an element of the set S a singularity of the affine surface Σ .

This definition is rather formal, and the picture one has to have in mind is that an affine surface is what you get when you take a euclidean polygon, and glue pairs of parallel sides along the unique affine transformation that sends one on the other. An other interesting equivalent formulation of this definition is to say that an affine surface if the datum of

- a representation $\rho : \pi_1 \Sigma \longrightarrow \text{Aff}_{\mathbb{R}_+^*}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b \mid a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{C}\}$;
- a non constant holomorphic map $\text{dev} : \tilde{\Sigma} \longrightarrow \mathbb{C}$ which is equivariant with respect to the above representation.

The map dev is called the *developing map* of the affine surface and the representation ρ its *holonomy*. One recovers the initial definition by restricting dev to sufficiently small open sets to get the charts of the affine structure, the equivariance of dev under the action of ρ ensuring that the transition maps belong to $\text{Aff}_{\mathbb{R}_+^*}(\mathbb{C})$. The singular points are the projection of the critical points of dev . This formalism borrowed from the theory of (G, X) -structures is often convenient to overcome minor technical issues.

4.1.2 Foliations and saddle connections.

Together with an affine surface comes a natural family of foliations. Fix an angle $\theta \in S^1$ and consider the trivial foliation of \mathbb{C} by straight lines directed by θ . This foliation being invariant by the action of $\text{Aff}_{\mathbb{R}_+^*}(\mathbb{C})$, it is well defined on $\Sigma \setminus S$ and extends at points of S to a singular foliation on Σ such that its singular type at a point of S is saddle-like.

A *saddle connection* on Σ is a singular leaf that goes from a singular point to another, that is which is finite in both directions. The set of saddle connections of an affine surface is countable hence so is the set of directions having saddle connections.

4.1.3 Cylinders.

If $\theta \in]0, 2\pi[$, the quotient of the angular sector based at 0 in \mathbb{C} by the action by multiplication of $\lambda > 1$ is called the *affine cylinder* of angle θ and of multiplier λ which we denote by $C_{\lambda, \theta}$. This definition extends to arbitrarily large values of θ by considering sufficiently large ramified cover of \mathbb{C} , see [DFG, Section 2.2] for a precise construction.

An affine cylinder is an affine surface whose boundary is totally geodesic, homeomorphic to a topological cylinder, with no singular points. For the sake of convenience, we will consider that euclidean cylinders, which are the affine surfaces one gets by identifying two opposite sides of a rectangle are a degenerated case of affine cylinder. In the sequel when we will refer to a *cylinder* we will mean an affine or euclidean cylinder, unless explicitly mentioned.

We say an affine surface has a *cylinder in direction θ* if there exists a regular closed leaf of the foliation in direction θ . The *cylinder in direction θ* is therefore the cylinder to which this closed leaf belongs.

Proposition 34. *A closed affine surface of genus g has at most $3g - 3$ cylinders in a given direction θ .*

Démonstration. It suffices to notice that two homotopic simple closed geodesics α and β on a surface Σ which are disjoint must bound an affine or a flat cylinder. Using induction on the complexity on a connected complex surface defined by $3g - 3 + k$, where g is the genus and k the number of boundary components, we see that there are at most $3g - 3$ simple closed curves in a topological surface which are not homotopic with each other. Any such set of $3g - 3$ curves is a maximal cut system which decomposes the surface in $2g - 2$ pair of pants.

Assume that α and β are homotopic then they bound a cylinder C in Σ . This cylinder has totally geodesic boundary. A Euler characteristic argument implies that, since ∂C is totally geodesic, C has no singular point in its interior. Such a cylinder is characterised by the linear holonomy $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ of a generator of its fundamental group that is isomorphic to \mathbb{Z} : because of the local rigidity of affine structures, the local isomorphism with a cylinder $C_{\lambda, \infty}$ of holonomy λ (if $\lambda \neq 1$) extends to the whole C . This proves that C is affinely isomorphic to $C_{\lambda, \theta}$ for a certain θ or to a flat cylinder if $\lambda = 1$. Moreover, if α and β lie in the same directional foliation and if $\lambda \neq 1$, θ must be a multiple of π .

Thus we can associate a simple closed curve in distinct homotopy classes for each cylinder. \square

4.1.4 Affine interval exchange transformations.

An *affine interval exchange transformation* (or AIET) is a bijective piecewise continuous map $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ with a finite number of discontinuity points, which is affine on each of its continuity intervals. A convenient way to represent an AIET is to draw on a first copy of $[0, 1]$ its continuity intervals and on a second copy their images.

4.1.5 The Veech group of an affine surface.

We recall in this paragraph basic definitions. An appendix to this article (see Appendix 4.5) gives further details on its construction and on the Veech group of the Disco surface (to be formally defined in the next paragraph). Let Σ be an affine surface. We say $g \in \text{Diff}^+(\Sigma)$ is an *affine automorphism* of Σ if in coordinates, g writes like the action of an element of $\text{GL}^+(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$ with the standard identification $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. We denote by $\text{Affine}(\Sigma)$ the subgroup of $\text{Diff}^+(\Sigma)$ made of affine automorphisms. The linear part in coordinates of an element of $\text{Affine}(\Sigma)$ is well defined up to multiplication by a constant $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, we have therefore a well defined morphism :

$$\rho : \text{Affine}(\Sigma) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R})$$

which associate to an affine automorphism its normalised linear part. We call ρ the *Fuchsian representation*. Its image $\rho(\text{Affine}(\Sigma))$ is called the *Veech group* of Σ and is denoted by $\mathbf{V}(\Sigma)$.

4.1.6 The 'Disco' surface.

The surface we are about to define will be the main object of interest of this text. It is the surface obtained after proceeding to the gluing below :

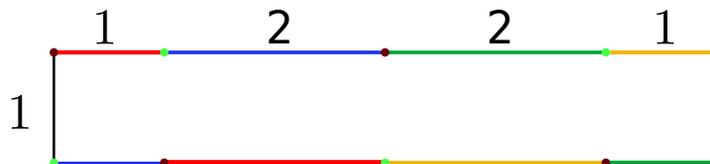


FIGURE 4.4 – The surface Σ .

We call the resulting surface the 'Disco' surface. In the following Σ will denote this particular surface.

- This is a genus 2 affine surface, which has two singular points of angle 4π . They correspond to the vertices of the polygon drawn in Figure 4.4. Green ones project onto one singular point and brown ones project onto the other.
- Line segments joining the middle of the two blue (red, yellow and green respectively) sides project onto four closed simple curves that we call a_1 , b_1 , a_2 and b_2 respectively. If oriented 'from the bottom to the top', they form a symplectic basis of $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$.
- With the orientation as above, we have that the linear holonomy of ρ of Σ satisfies $\rho(a_1) = \rho(b_2) = 2$ and $\rho(a_2) = \rho(b_1) = \frac{1}{2}$.

4.1.7 About the Veech group of Σ .

Flat cylinders A *flat cylinder* is the affine surface you get when gluing two opposite sides of a rectangle. The *height* of the cylinder is the length of the sides glued and the *diameter* of the cylinder is the length of the non-glued sides, that is the boundary components of the resulting cylinder. Of course, only the ratio of these two quantities is actually a well-defined invariant of the flat cylinder, seen as an affine surface. More precisely, we define

$$m = \frac{\text{diameter}}{\text{height}}$$

and call this quantity the *modulus* of the associated flat cylinder. The set of flat cylinders (seen as affine surfaces) is parametrised by the modulus.

If C is a cylinder of modulus m , there is an element of $f \in \text{Affine}(C)$ which has the following properties :

- f is the identity on ∂C ;
- f acts has a the unique Dehn twist of C ;
- the matrix associated to f is $\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, if ∂C is assumed to be in the horizontal direction.

Decomposition in flat cylinders and parabolic elements of the Veech group. We say an affine surface Σ has a *decomposition in flat cylinders* in a given direction (say the horizontal one) if there exists a finite number of saddle connections in this direction whose complement in Σ is a union of flat cylinders. If additionally, the flat cylinders of have commensurable moduli, the Veech group of Σ contains the matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & m' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

where m' is the smallest common multiple of all the moduli of the cylinders appearing in the cylinder decomposition. If the decomposition is in another direction θ , the Veech group actually contains the conjugate of this matrix by a rotation of angle θ . Moreover, the affine diffeomorphism realising this matrix is a Dehn twist along the multicurve made of all the simple closed curves associated to each of the cylinders of the decomposition.

Calculation of elements of the Veech group of Σ . The above paragraph allows us to bring to light two parabolic elements in \mathbf{V}_Σ . Indeed, Σ has two cylinder decompositions in the horizontal and vertical direction.

- The decomposition in the horizontal direction has one cylinder of modulus 6, in green in the Figure 4.16 below.

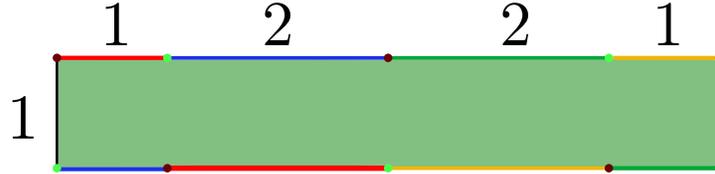


FIGURE 4.5 – Cylinder decomposition in the horizontal direction.

Applying the discussion of the last paragraph gives, we get that the matrix $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ belongs to \mathbf{V}_Σ .

- The decomposition in the vertical direction has two cylinders, both of modulus $\frac{3}{2}$, in respectively in blue and pink in the Figure 4.16 below.

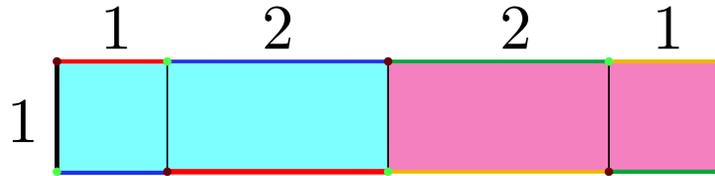


FIGURE 4.6 – Cylinder decomposition in the vertical direction.

Again, we get that the matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$ belongs to \mathbf{V}_Σ .

Finally, remark that both the polygon and the gluing pattern we used to build Σ is invariant by the rotation of angle π , which implies that the matrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ is realised by an involution in $\text{Affine}(\Sigma)$. Putting all the pieces together we get the

Proposition 35. *The group*

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

is a subgroup of \mathbf{V}_Σ .

4.1.8 A word about the directional foliations of Σ .

We have seen in the introduction that we have built the surface Σ in order that its directional foliations capture the dynamical properties of the family of AIETs $\{\varphi_t \mid t \in [0, 1]\}$. Precisely, we have that the foliation in direction $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ is the suspension of the AIET φ_t for

$$t = \frac{6}{\tan \theta}.$$

4.2 The Veech group of Σ .

4.2.1 The Veech group acting on the set of directional foliations

We have just seen in the previous section that an affine surface comes a family of oriented foliation, called **directional foliation** parametrised by the circle S^1 and denoted by \mathcal{F}_θ . Any affine diffeomorphism of the surface acts on the set of directional foliations. It is locally described by an affine map of \mathbb{R}^2 :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$$

where $A \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ and B is a vector of \mathbb{R}^2 . Such a map sends the θ -directional foliation on the $[A](\theta)$ -directional foliation, where $[A]$ is the projective action of the matrix A on the circle S^1 . Therefore (as a global object) an element of the Veech group also acts on the set of foliations $(\mathcal{F}_\theta)_{\theta \in S^1}$. Such an affine diffeomorphism conjugates one foliation and her foliations which are image of each other one by an element of the Veech group are \mathcal{C}^∞ -conjugate and therefore have the same dynamical behaviour. Recall that the goal of this article is to describe the dynamics of all the foliations \mathcal{F}_θ of the affine surface Σ . The remark above allows us to reduce the study to the quotient of S^1 by the action of Veech group on the set of foliations. We will find an interval (in projective coordinates) which is a fundamental domain for the action of the Veech group on its discontinuity set. The study of the dynamic for parameters θ in this interval will be performed in Section 4.3.

4.2.2 The subgroup Γ

We found in Section 4.1 three elements of the Veech group of the surface Σ :

$$\left\langle A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}, -\text{Id} \right\rangle \subset \mathbf{V}_\Sigma$$

The presence of the matrix $-\text{Id}$ in $\mathbf{V}(\Sigma)$ indicates that directional foliations on the surface Σ are invariant by reversing time. This motivates the study of the Veech group action on $\mathbb{RP}^1 := S^1 / -\text{Id}$ instead of S^1 .

