



**HAL**  
open science

# Observation et commande des systèmes dynamiques d'ordre non entier

Yassine Boukal

► **To cite this version:**

Yassine Boukal. Observation et commande des systèmes dynamiques d'ordre non entier. Automatique / Robotique. Université de Lorraine, 2017. Français. NNT : 2017LORR0154 . tel-01661396

**HAL Id: tel-01661396**

**<https://theses.hal.science/tel-01661396>**

Submitted on 11 Dec 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# Observation et commande des systèmes dynamiques d'ordre non entier

## Thèse

présentée et soutenue publiquement le 16 octobre 2017

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Lorraine – France

(Spécialité Automatique, Traitement du signal et des images, Génie informatique)

par

**Yassine BOUKAL**

### Composition du jury

#### *Rapporteurs :*

Nezha TRIGEASSOU    Maître de Conférences HDR, LIAS-CNRS,  
Université de Poitiers  
Driss BOUTAT        Professeur, PRISME, INSA Centre Val de Loire

#### *Examineurs :*

Catherine BONNET    Directrice de Recherche, INRIA Saclay-Ile-de-France  
& L2S-CentraleSupélec.  
Nour-Eddine RADHY    Professeur, LP2MT, Université Hassan II Aïn Chock,  
Casablanca, MAROC

#### *Directeur de thèse :*

Mohamed DAROUACH    Professeur, CRAN-CNRS, Université de Lorraine

#### *Co-Directeur de thèse :*

Michel ZASADZINSKI    Professeur, CRAN-CNRS, Université de Lorraine

Mis en page avec la classe thloria.

## Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués, sous la responsabilité scientifique des messieurs Mohamed DAROUACH et Michel ZASADZINSKI, Professeurs à l'Université de Lorraine et de Monsieur Nour-Eddine RADHY, Professeur à l'Université Hassan II Aïn Chock - Casablanca.

Je tiens tout d'abord à remercier les membres du jury qui m'ont fait l'honneur de participer à l'examen de ce travail.

Je suis très sensible à l'intérêt qu'a bien voulu porter à ce travail par Madame Nezha TRI-GEASSOU, Maître de Conférences HDR, LIAS-CNRS, Université de Poitiers. Je tiens à la remercier pour m'avoir fait l'honneur d'être rapporteuse de ce mémoire.

Je remercie chaleureusement Monsieur Driss BOUTAT, Professeur, PRISME, INSA Centre Val de Loire pour l'attention qu'il a manifesté à mes travaux de recherches et d'avoir accepté de rapporter ce travail. De plus, je garde et garderai un très bon souvenir de mon passage à Bourges durant ma thèse.

Je tiens à remercier, Madame Catherine BONNET, Directrice de Recherche, INRIA Saclay-Ile-de-France et Monsieur Nour-Eddine RADHY, Professeur à l'Université Hassan II Aïn Chock (LP2MT), Casablanca, MAROC pour m'avoir fait l'honneur d'être membre de mon jury.

Que Monsieur Mohamed DAROUACH, Professeurs à l'Université de Lorraine, trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour m'avoir accueilli au sein de l'équipe de Longwy du CRAN, pour sa présence physique et morale ainsi que les aides et tous les encouragements qu'il m'a apportés tout au long de mes recherches.

J'exprime mes profonds remerciements à mes directeurs de thèse, Monsieur Mohamed DAROUACH, Professeur à l'Université de Lorraine et membre de l'équipe de Longwy du CRAN, et Monsieur Michel ZASADZINSKI, Professeur à l'Université de Lorraine et responsable de l'équipe de Longwy du CRAN, et Monsieur Nour-Eddine RADHY, Professeur à l'Université Hassan II Aïn Chock - Casablanca, pour leur disponibilité, aide continue, soutien permanent et leurs encouragements ainsi que leur patience pour mener ce travail de recherche à terme. Leurs qualités, tant humaines que scientifiques furent pour moi un apport inestimable. Je leur en suis très reconnaissant.

J'adresse un grand merci à tous les membres de l'équipe de Longwy du CRAN que j'ai eu le plaisir de côtoyer pendant la durée de ma thèse : Harouna SOULEY ALI, MArouane ALMA, Hugues RAFARALAHY, Mohamed BOUTAYEB, Latifa BOUTAT-BADDAS, Ali ZEMOUCHE, Cédric DELATTRE, Christophe FONTE, Lama HASSAN, Adrien DROUOT, Florian SEVE ... Ils ont tous, de près ou de loin, contribué, par les nombreuses discussions que nous avons pu tenir, leur conseils et leur bonne humeur, à l'excellent déroulement de ma thèse.

Je ne peux pas finir aussi sans citer tous mes admirables amis qui sont soit en France ou au Maroc, dont certains d'entre eux, après un certain temps, sont devenus ma deuxième famille au cours de cette aventure Longovicienne. Au nom de tous les moments de partage : d'une discussion, d'un travail, d'un café, d'un repas, d'une sortie, d'un voyage ... Je dis merci à Khadija, Mehdi, Faiza, Nan, Gloria, Hao, Ghazi, Lahoucine, Yassine, Nadjiba, Soufiane, Bassem, Abdelatif, Hicham, Azza, Ahlem, Nossaiba, Abraham. Je n'oublie pas tous les membres du Club 24 sans exceptions qui sont tout simplement des agréables personnes.

Je tiens à remercier Madame Joëlle PINELLI, Monsieur Michel BORDET, Monsieur Sebastien MONERET, Madame Jocelyne FILIPUZZI, Madame Virginie BIENAIME, pour leurs

soutiens ainsi que pour leur aide dans l'organisation de la soutenance.

Je tiens à remercier les techniciens et les enseignants de l'IUT de Longwy ainsi que toutes les autres personnes que j'ai oublié de citer pour leur sympathie et leur bonne humeur qui m'ont permis de travailler dans de bonnes conditions.

Enfin, les mots les plus simples étant les plus forts, j'adresse toute mon affection à mes frères et sœurs, Fatimazahra, Ayoub, Loubna, mon cher cousin Youssef, ma tante Halima et toute ma famille, et en particulier à ma Mère et mon Père pour tous leurs encouragements, leurs sacrifices et surtout leur compréhension.

J'adresse enfin toute ma reconnaissance à mon grand frère Hicham, pour son aide permanent financier et moral, sa compréhension totale et pour les nombreux sacrifices qu'il a consentis, surtout dans les périodes difficiles durant mes études, en lui souhaitant un très bon courage et une bonne chance.

Enfin, j'aimerais conclure en saluant tous ceux qui luttent, individuellement ou collectivement, pour vivre dignement aujourd'hui.

*Ce travail est dédié à mon père Larbi BOUKAL, décédé trop tôt, qui m'a toujours poussé et motivé dans mes études. Puisse Dieu, le tout puissant, l'avoir en sa sainte miséricorde!*



# Table des matières

Remerciements	i
Table des figures	ix
Symboles et abréviations	xi

<b>Chapitre 1 Introduction</b>
--------------------------------

1.1	Introduction . . . . .	3
1.2	Formulation des opérateurs intégrale et dérivée d'ordre non entier . . . . .	4
1.2.1	Fonctions utiles dans le calcul fractionnaire . . . . .	4
1.2.1.1	La fonction Gamma . . . . .	4
1.2.1.2	La fonction Mittag-Leffler . . . . .	5
1.2.2	Intégration d'ordre non entier . . . . .	5
1.2.3	Différentiation d'ordre non entier . . . . .	6
1.2.3.1	Définition de Riemann-Liouville . . . . .	6
1.2.3.2	Définition de Caputo . . . . .	6
1.2.3.3	Définition de Grünwald-Letnikov . . . . .	6
1.2.4	Exemples d'applications des systèmes d'ordre non entier . . . . .	7
1.2.4.1	Thermique : Diffusion et équation de la chaleur . . . . .	7
1.2.4.2	Modèle de diffusion en électrochimie . . . . .	8
1.2.4.3	Impédance de l'interface électrode-électrolyte . . . . .	9
1.2.4.4	Rhéologie . . . . .	10
1.2.5	Approximations et Simulations des systèmes d'ordre non entier . . . . .	11
1.2.5.1	Méthodes d'approximation des opérateurs d'ordre non entier . . . . .	11
1.2.5.1.1	Les fractions en chaîne continues (Continued Fraction Expansions - CFE)	
1.2.5.1.2	L'approximation de Carlson . . . . .	11
1.2.5.1.3	L'approximation par pôles et zéros récursifs "CRONE" . . . . .	12
1.2.5.2	Simulations des systèmes d'ordre non entier . . . . .	13
1.3	Analyse de la stabilité des systèmes d'ordre non entier commensurable . . . . .	13

1.3.1	Représentation dans l'espace des pseudo états . . . . .	15
1.3.2	Définition d'une région $\mathcal{GLMI}$ . . . . .	16
1.3.3	Condition nécessaire et suffisante de stabilité dans une région $\mathcal{GLMI}$ . . .	16
1.3.4	Application à la $\mathcal{D}$ -stabilité dans une union de sous-régions convexes . . .	17
1.3.4.1	Régions du premier ordre . . . . .	17
1.3.5	Formulation $\mathcal{GLMI}$ de l'union de sous-régions convexes du premier ordre	17
1.3.6	Analyse des conditions de stabilité des systèmes d'ordre non entier par une approche $\mathcal{GLMI}$	18
1.3.6.1	Stabilité des systèmes d'ordre non entier . . . . .	18
1.3.6.2	Approche $\mathcal{GLMI}$ pour l'analyse de la stabilité des systèmes d'ordre non entier lorsque $0 < \alpha < 1$	18
1.3.6.3	Approche LMI pour l'analyse de la stabilité des systèmes d'ordre non entier lorsque $1 \leq \alpha < 2$	18
1.3.7	Stabilité au sens de Lyapunov . . . . .	27
1.4	Evaluation de la norme $H_\infty$ pour un système d'ordre non entier . . . . .	31
1.4.1	Formulation du problème . . . . .	31
1.4.2	Méthode basée sur la matrice Hamiltonienne . . . . .	33
1.4.3	Méthode basée sur le lemme de KYP généralisé . . . . .	34
1.5	Conclusion . . . . .	34

<b>Chapitre 2 Observateurs des systèmes d'ordre fractionnaire</b>
---

2.1	Introduction . . . . .	36
2.2	Observateurs des systèmes linéaires . . . . .	37
2.2.1	Synthèse d'observateurs linéaires . . . . .	37
2.2.1.1	Observateurs linéaires d'ordre plein . . . . .	37
2.2.1.2	Observateurs linéaires d'ordre réduit . . . . .	38
2.2.2	Exemple numérique . . . . .	41
2.3	Observateurs des systèmes à retards . . . . .	42
2.3.1	Position du problème . . . . .	43
2.3.2	Conditions d'existence . . . . .	44
2.3.3	Exemple numérique . . . . .	47
2.4	Conclusion . . . . .	49

<b>Chapitre 3 Observateurs des systèmes : incertains, à entrées inconnues, et en présence de perturbations</b>
--

3.1	Introduction . . . . .	52
3.2	Perturbations exogènes . . . . .	53
3.2.1	Observateurs à entrées inconnues . . . . .	53
3.2.1.1	Paramétrage de l'observateur à entrées inconnues . . . . .	54
3.2.1.2	Synthèse de l'observateur à entrées inconnues . . . . .	56

3.2.1.3	Exemple numérique . . . . .	58
3.2.2	Observateurs $H_\infty$ . . . . .	59
3.2.2.1	Paramétrage de l'observateur $H_\infty$ . . . . .	62
3.2.2.2	Synthèse de l'observateur $H_\infty$ . . . . .	64
3.2.2.3	Exemple numérique . . . . .	67
3.3	Perturbations endogènes . . . . .	68
3.3.1	Formulations du problème d'observateurs robustes . . . . .	70
3.3.2	Paramétrage de l'observateur robuste . . . . .	71
3.3.3	Synthèse de l'observateur robuste . . . . .	73
3.3.4	Exemple numérique . . . . .	77
3.4	Conclusion . . . . .	78

<b>Chapitre 4 Synthèse des lois de commande des systèmes d'ordre fractionnaire incertains</b>
---

4.1	Introduction . . . . .	82
4.2	Calcul de la norme $H_\infty$ pour LTI-FOS avec incertitudes . . . . .	83
4.2.1	Évaluation de la norme $H_\infty$ en utilisant la Matrice Hamiltonienne . . . . .	83
4.2.2	Évaluation de la norme $H_\infty$ en utilisant le lemme de KYP . . . . .	85
4.2.2.1	Cas où : $0 < \alpha < 1$ . . . . .	85
4.2.2.2	Cas où : $1 \leq \alpha < 2$ . . . . .	87
4.3	La commande basée sur un observateur . . . . .	88
4.3.1	Formulation du problème . . . . .	88
4.3.2	Paramétrisation de la commande robuste basée sur un observateur $H_\infty$ . . . . .	89
4.3.3	Synthèse de la commande robuste basée sur un observateur $H_\infty$ . . . . .	93
4.3.3.1	Approche basée sur la matrice Hamiltonienne . . . . .	93
4.3.3.2	Approche basée sur le lemme de KYP . . . . .	95
4.3.3.2.1	Cas où : $0 < \alpha < 1$ . . . . .	95
4.3.3.2.2	Cas où : $1 \leq \alpha < 2$ . . . . .	98
4.3.4	Lien avec la synthèse de lois de commande $H_\infty$ par retour de sortie dynamique . . . . .	100
4.4	Exemples numériques . . . . .	102
4.4.1	Approche basée sur la matrice Hamiltonienne . . . . .	102
4.4.2	Approche basée sur le lemme de KYP . . . . .	103
4.4.2.1	Cas où $0 < \alpha < 1$ . . . . .	103
4.4.2.2	Cas où $1 \leq \alpha < 2$ . . . . .	106
4.5	Conclusion . . . . .	110

**Conclusion générale**

---

**Annexe A Inégalités matricielles linéaires et compléments mathématiques**

A.1 Normes vectorielles et matricielles . . . . .	113
A.1.1 Relations sur les normes vectorielles et matricielles . . . . .	113
A.2 Pseudo-inverses et solutions des équations linéaires . . . . .	114
A.2.1 Solutions d'une équation linéaire et pseudo-inverses . . . . .	114
A.2.2 Pseudo-inverses réflexives . . . . .	116
A.2.3 Pseudo-inverse de Moore-Penrose . . . . .	116
A.2.4 Condition d'existence d'une solution . . . . .	116
A.3 Inégalités matricielles linéaires (LMI) . . . . .	117
A.3.1 Lemme de Schur . . . . .	117

**Annexe B Liste des publications**

B.1 Journaux et ouvrages de synthèse . . . . .	119
B.2 Conférences internationales avec actes et comité de lecture . . . . .	119

**Bibliographie** **121**

# Table des figures

1.1	Mouvement d'un fluide visqueux sur la surface transversale d'une plaque rigide . . . . .	8
1.2	Bloc intégrateur ou dérivateur d'ordre non entier $\alpha$ . . . . .	14
1.3	Représentation d'un système SISO d'ordre non entier à retard variant dans le temps	15
1.4	Domaines de stabilité des systèmes linéaires d'ordre non entier . . . . .	19
1.5	Région de stabilité pour $0 < \alpha < 1$ considérée comme l'union de 2 régions non convexes	19
1.6	Région de stabilité pour $1 \leq \alpha < 2$ considérée comme l'intersection de 2 régions non convexes	26
2.1	L'évolution du vecteur $z(t)$ et son estimation $\hat{z}(t)$ . . . . .	43
2.2	L'évolution de l'erreur d'estimation $e(t)$ . . . . .	43
2.3	Évolution du vecteur $z_1(t)$ et son estimation $\hat{z}_1(t)$ . . . . .	48
2.4	Évolution du vecteur $z_2(t)$ et son estimation $\hat{z}_2(t)$ . . . . .	48
2.5	Évolution de l'erreur d'estimation $e_1(1) = z_1(1) - \hat{z}_1(1)$ . . . . .	49
2.6	Évolution de l'erreur d'estimation $e_1(1)$ au voisinage de l'origine . . . . .	49
2.7	Évolution de l'erreur d'estimation $e_2(1) = z_2(1) - \hat{z}_2(1)$ . . . . .	50
2.8	Évolution de l'erreur d'estimation $e_2(1)$ au voisinage de l'origine . . . . .	50
3.1	Évolution de l'entrée inconnue $d_1(t)$ et de l'entrée connue $u(t)$ . . . . .	60
3.2	Évolution du vecteur $z_1(t)$ et son estimation $\hat{z}_1(t)$ . . . . .	60
3.3	Évolution du vecteur $z_2(t)$ et son estimation $\hat{z}_2(t)$ . . . . .	60
3.4	Évolution des erreurs d'estimation $e_1(t)$ et $e_2(t)$ . . . . .	61
3.5	Évolution du vecteur $x_1(t)$ et son estimation $\hat{x}_1(t)$ . . . . .	68
3.6	Évolution du vecteur $x_2(t)$ et son estimation $\hat{x}_2(t)$ . . . . .	69
3.7	Évolution de l'erreur d'estimation de l'état $x_1(t)$ . . . . .	69
3.8	Évolution de l'erreur d'estimation de l'état $x_2(t)$ . . . . .	69
3.9	Évolution du vecteur $z(t)$ et son estimation $\hat{z}(t)$ . . . . .	78
3.10	Évolution de l'erreur d'estimation du pseudo-état fonctionnel $z(t)$ . . . . .	79
4.1	Le signal des perturbations exogènes $w(t)$ . . . . .	103
4.2	L'évolution de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ du système . . . . .	104
4.3	L'évolution du pseudo-état $x_1(t)$ et son estimation $\hat{x}_1(t)$ . . . . .	104
4.4	L'évolution du pseudo-état $x_2(t)$ et son estimation $\hat{x}_2(t)$ . . . . .	104
4.5	L'évolution de l'erreur d'estimation $e_1(t)$ . . . . .	105
4.6	L'évolution de l'erreur d'estimation $e_2(t)$ . . . . .	105
4.7	Le signal des perturbations exogènes $w(t)$ . . . . .	107
4.8	Le signal de commande $u(t)$ . . . . .	107
4.9	Zoom sur l'évolution du signal de commande $u(t)$ durant l'intervalle $t \in [4, 11]$ . . . . .	107
4.10	Evolution du vecteur $x_1(t)$ et de l'estimation $\hat{x}_1(t)$ en boucle fermée . . . . .	108
4.11	Evolution du vecteur $x_2(t)$ et de l'estimation $\hat{x}_2(t)$ en boucle fermée . . . . .	108

*Table des figures*

---

4.12	Evolution de l'erreur d'estimation $e_1(t)$ . . . . .	108
4.13	Zoom sur l'évolution de l'erreur d'estimation $e_1(t)$ durant l'intervalle $t \in [4, 11]$ .	109
4.14	Evolution de l'erreur d'estimation $e_2(t)$ . . . . .	109
4.15	Zoom sur l'évolution de l'erreur d'estimation $e_2(t)$ durant l'intervalle $t \in [4, 11]$ .	110
4.16	Le système en boucle fermée . . . . .	110

# Symboles et abréviations

## Ensembles

$\mathbb{R}, \mathbb{C}$	l'ensemble des nombres réels (resp. complexes)
$\mathbb{R}_+$	l'ensemble des nombres réels non négatifs $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$
$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$	espace réel (resp. complexe) euclidien de dimension $n$
$\mathbb{R}^{n \times m}, \mathbb{C}^{n \times m}$	ensemble des matrices réelles (resp. complexes) de dimension $n \times m$

## Normes

$\ x\ _\infty$	norme $\mathcal{L}_\infty$ du signal $x \in \mathcal{L}_\infty[0, \infty)$
$\ x\ _2$	norme $\mathcal{L}_2$ du signal $x \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$
$\ G\ _\infty$	norme $\mathcal{H}_\infty$ du système continu $G(s)$

## Matrices, opérations et relations matricielles

$P > 0, P \geq 0$	matrice $P$ symétrique définie (resp. semi-définie) positive
$P > Q, P \geq Q$	pour $P - Q > 0$ (resp. $P - Q \geq 0$ ) où $P, Q$ symétriques $\in \mathbb{R}^{n \times n}$
$\text{rang}(A)$	rang de $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$
$\det(A)$	déterminant de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$\text{Im}(A)$	espace image de $A : \{y \text{ tel que } y = Ax\}$
$\text{Re}(A)$	partie réelle de $A$
$\ker(A)$	noyau de $A : \{x \text{ tel que } Ax = 0\}$
$\lambda(A)$	valeurs propres de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$A^T$	transposée de $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$
$A^{-1}$	inverse de $A \in \mathbb{C}^{n \times n}, \det(A) \neq 0$
$A^+$	pseudo-inverse de $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ vérifiant $AA^+A = A$
$\bar{\sigma}(A)$	valeur singulière maximum de la matrice $A$

$I, 0$	matrice identité (resp. nulle) de dimension appropriée
$I_n, 0_{n \times m}$	matrice identité (resp. nulle) de dimension $n \times n$ (resp. $n \times m$ )
$\text{diag}(A_1, \dots, A_p)$	matrice diagonale constituée avec les éléments de la diagonale des matrices $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , $i = 1, \dots, p$
$\text{bdiag}(A_1, \dots, A_p)$	matrice bloc-diagonale constituée avec $A_1, \dots, A_p$ matrices où $A_i \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , $i = 1, \dots, p$
$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \star & A_{22} \end{bmatrix}$	matrice partitionnée où le symbole $\star$ représente le transposé du bloc $A_{12}$ , soit $A_{12}^T$

## Abréviations

EDO	Equations Différentielles Ordinaires
EDF	Equations Différentielles Fractionnaires
LMI	Inégalités Matricielles Affines (pour Linear Matrix Inequalities)
KYP	Kalman-Yakubovich-Popov
BMI	Inégalité Matricielle Bilinéaire (pour Bilinear Matrix Inequality)
LTI	Linéaire à Temps Invariant (pour Linear Time Invariant)
SISO	Mono-Entrée Mono-Sortie (pour Single Input Single Output)
MIMO	Multi-Entrée Multi-Sortie (pour Multi Input Multi Output)
SDP	Programmation Semi-Définie (pour Semi-Definite Programming)
UIO	Observateur à Entrées Inconnues (pour Unknown Input Observer)
LTI-FOS	Système linéaire invariant dans le temps d'ordre fractionnaire
DU-FOS	Système d'ordre fractionnaire incertain soumis à des perturbations

# Introduction générale

Dans le domaine industriel, afin de répondre à des performances prédéfinies, il est primordial d'avoir une bonne information sur un procédé, ce qui permet de bien le contrôler. En général, les mesures accessibles ne permettent pas de représenter et d'analyser la dynamique interne du système considéré, sachant que l'accès à cette dynamique dans de nombreuses situations pratiques est considéré comme étant un fait primordial afin d'assurer certains critères de robustesse imposés par un cahier de charges. Depuis l'émergence des méthodes temporelles pour concevoir des approches multi-variables directes de synthèse des lois de commande linéaires, de nombreuses méthodes existent actuellement dans la littérature permettant d'améliorer certains critères tels que la stabilité et la robustesse du système ... Souvent, les lois de commande sont des fonctions linéaires des états du système. La totalité des composantes d'état (ou bien le pseudo-état) physique d'un système ne peut être déterminée par des mesures directes. Mais, en général les pseudo-états directement accessibles ne délivrent pas toutes les informations nécessaires pour détecter et localiser les défauts internes du procédé. Ceci rend le problème de construction du vecteur d'état et des fonctions du vecteur d'état un des sujets les plus importants dans l'ingénierie de contrôle, cela est le rôle de l'observateur, ou l'estimateur d'état.

Les notions de différentiation et d'intégration d'ordre non entier constituent un outil efficace pour caractériser le comportement d'une catégorie importante de systèmes dynamiques de dimension infinie. Les applications sont nombreuses, que ce soit en électricité, en thermique, en chimie ou en traitement du signal. La compacité des modèles obtenus est bien adaptée à la synthèse de lois de commande. Dans le cas des systèmes linéaires d'ordre non entier, il existe de nombreux résultats de stabilité et de stabilisation basés sur le placement des valeurs propres de la matrice du pseudo-état et sur la résolution d'inégalités matricielles affines. Quant à la différence des systèmes à dérivée d'ordre entier, il n'y a pas beaucoup de travaux basés sur les approches de type Lyapunov dédiés à la stabilisation des systèmes fractionnaires, avec ou sans retards. De plus, il y a peu de travaux sur la synthèse d'observateurs pour ce type de systèmes, notamment en présence de retards constants ou variant dans le temps. La présence de retard dans la dynamique des équations différentielles fractionnaires complique considérablement l'analyse des propriétés de cette classe de systèmes. Cependant, malgré que la présence de retards peut générer de l'instabilité, il n'y a que peu de travaux dans la littérature sur l'analyse de stabilité des équations différentielles fractionnaires retardées [BP01, BP02, CYC06, Bus08, FM09, MA09, SADB09, LS10, LYT11].

Un observateur est un système dynamique formé par une copie du système plus un terme de correction, et dont les entrées sont les entrées/sorties mesurées du système, et les sorties sont une estimation de l'état interne de ce système. En raison de leur potentiel de réduction de la complexité et le coût de calcul des lois de commande, et leur rôle dans le diagnostic de l'état des systèmes, le problème des observateurs reste aussi important dans la pratique.

## Objectifs

L'objet de cette thèse est la réalisation de la synthèse d'observateurs d'ordres plein et réduit pour les systèmes linéaires d'ordre fractionnaire, ainsi que leur utilisation dans une boucle de régulation pour cette même classe de systèmes. Les résultats obtenus dans ce travail de thèse se résument comme suit :

- (i) Etendre les méthodes existantes dans la littérature sur la synthèse d'observateurs dans le cas d'ordre entier au cas des systèmes d'ordre fractionnaire, tout en respectant la spécificité de cette classe de systèmes. L'objectif est aussi de donner les conditions d'existence de ces observateurs.
- (ii) Réaliser une synthèse d'observateurs basée sur les conditions d'existence obtenues. L'idée majeure est de présenter cette synthèse à l'aide des inégalités matricielles linéaires (LMI).
- (iii) Utiliser de nouvelles fonctions de Lyapunov suivant l'approche de distribution de l'intégrateur fractionnaire dans le domaine fréquentiel, ceci nous conduit à obtenir des conditions de stabilité pour les systèmes d'ordre fractionnaire à retard sous forme de LMI très simple à résoudre.
- (iv) Réaliser une synthèse de lois de commande basées sur les observateurs obtenus. L'objectif est de garantir la stabilité ainsi que des critères spécifiques tels que le rejet des perturbations et la robustesse vis-à-vis des incertitudes paramétriques du système.

Ce manuscrit présente, dans un premier temps, les notions mathématiques sur les systèmes d'ordre fractionnaire avec et sans retards. Ensuite, nous présentons la problématique considérée dans la thèse. Nous proposons ainsi une description des résultats présentés dans ce manuscrit.

Le premier chapitre constitue une introduction de base, traitant les notions mathématiques de base et de stabilités des systèmes d'ordre fractionnaire ainsi qu'une présentation des différentes définitions. Des fonctions utiles dans le calcul fractionnaire telles que la fonction Gamma et Mittag-Leffler sont présentées. Ces fonctions sont utilisées dans le calcul et la résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaire. L'analyse de la stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire est également présentée en utilisant des  $\mathcal{D}$ -stabilités connues aussi sous le nom "région  $\mathcal{GLMT}$ ". Par la suite, l'analyse de la stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire avec retard est considérée, où des conditions de stabilité sont obtenues sous formes de LMI. La démonstration est basée sur l'utilisation de l'approche de Lyapunov. Pour terminer ce chapitre, l'évaluation de la norme  $H_\infty$  pour ce type de système est formulée. Deux méthodes sont présentées, la première utilise la matrice Hamiltonienne d'un système d'ordre fractionnaire, et la seconde le lemme de KYP généralisé.

Dans le deuxième chapitre, nous nous sommes intéressés à la synthèse de plusieurs types d'observateurs : d'ordre réduit, d'ordre plein et des observateurs fonctionnels pour les systèmes d'ordre fractionnaire avec et sans retards. Dans le cas où il n'y a pas de retards dans la dynamique du système, des observateurs d'ordres plein et réduit ont été synthétisés afin d'assurer l'estimation des pseudo-états. Ainsi, des observateurs fonctionnels ont été synthétisés dans le cas où des retards sont présents dans la dynamique du système.

Dans le troisième chapitre, nous avons réalisé la synthèse d'observateurs pour les systèmes d'ordre fractionnaire en présence de perturbations endogènes ou exogènes. Nos contributions

---

peuvent être classées en trois parties : premièrement, des observateurs fonctionnels pour les systèmes d'ordre fractionnaire à retards affectés par des entrées inconnues ont été proposés. En deuxième lieu, des observateurs  $\mathcal{H}_\infty$  pour les systèmes d'ordre fractionnaire avec et sans retards ont été synthétisés afin d'assurer la stabilité de l'erreur d'observation. Il s'agit de garantir une borne du gain  $\mathcal{L}_2$  entre l'erreur d'observation et les perturbations non mesurables affectant la dynamique du système : ce gain  $\mathcal{L}_2$  correspond à la norme  $\mathcal{H}_\infty$ . Par la suite, la synthèse d'observateurs robustes vis-à-vis des incertitudes de modélisation pour cette classe de systèmes a été traitée. Les conditions suffisantes obtenues de convergence des erreurs d'estimations des pseudo-états sont établies sous la forme d'un ensemble d'inégalités matricielles affines.

L'utilisation des résultats des chapitres 2 et 3, pour synthétiser des lois de commande de type Commande-Basée-Observateurs, a été présentée dans le quatrième chapitre. Ces lois de commande ont été réalisées en se basant sur les différents observateurs obtenus pour les systèmes d'ordre fractionnaire. Des conditions de stabilité et des procédures de synthèse sont proposées. Les conditions de synthèse obtenues sont données sous forme d'inégalités linéaires matricielles (LMIs) non restrictives en linéarisant des inégalités bilinéaires matricielles (BMIs) obtenues à la base, et qui sont moins restrictives que celles données par des approches existantes dans la littérature.



# Chapitre 1

## Introduction

*“En ce monde rien n’est certain, à part la mort et les impôts.”*  
Benjamin Franklin

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>3</b>
<b>1.2</b>	<b>Formulation des opérateurs intégrale et dérivée d’ordre non entier</b>	<b>4</b>
1.2.1	Fonctions utiles dans le calcul fractionnaire . . . . .	4
1.2.1.1	La fonction Gamma . . . . .	4
1.2.1.2	La fonction Mittag-Leffler . . . . .	5
1.2.2	Intégration d’ordre non entier . . . . .	5
1.2.3	Différentiation d’ordre non entier . . . . .	6
1.2.3.1	Définition de Riemann-Liouville . . . . .	6
1.2.3.2	Définition de Caputo . . . . .	6
1.2.3.3	Définition de Grünwald-Letnikov . . . . .	6
1.2.4	Exemples d’applications des systèmes d’ordre non entier . . . . .	7
1.2.4.1	Thermique : Diffusion et équation de la chaleur . . . . .	7
1.2.4.2	Modèle de diffusion en électrochimie . . . . .	8
1.2.4.3	Impédance de l’interface électrode-électrolyte . . . . .	9
1.2.4.4	Rhéologie . . . . .	10
1.2.5	Approximations et Simulations des systèmes d’ordre non entier . . . . .	11
1.2.5.1	Méthodes d’approximation des opérateurs d’ordre non entier . . . . .	11
1.2.5.1.1	Les fractions en chaîne continues (Continued Fraction Expansions - CFE) . . . . .	11
1.2.5.1.2	L’approximation de Carlson . . . . .	11
1.2.5.1.3	L’approximation par pôles et zéros récursifs “CRONE” . . . . .	12
1.2.5.2	Simulations des systèmes d’ordre non entier . . . . .	13
<b>1.3</b>	<b>Analyse de la stabilité des systèmes d’ordre non entier commensurable</b>	<b>13</b>
1.3.1	Représentation dans l’espace des pseudo états . . . . .	15
1.3.2	Définition d’une région $\mathcal{GLMI}$ . . . . .	16
1.3.3	Condition nécessaire et suffisante de stabilité dans une région $\mathcal{GLMI}$ . . . . .	16
1.3.4	Application à la $\mathcal{D}$ -stabilité dans une union de sous-régions convexes . . . . .	17
1.3.4.1	Régions du premier ordre . . . . .	17
1.3.5	Formulation $\mathcal{GLMI}$ de l’union de sous-régions convexes du premier ordre . . . . .	17

1.3.6	Analyse des conditions de stabilité des systèmes d'ordre non entier par une approche $\mathcal{GLMI}$	18
1.3.6.1	Stabilité des systèmes d'ordre non entier . . . . .	18
1.3.6.2	Approche $\mathcal{GLMI}$ pour l'analyse de la stabilité des systèmes d'ordre non entier lorsque $0 < \alpha < 1$	
1.3.6.3	Approche LMI pour l'analyse de la stabilité des systèmes d'ordre non entier lorsque $1 \leq \alpha < 2$	
1.3.7	Stabilité au sens de Lyapunov . . . . .	27
<b>1.4</b>	<b>Evaluation de la norme <math>H_\infty</math> pour un système d'ordre non entier . .</b>	<b>31</b>
1.4.1	Formulation du problème . . . . .	31
1.4.2	Méthode basée sur la matrice Hamiltonienne . . . . .	33
1.4.3	Méthode basée sur le lemme de KYP généralisé . . . . .	34
<b>1.5</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>34</b>

---

## 1.1 Introduction

Dans une lettre datée du 30 septembre 1695, L'Hôpital a écrit à Leibniz en lui demandant des explications sur une notation particulière qu'il avait utilisée dans sa publication pour la  $n^{\text{ème}}$  dérivée d'une fonction

$$\frac{D^n f(t)}{Dt^n} \tag{1.1}$$

la question était : serait-il quoi le résultat si  $n = 1/2$ . La réponse de Leibniz était “un paradoxe apparent d'où nous aurons un jour des conséquences utiles”. Dans ces mots, le calcul fractionnaire est né.

Ce sujet datant d'au moins trois siècles a été considéré comme étant un calcul conventionnel, mais il n'était pas très populaire et pour être utilisé dans la communauté des chercheurs et ingénieurs. Il n'a intéressé que des mathématiciens afin de fonder les bases théoriques [Let68, Laz20, AM00].

On pourrait penser que ce thème de recherche sur la dérivation d'ordre non entier est une question de mathématiques “pures” sans intérêt pour l'ingénieur. Pourtant un exemple simple de mécanique des fluides montre comment la dérivée d'ordre un demi apparaît tout naturellement quand on veut expliciter un flux de chaleur sortant latéralement d'un écoulement fluide en fonction de l'évolution temporelle de la source interne. Parmi les avantages de la dérivée et les intégrales d'ordre fractionnaire est le fait de ne pas avoir que des propriétés locales, mais prend en compte l'historique des effets distribués non locaux. Ce qui explique l'intérêt particulier pour la dérivation d'ordre non entier dans la modélisation mécanique des gommages et des caoutchoucs, en bref toutes sortes de matériaux qui conservent la mémoire des déformations passées et dont le comportement est dit viscoélastique. En effet, la dérivation fractionnaire s'y introduit naturellement. Nous proposons dans une section une courte introduction à quelques applications.

En d'autres termes, ce thème de recherche peut traduire mieux la réalité de la nature, ce qui l'a rendu plus populaire au sein de la communauté des chercheurs et ingénieurs. Il ajoute une autre dimension pour mieux comprendre ou décrire la nature fondamentale d'une manière appréciée. C'est pour ces raisons que l'attention de plusieurs chercheurs des domaines appliqués tels que l'ingénierie, les sciences fondamentales et l'économie, a été attirée par ce thème de recherche [BT83, BT84, BC91, MM95, HLQ95, Eng96, El-96, Hil00, AS03, Das08, CDFP10]. Cela a été traduit par l'apparition de plusieurs applications basées sur ce nouveau sujet de recherche de 300 ans, qui peut être considéré comme un champ de recherche plus large, dont le calcul d'ordre entier conventionnel en fait partie.

Dans ce chapitre d'introduction, on tente d'aborder ce thème d'un point de vue théorique orienté vers des applications scientifiques et d'ingénierie. Nous allons rappeler un certain nombre de résultats sur les systèmes d'ordre non entier qui seront utilisés dans ce manuscrit, tels que les définitions de la différentiation d'ordre non entier, les approches d'approximation et de simulation d'un dérivateur fractionnaire, les conditions de stabilité ainsi que le calcul de norme d'une fonction de transfert d'un système d'ordre non entier. Dans le reste du manuscrit, l'ordre non entier est limité à seulement des nombres réels, les différentiations d'ordre complexes ne sont pas considérées. De plus, les systèmes considérés sont limités aux cas où l'ordre non entier est constant et commensurable.

## 1.2 Formulation des opérateurs intégrale et dérivée d'ordre non entier

### 1.2.1 Fonctions utiles dans le calcul fractionnaire

La compréhension des définitions et l'utilisation du calcul fractionnaire seront facilitées en donnant quelques définitions mathématiques nécessaires de quelques fonctions utiles telles que les fonctions Gamma et Mittag-Leffler.

#### 1.2.1.1 La fonction Gamma

La fonction gamma, par définition (voir L'intégrale fractionnaire), est intrinsèquement liée au calcul non entier. La fonction Gamma est une généralisation du factoriel pour tous les nombres réels. La définition de la fonction Gamma est donnée par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{z-1} du, \quad (1.2)$$

Pour tout nombre complexe  $z$ , cette intégrale converge absolument sur le demi-plan complexe où la partie réelle est strictement positive ( $\text{Re}(z) > 0$ ).

Quelques propriétés importantes de la fonction gamma sont données ci-dessous

- Elle possède des pôles simples pour  $z = 0, -1, -2, -3, \dots$ , cela signifie que la fonction Gamma tend vers l'infini à ces valeurs négatives donc discontinue à ces pôles.
- Une intégration par parties montre la relation fondamentale suivante

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt \\ &= [-e^{-t} t^z]_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \\ \Gamma(z+1) &= z\Gamma(z). \end{aligned} \quad (1.3)$$

En utilisant la relation (1.3), la fonction Gamma est étendue au demi-plan  $\text{Re}(z) \leq 0$  par

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n} \quad (\text{Re}(z) > -n; \quad n \in \mathbb{N}; \quad z \notin \mathbb{Z}_0^- := \{0, -1, -2, \dots\}). \quad (1.4)$$

où le terme  $(z)_n$  représente le *symbole de Pochhammer* défini pour tout nombre complexe  $z \in \mathbb{Z}$  et tout entier non négatif  $n \in \mathbb{N}_0$  par

$$(z)_0 = 1 \quad \text{et} \quad (z)_n = z(z+1)\dots(z+n-1) \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (1.5)$$

D'après les équations (1.3) et (1.5) on obtient la relation suivante :

$$\Gamma(n+1) = (1)_n = n! \quad (n \in \mathbb{N}_0) \quad (1.6)$$

### 1.2.1.2 La fonction Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffler introduite et étudiée par Mittag Leffler [ML03, ML05] est une généralisation directe des séries d'exponentielles. Son importance a été réalisée au cours des deux dernières décennies en raison de son implication directe dans des problèmes de la physique, de la biologie, de l'ingénierie et des sciences appliquées [SK98, GKMR14]. Dans ce qui suit, nous allons rappeler un certain nombre de définitions et certaines propriétés de la fonction Mittag-Leffler et ses généralisations [Dzh66, Erd55a, Erd55b, Erd55c, EMOT81].

La fonction Mittag-Leffler  $E_\alpha(z)$  est définie par [Dzh66, Erd55c, EMOT81]

$$E_\alpha(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (\alpha \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(\alpha) > 0), \quad (1.7)$$

Elle joue un rôle analogue à celui de la fonction exponentielle, c'est à dire, elle apparaît naturellement lors de la résolution d'équations différentielles dont l'ordre est non-entier.

La fonction Mittag-Leffler  $E_{\alpha,\beta}(z)$  a deux paramètres

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \operatorname{Re}(\beta) > 0), \quad (1.8)$$

et a été introduite pour la première fois par Wiman [Wim05]. Elle a été étudiée en détail ensuite par Agarwal et Humbert [Arg53, Hum53, HA53].

Pour toute variable  $z \in \mathbb{C}$ , la fonction Mittag-Leffler satisfait les relations suivantes où les fonctions exponentielles, cosinus et cosinus hyperbolique deviennent des cas particuliers de cette fonction.

$$E_1(\pm z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm 1)^k z^k}{\Gamma(k + 1)} = e^{\pm z} \quad (1.9)$$

$$E_2(-z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{\Gamma(2k + 1)} = \cos(z) \quad (1.10)$$

$$E_2(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k + 1)} = \cosh(z) \quad (1.11)$$

### 1.2.2 Intégration d'ordre non entier

Le calcul des intégrales et des dérivées d'une fonction analytique est très important dans l'étude et l'analyse du comportement des systèmes dynamiques. Dans ce paragraphe, nous rappelons la définition du calcul d'intégrale d'ordre non entier.

Pour introduire le calcul d'intégrale d'ordre non entier, nous commençons par donner la formule de Cauchy pour l'intégration répétée d'une fonction analytique  $f(t)$  d'une variable réelle  $t$ . La formule de Cauchy [ON99], [Pod99] est définie par

$$J^n f(t) := \int_a^t \int_a^{\tau_1} \dots \int_a^{\tau_{n-1}} f(\tau) d\tau \dots d\tau_2 d\tau_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t f(\tau) (t-\tau)^{n-1} d\tau \quad (1.12)$$

avec  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a, t \in \mathbb{R}$ ,  $a < t$ . Si  $n$  est remplacé par un nombre réel  $\alpha$  et le terme  $(n - 1)!$  par sa généralisation qui est la fonction Gamma, l'équation (1.12) devient une intégrale d'ordre non entier.

**Définition 1.2.1.** *Supposons que  $\alpha > 0$ ,  $a < t$ ,  $\alpha, a, t \in \mathbb{R}$ . L'intégrale de Riemann-Liouville à gauche d'une fonction  $f(t)$  pour un ordre non entier  $\alpha$  est définie par*

$${}^{RL}I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t f(\tau)(t - \tau)^{\alpha-1} d\tau, \quad 0 \leq t \quad (1.13)$$

### 1.2.3 Différentiation d'ordre non entier

Après l'introduction de l'opérateur du calcul d'intégrale d'ordre non entier, il est raisonnable de définir aussi la différenciation d'ordre non entier. Il existe différentes définitions dans la littérature, qui ne coïncident pas en général. Nous citons quelques unes parmi celles existantes dans la littérature, sachant que les deux définitions les plus utilisées sont celles de Riemann-Liouville et de l'opérateur défini par Caputo.

#### 1.2.3.1 Définition de Riemann-Liouville

Nous présentons dans cette partie la définition de Riemann-Liouville pour le calcul de la dérivée d'ordre non entier.

**Définition 1.2.2.** *Supposons que  $\alpha > 0$ ,  $a < t$ ,  $\alpha, a, t \in \mathbb{R}$ . L'expression donnée par*

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, \quad n - 1 < \alpha < n \in \mathbb{N} \quad (1.14)$$

*est la dérivée d'ordre non entier de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha$  de la fonction  $f(t)$ .*

#### 1.2.3.2 Définition de Caputo

La définition de la dérivée d'ordre non entier introduite par Caputo [Cap67], est donnée comme suit :

**Définition 1.2.3.** *Supposons que  $\alpha > 0$ ,  $a < t$ ,  $\alpha, a, t \in \mathbb{R}$ . L'expression donnée par*

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t \frac{\frac{d^n}{dt^n} f(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, \quad n - 1 < \alpha < n \in \mathbb{N} \quad (1.15)$$

*est la dérivée d'ordre non entier de Caputo d'ordre  $\alpha$  de la fonction  $f(t)$ .*

Pendant un certain temps, la définition de Caputo était considérée comme avantageuse pour les problèmes de valeur initiale. M. Caputo a été le premier à appliquer le calcul d'ordre non entier à la mécanique, en particulier aux modèles linéaires de visco-élasticité [Cap67, CM71].

#### 1.2.3.3 Définition de Grünwald-Letnikov

La dérivée de Grünwald-Letnikov est une extension de la méthode d'Euler dans le calcul non entier, elle permet de prendre la dérivée un nombre de fois non-entier, où les coefficients sont des coefficients binomiaux d'ordre non entier, qui sont récursivement définis et positifs.

