Contribution à l'analyse structurelle des systèmes singuliers pour la conception mécatronique

Julien Lagnier

▶ **To cite this version:**

Julien Lagnier. Contribution à l'analyse structurelle des systèmes singuliers pour la conception mécatronique. Mécanique [physics.med-ph]. Université de Lyon, 2017. Français. NNT : 2017LYSEI045 . tel-01661297

HAL Id: tel-01661297
https://theses.hal.science/tel-01661297

Submitted on 11 Dec 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre NNT : 2017LYSEI045

THESE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON

Opérée au sein de
INSA de Lyon

École Doctorale N° 162
MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE (MEGA)

Spécialité / discipline de doctorat :
GENIE MECANIQUE

Soutenue publiquement le 02/06/2017, par :

Julien LAGNIER

Contribution à l'analyse structurelle des systèmes singuliers pour la conception mécatronique

---

Devant le jury composé de :

NGWOMPO, Roger Fotsu	Lecturer, University of Bath	Rapporteur
SENAME, Olivier	Professeur des Universités, INPG	Rapporteur
DAUPHIN-TANGUY, Geneviève	Professeur des Universités, EC-Lille	Examinatrice
MASCHKE, Bernhard	Professeur des Universités, UCBL	Examinateur
REMOND, Didier	Professeur des Universités, INSA de Lyon	Directeur de thèse
MARQUIS-FAVRE, Wilfrid	Professeur des Universités, INSA de Lyon	Co-directeur de thèse
ALIRAND, Marc	Docteur Ingénieur, SIEMENS PLM	Invité
ARNOUX, Emmanuel	Docteur Ingénieur, RENAULT S.A.	Invité
FURIC, Sébastien	Ingénieur-Chercheur, INRIA	Invité

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Département FEDORA – INSA Lyon - Ecoles Doctorales – Quinquennal 2016-2020

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	**CHIMIE DE LYON** **http://www.edchimie-lyon.fr** Sec : Renée EL MELHEM Bat Blaise Pascal 3e etage secretariat@edchimie-lyon.fr Insa : R. GOURDON	M. Stéphane DANIELE Institut de Recherches sur la Catalyse et l'Environnement de Lyon IRCELYON-UMR 5256 Équipe CDFA 2 avenue Albert Einstein 69626 Villeurbanne cedex directeur@edchimie-lyon.fr
E.E.A.	**ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE** **http://edeea.ec-lyon.fr** Sec : M.C. HAVGOUDOUKIAN Ecole-Doctorale.eea@ec-lyon.fr	M. Gérard SCORLETTI Ecole Centrale de Lyon 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60.97 Fax : 04 78 43 37 17 Gerard.scorletti@ec-lyon.fr
E2M2	**EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION** **http://e2m2.universite-lyon.fr** Sec : Sylvie ROBERJOT Bât Atrium - UCB Lyon 1 04.72.44.83.62 Insa : H. CHARLES secretariat.e2m2@univ-lyon1.fr	M. Fabrice CORDEY CNRS UMR 5276 Lab. de géologie de Lyon Université Claude Bernard Lyon 1 Bât Géode 2 rue Raphaël Dubois 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 06.07.53.89.13 cordey@univ-lyon1.fr
EDISS	**INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE** **http://www.ediss-lyon.fr** Sec : Sylvie ROBERJOT Bât Atrium - UCB Lyon 1 04.72.44.83.62 Insa : M. LAGARDE secretariat.ediss@univ-lyon1.fr	Mme Emmanuelle CANET-SOULAS INSERM U1060, CarMeN lab, Univ. Lyon 1 Bâtiment IMBL 11 avenue Jean Capelle INSA de Lyon 696621 Villeurbanne Tél : 04.72.68.49.09 Fax :04 72 68 49 16 Emmanuelle.canet@univ-lyon1.fr
INFOMATHS	**INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES** **http://infomaths.univ-lyon1.fr** Sec :Renée EL MELHEM Bat Blaise Pascal, 3e étage Tél : 04.72. 43. 80. 46 Fax : 04.72.43.16.87 infomaths@univ-lyon1.fr	M. Luca ZAMBONI Bâtiment Braconnier 43 Boulevard du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél :04 26 23 45 52 zamboni@maths.univ-lyon1.fr
Matériaux	**MATERIAUX DE LYON** **http://ed34.universite-lyon.fr** Sec : Marion COMBE Tél:04-72-43-71-70 –Fax : 87.12 Bat. Direction ed.materiaux@insa-lyon.fr	M. Jean-Yves BUFFIERE INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Saint Exupéry 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 71.70 Fax 04 72 43 85 28 Ed.materiaux@insa-lyon.fr
MEGA	**MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE** **http://mega.universite-lyon.fr** Sec : Marion COMBE Tél:04-72-43-71-70 –Fax : 87.12 Bat. Direction mega@insa-lyon.fr	M. Philippe BOISSE INSA de Lyon Laboratoire LAMCOS Bâtiment Jacquard 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72 .43.71.70 Fax : 04 72 43 72 37 Philippe.boisse@insa-lyon.fr
ScSo	**ScSo*** **http://recherche.univ-lyon2.fr/scso/** Sec : Viviane POLSINELLI Brigitte DUBOIS Insa : J.Y. TOUSSAINT Tél : 04 78 69 72 76 viviane.polsinelli@univ-lyon2.fr	M. Christian MONTES Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Christian.montes@univ-lyon2.fr

*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Remerciements

L'aventure qu'il m'a été possible de vivre à travers cette thèse commence en 2011, lorsque nous en avons ébauché l'idée avec Emmanuel Arnoux et Didier Rémond. Si cette tentative initiale s'est avérée infructueuse en l'état, elle m'a toutefois permis d'affiner ce projet et ses thématiques, d'avoir la chance de pouvoir le construire avec Wilfrid Marquis-Favre, et de le nourrir de nombreuses discussions avec Marc Alirand et Sébastien Furic. Je leur en suis, tous les cinq, infiniment reconnaissant, et je suis heureux de tous les voir figurer dans ce jury.

Ce projet a été effectif de fin 2013 à début 2017, et, dans la mesure où il a été réalisé à temps partiel, a été rendu possible par l'implication continue, le dévouement, la compréhension et la gentillesse d'un grand nombre de personnes chez SIEMENS, et plus particulièrement Nicolas Orand, David Gagne, Philippe Aubret, Jacqueline Loustalot, Fabrice Gallo, Renaud Meillier, Vincent Braibant et Stefan Goossens. Je les remercie, toutes et tous, très chaleureusement, et simplement rien n'aurait été possible sans leur concours respectif, tant dans la construction que dans la réalisation de ce projet.

Mes directeurs de thèse, Didier Rémond et Wilfrid Marquis-Favre, m'ont été d'un soutien ininterrompu et indéfectible durant toutes ces années, tant scientifiquement que personnellement. J'aimerais également y associer les deux autres personnes de l'« équipe » (puisque c'est exactement de cela dont il s'agit...), Damien Eberard et Michaël Di Loreto. Je les remercie tous les quatre pour leur implication, leur temps, leur patience et pour avoir rendu cette collaboration si agréable et si fructueuse.

C'est un véritable honneur pour moi d'avoir vu ces travaux rapportés par Messieurs Roger Fotsu Ngwompo et Olivier Sename, et examinés par Madame Geneviève Dauphin-Tanguy et Monsieur Bernhard Maschke. L'ensemble de leurs retours, conseils et observations minutieuses m'ont été extrêmement bénéfiques. Je les en remercie et leur suis très reconnaissant de leur participation à cette évaluation.

J'aimerais remercier Marc Alirand pour son soutien au cours de ces trois dernières riches années, mais également pour tout ce qu'il m'a apporté au cours des dix précédentes. Si je crains de ne pouvoir être exhaustif dans mes qualificatifs, l'ensemble de mon parcours professionnel chez IMAGINE, LMS puis SIEMENS et l'ensemble des connaissances que j'ai pu y acquérir au cours de ces treize années sont indissociables de notre relation. Ma reconnaissance pour lui est immense.

Dans le cadre professionnel, j'ai également eu la chance de pouvoir travailler, échanger, et apprendre auprès de personnes incroyables, tant sur le plan technique que sur le plan humain. J'aimerais plus particulièrement citer et remercier Benoît Parmentier de PSA Peugeot Citroën, qui est très régulièrement dans mes pensées pour tout cela, Emmanuel Arnoux de RENAULT pour la densité et la qualité de toutes nos collaborations (et donc y compris pour ce présent projet de thèse !), Michel Lebrun, pour m'avoir

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

– entre plein d'autres choses – fait découvrir le bond graph, Sébastien Furic, pour ses nombreuses et vastes compétences qu'il a eu la patience de partager avec moi, et Pierric Toulemont, avec qui je partage mon bureau depuis de nombreuses années, et dont les connaissances et le « pragmatisme au quotidien » sont une réelle source d'inspiration pour moi.

J'aimerais remercier toutes les personnes de l'INSA de Lyon qui ont rendu ce deuxième passage aussi sensationnel et mémorable que le premier, en particulier Xavier Brun, Eric Bideaux, Philippe Lonjou, Habiba Nouar-Ochi, Sylvie Sesmat, Romain Delpoux, Arnaud Sandel, Sébastien Morterolle, Emmanuelle Vidal-Sallé, Jean-Francois Tregouet, Federico Bribiesca, Minh-Tu Pham et Maguy Mercier. J'aimerais également remercier les différents thésards avec lesquels j'ai pu échanger, et particulièrement Thomas Schaep, Naïm Naouar, Ismaël Azehaf et Tuan Ngoc Vu, ainsi que Clément Coïc de l'INSA de Toulouse.

Je ne peux m'empêcher de remercier la (quasi...)totalité des enseignants et professeurs dont j'ai eu l'opportunité et la chance de suivre les enseignements durant l'ensemble de ma scolarité, qui m'ont transmis leur savoir avec passion et donné les clés pour réussir mon cursus. Un certain nombre de ces professeurs m'a particulièrement marqué, et je me permets d'associer à cet accomplissement personnel Messieurs Jean-Pierre Brossard et Lionel Maiffredy de l'INSA de Lyon, Monsieur Jean-Noël Gence de l'UCBL et Mesdames Rousseau-Gubinelli et Jurus du collège La Clavelière à Oullins.

D'un point de vue plus personnel, je souhaite remercier et associer à ce projet ma famille, qui a été auprès de moi dans les bons moments et surtout dans les moins bons, et sans qui rien n'aurait été possible sans ce soutien inconditionnel. Et en premiers lieux ma femme Perrine, Roxane & Morgan, Mam, Pap, Joël et Mariantonia, mon frère Raf, Katia, Alex & Ele, Papy & Mamie, Pépé & Mémé, et toute la famille, avec une pensée toute particulière pour mon cousin Damien qui aura été très assidu dans le suivi de ce projet ! Un grand merci également aux bros Flo, Anton & Manou, ainsi qu'à Pedro & Mariana.

J'aimerais à présent adresser des énormes remerciements à tous mes amis, qui m'ont beaucoup entendu parler de cette aventure (et accepté mes complaintes, certaines (très) rares fois...), l'ont suivie avec soin, et m'ont toujours soutenu, motivé,... et supporté. Un immense merci à Lise, à Julie, à Nane, Marion, à Nico, Kik, Sam, Alex, Renan, Mike, Charles et tous mes potes du bout de la rue, à Dams, Canaille, à Bruno, à Sandra, à Karen (merci pour le road trip à Montréal pour l'ICBGM !), à David, Jérome, à Eve & Youce et à Nico Kieny. Un immense merci très progressif à Mory, Manouche, Xav & One Minute Alone pour cette bouffée d'oxygène hebdomadaire qui nourrit notre périple musical depuis une bonne dizaine d'année, et ainsi qu'aux autres résidents de l'Hôtel De La Musique, en particulier The Mood's Trip, GoneZilla et TARLD.

J'ai également une bonne grosse pensée pour mes potes de l'INSA de Lyon (du premier passage...), en particulier Yannick Penide avec qui j'ai réalisé la quasi-totalité de mes projets durant mes trois années de cycle ingénieur et qui m'a énormément apporté, ainsi que Max Coffin, Greg Planche, Nico Nguyen et Baptiste Challenge.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Je remercie enfin toutes ces personnes qui, plus ou moins inconsciemment, m'ont apporté beaucoup de choses qui m'ont servi pour mener à bien ce projet et me serviront également demain, notamment André Stempel, Daniel Matrunola, Olivier Datry, Alain Campion, Mario Marcio De Lemos, Denis Fargeton et Hélène Alirand.

Pour clore ces remerciements, j'aimerais à nouveau exprimer ma profonde reconnaissance à Wilfrid Marquis-Favre pour son temps, sa sérénité, sa patience [1], la confiance qu'il m'a portée pour contribuer à la méthodologie du laboratoire, sa vision et surtout pour ses multiples et immenses qualités et connaissances scientifiques qui n'ont d'égal que ses qualités humaines et sa gentillesse. Je reprendrais donc ses mots, qu'il avait lui-même adressés à son directeur de thèse, sans en changer une virgule : « Il m'a non seulement ouvert sans aucune réserve à ses connaissances en automatique et en bond graph, mais aussi communiqué sa passion pour la recherche. Ce fut pour moi un très grand honneur d'être l'un de ses chercheurs » [Fav97].

Mes derniers mots et pensées sont adressés à ma femme, Perrine, et à mes enfants, Roxane et Morgan, qui sont tous trois l'une de mes principales et des plus belles raison d'être. Et je ne peux m'empêcher de penser à Morgan, né au début de cette thèse, qui va enfin connaître son père autrement qu'étudiant...

1. ... dont une parfaite illustration est le temps passé avec moi, chez lui, pendant ses vacances de Noël 2016 ...

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

À mon grand-père, Alexandre Desroches,
À mes grand-parents, Lucie et Jean Dutendas,
À Manou,
À Benoit Parmentier,
À Mario Marcio De Lemos,
À Hélène Alirand,
À David Robert Jones,
À Charb, Cabu, Tignous *&* Wolinski.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Table des matières

Résumé v

Introduction générale vii

1 Conception et dimensionnement par modèle inverse ... application châssis 1
- 1.1 Introduction . . . 2
- 1.2 Conception et dimensionnement des systèmes mécatroniques . . . 3
  - 1.2.1 Mécatronique : historique et déclinaisons en automobile . . . 3
  - 1.2.2 Architecture des systèmes mécatroniques . . . 4
  - 1.2.3 Conception des systèmes mécatroniques . . . 6
- 1.3 Modélisation en conception fonctionnelle châssis et synthèse dynamique route . . . 9
  - 1.3.1 Préambule . . . 9
  - 1.3.2 Introduction et contexte industriel . . . 9
  - 1.3.3 Modélisation fonctionnelle châssis . . . 11
- 1.4 Analyse structurelle pour la conception et le dimensionnement, approche par modèle bond graph inverse . . . 24
  - 1.4.1 Introduction . . . 24
  - 1.4.2 Principe de l'inversion, intérêt pour la conception . . . 25
  - 1.4.3 Dimensionnement par modèle inverse utilisant des critères énergétiques . . . 27
  - 1.4.4 Définition de l'analyse structurelle et niveaux d'analyse . . . 32
  - 1.4.5 Outils d'analyse et de simulation utilisés . . . 37
- 1.5 Conclusions et problématiques traitées dans ce mémoire . . . 38

2 Analyse structurelle des systèmes linéaires réguliers 41
- 2.1 Introduction . . . 42
- 2.2 Approche algébrique de l'analyse structurelle . . . 43
  - 2.2.1 Introduction . . . 43
  - 2.2.2 Inversibilité et inverse d'ordre minimal . . . 45
  - 2.2.3 Structure à l'infini . . . 47
  - 2.2.4 Degré relatif et ordre d'essentialité . . . 52
  - 2.2.5 Exemple . . . 56
- 2.3 Analyse structurelle sur le modèle bond graph . . . 58
  - 2.3.1 Introduction . . . 58
  - 2.3.2 Inversibilité et inverse d'ordre minimal . . . 58
  - 2.3.3 Structure à l'infini . . . 62
  - 2.3.4 Degré relatif et ordre d'essentialité . . . 65
  - 2.3.5 Conclusions de l'analyse sur les bond graphs causal et bicausal . . . 67
- 2.4 Discussion sur les limitations de la méthodologie présentée . . . 69

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

2.4.1 Présence de boucles algébriques de type « 1ZCP » . . . 69
2.4.2 Intérêt de procédure de détermination commune pour les systèmes direct et inverse . . . 71
2.5 Conclusion . . . 72

3 Analyse structurelle des systèmes linéaires singuliers 75
3.1 Introduction . . . 76
3.2 Présentation des systèmes singuliers . . . 77
3.2.1 Généralités . . . 77
3.2.2 Régularité et solvabilité des systèmes singuliers . . . 81
3.2.3 Modes exponentiels, impulsionnels et non-dynamiques . . . 83
3.3 Inversion des systèmes singuliers . . . 87
3.4 Propreté et structure à l'infini des systèmes singuliers . . . 89
3.4.1 Propreté . . . 89
3.4.2 Structure à l'infini . . . 92
3.5 Ordres d'essentialité généralisés . . . 96
3.5.1 Introduction . . . 96
3.5.2 Structure à l'infini par colonne/ligne . . . 96
3.5.3 Ordres d'essentialité généralisés . . . 101
3.5.4 Interprétation . . . 104
3.5.5 Conclusion . . . 108
3.6 Conclusion . . . 108

4 Analyse structurelle des systèmes linéaires singuliers ... bond graph 111
4.1 Introduction . . . 112
4.2 Polynôme caractéristique d'un système singulier . . . 113
4.2.1 Introduction . . . 113
4.2.2 Détermination du polynôme caractéristique $\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ sur le bond graph . . . 115
4.3 Mineurs de la matrice système $\mathbf{P}(s)$ d'un système singulier . . . 133
4.3.1 Déterminant de la matrice système $\mathbf{P}(s)$ d'un système singulier sur son digraphe associé $\mathcal{G}(\Sigma_d)$ . . . 133
4.3.2 Déterminant de la matrice système $\mathbf{P}(s)$ d'un système singulier en bond graph . . . 139
4.4 Inversion des systèmes singuliers . . . 152
4.5 Structure à l'infini . . . 154
4.5.1 Détermination de la structure à l'infini d'un système singulier en bond graph . . . 154
4.5.2 Détermination du degré des transmittances de $\mathbf{T}(s)$ . . . 161
4.6 Ordres d'essentialité généralisés . . . 164
4.6.1 Détermination des ordres d'essentialité généralisés sur le bond graph associé à un modèle direct singulier . . . 164
4.6.2 Détermination des ordres d'essentialité généralisés sur le bond graph associé à un modèle inverse singulier . . . 167
4.6.3 Exemple de synthèse : système singulier représenté par un modèle bond graph bicausal . . . 169
4.7 Conclusion . . . 177

5 Analyse temporelle des systèmes singuliers 179
5.1 Introduction . . . 180
5.2 Équivalence des systèmes singuliers . . . 181
5.2.1 Introduction . . . 181

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

5.2.2 Forme de Rosenbrock . . . 183
5.2.3 Forme de Smith . . . 186
5.3 Réponse temporelle . . . 189
5.3.1 Introduction . . . 189
5.3.2 Approche de Yip & Sincovec . . . 190
5.3.3 Approche de Verghese *et al.* . . . 193
5.3.4 Continuité implicite des systèmes singuliers . . . 199
5.4 Propriétés des bond graphs directs et inverses représentant des systèmes linéaires singuliers . . . 200
5.4.1 Introduction . . . 200
5.4.2 Cas simplifié . . . 200
5.4.3 Cas général . . . 210
5.5 Conclusion . . . 216

Conclusion générale **219**

Bibliographie personnelle **227**

Bibliographie **229**

A Bond graph : Langage, matrice de structure de jonction et forme générale du système d'état **245**
A.1 Introduction générale . . . 245
A.2 Classification des boucles causales d'ordre 0, ou « ZCP », dans un bond graph . . . 246
A.3 Matrice de structure de jonction et systèmes d'équations . . . 248
A.3.1 Introduction . . . 248
A.3.2 Matrice de structure de jonction bond graph . . . 248
A.3.3 Forme générale . . . 252
A.3.4 Première forme simplifiée : vecteur d'état énergetique . . . 256
A.3.5 Seconde forme simplifiée : vecteur d'état énergetique, sous-matrice $\mathbf{E}_D = \mathbf{0}$ . . . 258
A.3.6 Remarque sur la classe des modèles bond graphs bicausaux . . . 260

B Bond graph : définitions et outils de l'analyse structurelle **263**
B.1 Définitions . . . 263
B.1.1 Lignes de puissances . . . 263
B.1.2 Chemins, boucles et cycles causaux . . . 263
B.1.3 Famille de chemins et cycles causaux, famille bond graph . . . 265
B.1.4 Ensemble de familles de chemins causaux . . . 267
B.2 Détermination graphique d'un modèle d'état régulier à partir du bond graph 268
B.2.1 Représentation d'état . . . 268
B.2.2 Représentation digraphe . . . 270
B.3 Détermination graphique d'un modèle d'état singulier à partir du bond graph . . . 272
B.4 Détermination graphique du polynôme caractéristique dans le cas régulier 273
B.5 Détermination graphique du déterminant de la matrice système . . . 275
B.5.1 Détermination sur le bond graph causal représentant le modèle direct 275
B.5.2 Détermination sur le bond graph bicausal représentant le modèle inverse . . . 279

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

C Digraphe : définition, calcul de déterminants et de mineurs **281**
C.1 Définitions . . . 281
C.2 Déterminant et mineurs . . . 282
C.2.1 Déterminant d'une matrice . . . 282
C.2.2 Polynôme caractéristique d'un système régulier . . . 285
C.2.3 Matrice système d'un système régulier . . . 288
C.2.4 Remarque sur le calcul des mineurs de la matrice système . . . 289
C.2.5 Détermination du polynôme caractéristique d'un système singulier sur son digraphe associé $\mathcal{G}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ . . . 289
C.2.6 Propriétés du faisceau $(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ d'un bond graph et implications sur la représentation digraphe associée $\mathcal{G}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ . . . 293
C.2.7 Propriétés de la matrice système $\mathbf{P}(s)$ issu d'un bond graph et implications sur la représentation digraphe associée $\mathcal{G}(\Sigma_d)$ . . . 297

D Correspondance étendue entre digraphe et bond graph **305**
D.1 Introduction . . . 305
D.2 Procédure de construction du digraphe associé à un modèle bond graph . . . 306
D.3 Correspondance digraphe/bond graph . . . 316
D.3.1 Correspondance entre cycle digraphe et cycle bond graph . . . 316
D.3.2 Correspondance entre cycle en digraphe et chemin entrée/sortie en bond graph, définition des familles bond graph . . . 316

E Bond graph : Analyse comportemental des systèmes réguliers **319**
E.1 Introduction . . . 319
E.2 Structure à l'infini . . . 319
E.2.1 Approche par le bond graph causal : nombre et ordre des zéros à l'infini de $\mathbf{T}(s)$ . . . 320
E.2.2 Approche par le bond graph bicausal : nombre et ordre des pôles à l'infini de $\mathbf{T}_{inv}(s)$ . . . 321
E.2.3 Degré relatif et ordre d'essentialité . . . 322

F Application de l'analyse structurelle aux modèles multicorps de véhicule, et implémentation logicielle **327**
F.1 Introduction . . . 327
F.2 Implémentation logicielle et validation . . . 329
F.2.1 Implémentation dans le logiciel *MS1* [MS1] . . . 329
F.2.2 Implémentation dans le logiciel *LMS Imagine.Lab Amesim* [Sie] . . . 329
F.3 Analyse structurelle, modèle inverse et invariants structurels . . . 334
F.3.1 Inversibilité . . . 334
F.3.2 Modèle Inverse d'ordre minimal . . . 334
F.3.3 Détermination des invariants structurels sur le modèle linéarisé direct 336
F.3.4 Détermination des invariants structurels sur le modèle inverse linéarisé . . . 338
F.3.5 Implémentation dans le logiciel *Amesim* [Sie] et Simulation . . . 338

G Transformation bond graph du modèle multicorps de véhicule **343**

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Résumé

Cette thèse s'inscrit dans le cadre de la conception des systèmes mécatroniques, composés d'une association de chaînes d'actionnement et de leur loi de commande, et dont la principale caractéristique est l'intégration de différentes technologies, siège de couplages et d'interactions entre différents domaines physiques. Les présents travaux se positionnent dans les premières phases du cycle de conception, là où les principaux efforts méthodologiques sont à mener pour améliorer la qualité et la fonctionnalité des produits, tout en réduisant leur coût et leur délai de mise sur le marché. Ces travaux reposent sur le prototypage virtuel, c'est à dire la modélisation et la simulation, qui représentent un outil essentiel pour supporter la démarche de conception, son développement, sa capitalisation et sa diffusion.

Dans une optique de réduire la durée de la phase de conception et d'améliorer son processus, une approche méthodologique envisageable est de reformuler le problème de conception sous une forme inverse, pour être au plus proche des spécifications du cahier des charges, usuellement exprimées sur les sorties du système. Ces spécifications sont ainsi « directement » utilisées pour calculer les inconnues du problème de conception du système qui en devient plus « naturel ». Dans ce contexte, le laboratoire Ampère [2] développe une méthodologie de conception et dimensionnement, initiée au début des années 90, basée sur l'inversion de modèle, utilisant le formalisme bond graph et ses propriétés structurelles pour proposer une démarche reposant sur des critères dynamiques et énergétiques. La principale originalité de cette démarche est sa phase d'analyse structurelle, permettant de hiérarchiser cette analyse suivant différents niveaux de la structure physique du modèle (topologie, phénoménologie, paramétrage). L'objectif de cette thèse est de contribuer au développement de cette méthodologie, en inscrivant nos travaux dans le contexte général de développement d'outils ayant pour but de vérifier la cohérence structurelle des modèles.

Le mémoire s'applique ainsi à étendre la méthodologie du laboratoire aux modèles de conception appartenant à la classe des systèmes *singuliers* (également usuellement nommés systèmes *implicites* ou systèmes *algébro-différentiels*), porté par la velléité de décliner la démarche à la conception fonctionnelle du châssis automobile et de ses sous-systèmes, impliquant notamment des modèles multicorps dits « fonctionnels » de dynamique du véhicule, et comportant un certain nombre d'abstractions et d'idéalisations. Cette extension s'inscrit essentiellement dans la phase d'analyse structurelle de la méthodologie, plus particulièrement dans la phase de vérification de l'*adéquation* entre la structure du modèle et les spécifications du cahier des charges, qui consiste d'une part, à assurer la validité du modèle de conception (en termes d'*inversibilité*), et d'autre part, la validité du cahier des charges (en termes de *propriétés* mathématiques des spécifications). La déclinaison de cette extension est proposée au niveau de la seule structure du modèle (*niveau d'analyse structurel*) et à un niveau prenant en considération la phénoménologie

2. Laboratoire Ampère – CNRS UMR5005, www.ampere-lab.fr.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

du système et les différentes lois de comportement (*niveau d'analyse comportemental*). Elle requiert la mise en place préalable d'un référentiel algébrique, essentiellement issu de travaux sur la commande des systèmes (utilisant notamment les invariants structurels que sont la *structure à l'infini*, le *degré relatif* et l'*ordre d'essentialité*), pour constituer une base de validation des extensions graphiques (digraphe et bond graph) que nous proposons. En plus de la généralisation qu'ils constituent à la classe des modèles singuliers, les travaux de ce mémoire proposent une uniformisation des précédentes approches de la méthodologie, originellement appliquées respectivement aux « modèles directs » et aux « modèles inverses », de sorte qu'il n'est à présent plus nécessaire de les différencier.

Mots-clés : systèmes mécatroniques, analyse structurelle, systèmes singuliers, inversion de modèle dynamique, bond graph, dimensionnement, adéquation spécification/structure de modèle, ordre d'essentialité généralisé, modèles multicorps, dynamique du véhicule.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Introduction générale

Thématiques et motivations

Les travaux proposés dans cette thèse s'inscrivent dans le contexte de l'analyse, de la spécification et de la conception des systèmes mécatroniques, formés par l'association de chaînes d'actionnement et de leurs lois de commande, et dont la principale caractéristique est l'intégration de différentes technologies, siège de couplage et d'interactions entre différents domaines physiques. Reposant sur la modélisation et la simulation, les présents travaux visent une contribution au développement méthodologique d'une démarche de conception de ces systèmes basée sur des critères dynamiques et énergétiques, proposée par le laboratoire Ampère [3]. Cette démarche s'intègre dès les premières phases du « cycle de développement en V », de la spécification fonctionnelle jusqu'à la conception des composants, et se caractérise par une phase d'*analyse structurelle*, hiérarchisée suivant les niveaux de la structure physique du modèle (topologie, phénoménologie, paramétrage). Cette démarche de conception est établie à travers l'utilisation du langage bond graph [Pay61] [KR68, KR75, KMR12], choisi comme l'un des supports unifiant tous les domaines de la physique et offrant la possibilité d'échanges entre les différentes disciplines. Elle propose enfin une approche par *modèle inverse*, supportée par l'extension de la causalité « classique » du bond graph que permet d'introduire la bicausalité [Gaw95].

L'orientation des recherches et des contributions présentées dans ce mémoire est portée par la velléité de décliner la démarche méthodologique pour la conception fonctionnelle du châssis automobile et de ses sous-systèmes, impliquant notamment des modèles multicorps dits « fonctionnels » de dynamique du véhicule. En termes de modélisation, un certain nombre d'abstractions et d'idéalisations, usuellement faites dans ce domaine, conduit à des modèles de conception appartenant à la classe des systèmes *singuliers* (également dénommés *algébro-différentiels*). La spécificité de cette classe de systèmes amène ainsi à la spécification des objectifs d'évolution de la méthodologie que nous visons dans les présents travaux.

Nous souhaitons également inscrire nos travaux dans le contexte de développement d'outils ayant pour but de vérifier la cohérence structurelle de modèles. L'ensemble des orientations et des choix de développement théorique de ce mémoire est réalisé dans la perspective de constituer des « briques » d'analyse et de validation de modèles, intégrées à des chaînes outillées de modélisation / analyse / simulation / synthèse.

Contexte

Les présents travaux s'inscrivent donc dans la démarche méthodologique de conception et dimensionnement des chaînes d'actionnement des systèmes mécatroniques, proposée par le Laboratoire d'Automatique Industrielle (LAI) de l'INSA de Lyon, devenu

3. Laboratoire Ampère – CNRS UMR5005, www.ampere-lab.fr.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

en 2007 le laboratoire Ampère, et initiée par Scavarda *et al.* [SAR91]. Son développement s'est en premiers lieux justifié par l'absence d'une méthodologie générale de conception de ces chaînes d'actionnement, alors dimensionnées par les spécialistes des disciplines concernées (mécanique, électrique, hydraulique, pneumatique,...). Les approches méthodologiques de conception originellement mises en œuvre, et toujours communément rencontrées en prototypage virtuel, sont des démarches dites d'« essai → erreur → correction », consistant à exploiter un modèle de manière itérative, en l'affinant, pour viser certaines performances formulées dans un cahier des charges. Le nombre d'itérations de la démarche dépend de la manière dont est caractérisé l'essai (par exemple dans le cas du dimensionnement d'une chaîne d'actionnement, la sélection du composant, ainsi que le choix de ses entrées). La procédure peut être itérée de nombreuses fois, sans garantie d'atteindre les critères d'acceptation fixés. Si la procédure aboutit, rien ne garantit l'optimalité du résultat et les possibles surdimensionnements ne sont pas nécessairement révélés. Si elle n'aboutit pas, l'identification des causes de sous-dimensionnement n'est pas triviale. Basées sur cette démarche, des méthodologies ont été élaborées pour minimiser *a priori* le nombre d'itérations. Par exemple, des *critères de sélection* de composants ont été formulés en termes de conditions d'adéquation entre une charge (spécifiée par le cahier des charges) et un actionneur (à dimensionner). Ces démarches, dont certaines sont relativement anciennes comme celle de Newton Jr [NJ50] ou celle de Cœuillet [Coe69], ne sont souvent adaptées que dans des cas de systèmes simplifiés, et limitées à des critères statiques obtenus en considérant des régimes de fonctionnement critiques. Or, il peut s'avérer que les performances dynamiques et/ou énergétiques du système soient plus dimensionnantes. Ces démarches de sélection ont cependant inspiré fortement le processus d'élaboration de la méthodologie du laboratoire Ampère. Le principal obstacle aux approches usuelles réside dans l'essence même de la démarche, basée sur une approche par *modèles directs* (c'est à dire une modélisation reproduisant le comportement d'un système donné *i.e.* l'évolution des sorties physiques du système calculées à partir des entrées physiques du système). Or, la démarche de conception est intrinsèquement basée sur une *approche inverse*, au sens où le cahier des charges spécifie les objectifs à atteindre par les sorties d'un système.

Les *modèles inverses* répondent ainsi naturellement au problème de conception. Ils peuvent être formulés de manière mathématique et permettent de prendre en considération les spécifications du cahier des charges de manière pertinente, tenant compte de leur évolution au cours du temps, et de dimensionner les systèmes sur des *critères dynamiques et énergétiques*. L'approche du dimensionnement par modèle inverse utilisant des critères dynamiques et énergétiques est par exemple relativement courante en robotique, où la problématique est la sélection et la validation d'actionneurs appliquant les efforts articulaires afin que les axes d'un robot suivent les vitesses articulaires spécifiées. Des méthodes de dimensionnement basées sur cette approche ont notamment été formulées par Potkonjak et Vukobratović [PJ86, VKP87] ou encore Dequidt [Deq98]. La méthodologie de dimensionnement par modèle inverse en bond graph du laboratoire Ampère s'inspire de ces méthodes pour en proposer une généralisation et une systématisation pour le dimensionnement des chaînes d'actionnement des systèmes mécatroniques. Pensée par Scavarda *et al.* [SAR91], l'approche a initialement été formulée dans la thèse d'Amara [Ama91] sur des problématiques énergétiques en robotique. La méthodologie a ensuite été développée par Fotsu-Ngwompo *et al.* [FNST96, FN97, FN98, NNST01, NBS05], puis formalisée par niveaux de structure physique du modèle (topologie, phénoménologie, paramétrage) par Jardin [Jar10], et étendue en termes de détermination d'invariants structurels supplémentaires par El Feki *et al.* [EFDLB+08b, EF11] et Jardin [Jar10]. Les travaux proposés dans le présent mémoire s'appuient ainsi sur cet

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

historique de développement. En lien avec les applications principalement présentées dans ce mémoire, précisons que cette démarche de conception s'est avérée adaptée à la conception fonctionnelle châssis pour différents sous-systèmes du véhicule, en l'occurrence au dimensionnement des sous-systèmes de direction assistée [Mec03, MMFSF03], de chaîne de traction hybride [Laf04] [BLD+05], du sous-système suspension [FN98] ou encore du contrôle actif de châssis [Mec03].

La présente étude se base également sur un certain nombre de nos travaux antérieurs, ayant abouti au développement d'un référentiel de modèles pour l'application dynamique véhicule, formulés en bond graph, validés (en analyse temporelle et fréquentielle, par comparaison avec des modèles théoriques ainsi qu'avec des mesures véhicules sur pistes d'essai) et déployés dans une solution logicielle industrielle [AL07, PMAL08, PMAL09b, PMAL09a]. Dans le cadre de ces développements, le choix du formalisme bond graph s'est imposé pour des raisons de compréhension des phénomènes physiques, de maîtrise des équations, de contraintes logicielles (modularité, pérennité, évolutivité, maintenance, portage, application temps réel), en nous basant en outre sur un certain nombre de travaux référents dans ce domaine [Kar76] [AD77] [All79] [BT85] [Bos86] [Pac87] [Mar87] [BA94]. Dans la mesure où nous souhaitons pouvoir appliquer la méthodologie de dimensionnement par bond graph et modèle inverse du laboratoire Ampère à la classe de modèles de ce référentiel, ce dernier constitue en cela l'une des sources de spécifications d'extension de cette méthodologie, et permet d'établir les orientations des travaux de ce mémoire.

Les présents travaux s'inscrivent par ailleurs dans le cadre du projet européen ITEA2 MODRIO [4], auquel le laboratoire Ampère ainsi que la société Siemens (ex-Lms Imagine) [5] ont participé, et plus particulièrement du lot 6, « Services pour la modélisation et la simulation ». Les objectifs originels de ce lot sont d'étendre les techniques d'analyse structurelle des systèmes mécatroniques à l'analyse statique et au diagnostic de modèles physiques. L'une des finalités visée était, d'une part, de déterminer si ces modèles sont bien formulés (au sens où l'on peut en faire un « code » exécutable), et, d'autre part, de fournir des informations au modélisateur sur de potentielles erreurs de modélisation structurelles, avant simulation. Les thématiques originellement visées par ce projet concernaient la description énergétique des systèmes mécatroniques (utilisant le formalisme bond graph) et l'analyse des modèles idéaux (*e.g.* diodes, interrupteurs électriques, frottements secs et butées mécaniques, modèles multicorps avec contraintes cinématiques,...). Dans ce contexte, les contributions proposées dans ce mémoire visent à constituer des « briques » d'analyse et de validation de modèles, intégrées à des chaînes outillées, destinées à des utilisateurs de simulation système non nécessairement experts en analyse structurelle, ni en bond graph, ni même en mécatronique. Nos travaux peuvent ainsi être considérés comme s'inscrivant dans une démarche générale hiérarchisée d'analyse structurelle de modèles, dans laquelle il est possible de :

1. montrer qu'un modèle structuré en réseau (énergétique) est bien formulé (travaux de Furic [Fur15a, Fur15b]),
2. s'il s'avère bien formulé, traduire un tel modèle en bond graph, et ce en temps polynomial (travaux de Perelson *et al.* [PO76], Lamb *et al.* [LAW93a, LWA93b, LWA93a, LAW93b]),

4. « MOdel DRIven physical systems Operation », clôturé en Mai 2016 (itea3.org/project/modrio.html, www.modelica.org/external-projects/modrio).

5. Éditrice du logiciel de simulation mécatronique *LMS Imagine.Lab Amesim* [Sie].

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

3. convertir ce bond graph par des opérations d'idéalisation et d'abstraction comportementales, faisant potentiellement apparaître des « singularités de structure » (au sens, par exemple, des causalités dérivées sur les éléments de stockage d'énergie), dont une représentation est possible sous une forme *singulière* (*i.e. algébro-différentielle*),
4. mener un certain nombre d'analyses sur le bond graph représentant le système singulier (ce qui constitue l'objet principal des travaux présentés dans ce mémoire).

Objectifs du mémoire

Dans le contexte de la méthodologie de conception et dimensionnement des systèmes mécatroniques par bond graph et modèle inverse, proposée par le laboratoire Ampère et basée sur des critères dynamiques et énergétiques, les travaux proposés dans ce mémoire ont pour principal objectif d'étendre la méthodologie à une classe de bond graph plus large[6], représentant des systèmes singuliers.

Cette extension s'inscrit essentiellement dans la phase d'analyse structurelle de la méthodologie, plus particulièrement dans la phase d'*adéquation* entre la structure du modèle et les spécifications du cahier des charges, qui consiste d'une part, à assurer la validité du modèle de conception (en termes d'*inversibilité*), et d'autre part, la validité du cahier des charges (en termes de *propriétés* mathématiques des fonctions spécifiées dans le cahier des charges). La méthodologie originale étant hiérarchisée suivant les différents niveaux de la structure physique du modèle (nous parlerons simplement de « niveaux d'analyse »), l'objectif est de pouvoir décliner cette extension, d'une part, au niveau de la seule structure du modèle (*niveau d'analyse structurel*) et, d'autre part, à un niveau prenant en considération la phénoménologie du système *i.e.* les différentes lois physiques intervenant dans le système (*niveau d'analyse comportemental*).

Préalablement à cette extension, nous souhaitons mettre en place un référentiel algébrique constituant une base de validation pour les extensions graphiques que nous proposerons. Les différentes spécificités et propriétés des systèmes singuliers que nous sommes amenés à étudier sont exposées sur la figure 1.

Comme discuté dans les précédents paragraphes, l'objectif sous-jacent de l'ensemble des développements théoriques formulés dans ce mémoire est d'être implémentable dans des outils logiciels, permettant l'automatisation des procédures d'analyse structurelle.

Organisation du mémoire

Chapitres

En vue de développer les thématiques, motivations et contexte précédemment introduits, et de répondre aux objectifs fixés, nous proposons un développement construit en cinq chapitres, articulés de la manière suivante.

6. En l'occurrence, nous souhaitons traiter les bond graphs causaux/bicausaux sans causalité préférentielle particulière, avec potentiellement des boucles causales d'ordre 0 de type $1ZCP$, $2ZCP$, $3ZCP$ et $4ZCP$ de la classification de van Dijk [vD94], avec également potentiellement des champs R et/ou IC.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

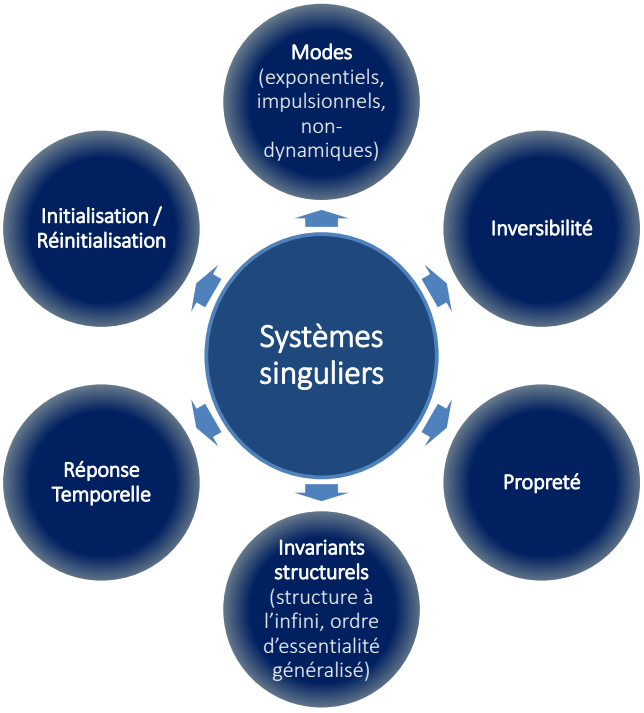


FIGURE 1 – Spécificités et propriétés des systèmes singuliers étudiés dans ce mémoire

Le premier chapitre dresse le contexte général de nos travaux, autour de trois sections. Dans un premier temps, nous introduirons les systèmes mécatroniques de manière générique, en présentant leurs architectures d'un point de vue énergétique, et en prenant au besoin des exemples issus de l'automobile (section 1.2). La conception des systèmes mécatroniques est ensuite présentée et introduite dans le « cycle en V », mettant en perspective la méthodologie de conception à laquelle nous souhaitons contribuer. Les différentes phases du cycle de conception en V sont alors mises en parallèle avec les niveaux d'abstraction de la modélisation rencontrés, nous permettant de positionner le niveau d'abstraction adressé dans nos présents travaux. Dans un second temps (section 1.3), nous présentons brièvement nos travaux antérieurs au présent projet, ayant abouti au développement d'un référentiel de modèles en dynamique du véhicule [AL07, PMAL08, PMAL09b, PMAL09a]. A travers des exemples bond graph simplifiés mais dimensionnants, nous présentons la modélisation fonctionnelle multicorps châssis et justifions les orientations des extensions méthodologiques prises dans les chapitres suivants. Dans un troisième et dernier temps (section 1.4), nous abordons l'analyse structurelle pour la conception et le dimensionnement, en détaillant plus particulièrement la méthodologie du laboratoire AMPÈRE, basée sur une approche inverse et prenant en considération des critères dynamiques et énergétiques. Cette présentation permet de définir et hiérarchiser différents niveaux d'analyse, et de présenter les outils de l'analyse structurelle que constituent l'approche modèle d'état, l'approche digraphe [7] et l'approche bond graph. Une ouverture sur les problématiques traitées dans ce mémoire sera proposée en conclusion de ce chapitre.

Le deuxième chapitre est essentiellement bibliographique et présente l'ensemble des notions d'analyse structurelle sur lesquelles se base la méthodologie du laboratoire, déclinées selon la classe de modèles jusqu'alors traitée, celle des systèmes réguliers. Principa-

7. « Digraphe » pour « directed graph » ou « graphe orienté » [Rei88, Rei94].

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

lement liées à la phase d'adéquation du cahier des charges avec la structure du modèle, nous abordons les propriétés d'*inversibilité* et les *invariants structurels* d'un modèle linéaire régulier. Notons à ce stade que la détermination des invariants structurels peut se faire de différentes manières, algébriquement ou graphiquement, en manipulant le modèle direct et/ou le modèle inverse. Cela nous amène à une structuration du chapitre en trois sections. La première présente l'approche algébrique (section 2.2), constituant le référentiel pour les méthodes graphiques, en abordant l'inversibilité des systèmes ainsi que la détermination des invariants structurels que sont la *structure à l'infini* [VLK82] [CD82], le *degré relatif* [BM65] et l'*ordre d'essentialité* [CDD+86]. La deuxième section (section 2.3) présente l'approche bond graph, déclinant graphiquement les propriétés et résultats de l'approche algébrique. La troisième section de ce chapitre discute des limitations existantes sur la méthodologie de dimensionnement telle qu'abordée dans ce deuxième chapitre (section 2.4).

Les chapitres suivants (chapitres 3, 4 et 5) sont principalement dédiés à la présentation de nos contributions à la méthodologie de conception et dimensionnement des systèmes mécatroniques par approche bond graph et modèle inverse. Nous présentons, dans un premier temps, un référentiel algébrique pour l'analyse *structurelle* des systèmes linéaires singuliers (chapitre 3) permettant le support de la méthodologie bond graph, dont l'extension est développée dans un second temps (chapitre 4). Dans un troisième et dernier temps, nous étendons les analyses algébriques et graphiques du point de vue de l'analyse *temporelle* des systèmes singuliers (chapitre 5).

Dans la perspective de constituer le référentiel algébrique pour supporter les extensions de la méthodologie de conception et dimensionnement, le troisième chapitre se structure autour de quatre sections principales. La première (section 3.2) introduit la classe des systèmes singuliers traitée dans nos travaux, les *systèmes linéaires singuliers à faisceau régulier* et précise leurs hypothèses, en se basant sur les travaux référents de Verghese *et al.* [VK79, VLK81, VK81] et les formalisations algébriques de Dai [Dai89c, Dai89b, Dai89a]. La deuxième (section 3.3) présente l'inversion des systèmes singuliers, comprenant des critères directs et indirects d'inversibilité et ouvrant sur l'approche graphique du chapitre 4. La section suivante (section 3.4) expose le concept essentiel que représente la *structure à l'infini* de ces systèmes, permettant de construire la formulation de validité du cahier des charges dans la phase d'adéquation de la méthodologie, en se basant sur les travaux de Murota & van der Woude [MvdW91]. Enfin, la section 3.5 propose la principale contribution de ce chapitre, à savoir la définition d'un ordre d'essentialité généralisé pour les systèmes singuliers, extension de l'ordre d'essentialité des systèmes réguliers [CDD+86, CD86], ainsi que sa détermination algébrique.

Le quatrième chapitre, regroupant la grande majorité des contributions de ce mémoire, propose d'aborder la détermination des propriétés des systèmes singuliers sur deux de leurs représentations graphiques associées (digraphe et bond graph). La finalité de ce chapitre est la détermination graphique de l'*inversibilité* et des *ordres d'essentialité généralisés* des sorties du modèle, à partir de sa représentation bond graph. Nous organisons ce développement en cinq sections. A partir de la généralisation de la correspondance digraphe/bond graph (proposée en annexe D), nous proposons une détermination bond graph du polynôme caractéristique $\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ (section 4.2) puis des déterminations digraphe et bond graph du déterminant de la matrice système du système singulier (section 4.3). Après avoir présenté l'inversibilité des systèmes singuliers en bond graph, en généralisant le test d'inversibilité de Rahmani [Rah93] et discutant de la validité de l'approche d'inversion de Fotsu Ngwompo [FN97] (section 4.4), nous proposons en

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

section 4.5 une extension aux systèmes singuliers de la détermination bond graph de leur structure à l'infini, en la déclinant suivant les niveaux de la structure physique du modèle. La section 4.6 propose enfin la détermination bond graph des *ordres d'essentialité généralisés*, également déclinée par niveau d'analyse. Cette détermination est proposée sur le modèle direct ainsi que sur le modèle inverse et permet de généraliser et d'unifier les travaux de Bertrand *et al.* [BSDT97], Jardin [Jar10] et El Feki [EF11].

Le cinquième et dernier chapitre présente un complément aux approches algébrique et graphique de l'analyse structurelle, en abordant l'analyse *temporelle* des systèmes singuliers, à travers trois sections. Nous présentons en premiers lieux les travaux sur l'équivalence entre systèmes singuliers apportés par Rosenbrock [Ros70, Ros74] et Smith [VLK81] [Dai89c] [Dua10], permettant également de définir l'index de nilpotence des systèmes singuliers (section 5.2). En se basant sur les différentes approches entreprises pour formuler la réponse temporelle de ces systèmes (section 5.3), nous proposons d'étayer sa formalisation utilisant la résolution distributionnelle, en présentant l'analogie qui peut être établie entre les modes dynamiques *exponentiels* et les modes dynamiques *impulsionnels*. La section 5.4 présente enfin une déclinaison bond graph des notions d'initialisation, de propreté, et de l'obtention de la réponse temporelle ainsi qu'une contribution sur la détection des modes impulsionnels dans un cas simplifié usuel où le bond graph ne possède pas de cycle causal d'ordre négatif, ni de chemin causal entre éléments de stockage en causalité dérivée. Le cas général est ensuite traité sur la détection des modes impulsionnels, avec différentes contributions basées sur les résultats en bond graph du chapitre 4.

La conclusion générale présente une synthèse du développement et des contributions proposées dans les différents chapitres de ce mémoire, ainsi que les perspectives qu'il nous semblerait pertinentes d'entrevoir pour compléter et étendre nos travaux.

Annexes

Différentes annexes sont également proposées pour supporter, préciser, ou illustrer les développements précédemment introduits, dont certaines comprennent des contributions :

— l'annexe A introduit très succinctement le langage *bond graph*, reprend la classification des boucles causales d'ordre 0 de van Dijk [vD94], et rappelle un certain nombre de considérations sur l'approche utilisant la matrice de structure de jonction (« MSJ ») et le système d'équations associé. Ceci nous permet principalement d'associer les résultats du chapitre 4 à l'approche « MSJ »,

— l'annexe B est un complément aux chapitres 2 et 4, permettant de synthétiser les *définitions* et *outils* de l'analyse structurelle en bond graph utilisés dans ce mémoire. Cette annexe comprend un certain nombre de définitions que nous proposons dans le cadre des présents travaux,

— l'annexe C présente différentes définitions et procédures de calcul de déterminant relatives au *digraphe*, avec un certain nombres de contributions sur la scrutation des degrés, d'une part, du polynôme caractéristique et, d'autre part, de la matrice système,

— l'annexe D présente un certain nombre de contributions sur *l'extension de la correspondance* digraphe/bond graph dans le cas des systèmes singuliers, notamment la procédure D.1 page 307 de construction du digraphe associé à un modèle bond

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

graph,

— l'annexe E, bibliographique, présente la déclinaison des notions exposées au chapitre 2 (section 2.3 page 58), en termes d'analyse structurelle sur le modèle bond graph, au niveau d'analyse *comportemental*,

— l'annexe F illustre les développements de l'analyse structurelle des systèmes singuliers proposés aux chapitres 3 et 4 sur un modèle de référence multicorps véhicule construit lors de nos travaux antérieurs et présenté au chapitre 1. Cette annexe illustre notamment l'implémentation de modèles inverses, issus de modèles multicorps de véhicule, dans les logiciels de simulation *MS1* [MS1] et *LMS Imagine.Lab Amesim* [Sie],

— l'annexe G est un support au chapitre 1 (section 1.3 page 9) et présente différentes manipulations bond graph sur un modèle véhicule de référence.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Chapitre 1

Conception et dimensionnement par modèle inverse : application à la conception fonctionnelle châssis

Sommaire

1.1 Introduction 2
1.2 Conception et dimensionnement des systèmes mécatroniques 3
1.2.1 Mécatronique : historique et déclinaisons en automobile 3
1.2.2 Architecture des systèmes mécatroniques 4
1.2.3 Conception des systèmes mécatroniques 6
1.3 Modélisation en conception fonctionnelle châssis et synthèse dynamique route 9
1.3.1 Préambule 9
1.3.2 Introduction et contexte industriel 9
1.3.3 Modélisation fonctionnelle châssis 11
1.4 Analyse structurelle pour la conception et le dimensionnement, approche par modèle bond graph inverse 24
1.4.1 Introduction 24
1.4.2 Principe de l'inversion, intérêt pour la conception 25
1.4.3 Dimensionnement par modèle inverse utilisant des critères énergétiques 27
1.4.4 Définition de l'analyse structurelle et niveaux d'analyse 32
1.4.5 Outils d'analyse et de simulation utilisés 37
1.5 Conclusions et problématiques traitées dans ce mémoire . . . 38

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

1.1 Introduction

Le présent chapitre 1 introduit le contexte général d'étude proposé dans ce mémoire. Il s'agit de la conception et du dimensionnement des systèmes mécatroniques, basés sur une approche par modèle inverse et utilisant des critères dynamiques et énergétiques. La méthodologie proposée et discutée au long du mémoire s'appuie sur le formalisme bond graph [1] et notamment sur les possibilités d'analyse de l'architecture des systèmes modélisés par bond graph. On parle ainsi d'*analyse structurelle*. Nous positionnerons cette méthodologie dans le cycle de conception des systèmes mécatroniques (connu sous la dénomination de « cycle de conception en V ») et exposerons les bénéfices d'approcher la démarche avec des modèles inverses d'une part, et de considérer une phase d'analyse amont portant sur l'architecture des modèles d'autre part. Si, comme nous le verrons, la méthodologie de conception des systèmes mécatroniques sur laquelle nous basons nos travaux est relativement générique, le contexte industriel d'application privilégié dans ce mémoire est celui de l'automobile, plus particulièrement du dimensionnement châssis et de la conception en dynamique du véhicule. Après avoir détaillé les modèles référents de ce domaine pour le prototypage virtuel et la classe de système à laquelle ils appartiennent (en l'occurrence la classe des systèmes *singuliers*), nous exposerons dans quelle mesure cette classe représente de nouvelles spécifications pour la méthodologie de conception. Le chapitre 1 se décline ainsi de la manière suivante (figure 1.1) :

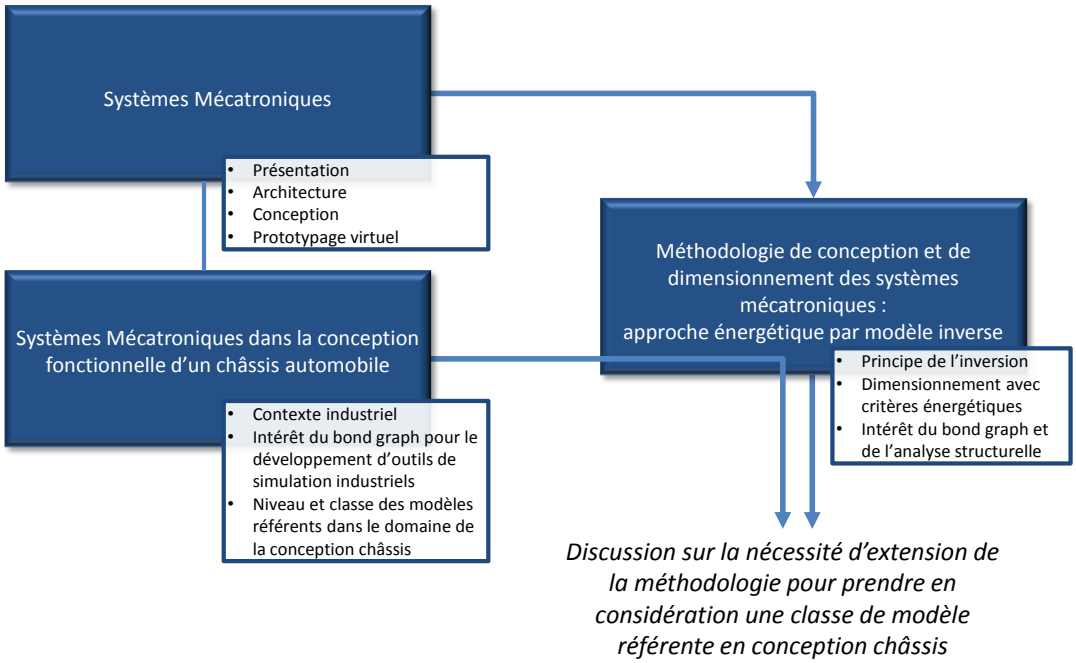


FIGURE 1.1 – Structure du chapitre 1, ouverture vers les problématiques adressées dans le mémoire

— La section 1.2 présente les systèmes mécatroniques et leur déclinaison en automobile, leur architecture, leur conception, ainsi que les outils référents en prototypage virtuel. Nous introduirons qu'une approche de modélisation adéquate est l'approche à *paramètres localisés* (« lumped-parameter »), pour laquelle le forma-

1. Une présentation succincte est proposée en annexe A, section A.1 page 245. Nous y introduisons les principales notions sur lesquelles s'appuie ce mémoire.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

lisme bond graph est une représentation graphique bien adaptée.

— La section 1.3 propose d'introduire le contexte de conception fonctionnelle en dynamique du véhicule et de détailler les modèles référents de ce domaine dans le cadre d'un déploiement industriel d'outil de modélisation et de simulation. L'une des finalités de cette section est de montrer comment le bond graph peut répondre aux problématiques de modélisation mécatronique de ce domaine et être une solution pérenne de capitalisation, de maintenance et d'évolutivité pour un logiciel industriel.

— La section 1.4 présente la méthodologie de dimensionnement par modèle inverse, dont une approche bond graph est proposée par le laboratoire Ampère depuis 25 ans et constitue la base des travaux de ce mémoire. Cette section introduit différents outils d'analyse structurelle communément employés en commande et expose le niveau de description et d'information qu'ils contiennent. Ceci permet de positionner la référence que constitue l'approche algébrique (modèle d'état, système structuré) dans les développements apportés en bond graph et permet de mettre en perspectives les contributions de ces travaux de thèse.

— La section 1.5 expose les problématiques traitées dans ce mémoire (introduites brièvement sur la figure 1.1), en mettant succinctement en perspective la classe de modèle de la section 1.3 avec la méthodologie présentée en section 1.4.

1.2 Conception et dimensionnement des systèmes mécatroniques

1.2.1 Mécatronique : historique et déclinaisons en automobile

Le terme « mechatronics » a été introduit en 1969 par Tetsuro Mori et Jiveshwar Sharma de la compagnie japonaise Yaskawa Electric Corporation, en combinant les termes « mecha » de mécanisme et « tronics » d'électronique [KO96], [Bar10]. La mécatronique définissait ainsi au début des années 80 une discipline transverse de la mécanique au sens large (mécanique, hydraulique, thermique) et de l'électronique. La définition a évolué avec la complexification des systèmes [Ise08] pour désigner globalement la tendance majeure de démarche de conception visant à l'intégration multi-technologique [Lub12]. Plusieurs définitions référentes ont été apportées au cours de l'évolution de la discipline : celle de l'éditorial du journal *Mechatronics* [DH91], celle du journal *IEEE Transactions on Mechatronics* proposée par Kyura & Oho [KO96] ou encore celle proposée en 2000 par l'*IFAC Technical Committee on Mechatronic Systems* [IFA00]. Toutes convergent vers une définition de la mécatronique comme la démarche de conception intégrant les systèmes mécaniques et électro-mécaniques (éléments mécaniques et électriques, machines, mécanique de précision, actionneurs), les systèmes électroniques (micro-électronique, électronique de puissance, capteurs) et les technologies de l'information (théorie des systèmes, modélisation, automatique, logiciels, intelligence artificielle) [Ise08]. Le terme « mécatronique » est apparu officiellement en France en 2005, dans *Le Petit Larousse*. Les travaux de normalisation ont été initiés par la France en 2008 avec la publication par l'*Association Française de Normalisation* (AFNOR) de la norme NF - E01 - 010, qui adopte la définition suivante pour la communauté scientifique et industrielle [AFN08] : la mécatronique est une *« démarche visant l'intégration en synergie de la mécanique, l'électronique, l'automatique et l'informatique dans la conception et la*

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

fabrication d'un produit en vue d'augmenter et/ou d'optimiser sa fonctionnalité ».

La velléité principale de l'approche mécatronique est la suppression des frontières existantes entre les technologies (sous entendu relatives à des *approches métiers* associées à une discipline particulière) pour permettre de satisfaire des fonctions supplémentaires, d'augmenter la prestation client, de développer de nouvelles offres et potentiellement de baisser les coûts [Lub12]. Le contexte automobile dans lequel s'inscrivent nos travaux est un environnement majeur illustrant les sauts technologiques rendus possible par la mécatronique depuis la fin des années 1970 (figure 1.2). Soulignons notamment les systèmes *ABS* (anti-blocage de roue), *ESP* (correction de trajectoire *i.e.* stabilisation en lacet) ou encore *RSC* (*Roll Stability Control i.e.* l'anti-roulis actif), qui peuvent être associés pour atteindre le *GCC* (Contrôle Global du Châssis) [Mur07]. L'évolution de cette

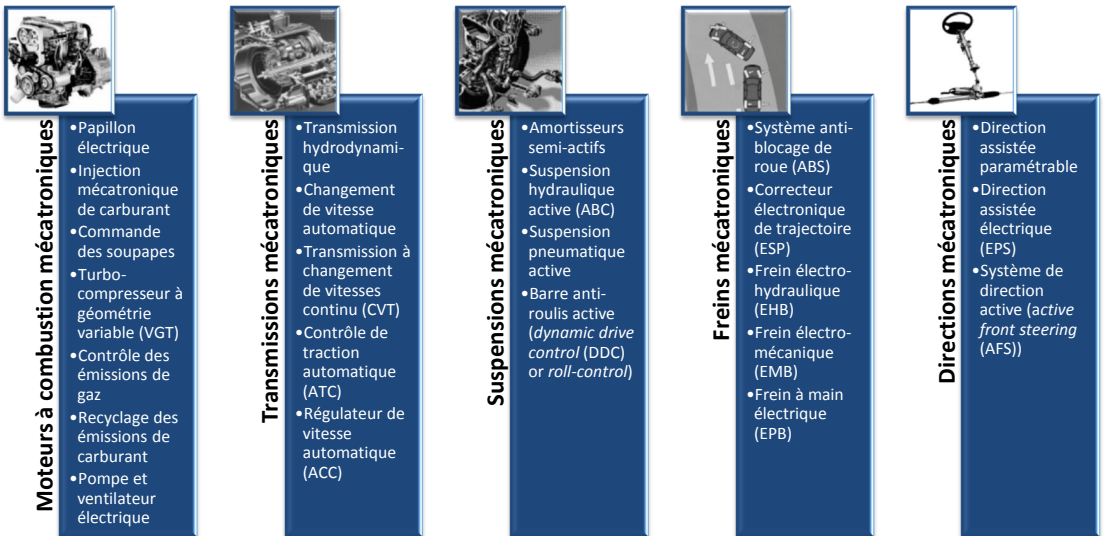


FIGURE 1.2 – « Mechatronic Automobiles » : ensemble des systèmes et composants mécatroniques présents dans l'automobile [Ise08]

discipline dans le domaine automobile est toujours importante et actuellement majoritairement portée par le développement des *ADAS* (*Advanced Driver Assistance Systems*) comme l'*ACC* (*Active Cruise Control*, figure 1.2), les systèmes d'évitement de collision (*Collision avoidance system*), l'assistance à la conduite sur autoroute ou dans les bouchons, le « car to car », ... L'ensemble des exemples applicatifs métiers proposés dans ce mémoire sont en lien avec les technologies exposées en figure 1.2. Outre le domaine automobile, de nombreuses autres applications peuvent être citées dans des domaines très variés comme le médical (tant dans le matériel – robot de chirurgie – que dans l'assistance ou le remplacement d'organes humains – prothèses bioniques, cœur artificiel de CARMAT –), la recherche spatiale (robot d'exploration, satellites), l'aéronautique – tant chez les intégrateurs que les systémiers (par exemple, la problématique du « fly by wire ») –, la consommation grand publique (robot aspirateur, appareil photo (l'autofocus par exemple), machine à café, fer à repasser générateur de vapeur), la production (machines-outil, chaîne d'assemblage),... [Bar10] [Jar10] [EF11] [Lub12] [DtMDD14].

1.2.2 Architecture des systèmes mécatroniques

Malgré la grande diversité de domaines concernés et de déclinaisons applicatives, il est possible de synthétiser de manière générique la description de l'architecture d'un système mécatronique (figure 1.3). Un système mécatronique peut être vu comme des

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

chaînes d'*actionnement*, supervisées par des algorithmes de *commande*, potentiellement pilotés par une *IHM* (Interface Homme-Machine). La chaîne d'actionnement représente

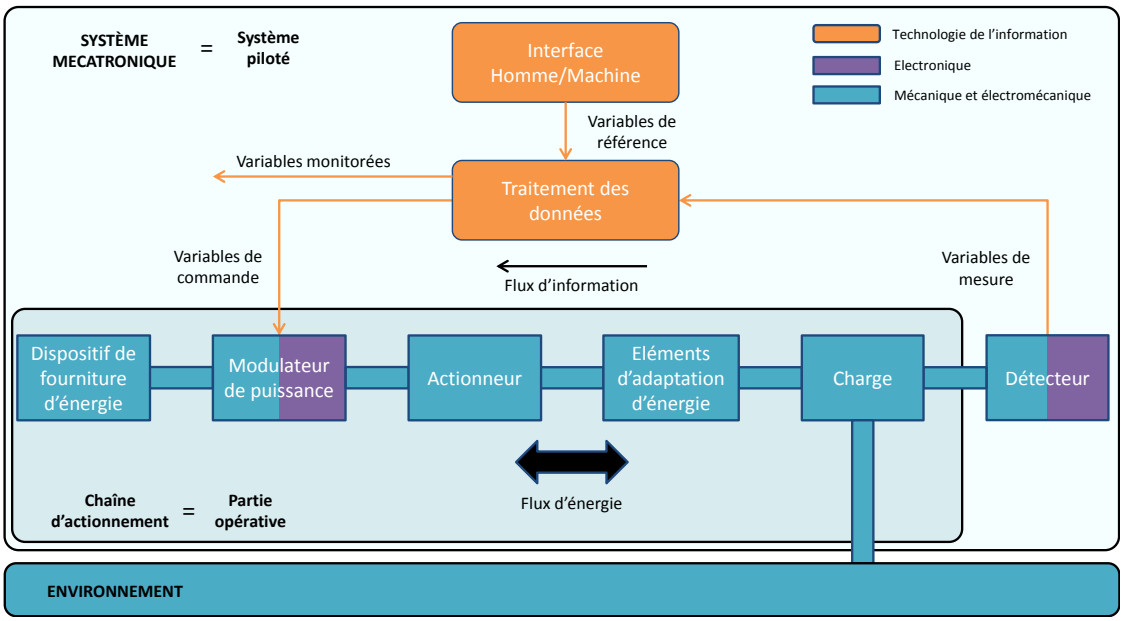


FIGURE 1.3 – Architecture générique d'un système mécatronique d'un point de vue énergétique [Ise08] [Jar10]

la partie *opérative* du système *piloté*, ce dernier étant constitué de l'ensemble {chaîne d'actionnement + électronique de commande + informatique}. Du point de vue énergétique, elle regroupe les fonctions suivantes [FN97] [Laf04] [Jar10] :

- alimentation énergétique du système (sous-système *dispositif de fourniture d'énergie*, figure 1.3),
- modulation de puissance, permettant le pilotage du transfert d'énergie entre le *dispositif de fourniture d'énergie* et les *actionneurs* (sous-système *modulateur de puissance*),
- conversion et transmission de l'énergie issue des *modulateurs de puissance* pour l'adapter au besoin de la *charge* (sous-système *actionneur* et sous-système *adaptation d'énergie*),
- actionnement des *degrés de liberté énergétiques* de la *charge*, finalité du système mécatronique (sous-système *charge*).

Remarque : L'architecture proposée en figure 1.3 est une architecture simple. Comme illustré dans les thèses de MECHIN [Mec03] et LAFFITE [Laf04] et souligné par JARDIN [Jar10], d'autres configurations plus complexes associant plusieurs chaînes d'actionnement sont envisageables (associées à des problématiques de recherche d'iso-actionnement ou sur-actionnement [Mec03]). Nous supposons toutefois que la cascade des différents dispositifs énergétiques *dispositif de fourniture d'énergie* → *modulateur de puissance* → ... → *charge* est toujours vérifiée.

Le contexte de ce mémoire est celui de la conception de la *partie opérative* d'un système mécatronique. Cette conception est déclinée en niveaux de *conception* et d'*abstraction de modélisation*, introduits et discutés en section suivante (section 1.2.3), pour expliciter le positionnement de la présente recherche.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

1.2.3 Conception des systèmes mécatroniques

La problématique de conception des systèmes mécatroniques peut-être représentée par le « cycle en V », issu du génie logiciel [Ise08] et adapté par et pour la communauté mécatronicienne [Jar10]. On parle alors d'*ingénierie concourante* (ou d'*approche mécatronique* ou encore d'*approche système*), où la démarche de conception intègre dès le départ l'interconnexion des différentes disciplines associées à des domaines physiques et/ou à des sous-systèmes, par opposition à des démarches plus anciennes d'*ingénierie séquentielle* (ou *approche métier*), cloisonnée par discipline et/ou sous-système. Lebrun résume l'évolution de cette démarche en utilisant la formule par laquelle on exprime que « l'ensemble est plus que la somme des différentes parties » [Leb03]. Le « cycle en V » proposé en figure 1.4 s'appuie sur les travaux de Lebrun [Leb03] et de Isermann [Ise08] ainsi que les références [DT99] [Jar10] [PPC+11]. Ce cycle commence par une approche

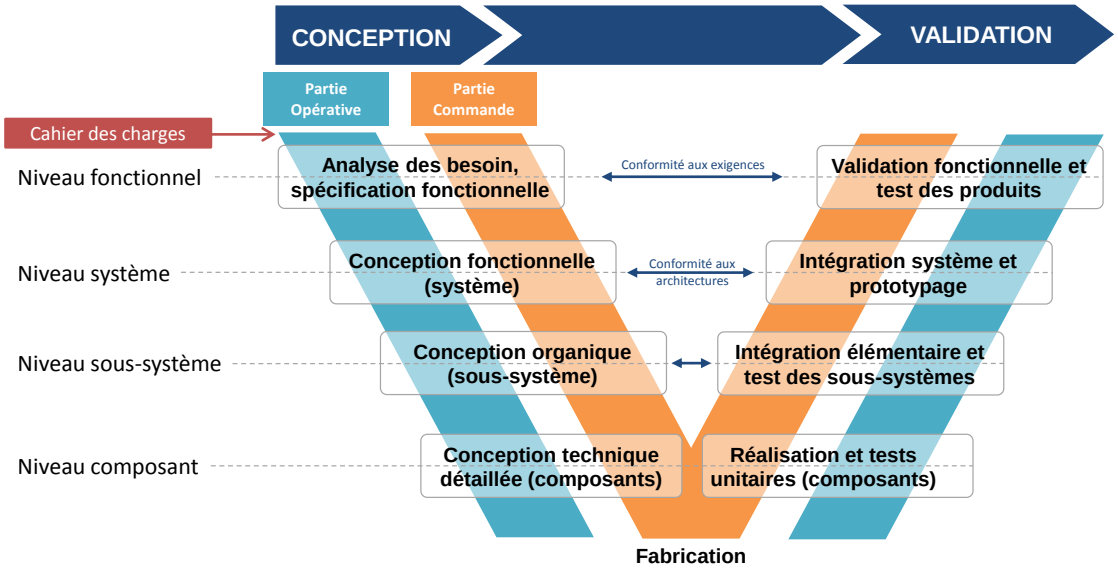


Figure 1.4 – Cycle en V de la démarche de conception

top-down caractérisant la phase d'étude, de conception et de développement suivi d'une démarche *bottom-up* caractérisant l'intégration, les tests et la validation du système. Il couvre le cycle de vie d'un produit, depuis les spécifications jusqu'à la production (voire la fin de vie du produit avec la prise en compte de l'impact environnemental). La conception implique un parcours du cycle de manière récursive, par itérations successives, avec de potentielles phases de reconception si nécessaire lors des études de conformité. Il est important de noter que la figure 1.4 associe dans la démarche de conception des systèmes mécatroniques deux cycles en parallèle, respectivement relatifs à la *partie opérative* (chaîne d'actionnement) et la *commande* (partie pilotage de la chaîne d'actionnement) du système, conformément au principe de l'*ingénierie concourante* [DT99] [Ise08]. La réduction des coûts et de temps de mise sur le marché des produits tout en améliorant leur qualité et leur fonctionnalité est rendue possible par cette *approche système* au prix d'efforts importants dès les premières phases de conception. Cela entraîne des besoins méthodologiques importants en phase amont de développement, notamment au *niveau système* où l'interaction entre parties *opérative* et *commande* est conséquente, et nécessite l'utilisation du prototypage virtuel (*i.e.* la modélisation et la simulation) [Leb03] [Rau03]. Le *niveau fonctionnel* définit les fonctionnalités du produit et les scénarios de son exploitation. Le *niveau système* représente la vue physique du produit, en termes d'architecture (nombre et interaction des sous-systèmes, choix des technologie d'action-

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

nement *e.g.* hydraulique, mécanique, électrique, pneumatique) et de fourniture d'énergie d'une part, et de sa commande d'autre part (choix et placement de capteurs, architecture électronique, architecture et théorie de la commande, architecture logiciel) [Ise08]. Le niveau *sous-système* fait référence aux différents organes constitutifs du système, qui sont à leur tour décomposés en *composants*.

Notons ainsi que l'architecture générique d'un système mécatronique telle qu'exposée en figure 1.3 (section 1.2.2 page 4) est traitée dans les niveaux de conception du cycle en V (figure 1.4) suivants :

- l'ensemble {chaîne d'actionnement + électronique de commande + informatique} correspond au *niveau système*,
- le dispositif de *fourniture d'énergie*, l'*actionneur* et les *éléments d'adaptation d'énergie* correspondent au *niveau sous-système* associée à la *partie opérative*. Le modulateur de puissance, le détecteur et le traitement des données correspondent au *niveau sous-système* associé à la *partie commande*.
- chaque sous-système précédent est décomposé en composants au *niveau composant* (respectivement associés à l'une ou l'autre des *parties opérative* et *commande*).

Comme précédemment évoqué, le prototypage virtuel est incontournable en *ingénierie concourante* et intervient dès le début du cycle en V. Toutefois, le « modèle unique » apte à répondre aux besoins des différents niveaux (*fonctionnel*, *système*, *sous-système*, *composant*) n'existe pas. Les différentes étapes du cycle de conception requièrent ainsi différents *niveaux d'abstraction* desquels découle la spécification des outils de modélisation et de simulation. On différentie quatre *niveaux d'abstraction de la modélisation* : *fonctionnel*, *système*, *réseau*, *géométrique* [Leb03]. S'il existe une relation avec les niveaux

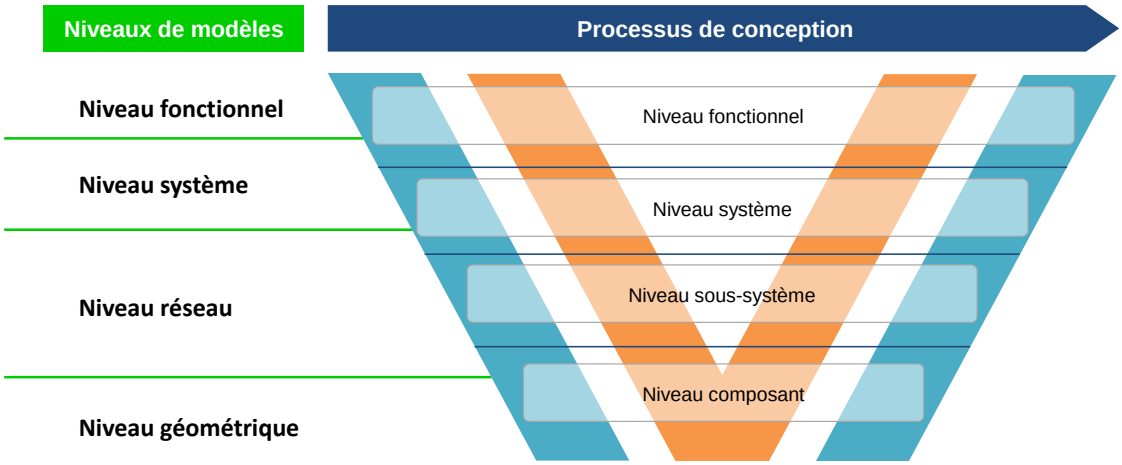


FIGURE 1.5 – Niveaux d'abstraction de la modélisation associés au cycle en V de conception [Leb03]

de conception du cycle en V (figure 1.4), la correspondance n'est pas exacte et des chevauchements existent entre *niveaux de conception* et *niveaux d'abstraction* (figure 1.5). Le détail des niveaux est le suivant :

1. le *niveau fonctionnel* s'astreint à définir les fonctions du système, ses états successifs et la logique de passage entre ces états. On parle ici d'automatismes sé-

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

quentiels, de machines à état, et concernent des processus à *événements discrets*.[2] Un niveau d'abstraction de modélisation peut être celui des *graphes d'état* et des *réseaux de* Petri [LD09].

2. le *niveau système* décrit le comportement du système physique et de la loi de commande, de manière continue dans le temps. La représentation du système est faite par association de sous-modèles de type « schéma bloc » correspondant chacun à un sous-système et décrivant leur comportement respectif par des lois entrées/sortie simplifiées (modèle équationnel, modèle tabulé) et échangeant des signaux entre eux. Ce niveau permet de représenter les différentes fonctions et états du système ainsi que son comportement physique simplifié. Le *niveau d'abstraction système* permet ainsi d'atteindre le *niveau de conception fonctionnel* et le *niveau de conception système*.
3. le *niveau réseau* est un niveau de modélisation essentiellement macroscopique, ou modèle à *paramètres localisés* (« *lumped parameter models* »), dans lequel les éléments constitutifs respectent des principes physiques (stockage d'énergie, dissipation d'énergie) et sont connectés entre eux avec des règles basées sur l'échange d'énergie (modulation idéalisée, loi de conservation). Une représentation supportant ce cadre théorique est par exemple le bond graph. On parle ici de modélisation « physique » au sens « phénoménologique » [Leb03] [3]. Le *niveau d'abstraction réseau* correspond ainsi au *niveau de conception système*, au *niveau de conception sous-système* et au *niveau de conception composant*.
4. le *niveau géométrique* contient les paramètres décrivant la géométrie ainsi que les lois de comportement des matériaux. On parle ici de modèle à *paramètres répartis* (« *distributed parameter models* »). Le *niveau d'abstraction géométrique* permet d'atteindre uniquement le *niveau de conception composant*.

Dans le cadre de ce mémoire, le niveau d'abstraction de modélisation et simulation concerné est le *niveau d'abstraction réseau*. Les modèles étudiés sont supposés être des modèles à paramètres localisés (« *lumped parameter models* »), représentés par le formalisme bond graph. Nous nous positionnons ainsi sur les niveaux de conception *système*, *sous-système* et *composant*.

Suivant le stade de développement du système le long du cycle de conception, différentes problématiques peuvent être traitées :

— la *synthèse d'architecture* se positionne au *niveau de conception système*. Elle permet la définition de la topologie de la chaîne d'actionnement (technologie, type d'actionneur, nombre, agencement) de manière à répondre *technologiquement* de manière optimale aux *spécifications fonctionnelles*. Nous pouvons citer les travaux de Laffite [Laf04] et Bideaux *et al.* [BLD+05] dans le cadre d'applications automobiles concernant la chaîne de traction ainsi que les travaux de Mosiek [Mos99] et Lichiardopol [Lic07a], tous supportés par le formalisme bond graph. Comme souligné par Jardin [Jar10], les problématiques de *synthèse d'architecture* se rencontrent également aux autres niveaux de conception, lors de la descente de cycle. Toutefois, ce vocable est usuellement employé au *niveau de*

2. De nombreux détails sont fournis dans l'article de Penas *et al.* [PPC+11].
3. Dans sa thèse, Jardin [Jar10] décompose le *niveau réseau* en deux niveaux, *sous-système* et *composant*. Nous conservons dans notre présentation la déclinaison originelle de Lebrun [Leb03].

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

conception système. [4]

— la *sélection et la validation des sous-systèmes ou des composants* sont traitées au *niveau de conception sous-système*, une fois l'architecture fixée. La *sélection* consiste à déterminer le sous-système adéquat dans un catalogue (*i.e.* donnant des gabarits constructeurs) pour satisfaire le cahier des charges (imposant charge et objectifs). La *validation* s'intéresse quant à elle à l'admissibilité des objectifs spécifiés ou encore à la mesure des capacités limites des composants (la charge étant là encore imposée) [FN97] [FN98] [Jar10].

— la *synthèse paramétrique* se positionne au *niveau de conception composant* et correspond à la détermination des paramètres d'un composant pour un objectif donné [FN98] [Laf04]. Cette détermination se base sur un comportement désiré en sortie du composant. [5]

Dans le présent mémoire, les principales illustrations sont relatives à la *sélection et validation de sous-systèmes ou de composants*, que nous qualifierons de *problème de dimensionnement*. Nous verrons toutefois ultérieurement (section 1.4 page 24) que la méthodologie proposée est applicable à d'autres problématiques de conception.

1.3 Modélisation véhicule pour la conception fonctionnelle châssis et la synthèse dynamique route

1.3.1 Préambule

Après une présentation du contexte industriel (section 1.3.2), l'objectif de la section 1.3.3 est d'exposer les éléments clés de la modélisation dite « fonctionnelle » en dynamique du véhicule et leur traduction dans le formalisme bond graph. Dans un premier temps, l'approche de cette modélisation est illustrée sur la liaison entre le porte-fusée et la caisse (section 1.3.3.1). Cette modélisation repose sur l'écriture d'une relation globale conservative en puissance, et de sa duale en effort (relation naturellement explicitée dans la représentation bond graph correspondante) [6]. Dans un second temps, un modèle de liaison à quatre degrés de liberté montre une première généralisation de représentation bond graph appliquée à la modélisation fonctionnelle (section 1.3.3.2). Enfin, le modèle utilisé pour traiter les problématiques théoriques de ce mémoire, à six degré de liberté, est présenté (section 1.3.3.3).

1.3.2 Introduction et contexte industriel

Le contexte de modélisation présenté dans la section 1.3 est celui du *GIE* (Groupement d'Intérêt Économique) *SARA* (Simulateur Avancé d'études et de Recherche Automobile), créé en 1992, qui a impliqué les constructeurs automobiles français Renault

4. Dans le cadre des problématiques de descente de cycle en conception fonctionnelle châssis, citons également les travaux de Loyer [Loy09] qui illustrent, en plus du niveau d'abstraction de modèle, une notion de hiérarchisation des paramètres de conception suivant le niveau de conception dans le cycle.

5. Notons que la notion est différente de l'*identification paramétrique*, où l'on détermine alors les paramètres inconnus d'une structure connue en connaissant les entrées et les résultats de mesure [EF11].

6. Comme nous le détaillerons dans cette section, c'est cette approche *globale* (ou *globalisée*) de la liaison cinématique entre le porte-fusée et la caisse qui implique la qualification « fonctionnelle » à la modélisation proposée, par opposition à une représentation complète du mécanisme *i.e.* de l'ensemble des corps constitutifs et de leurs liaisons respectives. L'approche *globale* permet ainsi de spécifier la *fonction* que doit remplir chacune des épures de suspension pour atteindre un objectif de comportement véhicule donné.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

et PSA PEUGEOT CITROËN ainsi que l'INRETS [7] [L'U95]. L'équipe modélisation de ce groupe de travail a produit la spécification et le développement de l'outil logiciel *ARHMM* (Advanced Road Handling Modular Model). La collaboration via le *GIE SARA* a été abandonnée en 1997. A la fin des années 1990, les spécifications de *ARHMM* ont été d'une part implémentées chez RENAULT dans l'environnement *MATLAB Simulink* (produit par la société THE MATHWORKS) en utilisant le logiciel multicorps *MESA VERDE* (produit par la société IPG), donnant naissance au logiciel *MADA* (Modélisation Avancée de Dynamique Automobile). Par ailleurs, les spécifications de *ARHMM* ont été implémentées par PSA PEUGEOT CITROËN dans l'environnement *LMS Imagine.Lab Amesim* (produit par la société SIEMENS, ex-LMS IMAGINE) en utilisant le logiciel multicorps *JAMES* (produit par la société SIMULOG), sous le nom de *SMASH Car*. L'implémentation *SMASH Car* a été utilisée chez PSA PEUGEOT CITROËN de 1997 à 2007 et a été remplacée depuis par une solution standard dans l'environnement *Amesim*, nommée *Amesim Vehicle Dynamics*, originellement développée lors d'un partenariat entre PSA PEUGEOT CITROËN et SIEMENS, ex-LMS IMAGINE [PMAL08]. Pour des raisons de compréhension des phénomènes physiques, de maîtrise des équations, de contraintes logiciel (modularité, pérennité, évolutivité, maintenance, portage, application temps réel [8]) [9], l'implémentation standard sous *Amesim* a été réalisée à l'aide du formalisme bond graph [PMAL09b], en se basant sur un certain nombre de travaux référents dans ce domaine [Kar76] [AD77] [All79] [BT85] [Bos86] [Pac87] [Mar87] [BA94]. L'approche a été validée de manière exhaustive dans le cadre de ce partenariat, en comparant notamment au référentiel historique que constituait l'implémentation *ARHMM/SMASH Car* [PMAL09a]. Les modèles bond graph proposés dans cette section sont issus des implémentations de la solution *Amesim Vehicle Dynamics*, dont seuls les spécifications et modèles du *module multicorps châssis* sont ici discutés et rapprochés au besoin de ceux de *ARHMM* [SAR94, SAR97].

Dans le contexte actuel de conception automobile, l'interaction entre les sous-systèmes du châssis, leur intégration au véhicule et leur contrôleur respectif sont d'emblée considérés dès les phases fonctionnelles amont. Les ABS/ESP sont à présent obligatoires dans de nombreuses législations automobiles, le couplage entre direction, freinage et suspension active devient de plus en plus courant et vise le contrôle global de châssis (GCC, pour « Global Chassis Control ») [Mur07]. Dans ce contexte, les modèles de conception et les outils de simulation doivent être capables de fournir un niveau de représentativité élevé ainsi que des possibilités intrinsèques d'assemblage, de couplage et d'intégration [Leb03]. Ces modèles et outils traitant nativement la multi-physique des phénomènes mise en jeu, ils permettent d'appréhender la conception et le développement du châssis du point de vue *mécatronique* telle qu'introduite en section 1.2 page 3. Un grand nombre de contraintes sur les outils dérive de ces besoins, et outre l'application multi-physique, nous noterons la nécessité de modularité, flexibilité, robustesse numérique [Rau03] ainsi que l'excellence de modélisation sur les verticalités métier, pour qu'un environnement commun de simulation puisse être pérenne sur le cycle de conception.

7. L'INRETS (Institut National de Recherche sur les Transports et leur Sécurité) a fusionné avec le LCPC (Laboratoire Central des Ponts et Chaussées) en janvier 2011 pour donner naissance à l'IFSTTAR (Institut Français des Sciences et Technologies des Transports, de l'Aménagement et des Réseaux).

8. Comprenant notamment les validations sur bancs HiL (Hardware-in-the-loop) [DANL13] et les applications sur simulateur de conduite [FAA+11] [BPA+13, BVG+14, BPG+14].

9. Dans un contexte similaire, les avantages du bond graph en conception mécatronique automobile sont également soulignés par ABADIE *et al.* [AGR00].

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

1.3.3 Modélisation fonctionnelle châssis

Dans le cadre de la modélisation et la simulation du comportement routier des véhicules, le qualificatif « fonctionnel », contrairement au sens qu'il revêt dans la section 1.2.3 pour la conception, fait ici référence aux modèles de connaissance « métier », basés sur une représentation équationnelle globale du véhicule. Cette classe de modèles est ici relativement vaste. Elle regroupe notamment les modèles usuels « Lacet/Dérive » et « Lacet/Dérive/Roulis » [Kar76] [Pac87] [Rau03] [Bro06], [Loy09], « Tangage/Pompage » [Pac87] [Bro09] [MFJ11b, MFJ11a], « Quart de véhicule » [Pac87] [Hal95], « 6 + 4 + 4 ddl » [Arn03] ou encore des modèles plus sophistiqués, tels ceux usuellement qualifiés de « modèles à 15 degrés de liberté », élaborés comme des modèles multi-corps complets et intégrant une liaison cinématique « avancée » entre le porte-fusée et la caisse [10] (et qui constitue en l'état une référence dans les approches fonctionnelles) [Rau03] [11]. Le niveau d'abstraction que constitue le modèle à « 15 degrés de liberté » est comparable à celui adressé dans les présents travaux *(voir détails en section 1.3.3)*.

En outre, le qualificatif « fonctionnel » s'oppose au qualificatif « organique » [12] associé, lui, à des logiciels multi-corps génériques (usuellement nommés « MBS » pour « Multi-Body Softwares » tels MSC ADAMS, LMS Virtual.Lab Motion (ex-DADS), SIMPACK, ou encore des applications plus anciennes comme JAMES, MESA VERDE, AUTOSIM, SD/FAST). Pouvant adopter différentes stratégies de description de coordonnées (cartésiennes, articulaires, libres) et de formalisation des systèmes d'équations (*Newton/Euler*, *Lagrange*, *travaux ou puissances virtuels*, ...) [BA94] [Ali97] [MF07], ces logiciels ont le point commun de représenter l'ensemble des solides et des liaisons cinématiques associés au châssis *i.e.* la caisse et l'ensemble des organes de la liaison au sol. Ils apparaissent généralement au niveau sous-systèmes *mécaniques* [13] dans le cycle de conception (figure 1.4). Si la classe de modèle organique, et les outils logiciels associés, a atteint un niveau de maturité important au cours des vingts dernières années, la classe de modèle fonctionnel conserve une évolutivité importante. Ceci est principalement dû au large spectre d'abstraction envisageable et l'apparition de problématiques multi-physiques et de pilotage d'actionneur très en amont dans le cycle de conception des véhicules. Nous pouvons garder à l'esprit que les outils de simulation fonctionnels en dynamique véhicule dans leur configuration usuelle (modèle « 15 ddl »), et pour des applications sur véhicule automobile de tourisme, sont utilisés dans des situations de vie basse fréquence (0 à 15 ou 20 Hz suivant les cas). La topologie du modèle multi-corps (au sens « 3D Functional Model ») est principalement choisie pour la représentation fonctionnelle des essieux et les contraintes temps réel auxquelles la simulation numérique doit répondre. Les principales limitations de l'approche fonctionnelle sont inhérentes à la définition de la liaison cinématique spécifique aux épures de suspension (« liaison glissière généralisée », voir section 1.3.3.1). Nous pouvons notamment citer le premier mode propre du train complet en longitudinal, souvent qualifié de « mode de *SHR* » (pour « Suspension Horizontal de

10. Notons que cette liaison cinématique « avancée » a été formalisée en multi-bond graph par Pacejka [Pac87]

11. Le modèle dit à « 15 degrés de liberté » est composé de 10 solides (1 caisse, 1 crémaillère, 4 porte-fusées et 4 roues) et l'ensemble des liaisons cinématiques entre ces 10 solides, où la liaison crémaillère/caisse est une liaison *glissière (prismatique)*, la liaison roue/porte-fusée est une liaison *pivot (rotoïde)* et la liaison porte-fusée/caisse est une liaison paramétrée appelée *glissière généralisée* comportant les corrections cinématiques du train (voir section 1.3.3.1).

12. Un traduction usuelle de l'approche organique est le « 3D component-oriented vehicle model », par opposition au « 3D Functional Model », autre terme désignant l'approche fonctionnelle [Rau03].

13. La précision *mécanique* est importante dans la mesure où l'ensemble des autres sous-systèmes châssis tels le système de direction, le système de freinage, le système de suspension, le système de transmission sont usuellement développés, au niveau *composant*, avec des approches de modélisation multi-physiques [PMAL09b].

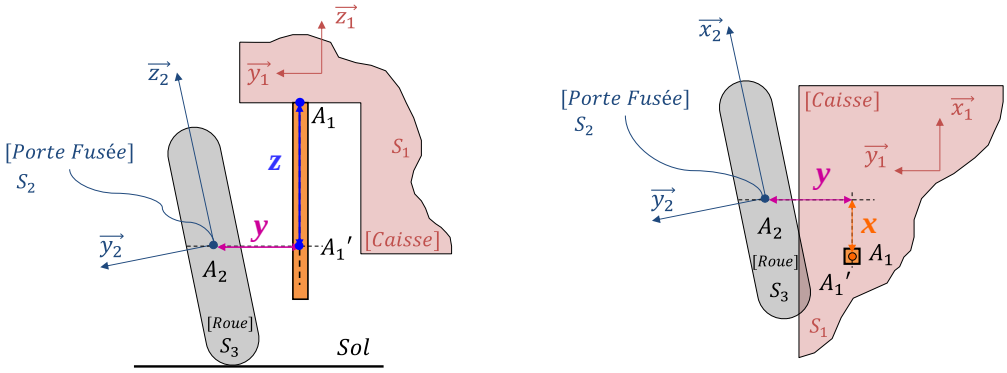
Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Roue »), que l'approche fonctionnelle ne peut représenter, intervenant notamment dans le phénomène de *shimmy*[14] [Bro25] [ALR01] [Rau03].

Dans le contexte de modélisation fonctionnelle châssis, nous proposons maintenant de détailler la classe de modèle bond graph qui justifiera en partie les orientations prises dans les travaux de ce mémoire. La présentation de la modélisation rappelle succinctement les approches de spécification et développement originels choisis par le *GIE SARA* [SAR94, SAR97] et la manière dont l'approche bond graph permet également d'y répondre. Dans les dénominations utilisées dans la section 1.3.3 et ses sous-sections, la « caisse » fait référence à la masse suspendue du châssis, le « porte-fusée » à la masse non suspendue. Également, la présentation est simplifiée de sorte qu'il n'est pas fait de distinction entre les différentes masses non suspendues : les *braqueuses tournantes* et *braqueuses non tournantes* sont comprises dans le « porte-fusée » et les *non braqueuses* sont comprises dans la « caisse ».

1.3.3.1 Liaison entre le porte fusée et la caisse

Nous détaillons dans cette section un point central de l'approche de modélisation « fonctionnelle » en dynamique du véhicule : la modélisation des essieux *i.e.* la liaison cinématique entre le porte-fusée[15] et la caisse, également qualifiée de *liaison glissière généralisée*. Pour des raisons de représentativité fréquentielle, le débattement vertical de la masse non-suspendue (braqueuse), auquel est associée la dynamique de rebond de roue, est conservé comme degré de liberté du système et noté z (figure 1.6). En revanche, les 5 autres mouvements relatifs du plan de jante par rapport à la caisse sont contraints et appliqués en tant que corrections cinématiques, fonctions du degré de liberté z[16]. Les



(a) Vue de derrière

(b) Vue de dessus

FIGURE 1.6 – Représentation des corrections cinématiques du solide « porte fusée » par rapport au solide « caisse » [SAR94]

courbes représentatives de l'évolution de ces variables en fonction de z sont les *épures du train* [SAR94]. Le point A_1' correspond à la position non corrigée du centre de masse du porte-fusée et le point A_2 correspond à la position corrigée (figures 1.6a et 1.6b). Le

14. Le shimmy de la direction « est une perturbation violente et périodique apportée dans la stabilité de l'essieu avant », où « le mouvement d'ensemble de l'essieu avant prend l'allure d'une rotation conique autour d'un axe parallèle à la route » [Bro25].

15. Le vocable « porte-fusée » est utilisé par abus de langage et désigne rigoureusement l'ensemble de la masse non suspendue braqueuse non-tournante.

16. En toute rigueur, les corrections cinématiques dépendent d'autres variables, en l'occurrence du débattement de la roue opposée z_{opp} et du déplacement de la crémaillère y_n pour un train directeur. Nous privilégions ici une présentation simplifiée de l'approche de modélisation.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

détail des corrections cinématiques du plan de jante est le suivant [17]

- variation de voie, notée x (figure 1.6b), où x est une fonction du degré de liberté z, notée ainsi $x(z)$.
- variation d'empattement $y(z)$ (figures 1.6a et 1.6b).
- angle de braquage $\delta_{rel}(z)$.
- angle de carrossage $\epsilon_{rel}(z)$.
- angle d'enroulement $\eta_{rel}(z)$.

Notons que le repérage du porte-fusée par rapport à la caisse est canonique (voir ci-après la décomposition d'Euler pour ce qui concerne les rotations). Il existe d'autres quantités usuelles de repérage des trains (angle et déport de chasse, angle et déport de pivot par exemple) qui peuvent toutes se reconstruire par rapport à celles présentées ci-dessus.

Il existe une position appelée « assiette de référence du train » (notion qui peut être très souvent confondue avec le « cas de charge de référence du véhicule ») pour laquelle les points A_1' et A_2 sont confondus. Notons en revanche que les trois angles (braquage, carrossage et enroulement) ne sont en général pas nuls à l'assiette de référence (on parle alors de *pincement initial*, *carrossage initial* du train [Hal95]). Ces angles repèrent le solide porte-fusée (solide noté S_2, auquel est lié le repère $R_2 = (A_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$) par rapport au solide caisse (noté S_1, auquel est lié le repère $R_1 = (A_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$) par une décomposition d'Euler paramétrée en z. Cette décomposition d'Euler de type (Z, X, Y), notée $TF_{1\to2}(z)$ dans (1.1), permet le passage du repère R_1 au repère R_2 par les rotations $\delta_{rel}(z)$, $\epsilon_{rel}(z)$ et $\eta_{rel}(z)$ respectivement autour de $\vec{z_1}$, $\vec{x_1'}$ et $\vec{y_2}$:

$$TF_{1\to2}(z) \rhd (\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1}) \xrightarrow[\vec{z_1}]{\delta_{rel}(z)} \left(\vec{x_1'}, \vec{y_1'}, \vec{z_1}\right) \xrightarrow[\vec{x_1'}]{\epsilon_{rel}(z)} \left(\vec{x_1'}, \vec{y_2}, \vec{z_1'}\right) \xrightarrow[\vec{y_2}]{\eta_{rel}(z)} (\vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2}) \quad (1.1)$$

La formalisation des équations de la dynamique du porte-fusée peut être réalisée en appliquant le principe des travaux virtuels [SAR94] (basé sur la méthode de Kane, discutée dans [BA94]). Pour cela, nous introduisons dans le repère caisse R_1, le déplacement relatif $\vec{\rho}$, la vitesse relative $\vec{v}$ et l'accélération relative $\vec{a}$:

$$\begin{aligned} \vec{\rho} &= \overrightarrow{A_1A_2} = \vec{r}(z) = x(z)\vec{x_1} + y(z)\vec{y_1} + z\,\vec{z_1} \\ \vec{v} &= \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z}\dot{z} \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z}\ddot{z} + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial z^2}\dot{z}^2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

ainsi que le déplacement virtuel $\delta\vec{\rho}$ du porte fusée au centre roue A_2 dans le repère caisse R_1 :

$$\delta\vec{\rho} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z}\delta z \quad (1.3)$$

Concernant les rotations, nous travaillons dans le repère d'Euler de la liaison, utilisant le $TF_{1\to2}(z)$ de (1.1). En définissant le vecteur $\vec{b} = \frac{\partial \delta_{rel}}{\partial z}\vec{z_1} + \frac{\partial \epsilon_{rel}}{\partial z}\vec{x_1'} + \frac{\partial \eta_{rel}}{\partial z}\vec{y_2}$, nous pouvons écrire le vecteur rotation instantané $\vec{\omega}$ du porte-fusée par rapport à la caisse

17. Les notations employées ici sont celles de la norme ISO 8855 (« Véhicules routiers - Dynamique des véhicules et tenue de route - Vocabulaire »). Pour éviter toute ambiguïté avec l'incrément δ utilisé dans le principe des travaux virtuels, le braquage sera noté $\delta_{rel}(z)$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

dans le repère d'Euler [18], ainsi que le vecteur accélération de rotation instantanée $\dot{\vec{\omega}}$:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \vec{b}\dot{z} \\ \dot{\vec{\omega}} &= \vec{b}\ddot{z} + \frac{\partial \vec{b}}{\partial z}\dot{z}^2 \end{aligned} \tag{1.4}$$

et le vecteur de rotation virtuel dans le repère d'Euler :

$$\delta\vec{\theta} = \vec{b}\,\delta z \tag{1.5}$$

Notons T^{ext} le torseur des efforts extérieurs appliqués sur le porte-fusée réduit au point A_2. Son expression dans le repère R_1 est la suivante :

$$T^{ext} = \left[\sum F^{ext}_{x1} \;\; \sum F^{ext}_{y1} \;\; \sum F^{ext}_{z1} \;\; \sum M^{ext}_{x1} \;\; \sum M^{ext}_{y1} \;\; \sum M^{ext}_{z1}\right]_{R_1} \tag{1.6}$$

Notons $\sum \vec{F^{ext}} = [\sum F^{ext}_{x1} \;\; \sum F^{ext}_{y1} \;\; \sum F^{ext}_{z1}]_{R_1}$ et $\sum \vec{M^{ext}} = [\sum M^{ext}_{x1} \;\; \sum M^{ext}_{y1} \;\; \sum M^{ext}_{z1}]_{R_1}$. En appliquant le principe des travaux virtuels au solide porte-fusée [19] et en considérant dans cette approche que R_1 est ici galiléen, nous obtenons [20] :

$$\left(m\vec{a} - \sum \vec{F^{ext}}\right)\cdot \delta\vec{\rho} \;+\; \left(J\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega}\wedge J\vec{\omega} - \sum \vec{M^{ext}}\right)\cdot \delta\vec{\theta} = 0 \tag{1.7}$$

en notant m et J respectivement la masse et l'inertie du solide porte-fusée [21]. Il est intéressant d'écrire la relation (1.7) dans le repère du solide caisse R_1, puisque dans cette approche, l'ensemble des degrés de liberté du modèle châssis est exprimé dans ce repère. Il est ainsi nécessaire de formuler la décomposition d'Euler $TF_{Euler\to 1}(z)$ entre le repère d'Euler de la liaison cinématique et le repère caisse, pour exprimer le vecteur $\vec{b}$ dans R_1 :

$$\begin{bmatrix} b_{x1} \\ b_{y_1} \\ b_{z_1} \end{bmatrix}_{R_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cos\delta_{rel}(z) & -\sin\delta_{rel}(z)\cos\epsilon_{rel}(z) \\ 0 & \sin\delta_{rel}(z) & \cos\delta_{rel}(z)\cos\epsilon_{rel}(z) \\ 1 & 0 & \sin\epsilon_{rel}(z) \end{bmatrix}}_{TF_{Euler\to 1}(z)} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\delta_{rel}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\epsilon_{rel}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\eta_{rel}}{\partial z} \end{bmatrix}_{R_{Euler}} \tag{1.8}$$

En utilisant (1.4), (1.5) et (1.8), nous pouvons écrire l'équation (1.7) de la manière scalaire concise suivante (respectant la formulation originelle de [SAR94]) :

$$\begin{aligned} \bar{m}(z)\ddot{z} &= \sum F^{ext}_{x1}\frac{\partial x}{\partial z} + \sum F^{ext}_{y1}\frac{\partial y}{\partial z} + \sum F^{ext}_{z1} \\ &+ \sum M^{ext}_{x1}\, b_{x1} + \sum M^{ext}_{y1}\, b_{y1} + \sum M^{ext}_{z1}\, b_{z1} \\ &- F^{inertiel}_{z} \end{aligned} \tag{1.9}$$

18. En d'autres termes, $\vec{\omega} \equiv \overrightarrow{\Omega}_{R_2/R_1}|_{R_{Euler}}$.

19. Bien que non évoqué dans la spécification [SAR94], il est important de préciser que les mouvements virtuels sont ici *compatibles* avec les liaisons cinématiques.

20. Nous conservons ici la formulation originelle synthétique de la spécification [SAR94]. Notons que pour la partie rotation, les vecteurs $\vec{\omega}$, $\dot{\vec{\omega}}$ et $\delta\vec{\theta}$ sont exprimés dans le repère d'Euler tandis que le vecteur $\sum \vec{M^{ext}}$ est exprimé dans R_1. Pour ce dernier, le produit scalaire $\sum \vec{M^{ext}}\cdot\delta\vec{\theta}$ nécessite l'expression préalable des vecteurs dans le même repère. Ce sera en l'occurrence le repère R_1 dans la suite du développement, avec les équations (1.8) et (1.9).

21. Ceci constitue à ce titre un point de vigilance important de l'approche fonctionnelle, dans la mesure où elle fait la distinction entre les éléments massiques du train appartenant au solide porte-fusée et ceux appartenant au solide caisse. On considère parfois un pourcentage massique de certaines pièces dans l'un des deux solides et le complémentaire dans l'autre.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

qui fait apparaître la masse condensée $\bar{m}(z)$ du système (dépendant de m et J, en l'occurrence $\bar{m}(z) = m\left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}\right]^2 + J\vec{b}^2$), les contributions des efforts extérieurs sur le degré de liberté z, et les efforts inertiels $F_z^{inertiel}$ en $\dot{z}^2$ qui s'expriment par :

$$F_z^{inertiel} = m\left[\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial z^2}\dot{z}^2\right]\left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}\right] + \left[J\frac{\partial \vec{b}}{\partial z}\dot{z}^2 + \vec{\omega} \wedge J\vec{\omega}\right] \cdot \vec{b} \tag{1.10}$$

L'équation (1.9) peut donc se mettre sous une forme *régulière* (appelée également représentation d'état *classique* ou *ODE* pour « Ordinary Differential Equation » soit donc « Equation Différentielle Ordinaire »). Dans le présent cas de figure où le mécanisme considéré est arborescent (*i.e.* ne contenant pas de boucle cinématique), la mise en équation par l'approche des travaux virtuels (1.7) conduit à des résultats similaires à ce que nous apporteraient les méthodes de *partition de coordonnées* ou de *projection* opérées par certains logiciels multicorps [MF07]. En l'occurrence cette dernière est celle utilisée par le logiciel *JAMES* [Ali97], utilisé pour générer le noyau symbolique du modèle de châssis de *SMASH Car*. La variable z est la seule variable articulaire du mécanisme décrit en figure 1.6 et confère ainsi en l'état le seul degré de liberté au système. Une traduction en bond graph des différentes manipulations des équations dans les outils multicorps a été proposée par Brix & Alirand [BA94], parmi lesquelles les approches « de type Lagrangienne » (*i.e.* où l'ensemble des paramètres du mouvement est conservé et où les équations de contraintes mécaniques sont traitées en introduisant les *multiplicateurs de* Lagrange [22]), ainsi que les approches basées sur le principe des travaux virtuels utilisés dans les précédents développements (équation (1.7)). Comme souligné par Marquis-Favre dans sa thèse [Fav97], les manipulations bond graph sur les éléments inertiels associées au principe des travaux virtuels proposées dans [BA94] permettent de retrouver les résultats énoncés par Allen [All79] sur le transfert d'inertie à travers les transformateurs modulés en mécanique multicorps [23]. Nous pouvons illustrer ce point avec les travaux de Alirand *et al.* [ALR01]. Si nous reprenons l'équation (1.7) et ne retenons que la translation pour simplifier la présentation, nous avons :

$$\left[m\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial z}\ddot{z} + \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\dot{z}^2 \\ \frac{\partial y}{\partial z}\ddot{z} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\dot{z}^2 \\ \ddot{z}\end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix}\sum F_{x1}^{ext} \\ \sum F_{y1}^{ext} \\ \sum F_{z1}^{ext}\end{pmatrix}^T\right] \cdot \begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial z} \\ 1\end{bmatrix} \delta z = 0 \tag{1.11}$$

Les équations (1.9) et (1.10) se simplifient ainsi :

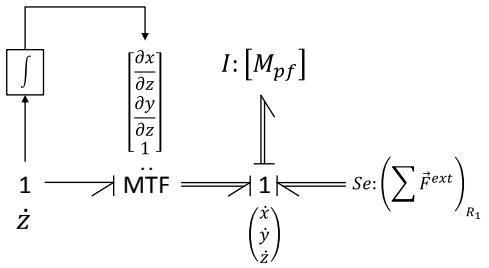
$$m\left[1 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2\right]\ddot{z} = \sum F_{x1}^{ext}\frac{\partial x}{\partial z} + \sum F_{y1}^{ext}\frac{\partial y}{\partial z} + \sum F_{z1}^{ext} - m\left[\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\frac{\partial y}{\partial z}\right]\dot{z}^2 \tag{1.12}$$

où l'on explicite ainsi la masse condensée $\bar{m}(z) = m\left[1 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2\right]$ du système (dépendant de m uniquement dans ce cas simplifié), les contributions des efforts extérieurs sur le degré de liberté z, et les efforts inertiels $F_z^{inertiel}$ en $\dot{z}^2$ de l'équation (1.10). En conservant les mêmes hypothèses et approches de modélisation, une traduction en bond graph du solide porte fusée et de sa liaison cinématique au châssis est celle proposée en figure 1.7a. Cette représentation explicite l'élément inertiel I : $[M_{pf}]$, où $[M_{pf}] = m \cdot I_{3\times 3}$.

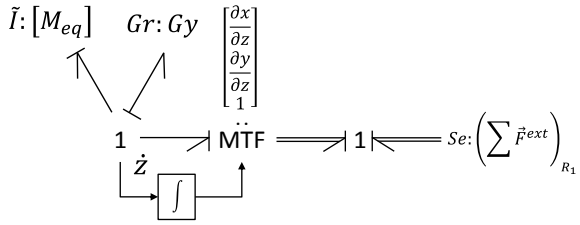
22. Aboutissant dans ce cas à des représentations d'états dites *singulières*.

23. Des précisions sont apportées dans [Fav97] sur la validité de l'approche de Allen [All79], en l'occurrence sur la nécessité que les inerties virtuelles soient en causalité intégrale, ce qui est le cas en pratique (et sera toujours le cas dans ce mémoire).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés



(a) Représentation bond graph simplifiée aux seuls mouvements de translation



(b) Éléments $\tilde{I}$ virtuel et gyristor G_r après passage à travers le MTF

FIGURE 1.7 – Représentation bond graph de la dynamique du porte-fusée

Le modèle bond graph de la figure 1.7b détaille le résultat du passage de cet élément I à travers le transformateur modulé MTF, aboutissant à l'élément $\tilde{I} : [M_{eq}]$ virtuel et au gyristor $Gr : [G_y]$ [All79]. En notant $[T_{Br}]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & 1 \end{bmatrix}$ la matrice caractéristique de l'élément MTF, celles associées à ces deux éléments sont respectivement les suivantes :

$$\begin{aligned} M_{eq} &= [T_{Br}]^T [M_{pf}] [T_{Br}] \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & 1 \end{bmatrix} [M_{pf}] \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & 1 \end{bmatrix}^T \\ &= m \left[1 + \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 \right] \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned} G_y &= [T_{Br}]^T [M_{pf}] \frac{d[T_{Br}]}{dt} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & 1 \end{bmatrix} [M_{pf}] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\dot{z} & \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\dot{z} & 0 \end{bmatrix}^T \\ &= m \left[\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\frac{\partial y}{\partial z} \right] \dot{z} \end{aligned} \tag{1.14}$$

L'équation (1.13) conduit au résultat de la masse condensée $\bar{m}(z)$ dans l'équation (1.12) et l'effort gyroscopique généralisé sur le lien du gyristor (figure 1.7b) est bien $F_z^{inertiel}$. L'effort extérieur $\sum \vec{F^{ext}}$ appliqué via la source d'effort Se sur la jonction 1 associée au solide porte-fusée (figure 1.7) peut également être remonté sur le degré articulaire z via le transformateur MTF. Cette opération conduit à :

$$F_{z\ total} = [T_{Br}]^T \begin{bmatrix} \sum F_{x1}^{ext} \\ \sum F_{y1}^{ext} \\ \sum F_{z1}^{ext} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum F_{x1}^{ext} \\ \sum F_{y1}^{ext} \\ \sum F_{z1}^{ext} \end{bmatrix} = \sum F_{x1}^{ext}\frac{\partial x}{\partial z} + \sum F_{y1}^{ext}\frac{\partial y}{\partial z} + \sum F_{z1}^{ext} \tag{1.15}$$

et permet de retrouver les contributions des efforts extérieurs de (1.12). Il nous est alors possible de simplifier le bond graph 1.7b suivant la figure 1.8, considérant les expressions M_{eq}, G_y et $F_{z\ total}$ respectives des équations (1.13), (1.14) et (1.15).

La contribution $\sum F_{x1}^{ext}\frac{\partial x}{\partial z} + \sum F_{y1}^{ext}\frac{\partial y}{\partial z}$ de l'effort $F_{z\ total}$ dans (1.15) représente « l'effet Broulhiet » du train (du nom de l'ingénieur Georges BROULHIET, qui l'a mis en évidence

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

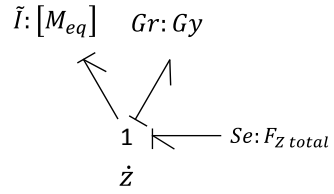


FIGURE 1.8 – Représentation bond graph de la dynamique du porte-fusée en termes de coordonnée articulaire z

et formalisé pour la première fois en 1930 dans l'article référent [Bro30] [24]). Il s'agit du torseur d'effort appliqué du porte-fusée sur la caisse, passant par les pièces de train, excluant ainsi dans le cas général les efforts de suspension (passant par les pièces de suspension) et les couples de transmission (passant par les arbres de transmission), selon la formalisation de Benoît PARMENTIER (PSA PEUGEOT CITROËN). ARNOUX [Arn03] qualifie l'« effet Broulhiet » par les déformations *cinématiques* [25] des trains qui modifient la position de l'axe principal de rotation de la caisse en roulis ou en tangage. Comme introduit dans [Bro30] et discuté dans [Arn03] et [Bro09], ces effets cinématiques anti-plongée au freinage, anti-cabrage à l'accélération, ou anti-roulis en virage permettent un meilleur contrôle des attitudes de caisse (en tangage et roulis) et une meilleure stabilité du véhicule. En pratique, les efforts de Broulhiet sont assez délicats à caractériser, y compris en simulation de manière générale (car le traitement symbolique des logiciels multicorps globalise les efforts statiques et les efforts gyroscopiques généralisés, comme par exemple dans *JAMES* – aboutissant à une formulation du type (1.12) – et donc dans *SMASH Car*). En revanche, l'approche bond graph (exemple de la figure 1.7b) permet de caractériser nativement, dans la remontée d'efforts, ceux de Broulhiet (par exemple dans l'implémentation *Amesim Vehicle Dynamics*).

En conclusion, la présente section 1.3.3.1 nous a permis d'introduire un point fondamental de l'approche de modélisation « fonctionnelle » en dynamique du véhicule : la modélisation de la liaison cinématique entre le porte-fusée et la caisse. Cette *liaison glissière généralisée* fait apparaître 5 équations de contrainte et le degré de liberté de débattement vertical z selon $\vec{z}_1$, variable articulaire de ce mécanisme arborescent. Selon l'approche de « type Lagrangienne », une mise en équation du système est possible en conservant l'ensemble des 6 déplacements du porte-fusée (en coordonnées cartésiennes) et les 5 équations de contraintes, conduisant à un système *algébro-différentiel* (également appelé système *singulier* ou système *implicite*), dont les spécificités seront discutées au chapitre 3 dans le cas linéaire. Il est envisageable de conserver cette formulation en coordonnées dépendantes pour l'implémentation logicielle (en utilisant par exemple la *Stabilisation de Baumgarte* ou la *Méthode des pénalités* [MF07]). Il est également envisageable de reformuler le problème mécanique en coordonnées indépendantes, comme nous l'avons vu dans cette section à l'aide du principe des travaux virtuels (approche originelle des spécifications dans [SAR94] et équivalente à la *méthode de projection* [BA94] utilisée dans le logiciel *JAMES* [Ali97]) ou à l'aide du bond graph, grâce aux approches de ALLEN [All79] [BA94] [Fav97] permettant les transferts d'inertie sur les variables in-

24. C'est également Georges BROULHIET qui a mis en lumière le phénomène de dérive du pneumatique dans les années 1920 [Arn03].

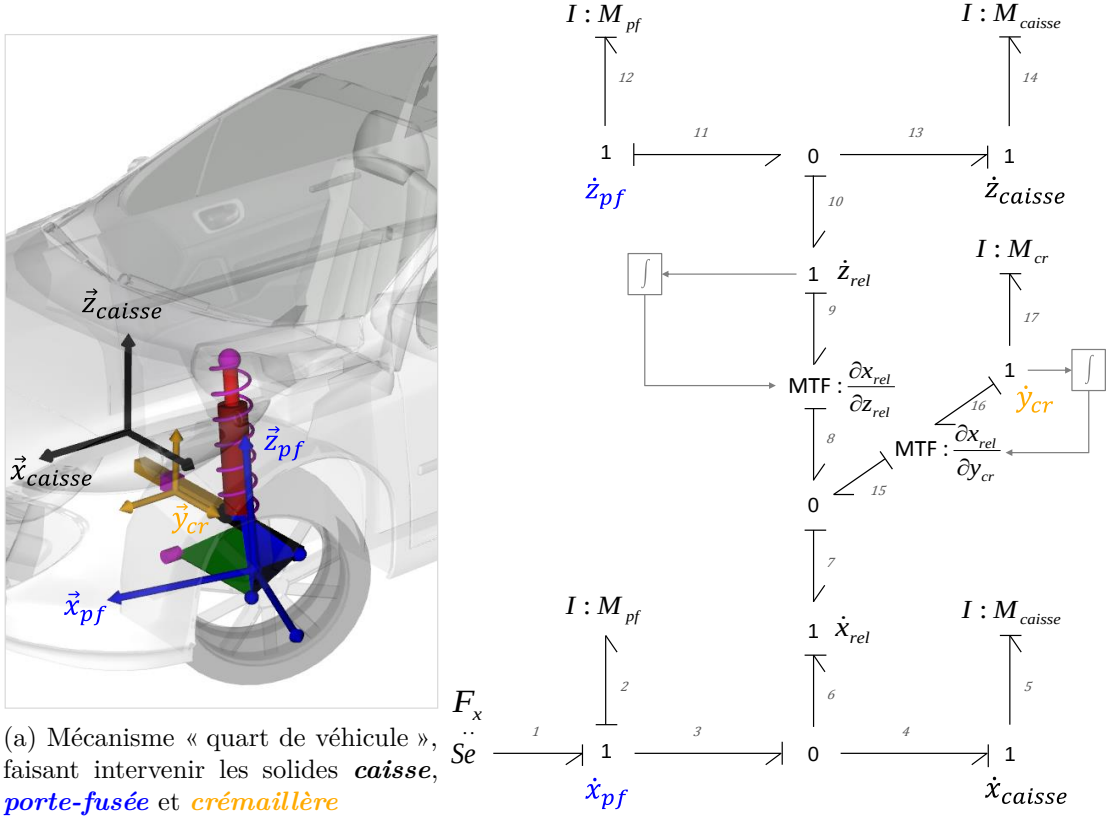
25. Par opposition aux déformations *élastiques*, qui sont des déformations sous efforts internes du train. Ces dernières sont composées aux déformations *cinématiques* pour induire de manière globale l'*élastocinématique* des trains.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

dépendantes (aboutissant dans notre exemple à l'inertie équivalente (1.13) et les effets gyroscopiques généralisés (1.14)). Ces approches du type « coordonnées indépendantes » permettent une formulation du système d'équation sous une forme *régulière*. En termes d'implémentation logiciel, elle répondent notamment ainsi aux contraintes d'exécution en *temps réel*[26]. Si le bond graph permet également d'aboutir aux mêmes manipulations que les approches classiques du type « coordonnées indépendantes » et ainsi aux mêmes implémentations logicielles, il n'est pas toujours intéressant de se ramener à ce type de représentation. La topologie du modèle originel conserve un grand intérêt puisqu'il représente nativement le système (exemple de la figure 1.7a). Il offre ainsi l'opportunité, entre autre, de travailler sur la *topologie* du modèle, base de l'*analyse structurelle* que nous allons aborder dans ce mémoire.

1.3.3.2 Modèle multicorps simplifié du châssis à quatre degrés de liberté

Cette section détaille l'approche de modélisation multicorps du châssis, en utilisant les concepts exposés dans la section précédente. Nous proposons dans un premier temps d'introduire le modèle « quart de véhicule X_Z » de la figure 1.9[27], établi dans [PMAL09b]. Ce modèle ne fait pas intervenir ici les efforts verticaux de suspension (*i.e.* liés aux ressort, amortisseur, butées d'attaque et détente et barre anti-roulis) pour n'expliciter que les liaisons cinématiques entre les solides (et mettre ainsi plus facilement en évidence les remontées d'effort par le train *i.e.* l'« effet Broulhiet »). Nous formulons



(a) Mécanisme « quart de véhicule », faisant intervenir les solides ***caisse***, ***porte-fusée*** et ***crémaillère***

(b) Modèle simplifié à quatre degrés de liberté

FIGURE 1.9 – Modèle multicorps simplifié à la translation dans le plan $\{XZ\}$, avec crémaillère [PMAL09b]

26. Voir par exemple les applications [FAA+11] et [BVG+14].

27. Si le mécanisme est ici illustré, en figure 1.9a, avec un train de type *McPherson*, l'approche fonctionnelle permet une modélisation générique de tous les types de trains usuels.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

dans un premier temps la description en coordonnées cartésiennes absolues. Ce modèle fait ainsi intervenir les degrés de liberté suivants :

— le déplacement vertical absolu de caisse, dont la vitesse est notée $\dot{z}_{caisse}$ sur le bond graph (figure 1.9b),
— le déplacement horizontal absolu de caisse, dont la vitesse est notée $\dot{x}_{caisse}$,
— le déplacement vertical absolu du porte-fusée, dont la vitesse est notée $\dot{z}_{pf}$,
— le déplacement latéral absolu de la crémaillère, dont la vitesse est notée $\dot{y}_{cr}$.

Le mouvement horizontal absolu du porte-fusée, dont la vitesse est notée $\dot{x}_{pf}$, est un mouvement cinématiquement contraint. La représentation bond graph 1.9b explicite que ce mouvement dépend algébriquement des quatre degrés de liberté du système,

$$\begin{aligned} \dot{x}_{pf} &= \dot{x}_{caisse} + \frac{\partial x_{rel}}{\partial z_{rel}} \underbrace{(\dot{z}_{pf} - \dot{z}_{caisse})}_{\dot{z}_{rel}} + \frac{\partial x_{rel}}{\partial y_{cr}} \dot{y}_{cr} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x_{rel}}{\partial z_{rel}} & 1 & -\frac{\partial x_{rel}}{\partial z_{rel}} & \frac{\partial x_{rel}}{\partial y_{cr}} \end{bmatrix}}_{[T_{Br\ 4ddl}]} \begin{bmatrix} \dot{z}_{pf} \\ \dot{x}_{caisse} \\ \dot{z}_{caisse} \\ \dot{y}_{cr} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.16}$$

en notant respectivement x_{rel} et z_{rel} les déplacements relatifs *horizontal* et *vertical* du solide porte-fusée par rapport au solide caisse (*i.e.* $x_{rel} = x_{pf} - x_{caisse}$ et $z_{rel} = z_{pf} - z_{caisse}$). Du point de vue des efforts remontés sur les degrés de liberté du système, la force F_x associée à l'élément Se du modèle 1.9b impacte ainsi l'ensemble des degrés de liberté du système (conservation de puissance de la structure de jonction). L'effort total issu du porte fusée est $e_3 = F_x - M_{pf}\ddot{x}_{pf}$ compte tenu de la causalité de l'élément $I : M_{pf}$. A partir du $T_{Br\ 4ddl}$ de (1.16), nous avons :

$$\begin{bmatrix} e_{12} \\ e_5 \\ e_{14} \\ e_{17} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x_{rel}}{\partial z_{rel}} \\ 1 \\ -\frac{\partial x_{rel}}{\partial z_{rel}} \\ \frac{\partial x_{rel}}{\partial y_{cr}} \end{bmatrix}}_{[T_{Br\ 4ddl}]^T} e_3 \tag{1.17}$$

En ne considérant que la composante statique de l'effort dans les considérations qui suivent, qui sont de l'ordre du « métier », la modélisation illustre plusieurs éléments notoires en dynamique du véhicule :

— *Composante* $F_{x_{caisse}} = F_x$ *:* de manière assez logique, l'effort appliqué au porte-fusée (effort du pneumatique) est directement répercuté sur le solide caisse. Il permet d'accélérer ou freiner le solide caisse (*i.e.* de transmettre la motricité au véhicule).

— *Composante* $F_{z_{caisse}} = -\frac{\partial x_{rel}}{\partial z_{rel}} F_x$ *:* cette composante révèle l'« effet Broulhiet » [Bro30] *i.e.* composante verticale de l'effort sur la caisse générée par un effort longitudinal sur le porte-fusée et ce, par le biais de la cinématique du train (élément $MTF : \frac{\partial x_{rel}}{\partial z_{rel}}$ sur le bond graph de la figure 1.9b). Cette composante correspond à des actions anti-plongée au freinage et anti-cabrage à l'accélération. Transposé

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

aux efforts transversaux, il existe une possibilité de générer des actions anti-roulis en virage.

— *Composante* $F_{y_{cr}} = \dfrac{\partial x_{rel}}{\partial y_{cr}} F_x$ *:* cette composante illustre le lien de puissance entre le porte-fusée et la crémaillère. Dans le présent cas de la figure 1.9b, la remontée d'effort à travers le MTF : $\dfrac{\partial x_{rel}}{\partial y_{cr}}$ correspond aux effets de *déport de pivot* et de *déport de chasse* du train permettant à un conducteur d'avoir, entre autres, un ressenti au volant des efforts généré au niveau du sol par les pneumatiques, notamment l'adhérence au sol [28] [29]. Notons en outre que l'*angle de pivot* et l'*angle de chasse* ne font pas partie de la décomposition canonique d'Euler usuellement choisie en dynamique véhicule (*i.e.* braquage, carrossage, enroulement) mais peuvent être algébriquement exprimés à partir des angles de cette décomposition canonique. Ils apparaissent de manière sous-jacente dans (1.18).

En adoptant à présent une démarche similaire à celle nous ayant permis de formuler l'équation (1.13), dont le détail est proposé en annexe G, il est envisageable de déterminer la matrice de masse équivalente associée aux degrés de liberté du mécanisme (*i.e.* élément $I : M_{eq}$ de la figure 1.8). En notant $[M_{ddl}] = diag\,(M_{pf}, M_{caisse}, M_{caisse}, M_{cr})$, la matrice de masse initiale des degrés de liberté du système et $[M_{eq\,4ddl}]$ la matrice de masse équivalente virtuelle correspondant à une description en « coordonnées indépendantes » du système, nous avons ainsi :

$$
\begin{aligned}
[M_{eq\,4ddl}] &= [T_{Br\ 4ddl}]^T\, M_{pf}\, [T_{Br\ 4ddl}] + [M_{ddl}] \\
&= \begin{bmatrix}
M_{pf}+M_{pf}\left(\dfrac{\partial x_{rel}}{\partial z_{rel}}\right)^2 & M_{pf}\dfrac{\partial x_{rel}}{\partial z_{rel}} & -M_{pf}\left(\dfrac{\partial x_{rel}}{\partial z_{rel}}\right)^2 & M_{pf}\dfrac{\partial x_{rel}}{\partial z_{rel}}\dfrac{\partial x_{rel}}{\partial y_{cr}} \\
M_{pf}\dfrac{\partial x_{rel}}{\partial z_{rel}} & M_{caisse}+M_{pf} & -M_{pf}\dfrac{\partial x_{rel}}{\partial z_{rel}} & M_{pf}\dfrac{\partial x_{rel}}{\partial y_{cr}} \\
-M_{pf}\left(\dfrac{\partial x_{rel}}{\partial z_{rel}}\right)^2 & -M_{pf}\dfrac{\partial x_{rel}}{\partial z_{rel}} & M_{caisse}+M_{pf}\left(\dfrac{\partial x_{rel}}{\partial z_{rel}}\right)^2 & -M_{pf}\dfrac{\partial x_{rel}}{\partial z_{rel}}\dfrac{\partial x_{rel}}{\partial y_{cr}} \\
M_{pf}\dfrac{\partial x_{rel}}{\partial z_{rel}}\dfrac{\partial x_{rel}}{\partial y_{cr}} & M_{pf}\dfrac{\partial x_{rel}}{\partial y_{cr}} & -M_{pf}\dfrac{\partial x_{rel}}{\partial z_{rel}}\dfrac{\partial x_{rel}}{\partial y_{cr}} & M_{cr}+M_{pf}\left(\dfrac{\partial x_{rel}}{\partial y_{cr}}\right)^2
\end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

Le bond graph associé à cette transformation est proposé en figure G.8 page 346 (l'annexe G détaille également le gyristor $[Gy_{4ddl}]$ issu du passage de l'élément $I : M_{pf}$ à travers le $MTF : [T_{Br\ 4ddl}]$). En ne s'intéressant qu'aux termes diagonaux de la matrice de masse équivalente $[M_{eq\,4ddl}]$ de (1.19), nous allons retrouver un certain nombre d'éléments consistant avec ceux discutés sur la remontée d'effort puisqu'impliquant le même transformateur, caractérisé par la matrice $T_{Br\ 4ddl}$ présente dans (1.16). En considérant

28. Une présentation « métier » des déports de pivot et chasse est proposée par Halconruy [Hal95], précisant le caractère stabilisant qu'il est possible d'apporter au véhicule par ces effets « cinématiques » du train.

29. Dans l'approche fonctionnel, il est possible d'approcher de manière assez fiable les « bras de levier » que représentent les *déport de pivot* et *déport de chasse* de la manière suivante :

$$
\textit{déport chasse} : \Delta X \approx \frac{\dfrac{\partial y_{rel}}{\partial y_{cr}} - R_{roue}\dfrac{\partial \epsilon_{rel}}{\partial y_{cr}}}{\dfrac{\partial \delta_{rel}}{\partial y_{cr}}} \quad , \quad \textit{déport pivot} : \Delta Y \approx -\frac{\dfrac{\partial x_{rel}}{\partial y_{cr}} + R_{roue}\dfrac{\partial \eta_{rel}}{\partial y_{cr}}}{\dfrac{\partial \delta_{rel}}{\partial y_{cr}}} \tag{1.18}
$$

où δ_{rel}, ϵ_{rel} et η_{rel} correspondent aux angles présentés pour la liaison cinématique généralisée (section 1.3.3.1) relativement à la caisse.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

le terme diagonal associé au degré de liberté de la crémaillère y_{cr}, $M_{cr} + M_{pf}\left(\frac{\partial x_{rel}}{\partial z_{rel}}\right)^2$, il est aisé de comprendre que, pour un véhicule, si la masse « propre » du solide crémaillère M_{cr} est de l'ordre de 2 kg environ, la masse « équivalente » avec l'ensemble des contributions des 5 mouvements contraints par roue de l'essieu directeur, peut atteindre des ordres de grandeur de 200 kg et justifie en partie le besoin d'avoir une assistance de direction.

Remarque : nous privilégions une présentation en coordonnées cartésiennes absolues par souci de clarté. Dans le cas du modèle 1.9b, le repérage en coordonnées articulaires nous imposerait de considérer la variable de déplacement relatif z_{rel} de la suspension entre les solides porte-fusée et caisse (*i.e.* $z_{rel} = z_{pf} - z_{caisse}$). La matrice $[T_{Br\ 4ddl}]$ de (1.16) serait modifiée de la manière suivante [PMAL09b] :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{pf} \\ \dot{z}_{pf} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x_{rel}}{\partial z_{rel}} & 1 & 0 & \frac{\partial x_{rel}}{\partial y_{cr}} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{[T'_{Br\ 4ddl}]} \begin{bmatrix} \dot{z}_{rel} \\ \dot{x}_{caisse} \\ \dot{z}_{caisse} \\ \dot{y}_{cr} \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

Cela modifie légèrement la matrice d'inertie virtuelle équivalente $[M_{eq\,4ddl}]$ de (1.19). Le mouvement de crémaillère est ici relatif dans la mesure où, dans ce modèle simplifié, la caisse n'a pas de degré de liberté sur l'axe y. En outre, nous ne détaillons pas ici le gyristor associé au transfert de masse à travers le MTF, qui, comme dans le cas du $Gr : [Gy_{4ddl}]$ (G.2) page 344, n'a pas de déclinaison aussi directe en dynamique véhicule que celles liées aux relations cinématiques (1.16) et (1.20), à la remontée d'effort (1.17) et à la matrice de masse équivalente (1.19). Il serait calculé de la même manière que $Gr : [Gy_{4ddl}]$ (le détail de calcul est donné dans [PMAL09b]).

Cette section nous a permis d'introduire l'intérêt de l'approche de modélisation multicorps fonctionnelle utilisant le formalisme bond graph. Il garantit de développer un modèle de connaissance, physique et conservatif en puissance, en considérant l'ensemble des phénomènes usuellement approchés en dynamique du véhicule soit par les flux (centre de roulis), soit par les efforts (effets Broulhiet, jacking effect). Ceci représente très souvent un point de vigilance important dans les approches fonctionnelles où la considération des flux et efforts est approchée séparément. Citons dans un premier temps les travaux de spécification *SARA* ou de Arnoux qui précisent la nécessité d'associer à la correction cinématique, un effort interne à la liaison cinématique appelé effet Broulhiet qui s'applique en plus du torseur d'effort extérieur appliqué au centre roue corrigé [SAR94] [Arn03]. Citons également les travaux de Mechin, où l'effet Broulhiet est une source d'effort aboutissant ainsi dans le cas simplifié étudié à un modèle « incomplet », bien que conservatif du point de vue du bond graph, car l'effet dual sur la cinématique du train n'est pas représenté [Mec03] [MFBM+06]. Par ailleurs, l'intérêt de l'approche multicorps fonctionnelle en bond graph se trouve également dans la relative simplicité et pérennité [30] d'implémentation logicielle de ce type de modèle. Comme nous l'avons vu, la connaissance d'un transformateur du bond graph (exemple du MTF caractérisé par $[T_{Br\ 4ddl}]$

30. Un certain nombre de logiciels industriels référents en dynamique véhicule fonctionnelle possède un noyau multicorps généré à partir d'un logiciel multicorps générique, nécessitant la maintenance dudit logiciel pour assurer la maintenance de la déclinaison fonctionnelle. Citons le logiciel *MSC CarSim*, dont le noyau multicorps est issu de la génération symbolique de AUTOSIM ou de *IPG Carmaker* issu de MESA VERDE. Le développement par l'approche bond graph n'est tributaire d'aucun logiciel symbolique et le code est issu de l'écriture des équations bond graph et n'est pas du code automatiquement généré (souvent délicat à interpréter).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

(1.16)) permet de générer par des manipulations simples l'ensemble des équations du système (*flux*, *efforts*, *masses virtuelles équivalentes* et *effets gyroscopiques généralisés i.e. gyristor* lié au transfert de masse par un MTF, voir figure 1.8). Enfin, le modèle de connaissance obtenu par l'approche bond graph permet de localiser et dissocier l'ensemble des effets usuels de la dynamique du véhicule (efforts *statiques* de type Broulhiet, efforts *dynamiques* de type gyroscopique) dont la considération a un grand intérêt dans la conception fonctionnelle en dynamique du véhicule et en spécification de la liaison au sol.

1.3.3.3 Modèle de référence pour l'analyse structurelle

Cette section propose un modèle de référence et sa représentation bond graph pour les travaux de ce mémoire en figure 1.10, détaillé dans [AL07], développé sur la base du modèle de la figure 1.9. Il possède six degrés de liberté cinématique et son niveau de complexité est représentatif du modèle dit « à 15 degrés de liberté » de la solution *Amesim Vehicle Dynamics*. Nous ne considérons toujours pas ici les rotations du train par rapport à la caisse, qui ajoutent une complexité de représentation et d'implémentation associée à la décomposition d'Euler liée aux angles de braquage, carrossage et enroulement (voir section 1.3.3.1), mais pas de spécificité supplémentaire au modèle. Pour conserver une clarté de présentation et une continuité par rapport au modèle de la figure 1.9, les degrés de liberté sont ici associés à des mouvements *absolus*[31]. En revanche, nous introduisons ici un effet statique (du point de vue des efforts) supplémentaire et relativement important en modélisation dynamique du véhicule, le *rappel gravitaire de direction*. Le phénomène physique est précisé par Halconruy [Hal95]. L'effet d'inclinaison de pivot a tendance à « faire rentrer la fusée dans le sol » lors d'une rotation du porte-fusée autour de l'axe de pivot dû à un braquage. Le rayon de roue ne variant que très peu (la raideur du pneu est très élevée, avec un ordre de grandeur de 200 000 N/m), la caisse a tendance à se soulever. Le poids du véhicule tend à s'opposer au mouvement et à faire reprendre à la roue sa position initiale [Hal95], donnant littéralement son nom au phénomène de « rappel à la position initiale par la gravité ». Cet effet se cumule avec celui de déport de chasse, selon [Hal95], mais également avec le déport de pivot. Dans la modélisation fonctionnelle, l'angle de pivot ne faisant pas partie de la décomposition canonique d'Euler entre porte-fusée et caisse, une modélisation possible du rappel gravitaire peut se faire par un lien de puissance et un MTF : $\dfrac{\partial z_{susp}}{\partial y_{cr}}$ entre le ressort de suspension et la crémaillère [AL07] (figure 1.10). L'effet de détente du ressort de suspension est substitué à la compression du ressort vertical du pneumatique dans ce cas et l'effet de « rappel par la gravité » est effectif dans les deux cas. Le modèle fait intervenir les déplacements latéraux des solides caisse et porte-fusée, respectivement y_{pf} (contraint) et y_{caisse} (degré de liberté). Ajoutons également la présence d'une démultiplication de suspension (associée au MTF : $\dfrac{\partial z_{susp}}{\partial z_{rel}}$) modélisant l'implémentation de l'organe de suspension, dont l'orientation n'est généralement pas suivant $\vec{z}_1$ (verticale caisse). La description des variables du modèle de la figure 1.10 est ainsi la suivante :

— degrés de liberté cinématique du modèle (6 ddl, paramétrage absolus) :
  — x_{caisse}, y_{caisse}, z_{caisse} (masse suspendue),
  — z_{pf} (masse non suspendue),

31. Nous avons discuté dans la section précédente la manipulation à réaliser pour obtenir une description articulaire du mécanisme (voir remarque liée à l'équation (1.20)). Dans le présent cas du modèle proposé en figure 1.10, il faudrait étendre le principe à la crémaillère dans la mesure où le mouvement latéral de caisse est ici considéré.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

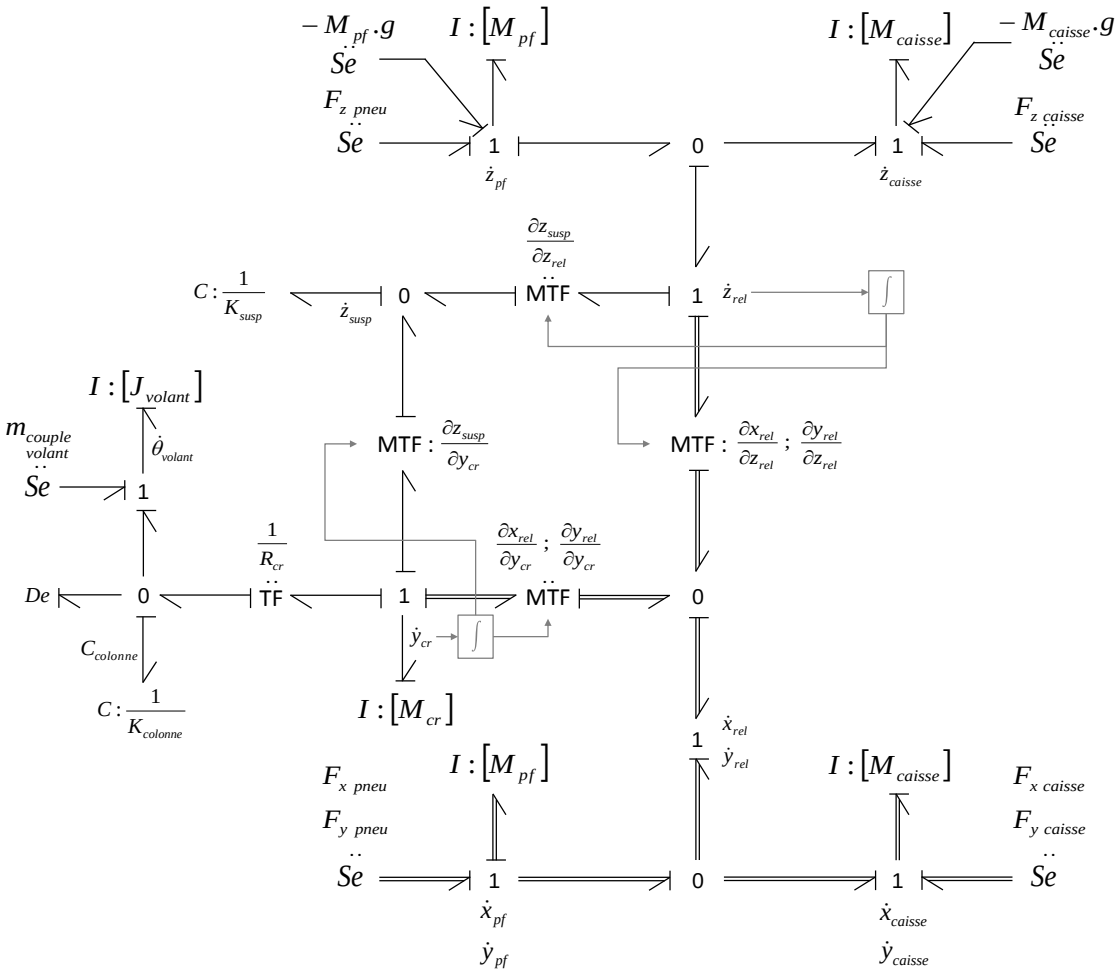


FIGURE 1.10 – Modèle multicorps quart de véhicule à 6 degrés de liberté, simplifié à la translation, avec crémaillère et rappel gravitaire de direction [AL07]

  - y_{cr} (crémaillère),
  - θ_V (volant).
- mouvements cinématiques contraints :
  - x_{pf}, y_{pf} (masse non suspendue)
- liaison cinématique sur $\overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{y_1}$, $x_{rel}(z_{rel}, y_{cr})$ et $y_{rel}(z_{rel}, y_{cr})$
- rappel gravitaire de direction modélisé par le couplage cinématique entre y_{cr}, z_{susp}, z_{pf} et z_{caisse}
- variables d'états du modèle ($n = 8 + 2$) :
  - $p_{x_{caisse}}$, $p_{y_{caisse}}$, $p_{z_{caisse}}$ (moments généralisés masse suspendue),
  - $p_{z_{pf}}$ (moment généralisé masse non suspendue),
  - p_{cr} (moment généralisé crémaillère),
  - q_{susp} (déplacement généralisé ressort suspension),
  - p_V (moment généralisé inertie volant),
  - q_V (déplacement généralisé ressort colonne),
  - *deux états supplémentaires sont introduits pour le calcul de z_{rel} et y_{cr}, pour le pilotage des MTF.*

Comme précédemment évoqué, le modèle de la figure 1.10 est représentatif de la complexité des modèles multicorps industriels de la solution *Amesim Vehicle Dynamics*,

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

développés grâce au bond graph. Les caractéristiques de ce modèle représentent une partie des spécifications du besoin en *analyse structurelle* abordée en section 1.4 de ce chapitre 1. Elles justifient les orientations prises aux chapitres 3 et 4 sur l'intérêt d'étendre les approches existantes en analyse structurelle (chapitre 2) à la classe des *systèmes singuliers*, qui est nativement la classe de système à laquelle les approches mécaniques multicorps aboutissent (sous entendu avant le traitement potentiel par des méthodes de *partition de coordonnées*, de *projections* ou encore de *stabilisation de Baumgarte* ou *pénalités* [MF07], comme évoqué en section 1.3.3.1 page 12). Notons que dans le cadre des présents travaux, nous avons implémenté le modèle de la figure 1.10 dans différents logiciels, en l'occurrence *MS1* [MS1] pour l'analyse structurelle et *Amesim* [Sie] pour la simulation numérique de référence que va constituer ce modèle direct (pour notamment valider les modèles inverses développés et détaillés dans la suite de ce mémoire, voir annexe F page 327).

1.4 Analyse structurelle pour la conception et le dimensionnement, approche par modèle bond graph inverse

1.4.1 Introduction

Cette section aborde la présentation de *méthodologies* supportant la conception et le dimensionnement des systèmes mécatroniques ainsi que la synthèse de leur cahier des charges. Nous souhaitons également détailler ici l'approche du laboratoire Ampère, qui propose une méthodologie basée sur l'inversion de modèle en utilisant le formalisme bond graph et ses propriétés structurelles.

Il existe différentes approches méthodologiques de conception. Nous discutons tout d'abord de la démarche communément rencontrée en prototypage virtuel qui est une méthode dite d'« essai → erreur → correction », consistant à exploiter un modèle direct de manière itérative en l'affinant (au niveau de sa structure et/ou de ses paramètres) pour viser certaines performances (formulées dans un cahier des charges). Les modèles peuvent être plus ou moins élaborés (statiques/dynamiques/énergétiques), associés à différents niveaux d'abstraction (figure 1.5 page 7), et il en est de même pour les itérations (« manuelles », ou associées à une démarche complexe d'optimisation robuste [Loy09]). D'autres démarches existent, dont certaines relativement anciennes, élaborant par exemple des *critères de sélection* de composant en formulant des conditions d'adéquation entre une charge (spécifiée par le cahier des charges) et un actionneur (à dimensionner). Ces démarches, comme celle de Newton Jr [NJ50] ou celle de Cœuillet [Coe69] [32] ne sont souvent adaptées que dans des cas de systèmes simplifiés, et limitées à des critères statiques obtenus en considérant des régimes de fonctionnement critiques. Il peut en outre s'avérer que les performances dynamiques et/ou énergétiques du système soient plus dimensionnantes. Ces démarches de sélection ont pour autant inspirées fortement le processus d'élaboration de la méthodologie du laboratoire Ampère. Nous clarifierons dans quelle mesure une approche *inverse* peut être parfois plus pertinente dans certain cas qu'une approche « essai → erreur → correction » construite par essence sur une approche *directe*.

L'intérêt du bond graph dans cette démarche de conception va également être étayé, en retrouvant notamment des points évoqués dans les précédentes sections. L'une des particularités de la démarche de conception par modèle inverse est sa phase d'analyse

32. Ces méthodes sont détaillées dans la thèse de Fotsu-Ngwompo [FN97] et rappelées dans celle de Jardin [Jar10].

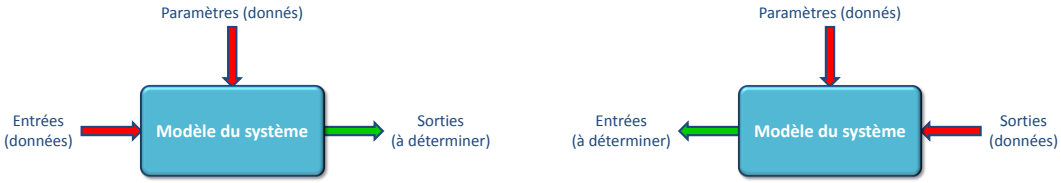
Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

structurelle en bond graph, rendue possible par essence du formalisme et grâce aux travaux référents de Rahmani [Rah93, RSDT97] (notamment repris dans les références [DT99, DT00]). La présentation faite dans cette section s'appuie sur les travaux de Fotsu-Ngwompo [FNST96, FN97, FN98, NNST01, NBS05] et la formalisation de Jardin [Jar10], synthétisée dans les références [MFJ11b, MFJ11a].

Ajoutons que cette démarche de conception, générique à l'ensemble des applications mécatroniques, s'est avérée également adaptée à la conception fonctionnelle châssis (cadre privilégié des illustrations faites dans ce mémoire) pour différents sous-systèmes du véhicule (figure 1.2, page 4), en l'occurrence, en dimensionnement du sous-système de direction assistée [Mec03, MMFSF03], de chaîne de traction hybride [Laf04] [BLD+05], du sous-système suspension [FN98] ou encore du contrôle actif de châssis [Mec03].

1.4.2 Principe de l'inversion, intérêt pour la conception

En nous plaçant au niveau de conception *système*, *sous-système* ou *composant* (figure 1.4 page 6) et dès lors que l'architecture du système (ou du sous-système, suivant le niveau de conception) est définie, le *problème de dimensionnement* défini en section 1.2.3 consiste à *sélectionner* et/ou *valider* les sous-systèmes (ou les composants, suivant le niveau de conception) de la chaîne d'actionnement pour satisfaire le cahier des charges. Le cahier des charges formule des objectifs et aptitudes que le système doit atteindre ainsi que des contraintes auxquelles il est soumis. Cette définition du besoin pour la formulation de la spécification fonctionnelle se fait dans la très grande majorité des cas sur le comportement désiré du système, soit donc sur ses sorties. En cela, la démarche de conception ne se pose pas en termes de *problème direct* (figure 1.11a) mais plutôt de *problème inverse* (figure 1.11b). [33] Pour autant, la démarche de conception (notamment



(a) Modèle direct (b) Modèle inverse entrées/sorties

Figure 1.11 – Approches de dimensionnement, schéma de l'organisation des grandeurs manipulées

en conception châssis) utilise majoritairement une démarche basée sur l'approche directe (figure 1.11a), usuellement nommée « méthode essai → erreur → correction ». Illustrée sur le cas du dimensionnement d'actionneur, cette démarche se base sur la procédure suivante [Jar10] :

1. Sélection d'actionneur dans un catalogue d'actionneurs disponibles (sur des critères souvent simples, stationnaires ou statiques),
2. Modélisation de l'actionneur sélectionné,
3. Définition des entrées du modèle {Actionneur + Charge},

33. Le modèle *direct* fait référence à une modélisation reproduisant le comportement d'un système. Ces modèles respectent un principe de causalité dont on peut faire une analogie avec la physique au sens de la *cause* et de l'*effet* : si un phénomène *cause* en entrée implique un phénomène *effet* en sortie, ce dernier ne peut pas précéder chronologiquement la *cause*. Ce n'est donc plus le cas pour les modèles *inverses*, pour lesquels les entrées sont calculées à partir des sorties.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

4. Simulation permettant de calculer les sorties de la charge (*i.e.* la trajectoire) en fonction des entrées précédemment fixées,
5. Comparaison de la trajectoire obtenue à celle spécifiée dans le cahier des charges,
6. Répétition de la procédure si la trajectoire obtenue n'est pas conforme au cahier des charges suivant les critères de tolérance et d'acceptation définis.

Cette procédure est généralement itérée de nombreuses fois, sans garantie d'atteindre les critères d'acceptation fixés. Dans le cas où la procédure aboutit, le concepteur n'a aucune assurance sur l'optimalité du résultat ou d'indication d'un potentiel sur-dimensionnement. Dans le cas où la procédure n'aboutit pas, il n'est pas possible d'identifier *a priori* les causes du sous-dimensionnement. Toujours dans le cadre de la démarche de conception par modèle direct, il est toutefois possible d'utiliser des méthodes plus évoluées comme l'*optimisation robuste*, soutenant les méthodes de *conception robuste* [Loy09], qui ont montré leur pertinence en conception fonctionnelle châssis. Le filtre de l'optimisation peut toutefois éloigner le concepteur de son modèle de connaissance et de la capitalisation de savoir qu'il peut en attendre.

Les modèles inverses répondent ainsi naturellement au problème de conception tel que nous le posons, puisque le cahier des charges impose la charge et ses objectifs en sortie. Ils peuvent être formulés de manière mathématique et permettent de prendre en considération les spécifications dynamiques du cahier des charges de manière pertinente (l'évolution désirée des sorties au cours du temps). Ce dernier point est toutefois un point de vigilance. La formulation du problème de conception sous forme de *problème inverse* implique en toute rigueur de reformuler le cahier des charges en termes de fonctions temporelles, ce qui peut s'avérer délicat voire non pertinent en termes de spécifications métiers. Dans ce cas, différentes idées peuvent être exploitées pour contourner ce problème comme l'expression du cahier des charges fonction de variables de puissance du système [Mec03] ou le couplage avec un problème d'optimisation [Jar10, Sch16]. Les problématiques principales issues de l'inversion de modèle, détaillées dans la suite de ce chapitre et au cours de ce mémoire, sont les suivantes :

1. L'*existence* du modèle inverse et sa *construction i.e.* la possibilité de formuler mathématiquement les entrées du modèle en fonction de ses sorties. On parle d'*inversibilité* du modèle, propriété qui peut être déterminée à partir de différents critères.

2. Les *propriétés* du modèle inverse, notamment des relations dynamiques sorties → entrées (en termes d'intégration et/ou de dérivation), dont certaines spécificités ont des implications sur les propriétés mathématiques à donner aux fonctions spécifiées par le cahier des charges (notamment en termes de *dérivabilité*).

Les travaux sur l'inversion de modèle ont originellement été traités par la communauté automaticienne pour des problématiques de commande [34] dans les années 1960. Nous pouvons citer les travaux originels de Zadeh & Desoer [ZD63] et de Weiss [Wei64] sur les systèmes linéaires à paramètres variants. La première condition nécessaire et suffisante d'inversibilité est établie par Brockett & Mesarović [BM65] dans le cas linéaire à temps invariant (LTI) et mono-variable (SISO). Citons également les travaux référents

34. Telles que le découplage pour la commande des systèmes multivariables, la poursuite parfaite de trajectoire ou l'analyse de sensibilité [SM69].

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

de Silverman [Sil68, Sil69] sur la généralisation des travaux de Brockett & Mesarović [BM65] au cas des systèmes discrets en temps et aux systèmes à paramètres variants, proposant un algorithme permettant d'obtenir des formulations de modèles inverses dont la partie dynamique est minimale (nommés ainsi modèles *inverses d'ordre minimal*) [35]. Ces éléments seront étayés au chapitre 2 selon qu'ils soient relatifs à des *critères directs d'inversibilité* (section 2.2.2.1 page 45) ou des *critères indirects d'inversibilité*, alors établis au cours du processus d'inversion (section 2.2.2.3 page 46).

1.4.3 Dimensionnement par modèle inverse utilisant des critères énergétiques

1.4.3.1 Approche en robotique

L'approche du dimensionnement par modèle inverse utilisant des critères dynamiques et énergétiques est relativement courante en robotique, où la problématique est la sélection et validation d'actionneurs appliquant les efforts articulaires $\mathbf{F}(t)$ afin que les axes du robot suivent les vitesses articulaires $\dot{\mathbf{q}}(t)$ imposées. En revanche, le cahier des charges spécifie généralement la trajectoire que les organes terminaux du robot (effecteurs) doivent suivre, dans le repère de la tâche à effectuer. On parle de *coordonnées opérationnelles* notées $\mathbf{y}(t)$. Le dimensionnement s'opère alors séquentiellement, en deux étapes [FN97] :

1. Expression des vitesses articulaires $\dot{\mathbf{q}}(t)$ en fonction des spécifications du cahier des charges sur les *coordonnées opérationnelles* $\mathbf{y}(t)$ et ses dérivées : considérons un mécanisme avec des liaisons cinématiques pour lesquelles le modèle géométrique direct peut s'exprimer selon la relation $\mathbf{y}(t) = f(\mathbf{q}(t))$. Le modèle *cinématique direct* s'obtient par dérivation par rapport au temps de la relation géométrique :
$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{J}(\mathbf{q}(t))\,\dot{\mathbf{q}}(t) \tag{1.21}$$
où $\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \dfrac{\partial f(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$ est appelée *matrice jacobienne du mécanisme*. Si la matrice $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ est inversible, il est ainsi possible d'écrire l'équation du modèle *cinématique inverse* pour en déduire les vitesses articulaires $\dot{\mathbf{q}}(t)$:
$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}(t))\,\dot{\mathbf{y}}(t) \tag{1.22}$$

2. Détermination des efforts articulaires $\mathbf{F}(t)$ à appliquer au niveau des axes du robot : cette étape de la méthodologie consiste à inverser le modèle de la charge pour établir le modèle *dynamique inverse*, de sorte à exprimer les efforts articulaires $\mathbf{F}(t)$ de la manière suivante :
$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{M}(\mathbf{q}(t))\,\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{h}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \tag{1.23}$$
où $\mathbf{M}(\mathbf{q}(t))$ est la matrice de masse équivalente du système et $\mathbf{h}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$ les efforts internes et externes du mécanisme ainsi que les efforts inertiels généralisés (gyroscopiques, de Coriolis et centrifuges).