We will often identify \mathbb{RP}^1 to the interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ by using projective coordinates :

$$\begin{aligned} \mathbb{RP}^1 &\rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] &\mapsto \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \end{aligned}$$

At the level of the Veech group it means to project it to $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ by the canonical projection π . Let us denote by $\Gamma \subset \pi(\mathbf{V}_\Sigma) \subset \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ the group generated by the two elements :

$$\Gamma := \left\langle A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

We will study the group Γ as a Fuchsian group, that is a **discrete** group of isometries of the real hyperbolic plane \mathbb{H}^2 . For the action of a Fuchsian group Φ on \mathbb{RP}^1 , there are two invariant subsets which we will distinguish :

- one called its *limit set* on which Φ acts minimally and that we will denote by $\Lambda_\Phi \subset \mathbb{RP}^1$;
- the complement of Λ_Φ which is called its *discontinuity set*, on which Φ acts properly and discontinuously and which we will denote by Ω_Φ .

We will give precise definitions in Section 4.2.4. In restriction to the discontinuity set, one can form the quotient by the action of the group. The topological space Ω_Φ / Φ is a manifold of dimension one : a collection of real lines and circles.

We will show in Proposition 38 that for the group Γ this set is a single circle, and therefore a fundamental domain I for the action of the group Γ can be taken to be an single interval (we will make it explicit : $I = [\arctan(1), \arctan(4)] \subset [0, \pi[\simeq \mathbb{RP}^1$). The dynamic of the directional foliations in the directions θ belonging to the interior of the interval I will be studied in Section 4.3.

Remarque 12. *We will prove in Section 4.4 that the group Γ is actually equal to the full Veech group of the surface Σ .*

4.2.3 The action of the group Γ on \mathbb{H} .

Two hyperbolic isometries $A, B \in \text{Isom}_+(\mathbb{H}^2)$ are said to be in **Schottky position** if the following condition holds :

There exists four disjoint domains D_i , $1 \leq i \leq 4$ which satisfy

$$A(D_1^c) = D_2 \quad B(D_3^c) = D_4$$

where D_i^c denotes the complementary set of D_i .

A group generated by two elements in Schottky position is also called a **Schottky group**.

Proposition 36. *The group Γ is Schottky. Moreover the surface M_Γ is a three punctured sphere with two cusps and one end of infinite volume.*

Démonstration. Viewed in the upper half plane model of \mathbb{H}^2 the action is easily shown to be Schottky. In fact the action of A (resp. B) becomes $z \mapsto z + 6$ (resp. $z \mapsto \frac{z}{\frac{3z}{2}+1}$). The two matrices are parabolic and fix ∞ and 0 respectively. Moreover, we observe that $A(-3) = 3$ and $B(-1) = 2$. Figure 4.7 below shows that the two matrices A and B are in Schottky position with associated domains D_i for $1 \leq i \leq 4$.

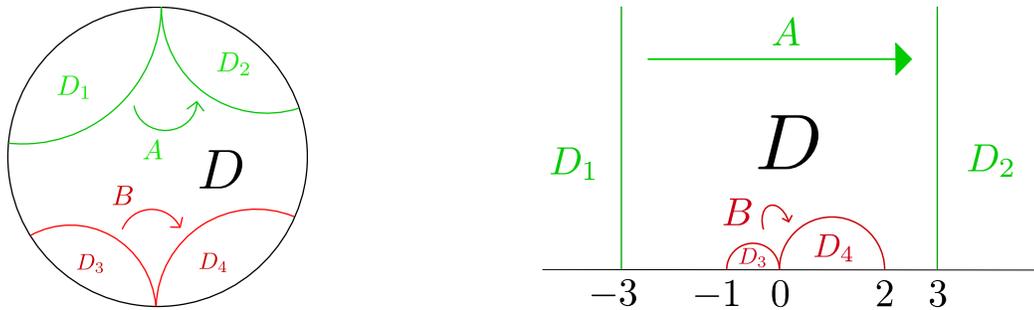


FIGURE 4.7 – A fundamental domain for the action of the group Γ acting on the hyperbolic plane.

The domain D of Figure 4.7 is a fundamental domain for the action of Γ . The isometry A identifies the two green boundaries of D together and B the two red ones. The quotient surface is homeomorphic to a three punctured sphere. \square

4.2.4 The limit set and the discontinuity set.

The following notion will play a key role in our analysis of the affine dynamics of the surface Σ :

Definition 10. The *limit set* $\Lambda_\Phi \subset S^1$ of a Fuchsian group Φ is the set of accumulation points in $\mathbb{D} \cup S^1$ of any orbit $\Phi \cdot \{z_0\}$, $z_0 \in \mathbb{D}^2$ where $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ is the disk model for the hyperbolic plane \mathbb{H}^2 .

The complementary set of the limit set is the good tool to understand the infinite volume part of such a surface.

Definition 11. The complementary set $\Omega_\Phi := S^1 \setminus \Lambda_\Phi$ is the *set of discontinuity* of the action of Γ on the circle.

The group Φ acts properly and discontinuously on the set of discontinuity one can thus form the quotient space Ω_Φ / Φ which is a manifold of dimension one : a collection of circles and real lines. These sets are very well understood for Schottky groups thanks to the ping-pong Lemma, for further details and developments see [Dal11] chapter 4.

Proposition 37 (ping-pong lemma). *A Schottky group is freely generated by any two elements in Schottky position and its limit set is homeomorphic to a Cantor set.*

The idea of the proof is to code points in the limit set. As it is shown in the following figure a point in the limit set is uniquely determined by a sequence in the alphabet $\{A, B, A^{-1}, B^{-1}\}$ such that two consecutive elements are not inverse from the other. The first letter of the sequence will determines in which domain D_i the point is, the second one in which sub-domain and so on :

The intersection of all these domains will give the standard construction of a Cantor set by cutting some part of smaller intervals repetitively.

The following theorem will be used in 4.4 to prove our main Theorem 36

Théorème 39 (Ahlfors, [Ahl66]). *A finitely generated Fuchsian group satisfies the following alternative :*

1. either its limit set is the full circle S^1 ;
2. or its limit set is of zero Lebesgues measure

In our setting, it is clear that the limit set is not the full circle, thus the theorem implies that the limit set of Γ is of zero Lebesgue measure.

4.2.5 The action on the discontinuity set and the fundamental interval

The following proposition is the ultimate goal of this section.

Proposition 38. *The quotient space*

$$\Omega_\Gamma / \Gamma$$

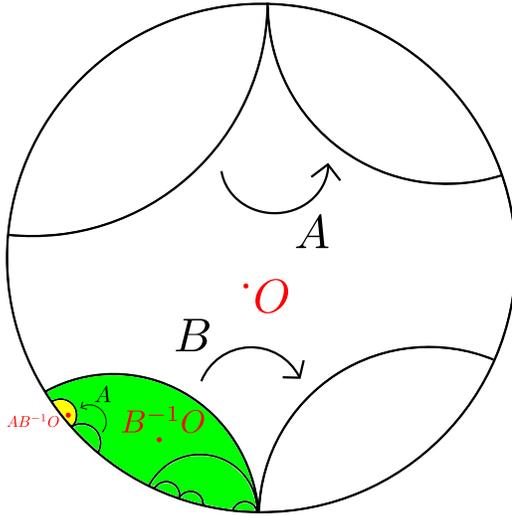


FIGURE 4.8 – In this example the first letter is A and the point as to be on the boundary of the green part. The second one being B^{-1} it has also to lie in the yellow one too.

is a circle. A fundamental domain for the action of Γ on Ω_Γ corresponds to the interval of slopes $I = [\arctan\left(\frac{1}{4}\right), \arctan(1)]$

Foliations defined by slopes which belong to this precise interval will be studied in section 4.3. To prove this proposition we will use the associated hyperbolic surface M_Γ and link its geometrical and topological properties to the action of the group Γ on the circle.

The definition of the limit set itself implies that it is invariant by the Fuchsian group. One can therefore seek a geometric interpretation of such a set on the quotient surface. We will consider the smallest convex set (for the hyperbolic metric) which contains all the geodesics which start and end in the limit set Λ_Γ . We denote it by $C(\Lambda_\Gamma)$. Because the group Γ is a group of isometries it preserves $C(\Lambda_\Gamma)$.

Definition 12. The *convex hull* of a hyperbolic surface M_Γ , denoted by $C(M_\Gamma)$ is defined as :

$$C(M_\Gamma) := C(\Lambda_\Gamma) / \Gamma$$

This is a subset of the surface M_Γ as a quotient of a Γ -invariant subset of \mathbb{H}^2 . The convex hull of a Fuchsian group is a surface with geodesic boundary, moreover if the group is finitely generated the convex hull has to be of finite volume. As a remark, a Fuchsian group is a lattice if and only if we have the

equality $C(M_\Gamma) = M_\Gamma$. In the special case of the Schottky group Γ the convex hull is a surface whose boundary is a single closed geodesic as it is shown on Figure 4.9. For a finitely generated group we will see that we have a one to one correspondence between connected components of the boundary of the convex hull and connected component of the quotient of the discontinuity set by the group.

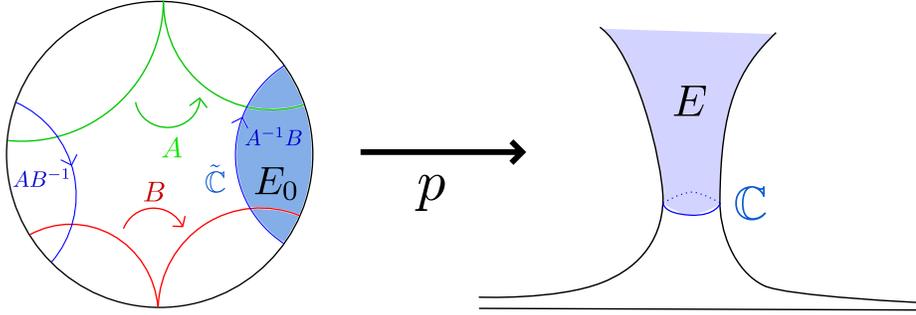


FIGURE 4.9 – The closed geodesic c cuts the surface M_Γ into two pieces. The blue part is the only infinite volume end and its complementary is the convex hull. The choice of a lift \tilde{c} of the geodesic c made on the picture allows us to describe the isometry which translate along \tilde{c} in terms of the generators of the group Γ . Indeed the pairing of the edges of the fundamental domain given by the action of the group Γ shows that the geodesic \tilde{c} is the translation axes of the matrix $A^{-1}B$.

The following lemma is the precise formulation of what we discussed above

Lemma 31. *Let Γ a finitely generated Fuchsian group. Any connected component I_0 of the discontinuity set Ω_Γ is stabilised by a cyclic group generated by an hyperbolic isometry γ_0 . Moreover ∂I_0 is composed of the two fixed points of the isometry γ_0 .*

We will keep the notations introduced with Figure 4.9. We start by showing that for any choice of a lift \tilde{c} in the universal cover of a geodesic c in the boundary of the convex hull one can associate an isometry verifying the properties of Lemma 31. c a closed geodesic consisting of a connected component of the boundary of the convex hull of M_Γ . One can choose a lift \tilde{c} of such a geodesic in the universal cover, the geodesic \tilde{c} is the axe of some hyperbolic isometry Φ , whose fixed points are precisely the intersection of \tilde{c} with the circle. As an element of the boundary of C_Γ it cuts the surface M_Γ into two pieces : C_Γ and an end E . One can check that this isometry Φ is exactly the stabiliser of the connected component E_0 of $p^{-1}(E)$ whose boundary is the geodesic \tilde{c} . Therefore such an isometry stabilises the connected component of the discontinuity set given by the endpoints of the geodesic \tilde{c} . We have shown that given a boundary component of C_Γ one can associate an element (in fact a conjugacy class) of the group Γ which stabilises a

connected component of Ω_Γ . We will not show how to associate a geodesic in the boundary of the convex hull to a connected component of the discontinuity set. However we want to put the emphasis on the fact the assumption that the group is finitely generated will be used here. The key point is the geometric finiteness theorem [Kat92, Theorem 4.6.1] which asserts that any finitely generated group is also **geometrically finite**. It means that the action of such a group admits a polygonal fundamental domain with finitely many edges. It is not difficult to exhibit from such a fundamental domain the desired geodesic by looking at the pairing induced by the group, as it is done in Figure 4.9 for our Schottky group.

Remarque 13. *The proof of Lemma 31 also shows that any point of the boundary of Ω_Γ is exactly the set of fixed points of hyperbolic isometries in Γ .*

Corollaire 5. *Connected components of Ω_Γ / Γ are in one to one correspondence with infinite volume end of the surface \mathbb{H}^2 / Γ .*

We now have all the materials needed to prove the Proposition 38.

Proof of Proposition 38. Because the surface \mathbb{H}^2 / Γ has only one end of infinite volume the corollary 5 gives immediately that Ω_Γ / Γ is a single circle. Proof of the second part of Lemma 31 consists in a simple matrix computation. Figure 4.9 gives explicitly the elements of the group Γ which stabilise a connected component of the discontinuity set. We then have to prove :

$$\left[AB^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

where $[X]$ is the projective class of the vector X . The computation is easy :

$$\begin{aligned} AB^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Remarque 14.