**Définition 1.2.4.** Supposons que  $\alpha > 0$ ,  $a < t$ ,  $\alpha, a, t \in \mathbb{R}$ . L'expression donnée par

$${}_a^{GL}D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\left[ \frac{t-a}{h} \right]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh) \quad (1.16)$$

est la dérivée d'ordre non entier de Grünwald-Letnikov d'ordre  $\alpha$  de la fonction  $f(t)$ .

On note que la définition de Grünwald-Letnikov est équivalente à la définition de Riemann-Liouville.

## 1.2.4 Exemples d'applications des systèmes d'ordre non entier

### 1.2.4.1 Thermique : Diffusion et équation de la chaleur

L'exemple le plus simple du système d'ordre non entier est l'équation de la chaleur à une dimension spatiale, commandée aux bords. En choisissant bien la variable de sortie, nous obtenons un dérivateur d'ordre  $\frac{1}{2}$ . A partir de ce transfert, il n'est pas compliqué de construire un système physique idéalisé qui représente un transfert d'ordre non entier propre, à savoir un transfert d'ordre deux avec une déviation d'ordre  $\frac{3}{2}$ . Cet exemple a été traité dans [BT84] et repris dans [Hot98, Mra04, Pod99].

On rappelle que l'équation de la chaleur est donnée par l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial v(t, x)}{t} = c \frac{\partial^2 v(t, x)}{t^2}, \quad 0 < t, \quad -\infty < x < 0 \quad (1.17)$$

où  $t$  est une variable scalaire libre, symbolisant le temps,  $x$  une variable libre scalaire ou vectorielle, représentant l'espace et  $c$  une constante positive. Nous nous intéressons ici à l'équation de la chaleur à une dimension spatiale; où la variable libre  $x$  est scalaire. Nous considérons les conditions initiales et aux limites suivantes

$$v(0, x) = 0 \quad \text{pour} \quad x < 0 \quad (1.18)$$

$$v(t, 0) = u(t) \quad \text{pour} \quad x = 0 \quad (1.19)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} v(t, x) = 0 \quad \text{pour} \quad t > 0 \quad (1.20)$$

Nous supposons que  $u$  est une fonction de type exponentielle avec une variation bornée presque partout (ceci garantit l'existence de la transformée de Laplace de  $v$  et la validité de la formule intégrale de la transformée inverse). Ainsi, le problème peut être résolu par passage dans la plan opérationnel. En utilisant la transformée de Laplace, nous obtenons

$$\frac{\partial \hat{v}(s, x)}{\partial x^2} = \frac{s}{c} \hat{v}(s, x) \quad \text{pour} \quad x > 0 \quad (1.21a)$$

$$\hat{v}(s, 0) = \hat{u}(s) \quad (1.21b)$$

La solution formelle de (1.21a) est

$$\hat{v}(s, x) = c_1(s) \exp\left(-x\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + c_2(s) \exp\left(x\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \quad (1.22)$$

Pour des raisons de bornitude, et tenant compte de la condition aux limites  $\hat{v}(s, 0) = \hat{u}(s)$ , on obtient

$$\hat{v}(s, x) = \hat{u}(s) \exp\left(x\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \quad (1.23)$$

Pour  $0 < x$ ,

$$\exp\left(x\sqrt{\frac{s}{c}}\right) = \mathcal{L}\left\{\frac{x}{2\sqrt{\pi c}}t^{-\frac{3}{2}}\exp\left(\frac{x^2}{4ct}\right)\right\} \quad (1.24)$$

Soit

$$v(t, x) = \frac{x}{2\sqrt{\pi c}} \int_0^t \tau^{-\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{x^2}{4c\tau}\right) u(t - \tau) d\tau \quad (1.25)$$

D'une part, on vérifie bien que (1.25) est une solution de l'équation différentielle (1.17), d'autre part, à partir de (1.23), on en déduit

$$\frac{\partial \hat{v}(s, x)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{c}} s^{\frac{1}{2}} \hat{v}(s, x) \quad (1.26)$$

et en particulier

$$\frac{\partial \hat{v}(s, 0)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{c}} s^{\frac{1}{2}} \hat{u}(s) \quad (1.27)$$

Si nous définissons comme variable de sortie

$$y(t) = \sqrt{c} \frac{\partial v(t, 0)}{\partial x} \quad (1.28)$$

nous obtenons le transfert suivant

$$\hat{y}(s) = s^{\frac{1}{2}} \hat{u}(s) \quad (1.29)$$

Ce qui nous permet d'établir le constat suivant : l'équation de transfert de la chaleur avec l'entrée  $u$  et la sortie  $y$  est donc un dérivateur d'ordre  $\frac{1}{2}$ .

Cet exemple peut être interprété physiquement comme le mouvement d'un fluide visqueux sur la surface transversale d'une plaque rigide dont le rapport entre la viscosité  $\mu$  et la masse volumique  $\rho$  est égale à  $c = \frac{\mu}{\rho}$  (voir figure 1.1). Le mouvement de la plaque est unidirectionnel suivant l'axe  $z$ . La direction normale à la plaque est repérée par la coordonnée  $x$ . Les deux variables  $u(t)$  et  $v(t, x)$  désignent respectivement, la vitesse de la plaque et la vitesse des particules du fluide situées à la distance  $x$  de la plaque.

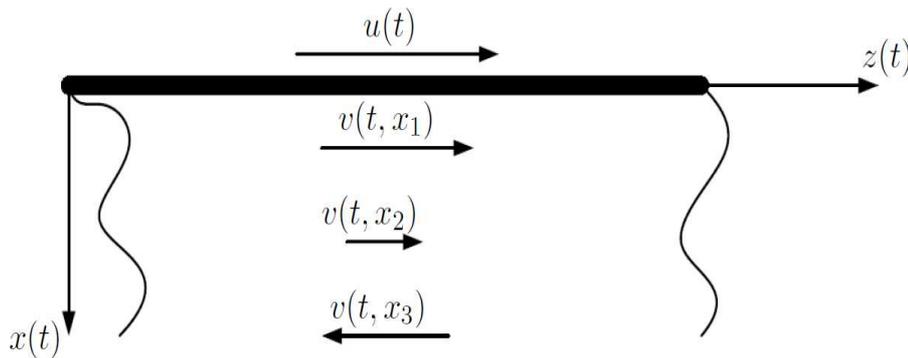


FIGURE 1.1 – Mouvement d'un fluide visqueux sur la surface transversale d'une plaque rigide

#### 1.2.4.2 Modèle de diffusion en électrochimie

Une des importantes études dans l'électrochimie est la détermination de la concentration de l'élément, électro-actif, analysé près de la surface de l'électrode. La fonction caractéristique

descriptive trouvée expérimentalement est de la forme suivante  $m(t) =_0 D_t^{-0.5}i(t)$ , qui est une intégration fractionnaire d'ordre 0.5 du courant. Ensuite, la concentration à la surface  $C_s(t)$  des espèces électro-actives, peut être évaluée par

$$C_s(t) = C_0 - K_0 D_t^{-0.5}i(t) \quad (1.30)$$

avec  $K = \frac{1}{nAF\sqrt{\mathbb{D}}}$ , où  $A$  est la surface de l'électrode,  $n$  est le nombre d'électrons impliqués dans la réaction,  $\mathbb{D}$  est le coefficient de diffusion et  $F$  est la constante de Faraday.

$C_0$  est la concentration uniforme des espèces électro-actives à travers le milieu électrolyte, à la situation d'équilibre initiale caractérisée par un potentiel constant auquel la réaction électrochimique est possible.

Cette relation est dérivée de l'équation de diffusion classique

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = \mathbb{D} \frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2} \quad (1.31)$$

où

$$(0 < x < \infty \text{ et } 0 < t) \text{ avec } C(\infty, t) = C_0 \text{ et } C(x, 0) = C_0$$

et

$$\left[ \mathbb{D} \frac{\partial C(x,t)}{\partial x} \right]_{x=0} = \frac{i(t)}{nAF} \quad (1.32)$$

On trouve des équations similaires pour les lignes de transmission semi-infinies et les études de flux de chaleur.

Cette approche de modélisation a contribué à la découverte des caractéristiques particulières du processus industriel. De plus, au lieu de l'équation de diffusion classique, il est possible de modéliser avec une équation de diffusion d'ordre non entier comme suit

$$D_t^\alpha C(x,t) = \mathbb{D} \frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2} \quad (1.33)$$

où  $0 < \alpha < 1$ . De ce fait, la concentration à la surface peut être liée à  $m_\alpha(t) =_0 D_t^{-\alpha/2}i(t)$

### 1.2.4.3 Impédance de l'interface électrode-électrolyte

La détermination de l'impédance dans les cellules des batteries électriques, appelée aussi "impédance de Warburg", est un autre exemple de l'utilisation du calcul fractionnaire dans la phase de modélisation des phénomènes physiques (voir [KHLS81a, KHLS81b, JM09]).

Les batteries électriques présentent toujours une sortie de courant limitée. Cette limitation est due au fait qu'à l'échelle microscopique de l'interface entre l'électrolyte et électrode, le procédé électrochimique a un "taux fini" ce qui limite le courant à la sortie. Les fabricants de batteries utilisent des électrodes poreuses pour contourner cette limitation, en augmentant la surface.

Il a été établi expérimentalement que l'impédance d'interface de surface électrolyte-métal ne présente pas un comportement de capacité pure, plutôt il est gouverné par [Las99]

$$Z(\omega) = \frac{K}{(j\omega)^\alpha} \quad (1.34)$$

où  $0 < \alpha < 1$ .

Ce qui est équivalent à

$$Z(s) = Ks^{-\alpha} \quad (1.35)$$

dans le domaine de Laplace.

Pour la diffusion d'un corps électrochimique à l'état solide, l'impédance de Warburg  $Z(s)$  varie proportionnellement par rapport à  $(j\omega)^{-0.5}$ , ce qui donne lieu à une faible puissance fréquentielle. Son équation caractéristique  $\frac{\partial C}{\partial t} = \mathbb{D} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ , donne lieu à cette variation proportionnelle  $Z(\omega) \propto (j\omega)^{-0.5}$ .

Grâce à des données expérimentales, Schmidt et Drumheller (voir [SD71]) montrent que le courant qui traverse un condensateur est proportionnel à la dérivée non entière de la tension. L'équation (1.34) montre en effet que l'on peut bien définir une impédance fractionnaire de capacité, qui peut être fabriquée à partir de composition de matériaux spécifiques.  $K$  désigne alors la constante du "Fractor" (capacité fractionnaire). Un axe de recherche intéressant dans la physique des matériaux qui permettra de mettre en évidence les propriétés de tels matériaux via des bandes de fréquences et de températures. La réalisation d'une impédance fractionnaire peut se faire par juxtaposition en série de cellules Résistance-Capacité (d'impédance traditionnelle).

La diffusion anormale est caractérisée par un déplacement moyen carré des particules diffusées qui ne suit pas la loi ordinaire de diffusion  $\langle r^2 \rangle \propto t$ , mais plus généralement  $\langle r^2 \rangle \propto t^\alpha$ . Ce constat n'est pas surprenant, car de nombreux mécanismes différents donnent lieu à des comportements anormaux, comme un écoulement complexe, un écoulement poreux, à travers une résine échangeuse d'ions tubulaire aléatoire, en raison de la complexité structurelle, des formes de la géométrie complexe, etc.

#### 1.2.4.4 Rhéologie

En rhéologie, lorsque des solides viscoélastiques sont utilisés comme matériaux isolateurs ou amortisseurs de vibrations, la dérivation d'ordre non entier est un moyen approprié pour décrire fidèlement l'amortissement dans les équations de mouvement [Bag79] et [BT86]. L'introduction de la dérivation d'ordre non entier dans la modélisation réduit le nombre de paramètres du modèle [Sou96]. On peut voir cela sur l'exemple du comportement contrainte-déformation d'un solide pour lequel l'équation de mouvement dans le cas d'un modèle entier est donnée par

$$\sigma(t) + \sum_{m=1}^M b_m \frac{d^m}{dt^m} \sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + \sum_{n=1}^N E_n \frac{d^n}{dt^n} \varepsilon(t) \quad (1.36)$$

où  $\sigma$  et  $\varepsilon$  désignent respectivement la contrainte et la déformation, et où  $b_m$ ,  $E_0$ ,  $M$ ,  $N$  et  $E_n$  sont des paramètres du modèle. Maintenant, en utilisant la dérivation d'ordre non entier, on n'a besoin que d'un seul terme de dérivation agissant respectivement sur la contrainte et la déformation. Ce qui produit un modèle compact à quatre ou cinq paramètres maximum [Bag89], au lieu d'une dizaine dans le cas de l'équation (1.36)

$$(1 + bD_t^\alpha)\sigma(t) = (E_0 + E_1 D_t^\alpha)\varepsilon(t) \quad (1.37)$$

Dans (1.37), les paramètres sont  $b$ ,  $E_0$ ,  $E_1$  et  $\alpha$ . Ce modèle reflète fidèlement les propriétés mesurées de plusieurs matériaux. Le bon comportement de cette modélisation fractionnaire s'explique notamment par le fait que les théories moléculaires "classiques" produisent des relations entre contrainte et déformation contenant des puissances fractionnaires de la fréquence. Des manipulations mathématiques de ces théories mettent ces relations sous forme de dérivées d'ordre non entier [BT83].

## 1.2.5 Approximations et Simulations des systèmes d'ordre non entier

La problématique principale de la simulation temporelle des systèmes d'ordre non entier est que l'évaluation de la sortie nécessite la connaissance de tout le passé du système, qui est cependant difficile à prendre en compte. De ce fait, la simulation des systèmes d'ordre non entier a attiré l'attention de plusieurs chercheurs pendant les dernières décennies [CH64, Ous91, CSTO92, Dor94, LOS96, Pet11, BMB11, MML011, MML012, LMM13], ce qui a conduit au développement d'une large variété d'approximations pour les opérateurs d'ordre non entier par ces derniers (voir [VPHF00] et ses références).

### 1.2.5.1 Méthodes d'approximation des opérateurs d'ordre non entier

La multitude des travaux sur l'approximation des opérateurs d'ordre non entier est due au fait que les particularités de chaque problème fractionnaire imposent une approche différente pour sa résolution. Dans ce qui suit, les méthodes d'approximation les plus utilisées seront présentées.

#### 1.2.5.1.1 Les fractions en chaîne continues (Continued Fraction Expansions - CFE)

Il est bien connu que la fraction en chaîne continue (CFE) est une méthode d'évaluation des fonctions, et converge dans un domaine beaucoup plus vaste dans le domaine complexe [PFTV92]. Le résultat d'une telle approximation pour une fonction irrationnelle,  $G(s)$ , peut être exprimé sous la forme

$$G(s) = a_0(s) + \frac{b_1(s)}{a_1(s) + \frac{b_2(s)}{a_2(s) + \frac{b_3(s)}{a_3(s) + \dots}}} \quad (1.38)$$

où les  $a_i$  et  $b_i$  sont des fonctions rationnelles en la variable  $s$ , ou constantes. Cette approche permet d'obtenir une fonction rationnelle,  $\hat{G}(s)$ , qui est une approximation de la fonction irrationnelle  $G(s)$ .

Dans [Roy67], la méthode générale CFE pour l'approximation d'un opérateur intégro-différentiel a été utilisée afin d'approximer la fonction  $G(s) = s^{-\alpha}$  avec  $0 < \alpha < 1$ . Cette approximation peut être obtenue en effectuant le CFE des fonctions

$$G_h(s) = \frac{1}{(1 + sT)^\alpha} \quad (1.39)$$

$$G_l(s) = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^\alpha \quad (1.40)$$

où  $G_h(s)$  représente l'approximation à des hautes fréquences ( $\omega T \gg 1$ ), et  $G_l(s)$  représente l'approximation à des basses fréquences ( $\omega \ll 1$ ).

#### 1.2.5.1.2 L'approximation de Carlson

La méthode proposée dans [CH64], est dérivée d'une procédure régulière de Newton utilisée pour l'approximation itérative de la racine  $\alpha^{\text{ième}}$ . Le point de départ de la méthode fait l'énoncé des relations suivantes

$$(H(s))^{\frac{1}{\alpha}} - G(s) = 0 \quad (1.41)$$

$$H(s) - (G(s))^\alpha = 0 \quad (1.42)$$

Définissons  $\alpha = \frac{1}{q}$  et  $m = \frac{q}{2}$  dans chaque itération, puis à partir de la valeur initiale  $H_0(s) = 1$ , une fonction rationnelle approximative est obtenue sous la forme

$$H_i(s) = H_{i-1}(s) \frac{(q-m)(H_{i-1}(s))^2 + (q+m)G(s)}{(q+m)(H_{i-1}(s))^2 + (q-m)G(s)} \quad (1.43)$$

Malheureusement, cette approche n'est utilisable que si  $q \in \mathbb{Z}$ , en d'autres termes  $\alpha$  ne peut prendre que des valeurs  $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{4}, \dots$

### 1.2.5.1.3 L'approximation par pôles et zéros récurrents "CRONE"

L'objectif de cette méthode est d'approcher l'opérateur d'intégration ou de dérivation non entier par un modèle entier borné en fréquence de dimension finie. Cette approximation nécessite deux étapes, une étape de troncature fréquentielle de l'opérateur d'intégration ou de dérivation non entière, puis une deuxième étape d'approximation de l'opérateur d'intégration ou de dérivation d'ordre non entier bornée en fréquence par un modèle entier.

La première étape consiste à introduire l'opérateur d'intégration borné en fréquence proposé dans [Ous95] par

$$s_{[\omega_A, \omega_B]}^{-\alpha} = C \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_h}}{1 + \frac{s}{\omega_b}} \right)^\alpha, \quad -1 < \alpha < 1 \quad (1.44)$$

où  $\omega_b < \omega_h$  et  $C$  est obtenu afin d'avoir un gain unitaire au centre de l'intervalle  $[\omega_A, \omega_B]$ .

$$\left| (j\omega)^{-\alpha} \right| = C \left| \frac{1 + \frac{j\omega}{\omega_h}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_b}} \right|^\alpha \quad (1.45)$$

où  $\omega_c = \sqrt{\omega_b \omega_h}$ .

Les pulsations transitionnelles  $\omega_b$  et  $\omega_h$  sont définies par

$$\omega_b = \frac{\omega_A}{\sigma} \quad (1.46a)$$

$$\omega_h = \sigma \omega_B \quad (1.46b)$$

où  $\sigma$  est généralement fixé à 10.

L'élargissement de la bande fréquentielle  $[\omega_A, \omega_B]$  permet d'éviter le phénomène d'effets de bord et d'obtenir une bonne approximation de  $s^{-\alpha}$  dans  $[\omega_A, \omega_B]$ .

La deuxième étape consiste à approximer la partie irrationnelle de (1.44) par une distribution récursive de zéros et pôles réels [Ous95]

$$\left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_h}}{1 + \frac{s}{\omega_b}} \right)^\alpha \approx \prod_{k=1}^{N_s} \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_k}}{1 + \frac{s}{\omega'_k}} \right) \quad (1.47)$$

où  $N_s$  désigne le nombre des pôles et zéros récurrents.

La récursivité des zéros et des pôles est caractérisée par les relations suivantes

$$\frac{\omega_k}{\omega_{k+1}} = \frac{\omega'_k}{\omega'_{k+1}} = \beta \eta \quad (1.48a)$$

$$\frac{\omega_k}{\omega'_k} = \beta \quad (1.48b)$$

$$\frac{\omega'_{k+1}}{\omega_{k+1}} = \eta \quad (1.48c)$$

Les facteurs récurrents  $\beta$  et  $\eta$  sont liés à l'ordre de dérivation  $\alpha$  et définis par

$$\beta = \left( \frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{\frac{\alpha}{N_s}} \quad (1.49a)$$

$$\eta = \left( \frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{\frac{1-\alpha}{N_s}} \quad (1.49b)$$

L'intérêt de cette méthode d'approximation réside dans sa simplicité de mise en oeuvre. Si l'ordre de dérivation  $1 < \alpha$  (respectivement ordre d'intégration  $\alpha < -1$ ) seule la partie non entière est approchée par un modèle à ordre entier.

**Remarque 1.2.1.** Contrairement aux approximations, l'approximation par pôles et zéros récurrents "CRONE" peut facilement être étendue au cas où l'ordre  $\alpha$  est complexe. Un tel ordre de dérivation est utilisé seulement dans des circonstances très spécifiques telle que la commande robuste "CRONE", afin d'avoir plus de degré de liberté.

### 1.2.5.2 Simulations des systèmes d'ordre non entier

Dans la littérature, deux approches sont les plus utilisées pour simuler les systèmes d'ordre non entier dans le domaine temporel. La première approche se base sur une approximation numérique discrète issue de la définition de Grünwald afin d'obtenir un modèle entier discret. La deuxième approche est basée sur le remplacement de l'opérateur de dérivation non entière par une distribution de pôles et zéros récurrents afin d'obtenir un modèle entier continu, qui est l'approximation "CRONE" [OLMN00, LMM13].

Dans ce manuscrit, les exemples numériques sont simulés en utilisant un "Toolbox" sur *Matlab* qui se base sur l'approximation "CRONE", et qui est disponible sur le site du laboratoire de l'équipe de recherche "CRONE". Ce *Toolbox* permet d'ajouter un bloc intégrateur ou dérivateur d'ordre non entier prédéfini dans la bibliothèque de l'éditeur *Simulink-Matlab*, où l'utilisateur a la possibilité de choisir les paramètres souhaités tels que l'intervalle de fréquence, le nombre de pôles ainsi que l'approche d'approximation comme on peut le voir dans la figure 1.2.

Ce bloc peut être combiné et relié avec d'autres blocs de la bibliothèque de l'éditeur *Simulink-Matlab* à l'aide de lignes qui représentent des signaux afin d'établir des relations mathématiques entre les composants du système, ce qui permet de créer un nouveau modèle représentatif du système dans l'espace des pseudo-états. Cette flexibilité présente un avantage dans la simulation des systèmes d'ordre non entier à retard, car il suffit d'utiliser le bloc retard, afin d'obtenir un état retardé qui sera bouclé par la suite vers l'entrée de l'intégrateur d'ordre non entier  $-\alpha$ . La figure 1.3 montre un modèle SISO type de la réalisation d'un système d'ordre non entier à retard dans l'environnement *Simulink-Matlab*. Le même principe peut être appliqué pour des systèmes MIMO d'ordre supérieur ou égal à 2.

## 1.3 Analyse de la stabilité des systèmes d'ordre non entier commensurable

Le transfert entrée - sortie d'un système d'ordre non entier décrit par un modèle continu peut être écrit comme suit

$$H(D^{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n})(y_1, y_2, \dots, y_l) = G(D^{\beta_0 \beta_1 \dots \beta_m})(u_1, u_2, \dots, u_l) \quad (1.50)$$

où  $y_l$  et  $u_l$  sont des fonctions du temps, respectivement la sortie et l'entrée du système décrit par le modèle (1.50),  $H$  et  $G$  sont des combinaisons (pas nécessairement linéaires) d'opérateurs de

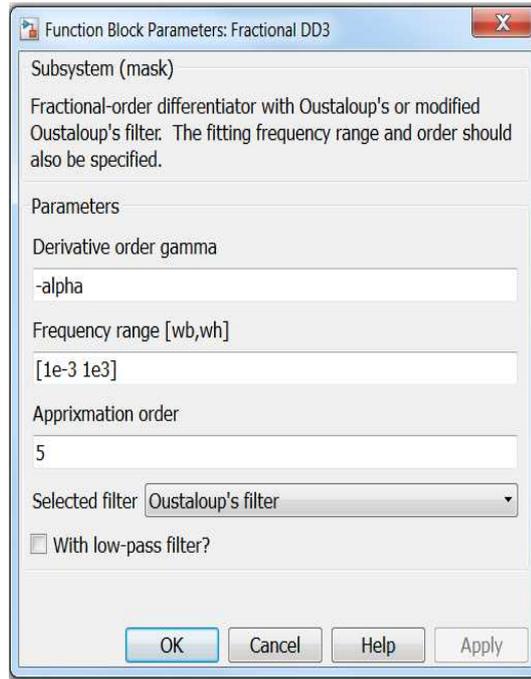


FIGURE 1.2 – Bloc intégrateur ou dérivateur d'ordre non entier  $\alpha$

la dérivation d'ordre non entier et  $(\alpha_i$  et  $\beta_j)$  sont les ordres de la dérivation fractionnaire relatifs respectivement à la sortie et à l'entrée du système. Pour le cas d'un système d'ordre non entier linéaire invariant monovariante, le modèle suivant peut être obtenu

$$H(D^{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n})y(t) = G(D^{\beta_0 \beta_1 \dots \beta_m})u(t) \quad (1.51)$$

avec

$$H(D^{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n}) = \sum_{k=0}^n a_k D^{\alpha_k}, \quad G(D^{\beta_0 \beta_1 \dots \beta_m}) = \sum_{k=0}^m b_k D^{\beta_k} \text{ et } a_k, b_k \in \mathbb{R}$$

Dans l'équation (1.51), qui décrit la dynamique d'un système linéaire invariant monovariante d'ordre non entier, deux cas se présentent et conduisent à deux types des systèmes : les systèmes commensurables ou d'ordres commensurables et les systèmes non commensurables ou d'ordres non commensurables.

Un système est dit commensurable si tous les ordres de dérivation de l'équation différentielle d'ordre non entier qui le régit sont des multiples entiers d'un ordre de base  $\alpha$ . C'est à dire dans l'équation (1.51), la condition suivante est remplie

$$\alpha_k, \beta_k = k\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (1.52)$$

L'équation (1.51) peut alors être écrite sous la forme

$$\sum_{k=0}^n a_k D^{k\alpha} y(t) = \sum_{k=0}^m b_k D^{k\alpha} u(t) \quad (1.53)$$

Un système est dit non commensurable si la condition (1.52) n'est pas remplie.

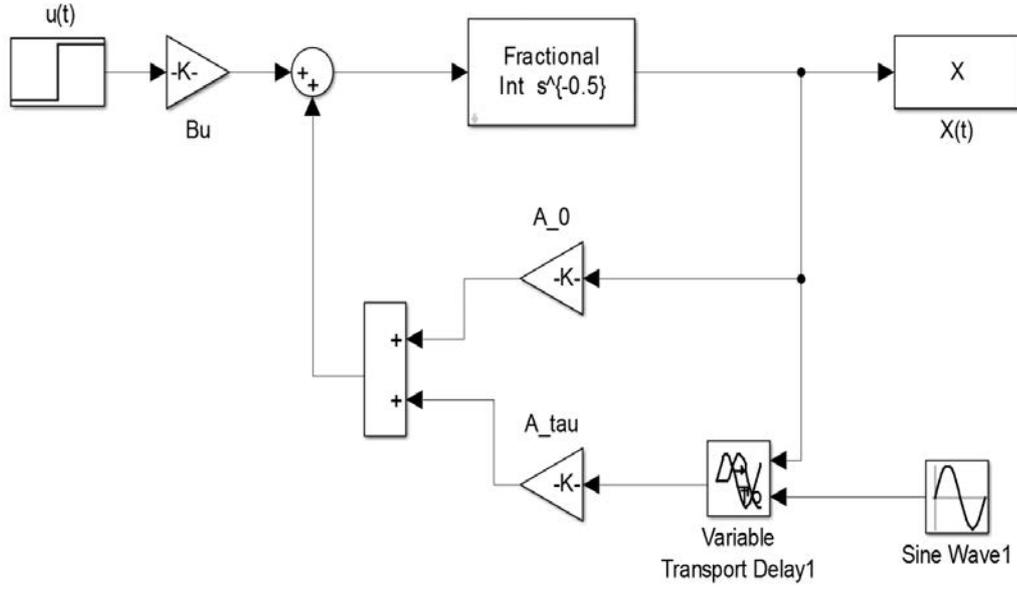


FIGURE 1.3 – Représentation d’un système SISO d’ordre non entier à retard variant dans le temps

Le cas des systèmes commensurables est très intéressant en pratique. Il permet d’obtenir une représentation des pseudo-états analogue à celle des systèmes d’ordre entier. Les ordres de dérivation  $\alpha_k$  et  $\beta_k$  relatifs à l’entrée et à la sortie étant tous deux des multiples d’un ordre non entier  $\alpha$ .

### 1.3.1 Représentation dans l’espace des pseudo états

La représentation d’un système d’ordre non entier commensurable dans l’espace des pseudo états est définie sous la forme suivante

$$D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.54a)$$

$$z(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1.54b)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  désigne le vecteur pseudo-état,  $u \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d’entrée représentant la commande,  $y \in \mathbb{R}^p$  est la sortie du système et  $\alpha$  est l’ordre de dérivation fractionnaire tel que  $0 < \alpha < 2$ .  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont des matrices constantes connues de dimensions appropriées.

La représentation des pseudo-états (1.54) n’est pas unique. Des formes similaires aux formes canoniques observables ou commandables d’un modèle entier peuvent être obtenues. Comme les concepts fondamentaux des systèmes d’ordre entier (Commandabilité, Observabilité, Stabilité,...) qui reposent sur la notion d’état et d’état initial. De nombreux travaux s’avèrent soit faux, soit corrects mais avec une démonstration erronée. Deux équipes de chercheurs, une américaine et l’autre française [LH01, HL02, AHL07, HL09, TM09, TM11, HLTM13], ont résolu le problème de l’initialisation d’un système d’ordre non entier.

La première s’est basée sur les concepts de “history function” et “intialization function”. Toutefois, leur théorie n’apporte pas de solution au concept d’état. La deuxième équipe s’est basée sur un autre concept, celui d’intégrateur d’ordre non entier, qui lui a permis aussi d’apporter une

solution au problème d'initialisation. A la différence de l'approche précédente ce concept s'appuie sur les notions d'état et d'état initial, en généralisant les propriétés des systèmes standards aux systèmes d'ordre non entier, mais avec la particularité d'un état de dimension infinie : il s'agit en fait d'un état  $z(w, t)$ , continûment distribué en fréquence,  $w$  variant de 0 à l'infini. Cet état permet d'expliquer de nombreuses propriétés des systèmes d'ordre non entier, en particulier leurs régimes libres, et surtout de prédire ces régimes libres à partir d'un état initial  $z(w, t_0)$ . Par ailleurs, quelques travaux ont montré que ce nouveau concept peut s'appliquer à la définition correcte des fonctions de Lyapunov et à l'observation d'état des systèmes d'ordre non entier [TMSO11, BZDR15, BZDR16a].

### 1.3.2 Définition d'une région $\mathcal{GLMI}$

Le formalisme introduit par [Chi96] et développé par Bachelier [Bac98] permet de traiter ce cas particulier en utilisant le concept de régions  $\mathcal{GLMI}$ , initialement étendu dans le cas des systèmes d'ordre non entier par [SMF10a] ([Bac98], p. 72).

**Définition 1.3.1.** [Chi96, Bac98] *Un sous ensemble  $\mathcal{D}$  du plan complexe est appelé région  $\mathcal{GLMI}$  d'ordre  $\ell$  (pour "Generalized LMI") s'il existe  $\theta_k \in \mathbb{C}^{\ell \times \ell}$ ,  $\psi_k \in \mathbb{C}^{\ell \times \ell}$ ,  $H_k \in \mathbb{C}^{\ell \times \ell}$  et  $J_k \in \mathbb{C}^{\ell \times \ell}$  tels que*

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists \omega = [\omega_1 \dots \omega_m]^T \in \mathbb{C}^m, f_{\mathcal{D}}(z, \omega) < 0, g_{\mathcal{D}}(\omega) = 0_{\ell, \ell}\}, \quad \forall k \in \{1, \dots, m\} \quad (1.55)$$

où

$$f_{\mathcal{D}}(z, \omega) = \sum_{i=1}^m (\theta_k \omega_k + \theta_k^* \bar{\omega}_k + \psi_k z \omega_k + \psi_k^* \bar{\omega}_k \bar{z}) \quad (1.56)$$

et

$$g_{\mathcal{D}}(\omega) = \sum_{i=1}^m (H_k \omega_k + J_k \bar{\omega}_k). \quad (1.57)$$

### 1.3.3 Condition nécessaire et suffisante de stabilité dans une région $\mathcal{GLMI}$

**Définition 1.3.2.** [Chi96, Bac98, CGA99] *Une matrice  $A$  est dite  $\mathcal{D}$ -stable si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement localisées dans cette région  $\mathcal{D}$  du plan complexe.*

Dans le cas où cette région  $\mathcal{D}$  est une région  $\mathcal{GLMI}$  de la forme (1.55), le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante de  $\mathcal{D}$ -stabilité pour la matrice  $A$  ([Bac98], pp. 72 et 73).

**Théorème 1.3.1.** [Chi96, Bac98] *Soit une matrice  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  et  $\mathcal{D}$  une région  $\mathcal{GLMI}$  définie par (1.55), (1.56) et (1.57).  $A$  est  $\mathcal{D}$ -stable si et seulement si il existe un ensemble de  $m$  matrices  $X_k \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\forall k \in \{1, \dots, m\}$ , tel que*

$$M_{\mathcal{D}}(A, \{X_k\}) = \sum_{i=1}^m (\theta_k \otimes X_k + \theta_k^* \otimes X_k^* + \psi_k \otimes (AX_k) + \psi_k^* \otimes (AX_k)^*) < 0, \quad (1.58)$$

et

$$N_{\mathcal{D}}(\{X_k\}) = \sum_{i=1}^m (H_k \otimes X_k + J_k \otimes X_k^*) = 0_{\ell, \ell}. \quad (1.59)$$

*Démonstration.* Voir [Chi96, Bac98]. •

**Remarque 1.3.1.** Les matrices  $M_{\mathcal{D}}(A, \{X_k\})$  et  $N_{\mathcal{D}}(\{X_k\})$  dans le théorème 1.3.1 peuvent être immédiatement déduites de l'écriture de  $f_{\mathcal{D}}(z, \omega)$  et  $g_{\mathcal{D}}(\omega)$  dans la définition 1.3.1 en effectuant les substitutions suivantes [Bac98]

$$(\omega_k, \bar{\omega}_k, z\omega_k, \bar{\omega}_k \bar{z}) \longleftrightarrow (\otimes X_k, \otimes X_k^*, \otimes (AX_k), \otimes (AX_k)^*). \quad (1.60)$$

### 1.3.4 Application à la $\mathcal{D}$ -stabilité dans une union de sous-régions convexes

Ce paragraphe est consacré au moyen par lequel le nombre de régions simples polynomiales peuvent être formulées comme des régions  $\mathcal{GLMI}$ . En effet, ces régions résultent en réalité d'unions de sous-régions polynomiales convexes, pas nécessairement symétriques par rapport à l'axe réel.

Nous décrivons ici des régions polynomiales, souvent utilisées dans les problèmes de placement de pôles, et qui peuvent être également décrites par une formulation  $\mathcal{GLMI}$ .

#### 1.3.4.1 Régions du premier ordre

Les régions de premier ordre sont décrites de manière cartésienne par ([Bac98], pp. 158 et 159)

$$\mathcal{D} = \{(z = x + jy) \in \mathbb{C} \mid d_0 + d_1 x + d_2 y < 0\}. \quad (1.61)$$

Puisque l'on a

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2j}, \quad (1.62)$$

on peut déduire

$$\mathcal{D} = \{(z = x + jy) \in \mathbb{C} \mid d_0 + d_1 \left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right) + d_2 \left(\frac{z - \bar{z}}{2j}\right) < 0\}, \quad (1.63)$$

ce qui est équivalent à

$$\mathcal{D} = \{(z = x + jy) \in \mathbb{C} \mid d_0 + \frac{d_1 - jd_2}{2} z + \frac{d_1 + jd_2}{2} \bar{z} < 0\}. \quad (1.64)$$

Cette formulation est identifiable avec la formulation polynomiale d'une région de premier ordre

$$\mathcal{D} = \{(z = x + iy) \in \mathbb{C} \mid \beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 \bar{z} < 0\} \quad (1.65)$$

en posant

$$\beta_0 = d_0, \quad \beta_1 = \frac{d_1 - jd_2}{2}, \quad \beta_2 = \frac{d_1 + jd_2}{2} = \beta_1^*. \quad (1.66)$$

### 1.3.5 Formulation $\mathcal{GLMI}$ de l'union de sous-régions convexes du premier ordre

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à l'étude de la stabilité d'une matrice lorsque  $\mathcal{D}$  est une union de certaines sous-régions convexes. Nous montrons que de nombreuses régions de ce type peuvent être décrites par une formulation  $\mathcal{GLMI}$  ([Bac98], pp. 79 et 80).

Soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble des régions  $\mathcal{D}$  pouvant être décrites par

$$\mathcal{D} = \bigcup_{k=1}^m \mathcal{D}_k \quad (1.67)$$

où les sous-régions  $\mathcal{D}_k$  peuvent être définies de la manière suivante (avec  $p = m$  car on se limite aux régions du premier ordre)

$$\mathcal{D}_k \in \mathcal{C}_1 \quad \forall k \in \{1, \dots, m\} \quad (1.68)$$

$\mathcal{C}_1$  est l'ensemble des régions du premier ordre, c'est-à-dire

$$\mathcal{D}_k = \{z \in \mathbb{C} \mid f_k(z) = \alpha_k + \beta_k z + \beta_k^* \bar{z} < 0\} \quad \forall k \in \{1, \dots, m\}. \quad (1.69)$$

En réalité,  $\mathcal{D}$  peut être exprimé comme en (1.55), (1.56) et (1.57) avec  $\ell = m + 1$  et

$$\theta_k = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Theta_k & 0_{1,m} \\ 0_{m,1} & -\varepsilon_k^m \end{bmatrix}, \quad \psi_k = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Psi_k & 0_{1,m} \\ 0_{m,1} & 0_m \end{bmatrix}, \quad H_k = -J_k = \varepsilon_{k+1}^{m+1} \quad (1.70)$$

où les matrices  $\varepsilon_j^i \in \mathbb{R}^{j \times j}$  ont toutes leurs composantes nulles à l'exception d'un "1" à la position  $(i, i)$ , avec

$$\Theta_k = \begin{bmatrix} \alpha_k & 0_{1,m} \\ 0_{m,1} & 0_{m,m} \end{bmatrix}, \quad \Psi_k = \begin{bmatrix} \beta_k & 0_{1,m} \\ 0_{m,1} & 0_{m,m} \end{bmatrix}, \quad \forall k \in \{1, \dots, m\} \quad (1.71)$$

Dans ce qui suit, on se limitera uniquement à l'ensemble  $\mathcal{C}_1$  des régions polynomiales du premier ordre.

### 1.3.6 Analyse des conditions de stabilité des systèmes d'ordre non entier par une approche $\mathcal{GLMI}$

#### 1.3.6.1 Stabilité des systèmes d'ordre non entier

**Théorème 1.3.2.** [Mat96] *Considérons le système linéaire d'ordre non entier commensurable suivant*

$$D_t^\alpha x = Ax + Bu \quad 0 < \alpha < 2 \quad (1.72a)$$

$$y = Cx + Du \quad (1.72b)$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$ . Soit  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  l'ensemble des valeurs propres de  $A$ , le système (1.72) est asymptotiquement stable au sens BIBO si et seulement si

$$|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}, \quad \lambda_i \in \sigma(A), \quad i = 1 \dots n \quad (1.73)$$

D'après ce théorème de la stabilité (et d'autres théorèmes pour  $1 \leq \alpha < 2$ ), il en découle les différentes régions stables et instables, voir figure 1.4.

La figure 1.4 montre que le domaine de stabilité  $D_s$  du système d'ordre non entier est non convexe lorsque  $0 < \alpha < 1$ . L'analyse de la stabilité des systèmes d'ordre non entier a été largement traitée dans [AC08, ACP07] dans le cas où  $1 \leq \alpha < 2$ .

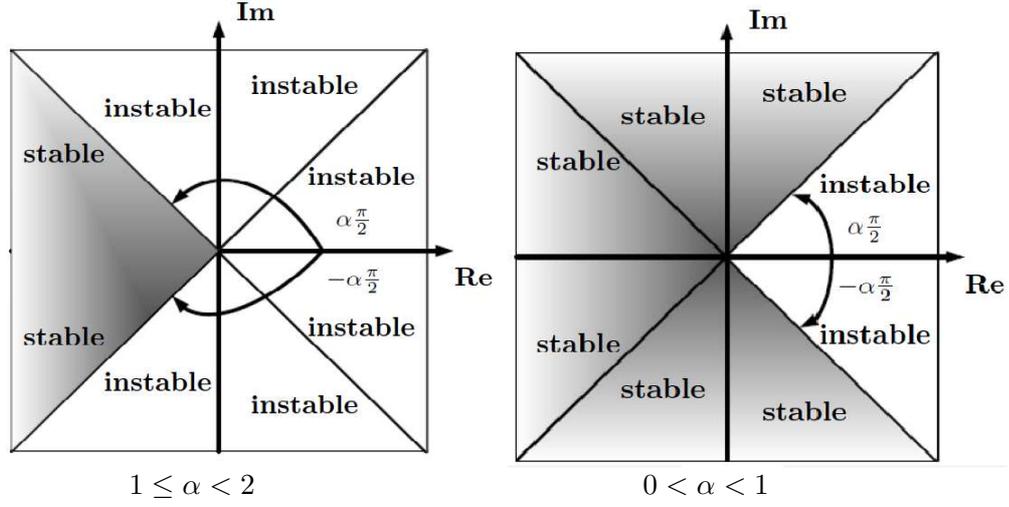


FIGURE 1.4 – Domaines de stabilité des systèmes linéaires d'ordre non entier

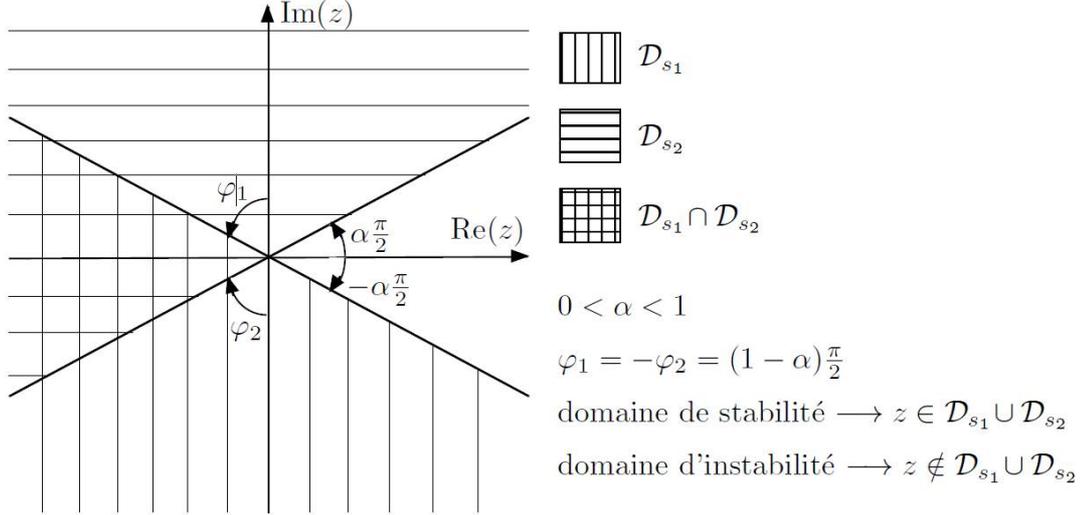


FIGURE 1.5 – Région de stabilité pour  $0 < \alpha < 1$  considérée comme l'union de 2 régions non convexes

### 1.3.6.2 Approche $\mathcal{GLMI}$ pour l'analyse de la stabilité des systèmes d'ordre non entier lorsque $0 < \alpha < 1$

Un résultat nouveau vient d'être établi par [SMF10a] dans le cas où  $0 < \alpha < 1$ , par une analyse par une décomposition du domaine de stabilité. Cette analyse est basée sur l'union de deux sous-régions convexes de premier ordre  $\mathcal{D}_{s_1}$  et  $\mathcal{D}_{s_2}$  et ces régions résultent d'une rotation de la moitié gauche des angles  $\varphi_1 = \varphi$  et  $\varphi_2 = -\varphi$  où  $\varphi = (1 - \alpha)\frac{\pi}{2}$  (figure 1.5).

Le domaine de stabilité  $\mathcal{D}_s$  est défini par

$$\mathcal{D}_s = \mathcal{D}_{s_1} \cup \mathcal{D}_{s_2} \quad (1.74)$$

avec (relation (70) dans [SMF10a])

$$\mathcal{D}_{s_k} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(ze^{j\varphi_k}) < 0\}, \quad \forall k \in \{1, 2\}. \quad (1.75)$$

où  $\mathcal{D}_{s_1}$  est la région située au-dessous de la droite ayant une pente négative et  $\mathcal{D}_{s_2}$  est la région située au-dessus de la droite ayant une pente positive.