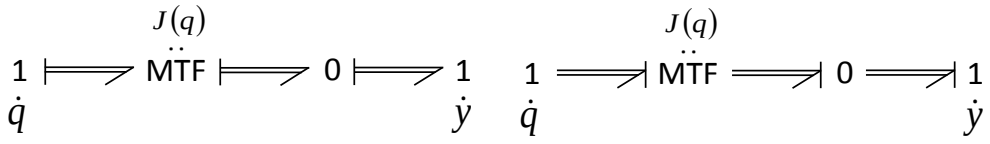
Connaissant ainsi les évolutions temporelles des vitesses articulaires $\dot{\mathbf{q}}(t)$ et des efforts articulaires $\mathbf{F}(t)$, un actionneur peut être sélectionné sur la base de ces grandeurs dyna-

35. Cet algorithme est notamment à la base de la procédure d'inversion bond graph proposée par Fotsu-Ngwompo [FN97] (voir chapitre 2, section 2.3.2 page 58).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

miques et énergétiques. [36]

Nous remarquons que la relation *cinématique directe* (1.21) rejoint les considérations faites en fin de section 1.3.3 page 11 sur la projection de mouvement (des coordonnées articulaires vers les coordonnées opérationnelles) et est consistante avec les approches de *partition de coordonnées* ou de *projections* [MF07] pour lesquelles une traduction bond graph existe (nous avons introduit à ce titre les travaux de Brix & Alirand [BA94]). Il est ainsi possible de représenter les relations cinématiques (1.21) et (1.22) en bond graph (figure 1.12), constatant qu'au niveau du modèle bond graph du mécanisme, le modèle cinématique inverse s'obtient simplement en inversant les causalités des liens associés aux variables de la charge. Ajoutons que la procédure complète d'inversion de la



(a) Modèle direct (b) Modèle cinématique inverse

Figure 1.12 – Modèle bond graph *cinématique direct* 1.12a et *cinématique inverse* 1.12b d'une structure mécanique [FN97]

charge est détaillée dans les travaux de Fotsu-Ngwompo [FN97], opérant avec la même séquence que l'approche robotique (cinématique puis dynamique). La détermination des efforts articulaires $\mathbf{F}(t)$ s'obtient en appliquant la procédure d'inversion au niveau de chaque axe du robot, en propageant la bicausalité (voir section 1.4.3.2) de l'axe du robot à l'actionneur et en imposant les vitesses articulaires précédemment calculées avec le bond graph de la figure 1.12b. Cette seconde étape permet ainsi d'exprimer le modèle *dynamique inverse* (équation 1.23) [37]. De manière plus générale, la figure 1.12 et les précédentes considérations introduisent l'intérêt et les capacités du formalisme bond graph dans une démarche de dimensionnement dynamique et énergétique des systèmes par approche inverse.

1.4.3.2 Approche générique

Une approche de dimensionnement par modèle inverse utilisant des critères dynamiques et énergétiques et utilisant le formalisme bond graph a été initiée, au sein du Laboratoire d'Automatique Industrielle (LAI) de l'INSA de Lyon (devenu aujourd'hui le laboratoire Ampère), par le Professeur Scavarda [SAR91]. L'approche a initialement été formulée dans la thèse d'Amara [Ama91] sur des problématiques énergétiques en robotique (traitant en bond graph les modèles cinématiques et dynamiques inverses évoqués en section 1.4.3.1). Une méthodologie a ensuite été développée par Fotsu-Ngwompo [FNST96, FN97, FN98, NNST01, NBS05], puis appliquée dans le cadre industriel par Mechin [Mec03, MMFSF03] et Laffite [Laf04]. Cette méthodologie a été reformalisée

36. Basées sur cette approche, des méthodes de sélection énergétiques plus élaborées sont envisageables. Citons la méthode de Potkonjak et Vukobratović [PJ86, VKP87], présentée dans [FN97], explicitant la condition d'adéquation charge/actionneur et la méthode de Dequidt [Deq98], évoquée dans [Jar10], prenant en compte des exigences sur la commande.

37. En d'autres termes, la propagation de la bicausalité ne se fait pas ici au travers du mécanisme, mais uniquement à travers l'actionneur placé sur l'articulation, dans la mesure où une vitesse articulaire $\dot{\mathbf{q}}_i$ de l'axe i est connue grâce au modèle cinématique inverse et permet de calculer dans le modèle dynamique inverse la variable conjuguée $\mathbf{F}_i(t)$ relative au même lien de puissance. Notons en outre que cette approche séquentielle est équivalente à une approche plus immédiate dans laquelle la bicausalité est directement propagée au travers du mécanisme, sans calcul cinématique préalable des vitesses articulaires.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

par niveaux d'analyse par Jardin [Jar10] et étendue en termes de détermination d'invariants structurels supplémentaires par El Feki *et al.* [EFDLB+08b, EF11] et Jardin [Jar10]. Les travaux proposés dans ce mémoire s'appuient ainsi sur cet historique de développement. En termes de positionnement dans le cycle de conception, cette méthodologie de dimensionnement par inversion des modèles et reposant sur le formalisme bond graph se positionne principalement à un niveau de modélisation macroscopique (modèle à paramètres localisés ou « lumped parameter models »), associé au *niveau d'abstraction de modélisation réseau* et elle permet de traiter trois niveaux de conception (*système*, *sous-système* et *composant*, voir figures 1.4 page 6 et 1.5 page 7). Nous ne nous intéresserons qu'a ce niveau d'abstraction dans le cadre de nos travaux [38]. Notons que la méthodologie a été appliquée à la classe de modèles à paramètres répartis (« distributed parameter models ») dans la thèse de Derkaoui [Der05], permettant d'atteindre le niveau d'abstraction *géométrique*.

La méthodologie de dimensionnement puise l'une de ses principales originalités dans sa phase d'analyse *structurelle*, c'est à dire de manière indépendante des valeurs numériques des paramètres du modèle. Elle exploite la description acausale du bond graph pour caractériser la structure d'interconnexion du système physique, puis la description causale pour la formulation du modèle *direct* et enfin la *bicausalité* pour la formulation du modèle *inverse*. Ces trois niveaux d'exploitation permettent également la détermination de propriétés structurelles du modèle. En définitive, le modèle direct et le modèle inverse dérivent tous deux d'une description générique. L'intérêt non négligeable est que d'une part, la formulation du modèle inverse n'est pas à construire « depuis la feuille blanche », et d'autre part, une modification de la structure d'interconnexion entre les éléments peut directement se répercuter sur les modèles direct et inverse.

Le dimensionnement d'une chaîne d'actionnement est réalisé en quatre étapes, proposées sur la figure 1.13 [39] et explicitées ci-après dans le cas d'une chaîne d'actionnement simple. Dans le cas d'une chaîne d'actionnement complète (par exemple, cascade de plu-

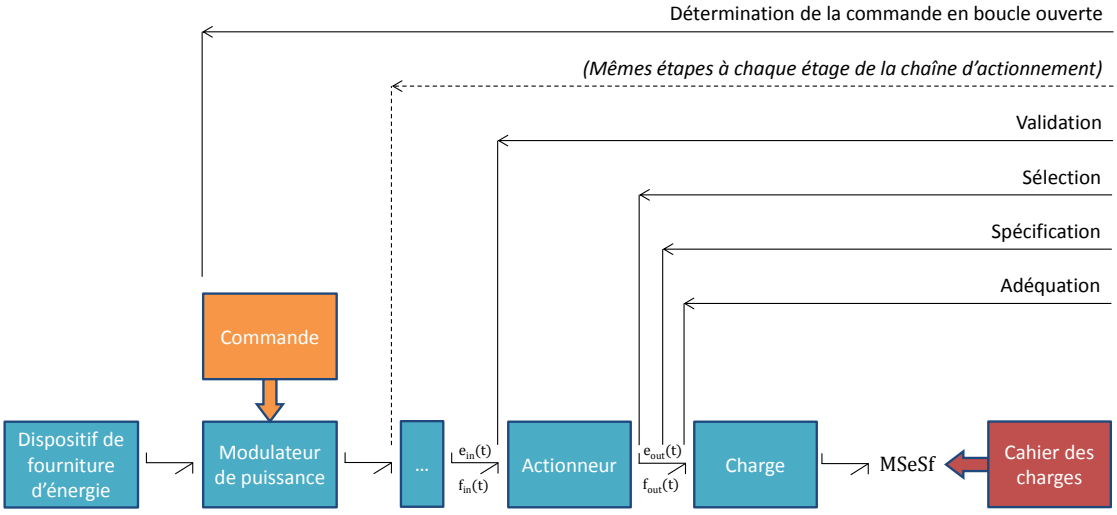


Figure 1.13 – Dimensionnement par modèle inverse, étage par étage [Jar10]

38. Nous pouvons en outre souligner que cette approche bond graph couvre l'approche robotique exposée en section 1.4.3.1.

39. Par souci de consistance, la figure 1.13 reprend les mêmes codes couleurs que les figures 1.3, 1.4 et 1.5.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

sieurs chaînes d'actionnement, association de chaînes secondaires), les spécifications du cahier des charges sont remontées le long de la structure d'interconnexion en réalisant des inversions successives. Ajoutons enfin que la méthodologie aboutit, lors de la remontée des spécifications au niveau du modulateur de puissance, à déterminer la commande en boucle ouverte du système (figure 1.13). Les quatre phases de la méthodologie sont les suivantes [FN98] [Jar10] [MFJ11b] :

1. *Adéquation* : Cette première étape est cruciale et consiste en deux *vérifications* au niveau de la structure du modèle de conception en question, en l'occurrence la charge (figure 1.13) :
   — l'*inversibilité* du modèle (validité du modèle de conception),
   — les propriétés des fonctions mathématiques spécifiées dans le cahier des charges (principalement en termes de *dérivabilité*) au regard de la structure du modèle (validité du cahier des charges).

   Cette première étape s'assure donc de l'adéquation entre la structure du modèle et les spécifications du cahier des charges.

2. *Spécification* : Cette seconde étape est une étape participant à la synthèse proprement dite de la conception. Elle consiste à construire le modèle inverse de la charge et des composants déjà dimensionnés et à déterminer par simulation les variables de puissance en *entrée* de l'étage considéré (variables $e_{out}(t)$ et $f_{out}(t)$ dans le cas de la charge en figure 1.13). Cette étape permet donc de déterminer les spécifications en *sortie* du composant en amont de la charge ou de la partie déjà dimensionnée du système à concevoir, *i.e.* l'actionneur dans le cas de la figure 1.13. Cette approche permet donc de « remonter » les spécifications au plus près de l'étage à dimensionner, et ce, indépendamment des parties encore non dimensionnées (parties amont à la charge dans le cas de la figure 1.13).

3. *Sélection* : Cette troisième étape utilise les résultats de la précédente pour sélectionner un composant capable de fournir les valeurs maximales des variables de puissance $e_{out}(t)$, $f_{out}(t)$ et $e_{out}(t) \times f_{out}(t)$. Cette étape permet ainsi une sélection pertinente du point de vue énergétique, à partir de *gabarits constructeur en sortie des composants à dimensionner*, en évitant les surdimensionnements. Elle permet également de regarder les fonctionnements de type intermittent (cas d'un actionneur électrique par exemple).

4. *Validation* : Cette quatrième et dernière étape permet de finaliser la validation du composant à dimensionner (actionneur dans le cas de la figure 1.13) en déterminant les variables de puissance en entrée $e_{in}(t)$ et $f_{in}(t)$ pour les comparer aux valeurs admissibles fournies par les *gabarits constructeur en entrée* (figure 1.14). Cette quatrième phase requiert ainsi les différentes étapes suivantes :
   (a) modéliser le composant choisi,
   (b) le coupler au modèle de la partie déjà dimensionnée,
   (c) reprendre l'étape d'adéquation (étape 1) pour vérifier la validité du (nouveau) modèle de conception ainsi construit (modèle {Charge + Actionneur} dans le cas de la figure 1.13) ainsi que la validité du cahier des charges par rapport à ce modèle,
   (d) si le modèle obtenu est inversible, construire le modèle inverse et le simuler pour déterminer les variables de puissance $e_{in}(t)$ et $f_{in}(t)$ en entrée du com-

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

posant sélectionné à partir des spécifications du cahier des charges (sur les sorties de la charge),

(e) comparer les variables de puissance $e_{in}(t)$ et $f_{in}(t)$ au gabarit constructeur en entrée du composant qui peut comporter des valeurs pour le régime nominal de fonctionnement et des régimes intermittents (figure 1.14).

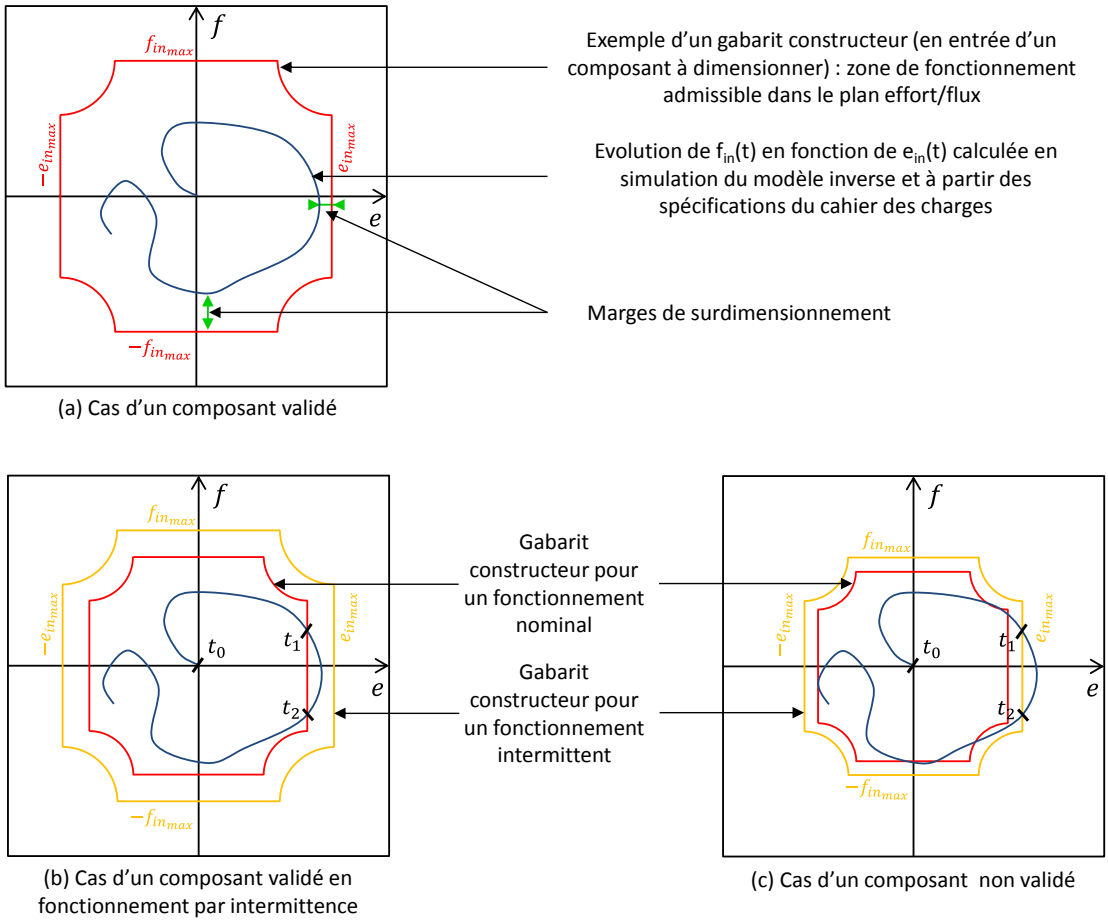


FIGURE 1.14 – Méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses : étape 4 (*Validation*)

Si différents actionneurs répondent aux exigences des étapes 3 et 4, d'autres critères peuvent entrer en considération pour le choix (prix, poids, encombrement, maintenance,...). Si aucun actionneur ne répond aux exigences, cette méthodologie peut permettre une spécification du besoin, en ayant une connaissance précise de la (des) variable(s) de puissance qui n'ont pas répondu à la spécification de départ.

Cette démarche peut être répétée tout le long de la chaîne d'actionnement jusqu'au dispositif de fourniture d'énergie. Dans le cas où elle est appliquée jusqu'au modulateur de puissance (compris), il est possible de déterminer la commande en boucle ouverte du système utile ainsi pour définir des contrôleurs intégrant des modèles inverses à leur structure de commande [Ser89] [FN97], ou pour déterminer des lois de commande pour une chaîne d'actionnement secondaire [MFJ11b].

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

1.4.4 Définition de l'analyse structurelle et niveaux d'analyse

1.4.4.1 Intérêt de différents niveaux d'analyse

Les méthodologies « classiques » de conception et dimensionnement mettent en œuvre usuellement des analyses dépendantes de valeurs numériques des paramètres (analyse de sensibilité paramétrique, optimisation, équilibre et pondération multi-attribut). De telles approches peuvent rendre difficile la capitalisation de savoir et de connaissance des modèles. D'autres méthodes proposent des phases d'analyse amont sur la structure des modèles, de sorte à pouvoir énoncer des propriétés intrinsèques aux modèles, non tributaires *a priori* de valeurs numériques des paramètres. Cette phase amont fait émerger les propriétés *structurelles* des modèles, exploitables pour leur conception, leur dimensionnement ou l'étude de leur commande (inversibilité, commandabilité, découplabilité,...). La méthodologie de conception et dimensionnement par modèle inverse du laboratoire Ampère, introduite en section précédente, s'inscrit dans cette seconde classe de méthodes, où la nature du formalisme bond graph sur laquelle elle se base, permet de mettre en œuvre une phase d'analyse structurelle de modèle. Cette analyse structurelle peut permettre de conclure très en amont sur la *validité d'un modèle de conception* et la *validité d'un cahier des charges*[40]. Elle permet également de donner une hiérarchisation des propriétés d'un modèle, suivant qu'elles portent sur sa *structure*, sur la *phénoménologie* physique qu'il renferme (*i.e.* lois de comportement et couplages) ou sur ses *paramètres*. L'intérêt majeur est qu'une propriété énoncée au niveau de la structure du modèle sera vraie pour *quasiment* toutes les valeurs de ses paramètres. *A contrario* , une propriété non vérifiée au niveau de la structure du modèle ne sera vraie pour aucune valeur de ses paramètres. Nous adopterons ainsi la définition employée dans les travaux référents de Rahmani [Rah93] (définition 1.1) pour qualifier une propriété dite *structurelle* d'un modèle, formulée dans un contexte de représentation utilisant le formalisme bond graph.

Définition 1.1 (*[Rah93]*)

Une propriété est dite structurelle *si :*

- *elle ne dépend que de la nature des éléments bond graph qui composent le modèle du système et de la façon dont ils sont interconnectés, et non pas des valeurs numériques de leurs paramètres,*
- *elle est vérifiée pour toutes les valeurs des paramètres sauf éventuellement pour quelques valeurs particulières.*

1.4.4.2 Outils de l'analyse structurelle

L'analyse structurelle de modèle a originellement été proposée par la communauté automaticienne pour résoudre des problèmes de commande. Les travaux pionniers sont ceux de Lin [Lin74] sur l'étude de la commandabilité et observabilité structurelles des systèmes linéaires à temps invariant (LTI), accompagnée d'une déclinaison graphique des résultats. Différentes approches de représentation ont été utilisées (ou formulées) pour supporter cette analyse. Citons chronologiquement l'approche matrice système [Ros70], l'approche modèle d'état [DC82], [VLK82], [CDD+86, CD86], l'approche géométrique [CD82], [DD82], [CD10], l'approche digraphe (« directed graph » ou « graphe orienté ») [Rei88], l'approche système structurée (incluant le digraphe structuré) [Lin74], [Rei88], [CDP91], [vdW91], [DC93], [CD10] puis l'approche bond graph [SDT89], [Rah93], [FN97], [BSDT97], [Jar10], [EF11]. Les études sont dans la grande majorité associées à l'analyse

40. Au sens, par exemple, de l'étape d'*adéquation* en termes d'*inversibilité* du modèle de conception et de *dérivabilité* requise de ses sorties (voir section 1.4.3.2 page 28).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

de la commande des systèmes (commandabilité et observabilité, découplage, inversion, rejet de perturbations, placement de pôles ou encore l'étude de leur structure finie et infinie). Dans nos présents travaux, nous allons privilégier l'**approche modèle d'état** (ainsi que sa déclinaison graphique, le digraphe), l'**approche système structuré** (et le digraphe structuré) et l'**approche bond graph**, toutes relatives au *niveau d'abstraction de modélisation réseau* (figure 1.5 page 7). Nous allons succinctement présenter les travaux de JARDIN [Jar10] qui a mis en perspective dans sa thèse ces trois approches pour établir leurs domaines de validité respectifs et comparer le niveau de *description* et d'*information* qu'elles proposent (section 1.4.4.3). De ces niveaux de description et d'information sont déclinés différents niveaux d'analyse. Nous présentons préalablement ces trois approches structurelles de manière sommaire.

Approche modèle d'état et digraphe Le comportement dynamique d'un système mécatronique peut être approché par la *représentation d'état* 1.24 qui permet de le modéliser sous forme matricielle (dans le présent cas, *linéaire* et *invariant dans le temps*).

$$\Sigma : \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{x}}(t) & = & \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) & = & \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{array} \right. \tag{1.24}$$

où $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie. Notons que les variables de sortie $\mathbf{y}(t)$ de ce modèle sont exprimées en fonction des variables d'état $\mathbf{x}(t)$ et des variables d'entrée $\mathbf{u}(t)$. Ce modèle est *direct* et la représentation d'état est ici *régulière*[41]. Il est possible de décrire graphiquement cette représentation matricielle sous la forme du digraphe $\mathcal{G}(\Sigma) = (V, W)$ [Rei88] ; ce dernier est formé [CD10] :

- d'un ensemble de sommets $V = U \cup X \cup Y$, où U, X, Y sont associés respectivement aux entrées $\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$, aux états $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ et aux sorties $\{y_1, y_2, \cdots, y_p\}$.
- d'un ensemble d'arcs $W = \{(u_j, x_i) | b_{ij} \neq 0\} \cup \{(x_j, x_i) | a_{ij} \neq 0\} \cup \{(x_j, y_i) | c_{ij} \neq 0\} \cup \{(u_j, y_i) | d_{ij} \neq 0\}$, où a_{ij} (resp. b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}) est l'élément (i, j) de la matrice $\mathbf{A}$ (resp. $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$). Par exemple, (x_j, x_i) représente donc l'arc orienté partant du sommet $x_j \in X$ vers $x_i \in X$ et a_{ij} correspond au coefficient de $\mathbf{A}$ situé sur sa i-ème ligne et j-ème colonne.

Approche système structuré et digraphe structuré Les systèmes linéaires structurés sont une classe de systèmes linéaires décrite par le modèle suivant [CD10] :

$$\Sigma_\lambda : \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{x}}(t) & = & \mathbf{A}_\lambda\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_\lambda\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) & = & \mathbf{C}_\lambda\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_\lambda\mathbf{u}(t) \end{array} \right. \tag{1.25}$$

où $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie. Les matrices $\mathbf{A}_\lambda$, $\mathbf{B}_\lambda$, $\mathbf{C}_\lambda$ et $\mathbf{D}_\lambda$ sont dites *matrices structurées*. Leurs coefficients nuls sont connus et les valeurs de tous les autres coefficients sont inconnues et ils sont supposés tous indépendants entre eux : ils sont représentés par des coefficients λ_i. Comme dans le cas du digraphe $\mathcal{G}(\Sigma)$ associé au système d'état Σ (1.24), il est possible de construire un *digraphe structuré* $\mathcal{G}(\Sigma_\lambda) = (V, W_\lambda)$ associé à Σ_λ (1.25), qui est formé :

- d'un ensemble de sommets $V = U \cup X \cup Y$,
- d'un ensemble d'arcs $W_\lambda = \{(u_j, x_i) | b_{\lambda_{ij}} \neq 0\} \cup \{(x_j, x_i) | a_{\lambda_{ij}} \neq 0\} \cup \{(x_j, y_i) | c_{\lambda_{ij}} \neq 0\} \cup \{(u_j, y_i) | d_{\lambda_{ij}} \neq 0\}$.

41. Par opposition à une représentation d'état dite *singulière*, qui exhibe des dépendances algébriques entre les variables d'état. Cette classe de système, notamment rencontrée lors de modélisations de systèmes mécaniques en présence de contraintes (présentées succinctement en section 1.3), sera discutée au chapitre 3.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Les ensembles de sommets et d'arcs de $\mathcal{G}(\Sigma_\lambda)$ sont définis exactement de la même manière que pour $\mathcal{G}(\Sigma)$. La seule différence réside dans la pondération des arcs. Dans le cas du *digraphe structuré*, les arcs portent les paramètres λ_i respectifs des matrices $\mathbf{A}_\lambda$, $\mathbf{B}_\lambda$, $\mathbf{C}_\lambda$, $\mathbf{D}_\lambda$ de (1.25) en lieu et place des coefficients des matrices A, B, C, D de (1.24).

Approche bond graph En se basant sur la brève présentation faite en annexe A (section A.1 page 245) et les considérations faites au cours de ce chapitre 1, le bond graph se caractérise par une *représentation graphique* des échanges d'énergie au sein d'un système et basée sur l'*analogie* entre variables de différents domaines de la physique. Nous avons souligné qu'il permet une modélisation de la *structure* du système (interconnexion des composants, visualisation des propriétés de causalité au niveau du modèle complet) ainsi qu'une modélisation *comportementale* permettant la déduction du modèle mathématique qu'est la *représentation d'état* (1.24). Nous avons également insisté sur le fait que le formalisme supporte les représentations *acausale* et *causale* en contraste avec les *approches modèle d'état* et *système structuré* qui ne consistent par essence qu'en des représentations causales (*i.e.* les équations sont d'emblée orientées).

1.4.4.3 Niveaux d'analyse et déclinaisons de la démarche de conception

La notion de niveaux d'analyse permet une classification hiérarchisée des propriétés énoncées sur un modèle de conception. Suite à la présentation des trois approches de modélisation que sont le *modèle d'état*, le *système structuré* et le *bond graph*, cette section expose les travaux de Jardin [Jar10] qui les a comparées pour établir leurs domaines de validité respectifs et les niveaux de *description* et d'*information* de modélisation qu'elles contiennent (figure 1.15). Les principaux points que nous pouvons dégager sont les suivants :

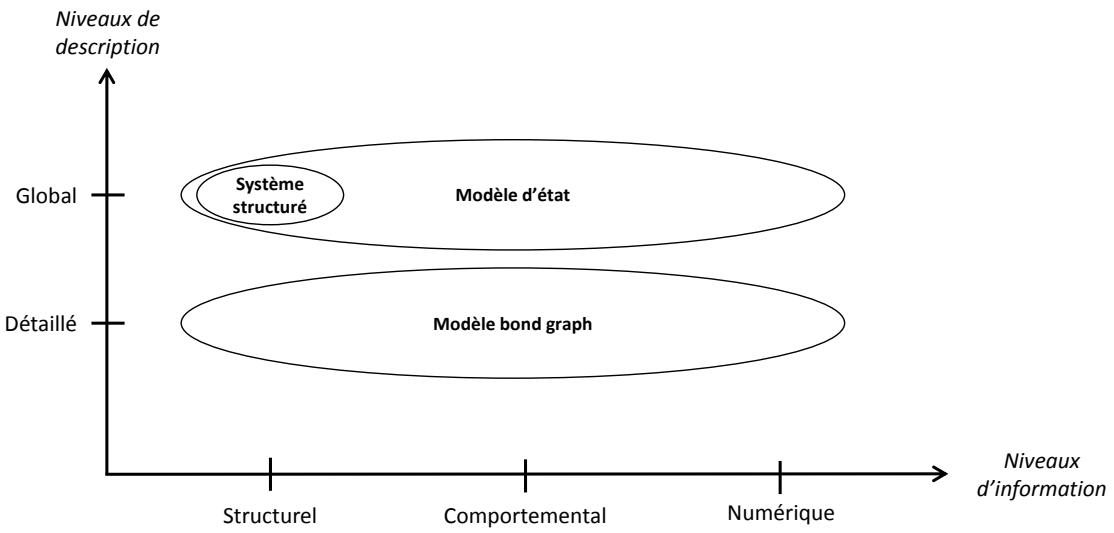


Figure 1.15 – Niveaux de description et d'information de différentes approches de modélisation [Jar10]

— l'*approche système structuré* est une représentation globale du système. L'ensemble des relations entre deux états est regroupé (au sens synthétisé, globalisé, compilé) dans un seul et même coefficient λ_i : le niveau de description est *global*. En termes de niveau d'information, seule la structure mathématique du modèle d'état correspondant est disponible. L'indépendance des coefficients λ_i implique

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

qu'il n'y a pas de détail phénoménologique : le niveau d'information est uniquement *structurel*.
- l'*approche modèle d'état* est également une représentation globale du système, où l'ensemble des relations entre les états est globalisé dans la structure mathématique comme dans l'approche système structuré : le niveau de description est *global*. Toutefois, les dépendances entre les coefficients des matrices existent et sont liées au comportement physique du système : le niveau d'information est *structurel* et *comportemental*.
- l'*approche bond graph* est une représentation *détaillée* du système, où l'ensemble des relations entre les variables dynamiques est conservé. En termes de niveaux d'information, nous avons évoqué le niveau structurel de l'approche, qui fournit également les lois caractéristiques des phénomènes physiques mis en jeu : le niveau d'information est *structurel* et *comportemental*.
- une résolution numérique est uniquement possible dans le cas des approches modèle d'état et bond graph (niveau d'information *numérique*, figure 1.15), mais pas dans le cas des systèmes structurés.

La distinction selon le niveau de *description* entre l'approche modèle d'état (et système structuré) et l'approche bond graph est intéressante car suivant l'objectif visé, l'un ou l'autre de ces niveaux de *description* est susceptible de mieux répondre. Par exemple, les problématiques de commande s'astreignent généralement à considérer le système dans son ensemble, auquel cas l'approche modèle d'état ou l'approche système structuré est davantage pertinente. En revanche, l'approche bond graph peut s'avérer plus adaptée pour l'interprétation physique, puisque le détail de la phénoménologie entre les différents composants du modèle est accessible. Rappelons en outre qu'il est possible d'obtenir une représentation d'état à partir d'un modèle bond graph (par exemple pour le cas de représentation d'état pouvant être mise sous forme *régulière*, à partir de la matrice de structure de jonction [Rah93] ou par scrutation des chemins causaux [FN97]). Ce point illustre ainsi que le coefficient d'une matrice de la représentation d'état (1.24) représente directement la somme de certains gains de chemins causaux du bond graph associé et justifie le qualificatif « global » employé dans les niveaux de *description*. Sur la base de la classification proposée en figure 1.15, Jardin [Jar10] a étayé les propositions originelles de Rahmani [Rah93, RSDT97] pour établir les quatre niveaux d'analyse suivants :

- le **niveau d'analyse structuré** est le niveau d'analyse le plus amont. Seule la structure du modèle globale est considérée et les coefficients [42] du modèle sont supposés être indépendants entre eux. Les propriétés dites *structurées* sont directement issues de l'analyse du *système structuré* (1.25), qui peut notamment être menée grâce à la représentation du système matriciel sous forme graphique d'un *digraphe structuré*.

- le **niveau d'analyse BG-structurel** est un niveau considérant uniquement la structure *énergétique détaillée*, locale, d'un modèle. Il est originellement formulé pour une représentation graphique de type bond graph mais peut être étendu [43]. Les propriétés *BG-structurelles* font ainsi référence à l'analyse sur un bond graph de l'existence de chemin causaux sans considération de leur gain. En d'autres termes, cette analyse ne considère pas les dépendances potentielles entre les phé-

42. Les coefficients en question sont ceux des matrices du système structuré (1.25).
43. Notamment à l'approche digraphe « éclaté » de Jardin [Jar10] sur l'exemple de Fotsu-Ngwompo [FN97] illustrant les exceptions de Wu & Youcef-Toumi [WYT95].

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

nomènes physiques (lois caractéristiques phénoménologiques).

— le **niveau d'analyse comportemental** est un niveau considérant la structure du modèle ainsi que les dépendances physiques engendrées par les lois caractéristiques phénoménologiques. Les propriétés *comportementales* peuvent être déduites analytiquement d'un modèle d'état [44] ou par analyse des gains des chemins causaux sur le bond graph (qui conduit dès lors à une analyse énergétique *globale* du modèle bond graph).

— le **niveau d'analyse numérique** est le niveau d'analyse le plus aval et considère les valeurs numériques des paramètres dans les calculs analytiques du niveau *comportemental*. Les propriétés établies sont dites *numériques*.

L'approche de référence que représente l'approche modèle d'état permet d'accéder aux niveaux d'analyse *structuré*, *comportemental* et *numérique*, tandis que le bond graph permet les niveaux d'analyse *BG-structurel*, *comportemental* et *numérique*. Ces différents niveaux d'analyse, par approche respective, auront un impact important sur la manière de traduire dans le formalisme bond graph les propriétés issues et démontrées sur l'approche modèle d'état. Comme déjà évoqué, cet impact se manifestera principalement sur le bond graph par la considération (ou non) des gains des chemins causaux. Enfin, de manière analogue à la dénomination employée par JARDIN dans sa thèse [Jar10], nous qualifierons par abus de langage d'*analyse structurelle* l'ensemble des analyses menées sans considération des valeurs numériques des paramètres, comprenant ainsi les niveaux d'analyse *structuré*, *BG-structurel* et *comportemental*. L'intérêt majeur d'une telle déclinaison a précédemment été évoqué (section 1.4.4.1) et est illustré sur la figure 1.16 [Jar10] [MFJ11b, MFJ11a] :

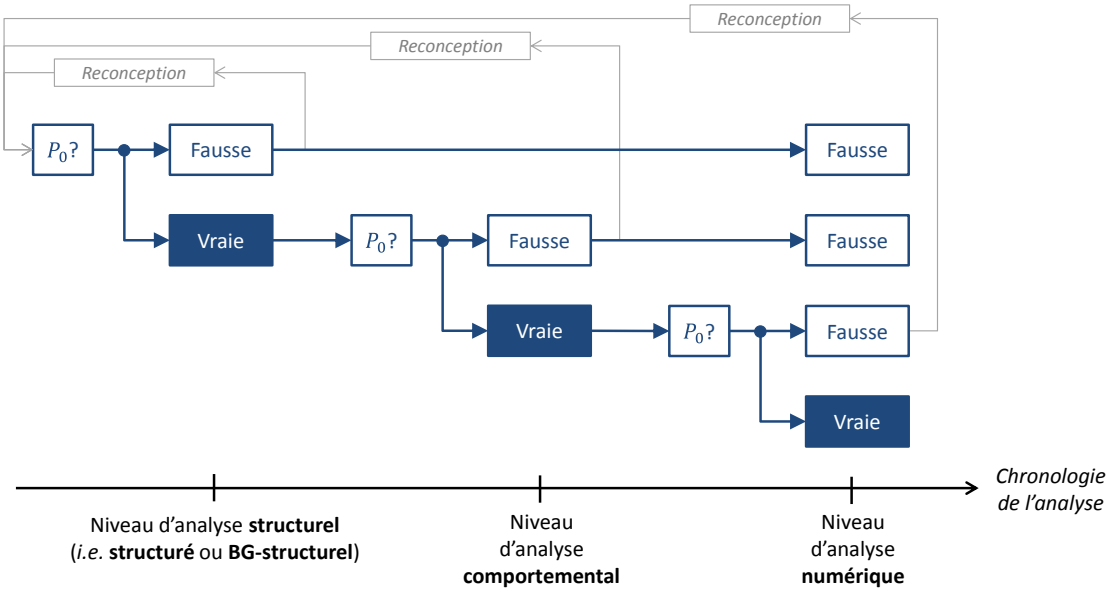


FIGURE 1.16 – Étude d'une propriété P_0 : utilisation de différent niveaux d'analyse pour orienter au plus tôt la reconception potentielle [Jar10] [MFJ11b, MFJ11a]

44. Nous désignerons ces propriétés comme issues de l'*approche algébrique*, qui nous permettra de dresser le référentiel existant des outils d'analyse structurelle et établi, entre autre, à partir de l'approche modèle d'état.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

1. Si une propriété P_0 (inversibilité ou autre) est fausse au niveau d'analyse *structurel* (*i.e.* structuré ou BG-structurel), elle sera fausse à tous les niveaux d'analyse avals. Le concepteur doit revoir la structure de son système, ou de son modèle.
2. Si une propriété P_0 est vraie au niveau *structurel* mais pas au niveau *comportemental*, le concepteur a déjà une information intéressante sur les pistes de reconception potentielle. Elles ne concernent que des couplages entre phénomènes du modèle (en l'occurrence sur le bond graph, l'annulation de somme de gains de chemins causaux entre certains éléments). Le concepteur peut éventuellement regarder si ce couplage peut être éliminé en introduisant un phénomène négligé (par exemple, une dynamique, un autre couplage ou un élément d'adaptation). L'intérêt du niveau de description *détaillé* du bond graph (figure 1.15) prend ici tout son sens.
3. Si une propriété P_0 est fausse uniquement au niveau *numérique*, le concepteur peut jouer sur les valeurs numériques non fixées par le cahier des charges ou par des éléments physiques du système pour essayer de la satisfaire.

Si l'on met à présent en perspective les différentes étapes de la méthodologie de dimensionnement par modèle inverse (section 1.4.3.2) avec ces différents niveaux d'analyse (figure 1.16), on peut comprendre comment la conception (à l'étape d'adéquation (étape 1) et celle de validation (étape 4)) peut bénéficier d'une réorientation au plus tôt lorsqu'il s'agit par exemple de tester l'inversibilité du système ou d'établir la dérivabilité requise de ses sorties [45].

1.4.5 Outils d'analyse et de simulation utilisés

Les outils de simulation utilisés dans nos travaux sont précisés en figures 1.17 et 1.18. En rapport avec les niveaux d'analyse exposés en section précédente (section 1.4.4.3 page 34, figure 1.16), ces outils seront manipulés avec les finalités suivantes :

— au niveau d'analyse *structurel* (structuré et BG-structurel) et *comportemental*, nous serons principalement amenés à utiliser le logiciel *MS1* (figure 1.17) pour l'analyse exhaustive des *chemins causaux* et des *familles de chemins causaux* ainsi que leurs attributs (*longueur* et *ordre*) [46].

— au niveau d'analyse *numérique*, l'implémentation logicielle est réalisée dans *Amesim* pour la simulation des modèles (figure 1.18a). Un point important consiste à valider que l'organisation causale particulière des modèles inverses (basée sur la bicausalité) développés dans nos travaux est compatible avec une plateforme de simulation comme *Amesim*.

— la validation des modèles de ce mémoire (directs et inverses) est réalisée dans *Amesim* également (figure 1.18b), en utilisant des protocoles de validation de modèles industriels, conformes à ceux requis pour la publication de modèles dans les librairies standards *Amesim* [PMAL09b, PMAL09a]. Ces protocoles utilisent les outils standards d'analyse temporelle et fréquentielle de cette plateforme de simulation.

45. Des exemples d'illustration sur une spécification dans le cahier des charges des degrés relatifs ou encore d'une structure à l'infini particulière sont proposés dans la thèse de Jardin [Jar10].
46. Voir le chapitre 4 et l'annexe B pour la définition de ces concepts.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

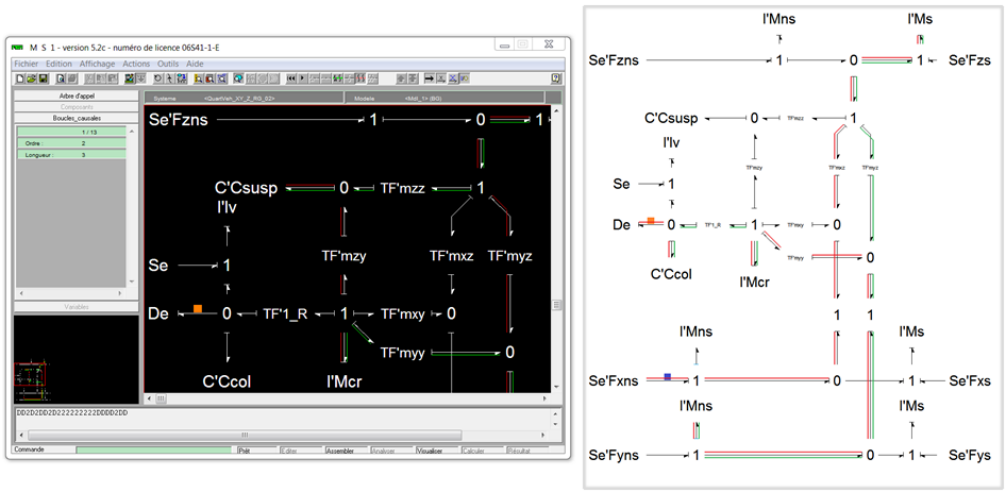
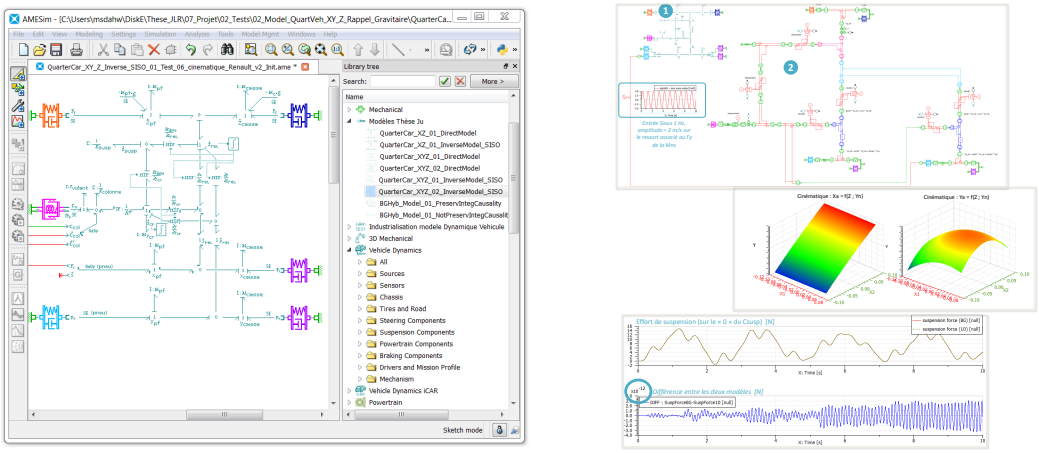


FIGURE 1.17 – Outils d'analyse et de simulation utilisés dans nos travaux (1 sur 2) : *MS1* [MS1]



(a) Implémentation

(b) Validation temporelle et fréquentielle

FIGURE 1.18 – Outils d'analyse et de simulation utilisés dans nos travaux (2 sur 2) : *Amesim* [Sie]

1.5 Conclusions et problématiques traitées dans ce mémoire

Le chapitre 1 a présenté la conception des systèmes mécatroniques, une déclinaison de modèles de conception fonctionnelle pour l'application châssis puis enfin, une méthodologie pour leur conception utilisant l'inversion de modèle et prenant en considération leur architecture (analyse structurelle). Au long de ses différentes étapes (section 1.4.3.2 page 28), la méthodologie a exhibé deux problématiques principales liées à sa phase d'analyse structurelle :

1. les propriétés d'*inversibilité* du modèle, durant les étapes d'*adéquation* (étape 1) et de *validation* (étape 4), que nous avons associées à la *validité du modèle de conception*,

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

2. les propriétés mathématiques des fonctions spécifiées dans le cahier des charges, principalement exprimées en termes de *dérivabilité* requise, que nous avons liées à la *validité du cahier des charges*.

Les propriétés de dérivabilité peuvent être établies à partir de la connaissance d'*invariants structurels* du modèle déterminés par des outils de l'analyse structurelle. Les outils utilisés dans ce mémoire sont introduits en section 1.4.4.2 page 32 et nous les détaillerons davantage au chapitre 2 et au chapitre 3. Nous introduirons en particulier les concepts d'*ordre d'essentialité* et de *degré relatif*, tous deux basés sur la *structure à l'infini* du système, et associés aux sorties du système.

A ce stade, la formulation de la méthodologie de dimensionnement est établie sur une classe de systèmes pouvant se mettre sous la forme d'une représentation d'état *régulière* (1.24). Nous avons en revanche évoqué en section 1.3.3 (page 11) lors de la présentation du modèle de référence de châssis (figure 1.10 page 23), basé sur une approche mécanique multicorps fonctionnelle, qu'il n'est pas toujours possible, ni souhaitable, d'obtenir une représentation d'état régulière. Les principales contributions présentées dans ce mémoire concernent une évolution de la méthodologie pour prendre en compte les systèmes d'état ne pouvant pas être formulés sous la forme (1.24) mais pouvant toutefois s'écrire sous la forme *singulière* linéaire à temps invariant suivante :

$$\Sigma_d : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}(t) & = & \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) & = & \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{array} \right. \tag{1.26}$$

où $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie et où la matrice $\mathbf{E}$ n'est pas nécessairement de rang plein.

Le chapitre 2 va à présent proposer une bibliographie des outils d'analyse structurelle utilisés par la méthodologie de conception que nous venons d'exposer. Il propose de détailler et discuter la base théorique de l'approche algébrique et de la démarche avec laquelle elle sert à valider l'approche bond graph. En fin de chapitre 2 seront exposées les limitations des développements tels qu'existants au début de nos travaux, et la nécessité de les étendre, fixant ainsi le périmètre des travaux des chapitres 3, 4 et 5.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Chapitre 2

Analyse structurelle des systèmes linéaires réguliers

Sommaire

2.1 Introduction 42
2.2 Approche algébrique de l'analyse structurelle 43
2.2.1 Introduction 43
2.2.2 Inversibilité et inverse d'ordre minimal 45
2.2.3 Structure à l'infini 47
2.2.4 Degré relatif et ordre d'essentialité 52
2.2.5 Exemple 56
2.3 Analyse structurelle sur le modèle bond graph 58
2.3.1 Introduction 58
2.3.2 Inversibilité et inverse d'ordre minimal 58
2.3.3 Structure à l'infini 62
2.3.4 Degré relatif et ordre d'essentialité 65
2.3.5 Conclusions de l'analyse sur les bond graphs causal et bicausal 67
2.4 Discussion sur les limitations de la méthodologie présentée . 69
2.4.1 Présence de boucles algébriques de type « 1ZCP » 69
2.4.2 Intérêt de procédure de détermination commune pour les systèmes direct et inverse 71
2.5 Conclusion 72

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

2.1 Introduction

Le présent chapitre 2 est essentiellement bibliographique et propose d'introduire un ensemble de notions d'analyse structurelle utiles au dimensionnement par modèle inverse proposé par le laboratoire AMPÈRE, présenté au chapitre 1. Ces notions se divisent en deux principales catégories, pouvant chacune être reliées aux critères formulés dans le cahier des charges d'un problème de conception (section 1.4.3.2 page 28) :

1. la propriété d'*inversibilité* d'un modèle linéaire régulier (validité du modèle de conception en phases d'*adéquation* et de *validation*),

2. les *invariants structurels* d'un modèle linéaire régulier (relatifs à la validité du cahier des charges en phase d'*adéquation* et utilisés pour établir les propriétés des fonctions mathématiques spécifiées dans le cahier des charges).

La première catégorie comprend également, en plus de l'inversibilité proprement dite, l'*ordre* du modèle inverse *i.e.* la dimension de son état. Comme précédemment introduit, les *invariants structurels* du modèle ont principalement trait, dans le contexte de dimensionnement par modèle inverse, aux critères de dérivabilité des sorties du modèle (sous-entendu du *modèle direct*). Les invariants manipulés dans ce chapitre sont la *structure à l'infini*, le *degré relatif* et l'*ordre d'essentialité*. Le premier est propre au système dans son ensemble et peut être utilisé, suivant les cas, pour la détermination des deux suivants, chacun associé, eux, aux sorties du modèle.

La détermination des invariants structurels peut se faire de différentes manières, algébriquement ou graphiquement, en manipulant le modèle direct et/ou le modèle inverse. La figure 2.1 [1] propose une vue d'ensemble simplifiée des concepts et processus discutés

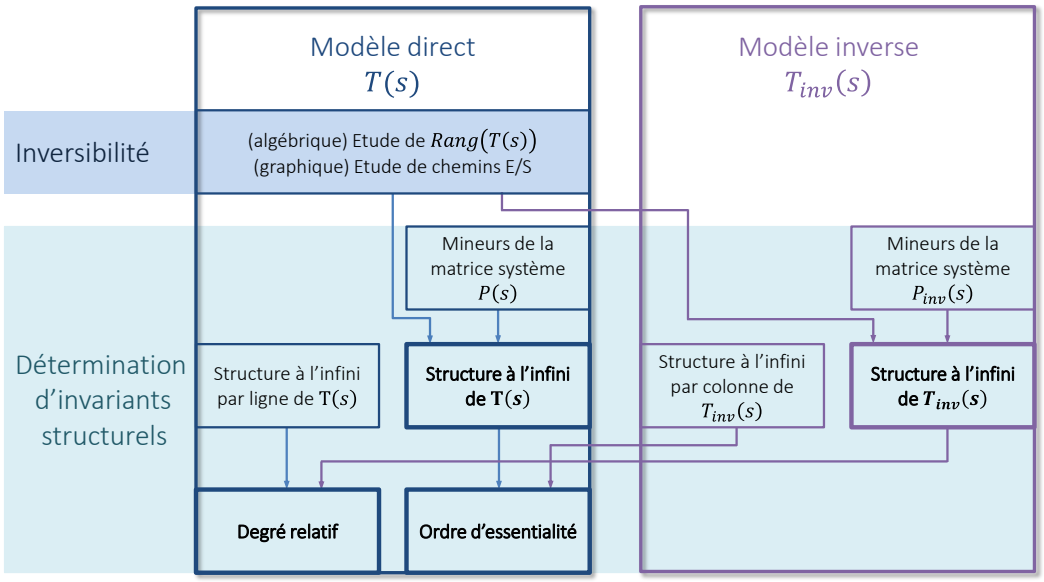


FIGURE 2.1 – Processus d'évaluation de l'*inversibilité* (modèle direct) et de détermination des *invariants structurels* (modèle direct et/ou modèle inverse), valables pour l'approche algébrique et l'approche graphique discutées au chapitre 2.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

dans ce chapitre. Son organisation repose sur cette vue d'ensemble :

— la section 2.2 établit la base théorique algébrique servant de référence au développement ultérieur des approches graphiques exposées dans les sections suivantes. Elle aborde l'ensemble des concepts exposés en figure 2.1,

— la section 2.3 présente la déclinaison graphique des résultats de l'approche algébrique. Une partie est énoncée sur le modèle *direct* et donc sur le bond graph *causal* associé. Elle regroupe ainsi les concepts et processus associés au bloc « Modèle direct $\mathbf{T}(s)$ » de la figure 2.1. La section présente également les procédures énoncées sur le modèle *inverse* et donc sur le bond graph *bicausal* associé, auquel une représentation d'état *généralisée* peut être attachée (avec un certain nombre de spécificités). Ces procédures regroupent ainsi les concepts associés au bloc « Modèle inverse $\mathbf{T}_{inv}(s)$ » de la figure 2.1,

— la section 2.4 discute les hypothèses sur lesquelles se base l'ensemble du cadre théorique et applicatif des précédentes sections de ce chapitre 2 pour les confronter à la classe de modèle exposée au chapitre 1, et exposer ainsi les limitations actuelles de la méthodologie. Cette discussion montre que la méthodologie actuelle n'est pas adaptée à la classe des systèmes singuliers et permet de dresser les perspectives des travaux proposés aux chapitres 3, 4 et 5.

2.2 Approche algébrique de l'analyse structurelle

2.2.1 Introduction

Le comportement dynamique des phénomènes physiques d'un système mécatronique peut être approché par une *représentation d'état*[2], qui permet, dans le cas linéaire, de modéliser un système dynamique sous forme matricielle. Nous considérons dans ce qui suit le système Σ carré (*i.e.* même nombre de variables d'entrée que de variables de sortie, p), *linéaire* et *invariant dans le temps* (LTI), dont la représentation d'état *classique* est la suivante :

$$\Sigma : \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{x}}(t) & = & \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) & = & \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{array} \right. \tag{2.1}$$

où $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur d'entrée et $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie. Les matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ sont de dimensions respectives $n \times n$, $n \times p$, $p \times n$ et $p \times p$.

Les variables de sortie $\mathbf{y}(t)$ de ce modèle sont exprimées en fonction des variables d'état $\mathbf{x}(t)$ et des variables d'entrée $\mathbf{u}(t)$. Ce modèle est donc un modèle *direct*. Il respecte le principe de causalité *physique* et est ainsi physiquement réalisable.

L'inversion du modèle direct Σ consiste à exprimer les variables d'entrées $\mathbf{u}(t)$ en fonction des variables de sortie $\mathbf{y}(t)$ et de leurs dérivées, et des variables d'état du modèle

1. Dans la figure 2.1, $\mathbf{T}(s)$ et $\mathbf{P}(s)$ font respectivement référence à la fonction de transfert et à la matrice système du modèle direct. $\mathbf{T}_{inv}(s)$ et $\mathbf{P}_{inv}(s)$ font respectivement référence à la fonction de transfert et à la matrice système du modèle inverse. Ces matrices seront rappelées au cours du chapitre.

2. Sans qualificatif supplémentaire, nous parlons de représentation d'état *classique* (ou *régulière*), telle qu'introduite par Kalman, dont la représentation dans le cas linéaire est celle du système (2.1). Nous introduirons par la suite la notion de représentation d'état *généralisée*, cas particulier de la représentation *singulière*, toutes deux abordées au chapitre 3.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

inverse. Cette formulation consiste à obtenir un système Σ^{-1} dont la représentation d'état *généralisée* est la suivante [FN97] :

$$\Sigma^{-1} : \begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{F}\mathbf{z}(t) + \mathbf{G}\mathbf{y}^{(\alpha)}(t) \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{H}\mathbf{z}(t) + \mathbf{J}\mathbf{y}^{(\alpha)}(t) \end{cases} \tag{2.2}$$

où $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état *généralisé*, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de sortie, $\mathbf{y}^{(\alpha)}(t) \in \mathbb{R}^{(p\times\alpha)}$ le vecteur d'entrée dont les éléments résultent d'opérations différentielles et algébriques sur les variables de sortie telles qu'on puisse écrire par transformation de Laplace : $\mathbf{Y}^{(\alpha)}(s) = \mathbf{M}(s)\mathbf{Y}(s)$, où la matrice $\mathbf{M}(s)$ est une matrice polynômiale en s. Ces opérations algébro-différentielles sur les composantes de $\mathbf{y}(t)$ peuvent se retrouver notamment par l'algorithme d'inversion de Silverman [Sil69]. Dans le système d'équations précédent, α représente les ordres de dérivation *nécessaires* des composantes du vecteur de sortie $y(t)$ dans le modèle inverse. Les matrices $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ et $\mathbf{J}$ sont de dimensions respectives $n \times n$, $n \times (p \times \alpha)$, $p \times n$ et $p \times (p \times \alpha)$.

Dans le modèle inverse Σ^{-1} représenté par (2.2), le vecteur $\mathbf{u}(t)$ joue le rôle de sortie et $\mathbf{y}^{\alpha}(t)$ le rôle d'entrée du système. Ce dernier étant issu de dérivations des composantes du vecteur $\mathbf{y}(t)$, il est non *physiquement* causal si l'on associe le rôle d'effet à la sortie et celui de cause à l'entrée. Il n'est pas concevable physiquement (au sens « technologiquement »). Il est en revanche définit *mathématiquement*. Nous introduisons à ce stade deux éléments importants associés au modèle Σ^{-1} et qui seront précisés dans la suite de ce chapitre :

1. *Ordre du modèle inverse* : le modèle Σ^{-1} est un modèle inverse d'*ordre plein*. La dimension n du vecteur d'état généralisé $\mathbf{z}(t)$ est la même que celle du vecteur d'état $\mathbf{x}(t)$ du modèle direct Σ. *Les dynamiques des systèmes* Σ *et* Σ^{-1} *seront en revanche différentes* a priori .

2. *Ordre de différentiation* apparaissant dans le modèle inverse : l'ordre de différentiation α est associé au nombre de différentiations nécessaires à opérer sur le vecteur $\mathbf{y}(t)$ de manière à obtenir une relation inversible faisant intervenir toutes les variables d'entrée [Sil69]. Dans le cas simplifié *SISO* (mono-entrée/mono-sortie), α est directement le *degré relatif* (section 2.2.4.1 page 52) de la sortie $\mathbf{y}$ par rapport à l'entrée $\mathbf{u}$. Dans ce cas, le *degré relatif* peut être lié à l'*ordre du modèle inverse* dit d'*ordre minimal*[3]. Dans le cas *MIMO*, le *degré relatif* est propre à chaque sortie y_i (voir théorème 2.7 page 52). L'entier α est alors propre au système Σ dans son ensemble et correspond également au nombre de différentiations à effectuer sur le vecteur de sortie pour obtenir une relation inversible avec toutes les variables d'entrée [Sil69]. Concernant l'*ordre de différentiation des sorties* apparaissant dans le modèle inverse, il existe une autre notion dans le cas *MIMO* qualifiant l'*ordre de dérivation maximal et atteint* d'une sortie $\mathbf{y}_i$ apparaissant dans le modèle inverse : l'*ordre d'essentialité* [CDD+86] (section 2.2.4.4), défini à partir de la *structure à l'infini* du système [Mal82] (section 2.2.3). Notons que dans le cas *SISO*, le *degré relatif* et l'*ordre d'essentialité* sont identiques.

Dans la méthodologie d'inversion, le vocable « ordre » est ainsi usité pour qualifier deux propriétés *a priori* distinctes du modèle inverse (*i.e. dimension dynamique* et *ordre de différentiation* des sorties), et qui sont directement liées dans le cas du *modèle inverse d'ordre minimal*.

3. Ayant une partie dynamique de dimension $n_{inv} \leq n$ minimale, en l'occurrence $n_{inv} = n - \alpha$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

2.2.2 Inversibilité et inverse d'ordre minimal

2.2.2.1 Critères directs d'inversibilité

Les critères d'inversibilité *directs* issus de l'approche algébrique sont applicables au modèle d'état (2.1) ainsi qu'à sa matrice de transfert $T(s)$ [4] ou sa matrice système $\mathbf{P}(s)$ [5], sans détermination préalable du modèle inverse. Le système Σ est inversible si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

1. La matrice de transfert $\mathbf{T}(s)$ (2.3) est inversible *i.e.* $\det(\mathbf{T}(s)) \neq 0$.

2. La matrice système $\mathbf{P}(s)$ (2.4) est inversible *i.e.* $\det(\mathbf{P}(s)) \neq 0$.

Remarque : l'équivalence de ces deux propriétés peut se déduire de la formule de Schur (définition 2.1 page 49) *i.e.* $\det(\mathbf{P}(s)) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\det(\mathbf{T}(s))$, notant que le polynôme caractéristique $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ ne peut pas s'annuler dans le cas régulier (2.1).

D'autres critères d'inversibilité ont été formulés. Les notions de *reproductibilité fonctionnelle* [BM65] et de *commandabilité fonctionnelle de la sortie* [SM69] [Rah93] définissent ainsi l'aptitude à déterminer une commande pour le suivi de trajectoire de sortie, équivalentes à l'inversibilité [6]. Notons les travaux de Respondek [Res90] sur l'inversion des systèmes linéaires aboutissant également à des critères d'inversibilité. Ces précédents critères directs sont détaillés dans la thèse de Fotsu-Ngwompo [FN97]. Notons en outre une formulation équivalente de Respondek en terme de nombre de zéros à l'infini, détaillée et discutée en section 2.2.3.

Remarque : Pour faire un lien à ce stade avec le bond graph, les critères *directs* d'inversibilité issus de l'approche algébrique ont été portés sur le modèle bond graph à travers les travaux originels de Rahmani [Rah93] sur la détermination de $\det(\mathbf{P}(s))$ à partir de la scrutation des chemins causaux entrées/sorties *différents* (définition B.9 page 264, et voir section 2.3.2.1). Les travaux de Fotsu-Ngwompo [FN97] utilisent les résultats de Rahmani pour proposer des critères « semi-directs » [7] d'inversibilité établis directement sur le bond graph en utilisant la bicausalité [Gaw95] [GS96] [FNST96] [FN97] (voir section 2.3.2.2).

4. La matrice de transfert $\mathbf{T}(s) \in \mathbb{R}^{p\times p}$ du système Σ de modèle d'état (2.1) est définie par :

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \tag{2.3}$$

5. La matrice système (ou matrice de Rosenbrock, [Ros70], [Ros74]) $\mathbf{P}(s) \in \mathbb{R}^{(n+p)\times(n+p)}$ du système (2.1) est définie par :

$$\mathbf{P}(s) = \begin{pmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

6. Les notions de *reproductibilité fonctionnelle* et de *commandabilité fonctionnelle de la sortie* correspondent à des inversions *à droite*. L'inversibilité à gauche est une notion duale des précédentes, souvent qualifiée d'*observabilité fonctionnelle de l'entrée* [FN97]. Dans le cas des systèmes carrés, l'*inversion à droite* et l'*inversion à gauche* sont des notions équivalentes.

7. Les critères d'inversion sont qualifiés de « semi-directs » car de manière générale, ils ne permettent de statuer sur l'inversibilité d'un système en bond graph que par l'analyse de la résolubilité de la structure de jonction du bond graph *inverse*.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

2.2.2.2 Modèle inverse d'ordre minimal

L'*inversion* d'un modèle direct considère en premier lieu les couples entrées/sorties, de sorte à formuler les variables d'entrées $\mathbf{u}(t)$ en fonction des variables de sorties $\mathbf{y}(t)$ (et de leurs dérivées). Si la représentation d'état inverse (2.2) est telle que la dimension du vecteur d'état n est la même que celle du système Σ (*i.e.* d'*ordre plein*), il est possible de trouver un système équivalent du point de vue entrée/sortie dont la dimension n_{inv} de la partie dynamique est inférieure à n. La réalisation conduisant au système Σ^{-1} – dont la partie dynamique est minimale – est qualifiée d'*inverse d'ordre minimal*. Silverman a démontré l'existence du modèle inverse d'*ordre minimal*, et que son obtention n'impliquait pas d'augmentation de l'ordre de dérivation des composantes du vecteur de sortie $\mathbf{y}(t)$ par rapport au modèle inverse d'*ordre plein* ([Sil68], cas *SISO* et [Sil69], cas *MIMO*). La procédure d'inversion proposée [Sil69] part du modèle inverse d'ordre plein et permet, par des manipulations adéquates, d'intégrer certaines variables d'état dans le vecteur de commande, réduisant ainsi l'ordre du modèle [8]. La notion d'*ordre minimal* qualifie ici la dimension de la partie dynamique du modèle inverse (*i.e.* dimension de l'espace d'état n_{inv}). Sa représentation d'état est la suivante [FN97], [EF11] :

$$\Sigma^{-1} : \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{x}}_{inv}(t) & = & \mathbf{A}_{inv}\,\mathbf{x}_{inv}(t) + \mathbf{B}_{inv}\,\mathbf{u}_{inv}^{(\alpha)}(t) \\ \mathbf{y}_{inv}(t) & = & \mathbf{C}_{inv}\,\mathbf{x}_{inv}(t) + \mathbf{D}_{inv}\,\mathbf{u}_{inv}^{(\alpha)}(t) \end{array} \right. \tag{2.5}$$

où, utilisant les notations de (2.1) et (2.2), $\mathbf{x}_{inv}(t) \in \mathbb{R}^{n_{inv}}$ est le vecteur d'état *généralisé*, $\mathbf{y}_{inv}(t) = \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de sortie et $\mathbf{u}_{inv}^{(\alpha)}(t) = \mathbf{y}^{(\alpha)}(t) \in \mathbb{R}^{p\times\alpha}$ le vecteur d'entrée. Le vecteur de commande $\mathbf{u}_{inv}^{(\alpha)}(t)$ regroupe le vecteur de sortie $\mathbf{y}(t)$ du modèle direct Σ ainsi que l'ensemble des dérivées successives de ses composantes apparaissant dans le modèle inverse d'ordre minimal. Le vecteur $\mathbf{u}_{inv}^{(\alpha)}(t)$ s'écrit ainsi :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{u}_{inv}^{(\alpha)}(t) & = & \mathbf{y}^{(\alpha)}(t) \\ & = & \left[\mathbf{y}_1(t) \quad \frac{d\mathbf{y}_1(t)}{dt} \quad \frac{d^2\mathbf{y}_1(t)}{dt^2} \quad \dots \quad \mathbf{y}_2(t) \quad \frac{d\mathbf{y}_2(t)}{dt} \quad \dots \quad \mathbf{y}_p(t) \quad \frac{d\mathbf{y}_p(t)}{dt} \quad \dots \quad \frac{d^{\alpha_p}\mathbf{y}_p(t)}{dt^{\alpha_p}}\right]^T \end{array} \tag{2.6}$$

Remarque : Sauf mention explicite contraire, nous ne nous intéresserons dans ce mémoire qu'aux *modèles inverses d'ordre minimal*. Portées sur le bond graph utilisant l'analogie avec la procédure d'inversion de Silverman, les procédures *SCAPI* et *MSCAPI* établies par Fotsu-Ngwompo conduisent directement au modèle inverse d'ordre minimal [FN97]. D'autre part, les travaux de Jardin ont montré que la détermination d'invariants structurels selon cette méthodologie d'inversion est applicable de manière relativement aisée en bicausal sur le bond graph inverse d'ordre minimal. Les modèles bond graph inverses d'ordre non minimal sont à considérer avec beaucoup plus de prudence, pour un intérêt relativement limité dans le présent cadre d'étude [Jar10].

2.2.2.3 Critères indirects d'inversibilité

Les critères d'inversibilité sont qualifiés d'*indirects* quand ils sont établis au cours du processus d'inversion. Pour les systèmes linéaires, tels le système (2.1), l'exemple de la procédure établie par Silverman conduit à des conditions d'inversibilité au cours de l'application de son algorithme [Sil69]. *Cette procédure est à la base des méthodes portées*

8. Dans sa thèse, Fotsu-Ngwompo détaille cette méthodologie, ainsi que celle de Seraji [Ser89] basée sur la fonction de transfert du système inverse $\mathbf{T}^{-1}(s)$, dont la procédure conduit directement à l'*inverse d'ordre minimal* sans passer par le modèle d'*ordre plein*.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

sur le bond graph par Fotsu-Ngwompo *[FN97] (voir section 2.3.2.2).*

Les critères d'inversibilité indirects sont plus pertinents dans le cas des systèmes non linéaires, dans la mesure où il n'existe alors pas de critère direct. Les premières formalisations ont été faites par Hirschorn [Hir79] sur les systèmes non linéaires affines en la commande, sur la base des travaux sur la reproductibilité fonctionnelle [BM65]. S'appuyant sur les résultats d'Hirschorn, d'autres travaux sur l'inversion des systèmes non-linéaires ont été réalisés par Singh [Sin81] et Perdon *et al.* [PCL92] et portent sur une généralisation de l'algorithme de Silverman aboutissant à des critères indirects utilisant, entre autre, les *degrés relatifs*. Citons également les travaux de Nijmeijer [Nij82, Nij86] et rappelons ceux de Respondek [Res90] pour leurs contributions sur l'inversion dans le cas général multi-variable non linéaire. Notons les travaux de Tan & Vandewalle [TV88] sur l'inversion des systèmes *singuliers*, aboutissant à des critères directs et indirects sur ce type de systèmes (voir par ailleurs au chapitre 3, la section 3.3 page 87) et enfin les travaux de Tanwani & Liberzon sur l'inversion des systèmes multi-variables à commutation, affines en la commande [TL10].

2.2.3 Structure à l'infini

2.2.3.1 Introduction et définition algébrique

La notion de structure à l'infini est une propriété *structurelle* basée sur la factorisation de Smith-McMillan à l'infini d'une matrice [VLK82] [CD82] [Ric01]. Appliquée à la matrice de transfert d'un système, elle permet de définir un certain nombre de propriétés fondamentales sur le modèle [Ric01]. Elle est représentée par un ensemble de *zéros et/ou de pôles à l'infini*, suivant la *propreté* des modèles. Ces zéros et ces pôles sont caractérisés par leurs *ordres*, également nommés *multiplicités*. Ces invariants structurels appliqués aux propriétés entrées/sorties d'un système permettent de donner notamment des conditions sur la résolution de problèmes de commande tels que le découplage (par retour d'état statique) [9], la poursuite d'un modèle de référence ou le rejet de perturbations [Mal82], [DC82], *i.e.* de spécifier comment la commande doit être synthétisée. Plus précisément, ils sont utilisés dans la détermination des *degrés relatifs* et *ordres d'essentialité* des sorties d'un modèle. Par opposition, la structure *finie* du système caractérise ses propriétés intrinsèques de stabilité (incluant donc sa dynamique finie).

Les informations structurelles que sont les pôles ou zéros finis ou infinis d'une matrice rationnelle sont issues de transformations élémentaires sur les lignes et colonnes de la matrice initiale pour la transformer en matrice rationnelle triangulaire (forme de Hermite) ou diagonale (forme de Smith, forme de Smith-McMillan à l'infini) [10]. Nous présentons ici la forme de Smith-McMillan à l'infini des matrices rationnelles conduisant à des formes diagonales de matrices rationnelles *non nécessairement propres* (théorème 2.1).

9. Comme rappelé dans la thèse de El Feki [EF11], les concepts de découplage et d'inversibilité sont liés, l'inversibilité d'un système étant une condition nécessaire mais non suffisante de sa découplabilité. Il existe en effet une classe de systèmes inversibles et non découplables par retour d'état *statique*, pour lesquels une extension dynamique est nécessaire (travaux de Gilbert [Gil69], il est alors question de découplage par retour d'état *dynamique*).

10. Rappelons qu'une fraction rationnelle $g(s)$ est définie comme le quotient de deux polynômes, $g(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$ avec $n(s) \in \mathbb{R}[s]$, $d(s) \in \mathbb{R}[s]$ et $d(s) \neq 0$. Une fraction rationnelle $g(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$ sera dite propre si $\deg d(s) \geq \deg n(s)$ et strictement propre si $\deg d(s) > \deg n(s)$. Une matrice rationnelle (resp. rationnelle *propre*, rationnelle *strictement propre*) est une matrice dont les éléments sont des fractions rationnelles (resp. rationnelles *propres*, rationnelles *strictement propres*).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Théorème 2.1 (*[VLK82], [CDP91], [vdW91], [MvdW91], [Ric01]*)

(Forme de* Smith-McMillan *à l'infini) *Pour toute matrice rationnelle $G(s)$ de dimension $(p \times m)$ et de rang r, la factorisation de* Smith-McMillan *à l'infini est définie par :*

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{B}_1(s) \begin{pmatrix} \mathbf{\Delta}_\infty(s) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{B}_2(s) \tag{2.7}$$

Où

- $\mathbf{B}_1(s)$ *et* $\mathbf{B}_2(s)$ *sont des matrices bipropres (*i.e. *propres, inversibles et d'inverses propres).*
- $\mathbf{\Delta}_\infty(s) = \begin{pmatrix} s^{-t_1} & & \\ & \ddots & \\ & & s^{-t_r} \end{pmatrix}$ *avec* $t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_r$.

La matrice $\begin{pmatrix} \mathbf{\Delta}_\infty(s) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ *est uniquement définie et est appelée* forme de Smith-McMillan *à l'infini de* $\mathbf{G}(s)$. *La structure à l'infini de* $\mathbf{G}(s)$ *est définie de la manière suivante :*

- *Si* $t_i \geq 0$, *alors* t_i *est un ordre de* zéro *à l'infini.*
- *Si* $t_i < 0$, *alors* $-t_i$ *est un ordre de* pôle *à l'infini.*

Remarque 1: une matrice $B(s)$ est dite *bipropre* ou *bicausale* si et seulement si $\lim_{s \to +\infty} \det(\mathbf{B}(s))$ est une constante non nulle [CDP91], [Ric01]. Une matrice *bicausale* ne possède ni pôles ni zéros à l'infini [CDT90].

Remarque 2: Il peut être montré grâce à la forme de Smith-McMillan *à l'infini* que les matrices rationnelles propres ne possèdent que des zéros à l'infini [DC82]. Le théorème 2.1 se simplifie alors à la forme dite de Smith [Ric01], où les ordres des zéros à l'infini, notés usuellement n_i dans ce cas particulier, sont tels que $0 \leq n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_r$. [11]

Il existe un lien entre les ordres des pôles et zéros à l'infini t_i et les degrés [12] des mineurs [13] de $\mathbf{G}(s)$. En effet, $t_i,\ i \in \{1, 2, ..., r\}$ peut être calculé de la manière suivante [EF11] :

$$-t_i = \delta_{D\ i} - \delta_{D\ i-1} \tag{2.9}$$

où $\delta_{D\ i}$ est le degré le plus élevé des mineurs d'ordre i de $\mathbf{G}(s)$, avec $\delta_{D\ 0} = 0$.

Notons par ailleurs que dans le cadre de détermination de la structure à l'infini des systèmes, nous serons amenés à considérer la définition 2.1 connue comme « formule de Schur » ou « complément de Schur » [EF11] :

11. Par souci de clarté de notation, les théorèmes 2.2 page 49 et 2.9 page 55 utilisent la notation n_i pour explicitement indiquer le fait que l'on y manipule des ordres de zéros à l'infini. Par distinction, le théorème 2.8 page 53 utilisera la notation t_i pour expliciter le fait que l'on y manipule des ordres de zéros/pôles à l'infini comme dans la forme de Smith-McMillan *à l'infini*, et en l'occurrence uniquement des pôles à l'infini dans le cas particulier du théorème 2.8.

12. Le degré d'une fraction rationnelle $g(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$ est défini par [Ric01] :

$$\deg(g(s)) = \deg(n(s)) - \deg(d(s)) \tag{2.8}$$

13. Un mineur d'une matrice est le determinant d'une de ses sous-matrices carrées. Il est dit *d'ordre* i lorsque cette sous-matrice est de dimension i [Gan66].

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Définition 2.1

(Formule de* Schur*) *Soit* $\mathbf{M}$ *une matrice définie par bloc,*

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

où $\mathbf{M}_{11}$ *et* $\mathbf{M}_{22}$ *sont des matrices carrées et* $\mathbf{M}_{11}$ *inversible. Le déterminant de la matrice* $\mathbf{M}$ *peut alors s'écrire sous la forme :*

$$\det(\mathbf{M}) = \det(\mathbf{M}_{11}) \det\left(\mathbf{M}_{22} - \mathbf{M}_{21}\mathbf{M}_{11}^{-1}\mathbf{M}_{12}\right) \tag{2.11}$$

2.2.3.2 Détermination par approche directe

L'approche *directe* qualifie ici la détermination de la structure à l'infini sur le modèle *direct*. Dans le chapitre 2, les modèles sont supposés *réguliers* et pouvant se mettre sous la représentation d'état (2.1). Ces systèmes sont associés à des matrices de transfert *propres* et n'ont que des zéros à l'infini. D'autres méthodes de détermination plus simples (évitant la factorisation par matrices bipropres) ont été mises en place et utilisées dans le cadre d'étude sur le rejet de perturbations [CDP91] ou le découplage par retour d'état [DC93] :[14]

Théorème 2.2 (*[CDP91], [vdW91], [DC93]*)

Soit $\mathbf{T}(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}$ *une matrice de transfert rationnelle propre de rang* r*. Le système correspondant admet* r *zéros globaux à l'infini dont les ordres* $n_1, n_2, ..., n_r$ *peuvent être calculés de la manière suivante :*

$$\begin{cases} n_1 &= \delta_1 \\ n_i &= \delta_i - \sum_{j=1}^{i-1} n_j \end{cases} \tag{2.12}$$

où δ_i *est le plus petit ordre des zéros à l'infini des mineurs d'ordre* i *de* $\mathbf{T}(s)$*.*

Remarque : la quantité δ_i est positive pour un système *régulier* (nécessairement propre). Il correspond à *l'exposant de la plus grande puissance de* s *par lequel tout mineur d'ordre* i *de* $\mathbf{T}(s)$ *peut être multiplié de sorte que le produit reste propre* [vdW91].[15]

La structure à l'infini de la matrice de transfert $\mathbf{T}(s)$ peut également être obtenue à partir de la matrice système $\mathbf{P}(s)$ [CDP91]. Ce résultat est intéressant dans la mesure où il permet de calculer les *zéros à l'infini des mineurs* de $\mathbf{T}(s)$:

14. Ces théorèmes sont directement ceux portés en bond graph par Jardin [Jar10], sur la base des travaux de Bertrand *et al.* [BSDT97, BSDT01], Sueur *et al.* [SDT92] et Dauphin-Tanguy [DT00].

15. Il est important de dissocier ici l'*ordre d'un zéro à l'infini d'un mineur* de $\mathbf{T}(s)$ de l'*ordre d'un zéro à l'infini* de $\mathbf{T}(s)$. Le premier représente l'opposé du *degré du mineur*, quand le second caractérise en partie la structure à l'infini de $\mathbf{T}(s)$. Ainsi notant δ_i, le *plus petit ordre des zéros à l'infini des mineurs d'ordre* i de $\mathbf{T}(s)$ et $\delta_{D\ i}$, le *plus haut degré des mineurs d'ordre* i de $\mathbf{T}(s)$ (comme dans l'équation (2.9), décliné ici à la matrice $\mathbf{T}(s)$), nous avons donc $\delta_{D\ i} = -\delta_i$. Si par exemple une fonction de transfert rationnelle propre $\mathbf{T}(s)$ a deux mineurs distincts d'ordre i, $t_{1_i}(s) = \frac{1}{s^4}$ et $t_{2_i}(s) = \frac{1}{s^3}$, l'exposant de la plus grande puissance de s par lequel ces deux mineurs d'ordre i $t_{1_i}(s)$ et $t_{2_i}(s)$ peuvent être multipliés de sorte que chaque produit reste propre est 3. Donc $\delta_i = 3$. En d'autres termes, le *plus haut degré des mineurs d'ordre* i *de* $T(s)$ est $\delta_{D\ i} = -3$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Théorème 2.3 (*[CDP91]*)

Soit $\mathbf{T}(s)^{j_1,...,j_i}_{h_1,...,h_i} \in \mathbb{R}^{i\times i}$ *une sous-matrice carrée déduite de la matrice de transfert* $\mathbf{T}(s)$ *(rationnelle propre, de rang* r*) en ne sélectionnant que les lignes* $h_1, ..., h_i$ *et les colonnes* $j_1, ..., j_i$*. Soit* $\delta_{i^{j_1,...,j_i}_{h_1,...,h_i}}$ *l'ordre du zéro à l'infini de son déterminant* $\det\left(\mathbf{T}(s)^{j_1,...,j_i}_{h_1,...,h_i}\right)$*.* $\delta_{i^{j_1,...,j_i}_{h_1,...,h_i}}$ *peut être déterminé de la manière suivante :*

$$\delta_{i^{j_1,...,j_i}_{h_1,...,h_i}} = n - \beta_{i^{j_1,...,j_i}_{h_1,...,h_i}} \tag{2.13}$$

où :

- *n est la dimension du vecteur d'état du système associé à la matrice de transfert $\mathbf{T}(s)$.*
- *$\beta_{i^{j_1,...,j_i}_{h_1,...,h_i}}$ est le degré de $\det\left(\mathbf{P}(s)^{1,...,n,n+j_1,...,n+j_i}_{1,...,n,n+h_1,...,n+h_i}\right)$.*
- *$\mathbf{P}(s)^{1,...,n,n+j_1,...,n+j_i}_{1,...,n,n+h_1,...,n+h_i} \in \mathbb{R}^{(n+i)\times(n+i)}$ est la sous matrice déduite de la matrice système $\mathbf{P}(s)$ en ne sélectionnant que les lignes $1, ..., n, n+h_1, ..., n+h_i$ et les colonnes $1, ..., n, n+j_1, ..., n+j_i$. Les n premières lignes et n premières colonnes de $\mathbf{P}(s)$ sont conservées (constituant la matrice $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$).*

Reformulé, l'ordre du zéro à l'infini d'un mineur $(i \times i)$ de $\mathbf{T}(s)$ est égale à n (dimension du vecteur d'état du système associé à $\mathbf{T}(s)$) auquel on soustrait le degré du mineur $(n+i)\times(n+i)$ correspondant de $\mathbf{P}(s)$. Grâce aux deux théorèmes précédents aboutissant aux équations (2.12) et (2.13), il est à présent possible d'exprimer le *plus petit* ordre des *zéros à l'infini des mineurs* d'ordre i de $\mathbf{T}(s)$ en fonction des degrés des mineurs d'ordre i de $\mathbf{P}(s)$ [CDP91] [Jar10] :

Théorème 2.4 (*[CDP91]*)

Soit δ_i le plus petit ordre des zéros à l'infini des mineurs d'ordre i de $\mathbf{T}(s)$. Alors :

$$\delta_i = n - \beta_i \tag{2.14}$$

où n est la dimension du vecteur d'état du système associé à $\mathbf{T}(s)$ et β_i est le plus grand degré des mineurs d'ordre i de $\mathbf{P}(s)$.

L'équation (2.14) utilisée dans l'expression (2.12) nous conduit à conclure que la structure à l'infini d'un modèle direct régulier (ayant une matrice de transfert $\mathbf{T}(s)$ rationnelle propre) peut être simplement déterminée à partir du calcul des degrés des mineurs de la matrice système $\mathbf{P}(s)$. *Ce résultat est important car la détermination graphique de* $\det \mathbf{P}(s)$ *est plus simple sur le bond graph que celle de* $\det \mathbf{T}(s)$ *et a été formalisée [Rah93], [BSDT97], [Jar10], basée sur les résultats exprimés sur les systèmes structurés* réguliers *[Rei88], [CDP91], [vdW91] (voir annexe B, section B.5.1 page 275).*

2.2.3.3 Détermination par approche inverse

L'approche *inverse* qualifie ici la détermination de la structure à l'infini (sous-entendu du modèle *inverse*), sur le modèle *inverse*. Les modèles inverses sont des systèmes ne respectant pas forcement une causalité physique. Définissons la matrice de transfert

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

$\mathbf{T}_{inv}(s) \in \mathbb{R}^{p\times p}$ du système Σ^{-1} de modèle d'état (2.5) de la manière suivante :

$$\mathbf{T}_{inv}(s) = \mathbf{C}_{inv}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{inv})^{-1}\mathbf{B}_{inv}(s) + \mathbf{D}_{inv}(s) \tag{2.15}$$

Remarque : les matrices $\mathbf{B}_{inv}(s)$ et $\mathbf{D}_{inv}(s)$ sont polynomiales en s de dimension respectives $(n_{inv} \times p)$ et $(p \times p)$ et obtenues en passant le système d'équation (2.5) dans le domaine de LAPLACE. Dans ce domaine, les opérations de dérivations effectuées sur le vecteur $y(t)$ sont reportées dans $\mathbf{B}_{inv}(s)$ et $\mathbf{D}_{inv}(s)$.

Les modèles inverses sont ainsi représentés par des matrices de transfert qui n'ont plus la propriété d'être nécessairement propres mais toutefois celle de posséder *uniquement des pôles à l'infini* [CDD+86], [EF11] (ce résultat peut être directement déduit de la factorisation de SMITH-MCMILLAN à l'infini (théorème 2.1) appliqué à la matrice de transfert rationnel propre $\mathbf{T}(s)$ du modèle direct Σ (2.1)). Soit également la matrice système $\mathbf{P}_{inv}(s) \in \mathbb{R}^{(n_{inv}+p)\times(n_{inv}+p)}$ du système Σ^{-1} (2.5) :

$$\mathbf{P}_{inv}(s) = \begin{pmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{inv} & \mathbf{B}_{inv}(s) \\ -\mathbf{C}_{inv} & \mathbf{D}_{inv}(s) \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

De manière analogue à l'approche algébrique directe, EL FEKI définit une relation entre les degrés des mineurs de la matrice de transfert $\mathbf{T}_{inv}(s)$ et les degrés des mineurs de la matrice système $\mathbf{P}_{inv}(s)$ associées au modèle inverse d'ordre minimal de système Σ^{-1} [EF11] :

Théorème 2.5 (*[EF11]*)

Soit $\mathbf{T}_{inv}(s)^{j_1,\dots,j_i}_{h_1,\dots,h_i} \in \mathbb{R}^{i\times i}$ une sous-matrice carrée déduite de la matrice de transfert $\mathbf{T}_{inv}(s)$ (rationnelle, non propre) en ne sélectionnant que les lignes $h_1, \dots, h_i$ et les colonnes $j_1, \dots, j_i$ tel que $\det\left(T_{inv}(s)^{j_1,\dots,j_i}_{h_1,\dots,h_i}\right) \neq 0$. Soit $\delta_{inv\, i^{j_1,\dots,j_i}_{h_1,\dots,h_i}}$ le degré de ce déterminant. $\delta_{inv\, i^{j_1,\dots,j_i}_{h_1,\dots,h_i}}$ peut être déterminé de la manière suivante :

$$\delta_{inv\, i^{j_1,\dots,j_i}_{h_1,\dots,h_i}} = \beta_{inv\, i^{j_1,\dots,j_i}_{h_1,\dots,h_i}} - n_{inv} \tag{2.17}$$

où :

- *n_{inv} est la dimension du vecteur d'état du système associé à la matrice de transfert $\mathbf{T}_{inv}(s)$.*
- *$\beta_{inv\, i^{j_1,\dots,j_i}_{h_1,\dots,h_i}}$ est le degré de $\det\left(\mathbf{P}_{inv}(s)^{1,\dots,n_{inv},n_{inv}+j_1,\dots,n_{inv}+j_i}_{1,\dots,n_{inv},n_{inv}+h_1,\dots,n_{inv}+h_i}\right)$.*
- *$\mathbf{P}_{inv}(s)^{1,\dots,n_{inv},n_{inv}+j_1,\dots,n_{inv}+j_i}_{1,\dots,n_{inv},n_{inv}+h_1,\dots,n_{inv}+h_i} \in \mathbb{R}^{(n_{inv}+i)\times(n_{inv}+i)}$ est la sous matrice déduite de la matrice système $\mathbf{P}_{inv}(s)$ en ne sélectionnant que les lignes $1, \dots, n_{inv}$, $n_{inv}+h_1, \dots, n_{inv}+h_i$ et les colonnes $1, \dots, n_{inv}, n_{inv}+j_1, \dots, n_{inv}+j_i$. Les n_{inv} premières lignes et n_{inv} premières colonnes de $\mathbf{P}_{inv}(s)$ sont conservées (constituant la matrice $(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{inv})$).*

Remarque : les mineurs nuls de $\mathbf{T}_{inv}(s)$ n'ont pas d'effet sur la structure à l'infini [EF11].

En d'autres termes, le degré d'un determinant $(i \times i)$ de $\mathbf{T}_{inv}(s)$ est égal au degré du mineur $(n+i) \times (n+i)$ correspondant de $\mathbf{P}_{inv}(s)$ auquel on soustrait n_{inv}, la dimension du vecteur d'état du système associé à $\mathbf{T}_{inv}(s)$, représentant le modèle inverse d'ordre minimal. De manière analogue au théorème 2.4, il est possible d'extraire le *plus haut*

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

degré des mineurs d'ordre i de $\mathbf{T}_{inv}(s)$ en fonction des degrés des mineurs d'ordre i de $\mathbf{P}_{inv}(s)$ [EF11] :

Théorème 2.6 (*[EF11]*)

Soit $\delta_{inv\,i}$ le plus haut degré des mineurs d'ordre i de $T_{inv}(s)$. Alors :

$$\delta_{inv\,i} = \beta_{inv\,i} - n_{inv} \tag{2.18}$$

où n_{inv} est la dimension du vecteur d'état du système associé à $T_{inv}(s)$ et $\beta_{inv\,i}$ est le plus haut degré des mineurs d'ordre i de $P_{inv}(s)$.

La structure à l'infini du modèle inverse peut ainsi être déterminée à partir du théorème 2.1 et de l'équation (2.9), en notant que $\delta_{inv\,i}$ dans (2.18) est la déclinaison de $\delta_{D\,i}$ de (2.9) à la matrice de transfert $\mathbf{T}_{inv}(s)$.

Remarque : il existe une certaine similitude entre les approches *directes* et *inverses*. Nous verrons au chapitre 3, section 3.4.2 page 92, qu'il existe une généralisation de la détermination de la structure à l'infini au cas des systèmes singuliers, pour laquelle les théorèmes 2.2, 2.3, 2.4, 2.5 et 2.6 sont des cas particuliers. Cette généralisation est notamment utilisée par Murota & van der Woude pour la détermination graphique, par le biais des matroïdes, de la structure à l'infini des systèmes singuliers [MvdW91].

2.2.4 Degré relatif et ordre d'essentialité

2.2.4.1 Définition du degré relatif

Le degré relatif, également désigné *ordre relatif*, *indice caractéristique* ou *ordre de zéro à l'infini par ligne* et noté n'_i, est associé à une sortie y_i du modèle et correspond au nombre minimal nécessaire de dérivations (par rapport au temps) de y_i pour faire apparaître une des composantes du vecteur d'entrée u dans l'expression $y_i^{(n'_i)}$. Dans le problème de conception abordé dans nos travaux, le degré relatif peut être imposé par le cahier des charges. Sa détermination a été originellement introduite pour solutionner des problématiques de découplage par retour d'état [CDB93].

2.2.4.2 Détermination du degré relatif par approche directe

Dans le cas des modèles réguliers LTI Σ (2.1), plusieurs méthodes algébriques ont été proposées :

Théorème 2.7

***(Degré relatif, approche directe)** Le degré relatif n'_i de la sortie y_i peut être déterminé de manière équivalente selon l'une des méthodes suivantes :*

- *n'_i est égal au minimum des degrés des fonctions de transfert composant la ligne $t_i(s)$ de la matrice de transfert [BM65] [DT00].*
- *n'_i peut être calculé selon [BM65], [DD82], [CDD+86] :*

$$n'_i = \begin{cases} 0 & si \quad d_i \neq 0 \\ \min\limits_{k\in\mathbb{N}^*}\{ & k| \quad c_i\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} \neq 0\} \end{cases} \tag{2.19}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

— n'_i *est égal à l'ordre du zéro à l'infini du système* $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, c_i, d_i)$ *(ou zéro à l'infini par ligne), soit [BM65], [DD82], [CDT90] :*

$$n'_i = \left\{ \min_{k \in \mathbb{N}} \{ k \mid \lim_{s \to +\infty} s^k t_i(s) \neq 0 \} \right\}. \tag{2.20}$$

où c_i *est l'*$i^{ème}$ *ligne de* $\mathbf{C}$, d_i *est l'*$i^{ème}$ *ligne de* $\mathbf{D}$ *et* $t_i(s) = c_i(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+d_i$.

2.2.4.3 Détermination du degré relatif par approche inverse

Une approche algébrique de détermination du degré relatif du modèle *direct* est proposée par El Feki [EF11] sur le modèle *inverse*, à partir des pôles à l'infini du modèle inverse d'ordre minimal Σ^{-1} (2.5) :

Théorème 2.8 (*[EF11]*)

(Degré relatif, approche inverse) *Pour un système linéaire, invariant dans le temps, carré et inversible, le degré relatif* n'_i *de la sortie* y_i *peut être déterminé de la manière suivante :*

$$n'_i = -\left(\sum_{j=1}^{p} t_j - \sum_{j=1}^{p-1} \bar{t}_{ij} \right) \tag{2.21}$$

où

— p *est le nombre de pôles à l'infini du système* $(\mathbf{A}_{inv}, \mathbf{B}_{inv}(s), \mathbf{C}_{inv}, \mathbf{D}_{inv}(s))$,
— t_j *est l'ordre du* $j^{ième}$ *pôle à l'infini du système* $(\mathbf{A}_{inv}, \mathbf{B}_{inv}(s), \mathbf{C}_{inv}, \mathbf{D}_{inv}(s))$,
— $\bar{t}_{ij}$ *est l'ordre du* $j^{ième}$ *pôle à l'infini du système* $\left(\mathbf{A}_{inv}, \overline{\mathbf{B}}_{inv_i}(s), \mathbf{C}_{inv}, \overline{\mathbf{D}}_{inv_i}(s)\right)$, *avec :*

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{B}}_{inv_i}(s) &= \begin{bmatrix} b_{inv_1}(s) & \dots & b_{inv_{i-1}}(s) & b_{inv_{i+1}}(s) & \dots & b_{inv_p}(s) \end{bmatrix} \\ \overline{\mathbf{D}}_{inv_i}(s) &= \begin{bmatrix} d_{inv_1}(s) & \dots & d_{inv_{i-1}}(s) & d_{inv_{i+1}}(s) & \dots & d_{inv_p}(s) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.22}$$

et $\forall k \in \{1, ..., i-1, i+1, ..., p\}$,
— $b_{inv_k}(s)$ *est la* $k^{ième}$ *colonne de* $\overline{\mathbf{B}}_{\mathrm{inv_i}}(s)$.
— $d_{inv_k}(s)$ *est la* $k^{ième}$ *colonne de* $\overline{\mathbf{D}}_{\mathrm{inv_i}}(s)$.

L'approche algébrique *directe* de détermination du degré relatif est relativement simple en comparaison de l'approche algébrique *inverse* proposé ici par El Feki. En effet, un certain nombre de manipulations matricielles est nécessaire pour établir l'ensemble des sous systèmes $\left(\mathbf{A}_{inv}, \overline{\mathbf{B}}_{inv_i}(s), \mathbf{C}_{inv}, \overline{\mathbf{D}}_{inv_i}(s)\right)$. Nous verrons dans la suite du présent chapitre 2 qu'une transposition en bond graph de ces théorèmes de détermination du degré relatif sera de manière analogue relativement simple sur le bond graph *causal* (représentant le modèle direct) et plus fastidieuse sur le bond graph *bicausal* (représentant le modèle inverse). Ce n'est pas le cas pour tous les invariants structurels, ainsi le choix du modèle bond graph *direct* ou *inverse* pourra se faire de manière judicieuse suivant les invariants à déterminer.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

2.2.4.4 Définition de l'ordre d'essentialité

L'ordre d'essentialité, noté n_{ie}, est associé à une sortie y_i du modèle et correspond à l'*ordre maximal atteint de dérivation* (par rapport au temps) de la sortie y_i qui apparaît dans le modèle inverse. La notion d'ordre d'essentialité à été introduite par Commault *et al.* sur le système régulier Σ (2.1) dans le contexte du découplage par retour d'état statique [CDD+86], en utilisant la notion de *ligne essentielle de matrices* de Cremer (ligne linéairement indépendante des autres) [Cre71]. Cette notion est fondamentale puisqu'elle se traduira directement dans notre contexte de dimensionnement par modèle inverse par un ordre de dérivabilité nécessaire et suffisant des trajectoires spécifiées en sortie pour calculer des entrées physiquement réalisables (*i.e.* ne contenant pas de distributions de Dirac, non physiquement réalisables). [16]

La définition originelle des ordres d'essentialité d'une matrice rationnelle strictement propre est la suivante :

Définition 2.2 (*[CD86]*)

> ***(Ordres d'essentialité d'une matrice rationnelle strictement propre)*** *Soit* $\mathbf{T}(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}(s)$ *une matrice rationnelle strictement propre de rang plein par les lignes, et* $p \leq m$. *Considérons une factorisation de* $\mathbf{T}(s)$ *de la forme :*
>
> $$\mathbf{T}(s) = \begin{bmatrix}\mathbf{R}(s) & \mathbf{0}\end{bmatrix} \mathbf{B}(s) \tag{2.23}$$
>
> *où* $\mathbf{R}(s) \in \mathbb{R}^{p\times p}(s)$ *est de rang plein et* $\mathbf{B}(s) \in \mathbb{R}^{m\times m}(s)$ *est une matrice bipropre.*
>
> *Les* ordres d'essentialité *de* $\mathbf{T}(s)$, *notés* n_{ie}, *sont définis de* manière unique *comme étant les ordres des pôles à l'infini par colonne de* $\mathbf{R}^{-1}(s)$.

Notons que dans le cas d'une matrice rationnelle strictement propre, carrée, de rang plein, la détermination des pôles à l'infini peut être directement réalisée sur $\mathbf{T}^{-1}(s)$ (puisque la matrice identité est une matrice bipropre). D'autre part, des procédures de détermination de ces invariants sont possibles à partir de la matrice originelle $\mathbf{T}(s)$, comme proposé ci-après (théorème 2.9).

Remarque 1: la définition 2.2 est la formulation originelle *i.e.* pour le cas des systèmes réguliers dont la matrice de transfert est *strictement propre*, avec $\mathbf{D} = 0$. Comme développé ultérieurement (chapitre 3, section 3.5, proposition 3.1), cette définition est également valable pour les systèmes dont la matrice de transfert est *propre*, avec $\mathbf{D} \neq 0$.

Remarque 2: la définition liée à l'équation (2.20) justifie le fait que dans le cas *SISO*, le *degré relatif* et l'*ordre d'essentialité* soient égaux.

2.2.4.5 Détermination de l'ordre d'essentialité par approche directe

L'approche algébrique de Commault *et al.* se traduit sur le système direct Σ (2.1) de la manière suivante :

16. Si les distributions de Dirac ou les impulsions sur les variables d'état seront toutefois utilisées lors de l'idéalisation de certains phénomènes, comme la commutation électrique ou le choc mécanique, elles seront dès lors introduites au niveau du phénomène à idéaliser. Elles ne seront en aucun cas issues d'un manque de propriété de dérivation des trajectoires de sortie.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Théorème 2.9 ([CDD+86])

(Ordre d'essentialité, approche directe) *Pour un système linéaire* $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ *inversible à droite avec* p *sorties, l'ordre d'essentialité* n_{ie} *de la sortie* y_i *peut être déterminé de la manière suivante :*

$$n_{ie} = \sum_{j=1}^{p} n_j - \sum_{j=1}^{p-1} \bar{n}_{ij} \tag{2.24}$$

où

- n_j *est l'ordre du* $j^{ième}$ *zéro à l'infini du système* $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$,
- $\bar{n}_{ij}$ *est l'ordre du* $j^{ième}$ *zéro à l'infini du sous-système* $\left(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_i\right)$, *avec :*

$$\overline{\mathbf{C}}_i = \begin{bmatrix} c_1^T & \dots & c_{i-1}^T & c_{i+1}^T & \dots & c_p^T \end{bmatrix}^T \tag{2.25}$$

et $\forall k \in \{1, ..., i-1, i+1, ..., p\}$, c_k *est la* $k^{ième}$ *ligne de* $\mathbf{C}_i$

Remarque : associée à la remarque faite sur la définition 2.2 et également soulignée par JARDIN dans sa thèse [Jar10], le théorème 2.9 reste valable pour un système où $\mathbf{D} \neq 0$. Autrement dit pour le système Σ (2.1), les ordres des zéros à l'infini n_j sont calculés sur le système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ et les ordres des zéros à l'infini $\bar{n}_{ij}$ sur le sous-système $\left(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_i, \overline{\mathbf{D}}_i\right)$ où $\overline{\mathbf{D}}_i$ est obtenue en supprimant la $i^{ième}$ ligne de $\mathbf{D}$ (voir détail au chapitre 3, section 3.5, proposition 3.2 page 102).

2.2.4.6 Détermination de l'ordre d'essentialité par approche inverse

La définition des *ordres d'essentialité* étant originellement formulée à partir d'une approche inverse (définition 2.2) *i.e.* sur $\mathbf{R}^{-1}(s)$ dans le cas non carré et directement sur $\mathbf{T}^{-1}(s)$ dans le cas carré, la procédure algébrique de détermination des ordres d'essentialité est immédiate sur la matrice de transfert du modèle inverse, en particulier sur $\mathbf{T}_{inv}(s)$ (2.15). Dans le présent cas du système *régulier* Σ (2.1), possédant une matrice de transfert $\mathbf{T}(s)$ propre, les matrices de transfert inverses associées n'ont que des pôles à l'infini [CDD+86] et donc, que des pôles à l'infini par colonne [CD86]. Les ordres d'essentialité de $\mathbf{T}(s)$, pôles à l'infini par colonne de $\mathbf{T}_{inv}(s)$, sont ainsi les degrés les plus élevés des transmittances de $\mathbf{T}_{inv}(s)$ par colonne. Ceci se traduit ainsi de la manière suivante :

Théorème 2.10 ([CDD+86] [CD86] [EF11])

(Ordre d'essentialité, approche inverse) *Pour un système linéaire carré* $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$, *invariant dans le temps et inversible, l'ordre d'essentialité* n_{ie} *de la sortie* y_i *peut être déterminé de la manière suivante :*

$$n_{ie} = \max_{j \in \{1,...,p\}} \left\{ \deg(t_{inv_{ji}}(s)) \right\} \tag{2.26}$$

où

- p *est la dimension du vecteur de sortie du système,*
- $t_{inv_{ji}}(s)$, $j \in \{1, ..., p\}$ *représente la* $j^{ième}$ *transmittance de la* $i^{ième}$ *colonne de* $\mathbf{T}_{inv}(s)$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Remarque : suivant les remarques relatives à la définition 2.2 et au théorème 2.9, le théorème 2.10 est également valable pour une représentation d'état (2.1) avec $\mathbf{D} \neq 0$.

2.2.5 Exemple

Prenons la matrice de transfert rationnelle propre $\mathbf{T}(s)$ suivante, entre les entrées U_1, U_2 et les sorties Y_1, Y_2 :

$$\mathbf{T}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^3} & \frac{1}{s^5} \\ \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^4} \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

Les *degrés relatifs* respectifs des sorties Y_1 et Y_2 sont ainsi (théorème 2.7) :

— $n'_1 = 3$
— $n'_2 = 2$

En explicitant le système avec ses entrées/sorties de la manière suivante,

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^3}\, U_1 + \frac{1}{s^5}\, U_2 \\ \\ \frac{1}{s^2}\, U_1 + \left(\frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^4} \right)\, U_2 \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

nous pouvons effectivement conclure qu'il faut dériver *au minimum* 3 fois la sortie Y_1 pour faire apparaître une composante de l'entrée (en l'occurrence U_1) et dériver *au minimum* 2 fois la sortie Y_2 pour faire apparaître une composante de l'entrée (en l'occurrence U_1 également ici). D'autre part, nous avons :

$$\mathbf{T}^{-1}(s) = \begin{bmatrix} (s+1)s^2 & -s \\ \\ -s^4 & s^3 \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

Les ordres des *pôles à l'infini par colonne* de $\mathbf{T}^{-1}(s)$ sont respectivement 4 pour la première colonne et 3 pour la seconde. Utilisant la définition 2.2 (ou de manière analogue le théorème 2.10), nous pouvons en déduire les *ordres d'essentialité* respectifs des sorties Y_1 et Y_2 :

— $n_{1e} = 4$
— $n_{2e} = 3$

Utilisant $\mathbf{T}^{-1}(s)$ pour formuler le modèle inverse de la manière suivante,

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (s+1)s^2\ Y_1 - s\ Y_2 \\ \\ -s^4\ Y_1 + s^3\ Y_2 \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

nous remarquons que la sortie Y_1 est dérivée 4 fois *au maximum* (en l'occurrence dans l'expression de la composante U_2) et que la sortie Y_2 est dérivée *au maximum* 3 fois (également dans l'expression de U_2). Rappelons que nous n'avons pas nécessairement besoin de savoir si le modèle inverse est ici d'ordre minimal, puisque les propriétés entrées/sorties entre inverse d'ordre minimal et inverse d'ordre plein sont identiques.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Comme exposé à travers le théorème 2.9, la précédente détermination des *ordres d'essentialité* peut être réalisée sans calcul préalable de la matrice de transfert inverse $\mathbf{T}^{-1}(s)$. Cette détermination requiert en revanche celle préalable de la *structure à l'infini* de $\mathbf{T}(s)$ (*i.e.* associée au modèle *direct*). Celle-ci peut par exemple être réalisée par la factorisation de Smith-McMillan à l'infini (théorème 2.1), rappelant que dans le présent cas, $\mathbf{T}(s)$ est rationnelle propre :

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(s) &= \mathbf{B}_1(s) \quad \mathbf{\Delta}_p(s) \quad \mathbf{B}_2(s) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{s}+\frac{1}{s^2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2.31}$$

Cette forme implique que la matrice de transfert $\mathbf{T}(s)$ (2.27) possède deux *zéros à l'infini*, d'ordre respectifs $n_1 = 2$ et $n_2 = 4$[17]. Une autre manière de retrouver ce résultat, sans passer par la forme de Smith-McMillan à l'infini, est de considérer les degrés des mineurs de $\mathbf{T}(s)$ (voir théorème 2.2 ou également l'équation (2.9)) :

— Dans (2.27), le *plus haut degré des mineurs d'ordre* 1 de $\mathbf{T}(s)$ est $\delta_{D\,1} = -2$. Nous avons ainsi $n_1 = -\delta_{D\,1} = 2$. De manière analogue, utilisant les notions du théorème 2.2, le *plus petit ordre des zéros à l'infini des mineurs d'ordre* 1 de $\mathbf{T}(s)$ est $\delta_1 = 2$, soit donc $n_1 = \delta_1 = 2$.

— Le *plus haut degré des mineurs d'ordre* 2 de $\mathbf{T}(s)$ est donné par le degré du (seul) mineur d'ordre 2 *i.e.* $\det \mathbf{T}(s) = \frac{1}{s^6}$, soit donc $\delta_{D\,2} = -6$ ou encore $\delta_2 = 6$ (*i.e.* le *plus petit ordre des zéros à l'infini des mineurs d'ordre* 2 de $\mathbf{T}(s)$ est 6). Nous avons ainsi (théorème 2.2) : $n_2 = \delta_2 - \sum_{j=1}^{2-1} n_j = \delta_2 - n_1 = 6 - 2 = 4$.

(Notons en outre que dans le cadre d'application du théorème 2.9 ci-après, pour le présent cas où $p = 2$, nous avons $\sum_{j=1}^{p} n_j = 6$).

Appliquons la détermination des ordres d'essentialité suivant le théorème 2.9. Dans le présent cas de matrice de transfert de dimension 2, la structure à l'infini des sous-systèmes $\left(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_i\right)$ se simplifie à des *structures à l'infini par ligne* :

— *Détermination de n_{1e} :* la sous-matrice $\mathbf{T}_1(s)$, obtenue en supprimant la ligne 1 de $\mathbf{T}(s)$, est la matrice ligne suivante,

$$\mathbf{T}_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s^3}+\frac{1}{s^4} \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

dont la *structure à l'infini par ligne* est un zéro à l'infini par ligne d'ordre $\bar{n}_{11} = 2$. Nous avons ainsi $n_{1e} = \sum_{j=1}^{2} n_j - \sum_{j=1}^{2-1} \bar{n}_{1j} = 6 - 2 = 4$.

— *Détermination de n_{2e} :* la sous-matrice $\mathbf{T}_2(s)$, obtenue en supprimant la ligne 2 de $\mathbf{T}(s)$, est la matrice ligne suivante,

$$\mathbf{T}_2(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^3} & \frac{1}{s^5} \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

17. Nous rappelons qu'il est usuel de noter n_i les ordres des zéros à l'infini dans le cas rationnel propre (impliquant que $\mathbf{T}(s)$ n'a que des zéros à l'infini) plutôt que t_i, utilisé dans le cas plus général où $\mathbf{T}(s)$ n'est pas nécessairement propre.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

dont la *structure à l'infini par ligne* est un zéro à l'infini par ligne d'ordre $\bar{n}_{21} = 3$. Nous avons ainsi $n_{2e} = \sum_{j=1}^{2} n_j - \sum_{j=1}^{2-1} \bar{n}_{2j} = 6 - 3 = 3$.

Nous retrouvons ainsi les mêmes résultats que ceux issus de la définition 2.2 sur $\mathbf{T}^{-1}(s)$ (2.29).

2.3 Analyse structurelle sur le modèle bond graph

2.3.1 Introduction

L'analyse structurelle de modèle a été présentée au chapitre 1 et son périmètre défini. Elle peut en partie se décliner en un certain nombre d'invariants structurels (*nombre* et *ordre* des zéros/pôles à l'infini, *degré relatif*, *ordre d'essentialité*), dont les définitions sur les systèmes *réguliers* ont été introduites en section 2.2. La formalisation de ces invariants a par ailleurs été partiellement réalisée graphiquement par un certain nombre d'auteurs cités en section 2.2, sur une représentation graphique du système d'état (digraphe) [Rei88] et par une approche structurée (digraphe structuré) [Lin74], [Rei88], [CDP91], [vdW91], [DC93], [CD10]. Portée sur le bond graph et étendue notamment grâce aux contributions de Suda *et al.* [SH86], Sueur *et al.* [SDT89], Rahmani [Rah93], Fotsu-Ngwompo [FN97], Bertrand *et al.* [BSDT97], Jardin [Jar10] et El Feki [EF11], l'analyse structurelle se base sur le référentiel que constituent les approches modèle d'état et digraphe structuré. Il est important de remarquer que la plupart des notions proposées en section 2.2 (critère d'inversibilité, invariants structurels) fait intervenir le calcul de déterminant matriciel. La présente section 2.3 s'appuie sur les travaux déterminants de Reinschke [Rei88] sur le calcul de rang et de déterminant de matrice en digraphe appliqué aux systèmes *réguliers*, se basant eux-mêmes sur ceux de Cauchy [Cau12] et de Mason [Mas53, Mas56]. Ces travaux ont notamment été portés en bond graph sur la matrice de transfert $\mathbf{T}(s)$ et la matrice système $\mathbf{P}(s)$ par Rahmani [Rah93] en utilisant les correspondances existantes entre digraphe et bond graph. Ils ont ensuite été discutés par Fotsu-Ngwompo [FN97] puis simplifiés par Jardin [Jar10] pour le cas de $\det(\mathbf{P}(s))$.

2.3.2 Inversibilité et inverse d'ordre minimal

Nous avons introduit en section 2.2 deux types de critère d'inversibilité, *direct* et *indirect*. Ils traduisent respectivement que l'étude d'inversibilité associée à chacune des deux procédures considère le modèle *direct* dans le premier cas, ou est menée pendant la construction du modèle *inverse* dans le second [18]. Nous présentons dans cette section deux procédures bond graph distinctes de tests illustrant respectivement les critères d'inversibilité *directs* et *indirects*. Ces procédures bond graph ont été établies respectivement par Rahmani [Rah93] et Fotsu-Ngwompo [FN97] [19].

2.3.2.1 Critères directs d'inversibilité

Ces critères d'inversibilité ont été établis dans le contexte de l'étude de la commande de système par découplage, qui ne requiert ainsi pas forcément la construction du modèle inverse. Ils sont issus d'une part des résultats démontrés sur les digraphes structurés [CDP91], et d'autre part de la correspondance entre chemins orientés *disjoints* en digraphe et chemins causaux *différents* en bond graph (définition B.9 page 264). Rahmani

18. Nous avons souligné le fait que les procédures indirectes algébriques de test d'inversibilité étaient également valables dans les cas de systèmes non-linéaires.

19. Dans sa thèse, Jardin a mis en perspective les différents critères constitutifs de ces deux procédures suivant les niveaux d'analyse *BG-structurel* et *comportemental* [Jar10], voir chapitre 1, section 1.4.4.3 page 34.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

propose dans un premier temps une méthode de détermination du déterminant de la matrice système $\det(\mathbf{P}(s))$ du système linéaire carré Σ (2.1) [20], dont la représentation bond graph possède *au moins* un choix possible de p chemins causaux entrées/sorties *différents* (p étant le nombre d'entrées et de sorties). Utilisant les critères d'inversibilité algébriques basés sur la matrice système [21], le test suivant est établi :

Test d'inversibilité 2.1 (*[Rah93]*)

Soit un système linéaire carré à p entrées et p sorties représenté par son modèle bond graph causal ne possédant pas d'élément de stockage en causalité dérivée et ayant le cas échéant des boucles algébriques toujours résolubles :

1. *Si le modèle bond graph ne contient pas p chemins causaux entrées/sorties différents, alors le système est non inversible.*
2. *Si le modèle bond graph contient* un seul *choix possible (un seul ensemble) de p chemins causaux entrées/sorties différents, alors le système est inversible.*
3. *Si le modèle bond graph contient plusieurs choix possibles (plusieurs ensembles) de p chemins causaux entrées/sorties différents, alors il faut calculer le determinant de la matrice système $\det(\mathbf{P}(s))$ pour conclure sur l'inversibilité.*

Nous pouvons noter que la notion de chemins causaux entrées/sorties *différents*, directement issue de la correspondance digraphe/bond graph, permet de mettre en évidence les indépendances *structurelles* de couplage des paires entrées/sorties par les éléments de stockage d'énergie I ou C. Si l'ensemble de p chemins causaux n'existe pas, nous avons directement $\det(\mathbf{P}(s)) = 0$ d'après la détermination bond graph proposée par Rahmani. En revanche, l'existence d'un *unique* ensemble de chemins causaux différents assure le fait que le determinant de la matrice système n'est pas nul, puisque qu'il n'est alors pas possible d'avoir plusieurs chemins causaux différents, pour un même couple entrées/sorties, dont la somme des gains puisse s'annuler. Ce dernier point nous permet également de comprendre que dès lors que plusieurs ensembles de p chemins causaux entrées/sorties *différents* existent, il n'est alors possible de conclure dans le présent cas qu'en vérifiant que $\det(\mathbf{P}(s)) \neq 0$ utilisant la détermination bond graph de Rahmani.

2.3.2.2 Critères « *semi-directs* » d'inversibilité

Ces critères d'inversibilité ont été établis dans le contexte du dimensionnement par modèle inverse, basée sur le bond graph et le concept de bicausalité [Gaw95]. Cette considération est importante puisqu'elle a conduit à considérer des chemins causaux entrées/sorties *disjoints* (définition B.8 page 264) plutôt que *différents* (définition B.9 page 264). Cette restriction par rapport à l'approche de Rahmani (section 2.3.2.1) se justifie simplement par la propagation de la bicausalité en bond graph, qui n'est envisageable que suivant des chemins causaux disjoints [22] pour ne pas aboutir à des conflits de causalité. La qualification *semi-directe* de ces critères est liée au fait que les premiers sont établis sur le bond graph causal (lié au modèle *direct*), mais que la fin du test, comme nous allons le voir, se base sur des critères établis sur le modèle bond graph bicausal (lié au modèle *inverse*) :

20. Jardin propose dans sa thèse [Jar10] une méthode plus simple de détermination de $\det(\mathbf{P}(s))$ sans utiliser le bond graph réduit comme dans la procédure de Rahmani [Rah93].

21. Nous rappelons que le système Σ est inversible si et seulement si la matrice système $\mathbf{P}(s)$ (2.4) est inversible *i.e.* $\det(\mathbf{P}(s)) \neq 0$.

22. Ces chemins se distinguent de ceux différents par le fait qu'ils ne peuvent pas impliquer les mêmes variables.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Test d'inversibilité 2.2 (*[FN97] [NBS05] [JEFMF+08]*)

Soit un système linéaire carré à p entrées et p sorties représenté par son modèle bond graph acausal ne possédant pas d'éléments de stockage en causalité dérivée et ayant le cas échéant des boucles algébriques toujours résolubles :

1. *Si le modèle bond graph ne contient pas d'ensemble de p lignes de puissance entrées/sorties disjointes, alors le système est non inversible.*
2. *Si le modèle bond graph ne contient pas d'ensemble de p chemins causaux entrées/sorties disjoints, alors le système est non inversible.*
3. *Si le modèle contient plusieurs ensembles de p chemins causaux entrées/sorties disjoints, alors il faut :*
   - *choisir un ensemble de p lignes de puissance entrées/sorties disjointes ;*
   - *construire le modèle bond graph bicausal correspondant en propageant la bicausalité le long des p lignes de puissance entrées/sorties disjointes choisies à l'étape précédente.*

   Si cette construction conduit à une structure de jonction résoluble, le modèle est inversible. Au contraire, si quel que soit l'ensemble de p lignes de puissance entrées/sorties disjointes et quelles que soient les affectations causales retenues pour le modèle bond graph bicausal, une structure de jonction non résoluble apparaît, le système est non inversible.

La résolubilité de la structure de jonction énoncée comprend la vérification des *contraintes globales de causalité* (cycles et co-cycles [Bid94]) et celle de l'*ordre des variables de base* (*basis order for junction structures* [RM80]), auxquelles les procédures établies par Rosenberg & Andry [RA79] et Van Dijk [vD94] répondent. Soulignons que la procédure de Fotsu-Ngwompo n'est pas moins générique que celle de Rahmani par la restriction à la scrutation des chemins *disjoints*, puisque ce premier a prouvé que s'il existe un *unique* ensemble de p chemin causaux entrées/sorties *différents*, ces p chemins causaux entrées/sorties sont nécessairement *disjoints* [FN97]. Cette propriété est importante pour confronter les deux approches et est relativement simple à appréhender puisque si l'ensemble n'est pas disjoint, les chemins causaux différents partagent des variables en commun et il existe ainsi plusieurs ensembles entrées/sorties possibles.

2.3.2.3 Comparaison par niveau d'analyse

Il est important de mentionner que la procédure d'inversion de Fotsu-Ngwompo est généralisable aux modèles présentant des éléments de stockage d'énergie dépendants (statiquement et dynamiquement, donc notamment des causalités dérivées sur les éléments de stockage d'énergie), puisqu'elle se base uniquement sur la considération graphique de propriété des chemins causaux (ils doivent être disjoints). En revanche, ce n'est pas forcément le cas pour la procédure de Rahmani, puisque certains travaux ont montré que la procédure originelle basée sur les digraphes structurés, base de la procédure bond graph de détermination de $\det(\mathbf{P}(s))$, est différente pour les systèmes *singuliers* [Rei94], [Mou00], [Jar10] [23]. En termes d'application, la procédure de Fotsu-Ngwompo est notamment utilisée dans les travaux de Mosiek [Mos99] en analyse structurelle appliquée à la surveillance de systèmes physiques modélisés en bond graph et son implémentation logicielle. Une comparaison a été proposée par Jardin pour replacer les deux procédures de test précédentes vis-à-vis de niveaux d'analyse [Jar10] :

23. Cette considération est l'une des principales motivations des travaux proposés au chapitre 4.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Test / *Niveau d'analyse*	Test d'inversibilité de RAHMANI	Test d'inversibilité de FOTSU-NGWOMPO
BG - Structurel	1(a) - Recherche d'un ensemble de chemins causaux entrées/sorties *différents* 1(b) - Étude des ensembles de chemins causaux entrées/sorties *différents*	1 - Étude des ensembles de lignes de puissance entrées/sorties disjointes 2 - Étude des ensembles de chemins causaux entrées/sorties *disjoints*
Comportemental	2 - Calcul du déterminant de la matrice système $\det(\mathbf{P}(s))$, déterminé à partir du bond graph	3 - Étude de la résolubilité de la structure de jonction du bond graph bicausal

TABLE 2.1 – Comparaison des procédures d'inversion de RAHMANI et FOTSU-NGWOMPO par niveau d'analyse [Rah93], [FN97], [Jar10]

2.3.2.4 Modèle inverse d'ordre minimal

Issue des travaux de SILVERMAN [Sil68, Sil69], la notion de modèle inverse d'ordre minimal comprend ainsi la dimension minimale irréductible de son espace d'état, notée n_{inv}, mais également le nombre minimal *total* de différentiations par rapport au temps à effectuer sur ses sorties y_i pour pouvoir inverser le système. Une procédure bond graph a été formalisée par FOTSU-NGWOMPO pour l'obtention de ce type de modèle, directement sans passer par le modèle d'ordre plein [FN97] :

Procédure d'obtention d'un modèle bond graph inverse d'ordre minimal à partir du bond graph direct [FN97] *Soit un bond graph causal représentant un modèle direct inversible, ne possédant pas d'élément de stockage en causalité dérivée et ayant le cas échéant des boucles algébriques toujours résolubles. Un bond graph bicausal représentant un modèle inverse d'ordre minimal peut être obtenu de la manière suivante :*

1. *Choisir un ensemble S_0 de p chemins causaux entrées/sorties disjoints d'ordre*[24] *minimal noté ω_{min}.*
2. *Déterminer un ensemble $S_{\ell p_0}$ de p lignes de puissance entrées/sorties disjointes associé à l'ensemble S_0.*
3. *Construire le bond graph bicausal correspondant en propageant la bicausalité le long des lignes de puissance appartenant à l'ensemble $S_{\ell p_0}$.*

Remarque : dans la précédente procédure, les hypothèses entraînent que les notions d'*ordre* (définition B.15 page 265) et de *longueur* (définition B.14 page 265) de chemins causaux sont confondues.

24. Voir définition B.15 page 265.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Dans le cas d'un modèle bond graph causal ne possédant pas d'élément de stockage en causalité dérivée et ayant le cas échéant des boucles algébriques toujours résolubles, nous aurons les implications suivantes :

— L'ordre minimal ω_{min} de l'ensemble de chemins causaux entrées/sorties disjoints correspond au nombre total minimum de dérivations des sorties y_i nécessaires pour inverser le système. *Dans le cas d'un bond graph représentant un modèle SISO, cet ordre serait directement le* degré relatif *de la sortie* y.

— La dimension de l'espace d'état du modèle inverse sera $n_{inv} = n - \omega_{min}$ (où n est la dimension de l'espace d'état du modèle *direct* associé au bond graph causal).

Remarque : si plusieurs ensembles de p chemins causaux entrées/sorties disjoints d'ordre minimal existent, nous privilégierons ceux qui entraînent un ordre de différentiation homogène sur les sorties y_i, pour circonscrire autant que possible les problématiques de différentiations numériques dans le modèle de simulation.

Nous avons présenté les deux premières phases de la construction d'un modèle inverse *i.e.* le *test bond graph d'inversibilité* et la construction du *bond graph bicausal représentant le modèle inverse d'ordre minimal*. Nous avons également rappelé les origines des critères constitutifs et les hypothèses sur lesquelles ils sont établis. En continuant de traiter à ce stade la même classe de modèle (*i.e.* systèmes *réguliers*, se déclinant ici par des bond graph ne possédant pas d'élément de stockage en causalité dérivée et ayant le cas échéant des boucles algébriques toujours résolubles), nous poursuivons cette présentation sur la détermination bond graph des invariants structurels que sont la *structure à l'infini*, le *degré relatif* et l'*ordre d'essentialité*.

2.3.3 Structure à l'infini

2.3.3.1 Introduction et résultats préliminaires

La section 2.2 a présenté la détermination de la structure a l'infini par approche algébrique (théorèmes 2.2, 2.3, 2.4). Elle se caractérise dans le cas de systèmes conduisant à des matrices de transfert propres, de rang r, par un nombre de zéros à l'infini égal à r dont les ordres peuvent être calculés grâce au degré des mineurs d'ordre i de la matrice de transfert $\mathbf{T}(s)$ (théorème 2.2) ou de la matrice système $\mathbf{P}(s)$ (théorèmes 2.3 et 2.4). Concernant l'approche graphique, nous avons évoqué la possibilité de calculer le determinant $\det(\mathbf{P}(s))$ à partir du bond graph dans le cas linéaire [Rah93] [Jar10], basé sur des résultats en digraphe structuré [Rei88], [CDP91]. Ces travaux sont présentés en détail en annexe B, section B.5.1 page 275 et permettent les formalisations de la section 2.3.3.2.

Dans la présente section, l'analyse structurelle est également envisagée sur le modèle inverse, en étendant au bond graph bicausal les résultats de l'approche algébrique (théorèmes 2.5 et 2.6). Nous présentons la détermination des invariants structurels (*nombre* et *ordres* des *pôles à l'infini*) à partir du bond graph bicausal, en fonction des niveaux d'analyse discutés précédemment (*i.e. BG- Structurel* et *comportemental*).[25] Cette détermination graphique se base sur celle préalable du déterminant de la matrice système

25. Notons que d'autres analyses structurelles peuvent être menées sur le modèle inverse comme la dynamique des zéros du système. Cette analyse peut être utilisée pour déterminer le degré des oscillations de commandes dans les problèmes de suivi de trajectoire, ainsi que la stabilité interne du système lors du découplage entrées/sorties. Fotsu-Ngwompo a ainsi proposé une interprétation de la dynamique des zéros, qui correspond aux dynamiques du modèle inverse dans le cas linéaire, à partir du modèle bond graph bicausal [FN97], généralisant ainsi les approches existantes basées sur le bond graph causal dans les travaux de Wu & Youcef-Toumi [WYT95].

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

du modèle inverse $\mathbf{P}_{inv}(s)$ en bond graph, détaillée en annexe B, section B.5.2 page 279 et permet les formalisations de la section 2.3.3.3.

La présente section 2.3.3, ainsi que la suivante (section 2.3.4), ne présentent l'analyse structurelle qu'au niveau *BG-Structurel* suivant la classification de Jardin (chapitre 1, section 1.4.4 page 32). La déclinaison des résultats de ces sections au niveau comportemental est proposée en annexe E.

Remarque : comme nous l'avons précédemment utilisé, nous qualifierons par abus de langage le « bond graph *causal* » comme le modèle bond graph lié au modèle *direct* et le modèle « bond graph bicausal » comme celui lié au modèle *inverse* dans la mesure où il n'y a pas d'ambiguité sur ce point, en raison des hypothèses faites sur le bond graph associé au modèle direct au chapitre 2. [26]

2.3.3.2 Détermination par le bond graph causal

La détermination de la structure à l'infini d'un modèle direct à partir de sa représentation bond graph causale se base sur les travaux de Bertrand *et al.* [BSDT97, BSDT01]. Jardin a repris les théorèmes de ces travaux pour les décliner suivants différents niveaux d'analyse (*BG-Structurel* et *comportemental*[27]) [Jar10]. Nous ne reprenons ici que le plus amont de ces niveaux (*i.e. BG-Structurel*). Notons que la démonstration des théorèmes 2.11 et 2.12 suivants utilise le théorème 2.2 page 49 et le lemme B.3 page 278. Ces théorèmes font intervenir les notions d'*ensemble de chemin causaux* (cas particulier de la définition B.23 page 266, explicité page 266) et de longueur associée (définition B.25 page 266), détaillées en annexe B, section B.1.3 page 265.

Théorème 2.11 (*[BSDT97], [Jar10]*)

(Nombre de zéros à l'infini, approche bond graph causal, niveau d'analyse BG-Structurel) *Sur le modèle bond graph en causalité préférentielle intégrale, le nombre* r_{BG-s} *de* zéros BG-Structurels à l'infini *du modèle est égal au nombre maximal de chemins qu'un ensemble de chemins causaux entrées/sorties* disjoints *puisse contenir.*

Théorème 2.12 (*[BSDT97], [Jar10]*)

(Ordre des zéros à l'infini, approche bond graph causal, niveau d'analyse BG-Structurel) *Sur le modèle bond graph en causalité préférentielle intégrale, les ordres des* zéros BG-Structurels *à l'infini du modèle peuvent être calculés de la manière suivante :*

$$\begin{cases} n_{BG-s,1} &= L_{1_s} \\ n_{BG-s,i} &= L_{i_s} - L_{i-1_s} \end{cases} \tag{2.34}$$

où :

— L_{i_s} *représente la longueur minimale qu'un ensemble d'exactement* i *chemins causaux entrées/sorties* différents *puisse contenir.*

26. Cette précision est importante puisque ces associations (direct/causal et inverse/bicausal) ne seront plus nécessairement vraies au chapitre 4.

27. Nous rappelons que le niveau d'analyse comportemental est également celui auquel aboutit l'approche algébrique.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Remarque : la formulation originelle de COMMAULT & DION (théorème 2.2), qui comporte des soustractions de sommations d'ordres de zéros à l'infini, peut se simplifier au niveau bond graph par la simple différence entre longueurs L_{i_s} et L_{i-1_s} pour le $i^{ième}$ zéro *BG-structurel* à l'infini $n_{BG-s,i}$ [Jar10].

Nous remarquons que la scrutation des chemins causaux est distincte entre le théorème 2.11 et le théorème 2.12. La restriction aux chemins *disjoints* dans le théorème 2.11 se justifie par le fait que le nombre de *zéros BG-Structurels à l'infini* est égal au rang r de la matrice de transfert $\mathbf{T}(s)$, soit donc à un ensemble de r chemins causaux entrées/sorties *disjoints* (comme vu sur le test d'inversibilité 2.2 page 60). En revanche, la détermination des ordres des *zéros BG-Structurels à l'infini* (théorème 2.12) doit se faire par scrutation des chemins causaux *différents*, comme défini par BERTRAND. [28] La déclinaison du théorème 2.12 au niveau comportemental est proposé en annexe E, théorème E.2 page 321.

La structure à l'infini du modèle *direct* est ainsi complètement définie sur le bond graph causal, représentant un modèle linéaire, invariant dans le temps et ayant une matrice de transfert associée *rationnelle propre*. A ce stade, cette détermination de la structure à l'infini a été formulée avec les hypothèses originelles pour les modèles bond graph, *i.e.* ne possédant pas de stockage d'énergie en causalité dérivée et ayant le cas échéant des boucles algébriques toujours résolubles. Ces hypothèses sont maintenant rediscutées sur le bond graph bicausal représentant le modèle inverse, puis dans les développements des chapitres 3, 4 et 5.

2.3.3.3 Détermination par le bond graph bicausal

Rappelons que dans le cas direct, au niveau *BG-Structurel*, le nombre de zéros à l'infini r_{BG-s} (théorème 2.11) peut être différent de r, égal au rang de $\mathbf{T}(s)$, puisque les gains des chemins causaux ne sont pas considérés à ce niveau d'analyse. Sur le bond graph bicausal représentant le modèle inverse, nous avons nécessairement p pôles à l'infini au niveau *comportemental*, et n'ayant ici que p entrées et p sorties, nous avons forcément que le nombre de pôles à l'infini du modèle inverse $r_{inv\,BG-s}$ sera égal à p au niveau d'analyse *BG-structurel* également. Les ordres des pôles à l'infini peuvent être déterminés sur le bond graph bicausal représentant le modèle inverse de la manière suivante :

Théorème 2.13 (*[EF11]*)

(Ordre des pôles à l'infini, approche bond graph bicausal - niveau d'analyse BG-Structurel) *Sur le modèle bond graph bicausal, représentant un modèle inverse d'ordre minimal, linéaire, invariant dans le temps, carré à p entrées et p sorties, le nombre de pôles à l'infini de ce modèle est égal à p et leur ordre, $t_{inv\,BG-s,i}$, peut être calculé de la manière suivante :*

$$\begin{cases} t_{inv\,BG-s,1} &= \omega_{1_s} \\ t_{inv\,BG-s,i} &= \omega_{i_s} - \omega_{i-1_s} \end{cases} \tag{2.35}$$

où :

- *ω_{i_s} représente l'ordre minimal qu'un ensemble d'exactement i chemins causaux entrées/sorties* différents *puisse avoir.*

28. Notons en effet que le théorème 2.12 peut se démontrer à partir du théorème B.2 page 275. Dans sa thèse JARDIN a ainsi levé les différentes ambiguïtés résidant jusqu'alors dans le type de chemin à étudier en reprenant les hypothèses sur lesquelles se basent les théorèmes 2.11 et 2.12 [Jar10].

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Au niveau BG-Structurel, la structure à l'infini est ainsi complètement définie sur un bond graph bicausal, représentant un système inverse LTI pouvant se mettre sous la forme généralisée (2.5) et ayant une matrice de transfert associée (2.15) rationnelle non propre ne possédant que des pôles à l'infini. La déclinaison au niveau d'analyse comportemental est faite en annexe E, théorème E.3 page 321.

Les déterminations des invariants structurels que sont le *degré relatif* et l'*ordre d'essentialité* sont à présent présentés. Rappelons que ces invariants structurels pourront être directement manipulés par le cahier des charges, que ce soit pour sa rédaction ou pour son exploitation en termes de spécifications pour le dimensionnement ou pour la commande.

2.3.4 Degré relatif et ordre d'essentialité

2.3.4.1 Détermination du degré relatif par le bond graph causal

Nous avons introduit au niveau algébrique (théorème 2.7, équation (2.20)) que le degré relatif représente le *zéro à l'infini par ligne* de l'$i^{ième}$ ligne de la fonction de transfert $\mathbf{T}(s)$, en d'autres termes, la transmittance $t_{ij}(s)$ associée à y_i comportant le minimum d'intégration par rapport aux entrées u_j. Transposé sur le bond graph direct, le degré relatif d'une sortie est donné de manière générique par l'*ordre minimal* parmi les chemins causaux entre les variables d'entrée u_j et cette sortie y_i [WYT95] [FN97] :

Théorème 2.14 (*[WYT95], [FN97], [Jar10]*)

(Degré relatif, approche bond graph causal, niveau d'analyse BG-structurel) *Sur un modèle bond graph en causalité préférentielle intégrale, le* degré relatif BG-structurel $n'_{BG-s,i}$ *de la sortie* y_i *est égal à* $\omega_{BG-s,i_{min}}$*, l'ordre minimal qu'un chemin causal puisse avoir entre la sortie* y_i *et n'importe quelle entrée.*

Remarque : Wu & Youcef-Toumi [WYT95] ont démontré que cette procédure possède une exception, lorsque plusieurs chemins causaux de même ordre minimal $\omega_{BG-s,i_{min}}$ entre la sortie y_i et une entrée u_j possède une somme de gain statique nulle. Dans ce cas, le degré relatif issue de l'approche algébrique (théorème 2.7) est plus grand que $\omega_{BG-s,i_{min}}$. Cela été souligné dans la thèse de Fotsu-Ngwompo [FN97] et ainsi réexprimé dans la thèse de Jardin [Jar10] par le biais des niveaux d'analyse (aboutissant aux déclinaisons du théorème 2.14 et du théorème E.4 page 323, respectivement pour les niveaux d'analyse *BG-structurel* et *comportemental*).

2.3.4.2 Détermination du degré relatif par le bond graph bicausal

Le degré relatif n'_i, associé à une sortie y_i du modèle *direct*, est également déterminable sur le modèle *inverse* Σ^{-1} (2.5) par l'approche algébrique (théorème 2.8). Basée sur la structure à l'infini du modèle inverse (théorèmes 2.5 et 2.6) pour laquelle la procédure de détermination sur le modèle bond graph bicausal a été précédemment précisée (théorèmes 2.13 et E.3 page 321 suivant le niveau d'analyse), le degré relatif peut se déterminer de la manière suivante :

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Théorème 2.15 (*[EF11]*)

(Degré relatif, approche bond graph bicausal, niveau d'analyse BG-structurel) *Sur un modèle bond graph bicausal, représentant un modèle inverse d'ordre minimal, linéaire, invariant dans le temps, carré à p entrées et p sorties, le* degré relatif BG-structurel $n'_{BG-s,i}$ *de la sortie y_i peut être calculé de la manière suivante :*

$$n'_{BG-s,i} = -\left(\omega_{p_s} - \omega^{(i)}_{p-1_s}\right) \tag{2.36}$$

où :

- *ω_{p_s} représente l'ordre minimal qu'un ensemble de p chemins causaux entrées/sorties* différents *puisse avoir.*
- *$\omega^{(i)}_{p-1_s}$ représente l'ordre minimal qu'un ensemble de $p-1$ chemins causaux entrées/sorties* différents *puisse avoir sur le modèle bond graph bicausal initial sans considérer son $i^{ième}$ double source (remplaçant le détecteur associé à la sortie y_i sur le bond graph associé au modèle direct).*

Les considérations sur la déclinaison du théorème 2.15 au niveau d'analyse comportemental sont exposées en annexe E, section E.2.3.2 page 324.

2.3.4.3 Détermination de l'ordre d'essentialité par le bond graph causal

L'ordre d'essentialité n_{ie}, associé à la sortie y_i du modèle direct (2.1), a été défini algébriquement (définition 2.2) et sa détermination à partir du modèle direct est proposée au théorème 2.9. Portée sur le bond graph, elle implique la détermination des ordres des zéros à l'infini n_j $(j = 1, ..., p)$ sur la représentation bond graph causal, tandis que les ordres des zéros à l'infini $\bar{n}_{ij}$ $(j = 1, ..., p-1)$ sont déterminés sans considérer le détecteur associé à la sortie y_i. La détermination préalable de la structure à l'infini sur le bond graph est donc requise (théorème 2.12).

Théorème 2.16 (*[BSDT97]*, *[Jar10]*)

(Ordre d'essentialité, approche bond graph causal, niveau d'analyse BG-structurel) *Sur un modèle bond graph en causalité préférentiellement intégrale, ne possédant pas d'éléments de stockage en causalité dérivée, ayant le cas échéant des boucles algébriques toujours résolubles, et associé à un modèle supposé inversible correspondant à un système linéaire, invariant dans le temps, l'ordre d'essentialité* BG-structurel $n_{BG-s,ie}$ *de la sortie y_i peut être déterminé de la manière suivante :*

$$n_{BG-s,ie} = L_{p_s} - L^{(i)}_{p-1_s} \tag{2.37}$$

où :

- *p est le nombre de sortie du système.*
- *L_{p_s} représente la longueur minimale qu'un ensemble de p chemins causaux entrées/sorties* différents *puisse avoir.*
- *$L^{(i)}_{p-1_s}$ représente la longueur minimale qu'un ensemble de $p-1$ chemins causaux entrées/sorties* différents *puisse avoir sur le modèle bond graph obtenu en supprimant son $i^{ième}$ détecteur* (i.e. *détecteur associé à la sortie y_i).*

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

La déclinaison de la détermination au niveau d'analyse comportementale est proposée en annexe E, section E.2.3.3 page 324 et se base sur la détermination bond graph préalable de la structure à l'infini au niveau d'analyse comportemental (théorème E.2 page 321).

2.3.4.4 Détermination de l'ordre d'essentialité par le bond graph bicausal

La définition algébrique de l'ordre d'essentialité n_{ie} est basée sur la *structure à l'infini par colonne* de $\mathbf{T}(s)^{-1}$, en sélectionnant la colonne relative à y_i (définition 2.2, théorème 2.10). La détermination sur le bond graph bicausal de ces invariants se base ainsi sur l'analyse des degrés des transmittances $t_{inv_{ji}}(s)$ associées à y_i de la matrice de transfert $\mathbf{T}_{inv}(s)$ (2.15) (rationnelle non propre, de rang p, ne possédant que des pôles à l'infini) :

Théorème 2.17 (*[EF11]*)

(Ordre d'essentialité, approche bond graph bicausal, niveau d'analyse BG-structurel) *Sur un modèle bond graph bicausal, représentant un modèle inverse d'ordre minimal, linéaire, invariant dans le temps, carré à p entrées et p sorties, l'*ordre d'essentialité BG-structurel $n_{BG-s,ie}$ *de la sortie y_i peut être déterminé de la manière suivante :*

$$n_{BG-s,ie} = -\min_{k,j}\{\omega_k(y_i \to u_j)\} \tag{2.38}$$

où $\omega_k(y_i \to u_j)$ est l'ordre du $k^{ième}$ chemin causal entre la double source associée à y_i et le double détecteur associé à u_j.

Remarque : la matrice de transfert $\mathbf{T}_{inv}(s)$ ne possédant que des pôles à l'infini garantit le fait que $\max_{j\in[1,\dots,m]}\left\{\deg(t_{inv_{ji}}(s))\right\} \geq 0$ (et d'autre part que l'ordre minimal $\omega_k(y_i \to u_j)$ qu'un chemin $y_i \to u_j$ puisse avoir est nécessairement négatif).

La déclinaison de la détermination au niveau d'analyse comportementale est proposée en annexe E, section E.2.3.4 page 325.

2.3.5 Conclusions de l'analyse sur les bond graphs causal et bicausal

Certains outils et procédures ont été rappelés et détaillés dans la présente section 2.3 sur l'analyse structurelle appliquée aux bond graph causal et bicausal. Outre les tests d'inversibilité et la procédure d'obtention du modèle inverse d'ordre minimal, les différents invariants structurels ont été déterminés (*nombre* et *ordres* des *zéros et pôles à l'infini*, *degré relatif* et *ordre d'essentialité*). Nous pouvons synthétiser les points suivants :

— La *structure à l'infini* est une propriété du système complet. Le *nombre* de zéros à l'infini est associé aux propriétés d'inversibilité du système (théorème 2.11). Les *ordres* des zéros à l'infini peuvent se déterminer sur le modèle bond graph causal par scrutation des ensembles de chemins causaux entrées/sorties *différents*, en analysant leur longueur (théorème 2.12). Cette longueur doit être minimale. D'autre part, les *ordres* des pôles à l'infini du modèle inverse peuvent se déterminer sur le modèle bond graph bicausal associé, par scrutation des ensembles de chemins causaux entrées/sorties *différents*, en analysant leur ordre (théorème 2.13). Cet ordre doit être minimale.

— Un *degré relatif* est associé à chacune des sorties du système. Il correspond au nombre minimal nécessaire de dérivations de la sortie pour faire apparaître une

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

des composantes du vecteur d'entrée. Sur le bond graph causal, il se détermine par scrutation des chemins causaux d'ordre minimal entre la sortie considérée et n'importe quelle entrée (théorème 2.14). Sur le bond graph bicausal, la détermination du degré relatif amène à considérer les ordres minimaux des ensembles de chemins causaux entrées/sorties *différents*, respectivement sur la représentation complète et sur celle dont on supprime la double source associée à la sortie dont on calcule le degré relatif (théorème 2.15).

— Un *ordre d'essentialité* est associé à chacune des sorties du système. Il correspond à l'ordre maximal nécessaire et suffisant de dérivation de la sortie qui apparaîtra dans le modèle inverse d'ordre minimal. Sur le modèle direct, la détermination préalable de la structure à l'infini du système est requise. Sur le bond graph causal, la détermination de l'ordre d'essentialité revient à considérer les longueurs minimales des ensembles de chemins causaux entrées/sorties différents, respectivement sur le bond graph initial et sur le bond graph sur lequel le détecteur associé à la sortie considérée a été supprimé (théorème 2.16). Sur le bond graph bicausal, la détermination de l'ordre d'essentialité d'une sortie repose sur la scrutation des chemins causaux d'ordre minimal entre cette sortie et n'importe quelle entrée.

Nous rencontrons ainsi une certaine dualité dans les procédures bond graph, suivant le modèle utilisé pour la détermination des invariants. Ce point a été discuté par El Feki *et al.* [EFJMF+12b], remarquant que :

1. la procédure bond graph de détermination du degré relatif n'_i en causal (théorème 2.14) est très similaire à celle de l'ordre d'essentialité n_{ie} en bicausal (théorème 2.17).

2. la procédure bond graph de détermination du degré relatif n'_i en bicausal (théorème 2.15) est très similaire à celle de l'ordre d'essentialité n_{ie} en causal (théorème 2.16), en rappelant qu'en algébrique, elles font chacune intervenir la structure à l'infini du système (inverse et direct respectivement).

Ces procédures étant plus ou moins fastidieuse selon les cas, il peut être intéressant de « sélectionner » le modèle suivant l'invariant à caractériser (en l'occurrence, le degré relatif n'_i sur le modèle direct (théorème 2.14) et l'ordre d'essentialité n_{ie} sur le modèle inverse (théorème 2.17).

Remarque : notons que la relative simplicité de caractérisation de n'_i en causal et n_{ie} en bicausal (item 1) provient simplement de leur définition algébrique respective et de la manière de la porter en bond graph. Ces deux invariants sont nativement définis sur la matrice de transfert (respectivement n'_i sur $\mathbf{T}(s)$ et n_{ie} sur $\mathbf{T}^{-1}(s)$) comme *structure à l'infini par ligne/colonne i.e.* correspondant au plus haut degré des transmittances relatives à y_i. Porté sur le bond graph (respectivement causal pour la détermination de n'_i et bicausal pour n_{ie}), cela se traduit par la recherche de chemins causaux d'ordres minimaux associés à y_i. Un raisonnement similaire peut être mené pour les déterminations détaillées à l'item 2, toutes deux basées sur la *structure à l'infini du système* (par opposition à la simple *structure à l'infini par lignes/colonnes*).

Si la mise en place pratique des procédures associées aux théorèmes de cette section semble un peu fastidieuse, rappelons toutefois que dans l'approche bond graph, le dé-

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

terminant de la matrice système $\mathbf{P}(s)$ et de ses sous-matrices n'est jamais calculé. Seuls leurs coefficients de plus haut degré est considéré. Cela nous conduit à évaluer des longueurs *minimales* des ensembles contenant des chemins entrées/sorties *différents*. Il est également important de mentionner que les procédures de scrutations bond graph sont ici clairement définies et pourraient être relativement simples à automatiser dans des logiciels supportant l'analyse structurelle en bond graph tels que MS1 [MS1] par exemple.

Notons enfin qu'un certain nombre d'exemple applicatifs de l'approche sur le bond graph causal peut être trouvé dans les travaux de Fotsu-Ngwompo *et al.* [FNST96] ainsi que Marquis-Favre & Jardin [MFJ11a, MFJ11b], et sur le bicausal dans les travaux de El Feki [EF11] et El Feki *et al.* [EFJMF+12b].

2.4 Discussion sur les limitations de la méthodologie présentée

2.4.1 Présence de boucles algébriques de type « 1ZCP »

En rapport avec la classe de modèle que nous souhaitons traiter dans le cadre de l'analyse structurelle par approche bond graph, nous avons évoqué au chapitre 1 le cas de modèles mécaniques possédant des contraintes algébriques entre les éléments inertiels. Une implication bond graph est la présence potentielle de boucles causales d'ordre 0 de type $1ZCP$ (et des $3ZCP$ impliquant des éléments I et/ou C) dans la classification de Van Dijk *et al.* [vDB91a, vDB91b, vD94] [29] *i.e.* où des éléments de stockage d'énergie en causalité dérivée apparaissent en raison de contraintes statiques entre éléments inertiels [30]. En présence de causalité dérivée, la *longueur* et l'*ordre* d'un chemin causal sont potentiellement différents. Dans le cadre des procédures de détermination d'invariants sur le bond graph causal de la section 2.3, où l'hypothèse d'absence de causalité en dérivation est clairement formulée [Jar10], les notions de *longueur* et d'*ordre* sont respectivement employées pour la détermination de l'ordre d'essentialité n_{ie} (théorème 2.16) et le degré relatif n'_i (théorème 2.14). Or nous avons mentionné le cas particulier de modèle *SISO* pour lequel n_{ie} et n'_i sont égaux. Les précédentes procédures établies sur le bond graph causal peuvent donc être remises en question lorsque des causalités dérivées apparaissent dans le modèle bond graph. Selon cet argument, ce n'est en revanche pas *a priori* le cas en bicausal.

Prenons l'exemple simple *SISO* de deux masses dont les déplacements sont algébriquement contraints (figure 2.2a). Associons respectivement aux masses m_1 et m_2 les quantités de mouvement p_1 et p_2. Une modélisation bond graph peut être celle proposée en figure 2.2b, où l'élément de stockage $I : m_2$ apparait en causalité dérivée, imposée par l'élément de stockage $I : m_1$ en causalité intégrale et où la boucle causale d'ordre 0 de type $1ZCP$ est représentée. En tenant compte de la contrainte algébrique sur les quantités de mouvement $m_2 p_1 = m_1 p_2$, nous pouvons écrire le système sous la forme

29. Cette classification est détaillée en annexe A.2 page 246. Nous y précisons en outre que dans l'ensemble de ce mémoire, nous ne dissocions pas le traitement des $1ZCP$ et des $3ZCP$ impliquant des éléments I et/ou C.

30. Dans des cas autres que $1ZCP$ (ou $3ZCP$ impliquant des éléments I et/ou C), des causalités en dérivation sur les éléments de stockage peuvent également apparaître, par exemple lors d'affectation de causalité non préférentiellement intégrale, voir chapitre 4, figure 4.6 page 124, ou lorsque la causalité est imposée par des sources Se, Sf.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

(a) (b)

FIGURE 2.2 – Exemple de deux masses en liaison encastrement

ODE suivante :

$$\begin{cases} \dot{p}_1 &= \dfrac{m_1}{m_1+m_2}u \\ y &= \dfrac{m_2}{m_1+m_2}u \end{cases} \tag{2.39}$$

Nous pouvons déduire de (2.39) que pour la sortie y, nous avons algébriquement $n'_1 = n_{1e} = 0$ (il existe une relation algébrique directe entrée/sortie). Au niveau bond graph, le modèle 2.2b ne possède qu'un seul chemin causal *entrée* → *sortie*, noté ⓐ, de gain statique non nul, de longueur $l_a = 1$ et d'ordre $\omega_a = 0$ (figure 2.3). La détermination des

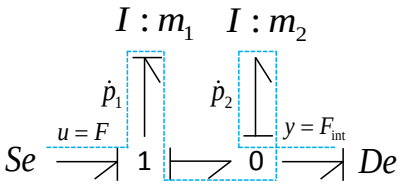


FIGURE 2.3 – Chemin causal *entrée* → *sortie* ⓐ

invariants structurels par l'approche bond graph causale est la suivante (le gain n'étant pas nul, les niveaux d'analyse *BG-Structurel* et *comportemental* conduisent ici aux mêmes résultats) :

— selon le théorème 2.14, le degré relatif de y est l'*ordre minimal qu'un chemin causal puisse avoir entre u et y* ; nous avons ainsi $n'_1 = \omega_a = 0$.

— selon le théorème 2.16, nous avons ici $n_{1e} = L_{p_s} - L^{(i)}_{p-1_s} = l_a - 0 = 1$. *($L_{p_s}$ représente la longueur minimale qu'un ensemble de $p = 1$ chemin causal entrée/sortie puisse avoir ; le sous-système « $i-1$ » n'existant pas dans le cas SISO, $L^{(i)}_{p-1_s} = 0$).*

Les résultats de l'approche bond graph causal sont donc ici non consistants avec l'approche algébrique en ce qui concerne l'ordre d'essentialité n_{1e} (et donc également la détermination de la structure à l'infini). Le degré relatif n'_1 est ici correct.

Menons à présent la détermination sur le modèle inverse. Algébriquement, le modèle est inversible et nous avons immédiatement $u = \dfrac{m_1+m_2}{m_2}y$ et $n'_1 = n_{1e} = 0$. Au niveau bond graph, le modèle est inversible au sens de la procédure de FOTSU-NGWOMPO (section 2.3.2.2, test d'inversibilité 2.2) et le bond graph bicausal du modèle inverse d'ordre minimal est proposé en figure 2.4, précisant l'unique chemin causal *sortie* → *entrée* noté ⓑ d'ordre 0 (la relation $u = \dfrac{m_1+m_2}{m_2}y$ peut également être vérifiée sur le modèle inverse). Le gain statique du chemin ⓑ n'étant pas nul, appliquons les procédures de

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

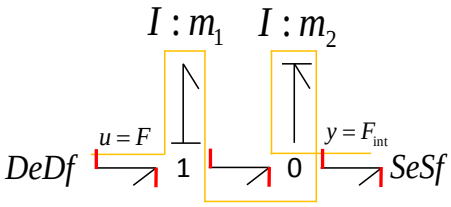


FIGURE 2.4 – Chemin causal *sortie* → *entrée* ⓑ

détermination des invariants n'_1 et n_{1e} du modèle direct sur le modèle inverse :

— d'après le théorème 2.15, nous avons $n'_1 = -\left(\omega_{p_s} - \omega^{(i)}_{p-1_s}\right) = -(\omega_b - 0) = 0$.

— d'après le théorème 2.17, l'*ordre minimal que peut avoir un chemin causal entre la double source associée à y et le double détecteur associé à u* est ici $\omega_b = 0$; nous avons ainsi $n_{1e} = 0$.

Les résultats de l'approche bond graph inverse sont ici consistants avec l'approche algébrique.

La considération de causalités dérivées (principalement issues de $1ZCP$) est l'un des points qui nous amènera à réévaluer les précédentes procédures bond graph de détermination d'invariants.

2.4.2 Intérêt de procédure de détermination commune pour les systèmes direct et inverse

Le présent chapitre a fait état de différentes approches, au niveau algébrique comme au niveau graphique (bond graph), de détermination des invariants structurels sur les deux modèles étudiés : le modèle *direct* Σ de représentation d'état *régulière* (2.1) et l'*inverse* Σ^{-1} de représentation d'état *généralisée* (2.5). Chacun possède des spécificités, parmi lesquelles,

— le modèle *direct* (2.1) possède une matrice de transfert $\mathbf{T}(s)$ (2.3) rationnelle *propre*, ne possédant que des zéros à l'infini (théorème 2.1). Le *degré relatif* n'_i associé à l'$i^{ième}$ sortie peut être défini comme l'ordre du *zéro à l'infini de l'*$i^{ième}$ *ligne* de $\mathbf{T}(s)$ (théorème 2.7). Cette dernière étant rationnelle propre, n'_i sera nécessairement positif (puisque toutes les transmittances de $\mathbf{T}(s)$ sont alors des fractions rationnelles propres).

— le modèle *inverse* (2.5) possède une matrice de transfert $\mathbf{T}_{inv}(s)$ (2.15) rationnelle *non propre*, ne possédant cependant que des pôles à l'infini [CDD+86]. L'*ordre d'essentialité* n_{ie} associé à l'$i^{ième}$ sortie (du modèle direct) peut être défini comme l'ordre du *pôle à l'infini de l'*$i^{ième}$ *colonne* de $\mathbf{T}_{inv}(s)$ (définition 2.2, théorème 2.10). Cette dernière ne possédant que des pôles à l'infini [CDD+86] et donc que des pôles à l'infini par colonne [CD86], n_{ie} sera nécessairement positif.

Les procédures algébriques utilisant par essence ces précédentes spécificités, leur déclinaisons graphiques les considèrent nécessairement. Elles aboutissent entre autres choses à des procédures dédiées, spécifiques au modèle considéré.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

L'idée suivant laquelle une représentation commune des modèles directs et inverse puisse être intéressante est avancée par Fotsu-Ngwompo dans sa thèse, en introduisant la formulation de l'inversion en termes de système *singulier* (2.40), puis en détaillant certaines procédures de passage du modèle singulier (2.40) au modèle d'état *généralisé* (dont (2.5) est une représentation) [FN97]. Quand bien même ces développements restent à l'état de perspectives dans sa thèse, cette proposition s'avère extrêmement intéressante pour « fusionner » les approches bond graph causal et bicausal. Elle a été formulée préalablement à l'ensemble des contributions réalisées par Jardin et El Feki dans leur thèses respectives, s'avèrant ainsi encore davantage pertinente.

$$\Sigma_d : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}(t) & = & \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) & = & \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{array} \right. \tag{2.40}$$

Précisons enfin qu'une représentation de systèmes possédant des contraintes algébriques, comme évoqué en section précédente 2.4.1, est possible avec la forme (2.40).

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre 2, l'ensemble des concepts et des processus sur lesquels se base la méthodologie bond graph de dimensionnement par modèle inverse du laboratoire Ampère a été détaillé (synthétisé en figure 2.1 page 42). Nous avons pris le soin de préciser dans un premier temps les bases théoriques de référence que constitue l'approche algébrique sur laquelle se base la méthodologie (section 2.2), en précisant à chaque étape les hypothèses employées, notamment pour la définition et la détermination des invariants structurels que représentent la *structure à l'infini*, le *degré relatif* et l'*ordre d'essentialité* :

— la classe de modèle direct traitée dans le chapitre 2 est celle des systèmes *réguliers i.e.* de représentation d'état *régulière*, possédant une matrice de transfert $\mathbf{T}(s)$ ayant la propriété d'être rationnelle *propre*. Une implication est le fait qu'elle ne possède que des *zéros à l'infini*,

— la précédente assertion implique que les *degrés relatifs* (ordres des zéros à l'infini par ligne de $\mathbf{T}(s)$) seront nécessairement positifs, et les *ordres d'essentialité* (ordres des pôles à l'infini par colonne de $\mathbf{T}^{-1}(s)$, appliqués à $\mathbf{T}_{inv}(s)$) seront nécessairement positifs également (puisque $\mathbf{T}^{-1}(s)$ ne comporte alors que des pôles à l'infini par colonne).

Les précédentes propriétés, associées à la classe de modèle direct traitée, représentent des spécificités sur lesquels l'ensemble des procédures graphiques reposent (section 2.3) :

— au niveau digraphe du modèle *direct*, avec les travaux de Reinschke [Rei88] sur le calcul de déterminant de la matrice système $\mathbf{P}(s)$ d'un système *régulier*,

— au niveau bond graph du modèle *direct*, sur la détermination du *degré relatif* [FN97] [Jar10], du calcul du *déterminant de la matrice système* $\mathbf{P}(s)$ d'un système *régulier* [Jar10], de la *structure à l'infini* [Jar10] et de l'*ordre d'essentialité* [Jar10],

— au niveau digraphe du modèle *inverse*, avec les travaux de El Feki [EF11] basés sur une généralisation à la représentation d'état *généralisée* sur la base des travaux de Reinschke [Rei88] sur le calcul de déterminant de la matrice système

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

$\mathbf{P}(s)$ d'un système *régulier*,

— au niveau bond graph du modèle *inverse*, avec les procédures de calcul de *degré relatif* et d'*ordre d'essentialité* du modèle direct [EF11] utilisant également les spécificités liées à un modèle direct *régulier* (par exemple, le théorème 2.17 utilisent le fait que $\mathbf{T}^{-1}$ n'ait que des pôles à l'infini).