1. *The fact that the boundary of the discontinuity set could be identified with the set of fixed points of hyperbolic isometries is not general. For example the limit set of fundamental group of any hyperbolic compact surface is the full circle, but this group being countable there is only a countable set of fixed points.*

2. *As a corollary we also have that hyperbolic fixed points are dense in the limit set.*

4.3 Generic directions and Rauzy induction.

This section aims at describing the dynamics of the Disco surface in an open interval of directions from which we will deduce in the next section its generic dynamics thanks to the study of the group Γ we performed in the previous section.

The boundary of \mathbb{H} is canonically identified with \mathbb{RP}^1 through the natural embedding $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{CP}^1$. Recall that the action of $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ by Möbius transformations on \mathbb{C} is induced by matrix multiplication on \mathbb{CP}^1 after identification with \mathbb{C} by the affine chart $z \rightarrow [z : 1]$. Thus the action of matrices of the Veech group on the set of directions corresponds to the action of these matrices as homographies on the boundary of \mathbb{H} .



FIGURE 4.10 – Attractive leaf in red, repulsive in green

We notice straightaway that for directions $[t : 1]$ with t between 1 and 2, there is an obvious attractive leaf of dilatation parameter $1/2$ (see Figure 4.10). It corresponds to the set of directions of an affine cylinder (see Section 4.1.3). There is also a repulsive closed leaf in this direction. This will always be the case since $-Id$ is in the Veech group, sending attractive closed leaves to repulsive closed leaves.

In the following we will describe dynamics of the directional foliation for t between 2 and 4. According to Section 4.1.7 the interval of direction $[1, 4]$ is a fundamental domain for the action of Γ on Ω_Γ its discontinuity set. Moreover this discontinuity set has full Lebesgue measure in the set of directions, thus understanding the dynamical behaviour of a typical direction therefore amounts to understanding it for $t \in [1, 4]$. Further discussion on what happens in other directions will be done in the next section.

4.3.1 Reduction to an AIET



FIGURE 4.11 – The stable sub-surface and its directions

The directions for $t \in [2, 4]$ have an appreciable property; they correspond to the directions of a *stable sub-surface* in the Disco surface represented in Figure 4.11. Every leaf in the the given angular set of directions that enters the sub-surface will stay trapped in it thereafter. Moreover the foliation in it will have a hyperbolic dynamics. We therefore seek attractive closed leaves in this subset. To do so, take a horizontal interval overlapping exactly this *stable sub-surface* and consider the first return map on it. It has a specific form, which is close to an affine interval exchange, and which we will study in this section.

In the following, an affine interval exchange transformation (AIET)¹ is a piecewise affine function on an interval. For any $m, n \in \mathbb{N}$, let $\mathcal{I}(m, n)$ be the set of AIETs defined on $[0, 1]$ with two intervals on which it is affine and such that the image of the left interval is an interval of its length divided by 2^n which rightmost point is 1, and that the image of its right interval is an interval of its length divided by 2^m which leftmost point is 0 (see Figure 4.12 for such an IET defined on $[0, 1]$). When representing an AIET, we will color the intervals on which it is affine in different colors, and represent a second interval on which we color the image of each interval with the corresponding color; this will be sufficient to characterise the map. The geometric representation motivates the fact that we call the former and latter set of intervals the *top* and *bottom intervals*.

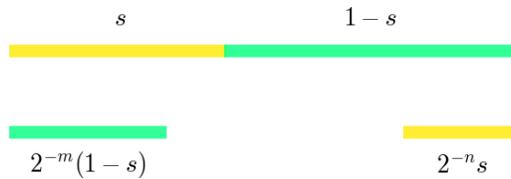


FIGURE 4.12 – Geometric representation of an element of $\mathcal{I}(m, n)$

Remark that the above cross-sections are in $\mathcal{I}(1, 1)$. We will study the dynamical behaviour of this family of AIET.

4.3.2 Rauzy-Veech induction

Let T be an AIET and D be its interval of definition. The first return map on a subinterval $D' \subset D$, $T' : D' \rightarrow D'$ is defined for every $x \in D'$, as

$$T'(x) = T^{n_0}(x) \text{ where } n_0 = \inf\{n \geq 1 | T^n(x) \in D'\}$$

Since we have no information on the recursivity of an AIET this first return map is a priori not defined on an arbitrary subinterval. Nonetheless generalizing a

1. In classical definitions of (affine) interval exchanges the maps are also assumed to be bijective, here they will be injective but not surjective.

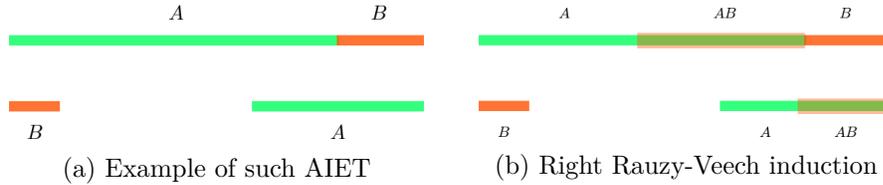
wonderful idea of Rauzy [Rau79] on IETs, we get a family of subinterval on which this first return map is well defined. Associating an AIET its first return map on this well-chosen smaller interval will be called the Rauzy-Veech induction.

The general idea in the choice of this interval is to consider the smallest of the two top and bottom intervals at one end of D (left or right) the interval of definition. We then consider the first return map on D minus this interval.

In the following we describe explicitly the induction for a simple family $\mathcal{I}(m, n)$. A general and rigorous definition of Rauzy-Veech induction here is certainly possible with a lot of interesting questions emerging but is beyond the scope of this article.

Assume now that T is an element of $\mathcal{I}(m, n)$, let $A, B \subset D$ be the left and right top intervals of T , and λ_A, λ_B their length. Several distinct cases can happen,

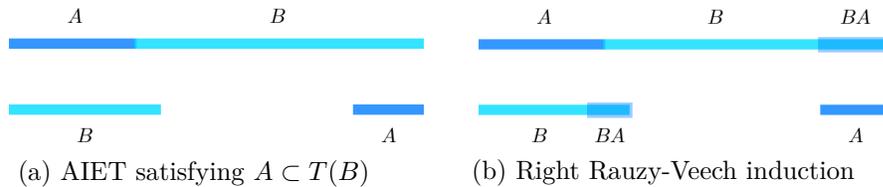
1. (a) $B \subset T(A)$ *i.e.* $\lambda_B \leq 2^{-n}\lambda_A$.



We consider the first return map on $D' = D - B$. $T^{-1}(B)$ of length $2^n\lambda_B$ has no direct image by T in D' but $T(B) \subset D'$. Thus for the first return map, this interval will be sent directly to $T(B)$ dividing its length by 2^{n+m} . We call this a right Rauzy-Veech induction of our AIET. The new AIET is in $\mathcal{I}(m + n, n)$, and its length vector (λ'_A, λ'_B) satisfies

$$\begin{pmatrix} \lambda'_A \\ \lambda'_B \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2^n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}}^{R_{m,n}} \begin{pmatrix} \lambda_A \\ \lambda_B \end{pmatrix}$$

- (b) If $A \subset T(B)$ *i.e.* $2^{-m}\lambda_B \geq \lambda_A$.

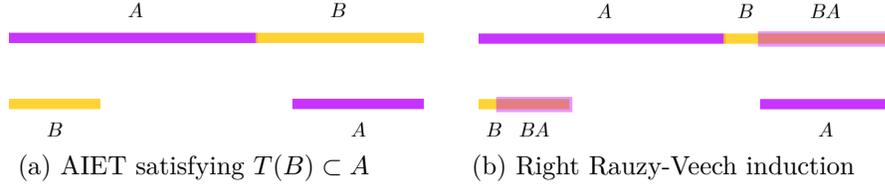


In this case, the right Rauzy-Veech induction will not yield an AIET of the form of the $\mathcal{I}(m, n)$ family therefore we consider the first return map on $D' = D - A$ which we call the left Rauzy-Veech induction of our AIET. We obtain a new AIET in $\mathcal{I}(m, n + m)$ and its length vector (λ'_A, λ'_B) satisfies,

$$\begin{pmatrix} \lambda'_A \\ \lambda'_B \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 2^m & 0 \\ -2^m & 1 \end{pmatrix}}^{L_{m,n}} \begin{pmatrix} \lambda_A \\ \lambda_B \end{pmatrix}$$

2. $T(A) \subset B$ i.e. $\lambda_B \geq 2^{-n}\lambda_A$ and $T(B) \subset A$ i.e. $2^{-m}\lambda_B \leq \lambda_A$.

We consider the first return map on the subinterval $D' = D - T(A)$. Then A has no direct image by T in D' but $T^2(A) \subset T(B) \subset D'$. Thus in the first return map, this interval will be sent directly to $T^2(A)$ dividing its length by 2^{n+m} .



Then $T^2(A) \subset A$ thus it has an attractive fixed point of derivative 2^{-n-m} .

Remarque 15. *The set of length for which we apply left or right Rauzy-Veech induction in the above trichotomy is exactly the set on which lengths λ'_A and λ'_B implied by the above formulas are both positive.*

More precisely, $0 \leq \lambda_B \leq 2^{-n}\lambda_A \iff R_{m,n} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_A \\ \lambda_B \end{pmatrix} \geq 0$,

and $0 \leq 2^{-m}\lambda_B \leq \lambda_A \iff L_{m,n} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_A \\ \lambda_B \end{pmatrix} \geq 0$.

This will be useful latter on, to describe the set of parameters which corresponds to the sequence of induction we apply.

The algorithm. We define in what follows an algorithm using the Rauzy induction that will allows us to determine if an element of $\mathcal{I}(1, 1)$ has an attractive

periodic orbit; and if so the length of its periodic orbit (or equivalently the dilatation coefficient of the associated leaf in Σ).

The algorithm goes the following way :

The entry is an element of $\mathcal{I}(m, n)$,

1. If the entry is in case (1), perform in case (a) the right Rauzy induction R or in case (b) the left Rauzy induction L to obtain an element of $\mathcal{I}(m+n, n)$ or $\mathcal{I}(m, n+m)$ respectively. Repeat the loop with this new element.
2. If it is in case (2), it means that the first return map on a well chosen interval has a periodic attractive point of derivative $2^{-m_l - n_l}$. The algorithm stops.

Alongside the procedure comes a sequence of symbols R and L keeping track of whether we have performed the Rauzy induction on the left or on the right at the n^{th} stage. This sequence is finite if and only if the algorithm describe above finishes. An interesting phenomenon will happen for AIET for which the induction never stops, and will be described latter.

4.3.3 Directions with attractive closed leaf

In the directions of Figure 4.11, we consider the first return map of the directional foliation on the interval given by the two length 1 horizontal interval at the bottom of the rectangle. We have chosen directions such that the first return map is well defined although it is not bijective, and it belongs to $\mathcal{I}(1, 1)$. The ratio of the two top intervals' length will vary smoothly between 0 and ∞ depending on the direction we choose. We parametrise this family of AIET by $s \in I := [0, 1]$, where $(s, 1-s)$ is the length vector of the element of $\mathcal{I}(1, 1)$ we get. Our purpose here is to characterise the subspace $H \subset I$ for which the above algorithm stops, in particular they correspond to AIET with a periodic orbit. The case of $I - H$ will be settled in the next subsection.

We describe for any finite word in the alphabet $\{L, R\}$, $w = w_1 \dots w_{l-1}$, the subset of parameters $H(w) \subset H \subset I$ for which the algorithm stops after the sequence w of Rauzy-Veech inductions.

We associate to w the sequences $n_1 = 1, \dots, n_l$, $m_1 = 1, \dots, m_l$ and $M_1 = Id, \dots, M_l$ defined by the recursive properties,

$$m_{i+1} = \begin{cases} m_i & \text{if } w_i = L \\ n_i + m_i & \text{if } w_i = R \end{cases}, \quad n_{i+1} = \begin{cases} n_i + m_i & \text{if } w_i = L \\ n_i & \text{if } w_i = R \end{cases},$$

$$M_{i+1} = \begin{cases} L_{m_i, n_i} \cdot M_i & \text{if } w_i = L \\ R_{m_i, n_i} \cdot M_i & \text{if } w_i = R \end{cases}$$

Let $s \in I$ such that we can apply Rauzy-Veech inductions corresponding to w to the element of $\mathcal{I}(1, 1)$ of lengths $(s, 1 - s)$. The induced AIET after all the steps of the induction is in $\mathcal{I}(m_l, n_l)$ and its length vector is

$$M_l \cdot \begin{pmatrix} s \\ 1 - s \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ 1 - s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a - b)s + b \\ (c - d)s + d \end{pmatrix}$$

Following Remark 15, the property of s that we can apply all the Rauzy-Veech inductions corresponding to w to the initial AIET in $\mathcal{I}(1, 1)$ is equivalent to $(a - b)s + b \geq 0$ and $(c - d)s + d \geq 0$. A simple recurrence on M_i shows that it is an integer matrix with $a, d \geq 0$, $b, c \leq 0$, hence $s \in \left[\frac{-b}{a-b}, \frac{d}{d-c} \right] =: I(w)$. $H(w)$ will be the central subinterval of $I(w)$ for which the induced AIET in $\mathcal{I}(m_l, n_l)$ is in case (2).