**Définition des régions  $\mathcal{D}_{s_i}$**

Supposons que  $\mathcal{D}_{s_i}$  est le demi-plan complexe situé au-dessus de la droite  $y = a_i x + b_i$  avec  $a_i = -\cot(\varphi_i)$  et  $\varphi_i = -0.5\pi + \arctan(a_i)$ . On a donc  $z \in \mathcal{D}_{s_i}$  si et seulement si

$$a_i x + b_i - y < 0$$

et on a les équivalences suivantes (en utilisant les relations (1.61) à (1.66) et (1.69))

$$\begin{aligned} a_i x + b_i - y < 0 &\iff -\cot(\varphi_i)x + b_i - y < 0 \\ &\iff b_i + 0.5(-\cot(\varphi_i) + j)z + 0.5(-\cot(\varphi_i) - j)\bar{z} < 0 \\ &\iff \frac{2b_i}{\sqrt{\cot^2(\varphi_i) + 1}} + \frac{-\cot(\varphi_i) + j}{\sqrt{\cot^2(\varphi_i) + 1}}z + \frac{-\cot(\varphi_i) - j}{\sqrt{\cot^2(\varphi_i) + 1}}\bar{z} < 0 \\ &\iff \alpha_i + \beta_i z + \beta_i^* \bar{z} < 0 \end{aligned}$$

avec  $\alpha_i = \frac{2b_i}{\sqrt{\cot^2(\varphi_i) + 1}}$ ,  $\beta_i = \frac{-\cot(\varphi_i) + j}{\sqrt{\cot^2(\varphi_i) + 1}}$  et  $|\beta_i| = 1$   
où  $x = 0.5(z + \bar{z})$  et  $y = 0.5(z - \bar{z})$ . Avec  $\tan(a_i) = 0.5\alpha\pi$ , on a bien

$$\varphi_i = -(1 - \alpha)0.5\pi \quad \text{et} \quad e^{j\varphi_i} = \frac{a - j}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{-\cot(\varphi_i) - j}{\sqrt{\cot^2(\varphi_i) + 1}} = \beta_i^*.$$

Si les calculs se font par rapport au demi-plan complexe en dessous de la droite, alors on effectue les remplacements suivants

$$\begin{aligned} a_i x + b_i - y < 0 &\longrightarrow -a_i x - b_i + y < 0, & a_i = -\cot(\varphi_i) &\longrightarrow a_i = -\cot(\varphi_i) \\ \varphi_i = -0.5\pi + \arctan(a_i) &\longrightarrow \varphi_i = 0.5\pi - \arctan(a_i) \\ 0.5(-\cot(\varphi_i) + j)z &\longrightarrow 0.5(\cot(\varphi_i) - j)z, & 0.5(-\cot(\varphi_i) - j)\bar{z} &\longrightarrow 0.5(\cot(\varphi_i) + j)\bar{z} \\ \varphi_i = -(1 - \alpha)0.5\pi &\longrightarrow \varphi_i = (1 - \alpha)0.5\pi, & e^{j\varphi_i} = \frac{a - j}{\sqrt{a^2 + 1}} &\longrightarrow e^{j\varphi_i} = \frac{-a + j}{\sqrt{a^2 + 1}} \\ e^{j\varphi_i} = \frac{-\cot(\varphi_i) - j}{\sqrt{\cot^2(\varphi_i) + 1}} &= \beta_i^* &\longrightarrow e^{j\varphi_i} &= \frac{\cot(\varphi_i) + j}{\sqrt{\cot^2(\varphi_i) + 1}} = \beta_i^*. \end{aligned}$$

On a  $e^{j\varphi_i} = \beta_k^*$ , alors qu'on a  $e^{j\varphi_i} = \beta_k$  dans [SMF10a]. □

**Définition des régions  $\mathcal{D}_{s_i}$  avec la relation (1.75)**

La relation (1.75) (relation (70) [SMF10a]) avec  $b_i = \alpha_i = 0$  s'écrit

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(ze^{j\varphi_1}) &= \operatorname{Re}(ze^{j\varphi}) = \operatorname{Re}\left((x + jy)\left(\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) + j\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)\right)\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\left(x\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) - y\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)\right) + j\left(x\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) + y\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)\right)\right) \\ &= x\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) - y\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) < 0 \end{aligned}$$

pour  $\mathcal{D}_{s_1}$  et

$$\operatorname{Re}(ze^{j\varphi_2}) = \operatorname{Re}(ze^{-j\varphi}) = \operatorname{Re}\left((x + jy)\left(\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) - j\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \operatorname{Re} \left( \left( x \sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) + y \cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \right) + j \left( x \cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) - y \sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \right) \right) \\
 &= x \sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) + y \cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) < 0
 \end{aligned}$$

pour  $\mathcal{D}_{s_2}$ , avec  $\cos(\alpha \frac{\pi}{2}) > 0$ ,  $\sin(\alpha \frac{\pi}{2}) > 0$  et  $\varphi_1 = -\varphi_2 = \varphi = (1 - \alpha) \frac{\pi}{2}$ .

On obtient donc

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_{s_1} &\longrightarrow x \tan\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) < y \\
 \mathcal{D}_{s_2} &\longrightarrow -x \tan\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) > y
 \end{aligned}$$

avec  $\tan(\alpha \frac{\pi}{2}) > 0$ .

Cette définition de  $\mathcal{D}_{s_1}$  et de  $\mathcal{D}_{s_2}$  ne convient pas car une diminution de  $y$  doit fonctionner pour  $\mathcal{D}_{s_1}$  et car une augmentation de  $y$  doit fonctionner pour  $\mathcal{D}_{s_2}$ . De plus, la région  $\mathcal{D}_{s_1}$  est limitée par une droite ayant une pente négative, tandis que la région  $\mathcal{D}_{s_2}$  est limitée par une droite ayant une pente positive. Il faut donc "permuter" les définitions des régions  $\mathcal{D}_{s_1}$  et de  $\mathcal{D}_{s_2}$  obtenues avec la relation (1.75).

La relation (1.75) n'est donc pas exacte et doit être remplacée par

$$\mathcal{D}_{s_k} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(ze^{-j\varphi_k}) < 0\}, \quad \forall k \in \{1, 2\}, \quad (1.76)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_{s_1} &\longrightarrow -x \tan\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) > y \iff \operatorname{Re}(ze^{-j\varphi_1}) = \operatorname{Re}(ze^{-j\varphi}) = x \sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) + y \cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) < 0 \\
 \mathcal{D}_{s_2} &\longrightarrow x \tan\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) < y \iff \operatorname{Re}(ze^{-j\varphi_2}) = \operatorname{Re}(ze^{j\varphi}) = x \sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) - y \cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) < 0
 \end{aligned}$$

avec  $\tan(\alpha \frac{\pi}{2}) > 0$ ,  $\cos(\alpha \frac{\pi}{2}) > 0$  et  $\varphi = \varphi_1 = -\varphi_2 = (1 - \alpha) \frac{\pi}{2}$ .  $\square$

En utilisant (1.69), (1.70), (1.71) et (1.76), les paramètres intervenant dans les relations (1.58) et (1.59) du théorème 1.3.1 sont (avec  $\varphi = (1 - \alpha) \frac{\pi}{2}$ )

$$H_1 = -J_1 = -\theta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, H_2 = -J_2 = -\theta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.77a)$$

$$\psi_1 = \begin{bmatrix} e^{-j\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \psi_2 = \begin{bmatrix} e^{j\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \psi_1 = \psi_2^* \quad (1.77b)$$

dans le cas où  $0 < \alpha < 1$  qui correspond à la région  $\mathcal{D}_{s_1} \cup \mathcal{D}_{s_2}$  dans figure 1.5. Les relations (1.58) et (1.59) du théorème 1.3.1 deviennent

$$\begin{aligned}
 &\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes X_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes X_1^* + \begin{bmatrix} e^{-j\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes (AX_1) + \begin{bmatrix} e^{j\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes (X_1^* A^T) \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \otimes X_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \otimes X_2^* + \begin{bmatrix} e^{j\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes (AX_2) + \begin{bmatrix} e^{-j\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes (X_2^* A^T)
 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{j\varphi}(AX_2 + X_1^*A^T) + e^{-j\varphi}(AX_1 + X_2^*A^T) & 0 & 0 \\ 0 & -(X_1 + X_1^*) & 0 \\ 0 & 0 & -(X_2 + X_2^*) \end{bmatrix} < 0, \quad (1.78)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes X_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes X_1^* + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes X_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \otimes X_2^* \\ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & X_1 - X_1^* & 0 \\ 0 & 0 & X_2 - X_2^* \end{bmatrix} = 0. \quad (1.79)$$

En utilisant les relations (1.78) et (1.79), le théorème 1.3.1 correspond au théorème suivant qui donne une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité des systèmes d'ordre non entier dans le cas où  $0 < \alpha < 1$ .

**Théorème 1.3.3.** *Le système d'ordre non entier (1.72) avec  $0 < \alpha < 1$  est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe deux matrices  $X_1 \in \mathbb{C}^{n \times n}$  et  $X_2 \in \mathbb{C}^{n \times n}$  vérifiant  $X_1 = X_1^* > 0$  et  $X_2 = X_2^* > 0$  et*

$$rX_1A^T + \bar{r}AX_1 + rAX_2 + \bar{r}X_2A^T < 0 \quad (1.80)$$

où  $r = e^{j(1-\alpha)\frac{\pi}{2}} = \sin(\alpha\frac{\pi}{2}) + j \cos(\alpha\frac{\pi}{2})$  et  $\bar{r} = e^{-j(1-\alpha)\frac{\pi}{2}} = \sin(\alpha\frac{\pi}{2}) - j \cos(\alpha\frac{\pi}{2})$ .

**Remarque 1.3.2.** Au vu des relations (1.78) et (1.79) dans le théorème 12 dans [SMF10a], les matrices complexes  $X_1$  et  $X_2$  sont hermitiennes, mais ne sont pas strictement (ou non strictement) définies positives. Par contre, dans le lemme 15 dans [FMS10], les matrices complexes  $X_1$  et  $X_2$  sont hermitiennes, mais ne sont pas strictement (ou non strictement) définies positives.

De plus, en posant  $r = e^{j\varphi} = e^{j(1-\alpha)\frac{\pi}{2}}$  dans [SMF10a],  $X_1$  correspond à la région  $\mathcal{D}_{s_2}$  et  $X_2$  correspond à la région  $\mathcal{D}_{s_1}$  dans la relation (84) dans [SMF10a] qui est  $\bar{r}X_1A^T + rAX_1 + rX_2A^T + \bar{r}AX_2 < 0$ . •

**Remarque 1.3.3.** Puisque les matrices complexes  $X_1$  et  $X_2$  sont hermitiennes (relation (1.79)  $\rightarrow X_1 = X_1^*$  et  $X_2 = X_2^*$ ), la relation (1.78) implique que les matrices complexes  $X_1$  et  $X_2$  sont définies positives ( $X_1 > 0$  et  $X_2 > 0$ ).

En effet, puisque  $X_1 = X_1^*$  et  $X_2 = X_2^*$ , alors les valeurs propres de  $X_1$  et  $X_2$  sont réelles [LT85] et  $X_1 + X_1^* = 2X_1$ ,  $X_2 + X_2^* = 2X_2$ . De plus, on a la relation suivante [Vid93] (p. 22, 23 et 26)

$$-0.5\lambda_{\max}(-X - X^*) \leq \operatorname{Re}(\lambda_i(X)) \leq 0.5\lambda_{\max}(X + X^*) \quad (1.81)$$

qui se réécrit ainsi

$$0 < \lambda_{\min}(X_1) \leq \lambda_i(X_1) \leq \lambda_{\max}(X_1) \quad \text{et} \quad 0 < \lambda_{\min}(X_2) \leq \lambda_i(X_2) \leq \lambda_{\max}(X_2) \quad (1.82)$$

car  $-0.5\lambda_{\max}(-X_k - X_k^*) = -\lambda_{\max}(-X_k) = -1 \times (-\lambda_{\min}(X_k)) = \lambda_{\min}(X_k)$  avec  $k = 1, 2$ . On obtient donc bien  $X_1 > 0$  et  $X_2 > 0$  (voir (1.78)).

La relation (1.81) est une propriété des mesures d'une matrice (item M6 du théorème 16 dans [Vid93] (p. 22 et 23)

$$-\mu_p(-X) \leq \operatorname{Re}(\lambda_i(X)) \leq \mu_p(X) \quad p = 1, \dots, n$$

où  $\mu_p(X)$  est une mesure de la matrice  $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$  [Vid93] (p. 22) définie comme suit

$$\mu_p(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|I_n + \varepsilon X\|_p}{\varepsilon}$$

et l'indice  $p$  désigne la norme matricielle  $p$  induite par la norme  $p$  d'un vecteur  $x$

$$\|x\|_p = \left( \sum_k |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Si on choisit  $p = 2$ , alors  $\|X\|_p = \|X\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(X^*X)}$  et  $\mu(X)_p = \mu_2(X) = 0.5\lambda_{\max}(X + X^*)$  [Vid93] (p. 26). •

**Lemme 1.3.1.** [LT85] (p. 219) Soit  $A = B + jC$  avec  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et

$$R = \begin{bmatrix} B & -C \\ C & B \end{bmatrix}.$$

On a les propriétés suivantes

- i) Si la matrice  $A$  est normale, alors la matrice  $R$  est normale.
- ii) Si la matrice  $A$  est hermitienne, alors la matrice  $R$  est symétrique.
- iii) Si la matrice  $A$  est définie positive, alors la matrice  $R$  est définie positive.
- iv) Si la matrice  $A$  est unitaire, alors la matrice  $R$  est orthogonale.

En utilisant le lemme 1.3.1, on réécrit le théorème 1.3.3 afin de remplacer la LMI complexe (1.80) par une LMI réelle.

**Lemme 1.3.2.** Le système d'ordre non entier (1.72) avec  $0 < \alpha < 1$  est asymptotiquement stable si et seulement si il existe quatre matrices  $X_{R_1} = X_{R_1}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $X_{I_1} = -X_{I_1}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $X_{R_2} = X_{R_2}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $X_{I_2} = -X_{I_2}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  vérifiant

$$\begin{bmatrix} X_{R_1} & -X_{I_1} \\ X_{I_1} & X_{R_1} \end{bmatrix} > 0, \quad (1.83)$$

$$\begin{bmatrix} X_{R_2} & -X_{I_2} \\ X_{I_2} & X_{R_2} \end{bmatrix} > 0, \quad (1.84)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{aligned} & (X_{R_1}A^T + AX_{R_1} + AX_{R_2} + X_{R_2}A^T) \sin(\alpha\frac{\pi}{2}) + (AX_{I_1} - X_{I_1}A^T - AX_{I_2} + X_{I_2}A^T) \cos(\alpha\frac{\pi}{2}) \\ & (X_{I_1}A^T + AX_{I_2} + X_{I_2}A^T + AX_{I_1}) \sin(\alpha\frac{\pi}{2}) + (X_{R_1}A^T - AX_{R_1} - X_{R_2}A^T + AX_{R_2}) \cos(\alpha\frac{\pi}{2}) \\ & (AX_{R_1} - X_{R_1}A^T - AX_{R_2} + X_{R_2}A^T) \cos(\alpha\frac{\pi}{2}) - (X_{I_1}A^T + AX_{I_2} + X_{I_2}A^T + AX_{I_1}) \sin(\alpha\frac{\pi}{2}) \\ & (X_{R_1}A^T + AX_{R_1} + AX_{R_2} + X_{R_2}A^T) \sin(\alpha\frac{\pi}{2}) + (AX_{I_1} - X_{I_1}A^T - AX_{I_2} + X_{I_2}A^T) \cos(\alpha\frac{\pi}{2}) \end{aligned} \right] < 0. \end{aligned} \quad (1.85)$$

*Démonstration.* Si  $X_{R_1} = X_{R_1}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $X_{I_1} = -X_{I_1}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $X_{R_2} = X_{R_2}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $X_{I_2} = -X_{I_2}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , alors  $X_1 = X_{R_1} + jX_{I_1}$  et  $X_2 = X_{R_2} + jX_{I_2}$  vérifient  $X_1 = X_1^*$  et  $X_2 = X_2^*$ . En utilisant le lemme 1.3.1,  $X_1 = X_1^* > 0$  et  $X_2 = X_2^* > 0$  si et seulement si les LMI (1.83) et (1.84) sont satisfaites.

En remplaçant dans l'inégalité (1.80) du théorème 1.3.3, les expressions de  $X_1 = X_{R_1} + jX_{I_1}$ ,  $X_2 = X_{R_2} + jX_{I_2}$  et  $r = \sin(\alpha\frac{\pi}{2}) + j \cos(\alpha\frac{\pi}{2})$ , on obtient la relation suivante

$$\begin{aligned} & \left( \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) + j \cos(\alpha \frac{\pi}{2}) \right) (X_{R_1} + jX_{I_1})A^T + \left( \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) - j \cos(\alpha \frac{\pi}{2}) \right) A(X_{R_1} + jX_{I_1}) \\ & + \left( \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) + j \cos(\alpha \frac{\pi}{2}) \right) A(X_{R_2} + jX_{I_2}) + \left( \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) - j \cos(\alpha \frac{\pi}{2}) \right) A^T(X_{R_2} + jX_{I_2}) < 0 \end{aligned} \quad (1.86)$$

qui peut s'écrire sous cette forme

$$\begin{aligned} & \left( \sin(\alpha \frac{\pi}{2})X_{R_1}A^T - \cos(\alpha \frac{\pi}{2})X_{I_1}A^T \right) + j \left( \cos(\alpha \frac{\pi}{2})X_{R_1}A^T + \sin(\alpha \frac{\pi}{2})X_{I_1}A^T \right) \\ & + \left( \sin(\alpha \frac{\pi}{2})AX_{R_1} + \cos(\alpha \frac{\pi}{2})AX_{I_1} \right) + j \left( \sin(\alpha \frac{\pi}{2})AX_{I_1} - \cos(\alpha \frac{\pi}{2})AX_{R_1} \right) \\ & + \left( \sin(\alpha \frac{\pi}{2})AX_{R_2} - \cos(\alpha \frac{\pi}{2})AX_{I_2} \right) + j \left( \sin(\alpha \frac{\pi}{2})AX_{I_2} + \cos(\alpha \frac{\pi}{2})AX_{R_2} \right) \\ & + \left( \sin(\alpha \frac{\pi}{2})X_{R_2}A^T + \cos(\alpha \frac{\pi}{2})X_{I_2}A^T \right) + j \left( \sin(\alpha \frac{\pi}{2})X_{I_2}A^T - \cos(\alpha \frac{\pi}{2})X_{R_2}A^T \right) < 0. \end{aligned} \quad (1.87)$$

En regroupant la partie réelle et la partie imaginaire de l'inégalité (1.87), on obtient

$$\begin{aligned} & \left( (X_{R_1}A^T + AX_{R_1} + AX_{R_2} + X_{R_2}A^T) \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) + (AX_{I_1} - X_{I_1}A^T - AX_{I_2} + X_{I_2}A^T) \cos(\alpha \frac{\pi}{2}) \right) \\ + j & \left( (X_{I_1}A^T + AX_{I_2} + X_{I_2}A^T + AX_{I_1}) \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) + (X_{R_1}A^T - AX_{R_1} + AX_{R_2} - X_{R_2}A^T) \cos(\alpha \frac{\pi}{2}) \right) < 0. \end{aligned} \quad (1.88)$$

En utilisant le lemme 1.3.1, on obtient la LMI (1.85). •

Dans le théorème suivant, l'inégalité (1.80) avec deux inconnues du théorème 1.3.3 est remplacée par une inégalité avec une seule variable (voir le théorème 16 dans [FMS10]).

**Théorème 1.3.4.** *Le système d'ordre non entier (1.72) avec  $0 < \alpha < 1$  est asymptotiquement stable si et seulement si il existe une matrice  $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$  vérifiant  $X = X^* > 0$  et*

$$(rX + \bar{r}\bar{X})^T A^T + A(rX + \bar{r}\bar{X}) < 0 \quad (1.89)$$

où  $r = e^{j(1-\alpha)\frac{\pi}{2}} = \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) + j \cos(\alpha \frac{\pi}{2})$ ,  $\bar{r} = e^{-j(1-\alpha)\frac{\pi}{2}} = \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) - j \cos(\alpha \frac{\pi}{2})$  et  $\bar{X} = \text{Re}(X) - j \text{Im}(X)$ .

*Démonstration.* Puisque  $X = X^*$  est équivalent à  $\text{Re}(X) = \text{Re}(X^T)$  et  $\text{Im}(X) = -\text{Im}(X^T)$ , alors  $X = X^*$  est équivalent à  $\bar{X} = \bar{X}^*$ .

**Suffisance :** Si on pose  $X_1 = \bar{X}$  et  $X_2 = X$ , il est évident que la relation (1.89) implique la relation (1.80) du théorème 1.3.3 car  $\bar{X}^T = \text{Re}(X^T) - j \text{Im}(X^T) = X^* = X = X_2$  et  $X^T = \text{Re}(X^T) + j \text{Im}(X^T) = \bar{X}^* = \bar{X} = X_1$ .

**Nécessité** La relation (1.80) est équivalente à

$$\begin{aligned} & \text{Re}(rX_1A^T + \bar{r}AX_1 + rAX_2 + \bar{r}X_2A^T) + j \text{Im}(rX_1A^T + \bar{r}AX_1 + rAX_2 + \bar{r}X_2A^T) \\ & + \text{Re}(rX_1A^T + \bar{r}AX_1 + rAX_2 + \bar{r}X_2A^T) - j \text{Im}(rX_1A^T + \bar{r}AX_1 + rAX_2 + \bar{r}X_2A^T) \\ & = 2 \text{Re}(rX_1A^T + \bar{r}AX_1 + rAX_2 + \bar{r}X_2A^T) \\ & = 2 \text{Re} \left( (\sin(\alpha \frac{\pi}{2}) + j \cos(\alpha \frac{\pi}{2}))(\text{Re}(X_1) + j \text{Im}(X_1)) + (\sin(\alpha \frac{\pi}{2}) - j \cos(\alpha \frac{\pi}{2}))(\text{Re}(X_2) + j \text{Im}(X_2)) \right) A^T \\ & \quad + 2A \text{Re} \left( (\sin(\alpha \frac{\pi}{2}) + j \cos(\alpha \frac{\pi}{2}))(\text{Re}(X_2) + j \text{Im}(X_2)) + (\sin(\alpha \frac{\pi}{2}) - j \cos(\alpha \frac{\pi}{2}))(\text{Re}(X_1) + j \text{Im}(X_1)) \right) \\ & = 2 \left( (\sin(\alpha \frac{\pi}{2}) \text{Re}(X_1 + X_2) + \cos(\alpha \frac{\pi}{2}) \text{Im}(X_2 - X_1)) \right) A^T \end{aligned}$$

$$+ 2A \left( \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) \operatorname{Re}(X_1 + X_2) - \cos(\alpha \frac{\pi}{2}) \operatorname{Im}(X_2 - X_1) \right) < 0 \quad (1.90)$$

puisque  $rX_1A^T + \bar{r}AX_1 + rAX_2 + \bar{r}X_2A^T = (rX_1A^T + \bar{r}AX_1 + rAX_2 + \bar{r}X_2A^T)^*$ .

Si on pose  $X = \bar{X}_1 + X_2 = \operatorname{Re}(X_1 + X_2) + j \operatorname{Im}(X_2 - X_1)$ , alors on a  $\bar{X} = \operatorname{Re}(X_1 + X_2) + j \operatorname{Im}(X_1 - X_2)$ , on a

$$\begin{aligned} rX &= (\sin(\alpha \frac{\pi}{2}) + j \cos(\alpha \frac{\pi}{2})) (\operatorname{Re}(X_1 + X_2) + j \operatorname{Im}(X_2 - X_1)) \\ &= \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) \operatorname{Re}(X_1 + X_2) - \cos(\alpha \frac{\pi}{2}) \operatorname{Im}(X_2 - X_1) \\ &\quad + j \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) \operatorname{Im}(X_2 - X_1) + j \cos(\alpha \frac{\pi}{2}) \operatorname{Re}(X_1 + X_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{r}\bar{X} &= (\sin(\alpha \frac{\pi}{2}) - j \cos(\alpha \frac{\pi}{2})) (\operatorname{Re}(X_1 + X_2) - j \operatorname{Im}(X_2 - X_1)) \\ &= \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) \operatorname{Re}(X_1 + X_2) - \cos(\alpha \frac{\pi}{2}) \operatorname{Im}(X_2 - X_1) \\ &\quad - j \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) \operatorname{Im}(X_2 - X_1) - j \cos(\alpha \frac{\pi}{2}) \operatorname{Re}(X_1 + X_2), \end{aligned}$$

et

$$rX + \bar{r}\bar{X} = 2 \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) \operatorname{Re}(X_1 + X_2) - 2 \cos(\alpha \frac{\pi}{2}) \operatorname{Im}(X_2 - X_1), \quad (1.91)$$

$$(rX + \bar{r}\bar{X})^T = 2 \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) \operatorname{Re}(X_1 + X_2) + 2 \cos(\alpha \frac{\pi}{2}) \operatorname{Im}(X_2 - X_1), \quad (1.92)$$

puisque  $\operatorname{Re}(X_1) = \operatorname{Re}(X_1^T)$ ,  $\operatorname{Re}(X_2) = \operatorname{Re}(X_2^T)$ ,  $\operatorname{Im}(X_1) = -\operatorname{Im}(X_1^T)$  et  $\operatorname{Im}(X_2) = -\operatorname{Im}(X_2^T)$ .

En utilisant (1.90), (1.91) et (1.92), on déduit que la relation (1.80) du théorème 1.3.3 implique la relation (1.89). •

**Remarque 1.3.4.** A la différence du théorème 1.3.3, le théorème 1.3.4 calcule une seule matrice complexe,  $X = X^* > 0$ , et utilise la matrice  $rX + \bar{r}\bar{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  pour calculer les matrices d'un correcteur. •

En utilisant le lemme 1.3.1, on réécrit le théorème 1.3.4 afin de remplacer la LMI complexe (1.89) par une LMI réelle.

**Lemme 1.3.3.** *Le système d'ordre non entier (1.72) avec  $0 < \alpha < 1$  est asymptotiquement stable si et seulement si il existe deux matrices  $X_R = X_R^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $X_I = -X_I^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  vérifiant*

$$\begin{bmatrix} X_R & -X_I \\ X_I & X_R \end{bmatrix} > 0, \quad (1.93)$$

$$\left( \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) X_R - \cos(\alpha \frac{\pi}{2}) X_I \right)^T A^T + A \left( \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) X_R - \cos(\alpha \frac{\pi}{2}) X_I \right) < 0. \quad (1.94)$$

*Démonstration.* Si  $X_R = X_R^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $X_I = -X_I^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , alors  $X = X_R + jX_I$  vérifie  $X = X^*$ . En utilisant le lemme 1.3.1,  $X = X^* > 0$  si et seulement si la LMI (1.93) est satisfaite.

En remplaçant dans l'inégalité (1.89) du théorème 1.3.4, les expressions de  $X = X_R + jX_I$  et  $r = \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) + j \cos(\alpha \frac{\pi}{2})$ , on obtient la relation suivante

$$\left( \left( \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) + j \cos(\alpha \frac{\pi}{2}) \right) (X_R + jX_I) + \left( \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) - j \cos(\alpha \frac{\pi}{2}) \right) (X_R - jX_I) \right)^T A^T$$

$$+ A \left( \left( \sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) + j \cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) \right) (X_R + jX_I) + \left( \sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) - j \cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) \right) (X_R - jX_I) \right) < 0 \quad (1.95)$$

qui peut s'écrire sous la forme suivante (la partie imaginaire étant nulle)

$$2 \left( \sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)X_R - \cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)X_I \right)^T A^T + 2A \left( \sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)X_R - \cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)X_I \right) < 0 \quad (1.96)$$

qui est équivalente à LMI (1.94). •

### 1.3.6.3 Approche LMI pour l'analyse de la stabilité des systèmes d'ordre non entier lorsque $1 \leq \alpha < 2$

Le théorème 1.3.1 correspond au théorème suivant qui donne une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité des systèmes d'ordre non entier dans le cas où  $1 \leq \alpha < 2$ .

**Théorème 1.3.5.** *Le système d'ordre non entier (1.72) avec  $1 \leq \alpha < 2$  est asymptotiquement stable si et seulement si il existe une matrice  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  vérifiant  $X = X^t > 0$  et*

$$\begin{bmatrix} (A^T X + X A) \sin(\theta) & (A^T X - X A) \cos(\theta) \\ (X A - A^T X) \cos(\theta) & (A^T X + X A) \sin(\theta) \end{bmatrix} < 0 \quad (1.97)$$

où  $\theta = \pi - \frac{\alpha\pi}{2}$ .

Le domaine de stabilité convexe dans le théorème 1.3.5 est donné dans figure 1.6.

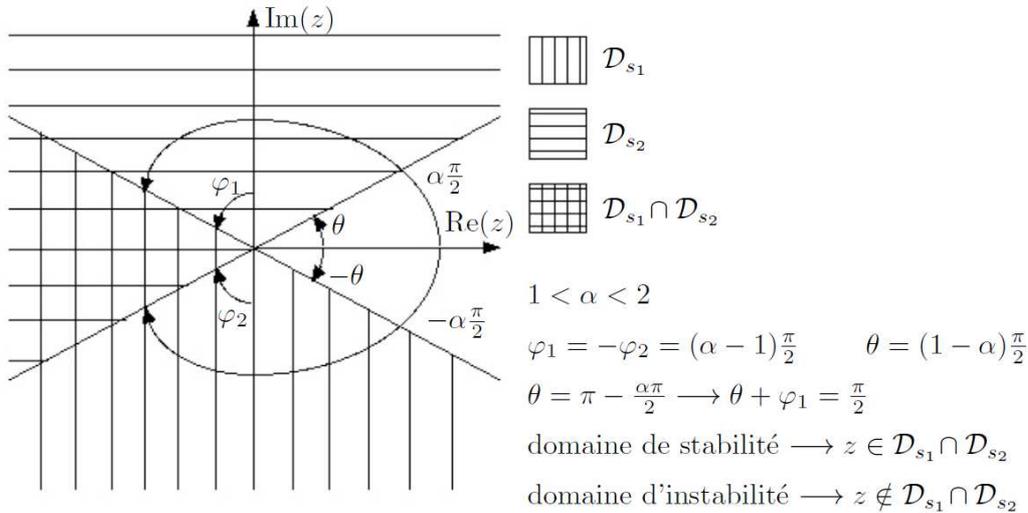


FIGURE 1.6 – Région de stabilité pour  $1 \leq \alpha < 2$  considérée comme l'intersection de 2 régions non convexes

**Remarque 1.3.5.** Dans [LC09, XL09] (Lu), on utilise directement la LMI (1.97).

Dans [ACP07, AC08] (Ahn et Chen), l'angle  $\varphi_1$  est appelé  $\theta$ . La LMI (1.97) est obtenue en traduisant la condition (1.73) par

$$\beta X A + \beta^* A^T X < 0 \quad (1.98)$$

avec  $\beta = e^{j(\alpha-1)\frac{\pi}{2}} = \sin(\theta) + j \cos(\theta)$  et  $\beta^* = \overline{\beta} e^{j(1-\alpha)\frac{\pi}{2}} = \sin(\theta) - j \cos(\theta)$ , puis on applique le lemme 1.3.1.

Dans [MSO05a, SMF10a], on utilise l'angle  $\frac{\alpha\pi}{2}$  à la place de  $\theta$  dans la LMI (1.97), ce qui revient à permuter  $\beta$  et  $\beta^*$  dans la LMI (1.98) car  $\sin(\theta) = \sin(\frac{\alpha\pi}{2})$  et  $\cos(\theta) = -\cos(\frac{\alpha\pi}{2})$ .

Dans [SGC97, CGA99, Bac98] (Chilali et Bachelier), on utilise l'angle  $\varphi_1$  à la place de  $\theta$ . La LMI (1.97) est donc remplacée par

$$\begin{bmatrix} (A^T X + X A) \cos(\varphi_1) & (A^T X - X A) \sin(\varphi_1) \\ (X A - A^T X) \sin(\varphi_1) & (A^T X + X A) \cos(\varphi_1) \end{bmatrix} < 0 \quad (1.99)$$

alors que dans [CG96] (Chilali), on utilise l'angle  $\theta$ . •

### 1.3.7 Stabilité au sens de Lyapunov

Dans la littérature, on peut citer différentes approches concernant l'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques d'ordre entier, et notamment celle qui se base sur la théorie élaborée par Lyapunov. Sans perte de généralité, nous considérons dans la suite  $x^* = 0$  comme étant le point d'équilibre. La théorie de Lyapunov est un outil important en automatique, permettant de conclure sur la stabilité d'un point d'équilibre du système. Elle repose sur l'existence de fonctions, vérifiant certains critères, et qui représentent d'une certaine manière l'énergie du système. Ce qui suit donne plus de détails sur ces fonctions et sur la stabilité au sens de Lyapunov. Ces résultats, maintenant classiques, peuvent être trouvés dans les références [Lya92a, Lya92, Lya92b] par exemple.

Dans cette partie, nous rappelons quelques concepts sur la stabilité des systèmes dynamiques. L'analyse de la stabilité d'un système dynamique consiste à étudier son comportement au voisinage du point d'équilibre  $x^* = 0$ . Cela passe par l'analyse de la trajectoire de l'état du système lorsque son état initial est proche d'un point ou d'une trajectoire d'équilibre [Vid69, VV82, Kha92, Vid93]. La stabilité des systèmes dynamiques non linéaires d'ordre non entier est très complexe et différente du système linéaire d'ordre non entier. La différence réside dans le fait que les systèmes non linéaires peuvent avoir plusieurs points d'équilibre ou même des cycles limites. Pour les systèmes non linéaires d'ordre non entier, il existe de nombreuses définitions de stabilité. Comme mentionné dans [Mat96], la stabilité exponentielle ne peut pas être utilisée pour caractériser la stabilité asymptotique des systèmes d'ordre non entier. Dans [OSL<sup>+</sup>08], une nouvelle définition concernant la stabilité des systèmes d'ordre non entier a été introduite.

Considérons le système non linéaire à dérivée d'ordre non entière, sous la forme suivante

$${}^{RL}D_t^\alpha x(t) = f(x(t)) \quad (1.100)$$

**Définition 1.3.3.** [OSL<sup>+</sup>08] La trajectoire  $x(t)$  du système (1.100) est  $t^{-q}$  asymptotiquement stable si il existe un nombre réel positif  $q$  tel que

$$\forall \|x(t)\| \quad \text{avec} \quad t \leq t_0, \exists N(x(t)), \quad \text{tel que} \quad \forall t \geq t_0, \|x(t)\| \leq Nt^{-q} \quad (1.101)$$

□

Le fait que les composantes du pseudo-états  $x(t)$  convergent lentement vers 0 suivant  $t^{-q}$  conduit parfois à un système d'ordre non entier appelé système à mémoire longue. La vitesse de convergence imposée par le terme  $t^{-q}$  est un cas particulier de la stabilité de Mittag-Leffler [LCP09].

La représentation diffuse utilisée par Heleschewitz et Matignon [HM98] et Montseny [HM98] déduite de la transformée de Laplace inverse de  $\frac{1}{s^\alpha}$  fournit une base théorique de l'approximation

temporelle de l'opérateur d'intégration  $I^\alpha$  d'ordre non entier  $\alpha$ . Ce dernier, représente un élément clé de l'analyse des systèmes d'ordre non entier dans le domaine temporel comme cela a été démontré dans [TM11, TMSO12a, TMSO12b, TMO13] .

**Définition 1.3.4.** [TM09] *Considérons l'intégrateur  $I^\alpha$  d'ordre non entier  $\alpha$ , représenté par le système linéaire suivant*

$$y(t) = h(t) * u(t) \quad (1.102)$$

où  $u(t)$  et  $y(t)$  sont respectivement l'entrée et la sortie de l'intégrateur d'ordre non entier  $I^\alpha$ , \* désigne l'opérateur de convolution.

Sa réponse impulsionnelle  $h(t)$  vérifie la définition de la pseudo-transformation de Laplace est donnée par [Mat94]

$$h(t) = \int_0^\infty \mu(\omega) e^{-\omega t} d\omega \quad (1.103)$$

où  $\mu(\omega)$  est appelée représentation diffusives [Mon98] (ou fonction de pondération fréquentielle) de la réponse impulsionnelle  $h(t)$ , qui a la forme suivante

$$\mu(\omega) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \omega^{-\alpha} \quad (1.104)$$

□

**Lemme 1.3.4.** [TM09, TMO09][TMSO11] *Considérons le système non linéaire à dérivée d'ordre non entière (1.100), en raison de la distribution fréquentielle continue du modèle de l'intégrateur d'ordre non entier  ${}^RL I_t^\alpha$ , le système non linéaire (1.100) peut être exprimé de la façon suivante*

$$\frac{\partial z(\omega, t)}{\partial t} = -\omega z(\omega, t) + f(x(t)) \quad \omega \in [0, +\infty[ \quad (1.105a)$$

$$x(t) = \int_0^\infty \mu(\omega) z(\omega, t) d\omega \quad (1.105b)$$

où  $z(\omega, t)$  est l'état distribué en fréquence de l'intégrateur d'ordre non entier  ${}^RL I_t^\alpha$ , et la fonction de pondération fréquentielle  $\mu(\omega)$  est donnée par (1.104). □

*Démonstration.* L'équation  $D^\alpha(x(t)) = f(x(t))$  correspond à une forme bouclée autour de l'opérateur d'intégration  $\frac{1}{s^\alpha}$  [TMO13]. Cet opérateur est défini par le système différentiel suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial z(\omega, t)}{\partial t} &= -\omega z(\omega, t) + u(t) \\ x(t) &= \int_0^\infty \mu(\omega) z(\omega, t) d\omega \end{cases}$$

Comme l'entrée  $u(t)$  de l'opérateur d'intégration est égale à  $f(x(t))$  (branche de retour), on obtient par substitution les relations (1.105). Cette méthodologie est largement décrite dans [TMSO12a, TMSO12b]. L'état distribué en fréquence  $z(\omega, t)$  vérifie l'équation différentielle (1.105) (pour une fréquence élémentaire  $\omega$ ) et la sortie  $x(t)$  de l'intégrateur d'ordre non entier est l'intégrale pondérée ( avec la fonction de pondération fréquentielle  $\mu(\omega)$ ) de toutes les contributions  $z(\omega, t)$  allant de 0 à  $+\infty$ . •

**Remarque 1.3.6.** Implicitement, l'état de l'intégrateur d'ordre non entier est généralement défini comme étant sa sortie  $x(t)$ . Par contre, d'après la définition (1.105),  $x(t)$  n'est que la somme pondérée des variables  $z(w, t)$ , donc c'est seulement un pseudo-état tandis que  $z(w, t)$  est son vrai état distribué de dimension infinie. L'approche de l'état infini (ou Infinite-State approach) s'appelle ainsi par référence à la dimension infinie de  $z(w, t)$  [TMO13]. Dans d'autres travaux, il est également défini comme étant une représentation diffuse [HM98, Mon98].

Dans la littérature, on peut citer différentes approches concernant l'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques d'ordre entier, et notamment celles qui se basent sur la théorie élaborée par Lyapunov.

Dans ce qui suit, notre but sera de présenter l'analyse de stabilité des systèmes d'ordre non entier à retard variant dans le temps en se basant sur cette approche, bien qu'elle est parfois conservatrice, mais elle a le mérite d'être simple à mettre en œuvre. Pour cela, nous nous sommes basés sur la fonction de Lyapunov introduite par Trigeassou et al [TMO09, TMSO11] dans le cas non-entier sans retard.

Afin d'analyser la stabilité d'un système d'ordre non entier à retard variable dans le temps FOS-TVD, nous considérons le cas non forcé, qui peut être représenté dans l'espace des pseudo-états par le modèle suivant

$$D^\alpha x(t) = A_0 x(t) + A_\tau x(t - \tau(t)) \quad (1.106a)$$

$$x(t) = \psi(t), t \in [-\tau_{\max}, 0] \quad , \quad 0 < \alpha < 1 \quad (1.106b)$$

avec  $\tau(t) > 0$  désigne la fonction du retard, continu, borné, c-à-d  $0 < \tau(t) < \tau_{\max}$  et vérifiant  $\frac{\partial \tau(t)}{\partial t} \leq \dot{\tau}_{\max} < 1$ , où  $\tau_{\max}$  et  $\dot{\tau}_{\max}$  sont deux constantes positives.

Le théorème suivant donne une condition suffisante permettant de conclure sur la stabilité du système décrit par (1.106) pour  $0 < \alpha < 1$ . Cette dernière est présentée sous forme d'inégalité matricielle linéaire LMI.

**Théorème 1.3.6.** *le système d'ordre non entier à retard variable dans le temps (1.106) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice,  $P$ , symétrique et définie positive vérifiant la LMI suivante*

$$\Omega = \begin{bmatrix} PA_0 + A_0^T P + 2\Lambda_1 & PA_\tau \\ \star & -\Lambda_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (1.107)$$

où

$$\Lambda_1 = \frac{1}{2(1 - \dot{\tau}_{\max})} I, \quad \Lambda_2 = \frac{1}{(1 - \dot{\tau}_{\max})} I.$$

et  $\star$  représente la partie correspondante de la matrice symétrique . □

*Démonstration.* Pour montrer ce théorème, nous faisons appel au lemme 1.3.4. En partant de la représentation d'un intégrateur d'ordre non entier donnée par (1.105), l'équation (1.106a) peut être réécrite comme suit

$$\frac{\partial z(\omega, t)}{\partial t} = -\omega z(\omega, t) + A_0 x(t) + A_\tau x(t - \tau(t)) \quad (1.108a)$$

$$x(t) = \int_0^\infty \mu(\omega) z(\omega, t) d\omega \quad (1.108b)$$

Maintenant, afin d'analyser la stabilité du système (1.106), nous considérons la fonction de Lyapunov monochromatique suivante [TMO09, TMSO11]

$$v_1(\omega, t) = z^T(\omega, t)Pz(\omega, t) \quad (1.109)$$

définie pour une fréquence élémentaire  $\omega$ , avec  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  une matrice symétrique définie positive ( $P = P^T > 0$ ).

Les dérivées de la fonction de Lyapunov  $v_1(t)$  par rapport à  $z(\omega, t)$  et  $t$  sont données par

$$\frac{\partial v_1(\omega, t)}{\partial z(\omega, t)} = 2z^T(\omega, t)P \quad (1.110)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1(\omega, t)}{\partial t} &= \frac{\partial v_1(\omega, t)}{\partial z(\omega, t)} \frac{\partial z(\omega, t)}{\partial t} \\ &= 2z^T(\omega, t)P(-\omega z(\omega, t) + A_0x(t) + A_\tau x(t - \tau(t))) \end{aligned} \quad (1.111)$$

En outre, en additionnant la fonction  $v_1(\omega, t)$  avec la fonction de pondération  $\mu(\omega)$ , cela permet de définir la fonction candidate de Lyapunov  $V_1(t)$  comme suit [TMO09, TMSO11]

$$V_1(t) = \int_0^\infty \mu(\omega)v_1(\omega, t)d\omega \quad (1.112)$$

et dont la dérivée le long des solutions de (1.108) vérifie

$$\begin{aligned} \frac{dV_1(t)}{dt} &= \int_0^\infty \mu(\omega) \frac{\partial v_1(\omega, t)}{\partial t} d\omega \\ &= \int_0^\infty \mu(\omega) 2z^T(\omega, t)P(-\omega z(\omega, t) + A_0x(t) + A_\tau x(t - \tau(t))) d\omega \\ &= -2 \int_0^\infty \omega \mu(\omega) z^T(\omega, t)Pz(\omega, t) d\omega + 2 \int_0^\infty \mu(\omega) z^T(\omega, t)P d\omega (A_0x(t) + A_\tau x(t - \tau(t))) \end{aligned} \quad (1.113)$$

En remplaçant dans l'équation (1.113) l'expression du pseudo-état donnée dans (1.108b) par  $x(t)$ , on obtient

$$\frac{dV_1(t)}{dt} = -2 \int_0^\infty \omega \mu(\omega) z^T(\omega, t)Pz(\omega, t)d\omega + 2x^T(t)P(A_0x(t) + A_\tau x(t - \tau(t))) \quad (1.114)$$

Par conséquent, nous en déduisons que la condition suffisante suivante donnée sous forme de LMI

$$2x^T(t)P(A_0x(t) + A_\tau x(t - \tau(t))) < 0 \quad (1.115)$$

doit être satisfaite afin que la fonction de Lyapunov  $V_1(t)$  ait une dérivée temporelle (le long des trajectoires du systèmes) décroissante, c-à-d  $\frac{dV_1(t)}{dt} < 0$ .