Ayant d'une part montré en fin de chapitre 2 (section 2.4) que la méthodologie n'est pas dans tous les cas directement applicable sur un bond graph causal et d'autre part, argumenté en faveur de procédures communes de détermination d'invariants dans le cas *régulier* et dans le cas *généralisé*, nous prônons l'intérêt à porter à la représentation d'état *singulière* (2.40). Cette représentation est d'une part consistante avec la classe de modèle présentée au chapitre 1 *i.e.* de modèle mécanique contenant des relations de contrainte entre les variables d'énergie (pouvant être représentées sur le bond graph par des $1ZCP$ comme le propose l'exemple 2.2), et propose d'autre part une base commune de représentation des modèles *direct* et *inverse* présentés au chapitre 2 et ainsi une certaine homogénéité de représentation.

La généralisation de la méthodologie bond graph de dimensionnement par modèle inverse à la classe des systèmes *singuliers* que nous allons proposer, va donc reprendre la démarche globale présentée au chapitre 2 :

— le chapitre 3 expose le cadre théorique de l'analyse structurelle, généralisant l'approche algébrique du chapitre 2 à la classe des systèmes singuliers,

— le chapitre 4 étend les procédures graphiques (digraphe et bond graph) à la classe des systèmes singuliers, utilisant comme référence théorique l'approche algébrique du chapitre 3,

— enfin, le chapitre 5 présente l'analyse temporelle des systèmes singuliers et une déclinaison de certaines de leurs propriétés sur les bond graphs représentant cette classe de système.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Chapitre 3

Analyse structurelle des systèmes linéaires singuliers

Sommaire

3.1 Introduction 76
3.2 Présentation des systèmes singuliers 77
3.2.1 Généralités 77
3.2.2 Régularité et solvabilité des systèmes singuliers 81
3.2.3 Modes exponentiels, impulsionnels et non-dynamiques 83
3.3 Inversion des systèmes singuliers 87
3.4 Propreté et structure à l'infini des systèmes singuliers 89
3.4.1 Propreté 89
3.4.2 Structure à l'infini 92
3.5 Ordres d'essentialité généralisés 96
3.5.1 Introduction 96
3.5.2 Structure à l'infini par colonne/ligne 96
3.5.3 Ordres d'essentialité généralisés 101
3.5.4 Interprétation 104
3.5.5 Conclusion 108
3.6 Conclusion 108

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

3.1 Introduction

Le présent chapitre 3 s'inscrit dans une proposition d'extension de la méthodologie de conception des systèmes mécatroniques basée sur une approche énergétique par modèle inverse et sur le formalisme bond graph, présentée au chapitre 1. Les outils d'analyse structurelle sur laquelle elle se base ont été détaillés au chapitre 2. La classe de modèle à laquelle nous souhaitons maintenant appliquer cette méthodologie, *i.e.* les systèmes *singuliers*, a été introduite au chapitre 1 et les limitations, à ce stade, ont été abordées du point de vue du bond graph au chapitre 2 (section 2.4 page 69).

La principale contribution proposée dans ce chapitre est la définition d'un ordre d'essentialité généralisé pour les systèmes singuliers, extension de l'ordre d'essentialité des systèmes réguliers (section 2.2.4 page 52), ainsi qu'une détermination algébrique. Sa transposition graphique sur le bond graph sera abordée au chapitre 4. Elle constituera l'extension méthodologique de nos travaux de recherche sur la conception et le dimensionnement par modèle inverse des systèmes mécatroniques.

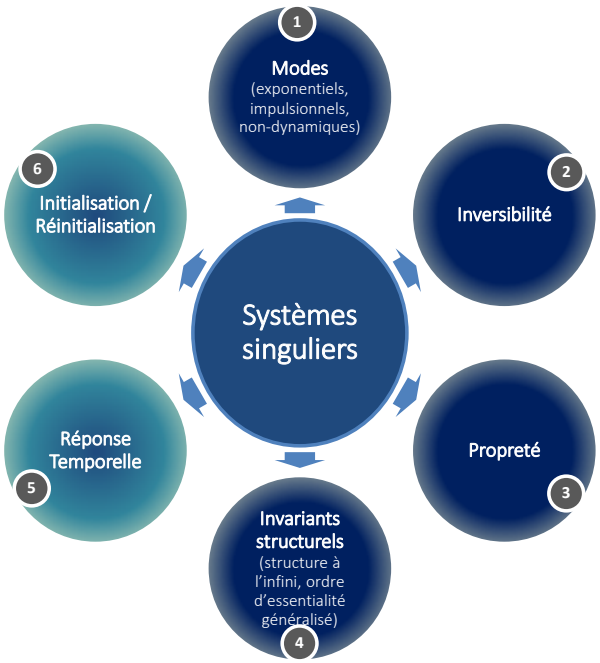


FIGURE 3.1 – Spécificités et propriétés des systèmes singuliers (les items 1 à 4, associés à l'analyse structurelle, sont abordés dans ce chapitre du point de vue algébrique, et les items 5 et 6, associés à l'analyse temporelle, au chapitre 5)

La figure 3.1 présente un certain nombre d'aspects pour lesquels la classe des systèmes singuliers se distinguent de celle des systèmes réguliers. Peut-être ce qui constitue leur principale caractéristique est qu'ils exhibent, outre des modes *exponentiels* classiques, des modes *impulsionnels* et des modes *non-dynamiques*. Ceux-ci ont une incidence forte, en lien avec l'initialisation et la réinitialisation potentielle de l'état, sur la forme des réponses temporelles dont notamment des discontinuités dans les solutions de ces systèmes. Ces aspects seront plus détaillés dans le chapitre 5 où nous proposerons une approche générale de ces systèmes dans le formalisme bond graph.

Dans l'objectif des contributions de ce chapitre, les propriétés de propreté et d'inversibilité ainsi que les invariants structurels constituent le cœur de l'analyse structurelle ap-

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

pliquée aux systèmes singuliers. La partie bibliographique s'appuie principalement sur les travaux référents de VERGHESE *et al.* [VK79, VLK81, VK81], de KUCERA [Kuc86, Kuc89] et les formalisations au niveau algébrique de DAI [Dai89c, Dai89b, Dai89a] ainsi que celles de BUISSON *et al.* [Bui93b, Bui93a, BL94, BC97, BC98, CBLR02] proposées pour ces dernières en support d'implémentations bond graph pour la modélisation des systèmes à commutation. Nous nous appuierons par ailleurs sur les travaux de COMMAULT *et al.* sur les invariants structurels des systèmes réguliers [CD82, DC82, CDD$^+$86, CD86, CDB93, DC93, CD10] pour proposer un certain nombre d'extensions associées aux ordres d'essentialité aux cas des systèmes singuliers. Dans la méthodologie de conception par modèle inverse, la détermination de cet invariant participe à la phase d'analyse structurelle d'*adéquation* pour assurer la *validité du cahier des charges* (chapitre 1, section 1.4.3.2 page 28). Le chapitre 3 propose une présentation organisée de la manière suivante :

— la section 3.2 introduit la classe des systèmes singuliers et précise les hypothèses considérées dans le contexte de nos travaux, en l'occurrence, celles de *systèmes linéaires singuliers à faisceau régulier*. Cette section précise les implications sur le faisceau et nous exposons l'une des principales spécificités des systèmes singuliers (au sens de l'extension qu'ils représentent par rapport aux systèmes réguliers) : la présence de *modes infinis dynamiques* (appelés également *modes impulsionnels*) et *modes infinis non-dynamiques* (figure 3.1).

— la section 3.3 présente l'inversion des systèmes singuliers, comprenant des critères directs et indirects d'inversibilité et ouvrant sur l'approche graphique du chapitre 4.

— la section 3.4 présente les travaux de KUCERA [Kuc86, Kuc89], qui étendent la notion de propreté aux systèmes singuliers (figure 3.1) basée sur la structure à l'infini du faisceau du système, ainsi que ceux de MUROTA & VAN DER WOUDE [MvdW91] sur la structure à l'infini de ces systèmes (au sens usuel *i.e.* au sens entrées/sorties).

— la section 3.5 comprend enfin l'extension que nous proposons aux systèmes singuliers de la notion d'*ordre d'essentialité* originellement définie par COMMAULT *et al.* [CDD$^+$86, CD86] sur les systèmes réguliers. Cette extension est proposée sous le vocable d'*ordre d'essentialité généralisé* (figure 3.1).

3.2 Présentation des systèmes singuliers

3.2.1 Généralités

Nous avons précédemment introduit la représentation du comportement dynamique des phénomènes physiques d'un système mécatronique à partir de la représentation d'état *régulière* (ou *classique*), donnée par le système Σ (linéaire et invariant dans le temps (2.1) et rappelé en (3.1) dans le cas général non carré),

$$\Sigma : \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{x}}(t) & = & \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) & = & \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{array} \right. \tag{3.1}$$

où $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie. Cette représentation est la base originelle des théories de l'automatique développées dans nos précédents paragraphes et constitue également la classe initiale de modèle *direct* étudiée jusqu'alors pour l'inversion dans la méthodologie de conception

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

par modèle inverse (section 1.4.3.2 page 28, portée notamment par les références [FN97] [Jar10] [EF11]) [1]. Si la classe des modèles *réguliers* est largement répandue dans la représentation des systèmes mécatroniques, elle est de fait restreinte au cas des systèmes décrits par des équations différentielles ordinaires (souvent qualifiés de systèmes *ODE* pour *« Ordinary Differential Equation » systems*, en l'occurrence linéaires et à temps invariant dans le cas (3.1)). Il se trouve qu'un grand nombre de représentations mathématiques de modèle fait intervenir des relations *dynamiques* mais également *statiques* entre les variables d'état, aboutissant à des systèmes d'équations algébro-différentielles (ou *DAE*, pour *« Differential Algebraic Equation » systems*). Cette formulation algébro-différentielle peut être issue du choix des variables d'un modèle, auquel cas il peut exister des transformations permettant de se ramener à une représentation d'état classique (3.1). Dans d'autres cas, une description algébro-differentielle est requise pour représenter « nativement » le système mécatronique avec ses équations de contraintes algébriques comme notamment dans le cas de sous-systèmes inter-connectés [SL73] [2] [RP74], de modélisation de réseaux électriques [VLK81] [Dai89c] ou de systèmes mécaniques [Mur87] [Vil94] [MV95] [Dua10] qui sont, pour ces derniers, le contexte d'étude privilégié de nos travaux (chapitre 1, section 1.3 page 9). Nous parlons alors de systèmes *singuliers* ou *descripteurs de variables* [3]. Dans le cas linéaire et à temps invariant, la représentation d'état associée à d'un tel système est la suivante (3.2) :

$$\Sigma_d : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}(t) & = & \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) & = & \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{array} \right. \tag{3.2}$$

où $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie. Les matrices $\mathbf{E}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ sont constantes et de dimensions respectives $n \times n$, $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$ et $p \times m$.

Notons en premier lieu que si la matrice $\mathbf{E}$ est inversible (*i.e.* de rang n) dans (3.2), le système se ramène au système d'état classique (3.1) simplement en prémultipliant l'équation d'évolution par $\mathbf{E}^{-1}$. Dans le cas général, la matrice $\mathbf{E}$ n'est pas inversible et le système d'état (3.2) est dit *singulier*, traduisant ainsi le fait que la matrice $\mathbf{E}$ soit singulière ($\operatorname{Rang}\mathbf{E} = q < n$) [Dai89c]. ($\operatorname{Rang}\mathbf{E}$) définit l'*ordre généralisé du système* (3.2), noté q [VLK81]. La *dimension du système* (3.2) est la dimension n du vecteur d'état $\mathbf{x}(t)$ [FN97]. La matrice de transfert $\mathbf{T}(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}$ du système singulier Σ_d de modèle d'état (3.2) est définie par [MDV94],

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \tag{3.3}$$

en rappelant que la représentation en transfert fait l'hypothèse de conditions initiales nulles, *i.e.* $\mathbf{E}\mathbf{x}(0^-) = 0$ dans le présent cas. La matrice système $\mathbf{P}(s) \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$ du système Σ_d est définie par (3.4) [Ros70],

$$\mathbf{P}(s) = \begin{pmatrix} s\mathbf{E} - \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

en ajoutant que comme dans le cas régulier, certaines définitions font intervenir des signes différents sur les coefficients [TV88], [Vil94].

1. La précision suivant laquelle nous parlons de modèle *direct* provient du fait que El Feki a étudié dans sa thèse [EF11] un cas particulier de système singulier, en l'occurrence le modèle d'état généralisé ne possédant que des pôles à l'infini, classe de système à laquelle l'inversion de (3.1), dans le cas carré, aboutit.

2. Singh & Liu ont été les premiers à mentionner ce type de systèmes, en montrant que les représentations d'état *classiques* étaient impossibles à obtenir dans des cas de systèmes inter-connectés [SL73], [Dai89c].

3. Appellation introduite par Luenberger en 1977 [Lue77] [VLK81].

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Exemple

Prenons l'exemple simple d'un différentiateur pur [Kuc86]. Un tel système peut se mettre sous la représentation d'état suivante,

$$\begin{array}{rcl} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{array} \tag{3.5}$$

avec, conformément aux notations utilisées dans (3.2),

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = 0 \tag{3.6}$$

Le système (3.5) est tel que $\mathbf{E}$ est singulière ($\det \mathbf{E} = 0$) et peut-être ré-exprimé de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl} x_2(t) & = & u(t) \\ x_1(t) & = & \dot{x}_2(t) \\ y(t) & = & x_1(t) \end{array} \tag{3.7}$$

Nous vérifions la fonction de transfert du différentiateur en écrivant :

$$T(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = s \tag{3.8}$$

Remarque : *la régularité du faisceau* $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$*, pour lequel* $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ *est défini, sera discutée ultérieurement (section 3.2.2).*

Il existe différentes terminologies pour qualifier ces systèmes : systèmes *singuliers*, systèmes *descripteurs de variables*, systèmes *d'état généralisé*, systèmes *à semi-état*, systèmes *algébro-différentiels*, systèmes *implicites*, systèmes *dégénérés*, systèmes *contraints*, systèmes *singuliers singulièrement perturbés*. Nous apporterons toutefois une nuance entre la notion de système *singulier* (*i.e. descripteur de variable*), représenté par le système Σ_d (3.2) et la notion de système *généralisé*, que nous avons évoqué au chapitre 2 dans le cas de l'obtention du modèle inverse (système Σ^{-1} (2.2) page 44) [4]. Ces deux systèmes sont équivalents sous certaines conditions que nous discuterons (chapitre 5, sections 5.2 et 5.3). Ce point illustrera à nouveau l'intérêt avancé au chapitre 2 (section 2.4.2 page 71) d'avoir une représentation unifiée pour les systèmes directs et les systèmes inverses.

Cet intérêt apparaît également lorsque la matrice $\mathbf{E}$ d'un modèle n'est pas « initialement » singulière, par l'étude d'un système simplifié idéalisant certains éléments du modèle (y compris ceux associés à des stockages d'énergie). L'étude du modèle idéalisé fournit ainsi les comportements asymptotiques (*i.e.* limites) du modèle initial. Cette approche, appelée *méthode des perturbations singulières*, est discutée dans l'article référent de Verghese *et al.* sur les systèmes singuliers [VLK81]. Il y présente l'approche de Cobb (proposée dans la thèse de ce dernier, en 1980) sur l'étude des systèmes de la forme $\mathbf{E}(\epsilon)\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\epsilon)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\epsilon)\mathbf{u}(t)$, dans lequel ϵ est un paramètre « petit ». Le comportement du système est alors étudié pour ϵ tendant vers 0, en ayant une matrice

4. Nous rappelons ici que le modèle d'état généralisé est un modèle mis sous forme d'équations différentielles ordinaires avec éventuellement des dérivations de l'entrée, cas des systèmes non causaux [FN97], [Pet82].

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

$\mathbf{E}(\epsilon)$ singulière pour $\epsilon = 0$.

L'une des principales caractéristiques des systèmes singuliers est la présence potentielle de *modes impulsionnels* (ou *modes dynamiques infinis i.e.* phénomènes impulsionnels [5]) dans la réponse du système (libre et/ou forcée), dûs aux conditions initiales arbitraires sur l'ensemble des degrés de liberté du système, aux caractéristiques de l'entrée ou encore à la présence de commutations dans le système. La définition de *degré de liberté* d'un système singulier varie suivant les auteurs et la démarche de résolution du système d'équations. Nous adoptons dans ce mémoire la définition de Verghese *et al.* (définition 3.1).

Définition 3.1 (*[VLK81]*)

Le ***nombre de degrés de liberté*** *du système* (3.2) *est équivalent à l'ordre généralisé du système, soit le rang de* $\mathbf{E}$.

Définition 3.2 (*[VLK81] [Mur87] [Dai89c]*)

Le ***nombre de degrés de liberté dynamiques*** *du système* (3.2) *est le* nombre de variables d'états indépendantes du système, *soit le degré de* $\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$.

Remarque : le nombre de *degrés de liberté* peut potentiellement être différent du nombre de *degrés de liberté dynamiques* du système (en l'occurrence plus grand).

Les systèmes singuliers peuvent également comporter des *modes non dynamiques* [VLK81], associés à des équations algébriques entrées/sorties et certaines relations algébriques entre états, que l'on peut rencontrer sous le vocable de *modes algébriques* [BC98] ou de *modes entraînés* [Mou00]. Plusieurs approches de résolution ont été historiquement développées. Certaines se concentrent sur la résolution temporelle des modes exponentiels (associés aux *degrés de liberté dynamiques* du système (définition 3.2, voir par ailleurs la section 3.2.3). Elles calculent des conditions initiales compatibles pour l'ensemble des degrés de liberté du système de manière à ne pas engendrer de modes impulsionnels [6]. C'est notamment l'approche proposée dans l'article référent de Yip & Sincovec [YS81], détaillée en section 5.3.2. D'autres approches, comme celle de Verghese *et al.* [VLK81], considèrent des conditions initiales arbitraires sur l'ensemble des degrés de liberté du système singulier (définition 3.1) *i.e.* pas uniquement les degrés de liberté dynamiques. Ce choix peut donc engendrer des modes impulsionnels, dont le nombre et la solution temporelle peuvent être déterminés [VLK81], [YS81], [Mur87], [Dai89c] (section 5.3.3). Cette approche est à rapprocher des méthodes de résolution des systèmes à commutation [Bui93b] ou de celles de la théorie du choc [Bro97] [Bro06].

Les approches de référence de la littérature sur l'étude des systèmes singuliers ont été portées par la généralisation des systèmes d'états réguliers sans discussion préalable de la régularité de la matrice $\mathbf{E}$ (comprenant, comme mentionné précédemment, les systèmes idéaux, les systèmes avec contraintes, les systèmes à commutation, les systèmes interconnectés ou encore des systèmes avec défaillances potentielles). Cette généralisation a également été réalisée sur la commande de tels systèmes, dont l'une des principales fina-

5. Nous insisterons sur ce vocable ultérieurement. Il est important de préciser que dans le présent cas des systèmes singuliers à faisceau régulier, la notion de *mode impulsionnel* et celle de *phénomène impulsionnel* sont équivalentes. Ce n'est plus nécessairement vrai si le faisceau n'est pas régulier.

6. On parle alors d'ensemble de conditions initiales *admissibles* pour le système singulier [YS81].

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

lités est de faire disparaitre les phénomènes impulsionnels associés le cas échéant [7] (commande par retour d'état [Dai89c] [Dai89b] [Dua10], compensation dynamique [Dai89c], commande par retour de sortie [Dua10], commande proportionnelle/dérivée [Dua10]).

3.2.2 Régularité et solvabilité des systèmes singuliers

L'étude de la *solvabilité* des systèmes singuliers se base sur l'étude de la *régularité* du faisceau de matrice [8] $(\mathbf{E}, \mathbf{A})$, originellement discutée par Gantmacher [Gan66]. La régularité peut-être définie de la manière suivante :

Définition 3.3 (*[Dai89c]*)

(Régularité du faisceau** $(\mathbf{E}, \mathbf{A})$**) *Pour toutes matrices* $\mathbf{E}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, le faisceau* $(\mathbf{E}, \mathbf{A})$ *est dit* régulier *si :*

- *il existe un scalaire constant* $\alpha \in \mathbb{C}$ *tel que* $\det(\alpha\mathbf{E} + \mathbf{A}) \neq 0$*, sauf pour un certain nombre fini de valeurs de* $\alpha \in \mathbb{C}$

ou

- *le polynôme* $s\mathbf{E} - \mathbf{A}$ *est tel que* $\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) \neq 0$*, où* s *représente l'opérateur de* Laplace*.*

Un second théorème est également à présenter pour discuter de l'unicité des solutions du système d'équations ainsi que de l'équivalence entre systèmes singuliers. Lorsque le faisceau $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ est régulier, sa décomposition de Kronecker [WZ01] se simplifie à la forme dite de Kronecker-Weierstrass suivante :

Théorème 3.1 (*[VLK81] [Mur87] [Dai89c] [FN97] [WZ01]*)

(Théorème de Kronecker-Weierstrass, régularité du faisceau** $(\mathbf{E}, \mathbf{A})$**) *Le faisceau* $(\mathbf{E}, \mathbf{A})$ *est régulier si et seulement si deux matrices non singulières* $\mathbf{M}$ *et* $\mathbf{N}$ *peuvent être choisies telles que :*

$$\mathbf{MEN} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n_1} & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{MAN} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{n_2} \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

avec $n_1 + n_2 = n$*,* $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{R}^{n_1\times n_1}$ *est une matrice quelconque,* $\mathbf{E}_2 \in \mathbb{R}^{n_2\times n_2}$ *est une matrice nilpotente.*

Nous rappelons qu'une matrice $\mathbf{P}$ est dite *nilpotente* s'il existe un entier positif i tel que $\mathbf{P}^i = 0$. Le plus petit entier positif k pour lequel $\mathbf{P}^k = 0$ est appelé *index de nilpotence* (ou *degré de nilpotence*) de la matrice $\mathbf{P}$ [FN97]. Toutes les valeurs propres d'une matrice nilpotente sont nulles [VLK81].

La *solvabilité* du système singulier (3.2) a été originellement définie par Yip & Sincovec comme *l'existence d'une solution unique* $\mathbf{x}(t)$ *pour une entrée quelconque* $\mathbf{u}(t)$ *suffisamment dérivable et une condition initiale quelconque* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ *admissible correspondant à l'entrée* $\mathbf{u}(t)$ [YS81]. Cette définition se base sur les travaux de Gantmacher

7. Les phénomènes impulsionnels sont en effet très souvent associés à l'endommagement des systèmes par la nature « infiniment rapide » des phénomènes physiques associés, *i.e.* commutation électrique instantanée, choc mécanique,...

8. Le *faisceau* de matrice peut être ici défini comme des *matrices polynomiales du premier ordre* [MDV94], voir l'exemple page 79.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

qui a montré que le système $\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)$ (*i.e.* le système (3.2) pour lequel $\mathbf{B} = \mathbf{I}$) est *solvable* si et seulement si le faisceau $(\mathbf{E}, \mathbf{A})$ est *régulier* [Gan66]. La généralisation à une matrice $\mathbf{B}$ quelconque a ensuite été proposée dans [YS81]. Nous donnons le résultat suivant sur le faisceau $s\mathbf{E} - \mathbf{A}$ (condition nécessaire) :

Théorème 3.2 (*[YS81], [Mur87]*)

Le système (3.2) *est* ***soluble*** *si le faisceau de matrice* $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ *est* régulier, i.e. $\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) \neq 0$.

La notion de solvabilité est avant toute chose associée à l'*unicité* de la solution du système Σ_d (3.2). A ce titre, la décomposition proposée au théorème 3.1 est une condition nécessaire et suffisante de l'*existence* et de l'*unicité* de cette solution [Dai89c]. La définition de Yip & Sincovec introduite précédemment conditionne également la solvabilité à la dérivabilité de l'entrée et le caractère *admissible* des conditions initiales. Néanmoins, elle peut être généralisée en établissant que l' *inversibilité du faisceau* $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ *entraîne l'unicité des solutions du système* Σ_d (3.2) *pour toute condition* $\mathbf{E}\mathbf{x}(0^-)$ *et toute entrée* $\mathbf{u}(t)$ [VLK81] [Kuc86] [Dai89b]. [9] [10] Cette définition étendue de la solvabilité nous permet ainsi de considérer un ensemble quelconque de conditions initiales $\mathbf{E}\mathbf{x}(0^-)$ sur l'ensemble des q degrés de liberté du système (au sens de la définition 3.1, *i.e.* $q = \operatorname{Rang}\mathbf{E}$) [11]. Suivant les auteurs, il est question de conditions initiales potentiellement « inconsistantes » (Doetsch, 1974 ou Cobb, 1982) ou « inadmissibles » (Blomberg, 1975), qui indiquent qu'un système soit dans un état quelconque préalablement à un changement de *structure* ou de *topologie* (évènement de commutation, choc, interconnexion ou défaillance). Ce changement entraîne alors un nouvel état potentiellement atteint par le biais de dynamiques infinies (*i.e.* impulsions, sauts) et faisant suite à une modification soudaine de la configuration du système (par exemple, la fermeture d'un interrupteur électrique idéalisé imposant une contrainte statique entre deux éléments de stockage d'énergie est couramment employée pour illustrer ce phénomène [VLK81], [Bui93b], [Mou00]) [12]. Cette définition de la solubilité de système singulier incluant la possibilité de prendre en compte de telles conditions initiales « inconsistantes » s'avère donc intéressante pour la classe de problème que nous traitons dans ce mémoire, les *systèmes singuliers à faisceaux réguliers*, pour de potentielles extensions aux systèmes à commutations.

Notons en outre que si la majorité des approches considère un faisceau de matrice $s\mathbf{E} - \mathbf{A}$ régulier, certains travaux plus récents ont visé la généralisation des théories aux systèmes singuliers dits *irréguliers*, *i.e.* ayant un faisceau $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ non régulier. Le faisceau peut par exemple être rectangulaire ou tel que $\operatorname{Rang}(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) < n$. Citons notamment l'article introductif de Dai [Dai89a], les travaux de Wang & Zou [WZ01], Ishihara & Terra [IT01], Hou [Hou04] et Boukhobza, Hamelin & Sauter [BHS06].

9. Cette propriété énoncée par Verghese *et al.* repose sur la transformée de Laplace du système Σ_d (3.2) (originellement présenté avec la matrice $\mathbf{D} = 0$), soit [VLK81] [Kuc86] :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{X}(s) & = & (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\left[\mathbf{E}x(0^-) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)\right] \\ \mathbf{Y}(s) & = & \mathbf{C}\mathbf{X}(s) \end{array} \tag{3.10}$$

10. Cette définition sous-entend la validité du système pour un temps $t < 0$, ce qui n'est pas le cas de la formulation de Yip & Sincovec [YS81]. Notons toutefois que certains travaux antérieurs de ces deux derniers auteurs traitent ce point dont nous rediscutons au chapitre 5, en section 5.3 page 189.

11. Verghese parle d'*unconstrained values of* $\mathbf{E}\mathbf{x}(0^-)$.

12. Ajoutons que les pionniers dans la formalisation du traitement des systèmes singuliers, tels Verghese, Levy, Kailath sont principalement issus de la recherche dans le domaine électrique.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

3.2.3 Modes exponentiels, impulsionnels et non-dynamiques des systèmes singuliers

Les systèmes d'état *classiques* (système Σ (3.1)) contiennent un certain nombre de modes propres, par essence *exponentiels*. Ces modes sont intrinsèquement liés à la nature uniquement *dynamique* des contraintes entre les états. Ces systèmes sont ainsi également qualifiés de *réguliers*. Par opposition, les systèmes qualifiés de *singuliers* contiennent, en plus des contraintes *dynamiques*, des contraintes de type *statique* entre les états *i.e.* des relations algébriques, entraînant la singularité de la matrice $\mathbf{E}$ dans le système Σ_d (3.2). Ces relations algébriques peuvent de plus potentiellement conduire à une dépendance entre les q *degrés de liberté* du système (*i.e.* dans l'ensemble des relations algébriques entre les états, certaines lient des degrés de liberté entre eux). Le système singulier Σ_d (3.2) est alors caractérisé par [VLK81] [Mur85] [Kuc86] [Mur87] [Dai89c] :

— n = *dimension du système*, égale à la dimension du vecteur d'état $\mathbf{x}(t)$ du système ($= \dim(\mathbf{E})$).

— q = *ordre généralisé du système*, nombre de *degrés de liberté du système*, avec $q = \operatorname{Rang} \mathbf{E}$.

— d = nombre de *degrés de liberté dynamiques* du système, *i.e.* le *nombre de variables d'état indépendantes du système*, avec $d = \deg \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$. Les *degrés de liberté dynamiques* de Σ_d regroupent ainsi uniquement les états associés à des modes dynamiques *finis* (*i.e.* exponentiels). On parle également de *degré dynamique* du système [13].

Il en résulte que les conditions initiales de l'ensemble des degrés de liberté ne sont pas indépendantes. Toutefois, comme introduit en section 3.2.2, un choix arbitraire de ces conditions initiales peut être opéré, conduisant alors à l'apparition de phénomènes impulsionnels (plus exactement au fait que les modes impulsionnels soient excités par les conditions initiales des états). Ajoutons qu'un éventuel changement de structure du modèle (commutation, choc,...) peut être vue comme une (re)initialisation du modèle dans une nouvelle topologie (*i.e.* un nouveau modèle dont la formulation analytique reste celle du système Σ_d (3.2) avec une évolution possible du rang des matrices constitutives de Σ_d). La seconde source potentielle d'excitation des modes impulsionnels dans le modèle est liée à la caractéristique de l'entrée $\mathbf{u}(t)$ (comprenant la commande et potentiellement également des perturbations). Nous avons en effet mentionné la dépendance possible des variables d'état à l'entrée $\mathbf{u}(t)$ et de ses dérivées respectives (exemple, au chapitre 2, du système généralisé (2.2) page 44) [14]. Il est donc évident qu'un manque de dérivabilité de l'entrée peut entraîner des phénomènes impulsionnels sur les états (et les degrés de liberté) du système. Ceci rejoint directement les considérations faites au chapitre 1 sur la méthodologie de dimensionnement (section 1.4.3.2 page 28) et la mise en place des

13. Dans le domaine électrique, la notion de *degré dynamique* d est connue comme étant l'*ordre de complexité* en théorie des réseaux [Mur87]. L'ordre généralisé q est alors associé au nombre d'éléments de stockage d'énergie (*reactive elements*) et le degré dynamique d est associé à l'*ordre régulier* du modèle (*regular order*). Un nombre d'éléments de stockage q supérieur à d indique la présence de boucle entre les capacités et/ou de courts circuits, et implique la présence de $(q-d)$ modes impulsionnels [VLK81]. Cette approche physique sera rediscutée au niveau bond graph au chapitre 5, en soulignant l'importance du type de variable sélectionnée dans le système d'équations descripteur (en l'occurrence, variable associée à un stockage d'énergie ou non).

14. Nous rappelons que le système généralisé (2.2) représente un modèle inverse (d'ordre plein), Σ^{-1}, pour lequel les *sorties* du modèle direct Σ représentent les *entrées* et donc également celles du modèle généralisé associé (qui fait apparaître leurs dérivées par rapport au temps).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

outils au chapitre 2 pour assurer sa phase d'*adéquation*[15]. Une différence notoire existe cependant entre les deux *sources* d'impulsions potentielles (*i.e.* sources d'excitation des modes impulsionnels du système), comme nous le détaillerons en section 5.3 : les *réponses libres* associées aux modes impulsionnels du système ne pourront être excitées qu'à l'initialisation du système (ou à la commutation pour un système à *structure variable*), alors que les *réponses forcées* associées aux modes impulsionnels du système (liées aux propriétés de dérivabilité de l'entrée) peuvent apparaître à un instant quelconque de la réponse temporelle de $\mathbf{x}(t)$. En définitive, le système singulier Σ_d (3.2) possède ainsi (figure 3.2) :

— d modes exponentiels (*i.e.* nombre d'états dynamiques finis, ou pôles),

— $(q-d)$ modes impulsionnels (*i.e.* $\operatorname{Rang}\mathbf{E} - \deg\left[\det(s\mathbf{E}-\mathbf{A})\right]$), nombre d'états dynamiques infinis,

— $(n-q)$ modes infinis non dynamiques, issus de certaines relations algébriques.

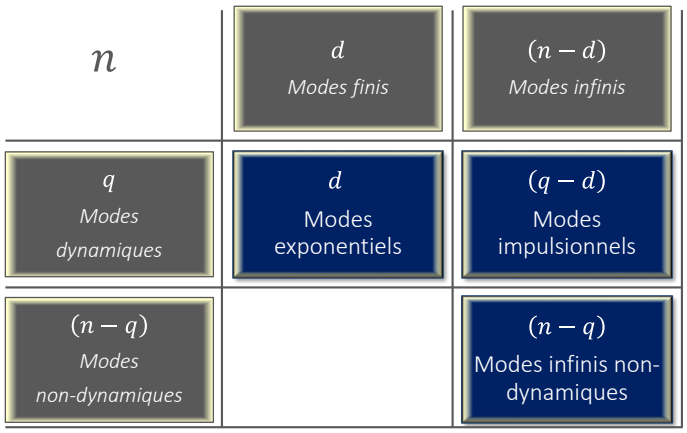


FIGURE 3.2 – Classement des trois différents types de modes du système Σ_d (3.2) suivant les attributs fini/infini et dynamique/non-dynamique

Par définition, les grandeurs scalaires associées à ces n modes (dynamiques ou non, finis ou non) sont les *valeurs propres généralisées* liées au faisceau $s\mathbf{E}-\mathbf{A}$ ([Ric01], Chap. 9). Rappelons que dans le cas *régulier* (3.1), nous avons $d = q = n$, *i.e.* le système possède n modes dynamiques finis, exponentiels, qui sont des pôles. Illustrons l'ensemble des notions évoquées précédemment sur l'exemple suivant :

15. Ceci fait également écho à la définition originelle de YIP & SINCOVEC de la solvabilité des systèmes singuliers, qui adjoint à la régularité du faisceau $(\mathbf{E},\mathbf{A})$ la nature *suffisamment* dérivable de l'entrée, dans le but de ne pas faire apparaître d'impulsions [YS81].

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Exemple

Reprenons et détaillons l'exemple de VERGHESE *et al.* [VLK81] en considérant le système d'état (3.11) :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

Le système singulier (3.11) possède ainsi les propriétés suivantes :

— le système est *solvable*, car

$$\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} -1 & s \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0 \tag{3.12}$$

— la *dimension* du système n est égale à 2,

— l'*ordre généralisé* q du système est

$$q = \operatorname{Rang} \mathbf{E} = \operatorname{Rang} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \tag{3.13}$$

— le *degré dynamique* du système *i.e.* le *nombre de degré de liberté dynamique* est

$$d = \deg \left[\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})\right] = \deg \det \begin{bmatrix} -1 & s \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 0 \tag{3.14}$$

— la fonction de transfert est

$$T(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -s \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -s \tag{3.15}$$

Nous pouvons conclure que ce système ne possède aucun mode exponentiel ($d = 0$), possède un mode impulsionnel ($q - d = 1$), ainsi qu'un mode non dynamique ($n - q = 1$). Notons en effet dans le système (3.11) que l'équation en $x_2(t)$ est une relation entrée/état non-dynamique, $x_2(t) = -u(t)$. Notons également le point suivant, que nous développerons au chapitre 5 : la forme de la fonction de transfert (3.15) associée à la sortie $y(t) = x_1(t)$ est polynomiale (et donc non propre) et révèle ainsi un mode impulsionnel. Ajoutons en outre que l'exemple illustre que la représentation en transfert peut potentiellement masquer un certain nombre de mode, en l'occurrence le mode non-dynamique associé à $x_2(t)$ ici.

L'unique mode impulsionnel, associé à $x_1(t)$, peut être mis en évidence en imposant par exemple au système (3.11) la commande $u(t) = u_0\,\Gamma(t)$, avec la condition initiale arbitraire x_{10} quelconque. Le système (3.11) peut ainsi s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{cases} x_1(t) = \dot{x}_2(t) \\ x_2(t) = -u(t) \end{cases} \tag{3.16}$$

Le système (3.16) possède, au sens *distributionnel* (voir par ailleurs la section 5.3.3 page 193), les solutions suivantes :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_0\,\delta(t) \\ -u_0\,\Gamma(t) \end{bmatrix}, \quad t \geq 0 \tag{3.17}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

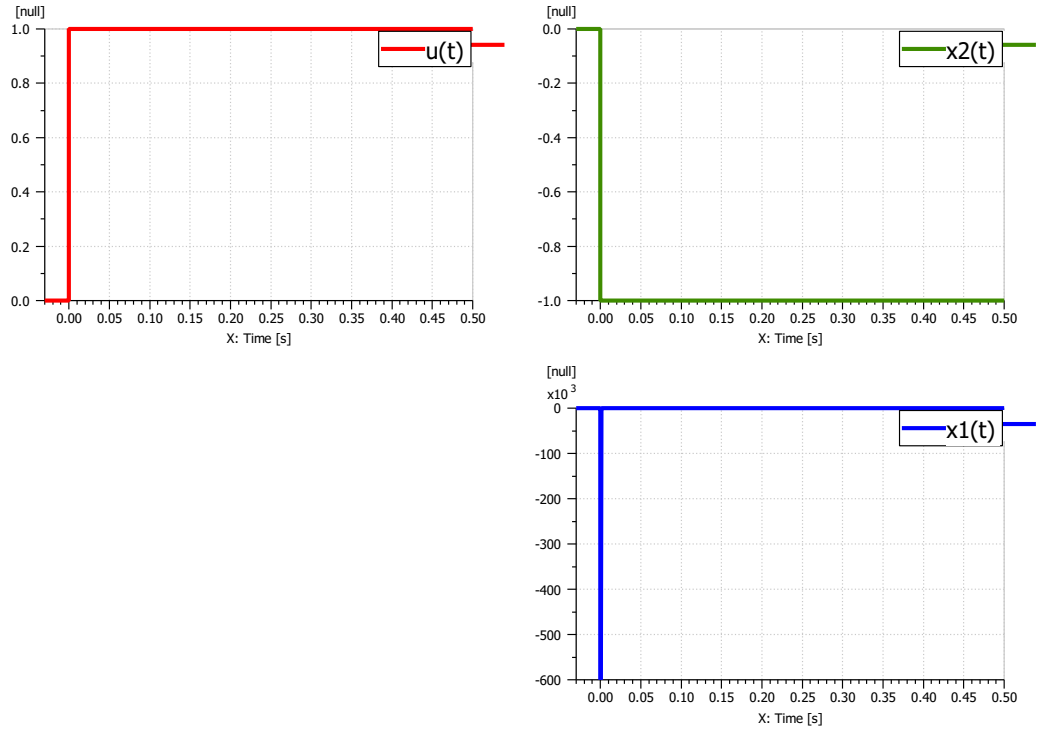


FIGURE 3.3 – Solution temporelle (3.17) du système (3.16), avec $u_0 = 1$

Enfin, un critère algébrique a été démontré par DAI [Dai89b] pour déterminer l'absence de mode impulsionnel dans le système singulier (3.2), que nous pourrons rapprocher des notions de *propreté* (section 3.4.1) et *continuité implicite* (section 5.3.4) : [16]

Théorème 3.3 (*[Dai89b]*)

(Critère d'absence de mode impulsionnel dans un système singulier) *Le système singulier* Σ_d (3.2) *ne comporte pas de mode impulsionnel* (i.e. $\operatorname{Rang}\mathbf{E} = \deg[\det(s\mathbf{E}-\mathbf{A})]$)*, si et seulement si :*

$$\operatorname{Rang}\begin{pmatrix}\mathbf{E} & 0\\ \mathbf{A} & \mathbf{E}\end{pmatrix} = n + \operatorname{Rang}\mathbf{E} \tag{3.18}$$

Reformulé dans les travaux de LU, BUISSON et CORMERAIS [LB94], [BC98], le théorème 3.3 implique que si $\operatorname{Rang}\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{E} & 0\\ \mathbf{A} & \mathbf{E}\end{smallmatrix}\right) = n + \operatorname{Rang}\mathbf{E} - h$, il y a, parmi les q modes dynamiques, $q-h$ modes finis (*i.e.* exponentiels, figure 3.2) et h modes infinis (infinis dynamiques *i.e.* impulsionnels) *(soit avec les notations précédentes,* $(q-d) = h$ *ou encore* $(q-h) = d$*).* Le théorème 3.3 est relativement important dans la mesure où, comme nous l'avons succinctement évoqué en section 3.2, les travaux de VERGHESE puis DAI ont montré que pour les systèmes singuliers ayant un faisceau $(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ régulier (définition 3.3 page 81), l'*absence de mode impulsionnel* est équivalent à l'*absence de phénomène impulsionnel dans la réponse du système* [VLK81] [Dai89b] [IT01]. Ce n'est plus nécessairement le cas si le système singulier possède un faisceau non-régulier (cas des systèmes singuliers *irréguliers*).

16. La démonstration de ce théorème se base sur la forme de ROSENBROCK (section 5.2.2) en montrant que (3.18) est vraie si et seulement si $\mathbf{E}_2 = 0$ dans (5.4c).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

3.3 Inversion des systèmes singuliers

L'inversion de systèmes singuliers a été abordée par Lewis [Lew83] et Tan & Vandewalle [TV88]. L'approche proposée dans [TV88] s'inspire des travaux de Rosenbrock [Ros74] et manipule la flexibilité de représentation du système singulier Σ_d (3.2), dans le cas où ce dernier est carré, pour proposer une approche relativement simple. Par opposition, les travaux de Lewis [Lew83] visent une généralisation des procédures existantes d'inversion aux systèmes singuliers. Elle se base sur les travaux de Silverman sur l'inversion des systèmes réguliers [Sil69] et de Luenberger sur la formalisation des systèmes singuliers [Lue77]. Nous présentons succinctement ici l'approche de Tan & Vandewalle [TV88], également discutée dans [FN97], ainsi que celle de Pasqualetti *et al.* [PBB11].

En faisant l'hypothèse que le système singulier (3.2) est carré et solvable (*i.e.* le faisceau $s\mathbf{E} - \mathbf{A}$ est régulier, voir théorème 3.1), un modèle inverse de (3.2) peut être décrit par le système singulier suivant [TV88] :

$$\Sigma_d^{-1} : \begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{E} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BC} & \mathbf{B} - \mathbf{BD} \\ -\mathbf{C} & -\mathbf{D} \end{pmatrix} \mathbf{z}(t) + \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{u}(t) &= \begin{pmatrix} -\mathbf{C} & \mathbf{I} - \mathbf{D} \end{pmatrix} \mathbf{z}(t) + \mathbf{y}(t) \end{cases} \tag{3.19}$$

avec $\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix}$.

En apportant les remarques suivantes :

— l'*ordre généralisé* q du modèle inverse est le même que celui du modèle direct [TV88], [FN97]. Nous remarquons en effet que $\mathrm{Rang}\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{E} & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \mathrm{Rang}\,\mathbf{E}$. Notons toutefois que dans le cas régulier, *i.e.* $\mathbf{E} = \mathbf{I}$, l'équation (3.19) appliquée au modèle régulier (2.1) page 43, peut conduire au modèle inverse d'ordre plein (2.2) page 44 et non au modèle inverse d'ordre minimal (2.5) page 46.

— la formulation (3.19) reste celle d'un modèle singulier, ce qui est l'un des intérêts de cette approche. Une formulation est toutefois possible en termes de système (inverse) généralisé, du type (2.2) page 44 (les dérivées de l'entrée n'apparaissent pas explicitement dans la formulation (3.19)) [17].

— contrairement aux formulations rencontrées dans [Jar10], [EF11], le vecteur $\mathbf{x}$ du vecteur d'état $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T & \mathbf{u}^T \end{bmatrix}^T$ est *le vecteur d'état originel* du modèle direct (3.2), ce qui est un point remarquable de l'approche (au sens où l'on continue à manipuler l'état du modèle direct même en inverse). Notons en revanche que la formulation (3.19) n'est pas « complète » dans la mesure où le vecteur d'entrée est compris dans le vecteur d'état et non explicité en sortie du modèle inverse contrairement aux formulations (2.2) page 44 et (2.5) page 46 dans le cas de l'inversion d'un système régulier.

17. Les dérivées de l'entrée peuvent apparaître au cours des transformations en système généralisé dans les manipulations des formes de Rosenbrock (section 5.2.2 page 183) ou Smith (section 5.2.3 page 186).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

— si l'*ordre généralisé* est le même entre le modèle inverse Σ^{-1} (2.2) page 44 et inverse Σ_d^{-1} (3.19), la *dimension* de ce dernier est augmentée. [18]

La solvabilité du système Σ_d^{-1} (3.19) est équivalente à l'inversibilité du système singulier direct (3.2) [TV88]. Ceci constitue en l'état un critère d'inversibilité *indirect* du système singulier (tel que défini au chapitre 2, section 2.2.2.3). Nous pouvons ainsi énoncer pour les systèmes singuliers :

Théorème 3.4 (*[TV88]*)

(Critère direct d'inversibilité d'un système* singulier*) *Le système singulier Σ_d (3.2), dans le cas où ce dernier est carré, est inversible si et seulement si le déterminant de sa matrice système $\mathbf{P}(s)$ (3.4) est non identiquement nul.*

Théorème 3.5 (*[TV88]*)

(Critère indirect d'inversibilité d'un système* singulier*) *Le système singulier Σ_d (3.2), dans le cas où ce dernier est carré, est inversible si et seulement si le système (3.19) est solvable, ou de manière équivalente si le faisceau (3.20) est* régulier *:*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} s - \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BC} & \mathbf{B} - \mathbf{BD} \\ -\mathbf{C} & -\mathbf{D} \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

Nous pouvons d'autre part citer les travaux de Pasqualetti *et al.* [PBB11] aboutissant également à un critère indirect d'inversibilité exprimé sur la matrice système $\mathbf{P}(s)$ (3.4) :

Théorème 3.6 (*[PBB11]*)

(Critère indirect d'inversibilité d'un système* singulier*) *Le système singulier Σ_d (3.2), dans le cas où ce dernier est carré, est inversible si et seulement si :*

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} s\mathbf{E} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = n + \text{Rang} \begin{pmatrix} -\mathbf{B} \\ \mathbf{D} \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$ sauf pour un certain nombre fini de valeurs de s.

Remarque : la différence de signe entre la définition de la matrice système de (3.21) et la définition (3.4) que nous utilisons dans ce mémoire n'a aucun impact sur le théorème 3.6.

Il est intéressant de mentionner à ce stade que le critère direct d'inversibilité de Tan & Vandewalle [TV88] a été porté graphiquement sur le digraphe structuré par Pasqualetti *et al.* [PBB11], aboutissant au théorème 4.1 page 152, dont nous discuterons au chapitre 4, section 4.4.

18. A ce titre, une procédure de réduction de la dimension du système est proposée dans [TV88] en se basant sur la notion d'*équivalence forte* (*« strong equivalence »*) de Verghese *et al.* [VLK81] évoquée en section 5.2.2 page 183, qui préserve la structure des modes dynamiques (exponentiels et impulsionnels) mais pas celle des modes infinis non dynamiques.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

3.4 Propreté et structure à l'infini des systèmes singuliers

3.4.1 Propreté

L'étude de la *propreté* du système singulier Σ_d (3.2), à laquelle est souvent associée la *stabilité*, a notamment été proposée par KUCERA [Kuc86, Kuc89]. Elle repose sur l'hypothèse préalable que le faisceau de matrice $s\mathbf{E} - \mathbf{A}$ est régulier (théorème 3.1), garantissant ainsi l'unicité des solutions pour q conditions initiales *arbitraires* $\mathbf{Ex}(0)$ et pour toute entrée $\mathbf{u}(t)$ [19].

Rappelons que le système *régulier* (3.1) est *propre* et que la matrice de transfert $T(s)$ associée ne possède que des zéros à l'infini. Dans le cas du système *singulier* (3.2), deux notions différentes sont employées, la *propreté interne* et la *propreté externe*, respectivement associées au faisceau $s\mathbf{E} - \mathbf{A}$ d'une part, et à la matrice de transfert $T(s)$ (3.3) d'autre part [Kuc86]. En d'autres termes, la propreté *interne* traduit les propriétés intrinsèques du système alors que la propreté *externe* reflète les propriétés du point de vue entrées/sorties. *Notons que les systèmes* réguliers *sont ainsi propres du point de vue* interne *et* externe.

Théorème 3.7 (*[Kuc86]*)

(Propreté interne d'un système singulier) *Le système singulier* (3.2) *est* propre du point de vue interne *si le faisceau de matrice* $s\mathbf{E} - \mathbf{A}$ *n'a pas de zéros à l'infini,* i.e. *si* $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ *est propre.*

Précisons que dans le théorème 3.7 nous ne parlons pas de la structure à l'infini du système, associée à la matrice de transfert, comme vu au chapitre 2, mais de celle du faisceau $s\mathbf{E}-\mathbf{A}$. La propreté interne implique que l'ensemble des q modes dynamiques du système (3.2) ne comprend pas de phénomène impulsionnel à $t = 0$ pour des conditions initiales arbitraires $\mathbf{Ex}(0)$ [20]. Ces considérations nous permettent de présenter la proposition de DAI d'un critère d'absence de mode impulsionnel, directement liée à la propreté interne des systèmes singuliers :

Théorème 3.8 (*[Dai89c]*)

(Critère d'absence de mode impulsionnel dans un système singulier) *Le système singulier* (3.2) *ne comprend aucun mode impulsionnel si et seulement si le système n'a pas de pôle à l'infini.*

Le théorème 3.8 est ici reproduit comme dans l'ouvrage de DAI *où il faut comprendre (et uniquement ici) le vocable* « système » *comme le faisceau* $(s\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$. *Il est ainsi associé à la propreté* interne. En d'autres termes, l'existence des pôles à l'infini est *la cause de l'apparition des modes impulsionnels dans le système singulier* (3.2) [Dai89b].

Remarque : les formulations originelles des théorèmes 3.7 et 3.8 sont telles que $\mathbf{D} = 0$. Si ceci n'a pas d'influence sur la propreté interne, les considérations sur la propreté de

19. Le faisceau régulier garantit l'unicité des solutions pour l'ensemble du vecteur d'état *i.e.* les q modes dynamiques et les $(n - q)$ modes non-dynamiques [Kuc86].

20. Nous travaillons ici sur le faisceau $s\mathbf{E}-\mathbf{A}$, donc nous ne regardons ici que les potentielles réponses libres associées aux modes impulsionnels (voir section 5.3 page 189). Le théorème 3.7 implique ainsi que les réponses libres du système (3.2) n'exhiberont aucun phénomène impulsionnel si celui-ci est propre du point de vue interne.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

$T(s)$ doivent simplement faire intervenir la matrice D.

Exemple

(Système singulier propre du point de vue *interne* et *externe*) : Reprenons et commentons l'exemple de KUCERA [Kuc86], faisant intervenir un différentiateur de la manière suivante (3.22) :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.22}$$

Une illustration de ce système peut être celle de la figure 3.4.

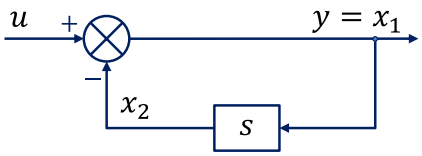


FIGURE 3.4 – Schéma bloc du système d'équation (3.22)

Nous vérifions que le faisceau $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ est régulier avec (3.23) et son inverse est donné par (3.24).

$$\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = -(s+1) \neq 0 \tag{3.23}$$

et

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{-1}{s+1} \\ \dfrac{-1}{s+1} & \dfrac{-s}{s+1} \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

Le faisceau $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ est propre donc le système (3.22) est propre du point de vue interne. Sans détailler la réponse temporelle, prenons l'exemple de l'entrée en créneau $u(t)$ de la figure 3.5 ci-dessous, en notant que $u(0^-) \neq u(0^+)$. Nous pouvons vérifier en simulation que les réponses temporelles des variables $x_2(t)$ et $y(t) = x_1(t)$ ne comportent pas de phénomène impulsionnel (figure 3.5, variables $x_2(t)$ et $x_1(t)$). Nous notons toutefois la présence d'un *saut* dans la réponse $x_2(t)$, dû au terme $\frac{-s}{s+1}$, propre mais non strictement propre, dans le faisceau $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$. La fonction de transfert de ce système étant strictement propre ($T(s) = \frac{-1}{s+1}$), nous illustrons ici que l'analyse du faisceau $s\mathbf{E} - \mathbf{A}$ traite de l'ensemble des variables d'état du système et non uniquement les entrées/sorties (la sortie est ici strictement propre alors que la variable interne $x_2(t)$ est associée à la transmittance $\frac{-s}{s+1}$ non strictement propre et donc potentiellement à considérer avec plus d'attention).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

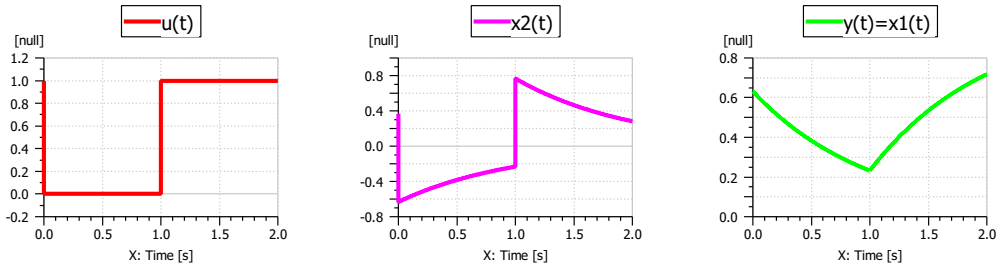


FIGURE 3.5 – Exemple de réponse temporelle du système d'équations (3.22)

L'exemple précédent nous conduit à formuler le fait que de manière évidente, la propreté *interne* implique la propreté *externe* (mais que la réciproque n'est pas vraie) [Kuc86]. Nous pouvons illustrer ce principe sur l'exemple suivant (3.25), associant un différentiateur en série avec l'entrée de commande.

Exemple

(Système singulier propre du point de vue *externe* mais pas du point de vue *interne*) : Reprenons un second exemple de KUCERA [Kuc86] et commentons-le également. Il fait intervenir un différentiateur en série avec un intégrateur (3.25) :

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\\dot{x}_2(t)\\\dot{x}_3(t)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u(t)\\ y(t) &= \begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{3.25}$$

Le système est illustré sur la figure 3.6.

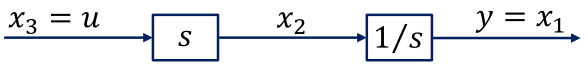


FIGURE 3.6 – Schéma bloc du système d'équations (3.25)

Nous vérifions que le faisceau $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ est régulier avec (3.26) et son inverse est donné par (3.27).

$$\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \det\begin{bmatrix}s&-1&0\\0&-1&s\\0&0&1\end{bmatrix} = -s \neq 0 \tag{3.26}$$

et

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{s}&\frac{-1}{s}&1\\0&-1&s\\0&0&1\end{bmatrix} \tag{3.27}$$

Nous voyons immédiatement que le faisceau $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ (3.27) n'est pas propre. Ce système n'est pas propre du point de vue *interne* et peut potentiellement comporter

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

au moins un mode impulsionnel. En l'occurrence, dans le présent cas, il est dû à la relation de différentiation $x_2(t) = \dfrac{dx_3}{dt}$ et ainsi identique à celui du différentiateur pur. Ce mode impulsionnel peut être mis en évidence par exemple pour une entrée $u(t)$ en échelon ou en créneau comme sur la figure 3.7. Notons toutefois que le système est propre du point de vue *externe*, puisque $T(s) = 1$.

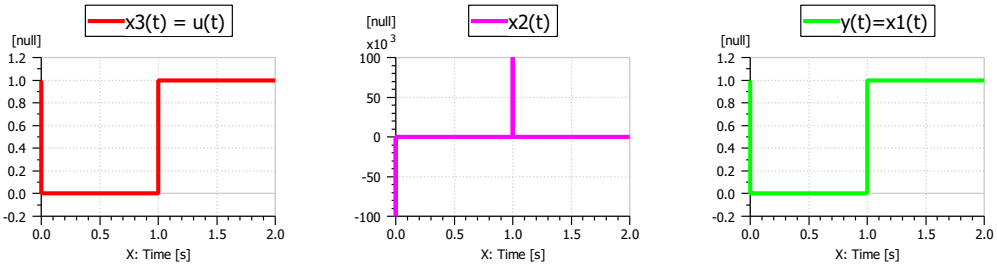


FIGURE 3.7 – Exemple de réponse temporelle du système d'équation (3.25)

Les définitions précédentes nous permettent d'illustrer d'une autre manière les considérations de la section 3.2.3 sur les systèmes singuliers linéaires à temps invariants du type Σ_d (3.2) [Kuc89] :

— le nombre de degrés de liberté dynamiques d, avec $d = \deg[\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})]$ est le nombre de variables d'état indépendantes du système et équivaut au nombre d'intégrateur dans le système et ainsi au nombre de pôles *finis* du faisceau $(s\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$ (modes dynamiques *finis i.e.* exponentiels).

— le nombre de degré de liberté du système q, avec $q = \operatorname{Rang}\mathbf{E}$ équivaut au nombre total d'éléments dynamiques dans le système (*i.e.* intégrateurs et différentiateurs) pour lesquels les conditions initiales sont choisies arbitrairement. q est donc égal au nombre total de pôles *finis* et *infinis* du faisceau $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$.

— la dimension du système est n et correspond à la dimension du vecteur d'état $\mathbf{x}(t)$, mais le nombre d'éléments dynamique peut être inférieur *i.e.* $\operatorname{Rang}\mathbf{E} \leq n$.

Notons par ailleurs que certains auteurs comme MISRA *et al.* [MDV94] utilisent la notion de *matrice système compressée* pour analyser les systèmes singuliers. Les zéros *finis* et *infinis* du faisceau $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ correspondent à ceux de la *matrice système compressée*, en l'occurrence construite à partir d'une forme de SMITH (5.12) légèrement modifiée [21].

3.4.2 Structure à l'infini

La structure à l'infini a été abordée au chapitre 2 (section 2.2.3 page 47) pour les systèmes LTI *réguliers*. C'est une notion associée aux entrées/sorties du système et déterminée à partir de sa matrice de transfert $\mathbf{T}(s)$, par exemple grâce à la décomposition de SMITH-MCMILLAN à l'infini (théorème 2.1 page 48) de celle-ci. La structure a l'infini se définit comme le *nombre* et l'*ordre* des zéros/pôles à l'infini (resp. des zéros à l'infini)

21. Cette forme modifiée conserve une matrice $\mathbf{E}_{11}$ de rang plein de telle sorte que l'équation originelle de SMITH (5.12a) puisse s'écrire $\mathbf{E}_{11}\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1(t) = \mathbf{A}_{11}\tilde{\mathbf{x}}_1(t) + \mathbf{A}_{12}\tilde{\mathbf{x}}_2(t) + \tilde{\mathbf{B}}_1\mathbf{u}(t)$. L'équation (5.12b) est inchangée. Cette forme de SMITH modifiée est également celle utilisée par FOTSU-NGWOMPO dans sa thèse [FN97] pour introduire les systèmes singuliers.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

dans le cas général des systèmes non propres (resp. dans le cas des systèmes propres) [22]. Dans le cas des systèmes *singuliers*, et comme pour la notion de propreté, la notion de structure à l'infini repose sur l'hypothèse que le faisceau de matrice $s\mathbf{E} - \mathbf{A}$ est régulier (théorème 3.1), garantissant en premier lieu l'existence de la matrice de transfert (3.3) [MvdW91], mais également l'unicité des solutions pour q conditions initiales *arbitraires* $\mathbf{Ex}(0^-)$ et pour toute entrée $\mathbf{u}(t)$ (voir section 5.3.3 page 193) [VLK81] [Kuc86].

La structure à l'infini des systèmes *singuliers* peut directement être obtenue à partir des définitions usuelles sur les systèmes *réguliers*. Rappelons les principaux résultats basés sur la forme de Smith-McMillan (théorème 2.1 page 48) de la matrice de transfert rationnelle propre $T(s)$ (2.3) et qui s'expriment de la manière suivante [vdW91], [MvdW91] :

— Le *nombre* de zéros à l'infini est égale r, où $r = \operatorname{Rang} \mathbf{T}(s)$.

— Issus de la forme de Smith-McMillan, les *ordres* des r zéros à l'infini sont des entiers ordonnés selon $0 \leq n_1 \leq n_2 \leq ... \leq n_r$, avec $\mathbf{\Delta}_\infty(s) = diag\,(s^{-n_1}, s^{-n_2}, ..., s^{-n_r})$.

— Nous avons également introduit la possibilité de directement calculer la *somme des zéros à l'infini* à partir de la matrice système $\mathbf{P}(s)$ (2.4). En rappelant que n_i est l'ordre du $i^{ième}$ zéros à l'infini de la matrice de transfert rationnelle propre $\mathbf{T}(s)$ (2.3), une formulation condensée des théorèmes 2.2, 2.3, 2.4 peut s'exprimer de la manière suivante [MvdW91],

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{i} n_j = -\delta_{D\ n+i} \begin{pmatrix} \mathbf{A} - s\mathbf{I} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} + \delta_D\,(\mathbf{A} - s\mathbf{I}) \tag{3.28}$$

où la notation $\delta_{D\ i}(\cdot)$ désigne *le plus haut degré du mineur d'ordre* i de la matrice considéré. Le cadre rationnel propre de l'équation (3.28) nous permet d'écrire que :

— la composante $\delta_D\,(\mathbf{A} - s\mathbf{I})$ est égale à la dimension du système d'état, *i.e.* $\delta_D\,(\mathbf{A} - s\mathbf{I}) = n$.

— la composante $\delta_{D\ n+i}\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{A}-s\mathbf{I} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{smallmatrix}\right)$ équivaut au *plus haut degré du mineur d'ordre* $(n+i)$ *de la matrice système* $\mathbf{P}(s)$, que nous avons noté β_i dans (2.14). [23]

Les précédents résultats sur les systèmes réguliers sont à présent étendus aux systèmes singuliers à travers les formalisations proposées par Murota et van der Woude [MvdW91, vdW91]. Nous rappelons au préalable les éléments suivants pour les systèmes (non propres) du type Σ_d (3.2), permettant l'extension des théorèmes 2.2, 2.3, 2.4 proposée par la suite (respectivement, les théorèmes 3.9, 3.10, 3.11) ;

— le *nombre* de zéros et pôles à l'infini est $r = \operatorname{Rang} \mathbf{T}(s)$, où $\mathbf{T}(s)$ est une matrice rationnelle non propre définie par (3.3)

22. Sans précision supplémentaire, les zéros/pôles à l'infini sont ceux de la structure à l'infini du système *i.e.* associés à la matrice de transfert $\mathbf{T}(s)$. Ces zéros/pôles sont ainsi associés à la propreté *externe* du système, par opposition à ceux du faisceau $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$, associés à la propreté *interne* du système (section 3.4.1).

23. Remarquons que le changement de signe entre la matrice système $\mathbf{P}(s)$ (2.4) et la matrice $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{A}-s\mathbf{I} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{smallmatrix}\right)$ définie dans (3.28) n'a pas d'influence sur le calcul du degré de mineur.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

— issus de la forme de Smith-McMillan à l'infini, les *ordres* des r zéros et pôles à l'infini sont les entiers relatifs ordonnés $t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_r$, avec $\mathbf{\Delta}_\infty(s) = diag\left(s^{-t_1}, s^{-t_2}, ..., s^{-t_r}\right)$.

Théorème 3.9 (*[MvdW91]*)

(Structure à l'infini d'un système* singulier*) *Soit $\mathbf{T}(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}$ une matrice rationnelle non propre de rang r. Le système correspondant admet r zéros/pôles à l'infini dont les ordres $t_1, t_2, ..., t_r$ peuvent être calculés de la manière suivante, pour $1 \leq i \leq r$:*

$$\sum_{j=1}^{i} t_j = -\ \delta_{D\ i} \tag{3.29}$$

où $\delta_{D\ i}$ est le plus haut degré des mineurs d'ordre i de $\mathbf{T}(s)$.

Le théorème précédent peut ainsi être appliqué en particulier à la matrice de transfert $\mathbf{T}(s)$ rationnelle non propre (3.3). De manière analogue à l'approche algébrique sur les systèmes *réguliers*, il existe une relation entre les degrés des mineurs des matrices de transfert $\mathbf{T}(s)$ (3.3) et système $\mathbf{P}(s)$ (3.4) associées au modèle :

Théorème 3.10 (*[MvdW91]*)

Soit $\mathbf{T}(s)^{j_1,...,j_i}_{h_1,...,h_i} \in \mathbb{R}^{i\times i}$ une sous-matrice carrée déduite de la matrice de transfert $\mathbf{T}(s)$ (rationnelle, non propre, (3.3)) en ne sélectionnant que les lignes $h_1, ..., h_i$ et les colonnes $j_1, ..., j_i$ tel que $\det\left(\mathbf{T}(s)^{j_1,...,j_i}_{h_1,...,h_i}\right) \neq 0$. Soit $\delta_{D\,i^{j_1,...,j_i}_{h_1,...,h_i}}$ le degré de ce déterminant. $\delta_{D\,i^{j_1,...,j_i}_{h_1,...,h_i}}$ peut être déterminé de la manière suivante :

$$\delta_{D\,i^{j_1,...,j_i}_{h_1,...,h_i}} = \beta_{D\,i^{j_1,...,j_i}_{h_1,...,h_i}} - d \tag{3.30}$$

où :

- *d est la dimension de la partie* dynamique finie *du vecteur d'état du système associé à la matrice de transfert $\mathbf{T}(s)$, soit $d = \deg\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \delta_D(\mathbf{A} - s\mathbf{E})$.*
- *$\beta_{D\,i^{j_1,...,j_i}_{h_1,...,h_i}}$ est le degré de $\det\left(\mathbf{P}(s)^{1,...,n,n+j_1,...,n+j_i}_{1,...,n,n+h_1,...,n+h_i}\right)$*
- *$\mathbf{P}(s)^{1,...,n,n+j_1,...,n+j_i}_{1,...,n,n+h_1,...,n+h_i} \in \mathbb{R}^{(n+i)\times(n+i)}$ est la sous matrice déduite de la matrice système $\mathbf{P}(s)$ en ne sélectionnant que les lignes $1, ..., n, n+h_1, ..., n+h_i$ et les colonnes $1, ..., n, n+j_1, ..., n+j_i$. Les n premières lignes et n premières colonnes de $\mathbf{P}(s)$ sont conservés (contenant la matrice $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$).*

Reformulé en d'autres termes, le degré d'un determinant $(i \times i)$ de $\mathbf{T}(s)$ (3.3) est égale au degré du mineur $(n+i) \times (n+i)$ correspondant de $\mathbf{P}(s)$ (3.4) auquel on soustrait d, la dimension du vecteur d'état de la partie dynamique finie du système associé à $\mathbf{T}(s)$, représentant le modèle singulier (3.2). Il est à présent possible d'extraire le *plus haut* degré des mineurs d'ordre i de $\mathbf{T}(s)$ en fonction des degrés des mineurs d'ordre i de $\mathbf{P}(s)$:

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Théorème 3.11 (*[MvdW91]*)

Soit $\delta_{D\,i}$ le plus haut degré des mineurs d'ordre i de $\mathbf{T}(s)$. Alors :

$$\delta_{D\,i} = \beta_{D\,i} - d \tag{3.31}$$

où d est la dimension du vecteur d'état de la partie dynamique finie du système associé à $\mathbf{T}(s)$ et $\beta_{D\,i}$ est le plus haut degré des mineurs d'ordre $(n+i)$ de $\mathbf{P}(s)$.

Les théorèmes 3.9, 3.10, 3.11 sont résumés par Murota & van der Woude de la manière condensée suivante :

Théorème 3.12 (*[MvdW91]*)

En notant t_i l'ordre du $i^{ième}$ zéro/pôle à l'infini de la matrice de transfert rationnelle non propre $\mathbf{T}(s)$ (3.3) et $\delta_{D\ i}(\cdot)$ le plus haut degré du mineur d'ordre i de la matrice considérée, la somme des ordres des zéros/pôles à l'infini du système singulier peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\sum_{j=1}^{i} t_j = -\ \delta_{D\ i} = -\delta_{D\ n+i} \begin{pmatrix} \mathbf{A} - s\mathbf{E} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} + \delta_D\left(\mathbf{A} - s\mathbf{E}\right) \tag{3.32}$$

En notant que :

— La composante $\delta_D\left(\mathbf{A} - s\mathbf{E}\right)$ est égale à la dimension de la partie dynamique finie du système d'état, *i.e.* $\delta_D\left(\mathbf{A} - s\mathbf{E}\right) = d = \deg\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$.

— La composante $\delta_{D\ n+i}\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{A}-s\mathbf{E} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{smallmatrix}\right)$ équivaut au *plus haut degré du mineur d'ordre $(n+i)$ de la matrice système* $\mathbf{P}(s)$, que nous avons noté $\beta_{D\,i}$ dans (3.31). [24]

Remarque : Il faut en toute rigueur préciser que la formulation originelle dans [MvdW91] ne fait pas intervenir la matrice $\mathbf{D}$ dans la formulation de $\mathbf{T}(s)$ et $\mathbf{P}(s)$. En utilisant la formule de Schur [25] appliquée à la matrice système $\mathbf{P}(s)$ (3.4) et la matrice de transfert $\mathbf{T}(s)$ (3.3), notant que les matrices $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ et $\mathbf{D}$ sont carrées et que $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ est inversible, nous pouvons directement écrire :

$$\det\begin{pmatrix} s\mathbf{E} - \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})\det\left(\mathbf{D} + \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\right) \tag{3.33}$$

24. Le changement de variable entre la matrice système $\mathbf{P}(s)$ du système *singulier* définie dans (3.4) et la matrice système $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{A}-s\mathbf{E} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{smallmatrix}\right)$ de (3.32) n'a pas d'influence sur le calcul du degré de mineur.

25. La formule de Schur (définition 2.1 page 49) est rappelée ci-après : soit $\mathbf{M}$ une matrice définie par bloc $\mathbf{M} = \left[\begin{smallmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{smallmatrix}\right]$ où $\mathbf{M}_{11}$ et $\mathbf{M}_{22}$ sont des matrices carrées et $\mathbf{M}_{11}$ inversible. Le déterminant de la matrice $\mathbf{M}$ peut alors s'écrire sous la forme $\det(\mathbf{M}) = \det(\mathbf{M}_{11})\det\left(\mathbf{M}_{22} - \mathbf{M}_{21}\mathbf{M}_{11}^{-1}\mathbf{M}_{12}\right)$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

et ainsi,

$$\begin{array}{rcccc} -\deg\det\left(\mathbf{D}+\mathbf{C}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\right) & = & -\deg\det\begin{pmatrix} s\mathbf{E}-\mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{D}\end{pmatrix} & + & \deg\det(s\mathbf{E}-\mathbf{A}) \\ \Leftrightarrow\ -\deg\det\ \mathbf{T}(s) & = & -\deg\det\ \mathbf{P}(s) & + & d \end{array} \tag{3.34}$$

Cette approche est également déclinable aux mineurs de $\mathbf{T}(s)$ et $\mathbf{P}(s)$, respectivement d'ordre i et $n+i$. En effet, la considération de mineurs d'ordre $n+i$ ne modifie pas le faisceau $(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ de $\mathbf{P}(s)$, il reste donc toujours régulier (et carré), la matrice $\mathbf{D}$ est remplacée par une matrice carrée de dimension i, et les matrices $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ par des extractions respectivement de i colonnes et i lignes. La formule de Schur peut donc s'appliquer et les équations (3.33) et (3.34) peuvent être déclinées aux mineurs respectifs de $\mathbf{T}(s)$ et $\mathbf{P}(s)$. Ces considérations justifient l'extension faite du théorème 3.12 de [MvdW91] en considérant une matrice $\mathbf{D}\neq 0$, mais également celles des théorèmes 3.9, 3.10, 3.11.

Il est intéressant de noter que la définition de la structure à l'infini des systèmes *singuliers* ainsi que les théorèmes 3.9, 3.10, 3.11 et 3.12 sont une généralisation qui comprend les définitions et théorèmes établis pour les systèmes *réguliers* (théorèmes 2.2, 2.3, 2.4, résumés par l'équation (3.28)), base de l'analyse structurelle des modèles directs présentée par Jardin [Jar10], mais également ceux établis pour le cas particulier des systèmes *généralisés* (théorèmes 2.5 et 2.6), base de l'analyse structurelle des modèles inverses proposée par El Feki [EF11]. Nous rappelons que les modèles inverses traités dans [EF11] peuvent se mettre sous la forme *généralisée* (2.5) page 46, où le système d'ordre minimal Σ^{-1} est un cas particulier de systèmes singuliers ne possédant que des pôles à l'infini [CDD+86]. [26]

3.5 Ordres d'essentialité généralisés

3.5.1 Introduction

Nous souhaitons à présent étendre la notion d'ordre d'essentialité aux systèmes linéaires à temps invariant singuliers, possédant donc une matrice de transfert non forcément propre. Nous gardons à l'esprit la finalité de la phase d'*adéquation* de la méthodologie d'inversion (chapitre 1, section 1.4 page 24) pour déterminer l'ordre de dérivation *maximal nécessaire* et *suffisant* de chaque sortie apparaissant dans le modèle inverse du système singulier Σ_d (3.2). Pour ce faire, nous nous appuyons sur les résultats de Commault *et al.* [CD86, CDD+86] et les démonstrations associées, initialement énoncées dans le cas des systèmes strictement propres (*i.e.* systèmes ayant des matrices de transfert strictement propres), pour les étendre aux systèmes singuliers. Nous montrons que ces invariants structurels sont déterminés de manière unique sur $\mathbf{T}(s)$ (3.3) et nous les nommons *ordres d'essentialité généralisés* du système singulier Σ_d (3.2).

3.5.2 Structure à l'infini par colonne (resp. par ligne) de matrices rationnelles

Pour les définitions et démonstrations relatives à l'ordre d'essentialité généralisé, nous donnons un certain nombre de rappels sur la structure à l'infini par colonne (resp. par ligne) des matrices rationnelles. Nous rappelons tout d'abord la notion de vecteur

26. Nous verrons au chapitre 5 que le système (2.5) peut-être issu d'une transformation d'un système *singulier* initialement exprimé sous la forme (3.2) à partir des transformations d'*équivalence restreinte* (définition 5.1 page 182) de Rosenbrock (théorème 5.2 page 183) et Smith (théorème 5.3 page 186) ou de la transformation d'*équivalence stricte* (*s.s.e*) de l'équation (5.20) page 189.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

rationnel.

Définition 3.4 (*[Ric01]*)

> ***(Vecteur rationnel (resp. rationnel* propre, *rationnel* strictement propre))** Un vecteur rationnel (resp. rationnel* propre, *rationnel* strictement propre*) est un vecteur dont les composantes sont des fractions rationnelles (resp. rationnelles* propres, *rationnelles* strictement propres*).*

Ainsi, un vecteur rationnel est non propre s'il possède au moins une composante $v_i(s)$ rationnelle non propre, *i.e.* de la forme $v_i(s) = p_i(s) + g_i(s)$ où $p_i(s)$ est un polynôme et $g_i(s)$ une fraction rationnelle propre. Nous définissons maintenant la *structure à l'infini par colonne* (resp. *par ligne*) d'une matrice rationnelle comme étant l'*ordre du zéro/pôle à l'infini par colonne* (resp. *par ligne*) de la matrice (définition 3.5).

Définition 3.5 (*[CDT90, CD86]*)

> ***(Structure à l'infini par colonne (resp. par ligne) d'une matrice rationnelle)** Soit $\mathbf{T}(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}$ une matrice rationnelle et notons $\mathbf{g}_i(s)$ la $i^{ième}$ colonne (resp. ligne) de $\mathbf{T}(s)$. La structure à l'infini de la $i^{ième}$ colonne (resp. $i^{ième}$ ligne) est définie par l'entier relatif k_i de la manière suivante :*
>
> $$k_i = \min_{k\in\mathbb{Z}} \{ \lim_{s\to+\infty} s^k \mathbf{g}_i(s) = \mathbf{g}_i \neq 0\} \tag{3.35}$$
>
> *en précisant :*
> - *si $k_i \geq 0$, k_i est un ordre de* zéro à l'infini de la $i^{ième}$ colonne (resp. $i^{ième}$ ligne) $\mathbf{g}_i(s)$.
> - *si $k_i < 0$, $-k_i$ est un ordre de* pôle à l'infini de la $i^{ième}$ colonne (resp. $i^{ième}$ ligne) $\mathbf{g}_i(s)$.

Remarque 1: L'entier k_i ainsi défini est *unique*.

Remarque 2: la définition 3.5 est légèrement modifiée par à rapport à la définition originelle de Commault *et al.* [CDT90] pour être consistante avec la factorisation de Smith-McMillan à l'infini d'une matrice rationnelle (théorème 2.1 page 48) et les définitions originelles exprimées sur les ordres des zéros à l'infini par ligne d'une matrice rationnelle propre [BM65] [DD82], rappelées au théorème 2.7 page 52. [27]

La définition 3.5 implique qu'une matrice rationnelle ayant pour $i^{ième}$ colonne (resp. pour $i^{ième}$ ligne) un vecteur rationnel propre possèdera un *zéro à l'infini par colonne* (resp. par ligne) pour la $i^{ième}$ colonne (resp. $i^{ième}$ ligne). Si en revanche l'une des composantes de la $i^{ième}$ colonne (resp. $i^{ième}$ ligne) n'est pas propre (en d'autres termes si le vecteur constitutif de l'$i^{ième}$ colonne (resp. $i^{ième}$ ligne) est rationnel non propre), la structure à l'infini de la $i^{ième}$ colonne (resp. $i^{ième}$ ligne) sera constituée d'un *pôle à l'infini par colonne* (resp. par ligne). [28]

27. En imaginant par exemple qu'on applique (3.35) à une matrice rationnelle directement sous sa forme de Smith-McMillan à l'infini, impliquant que les zéros/pôles à l'infini par colonne sont équivalents aux zéros/pôles à l'infini de la matrice.

28. La définition 3.5 et la présente assertion comprend ainsi la définition formulée par Commault *et al.* dans [CD86] sur les vecteurs rationnels non propres : *Si $v(s)$ est un vecteur rationnel non propre, il possède un* pôle à l'infini d'ordre *q, où q est le degré maximal des polynômes constitutifs des composantes de $v(s)$.*

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Exemple

(Structure à l'infini par colonne d'une matrice rationnelle) Considérons la matrice rationnelle $\mathbf{T}(s)$ suivante :

$$\mathbf{T}(s) = \begin{bmatrix} s^2 & \frac{1}{s^2} & s^2 & \frac{1}{s^2} & 1 & 1 \\ s^3 & s^3 & \frac{1}{s^3} & \frac{1}{s^3} & s^2 & \frac{1}{s^2} \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

En notant k_i les ordres respectifs des zéros/pôles à l'infini des colonnes $\mathbf{g}_i(s)$ de $\mathbf{T}(s)$, nous avons k_1, k_2 et k_3, ordres des *pôles à l'infini par colonne* de $\mathbf{g}_1(s)$, $\mathbf{g}_2(s)$ et $\mathbf{g}_3(s)$, de valeur respective 3, 3 et 2. $\mathbf{g}_4(s)$ possède un *zéro à l'infini par colonne* d'ordre $k_4 = 2$, $\mathbf{g}_5(s)$, un *pôle à l'infini par colonne* d'ordre $k_5 = 2$ et enfin $\mathbf{g}_6(s)$ possède un *zéro à l'infini par colonne* d'ordre $k_6 = 0$.

Nous introduisons à présent certaines propriétés entre matrices rationnelles liées par des opérations de pré/post-multiplication par des matrices rationnelles *bipropres* (ou *bicausales*). Nous rappelons qu'une matrice rationnelle propre $\mathbf{B}(s) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ est dite *bipropre* (ou *bicausale*) si $\mathbf{B}(s)$ est inversible et d'inverse $\mathbf{B}^{-1}(s) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ propre. Ces opérations sont rencontrées lors de la détermination de la structure à l'infini par colonne des matrices rationnelles et des ordres d'essentialité.

Propriété 3.6

(Matrices rationnelles liées par des transformations bipropres (bicausales)) *Soient deux matrices $\mathbf{M}_1(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}$ et $\mathbf{M}_2(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}$ liées par une transformation bipropre par la gauche :*

$$\mathbf{M}_1(s) = \mathbf{B}(s)\mathbf{M}_2(s) \tag{3.37}$$

où $\mathbf{B}(s) \in \mathbb{R}^{p\times p}$ est bipropre. Alors l'ordre du zéro/pôle à l'infini de l'$i^{ième}$ colonne de $\mathbf{M}_1(s)$ est égal à l'ordre du zéro/pôle à l'infini de l'$i^{ième}$ colonne de $\mathbf{M}_2(s)$ et défini de manière unique.

Démonstration : la propriété 3.6 peut être démontrée à partir de la définition 3.5. Soient $\mathbf{M}_1(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}$ et $\mathbf{M}_2(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}$ liées par la transformation bipropre (3.37). Notons respectivement $\mathbf{g}_{1i}(s)$ et $\mathbf{g}_{2i}(s)$ les $i^{ièmes}$ colonnes de $\mathbf{M}_1(s)$ et $\mathbf{M}_2(s)$. Nous pouvons écrire, pour $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \lim_{s\to+\infty} s^k \mathbf{g}_{1i}(s) &= \lim_{s\to+\infty} s^k \left(\mathbf{B}(s)\, \mathbf{g}_{2i}(s)\right) \\ &= \lim_{s\to+\infty} \mathbf{B}(s) \left(s^k\, \mathbf{g}_{2i}(s)\right) \\ &= \mathbf{B}_0 \lim_{s\to+\infty} s^k\, \mathbf{g}_{2i}(s)\,, \end{aligned} \tag{3.38}$$

où $\mathbf{B}_0$ est une matrice constante inversible. La dernière égalité de (3.38) et la définition 3.5 impliquent que l'ordre du zéro/pôle à l'infini de l'$i^{ième}$ colonne de $\mathbf{M}_1(s)$ est égale à l'ordre du zéro/pôle à l'infini de l'$i^{ième}$ colonne de $\mathbf{M}_2(s)$.

Fin de la démonstration.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Un raisonnement similaire est applicable par ligne lorsque deux matrices rationnelles sont liées par une transformation bipropre par la droite. Les *ordres des zéros/pôles à l'infini par ligne* sont égaux. Il peut également être montré que la structure à l'infini par ligne d'une matrice rationnelle est définie de manière unique.

Exemple

(Matrices rationnelles liées par des transformations bipropres, cas rationnel propre) : considérons dans l'exemple de [CD86], la matrice rationnelle propre $\mathbf{T}(s)$ suivante (3.39) et sa forme de Hermite associée $\mathbf{H}(s)$:

$$\mathbf{T}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s^3} \\ \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} & 0 \\ \frac{1}{s} & \frac{1}{s^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{s} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{H}(s)\mathbf{B}(s) \tag{3.39}$$

Les matrices $\mathbf{T}(s)$ et $\mathbf{H}(s)$, liées par la transformation bipropre par la droite (3.39), ont les mêmes ordres de *zéros à l'infini par ligne*, respectivement 2 pour la première ligne et 1 pour la seconde. D'autre part, nous avons :

$$\mathbf{T}^{-1}(s) = \begin{bmatrix} (s+1)s^2 & -s^2 \\ -s^4 & s^3 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}(s)\mathbf{H}^{-1}(s) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{s} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ -s^4 & s^3 \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

Les matrices $\mathbf{T}^{-1}(s)$ et $\mathbf{H}^{-1}(s)$, liées par la transformation bipropre par la gauche (3.40), ont les mêmes ordres de *pôles à l'infini par colonne*, respectivement 4 pour la première colonne et 3 pour la seconde.

Remarque : la forme de Hermite est une forme triangulaire de la matrice rationnelle initiale qui peut être obtenue par transformations élémentaires sur ses colonnes, par postmultiplication (*i.e.* multiplication à droite) par des matrices rationnelles propres, inversibles et d'inverses rationnelles propres (donc *bipropres*) [Ric01]. Notons par exemple que la permutation de deux colonnes est l'une des opérations élémentaires sur une matrice rationnelle pouvant être représentée par une transformation bicausale par la droite. Cette opération élémentaire conserve la structure à l'infini par ligne.

Exemple

(Matrices rationnelles liées par des transformations bipropres, cas rationnel) : considérons la matrice rationnelle $\mathbf{T}(s)$ suivante (3.41) et une factorisation $\mathbf{R}(s)$ faisant intervenir une transformation à droite par une matrice bipropre $\mathbf{B}(s)$:

$$\mathbf{T}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s^3} \\ \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2}+s^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} & 0 \\ \frac{1}{s} & s^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{s} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{R}(s)\mathbf{B}(s) \tag{3.41}$$

Les matrices $\mathbf{T}(s)$ et $\mathbf{R}(s)$ de (3.41) possèdent :

— le même ordre de *zéro à l'infini par ligne* pour la première ligne, en l'occurrence 2,

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

— le même ordre de *pôle à l'infini par ligne* pour la seconde ligne, à savoir 3.

De manière analogue, analysons une transformation bipropre par la gauche à l'aide de la matrice $\mathbf{T}^{-1}(s)$. Nous avons :

$$\mathbf{T}^{-1}(s) = \begin{bmatrix} s^2 + \frac{1}{s^3} & -\frac{1}{s^4} \\ -\frac{1}{s^2} & \frac{1}{s^3} \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}(s)\mathbf{R}^{-1}(s) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{s} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ -\frac{1}{s^2} & \frac{1}{s^3} \end{bmatrix} \tag{3.42}$$

Les matrices $\mathbf{T}^{-1}(s)$ et $\mathbf{R}^{-1}(s)$ de (3.42) possèdent :
— le même ordre de *pôle à l'infini par colonne* pour la première colonne, en l'occurrence 2,
— le même ordre de *zéro à l'infini par colonne* pour la seconde colonne, à savoir 3.

Nous proposons d'utiliser à présent les propriétés précédentes sur les transformations bipropres pour d'une part étendre la définition de certains invariants, initialement énoncée pour des matrices rationnelles propres, et d'autre part démontrer leur unicité. Cette démonstration s'appuie sur la formalisation initialement proposée par Commault *et al.* [CDD+86, CD86] sur les matrices rationnelles propres.

Remarque : *dans toute la suite de ce mémoire, annexes comprises, les définitions, procédures ou propositions qui font l'objet d'une contribution sont identifiables par un encadré en trait épais, comme celui de la proposition 3.1, ci-après.*

Proposition 3.1

Soit $\mathbf{T}(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}$ une matrice rationnelle de rang plein par les lignes, et $p \leq m$. Considérons une factorisation de $\mathbf{T}(s)$ de la forme :

$$\mathbf{T}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(s) & 0 \end{bmatrix} \mathbf{B}(s)\,, \tag{3.43}$$

où $\mathbf{R}(s) \in \mathbb{R}^{p\times p}$ est inversible et $\mathbf{B}(s) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ est bipropre.

Les ordres des zéros/pôles à l'infini par colonne de $\mathbf{R}^{-1}(s)$ sont définis de manière unique.

Démonstration [29] :

Soit $\mathbf{T}(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}$ une matrice rationnelle de rang plein par les lignes, et $p \leq m$. Considérons en premiers lieux deux factorisations de $\mathbf{T}(s)$ de la forme :

$$\mathbf{T}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1(s) & 0 \end{bmatrix} \mathbf{B}_1(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_2(s) & 0 \end{bmatrix} \mathbf{B}_2(s) \tag{3.44}$$

29. Cette démonstration est similaire à la démonstration d'unicité de la structure à l'infini par colonne de $\mathbf{R}^{-1}(s)$ proposée par Commault *et al.* dans [CD86]. La seule différence réside dans le fait que la démonstration originale est énoncée pour une matrice de transfert $\mathbf{T}(s)$ rationnelle strictement propre, stable et surjective, tandis que la démonstration proposée ici l'étend au cas rationnel.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

où $\mathbf{R}_1(s) \in \mathbb{R}^{p\times p}$ et $\mathbf{R}_2(s) \in \mathbb{R}^{p\times p}$ sont des matrices rationnelles inversibles et $\mathbf{B}_1(s) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ et $\mathbf{B}_2(s) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ sont des matrices bipropres.

Nous pouvons réécrire (3.44) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix}\mathbf{R}_1^{-1}(s)\mathbf{R}_1(s) & 0\end{bmatrix}\mathbf{B}_1(s)\mathbf{B}_1^{-1}(s) &= \begin{bmatrix}\mathbf{R}_1^{-1}(s)\mathbf{R}_2(s) & 0\end{bmatrix}\mathbf{B}_2(s)\mathbf{B}_1^{-1}(s) \\ \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix}\mathbf{I}_p & 0\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\mathbf{R}_1^{-1}(s)\mathbf{R}_2(s) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{11}(s) & \mathbf{B}_{12}(s)\\ \mathbf{B}_{21}(s) & \mathbf{B}_{22}(s)\end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.45}$$

où $\mathbf{B}_{11} \in \mathbb{R}^{p\times p}(s)$, $\mathbf{B}_{12} \in \mathbb{R}^{p\times(m-p)}(s)$, $\mathbf{B}_{21} \in \mathbb{R}^{(m-p)\times p}(s)$ et $\mathbf{B}_{22} \in \mathbb{R}^{(m-p)\times(m-p)}(s)$. En notant que $\mathbf{R}_1^{-1}(s)\mathbf{R}_2(s)$ est inversible, la relation (3.45) entraîne que $\mathbf{B}_{12}(s) = \mathbf{0}$.

En notant à présent que la matrice $B_2(s)B_1^{-1}(s)$ de (3.45) est une matrice bipropre [30] et que son inverse est de la forme :

$$\left(\mathbf{B}_2(s)\mathbf{B}_1^{-1}(s)\right)^{-1} = \begin{bmatrix}\mathbf{B}_{11}^{-1}(s) & 0\\ * & *\end{bmatrix} \tag{3.46}$$

nous pouvons en conclure que la matrice $\mathbf{B}_{11}(s)$ est une matrice bipropre.
En utilisant (3.45), nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_p &= \mathbf{R}_1^{-1}(s)\mathbf{R}_2(s)\mathbf{B}_{11}(s)\ , \\ \text{soit} \qquad \mathbf{R}_1^{-1}(s) &= \mathbf{B}_{11}^{-1}(s)\mathbf{R}_2^{-1}(s) \end{aligned} \tag{3.47}$$

Nous pouvons ainsi conclure de la propriété 3.6 que l'ordre du zéro/pôle à l'infini de l'$i^{ième}$ colonne de $\mathbf{R}_1^{-1}(s)$ est égal à l'ordre du zéro/pôle à l'infini de l'$i^{ième}$ colonne de $\mathbf{R}_2^{-1}(s)$.

Fin de la démonstration.

3.5.3 Ordres d'essentialité généralisés : définition et détermination algébrique

En utilisant les résultats de la section 3.5.2, nous allons à présent définir les *ordres d'essentialité généralisés* des matrices rationnelles non nécessairement propres, proposer une méthode de détermination algébrique, ainsi qu'une interprétation pour l'inversion des systèmes d'état singuliers à temps invariant.

Définition 3.7

(Ordres d'essentialité généralisés d'une matrice rationnelle non nécessairement propre) *Soit $\mathbf{T}(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}$ une matrice rationnelle de rang plein par les lignes, et $p \leq m$. Considérons une factorisation de $\mathbf{T}(s)$ de la forme :*

$$\mathbf{T}(s) = \begin{bmatrix}\mathbf{R}(s) & 0\end{bmatrix}\mathbf{B}(s) \tag{3.48}$$

où $\mathbf{R}(s) \in \mathbb{R}^{p\times p}$ est inversible et $\mathbf{B}(s) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ est bipropre (bicausale).

Les ordres d'essentialité généralisés *de $\mathbf{T}(s)$, notés n_{ie_g}, sont définis comme les ordres des zéros/pôles à l'infini par colonne de $\mathbf{R}^{-1}(s)$. Ils sont définis de* manière unique.

30. Le produit de deux matrices bipropres est une matrice bipropres.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Démonstration : La démonstration de l'unicité des ordres d'essentialité généralisés de $\mathbf{T}(s)$ est directement issue de la proposition 3.1.

Fin de la démonstration.

Nous proposons à présent une procédure algébrique de détermination des *ordres d'essentialité généralisés* des matrices rationnelles. Sa démonstration s'appuie sur celle énoncée par COMMAULT *et al.* [CDD+86, CD86], étendue au cas non forcément propre. Elle se base sur la structure à l'infini de $\mathbf{T}(s)$ pour déterminer la structure à l'infini par colonne de $\mathbf{T}^{-1}(s)$.

Proposition 3.2 (*[LEDL+16]*)

(Ordres d'essentialité généralisés d'une matrice rationnelle non nécessairement propre) *Soit* $\mathbf{T}(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}$ *une matrice rationnelle de rang plein par les lignes, et* $p \leq m$. *Les* ordres d'essentialité généralisés n_{ie_g} *peuvent être déterminé de la manière suivante :*

$$n_{ie_g} = \sum_{j=1}^{p} t_j - \sum_{j=1}^{p-1} \bar{t}_{ij} \qquad i = 1, ..., p \tag{3.49}$$

où

- p *est le rang de* $\mathbf{T}(s)$, *égal au nombre de pôles/zéros à l'infini de* $\mathbf{T}(s)$,
- t_j *est l'ordre du* $j^{ième}$ *pôle/zéro à l'infini de* $\mathbf{T}(s)$,
- $\bar{t}_{ij}$ *est l'ordre du* $j^{ième}$ *pôle/zéro à l'infini de la matrice* $\mathbf{T}_i(s) \in \mathbb{R}^{(p-1)\times m}$, *obtenue à partir de* $\mathbf{T}(s)$ *en supprimant sa* $i^{ième}$ *ligne.*

Démonstration : *la démonstration est ici présentée pour* $i = 1$ *afin de simplifier les manipulations sur* $\mathbf{T}(s)$. *Cette démonstration est valable pour tout* i *en faisant les permutations de lignes préalables adéquates sur* $\mathbf{T}(s)$ *pour se ramener au présent cas.*

Soit $\mathbf{T}(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}$ une matrice rationnelle de rang plein par les lignes, et $p \leq m$. Considérons en premier lieu une factorisation de $\mathbf{T}(s)$ de la forme :

$$\mathbf{T}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(s) & 0 \end{bmatrix} \mathbf{B}(s) \tag{3.50}$$

où $\mathbf{R}(s) \in \mathbb{R}^{p\times p}$ est inversible et $\mathbf{B}(s) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ est bipropre. Écrivons $\mathbf{R}(s)$ de la manière suivante (3.51) :

$$\mathbf{R}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1(s) \\ \hline \bar{\mathbf{R}}_1(s) \end{bmatrix} \tag{3.51}$$

où $\mathbf{r}_1(s)$ est la première ligne de $\mathbf{R}(s)$ et $\bar{\mathbf{R}}_1(s) \in \mathbb{R}^{(p-1)\times p}$, de rang $(p-1)$. La matrice $\bar{\mathbf{R}}_1(s)$ peut être factorisée suivant la forme de SMITH-MCMILLAN à l'infini (théorème 2.1 page 48) :

$$\bar{\mathbf{R}}_1(s) = \bar{\mathbf{B}}_1(s)\bar{\mathbf{\Delta}}(s)\bar{\mathbf{B}}_2(s) \tag{3.52}$$

où

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

— $\bar{\mathbf{B}}_1(s) \in \mathbb{R}^{(p-1)\times(p-1)}$ et $\bar{\mathbf{B}}_2(s) \in \mathbb{R}^{p\times p}$ sont des matrices bipropres.

— $\bar{\mathbf{\Delta}}(s) = \left[\begin{array}{ccc|c} s^{-\bar{t}_{11}} & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & s^{-\bar{t}_{1(p-1)}} & 0 \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{(p-1)\times p}$

En utilisant (3.51) et (3.52), la matrice $\mathbf{R}(s)$ peut être factorisée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(s) &= \left[\begin{array}{c} \mathbf{r}_1(s) \\ \hline \bar{\mathbf{B}}_1(s)\bar{\mathbf{\Delta}}(s)\bar{\mathbf{B}}_2(s) \end{array}\right] \\ &= \underbrace{\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \bar{\mathbf{B}}_1(s) & \\ 0 & & & \end{array}\right]}_{\bar{\bar{\mathbf{B}}}_1(s)} \cdot \underbrace{\left[\begin{array}{c} \mathbf{r}_1(s)\bar{\mathbf{B}}_2^{-1}(s) \\ \hline \bar{\mathbf{\Delta}}(s) \end{array}\right]}_{\bar{\mathbf{R}}(s)}}_{\bar{\mathbf{T}}(s)} \cdot \bar{\mathbf{B}}_2(s) \end{aligned} \tag{3.53}$$

où $\bar{\bar{\mathbf{B}}}_1(s) \in \mathbb{R}^{p\times p}$ est bipropre, $\bar{\mathbf{R}}(s) \in \mathbb{R}^{p\times p}$ est inversible et $\bar{\mathbf{T}}(s) \in \mathbb{R}^{p\times p}$ est inversible également.

Les matrices $\mathbf{R}(s)$ et $\bar{\mathbf{T}}(s)$ sont liées par une transformation bipropre à droite (3.53) et ainsi leur inverse, par une transformation bipropre à gauche (en notant que $\bar{\mathbf{T}}^{-1}(s) = \bar{\mathbf{R}}^{-1}(s)\bar{\bar{\mathbf{B}}}_1^{-1}(s)$). La propriété 3.6 implique que la *structure à l'infini par colonne* de $\mathbf{R}^{-1}(s)$ est égale à celle de $\bar{\mathbf{T}}^{-1}(s)$.

Calculons à présent la première colonne de $\bar{\mathbf{T}}^{-1}(s)$, avec $\bar{\mathbf{T}}^{-1}(s) = \bar{\mathbf{R}}^{-1}(s)\bar{\bar{\mathbf{B}}}_1^{-1}(s)$. La forme particulière de la matrice bipropre $\bar{\bar{\mathbf{B}}}_1(s)$ (et donc de $\bar{\bar{\mathbf{B}}}_1^{-1}(s)$) implique que la première colonne de $\bar{\mathbf{T}}^{-1}(s)$ correspond à la première colonne de $\bar{\mathbf{R}}^{-1}(s)$ et qu'elles ont donc la même structure à l'infini *i.e.* le même ordre de *pôle/zéro à l'infini par colonne*). Nous avons :

$$\bar{\mathbf{R}}^{-1}(s) = \frac{1}{\det\left(\bar{\mathbf{R}}(s)\right)} \operatorname{com}\left(\bar{\mathbf{R}}(s)\right)^T \tag{3.54}$$

où com$(\cdot)$ désigne la comatrice (ou matrice adjointe).

La première colonne de $\operatorname{com}\left(\bar{\mathbf{R}}(s)\right)^T$ se réduit à la forme suivante :

$$\operatorname{com}\left(\bar{\mathbf{R}}(s)\right)^T_{p,1} = \left[\begin{array}{cccc} 0 & \cdots & 0 & (-1)^{(p+1)} \prod_{j=1}^{p-1} s^{-\bar{t}_{1j}} \end{array}\right]^T \tag{3.55}$$

Pour le calcul de $\det\left(\bar{\mathbf{R}}(s)\right)$, ré-exprimons préalablement $\bar{\mathbf{R}}(s)$ à partir de (3.53) de la manière suivante :

$$\bar{\mathbf{R}}(s) = \bar{\bar{\mathbf{B}}}_1^{-1}(s)\mathbf{R}(s)\bar{\mathbf{B}}_2^{-1}(s) \tag{3.56}$$

La matrice $\mathbf{R}(s)$, rationnelle carrée de rang plein (3.50), peut également être factorisée sous la forme de Smith-McMillan à l'infini selon :

$$\mathbf{R}(s) = \mathbf{B}_3(s)\mathbf{\Delta}(s)\mathbf{B}_4(s) \tag{3.57}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

où

— $\mathbf{B}_3(s) \in \mathbb{R}^{p\times p}$ et $\mathbf{B}_4(s) \in \mathbb{R}^{p\times p}$ sont des matrices bipropres.

— $\mathbf{\Delta}(s) = \begin{bmatrix} s^{-t_1} & & \\ & \ddots & \\ & & s^{-t_p} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p\times p}$

En utilisant (3.56) et (3.57), il vient :

$$\bar{\mathbf{R}}(s) = \bar{\mathbf{B}}_1^{-1}(s)\mathbf{B}_3(s)\mathbf{\Delta}(s)\mathbf{B}_4(s)\bar{\mathbf{B}}_2^{-1}(s) \tag{3.58}$$

Le déterminant de $\bar{\mathbf{R}}(s)$ peut ainsi s'écrire :

$$\det\left(\bar{\mathbf{R}}(s)\right) = b(s)\prod_{j=1}^{p} s^{-t_j} \tag{3.59}$$

où $b(s)$ est une fonction bipropre provenant des déterminants des matrices bipropres de (3.58).

Nous pouvons ainsi réécrire la première colonne de la matrice $\bar{\mathbf{R}}^{-1}(s)$ selon :

$$\left(\bar{\mathbf{R}}^{-1}(s)\right)_{p,1} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \dfrac{(-1)^{(p+1)}\prod_{j=1}^{p-1} s^{-\bar{t}_{1j}}}{b(s)\prod_{j=1}^{p} s^{-t_j}} \end{bmatrix}^T \tag{3.60}$$

L'ordre du zéro/pôle à l'infini de la première colonne de la matrice $\bar{\mathbf{R}}^{-1}(s)$ est donc égal à $\sum_{j=1}^{p-1}(-\bar{t}_{ij}) - \sum_{j=1}^{p}(-t_j) = \sum_{j=1}^{p} t_j - \sum_{j=1}^{p-1}\bar{t}_{ij}$ et correspond également à l'ordre du zéro/pôle à l'infini de la première colonne de $\bar{\mathbf{T}}^{-1}(s)$ (3.53).

En utilisant (3.53) et en rappelant que $\bar{\mathbf{B}}_2(s)$ est bipropre, nous pouvons conclure que la *structure à l'infini par colonne* de $\mathbf{R}^{-1}(s)$ est égale à celle de $\bar{\mathbf{T}}^{-1}(s)$. Nous pouvons ainsi en déduire que l'*ordre d'essentialité généralisé* n_{ie_g} de $\mathbf{T}(s)$ peut être déterminé de la manière suivante :

$$n_{ie_g} = \sum_{j=1}^{p} t_j - \sum_{j=1}^{p-1}\bar{t}_{ij} \qquad\qquad i = 1, ..., p \tag{3.61}$$

Fin de la démonstration.

3.5.4 Interprétation pour les systèmes linéaires singuliers à temps invariant

Les *ordres d'essentialité généralisés* proposés en section 3.5.3 sont définis de manière unique sur une matrice rationnelle, notée $\mathbf{T}(s)$, comme étant la structure à l'infini par colonne (*i.e.* les ordres des pôles/zéros à l'infini par colonne) de la matrice $\mathbf{R}^{-1}(s)$ (définition 3.7). Ajoutons que dans le cas où la matrice rationnelle $\mathbf{T}(s)$ est carrée d'ordre plein (*i.e.* $\mathbf{T}(s) \in \mathbb{R}^{p\times p}$), nous pouvons directement appliquer cette définition à $\mathbf{T}^{-1}(s)$ (dans la mesure où la matrice identité est une matrice bipropre). Nous pouvons ainsi proposer le Lemme suivant pour les systèmes d'état singuliers linéaires à temps invariants :

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Lemme 3.3

(Ordres d'essentialité généralisés d'un système d'état singulier linéaire à temps invariant) *Soit le système d'état singulier linéaire à temps invariant* Σ_d (3.2) *ayant pour matrice de transfert* $\mathbf{T}(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}$, *rationnelle de rang plein par les lignes,* $p \leq m$, *telle que* $\mathbf{T}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}$. *L'*ordre d'essentialité généralisé n_{ie_g} *de la* $i^{ième}$ *sortie* y_i *du système peut être déterminé de la manière suivante :*

$$n_{ie_g} = \sum_{j=1}^{p} t_j - \sum_{j=1}^{p-1} \bar{t}_{ij} \qquad i = 1, ..., p \tag{3.62}$$

où

- *p est le rang de* $\mathbf{T}(s)$, *égale au nombre de pôle et zéro à l'infini du système* $(\mathbf{E}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$,
- t_j *est l'ordre du* $j^{ième}$ *pôle/zéro à l'infini du système* $(\mathbf{E}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$,
- $\bar{t}_{ij}$ *est l'ordre du* $j^{ième}$ *pôle/zéro à l'infini du sous-système ayant pour matrice de transfert* $\mathbf{T}_i(s)$, *de dimension* $(p-1)\times m$, *obtenue à partir de* $\mathbf{T}(s)$ *en supprimant sa* $i^{ième}$ *ligne.*

En ramenant le raisonnement qui suit aux systèmes carrés par souci de simplicité (*i.e.* $\mathbf{T}(s) \in \mathbb{R}^{p\times p}$), deux cas de structures à l'infini par colonne peuvent se présenter pour la matrice de transfert du système inverse $\mathbf{T}^{-1}(s)$ (voir par ailleurs les définitions 3.5 et 3.7) :

- Si l'$i^{ième}$ colonne de $\mathbf{T}^{-1}(s)$ possède un *pôle* à l'infini, l'ordre de ce *pôle* à l'infini par colonne correspond à l'ordre *maximal* de *dérivation* (atteint) de la sortie associée du système.

- Si l'$i^{ième}$ colonne de $\mathbf{T}^{-1}(s)$ possède un *zéro* à l'infini, l'ordre de ce *zéro* à l'infini par colonne correspond à l'ordre *minimal* d'*intégration* de la sortie associée du système.

Nous rappelons que les systèmes d'état *réguliers*, ayant des matrices de transfert propres (*i.e.* n'ayant que des zéros à l'infini), possèdent des matrices de transfert inverses n'ayant que des pôles à l'infini [CDD+86] et ainsi uniquement des pôles à l'infini par colonne [CD86]. Les ordres de ces pôles à l'infini par colonne correspondent aux ordres de dérivation maximaux des sorties associées dans cette représentation inverse du système (non nécessairement associée au modèle inverse d'ordre minimal). Dans le cas d'un système d'état singulier, la matrice de transfert inverse associée peut indifféremment exhiber des zéros ou pôles à l'infini par colonne. Dans le cas où nous retrouverions un pôle à l'infini pour l'$i^{ième}$ colonne de $\mathbf{T}^{-1}(s)$, l'implication pour la sortie associée est la même que vu précédemment pour un système d'état classique. Dans le cas où nous trouverions un zéro à l'infini pour l'$i^{ième}$ colonne de $\mathbf{T}^{-1}(s)$, cela implique en revanche un ordre d'*intégration minimal* de la sortie associée, par implication de la définition d'un zéro à l'infini d'une colonne/ligne d'une matrice rationnelle (définition 3.5).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Exemple

(Ordres d'essentialité généralisés déterminés sur la matrice de transfert *inverse* d'un système singulier ; cas où $T(s)$ est rationnelle) : Considérons la matrice rationnelle $T(s)$ suivante et sa matrice inverse associée $T^{-1}(s)$:

$$\mathbf{T}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s^3} \\ \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} + s^3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{T}^{-1}(s) = \begin{bmatrix} s^2 + \frac{1}{s^3} & -\frac{1}{s^4} \\ -\frac{1}{s^2} & \frac{1}{s^3} \end{bmatrix} \tag{3.63}$$

La matrice $\mathbf{T}^{-1}(s)$ de (3.63) possède :
- un pôle à l'infini pour la première colonne, d'ordre 2,
- un zéro à l'infini pour la seconde colonne, d'ordre 3.

Considérant le vecteur d'entrée $\mathbf{U}(s) = \begin{bmatrix} U_1(s) & U_2(s) \end{bmatrix}^T$ et le vecteur de sortie $\mathbf{Y}(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) & Y_2(s) \end{bmatrix}^T$, nous obtenons, pour le modèle inverse associée à (3.63), la représentation suivante :

$$\mathbf{U}(s) = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1}(s)\mathbf{Y}(s) = \begin{bmatrix} \left(s^2 + \frac{1}{s^3}\right) Y_1(s) - \frac{1}{s^4} Y_2(s) \\ -\frac{1}{s^2} Y_1(s) + \frac{1}{s^3} Y_2(s) \end{bmatrix} \tag{3.64}$$

Le modèle inverse (3.64) fait intervenir pour la première sortie $Y_1(s)$, un ordre de dérivation maximale de 2, correspondant à l'ordre du pôle à l'infini de la première colonne de $\mathbf{T}^{-1}(s)$ ($n_{1e_g} = 2$). Pour la seconde sortie, $Y_2(s)$, la structure à l'infini de la seconde colonne de $\mathbf{T}^{-1}(s)$ étant un zéro, l'ordre associé correspond à l'ordre d'intégration minimal de cette sortie dans le modèle inverse, en l'occurrence 3 ($n_{2e_g} = -3$).

Exemple

(Ordres d'essentialité généralisés déterminés sur la matrice de transfert d'un système singulier ; cas où $\mathbf{T}(s)$ est rationnelle) : Considérons à nouveau la matrice rationnelle $\mathbf{T}(s)$ de (3.63).

1. Calculons dans un premier temps la quantité $\sum_{j=1}^{p} t_j$, *i.e.* la somme des zéros/pôles à l'infini de $\mathbf{T}(s)$. Nous avons précédemment introduit le fait qu'il est envisageable de déterminer les ordres des zéros/pôles à l'infini de $\mathbf{T}(s)$ grâce à ses mineurs (voir théorème 3.9 page 94), évitant ainsi la factorisation de Smith-McMillan à l'infini (théorème 2.1 page 48). Nous avons ainsi :

   — mineurs d'ordre 1 : $\frac{1}{s^2}$; $\frac{1}{s^3}$; $\frac{1}{s}$; $\frac{1}{s^2} + s^3$.

   Le plus haut degré des mineurs d'ordre 1 de $T(s)$, noté $\delta_{D\ 1}$, est 3, soit :

   $$t_1 = -\ \delta_{D\ 1} = -3 \tag{3.65}$$

   où t_1 est un pôle à l'infini de $\mathbf{T}(s)$, d'ordre 3.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

— mineurs d'ordre 2 : $\det(\mathbf{T}(s)) = s$.

Le plus haut degré des mineurs d'ordre 2 de $\mathbf{T}(s)$, noté $\delta_{D\ 2}$, est 1, soit :

$$\sum_{j=1}^{2} t_j = -\ \delta_{D\ 2} = -1 \tag{3.66}$$

soit $t_2 = 2$, où t_2 est un zéro à l'infini de $\mathbf{T}(s)$, d'ordre 2.

2. Calculons à présent les quantités $\sum_{j=1}^{p-1} \bar{t}_{ij}$ relatives à chacune des sous-matrices $\mathbf{T}_1(s)$ et $\mathbf{T}_2(s)$ dans lesquelles on a respectivement supprimé la $1^{ère}$ et la $2^{ème}$ ligne de $\mathbf{T}(s)$. Il s'agit de la somme des zéros/pôles à l'infini des sous-matrices $\mathbf{T}_1(s)$ et $\mathbf{T}_2(s)$ respectivement :

— la sous-matrice $\mathbf{T}_1(s)$ est la matrice ligne suivante :

$$\mathbf{T}_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} + s^3 \end{bmatrix} \tag{3.67}$$

La somme des zéros/pôles à l'infini de $\mathbf{T}_1(s)$ se réduit au seul zéro/pôle à l'infini par ligne, en l'occurrence un pôle d'ordre 3. Soit :

$$\bar{t}_{11} = -3 \tag{3.68}$$

— la sous-matrice $\mathbf{T}_2(s)$ est la matrice ligne suivante :

$$\mathbf{T}_2(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s^3} \end{bmatrix} \tag{3.69}$$

La somme des zéros/pôles à l'infini de $\mathbf{T}_2(s)$ se réduit au seul zéro/pôle à l'infini par ligne, en l'occurrence un zéro d'ordre 2. Soit :

$$\bar{t}_{21} = 2 \tag{3.70}$$

3. Calculons enfin les *ordres d'essentialité généralisés* de $\mathbf{T}(s)$. Nous avons :

$$n_{1e_g} = \sum_{j=1}^{2} t_j - \sum_{j=1}^{2-1} \bar{t}_{1j} = (-3+2) - (-3) = 2 \tag{3.71}$$

et

$$n_{2e_g} = \sum_{j=1}^{2} t_j - \sum_{j=1}^{2-1} \bar{t}_{2j} = (-3+2) - 2 = -3 \tag{3.72}$$

Nous déduisons de (3.71) que la première sortie du système sera *dérivée* au *maximum* deux fois ($n_{1e_g} = 2$) et de (3.72) que la deuxième sortie sera *intégrée* au *minimum* trois fois ($n_{2e_g} = -3$) dans le modèle inverse. Ces résultats correspondent bien à ce qui a été trouvé à partir de la matrice $\mathbf{T}^{-1}(s)$ de (3.63).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

3.5.5 Conclusion sur les ordres d'essentialité généralisés

La définition de l'*ordre d'essentialité généralisé* d'une matrice rationnelle appliquée à la matrice de transfert d'un système singulier et son implication sur les ordres de dérivation et d'intégration des sorties dans le modèle inverse associé correspondent à nos attentes dans le cadre de la méthodologie de dimensionnement par modèle inverse (chapitre 1, section 1.4 page 24) pour l'extension à la classe des systèmes linéaires singuliers que nous visons. Dans la phase d'*adéquation*, les exigences sur les sorties formulées par le cahier des charges portent principalement sur leurs ordres de dérivation (étape de *validité du cahier des charges* de la phase d'*adéquation*, voir figure 1.13 page 29). A ce titre, le présent développement apporte cette information (proposition 3.1, définition 3.7, et interprétation en section 3.5.4) et la manière de la caractériser (proposition 3.2, lemme 3.3), *i.e.* l'ordre de dérivation *maximal* et *atteint* de chacune des sorties dans le modèle inverse, dans la mesure où ces dernières sont dérivées. Dans le cas où certaines sorties ne sont pas dérivées mais exclusivement intégrées, la définition de l'*ordre d'essentialité généralisé* ne fournit en revanche qu'une borne *inférieure* de l'ordre d'intégration. Ceci ne pose aucun problème dans le cadre de la méthodologie de dimensionnement.

3.6 Conclusion

Le présent chapitre 3 a permis d'établir un certain nombre de propriétés algébriques des systèmes singuliers pour constituer un cadre référent aux extensions graphiques à cette classe de système de la méthodologie de conception (présentée au chapitre 1) et de ses outils (chapitre 2).

Nous avons choisi de traiter la classe des *systèmes singuliers à faisceau régulier*, qui correspond à la classe de système issu de modèles bond graph (ce point sera rediscuté au chapitre 4) et permet de regarder en premier lieu leur solvabilité (section 3.2.2). Vis-à-vis de la classe des systèmes réguliers sur laquelle l'ensemble de la méthodologie de conception (et de ses outils) est originellement formulée, la classe des systèmes singuliers se distingue tout d'abord par la présence de phénomènes infinis dynamiques (*modes impulsionnels*) et non dynamiques (*modes non dynamiques*, ou *modes algébriques*). La compréhension de cette spécificité majeure nécessite la mise en place de transformations du système originel et une formalisation de la réponse temporelle du système que nous proposons au chapitre 5 sur la base de l'approche distributionnelle de Verghese et en explicitant la contribution des modes exponentiels, impulsionnels et non dynamiques (sections 5.2 et 5.3). Ces modes, associés à la notion de *propreté* (section 3.4.1), constituent en partie la référence algébrique qui nous permettra d'énoncer un certain nombre de propriétés structurelles sur les modèles bond graph (chapitre 4), notamment au regard de la spécificité physique que représentent les stockages d'énergie dans le bond graph et leur variable d'énergie associée (et ainsi la représentation d'état singulière du système qui en découle).

Dans le cadre de la méthodologie de dimensionnement par modèle inverse, le chapitre 3 étend le référentiel algébrique pour supporter la phase d'*adéquation i.e.* la phase assurant la concordance entre la structure du modèle et les spécifications du cahier des charges. Cette phase concerne l'inversibilité du modèle (validité du modèle de conception) et les propriétés de dérivabilité des fonctions spécifiées en sortie dans le cahier des charges par rapport à la structure du modèle inverse (validité du cahier des charges) :

— l'*inversibilité* structurelle a été détaillée au chapitre 2, notamment à travers la procédure « semi-directe » de Fotsu-Ngwompo (section 2.3.2.2 page 59) puis

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

rediscutée en section 3.3 à la lumière des procédures algébriques existantes sur les systèmes singuliers.

— les propriétés structurelles de *dérivabilité* des sorties du modèle inverse ont été abordées, comme dans la démarche originelle, en se basant sur la structure à l'infini du système et sur la notion d'ordre d'essentialité. Si, au niveau algébrique, la première a déjà été formalisée sur les systèmes singuliers (section 3.4.2), nous proposons en section 3.5 des contributions permettant d'étendre la notion d'ordre d'essentialité aux matrices rationnelles non nécessairement propres, que nous nommons « ordre d'essentialité généralisé » (définition 3.7), démontrant leur unicité (proposition 3.1), et donnant un moyen de les déterminer (proposition 3.2) et une déclinaison pour les systèmes linéaires singuliers (lemme 3.3). Comme dans le cas régulier, l'ordre d'essentialité généralisé représente l'ordre de dérivation maximal de chacune des sorties dans le modèle inverse (dans la mesure où celles-ci sont effectivement dérivées) et fournit ainsi un critère sur les spécifications du cahier des charges dans la phase d'adéquation de la méthodologie de dimensionnement par modèle inverse.

Le chapitre 4 va à présent s'appuyer sur le référentiel algébrique du chapitre 3 pour discuter des propriétés structurelles dans le formalisme bond graph et proposer une déclinaison graphique en digraphe et en bond graph de la détermination des invariants structurels tels que la *structure à l'infini* et l'*ordre d'essentialité généralisé*, permettant ainsi l'extension de la méthodologie de dimensionnement.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Chapitre 4

Analyse structurelle des systèmes linéaires singuliers : Approche bond graph

Sommaire

4.1 Introduction 112
4.2 Polynôme caractéristique d'un système singulier 113
4.2.1 Introduction 113
4.2.2 Détermination du polynôme caractéristique $\det(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ sur le bond graph 115
4.3 Mineurs de la matrice système $\mathbf{P}(s)$ d'un système singulier . 133
4.3.1 Déterminant de la matrice système $\mathbf{P}(s)$ d'un système singulier sur son digraphe associé $\mathcal{G}(\Sigma_d)$ 133
4.3.2 Déterminant de la matrice système $\mathbf{P}(s)$ d'un système singulier en bond graph 139
4.4 Inversion des systèmes singuliers 152
4.5 Structure à l'infini 154
4.5.1 Détermination de la structure à l'infini d'un système singulier en bond graph 154
4.5.2 Détermination du degré des transmittances de $\mathbf{T}(s)$ 161
4.6 Ordres d'essentialité généralisés 164
4.6.1 Détermination des ordres d'essentialité généralisés sur le bond graph associé à un modèle direct singulier 164
4.6.2 Détermination des ordres d'essentialité généralisés sur le bond graph associé à un modèle inverse singulier 167
4.6.3 Exemple de synthèse : système singulier représenté par un modèle bond graph bicausal 169
4.7 Conclusion 177

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

4.1 Introduction

Le chapitre 4 propose d'aborder la détermination des propriétés des systèmes singuliers, exposées en terme algébrique au chapitre 3, sur leur représentation graphique associée. De manière analogue aux développements faits sur les systèmes réguliers détaillés au chapitre 2, nous allons nous appuyer dans le présent chapitre 4 sur la représentation digraphe qui peut être établie à partir du système d'état singulier pour déterminer les propriétés algébriques du chapitre 3 de manière graphique sur le modèle bond graph. Nous rediscuterons et généraliserons pour cela la correspondance qui peut être établie entre digraphe et bond graph.

Nous présentons ainsi les extensions de la méthodologie de conception par modèle bond graph inverse à la classe des systèmes singuliers, en nous concentrant sur la phase d'analyse structurelle, pour assurer d'une part *la validité du modèle de conception* (*i.e.* son inversibilité) et d'autre part la *validité du cahier des charges* (voir chapitre 1, section 1.4.3.2 page 28). Si l'inversibilité ne requiert à ce stade pas plus de commentaires,

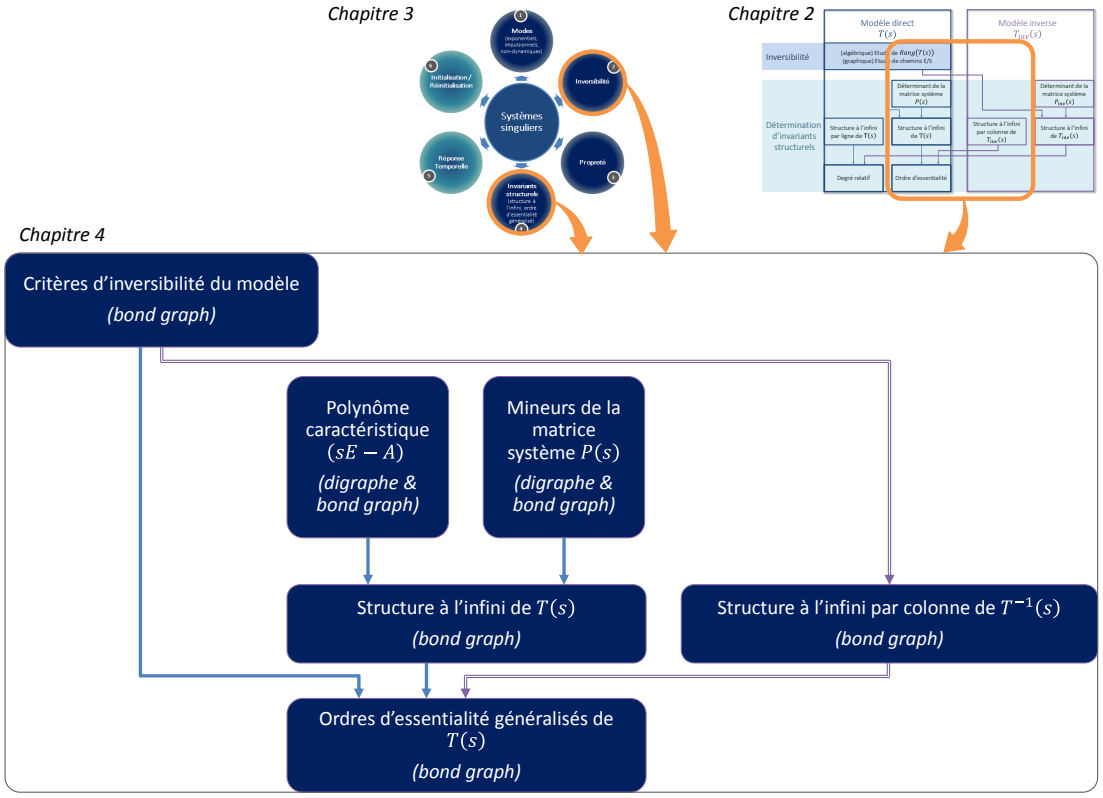


FIGURE 4.1 – chapitre 4 : détermination graphique des invariants structurels dans le cas singulier pour la généralisation de la méthodologie de dimensionnement. *La présente figure contient les figures 2.1 page 42 et 3.1 page 76.*

nous avons vu au chapitre 2 que la deuxième phase de l'étape d'*adéquation*, à savoir la vérification de la *validité du cahier des charges*, a été formulée en termes d'analyse structurelle avec les deux invariants que sont le *degré relatif* et l'*ordre d'essentialité*. Dans le cas des systèmes réguliers, si le premier représente une première information sur l'ordre de dérivation de chacune des sorties (*i.e.* l'ordre *minimal* de dérivation apparaissant dans le modèle inverse), le second, particularisé à chaque sortie également, représente l'ordre *maximal* de dérivation atteint. Cet état de fait nous a conduit à principalement nous

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

intéresser à ce second invariant dans le cadre de la méthodologie de dimensionnement, en en proposant une extension algébrique à la classe des systèmes singuliers (chapitre 3 section 3.5 page 96, définition 3.7, proposition 3.2 et lemme 3.3) ; l'*ordre d'essentialité généralisé* ainsi formulé conserve l'information requise pour la phase d'*adéquation*, à savoir l'ordre de dérivation maximal atteint par une sortie du modèle inverse (dans la mesure où celle-ci est effectivement dérivée).

Les notions étudiées et l'organisation du chapitre 4 sont présentées en figure 4.1. La finalité de ce chapitre est la détermination graphique de l'*inversibilité* et des *ordres d'essentialité généralisés* des sorties du modèle bond graph. Le détail des différentes sections du chapitre 4, et des contributions associées, est le suivant :

— la section 4.2 propose une détermination bond graph du polynôme caractéristique $\det(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ à partir des travaux de Reinschke en digraphe [Rei94] et d'une première formulation bond graph apportée par Mouhri *et al.* [MRDT99, Mou00] (figure 4.1). Nous rediscuterons cette dernière en montrant qu'elle ne respecte pas strictement la correspondance digraphe/bond graph originellement proposée par Rahmani [Rah93]. A partir de la généralisation de la correspondance digraphe/bond graph (annexe D), nous aboutirons aux propositions 4.1 page 116 et 4.2 page 126.

— la section 4.3 propose une détermination de $\det(\mathbf{P}(s))$ en digraphe (proposition 4.3 page 133) puis en bond graph (proposition 4.4 page 140) en utilisant une fois encore la généralisation de la correspondance digraphe/bond graph établie en annexe D (figure 4.1).

— la section 4.4 présente l'inversibilité des systèmes singuliers en bond graph (figure 4.1), en généralisant le test d'inversibilité de Rahmani [Rah93] (proposant ainsi le test d'inversibilité 4.1 page 152) et en discutant de la validité de l'approche d'inversion de Fotsu Ngwompo [FN97] détaillée au chapitre 2 (section 2.3.2.2 page 59).

— la section 4.5 propose une extension aux systèmes singuliers de la détermination bond graph de la structure à l'infini d'un système (figure 4.1), en la déclinant par niveaux d'analyses (propositions 4.5 et 4.6 page 155, et 4.7 et 4.8 page 156). La section 4.5 propose également une détermination du degré d'une transmittance de $\mathbf{T}(s)$ (lemme 4.9 page 161).

— la section 4.6 propose enfin la détermination bond graph des *ordres d'essentialité généralisés* (figure 4.1), déclinée par niveau d'analyse. Cette détermination est proposée sur le modèle direct (propositions 4.10 et 4.11 page 165), ainsi que sur le modèle inverse (propositions 4.12 et 4.13 page 167). Un exemple de synthèse (section 4.6.3 page 169) viendra illustrer la majorité des notions abordées au chapitre 4, ainsi qu'au chapitre 3.

4.2 Polynôme caractéristique d'un système singulier

4.2.1 Introduction

Du point de vue graphique, Reinschke a formalisé la détermination sur les digraphes d'un certain nombre de grandeurs usuelles de l'automatique sur les systèmes

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

réguliers [Rei84, Rei88] et singuliers [Rei94] [RW97], principalement basées sur les calculs de déterminants de matrice. Ces déterminations reposent en partie sur les approches graphiques de Mason [Mas53, Mas56] (*i.e.* « règle de Mason », notamment portée en bond graph [Bro72]) et sont à la base des procédures bond graph existantes introduites par Rahmani [Rah93] par correspondance entre digraphe et bond graph, et développées par Mouhri *et al.* [MRDT99, Mou00], Jardin [Jar10] et El Feki [EF11].

La présente section 4.2 traite la détermination bond graph du polynôme caractéristique du système singulier (4.1), démontrée grâce à la procédure digraphe existante pour cette classe de système [Rei94] (annexe C.2.5) et la correspondance digraphe/bond graph telle qu'exposée en annexe D, procédure D.1 page 307.

$$\Sigma_d : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}(t) & = & \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) & = & \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{array} \right. \tag{4.1}$$

Pour la suite de la présentation, nous employons les notations suivantes pour l'écriture du polynôme caractéristique du système singulier (4.1), où n est la dimension du vecteur d'état :

$$\det\left(s\mathbf{E} - \mathbf{A}\right) = \sum_{i=0}^{n} p_i s^{n-i} \tag{4.2}$$

La classe de modèle bond graph considérée dans cette section est celle des modèles linéaires, causaux et bicausaux, contenant tout type d'éléments multiports (en particulier des champs IC et des champs R), comportant potentiellement tous types de boucles causales d'ordre 0 (*i.e.* de classe 1 à 4 dans la classification de Van Dijk [vD94], voir annexe A.2 page 246) et boucles d'ordre négatives (qui peuvent être potentiellement impliquées par un choix délibéré d'affectation de la causalité non préférentiellement intégrale), dont une représentation d'état peut être formulée sous la forme (4.3). La structure de la représentation d'état (4.3) peut être montrée grâce à la matrice de structure de jonction (annexe A.3.2, équation (A.28) page 257). [1]

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_I & \mathbf{E}_{ID} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_I(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_D(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_I & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{DI} & \mathbf{I}_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_I(t) \\ \mathbf{x}_D(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_I \\ \mathbf{B}_D \end{pmatrix} \mathbf{u}(t) \tag{4.3}$$

Une première démarche de portage de la détermination du polynôme caractéristique d'un système singulier en bond graph a été proposée par Mouhri *et al.* [MRDT99, Mou00] sur la base de la correspondance qui peut être établie entre digraphe et bond graph proposées par Rahmani [Rah93] dans le cas régulier (annexes B.2 et B.3). De notre point de vue, ces résultats nécessitent d'être ré-explicités en exposant clairement la manière d'exploiter la procédure digraphe de Reinschke (annexe C.2.5 page 289, théorème C.4) et en précisant leur démonstration. Ces travaux se basent sur la proposition préalable de la procédure D.1 page 307 qui permet de construire le digraphe correspondant à un bond graph dont la représentation d'état peut être formulée sous la forme (4.3).

1. La forme (4.3), avec $A_{ID} = 0$, peut-être obtenue y compris en présence de champs de type IC, au moyen de résolutions potentielles de boucles causales d'ordre 0 entre éléments de stockage faisant intervenir des variables de puissance (ces boucles causales d'ordre 0 entre éléments de stockage sont distinctes des $1ZCP$ de van Dijk [vD94]), voir annexe A.3.3 page 252. Cette résolution peut être traitée par la considération des gains des chemins généralisés sur le bond graph (définition B.17 page 265).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

4.2.2 Détermination du polynôme caractéristique $\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ sur le bond graph

4.2.2.1 Cas sans variable de puissance dans le vecteur d'état

Le présent développement se base sur la correspondance digraphe/bond graph proposée en annexe D (procédure D.1 page 307), considérant pour faisceau $s\mathbf{E}-\mathbf{A}$ du modèle bond graph celui du système (4.3). Nous précisons en annexe D.3 que la correspondance digraphe/bond graph est basée sur le type de variables exposées dans la représentation d'état et sur la procédure digraphe (annexe C.2.5 page 289, théorème C.4). Ici, nous ne considérons que les variables d'énergie dans le vecteur d'état. Une généralisation à un vecteur d'état comprenant des variables de puissance est proposée en section 4.2.2.5 page 125.

Le type de variables exposées dans la représentation d'état conditionne la gestion des inclusions/exclusions de cycles/chemins causaux dans le bond graph et ainsi la définition des chemins *différents au sens du bond graph* dans la scrutation. En d'autres termes, la définition de chemins *différents au sens du bond graph* est dépendante du type de variables implicites qui y sont exposées dans le cas singulier. Ces précisions ont leur importance dans la mesure où Mouhri *et al.* proposent de ne considérer que les familles de cycles *disjoints* du bond graph [MRDT99, Mou00] pour le calcul du polynôme caractéristique. Utilisant la procédure D.1 et la correspondance établie en annexe D, nous proposons dans la suite de cet exposé de montrer que ce sont en fait bien des familles de cycles *différents au sens du bond graph* de la définition 4.1 qu'il nous faut considérer pour le calcul du polynôme caractéristique d'un système singulier tel qu'exprimé selon la représentation d'état (4.3) choisie dans ce mémoire, pour strictement respecter la correspondance digraphe/bond graph.

La considération de familles de cycles *différents au sens du bond graph* et non *disjoints* se déduit immédiatement de l'application de la détermination bond graph du polynôme caractéristique à la classe des systèmes *réguliers*, cas particulier des systèmes *singuliers* pour lesquels $\mathbf{E} = \mathbf{I}$, qui contredirait la proposition faite par Rahmani [Rah93] (théorème B.1 page 274). Notons en outre que la démonstration de Mouhri [Mou00] se base justement sur la procédure digraphe de Reinschke (théorème C.4) et la correspondance digraphe/bond graph de Rahmani [Rah93] (la proposition originale de Rahmani, annexe B.2, a été étendue par Mouhri selon les propositions de l'annexe B.3). Cela nous conduit à proposer la définition 4.1 et la proposition 4.1 dans le cas où le bond graph peut se mettre sous la forme générale (4.3) :

Définition 4.1

> ***(Définition de cycles causaux BG-différents-génériques)*** *Sur un modèle bond graph causal, deux cycles causaux sont dits* ***BG-différents-génériques*** *s'ils ne possèdent aucune variable d'état en commun.*

Remarque : la définition est ici donnée en termes de cycles, elle est étendue en termes de chemins en définition 4.2. Basé sur la forme (4.3) dans le présent cas de la section 4.2.2.1, la définition 4.1 est ici particularisée aux variables d'énergie.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Proposition 4.1

(Détermination du polynôme caractéristique d'un système singulier sur le bond graph associé) : *La valeur de chaque coefficient p_i du polynôme caractéristique écrit sous la forme $\det(s\mathbf{E}-\mathbf{A}) = \sum_{i=0}^{n} p_i s^{n-i}$ d'un système singulier pouvant se mettre sous la forme (4.3), peut être déterminée à partir du modèle bond graph associé de la manière suivante :*

$$\begin{aligned} p_i &= \sum_{\substack{\mathcal{F}_k \text{ telle que} \\ \omega_{\mathcal{F}_k} = i - n_D}} (-1)^{n_D - d_k} \tilde{G}_{\mathcal{F}_k} \qquad \forall i \in \{0, ..., n\} \setminus n_D \\ p_i &= (-1)^{n_D} + \sum_{\substack{\mathcal{F}_k \text{ telle que} \\ \omega_{\mathcal{F}_k} = 0}} (-1)^{n_D - d_k} \tilde{G}_{\mathcal{F}_k} \qquad i = n_D \end{aligned} \tag{4.4}$$

où :

- *n est la dimension du vecteur d'état, composé de l'ensemble des variables d'énergie du système,* i.e. *$n = n_I + n_D$ (où n_I et n_D sont respectivement le nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité* intégrale *et* dérivée*),*
- *$\mathcal{F}_k$ est la $k^{ième}$ famille de cycles causaux* BG-différents-génériques (définition 4.1)*, où seuls les cycles impliquant les variables d'énergie sont considérés,*
- *$\omega_{\mathcal{F}_k}$ est* l'ordre *de la famille de cycles causaux* BG-différents-génériques *$\mathcal{F}_k$,*
- *d_k est le nombre de cycles causaux* BG-différents-génériques *formant la famille $\mathcal{F}_k$,*
- *$\tilde{G}_{\mathcal{F}_k}$ est le gain statique de la famille $\mathcal{F}_k$.*

Démonstration : La démonstration se base sur la détermination du polynôme caractéristique d'un système singulier sur le digraphe $\mathcal{G}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ (théorème C.4 page 289) appliqué à la représentation (4.3) et la correspondance digraphe/bond graph proposée à l'annexe D page 305 (notamment la procédure D.1 page 307).

Ordre maximal du polynôme caractéristique : le calcul du polynôme caractéristique peut *a priori* faire intervenir toutes les variables d'énergie du modèle bond graph et seules les variables d'énergie contribuent à l'ordre de ce polynôme *via* les cycles causaux. Nous avons donc $n = n_I + n_D$.

Correspondance des cycles entre digraphe/bond graph : la procédure digraphe de calcul d'un déterminant utilise la notion de famille directrice (définition C.12 page 282), sous entendu de cycles *disjoints* au sens du digraphe (définition C.8 page 282). La correspondance digraphe/bond graph s'établit dans le présent cas entre les cycles *disjoints* du digraphe et les cycles causaux bond graph ne possédant aucune variable de la représentation d'état (4.3) en commun. En d'autres termes, en ne considérant ici que les variables d'énergie x_{I_i} et x_{D_i}, la correspondance digraphe/bond graph s'établit entre les cycles *disjoints* du digraphe et les cycles *BG-différents-génériques* (définition 4.1 page 115).

Ordre des familles de cycles bond graph contribuant au coefficient p_i : dans la procédure digraphe (théorème C.4 page 289), le nombre d'arcs *A–edge* de la famille $\mathcal{F}_i$ contribuant à p_i est i. De manière équivalente, la famille $\mathcal{F}_i$ contient $n-i$ arcs de type *E–edge*. En utilisant les notations de l'annexe D.2 page 306, nous avons la correspondance digraphe/bond graph suivante (où $\mathcal{F}_i$ fait référence à *la* famille digraphe précisée

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

au théorème C.4 page 289 et $\mathcal{F}_k$ à *l'une* des familles bond graph contribuant au coefficient p_i constituant la famille $\mathcal{F}_i$. *Ce point est précisé en annexe D.2 page 306*) :

— nombre d'arcs de type *A–edge* de la famille $\mathcal{F}_i$: $i = n_{A_x,b,\mathcal{F}_i} + n_{A_x,\bar{b},\mathcal{F}_i}$

où pour la famille digraphe $\mathcal{F}_i$, $n_{A_x,b,\mathcal{F}_i}$ est le nombre d'arcs de type *A–edge* provenant de la sous-matrice $\mathbf{I}_D$ de (4.3) et $n_{A_x,\bar{b},\mathcal{F}_i}$ est le nombre d'arcs de type *A–edge* provenant des sous-matrices $\mathbf{A}_{DI}$, $\mathbf{A}_I$.

— nombre d'arcs de type *E–edge* de la famille $\mathcal{F}_i$: $n - i = n_{E_x,b,\mathcal{F}_i} + n_{E_x,\bar{b},\mathcal{F}_i}$

où pour la famille digraphe $\mathcal{F}_i$, $n_{E_x,b,\mathcal{F}_i}$ est le nombre d'arcs de type *E–edge* provenant de la sous-matrice $\mathbf{I}_I$ de (4.3) et $n_{E_x,\bar{b},\mathcal{F}_i}$ est le nombre d'arcs de type *E–edge* provenant des sous-matrices $\mathbf{E}_{ID}$, $\mathbf{E}_D$.

En développant la précédente relation relative au *E–edge*, nous pouvons écrire,

$$n_{E_x,\bar{b},\mathcal{F}_i} = n_{E_x,\bar{b},D\to I,\mathcal{F}_i} + n_{E_x,\bar{b},D\to D,\mathcal{F}_i} \tag{4.5}$$

où

— $n_{E_x,\bar{b},D\to I,\mathcal{F}_i}$ est le nombre d'arcs de la famille digraphe $\mathcal{F}_i$ provenant de la sous-matrice $\mathbf{E}_{ID}$, et

— $n_{E_x,\bar{b},D\to D,\mathcal{F}_i}$ est le nombre d'arcs de la famille digraphe $\mathcal{F}_i$ provenant de la sous-matrice $\mathbf{E}_D$.

Nous avons ainsi au niveau du bond graph :

$n_{E_x,\bar{b},D\to I,\mathcal{F}_i} = n_{D,D\to I,\mathcal{F}_k}$, nombre de stockages d'énergie en causalité dérivée de la famille bond graph de cycles causaux $\mathcal{F}_k$ intervenant dans des cycles causaux entre éléments de stockage en causalité intégrale et éléments de stockage en causalité dérivée. Nous notons également que $n_{E_x,\bar{b},D\to I,\mathcal{F}_i} = n_{I,\mathcal{F}_k}$, nombre de stockages d'énergie en causalité intégrale de la famille bond graph de cycles causaux $\mathcal{F}_k$, et

$n_{E_x,\bar{b},D\to D,\mathcal{F}_i} = n_{D,\mathcal{F}_k} - n_{D,D\to I,\mathcal{F}_k}$ *i.e.* le nombre d'arcs de type *E–edge* associés à la sous-matrice $\mathbf{E}_D$ correspond sur le bond graph au nombre de chemins causaux entre éléments de stockage d'énergie en causalité dérivée dans la famille $\mathcal{F}_k$, égal au nombre total d'éléments de stockage en causalité dérivée $n_{D,\mathcal{F}_k}$ moins le nombre d'éléments de stockage en causalité dérivée impliqués dans des chemins causaux entre éléments de stockage en causalité dérivée et causalité intégrale $n_{D,D\to I,\mathcal{F}_k}$ de $\mathcal{F}_k$.

Nous pouvons ainsi réécrire (4.5) de la manière suivante,

$$\begin{aligned} n_{E_x,\bar{b},\mathcal{F}_i} &= n_{E_x,\bar{b},D\to I,\mathcal{F}_i} + n_{E_x,\bar{b},D\to D,\mathcal{F}_i} \\ &= n_{D,D\to I,\mathcal{F}_k} + (n_{D,\mathcal{F}_k} - n_{D,D\to I,\mathcal{F}_k}) \\ &= n_{D,\mathcal{F}_k} \end{aligned} \tag{4.6}$$

D'autre part, en notant $n_{I,\bar{\mathcal{F}}_k}$ le nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale n'apparaissant pas dans la famille bond graph $\mathcal{F}_k$, *i.e.* $n_{I,\bar{\mathcal{F}}_k} = n_{E_x,b,\mathcal{F}_i}$, nous

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

pouvons ainsi exprimer le nombre total de *E–edge*, $n-i$, de la famille $\mathcal{F}_i$ du digraphe associé à une famille bond graph $\mathcal{F}_k$:

$$\begin{aligned} n-i &= n_{E_x,b,\mathcal{F}_i} + n_{E_x,\bar{b},\mathcal{F}_i} \\ &= n_{I,\bar{\mathcal{F}}_k} + n_{D,\mathcal{F}_k} \\ &= (n_I - n_{I,\mathcal{F}_k}) + n_{D,\mathcal{F}_k} \\ &= n_I - (n_{I,\mathcal{F}_k} - n_{D,\mathcal{F}_k}) \\ &= n_I - \omega_{\mathcal{F}_k} \end{aligned} \tag{4.7}$$

soit donc

$$n_I + n_D - i = n_I - \omega_{\mathcal{F}_k} \tag{4.8}$$

et ainsi,

$$\omega_{\mathcal{F}_k} = i - n_D \tag{4.9}$$

Facteur de permutation des familles de cycles bond graph : par définition, $d_{\mathcal{F}_i}$, le nombre de cycles disjoints formant la famille de cycles digraphe $\mathcal{F}_i$ est égale à d_k, nombre de cycles causaux *BG-différents-génériques* formant la famille bond graph $\mathcal{F}_k$ correspondante, auquel on ajoute toutes les boucles digraphe associées aux éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale (resp. dérivée), au nombre de $n_{E_x,b,\mathcal{F}_i}$ (resp. $n_{A_x,b,\mathcal{F}_i}$), *i.e.*

$$d_{\mathcal{F}_i} = d_k + n_{E_x,b,\mathcal{F}_i} + n_{A_x,b,\mathcal{F}_i} \tag{4.10}$$

En rappelant d'une part que le facteur de permutation associé à la famille $\mathcal{F}_i$ de la procédure digraphe (théorème C.4 page 289) est $(-1)^{n-i-d_{\mathcal{F}_i}}$, nous avons

$$\begin{aligned} n-i-d_{\mathcal{F}_i} &= n_{E_x,b,\mathcal{F}_i} + n_{E_x,\bar{b},\mathcal{F}_i} - (d_k + n_{E_x,b,\mathcal{F}_i} + n_{A_x,b,\mathcal{F}_i}) \\ &= n_{E_x,\bar{b},\mathcal{F}_i} - (d_k + n_{A_x,b,\mathcal{F}_i}) \end{aligned} \tag{4.11}$$

et en utilisant (4.6),

$$\begin{aligned} n-i-d_{\mathcal{F}_i} &= -d_k + n_{D,\mathcal{F}_k} - n_{D,\bar{\mathcal{F}}_k} \\ &= -d_k + \left(n_D - n_{D,\bar{\mathcal{F}}_k}\right) - n_{D,\bar{\mathcal{F}}_k} \\ &= -d_k + n_D - 2n_{D,\bar{\mathcal{F}}_k} \end{aligned} \tag{4.12}$$

En notant que le terme $2n_{D,\bar{\mathcal{F}}_k}$ est pair, nous avons donc :

$$(-1)^{n-i-d_{\mathcal{F}_i}} = (-1)^{n_D - d_k} \tag{4.13}$$

D'autre part, nous devons prendre en compte tous les facteurs (-1) issus de la procédure de construction du digraphe à partir du bond graph (procédure D.1 page 307). Dans le présent cas où seules les variables d'énergie sont exposées dans le vecteur d'état, seuls les items 3 et 8 de la procédure D.1 (*i.e.* associés respectivement à la détermination des sous-matrices $\mathbf{E}_{ID}$ et $\mathbf{A}_{DI}$ de (4.3)) entraînent un facteur négatif sur les gains du bond graph. En notant n_{BD} le nombre d'arcs total portant ce facteur (-1), nous avons donc,

$$n_{BD} = n_{E_x,\bar{b},D\to I,\mathcal{F}_i} + n_{A_x,\bar{b},I\to D,\mathcal{F}_i} \tag{4.14}$$

que nous pouvons ré-écrire au niveau bond graph suivant,

$$n_{BD} = n_{D,D\to I,\mathcal{F}_k} + n_{D,I\to D,\mathcal{F}_k} \tag{4.15}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

en notant que $n_{D,D\to I,\mathcal{F}_k}$ et $n_{D,I\to D,\mathcal{F}_k}$ sont nécessairement égaux dans le présent cas où seules les variables d'énergie sont considérées (puisque ces chemins causaux interviennent uniquement dans les boucles entre éléments de stockage en causalité intégrale et en causalité dérivée) [2]. La quantité n_{BD} est donc paire. Nous pouvons ainsi conclure que,

$$(-1)^{n-i-d_{\mathcal{F}_i}} \times (-1)^{n_{BD}} = (-1)^{n_D-d_k} \tag{4.16}$$

Remarque sur la présence du coefficient $(-1)^{n_D}$ *dans* p_i *pour* $i = n_D$ *dans* (4.4) *:* Ce coefficient est issu de la famille de cycle directrice sur le digraphe $\mathcal{G}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ uniquement formée de boucles (définition C.7 page 282) unitaires de type *E–edge* sur l'ensemble des sommets d'état associés aux variables d'énergie associées aux éléments de stockage en causalité intégrale et de boucles unitaires de type *A–edge* sur l'ensemble des sommets d'état associés aux variables d'énergie associées aux éléments de stockage en causalité dérivée (*i.e.* respectivement associés aux sous-matrices $\mathbf{I}_I$ et $\mathbf{I}_D$). Cette famille directrice comporte ainsi n_I arcs de type *E–edge* et n_D arcs de type *A–edge*, contribue donc au coefficient d'ordre n_I (*i.e.* d'ordre $n-i$ pour $i = n_D$) du polynôme caractéristique du système et ne correspond à aucune famille de cycle sur le bond graph associé. Le gain unitaire de cette famille directrice doit être multiplié par le facteur de permutation établi en (4.16), en notant que de manière évidente pour cette famille, $d_k = 0$, permettant ainsi de retrouver le coefficient $(-1)^{n_D}$ dans p_i pour $i = n_D$.

Fin de la démonstration.

Remarque 1: l'ordre $\omega_{\mathcal{F}_k}$ des familles de cycles *BG-différents-génériques* du bond graph contribue au monôme de degré $n-i$ par la relation $n-i = n_I - \omega_{\mathcal{F}_k}$ du polynôme caractéristique, tandis qu'en digraphe, c'est directement le nombre d'arc $(n-i)$ de type *E–Edge* d'une famille directrice sur $\mathcal{G}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ qui implique le degré $(n-i)$. *(En bond graph, les familles d'ordre croissant contribuent pour le monôme de degré décroissant dans le polynôme caractéristique).*

Remarque 2: le monôme de plus haut degré du polynôme caractéristique (4.4) d'un modèle bond graph dont une représentation d'état peut s'ecrire sous la forme (4.3) est donné par l'ordre minimal ω_{n_I-d} qu'une famille de cycles causaux *BG-différents-génériques (définition 4.1, n'incluant que les variables d'énergie)* puisse avoir, telle que la somme des gains statiques des familles de cycles d'ordre ω_{n_I-d}, soit différente de zéro. Nous avons ainsi :

$$d = \deg\det(s\mathbf{E}-\mathbf{A}) = n_I - \omega_{n_I-d} \tag{4.17}$$

La quantité ω_{n_I-d} est nécessairement négative, et la formulation (4.4) implique que si le bond graph ne comporte pas de cycles d'ordre négatif, $d = n_I$.

Nous proposons d'illustrer la proposition 4.1 et les précédentes considérations à travers les exemples suivants :

1. Exemple 1 (section 4.2.2.2 page 120) : Présence d'une $1ZCP$, calcul du polynôme caractéristique à partir de la représentation singulière (4.3). Détail de l'implication sur les chemins *BG-différents-génériques. Cet exemple illustre la distinction*

2. Ce point peut également être directement déduit de la représentation digraphe générique du faisceau $s\mathbf{E}-\mathbf{A}$, figure D.2 page 309, dans le présent cas simplifié où seuls les sommets d'état $\mathbf{x}_I$ et $\mathbf{x}_D$ existent.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

entre cycles BG-différents-génériques *et* BG-différents.

2. Exemple 2 (section 4.2.2.3 page 121) : Présence d'une $2ZCP$, calcul du polynôme caractéristique à partir de la représentation singulière (4.3).

3. Exemple 3 (section 4.2.2.4 page 123) : Présence d'un cycle d'ordre négatif. Détail de l'implication sur les chemins *BG-différents-génériques*.

4.2.2.2 Exemple 1 :cas linéaire avec plusieurs boucles causales d'ordre 0 de classe 1, mise sous forme singulière et régulière

Cet exemple illustre la distinction entre cycles BG-différents *(définition B.9 page 264) et* BG-différents-génériques *(définition 4.1).* Prenons le modèle de la figure 4.2 (où $n_I = 2$ et $n_D = 1$). Il comprend plusieurs $1ZCP$ partageant un même élément de

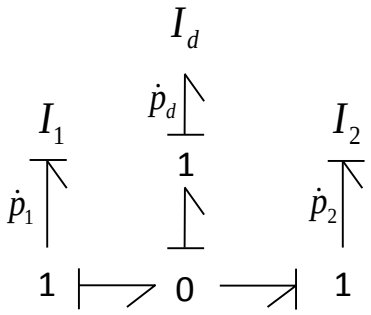


FIGURE 4.2 – Exemple de bond graph avec boucles causales d'ordre 0 de classe 1.

stockage en causalité dérivée, I_d. Sa représentation d'état est détaillée en (4.18) et le digraphe $\mathcal{G}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ associé est proposé en figure 4.3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p_1} \\ \dot{p_2} \\ \dot{p_d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{I_d}{I_1} & \dfrac{I_d}{I_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_d \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

Le polynôme caractéristique vaut $\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = -s^2\left(1 + \dfrac{I_d}{I_1} + \dfrac{I_d}{I_2}\right)$. La détermination graphique sur le digraphe (théorème C.4 page 289) et le bond graph (proposition 4.1) est détaillé en table 4.1. Nous voyons immédiatement sur le digraphe que le cycle $\{p_{I_2}, p_{I_d}\}$ de $\mathcal{F}_{1_b}$ et le cycle $\{p_{I_1}, p_{I_d}\}$ de $\mathcal{F}_{1_c}$ (de poids respectifs sI_d/I_2 et sI_d/I_1) ne sont pas disjoints : ils partagent tous deux le sommet p_{I_d} associé à p_d, variable d'état associé au stockage en causalité dérivée I_d. Sur le bond graph, cela illustre qu'une famille de cycles ne peut être formée de l'union des cycles d'ordre 0 $\{I_1, I_d\}$ et $\{I_2, I_d\}$ dans la perspective d'appliquer la proposition 4.1 et la correspondance digraphe/bond graph étendue au vecteur d'état $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_D)^T$: ces deux cycles ne sont pas *BG-différents-génériques* (définition 4.1), alors qu'ils sont *BG-différents*.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

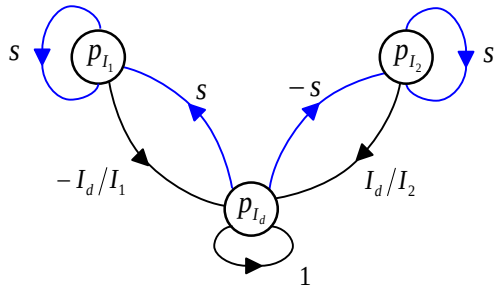


FIGURE 4.3 – Digraphe $\mathcal{G}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ de la représentation d'état (4.18), associé au modèle bond graph 4.2

4.2.2.3 Exemple 2 :cas linéaire avec boucle causale d'ordre 0 de classe 2

Cet exemple propose la détermination du polynôme caractéristique d'un modèle bond graph comportant une boucle causale d'ordre 0 de classe 2 ($2ZCP$) (figure 4.4). Exprimé sous la forme (4.3), ce modèle conduit à la représentation d'état régulière (4.19).