If we consider the sets

$$H_k := \bigcup_{|w| \leq k} H(w) \quad \text{and} \quad H = \bigcup_k H_k$$

we remark that H has the same construction as the complement of the Cantor triadic set; each H_k is constructed from H_{k-1} by adding a central part of each interval which is a connected component of $I - \bigcup_{j < k} H_j$.

The rest of the subsection aims now at proving the following lemma,

Lemme 32. *$H \subset I$ has full Lebesgue measure.*

Démonstration. We will prove in the following that for any non-empty word w ,

$$\frac{|H(w)|}{|I(w)|} \geq \delta \tag{4.1}$$

for some $\delta > 0$. Thus at each step k , H_k is at least a δ -proportion larger in Lebesgue measure than H_{k-1} . This implies that the Lebesgue measure

$$\lambda(H) \geq \lambda(H_k) \geq 1 - \delta^k \text{ for any } k$$

□

We now show Inequality 4.1. Let w be any finite word in the alphabet $\{L, R\}$. For convenience we normalise the interval $I(w)$ for such that it is $[0, 1]$. We denote by $(\lambda_A(s), \lambda_B(s))$ the length vector of the AIET induced by the sequence w of

Rauzy-Veech inductions. These two lengths are linear functions of s , λ_A is zero at the left end of the interval and λ_B is zero at the right end. As a consequence, these two functions have the form $\lambda_A(s) = \alpha s$ and $\lambda_B(s) = \beta(1-s)$ for $s \in [0, 1]$, where α and β are the maximal values of λ_A and λ_B respectively equal to according to the previous computations

$$\alpha = (a-b)\frac{d}{d-c} + b = \frac{ad-bd+bd-bc}{d-c} = \frac{\det(M_I)}{d-c}$$

and

$$\beta = (c-d)\frac{-b}{a-b} + d = \frac{-bc+bd+da-db}{a-b} = \frac{\det(M_I)}{a-b}$$

We see that $\lambda_A(s) = 2^{-m}\lambda_B(s) \iff 2^m\alpha s = \beta(1-s) \iff s = \frac{\beta}{2^m\alpha+\beta}$ and similarly $\lambda_B(s) = 2^{-n}\lambda_A(s) \iff 2^n\beta(1-s) = \alpha s \iff s = \frac{2^n\beta}{\alpha+2^n\beta}$. Hence

$$\lambda_A(s) \leq 2^{-m}\lambda_B(s) \iff s \in \left[0, \frac{\beta}{2^m\alpha+\beta}\right]$$

and

$$\lambda_B(s) \leq 2^{-n}\lambda_A(s) \iff s \in \left[\frac{\beta}{2^{-n}\alpha+\beta}, 1\right]$$

thus

$$H(w) = \left[\frac{\beta}{2^m\alpha+\beta}, \frac{\beta}{2^{-n}\alpha+\beta}\right].$$

If we denote by $x = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a-b}{d-c}$,

$$\frac{|H(w)|}{|I(w)|} = \frac{1}{1+2^{-n}x} - \frac{1}{1+2^m x}$$

We prove the following technical lemma

Lemme 33. *For any word w in $\{R, L\}$, if $M(w) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, we have,*

$$2^{-1} \leq \frac{a-b}{d-c} \leq 2$$

This implies directly that

$$\frac{|H(w)|}{|I(w)|} \geq \frac{1}{1+2^{-n+1}} - \frac{1}{1+2^{m-1}}$$

Hence for w not empty, either $n \geq 2$ or $m \geq 2$ thus either

$$\frac{|H(w)|}{|I(w)|} \geq \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \text{ or } \frac{|H(w)|}{|I(w)|} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Démonstration. The proof goes by induction on the length of w . Let us assume that $2^{-1} = \frac{a-b}{d-c} = 2$ for some w . We denote by

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = R_{m,n} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2^n c & b - 2^n d \\ 2^n c & 2^n d \end{pmatrix}$$

Thus $\frac{a'-b'}{d'-c'} = 2^{-n} \frac{a-b}{d-c} + 1$ from which the inequality follows.

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = L_{m,n} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^m a & 2^m b \\ c - 2^m a & d - 2^m b \end{pmatrix}$$

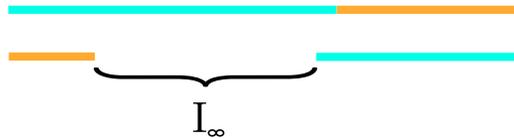
The inequality is similar to the previous one. □

4.3.4 AIET with infinite Rauzy-Veech induction

We focus in this subsection on what happens for AIETs on which we apply Rauzy-Veech induction infinitely many times. First, remark that if we apply the induction on the same side infinitely many times, the length of the top interval of the corresponding side on the induced AIET is multiplied each time by a positive power of 2, therefore it goes to infinity. Yet the total length of the subinterval is bounded by 1 the length of the definition interval from which we started the induction. Thus the length of the interval has to be zero; this corresponds to the case where there is a saddle connection and it is included in the closed orbit case, since we chose to take $H(w)$ closed.

In consequence, for an IET T with parameter in $I - H$, we apply Rauzy-Veech induction infinitely many times, and the sequence of inductions we apply is not constant after a finite number of steps. Now let as above D be the interval of definition of the given AIET, and $A, B \subset D$ be its two consecutive domain of continuity. Remark that the induction keeps the right end of $T(B)$ and the left end of $T(A)$ unchanged. Moreover the induction divides the length of one of the bottom interval (depending on which Rauzy-Veech induction we apply) by at least two. As a consequence, if we consider I_n to be the open subinterval of D on which we consider the first return map after the n -th induction, the limit of these nested intervals is

$$I_\infty := \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = D - \{T(A) \cup T(B)\}$$



By definition, this interval is disjoint from $T(D)$, and therefore

$$\forall x \in D \text{ and } n \in \mathbb{N}, T^n(x) \notin I_\infty$$

Moreover, our definition of Rauzy-Veech induction implies that any point outside of the subinterval on which we consider the first return will end up in this subinterval in finite time. Thus

$$\forall x \in D \text{ and } n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} \text{ such that } T^k(x) \in I_n$$

This implies that the orbit of any point of D accumulates on ∂I_∞ .

Let us introduce the complementary of all the images of I_∞ ,

$$\Omega := D - \bigcup_{n=0}^{\infty} T^n I_\infty$$

The measure of I_∞ is $1/2$, taking the image by T divides the measure of any interval by two and any iterated image of this set is disjoint, since its image is disjoint from itself and T is injective. Hence the measure of Ω is $1/2 \cdot (1 + 1/2 + 1/2^2 + \dots) = 1$. As we remarked, the orbit of any point of D accumulates to ∂I_∞ and thus to any image of it, hence to any point of $\partial \Omega$. As $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^n I_\infty$ has full measure, Ω has zero Lebesgue measure and thus has empty interior. To conclude, Ω is the limit set of any orbit of T .

Now Ω is closed set with empty interior. Moreover if we take a point in Ω , any neighborhood contains an interval and thus its boundary. Hence no point is isolated, and Ω is a Cantor set. Which leads to the following proposition,

Proposition 39. *In the space of directions $[1, 4]$, there is a set H , which complementary set is a Cantor set of zero measure which satisfies,*

- $\forall \theta \in \overline{H}$ the foliation \mathcal{F}_θ concentrates to an attractive leaf.
- $\forall \theta \in \partial H$ the foliation \mathcal{F}_θ concentrates to a closed saddle connection.
- $\forall \theta \in [1, 4] \setminus \overline{H}$ the foliation \mathcal{F}_θ concentrates on a stable Cantor set of zero measure in the foliation.

4.4 The global picture.

Gathering all materials developed in the previous sections, we prove here the main theorems announced in the introduction.

Proposition 40. *Assume that the foliation \mathcal{F}_θ of Σ has a closed attracting leaf F^+ . Then it has a unique repulsing leaf F^- and any leaf which is different from F^- and regular accumulates on F^+ .*

This proposition ensures that in all the cases where we have already found an attracting leaf, the dynamics of the foliation is as simple as can be.

Démonstration. The image of F^+ by the action of the diffeomorphism of $\text{Affine}(\Sigma)$ whose image by the Fuchsian representation is $-\text{Id}$ is the repulsive leaf announced which we denote by \mathcal{F}^- . Let L be a leaf of the **oriented** foliation that accumulates to F^+ . We consider the very same leaf but with the reversed orientation. We also assume that L was not issued from a singular point, in which case we consider its ω -limit in Σ which we denote by Q . We want to prove that $Q = F^-$. Assume by contradiction that $Q \neq F^-$.

- Either Q is an attracting closed leaf. In that case the image of Q by the involution of the Veech group is another closed leaf and we get the existence of four different closed attracting leaves. Since the surface Σ does not have cylinders of angle $\geq \pi$ (because Σ is triangulable, see [DFG]), each of these closed leaves belongs to a different cylinder. This contradicts Proposition 34.
- Or Q is another type of quasiminimal. In that case, any subsurface of Σ containing Q is of genus at least one (see [Lev87, p.91]). On the other hand, Q is disjoint from F^+ and F^- which contradicts the fact that Σ has genus two.

□

We say that a direction having such a dynamical behavior is *dynamically trivial*.

Théorème 40. *The set of dynamically trivial directions in S^1 is open and has full measure.*

Démonstration. Since $-\text{Id}$ belongs to the Veech group of Σ , the foliations \mathcal{F}_θ and $\mathcal{F}_{-\theta}$ have the same dynamical behavior. We will therefore consider parameters θ in \mathbb{RP}^1 instead of in S^1 . We denote then by $\mathcal{T} \subset \mathbb{RP}^1$ the set of dynamically trivial directions in \mathcal{T} . We have proved in Section 4.3 that the trace of \mathcal{T} on $J = \{[1 : t] \mid t \in [1, 4]\} \subset \mathbb{RP}^1$ is the complement of a Cantor set and that $\mathcal{T} \cap J$ has full measure.

Also J is a fundamental domain for the action of Γ on Ω_Γ the discontinuity set of Γ . Since $\Gamma < \mathbf{V}(\Sigma)$, two directions in \mathbb{RP}^1 in the same orbit for the action of θ induce conjugated foliations on Σ and therefore have same dynamical behavior. This implies that $\mathcal{T} \cap \Omega_\Gamma$ is open and has full measure in Ω_Γ . Since Ω_Γ has itself full measure in \mathbb{RP}^1 , \mathcal{T} has full measure in \mathbb{RP}^1 . Its openness is a consequence of the stability of dynamically trivial foliations for the \mathcal{C}^∞ topology, see [Lio95] for instance.

□

Relying on a similar argument exploiting in a straightforward manner the action of the Veech group and the depiction of the dynamics made in Section 4.3, we get the

Théorème 41. *There exists a Cantor set $\mathcal{K} \subset S^1$ such that for all $\theta \in \mathcal{K}$, the foliation \mathcal{F}_θ accumulates to a set which is transversely a Cantor set of zero Hausdorff measure.*

We believe it is worth pointing out that the method we used to find these ‘Cantor like’ directions is new compared to the one used in [CG97], [BHM10] and [MMY10]. Also, our Cantor sets have zero Hausdorff dimension. It would be interesting to compare with the aforementioned examples.

Théorème 42. *The Veech group of Σ is exactly Γ .*

Démonstration. We cut the proof into four steps :

1. proving that any element in $\mathbf{V}(\Sigma)$ preserves Λ_Γ ;
2. proving that Γ has finite index in $\mathbf{V}(\Sigma)$;
3. proving that the group Γ is normal in $\mathbf{V}(\Sigma)$;
4. concluding.

(1) Let us prove the first point. Because of the description of the dynamics of the directional foliations we have achieved, one can show the limit set of the Veech group is the same than the limit set of Γ . If not, there must be a point of $\Lambda_{\mathbf{V}_\Sigma}$ in the fundamental interval I . But since the group \mathbf{V}_Σ is non elementary it implies that we have to find in I infinitely many copies of a fundamental domain for the action of Γ on the discontinuity set. In particular infinitely many disjoint intervals corresponding to directions where the foliation has an attracting leave of dilatation parameter 2. But by the study performed in the above section the only sub-interval of I having this property is $]1, 2[$.

(2) The second point follows from that the projection

$$\Gamma \backslash \mathbb{H} \longrightarrow \mathbf{V}(\Sigma) \backslash \mathbb{H}$$

induces an isometric orbifold covering

$$C(\Gamma \backslash \mathbb{H}) \longrightarrow C(\mathbf{V}(\Sigma) \backslash \mathbb{H}).$$

Since $C(\Gamma \backslash \mathbb{H})$ has finite volume and because $[\Gamma : \mathbf{V}(\Sigma)] = \frac{\text{vol}(C(\Gamma \backslash \mathbb{H}))}{\text{vol}(C(\mathbf{V}(\Sigma) \backslash \mathbb{H}))}$, this ratio must be finite and hence Γ has finite index in $\mathbf{V}(\Sigma)$.