Ensuite, une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii  $V_2(t)$  choisie sous la forme

$$V_2(t) = \frac{1}{(1 - \partial\tau_{\max})} \int_{t-\tau(t)}^t x^T(s)x(s)ds \quad (1.116)$$

dont la dérivée temporelle le long des solutions du système (1.106) est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{dV_2(t)}{dt} &= \frac{1}{(1 - \partial\tau_{\max})} \{x^T(t)x(t)\} \\ &\quad - \frac{1}{(1 - \partial\tau_{\max})} \left(1 - \frac{\partial\tau(t)}{\partial t}\right) x^T(t - \tau(t))x(t - \tau(t)) \end{aligned} \quad (1.117)$$

de plus, elle est bornée par

$$\frac{dV_2(t)}{dt} \leq \frac{1}{(1 - \partial\tau_{\max})} \{x^T(t)x(t) - x^T(t - \tau(t))x(t - \tau(t))\} \quad (1.118)$$

En effet, la dérivée temporelle de la fonction  $V(t)$  qui est définie comme étant la somme des deux fonctions candidates de Lyapunov  $V_1(t)$  et  $V_2(t)$  est la suivante

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &\leq -2 \int_0^\infty \omega \mu(\omega) z^T(\omega, t) P z(\omega, t) d\omega + 2x^T(t)(PA_0 + \Lambda_1)x(t) + 2x^T(t)PA_\tau x(t - \tau(t)) \\ &\quad - x^T(t - \tau(t))\Lambda_2 x(t - \tau(t)) \end{aligned} \quad (1.119)$$

où  $\Lambda_1 = \frac{1}{2(1 - \partial\tau_{\max})}I$  et  $\Lambda_2 = \frac{1}{(1 - \partial\tau_{\max})}I$ .

Cette inégalité est équivalente à

$$X^T(t)\Omega X(t) \leq 0 \quad (1.120)$$

avec

$$\Omega = \begin{bmatrix} PA_0 + A_0^T P + 2\Lambda_1 & PA_\tau \\ A_\tau^T P & -\Lambda_2 \end{bmatrix} \quad (1.121)$$

et

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau(t)) \end{bmatrix} \quad (1.122)$$

Finalement, une condition suffisante de stabilité du système (1.106) est obtenue sous la forme d'inégalité matricielle linéaire. Cela signifie que le système (1.106) est asymptotiquement stable si la matrice  $\Omega$  est définie négative, ce qui conclut la démonstration. •

## 1.4 Evaluation de la norme $H_\infty$ pour un système d'ordre non entier

### 1.4.1 Formulation du problème

Soit la représentation dans l'espace des pseudo-états d'un système d'ordre non entier soumis à des perturbations exogènes mis sous la forme ci-dessous

$$D^\alpha x(t) = A_0 x(t) + B_0 w(t) \quad (1.123a)$$

$$z(t) = C_0 x(t) + D_0 w(t) \quad (1.123b)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  désigne le vecteur pseudo-état,  $w \in \mathbb{R}^q$  est le vecteur d'entrée représentant les perturbations extérieures,  $z \in \mathbb{R}^r$  est la sortie à contrôler et  $\alpha$  est l'ordre de la dérivation fractionnaire

tel que  $0 < \alpha < 2$ .  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$  et  $D_0$  sont des matrices constantes connues de dimensions appropriées.

La fonction de transfert entre l'entrée  $w$  et la sortie  $z$  du système 1.123 est définie par

$$Z(s) = T_{zw}(s)W(s) \quad (1.124)$$

où  $W(s)$  et  $Z(s)$  sont les transformées de Laplace de  $w(t)$  et  $z(t)$ , respectivement, avec des conditions initiales nulles c-à-d  $x(t) = 0, \quad \forall t \leq 0$ .

Par conséquent, nous avons

$$T_{zw}(s) = C_0(s^\alpha I - A_0)^{-1}B_0 + D_0 \quad (1.125)$$

**Définition 1.4.1.** *Le signal de perturbation  $w(t)$  appartient à  $\mathcal{L}_2$  si la norme suivante*

$$\|w\|_2 = \left( \int_0^\infty w(t)^T w(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.126)$$

*est bornée.*

*Cette norme peut être interprétée comme étant l'énergie du signal  $w(t)$ .*

**Définition 1.4.2.** *Le système (1.123) respecte le critère de performance  $H_\infty$ , c-à-d  $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$ , s'il est stable et l'inégalité suivante*

$$J = \int_0^\infty z^T(\tau)z(\tau) - \gamma^2 w^T(\tau)w(\tau) d\tau < 0. \quad (1.127)$$

*est satisfaite pour toute perturbation  $w$  appartenant à  $\mathcal{L}_2$  avec des conditions initiales nulles.*

*D'ailleurs,  $\gamma$  est le niveau d'atténuation assuré dans le pire des cas, c-à-d à la fréquence pour laquelle le gain de transfert est maximum.*

Le niveau de performance  $\gamma$  donné dans la Définition 1.4.2 peut être interprété comme étant une borne supérieure du gain  $\mathcal{L}_2$  entre la perturbation  $w$  et la sortie à contrôler  $z$ .

Nous allons présenter le lemme de majoration, qui est souvent utilisé dans le but de linéariser des termes bilinéaires, ainsi que dans l'analyse de la robustesse.

**Lemme 1.4.1.** *[KPZ90] Soit  $D, E$  et  $F$  des matrices réelles de dimensions appropriées et une matrice  $F$  satisfaisant la condition  $F^T F \leq I$ . Pour tout scalaire  $\epsilon > 0$  et tous vecteurs  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , nous avons*

$$2x^T DFEy \leq \epsilon^{-1} x^T D D^T x + \epsilon y^T E^T E y \quad (1.128)$$

Dans la suite de ce manuscrit, nous serons amenés à majorer et linéariser des termes bilinéaires où les composantes sont des matrices complexes. C'est la raison pour laquelle nous étendons le Lemme 1.4.1 au cas des matrices complexes. Ce lemme qui permet de transformer certaines inégalités matricielles non linéaires en LMI sera nécessaire pour démontrer les résultats obtenus.

**Lemme 1.4.2.** *Pour tout scalaire  $\epsilon > 0$  et toute matrice  $F \in \mathbb{R}^{p \times q}$  satisfaisant  $F^T F \leq I$ , l'inégalité suivante*

$$2\Re(x^* DFEy) \leq \epsilon^{-1} x^* D D^* x + \epsilon y^* E^* E y \quad (1.129)$$

*est vérifiée pour tous vecteurs  $x, y \in \mathbb{C}^n$  et toutes matrices complexes  $D$  et  $E$  de dimensions appropriées.*

En adaptant la démonstration du Lemme 1.4.1 présentée dans [KPZ90], nous obtenons qu'une condition de majoration d'une classe de termes non linéaires avec des matrices complexes est assurée par l'inégalité (1.129).

*Démonstration.* Pour établir ce lemme, nous considérons l'inégalité suivante

$$0 \leq \left\| \sqrt{\epsilon} D^* x - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} F E y \right\|^2 \quad (1.130)$$

qui est vérifiée pour tous vecteurs  $x, y \in \mathbb{C}^n$ .

D'abord, nous développons l'inégalité (1.130),

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| \sqrt{\epsilon} D^* x - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} F E y \right\|^2 \\ &= (x^* \sqrt{\epsilon} D - y^* \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} E^* F^*) (\sqrt{\epsilon} D^* x - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} F E y) \\ &= (\epsilon x^* D D^* x + \frac{1}{\epsilon} y^* E^* F^* F E y) - x^* D F E y - y^* E^* F^* D^* x \end{aligned}$$

Puis, du fait que pour tout nombre  $\vartheta \in \mathbb{C}$ , on a

$$2 \Re(\vartheta) = \vartheta + \vartheta^*,$$

nous déduisons que

$$2 \Re(x^* D F E y) \leq (\epsilon x^* D D^* x + \frac{1}{\epsilon} y^* E^* F^* F E y)$$

Ce qui complète la démonstration. •

### 1.4.2 Méthode basée sur la matrice Hamiltonienne

Deux outils de calcul de la norme  $H_\infty$  pour FOS ont d'abord été proposés dans [MSO05b]. Le calcul du gain  $\mathcal{L}_2$  pour FOS a été initialement présenté dans [MSO05b]. Par la suite il a été étendu pour donner une nouvelle formulation dans [MSO08]. Les lemmes suivants montrent ces calculs.

**Lemme 1.4.3.** [MSO05b] *Soit une pseudo représentation d'état stable de la forme (1.123) et soit un nombre réel positif  $\gamma > \bar{\sigma}(D_0)$ . La fonction de transfert  $T_{zw}(s)$  définie dans (1.125) satisfait  $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$  si et seulement si la pseudo matrice hamiltonienne  $A_\gamma$  définie par*

$$A_\gamma = \begin{pmatrix} (A_0 + B_0 R D_0^T C_0) & \Xi B_0 R B_0^T \\ C_0^T (I + D_0 R D_0^T) C_0 & \Xi (A_0^T + C_0^T D_0 R B_0^T) \end{pmatrix} \quad (1.131)$$

où  $\Xi = e^{-\alpha j \pi}$  et  $R = (\gamma^2 I - D_0^T D_0)^{-1}$ , n'a que des valeurs propres dans le domaine de stabilité défini par  $s \in \mathbb{C} : |\arg(s)| > \alpha \frac{\pi}{2}$ .

### 1.4.3 Méthode basée sur le lemme de KYP généralisé

Récemment, une nouvelle formulation sous la forme d'inégalité matricielle linéaire (LMI) pour calculer la norme  $H_\infty$  du système (1.123) en utilisant le lemme généralisé de Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) a été proposée dans [FFS13] et [LWP<sup>+</sup>15]. Cette nouvelle formulation est présentée dans le théorème suivant.

**Théorème 1.4.1.** [FFS13] *La fonction de transfert  $T_{zw}(s)$  définie dans (1.125) satisfait  $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$  si les conditions suivantes sont vérifiées, selon la valeur de  $\alpha$*

- cas 1 :  $0 < \alpha < 1$  :  $\exists X \in \mathbb{H}^n > 0$  tel que

$${}_{01}\Gamma = \begin{bmatrix} \text{sym}\{A_0(e^{j\theta}X + e^{-j\theta}\bar{X})\} & * & * \\ C_0(e^{j\theta}X + e^{-j\theta}\bar{X}) & -\gamma I & * \\ B_0^T & D_0^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.132)$$

- cas 2 :  $1 \leq \alpha < 2$  :  $\exists P \in \mathbb{H}^n > 0$  tel que

$${}_{12}\Gamma = \begin{bmatrix} \text{sym}\{A_0e^{j\theta}P\} & * & * \\ C_0e^{j\theta}P & -\gamma I & * \\ B_0^T & D_0^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.133)$$

où  $\theta = \frac{\pi}{2}(1 - \alpha)$ .

Dans le deuxième cas, la condition (1.133) est aussi nécessaire.

## 1.5 Conclusion

Dans ce premier chapitre, les différentes définitions qui nous semblent primordiales à connaître dans le calcul fractionnaire ont été présentées, ainsi que quelques fonctions utiles telles que la fonction Gamma et la fonction de Mittag-Leffler. Par la suite, une courte introduction à quelques applications a été proposée dans une section. Puis, quelques approches d'approximation et de simulation d'un dérivateur d'ordre non entier ont été rappelées.

De plus, dans le cas des systèmes d'ordre non entier sans retard, les conditions de stabilité ont été données sous forme d'Inégalités matricielles linéaires (LMIs) en utilisant les notions de région  $\mathcal{GLMI}$  ainsi que de la  $\mathcal{D}$ -stabilité. Ces conditions obtenues sous forme des LMI permettent de localiser les valeurs propres de la matrice du pseudo-état dans une région convexe dans le cas de  $1 \leq \alpha < 2$  ou bien, dans l'union de certaines sous-régions convexes pour  $0 < \alpha < 1$ .

Dans un deuxième temps, en se basant sur les approches de type Lyapunov dédiées aux systèmes d'ordre non entier, des outils d'analyse avancés propres aux systèmes d'ordre non entier à retard variant dans le temps, offrant ainsi un cadre de travail approprié pour l'étude et la conception de différents types d'observateurs pour ces systèmes ont été développés.

Dans la troisième partie de ce chapitre, le problème de l'évaluation de la norme  $H_\infty$  pour les systèmes d'ordre non entier a été formulé. Puis, les méthodes existantes pour calculer cette norme  $H_\infty$  ont été présentées.

# Chapitre 2

## Observateurs des systèmes d'ordre fractionnaire

*“Le soleil se lève avant moi, mais je me couche après lui :  
nous sommes quittes.”  
Jules Renard*

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>36</b>
<b>2.2</b>	<b>Observateurs des systèmes linéaires</b>	<b>37</b>
2.2.1	Synthèse d'observateurs linéaires	37
2.2.1.1	Observateurs linéaires d'ordre plein	37
2.2.1.2	Observateurs linéaires d'ordre réduit	38
2.2.2	Exemple numérique	41
<b>2.3</b>	<b>Observateurs des systèmes à retards</b>	<b>42</b>
2.3.1	Position du problème	43
2.3.2	Conditions d'existence	44
2.3.3	Exemple numérique	47
<b>2.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>49</b>

---

## 2.1 Introduction

En pratique, les sorties d'un système dynamique ne fournissent pas toutes les mesures des pseudo-états internes d'un système. Cela est dû parfois aux difficultés techniques rencontrées lors de l'implémentation des capteurs dans certains endroits du processus en question. De plus, le coût très élevé de certains types de capteurs, représente un obstacle financier sensible. En effet, pour une grande classe de processus industriels, la dimension du vecteur des sorties, nommé aussi vecteur des mesures, est inférieure à celle du vecteur des pseudo-états du système. En d'autres termes, à chaque instant  $t$ , nous n'avons pas toutes les mesures des pseudo-états du systèmes. Reconstruire le vecteur des pseudo-états ou des fonctions de ce vecteur est l'un des sujets les plus importants en théorie de contrôle. Ce fait est dû à la nécessité de connaître les variables non-mesurées pour la commande et la surveillance d'un procédé dynamique.

Dans de très nombreuses applications industrielles, la génération d'une loi de commande nécessite que la connaissance d'une fonctionnelle  $z(t) = T_z x(t)$  des pseudo-états au lieu de connaître tout le vecteur des pseudo-états  $x(t)$ . Depuis ces premiers travaux [FW72, Lue63, Lue64] sur la synthèse d'observateur fonctionnel linéaire pour les systèmes d'ordre entier sans retards, deux techniques de synthèse peuvent être distinguées pour cette classe d'observateurs. D'une part, nous citons celles qui commencent par la solution de l'équation de Sylvester qui apparaît dans les conditions d'existence d'un tel observateur, par exemple [Tsu04, TNT08]. D'autre part, nous trouvons des méthodes de synthèse qui se basent sur les conditions nécessaires et suffisantes obtenues dans [Dar00], par exemple [FTJ10, FT13]. Ces approches sont élargies vers le cas des systèmes à retards, ce qui a permis de concevoir des observateurs pour ces systèmes en tenant en compte de la spécificité de son comportement en présence du retard [Bou01, BD01, Dar01, XLZY04, JT05, SH05, ZBB06, Dar07]. Une des raisons principales pour laquelle il y a eu un intérêt considérable pour ce thème de recherche est son potentiel de réduire la complexité et le coût de calcul des gains des observateurs et de contrôleurs.

D'autre part, il est clair qu'un observateur d'ordre plein n'est qu'un cas particulier de l'observateur fonctionnel, c-à-d  $T_z = I_n$ . Sachant que les premiers travaux sur les problèmes d'estimation de l'état dans le cas d'ordre entier ont été proposés par Luenberger [Lue64, Lue66, Lue71] dans le cas déterministe, et par Kalman [Kal60] dans le cas stochastique. L'intérêt de reconstruire tout le vecteur des pseudo-états dépend de l'utilisation [YW88, DZX94, Dar09, BRDZ13, KK95]. Dans certains cas, par exemple en présence des entrées inconnues, il a été démontré [YW88, DZX94, Dar09] qu'un observateur d'ordre plein peut avoir une vitesse de convergence plus rapide, contrairement au cas des observateurs d'ordre réduit [YW88, BH95, Nak97, ZMD00].

Depuis les premiers travaux de Luenberger, les recherches sur la synthèse des observateurs fonctionnels n'ont pas cessé de progresser. Par contre, il y a peu de travaux dans la littérature sur la synthèse d'observateurs fonctionnels pour des systèmes d'ordre fractionnaire avec retard. C'est la raison pour laquelle nous nous intéressons dans cette section à ce problème.

Dans ce chapitre, nous tentons de présenter l'état de l'art sur les concepts fondamentaux liés à la synthèse des observateurs fonctionnels linéaires, et d'introduire cette théorie des observateurs d'état pour les systèmes d'ordre fractionnaire avec et sans retards. Les conditions d'existence et de synthèse d'observateurs fonctionnels linéaires deviennent plus compliquées en présence des entrées inconnues et de retards constants ou variables dans le temps.

## 2.2 Observateurs des systèmes linéaires

Cette partie est consacrée au problème d'estimation des pseudo-états des systèmes d'ordre fractionnaire. Nous rappelons tout d'abord le concept d'observateurs d'ordre plein, d'ordre réduit et fonctionnel, où ce dernier représente un cas plus général des précédentes formes. Par la suite, nous présentons les conditions d'existence, ainsi que la méthodologie de synthèse.

### 2.2.1 Synthèse d'observateurs linéaires

#### 2.2.1.1 Observateurs linéaires d'ordre plein

Soit le système linéaire d'ordre fractionnaire dont la représentation de ses pseudo-états est donnée ci-dessous

$$D^\alpha x(t) = A_0 x(t) + B_u u(t) \quad (2.1a)$$

$$y(t) = C_y x(t) \quad (2.1b)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  et  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  représentent respectivement le vecteur des pseudo-états, le vecteur des entrées et le vecteur des sorties.  $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est la matrice dynamique,  $B_u \in \mathbb{R}^{n \times m}$  est la matrice d'entrée et  $C_y \in \mathbb{R}^{p \times n}$  est la matrice de sortie. Le triplet  $(A_0, B_u, C_y)$  caractérise la dynamique du système dans l'espace des pseudo-états.

On considère la description suivante d'un observateur

$$D^\alpha \hat{x}(t) = A_0 \hat{x}(t) + B_u u(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \quad (2.2a)$$

$$\hat{y}(t) = C_y \hat{x}(t) \quad (2.2b)$$

où le vecteur  $\hat{x}(t)$  représente l'estimation du pseudo-état  $x(t)$  du système (2.1). L'observateur (2.2) est composé d'une copie du système fractionnaire (2.1), est contrôlé par le même signal d'entrée  $u(t)$  que le système original (2.1), et par un terme de correction provenant de la différence entre la sortie réelle  $y(t)$  du système (2.1) et la sortie de l'observateur (2.2). La matrice  $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$  est une matrice appelée gain de l'observateur qui sera spécifié par la suite.

On pose l'erreur d'estimation  $e(t)$  comme suit

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (2.3)$$

et sa dynamique fractionnaire est décrite par l'équation suivante

$$D^\alpha e(t) = (A_0 - LC_y)e(t) \quad (2.4)$$

Il est clair que la dynamique fractionnaire de l'erreur d'estimation convergera vers 0, si le choix de la matrice  $L$ , gain de l'observateur (2.2), est fait d'une manière pertinente. L'existence d'une matrice  $L$  qui assure la stabilisation asymptotique de l'erreur d'estimation est donnée par le lemme suivant.

**Lemme 2.2.1.** [MAN96, MAN97], *La paire de matrices  $(A_0, C_y)$  est détectable si ses modes inobservables sont asymptotiquement stables, c-à-d tous les modes inobservables associés aux valeurs propres  $\lambda$  de la matrice  $A_0$  telles que  $|\arg(\lambda)| > \alpha \frac{\pi}{2}$ .*

Si la condition du lemme 2.2.1 qui assure la condition d'existence d'un observateur sous la forme (2.2) pour le système (2.1) est satisfaite, le vecteur des pseudo-états du système fractionnaire peut être reconstruit via l'observateur (2.2).

La stabilisation asymptotique du système linéaire fractionnaire (2.4) est donnée par les deux théorèmes suivants.

**Théorème 2.2.1.** [N'D11] Il existe un observateur fractionnaire (2.2) avec  $0 < \alpha < 1$  assurant la stabilité asymptotique de l'erreur d'observation (2.4) si et seulement si il existe deux matrices  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ( $Q = Q^T > 0$ ) telles que

$$\sum_{i=1}^2 \text{sym}(\Gamma_{i1} \otimes (A_0^T Q + C_y^T X)) < 0 \quad (2.5)$$

où les matrices  $\Gamma_{i1}$  ( $i = 1, 2$ ) sont données par

$$\Gamma_{11} = \begin{bmatrix} \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) & -\cos(\alpha \frac{\pi}{2}) \\ \cos(\alpha \frac{\pi}{2}) & \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix}, \quad \Gamma_{21} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha \frac{\pi}{2}) & \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) \\ -\sin(\alpha \frac{\pi}{2}) & \cos(\alpha \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix}. \quad (2.6a)$$

Le gain assurant la stabilité asymptotique de l'erreur d'estimation est donné par

$$L = -Q^{-1} X^T$$

**Théorème 2.2.2.** [N'D11] Il existe un observateur fractionnaire (2.2) avec  $1 \leq \alpha < 2$  assurant la stabilité asymptotique de l'erreur d'observation (2.4) si et seulement si il existe deux matrices  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ( $P = P^T > 0$ ) telles que

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{12}^T & \Omega_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.7)$$

avec

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= \Omega_{22} = (A_0^T P + P A_0 + C_y^T X + X^T C_y) \sin(\pi - \alpha \frac{\pi}{2}) \\ \Omega_{12} &= (A_0^T P - P A_0 + C_y^T X - X^T C_y) \cos(\pi - \alpha \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

Le gain assurant la stabilité asymptotique de l'erreur d'estimation est donné par

$$L = -P^{-1} X^T$$

### 2.2.1.2 Observateurs linéaires d'ordre réduit

Dans de nombreux processus industriels, une partie du vecteur des pseudo-états internes du modèle est disponible via le vecteur de sortie, donc ce n'est pas nécessaire de l'estimer. Ainsi, il ne reste à estimer que la partie non accessible. On parle par la suite d'un observateur d'ordre réduit.

Soit le système linéaire d'ordre fractionnaire dont la représentation de ses pseudo-états est donnée ci-dessous

$$D^\alpha x(t) = A_0 x(t) + B_u u(t) \quad (2.8a)$$

$$y(t) = C_y x(t) \quad (2.8b)$$

$$z(t) = T_z x(t) \quad (2.8c)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  et  $z(t) \in \mathbb{R}^r$  représentent respectivement le vecteur des pseudo-états, le vecteur des entrées, le vecteur des sorties et la fonctionnelle à estimer.  $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est la matrice dynamique,  $B_u \in \mathbb{R}^{n \times m}$  est la matrice d'entrée,  $C_y \in \mathbb{R}^{p \times n}$  est la matrice de sortie

et  $T_z$  est la matrice du vecteur à estimer. Le triplet  $(A_0, B_u, C_y)$  caractérise la dynamique du système dans l'espace des pseudo-états.

Afin de reconstruire partiellement le pseudo-état  $z(t)$  du système (2.8), nous utilisons un observateur fractionnaire d'ordre réduit où sa structure est donnée par la forme suivante

$$D^\alpha \eta(t) = N\eta(t) + Hu(t) + Jy(t) \quad (2.9a)$$

$$\hat{z}(t) = \eta(t) + Ey(t) \quad (2.9b)$$

où  $\eta(t) \in \mathbb{R}^r$  est le pseudo-état de l'observateur (2.9), le vecteur  $\hat{z}(t) \in \mathbb{R}^r$  est une estimation du vecteur  $z(t)$ . Les matrices  $N, J, H$  et  $E$  sont des matrices inconnues de dimensions appropriées qui doivent être déterminées afin que  $\hat{z}(t)$  converge asymptotiquement vers  $z(t)$ . Une procédure constructive pour la synthèse de ce type d'observateur d'ordre réduit a été traitée dans [NDVZ13].

Maintenant, dans un premier temps, nous présentons des conditions suffisantes pour l'existence d'un observateur d'ordre réduit (2.9) pour le système (2.8) sous forme d'une proposition. Par la suite, nous étudions la stabilité de l'erreur d'estimation selon l'ordre de dérivation  $\alpha$ .

**Proposition 2.2.1.** *Le système (2.9) est un observateur d'ordre réduit pour le système (2.8) avec  $0 < \alpha < 2$ , pour toute initialisation, c-à-d  $z(t), \hat{z}(t), \forall t \leq 0$ , si*

i)  $D^\alpha e(t) = Ne(t)$  est asymptotiquement stable,

ii) les contraintes

$$RA_0 - NR - JC_y = 0 \quad (2.10a)$$

$$H = RB_u \quad (2.10b)$$

sont vérifiées. Où la matrice  $R$  est définie par  $R = T_z - EC_y$

*Démonstration.* D'abord, nous définissons l'erreur d'estimation comme  $e(t) = z(t) - \hat{z}(t)$ . La dynamique fractionnaire de l'erreur d'estimation est donnée par

$$D^\alpha e(t) = D^\alpha z(t) - D^\alpha \hat{z}(t)$$

ce qui est équivalent à

$$D^\alpha e(t) = Ne(t) + (RA_0 - NR - JC_y)(x(t)) + (RB_u - H)u(t) \quad (2.11)$$

Si les deux conditions données sous forme d'équations suivantes

$$RA_0 - NR - JC_y = 0$$

$$H = RB_u$$

sont satisfaites, alors, on peut simplifier la dynamique de l'erreur d'estimation (2.11) comme suit

$$D^\alpha e(t) = Ne(t) \quad \text{avec} \quad 0 < \alpha < 2 \quad (2.12)$$

Dans ce cas,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = 0$  si la dynamique de l'erreur d'estimation (2.12) est asymptotiquement stable. •

Sous l'hypothèse que les deux contraintes (2.10a) et (2.10b) sont vérifiées, dans ce qui suit, le but sera de chercher des matrices  $N$ ,  $E$ ,  $J$  et  $H$  telles que la condition i) de stabilité de l'erreur d'estimation soit vérifié.

Par ailleurs, en utilisant la définition de la matrice  $R$  donnée comme  $R = T_z - EC_y$ , l'équation (2.10a) peut être réécrite comme suit

$$\begin{aligned} T_z A_0 &= NT_z - NEC_y + EC_y A_0 + JC_y \\ &= NT_z + EC_y A_0 + (J - NE)C_y \\ &= NT_z + EC_y A_0 + KC_y \end{aligned}$$

où  $K = J - NE$ , et l'équation (2.10a) peut être reformulée sous la forme suivante

$$\begin{bmatrix} N & K & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_z \\ C_y \\ C_y A_0 \end{bmatrix} = T_z A_0 \quad (2.13)$$

La condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution à l'équation (2.13) est donnée par le Lemme A.2.1 dans l'Annexe A. Si la condition de rang est vérifié alors la solution générale est donnée par

$$\begin{bmatrix} N & K & E \end{bmatrix} = T_z A_0 \begin{bmatrix} T_z \\ C_y \\ C_y A_0 \end{bmatrix}^+ - Z \left( I - \begin{bmatrix} T_z \\ C_y \\ C_y A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_z \\ C_y \\ C_y A_0 \end{bmatrix}^+ \right) \quad (2.14)$$

où la matrice  $Z$  est une matrice arbitraire de dimension appropriée, et  $A^+$  est une pseudo-inverse de  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  vérifiant  $AA^+A = A$ .

D'après l'équation (2.14), nous pouvons alors en déduire que

$$N = \mathbb{A}_N - Z\mathbb{B}_N \quad (2.15a)$$

$$K = \mathbb{A}_K - Z\mathbb{B}_K \quad (2.15b)$$

$$E = \mathbb{A}_E - Z\mathbb{B}_E \quad (2.15c)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_N &= T_z A_0 \begin{bmatrix} T_z \\ C_y \\ C_y A_0 \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbb{B}_N &= \left( I - \begin{bmatrix} T_z \\ C_y \\ C_y A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_z \\ C_y \\ C_y A_0 \end{bmatrix}^+ \right) \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbb{A}_K &= T_z A_0 \begin{bmatrix} T_z \\ C_y \\ C_y A_0 \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbb{B}_K &= \left( I - \begin{bmatrix} T_z \\ C_y \\ C_y A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_z \\ C_y \\ C_y A_0 \end{bmatrix}^+ \right) \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbb{A}_E &= T_z A_0 \begin{bmatrix} T_z \\ C_y \\ C_y A_0 \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} & \mathbb{B}_E &= \left( I - \begin{bmatrix} T_z \\ C_y \\ C_y A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_z \\ C_y \\ C_y A_0 \end{bmatrix}^+ \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

D'après l'équation (2.10b) et l'expression de la matrice  $K$ , nous pouvons facilement déduire les matrices  $J$  et  $H$  qui sont calculées par

$$J = K + NE \quad (2.16a)$$

$$H = (T_z - EC_y)B_u \quad (2.16b)$$

□.

Ensuite, après vérification du Lemme A.2.1 qui représente une condition nécessaire et suffisante de la résolution de l'équation (2.13), nous pouvons calculer tous les paramètres de l'observateur fractionnaire d'ordre réduit (2.9).

De ce fait, sous la condition (A.2.19) et en utilisant (2.15a), nous remplaçons la matrice  $N$  par son expression dans la dynamique de l'erreur d'estimation, ce qui donne

$$D^\alpha e(t) = (\mathbb{A}_N - Z\mathbb{B}_N)e(t) \quad 0 < \alpha < 2 \quad (2.17)$$

Par conséquent, la synthèse de l'observateur fractionnaire d'ordre réduit (2.9) est ramenée à la détermination d'une matrice de paramétrage  $Z$  telle que la condition i) de la proposition 2.2.1 soit satisfaite.

La stabilité asymptotique de l'erreur d'estimation (2.17) pour tout ordre de dérivation  $\alpha$ , telle que  $0 < \alpha < 1$  (respectivement  $1 \leq \alpha < 2$ ) est donnée directement en remplaçant le couple de matrices  $(A_0, C_y)$  par  $(\mathbb{A}_N, \mathbb{B}_N)$  dans le théorème 2.2.1 (respectivement 2.2.2)

### 2.2.2 Exemple numérique

Cette partie est consacrée à l'illustration de la synthèse d'observateur développée précédemment à travers un exemple numérique, où nous montrons que l'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers 0.

Afin d'illustrer la validité de la méthode présentée dans cette partie, un exemple numérique de synthèse d'observateur d'ordre réduit est présenté. Les définitions standards de l'opérateur différentiel d'ordre fractionnaire ne permettent pas la mise en œuvre directe d'opérateurs d'ordre fractionnaire dans les simulations. Les simulations suivantes sont effectuées en utilisant la *toolbox CRONE* pour les systèmes avec ordre fractionnaire (voir section 1.2.5).

Considérons un système linéaire invariant dans le temps d'ordre fractionnaire représenté dans l'espace des pseudo-états sous la forme suivante

$$D^{1.5}x(t) = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (2.18a)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \end{bmatrix} x(t) \quad (2.18b)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \quad (2.18c)$$

D'après les matrices de la représentation du pseudo-état donnée par (2.18), en suivant la procédure de synthèse développée auparavant, la condition (A.2.19) d'existence d'un observateur est vérifiée, on obtient

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -0.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.75 \end{bmatrix}$$

Pour s'assurer que la condition i) de la proposition 2.2.1 est satisfaite, il faut que les valeurs propres de la matrice  $N$ , gain de l'observateur, soient dans une région de stabilité en fonction de l'ordre de dérivation  $\alpha$ . La matrice  $N$  peut être déterminée en utilisant une des techniques semblables à celles utilisées dans le cas d'ordre entier, par exemple la méthode du placement de valeurs propres de la matrice  $N$ . En utilisant un des solveurs des LMIs disponible sous Matlab, nous obtiendrons une solution faisable de la LMI donnée par le théorème 2.2.2, qui assure la stabilité asymptotique de l'erreur d'estimation (2.17) où les matrices de décision sont données par

$$P = 0.66146 \text{ et } X = \begin{bmatrix} 0.44097 & 0.44097 & -0.72229 \end{bmatrix}$$

Ensuite, à partir de ces matrices, nous pouvons déduire le gain  $Z$  de stabilisation l'erreur d'estimation

$$Z = -P^{-1}X^T = \begin{bmatrix} -0.66667 & -0.66667 & 1.092 \end{bmatrix}$$

En effet, à partir des équations (2.15), les matrices de l'observateur sont obtenues par la suite

$$\begin{aligned} N &= -1.319 & K &= -1.7299 \\ E &= -1.092 & J &= -0.28964 \\ H &= 3.7299 \end{aligned}$$

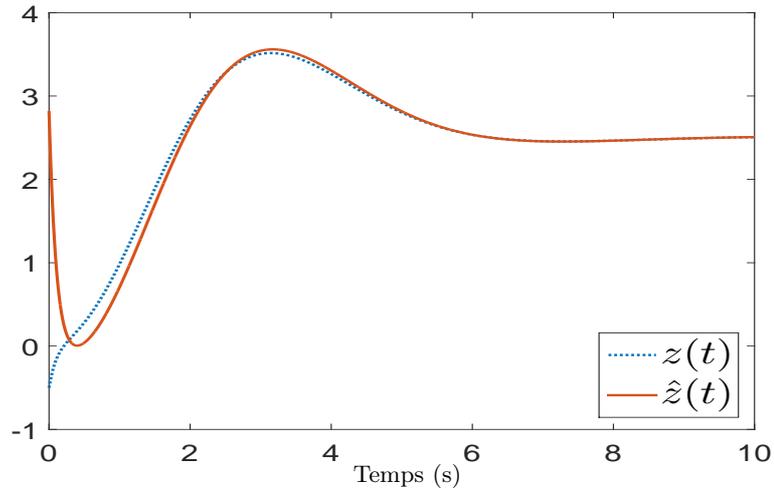
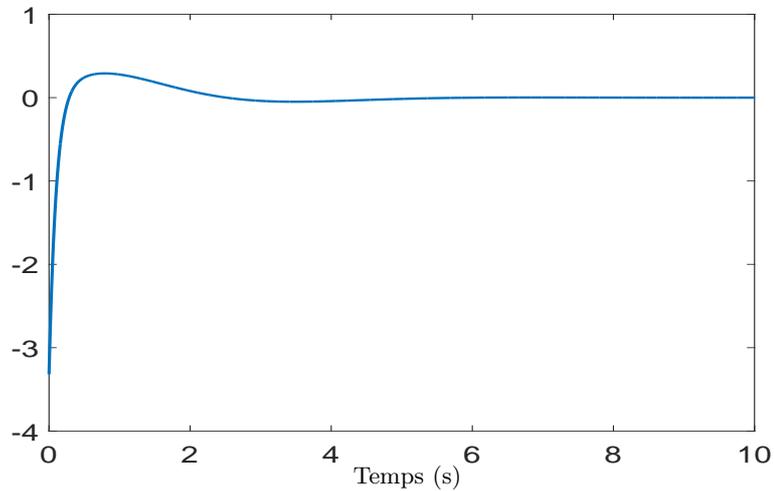
Finalement, la dynamique de l'observateur qui nous permet d'avoir une estimation du pseudo-état  $\hat{z}(t)$  est donnée par

$$\begin{cases} D^{1.5}\eta(t) = -1.319\eta(t) + 3.7299u(t) - 0.28964y(t) \\ \hat{z}(t) = \eta(t) - 1.092y(t) \end{cases} \quad (2.19)$$

Pour vérifier la convergence de l'estimation  $\hat{z}(t)$  vers le pseudo-état  $z(t)$  du système (2.18), ainsi que la convergence asymptotique de l'erreur d'estimation  $e(t)$  vers 0, il suffit de tracer l'évolution du trajectoires de  $\hat{z}(t)$ ,  $z(t)$  et  $e(t)$ . Les résultats des simulations numériques sont illustrés dans les figures (2.1) et (2.2). La figure (2.1) montre l'évolution du pseudo-état  $z(t)$  et son estimé  $\hat{z}(t)$ , où il apparaît donc clairement que  $\hat{z}(t)$  converge asymptotiquement vers  $z(t)$ . Dans la figure (2.2), il est clair que l'erreur d'estimation  $e(t)$  converge asymptotiquement vers 0, ce qui traduit le fait que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = 0$ .

## 2.3 Observateurs des systèmes à retards

La partie précédente a été consacrée à l'étude et la synthèse des observateurs pour des systèmes d'ordre fractionnaire dont la dynamique est marquée par l'absence de retards dans les pseudo-états. En revanche, cette section sera consacrée au problème d'estimation des pseudo-états des systèmes d'ordre fractionnaire à retard. Nous commençons par synthétiser les différents types d'observateurs. Par la suite, des conditions suffisantes d'existence de ces observateurs seront présentées, puis la convergence de l'erreur d'estimation sera analysée en utilisant l'approche développée dans le premier chapitre.

FIGURE 2.1 – L'évolution du vecteur  $z(t)$  et son estimation  $\hat{z}(t)$ FIGURE 2.2 – L'évolution de l'erreur d'estimation  $e(t)$ 

### 2.3.1 Position du problème

Contrôler un système d'ordre fractionnaire, avec ou sans retard, nécessite la connaissance d'une partie ou la totalité du vecteur des pseudo-états de ce système. Selon les applications considérées, différents types d'observateurs peuvent être synthétisés (observateur fonctionnel, d'ordre réduit ou plein). Dans la littérature, il y a peu de travaux sur la synthèse d'observateurs fonctionnels pour des systèmes d'ordre fractionnaire avec retard. C'est la raison pour laquelle nous nous intéressons dans cette section à ce problème.

Nous considérons une classe des systèmes d'ordre fractionnaire linéaire à retards sous la forme suivante

$$D^\alpha x(t) = A_0 x(t) + A_\tau x(t - \tau(t)) + B_u u(t) \quad (2.20a)$$

$$y(t) = C_y x(t) \quad (2.20b)$$

$$z(t) = T_z x(t) \quad (2.20c)$$

$$x(t) = \psi(t), t \in [-\tau_{\max}, 0] \quad (2.20d)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur des pseudo-états,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est

le vecteur de sortie et  $z(t) \in \mathbb{R}^r$  est une fonctionnelle des pseudo-états.  $A_0, A_\tau, B_u, C_y$  et  $T_z$  sont les matrices du système de dimensions appropriées. La fonction  $\tau(t)$  représente un retard variant et borné ( $0 \leq \tau(t) \leq \tau_{\max}, \forall t \geq 0$ ) et  $\psi(t)$  est la condition initiale du système à l'instant  $t \in [-\tau_{\max}, 0]$ .

Un observateur fonctionnel permettant d'estimer la fonctionnelle  $z(t)$  du système à retards (2.20) a la forme générale suivante

$$D^\alpha \eta(t) = N_0 \eta(t) + N_\tau \eta(t - \tau(t)) + H_u u(t) + J_0 y(t) + J_\tau y(t - \tau(t)) \quad (2.21a)$$

$$\hat{z}(t) = \eta(t) + E_y y(t) \quad (2.21b)$$

$$\eta(t) = \eta_0(t), t \in [-\tau_{\max}, 0] \quad (2.21c)$$

où le vecteur  $\eta(t) \in \mathbb{R}^n$  est le pseudo-état de l'observateur, le vecteur  $\hat{z}(t) \in \mathbb{R}^n$  est l'estimation de la fonctionnelle linéaire  $z(t) = T_z x(t)$ , tandis que  $N_0, N_\tau, J_0, J_\tau, H_u$  et  $E_y$  sont des matrices constantes qui doivent être déterminées afin que l'estimé  $\hat{z}(t)$  converge asymptotiquement vers le pseudo-état  $z(t)$  du système (2.20).

### 2.3.2 Conditions d'existence

Soit  $e(t)$  l'erreur d'estimation définie par

$$e(t) = z(t) - \hat{z}(t) \quad (2.22)$$

et sa dynamique fractionnaire est décrite par l'équation suivante

$$\begin{aligned} D^\alpha e(t) &= D^\alpha z(t) - D^\alpha \hat{z}(t) \\ &= N_0 e(t) + N_\tau e(t - \tau) + (RA_0 - N_0 R - J_0 C_y) x(t) \\ &\quad + (RA_\tau - N_\tau R - J_\tau C) x(t - \tau(t)) + (RB_u - H_u) u(t) \end{aligned} \quad (2.23)$$

où  $R = T_z - E_y C_y$ .

Dans ce qui suit, nous présentons un théorème qui donne une condition suffisante de l'existence d'un observateur fonctionnel sous la forme (2.21) (d'ordre réduit, d'ordre plein, respectivement) pour le système d'ordre fractionnaire à retard (2.20).

**Théorème 2.3.1.** *Le système (2.21) est un observateur asymptotique du système (2.20) pour  $0 < \alpha < 1$ , c-à-d  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{x}(t) - x(t) = 0$ , pour toutes conditions initiales du système (2.20)  $\psi(t)$ , de l'observateur  $\eta_0(t)$  à l'instant  $t \in [-\tau_{\max}, 0]$  et  $u(t)$  si*

(i)  $D^\alpha e(t) = N_0 e(t) + N_1 e(t - \tau(t))$  est asymptotiquement stable ;

(ii) les contraintes

$$RA_0 - N_0 R - J_0 C_y = 0 \quad (2.24a)$$

$$RA_\tau - N_\tau R - J_\tau C_y = 0 \quad (2.24b)$$

$$H_u = RB_u \quad (2.24c)$$

sont vérifiées

*Démonstration.* Si les conditions (i - ii) du Théorème 2.3.1 sont satisfaites, cela implique que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = 0$  pour toutes conditions initiales du système (2.20),  $\psi(t)$ , et de l'observateur

(2.21),  $\eta_0(t)$ ,  $\forall t \in [-\tau_{\max}, 0]$  et vecteur des entrées  $u(t)$ . Donc, il doit exister des matrices  $N_0$ ,  $N_\tau$ ,  $R$ ,  $J_0$ ,  $J_\tau$  et  $H_u$  vérifiant les conditions

$$\begin{aligned} RA_0 - N_0R - J_0C_y &= 0 \\ RA_\tau - N_\tau R - J_\tau C_y &= 0 \\ H_u &= RB_u \end{aligned}$$

D'après les équations (2.24) et la dynamique de l'erreur d'estimation (2.23), la dynamique de l'erreur d'estimation peut être réécrite sous la forme simplifiée suivante

$$D^\alpha e(t) = N_0 e(t) + N_1 e(t - \tau), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.25)$$

Donc, la condition suivante  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = 0$  est satisfaite si l'erreur d'estimation (2.25) est stable. Ce qui conclut la preuve.  $\bullet$

Ainsi, la synthèse de l'observateur (2.21) est réduite à trouver des matrices  $N_0$ ,  $N_\tau$ ,  $R$ ,  $J_0$ ,  $J_\tau$  et  $H_u$  telles que les conditions (i - ii) du théorème 2.3.1 soient satisfaites. Avant que nous entamions la résolution des équations (2.24), nous allons remplacer la matrice  $R$  par son expression dans les équations (2.24a) et (2.24b), ce qui permet d'aboutir à ces nouvelles réécritures des équations (2.24a) et (2.24b)

$$N_0 + E_y C_y A_0 + K_0 C_y = A_0 \quad (2.26a)$$

$$N_\tau + E_y C_y A_\tau + K_\tau C_y = A_\tau \quad (2.26b)$$

où  $K_0 = J_0 - N_0 E_y$  et  $K_\tau = J_\tau - N_\tau E_y$ .

**Remarque 2.3.1.** Nous voudrions attirer l'attention du lecteur que d'après l'équation (2.24c) et l'expression de la matrice  $R$ , nous pouvons facilement calculer la matrice  $H_u$  une fois la matrice  $E_y$  est déterminée.  $\bullet$

En réécrivant les équations (2.26a) et (2.26b) de la façon équivalente suivante

$$\begin{bmatrix} N_0 & N_\tau & K_0 & K_\tau & E \end{bmatrix} \mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 \quad (2.27)$$

où

$$\mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} T_z & 0 \\ 0 & T_z \\ C_y & 0 \\ 0 & C_y \\ C_y A_0 & C_y A_\tau \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathcal{M}_2 = \begin{bmatrix} A_0 & A_\tau \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

La condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution à l'équation (2.27) est donnée aussi par le Lemme A.2.1 dans l'Annexe A.