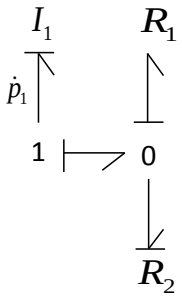


FIGURE 4.4 – Exemple de bond graph avec boucle causale d'ordre 0 de classe 2

$$\dot{p_1} = -\frac{R_2R_1}{R_1+R_2}\frac{1}{I_1}\,p_1 + \frac{R_2R_1}{R_1+R_2}\,u \tag{4.19}$$

Notons que dans le présent cas, la boucle causale $\{I_1, R_1\}$ d'ordre 1 touche la boucle causale $\{R_1, R_2\}$ d'ordre 0 de classe 2 ($2ZCP$)[3]. Nous avons ainsi $\det(s\mathbf{E}-\mathbf{A}) = s + \frac{R_2R_1}{R_1+R_2}\frac{1}{I_1}$, avec $\mathbf{E}=\mathbf{I}$. La détermination graphique (table 4.2), effectuée selon

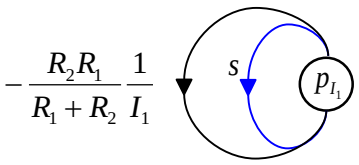


FIGURE 4.5 – Digraphe $\mathcal{G}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ associé au modèle bond graph 4.4

3. En rapprochant ceci de la matrice de structure de jonction (annexe A.3.2), la boucle causale $\{I_1, R_1\}$ est associée aux coefficients $\mathbf{S}_{13}$ et $\mathbf{S}_{31}$ de la forme (A.12) page 252, et dans (A.28), le coefficient de la matrice d'état issu de la boucle causale $\{R_1, R_2\}$ peut ainsi s'exprimer selon $\mathbf{S}_{13}(\mathbf{I}-\mathbf{L}\mathbf{S}_{33})^{-1}\mathbf{L}\mathbf{S}_{31} = -\frac{R_2R_1}{R_1+R_2}$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

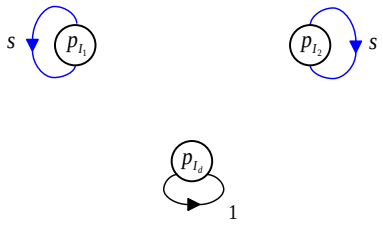
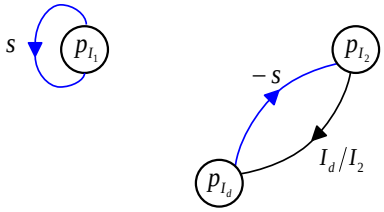
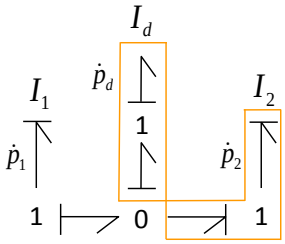
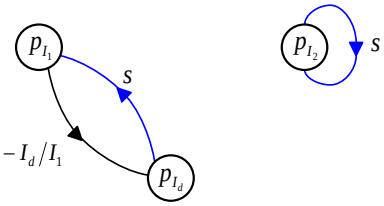
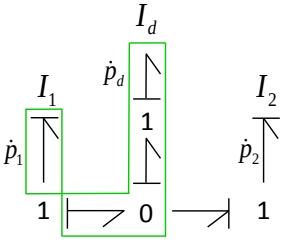
p_i	(Digraphe) Famille de cycles disjoints $\mathcal{F}_i$ de longueur $l_{\mathcal{F}_i} = n = 3$	(Bond graph) Famille de cycles *BG-différents-génériques* $\mathcal{F}_k$ d'ordre $\omega_{\mathcal{F}_k} = i - n_D$	(Bond graph) $(-1)^{n_D - d_k}\,\tilde{G}_{\mathcal{F}_k}$
p_0	*pas de familles avec 3 arcs de type* E–Edge	*pas de familles d'ordre* $\omega_{\mathcal{F}_k} = i - n_D = 0 - 1 = -1$	0
p_1	(a) Famille de cycle $\mathcal{F}_{1_a}$ 		$(-1)^1$ (terme constant de (4.4) pour $i = n_D$)
	(b) Famille de cycle $\mathcal{F}_{1_b}$ 	(b) Famille de cycle $\mathcal{F}_{1_b}$ 	$(-1)^{1-1}\dfrac{-I_d}{I_2}$
	(c) Famille de cycle $\mathcal{F}_{1_c}$ 	(c) Famille de cycle $\mathcal{F}_{1_c}$ 	$(-1)^{1-1}\dfrac{-I_d}{I_1}$

TABLE 4.1 – Exemple de détermination du polynôme caractéristique du bond graph 4.2 et son digraphe $\mathcal{G}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ associé 4.3 (selon la proposition 4.1)

la proposition 4.1, illustre un point majeur de scrutation portée par cette procédure : seules les boucles causales incluant les variables d'énergie sont considérées dans le calcul du polynôme caractéristique. En l'état, la $2ZCP$ $\{R_1, R_2\}$ apparaît dans le calcul parce qu'elle touche la boucle $\{I_1, R_1\}$. Ce point est également illustré par le fait que le gain statique de la $2ZCP$ $\{R_1, R_2\}$, dont la valeur est $-R_1/R_2$, n'apparait pas explicitement dans le calcul du polynôme caractéristique. En d'autres termes, il n'existe pas de famille de cycles causaux d'ordre 1 formée par les deux boucles $\{I_1, R_1\}$ et $\{R_1, R_2\}$ (respectivement d'ordre 1 et 0), alors considérées comme cycles *BG-différents-génériques* (même si c'est par ailleurs le cas). C'est la raison pour laquelle la proposition 4.1 précise que « seuls

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

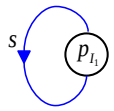
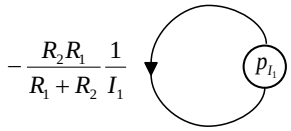
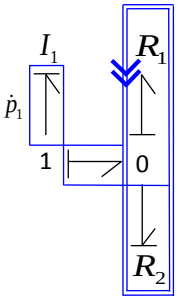
p_i	(Digraphe) Famille de cycles disjoints $\mathcal{F}_i$ de longueur $l_{\mathcal{F}_i} = n = 1$	(Bond graph) Famille de cycles *BG-différents-génériques* $\mathcal{F}_k$ d'ordre $\omega_{\mathcal{F}_k} = i - n_D$	(Bond graph) $(-1)^{n_D - d_k}\, \tilde{G}_{\mathcal{F}_k}$
p_0	(a) Famille de cycle $\mathcal{F}_{1_a}$ 		$(-1)^0$ (terme constant de (4.4) pour $i = n_D = 0$ ici)
p_1	(b) Famille de cycle $\mathcal{F}_{1_b}$ 	(b) Famille de cycle $\mathcal{F}_{1_b}$ 	$(-1)^{0-1}\frac{-R_1}{I_1}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{-R_1}{R_2}\right)^l$ $= (-1)^{0-1}\frac{-R_1}{I_1}\frac{R_2}{R_1+R_2}$

TABLE 4.2 – Exemple de détermination du polynôme caractéristique du bond graph de la figure 4.4 et son digraphe $\mathcal{G}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ associé (figure 4.5) selon la proposition 4.1

les cycles incluant les variables d'énergie sont considérés » puisqu'eux seuls participent à l'ordre du polynôme caractéristique.

4.2.2.4 Exemple 3 :cas d'un chemin d'ordre négatif entre un élément R et un élément de stockage d'énergie en causalité dérivée

Cet exemple propose le cas de cycles d'ordre zéro et d'ordre négatif et les considérations associées sur l'ordre du polynôme caractéristique dans ce cas précis. Nous considérons le bond graph de la figure 4.6, où le choix d'une affectation de causalité mixte à été fait. Les causalités de l'élément R et de l'élément I noté I_2 conduit à la présence d'un cycle causal d'ordre 0, $\{I_1, I_2\}$ et d'un cycle causal d'ordre -1, $\{R, I_2\}$. Cet exemple illustre notamment le fait que, suivant la définition 4.1, ces deux cycles ne sont pas *BG-différents-génériques* et ne pourront donc pas former *ensemble* de familles de cycles en vue d'appliquer la proposition 4.1. La représentation d'état est donnée en (4.20) et le polynôme caractéristique du système est $\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = p_0 s^2 + p_1 s + p_2 = -\left(\frac{I_2}{R}\right) s^2 - \left(1 + \frac{I_2}{I_1}\right) s.$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\frac{I_2}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p_1} \\ \dot{p_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{I_2}{I_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -I_2 \end{bmatrix} u \tag{4.20}$$

La détermination graphique du polynôme caractéristique proposée en table 4.3 illustre

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

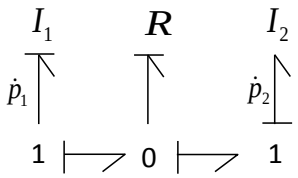


FIGURE 4.6 – Exemple de bond graph avec boucles causales d'ordre 0 et d'ordre -1

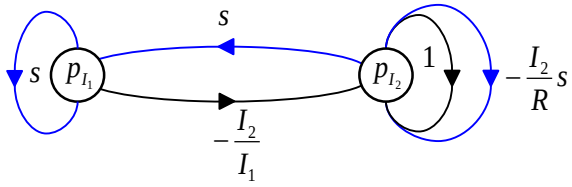


FIGURE 4.7 – Digraphe $\mathcal{G}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ associé au modèle bond graph 4.6

clairement que les cycles $\{I_1, I_2\}$ et $\{R, I_2\}$ ne sont pas *BG-différents-génériques* puisqu'ils partagent tous deux la variable p_2 (ceci se retrouve sur le digraphe par le fait que les familles $\mathcal{F}_{1_a}$ et $\mathcal{F}_{1_c}$ ne sont pas *disjointes* au sens du digraphe). L'exemple illustre également qu'en présence de liens causaux entre un élément R et un élément de stockage d'énergie en causalité dérivée, le degré du polynôme caractéristique – égale à 2 dans le présent cas – est susceptible d'être plus élevé que le nombre de stockage en causalité intégrale – égale à 1 ici – et est au maximum égale au nombre de stockage d'énergie $n_I + n_D$. C'est le cas ici, $n_I + n_D = 2$. Le rôle de l'élément de stockage I_2 dans le polynôme caractéristique est en quelque sorte « réhabilité » par l'élément R (cette considération est donc consistante avec une causalité préférentielle intégrale et l'élément R en causalité résistance).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

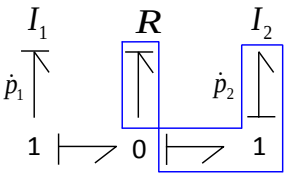
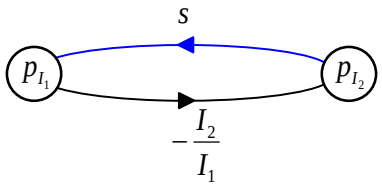
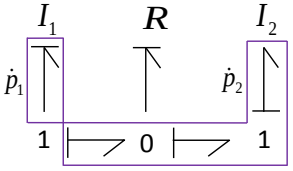
p_i	(Digraphe) Famille de cycles disjoints $\mathcal{F}_i$ de longueur $l_{\mathcal{F}_i} = n = 2$	(Bond graph) Famille de cycles *BG-différents-génériques* $\mathcal{F}_k$ d'ordre $\omega_{\mathcal{F}_k} = i - n_D$	(Bond graph) $(-1)^{n_D - d_k}\,\tilde{G}_{\mathcal{F}_k}$
p_0	*familles avec 2 arcs de type* E–Edge (a) Famille de cycle $\mathcal{F}_{1_a}$ 	*familles d'ordre* $\omega_{\mathcal{F}_k} = i - n_D = 0 - 1 = -1$ 	$(-1)^{1-1}\frac{-I_2}{R}$
p_1	(b) Famille de cycle $\mathcal{F}_{1_b}$ (c) Famille de cycle $\mathcal{F}_{1_c}$ 	(c) Famille de cycle $\mathcal{F}_{1_c}$ 	$(-1)^1$ (terme constant de (4.4) pour $i = n_D$) $(-1)^{1-1}\frac{-I_2}{I_1}$
p_2	*pas de familles avec 2 arcs de type* A–Edge	*pas de familles d'ordre* $\omega_{\mathcal{F}_k} = i - n_D = 2 - 1 = 1$	0

TABLE 4.3 – Exemple de détermination du polynôme caractéristique du bond graph 4.6 et son digraphe $\mathcal{G}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ associé 4.7 (selon la proposition 4.1)

4.2.2.5 Généralisation de la proposition 4.1 : cas avec variable de puissance en plus des variables d'énergie dans le vecteur d'état

Fort des précédentes considérations sur la correspondance digraphe/bond graph dans le cas de calcul de déterminant appliqué au faisceau $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$, correspondance assujettie aux variables que nous décidons d'exposer dans la représentation d'état associée au bond graph, nous proposons dans cette section une généralisation portée par la proposition 4.2. Le faisceau $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ peut être étendu aux variables (algébriques) de puissance grâce à la procédure D.1 page 307, aboutissant à une écriture de la représentation d'état sous la forme (4.21).

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_I & \mathbf{E}_{ID} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{\lambda D} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_I(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_D(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_\lambda(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_I & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{I\lambda} \\ \mathbf{A}_{DI} & \mathbf{I}_D & \mathbf{A}_{D\lambda} \\ \mathbf{A}_{\lambda I} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_\lambda + \mathbf{A}_\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_I(t) \\ \mathbf{x}_D(t) \\ \mathbf{x}_\lambda(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_I \\ \mathbf{B}_D \\ \mathbf{B}_\lambda \end{pmatrix} \mathbf{u}(t) \qquad (4.21)$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Cette généralisation englobe ainsi la détermination bond graph du polynôme caractéristique :

— des systèmes réguliers sans éléments de stockage en causalité dérivée (théorème B.1 page 274),

— des systèmes singuliers écrits sous la forme (4.3) (définition 4.1, où seules les variables d'énergie sont considérées, et proposition 4.1).

— des systèmes singuliers écrits sous la forme (4.21) (définition 4.1 et proposition 4.2).

Proposition 4.2

(Détermination du polynôme caractéristique d'un système singulier sur le bond graph associé) : *La valeur de chaque coefficient p_i du polynôme caractéristique écrit sous la forme* $\det(s\mathbf{E}-\mathbf{A}) = \sum_{i=0}^{n} p_i s^{n-i}$ *d'un système singulier pouvant se mettre sous la forme (4.21), peut être déterminé à partir du modèle bond graph associé de la manière suivante :*

$$p_i = \sum_{\substack{\mathcal{F}_k \text{ telle que} \\ \omega_{\mathcal{F}_k} = i - n_D - n_\lambda}} (-1)^{n_D+n_\lambda-d_k}\, \tilde{G}_{\mathcal{F}_k} \qquad \forall i \in \{0,...,n\} \setminus n_D$$

$$p_i = (-1)^{n_D+n_\lambda} + \sum_{\substack{\mathcal{F}_k \text{ telle que} \\ \omega_{\mathcal{F}_k} = 0}} (-1)^{n_D+n_\lambda-d_k}\, \tilde{G}_{\mathcal{F}_k} \qquad i = n_D + n_\lambda \tag{4.22}$$

où :

— $n = n_I + n_D + n_\lambda$ *est la dimension du vecteur d'état,*
— n_I *est le nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale,*
— n_D *est le nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité dérivée,*
— n_λ *est le nombre de variables de puissance exposées dans la représentation d'état (4.21),*
— $\mathcal{F}_k$ *est la* $k^{ième}$ *famille de cycles causaux* BG-différents-génériques (définition 4.1)*, où seuls les cycles impliquant les variables exposées dans la représentation d'état (4.21) sont considérés,*
— $\omega_{\mathcal{F}_k}$ *est* l'ordre *de la famille de cycles causaux* BG-différents-génériques $\mathcal{F}_k$*,*
— d_k *est le nombre de cycles causaux* BG-différents-génériques *formant la famille* $\mathcal{F}_k$*,*
— $\tilde{G}_{\mathcal{F}_k}$ *est le gain statique de la famille* $\mathcal{F}_k$*.*

Démonstration : la proposition 4.2 peut se démontrer en reprenant point par point la démonstration de la proposition 4.1, en adaptant la correspondance digraphe/bond graph à la représentation d'état (4.21) (procédure D.1 page 307).

La considération sur l'*ordre maximal du polynôme caractéristique* est inchangé par rapport à la proposition 4.1.

Correspondance des cycles entre digraphe et bond graph : la correspondance digraphe/bond graph s'établit dans le présent cas entre les cycles *disjoints* du digraphe et les cycles causaux bond graph ne possédant aucune variable de la représentation d'état

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

(4.21) en commun.

Ordre des familles de cycles bond graph contribuant au coefficient p_i : Dans le présent cas, nous avons :

— nombre d'arcs de type *A–edge* de la famille $\mathcal{F}_i$: $i = n_{A_x,b,\mathcal{F}_i} + n_{A_x,\bar{b},\mathcal{F}_i}$

où pour la famille digraphe $\mathcal{F}_i$, $n_{A_x,b,\mathcal{F}_i}$ est le nombre d'arcs de type *A–edge* provenant des sous-matrices $\mathbf{I}_D$ et $\mathbf{I}_\lambda$ de (4.21) et $n_{A_x,\bar{b},\mathcal{F}_i}$ est le nombre d'arcs de type *A–edge* provenant des sous-matrices $\mathbf{A}_{DI}$, $\mathbf{A}_I$, $\mathbf{A}_{I\lambda}$, $\mathbf{A}_{\lambda I}$, $\mathbf{A}_{D\lambda}$ et $\mathbf{A}_\lambda$.

— nombre d'arcs de type *E–edge* de la famille $\mathcal{F}_i$: $n - i = n_{E_x,b,\mathcal{F}_i} + n_{E_x,\bar{b},\mathcal{F}_i}$

où pour la famille digraphe $\mathcal{F}_i$, $n_{E_x,b,\mathcal{F}_i}$ est le nombre d'arcs de type *E–edge* provenant de la sous-matrice $\mathbf{I}_I$ de (4.3) et $n_{E_x,\bar{b},\mathcal{F}_i}$ est le nombre d'arcs de type *E–edge* provenant des sous-matrices $\mathbf{E}_{ID}$, $\mathbf{E}_D$ et $\mathbf{E}_{\lambda D}$.

En développant la précédente relation relative au *E–edge* pour adapter l'équation (4.5) au présent cas, nous pouvons écrire,

$$n_{E_x,\bar{b},\mathcal{F}_i} = n_{E_x,\bar{b},D\to I,\mathcal{F}_i} + n_{E_x,\bar{b},D\to D,\mathcal{F}_i} + n_{E_x,\bar{b},D\to\lambda,\mathcal{F}_i} \tag{4.23}$$

où

— $n_{E_x,\bar{b},D\to I,\mathcal{F}_i}$ est le nombre d'arcs de la famille digraphe $\mathcal{F}_i$ provenant de la sous-matrice $\mathbf{E}_{ID}$,

— $n_{E_x,\bar{b},D\to D,\mathcal{F}_i}$ est le nombre d'arcs de la famille digraphe $\mathcal{F}_i$ provenant de la sous-matrice $\mathbf{E}_D$,

— $n_{E_x,\bar{b},D\to\lambda,\mathcal{F}_i}$ est le nombre d'arcs de la famille digraphe $\mathcal{F}_i$ provenant de la sous-matrice $\mathbf{E}_{\lambda D}$.

Nous avons ainsi au niveau du bond graph :

$$n_{E_x,\bar{b},D\to I,\mathcal{F}_i} = n_{D,D\to I,\mathcal{F}_k},$$

$$n_{E_x,\bar{b},D\to D,\mathcal{F}_i} = n_{D,\mathcal{F}_k} - n_{D,D\to I,\mathcal{F}_k} - n_{D,D\to\lambda,\mathcal{F}_k}, \text{ et}$$

$$n_{E_x,\bar{b},D\to\lambda,\mathcal{F}_i} = n_{D,D\to\lambda,\mathcal{F}_k},$$

et retrouvons ainsi pour (4.23),

$$n_{E_x,\bar{b},\mathcal{F}_i} = n_{D,\mathcal{F}_k} \tag{4.24}$$

résultat identique à (4.6). L'équation (4.7) est ainsi toujours valable dans le présent cas, conduisant ici à

$$n_I + n_D + n_\lambda - i = n_I - \omega_{\mathcal{F}_k} \tag{4.25}$$

et ainsi,

$$\omega_{\mathcal{F}_k} = i - n_D - n_\lambda \tag{4.26}$$

Facteur de permutation des familles de cycles bond graph : par définition les équations (4.10) et (4.11) restent valables, en notant que dans le présent cas sur le digraphe, la quantité $n_{E_x,\bar{b},\mathcal{F}_i}$ est :

$$n_{E_x,\bar{b},\mathcal{F}_i} = n_{E_x,\bar{b},D\to I,\mathcal{F}_i} + n_{E_x,\bar{b},D\to\lambda,\mathcal{F}_i} + n_{E_x,\bar{b},D\to D,\mathcal{F}_i} \tag{4.27}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Nous avons ainsi,

$$\begin{aligned} n-i-d_{\mathcal{F}_i} &= n_{E_x,\bar{b},\mathcal{F}_i} - (d_k + n_{A_x,b,\mathcal{F}_i}) \\ &= n_{E_x,\bar{b},D\to I,\mathcal{F}_i} + n_{E_x,\bar{b},D\to\lambda,\mathcal{F}_i} + n_{E_x,\bar{b},D\to D,\mathcal{F}_i} - (d_k + n_{A_x,b,\mathcal{F}_i}) \end{aligned} \tag{4.28}$$

que nous pouvons écrire au niveau bond graph selon,

$$n-i-d_{\mathcal{F}_i} = n_{D,D\to I,\mathcal{F}_k} + n_{\lambda,D\to\lambda,\mathcal{F}_k} + n_{D,D\to D,\mathcal{F}_k} - \left(d_k + n_{D,\bar{\mathcal{F}}_k} + n_{\lambda,\bar{\mathcal{F}}_k}\right) \tag{4.29}$$

D'autre part, la prise en compte de tous les facteurs (-1) issus de la procédure D.1, de construction du digraphe à partir du bond graph, conduit à considérer ici les items 3, 8, 10, 11 et 13 de la procédure (*i.e.* associés respectivement à la détermination des sous-matrices $\mathbf{E}_{ID}$, $\mathbf{A}_{DI}$, $\mathbf{A}_{D\lambda}$, $\mathbf{A}_{\lambda I}$ et $\mathbf{A}_\lambda$ de (4.21)) entraînent un facteur négatif sur les gains du bond graph. En notant n_{BD}, comme précédemment, le nombre d'arcs total portant ce facteur (-1), nous avons dans le présent cas,

$$n_{BD} = n_{E_x,\bar{b},D\to I,\mathcal{F}_i} + n_{A_x,\bar{b},I\to D,\mathcal{F}_i} + n_{A_x,\bar{b},\lambda\to D,\mathcal{F}_i} + n_{A_x,\bar{b},I\to\lambda,\mathcal{F}_i} + n_{A_x,\bar{b},\lambda\to\lambda,\mathcal{F}_i} \tag{4.30}$$

que nous pouvons ré-écrire au niveau bond graph suivant,

$$n_{BD} = n_{D,D\to I,\mathcal{F}_k} + n_{D,I\to D,\mathcal{F}_k} + n_{\lambda,I\to\lambda,\mathcal{F}_k} + n_{D,\lambda\to D,\mathcal{F}_k} + n_{\lambda,\lambda\to\lambda,\mathcal{F}_k} \tag{4.31}$$

En utilisant les équations (4.29) et (4.31), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} n-i-d_{\mathcal{F}_i}+n_{BD} &= 2\times n_{D,D\to I,\mathcal{F}_k} + n_{\lambda,D\to\lambda,\mathcal{F}_k} + n_{D,D\to D,\mathcal{F}_k} \\ &\quad + n_{\lambda,I\to\lambda,\mathcal{F}_k} + n_{D,I\to D,\mathcal{F}_k} \\ &\quad + n_{\lambda,\lambda\to\lambda,\mathcal{F}_k} + n_{D,\lambda\to D,\mathcal{F}_k} \\ &\quad - \left(d_k + n_{D,\bar{\mathcal{F}}_k} + n_{\lambda,\bar{\mathcal{F}}_k}\right) \\ &= 2\times n_{D,D\to I,\mathcal{F}_k} + n_{\lambda,\mathcal{F}_k} + n_{D,\mathcal{F}_k} \\ &\quad - \left(d_k + n_{D,\bar{\mathcal{F}}_k} + n_{\lambda,\bar{\mathcal{F}}_k}\right) \\ &= 2\times n_{D,D\to I,\mathcal{F}_k} + \left(n_\lambda - n_{\lambda,\bar{\mathcal{F}}_k}\right) + \left(n_D - n_{D,\bar{\mathcal{F}}_k}\right) \\ &\quad - \left(d_k + n_{D,\bar{\mathcal{F}}_k} + n_{\lambda,\bar{\mathcal{F}}_k}\right) \end{aligned} \tag{4.32}$$

Soit donc,

$$n-i-d_{\mathcal{F}_i}+n_{BD} = 2\times n_{D,D\to I,\mathcal{F}_k} - 2\times n_{\lambda,\bar{\mathcal{F}}_k} - 2\times n_{D,\bar{\mathcal{F}}_k} + n_\lambda + n_D - d_k \tag{4.33}$$

Nous pouvons ainsi écrire,

$$(-1)^{n-i-d_{\mathcal{F}_i}+n_{BD}} = (-1)^{n_D+n_\lambda-d_k} \tag{4.34}$$

Remarque sur la présence du coefficient $(-1)^{n_D+n_\lambda}$ *dans* p_i *pour* $i = n_D + n_\lambda$ *dans* (4.22) *:* ce coefficient est issu de la famille de cycles directrice sur le digraphe $\mathcal{G}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ uniquement formée de boucles unitaires de type *E–edge* sur l'ensemble des sommets d'état associés aux variables d'énergie associées aux éléments de stockage en causalité intégrale et de boucles unitaires de type *A–edge* sur l'ensemble des sommets d'état associés aux variables d'énergie associées aux éléments de stockage en causalité dérivée et aux variable algébriques (*i.e.* respectivement associés aux sous-matrices $\mathbf{I}_I$, $\mathbf{I}_D$ et $\mathbf{I}_\lambda$). Cette famille directrice comporte ainsi n_I arcs de type *E–edge* et $n_D + n_\lambda$ arcs de type *A–edge*, contribue donc au coefficient d'ordre n_I (*i.e.* d'ordre $n-i$ pour $i = n_D + n_\lambda$) du polynôme caractéristique du système et ne correspond à aucune famille de cycles sur le bond graph associé. Le gain unitaire de cette famille directrice doit être multiplié par le facteur de permutation établi en (4.32), en notant que de manière évidente pour cette famille, $d_k = 0$, permettant ainsi de retrouver le coefficient $(-1)^{n_D+n_\lambda}$ dans p_i pour $i = n_D + n_\lambda$.

Fin de la démonstration.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

4.2.2.6 Exemple : reprise de l'exemple considéré en section 4.2.2.3

Pour illustrer la proposition 4.2, nous reprenons ici le modèle bond graph de la figure 4.4 page 121 et calculons le polynôme caractéristique associé à partir d'une représentation d'état singulière « élargie » incluant une variable algébrique d'effort dans la représentation d'état, notée e_{R_1} sur la figure 4.8. Le présent exemple illustre à nouveau le fait que la

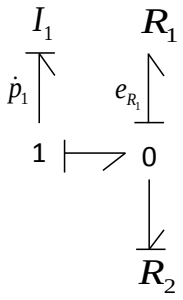


FIGURE 4.8 – Modèle bond graph de la figure 4.4, définition de la variable algébrique d'effort e_{R_1} associée à la $2ZCP$ $\{R_1, R_2\}$

définition intrinsèque des chemins *différents au sens du bond graph* (définition 4.1, où dans le présent cas, *BG-différents-génériques* signifie donc *différents au sens des variables* p_1 *et* e_{R_1}) est liée à la représentation d'état et associée à la procédure de calcul de déterminant en digraphe (théorème C.4 page 289) [4], pour respecter la correspondance digraphe/bond graph (procédure D.1 page 307). Nous optons ici pour une représentation d'état singulière en élevant la variable implicite d'effort e_{R_1} associée à la boucle algébrique $\{R_1, R_2\}$ au rang de variable d'état (équation (4.35)), qui explicite ainsi d'avantage les dépendances statiques entre les variables du système.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p_1} \\ \dot{e_{R_1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\dfrac{R_1}{I_1} & 1+\dfrac{R_1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ e_{R_1} \end{bmatrix} \tag{4.35}$$

Le polynôme caractéristique de 4.35 est $\det(s\mathbf{E}-\mathbf{A}) = -s\left(1+\dfrac{R_1}{R_2}\right) - \dfrac{R_1}{I_1}$, consistant avec celui de la représentation (4.19) au coefficient $-(1+\dfrac{R_1}{R_2})$ près, simplement issu du choix de représentation du système d'état *(il est aisé de voir que la boucle algébrique* $\{R_1, R_2\}$ *participe de la même manière à la dynamique du système)*. Le digraphe $\mathcal{G}(sE-A)$ associé est celui de la figure 4.9 et la détermination du polynôme caractéristique suivant la proposition 4.2 est exposée en table 4.4. Comme attendu au niveau bond graph, la boucle causale $\{R_1, R_2\}$ apparaît en temps que telle dans le monôme p_0 (elle est d'ordre 0). La boucle $\{I_1, R_1\}$ d'ordre 1 apparaît dans le monôme p_1, en notant que conformément à la définition définition 4.1 sur la scrutation, les cycles $\{R_1, R_2\}$ et $\{I_1, R_1\}$ ne sont pas *BG-différents au sens des variables* p_1 *et* e_{R_1} et ne peuvent à ce titre former une famille de cycles. D'autre part, nous illustrons la correspondance digraphe/bond graph apportée par la procédure D.1 page 307 sur les familles directrices de la table 4.4. Nous voyons par exemple que la famille $\mathcal{F}_{1_b}$ conduit sur le digraphe à

4. Il est important de garder à l'esprit qu'au niveau digraphe, le théorème C.4 est applicable quel que soit le faisceau $(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ choisi pour représenter le système. La représentation (4.21) est l'une des représentations d'un système issu du bond graph dans laquelle les variables d'énergie et certaines variables algébriques supplémentaires sont définies comme variables d'état du système. Nous avons également présenté la représentation (4.3) dans laquelle seules les variables d'énergie y sont portées.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

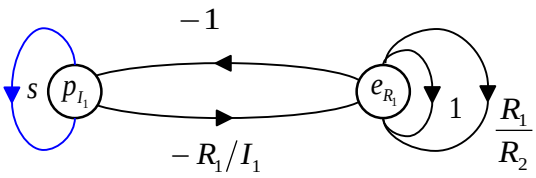


FIGURE 4.9 – Digraphe $\mathcal{G}(sE - A)$ associé au modèle bond graph de la figure 4.8

une famille directrice avec une boucle de type *E–edge* (issue de la sous-matrice $\mathbf{I}_I$) sur la variable p_1 et une boucle de type *A–edge* (issue de la sous-matrice $\mathbf{A}_\lambda$) sur la variable e_{R_1}. Déclinée sur le bond graph, cela conduit à une famille de 1 cycle formé par la $2ZCP$ $\{R_1, R_2\}$, dans laquelle l'élément de stockage I_1 n'intervient donc pas (puisque justement sur le digraphe, le *E–edge* provient de $\mathbf{I}_I$). La famille $\mathcal{F}_{1_c}$ conduit à une famille directrice sur le digraphe faisant intervenir les deux sommets d'état. La correspondance digraphe/bond graph conduit ainsi ici sur le bond graph à une famille de 1 cycle faisant intervenir ces deux variables, en l'occurrence le cycle $\{I_1, R_1\}$.

Dans le présent cas du modèle de la figure 4.4 (ou de la figure 4.8) représenté par le système d'état singulier « élargi » (4.35), la correspondance digraphe/bond graph conduit ici à une restriction de la scrutation bond graph aux chemins *BG-disjoints* (définition B.8 page 264). Peut-être est-ce en ce sens que MOUHRI *et al.* [MRDT99, Mou00] ont initialement voulu porter en bond graph les travaux de REINSCHKE [Rei94] (théorème C.4 page 289). Nous avons toutefois montré que cette considération n'est pas *de facto* valable et qu'il faut descendre au niveau des variables de la représentation d'état choisie pour gérer les exclusions et ainsi rigoureusement respecter une correspondance digraphe/bond graph. Un autre point peut être également précisé : dans le présent cas, le fait d'introduire la variable e_{R_1} appartenant la boucle algébrique de type $2ZCP$ simplifie grandement la scrutation bond graph en terme de cycles et de leurs gains respectifs. Toutefois, le fait de considérer *a priori* indifféremment toutes les classes de cycles d'ordre 0 peut s'avérer trompeuse dans la mesure où les boucles algébriques sur les éléments R (*i.e.* $2ZCP$ et les $3ZCP$ les impliquant) peuvent ne pas participer à la dynamique du système (ce n'est pas le cas sur le modèle de la figure 4.8, mais ce n'est pas une généralité). Il faudrait en toute rigueur discriminer ces boucles par l'analyse des chemins causaux. En d'autres termes, ce n'est pas parce que nous élargissons la représentation d'état à l'ensemble des variables implicites contenues dans les $2ZCP$ et $3ZCP$ que la scrutation s'avère être la plus judicieuse (même si formellement, le calcul du polynôme caractéristique reste parfaitement valable dans tous les cas suivant la représentation d'état choisie grâce à la proposition 4.2, en gérant convenablement les exclusions pour la scrutation. Les résultats seront similaires à un coefficient près). Conserver une scrutation des boucles n'incluant que les variables d'énergie (proposition 4.1) peut être parfois plus pertinente. Ce dernier point est illustré par l'exemple de la figure 4.10 et la table 4.5 associée, où la $2ZCP$ $\{R_1, R_2\}$ ne participe pas à la dynamique du système. Elle se retrouve dans la représentation 2 en raison de la prise en compte de la variable « supplémentaire » e_{R_1}. Les propositions 4.1 et 4.2 conduisent toutes deux à des résultats similaires, à un coefficient près, mais la considération de la $2ZCP$ n'est en l'état pas pertinente dans la dynamique du système (*i.e.* la $2ZCP$ ne touche pas le cycle $\{I_1, R_3\}$, seul responsable de cette dynamique).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

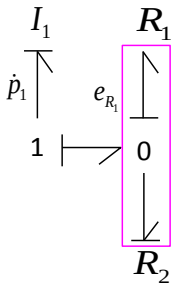
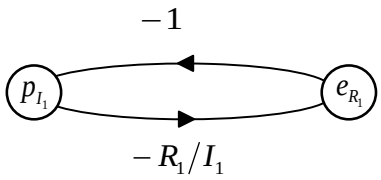
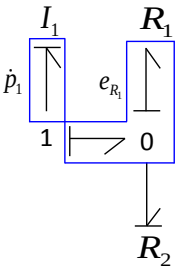
p_i	(Digraphe) Famille de cycles disjoints $\mathcal{F}_i$ de longueur $l_{\mathcal{F}_i} = n = 2$	(Bond graph) Famille de cycles *BG-différents-génériques* $\mathcal{F}_k$ d'ordre $\omega_{\mathcal{F}_k} = i - n_D - n_\lambda$	(Bond graph) $(-1)^{n_D+n_\lambda-d_k}\,\tilde{G}_{\mathcal{F}_k}$
p_0	*pas de familles avec* 2 *arcs de type* E–Edge	*pas de familles d'ordre* $\omega_{\mathcal{F}_k} = i - n_D - n_\lambda = 0 - 0 - 1 = -1$	0
p_1	(a) Famille de cycle $\mathcal{F}_{1_a}$		$(-1)^{0+1}$ (terme constant de (4.22) pour $i = n_D + n_\lambda = 1$)
	(b) Famille de cycle $\mathcal{F}_{1_b}$	(b) Famille de cycle $\mathcal{F}_{1_b}$ 	$(-1)^{0+1-1}\frac{-R_1}{R_2}$
p_2	(c) Famille de cycle $\mathcal{F}_{1_c}$ 	(c) Famille de cycle $\mathcal{F}_{1_c}$ 	$(-1)^{0+1-1}\frac{-R_1}{I_1}$

TABLE 4.4 – Détermination du polynôme caractéristique du bond graph 4.4 suivant la proposition 4.2 appliquée à la représentation d'état (4.35)

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

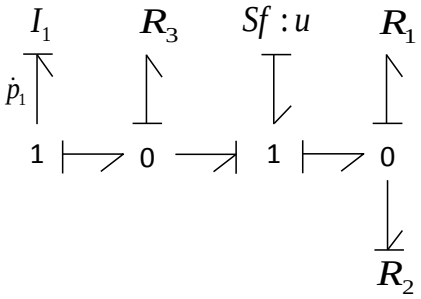


FIGURE 4.10 – Autre exemple de bond graph avec boucle causale d'ordre 0 de classe 2.

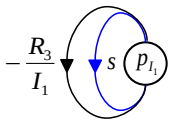
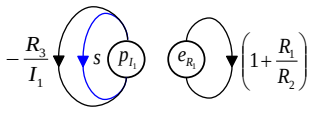
Représentation d'état et polynôme caractéristique du modèle bond graph 4.10	Digraphe $\mathcal{G}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ associé	(Bond graph) Famille de cycles *BG-différents-génériques*
(a) Représentation d'état 1 (de type (4.3)) $\dot{p}_1 = -\frac{R_3}{I_1}p_1 + R_3 u$ $\det(sE - A) = s + \frac{R_3}{I_1}$		1 famille de cycles d'ordre 1, formée du cycle $\{I_1, R_3\}$ (d'ordre 1)
(b) Représentation d'état 2 (de type (4.21), incluant la variable implicite e_{R_1}) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{p}_1\\ e_{\dot{R}_1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{R_3}{I_1} & 0\\ 0 & \left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1\\ e_{R_1}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}R_3\\ -R_1\end{bmatrix} u$ $\det(s\mathbf{E}-\mathbf{A}) = -\left(s+\frac{R_3}{I_1}\right)\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)$		3 familles de cycles : Une d'ordre 0 formée du cycle $\{R_1, R_2\}$ (d'ordre 0) ; une d'ordre 1 formée du cycle $\{I_1, R_3\}$ (d'ordre 1) ; une d'ordre 1 formée du cycle $\{I_1, R_3\}$ (d'ordre 1) et du cycle $\{R_1, R_2\}$ (d'ordre 0)

TABLE 4.5 – Représentations d'état du bond graph 4.10, digraphes associés et familles bond graph considérées suivant la représentation d'état pour le calcul du polynôme caractéristique

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

4.3 Mineurs de la matrice système $\mathbf{P}(s)$ d'un système singulier

4.3.1 Déterminant de la matrice système $\mathbf{P}(s)$ d'un système singulier sur son digraphe associé $\mathcal{G}(\Sigma_d)$

Nous proposons dans cette section une extension de la procédure digraphe du calcul du déterminant de la matrice système à la classe des systèmes LTI singuliers (4.1). [5] Cette procédure (proposition 4.3) s'inspire du cas des systèmes réguliers en introduisant le concept de digraphe augmenté (noté $\mathcal{G}(\Sigma'_d)$) [Rei88], et de la détermination digraphe du polynôme caractéristique dans le cas des systèmes singuliers (théorème C.4 page 289). La formulation est dans un premier temps établie dans le cas $p = m$ puis ensuite discutée pour les mineurs.

Proposition 4.3 (*[LEDL+16]*)

(Détermination du déterminant de la matrice système d'un système singulier sur son digraphe $\mathcal{G}(\Sigma_d)$ associé) *Soit $\mathcal{G}(\Sigma_d)$ le digraphe associé au système singulier (4.1) pour lequel $p = m$. Le déterminant de la matrice système peut être déterminé graphiquement sur $\mathcal{G}(\Sigma_d)$ de la manière suivante :*

$$\det \begin{pmatrix} s\mathbf{E} - \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{n} \rho_k^{\{p\}} s^{n-k} \tag{4.36}$$

où,

- *n est le nombre de sommets d'état,*
- *p est le nombre de sommets de sortie (et d'entrée),*
- *$\mathcal{G}(\Sigma'_d)$ est le digraphe augmenté obtenu à partir de $\mathcal{G}(\Sigma_d)$ en ajoutant un arc (dit « de retour ») de poids -1 de chaque sommet de sortie vers chaque sommet d'entrée,*
- *$\rho_k^{\{p\}}$ est déterminé sur $\mathcal{G}(\Sigma'_d)$ et correspond à la somme des poids des familles directrices (*i.e. *de cycles disjoints) de longueur $n+p+p$ (*i.e. *contenant les n sommets d'état et exactement p arcs de retour), contenant au plus une paire entrée/sortie par cycle, et contenant exactement $(n-k)$ E-edges. Dans ce calcul, le poids de chaque famille, notée $\mathcal{F}_l$, doit être multiplié par :*
  - *un facteur $(-1)^{(n-k)-d_{\mathcal{F}_l}}$, où $(n-k)$ est le nombre de* E-edges *de la famille $\mathcal{F}_l$ et $d_{\mathcal{F}_l}$ est le nombre de cycles disjoints de $\mathcal{F}_l$.*
  - *un facteur $(-1)^{\sigma_{\mathcal{F}_l}}$, où $\sigma_{\mathcal{F}_l}$ est le nombre de permutations nécessaires pour ordonner les sommets de sortie de la famille $\mathcal{F}_l$ dans l'ordre initial des sommets de sortie, lorsque les cycles de $\mathcal{F}_l$ sont ordonnés dans l'ordre initial des sommets d'entrée.*

Démonstration : Cette démonstration est basée sur les théorèmes C.1 page 283, C.2 page 286 et C.4 page 289, ainsi que les travaux de Reinschke sur la matrice système $\mathbf{P}(s)$ dans le cas régulier [Rei88] introduisant la notion de digraphe augmenté.

5. Notons qu'à notre connaissance, cette détermination digraphe n'existe pas, alors que la plupart des éléments sur lesquels nous nous basons sont présents dans la publication de Reinschke [Rei94] et ses travaux antérieurs sur les systèmes réguliers [Rei84, Rei88]. Notons à ce titre les travaux de Reinschke & Wiedemann [RW97] et Wiedemann [Wie99] qui adressent également des problématiques similaires.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Forme de la matrice système $\mathbf{P}(s)$*, implication sur les* ordres *et les* gains *des familles directrices sur le digraphe associé* $\mathcal{G}(s\mathbf{E}'-\mathbf{A}')$ *:* Nous notons en premier lieu que la matrice système $\mathbf{P}(s)$ de (4.1) peut s'écrire de la manière suivante,

$$\mathbf{P}(s) = \begin{pmatrix} s\mathbf{E}-\mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = s\mathbf{E}' - \mathbf{A}' \tag{4.37}$$

avec potentiellement des opérateurs dans la matrice $\mathbf{C}$, dont les arcs *E–edge*, le cas échéant, doivent être portés sur le digraphe avec un facteur -1. Cela implique que la procédure digraphe de détermination du polynôme caractéristique (théorème C.4 page 289) peut s'appliquer au faisceau $s\mathbf{E}'-\mathbf{A}'$ de (4.37) sur le digraphe associé $\mathcal{G}(s\mathbf{E}'-\mathbf{A}')$ [6]. Ceci valide les *ordres* et les *gains* des familles directrices de l'équation (4.36) de la proposition 4.3 sur $\mathcal{G}(\Sigma'_d)$, mais ne valide pas à ce stade les signes des gains des familles de $\mathcal{G}(\Sigma'_d)$. Il nous reste ainsi à valider les points suivants, qui font l'objet des développements suivants de la présente démonstration :

1. Justification de la forme du digraphe $\mathcal{G}(\Sigma'_d)$, *i.e.* de la notion de *digraphe augmenté*, du point de vue :
   (a) du dédoublement des nœuds entrées/sorties avec ajout d'un arc de poids (-1) entre ces nœuds,
   (b) des signes des poids des arcs,
   (c) de l'ajout d'arcs (-1) originellement non-existants sur la représentation du faisceau $s\mathbf{E}'-\mathbf{A}'$ entre toutes les paires entrées/sorties, justifiant la construction de $\mathcal{G}(\Sigma'_d)$ et le qualificatif de *digraphe augmenté*,

2. Justification des règles d'exploitation choisies sur $\mathcal{G}(\Sigma'_d)$ liées à l'*item 1.(c)*,

3. Justification du facteur $(-1)^{\sigma_{\mathcal{F}_l}}$ à prendre en compte sur $\mathcal{G}(\Sigma'_d)$ suivant la famille considérée.

Considérations sur le calcul du déterminant de la matrice système $\mathbf{P}(s)$ *:* en partant de $\mathbf{P}(s)$, nous pouvons écrire :

$$\mathbf{P}(s) = \begin{pmatrix} s\mathbf{E}-\mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\mathbf{E}-\mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & -\mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_m \end{pmatrix} \tag{4.38}$$

Soit donc,

$$\begin{aligned} \det \mathbf{P}(s) &= \det \begin{pmatrix} s\mathbf{E}-\mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & -\mathbf{D} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_m \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} s\mathbf{E}-\mathbf{A} & -\mathbf{B} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & -\mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I}_m \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} s\mathbf{E}-\mathbf{A} & \mathbf{0} & -\mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} & -\mathbf{D} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_m & \mathbf{0} \end{pmatrix} (-1)^m \end{aligned} \tag{4.39}$$

6. La mention selon laquelle la matrice $\mathbf{C}$ peut comporter des opérateurs de Laplace est liée à la procédure D.1 page 307 et l'adaptation ultérieure de la proposition 4.3 en bond graph (proposition 4.4 page 140). Notons que la présence d'opérateur dans la matrice $\mathbf{C}$ ne modifie en rien la procédure digraphe (théorème C.4 page 289, justement basée sur la discrimination des arcs *avec* opérateurs et arcs *sans* opérateurs issus du faisceau $s\mathbf{E}'-\mathbf{A}'$), en appliquant simplement un changement de signe des arcs *E–edge* provenant de $\mathbf{C}$ pour respecter le théorème C.4. Notons en outre qu'il est toujours possible de se ramener à une forme du type $\left(\begin{smallmatrix} s\mathbf{E}_a-\mathbf{A}_a & \mathbf{B}_a \\ -\mathbf{C}_a & \mathbf{D}_a \end{smallmatrix}\right)$ où les matrices $\mathbf{E}_a$, $\mathbf{A}_a$, $\mathbf{B}_a$, $\mathbf{C}_a$, $\mathbf{D}_a$ ne comportent pas d'opérateurs.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

En notant $\mathbf{P}_1(s) = \begin{pmatrix} s\mathbf{E}-\mathbf{A} & \mathbf{0} & -\mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} & -\mathbf{D} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_m & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, montrons à présent une forme équivalente à $\mathbf{P}_1(s)$ pour le calcul de son déterminant en travaillant sur sa sous matrice identité $\mathbf{I}_m$. Définissons une matrice symétrique $\mathbf{YU}'_{\mathcal{IJK}}$ ne possédant qu'un seul élément par ligne et par colonne de valeur (-1) de la manière suivante :

Soit $\mathcal{M} = \{1, \cdots, m\}$, notons $\mathbf{YU}'_{\mathcal{IJK}}$ avec $\begin{array}{rcll} \mathcal{I} & = & \{i_1, \cdots, i_d\} & \subset \mathcal{M} \\ \mathcal{J} & = & \{j_1, \cdots, j_{ed}\} & \subset \mathcal{M}\backslash\mathcal{I} \\ \mathcal{K} & = & \{k_1, \cdots, k_{ed}\} & \subset \mathcal{M}\backslash\{\mathcal{I}\times\mathcal{J}\} \end{array}$

telle que $\begin{array}{rcllll} yu_{ii} & = & -1 & \forall i & \in \mathcal{I} & , \ 0 \ \text{sinon} \\ yu_{jk} = yu_{kj} & = & -1 & \forall (j,k) & \in \{\mathcal{J}\times\mathcal{K}\} & , \ 0 \ \text{sinon} \end{array}$

Nous pouvons ainsi écrire

$$\det \mathbf{I}_m = \det\left[\mathbf{YU}'_{\mathcal{IJK}}\right](-1)^{m-n_0}(-1)^{\sigma} \tag{4.40}$$

où σ est le nombre de permutations ligne/colonne dans $\mathbf{YU}'_{\mathcal{IJK}}$ par rapport à $\mathbf{I}_m$ et n_0 est le nombre de zéros sur la diagonale de $\mathbf{YU}'_{\mathcal{IJK}}$. n_0 étant pair par construction, nous avons donc

$$\det \mathbf{I}_m = \det\left[\mathbf{YU}'_{\mathcal{IJK}}\right](-1)^{m}(-1)^{\sigma} \tag{4.41}$$

A la matrice $\mathbf{YU}'_{\mathcal{IJK}}$, nous faisons correspondre la matrice $\mathbf{P}'_{\mathcal{IJK}}(s)$ suivante,

$$\mathbf{P}'_{\mathcal{IJK}}(s) = \begin{pmatrix} s\mathbf{E}-\mathbf{A} & \mathbf{0} & -\mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} & -\mathbf{D} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{YU}'_{\mathcal{IJK}} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{4.42}$$

qui s'écrit donc sous la forme d'un faisceau $s\mathbf{E}'' - \mathbf{A}''$.

Nous avons donc

$$\det \mathbf{P}_1(s) = \det \mathbf{P}'_{\mathcal{IJK}}(-1)^{m+\sigma} \tag{4.43}$$

A partir de (4.39) et (4.43), nous pouvons écrire :

$$\det \mathbf{P}(s) = \det \mathbf{P}'_{\mathcal{IJK}}(-1)^{\sigma} \tag{4.44}$$

où σ est le nombre de permutations ligne/colonne de la sous-matrice $\mathbf{YU}'_{\mathcal{IJK}}$ par rapport à $\mathbf{I}_m$.

Le déterminant de $\mathbf{P}(s)$ peut donc se calculer indifféremment sur toute matrice $\mathbf{P}'_{\mathcal{IJK}}$ en prenant en compte le facteur $(-1)^{\sigma}$. Il en est de même pour les mineurs de $\mathbf{P}(s)$. Plus particulièrement, il est envisageable de calculer chaque terme de $\det \mathbf{P}(s)$ à partir d'une matrice $\mathbf{P}'_{\mathcal{IJK}}$ différente (et cela est également applicable pour les termes des mineurs). Sur cette base, nous prenons arbitrairement la règle (R_1) suivante :

(R_1) Pour les termes de $\det \mathbf{P}(s)$ où apparaissent les éléments $d_{j_1k_1}, d_{j_2k_2}, \cdots, d_{j_{ed}k_{ed}}$ de la matrice $\mathbf{D}$, exploiter $\mathbf{P}'_{\mathcal{IJK}}$ avec $\mathcal{I} = \{i_1, \cdots, i_{m-ed}\}$, $\mathcal{J} = \{j_1, \cdots, j_{ed}\}$, $\mathcal{K} = \{k_1, \cdots, k_{ed}\}$.

Par nature des termes de $\det \mathbf{P}(s)$, nous avons $\mathcal{J} \subset \mathcal{M}$, $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}\backslash\mathcal{J}$ et donc $\mathcal{I} = \mathcal{M}\backslash\{\mathcal{J}\times\mathcal{K}\}$. Chacun de ces termes doit être multiplié par $(-1)^{\sigma}$, où σ est le nombre de permutations ligne/colonne de la sous-matrice $\mathbf{YU}'_{\mathcal{IJK}}$ par rapport à $\mathbf{I}_m$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Exploitation du digraphe pour le calcul du déterminant de la matrice système $\mathbf{P}(s)$ *à partir du digraphe associé à* $\mathbf{P}'_{\mathcal{IJK}}$ *:* les précédents développements se justifient en digraphe de la manière suivante :

- la matrice $\mathbf{P}_1(s)$ introduite dans (4.39) justifie le dédoublement des sommets entrées/sorties sur le digraphe associé *(item 1.(a))*,
- la matrice $\mathbf{P}'_{\mathcal{IJK}}$ définie en (4.42) justifie le signe des poids des arcs, en rappelant que la sous-matrice $\mathbf{YU}'_{\mathcal{IJK}}$ ne possède que des arcs de poids (-1) *(item 1.(b))*. Le cas où $\mathbf{YU}'_{\mathcal{IJK}}$ est diagonale (*i.e.* de la forme $-\mathbf{I}_m$) correspond au digraphe avec m arcs de retour de poids (-1) entre les sommets de sortie y_i et les sommets d'entrée u_i. Rappelons enfin que $\mathbf{P}'_{\mathcal{IJK}}$ s'écrit sous la forme d'un faisceau $s\mathbf{E}'' - \mathbf{A}''$ pour lequel une procédure de détermination graphique du déterminant existe sur le digraphe associé $\mathcal{G}(s\mathbf{E}'' - \mathbf{A}'')$ (théorème C.4 page 289). Notons enfin que la forme de la matrice $\mathbf{P}'_{\mathcal{IJK}}$ impose qu'il y ait exactement m arcs de retour entre les sommets de sortie et les sommets d'entrée pour le calcul de chaque terme de $\det \mathbf{P}(s)$ en appliquant le théorème C.4.

Le digraphe $\mathcal{G}(s\mathbf{E}'' - \mathbf{A}'')$, représentation graphique de la matrice $\mathbf{P}'_{\mathcal{IJK}}$, peut être mis sous la forme générique de la figure 4.11. La variabilité de la sous-matrice $\mathbf{YU}'_{\mathcal{IJK}}$ en-

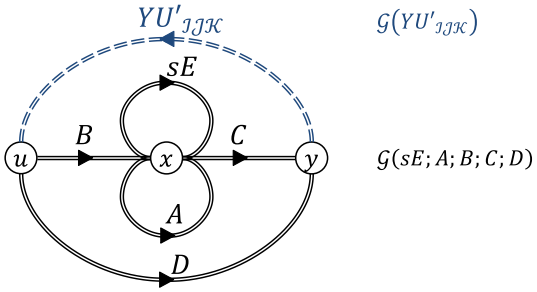


FIGURE 4.11 – Digraphe générique $\mathcal{G}(s\mathbf{E}'' - \mathbf{A}'')$ associant les sous-digraphes $\mathcal{G}(s\mathbf{E}; \mathbf{A}; \mathbf{B}; \mathbf{C}; \mathbf{D})$ et $\mathcal{G}(\mathbf{YU}'_{\mathcal{IJK}})$

traîne celle de la représentation digraphe associée $\mathcal{G}(s\mathbf{E}'' - \mathbf{A}'')$. Cependant, ces différents digraphes ont un sous-digraphe invariant $\mathcal{G}(s\mathbf{E}; \mathbf{A}; \mathbf{B}; \mathbf{C}; \mathbf{D})$ et diffèrent uniquement par le sous-digraphe $\mathcal{G}(\mathbf{YU}'_{\mathcal{IJK}})$. Il est possible de superposer tous ces digraphes pour obtenir le digraphe global $\mathcal{G}(\Sigma'_d)$ (figure 4.12), dans lequel la matrice $[-\mathbf{1}]$ est carrée, de

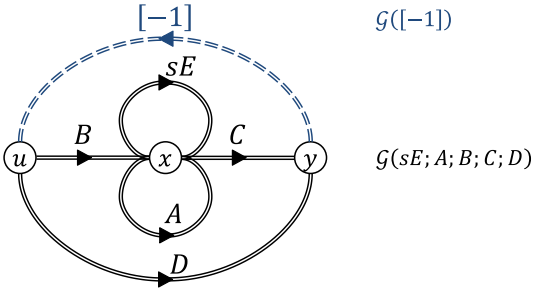


FIGURE 4.12 – Digraphe générique $\mathcal{G}(\Sigma'_d)$ associant les sous-digraphes $\mathcal{G}(s\mathbf{E}; \mathbf{A}; \mathbf{B}; \mathbf{C}; \mathbf{D})$ et $\mathcal{G}([-\mathbf{1}])$

dimension m, avec tous ses éléments égaux à -1. Le digraphe $\mathcal{G}(\Sigma'_d)$ ainsi obtenu est donc *augmenté* (au sens où des arcs supplémentaires sont introduits, originellement non-existants dans la représentation $\mathbf{P}'_{\mathcal{IJK}}$). Ce point justifie l'*item 1.(c)*. Le digraphe $\mathcal{G}(\Sigma'_d)$,

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

possédant potentiellement une matrice $\mathbf{D}$ pleine, peut être exploité pour la détermination de chaque termes de $\det \mathbf{P}(s)$, en utilisant le théorème C.4, en éliminant les arcs de retours des sommets y vers les sommets u conformément à la règle (R_1) [7]. Sont donc considérés, pour un terme de $\det \mathbf{P}(s)$, uniquement les arcs y_k vers u_j si d_{jk} est un élément de $\mathbf{D}$ considéré dans le terme calculé, et les arcs y_i vers u_i $\forall\ i \neq j$ et $i \neq k$.

Règles d'exploitation du digraphe $\mathcal{G}(\Sigma'_d)$ pour le calcul de $\det \mathbf{P}(s)$ *:* la procédure de calcul d'un polynôme caractéristique (théorème C.4 page 289) s'applique sur le digraphe $\mathcal{G}(s\mathbf{E}'' - \mathbf{A}'')$ associé à $\mathbf{P}'_{\mathcal{IJK}}$. La procédure s'applique donc également au digraphe $\mathcal{G}(\Sigma'_d)$ pour la détermination de $\det \mathbf{P}(s)$. Dans cette procédure appliquée à $\mathcal{G}(\Sigma'_d)$, chaque terme de $\det \mathbf{P}(s)$ est associé à une famille directrice de cycles disjoints et doit répondre aux règles suivantes :

- chaque famille $\mathcal{F}_l$ doit contenir exactement m arcs de retour entre les sommets de sortie et les sommets d'entrée,
- chaque cycle d'une famille ne peut passer au plus que par *un* sommet d'entrée et *un* sommet de sortie,
- un cycle contenant un arc d_{jk} ne contient que deux arcs (et donc que deux sommets), l'arc d_{jk} en question entre le sommet d'entrée u_k et le sommet de sortie y_j et un arc de retour (de poids (-1)),
- le poids de chaque famille $\mathcal{F}_l$ doit, conformément à (4.44), être multiplié par un facteur $(-1)^{\sigma_{\mathcal{F}_l}}$, où $\sigma_{\mathcal{F}_l}$ est le nombre de permutations nécessaires pour ordonner les sommets de sortie de la famille $\mathcal{F}_l$ dans l'ordre initial des sommets de sortie, lorsque les cycles de $\mathcal{F}_l$ sont ordonnés dans l'ordre initial des sommets d'entrée (*i.e.* sans permutations).

Fin de la démonstration.

Remarque 1: en rapport avec la détermination graphique de la structure à l'infini, la proposition 4.3 est applicable aux mineurs $(n+i)\times(n+i)$ de la matrice système $\mathbf{P}(s)$, en considérant les ensembles $\{i$ sommets d'entrée$\} \cup \{i$ sommets de sortie$\}$ appropriés. Le plus haut degré des mineurs d'ordre $n+i$ de $\mathbf{P}(s)$ est ainsi donné par la famille directrice de largeur $n+i+i$ (*i.e.* contenant $n+i+i$ sommets) contenant le plus grand nombre d'arcs de type *E–edge* sur le digraphe augmenté $\mathcal{G}(\Sigma'_d)$.

Remarque 2: rappelant que l'inversibilité du système singulier Σ_d (4.1) est assurée si et seulement si $\det(\mathbf{P}(s)) \neq 0$, l'application de la proposition 4.3 au digraphe $\mathcal{G}(\Sigma_d)$ permet de directement montrer le théorème 4.1 de [PBB11], énoncé en page 152.

Remarque 3: le côté arbitraire de la règle (R_1) utilisée dans la démonstration de la proposition 4.3 montre qu'il y a potentiellement plusieurs façons d'obtenir $\det \mathbf{P}(s)$ à partir de $\mathcal{G}(\Sigma'_d)$.

7. Ajoutons que si le théorème C.4 était appliqué sur $\mathcal{G}(\Sigma'_d)$ sans règle particulière (telle la règle (R_1)), la procédure aboutirait logiquement à $\det \mathbf{P}(s) = 0$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Exemple

(Illustration de la proposition 4.3) Considérons le système d'état (4.45), dont le faisceau $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ est celui du système (C.12) page 290, pour lequel le polynôme caractéristique a été calculé algébriquement et graphiquement (figure C.5 page 291 et table C.4 page 291).

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{13} \\ 0 & e_{22} & e_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & d_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{4.45}$$

La matrice système $\mathbf{P}(s)$ est donnée en (4.46) et le digraphe augmenté $\mathcal{G}(\Sigma'_d)$ associé est proposé en figure 4.13.

$$\mathbf{P}(s) = \begin{bmatrix} -a_{11} & 0 & s\,e_{13} - a_{13} & b_{11} & 0 \\ -a_{21} & s\,e_{22} - a_{22} & s\,e_{23} - a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & -a_{32} & 0 & b_{31} & b_{32} \\ 0 & -c_{12} & 0 & 0 & d_{12} \\ 0 & 0 & -c_{23} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.46}$$

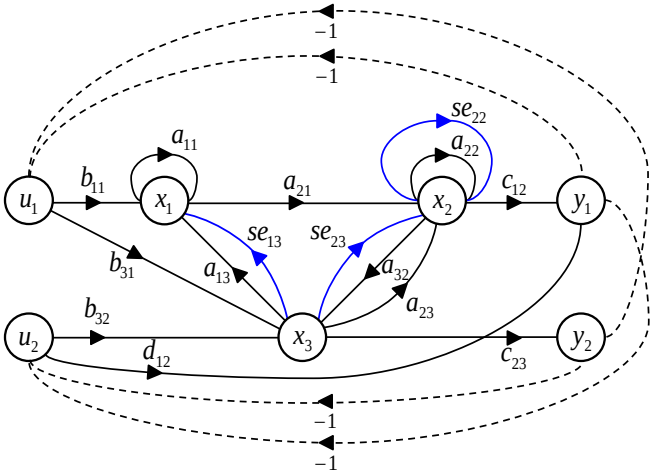
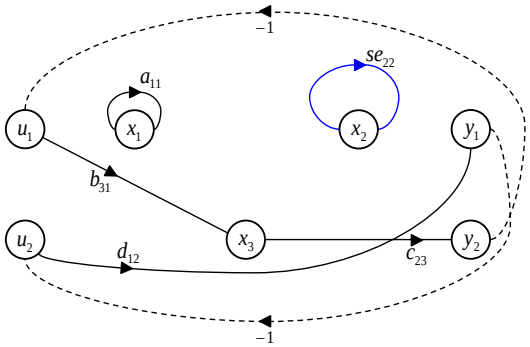
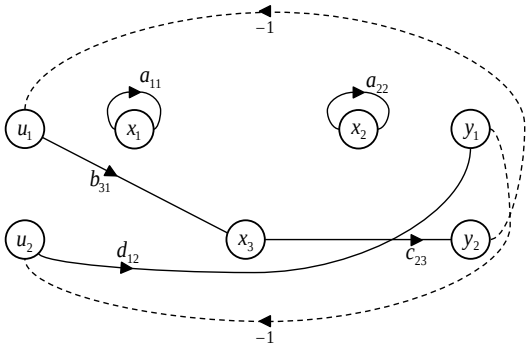


FIGURE 4.13 – Digraphe augmenté $\mathcal{G}(\Sigma'_d)$ pour le calcul du déterminant de la matrice système (4.46)



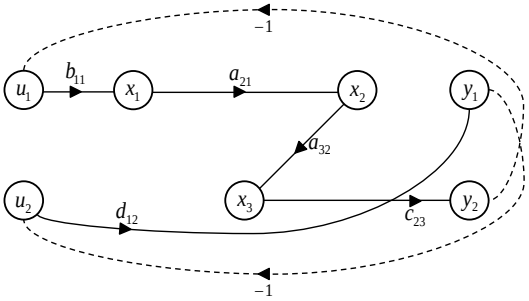
Famille directrice $\mathcal{F}_a$ de quatre cycles disjoints contenant exactement deux arcs de retour



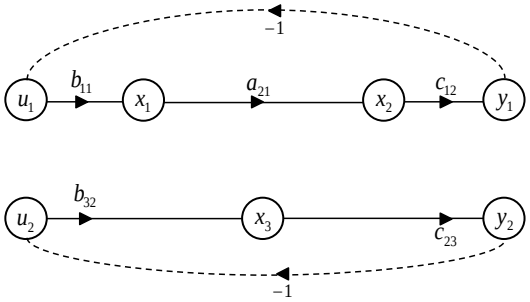
Famille directrice $\mathcal{F}_b$ de quatre cycles disjoints contenant exactement deux arcs de retour

FIGURE 4.14 – Calcul de $\det(\mathbf{P}(s))$ sur le digraphe $\mathcal{G}(\Sigma'_d)$ 4.13 selon la proposition 4.3 (1 sur 2)

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés



Famille directrice $\mathcal{F}_c$ de deux cycles disjoints contenant exactement deux arcs de retour



Famille directrice $\mathcal{F}_d$ de deux cycles disjoints contenant exactement deux arcs de retour

FIGURE 4.15 – Calcul de $\det(\mathbf{P}(s))$ sur le digraphe $\mathcal{G}(\Sigma'_d)$ 4.13 selon la proposition 4.3 (2 sur 2)

En appliquant la proposition 4.3, nous aboutissons à quatre familles directrices (resp. $\mathcal{F}_a$, $\mathcal{F}_b$, $\mathcal{F}_c$ et $\mathcal{F}_d$, en figures 4.14 et 4.15) et obtenons alors :

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{P}(s)) &= (-1)^{\sigma_{\mathcal{F}_a}}(-1)^{(n-k_{\mathcal{F}_a})-d_{\mathcal{F}_a}} G_{\mathcal{F}_a} s^{n-k_{\mathcal{F}_a}} \\
&+ (-1)^{\sigma_{\mathcal{F}_b}}(-1)^{(n-k_{\mathcal{F}_b})-d_{\mathcal{F}_b}} G_{\mathcal{F}_b} s^{n-k_{\mathcal{F}_b}} \\
&+ (-1)^{\sigma_{\mathcal{F}_c}}(-1)^{(n-k_{\mathcal{F}_c})-d_{\mathcal{F}_c}} G_{\mathcal{F}_c} s^{n-k_{\mathcal{F}_c}} \\
&+ (-1)^{\sigma_{\mathcal{F}_d}}(-1)^{(n-k_{\mathcal{F}_d})-d_{\mathcal{F}_d}} G_{\mathcal{F}_d} s^{n-k_{\mathcal{F}_d}} \\
&= (-1)^1(-1)^{(1)-4}\ a_{11}\ b_{31}\ c_{23}\ d_{12}\ e_{22}\ s^1 \\
&+ (-1)^1(-1)^{(0)-4}\ a_{11}\ b_{31}\ c_{23}\ d_{12}\ a_{22}\ s^0 \\
&+ (-1)^1(-1)^{(0)-2}\ a_{21}\ a_{32}\ b_{11}\ c_{23}\ d_{12}\ s^0 \\
&+ (-1)^0(-1)^{(0)-2}\ a_{21}\ b_{11}\ c_{12}\ b_{32}\ c_{23}\ s^0 \\
&= a_{11}\ b_{31}\ c_{23}\ d_{12}\ e_{22}\ s \\
&- a_{11}\ b_{31}\ c_{23}\ d_{12}\ a_{22} \\
&- a_{21}\ a_{32}\ b_{11}\ c_{23}\ d_{12} \\
&+ a_{21}\ b_{11}\ c_{12}\ b_{32}\ c_{23}
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Le résultat (4.47) est identique au calcul algébrique de $\det(\mathbf{P}(s))$ effectué sur (4.46), en notant ici que $\rho_2^{\{2\}} = a_{11}\ b_{31}\ c_{23}\ d_{12}\ e_{22}$, et $\rho_3^{\{2\}} = -\ a_{11}\ b_{31}\ c_{23}\ d_{12}\ a_{22}\ -\ a_{21}\ a_{32}\ b_{11}\ c_{23}\ d_{12}\ +\ a_{21}\ b_{11}\ c_{12}\ b_{32}\ c_{23}$.

4.3.2 Déterminant de la matrice système $\mathbf{P}(s)$ d'un système singulier en bond graph

Nous proposons dans cette section une procédure de détermination du déterminant de la matrice système sur le bond graph représentant un système linéaire singulier de la forme[8] :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_I & \mathbf{E}_{ID} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{\lambda D} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_I(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_D(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_\lambda(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_I & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{I\lambda} \\ \mathbf{A}_{DI} & \mathbf{I}_D & \mathbf{A}_{D\lambda} \\ \mathbf{A}_{\lambda I} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_\lambda + \mathbf{A}_\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_I(t) \\ \mathbf{x}_D(t) \\ \mathbf{x}_\lambda(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_I \\ \mathbf{B}_D \\ \mathbf{B}_\lambda \end{pmatrix} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_I & \mathbf{C}_D \dfrac{d(\cdot)}{dt} & \mathbf{C}_\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_I(t) \\ \mathbf{x}_D(t) \\ \mathbf{x}_\lambda(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{D} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t) \tag{4.48}$$

8. La classe de bond graph traitée par les modèles représentant le système (4.48) est détaillée en annexes A.3 page 248 et D.1 page 305.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

où,

- $\mathbf{x}_I(t) \in \mathbb{R}^{n_I}$ est le vecteur des variables d'énergie des éléments de stockage en causalité intégrale,
- $\mathbf{x}_D(t) \in \mathbb{R}^{n_D}$ est le vecteur des variables d'énergie des éléments de stockage en causalité dérivée,
- $\mathbf{x}_\lambda(t) \in \mathbb{R}^{n_\lambda}$ est un vecteur de variables de flux ou d'effort, dans le bond graph, choisies pour la représentation d'état.

Nous proposons en premier lieu d'étendre simplement la définition de *cycles causaux BG-différents-génériques* aux chemins causaux :

Définition 4.2

(Définition de chemins causaux BG-différents-génériques) *Sur un modèle bond graph causal, deux chemins causaux sont dits* ***BG - différents - génériques*** *s'ils ne possèdent aucune variable d'état en commun.*

En utilisant la proposition 4.3 et la correspondance digraphe/bond graph établie en annexe D (notamment la procédure D.1 page 307), il nous est dès lors possible de formuler la proposition 4.4 :

Proposition 4.4 (*[LEDL+16]*)

(Détermination du déterminant de la matrice système d'un système singulier sur son bond graph associé) *Sur le modèle bond graph représentant un système linéaire singulier pouvant se mettre sous la forme (4.48), avec $m = p$, le déterminant de la matrice système est donné par l'expression suivante :*

$$\det \begin{pmatrix} s\mathbf{E} - \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \sum_{k=-n_D}^{n_I} \rho_k^{\{p\}} s^{n_I - k} \tag{4.49}$$

où :

- *n_I est le nombre d'éléments de stockage en causalité intégrale,*
- *n_D est le nombre d'éléments de stockage en causalité dérivée,*
- *p est le nombre de sorties (et d'entrées),*
- *$\mathcal{F}_{\{p\}\,j}$ est la $j^{ième}$ famille bond graph (définition B.1) d'exactement p chemins causaux entrée/sortie* BG-différents-génériques *(définition 4.2), où seuls les chemins (et a fortiori les cycles) impliquant les variables* exposées dans la représentation d'état *(4.48) sont considérés,*
- *$\mathbb{F}_{\{p\},k}$ est l'ensemble des familles bond graph $\mathcal{F}_{\{p\}\,j}$ d'ordre $\omega_{\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} = k$.*
- *$\rho_k^{\{p\}}$ est la somme des gains statiques de $\mathbb{F}_{\{p\},k}$, dans laquelle le gain de chaque famille $\mathcal{F}_{\{p\}\,j}$ doit être multiplié par :*
  - *un facteur $(-1)^{n_D + n_\lambda - d_j}$, où n_λ est le nombre de variables de puissance choisies dans le vecteur d'état de (4.48) et d_j est le nombre de* cycles causaux BG-différents-génériques *formant la famille $\mathcal{F}_{\{p\}\,j}$.*
  - *un facteur $(-1)^{\sigma_j}$, où σ_j est le nombre de permutations nécessaires pour ordonner les sorties de la famille $\mathcal{F}_{\{p\}\,j}$ dans l'ordre initial des sorties, lorsque les p chemins causaux sont ordonnés dans l'ordre initial des entrées.*

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Démonstration : la proposition 4.4 se base sur le calcul du déterminant de la matrice système en digraphe (proposition 4.3). Elle peut se démontrer en reprenant point par point les démonstrations des propositions 4.1 et 4.2, en adaptant la correspondance digraphe/bond graph à la représentation d'état (4.48) (procédure D.1 page 307).

Ordre maximal du polynôme caractéristique : le calcul du déterminant de la matrice système peut *a priori* faire intervenir toutes les variables d'énergie du modèle bond graph et seules les variables d'énergie contribuent à l'ordre de ce déterminant *via* les cycles et les chemins causaux. L'ordre maximal de ce déterminant est donc $n_I + n_D$.

Correspondance des cycles entre digraphe/bond graph : la correspondance entre digraphe et bond graph s'établit dans le présent cas entre les familles directrices de cycles *disjoints* du digraphe et les familles bond graph comprenant nécessairement les p chemins causaux entrée/sortie, dont les cycles et chemins ne possèdent aucune variable de la représentation d'état (4.48) en commun.

Correspondance entre les familles directrice du digraphe comprenant $n-k$ arcs de type E–edge *dans* (4.36) *(proposition 4.3) et les familles bond graph contribuant à l'ordre $n_I - k$ dans* (4.49) *:* dans le présent cas, le nombre d'arc de type *E–edge* de la famille $\mathcal{F}_i$ est $n-k = n_{E_x,b,\mathcal{F}_i} + n_{E_x,\bar{b},\mathcal{F}_i}$, où pour la famille digraphe $\mathcal{F}_i$, $n_{E_x,b,\mathcal{F}_i}$ est le nombre d'arcs de type *E–edge* provenant de la sous-matrice $\mathbf{I}_I$ de (4.48) et $n_{E_x,\bar{b},\mathcal{F}_i}$ est le nombre d'arcs de type *E–edge* provenant des sous-matrices $\mathbf{E}_{ID}$, $\mathbf{E}_D$, $\mathbf{E}_{\lambda D}$ et $\mathbf{C}_D$ [9]. En développant cette relation pour adapter l'équation (4.23) au présent cas, nous pouvons écrire,

$$n_{E_x,\bar{b},\mathcal{F}_i} = n_{E_x,\bar{b},D\to I,\mathcal{F}_i} + n_{E_x,\bar{b},D\to D,\mathcal{F}_i} + n_{E_x,\bar{b},D\to\lambda,\mathcal{F}_i} + n_{E_x,\bar{b},D\to y,\mathcal{F}_i} \tag{4.50}$$

où

— $n_{E_x,\bar{b},D\to I,\mathcal{F}_i}$ est le nombre d'arcs de la famille digraphe $\mathcal{F}_i$ provenant de la sous-matrice $\mathbf{E}_{ID}$,

— $n_{E_x,\bar{b},D\to D,\mathcal{F}_i}$ est le nombre d'arcs de la famille digraphe $\mathcal{F}_i$ provenant de la sous-matrice $\mathbf{E}_D$,

— $n_{E_x,\bar{b},D\to\lambda,\mathcal{F}_i}$ est le nombre d'arcs de la famille digraphe $\mathcal{F}_i$ provenant de la sous-matrice $\mathbf{E}_{\lambda D}$,

— $n_{E_x,\bar{b},D\to y,\mathcal{F}_i}$ est le nombre d'arcs de la famille digraphe $\mathcal{F}_i$ provenant de la sous-matrice $\mathbf{C}_D$.

Nous avons ainsi au niveau du bond graph :

$$n_{E_x,\bar{b},D\to I,\mathcal{F}_i} = n_{D,D\to I,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}},$$

$$n_{E_x,\bar{b},D\to D,\mathcal{F}_i} = n_{D,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} - n_{D,D\to I,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} - n_{D,D\to\lambda,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} - n_{D,D\to y,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}},$$

$$n_{E_x,\bar{b},D\to\lambda,\mathcal{F}_i} = n_{D,D\to\lambda,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}}, \text{ et}$$

$$n_{E_x,\bar{b},D\to y,\mathcal{F}_i} = n_{D,D\to y,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}},$$

et retrouvons ainsi pour (4.50)

$$n_{E_x,\bar{b},\mathcal{F}_i} = n_{D,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} \tag{4.51}$$

9. Ce détail sur les *E–edges* peut également être directement visualisé sur la figure D.1 page 309.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

résultat identique à (4.6). La quantité $n-k$, nombre d'arcs de type *E–edge* de $\mathcal{F}_i$, est ainsi

$$\begin{aligned} n-k &= n_{E_x,b,\mathcal{F}_i} + n_{E_x,\bar{b},\mathcal{F}_i} \\ &= n_{I,\bar{\mathcal{F}}_{\{p\}\,j}} + n_{D,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} \\ &= \left(n_I - n_{I,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}}\right) + n_{D,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} \\ &= n_I - \left(n_{I,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} - n_{D,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}}\right) \\ &= n_I - \omega_{\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} \end{aligned} \tag{4.52}$$

Nous en déduisons donc que la correspondance s'établit entre les familles directrices du digraphe comprenant $n-k$ arcs de type *E–edge* dans (4.36) et les familles bond graph d'ordre $\omega_{\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} = k$ dans (4.49).

Facteur de permutation $(-1)^{n_D+n_\lambda-d_j}$ des familles bond graph : par définition, $d_{\mathcal{F}_i}$, le nombre de cycles disjoints formant la famille de cycles digraphe $\mathcal{F}_i$ est égale à d_j, nombre de cycles causaux *BG-différents-génériques* formant la famille bond graph $\mathcal{F}_{\{p\}\,j}$ correspondante, auquel on ajoute toutes les boucles digraphe associées aux éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale (resp. dérivée), au nombre de $n_{E_x,b,\mathcal{F}_i}$ (resp. $n_{A_x,b,\mathcal{F}_i}$), ainsi que les p chemins causaux entrée/sortie *i.e.*

$$d_{\mathcal{F}_i} = d_j + n_{E_x,b,\mathcal{F}_i} + n_{A_x,b,\mathcal{F}_i} + p \tag{4.53}$$

En rappelant le facteur de permutation $(-1)^{n-k-d_{\mathcal{F}_i}}$ associé à la famille $\mathcal{F}_i$ de la procédure digraphe (proposition 4.3), nous avons

$$\begin{aligned} n-k-d_{\mathcal{F}_i} &= n_{E_x,b,\mathcal{F}_i} + n_{E_x,\bar{b},\mathcal{F}_i} - (d_j + n_{E_x,b,\mathcal{F}_i} + n_{A_x,b,\mathcal{F}_i}) + p \\ &= n_{E_x,\bar{b},\mathcal{F}_i} - (d_j + n_{A_x,b,\mathcal{F}_i}) + p \end{aligned} \tag{4.54}$$

en notant que dans le présent cas sur le digraphe, la quantité $n_{E_x,\bar{b},\mathcal{F}_i}$ est :

$$n_{E_x,\bar{b},\mathcal{F}_i} = n_{E_x,\bar{b},D\to I,\mathcal{F}_i} + n_{E_x,\bar{b},D\to\lambda,\mathcal{F}_i} + n_{E_x,\bar{b},D\to D,\mathcal{F}_i} + n_{E_x,\bar{b},D\to y,\mathcal{F}_i} \tag{4.55}$$

Nous avons ainsi,

$$\begin{aligned} n-k-d_{\mathcal{F}_i} &= n_{E_x,\bar{b},\mathcal{F}_i} - (d_j + n_{A_x,b,\mathcal{F}_i}) + p \\ &= n_{E_x,\bar{b},D\to I,\mathcal{F}_i} + n_{E_x,\bar{b},D\to\lambda,\mathcal{F}_i} + n_{E_x,\bar{b},D\to D,\mathcal{F}_i} + n_{E_x,\bar{b},D\to y,\mathcal{F}_i} \\ &- (d_j + n_{A_x,b,\mathcal{F}_i}) + p \end{aligned} \tag{4.56}$$

que nous pouvons écrire au niveau bond graph selon,

$$\begin{aligned} n-k-d_{\mathcal{F}_i} &= n_{D,D\to I,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} + n_{\lambda,D\to\lambda,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} + n_{D,D\to D,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} + n_{D,D\to y,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} \\ &- \left(d_j + n_{D,\bar{\mathcal{F}}_{\{p\}\,j}} + n_{\lambda,\bar{\mathcal{F}}_{\{p\}\,j}}\right) + p \end{aligned} \tag{4.57}$$

D'autre part, la prise en compte de tous les facteurs (-1) issus de la procédure D.1, de construction du digraphe à partir du bond graph, conduit à considérer ici les items 3, 8, 10, 11, 13, 15, 16 et 18 de la procédure (*i.e.* associés respectivement à la détermination des sous-matrices $\mathbf{E}_{ID}$, $\mathbf{A}_{DI}$, $\mathbf{A}_{D\lambda}$, $\mathbf{A}_{\lambda I}$, $\mathbf{A}_\lambda$, $\mathbf{B}_D$, $\mathbf{B}_\lambda$ et $\mathbf{C}_D$ de (4.48)) entraînent un facteur négatif sur les gains du bond graph. Ajoutons à cela le fait que le digraphe augmenté issu de la procédure D.1 fait intervenir p arcs de retour de poids -1 qui doivent être comptabilisés dans le présent facteur global pour établir la correspondance

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

digraphe/bond graph. En notant n_{BD}, comme précédemment, le nombre d'arcs total portant ce facteur (-1), nous avons dans le présent cas,

$$\begin{aligned} n_{BD} &= n_{E_x,\bar{b},D\to I,\mathcal{F}_i} + n_{A_x,\bar{b},I\to D,\mathcal{F}_i} + n_{A_x,\bar{b},\lambda\to D,\mathcal{F}_i} + n_{A_x,\bar{b},I\to\lambda,\mathcal{F}_i} + n_{A_x,\bar{b},\lambda\to\lambda,\mathcal{F}_i} \\ &+ n_{A_x,\bar{b},u\to D,\mathcal{F}_i} + n_{A_x,\bar{b},u\to\lambda,\mathcal{F}_i} + n_{E_x,\bar{b},D\to y,\mathcal{F}_i} + p \end{aligned} \tag{4.58}$$

que nous pouvons ré-écrire au niveau bond graph,

$$\begin{aligned} n_{BD} &= n_{D,D\to I,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} + n_{D,I\to D,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} + n_{\lambda,I\to\lambda,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} + n_{D,\lambda\to D,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} + n_{\lambda,\lambda\to\lambda,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} \\ &+ n_{D,u\to D,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} + n_{\lambda,u\to\lambda,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} + n_{D,D\to y,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} + p \end{aligned} \tag{4.59}$$

En utilisant les équations (4.57) et (4.59), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} n-k-d_{\mathcal{F}_i}+n_{BD} &= 2\times n_{D,D\to I,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} + n_{\lambda,D\to\lambda,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} + n_{D,D\to D,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} \\ &\quad + n_{\lambda,I\to\lambda,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} + n_{D,I\to D,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} \\ &\quad + n_{\lambda,\lambda\to\lambda,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} + n_{D,\lambda\to D,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} \\ &\quad + n_{\lambda,u\to\lambda,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} + n_{D,u\to D,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} \\ &+ 2\times n_{D,D\to y,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} \\ &- n_{D,\bar{\mathcal{F}}_{\{p\}\,j}} - n_{\lambda,\bar{\mathcal{F}}_{\{p\}\,j}} \\ &- d_j + 2p \\ &= 2\times n_{D,D\to I,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} + n_{\lambda,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} + n_{D,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} \\ &+ 2\times n_{D,D\to y,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} \\ &- n_{D,\bar{\mathcal{F}}_{\{p\}\,j}} - n_{\lambda,\bar{\mathcal{F}}_{\{p\}\,j}} \\ &- d_j + 2p \\ &= 2\times n_{D,D\to I,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} + \left(n_\lambda - n_{\lambda,\bar{\mathcal{F}}_{\{p\}\,j}}\right) + \left(n_D - n_{D,\bar{\mathcal{F}}_{\{p\}\,j}}\right) \\ &+ 2\times n_{D,D\to y,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} \\ &- n_{D,\bar{\mathcal{F}}_{\{p\}\,j}} - n_{\lambda,\bar{\mathcal{F}}_{\{p\}\,j}} \\ &- d_j + 2p \end{aligned} \tag{4.60}$$

Soit donc,

$$\begin{aligned} n-k-d_{\mathcal{F}_i}+n_{BD} &= 2\times n_{D,D\to I,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} - 2\times n_{\lambda,\bar{\mathcal{F}}_{\{p\}\,j}} - 2\times n_{D,\bar{\mathcal{F}}_{\{p\}\,j}} \\ &+ 2\times n_{D,D\to y,\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} + 2p \\ &+ n_\lambda + n_D - d_j \end{aligned} \tag{4.61}$$

Nous pouvons ainsi écrire,

$$(-1)^{n-k-d_{\mathcal{F}_i}+n_{BD}} = (-1)^{n_D+n_\lambda-d_j} \tag{4.62}$$

Facteur de permutation $(-1)^{\sigma_j}$ des familles bond graph : ce facteur provient directement de la détermination digraphe de $\det\mathbf{P}(s)$, plus exactement de la règle (R_1) détaillée dans la démonstration de la proposition 4.3. Cette règle entraîne le facteur de permutation $(-1)^{\sigma_{\mathcal{F}_i}}$, où $\sigma_{\mathcal{F}_i}$ est le nombre de permutations nécessaires pour ordonner les sommets de sortie de la famille $\mathcal{F}_i$ dans l'ordre initial des sommets de sortie, lorsque les cycles de $\mathcal{F}_i$ sont ordonnés dans l'ordre initial des sommets d'entrée (*i.e.* sans permutations). La correspondance entre la famille de cycle digraphe $\mathcal{F}_i$ et la famille bond graph $\mathcal{F}_{\{p\}\,j}$ implique que la règle de réordonnancement des entrées/sorties dans la procédure digraphe (proposition 4.3) s'applique directement à la famille bond graph $\mathcal{F}_{\{p\}\,j}$.

Fin de la démonstration.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Remarque : les familles bond graph $\mathcal{F}_{\{p\}\,j}$ (définition B.1) doivent obligatoirement contenir les p chemins causaux entrée/sortie *BG-différents-génériques* (définition 4.2) du système (*i.e.* toutes ses entrées/sorties). Ces familles peuvent également contenir des cycles causaux *BG-différents-génériques* (définition 4.1), qui doivent également être *BG-différents-génériques* avec les p chemins causaux entrée/sortie, de sorte que l'ordre respectif des familles, $\omega_{\mathcal{F}_{\{p\}\,j}}$, soit égale à k.

La proposition 4.4 généralise ainsi la détermination bond graph de $\det(\mathbf{P}(s))$ aux systèmes singuliers pouvant être mis sous la forme (4.48), comprenant ainsi celle originellement proposée pour la classe des systèmes réguliers par Jardin [Jar10] et pour la classe particulière des systèmes singuliers linéaires sur le bond graph bicausal représentant des modèles inverses ne possédant que des pôles à l'infini proposée par El Feki [EF11] [10].

La proposition 4.4 implique que le *degré du déterminant de* $\mathbf{P}(s)$, noté $\beta_{D\,p}$ (*i.e. degré du mineur d'ordre* $(n+p)$ *de* $\mathbf{P}(s)$, avec $n = n_I + n_D + n_\lambda$) est donné par l'ordre minimal $\omega_{\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} = k_{min}$ qu'une famille $\mathcal{F}_{\{p\}\,j}$ de p chemins causaux entrée/sortie *BG-différents-génériques* puisse avoir, telle que la somme des gains statiques des familles $\mathcal{F}_{\{p\}\,j}$ d'ordre $\omega_{\mathcal{F}_{\{p\}\,j}} = k_{min}$ soit différente de zéro (*i.e.* $\rho^{\{p\}}_{k_{min}} \neq 0$). Ce point est explicité à travers l'équation (4.63), en rappelant ici que $m = p$ [11].

$$\beta_{D\,p} = n_I - \min_{\mathcal{F}_{\{p\}\,,\,\omega_j}} \left\{ \omega_j \mid \rho^{\{p\}}_{\omega_j} \neq 0 \right\} \tag{4.63}$$

10. Cette classe de modèle, traitée dans l'annexe D, a également été abordée en annexe A du point de vue de la matrice de structure de jonction, en section A.3 page 248, et plus particulièrement en section A.3.6 page 260.

11. Conformément à la définition B.1, une famille $\mathcal{F}_{\{p\}\,j}$ d'ordre $\omega_{\mathcal{F}_{\{p\}\,j}}$ est notée $\mathcal{F}_{\{p\}\,,\,\omega_j}$ dans la mesure où il n'y a pas d'ambiguïté sur la notion d'ordre considéré ici (*i.e.* celui d'une *famille de chemins* et non simplement d'un *chemin*).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Exemple 1 (Illustration des propositions 4.3 et 4.4)

Nous proposons de déterminer algébriquement et graphiquement le déterminant de la matrice système sur le modèle bond graph de la figure 4.16, où $n_I = 2$, $n_D = 1$ et $n_\lambda = 1$ *(le polynôme caractéristique de ce modèle a été déterminé algébriquement et graphiquement - en digraphe et bond graph - en section 4.2.2.2 page 120).*

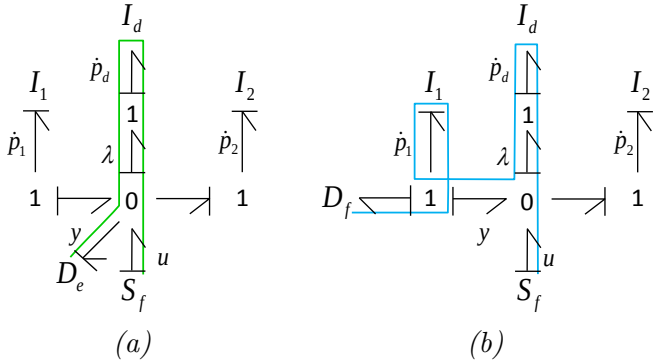


FIGURE 4.16 – Exemple de bond graph avec plusieurs boucles causales d'ordre 0 de classe 1

Cas 4.16 (a) : Le positionnement du détecteur D_e en 4.16a conduit à mesurer l'effort de liaison entre les éléments en causalité intégrale et dérivée (sa nature est donc celle d'un multiplicateur de LAGRANGE, noté λ). Le lien causal entre l'élément de stockage en causalité dérivée I_d et le détecteur D_e associé au multiplicateur λ est $y = \lambda = \dot{p}_d$. Le système, sous la forme (4.48), est donné en (4.64) et son digraphe $\mathcal{G}(\Sigma'_{d\,(a)})$ associé en figure 4.17a *(cette mise en équation suivant la procédure D.1 page 307 est également détaillée en annexe D, exemple 2 page 312).* Algébriquement, nous avons $\det \mathbf{P}(s) = I_d s^3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{p}_d \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{I_d}{I_1} & \dfrac{I_d}{I_2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_d \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_d \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_d \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \qquad (4.64)$$

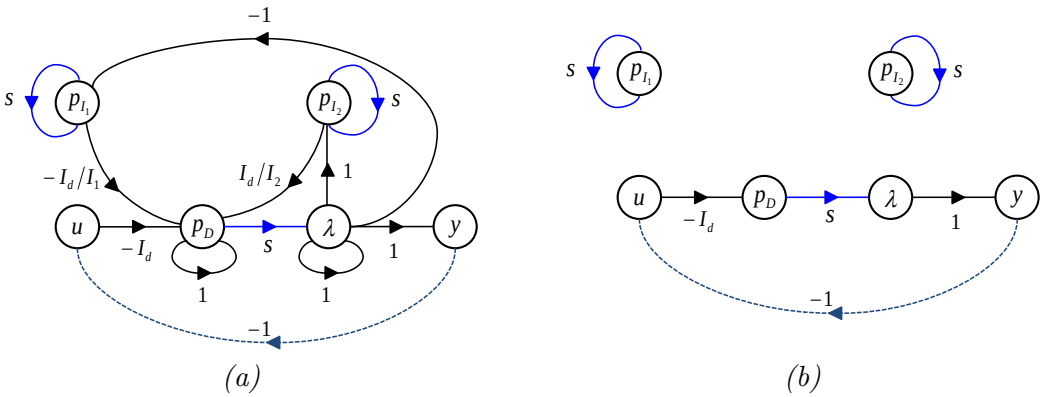


FIGURE 4.17 – (a) Digraphe $\mathcal{G}(\Sigma'_{d\,(a)})$ du système (4.64) associé au bond graph (4.16a) et (b) unique famille directrice de $\mathcal{G}(\Sigma'_{d\,(a)})$, notée $\mathcal{F}_a$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Nous pouvons remarquer que le digraphe $\mathcal{G}(\Sigma'_{d\,(a)})$ 4.17a ne comporte qu'une seule famille directrice, notée $\mathcal{F}_a$, détaillée en figure 4.17b. Suivant la proposition 4.3 appliquée au digraphe $\mathcal{G}(\Sigma'_{d\,(a)})$, nous avons :

$$\begin{aligned} \det \mathbf{P}(s) &= \sum_{k=0}^{n} \rho_k^{\{p\}}\ s^{n-k} \\ &= (-1)^{\sigma_{\mathcal{F}_a}}\ (-1)^{(n-k_{\mathcal{F}_a})-d_{\mathcal{F}_a}}\ G_{\mathcal{F}_a}\ s^{n-k_{\mathcal{F}_a}} \\ &= (-1)^0\ (-1)^{(3)-3}\ I_d\ s^3 \qquad\qquad = I_d\ s^3 \end{aligned} \tag{4.65}$$

L'application de la proposition 4.4 au bond graph 4.16a conduit à préalablement observer qu'il n'existe qu'un seul chemin causal E/S (respectant de fait la définition 4.2), en l'occurrence le chemin $(S_f \to I_d \to D_e)$, d'ordre $\omega_{\tilde{\mathcal{F}}_a} = -1$ et aucun cycle causal *BG-différents-génériques*. Cela est consistant avec le fait qu'il n'existe qu'une seule famille directrice $\mathcal{F}_a$ sur le digraphe $\mathcal{G}(\Sigma'_{d\,(a)})$ figure 4.17. En notant $\tilde{\mathcal{F}}_a$ la famille bond graph formée de l'unique chemin causal entrée/sortie, le déterminant de la matrice système est ainsi donné par :

$$\begin{aligned} \det \mathbf{P}(s) &= \sum_{k=-n_D}^{n_I} \rho_k^{\{p\}}\ s^{n_I-k} \\ &= \rho_{-1}^{\{1\}}\ s^{n_I-k_{\tilde{\mathcal{F}}_a}} \\ &= (-1)^{\sigma_{\tilde{\mathcal{F}}_a}}\ (-1)^{n_D+n_\lambda-d_{\tilde{\mathcal{F}}_a}}\ \tilde{G}_{\tilde{\mathcal{F}}_a}\ s^{n_I-k_{\tilde{\mathcal{F}}_a}} \\ &= (-1)^0\ (-1)^{1+1-0}\ I_d\ s^{2-(-1)} \qquad\qquad = I_d\ s^3 \end{aligned} \tag{4.66}$$

Nous concluons que les approches algébrique, digraphe et bond graph conduisent au même résultat.

Cas 4.16 (b) : Dans cette configuration, le détecteur D_f est placé sur une jonction connectée à un stockage en causalité intégrale (I_1). La représentation d'état du système est donnée en (4.67). Par consistance avec le cas 4.16a, la variable non énergétique λ est conservée alors qu'elle apparait uniquement ici comme une variable interne du système. Le digraphe associé est proposé en figure 4.18a et le calcul algébrique conduit à $\det \mathbf{P}(s) = -\dfrac{I_d}{I_1}s^2$.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p_1} \\ \dot{p_2} \\ \dot{p_d} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{I_d}{I_1} & \dfrac{I_d}{I_2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_d \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_d \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{I_1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_d \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \end{aligned} \tag{4.67}$$

Une seule famille directrice existe sur $\mathcal{G}(\Sigma'_{d\,(b)})$, notée $\mathcal{F}_b$ sur 4.18b. En utilisant la proposition 4.3 appliquée à $\mathcal{G}(\Sigma'_{d\,(b)})$, nous avons :

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{P}(s) &= \sum_{k=0}^{n} \rho_k^{\{p\}}\ s^{n-k} \\
&= (-1)^{\sigma_{\mathcal{F}_b}}\ (-1)^{(n-k_{\mathcal{F}_b})-d_{\mathcal{F}_b}}\ G_{\mathcal{F}_b}\ s^{n-k_{\mathcal{F}_b}} \\
&= (-1)^0\ (-1)^{(2)-2}\ \left(-\frac{I_d}{I_1}\right)\ s^2 \qquad\qquad = -\frac{I_d}{I_1}\ s^2
\end{aligned} \tag{4.68}$$

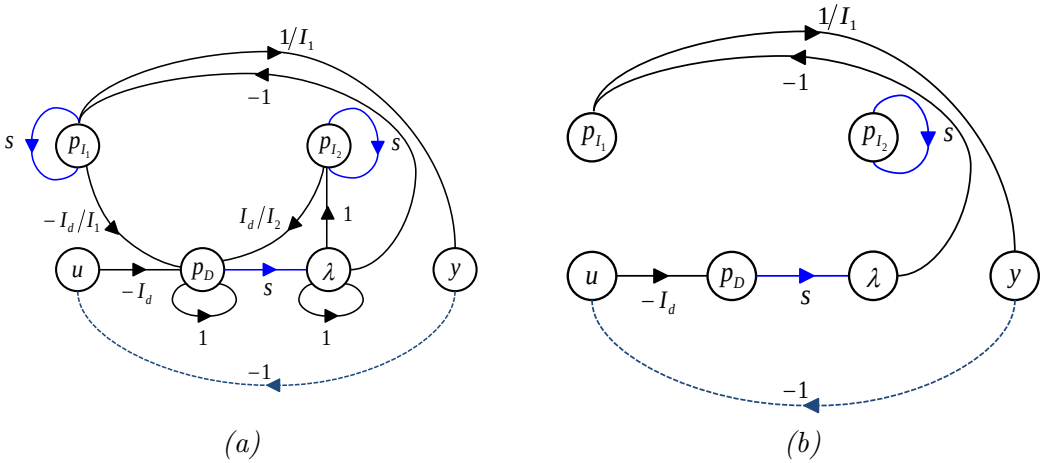


FIGURE 4.18 – (a) Digraphe $\mathcal{G}(\Sigma'_{d\,(b)})$ du système (4.67) associé au bond graph (4.16b) et (b) unique famille directrice de $\mathcal{G}(\Sigma'_{d\,(b)})$, notée $\mathcal{F}_b$

L'application de la proposition 4.4 au bond graph 4.16b se construit sur les mêmes considérations qu'au cas 4.16a : il n'existe qu'un seul chemin causal E/S, en l'occurrence le chemin $(S_f \to I_d \to I_1 \to D_f)$ représenté sur la figure 4.16b, d'ordre $\omega_{\tilde{\mathcal{F}}_b} = 0$. En notant $\tilde{\mathcal{F}}_b$ la famille bond graph formée de l'unique chemin causal E/S (où aucun cycle causal n'est *BG-différent-générique* de ce chemin), le déterminant de la matrice système est ainsi donné par :

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{P}(s) &= \sum_{k=-n_D}^{n_I} \rho_k^{\{p\}}\ s^{n_I-k} \\
&= \rho_0^{\{1\}}\ s^{n_I-k_{\tilde{\mathcal{F}}_b}} \\
&= (-1)^{\sigma_{\tilde{\mathcal{F}}_b}}\ (-1)^{n_D+n_\lambda-d_{\tilde{\mathcal{F}}_b}}\ \tilde{G}_{\tilde{\mathcal{F}}_b}\ s^{n_I-k_{\tilde{\mathcal{F}}_b}} \\
&= (-1)^0\ (-1)^{1+1-0}\ \left(-\frac{I_d}{I_1}\right)\ s^{2-(0)} \qquad = -\frac{I_d}{I_1}\ s^2
\end{aligned} \tag{4.69}$$

Nous concluons que les approches algébrique, digraphe et bond graph conduisent au même résultat.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Exemple 2 (Illustration des propositions 4.3 et 4.4)

Nous proposons de déterminer algébriquement et graphiquement le déterminant de la matrice système sur le modèle bond graph de la figure 4.19 qui représente le cas académique où un choix délibéré d'une causalité dérivée sur un élément de stockage est effectué, induisant dans ce cas un cycle causal d'ordre négatif, où $n_I = 1$, $n_D = 1$ et $n_\lambda = 1$ *(le polynôme caractéristique de ce modèle a été déterminé algébriquement et graphiquement - en digraphe et bond graph - en section 4.2.2.4 page 123).*

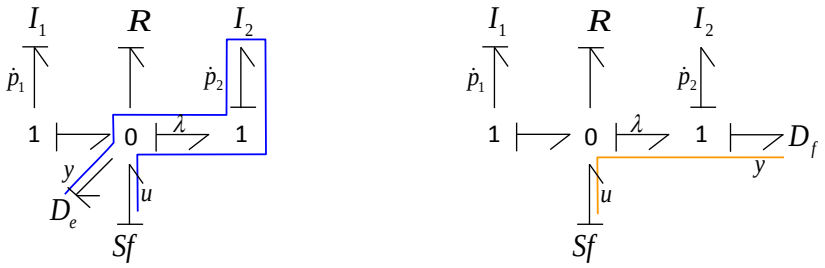


FIGURE 4.19 – Exemple de bond graph avec boucles causales d'ordre 0 et d'ordre -1

Cas 4.19 (a) : Nous reprenons ici les considérations sur l'effort de liaison λ exposées au cas 4.16a. Le système, sous la forme (4.48), est donné en (4.70) et son digraphe $\mathcal{G}(\Sigma'_{d\,(a)})$ associé en figure 4.20a. Algébriquement, nous avons $\det P(s) = I_2\, s^2$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p_1} \\ \dot{p_2} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{I_2}{I_1} & 1 & \dfrac{I_2}{R} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -I_2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \qquad (4.70)$$

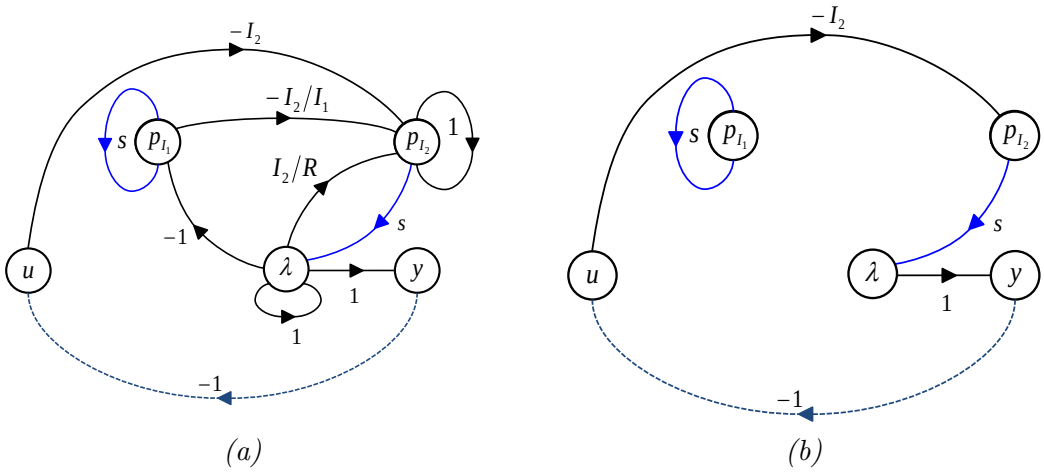


FIGURE 4.20 – (a) Digraphe $\mathcal{G}(\Sigma'_{d\,(a)})$ du système (4.70) associé au bond graph (4.19a) et (b) unique famille directrice de $\mathcal{G}(\Sigma'_{d\,(a)})$, notée $\mathcal{F}_a$

Une seule famille directrice existe sur $\mathcal{G}(\Sigma'_{d\,(a)})$, notée $\mathcal{F}_a$ sur 4.20b. Utilisant la

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

proposition 4.3 appliquée à $\mathcal{G}(\Sigma'_{d\,(a)})$, nous avons :

$$\begin{aligned} \det \mathbf{P}(s) &= \sum_{k=0}^{n} \rho_k^{\{p\}}\, s^{n-k} \\ &= (-1)^{\sigma_{\mathcal{F}_a}}\, (-1)^{(n-k_{\mathcal{F}_a})-d_{\mathcal{F}_a}}\, G_{\mathcal{F}_a}\, s^{n-k_{\mathcal{F}_a}} \\ &= (-1)^0\, (-1)^{(2)-2}\, I_2\, s^2 \qquad\qquad = I_2\, s^2 \end{aligned} \tag{4.71}$$

L'application de la proposition 4.4 au bond graph 4.19a conduit à préalablement observer qu'il n'existe qu'un seul chemin causal entrée/sortie, en l'occurrence le chemin $(S_f \to I_2 \to D_e)$ représenté sur la figure 4.19a, d'ordre $\omega_{\tilde{\mathcal{F}}_a} = -1$ (*i.e.* les deux boucles $\{R; I_2\}$ et $\{I_1; I_2\}$, respectivement d'ordre -1 et 0, ne sont pas *BG-différents-génériques* (définition 4.2) de ce chemin causal puisqu'elles lui partagent la variable $\dot{p}_2$). Cela est consistant avec la correspondance digraphe/bond graph mise en place par le biais de la procédure D.1 page 307 et le fait qu'il n'existe qu'une seule famille directrice $\mathcal{F}_a$ sur le digraphe $\mathcal{G}(\Sigma'_{d\,(a)})$ figure 4.20. En notant $\tilde{\mathcal{F}}_a$ la famille bond graph formée de l'unique chemin causal entrée/sortie, le déterminant de la matrice système est ainsi donné par :

$$\begin{aligned} \det \mathbf{P}(s) &= \sum_{k=-n_D}^{n_I} \rho_k^{\{p\}}\, s^{n_I-k} \\ &= \rho_{-1}^{\{1\}}\, s^{n_I-k_{\tilde{\mathcal{F}}_a}} \\ &= (-1)^{\sigma_{\tilde{\mathcal{F}}_a}}\, (-1)^{n_D+n_\lambda-d_{\tilde{\mathcal{F}}_a}}\, \tilde{G}_{\tilde{\mathcal{F}}_a}\, s^{n_I-k_{\tilde{\mathcal{F}}_a}} \\ &= (-1)^0\, (-1)^{1+1-0}\, I_2\, s^{1-(-1)} \qquad\qquad = I_2\, s^2 \end{aligned} \tag{4.72}$$

Nous concluons que les approches algébrique, digraphe et bond graph conduisent au même résultat.

Cas 4.19 (b) : Dans cette configuration, le détecteur D_f est placé sur la jonction connectée à l'élément de stockage en causalité dérivée I_2. La représentation d'état du système est donnée en (4.73). Comme dans le cas de la figure 4.16, nous conservons la variable non énergétique λ par consistance avec le cas 4.19b alors qu'elle apparait uniquement ici comme une variable interne du système. Le digraphe associé est proposé en figure 4.21. Le calcul algébrique conduit à $\det \mathbf{P}(s) = s$.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\dfrac{I_2}{I_1} & 1 & \dfrac{I_2}{R} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -I_2 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{I_1} & 0 & -\dfrac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} u \end{aligned} \tag{4.73}$$

Cinq familles directrices existent sur $\mathcal{G}(\Sigma'_{d\,(b)})$, respectivement notées $\mathcal{F}_{b_a}$, $\mathcal{F}_{b_b}$ (figure 4.22) et $\mathcal{F}_{b_c}$, $\mathcal{F}_{b_d}$ et $\mathcal{F}_{b_e}$ (figure 4.23). Utilisant la proposition 4.3 appliquée à $\mathcal{G}(\Sigma'_{d\,(b)})$ (figure 4.21), nous avons,

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{P}(s)) &= (-1)^{\sigma_{\mathcal{F}_{b_a}}} (-1)^{(n-k_{\mathcal{F}_{b_a}})-d_{\mathcal{F}_{b_a}}} G_{\mathcal{F}_{b_a}} s^{n-k_{\mathcal{F}_{b_a}}} \\ &+ (-1)^{\sigma_{\mathcal{F}_{b_b}}} (-1)^{(n-k_{\mathcal{F}_{b_b}})-d_{\mathcal{F}_{b_b}}} G_{\mathcal{F}_{b_b}} s^{n-k_{\mathcal{F}_{b_b}}} \\ &+ (-1)^{\sigma_{\mathcal{F}_{b_c}}} (-1)^{(n-k_{\mathcal{F}_{b_c}})-d_{\mathcal{F}_{b_c}}} G_{\mathcal{F}_{b_c}} s^{n-k_{\mathcal{F}_{b_c}}} \\ &+ (-1)^{\sigma_{\mathcal{F}_{b_d}}} (-1)^{(n-k_{\mathcal{F}_{b_d}})-d_{\mathcal{F}_{b_d}}} G_{\mathcal{F}_{b_d}} s^{n-k_{\mathcal{F}_{b_d}}} \\ &+ (-1)^{\sigma_{\mathcal{F}_{b_e}}} (-1)^{(n-k_{\mathcal{F}_{b_e}})-d_{\mathcal{F}_{b_e}}} G_{\mathcal{F}_{b_e}} s^{n-k_{\mathcal{F}_{b_e}}} \end{aligned} \tag{4.74}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

soit :

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{P}(s)) &= (-1)^0(-1)^{(2)-2}\left(-\frac{I_2}{R}\right)s^2 \\ &+ (-1)^0(-1)^{(2)-3}\left(-\frac{I_2}{R}\right)s^2 \\ &+ (-1)^0(-1)^{(1)-1}\left(-\frac{I_2}{I_1}\right)s^1 \\ &+ (-1)^0(-1)^{(1)-4}(-1)\,s^1 \\ &+ (-1)^0(-1)^{(1)-2}\left(-\frac{I_2}{I_1}\right)s^1 = s\end{aligned} \tag{4.75}$$

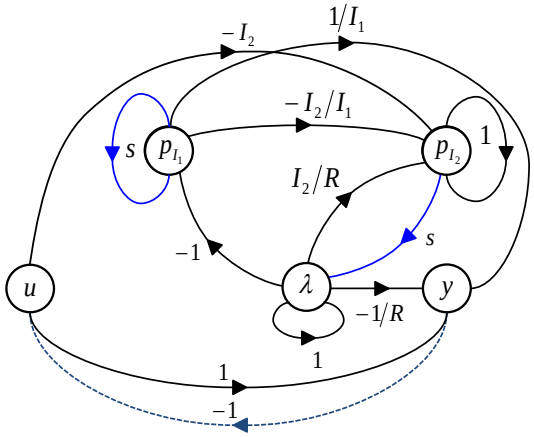


FIGURE 4.21 – Digraphe $\mathcal{G}(\Sigma'_{d\,(b)})$ du système (4.73) associé au bond graph (4.19b)

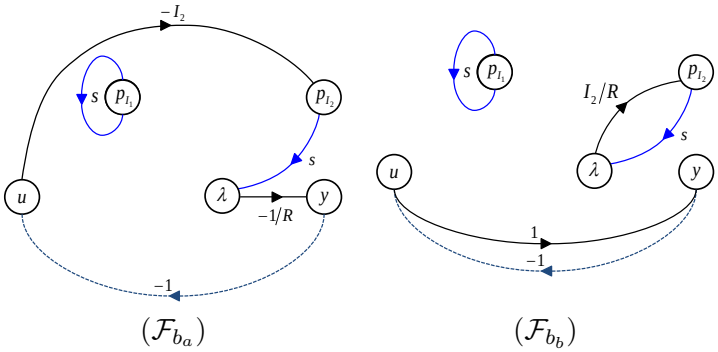


FIGURE 4.22 – Familles directrices du digraphe $\mathcal{G}(\Sigma'_{d\,(b)})$ (figure 4.21) avec 2 *E–edges*

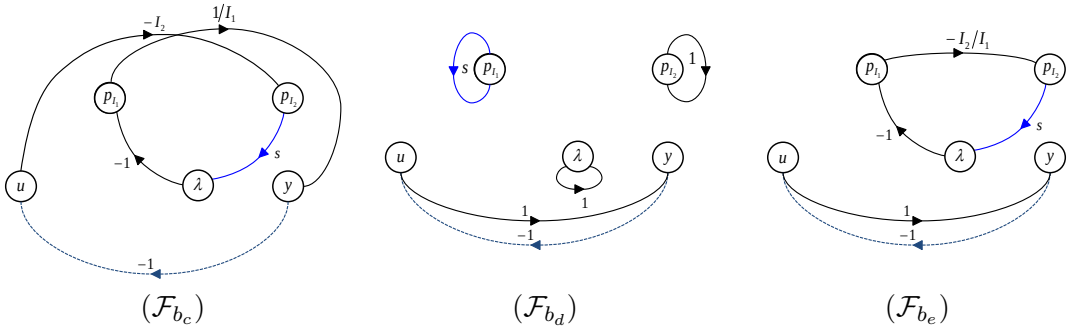


FIGURE 4.23 – Familles directrices du digraphe $\mathcal{G}(\Sigma'_{d\,(b)})$ (figure 4.21) avec 1 *E–edge*

En vue d'appliquer la proposition 4.4 au bond graph 4.19b, nous observons, conformément à la correspondance digraphe/bond graph, qu'il existe également cinq familles bond graph formées d'un seul chemin causal entrée/sortie *BG-différents-génériques* (définition 4.2). Ces familles sont notées $\tilde{\mathcal{F}}_{b_a}$, $\tilde{\mathcal{F}}_{b_b}$ (figure 4.24) et $\tilde{\mathcal{F}}_{b_c}$, $\tilde{\mathcal{F}}_{b_d}$ et $\tilde{\mathcal{F}}_{b_e}$ (figure 4.25) et correspondent respectivement aux familles directrices $\mathcal{F}_{b_a}$, $\mathcal{F}_{b_b}$ (figure

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

4.22) et $\mathcal{F}_{b_c}$, $\mathcal{F}_{b_d}$ et $\mathcal{F}_{b_e}$ (figure 4.23) sur $\mathcal{G}(\Sigma'_{d\,(b)})$. Notons par exemple la topologie de la famille directrice $\mathcal{F}_{b_a}$ avec une boucle de type *E–edge* sur le variable p_{I_1} et le cycle $u \to p_{I_2} \to \lambda \to y \to u$ qui correspond sur le bond graph à la famille $\tilde{\mathcal{F}}_{b_a}$ au chemin $u \to p_{I_2} \to \lambda \to y$ (l'élément de stockage I_1 n'étant pas touché par ce chemin).

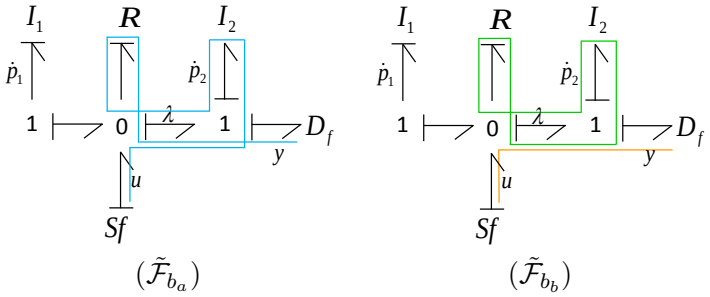


FIGURE 4.24 – Familles bond graph d'ordre -1 (modèle de la figure 4.19b)

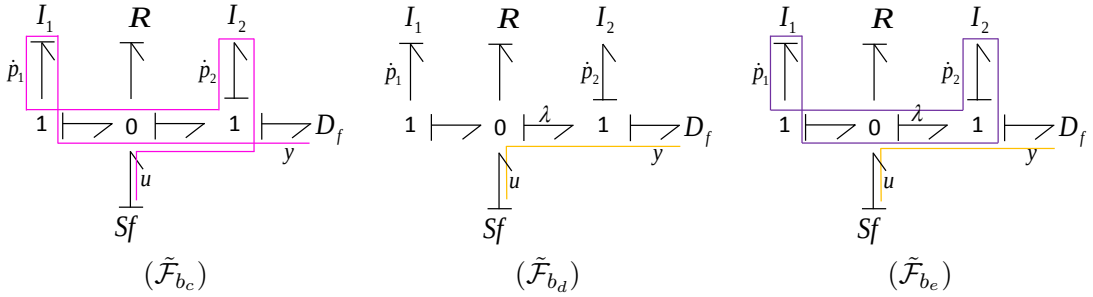


FIGURE 4.25 – Familles bond graph d'ordre 0 (modèle de la figure 4.19b)

En appliquant la proposition 4.4 au bond graph 4.19b, le déterminant de la matrice système est ainsi donné par :

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{P}(s)) &= (-1)^{\sigma_{\tilde{\mathcal{F}}_{b_a}}}(-1)^{n_D+n_\lambda-d_{\tilde{\mathcal{F}}_{b_a}}}\tilde{G}_{\tilde{\mathcal{F}}_{b_a}}\, s^{n_I-k_{\tilde{\mathcal{F}}_{b_a}}} \\
&= (-1)^{\sigma_{\tilde{\mathcal{F}}_{b_b}}}(-1)^{n_D+n_\lambda-d_{\tilde{\mathcal{F}}_{b_b}}}\tilde{G}_{\tilde{\mathcal{F}}_{b_b}}\, s^{n_I-k_{\tilde{\mathcal{F}}_{b_b}}} \\
&= (-1)^{\sigma_{\tilde{\mathcal{F}}_{b_c}}}(-1)^{n_D+n_\lambda-d_{\tilde{\mathcal{F}}_{b_c}}}\tilde{G}_{\tilde{\mathcal{F}}_{b_c}}\, s^{n_I-k_{\tilde{\mathcal{F}}_{b_c}}} \\
&= (-1)^{\sigma_{\tilde{\mathcal{F}}_{b_d}}}(-1)^{n_D+n_\lambda-d_{\tilde{\mathcal{F}}_{b_d}}}\tilde{G}_{\tilde{\mathcal{F}}_{b_d}}\, s^{n_I-k_{\tilde{\mathcal{F}}_{b_d}}} \\
&= (-1)^{\sigma_{\tilde{\mathcal{F}}_{b_e}}}(-1)^{n_D+n_\lambda-d_{\tilde{\mathcal{F}}_{b_e}}}\tilde{G}_{\tilde{\mathcal{F}}_{b_e}}\, s^{n_I-k_{\tilde{\mathcal{F}}_{b_e}}}
\end{aligned} \tag{4.76}$$

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{P}(s)) &= (-1)^0(-1)^{1+1-0}\left(-\frac{I_2}{R}\right)s^{1-(-1)} \\
&+ (-1)^0(-1)^{1+1-1}\left(-\frac{I_2}{R}\right)s^{1-(-1)} \\
&+ (-1)^0(-1)^{1+1-0}\left(-\frac{I_2}{I_1}\right)s^{1+0} \\
&+ (-1)^0(-1)^{1+1-0}\,(1)\,s^{1-0} \\
&+ (-1)^0(-1)^{1+1-1}\left(-\frac{I_2}{I_1}\right)s^{1+0} \qquad = s
\end{aligned} \tag{4.77}$$

Nous concluons que les approches algébrique, digraphe et bond graph conduisent au même résultat.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

4.4 Inversion des systèmes singuliers

La présente section propose de reprendre les considérations du chapitre 2 section 2.3.2 page 58 sur l'étude de l'inversibilité des systèmes à partir de leur bond graph associé, et des procédures de Rahmani (section 2.3.2.1 page 58) et de Fotsu Ngwompo (section 2.3.2.2 page 59), en discutant leur généralisation au cas singulier. La discussion est menée sur le bond graph représentant un système singulier de la forme (4.48) page 139, dont les hypothèses sont détaillées en annexe D.1 page 305.

Il est en premier lieu intéressant de mentionner que le critère direct d'inversibilité de Tan & Vandewalle [TV88] (théorème 3.4 page 88) a été porté graphiquement sur le digraphe structuré par Pasqualetti *et al.* [PBB11] :

Théorème 4.1 (*[PBB11]*)

(Critère direct d'inversibilité d'un système* singulier *sur le digraphe structuré associé) : *si le système singulier* Σ_d (4.1) *est solvable (*i.e. *si le faisceau* $s\mathbf{E}-\mathbf{A}$ *est régulier), il est inversible si et seulement si, sur le digraphe structuré associé, il existe un ensemble de* p *chemins entrée/sortie disjoints.*

Le théorème 4.1 peut être directement démontré grâce au théorème 3.4 et à la proposition 4.3 page 133 que nous avons formulé sur le digraphe.

Au niveau bond graph, nous pouvons dans un premier temps généraliser le test d'inversibilité 2.1 page 59 proposé par Rahmani, basé sur la détermination bond graph du déterminant de la matrice système, en utilisant la détermination de $\det(\mathbf{P}(s))$ du système singulier (4.48) (proposition 4.4 page 140) :

Test d'inversibilité 4.1

Soit un modèle bond graph représentant un système singulier carré à p *entrées et* p *sorties de la forme* (4.48).

1. *Si le modèle bond graph ne contient pas* p *chemins causaux entrée/sortie* BG-différents-génériques *(définition 4.2), alors le système est non inversible.*
2. *Si le modèle bond graph contient* un seul *ensemble de* p *chemins causaux entrée/sortie* BG-différents-génériques, *alors le système est inversible.*
3. *Si le modèle contient* plusieurs *ensembles de* p *chemins causaux entrée/sortie* BG-différents-génériques, *alors il faut calculer le determinant de la matrice système* $\det(\mathbf{P}(s))$ *à l'aide la proposition 4.4 pour conclure sur l'inversibilité.*

Démonstration : Cette généralisation utilise le théorème 3.4 et l'inversibilité de la matrice système, en considérant la proposition 4.4 et en notant les points suivants :

— *en termes de chemin en bond graph :* nous avons détaillé en section 4.3.2 que dans le cas singulier, le calcul de $\det(\mathbf{P}(s))$ à partir de la proposition 4.4 implique la considération de famille bond graph (définition B.1 page 267) d'exactement p chemins causaux entrée/sortie *BG-différents-génériques* (définition 4.2), où seuls les chemins (et a fortiori les cycles) impliquant les variables *exposées dans la re-*

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

présentation d'état (4.48) sont considérés.

— *en terme de calcul du déterminant de la matrice système :* la proposition 4.4 permet de généraliser le calcul de $\det(\mathbf{P}(s))$ à la classe des systèmes singuliers.

Dans la présente formulation du test d'inversibilité 4.1, l'item 2 peut se restreindre à la scrutation d'un *ensemble* de chemins causaux et pas nécessairement d'une *famille* bond graph (définition B.1) dans la mesure où un *ensemble unique* est suffisant pour assurer la non nullité de $\det(\mathbf{P}(s))$, y compris dans le cas singulier. La considération de *famille*, incluant donc potentiellement des cycles causaux supplémentaires, n'aura d'intérêt que dans la considération des *ordres* associés et dans le calcul effectif des termes de $\det(\mathbf{P}(s))$ à partir du bond graph (proposition 4.4).

Fin de la démonstration.

Remarque : comme mentionné par Jardin [Jar10] à propos du test d'inversibilité de Rahmani [Rah93], il n'est pas nécessaire en pratique de calculer l'ensemble des coefficients du polynôme de $\det(\mathbf{P}(s))$ pour conclure sur sa non nullité dans le présent test d'inversibilité 4.1 (concernant l'item 3). En utilisant la proposition 4.4 et l'ensemble de ses éléments constitutifs, montrer que $\det(\mathbf{P}(s)) \neq 0$ revient à montrer qu'il existe $k \in \{-n_D, \cdots, n_I\}$ tel que $\rho_k^{\{p\}} \neq 0$ dans (4.49).

Concernant à présent l'approche de Fotsu Ngwompo, le test d'inversibilité 2.2 page 60 est généralisable puisqu'il se base uniquement sur la considération graphique de propriété des ensembles de chemins causaux. Ces chemins causaux doivent en l'occurrence être *disjoints* (définition B.8 page 264) pour assurer la propagation de la bicausalité. La présence potentielle de cycles causaux d'ordre 0 (de type $1ZCP$, $2ZCP$, $3ZCP$ et $4ZCP$) ou d'ordre négatif, la présence potentielle de champs R et/ou IC ne modifient en rien ces considérations. Si il existe un ensemble de p chemins causaux entrée/sortie *disjoints* suivant lequel la propagation de la bicausalité conduit à une structure de jonction résoluble, le modèle bond graph est inversible. Si le modèle à inverser contient des assignations bicausales entre chemins entrée/sortie, la propagation de la bicausalité sur ces chemins conduit à rétablir une causalité « classique ». Dans ce dernier cas, la bicausalité est nécessairement propagée à partir de la double source $SeSf$, qui (re)devient alors un détecteur (plus exactement des « sources/détecteurs » [Gaw95, FN97] *i.e.* un $DeSf$ ou un $DfSe$ suivant la causalité), jusqu'au double détecteur $DeDf$ qui (re)devient une source d'effort ou de flux. Nous pouvons ainsi confirmer que le test d'inversibilité 2.2 est applicable à la classe des modèles bond graph représentant un système singulier de la forme (4.48) page 139. Rappelons en outre que ce test d'inversibilité 2.2 aboutit à la construction du modèle inverse (la procédure est *semi-directe*, les derniers critères étant établis sur le modèle bond graph inverse). Nous illustrons cette approche avec l'exemple de synthèse proposé en section 4.6.3 page 169.

Notons que nous ne définissons pas dans cette section l'inverse *d'ordre minimal* du modèle singulier (notion exposée en bond graph en section 2.3.2.4 page 61 pour les systèmes réguliers). Il n'est pas nécessaire d'établir le modèle inverse d'*ordre minimal* pour déterminer les invariants que sont la structure à l'infini du système (section 4.5) et les ordres d'essentialité généralisés (section 4.6). Il est toutefois possible, lors de l'application du test d'inversibilité 2.2 page 60, de choisir un ensemble S_0 de p chemins causaux entrée/sortie disjoints d'ordre minimal.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

4.5 Structure à l'infini

4.5.1 Détermination de la structure à l'infini d'un système singulier en bond graph

La définition algébrique de la structure à l'infini des systèmes singuliers a été présentée au chapitre 3 à travers les théorèmes 3.9, 3.10, 3.11 et 3.12 page 95. Nous avons vu que cette généralisation inclus les définitions et théorèmes établis pour les systèmes *réguliers* (théorèmes 2.2, 2.3, 2.4 page 50), base de l'analyse structurelle des modèles directs [Jar10], mais également le cas particulier des systèmes *généralisés* issus des modèles inverses de systèmes propres (théorèmes 2.5 et 2.6 page 52), base de l'analyse structurelle des modèles inverses [EF11]. Nous visons ici à généraliser les approches de détermination de la structure à l'infini d'un système à partir de sa représentation bond graph associée. La finalité est une proposition étendue à la classe des systèmes singuliers, incluant également ainsi celles développées pour des bond graphs causaux sans causalité dérivée [BSDT97] [Jar10] et les bond graphs bicausaux (incluant la classe des modèles inverses traitée par El Feki [EF11] [EFJMF+12a], voir chapitre 2).

Nous rappelons au préalable les éléments suivants pour les systèmes *singuliers* dont la représentation d'état peut être mise sous la forme (4.1) :

— le *nombre* de zéros et pôles à l'infini est égal à r, où $r = \text{Rang}(\mathbf{T}(s))$, et $\mathbf{T}(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}$ est la matrice de transfert rationnelle non propre de (4.1) définie par $\mathbf{T}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$ [MDV94].

— issus de la forme de Smith-McMillan à l'infini (2.7) page 48, les *ordres* des r zéros et pôles à l'infini de $\mathbf{T}(s)$ sont des entiers relatifs ordonnés selon $t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_r$. La somme des ordres des zéros/pôles à l'infini du système (4.1) peut s'exprimer selon (4.78) [MvdW91] :

$$\sum_{j=1}^{i} t_j = -\ \delta_{D\ i} = -\beta_{D\,i} + \delta_D\,(\mathbf{A} - s\mathbf{E}) \tag{4.78}$$

En notant que :
— t_i est l'ordre du $i^{ième}$ zéro/pôle à l'infini de $\mathbf{T}(s)$,
— $\delta_{D\ i}$ est le plus haut degré des mineurs d'ordre i de $\mathbf{T}(s)$,
— $\beta_{D\,i}$ est le plus haut degré du mineur d'ordre $(n+i)$ de la matrice système $\mathbf{P}(s)$,
— $\delta_D\,(\mathbf{A} - s\mathbf{E})$ est la dimension de la partie dynamique finie du système d'état, *i.e.* $\delta_D\,(\mathbf{A} - s\mathbf{E}) = d = \deg\ \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$.

Nous formulons dès à présent deux propositions, respectivement sur le *nombre* et l'*ordre* des zéros/pôles à l'infini d'un système singulier sur son bond graph associé (déclinés ici par niveaux d'analyse, respectivement *BG-Structurel* et *comportemental*, tels que définis au chapitre 1, section 1.4.4 page 32) :

Proposition 4.5

(Nombre de zéros/pôles à l'infini d'un système singulier sur sa représentation bond graph associée - niveau d'analyse BG-Structurel) *Sur le modèle bond graph représentant le système singulier (4.48), le nombre r_{BG-s} de zéros/pôles* BG-structurels *à l'infini de ce système est égal au nombre maximal de*

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

chemins qu'un ensemble de chemins (bi)causaux entrée/sortie BG-disjoints *puisse contenir.*

Proposition 4.6

(Nombre de zéros/pôles à l'infini d'un système singulier sur sa représentation bond graph associée - niveau d'analyse comportemental) *Sur le modèle bond graph représentant le système singulier* (4.48)*, le nombre* r *de zéros/pôles à l'infini du système est égal au nombre maximal de chemins qu'un ensemble de chemins (bi)causaux entrée/sortie* BG-disjoints *puisse contenir* pour assurer l'inversibilité d'un sous-système de dimension r.

Démonstration :

Approche algébrique : la forme de Smith-McMillan à l'infini (2.7) appliquée à la matrice de transfert non propre $\mathbf{T}(s)$ du système (4.48) implique que le nombre r de zéros/pôles à l'infini corresponde au rang de $\mathbf{T}(s)$. Par définition du rang, cela signifie qu'au moins un mineur d'ordre r est non nul, que tout mineur d'ordre strictement supérieur à r est nécessairement nul, et qu'il existe un sous-système de dimension r inversible.

Approche bond graph :

— *niveau d'analyse comportemental :* l'assertion précédente implique qu'il existe nécessairement au moins un ensemble de r chemins causaux entrée/sortie *BG-disjoints* (définition B.8 page 264) qui assurent cette inversibilité [FN97] [JEFMF+08]. Cette condition d'inversibilité implique de manière sous-jacente sur le bond graph que d'une part :
  — soit il n'existe aucun ensemble contenant plus de r chemins causaux *BG-disjoints*,
  — soit il existe plusieurs ensembles contenant plus de r chemins causaux *BG-disjoints*, mais dont la somme signée de leurs gains s'annule,

  et que d'autre part, la résolubilité de la structure de jonction du modèle inverse est assurée *(voir section 2.3.2.2 page 59)*. L'ensemble de ces considérations, impliquant nécessairement sur le bond graph l'existence même de lignes de puissance entrée/sortie disjointes, n'est donc par essence pas restreinte au cas régulier et ainsi directement applicable aux bond graph causaux ou bicausaux représentant le système singulier (4.48). Au niveau d'analyse *comportemental*, il existe nécessairement au moins un ensemble de r chemins (bi)causaux entrée/sortie *BG-disjoints* pour assurer l'inversibilité du système.

— *niveau d'analyse BG-structurel :* le précédent développement se traduit ainsi simplement par l'existence d'au moins un ensemble d'*au maximum* r_{BG-s} chemins (bi)causaux entrée/sortie *BG-disjoints*.

Fin de la démonstration.

Concernant les ordres des zéros/pôles à l'infini, nous pouvons faire les propositions suivantes :

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Proposition 4.7

(Ordre des zéros/pôles à l'infini d'un système singulier sur sa représentation bond graph associée - niveau d'analyse BG-Structurel) *Sur le modèle bond graph représentant le système singulier (4.48), les ordres des zéros/pôles* BG-structurels *à l'infini de ce système peuvent être déterminés de la manière suivante :*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} t_{BG-s,1} & = & \omega_{1_s} - \omega_{(n_I-d)_s} \\ t_{BG-s,i} & = & \omega_{i_s} - \omega_{i-1_s} \end{array} \right. \tag{4.79}$$

où :

- $\omega_{(n_I-d)_s}$ *représente l'ordre minimal qu'une famille des seuls cycles causaux* BG-différents-génériques *(définition B.18) impliquant les variables d'état, puisse avoir.*
- ω_{i_s} *représente l'ordre minimal que peut avoir une famille bond graph (définition B.23) d'exactement i chemins causaux entrée/sortie* BG-différents-génériques *(définition 4.2), et où seuls les chemins et cycles impliquant les variables* exposées dans la représentation d'état (4.48) *sont considérés.*

Proposition 4.8

(Ordre des zéros/pôles à l'infini d'un système singulier sur sa représentation bond graph associée - niveau d'analyse comportemental) *Sur le modèle bond graph représentant le système singulier (4.48), les ordres des zéros/pôles à l'infini de ce système peuvent être déterminés de la manière suivante :*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} t_1 & = & \omega_1 - \omega_{n_I-d} \\ t_i & = & \omega_i - \omega_{i-1} \end{array} \right. \tag{4.80}$$

où sur le modèle bond graph :

$$\omega_i = \min_{\substack{(U,Y)\subset[\![1,p]\!]^2 \\ tel\ que\ |U|=|Y|=i}} \left\{ \min_{\mathcal{F}_{(U,Y),\omega_j}} \left\{ \omega_j \mid \rho_{\omega_j}^{(U,Y)} \neq 0 \right\} \right\} \quad , \quad \forall i \in \{1,...,r\} \tag{4.81}$$

où :

- ω_{n_I-d} *représente l'ordre minimal qu'une famille des seuls cycles causaux* BG-différents-génériques *(définition B.18) impliquant les variables d'état puisse avoir, telle que la somme des gains statiques des familles d'ordre ω_{n_I-d} soit différente de zéro.*

- $\mathcal{F}_{(U,Y),\omega_j}$ *est la $j^{ième}$ famille bond graph (définition B.23) d'ordre ω_j (définition B.26), contenant exactement i chemins causaux entrée/sortie* BG-différents-génériques *(définition 4.2), où seuls les chemins et cycles impliquant les variables* exposées dans la représentation d'état (4.48) *sont considérés, les chemins étant entre les variables d'entrées contenues dans l'ensemble $\mathbf{U}$ de dimension i ($|\mathbf{U}| = i$) et les variables de sorties contenues dans l'ensemble $\mathbf{Y}$ de dimension i ($|\mathbf{Y}| = i$).*

- $\mathbb{F}_{(U,Y),\omega_j}$ *est l'ensemble des familles $\mathcal{F}_{(U,Y),\omega_j}$ (définition B.5).*

- $\rho_{\omega_j}^{(U,Y)}$ *est la somme des gains statiques de $\mathbb{F}_{(U,Y),\omega_j}$ dans laquelle le gain statique de chaque famille $\mathcal{F}_{(U,Y),\omega_j}$ doit être multiplié par :*
  - *un facteur $(-1)^{n_D+n_\lambda-d_j}$, où n_D et n_λ sont respectivement le nombre d'éléments de stockage en causalité dérivée et le nombre de variables de*

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

puissance choisies dans le vecteur d'état de (4.48), et d_j est le nombre de cycles *causaux* BG-différents-génériques *contenus dans la famille $\mathcal{F}_{(U,Y),\omega_j}$,*
— *un facteur $(-1)^{\sigma_j}$, où σ_j est le nombre de permutations nécessaires pour ordonner les i sorties de la famille $\mathcal{F}_{(U,Y),\omega_j}$ dans l'ordre initial des sorties, lorsque les i chemins causaux sont ordonnés dans l'ordre initial des entrées.*

Démonstration des propositions 4.7 et 4.8 :

Approche algébrique : utilisant l'équation (4.78), nous pouvons écrire :

$$\begin{array}{lllllll} \textit{pour } i=1 & t_1 & = & -\beta_{D\,1}+d & & & \\ \textit{pour } i>1 & t_i & = & \sum_{j=1}^{i} t_j & - & \sum_{j=1}^{i-1} t_j & \\ & & = & (-\beta_{D\,i}+d) & - & (-\beta_{D\,i-1}+d) & \\ & & = & -\beta_{D\,i} & + & \beta_{D\,i-1} & \end{array} \tag{4.82}$$

où $\beta_{D\,i}$ est le plus haut degré du mineur d'ordre $(n+i)$ de la matrice système $\mathbf{P}(s)$.

Approche bond graph, polynôme caractéristique :
— *niveau d'analyse comportemental :* en utilisant la proposition 4.2 page 126, le monôme de plus haut degré du polynôme caractéristique est donné par l'ordre minimal ω_{n_I-d} qu'une famille de cycles causaux *BG-différents-génériques*, impliquant les variables d'état, puisse avoir, telle que la somme des gains statiques des familles de cycles d'ordre ω_{n_I-d} soit différente de zéro. Nous avons ainsi $d = \deg\det(s\mathbf{E}-\mathbf{A}) = n_I - \omega_{n_I-d}$.

— *niveau d'analyse BG-structurel :* la précédente assertion se décline sans analyse de gains de chemins causaux de la manière suivante : le monôme de plus haut degré du polynôme caractéristique est donné par l'ordre minimal $\omega_{(n_I-d)_s}$ qu'une famille de cycles causaux *BG-différents-génériques* impliquant les variables d'état, puisse avoir.

Approche bond graph, mineurs de la matrice système :
— *niveau d'analyse comportemental :* la proposition 4.4 page 140 est applicable aux mineurs $(n+i)\times(n+i)$ de la matrice système $\mathbf{P}(s)$ avec $n = n_I + n_D + n_\lambda$, en considérant les ensembles $\{i$ sources$\}\cup\{i$ détecteurs$\}$ appropriés :

— Pour un ensemble donné $(\mathbf{U},\mathbf{Y})$ de i chemins causaux entrée/sortie *BG-différents-génériques* entre les variables d'entrée contenues dans l'ensemble $\mathbf{U}$ de dimension i ($|\mathbf{U}| = i$) et les variables de sortie contenues dans l'ensemble $\mathbf{Y}$ de dimension i ($|\mathbf{Y}| = i$), le *degré du mineur associé*, noté $\beta_{D\,i\,(U,Y)}$, est donc donné par (4.83). *Conformément à la définition B.1, une famille $\mathcal{F}_{(U,Y)\ j}$ d'ordre $\omega_{\mathcal{F}_{(U,Y)\ j}}$ est notée $\mathcal{F}_{(U,Y),\omega_j}$.*

$$\beta_{D\,i\,(U,Y)} = n_I - \min_{\mathcal{F}_{(U,Y),\omega_j}} \left\{\omega_j \mid \rho^{(U,Y)}_{\omega_j} \neq 0\right\} \tag{4.83}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

— Le *degré le plus élevé des mineurs d'ordre* $(n+i)$ *de* $\mathbf{P}(s)$, $\beta_{D\,i}$, est donné par l'ordre minimal $\omega_i = k_{min\,i}$ qu'une famille $\mathcal{F}_{\{i\}\ j}$ de i chemins causaux entrée/sortie *BG-différents-génériques* puisse avoir parmi tous les ensembles $(\mathbf{U},\mathbf{Y})$ possibles telle que $|\mathbf{U}| = |\mathbf{Y}| = i$, et que la somme des gains statiques des familles $\mathcal{F}_{(U,Y)\ j}$ associées à cet ensemble $(\mathbf{U},\mathbf{Y})$ d'ordre $\omega_{\mathcal{F}_{(U,Y)\ j}} = \omega_i = k_{min\,i}$ soit différente de zéro (*i.e.* $\rho^{\{i\}}_{k_{min\,i}} \neq 0$) :

$$\begin{aligned}
\beta_{D\,i} &= \max_{\substack{(U,Y)\subset[\![1,p]\!]^2 \\ \text{tel que } |U|=|Y|=i}} \left\{\beta_{D\,i\,(U,Y)}\right\} \\
&= \max_{\substack{(U,Y)\subset[\![1,p]\!]^2 \\ \text{tel que } |U|=|Y|=i}} \left\{ n_I - \min_{\mathcal{F}_{(U,Y)\,,\,\omega_j}} \left\{\omega_j \mid \rho^{(U,Y)}_{\omega_j} \neq 0\right\}\right\} \\
&= n_I - \min_{\substack{(U,Y)\subset[\![1,p]\!]^2 \\ \text{tel que } |U|=|Y|=i}} \left\{ \min_{\mathcal{F}_{(U,Y)\,,\,\omega_j}} \left\{\omega_j \mid \rho^{(U,Y)}_{\omega_j} \neq 0\right\}\right\} \\
&= n_I - \omega_i
\end{aligned} \tag{4.84}$$

— *niveau d'analyse BG-structurel :* la précédente assertion se décline sans analyse de gains de chemins causaux de la manière suivante : le degré le plus élevé du mineur d'ordre $(n+i)$ de $\mathbf{P}(s)$ est donné par l'ordre minimal ω_{i_s} qu'une famille de i chemins causaux entrée/sortie *BG-différents-génériques* puisse avoir.

Approche bond graph, ordre des zéros/pôles à l'infini de la matrice de transfert :

— *niveau d'analyse comportemental :* en utilisant (4.82), nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned}
t_1 &= -\beta_{D\,1} + d \\
&= -(n_I - \omega_1) + (n_I - \omega_{n_I-d}) \\
&= \omega_1 - \omega_{n_I-d} \\
\\
t_i &= -\beta_{D\,i} + \beta_{D\,i-1} \\
&= -(n_I - \omega_i) + (n_I - \omega_{i-1}) \\
&= \omega_i - \omega_{i-1}
\end{aligned} \tag{4.85}$$

— *niveau d'analyse BG-structurel :* l'équation (4.85) déclinée au niveau *BG-structurel* conduit immédiatement à (4.79).

Fin de la démonstration.

Remarque 1: nous rappelons que le niveau d'analyse *comportemental* est le même pour l'approche algébrique et l'approche bond graph. *Les notations utilisées dans les formulations bond graph des propositions 4.6 et 4.8 et les démonstrations associées sont consistantes avec celles de l'approche algébrique (équations* (4.78) *et* (4.82)*).*

Remarque 2: la considération sur le *degré le plus élevé des mineurs d'ordre* $(n+i)$ *de* $\mathbf{P}(s)$ (équation (4.84)) permet également d'étendre le calcul du *degré du mineur de* $\mathbf{P}(s)$ (noté $\beta_{D\,p}$ dans l'équation (4.63), formulée pour $p = m$) pour des systèmes non-carrés avec p sorties et m entrées, telles que $p \leq m$. Dans le cas non-carré, nous pouvons ainsi écrire le *degré le plus élevé des mineurs d'ordre* $(n+p)$ *de* $\mathbf{P}(s)$:

$$\beta_{D\,p} = n_I - \min_{\substack{U\subset[\![1,m]\!]\ ,\ Y\subset[\![1,p]\!] \\ \text{tel que } |U|=|Y|=p}} \left\{ \min_{\mathcal{F}_{(U,Y)\,,\,\omega_j}} \left\{\omega_j \mid \rho^{(U,Y)}_{\omega_j} \neq 0\right\}\right\} \tag{4.86}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Il est trivial de décliner également les mineurs d'ordre $(n+i)$ *et le* plus haut degré des mineurs d'ordre $(n+i)$ *(resp. équations* (4.83) *et* (4.84)*) au cas des systèmes non-carrés avec* $p \leq m$*. Cette déclinaison requiert simplement de différencier la dimension des ensembles d'entrées* $\mathbf{U}$ *et de sortie* $\mathbf{Y}$ *dans* (4.84) *comme cela est proposé dans* (4.86)*.*

Remarque 3: par souci de clarté, nous avons privilégié une formulation de la proposition 4.8 pour le cas $p = m$. En rapport avec la précédente remarque, la déclinaison au cas non carré où $p \leq m$ requiert simplement de différencier la dimension des ensembles d'entrées $\mathbf{U}$ et de sortie $\mathbf{Y}$.

Contrairement à la classe des systèmes réguliers traitée par Bertrand *et al.* [BSDT97] et Jardin [Jar10] ainsi que celle des systèmes singuliers issus de bond graph bicausaux (et ne possédant que des pôles à l'infini car représentant les modèles inverses de la classe précédente des systèmes réguliers linéaires) traitée par El Feki [EF11], la proposition 4.7 formulée au niveau d'analyse BG-Structurel fait déjà à ce stade intervenir la notion de *famille bond graph* (définition B.23) et non plus d'*ensembles de chemins causaux* (cas particulier de *famille bond graph* dans laquelle il n'y a pas de *cycle causal*, voir les remarques associées à la définition B.23). Cela est uniquement liée à la présence potentielle de cycles causaux d'ordre négatif dans le système (4.48), contribuant ainsi à l'ordre *minimal* dans (4.79). Dans les deux classes de système précédemment évoquées ([BSDT97, Jar10] et [EF11]), les *cycles causaux* sont nécessairement d'ordre strictement positif[12] et contribuent ainsi à nécessairement faire *augmenter* l'ordre. Ils ne sont ainsi pas introduits, pour ces deux classes de système, dans la scrutation bond graph de recherche d'ordre *minimal* au niveau d'analyse BG-Structurel.

Le cas où aucun cycle causal d'ordre négatif ne peut exister conduit donc à $\omega_{n_I-d} = 0$ dans (4.80) (et *a fortiori* $\omega_{(n_I-d)_s} = 0$ dans (4.79)). La déclinaison des propositions 4.5, 4.6, 4.7 et 4.8 dans ce cas simplifié permet de retrouver les résultats des travaux de Bertrand *et al.* [BSDT97] et Jardin [Jar10] d'une part, et ceux de El Feki [EF11] d'autre part, sur la détermination bond graph de la structure à l'infini des classes respectives de système traitées dans ces travaux :

- *cas des systèmes réguliers issus de bond graphs sans causalité dérivée [BSDT97] [Jar10] :* la structure à l'infini de cette classe de système ne contient par essence que des zéros à l'infini. Ces bond graphs ne contenant aucune causalité dérivée, les notions d'*ordre* de cycle et chemins causaux se simplifient aux notions de *longueur* de cycle et chemins causaux, respectivement. Nous pouvons ainsi vérifier :
  - au niveau d'analyse *BG-Structurel*, l'ordre des zéros à l'infini d'un système régulier sur sa représentation bond graph associée (théorème 2.12 page 63) est bien un cas particulier de la proposition 4.7,
  - au niveau d'analyse *comportemental*, l'ordre des zéros à l'infini d'un système régulier sur sa représentation bond graph associée (théorème E.2 page 321) est bien un cas particulier de la proposition 4.8.

- *cas des systèmes généralisés ne comportant que des pôles à l'infini issus de bond graph bicausaux, sans cycles causaux d'ordre négatif [EF11] :* la structure à l'infini de cette classe de système ne contient par essence que des pôles à l'infini. Nous pouvons ainsi vérifier :

12. Si la classe des systèmes réguliers traitée par Bertrand *et al.* [BSDT97] et Jardin [Jar10] ne nécessite pas plus de commentaire sur ce point, la justification concernant la classe des bond graphs bicausaux traités dans [EF11] est apportée en annexe A.3.6 page 260.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

— au niveau d'analyse *BG-Structurel*, l'ordre des pôles à l'infini de la classe des systèmes singuliers issus de modèles inverses réguliers, sur leur représentation bond graph associée (théorème 2.13 page 64) est bien un cas particulier de la proposition 4.7,
— au niveau d'analyse *comportemental*, l'ordre des pôles à l'infini (théorème E.3 page 321) est bien un cas particulier de la proposition 4.8.

Exemple 1

Reprenons dans l'exemple 1 page 145, le cas 4.16(a) :

— la fonction de transfert de ce système est donné par $T_{4.16a}(s) = s\,\dfrac{1}{1/I_d + 1/I_1 + 1/I_2}$. Sa structure à l'infini est un pôle d'ordre 1 *i.e.* $t_1 = -1$. Ceci se retrouve algébriquement avec les précédents résultats sur la matrice système et le polynôme caractéristique : $t_1 = -\beta_{D\,1} + d = -3 + 2 = -1$.
— sur le bond graph au niveau d'analyse comportemental, nous avons $\omega_{n_I - d} = 0$. Nous rappelons qu'il n'existe qu'un seul chemin causal E/S, en l'occurrence le chemin $(S_f \to I_d \to D_e)$ représenté sur la figure 4.16a, d'ordre $\omega_{\tilde{\mathcal{F}}_a} = -1$ et de gain non nul. Appliquant la proposition 4.8, nous avons donc $\omega_1 = \omega_{\tilde{\mathcal{F}}_a} = -1$. Il vient $t_1 = \omega_1 - \omega_{n_I - d} = -1 - 0 = -1$, conformément à l'approche algébrique.

Exemple 2

Reprenons dans l'exemple 2 page 148, le cas 4.19(a) :

— la fonction de transfert de ce système vaut $T_{4.19a}(s) = \dfrac{sR}{s + R/I_1 + R/I_2}$ et sa structure à l'infini est donc un zéro d'ordre 0 *i.e.* $t_1 = 0$. Ceci se retrouve algébriquement avec les précédents résultats sur la matrice système et le polynôme caractéristique : $t_1 = -\beta_{D\,1} + d = -2 + 2 = 0$.
— sur le bond graph au niveau d'analyse comportemental, nous avons $\omega_{n_I - d} = -1$ (puisque $n_I = 1$ et $d = 2$). Nous avons vu qu'il n'existe pour ce modèle qu'un seul chemin causal entrée/sortie en l'occurrence le chemin $(S_f \to I_2 \to D_e)$ représenté sur la figure 4.19a, d'ordre $\omega_{\tilde{\mathcal{F}}_a} = -1$ et de gain non nul. Appliquant la proposition 4.8, nous avons donc $\omega_1 = \omega_{\tilde{\mathcal{F}}_a} = -1$. Il vient $t_1 = \omega_1 - \omega_{n_I - d} = -1 - (-1) = 0$, conformément à l'approche algébrique.

Pour le cas 4.19(b) de l'exemple 2 page 148 :

— nous avons $T_{4.19b} = \dfrac{RI_1}{sI_1I_2 + I_1R + I_2R}$. La structure à l'infinie de $\mathbf{T}_{4.19b}$ est un zéro à l'infini d'ordre 1, *i.e.* $t_1 = 1$, qui se retrouve algébriquement avec les précédents résultats : $t_1 = -\beta_{D\,1} + d = -1 + 2 = 1$.
— sur le bond graph au niveau d'analyse comportemental, nous rappelons qu'il existe cinq familles bond graph formées chacune d'un chemin chemin causal entrée/sortie. Les familles $\tilde{\mathcal{F}}_{b_a}$ et $\tilde{\mathcal{F}}_{b_b}$ (figure 4.24) sont d'ordre -1 et forment ainsi l'ensemble $\mathbb{F}_{(u,y)\,,-1}$ et les familles $\tilde{\mathcal{F}}_{b_c}$, $\tilde{\mathcal{F}}_{b_d}$ et $\tilde{\mathcal{F}}_{b_e}$ (figure 4.25) sont d'ordre 0 et forment l'ensemble $\mathbb{F}_{(u,y)\,,0}$. Calculons $\rho_{-1}^{(u,y)}$, somme des gains statiques de $\mathbb{F}_{(u,y)\,,-1}$. Nous avons $\rho_{-1}^{(u,y)} = -\dfrac{I_2}{R} + \dfrac{I_2}{R} = 0$. D'autre part, la somme des gains statiques de $\mathbb{F}_{(u,y)\,,0}$ est $\rho_0^{(u,y)} = 1 + \dfrac{I_2}{I_1} - \dfrac{I_2}{I_1} = 1 \neq 0$. Appliquant la proposition 4.8, nous avons donc $\omega_1 = 0$. Il vient $t_1 = \omega_1 - \omega_{n_I - d} = 0 - (-1) = 1$, conformément à l'approche algébrique.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Les précédents exemples sont réduits au simple cas SISO *par souci de simplicité. D'autres exemples plus complets relatifs à cette section seront proposés conjointement avec ceux associés aux ordres d'essentialité généralisés en section 4.6 page 164.*

4.5.2 Détermination du degré des transmittances de $\mathbf{T}(s)$

En utilisant l'expression de la somme des ordres des zéros/pôles à l'infini (4.78) du système (4.1) et les démonstrations associées aux propositions 4.7 et 4.8, il est possible de décliner la procédure suivante (lemme 4.9). *Notons que nous ne particularisons pas ici le modèle. La procédure est applicable pour un modèle* direct *ou* inverse *sur la matrice de transfert associée, respectivement* $\mathbf{T}(s)$ *et* $\mathbf{T}^{-1}(s)$.

Lemme 4.9

(Degré d'une transmittance $t_{ij}(s)$ ***de la matrice de transfert d'un système singulier sur sa représentation bond graph associée)*** *Sur le modèle bond graph représentant le système singulier (4.48), le degré* $\delta_{D\,1\,(u_i,y_j)}$ *de la transmittance* $t_{ij}(s)$ *entre l'entrée* u_i *et la sortie* y_j *peut être déterminé de la manière suivante :*

$$\delta_{D\,1\,(u_i,y_j)} \triangleq \deg\left(t_{ij}(s)\right) = -\min_{\mathcal{F}_{(u_i,y_j)\,,\,\omega_k}} \left\{\omega_k \mid \rho_{\omega_k}^{(u_i,y_j)} \neq 0\right\} + \omega_{n_I-d} \tag{4.87}$$

où :

- $\mathcal{F}_{(u_i,y_j)\ \omega_k}$ *est la* $k^{ième}$ *famille bond graph (définition B.23) d'ordre* ω_k *(définition B.26), contenant exactement* 1 *chemin causal entre l'entrée* u_i *et la sortie* y_j*, où seuls les cycles et le chemin impliquant les variables* exposées dans la représentation d'état (4.48) *sont considérés,*
- $\mathbb{F}_{(u_i,y_j)\ \omega_k}$ *est l'ensemble des familles* $\mathcal{F}_{(u_i,y_j)\ \omega_k}$ *(définition B.5),*
- $\rho_{\omega_k}^{(u_i,y_j)}$ *est la somme des gains statiques de* $\mathbb{F}_{(u_i,y_j)\ \omega_k}$ *dans laquelle le gain statique de chaque famille* $\mathcal{F}_{(u_i,y_j)\ \omega_k}$ *doit être multiplié par un facteur* $(-1)^{n_D+n_\lambda-d_j}$*, où* n_D *et* n_λ *sont respectivement le nombre d'éléments de stockage en causalité dérivée et le nombre de variables de puissance choisies dans le vecteur d'état de (4.48), et* d_j *est le nombre de* cycles causaux BG-différents-génériques *contenus dans la famille* $\mathcal{F}_{(u_i,y_j)\ \omega_k}$*,*
- ω_{n_I-d} *représente l'ordre minimal qu'une famille des seuls cycles causaux* BG-différents-génériques *(définition B.18) impliquant les variables d'état puisse avoir, telle que la somme des gains statiques des familles d'ordre* ω_{n_I-d} *soit différente de zéro.*

Démonstration :

- En utilisant l'expression (4.83) page 157 réduite à une entrée u_i et une sortie y_j, le *degré du mineur associé* de la matrice système, que nous noterons ici $\beta_{D\,1\,(u_i,y_j)}$ est donné par l'ordre minimal k_{min} qu'une famille $\mathcal{F}_{(u_i,y_j)\ \omega_k}$ (d'ordre ω_k) de 1 chemin causal *BG-différent-générique* $u_i \rightarrow y_j$ puisse avoir, telle que la somme des gains statiques de l'ensemble des familles d'ordre égal à k_{min} soit différente de zéro ($\rho_{k_{min}}^{\{u_i,y_j\}} \neq 0$), soit donc :

$$\beta_{D\,1\,(u_i,y_j)} = n_I - \min_{\mathcal{F}_{(u_i,y_j)\,,\,\omega_k}} \left\{\omega_k \mid \rho_{\omega_k}^{(u_i,y_j)} \neq 0\right\} \tag{4.88}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

— L'équation (4.78) et le théorème 3.10 page 94 permettent d'écrire le degré de la transmittance $t_{ij}(s)$ *i.e.* le degré du mineur d'ordre 1 associé au couple $\{u_i, y_j\}$ de (4.88), noté $\delta_{D\,1\,(u_i,y_j)} \triangleq \deg(t_{ij}(s))$:

$$\begin{aligned}
\delta_{D\,1\,(u_i,y_j)} &= \beta_{D\,1\,(u_i,y_j)} - d \\
&= \left(n_I - \min_{\mathcal{F}_{(u_i,y_j)\,,\,\omega_k}} \left\{ \omega_k \mid \rho_{\omega_k}^{(u_i,y_j)} \neq 0 \right\} \right) - (n_I - \omega_{n_I-d}) \\
&= - \min_{\mathcal{F}_{(u_i,y_j)\,,\,\omega_k}} \left\{ \omega_k \mid \rho_{\omega_k}^{(u_i,y_j)} \neq 0 \right\} + \omega_{n_I-d}
\end{aligned} \tag{4.89}$$

Fin de la démonstration.

Remarque 1: nous présentons ici une formulation générique du lemme 4.9, consistante avec les propositions 4.7 et 4.8 et les quantités manipulées. La scrutation opérée au lemme 4.9 pourrait se simplifier en raison de la présence de mêmes cycles causaux *BG-Différents-génériques* contribuant à la quantité ω_k et la quantité ω_{n_I-d}.

Remarque 2: le lemme 4.9 est consistant avec la procédure de détermination du degré relatif n_i' sur le modèle direct dans le cas *régulier* (cette procédure est présentée en section 2.3.4.1 page 65 et la déclinaison au niveau d'analyse comportemental que nous évoquons ici est présentée en annexe E, théorème E.4 page 323). En effet, ce dernier est défini comme l'ordre du *zéro à l'infini par ligne* de $T(s)$ alors que le présent lemme 4.9 qualifie un degré de transmittance (d'où la différence de signe entre les deux procédures), en rappelant que pour un système *régulier*, nous avons $\omega_{n_I-d} = 0$. Le lemme 4.9 est également consistant avec la procédure de détermination de l'ordre d'essentialité sur $\mathbf{T}^{-1}(s)$ (voir section 2.3.4.4 page 67 et la déclinaison que nous évoquons ici à l'annexe E, théorème E.6 page 325). La généralisation du théorème E.6 aux systèmes singuliers est proposée en section 4.6.2 page 167, propositions 4.12 et 4.13.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Exemple 1

Reprenons le bond graph de la figure 4.16(a) page 145 :

- la fonction de transfert de ce système a été précédemment donnée, $T_{4.16a}(s) = s\,\dfrac{1}{1/I_d + 1/I_1 + 1/I_2}$ et présente un degré $\delta_{D\,1\,(u,y)_{(a)}} = 1$. Sur le bond graph, la figure 4.16a précise l'unique chemin causal ⓚ d'ordre $\omega_{u\to y} = -1$ qu'il puisse y avoir entre l'entrée u et la sortie y. Il existe deux cycles causaux d'ordre 0 (comme vus en table 4.1 page 122), non *BG-différent-générique* entre eux et avec le chemin causal ⓚ. Ils n'interviennent dès lors ni l'un ni l'autre dans la constitution de l'unique famille $\mathcal{F}_{(u,y)\ \omega_k}$, et donc $\omega_k = \min\{\omega_{u\to y}\} = -1$. *Dans ce cas très simple, la* famille *ne contient pas de cycle causal et est donc équivalente à un* ensemble *de chemin causaux, en l'occurrence* 1 *seul chemin,* ⓚ *(voir définition B.23 page 266).*
- la quantité ω_{n_I-d} est nulle,
- la déclinaison du lemme 4.9 donne donc $\delta_{D\,1\,(u,y)_{(a)}} = -(-1) + 0 = 1$, conformément à l'approche algébrique.