(3) Remark that Γ is generated by two parabolic elements A and B and that these define the only two conjugacy class in Γ of parabolic elements. We are going

to prove that any element $g \in \mathbf{V}(\Sigma)$ normalise both A and B . Since Γ has finite index in $\mathbf{V}(\Sigma)$, there exists $n \geq 1$ such that $(gAg^{-1})^n \in \Gamma$. There are but two classes of conjugacy of parabolic elements in Γ which are the ones of A and B . If $n \geq 2$, this implies that $\mathbf{V}(\Sigma)$ contains a strict divisor of A , which would make the limit set of $\mathbf{V}(\Sigma)$ larger than Λ_Γ (consider the eigenvalues of the matrix AB^{-1} which determine points in the boundary on the limit set, see Lemma 31). Therefore gAg^{-1} belongs to Γ . A similar argument shows that $gBg^{-1} \in \Gamma$ and since A and B generate Γ , g normalises Γ . Hence Γ is normal in $\mathbf{V}(\Sigma)$.

(4) Any $g \in \mathbf{V}(\Sigma)$ thus acts on the convex hull $C(\Gamma \backslash \mathbb{H})$ of the surface $C(\Gamma \backslash \mathbb{H})$. In particular it has to preserve the boundary of $C(\Gamma \backslash \mathbb{H})$, which is a single geodesic by Proposition 38. At the universal cover it means that g has to fix a lift of the geodesic c , thus the isometry g permutes two fixed points of a hyperbolic element h of Γ . Two situations can occur :

- g is an elliptic element. His action on $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ cannot permute the two cusps because they correspond to two essentially different cylinder decompositions on Σ . It therefore fixes the two cusps and hence must be trivial.
- g is hyperbolic and fixes the two fixed points of h . Moreover, by Lemma 31, it acts on the fundamental interval I and as we discussed above such an action has to be trivial because of our study of the associated directional foliations, the translation length of g is then the same than h . But g is fully determined by its fixed points and its translation length, which shows that $g = h$ and thus $g \in \Gamma$.

Any element of $\mathbf{V}(\Sigma)$ therefore belongs to Γ and the theorem is proved. □

4.5 On the Veech group of Σ .

We aim at discussing the different definitions of the Veech group, and how they relate to each other. Classically there are two ways to define the Veech group of a translation surface : either by saying that it is the group of derivatives of the (real) affine diffeomorphisms of the surface Σ or that it is the stabiliser of Σ for the $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ -action on a certain moduli space.

It is often convenient to consider the affine diffeomorphism realising a certain element of SL and to know about its topological properties, namely which type of class in the mapping class group of Σ it represents.

In order to extricate the subtleties between these different points of view, we make the following definitions :

1. $\mathrm{Affine}(\Sigma)$ is the subgroup of $\mathrm{Diff}^+(\Sigma)$ made of affine automorphisms ;

2. $\rho : \text{Affine}(\Sigma) \longrightarrow \text{SL}$ is the natural projection obtained the following way : any element $f \in \text{Affine}(\Sigma)$ writes down in coordinate charts as an element of $\text{GL}^+(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$. Its linear part in $\text{GL}^+(2, \mathbb{R})$ only changes under a different choice of charts by a multiplication by a certain $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Its class in $\text{GL}^+(2, \mathbb{R})/\mathbb{R}_+^* = \text{SL}$ is therefore well defined and is by definition $\rho(f)$. We call ρ the *Fuchsian representation*.
3. $\tau : \text{Affine}(\Sigma) \longrightarrow \text{MCG}(\Sigma)$ is the natural projection to the mapping class group.

Remarque 16. *It is important to understand that the fact that the image of ρ lies in SL is somewhat artificial and that the space it naturally lies in is $\text{GL}^+(2, \mathbb{R})/\mathbb{R}_+^*$. In particular, when an element of the Veech group is looked at in coordinate charts, there is no reason the determinant of its derivative should be equal to 1, however much natural the charts are.*

We first make the following elementary but important remark : the kernel of ρ need not to be trivial. Consider $\widehat{\Sigma}$ any ramified cover of Σ together with the pulled-back affine structure. The Galois group of the cover acts non-trivially as elements of $\text{Affine}(\widehat{\Sigma})$ whose image under ρ are trivial, by definition. Conversely, the quotient of an affine surface Σ by $\text{Ker}(\rho)$ is still an affine surface over which Σ is a ramified cover, and whose Fuchsian representation has trivial kernel. The *Veech group* $\mathbf{V}(\Sigma)$ of Σ is by definition $\rho(\Sigma) \subset \text{SL}$. We also say an affine surface is *irreducible* if its Fuchsian representation has trivial kernel or equivalently if it is not a non-trivial ramified cover over another affine surface.

4.5.1 Thurston's theorem on multi-twists.

We recall in this subsection a theorem of Thurston allowing the understanding of the topological type of the elements of a subgroup of $\text{MCG}(\Sigma)$ generated by a couple of multi-twists. Let α and β be two multicurve on Σ . We say that

- α and β are *tight* if they intersect transversely and that their number of intersection is minimal in their isotopy class ;
- α and β fill up Σ if $\Sigma \setminus (\alpha \cup \beta)$ is a union of cells.

Denote by $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ and β_1, \dots, β_l the components of α and β respectively. We form the $k \times l$ matrix $N = (i(\alpha_i, \beta_j))_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l}$. One easily checks that $\alpha \cup \beta$ is connected if and only if a power of $N^t N$ is positive. Under this assumption, $N^t N$ has a unique positive eigenvector V of eigenvalue $\mu > 0$. We also denote by T_α (resp. T_β) the Dehn twist along α (resp. along β).

Théorème 43 (Theorem 7 of [Thu88]). *Let α and β two multicurves which are tight and which fill up Σ , and assume that $\alpha \cup \beta$ is connected. Denote by $G(\alpha, \beta)$*

the subgroup of $\text{MCG}(\Sigma)$ generated by T_α and T_β . There is a representation $\rho : G(\alpha, \beta) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ defined by

$$\rho(T_\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \mu^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ and } \rho(T_\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mu^{\frac{1}{2}} & 1 \end{pmatrix}$$

such that g is of finite order, reductive or pseudo-Anosov according to whether $\rho(g)$ is elliptic, parabolic or pseudo-Anosov.

4.5.2 Topological type of elements of the Veech group of Σ .

We apply Thurston's theorem to the Veech group of Σ . Let us narrow our focus on the elements of $\text{Affine}(\Sigma)$ acting as $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$ that we identified in Section 4.1.7. They are the Dehn twists along the curves α and β drawn in Figure 4.16.

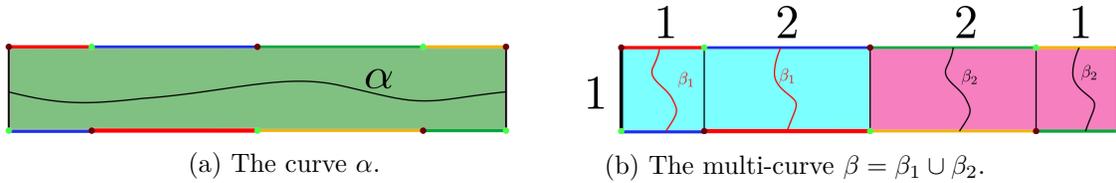


FIGURE 4.16 – Definition of α and β

One checks that :

- $\alpha \cup \beta$ is connected ;
- α and β are tight since they can both be realised as geodesics of Σ ;
- α and β are filling up Σ .

With an appropriate choice of orientation for α and β , we have that $i(\alpha, \beta_1) = i(\alpha, \beta_2) = 2$. The intersection matrix associated is therefore $N = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ and $N^t N = \begin{pmatrix} 8 & \\ & \end{pmatrix}$. The parameter μ is then equal to 8 and $\sqrt{\mu} = 2\sqrt{2}$. We are left with two representations

$$\rho_1, \rho_2 : G(\alpha, \beta) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R}).$$

1. ρ_1 is the restriction of the Fuchsian representation to $G(\alpha, \beta) < \text{Affine}(\Sigma)$ composed with the projection onto $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$.
2. ρ_2 is the representation given by Thurston's theorem.

By definition of these two representations, ρ_1 maps T_α to $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ and ρ_2 maps it to $\begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; and ρ_1 maps T_β to $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$ and ρ_2 maps it to $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 41. *For all $g \in G(\alpha, \beta)$, $\rho_1(g)$ and $\rho_2(g)$ have same type.*

Démonstration. — ρ_1 and ρ_2 are faithful;

— ρ_1 and ρ_2 are Schottky subgroups of $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ of infinite covolume;

— ρ_1 and ρ_2 send T_α and T_β to two parabolic elements;

As a consequence of these three facts, the quotient of \mathbb{H} by the respective actions of $G(\alpha, \beta)$ through ρ_1 and ρ_2 respectively are both a sphere S with two cusps and a funnel. No element of $\rho_1(G(\alpha, \beta))$ or $\rho_2(G(\alpha, \beta))$ is elliptic, and the image of $g \in G(\alpha, \beta)$ is parabolic in $\rho_1(G(\alpha, \beta))$ or $\rho_2(G(\alpha, \beta))$ if and only if the corresponding element in $\pi_1(S)$ is in the free homotopy class of a simple closed curve circling a cusp. Which proves the proposition. □

There is little needed to complete the topological description of the elements of the Veech group of Σ . Indeed, Proposition 41 above together with Thurston's theorem ensures that the topological type of $g \in G(\alpha, \beta) \subset \mathrm{Affine}(\Sigma)$ is determined by (the projection to $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ of) its image by the Fuchsian representation (namely g has finite order if $\rho_1(g)$ is elliptic, g is reductive if $\rho_1(g)$ is parabolic and pseudo-Anosov if $\rho_1(g)$ is hyperbolic).

The group $G(\alpha, \beta)$ has index 2 in \mathbf{V}_Σ . The involution $i \in \mathrm{Affine}(\Sigma)$ acting as $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ preserves the multi-curves α and β and therefore commutes to the whole $G(\alpha, \beta)$. In particular, any element of \mathbf{V}_Σ writes $g \cdot i$ with $g \in G(\alpha, \beta)$. The type of $g \cdot i$ being the same as the type of g , we get the following

Théorème 44. *For all $f \in \mathrm{Affine}(\Sigma)$, f is of finite order, reductive or pseudo-Anosov according to whether its image by the Fuchsian representation in $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ is elliptic, parabolic or hyperbolic.*

Annexe A

Les représentations de Magnus et de Chueshev.

Tout au long de cet annexe, Σ est une surface compacte orientée de genre $g \geq 2$. On notera Γ son groupe fondamental, $\tilde{\Sigma}$ un revêtement universel muni d'une action de Γ de telle sorte que $\Sigma = \tilde{\Sigma}/\Gamma$.

A.1 Homologie du revêtement abélien de Σ .

On note Σ_{ab} le revêtement abélien de Σ , c'est à dire la surface $\tilde{\Sigma}/D\Gamma$, où $D\Gamma$ est le premier groupe dérivé de Γ , c'est à dire le sous groupe distingué de Γ engendré par ses commutateurs. Il s'agit du plus petit sous-groupe distingué de Γ tel que le quotient $\Gamma/D\Gamma$ soit abélien, et $\Gamma/D\Gamma$ est appelé l'*abélianisé* de Γ . D'autre part il est connu que $\Gamma/D\Gamma = H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$, ainsi le groupe fondamental de Σ_{ab} s'identifie naturellement à $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$.

Ainsi le premier groupe d'homologie $H_1(\Sigma_{ab}, \mathbb{Z})$ est muni d'une action linéaire de $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$, qui n'est autre que l'action induite par $\pi_1 \Sigma_{ab} = H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ sur $H_1(\Sigma_{ab}, \mathbb{Z})$.

Proposition 42. *Le groupe $H_1(\Sigma_{ab}, \mathbb{Z})$ est un $\mathbb{Z}H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ -module libre de rang $2g - 2$.*

Démonstration. Cette preuve est complètement inspirée de la partie 2 de l'article [CP11]. Soit p un point de Σ tel que $\Gamma = \pi_1(\Sigma, p)$ et on note $\pi \hat{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ la projection naturelle. On a alors la suite exacte de $\mathbb{Z}H$ -modules suivante

$$0 \rightarrow H_1(\hat{\Sigma}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\hat{\Sigma}, \pi^{-1}(p), \mathbb{Z}) \rightarrow H_0(\pi^{-1}(p), \mathbb{Z}) \rightarrow H_0(\hat{\Sigma}, \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

Les trois premiers termes de la suite sont des $\mathbb{Z}H$ -modules libres de rang fini et le terme $H_0(\hat{\Sigma}, \mathbb{Z})$ est de rang zéro. La formule du rang assure alors que

$$r(\mathrm{H}_1(\widehat{\Sigma}, \pi^{-1}(p), \mathbb{Z})) = r(\mathrm{H}_1(\widehat{\Sigma}, \mathbb{Z})) + r(\mathrm{H}_0(\pi^{-1}(p), \mathbb{Z}))$$

□

A.2 La représentation de Magnus du groupe de Torelli.