**Remarque 2.3.2.** On remarque que la différence entre les différents observateurs réside dans l'expression de la matrice  $R$  qui contient  $T_z$ . Ce qui se reflète sur l'existence d'une solution de l'équation (2.27) qui est donnée par le Lemme A.2.1 dans l'Annexe A. Contrairement au cas de l'observateur d'ordre plein, dans la synthèse d'un observateur d'ordre réduit, la condition (A.2.19) n'est pas toujours satisfaite. En effet, dans le cas d'un observateur d'ordre plein, la condition (A.2.19) est toujours vérifiée  $T_z = I_n$ .  $\bullet$

L'ensemble des solutions de l'équation (2.27) est donné par

$$\begin{bmatrix} N_0 & N_1 & K_0 & K_1 & E \end{bmatrix} = \mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1^+ - Z(I - \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_1^+) \quad (2.29)$$

où le paramètre  $Z$  est une matrice arbitraire de dimension appropriée.

D'après l'équation (2.29), nous obtenons

$$N_0 = \mathbb{A}_{N_0} - Z\mathbb{B}_{N_0} \quad (2.30a)$$

$$N_\tau = \mathbb{A}_{N_\tau} - Z\mathbb{B}_{N_\tau} \quad (2.30b)$$

$$K_0 = \mathbb{A}_{K_0} - Z\mathbb{B}_{K_0} \quad (2.30c)$$

$$K_\tau = \mathbb{A}_{K_\tau} - Z\mathbb{B}_{K_\tau} \quad (2.30d)$$

où

$$\mathbb{A}_{N_0} = (\mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1^+) \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2.31a)$$

$$\mathbb{B}_{N_0} = (I - \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_1^+) \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2.31b)$$

$$\mathbb{A}_{N_\tau} = (\mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1^+) \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2.31c)$$

$$\mathbb{B}_{N_\tau} = (I - \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_1^+) \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2.31d)$$

Les matrices  $J_0$ ,  $J_\tau$  et  $H_u$  sont obtenues à partir des expressions des matrices  $K_0$ ,  $K_\tau$  et  $R$  comme suit

$$J_0 = K_0 + N_0 E_y \quad (2.32a)$$

$$J_\tau = K_\tau + N_\tau E_y \quad (2.32b)$$

$$H_u = (I_n - E_y C_y) B_u \quad (2.32c)$$

Tout d'abord, en partant de l'équation (2.23) et en considérant que les conditions (2.24) définies précédemment sont vérifiées, puis, en remplaçant les matrices  $N_0$  et  $N_\tau$  par leurs expressions données par les relations (2.30a) et (2.30b), nous pouvons exprimer la dynamique de l'erreur d'estimation en fonction d'une seule matrice paramètre,  $Z$ , comme suit

$$D^\alpha e(t) = (\mathbb{A}_{N_0} - Z\mathbb{B}_{N_0})e(t) + (\mathbb{A}_{N_\tau} - Z\mathbb{B}_{N_\tau})e(t - \tau(t)), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.33)$$

Dans cette étape, le choix des matrices de l'observateur (2.21) est réduit à l'obtention du gain  $Z$  tel que la dynamique de l'erreur d'estimation donnée par l'équation (2.33) soit asymptotiquement stable, puis les matrices de l'observateur sont données par les relations (2.30) et (2.32).

Par ailleurs, afin d'analyser la stabilité de l'erreur d'estimation (2.33) ainsi que sa convergence, dans le cas où l'ordre de dérivation fractionnaire est  $0 < \alpha < 1$ , nous faisons appel à la théorie de Lyapunov en utilisant la représentation diffusive de l'intégrateur fractionnaire, ce qui sera l'objet du théorème suivant.

**Théorème 2.3.2.** *Le système dynamique décrit par (2.21) avec  $0 < \alpha < 1$  est un observateur pour le système (2.20) s'il existe une matrice,  $P$ , symétrique et définie positive, et une matrice  $Y$  vérifiant l'inégalité matricielle linéaire suivante*

$$\Omega = \begin{bmatrix} (P\mathbb{A}_{N_0} - Y\mathbb{B}_{N_0}) + (\mathbb{A}_{N_0}^T P - \mathbb{B}_{N_0}^T Y^T) + 2\Lambda_1 & (P\mathbb{A}_{N_\tau} - Y\mathbb{B}_{N_\tau}) \\ * & -\Lambda_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (2.34)$$

où

$$\Lambda_1 = \frac{1}{2(1 - \partial\tau_{max})}I, \quad \Lambda_2 = \frac{1}{(1 - \partial\tau_{max})}I.$$

et \* représente la partie correspondante de la matrice symétrique .  $\square$

*Démonstration.* La démonstration de ce théorème est donnée par la preuve du théorème 1.3.6 en substituant respectivement les matrices  $A_0$  et  $A_\tau$  par  $\mathbb{A}_{N_0} - Z\mathbb{B}_{N_0}$  et  $\mathbb{A}_{N_\tau} - Z\mathbb{B}_{N_\tau}$  où  $Y = PZ$ .  $\bullet$

### 2.3.3 Exemple numérique

Ce paragraphe est dédié à la mise en évidence de l'efficacité de la méthodologie proposée dans cette section. Nous considérons le système d'ordre fractionnaire à retard décrit par

$$\begin{cases} D^{0.5}x(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & -2.5 \\ 1.2 & -0.1 \end{bmatrix} x(t-0.5) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \\ z(t) = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} x(t) \end{cases} \quad (2.35)$$

D'après les matrices décrivant le système, les équations (2.28) deviennent

$$\mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & -2.5 \end{bmatrix} \quad \mathcal{M}_2 = \begin{bmatrix} 14 & -5 & -2.8 & 9.9 \\ 3 & -2 & 4.6 & -2.8 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

On peut voir que la condition du rang donnée par l'équation (A.2.19) est satisfaite, et, d'après les résultats obtenus dans la section 2.3.2, l'inégalité linéaire matricielle LMI (2.34) donnée dans le théorème 2.3.2, qui assure la stabilité de l'erreur d'estimation (2.17), admet comme solutions les variables de décision suivantes

$$P = \begin{bmatrix} 1.858 & -0.10298 \\ -0.10298 & 1.5834 \end{bmatrix} \text{ et } Y = \begin{bmatrix} 1.4578 & 0.034721 & 0 & 0 & 0 & -1.8338 & 0 \\ 0.034724 & 1.5504 & 0 & 0 & 0 & -5.5015 & 0 \end{bmatrix}$$

Ensuite, la matrice de paramètre  $Z$  est déduite comme suit

$$Z = P^{-1}Y = \begin{bmatrix} 0.78863 & 0.073217 & 0 & 0 & 0 & -1.1838 & 0 \\ 0.073219 & 0.98387 & 0 & 0 & 0 & -3.5514 & 0 \end{bmatrix}$$

En utilisant la méthodologie de synthèse présentée dans la section 2.3.2, nous en déduisons les matrices de l'observateur fonctionnel

$$N_0 = \begin{bmatrix} -0.78863 & -0.073217 \\ -0.073219 & -0.98387 \end{bmatrix} \quad N_\tau = \begin{bmatrix} -0.0079308 & -0.023793 \\ -0.023792 & -0.071377 \end{bmatrix}$$

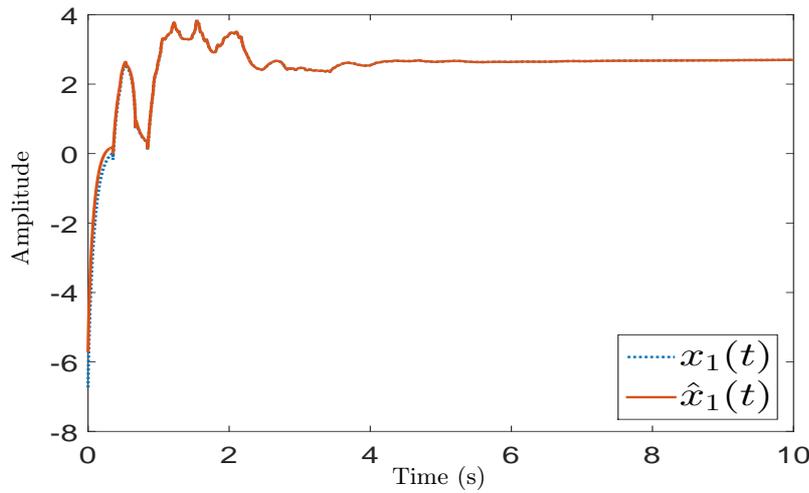


FIGURE 2.3 – Évolution du vecteur  $z_1(t)$  et son estimation  $\hat{z}_1(t)$

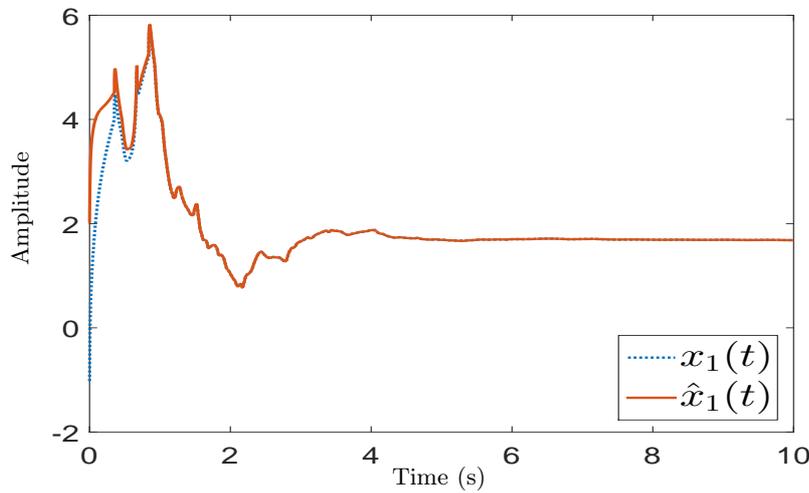


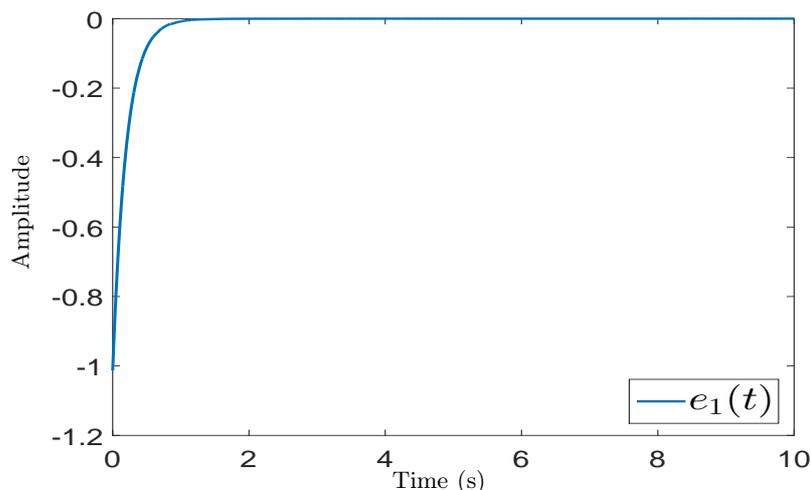
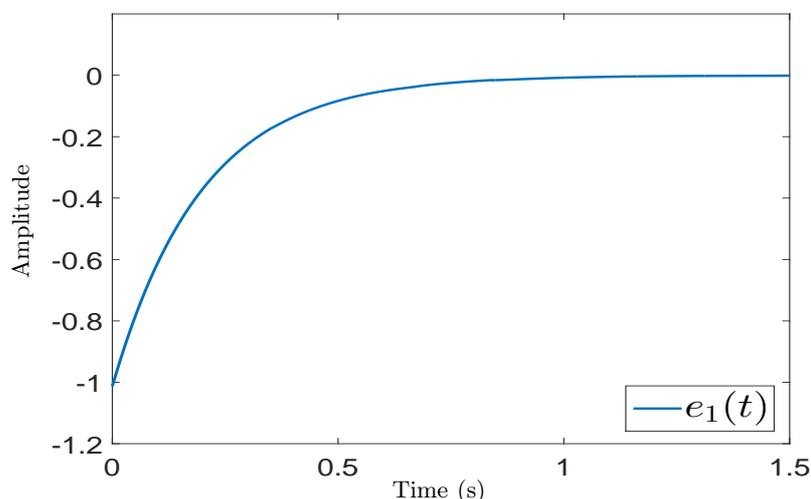
FIGURE 2.4 – Évolution du vecteur  $z_2(t)$  et son estimation  $\hat{z}_2(t)$

$$E = \begin{bmatrix} -3.9917 \\ 1.0248 \end{bmatrix} \quad J_0 = \begin{bmatrix} 2.0165 \\ 6.0495 \end{bmatrix}$$

$$J_\tau = \begin{bmatrix} 1.1911 \\ 3.5732 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

Les figures 2.3-2.8 montrent les performances de l'observateur fonctionnel synthétisé.

Nous avons tracé les composantes du fonctionnel  $z_1(t)$  et  $z_2(t)$  et leurs estimations dans les figures 2.3 et 2.4 où les estimations poursuivent les composantes réelles du fonctionnel  $z(t)$ . Dans les figures 2.5 et 2.7, on voit bien que les erreurs d'estimations convergent asymptotiquement vers zéro. De plus, l'évolution des erreurs d'estimations au voisinage de l'origine est tracée dans les figures 2.6 et 2.8.

FIGURE 2.5 – Évolution de l'erreur d'estimation  $e_1(t) = z_1(t) - \hat{z}_1(t)$ FIGURE 2.6 – Évolution de l'erreur d'estimation  $e_1(t)$  au voisinage de l'origine

## 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité le problème de la synthèse d'observateurs pour les systèmes à dérivée d'ordre non entier, dans le cas où les mesures ne sont pas perturbées. Pour cela, nous avons proposé différents types d'observateurs, d'ordre plein, réduit et fonctionnel pour deux classes de systèmes à dérivée d'ordre non entier, avec et sans retards.

Dans un premier temps, dans le cas sans retard, nous avons proposé des conditions nécessaires et suffisantes afin d'assurer la convergence de l'erreur d'estimation vers zéro grâce à l'utilisation d'une LMI dans le cas où  $1 \leq \alpha < 2$  et d'une  $\mathcal{GLMI}$  dans le cas où  $0 < \alpha < 1$ . L'approche qui consiste à placer les valeurs propres dans un domaine de stabilité est ensuite utilisée pour calculer le gain de l'observateur.

Nous nous sommes intéressés également au problème d'estimation des pseudo-états des systèmes à dérivée d'ordre non entier avec retards. Nous avons présenté une méthodologie de construction d'observateurs fonctionnels pour cette classe de systèmes à dérivée d'ordre non entier avec retards. Les conditions d'existence de ces observateurs ont été obtenues sous la forme de contraintes. Ces dernières sont écrites sous forme de système d'équations à satisfaire. Puis, le

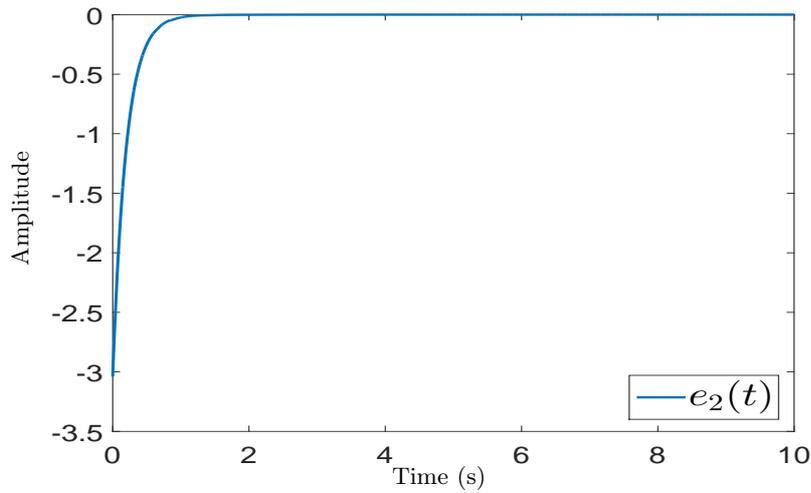


FIGURE 2.7 – Évolution de l'erreur d'estimation  $e_2(t) = z_2(t) - \hat{z}_2(t)$

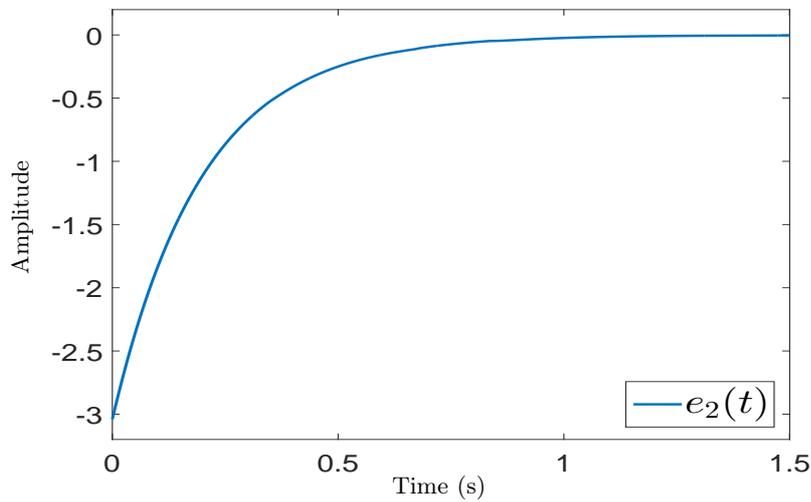


FIGURE 2.8 – Évolution de l'erreur d'estimation  $e_2(t)$  au voisinage de l'origine

fait d'utiliser l'approche de Lyapunov pour analyser la stabilité de ces systèmes nous a permis de déduire une condition suffisante pour assurer la stabilité de l'erreur d'estimation sous forme de LMI.

Enfin, des exemples numériques ont été fournis afin de montrer l'efficacité des méthodes proposées.

## Chapitre 3

# Observateurs des systèmes : incertains, à entrées inconnues, et en présence de perturbations

*“La plus grande gloire n’est pas de ne jamais tomber,  
mais de se relever à chaque chute.”  
Confucius*

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>52</b>
<b>3.2</b>	<b>Perturbations exogènes</b> . . . . .	<b>53</b>
3.2.1	Observateurs à entrées inconnues . . . . .	53
3.2.1.1	Paramétrage de l’observateur à entrées inconnues . . . . .	54
3.2.1.2	Synthèse de l’observateur à entrées inconnues . . . . .	56
3.2.1.3	Exemple numérique . . . . .	58
3.2.2	Observateurs $H_\infty$ . . . . .	59
3.2.2.1	Paramétrage de l’observateur $H_\infty$ . . . . .	62
3.2.2.2	Synthèse de l’observateur $H_\infty$ . . . . .	64
3.2.2.3	Exemple numérique . . . . .	67
<b>3.3</b>	<b>Perturbations endogènes</b> . . . . .	<b>68</b>
3.3.1	Formulations du problème d’observateurs robustes . . . . .	70
3.3.2	Paramétrage de l’observateur robuste . . . . .	71
3.3.3	Synthèse de l’observateur robuste . . . . .	73
3.3.4	Exemple numérique . . . . .	77
<b>3.4</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>78</b>

---

### 3.1 Introduction

En théorie de contrôle, plusieurs critères peuvent être considérés et analysés, dont deux demeurent primordiaux. Le premier concerne la stabilité interne d'un système en se basant sur sa représentation dans l'espace de ses pseudo-états. Néanmoins, les modèles obtenus, qui peuvent être linéarisés ou non autour d'un point de fonctionnement ne sont pas idéaux pour la plupart des cas. Le deuxième est la possibilité d'estimer le vecteur de tous les pseudo-états internes ou qu'une partie, en utilisant des observateurs robustes dédiés à cette catégorie de systèmes [MAN96, GDB08, SMFO09, SFMF12]. Ainsi, plusieurs méthodes d'analyse de la stabilité et de sa robustesse peuvent être utilisées [PCV04, PCVP05, CAP06, Bus08, RSES09, XL09, LC09, LCP09, MA09, LC10, LCP10, SMF10a, SMF10b, JZ11, NDZR13, FFS13, LWP<sup>+</sup>15] dont certains tiennent en compte la présence des incertitudes (par exemple : paramétriques, non structurées ou dynamiques...) du modèle obtenu et des perturbations exogènes (par exemple : les entrées inconnues, les signaux perturbateurs à énergie finie...). Ces méthodes d'analyse sont très utiles, non seulement pour l'étude de la stabilité et la robustesse d'un système, mais aussi afin d'évaluer l'erreur d'estimation vis-à-vis des perturbations endogènes et exogènes.

L'analyse de la robustesse des systèmes dynamiques n'a été considérée que dans le domaine fréquentiel dans les années 60 en exploitant une des méthodes disponibles comme "la théorie quantitative de rétroaction" qui a été développée par *Isaac Horowitz* [Hor63, HS75]. Le formalisme de la norme  $H_\infty$  fondé par le mathématicien anglais *HARDY (Godfrey Harold)* [HW79, RR85] dans le 19<sup>e</sup> siècle, introduit par la suite en automatique dans les années 80 par *George Zames* [Zam81, FHZ84, OZ93], est considéré comme étant la base de la commande  $H_\infty$ . Ainsi, la synthèse  $H_\infty$  est devenue une des méthodes de synthèse des commandes optimales qui minimisent l'action des entrées indésirables sur les sorties du système. Elle est utilisée actuellement dans plusieurs applications caractérisées par la flexibilité de leurs structures, dont son avantage est d'assurer une stabilité robuste en rejetant l'effet des perturbations.

La synthèse d'observateurs pour les systèmes d'ordre fractionnaire a attiré l'attention de plusieurs chercheurs ces derniers temps [CVP03, CVP04, DS06, Lu06, LH07, NDZR11, DM11, PUR11, BM12, NDZ12b, NDZ12a, NDVZ13, BRDZ13, BDZR14b, BDZR14a]. Malgré cela, l'estimation des pseudo-états d'un système fractionnaire à retard variant dans le temps affecté par des perturbations endogènes (incertitude paramétrique ou dynamique) ou exogènes (entrées inconnues, les signaux perturbateurs) reste toujours un des problèmes majeurs dans l'analyse des systèmes fractionnaires. En effet, l'estimation de la pseudo-état ne converge pas asymptotiquement vers le pseudo-état du système en présence de ces perturbations. Dans l'intention de contourner ce problème, la synthèse  $H_\infty$  sera un atout puissant pour minimiser l'effet de ces perturbations sur l'erreur d'estimation.

Dans ce chapitre, notre intérêt principal est de concevoir des observateurs capables d'estimer les pseudo-états d'un système fractionnaire à retard variant dans le temps en présence des perturbations endogènes ou exogènes [BDZR15, BZDR15, BZDR16a]. Dans le cas des systèmes dynamiques incertains ou bien en présence de perturbations à énergie finie, l'observateur proposé doit minimiser l'effet de ces perturbations sur l'erreur d'estimation. D'un autre côté, si les perturbations sont considérées comme étant des entrées inconnues, l'observateur doit assurer le découplage des entrées inconnues de l'erreur d'estimation. De plus, en absence des perturbations, ces observateurs doivent assurer la convergence vers zéro des erreurs d'estimation. Nous montrons par la suite l'efficacité des approches proposées dans des exemples académiques.

## 3.2 Perturbations exogènes

Les entrées indésirables des systèmes dynamiques peuvent être classées selon plusieurs critères (signal déterministe, signal aléatoire, ...). En général, on peut les diviser en deux catégories, les entrées inconnues (UI) à inclure dans la partie modélisation du système dynamique et les perturbations additives externes qui sont dans ce mémoire, supposées avoir une énergie finie ou une puissance moyenne finie.

Concevoir un observateur qui permettra d'estimer les pseudo-états d'un système dynamique en présence des entrées inconnues consiste à trouver un opérateur de projection afin de découpler les entrées inconnues de l'erreur d'estimation (voir [NDZ12a], [NDVZ13]). La synthèse d'observateurs pour la deuxième catégorie est traitée en minimisant l'effet des perturbations sur l'erreur d'estimation. En se basant sur le calcul de la norme  $H_\infty$  pour les systèmes d'ordre fractionnaire proposé dans [SMO05] et [MSO08], un observateur  $H_\infty$  pour les systèmes fractionnaires perturbés et sans retard a été proposé dans [BDZR14a].

Par ailleurs, dans la même optique, des travaux ont eu lieu pour des systèmes d'ordre fractionnaire à retard variant dans le temps dans [BDZR15, BZDR15] en s'appuyant sur des approches de type Lyapunov et un critère  $H_\infty$  en minimisant l'effet des perturbations sur l'erreur d'estimation.

### 3.2.1 Observateurs à entrées inconnues

Soit le système d'ordre fractionnaire à retard variant dans le temps en présence d'entrées inconnues dont la représentation de ses pseudo-états a la structure suivante

$$D^\alpha x(t) = A_0 x(t) + A_\tau x(t - \tau(t)) + B_u u(t) + B_d d(t) \quad (3.1a)$$

$$y(t) = C_y x(t) + D_d d(t) \quad (3.1b)$$

$$z(t) = T_z x(t) \quad (3.1c)$$

$$x(t) = \psi(t), t \in [-\tau_{\max}, 0] \quad \text{avec} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.1d)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur des pseudo-états,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur de commande,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  sont les mesures ou bien le vecteur de sortie,  $d(t) \in \mathbb{R}^k$  est le vecteur des entrées inconnues et  $z(t) \in \mathbb{R}^r$  est la fonctionnelle du pseudo-état à estimer.  $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A_\tau \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_u \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $B_d \in \mathbb{R}^{n \times k}$ ,  $C_y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $D_d \in \mathbb{R}^{p \times k}$  sont des matrices connues de dimensions appropriées, et  $\text{rang } T_z = r$ .  $D^\alpha$  est un opérateur différentiel élevé à un ordre non entier  $\alpha$ .  $\tau(t) > 0$  désigne la fonction du retard, continu, borné, c-à-d  $0 < \tau(t) < \tau_{\max}$  et vérifiant  $\frac{\partial \tau(t)}{\partial t} \leq \dot{\tau}_{\max} < 1$ , où  $\tau_{\max}$  et  $\dot{\tau}_{\max}$  sont deux constantes positives.  $\psi(t)$  est une fonction continue qui représente la fonction d'initialisation du système.

**Remarque 3.2.1.** La notation  $D^\alpha$  est utilisée si la connaissance du choix de la dérivée n'est pas nécessaire pour comprendre les développements mathématiques. Dans la suite, si la dérivée de Caputo est utilisée, alors  $D^\alpha$  est remplacée par  ${}_a^C D_t^\alpha$ , alors que si la dérivée de Riemann-Liouville est considérée, alors  $D^\alpha$  est remplacée par  ${}_a^{RL} D_t^\alpha$ . •

Les matrices  $B_d$  et  $D_d$  vérifiant

$$\text{rang} \begin{pmatrix} B_d \\ D_d \end{pmatrix} = k \quad (3.2a)$$

$$\text{rang } D_d < q \quad (3.2b)$$

**Remarque 3.2.2.** On note bien que si  $\text{rang } D_d = q$ , alors on n'a pas de mesure disponible non affectée par les entrées inconnues. •

Dans l'objectif de reconstruire les pseudo-états du système (3.1), l'observateur adopté a la forme suivante

$$D^\alpha \eta(t) = N_0 \eta(t) + N_\tau \eta(t - \tau(t)) + H u(t) + J_0 y(t) + J_\tau y(t - \tau(t)) \quad (3.3a)$$

$$\hat{z}(t) = \eta(t) + E_y y(t) \quad (3.3b)$$

$$\eta(t) = \eta_0(t), t \in [-\tau, 0] \quad (3.3c)$$

où  $\eta(t) \in \mathbb{R}^r$  est le vecteur des pseudo-états de l'observateur et  $\hat{z}(t) \in \mathbb{R}^r$  est l'estimation de la fonctionnelle  $z(t)$ .  $N_0$ ,  $N_\tau$ ,  $J_0$ ,  $J_\tau$ ,  $H$  et  $E_y$  sont des matrices de dimensions appropriées qu'il faut déterminer, de telle sorte que l'estimation  $\hat{z}(t)$  converge asymptotiquement vers  $z(t)$  malgré la présence des entrées inconnues.

### 3.2.1.1 Paramétrage de l'observateur à entrées inconnues

Soit l'erreur d'estimation  $e(t)$  définie à partir de (3.1) et (3.3) par

$$e(t) = z(t) - \hat{z}(t) \quad (3.4)$$

Sa dynamique fractionnaire est exprimée comme suit

$$D^\alpha e(t) = D^\alpha z(t) - D^\alpha \hat{z}(t) \quad (3.5a)$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned} D^\alpha e(t) = & N_0 e(t) + N_\tau e(t - \tau) + (R A_0 - N_0 R - J_0 C_y) x(t) + (R A_\tau - N_\tau R - J_\tau C_y) x(t - \tau) \\ & + (R B_u - H) u(t) + (P B_d + N_0 E_y D_d - J_0 D_d) d(t) + (N_\tau E_y D_d - J_\tau D_d) d(t - \tau) \\ & - E_y D_d D^\alpha d(t) \end{aligned} \quad (3.5b)$$

où  $R = T_z - E_y C_y$ .

Le théorème suivant utilise les résultats obtenus dans [BDZR15]. D'une part, il donne des conditions suffisantes d'existence d'un observateur (3.3) pour le système (3.1) et, d'autre part, il assure la convergence asymptotique vers zéro de l'erreur d'estimation (3.4).

**Théorème 3.2.1.** [BDZR15] *Le système (3.3) est un observateur fonctionnel pour le système (3.1) et assure  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{z}(t) - z(t) = 0$ , pour toutes fonctions d'initialisation c-à-d  $x(t), \hat{z}(t) \forall t \leq 0$  et  $u(t)$  s'il existe des matrices  $N_0, N_\tau, J_0, J_\tau, H$  et  $E_y$  telles que*

$$D^\alpha e(t) = N_0 e(t) + N_\tau e(t - \tau) \quad \text{est asymptotiquement stable.} \quad (3.6a)$$

$$R A_0 - N_0 R - J_0 C_y = 0 \quad (3.6b)$$

$$R A_\tau - N_\tau R - J_\tau C_y = 0 \quad (3.6c)$$

$$H = R B_u \quad (3.6d)$$

$$R B_d + N_0 E_y D_d - J_0 D_d = 0 \quad (3.6e)$$

$$N_\tau E_y D_d - J_\tau D_d = 0 \quad (3.6f)$$

$$E_y D_d = 0 \quad (3.6g)$$

*Démonstration.* Si toutes les conditions (3.6b)-(3.6g) sont vérifiées, alors, d'après l'équation (3.5b), la dynamique fractionnaire de l'erreur d'estimation devient

$$D^\alpha e(t) = N_0 e(t) + N_\tau e(t - \tau) \quad \text{avec} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.7)$$

Dans ce cas là, pour toutes fonctions d'initialisation de l'observateur (3.3) et du système (3.1) c-à-d  $x(t), \hat{z}(t) \forall t \leq 0$  et  $u(t), \lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = 0$  si les matrices  $N_0$  et  $N_\tau$  sont choisies de sorte que (3.7) est stable. Cela prouve le résultat annoncé dans le théorème 3.2.1. •

Ainsi, il faut analyser les restrictions à imposer dans le choix des matrices  $N_0, N_\tau, J_0, J_\tau, H$  et  $E_y$  en s'assurant que les conditions (3.6b)-(3.6g) soient remplies.

En utilisant la définition de  $R$  mentionnée auparavant, les equations (3.6b) - (3.6g) peuvent être réécrites sous la forme suivante

$$N_0 T_z + E_y C_y A_0 + K_0 C = T_z A_0 \quad (3.8a)$$

$$N_\tau T_z + E_y C_y A_\tau + K_\tau C = T_z A_\tau \quad (3.8b)$$

$$K_0 D_d + E_y C_y B_d = T_z B_d \quad (3.8c)$$

$$K_\tau D_d = 0 \quad (3.8d)$$

$$E_y D_d = 0 \quad (3.8e)$$

où  $K_0 = J_0 - N_0 E_y$  et  $K_\tau = J_\tau - N_\tau E_y$ .

Remarquons que si la matrice  $E_y$  est déterminée, alors la matrice  $H$  peut être déduite à partir de  $E_y$  en utilisant l'équation (3.6d).

En utilisant une représentation matricielle, les équations précédentes (3.8a)-(3.8e) deviennent

$$\begin{bmatrix} N_0 & N_\tau & K_0 & K_\tau & E_y \end{bmatrix} \mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 \quad (3.9)$$

où

$$\mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} T_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_z & 0 & 0 & 0 \\ C_y & 0 & D_d & 0 & 0 \\ 0 & C_y & 0 & D_d & 0 \\ C_y A_0 & C_y A_\tau & C_y B_d & 0 & D_d \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{M}_2 = \begin{bmatrix} T_z A_0 & T_z A_\tau & T_z B_d & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution à l'équation (3.9) est donnée aussi par le Lemme A.2.1 dans l'Annexe A.

Dans ce cas, la solution générale du système (3.9) est donnée sous la forme

$$\begin{bmatrix} N_0 & N_\tau & K_0 & K_\tau & E \end{bmatrix} = \mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1^+ - Z(I - \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_1^+) \quad (3.10)$$

où  $Z$  est une matrice arbitraire de dimension appropriée.

A partir de l'équation (3.10), on obtient alors

$$N_0 = \mathbb{A}_{N_0} - Z \mathbb{B}_{N_0} \quad (3.11a)$$

$$N_\tau = \mathbb{A}_{N_\tau} - Z \mathbb{B}_{N_\tau} \quad (3.11b)$$

$$K_0 = \mathbb{A}_{K_0} - Z \mathbb{B}_{K_0} \quad (3.11c)$$

$$K_\tau = \mathbb{A}_{K_\tau} - Z \mathbb{B}_{K_\tau} \quad (3.11d)$$

avec

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_{N_0} &= (\mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1^+) \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ \mathbb{B}_{N_0} &= (I - \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_1^+) \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ \mathbb{A}_{N_\tau} &= (\mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1^+) \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ \mathbb{B}_{N_\tau} &= (I - \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_1^+) \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T\end{aligned}$$

Les matrices  $J_0$ ,  $J_\tau$  et  $H$  sont déduites à partir des expressions de  $K_0$  et  $K_\tau$ , et de l'équation (3.6d)

$$J_0 = K_0 + N_0 E_y \quad (3.12a)$$

$$J_\tau = K_\tau + N_\tau E_y \quad (3.12b)$$

$$H = (T_z - E_y C_y) B_u \quad (3.12c)$$

Pour terminer, si la condition du rang donnée par l'équation (A.2.19) est satisfaite, nous pouvons résumer ces résultats comme suit : toutes les matrices de l'observateur fonctionnel (3.3) peuvent être calculées si le gain matriciel  $Z$  est connu.

En exploitant les expressions de  $N_0$  et  $N_\tau$  données par (3.11a) et (3.11b), la dynamique fractionnaire de l'erreur d'estimation (3.7) est réécrite sous la forme suivante

$$D^\alpha e(t) = (\mathbb{A}_0 - Z \mathbb{B}_0) e(t) + (\mathbb{A}_1 - Z \mathbb{B}_1) e(t - \tau) \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.13)$$

Finalement, construire un observateur fonctionnel (3.3) pour le système (3.1) se réduit à trouver une matrice de paramétrage  $Z$  telle que la condition (3.6a) du théorème (3.2.1) soit satisfaite, c'est-à-dire assurer la stabilité asymptotique de l'erreur d'estimation (3.13).

### 3.2.1.2 Synthèse de l'observateur à entrées inconnues

Dans ce paragraphe, le problème de l'analyse de stabilité de l'erreur d'estimation donnée par l'équation (3.13) est abordé. Pour cela, nous allons montrer dans le théorème suivant qu'une condition de stabilité de l'erreur d'estimation (3.13) peut être obtenue en faisant appel à l'approche indirecte de Lyapunov. Le théorème suivant est basé sur les résultats donnés dans [BZDR16a, BZDR16b].

**Théorème 3.2.2.** *Pour tout  $0 < \alpha < 1$  ainsi que la condition (A.2.19) est satisfaite, la dynamique fractionnaire de l'erreur d'estimation (3.13) est asymptotiquement stable, c-à-d que l'erreur d'estimation tend asymptotiquement vers zéro si il existe une matrice définie positive  $\mathcal{P}$  et une matrice  $\mathcal{Y}$  telles que l'inégalité matricielle linéaire suivante soit satisfaite*

$$\Omega = \begin{bmatrix} \mathcal{P} \mathbb{A}_0 - \mathcal{Y} \mathbb{B}_0 + \mathbb{A}_0^T \mathcal{P} - \mathbb{B}_0^T \mathcal{Y}^T + 2\Lambda_1 & \mathcal{P} \mathbb{A}_\tau - \mathcal{Y} \mathbb{B}_\tau \\ * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.14)$$

avec

$$\Lambda_1 = \frac{1}{2(1 - \dot{\tau}_{\max})} I$$

et  $*$  désigne la partie symétrique d'une matrice.

Le gain de paramétrage  $Z$  est obtenu à partir de l'équation suivante

$$Z = \mathcal{P}^{-1} \mathcal{Y} \quad (3.15)$$

*Démonstration.* En se basant sur le lemme 1.3.4, le système (3.13) est exprimé par l'expression suivante

$$\frac{\partial z(\omega, t)}{\partial t} = -\omega z(\omega, t) + N_0 e(t) + N_\tau e(t - \tau(t)) \quad (3.16a)$$

$$e(t) = \int_0^\infty \mu(\omega) z(\omega, t) d\omega \quad (3.16b)$$

Afin d'analyser la stabilité du système (3.13), nous considérons la fonction candidate monocromatique de Lyapunov suivante

$$v_1(\omega, t) = z^T(\omega, t) \mathcal{P} z(\omega, t) \quad (3.17)$$

pour la fréquence élémentaire  $\omega$ , où  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice symétrique définie positive ( $\mathcal{P} = \mathcal{P}^T > 0$ ).

Par ailleurs, une fonction candidate  $V_1(t)$  est définie en additionnant toute la monocromatique  $v_1(\omega, t)$  avec la fonction de pondération  $\mu(\omega)$ , c-à-d que  $V_1(t)$  est donnée par l'expression suivante

$$V_1(t) = \int_0^\infty \mu(\omega) v_1(\omega, t) d\omega \quad (3.18)$$

Les dérivées de la fonction de Lyapunov  $v_1(t)$  par rapport à  $z(\omega, t)$  et au temps  $t$  sont données par

$$\frac{\partial v_1(\omega, t)}{\partial z(\omega, t)} = 2z^T(\omega, t) \mathcal{P} \quad (3.19)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1(\omega, t)}{\partial t} &= \frac{\partial v_1(\omega, t)}{\partial z(\omega, t)} \frac{\partial z(\omega, t)}{\partial t} \\ &= 2z^T(\omega, t) \mathcal{P} (-\omega z(\omega, t) + N_0 e(t) + N_\tau e(t - \tau(t))) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Ainsi la dynamique de la fonction de Lyapunov (3.18) le long de la trajectoire (3.16) est donnée par la forme suivante

$$\begin{aligned} \frac{dV_1(t)}{dt} &= \int_0^\infty \mu(\omega) \frac{\partial v_1(\omega, t)}{\partial t} d\omega \\ &= \int_0^\infty \mu(\omega) 2z^T(\omega, t) \mathcal{P} (-\omega z(\omega, t) + N_0 e(t) + N_\tau e(t - \tau(t))) d\omega \\ &= -2 \int_0^\infty \omega \mu(\omega) z^T(\omega, t) \mathcal{P} z(\omega, t) d\omega + 2 \int_0^\infty \mu(\omega) z^T(\omega, t) \mathcal{P} d\omega (N_0 e(t) + N_\tau e(t - \tau(t))) \end{aligned} \quad (3.21)$$

En substituant dans (3.21) l'expression du pseudo-état donnée par (3.16), nous obtenons

$$\frac{dV_1(t)}{dt} = -2 \int_0^\infty \omega \mu(\omega) z^T(\omega, t) \mathcal{P} z(\omega, t) d\omega + 2x^T(t) \mathcal{P} (N_0 e(t) + N_\tau e(t - \tau(t))) \quad (3.22)$$

Pour que l'inégalité  $\frac{dV_1(t)}{dt} < 0$  soit vérifiée, la condition à satisfaire est donnée par l'inégalité matricielle linéaire suivante

$$2x^T(t) \mathcal{P} (N_0 e(t) + N_\tau e(t - \tau(t))) < 0 \quad (3.23)$$

Maintenant, une deuxième fonction de Lyapunov-Krasovskii  $V_2(t)$  est définie ci-dessous

$$V_2(t) = \frac{1}{(1 - \dot{\tau}_{\max})} \int_{t-\tau(t)}^t e^T(s)e(s)ds \quad (3.24)$$

et sa dérivée par rapport au temps le long de la trajectoire de (3.13) est donnée par

$$\frac{dV_2(t)}{dt} = \frac{1}{(1 - \dot{\tau}_{\max})} e^T(t)e(t) - \frac{1}{(1 - \dot{\tau}_{\max})} \left(1 - \frac{\partial\tau(t)}{\partial t}\right) e^T(t - \tau(t))e(t - \tau(t)) \quad (3.25)$$

Cette dérivée est bornée comme suit

$$\frac{dV_2(t)}{dt} \leq \frac{1}{(1 - \dot{\tau}_{\max})} e^T(t)e(t) - e^T(t - \tau(t))e(t - \tau(t)) \quad (3.26)$$

Additionner les dérivées temporelles des deux fonctions de Lyapunov  $V_1(t)$  et  $V_2(t)$  en définissant  $V(t) = V_1(t) + V_2(t)$  donne

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} \leq & -2 \int_0^\infty \omega \mu(\omega) z^T(\omega, t) \mathcal{P} z(\omega, t) d\omega + 2x^T(t) (\mathcal{P} N_0 + \Lambda_1) e(t) + 2e^T(t) \mathcal{P} N_\tau e(t - \tau(t)) \\ & - e^T(t - \tau(t)) e(t - \tau(t)) \end{aligned} \quad (3.27)$$

avec  $\Lambda_1 = \frac{1}{2(1 - \dot{\tau}_{\max})} I$ .

L'inégalité (3.27) est équivalente à

$$X^T(t) \Omega X(t) \leq 0 \quad (3.28)$$

où

$$\Omega = \begin{bmatrix} \mathcal{P} N_0 + N_0^T \mathcal{P} + 2\Lambda_1 & \mathcal{P} N_\tau \\ N_\tau^T \mathcal{P} & -I \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

En remplaçant les matrices  $N_0$  et  $N_\tau$  par leur expression donnée dans (3.13), alors l'inégalité matricielle linéaire (3.29) devient (3.14). Ainsi, une condition suffisante de stabilité du système (3.13) est donnée sous forme d'une inégalité matricielle linéaire. Cela signifie que le système (3.13) est asymptotiquement stable si l'inégalité matricielle linéaire (3.14) est satisfaite. Ce qui complète la démonstration. •

### 3.2.1.3 Exemple numérique

L'exemple ci-après illustre les résultats obtenus dans ce chapitre afin d'estimer le vecteur fonctionnel linéaire  $z(t)$  du pseudo-état  $x(t)$ . Considérons le système d'ordre fractionnaire à retard variant dans le temps en présence des entrées inconnues décrit par

$$D^{0.5} x(t) = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -2 & -10 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} x(t - \tau(t)) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d(t) \quad (3.30a)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \quad (3.30b)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (3.30c)$$

En appliquant les approches de conception et de synthèse proposées dans les sections 3.2.1.1 et 3.2.1.2 sur le système (3.30), nous obtenons une solution faisable de l'inégalité matricielle linéaire (3.14) donnée dans le théorème 3.2.2 où la condition de rang (A.2.19) est vérifiée.