Exemple 2

Reprenons le bond graph de la figure 4.19(a) page 148 :

- nous rappelons que $T_{4.19a}(s) = \dfrac{sR}{s + R/I_1 + R/I_2}$, soit donc $\delta_{D\,1\,(u,y)_{(a)}} = 0$. Sur le bond graph, la figure 4.19a précise l'unique chemin causal ⓖ d'ordre $\omega_{u\to y} = -1$ entre l'entrée u et la sortie y. Dans cet exemple, il existe également deux cycles causaux d'ordre respectif -1 et 0 (comme vus en table 4.3 page 125), non *BG-différent-générique* l'un avec l'autre et avec le chemin causal ⓖ. Ils n'interviennent dès lors ni l'un ni l'autre dans la constitution de l'unique famille $\mathcal{F}_{(u,y)\ \omega_g}$, et donc $\omega_g = \min\{\omega_{u\to y}\} = -1$.
- nous avons $\omega_{n_I-d} = -1$ dû au cycle causal d'ordre négatif $\{R, I_2\}$,
- le lemme 4.9 conduit donc à $\delta_{D\,1\,(u,y)_{(a)}} = -(-1) + (-1) = 0$, conformément à l'approche algébrique.

Pour le cas 4.19(b) page 148 :

- nous rappelons que nous avons $T_{4.19b} = \dfrac{RI_1}{sI_1I_2 + I_1R + I_2R}$, soit donc $\delta_{D\,1\,(u,y)_{(b)}} = -1$ et qu'il existe dans le présent cas cinq familles bond graph formées chacune d'un chemin chemin causal entrée/sortie. Les familles $\tilde{\mathcal{F}}_{b_a}$ et $\tilde{\mathcal{F}}_{b_b}$ (figure 4.24) sont d'ordre -1 et forment ainsi l'ensemble $\mathbb{F}_{(u,y)\,,-1}$ et les familles $\tilde{\mathcal{F}}_{b_c}$, $\tilde{\mathcal{F}}_{b_d}$ et $\tilde{\mathcal{F}}_{b_e}$ (figure 4.25) sont d'ordre 0 et forment l'ensemble $\mathbb{F}_{(u,y)\,,0}$. Nous avons détaillé à l'exemple 2 page 160 la somme des gains statiques de ces deux ensembles, $\rho_{-1}^{(u,y)} = 0$ et $\rho_0^{(u,y)} \neq 0$.
- nous avons vu que $\omega_{n_I-d} = -1$, et ainsi,
- le lemme 4.9 conduit donc à $\delta_{D\,1\,(u,y)_{(b)}} = 0 + (-1) = -1$, conformément à l'approche algébrique.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

4.6 Ordres d'essentialité généralisés

4.6.1 Détermination des ordres d'essentialité généralisés sur le bond graph associé à un modèle direct singulier

Nous proposons de déterminer dans cette section les *ordres d'essentialité généralisés* sur le modèle bond graph représentant le système singulier (4.48) page 139. Cette détermination est basée sur l'approche algébrique mise en place au chapitre 3 section 3.5 page 96 (définition 3.7, proposition 3.2 et lemme 3.3). Nous utilisons les propositions 4.5 page 154 et 4.6 page 155 ainsi que les propositions 4.7 et 4.8 page 156, pour respectivement calculer le *nombre* et l'*ordre* des zéros/pôles à l'infini du système singulier sur le bond graph associé, suivant les différents niveaux d'analyse (*BG-structurel* ou *comportemental* suivant la classification de JARDIN [Jar10], voir chapitre 1, section 1.4.4 page 32).

Proposition 4.10

(Ordres d'essentialité généralisés d'un système direct singulier sur sa représentation bond graph associée - niveau d'analyse BG-Structurel) *Sur le modèle bond graph représentant le système singulier (4.48) supposé inversible, l'ordre d'essentialité généralisé BG-structurel n_{BG-s,ie_g} de la sortie y_i peut être déterminé de la manière suivante :*

$$\begin{aligned} n_{BG-s,ie_g} &= \omega_{1_s} - \omega_{(n_I-d)_s} \quad , \quad \text{si p} = 1 \text{ (1 sortie)} \\ n_{BG-s,ie_g} &= \omega_{p_s} - \omega^{(i)}_{p-1_s} \quad , \quad \text{si p} > 1 \end{aligned} \tag{4.90}$$

où :

- $\omega_{(n_I-d)_s}$ *représente l'ordre minimal qu'une famille des seuls cycles causaux* BG-différents-génériques *(définition B.18) impliquant les variables d'état de (4.48) puisse avoir,*
- ω_{p_s} *représente l'ordre minimal que peut avoir une famille bond graph (définition B.23) d'exactement p chemins causaux entrée/sortie* BG-différents-génériques *(définition 4.2) et où seuls les chemins et cycles impliquant les variables* exposées dans la représentation d'état (4.48) *sont considérés,*
- $\omega^{(i)}_{p-1_s}$ *représente l'ordre minimal que peut avoir une famille bond graph (définition B.23) d'exactement $p-1$ chemins causaux entrée/sortie* BG-différents-génériques *(définition 4.2) où seuls les chemins et cycles impliquant les variables* exposées dans la représentation d'état (4.48) *sont considérés, sans tenir compte de la $i^{ième}$ sortie.*

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Proposition 4.11

(Ordres d'essentialité généralisés d'un système direct singulier sur sa représentation bond graph associée - niveau d'analyse comportemental) *Sur le modèle bond graph représentant le système singulier (4.48) supposé inversible, l'ordre d'essentialité généralisé n_{ie_g} de la sortie y_i peut être déterminé de la manière suivante :*

$$\begin{aligned} n_{ie_g} &= \omega_1 - \omega_{n_I-d} \quad , \quad \text{si p} = 1 \text{ (1 sortie)} \\ n_{ie_g} &= \omega_p - \omega_{p-1}^{(i)} \quad , \quad \text{si p} > 1 \end{aligned} \tag{4.91}$$

où sur le modèle bond graph,

$$\omega_p = \min_{\mathcal{F}_{\{p\}\,,\,\omega_j}} \left\{ \omega_j \mid \rho_{\omega_j}^{\{p\}} \neq 0 \right\} \tag{4.92}$$

et sur le modèle bond graph sans considération de sa $i^{ième}$ sortie,

$$\omega_{p-1}^{(i)} = \min_{\substack{U^{(i)} \subset [\![1,p]\!]\setminus\{i\}, Y^{(i)} \subset [\![1,p]\!]\setminus\{i\} \\ \text{tel que } |U^{(i)}|=|Y^{(i)}|=p-1}} \left\{ \min_{\mathcal{F}_{(U^{(i)},Y^{(i)})\,,\,\omega_j}} \left\{ \omega_j \mid \rho_{\omega_j}^{(U^{(i)},Y^{(i)})} \neq 0 \right\} \right\} \tag{4.93}$$

où :

- *p est le nombre de sorties (et d'entrées),*
- *ω_{n_I-d} représente l'ordre minimal qu'une famille des seuls cycles causaux* BG-différents-génériques *(définition B.18) impliquant les variables d'état puisse avoir, telle que la somme des gains statiques des familles d'ordre ω_{n_I-d} soit différente de zéro,*
- *$\mathcal{F}_{(U,Y)\,,\,\omega_j}$ (resp. $\mathcal{F}_{(U^{(i)},Y^{(i)})\,,\,\omega_j}$, sans considération de la $i^{ième}$ sortie) est la $j^{ième}$ famille bond graph (définition B.1) contenant exactement p (resp. p−1) chemins causaux entrée/sortie* BG-différents-génériques *(définition 4.2), où seuls les chemins et les cycles impliquant les variables* exposées dans la représentation d'état (4.48) *sont considérés, les chemins étant entre les variables d'entrée contenues dans l'ensemble* $\mathbf{U}$ *de dimension p (resp.* $\mathbf{U}^{(i)}$ *de dimension $p-1$) et les variables de sortie contenues dans l'ensemble* $\mathbf{Y}$ *de dimension p (resp.* $\mathbf{Y}^{(i)}$ *de dimension $p-1$)* ***et*** *d'ordre ω_j (définition B.26),*
- *$\mathbb{F}_{(U,Y)\,,\,\omega_j}$ (resp. $\mathbb{F}_{(U^{(i)},Y^{(i)})\,,\,\omega_j}$) est l'ensemble des familles $\mathcal{F}_{(U,Y)\,,\,\omega_j}$ (resp. $\mathcal{F}_{(U^{(i)},Y^{(i)})\,,\,\omega_j}$) (définition B.5),*
- *$\rho_{\omega_j}^{(U,Y)}$ (resp. $\rho_{\omega_j}^{(U^{(i)},Y^{(i)})}$) est la somme des gains statiques de $\mathbb{F}_{(U,Y)\,,\,\omega_j}$ (resp. $\mathbb{F}_{(U^{(i)},Y^{(i)})\,,\,\omega_j}$) dans laquelle le gain statique de chaque famille doit être multiplié par :*
  - *un facteur $(-1)^{n_D+n_\lambda-d_j}$, où n_D et n_λ sont respectivement le nombre d'éléments de stockage en causalité dérivée et le nombre de variables de puissance choisies dans le vecteur d'état de (4.48), et d_j est le nombre de* cycles causaux BG-différents-génériques *contenus dans la famille $\mathcal{F}_{(U,Y)\,,\,\omega_j}$ (resp. $\mathcal{F}_{(U^{(i)},Y^{(i)})\,,\,\omega_j}$),*
  - *un facteur $(-1)^{\sigma_j}$, où σ_j est le nombre de permutations nécessaires pour ordonner les p (resp. $p-1$) sorties de la famille $\mathcal{F}_{(U,Y)\,,\,\omega_j}$ (resp. $\mathcal{F}_{(U^{(i)},Y^{(i)})\,,\,\omega_j}$) dans l'ordre initial des sorties, lorsque les p (resp. $p-1$) chemins causaux sont ordonnés dans l'ordre initial des entrées.*

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Démonstration des propositions 4.10 et 4.11 :

Approche algébrique : en utilisant les notations suivantes,
— $\beta_{D\,p}$ le *degré du déterminant de la matrice système* $\mathbf{P}(s)$ (*i.e. degré du mineur d'ordre* $(n+p)$ *de* $\mathbf{P}(s)$, avec $n = n_I + n_D + n_\lambda$,
— $\beta^{(i)}_{D\,p-1}$ le *degré du mineur d'ordre* $(n+(p-1))$ *de* $\mathbf{P}^{(i)}(s)$, où $\mathbf{P}^{(i)}(s)$ est la *matrice système* du sous-système obtenu en supprimant sa $i^{ième}$ sortie,

et en utilisant le lemme 3.3 page 105 et l'équation (4.78) page 154, nous pouvons écrire pour la sortie i :

$$\begin{array}{rcccc} n_{ie_g} & = & \sum_{j=1}^{p} t_j & - & \sum_{j=1}^{p-1} \bar{t}_{ij} \\ & = & (-\beta_{D\,p} + d) & - & \left(-\beta^{(i)}_{D\,p-1} + d\right) \end{array} \tag{4.94}$$

Approche bond graph : utilisant les propositions 4.7 et 4.8 et leurs démonstrations respectives (équations (4.82) et (4.85) ainsi que la formulation (4.84) page 158), nous pouvons décliner les considérations suivantes par niveau d'analyse :

— *niveau d'analyse comportemental :*

$$\begin{aligned} n_{ie_g} &= (-\beta_{D\,p} + d) - (-\beta^{(i)}_{D\,p-1} + d) \\ &= (-(n_I - \omega_p) + (n_I - \omega_{n_I-d})) - (-(n_I - \omega^{(i)}_{p-1}) + (n_I - \omega_{n_I-d})) \\ &= \omega_p - \omega^{(i)}_{p-1} \end{aligned} \tag{4.95}$$

et $n_{ie_g} = \omega_1 - \omega_{n_I-d}$ dans le cas particulier où $p = 1$.

— *niveau d'analyse BG-structurel :* l'équation (4.95) et les considérations associées déclinées au niveau *BG-structurel* conduisent immédiatement à la proposition 4.10.

Fin de la démonstration.

Remarque 1: les propositions 4.10 et 4.11 précisent que le système singulier doit être inversible. Dans le cas contraire, la notion d'*ordre d'essentialité généralisé* n'a pas de sens.

Remarque 2: la spécificité du cas $p = 1$ a été illustrée à travers les exemples SISO 1 et 2 page 160, avec respectivement $\omega_{n_I-d} = 0$ pour l'exemple 1 et $\omega_{n_I-d} \neq 0$ pour l'exemple 2 (en notant que dans ces deux exemples, nous avons $n_{1e_g} = t_1$).

La détermination de l'*ordre d'essentialité généralisé* sur le bond graph (propositions 4.10 et 4.11) généralise les travaux de Bertrand *et al.* [BSDT97] et Jardin [Jar10] sur un modèle direct (théorèmes 2.16 page 66 et E.5 page 324) en l'étendant aux systèmes singuliers.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

4.6.2 Détermination des ordres d'essentialité généralisés sur le bond graph associé à un modèle inverse singulier

Nous proposons de déterminer dans cette section les *ordres d'essentialité généralisés* sur le modèle bond graph représentant le système *inverse* singulier (4.96), équivalent au système (4.48) page 139, où la seule différence réside dans le jeu d'entrées/sorties et d'états considérés dans (4.96) (s'agissant donc pour ce dernier de ceux du modèle inverse).

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_I & \mathbf{E}_{ID} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{\lambda D} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{I_{inv}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_{D_{inv}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_{\lambda_{inv}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_I & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{I\lambda} \\ \mathbf{A}_{DI} & \mathbf{I}_D & \mathbf{A}_{D\lambda} \\ \mathbf{A}_{\lambda I} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_\lambda + \mathbf{A}_\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{I_{inv}}(t) \\ \mathbf{x}_{D_{inv}}(t) \\ \mathbf{x}_{\lambda_{inv}}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_I \\ \mathbf{B}_D \\ \mathbf{B}_\lambda \end{pmatrix} \mathbf{u}_{inv}(t)$$

$$\mathbf{y}_{inv}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_I & \mathbf{C}_D \dfrac{d(\cdot)}{dt} & \mathbf{C}_\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{I_{inv}}(t) \\ \mathbf{x}_{D_{inv}}(t) \\ \mathbf{x}_{\lambda_{inv}}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{D} \end{pmatrix} \mathbf{u}_{inv}(t) \tag{4.96}$$

Cette détermination est basée sur l'approche algébrique mise en place au chapitre 3, section 3.5 page 96 (définition 3.7 page 101). Nous utilisons ici le calcul du degré d'une transmittance d'une matrice de transfert (lemme 4.9 page 161) appliqué à la matrice de transfert $\mathbf{T}^{-1}(s)$ du modèle inverse d'un système singulier, sur sa représentation bond graph associée. Comme dans le cas direct 4.6.1, nous formulons ces propositions suivant les différents niveaux d'analyse (*i.e.* niveau d'analyse *BG-structurel* ou *comportemental* suivant la classification de Jardin [Jar10]).

Proposition 4.12

(Ordres d'essentialité généralisés d'un système inverse singulier sur sa représentation bond graph associée - niveau d'analyse BG-Structurel) *Sur le modèle bond graph représentant le système inverse singulier (4.96), l'ordre d'essentialité généralisé n_{BG-s,ie_g} de la sortie y_i peut être déterminé de la manière suivante :*

$$n_{BG-s,ie_g} = -\min_{j\in\{1,p\}} \left\{ \min_{\mathcal{F}_{(y_i,u_j)},\omega_k} \{\omega_k\} \right\} + \omega_{(n_I-d)_s} \tag{4.97}$$

où :

- *p est le nombre de sorties (et d'entrées),*
- *$\omega_{(n_I-d)_s}$ représente l'ordre minimal qu'une famille des seuls cycles causaux* BG-différents-génériques *(définition B.18) impliquant les variables d'état de (4.96) puisse avoir,*
- *$\mathcal{F}_{(u_i,y_j)\ \omega_k}$ est la $k^{ième}$ famille bond graph (définition B.23) d'ordre ω_k (définition B.26), contenant exactement 1 chemin causal entre la sortie y_i et l'entrée u_j, où seuls les cycles et le chemin impliquant les variables* exposées dans la représentation d'état *(4.96) sont considérés.*

Proposition 4.13

(Ordres d'essentialité généralisés d'un système inverse singulier sur sa représentation bond graph associée - niveau d'analyse comportemental) *Sur le modèle bond graph représentant le système inverse singulier (4.96), l'ordre d'essentialité généralisé n_{ie_g} de la sortie y_i peut être déterminé de la manière sui-*

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

vante :

$$n_{ie_g} = -\min_{j\in\{1,p\}}\left\{\min_{\mathcal{F}_{(y_i,u_j)\,,\,\omega_k}}\left\{\omega_k \mid \rho_{\omega_k}^{(y_i,u_j)} \neq 0\right\}\right\} + \omega_{n_I-d} \tag{4.98}$$

où :

- p *est le nombre de sorties (et d'entrées),*
- ω_{n_I-d} *représente l'ordre minimal qu'une famille des seuls cycles causaux* BG-différents-génériques *(définition B.18) impliquant les variables d'état de (4.96) puisse avoir, telle que la somme des gains statiques des familles d'ordre* ω_{n_I-d} *soit différente de zéro,*
- $\mathcal{F}_{(u_i,y_j)\ \omega_k}$ *est la* $k^{ième}$ *famille bond graph (définition B.23) d'ordre* ω_k *(définition B.26), contenant exactement* 1 *chemin causal entre la sortie* y_i *et l'entrée* u_j*, où seuls les cycles et le chemin impliquant les variables* exposées dans la représentation d'état (4.96) *sont considérés,*
- $\mathbb{F}_{(y_i,u_j)\ \omega_k}$ *est l'ensemble des familles* $\mathcal{F}_{(y_i,u_j)\ \omega_k}$ *(définition B.5),*
- $\rho_{\omega_k}^{(y_i,u_j)}$ *est la somme des gains statiques de* $\mathbb{F}_{(y_i,u_j)\ \omega_k}$ *dans laquelle le gain statique de chaque famille* $\mathcal{F}_{(y_i,u_j)\ \omega_k}$ *doit être multiplié par un facteur* $(-1)^{n_D+n_\lambda-d_j}$*, où* n_D *et* n_λ *sont respectivement le nombre d'éléments de stockage en causalité dérivée et le nombre de variables de puissance choisies dans le vecteur d'état de (4.96), et* d_j *est le nombre de* cycles causaux BG-différents-génériques *contenus dans la famille* $\mathcal{F}_{(y_i,u_j)\ \omega_k}$*.*

Démonstration des propositions 4.12 et 4.13 :

Appliqué à $\mathbf{T}^{-1}(s)$, le lemme 4.9 page 161 permet la détermination bond graph du degré d'une transmittance de cette matrice de transfert, que nous notons ici $t_{inv\,ij}(s)$, entre la variable de sortie y_i et la variable d'entrée u_j (sous-entendu sur le bond graph inverse). En utilisant par ailleurs la définition 3.5 page 97, nous pouvons écrire :

- *niveau d'analyse comportemental :*

$$\begin{aligned} n_{ie_g} &= \max_{j\in\{1,p\}} \left\{\deg\left(t_{inv\,ij}(s)\right)\right\} \\ &= \max_{j\in\{1,p\}} \left\{-\min_{\mathcal{F}_{(y_i,u_j)\,,\,\omega_k}}\left\{\omega_k \mid \rho_{\omega_k}^{(y_i,u_j)} \neq 0\right\} + \omega_{n_I-d}\right\} \\ &= -\min_{j\in\{1,p\}} \left\{\min_{\mathcal{F}_{(y_i,u_j)\,,\,\omega_k}}\left\{\omega_k \mid \rho_{\omega_k}^{(y_i,u_j)} \neq 0\right\}\right\} + \omega_{n_I-d} \end{aligned} \tag{4.99}$$

- *niveau d'analyse BG-Structurel :* l'équation (4.99) se décline directement, sans considérations sur les gains statiques des familles $\mathcal{F}_{(y_i,u_j)\ \omega_k}$, en l'équation (4.97).

Fin de la démonstration.

Remarque 1: en rappelant que la quantité ω_{n_I-d} est nécessairement négative, la formulation (4.98) permet de retrouver la nature même de l'ordre d'un zéro/pôle à l'infini

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

par colonne (définition 3.5 page 97) intervenant dans la caractérisation de l'ordre d'essentialité généralisé (définition 3.7 page 101) :

— si la famille $\mathcal{F}_{(y_i,u_j),\omega_k}$ d'ordre minimal $\omega_k = k_{min}$ est d'ordre négatif, elle conduit à caractériser l'ordre *maximal* de *dérivation* (atteint) de la sortie y_i (en notant alors que si $\omega_k < \omega_{n_I-d}$, alors $n_{ie_g} > 0$ et correspond effectivement à l'ordre de dérivation *maximal*).

— si la famille $\mathcal{F}_{(y_i,u_j),\omega_k}$ d'ordre minimal $\omega_k = k_{min}$ est d'ordre positif, elle conduit à caractériser l'ordre *minimal* d'*intégration* de la sortie y_i (en notant alors que nécessairement $n_{ie_g} < 0$).

(le cas $n_{ie_g} = 0$ indique que de manière certaine la sortie n'est pas dérivée mais peut potentiellement être intégrée *i.e.* peut être associé au cas $n_{ie_g} < 0$).

Remarque 2: dans le cas d'inversion de systèmes appartenant à la classe traitée dans la thèse de Jardin [Jar10] (*i.e.* bond graph sans causalité dérivée aboutissant à des systèmes LTI réguliers ne possédant par essence que des zéros à l'infini), les propositions 4.12 et 4.13 se simplifient aux théorèmes formulés dans la thèse de El Feki [EF11] exposés au chapitre 2 (respectivement les théorèmes 2.17 page 67 et E.6 page 325 suivant le niveau d'analyse).

4.6.3 Exemple de synthèse : système singulier représenté par un modèle bond graph bicausal

4.6.3.1 Modèle bond graph direct et représentation d'état singulière associée

Soit le modèle bond graph bicausal de la figure 4.26, comprenant $m = 2$ entrées, u_1 et u_2, et $p = 2$ sorties, y_1 et y_2. En utilisant la procédure D.1 page 307, le modèle s'écrit

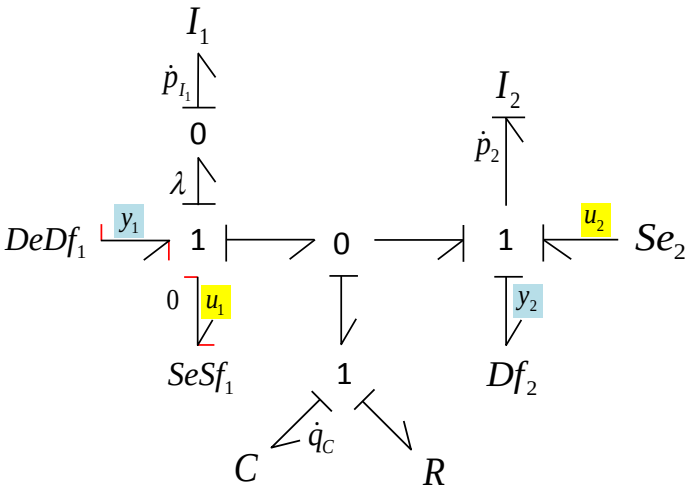


Figure 4.26 – Exemple d'un bond graph bicausal représentant un système direct singulier

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

sous la forme du système singulier (4.100).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_{I_2} \\ \dot{q}_C \\ \dot{p}_{I_1} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{I_2} & \frac{1}{C} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{I_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{I_2} \\ q_C \\ p_{I_1} \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R & 1 \\ 1 & 0 \\ -I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{I_2} & \frac{1}{C} & 0 & 1 \\ \frac{1}{I_2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{I_2} \\ q_C \\ p_{I_1} \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{4.100}$$

En nous basant sur cette dernière représentation, la matrice de transfert $\mathbf{T}(s)$ rationnelle du système est la suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s\left(CI_1I_2s^2 + CI_1Rs + CI_2Rs + I_1 + I_2\right)}{CI_2s^2 + CRs + 1} & -\frac{CRs + 1}{CI_2s^2 + CRs + 1} \\ \frac{CRs + 1}{CI_2s^2 + CRs + 1} & \frac{sC}{CI_2s^2 + CRs + 1} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.101}$$

4.6.3.2 Détermination des ordres d'essentialité généralisés : approche algébrique

La matrice de transfert inverse $\mathbf{T}^{-1}(s)$ est donnée en (4.102). La structure à l'infini par colonne (définition 3.5 page 97) appliquée à $\mathbf{T}^{-1}(s)$ nous conduit à conclure que les ordres d'essentialité généralisés (définition 3.7 page 101) de $\mathbf{T}(s)$ sont respectivement :

— $n_{1e_g} = -1$ (en d'autres termes, la *structure à l'infini de la première colonne* de $\mathbf{T}^{-1}(s)$ est un zéro à l'infini, d'ordre 1).

— $n_{2e_g} = 1$ (en d'autres termes, la *structure à l'infini de la deuxième colonne* de $\mathbf{T}^{-1}(s)$ est un pôle à l'infini, d'ordre 1).

$$\mathbf{T}^{-1}(s) = \begin{bmatrix} \frac{sC}{CI_1s^2 + CRs + 1} & \frac{CRs + 1}{CI_1s^2 + CRs + 1} \\ -\frac{CRs + 1}{CI_1s^2 + CRs + 1} & \frac{s\left(CI_1I_2s^2 + CI_1Rs + CI_2Rs + I_1 + I_2\right)}{CI_1s^2 + CRs + 1} \end{bmatrix} \tag{4.102}$$

La proposition 3.2 page 102 et le lemme 3.3 page 105 permettent également la détermination algébrique des ordres d'essentialité généralisés directement sur $\mathbf{T}(s)$, par analyse de sa structure à l'infini et de celles de ses sous-matrices $\mathbf{T}_i(s)$. Nous détaillons cette détermination pour la comparer ensuite à l'approche bond graph :

1. Détermination des zéros/pôles à l'infini de $\mathbf{T}(s)$ à partir des degrés de ses mineurs.
   (a) *Calcul de t_1 de $\mathbf{T}(s)$ à partir de ses mineurs d'ordre 1 :* de (4.101), nous pouvons conclure que le plus haut degré des mineurs d'ordre 1 de $\mathbf{T}(s)$ est $\delta_{D\ 1} = +1$. Nous avons donc $t_1 = -\ \delta_{D\ 1} = -1$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

(b) *Calcul de t_2 de $\mathbf{T}(s)$ à partir de ses mineurs d'ordre 2 :* le mineur d'ordre 2 de $\mathbf{T}(s)$ est $\det \mathbf{T}(s) = \frac{CI_1s^2+CRs+1}{CI_2s^2+CRs+1}$. Son degré est $\delta_{D\ 2} = 0$. Nous avons ainsi $\sum_{j=1}^{2} t_j = -\ \delta_{D\ 2} = 0$ et donc $t_2 = 1$.

2. Détermination de la structure à l'infini des sous-matrices $\mathbf{T}_i(s)$.

(a) *Structure à l'infini de $\mathbf{T}_1(s)$:* la sous-matrice $\mathbf{T}_1(s)$, obtenue à partir de $\mathbf{T}(s)$ en supprimant sa première ligne, est définie par :

$$\mathbf{T}_1(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{CRs+1}{CI_2s^2+CRs+1} & \dfrac{sC}{CI_2s^2+CRs+1} \end{bmatrix} \tag{4.103}$$

Sa structure à l'infini est donc sa *structure à l'infini par ligne*, en l'occurrence un zéro à l'infini d'ordre 1. Nous avons donc $\sum_{j=1}^{2-1} \bar{t}_{1j} = \bar{t}_{11} = 1$.

(b) *Structure à l'infini de $\mathbf{T}_2(s)$:* la sous-matrice $\mathbf{T}_2(s)$, obtenue à partir de $\mathbf{T}(s)$ en supprimant sa seconde ligne, est définie par

$$\mathbf{T}_2(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s\left(CI_1I_2s^2+CI_1Rs+CI_2Rs+I_1+I_2\right)}{CI_2s^2+CRs+1} & -\dfrac{CRs+1}{CI_2s^2+CRs+1} \end{bmatrix} \tag{4.104}$$

Sa structure à l'infini est un pôle à l'infini d'ordre 1. Nous avons donc $\sum_{j=1}^{2-1} \bar{t}_{2j} = \bar{t}_{21} = -1$.

3. Calcul des ordres d'essentialité généralisés :

(a) *pour la sortie y_1 ;* $n_{1e_g} = \sum_{j=1}^{2} t_j - \sum_{j=1}^{2-1} \bar{t}_{1j} = (0) - (1) = -1$,

(b) *pour la sortie y_2 ;* $n_{2e_g} = \sum_{j=1}^{2} t_j - \sum_{j=1}^{2-1} \bar{t}_{2j} = (0) - (-1) = +1$.

Ces résultats sont identiques à ceux déterminés précédemment, par définition sur $\mathbf{T}^{-1}(s)$.

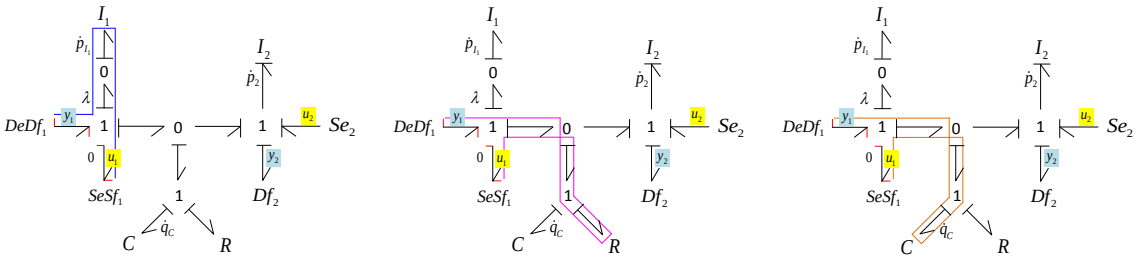
4.6.3.3 Détermination des ordres d'essentialité généralisés : approche par le bond graph du modèle direct

Déterminons à présent ces invariants structurels sur le bond graph de la figure 4.26, structure à l'infini de la matrice de transfert (proposition 4.8 page 156) et ordres d'essentialité généralisés (proposition 4.11 page 165), en ne déclinant l'analyse qu'au niveau *comportemental* pour une comparaison consistante avec l'approche algébrique. Notons que dans le présent cas le modèle bond graph ne présente pas de cycles causaux d'ordre négatif, conduisant à $\omega_{n_I-d} = 0$ dans les deux précédentes propositions.

1. Détermination des zéros/pôles à l'infini de $\mathbf{T}(s)$ à partir des familles bond graph :

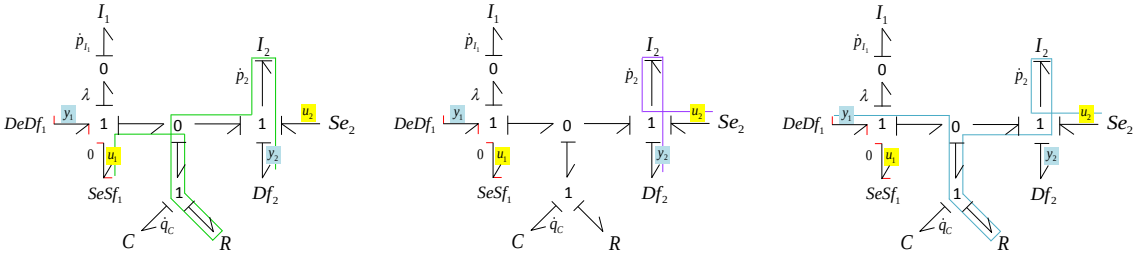
(a) *Calcul de t_1 de $\mathbf{T}(s)$:* Nous regardons les familles $\mathcal{F}_{(U,Y),\omega_j}$ de $p = 1$ chemin causal entrée/sortie ($|\mathbf{U}| = |\mathbf{Y}| = 1$), d'ordre minimal. Le bond graph de la figure 4.26 comprend 10 chemins causaux entrée/sortie (figures 4.27, 4.28, 4.29 et 4.30). Nous pouvons observer ici que l'ordre minimal qu'une famille $\mathcal{F}_{(U,Y),\omega_j}$ telle $|\mathbf{U}| = |\mathbf{Y}| = 1$ puisse avoir est associé à la famille formée par le chemin a_{o-1}, d'ordre $\omega_{a_{o-1}} = -1$. Notons cette famille $\mathcal{F}_{(1)(u_1,y_1),-1}$. Il n'y a ici qu'une seule famille entrée/sortie qui soit d'ordre -1. L'ensemble $\mathbb{F}_{(u_1,y_1),-1}$ des familles $\mathcal{F}_{(u_1,y_1),-1}$ (définition B.5) n'est formé que de la seule

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés



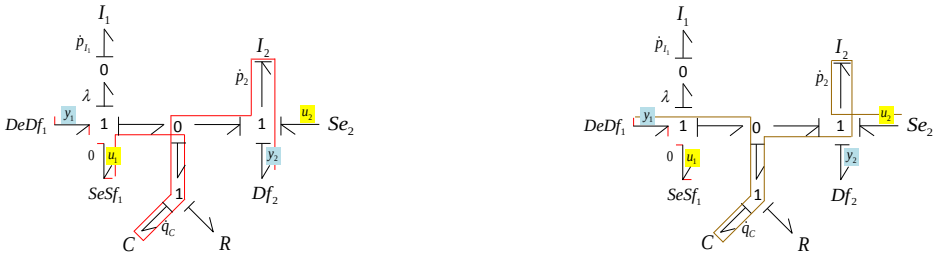
(a) Chemin causal u1 → y1 d'ordre -1 (a_{o-1}) (b) Chemin causal u1 → y1 d'ordre 0 (b_{o0}) (c) Chemin causal u1 → y1 d'ordre 1 (c_{o1})

FIGURE 4.27 – Chemins causaux *Entrée* → *Sortie* du bond graph 4.26 - (1 sur 4)



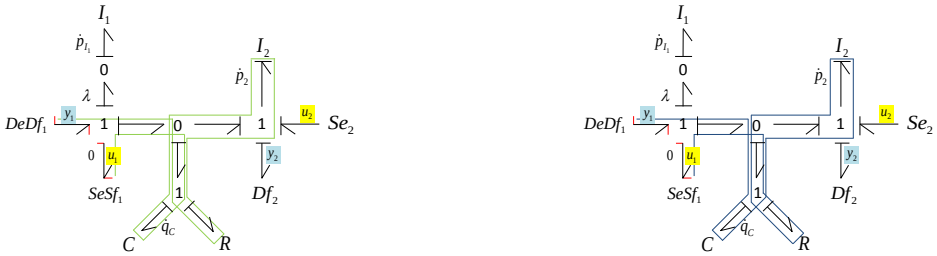
(d) Chemin causal u1 → y2 d'ordre 1 (d_{o1}) (e) Chemin causal u2 → y2 d'ordre 1 (e_{o1}) (f) Chemin causal u2 → y1 d'ordre 1 (f_{o1})

FIGURE 4.28 – Chemins causaux *Entrée* → *Sortie* du bond graph 4.26 - (2 sur 4)



(g) Chemin causal u1 → y2 d'ordre 2 (g_{o2}) (h) Chemin causal u2 → y1 d'ordre 2 (h_{o2})

FIGURE 4.29 – Chemins causaux *Entrée* → *Sortie* du bond graph 4.26 - (3 sur 4)



(i) Chemin causal u1 → y1 d'ordre 2 (i_{o2}) (j) Chemin causal u1 → y1 d'ordre 2 (j_{o2})

FIGURE 4.30 – Chemins causaux *Entrée* → *Sortie* du bond graph 4.26 - (4 sur 4)

famille $\mathcal{F}_{(1)(u_1,y_1),-1}$. Le gain de cette famille (définition B.24 page 266) n'est

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

pas nul, donc :

$$\omega_1 = \min_{\substack{(U,Y)\subset[\![1,p]\!]^2 \\ \text{tel que } |U|=|Y|=1}} \left\{ \min_{\mathcal{F}_{(U,Y),\omega_j}} \left\{ \omega_j \mid \rho_{\omega_j}^{(U,Y)} \neq 0 \right\} \right\} = \omega_{a_{o-1}} = -1 \qquad (4.105)$$

et $t_1 = \omega_1 - \omega_{n_I-d} = (-1) - 0 = -1$, conformément à l'approche algébrique.

Remarquons en outre que, dans le présent cas où $\omega_{n_I-d} = 0$, le chemin a_{o-1} est un chemin de l'entrée u_1 vers la sortie y_1 et correspond donc bien au fait que la transmittance (lemme 4.9 page 161) de degré le plus élevé de (4.101) est $t_{11}(s)$. Nous pouvons en outre vérifier que pour les trois autres transmittances (représentant les trois autres mineurs d'ordre 1 de $\mathbf{T}(s)$), les ordres minimaux des chemins sont tous égaux à 1 conformément à (4.101) (en l'occurrence d_{o1} pour $t_{21}(s)$, f_{o1} pour $t_{12}(s)$ et e_{o1} pour $t_{22}(s)$).

(b) *Calcul de t_2 de $\mathbf{T}(s)$:* Nous regardons les familles $\mathcal{F}_{(U,Y),\omega_j}$ de $p = 2$ chemins causaux entrée/sortie *BG - différents - génériques*, où $\mathbf{U} = \{u_1, u_2\}$ et $\mathbf{Y} = \{y_1, y_2\}$, d'ordre minimal (cette famille existe forcément puisque le système est inversible, et donc il existe au moins une famille de p chemins causaux *disjoints*, avec ici $p = 2$). Il existe en l'occurrence ici trois familles de 2 chemins entrée/sortie *BG - différents - génériques*, dont une seule d'ordre minimal, égale à 0 (figure 4.31), formée par les chemins a_{o-1} et e_{o1}. Ces chemins causaux sont de plus disjoints, et assurent ainsi également l'inversibilité du système. (Notons que les deux autres familles sont respectivement formées des chemins b_{o0} et e_{o1} et des chemins c_{o1} et e_{o1} et sont d'ordre respectif 1 et 2). La famille d'ordre minimal est d'ordre $\omega_j = \omega_{a_{o-1}} + \omega_{e_{o1}} = (-1) + (1) = 0$

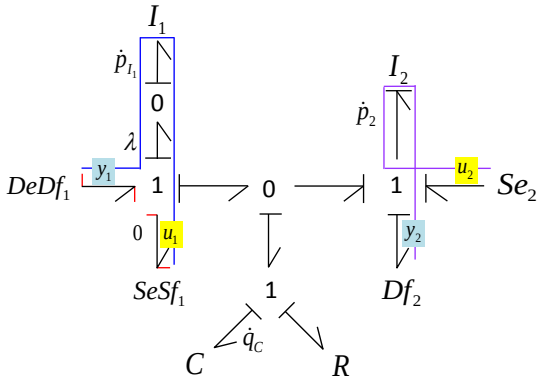


FIGURE 4.31 – Famille $\mathcal{F}_{(1)(\{u_1,u_2\},\{y_1,y_2\}),0}$ d'ordre minimal sur le bond graph 4.26

et dénotée $\mathcal{F}_{(1)(\{u_1,u_2\},\{y_1,y_2\}),0}$. Ainsi, $\omega_2 = 0$ et donc $t_2 = \omega_2 - \omega_1 = 1$, conformément à l'approche algébrique.

2. Détermination de la structure à l'infini des sous-matrices $\mathbf{T}_i(s)$.

(a) *Structure à l'infini de $\mathbf{T}_1(s)$:* en ne considérant plus le double-détecteur $D_e D_f{}'1$, nous scrutons l'ensemble des chemins $u_1 \to y_2$ et $u_2 \to y_2$ (*i.e.* les chemins d_{o1}, e_{o1}, g_{o2}). L'ordre minimal qu'une famille de un chemin causal puisse avoir est 1 (chemin d_{o1} ou chemin e_{o1}). Notons respectivement $\mathcal{F}_{(1)(\{u_1,u_2\},\{y_2\}),1}$ et $\mathcal{F}_{(2)(\{u_1,u_2\},\{y_2\}),1}$ les familles formées par les chemins d_{o1} et e_{o1}, toutes deux d'ordre 1. Ces deux familles forment l'ensemble $\mathbb{F}_{(\{u_1,u_2\},\{y_2\}),1}$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Nous pouvons vérifier que le gain de cet ensemble, noté $\rho_1^{(\{u_1,u_2\},\{y_2\})}$, n'est pas nul (et vaut $\frac{R+1}{I_2}$). Nous avons ainsi $\bar{t}_{1j} = \omega_1^{(1)} - \omega_{n_I-d} = 1$.

(b) *Structure à l'infini de* $\mathbf{T}_2(s)$ *:* en ne considérant plus le détecteur $D_f{}'2$ nous scrutons l'ensemble des chemins $u_1 \to y_1$ et $u_2 \to y_1$ (*i.e.* les chemins a_{o-1}, b_{o0}, c_{o1}, f_{o1}, h_{o2}). L'ordre minimal qu'une famille de un chemin causal puisse avoir est -1 (chemin a_{o-1}). Nous avons donc $\bar{t}_{2j} = \omega_1^{(2)} - \omega_{n_I-d} = -1$.

3. Calcul des ordres d'essentialité généralisés (proposition 4.11 page 165) :

(a) *pour la sortie* y_1 ; $n_{1e_g} = \omega_2 - \omega_1^{(1)} = (0) - (1) = -1$,

(b) *pour la sortie* y_2 ; $n_{2e_g} = \omega_2 - \omega_1^{(2)} = (0) - (-1) = +1$.

La détermination des ordres d'essentialité généralisés à partir du bond graph de la figure 4.26 conduit aux mêmes résultats que par l'approche algébrique (définition sur $\mathbf{T}^{-1}(s)$ ou détermination sur $\mathbf{T}(s)$).

En conclusion, nous pouvons affirmer que le modèle inverse du bond graph figure 4.26 aura les propriétés suivantes sur ses sorties : [13]

— la sortie $y_1(t)$ ne sera pas dérivée dans son expression des entrées $u_1(t)$ et $u_2(t)$ et sera intégrée *au minimum* 1 fois (puisque $n_{1e_g} = -1$).

— la sortie $y_2(t)$ sera dérivée *au maximum* 1 fois dans son expression des entrées $u_1(t)$ et $u_2(t)$ (puisque $n_{2e_g} = +1$).

4.6.3.4 Bond graph du modèle inverse

Nous établissons dans cette section le bond graph du modèle inverse pour vérifier sa consistance avec les ordres d'essentialité généralisés obtenus dans la section précédente. L'inversibilité du modèle a été abordée à la section précédente, en rappelant le choix des chemins causaux entrées/sorties disjoints de la figure 4.31 (notés a_{o-1} et e_{o1} sur les figures 4.27 et 4.28), constituant la famille bond graph d'ordre minimal. Le rétablissement de la causalité le long de la ligne de puissance associée au chemin a_{o-1} et la propagation de la bicausalité le long de celle associée au chemin e_{o1} nous permettent d'établir le modèle inverse (figure 4.32). Le modèle direct contenant des assignations bicausales, le modèle inverse de la figure 4.32 détaille explicitement les éléments bond graph « source/détecteur » [Gaw95, FN97], en l'occurrence la « source d'effort nul ($e = 0$) / détecteur de flux » sur la jonction 1 associée au stockage I_1, notée $DfSe_1$, et mesurant la sortie u_1.

Le système d'équation du modèle inverse de la figure 4.32 est détaillé en (4.106) et permet de valider les ordres d'intégration/dérivation de $y_1(t)$ et $y_2(t)$ déterminés dans la section précédente (validant que l'ordre de dérivation de $y_2(t)$ est bien de 1 au maximum

13. Voir lemme 3.3 page 105 et les considérations associées.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

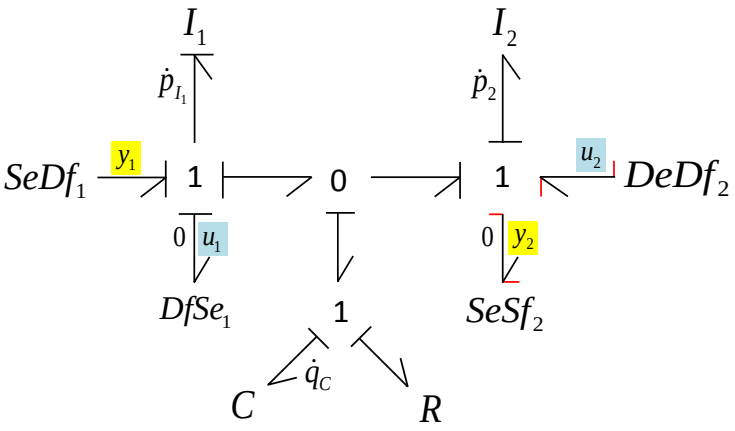


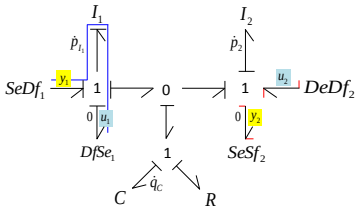
FIGURE 4.32 – Modèle bond graph inverse du bond graph bicausal de la figure 4.26

et que l'ordre d'intégration de $y_1(t)$ est de 1 au minimum).

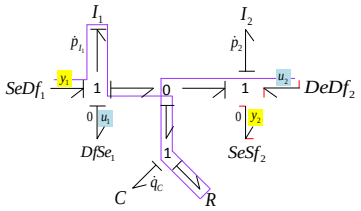
$$\begin{aligned}
\dot{p}_1(t) &= -\frac{R}{I_1}\,p_1(t) - \frac{1}{C}\,q_C(t) + y_1(t) + R\,y_2(t)\\
\dot{q}_C(t) &= \frac{1}{I_1}\,p_1(t) - y_2(t)\\
p_2(t) &= I_2\,y_2(t)\\
u_1(t) &= \frac{1}{I_1}\,p_1(t)\\
u_2(t) &= -\frac{R}{I_1}\,p_1(t) - \frac{1}{C}\,q_C(t) + R\,y_2(t) + \dot{p}_2(t)
\end{aligned} \tag{4.106}$$

4.6.3.5 Détermination des ordres d'essentialité généralisés : approche bond graph inverse

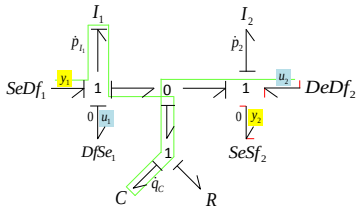
En utilisant le bond graph de la figure 4.32, nous proposons une détermination au niveau d'analyse comportemental des ordres d'essentialité généralisés sur le modèle inverse (proposition 4.13 page 167). Le calcul du polynôme caractéristique (proposition 4.1 page 116) conduit à $\det(s\mathbf{E}-\mathbf{A}) = -s^2 - \frac{R}{I_1}s - \frac{1}{I_1 C}$, et donc $\omega_{n_I-d} = 0$ (cette conclusion peut-être retrouvée par le fait qu'aucun cycle causal d'ordre négatif n'existe sur ce bond graph, le seul élément de stockage en causalité dérivée n'intervenant dans aucun cycle). La scrutation des *familles bond graph* (définition B.23 page 266) où n'apparaissent que des chemins suffit ici. Nous avons ainsi (figures 4.33, 4.34, 4.35 et 4.36) :



(a) Chemin causal y1 → u1 d'ordre 1 ($a_{inv\,o1}$)



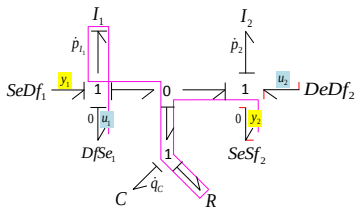
(b) Chemin causal y1 → u2 d'ordre 1 ($b_{inv\,o1}$)



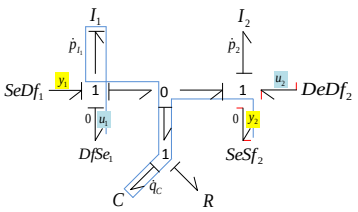
(c) Chemin causal y1 → u2 d'ordre 2 ($c_{inv\,o2}$)

FIGURE 4.33 – Chemins causaux *Sortie* → *Entrée* du bond graph du modèle inverse - (1 sur 4)

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

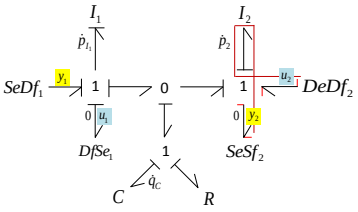


(d) Chemin causal y2 → u1 d'ordre 1 ($d_{inv\,o1}$)

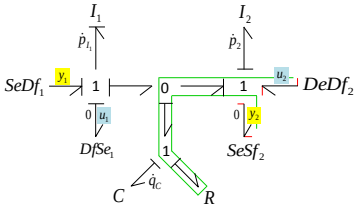


(e) Chemin causal y2 → u1 d'ordre 2 ($e_{inv\,o2}$)

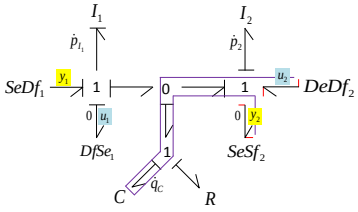
FIGURE 4.34 – Chemins causaux *Sortie* → *Entrée* du bond graph du modèle inverse - (2 sur 4)



(f) Chemin causal y2 → u2 d'ordre -1 ($f_{inv\,o-1}$)

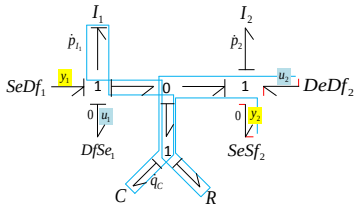


(g) Chemin causal y2 → u2 d'ordre 0 ($g_{inv\,o0}$)

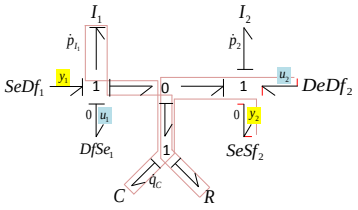


(h) Chemin causal y2 → u2 d'ordre 1 ($h_{inv\,o1}$)

FIGURE 4.35 – Chemins causaux *Sortie* → *Entrée* du bond graph du modèle inverse - (3 sur 4)



(i) Chemin causal y2 → u2 d'ordre 2 ($i_{inv\,o2}$)



(j) Chemin causal y2 → u2 d'ordre 2 ($j_{inv\,o2}$)

FIGURE 4.36 – Chemins causaux *Sortie* → *Entrée* du bond graph du modèle inverse - (4 sur 4)

— pour la sortie y_1, nous considérons les chemins causaux $a_{inv\,o1}$, $b_{inv\,o1}$ et $c_{inv\,o2}$. L'ordre minimal qu'une (famille de un) chemin causal puisse avoir est par exemple $\omega_{a_{inv}} = 1$ (ou également $\omega_{b_{inv}} = 1$). L'ordre d'essentialité généralisé n_{1e_g} de la sortie y_1 vaut ainsi $n_{1e_g} = -\omega_{a_{inv}} + \omega_{n_I - d} = -(1) + 0 = -1$, conformément aux précédents résultats.

— pour la sortie y_2, nous considérons les chemins causaux $d_{inv\,o1}$, $e_{inv\,o2}$, $f_{inv\,o-1}$, $g_{inv\,o0}$, $h_{inv\,o1}$, $i_{inv\,o2}$, $j_{inv\,o2}$. L'ordre minimal qu'une (famille de un) chemin causal puisse avoir est $\omega_{f_{inv}} = -1$. L'ordre d'essentialité généralisé n_{2e_g} de la sortie y_2 vaut ainsi $n_{2e_g} = -\omega_{f_{inv}} + \omega_{n_I - d} = -(-1) + 0 = +1$, conformément aux précédents résultats.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

4.7 Conclusion

Le chapitre 4 nous a permis d'étendre la méthodologie de dimensionnement par modèle inverse représentés par bond graph, à la classe des modèles linéaires singuliers pouvant se mettre sous la forme (4.48) page 139. Cette extension concerne plus particulièrement la phase d'analyse structurelle de la méthodologie, notamment aux étapes d'*Adéquation* et de *Validation* (chapitre 1, section 1.4.3.2 page 28). La généralisation que nous avons proposée a repris la démarche théorique du chapitre 2, à savoir l'établissement d'un cadre algébrique référent supportant l'analyse structurelle dans le cas singulier (chapitre 3) puis son portage sur le bond graph (chapitre 4). De manière similaire à la classe des modèles réguliers (chapitre 2), nous avons utilisé la « passerelle » que constitue le formalisme digraphe, au prix d'une généralisation de la correspondance digraphe/bond graph (annexe D). La finalité a ainsi été la possibilité de généraliser en bond graph l'évaluation de l'*inversibilité* (section 4.4 page 152) et la détermination de l'*ordre d'essentialité généralisé* (section 4.6 page 164). Comme nous l'avons introduit à l'aide de la figure 4.1 page 112, ces dernières ont nécessité la détermination préalable du polynôme caractéristique du système singulier (section 4.2 page 113), des mineurs de sa matrice système (section 4.3 page 133) et de sa structure à l'infini (section 4.5 page 154).

L'intérêt principal que nous voyons à la détermination bond graph des invariants structurels précédemment cités, en plus de la généralisation qu'elle constitue à la classe des systèmes singuliers, est l'uniformisation qu'elle propose. Nous avons précisé qu'une représentation sous la forme (4.48) page 139, sur laquelle se base l'ensemble des développements de ce chapitre, était consistante avec la représentation des modèles directs (réguliers ou singuliers) ainsi que leurs inverses respectifs (réguliers ou singuliers). Les déterminations que nous proposons unifient ainsi les « approche direct » et « approche inverse » (telles que détaillées au chapitre 2), de sorte qu'il n'est alors plus indispensable de les différentier. Cela s'entend bien évidemment suivant le contexte : par exemple, un *ordre d'essentialité généralisé* est liée à une sortie d'un modèle *direct*, par essence modèle de conception de la méthodologie de dimensionnement (mais peut se faire sur le modèle *direct* (propositions 4.10 et 4.11 page 165) ou le modèle *inverse* (propositions 4.12 et 4.13 page 167)). Mais l'ensemble des invariants présentés dans ce chapitre (polynôme caractéristique, mineurs de matrice système, structure à l'infini, structure à l'infini par ligne/colonne, degré de transmittance) est applicable à des modèles pouvant être formulés sous la forme (4.48), soit donc *directs* **ou** *inverses*.

Nous reprenons maintenant en détails les contributions de ce chapitre, classées suivant les sections dans lesquelles elles apparaissent.

— la section 4.2 a proposé une détermination bond graph du polynôme caractéristique $\det(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ à partir des travaux de Reinschke en digraphe [Rei94] et d'une première formulation bond graph apportée par Mouhri *et al.* [MRDT99, Mou00]. Nous avons montré et illustré le fait que cette dernière ne respecte pas strictement la correspondance digraphe/bond graph. Originellement proposée par Rahmani [Rah93], nous avons généralisé en premier lieu cette correspondance (annexe D). De cette généralisation sont donc issues deux propositions. La première (proposition 4.1 page 116) permet de déterminer le polynôme caractéristique du système singulier à partir de sa représentation bond graph dans le cas où seuls les variables d'énergie constituent le vecteur d'état. La seconde (proposition 4.2 page

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

126) généralise la détermination du polynôme caractéristique au cas où des variables de puissance sont choisies en plus dans le vecteur d'état. Ces propositions ont nécessité d'étendre la définition de chemins causaux *BG-différents* pour tenir compte de tous ces types de variable d'état (définition 4.2 page 140). A signaler que nous avons également proposé, en digraphe, dans l'annexe C, la détermination du degré du polynôme caractéristique suivant le niveau de simplification du modèle issu du bond graph (proposition C.1 page 294 dans le cas simplifié et C.2 page 296 dans le cas général).

— la section 4.3 a proposé une détermination de $\det(\mathbf{P}(s))$ en digraphe (proposition 4.3 page 133) puis en bond graph (proposition 4.4 page 140) en utilisant la généralisation de l'équivalence digraphe/bond graph établie en annexe D. En lien avec ces propositions, nous avons également énoncé dans l'annexe C, les propriétés de la matrice système directement à partir de la représentation bond graph (proposition C.3 page 298, lemme C.4 page 302 et proposition C.5 page 303) suivant différents niveaux d'hypothèses.

— la section 4.4 a présenté l'inversibilité des systèmes singuliers en bond graph, en généralisant le test d'inversibilité de Rahmani (proposant ainsi le test d'inversibilité 4.1 page 152), et a discuté de la validité de l'approche d'inversion de Fotsu Ngwompo détaillée au chapitre 2.

— la section 4.5 a énoncé une extension aux systèmes singuliers de la détermination bond graph de la structure à l'infini, en la déclinant par niveau d'analyse (propositions 4.5 et 4.6 page 155, et 4.7 et 4.8 page 156). Cette section a également proposé une détermination du degré d'une transmittance de $\mathbf{T}(s)$ (lemme 4.9 page 161).

— Enfin, la section 4.6 a proposé la détermination bond graph des *ordres d'essentialité généralisés*, déclinée par niveau d'analyse. Cette détermination est proposée sur le modèle direct (propositions 4.10 et 4.11 page 165), ainsi que sur le modèle inverse (propositions 4.12 et 4.13 page 167).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Chapitre 5

Analyse temporelle des systèmes singuliers

Sommaire

5.1 Introduction 180
5.2 Équivalence des systèmes singuliers 181
5.2.1 Introduction 181
5.2.2 Forme de Rosenbrock 183
5.2.3 Forme de Smith 186
5.3 Réponse temporelle 189
5.3.1 Introduction 189
5.3.2 Approche de Yip & Sincovec 190
5.3.3 Approche de Verghese *et al.* 193
5.3.4 Continuité implicite des systèmes singuliers 199
5.4 Propriétés des bond graphs directs et inverses représentant des systèmes linéaires singuliers 200
5.4.1 Introduction 200
5.4.2 Cas simplifié 200
5.4.3 Cas général 210
5.5 Conclusion 216

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

5.1 Introduction

Le chapitre 5 aborde l'analyse temporelle des systèmes linéaires singuliers à faisceau régulier, pouvant être mis sous la forme Σ_d (5.1). Du point de vue algébrique, il présente un complément à l'analyse structurelle des systèmes singuliers traitée au chapitre 3 (figure 5.1) et en constitue donc une extension sur laquelle des déclinaisons graphiques vont pouvoir s'appuyer.

$$\Sigma_d : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}(t) & = & \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) & = & \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{array} \right. , \tag{5.1}$$

dont les différentes composantes sont détaillées à la page 78.

Le présent chapitre expose ainsi également un certain nombre d'interprétations en bond graph, liées à la détection des modes impulsionnels, la propreté, la réponse temporelle et l'initialisation (figure 5.1).

FIGURE 5.1 – Spécificités et propriétés des systèmes singuliers : le chapitre 5 aborde les items 5 et 6 du point de vue algébrique et les items 1, 3, 5 et 6 du point de vue bond graph

L'analyse temporelle est proposée au niveau algébrique aux sections 5.2 et 5.3. Bien qu'essentiellement bibliographiques, nous y proposons une formalisation, à notre sens, claire et sans ambiguïté de la notion de *modes impulsionnels*. Nous n'avons, à notre connaissance, pas rencontrée jusqu'alors cette formalisation dans la littérature. Nous mettons également en lumière l'analogie assez forte qui peut être dressée entre les définitions de modes dynamiques *exponentiels* et *impulsionnels* pour un système, ainsi que les réponses *libre* et *forcée* associées à ces modes [1] :

1. Si certains auteurs emploient le vocable « free responses » [VLK81] [IT01], ils font en l'occurrence explicitement référence aux deux types de réponse (*libre* et *forcée*). Citons notamment VERGHESE *et al.* [VLK81] qui qualifient la réponse forcée de *« free-response mode that can be alternatively excited from zero initial condition, by means of an input that contains no component at the modal frequency »*. C'est

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

— les *réponses libres* associées aux modes exponentiels et modes impulsionnels sont intrinsèquement liées au faisceau $(\mathbf{E}, \mathbf{A})$ et aux conditions initiales des états du système. Pour les systèmes *réguliers*, les réponses libres sont exclusivement associées aux modes exponentiels et liées à la matrice d'état $\mathbf{A}$ (plus exactement au faisceau $(\mathbf{I}, \mathbf{A})$) et aux conditions initiales. Pour les systèmes *singuliers*, les réponses libres sont associées aux modes exponentiels et impulsionnels, et liées au faisceau $(\mathbf{E}, \mathbf{A})$, et aux conditions initiales.

— les *réponses forcées* associées aux modes exponentiels et modes impulsionnels sont liées au faisceau $(\mathbf{E}, \mathbf{A})$, à la matrice de commande $\mathbf{B}$ et aux entrées $\mathbf{u}(t)$. Avec la même analogie, les réponses forcées associées aux modes exponentiels sont, pour les systèmes *réguliers*, liées à la matrice d'état $\mathbf{A}$, la matrice de commande $\mathbf{B}$ et la nature de l'entrée $\mathbf{u}(t)$. Pour les systèmes *singuliers*, ces réponses sont liées à $(\mathbf{E}, \mathbf{A})$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{u}(t)$. [2]

Ces considérations nous permettent en partie de justifier que le vocable *mode* est employé à bon escient pour qualifier le *mode* exponentiel et le *mode* impulsionnel, en rappelant que ces deux types de mode sont liés à des phénomènes *dynamiques*, respectivement *finis* et *infinis*. Par ailleurs, pour éviter toute ambiguïté dans la mesure où le vocable *phénomènes aux « dynamiques infinies »* est souvent usité sans plus de caractérisation par les auteurs cités dans les chapitres 3 et 5, nous précisons qu'une impulsion est une distribution de Dirac, par opposition, par exemple, à un échelon (qui est lui aussi par essence associé à un phénomène dynamique infini). Cette distinction est clairement établie dans les travaux de Dai [Dai89c], Kucera [Kuc86] ou encore Buisson [Bui93b], qui parlent bien de distribution de Dirac et de ses dérivées. Pour les phénomènes de saut, Dai [Dai89c] parle de « jump behavior », Buisson [Bui93b] ainsi que Lorenz [Lor93] parlent de « discontinuités ».

La section 5.4 propose une déclinaison bond graph des notions d'initialisation, de propreté, d'obtention de la réponse temporelle ainsi qu'une contribution sur la détection des modes impulsionnels dans un cas simplifié usuel où le bond graph ne possède pas de cycle causal d'ordre négatif, ni de liens causaux entre éléments de stockage en causalité dérivée (directe ou à travers un élément R) [3]. Le cas général est ensuite traité sur la détection des modes impulsionnels, avec différentes contributions basées sur les résultats en bond graph du chapitre 4.

5.2 Équivalence des systèmes singuliers

5.2.1 Introduction

Le système singulier Σ_d de représentation d'état (5.1) possède d modes exponentiels, $(q-d)$ modes impulsionnels et $(n-q)$ modes non-dynamiques (avec $d = \deg \det(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$, $q = \operatorname{Rang} \mathbf{E}$ et $n = \dim \mathbf{x}(t)$). Dans l'objectif de séparer les différents types de mode du

donc également en ce sens que nous proposons de formaliser ces points en section 5.3 pour les clarifier et lever toute ambiguïté.

2. Nous pouvons par exemple citer les travaux de Wang & Zou [WZ01] sur les systèmes singuliers, étendus aux cas *irréguliers*, qui explicitent clairement ces notions. Ils précisent en l'occurrence qu'un certain nombre de modes peuvent être indifféremment excités par les conditions initiales ou les entrées (*« input-generatable modes »*) ou uniquement par les conditions initiales si les entrées sont « trop » suffisamment dérivables.

3. Cette classe de système est définie en annexe A.3.5 page 258 et dénommée « seconde forme simplifiée ».

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

système, ROSENBROCK a proposé la notion d'*équivalence restreinte* entre les systèmes singuliers, notée *r.s.e.* pour *restricted system equivalence* [Ros74]. Cette équivalence se base sur l'équivalence stricte entre deux faisceaux de matrice réguliers [Gan66], permettant d'exprimer la forme de KRONECKER du faisceau $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ [VLK81], *i.e.* dans le présent cas, la forme canonique quasi-diagonale de KRONECKER-WEIERSTRASS introduite en section 3.2.2 (théorème 3.1 page 81). Cette forme nous permettra également de qualifier l'*index* du système singulier, appelé également *indice de nilpotence* du système singulier.

Théorème 5.1 (*[VLK81] [Mur87] [Dai89c] [FN97] [WZ01]*)

(Forme de* Kronecker-Weierstrass *d'un faisceau* $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ *régulier, introduction du degré dynamique du système) *Soit* $(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ $(\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n})$ *un faisceau de matrice régulier, alors il existe deux matrices constantes réelles non-singulières* $\mathbf{M}$ *et* $\mathbf{N}$ *telles que :*

$$\mathbf{M}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{N} = \begin{pmatrix} s\mathbf{I}_d - \mathbf{A}_1 & 0 \\ 0 & s\mathbf{E}_2 - \mathbf{I}_{n-d} \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

avec

- $d = \deg \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$
- $n = \dim \mathbf{x}(t)$
- $\mathbf{E}_2 \in \mathbb{R}^{(n-d)\times(n-d)}$ *est une matrice nilpotente.*

Le théorème 5.1 reformule simplement le théorème générique 3.1 en introduisant ici explicitement le *degré dynamique d* du système *(au niveau des notations, les matrices* $\mathbf{M}$ *et* $\mathbf{N}$ *peuvent être les mêmes dans les théorèmes 3.1 et 5.1, en précisant toutefois que cette décomposition n'est pas unique)*. Ce théorème permet de définir l'*équivalence restreinte* entre *deux systèmes singuliers*, exprimée ici sur la matrice système $\mathbf{P}(s)$ (forme (3.4) page 78). *Il est proposé ici dans sa version originelle, et généralisable à une sous-matrice* $\mathbf{D}$ *non nulle.*

Définition 5.1 (*[Ros74]*)

(Équivalence restreinte entre systèmes singuliers (r.s.e., restricted system équivalence)) *Soient deux matrices constantes réelles non-singulières* $\hat{\mathbf{M}}$ *et* $\hat{\mathbf{N}}$*, alors deux systèmes singuliers* Σ_d *et* Σ_{d_1} *sont* équivalents au sens r.s.e. *si leur matrices systèmes respectives sont liées par la relation suivante (où l'indice* 1 *fait référence aux paramètres de* Σ_{d_1}*) :*

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{M}} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s\mathbf{E} - \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{N}} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\mathbf{E}_1 - \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \\ -\mathbf{C}_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

La notion d'*équivalence restreinte* (définition 5.1) est importante dans la mesure où toutes les transformations d'équivalence usuelles existantes entre systèmes singuliers, *forme canonique standard* ou forme de ROSENBROCK (section 5.2.2), et *décomposition sous forme dynamique* ou forme de SMITH (section 5.2.3), reposent sur cette définition. Elle conserve l'ensemble des propriétés du système singulier (entre autres, degré dynamique, matrice de transfert, propriétés à l'infini, ses zéros et pôles). Tous les modes (exponentiels, impulsionnels, non-dynamiques) sont conservés. Elle permet de manipuler le système singulier

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

de manière à le séparer en différents sous-systèmes, comprenant certains types de mode uniquement. Rappelons enfin que la forme de KRONECKER-WEIERSTRASS (théorème 5.1) permet également de décomposer directement la fonction de transfert du système en une partie strictement propre et une partie polynomiale. Les formes de ROSENBROCK (5.4) et SMITH (5.12) sont brièvement rappelées ci-après et permettront de fournir un certain nombre de critères sur la présence (ou non) des différents types de mode ainsi que la base de la résolution temporelle (classique et distributionnelle) des équations (section 5.3). Différents ouvrages de référence détaillent ces transformations [Ros74], [VLK81], [YS81], [Dai89c] et [Dua10]. Elles sont également discutées dans les références [Vil94], [FN97] et [Mou00].

5.2.2 Forme de Rosenbrock

La *forme de* ROSENBROCK [Ros70] [Ros74] est usuellement nommée *décomposition standard*, *forme canonique standard* (ou encore *première forme équivalente* dans [Dai89c]). Cette décomposition est *r.s.e.* au système Σ_d (5.1). Elle est issue de la forme de KRONECKER-WEIERSTRASS du faisceau $sE - A$ (théorème 5.1) :

Théorème 5.2 (*[Ros74] [YS81] [Dai89c]*)

(Forme de* Rosenbrock *d'un système singulier) *Pour tout système singulier Σ_d (5.1), il existe deux matrices constantes réelles non-singulières $\bar{\mathbf{M}}$ et $\bar{\mathbf{N}}$ de sorte que Σ_d soit équivalent au sens de la* r.s.e. *au système suivant (on considère ici le cas où la matrice D est nulle dans (5.1), sans perte de généricité) :*

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_1(t) = \mathbf{A}_1\bar{\mathbf{x}}_1(t) + \bar{\mathbf{B}}_1\mathbf{u}(t) \tag{5.4a}$$

$$\mathbf{y}_1(t) = \bar{\mathbf{C}}_1\bar{\mathbf{x}}_1(t) \tag{5.4b}$$

$$\mathbf{E}_2\dot{\bar{\mathbf{x}}}_2(t) = \bar{\mathbf{x}}_2(t) + \bar{\mathbf{B}}_2\mathbf{u}(t) \tag{5.4c}$$

$$\mathbf{y}_2(t) = \bar{\mathbf{C}}_2\bar{\mathbf{x}}_2(t) \tag{5.4d}$$

$$\mathbf{y}(t) = \bar{\mathbf{C}}_1\bar{\mathbf{x}}_1(t) + \bar{\mathbf{C}}_2\bar{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{y}_1(t) + \mathbf{y}_2(t) \tag{5.4e}$$

avec le changement d'état suivant :

$$\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{x}}_1(t)\\ \bar{\mathbf{x}}_2(t)\end{bmatrix} = \bar{\mathbf{N}}^{-1}\mathbf{x}(t), \quad \bar{\mathbf{x}}_1 \in \mathbb{R}^d, \quad \bar{\mathbf{x}}_2 \in \mathbb{R}^{n-d} \tag{5.5}$$

et

$$\bar{\mathbf{M}}\mathbf{E}\bar{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix}\mathbf{I}_d & 0\\ 0 & \mathbf{E}_2\end{pmatrix}, \ \bar{\mathbf{M}}\mathbf{A}\bar{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix}\mathbf{A}_1 & 0\\ 0 & \mathbf{I}_{n-d}\end{pmatrix}, \ \bar{\mathbf{M}}\mathbf{B} = \begin{pmatrix}\bar{\mathbf{B}}_1\\ \bar{\mathbf{B}}_2\end{pmatrix}, \ \mathbf{C}\bar{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix}\bar{\mathbf{C}}_1 & \bar{\mathbf{C}}_2\end{pmatrix} \tag{5.6}$$

avec

- $d = \deg\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$
- $n = \dim\mathbf{x}(t)$
- $\mathbf{E}_2 \in \mathbb{R}^{(n-d)\times(n-d)}$ *est une matrice nilpotente. Nous notons k l'index de nilpotence de $\mathbf{E}_2$.*
- $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{R}^{d\times d}$ *est une matrice quelconque.*

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Nous notons $\bar{\mathbf{x}}_1(0) = \bar{\mathbf{x}}_{10}$ et $\bar{\mathbf{x}}_2(0) = \bar{\mathbf{x}}_{20}$ les conditions initiales des vecteurs d'état de (5.4).

La *décomposition canonique standard* (théorème 5.2) permet de séparer le système originel en deux sous-systèmes, respectivement appelés sous-système *lent* ((5.4a), (5.4b)) et *rapide* ((5.4c), (5.4d))[4]. Il est en effet important de noter que le sous-système ((5.4a), (5.4b)), de dimension d, comprend tous les modes exponentiels (*i.e.* de dynamique finie) du système Σ_d (5.1) et uniquement ceux-ci. Le sous-système rapide ((5.4c), (5.4d)), de dimension $(n-d)$, comprend pour sa part l'ensemble des modes infinis (*i.e.* impulsionnels et non-dynamiques) du système Σ_d (5.1), notant que $(n-q)+(q-d) = (n-d)$. Nous constatons ainsi de manière sous-jacente que cette décomposition ne fait en revanche pas de distinction entre modes impulsionnels et non-dynamiques et ne fait donc pas apparaître la notion d'*ordre généralisé du système singulier*, q (où $q = \operatorname{Rang}\mathbf{E}$)[5]. Notons également que la *décomposition canonique standard* détermine l'*index* du système singulier (voir équations (5.2) et (5.6)) :

Définition 5.2 (*[YS81] [vD94] [FN97]*)

> *L'**index d'un système singulier** dont le faisceau de matrice $s\mathbf{E}-\mathbf{A}$ est régulier (définition 3.3 page 81) se définit comme l'index de nilpotence k de la matrice $\mathbf{E}_2$ obtenue avec le théorème 5.1.*

Nous pouvons ainsi noter les cas remarquables suivants :

— si le système est *régulier i.e.* pouvant s'écrire sous la forme (3.1) page 77, autrement dit si l'équation (5.4c) n'existe pas, on définit que l'index (de nilpotence) du système singulier est nul ($k = 0$),

— si $\mathbf{E}_2 = \mathbf{0}$ dans (5.4c), l'index du système singulier vaut $k = 1$. En d'autres termes, si $\mathbf{E}_2 \neq \mathbf{0}$, l'index du système sera supérieur à 1. Notons en outre que dans ce cas particulier, la nullité de $\mathbf{E}_2$ conduit à l'équation non-dynamique $\mathbf{0} = \bar{\mathbf{x}}_2(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t)$ pour la variable $\bar{\mathbf{x}}_2(t)$. Un tel système ne comportera pas de mode impulsionnel puisque le système ne comprend alors que des modes exponentiels issus de (5.4a), système *régulier*, et des modes non-dynamiques issus de (5.4c) où $\mathbf{E}_2 = \mathbf{0}$)).

Nous utiliserons ultérieurement la *forme canonique standard* (théorème 5.2) pour la résolution temporelle des équations des sous-systèmes *lent* et *rapide*.

4. Cette décomposition n'est pas unique *i.e.* plusieurs changements d'état sont envisageables. Toutefois, le théorème 5.2 assure des propriétés similaires entre toutes les formes canoniques standard. On parle d'*équivalence similaire (« similar equivalence »)* qui, sous cette notion, rend cette classe de décomposition unique [Dai89c].

5. En partant de ce fait, Verghese *et al.* ont fait évoluer la notion d'*équivalence restreinte (r.s.e.)* de Rosenbrock vers l'*équivalence forte* (*« strong equivalence »*) entre systèmes singuliers, permettant de dissocier les modes dynamiques des modes non-dynamiques. Cette nouvelle définition permet de rapprocher deux systèmes, ainsi *fortement équivalents*, bien qu'ayant un nombre de modes non-dynamiques différents, ce qui n'est donc pas le cas de la *r.s.e.* [VLK81].

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Exemple

Reprenons l'exemple simple du chapitre 2, figure 2.2 page 70, représentant deux masses dont les déplacements sont rigidement contraints (rappelé en figure 5.2). Associons respectivement aux masses m_1 et m_2 les quantités de mouvement p_1 et p_2 et les vitesses v_1 et v_2.

(a) (b)

FIGURE 5.2 – Exemple de deux masses en liaison encastrement

En modélisant la contrainte au niveau cinématique, $v_1 - v_2 = 0$, nous en déduisons la relation algébrique suivante sur les quantités de mouvement : $m_2 p_1 = m_1 p_2$. Le système d'équations associé au modèle peut être ainsi mis sous la forme singulière suivante (5.7) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p_1}(t) \\ \dot{p_2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ m_2 & -m_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \tag{5.7}$$

Nous remarquons dans (5.7) que $q = \text{Rang}\,\mathbf{E} = 1$ et $d = \deg \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = 1$, ce qui nous amène à conclure à la présence d'un mode exponentiel (ou nul) et d'un mode non dynamique, lié au mouvement rigide des deux masses m_1 et m_2 et à l'équation algébrique de contrainte associée. La forme de ROSENBROCK (5.4) peut ainsi être exprimée en choisissant le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \bar{\mathbf{N}}^{-1} \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ m_2 & -m_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{N}} &= -\tfrac{1}{m_1+m_2} \begin{bmatrix} -m_1 & -1 \\ -m_2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.8}$$

En choisissant pour matrice $\bar{\mathbf{M}}$ la matrice identité (non singulière), le système (5.7) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1(t) &= 0 + u(t) \\ 0 &= \bar{x}_2(t) + 0 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Nous vérifions en effet dans (5.9) que les transformations issues de (5.6) correspondent à la forme de ROSENBROCK (5.4) :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}}\mathbf{E}\bar{\mathbf{N}} &= -\tfrac{1}{m_1+m_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -m_1 & -1 \\ -m_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{M}}\mathbf{A}\bar{\mathbf{N}} &= -\tfrac{1}{m_1+m_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ m_2 & -m_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -m_1 & -1 \\ -m_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{M}}\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.10}$$

Nous trouvons ici $\mathbf{A}_1 = 0$ et $\mathbf{E}_2 = 0$. Cette dernière égalité implique que l'index du

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

système (5.7) est 1, conformément aux précédentes remarques sur la forme de $\mathbf{E}_2$ en l'absence de mode impulsionnel dans le système.

Remarque : la relation de contrainte sur les quantités de mouvement est nativement donnée par le modèle bond graph de la figure 5.2. Elle est de type *semi-holonome* et entraîne ainsi l'indice de nilpotence de 1 dans cet exemple. Le bond graph permet également d'exprimer la contrainte sur les dérivées des variables d'énergie du système $(\dot{p}_1, \dot{p}_2)$ aboutissant au système d'équations (5.11). Le bond graph contient donc également la forme dérivée de l'équation de contrainte permettant de mettre le système sous la forme régulière (5.11).

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ m_2 & -m_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_1(t) \\ \dot{p}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \tag{5.11}$$

5.2.3 Forme de Smith

La *forme de* Smith [VLK81] [Dai89c] [Dua10] est usuellement nommée *décomposition sous forme dynamique*, *description singulièrement perturbée* (ou encore *seconde forme équivalente* dans [Dai89c]). Cette décomposition est *r.s.e.* – au sens de la définition 5.1 – par rapport au système originel Σ_d (5.1). Elle envisage un découplage différent de la *forme canonique standard* (théorème 5.2), ici basée sur la notion d'*ordre généralisé du système singulier* (définition 3.1 page 80).

Théorème 5.3 (*[Dai89c]*)

(Forme de* Smith *d'un système singulier) *Pour tout système singulier* Σ_d (5.1)*, il existe deux matrices constantes réelles non-singulières* $\tilde{\mathbf{M}}$ *et* $\tilde{\mathbf{N}}$ *telles que* $\tilde{\mathbf{M}}\mathbf{E}\tilde{\mathbf{N}} = diag\,(\mathbf{I}_q, 0)$*, avec* $q = \mathrm{Rang}\,\mathbf{E}$ *l'ordre généralisé du système singulier.* Σ_d *est alors équivalent au sens de la* r.s.e. *au système suivant (on considère ici le cas où la matrice* D *est nulle dans* (5.1)*, sans perte de généricité) :*

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1(t) = \mathbf{A}_{11}\tilde{\mathbf{x}}_1(t) + \mathbf{A}_{12}\tilde{\mathbf{x}}_2(t) + \tilde{\mathbf{B}}_1\mathbf{u}(t) \tag{5.12a}$$

$$0 = \mathbf{A}_{21}\tilde{\mathbf{x}}_1(t) + \mathbf{A}_{22}\tilde{\mathbf{x}}_2(t) + \tilde{\mathbf{B}}_2\mathbf{u}(t) \tag{5.12b}$$

$$\mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{C}}_1\tilde{\mathbf{x}}_1(t) + \tilde{\mathbf{C}}_2\tilde{\mathbf{x}}_2(t) \tag{5.12c}$$

avec le changement d'état suivant :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{N}}^{-1}\mathbf{x}(t), \quad \tilde{\mathbf{x}}_1 \in \mathbb{R}^q, \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 \in \mathbb{R}^{n-q} \tag{5.13}$$

et

$$\tilde{\mathbf{M}}\mathbf{E}\tilde{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{M}}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{M}}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1 \\ \tilde{\mathbf{B}}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}\tilde{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_1 & \tilde{\mathbf{C}}_2 \end{pmatrix} \tag{5.14}$$

avec

- $q = \mathrm{Rang}\,\mathbf{E}$
- $n = \dim\,\mathbf{x}(t)$
- $\mathbf{A}_{11} \in \mathbb{R}^{q\times q}$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Nous notons $\tilde{\mathbf{x}}_1(0) = \tilde{\mathbf{x}}_{10}$ et $\tilde{\mathbf{x}}_2(0) = \tilde{\mathbf{x}}_{20}$ les conditions initiales des vecteurs d'état de (5.12).

La *forme de* Smith [6] ou *décomposition sous forme dynamique* (théorème 5.3) permet de séparer le système en deux sous-systèmes (5.12a) et (5.12b), comprenant respectivement les modes dynamiques (*i.e.* exponentiels et impulsionnels) et les modes non-dynamiques. Cette décomposition est ainsi une illustration différente de la nature physique d'un système singulier. Il est composé d'une partie *dynamique*, régie par une équation différentielle (5.12a) et d'une partie *non-dynamique* ou encore, algébrique, qui représente les équations de *contraintes* entre les variables d'état (5.12b). Basé sur cette décomposition, le lien entre les équations de contrainte (5.12b) et l'*index du système singulier* (définition 5.2 page 184) a été établi par Brenan *et al.* [BCP95]. Il est possible de dériver les équations de contraintes (5.12b) et réécrire le système, toujours sous forme singulière, en faisant potentiellement apparaître des dérivées de la commande $\mathbf{u}(t)$ [7]. A chaque dérivation, l'index du nouveau système singulier diminue d'une unité, si bien que le nombre total de dérivations pour passer d'un système singulier à un système différentiel ordinaire est donc l'index du système singulier. Nous rappelons par ailleurs que c'est par définition l'indice de nilpotence de la matrice $\mathbf{E}_2$ dans (5.4c) (définition 5.2 page 184). On parle également de *distance* ou *degré de singularité* entre le système originel et le système d'équations différentielles ordinaires qui lui est associé [FN97]. [8] [9]

Exemple

Reprenons l'exemple simple de deux masses rigidement liées de la figure 5.2. Le système (5.7), rappelé ci-dessous en (5.16), est déjà sous la forme de Smith (5.15) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_1(t) \\ \dot{p}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ m_2 & -m_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \tag{5.16}$$

Appliquant l'approche de Brenan *et al.* [BCP95], nous remarquons qu'une seule dérivation de l'équation de contrainte exprimée sur les quantités de mouvement $m_2 p_1 = m_1 p_2$ permet d'exprimer le système originel (5.7) sous la forme *différentielle ordinaire* (5.11). Nous aboutissons ainsi à la même conclusion que celle exprimée à partir de la forme de Rosenbrock : le système singulier (5.7) (ou (5.16)) a un indice de nilpotence de 1.

6. La dénomination de cette forme tient simplement au fait qu'elle se base sur la forme de Smith de la matrice $\mathbf{E}$ de Σ_d (5.1), *i.e.* une diagonalisation par matrice constante et régulière, de manière similaire à la forme de Smith-McMillan (théorème 2.1 page 48) que nous avons par exemple appliquée à la matrice de transfert du système au chapitre 2.

7. Brenan *et al.* montrent que pour un système d'index $k > 1$, la réponse temporelle peut faire apparaitre des dérivations de l'entrée jusqu'à l'ordre $k - 1$ [BCP95] [vD94] (voir par ailleurs la section 5.3.2).

8. Dans sa thèse, Fotsu-Ngwompo propose également un algorithme pour déterminer l'index d'un système singulier et le transformer en système différentiel ordinaire [FN97].

9. Notons que la présentation de la forme de Smith proposée dans [FN97] ou [MDV94] est légèrement différente et s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{11} & \mathbf{E}_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1(t) \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} u(t) \tag{5.15}$$

Un changement de variable est utilisé mais la partition des états est identique à celle de (5.12) (décomposition par rang, avec le Rang $\mathbf{E}$). La nature des deux équations constitutives du système (5.15) est la même que celle de (5.12a) et (5.12b).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Remarque : notons que les variables d'état introduites dans la représentation (5.16) sont associées à des stockages d'énergie sur le modèle bond graph de la figure 5.2 (quantités de mouvement p_1 et p_2). Nous introduisons à ce stade qu'il est possible de montrer qu'une certaine classe de modèle bond graph (à laquelle appartient le modèle de la figure 5.2) ne peut contenir d'impulsion sur ses variables d'énergie, comme l'illustre le présent cas.

La *décomposition sous forme dynamique* (théorème 5.3) conduit également au cas remarquable suivant. Si la matrice $\mathbf{A}_{22}$ est *inversible* dans l'équation (5.12b), le système peut se mettre sous une forme *régulière* et ne possède ainsi pas de mode impulsionnel [VLK81]. En effet, nous pouvons réécrire (5.12b) de la manière suivante :

$$\tilde{\mathbf{x}}_2(t) = -\mathbf{A}_{22}^{-1}\left(\mathbf{A}_{21}\tilde{\mathbf{x}}_1(t) + \tilde{\mathbf{B}}_2\mathbf{u}(t)\right) \tag{5.17}$$

et l'équation (5.12a) devient alors :

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1(t) = \left(\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\right)\tilde{\mathbf{x}}_1(t) + \left(\tilde{\mathbf{B}}_1 - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}_2\right)\mathbf{u}(t) \tag{5.18}$$

l'équation (5.12c) reste inchangée :

$$\mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{C}}_1\tilde{\mathbf{x}}_1(t) + \tilde{\mathbf{C}}_2\tilde{\mathbf{x}}_2(t) \tag{5.19}$$

Le système (5.12a), (5.12b) est alors la simple composition du système régulier (5.18) et de la relation algébrique non-dynamique (5.17). Le système ne possède donc pas de mode impulsionnel (c'est le cas de l'exemple de la figure 5.2, où dans le système (5.16), la matrice $\mathbf{A}_{22}$ est inversible puisque $\mathbf{A}_{22} = -m_1$). Le cas particulier où la matrice $\mathbf{A}_{22}$ est inversible dans (5.12) est donc complètement équivalent au cas où la matrice $\mathbf{E}_2$ est nulle dans (5.4), *i.e.* à la *forme canonique standard* dans laquelle $\bar{\mathbf{x}}_2(t)$ est déterminée par l'équation non-dynamique $0 = \bar{\mathbf{x}}_2(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t)$ [10].

Dans le cas général avec $\mathbf{A}_{22}$ éventuellement singulière dans (5.12b), la décomposition de Smith (théorème 5.3) est une décomposition de rang de la matrice $\mathbf{E}$ du système singulier Σ_d (5.1). Cette décomposition conduit à rassembler l'ensemble des q degrés de liberté du système dans (5.12a) et les sépare ainsi des relations de contraintes de (5.12b). L'équation (5.12b) n'est cependant pas un ensemble de simples relations ne comportant que les modes non-dynamiques du système, comme sa dimension $(n-q)$ pourrait nous le laisser penser. L'unique cas où cette équation n'a aucune influence sur la dynamique du système est le cas où $\mathbf{A}_{22}$ est inversible. Le cas où $\mathbf{A}_{22}$ est singulière entraînera des modes (dynamiques) impulsionnels *a priori*. La connexion forte entre les deux équations (5.12a) et (5.12b) de la forme de Smith est intrinsèquement liée au choix de la partition des états et, par opposition, ne se retrouve pas dans la forme de Rosenbrock (équations (5.4a) et (5.4c)). Dans cette dernière, l'équation (5.4a) est de dimension d (avec $d = \deg\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$) et ne regroupe effectivement que les modes exponentiels du système (ce sous-système est toujours régulier, quelles que soient les propriétés de la matrice $\mathbf{E}_2$ dans (5.4c)). Notons enfin toutefois que l'équation (5.12b) de la forme de Smith est, en mécanique, la forme usuelle des contraintes cinématiques entre solides [All79] [Fav97] (voir l'exemple figure 5.2 précédent). Elle apparait à ce titre plus explicite que dans la forme de Rosenbrock en raison du choix de partition des états et peut s'avérer intéressante dans la mesure où, comme nous l'avons introduit précédemment, un choix de variables d'état pertinent en modélisation (en l'occurrence, associé à des variables d'énergie) peut permettre l'inversibilité de $\mathbf{A}_{22}$ dans (5.12b).

10. Attention toutefois à la partition différente des états dans ces deux représentations, voir équations (5.5) et (5.13).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

5.3 Réponse temporelle

5.3.1 Introduction

La réponse temporelle du système singulier Σ_d (5.1), dans l'hypothèse où ce dernier est solvable (théorème 3.2 page 82), est basée sur sa décomposition préalable en sous-systèmes. C'est usuellement la décomposition *canonique standard* (forme de Rosenbrock, section 5.2.2) qui est utilisée [YS81] [Dai89c]. Cette section 5.3 présente l'approche de résolution *classique* de Yip & Sincovec (section 5.3.2) puis l'approche *distributionnelle* de Verghese (section 5.3.3). Notons que nous proposons en section 5.3.3 une formalisation différente de l'approche de Verghese qui, à notre connaissance, n'a pas été exposée dans la littérature (principalement [VLK81, Dai89c, Dua10]) de manière aussi explicite.

Il est intéressant de mentionner que préalablement à la notion d'*équivalence restreinte (r.s.e)* entre systèmes singuliers (définition 5.1 page 182), une notion d'équivalence a été employée par plusieurs auteurs pour rapprocher et transformer les systèmes singuliers (Rosenbrock l'a par exemple qualifiée d'*équivalence stricte (s.s.e.)* entre systèmes singuliers [Ros70] [VLK81] [11]). Cette équivalence permet par différentes transformations de réduire le système Σ_d (5.1) au système régulier *équivalent* (5.20) [Ros70] [VLK81] [MDV94], d'ordre $d = \deg\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ (rappelant que d est le nombre de degré de liberté *dynamiques* du système, définition 3.2 page 80) :

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_1(t) = \mathbf{A}_1\bar{\mathbf{x}}_1(t) + \bar{\mathbf{B}}_1\mathbf{u}(t) \tag{5.20a}$$

$$\mathbf{y}(t) = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}_1(t) + \mathbf{D}_1(p)\mathbf{u}(t) \tag{5.20b}$$

où p est l'opérateur de dérivation par rapport au temps, $p = \dfrac{d}{dt}$.

L'équation (5.20a) est, par essence de la transformation, équivalente à l'équation (5.4a). Elle contient la structure des modes dynamiques finis et préserve également leur couplage avec les entrées du système. En revanche, l'équation (5.20b) n'est pas équivalente à l'équation (5.4b). Une manière de présenter ce point est de passer dans le domaine de Laplace. L'approche *s.s.e.* explicite la matrice $\mathbf{D}(s)$ qui représente la partie polynomiale de la matrice de transfert $\mathbf{T}(s)$. Dans l'approche *s.s.e.*, la seule partie préservée du système originel associée à des phénomènes impulsionnels est ainsi $\mathbf{D}(s)$. En effet, dans le cas des systèmes singuliers à faisceau régulier, il est possible d'utiliser la forme de Kronecker-Weierstrass du faisceau $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ (théorème 5.1 page 182) pour décomposer $\mathbf{T}(s)$ en une partie strictement propre et une partie polynomiale, $\mathbf{T}(s) = \bar{\mathbf{T}}(s) + \mathbf{D}(s)$. Les modes exponentiels sont associés à la partie strictement propre $\bar{\mathbf{T}}(s)$, les modes impulsionnels et non-dynamiques à la partie polynomiale $\mathbf{D}(s)$ [VLK81]. Notons cependant une limitation importante dans cette approche. La décomposition de la matrice de transfert $\mathbf{T}(s)$ permet d'exposer un certain nombre de modes exponentiels ainsi qu'un certain nombre de modes impulsionnels issus des relations entrées/sorties, mais ne propose pas pour ces derniers de structure des *modes impulsionnels* en tant que telle. En d'autres termes, cette approche ne permet pas de mettre en évidence l'ensemble des réponses *libres* associées aux modes dynamiques (issues des conditions initiales des q degrés de liberté du système) d'une part, et peut masquer un certain nombre de modes suivant la forme de la matrice

11. Rosenbrock parle de *strict system equivalence* (s.s.e.) [Ros70], directement basée sur l'équivalence *stricte* entre faisceaux de matrice de Gantmacher [Gan66], qu'il fera ensuite évoluer pour aboutir à la notion de *restricted system equivalence* (définition 5.1 page 182) [Ros74].

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

C d'autre part. [12]

Notons en outre le point important suivant. La matrice $\bar{\mathbf{B}}_1$ de (5.20a) est une matrice constante d'après le changement de variable sur $\bar{\mathbf{x}}_1$ (équation (5.5) page 183, sous-matrice associée à $\bar{\mathbf{x}}_1$). Si en revanche $\bar{\mathbf{x}}_1$ est un sous-vecteur non transformé de $\mathbf{x}$ (du système Σ_d (5.1)), la matrice des entrées peut être polynomiale (*i.e.* $\bar{\mathbf{B}}_1(p)$), engendrant des dérivations du vecteur d'entrée [VLK81] et aboutissant à une représentation d'état généralisée (dont une illustration a été donnée au chapitre 2, avec le modèle inverse d'ordre minimal (2.5) page 46). Dans le contexte bond graph, ce dernier cas de figure est celui dans lequel la procédure de réduction [13] de Rosenberg [Ros71] se positionne dans le cas linéaire (section A.3.2). La matrice $\bar{\mathbf{B}}_1(p)$ dans (5.20a) est polynomiale, en l'occurrence de degré 1, et le sous-vecteur $\bar{\mathbf{x}}_1$ correspond à l'ensemble de variables (non transformées) associé aux stockages d'énergie en causalité intégrale du bond graph.

Comme précédemment introduit, deux approches de résolution temporelle du système singulier Σ_d (5.1) existent. Certaines se concentrent sur les d degrés de liberté dynamiques en calculant des conditions initiales *compatibles* (ou *admissibles* ou *consistantes*) pour l'ensemble des q degrés de liberté du système de manière à ne pas exciter les modes impulsionnels [YS81] (section 5.3.2). D'autres considèrent une initialisation arbitraire de l'ensemble des q degrés de liberté du système singulier [VLK81] (section 5.3.3). Ces deux approches sont toutefois issues de la *forme canonique standard* de Rosenbrock (section 5.2.2). De manière sous-jacente, nous pouvons ainsi noter que ces deux approches considèrent l'*ensemble* des $(q-d)$ modes impulsionnels du système [14], mais que la finalité visée diffère (en l'occurrence soit la forme des réponses est privilégiée, soit la liberté d'initialisation). Elles sont brièvement présentées dans les sections suivantes.

5.3.2 Approche de Yip & Sincovec

L'approche de Yip & Sincovec est une résolution *classique* [15] du système algébro-différentiel Σ_d (5.1) mis sous la forme (5.4) [YS81]. Elle utilise la propriété de nilpotence de la matrice $\mathbf{E}_2$ du sous-système rapide (5.4c). La résolution est alors opérée de la manière suivante [YS81] [Dai89c] :

— le sous-système lent (5.4a), de dimension (et de degré) d, est un système différentiel ordinaire, dont la solution temporelle peut s'écrire :

$$\bar{\mathbf{x}}_1(t) = e^{\mathbf{A}_1 t}\,\bar{\mathbf{x}}_{10} + \int_0^t e^{\mathbf{A}_1(t-\tau)}\bar{\mathbf{B}}_1\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{5.21}$$

Ce système a une solution unique, complètement déterminée par :
- $\bar{\mathbf{x}}_{10}$, vecteur des d conditions initiales,
- $\mathbf{u}(t)$, $t \geq 0$, entrée de commande continue par morceaux.

12. Bien que non exprimé dans [VLK81], la forme (5.20b) fait l'hypothèse sous-jacente que $\mathbf{D}(s)$ est formulée de telle sorte que tous les modes impulsionnels soient représentés, ce qui n'est pas nécessairement le cas dans la représentation entrée/sortie de la matrice de transfert, comme nous venons de le souligner.

13. Plus exactement de réduction au nombre minimal d'équations, en éliminant les variables statiquement dépendantes. Le système d'état originellement *singulier* issu du modèle bond graph est transformé en un système d'état *généralisé* de dimension et d'ordre d, *i.e.* où le vecteur d'état est uniquement composé des variables associées à l'ensemble des stockages d'énergie en causalité intégrale.

14. Cela ne serait pas possible avec la réduction du système singulier utilisée dans l'équation (5.20).

15. Par opposition à une résolution *distributionnelle*, abordée en section 5.3.3.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

— la résolution du sous-système rapide (5.4c) fait l'hypothèse supplémentaire que l'entrée de commande $\mathbf{u}(t)$ continue par morceau est au moins $(k-1)$ fois dérivable par rapport au temps (où k est l'index de nilpotence de $\mathbf{E}_2$) [16]. Utilisant la nilpotence de $\mathbf{E}_2$ et en dérivant successivement l'équation (5.4c) puis prémultipliant par $\mathbf{E}_2$, nous pouvons écrire :

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{E}_2\dot{\bar{\mathbf{x}}}_2(t) & = & \bar{\mathbf{x}}_2(t) & + \quad \bar{\mathbf{B}}_2\mathbf{u}(t) \\ {\mathbf{E}_2}^2\bar{\mathbf{x}}_2^{(2)}(t) & = & \mathbf{E}_2\dot{\bar{\mathbf{x}}}_2(t) & + \quad \mathbf{E}_2\bar{\mathbf{B}}_2\dot{\mathbf{u}}(t) \\ & \cdots & & \\ {\mathbf{E}_2}^k\bar{\mathbf{x}}_2^{(k)}(t) & = & {\mathbf{E}_2}^{k-1}\bar{\mathbf{x}}_2^{(k-1)}(t) & + \quad {\mathbf{E}_2}^{k-1}\bar{\mathbf{B}}_2\mathbf{u}^{(k-1)}(t) \end{array} \tag{5.22}$$

En ajoutant terme à terme les éléments de (5.22) et en notant que ${\mathbf{E}_2}^k = 0$, nous pouvons directement écrire la solution temporelle du sous-système rapide :

$$\bar{\mathbf{x}}_2(t) = -\sum_{i=0}^{k-1} {\mathbf{E}_2}^i\bar{\mathbf{B}}_2\mathbf{u}^{(i)}(t) \tag{5.23}$$

Ce système a une solution unique, complètement déterminée par $\mathbf{u}(t)$, entrée de commande continue par morceaux, au moins $(k-1)$ fois dérivable.

En conséquence, nous avons $\bar{\mathbf{x}}_{20} = -\sum_{i=0}^{h-1} {\mathbf{E}_2}^i\bar{\mathbf{B}}_2\mathbf{u}^{(i)}(0)$, vecteur des $(n-d)$ conditions initiales *compatibles* [17].

Les considérations précédentes sur les conditions initiales entraînent la définition suivante des *conditions initiales compatibles* du système singulier (5.4) [YS81] :

Définition 5.3 (*[YS81]*)

Soit $\mathbf{U}_t$*, l'ensemble des* $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{C}^m$*, vecteurs complexes de dimension* m*, tel que* $\mathbf{u}(t)$ *soit au moins* $(k-1)$ *fois dérivable. L'ensemble* $\mathbf{I}$ *des* ***conditions initiales compatibles*** (i.e. *admissibles) pour le système* (5.4) *est donné par :*

$$\mathbf{I} = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1(t) \\ \bar{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} \quad | \quad \bar{\mathbf{x}}_{10} \in \mathbb{C}^d \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{x}}_{20} = -\sum_{i=0}^{k-1} {\mathbf{E}_2}^i\bar{\mathbf{B}}_2\mathbf{u}^{(i)}(0), \mathbf{u}(t) \in \mathbf{U}_t \right\} \tag{5.24}$$

L'approche de Yip & Sincovec s'astreint à produire une solution temporelle *admissible* au système (5.4), c'est-à-dire sans impulsion. Conformément à la précédente présentation des *deux* sources potentielles d'impulsions (section 3.2.3 page 83), *i.e.* les conditions initiales et les dérivées temporelles des entrées de commande, nous voyons que la définition 5.3 garantit de manière certaine que ces deux sources soient circonscrites. Si les valeurs initiales du vecteur $\bar{\mathbf{x}}_1(t)$ peuvent être arbitraires (il s'agit en effet des d degrés de liberté dynamiques du système (5.1)), les $(n-d)$ conditions initiales du vecteur $\bar{\mathbf{x}}_2(t)$

16. S'appuyant ainsi sur les travaux de Brenan *et al.* [BCP95] évoqués en section 5.2.3.

17. Certaines références, comme par exemple [Mou00], indiquent que l'équation (5.23) n'est définie que pour $t > 0$. Si cette restriction est discutable et sera argumentée par la discussion sur l'équation (5.26) page 192, elle souligne le fait que dans le cas de recherche de conditions initiales *admissibles*, la réinitialisation ou le changement potentiel de structure est à prendre en considération de manière soignée. La seconde approche de résolution (section 5.3.3), sur les q degrés de liberté, entraîne une considération moins stricte sur les conditions initiales.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

sont contraintes. En d'autres termes, les $(q-d)$ modes impulsionnels sont initialisées de manière à ce qu'aucun ne soit excité à l'instant $t=0$ d'une part [18], et qu'aucun manque de propriété de dérivabilité de l'entrée de commande n'engendre d'impulsion pour $t \geq 0$ d'autre part.

Nous pouvons davantage préciser cette approche grâce à l'analyse de Dai [Dai89c]. Le sous-système (5.4a) est qualifié de *lent* puisque sa réponse temporelle (5.21) représente l'effet cumulatif de l'entrée de commande $\mathbf{u}(t)$, $t \geq 0$, sur $\bar{\mathbf{x}}_1(t)$. En d'autres termes, $\bar{\mathbf{x}}_1(t)$ n'a pas de relation « directe » avec l'entrée de commande $\mathbf{u}(t)$ à l'instant t (au sens ou cette relation est dynamique, issue d'une intégration). Au contraire, le sous-système (5.4c) est qualifié de *rapide* puisqu'il répond instantanément à la variation de commande $\mathbf{u}(t)$ à l'instant t et aux évolutions de la commande de manière globale *i.e.* la commande et ses dérivées par rapport au temps (5.23). En revanche, il n'y a aucun effet cumulatif de la commande dans le sous-système $\bar{\mathbf{x}}_2(t)$. Pour tout $\epsilon > 0$, les propriétés de $\mathbf{u}(\tau)$, $0 \leq \tau \leq t-\epsilon$ n'ont aucun effet sur l'état $\bar{\mathbf{x}}_2(t)$. Si le système (5.1) possède une topologie fixe, l'initialisation (5.24) proposée dans [YS81] est suffisante. Si en revanche, le système est sujet à un changement de topologie et/ou une réinitialisation, il est important de dissocier les instants précédents et suivant l'évènement de commutation et leur implication pour les variables $\bar{\mathbf{x}}_1(t)$ et $\bar{\mathbf{x}}_2(t)$. En faisant l'hypothèse que l'événement de commutation se produit au temps $t=0$, ne considérant que les instants suivants $(t>0)$ et en regardant la limite $t \to 0^+$, nous pouvons préciser les conditions initiales *admissibles* apportées par la définition 5.3 de la manière suivante :

$$\mathbf{I} = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1(t) \\ \bar{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} \;\middle|\; \bar{\mathbf{x}}_{10} \in \mathbb{C}^d \;\text{ et }\; \bar{\mathbf{x}}_{20} = -\sum_{i=0}^{k-1} {\mathbf{E}_2}^i \bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{u}^{(i)}(0^+), \mathbf{u}(t) \in \mathbf{U}_t \right\} \tag{5.25}$$

En d'autres termes, si l'initialisation du sous-système *lent* à $t=0$ peut provenir d'un processus d'évolution précédent la réinitialisation / commutation, celle du sous-système *rapide* ne peut se faire que de manière compatible avec la topologie du système et la commande après commutation [19]. Cette dernière sera donc issue de la limite lorsque t tend vers l'instant de réinitialisation / commutation par *valeur supérieure*.

En conclusion de l'approche de Yip & Sincovec [YS81], la réponse temporelle complète *compatible* du système (5.4) peut être explicitée de la manière suivante [Dai89c] :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \bar{\mathbf{N}} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_d \\ 0 \end{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1(t) + \bar{\mathbf{N}} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-d} \end{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}_2(t) \\ &= \bar{\mathbf{N}} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_d \\ 0 \end{pmatrix} \left(e^{\mathbf{A}_1 t} \bar{\mathbf{x}}_{10} + \int_0^t e^{\mathbf{A}_1 (t-\tau)} \bar{\mathbf{B}}_1 u(\tau) d\tau \right) - \bar{\mathbf{N}} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-d} \end{pmatrix} \sum_{i=0}^{k-1} {\mathbf{E}_2}^i \bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{u}^{(i)}(t) \end{aligned} \tag{5.26}$$

avec les conditions initiales *compatibles* suivantes :

$$\mathbf{x}_0 = \bar{\mathbf{N}} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_d \\ 0 \end{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}_{10} - \bar{\mathbf{N}} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_{n-d} \end{pmatrix} \sum_{i=0}^{k-1} {\mathbf{E}_2}^i \bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{u}^{(i)}(0^+) \tag{5.27}$$

18. Lors de cette résolution temporelle *classique*, la relation (5.23) peut paraitre « trompeuse » car c'est une relation entrée/état algébrique qui pourrait ne comprendre qu'un vecteur de modes non-dynamiques. Ce n'est pas le cas. La réponse libre associée aux modes impulsionnels apparaîtra si $\bar{\mathbf{x}}_2(0) \neq -\sum_{i=0}^{k-1} {\mathbf{E}_2}^i \bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{u}^{(i)}(0)$. Elle est incluse dans la relation (5.23).

19. Notons que Buisson a apporté un certain nombre de formalisations illustrant les points précédemment mentionnés grâce à l'analyse structurelle de modèles à commutation que permet l'approche bond graph [Bui93b].

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

La solution (5.26) du système (5.4) est unique et requiert la dérivabilité à l'ordre $(k-1)$ de l'entrée de commande $\mathbf{u}(t)$, où k est l'index de nilpotence de la matrice $\mathbf{E}_2$ dans (5.4). Les conditions initiales (5.27) garantissent l'absence d'impulsion dans la réponse du système *i.e.* aucun mode impulsionnel n'est excité, ni par les conditions initiales (réponse libre), ni par les entrées (réponse forcée).

5.3.3 Approche de Verghese *et al.*

L'approche de Verghese *et al.* est une résolution *distributionnelle* du système singulier Σ_d (5.1) basée sur la *forme canonique standard* (5.4) [VLK81] [20]. Comme précédemment mentionné, cette approche considère également l'ensemble des q degrés de liberté du système singulier mais doivent maintenant pouvoir être initialisés de manière arbitraire et ne pas obligatoirement satisfaire les conditions initiales admissibles (5.27). Bien que par essence compatible avec la partition d'état proposée dans la décomposition *dynamique* de Smith (section 5.2.3) du système singulier (5.1), la résolution distributionnelle de Verghese a été formalisée sur la décomposition canonique standard de Rosenbrock (5.4), section 5.2.2. En ce sens, elle se base sur l'approche de Yip & Sincovec de la section précédente mais introduit la dérivation *au sens distributionnel* dans la résolution temporelle du sous-système rapide de vecteur d'état $\bar{\mathbf{x}}_2(t)$, de dimension $(n-d)$:

— également basée sur la *décomposition canonique standard*, la résolution temporelle du sous-système *lent* (5.4a) est identique à celle de l'approche *classique* et conduit à la solution (5.21),

— la résolution distributionnelle du sous-système *rapide* peut être introduite en utilisant la transformée de Laplace de (5.4c) :

$$(s\mathbf{E}_2 - \mathbf{I}_{n-d})\ \bar{\mathbf{X}}_2(s) = \mathbf{E}_2\ \bar{\mathbf{x}}_2(0) + \bar{\mathbf{B}}_2\ \mathbf{U}(s) \tag{5.28}$$

Soit [21]

$$\bar{\mathbf{X}}_2(s) = (s\mathbf{E}_2 - \mathbf{I}_{n-d})^{-1}\left(\mathbf{E}_2\ \bar{\mathbf{x}}_2(0) + \bar{\mathbf{B}}_2\ \mathbf{U}(s)\right) \tag{5.29}$$

Et ainsi [22]

$$\bar{\mathbf{X}}_2(s) = -\sum_{i=0}^{k-1} {\mathbf{E}_2}^i\, s^i \left(\mathbf{E}_2\ \bar{\mathbf{x}}_2(0) + \bar{\mathbf{B}}_2\ \mathbf{U}(s)\right) \tag{5.30}$$

En appliquant la transformée de Laplace inverse à l'équation (5.30) et en notant que $\mathrm{L}\left[\delta^{(i)}(t)\right] = s^i$, la solution temporelle *distributionnelle* du sous-système rapide (5.4c) peut ainsi s'écrire :

$$\bar{\mathbf{x}}_2(t) = -\sum_{i=0}^{k-1} \delta^{(i)}(t){\mathbf{E}_2}^{i+1}\bar{\mathbf{x}}_2(0) - \sum_{i=0}^{k-1} {\mathbf{E}_2}^i\bar{\mathbf{B}}_2\mathbf{u}^{(i)}(t) \tag{5.31}$$

20. Si l'approche présentée ici n'est pas strictement celle développée par Verghese *et al.* dans son article fondateur sur les systèmes singuliers [VLK81], elle reprend l'ensemble des concepts. L'approche dite de Verghese *et al.* proposée ici a été en partie formalisée par Dai dans son livre [Dai89c]. Nous en proposons ici une formalisation quelque peu différente pour clairement expliciter et illustrer les trois différents types de modes associés au système singulier (5.1).

21. Le faisceau $(s\mathbf{E}_2 - \mathbf{I}_{n-d})$ étant évidemment supposé régulier.

22. L'égalité $(s\mathbf{E}_2 - \mathbf{I}_{n-d})^{-1} = -\sum_{i=0}^{k-1} {\mathbf{E}_2}^i\, s^i$ est rappelée dans [Mou00] et [Dua10] et découle directement de l'expression générique utilisée par ailleurs en annexe D.2, équation (D.9) page 315. Elle se simplifie ici avec l'index de nilpotence de $\mathbf{E}_2$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

La réponse temporelle (5.31) formalise ainsi clairement les deux sources potentielles de *phénomènes impulsionnels* pouvant apparaître dans la réponse temporelle du système singulier (5.1), toutes deux associées à ses *modes impulsionnels*. En rappelant que $\mathbf{E}_2{}^k = 0$, nous pouvons décomposer (5.31) de la manière suivante,

$$\bar{\mathbf{x}}_2(t) = -\sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{E}_2{}^i \bar{\mathbf{x}}_2(0)\delta^{(i-1)}(t) - \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{E}_2{}^i \bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{u}^{(i)}(t) - \bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{u}(t) \tag{5.32}$$

qui se factorise selon (5.33) :

$$\bar{\mathbf{x}}_2(t) = -\sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{E}_2{}^i \left(\bar{\mathbf{x}}_2(0)\delta^{(i-1)}(t) + \bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{u}^{(i)}(t) \right) - \bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{u}(t) \tag{5.33}$$

— l'expression de la réponse temporelle du sous système rapide (5.4c) formulée en (5.33) nous permet d'expliciter clairement ses différentes composantes constitutives :

- la composante de la réponse temporelle associée aux *modes impulsionnels* est :

$$\bar{\mathbf{x}}_{2_imp}(t) = -\sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{E}_2{}^i \left(\bar{\mathbf{x}}_2(0)\delta^{(i-1)}(t) + \bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{u}^{(i)}(t) \right) \tag{5.34}$$

  dans laquelle nous retrouvons :

  - la *réponse libre* associée aux modes impulsionnels, intrinsèquement liée au faisceau $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ et à $n - d$ conditions initiales :

$$\bar{\mathbf{x}}_{2_imp_libre}(t) = -\sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{E}_2{}^i \bar{\mathbf{x}}_2(0)\delta^{(i-1)}(t) \tag{5.35}$$

  - la *réponse forcée* associée aux modes impulsionnels, liée au faisceau $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ et aux entrées par l'intermédiaire de la matrice $\bar{\mathbf{B}}_2$:

$$\bar{\mathbf{x}}_{2_imp_forcee}(t) = -\sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{E}_2{}^i \bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{u}^{(i)}(t) \tag{5.36}$$

- la composante de la réponse temporelle associée aux *modes non-dynamiques* :

$$\bar{\mathbf{x}}_{2_non_dynamique}(t) = -\bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{u}(t) \tag{5.37}$$

Le sous-système rapide (5.4c) a une solution unique, complètement déterminée par :

- Le vecteur des $(n - d)$ conditions initiales suivant,

$$\bar{\mathbf{x}}_{20} = -\sum_{i=0}^{k-1} \delta^{(i)}(0) \mathbf{E}_2{}^{i+1} \bar{\mathbf{x}}_2(0) - \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{E}_2{}^i \bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{u}^{(i)}(0) \tag{5.38}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

dans lequel le vecteur $\bar{\mathbf{x}}_2(0)$ peut être arbitraire ou provenir de valeur du passé (*e.g.* consécutivement à une réinitialisation / commutation à $t = 0$, et alors issue d'une limite lorsque t tend 0 par *valeur inférieure*), et alors non nécessairement *compatible* au sens de Yip & Sincovec (section 5.3.2). [23]

- $\mathbf{u}(t)$, entrée de commande continue par morceaux. [24]

L'approche de Verghese conduit à une résolution temporelle faisant intervenir des distributions de Dirac (ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre $(k-1)$) dans la réponse du sous-système rapide (5.4c) au temps $t = 0$ (temps auquel par hypothèse apparaît un évènement d'initialisation). Nous pouvons noter le point évident mais fondamental suivant. Pour $t > 0$, les solutions temporelles *classique* (5.23) et *distributionnelle* (5.31) sont identiques. Nous voyons également de manière évidente pourquoi dans la résolution classique, l'égalité $\bar{\mathbf{x}}_2(0) = -\sum_{i=0}^{k-1} {\mathbf{E}_2}^i \bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{u}^{(i)}(0)$ (condition *admissible* (5.24) [YS81] ou condition (5.25)) conduit à l'absence d'impulsion (nous avons alors $-\sum_{i=0}^{k-1} \delta^{(i)}(t) {\mathbf{E}_2}^{i+1} \bar{\mathbf{x}}_2(0) = 0$ dans (5.31)). Les conditions initiales $\bar{\mathbf{x}}_{20}$ de (5.38) ne méritent en l'état pas plus de précisions. Nous n'avons pas besoin d'analyser en détails la nouvelle topologie du système (*i.e.* étudier la limite lorsque le temps t tend vers l'instant d'initialisation par valeur supérieure, comme dans le cas des conditions initiales *admissibles* (5.25)).

Il faut toutefois garder à l'esprit que la résolution temporelle proposée avec (5.31) et (5.38) est basée sur la *forme canonique standard* (5.4) et considère l'ensemble des $(n-d)$ états du système, soit les $(q-d)$ modes impulsionnels (qui font partie de l'ensemble des degrés de liberté du système) mais également les $(n-q)$ états conduisant aux modes non-dynamiques. Dans l'esprit originel de Verghese, ces états non-dynamiques ne posent pas de problème d'initialisation dans le sens où leurs valeurs initiales ne sont pas choisies arbitrairement mais trivialement calculées à partir des $(n-q)$ équations non-dynamiques. Dans la forme décomposée (5.37), cela s'avère d'autant plus trivial que seule l'entrée de commande apparaît. Comme entrevu en section 3.2.3 page 83 avec l'exemple (3.11) page 85 et la condition initiale conduisant à l'expression (3.16) page 85, si les modes non-dynamiques ne sont structurellement pas des modes impulsionnels, ils peuvent être responsables de leur excitation par une réinitialisation / commutation (équation (3.17), figure 3.3 page 86) de l'entrée de commande en l'occurrence dans cet exemple. Notons enfin, comme dans l'exemple ci-dessous de Dai [Dai89c] et souligné dans [Mou00], que la solution distributionnelle (5.31) est en l'état valable pour une entrée de commande au moins $(k-1)$ fois dérivable. Le cas où l'entrée de commande n'a pas ces propriétés ou possède des discontinuités peut exciter des modes impulsionnels et ainsi introduire des distributions de Dirac issues des sauts de fonction $u^{(i)}(t_0^+) - u^{(i)}(t_0^-)$ à l'instant t_0 de non continuité.

23. Voir notamment l'exemple suivant page 196, où une condition initiale incompatible est donnée pour $x_2(0)$ dans (5.46) et (5.48).

24. En toute rigueur, la démarche de résolution visant à choisir des conditions arbitraires pour l'ensemble du vecteur $\bar{\mathbf{x}}_2(t)$ peut être étendue à la commande $\mathbf{u}(t)$ et ses dérivées respectives. La transformée de Laplace inverse appliquée à l'équation (5.30) comporte ainsi un terme supplémentaire que la plupart des auteurs référents (Dai, Cobb) ne considère pas. Dans son livre, Duan [Dua10] explicite ce terme, qui conduit à la solution étendue suivante :

$$\bar{\mathbf{x}}_2(t) = -\sum_{i=0}^{k-1} \delta^{(i)}(t) {\mathbf{E}_2}^{i+1} \bar{\mathbf{x}}_2(0) - \sum_{i=0}^{k-1} {\mathbf{E}_2}^i \bar{\mathbf{B}}_2 \left(\mathbf{u}^{(i)}(t) + \sum_{h=0}^{i-1} \delta^{(h)}(t) \mathbf{u}^{(i-h-1)}(0) \right) \tag{5.39}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

En conclusion de l'approche de Verghese, la réponse temporelle complète du système (5.4) avec conditions initiales arbitraires sur ses q degrés de liberté peut être explicitée de la manière suivante [Dai89c] :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \bar{\mathbf{N}}\begin{pmatrix}\mathbf{I}_d\\0\end{pmatrix}\bar{\mathbf{x}}_1(t) + \bar{\mathbf{N}}\begin{pmatrix}0\\\mathbf{I}_{n-d}\end{pmatrix}\bar{\mathbf{x}}_2(t)\\ &= \bar{\mathbf{N}}\begin{pmatrix}\mathbf{I}_d\\0\end{pmatrix}\left(e^{\mathbf{A}_1 t}\bar{\mathbf{x}}_{10} + \int_0^t e^{\mathbf{A}_1(t-\tau)}\bar{\mathbf{B}}_1\mathbf{u}(\tau)d\tau\right)\\ &+ \bar{\mathbf{N}}\begin{pmatrix}0\\\mathbf{I}_{n-d}\end{pmatrix}\left(-\sum_{i=0}^{k-1}\delta^{(i)}(t)\mathbf{E}_2{}^{i+1}\bar{\mathbf{x}}_2(0) - \sum_{i=0}^{k-1}\mathbf{E}_2{}^{i}\bar{\mathbf{B}}_2\mathbf{u}^{(i)}(t)\right)\end{aligned} \tag{5.40}$$

La solution (5.40) du système (5.4) est unique et requiert la dérivabilité à l'ordre $(k-1)$ de l'entrée de commande $\mathbf{u}(t)$, où k est l'index de nilpotence de la matrice $\mathbf{E}_2$ dans (5.4). Cette réponse temporelle illustre d'une manière différente certaines propriétés précédemment introduites. Le système singulier (5.1) *n'a pas de mode impulsionnel si et seulement si* $\mathbf{E}_2 = 0$ dans (5.40) [Dai89b] ou d'une autre manière, un système singulier d'*indice de nilpotence de* 1 *ne comporte pas de mode impulsionnel*. Nous retrouvons également le fait que l'*absence de mode impulsionnel* implique l'*absence de phénomène impulsionnel dans la réponse du système* [VLK81] [Dai89b] [IT01] (en rappelant que ce n'est plus nécessairement le cas si le système singulier possède un faisceau non-régulier, comme nous l'avons abordé en section 3.2.3).

Exemple

Reprenons l'exemple suivant de Dai [Dai89c] (repris dans [Mou00] et rediscuté dans [Dua10]) présenté avec nos précédentes formalisations.

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x_1}(t)\\\dot{x_2}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}u(t) \tag{5.41}$$

Ce système possède exactement les mêmes propriétés dynamiques que le modèle d'état de l'exemple (3.11) page 85 : $d = 0$ mode exponentiel, $q - d = 1$ mode impulsionnel (associé à la variable $x_1(t)$) et $n - q = 1$ mode non dynamique (associé à la variable $x_2(t)$). Ce système n'ayant pas de dynamique exponentielle et, en remarquant que la matrice A est la matrice identité et que la matrice E est nilpotente d'index 2, nous concluons que l'équation (5.41) est directement le sous-système *rapide* (5.4c) de la forme de Rosenbrock, dont les solutions temporelles ont été discutées (résolution *classique* (5.23) et (5.25), et *distributionnelle* (5.31) et (5.38)). Nous pouvons ainsi noter :

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \qquad \bar{\mathbf{B}}_2 = \begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix} \tag{5.42}$$

La solution temporelle distributionnelle (5.31) appliquée au système (5.41) est la suivante :

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix} = -\sum_{i=0}^{1}\delta^{(i)}(t)\mathbf{E}_2{}^{i+1}\begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{bmatrix} - \sum_{i=0}^{1}\mathbf{E}_2{}^{i}\bar{\mathbf{B}}_2\mathbf{u}^{(i)}(t) \tag{5.43}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Soit

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = -\delta(t) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \dot{u}(t) = \begin{bmatrix} -x_2(0)\delta(t) + u(t) + \dot{u}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \tag{5.44}$$

Nous voyons dans (5.44) que la variable $x_1(t)$ contient :

— une distribution de Dirac associée à $x_2(0)$, représentant la réponse libre du mode impulsionnel. *Notons que la condition initiale $x_1(0)$ sur le degré de liberté $x_1(t)$ n'apparaît pas dans les équations.*

— une combinaison linéaire de l'entrée $u(t)$ et de sa dérivée première. Suivant les propriétés de continuité et dérivabilité de l'entrée, un phénomène impulsionnel (provenant de l'excitation du mode impulsionnel) peut potentiellement apparaître dans la réponse forcée du système.

La variable $x_2(t)$ est associée au mode non-dynamique du système (équation algébrique entrée/état $x_2(t) = u(t)$). Comme mentionné lors de la discussion de l'exemple (3.11) page 85, si ce mode non dynamique n'est pas (structurellement) responsable du mode impulsionnel (lié à $x_1(t)$), il le sollicite par sa condition initiale, fixée par $u(t)$.

Il est intéressant d'analyser la réponse du système (5.44) pour deux cas particuliers de l'entrée $u(t)$ [Dai89c], en faisant l'hypothèse que $x_2(0) \neq 0$:

1. le premier cas est celui de la réponse à un échelon $\Gamma(t - t_0)$. Soit $u(t)$ l'entrée de commande suivante :

$$u(t) = \Gamma(t - t_0) = \begin{cases} 0 \text{ pour } 0 \leq t < t_0 \\ 1 \text{ pour } t_0 \leq t \end{cases} \tag{5.45}$$

La solution du système peut s'écrire :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -x_2(0)\delta(t) + \Gamma(t - t_0) + \delta(t - t_0) \\ x_2(t) &= \Gamma(t - t_0) \end{aligned} \tag{5.46}$$

Dans ce cas de figure, une seconde impulsion est créée au temps t_0 due à la discontinuité de la fonction échelon (figure 5.3, avec $t_0 = 1$ *sec*).

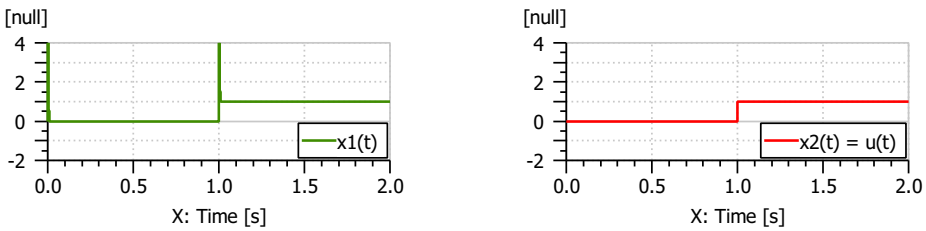


FIGURE 5.3 – Solution temporelle du système (5.41) pour l'entrée (5.45) [Dai89c]

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

2. le second cas est celui de la réponse à une rampe. Soit $u(t)$ l'entrée de commande suivante :

$$u(t) = g(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leq t < t_0 \\ t-t_0 & \text{pour } t_0 \leq t \end{cases} \tag{5.47}$$

La solution du système peut s'écrire :

$$\begin{array}{rcl} x_1(t) & = & -x_2(0)\delta(t) + g(t-t_0) + \Gamma(t-t_0) \\ x_2(t) & = & g(t-t_0) \end{array} \tag{5.48}$$

Dans ce cas de figure, un saut est induit au temps $t_0 = 1$ *sec* dû aux (manque de) propriétés de dérivation de la fonction rampe (figure 5.4).

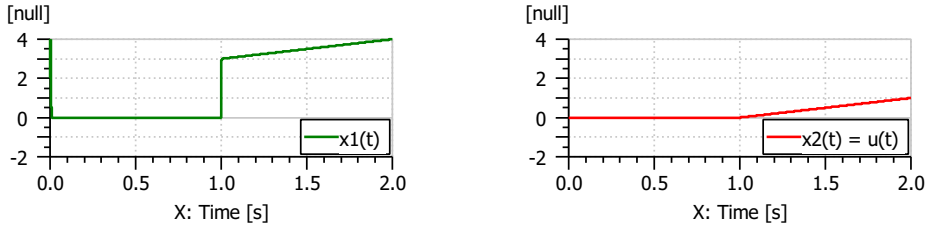


FIGURE 5.4 – Solution temporelle du système (5.41) pour l'entrée (5.47) [Dai89c]

Cet exemple illustre la spécificité de la réponse temporelle du système singulier (5.1) en mettant en lumière les deux sources potentielles d'excitation de ses modes impulsionnels :

— *conditions initiales arbitraires* des q degrés de liberté du système : si le précédent exemple n'illustre pas *a priori* directement le cas de l'initialisation des q degrés de liberté (par ailleurs relativement explicite sur la forme (5.40)) elle montre le cas plus pernicieux de l'effet de $\mathbf{E}_2$ dans l'association algébrique des états associés aux modes non-dynamiques (variable $x_2(t)$) avec les états associés aux modes impulsionnels (variable $x_1(t)$), aboutissant au cas de figure suivant : la valeur initiale des modes non-dynamiques peut induire une impulsion sur les q degrés de liberté (*i.e.* exciter un ou plusieurs mode impulsionnels). C'est le cas de la variable $x_1(t)$ dans (5.41) : sa valeur initiale est $x_{10} = -x_2(0)\delta(t) + u(0) + \dot{u}(0)$.

— propriétés de *continuité* et de *dérivation* de l'entrée de commande $u(t)$: cette condition est liée à une propriété structurelle de modèle à savoir celle du terme $\mathbf{E}_2{}^i\bar{\mathbf{B}}_2\mathbf{u}^{(i)}(t)$ de (5.40), faisant intervenir des dérivations de la commande. Cette propriété est déterminée par l'index de nilpotence k de la matrice $\mathbf{E}_2$, ainsi que la forme de cette dernière, dans la forme canonique standard (5.4) et des dérivées jusqu'à l'ordre $k-1$ sont susceptibles d'apparaître dans la réponse temporelle du système.

Si nous reprenons les considérations de DUAN [Dua10] sur les discontinuités potentielles de la commande à l'instant initial (associées à l'équation (5.39)), nous remarquons que le terme lié aux valeurs initiales arbitraires de la commande et de ses dérivées s'écrit :

$$-\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{h=0}^{i-1} \mathbf{E}_2{}^i\bar{\mathbf{B}}_2\delta^{(h)}(t)u_{(i-h-1)}(0) = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} u(0)\delta(t) = \begin{bmatrix} u(0)\delta(t) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.49}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Ce qui nous conduit à réécrire les solutions temporelles du système de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2(0)\delta(t) + u(t) + \dot{u}(t) + u(0)\delta(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \tag{5.50}$$

Dans le cas de l'exemple originel (5.41) de Dai [Dai89c], cela n'engendre pas de modifications dans la mesure où pour les deux cas de figures traités (entrée de commande échelon ou rampe), nous avons $u(0) = 0$, mais nous devons en expliciter la raison. Suivant l'esprit de Verghese quant aux valeurs initiales des $(n - q)$ variables associées aux modes non-dynamiques, trivialement déterminées à partir des équations algébriques [VLK81], la résolution (5.50) peut prêter à confusion. En effet, la variable non dynamique $x_2(t)$ ne peut pas être dissociée de la relation algébrique $x_2(t) = u(t)$, auquel cas nous aurons forcément $x_2(0) = u(0)$ et la première équation de (5.50) se réduit à $x_1(t) = u(t) + \dot{u}(t)$. En d'autres termes les impulsions disparaitraient de la solution temporelle. Il existe cependant un cas pratique dans lequel l'exemple tel que formulé en (5.44) reste parfaitement valable : le cas d'une commutation à $t = 0$ entraînant l'équation algébrique $x_2(t) = u(t)$ pour $t \geq 0$ uniquement, avec $x_2(0) \neq 0$ et $u(0) = 0$. Cela revient ainsi à simplement préciser les conditions initiales de l'équation (5.41), ce qui n'est pas le cas dans l'exemple originel [Dai89c] ni dans les diverses discussions [Mou00], [Dua10]. Une autre manière d'expliciter ce point est de revenir sur l'approche de Yip & Sincovec, et plus particulièrement les conditions initiales admissibles (5.25), appliqué au présent exemple. La condition initiale admissible $x_{10\,(5.25)} = u(0) + \dot{u}(0)$ n'induira pas d'impulsion dans la réponse temporelle. En revanche, une condition initiale arbitraire $x_{10} \neq x_{10\ (5.25)}$ induira une impulsion dans le présent cas (et rejoint l'hypothèse $x_2(0) \neq 0$ que nous avons faite dans les exemples (5.46) et (5.48) pour la faire délibérément apparaître).

5.3.4 Continuité implicite des systèmes singuliers

La notion de *continuité implicite* a été introduite par Lu & Buisson [LB94] lors de travaux sur les systèmes à commutation. La notion de *continuité implicite* est basée sur la conservation de certaines grandeurs d'un système, y compris lorsque ses sous-systèmes constitutifs subissent des discontinuités. Cette notion est à rapprocher directement du comportement dynamique des systèmes physiques en présence de chocs, butées, commutations pour lesquels certaines grandeurs physiques sont conservées (par exemple la quantité de mouvement d'un système mécanique en présence de chocs entre ses éléments constituants [Bro97]). En se basant sur la philosophie de Verghese discutée en section 5.3.3, Lu & Buisson considèrent directement l'élément $\mathbf{Ex}(t)$ comme étant la *variable d'état implicite* du système (5.1) et la quantité $\mathbf{Ex}(0)$ comme la *valeur implicite initiale*. La *continuité implicite* est ainsi définie de la manière suivante :

Définition 5.4 (*[LB94]*)

> ***(Continuité implicite d'un système singulier)*** *Le système singulier* (5.1) *est* implicitement continu *si en* $t = 0$, $\mathbf{Ex}(0^+) = \mathbf{Ex}(0^-)$. *De plus, le système singulier* (5.1) *est dit* explicitement continu *si* $\mathbf{x}(0^+) = \mathbf{x}(0^-)$.

Basé sur la décomposition de Kronecker-Weierstrass du faisceau $(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ (théorème 5.1), Lu & Buisson ont démontré le critère mathématique suivant :

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Théorème 5.4 (*[LB94]*)

(Continuité implicite d'un système singulier) *Soit le système singulier* (5.1) *supposé soluble* (i.e. $det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) \neq 0$) *et supposons que la commande* $\mathbf{u}(t)$ *ne soit pas impulsive pour tout* $t \geq 0^-$. *Le système* (5.1) *est* implicitement continu, i.e.

$$\mathbf{Ex}(0^+) = \mathbf{Ex}(0^-) \tag{5.51}$$

si et seulement si $\operatorname{Rang} \mathbf{E} = \deg \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$.

En d'autres termes, le système (5.1) est *implicitement continu* si et seulement s'il ne comporte pas de mode impulsionnel. Il est ainsi possible de rapprocher les propriétés de *propreté interne* et de *continuité implicite* des systèmes singuliers. En outre, la propriété de *continuité implicite* rejoint l'approche de résolution des systèmes singuliers de Yip & Sincovec (section 5.3.2) conduisant aux conditions initiales *compatibles* ou *admissibles* (5.27), sans impulsion (*i.e.* sans excitation des modes impulsionnels). Lu & Buisson reformule donc ce problème avec la condition équivalente $\mathbf{Ex}(0^+) = \mathbf{Ex}(0^-)$. La *continuité implicite* est par ailleurs utilisée dans les travaux d'analyse structurelle de Buisson & Lu sur base bond graph [BL94] pour en déduire des propriétés fondamentales sur les variables d'état d'énergie des systèmes singuliers. En l'occurrence, les variables associées à des stockage d'énergie sont implicitement continues, quelle que soit leur causalité, pour une certaine classe de modèle (détaillée dans la section 5.4 suivante, section 5.4.2).

5.4 Propriétés des bond graphs directs et inverses représentant des systèmes linéaires singuliers

5.4.1 Introduction

La section 5.4 discute des hypothèses de modélisation bond graph des systèmes singuliers, en proposant de détailler les simplifications engendrées par la considération d'un vecteur d'état constitué uniquement de variables d'énergie puis, affecté d'une causalité préférentiellement intégrale. Cette discussion est motivée par la détermination, sur leur représentation bond graph, des différents modes (exponentiels, impulsionnels, non-dynamiques) des systèmes singuliers, originellement analysé structurellement sur ce formalisme grâce aux travaux de Buisson, Lu et Cormerais sur la matrice de structure de jonction dans le cas des systèmes à commutation [LB94, BL94, BC97, BC98, CBLR02]. Ces analyses structurelles font suite aux travaux pionniers de Buisson [Bui93b, Bui93a] et Lorenz [Lor93] [25].

5.4.2 Cas simplifié

Le cas discuté dans la présente section 5.4.2 correspond à un vecteur d'état constitué uniquement des variables d'énergie et où, entre autre, la représentation bond graph du système singulier ne comporte pas de cycle causal d'ordre négatif. Cette classe de bond graph regroupe *tous* les bond graphs linéaires causaux affectés de la causalité préférentielle intégrale, ainsi que les bond graphs bicausaux dans laquelle il n'existe pas de liens causaux entre éléments de stockage en causalité dérivée d'une part, et entre un élément

25. Nous citons ici les travaux pionniers sur les systèmes à commutation formalisant la notion d'impulsion lors des commutations. Un grand nombre d'autres travaux sur ces systèmes relatifs aux changements de topologie et aux discontinuités a été réalisé sur le formalisme bond graph durant la même période. Citons notamment Asher [Ash93], Broenink & Wijbrans [BW93] et Ducreux *et al.* [DDTR93].

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

de stockage en causalité dérivée et un élément R d'autre part. La forme du système singulier est donc la suivante (voir section A.3.5 page 258) [26] :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\mathbf{I}_I & \mathbf{E}_{ID}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\mathbf{x}}_I\\ \dot{\mathbf{x}}_D\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\mathbf{A}_I & \mathbf{0}\\ \mathbf{A}_{DI} & \mathbf{I}_D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_I\\ \mathbf{x}_D\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathbf{B}_I\\ \mathbf{B}_D\end{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{y} &= \begin{pmatrix}\mathbf{C}_I & \mathbf{C}_D\dfrac{d(\cdot)}{dt}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_I\\ \mathbf{x}_D\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathbf{D}\end{pmatrix}\mathbf{u}\end{aligned} \tag{5.52}$$

5.4.2.1 Dimension, ordre généralisé et degré de liberté dynamique

Basé sur la représentation d'état issue de la matrice de structure de jonction, Buisson & Lu ont montré qu'un système modélisé par bond graph pouvant être représenté par le système singulier (5.52) est *implicitement continu* [BL94] (section 5.3.4 page 199). En d'autres termes, la quantité $\mathbf{Ex}(t)$ est continue [27]. Un tel modèle bond graph ne comporte pas de mode impulsionnel sur l'ensemble de ses variables d'énergie (y compris en présence de phénomènes comme des commutations et chocs). Les variables d'énergie peuvent subir des *discontinuités* (*i.e.* des sauts) mais pas d'*impulsion*. Des impulsions peuvent toutefois être présentes sur d'autres variables bond graph non associées à des stockages d'énergie (voir section 5.4.2.3). Buisson & Cormerais ont également retrouvé ces conclusions fondamentales en utilisant le théorème 3.3 page 86 dans [BC97, BC98].

Les conclusions précédentes peuvent être déduites de la forme de Rosenbrock (section 5.2.2 page 183) appliquée au système (A.33). Il est en effet possible de trouver les matrices non-singulières $\bar{\mathbf{M}}$ et $\bar{\mathbf{N}}$ suivantes [BC97, BC98] :

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix}\mathbf{I}_I & \mathbf{A}_I\,\mathbf{E}_{ID}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{I}_I & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{R}\end{pmatrix},\quad \text{avec}\quad \mathbf{R} = (-\mathbf{A}_{DI}\,\mathbf{E}_{ID} + \mathbf{I}_D)^{-1} \tag{5.53}$$

et

$$\bar{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix}\mathbf{I}_I & -\mathbf{E}_{ID}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{I}_I & \mathbf{0}\\ -\mathbf{R}\mathbf{A}_{DI} & \mathbf{I}_D\end{pmatrix},\quad \text{où}\quad \begin{bmatrix}\bar{\mathbf{x}}_1\\ \bar{\mathbf{x}}_2\end{bmatrix} = \bar{\mathbf{N}}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_I\\ \mathbf{x}_D\end{bmatrix} \tag{5.54}$$

Conformément au théorème 5.2, équation (5.6), nous obtenons les transformations (5.55) :

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{M}}\mathbf{E}\bar{\mathbf{N}} &= \begin{pmatrix}\mathbf{I}_I & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_2\end{pmatrix}, && \text{avec}\quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{0}\\ \bar{\mathbf{M}}\mathbf{A}\bar{\mathbf{N}} &= \begin{pmatrix}\mathbf{A}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_D\end{pmatrix}, && \text{avec}\quad \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_I\,(\mathbf{I}_I + \mathbf{E}_{ID}\,\mathbf{R}\,\mathbf{A}_{DI})\\ \bar{\mathbf{M}}\mathbf{B} &= \begin{pmatrix}\bar{\mathbf{B}}_1\\ \bar{\mathbf{B}}_2\end{pmatrix}, && \text{avec}\quad \bar{\mathbf{B}}_1 = \mathbf{B}_I + \mathbf{A}_I\,\mathbf{E}_I D\,\mathbf{R}\,\mathbf{B}_D\\ & && \qquad\quad \bar{\mathbf{B}}_2 = \mathbf{R}\,\mathbf{B}_D\end{aligned} \tag{5.55}$$

26. Cette classe de système est définie en annexe A.3.5 sous la dénomination de « seconde forme simplifiée ».

27. Avec les notations présentées en annexe A.3.5, Buisson & Lu montrent que la quantité $\mathbf{x}_I - \left(\mathbf{S}_{15}\mathbf{S}_{25}^{-1}\right)\mathbf{x}_D$ est continue au cours du temps, y compris lors de commutation (*i.e.* $\mathbf{x}_I^+ - \left(\mathbf{S}_{15}\mathbf{S}_{25}^{-1}\right)\mathbf{x}_D^+ = \mathbf{x}_I^- - \left(\mathbf{S}_{15}\mathbf{S}_{25}^{-1}\right)\mathbf{x}_D^-$) , où dans cette expression, $\mathbf{S}_{15}$ et $\mathbf{S}_{25}$ représentent explicitement les liens causaux avec les sources modélisant les interrupteurs *(ces notations sont donc cohérentes avec celles de l'équation (A.12) page 252). Notons que l'hypothèse d'absence de cycles causaux énoncée dans [BL94] est relâchée dans [BC97], où seuls les bond graphs comportant des cycles causaux de gains unité (*i.e. $5ZCP$ *de* van Dijk *[vDB91a, vD94]) sont logiquement écartés.*

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Soit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_I \left(\mathbf{I}_I + \mathbf{E}_{ID}\ \mathbf{R}\ \mathbf{A}_{DI}\right) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \bar{\mathbf{x}}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_I + \mathbf{A}_I\ \mathbf{E}_I D\ \mathbf{R}\ \mathbf{B}_D \\ \mathbf{R}\ \mathbf{B}_D \end{pmatrix} \mathbf{u} \quad (5.56)$$

Il est important de souligner en premiers lieux dans (5.55) que la dimension des sous-matrices identités est cohérente avec celle issue des transformations de Rosenbrock (5.6) :[28]

— dans l'expression $\bar{\mathbf{M}}\mathbf{E}\bar{\mathbf{N}}$, la matrice $\mathbf{I}_I$ est de dimension $n_I \times n_I$ où n_I, nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale est équivalent à d, nombre de variables d'état indépendantes du système (conduisant à d modes exponentiels),

— dans l'expression $\bar{\mathbf{M}}\mathbf{A}\bar{\mathbf{N}}$, la matrice $\mathbf{I}_D$ est de dimension $n_D \times n_D$ où n_D, nombre de stockage d'énergie en causalité dérivée est équivalent *a fortiori* aux $(n-d)$ modes non exponentiels.

La forme de Rosenbrock obtenue en (5.55) conduit à $\mathbf{E}_2 = \mathbf{0}$. Comme nous l'avons vu précédemment, $\mathbf{E}_2 = \mathbf{0}$ dans l'équation (5.4c) page 183 implique que l'index du système singulier vaut 1 et conduit à l'équation non-dynamique $\mathbf{0} = \bar{\mathbf{x}}_2(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t)$ pour la variable $\bar{\mathbf{x}}_2(t)$. En d'autres termes, ce système d'indice de nilpotence 1 (définition 5.2 page 184) ne comporte pas de mode impulsionnel puisque le système ne comprend alors que des modes exponentiels (issus de (5.4a), système (toujours) *régulier*) et des modes non-dynamiques (issus de (5.4c), dans laquelle $\mathbf{E}_2 = 0$). En rappelant que le système (5.52) est construit à partir de la forme (A.12) page 252 en faisant intervenir uniquement les variables d'énergie dans le vecteur d'état, nous aboutissons à nouveau à la conclusion de Buisson & Lu : un modèle bond graph, formulé avec les hypothèses exposées en début de section 5.4.2, ne peut pas contenir de mode impulsionnel sur ses variables d'énergie.

L'obtention d'une forme de Rosenbrock (5.55) et les propriétés associées (index du système singulier égal à 1) permet d'exprimer relativement simplement la réponse temporelle du système, y compris en présence de commutations, en utilisant le changement de variables $\bar{\mathbf{N}}$. Il est en outre envisageable de retrouver les conclusions de Buisson & Lu en trouvant une forme de Smith (section 5.2.3 page 186) du système (5.52), comme l'a fait Mouhri [Mou00], en montrant que la sous matrice $\mathbf{A}_{22}$ de (5.12b) obtenue à partir de la matrice de structure de jonction est inversible, conduisant ainsi à l'équation non dynamique (5.17) et l'équation régulière (5.18)[29]. Enfin, utilisant directement l'équation (5.52), Rahmani & Dauphin-Tanguy redémontrent l'absence d'impulsion sur les variables d'énergie par l'étude de $\operatorname{Rang}\mathbf{E}$ et de $\deg\det(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ à par-

28. En termes de notations, il est à noter que dans les expressions (5.6) et (5.55), nous avons *de facto* $\mathbf{I}_d \equiv \mathbf{I}_I$ et ainsi $\mathbf{I}_{n-d} = \mathbf{I}_D$. Ces considérations préalables sur l'obtention d'une forme de Rosenbrock sont importantes dans la mesure où elle ne sont pas explicitement faites dans les références [BC97] [BC98]. Elles permettent ainsi, d'une autre manière, de directement conclure à l'absence d'impulsions dans (5.52) grâce à l'indice de nilpotence de $\mathbf{E}_2$ dans (5.55), qui en l'occurrence est 1.

29. En l'occurrence, Mouhri aboutit à la forme de Smith (5.57) de l'équation (5.52) :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_I & -\mathbf{A}_I\ \mathbf{E}_{ID} \\ \mathbf{A}_{DI} & -\mathbf{A}_{DI}\mathbf{E}_{ID} + \mathbf{I}_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_I \\ \mathbf{B}_D \end{pmatrix} \mathbf{u}\ , \quad (5.57)$$

avec $\mathbf{A}_{22} = -\mathbf{A}_{DI}\mathbf{E}_{ID} + \mathbf{I}_D$, inversible.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

tir de la matrice de structure de jonction également, et notamment que $(q-d)=0$ (*i.e.* $\text{Rang}\,\mathbf{E} - \deg\ \det(s\mathbf{E}-\mathbf{A})=0$) [RDT06].

En rappelant les caractéristiques génériques des systèmes singuliers [VLK81], [Mur85], [Kuc86], [Mur87], [Dai89c] (chapitre 3, section 3.2.3 page 83) :

— n = *dimension du système*, égale à la dimension du vecteur d'état $\mathbf{x}(t)$ du système ($=\dim(\mathbf{E})$),

— q = *ordre généralisé du système*, nombre de *degrés de liberté du système*, avec $q=\text{Rang}(\mathbf{E})$,

— d = nombre de *degrés de liberté dynamiques* du système, *i.e.* le *nombre de variables d'état indépendantes du système*, avec $d=\deg\det(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$, ou encore *degré dynamique* du système.

En rapprochant ces caractéristiques des résultats précédents exprimés à partir du bond graph sur les variables d'énergie, nous arrivons finalement à des considérations bond graph assez « naturelles » :

— $n=n_I+n_D$, la *dimension du système* est égale au nombre d'éléments de stockage d'énergie,

— $q=d=n_I$, le nombre de *degrés de liberté du système* est équivalent au nombre de *degrés de liberté dynamiques* du système, *i.e.* le *nombre de variables d'états (statiquement) indépendantes du système*, ou encore le nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale sur le bond graph. L'*ordre généralisé du système* est égal au *degré dynamique* du système. On parle également d'*ordre BG* du modèle bond graph [FN97] [Jar10].

Remarque : le *nombre de variables d'état dynamiquement indépendantes du système* est égal à $n_{i(I)}-n_{i(D)}$, où $n_{i(I)}$ (resp. $n_{i(D)}$) représente le nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale lorsque la causalité préférentielle intégrale (resp. dérivée) est appliquée au bond graph [vD94] [FN97]. En d'autres termes, les variables dynamiquement indépendantes sont celles qui ont la causalité préférentielle dans chacune des deux affectations causales préférentielles (BGI, BGD). [30]

5.4.2.2 Implications sur l'initialisation, la propreté et la réponse temporelle

Les propriétés du système (5.56) conduisent à des résultats importants concernant l'initialisation. En utilisant les travaux de Verghese (section 5.3.3 page 193) appliqués au cas particulier des systèmes singuliers ne possédant que des modes exponentiels et des modes non-dynamiques, nous pouvons dire que les variables d'énergie d'un bond graph ne contiennent pas d'impulsions, y compris à l'initialisation. Les variables dépendantes (uniquement associées à des modes non-dynamiques) sont calculées, et ceci y compris à l'instant initial à partir de l'équation (5.17) page 188 dans la forme de Smith ou à partir

30. Ce résultat est directement issu de la dépendance entre les *dérivées* des variables d'état, soit donc du rang de la matrice d'état *i.e.* $\text{Rang}\,\mathbf{A}$. Une matrice d'état singulière implique que ses lignes/colonnes ne sont pas linéairement indépendantes, donc que les dérivées sont dépendantes [vD94]. Notons que le calcul du $Rang_{BG}$ de la matrice $\mathbf{A}$ dans un système singulier est notamment proposé dans [Mou00] et [RDT06].

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

de l'équation (5.4c) page 183 dans la forme de Rosenbrock, avec $\mathbf{E}_2 = \mathbf{0}$ (cette dernière approche est celle opérée en bond graph dans [BC97] à partir de la forme (5.56)). Conformément à l'approche de Verghese, l'ensemble des q ($= d = n_I$) degrés de liberté *dynamiques* du système singulier peuvent être ici initialisés de manière arbitraire, aucune impulsion ne sera engendrée sur les variables d'énergie du système (5.56).

En termes de propreté, nous pouvons reprendre certaines considérations de Kucera et Dai (chapitre 3, section 3.4.1 page 89) et les associer aux résultats précédents :

— n_I, nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale est équivalent à d, nombre de variables d'état indépendantes du système (conduisant à d modes exponentiels) *i.e.* $n_I \equiv d = \deg \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$. C'est le nombre d'intégrateurs dans le système et ainsi le nombre de pôles finis du faisceau $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ (modes dynamiques *finis* (*i.e.* exponentiels)).

— l'égalité $q = d$ *i.e.* $\text{Rang}(\mathbf{E}) = \deg \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ entraîne que dans cette classe de modèles, le faisceau $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ (associé à l'ensemble des variables d'énergie du système) n'a pas de pôles à l'infini. En d'autres termes, cette classe de modèles aboutit à des systèmes *propres* du point de vue des variables énergétiques (le faisceau $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ est propre). [31]

En termes de réponse temporelle, les précédentes considérations sur l'absence de mode impulsionnel et la simplification à la forme de Rosenbrock (5.56) dans laquelle la matrice $\mathbf{E}_2$ est nulle nous conduit à une équation différentielle ordinaire sur la variable $\bar{\mathbf{x}}_1$ et une équation algébrique triviale sur $\bar{\mathbf{x}}_2$. Utilisant le changement de variable (5.54), nous pouvons exprimer la réponse temporelle des variables $\mathbf{x}_I$ et $\mathbf{x}_D$. Ces formalisations sont explicitées dans les travaux de Buisson & Cormerais [BC97, BC98].

5.4.2.3 Modes impulsionnels sur les variables de sortie non énergétiques du bond graph (direct ou inverse)

Nous avons vu que le système (5.52), était *propre* du point de vue interne lorsque son faisceau $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ était construit à partir d'un vecteur d'état comprenant l'ensemble des variables d'énergie du système (associées à des éléments de stockage en causalité intégrale et dérivée). Ce système ne comporte pas de mode impulsionnel. La propreté du système (5.52) n'est toutefois plus garantie du point de vue entrée/sortie s'il existe des chemins causaux entre des éléments de stockage en causalité dérivée et des détecteurs (D_f, D_e). *La proposition de cette section s'inspire de celle de l'analyse structurelle des systèmes à commutation proposée par* Buisson & Cormerais *[BC97, BC98].*

Nous formulons la proposition suivante :

Proposition 5.1

(propreté interne et externe d'un modèle bond graph) *Le modèle bond graph représentant le système singulier (5.52), propre du point de vue interne, l'est du point de vue externe si et seulement si il n'existe pas de chemin causal* de longueur nulle *entre les éléments de stockage en causalité dérivée et les détecteurs.*

31. Précisons que nous ne parlons pas de la *structure à l'infini* du système ici, qui est associée à la matrice de transfert, mais de celle du faisceau $s\mathbf{E} - \mathbf{A}$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Démonstration : Le système (5.52) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_I & \mathbf{E}_{ID} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_D & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_I \\ \dot{\mathbf{x}}_D \\ \dot{\mathbf{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{DI} & \mathbf{I}_D & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}_I & \mathbf{0} & \mathbf{I}_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_I \\ \mathbf{x}_D \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_I \\ \mathbf{B}_D \\ -\mathbf{D} \end{pmatrix} \mathbf{u} \tag{5.58}$$

Le système (5.58) comportant rigoureusement le même nombre de stockage d'énergie, n, que le système (5.52), dont le même nombre en causalité intégrale, n_I, le degré du polynôme caractéristique d reste inchangé. En revanche, l'analyse de rang des matrices $\mathbf{E}$ respectives conduit à :

— dans (5.52) :

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_I & \mathbf{E}_{ID} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = n_I \tag{5.59}$$

— dans (5.58) :

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_I & \mathbf{E}_{ID} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_D & \mathbf{0} \end{pmatrix} = n_I + \text{Rang}(\mathbf{C}_D) \tag{5.60}$$

Nous déduisons de (5.60) que le système (5.58) possède des modes impulsionnels si et seulement si $(q-d) = \text{Rang}(\mathbf{E}_{(5.58)}) - \deg\ \det(s\mathbf{E}_{(5.58)} - \mathbf{A}_{(5.58)}) = \text{Rang}(\mathbf{C}_D) \neq 0$, or $\mathbf{C}_D$ est construite à partir des chemins causaux de longueur nulle entre les éléments de stockage en causalité dérivée et les détecteurs (procédure D.1 page 307), d'où le résultat de la proposition.

Fin de la démonstration.

Remarque 1: le résultat de la proposition 5.1 est ainsi très similaire à celui obtenu sur les systèmes à commutation dans [BC98]. Une différence existe toutefois sur la nature des chemins causaux considérés dans le présent cas (5.58). La sous-matrice $\mathbf{C}_D$ représente ici les chemins causaux de longueur nulle entre éléments de stockage en causalité dérivée et détecteurs S_e, S_f.

Remarque 2: la quantité $\text{Rang}(\mathbf{C}_D)$ représente *l'ensemble des chemins causaux disjoints* entre éléments de stockage en causalité dérivée et détecteurs. Nous pouvons conclure que dans le cas où *un seul* ensemble de chemins causaux disjoints existe entre stockage en causalité dérivée et détecteur, les modes impulsionnels seront associés aux variables de sortie de cet ensemble.

Remarque 3: la proposition 5.1 ne garantit pas l'absence d'impulsions sur l'ensemble des variables du bond graph. La nullité de $\mathbf{C}_D$ indique que si potentiellement elles existent, elles ne seront pas détectées.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Exemple

Considérons le bond graph de la figure 5.5 avec différents positionnement de détecteurs. Ce modèle a également été discuté en section 4.2.2.2 page 120 ainsi qu'en section 4.3.2 page 139 (exemple 1 page 145).

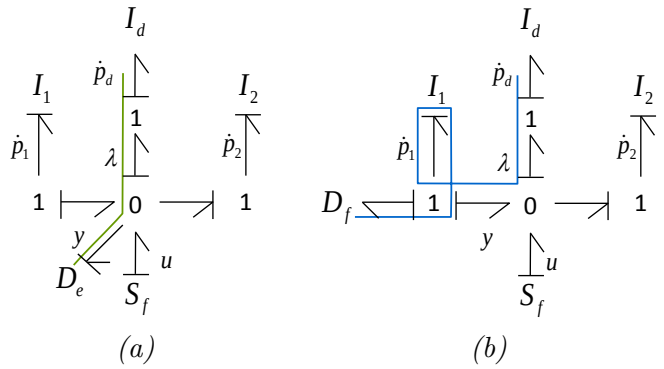


FIGURE 5.5 – Exemple de bond graph avec plusieurs boucles causales d'ordre 0 de classe 1

Le système peut se mettre sous la forme d'état singulier (5.52), dont le polynôme caractéristique est $\det(s\mathbf{E}-\mathbf{A}) = -s^2\left(1+\frac{I_d}{I_1}+\frac{I_d}{I_2}\right)$ et $\text{Rang}(\mathbf{E}) = 2$, vérifiant ainsi l'égalité $q = d = n_I$ (équation (5.61)).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{p}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{I_d}{I_1} & \frac{I_d}{I_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_d \end{bmatrix} u \tag{5.61}$$

Le positionnement du détecteur D_e en figure 5.5a conduit à mesurer l'effort entre éléments en causalité intégrale et dérivée. Il existe ici un lien causale entre l'élément de stockage en causalité dérivée I_d et le détecteur D_e (sous-matrice ($\mathbf{C}_D$) non nulle dans (5.52), avec en l'occurrence ici $y = \dot{p}_d$, *i.e.* $\mathbf{C}_D = 1$). Il existe donc un mode impulsionnel sur la sortie. En effet, le système peut s'écrire de la manière suivante,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{p}_d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{I_d}{I_1} & \frac{I_d}{I_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_d \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{d(\cdot)}{dt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \end{aligned} \tag{5.62}$$

Il comprend ainsi $q - d = \text{Rang}(\mathbf{C}_D) = 1$ mode impulsionnel, portant sur la variable de sortie $y = \dot{p}_d$.