Le groupe de Torelli $\mathcal{I}(\Sigma)$ est le noyau de la représentation symplectique, autrement dit c'est le sous groupe du groupe modulaire qui agit trivialement sur $H = \mathrm{H}_1(\Sigma, \mathbb{Z})$. Il est naturel de vouloir relever l'action de $\mathcal{I}(\Sigma)$ à une action $\mathbb{Z}H$ -linéaire à $\mathrm{H}_1(\widehat{\Sigma}, \mathbb{Z})$.

Soit f un difféomorphisme de Σ agissant trivialement sur $\mathrm{H}_1(\Sigma, \mathbb{Z})$. Le choix d'un point $p \in \Sigma$ et de relevés \tilde{p} et q de p et $f(p)$ définit de manière unique un relevé $\widehat{f} : \widehat{\Sigma} \rightarrow \widehat{\Sigma}$. Deux tels relevés diffèrent de la pré-composition et post-composition par un élément de $\mathrm{H}_1(\Sigma, \mathbb{Z}) = \mathrm{Aut}(\widehat{\Sigma}/\Sigma)$. Plus précisément si \widehat{f}_1 et \widehat{f}_2 sont deux relevés de f à $\widehat{\Sigma}$, il existe $g, h \in \mathrm{H}_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ tels que pour tout $c \in \mathrm{H}_1(\widehat{\Sigma}, \mathbb{Z})$

$$\widehat{f}_2(c) = g \cdot \widehat{f}_1(h \cdot c).$$

D'autre part, comme f agit trivialement sur $\mathrm{H}_1(\Sigma, \mathbb{Z})$, tout relevé \widehat{f} est $\mathbb{Z}H$ -linéaire. En particulier la relation ci-dessus devient

$$\widehat{f}_2(c) = (g \cdot h) \widehat{f}_1(c).$$

La classe de l'action d'un relevé $\widehat{f} : \mathrm{H}_1(\widehat{\Sigma}, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{H}_1(\widehat{\Sigma}, \mathbb{Z})$ dans $\mathrm{PGL}(\mathrm{H}_1(\widehat{\Sigma}, \mathbb{Z}))$ ne dépend donc pas du relevé de f . Le choix d'une base de $\mathrm{H}_1(\widehat{\Sigma}, \mathbb{Z})$ nous permet donc de définir une représentation :

$$\mathcal{I}(\Sigma) \rightarrow \mathrm{PGL}(2g - 2, \mathbb{Z}H).$$

Cette représentation s'appelle la *représentation de Magnus* du groupe de Torelli.

A.3 La représentation de Chueshev du groupe de Torelli.

Soit $\alpha : H \rightarrow \mathbb{C}^*$ un morphisme de groupe. Il donne à \mathbb{C} une structure de $\mathbb{Z}H$ -module. On note $E_\alpha = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathrm{H}_1(\widehat{\Sigma}, \mathbb{Z}), \mathbb{C})$, E_α est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $2g - 2$. Comme $\mathcal{I}(\Sigma)$ définit une action projective sur $\mathrm{H}_1(\widehat{\Sigma}, \mathbb{Z})$, $\mathcal{I}(\Sigma)$ agit projectivement sur E_α et définit une représentation

$$\mathcal{I}(\Sigma) \rightarrow \mathrm{PGL}(E_\alpha).$$

Annexe B

Complex hyperbolic geometry.

Complex hyperbolic space.

On the complex vector space \mathbb{C}^{n+1} of dimension $n+1$, we consider the hermitian form $\langle \cdot, \cdot \rangle$ of signature $(1, n)$ defined by

$$\langle z, w \rangle = z_0 \overline{w_0} - \sum_{i=1}^n z_i \overline{w_i}$$

for $z = (z_0, \dots, z_n)$ and $w = (w_0, \dots, w_n)$ in \mathbb{C}^{n+1} .

All the definitions to come do not depend on the choice of the hermitian metric of signature $(1, n)$ since two such form a linearly conjugated. Recall that $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ is the set of complex line of \mathbb{C}^{n+1} . We define $\mathbb{C}\mathbb{H}^n$, the **complex hyperbolic space of dimension n** , to be the subset of $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ formed by the lines in \mathbb{C}^{n+1} on which $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is positive :

$$\mathbb{C}\mathbb{H}^n = \left\{ [z] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n \mid z \in \mathbb{C}^{n+1}, \langle z, z \rangle > 0 \right\}.$$

We denote by $\text{PU}(1, n)$ the set of linear automorphisms of \mathbb{C}^{n+1} which preserve $\langle \cdot, \cdot \rangle$. It acts projectively on $\mathbb{C}\mathbb{H}^n$ and satisfies to the following properties :

- its action on $\mathbb{C}\mathbb{H}^n$ is free and transitive ;
- $\text{PU}(1, n)$ is exactly the group $\text{Aut}(\mathbb{C}\mathbb{H}^n)$ of biholomorphisms of $\mathbb{C}\mathbb{H}^n$;
- there exists a Riemannian metric on $\mathbb{C}\mathbb{H}^n$ for which $\text{PU}(1, n)$ is exactly the set of orientation preserving isometry. This metric is called the **complex hyperbolic metric** ;
- this metric has sectional curvature comprised between $-\frac{1}{4}$ and -1 . Its holomorphic sectional curvature is constant.

The stabiliser of a point in $\mathbb{C}\mathbb{H}^n$ (which is exactly the stabiliser of a positive line $\text{PU}(1, n)$) is conjugated to $\text{U}(n) \subset \text{PU}(1, n)$, which is the maximal compact subgroup of $\text{PU}(1, n)$. The complex hyperbolic space $\mathbb{C}\mathbb{H}^n$ is therefore isometric to the rank one (hermitian) symmetric space $\text{PU}(1, n)/\text{U}(n)$. It is the non-compact dual of $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

The distance for the complex hyperbolic metric can be explicitly computed by means of the initial hermitian form :

Lemme 34. *Let $[z]$ and $[w]$ be two points in $\mathbb{C}\mathbb{H}^n \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ with $z, w \in \mathbb{C}^{n+1}$.*

1. *The complex hyperbolic distance α between $[z]$ and $[w]$ satisfies*

$$\cosh^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\langle z, w \rangle \cdot \langle w, z \rangle}{\langle z, z \rangle \cdot \langle w, w \rangle}.$$

2. *The geodesic curve linking $[z]$ to $[w]$ in $\mathbb{C}\mathbb{H}^n$ is the projectivisation of the linear segment $[z, w] = \{z + tw \mid t \in [0, 1]\}$ linking z to w in \mathbb{C}^{n+1} .*

(For some proofs, see [Par10]).

Coordinates.

The ball model

In order to have coordinates on $\mathbb{C}\mathbb{H}^n$, one can take affine coordinates of $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Since $z_0 \neq 0$ if $[z] = [z_0 : \dots : z_n]$ belongs to $\mathbb{C}\mathbb{H}^n$, the latter is included in the affine chart $\{z_0 \neq 0\}$ of $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

In the $z_0 = 1$ normalisation, it comes that z_1, \dots, z_n provide a global system of holomorphic coordinates which identify $\mathbb{C}\mathbb{H}^n$ with the complex n -ball :

$$\left\{ (z_i)_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{i=1}^n |z_i|^2 < 1 \right\}.$$

In this model of the complex hyperbolic space, the hyperbolic metric identifies with the Bergman metric of the complex n -ball.

Although we do not use it in the present text, the complex ball is a very classical model for $\mathbb{C}\mathbb{H}^n$ which is worth being mentioned. We will not say anything more about it but one can find a comprehensive presentation in [Gol99].

Pseudo-horospherical coordinates.

More important for our purpose is a special kind of affine coordinates on $\mathbb{C}\mathbb{H}^n$ which are very close, in spirit, to the *horospherical coordinates* introduced by Goldman and Parker in [GP92].

Let $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_n)$ be a system of linear coordinates on \mathbb{C}^{n+1} such that the expression of the hermitian form $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in these can be written out

$$\langle \xi, \xi \rangle = \frac{i}{2} (\xi_n \bar{\xi}_0 - \xi_0 \bar{\xi}_n) + a(\widehat{\xi}, \widehat{\xi})$$

for a hermitian form a of signature $(1, n-1)$ and where $\widehat{\xi}$ stands for $(\xi_0, \dots, \xi_{n-1})$.

Lemme 35. *If $\xi = (\xi_i)_{i=0}^n$ is such that $\langle \xi, \xi \rangle > 0$ then $\xi_0 \neq 0$.*

Démonstration. One verifies that, up to a linear change of coordinates letting ξ_0 invariant, one can assume that $\langle \xi, \xi \rangle = \frac{i}{2} (\xi_n \bar{\xi}_0 - \xi_0 \bar{\xi}_n) + \sum_{j=0}^{n-1} \epsilon_j \xi_j \bar{\xi}_j$ for some ϵ_j belonging to $\{-1, 0, 1\}$. By assumption, $a(\widehat{\xi}, \widehat{\xi}) = \sum_{j=0}^{n-1} \epsilon_j \xi_j \bar{\xi}_j$ has signature $(1, n-1)$ hence exactly one of the ϵ_j 's is equal to 1, all the others being equal to -1.

If $\epsilon_0 = -1$, then $\frac{i}{2} (\xi_n \bar{\xi}_0 - \xi_0 \bar{\xi}_n) - \xi_0 \bar{\xi}_0$ has signature $(1, 1)$. Since $\sum_{j=1}^{n-1} \epsilon_j \xi_j \bar{\xi}_j$ has signature $(1, n-2)$ (because $\epsilon_j = 1$ for some $j \geq 1$), this would imply that $\langle \cdot, \cdot \rangle$ has signature $(2, n-1)$, a contradiction. \square

From the preceding lemma, it follows that the complex hyperbolic space admits a model contained in the affine chart $\{\xi_0 \neq 0\}$ of $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Then, under the normalization $\xi_0 = 1$, the ξ_k 's for $k = 1, \dots, n$ provide global affine coordinates on this model which will be called **pseudo-horospherical coordinates**.

In such coordinates, the associated quadratic form is given by $\langle \xi, \xi \rangle = \text{Im}(\xi_n) + a(\widehat{\xi}, \widehat{\xi})$ with $\widehat{\xi} = (1, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ and consequently, this model of the complex hyperbolic space $\mathbb{C}\mathbb{H}^n$ consists in the set of $\xi = (\widehat{\xi}, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$ such that

$$\text{Im}(\xi_n) > -a(\widehat{\xi}, \widehat{\xi}).$$

In the standard (homogeneous) coordinates $z = (z_0, z_1, \dots, z_n)$ on \mathbb{C}^{n+1} , the formula for the complex hyperbolic metric is the following

$$g = -\frac{4}{\langle z, z \rangle^2} \begin{vmatrix} \langle z, z \rangle & \langle dz, z \rangle \\ \langle z, dz \rangle & \langle dz, dz \rangle \end{vmatrix}.$$

A straightforward calculation gives the following formula for the expression of this metric in pseudo-horospherical coordinates :

$$g = -\frac{4}{\langle \xi, \xi \rangle^2} \left(\langle \xi, \xi \rangle \cdot a(d\widehat{\xi}, d\widehat{\xi}) - a(\widehat{\xi}, d\widehat{\xi}) \cdot a(d\widehat{\xi}, \widehat{\xi}) - \text{Im}(d\xi_n \cdot a(\widehat{\xi}, d\widehat{\xi})) - |d\xi_n|^2 \right).$$

Introducing $u = \langle \xi, \xi \rangle$ and $s = \text{Re}(\xi_n)$, we therefore have $\xi_n = s + i(u - a(\widehat{\xi}, \widehat{\xi}))$. In the coordinates system $(s, u, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ on the pseudo-horospherical model of $\mathbb{C}\mathbb{H}^n$ we are considering, the metric tensor g writes down

$$g = \frac{4}{u^2} \left(\frac{du^2}{4} + \left(\frac{ds}{2} + \text{Im}(\omega) \right)^2 + \text{Re}(\omega)^2 - u \cdot \Omega \right) \quad (\text{B.1})$$

where $\omega = a(\hat{\xi}, d\hat{\xi})$ and $\Omega = a(d\hat{\xi}, d\hat{\xi})$.

We now introduce the family of open sets in $\mathbb{C}\mathbb{H}^n$:

$$U_{K,\lambda} = \left\{ [1, \xi_1, \dots, \xi_n] \in \mathbb{C}\mathbb{H}^n \mid |\xi_1|, \dots, |\xi_{n-1}|, |\operatorname{Re}(\xi_n)| < K \text{ and } \operatorname{Im}(\xi_n) > \lambda \right\}$$

with $K, \lambda > 0$.