Par la suite, un couple de matrices  $P$  et  $Y$ , solutions de (3.14) et qui assure la stabilité asymptotique de l'erreur d'estimation, est obtenu ci-dessous

$$P = \begin{bmatrix} 0.61374 & -0.48872 \\ -0.48872 & 0.61374 \end{bmatrix} \quad (3.31a)$$

$$Y = \begin{bmatrix} 52.367 & 10.212 & -26.68 & 0.4407 & 19.463 & -13.56 & -86.815 \\ 2.0883 & 0.63753 & -26.68 & 0.4407 & 0.83959 & -13.56 & -86.815 \end{bmatrix} \quad (3.31b)$$

La matrice de paramétrage  $Z$  est déduite à partir de (3.31a) et (3.31b) par la relation suivante

$$Z = P^{-1}Y = \begin{bmatrix} 240.59 & 47.734 & -213.41 & 3.525 & 89.643 & -108.47 & -694.4 \\ 194.98 & 39.049 & -213.41 & 3.525 & 72.75 & -108.47 & -694.4 \end{bmatrix} \quad (3.31c)$$

Les matrices (3.11) et (3.12), gains de l'observateur fonctionnel (3.3) sont obtenues ci-après

$$\begin{aligned} N_0 &= \begin{bmatrix} -2.7613 & -2.2387 \\ -2.2387 & -2.7613 \end{bmatrix} & N_1 &= \begin{bmatrix} -3.4852e^{-14} & -4.6519e^{-14} \\ -1.8109e^{-14} & -2.7643e^{-14} \end{bmatrix} \\ E &= \begin{bmatrix} 2 \\ 3.4415e^{-13} \end{bmatrix} & J_0 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ J_1 &= \begin{bmatrix} 2.9654e^{-13} \\ 2.878e^{-13} \end{bmatrix} & H &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La figure 3.1 montre le comportement du signal de l'entrée inconnue  $d(t)$  et l'entrée de commande du système  $u(t)$ . Le signal de l'entrée inconnue  $d(t)$  est activé pour une durée égale à une seconde, c'est-à-dire qu'il affecte le système dans l'intervalle de temps entre deux et trois secondes.

Dans les figures 3.2 et 3.3, il est clair que les estimations  $\hat{z}_1(t)$  et  $\hat{z}_2(t)$  convergent asymptotiquement vers les fonctionnelles du pseudo-états  $z_1(t)$  et  $z_2(t)$  malgré la présence d'une entrée inconnue  $d(t)$ . Dans la figure 3.4, l'évolution des erreurs d'estimation est présentée. Ces erreurs convergent asymptotiquement vers zéro. Il est clair que l'observateur à entrée inconnue assure le suivi asymptotique des fonctionnelles du pseudo-états du système malgré la présence de l'entrée inconnue.

Nous pouvons voir clairement que l'erreur d'estimation n'est pas influencée par la présence des entrées inconnues, sachant que ces entrées inconnues agissent sur les états du système. Les figures 3.1-3.4 montrent les performances des approches de conception et de synthèse proposées dans les sections 3.2.1.1 et 3.2.1.2 pour concevoir un observateur à entrées inconnues de la forme (3.3) pour le système (3.30).

### 3.2.2 Observateurs $H_\infty$

Considérons le système d'ordre fractionnaire à retard variant dans le temps, soumis à des perturbations et représenté sous la forme suivante

$$D^\alpha x(t) = A_0 x(t) + A_\tau x(t - \tau(t)) + B_u u(t) + B_w w(t) \quad (3.32a)$$

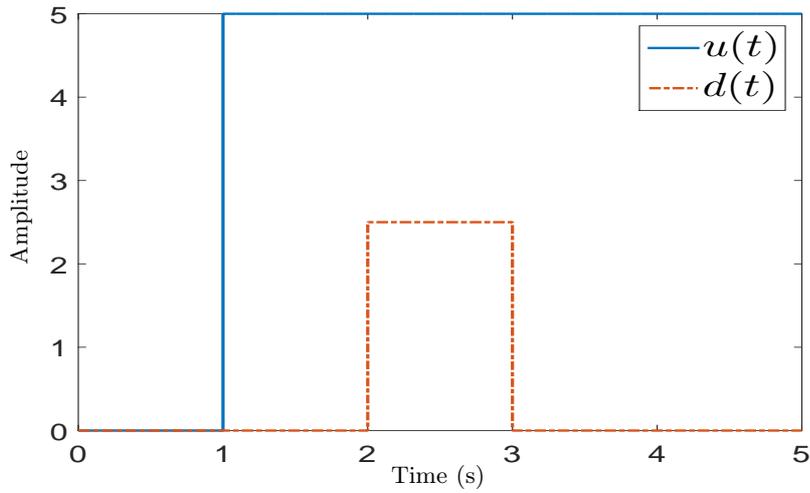


FIGURE 3.1 – Évolution de l'entrée inconnue  $d_1(t)$  et de l'entrée connue  $u(t)$

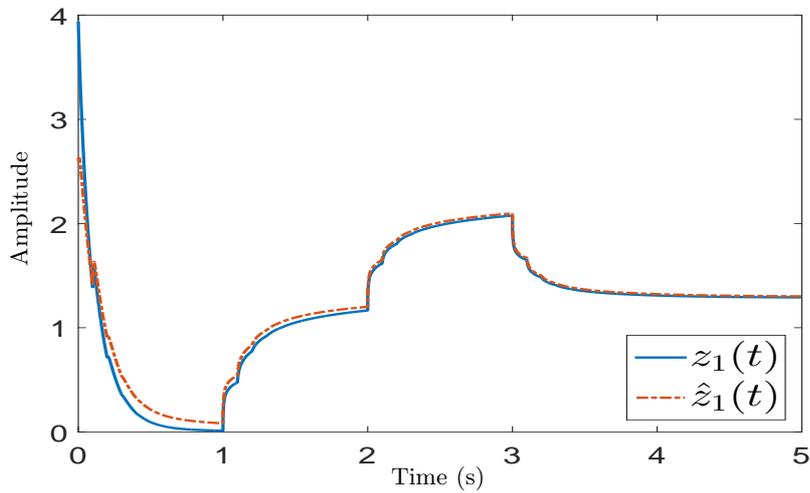


FIGURE 3.2 – Évolution du vecteur  $z_1(t)$  et son estimation  $\hat{z}_1(t)$

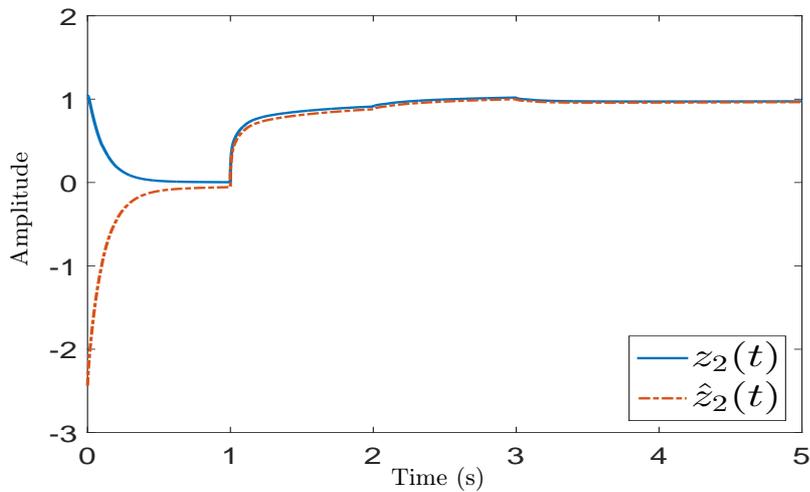
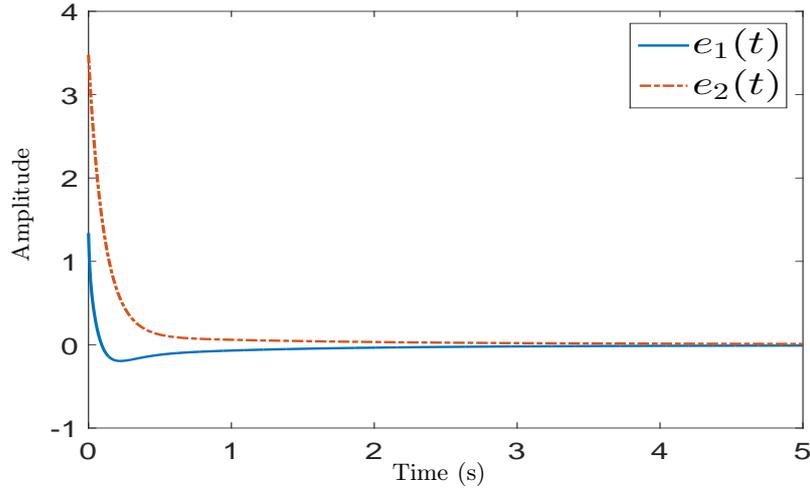


FIGURE 3.3 – Évolution du vecteur  $z_2(t)$  et son estimation  $\hat{z}_2(t)$


 FIGURE 3.4 – Évolution des erreurs d'estimation  $e_1(t)$  et  $e_2(t)$ 

$$y(t) = C_y x(t) \quad \text{avec} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.32b)$$

$$x(t) = \psi(t), t \in [-\tau_{\max}, 0] \quad (3.32c)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur des pseudo-états,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur de commande,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  sont les mesures ou bien le vecteur de sortie et  $w(t) \in \mathbb{R}^q$  est le vecteur des perturbations externes.  $A_0, A_\tau, B_u, B_w$  et  $C_y$  sont des matrices connues de dimensions appropriées.  $\tau(t) > 0$  désigne la fonction du retard, continue, bornée, c-à-d  $0 < \tau(t) < \tau_{\max}$  et vérifiant  $0 < \frac{\partial \tau(t)}{\partial t} \leq \dot{\tau}_{\max} < 1$ , où  $\tau_{\max}$  et  $\dot{\tau}_{\max}$  sont deux constantes positives.  $\psi(t)$  est une fonction continue, et représente la fonction d'initialisation du système.

On suppose que le signal des perturbations satisfait  $w(t) \in L_2$  où la norme  $L_2$  est définie par

$$\|w\|_2 = \left( \int_0^\infty w(t)^T w(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.33)$$

Maintenant, nous considérons l'observateur  $H_\infty$  suivant

$$D^\alpha \eta(t) = N_0 \eta(t) + N_\tau \eta(t - \tau(t)) + H u(t) + J_0 y(t) + J_\tau y(t - \tau(t)) \quad (3.34a)$$

$$\hat{x}(t) = \eta(t) + E_y y(t) \quad \text{avec} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.34b)$$

$$\eta(t) = \eta_0(t), t \in [-\tau_{\max}, 0] \quad (3.34c)$$

qui permettra de reconstruire les pseudo-états du système (3.32).

$\eta(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur des pseudo-états de l'observateur et  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  est l'estimation de  $x(t)$ . Les matrices  $N_0, N_\tau, J_0, J_\tau, H$  et  $E_y$  sont inconnues et de dimensions appropriées et doivent être déterminées afin que l'estimation  $\hat{x}(t)$  converge asymptotiquement vers  $x(t)$  quand  $w(t) = 0$  et minimise l'effet des perturbations  $w(t)$  sur l'erreur d'estimation  $e(t)$  quand  $w(t) \neq 0$ , c-à-d  $\frac{\|e\|_2}{\|w\|_2} < \gamma$ .

**Définition 3.2.1.** Le système (3.34) est un observateur  $H_\infty$  pour le système (3.32) si, sous condition initiale égale à zéro, la norme  $H_\infty$  de la fonction du transfert entre les perturbations  $w(t)$  et l'erreur d'estimation  $e(t)$  est bornée  $\|H_{ew}(s)\|_\infty = \frac{\|e\|_2}{\|w\|_2} < \gamma$ .

Autrement dit, il existe un scalaire positive  $\gamma$  qui définit le niveau de performance, tel que l'inégalité suivante

$$J = \int_0^\infty e^T(s) e(s) - \gamma^2 w^T(s) w(s) ds < 0 \quad (3.35)$$

est satisfaite.

### 3.2.2.1 Paramétrage de l'observateur $H_\infty$

À partir des systèmes (3.32) et (3.34), l'erreur d'estimation  $e(t)$  est définie par

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (3.36)$$

et sa dynamique fractionnaire est exprimée sous la forme suivante

$$D^\alpha e(t) = D^\alpha x(t) - D^\alpha \hat{x}(t) \quad (3.37a)$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned} D^\alpha e(t) = & N_0 e(t) + N_\tau e(t - \tau(t)) + (RA_0 - N_0 R - J_0 C_y)x(t) + (RA_\tau - N_\tau R - J_\tau C_y)x(t - \tau(t)) \\ & + (RB_u - H)u(t) + RB_w w(t) \end{aligned} \quad (3.37b)$$

où  $R = I_n - E_y C_y$ .

Le théorème 3.2.3 donne les conditions d'existence de l'observateur (3.34) pour le système (3.32).

**Théorème 3.2.3.** *Le système (3.34) est un observateur  $H_\infty$  pour le système (3.32) et assure l'indice de performance (3.35) où  $0 < \alpha < 1$ , pour toute initialisation, c-à-d  $x(t), \hat{x}(t), \forall t \leq 0$  et  $u(t)$  si*

A) *La dynamique fractionnaire de l'erreur d'estimation*

$$D^\alpha e(t) = N_0 e(t) + N_\tau e(t - \tau(t)) + RB_w w(t) \quad (3.38)$$

1. *pour  $w(t) = 0$ , est asymptotiquement stable ;*
2. *pour  $w(t) \neq 0$ , l'effet de la perturbation  $w(t)$  sur l'erreur d'estimation  $e(t)$  est minimisé, c-à-d*

$$\sup_{w \in L_2 - \{0\}} \frac{\|e\|_2}{\|w\|_2} < \gamma$$

B)  $RA_0 - N_0 R - J_0 C_y = 0$

C)  $RA_\tau - N_\tau R - J_\tau C_y = 0$

D)  $H = RB_u$

La synthèse de l'observateur (3.34) se réduit donc à un choix judicieux des matrices  $N_0$ ,  $N_\tau$ ,  $J_0$ ,  $J_\tau$ ,  $H$  et  $E_y$  tel que les conditions (A)-(D) sont satisfaites.

En utilisant la définition de la matrice  $R$ , les conditions (B) et (C) du théorème 3.2.3 peuvent être réécrites sous la forme suivante

$$N_0 + E_y C_y A_0 + K_0 C_y = A_0 \quad (3.39a)$$

$$N_\tau + E_y C_y A_\tau + K_\tau C_y = A_\tau \quad (3.39b)$$

avec  $K_0 = J_0 - N_0 E_y$  et  $K_\tau = J_\tau - N_\tau E_y$ .

La matrice  $H$  est déduite à partir de la condition (D) du théorème 3.2.3 dès que la matrice  $E_y$  est calculée.

Afin de simplifier la résolution des équations (3.39a) et (3.39b), nous les reformulons sous une forme matricielle donnée par

$$\begin{bmatrix} N_0 & N_\tau & K_0 & K_\tau & E_y \end{bmatrix} \mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 \quad (3.40)$$

avec

$$\mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \\ C_y & 0 \\ 0 & C_y \\ C_y A_0 & C_y A_\tau \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_2 = \begin{bmatrix} A_0 & A_\tau \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

La condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution à l'équation (3.40) est donnée par le Lemme A.2.1 dans l'Annexe A. Il est important de souligner que dans le cas d'un observateur d'ordre plein, la condition du rang donnée par l'équation (A.2.19) est toujours vérifiée, donc, le système linéaire (3.40) admet toujours une solution générale donnée sous la forme suivante

$$\begin{bmatrix} N_0 & N_\tau & K_0 & K_\tau & E_y \end{bmatrix} = \mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1^+ - Z(I - \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_1^+) \quad (3.42)$$

où  $Z$  est une matrice arbitraire de dimensions appropriées.

D'après (A.2.20), on obtient

$$N_0 = \mathbb{A}_{N_0} - Z\mathbb{B}_{N_0} \quad (3.43a)$$

$$N_\tau = \mathbb{A}_{N_\tau} - Z\mathbb{B}_{N_\tau} \quad (3.43b)$$

$$K_0 = \mathbb{A}_{K_0} - Z\mathbb{B}_{K_0} \quad (3.43c)$$

$$K_\tau = \mathbb{A}_{K_\tau} - Z\mathbb{B}_{K_\tau} \quad (3.43d)$$

$$E_y = \mathbb{A}_{E_y} - Z\mathbb{B}_{E_y} \quad (3.43e)$$

où

$$\mathbb{A}_{N_0} = (\mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1^+) \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbb{B}_{N_0} = (I - \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_1^+) \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbb{A}_{N_\tau} = (\mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1^+) \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbb{B}_{N_\tau} = (I - \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_1^+) \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Les matrices  $J_0$ ,  $J_\tau$  et  $H$  sont déduites à partir des expressions des matrices  $K_0$  et  $K_\tau$  obtenues précédemment

$$J_0 = K_0 + N_0 E_y \quad (3.44a)$$

$$J_\tau = K_\tau + N_\tau E_y \quad (3.44b)$$

$$H = (I_n - E_y C_y) B \quad (3.44c)$$

Il est clair maintenant que toutes les matrices de l'observateur  $H_\infty$  (3.34) peuvent être calculées à partir d'une seule matrice de paramétrage  $Z$ .

En utilisant les nouvelles expressions des matrices  $N_0$  et  $N_\tau$  données par les équations (3.43a) et (3.43b), la dynamique fractionnaire de l'erreur d'estimation (3.37b) devient

$$D^\alpha e(t) = (\mathbb{A}_{N_0} - Z\mathbb{B}_{N_0})e(t) + (\mathbb{A}_{N_\tau} - Z\mathbb{B}_{N_\tau})e(t - \tau(t)) + RB_w w(t) \quad (3.45)$$

avec  $0 < \alpha < 1$ .

Ainsi, la synthèse d'un observateur  $H_\infty$  donné par (3.34) pour le système (3.32) se réduit à la détermination d'une matrice de paramétrage  $Z$  qui satisfait la condition (A) du théorème 3.2.3.

### 3.2.2.2 Synthèse de l'observateur $H_\infty$

Dans cette section, nous verrons qu'en utilisant l'approche indirecte de Lyapunov, on peut obtenir une condition suffisante de la stabilité de l'erreur d'estimation en assurant une certaine robustesse par rapport aux perturbations, c-à-d minimiser l'indice  $\gamma$  de performance  $H_\infty$  donnée par (3.35). Tout d'abord, le théorème suivant est énoncé.

**Théorème 3.2.4.** *Le système (3.32) admet un observateur  $H_\infty$  sous la forme (3.34) s'il existe deux matrices définies positives  $P$  et  $Q$ , une matrice  $Y$  et un scalaire positif  $\gamma$  afin que le problème d'optimisation suivant*

$$\min(\gamma^2 > 0) \quad \text{sous la contrainte}$$

$$\begin{bmatrix} (P\mathbb{A}_{N_0} - Y\mathbb{B}_{N_0}) + (P\mathbb{A}_{N_0} - Y\mathbb{B}_{N_0})^T + 2I & P\mathbb{A}_{N_\tau} - Y\mathbb{B}_{N_\tau} & P\mathbb{A}_w + Y\mathbb{B}_w \\ * & -2(1 - \hat{\tau}_{max})Q & 0 \\ * & * & -2\gamma^2 I_p \end{bmatrix} < 0 \quad (3.46)$$

admette une solution, où  $\mathbb{A}_w = (I_n - \mathbb{A}_{E_y} C_y)B_w$ ,  $\mathbb{B}_w = \mathbb{B}_E C_y B_w$  et  $*$  représente la partie symétrique de la matrice.

La matrice de paramétrage,  $Z$ , de l'observateur est donnée par  $Z = P^{-1}Y$ .

*Démonstration.* Tout d'abord, en utilisant la définition donnée par le lemme 1.3.4, l'équation (3.45) peut être réécrite sous la forme suivante

$$\frac{\partial z(\omega, t)}{\partial t} = -\omega z(\omega, t) + (\mathbb{A}_{N_0} - Z\mathbb{B}_{N_0})e(t) + (\mathbb{A}_{N_\tau} - Z\mathbb{B}_{N_\tau})e(t - \tau(t)) + RB_w w(t) \quad (3.47a)$$

$$e(t) = \int_0^\infty \mu(\omega) z(\omega, t) d\omega \quad (3.47b)$$

Soit une fonction candidate  $V_1(t)$  définie comme étant la somme de tous les monochromatiques  $v_1(\omega, t)$  avec la fonction de pondération  $\mu(\omega)$

$$V_1(t) = \int_0^\infty \mu(\omega) v_1(\omega, t) d\omega \quad (3.48)$$

où la fonction monochromatique  $v_1(t)$  qui correspond à la fréquence élémentaire  $\omega$  est définie par

$$v_1(t) = z^T(\omega, t) P z(\omega, t) \quad (3.49)$$

où  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice symétrique définie positive ( $P = P^T > 0$ ).

Les dérivées partielles de  $v_1(t)$  par rapport à  $z(\omega, t)$  et  $t$  sont données par

$$\frac{\partial v_1(t)}{\partial z(\omega, t)} = 2z^T(\omega, t) P \quad (3.50)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1(t)}{\partial t} &= \frac{\partial v_1(t)}{\partial z(\omega, t)} \frac{\partial z(\omega, t)}{\partial t} \\ &= 2z^T(\omega, t)P \left( -\omega z(\omega, t) + (\mathbb{A}_{N_0} - Z\mathbb{B}_{N_0})e(t) + (\mathbb{A}_{N_\tau} - Z\mathbb{B}_{N_\tau})e(t - \tau(t)) + RB_w w(t) \right) \end{aligned} \quad (3.51)$$

En conséquence, la dérivée temporelle de la fonction candidate de Lyapunov  $V_1(t)$  le long des trajectoires de solution de (3.47) est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{dV_1(t)}{dt} &= \int_0^\infty \mu(\omega) \frac{\partial v_1(t)}{\partial t} d\omega \\ &= \int_0^\infty \mu(\omega) 2z^T(\omega, t)P \left( -\omega z(\omega, t) + (\mathbb{A}_{N_0} - Z\mathbb{B}_{N_0})e(t) + (\mathbb{A}_{N_\tau} - Z\mathbb{B}_{N_\tau})e(t - \tau(t)) \right. \\ &\quad \left. + RB_w w(t) \right) d\omega \\ &= -2 \int_0^\infty \omega \mu(\omega) z^T(\omega, t)P z(\omega, t) d\omega + 2 \int_0^\infty \mu(\omega) z^T(\omega, t)P d\omega \times \left( (\mathbb{A}_{N_0} - Z\mathbb{B}_{N_0})e(t) \right. \\ &\quad \left. + (\mathbb{A}_{N_\tau} - Z\mathbb{B}_{N_\tau})e(t - \tau(t)) + RB_w w(t) \right) \end{aligned} \quad (3.52)$$

En utilisant l'équation (3.47), la relation (3.52) se simplifie

$$\begin{aligned} \frac{dV_1(t)}{dt} &= -2 \int_0^\infty \omega \mu(\omega) z^T(\omega, t)P z(\omega, t) d\omega + 2e^T(t)P \left( (\mathbb{A}_{N_0} - Z\mathbb{B}_{N_0})e(t) \right. \\ &\quad \left. + (\mathbb{A}_{N_\tau} - Z\mathbb{B}_{N_\tau})e(t - \tau(t)) + RB_w w(t) \right) \end{aligned} \quad (3.53)$$

Il est évident qu'il faut que la condition

$$2e^T(t)P \left( (\mathbb{A}_{N_0} - Z\mathbb{B}_{N_0})e(t) + (\mathbb{A}_{N_\tau} - Z\mathbb{B}_{N_\tau})e(t - \tau(t)) + RB_w w(t) \right) < 0 \quad (3.54)$$

doit être satisfaite avec  $P > 0$ , pour que  $\frac{dV_1(t)}{dt} < 0$ .

D'autre part, une fonction de Lyapunov-Karasovski candidate  $V_2(t)$  est choisie

$$V_2(t) = 2 \int_{t-\tau(t)}^t e^T(s)Qe(s)ds \quad (3.55)$$

où  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice symétrique définie positive.

La dérivée temporelle de la fonction (3.55) le long de la trajectoire de la solution de (3.47) est donnée

$$\frac{dV_2(t)}{dt} = 2e^T(t)Qe(t) - 2\left(1 - \frac{\partial \tau(t)}{\partial t}\right)e^T(t - \tau(t))Qe(t - \tau(t)) \quad (3.56)$$

Par la suite, nous choisissons une fonction candidate de Lyapunov sous la forme d'une somme de deux fonctions,

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) \quad (3.57)$$

Ensuite, nous additionnons les deux dérivées temporelles (3.53) et (3.56), on obtient

$$\frac{dV(t)}{dt} = -2 \int_0^\infty \omega \mu(\omega) z^T(\omega, t)P z(\omega, t) d\omega + 2e^T(t)P \left( (\mathbb{A}_{N_0} - Z\mathbb{B}_{N_0})e(t) + RB_w w(t) \right)$$

$$+ (\mathbb{A}_{N_\tau} - Z\mathbb{B}_{N_\tau})e(t - \tau(t)) - 2\left(1 - \frac{\partial\tau(t)}{\partial t}\right)e^T(t - \tau(t))Qe(t - \tau(t)) + 2e^T(t)Qe(t) \quad (3.58)$$

Finalement, nous obtenons une condition suffisante de stabilité du système (3.47) sous la forme suivante

$$2(e^T(t)P((\mathbb{A}_{N_0} - Z\mathbb{B}_{N_0})e(t) + (\mathbb{A}_{N_\tau} - Z\mathbb{B}_{N_\tau})e(t - \tau(t)) + RB_w w(t)) + e^T(t)Qe(t) - (1 - \dot{\tau}_{max})e^T(t - \tau(t))Qe(t - \tau(t))) \leq 0$$

ce qui est équivalent à

$$X^T \begin{bmatrix} (P\mathbb{A}_{N_0} - Y\mathbb{B}_{N_0} + I) + (P\mathbb{A}_{N_0} - Y\mathbb{B}_{N_0} + I)^T & P\mathbb{A}_{N_\tau} - Y\mathbb{B}_{N_\tau} & P\mathbb{A}_w + Y\mathbb{B}_w \\ * & -(1 - \dot{\tau}_{max})Q & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} X \leq 0 \quad (3.59)$$

où  $X = \begin{bmatrix} e(t) \\ e(t - \tau(t)) \\ w(t) \end{bmatrix}$ ,  $\mathbb{A}_w$  et  $\mathbb{B}_w$  sont données dans le théorème 3.2.4, et  $Y = PZ$ .

On peut remarquer à partir de l'inégalité (3.59) que, si  $w(t) = 0$ , une condition suffisante de stabilité du système (3.47) est

$$\begin{bmatrix} (P\mathbb{A}_{N_0} - Y\mathbb{B}_{N_0} + I) + (P\mathbb{A}_{N_0} - Y\mathbb{B}_{N_0} + I)^T & P\mathbb{A}_{N_\tau} - Y\mathbb{B}_{N_\tau} \\ * & -(1 - \dot{\tau}_{max})Q \end{bmatrix} < 0 \quad (3.60)$$

Dans le cas où  $w(t) \neq 0$ , le critère  $J$  défini dans l'équation (3.35) est vérifié si

$$\frac{dV(t)}{dt} + e^T(t)e(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) < 0 \quad (3.61)$$

Intégrer l'inégalité (3.61) conduit à

$$V(\infty) - V(0) < \int_0^\infty \gamma^2 w^T(t)w(t) - e^T(t)e(t) \quad (3.62)$$

L'inégalité (3.62) devient

$$V(\infty) < \gamma^2 \int_0^\infty w^T w dt - \int_0^\infty e^T e dt \quad (3.63)$$

d'où ( $\forall V(\infty) > 0$ )

$$0 < \gamma^2 \int_0^\infty w^T w dt - \int_0^\infty e^T e dt \quad (3.64)$$

$$\int_0^\infty e^T e dt < \gamma^2 \int_0^\infty w^T w dt \quad (3.65)$$

ce qui est équivalent à  $\frac{\|e\|_2}{\|w\|_2} < \gamma$  (voir (3.35)).

D'après les inégalités (3.59) et (3.61), nous obtenons l'inégalité suivante

$$X^T \Omega X < 0 \quad (3.66)$$

où

$$\begin{bmatrix} (P\mathbb{A}_{N_0} - Y\mathbb{B}_{N_0}) + (P\mathbb{A}_{N_0} - Y\mathbb{B}_{N_0})^T + 2Q & P\mathbb{A}_{N_\tau} - Y\mathbb{B}_{N_\tau} & P\mathbb{A}_w + Y\mathbb{B}_w \\ * & -2(1 - \dot{\tau}_{max})Q & 0 \\ * & * & -2\gamma^2 I_p \end{bmatrix}$$

Finalemment, la stabilité robuste de l'erreur d'estimation (3.47) est assurée si la LMI (3.46) est satisfaite. •

### 3.2.2.3 Exemple numérique

Dans le but de mettre en lumière les résultats obtenus dans cette section, nous exposons un exemple numérique concernant la synthèse d'un observateur  $H_\infty$  (3.34) pour le système (3.32), qui est apte à estimer les pseudo-états du (3.32) et rejette l'effet des perturbations sur l'erreur d'estimation.

Pour cela, nous considérons un système d'ordre fractionnaire à retard variant dans le temps, soumis à des perturbations, avec les valeurs numériques du modèle données par

$$D^{0.75}x(t) = \begin{bmatrix} -1.6 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -0.5 & -2.4 \\ 0.2 & -0.35 \end{bmatrix} x(t - \tau(t)) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2.5 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0.25 \\ -0.1 \end{bmatrix} w(t) \quad (3.67a)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (3.67b)$$

Le retard est  $\tau(t) = \tau_1 \sin(\omega t - \varphi)$ , avec  $\tau_1 = 0.95\text{s}$ ,  $\omega = 7.5\text{rad/s}$  et  $\varphi = 2$ .

Une solution de la faisabilité du problème d'optimisation linéaire (3.46) donnée dans le théorème 3.2.4 est obtenue en utilisant MATLAB avec YALMIP [Lof04]. La solution obtenue nous permet de déduire la matrice de paramétrage  $Z$ .

On obtient ainsi les matrices de décision suivantes

$$P = \begin{bmatrix} 123.31 & 80.98 \\ 80.98 & 84.999 \end{bmatrix} \quad (3.68a)$$

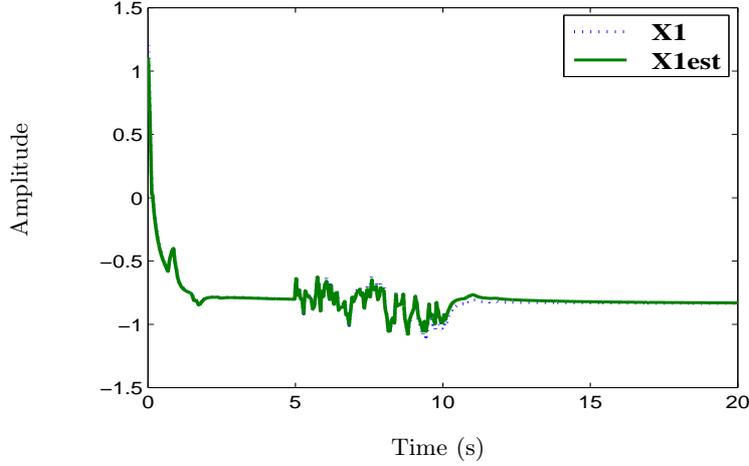
$$Q = \begin{bmatrix} 134.27 & 78.924 \\ 78.924 & 134.27 \end{bmatrix} \quad (3.68b)$$

$$Y = \begin{bmatrix} -3367.9 & 7638.7 & -3257 & -4454.2 & -3448.5 & -3435.7 & 2798.4 \\ 1239.7 & 5707.7 & -46611 & 11382 & 1182.9 & -46793 & -17046 \end{bmatrix} \quad (3.68c)$$

qui correspondent à la solution du problème d'optimisation (3.46). Cela signifie que la stabilité asymptotique de l'erreur d'estimation est assurée, c'est-à-dire la convergence de l'erreur d'estimation vers zéro en l'absence de perturbations. En outre, l'effet des perturbations sur l'erreur d'estimation est minimisé avec  $\gamma = 0.3174$ .

La matrice de paramétrage  $Z$  est

$$Z = P^{-1}Y = \begin{bmatrix} -98.559 & 47.685 & 891.56 & -331.44 & -99.131 & 891.43 & 412.48 \\ 108.48 & 21.72 & -1397.8 & 449.66 & 108.36 & -1399.8 & -593.51 \end{bmatrix} \quad (3.68d)$$


 FIGURE 3.5 – Évolution du vecteur  $x_1(t)$  et son estimation  $\hat{x}_1(t)$ 

Finalement, l'estimation  $\hat{x}(t)$  est obtenue avec cet observateur

$$D^{0.75}\eta(t) = \begin{bmatrix} -0.3517 & -0.16308 \\ 0.48984 & -1.8727 \end{bmatrix} \eta(t) + \begin{bmatrix} 0.08154 \\ 2.4363 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} -0.084477 & -0.1957 \\ -0.88953 & -0.19724 \end{bmatrix} \eta(t - \tau(t)) \quad (3.69a)$$

$$+ \begin{bmatrix} -0.11217 \\ 0.9427 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} -0.046338 \\ 0.2918 \end{bmatrix} y(t - \tau(t)) \quad (3.69b)$$

$$\hat{x}(t) = \eta(t) + \begin{bmatrix} 0.91846 \\ 0.063651 \end{bmatrix} y(t) \quad (3.69c)$$

$$\eta(t) = \eta_0(t), t \in [-\tau_{\max}, 0] \quad (3.69d)$$

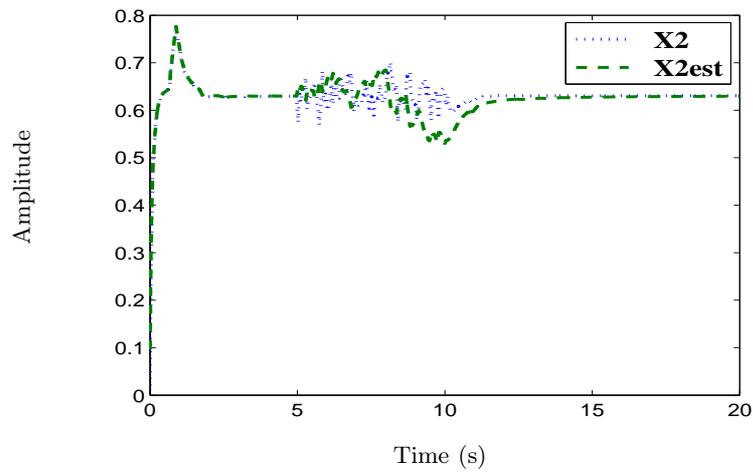
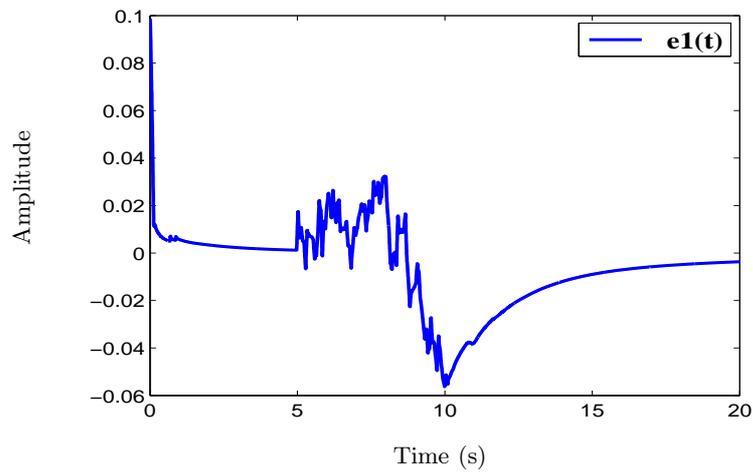
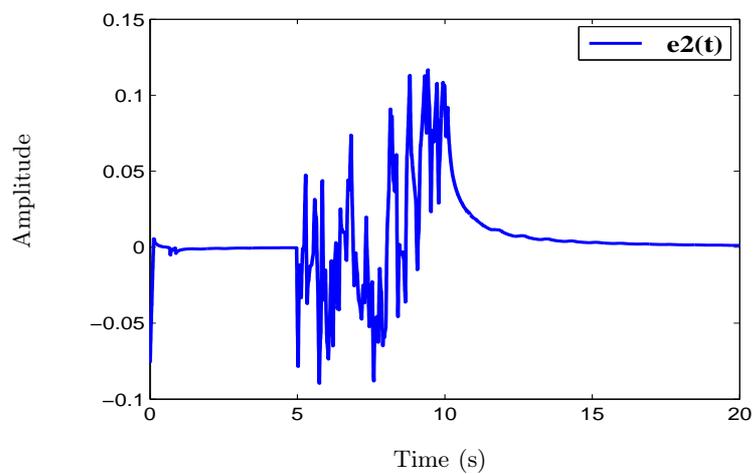
Les figures 3.5 à 3.8 résument les performances dans le domaine temporel de l'observateur proposé. Les pseudo-états du système (3.67) sont affichés avec leurs estimations et les erreurs d'estimation obtenues en utilisant la méthode de synthèse proposée. Il est clair que l'état de l'estimation  $\hat{x}(t)$  converge vers l'état actuel  $x(t)$ .

A partir des figures 3.5 à 3.8, nous remarquons que la perturbation  $w(t)$  est présente dans un intervalle de temps entre 5 et 10 secondes. De plus, nous constatons que les composantes de l'estimation  $\hat{x}(t)$  suivent les trajectoires de celles du pseudo-état  $x(t)$ . Les erreurs d'estimation sont dues à la présence de la perturbation  $w(t)$  mais ceci est en accord avec la valeur minimale obtenue de  $\gamma$  qui est  $\gamma = 0,3174$  et qui mesure l'atténuation des effets de la perturbation sur l'erreur d'estimation.

### 3.3 Perturbations endogènes

Les représentations dans l'espace des pseudo-états étudiées auparavant dans ce manuscrit, sont obtenues en approximant le modèle mathématique du système qui prend en compte certaines caractéristiques et situations particulières de fonctionnement.

La présence inévitable de certains phénomènes dont la modélisation d'un système physique réel dans son espace des pseudo-états qui ne sont pas tenues en compte, engendre des erreurs de

FIGURE 3.6 – Évolution du vecteur  $x_2(t)$  et son estimation  $\hat{x}_2(t)$ FIGURE 3.7 – Évolution de l'erreur d'estimation de l'état  $x_1(t)$ FIGURE 3.8 – Évolution de l'erreur d'estimation de l'état  $x_2(t)$

modélisation mathématique. Par conséquent, ces erreurs limitent l'obtention des performances souhaitées en utilisant les lois de commande. En pratique, il est bien connu que les incertitudes affectant les modèles mathématiques des systèmes physiques réels peuvent compromettre considérablement la synthèse des lois de commande. En général, les erreurs de modélisation (perturbations ou incertitudes) associées aux modèles mathématiques des systèmes physiques peuvent être dues

- (i) aux variations de paramètres réels ;
- (ii) aux non linéarités négligées ;
- (iii) à la dynamique non modifiée (erreurs dans l'ordre du modèle) ;
- (iv) à des perturbations externes négligées ou incorrectement modélisées.

Les méthodes de synthèse des lois de commande ou des observateurs connaissent certaines limitations. Ces limitations sont liées à leur dépendance de la fidélité du modèle utilisé pour la synthèse du contrôleur. Cette partie, est consacrée au développement des méthodes de synthèse et d'analyse d'observateurs robustes vis-à-vis des incertitudes non structurées. L'utilisation de ces observateurs pour générer des lois de commande afin d'atteindre certaines performances souhaitées fera l'objet du chapitre suivant.

### 3.3.1 Formulations du problème d'observateurs robustes

Dans cette section, nous considérons un modèle dont les paramètres ne sont pas certains, ce qui rend le système incertain. Le fait de ne pas tenir en compte de ces incertitudes lors de l'estimation des pseudo-états du système causerait des erreurs d'estimation. Dans un premier lieu, nous proposons un observateur pour ce type de système. Par la suite, nous chercherons à minimiser l'action des pseudo-états du système sur l'erreur d'estimation.

Considérons le système incertain d'ordre fractionnaire à retard variant dans le temps représenté par le modèle suivant

$$D^\alpha x(t) = (A_0 + \Delta A_0(t))x(t) + (A_\tau + \Delta A_\tau(t))x(t - \tau(t)) \quad (3.70a)$$

$$y(t) = C_y x(t) \quad (3.70b)$$

$$z(t) = T_z x(t) \quad (3.70c)$$

$$x(t) = \psi(t), t \in [-\tau_{\max}, 0] \quad \text{avec} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.70d)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur des pseudo-états,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur des mesures, et  $z(t) \in \mathbb{R}^r$  est le vecteur de sortie qu'on souhaite estimer.  $\psi(t)$  est une fonction continue qui représente la fonction d'initialisation du système.

La fonction du retard  $\tau(t) \geq 0$  est continue, bornée et satisfait les hypothèses suivantes

$$0 < \tau(t) < \tau_{\max} < \infty \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tau(t)}{\partial t} \leq \dot{\tau}_{\max} < 1,$$

où  $\tau_{\max}$  et  $\dot{\tau}_{\max}$  sont deux scalaires connus et positifs.

$A_0$ ,  $A_\tau$ ,  $C_y$  et  $T_z$  sont des matrices connues de dimensions appropriées. Les termes  $\Delta A_0(t)$  et  $\Delta A_\tau(t)$  représentent les incertitudes paramétriques. Ces derniers modélisent la mauvaise connaissance de certaines valeurs numériques du modèle et peuvent varier dans le temps.

**Hypothèse 3.3.1.** *On suppose que les incertitudes considérées sont structurées et bornées. Elles peuvent avoir une variation dans le temps et satisfont les relations suivantes*

$$\Delta A_0(t) = M_1 F_1(t) N_1 \quad (3.71a)$$

$$\Delta A_\tau(t) = M_2 F_2(t) N_2 \quad (3.71b)$$

où les matrices réelles  $M_i, N_i$  ( $\forall i = 1, 2$ ) sont connues, constantes et avec des dimensions appropriées.  $F_i(t)$  ( $\forall i = 1, 2$ ) sont des matrices variant dans le temps telles que

$$F_i^T(t) F_i(t) \leq I \quad \forall i = 1, 2 \quad (3.72)$$

où les éléments de  $F_i(t)$  sont mesurables au sens de Lebesgue.

Pour illustrer l'estimation d'un vecteur fonctionnel  $z(t)$  (3.70c) du système (3.70), nous considérons un observateur robuste sous la forme suivante

$$D^\alpha \eta(t) = N_0 \eta(t) + N_\tau \eta(t - \tau(t)) + J_0 y(t) + J_\tau y(t - \tau(t)) \quad (3.73a)$$

$$\hat{z}(t) = \eta(t) + E_y y(t) \quad (3.73b)$$

$$\eta(t) = \eta_0(t), t \in [-\tau_{\max}, 0] \quad \text{avec} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.73c)$$

où  $\eta(t) \in \mathbb{R}^r$  est le vecteur des pseudo-états de l'observateur et  $\hat{z}(t) \in \mathbb{R}^r$  est l'estimation de  $z(t)$ . Les matrices  $N_0, N_\tau, J_0, J_\tau$  et  $E_y$  sont inconnues et de dimensions appropriées et qui doivent être déterminées afin que l'estimation  $\hat{x}(t)$  converge asymptotiquement vers  $x(t)$  et minimise l'effet du biais, qui est dû à la présence d'incertitudes, sur l'erreur d'estimation  $e(t)$ .

**Définition 3.3.1.** *Le système (3.73) est un observateur fonctionnel robuste pour le système (3.3.1) si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (z(t) - \hat{z}(t)) = 0$

(ii) *Pour des conditions initiales nulles, il existe un niveau d'atténuation réel positif  $\gamma$  tel que*

$$\frac{\|z(t) - \hat{z}(t)\|_2}{\|x(t)\|_2} = \frac{\|e(t)\|_2}{\|x(t)\|_2} < \gamma. \quad (3.74)$$

**Remarque 3.3.1.** La précision de l'observateur est caractérisée par la robustesse de l'erreur d'estimation par rapport aux incertitudes du système. Celle-ci se traduit par la minimisation de l'effet des incertitudes sur l'erreur d'estimation. Pour cela, nous proposons d'utiliser la norme induite  $\mathcal{L}_2$  [Xd90, XdF91, Xd92]. Cette norme nous permet de minimiser la sensibilité des erreurs d'estimation  $e(t) = z(t) - \hat{z}(t)$  par rapport aux incertitudes du système, s'il existe une borne supérieure finie  $\gamma$  de cette norme (3.74). •

### 3.3.2 Paramétrage de l'observateur robuste

La procédure de synthèse de l'observateur robuste (3.73) consiste à donner ses conditions d'existence en premier lieu. Ainsi, nous commençons à analyser l'erreur d'estimation, puis déduire les conditions qui satisfont la définition 3.3.1 donnée dans la section 3.3.1.