Pour le cas de la 5.5b, le positionnement du détecteur D_f mesure un flux sur l'élément I_1 en causalité intégrale. Il n'y a pas de chemin causal direct entre un élément de stockage en causalité dérivée, en l'occurrence I_d, et le détecteur D_f et donc, aucun mode impulsionnel sur cette sortie. Le modèle peut directement s'écrire à partir de l'équation d'état (5.61) à laquelle on adjoint l'équation de sortie $y = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_d \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$. Nous retrouvons alors ici $q = d = n_i$, et le système ne comporte pas d'impulsion, sur aucune de ses variables d'état ou de sor-

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

tie. Notons que si nous introduisons toutefois la variable $\lambda = \dot{p_d}$ dans l'expression du système, un mode impulsionnel sur λ apparaît, mais ne sera pas détecté avec cette configuration de capteur (système (5.63)).

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p_1} \\ \dot{p_2} \\ \dot{p_d} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{I_d}{I_1} & \dfrac{I_d}{I_2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_d \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_d \\ 0 \end{bmatrix} u \\
y &= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{I_1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_d \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u
\end{aligned} \tag{5.63}$$

Remarque 4: en considérant à nouveau l'exemple 2 page 148, nous soulignons l'importance des hypothèses utilisées pour formuler la proposition 5.1 (en l'occurrence le fait que nous travaillons sur le modèle bond graph représentant le système singulier (5.52)). En effet, le cas de la figure 4.19a page 148 n'exhibe pas de mode impulsionnel sur la sortie y malgré le lien causale direct entre le détecteur d'effort D_e et l'élément I_2. Ce fait se justifie par l'égalité $\text{Rang}(\mathbf{E}) = \deg\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ pour le système (5.64), qui ne peut s'écrire sous la forme simplifiée (5.52). [32]

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\dfrac{I_2}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p_1} \\ \dot{p_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\dfrac{I_2}{I_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -I_2 \end{bmatrix} u \\
y &= \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{d(\cdot)}{dt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u
\end{aligned} \tag{5.64}$$

Une autre manière de retrouver ce résultat est d'analyser la fonction de transfert de ce système, donnée par $T_{5.64}(s) = \dfrac{sR}{s + R/I_1 + R/I_2}$, constatant ainsi que sa structure à l'infini est un zéro à l'infini d'ordre 0 (impliquant *de facto* l'absence de mode impulsionnel sur la sortie y).

5.4.2.4 Cas simplifié : exemple de résolution temporelle et de détection des modes impulsionnels

Nous proposons de déterminer les différents modes (exponentiels, impulsionnels, non-dynamiques) du système (4.100) page 170 proposé dans l'exemple de synthèse de la section 4.6.3 page 169.

approche algébrique Nous pouvons dans un premier temps conclure que : [33]

- $n = \dim(\mathbf{E}) = 4$ (*dimension du système*).
- $q = \text{Rang}(\mathbf{E}) = 3$ (nombre de *degré de liberté du système*).
- $d = \deg\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = 2$ (nombre de *degrés de liberté dynamiques* du système, *i.e.* le *nombre de variables d'états indépendantes du système*, où sur le bond graph, $d = n_I - \omega_{n_I - d} = 2 - 0 = 2$ puisque le bond graph respecte les hypothèses énoncées en début de section 5.4.2).

32. Le système (5.64) est en l'occurrence de la forme (A.25) page 256, voir section A.3.4.
33. Voir chapitre 3, section 3.2.3 page 83.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Le système singulier (4.100) possède ainsi :
- $d = 2$ modes exponentiels.
- $(q - d) = (3 - 2) = 1$ mode impulsionnel.
- $(n - q) = (4 - 3) = 1$ mode infini non-dynamique.

Nous proposons de décomposer le système sous la forme de Rosenbrock (*i.e.* décomposition *canonique standard*, section 5.2.2, théorème 5.2 page 183). Nous rappelons que cette décomposition se base sur la notion d'*équivalence restreinte* entre deux systèmes singuliers (définition 5.1 page 182), directement issue de la forme de « Kronecker-Weierstrass » (théorème 5.1 page 182). Cette dernière forme permet de vérifier à nouveau la régularité du faisceau $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$. Dans le présent cas, le système (4.100) est déjà sous une forme de Kronecker-Weierstrass, puisqu'en choisissant la matrice identité comme matrice constante réelle non-singulière pour $\mathbf{M}$ et pour $\mathbf{N}$, le faisceau du système (4.100) s'écrit sous la forme suivante,

$$\mathbf{M}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{N} = \begin{bmatrix} s + \dfrac{R}{I_2} & -\dfrac{1}{C} & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{I_2} & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \end{bmatrix} \tag{5.65}$$

Le faisceau (5.65) est de la forme $\mathbf{M}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{N} = \begin{pmatrix} s\mathbf{I}_d - \mathbf{A}_1 & 0 \\ 0 & s\mathbf{E}_2 - \mathbf{I}_{n-d} \end{pmatrix}$, avec $d = \deg \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = 2$, $n = \dim \mathbf{x}(t) = 4$ et $\mathbf{E}_2 \in \mathbb{R}^{(n-d)\times(n-d)}$ est une matrice nilpotente. Outre la vérification de régularité du faisceau, l'index de nilpotence h de $\mathbf{E}_2$ dans (5.65), en l'occurrence $h = 2$, est consistante avec le fait que le système possède un mode impulsionnel (l'indice est supérieur à 1). En utilisant les précédents résultats, nous concluons que le système singulier (4.100) est déjà sous une forme de Rosenbrock, en conservant les matrices de transformation $\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{I}$ et $\bar{\mathbf{N}} = \mathbf{I}$[34]. Le système est rappelé en (5.66) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_{I_2} \\ \dot{q}_C \\ \dot{p}_{I_1} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{I_2} & \frac{1}{C} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{I_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{I_2} \\ q_C \\ p_{I_1} \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R & 1 \\ 1 & 0 \\ -I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{5.66}$$

Le sous-système *lent*, comprenant tous les modes exponentiels (*i.e.* de dynamique finie), est composé des variables d'énergie p_{I_2} et q_C, et le sous-système *rapide*, comprenant tous les modes infinis, permet d'associer le mode non-dynamique à la variable d'énergie p_{I_1} (grâce à l'équation $p_{I_1} = I_1 u_1$) et le mode impulsionnel à la variable non énergétique λ (équation $\lambda = \dot{p}_{I_1} = I_1 \dot{u}_1$).

Les précédentes considérations peuvent également être explicitées en établissant la solution temporelle du système (section 5.3). Nous proposons ici de ne regarder que la solution temporelle distributionnelle (section 5.3.3 page 193) du sous-système *rapide*. En précisant ce dernier sous la forme suivante *(conservant les notations associées à la forme*

34. Notons qu'en utilisant $\bar{\mathbf{N}} = \mathbf{I}$, nous pouvons conserver dans (5.66) les variables d'états originelles du système, puisque le changement de variables d'état de la forme de Rosenbrock est de la forme $\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1(t) & \bar{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix}^T = \bar{\mathbf{N}}^{-1}\mathbf{x}(t)$ (*c.f.* équation (5.5) page 183). Ce n'est en revanche pas une généralité en bond graph, comme nous l'avons vu à l'équation (5.54) page 201.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

de Rosenbrock*)*,

$$\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}}_{\mathbf{E}_2}\begin{bmatrix}\dot{p}_{I_1}\\ \dot{\lambda}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}_{\mathbf{I}_d}\begin{bmatrix}p_{I_1}\\ \lambda\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}-I_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}_2}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix} \quad , \tag{5.67}$$

la solution temporelle distributionnelle (équation (5.31) page 193) appliquée au système (4.100) est la suivante :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix}p_{I_1}(t)\\ \lambda(t)\end{bmatrix} &= -\sum_{i=0}^{h-1}\delta^{(i)}(t)\mathbf{E}_2{}^{i+1}\begin{bmatrix}p_{I_1}(0)\\ \lambda(0)\end{bmatrix}\\
&- \sum_{i=0}^{h-1}\mathbf{E}_2{}^{i}\bar{\mathbf{B}}_2\mathbf{u}^{(i)}(t)\\
&= -\delta(t)\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{I_1}(0)\\ \lambda(0)\end{bmatrix}\\
&- \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-I_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-I_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{u}_1(t)\\ \dot{u}_2(t)\end{bmatrix}\\
&= \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ \delta(t)p_{I_1}(0)\end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{x}}_{2_imp_libre}(t)}\\
&- \underbrace{\begin{bmatrix}-I_1u_1(t)\\ 0\end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{x}}_{2_non_dynamique}(t)} - \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ -I_1\dot{u}_1(t)\end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{x}}_{2_imp_forcee}(t)}\\
&= \begin{bmatrix}I_1u_1(t)\\ \delta(t)p_{I_1}(0) + I_1\dot{u}_1(t)\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.68}$$

Nous retrouvons ainsi les conclusions précédemment établies :

- le mode impulsionnel est associé à la variable non-énergétique λ du système. Ce mode peut être excité :
  - par les conditions initiales des variables d'état du système (terme $\delta(t)p_{I_1}(0)$, *réponse libre* associée aux mode impulsionnel, voir équation (5.35) page 194),
  - ou par les entrées du système (terme $I_1\dot{u}_1(t)$, *réponse forcée* associée au mode impulsionnel, équation (5.36) page 194).

- le mode non-dynamique est associé à la variable énergétique p_{I_1}. Nous retrouvons ainsi la composante $\bar{\mathbf{x}}_{2_non_dynamique}(t) = -\bar{\mathbf{B}}_2u(t)$ (équation (5.37) page 194).

approche bond graph L'analyse bond graph est dans ce cas de figure relativement simple à mener en rappelant que le bond graph considéré (figure 4.26 page 169) respecte les hypothèses de la présente section 5.4. Les variables associées à des stockages d'énergie (en causalité intégrale ou dérivée) ne peuvent pas contenir de modes impulsionnels. Les variables p_{I_2} et q_C, associées à des stockages d'énergie en causalité intégrale vont être associées aux modes exponentiels, la variable p_{I_1} relative au stockage d'énergie en causalité dérivée I_1 est associée au mode non-dynamique puisque le bond graph donne

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

directement la relation constitutive $p_{I_1} = I_1 u_1$. D'autre part, la proposition 5.1 nous permet de conclure à la présence d'un mode impulsionnel dans la mesure où il existe (au moins un) chemin causal direct entre un élément de stockage en causalité dérivée et un détecteur, en l'occurrence le chemins a_{o-1} (figure 4.27(a) page 172). Ce chemin implique ici l'existence de la composante $\lambda = \dot{p_{I_1}} = I_1 \dot{u_1}$ de la sortie y_1, directement issue de la loi constitutive de l'élément I_1. Nous retrouvons les conclusions de l'approche algébrique.

5.4.3 Cas général

Nous souhaitons, dans la présente section, étendre les résultats apportées en section 5.4.2 par Buisson & Lu [BL94] concernant la détection potentielle des modes impulsionnels dans le cas général où le bond graph représente un système linéaire singulier de la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_I & \mathbf{E}_{ID} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{\lambda D} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_I(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_D(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_\lambda(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_I & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{I\lambda} \\ \mathbf{A}_{DI} & \mathbf{I}_D & \mathbf{A}_{D\lambda} \\ \mathbf{A}_{\lambda I} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_\lambda + \mathbf{A}_\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_I(t) \\ \mathbf{x}_D(t) \\ \mathbf{x}_\lambda(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_I \\ \mathbf{B}_D \\ \mathbf{B}_\lambda \end{pmatrix} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_I & \mathbf{C}_D \dfrac{d(\cdot)}{dt} & \mathbf{C}_\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_I(t) \\ \mathbf{x}_D(t) \\ \mathbf{x}_\lambda(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{D} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t) \tag{5.69}$$

La forme très générale de système singulier (5.69), notamment adressée au chapitre 4 en section 4.3.2 page 139, est issue d'un bond graph causal ou bicausal où les seuls hypothèses sont que la structure de jonction soit résoluble. Le bond graph peut avoir des champs, des ZCP de classe 1 à 4 dans la classification de van Dijk *et al.* [vDB91a, vD94] et être indifféremment affecté d'une causalité préférentielle intégrale, dérivée, voire mixte. [35]

5.4.3.1 Détection de modes impulsionnels en utilisant les degrés des transmittances

Les notions de *propreté interne* et *propreté externe* des systèmes singuliers ont été introduites au chapitre 3 (section 3.4.1 page 89, notamment les théorèmes 3.7 et 3.8). Si un système est propre du point de vue *interne* (*i.e.* faisceau $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ propre) aucun terme impulsionnel n'apparaîtra sur l'ensemble de ses variables internes. Si un système est propre du point de vue *externe* (*i.e.* faisceau $\mathbf{T}(s)$ propre), aucune de ses variables de sortie ne verra apparaître de terme impulsionnel [Kuc86]. Dans le présent cas de la formulation (5.69), la propreté *interne* n'implique pas nécessairement la propreté *externe*, en raison de la présence d'opérateurs dans la sous-matrice $\mathbf{C}_D$ [36]. Rappelant les considérations sur la propreté des matrices rationnelles (chapitre 2, section 2.2.3.1 page 47) [37], nous proposons le critère de détection de modes impulsionnels suivant (lemme 5.2) :

35. La classe de bond graph adressée par les modèles représentant le système (5.69) est détaillée en annexe A.3.3 page 252 ainsi qu'en annexe D.1 page 305.

36. En rapport avec cette dernière remarque, la flexibilité de la représentation (5.69), liée au choix arbitraire de variables de puissance comprises dans le vecteur $\mathbf{x}_\lambda$, offre la possibilité de choisir d'exposer dans le vecteur d'état des variables de puissance de manière à substituer tous les termes de $\mathbf{C}_D$ de manière à les faire apparaître dans la sous-matrice $\mathbf{E}_{\lambda D}$ (voir par exemple l'équation (5.64) page 207 qui peut s'écrire sous la forme (4.70) page 148). Sous cette condition, et ainsi sans opérateur dans la matrice $\mathbf{C}$, la propreté *interne* implique la propreté *externe* dans (5.69).

37. En l'occurrence, une matrice rationnelle (resp. rationnelle *propre*, rationnelle *strictement propre*) est une matrice dont les éléments sont des fractions rationnelles (resp. rationnelles *propres*, rationnelles *strictement propres*).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Lemme 5.2

(Propreté externe d'un système singulier sur son modèle bond graph associé) *Un modèle bond graph bicausal ou sans causalité préférentielle particulière, représentant le système singulier (5.69), est propre du point de vue externe (et ne comprendra ainsi aucun terme impulsionnel sur ses variables de sortie) si et seulement si tous les degrés des transmittances $\delta_{D\,1\,(u_i,y_j)}$ sont négatifs, où*

$$\delta_{D\,1\,(u_i,y_j)} \triangleq \deg\left(t_{ij}(s)\right) = -\min_{\mathcal{F}_{(u_i,y_j)\,,\,\omega_k}} \left\{\omega_k \mid \rho_{\omega_k}^{(u_i,y_j)} \neq 0\right\} + \omega_{n_I-d} \tag{5.70}$$

avec :

- *$\mathcal{F}_{(u_i,y_j)\ \omega_k}$ est la $k^{ième}$ famille bond graph (définition B.23 page 266) d'ordre ω_k (définition B.26 page 266), contenant exactement 1 chemin causal entre l'entrée u_i et la sortie y_j, où seuls les cycles et le chemin impliquant les variables* exposées dans la représentation d'état (5.69) *sont considérés,*
- *$\mathbb{F}_{(u_i,y_j)\ \omega_k}$ est l'ensemble des familles $\mathcal{F}_{(u_i,y_j)\ \omega_k}$ (notation B.5 page 267),*
- *$\rho_{\omega_k}^{(u_i,y_j)}$ est la somme des gains statiques de $\mathbb{F}_{(u_i,y_j)\ \omega_k}$ dans laquelle le gain statique de chaque famille $\mathcal{F}_{(u_i,y_j)\ \omega_k}$ doit être multiplié par un facteur $(-1)^{n_D+n_\lambda-d_j}$, où n_D et n_λ sont respectivement le nombre d'éléments de stockage en causalité dérivée et le nombre de variables de puissance choisies dans le vecteur d'état de (5.69), et d_j est le nombre de* cycles causaux BG-différents-génériques *contenus dans la famille $\mathcal{F}_{(u_i,y_j)\ \omega_k}$,*
- *ω_{n_I-d} représente l'ordre minimal qu'une famille des seuls cycles causaux* BG-différents-génériques *(définition B.18 page 265) impliquant les variables d'état puisse avoir, telle que la somme des gains statiques des familles d'ordre ω_{n_I-d} soit différente de zéro.*

Démonstration :

Le résultat découle immédiatement du lemme 4.9 page 161.

Fin de la démonstration.

Remarque 1: le lemme 5.2 est formulé au niveau d'analyse *comportemental*, comme le lemme 4.9. Leur déclinaison respective au niveau d'analyse *BG-Structurel* peut être trivialement réalisée sans considération des gains statiques.

Remarque 2: comme le lemme 4.9 page 161, le lemme 5.2 (ainsi que le lemme 5.3 de la section suivante) ne particularise pas le système étudié. Il est applicable sur le modèle bond graph associé à un modèle direct ou inverse.

5.4.3.2 Détection de modes impulsionnels en utilisant la structure à l'infini du système

Les notions de *propreté interne* et de *propreté externe* reflètent également d'une part la *structure à l'infini du faisceau* $(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ d'un système singulier *i.e.* ses propriétés intrinsèques, et d'autre part, la *structure à l'infini de sa matrice de transfert* $\mathbf{T}(s)$, *i.e.* les

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

propriétés entrées/sorties du système. Déclinée au niveau *interne* ou *externe* d'une autre manière qu'à la section précédente, l'existence des pôles à l'infini dans le système singulier (5.1) est la cause de l'apparition des modes impulsionnels [Dai89b]. Nous proposons ainsi le lemme suivant :

Lemme 5.3

(Propreté externe d'un système singulier sur son modèle bond graph associé) *Un modèle bond graph bicausal ou sans causalité préférentielle particulière, représentant le système singulier (5.69), est propre du point de vue externe (et ne comprendra ainsi aucun terme impulsionnel sur ses variables de sortie) si et seulement si tous les ordres t_i de ses zéros/pôles à l'infini sont tels que $(t_i) \geq 0$, où*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} t_1 & = & \omega_1 - \omega_{n_I-d} \\ t_i & = & \omega_i - \omega_{i-1} \end{array} \right. \tag{5.71}$$

avec, sur le modèle bond graph :

$$\omega_i = \min_{\substack{(U,Y)\subset[\![1,p]\!]^2 \\ \text{tel que } |U|=|Y|=i}} \left\{ \min_{\mathcal{F}_{(U,Y),\omega_j}} \left\{ \omega_j \mid \rho_{\omega_j}^{(U,Y)} \neq 0 \right\} \right\} \quad , \quad \forall i \in \{1,...,r\} \tag{5.72}$$

et :

- *ω_{n_I-d} représente l'ordre minimal qu'une famille des seuls cycles causaux* BG-différents-génériques *(définition B.18 page 265) impliquant les variables d'état puisse avoir, telle que la somme des gains statiques des familles d'ordre ω_{n_I-d} soit différente de zéro.*

- *$\mathcal{F}_{(U,Y),\omega_j}$ est la $j^{ième}$ famille bond graph (définition B.23 page 266) d'ordre ω_j (définition B.26 page 266), contenant exactement i chemins causaux entrée/sortie* BG-différents-génériques *(définition 4.2 page 140), où seuls les chemins et cycles impliquant les variables* exposées dans la représentation d'état (5.69) *sont considérés, les chemins étant entre les variables d'entrées contenues dans l'ensemble $\mathbf{U}$ de dimension i ($|\mathbf{U}| = i$) et les variables de sorties contenues dans l'ensemble $\mathbf{Y}$ de dimension i ($|\mathbf{Y}| = i$).*

- *$\mathbb{F}_{(U,Y),\omega_j}$ est l'ensemble des familles $\mathcal{F}_{(U,Y),\omega_j}$ (définition B.5 page 267).*

- *$\rho_{\omega_j}^{(U,Y)}$ est la somme des gains statiques de $\mathbb{F}_{(U,Y),\omega_j}$ dans laquelle le gain statique de chaque famille $\mathcal{F}_{(U,Y),\omega_j}$ doit être multiplié par :*
  - *un facteur $(-1)^{n_D+n_\lambda-d_j}$, où n_D et n_λ sont respectivement le nombre d'éléments de stockage en causalité dérivée et le nombre de variables de puissance choisies dans le vecteur d'état de (5.69), et d_j est le nombre de* cycles causaux BG-différents-génériques *contenus dans la famille $\mathcal{F}_{(U,Y),\omega_j}$,*
  - *un facteur $(-1)^{\sigma_j}$, où σ_j est le nombre de permutations nécessaires pour ordonner les i sorties de la famille $\mathcal{F}_{(U,Y),\omega_j}$ dans l'ordre initial des sorties, lorsque les i chemins causaux sont ordonnés dans l'ordre initial des entrées.*

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Démonstration :

Les théorèmes 3.7 et 3.8 page 89, ainsi que la proposition 4.8 page 156 conduisent immédiatement à ce résultat.

Fin de la démonstration.

Remarque 1: le lemme 5.2 est formulé au niveau d'analyse *comportemental*, comme l'est la proposition 4.8. Sa déclinaison au niveau d'analyse *BG-Structurel* peut être trivialement réalisée sans considération des gains statiques, à partir de la proposition 4.7 page 156.

Remarque 2: basé sur la détermination de la structure à l'infini du système, le lemme 5.3 ne produit pas de critère particularisé à une sortie donnée (sauf dans le cas très particulier d'un bond graph *SISO*, voir ci-après).

Exemple

> Dans le cas simplifié des exemples SISO 1 et 2 page 160, seul le cas de la figure 4.16(a) page 145 comportera un mode impulsionnel, sur la variable de sortie y mesurée par le détecteur d'effort D_e, conformément aux considérations sur $T_{4.16a}(s)$ exposées dans l'exemple 1 page 160.

5.4.3.3 Présence de mode impulsionnel sur les variables d'énergie du système

Dans le cas général d'un bond graph représentant le système singulier (5.69), l'absence de mode impulsionnel associé aux variables d'énergie n'est plus garantie, notamment dans le cas bicausal. La présente section a simplement pour objectif d'illustrer ce point, à partir d'un exemple simple.

Prenons l'exemple du bond graph bicausal de la figure 5.6, où le module du gyrateur GY vaut 1. Les entrées de ce modèle sont y_1 et y_2, respectivement issues des doubles sources $SeSf_1$ et $SeSf_2$. Les sorties sont u_1 et u_2, respectivement mesurées par les doubles

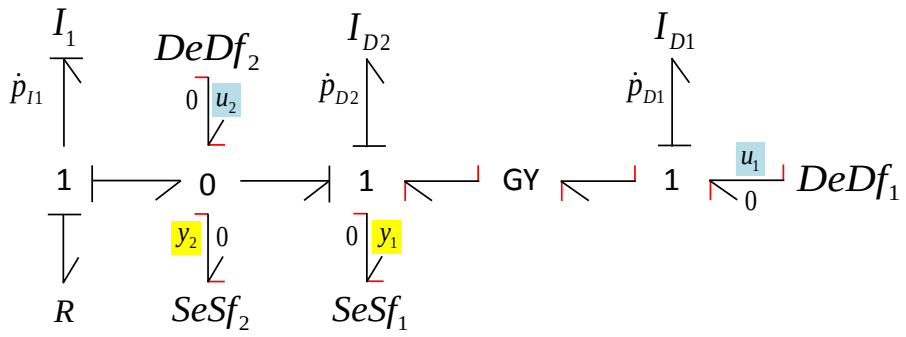


FIGURE 5.6 – Modèle bond graph comprenant un mode impulsionnel sur une variable d'énergie

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

détecteurs $DeDf_1$ et $DeDf_2$. Le modèle s'écrit sous la forme du système singulier (5.73) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{D1}\, r \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_{I1} \\ \dot{p}_{D1} \\ \dot{p}_{D2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{I_1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{I1} \\ p_{D1} \\ p_{D2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & I_{D1}\, r \\ -I_{D2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{d(\cdot)}{dt} & 0 \\ \frac{1}{I_1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{I1} \\ p_{D1} \\ p_{D2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \tag{5.73}$$

Le polynôme caractéristique du système est $\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = s + \dfrac{R}{I_1}$, que nous déterminons sur le bond graph à partir de la proposition 4.1 page 116, en remarquant qu'un seul cycle causal n'existe, en l'occurrence entre I_1 et R. Nous avons dans le présent cas, $n = \dim(\mathbf{E}) = 3$, $q = \text{Rang}(\mathbf{E}) = 2$ et $d = \deg \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = 1$. Nous avons ainsi $d = 1$ modes exponentiels, $(q - d) = 1$ mode impulsionnel et $(n - q) = 1$ mode infini non-dynamique. Nous pouvons noter que le système (5.73) est déjà sous la forme de Rosenbrock (section 5.2.2 page 183), avec $\mathbf{E}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & I_{D1}\, r \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, nilpotente d'index 2. Nous en déduisons que le mode exponentiel est associé à la variable p_{I1}, que le mode non-dynamique est associé à la variable p_{D2} (équation $p_{D2} = I_{D2} y_1$) et enfin que le mode impulsionnel est associé à la variable p_{D1} (équation $p_{D1} = I_{D1}\, r\, (\dot{p}_{D2} - y_2)$). Ce dernier illustre ainsi la potentialité de trouver des modes impulsionnels sur les variables d'énergie d'un bond graph.

La présence de modes impulsionnels associés à des variables d'énergie est notamment susceptible de se produire, comme dans le présent cas du bond graph de la figure 5.6, sur des bond graph bicausaux ayant une topologie arborescente, dans lesquels il existe, comme par exemple dans le présent cas, un lien causal entre deux éléments de stockage en causalité dérivée [38]. La spécificité de la bicausalité tend à « casser » les cycles causaux (au sens où le lien causal entre les deux éléments de stockage en causalité dérivée ne se fait que dans un sens). Dans la représentation singulière (5.69), ceci peut entraîner une augmentation du rang de la matrice $\mathbf{E}$ sans que le degré du polynôme caractéristique, lié aux cycles causaux, ne soit nécessairement augmenté dans les mêmes proportions, impliquant que q soit alors différent de d. Bien que ce ne soit pas une généralité, nous comprenons ainsi la raison pour laquelle dans un bond graph causal, quel que soit la causalité choisie, il est *a priori* plus difficile de trouver des modes impulsionnel associés à des variables d'énergie.

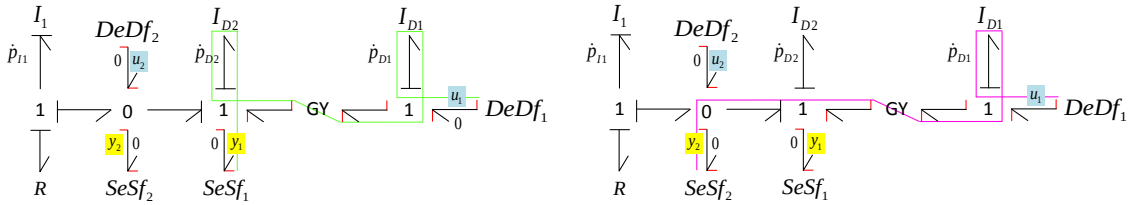
Nous pouvons également analyser la présence potentielle de modes impuslionnels sur les *sorties* du modèle de la figure 5.6, grâce aux lemmes 5.2 et 5.3. Du point de vue algébrique, la matrice de transfert du système (5.73) est la suivante :

$$\mathbf{T}_{(5.73)}(s) = \begin{bmatrix} -s^2\, I_{D1}\, r\, I_{D2} + \dfrac{1}{r} & -s\, I_{D1}\, r \\ -1 & -\dfrac{1}{s\, I_1 + R} \end{bmatrix} \tag{5.74}$$

38. Le lien causal entre deux éléments de stockage d'énergie en causalité dérivée est constitutif de la sous-matrice $\mathbf{S}_{22}$ dans la matrice de structure de jonction bond graph (voir annexes A.3.2 et A.3.3, par exemple la forme générale (A.13) page 253). Le lien causal entre deux éléments de stockage d'énergie en causalité dérivée peut également se faire à travers un élément R, à travers les sous-matrices $\mathbf{S}_{23}$ et $\mathbf{S}_{32}$ de (A.13). Ces deux cas de figure (lien direct ou à travers un élément R) sont compris dans le terme de $\mathbf{S}_{DD}$ de la forme (A.17) page 254 et ainsi dans la sous-matrice $\mathbf{E}_D$ dans (5.69) (voir annexe A.3.3).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Nous pouvons immédiatement conclure que la matrice de transfert $\mathbf{T}_{(5.73)}(s)$ n'est pas propre, les transmittances $t_{11}(s)$ et $t_{12}(s)$ étant de degré respectif 2 et 1. Des impulsions sont ainsi susceptibles d'apparaître dans la sortie u_1. Dans la perspective d'appliquer le lemme 5.2 au bond graph de la figure 5.6, en notant que ce dernier ne comporte pas de cycle causal d'ordre négatif, nous scrutons les *chemins* entrées/sorties d'ordre minimal. Nous observons ainsi qu'il n'existe qu'un seul chemin causal d'ordre minimal entre l'entrée y_1 et la sortie u_1, d'ordre -2, et qu'un seul chemin causal d'ordre minimal entre l'entrée y_2 et la sortie u_1, d'ordre -1 (figure 5.7). Le lemme 5.2 conduit ainsi à $\deg(t_{11}(s)) = 2$

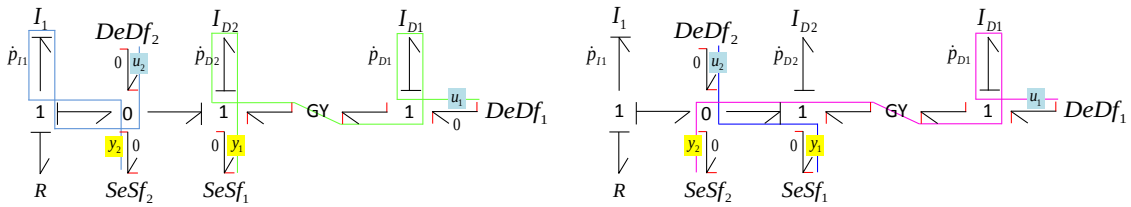


(a) Chemin causal y1 → u1 d'ordre -2 (a_{o2})

(b) Chemin causal y2 → u1 d'ordre -1 (b_{o1})

FIGURE 5.7 – Détails de certain chemins causaux *Entrée* → *Sortie* du bond graph 5.6

et $\deg(t_{12}(s)) = 1$, conformément à l'approche algébrique, et à conclure que le système n'est pas propre du point de vue externe. Il peut comprendre des termes impulsionnels sur ses variables de sortie (en l'occurrence u_1 dans le présent cas). Cette conclusion peut également être retrouvée en appliquant le lemme 5.3, basé sur la structure à l'infini du système. Du point de vue algébrique, le plus haut degré des mineurs d'ordre 1 de $\mathbf{T}_{(5.73)}(s)$ est $\delta_{D\,1} = +2$. Nous avons donc $t_1 = -\delta_{D\,1} = -2$. Le mineur d'ordre 2 de $\mathbf{T}_{(5.73)}(s)$ est de degré $\delta_{D\,2} = +1$, nous avons ainsi $\sum_{j=1}^{2} t_j = -\delta_{D\,2} = -1$ et donc $t_2 = 1$. Nous retrouvons ainsi que la matrice de transfert $\mathbf{T}_{(5.73)}(s)$ n'est pas propre, puisqu'elle comporte un pôle à l'infini, d'ordre 2 (*i.e.* $t_1 = -2$). Du point de vue bond graph, la famille bond graph contenant exactement 1 chemin causal entrée/sortie et d'ordre minimal est formée par le chemin $y1 \to u1$ noté a_{o2} sur la figure 5.7. Grâce au lemme 5.3, nous avons immédiatement $t_1 = -2$, conformément à l'approche algébrique, et nous concluons que le système n'est pas propre du point de vue externe. Nous pouvons en outre également vérifier la détermination de t_2 sur le bond graph. Il existe deux familles bond graph contenant exactement 2 chemins causaux entrée/sortie *BG-différents-génériques* et d'ordre minimal, égal à -1 et dont les gains statiques ne s'annulent pas. Ces familles



(c) Famille de deux chemins causaux E/S d'ordre minimal −1 ($\mathcal{F}_c$)

(d) Famille de deux chemins causaux E/S d'ordre minimal −1 ($\mathcal{F}_d$)

FIGURE 5.8 – Détails de familles sur le bond graph 5.6

sont détaillées sur la figure 5.8. Nous pouvons ainsi déduire du lemme 5.3 que $t_2 = -1 - (-2) = 1$, conformément à l'approche algébrique.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

5.5 Conclusion

Le chapitre 5 a abordé l'analyse temporelle des systèmes linéaires singuliers à faisceau régulier, de la forme (5.1) page 180, du point de vue algébrique (sections 5.2 et 5.3) et du point de vue du bond graph (section 5.4). Au niveau algébrique, l'analyse temporelle, essentiellement bibliographique dans le présent chapitre, constitue un complément à l'analyse structurelle présentée au chapitre 3. Nous avons, dans un premier temps, exposé l'équivalence entre systèmes singuliers (section 5.2), à travers les formes usuelles de Rosenbrock et Smith, permettant d'obtenir des équivalences dans lesquelles les différents modes susceptibles d'apparaître dans un système singulier sont décomposés. Ces transformations conservent l'ensemble des propriétés du système singulier (notamment le degré dynamique, la matrice de transfert, la structure à l'infini). En particulier, la forme de Rosenbrock permet une séparation stricte des modes *finis* et *infinis*, la détermination de l'indice de nilpotence du système, et constitue la base de l'approche de résolution temporelle présentée en section 5.3, *classique* (section 5.3.2) ou *distributionnelle* (section 5.3.3). Basée sur la résolution distributionnelle, nous avons proposé une formalisation, à notre sens, claire et sans ambiguïté de la notion de mode impulsionnel et de l'analogie existante entre modes exponentiels et impulsionnels, qui peut être établie jusqu'aux réponses *libres* et *forcées* (section 5.3.3).

Au niveau graphique (section 5.4), nous avons présenté l'analyse structurelle suivant deux niveaux d'hypothèses sur le modèle bond graph. Un premier cas simplifié, usuellement rencontré en pratique, a été détaillé (section 5.4.2). Il comprend notamment, dans le cas linéaire, l'ensemble des bond graphs affectés d'une causalité préférentielle intégrale. Basée sur la forme de Rosenbrock particulière à laquelle ce niveau d'hypothèses aboutit (section 5.4.2.1), un certain nombre de propriétés a été présenté, dont la principale est l'absence de mode impulsionnel associé aux variables d'énergie du système. L'index de nilpotence du système singulier ne peut ainsi excéder 1 pour cette classe de système. Nous avons ensuite proposé, en section 5.4.3, une extension au cas général des modèles bond graphs adressés au chapitre 4, concernant la détection des modes impulsionnels sur les sorties du modèle. Nous avons enfin montré que dans cette classe très générale de bond graph, des modes impulsionnels associés aux variables d'énergie du système peuvent apparaître, notamment dans le cas bicausal lorsque les modèles sont arborescents (section 5.4.3.3).

Nous reprenons à présent en détails les contributions de ce chapitre, classées suivant les sections dans lesquelles elles apparaissent.

— au niveau algébrique, en rapport avec la bibliographie présentée sur la réponse temporelle (section 5.3), nous avons étayé la formalisation de la réponse utilisant la résolution distributionnelle (section 5.3.3). Si aucun résultat nouveau n'est énoncé, nous présentons, à notre sens de manière claire et sans équivoque, l'analogie qui peut être établie entre les modes dynamiques *exponentiels* et les modes dynamiques *impulsionnels*. Cette formalisation nous permet d'exposer les réponses *libres* et *forcées* associées aux modes impulsionnels (équations (5.35) et (5.36) page 194) ainsi que la réponse temporelle associée aux modes non-dynamiques (équation (5.37) page 194). Cette explicitation permet de clarifier les deux origines possibles des impulsions dans un système singulier, à savoir les

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

conditions initiales et les entrées.

— au niveau bond graph (section 5.4),

  ◦ nous avons proposé en section 5.4.2, dans un cas de simplification usuellement possible sur le modèle bond graph, un critère permettant d'évaluer la propreté interne *et* externe du modèle (proposition 5.1 page 204), basé sur l'existence de certains chemins causaux.

  ◦ dans le cas général de la classe de bond graph traitée au chapitre 4, nous avons proposé en section 5.4.3, sur la forme générale (5.69) page 210, deux critères bond graph de détection des modes impulsionnels. Ces critères utilisent respectivement le degré des transmittances (lemme 5.2 page 211) et la structure à l'infini du système (lemme 5.3 page 212). Ces deux lemmes reposent sur l'exploitation de propositions formulées au chapitre 4 et sont ainsi applicables sur un bond graph causal/bicausal sans causalité préférentielle, avec potentiellement des boucles causales d'ordre 0 de classe 1, 2, 3 et 4, avec également potentiellement des champs R et/ou IC.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Conclusion générale

Les travaux proposés dans cette thèse s'inscrivent dans le contexte de la conception des systèmes mécatroniques, dans une démarche s'intégrant dès les premières phases du cycle de conception, là où les principaux efforts méthodologiques sont à mener pour améliorer la qualité des produits et leur fonctionnalité tout en réduisant leur coût et leur délai de mise sur le marché. Reposant sur le prototypage virtuel (*i.e.* la modélisation et la simulation), outil essentiel pour supporter cette démarche, nos travaux contribuent à la méthodologie d'analyse et de conception des systèmes mécatroniques proposée par le laboratoire Ampère, basée sur des critères dynamiques et énergétiques. Cette démarche se décline de la spécification fonctionnelle jusqu'à la conception des composants, et se caractérise par une phase d'*analyse structurelle*, hiérarchisée suivant les niveaux de la structure physique du modèle (topologie, phénoménologie, paramétrage), en proposant une approche par *modèle inverse* dont le support est le formalisme bond graph. Nos contributions ont visé à étendre la méthodologie du laboratoire aux modèles de conception appartenant à la classe des systèmes *singuliers* (également usuellement nommés systèmes *implicites* ou systèmes *algébro-différentiels*).

Le premier chapitre a dressé le contexte général de ces travaux. Nous avons, dans un premier temps, introduit les systèmes mécatroniques de manière générique et leurs architectures du point de vue énergétique, puis présenté leur cycle de conception pour mettre en perspective la méthodologie du laboratoire Ampère. Nous avons détaillé les différentes phases de ce cycle de conception, pour les associer ensuite aux niveaux d'abstraction de modélisation utilisés. Cette étape essentielle nous a permis de positionner le niveau d'abstraction que nous traitons dans ce mémoire : le niveau *réseau*. Essentiellement macroscopique et correspondant le plus souvent à des modèles à *paramètres localisés*, son cadre théorique est supporté par le formalisme bond graph. Ceci nous a amené, dans un second temps, à brièvement présenter nos travaux antérieurs au présent projet, ayant abouti au développement d'un référentiel industriel de modèles en dynamique du véhicule [AL07, PMAL08, PMAL09b, PMAL09a], pour lequel le bond graph a été choisi, notamment comme outil de compréhension des phénomènes physiques, de maîtrise des équations, et répondant également aux contraintes de développement des logiciels industriels comme *LMS Imagine.Lab Amesim*, notamment en termes de modularité, pérennité, évolutivité, maintenance, portage et application temps réel. Dans ce contexte, nous avons introduit la modélisation fonctionnelle multicorps du châssis, et à ce titre, justifié les orientations des extensions méthodologiques prises dans ce mémoire sur les systèmes *singuliers*. En ce sens, la troisième partie de ce chapitre a présenté l'analyse structurelle pour la conception et le dimensionnement, en détaillant plus particulièrement la démarche du laboratoire dans laquelle nous inscrivons ces extensions méthodologiques. Basée sur une approche inverse et le formalisme bond graph, nous avons souligné son originalité, liée, d'une part, à la prise en considération de critères dynamiques et énergétiques pour le dimensionnement, et d'autre part, à sa hiérarchisation par niveaux d'analyse. Ce détail permet de positionner les extensions méthodologiques que nous proposons, à savoir dans les phases d'analyse structurelle d'*adéquation* et de

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

validation.

Le deuxième chapitre est essentiellement bibliographique et dresse l'état de l'art au début de nos travaux. Il présente l'ensemble des notions d'analyse structurelle sur lesquelles se base la méthodologie du laboratoire Ampère, originellement développée sur la classe des systèmes *réguliers*. En rapport avec les phases précédemment mentionnées d'*adéquation* du cahier des charges avec la structure du modèle, et de *validation*, nous nous sommes intéressés aux propriétés d'*inversibilité* et aux *invariants structurels* qui constituent le socle de l'analyse. Nous avons souligné que pour la classe des systèmes *réguliers*, la méthodologie permet la détermination des invariants structurels de manière algébrique ou graphique, en manipulant le modèle direct et/ou le modèle inverse à l'aide de procédures dédiées respectivement à l'une ou l'autre des représentations. Dans le but d'identifier les différentes contributions à établir dans nos travaux, nous avons été ainsi amenés, dans un premier temps, à détailler de manière exhaustive l'approche algébrique, qui constitue le référentiel de développement et de validation des méthodes graphiques. Nous y avons abordé l'inversibilité des systèmes, ainsi que la détermination des invariants structurels que sont la *structure à l'infini* [VLK82] [CD82], le *degré relatif* [BM65] et l'*ordre d'essentialité* [CDD+86]. Dans un deuxième temps, nous avons détaillé avec la même granularité l'approche bond graph, en déclinant graphiquement les propriétés d'inversibilité et la détermination de ces invariants structurels. La présentation successive des approches algébrique puis graphique nous a permis d'exposer la manière avec laquelle la démarche de conception a été développée, et les fondements théoriques sur lesquels elle se fonde et par rapport auxquels elle a été validée. En fin de chapitre, ceci nous a également permis d'ouvrir la discussion sur les limitations existantes de la méthodologie de dimensionnement notamment vis-à-vis de la classe des modèles *singuliers*, et d'orienter la structuration des chapitres suivants (chapitres 3, 4 et 5) ainsi que les différentes contributions à produire pour prétendre pouvoir étendre la méthodologie.

Le troisième chapitre constitue le référentiel algébrique de l'analyse structurelle des systèmes *singuliers*, nous permettant de supporter les extensions de la méthodologie de conception et dimensionnement (proposées de manière graphique au chapitre 4). Nous avons introduit en premiers lieux la classe de systèmes singuliers traitée dans nos travaux, à savoir les *systèmes linéaires singuliers à faisceau régulier* et précisé leurs spécificités, dont la principale est la présence potentielle de modes *infinis*, pouvant être *dynamiques* (*i.e.* les modes impulsionnels) ou *non-dynamiques*. Le chapitre présente l'inversion des systèmes singuliers, sur la base de critères *directs* et *indirects* d'inversibilité qui donnent lieu, au chapitre 4, aux déclinaisons graphiques de ces propriétés. Comme dans le cas des systèmes *réguliers*, la constitution du référentiel algébrique des systèmes *singuliers* repose sur le concept de *structure à l'infini*, détaillé avec le même niveau d'exhaustivité qu'au chapitre 2, permettant la détermination des invariants structurels utilisés pour qualifier le cahier des charges dans les phases méthodologiques d'*adéquation* et de *validation*. Enfin, la dernière partie de ce développement a proposé la principale contribution de ce chapitre, à savoir la définition d'un *ordre d'essentialité généralisé* pour les matrices rationnelles non nécessairement propres (extension de l'ordre d'essentialité de Commault *et al.* [CDD+86, CD86]), une démonstration de son unicité, une détermination algébrique, ainsi qu'une déclinaison pour les systèmes linéaires singuliers.

Le quatrième chapitre propose la détermination des propriétés des systèmes singuliers sur deux de leurs représentations graphiques associées (digraphe et bond graph). Il regroupe la majorité des contributions de ce mémoire, en proposant l'extension de la méthodologie de conception du laboratoire à travers la détermination bond graph de

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

l'*inversibilité* et des *ordres d'essentialité généralisés* des sorties du modèle. Cette extension est rendue possible par un certain nombre de développements intermédiaires qui jalonnent l'organisation de ce chapitre. Nous avons utilisé la « passerelle » que peut constituer la représentation digraphe pour le portage des propriétés algébriques des systèmes singuliers sur leur représentation bond graph associée. Nous avons ainsi dans un premier temps généralisé la correspondance digraphe/bond graph (annexe D), pour proposer ensuite une détermination bond graph du polynôme caractéristique du système singulier, puis des déterminations *digraphe* et *bond graph* du déterminant de sa matrice système. Ces développements nous ont permis d'aborder de manière graphique l'inversibilité des systèmes singuliers, en généralisant le test d'inversibilité bond graph de Rahmani [Rah93] et en discutant de la validité de l'approche d'inversion de Fotsu Ngwompo [FN97]. Également basée sur les développements du début de ce chapitre, nous avons ensuite proposé une extension aux systèmes singuliers de la détermination bond graph de leur structure à l'infini (déclinée selon les niveaux d'analyse de la méthodologie du laboratoire). Nous avons enfin proposé la détermination bond graph des *ordres d'essentialité généralisés*, également déclinée par niveau d'analyse. Cette détermination est proposée sur le modèle direct ainsi que sur le modèle inverse, et permet de généraliser et d'unifier les travaux de Bertrand *et al.* [BSDT97], Jardin [Jar10] et El Feki [EF11]. Nous rappelons en outre les considérations faites en annexe A sur l'approche utilisant la matrice de structure de jonction (« MSJ ») et le système d'équations associé, nous permettant d'associer l'ensemble des résultats de ce chapitre à l'approche « MSJ ».

Le cinquième et dernier chapitre de ce mémoire apporte un complément aux approches algébrique et graphique de l'analyse structurelle, en présentant l'analyse *temporelle* des systèmes singuliers. Au niveau algébrique, nous avons présenté dans un premier temps la notion d'équivalence entre systèmes singuliers, en l'occurrence celle de Rosenbrock puis celle de Smith. Ces équivalences conservent l'ensemble des propriétés des systèmes, permettent notamment de les décomposer suivant leurs différents modes constitutifs (*i.e.* modes exponentiels, impulsionnels, non-dynamiques) et de définir leur index de nilpotence. Utilisant l'équivalence de Rosenbrock associée à une approche de résolution distributionnelle, nous avons étayé la formalisation de la notion de mode impulsionnel, en présentant l'analogie qui peut être établie entre les modes *exponentiels* et *impulsionnels*, et ce, jusqu'aux réponses *libres* et *forcées*. Au niveau graphique, nous avons présenté une déclinaison bond graph des notions d'initialisation, de propreté, et de l'obtention de la réponse temporelle ainsi qu'une contribution sur la détection des modes impulsionnels dans un cas simplifié usuel, comprenant notamment celui de bond graphs affectés d'une causalité préférentielle intégrale. Basée sur la forme de Rosenbrock particulière à laquelle ce niveau d'hypothèses aboutit, un certain nombre de propriétés a été présenté, dont la principale est l'absence de mode impulsionnel associé aux variables d'énergie du système (travaux originels de Buisson *et al.* [Bui93b, Bui93a, BL94, BC97, BC98]). Nous avons ensuite traité dans le cas plus général, la détection des modes impulsionnels, avec différentes contributions basées sur les résultats bond graph que nous avons proposés au chapitre 4 (en l'occurrence la détermination bond graph du degré d'une transmittance de la matrice de transfert, et celle des ordres des zéros/pôles à l'infini d'un système singulier). Nous avons enfin montré que dans cette classe très générale de bond graph, des modes impulsionnels associés aux variables d'énergie du système peuvent apparaître, notamment dans le cas bicausal.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Résumé des contributions

Nous détaillons dans le présent paragraphe les contributions évoquées dans la synthèse précédente, en reprenant les inventaires faits à la fin de chaque chapitre de ce mémoire.

Dans le chapitre 1, la section 1.3 présente brièvement et partiellement nos travaux de modélisation, antérieurs au présent projet, ayant abouti à un logiciel industriel déployé de dynamique du véhicule multicorps [AL07, PMAL08, PMAL09b, PMAL09a]. Ce référentiel a été développé à partir d'une formulation analytique issue du bond graph (des exemples simplifiés sont proposés en sections 1.3.3.2 et 1.3.3.3). Différents exemples applicatifs cités sont issus de nos publications antérieures, notamment faites avec PSA PEUGEOT CITROËN [BPA+13, BVG+14, BPG+14]. Notons également les travaux faits chez RENAULT utilisant cette solution [FAA+11], ou encore FERRARI [RRAKC15, RRACS16, RRLA+17].

Les chapitres 3, 4 et 5 présentent nos contributions à la méthodologie de conception et dimensionnement des systèmes mécatroniques par approche bond graph et modèle inverse. La structuration de ces contributions est, dans un premier temps, faite à travers un référentiel algébrique pour l'analyse *structurelle* des systèmes linéaires singuliers (chapitre 3) permettant le support de la méthodologie bond graph, dont l'extension est développée dans un second temps (chapitre 4). Dans un troisième et dernier temps, nous avons étendu les analyses algébrique et graphique du point de vue *temporel* des systèmes singuliers (chapitre 5). Préalablement à la présentation exhaustive des contributions, il est à noter que chaque procédure bond graph proposée dans ce mémoire est automatisable dans un logiciel supportant l'analyse structurelle (comme l'est par exemple le logiciel *MS1* [MS1]).

Dans le chapitre 3, nous avons proposé en section 3.5 des contributions permettant d'étendre la notion d'ordre d'essentialité aux matrices rationnelles non nécessairement propres, que nous nommons « ordre d'essentialité généralisé » (définition 3.7). Nous démontrons son unicité (proposition 3.1), et donnons un moyen de le déterminer (proposition 3.2) et une déclinaison pour les systèmes linéaires singuliers (lemme 3.3). Comme dans le cas régulier, l'ordre d'essentialité généralisé représente l'ordre de dérivation maximal de chacune des sorties dans le modèle inverse (dans la mesure où celles-ci sont effectivement dérivées) et fournit ainsi un critère sur les spécifications du cahier des charges dans la phase d'adéquation de la méthodologie de dimensionnement par modèle inverse.

Le chapitre 4 nous a permis d'étendre la méthodologie de dimensionnement par modèles inverses représentés par bond graph, à la classe des modèles linéaires singuliers. Ce développement s'est fait à partir des contributions suivantes, classées selon les sections dans lesquelles elles apparaissent.

— la section 4.2 a proposé une détermination bond graph du polynôme caractéristique $\det(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ à partir des travaux de REINSCHKE en digraphe [Rei94] et d'une première formulation bond graph apportée par MOUHRI *et al.* [MRDT99, Mou00]. Nous avons montré et illustré le fait que cette dernière ne respecte pas strictement la correspondance digraphe/bond graph. Originellement proposée par RAHMANI [Rah93], nous avons généralisé en premier lieu cette correspondance (annexe D,

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

procédure D.1 page 307), en proposant préalablement un certain nombre de définitions (annexe B) [39] basées sur la notion de chemins **BG - différents - génériques** (définition B.11 page 264). De cette généralisation sont donc issues deux propositions. La première (proposition 4.1 page 116) permet de déterminer le polynôme caractéristique du système singulier à partir de sa représentation bond graph dans le cas où seuls les variables d'énergie constituent le vecteur d'état. La seconde (proposition 4.2 page 126) généralise la détermination du polynôme caractéristique au cas où des variables de puissance sont choisies en plus dans le vecteur d'état. Ces propositions ont nécessité d'étendre la définition de chemins causaux *BG-différents* pour tenir compte de tous ces types de variable d'état (définition 4.2 page 140). A signaler que nous avons également proposé, en digraphe, dans l'annexe C, la détermination du degré du polynôme caractéristique suivant le niveau de simplification du modèle issu du bond graph (proposition C.1 page 294 dans le cas simplifié et C.2 page 296 dans le cas général).

— la section 4.3 a proposé une détermination de $\det(\mathbf{P}(s))$ en digraphe (proposition 4.3 page 133) puis en bond graph (proposition 4.4 page 140) en utilisant la généralisation de l'équivalence digraphe/bond graph établie en annexe D. En lien avec ces propositions, nous avons également énoncé dans l'annexe C, les propriétés de la matrice système directement à partir de la représentation bond graph (proposition C.3 page 298, lemme C.4 page 302 et proposition C.5 page 303) suivant différents niveaux d'hypothèses.

— la section 4.4 a présenté l'inversibilité des systèmes singuliers en bond graph, en généralisant le test d'inversibilité de Rahmani (proposant ainsi le test d'inversibilité 4.1 page 152), et a discuté de la validité de l'approche d'inversion de Fotsu Ngwompo détaillée au chapitre 2.

— la section 4.5 a énoncé une extension aux systèmes singuliers de la détermination bond graph de la structure à l'infini, en la déclinant par niveau d'analyse (propositions 4.5 et 4.6 page 155, et 4.7 et 4.8 page 156). Cette section a également proposé une détermination du degré d'une transmittance de $\mathbf{T}(s)$ (lemme 4.9 page 161).

— enfin, la section 4.6 a proposé la détermination bond graph des *ordres d'essentialité généralisés*, déclinée par niveau d'analyse. Cette détermination est proposée sur le modèle direct (propositions 4.10 et 4.11 page 165), ainsi que sur le modèle inverse (propositions 4.12 et 4.13 page 167).

Comme précisé en fin de chapitre, l'intérêt principal que nous voyons à la détermination bond graph des invariants structurels précédemment cités, en plus de la généralisation qu'elle constitue à la classe des systèmes singuliers, est l'uniformisation qu'elle propose. Nous avons précisé qu'une représentation sous la forme (4.48) page 139, sur laquelle se base l'ensemble des développements de ce chapitre, était consistante avec la représentation des modèles directs (réguliers ou singuliers) ainsi que leurs inverses respectifs (réguliers ou singuliers). Les déterminations que nous proposons unifient ainsi les « approche direct » et « approche inverse » (approches originelles de la méthodologie de conception du laboratoire, détaillées au chapitre 2), de sorte qu'il n'est alors plus indispensable de les différencier. En d'autres termes, l'ensemble des invariants présentés dans ce chapitre (polynôme caractéristique, mineurs de matrice système, structure à l'infini, structure à

39. En l'occurrence, les définitions B.10, B.11, B.18, B.19, B.20, B.21 et B.23 (pages 264 à 266).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

l'infini par ligne/colonne, degré de transmittance) est applicable à des modèles pouvant être formulés sous la forme (4.48) page 139, soit donc *directs* **ou** *inverses*.

Le chapitre 5 a abordé l'analyse temporelle des systèmes linéaires singuliers à faisceau régulier du point de vue algébrique (sections 5.2 et 5.3) et du point de vue du bond graph (section 5.4). Les contributions, classées suivant les sections dans lesquelles elles apparaissent, sont les suivantes :

— au niveau algébrique, en rapport avec la bibliographie présentée sur la réponse temporelle (section 5.3), nous avons étayé la formalisation de la réponse utilisant la résolution distributionnelle. Si aucun résultat nouveau n'est énoncé, nous présentons, à notre sens de manière claire et sans équivoque, l'analogie qui peut être établie entre les modes dynamiques *exponentiels* et les modes dynamiques *impulsionnels*. Cette formalisation nous permet d'exposer les réponses *libres* et *forcées* associées aux modes impulsionnels ainsi que la réponse temporelle associée aux modes non-dynamiques. Cette explicitation permet de clarifier les deux origines possibles des impulsions dans un système singulier, à savoir la compatibilité des conditions initiales et les propriétés de dérivabilité des entrées.

— au niveau bond graph (section 5.4),

  ◦ nous avons proposé en section 5.4.2, dans un cas de simplification usuellement possible sur le modèle bond graph, un critère permettant d'évaluer la propreté interne *et* externe du modèle (proposition 5.1 page 204), basé sur l'existence de certains chemins causaux.

  ◦ dans le cas général de la classe de bond graph traitée au chapitre 4, nous avons proposé en section 5.4.3, sur la forme générale (5.69) page 210, deux critères bond graph de détection des modes impulsionnels. Ces critères utilisent respectivement le degré des transmittances (lemme 5.2 page 211) et la structure à l'infini du système (lemme 5.3 page 212). Ces deux lemmes reposent sur l'exploitation de propositions formulées au chapitre 4 et sont ainsi applicables sur un bond graph causal/bicausal sans causalité préférentielle, avec potentiellement des boucles causales d'ordre 0 de classe 1, 2, 3 et 4, avec également potentiellement des champs R et/ou IC.

En termes de contributions, ajoutons en outre que nous avons appliqué la démarche d'analyse structurelle à laquelle ce mémoire contribue sur les modèles de châssis référents du chapitre 1. Nous avons vérifié la possibilité d'implémenter des modèles inverses issus de modèles multicorps en annexe F dans le logiciel de simulation des systèmes mécatroniques *LMS Imagine.Lab Amesim* [Sie], en validant notamment que la structuration de code engendrée par la bicausalité est compatible avec la manière dont le logiciel gère les entrées/sorties.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Perspectives

En termes d'analyse structurelle, différentes perspectives nous sembleraient intéressantes pour étendre les travaux de ce mémoire. Nous pensons en premiers lieux à une extension des différentes analyses, propriétés et détermination d'invariant aux modèles à *commutation* ou *hybrides* (*i.e.* modèle dont la topologie est susceptible d'être modifiée au cours du temps, notamment en présence de butées idéalisées ou frottements secs en mécanique, diodes ou interrupteurs en électrique). Un certain nombre de travaux existe sur le sujet, et notamment en bond graph, initiés par Buisson *et al.* [Bui93b, Bui93a, BL94, BC97, BC98, CBLR02], sur lesquels nous nous sommes appuyés aux chapitres 3 et 5. Il nous semblerait pertinent d'étudier cette extension en formalisant de manière rigoureuse le phénomène de choc en bond graph, en nous basant notamment sur les formalisations théoriques faites en mécanique par Brossard [Bro94, Bro97]. Si certains travaux ont été réalisés en ce sens, en l'occurrence par Zimmer & Cellier [ZC07] en introduisant de nouveaux concepts, il nous semble intéressant d'évaluer dans quelle mesure la structure de jonction « native » du bond graph est capable de supporter la formulation du choc. Notons par ailleurs le nombre important de travaux réalisés sur les systèmes à commutation en bond graph. Outre les travaux de Buisson *et al.* précédemment cités, ainsi que ceux de Lorenz [Lor93], Asher [Ash93], Broenink & Wijbrans [BW93] et Ducreux *et al.* [DDTR93], nous pouvons mentionner les travaux de Borutzky [Bor95], Rahmani & Dauphin-Tanguy [RDT06], Mosterman & Biswas [MB98], Edström [Eds98], ou plus récemment ceux de Margetts & Ngwompo [MN15] qui pourraient être mis à profit pour supporter cette extension. Également en termes d'analyse structurelle, il nous semblerait intéressant d'ouvrir les présents travaux aux modèles présentant des non-linéarités, et comme par exemple les modèles du chapitre 1 et de l'annexe F le propose, en évaluant en premiers lieux le cas des MTF en bond graph. Nous pourrions par exemple tirer avantage des travaux de Lichiardopol *et al.* [LS06, Lic07b] en bond graph, en notant en outre, sans être exhaustif, qu'il existe une extension algébrique à la définition des ordres d'essentialité pour les systèmes non-linéaires [GM89] (cas des systèmes affines en la commande). Par ailleurs, en lien avec la classe de modèle traitée dans ce mémoire, nous jugeons opportun de nous baser sur les résultats de nos travaux pour étendre la notion de *degré relatif* à la classe des systèmes *singuliers*, pour pouvoir potentiellement traiter la problématique de découplage par retour d'état pour cette classe de systèmes. C'est la principale raison pour laquelle nous n'avons pas voulu « qualifier » la détermination de la *structure à l'infini par ligne* d'un système, alors qu'elle peut être trivialement établie à partir du lemme 4.9 page 161. Nous estimons en effet que la détermination d'un « degré relatif généralisé » ne serait pertinente que dans la mesure où ce dernier serait associé à l'*ordre d'essentialité généralisé* pour établir un critère de découplage par retour d'état statique pour les systèmes singuliers.

En termes d'extension additionnelle de la méthodologie de conception et dimensionnement du laboratoire Ampère, il nous semblerait également important d'étendre, à la classe de modèle traitée dans ce mémoire, le couplage avec l'optimisation en bond graph, initié par Marquis-Favre *et al.* [MFCTS05, MFMC+08], puis repris par Jardin pour l'adapter à la méthodologie du laboratoire [Jar10], et notamment illustré par Schaep [Sch16] dans un cas industriel. Dans le cadre de la méthodologie, le couplage de l'inversion avec l'optimisation permet notamment de réduire les exigences, d'une part, en termes de rédaction du cahier des charges (par exemple, en donnant des spécifications exprimées autrement que sous forme de fonctions dépendantes du temps *e.g.* valeur limite à ne pas dépasser, valeur moyenne, valeur à atteindre,...), ou d'autre part, lorsque le problème

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

de dimensionnement ne peut être complètement formulé sous la forme d'un problème inverse (par exemple, lorsqu'il n'y a pas adéquation entre spécifications et structure du modèle).

Comme souligné dans l'introduction de ce mémoire et en lien avec le projet européen MODRIO, auquel le laboratoire Ampère et la société Siemens (ex-Lms Imagine) ont participé, et dans lequel s'inscrivent nos travaux, nos contributions constituent des « briques » d'analyse se positionnant dans une démarche générale hiérarchisée d'analyse structurelle de modèles, dans laquelle nous rappelons qu'il est possible de :

1. montrer qu'un modèle structuré en réseau (énergétique) est bien formulé (travaux de Furic [Fur15a, Fur15b]),
2. s'il s'avère bien formulé, traduire un tel modèle en bond graph, et ce en temps polynomial (travaux de Perelson *et al.* [PO76], Lamb *et al.* [LAW93a, LWA93b, LWA93a, LAW93b]),
3. convertir ce bond graph par des opérations d'idéalisation et d'abstraction comportementales, faisant potentiellement apparaître des « singularités de structure », dont une représentation est possible sous une forme *singulière*,
4. mener un certain nombre d'analyses sur le bond graph représentant le système singulier.

Cette démarche générale hiérarchisée d'analyse structurelle pourrait être enrichie de différentes manières. En premiers lieux, un cinquième item pourrait concerner une procédure « inverse » permettant de reporter l'analyse établie sur le modèle bond graph comportant les idéalisations comportementales (item 4) sur le modèle bond graph originel (item 2), voire sur le modèle réseau initial (item 1). De plus, concernant l'item 3 et les opérations d'idéalisation et d'abstraction, nous pourrions faire intervenir les *modèles non-standards*, utilisant le concept de nombre *hyperréel*, offrant la possibilité de traiter rigoureusement les notions de quantité *infiniment petite* ou *infiniment grande* (ce qui serait par exemple le cas, par passage à la limite, d'un élément C « de capacité nulle » du bond graph appliquant une contrainte cinématique entre deux éléments I, si nous reprenons le cadre des exemples applicatifs traités dans ce mémoire). Nous pouvons en ce sens signaler les travaux de Mosterman *et al.* [MSZ13] et ceux de Bliudze & Furic [BF14], appliqués au même niveau d'abstraction de modèle que celui traité dans nos travaux, pour constituer une base de réflexion. Cette approche pourrait en outre potentiellement fournir des éléments d'analyse supplémentaires pour les systèmes à commutation précédemment évoqués.

Enfin, dans un cadre plus applicatif, il nous semblerait intéressant d'implémenter les différentes procédures décrites dans ce mémoire dans un logiciel supportant l'analyse structurelle. Cette implémentation, s'inscrivant dans l'item 4 de la précédente description de chaîne outillée, pourrait ouvrir sur l'automatisation d'un certain nombre d'étapes de la méthodologie de conception, et potentiellement adresser un plus grand nombre d'utilisateurs de simulation système, non nécessairement experts en analyse structurelle, ni en bond graph, ni même en mécatronique.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Bibliographie personnelle

Bibliographie personnelle au cours de la thèse

[LEDL+16] Julien Lagnier, Damien Eberard, Michael Di Loreto, Didier Rémond, and Wilfrid Marquis-Favre. Definition of essential order on descriptor systems and its bond graph determination. In Jose J. Granda and Dean C. Karnopp, editors, *Proceedings of the International Conference On Bond Graph Modeling and Simulation (ICBGM 2016)*, pages 133–141. Society for Modeling & Simulation International (SCS), July 24-27 2016.

Bibliographie personnelle en cours

[RRLA+17] I. Ramirez Ruiz, J. Lagnier, M. Alirand, F. Cheli, and E. Sabbioni. Active roll center position (to appear). In *SAE Safety Events*, 2017.

Bibliographie personnelle antérieure

[AL07] M. Alirand and J. Lagnier. Rapport final concernant le développement de la librairie Dynamique Véhicule d'AMESim. Technical report, LMS Imagine S.A., 2007. 307 p.

[BPA+13] S. Barale, A. Plisson, M. Alirand, J. Lagnier, and J. Guillet. Improved functional modelling in comfort analyses for hydraulic suspension testing. In *4th International Munich Chassis Symposium*, Munich, Germany, June 2013.

[BPG+14] S. Barale, A. Plisson, J. Guillet, M. Alirand, and J. Lagnier. Control logic testing for mechatronic systems : a process based on model simplification. In *12th Int. Symposium on Advanced Vehicle Control*, pages 1 – 8, Tokyo, Japan, September 2014.

[BVG+14] S. Barale, P. Vars, J. Guillet, M. Alirand, J. Lagnier, and P. Toulemont. Comfort analyses of the hydractive suspension using a driving simulator. In *Driving Simulation Conference (DSC)*, Paris, France, Sept 2014.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

[DANL13] F.D. Dragne, M. Alirand, W. Neves, and J. Lagnier. ESC hydraulic circuit modeling and model reduction in the aim of reaching real-time capability. In *SAE Technical Paper*. SAE International, 05 2013.

[PMAL08] Benoît Parmentier, Frédéric Monnerie, Marc Alirand, and Julien Lagnier. A new library for vehicle dynamics functional simulation. In *Proceedings of the Vehicle Dynamics Expo - North America*, October 2008.

[PMAL09a] Benoît Parmentier, Frédéric Monnerie, Marc Alirand, and Julien Lagnier. Vehicle functional design - from PSA in-house software to AMESim standard library with increased modularity. In *Proceedings of the Vehicle Dynamics Expo*. UKIP Media & Events Ltd., June, 17–19 2009.

[PMAL09b] Benoît Parmentier, Frédéric Monnerie, Marc Alirand, and Julien Lagnier. Vehicle functional design : From PSA in-house software to standard product and modularity for chassis subsystems. In SIA, editor, *Proceedings of the SIA congress*, 23 et 24 Septembre 2009. Reference R-2009-10-14.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Bibliographie

[AD77] R. R. Allen and S. Dubowsky. Mechanisms as components of dynamic systems : A bond graph approach. *Journal of Engineering for Industry*, 99(1) :104–111, February 1977.

[AFN08] AFNOR. Mécatronique - Vocabulaire. Technical Report Norme NF E01 - 010, Association française de normalisation, 2008.

[AGR00] V. Abadie, F. Guillemard, and A. Rault. *Les bond graphs*, chapter Apport du bond graph dans la démarche mécatronique appliquée à l'automobile, pages 351 – 377. IC2 : Série Systèmes automatisés. Hermes Science Publications, 2000.

[AL07] M. Alirand and J. Lagnier. Rapport final concernant le développement de la librairie Dynamique Véhicule d'AMESim. Technical report, LMS Imagine S.A., 2007. 307 p.

[Ali97] M. Alirand. Evaluation des logiciels multicorps symboliques MESA VERDE et JAMES. Technical Report MA/CR/P269/1397, IMAGINE, Avril 1997. 139 p.

[All79] Ross R. Allen. Multiport representation of inertia properties of kinematic mechanisms. *Journal of the Franklin Institute*, 308(3) :235–253, September 1979.

[ALR01] M. Alirand, M. Lebrun, and C. W. Richards. Front wheel vibrations : A hydraulic point of view - models and first results. *SAE Technical Paper 2001-01-0490*, 2001.

[Ama91] Maher Amara. *Contribution à l'étude des aspects énergétiques en robotique mobile*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées (Lyon, France), 1991.

[Arn03] Emmanuel M. Arnoux. *Lois de commande et systèmes de suspension adaptatifs - Théorie et application à la mécanique automobile*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, Avril 2003. 176 p.

[Ash93] G.M. Asher. The robust modelling of variable topology circuits using bond graphs. In *ICBGM'93 : International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation*, pages 126–131. Society for Modeling & Simulation International (SCS), January 17-20 1993.

[BA94] F. Brix and M. Alirand. Bond-graph representation of the manipulation of constraint equations in multibody software. In *Proceedings CISS'94, First Joint Conference of International Simulation Societies*, pages 649–653, Zurich, August, 22-25 1994. Society for Computer Simulation International.

[Bar10] Franck Barnu. Applications industrielles mécatroniques : quelques exemples. *Techniques de l'ingénieur Mécatronique*, base documentaire : TIB509DUO.(ref. article : bm8006), 2010. fre.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

[BC96a] W. Borutzky and F.E. Cellier. Tearing algebraic loops in bond graphs. *Transactions of the Society for Computer Simulation International*, 13(2) :102–115, 1996.

[BC96b] W. Borutzky and F.E. Cellier. Tearing in bond graphs with dependent storage elements. In *Proc. CESA*, volume 96, pages 9–12, 1996.

[BC97] Jean Buisson and Hervé Cormerais. Modeling hybrid systems with bond-graph using an implicit formulation. *The Bond Graph Digest*, 1, 1997.

[BC98] Jean Buisson and Hervé Cormerais. Descriptor systems for the knowledge modelling and simulation of hybrid physical systems. In *JESA Journal européen des systèmes automatisés*, volume 32, pages 1047–1072, march 1998.

[BCP95] K. Brenan, S. Campbell, and L. Petzold. *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1995. 251 p. (This SIAM Edition is an unabridged, corrected republication of the work first published by North-Holland, New York, 1989).

[BF14] S. Bliudze and S. Furic. An operational semantics for hybrid systems involving behavioral abstraction. In *Proceedings of the 10th International Modelica Conference ; March 10-12 ; 2014 ; Lund ; Sweden*, number 96, pages 693–706. Linköping University Electronic Press ; Linköpings universitet, 2014.

[BHS06] Taha Boukhobza, Frédéric Hamelin, and Dominique Sauter. Observability of structured linear systems in descriptor form : A graph-theoretic approach. *Automatica*, 42(4) :629–635, 2006.

[Bid94] Catherine Bidard. *Graphes de liaison torsoriels pour la modélisation et l'analyse cinéstatiques des mécanismes*. PhD thesis, Université Lyon 1, 1994. Thèse de doctorat dirigée par SAU, JACQUES Sciences appliquées Lyon 1 1994.

[BL94] Jean Buisson and Yuping Lu. Analyse des systèmes hybrides avec les bond-graphs. modes impulsionnels et formulation implicite. In *Symposium ADPM '94 : automatisation des processus mixtes : les systèmes dynamiques hybrides*, pages pp 77–82. Institut belge de régulation et d'automatisme, novembre 1994.

[BLD+05] E. Bideaux, J. Laffite, A. Derkaoui, W. Marquis-Favre, S Scavarda, and F. Guillemard. Design of a hybrid vehicle powertrain using an inverse methodology. In *Conference proceeding of Power Transmission and Motion Control*, Bath, Great Britain, Sept. 7–9 2005.

[BM65] R.W Brockett and M.D Mesarović. The reproducibility of multivariable systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 11(0) :548 – 563, 1965.

[Bor95] W. Borutzky. Discontinuities in a bond graph framework. *Journal of the Franklin Institute*, 332(2) :141 – 154, 1995.

[Bor10] Wolfgang Borutzky. *Bond graph methodology : development and analysis of multidisciplinary dynamic system models*. Springer Science & Business Media, 2010.

[Bos86] A.M. Bos. *Modelling multibody systems in terms of multibond graphs*. PhD thesis, University of Twente, Enschede, Netherlands, 1986. 225 p.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

[BPA+13] S. Barale, A. Plisson, M. Alirand, J. Lagnier, and J. Guillet. Improved functional modelling in comfort analyses for hydraulic suspension testing. In *4th International Munich Chassis Symposium*, Munich, Germany, June 2013.

[BPG+14] S. Barale, A. Plisson, J. Guillet, M. Alirand, and J. Lagnier. Control logic testing for mechatronic systems : a process based on model simplification. In *12th Int. Symposium on Advanced Vehicle Control*, pages 1 – 8, Tokyo, Japan, September 2014.

[Bro25] M.G. Broulhiet. La suspension de la direction de la voiture automobile - shimmy et dandinement. Technical report, Société des ingénieurs civils, 1925. Vol. 78.

[Bro30] M.G. Broulhiet. Les Relations de l'Automobile avec Son train roulant. *Journal de la société des ingénieurs de l'automobile*, Janvier 1930. 4ème année. Tome IV.

[Bro72] F. T. Brown. Direct application of the loop rule to bond graphs. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 94(3) :253 – 261, Sept 1972.

[Bro94] Jean-Pierre Brossard. Mécanique générale. Chapitre 10 – Théorie du choc - Cours INSA de Lyon, GMC, 1994.

[Bro97] Jean-Pierre Brossard. Mécanique générale dynamique, théorie classique du choc. *Techniques de l'ingénieur Mécanique physique*, base documentaire : TIB110DUO.(ref. article : a1668), 1997.

[Bro06] Jean-Pierre Brossard. *Dynamique du véhicule : modélisation des systèmes complexes*, volume 1 (XV-714 p.) of *Collection des sciences appliquées de l'INSA de Lyon*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2006.

[Bro09] Jean-Pierre Brossard. *Dynamique du freinage*. Collection des sciences appliquées de l'INSA de Lyon. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2009. 269 p.

[BSDT97] J.M. Bertrand, C. Sueur, and G. Dauphin-Tanguy. On the finite and infinite structures of bond-graph models. In *IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, 1997. Computational Cybernetics and Simulation.*, volume 3, pages 2472–2477 vol.3, Oct 1997.

[BSDT01] J.M. Bertrand, C. Sueur, and G. Dauphin-Tanguy. Input-output decoupling with stability for bond graph models. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 1(1) :39–58, 2001.

[BT85] A.M. Bos and M.J.L. Tiernego. Formula manipulation in the bond graph modelling and simulation of large mechanical systems. *Journal of the Franklin Institute*, 319(1) :51 – 65, 1985.

[Bui93a] Jean Buisson. Analysis and characterisation of hybrid systems with bond-graphs. In *Systems, Man and Cybernetics, 1993. 'Systems Engineering in the Service of Humans', Conference Proceedings., International Conference on*, pages 264–269 vol.1, Oct 1993.

[Bui93b] Jean Buisson. Analysis of switching devices with bond graphs. *Journal of the Franklin Institute*, 330(6) :1165 – 1175, 1993.

[BVG+14] S. Barale, P. Vars, J. Guillet, M. Alirand, J. Lagnier, and P. Toulemont. Comfort analyses of the hydractive suspension using a driving simulator. In *Driving Simulation Conference (DSC)*, Paris, France, Sept 2014.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

[BW93] Jan F. Broenink and Klaas C.J. Wijbrans. Describing discontinuities in bond graph. In *ICBGM'93 : International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation*, pages 120–125. Society for Modeling & Simulation International (SCS), January 17-20 1993.

[Cau12] Augustin Louis Cauchy. *Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment : lu à l'Institut le 30 Novembre 1812*. Ecole polytechnique (France), 1812.

[CBLR02] Hervé Cormerais, Jean Buisson, Sylvain Leirens, and Pierre-Yves Richard. Calcul symbolique de l'ensemble des équations d'état pour les bond graphs en commutation. In *CIFA, Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, Nantes, France, July 2002.

[CD82] C. Commault and J. Dion. Structure at inifinity of linear multivariable systems : A geometric approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 27(3) :693–696, Jun 1982.

[CD86] C. Commault and J. M. Dion. Some structural invariants within the transfer matrix approach. In *1986 25th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1284–1288, Dec 1986.

[CD10] C. Commault and J. M. Dion. Analyse structurelle des systèmes, une approche graphique. In *CIFA, Nancy*, 2010.

[CDB93] C. Commault, J. M. Dion, and M. Benahcene. On dynamic decoupling of structured systems. In *Decision and Control, 1993., Proceedings of the 32nd IEEE Conference*, pages 1330–1335 vol.2, Dec 1993.

[CDD+86] C. Commault, J. Descusse, J. M. Dion, J. F. Lafay, and M. Malabre. New decoupling invariants : the essential orders. *International Journal of Control*, 44(3) :689–700, 1986.

[CDP91] C. Commault, J. M. Dion, and A. Perez. Disturbance rejection for structured systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(7) :884–887, Jul 1991.

[CDT90] C. Commault, J. M. Dion, and J. Torres. Invariant spaces at infinity of linear systems application to block decoupling. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 35(5) :618–623, May 1990.

[Coe69] J. Coeuillet. Choix des moteurs de servomécanismes. *Automatisme*, pages 56 – 67, février 1969.

[Cre71] M. Cremer. A precompensator of minimal order for decoupling a linear multi-variable system. *International Journal of Control*, 14(6) :1089–1103, 1971.

[Dai89a] Liyi Dai. The difference between regularity and irregularity in singular systems. *Circuits, Systems and Signal Processing*, 8(4) :435–444, 1989.

[Dai89b] Liyi Dai. Impulsive modes and causality in singular systems. *International Journal of Control*, 50(4) :1267–1281, 1989.

[Dai89c] Liyi Dai. *Singular Control Systems*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 1989. 301 pages.

[DANL13] F.D. Dragne, M. Alirand, W. Neves, and J. Lagnier. ESC hydraulic circuit modeling and model reduction in the aim of reaching real-time capability. In *SAE Technical Paper*. SAE International, 05 2013.

[DC82] J. M. Dion and C. Commault. Smith - mcmillan factorizations at infinity of rational matrix functions and their control interpretation. *Systems & Control Letters*, 1(5) :312 – 320, 1982.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

[DC93] J. M. Dion and C. Commault. Feedback decoupling of structured systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 38(7) :1132–1135, Jul 1993.

[DD82] J. Descusse and J.M. Dion. On the structure at infinity of linear square decoupled systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 27(4) :971–974, Aug 1982.

[DDTR93] J.P. Ducreux, G. Dauphin-Tanguy, and C. Rombaut. Bond graph modelling of commutation phenomena in power electronics circuit. In *ICBGM'93 : International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation*, pages 132–136. Society for Modeling & Simulation International (SCS), January 17-20 1993.

[Deq98] Antoine Dequidt. *Contribution à une approche interdisciplinaire de la conception des systèmes mécaniques commandés : application aux axes de machines*. PhD thesis, Université de Valenciennes, Valenciennes, France, 1998. Thèse de doctorat dirigée par Castelain, Jean-Marie Génie mécanique Valenciennes 1998.

[Der05] Abdechafik Derkaoui. *Dimensionnement pour des critères dynamiques et énergétiques de systèmes mécatroniques comportant des sous-systèmes à paramètres répartis : approche par méthode inverse*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées (Lyon, France), 2005.

[DH91] R.W. Daniel and J.R. Hewit. Editorial. *Mechatronics*, 1(1) :i – ii, 1991.

[DMDtD14] R. Denis, J.-C. Maré, G. Dauphin-tanguy, and A. Debiane. Approche virtuelle pour la conception et le développement de systèmes mécatroniques - mise en œuvre. In *Techniques de l'Ingénieur, série Ingénierie des systèmes et robotique, S-7801*. Techniques de l'Ingénieur, 2014.

[DT99] G. Dauphin-Tanguy. Les bond graphs et leur application en mécatronique. *Techniques de l'ingénieur Automatique avancée*, base documentaire : TIB393DUO.(ref. article : s7222), 1999. fre.

[DT00] G. Dauphin-Tanguy. *Les bond graphs*. IC2 : Série Systèmes automatisés. Hermes Science Publications, 2000. 383 pages.

[DtMDD14] G. Dauphin-tanguy, J.-C. Maré, R. Denis, and A. Debiane. Approche virtuelle pour la conception et le développement de systèmes mécatroniques - méthodologie. In *Encyclopédie des techniques de l'ingénieur, série Ingénierie des systèmes et robotique*. Techniques de l'Ingénieur, 2014.

[Dua10] Guang-Ren Duan. *Analysis and Design of Descriptor Linear Systems*, volume 23 of *Advances in Mechanics and Mathematics*. Springer-Verlag New York, 2010. 494 pages.

[Eds98] Krister Edström. Mode initialization when simulating switched bond graphs. In *Proceedings of the 2nd IMACS International Multiconference on Computational Engineering in Systems Applications*, Hammamet, Tunisia, April 1998.

[EF11] Mariem El Feki. *Analyse et synthèse de tolérance pour la conception et le dimensionnement des systèmes mécatroniques*. Thèse, Ecole Centrale de Lyon (France), July 2011.

[EFDLB+08a] M. El Feki, M. Di Loreto, E. Bideaux, D. Thomasset, and R. Fotsu Ngwompo. Structural properties of inverse models represented by bond graph. In *Proceedings of the 17th IFAC World Congress, 2008. Vol. Volume 17 Part 1.*, pages 236–241. International Federation of Automatic Control, 2008.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

[EFDLB+08b] Mariem El Feki, Michaël Di Loreto, Eric Bideaux, Daniel Thomasset, and Wilfrid Marquis-Favre. On the role of essential orders on feedback decoupling and model inversion : bond graph approach. In *ECMS*, pages 457–463, Nicosia, Cyprus, June 2008. Paper BG57.

[EFJMF+12a] Mariem El Feki, Audrey Jardin, Wilfrid Marquis-Favre, Laurent Krähenbühl, Eric Bideaux, and Daniel Thomasset. Determination of essential orders from a bond graph model. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 134(6) :061006 (9 pages), September 2012. Received 19 September 2010 ; accepted 3 June 2011 ; published 13 September 2012.

[EFJMF+12b] Mariem El Feki, Audrey Jardin, Wilfrid Marquis-Favre, Laurent Krähenbühl, and Daniel Thomasset. Structural analysis by bond graph approach : Duality between causal and bicausal procedure. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I : Journal of Systems and Control Engineering*, 226(1) :82–100, January 2012.

[FAA+11] Z. Fang, M. Alirand, S. André, Th. Denoual, A. Kemeny, G. Reymond, and Jansson A. Multi objective analysis on a driving simulator applied to an electric vehicle : vehicle stability, handling and drivability. In *16th International Congress SIA Dynamique du Véhicule*, Mulhouse, France, Oct 2011.

[Fav97] Wilfrid Favre. *Contribution à la représentation bond graph des systèmes mécaniques multicorps*. Thèse, Institut National des Sciences Appliquées (Lyon, France), 1997.

[Fic04] Philippe Fichou. Bond graphs : une méthode pluridisciplinaire. *Revue technologie n°133*, Sept. 2004.

[FN97] Roger Fotsu Ngwompo. *Contribution au dimensionnement des systèmes sur des critères dynamiques et énergetiques : approche par bond graph*. Thèse, Institut National des Sciences Appliquées (Lyon), 1997.

[FN98] Roger Fotsu Ngwompo. Développement d'une méthodologie de dimensionnement des éléments d'un système : application au cas d'une suspension hydropneumatique. Rapport technique, Laboratoire d'Automatique Industrielle, INSA de Lyon, Villeurbanne, France, Oct. 1998. 39 p.

[FNST96] Roger Fotsu Ngwompo, Serge Scavarda, and Daniel Thomasset. Inversion of linear time-invariant {SISO} systems modelled by bond graph. *Journal of the Franklin Institute*, 333(2) :157 – 174, 1996.

[Fur15a] S. Furic. Physical connection proposal for the FMI. Technical report, Siemens, Germany, February, 9 – 10 2015. FMI design meeting.

[Fur15b] S. Furic. A physical connection proposal for the FMI. Technical report, Siemens, ENS Cachan, Paris, October 2015. Workshop Sim@SL.

[Gan66] Félix R. Gantmacher. *Théorie Des Matrices*. Paris, Dunod, 1966. Traduit par Ch. Sarthou, 638 pages.

[Gaw95] Peter Gawthrop. Bicausal bond graphs. In *Proceedings of the International Conference On Bond Graph Modeling and Simulation (ICBGM'95)*, volume 27 of *Simulation Series*, pages 83–88, 1995.

[Gil69] Elmer G. Gilbert. The decoupling of multivariable systems by state feedback. *SIAM Journal on Control*, 7(1) :50–63, 1969.

[GM89] A. Glumineau and C. H. Moog. Essential orders and the non-linear decoupling problem. *International Journal of Control*, 50(5) :1825–1834, November 1989.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

[GS96] Peter Gawthrop and Lorcan Smith. *Metamodelling : For Bond Graphs and Dynamic Systems*. Prentice Hall International (UK) Ltd., Hertfordshire, UK, UK, 1996. 317 pages.

[Hal95] Thierry Halconruy. *Les liaisons au sol*. ETAI, 1995. 200 p.

[Hir79] R.M. Hirschorn. Invertibility of multivariable nonlinear control systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 24(6) :855–865, Dec 1979.

[Hou04] M. Hou. Controllability and elimination of impulsive modes in descriptor systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 49(10) :1723–1729, Oct 2004.

[IFA00] IFAC Technical Commitee. http ://tc.ifac-control.org/4/2/scope (consultée le 30/09/2016), 2000.

[Ise08] Rolf Isermann. Mechatronic systems – innovative products with embedded control. *Control Engineering Practice*, 16(1) :14 – 29, 2008.

[IT01] J.Y. Ishihara and M.H. Terra. Impulse controllability and observability of rectangular descriptor systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 46(6) :991–994, Jun 2001.

[Jar10] Audrey Jardin. *Contribution à une méthodologie de dimensionnement des systèmes mécatroniques : analyse structurelle et couplage à l'optimisation dynamique*. Thèse, Institut National des Sciences Appliquées (Lyon, France), January 2010.

[JEFMF+08] A. Jardin, M. El Feki, W. Marquis-Favre, D. Thomasset, and E. Bideaux. Use of structural analysis in a bond graph-based methodology for sizing mechatronic systems. In *7th edition France - Japan, 5th Europe - Asia Congress on Mechatronics*, Le Grand Bornand, France, may 2008.

[Kar76] Dean C. Karnopp. Bond graphs for vehicle dynamics. *Vehicle System Dynamics*, 5(3) :171–184, 1976.

[KMR90] D.C. Karnopp, D.L. Margolis, and R.C. Rosenberg. *System Dynamics : A Unified Approach (second edition)*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990.

[KMR12] D.C. Karnopp, D.L. Margolis, and R.C. Rosenberg. *System dynamics : modeling, simulation, and control of mechatronic systems*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2012.

[KO96] N. Kyura and H. Oho. Mechatronics – An industrial perspective. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 1(1) :10–15, March 1996.

[KR68] D.C. Karnopp and R.C. Rosenberg. *Analysis and Simulation of Multiport Systems – The Bond Graph Approach to Physical System Dynamics*. MIT Press, Cambridge, MA, 1968.

[KR75] D.C. Karnopp and R.C. Rosenberg. *System Dynamics : A Unified Approach*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1975.

[Kuc86] Vladimir Kucera. Internal properness and stability in linear systems. *Kybernetika*, 22 :1–18, 1986.

[Kuc89] Vladimir Kucera. Generalized state-space systems and proper stable matrix fractions. In Hendrik Nijmeijer and JohannesM. Schumacher, editors, *Three Decades of Mathematical System Theory*, volume 135 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 276–301. Springer Berlin Heidelberg, 1989.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

[Laf04] Jérome Laffite. *Aide à la conception et au dimensionnement énergétique et dynamique de systèmes mécatroniques par une approche inverse : application aux chaînes de transmission automobiles*. PhD thesis, INSA de Lyon, Villeurbanne, France, 2004.

[LAW93a] J.D. Lamb, G.M. Asher, and D.R. Woodall. Causal loops and Mason's rule for bond graphs. In *ICBGM'93 : International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation*, pages 67–72. Society for Modeling & Simulation International (SCS), January 17-20 1993.

[LAW93b] J.D. Lamb, G.M. Asher, and D.R. Woodall. Network realisation of bond graph. In *ICBGM'93 : International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation*, pages 85–90. Society for Modeling & Simulation International (SCS), January 17-20 1993.

[LB94] Yuping Lu and Jean Buisson. The implicit continuity of discontinuous systems. In *2nd IEEE Mediterranean Symposium on New Directions in Control and Automation (MED '94)*, Chania, Crete, Greece, June 19-21 1994.

[LD09] Pierre Ladet and Isabel Demongodin. Outils de modélisation des automatismes séquentiels - Réseaux de Petri. *Techniques de l'ingénieur Automatique séquentielle*, base documentaire : TIB395DUO.(ref. article : s7252), 2009. fre.

[Leb03] M. Lebrun. Simulation et cao en automatique et mécatronique. *Techniques de l'ingénieur Modélisation et analyse de systèmes asservis*, base documentaire : TIB391DUO.(ref. article : s7260), 2003. fre.

[LEDL+16] Julien Lagnier, Damien Eberard, Michael Di Loreto, Didier Rémond, and Wilfrid Marquis-Favre. Definition of essential order on descriptor systems and its bond graph determination. In Jose J. Granda and Dean C. Karnopp, editors, *Proceedings of the International Conference On Bond Graph Modeling and Simulation (ICBGM 2016)*, pages 133–141, Montreal, Canada, July 24-27 2016. Society for Modeling & Simulation International (SCS).

[Lew83] Frank L. Lewis. Inversion of descriptor systems. In *American Control Conference, 1983*, pages 1153–1158, June 1983.

[Lic07a] Anca-Maria Lichiardopol. *L'approche bond graph pour la découverte technologique*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lille, 2007.

[Lic07b] Stefan Lichiardopol. *Study of duality in bond graph models. Application to control law synthesis*. Theses, Ecole Centrale de Lille, October 2007.

[Lin74] Ching-Tai Lin. Structural controllability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(3) :201–208, Jun 1974.

[Lor93] Francis Lorenz. Discontinuities in bond graphs : What is required ? In *ICBGM'93 : International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation*, pages 137–142. Society for Modeling & Simulation International (SCS), January 17-20 1993.

[Loy09] Bruno Loyer. *Conception fonctionnelle robuste par optimisation multicritère de systèmes de suspension automobile passifs et semi-actifs*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2009.

[LS06] S. Lichiardopol and C. Sueur. Decoupling of non-linear bond-graph models. In *2006 IEEE Conference on Computer Aided Control System Design, 2006 IEEE International Conference on Control Applications, 2006*

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

IEEE International Symposium on Intelligent Control, pages 2237–2242, Oct 2006.

[L'U95] L'Usine Nouvelle. Un grand simulateur national pour l'automobile, Mars 1995. L'USINE NOUVELLE numéro 2493, www.usinenouvelle.com, consulté le 12/09/2016.

[Lub12] Philippe Lubineau. Normalisation en mécatronique. *Techniques de l'ingénieur Mécatronique*, base documentaire : TIB509DUO.(ref. article : bm8080), 2012. fre.

[Lue77] D.G. Luenberger. Dynamic equations in descriptor form. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 22(3) :312–321, Jun 1977.

[LWA93a] J.D. Lamb, D.R. Woodall, and G.M. Asher. Equivalence of bond graph junction structure. In *ICBGM'93 : International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation*, pages 79–84. Society for Modeling & Simulation International (SCS), January 17-20 1993.

[LWA93b] J.D. Lamb, D.R. Woodall, and G.M. Asher. Singular bond graphs. In *ICBGM'93 : International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation*, pages 73–78. Society for Modeling & Simulation International (SCS), January 17-20 1993.

[Mal82] M. Malabre. Almost invariant subspaces, transmission and infinite zeros : a lattice interpretation. *Systems & Control Letters*, 1(6) :347 – 355, 1982.

[Mar87] Donald L. Margolis. Bond graphs as a simulation modelling formalism. *Vehicle System Dynamics*, 16(sup1) :233–262, 1987.

[Mas53] Samuel J Mason. *Feedback Theory : I. Some Properties of Signal Flow Graphs.* Massachusetts Institute of Technology, Research Laboratory of Electronics, 1953.

[Mas56] Samuel J Mason. *Feedback Theory : further properties of signal flow graphs.* Research Laboratory of Electronics, Massachusetts Institute of Technology, 1956.

[Mas88] Bernhard M. Maschke. A transformation from bond-graphs to system-graphs. *Proceedings ASME Winter Annual Meeting*, Vol.8 :pp.23–32, 1988.

[Mas90] Bernhard M. Maschke. *Contribution à une approche par bond-graph de l'étude et la conception de lois de commande de robots contenant des segments flexibles.* Thèse de doctorat : Sciences appliqués (359 p.), Paris 11, 1990.

[MB98] Pieter J Mosterman and Gautam Biswas. A theory of discontinuities in physical system models. *Journal of the Franklin Institute*, 335(3) :401–439, 1998.

[MDV94] Pradeep Misra, Paul Van Dooren, and Andras Varga. Computation of structural invariants of generalized state-space systems. *Automatica*, 30(12) :1921 – 1936, 1994.

[Mec03] Olivier Mechin. *Conception des systèmes de la liaison au sol : contribution à la définition du cahier des charges.* PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées (Lyon, France), 2003.

[MF07] Wilfrid Marquis-Favre. Simulation des mécanismes Résolution des équations dans les logiciels. *Techniques de l'ingénieur Modélisation mécanique*, base documentaire : TIB400DUO.(ref. article : af5054), Juillet 2007. fre.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

[MFBM+06] Wilfrid Marquis-Favre, Eric Bideaux, Olivier Mechin, Serge Scavarda, Franck Guillemard, and Marc Ebalard. Mechatronic bond graph modelling of an automotive vehicle. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 12(2-3) :189–202, 2006.

[MFCTS05] W. Marquis-Favre, B. Chereji, D. Thomasset, and S. Scavarda. Bond graph representation of an optimal control problem : the dc motor example. In *Proceedings of the International Conference On Bond Graph Modeling and Simulation (ICBGM 2005)*, New Orleans, USA, January 23 – 27 2005. pp. 239 – 244.

[MFJ11a] Wilfrid Marquis-Favre and Audrey Jardin. *Bond Graph Modelling of Engineering Systems : Theory, Applications and Software Support*, chapter Bond Graphs and Inverse Modeling for Mechatronic System Design, pages 195–226. Springer New York, New York, NY, 2011.

[MFJ11b] Wilfrid Marquis-Favre and Audrey Jardin. Bond graph pour la conception de systèmes mécatroniques. *Techniques de l'ingénieur Outils d'analyse en électronique de puissance et métrologie*, base documentaire : TIB278DUO.(ref. article : d3065), 2011. fre.

[MFMC+08] Wilfrid Marquis-Favre, Omar Mouhib, Bogdan Chereji, Daniel Thomasset, Jérôme Pousin, and Martine Picq. Bond graph formulation of an optimal control problem for linear time invariant systems. *Journal of the Franklin Institute*, 345(4) :349 – 373, 2008.

[MMFSF03] Olivier Mechin, Wilfrid Marquis-Favre, Serge Scavarda, and Pierre Ferbach. Sizing of an electric power steering system on dynamic and energetic criteria. In Francois Cellier Jose J. Granda, editor, *Proceedings of the 2003 International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation (ICBGM 2003)*. San Diego, CA : Society for Computer Simulation International, c2002, January 19-23 2003.

[MMV95] Willem Minten, Bart De Moor, and Joos Vandewalle. State equations of nonlinear dynamic systems. In *International Conference on Bond Graph Modeling, ICBGM'95, Proceeding of the 1995 Western Simulation Multiconference*, January 15-18 1995.

[MN15] R. Margetts and R F Ngwompo. Mode switching in causally dynamic hybrid bond graphs. *Mechatronics*, 28 :96 – 102, 2015.

[Mos99] David Mosiek. *Procédures graphiques pour l'analyse structurelle de systèmes physiques modélisés par bond graphs.* PhD thesis, Université Lille1 - Sciences et Technologies, Octobre 1999. 194 p.

[Mou00] Abderrahim Mouhri. *Etude structurelle des systèmes généralisés par l'approche bond graph.* Thèse, Lille 1, 2000. Th. : productique.

[MRDT99] A. Mouhri, A. Rahmani, and G. Dauphin-Tanguy. Symbolic determination of generalized state equation for singular system modelled by bond graph. *CSCC'99 Proceedings*, pages 2811–2816, 1999.

[MS1] MS1 Software. http ://www.lorsim.be (consulté le 26/08/2016).

[MSZ13] Pieter J. Mosterman, Gabor Simko, and Justyna Zander. A hyperdense semantic domain for discontinuous behavior in physical system modeling. In *Compositional Multi-Paradigm Models for Software Development (MPM)*, 2013.

[Mur85] Kazuo Murota. Use of the concept of physical dimensions in the structural approach to systems analysis. *Japan Journal of Applied Mathematics*, 2(2) :471–494, 1985.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

[Mur87] Kazuo Murota. *Systems Analysis by Graphs and Matroids*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1987. 284 pages.

[Mur07] Michael Murphy. Vehicle dynamics : technologies and trends to 2015. *Automotive World*, 2007. 50 p.

[MV95] B.M. Maschke and M. Villarroya. Properties of descriptor systems arising from bond graph models. *Mathematics and Computers in Simulation*, 39(5) :491–497, 1995.

[MvdW91] Kazuo Murota and J.W. van der Woude. Structure at infinity of structured descriptor systems and its applications. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 29(4) :878–894, 1991.

[NBS05] RF Ngwompo, E Bideaux, and S Scavarda. On the role of power lines and causal paths in bond graphbased model inversion. In *Proceedings of the International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation, San Diego USA*, pages 78–85. University of Bath, 2005.

[Nij82] Henk Nijmeijer. *Invertibility of Affine Nonlinear Control Systems : a Geometric Approach : Preprint*. Mathematisch Centrum. Mathematische Besliskunde, 1982. 12 pages.

[Nij86] Henk Nijmeijer. Right-invertibility for a class of nonlinear control systems : A geometric approach. *Systems & Control Letters*, 7(2) :125–132, 1986.

[NJ50] G.C. Newton Jr. What size motor for proper operation of servomechanism ? *Machine Design*, 22 :125 – 130, 1950.

[NNST01] R F Ngwompo, R F Ngwompo, S Scavarda, and D Thomasset. Physical model-based inversion in control systems design using bond graph representation part 1 : Theory. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I : Journal of Systems and Control Engineering*, 215(2) :95–104, 2001.

[Pac87] H.B. Pacejka. Bond graphs in vehicle dynamics. *Vehicle System Dynamics*, 16(sup1) :263–287, 1987.

[Pay61] Henry M. Paynter. *Analysis and design of engineering systems*. MIT Press, Cambridge, MA, 1961.

[Pay71] Henry M. Paynter. Discussion : "state-space formulation for bond graph models of multiport systems" (rosenberg, r. c., 1971, asme j. dyn. syst., meas., control, 93, pp. 35-40). *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 93(2) :123–124, June 1971.

[PBB11] F. Pasqualetti, A. Bicchi, and F. Bullo. A graph-theoretical characterization of power network vulnerabilities. In *American Control Conference (ACC), 2011*, pages 3918–3923, June 2011.

[PCL92] Anna Maria Perdon, Giuseppe Conte, and Sauro Longhi. Invertibility and inversion of linear periodic systems. *Automatica*, 28(3) :645–648, 1992.

[Pet82] Linda Petzold. Differential/algebraic equations are not ODEs. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 3(3) :367–384, 1982.

[PJ86] V. Potkonjak and N. Jakšić. Contribution to a computer-aided choice of d.c. motors for manipulation robots. *Robotica*, 4(1) :37–41, 001 1986.

[PMAL08] Benoît Parmentier, Frédéric Monnerie, Marc Alirand, and Julien Lagnier. A new library for vehicle dynamics functional simulation. In *Proceedings of the Vehicle Dynamics Expo - North America*, October 2008.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

[PMAL09a] Benoît Parmentier, Frédéric Monnerie, Marc Alirand, and Julien Lagnier. Vehicle functional design - from PSA in-house software to AMESim standard library with increased modularity. In *Proceedings of the Vehicle Dynamics Expo*. UKIP Media & Events Ltd., June, 17–19 2009.

[PMAL09b] Benoît Parmentier, Frédéric Monnerie, Marc Alirand, and Julien Lagnier. Vehicle functional design : From PSA in-house software to standard product and modularity for chassis subsystems. In SIA, editor, *Proceedings of the SIA congress*, 23 et 24 Septembre 2009. Reference R-2009-10-14.

[PO76] A. S. Perelson and G. F. Oster. Bond graphs and linear graphs. *Journal of the Franklin Institute*, 302(2) :159 – 185, 1976.

[PPC+11] Olivia Penas, Régis Plateaux, Jean-Yves Choley, Hubert Kadima, Thierry Soriano, Christophe Combastel, and Alain Riviere. Conception mécatronique vers un processus continu de conception mécatronique intégrée. *Techniques de l'ingénieur mécatronique*, base documentaire : TIB509DUO.(ref. article : bm8020), 2011. fre.

[RA79] R.C. Rosenberg and A.N. Andry. Solvability of bond graph junction structures with loops. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 26(2) :130–137, Feb 1979.

[Rah93] Ahmed Rahmani. *Etude structurelle des systèmes linéaires par l'approche Bond Graph.* PhD thesis, Lille 1, 1993.

[Rau03] Jochen Rauh. Virtual development of ride and handling characteristics for advanced passenger cars. *Vehicle System Dynamics*, 40(1-3) :135–155, 2003.

[RDT98] A. Rahmani and G. Dauphin-Tanguy. Symbolic determination of state matrices from bond graph model with derivative causality. In *IEEE SMC IMACS Multiconference Computation Engineering in System Application*, volume 1, pages 272–277, Hammamet, Tunisie, 1998.

[RDT06] Ahmed Rahmani and Geneviève Dauphin-Tanguy. Structural analysis of switching systems modelled by bond graph. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 12(2-3) :235–247, 2006.

[Rei84] Kurt Johannes Reinschke. Graph-theoretic characterization of fixed modes in centralized and decentralized control. *International Journal of Control*, 39(4) :715–729, 1984.

[Rei88] Kurt Johannes Reinschke. *Multivariable control : a graph-theoretic approach.* Lecture notes in control and information sciences. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1988. 236 pages.

[Rei94] Kurt Johannes Reinschke. Graph-theoretic approach to symbolic analysis of linear descriptor systems. *Linear Algebra and its Applications*, 197 198 :217 – 244, 1994.

[Res90] W. Respondek. Right and left invertibility of nonlinear control systems. In H.J. Sussmann (ed.), editor, *Nonlinear Controllability and Optimal Control*, pages 133–176. Marcel Dekker, New York, 1990.

[Ric01] Jean-Pierre Richard. *Algèbre et analyse pour l'automatique.* Traité IC2. Hermes Science, Paris, 2001. 406 pages.

[RM80] R. C. Rosenberg and B. Moultrie. Basis order for bond graph junction structures. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, CAS-27(10) :909–920, October 1980.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

[Ros70] H. H. Rosenbrock. *State-space and multivariable theory*. Nelson, London, 1970.

[Ros71] R. C. Rosenberg. State-space formulation for bond graph models of multiport systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 93(1) :35–40, March 1971.

[Ros74] H. H. Rosenbrock. Structural properties of linear dynamical systems. *International Journal of Control*, 20(2) :191–202, 1974.

[RP74] H. H. Rosenbrock and A. C. Pugh. Contributions to a hierarchical theory of systems. *International Journal of Control*, 19(5) :845–867, 1974.

[RRACS16] I. Ramirez Ruiz, M. Alirand, F. Cheli, and E. Sabbioni. Exploring different vehicle model complexity for reference in a sensor signal processing model controller. In Peter E. Pfeffer Johannes Edelmann, Manfred Plöch, editor, *Proceedings of the 13th International Symposium on Advanced Vehicle Control (AVEC'16)*, pages 527 – 532, Munich, September 13 – 16 2016.

[RRAKC15] Isabel Ramirez Ruiz, Marc Alirand, Nicolas Kieny, and Federico Cheli. *Smart electromechanical system to improve vehicle handling and stability by toe and camber control on the rear wheel*, pages 123–127. Springer Fachmedien Wiesbaden, Wiesbaden, 2015.

[RRLA+17] I. Ramirez Ruiz, J. Lagnier, M. Alirand, F. Cheli, and E. Sabbioni. Active roll center position (to appear). In *SAE Safety Events*, 2017.

[RSDT97] A. Rahmani, C. Sueur, and G. Dauphin-Tanguy. Approche des bond graphs pour l'analyse structurelle des systèmes linéaires. *Linear Algebra and its Applications*, 259(0) :101 – 131, 1997.

[RW97] Kurt J. Reinschke and Gunter Wiedemann. Digraph characterization of structural controllability for linear descriptor systems. *Linear Algebra and its Applications*, 266(0) :199 – 217, 1997.

[SAR91] S. Scavarda, M. Amara, and E. Richard. Determination of the input power in terms of output variables using bond graph. In *IMACS-IFAC Symposium MCTS 91 Modelling and Control of Technological Systems*, pages 1 – 5, Lille, France, 1991.

[SAR94] GIE SARA. Cinématique des trains. Technical Report MD9229.4, INRETS/PSA/RENAULT, Juin 1994. 24 p.

[SAR97] GIE SARA. ARHMM range module specification dossier : Physical and numerical specification of [chassis+axles] for ARHMMV1. Technical Report EM/9714/MD-SP V1.0, INRETS/PSA/RENAULT, 1997. 78 p.

[Sch16] Thomas Schaep. *Conception et commande optimale d'une architecture hybride hydraulique de reach stacker*. Thèse, Institut National des Sciences Appliquées (Lyon, France), 2016.

[SDT89] C. Sueur and G. Dauphin-Tanguy. Structural controllability/observability of linear systems represented by bond graphs. *Journal of the Franklin Institute*, 326(6) :869 – 883, 1989.

[SDT92] C. Sueur and G. Dauphin-Tanguy. Poles and zeros of multivariable linear systems : A bond graph approach. In P.C. Breedveld and G. Dauphin Tanguy, editors, *IMACS Transactions, Bond graph for Engineers*, pages 211–228. Elsevier Science Publishers BV (North Holland), 1992.

[Ser89] H. Seraji. Minimal inversion, command matching and disturbance decoupling in multivariable systems. *International Journal of Control*, 49(6) :2093–2121, 1989.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

[SH86] N. Suda and T. Hatanaka. Structural properties of systems represented by bond graphs. In S.G.Tzafestas and P.Borne, editors, *World IMACS Conference on Complex and Distributed Systems : Analysis, Simulation and Control*, volume 4, pages 73–80, 1986.

[Sie] Siemens PLM Software. LMS Imagine.Lab Amesim Software, revision 15.0.0.

[Sil68] Leonard M. Silverman. Properties and application of inverse systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 13(4) :436–437, Aug 1968.

[Sil69] Leonard M. Silverman. Inversion of multivariable linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 14(3) :270–276, Jun 1969.

[Sin81] Sudarshan Singh. A modified algorithm for invertibility in nonlinear systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 26(2) :595–598, Apr 1981.

[SL73] Sudarshan Singh and Ruey-Wen Liu. Existence of state equation representation of linear large-scale dynamical systems. *Circuit Theory, IEEE Transactions on*, 20(3) :239–246, May 1973.

[SM69] M.K. Sain and J.L. Massey. Invertibility of linear time-invariant dynamical systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 14(2) :141–149, Apr 1969.

[TL10] Aneel Tanwani and Daniel Liberzon. Invertibility of switched nonlinear systems. *Automatica*, 46(12) :1962 – 1973, 2010.

[TV88] S. Tan and J. Vandewalle. Inversion of singular systems. *Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, 35(5) :583–587, May 1988.

[vD94] J. van Dijk. *On the role of bond graph causality in modelling mechatronic systems*. PhD thesis, Twente University, Netherlands, 1994.

[vDB91a] J. van Dijk and P.C. Breedveld. Simulation of system models containing zero-order causal paths : I. classification of zero-order causal paths. *Journal of the Franklin Institute*, 328(5-6) :959 – 979, 1991.

[vDB91b] J. van Dijk and P.C. Breedveld. Simulation of system models containing zero-order causal paths : II. numerical implications of class 1 zero-order causal paths. *Journal of the Franklin Institute*, 328(5-6) :981 – 1004, 1991.

[vdW91] J.W. van der Woude. On the structure at infinity of a structured system. *Linear Algebra and its Applications*, 148(0) :145 – 169, 1991.

[Vil94] Marc Villarroya. Propriétés et analyse graphique des systèmes implicites issus des graphes de liaison. Mémoire de diplôme d'ingénieur : Automatisme, CNAM, PARIS, 1994.

[VK79] G.C. Verghese and T. Kailath. Eigenvector chains for finite and infinite zeros of rational matrices. In *18th IEEE Conference on Decision and Control including the Symposium on Adaptive Processes*, volume 2, pages 31–32, Dec 1979.

[VK81] G.C. Verghese and T. Kailath. Rational matrix structure. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(2) :434–439, Apr 1981.

[VKP87] M. Vukobratović, D. Katić, and V. Potkonjak. Computer-assisted choice of electrohydraulic servosystems for manipulation robots using complete mathematical models. *Mechanism and Machine Theory*, 22(5) :431 – 439, 1987.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

[VLK81] G.C. Verghese, B.C. Levy, and T. Kailath. A generalized state-space for singular systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(4) :811–831, Aug 1981.

[VLK82] A. I. G. Vardulakis, D. N. J. Limebeer, and N. Karcanias. Structure and smith-macmillan form of a rational matrix at infinity. *International Journal of Control*, 35(4) :701–725, 1982.

[Wei64] L. Weiss. On a question related to the control of linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 9(2) :176–177, Apr 1964.

[Wie99] Gunter Wiedemann. *Strukturelle Zugänge Zur Analyse und Synthese Linearer Regelungssysteme in Deskriptorform*. Shaker, september 1999. 170 pages.

[WYT95] S.-T. Wu and K. Youcef-Toumi. On relative degrees and zero dynamics from physical system modeling. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 117(2) :205–217, June 1995.

[WZ01] Weiqun Wang and Yun Zou. Analysis of impulsive modes and luenberger observers for descriptor systems. *Systems & Control Letters*, 44(5) :347 – 353, 2001.

[Yan12] Dapeng Yang. *Algebraic approach for analysis of systems modeled by bond graph*. Theses, Ecole Centrale de Lille, June 2012.

[YS81] E. Yip and R. Sincovec. Solvability, controllability, and observability of continuous descriptor systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 26(3) :702–707, Jun 1981.

[ZC07] D. Zimmer and F. Cellier. Impulse-bond Graphs,. In *Proceedings of the International Conference On Bond Graph Modeling and Simulation (ICBGM 2007)*, pages 3 – 11, San Diego, California, 2007.

[ZD63] Lotfi A. Zadeh and Charles A. Desoer. *Linear System Theory : The State Space Approach*. McGraw-Hill, New York, 1963. 627 p.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Annexe A

Bond graph : Langage, matrice de structure de jonction et forme générale du système d'état

A.1 Introduction générale

Le bond graph ou « graphe à liens » a été imaginé par Henry Paynter en 1959 et publié pour la première fois en 1961 [Pay61]. Le langage a été formalisé par Karnopp & Rosenberg en 1968 [KR68], puis dans l'ouvrage référent [KR75] [1]. Selon l'introduction faite par Dauphin-Tanguy [DT99], le formalisme bond graph repose sur deux caractéristiques intrinsèques :

— la *représentation graphique* des échanges d'énergie au sein d'un système (« qui suppose une approche énergétique des problèmes, donc universelle »), et

— l'*analogie* entre variables de différents domaines physiques, ce qui en fait un « langage unifié pour tous les domaines de la physique ».

Le formalisme bond graph concerne tous les systèmes, en linéaire ou non linéaire, dans tous les domaines (électroniques, hydrauliques, mécaniques, thermiques...) [Fic04]. Le modèle bond graph est un modèle de connaissance. Il suppose généralement les *paramètres localisés* dans le système (*« lumped parameter model »*) [2]. Le formalisme permet une modélisation *structurelle* par la structure même d'interconnexion entre les éléments (bond graph *acausal*) ainsi que par la visualisation des propriétés de structure des équations (bond graph *causal*), et *comportementales* par la déduction des modèles mathématiques (matrice de transfert, équation d'état) [DT00] [3]. Il est particulièrement adapté à la modélisation des systèmes mécatroniques [DT99] [Leb03] [DtMDD14] [DMDtD14] et ce, à différents niveaux du cycle de conception [Leb03] comme nous l'explicitons au chapitre 1.

En rapport avec le rôle de la causalité, il est intéressant de préciser à ce stade les points

1. Notons qu'il existe plusieurs éditions de cette ouvrage. Citons notamment celle de 1990 impliquant également Margolis [KMR90] qui est usuellement citée, ou encore la plus récente [KMR12].

2. Le bond graph n'interdit pas de modéliser des systèmes à paramètres répartis à condition d'effectuer une semi-discrétisation des équations associés (système de dimension infinie). Ce point est très brièvement abordé au chapitre 1, section 1.4.3.2 page 28, en rapport avec la méthodologie de dimensionnement abordée dans ce mémoire.

3. Le bond graph peut également être vu comme un outil de modélisation au niveau *fonctionnel* ou au niveau *système* par sa représentation bond graph à mots [DT00].

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

suivants :

— le bond graph *acausal* d'un système dynamique modélise la structure d'interconnexion entre les différents composants constitutifs du système (*i.e.* son architecture) ainsi que le transfert d'énergie entre ces composants. Au niveau équationnel, il permet d'établir les équations de contraintes entre les différentes variables du système, sans pour autant, à ce stade, orienter les équations.

— le bond graph *causal* est établi à partir du modèle acausal en suivant des règles d'affectation de causalité [4]. La causalité confère au bond graph une structure de *graphe orienté*. Elle permet d'orienter les équations du modèle et ainsi de calculer numériquement l'état et les sorties du modèle physique. Elle permet également de déduire des propriétés *structurelles* du système en étudiant la nature des relations entre les variables du système (en l'occurrence ses variables de *flux* et d'*effort*). [5]

— le bond graph *bicausal* est établi à partir du modèle acausal en suivant des règles d'affectation de causalité étendues à des schémas de calcul qui ne coïncident plus avec le sens de l'observation de l'évolution des phénomènes physiques (au sens de la causalité physique). Cette extension a été proposée par Gawthrop [Gaw95] et utilisée dans le cadre de l'approche de modélisation par bond graph inverse par Fotsu-Ngwompo [FNST96, FN97, NBS05] pour formuler une procédure d'inversion, nommée « SCAPI » pour « Sequential Causality Assignment Procedure for Inversion ». Ces travaux constituent la principale base de l'étude proposée dans ce mémoire.

Nous ne reprenons pas dans cette annexe une présentation détaillée du formalisme bond graph. Le lecteur intéressé pourra trouver des exposés complets dans les références [KR75, KMR90, KMR12], [DT99, DT00], [Fic04], [Bor10].

A.2 Classification des boucles causales d'ordre 0, ou « ZCP », dans un bond graph

Les boucles causales d'ordre 0 (ou « ZCP » pour *zero-order causal path* [vDB91a, vDB91b]) représentent les couplages statiques entre les éléments bond graph et peuvent être classifiées suivant le type d'éléments qu'elles font intervenir (*i.e.* éléments de stockage, éléments de dissipation et/ou élément de la structure de jonction). Une première classification a été proposée par van Dijk & Breedveld [vDB91a] puis réordonnée par van Dijk [vD94]. C'est cette dernière classification qui est usuellement employée [6] et qui fait référence dans le présent mémoire. Les boucles causales d'ordre 0 sont classées de 1 à 5 de la manière suivante :

1. Boucle d'ordre 0 de classe 1 (« 1ZCP ») : il s'agit d'une boucle causale d'ordre 0 entre un élément de stockage d'énergie (I ou C) en causalité intégrale et un

4. De nombreux auteurs ont proposé des travaux à ce sujet. Citons notamment les travaux de van Dijk [vD94] qui sont abordés dans ce mémoire.

5. En toute rigueur, la causalité bond graph est une causalité *opératoire*. Si elle rejoint le principe de causalité au sens où une *cause opératoire* produit un *effet opératoire*, la causalité bond graph ne coïncide pas nécessairement avec la causalité physique sur l'ordre chronologique d'apparition des phénomènes physiques.

6. Parmi les travaux couramment cités dans ce mémoire, citons notamment [FN97], [RDT98], [MRDT99], et citons également [BC96a, BC96b], [Bor10].

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

élément de stockage d'énergie en causalité dérivée (le J utilisé dans les figures A.1 et A.2 représente une jonction 0 ou 1).

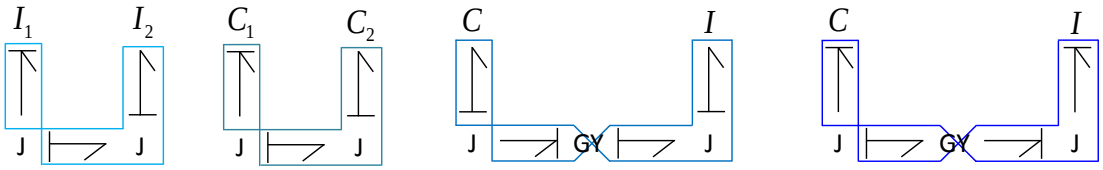


FIGURE A.1 – Boucle causale d'ordre 0 de classe 1 dans la classification de VAN DIJK [vD94]

2. Boucle d'ordre 0 de classe 2 (« 2ZCP ») : il s'agit d'une boucle causale d'ordre 0 entre deux éléments de relation constitutive algébrique (élément de type R).

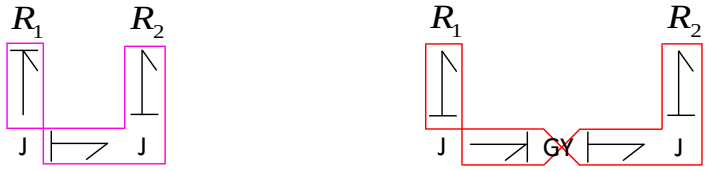


FIGURE A.2 – Boucle causale d'ordre 0 de classe 2 dans la classification de VAN DIJK [vD94]

3. Boucle d'ordre 0 de classe 3 (« 3ZCP ») : ce type de boucle est également appelé « maille causale » (*causal mesh*), définit le cas de boucle où seule l'une des deux variables conjuguées de certains liens est empruntée, et qui passe par des éléments externes de type I, C ou R.

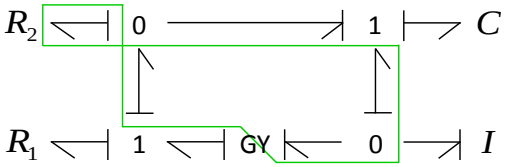


FIGURE A.3 – Boucle causale d'ordre 0 de classe 3 dans la classification de VAN DIJK [vD94]

4. Boucle d'ordre 0 de classe 4 (« 4ZCP ») : il s'agit d'un cycle passant uniquement par les éléments de la structure de jonction[7] et de gain différent de +1 (figure A.4).

5. Boucle d'ordre 0 de classe 5 (« 5ZCP ») : il s'agit d'un cycle passant uniquement par les éléments de la structure de jonction et de gain égale à +1 (figure A.4).

7. Voir par exemple la figure A.5 page 249 pour la partie relative à la structure de jonction.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

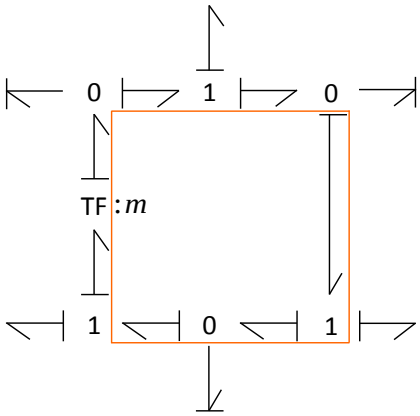


FIGURE A.4 – Boucle causale d'ordre 0 de classe 4 (si $m \neq 1$) et 5 (si $m = 1$) dans la classification de VAN DIJK [vD94]

Remarque : dans l'ensemble de ce mémoire, nous ne dissocions pas le traitement des $1ZCP$ et des $3ZCP$ impliquant des éléments I et/ou C. Nous ne dissocions pas non plus le traitement des $2ZCP$ et des $3ZCP$ impliquant des éléments R. Dans le cas où des $3ZCP$ impliquent des éléments I, C et des éléments R, cette boucle sera considérée de la même manière qu'une $1ZCP$.

A.3 Matrice de structure de jonction et systèmes d'équations

A.3.1 Introduction

L'analyse structurelle menée au chapitre 4 porte sur les représentations digraphe et bond graph représentant un système singulier linéaire à temps invariant Σ_d (4.1) page 114. Les spécificités de la représentation bond graph issues des considérations physiques et énergétiques sont abordées du point de vue de la *matrice de structure jonction* (ou « MSJ ») introduite par ROSENBERG [Ros71, Pay71] (section A.3.2). L'approche « MSJ » permet une considération globale de la *structure de jonction* du bond graph et de ses implications causales sur les éléments de stockage, dissipation, sources et détecteurs. Elle permet, selon la qualification de ROSENBERG, « d'anticiper les propriétés de formulation avant l'écriture d'équations » [Ros71] et sied particulièrement bien à la déclinaison graphique de l'approche structurelle telle qu'elle est présentée au chapitre 1 et au chapitre 2. Nous utilisons la matrice de structure de jonction pour nous permettre de mettre en place une forme très générale de système singulier à partir du bond graph (section A.3.3). Cette forme est celle sur laquelle s'applique les principales contributions du chapitre 4, ainsi que celles de la section 5.4.3 page 210 du chapitre 5. Ensuite, deux formes simplifiées (sections A.3.4 et A.3.5) permettent de retrouver les principales propriétés des systèmes singuliers à travers leur représentation bond graphs dans le cas des hypothèses de modélisation associées (chapitre 5, section 5.4.2 page 200).

A.3.2 Matrice de structure de jonction bond graph

A partir d'une représentation condensée de la *structure de jonction*, des éléments de *stockage* et de *dissipation*, des *sources* et des *détecteurs* (figure A.5) et de l'orientation des vecteurs *significatifs* du système de la forme causale (figure A.6), ROSENBERG a établi au niveau structurel le lien entre les variables d'entrée et de sortie de la structure de

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

jonction. Il en découle une représentation du système sous forme d'état, régulier (A.1) ou singulier (A.2) suivant la topologie du système et le niveau de substitution réalisée.

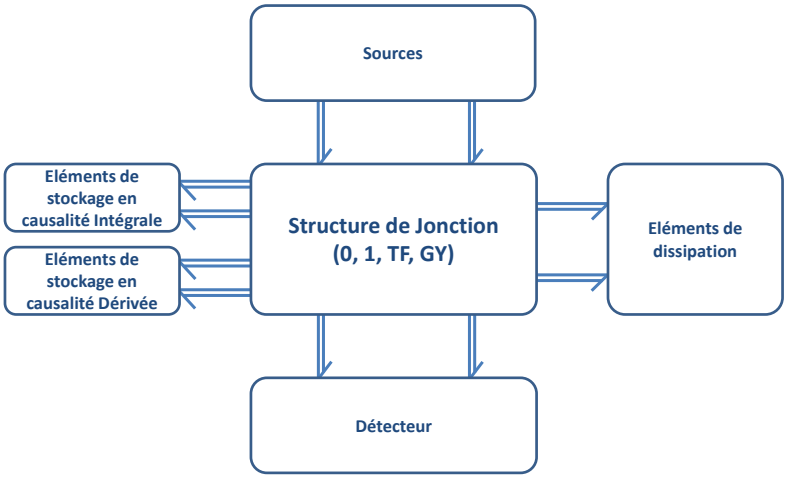


FIGURE A.5 – Représentation condensée des systèmes multiports (à topologie fixe) [Ros71] : Forme acausale – directions de puissances

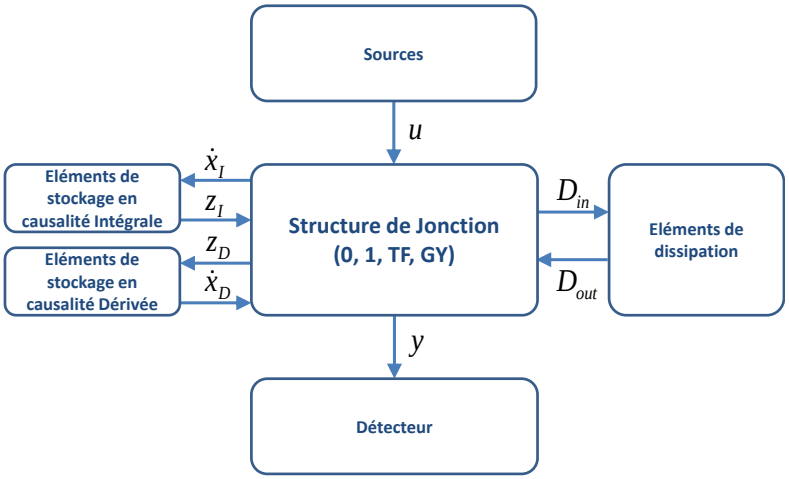


FIGURE A.6 – Représentation condensée des systèmes multiports (à topologie fixe) [Ros71] : Forme causale – orientation des vecteurs significatifs

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \tag{A.1}$$

où $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie.

$$\Sigma_d : \begin{cases} \mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \tag{A.2}$$

où $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie.

ROSENBERG [Ros71] a également établi une procédure de passage du système singulier

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

de type (A.2) (lorsque des stockages d'énergie sont en causalité dérivée) à un système généralisé de type (A.3) (dont le système (2.5) page 46 est une illustration). [8]

$$\Sigma_g : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}^{(\alpha)}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}^{(\alpha)}(t) \end{cases} \tag{A.3}$$

où, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état *généralisé*, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de sortie et $\mathbf{u}^{(\alpha)}(t) \in \mathbb{R}^{p\times\alpha}$ le vecteur d'entrée. Le vecteur de commande $\mathbf{u}^{(\alpha)}(t)$ regroupe le vecteur $\mathbf{u}$ ainsi que l'ensemble des dérivées successives de ses composantes apparaissant dans le modèle. Notons également les travaux ultérieurs de Minten *et al.* [MMV95], qui ont permis de formaliser cette approche en non-linéaire (suivant différentes sources de non linéarités) et de classer les systèmes et leur représentation associée suivant les hypothèses simplificatrices potentielles, aboutissant à des systèmes réguliers de la forme Σ (A.1) ou singuliers, sous forme classique Σ_d (A.2) ou généralisée Σ_g (A.3). L'ensemble des variables *significatives* (figure A.6) représentent l'état énergétique du système et son évolution lors de ses échanges avec son environnement (entrée de commande, dissipation). La *structure de jonction*, composée des éléments $\{TF, GY, 0, 1\}$, conserve la puissance du système (le bilan de puissance entre l'ensemble des flux d'énergie entrants et sortants est nul). Elle renferme les lois physiques fondamentales de conservation de puissance. Le vecteur $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_D)^T$ est associé à l'ensemble des éléments de stockage d'énergie du système et est constitué des variables d'*énergie* du système (*true energy variable* [Ros71]). Il est respectivement composé de $\mathbf{x}_I$, variables d'énergie associée aux stockages C et I en causalité intégrale, et $\mathbf{x}_D$, variables d'énergie associée aux stockages C et I en causalité dérivée [9]. Le vecteur $\mathbf{X}$ représente le vecteur d'état *énergétique* naturel du système [10]. Les variables de *puissance* sont les suivantes (figure A.6) :

— le vecteur $\dot{\mathbf{x}}_I$ est composé des dérivées par rapport au temps des composantes du vecteur $\mathbf{x}_I$, associées aux stockages en causalité intégrale (*i.e.* variables d'*effort* pour les éléments I et de *flux* pour les éléments C). C'est un vecteur de sortie de la structure de jonction (*i.e.* entrant dans les champs de stockage). Le vecteur complémentaire $\mathbf{z}_I$ est le vecteur de co-énergie associé aux stockages en causalité intégrale, *i.e.* les variables de *flux* pour les éléments I et d'*effort* pour les éléments C. Il entre dans la structure de jonction. Le produit $\dot{\mathbf{x}}_I \cdot \mathbf{z}_I$ représente la puissance aux ports entre les champs de stockage en causalité intégrale et la structure de jonction.

— le vecteur $\dot{\mathbf{x}}_D$ est composé des dérivées par rapport au temps des composantes du vecteur $\mathbf{x}_D$, associées aux stockages en causalité dérivée (*i.e.* variables d'*effort* pour les éléments I et de *flux* pour les éléments C). Dans ce cas particulier, ce

8. La procédure de Rosenberg opère des dérivations d'équations de contrainte avec une approche similaire à celle de Yip & Sincovec (chapitre 5, section 5.3.2 page 190). Considérant dans [Ros71] uniquement les variables d'état d'énergie du système, le système singulier est mis sous la forme généralisée $\dot{\mathbf{x}}_I = A\mathbf{x}_I + \mathbf{B}_1\mathbf{u} + \mathbf{B}_2\dot{\mathbf{u}}$. Nous rappelons à ce stade les remarques de Verghese [VLK81] sur la potentielle perte d'information qu'entraîne une telle transformation (*i.e.* pas de représentation de la structure des *modes impulsionnels*, section 5.3.1 page 189, équation 5.20 et remarques associées). Des *phénomènes impulsionnels* peuvent toutefois apparaître sur certaines variables de puissance en raison de la dérivation des entrées.

9. Cette définition est générique, valable également pour les champs C, I ou IC, couplés (*i.e.* causalité mixte sur les ports) ou non.

10. Il est important d'insister sur le fait que le vecteur d'état est ici composé de variables énergétiques (*i.e.* moment généralisé p pour un élément I, déplacement généralisé q pour un élément C), nécessaires et suffisantes pour sa représentation d'état. D'autres variables, non énergétiques, peuvent être ajoutées au vecteur d'état comme nous le verrons par la suite ou également dans le cas des systèmes hybrides, pour tenir compte de l'état des commutateurs [BC97, BC98].

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

vecteur entre dans la structure de jonction (*i.e.* sort des champs de stockage). Le vecteur complémentaire $\mathbf{z}_D$ est le vecteur de co-énergie associé aux stockages en causalité dérivée, sortant de la structure de jonction, *i.e.* les variables de *flux* pour les éléments I et d'*effort* pour les éléments C. Le produit $\dot{\mathbf{x}}_D.\mathbf{z}_D$ représente la puissance aux ports entre les champs de stockage en causalité dérivée et la structure de jonction.

— les vecteurs $\mathbf{D}_{in}$ et $\mathbf{D}_{out}$ représentent les variables de puissance, respectivement entrantes et sortantes du champ dissipatif. Notons que flux ou efforts peuvent être des variables entrantes de ce champ, si l'élément associé est en causalité résistance ou conductance, respectivement.

— le vecteur $\mathbf{u}$ est composé des variables de puissance des sources de flux (Sf) et/ou d'effort (Se). Il représente le vecteur des entrées de commande ou de perturbation du système.

— le vecteur $\mathbf{y}$ est composé des variables de puissance des détecteurs de flux (Df) et/ou d'effort (De). Il représente le vecteur d'observation (*i.e.* de mesure) du système.

L'ensemble du développement de Rosenberg repose donc sur les cinq vecteurs $\dot{\mathbf{X}} = (\dot{\mathbf{x}}_I, \dot{\mathbf{x}}_D)^T$, $\mathbf{Z} = (\mathbf{z}_I, \mathbf{z}_D)^T$, $\mathbf{D}_{in}$, $\mathbf{D}_{out}$ et $\mathbf{u}$ ainsi que le vecteur d'énergie $\mathbf{X}$ [Ros71] [11]. Les lois de comportement sont associées aux différents champs I, C et R en faisant intervenir les vecteurs précédents :

— le champ de stockage est caractérisé de manière générale par la loi de comportement suivante (A.4), en faisant l'hypothèse que les lois puissent être explicitées :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{z}_I \\ \mathbf{x}_D \end{pmatrix} = \mathbf{\Phi}_S \left(\mathbf{x}_I \, , \, \mathbf{z}_D \right) \tag{A.4}$$

Notons les cas particuliers suivants :

— le cas où tous les stockages sont en causalité intégrale aboutit à une relation entre la variable de co-énergie z_i et la variable d'énergie x_i :

$$\mathbf{z}_I = \mathbf{\Phi}_S \left(\mathbf{x}_I \right) \tag{A.5}$$

Dans le cas linéaire, (A.5) se simplifie suivant :

$$\mathbf{z}_I = \mathbf{S} \cdot \mathbf{x}_I \tag{A.6}$$

— le cas où tous les stockages d'énergie sont des éléments 1-port ou s'il n'existe pas de causalité mixte sur les stockages (*i.e.* les vecteurs d'état $\mathbf{x}_I$ et $\mathbf{x}_D$ ne sont pas couplés) aboutit au système suivant [MMV95] :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{z}_I & = & \mathbf{\Phi}_{Si} \left(\mathbf{x}_I \right) \\ \mathbf{x}_D & = & \mathbf{\Phi}_{Sd}^{-1} \left(\mathbf{z}_D \right) \end{array} \right. \tag{A.7}$$

Dans le cas linéaire, (A.7) se simplifie suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{z}_I & = & \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{x}_I \\ \mathbf{x}_D & = & \mathbf{S}_d^{-1} \cdot \mathbf{z}_D \end{array} \right. \tag{A.8}$$

11. Nous parlons ici de la mise en équation sous forme d'état sans spécialement spécifier les mesures.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Dans le cas linéaire où les stockages sont des éléments 1-port, les matrices S_i et S_d^{-1} sont diagonales et définies positives [Mou00].

— Le cas où les stockages d'énergie sont couplés mais leur loi de comportement est linéaire conduit à simplifier (A.4) de la manière suivante (A.9) [BC98],

$$\begin{pmatrix} \mathbf{z}_I \\ \mathbf{x}_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_i & \mathbf{S}_{id} \\ \mathbf{S}_{di} & \mathbf{S}_d^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_I \\ \mathbf{z}_D \end{pmatrix} \tag{A.9}$$

où la matrice $\begin{pmatrix} \mathbf{S}_i & \mathbf{S}_{id} \\ \mathbf{S}_{di} & \mathbf{S}_d^{-1} \end{pmatrix}$ est inversible.

— le champ de dissipation est caractérisé de manière générale par la loi de comportement suivante :

$$\mathbf{D}_{out} = \mathbf{\Phi}_L(\mathbf{D}_{in}) \tag{A.10}$$

Dans le cas linéaire, (A.10) se simplifie suivant :

$$\mathbf{D}_{out} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{D}_{in} \tag{A.11}$$

En faisant l'hypothèse qu'il n'y a pas de boucle causale de gain unité [12] [BC98] et que les lois de comportement peuvent s'expliciter sous forme matricielle, une relation linéaire peut être formulée entre les sorties de la structure de jonction $(\dot{\mathbf{x}}_I, \mathbf{z}_D, \mathbf{D}_{in})^T$ et ses entrées $(\mathbf{z}_I, \dot{\mathbf{x}}_D, \mathbf{D}_{out}, \mathbf{u})^T$:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_I \\ \mathbf{z}_D \\ \mathbf{D}_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} & \mathbf{S}_{13} & \mathbf{S}_{15} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} & \mathbf{S}_{23} & \mathbf{S}_{25} \\ \mathbf{S}_{31} & \mathbf{S}_{32} & \mathbf{S}_{33} & \mathbf{S}_{35} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z}_I \\ \dot{\mathbf{x}}_D \\ \mathbf{D}_{out} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \tag{A.12}$$

La possibilité d'exprimer le système d'équation sous la forme (A.12) comprend de manière sous-jacente le fait que les boucles causales internes à la structure de jonction [13], si elles existent, sont résolues, à quoi correspond de manière plus globale que d'une part, les contraintes globales de Kirchhoff sur les cycles et co-cycles d'une structure de jonction sont respectées [Bid94] et que d'autre part, l'ordre des variables de base (*basis order variable of junction structures* [RM80]) est également respecté. Combinée aux différentes lois de comportement (A.9) et (A.11), il est possible de mettre l'équation (A.12) sous différentes formes (*représentation d'état généralisée* [Ros71], *forme standard implicite* [BC98], *représentation d'état singulière* [MMV95], [BC98], [Mou00], [RDT06]).

A.3.3 Forme générale

Cette première forme d'équations du modèle issue de l'exploitation de la structure de jonction du bond graph (figures A.5 et A.6) est un système singulier où le vecteur d'état est constitué de toutes les variables d'énergie et de certaines variables de puissance de la représentation. D'une part, cette écriture nécessite l'élimination des variables D_{in} et D_{out} aux ports des éléments dissipatifs, et d'autre part, elle nous amène à faire évoluer la représentation de la figure A.5 pour tenir compte explicitement des variables de puissance choisies dans le vecteur d'état (figure A.7). On peur retrouver parmi ces variables certaines composantes de D_{in} et/ou D_{out} mais de manière générale, ce peut

12. « Boucle causale d'ordre 0 de *classe 5* » ou « *5ZCP* » dans la classification de Van Dijk [vDB91a, vD94], aboutissant à une structure de jonction non résoluble (section A.2).

13. Boucles causales d'ordre 0 de *classe 4* ou « *4ZCP* » dans la classification de Van Dijk [vDB91a, vD94] (section A.2).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

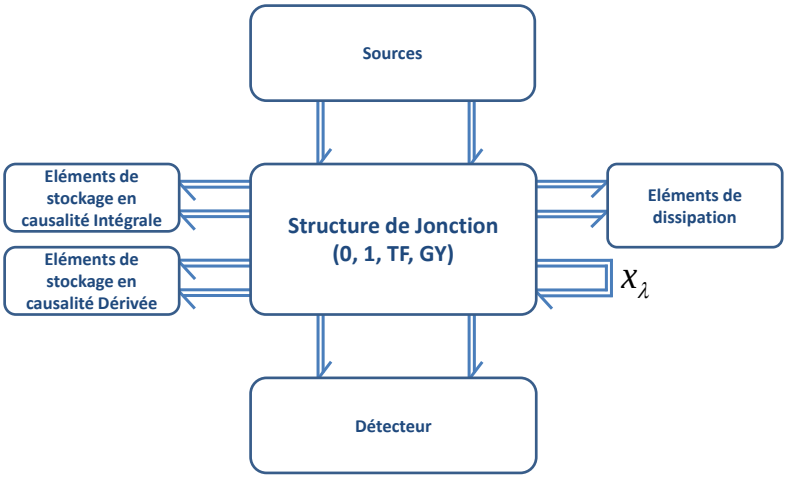


FIGURE A.7 – Représentation condensée des systèmes multiports (à topologie fixe) explicitant des variables de puissance sur des liens de la structure de jonction

être n'importe quelle variable de puissance sur un lien de la structure de jonction. Avec ces nouvelles variables, l'équation (A.12) devient :

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_I \\ \mathbf{z}_D \\ \mathbf{D}_{in} \\ \mathbf{x}_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} & \mathbf{S}_{13} & \mathbf{S}_{14} & \mathbf{S}_{15} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} & \mathbf{S}_{23} & \mathbf{S}_{24} & \mathbf{S}_{25} \\ \mathbf{S}_{31} & \mathbf{S}_{32} & \mathbf{S}_{33} & \mathbf{S}_{34} & \mathbf{S}_{35} \\ \mathbf{S}_{41} & \mathbf{S}_{42} & \mathbf{S}_{43} & \mathbf{S}_{44} & \mathbf{S}_{45} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z}_I \\ \dot{\mathbf{x}}_D \\ \mathbf{D}_{out} \\ \mathbf{x}_\lambda \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{51} & \mathbf{S}_{52} & \mathbf{S}_{53} & \mathbf{S}_{54} & \mathbf{S}_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z}_I \\ \dot{\mathbf{x}}_D \\ \mathbf{D}_{out} \\ \mathbf{x}_\lambda \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \tag{A.13}$$

Notons que les éléments des sous-matrices de (A.13) ne sont pas les mêmes que ceux de (A.12), sauf dans le cas particulier où aucune variable de puissance n'est portée dans la représentation d'état (*i.e.* cas où le vecteur $\mathbf{x}_\lambda$ n'existe pas). Dans le cas général, ces différences résultent de la non résolution *a priori* de certaines boucles causales dans (A.13), notamment les $2ZCP$, $3ZCP$ et $4ZCP$, alors que ces boucles sont nécessairement résolues dans (A.12).

La loi de comportement sur les champs dissipatifs (A.11) permet d'exprimer D_{out} en fonction des autres variables d'état,

$$\mathbf{D}_{out} = (\mathbf{I} - \mathbf{L}\ \mathbf{S}_{33})^{-1} \left[\mathbf{L}\ \mathbf{S}_{31}\ \mathbf{z}_I + \mathbf{L}\ \mathbf{S}_{32}\ \dot{\mathbf{x}}_D + \mathbf{L}\ \mathbf{S}_{34}\ \mathbf{x}_\lambda + \mathbf{L}\ \mathbf{S}_{35}\ \mathbf{u}\right] \tag{A.14}$$

ce qui suppose, entre autre, la résolubilité des $2ZCP$ et des $3ZCP$ impliquant les éléments R pour assurer l'inversibilité de la matrice $(\mathbf{I} - \mathbf{L}\ \mathbf{S}_{33})$. En introduisant (A.14) dans

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

(A.13), nous obtenons pour l'équation d'évolution,

$$\begin{pmatrix}\dot{\mathbf{x}}_I\\ \mathbf{z}_D\\ \mathbf{x}_\lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{S}_{11}+\mathbf{S}_{13}(\mathbf{I}-\mathbf{LS}_{33})^{-1}\mathbf{LS}_{31} & \mathbf{S}_{12}+\mathbf{S}_{13}(\mathbf{I}-\mathbf{LS}_{33})^{-1}\mathbf{LS}_{32}\\ \mathbf{S}_{21}+\mathbf{S}_{23}(\mathbf{I}-\mathbf{LS}_{33})^{-1}\mathbf{LS}_{31} & \mathbf{S}_{22}+\mathbf{S}_{23}(\mathbf{I}-\mathbf{LS}_{33})^{-1}\mathbf{LS}_{32}\\ \mathbf{S}_{41}+\mathbf{S}_{43}(\mathbf{I}-\mathbf{LS}_{33})^{-1}\mathbf{LS}_{31} & \mathbf{S}_{42}+\mathbf{S}_{43}(\mathbf{I}-\mathbf{LS}_{33})^{-1}\mathbf{LS}_{32}\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}\mathbf{S}_{14}+\mathbf{S}_{13}(\mathbf{I}-\mathbf{LS}_{33})^{-1}\mathbf{LS}_{34} & \mathbf{S}_{15}+\mathbf{S}_{13}(\mathbf{I}-\mathbf{LS}_{33})^{-1}\mathbf{LS}_{35}\\ \mathbf{S}_{24}+\mathbf{S}_{23}(\mathbf{I}-\mathbf{LS}_{33})^{-1}\mathbf{LS}_{34} & \mathbf{S}_{25}+\mathbf{S}_{23}(\mathbf{I}-\mathbf{LS}_{33})^{-1}\mathbf{LS}_{35}\\ \mathbf{S}_{44}+\mathbf{S}_{43}(\mathbf{I}-\mathbf{LS}_{33})^{-1}\mathbf{LS}_{34} & \mathbf{S}_{45}+\mathbf{S}_{43}(\mathbf{I}-\mathbf{LS}_{33})^{-1}\mathbf{LS}_{35}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{z}_I\\ \dot{\mathbf{x}}_D\\ \mathbf{x}_\lambda\\ \mathbf{u}\end{pmatrix} \tag{A.15}$$

et pour l'équation de sortie,

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix}\mathbf{S}_{51}+\mathbf{S}_{53}(\mathbf{I}-\mathbf{LS}_{33})^{-1}\mathbf{LS}_{31} & \mathbf{S}_{52}+\mathbf{S}_{53}(\mathbf{I}-\mathbf{LS}_{33})^{-1}\mathbf{LS}_{32}\\ \mathbf{S}_{54}+\mathbf{S}_{53}(\mathbf{I}-\mathbf{LS}_{33})^{-1}\mathbf{LS}_{34} & \mathbf{S}_{55}+\mathbf{S}_{53}(\mathbf{I}-\mathbf{LS}_{33})^{-1}\mathbf{LS}_{35}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{z}_I\\ \dot{\mathbf{x}}_D\\ \mathbf{x}_\lambda\\ \mathbf{u}\end{pmatrix} \tag{A.16}$$

que nous notons respectivement de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\dot{\mathbf{x}}_I\\ \mathbf{z}_D\\ \mathbf{x}_\lambda\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\mathbf{S}_{II} & \mathbf{S}_{ID} & \mathbf{S}_{I\lambda} & \mathbf{S}_{IU}\\ \mathbf{S}_{DI} & \mathbf{S}_{DD} & \mathbf{S}_{D\lambda} & \mathbf{S}_{DU}\\ \mathbf{S}_{\lambda I} & \mathbf{S}_{\lambda D} & \mathbf{S}_{\lambda\lambda} & \mathbf{S}_{\lambda U}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{z}_I\\ \dot{\mathbf{x}}_D\\ \mathbf{x}_\lambda\\ \mathbf{u}\end{pmatrix}\\ \mathbf{y} &= \begin{pmatrix}\mathbf{S}_{YI} & \mathbf{S}_{YD} & \mathbf{S}_{Y\lambda} & \mathbf{S}_{YU}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{z}_I\\ \dot{\mathbf{x}}_D\\ \mathbf{x}_\lambda\\ \mathbf{u}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{A.17}$$

avec,

$$\begin{array}{lllllllll}\mathbf{S}_{II} &=& \mathbf{S}_{11}+\mathbf{S}_{13}(\mathbf{I}-\mathbf{LS}_{33})^{-1}\mathbf{LS}_{31} &;& \mathbf{S}_{ID} &=& \mathbf{S}_{12}+\mathbf{S}_{13}(\mathbf{I}-\mathbf{LS}_{33})^{-1}\mathbf{LS}_{32}\\ \mathbf{S}_{I\lambda} &=& \mathbf{S}_{14}+\mathbf{S}_{13}(\mathbf{I}-\mathbf{LS}_{33})^{-1}\mathbf{LS}_{34} &;& \mathbf{S}_{DI} &=& \mathbf{S}_{21}+\mathbf{S}_{23}(\mathbf{I}-\mathbf{LS}_{33})^{-1}\mathbf{LS}_{31}\\ \mathbf{S}_{DD} &=& \mathbf{S}_{22}+\mathbf{S}_{23}(\mathbf{I}-\mathbf{LS}_{33})^{-1}\mathbf{LS}_{32} &;& \mathbf{S}_{D\lambda} &=& \mathbf{S}_{24}+\mathbf{S}_{23}(\mathbf{I}-\mathbf{LS}_{33})^{-1}\mathbf{LS}_{34}\\ \mathbf{S}_{\lambda I} &=& \mathbf{S}_{41}+\mathbf{S}_{43}(\mathbf{I}-\mathbf{LS}_{33})^{-1}\mathbf{LS}_{31} &;& \mathbf{S}_{\lambda D} &=& \mathbf{S}_{42}+\mathbf{S}_{43}(\mathbf{I}-\mathbf{LS}_{33})^{-1}\mathbf{LS}_{32}\\ \mathbf{S}_{\lambda\lambda} &=& \mathbf{S}_{44}+\mathbf{S}_{43}(\mathbf{I}-\mathbf{LS}_{33})^{-1}\mathbf{LS}_{34} &;& \mathbf{S}_{IU} &=& \mathbf{S}_{15}+\mathbf{S}_{13}(\mathbf{I}-\mathbf{LS}_{33})^{-1}\mathbf{LS}_{35}\\ \mathbf{S}_{DU} &=& \mathbf{S}_{25}+\mathbf{S}_{23}(\mathbf{I}-\mathbf{LS}_{33})^{-1}\mathbf{LS}_{35} &;& \mathbf{S}_{\lambda U} &=& \mathbf{S}_{45}+\mathbf{S}_{43}(\mathbf{I}-\mathbf{LS}_{33})^{-1}\mathbf{LS}_{35}\\ \mathbf{S}_{YI} &=& \mathbf{S}_{51}+\mathbf{S}_{53}(\mathbf{I}-\mathbf{LS}_{33})^{-1}\mathbf{LS}_{31} &;& \mathbf{S}_{YD} &=& \mathbf{S}_{52}+\mathbf{S}_{53}(\mathbf{I}-\mathbf{LS}_{33})^{-1}\mathbf{LS}_{32}\\ \mathbf{S}_{Y\lambda} &=& \mathbf{S}_{54}+\mathbf{S}_{53}(\mathbf{I}-\mathbf{LS}_{33})^{-1}\mathbf{LS}_{34} &;& \mathbf{S}_{YU} &=& \mathbf{S}_{55}+\mathbf{S}_{53}(\mathbf{I}-\mathbf{LS}_{33})^{-1}\mathbf{LS}_{35}\end{array} \tag{A.18}$$

En utilisant à présent les lois de comportement des champs de stockage d'énergie (A.9), nous pouvons réécrire (A.17) en termes des variables d'énergie $\mathbf{x}_I$ et $\mathbf{x}_D$, des variables de puissance $\mathbf{x}_\lambda$ et du vecteur de sortie $\mathbf{y}$. Exprimons dans un premier temps la variable $\mathbf{z}_D$,

$$\mathbf{z}_D = (\mathbf{I}-\mathbf{S}_{DI}\mathbf{S}_{id})^{-1}\left[\mathbf{S}_{DI}\mathbf{S}_i\mathbf{x}_I + \mathbf{S}_{DD}\dot{\mathbf{x}}_D + \mathbf{S}_{D\lambda}\mathbf{x}_\lambda + \mathbf{S}_{DU}\mathbf{u}\right] \tag{A.19}$$

en notant $\mathbf{H}_D = (\mathbf{I}-\mathbf{S}_{DI}\mathbf{S}_{id})^{-1}$ dans la suite de ce développement. Il est ainsi possible

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

d'exprimer les variables $\mathbf{x}_I$, $\mathbf{x}_D$, $\mathbf{x}_\lambda$ et $\mathbf{y}$ de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcccccccc}
\dot{\mathbf{x}}_I &=& [\mathbf{S}_{II}\mathbf{S}_i + \mathbf{S}_{II}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DI}\mathbf{S}_i] & \mathbf{x}_I & + & [\mathbf{S}_{ID} + \mathbf{S}_{II}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DD}] & \dot{\mathbf{x}}_D \\
&+& [\mathbf{S}_{I\lambda} + \mathbf{S}_{II}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{D\lambda}] & \mathbf{x}_\lambda & + & [\mathbf{S}_{IU} + \mathbf{S}_{II}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DU}] & \mathbf{u} \\
\mathbf{x}_D &=& \left[\mathbf{S}_{di} + \mathbf{S}_d^{-1}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DI}\mathbf{S}_i\right] & \mathbf{x}_I & + & \left[\mathbf{S}_d^{-1}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DD}\right] & \dot{\mathbf{x}}_D \\
&+& \left[\mathbf{S}_d^{-1}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{D\lambda}\right] & \mathbf{x}_\lambda & + & \left[\mathbf{S}_d^{-1}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DU}\right] & \mathbf{u} \\
\mathbf{x}_\lambda &=& [\mathbf{S}_{\lambda I}\mathbf{S}_i + \mathbf{S}_{\lambda I}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DI}\mathbf{S}_i] & \mathbf{x}_I & + & [\mathbf{S}_{\lambda D} + \mathbf{S}_{\lambda I}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DD}] & \dot{\mathbf{x}}_D \\
&+& [\mathbf{S}_{\lambda\lambda} + \mathbf{S}_{\lambda I}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{D\lambda}] & \mathbf{x}_\lambda & + & [\mathbf{S}_{\lambda U} + \mathbf{S}_{\lambda I}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DU}] & \mathbf{u} \\
\\
\mathbf{y} &=& [\mathbf{S}_{YI}\mathbf{S}_i + \mathbf{S}_{YI}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DI}\mathbf{S}_i] & \mathbf{x}_I & + & [\mathbf{S}_{YD} + \mathbf{S}_{YI}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DD}] & \dot{\mathbf{x}}_D \\
&+& [\mathbf{S}_{Y\lambda} + \mathbf{S}_{YI}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{D\lambda}] & \mathbf{x}_\lambda & + & [\mathbf{S}_{YU} + \mathbf{S}_{YI}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DU}] & \mathbf{u}
\end{array} \tag{A.20}$$

Les équations de (A.20) peuvent se mettre sous forme matricielle (A.21) et (A.22).

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_I & -[\mathbf{S}_{ID} + \mathbf{S}_{II}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DD}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \left[\mathbf{S}_d^{-1}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DD}\right] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [\mathbf{S}_{\lambda D} + \mathbf{S}_{\lambda I}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DD}] & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_I \\ \dot{\mathbf{x}}_D \\ \dot{\mathbf{x}}_\lambda \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} [\mathbf{S}_{II}\mathbf{S}_i + \mathbf{S}_{II}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DI}\mathbf{S}_i] & \mathbf{0} & [\mathbf{S}_{I\lambda} + \mathbf{S}_{II}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{D\lambda}] \\ -\left[\mathbf{S}_{di} + \mathbf{S}_d^{-1}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DI}\mathbf{S}_i\right] & \mathbf{I}_D & -\left[\mathbf{S}_d^{-1}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{D\lambda}\right] \\ -[\mathbf{S}_{\lambda I}\mathbf{S}_i + \mathbf{S}_{\lambda I}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DI}\mathbf{S}_i] & \mathbf{0} & \mathbf{I}_\lambda - [\mathbf{S}_{\lambda\lambda} + \mathbf{S}_{\lambda I}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{D\lambda}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_I \\ \mathbf{x}_D \\ \mathbf{x}_\lambda \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} [\mathbf{S}_{IU} + \mathbf{S}_{II}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DU}] \\ -\left[\mathbf{S}_d^{-1}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DU}\right] \\ -[\mathbf{S}_{\lambda U} + \mathbf{S}_{\lambda I}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DU}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \end{pmatrix} \tag{A.21}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} [\mathbf{S}_{YI}\mathbf{S}_i + \mathbf{S}_{YI}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DI}\mathbf{S}_i] & [\mathbf{S}_{YD} + \mathbf{S}_{YI}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DD}]\,\dfrac{d(\cdot)}{dt} & [\mathbf{S}_{Y\lambda} + \mathbf{S}_{YI}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{D\lambda}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_I \\ \mathbf{x}_D \\ \mathbf{x}_\lambda \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} [\mathbf{S}_{YU} + \mathbf{S}_{YI}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DU}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \end{pmatrix} \tag{A.22}$$

L'équation d'évolution (A.21) et l'équation de sortie (A.22) sont notées de la manière suivante (forme (A.23)),

$$\begin{array}{rcl}
\begin{pmatrix} \mathbf{I}_I & \mathbf{E}_{ID} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{\lambda D} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_I \\ \dot{\mathbf{x}}_D \\ \dot{\mathbf{x}}_\lambda \end{pmatrix} &=& \begin{pmatrix} \mathbf{A}_I & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{I\lambda} \\ \mathbf{A}_{DI} & \mathbf{I}_D & \mathbf{A}_{D\lambda} \\ \mathbf{A}_{\lambda I} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_\lambda + \mathbf{A}_\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_I \\ \mathbf{x}_D \\ \mathbf{x}_\lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_I \\ \mathbf{B}_D \\ \mathbf{B}_\lambda \end{pmatrix} \mathbf{u} \\
\mathbf{y} &=& \left(\mathbf{C}_I \quad \mathbf{C}_D\dfrac{d(\cdot)}{dt} \quad \mathbf{C}_\lambda\right) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_I \\ \mathbf{x}_D \\ \mathbf{x}_\lambda \end{pmatrix} + \left(\mathbf{D}\right) \mathbf{u}
\end{array} \tag{A.23}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

avec :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_{ID} &= -\left[\mathbf{S}_{ID} + \mathbf{S}_{II}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DD}\right] \\
\mathbf{E}_{D} &= \left[\mathbf{S}_{d}^{-1}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DD}\right] \\
\mathbf{E}_{\lambda D} &= \left[\mathbf{S}_{\lambda D} + \mathbf{S}_{\lambda I}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DD}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}_{I} &= \left[\mathbf{S}_{II}\mathbf{S}_{i} + \mathbf{S}_{II}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DI}\mathbf{S}_{i}\right] \\
\mathbf{A}_{I\lambda} &= \left[\mathbf{S}_{I\lambda} + \mathbf{S}_{II}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{D\lambda}\right] \\
\mathbf{A}_{DI} &= -\left[\mathbf{S}_{di} + \mathbf{S}_{d}^{-1}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DI}\mathbf{S}_{i}\right] \\
\mathbf{A}_{D\lambda} &= -\left[\mathbf{S}_{d}^{-1}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{D\lambda}\right] \\
\mathbf{A}_{\lambda I} &= -\left[\mathbf{S}_{\lambda I}\mathbf{S}_{i} + \mathbf{S}_{\lambda I}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DI}\mathbf{S}_{i}\right] \\
\mathbf{A}_{\lambda} &= -\left[\mathbf{S}_{\lambda\lambda} + \mathbf{S}_{\lambda I}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{D\lambda}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}_{I} &= \left[\mathbf{S}_{IU} + \mathbf{S}_{II}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DU}\right] \quad ; \quad \mathbf{C}_{I} = \left[\mathbf{S}_{YI}\mathbf{S}_{i} + \mathbf{S}_{YI}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DI}\mathbf{S}_{i}\right] \\
\mathbf{B}_{D} &= -\left[\mathbf{S}_{d}^{-1}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DU}\right] \quad ; \quad \mathbf{C}_{D} = \left[\mathbf{S}_{YD} + \mathbf{S}_{YI}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DD}\right] \\
\mathbf{B}_{\lambda} &= -\left[\mathbf{S}_{\lambda U} + \mathbf{S}_{\lambda I}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DU}\right] \quad ; \quad \mathbf{C}_{\lambda} = \left[\mathbf{S}_{Y\lambda} + \mathbf{S}_{YI}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{D\lambda}\right] \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \mathbf{D} = \left[\mathbf{S}_{YU} + \mathbf{S}_{YI}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DU}\right]
\end{aligned}
\tag{A.24}
$$

La forme très générale de système singulier (A.23) est donc issue d'un bond graph causal ou bicausal où les seuls hypothèses sont que la structure de jonction soit résoluble. Le bond graph peut avoir des champs, des ZCP de classe 1 à 4 dans la classification de van Dijk [vD94] (section A.2 page 246) et être indifféremment affecté d'une causalité préférentielle intégrale, dérivée, voire mixte. Nous notons également que le faisceau $(\mathbf{E}, \mathbf{A})$ de (A.23) est régulier, et justifie ainsi la restriction de nos travaux à cette classe de système (voir chapitre 3).