Lemme 36. *Let K and λ be arbitrary positive constants.*

1. *The complex hyperbolic volume of $U_{K,\lambda}$ is finite.*
2. *If $\gamma : [0, 1] \rightarrow U_{K,\lambda}$ is path such that $\gamma(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_n(t))$ for any $t \in [0, 1]$, then its length $L(\gamma)$ for the complex hyperbolic metric satisfies*

$$L(\gamma) \geq \left| \log(\xi_n(1)) - \log(\xi_n(0)) \right|.$$

Démonstration. In the coordinates system $(s, u, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ on $U_{K,\lambda}$, the complex hyperbolic volume element writes down

$$\sqrt{\det(g)} ds du d\xi_1 d\bar{\xi}_1 \cdots d\xi_{n-1} d\bar{\xi}_{n-1}.$$

Since both ω and Ω depend continuously on ξ_1, \dots, ξ_{n-1} , one gets that

$$\sqrt{\det(g)} = \frac{f(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})}{u^{2n+2}}$$

for some positive and continuous function f which thereby is bounded on $U_{K,\lambda}$. The finiteness of the volume of $U_{K,\lambda}$ follows directly from evaluating the associated integral.

The second point of the lemma follows directly from the fact that $g \geq u^{-2} du^2$ on $U_{K,\lambda}$. To see this, one has to prove that Ω is negative. But if Ω was not, since $du^2/4 + (ds/2 + \operatorname{Im}(\omega))^2 + \operatorname{Re}(\omega)^2$ does not depend on u , one would deduce from (B.1) that g would not be positive for large value of u , a contradiction. \square

Annexe C

Cone-manifolds

Generalities

This section strongly builds on [McM], in particular the use of joints for describing spherical cone-manifolds.

Let X be a complete homogeneous Riemannian manifold and let G be its isometry group (or more generally a subgroup of its isometry group). We develop material on cone-manifolds in this specific case. For any point $p \in X$, one denotes by X_p the set of geodesic rays emanating from it and $G_p = \text{Stab}_G(p)$ stands for its stabiliser.

A **(X, G) -cone-manifold** is a geometric object built inductively as follows :

- if X is 1-dimensional, a (X, G) -cone-manifold is just a (X, G) -manifold ;
- otherwise, a (X, G) -cone-manifold is a topological space such that any point in it has a neighbourhood isomorphic to a cone over a (X_p, G_p) -cone-manifold.

One just remarks that X_p is just the unit sphere at p in X and therefore G_p can naturally be seen as a subgroup of $O(n)$ where n is the dimension of X .

A simple example of a non trivial cone-manifold is a Euclidean cone. If $X = \mathbb{R}^2$ and $G = \text{Iso}(\mathbb{R}^2)$, $X_p = S^1$ and $G_p = O(2)$. A (X_p, G_p) -manifold is nothing else but a circle of length θ and a cone over it is a cone of angle θ . Finally, remark that any (X, G) -manifold is also a (X, G) -cone-manifold in a natural way.

Cones are cone-manifolds.

Let X be a connected Riemannian manifold such that G is the component of the identity of its isometry group. Let X' be a totally geodesic submanifold of codimension 2 in X such that $\text{Stab}_G(X')$ is $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, *i.e.* it acts by rotation of angle θ around X' for any $\theta \in S^1$.

We explain the general construction of the *cone of angle θ over X'* . The metric completion Y of the universal covering of $X \setminus X'$ is an infinite cyclic cover of X

branched along X' . There is a group \mathbb{R} of isometry lifting the action of S^1 by rotation to Y and if $\theta \in]0, +\infty[$, one defines X_θ the **cone of angle θ over X'** to be the quotient of Y by the action of the rotation of angle θ on Y . The image in X_θ of the preimage of X' in Y is called the **singular locus of the cone**.

Proposition 43. *X_θ is a (X, G) -cone manifold.*

Démonstration. The proof goes by induction on the dimension of X . Away from its singular locus, X_θ is a (X, G) -manifold hence the proposition is clear here.

Let p be a point of the singular locus. The set W of points of X_θ that can be joined to p by a geodesic path of length 1 happens to be a cone of angle θ for a sphere S of radius 1 at a point $q \in X'$ with isometry group $\text{Stab}_G(q)$. A neighbourhood of p in X_θ is then the cone over W . We want to show that W is actually a $(S, \text{Stab}_G(q))$ cone-manifold. This will be done by showing that W is actually a cone of angle θ and applying the induction hypothesis.

The intersection $S' = X' \cap S$ is a totally geodesic submanifold of S for the metric induced by X and $S^1 \subset \text{Stab}_G(X') \subset \text{Stab}_G(q)$. The universal cover of $S \setminus S'$ embeds in the one of $X \setminus X'$ and therefore the metric completion of the universal cover of $S \setminus S'$ embeds in the metric completion Y of the universal cover of $X \setminus X'$. W is then the quotient of the metric completion of the universal cover of $S \setminus S'$ by the rotation of angle θ . Hence W is a $(S, \text{Stab}_G(q))$ -cone and since $\dim(S) = \dim(X) - 1$, is a $(S, \text{Stab}_G(q))$ -cone-manifold. \square

Joints

We now restricts to the case when $X = \mathbb{C}\mathbb{H}^n$ and $G = \text{PU}(1, n)$. The unit sphere at a point p in X is $S^{2n-1} = \partial(B^n)$ where B^n is the unit ball at p and its isometry group is $\text{U}(n) \subset G$. For every k in $\{1, \dots, n\}$, we can carry on the construction detailed below.

The joint $A * B$ of two topological spaces A and B is the space you get by adjoining to every couple of points $(a, b) \in A \times B$ a segment $[a, b]$. This operation can be made geometrical if A and B are spherical manifold. One remarks that $S^{2(n+k)-1}$ is the joint of $S^{2n-1} * S^{2k-1}$ where S^{2n-1} and S^{2k-1} are embedded in $S^{2(n+k)-1}$ in a essentially unique way such that each points $x \in S^{2n-1}$ and $y \in S^{2k-1}$ are joined by a unique geodesic path of length $\frac{\pi}{2}$. This makes it very clear how one can endow the joint of X a $(S^{2n-1}, \text{U}(n))$ -manifold and Y a $(S^{2k-1}, \text{U}(k))$ -manifold the structure of a $(S^{2(n+k)-1}, \text{U}(n+k))$ -manifold. A good reference that deals with this construction is [BH99, Chapter I.5, p.63].

This property of naturality extends in some way to cone-manifolds.

Lemme 37. *Let M be a $(S^{2k-1}, \text{U}(k))$ -cone-manifold. Then the joint $S^{2(n-k)-1} * M$ has a natural structure of $(S^{2n-1}, \text{U}(n))$ -cone-manifold.*

Démonstration. The proof goes by double induction on n and $i = (n - k)$. To be more precise, we assume that the lemma is true for all (n', k') such that either $n' < n$ or $n' = n$ and $k < k'$. Take $p \in S^{2(n-k)-1} * M$. We distinguish two cases :

1. **p does not belong to $S^{2(n-k)-1}$.** In that case p belongs to an arc $]x, y]$ with $x \in S^{2(n-k)-1}$ and $y \in M$. Denote by M_i is the strata of codimension i of M . If $i = 0$, *i.e.* y is a regular point in M , p is a regular point of $S^{2(n-k)-1} * M$. If $i \geq 1$ by the induction hypothesis $S^{2(n-k)-1} * M_i$ is a $(S^{2n-3}, U(n-1))$ -cone-manifold. In that case p has a neighbourhood which is the cone over the joint $S^{2(k+i)-1} * V(y)$ where $V(y)$ is a $(S^{2(n-k-i)-1}, U(n-k-i))$ -cone-manifold over which a neighbourhood of y in M_i is the cone.
2. **p belongs to $S^{2(n-k)-1}$.** In that case a neighbourhood of p in $S^{2(n-k)-1} * M$ is a cone over the joint $S^{2(n-k-1)-1} * M$ and the induction hypothesis allows to conclude.

□

Strata

A $\mathbb{C}\mathbb{H}^n$ -cone-manifold X has a stratified structure $X_0 \sqcup X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n$ where X_k is a $\mathbb{C}\mathbb{H}^{n-k}$ -manifold whose metric completion is $X_k \sqcup \dots \sqcup X_n$. Every point $p \in X$ has a neighbourhood who is the cone over the joint $S^{2(n-i)-1} * X(p)$ where X_p is a $(S^{2i-1}, U(i))$ -cone-manifold. X_k is defined to be the set of point for which the biggest integer i for which a neighbourhood of p has the latest structure is equal to k .

Totally geodesic subcone-manifolds.

We dedicate a subsection to the notion of totally geodesic subcone-manifolds. We assume here that X is a Riemannian manifold which is either $\mathbb{C}\mathbb{H}^n$ or S^k and G is either $\text{PU}(1, n)$ or a subgroup of $\text{O}(k)$. X_p is the unit sphere at a point $p \in X$ and $G_p = \text{Stab}_G(\{p\})$. If X is a (X, G) -cone-manifold, a totally geodesic sub-cone-manifold Y of X is a subset of X such that the intersection of Y with each stratum of X is a totally geodesic submanifold of the stratum.

Lemme 38. *Let p be a point of X and Y be a totally geodesic submanifold of X such that $p \in Y$. Then $X_p \cap Y$ is a totally geodesic submanifold of X_p .*

Démonstration. This is a consequence that in all the cases we are considering there exists a subgroup G'_p of G_p such that $\text{Stab}(G'_p) = Y$. □

Proposition 44. *A totally geodesic subcone-manifold Y of a Riemannian cone-manifold M endowed with the natural metric structure coming from its embedding is also a cone-manifold.*

Démonstration. The proof goes by induction on $\dim(Y)$. Take q in Y . q has neighbourhood in M which is a cone over a (X_p, G_p) -manifold X' , where X_p is the unit sphere at a point $p \in X$ and $G_p = \text{Stab}_G(\{p\})$. According to Lemma 38 $X' \cap Y$ is also a totally geodesic cone manifold of dimension $\dim(Y) - 1$. The induction hypothesis ensures that $X' \cap Y$ is also a cone-manifold and therefore p has a neighbourhood which is a cone over a cone-manifold. \square

Higher dimensional complex hyperbolic cones.

We now give local models for some specific complex hyperbolic cone manifolds. In particular we generalise the notion of cone previously defined in the particular case of complex hyperbolic geometry. Let X be a complete complex hyperbolic cone-manifold of dimension k and let p a point being a stratum of codimension k . We denote by X_0 the set of regular points of which is open in X . Consider the trivial product $\mathbb{C}\mathbb{H}^n \times X_0$. There is a unique complex hyperbolic structure on $\mathbb{C}\mathbb{H}^n \times X_0$ such that

- Each fiber $\{*\} \times X_0$ are locally totally geodesic
- Any fiber $\{*\} \times X_0$ intersect $\mathbb{C}\mathbb{H}^n \times \{p\}$ orthogonally.

The metric completion of $\mathbb{C}\mathbb{H}^n \times X_0$ is then $\mathbb{C}\mathbb{H}^n \times X$. Here is the good moment to explain the notion of orthogonality in a $(\mathbb{C}\mathbb{H}^n, \text{PU}(1, n))$ -cone-manifold. Let Y and Z be two totally geodesic sub-cone-manifold of X a $(\mathbb{C}\mathbb{H}^n, \text{PU}(1, n))$ -cone-manifold which intersect only at a point p . We say that they intersect orthogonally if every couple of regular points $p \in Y$ and $q \in Z$ is contained in an open set U of X such that

- U is isometric to an open set of $\mathbb{C}\mathbb{H}^n$;
- $Y \cap U$ and $Z \cap U$ are respectively identified with open subset of copies of $\mathbb{C}\mathbb{H}^i$ and $\mathbb{C}\mathbb{H}^j$ in $\mathbb{C}\mathbb{H}^n$ which intersect orthogonally.

Proposition 45. $\mathbb{C}\mathbb{H}^n \times X$ seen as the metric completion of $\mathbb{C}\mathbb{H}^n \times X_0$ is a complex hyperbolic cone-manifold.

Démonstration. Let q a point in X which has maximal codimension. A neighbourhood of q in X which is a cone over a $(S^{2k-1}, U(k))$ -cone-manifold X' . According to Lemma 37 the spherical joint $X' * S^{2n-1}$ has a natural structure of $(S^{2(n+k)-1}, U(n+k))$ -cone-manifolds, of which a neighbourhood of q in $\mathbb{C}\mathbb{H}^n \times X$ is a cone over. \square

Bibliographie

- [Ahl64] Lars V. Ahlfors. Finitely generated Kleinian groups. *Amer. J. Math.*, 86 :413–429, 1964.
- [Ahl66] Lars V. Ahlfors. Fundamental polyhedrons and limit point sets of Kleinian groups. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 55 :251–254, 1966.
- [BFG] Adrien Boulanger, Carlos Fougeroc, and Selim Ghazouani. Cascades in the nymaics of affine interval exchange transformations. *arXiv preprint*, <https://arxiv.org/abs/1701.02332>.
- [BG15] Shinpei Baba and Subhojoy Gupta. Holonomy map fibers of $\mathbb{C}P^1$ -structures in moduli space. *J. Topol.*, 8(3) :691–710, 2015.
- [BH89] F. Beukers and G. Heckman. Monodromy for the hypergeometric function ${}_nF_{n-1}$. *Invent. Math.*, 95(2) :325–354, 1989.
- [BH99] M. R. Bridson and A. Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [BHM10] Xavier Bressaud, Pascal Hubert, and Alejandro Maass. Persistence of wandering intervals in self-similar affine interval exchange transformations. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 30(3) :665–686, 2010.
- [CDF] Gabriel Calsamiglia, Bertrand Deroin, and Stefano Francaviglia. A transfer principle : from periods to isoperiodic foliations. *Preprint 2015*.
- [CDF14] Gabriel Calsamiglia, Bertrand Deroin, and Stefano Francaviglia. Branched projective structures with Fuchsian holonomy. *Geom. Topol.*, 18(1) :379–446, 2014.
- [CG97] Ricardo Camelier and Carlos Gutierrez. Affine interval exchange transformations with wandering intervals. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 17(6) :1315–1338, 1997.
- [Chu90] V. V. Chueshev. Cohomological Gunning fibration and the Torelli group. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 31(3) :198–203, 219, 1990.