D'après la définition de l'erreur d'estimation donnée par  $e(t) = z(t) - \hat{z}(t)$ , nous obtenons sa dynamique fractionnaire sous la forme suivante

$$D^\alpha e(t) = D^\alpha z(t) - D^\alpha \hat{z}(t)$$

$$\begin{aligned}
 &= T_z D^\alpha x(t) - D^\alpha \eta(t) - E C D^\alpha x(t) \\
 &= \underbrace{(T_z - EC)}_R D^\alpha x(t) - D^\alpha \eta(t) \\
 &= N_0 e(t) + N_\tau e(t - \tau(t)) + (R A_0 - N_0 R - J_0 C + R \Delta A_0(t)) x(t) \\
 &\quad + (R A_\tau - N_\tau R - J_\tau C + R \Delta A_\tau(t)) x(t - \tau(t))
 \end{aligned} \tag{3.75a}$$

Le théorème suivant donne les conditions d'existence et de stabilité de l'observateur fonctionnel (3.73).

**Théorème 3.3.1.** *Le système (3.73) est un observateur fonctionnel robuste pour le système (3.3.1) selon la définition 3.3.1 où  $0 < \alpha < 1$ , pour tous  $z(t)$ ,  $\hat{z}(t) \forall t < 0$  et  $u(t)$  si*

A) *la dynamique fractionnaire de l'erreur d'estimation est donnée par*

$$D^\alpha e(t) = N_0 e(t) + N_1 e(t - \tau(t)) + R \Delta A_0(t) x(t) + R \Delta A_\tau(t) x(t - \tau(t)) \tag{3.76}$$

1. *est asymptotiquement stable ;*

2. *l'effet des pseudo-états sur l'erreur d'estimation est minimisé avec le critère (3.74).*

B)  $R A_0 - N_0 R - J_0 C = 0$

C)  $R A_\tau - N_\tau R - J_\tau C = 0$

La synthèse d'observateur fonctionnel se réduit donc à trouver des matrices  $N_0$ ,  $N_\tau$ ,  $R$ ,  $J_0$ ,  $J_\tau$  et  $H$  telles que les conditions (A) - (C) soient remplies.

En utilisant l'expression de  $R$  et les termes définis par  $K_0 = J_0 - N_0 E_y$  et  $K_\tau = J_\tau - N_\tau E_y$ , les équations (B) et (C) s'écrivent

$$N_0 + E C A_0 + K_0 C = A_0 \tag{3.77a}$$

$$N_\tau + E C A_\tau + K_\tau C = A_\tau \tag{3.77b}$$

Les equations (3.77a) et (3.77b) peuvent être combinées dans un système d'équation algébrique qui s'exprime sous la forme suivante

$$\begin{bmatrix} N_0 & N_\tau & K_0 & K_\tau & E \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} T_z & 0 \\ 0 & T_z \\ C & 0 \\ 0 & C \\ C A_0 & C A_\tau \end{bmatrix}}_{\mathcal{M}_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_0 & A_\tau \end{bmatrix}}_{\mathcal{M}_2} \tag{3.78}$$

La condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution à l'équation (3.78) est donnée par le Lemme A.2.1 dans l'Annexe A.

Dans ce cas, la solution générale du système (3.78) est donnée sous la forme

$$\begin{bmatrix} N_0 & N_\tau & K_0 & K_\tau & E \end{bmatrix} = \mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1^+ - Z(I - \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_1^+) \tag{3.79}$$

où  $Z$  est une matrice arbitraire de dimension appropriée.

Les matrices de paramétrage sont obtenues en les extrayant de l'équation (3.79) comme suit

$$N_0 = \mathbb{A}_0 - Z\mathbb{B}_0 \quad (3.80a)$$

$$N_\tau = \mathbb{A}_1 - Z\mathbb{B}_1 \quad (3.80b)$$

$$K_0 = \mathbb{A}_2 - Z\mathbb{B}_2 \quad (3.80c)$$

$$K_\tau = \mathbb{A}_3 - Z\mathbb{B}_3 \quad (3.80d)$$

$$E = \mathbb{A}_4 - Z\mathbb{B}_4 \quad (3.80e)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_0 &= (\mathcal{M}_2\mathcal{M}_1^+) \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ \mathbb{B}_0 &= (I - \mathcal{M}_1\mathcal{M}_1^+) \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ \mathbb{A}_1 &= (\mathcal{M}_2\mathcal{M}_1^+) \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ \mathbb{B}_1 &= (I - \mathcal{M}_1\mathcal{M}_1^+) \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

Les matrices  $J_0$ ,  $J_1$  et  $H$  sont déduites à partir de

$$J_0 = K_0 + N_0E \quad (3.81a)$$

$$J_\tau = K_\tau + N_1E \quad (3.81b)$$

$$H = (I_n - EC)B \quad (3.81c)$$

La dynamique fractionnaire de l'erreur d'estimation (3.76) se réécrit de la manière suivante

$$D^\alpha e(t) = (\mathbb{A}_0 - Z\mathbb{B}_0)e(t) + (\mathbb{A}_1 - Z\mathbb{B}_1)e(t - \tau(t)) + R\Delta A_0(t)x(t) + R\Delta A_\tau(t)x(t - \tau(t)) \quad (3.82)$$

en utilisant les matrices de gains  $N_0$  et  $N_\tau$  données par (3.80a) et (3.80b).

Puisque dans la solution (3.79) de l'équation (3.78), il n'y a qu'une seule matrice inconnue  $Z$  à déterminer. La question d'existence d'un observateur robuste (3.73) pour le système (3.70), se pose donc comme suit : existe-il une matrice de paramétrage  $Z$  telle que la contrainte (A) du théorème 3.3.1 est vérifiée. La condition d'existence et sa détermination feront l'objet de la prochaine section.

### 3.3.3 Synthèse de l'observateur robuste

Comme nous l'avons mentionné auparavant dans ce chapitre qu'une manière effective d'examiner la stabilité d'un système fractionnaire à retard autonome est d'utiliser l'approche indirecte de Lyapunov. Dans cette section, dans le but d'analyser la robustesse de la stabilité de l'erreur d'estimation donnée par (3.82), nous proposerons de compléter l'analyse présentée précédemment, par l'ajout d'une norme induite  $\mathcal{L}_2$ . Cette dernière, impose une borne supérieure  $\gamma$  sur l'amplification de l'énergie des pseudo-états  $x(t)$  sur l'erreur d'estimation via les incertitudes du système. Cela se traduit par la condition (3.74) donnée dans la définition 3.3.1. C'est l'objectif du théorème suivant.

**Théorème 3.3.2.** *Soit la condition (A.2.19) est satisfaite et  $0 < \alpha < 1$ . S'il existe deux matrices symétriques définies positives  $P$  et  $Q$ , et une troisième matrice  $Y$  afin que le problème d'optimisation suivant*

$$\min(\gamma^2 > 0) \quad \text{sous la contrainte}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\Omega_{11} + \Omega_{11}^T) + I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I_n + N_1 N_1^T + \Lambda_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.83)$$

admette une solution en minimisant le scalaire réel positif  $\gamma$  avec

$$\Omega_{11} = \begin{bmatrix} 2(P\mathbb{A}_0 - Y\mathbb{B}_0) + \Lambda_1 & P\mathbb{A}_1 - Y\mathbb{B}_1 & \Lambda_3 M_1 & \Lambda_3 M_2 \\ * & -I & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{1}{(1 - \hat{\tau}_{\max})} I, & \Lambda_2 &= \frac{\beta_2 \beta_2^T}{(1 - \hat{\tau}_{\max})} I, & \Lambda_3 &= (P\mathbb{A}_R + Y\mathbb{A}_R), \\ \mathbb{A}_R &= (T - \mathbb{A}_4 C), & \mathbb{B}_R &= \mathbb{B}_4 C. \end{aligned}$$

le symbole  $*$  désigne la partie correspondante de la matrice symétrique et  $\beta_2 = N_2^T N_2 + \varepsilon I$  où  $\varepsilon > 0$  est un scalaire arbitraire.

Alors, la dynamique fractionnaire de l'erreur d'estimation (3.82) est robustement stable en présence d'incertitudes en assurant une borne supérieure minimale  $\gamma$  de la norme induite  $\mathcal{L}_2$  donnée par (3.74). La matrice de paramétrage  $Z$  est donnée par  $Z = P^{-1}Y$ .

*Démonstration.* Conformément au lemme 1.3.4, une formulation équivalente de l'équation de la dynamique de l'erreur d'estimation (3.82) s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} \frac{\partial z(\omega, t)}{\partial t} &= -\omega z(\omega, t) + (\mathbb{A}_0 - Z\mathbb{B}_0)e(t) + R\Delta A_0(t)x(t) + (\mathbb{A}_1 - Z\mathbb{B}_1)e(t - \tau(t)) \\ &\quad + R\Delta A_\tau(t)x(t - \tau(t)) \end{aligned} \quad (3.84a)$$

$$e(t) = \int_0^\infty \mu(\omega) z(\omega, t) d\omega \quad (3.84b)$$

Pour établir la stabilité asymptotique robuste de l'erreur d'estimation décrite par (3.82), une fonction Lyapunov quadratique monochromatique pour la fréquence élémentaire  $\omega$  de la forme

$$v_1(t) = z^T(\omega, t) P z(\omega, t) \quad (3.85)$$

est choisie, où  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice définie positive symétrique ( $P = P^T > 0$ ). Par conséquent, les dérivées partielles de  $v_1(t)$  par rapport à  $z(\omega, t)$  et  $t$  sont données par

$$\frac{\partial v_1(t)}{\partial z(\omega, t)} = 2z^T(\omega, t) P \quad (3.86)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1(t)}{\partial t} &= \frac{\partial v_1(t)}{\partial z(\omega, t)} \frac{\partial z(\omega, t)}{\partial t} \\ &= 2z^T(\omega, t) P (-\omega z(\omega, t) + (\mathbb{A}_0 - Z\mathbb{B}_0)e(t) + (\mathbb{A}_1 - Z\mathbb{B}_1)e(t - \tau(t)) + R\Delta A_0(t)x(t) \\ &\quad + R\Delta A_\tau(t)x(t - \tau(t))) \end{aligned} \quad (3.87)$$

La fonction de Lyapunov candidate  $V_1(t)$  est définie en additionnant la fonction monochromatique  $v_1(\omega, t)$  avec la fonction de pondération  $\mu(\omega)$ , i.e  $V_1(t)$  est donnée sous la forme suivante

$$V_1(t) = \int_0^\infty \mu(\omega) v_1(\omega, t) d\omega \quad (3.88)$$

La dynamique de la fonction candidate de Lyapunov  $V_1(t)$  le long de la trajectoire de la solution de (3.84) est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{dV_1(t)}{dt} &= \int_0^\infty \mu(\omega) \frac{\partial v_1(t)}{\partial t} d\omega \\ &= \int_0^\infty \mu(\omega) 2z^T(\omega, t) P (-\omega z(\omega, t) + (\mathbb{A}_0 - Z\mathbb{B}_0)e(t) + (\mathbb{A}_1 - Z\mathbb{B}_1)e(t - \tau(t)) + R\Delta A_0(t)x(t) \\ &\quad + R\Delta A_\tau(t)x(t - \tau(t))) d\omega \\ &= -2 \int_0^\infty \omega \mu(\omega) z^T(\omega, t) P z(\omega, t) d\omega + 2 \int_0^\infty \mu(\omega) z^T(\omega, t) P d\omega ((\mathbb{A}_0 - Z\mathbb{B}_0)e(t) \\ &\quad + (\mathbb{A}_1 - Z\mathbb{B}_1)e(t - \tau(t)) + R\Delta A_0(t)x(t) + R\Delta A_\tau(t)x(t - \tau(t))) \end{aligned} \quad (3.89)$$

En substituant l'expression de l'erreur d'estimation donnée par (3.84) dans (3.89), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{dV_1(t)}{dt} &= -2 \int_0^\infty \omega \mu(\omega) z^T(\omega, t) P z(\omega, t) d\omega + 2e^T(t) P ((\mathbb{A}_0 - Z\mathbb{B}_0)e(t) + (\mathbb{A}_1 - Z\mathbb{B}_1)e(t - \tau(t)) \\ &\quad + R\Delta A_0(t)x(t) + R\Delta A_\tau(t)x(t - \tau(t))) \end{aligned} \quad (3.90)$$

La condition suffisante pour laquelle  $\frac{dV_1(t)}{dt} < 0$  est vérifiée, est donnée par

$$\begin{aligned} 2e^T(t) P (\mathbb{A}_0 - Z\mathbb{B}_0)e(t) + \underbrace{2e^T(t) P (\mathbb{A}_1 - Z\mathbb{B}_1)e(t - \tau(t))}_{\Phi_1} \\ + \underbrace{2e^T(t) P R \Delta A_0(t)x(t)}_{\Phi_2} + \underbrace{2e^T(t) P R \Delta A_\tau(t)x(t - \tau(t))}_{\Phi_3} < 0 \end{aligned} \quad (3.91)$$

avec  $P > 0$ .

De plus, en appliquant le lemme de majoration 1.4.1 sur  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  et  $\Phi_3$ , nous obtenons les inégalités suivantes

$$\Phi_1 \leq e^T(t) (P(\mathbb{A}_1 - Z\mathbb{B}_1))(P(\mathbb{A}_1 - Z\mathbb{B}_1))^T e(t) + e(t - \tau(t))^T e(t - \tau(t)) \quad (3.92a)$$

$$\Phi_2 \leq e^T(t) (PRM_1)(PRM_1)^T e(t) + x^T(t) N_1^T N_1 x(t) \quad (3.92b)$$

$$\Phi_3 \leq e^T(t) (PRM_2)(PRM_2)^T e(t) + x^T(t - \tau(t)) \beta_2^T \beta_2 x(t - \tau(t)) \quad (3.92c)$$

Ainsi, nous définissons une deuxième fonction candidate de Lyapunov-Krasovskii  $V_2(t)$  comme suit

$$V_2(t) = \frac{1}{(1 - \dot{\tau}_{\max})} \int_{t-\tau(t)}^t e^T(s) e(s) + x^T(s) \beta_2^T \beta_2 x(s) ds \quad (3.93)$$

La dérivée temporelle de  $V_2(t)$  le long de la trajectoire de la solution de (3.84) est donnée par

$$\frac{dV_2(t)}{dt} = \frac{1}{(1 - \dot{\tau}_{\max})} \{e^T(t) e(t) + x^T(t) \beta_2^T \beta_2 x(t)\} - \frac{1}{(1 - \dot{\tau}_{\max})} \left(1 - \frac{\partial \tau(t)}{\partial t}\right) e^T(t - \tau(t)) e(t - \tau(t))$$

$$- \frac{1}{(1 - \dot{\tau}_{\max})} \left(1 - \frac{\partial \tau(t)}{\partial t}\right) x^T(t - \tau(t)) \beta_2^T \beta_2 x(t - \tau(t)) \quad (3.94)$$

et bornée par

$$\begin{aligned} \frac{dV_2(t)}{dt} \leq & \frac{1}{(1 - \dot{\tau}_{\max})} \{e^T(t)e(t) + x^T(t)\beta_2^T \beta_2 x(t)\} - x^T(t - \tau(t))\beta_2^T \beta_2 x(t - \tau(t)) \\ & - e^T(t - \tau(t))e(t - \tau(t)) \end{aligned} \quad (3.95)$$

Soit une fonction candidate de Lyapunov définie de la manière suivante

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) \quad (3.96)$$

La dynamique de la fonction de Lyapunov (3.96) s'obtient en additionnant (3.89) et (3.94),

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} \leq & -2 \int_0^\infty \omega \mu(\omega) z^T(\omega, t) P z(\omega, t) d\omega + x^T(t) (N_1 N_1^T + \Lambda_2) x(t) + e^T(t) (P(\mathbb{A}_0 - Z\mathbb{B}_0) \\ & + (PRM_1)(PRM_1)^T + (PRM_2)(PRM_2)^T + (P(\mathbb{A}_1 - Z\mathbb{B}_1))(P(\mathbb{A}_1 - Z\mathbb{B}_1))^T + \Lambda_1) e(t) \end{aligned} \quad (3.97)$$

où  $\Lambda_1 = \frac{1}{(1 - \dot{\tau}_{\max})} I$  et  $\Lambda_2 = \frac{\beta_2^T \beta_2}{(1 - \dot{\tau}_{\max})} I$ .

Cette inégalité peut s'écrire également de la manière suivante

$$X^T \begin{bmatrix} \Omega_{11} & 0 \\ 0 & N_1 N_1^T + \Lambda_2 \end{bmatrix} X \leq 0 \quad (3.98)$$

où l'expression de  $\Omega_{11}$  est donnée dans le théorème 3.3.2.

Pour minimiser l'effet des incertitudes des paramètres sur la dynamique des erreurs d'estimation, pour un niveau de performance réel  $\gamma$  donné par (3.74), l'inégalité suivante doit être satisfaite

$$J = \int_0^\infty \{e^T(s)e(s) - \gamma_1^2 x^T(s)x(s)\} ds < 0. \quad (3.99)$$

Pour assurer la stabilité avec l'inégalité (3.99), il faut que  $\frac{dV(t)}{dt} < 0$  telle que

$$\frac{dV(t)}{dt} + e^T(t)e(t) - \gamma_1^2 x^T(t)x(t) < 0 \quad (3.100)$$

En intégrant l'inégalité (3.100), nous obtenons que

$$V(\infty) - V(0) < - \int_0^\infty \{e^T(s)e(s) - \gamma_1^2 x^T(s)x(s)\} ds \quad (3.101)$$

Pour des conditions initiales nulles, l'inégalité ci-dessus devient

$$\begin{aligned} V(\infty) & < - \int_0^\infty e^T(s)e(s) ds + \gamma_1^2 \int_0^\infty x^T(s)x(s) ds \\ \implies \int_0^\infty e^T(s)e(s) ds & < \gamma_1^2 \int_0^\infty x^T(s)x(s) ds \end{aligned}$$

$$\implies \frac{\|e(t)\|_2}{\|x(t)\|_2} < \gamma$$

ce qui est équivalent à la proposition (ii) dans la définition 3.3.1.

D'après (3.98) et (3.100), nous obtenons l'inégalité suivante

$$X^T \Omega_1 X < 0 \quad (3.102)$$

avec

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} \Omega_{11} + I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I_n + N_1 N_1^T + \Lambda_2 \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

Cela complète la démonstration. •

La robustesse de stabilité de l'erreur d'estimation (3.82) est assurée par le théorème 3.3.2, si la condition suffisante donnée sous forme d'un problème d'optimisation (3.83) admet une solution. Le système décrit par (3.73) est donc un observateur robuste pour le système (3.70). En outre, toutes les matrices gains de l'observateur (3.73) sont déduites algébriquement en utilisant les équations (3.80a), (3.80b), (3.80e) et (3.81).

**Remarque 3.3.2.** Puisque la dynamique de la fonction de Lyapunov  $V(t)$  dépend de  $x(t)$  via  $\frac{dV_2(t)}{dt}$ , alors le système (3.70) est asymptotiquement stable  $\forall F_i(t)$  donné par (3.72). •

### 3.3.4 Exemple numérique

Nous allons montrer avec un exemple numérique l'efficacité de l'algorithme proposé dans cette partie pour l'estimation des pseudo-états d'un système incertain d'ordre fractionnaire à retard variant dans le temps. Pour cela, nous considérons le système décrit par

$$D^{0.5}x(t) = \left( \begin{bmatrix} -1.6 & 5 \\ 1 & -20 \end{bmatrix} + M_1 F_1(t) N_1 \right) x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2.5 \end{bmatrix} u(t) \\ + \left( \begin{bmatrix} -0.5 & 2.4 \\ 0.2 & -0.35 \end{bmatrix} + M_2 F_2(t) N_2 \right) x(t - \tau(t)) \quad (3.104a)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (3.104b)$$

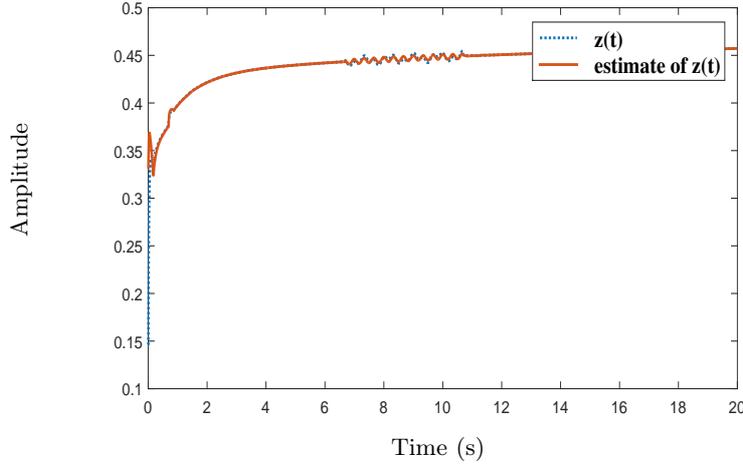
$$z(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \quad (3.104c)$$

où

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.1 \\ 2 & -0.1 \end{bmatrix} \quad N_1 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0.2 & -0.1 \end{bmatrix} \\ M_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ 2.1 & 1 \end{bmatrix} \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.65 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

où  $F_1(t)$  et  $F_2(t)$  satisfont aux conditions données par (3.72) dans l'hypothèse 3.3.1. Le retard  $\tau(t)$  est défini de la manière suivante  $\tau(t) = \tau_1 \sin(\omega t)$ , avec  $\tau_1 = 0.5\text{s}$  et  $\omega = 7.5\text{rad/s}$ .

Le problème d'optimisation (3.83) donné dans le théorème 3.3.2, peut être résolu en utilisant YALMIP [Lof04] avec MATLAB, sachant que la condition (A.2.19) est satisfaite.


 FIGURE 3.9 – Évolution du vecteur  $z(t)$  et son estimation  $\hat{z}(t)$ 

Une solution du problème d'optimisation (3.83) est obtenue pour

$$P = \begin{bmatrix} 1025.2 & 2.777e^{-11} \\ 2.777e^{-11} & 2.5389 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1025.2 & 0 \\ 0 & 1025.2 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 485.31 & 147.48 & -8.4053 & 85.97 & -539.5 & -8.4053 & -33.923 \\ 1 - 7.1651 & 48.073 & 21.311 & 17.394 & -10.699 & 20.492 & 7.1527 \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

et une valeur optimale de  $\gamma$  donnée par  $\gamma = 0.7574$ .

La matrice de paramétrage  $Z$  est déduite à partir de la solution obtenue précédemment par

$$Z = P^{-1}Y = \begin{bmatrix} 0.47338 & 0.14385 & -0.0081985 & 0.083856 & -0.52623 & -0.0081985 & -0.033088 \\ -2.8221 & 18.935 & 8.3936 & 6.8511 & -4.2139 & 8.0711 & 2.8172 \end{bmatrix} \quad (3.106)$$

En utilisant cette matrice de paramétrage, toutes les matrices de l'observateur robuste (3.73) sont déduites à partir des équations (3.80) et (3.81). Les figures 3.9 et 3.10 montrent les performances de l'observateur proposé. L'état fonctionnel réel, son estimation et l'erreur d'estimation obtenue sont présentés dans 3.9 et 3.10. De plus, les matrices  $F_i(t)$  ( $\forall i = 1, 2$ ) sont différentes de zéro dans un intervalle de temps compris entre six et quatorze secondes et égale à zéro ailleurs. Lorsque les incertitudes sont différentes de zéro, l'estimation  $\hat{z}(t)$  suit la trajectoire réelle du  $z(t)$  avec des perturbations qui sont dues aux effets des paramètres incertains. Ceci est en accord avec la valeur du  $\mathcal{L}_2$  donnée par  $\gamma = 0.7574$ . Enfin, on remarque que  $\hat{z}(t)$  converge robustement vers  $z(t)$ .

### 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, différents observateurs ont été proposés pour les systèmes à dérivée d'ordre non entier à retard en présence de plusieurs types de perturbations (endogènes ou exogènes). Nous avons étudié le problème de synthèse des observateurs pour cette classe de systèmes. D'après l'analyse de l'erreur d'estimation, nous avons obtenu des contraintes algébriques sous forme de système d'équation à résoudre. Par la suite, le problème de synthèse d'observateurs a été réduit

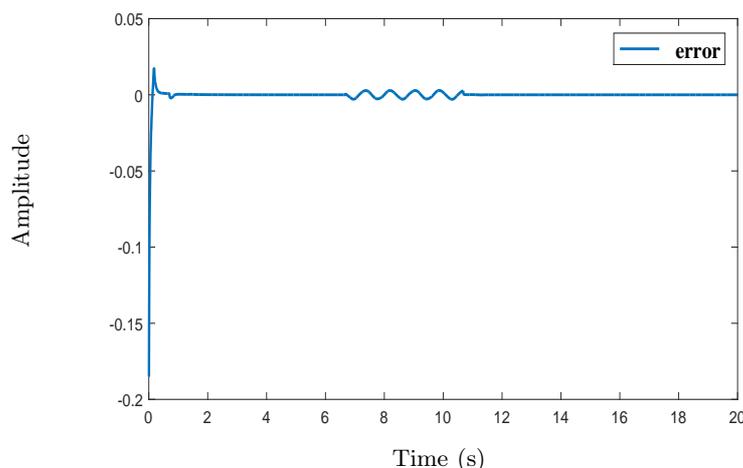


FIGURE 3.10 – Évolution de l’erreur d’estimation du pseudo-état fonctionnel  $z(t)$

à la détermination d’une matrice de paramétrage. Le problème de la détermination de cette matrice de paramétrage a été formulé sous la forme d’un problème d’optimisation donné sous forme des LMI.

Dans la section 3.2.1, nous avons proposé un observateur pour ces systèmes en présence d’entrées inconnues. Le point fort de l’observateur proposé est sa capacité de découpler l’erreur d’estimation de ces entrées inconnues. Nous avons donné les conditions d’existence de ces observateurs sous la forme de contraintes à satisfaire. Puis une condition suffisante est obtenue sous la forme d’une LMI afin de paramétrer la convergence de l’erreur d’estimation indépendamment des entrées inconnues.

Dans la section 3.2.2, nous avons proposé un observateur  $H_\infty$ , dans le cas où le système est soumis à des perturbations, qui doit satisfaire deux critères. Dans un premier lieu, en absence de perturbations, quand  $t$  tend vers l’infini, l’erreur d’estimation converge de façon asymptotique vers zéro. Deuxièmement, lorsque le système est soumis à des perturbations, l’observateur  $H_\infty$  garantit la minimisation de l’effet des perturbations sur l’erreur d’estimation. En adoptant une approche d’analyse en utilisant la théorie de Lyapunov et les contraintes algébriques dérivées de l’analyse de la dynamique d’erreur d’estimation, une condition suffisante est obtenue sous la forme d’une LMI a permis de satisfaire les deux exigences ci-dessus.

La dernière section de ce chapitre était dédiée à la synthèse d’observateurs robustes pour les systèmes d’ordre fractionnaire incertains. Nous avons donné les conditions d’existence de ces observateurs en étudiant la robustesse de la stabilité de l’erreur d’estimation ainsi que des contraintes algébriques. La robustesse de la stabilité de l’erreur d’estimation est analysée en ajoutant une norme induite  $\mathcal{L}_2$ , qui a imposé une borne supérieure  $\gamma$  sur l’amplification de l’énergie des pseudo-états  $x(t)$  sur l’erreur d’estimation malgré les incertitudes du système. En utilisant l’approche indirecte de Lyapunov et Lyapunov-Krasovskii, nous avons obtenu un problème de minimisation formulé avec une contrainte LMI, afin de minimiser l’effet des incertitudes sur les erreurs estimées avec un indice de performance  $\gamma$ .

Ces différentes classes d’observateurs synthétisés seront utilisés par la suite afin de générer des lois de commande basées sur des observateurs pour ces systèmes.

Des exemples numériques ont été présentés pour illustrer les procédures de synthèse ainsi que les performances des observateurs proposés.



## Chapitre 4

# Synthèse des lois de commande des systèmes d'ordre fractionnaire incertains

*“Les machines un jour pourront résoudre tous les problèmes,  
mais jamais aucune d’entre elles ne pourra en poser un !”*  
Albert Einstein

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>82</b>
<b>4.2</b>	<b>Calcul de la norme <math>H_\infty</math> pour LTI-FOS avec incertitudes</b>	<b>83</b>
4.2.1	Évaluation de la norme $H_\infty$ en utilisant la Matrice Hamiltonienne	83
4.2.2	Évaluation de la norme $H_\infty$ en utilisant le lemme de KYP	85
4.2.2.1	Cas où : $0 < \alpha < 1$	85
4.2.2.2	Cas où : $1 \leq \alpha < 2$	87
<b>4.3</b>	<b>La commande basée sur un observateur</b>	<b>88</b>
4.3.1	Formulation du problème	88
4.3.2	Paramétrisation de la commande robuste basée sur un observateur $H_\infty$	89
4.3.3	Synthèse de la commande robuste basée sur un observateur $H_\infty$	93
4.3.3.1	Approche basée sur la matrice Hamiltonienne	93
4.3.3.2	Approche basée sur le lemme de KYP	95
4.3.3.2.1	Cas où : $0 < \alpha < 1$	95
4.3.3.2.2	Cas où : $1 \leq \alpha < 2$	98
4.3.4	Lien avec la synthèse de lois de commande $H_\infty$ par retour de sortie dynamique	100
<b>4.4</b>	<b>Exemples numériques</b>	<b>102</b>
4.4.1	Approche basée sur la matrice Hamiltonienne	102
4.4.2	Approche basée sur le lemme de KYP	103
4.4.2.1	Cas où $0 < \alpha < 1$	103
4.4.2.2	Cas où $1 \leq \alpha < 2$	106
<b>4.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>110</b>

---

## 4.1 Introduction

Dans la pratique, il est rarement possible de mesurer tout l'état du système, par conséquent une commande par retour d'état n'est pas réalisable. Pour cette raison, la synthèse d'observateurs, permettant l'estimation des états internes d'un système, a fait l'objet d'une attention particulière ces dernières années [Lue71, DZ92, Dar01]. Les contrôleurs basés sur observateurs (OBC) sont généralement utilisés pour générer des lois de commande permettant la stabilisation et améliorant les performances d'un système dynamique. Récemment, des recherches pour la synthèse d'OBC ont été développées pour les systèmes d'ordre fractionnaire [LC10, LGC<sup>+</sup>14, NZDR09].

L'optimisation  $H_\infty$  utilisée en présence de perturbations exogènes à énergie finie permet de garantir un niveau d'atténuation des perturbations. Cependant, la théorie de la commande  $H_\infty$  était généralement limitée aux systèmes d'ordre entier. Au cours des dernières années, des travaux d'extension du calcul de la norme  $H_\infty$  aux systèmes d'ordre fractionnaire ont été réalisés [MSO05b]. Dans [MSO05b], les auteurs ont défini la pseudo-matrice hamiltonienne d'un système d'ordre fractionnaire. Puis, ils ont proposé deux méthodes pour calculer sa norme  $H_\infty$  en se basant sur cette matrice. La première est basée sur un algorithme de dichotomie, et la deuxième utilise le formalisme LMI. En outre, une version du lemme borné réel pour les systèmes d'ordre fractionnaire a été dérivée dans [MSO08], ainsi qu'un calcul analytique de la norme  $H_2$  pour une fonction de transfert fractionnaire a été présenté dans [MALO11].

C. Farges et al. [FFS13], L. Shu et al. [LWP<sup>+</sup>15] ont proposé des résultats généraux en utilisant le lemme généralisé de Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) pour transformer le problème de calcul de la norme  $H_\infty$  sous une formulation LMI. Les résultats obtenus dans [FFS13] et [LWP<sup>+</sup>15] permettent également de vérifier la stabilité et le calcul de la norme  $H_\infty$  simultanément. Par conséquent, en utilisant ces résultats d'analyse, des méthodes ont été proposées dans la littérature pour concevoir des contrôleurs dynamiques et des observateurs  $H_\infty$  [FSF13, NVD<sup>+</sup>13, SL14, BDZR14b]. Dans tous ces travaux, seul le système perturbé est considéré sans incertitudes.

Les principales difficultés dans la synthèse de ce type de contrôleur, résident dans les incertitudes additives et les perturbations exogènes, ce qui provoque dans certains cas l'instabilité du système considéré. L'idée principale de ce chapitre est de concevoir des contrôleurs robustes basés sur observateurs pour des systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire incertains soumis à des perturbations exogènes. Dans ce cadre nous présentons deux approches.

Tout d'abord, les conditions d'existence d'un OBC pour ces systèmes sont données. Puis, en utilisant une technique d'optimisation fondée sur la matrice hamiltonienne d'un système d'ordre fractionnaire présentée dans [MSO05b], une condition de stabilité de l'erreur d'estimation et de stabilisation du système original est donnée sous forme d'inégalité matricielle, où le gain de l'observateur et la loi de commande peuvent être calculés à partir de la résolution de cette inégalité en deux étapes. La méthode proposée a deux objectifs, le premier satisfaire l'indice de performance  $H_\infty$ , et le deuxième garantir la stabilisation du DU-FOS.

En utilisant le lemme généralisé de Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) [FFS13] et [LWP<sup>+</sup>15], une deuxième méthode est proposée pour la synthèse d'un contrôleur robuste basé sur un observateur  $H_\infty$  pour un DU-FOS. Cette approche est décomposée en deux parties. Dans la première partie, une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un observateur  $H_\infty$  robuste est donnée. Ensuite, une condition de la stabilité de l'erreur d'estimation et la stabilisation du système d'origine par une commande robuste basée sur un observateur est donnée sous forme d'inégalité matricielle, où tous les gains de l'observateur et la loi de commande sont calculés en résolvant une inégalité matricielle. Enfin, des exemples numériques sont présentés pour illustrer l'efficacité des méthodes de synthèse présentées.

## 4.2 Calcul de la norme $H_\infty$ pour LTI-FOS avec incertitudes

La classe de système linéaire considérée dans ce paragraphe, est composée du système nominal ainsi que des incertitudes et des perturbations exogènes. Le modèle s'écrit sous la forme

$$D^\alpha x(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B_w + \Delta B_w)w(t) \quad (4.1a)$$

$$z(t) = (C_z + \Delta C_z)x(t) + (D_w + \Delta D_w)w(t) \quad (4.1b)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  désigne le vecteur pseudo-état,  $w \in \mathbb{R}^q$  est le vecteur des perturbations exogènes,  $z \in \mathbb{R}^r$  est la sortie à contrôler et  $\alpha$  est l'ordre de la dérivation fractionnaire tel que  $0 < \alpha < 2$ .  $A$ ,  $B_w$ ,  $C_z$  et  $D_w$  sont des matrices constantes connues avec des dimensions appropriées. Les termes  $\Delta A$ ,  $\Delta B_w$ ,  $\Delta C$ , et  $\Delta D_w$  sont des matrices inconnues variant dans le temps, et représentent les incertitudes paramétriques.

**Hypothèse 4.2.1.** *On suppose que les matrices d'incertitudes du système  $\Delta A$ ,  $\Delta B_w$ ,  $\Delta C$  et  $\Delta D_w$  sont structurées et bornées. Elles peuvent varier dans le temps et avoir la structure suivante*

$$\begin{bmatrix} \Delta A & \Delta B_w \\ \Delta C_z & \Delta D_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_z \end{bmatrix} F(t) \begin{bmatrix} N_x & N_w \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

où  $M_x$ ,  $M_z$ ,  $N_x$  et  $N_w$  sont des matrices réelles, connues, et constantes de dimensions appropriées.  $F(t)$  est une matrice variante dans le temps satisfaisant l'inégalité suivante

$$F^T(t)F(t) \leq I \quad (4.3)$$

où les éléments de  $F(t)$  sont continus.

### 4.2.1 Évaluation de la norme $H_\infty$ en utilisant la Matrice Hamiltonienne

Comme nous l'avons vu dans la partie 1.4 du chapitre 1, deux méthodes sont considérées dans l'analyse et le calcul de la norme  $H_\infty$  d'un système d'ordre non entier. La première approche consiste à évaluer dans un premier temps sa stabilité (par exemple à l'aide des méthodes LMI présentées dans la section 1.3 du chapitre 1). Puis, si le système est stable, sa norme  $H_\infty$  peut être calculer en utilisant le Lemme 4.2.1, sinon cette dernière est infinie. La seconde approche consiste à calculer directement la norme  $H_\infty$  du système.

Dans ce qui suit, nous allons utiliser la méthode présentée dans la section 1.4.2 pour calculer la norme  $H_\infty$  du système (4.1). L'analyse se base sur l'évaluation des valeurs propres de la pseudo matrice Hamiltonienne et prend en compte les bornes supérieures des incertitudes paramétriques du système. Si par ailleurs le système (4.1) est stable, donc sa norme  $H_\infty$  peut être calculée en utilisant le lemme suivant.

**Lemme 4.2.1.** *[MSO05b] Soit une pseudo représentation d'état stable de la forme (1.123) et soit un nombre réel positif  $\gamma > \bar{\sigma}(D_0)$ . La fonction de transfert  $T_{zw}(s)$  définie dans (1.125) satisfait  $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$  si et seulement si la pseudo matrice hamiltonienne  $A_\gamma$  définie par*

$$A_\gamma = \begin{pmatrix} (A_0 + B_0 R D_0^T C_0) & \Xi B_0 R B_0^T \\ C_0^T (I + D_0 R D_0^T) C_0 & \Xi (A_0^T + C_0^T D_0 R B_0^T) \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

où  $\Xi = e^{-\alpha j\pi}$  et  $R = (\gamma^2 I - D_0^T D_0)^{-1}$ , n'a que des valeurs propres dans le domaine de stabilité défini par  $s \in \mathbb{C} : |\arg(s)| > \alpha \frac{\pi}{2}$ .



Grâce au complément de Schur, on peut réécrire l'inégalité ci-dessus (4.9) sous une forme où chacune des variables de décision s'écrit d'une manière affine en fonction des matrices du système

$$\left[ \begin{array}{cccccccccc} \text{Sym}\{\Xi_1 PA\} & N_A^T & N_C^T & PM & PB_w + \frac{1}{\mu_1} N_A^T N_{B_w} + \frac{1}{\mu_2} N_C^T N_{D_w} & 0 & 0 & \Xi_1^* C^T & 0 & \\ * & -\frac{1}{\mu_1} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\frac{1}{\mu_2} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\mu_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I & N_{B_w}^T & N_{D_w}^T & D_w^T & 0 & < 0 \\ * & * & * & * & * & -\frac{1}{\mu_1} I & 0 & 0 & 0 & \\ * & * & * & * & * & * & -\frac{1}{\mu_2} I & 0 & 0 & \\ * & * & * & * & * & * & * & -I & M & \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\mu_2 I & \end{array} \right] \quad (4.10)$$

Nous pouvons facilement déduire, en permutant des lignes et des colonnes, l'équivalence entre les inégalités (4.5) et (4.10).

Nous constatons à partir de ces résultats que s'il existe une matrice hermitienne  $P$  définie positive et deux scalaires positifs  $\mu_1$  and  $\mu_2$  tels que l'inégalité (4.5) soit satisfaite, alors la norme  $\mathcal{L}_\infty$  du système (4.1) est inférieure à  $\gamma$ . Ce qui complète la démonstration. •

## 4.2.2 Évaluation de la norme $H_\infty$ en utilisant le lemme de KYP

Dans ce paragraphe, nous analysons la stabilité robuste d'une classe de systèmes d'ordre fractionnaire en présence d'incertitudes du modèle et de perturbations exogènes (DU-FOS), dans les cas  $0 < \alpha < 1$  et  $1 \leq \alpha < 2$ .

Dans ce qui suit, la robustesse de la stabilité du système (4.1) est analysée en utilisant la norme  $H_\infty$ . Cette méthode d'analyse nous permet d'assurer la stabilité du système malgré la présence des incertitudes, tout en garantissant le rejet des perturbations.

Nous commençons par introduire deux lemmes pour calculer la norme  $H_\infty$  d'un système fractionnaire affecté par des incertitudes paramétriques en se basant sur la sous section 1.4.1.