La forme (A.23) est exploitée dans l'annexe D pour établir une procédure de construction du digraphe à partir du bond graph (procédure D.1 page 307) et est la forme sur laquelle se base les principaux résultats du chapitre 4. Il est important de noter que les signes des sous-matrices de (A.23) explicités dans (A.24) proviennent des changements de signe opérés lors de l'écriture de la forme (A.21) à partir de (A.20) et justifient en partie les signes appliqués dans la procédure D.1 page 307.

A.3.4 Première forme simplifiée : vecteur d'état énergetique

Une première simplification consiste à ne choisir dans le vecteur que des variables d'énergie. Le système singulier s'obtient immédiatement à partir de la forme (A.23) en éliminant les variables de puissance dans le vecteur d'état :

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \mathbf{I}_I & \mathbf{E}_{ID} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_I \\ \dot{\mathbf{x}}_D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_I & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{DI} & \mathbf{I}_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_I \\ \mathbf{x}_D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_I \\ \mathbf{B}_D \end{pmatrix} \mathbf{u} \\
\mathbf{y} &= \begin{pmatrix} \mathbf{C}_I & \mathbf{C}_D \dfrac{d(\cdot)}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_I \\ \mathbf{x}_D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{D} \end{pmatrix} \mathbf{u}
\end{aligned}
\tag{A.25}
$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

avec :

$$\begin{array}{rclcrcl} \mathbf{E}_{ID} &=& -\left[\mathbf{S}_{ID}+\mathbf{S}_{II}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DD}\right] & ; & \mathbf{A}_I &=& \left[\mathbf{S}_{II}\mathbf{S}_i+\mathbf{S}_{II}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DI}\mathbf{S}_i\right] \\ \mathbf{E}_D &=& \left[\mathbf{S}_d^{-1}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DD}\right] & ; & \mathbf{A}_{DI} &=& -\left[\mathbf{S}_{di}+\mathbf{S}_d^{-1}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DI}\mathbf{S}_i\right] \\ \mathbf{B}_I &=& \left[\mathbf{S}_{IU}+\mathbf{S}_{II}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DU}\right] & ; & \mathbf{C}_I &=& \left[\mathbf{S}_{YI}\mathbf{S}_i+\mathbf{S}_{YI}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DI}\mathbf{S}_i\right] \\ \mathbf{B}_D &=& -\left[\mathbf{S}_d^{-1}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DU}\right] & ; & \mathbf{C}_D &=& \left[\mathbf{S}_{YD}+\mathbf{S}_{YI}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DD}\right] \\ & & & & \mathbf{D} &=& \left[\mathbf{S}_{YU}+\mathbf{S}_{YI}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DU}\right] \end{array} \tag{A.26}$$

Par rapport à la forme générale (A.23) dans laquelle les variables de puissance choisies dans le vecteur d'état peuvent permettre de « couper » des ZCP, la forme (A.25) est conditionnée par la résolubilité de la structure de jonction dans laquelle un plus grand nombre de ZCP risque d'être à résoudre (ceux non « coupés » par les x_λ).

A partir de la forme (A.25), nous souhaitons à présent discuter d'une simplification supplémentaire aboutissant à une forme usuellement rencontrée dans la littérature, notamment dans les travaux de Buisson *et al.* [Bui93b, Bui93a, BC97, BC98]. En faisant l'hypothèse d'absence de champ de type IC dans (A.25) et en utilisant les notations de la matrice de structure de jonction de la forme (A.12), il est possible de mettre le système d'équation (A.12) sous la représentation d'état singulier (A.25), avec dans ce cas simplifié, $\mathbf{S}_{id}=\mathbf{0}$ et $\mathbf{S}_{di}=\mathbf{0}$ (équivalent au cas (A.8)) et les sous-matrices de (A.26) se simplifient suivant,

$$\begin{array}{rclcl} \mathbf{E}_{ID} &=& -\mathbf{S}_{ID} &=& -\left[\mathbf{S}_{12}+\mathbf{S}_{13}(\mathbf{I}-\mathbf{L}\mathbf{S}_{33})^{-1}\mathbf{L}\mathbf{S}_{32}\right] \\ \mathbf{E}_D &=& \mathbf{S}_d^{-1}\mathbf{S}_{DD} &=& \mathbf{S}_d^{-1}\left[\mathbf{S}_{22}+\mathbf{S}_{23}(\mathbf{I}-\mathbf{L}\mathbf{S}_{33})^{-1}\mathbf{L}\mathbf{S}_{32}\right] \\ \mathbf{A}_I &=& \mathbf{S}_{II}\mathbf{S}_i &=& \left[\mathbf{S}_{11}+\mathbf{S}_{13}(\mathbf{I}-\mathbf{L}\mathbf{S}_{33})^{-1}\mathbf{L}\mathbf{S}_{31}\right]\mathbf{S}_i \\ \mathbf{A}_{DI} &=& -\left[\mathbf{S}_d^{-1}\mathbf{S}_{DI}\mathbf{S}_i\right] &=& -\left[\mathbf{S}_d^{-1}\left[\mathbf{S}_{21}+\mathbf{S}_{23}(\mathbf{I}-\mathbf{L}\mathbf{S}_{33})^{-1}\mathbf{L}\mathbf{S}_{31}\right]\mathbf{S}_i\right] \\ \mathbf{B}_I &=& \mathbf{S}_{IU} &=& \mathbf{S}_{15}+\mathbf{S}_{13}(\mathbf{I}-\mathbf{L}\mathbf{S}_{33})^{-1}\mathbf{L}\mathbf{S}_{35} \\ \mathbf{B}_D &=& -\left[\mathbf{S}_d^{-1}\mathbf{S}_{DU}\right] &=& -\left[\mathbf{S}_d^{-1}\left[\mathbf{S}_{25}+\mathbf{S}_{23}(\mathbf{I}-\mathbf{L}\mathbf{S}_{33})^{-1}\mathbf{L}\mathbf{S}_{35}\right]\right] \\ \mathbf{C}_I &=& \mathbf{S}_{YI}\mathbf{S}_i &=& \left[\mathbf{S}_{51}+\mathbf{S}_{53}(\mathbf{I}-\mathbf{L}\mathbf{S}_{33})^{-1}\mathbf{L}\mathbf{S}_{31}\right]\mathbf{S}_i \\ \mathbf{C}_D &=& \mathbf{S}_{YD} &=& \mathbf{S}_{52}+\mathbf{S}_{53}(\mathbf{I}-\mathbf{L}\mathbf{S}_{33})^{-1}\mathbf{L}\mathbf{S}_{32} \\ \mathbf{D} &=& \mathbf{S}_{YU} &=& \mathbf{S}_{55}+\mathbf{S}_{53}(\mathbf{I}-\mathbf{L}\mathbf{S}_{33})^{-1}\mathbf{L}\mathbf{S}_{35} \end{array} \tag{A.27}$$

Remarquons que la forme (A.25) associée aux sous-matrices simplifiées de (A.27) se trouve usuellement sous une forme légèrement différente dans les travaux de Buisson précédemment cités en ce qui concerne l'équation d'évolution, en l'occurrence sous la forme (A.28).

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_I & -\mathbf{S}_{12}-\mathbf{S}_{13}(\mathbf{I}-\mathbf{L}\mathbf{S}_{33})^{-1}\mathbf{L}\mathbf{S}_{32} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{S}_{22}-\mathbf{S}_{23}(\mathbf{I}-\mathbf{L}\mathbf{S}_{33})^{-1}\mathbf{L}\mathbf{S}_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_I \\ \dot{\mathbf{x}}_D \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} \left[\mathbf{S}_{11}+\mathbf{S}_{13}(\mathbf{I}-\mathbf{L}\mathbf{S}_{33})^{-1}\mathbf{L}\mathbf{S}_{31}\right]\mathbf{S}_i & \mathbf{0} \\ \left[\mathbf{S}_{21}+\mathbf{S}_{23}(\mathbf{I}-\mathbf{L}\mathbf{S}_{33})^{-1}\mathbf{L}\mathbf{S}_{31}\right]\mathbf{S}_i & -\mathbf{S}_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_I \\ \mathbf{x}_D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{15}+\mathbf{S}_{13}(\mathbf{I}-\mathbf{L}\mathbf{S}_{33})^{-1}\mathbf{L}\mathbf{S}_{35} \\ \mathbf{S}_{25}+\mathbf{S}_{23}(\mathbf{I}-\mathbf{L}\mathbf{S}_{33})^{-1}\mathbf{L}\mathbf{S}_{35} \end{pmatrix} \mathbf{u} \tag{A.28}$$

Il est important de préciser que dans la représentation (A.25) (ainsi que la forme simplifiée (A.28)), la matrice $\mathbf{E}$ « coupe » notamment les relations causales entre éléments

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

de stockages en causalité intégrale et dérivée (terme $\mathbf{S}_{12}$), en d'autres termes les boucles causales d'ordre 0 de type 1 (*i.e.* $1ZCP$) ainsi que les $3ZCP$ impliquant des éléments I et/ou C, et comprend également la résolution analytique des boucles causales algébriques sur les éléments R *i.e.* d'ordre 0 de type 2 ($2ZCP$), et de type 3 ($3ZCP$, dans la mesure où ces dernières impliquent uniquement ici des éléments R), pouvant être impliquées dans les relations entre éléments de stockage en causalité intégrale et dérivée (terme $\mathbf{S}_{13}(\mathbf{I} - \mathbf{LS}_{33})^{-1}\mathbf{LS}_{32}$) [Mas88] [BC98]. La résolution analytique des $2ZCP$ et $3ZCP$ intervient sur d'autres termes des représentations (A.25) et (A.28), notamment sur les boucles causales d'ordre 1 associées aux variables d'énergie en causalité intégrale et impliquant des $2ZCP$ et $3ZCP$ (terme $\mathbf{S}_{13}(\mathbf{I} - \mathbf{LS}_{33})^{-1}\mathbf{LS}_{31}$). Rappelons enfin que de manière sous jacente comme sur la forme (A.12), les représentations (A.25) et (A.28) comprennent la résolution des boucles algébriques (sous-entendues *résolubles*) sur la structure de jonction *i.e.* d'ordre 0 de type 4 ($4ZCP$). L'ensemble de ces considérations est directement issu du choix du vecteur d'état $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_D)^T$ et des variables que nous décidons d'exposer dans la représentation d'état (ainsi, les boucles causales d'ordre 0 n'interviennent pas de la même manière dans cette représentation d'état suivant qu'elles impliquent directement les variables exposées ($1ZCP$ et $3ZCP$ impliquant des éléments I et/ou C) ou non ($2ZCP$, $3ZCP$ impliquant des éléments R uniquement et $4ZCP$)). [14]

A.3.5 Seconde forme simplifiée : vecteur d'état énergetique, sous-matrice $\mathbf{E}_D = \mathbf{0}$

Cette classe de bond graph regroupe *tous* les bond graphs linéaires causaux affectés de la causalité préférentielle intégrale, ainsi que les bond graphs bicausaux dans laquelle il n'existe pas de liens causaux entre éléments de stockage en causalité dérivée d'une part, et entre un élément de stockage en causalité dérivée et un élément R d'autre part. Cette classe de modèle bond graph ne comporte ainsi pas de cycle causal d'ordre négatif.

Il est ainsi possible de discuter d'un certain nombre d'hypothèses sur les éléments constitutifs de la matrice du système (A.12) amenant à des simplifications de la représentation d'état (A.25). Ces simplifications sont justifiées par la spécificité du bond graph causal en causalité préférentielle intégrale, et justifient également les hypothèses simplificatrices ci-dessus sur les bond graphs bicausaux :

— la matrice $\mathbf{S}_{22}$ représente le lien causale entre $\dot{\mathbf{x}}_D$ et $\mathbf{z}_D$ (*i.e.* entre les éléments de stockage en causalité dérivée). En causalité préférentielle intégrale $\mathbf{S}_{22}$ est nulle, car sinon il serait possible d'inverser la causalité de deux éléments de stockage en causalité dérivée ayant, le cas échéant, un lien causal [Ros71], [BC98].

— la matrice $\mathbf{S}_{23}$ représente le lien causal entre $\mathbf{D}_{out}$ et $\mathbf{z}_D$ (*i.e.* entre les éléments de stockage en causalité dérivée et les éléments de dissipation). Pour les mêmes raisons, $\mathbf{S}_{23}$ est nulle, car sinon il serait possible d'inverser la causalité de certains éléments de stockage en causalité dérivée ayant, le cas échéant, un lien causal avec des éléments de dissipation [Ros71], [BC98].

— les propriétés de conservation de puissance de la structure de jonction entraîne l'anti-symétrie des sous-matrices extra-diagonales de la matrice du système (A.12) et donc $\mathbf{S}_{ji} = -\mathbf{S}_{ij}^T$ ($i = 1..3, j = 1..3, i \neq j$). Ceci conduit notamment à la rela-

14. Ce point est également discuté au paragraphe 4.2.2 page 115.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

tion $\mathbf{S}_{32} = -\mathbf{S}_{23}^T = \mathbf{0}$ [Ros71] [MMV95] [BC98].

Les considérations précédentes nous permettent une nouvelle simplification de la forme du système d'état singulier (A.25) de la manière suivante, en notant notamment que $\mathbf{S}_{DD} = \mathbf{0}$ dans (A.18),

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_I & \mathbf{E}_{ID} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_I \\ \dot{\mathbf{x}}_D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_I & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{DI} & \mathbf{I}_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_I \\ \mathbf{x}_D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_I \\ \mathbf{B}_D \end{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \begin{pmatrix} \mathbf{C}_I & \mathbf{C}_D \dfrac{d(\cdot)}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_I \\ \mathbf{x}_D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{D} \end{pmatrix} \mathbf{u} \end{aligned} \tag{A.29}$$

avec :

$$\begin{array}{rclcrcl} \mathbf{E}_{ID} &=& -\mathbf{S}_{ID} & ; & \mathbf{A}_I &=& [\mathbf{S}_{II}\mathbf{S}_i + \mathbf{S}_{II}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DI}\mathbf{S}_i] \\ \mathbf{E}_D &=& \mathbf{0} & ; & \mathbf{A}_{DI} &=& -\left[\mathbf{S}_{di} + \mathbf{S}_d^{-1}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DI}\mathbf{S}_i\right] \\ \mathbf{B}_I &=& [\mathbf{S}_{IU} + \mathbf{S}_{II}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DU}] & ; & \mathbf{C}_I &=& [\mathbf{S}_{YI}\mathbf{S}_i + \mathbf{S}_{YI}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DI}\mathbf{S}_i] \\ \mathbf{B}_D &=& -\left[\mathbf{S}_d^{-1}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DU}\right] & ; & \mathbf{C}_D &=& \mathbf{S}_{YD} \\ & & & & \mathbf{D} &=& [\mathbf{S}_{YU} + \mathbf{S}_{YI}\mathbf{S}_{id}\mathbf{H}_D\mathbf{S}_{DU}] \end{array} \tag{A.30}$$

A partir de la forme (A.29), nous souhaitons à nouveau discuter de la même simplification que celle appliquée sur (A.25) aboutissant aux sous-matrices de (A.27) et à l'écriture (A.28). Cette forme est également usuellement rencontrée dans la littérature, notamment dans les travaux de Buisson *et al.* [Bui93b, Bui93a, BC97, BC98], Mouhri *et al.* [MRDT99, Mou00] ou encore Rahmani *et al.* [RDT98, RDT06]. En faisant donc l'hypothèse d'absence de champ de type IC dans (A.29) et en utilisant les notations de la matrice de structure de jonction de la forme (A.12), il est possible de mettre le système d'équation (A.12) sous la représentation d'état singulier (A.29), avec $\mathbf{S}_{id} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{S}_{di} = \mathbf{0}$, et les sous-matrices de (A.30) se simplifient suivant,

$$\begin{array}{rclcl} \mathbf{E}_{ID} &=& -\mathbf{S}_{ID} &=& -\mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{A}_I &=& \mathbf{S}_{II}\mathbf{S}_i &=& \left[\mathbf{S}_{11} + \mathbf{S}_{13}(\mathbf{I} - \mathbf{L}\mathbf{S}_{33})^{-1}\mathbf{L}\mathbf{S}_{31}\right]\mathbf{S}_i \\ \mathbf{A}_{DI} &=& -\left[\mathbf{S}_d^{-1}\mathbf{S}_{DI}\mathbf{S}_i\right] &=& -\left[\mathbf{S}_d^{-1}\mathbf{S}_{21}\mathbf{S}_i\right] \\ \mathbf{B}_I &=& \mathbf{S}_{IU} &=& \mathbf{S}_{15} + \mathbf{S}_{13}(\mathbf{I} - \mathbf{L}\mathbf{S}_{33})^{-1}\mathbf{L}\mathbf{S}_{35} \\ \mathbf{B}_D &=& -\left[\mathbf{S}_d^{-1}\mathbf{S}_{DU}\right] &=& -\left[\mathbf{S}_d^{-1}\mathbf{S}_{25}\right] \\ \mathbf{C}_I &=& \mathbf{S}_{YI}\mathbf{S}_i &=& \left[\mathbf{S}_{51} + \mathbf{S}_{53}(\mathbf{I} - \mathbf{L}\mathbf{S}_{33})^{-1}\mathbf{L}\mathbf{S}_{31}\right]\mathbf{S}_i \\ \mathbf{C}_D &=& \mathbf{S}_{YD} &=& \mathbf{S}_{52} \\ \mathbf{D} &=& \mathbf{S}_{YU} &=& \mathbf{S}_{55} + \mathbf{S}_{53}(\mathbf{I} - \mathbf{L}\mathbf{S}_{33})^{-1}\mathbf{L}\mathbf{S}_{35} \end{array} \tag{A.31}$$

Remarquons à nouveau que la forme (A.29) associée aux sous-matrices simplifiées de (A.31) se trouve usuellement sous une forme légèrement différente dans les travaux de Buisson, Mouhri et Rahmani précédemment cités en ce qui concerne l'équation d'évo-

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

lution, en l'occurrence sous la forme (A.32).

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_I & -\mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_I \\ \dot{\mathbf{x}}_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[\mathbf{S}_{11} + \mathbf{S}_{13}(\mathbf{I} - \mathbf{L}\mathbf{S}_{33})^{-1}\mathbf{L}\mathbf{S}_{31}\right]\mathbf{S}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{21}\mathbf{S}_i & -\mathbf{S}_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_I \\ \mathbf{x}_D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{15} + \mathbf{S}_{13}(\mathbf{I} - \mathbf{L}\mathbf{S}_{33})^{-1}\mathbf{L}\mathbf{S}_{35} \\ \mathbf{S}_{25} \end{pmatrix} \mathbf{u} \tag{A.32}$$

Remarque 1: en notant $\mathbf{H} = (\mathbf{I} - \mathbf{L}\mathbf{S}_{33})^{-1}\mathbf{L}$ et $\mathbf{K} = \mathbf{S}_{11} + \mathbf{S}_{13}\mathbf{H}\mathbf{S}_{31}$ dans (A.32), nous retrouvons l'expression du système d'état de Buisson *et al.* [BC98] :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_I & -\mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_I \\ \dot{\mathbf{x}}_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}\,\mathbf{S}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{21}\,\mathbf{S}_i & -\mathbf{S}_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_I \\ \mathbf{x}_D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{15} + \mathbf{S}_{13}\mathbf{H}\mathbf{S}_{35} \\ \mathbf{S}_{25} \end{pmatrix} \mathbf{u} \tag{A.33}$$

Remarque 2: avec les mêmes hypothèses, la forme (A.32) est consistante avec la forme obtenue par Rosenberg [Ros71], alors écrite sous la forme du système généralisé $\dot{\mathbf{x}}_I = \mathbf{A}\mathbf{x}_I + \mathbf{B}_1\mathbf{U} + \mathbf{B}_2\dot{\mathbf{U}}$ où $\mathbf{B}_2 = \mathbf{S}_d^{-1}\,\mathbf{S}_{25}$ (en utilisant les notations de (A.32)). L'absence de lien causal entre une source et un élément de stockage d'énergie en causalité dérivée implique que $\mathbf{S}_{25} = 0$ et le système généralisé précédent se simplifie au système différentiel ordinaire $\dot{\mathbf{x}}_I = \mathbf{A}\mathbf{x}_I + \mathbf{B}_1\mathbf{U}$.

A.3.6 Remarque sur la classe des modèles bond graphs bicausaux

Cette classe de modèle regroupe les bond graphs bicausaux représentant des modèles inverses, pour lesquels la bicausalité est propagée dans la structure de jonction, depuis les doubles sources S_eS_f imposant effort et flux, vers les doubles détecteurs d'effort et de flux D_eD_f. Cette classe de modèle exclut en revanche les bond graphs bicausaux pour lesquels la bicausalité est débouchante sur les éléments I, R, C et/ou sur les éléments de transduction TF et GY, représentant généralement des modèles ayant pour vocation la synthèse paramétrique ou l'identification [Gaw95]. La classe des *modèles bond graphs à bicausalité traversante* est donc consistante avec la forme acausale de la figure A.5, mais également avec l'orientation des vecteurs significatifs proposée sur la figure A.6. L'ensemble des considérations aboutissants aux équations (A.5)-(A.11) reste ainsi applicable et la matrice de structure de jonction de cette classe de modèle bond graph est donc consistante avec la forme (A.12) (resp. (A.13) suivant le vecteur d'état choisi). Dès lors, en utilisant la loi de comportement linéaire sur le champ de stockage (A.9) et en utilisant l'équation (A.14), il est possible de mettre le système singulier dans le cas bicausal sous la forme (A.25) (resp. (A.23)), et dans certains cas sous la forme (A.29) (voir les hypothèses en début de section A.3.5). Le cas (A.25) des systèmes singuliers représentés par des modèles bond graphs à *bicausalité traversante* est la classe de modèles adressée dans les travaux de El Feki *et al.* [EFDLB+08b, EFDLB+08a, EF11, EFJMF+12a] que nous abordons au chapitre 2 (section 2.3 page 58), en notant que les travaux de El Feki *et al.* font les hypothèses supplémentaires d'absence de cycle causal d'ordre négatif d'une part et de ne contenir que des pôles à l'infini d'autre part.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Exemple

Considérons le modèle de la figure A.8, contenant des affectations *causales* et *bicausales traversantes*, respectant les hypothèses de la section A.3.5. La représentation d'état est donnée en (A.34). Notons en outre l'absence de champ dans le présent cas conduisant aux simplifications explicitées dans (A.31).

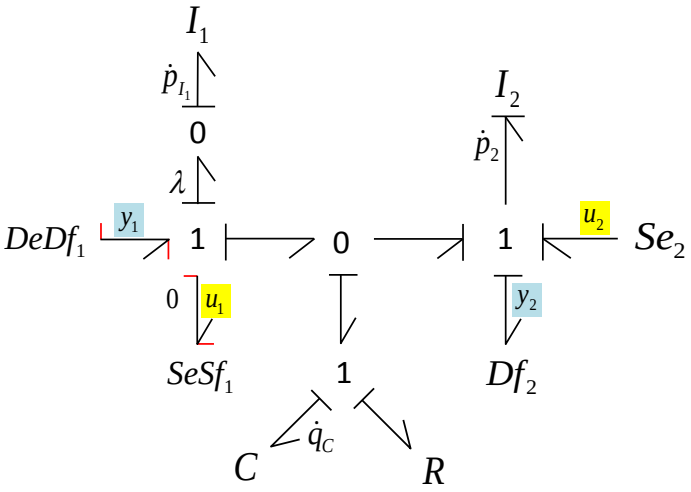


FIGURE A.8 – Système singulier représenté par un bond graph bicausale

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \dot{p}_{I_2} \\ \dot{q}_C \\ \hline \dot{p}_{I_1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} -\frac{R}{I_2} & \frac{1}{C} & 0 \\ -\frac{1}{I_2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} p_{I_2} \\ q_C \\ \hline p_{I_1} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc} R & 1 \\ 1 & 0 \\ \hline -I_1 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad \text{(A.34)}$$

Notons que dans le présent cas la causalité dérivée sur l'élément de stockage $I'1$ est imposée par la double-source $SeSf'1$ (impliquant $\mathbf{S}_{25} \neq \mathbf{0}$ dans (A.29), et ainsi dans (A.32)), en l'occurrence $\mathbf{S}_{25} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \end{bmatrix}$ issue de l'équation $p_{I_1} = I_1 u_1$). Il n'existe ainsi ici pas de boucle causale d'ordre 0 entre éléments de stockage dépendant et indépendants (*i.e.* $1ZCP$ et $3ZCP$ impliquant des éléments I et/ou C), et donc $\mathbf{S}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ et $\mathbf{S}_{21} = -\mathbf{S}_{12}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Il existe deux boucles causales faisant intervenir des éléments de stockage, $\{I'2; C\}$ et $\{I'2; R\}$, d'ordre respectif 2 et 1, et il n'existe pas ici de boucle causale d'ordre 0 n'impliquant que des éléments R (*i.e.* pas de $2ZCP$ ni $3ZCP$ impliquant uniquement des éléments R), soit donc $\mathbf{S}_{33} = 0$.

La sous-matrice $\mathbf{A}_I$ associée aux stockages d'énergie indépendant se simplifie suivant $\mathbf{A}_I = (\mathbf{S}_{11} + \mathbf{S}_{13}\mathbf{L}\mathbf{S}_{31})\,\mathbf{S}_i = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{I_2} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{R}{I_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{I_2} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{I_2} & 0 \end{bmatrix}$ et la sous-matrice $\mathbf{B}_I$, suivant $\mathbf{B}_I = \mathbf{S}_{15} + \mathbf{S}_{13}\mathbf{L}\mathbf{S}_{35} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (en notant que la sous-matrice $\mathbf{S}_{15}$ est formée à partir des deux chemins causaux respectifs $\{u_1 \to C\}$ et $\{u_2 \to I'2\}$, la sous-matrice $\mathbf{S}_{35}$ est formée à partir du chemins causal $\{u_1 \to R\}$ et S_{13} à partir de $\{R \to I'2\}$, tous de gain unité).

Notons que ce modèle est discuté en section 4.6.3 page 169.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Annexe B

Bond graph : définitions et outils de l'analyse structurelle

B.1 Définitions

B.1.1 Lignes de puissances

Définition B.1 (*[WYT95, NBS05]*)

> *Sur un modèle bond graph acausal, une* ***ligne de puissance*** *est une série de liens bond graph et d'éléments multiports adjacents. Elle représente le chemin de transmission d'énergie entre deux points d'un système.*

Définition B.2

> *Une* ***ligne de puissance entrée/sortie*** *est une ligne de puissance entre un élément portant une variable d'entrée et un élément portant une variable de sortie du modèle.*

Définition B.3 (*[NNST01]*)

> ***Deux lignes de puissance*** *sont dites* ***disjointes*** *si et seulement si elles ne possèdent aucun lien ou élément en commun.*

B.1.2 Chemins, boucles et cycles causaux

Définition B.4 (*[WYT95, NNST01]*)

> *Sur un modèle bond graph causal, un* ***chemin causal*** *est une suite de variables (d'effort et/ou de flux) ordonnée suivant l'affectation de la causalité.*

Définition B.5 (*[Rah93, DT00]*)

> *Une* ***boucle causale*** *est un chemin causal fermé (i.e. un chemin dont la variable de départ et d'arrivée est la même) entre deux éléments de type R, I ou C. Par définition, une boucle causale ne peut passer deux fois par la même variable de puissance et traverse* au maximum *deux éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale.*

Définition B.6 (*[Rah93, vD94]*)

> *Un* ***cycle causal*** *est un chemin causal fermé pouvant contenir plusieurs éléments de stockage d'énergie distincts.*

Remarque : la notion de cycle causal est ainsi une généralisation de la notion de boucle causale.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Définition B.7 (*[FN97]*)

*Un **chemin causal entrée/sortie** est un chemin causal entre une variable d'entrée et une variable de sortie du modèle.*

Définition B.8 (*[FN97, NNST01]*)

***Deux chemins causaux** sont dits **disjoints** si et seulement s'ils ne possèdent aucune variable (d'effort ou de flux) en commun.*

Définition B.9 (*[Rah93]*)

***Deux chemins causaux** sont dits **BG-différents** s'ils ne possèdent aucun élément de stockage d'énergie en causalité intégrale en commun.*

Remarque : la définition B.9 proposée par Rahmani est issue de la correspondance digraphe/bond graph utilisée pour l'analyse structurelle bond graph des *systèmes réguliers*. La définition B.9 est ainsi un cas particulier de la définition 4.2 page 140 (et reprise ci-dessous, définition B.11) que nous proposons. Dans le cas particulier où le vecteur d'état de la représentation d'état du système est réduit aux seules variables d'énergie associées aux éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale, les définitions B.9 et B.11 sont identiques.

Définition B.10 (*reprise de la définition 4.1 page 115*)

***Deux cycles causaux** sont dits **BG - différents - génériques** s'ils ne possèdent aucune variable d'état en commun.*

Définition B.11 (*reprise de la définition 4.2 page 140*)

***Deux chemins causaux** sont dits **BG - différents - génériques** s'ils ne possèdent aucune variable d'état en commun.*

Définition B.12 (*[Rah93, DT00]*)

*Sur un modèle bond graph causal, le **gain** $G_k(s)$ **d'un chemin causal** ⓚ peut être calculé de la manière suivante :*

$$G_k(s) = (-1)^{n_0+n_1} \cdot \prod_i (m_i)^{h_i} \cdot \prod_j (r_j)^{k_j} \cdot \prod_e g_e(s) \tag{B.1}$$

où :

- *s est la variable de Laplace,*
- *n_0 (resp. n_1) est le nombre total de changements d'orientation des liens au niveau des jonctions 0 (resp. des jonctions 1) lorsque le chemin est parcouru suivant la variable de flux (resp. d'effort),*
- *m_i (resp. r_j) est le module du $i^{\text{ième}}$ élément TF (resp. GY) rencontré le long du chemin causal,*
- *$h_i = \pm 1$ (resp. $k_j = \pm 1$) suivant la causalité du $i^{\text{ième}}$ élément TF (resp. élément GY) rencontré le long du chemin causal,*
- *$\prod_e g_e(s)$ est le produit des transmittances des éléments I, R et C rencontrés le long du chemin causal. Si aucun de ces éléments n'intervient dans ce chemin causal, $\prod_e g_e(s) = 1$.*

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Définition B.13

Le ***gain statique*** $\tilde{G}_k$ ***d'un chemin causal*** ⓚ *correspond au terme constant du gain* $G_k(s)$ *de ce chemin causal.*

Définition B.14 (*[Rah93]*)

La ***longueur*** l_k *(resp.* $l_{\mathcal{C}}$*)* ***d'un chemin causal*** ⓚ *(resp.* ***d'un cycle causal*** $\mathcal{C}$*) est égal au nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale rencontrés le long de ce chemin (resp. de ce cycle).*

Définition B.15 (*[Rah93]*)

*L'***ordre** ω_k *(resp.* $\omega_{\mathcal{C}}$*)* ***d'un chemin causal*** ⓚ *(resp.* ***d'un cycle causal*** $\mathcal{C}$*) est égal à la différence entre le nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale et le nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité dérivée rencontrés le long de ce chemin (resp. de ce cycle).*

Définition B.16 (*[Jar10]*)

Un ***chemin causal*** *(resp. un* ***cycle causal****) est dit* ***élémentaire*** *si et seulement si, dans la suite ordonnée de variables qui le caractérise, chaque variable (de flux ou d'effort) n'apparaît qu'une seule et unique fois.*

Définition B.17 (*[Jar10]*)

Un ***chemin causal*** *(resp. un* ***cycle causal****) est dit* ***généralisé*** *si et seulement si, dans la suite ordonnée de variables qui le caractérise, au moins une variable (de flux ou d'effort) apparaît plus d'une fois.*

B.1.3 Famille de chemins et cycles causaux, famille bond graph

Définition B.18

Une ***famille de cycles causaux*** $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ *est un ensemble de cycles causaux* ***BG - différents - génériques*** *au sens de la définition B.10.*

Définition B.19

Le ***gain*** $G_{\mathcal{F}_{\mathcal{C}}}$ *(resp.* ***gain statique*** $\tilde{G}_{\mathcal{F}_{\mathcal{C}}}$*)* ***d'une famille de cycles causaux*** $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ *est égal au produit des gains (resp. des gains statiques) des cycles composant la famille* $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$*.*

Définition B.20

La ***longueur*** $l_{\mathcal{F}_{\mathcal{C}}}$ ***d'une famille de cycles causaux*** $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ *est égale au nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale contenus dans la famille* $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$*.*

Définition B.21

*L'***ordre** $\omega_{\mathcal{F}_{\mathcal{C}}}$ ***d'une famille de cycles causaux*** $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ *est égal à la différence entre le nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale et le nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité dérivée contenus dans la famille* $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$*.*

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Remarque : les définitions B.19, B.20, B.21 sont originellement formulées dans [Rah93] sur des familles de cycles causaux considérés comme *BG-Différents* au sens de la définition B.9. Les définitions B.19, B.20, B.21 généralisent ici les définitions dans [Rah93] aux familles de cycles causaux de la définition B.18.

Définition B.22 (*[FN97]*)

> *La **longueur** $l_{\mathcal{E}}$ (l'**ordre** $\omega_{\mathcal{E}}$) **d'un ensemble** $\mathcal{E}$ de chemins causaux disjoints est égale à la somme des longueurs (resp. des ordres) de tous les chemins constituant l'ensemble $\mathcal{E}$.*

Remarque : la définition B.22 est particularisée à un ensemble de chemins disjoints comme originellement formulée par Fotsu-Ngwompo [FN97]. Elle est généralisable à des ensembles de chemins causaux sans propriété particulière.

Définition B.23

> *Une **famille bond graph** $\mathcal{F}$ est un ensemble de cycles causaux et de chemins causaux entrée/sortie **BG - différents - génériques** au sens des définitions B.10 et B.11.*

Remarques relatives à la définition B.23 :

- les cycles et les chemins causaux entrée/sortie sont *BG - différents - génériques* entre eux,
- une *famille de cycles causaux* $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ (définition B.18) est un cas particulier de *famille bond graph* $\mathcal{F}$ dans laquelle il n'y a que des cycles causaux,
- un *ensemble de chemins causaux entrée/sortie BG - différents - génériques* (au sens de la définition B.11) est un cas particulier de *famille bond graph* $\mathcal{F}$ dans laquelle il n'y a pas de cycle causal.

Voir également les notations B.1, B.2, B.3, B.4 et B.5 page 267 se rapportant à la définition B.23.

Définition B.24 (*[Jar10]*)

> *Le **gain** $G_{\mathcal{F}}$ (resp. gain statique $\tilde{G}_{\mathcal{F}}$) **d'une famille bond graph** $\mathcal{F}$ est égal au produit des gains (resp. des gains statiques) des cycles et des chemins causaux contenus dans la famille $\mathcal{F}$.*

Définition B.25 (*[Jar10]*)

> *La **longueur** $l_{\mathcal{F}}$ **d'une famille bond graph** $\mathcal{F}$ est égale au nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale contenus dans cette famille (*i.e. *traversés le long des cycles causaux **et** des chemins causaux constituant la famille $\mathcal{F}$).*

Définition B.26 (*[Jar10, EF11]*)

> *L'**ordre** $\omega_{\mathcal{F}}$ **d'une famille bond graph** $\mathcal{F}$ est égal à la différence entre le nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale et le nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité dérivée contenus dans la famille $\mathcal{F}$ (*i.e. *traversés le long des cycles causaux **et** des chemins causaux constituant la famille $\mathcal{F}$).*

Remarque : les définitions B.24, B.25, B.26 sont originellement formulées dans [Jar10] sur des familles bond graph pour lesquelles les cycles et chemins causaux sont considé-

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

rés comme *BG-Différents* au sens de la définition B.9. Les définitions B.24, B.25, B.26 généralisent ici celles dans [Jar10] aux familles bond graph de la définition B.23.

Notation B.1 (*associée à la définition B.23*)

> *On note $\mathcal{F}_{(U,Y)}$ une famille bond graph (définition B.23) telle que le jeu des entrées est fixé par l'ensemble U et le jeu des sorties est fixé par l'ensemble Y. Si l'ordre $\omega_{\mathcal{F}_{(U,Y)}}$ de la famille $\mathcal{F}_{(U,Y)}$ doit être précisé, la famille est alors notée $\mathcal{F}_{(U,Y),\omega}$.*

Remarque : dans le cas particulier d'un système carré avec p entrées et p sorties où l'ensemble des entrées/sorties est considéré, la notation d'une famille bond graph sera $\mathcal{F}_{\{p\},\omega}$ (comme par exemple dans la proposition 4.4 page 140).

B.1.4 Ensemble de familles de chemins causaux

Notation B.2 (*associée à la définition B.23*)

> *On note $\mathbb{F}$ un **ensemble de familles bond graph** $\mathcal{F}$ (définition B.23).*

Notation B.3 (*associée à la définition B.23*)

> *$\mathbb{F}_{(U,Y)}$ dénote un **ensemble de familles bond graph** $\mathcal{F}_{(U,Y)}$ (définition B.23, notation B.1) pour lesquelles les chemins causaux entrée/sortie sont tels que le jeu des entrées est fixé par l'ensemble U et le jeu des sorties est fixé par l'ensemble Y).*

Notation B.4 (*associée à la définition B.23*)

> *$\mathbb{F}_{\omega_{\mathcal{F}}}$ dénote un **ensemble de familles bond graph $\mathcal{F}$ du même ordre** $\omega_{\mathcal{F}}$.*

Notation B.5 (*associée à la définition B.23*)

> *$\mathbb{F}_{(U,Y),\omega_{\mathcal{F}}}$ dénote un **ensemble de familles bond graph** $\mathcal{F}_{(U,Y)}$ (définition B.23, notation B.1) pour lesquelles les chemins causaux entrée/sortie sont tels que le jeu des entrées est fixé par l'ensemble U et le jeu des sorties est fixé par l'ensemble Y **et** du même ordre $\omega_{\mathcal{F}}$.*

Remarque : concernant les notations B.4 et B.5, dans la mesure où il n'y a pas d'ambiguïté sur le fait que les *ordres* considérés sont des *ordres de familles bond graph* (notés $\omega_{\mathcal{F}}$ dans la définition B.26) et non simplement des ordres de chemins causaux (notés ω_k dans la définition B.15), l'indice relatif à la notation de la famille « $\mathcal{F}$ » pourra être omis. Cela conduit à respectivement noter $\mathbb{F}_{\omega}$ et $\mathbb{F}_{(U,Y),\omega}$ les ensembles mentionnés dans les *notations* B.4 et B.5.

En outre, nous notons $\rho_{\mathbb{F}}$ la **somme des gains statiques des familles bond graph de l'ensemble** $\mathbb{F}$, *i.e.* $\rho_{\mathbb{F}} = \sum_{\mathcal{F}} \tilde{G}_{\mathcal{F}}$. Cette somme peut éventuellement faire intervenir des facteurs de signe multiplicatifs propres à chaque famille $\mathcal{F}$ constitutive de $\mathbb{F}$ suivant la topologie de $\mathcal{F}$ (*i.e.* nombre de cycle causaux, ordonnancement des variables entrées/sorties,...) [1]. Pour une raison de clarté, la somme $\rho_{\mathbb{F}}$ déclinée suivant les *notations* B.3, B.4, B.5 est écrite de la manière suivante :

— la somme des gains statiques des familles bond graph de l'ensemble $\mathbb{F}_{(U,Y)}$ est notée $\rho^{(U,Y)} \equiv \rho_{\mathbb{F}_{(U,Y)}}$,

1. Voir par exemple les propositions 4.4 page 140 et 4.8 page 156.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

— la somme des gains statiques des familles bond graph de l'ensemble $\mathbb{F}_{\omega_\mathcal{F}}$ est notée $\rho_{\omega_\mathcal{F}} \equiv \rho_{\mathbb{F}_{\omega_\mathcal{F}}}$. Étant donné qu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le fait que les *ordres* considérés ici sont des *ordres de familles bond graph* et non simplement des ordres de chemins causaux, nous simplifions la notation précédente suivant $\rho_\omega \equiv \rho_{\omega_\mathcal{F}} \equiv \rho_{\mathbb{F}_{\omega_\mathcal{F}}}$,

— la somme des gains statiques des familles bond graph de l'ensemble $\mathbb{F}_{(U,Y),\omega_\mathcal{F}}$ est notée $\rho_{\omega_\mathcal{F}}^{(U,Y)} \equiv \rho_{\mathbb{F}_{(U,Y),\omega_\mathcal{F}}}$. Là encore, il n'y a pas d'ambiguïté sur le fait que les *ordres* considérés sont des *ordres de familles bond graph* et non simplement des ordres de chemins causaux. Nous simplifions la notation précédente suivant $\rho_\omega^{(U,Y)} \equiv \rho_{\omega_\mathcal{F}}^{(U,Y)} \equiv \rho_{\mathbb{F}_{(U,Y),\omega_\mathcal{F}}}$.

Si, comme dans la proposition 4.4 page 140, toutes les p entrées et toutes les p sorties du modèle sont sélectionnées pour réaliser ce calcul, la notation alors employée dans ce cas particulier est $\rho_{\omega_\mathcal{F}}^{\{p\}}$. De plus, pour les familles d'ordre $\omega_\mathcal{F} = k$, la notation se simplifie alors en $\rho_k^{\{p\}}$.

B.2 Détermination graphique d'un modèle d'état régulier à partir du bond graph

La détermination du modèle d'état à partir du bond graph est possible sous forme matricielle ou sous forme d'un digraphe. Dans le cas régulier, la représentation d'état du système, dite *classique*, est la suivante :

$$\Sigma : \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{x}}(t) & = & \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) & = & \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{array} \right. \tag{B.2}$$

B.2.1 Représentation d'état

Procédure B.1 (*[FN97],[RDT98],[DT00]*)

*Soit un modèle bond graph représentant un système linéaire et invariant dans le temps et qui ne présente ni boucle algébrique (*i.e. *ZCP), ni élément de stockage en causalité dérivée (lorsque le modèle est en causalité préférentiellement intégrale).*

L'affectation d'une causalité préférentiellement intégrale permet d'en déduire un modèle d'état de la forme (B.2), où $\mathbf{x}(t)$ est alors le vecteur d'état constitué des variables d'énergie associées aux éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale ($\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_{I(I)}}$) et $\mathbf{u}(t)$ (resp. $\mathbf{y}(t)$) est constitué des variables d'entrée (resp. de sortie) associées aux éléments source (resp. détecteur). Les coefficients des matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ sont calculés de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{ij} & = & \displaystyle\sum_{ⓚ|\omega_k(\dot{x}_j,\dot{x}_i)=1} \tilde{G}_k\left(\dot{x}_j,\dot{x}_i\right) \\ b_{ij} & = & \displaystyle\sum_{ⓚ|\omega_k(u_j,\dot{x}_i)=0} \tilde{G}_k\left(u_j,\dot{x}_i\right) \\ c_{ij} & = & \displaystyle\sum_{ⓚ|\omega_k(\dot{x}_j,y_i)=1} \tilde{G}_k\left(\dot{x}_j,y_i\right) \\ d_{ij} & = & \displaystyle\sum_{ⓚ|\omega_k(u_j,y_i)=0} \tilde{G}_k\left(u_j,y_i\right) \end{array} \right. \tag{B.3}$$

où $\tilde{G}_k\left(v_i,v_j\right)$ correspond au gain statique du chemin causal ⓚ existant entre les variables v_i et v_j et dont l'ordre est $\omega_k\left(v_i,v_j\right)$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Deux extensions ont été proposées à la procédure B.1 :

— Rahmani *et al.* [RSDT97, RDT98] ont proposé l'extension à la prise en compte des boucles algébriques de type $1ZCP$ et $3ZCP$ impliquant des éléments I et/ou C, où l'hypothèse d'absence des boucles algébriques de type $2ZCP$ et $3ZCP$ impliquant des éléments R est conservée (voir procédure B.2).

— Jardin [Jar10] a formalisé les réflexions de Fotsu-Ngompo [FN97] sur la prise en compte des boucles algébriques de type $2ZCP$ et $3ZCP$ impliquant des éléments R (l'hypothèse d'absence des boucles algébriques impliquant des éléments de stockage est conservée). La prise en compte de ce type de boucles dans la procédure B.1 revient à étudier les chemins causaux *généralisés* (définition B.17 page 265) et non plus les chemins causaux *élémentaires* (définition B.16 page 265). Ce cas de figure a été précisé dans les travaux de Maschke [Mas88, Mas90], où les chemins causaux peuvent parcourir une boucle algébrique une infinité de fois sans que cela ne modifie leur ordre. Dans ce cas, la limite de la série des gains statiques (définition B.13 page 265) de ces chemins est calculée. Si nous considérons par exemple un chemin causal élémentaire ⓚ entre deux variables v_i et v_j d'ordre ω et de gain g_ω, possédant une variable commune (autre que la variable d'arrivée v_j) avec une boucle algébrique de gain g_0, le gain $G_k(v_i, v_j)$ du chemin causal généralisé ⓚ, d'ordre ω est $G_k(v_i, v_j) = \sum_{l=0}^{\infty} g_\omega \, (g_0)^l = \dfrac{g_\omega}{1 - g_0}$ *(ce point est également discuté en annexe D.2 page 306, voir par exemple la figure D.9 page 315).*

Procédure B.2 (*[RSDT97],[RDT98]*)

Soit un modèle bond graph représentant un système linéaire et invariant dans le temps, qui ne présente pas de boucle algébrique de type $2ZCP$ ou $3ZCP$. L'affectation d'une causalité préférentiellement intégrale permet d'en déduire un modèle d'état de la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{W}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \tag{B.4}$$

où :

— $\mathbf{x}(t)$ *est le vecteur d'état constitué des variables d'énergie associées aux éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale* ($\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_{I(I)}}$),
— $\mathbf{u}(t)$ *(resp.* $\mathbf{y}(t)$*) est constitué des variables d'entrée (resp. de sortie) associées aux éléments source (resp. détecteur).*

Les coefficients de la matrice $\mathbf{W}$ *sont déterminés selon la procédure suivante :*

— *pour les termes diagonaux, notés* w_{ii},

$$w_{ii} = 1 - \sum_{ⓚ|\omega_k(\dot{x}_i,\dot{x}_i)=0} \tilde{G}_k(\dot{x}_i, \dot{x}_i) \qquad \forall i \in \{0, ..., n_I\} \ , \tag{B.5}$$

où $\tilde{G}_k(\dot{x}_i, \dot{x}_i)$ *représente le gain statique du chemin causal* ⓚ *d'ordre* $\omega_k = 0$ *entre l'élément de stockage* I *ou* C *en causalité intégrale associé à la variable d'énergie* x_i *et elle-même, à travers un élément de stockage* I *ou* C *en cau-*

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

salité dérivée.

— *pour les termes extra-diagonaux, notés* w_{ji},

$$w_{ij} = \sum_{\Bbbk | \omega_k(\dot{x}_j, \dot{x}_i)=0} \tilde{G}_k(\dot{x}_j, \dot{x}_i) \qquad \forall i, j \in \{0, ..., n_I\}, i \neq j \ , \tag{B.6}$$

où $\tilde{G}_k(\dot{x}_j, \dot{x}_i)$ *représente le gain statique du chemin causal* $\Bbbk$ *d'ordre* $\omega_k = 0$ *entre l'élément de stockage* I *ou* C *en causalité intégrale associé à la variable d'énergie* x_j *et l'élément de stockage* I *ou* C *en causalité intégrale associé à la variable d'énergie* x_i.

Les coefficients des matrices **A**, **B**, **C** *et* **D** *sont déterminés à l'aide de la procédure B.1 indépendamment des éléments en causalité dérivée, en les ignorant lors de la scrutation.*

La procédure B.2 est introduite dans [RSDT97] et démontrée dans [RDT98] en utilisant la matrice de structure de jonction (voir annexe A.3) avec les hypothèses simplificatrices de la section A.3.5 page 258. L'extension de la procédure B.1 proposée par Jardin [Jar10] sur la prise en compte des $2ZCP$ et $3ZCP$ impliquant des éléments R est en outre également envisageable pour la procédure B.2. En revanche, les procédures B.1 et B.2 ne sont pas applicables à des bond graphs possédant des cycles causaux d'ordre négatif, faisant par exemple apparaître une boucle causal entre un élément R et un élément de stockage d'énergie I ou C en causalité dérivée.

B.2.2 Représentation digraphe

La présente section B.2.2 présente la procédure de Rahmani [Rah93] permettant de construire directement un digraphe à partir du modèle bond graph. Compte tenu des hypothèses, la longueur d'un chemin causal est ici équivalente à son ordre. *Une présentation du formalisme digraphe est donnée dans l'annexe C.*

Procédure B.3 (*[Rah93],[Jar10]*)

*Soit un modèle bond graph en causalité préférentiellement intégrale, représentant un système linéaire et invariant dans le temps et qui ne présente ni boucle algébrique (*i.e. *ZCP), ni élément de stockage en causalité dérivée (lorsque le modèle est en causalité préférentiellement intégrale). Le digraphe correspondant est obtenu en appliquant les règles suivantes :*

1. *Chaque variable d'énergie associée à un élément de stockage d'énergie en causalité intégrale, chaque variable d'entrée associée à une source d'effort ou de flux et chaque variable de sortie associée à un détecteur d'effort ou de flux sont respectivement représentées par un sommet d'état* x_i, *d'entrée* u_i *et de sortie* y_i *sur le digraphe.*
2. *Un chemin causal de longueur* 1 *reliant une variable d'énergie* x_i *associée à un élément de stockage d'énergie en causalité intégrale à une autre variable d'énergie* x_j *associée à un élément distinct de stockage d'énergie en causalité intégrale est représenté par un arc reliant le sommet d'état* x_i *au sommet d'état* x_j.
3. *Un chemin causal de longueur* 1 *reliant une variable d'énergie* x_i *associée à un élément de stockage d'énergie en causalité intégrale à elle-même (boucle*

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

causale) est représenté par un arc reliant le sommet d'état correspondant x_i à lui-même (cycle unitaire).

4. *Un chemin causal de longueur 0 reliant une variable d'entrée u_i, associée à une source, à une variable d'énergie x_j associée à un élément de stockage d'énergie en causalité intégrale est représenté par un arc reliant le sommet d'entrée u_i au sommet d'état x_j.*
5. *Un chemin causal de longueur 0 reliant une variable d'énergie x_i associée à un élément de stockage d'énergie en causalité intégrale, à une variable de sortie y_i associée à un détecteur est représenté par un arc reliant le sommet d'état x_i au sommet de sortie y_j*
6. *Un chemin causal de longueur 0 reliant une variable d'entrée u_i, associée à une source, à une variable de sortie y_j associée à un détecteur est représenté par un arc reliant le sommet d'entrée u_i au sommet de sortie y_j.*
7. *Chaque arc a un poids égal au gain statique du chemin causal à partir duquel il a été construit.*

Remarque : lorsque plusieurs chemins causaux existent entre deux variables v_i et v_j, deux cas de figure peuvent se présenter :

— soit la somme de leur gain statique est nulle, auquel cas aucun arc n'est ajouté sur le digraphe entre les deux sommets,

— soit la somme de leur gain statique n'est pas nulle, auquel cas le poids de l'arc est égal à cette somme.

La procédure B.3 est basée sur une détermination de la représentation d'état à partir du bond graph correspondant à la procédure B.1. Les procédures B.1 et B.3 sont ainsi formulées avec les mêmes hypothèses. Les deux extensions proposées à la procédure B.1 respectivement sur la prise en compte des boucles algébriques de type $1ZCP$ et $3ZCP$ impliquant des éléments I et/ou C [RSDT97, RDT98] et de type $2ZCP$ et $3ZCP$ impliquant des éléments R [Jar10] sont également applicables sans difficultés particulières à la procédure B.3 :

— la procédure B.2 détaille explicitement la scrutation supplémentaire à effectuer en présence de $1ZCP$ et $3ZCP$ impliquant des éléments I et/ou C. Une différence majeure est en revanche à préciser : les gains associés aux termes w_{ii} et w_{ij} engendreront des arcs entre les sommets d'état correspondant du digraphe, de poids égaux aux gains statiques respectifs (B.5) et (B.6) et de type $E-edge$ (annexe C, définition C.13 page 289),

— les considérations de Jardin en présence de $2ZCP$ et $3ZCP$ impliquant des éléments R impliquent que les poids des arcs du digraphe seront issus des gains des chemins causaux généralisés du bond graph le cas échéant.

Remarque : en revanche, la procédure B.3 n'est pas applicable à des bond graphs possédant des cycles causaux d'ordre négatif, faisant par exemple apparaître une boucle causal entre un élément R et un élément de stockage d'énergie I ou C en causalité dérivée.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

B.3 Détermination graphique d'un modèle d'état singulier à partir du bond graph

La procédure B.4 présentée ci-après est proposée par Mouhri *et al.* [MRDT99]. Elle utilise la matrice de structure de jonction (annexe A.3) avec les hypothèses simplificatrices de la section A.3.5 page 258 (permettant d'écrire le système d'état sous la forme singulière (A.33) page 260).

Procédure B.4 (*[MRDT99],[Mou00]*)

Soit un modèle bond graph représentant un système linéaire et invariant dans le temps, avec uniquement des éléments bond graph 1-port, qui ne présente pas de boucle algébrique de type $2ZCP$ ou $3ZCP$ impliquant des éléments R, ni lien causal entre un élément R et un élément de stockage en causalité dérivée, ni lien causal entre deux éléments de stockage en causalité dérivée. L'utilisation de la matrice de structure de jonction permet de déduire un modèle d'état de la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_I & \mathbf{E}_{id} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_I(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_D(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{di} & \mathbf{A}_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_I(t) \\ \mathbf{x}_D(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_i \\ \mathbf{B}_d \end{pmatrix} \mathbf{u}(t) \tag{B.7}$$

avec $\mathbf{E}_{id} = -\mathbf{S}_{12}$, $\mathbf{A}_{di} = \mathbf{S}_{21}\ \mathbf{S}_i$, $\mathbf{A}_{dd} = -\mathbf{S}_d$, $\mathbf{B}_d = \mathbf{S}_{24}$, $\mathbf{A}_i = \mathbf{K}\ \mathbf{S}_i$ *et* $\mathbf{B}_i = \mathbf{S}_{14} + \mathbf{S}_{13}\mathbf{H}\mathbf{S}_{34}$, *en notant* $\mathbf{H} = (\mathbf{I} - \mathbf{L}\mathbf{S}_{33})^{-1}\mathbf{L}$ *et* $\mathbf{K} = \mathbf{S}_{11} + \mathbf{S}_{13}\mathbf{H}\mathbf{S}_{31}$.
où :

- $\mathbf{x}_I(t)$ *est le vecteur d'état constitué des variables d'énergie associées aux éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale* ($\mathbf{x}_I(t) \in \mathbb{R}^{n_{I(I)}}$),
- $\mathbf{x}_D(t)$ *est le vecteur d'état constitué des variables d'énergie associées aux éléments de stockage d'énergie en causalité dérivée* ($\mathbf{x}_D(t) \in \mathbb{R}^{n_{D(I)}}$),
- $\mathbf{u}(t)$ *est constitué des variables d'entrée associées aux éléments source.*

Les coefficients des différentes sous-matrices sont déterminés selon les procédures suivantes :

- *coefficients de la sous-matrice* $\mathbf{E}_{id}$ *:*

$$e_{id} = -\sum_{ⓚ|\omega_k(\dot{x}_d,\dot{x}_i)=0} \tilde{G}_k(\dot{x}_d, \dot{x}_i) \quad \forall d \in \{0, ..., n_D\} \ \text{ et } \ \forall i \in \{0, ..., n_I\} \ , \tag{B.8}$$

  où $\tilde{G}_k(\dot{x}_d, \dot{x}_i)$ *représente le gain statique du chemin causal* ⓚ *d'ordre* $\omega_k = 0$ *entre l'élément de stockage I ou C en causalité dérivée associé à la variable d'énergie* x_d *et l'élément de stockage I ou C en causalité intégrale associé à la variable d'énergie* x_i,

- *coefficients de la sous-matrice* $\mathbf{A}_{di}$ *:*

$$a_{di} = \sum_{ⓚ|\omega_k(\dot{x}_i,\dot{x}_d)=0} \tilde{G}_k(\dot{x}_i, \dot{x}_d) \quad \forall d \in \{0, ..., n_D\} \ \text{ et } \ \forall i \in \{0, ..., n_I\} \ , \tag{B.9}$$

  où $\tilde{G}_k(\dot{x}_i, \dot{x}_d)$ *représente le gain statique du chemin causal* ⓚ *d'ordre* $\omega_k = 0$ *entre l'élément de stockage I ou C en causalité intégrale associé à la variable d'énergie* x_i *et l'élément de stockage I ou C en causalité dérivée associé à la variable d'énergie* x_d,

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

— *coefficients de la sous-matrice* $\mathbf{A}_i$ *: ils sont déterminés à l'aide de la procédure B.1 appliquée à la détermination de* $\mathbf{A}$ *dans le cas régulier, indépendamment des éléments en causalité dérivée, en les ignorant lors de la scrutation,*

— *coefficients de la sous-matrice* $\mathbf{A}_{dd} = -\mathbf{S}_d$ *: ils correspondent aux paramètres* I_d *et* C_d *des éléments de stockage d'énergie en causalité dérivée composant le vecteur* $\mathbf{x}_D$*, avec un signe négatif,*

— *coefficients de la sous-matrice* $\mathbf{B}_d$ *:*

$$b_{d_{ij}} = \sum_{ⓚ|\omega_k(u_j,\dot{x}_{d_i})=-1} \tilde{G}_k\left(u_j, \dot{x}_{d_i}\right) \ \forall d \in \{0, ..., n_D\} \tag{B.10}$$

où $\tilde{G}_k(u_j, \dot{x}_{d_i})$ *représente le gain statique du chemin causal* ⓚ *d'ordre* $\omega_k = -1$ *entre l'élément source* Se *ou* Sf *associé à la variable* u_j *et l'élément de stockage* I *ou* C *en causalité dérivée associé à la variable d'énergie* x_{d_i}*,*

— *coefficients de la sous-matrice* $\mathbf{B}_i$ *: ils sont déterminés à l'aide de la procédure B.1 appliquée à la détermination de* $\mathbf{B}$ *dans le cas régulier, indépendamment des éléments en causalité dérivée, en les ignorant lors de la scrutation.*

Comme pour la procédure B.2 (section B.2.1), l'extension de la procédure B.1 proposée par Jardin [Jar10] sur la prise en compte des $2ZCP$ et $3ZCP$ impliquant des éléments R est également envisageable pour la procédure B.4. En revanche, comme pour les procédures B.1 et B.2, la procédure B.4 n'est pas applicable à des bond graphs possédant des cycles causaux d'ordre négatif, faisant par exemple apparaître une boucle causale entre un élément R et un élément de stockage d'énergie I ou C en causalité dérivée. Enfin, la procédure B.4 n'est pas définie pour les sorties $\mathbf{y}(t)$, notamment en présence de chemin entrée/sortie d'ordre négatif. Notons à ce propos que dans l'annexe D, une présentation différente est donnée, en précisant la procédure sur les sorties.

Remarque : la procédure B.4 est la base d'une correspondance digraphe/bond graph sur laquelle se basent Mouhri *et al.* [MRDT99] pour formuler une détermination de $\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ sur le bond graph. La manière dont est établie cette formulation est discutée en section 4.2.2 page 115 en montrant qu'elle ne respecte pas strictement la correspondance digraphe/bond graph au sens de la procédure B.4.

B.4 Détermination graphique du polynôme caractéristique dans le cas régulier

Basé sur le théorème C.2 page 286 formulé en digraphe [Rei88], Rahmani a utilisé une correspondance digraphe/bond graph entre les cycles *disjoints* en digraphe et les cycles causaux *différents* en bond graph au sens de la définition B.9 page 264, reposant sur la procédure B.3, pour proposer le théorème B.1 de calcul du polynôme caractéristique d'un système régulier en bond graph. Son expression dans ce cas régulier se simplifie en la forme (B.11) (expression (4.2) page 114 pour laquelle, dans le cas régulier, $\mathbf{E} = \mathbf{I}$ et $p_0 = 1$).

$$P_{\mathbf{A}}(s) = \det\left(s\mathbf{I_n} - \mathbf{A}\right) = s^n + \sum_{i=1}^{n} p_i s^{n-i} \tag{B.11}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Théorème B.1 (*[Rah93]*)

(Détermination du polynôme caractéristique d'un système régulier sur le modèle bond graph associé) *En considérant le système régulier* (B.2)*, les coefficients* p_i $(1 \leq i \leq n)$ *de son polynôme caractéristique* (B.11) *peuvent être déterminés à partir du modèle bond graph associé, ne présentant ni boucles algébriques* (i.e. *ZCP*) *ni éléments de stockage en causalité dérivée, de la manière suivante :*

$$p_i = \sum_{\mathcal{F}_k \text{ telle que } l_{\mathcal{F}_k} = i} (-1)^{d_{\mathcal{F}_k}} \tilde{G}_{\mathcal{F}_k} \tag{B.12}$$

où :

- $\mathcal{F}_k$ *est la* $k^{ième}$ *famille de cycles causaux* BG-différents *(au sens de la définition B.9 page 264),*
- $l_{\mathcal{F}_k}$ *est la longueur de la famille de cycles causaux* BG-différents $\mathcal{F}_k$*.*
- $d_{\mathcal{F}_k}$ *est le nombre de cycles causaux* BG-différents *contenus dans la famille de cycles* $\mathcal{F}_k$*.*
- $\tilde{G}_{\mathcal{F}_k}$ *est le gain statique de la famille de cycles causaux* BG-différents $\mathcal{F}_i$*.*

Remarque : bien que non explicitement mentionné dans [Rah93], la formulation du théorème B.1 est appliquée à un modèle bond graph représentant un système linéaire et invariant dans le temps qui ne présente ni boucle causal entre deux éléments R, ni élément de stockage en causalité dérivée (lorsque le modèle est en causalité préférentiellement intégrale). Ceci se justifie simplement en remarquant que la correspondance digraphe/bond graph utilisée dans la démonstration du théorème B.1 dans [Rah93] est basée sur la procédure B.3.

Néanmoins le théorème B.1 est également valable lorsque le bond graph contient des $2ZCP$ ou $3ZCP$ impliquant des éléments R, à condition de considérer les gains statiques des chemins *généralisés* comme l'a formalisé Jardin [Jar10] (voir section B.2.1). En revanche, ce théorème n'est pas compatible avec la présence de $1ZCP$ ou de $3ZCP$ impliquant des éléments I et/ou C. En effet, la procédure B.2 page 269 implique que le coefficient p_0 du monôme en s^{n_I} ne soit pas nécessairement égal à 1 dans la forme (B.11) sur laquelle il se base. Le théorème B.1 n'est pas non plus valable en présence de cycles causaux d'ordre négatif (par essence de sa formulation). Pour expliciter la validité du théorème B.1 sur l'expression du polynôme caractéristique qu'il permet de déterminer, nous pouvons simplement le préciser de la manière suivante,

$$P_{\mathbf{A}}(s) = \det\left(s\mathbf{I}_{\mathbf{n_I}} - \mathbf{A}\right) = s^{n_I} + \sum_{i=1}^{n_I} p_i s^{n_I - i} \tag{B.13}$$

où n_I est le nombre d'éléments de stockage (sous entendu en causalité intégrale, puisqu'ils le sont nécessairement tous).

L'ensemble de ces points est également discuté au chapitre 4 où nous proposons une extension du théorème B.1, en section 4.2 page 113.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

B.5 Détermination graphique du déterminant de la matrice système

La présente section B.5 est un support aux développements bond graph présentés au chapitre 2, section 2.3 page 58. La classe des modèles directs *traitée ici est celle des modèles* réguliers *dont une représentation d'état est celle formulée en* (B.2) *page 268.*

Remarque : par souci de consistance avec le vocable bond graph utilisé au chapitre 2, nous qualifions dans cette section, le « bond graph *causal* » comme le modèle bond graph lié au modèle *direct* et le modèle « bond graph bicausal » comme celui lié au modèle *inverse* dans la mesure où il n'y a pas d'ambiguïté sur ce point dans les modèles traités ici.

B.5.1 Détermination sur le bond graph causal représentant le modèle direct

Cette section concerne la détermination bond graph du déterminant de la matrice système du modèle direct régulier, $\mathbf{P}(s)$. Nous présentons ci-après la méthode de Jardin [Jar10] dans le cas *régulier*, qui a exploité la correspondance entre les cycles *disjoints* en digraphe et les chemins causaux entrées/sorties *différents* en bond graph (définition B.9 page 264) sur la base des travaux de Reinschke sur les digraphes structurés [Rei88] (théorème C.3 page 288).

Théorème B.2 (*[Jar10]*)

(Déterminant de la matrice système d'un modèle direct régulier, approche bond graph causal) *Pour un système linéaire, invariant dans le temps, carré à p entrées et p sorties, le determinant de la matrice système $\mathbf{P}(s)$ peut être calculé de la manière suivante :*

$$\det \mathbf{P}(s) = \sum_{k=0}^{n} \rho_k^{\{p\}} s^{n-k} \tag{B.14}$$

où, sur le modèle bond graph en causalité préférentiellement intégrale et sans causalité dérivée :

- *n correspond au nombre d'éléments de stockage d'énergie (dimension de l'espace d'état),*
- *p correspond au nombre de sorties (et également au nombre d'entrées),*
- *$\rho_k^{\{p\}}$ correspond à la* somme *des gains statiques des familles bond graph de* longueur *égale à k* ***et*** *contenant* exactement *p chemins causaux entrées/sorties* différents. *Dans ce calcul, le gain statique de chaque famille bond graph doit être multiplié :*
  - *par $(-1)^d$, où d est le nombre de* cycles *contenus dans la famille bond graph,*
  - *et par $(-1)^{\sigma_{\mathcal{F}}}$, où $\sigma_{\mathcal{F}}$ est le nombre de permutations nécessaires pour ordonner les sorties dans l'ordre du vecteur de sortie initial quand les p chemins causaux de la famille $\mathcal{F}$ sont ordonnés dans l'ordre du vecteur d'entrée initial (ordre originel du vecteur d'entrée).*

Remarque : l'ensemble des notions concernant le digraphe et le bond graph utile à l'établissement du théorème B.2 est discuté au chapitre 4 (avec le support de l'annexe C)

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

pour l'étendre aux systèmes singuliers (aboutissant notamment à la proposition 4.3 page 133 sur le digraphe et la proposition 4.4 page 140 sur le bond graph).

Plusieurs points sont toutefois à souligner à ce stade dans le théorème B.2 :

- nous ne considérons pas uniquement les ensembles de p les chemins causaux entrées/sorties *différents*, mais également les cycles causaux *différents*, qui doivent en plus être *différents* (au sens du bond graph, définition B.9 page 264) des p chemins causaux entrées/sorties. Les longueurs respectives de ces cycles entrent dans la détermination de la longueur de la famille bond graph, en l'occurrence k dans l'expression $\rho_k^{\{p\}}$, [2]
- la permutation est simplement le ré-ordonnancement des chemins entrées/sorties existants par rapport à l'ordonnancement fixé initialement dans les vecteurs d'entrée et de sortie,
- nous remarquons enfin que la somme signée [3] des gains statiques d'une famille bond graph (contenant exactement p chemins causaux entrées/sorties *différents*) de *longueur minimale* est le coefficient du monôme de plus haut degré de $\det \mathbf{P}(s)$.

Remarque : nous avons ici privilégié une présentation du théorème proche de sa formulation originelle par Jardin [Jar10]. Par commodité, nous avons défini des notions et notations supplémentaires en section B.1, en particulier la *famille bond graph* (définition B.23 et notation B.1) et l'*ensemble de familles bond graph* (notations B.2, B.3, B.4, B.5), en particularisant au besoin suivant des attributs communs (par exemple, la notation B.1 relative à la *famille bond graph* et, B.4 et B.5 relatives aux *ensembles de familles bond graph*). *Ces notions sont, entre autre, utilisées dans la proposition 4.4 page 140, généralisation au cas singulier du théorème B.2. Elles sont d'autant plus pertinentes lors de la manipulation des mineurs de* $\mathbf{P}(s)$ *(voir paragraphe suivant).*

Le théorème B.2 est l'un des outils fondamentaux permettant d'appréhender la détermination graphique de l'ordre des zéros à l'infini aux niveaux *BG-Structurel* et *comportemental*, pour un bond graph d'un modèle *direct*. Le détail du théorème B.2 est important pour ce deuxième niveau d'analyse qui considère la structure du modèle bond graph ainsi que certaines dépendances physiques engendrées par les lois caractéristiques phénoménologiques. [4]

Détails sur la détermination bond graph de mineurs, application par niveaux d'analyse à la structure à l'infini du système Le présent paragraphe présente les outils pour la détermination de la structure à l'infini sur le bond graph d'un modèle direct, en introduisant des notations supplémentaires par rapport aux travaux de Jardin [Jar10] et El Feki [EF11]. Ces notations sont celles proposées en section B.1. Elles sont conservées pour ré-exprimer tous les théorèmes de l'annexe E, de manière plus concise à notre sens. Nous utilisons ici l'approche algébrique (théorèmes 2.2 page 49, 2.3 page 50 et 2.4 page 50) et la procédure bond graph de calcul de déterminant de la matrice système $\mathbf{P}(s)$ d'un système *régulier* (théorème B.2). Cette démarche sert à généraliser les présents résultats aux systèmes *singuliers* au chapitre 4. Par souci de clarté et concision, nous privilégions une présentation où le système est carré, mais l'approche peut être étendue au cas $p \leq m$ en précisant de manière adéquate les ensembles des entrées et des

2. Le lecteur intéressé peut consulter les exemples de compréhension proposés par Jardin dans sa thèse [Jar10], chapitre 3, en comparant avec l'approche originelle de Rahmani s'appuyant sur les bond graphs réduits [Rah93].

3. En prenant en compte le nombre de cycles d et le nombre de permutations σ_F.

4. Rappelons que les propriétés *comportementales* sont déduites par analyse des *gains* des chemins causaux.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

sorties.

— Au niveau algébrique, le théorème 2.3 page 50 permet de calculer l'ordre du zéro à l'infini d'un mineur $(i \times i)$ de $T(s)$: il est égale à n (dimension du vecteur d'état du système associé à $T(s)$) auquel on soustrait $\beta_{i^{j_1,\dots,j_i}_{h_1,\dots,h_i}}$, le degré du mineur $(n+i)\times(n+i)$ correspondant de $\mathbf{P}(s)$ *i.e.* faisant intervenir les variables d'entrée contenues dans l'ensemble $U = \{u_{j_1},\dots,u_{j_i}\}$ et les variables de sortie contenues dans l'ensemble $Y = \{y_{h_1},\dots,y_{h_i}\}$, avec donc $|U| = |Y| = i$. Par souci de concision, nous notons $\beta_{i\,(U,Y)}$ ce degré *i.e.* $\beta_{i\,(U,Y)} \triangleq \beta_{i^{j_1,\dots,j_i}_{h_1,\dots,h_i}}$.

Le théorème 2.4 page 50 amène ensuite à considérer *le plus haut* degré β_i parmi tous les degrés des mineurs d'ordre $(n+i)\times(n+i)$ de $\mathbf{P}(s)$. Soit donc :

$$\beta_i = \max_{\substack{(U,Y)\subset[\![1,p]\!]^2 \\ \text{tel que } |U|=|Y|=i}} \left\{\beta_{i\,(U,Y)}\right\} = \max_{\substack{(U,Y)\subset[\![1,p]\!]^2 \\ \text{tel que } |U|=|Y|=i}} \left\{\deg\left(\det\left(\mathbf{P}(s)^{1,\dots,n,n+j_1,\dots,n+j_i}_{1,\dots,n,n+h_1,\dots,n+h_i}\right)\right)\right\} \tag{B.15}$$

— De manière générale, sans particulariser par niveau d'analyse, les résultats de l'approche algébrique peuvent être rapprochés du bond graph en utilisant le théorème B.2 pour calculer les mineurs d'ordre $(n+i)\times(n+i)$ de la matrice système $\mathbf{P}(s)$ à partir de l'étude des chemins causaux entrées/sorties *différents* :

$$\det\left(\mathbf{P}(s)^{1,\dots,n,n+j_1,\dots,n+j_i}_{1,\dots,n,n+h_1,\dots,n+h_i}\right) = \sum_{k=0}^{n} \rho_k^{\{i^{j_1,\dots,j_i}_{h_1,\dots,h_i}\}} s^{n-k} \tag{B.16}$$

La sous-matrice exposée en (B.16) est déduite de la matrice système $\mathbf{P}(s)$ en ne sélectionnant que les lignes $1,\dots,n,n+h_1,\dots,n+h_i$ et les colonnes $1,\dots,n,n+j_1,\dots,n+j_i$. Seuls les sources et détecteurs bond graph correspondant effectivement aux entrées $u_{j_1},\dots,u_{j_i}$ et aux sorties $y_{h_1},\dots,y_{h_i}$ sont considérés.

— Pour un ensemble donné (U,Y) associé à i chemins causaux entrées/sorties *différents* entre les variables d'entrée contenues dans l'ensemble U de dimension i ($|U| = i$) et les variables de sortie contenues dans l'ensemble Y de dimension i ($|Y| = i$), notons $\mathcal{F}_{(U,Y)\,,l}$ la famille $\mathcal{F}_{(U,Y)}$ de longueur l. *Conformément à la notation B.1 page 267 (pour laquelle le présent cas de la famille $\mathcal{F}_{(U,Y)\,,l}$ est un cas particulier) une famille $\mathcal{F}_{(U,Y)}$ d'ordre ω est notée $\mathcal{F}_{(U,Y)\,,\omega}$ dans la mesure où il n'y a pas d'ambiguïté sur la notion d'ordre considéré ici (*i.e. *celui d'une* famille de chemins *et non simplement d'un* chemin*).* En utilisant le théorème B.2, le *degré $\beta_{i\,(U,Y)}$ du mineur associé* de la matrice système de (B.16) est donné par :

$$\beta_{i\,(U,Y)} = n - \min_{\mathcal{F}_{(U,Y)\,,l}} \left\{ l \mid \rho_l^{(U,Y)} \neq 0 \right\} \tag{B.17}$$

— Le *degré le plus élevé des mineurs d'ordre $(n+i)$ de* $\mathbf{P}(s)$, noté β_i dans le théorème 2.4 page 50, est donné par la longueur minimale $L_i = l_{min\,i}$ qu'une famille $\mathcal{F}_{\{i\}}$ de i chemins causaux entrées/sorties *différents* puisse avoir parmi tous les ensembles (U,Y) possibles tels que $|U| = |Y| = i$ et tels que la somme des gains statiques des familles $\mathcal{F}_{(U,Y)\,,L_i}$, *i.e.* de longueur L_i et pour un même ensemble

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

(U,Y), soit différente de zéro (*i.e.* $\rho_{L_i}^{\{i\}} \neq 0$) :

$$\begin{aligned}
\beta_i &= \max_{\substack{(U,Y)\subset[\![1,p]\!]^2 \\ \text{tel que } |U|=|Y|=i}} \left\{\beta_{i\,(U,Y)}\right\} \\
&= \max_{\substack{(U,Y)\subset[\![1,p]\!]^2 \\ \text{tel que } |U|=|Y|=i}} \left\{n - \min_{\mathcal{F}_{(U,Y)\,,\,l}} \left\{l \mid \rho_l^{(U,Y)} \neq 0\right\}\right\} \\
&= n - \min_{\substack{(U,Y)\subset[\![1,p]\!]^2 \\ \text{tel que } |U|=|Y|=i}} \left\{\min_{\mathcal{F}_{(U,Y)\,,\,l}} \left\{l \mid \rho_l^{(U,Y)} \neq 0\right\}\right\} \\
&= n - L_i
\end{aligned} \tag{B.18}$$

Résultats au niveau d'analyse BG-structurel Dans ce niveau d'analyse, les propriétés structurelles font uniquement référence à l'existence dans le bond graph de chemins causaux sans considération de leur gain. La scrutation relative à la détermination de β_i (théorème 2.4 page 50) dans (B.18) se simplifie ainsi à la simple considération d'*ensemble* de i chemins causaux entrées/sorties *différents* (en effet, dans le présent cas *régulier*, les cycles causaux, s'ils existent, sont nécessairement d'ordre positif). Notant L_{i_s} la longueur minimale qu'un *ensemble* de i chemins causaux entrées/sorties *différents* puisse avoir sur le bond graph, le lemme suivant est immédiat :

Lemme B.3 (*[Jar10]*)

(Plus petit ordre des zéros à l'infini des mineurs de la matrice de transfert, approche bond graph causal) *Pour un système linéaire, invariant dans le temps, carré à p entrées et p sorties, ayant une matrice de transfert* $\mathbf{T}(s)$ *rationnelle propre de rang* r*. Le plus petit ordre* $\delta_{BG-s,i}$ *des zéros* BG-Structurels *à l'infini des mineurs d'ordre* i *de* $\mathbf{T}(s)$ *peut être calculé de la manière suivante :*

$$\delta_{BG-s,i} = L_{i_s} \ , \forall i \in \{1, ..., r_{BG-s}\} \tag{B.19}$$

où, sur le modèle bond graph associé, en causalité préférentiellement intégrale :

- r_{BG-s} *est le nombre de* zéros BG-Structurels *à l'infini du système, égal au nombre maximal de chemins qu'un ensemble de chemins causaux entrées/sorties* disjoints *puisse contenir,*
- L_{i_s} *est la longueur minimale qu'un ensemble de* i *chemins causaux entrées/sorties* différents *puisse avoir.*

Remarque : r_{BG-s} peut être différent de r puisque les gains des chemins causaux ne sont pas considérés à ce niveau d'analyse.

Résultats au niveau d'analyse comportemental La formulation (B.18) et les considérations associées, consistantes avec le niveau d'analyse *comportemental*, nous permettent d'appréhender la déclinaison au niveau *comportemental* du lemme B.3. *Ceci n'est pas développé ici car directement abordé par le biais du théorème E.2 page 321.*

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

B.5.2 Détermination sur le bond graph bicausal représentant le modèle inverse

Cette section concerne la détermination bond graph du déterminant de la matrice système du modèle inverse, $\mathbf{P}_{inv}(s)$ définie à l'équation 2.16 page 51. Elle s'inscrit dans le cadre des travaux de El Feki [EF11], qui a étendu les procédures de Jardin (théorème B.2) au cas du bond graph bicausal associé à un modèle inverse sous la forme de la représentation d'état *généralisée* (2.5) page 46. De manière similaire à l'approche de Jardin, la détermination de $\det \mathbf{P}_{inv}(s)$ utilise la correspondance existante entre les cycles *disjoints* en digraphe et les chemins causaux entrées/sorties *différents* en bond graph ainsi que les travaux de Reinschke sur les digraphes structurés [Rei88] (théorème C.3 page 288).

Théorème B.4 (*[EF11]*)

(Déterminant de la matrice système, approche bond graph bicausal) *Pour un système inverse linéaire, invariant dans le temps, carré à p entrées et p sorties, le determinant de la matrice système $\mathbf{P}_{inv}(s)$ peut être calculé de la manière suivante :*

$$\det \mathbf{P}_{inv}(s) = \sum_{k=-n_D}^{n_{inv}} \rho_k^{\{p\}} s^{n_{inv}-k} \tag{B.20}$$

où, sur le modèle bond graph bicausal :

- *n_{inv} correspond au nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale (dimension de l'espace d'état),*
- *n_D correspond au nombre de stockage d'énergie en causalité dérivée,*
- *p correspond au nombre d'entrées et de sorties,*
- *$\rho_k^{\{p\}}$ correspond à la* somme *des gains statiques des familles bond graph* d'ordre *égal à k* ***et*** *contenant* exactement *p chemins causaux entrées/sorties* différents*. Dans ce calcul, le gain statique de chaque famille bond graph doit être multiplié :*
  - *par $(-1)^d$, où d est le nombre de* cycles *contenus dans la famille bond graph,*
  - *et par $(-1)^{\sigma_{\mathcal{F}}}$, où $\sigma_{\mathcal{F}}$ est le nombre de permutations nécessaires pour ordonner les sorties dans l'ordre du vecteur de sortie initial quand les p chemins causaux de la famille $\mathcal{F}$ sont ordonnés dans l'ordre du vecteur d'entrée initial (ordre originel du vecteur d'entrée).*

Remarque : cette extension est relativement simple à apporter puisque la seule différence au niveau digraphe, dans le cas particulier de la représentation d'état *généralisée* (2.5) page 46, est l'apparition de l'opérateur de Laplace sur les arcs du digraphe, modifiant le poids des arcs mais ne modifiant pas le calcul originel du déterminant de la matrice système [Rei88], [EF11] [5]. Cela conduit ainsi à considérer au niveau bond graph les *gains* de chemins causaux et non plus les *gains statiques*, l'*ordre* des chemins causaux et non plus leur *longueur*. Le théorème B.4 est ainsi un cas particulier de la formalisation sur les systèmes *singuliers* faite au chapitre 4. Sa généralisation à l'ensemble des

5. Notons que l'un des principaux points rendant relativement aisée l'extension digraphe, puis bond graph (théorème B.4), est la *régularité* et la *position diagonale* des opérateurs sur le faisceau $(sI - A_{inv})$ que permet la forme *généralisée* (2.5). Ceci ne modifie ainsi pas les procédures digraphe en raison de propriétés de complétion. Ce point est rediscuté au chapitre 4 sur les systèmes singuliers de faisceau $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

systèmes *singuliers* de faisceau $(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ régulier est formulée en proposition 4.4 page 140.

Rappelons enfin le point important suivant : les procédures algébriques de référence en direct et en inverse nous amènent à considérer dans les deux cas les *plus hauts* degrés des mineurs de chaque matrice système associée, respectivement $\mathbf{P}(s)$ dans le cas direct et $\mathbf{P}_{inv}(s)$ dans le cas inverse.

Détermination des degrés des mineurs de $\mathbf{P}_{inv}(s)$, niveau d'analyse BG-structurel Nous exposons ici le calcul des plus hauts degrés des mineurs de la matrice de transfert $\mathbf{T}_{inv}(s)$ du modèle inverse. Bien qu'établie au niveau BG-structurel, cette procédure est à rapprocher, pour la compréhension, du résultat de l'approche algébrique en inverse (théorème 2.6 page 52).

Lemme B.5 (*[EF11]*)

Pour un système inverse d'ordre minimal, linéaire, invariant dans le temps, carré à p entrées et p sorties, ayant une matrice de transfert $\mathbf{T}_{inv}(s)$ rationnelle non propre de rang p. Le plus haut degré $\delta_{inv\,BG-s,i}$ BG-Structurel *des mineurs d'ordre i de $\mathbf{T}_{inv}(s)$ peut être calculé de la manière suivante :*

$$\delta_{inv\,BG-s,i} = -\omega_{i_s} \ , \forall i \in \{1, ..., r_{inv\,BG-s}\} \tag{B.21}$$

où, sur le modèle bond graph bicausal associé :

- *$r_{inv\,BG-s}$ est le nombre de* pôles BG-Structurels *à l'infini du système, égal au nombre maximal de chemins qu'un ensemble de chemins causaux entrées/sorties* disjoints *puisse contenir,*
- *ω_{i_s} est l'ordre minimal qu'un ensemble de i chemins causaux entrées/sorties* différents *puisse avoir.*

Le Lemme B.5 permet ainsi d'étendre facilement le théorème originel de Bertrand *et al.* [BSDT97] (théorème 2.12 page 63) établi sur le bond graph causal, au cas du bond graph bicausal (théorème 2.13 page 64).

Détermination des degrés des mineurs de $\mathbf{P}_{inv}(s)$, niveau d'analyse comportemental De manière analogue à l'approche bond graph causal, il est possible de décliner le Lemme B.5 au niveau d'analyse comportemental pour la détermination du *plus haut* degré $\delta_{inv\,i}$ des mineurs d'ordre i de $\mathbf{T}_{inv}(s)$. Ce point n'est pas détaillé car abordé dans le théorème E.3 page 321.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Annexe C

Digraphe : définition, calcul de déterminants et de mineurs

C.1 Définitions

Les définitions et concepts sur les digraphes exposés dans cette section sont issus des travaux de Reinschke [Rei88, Rei94, RW97] et van der Woude [vdW91] [1].

Définition C.1

*Un **chemin orienté** $\mathcal{P}$ est une séquence d'*arcs orientés *dans le même sens, de sorte que le* sommet *de départ de l'arc suivant corresponde au* sommet *d'arrivée de l'arc précédent, soit $\mathcal{P} = \{(v_0, v_1), (v_1, v_2), ..., (v_{n-1}, v_n)\}$, où la notation v_i est employée pour les sommets (« vertex ») du digraphe. La séquence $\mathcal{P}$ peut également être présentée sous la forme $\{e_1, e_2, ...\}$, où la notation e_j est employée pour les arcs (« edge ») du digraphe.*

Définition C.2

*La **longueur** d'un chemin orienté $\mathcal{P}$ correspond au nombre d'arcs orientés composant la séquence $\mathcal{P}$.*

Définition C.3

*Le **poids** d'un chemin orienté $\mathcal{P}$ est égal au produit des poids des arcs orientés impliqués dans la séquence $\mathcal{P}$.*

Définition C.4

*Le sommet de départ du premier arc de $\mathcal{P}$ et le sommet d'arrivée du dernier arc de $\mathcal{P}$ sont respectivement nommés **sommet initial** du chemin orienté $\mathcal{P}$ et **sommet final** du chemin orienté $\mathcal{P}$.*

Définition C.5

*Un chemin orienté $\mathcal{P}$ est dit **fermé** si le sommet initial et le sommet final de $\mathcal{P}$ coïncident.*

Définition C.6

*Un **cycle** est un chemin orienté fermé dans lequel les sommets parcourus ne sont rencontrés qu'une seule fois, à l'exception du sommet initial-final.*

1. Un ensemble exhaustif de définitions relatives au digraphe utiles à l'analyse structurelle avec références bibliographiques associées et exemples peut également être consulté dans l'*Annexe C* de la thèse de Jardin [Jar10].

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Remarque : la définition de *cycle* est ici celle donnée par Reinschke [Rei88, Rei94] par souci de consistance avec les définitions originelles. La définition de *cycle* donnée dans [Jar10], [EF11] et proposée par Rahmani [Rah93] est celle correspondant au *chemin orienté fermé* dans [Rei88, Rei94, RW97]. La définition de *cycle* de Reinschke [Rei88, Rei94] et van der Woude [vdW91] correspond à la définition de *cycle élémentaire* dans [Rah93], [Jar10] et [EF11]. Notons toutefois que dans l'ensemble des travaux de Jardin [Jar10] et El Feki [EF11], l'hypothèse que les *cycles* considérés sont des *cycles élémentaires* est faite de manière tacite (voir par exemple les définitions 21 et 25 page 316 dans [Jar10]).

Définition C.7

> *La* ***longueur d'un cycle*** *est égal au nombre d'arcs qui le composent et correspond également dans ce cas au nombre de sommets contenus dans ce cycle. Une* ***boucle*** *est un cycle de longueur égale à* 1*.*

Définition C.8

> *Deux cycles sont dits* ***disjoints*** *s'ils ne possèdent aucun sommet (et donc aucun arc) en commun.*

Définition C.9

> *Une* ***famille de cycles*** $\mathcal{F}_i$ *est un ensemble de cycles disjoints.*

Définition C.10

> *La* ***longueur d'une famille de cycles*** $\mathcal{F}_i$*, notée* $l_{\mathcal{F}_i}$*, est égale au nombre de sommets contenus dans* $\mathcal{F}_i$*.*

Définition C.11

> *Le* ***poids d'une famille de cycles*** $\mathcal{F}_i$*, notée* $G_{\mathcal{F}_i}$*, est égal au produit des poids des cycles constitutifs de* $\mathcal{F}_i$*.*

Définition C.12

> *Une* famille de cycles $\mathcal{F}_i$ *est dite* ***directrice*** *si elle touche tous les sommets du digraphe (« spanning cycle family »).*

C.2 Déterminant et mineurs

C.2.1 Déterminant d'une matrice

Il est important de rappeler en premiers lieux le simple calcul du déterminant d'une matrice carrée à l'aide de sa représentation digraphe, dans la mesure où toutes les procédures digraphe faisant intervenir un calcul de déterminant l'utilise. Cette procédure est rappelée par Reinschke [Rei88], en notant que le facteur de permutation introduit dans le théorème C.1 suivant est issu des travaux de Cauchy, dès 1812 [Cau12].

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Théorème C.1 (*[Rei88], [Cau12]*)

(Détermination du déterminant d'une matrice* M *de dimension* $n \times n$ *sur son digraphe associé* $\mathcal{G}(\mathbf{M})$*) : *Le déterminant d'une matrice* $\mathbf{M}$ *de dimension* $n \times n$*, noté* $\det(\mathbf{M})$*, est calculé à partir des familles directrices du digraphe associé* $\mathcal{G}(\mathbf{M})$ *de la manière suivante :*

$$\det(\mathbf{M}) = \sum_{\mathcal{F}_i \text{ telle que } l_{\mathcal{F}_i}=n} (-1)^{n-d_{\mathcal{F}_i}} G_{\mathcal{F}_i} \tag{C.1}$$

où, sur le digraphe $\mathcal{G}(\mathbf{M})$ *:*

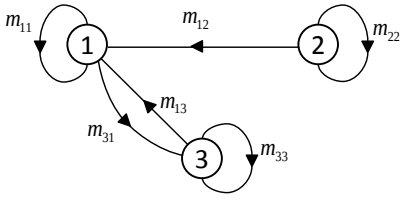
- $\mathcal{F}_i$ *est une famille de cycle directrice (*i.e. *de longueur* $l_{\mathcal{F}_i}$ *égale à* n*),*
- $d_{\mathcal{F}_i}$ *est le nombre de cycles formant la famille de cycles* $\mathcal{F}_i$*,*
- $G_{\mathcal{F}_i}$ *est le poids de la famille de cycle directrice* $\mathcal{F}_i$*.*

Exemple

(Détermination du déterminant d'une matrice M de dimension 3×3 sur son digraphe associé $\mathcal{G}(\mathbf{M})$) : Considérons la matrice $\mathbf{M}$ et son digraphe associé sur la figure C.1. Nous avons de manière algébrique, $\det(\mathbf{M}) = m_{11}\,m_{22}\,m_{33} - m_{13}\,m_{22}\,m_{31}$.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ 0 & m_{22} & 0 \\ m_{31} & 0 & m_{33} \end{bmatrix}$$

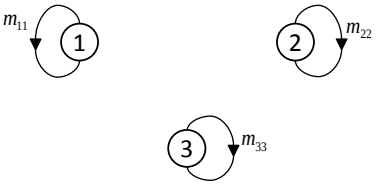
(a)



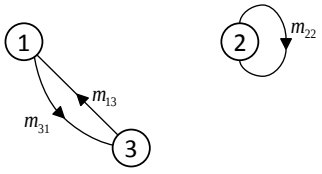
(b)

FIGURE C.1 – Calcul du déterminant de la matrice $\mathbf{M}$ sur son digraphe associé $\mathcal{G}(\mathbf{M})$

Le digraphe de la figure C.1 ne comprend que deux *familles directrices*, $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ (figure C.2).



$(\mathcal{F}_1)$



$(\mathcal{F}_2)$

FIGURE C.2 – Familles directrices du digraphe $\mathcal{G}(\mathbf{M})$ de la figure C.1

Les *poids de ces familles de cycles* sont respectivement $G_{\mathcal{F}_1} = m_{11}m_{22}m_{33}$ et $G_{\mathcal{F}_2} = m_{13}m_{22}m_{31}$ et elles sont respectivement composées de $d_{\mathcal{F}_1} = 3$ et $d_{\mathcal{F}_2} = 2$ cycles *disjoints*. Nous avons ainsi :

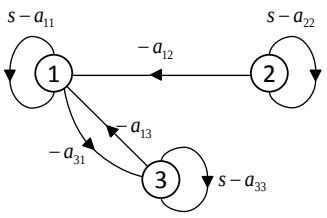
$$\begin{aligned} \det(\mathbf{M}) &= \sum_{\mathcal{F}_i \text{ telle que } l_{\mathcal{F}_i}=n} (-1)^{n-d_{\mathcal{F}_i}} G_{\mathcal{F}_i} \\ &= (-1)^{3-3}\, m_{11}\, m_{22}\, m_{33} + (-1)^{3-2}\, m_{13}\, m_{22}\, m_{31} \\ &= m_{11}\, m_{22}\, m_{33} - m_{13}\, m_{22}\, m_{31} \end{aligned} \tag{C.2}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

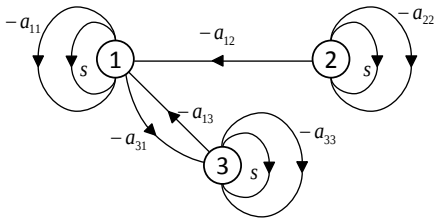
La notion de *famille directrice* (définition C.12 page 282) est fondamentale dans le calcul d'un déterminant en digraphe. S'il n'existe pas de famille directrice dans un digraphe, nous pouvons directement conclure que le determinant de la matrice qu'il représente est nul. Cette notion est souvent « omise » dans l'expression de certaines procédures, comme par exemple celle de détermination du polynôme caractéristique d'un système régulier par digraphe (théorème C.2 page 286). Elle n'apparait pas explicitement, mais elle est forcément sous-jacente du fait qu'une famille directrice existera nécessairement dans le cas régulier. Ce n'est plus le cas pour un système singulier. Notons en outre que le calcul de $\det(-\mathbf{M})$ ne modifie pas le digraphe $\mathcal{G}(\mathbf{M})$ (voir par exemple figure C.1) mais que chacun des poids des arcs sera multiplié par un coefficient (-1) dans le calcul du poids des familles de cycles directrices. Avec l'approche générique précédente, calculons par exemple le polynôme caractéristique d'un système régulier, *i.e.* $\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$, dont la matrice d'état, notée $\mathbf{A}$, est de la forme de la matrice $\mathbf{M}$ de la figure C.1. Nous construisons ainsi le digraphe $\mathcal{G}(\mathbf{F}_r)$ de la figure C.3c, représentant le faisceau régulier $\mathbf{F}_r = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})$, sur lequel certains arcs possèdent l'opérateur de Laplace issu de la matrice $s\mathbf{I}$ *(notons simplement à ce stade que le calcul d'un déterminant à partir d'un digraphe se base uniquement sur l'existence d'arc entre des sommets, quelle que soit la nature du poids des arcs,* i.e. *avec ou sans opérateur).*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

(a) Matrice d'état



(b) Représentation digraphe du faisceau $s\mathbf{I} - \mathbf{A}$



(c) Représentation digraphe du faisceau $s\mathbf{I} - \mathbf{A}$ (équivalente)

Figure C.3 – Exemple de représentation d'un faisceau $s\mathbf{I}-\mathbf{A}$ pour le calcul du polynôme caractéristique par la procédure *générique* (théorème C.1) de calcul d'un déterminant en digraphe (le digraphe C.3c est la représentation explicitée du faisceau $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$)

Le calcul algébrique du polynôme caractéristique est détaillé en (C.3) et la détermination digraphe générique dans les tables C.1 et C.2 (les monômes sont classés suivant leur degré). Nous recensons 10 familles directrices dans cet exemple. La famille $\mathcal{F}_1$ comprend 3 arcs avec opérateur, les familles $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$, $\mathcal{F}_4$ comprennent 2 arcs avec opérateur, les familles $\mathcal{F}_5$, $\mathcal{F}_6$, $\mathcal{F}_7$, $\mathcal{F}_8$ comprennent 1 arc avec opérateur et les familles $\mathcal{F}_9$, $\mathcal{F}_{10}$ ne comprennent pas d'arc avec opérateur. Ainsi, chacune contribue au monôme du polynôme caractéristique dont l'ordre est égal au nombre d'arcs avec opérateur qu'elle comprend.

$$\begin{array}{rcll} \det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}) & = & s^3 & \\ & + & s^2 & (-a_{33} - a_{22} - a_{11}) \\ & + & s & (a_{11}\,a_{22} + a_{11}\,a_{33} - a_{13}\,a_{31} + a_{22}\,a_{33}) \\ & + & & (-a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{13}\,a_{22}\,a_{31}) \end{array} \tag{C.3}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

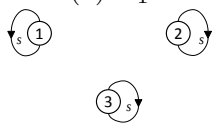
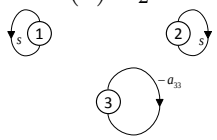
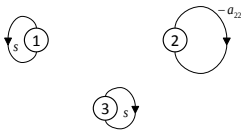
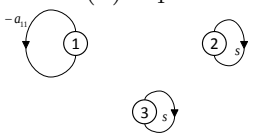
Famille de cycles directrice $\mathcal{F}_i$ ($l_{\mathcal{F}_i} = n = 3$)	$(-1)^{n-d_{\mathcal{F}_i}} G_{\mathcal{F}_i}$
(a) $\mathcal{F}_1$ 	$(-1)^{3-3}s^3$
(b) $\mathcal{F}_2$ 	$(-1)^{3-3}s^2(-a_{33})$
(c) $\mathcal{F}_3$ 	$(-1)^{3-3}s^2(-a_{22})$
(d) $\mathcal{F}_4$ 	$(-1)^{3-3}s^2(-a_{11})$

TABLE C.1 – Calcul du polynôme caractéristique de C.3c par la procédure *générique* de calcul d'un déterminant en digraphe - 1 sur 2

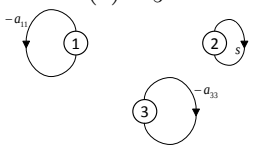
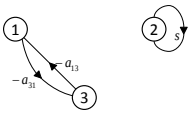
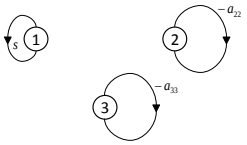
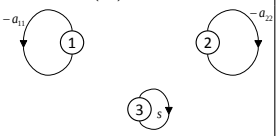
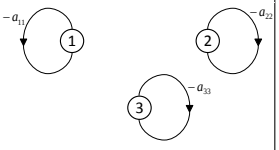
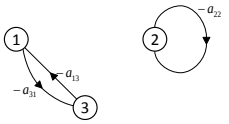
Famille de cycle directrice $\mathcal{F}_i$ ($l_{\mathcal{F}_i} = n = 3$)	$(-1)^{n-d_{\mathcal{F}_i}} G_{\mathcal{F}_i}$
(e) $\mathcal{F}_5$ 	$(-1)^{3-3}s(-a_{11})(-a_{33})$
(f) $\mathcal{F}_6$ 	$(-1)^{3-2}s(-a_{13})(-a_{31})$
(g) $\mathcal{F}_7$ 	$(-1)^{3-3}s(-a_{22})(-a_{33})$
(h) $\mathcal{F}_8$ 	$(-1)^{3-3}s(-a_{11})(-a_{22})$
(i) $\mathcal{F}_9$ 	$(-1)^{3-3}(-a_{11})(-a_{22})(-a_{33})$
(j) $\mathcal{F}_{10}$ 	$(-1)^{3-2}(-a_{13})(-a_{31})(-a_{22})$

TABLE C.2 – Calcul du polynôme caractéristique de C.3c par la procédure *générique* de calcul d'un déterminant en digraphe - 2 sur 2

C.2.2 Polynôme caractéristique d'un système régulier

REINSCHKE a proposé la procédure *dédiée* suivante (théorème C.2) pour le calcul du polynôme caractéristique du système régulier (C.4) :

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \tag{C.4}$$

Nous utilisons l'expression du polynôme caractéristique suivante :

$$P_{\mathbf{A}}(s) = \det\left(s\mathbf{I_n} - \mathbf{A}\right) = s^n + \sum_{i=1}^{n} p_i s^{n-i} \tag{C.5}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Théorème C.2 (*[Rei88]*)

(Détermination du polynôme caractéristique d'un système régulier sur le digraphe $\mathcal{G}(\mathbf{A})$ associé) : *En considérant le système régulier (C.4) et le digraphe $\mathcal{G}(\mathbf{A})$ associé à sa matrice d'état, les coefficients p_i $(1 \leq i \leq n)$ de son polynôme caractéristique (C.5) sont déterminés de la manière suivante :*

$$p_i = \sum_{\mathcal{F}_k \text{ telle que } l_{\mathcal{F}_k}=i} (-1)^{d_{\mathcal{F}_k}} G_{\mathcal{F}_k} \tag{C.6}$$

où, sur le digraphe $\mathcal{G}(\mathbf{A})$:

- *n est le nombre de sommets,*
- *$\mathcal{F}_k$ est une famille de cycles de longueur $l_{\mathcal{F}_k}$,*
- *$d_{\mathcal{F}_k}$ est le nombre de cycles disjoints formant la famille de cycles $\mathcal{F}_k$,*
- *$G_{\mathcal{F}_k}$ est le poids de la famille de cycles $\mathcal{F}_k$.*

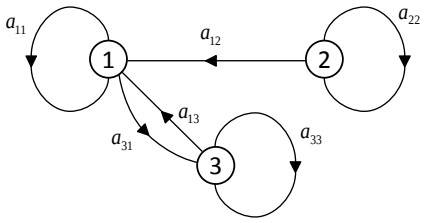
En particulier :

- p_1 correspond à la somme des poids de tous les cycles de longueur 1, chaque poids étant multiplié par (-1),
- p_2 correspond à la somme des poids de tous les cycles de longueur 2 (chaque poids étant multiplié par (-1)) et des poids de toutes les paires de cycles disjoints de longueur 1 (le poids des paires étant alors multiplié par $(-1)^2 = 1$),
- p_3 correspond à la somme des poids de tous les cycles de longueur 3 (chaque poids étant multiplié par (-1)), des poids des familles de cycles disjoints composées d'un cycle de longueur 2 et d'un cycle de longueur 1 (le poids de chaque famille étant alors multiplié par $(-1)^2 = 1$) et des poids des familles de trois cycles disjoints de longueur 1 (le poid de chaque famille étant alors multiplié par $(-1)^3 = -1$),
- etc ...

Appliqué à l'exemple précédent (figure C.3), le calcul du polynôme caractéristique du système par la méthode *dédiée* de Reinschke (théorème C.2) conduit à considérer uniquement le digraphe $\mathcal{G}(\mathbf{A})$, figure C.4 *(la procédure s'applique directement sur $\mathcal{G}(\mathbf{A})$ et non $\mathcal{G}(-\mathbf{A})$)*.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

(a) Matrice d'état



(b) $\mathcal{G}(\mathbf{A})$

Figure C.4 – Calcul du polynôme caractéristique (C.3) par la procédure *dédiée* de calcul d'un déterminant en digraphe

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

p_i	Famille de cycles $\mathcal{F}_k$ de longueur $l_{\mathcal{F}_k} = i$	$(-1)^{d_{\mathcal{F}_k}} G_{\mathcal{F}_k}$
p_1	(b') $\mathcal{F}_{2'}$	$(-1)^1 a_{33}$
	(c') $\mathcal{F}_{3'}$	$(-1)^1 a_{22}$
	(d') $\mathcal{F}_{4'}$	$(-1)^1 a_{11}$

TABLE C.3 – Détail du coefficient p_1 du monôme de degré $(n - i = 3 - 1 = 2)$ du polynôme caractéristique (C.3) par la procédure *dédiée* de calcul du déterminant d'un système régulier en digraphe (théorème C.2)

Par exemple, le détail de la détermination du coefficient p_1 *i.e.* monôme d'ordre 2 $(= n - i = 3 - 1)$ du polynôme caractéristique (C.3) par la procédure *dédiée* de calcul d'un déterminant (théorème C.2) est proposé en table C.3. Nous remarquons dans ce cas que les trois familles de longueur $l_{\mathcal{F}_k} = 1$ notées $\mathcal{F}_{2'}$, $\mathcal{F}_{3'}$, $\mathcal{F}_{4'}$ correspondent respectivement aux familles directrices $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$, $\mathcal{F}_4$ (table C.1). La considération de familles de longueur $l_{\mathcal{F}_k} = 1$ sur $\mathcal{G}(\mathbf{A})$ revient à considérer des familles directrices sur $\mathcal{G}(F_r)$ (figure C.3c) comprenant $n - i = 3 - 1 = 2$ arcs avec l'opérateur de LAPLACE, conduisant donc au monôme de degré $3 - 1 = 2$ du polynôme caractéristique.

En d'autres termes, l'approche dédiée de REINSCHKE considère bien des familles directrices, mais de manière sous-jacente dans la mesure où dans le cas régulier, des familles de cycles disjoints de longueur i sur le digraphe $\mathcal{G}(\mathbf{A})$ sont nécessairement « complétées » par des familles de cycles disjoints *unitaires* (*boucles*, définition C.7), de longueur $n - i$, portant chacun un opérateur de LAPLACE provenant du faisceau $s\mathbf{I}$, pour former des familles (nécessairement) directrices (de longueur n, *i.e.* $i + (n - i)$). Le faisceau $s\mathbf{I} - \mathbf{A}$ étant régulier, une famille directrice existera nécessairement. Il est donc possible d'omettre cette complétion, par commodité, comme c'est le cas dans l'expression de la procédure dédiée de REINSCHKE (théorème C.2). C'est la raison pour laquelle seul le digraphe $\mathcal{G}(\mathbf{A})$ est considéré et non celui représentant le faisceau complet $s\mathbf{I} - \mathbf{A}$, qui plus est, sans y adjoindre la contrainte forte sur la nécessité de considérer des familles directrices.

Ajoutons que s'il est possible d'omettre les arcs avec opérateurs par commodité de procédure dans le cas régulier, il n'en reste pas moins que les deux procédures (*générale i.e.* théorème C.1 et *dédiée i.e.* théorème C.2) conduisent au même résultat. Ceci souligne que la présence d'opérateur sur les arcs devient superflue dans le calcul du determinant du faisceau $s\mathbf{I} - \mathbf{A}$, leur poids unitaire étant transparent dans le calcul des poids des familles de cycles. *Notons en outre que le facteur de permutation de la procédure dédiée*

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

prend en considération le fait que le polynôme caractéristique fait intervenir la matrice $-\mathbf{A}$.

C.2.3 Matrice système d'un système régulier

Rappelons que la matrice système (ou matrice de Rosenbrock, [Ros70], [Ros74]) $\mathbf{P}(s) \in \mathbb{R}^{(n+p)\times(n+p)}$ du système (C.4) est définie par :

$$\mathbf{P}(s) = \begin{pmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \tag{C.7}$$

Théorème C.3 (*[Rei88]*)

(Détermination du déterminant de la matrice système d'un système régulier sur son digraphe $\mathcal{G}(\Sigma)$ ***associé)*** *Soit* $\mathcal{G}(\Sigma)$ *le digraphe associé au système régulier (C.4) pour lequel* $p = m$*, caractérisé par le quadruplet de matrices* $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$*. Le déterminant de la matrice système peut être déterminé graphiquement sur* $\mathcal{G}(\Sigma)$ *de la manière suivante :*

$$\det \begin{pmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{n} \rho_k^{\{p\}} s^{n-k} \tag{C.8}$$

où :

- n *est le nombre de sommets d'état,*
- p *est le nombre de sommets de sortie (et d'entrée),*
- $\mathcal{G}(\Sigma')$ *est le digraphe augmenté obtenu à partir de* $\mathcal{G}(\Sigma)$ *en ajoutant un arc (dit « de retour ») de poids* -1 *entre chaque sommet de sortie et chaque sommet d'entrée (dans ce sens),*
- $\rho_k^{\{p\}}$ *est déterminé sur* $\mathcal{G}(\Sigma')$ *et correspond à la somme des poids des familles de cycles contenant* k *sommets d'état et exactement* p *arcs de retour, avec la condition d'un arc de retour au plus par cycle. Dans ce calcul, le poids de chaque famille, notée* $\mathcal{F}_l$*, doit être multiplié par :*
  - *un facteur* $(-1)^{d_{\mathcal{F}_l}}$*, où* $d_{\mathcal{F}_l}$ *est le nombre de cycles disjoints de* $\mathcal{F}_l$*,*
  - *un facteur* $(-1)^{\sigma_{\mathcal{F}_l}}$*, où* $\sigma_{\mathcal{F}_l}$ *est le nombre de permutations nécessaires pour ordonner les sommets de sortie de la famille* $\mathcal{F}_l$ *dans l'ordre initial des sommets de sortie, lorsque les cycles de* $\mathcal{F}_l$ *sont ordonnés dans l'ordre initial des sommets d'entrée.*

Remarque : le théorème C.3 est originellement formulé par Reinschke dans [Rei88] pour $\mathbf{D} = 0$. Il est facilement généralisable dans le cas contraire comme évoqué par Jardin [Jar10] et montré au chapitre 4 en section 4.3 page 133.

Il est important de constater que, comme dans le cas de la détermination du polynôme caractéristique dans le cas régulier (théorème C.2), le théorème C.3 considère des familles directrices de manière sous-jacente, sans le préciser explicitement. La scrutation digraphe du théorème C.3 ne considère que des « familles de cycles contenant k sommets d'état », car les $n - k$ sommets d'état restant complètent la famille directrice avec des arcs contenant nécessairement l'opérateur de Laplace. Dans le cas des systèmes réguliers, la complétion pour former des familles directrices comprenant les n sommets d'état est nécessairement opérée. Les $n - k$ arcs avec opérateur de ces familles de cycles $\mathcal{F}_l$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

impliquent le coefficient de s^{n-k} de (C.8). Comme pour le théorème C.2, le théorème C.3 propose donc une scrutation simplifiée par commodité, rendue possible par la spécificité du faisceau $s\mathbf{I} - \mathbf{A}$.

C.2.4 Remarque sur le calcul des mineurs de la matrice système

Un mineur de matrice étant par définition le déterminant d'une sous-matrice carrée de la matrice originelle considérée, la déclinaison en digraphe est immédiate dans le cas particulier de la matrice système. Il suffit de sélectionner les sommets du digraphe associés aux entrées/sorties relatives aux lignes et colonnes de la sous-matrice considérée et d'appliquer le théorème C.3. Ceci n'est toutefois pas une généralité pour le calcul de mineur, mais s'applique dans le présent cas de $\mathbf{P}(s)$ en raison du fait que nous conservions *de facto* le faisceau $s\mathbf{I} - \mathbf{A}$ dans le calcul des mineurs de $\mathbf{P}(s)$.

C.2.5 Détermination du polynôme caractéristique d'un système singulier sur son digraphe associé $\mathcal{G}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$

Analysons la détermination du polynôme caractéristique dans le cas du système singulier Σ_d (C.9) à partir de sa représentation digraphe.

$$\Sigma_d : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}(t) & = & \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) & = & \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{array} \right. \tag{C.9}$$

La procédure générique de calcul de déterminant (théorème C.1 page 283) appliquée au faisceau $s\mathbf{E} - \mathbf{A}$ est par essence applicable, comme nous le verrons par la suite. Pour autant, Reinschke a généralisé aux systèmes singuliers la procédure qu'il avait originellement énoncée sur les systèmes réguliers (théorème C.2 page 286). Il a introduit pour cela la scrutation différentiée des arcs provenant de la matrice $\mathbf{E}$, appelés *E-edges* (*i.e.* arcs associés à des opérateurs de Laplace) et ceux provenant de la matrice $\mathbf{A}$, appelés *A–Edges*, définis de la manière suivante :

Définition C.13

*Un arc orienté entre deux sommets d'état de la matrice E (resp. A) du système singulier Σ_d (C.9) est nommé **E-edge** (resp. **A-edge**).*

Le polynôme caractéristique du système singulier Σ_d (C.9) est rappelé ci-après,

$$\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \sum_{i=0}^{n} p_i s^{n-i} \tag{C.10}$$

et peut être déterminé sur son digraphe associé, noté $\mathcal{G}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ par Reinschke, de la manière suivante :

Théorème C.4 (*[Rei94]*)

(Détermination du polynôme caractéristique d'un système singulier sur le digraphe $\mathcal{G}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ associé) : *En considérant le système singulier (C.9) et le digraphe $\mathcal{G}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ associé, les coefficients p_i $(0 \leq i \leq n)$ de son polynôme caractéristique (C.10) sont déterminés de la manière suivante :*

$$p_i = \sum_{\substack{\mathcal{F}_i \text{ telle que } l_{\mathcal{F}_i}=n \\ \text{avec } (n-i) \text{ } E-edges}} (-1)^{n-i-d_{\mathcal{F}_i}} \, G_{\mathcal{F}_i} \tag{C.11}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

où, sur le digraphe $\mathcal{G}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$:
- *n est le nombre de sommets d'état,*
- *$\mathcal{F}_i$ est une famille directrice de cycles* (i.e. *de longueur $l_{\mathcal{F}_i}=n$), impliquant exactement i* A–Edges *(ou de manière équivalente $(n-i)$* E–Edges*),*
- *i est le nombre de* A–Edges *contenus dans la famille de cycles $\mathcal{F}_i$,*
- *$d_{\mathcal{F}_i}$ est le nombre de cycles disjoints formant la famille de cycles $\mathcal{F}_i$,*
- *$G_{\mathcal{F}_i}$ est le poids de la famille de cycles $\mathcal{F}_i$.*

Le théorème C.4 conduit directement aux propriétés structurelles suivantes sur $\mathcal{G}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$:
- le système singulier Σ_d (C.9) est non solvable au sens du théorème 3.2 page 82 (*i.e.* $\det(s\mathbf{E}-\mathbf{A})=0$) si et seulement s'il n'existe pas de famille de cycles $\mathcal{F}_i$ de longueur $l_{\mathcal{F}_i}=n$ sur $\mathcal{G}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ (ou en d'autres termes, s'il n'existe pas de famille directrice sur le digraphe). On dit que le système singulier (C.9) est *structurellement dégénéré* [Rei94].
- la dimension $d=\deg\det(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ de la partie dynamique finie du système singulier Σ_d (C.9) est donnée par le nombre maximal d'arcs orientés de type *E–Edge* contenus dans une famille directrice $\mathcal{F}_i$ sur $\mathcal{G}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$.

Le point fondamentalement différent avec les systèmes réguliers est qu'il peut ne pas exister de famille directrice sur $\mathcal{G}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$. Le cas échéant où une famille directrice existe, nous retrouvons sur le digraphe représentant le faisceau $s\mathbf{E}-\mathbf{A}$ la notion importante de complétion entre les arcs de types *A-Edge* et *E-Edge*[2] : si une famille directrice, *i.e.* de longueur n, comprend i *A–Edges*, elle comprend nécessairement $(n-i)$ *E–Edges*. Cette propriété est directement issue de la définition du *cycle* en digraphe, impliquant que le nombre d'arcs le composant est aussi égal au nombre de sommets qu'il comprend[3]. Prenons l'exemple de compréhension suivant proposé par Reinschke [Rei94] (un exemple similaire est également proposé par Mouhri [Mou00]) :

Exemple

(Détermination du polynôme caractéristique d'un système singulier sur le digraphe $\mathcal{G}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ associé) [Rei94] : Considérons le système (C.12), de dimension $n=3$ et son digraphe $\mathcal{G}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ associé (figure C.5).

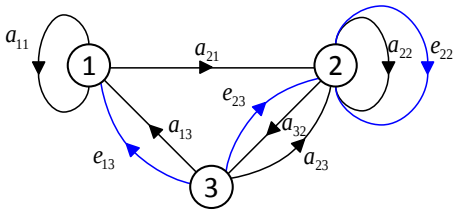
$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix}0&0&e_{13}\\0&e_{22}&e_{23}\\0&0&0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&0&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\0&a_{32}&0\end{bmatrix} \tag{C.12}$$

Le polynôme caractéristique du système (C.12) est tel que $\det(s\mathbf{E}-\mathbf{A})=p_0s^3+p_1s^2+p_2s+p_3$, avec $p_0=0$, $p_1=0$, $p_2=e_{13}\ a_{21}\ a_{32}-e_{23}\ a_{11}\ a_{32}$ et $p_3=a_{11}\ a_{23}\ a_{32}-a_{13}\ a_{21}\ a_{32}$ et l'approche graphique sur le digraphe C.5 est illustrée dans la table C.4.

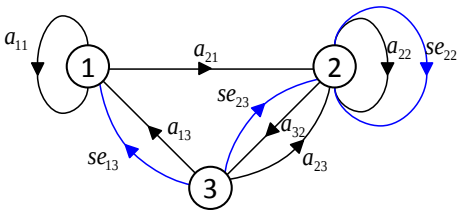
2. La précision selon laquelle nous considérons dans cette assertion le digraphe $\mathcal{G}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ est importante puisque cette affirmation ne sera par exemple plus valable pour le digraphe représentant la matrice système.

3. Ce point justifie la définition précise de cette notion, à différencier du *chemin orienté fermé* (voir par ailleurs la définition C.6 page 281 ainsi que la remarque associée).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés



(a) $\mathcal{G}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$



(b) Représentation équivalente à $\mathcal{G}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ *en explicitant les arcs avec opérateur de* Laplace

FIGURE C.5 – Représentations digraphe du système (C.12)

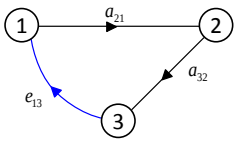
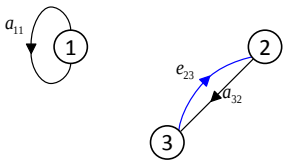
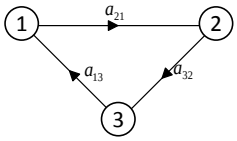
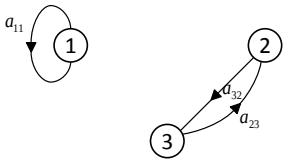
p_i	Famille de cycle $\mathcal{F}_i$ de longueur $l_{\mathcal{F}_i} = n = 3$	$(-1)^{n-i-d_{\mathcal{F}_i}}\, G_{\mathcal{F}_i}$
p_0	*pas de famille de cycles de longueur* $n = 3$, *faisant intervenir* 3 *arcs de type* E–Edge	0
p_1	*pas de famille de cycles de longueur* $n = 3$, *faisant intervenir* 2 *arcs de type* E–Edge	0
p_2	(a) $\mathcal{F}_{2_a}$ 	$(-1)^{3-2-1} e_{13}\ a_{21}\ a_{32}$
	(b) $\mathcal{F}_{2_b}$ 	$(-1)^{3-2-2} e_{23}\ a_{11}\ a_{32}$
p_3	(c) $\mathcal{F}_{3_c}$ 	$(-1)^{3-3-1} a_{13}\ a_{21}\ a_{32}$
	(d) $\mathcal{F}_{3_d}$ 	$(-1)^{3-3-2} a_{11}\ a_{23}\ a_{32}$

TABLE C.4 – Calcul du polynôme caractéristique du système (C.12) par l'approche digraphe *dédiée* (théorème C.4) sur $\mathcal{G}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ (figure C.5)

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Remarque : nous conservons dans le précédent exemple la notation originale « $\mathcal{G}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ » de [Rei94], bien que le digraphe ne représente rigoureusement en l'état que la matrice $s\mathbf{E}$ et la matrice $\mathbf{A}$. Une notation $\mathcal{G}(s\mathbf{E}\,;\mathbf{A})$ pourrait être plus explicite quant à la représentation effective portée sur le digraphe.

La considération différentiée proposée par Reinschke des arcs de types *E–Edge* et *A–Edge* dans le théorème C.4 est une commodité de lecture graphique sur le digraphe $\mathcal{G}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ au même titre que celle introduite dans le cas régulier (section C.2.2). Il est en revanche important de souligner que le théorème C.4 s'applique au digraphe $\mathcal{G}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ tel qu'exposé en figure C.5a, par opposition à une représentation digraphe explicitée du faisceau (figures C.6a et C.6b). Dans ces derniers cas, où les poids des arcs orientés sont directement ceux des coefficients du faisceau $(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$, la procédure générique de calcul de determinant (théorème C.1 page 283) conduit bien au même résultat (voir la détermination de la table C.5, réalisée à partir du digraphe C.6b, où les familles $\mathcal{F}'_{2_a}$, $\mathcal{F}'_{2_b}$, $\mathcal{F}'_{3_c}$, $\mathcal{F}'_{3_d}$ correspondent respectivement aux familles $\mathcal{F}_{2_a}$, $\mathcal{F}_{2_b}$, $\mathcal{F}_{3_c}$, $\mathcal{F}_{3_d}$ de la table C.4 issues de l'approche dédiée de Reinschke sur $\mathcal{G}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ (théorème C.4, figure C.5, table C.4).

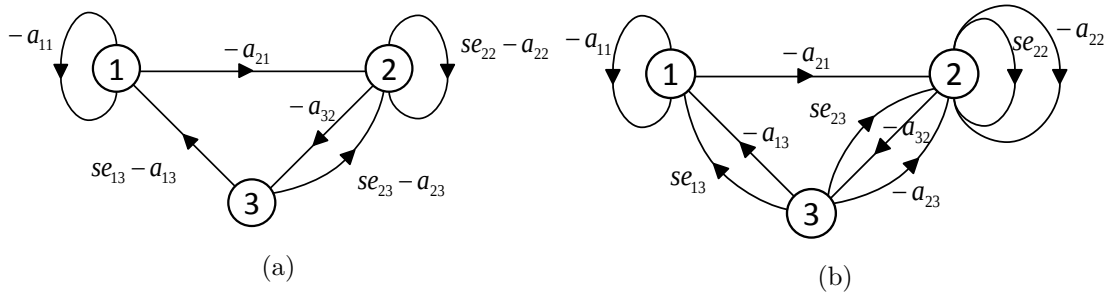


Figure C.6 – Représentations digraphe équivalentes et explicitées du faisceau $sE-A$ du système (C.12)

Les considérations précédentes soulignent que le calcul structurel de déterminant à partir d'un digraphe fait intervenir uniquement la *longueur* des *familles de cycles* (elles doivent être directrices, *i.e.* de longueur égale à la dimension de la matrice) et le *nombre* de *cycles disjoints* de ces familles. En soit, la présence d'opérateurs sur les arcs n'a aucune influence sur le calcul de déterminant. Pour autant, les procédures proposées par Reinschke dans le cas des systèmes réguliers (théorèmes C.2 page 286 et C.3 page 288) et singuliers (théorème C.4 page 289) apportent des commodités de détermination des polynômes caractéristiques permettant de s'affranchir complètement des arcs avec opérateurs dans le cas régulier, ou simplement de s'affranchir des opérateurs et de différencier les deux types d'arcs, *E–Edge* et *A–Edge*, dans le cas singulier. Ces deux procédures reposent toutefois sur la considération de familles nécessairement *directrices*, bien que cette notion soit régulièrement omise dans les formulations.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

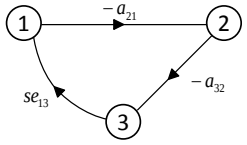
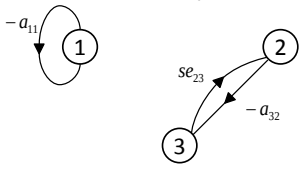
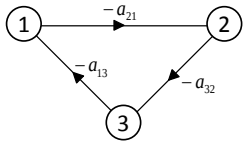
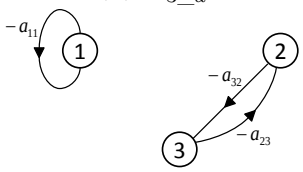
Famille de cycles directrice $\mathcal{F}_i$ (*i.e.* de longueur $l_{\mathcal{F}_i} = n = 3$)	$(-1)^{n-d_{\mathcal{F}_i}} G_{\mathcal{F}_i}$
(a) $\mathcal{F}'_{2_a}$ 	$(-1)^{3-1}\ s\ e_{13}\ (-a_{21})\ (-a_{32})$
(b) $\mathcal{F}'_{2\ b}$ 	$(-1)^{3-2}\ s\ e_{23}\ (-a_{11})\ (-a_{32})$
(c) $\mathcal{F}'_{3_c}$ 	$(-1)^{3-1}\ (-a_{13})\ (-a_{21})\ (-a_{32})$
(d) $\mathcal{F}'_{3_d}$ 	$(-1)^{3-2}\ (-a_{11})\ (-a_{23})\ (-a_{32})$

TABLE C.5 – Calcul du polynôme caractéristique du système (C.12) par l'approche digraphe *générique* (théorème C.1 page 283) sur la figure C.6b

C.2.6 Propriétés du faisceau $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ d'un bond graph et implications sur la représentation digraphe associée $\mathcal{G}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$

Dans le cas d'un vecteur d'état constitué des variables d'énergie de tous les éléments de stockage et d'une classe de modèle bond graph regroupant *tous* les bond graphs linéaires causaux affectés de la causalité préférentielle intégrale, ainsi que les bond graphs bicausaux dans laquelle il n'existe pas de liens causaux entre éléments de stockage en causalité dérivée d'une part, et entre un élément de stockage en causalité dérivée et un élément R d'autre part (dénommée « seconde forme simplifiée » et détaillée dans l'annexe A.3.5 page 258), le système singulier est donné par :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_I & \mathbf{E}_{ID} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_I \\ \dot{\mathbf{x}}_D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_I & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{DI} & \mathbf{I}_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_I \\ \mathbf{x}_D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_I \\ \mathbf{B}_D \end{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \begin{pmatrix} \mathbf{C}_I & \mathbf{C}_D \frac{d(\cdot)}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_I \\ \mathbf{x}_D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{D} \end{pmatrix} \mathbf{u} \end{aligned} \tag{C.13}$$

Les propriétés des sous-matrices nous permettent de formuler la proposition suivante :

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Proposition C.1

(propriété de la représentation digraphe $\mathcal{G}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ ***associée au faisceau*** $(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ ***des variables d'énergie d'un bond graph)*** *Sur la représentation digraphe* $\mathcal{G}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ *associée à la représentation d'état* (C.13)*, issue d'un bond graph causal affecté de la causalité préférentielle intégrale ou d'un bond graph bicausal dans lequel il n'existe pas de liens causaux entre éléments de stockage en causalité dérivée d'une part, et entre un élément de stockage en causalité dérivée et un élément R d'autre part, le degré d du polynôme caractéristique du modèle associé,* $d = \deg\det(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$*, est* donné *par le nombre maximal de cycles unitaires (boucles) de type* E–Edge *que peuvent contenir les familles directrices de* $\mathcal{G}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$*.*

Démonstration : *La démonstration peut s'illustrer sur le digraphe générique de la figure D.2 page 309 en considérant les hypothèses simplificatrices détaillées dans l'expression de la proposition C.1 associée au système* (C.13). La forme de la matrice $\mathbf{E}$ de (C.13) nous conduit directement aux affirmations suivantes sur $\mathcal{G}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$:

- *Sous matrice* $\mathbf{I}_I \in \mathbb{R}^{n_I \times n_I}$ *:* Tous les sommets d'état associés à des stockages en causalité intégrale possèdent des cycles unitaires de type *E–Edge* et ne possèdent aucun autre arc de type *E–Edge* entre eux.
- *Sous matrice* $\mathbf{E}_{ID} \in \mathbb{R}^{n_I \times n_D}$ *:* Il existe potentiellement des arcs de type *E–Edge provenant* des sommets d'état associés à des stockages en causalité dérivée *vers* des sommets d'état associés à des stockages en causalité intégrale (dans ce sens uniquement).

D'autre part, la forme de la matrice $\mathbf{A}$ de (C.13) nous conduit également directement à l'affirmation qu'il existe un cycle unitaire de type *A–Edge* pour tous les sommets d'état associés à des stockages en causalité dérivée. Il n'existe donc pas de cycles impliquant plusieurs sommets d'état qui puissent comporter plusieurs arcs de type *E–Edge*. D'autre part, le fait qu'il existe nécessairement des cycles unitaires de type *A–Edge* sur tous les sommets d'état associés à des stockages en causalité dérivée garantit qu'une famille directrice conduisant au plus grand nombre de cycle unitaire de type *E–Edge* est celle comportant le plus grand nombre d'arcs de type *E–Edge*. (En outre, il peut tout à fait exister d'autre familles directrices conduisant à ce même nombre maximale de *E–Edge*).

Fin de la démonstration.

Remarque 1: nous pouvons aisément remarquer que dans le présent cas, cette proposition nous conduit à un résultat précédemment énoncé : le degré du polynôme caractéristique du système singulier (C.13) est égal au nombre d'éléments de stockage en causalité intégrale, soit :

$$n_I \equiv d = \deg\ \det(s\mathbf{E}-\mathbf{A}) \tag{C.14}$$

Remarque 2: nous retrouvons ainsi ici une propriété du système singulier (C.13). Ce dernier ne comporte pas de mode impulsionnel sur le vecteur d'état, puisque la remarque précédente conduit à l'égalité $\text{Rang}(\mathbf{E}) = \deg\ \det(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$.

Remarque 3: en utilisant la notation (C.11), le coefficient du monôme de plus haut degré du polynôme caractéristique du système singulier (C.13) sera nécessairement de la forme (C.15). *Par convention, nous notons* $\mathcal{F}_1$ *la famille comportant uniquement des*

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

cycles unitaires de type E–Edge *sur les n_I sommets d'état associés aux éléments de stockage en causalité intégrale et $\mathcal{F}_{i-1}$ les autres familles.*

$$p_{n_D} = (-1)^{n_I - d_{\mathcal{F}_1}} + \sum_{\substack{\mathcal{F}_{i-1} \text{ telle que } l_{\mathcal{F}_{i-1}} = n \\ \text{avec } n_I \ E-edges}} (-1)^{n_I - d_{\mathcal{F}_{i-1}}} G_{\mathcal{F}_{i-1}} \tag{C.15}$$

La notation p_{n_D} de (C.15) est employée de manière à être consistante avec la proposition bond graph 4.1 page 116.

Remarque 4: dans le cas général d'un bond graph pouvant se mettre sous la forme générale (A.23) page 255 (voir par ailleurs de manière générale l'annexe A.3 page 248 pour l'établissement des systèmes d'état issus du bond graph), le coefficient (C.15) représente le monôme en s^{n_I} du polynôme caractéristique.

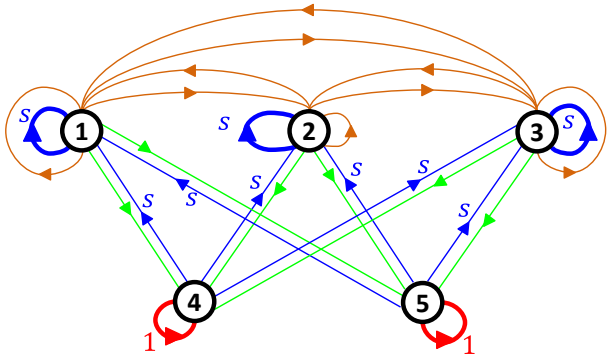
Exemple

(Illustration de la proposition C.1) Considérons le digraphe $\mathcal{G}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ de la figure C.7 dans le cas dimensionnant où toutes les sous-matrices non-nulles de (C.13) sont pleines, pour lequel $n_i = 3$ et $n_d = 2$. *Le poids des arcs n'entrant aucunement en considération dans les développement précédents, nous ne considérons ici que des poids unitaires par souci de clarté. L'opérateur de* Laplace *est explicité sur les arcs de type* E–Edge*, en bleu et les cycles unitaires sont en* ***gras****.*

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \mathbf{1} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

(a)



(b)

Figure C.7 – (a) exemple d'un faisceau $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$ issu d'un bond graph de la forme (C.13) et (b) représentation digraphe associée $\mathcal{G}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$

L'analyse des familles directrices du digraphe C.7b illustre que le degré de $\det(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ est donné par la famille conduisant au plus grand nombre de cycles unitaires de type *E–Edge* (figure C.8a), ou en d'autres termes, qu'il n'existe pas de familles directrices impliquant des cycles de plusieurs sommets comprenant plus d'arcs de type *E–Edge*. Notons qu'il existe d'autres familles directrices contribuant également au monôme de plus haut degré de $\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$, par exemple celle de la figure C.8b. L'exemple illustre également l'importance de la sous-matrice $\mathbf{I}_D$ de (C.13).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

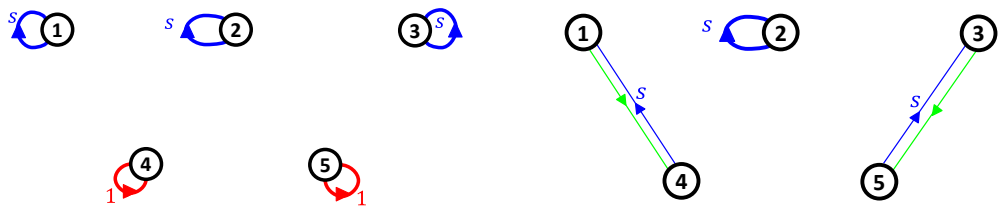


FIGURE C.8 – Exemples de familles directrices sur le digraphe $\mathcal{G}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ de la figure C.7 pour le calcul de $\det(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$

Nous pouvons généraliser la proposition C.1 en remarquant le point suivants. Si dans $\mathbf{E}$ la sous-matrice $n_D \times n_D$ relative aux sommets d'état en causalité dérivée n'est pas nulle, comme par exemple dans la forme (A.25) page 256, une discussion doit être menée :

— si les termes diagonaux de cette sous-matrice sont non-nuls, la proposition est toujours valable (quelle que soit la forme de la sous-matrice),

— si des termes diagonaux disparaissent et que des termes non-diagonaux apparaissent, la proposition peut ne plus être valable suivant la forme du faisceau.

Revenons ainsi à la représentation d'état du système singulier non simplifié (A.25), ré-explicitée en (C.16) :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\mathbf{I}_I & \mathbf{E}_{ID}\\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\mathbf{x}}_I\\ \dot{\mathbf{x}}_D\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\mathbf{A}_I & \mathbf{0}\\ \mathbf{A}_{DI} & \mathbf{I}_D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_I\\ \mathbf{x}_D\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathbf{B}_I\\ \mathbf{B}_D\end{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{y} &= \begin{pmatrix}\mathbf{C}_I & \mathbf{C}_D\dfrac{d(\cdot)}{dt}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_I\\ \mathbf{x}_D\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathbf{D}\end{pmatrix}\mathbf{u}\end{aligned} \tag{C.16}$$

Les considérations précédentes sur le cas général (C.16) impliquent que la proposition C.1 reste donc valable si tous les termes diagonaux de la sous-matrice $\mathbf{E}_D$ sont non nuls ou si $\mathbf{E}_D$ est diagonale (avec certains termes potentiellement nuls). Le seul cas où la proposition pourrait ne pas être valable est l'apparition de termes extra-diagonaux symétriques associés à des termes diagonaux nuls ; l'ensemble du faisceau serait alors à analyser (puisqu'il resterait une dépendance avec la complétion des arcs de la matrice $\mathbf{A}$). Si la généralisation complète de la proposition C.1 à la représentation d'état (C.16) dépend d'une discussion sur la forme de la sous-matrice $\mathbf{E}_D$, nous pouvons toutefois apporter une généralisation sous la forme de la proposition C.2, directement interprétable en bond graph :

Proposition C.2

(Propriété de la représentation digraphe $\mathcal{G}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ associée au faisceau $(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ des variables d'énergie d'un bond graph) *Sur la représentation digraphe $\mathcal{G}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ associée à la représentation d'état (C.16), le degré du polynôme caractéristique du modèle associé, $\deg\det(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$, est **donné par** une famille directrice conduisant au nombre maximal de cycles unitaires (boucles) de type* E–Edge *sur les sommets d'état associés aux variables d'énergie des éléments de stockage en causalité intégrale.*

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Démonstration : La proposition C.1 est valable sur le système (C.16) en la restreignant aux sommets d'état associés aux variables d'énergie en causalité intégrale sur $\mathcal{G}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$. La contribution maximale d'arc de type *E–Edge* touchant des sommets d'état associés aux variables d'énergie en causalité intégrale dans $\deg\det(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ sera nécessairement via les cycles unitaires de type *E–Edge* sur ces sommets.

Fin de la démonstration.

Remarque : la proposition C.2 permet d'illustrer clairement que dans le cas d'une affectation bicausale ou non préférentiellement intégrale, le degré du polynôme caractéristique peut être supérieur au nombre de stockage en causalité intégrale (validant ainsi cette propriété énoncée dans [Mou00]). Grâce à la forme du faisceau (C.16) et l'exemple d'illustration de la figure C.7, nous pouvons conclure que le degré du polynôme caractéristique d'un système issu d'un bond graph (causal, bicausal) peut au maximum être égale à n_I+n_D (comme initialement énoncé dans (C.10) en prenant ici comme dimension du vecteur d'état $n = n_I + n_D$). *Voir par exemple l'exemple de la section 4.2.2.4 page 123).* [4]

Une déclinaison très simple et fondamentale de la proposition C.2 pour la scrutation d'un bond graph fournissant un système pouvant se mettre sous la forme (C.16) peut être faite pour l'étude de son polynôme caractéristique : son degré est donné par les familles de cycles évitant les sommets associés aux éléments de stockage en causalité intégrale et impliquant le plus grand nombre de ceux associés aux éléments de stockage en causalité dérivée (et donc dans des cycles d'ordre négatif s'ils existent).

C.2.7 Propriétés de la matrice système $\mathbf{P}(s)$ issu d'un bond graph et implications sur la représentation digraphe associée $\mathcal{G}(\Sigma_d)$

Nous étendons dans cette section les considérations précédentes faites sur les propriétés du faisceau $(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ issu d'un modèle bond graph n'incluant que les variables d'énergie (proposition C.1 page 294) à la matrice système $\mathbf{P}(s)$ et en déduisons les implications sur le digraphe $\mathcal{G}(\Sigma_d)$ associé. La finalité est l'obtention de propriétés structurelles de scrutation du bond graph pour la détermination graphique de $\det(\mathbf{P}(s))$, en utilisant la correspondance digraphe/bond graph.

Pour établir les propriétés de $\mathbf{P}(s)$ issu du bond graph, nous utilisons dans un premier temps la représentation d'état simplifiée (C.18) du système, simplement réécrite à partir

4. Nous rappelons que les cycles digraphes sont définis de telle sorte que leur *longueur* est égale au nombre de sommets composant le cycle. En d'autre termes, il n'est pas possible d'avoir une famille directrice avec un nombre d'arcs de type *E–Edge* supérieur au nombre maximal de sommets d'état, égal à $n_I + n_D$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

de (C.13) [5] :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_I & \mathbf{E}_{ID} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_D & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_I \\ \dot{\mathbf{x}}_D \\ \dot{\mathbf{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{DI} & \mathbf{I}_D & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}_I & \mathbf{0} & \mathbf{I}_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_I \\ \mathbf{x}_D \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_I \\ \mathbf{B}_D \\ -\mathbf{D} \end{pmatrix} \mathbf{u} \tag{C.18}$$

La représentation (C.18) implique que du point de vue du digraphe, les arcs supplémentaires de type *E–Edge* (*i.e.* avec opérateur de LAPLACE provenant de la matrice $\mathbf{E}$) entre $\mathcal{G}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ de (C.13) et $\mathcal{G}(\Sigma_d)$ proviendront uniquement des composantes de la sous-matrice $\mathbf{C}_D$ associée sur le bond graph aux chemins causaux entre éléments de stockage d'énergie en causalité dérivée et détecteurs [6]. Suivant (C.18), tous les autres arcs du digraphe $\mathcal{G}(\Sigma_d)$ relatifs aux sommets d'entrée et de sortie ne portent pas d'opérateurs (rappelons notamment que l'ensemble des détecteurs causalement liés à des éléments de stockages en causalité intégrale est porté par la sous-matrice $-\mathbf{C}_I$ et que les transmissions directes entrée/sortie sont portées par la sous-matrice $-\mathbf{D}$). Nous pouvons ainsi formuler la proposition suivante :

Proposition C.3

(propriété de la représentation digraphe $\mathcal{G}(\Sigma_d)$ associée à la matrice système $\mathbf{P}(s)$ issue d'un modèle bond graph) *Sur la représentation digraphe $\mathcal{G}(\Sigma_d)$ associée à la représentation d'état (C.18), issue d'un bond graph causal affecté de la causalité préférentielle intégrale ou d'un bond graph bicausal dans lequel il n'existe pas de liens causaux entre éléments de stockage en causalité dérivée d'une part, et entre un élément de stockage en causalité dérivée et un élément R d'autre part, le degré du déterminant de la matrice système, $\deg\det(\mathbf{P}(s))$, est* ***associé à*** *la famille directrice aboutissant au nombre maximal de cycles unitaires (boucles) de type* E–Edge *de $\mathcal{G}(\Sigma'_d)$, digraphe augmenté obtenu à partir de $\mathcal{G}(\Sigma_d)$ en ajoutant un arc de retour de poids (-1) entre chaque sommet de sortie et chaque sommet d'entrée (dans ce sens).*

Démonstration : *Cette démonstration reprend celle de la proposition C.1 (alors appliquée au faisceau $(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ n'impliquant que les variables d'énergie du système). Un raisonnement similaire est ici appliqué sur le faisceau étendu aux variables de sortie $(s\mathbf{E}'-\mathbf{A}')$ de (C.18), comprenant de manière exhaustive l'ensemble des arcs avec opérateur de* LAPLACE *susceptibles d'apparaitre dans $\mathcal{G}(\Sigma'_d)$ et permettant ainsi de démontrer sur le digraphe $\mathcal{G}(s\mathbf{E}'-\mathbf{A}')$ associé au système (C.18) les propriétés de $\mathcal{G}(\Sigma'_d)$ énoncées en proposition C.3. Seuls les arcs (entrées → états) et les arcs de retour (sorties → entrées) sont dans un premier temps écartés de la démonstration et seront réhabilités dans la*

5. Voir annexe A.3.5 page 258. La forme (C.18) a également été utilisée au chapitre 5, section 5.4.2.3, équation (5.58) page 205. En d'autres termes, la forme (C.18) est une représentation d'état

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{E}'\dot{\mathbf{x}} & = & \mathbf{A}'\mathbf{x}+\mathbf{B}'\mathbf{u} \\ \mathbf{y}' & = & \mathbf{C}'\mathbf{x} \end{array} \right. \tag{C.17}$$

où la variable d'état $\mathbf{x}$ dans (C.17) regroupe l'ensemble des variables bond graph d'énergie et de sortie de (C.13) *i.e.* $\mathbf{X}=(\mathbf{x}_I,\mathbf{x}_D,\mathbf{y})$ et la variable $\mathbf{y}'$ dans (C.17) ne représente qu'une copie des sorties bond graph *i.e.* $\mathbf{C}'=\left[\begin{smallmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_y\end{smallmatrix}\right]$.

6. Nous avons établi en section 5.4.2.3 page 204 que la sous-matrice $\mathbf{C}_D$ était responsable de l'apparition de modes impulsionnels sur les variables non-énergétiques de sortie causalement liées à des éléments de stockage en causalité dérivée (proposition 5.1 page 204). Seuls ces chemins bond graph, d'ordre négatif, impliquent la présence additionnelle d'opérateur de LAPLACE sur les arcs associés du digraphe $\mathcal{G}(\Sigma_d)$ *i.e.* autre que les arcs entre variables d'énergie.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

considération de l'ensemble des familles directrices de $\mathcal{G}(\Sigma'_d)$.

La forme de la matrice $\mathbf{E}'$ de (C.18) nous conduit aux affirmations suivantes sur $\mathcal{G}(\Sigma'_d)$:

- *Sous matrice* $\mathbf{I}_I \in \mathbb{R}^{n_I \times n_I}$ *:* Tous les sommets d'état associés à des stockages en causalité intégrale possèdent des cycles unitaires de type *E–Edge* et ne possèdent aucun autre arc de type *E–Edge* entre eux.
- *Sous matrice* $\mathbf{E}_{ID} \in \mathbb{R}^{n_I \times n_D}$ *:* Il existe potentiellement des arcs de type *E–Edge provenant* des sommets d'état associés à des stockages en causalité dérivée *vers* des sommets d'état associés à des stockages en causalité intégrale (dans ce sens uniquement).
- *Sous matrice* $\mathbf{C}_D \in \mathbb{R}^{n_Y \times n_D}$ *:* Il existe potentiellement des arcs de type *E–Edge provenant* des sommets d'état associés à des stockages en causalité dérivée *vers* des sommets associés à des sorties (dans ce sens uniquement).

La forme de la matrice $\mathbf{A}'$ de (C.18) nous conduit également à affirmer, d'une part, qu'il existe un cycle unitaire de type *A–Edge* pour tous les sommets d'état associés à des stockages en causalité dérivée (sous matrice $\mathbf{I}_D \in \mathbb{R}^{n_D \times n_D}$) et, d'autre part, qu'il existe un cycle unitaire de type *A–Edge* pour tous les sommets d'état associés aux sorties.(sous matrice $\mathbf{I}_y$).

Il n'existe donc pas de cycles impliquant plusieurs sommets d'état (qu'ils soient associés à des stockages en causalité intégrale ou dérivée) et/ou de sommets associés à des sorties qui puissent comporter plusieurs arcs de type *E–Edge*. Cela se justifie par le fait que les seuls arcs de type *E–Edge* autres que ceux formant des cycles unitaires sont des arcs qui *arrivent* vers les sommets d'états associés à des stockages en causalité intégrale et qui *arrivent* vers les sommets associés aux sorties, *provenant* nécessairement des sommets d'état associés à des causalités en dérivation. D'autre part, le fait qu'il existe nécessairement des cycles unitaires de type *A–Edge* sur tous les sommets d'état associés à des stockages en causalité dérivée et des sommets associés aux sorties garantit qu'une famille directrice conduisant au plus grand nombre de *cycle* unitaire de type *E–Edge* est celle comportant le plus grand nombre d'arcs de type *E–Edge*.

Fin de la démonstration.

Remarque : contrairement au cas de la proposition C.1, *i.e.* cas du seul faisceau représentant les variables d'énergie du système auquel le digraphe $\mathcal{G}(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ est associé, dans le présent cas $\deg\det(\mathbf{P}(s))$ n'est pas nécessairement donné par le nombre de cycle unitaire de type *E–Edge* de la famille directrice en question, puisqu'il peut exister des cycles impliquant des arcs de type *E–Edge* entre les sommets d'états associés aux stockage en causalité dérivée et les sommets associés aux sorties (sous-matrice $\mathbf{C}_D$). La proposition C.3 garantit uniquement que $\deg\det(\mathbf{P}(s))$ sera *associé à* la famille directrice comportant *le plus grand nombre* de cycles unitaire de type *E–Edge* de $\mathcal{G}(\Sigma'_d)$.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

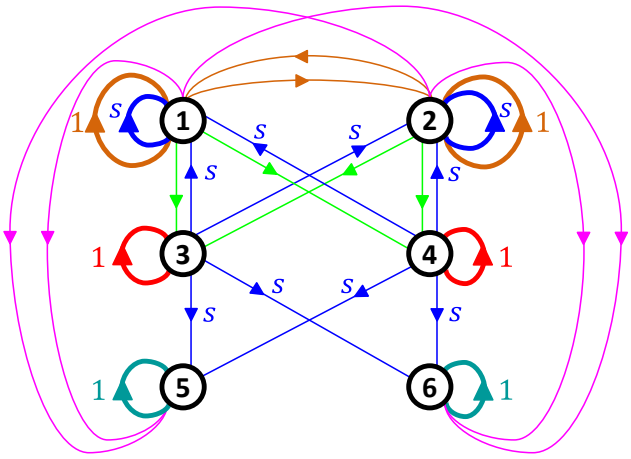
Exemple 1

(Remarque préalable sur le digraphe $\mathcal{G}(s\mathbf{E}'-\mathbf{A}')$ du faisceau étendu (C.18)) Considérons le digraphe $\mathcal{G}(s\mathbf{E}'-\mathbf{A}')$ de la figure C.9 dans le cas dimensionnant où toutes les sous-matrices non-nulles de (C.18) sont pleines, pour lequel $n_I = 2$, $n_D = 2$ et $n_Y = 2$. *Le poids des arcs n'entrant aucunement en considération dans les développements précédents, nous ne considérons ici que des poids unitaires par souci de clarté. L'opérateur de* Laplace *est explicité sur les arcs de type* E–Edge *en bleu, et les cycles unitaires sont en* ***gras*** *(le code couleur est ici consistant avec celui de la figure C.7 page 295).*

$$\mathbf{E}' = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

(a)



(b)

Figure C.9 – (a) Exemple d'un faisceau $(s\mathbf{E}'-\mathbf{A}')$ étendu aux variables de sorties, issu d'un bond graph direct de la forme (C.18) et (b) représentation digraphe associée $\mathcal{G}(s\mathbf{E}'-\mathbf{A}')$

L'analyse des familles directrices du digraphe C.9b illustre que le degré de $\det(s\mathbf{E}'-\mathbf{A}')$ est *donné* par la famille conduisant au plus grand nombre de cycle unitaire de type *E–Edge* (figure C.10a), ou en d'autres termes qu'il n'existe pas de familles directrices impliquant des cycles de plusieurs sommets comprenant plus d'arcs de type *E–Edge sur ce faisceau* (cette précision est importante, puisque nous ne considérons pas (encore) le digraphe complet $\mathcal{G}(\Sigma'_d)$). Notons qu'il existe d'autres familles directrices contribuant également au monôme de plus haut degré de $\det(s\mathbf{E}'-\mathbf{A}')$, par exemple celle de la figure C.10b. L'exemple illustre également l'importance des sous-matrices $\mathbf{I}_D$ et $\mathbf{I}_y$ dans la constitution de la famille directrice de $\mathcal{G}(s\mathbf{E}'-\mathbf{A}')$ de la figure C.10a.

(a) *(b)*

Figure C.10 – Exemples de familles directrices sur le digraphe $\mathcal{G}(s\mathbf{E}'-\mathbf{A}')$ de la figure C.9 intervenant dans le calcul de $\det(s\mathbf{E}'-\mathbf{A}')$ de (C.18)

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Exemple 2

(Illustration de la proposition C.3 : digraphe $\mathcal{G}(\Sigma_d)$ d'un système sur la base de la représentation (C.18)) Sans perte de généricité, considérons le système de la figure C.11 construit à partir du faisceau de la figure C.9.

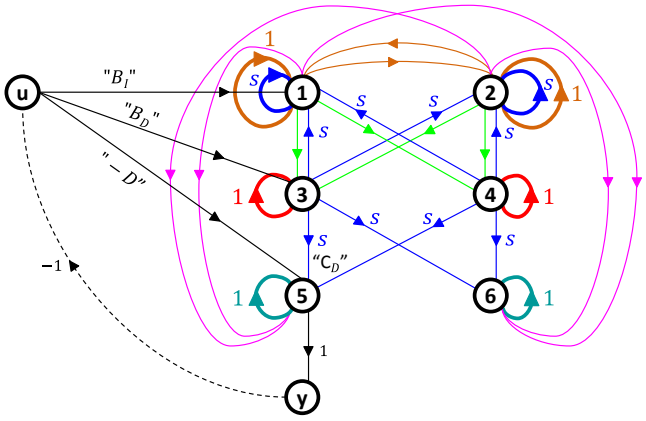
$$\mathbf{E}' = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a)

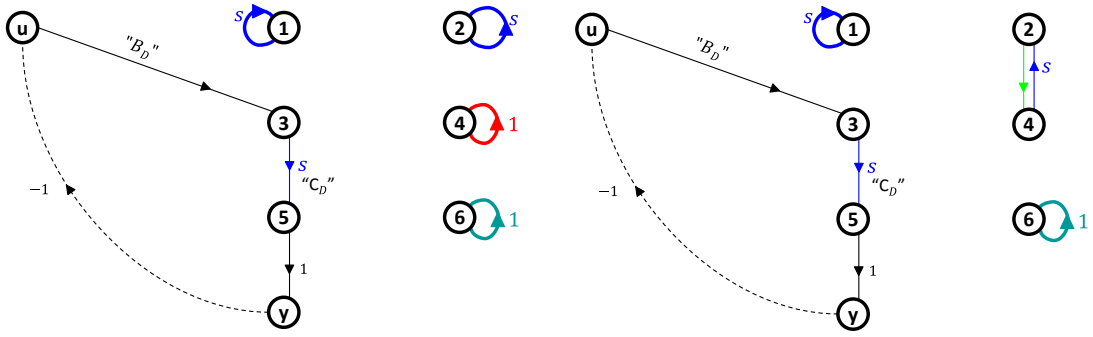


(b)

FIGURE C.11 – (a) Exemple de représentation issue de la forme (C.18) et (b) représentation digraphe associée $\mathcal{G}(\Sigma'_d)$

Par soucis de clarté, nous ne considérons ici qu'une entrée u et qu'une sortie y. Bien que les matrices $\mathbf{B}'$ et $\mathbf{C}'$ ne soient pas pleines, l'exemple est générique dans la mesure où tous les types d'arcs sont représentés *i.e.* (entrées → états en causalité intégrale), (entrées → états en causalité dérivée) et (entrées → sorties), respectivement associés aux sous matrices $\mathbf{B}_I$, $\mathbf{B}_D$ et $-\mathbf{D}$ de (C.18).

L'exemple C.11 illustre la proposition C.3 à travers la famille directrice C.12a. Comme précédemment mentionné, d'autres familles peuvent contribuer au monôme de plus haut degré (figure C.12b).



(a) *(b)*

FIGURE C.12 – Exemples de familles directrices sur le digraphe $\mathcal{G}(\Sigma'_d)$ de la figure C.11b contribuant au monôme de plus haut degré de $\det(\mathbf{P}(s))$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

La proposition C.3 et les deux précédents exemples associés nous conduisent au lemme C.4, directement interprétable sur le bond graph :

Lemme C.4

(Degré du déterminant de la matrice système $\mathbf{P}(s)$ ***issue d'un modèle bond graph)*** *Sur la représentation digraphe augmentée* $\mathcal{G}(\Sigma'_d)$ *associée à la représentation d'état* (C.18)*, issue d'un bond graph causal affecté de la causalité préférentielle intégrale ou d'un bond graph bicausal dans lequel il n'existe pas de liens causaux entre éléments de stockage en causalité dérivée d'une part, et entre un élément de stockage en causalité dérivée et un élément R d'autre part, le degré du déterminant de la matrice système,* $\deg\det(\mathbf{P}(s))$*, est donné par le nombre d'arc de type* E–Edge *de la famille directrice aboutissant au nombre maximal de cycles unitaires (boucles) de type* E–Edge *et au nombre maximal de cycles (entrées → états en causalité dérivée → sorties → entrées).*

Démonstration :

Le résultat découle immédiatement de la proposition C.3 page 298.

Fin de la démonstration.

Remarque : le lemme C.4 conduit à $\sup\left(\deg\det(\mathbf{P}(s))\right) = n_I + n_D$.