- [CP11] Thomas Church and Aaron Pixton. Separating twists and the Magnus representation of the Torelli group. *Geom. Dedicata*, 155 :177–190, 2011.
- [Dal11] Françoise Dal’Bo. *Geodesic and horocyclic trajectories*. Universitext. Springer-Verlag London, 1 edition, 2011.
- [DFG] Eduard Duryev, Carlos Fougeroc, and Selim Ghazouani. Affine surfaces and their veech groups. *arXiv preprint*, <https://arxiv.org/abs/1609.02130>.
- [DM86] P. Deligne and G. D. Mostow. Monodromy of hypergeometric functions and nonlattice integral monodromy. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (63) :5–89, 1986.
- [DPP15] M. Deraux, J. Parker, and J. Paupert. New non-arithmetic complex hyperbolic lattices. *Inventiones mathematicae*, pages 1–91, 2015.
- [DS05] F. Diamond and J. Shurman. *A first course in modular forms*, volume 228 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2005.
- [dSG10] Henri Paul de Saint-Gervais. *Uniformisation des surfaces de Riemann : retour sur un théorème centenaire*. ENS Éditions, Lyon, 2010.
- [EMM15] Alex Eskin, Maryam Mirzakhani, and Amir Mohammadi. Isolation, equidistribution, and orbit closures for the $SL(2, \mathbb{R})$ action on moduli space. *Ann. of Math. (2)*, 182(2) :673–721, 2015.
- [FM12] Benson Farb and Dan Margalit. *A primer on mapping class groups*, volume 49 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.
- [Gha] Selim Ghazouani. Mapping class group dynamics and the holonomy of branched affine structures. <http://arxiv.org/pdf/1607.07185>.
- [Gha16] Selim Ghazouani. Mapping class group dynamics on $\text{Aff}(\mathbb{C})$ -characters. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 66(2) :729–751, 2016.
- [GKM00] Daniel Gallo, Michael Kapovich, and Albert Marden. The monodromy groups of Schwarzian equations on closed Riemann surfaces. *Ann. of Math. (2)*, 151(2) :625–704, 2000.
- [Gol80] William M. Goldman. *Discontinuous group and the Euler class*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1980. Thesis (Ph.D.)—University of California, Berkeley.
- [Gol88] William M. Goldman. Topological components of spaces of representations. *Invent. Math.*, 93(3) :557–607, 1988.
- [Gol99] W. M. Goldman. *Complex hyperbolic geometry*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1999. Oxford Science Publications.

- [GPa] S. Ghazouani and L. Pirio. Flat tori and elliptic hypergeometric functions. *Preprint*.
- [GPb] Selim Ghazouani and Luc Pirio. Moduli spaces of flat tori with prescribed holonomy. <http://arxiv.org/pdf/1607.07185>.
- [GP92] W. M. Goldman and J. R. Parker. Dirichlet polyhedra for dihedral groups acting on complex hyperbolic space. *J. Geom. Anal.*, 2(6) :517–554, 1992.
- [Gro99] M. Gromov. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, volume 152 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1999. Based on the 1981 French original [MR0682063 (85e :53051)], With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes, Translated from the French by Sean Michael Bates.
- [Hau20] Otto Haupt. Ein Satz über die Abelschen Integrale 1. Gattung. *Math. Z.*, 6(3-4) :219–237, 1920.
- [HS06] Pascal Hubert and Thomas A Schmidt. Chapter 6 - An Introduction to Veech Surfaces. In B Hasselblatt and A Katok, editors, *Handbook of Dynamical Systems*, volume 1, Part B of *Handbook of Dynamical Systems*, pages 501–526. Elsevier Science, 2006.
- [Jør76] Troels Jørgensen. On discrete groups of Möbius transformations. *Amer. J. Math.*, 98(3) :739–749, 1976.
- [Kap] Michael Kapovich. Periods of abelian differentials and dynamics. *Preprint*.
- [Kat92] Svetlana Katok. *Fuchsian groups*. Chicago lectures in mathematics series. University of Chicago Press, 1 edition, 1992.
- [Kea75] Michael Keane. Interval exchange transformations. *Math. Z.*, 141 :25–31, 1975.
- [KZ03] M. Kontsevich and A. Zorich. Connected components of the moduli spaces of Abelian differentials with prescribed singularities. *Invent. Math.*, 153(3) :631–678, 2003.
- [Lev82a] Gilbert Levitt. Feuilletages des surfaces. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 32(2) :x, 179–217, 1982.
- [Lev82b] Gilbert Levitt. Pantalons et feuilletages des surfaces. *Topology*, 21(1) :9–33, 1982.
- [Lev87] Gilbert Levitt. La décomposition dynamique et la différentiabilité des feuilletages des surfaces. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 37(3) :85–116, 1987.
- [Lio95] Isabelle Liousse. Dynamique générique des feuilletages transversalement affines des surfaces. *Bull. Soc. Math. France*, 123(4) :493–516, 1995.

- [LV93] R. Le Vavasseur. Sur le système d'équations aux dérivées partielles simultanées auxquelles satisfait la série hypergéométrique à deux variables $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys.*, 7(3) :F1–F120, 1893.
- [Mas82] Howard Masur. Interval exchange transformations and measured foliations. *Ann. of Math. (2)*, 115(1) :169–200, 1982.
- [McM] C. T. McMullen. The gauss-bonnet theorem for cone manifolds and volumes of moduli spaces. *Preprint*.
- [MMY10] S. Marmi, P. Moussa, and J.-C. Yoccoz. Affine interval exchange maps with a wandering interval. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 100(3) :639–669, 2010.
- [Mos86] G. D. Mostow. Generalized Picard lattices arising from half-integral conditions. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (63) :91–106, 1986.
- [Mos88] G. D. Mostow. On discontinuous action of monodromy groups on the complex n -ball. *J. Amer. Math. Soc.*, 1(3) :555–586, 1988.
- [MS91] Howard Masur and John Smillie. Hausdorff dimension of sets of nonergodic measured foliations. *Ann. of Math. (2)*, 134(3) :455–543, 1991.
- [MWa] Julien Marché and Maxime Wolff. The modular action on $\mathrm{psl}(2, r)$ -characters in genus 2. *Preprint*.
- [MWb] Julien Marché and Maxime Wolff. Six point configurations in the hyperbolic plane and ergodicity of the mapping class group. *Preprint*.
- [Par06] J. R. Parker. Cone metrics on the sphere and Livné's lattices. *Acta Math.*, 196(1) :1–64, 2006.
- [Par10] J. R. Parker. Notes on complex hyperbolic geometry. 2010.
- [Rat91] Marina Ratner. Raghunathan's topological conjecture and distributions of unipotent flows. *Duke Math. J.*, 63(1) :235–280, 1991.
- [Rau79] Gérard Rauzy. Échanges d'intervalles et transformations induites. *Acta Arith.*, 34(4) :315–328, 1979.
- [Sau90] J. Sauter. Isomorphisms among monodromy groups and applications to lattices in $\mathrm{PU}(1, 2)$. *Pacific J. Math.*, 146(2) :331–384, 1990.
- [Sch] R. E. Schwartz. Notes on shape of polyhedra. *arXiv*, arXiv :1506.07252.
- [Suz05] Masaaki Suzuki. Geometric interpretation of the Magnus representation of the mapping class group. *Kobe J. Math.*, 22(1-2) :39–47, 2005.
- [Ter73] T. Terada. Problème de Riemann et fonctions automorphes provenant des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables. *J. Math. Kyoto Univ.*, 13 :557–578, 1973.

- [Thu82] William P. Thurston. Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 6(3) :357–381, 1982.
- [Thu88] William P. Thurston. On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 19(2) :417–431, 1988.
- [Thu97] W. P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*, volume 35 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Edited by Silvio Levy.
- [Tro86] Marc Troyanov. Les surfaces euclidiennes à singularités coniques. *Enseign. Math. (2)*, 32(1-2) :79–94, 1986.
- [Vee82] William A. Veech. Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps. *Ann. of Math. (2)*, 115(1) :201–242, 1982.
- [Vee93] William A. Veech. Flat surfaces. *Amer. J. Math.*, 115(3) :589–689, 1993.
- [Vee97] W. A. Veech. Delaunay partitions. *Topology*, 36(1) :1–28, 1997.
- [Vee08] W. A. Veech. Informal notes on flat surfaces. *Unpublished course notes*, 2008.
- [Zor06] Anton Zorich. Flat surfaces. In *Frontiers in number theory, physics, and geometry. I*, pages 437–583. Springer, Berlin, 2006.

Résumé

Cette thèse s'intéresse aux structures affines complexes sur les surfaces de Riemann compactes. Ces structures sont les structures modélées sur le plan complexe via ses similitudes. La première partie de ce travail s'attache

à déterminer les représentations du groupe fondamental d'une surface fermée orientable qui sont l'holonomie d'une structure affine branchée. Cette question est résolue en décrivant l'action du groupe modulaire sur la variété des caractères associée: on donne une liste presque complète de l'ensemble des fermés invariants de cette action. L'ensemble des représentations géométriques étant ouvert, on en déduit que la seule obstruction à être l'holonomie d'une structure affine branchée est d'être euclidienne de volume nul.

Dans un second chapitre, nous étudions la géométrie hyperbolique complexe de certains espaces de module de tores plats à singularités. Dans un travail en collaboration avec Luc Piro, nous prouvons que les espaces de modules associés à des données d'holonomie rationnelles se complètent naturellement en des cônes-manifolds de volumes finis. Nous interprétons les singularités en termes de dégénérescences des tores plats sous-jacent et nous décrivons le voisinage du lieu singulier à l'aide de chirurgies.

Enfin, dans une dernière partie constitué des chapitres trois et quatre, nous posons les bases de l'étude des surfaces dites de *dilatation* qui sont les structures affines dont l'holonomie linéaire est réelle. Chacune de ces surfaces porte une famille à un paramètre de feuilletages transversalement affines et ces l'étude de ses feuilletages qui motivent l'intérêt porté à cette particulière classe de surfaces affines complexes. Nous démontrons un résultat de structure des groupes de symétrie affine des surfaces de dilatation (le groupe de *Veech*) et nous étudions les propriétés dynamiques d'un exemple particulier.

Mots Clés

structures affines complexes, surfaces, groupe modulaire, holonomie, feuilletages de Veech, espaces de modules, géométrie hyperbolique complexe, surfaces de dilatation, groupe de Veech, feuilletages transversalement affines

Abstract

This thesis aims at investigating complex affine structures on compact Riemann surfaces. These structures are the structures modelled on the complex plane through the group of its complex affine transformations.

The first part of this work concerns the question of determining the representations of the fundamental group of a closed orientable surface which are the holonomy of branched affine structure. We solve this problem by describing the action of the mapping class group on the associated character variety: we give an almost comprehensive list of all the closed invariant subsets for this action. The subset of geometric representations being open we deduce from this description that the only obstruction for a representation to be the holonomy of a branched affine structure is to be Euclidean and to have null volume.

In the second chapter we study the complex hyperbolic geometry of certain moduli space of flat tori with conical singularities. In a piece of work joint with Luc Piro, we prove that the moduli space associated to a rational holonomy datum have a metric completion which is a cone-manifold of finite volume. In addition we interpret the singular locus of this completion in terms of degenerations of the underlying flat tori and describe the geometry of a neighbourhood of the singular locus using surgeries for flat surfaces.

In a last part made of chapter three and four, we begin the study of the so-called *dilatation* surfaces which are those affine surfaces whose linear holonomy is real. Each of these surfaces comes with a one-parameter family of transversally affine foliations and it is these foliations which motivate the interest that we have in this particular class of affine structures. We prove a structural results on the group of affine symmetries of dilatation surfaces (the *Veech* group) and then study the dynamics of the directional foliations of a particular example.

Keywords

complex affine structures, surfaces, mapping class group, holonomy, Veech foliations, moduli spaces, complex hyperbolic geometry, dilatation surfaces, Veech group, transversally affine foliations