Le lemme C.4 implique la scrutation de familles bond graph de chemins entrée/sortie évitant les éléments de stockage en causalité intégrale et impliquant le plus possible en causalité dérivée, empruntant préférentiellement les chemins causaux (entrée → stockage en causalité dérivée) *i.e.* chemins causaux entre variables $\mathbf{U}$ et variables $\mathbf{z}_D$, associés à $\mathbf{B}_D$, et les chemins causaux (stockage en causalité dérivée → sortie) *i.e.* chemins causaux entre variables $\dot{\mathbf{x}}_D$ et $\mathbf{Y}$, associés à $\mathbf{C}_D$.

Nous souhaitons à présent généraliser la proposition C.3, formulé sur la forme (C.18), à la représentation non simplifiée (C.19), réécrite à partir de (C.16) :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_I & \mathbf{E}_{ID} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_D & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_I \\ \dot{\mathbf{x}}_D \\ \dot{\mathbf{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{DI} & \mathbf{I}_D & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}_I & \mathbf{0} & \mathbf{I}_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_I \\ \mathbf{x}_D \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_I \\ \mathbf{B}_D \\ -\mathbf{D} \end{pmatrix} \mathbf{u} \qquad \text{(C.19)}$$

Structurellement, nous remarquons que la simplification de la représentation d'état (C.19) en (C.18) est uniquement portée par la simplification du faisceau $(s\mathbf{E}-\mathbf{A})$ de la représentation (C.16) en (C.13) précédemment discutée (section C.2.6 page 293). Nous pouvons ainsi rappeler les points évoqués lors de cette précédente analyse, toujours valables dans le présent cas. Si dans $\mathbf{E}$, la sous-matrice $n_D \times n_D$ relative aux sommets d'état en causalité dérivée n'est pas nulle (cas (C.19)), une discussion doit être menée :

— si les termes diagonaux de cette sous-matrice sont non-nuls, la proposition est toujours valable (quelle que soit la forme de la sous-matrice),

— si des termes diagonaux disparaissent et que des termes non-diagonaux apparaissent de manière symétrique, la proposition peut ne plus être valable suivant

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

la forme du faisceau.

Si la généralisation complète de la proposition C.3 à la représentation d'état non simplifiée (C.19) dépend d'une discussion sur la forme de la sous-matrice $\mathbf{E}_D$, nous pouvons toutefois apporter une généralisation sous la forme de la proposition C.5, directement interprétable en bond graph :

Proposition C.5

(Propriété de la représentation digraphe $\mathcal{G}(\Sigma_d)$ associée à la matrice système $\mathbf{P}(s)$ issue d'un bond graph) *Sur la représentation digraphe $\mathcal{G}(\Sigma_d)$ associée à la représentation d'état (C.19), le degré du déterminant de la matrice système, $\deg\det(\mathbf{P}(s))$, est* ***associé à*** *la famille directrice aboutissant au nombre maximal de cycles unitaires (boucle) de type* E–Edge *sur les sommets d'état associés aux variables d'énergie en causalité intégrale de $\mathcal{G}(\Sigma'_d)$, digraphe augmenté obtenu à partir de $\mathcal{G}(\Sigma_d)$ en ajoutant un arc de retour de poids (-1) entre chaque sommet de sortie et chaque sommet d'entrée (dans ce sens).*

Démonstration : *Nous reprenons ici directement la démonstration de la proposition C.2.* La proposition C.3 est valable sur le système (C.19) en la restreignant aux sommets d'état associés aux variables d'énergie en causalité intégrale sur $\mathcal{G}(\Sigma'_d)$: la contribution maximale d'arc de type *E–Edge* touchant des sommets d'état associés aux variables d'énergie en causalité intégrale dans $\deg\det(\mathbf{P}(s))$ sera nécessairement via les cycles unitaires de type *E–Edge* sur ces sommets.

Fin de la démonstration.

La proposition C.5 implique une déclinaison très simple et fondamentale de scrutation d'un bond graph pouvant se mettre sous la forme (C.19) pour l'étude du déterminant de sa matrice système : $\deg\det(\mathbf{P}(s))$ est donné par les familles de cycles évitant les éléments de stockage en causalité intégrale et impliquant le plus d'éléments de stockage en causalité dérivée (sous entendu dans des *cycles d'ordre négatif* et dans des *chemins (entrée → sortie) d'ordre négatif*).

Remarque : la proposition C.5 conduit à $\sup(\deg\det\mathbf{P}(s)) = n_I + n_D$ *(comme dans le cas simplifié de la représentation d'état* (C.18)*.*

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Annexe D

Correspondance étendue entre digraphe et bond graph

D.1 Introduction

La présente annexe D propose de préciser et d'étendre la correspondance qui peut être faite entre le formalisme digraphe et le formalisme bond graph, originellement introduite par Rahmani [Rah93] pour le calcul du polynôme caractéristique d'un système régulier (section B.4 page 273, théorème B.1), en support du chapitre 4. Cette correspondance digraphe/bond graph a été initialement construite sur l'obtention d'une représentation d'état à partir du bond graph et d'une traduction de cette représentation d'état en digraphe (cette traduction bond graph vers digraphe est présentée aux sections B.2 et B.3 en précisant les hypothèses originelles). Grâce aux travaux de Reinschke sur le calcul de déterminant en digraphe (section C.2) et notamment la détermination graphique du polynôme caractéristique d'un système régulier sur son digraphe associé (section C.2.2, théorème C.2), Rahmani a établi une correspondance entre des familles de cycles sur le digraphe et des familles de cycles sur le bond graph pour porter les procédures digraphes de Reinschke [Rei88] sur le bond graph associé à un système régulier (section B.4, théorème B.1, originellement formulé pour des bond graphs sans causalité dérivée sur les éléments de stockage d'énergie, ni boucle algébrique de type $2ZCP$ ou $3ZCP$) [1].

La correspondance proposée par Rahmani [Rah93] pour le calcul de $\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$ s'établit entre les cycles *disjoints* d'un digraphe et les cycles *BG-Différents* (définition B.9 page 264) d'un bond graph causal pour le calcul du polynôme caractéristique d'un système régulier [2]. Par extension, la correspondance est valable sur les *chemins* causaux du bond graph et notamment utilisée par Jardin [Jar10] pour démontrer une procédure de calcul du déterminant de la matrice système $\mathbf{P}(s)$ d'un système régulier à partir d'un bond graph (théorème B.2 page 275). Cette correspondance étant uniquement basée sur la nature des arcs entre les deux formalismes, il n'y a pas de restriction sur le type de bond graph considéré (causal/bicausal, avec ou sans causalités dérivées sur les éléments de stockage, et par ailleurs utilisée à ce titre par El Feki [EF11] pour formuler le théorème B.4 page 279). Ce sont les simplifications opérées sur la représentation d'état du système

1. Une extension du théorème B.1 au cas des boucles algébriques de type $2ZCP$ ou $3ZCP$ impliquant les éléments R a été discuté par Jardin [Jar10], voir section B.4.

2. La définition B.9 et la correspondance digraphe/bond graph mentionnée a notamment été exploitée par Rahmani [Rah93], Jardin [Jar10], El Feki [EF11] et discutée par Fotsu Ngwompo [FN97]. Notons toutefois que certaines références utilisant cette correspondance peuvent être quelque peu ambiguës sur les définitions des types de chemins ([Yan12], Définition 2.39), d'où l'importance de la précision exacte de cette correspondance. En outre, les définitions bond graph de *chemins disjoints* de Mouhri [Mou00] et Mosiek [Mos99] sont bien consistantes avec celles de nos présents travaux (définition B.8 page 264).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

qui engendre les hypothèses simplificatrices sur les bond graphs considérés dans les procédures.

Après les précédents rappels sur les procédures existantes et les hypothèses associées, nous souhaitons à présent préciser la correspondance digraphe/bond graph existante et l'étendre à une classe de bond graph plus large (bond graph causal/bicausal sans causalité préférentielle, avec potentiellement des boucles causales d'ordre 0 de type $1ZCP$, $2ZCP$, $3ZCP$ et $4ZCP$, avec également potentiellement des champs R et/ou IC). Nous souhaitons clairement expliciter dans la procédure D.1 que nous proposons, la correspondance graphique entre digraphe et bond graph au niveau des cycles. Nous proposons également d'expliciter clairement tous les types d'arcs sur le digraphe issus des chemins causaux du bond graph et associés aux matrices $\mathbf{E}$ et $\mathbf{A}$ en exposant notamment les arcs avec opérateur de Laplace dans les digraphes construits à partir de la procédure D.1.

D.2 Procédure de construction du digraphe associé à un modèle bond graph

Nous proposons dans ce paragraphe une procédure permettant d'établir la correspondance entre un digraphe et un bond graph représentant un système linéaire singulier à faisceau régulier de la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_I & \mathbf{E}_{ID} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{\lambda D} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_I(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_D(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_\lambda(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_I & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{I\lambda} \\ \mathbf{A}_{DI} & \mathbf{I}_D & \mathbf{A}_{D\lambda} \\ \mathbf{A}_{\lambda I} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_\lambda + \mathbf{A}_\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_I(t) \\ \mathbf{x}_D(t) \\ \mathbf{x}_\lambda(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_I \\ \mathbf{B}_D \\ \mathbf{B}_\lambda \end{pmatrix} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_I & \mathbf{C}_D \dfrac{d(\cdot)}{dt} & \mathbf{C}_\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_I(t) \\ \mathbf{x}_D(t) \\ \mathbf{x}_\lambda(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{D} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t) \tag{D.1}$$

où,

- $\mathbf{x}_I(t) \in \mathbb{R}^{n_I}$ est le vecteur des variables d'énergie des éléments de stockage en causalité intégrale,
- $\mathbf{x}_D(t) \in \mathbb{R}^{n_D}$ est le vecteur des variables d'énergie des éléments de stockage en causalité dérivée,
- $\mathbf{x}_\lambda(t) \in \mathbb{R}^{n_\lambda}$ est un vecteur de variables de flux ou d'effort, dans le bond graph, choisies pour la représentation d'état.

Parmi les différentes sous-matrices de (D.1), $\mathbf{I}_I$, $\mathbf{I}_D$ et $\mathbf{I}_\lambda$ sont des matrices identité de dimension respectives n_I, n_D et n_λ, et C_D est une matrice d'opérateur de dérivation par rapport au temps. Les autres matrices sont quelconques, à coefficients réels, et sont de dimensions correspondantes à celles des vecteurs $\mathbf{x}_I$, $\mathbf{x}_D$ et $\mathbf{x}_\lambda$. Le bond graph représentant le système d'état (D.1) est général, sans causalité préférentielle particulière, causal ou bicausal, pouvant contenir des boucles d'ordre 0 de type $1ZCP$, $2ZCP$, $3ZCP$ et $4ZCP$ dans la classification de van Dijk [vD94] ainsi que des champs R et IC. Il doit respecter les contraintes globales de causalité pour que sa structure de jonction soit résoluble [vD94]. La procédure D.1 que nous proposons dans la présente section nous permet d'obtenir le digraphe générique de la figure D.1. Nous établirons également les correspondances entre les gains statiques des chemins causaux du bond graph et les poids des arcs du digraphe.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Procédure D.1

Soit un modèle bond graph causal/bicausal représentant le système singulier linéaire et invariant dans le temps (D.1). Le digraphe correspondant, représenté sur la figure D.1, est obtenu en appliquant les règles suivantes :

1. *Chaque variable d'énergie associée à un élément de stockage d'énergie en causalité intégrale, chaque variable d'énergie associée à un élément de stockage d'énergie en causalité dérivée, chaque variable de puissance choisie dans le vecteur d'état, chaque variable d'entrée associée à une source d'effort ou de flux et chaque variable de sortie associée à un détecteur d'effort ou de flux est respectivement représentée par un sommet d'état x_{I_i}, x_{D_i} et x_{λ_i}, d'entrée u_i et de sortie y_i sur le digraphe.*
2. *sous matrice $\mathbf{I}_I$: à chaque sommet d'état x_{I_i} du digraphe est associée une boucle de type* E–edge *de poids unitaire.*
3. *sous matrice $\mathbf{E}_{ID}$: chaque chemin causal reliant la dérivée d'une variable d'énergie x_{D_i} à la dérivée d'une variable d'énergie x_{I_j} est représenté par un arc de type* E–edge *reliant le sommet d'état x_{D_i} au sommet d'état x_{I_j}, dont le poids $\mathbf{e}_{ID_{ji}}$ de l'arc est égal à l'opposé du gain statique du chemin causal,*
4. *sous matrice $\mathbf{E}_D$: chaque chemin causal reliant la dérivée d'une variable d'énergie x_{D_i} à une variable d'énergie x_{D_j} est représenté par un arc de type* E–edge *reliant le sommet d'état x_{D_i} au sommet d'état x_{D_j}, le poids $\mathbf{e}_{D_{ji}}$ de l'arc étant égal au gain statique du chemin causal,*
5. *sous matrice $\mathbf{E}_{\lambda D}$: chaque chemin causal reliant une variable d'énergie x_{D_i} à une variable de puissance x_{λ_j} est représenté par un arc de type* E–edge *reliant le sommet d'état x_{D_i} au sommet d'état x_{λ_j}, dont le poids $\mathbf{e}_{\lambda D_{ji}}$ de l'arc est égal au gain statique du chemin causal,*
6. *sous matrice $\mathbf{A}_I$: chaque chemin causal reliant une variable d'énergie x_{I_i} à la dérivée d'une variable d'énergie x_{I_j} est représenté par un arc de type* A–edge *reliant le sommet d'état x_{I_i} au sommet d'état x_{I_j}, le poids $\mathbf{a}_{I_{ji}}$ étant égal au gain du chemin causal,*
7. *sous matrice $\mathbf{A}_{I\lambda}$: chaque chemin causal reliant une variable de puissance x_{λ_i} à la dérivée d'une variable d'énergie x_{I_j} est représenté par un arc de type* A–edge *reliant le sommet d'état x_{λ_i} au sommet d'état x_{I_j}, dont le poids $\mathbf{a}_{I\lambda_{ji}}$ de l'arc est égal au gain du chemin causal,*
8. *sous matrice $\mathbf{A}_{DI}$: chaque chemin causal reliant une variable d'énergie x_{I_i} à une variable d'énergie x_{D_j} est représenté par un arc de type* A–edge *reliant le sommet d'état x_{I_i} au sommet d'état x_{D_j}, dont le poids $\mathbf{a}_{DI_{ji}}$ de l'arc est égal à l'opposé du gain du chemin,*
9. *sous matrice $\mathbf{I}_D$: à chaque sommet d'état x_{D_i} du digraphe est associée une boucle de type* A–edge *de poids unitaire,*
10. *sous matrice $\mathbf{A}_{D\lambda}$: chaque chemin causal reliant une variable de puissance x_{λ_i} à la dérivée d'une variable d'énergie x_{D_j} est représenté par un arc de type* A–edge *reliant le sommet d'état x_{λ_i} au sommet d'état x_{D_j}, le poids $\mathbf{a}_{D\lambda_{ji}}$ de l'arc étant égal à l'opposé du gain du chemin causal,*
11. *sous matrice $\mathbf{A}_{\lambda I}$: chaque chemin causal reliant une variable d'énergie x_{I_i} à une variable de puissance x_{λ_j} est représenté par un arc de type* A–edge *reliant le sommet d'état x_{I_i} au sommet d'état x_{λ_j}, le poids $\mathbf{a}_{\lambda I_{ji}}$ de l'arc étant égal à l'opposé du gain du chemin,*
12. *sous matrice $\mathbf{I}_\lambda$: à chaque sommet d'état x_{λ_i} du digraphe est associée une boucle de type* A–edge*, de poids unitaire,*

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

13. *sous matrice* $\mathbf{A}_\lambda$ *: chaque chemin causal reliant une variable de puissance* x_{λ_i} *à une variable de puissance* x_{λ_j} *est représenté par un arc de type* A–edge *reliant le sommet d'état* x_{λ_i} *au sommet d'état* x_{λ_j}*, le poids* $\mathbf{a}_{\lambda_{ji}}$ *de l'arc étant égal à l'opposé du gain du chemin causal,*

    Les règles 1 *à* 13 *suffisent à constituer le digraphe duquel on peut établir le polynôme caractéristique du système singulier* (D.1) *(voir la figure D.2). Pour calculer le déterminant de sa matrice système* $\mathbf{P}(s)$ *et ses mineurs, le digraphe doit être complété par les règles* 14 *à* 21 *suivantes :*

14. *sous matrice* $\mathbf{B}_I$ *: chaque chemin causal reliant une variable d'entrée* u_i *à la dérivée d'une variable d'énergie* x_{I_j} *est représenté par un arc de type* A–edge *reliant le sommet d'entrée* u_i *au sommet d'état* x_{I_j}*, le poids* $\mathbf{b}_{I_{ji}}$ *de l'arc étant égal au gain du chemin causal,*
15. *sous matrice* $\mathbf{B}_D$ *: chaque chemin causal reliant une variable d'entrée* u_i *à une variable d'énergie* x_{D_j} *est représenté par un arc de type* A–edge *reliant le sommet d'entrée* u_i *au sommet d'état* x_{D_j}*, le poids* $\mathbf{b}_{D_{ji}}$ *de l'arc étant égal à l'opposé du gain du chemin causal,*
16. *sous matrice* $\mathbf{B}_\lambda$ *: chaque chemin causal reliant une variable d'entrée* u_i *à une variable de puissance* x_{λ_j} *est représenté par un arc de type* A–edge *reliant le sommet d'entrée* u_i *au sommet d'état* x_{λ_j}*, le poids* $\mathbf{b}_{\lambda_{ji}}$ *de l'arc étant égal à l'opposé du gain du chemin causal,*
17. *sous matrice* $\mathbf{C}_I$ *: chaque chemin causal reliant une variable d'énergie* x_{I_i} *à une variable de sortie* y_j *est représenté par un arc de type* A–edge *reliant le sommet d'état* x_{I_i} *au sommet de sortie* y_j*, le poids* $\mathbf{C}_{I_{ji}}$ *de l'arc étant égal au gain du chemin causal,*
18. *sous matrice* $\mathbf{C}_D$ *: chaque chemin causal reliant la dérivée d'une variable d'énergie* x_{D_i} *à une variable de sortie* y_j *est représenté par un arc de type* E–edge *reliant le sommet d'état* x_{D_i} *au sommet de sortie* y_j*, le poids* $\mathbf{c}_{D_{ji}}$ *étant égal à l'opposé du gain du chemin causal,*
19. *sous matrice* $\mathbf{C}_\lambda$ *: chaque chemin causal reliant une variable de puissance* x_{λ_i} *à une variable de sortie* y_j *est représenté par un arc de type* A–edge *reliant le sommet d'état* x_{λ_i} *au sommet de sortie* y_j*, le poids* $\mathbf{c}_{\lambda_{ji}}$ *de l'arc étant égal au gain du chemin causal,*
20. *sous matrice* $\mathbf{D}$ *: chaque chemin causal reliant une variable d'entrée* u_i *à une variable de sortie* y_j *est représenté par un arc de type* A–edge *reliant le sommet d'entrée* u_i *au sommet de sortie* y_j*, le poids* $\mathbf{d}_{ji}$ *de l'arc étant égal au gain du chemin causal,*
21. *Chaque sommet de sortie* y_i *du digraphe est relié à chaque sommet d'entrée* u_j *par un arc de poids* -1*.*

Sur la représentation digraphe de la figure D.1 issue de la procédure D.1, nous pouvons remarquer les points suivants :

— les arcs de type *E–edge* sont associés :

  — soit aux variables d'énergie x_{I_i}, correspondant à des boucles sur le digraphe, de poids unitaire. Ces boucles ne correspondent à aucun cycle causal sur le

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

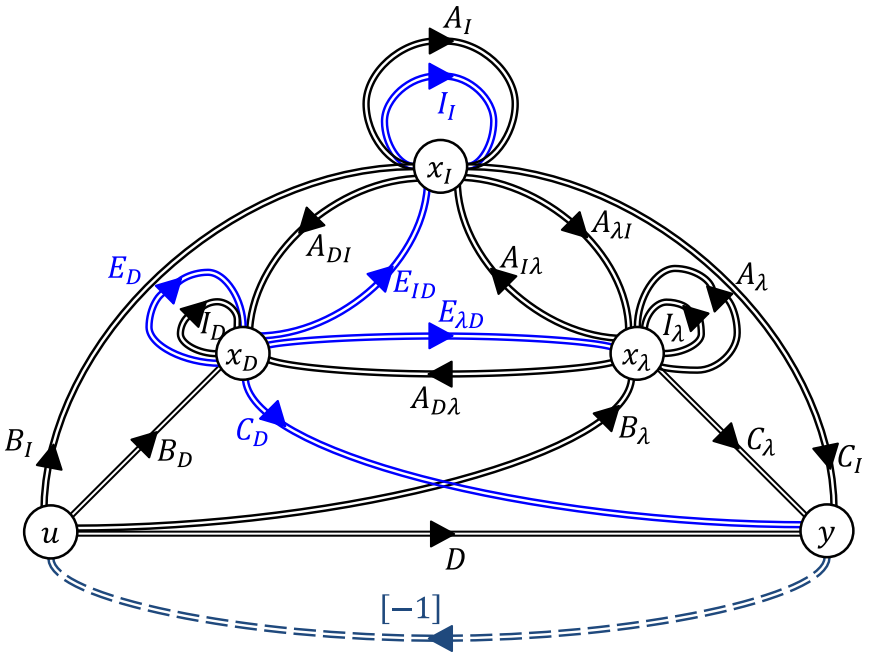


FIGURE D.1 – Digraphe générique obtenu à partir d'un modèle bond graph en appliquant la procédure D.1

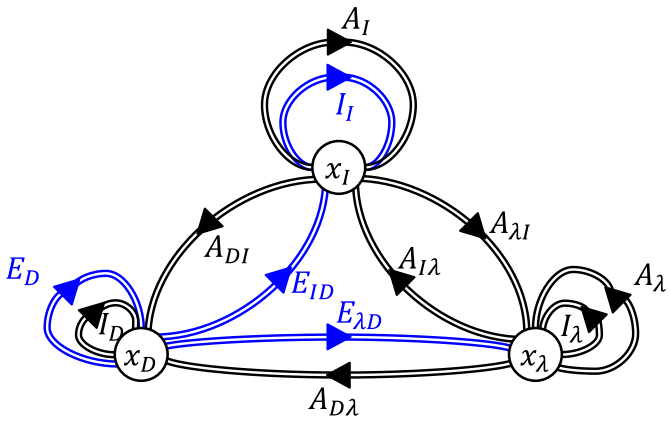


FIGURE D.2 – Remarque sur le digraphe générique obtenu à partir d'un modèle bond graph en appliquant les items 1 à 13 de la procédure D.1

bond graph associé,

— soit à tous les chemins causaux du bond graph issus des éléments de stockage en causalité dérivée.

— les arcs de type A–*edge* sont associés :

— soit aux variables d'énergie x_{D_i} et aux variables de puissance x_{λ_i}, correspondant à des boucles de poids unitaire. Ces boucles ne correspondent à aucun cycle causal sur le bond graph associé,

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

— soit à tous les chemins causaux du bond graph issus des éléments de stockage en causalité intégrale, des variables de puissance choisies dans le vecteur d'état et des sources.

Les arcs de type *E–edge* ou *A–edge* peuvent ainsi être discriminés suivant qu'ils apparaissent explicitement ou non dans des chemins causaux du bond graph. En considérant uniquement dans un premier temps les sommets d'états du digraphe, notons respectivement $n_{et\,E_x}$ et $n_{et\,A_x}$ le nombre d'arcs de type *E–edge* et *A–edge* associés aux variables d'énergie x_{I_i} et x_{D_i} et aux variables de puissance x_{λ_i} du modèle bond graph (sous entendu, entre elles uniquement). Le nombre d'arcs de type *E–edge* (resp. de type *A–edge*) provenant de la sous-matrice $\mathbf{I}_I$ (resp. des sous matrices $\mathbf{I}_D$ et $\mathbf{I}_\lambda$) est noté $n_{E_x,b}$ (resp. $n_{A_x,b}$). Tous ces arcs sont associés à des boucles de poids unitaire sur les digraphes des figures D.1 et D.2. Le nombre d'arcs de type *E–edge* provenant des sous-matrices $\mathbf{E}_{ID}$, $\mathbf{E}_D$ et $\mathbf{E}_{\lambda D}$ est respectivement noté $n_{E_x,\bar{b},D\to I}$, $n_{E_x,\bar{b},D\to D}$ et $n_{E_x,\bar{b},D\to\lambda}$; leur somme est notée $n_{et\,E_x,\bar{b}}$. Le nombre d'arcs de type *A–edge* provenant des sous-matrices $\mathbf{A}_{DI}$, $\mathbf{A}_I$, $\mathbf{A}_{I\lambda}$, $\mathbf{A}_{\lambda I}$, $\mathbf{A}_\lambda$ et $\mathbf{A}_{D\lambda}$ est respectivement noté $n_{A_x,\bar{b},I\to D}$, $n_{A_x,\bar{b},I\to I}$, $n_{A_x,\bar{b},\lambda\to I}$, $n_{A_x,\bar{b},I\to\lambda}$, $n_{A_x,\bar{b},\lambda\to\lambda}$ et $n_{A_x,\bar{b},\lambda\to D}$; leur somme est notée $n_{et\,A_x,\bar{b}}$. Nous avons évidemment

$$\begin{aligned} n_{et\,E_x} &= n_{E_x,b} + n_{et\,E_x,\bar{b}} \\ &= n_{E_x,b} + n_{E_x,\bar{b},D\to I} + n_{E_x,\bar{b},D\to D} + n_{E_x,\bar{b},D\to\lambda} \end{aligned} \tag{D.2}$$

et

$$\begin{aligned} n_{et\,A_x} &= n_{A_x,b} + n_{et\,A_x,\bar{b}} \\ &= n_{A_x,b} + n_{A_x,\bar{b},I\to D} + n_{A_x,\bar{b},I\to I} + n_{A_x,\bar{b},\lambda\to I} \\ &\quad + n_{A_x,\bar{b},I\to\lambda} + n_{A_x,\bar{b},\lambda\to\lambda} + n_{A_x,\bar{b},\lambda\to D} \end{aligned} \tag{D.3}$$

Il est ainsi important de préciser que les $n_{et\,E_x,\bar{b}}$ arcs de type *E–edge* et les $n_{et\,A_x,\bar{b}}$ arcs de type *A–edge* du digraphe correspondent à des chemins causaux intervenant dans les cycles du bond graph associé (voir par ailleurs la section D.3). En revanche, les $n_{E_x,b}$ arcs de type *E–edge* et les $n_{A_x,b}$ formant respectivement les $n_{E_x,b}$ boucles de type *E–edge* et les $n_{A_x,b}$ boucles de type *A–edge* sur le digraphe (figures D.1 et D.2) ne sont pas associés à des chemins causaux sur le bond graph.

En considérant à présent l'ensemble des arcs de type *E–edge* et *A–edge* sur le digraphe de la figure D.1, *i.e.* en considérant en plus des précédents, les arcs associés aux variables d'entrée u_i et de sorties y_i, nous pouvons proposer les considérations suivantes : notons respectivement $n_{uy\,E_x}$ et $n_{uy\,A_x}$ le nombre d'arcs de type *E–edge* et *A–edge* associés aux variables u_i et y_i apparaissant dans le digraphe générique de la figure D.1 et non dans celui de la figure D.2 *i.e.* ceux issus des items 14 à 21 de la procédure D.1. Le nombre d'arcs de type *E–edge* provenant de la sous-matrice $\mathbf{C}_D$ est noté $n_{E_x,\bar{b},D\to y}$. Le nombre d'arcs de type *A–edge* provenant des sous-matrices $\mathbf{B}_I$, $\mathbf{B}_D$, $\mathbf{B}_\lambda$, $\mathbf{C}_I$, $\mathbf{C}_\lambda$ et $\mathbf{D}$ est respectivement noté $n_{A_x,\bar{b},u\to I}$, $n_{A_x,\bar{b},u\to D}$, $n_{A_x,\bar{b},u\to\lambda}$, $n_{A_x,\bar{b},I\to y}$, $n_{A_x,\bar{b},\lambda\to y}$ et $n_{A_x,\bar{b},u\to y}$; leur somme est notée $n_{uy\,A_x,\bar{b}}$. En utilisant l'équation (D.2), nous pouvons définir n_{E_x}, le nombre total d'arc de type *E–edge* dans le digraphe générique de la figure D.1 :

$$\begin{aligned} n_{E_x} &= n_{et\,E_x} + n_{E_x,\bar{b},D\to y} \\ &= n_{E_x,b} + n_{E_x,\bar{b},D\to I} + n_{E_x,\bar{b},D\to D} + n_{E_x,\bar{b},D\to\lambda} + n_{E_x,\bar{b},D\to y} \end{aligned} \tag{D.4}$$

D'autre part, en utilisant (D.3), nous pouvons également définir n_{A_x}, le nombre total

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

d'arc de type *A–edge* dans le digraphe générique de la figure D.1. Nous avons $n_{A_x} = n_{et\,A_x} + n_{uy\,A_x,\bar{b}}$, soit donc

$$\begin{aligned} n_{A_x} = n_{A_x,b} \quad &+ \quad n_{A_x,\bar{b},I\to D} + n_{A_x,\bar{b},I\to I} + n_{A_x,\bar{b},\lambda\to I} \\ &+ \quad n_{A_x,\bar{b},I\to\lambda} + n_{A_x,\bar{b},\lambda\to\lambda} + n_{A_x,\bar{b},\lambda\to D} \\ &+ \quad n_{A_x,\bar{b},u\to I} + n_{A_x,\bar{b},u\to D} + n_{A_x,\bar{b},u\to\lambda} \\ &+ \quad n_{A_x,\bar{b},I\to y} + n_{A_x,\bar{b},\lambda\to y} + n_{A_x,\bar{b},u\to y} \end{aligned} \tag{D.5}$$

La procédure D.1 est illustrée dans les exemples suivants (pages 311 et 312).

Exemple 1

Considérons le modèle de la figure D.3, ne précisant pas de sources et de détecteurs. La représentation d'état est donnée en (D.6).

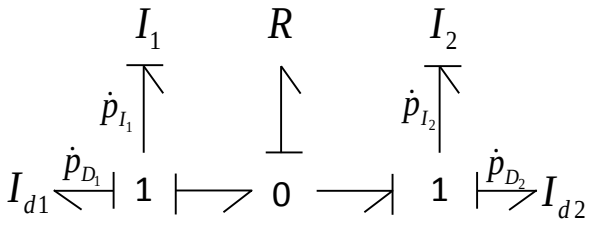


FIGURE D.3 – Exemple de bond graph avec deux éléments de stockage d'énergie en causalité dérivée

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_{I_1} \\ \dot{p}_{I_2} \\ \dot{p}_{D_1} \\ \dot{p}_{D_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/I_1 & R/I_2 & 0 & 0 \\ R/I_1 & -R/I_2 & 0 & 0 \\ -I_{d1}/I_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -I_{d2}/I_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{I_1} \\ p_{I_2} \\ p_{D_1} \\ p_{D_2} \end{bmatrix} \tag{D.6}$$

Le digraphe obtenue par la procédure D.1 est proposé en figure D.4.

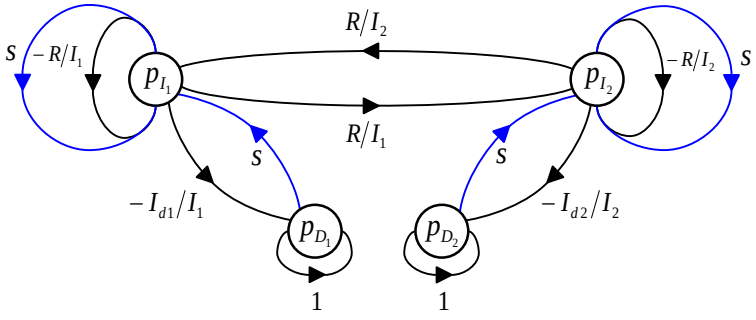


FIGURE D.4 – Digraphe du modèle de la figure D.3 par la procédure D.1

Remarque : par souci de clarté, le digraphe de la figure D.4 explicite les arcs de type *E–edge* en précisant l'opérateur de LAPLACE dans leur poids respectif. En toute rigueur, la procédure D.1 ne conduit pas à introduire ces opérateurs, qui sont par ailleurs pris en compte dans les procédures digraphes par simple distinction entre *E–edge* et *A–edge* comme l'induit la procédure D.1 (voir également la section C.2.5 page 289).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Exemple 2

Considérons le modèle de la figure D.5, précisant une source de flux et un détecteur d'effort. La représentation d'état est proposée en (D.7).

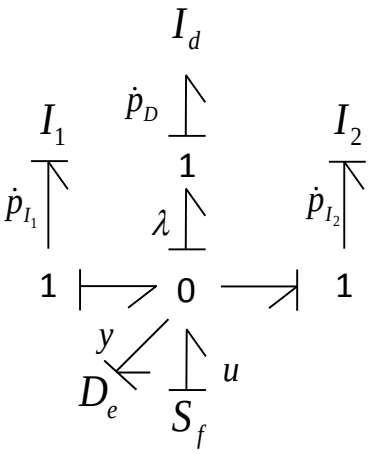


FIGURE D.5 – Exemple de bond graph avec un élément de stockage d'énergie en causalité dérivée

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_{I_1} \\ \dot{p}_{I_2} \\ \dot{p}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{I_d}{I_1} & \frac{I_d}{I_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{I_1} \\ p_{I_2} \\ p_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_d \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{d(\cdot)}{dt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{I_1} \\ p_{I_2} \\ p_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \qquad \text{(D.7)}$$

Le digraphe obtenue par la procédure D.1 est proposé en figure D.6.

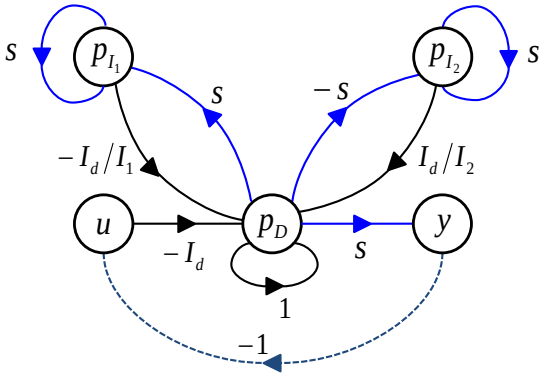


FIGURE D.6 – Digraphe du modèle de la figure D.5 par la procédure D.1

Introduisons dans (D.7) la variable d'état de puissance λ précisée sur la figure D.5, *i.e.* la variable d'effort sur le lien de puissance imposant l'effort sur la jonction 0. Le système se met sous la forme (D.8), équivalente à (D.7).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_{I_1} \\ \dot{p}_{I_2} \\ \dot{p}_D \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{I_d}{I_1} & \frac{I_d}{I_2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{I_1} \\ p_{I_2} \\ p_D \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_d \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{I_1} \\ p_{I_2} \\ p_D \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \qquad \text{(D.8)}$$

Le digraphe associé à (D.8) est donné en figure D.7.

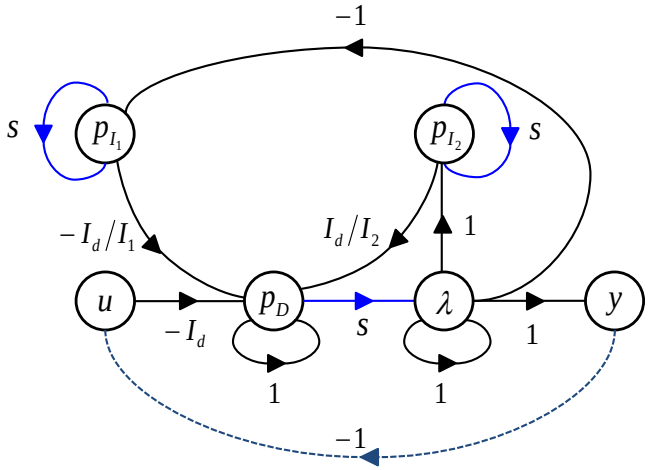


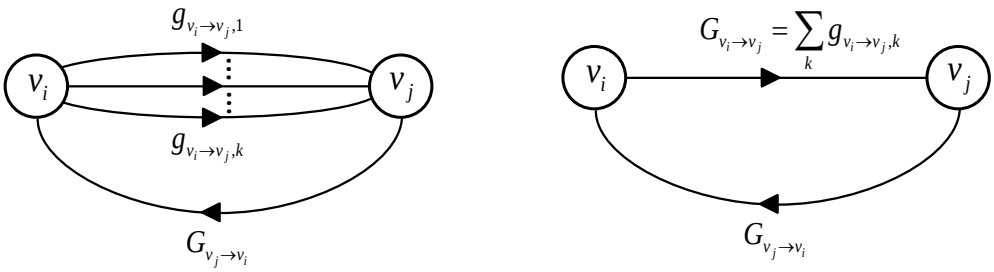
FIGURE D.7 – Digraphe du modèle de la figure D.5 en introduisant la variable d'état supplémentaire λ

Les calculs graphiques de déterminant tels la détermination du polynôme caractéristique ou du déterminant de la matrice système sur les digraphes des figures D.6 et D.7 conduisent au même résultat à un coefficient près (en l'occurrence -1 dans le présent cas compte tenu du choix des variables).

Remarque : Comme dans la représentation de la figure D.4 page 311 et la remarque associée, par souci de clarté, le digraphe de la figure D.7 explicite les arcs de type *E–edge* en précisant l'opérateur de LAPLACE dans leur poids respectif.

Contribution de plusieurs chemins causaux du bond graph à un même terme des matrices de la représentation d'état Sur le bond graph, un ensemble de k chemins causaux de même ordre entre deux variables v_i et v_j contribue au même terme m_{ji} d'une matrice de la représentation d'état. Ce terme m_{ji} est la somme des gains respectifs $g_{v_i \to v_j, l}$ des k chemins causaux *i.e.* $m_{ji} = \sum_{l=1}^{k} g_{v_i \to v_j, l}$. Sur le digraphe, ces k chemins causaux correspondent à k arcs entre le sommet v_i et le sommet v_j (dans ce sens). Un digraphe équivalent peut être construit en impliquant un seul arc entre ces deux sommets, de poids $\sum_{l=1}^{k} g_{v_i \to v_j, l}$. De manière générale, s'il existe un chemin orienté de v_j à v_i de poids $G_{v_j \to v_i}$, le digraphe de la figure D.8a est constitué de k familles comportant chacune un seul cycle, de poids respectif $g_{v_i \to v_j,1}$, $g_{v_i \to v_j,2}$, ... , $g_{v_i \to v_j,k}$. Le poids de l'ensemble des

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés



(a) (b)

FIGURE D.8 – Exemple d'équivalence entre digraphe pour le calcul du poids de l'ensemble des familles de cycles

familles de cycle est ainsi $\sum_{l=1}^{k} G_{v_j \to v_i} g_{v_i \to v_j,l} = G_{v_j \to v_i} \sum_{l=1}^{k} g_{v_i \to v_j,l} = G_{v_j \to v_i} G_{v_i \to v_j}$ et correspond également au poids de l'unique famille (d'un seul cycle) du digraphe D.8b. Cette équivalence reste valable lorsque les cycles de la figure D.8a d'une part, et l'unique cycle de la figure D.8b d'autre part sont considérés dans une même famille plus globale de cycles.

Il est à noter que l'ensemble des k familles du digraphe de la figure D.8a, faisant chacune intervenir les sommets v_i et v_j, ne correspond pas à une famille bond graph $\mathcal{F}$ (définition B.23 page 266), puisque les cycles les constituant ne sont par essence pas **BG - différents - génériques** (définitions B.10 et B.11 page 264). L'ensemble des k familles du digraphe de la figure D.8a correspond en revanche à un ensemble $\mathbb{F}$ (définition B.23 page 266, notation B.2 page 267) de k familles bond graph $\mathcal{F}_k$.

Dans la présente représentation de la figure D.8a, chaque cycle du digraphe correspond à un cycle causale ou un chemin entrée/sortie en bond graph.

Prise en compte des boucles causales d'ordre 0 Certaines précisions peuvent être à présent exposées pour étayer les propositions 4.1 page 116, 4.2 page 126 et 4.4 page 140 concernant les implications liées au choix du vecteur d'état.

Nous rappelons dans la présente section le traitement des boucles causales d'ordre 0 (ou « boucles algébriques » ou « chemins causaux d'ordre 0 » ou « ZCP » [vDB91a, vD94]) dans l'application de la procédure D.1 page 307 pour la construction d'une représentation d'état et d'un digraphe à partir d'un bond graph. L'annexe A.2 page 246 présente les éléments importants de ces boucles causales d'ordre 0 à travers la classification de VAN DIJK, et l'annexe A.3 page 248 détaille leur résolution suivant la représentation d'état choisie.

La construction du digraphe à partir du bond graph nécessite la détermination des gains statiques de chemins causaux éventuellement généralisés (définition B.17 page 265) suivant le choix des variables d'état (*i.e.* avec ou sans variable de puissance $\mathbf{x}_\lambda$ en plus des variables d'énergie $\mathbf{x}_I$ et $\mathbf{x}_D$). Tout d'abord, la présence de toutes les variables d'énergie dans le vecteur d'état indique que les $1ZCP$ et les $3ZCP$ impliquant des éléments I et/ou C ne sont pas résolues *a priori* , et « coupées » par le fait de devoir justement expliciter l'une des variables appartenant à ces boucles causales. Ensuite, l'absence de toute variable de puissance dans le vecteur d'état nécessite de résoudre les « autres ZCP », en

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

l'occurrence les $2ZCP$, les $3ZCP$ impliquant des éléments R et les $4ZCP$. Ce cas est notamment précisé dans les travaux de Maschke [Mas88, Mas90] pour les $2ZCP$ et les $3ZCP$ impliquant des éléments R, en notant que structurellement, dans la forme (A.14) page 253,

$$(\mathbf{I} - \mathbf{LS}_{33})^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} (\mathbf{LS}_{33})^{l} \ , \tag{D.9}$$

Ceci correspond ainsi à un parcours d'une boucle une infinité de fois, sans modifier son ordre. Maschke a également introduit le *graphe des chemins causaux*, représentation graphique permettant entre autres choses, d'exposer clairement la topologie des boucles causales et des chemins causaux dans le bond graph (figure D.9) [3]. Notons en outre que la formulation (D.9) permet d'aboutir à la condition énoncée par Rosenberg & Andry [RA79] sur la condition de résolubilité de boucles causales ($\mathbf{LS}_{33} \neq 1$, pour assurer la convergence de la série). Nous voyons également que cette condition de résolubilité, lorsqu'appliquée aux boucles sur la structure de jonction, conduit directement aux conclusions de Van Dijk et Breedveld sur les $4ZCP$ et $5ZCP$, respectivement *résolubles* et *non résolubles* [vDB91a, vD94] (voir figure D.9, où l'on doit nécessairement avoir $g_0 \neq 1$).

Nous insistons sur le fait que seuls les gains statiques respectifs du chemin élémentaire et du chemin généralisé sont différents dans le cas de la figure D.9. Au niveau de l'ordre en revanche, la scrutation du chemin élémentaire ou du chemin généralisé est équivalente. *Cette précision a de l'importance lors de la scrutation des chemins pour la détermination de la structure à l'infini à partir du bond graph par scrutation des chemins causaux, suivant les niveaux d'analyse visés* i.e. BG-structurel *ou* comportemental *selon la classification de* Jardin *[Jar10] (chapitre 1, section 1.4.4.3 page 34).*

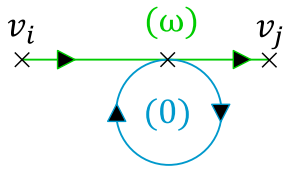
Chemin causal généralisé (v_i, v_j) d'ordre ω composé — du chemin élémentaire (ω) d'ordre ω, de gain g_ω, — touchant la boucle causale (0) d'ordre 0, de gain g_0	
Gain du chemin causal généralisé (v_i, v_j)	$G_{O_\omega}(v_i, v_j) = \sum_{l=0}^{\infty} g_\omega \, (g_0)^l = \dfrac{g_\omega}{1 - g_0}$ (D.10)

Figure D.9 – Détail du gain du chemin causal généralisé (v_i, v_j), utilisant le *graphe des chemins causaux* [Mas88] [FN97]

3. Ce point a notamment été utilisé par Fotsu-Ngwompo [FN97] pour exposer la difficulté supplémentaire de scrutation des chemins causaux en présence de boucles causales d'ordre 0.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

D.3 Correspondance digraphe/bond graph

D.3.1 Correspondance entre cycle digraphe et cycle bond graph

La démonstration des différentes procédures du chapitre 4 repose sur la correspondance entre le digraphe et le bond graph et plus particulièrement entre la scrutation des cycles dans le digraphe et sa correspondance dans le formalisme bond graph. Tout d'abord, par construction (procédure D.1 page 307), un arc digraphe fait correspondre en bond graph un chemin causal entre une variable (ou sa dérivée par rapport au temps) du vecteur d'état et une autre variable (ou sa dérivée) de ce même vecteur d'état, sans contenir aucune autre variable d'état choisie. Un chemin orienté en digraphe (définition C.1 page 281) étant une succession d'arcs tels que le sommet de départ du suivant est le sommet d'arrivée du précédent, il lui correspond en bond graph un chemin causal passant par les différentes variables associées aux sommets impliquées dans le chemin orienté du digraphe. Le cycle digraphe est un chemin orienté particulier dont le sommet final est confondu avec le sommet initial, qui plus est, ne faisant intervenir chaque sommet qu'une seule fois (définition C.6 page 281). En bond graph, **considérant les variables du vecteur d'état**, ceci correspond donc à un cycle causal passant une et une seule fois par chaque variable associée à chaque sommet du digraphe. Enfin, les procédures digraphe nécessitent de considérer des cycles disjoints, c'est à dire des cycles qui ne partagent aucun sommet entre eux (définition C.8 page 282). Ceci correspond au niveau bond graph à des cycles causaux qui ne passent pas par les mêmes variables du vecteur d'état (en rappelant qu'en digraphe, à chaque variable du vecteur d'état est associée un sommet). Ceci a donc amené à introduire la définition B.10 page 264 de cycles causaux **BG-différents-génériques**, extension de celle sur les cycles causaux (définition B.9 page 264, exprimée, pour cette dernière, dans le cas général des chemins causaux). Dans les exemples de cette section, les deux cycles disjoints en digraphe de la figure D.11b correspondent aux deux cycles **BG-différents-génériques** de la figure D.11a (qui se trouvent en l'occurrence ici être également BG-différents au sens de la définition B.9 page 264). Notons enfin que la correspondance entre cycle digraphe et cycle bond graph intervient notamment dans la démonstration des propositions 4.1 page 116 et 4.2 page 126.

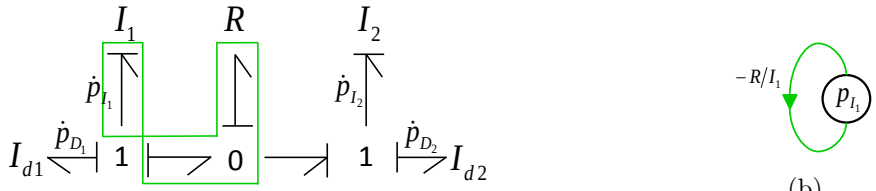


FIGURE D.10 – Exemple de correspondance entre cycle bond graph (a) et cycle digraphe (b) (sur l'exemple 1 page 311)

D.3.2 Correspondance entre cycle en digraphe et chemin entrée/sortie en bond graph, définition des familles bond graph

Les considérations de la section D.3.1 s'étendent naturellement en considérant, en plus des variables du vecteur d'état, les variables d'entrée u_i et de sortie y_i du système (*i.e.* d'une part, les sommets associés sur le digraphe et, d'autre part, les éléments sources et détecteurs du bond graph). Elles conduisent rigoureusement à une correspondance entre les *chemins* entrée/sortie du digraphe, noté $\mathcal{G}(\Sigma_d)$, incluant les sommets

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

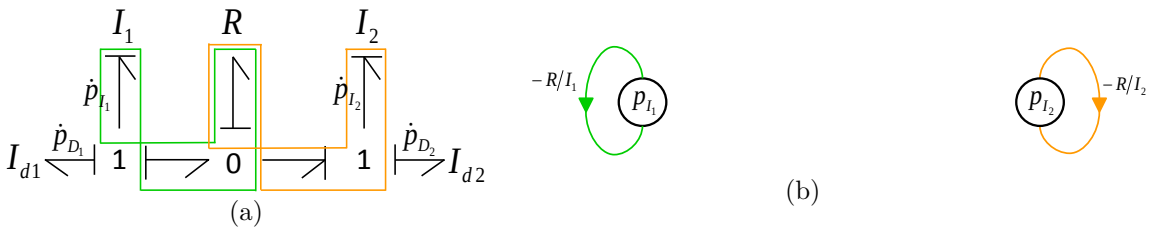


FIGURE D.11 – Exemple de correspondance entre cycles bond graph (a) et cycles digraphe (b) (sur l'exemple 1 page 311)

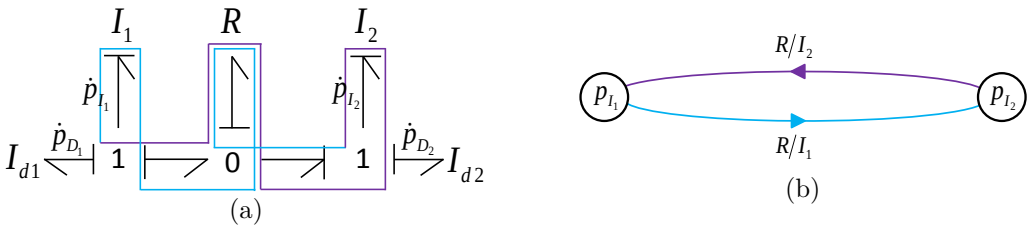


FIGURE D.12 – Exemple de correspondance entre cycle bond graph (a) et cycle digraphe (b) (sur l'exemple 1 page 311)

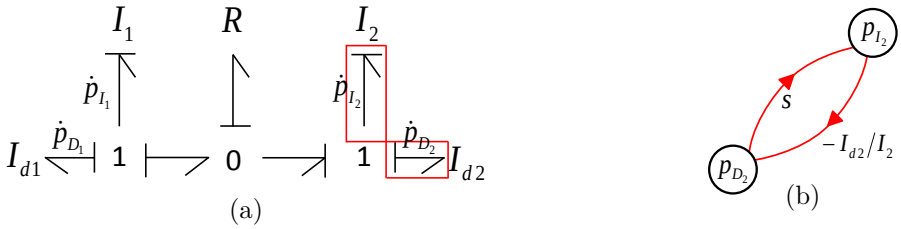


FIGURE D.13 – Exemple de correspondance entre cycle bond graph (a) et cycle digraphe (b) (sur l'exemple 1 page 311)

d'entrée et de sortie, et les *chemins* entrée/sortie du bond graph. En outre, la procédure de calcul du déterminant de la matrice système $\mathbf{P}(s)$ d'un système singulier (proposition 4.3 page 133) fait intervenir la notion de digraphe augmenté (noté $\mathcal{G}(\Sigma'_d)$, obtenu à partir de $\mathcal{G}(\Sigma_d)$ en ajoutant un arc (dit « de retour ») de poids -1 de chaque sommet de sortie vers chaque sommet d'entrée). Dès lors, en faisant uniquement et tacitement référence au digraphe $\mathcal{G}(\Sigma'_d)$ (proposition 4.3 page 133), la correspondance digraphe/bond graph s'établit entre les *cycles* digraphe faisant intervenir les sommets d'entrée et de sortie et les *chemins* entrée/sortie du bond graph correspondant. Conformément aux considérations de la section D.3.1, la correspondance s'établit ainsi entre les *cycles disjoints* du digraphe et les *chemins* **BG-différents-génériques** du bond graph (définition B.11 page 264).

Enfin, en introduisant la notion de familles directrices (définition C.12 page 282) du digraphe augmenté (notamment dans la proposition 4.3 page 133), la correspondance s'étend entre les *familles directrices* du digraphe augmenté et les *familles bond graph* (définition B.23 page 266). Cette correspondance est notamment utilisée pour démontrer la procédure de calcul du déterminant de la matrice système $\mathbf{P}(s)$ en bond graph (proposition 4.4 page 140) à partir de celle établit en digraphe (proposition 4.3 page 133).

Des exemples relatifs à la présente section D.3.2 sont traités en section 4.3.2 page 139 (exemples 1 page 145 et 2 page 148).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Annexe E

Bond graph : Analyse comportemental des systèmes réguliers

E.1 Introduction

Cette annexe présente la déclinaison des notions exposées au chapitre 2, section 2.3 page 58, au niveau d'analyse comportemental (tel que défini au chapitre 1, section 1.4.4 page 32). Rappelons qu'au chapitre 2, la classe de modèle direct traitée est celle dont la représentation d'état est *régulière* (E.1) :

$$\Sigma : \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{x}}(t) & = & \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) & = & \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{array} \right. \tag{E.1}$$

où $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur d'entrée et $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie. Les matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ sont de dimensions respectives $n \times n$, $n \times p$, $p \times n$ et $p \times p$. Le modèle inverse d'ordre minimal de Σ est noté Σ^{-1}. Sa représentation d'état *généralisée* est la suivante :

$$\Sigma^{-1} : \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{x}}_{inv}(t) & = & \mathbf{A}_{inv}\, \mathbf{x}_{inv}(t) + \mathbf{B}_{inv}\, \mathbf{u}_{inv}^{(\alpha)}(t) \\ \mathbf{y}_{inv}(t) & = & \mathbf{C}_{inv}\, \mathbf{x}_{inv}(t) + \mathbf{D}_{inv}\, \mathbf{u}_{inv}^{(\alpha)}(t) \end{array} \right. \tag{E.2}$$

où $\mathbf{x}_{inv}(t) \in \mathbb{R}^{n_{inv}}$ est le vecteur d'état *généralisé*, $\mathbf{y}_{inv}(t) = \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de sortie et $\mathbf{u}_{inv}^{(\alpha)}(t) = \mathbf{y}^{(\alpha)}(t) \in \mathbb{R}^{p \times \alpha}$ le vecteur d'entrée. Le vecteur de commande $\mathbf{u}_{inv}^{(\alpha)}(t)$ regroupe le vecteur de sortie $\mathbf{y}(t)$ du modèle direct Σ ainsi que l'ensemble des dérivées successives de ses composantes apparaissant dans le modèle inverse d'ordre minimal.

E.2 Structure à l'infini

E.2.0.1 Introduction et résultats préliminaires

Le chapitre 2, section 2.2 page 43 montre comment déterminer la structure à l'infini par approche modèle d'état (approche algébrique) sur des modèles directs (ayant une matrice de transfert $\mathbf{T}(s)$ associée rationnelle *propre*) à l'aide des théorèmes 2.2, 2.3 et 2.4 page 49 et 50. Nous avons également souligné que le cas direct ne comporte que des zéros à l'infini (cas simplifié de la forme de Smith-McMillan à l'infini, théorème 2.1 page 48), que le nombre de zéros à l'infini est égal à r, rang de $\mathbf{T}(s)$, et que leur ordre respectif peut être calculé grâce au degré des mineurs de la matrice système $\mathbf{P}(s)$ (2.4) page 45. Nous avons par ailleurs présenté qu'une approche algébrique peut également être menée sur des systèmes inverses tels que Σ^{-1} (E.2), possédant une matrice de transfert rationnelle *non propre*, $\mathbf{T}_{inv}(s)$, en se basant sur la factorisation de Smith-McMillan

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

à l'infini de cette matrice de transfert et en étendant respectivement les trois théorèmes 2.2, 2.3 et 2.4 page 49 et 50. Cela nous amène à exprimer successivement :

1. dans le cas propre (resp. non propre), l'expression des ordres des zéros (resp. des zéros et des pôles) à l'infini à partir des ordres des zéros à l'infini des mineurs de $\mathbf{T}(s)$ (théorème 2.2 page 49) (resp. à partir des degrés des mineurs de $\mathbf{T}_{inv}(s)$ (équation (2.9) page 48, et théorème 2.5 page 51)).

2. dans le cas propre (resp. non propre), l'expression des ordres des zéros à l'infini des mineurs de $\mathbf{T}(s)$ (resp. des degrés des mineurs de $\mathbf{T}_{inv}(s)$) à partir des degrés des mineurs correspondant de $\mathbf{P}(s)$ (resp. de $\mathbf{P}_{inv}(s)$) et de la dimension du vecteur d'état du modèle direct (théorème 2.3 page 50) (resp. du modèle inverse (théorème 2.5 page 51)).

3. dans le cas propre (resp. non propre), l'expression du plus *petit* ordre des zéros à l'infini des mineurs d'ordre considéré de $\mathbf{T}(s)$ (resp. le plus *haut* degré des mineurs d'ordre considéré de $\mathbf{T}_{inv}(s)$) à partir du plus *haut* degré des mineurs associés de $\mathbf{P}(s)$ (resp. de $\mathbf{P}_{inv}(s)$) et de la dimension du vecteur d'état du système associé à $\mathbf{T}(s)$ (théorème 2.4 page 50) (resp. associé à $\mathbf{T}_{inv}(s)$ (theorème 2.6 page 52)).

Il est important de garder ces notions en mémoire pour les déclinaisons des procédures bond graph de la section 2.3 page 58 au niveau d'analyse *comportemental*.

Remarque : par souci de consistance avec le vocable bond graph utilisé au chapitre 2, nous qualifierons dans la présente annexe E, le bond graph *causal* comme le bond graph lié au modèle *direct* et le bond graph bicausal comme celui lié au modèle *inverse* dans la mesure où il n'y a pas d'ambiguité sur ce point dans le contexte du chapitre 2.

E.2.1 Approche par le bond graph causal : nombre et ordre des zéros à l'infini de $\mathbf{T}(s)$

La présente section propose la déclinaison des théorèmes 2.11 et 2.12 page 63 au niveau d'analyse comportemental.

Issu de la forme de Smith-McMillan à l'infini (théorème 2.1 page 48), conduisant à $r = \operatorname{Rang} \mathbf{T}(s)$ et le test d'inversibilité 2.2 page 60, le nombre de zéros à l'infini peut être déterminé sur le bond graph de la manière suivante :

Théorème E.1 (*[Jar10]*)

(Nombre de zéros à l'infini, approche bond graph causal, niveau d'analyse comportemental) *Sur le bond graph en causalité préférentielle intégrale, le nombre r de* zéros à l'infini *du système est égal au nombre maximal de chemins qu'un ensemble de chemins causaux entrées/sorties* disjoints *puisse contenir pour assurer l'inversibilité d'un sous-système de dimension r.*

La détermination bond graph des ordres des zéros à l'infini au niveau *comportemental*, consistante avec l'approche algébrique, se base sur les théorèmes 2.2 page 49, 2.3 et 2.4 page 50, ainsi qu'à l'annexe B, le théorème B.2 page 275 et les considérations relatives à la mise en forme (B.18) page 278 :

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Théorème E.2 (*[Jar10]*)

(Ordre des zéros à l'infini, approche bond graph causal, niveau d'analyse comportemental) *Pour un système linéaire, invariant dans le temps, carré à p entrées et p sorties, ayant une matrice de transfert $T(s)$ rationnelle propre de rang r. Les ordres des zéros à l'infini peuvent être calculés de la manière suivante :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} n_1 & = & L_1 \\ n_i & = & L_i - L_{i-1} \end{array} \right. \tag{E.3}$$

où

$$L_i = \min_{\substack{(U,Y)\subset[\![1,p]\!]^2 \\ tel\ que\ |U|=|Y|=i}} \left\{ \min_{\mathcal{F}_{(U,Y),l_j}} \left\{ l_j \mid \rho_{l_j}^{(U,Y)} \neq 0 \right\} \right\} \ , \ \forall i \in \{1,...,r\} \tag{E.4}$$

où, sur le bond graph en causalité préférentielle intégrale, ne possédant pas d'élément de stockage d'énergie en causalité dérivée et ayant le cas échéant des boucles algébriques toujours résolubles :

- $\mathcal{F}_{(U,Y),l_j}$ *est la $j-$ième famille bond graph (définition B.23 page 266), contenant comme chemins causaux exactement i chemins causaux entrée/sortie* différents *(définition B.9 page 264) entre les variables d'entrée contenues dans l'ensemble U de dimension i ($|U| = i$) et les variables de sortie contenues dans l'ensemble Y de dimension i ($|Y| = i$)* ***et*** *de longueur l_j (notation B.1 page 267).*
- $\mathbb{F}_{(U,Y),l_j}$ *est l'ensemble des familles $\mathcal{F}_{(U,Y),l_j}$ (notation B.5 page 267).*
- $\rho_{l_j}^{(U,Y)}$ *est la somme des gains statiques de $\mathbb{F}_{(U,Y),l_j}$ dans laquelle le gain statique de chaque famille $\mathcal{F}_{(U,Y),l_j}$ doit être multiplié par :*
  - *un facteur $(-1)^d$, où d est le nombre de* cycles causaux différents *formant la famille $\mathcal{F}_{(U,Y),l_j}$,*
  - *un facteur $(-1)^\sigma$, où σ est le nombre de permutations nécessaires pour ordonner les i sorties de la famille $\mathcal{F}_{(U,Y),l_j}$ dans l'ordre initial des sorties, lorsque les i chemins causaux sont ordonnés dans l'ordre initial des entrées.*

E.2.2 Approche par le bond graph bicausal : nombre et ordre des pôles à l'infini de $\mathbf{T}_{inv}(s)$

La présente section propose la déclinaison du théorème 2.13 page 64 au niveau d'analyse comportemental.

Théorème E.3 (*[EF11]*)

(Ordre des pôles à l'infini, approche bond graph bicausale - niveau d'analyse comportemental) *Sur le bond graph bicausal, représentant un modèle inverse d'ordre minimal, linéaire, invariant dans le temps, carré à p entrées et p sorties, le nombre de pôles à l'infini de ce modèle est égal à p et leur ordre peut être calculé de la manière suivante :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} t_{inv\,1} & = & \omega_1 \\ t_{inv\,i} & = & \omega_i - \omega_{i-1} \end{array} \right. \tag{E.5}$$

où sur le bond graph bicausal :

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

$$\omega_i = \min_{\substack{(U,Y)\subset[\![1,p]\!]^2 \\ tel\ que\ |U|=|Y|=i}} \left\{ \min_{\mathcal{F}_{(U,Y),\omega_j}} \left\{ \omega_j \mid \rho_{\omega_j}^{(U,Y)} \neq 0 \right\} \right\} \quad , \quad \forall i \in \{1,...,p\} \tag{E.6}$$

où :

- n_{inv} *correspond au nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale (dimension de l'espace d'état),*
- n_D *correspond au nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité dérivée,*
- $\mathcal{F}_{(U,Y),\omega_j}$ *est la* $j-$*ième famille bond graph (définition B.23 page 266), contenant exactement* i *chemins causaux entrée/sortie* différents *(définition B.9 page 264) entre les variables d'entrée contenues dans l'ensemble* U *de dimension* i *(*$|U| = i$*) et les variables de sortie contenues dans l'ensemble* Y *de dimension* i *(*$|Y| = i$*)* **et** *d'ordre* $\omega_j \in [-n_D, n_{inv}]$ *(notation B.1 page 267),*
- $\mathbb{F}_{(U,Y),\omega_j}$ *est l'ensemble des familles* $\mathcal{F}_{(U,Y),\omega_j}$ *(notation B.5 page 267),*
- $\rho_{\omega_j}^{(U,Y)}$ *est la somme des gains statiques de* $\mathbb{F}_{(U,Y),\omega_j}$ *dans laquelle le gain statique de chaque famille* $\mathcal{F}_{(U,Y),\omega_j}$ *doit être multiplié par :*
  - *un facteur* $(-1)^d$*, où* d *est le nombre de* cycles *causaux* BG-différents-génériques *formant la famille* $\mathcal{F}_{(U,Y),\omega_j}$*,*
  - *un facteur* $(-1)^\sigma$*, où* σ *est le nombre de permutations nécessaires pour ordonner les* i *sorties de la famille* $\mathcal{F}_{(U,Y),\omega_j}$ *dans l'ordre initial des sorties, lorsque les* i *chemins causaux sont ordonnés dans l'ordre initial des entrées.*

Au niveau comportemental, la structure à l'infini est ainsi complètement définie sur un bond graph bicausal, représentant un système inverse LTI pouvant se mettre sous la forme généralisée (E.2) et ayant une matrice de transfert associée (2.15) page 51 rationnelle non propre ne possédant que des pôles à l'infini.

E.2.3 Degré relatif et ordre d'essentialité

E.2.3.1 Détermination du degré relatif par le bond graph causal

La présente section propose la déclinaison du théorème 2.14 page 65 au niveau d'analyse comportemental.

Comme rappelé par Fotsu-Ngwompo [FN97] et Jardin [Jar10], l'« exception de WU & YOUCEF-TOUMI » [WYT95] souligne la nécessité de considérer les gains des chemins causaux pour établir une procédure bond graph conduisant aux mêmes résultats que l'approche algébrique. La détermination au niveau d'analyse *comportemental* est ainsi la suivante (où $\tilde{G}$ représente le gain *statique* du chemin causal (définition B.13 page 265), alors que G représente le gain du chemin causal (définition B.12 page 264)) :

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Théorème E.4 (*[WYT95], [FN97], [Jar10]*)

(Degré relatif, approche bond graph causal, niveau d'analyse comportemental) *Sur un bond graph en causalité préférentielle intégrale, le* degré relatif n'_i *de la sortie y_i peut être déterminé de la manière suivante :*

$$n'_i = \min_k \left\{ \omega_k \,|\, \sum_{l|\omega_l(u_j,y_i)=\omega_k} \tilde{G}_l\left(u_j, y_i\right) \neq 0 \right\} \tag{E.7}$$

où $\tilde{G}_l\left(u_j, y_i\right)$ est le gain statique du chemin causal l d'ordre ω_k entre une *entrée u_j et* la *sortie y_i.*

Notons que le calcul des gains statiques sur lequel se base ce théorème est issu des travaux de Fotsu-Ngwompo [FN97], originellement adressés par Rosenberg [Ros71], sur l'obtention de modèle d'état à partir du modèle bond graph, formulé sur des bond graphs ne présentant ni boucle algébrique, ni causalité en dérivation sur les éléments de stockage d'énergie. Basé sur [Ros71], Rahmani, Sueur et Dauphin-Tanguy ont montré que cette procédure d'obtention du modèle d'état sous forme *régulière* (E.1) pouvait être étendue aux modèles possédant des causalités dérivées sur les éléments de stockage, dans le cas de bond graphs en causalité préférentielle intégrale [RSDT97], [RDT98] [1].

Remarque : dans le présent cas de bond graphs sans causalité dérivées conduisant à une représentation d'état *régulière*, un chemin entrée/sortie $u_j \rightarrow y_i$ sera nécessairement d'ordre **positif** (les notions d'*ordre* et de *longueur* sont en outre confondues dans ce cas). Ceci est consistant avec la définition algébrique (théorème 2.7 page 52), où le degré relatif est nécessairement un *zéro à l'infini par ligne* de $\mathbf{T}(s)$, rationnelle propre. Nous pouvons également à ce stade introduire le fait qu'il en sera de même (*i.e.* ordre **positif**) pour la classe de modèle comprenant des causalités dérivées sur les éléments de stockage résultant de boucles algébriques de type $1ZCP$ ou de type $3ZCP$ impliquant des éléments I et/ou C, dès lors que le modèle d'état peut se simplifier à la forme régulière (E.1) grâce à la procédure de [RSDT97], [RDT98], puisque la fonction de transfert $\mathbf{T}(s)$ associée sera rationnelle propre [2]. Un exemple pouvant se mettre sous forme régulière peut être celui proposé en figure 4.16 (b) page 145 (chapitre 4), où $\mathbf{T}_{4.16b}(s) = -\dfrac{1}{1 + I_1/I_2 + I_1/I_d}$ et pour lequel le chemin d'ordre minimal (vérifiant l'hypothèse de non-nullité de gain statique) est d'ordre 0 (et donc ici $n'_i = 0$).

En revanche, un premier contre-exemple, celui d'un modèle ne pouvant pas se mettre sous forme régulière, peut être celui proposé en figure 4.16 (a) page 145 (chapitre 4), où $\mathbf{T}_{4.16a}(s) = \dfrac{s}{1/I_1 + 1/I_2 + 1/I_d}$ et pour lequel le chemin entrée/sortie d'ordre minimal (vérifiant l'hypothèse de non-nullité de gain statique) est d'ordre -1. *(Nous ne faisons donc à ce stade pas de lien avec le degré relatif, puisque non défini pour cette classe de système).*

1. En toute rigueur, il est important de rappeler que dans ces références, la procédure n'envisage que le cas où les causalités dérivées sur les éléments de stockage sont dues à des boucles algébriques entre éléments de stockage *i.e.* des $1ZCP$ ou des $3ZCP$ impliquant des éléments I et/ou C, dans la classification de Van Dijk *et al.* [vDB91a, vD94] (voir l'annexe A.2 page 246). Notons par ailleurs que cette procédure est rediscutée et détaillée au chapitre 4, section 4.2.2.

2. Cette affirmation est rediscutée au chapitre 4 et est en toute rigueur une conséquence immédiate du lemme 4.9 page 161.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Un deuxième contre-exemple peut être celui d'un modèle comportant des cycles causaux entre éléments de stockage d'énergie en causalité dérivée et éléments R, quand bien même le système peut s'exprimer de manière *régulière*. Une illustration peut être celle de la figure 4.19 (a) page 148 (chapitre 4), pour lequel $\mathbf{T}_{4.19a}(s) = \dfrac{sR}{s + R/I_1 + R/I_2}$ (soit donc $n'_i = 0$) et où le chemin entrée/sortie d'ordre minimal (vérifiant l'hypothèse de non-nullité de gain statique) est d'ordre -1.

E.2.3.2 Détermination du degré relatif par le bond graph bicausal

La détermination de n'_i au niveau comportementale sur le bond graph bicausal nécessite la considération des gains des chemins causaux pour établir une procédure consistante avec l'« approche algébrique » (théorème 2.8 page 53). Le théorème 2.15 page 66 précise la procédure bond graph à laquelle se simplifie la scrutation au niveau d'analyse BG-structurel, lors de différence de structure à l'infini entre système original et sous-système dans lequel la sortie y_i n'est pas considérée. Au niveau d'analyse comportemental, la détermination du degré relatif n'_i sur le modèle *inverse* est ainsi très proche de celle de l'ordre d'essentialité sur le modèle *direct* (théorème E.5 ci-après) et ne sera donc pas ici détaillée. La dualité existante entre ces procédures a été précisée par El Feki, Jardin *et al.* [EFJMF+12b]. Elle est directement issue des définitions algébriques des invariants sur $T(s)$ ou $T(s)^{-1}$ et sera à nouveau abordée dans la suite de cette annexe.

E.2.3.3 Détermination de l'ordre d'essentialité par le bond graph causal

La présente section propose la déclinaison du théorème 2.16 page 66 au niveau d'analyse comportemental.

A partir du théorème 2.9 page 55 et du théorème E.2, nous pouvons formuler cette détermination de la manière suivante :

Théorème E.5 (*[Jar10]*)

(Ordre d'essentialité, approche bond graph causal, niveau d'analyse comportemental) *Sur un bond graph causal représentant un modèle linéaire, invariant dans le temps et inversible, ne comportant pas d'élément de stockage d'énergie en causalité dérivée et ayant le cas échéant, des boucles algébriques toujours résolubles, l'ordre d'essentialité n_{ie} de la sortie y_i peut être déterminé de la manière suivante :*

$$n_{ie} = L_p - L_{p-1}^{(i)} \tag{E.8}$$

où sur le bond graph,

$$L_p = \min_{\substack{U\subset[\![1,m]\!]\ ,\ Y\subset[\![1,p]\!] \\ tel\ que\ |U|=|Y|=p}} \left\{ \min_{\mathcal{F}_{(U,Y)}\,,\,L_j} \left\{ L_j \mid \rho_{L_j}^{(U,Y)} \neq 0 \right\} \right\} \tag{E.9}$$

et sur le bond graph sans considération de la $i-$ième sortie,

$$L_{p-1}^{(i)} = \min_{\substack{U^{(i)}\subset[\![1,m]\!]\setminus\{i\},Y^{(i)}\subset[\![1,p]\!]\setminus\{i\} \\ tel\ que\ |U^{(i)}|=|Y^{(i)}|=p-1}} \left\{ \min_{\mathcal{F}_{(U^{(i)},Y^{(i)})}\,,\,L_j} \left\{ L_j \mid \rho_{L_j}^{(U^{(i)},Y^{(i)})} \neq 0 \right\} \right\} \tag{E.10}$$

où :

— *m est le nombre d'entrées et p est le nombre de sorties,*

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

— $\mathcal{F}_{(U,Y),L_j}$ *(resp.* $\mathcal{F}_{(U^{(i)},Y^{(i)}),L_j}$ *sans considération de sa* $i-$*ième sortie) est la* $j-$*ième famille du bond graph (définition B.23 page 266), contenant exactement* p *(resp.* $p-1$*) chemins causaux entrées/sorties* différents *(définition B.9 page 264) entre les variables d'entrées contenues dans l'ensemble* U *de dimension* p *(resp.* $U^{(i)}$ *de dimension* $p-1$*) et les variables de sorties contenues dans l'ensemble* Y *de dimension* p *(resp.* $Y^{(i)}$ *de dimension* $p-1$*)* ***et*** *de longueur* L_j *(notation B.1 page 267),*

— $\mathbb{F}_{(U,Y),L_j}$ *(resp.* $\mathbb{F}_{(U^{(i)},Y^{(i)}),L_j}$*) est l'ensemble des familles* $\mathcal{F}_{(U,Y),L_j}$ *(resp.* $\mathcal{F}_{(U^{(i)},Y^{(i)}),L_j}$*) (notation B.5 page 267),*

— $\rho_{L_j}^{(U,Y)}$ *(resp.* $\rho_{L_j}^{(U^{(i)},Y^{(i)})}$*) est la somme des gains statiques de* $\mathbb{F}_{(U,Y),L_j}$ *(resp.* $\mathbb{F}_{(U^{(i)},Y^{(i)}),L_j}$*) dans laquelle le gain statique de chaque famille* $\mathcal{F}_{(U,Y),L_j}$ *(resp.* $\mathcal{F}_{(U^{(i)},Y^{(i)}),L_j}$*) doit être multiplié par :*
  — *un facteur* $(-1)^d$*, où* d *est le nombre de* cycles *causaux* différents *formant la famille* $\mathcal{F}_{(U,Y),L_j}$ *(resp.* $\mathcal{F}_{(U^{(i)},Y^{(i)}),L_j}$*),*
  — *un facteur* $(-1)^\sigma$*, où* σ *est le nombre de permutations nécessaires pour ordonner les* p *(resp.* $p-1$*) sorties de la famille* $\mathcal{F}_{(U,Y),L_j}$ *(resp.* $\mathcal{F}_{(U^{(i)},Y^{(i)}),L_j}$*) dans l'ordre initial des sorties, lorsque les* p *(resp.* $p-1$*) chemins causaux sont ordonnés dans l'ordre initial des entrées.*

E.2.3.4 Détermination de l'ordre d'essentialité par le bond graph bicausal

La présente section propose la déclinaison du théorème 2.17 page 67 au niveau d'analyse comportemental.

Théorème E.6 (*[EF11]*)

(Ordre d'essentialité, approche bond graph bicausal, niveau d'analyse comportemental) *Sur un bond graph bicausal, représentant un modèle inverse d'ordre minimal, linéaire, invariant dans le temps, l'*ordre d'essentialité n_{ie} *de la sortie* y_i *peut être déterminé de la manière suivante :*

$$n_{ie} = -\min_{k,j}\left\{\omega_k(y_i \to u_j) \middle| \sum_{l|\omega_l(y_i\to u_j)=\omega_k(y_i\to u_j)} \tilde{G}_l\left(y_i \to u_j\right) \neq 0\right\} \tag{E.11}$$

où $\tilde{G}_l\left(y_i \to u_j\right)$ *est le gain statique du chemin causal* ① *d'ordre* $\omega_l(y_i \to u_j)$ *entre la double source associée à* y_i *et le double détecteur associé à* u_j*.*

Remarque : En rapport avec les différents niveaux d'analyse (*BG-structurel* et *comportemental*), nous pouvons noter le point suivant. Dans l'hypothèse où le gain statique d'un ensemble de chemins causaux s'annule, l'ordre minimal sera incrémenté de sorte à vérifier la non nullité de la somme du gain statique de l'ensemble de chemins causaux d'ordre $\omega_l(y_i \to u_j)+1$. Cela aura pour conséquence de *diminuer* l'ordre d'essentialité dans ce cas (et ainsi l'ordre de dérivation maximal de la sortie associée). En d'autres termes, l'ordre d'essentialité $n_{BG-s,ie}$ (au niveau *BG-structurel*), sera toujours plus grand que l'ordre d'essentialité n_{ie} (au niveau *comportemental*) lors de sa détermination sur le bond graph bicausal.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Annexe F

Application de l'analyse structurelle aux modèles multicorps de véhicule, et implémentation logicielle

F.1 Introduction

La présente annexe illustre les développements de l'analyse structurelle des systèmes singuliers proposés aux chapitres 3 et 4 sur le modèle de référence multicorps quart de véhicule présenté au chapitre 1 (section 1.3.3.3, figure 1.10 page 23) et rappelé en figure F.2. Comme introduit en section 1.4.5, l'analyse est menée avec les outils logiciels suivants, selon le niveau d'analyse et la finalité envisagée :

— aux niveaux d'analyse *structurel* (structuré et BG-structurel) et *comportemental*, nous utilisons le logiciel *MS1* [MS1] pour l'analyse exhaustive des *chemins causaux* (définition B.4 page 263) et des *familles de chemins causaux* (définition B.23 page 266) ainsi que leurs attributs (*longueur* et *ordre*, définitions respectives B.25 et B.26 page 266),

— pour le niveau d'analyse *numérique*, l'implémentation est réalisée dans *LMS Imagine.Lab Amesim* [Sie]. Cette étape consiste en premiers lieux à valider que l'organisation causale particulière des modèles inverses est compatible avec cette plateforme de simulation. Les modèles sont ensuite validés en utilisant des protocoles de validation de modèles industriels [PMAL09b, PMAL09a], dont une partie est brièvement illustrée dans la présente annexe.

Nous rappelons que le mécanisme considéré est celui de la figure F.1 et dont le modèle, proposé en figure F.2, est un multicorps « quart de véhicule » simplifié avec masses suspendue et non suspendue en translation suivant les directions $\overrightarrow{x_0}$, $\overrightarrow{y_0}$ et $\overrightarrow{z_0}$ du référentiel galiléen. Les rotations ne sont pas modélisées et la dynamique de la masse suspendue est définie au centre roue. Le bond graph introduit les éléments de modélisation suivants :

— les contraintes mécaniques (conduisant à des éléments de stockage d'énergie I en causalité dérivée associées à des boucles causales d'ordre zéro de classe 1 ou « $1ZCP$ » dans la classification de VAN DIJK [vD94], annexe A.2 page 246),
— les cinématiques des trains (MTF), dont la remontée d'effort associée représente l'effet Broulhiet de suspension,
— le rappel gravitaire de direction.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

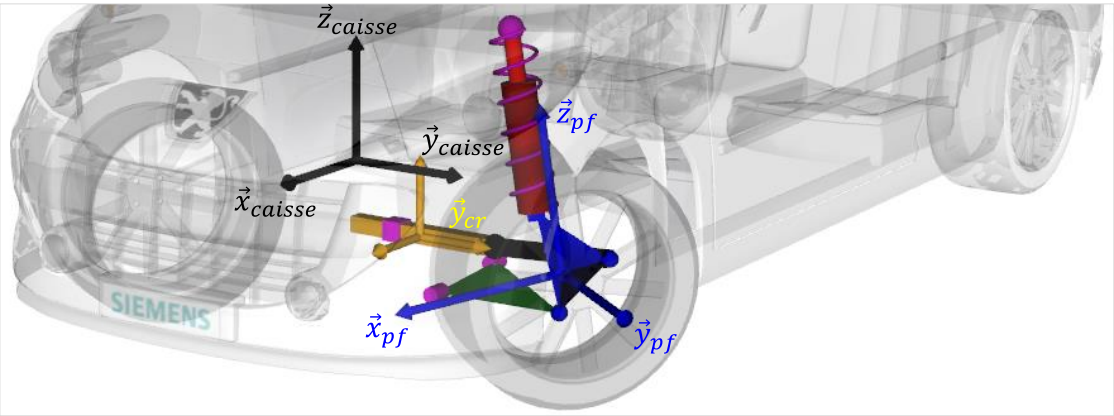


FIGURE F.1 – Mécanisme « quart de véhicule », faisant intervenir les solides ***caisse***, ***porte-fusée*** et ***crémaillère***

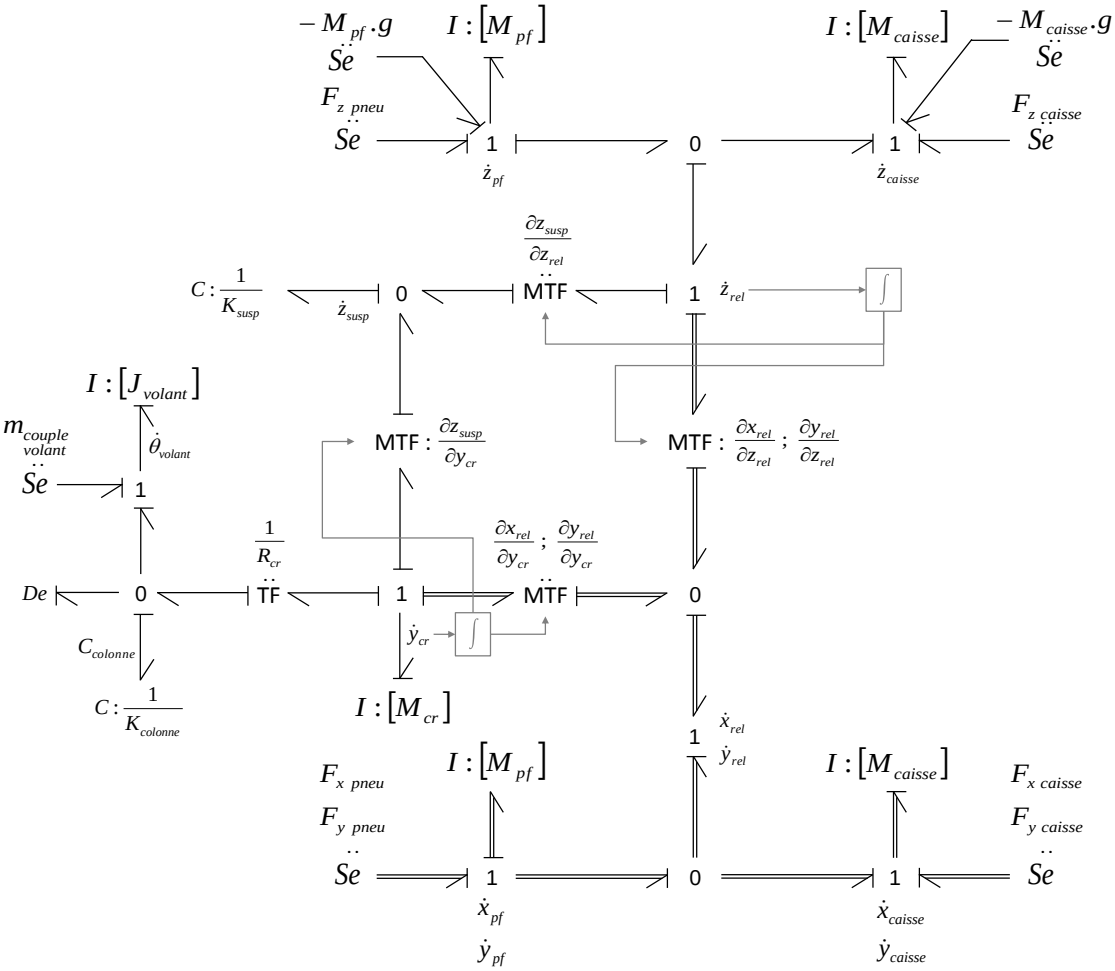


FIGURE F.2 – Modèle multicorps quart de véhicule à 6 degrés de liberté, simplifié à la translation, avec crémaillère et rappel gravitaire de direction [AL07] (détaillé au chapitre 1, section 1.3.3.3, figure 1.10 page 23)

Le modèle possède 10 variables d'état, dont deux introduites pour le calcul de z_{rel} et y_{cr}, pour le pilotage des MTF (détaillés en section 1.3.3.3 page 22).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Notons que le modèle de la figure F.2 est un modèle non-linéaire, dont les non-linéarités sont dues, dans le présent cas, aux différents MTF modélisant la cinématique des trains. Il est important de mentionner que, conformément à la classe de modèle adressée dans ce mémoire, en l'occurrence celle des modèles *linéaires singuliers*[1], nous allons appliquer l'analyse structurelle à un modèle linéarisé, représentant uniquement ici la structure d'interconnexion énergétique du modèle. Ce dernier ne représente pas nécessairement le modèle *linéarisé tangent*. Dans l'approche mise en place dans la présente annexe, nous allons confirmer les résultats de l'analyse structurelle établie sur le modèle linéarisé, sur le modèle non-linéaire initiale, sans que cela n'ait évidemment valeur de démonstration. Nous avons à ce titre formulé un certain nombre de perspectives en conclusions de ce mémoire, dont l'une viserait l'extension de nos travaux à certaines classes de modèles non-linéaires, dont celle regroupant les exemples traités dans la présente annexe. Une justification que nous pouvons en outre apporter au choix de travailler sur le modèle linéarisé, par rapport à l'étude que nous faisons ici et par rapport aux différentes procédures développées dans ce mémoire, est que l'ensemble des chemins causaux passant par les modulations seront nécessairement d'ordre plus élevé que les chemins causaux ne passant uniquement que par les bonds.

F.2 Implémentation logicielle et validation

F.2.1 Implémentation dans le logiciel *MS1* [MS1]

En tenant compte des considérations exposées en introduction (section F.1), la déclinaison du modèle quart de véhicule *linéarisé* ne requiert pas davantage de commentaires. L'implémentation du modèle linéarisé dans *MS1*, issu de celui de la figure F.2, utilise une réécriture préalable du modèle bond graph avec des mono-liens (figure F.3), et est illustré en figure F.4.

F.2.2 Implémentation dans le logiciel *LMS Imagine.Lab Amesim* [Sie]

L'implémentation du modèle de la figure F.2 dans *Amesim* nécessite l'écriture préalable du système d'équation. Ce dernier est ici manipulé pour obtenir un système d'état sous forme *classique*, et validé avec la même approche que les modèles multicorps industriels de la solution *Amesim Vehicle Dynamics* [PMAL09b]. La causalité du sous-modèle *Amesim* est exposée en figure F.5. La validation est réalisée en comparant les modèles développés dans ce mémoire en simulation fréquentielle (figure F.6) et temporelle (figure F.7) avec le référentiel que constituent les modèles standards de la solution *Amesim* :

— un exemple de validation fréquentielle du modèle multicorps à six degrés de liberté est proposé en figure F.6. Dans le présent cas, l'analyse fréquentielle est réalisée sur le mode vertical de la masses non-suspendue (associé à la variable z_{pf}), en comparant les résultats ①, du modèle multicorps à six degrés de liberté, avec ②, le modèle à quinze degré de liberté de la librairie *Amesim Vehicle Dynamics*, et ③, avec un modèle équivalent construit avec la librairie *Amesim Mechanical*,

— un exemple de validation temporelle du modèle multicorps à six degrés de liberté est proposé en figure F.7. Dans ce cas, l'analyse temporelle est réalisée à l'aide

1. Par exemple décrite au chapitre 4, section 4.3.2 page 139, *i.e.* classe de modèle bond graph représentant un système linéaire singulier pouvant se mettre sous la forme (4.48) page 139. Cette classe est également décrite en annexe A.3, l'associant à l'approche utilisant la matrice de structure de jonction (forme (A.23) page 255).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

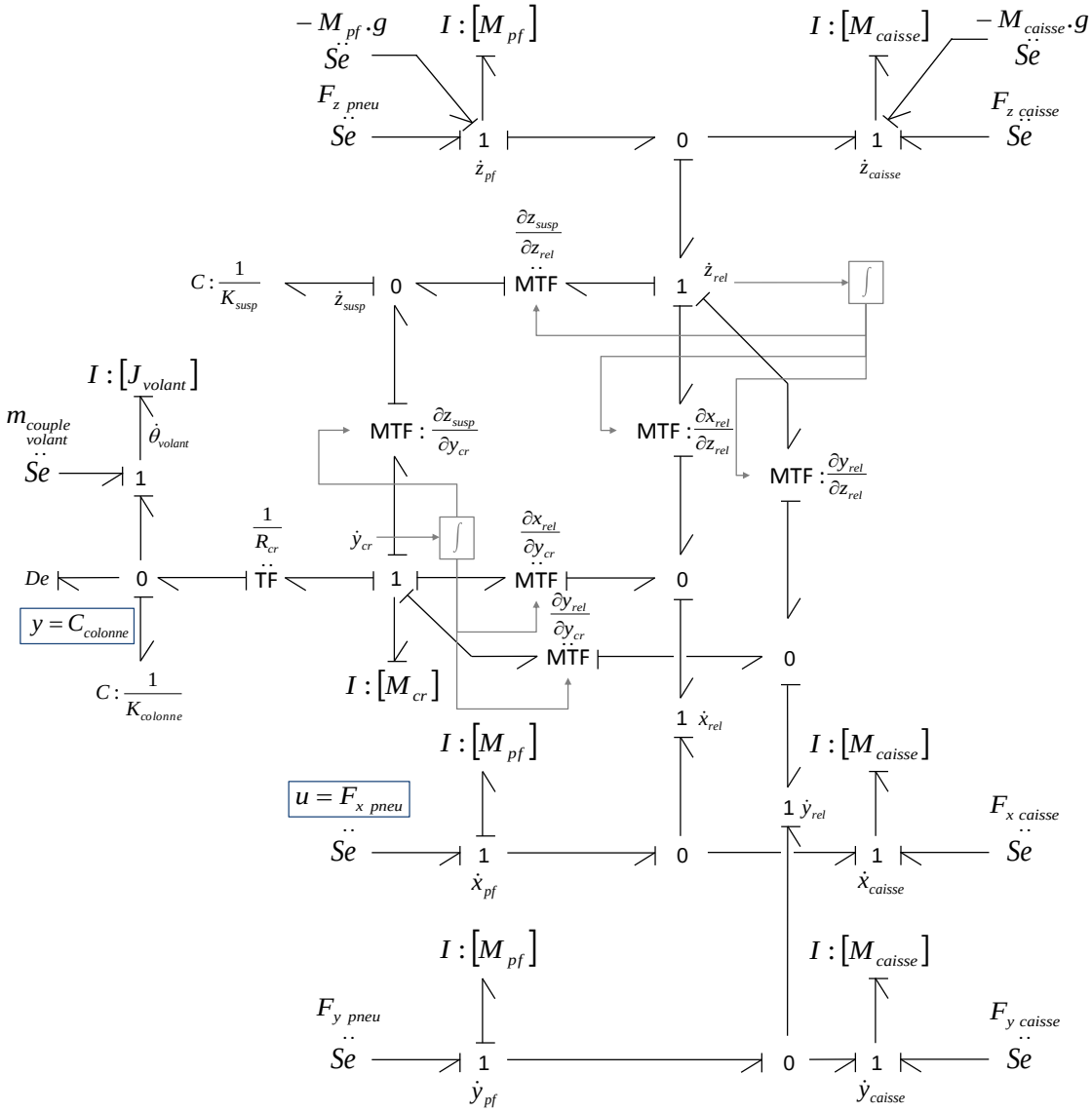


FIGURE F.3 – Modèle de la figure F.2 réécrit avec des mono-liens

d'un balayage sinusoïdale au centre roue, en comparant les résultats ①, du modèle multicorps à six degrés de liberté, avec ②, un modèle équivalent construit avec la librairie *Amesim Mechanical*.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

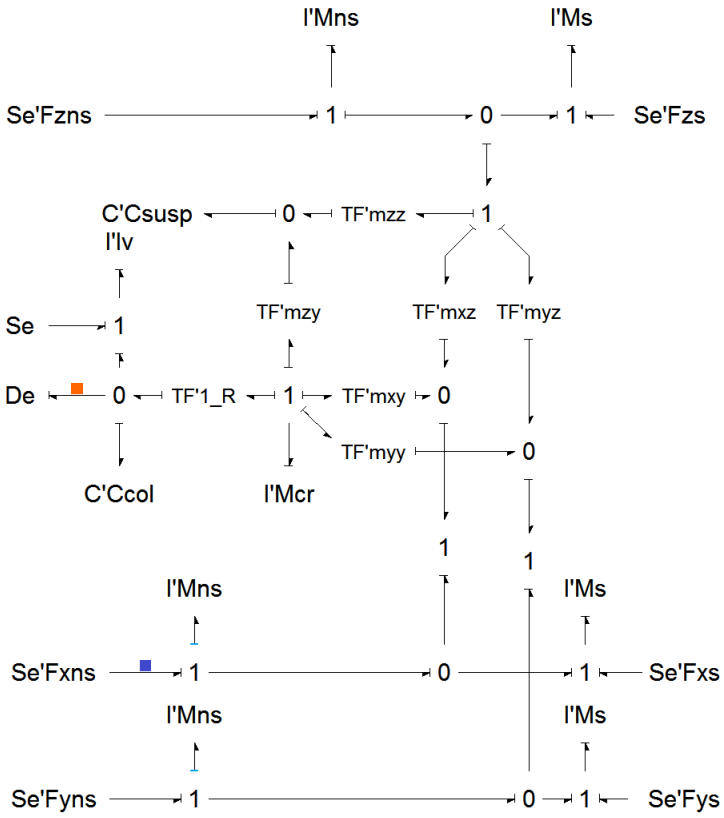


FIGURE F.4 – Implémentation du modèle multicorps *linéarisé* quart de véhicule à 6 degrés de liberté dans le logiciel *MS1* [MS1]

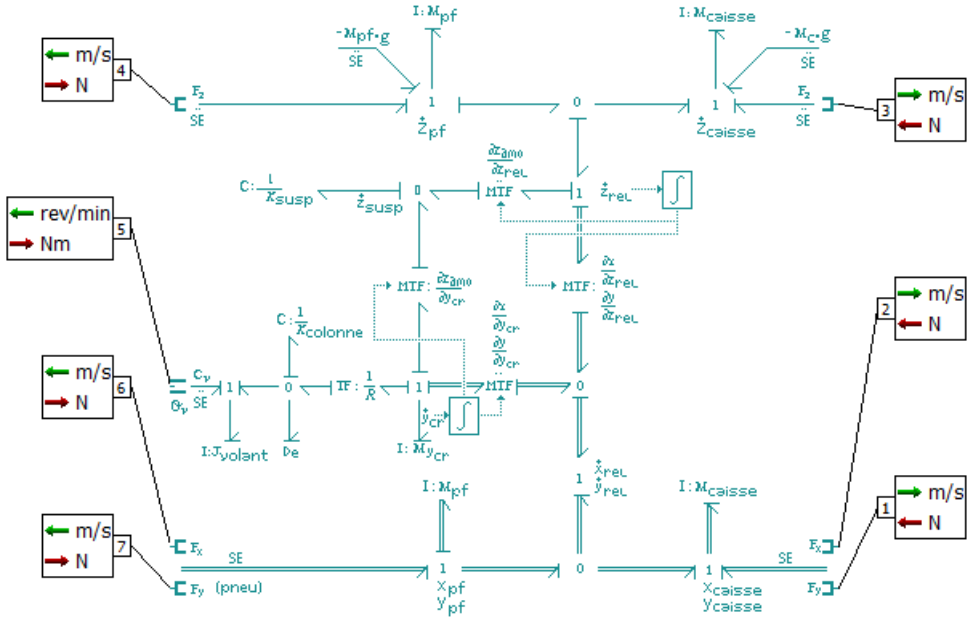
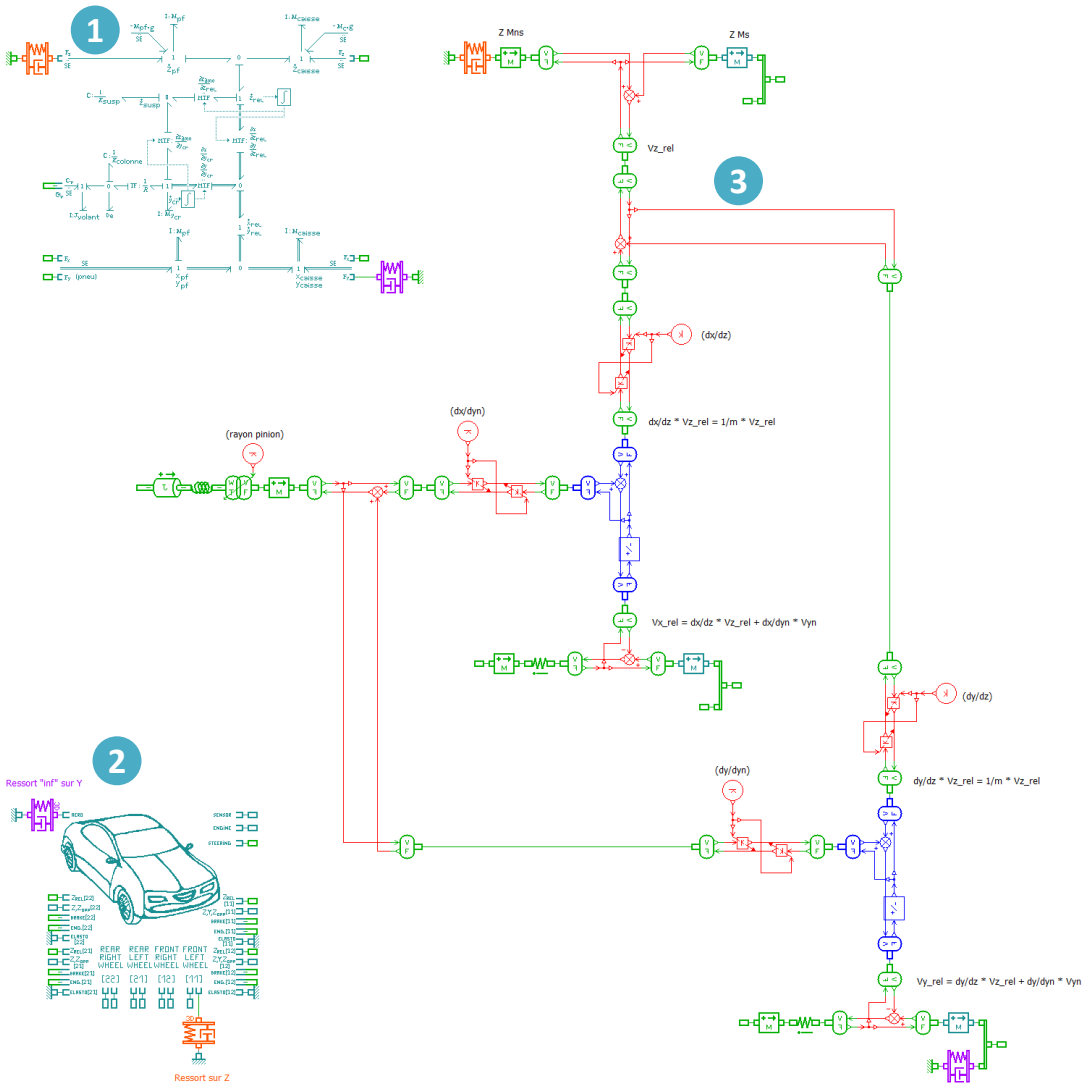
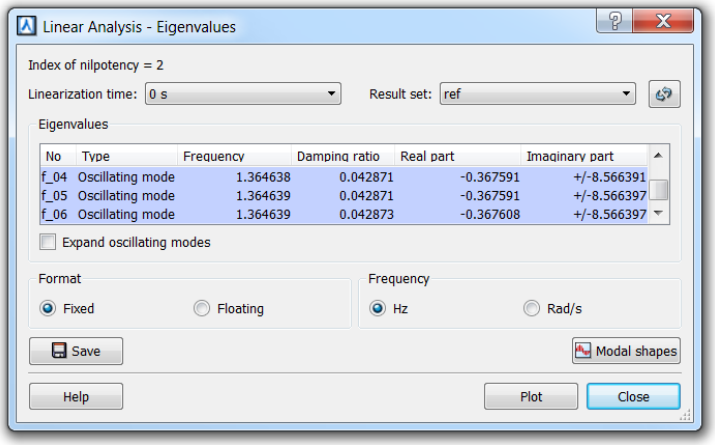


FIGURE F.5 – Implémentation du modèle multicorps quart de véhicule à 6 degrés de liberté dans le logiciel *Amesim* [Sie], détail de la causalité

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés



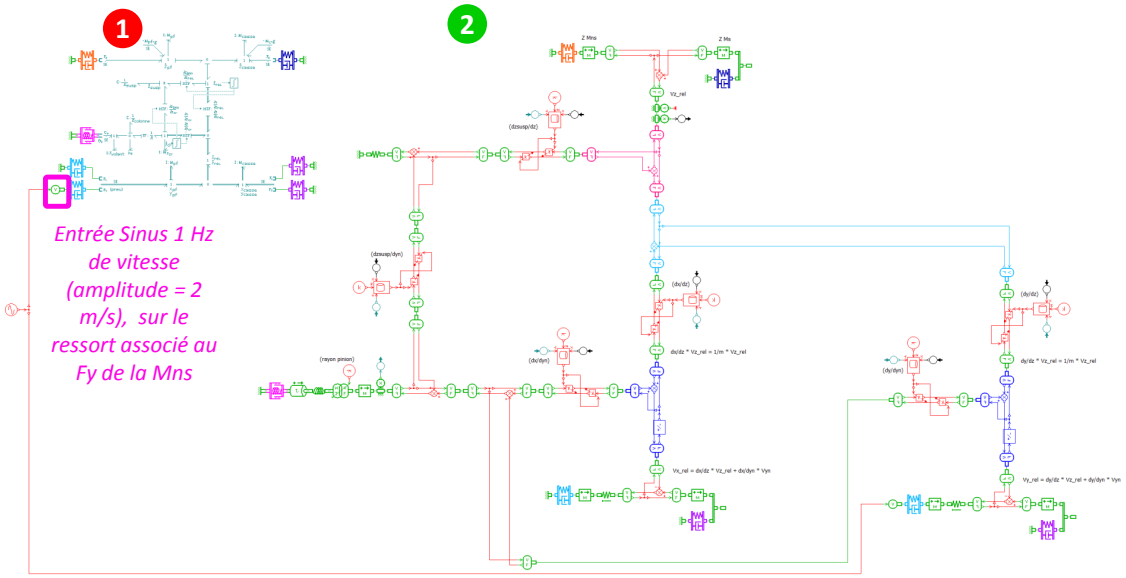
(a) Comparaison avec deux modèles référents



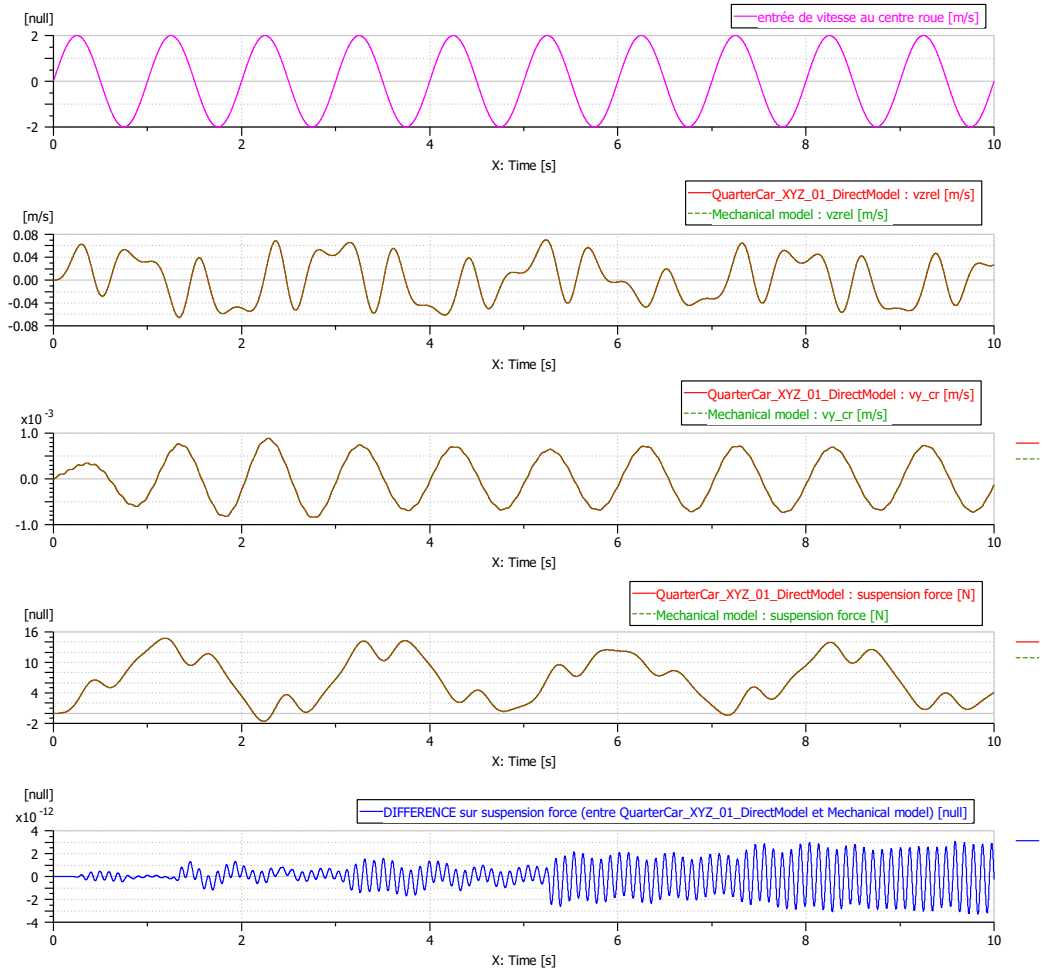
(b) Résultats comparatifs d'analyse fréquentielle sur les modèles ①, ② et ③

FIGURE F.6 – Exemple de validation fréquentielle du modèle multicorps à six degrés de liberté

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés



(a) Comparaison avec un modèle référent



(b) Résultats comparatifs d'analyse temporelle sur les modèles ① et ②

FIGURE F.7 – Exemple de validation temporelle du modèle multicorps à six degrés de liberté

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

F.3 Analyse structurelle, modèle inverse et invariants structurels

Ce cas d'étude est simplifié à un seul couple *entrée/sortie* pour l'inversion (modèle *SISO*). Comme détaillé au chapitre 4, cette classe de modèle n'écarte pas les considérations sur les études des ensembles entrée/sortie de chemins causaux, sur le bond graph direct (section 4.6.1 page 164) comme sur le bond graph inverse (section 4.6.2 page 167) lorsque nous souhaitons traiter le niveau d'analyse comportemental. Nous ne devons considérer toutefois ici que des ensembles de familles [2] ne contenant qu'*un seul* chemin causal entrée/sortie. Introduisons en outre à ce stade le fait que ni le modèle direct (figure F.3), ni le modèle inverse développé ci-après ne contiennent de cycle causal d'ordre négatif. Les scrutations pour la détermination d'invariants (*i.e.* structure à l'infini, ordre d'essentialité généralisé) se simplifient ainsi à des ensembles de chemins causaux (plutôt que des familles bond graph).

Le modèle inverse propose de déterminer l'effort $F_{x\,pneu}$ du sol sur le pneumatique suivant $\vec{x}_0$ (entrée u) à partir du couple $C_{colonne}$ appliqué sur la colonne de direction *i.e.* entre le volant et le pignon de crémaillère (sortie y).

F.3.1 Inversibilité

L'inversibilité du modèle est évaluée suivant le test d'inversibilité 2.2 page 60, rediscuté en section 4.4 page 152. Dans le présent cas *SISO*, nous notons sur le bond graph direct (figure F.3) :

- qu'il existe une ligne de puissance entre l'entrée $u = F_{x\ pneu}$ et la sortie $y = C_{colonne}$,
- qu'il existe un chemin causal entre l'entrée $F_{x\ pneu}$ et la sortie $C_{colonne}$,
- que la propagation de la bicausalité suivant un chemin causal entre l'entrée $F_{x\ pneu}$ et la sortie $C_{colonne}$ conduit à un modèle dont la structure de jonction est résoluble (nous détaillerons ce point lors de l'établissement du modèle inverse d'ordre minimal (figure F.9)).

Nous en déduisons que ce modèle est inversible pour le couple d'entrée/sortie sélectionné $F_{x\ pneu}/C_{colonne}$.

F.3.2 Modèle Inverse d'ordre minimal

Nous reprenons ici la procédure de la section 2.3.2.4 page 61, qui a été rediscutée en section 4.4 page 152 et qui est applicable dans le présent cas. A partir des chemins causaux entrée/sortie (*i.e.* $F_{x\ pneu}/C_{colonne}$) sur le bond graph direct, nous sélectionnons un chemin d'ordre minimal. Nous verrons ultérieurement que ce chemin causal, noté $a_{o2_{siso}}$ sur la figure F.8, fait parti des trois chemins causaux entrée/sortie d'ordre minimal (en l'occurrence d'ordre 2) sur le bond graph direct (voir la figure F.10). Nous pouvons dès lors construire le bond graph bicausal correspondant au modèle inverse d'ordre minimal, en propageant la bicausalité le long de la ligne de puissance associée au chemin causal $a_{o2_{siso}}$ (figure F.9). L'ordre du modèle inverse (*i.e.* nombre de degrés de liberté dynamiques, définition 3.2 page 80) est ainsi égale à $8-2=6$, auquel il faut ajouter en outre les deux intégrateurs, pour un total de 8 variables d'état dans le modèle.

2. Définition B.2 page 267.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

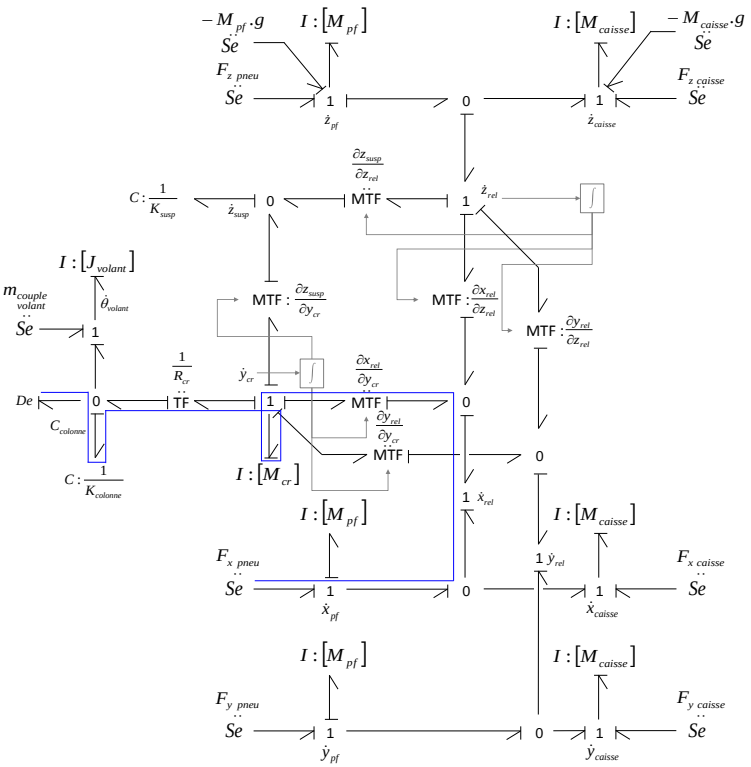


FIGURE F.8 – Chemin causal entrée/sortie $a_{o2_{siso}}$, d'ordre minimal, sur le modèle direct

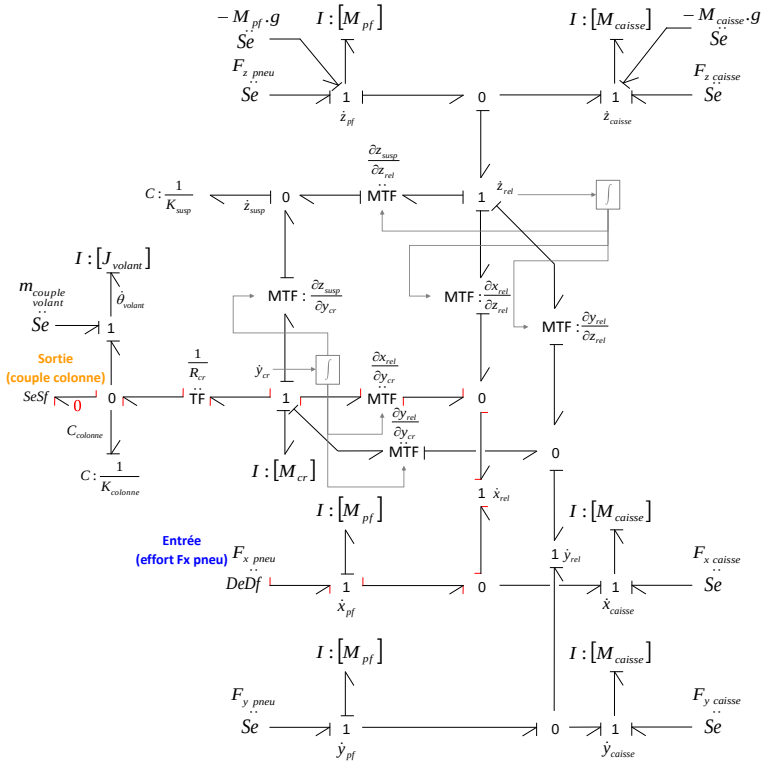


FIGURE F.9 – Modèle bicausal représentant le modèle inverse, d'ordre minimal, où la sortie est $y = C_{colonne}$ et l'entrée est $u = F_{x\ pneu}$

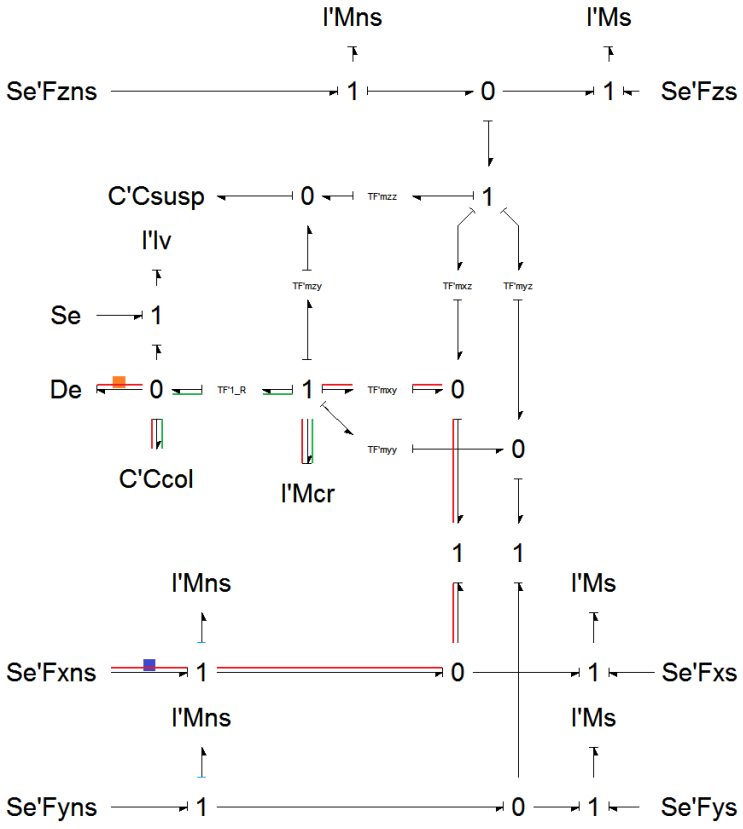
Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

F.3.3 Détermination des invariants structurels sur le modèle linéarisé direct

Ordre d'essentialité généralisé Le modèle direct linéarisé (figure F.4) comprend cinq chemins causaux entre l'entrée $u = F_{x\ pneu}$ et la sortie $y = C_{colonne}$:

— 3 chemins causaux d'ordre 2 (resp. $a_{o2_{siso}}$, $b_{o2_{siso}}$, $c_{o2_{siso}}$ sur les figures F.10 et F.11),

— 2 chemins causaux d'ordre 4 (resp. $a_{o4_{siso}}$, $b_{o4_{siso}}$ sur la figure F.12).



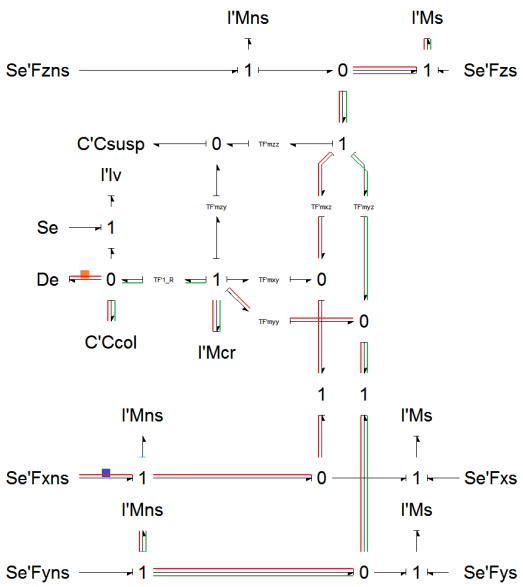
(a) Chemin causal E/S d'ordre 2 ($a_{o2_{siso}}$), de longueur 2

FIGURE F.10 – Modèle quart de véhicule direct SISO. Chemins causaux entrée/sortie d'ordre minimal (ordre 2) – 1 sur 2

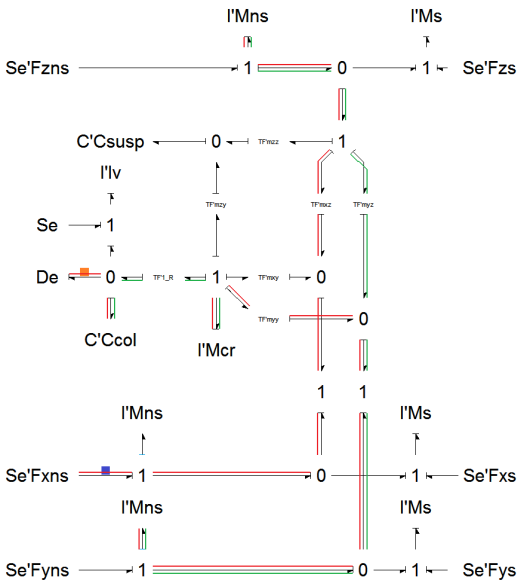
En appliquant la proposition 4.10 page 164, nous pouvons en déduire qu'au niveau d'analyse *BG-Structurel*, l'*ordre d'essentialité généralisé* de la sortie $y = C_{colonne}$ est égale à 2 (*i.e.* $n_{BG-s,1e_g} = 2$). D'autre part nous justifions le choix du chemin causal d'ordre minimal entrée/sortie utilisé pour propager la bicausalité de la manière suivante : parmi les trois chemins d'ordre minimal $a_{o2_{siso}}$, $b_{o2_{siso}}$ et $c_{o2_{siso}}$, nous privilégions celui qui a une longueur minimale. Ce qui correspond dans notre cas au nombre minimal de passage par des éléments de stockage d'énergie (en causalité intégrale *et* dérivée).

Au niveau d'analyse *comportemental*, nous devons considérer la somme des gains statiques des trois chemins causaux d'ordre minimal, conformément à la proposition 4.11 page 165, plus particulièrement l'équation (4.92) dans le présent cas SISO. Il peut être

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

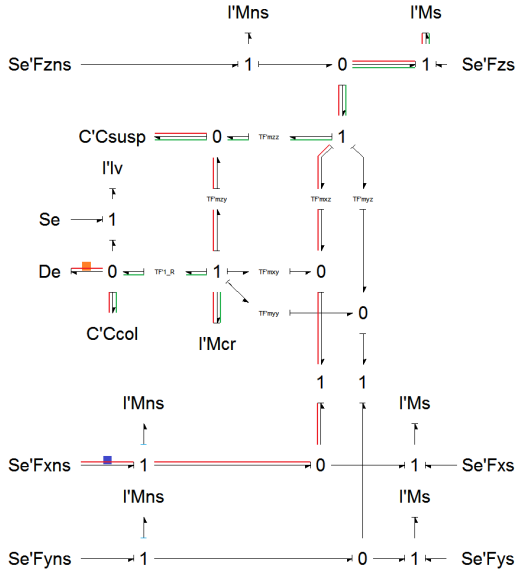


(b) Chemin causal E/S d'ordre 2 ($b_{o2_{siso}}$) (de longueur 3)

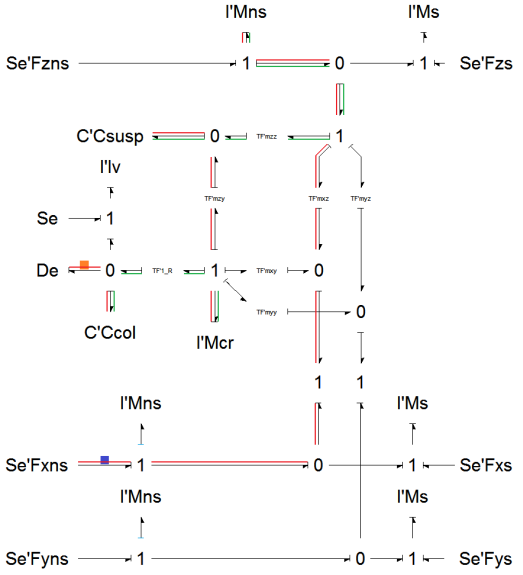


(c) Chemin causal E/S d'ordre 2 ($c_{o2_{siso}}$) (de longueur 3)

FIGURE F.11 – Modèle quart de véhicule direct SISO. Chemins causaux entrée/sortie d'ordre minimal (ordre 2) – 2 sur 2



(a) Chemin causal E/S d'ordre 4 ($a_{o4_{siso}}$) (de longueur 4)



(b) Chemin causal E/S d'ordre 4 ($b_{o4_{siso}}$) (de longueur 4)

FIGURE F.12 – Modèle quart de véhicule direct SISO. Chemins causaux entrée/sortie d'ordre non minimal (ordre 4).

montré que la somme des gains statiques de ces trois chemins ne peut pas être nulle, grâce à l'écriture du système d'équations du modèle (que nous ne détaillerons pas ici). Nous en concluons que l'*ordre d'essentialité généralisé* de la sortie $y = C_{colonne}$ est également égale à 2 au niveau d'analyse comportemental (*i.e.* $n_{1e_g} = 2$).

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

F.3.4 Détermination des invariants structurels sur le modèle inverse linéarisé

Ordre d'essentialité généralisé Dans le cas du modèle inverse *linéarisé* par rapport au modèle proposé en figure F.9, il existe 54 chemins causaux entre l'entrée $u = F_{x\ pneu}$ et la sortie $y = C_{colonne}$. La détermination de l'ordre d'essentialité généralisé d'une sortie a été explicitée sur le modèle inverse grâce aux propositions 4.12 et 4.13 page 167 suivant les niveaux d'analyse. L'analyse causale menée avec le logiciel *MS1* indique la présence, parmi les 54 chemins causaux entrée/sortie, la présence de 11 chemins causaux d'ordre minimal égale à -2. Nous en déduisons qu'au niveau d'analyse *BG-Structurel*, l'*ordre d'essentialité généralisé* de la sortie $y = C_{colonne}$, que nous avons noté $n_{BG-s,1e_g}$, est égale à 2 (proposition 4.12), en soulignant à nouveau que la quantité ω_{n_I-d} est nulle dans le présent cas (en raison de l'absence de boucles causales d'ordre négatif).

Au niveau d'analyse *comportemental*, sans rentrer d'avantage ici dans le détail du calcul, il est possible de montrer que la somme des gains statiques des 11 chemins causaux d'ordre minimal entre la sortie y et l'entrée u n'est pas nulle. Une manière de constater ce point est, comme nous le faisons dans le présent cas, d'écrire le système d'équations du modèle inverse et de vérifier *in fine* l'ordre de différentiation de la sortie y apparaissant dans le modèle inverse (voir par exemple l'équation de u (F.1) page 341). Nous pouvons conclure que l'ordre d'essentialité généralisé de la sortie $y = C_{colonne}$, que nous avons noté n_{1e_g}, est égale à 2 (proposition 4.13), conformément aux résultats issus du modèle direct de la section F.3.3.

F.3.5 Implémentation dans le logiciel *Amesim* [Sie] et Simulation

L'implémentation dans *Amesim* est réalisée sous la forme d'un sous-modèle spécifique dont l'icône et la causalité sont détaillés en figure F.13. Comme exposé en section F.3.2, ce modèle comporte 6 degrés de liberté, et 8 variables d'état, détaillées ci-après :

- $p_{x_{caisse}}$, $p_{y_{caisse}}$, $p_{z_{caisse}}$ (moments généralisés masse suspendue),
- $p_{z_{pf}}$ (moment généralisé masse non suspendue),
- q_{susp} (déplacement généralisé ressort suspension),
- p_V (moment généralisé inertie volant),
- *deux états supplémentaires sont introduits pour le calcul de* z_{rel} *et* y_{cr}*, pour le pilotage des MTF, détaillés en figure F.9.*

L'implémentation détaille la sortie de couple volant $y = C_{colonne}$ (qui est donc l'entrée au port 6 du sous-modèle de la figure F.13) ainsi que ses dérivées première et seconde (respectivement aux ports 7 et 8). L'implémentation détaille également l'entrée en effort issu du pneumatique sur l'axe $\overrightarrow{x_0}$, $u = F_{x\ pneu}$ (qui est la sortie au port 9 du sous-modèle de la figure F.13, dont l'équation (F.1) est donnée page 341). Notons que le flux associé à ce lien de puissance, la sortie de vitesse de la masse non-suspendue suivant l'axe $\overrightarrow{x_0}$, est la sortie au port 10.

En termes d'implémentation de code, la flexibilité de structuration des variables d'entrée et de sortie dans les sous-modèles *Amesim* permet une implémentation complètement équivalente à un sous-modèle à causalité « usuelle » (*i.e.* la causalité « classique » du bond graph)[3]. En d'autres termes, la bicausalité n'entraîne pas de spécificités supplémentaires d'implémentation dans le logiciel *Amesim*.

3. En rentrant dans le détail d'implémentation, dans le présent cas la variable $u = F_{x\ pneu}$ est définie comme une « variable basique de sortie » (*basic variable*) par souci de simplicité, mais rien n'empêche

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

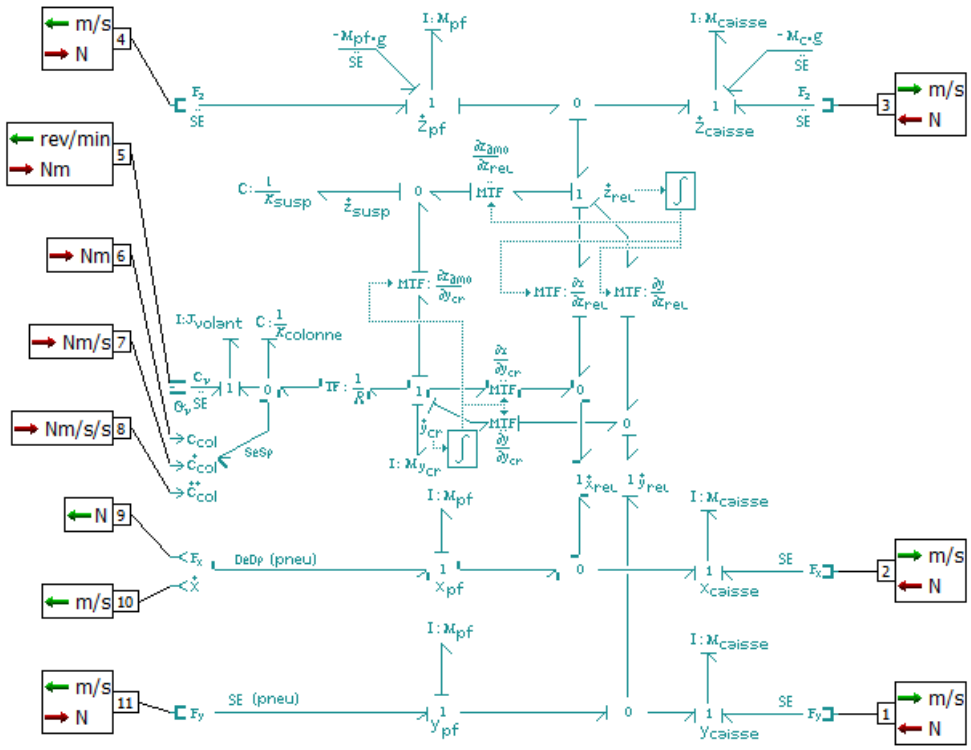


FIGURE F.13 – Implémentation du modèle multicorps quart de véhicule inverse dans le logiciel *Amesim* [Sie]

Une validation exhaustive a été réalisée, similaire à celle évoquée en section F.2.2 sur le modèle direct. Un exemple de validation complet du modèle inverse peut par exemple être celui proposé en figure F.14, où le modèle inverse est connecté en série avec le modèle direct au niveau de la variable d'entrée $u = F_{x\ pneu}$ (*i.e.* sortie du modèle inverse et entrée du modèle direct), où, comme en section F.2.2, la cinématique de suspension est réelle (issue de mesures sur banc) et où l'ensemble des dynamiques des deux sous-modèles sont sollicitées.

Nous faisons ici une analyse temporelle sur un balayage sinusoïdale en couple volant sur $y = C_{colonne}$ sur le modèle inverse, que nous devons nécessairement retrouver sur le modèle direct. Une comparaison sur une trentaine de variables de chacun des modèles à été réalisée. Nous n'en exposons que quelques unes sur la figure F.15, comprenant en l'occurrence la comparaison des variables $y = C_{colonne}$ (quatrième variable de la figure F.15, et la différence entre les deux est exposée sur la cinquième variable, en insistant sur l'échelle de ce dernier signal, à 10^{-6} Nm).

une mise en place sous la forme de *multiline macro* d'*Amesim*, qui est la solution privilégiée pour l'industrialisation.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

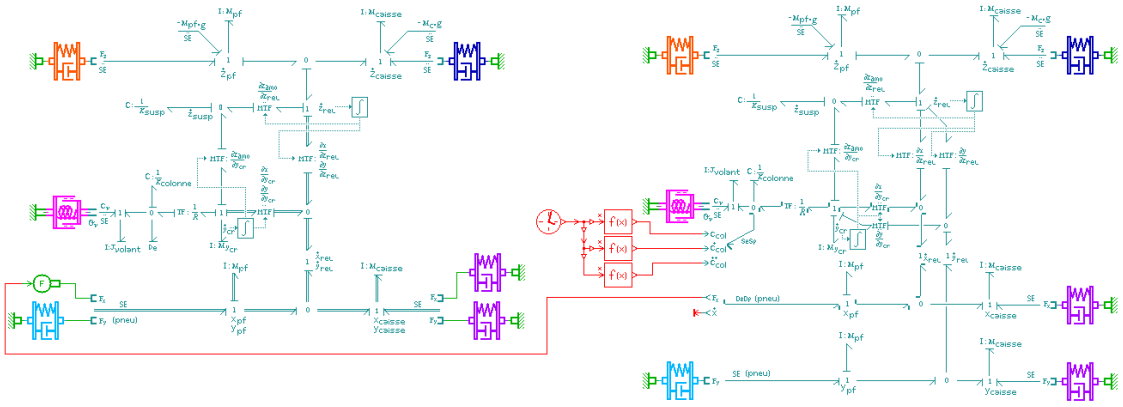


FIGURE F.14 – Exemple de validation du modèle inverse quart de véhicule : analyse temporelle sur un balayage sinusoïdale en couple volant sur $y = C_{colonne}$ sur le modèle inverse, connecté en série avec le modèle direct au niveau de l'entrée $u = F_{x\ pneu}$

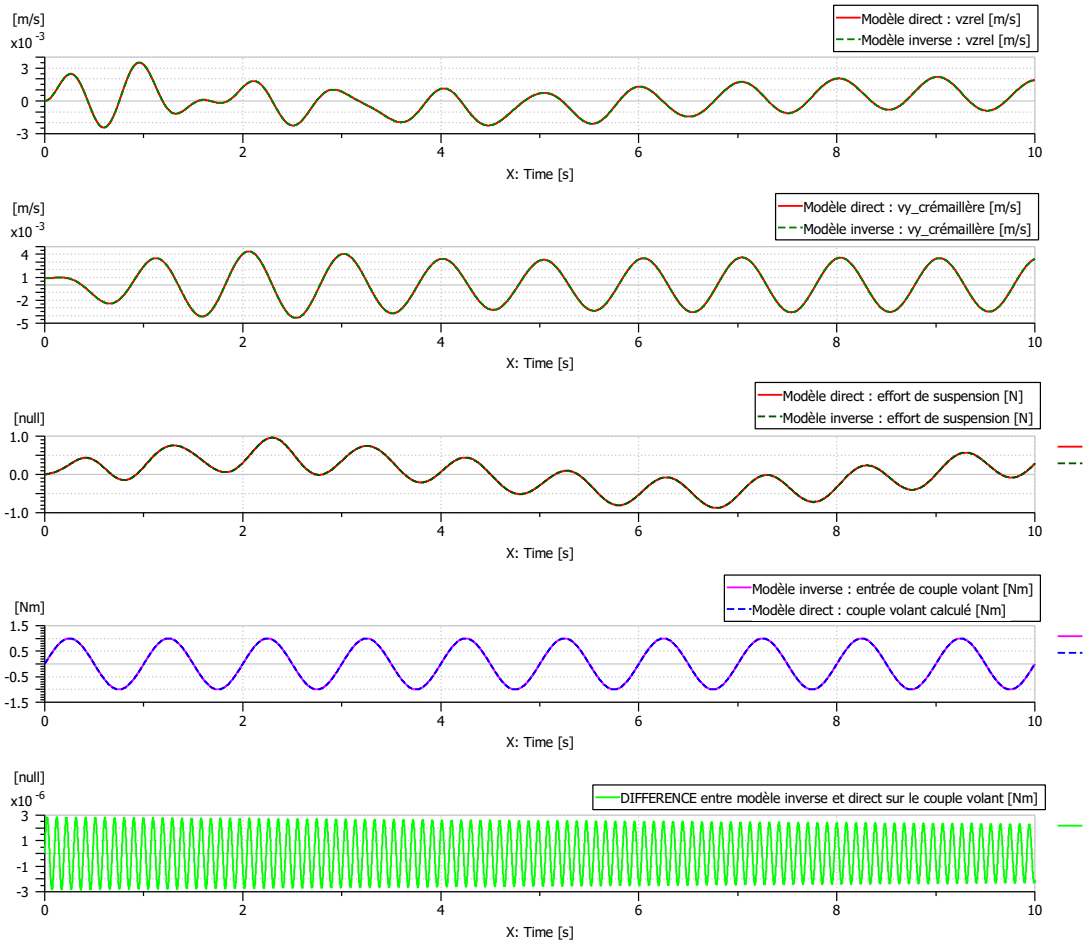


FIGURE F.15 – Exemple de validation du modèle inverse quart de véhicule : comparaison entre modèle direct et inverse sur le modèle *Amesim* de la figure F.14

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Remarque : détail de la variable d'entrée $u = F_{x\ pneu}$

$$
\begin{aligned}
F_{x\ pneu} = \\
& M_{pf}\ \{ \\
& \frac{\frac{d}{dt}p_{x_{caisse}}(t)}{M_{caisse}} + ((\frac{d^2}{dz_{rel}{}^2}x_{rel})\frac{d}{dt}z_{rel}(t) + (\frac{d^2}{dz_{rel}dy_{cr}}x_{rel})\frac{d}{dt}y_{cr}(t))(\frac{p_{z_{pf}}(t)}{M_{pf}} - \frac{p_{z_{caisse}}(t)}{M_{caisse}}) \\
& +(\frac{d}{dz_{rel}}x_{rel})(\frac{\frac{d}{dt}p_{z_{pf}}(t)}{M_{pf}} - \frac{\frac{d}{dt}p_{z_{caisse}}(t)}{M_{caisse}}) \\
& +((\frac{d^2}{dy_{cr}{}^2}x_{rel})\frac{d}{dt}y_{cr}(t) + (\frac{d^2}{dz_{rel}dy_{cr}}x_{rel})\frac{d}{dt}z_{rel}(t))R(\frac{p_v(t)}{J_{volant}} + \frac{1}{K_{colonne}}\frac{d}{dt}C_{colonne}(t)) \\
& +(\frac{d}{dy_{cr}}x_{rel})R(\frac{\frac{d}{dt}p_v(t)}{J_{volant}} + \frac{1}{K_{colonne}}\frac{d^2}{dt^2}C_{colonne}(t)) \\
& \} \\
& + \\
& (\frac{d}{dy_{cr}}x_{rel})^{-1}\{ \\
& \frac{C_{colonne}(t)}{R} + \frac{(\frac{d}{dy_{cr}}z_{susp})q_{susp}(t)}{C_{susp}} + M_{cr}\,R(\frac{\frac{d}{dt}p_v(t)}{J_{volant}} + \frac{1}{K_{colonne}}\frac{d^2}{dt^2}C_{colonne}(t)) \\
& -(\frac{d}{dy_{cr}}y_{rel})[\\
& F_{y\ pneu}(t) - M_{pf}\ (\\
& \frac{\frac{d}{dt}p_{y_{caisse}}(t)}{M_{caisse}} + ((\frac{d^2}{dz_{rel}{}^2}y_{rel})\frac{d}{dt}z_{rel}(t) + (\frac{d^2}{dz_{rel}dy_{cr}}y_{rel})\frac{d}{dt}y_{cr}(t))(\frac{p_{z_{pf}}(t)}{M_{pf}} - \frac{p_{z_{caisse}}(t)}{M_{caisse}}) \\
& +(\frac{d}{dz_{rel}}y_{rel})(\frac{\frac{d}{dt}p_{z_{pf}}(t)}{M_{pf}} - \frac{\frac{d}{dt}p_{z_{caisse}}(t)}{M_{caisse}}) \\
& +((\frac{d^2}{dy_{cr}{}^2}y_{rel})\frac{d}{dt}y_{cr}(t) + (\frac{d^2}{dz_{rel}dy_{cr}}y_{rel})\frac{d}{dt}z_{rel}(t))R(\frac{p_v(t)}{J_{volant}} + \frac{1}{K_{colonne}}\frac{d}{dt}C_{colonne}(t)) \\
& +(\frac{d}{dy_{cr}}y_{rel})R(\frac{\frac{d}{dt}p_v(t)}{J_{volant}} + \frac{1}{K_{colonne}}\frac{d^2}{dt^2}C_{colonne}(t)) \\
&) \\
&] \\
& \}
\end{aligned}
\tag{F.1}
$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Annexe G

Transformation bond graph du modèle multicorps de véhicule

La présente annexe est un support au chapitre 1, section 1.3 page 9. Elle propose une transformation du bond graph de la figure 1.9b page 18 pour le mettre sous les formes proposées en figures 1.7a et 1.7b page 16. Le bond graph de la figure 1.9b est rappelé ci-après en figure G.1. Les étapes de transformation sur le bond graph sont développées sur les figures G.2 à G.6 de manière acausale [1]. La causalité est appliquée sur la figure G.7, pour aboutir à une représentation bond graph analogue à celle de la figure 1.7a et enfin, le passage de l'élément inertiel dépendant $I : M_{pf}$ à travers le MTF exposé sur le bond graph de la figure G.8 conduit à une représentation analogue au bond graph de la figure 1.7b.

Nous rappelons que le mouvement horizontal absolu du porte-fusée, dont la vitesse est notée $\dot{x}_{pf}$, est un mouvement cinématiquement contraint. La représentation bond graph des figures 1.9b et G.1 explicite que ce mouvement dépend algébriquement des quatre degrés de liberté du système, comme explicité par l'équation (1.16) page 19, rappelée ci-dessous en (G.1) :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{pf} &= \dot{x}_{caisse} + \frac{\partial x_{rel}}{\partial z_{rel}} \underbrace{(\dot{z}_{pf} - \dot{z}_{caisse})}_{\dot{z}_{rel}} + \frac{\partial x_{rel}}{\partial y_{cr}} \dot{y}_{cr} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x_{rel}}{\partial z_{rel}} & 1 & -\frac{\partial x_{rel}}{\partial z_{rel}} & \frac{\partial x_{rel}}{\partial y_{cr}} \end{bmatrix}}_{[T_{Br\ 4ddl}]} \begin{bmatrix} \dot{z}_{pf} \\ \dot{x}_{caisse} \\ \dot{z}_{caisse} \\ \dot{y}_{cr} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{G.1}$$

La masse équivalente $[M_{eq\,4ddl}]$ apparaissant dans le bond graph de la figure G.8 a été développée à l'équation (1.19) page 20 et le gyristor $[Gy_{4ddl}]$ est proposé en (G.2).

1. Par raison de simplicité, les liens de signal de modulation des MTF ne sont pas représentés dans les différentes étapes de la transformation.

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

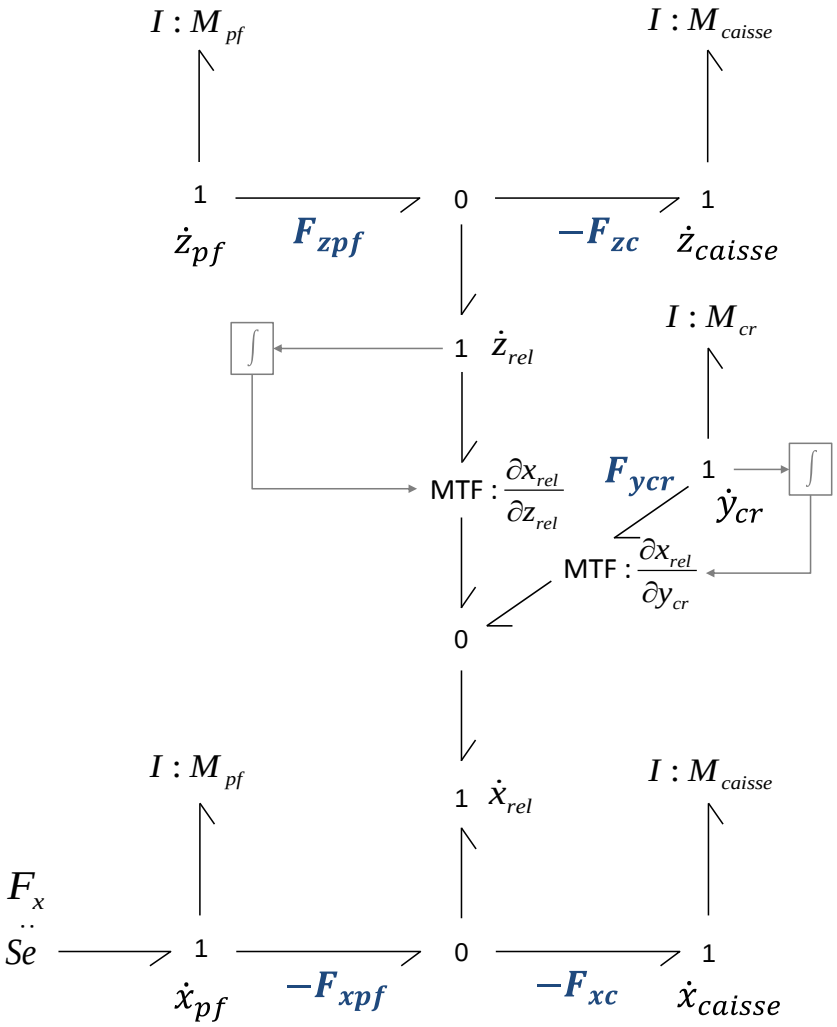


FIGURE G.1 – Représentation bond graph proposée en figure 1.9b page 18

$$[Gy_{4ddl}] = [T_{Br\ 4ddl}]^T M_{pf} \frac{d[T_{Br\ 4ddl}]}{dt}$$

$$= M_{pf} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{rel}}{\partial z_{rel}} \frac{\partial^2 x_{rel}}{\partial z_{rel}^2} \dot{z}_{rel} & 0 & -\frac{\partial x_{rel}}{\partial z_{rel}} \frac{\partial^2 x_{rel}}{\partial z_{rel}^2} \dot{z}_{rel} & \frac{\partial x_{rel}}{\partial z_{rel}} \frac{\partial^2 x_{rel}}{\partial y_{cr}^2} \dot{y}_{cr} \\ \frac{\partial^2 x_{rel}}{\partial z_{rel}^2} \dot{z}_{rel} & 0 & -\frac{\partial^2 x_{rel}}{\partial z_{rel}^2} \dot{z}_{rel} & \frac{\partial^2 x_{rel}}{\partial y_{cr}^2} \dot{y}_{cr} \\ -\frac{\partial x_{rel}}{\partial z_{rel}} \frac{\partial^2 x_{rel}}{\partial z_{rel}^2} \dot{z}_{rel} & 0 & \frac{\partial x_{rel}}{\partial z_{rel}} \frac{\partial^2 x_{rel}}{\partial z_{rel}^2} \dot{z}_{rel} & -\frac{\partial x_{rel}}{\partial z_{rel}} \frac{\partial^2 x_{rel}}{\partial y_{cr}^2} \dot{y}_{cr} \\ \frac{\partial x_{rel}}{\partial y_{cr}} \frac{\partial^2 x_{rel}}{\partial z_{rel}^2} \dot{z}_{rel} & 0 & -\frac{\partial x_{rel}}{\partial y_{cr}} \frac{\partial^2 x_{rel}}{\partial z_{rel}^2} \dot{z}_{rel} & \frac{\partial x_{rel}}{\partial y_{cr}} \frac{\partial^2 x_{rel}}{\partial y_{cr}^2} \dot{y}_{cr} \end{bmatrix} \quad \text{(G.2)}$$

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

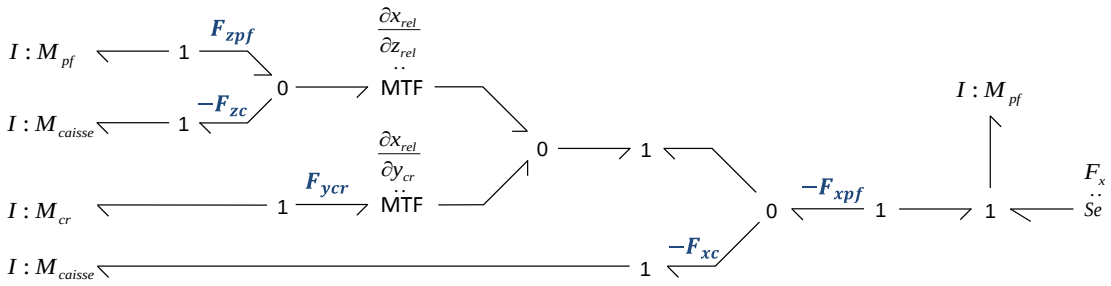


FIGURE G.2 – Transformation du bond graph de la figure G.1, première étape

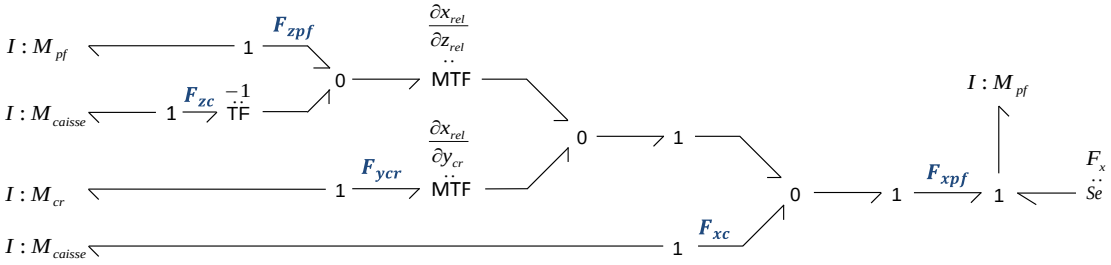


FIGURE G.3 – Transformation du bond graph de la figure G.1, deuxième étape

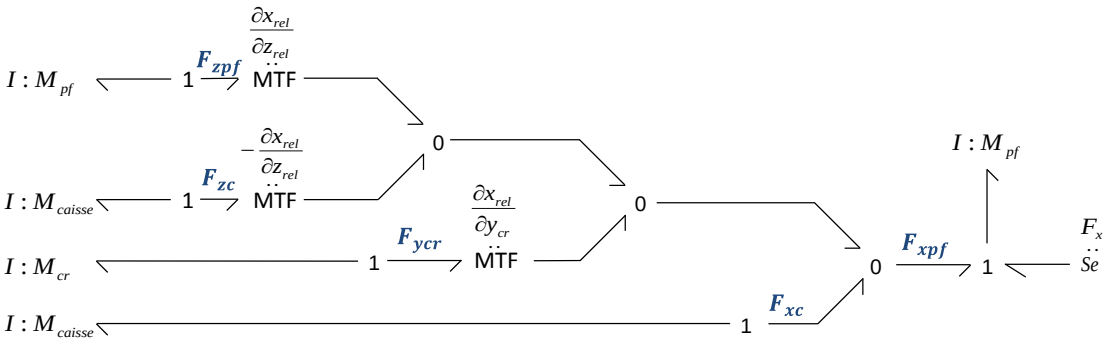


FIGURE G.4 – Transformation du bond graph de la figure G.1, troisième étape

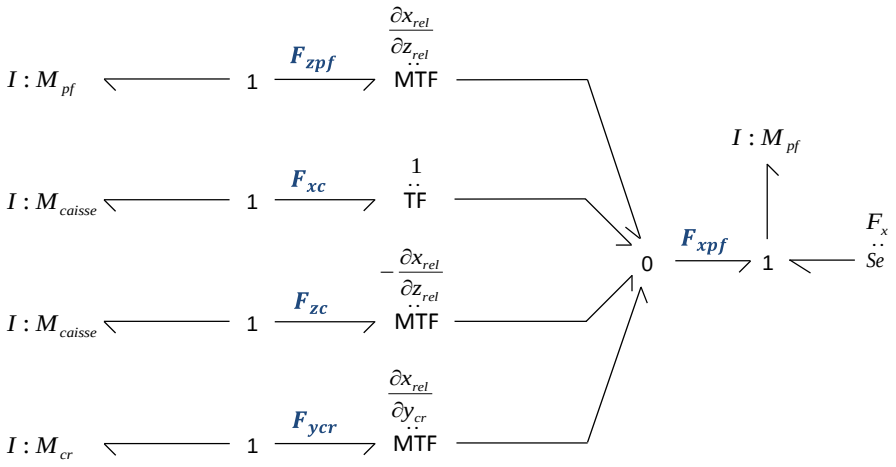


FIGURE G.5 – Transformation du bond graph de la figure G.1, quatrième étape

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

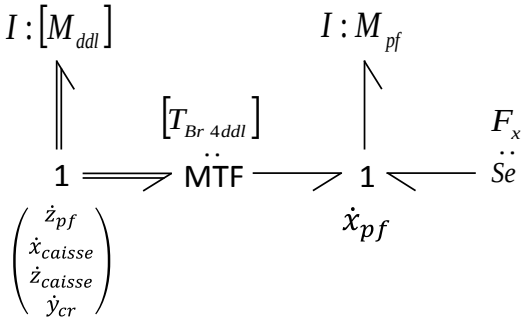


FIGURE G.6 – Transformation du bond graph de la figure G.1, cinquième étape (écriture utilisant des multi-liens

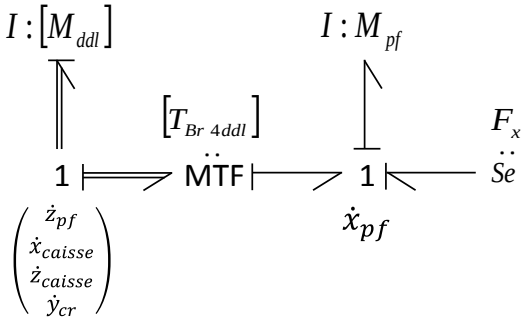


FIGURE G.7 – Transformation du bond graph de la figure G.1, sixième étape (application de la causalité)

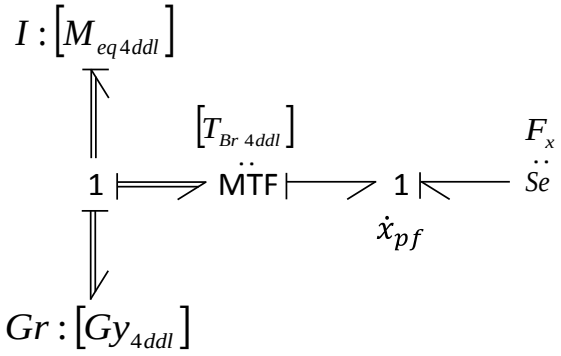


FIGURE G.8 – Transformation du bond graph de la figure G.1, septième étape (passage de l'élément inertiel dépendant $I:M_{pf}$ à travers le MTF)

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés

FOLIO ADMINISTRATIF

THESE DE L'UNIVERSITE DE LYON OPEREE AU SEIN DE L'INSA LYON

NOM : LAGNIER DATE de SOUTENANCE : 02/06/2017
Prénoms : Julien, Alexandre, Jean

TITRE : Contribution à l'analyse structurelle des systèmes singuliers pour la conception mécatronique.

NATURE : Doctorat Numéro d'ordre : 2017LYSEI045

Ecole Doctorale numéro 162 : MEGA DE LYON (MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE)

Spécialité : GENIE MECANIQUE

RESUME : Cette thèse s'inscrit dans le cadre de la conception des systèmes mécatroniques. Les travaux se positionnent dans les premières phases du cycle de conception, là où les principaux efforts méthodologiques sont à mener pour améliorer la qualité et la fonctionnalité des produits, et reposent sur le prototypage virtuel (modélisation et simulation).

Une approche méthodologique envisageable est de reformuler le problème de conception sous une forme inverse, pour directement utiliser les spécifications du cahier des charges, usuellement exprimées sur les sorties, pour calculer les inconnues du problème. Dans ce contexte, le laboratoire Ampère développe une méthodologie de conception et dimensionnement, basée sur l'inversion de modèle, utilisant le formalisme bond graph, pour proposer une démarche reposant sur des critères dynamiques et énergétiques, et dont la principale originalité est sa phase d'analyse structurelle, permettant une hiérarchisation d'analyse suivant différents niveaux de la structure physique du modèle (topologie, phénoménologie, paramétrage).

L'objectif est de contribuer au développement de cette méthodologie, en l'étendant aux modèles appartenant à la classe des systèmes singuliers, porté par la velléité de décliner la démarche à la conception fonctionnelle du châssis automobile et de ses sous-systèmes, comportant un certain nombre d'abstractions de modélisation et d'idéalisations. Cette déclinaison est proposée, d'une part, au niveau de la structure du modèle et, d'autre part, à un niveau considérant sa phénoménologie et ses lois de comportement. Elle requiert la mise en place préalable d'un référentiel algébrique, essentiellement issu de travaux sur la commande des systèmes, pour constituer une base de validation des extensions graphiques (digraphe et bond graph) proposées. En plus de la généralisation qu'ils constituent à la classe des modèles singuliers, les présents travaux proposent une uniformisation des précédentes approches de la méthodologie, originellement appliquées respectivement aux modèles directs et aux modèles inverses, de sorte qu'il n'est à présent plus nécessaire de les différencier.

MOTS-CLÉS : systèmes mécatroniques, analyse structurelle, systèmes singuliers, inversion de modèle dynamique, bond graph, dimensionnement, adéquation spécification/structure de modèle, ordre d'essentialité généralisé, modèles multicorps, dynamique du véhicule.

Laboratoires de recherche :
Laboratoire LaMCoS – UMR CNRS 5259 – INSA de Lyon
Laboratoire Ampère – UMR CNRS 5005 – INSA de Lyon

Directeur de thèse : REMOND Didier – Co-directeur de thèse : MARQUIS-FAVRE Wilfrid

Présidente du jury : DAUPHIN-TANGUY Geneviève

Composition du jury :

Rapporteurs :	NGWOMPO Roger Fotsu, SENAME Olivier
Examinateurs :	DAUPHIN-TANGUY Geneviève, MASCHKE Bernhard
Invités :	ALIRAND Marc, ARNOUX Emmanuel, FURIC Sébastien
Directeur de thèse :	REMOND Didier
Co-directeur de thèse :	MARQUIS-FAVRE Wilfrid

Cette thèse est accessible à l'adresse : http://theses.insa-lyon.fr/publication/2017LYSEI045/these.pdf
© [J. Lagnier], [2017], INSA Lyon, tous droits réservés