### 4.2.2.1 Cas où : $0 < \alpha < 1$

**Lemme 4.2.3.** *La fonction de transfert du système (4.1) entre l'entrée de perturbations  $w(t)$  et la sortie à contrôler  $z(t)$  a une norme  $H_\infty$  inférieure à un scalaire  $\gamma > 0$  s'il existe une matrice définie positive  $X \in \mathbb{H}^n$  et un scalaire positif  $\mu_1$ , telle que l'inégalité matricielle suivante*

$$\begin{bmatrix} {}_{01}\Theta_{11} & {}_{01}\Theta_{12} \\ * & {}_{01}\Theta_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.11)$$

est satisfaite pour  $0 \leq \alpha < 1$ , avec

$$\begin{aligned} {}_{01}\Theta_{11} &= \text{sym}\{A(e^{j\theta} X + e^{-j\theta} \bar{X})\} \\ {}_{01}\Theta_{12} &= \begin{bmatrix} M_x & \Lambda_1 & C_0(e^{j\theta} X + e^{-j\theta} \bar{X}) & 0 & B_w \end{bmatrix} \\ \Lambda_1 &= \begin{bmatrix} (N_x X)^* & (N_x \bar{X})^* & (N_x X)^* & (N_x \bar{X})^* \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$${}_{01}\Theta_{22} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3\mu_1}I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & -\mu_1 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma I & M_z & D_w \\ * & * & * & -\frac{1}{3\mu_1}I & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma I + \underbrace{\frac{1}{\mu_1} \begin{bmatrix} N_w \\ N_w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_w \\ N_w \end{bmatrix}}_{\Lambda_2} \end{bmatrix}$$

*Démonstration.* On pose  $A_0 = A + \Delta A$ ,  $B_0 = B_w + \Delta B_w$ ,  $C_0 = C_z + \Delta C_z$  et  $D_0 = D_w + \Delta D_w$ , l'expression de  ${}_{01}\Gamma$  dans l'inégalité (1.132) peut être réécrite sous la forme suivante

$$\begin{aligned} {}_{01}\Gamma &= {}_{01}\Omega_{12} + \Delta_{01}\Omega_1 + \Delta_{01}\Omega_2 \\ &= {}_{01}\Omega_{12} + \text{sym}\{ {}_{01}\mathcal{X}_1^* F {}_{01}\mathcal{Y}_1 + {}_{01}\mathcal{X}_2^* F {}_{01}\mathcal{Y}_2 \} + \text{sym}\{ {}_{01}\mathcal{X}_3^* F {}_{01}\mathcal{Y}_3 \} < 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

où

$$\begin{aligned} {}_{01}\Omega_{12} &= \begin{bmatrix} \text{sym}\{A(e^{j\theta}X + e^{-j\theta}\bar{X})\} & * & * \\ C_z e^{j\theta}(e^{j\theta}X + e^{-j\theta}\bar{X}) & -\gamma I & * \\ B_w^T & D_w^T & -\gamma I \end{bmatrix}, \\ \Delta_{01}\Omega_2 &= \begin{bmatrix} \text{sym}\{e^{-j\theta}M_x F N_x \bar{X}\} & * & * \\ e^{-j\theta}M_z F N_x \bar{X} & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \Delta_{01}\Omega_1 &= \begin{bmatrix} \text{sym}\{e^{j\theta}M_x F N_x X\} & * & * \\ e^{j\theta}M_z F N_x X & 0 & * \\ (M_x F N_w)^T & (M_z F N_w)^T & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} {}_{01}\mathcal{X}_1 &= \begin{bmatrix} e^{-j\theta}M_x^T & 0 & 0 \\ 0 & e^{-j\theta}M_z^T & 0 \end{bmatrix}, & {}_{01}\mathcal{Y}_1 &= \begin{bmatrix} N_x X & 0 & 0 \\ N_x X & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ {}_{01}\mathcal{X}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_w \\ 0 & 0 & N_w \end{bmatrix}, & {}_{01}\mathcal{Y}_2 &= \begin{bmatrix} M_x^T & 0 & 0 \\ 0 & M_z^T & 0 \end{bmatrix}, \\ {}_{01}\mathcal{X}_3 &= \begin{bmatrix} e^{j\theta}M_x^T & 0 & 0 \\ 0 & e^{j\theta}M_z^T & 0 \end{bmatrix}, & {}_{01}\mathcal{Y}_3 &= \begin{bmatrix} N_x \bar{X} & 0 & 0 \\ N_x \bar{X} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

L'application du lemme 1.4.2 à l'inégalité (4.12), en tenant compte de l'inégalité (4.3), nous conduit à la relation suivante

$$\begin{aligned} {}_{01}\Gamma &< {}_{01}\Omega_{12} + \mu_1 {}_{01}\mathcal{X}_1^* {}_{01}\mathcal{X}_1 \\ &\quad + \mu_1^{-1} {}_{01}\mathcal{Y}_1^* {}_{01}\mathcal{Y}_1 + \mu_1^{-1} {}_{01}\mathcal{X}_2^* {}_{01}\mathcal{X}_2 + \mu_1 {}_{01}\mathcal{Y}_2^* {}_{01}\mathcal{Y}_2 \\ &\quad + \mu_1 {}_{01}\mathcal{X}_3^* {}_{01}\mathcal{X}_3 + \mu_1^{-1} {}_{01}\mathcal{Y}_3^* {}_{01}\mathcal{Y}_3 \end{aligned} \quad (4.13)$$

D'autre part, si l'inégalité suivante

$${}_{01}\Omega_{12} + \begin{bmatrix} {}_{01}\Pi_{11} & 0 & 0 \\ * & {}_{01}\Pi_{22} & 0 \\ * & * & {}_{01}\Pi_{33} \end{bmatrix} < 0, \quad (4.14)$$

est satisfaite, l'inégalité (4.12) l'est aussi

$$\begin{aligned} {}_{01}\Pi_{11} &= \frac{1}{\mu_1} \overbrace{\begin{bmatrix} (N_x X)^* & (N_x \bar{X})^* & (N_x X)^* & (N_x \bar{X})^* \end{bmatrix}}^{\Lambda_1} \overbrace{\begin{bmatrix} (N_x X) \\ (N_x \bar{X}) \\ (N_x X) \\ (N_x \bar{X})^* \end{bmatrix}}^{\Lambda_1^*} \\ &\quad + 3\mu_1 M_x M_x^T \\ {}_{01}\Pi_{22} &= 3\mu_1 M_z M_z^T \\ {}_{01}\Pi_{33} &= \frac{1}{\mu_1} \overbrace{(N_w^T N_w + N_w^T N_w)}^{\Lambda_2} \end{aligned}$$

Maintenant, en appliquant le lemme de Schur sur la première composante bloc-diagonale de l'inégalité matricielle (4.14), nous obtenons

$$\text{sym}\{A(e^{j\theta}X + e^{-j\theta}\bar{X})\} + {}_{01}\Pi_{11} = \begin{bmatrix} \text{sym}\{A(e^{j\theta}X + e^{-j\theta}\bar{X})\} & M_x & \Lambda_1 \\ * & \frac{-1}{3\mu_1}I & 0 \\ * & * & -\mu_1 I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.15)$$

De la même manière, la deuxième composante bloc-diagonale de l'inégalité matricielle (4.14) est équivalente à

$$-\gamma I + {}_{01}\Pi_{22} = -\gamma I + 3\mu_1 M_z M_z^T = \begin{bmatrix} -\gamma I & M_z \\ * & -\frac{1}{3\mu_1}I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.16)$$

Ensuite, en remplaçant les deux premiers blocs diagonaux de (4.14) par leurs équivalents ce (4.15) et (4.16) cela conduit à la LMI (4.11), ce qui complète la démonstration. •

#### 4.2.2.2 Cas où : $1 \leq \alpha < 2$

**Lemme 4.2.4.** *La fonction de transfert du système (4.1) entre l'entrée de perturbations  $w(t)$  et la sortie à contrôler  $z(t)$  a une valeur maximale  $\gamma > 0$  donnée pour sa norme  $H_\infty$  s'il existe une matrice définie positive  $P \in \mathbb{H}^n$  et deux scalaires positifs  $\mu_1$  et  $\mu_2$  afin que l'inégalité matricielle suivante*

$$\begin{bmatrix} {}_{12}\Theta_{11} & {}_{12}\Theta_{12} \\ * & {}_{12}\Theta_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.17)$$

soit vérifiée pour  $1 \leq \alpha < 2$ , avec

$${}_{12}\Theta_{11} = \text{sym}\{Ae^{j\theta}P\}$$

$${}_{12}\Theta_{12} = \begin{bmatrix} M_x & (N_xP)^T & (N_xP)^T & (C_z e^{j\theta}P)^T & 0 & B_w \end{bmatrix}$$

$${}_{12}\Theta_{22} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\mu_1}I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & -\mu_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\mu_2 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma I & M_z & D_w \\ * & * & * & * & -\frac{1}{2\mu_1}I & 0 \\ * & * & * & * & * & -\gamma I + \Lambda_2 \end{bmatrix}$$

*Démonstration.* La démonstration de ce lemme se ressemble à celle du lemme 4.2.3 en suivant la même procédure. L'inégalité (4.17) est obtenue en remplaçant la matrice  $(e^{j\theta}X + e^{-j\theta}\bar{X})$  par  $P$  et en suivant les mêmes démarches que dans la démonstration 4.2.2.1. •

## 4.3 La commande basée sur un observateur

### 4.3.1 Formulation du problème

Nous considérons le DU-FOS représenté sous la forme suivante

$$D^\alpha x(t) = (A + \Delta A)x(t) + B_u u(t) + (B_w + \Delta B_w)w(t) \quad (4.18a)$$

$$y(t) = C_y x(t) + D_w w(t) \quad (4.18b)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur des pseudo-états,  $u \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur de commande,  $y \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur des sorties ainsi que  $w \in \mathbb{R}^q$  représente les perturbations du système.  $A$ ,  $B_u$ ,  $B_w$ ,  $C_y$  et  $D_w$  sont les matrices de la représentation dans l'espace des pseudo-états de dimensions appropriées. Les incertitudes  $\Delta A$  et  $\Delta B_w$  satisfont l'hypothèse 4.2.1.

**Hypothèse 4.3.1.** *Nous supposons que les perturbations  $w(t)$  satisfont la Définition 1.4.1, c-à-d sa norme  $\mathcal{L}_2$  qui peut être interprétée comme étant l'énergie du signal des perturbations  $w$  définie comme suit*

$$\|w\|_2 = \left( \int_0^\infty w(t)^T w(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.19)$$

est bornée.

Pour stabiliser le système (4.18) par un retour de pseudo-état, il faut disposer à cet effet de tout le vecteur des pseudo-états internes  $x$ . C'est la raison pour laquelle nous considérons un observateur robuste  $H_\infty$  qui permet de synthétiser une loi de commande linéaire basée sur l'estimé du vecteur des pseudo-états.

Le contrôleur basé sur un observateur est de la forme

$$D^\alpha \eta(t) = N\eta(t) + Hu(t) + Jy(t) \quad (4.20a)$$

$$\hat{x}(t) = \eta(t) + Ey(t) \quad (4.20b)$$

$$u(t) = K_u \hat{x}(t) \quad (4.20c)$$

où  $\eta \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur des pseudo-états de l'observateur,  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  est l'estimé de  $x$  et  $u \in \mathbb{R}^m$  est la commande à réaliser. Les matrices  $N$ ,  $J$ ,  $H$ ,  $E$  et  $K_u$  de dimensions appropriées sont à déterminer afin que l'erreur d'estimation et le système en boucle fermée soient robustement stables, i.e.  $\hat{x}(t)$  converge asymptotiquement vers  $x(t)$  si  $w(t) = 0$  et  $\frac{\|e\|_2}{\|w\|_2} < \gamma$  pour  $w(t) \neq 0$ .

**Problème 4.3.1.** *Obtenir, si possible, une commande basée sur un observateur robuste sous la forme (4.20), c-à-d déterminer toutes les matrices  $N$ ,  $J$ ,  $H$  et  $E$  de l'observateur (4.20a-4.20b) ainsi que la matrice  $K_u$  de la loi de commande (4.20c) tels que :*

- *Le système en boucle fermée soit stable.*
- *L'estimé  $\hat{x}$  converge asymptotiquement vers  $x$  quand  $w(\cdot) = 0$ .*
- *La norme  $H_\infty$  de la matrice de transfert en boucle fermée pour une entrée  $w(t)$  et une sortie  $e(t)$  est bornée par  $\gamma$  quand  $w(\cdot) \neq 0$ , c-à-d  $\frac{\|e\|_2}{\|w\|_2} < \gamma$ , avec  $e = x - \hat{x}$ .*

### 4.3.2 Paramétrisation de la commande robuste basée sur un observateur $H_\infty$

Afin de synthétiser l'observateur robuste  $H_\infty$ , nous commençons par définir l'erreur d'estimation entre  $x(t)$  et  $\hat{x}$  par

$$\begin{aligned} e(t) &= x(t) - \hat{x}(t) \\ &= x(t) - \eta(t) - Ey(t) \\ &= \underbrace{(I_n - EC_y)}_R x(t) - \eta(t) - ED_w w(t) \end{aligned} \quad (4.21)$$

D'après l'équation (4.21), on remarque que l'erreur d'estimation  $e$  dépend des perturbations  $w$ . Pour éviter qu'une dérivée des perturbations  $w$  apparaît dans la dynamique de l'erreur d'estimation  $e$ , nous introduisons une nouvelle variable  $\varepsilon$  définie comme suit

$$\varepsilon = Rx(t) - \eta(t) \quad (4.22)$$

En outre, une réalisation dans l'espace des pseudo-états de la fonction de transfert  $T_{we}$  entre  $w$  et  $e$  avec une dynamique d'ordre fractionnaire  $\alpha$  a la forme suivante

$$D^\alpha \varepsilon = RD^\alpha x(t) - D^\alpha \eta \quad (4.23a)$$

$$e(t) = \varepsilon - ED_w w(t) \quad (4.23b)$$

ce qui est équivalente à

$$\begin{aligned} D^\alpha \varepsilon(t) &= N\varepsilon(t) + (RA - NR - JC_y + R\Delta A)x(t) \\ &\quad + (RB_w - JD_w + R\Delta B_w)w(t) \\ &\quad + (RB_u - H)u(t) \end{aligned} \quad (4.24a)$$

$$e(t) = \varepsilon - ED_w w(t) \quad (4.24b)$$

Ainsi, nous pouvons déduire que la loi de commande (4.20c) peut s'écrire sous la forme

$$u(t) = K_u x(t) - K_u \varepsilon(t) + K_u ED_w w(t) \quad (4.25)$$

La représentation dans l'espace des pseudo-états en boucle fermée, formée par (4.18), (4.24) et (4.25) est donnée par

$$D^\alpha \tilde{X}(t) = (\tilde{A} + \Delta\tilde{A}) \tilde{X}(t) + (\tilde{B}_w + \Delta\tilde{B}_w) w(t) + \tilde{B}_u u(t) \quad (4.26a)$$

$$e(t) = \tilde{C}\tilde{X}(t) + \tilde{D}_w w(t) \quad (4.26b)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{X}(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix}, & \tilde{A} &= \begin{bmatrix} A + B_u K_u & -B_u K_u \\ \Theta_1 & N \end{bmatrix}, \\ \tilde{B}_w &= \begin{bmatrix} \Theta_3 \\ RB_w - JD_w \end{bmatrix}, & \tilde{B}_u &= \begin{bmatrix} 0 \\ \Theta_2 \end{bmatrix}, \\ \tilde{C} &= \begin{bmatrix} 0 & I_n \end{bmatrix}, & \tilde{D}_w &= -ED_w. \end{aligned}$$

$$\Delta\tilde{A} = \tilde{M}_x F \tilde{N}_x, \quad \Delta\tilde{B}_w = \tilde{M}_x F \tilde{N}_w,$$

et

$$\tilde{M}_x = \begin{bmatrix} M_x \\ RM_x \end{bmatrix} \quad \tilde{N}_x = \begin{bmatrix} N_x & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{N}_w = N_w$$

avec

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= NR + JC_y - RA \\ \Theta_2 &= H - RB_u \\ \Theta_3 &= B_u K_u ED_w + B_w \end{aligned}$$

A partir de la présentation précédente, nous pouvons énoncer la proposition suivante.

**Proposition 4.3.1.** *Le système (4.20) génère une commande basée sur un observateur  $H_\infty$  pour le système (4.18), tout en respectant les Définitions 1.4.1 et 1.4.2 pour toute initialisation du vecteur des pseudo-états  $x$  et d'estimation  $\hat{x}$  [LH01, HL09, HLTM13], s'il existe des matrices  $N$ ,  $J$ ,  $H$ ,  $E$  et  $K_u$  telles que*

*i) Le gain  $\mathcal{L}_2$  de la boucle fermée (4.26) est borné par  $\gamma > 0$ .*

*ii)  $NR + JC_y - RA = 0$*

*iii)  $H = RB_u$*

avec  $R = I_n - EC_y$ .

**Remarque 4.3.1.** Si la condition iii) est satisfaite, le terme  $\tilde{B}_u$  disparaîtra de l'expression du système (4.26). De plus, le système (4.1) aura une structure similaire à celle de (4.26) où le vecteur  $x$  et la sortie à contrôler  $z$  seront remplacés par le vecteur augmenté  $\tilde{X}$  et l'erreur d'estimation  $e$ , respectivement. •

En utilisant la définition de la matrice  $R$ , l'expression de  $\Theta_1$  et l'item ii) de la proposition 4.3.1, nous obtenons

$$N = \mathbb{A}_N - Z\mathbb{B}_N \quad (4.27)$$

avec  $\mathbb{A}_N = A$ ,  $Z = \begin{bmatrix} K & E \end{bmatrix}$ ,  $\mathbb{B}_N = \begin{bmatrix} C_y \\ C_y A \end{bmatrix}$  et  $K = J - NE$ .

**Remarque 4.3.2.** La matrice  $J$  peut être calculée à partir de la connaissance de la matrice  $K$  et des matrices  $N$  et  $E$ . •

Avant de déterminer les matrices  $K_u$  et  $Z$  du contrôleur et de l'observateur respectivement, nous introduisons l'hypothèse suivante

**Hypothèse 4.3.2.** Les paires  $(C_y, A)$  et  $(A, B_u)$  sont supposées satisfaire les conditions suivantes

$$\text{rang} \left( \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C_y \end{bmatrix} \right) = n \quad (4.28)$$

et

$$\text{rang} \left( \begin{bmatrix} \lambda I - A & B_u \end{bmatrix} \right) = n \quad (4.29)$$

pour toute valeur propre  $\lambda$  de la matrice  $A$  telle que  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $|\arg(\lambda)| \leq \alpha \frac{\pi}{2}$ .

A partir de l'équation (4.27), on peut voir qu'il existe une matrice de gain  $Z$  telle que la matrice  $N$  est une matrice Hurwitz, c-à-d que toutes les valeurs propres de  $N$  satisfont  $|\arg(\lambda(N))| \leq \alpha \frac{\pi}{2}$ . Le lemme suivant donne la condition d'existence de la matrice  $Z$ .

**Lemme 4.3.1.** [BDZR17] Il existe une matrice de gain  $Z$  telle que  $N$  définie par l'équation (4.27) est une matrice de stabilité, c-à-d toutes les valeurs propres de  $N$  satisfont  $|\arg(\lambda(N))| \leq \alpha \frac{\pi}{2}$ , si et seulement si la condition de rang donnée par l'équation (4.28) est satisfaite pour toute valeur propre  $\lambda$  de la matrice  $A$  telle que  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $|\arg(\lambda)| \leq \alpha \frac{\pi}{2}$ .

*Démonstration.* Il a été montré dans [ZDG96] que la condition (4.28) est satisfaite pour toute valeur propre  $\lambda$  de la matrice  $A$  avec  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $|\arg(\lambda)| \leq \alpha \frac{\pi}{2}$  s'il existe une matrice  $Z$  telle que toutes les valeurs propres de  $A - ZC_y$  soient dans ce domaine de stabilité.

Soit  $\lambda$  une valeur propre de la matrice  $A$ . Nous allons montrer que la paire de matrices  $(\mathbb{B}_N, \mathbb{A}_N)$  satisfait la même condition de rang que la paire  $(C_y, A)$  (4.28). Nous avons

$$\begin{aligned} \text{rang} \left( \begin{bmatrix} \lambda I - \mathbb{A}_N \\ \mathbb{B}_N \end{bmatrix} \right) &= \text{rang} \left( \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ C_y & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C_y A \\ C_y \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{rang} \left( \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ \lambda C_y \\ C_y \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{rang} \left( \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & -\lambda I \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ \lambda C_y \\ C_y \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$= \text{rang} \left( \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C_y \end{bmatrix} \right).$$

Ce qui termine la démonstration. •

La condition (4.29) est nécessaire pour obtenir un gain  $K_u$  tel que toutes la valeurs propres de la matrice  $A + B_u K_u$  satisfont la condition  $|\arg(\lambda(A + B_u K_u))| \leq \alpha \frac{\pi}{2}$ .

A partir du système d'équation (4.27), nous avons

$$N = \mathbb{A}_N - Z\mathbb{B}_N \tag{4.30a}$$

$$K = Z\mathbb{B}_K \tag{4.30b}$$

$$E = Z\mathbb{B}_E \tag{4.30c}$$

$$R = \mathbb{A}_R - Z\mathbb{B}_R \tag{4.30d}$$

avec

$$\mathbb{B}_K = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B}_E = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad \mathbb{A}_R = I_n, \quad \mathbb{B}_R = \mathbb{B}_E C = \begin{bmatrix} 0 \\ C_y \end{bmatrix}.$$

Les matrices  $J$  et  $H$  sont déduites à partir de (4.30)

$$J = K + NE \tag{4.31a}$$

$$H = (I_n - EC)B \tag{4.31b}$$

En utilisant les relations (4.30a), (4.30b), (4.30c) et (4.31a), l'expression du terme  $JD_w$  peut être reformulée de la manière suivante

$$JD_w = Z\mathbb{B}_K + (\mathbb{A}_N - Z\mathbb{B}_N)Z\mathbb{B}_E D_w \tag{4.32}$$

et  $\Theta_3$  peut être aussi simplifiée comme suit

$$\begin{aligned} \Theta_3 &= B_u K_u E D_w + B_w \\ &= B_u K_u Z\mathbb{B}_E D_w + B_w \end{aligned} \tag{4.33}$$

Les équations (4.32) et (4.33) contiennent des bilinéarités dans les termes  $Z\mathbb{B}_N Z\mathbb{B}_E D_w$  et  $B_u K_u Z\mathbb{B}_E D_w$  car  $Z$  et  $K_u$  sont des matrices inconnues à déterminer. Pour éliminer ces bilinéarités et afin de rendre le problème d'optimisation convexe, nous imposons la contrainte suivante

$$Z\mathbb{B}_E D_w = 0 \tag{4.34}$$

Pour que la contrainte (4.34) soit satisfaite, il est nécessaire et suffisant que l'équation suivante

$$Z\mathbb{B}_E D_w = \begin{bmatrix} K & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} D_w = E D_w = 0 \tag{4.35}$$

soit vérifiée.

En insérant l'équation (4.35) dans (4.32) et (4.33), nous obtenons

$$JD_w = Z\mathbb{B}_K \tag{4.36a}$$

$$\Theta_3 = B_w \tag{4.36b}$$

Ainsi la matrice  $Z$  solution de la contrainte (4.34) est donnée par l'expression suivante

$$\begin{aligned}
 Z &= \tilde{Z} \overbrace{(I - \mathbb{B}_E D_w (\mathbb{B}_E D_w)^+)^{\Phi}} \\
 &= \begin{bmatrix} \tilde{K} & \tilde{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & (I - D_w D_w^+) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \tilde{K} & \tilde{E} \overbrace{(I - D_w D_w^+)^{\Phi_2}} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} K & E \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

avec  $\tilde{Z} = \begin{bmatrix} \tilde{K} & \tilde{E} \end{bmatrix}$  est une matrice arbitraire de dimension appropriée. A partir de (4.35) et

(4.37), nous avons  $K = \tilde{K}$  et  $E = \tilde{E} \overbrace{(I - D_w D_w^+)^{\Phi_2}}$ .

De plus, la matrice  $RB_w - JD_w$  peut être réécrite de la manière suivante

$$RB_w - JD_w = \mathbb{A}_{RJ} - \tilde{Z} \Phi \mathbb{B}_{RJ} \tag{4.38}$$

où

$$\begin{aligned}
 \mathbb{A}_{RJ} &= \mathbb{A}_R B_w = B_w \\
 \mathbb{B}_{RJ} &= \mathbb{B}_R B_w - \mathbb{B}_K D_w = \begin{bmatrix} -D_w \\ C_y B_w \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Finalement, toutes les matrices de l'observateur (4.20) peuvent être calculées si la matrice de paramétrage  $\tilde{Z}$  est connue.

### 4.3.3 Synthèse de la commande robuste basée sur un observateur $H_\infty$

#### 4.3.3.1 Approche basée sur la matrice Hamiltonienne

Dans ce cas, si les conditions ii) et iii) de la proposition 4.3.1 sont satisfaites, alors le système augmenté (4.26) peut être exprimé comme suit

$$D^\alpha \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} A + B_u K_u & -B_u K_u \\ 0 & N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta A(t) & 0 \\ R \Delta A(t) & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_w \\ RB_w \end{bmatrix} w(t) \tag{4.39}$$

ou d'une manière équivalente,

$$D^\alpha \tilde{X}(t) = \left( \tilde{A} + \Delta \tilde{A}(t) \right) \tilde{X}(t) + \tilde{B} w(t) \tag{4.40}$$

tels que

$$\tilde{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} A + B_u K_u & -B_u K_u \\ 0 & N \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_w \\ RB_w \end{bmatrix}$$

$$\Delta \tilde{A}(t) = \tilde{M}F(t)\tilde{N}_A \quad \tilde{M} = \begin{bmatrix} M \\ RM \end{bmatrix} \quad \tilde{N}_A = \begin{bmatrix} N_A & 0 \end{bmatrix}$$

Le théorème suivant donne les conditions d'existence d'un contrôleur basé sur un observateur de la forme (4.20).

**Théorème 4.3.1.** *Le système (4.20) est un contrôleur basé sur un observateur  $H_\infty$  pour le système incertain (4.18) avec un indice de performance d'atténuation de perturbation donné  $\gamma$ , s'il existe deux matrices hermitiennes définies positives  $P_1$  et  $P_2$ , deux matrices  $X_1$  et  $X_2$ , et un scalaire positif  $\mu_1$  tels que l'inégalité matricielle suivante soit satisfaite*

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ * & \Omega_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.41)$$

où

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= \begin{bmatrix} \text{Sym}\{\Xi_1(AP_1 + B_u X_1)\} & -B_u K_u \\ * & \text{Sym}\{\Xi_1(P_2 \mathbb{A}_N - X_2 \mathbb{B}_N)\} \end{bmatrix} \\ \Omega_{12} &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ P_2 \mathbb{A}_R M + X_2 \mathbb{B}_R M \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} P_1^{-1} N_A^T \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_w \\ P_2 \mathbb{A}_R B_w + X_2 \mathbb{B}_R B_w \end{bmatrix} & \Xi_1^* I \end{bmatrix} \\ \Omega_{22} &= \begin{bmatrix} -\mu_1 I & 0 & 0 & 0 \\ * & -\frac{1}{\mu_1} I & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_R &= I_n - \mathbb{A}_2 C & X_1 &= K_u P_1^{-1} \\ \mathbb{B}_R &= \mathbb{B}_2 C & X_2 &= P_2 Z \end{aligned}$$

*Démonstration.* La démonstration détaillée de ce résultat est omise. Cependant, cette démonstration peut être obtenue en remplaçant toutes les matrices du système  $A$ ,  $B_w$ ,  $N_A$  et  $M$  dans l'inégalité (4.5) par leur expression donnée dans le système augmenté (4.39)  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}_w$ ,  $\tilde{N}_A$  et  $\tilde{M}$ , respectivement. Ainsi, l'inégalité (4.41) est obtenue par pré- et post- multiplication de l'inégalité ci-dessus par les matrices suivantes,  $\begin{bmatrix} P_{01}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} P_{01}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T$  respectivement, où  $P_{01}^{-1} = P_1$ . •

Nous pouvons remarquer que la condition d'existence d'une commande basée sur un observateur  $H_\infty$  donné par l'inégalité (4.41) est non convexe. Le produit comprend les deux matrices de décision  $P_1$  et  $K_u$ , ainsi que la présence de matrices  $P_1$  et son inverse  $P_1^{-1}$  conduisant à une inégalité matricielle bilinéaire (BMI). L'inégalité (4.41) ne peut pas être résolue pour  $(P_1, P_2, X_1, X_2, K_u)$  en même temps. Par conséquent, nous proposons de résoudre ce problème en deux étapes. Nous commençons d'abord par la résolution de la première composante  $\Omega_{11}$ . Après l'obtention des matrices  $P_1$  et  $X_1$  solution de  $\text{Sym}\{\Xi_1(AP_1 + B_u X_1)\} < 0$ , qui sont remplacées dans l'inégalité (4.41), nous conduit à une LMI.

### 4.3.3.2 Approche basée sur le lemme de KYP

Dans cette section, la synthèse d'une loi de commande basée sur un observateur  $H_\infty$  sera traitée. Tout d'abord, en tenant compte des conditions ii) et iii) et des équations (4.27) et (4.37), les matrices du système en boucle fermée (4.26) deviennent

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A + B_u K_u & -B_u K_u \\ 0 & A - \tilde{Z} \Phi \mathbb{B}_N \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_w = \begin{bmatrix} B_w \\ B_w - \tilde{Z} \Phi \mathbb{B}_{RJ} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}_u = 0, \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}_w = 0,$$

$$\Delta \tilde{A}(t) = \tilde{M}_x F(t) \tilde{N}_x, \quad \Delta \tilde{B}(t) = \tilde{M}_x F(t) \tilde{N}_w,$$

et

$$\tilde{M}_x = \begin{bmatrix} M_x \\ (I_n - \tilde{E} \Phi_2 C_y) M_x \end{bmatrix}, \quad \tilde{N}_x = \begin{bmatrix} N_x & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{N}_w = N_w.$$

Ainsi, la synthèse d'une loi commande robuste basée sur un observateur  $H_\infty$  se réduit à trouver des matrices  $\tilde{Z}$  et  $K_u$ . En notant qu'une fois la matrice  $E$  est déterminée, on peut déduire facilement la matrice  $H$  à partir de l'équation (4.31b).

De plus, en se basant sur les lemmes 4.2.3 et 4.2.4, la stabilisation du système DU-FOS (4.18) peut être transformée en un problème d'optimisation en calculant la norme  $H_\infty$  du système (4.26).

#### 4.3.3.2.1 Cas où : $0 < \alpha < 1$

**Théorème 4.3.2.** *Sous l'hypothèse 4.3.2, le système (4.20) est un contrôleur basé sur un observateur  $H_\infty$  pour le système (4.18) garantissant un niveau de performance  $\gamma$  de rejet des perturbations, s'il existe une matrice  $\Psi_1 \in \mathbb{C}^{n \times n}$  telle que  $\Re(\Psi_1) \neq \tan(\theta) \Im(\Psi_1)$ , et une matrice symétrique définie positive  $\Psi_2 = \Psi_2^* \in \mathbb{R}^{r \times r}$ , deux matrices  $\mathcal{K}_u$  et  $\mathcal{Z}$ , et un scalaire positif  $\mu_1$ , telle que l'inégalité matricielle suivante*

$$\begin{bmatrix} {}_{01}\tilde{\Theta}_{11} & {}_{01}\tilde{\Theta}_{12} \\ * & {}_{01}\tilde{\Theta}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_{01}\Sigma_{11} & {}_{01}\Sigma_{12} \\ * & {}_{01}\Sigma_{22} \end{bmatrix} & * \\ \begin{bmatrix} \Upsilon_1 & {}_{01}\mathcal{X}_4 \\ {}_{01}\mathcal{Y}_4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\Upsilon_1 & 0 \\ 0 & -\Upsilon_1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.42)$$

est satisfaite pour un ordre fractionnaire  $0 < \alpha < 1$ , où

$${}_{01}\Sigma_{11} = \text{sym} \left\{ \begin{bmatrix} A\Upsilon_1 + B_u \mathcal{K}_u & 0 \\ 0 & \Upsilon_2 A - \mathcal{Z} \Phi \mathbb{B}_N \end{bmatrix} \right\}$$

$${}_{01}\Sigma_{12} = \begin{bmatrix} M_x \\ \Upsilon_2 M_x - \mathcal{Z}_2 \Phi_2 C_y M_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\Psi_1} N_x^T \\ 0 \end{bmatrix} \dots$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \Psi_1 N_x^T \\ 0 \end{bmatrix} \quad 0 \quad 0 \quad \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad 0 \quad \begin{bmatrix} B_w \\ \Upsilon_2 B_w - Z \Phi \mathbb{B}_{RJ} \end{bmatrix} \\
 {}_{01}\Sigma_{22} = & \begin{bmatrix} -\frac{1}{3\mu_1}I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & -\mu_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\mu_1 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\frac{1}{3\mu_1}I & 0 \\ * & * & * & * & * & -\gamma I + \Lambda_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 {}_{01}\mathcal{X}_4 &= \begin{bmatrix} -K_u^T B_u^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 {}_{01}\mathcal{Y}_4 &= \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

avec

$$\Upsilon_1 = e^{j\theta}\Psi_1 + e^{-j\theta}\overline{\Psi_1} \qquad \Upsilon_2 = 2 \cos(\theta)\Psi_2$$

De plus, les matrices  $K_u$  et  $Z$  sont données par

$$K_u = \mathcal{K}_u \Upsilon_1^{-1} \qquad \tilde{Z} = \Upsilon_2^{-1} Z$$

**Remarque 4.3.3.** Notez que la matrice  $\Upsilon_1 = e^{j\theta}\Psi_1 + e^{-j\theta}\overline{\Psi_1}$  doit être non singulière. Pour cela, la partie réelle de la matrice  $\Psi_1$  doit être choisie comme suit

$$\Re(\Psi_1) \neq \tan(\theta)\Im(\Psi_1) \tag{4.43}$$

•

*Démonstration.* Tout d'abord, nous considérons la structure suivante pour la matrice  $\Psi$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_1 & 0 \\ 0 & \Psi_2 \end{bmatrix}$$

où  $\Psi_1 \in \mathbb{C}^{n \times n}$  et  $\Psi_2 = \Psi_2^* \in \mathbb{R}^{r \times r}$ .

On en déduit que

$$e^{j\theta}\Psi + e^{-j\theta}\overline{\Psi} = \begin{bmatrix} e^{j\theta}\Psi_1 + e^{-j\theta}\overline{\Psi_1} & 0 \\ 0 & (e^{j\theta} + e^{-j\theta})\Psi_2 \end{bmatrix} \tag{4.44}$$

$$= \begin{bmatrix} \Upsilon_1 & 0 \\ 0 & \Upsilon_2^{-1} \end{bmatrix} \tag{4.45}$$

où  $(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) = 2 \cos(\theta)$ .

En remplaçant les matrices  $A$ ,  $B_w$ ,  $N_x$ ,  $N_w$  et  $M_x$  dans l'inégalité (4.11), par  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}_w$ ,  $\tilde{N}_x$ ,  $\tilde{N}_w$  et  $\tilde{M}_x$  respectivement, données dans le système en boucle fermée (4.26), l'inégalité (4.11) devient

$$\begin{bmatrix} {}_{01}\Theta_{11} & {}_{01}\Theta_{12} \\ * & {}_{01}\Theta_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.46)$$

où

$${}_{01}\Theta_{11} = \text{sym} \left\{ \begin{bmatrix} A\Upsilon_1 + B_u\mathcal{K}_u & -B_u\mathcal{K}_u\Upsilon_2^{-1} \\ 0 & A\Upsilon_2^{-1} - \tilde{Z}\Phi_{\mathbb{B}_N}\Upsilon_2^{-1} \end{bmatrix} \right\}$$

Les termes  ${}_{01}\Theta_{12}$  et  ${}_{01}\Theta_{22}$  peuvent également être réécrits sous la forme suivante

$${}_{01}\Theta_{12} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ (I_n - \tilde{E}\Phi_2 C_y)M_x \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \overline{\Psi}_1 N_x^T \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Psi_1 N_x^T \\ 0 \end{bmatrix} & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \left( \begin{bmatrix} 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Upsilon_1 & 0 \\ 0 & \Upsilon_2^{-1} \end{bmatrix} \right)^* & 0 & \begin{bmatrix} B_w \\ B_w - \tilde{Z}\Phi_{\mathbb{B}_R J} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

et

$${}_{01}\Theta_{22} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3\mu_1}I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & -\mu_1 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma I & 0 & 0 \\ * & * & * & -\frac{1}{3\mu_1}I & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma I + \Lambda_2 \end{bmatrix}$$

En pré- et post- multipliant l'inégalité (4.46) par les matrices suivantes  $\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \Upsilon_2 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$  et

$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \Upsilon_2 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T$ , respectivement, nous obtenons

$$\begin{bmatrix} {}_{01}\tilde{\Theta}_{11} & {}_{01}\tilde{\Theta}_{12} \\ * & {}_{01}\tilde{\Theta}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \Upsilon_2 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_{01}\Theta_{11} & {}_{01}\Theta_{12} \\ * & {}_{01}\Theta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \Upsilon_2 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T < 0 \quad (4.47)$$

où

$${}_{01}\tilde{\Theta}_{11} = \text{sym} \left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} A\Upsilon_1 + B_u\mathcal{K}_u & 0 \\ 0 & \Upsilon_2 A - \mathcal{Z}\Phi_{\mathbb{B}_N} \end{bmatrix}}^{{}_{01}\Sigma_{11}} \right\} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & -B_u\mathcal{K}_u \\ * & 0 \end{bmatrix}}^{{}_{01}\tilde{\Sigma}_{11}}$$

$${}_{01}\tilde{\Theta}_{12} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ \Upsilon_2 M_x - \mathcal{Z}_2 \Phi_2 C_y M_x \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \overline{\Psi}_1 N_x^T \\ 0 \end{bmatrix} & \dots \\ & \begin{bmatrix} \Psi_1 N_x^T \\ 0 \end{bmatrix} & 0 & 0 & \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} & 0 & \begin{bmatrix} B_w \\ \Upsilon_2 B_w - \mathcal{Z} \Phi \mathbb{B}_{RJ} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$${}_{01}\tilde{\Theta}_{22} = {}_{01}\Theta_{22} = {}_{01}\Sigma_{22}$$

$${}_{01}\Sigma_{22} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3\mu_1}I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & -\mu_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\mu_1 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\frac{1}{3\mu_1}I & 0 \\ * & * & * & * & * & -\gamma I + \Lambda_2 \end{bmatrix}$$

où  $\mathcal{Z} = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_1 & \mathcal{Z}_2 \end{bmatrix} = \Upsilon_2 \tilde{\mathcal{Z}}$  et  $\mathcal{K}_u = K_u \Upsilon_1$ .

En effet, l'inégalité (4.47) peut être représentée comme étant une somme d'une matrice avec des nouvelles variables de décision  $\mathcal{K}_u$  et  $\mathcal{Z}$ , et une matrice contenant les variables  $K_u$  et  $Z$  tel que

$$\begin{bmatrix} {}_{01}\tilde{\Theta}_{11} & {}_{01}\tilde{\Theta}_{12} \\ * & {}_{01}\tilde{\Theta}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_{01}\Sigma_{11} & {}_{01}\Sigma_{12} \\ * & {}_{01}\Sigma_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}_{01}\tilde{\Sigma}_{11} & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (4.48)$$

Maintenant, nous pouvons utiliser le lemme 1.4.2 pour éliminer les variables  $K_u$  et  $Z$ . Par conséquent, nous obtenons

$$\begin{bmatrix} {}_{01}\tilde{\Sigma}_{11} & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix} = \text{sym}\{ {}_{01}\mathcal{X}_4^* \quad {}_{01}\mathcal{Y}_4 \}$$

$$\leq - \begin{bmatrix} \Upsilon_1 & {}_{01}\mathcal{X}_4 \\ & {}_{01}\mathcal{Y}_4 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} -\Upsilon_1 & 0 \\ 0 & -\Upsilon_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Upsilon_1 & {}_{01}\mathcal{X}_4 \\ & {}_{01}\mathcal{Y}_4 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

où

$${}_{01}\mathcal{X}_4 = \begin{bmatrix} -K_u^T B_u^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.50a)$$

$${}_{01}\mathcal{Y}_4 = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.50b)$$

Finalement, en appliquant le complément de Schur, nous obtenons l'inégalité (4.42), ce qui complète la démonstration.  $\bullet$

#### 4.3.3.2.2 Cas où : $1 \leq \alpha < 2$

**Théorème 4.3.3.** *Sous l'hypothèse 4.3.2, le système (4.20) est un contrôleur basé sur un observateur  $H_\infty$  pour le système (4.18) garantissant un niveau de performance  $\gamma$  de rejet des perturbations, s'il existe deux matrices hermitiennes définies positives  $P_1$  et  $P_2$ , deux matrices  $\mathcal{K}_u$  et*

$\mathcal{Z}$ , et un scalaire positif  $\mu_1$ , afin que l'inégalité matricielle suivante

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_{12}\Sigma_{11} & {}_{12}\Sigma_{12} \\ * & {}_{12}\Sigma_{22} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} {}_{12}\mathcal{X}_5^T P_1 & {}_{12}\mathcal{Y}_5^T \end{bmatrix} \\ * & \begin{bmatrix} -P_1 & 0 \\ 0 & -P_1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.51)$$

soit satisfaite pour un ordre fractionnaire  $1 \leq \alpha < 2$ , où

$${}_{12}\Sigma_{11} = \text{sym} \left\{ e^{j\theta} \begin{bmatrix} AP_1 + B_u \mathcal{K}_u & 0 \\ 0 & P_2 A - \mathcal{Z} \Phi \mathbb{B}_N \end{bmatrix} \right\}$$

$${}_{12}\Sigma_{12} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ P_2 M_x - \mathcal{Z}_2 \Phi_2 C_y M_x \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} P_1 N_x^T \\ 0 \end{bmatrix} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \begin{bmatrix} 0 \\ e^{j\theta} I \end{bmatrix} & 0 & \begin{bmatrix} B_w \\ P_2 B_w - \mathcal{Z} \Phi \mathbb{B}_{RJ} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$${}_{12}\Sigma_{22} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\mu_1} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & -\mu_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\mu_1 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\frac{1}{2\mu_1} I & 0 \\ * & * & * & * & * & -\gamma I + \Lambda_2 \end{bmatrix}$$

et

$$P_1 {}_{12}\mathcal{X}_5 = \begin{bmatrix} -e^{-j\theta} \mathcal{K}_u^T B_u^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}_{12}\mathcal{Y}_5 = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

avec

$$\mathbb{A}_R = I_n - \mathbb{A}_E C \quad \mathbb{B}_R = \mathbb{B}_E C$$

De plus, les matrices gains  $K_u$  et  $Z$  sont données par

$$K_u = \mathcal{K}_u P_1^{-1} \quad \tilde{Z} = P_2^{-1} \mathcal{Z}$$

*Démonstration.* La démonstration est omise car elle est similaire à celle de la sous-section 4.3.2. •

**Remarque 4.3.4.** On peut remarquer que les inégalités (4.42) et (4.51) sont non linéaires à cause de la présence du scalaire  $\mu_1$  et son inverse  $\mu_1^{-1}$ . Cependant, pour un scalaire positif  $\mu_1$  fixé, les inégalités (4.42) et (4.51) deviennent des LMIs qui dépendent uniquement des variables  $P_1, P_2, \Psi_1, \Psi_1, \mathcal{K}_u, \mathcal{Z}$  et le niveau de performance  $\gamma$  du rejet des perturbations. Pour contourner

ce problème de choix du scalaire  $\mu_1$ , nous utilisons la méthode des grilles proposée dans [LF97]. Pour cela, nous commençons par réaliser le changement de variable suivant  $\xi_1 = \mu_1/(1 + \mu_1)$  ce qui implique que  $\mu_1 = \xi_1/(1 - \xi_1)$ . Il est facile de remarquer que  $\mu_1 > 0$  si et seulement si  $\xi_1 \in ]0, 1[$ . Ensuite, nous divisons l'intervalle  $]0, 1[$  soit en échelle normale ou logarithmique. Par la suite, nous affectons à la variable  $\xi_1$ , les valeurs obtenues par la subdivision de l'intervalle  $]0, 1[$ , d'une manière itérative. Puis, en remplaçant  $\mu_1$  par la nouvelle valeur à chaque itération dans l'expression (4.42) et (4.51), on obtient des problèmes d'optimisation convexes impliquant des conditions LMI. Ces dernières, peuvent être résolues de manière efficace, en utilisant un des outils de résolution des LMI pour chaque valeur  $\xi_1$  dans l'intervalle  $]0, 1[$ . •

**Remarque 4.3.5.** Dans le cas, où les incertitudes sont égales à zéro, on peut remarquer qu'il n'est pas nécessaire de linéariser les inégalités matricielles obtenues, ceci est dû à la non-existence des scalaires  $\mu_i$  et leurs inverses. •

#### 4.3.4 Lien avec la synthèse de lois de commande $H_\infty$ par retour de sortie dynamique

Dans cette section, nous allons présenter une comparaison entre les résultats présentés dans cette section et l'approche de commande utilisant un retour de sortie dynamique présentée dans [FFSS13]. Pour une simplification, nous considérons le cas où  $\Delta A(t) = 0$ . Le système considéré dans [FFSS13] est de la forme

$$D^\alpha x(t) = Ax(t) + B_u u(t) + B_w w(t) \quad (4.52a)$$

$$y(t) = C_y x(t) + D_w w(t) \quad (4.52b)$$

$$z(t) = C_z x(t) + D_z u(t) + D_{zw} w(t) \quad (4.52c)$$

avec  $D = 0$ .

Dans [FFSS13], l'objectif est de concevoir un contrôleur dynamique d'ordre fractionnaire  $\mathcal{K}$  de la forme

$$D^\alpha x_k(t) = A_k x(t) + B_k y(t) \quad (4.53a)$$

$$u_k(t) = C_k x_k(t) + D_k y(t) \quad (4.53b)$$

Dans ce cas, la représentation en boucle fermée devient

$$D^\alpha \tilde{x}(t) = \mathcal{A} \tilde{x}(t) + \mathcal{B} w(t) \quad (4.54a)$$

$$z(t) = \mathcal{C} \tilde{x}(t) + \mathcal{D} w(t) \quad (4.54b)$$

où

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & x_k^T(t) \end{bmatrix}^T$$

avec

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A + B_u D_k C_y & B_u C_k \\ B_k C_y & A_K \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} B_w + B_u D_k D_w \\ B_k D_w \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \begin{bmatrix} C_z + D_z D_k C_y & D_z C_k \end{bmatrix} \\ \mathcal{D} &= D_{zw} + D_z D_k D_w. \end{aligned}$$

L'objectif dans la référence [FFSS13] est de concevoir un contrôleur  $\mathcal{K}$  tel que  $\|T_{zw}^{cl}\| < \gamma_1$ , où  $\gamma_1$  est un nombre réel positif, autrement dit

$$\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} < \gamma_1 \quad (4.55)$$

Par contre, notre objectif est de concevoir un contrôleur basé sur un observateur  $H_\infty$  (4.20), ce qui nous a conduit à obtenir la boucle fermée suivante

$$D^\alpha \tilde{X}(t) = \tilde{A}\tilde{X}(t) + \tilde{B}_w w(t) \quad (4.56a)$$

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) = \tilde{C}\tilde{X}(t) + \tilde{D}_w w(t) \quad (4.56b)$$

où les matrices  $\tilde{X}(t)$ ,  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}_w$ ,  $\tilde{C}$  et  $\tilde{D}_w$  sont données par (4.26).

Ainsi, l'objectif ici est de trouver un contrôleur basé sur un observateur (4.20) tel que  $\|T_{ew}^{cl}\| < \gamma_2$ , où  $\gamma_2$  est un nombre réel positif, autrement dit

$$\frac{\|e\|_2}{\|w\|_2} < \gamma_2 \quad (4.57)$$

Il est facile de constater que les objectifs du (4.55) et (4.57) sont différents. Pour cela, afin de comparer notre approche avec celle présentée dans [FFSS13], nous allons introduire une nouvelle variable  $z(t)$  donnée dans l'équation (4.52c). Dans ce cas, le système (4.56) devient

$$D^\alpha \tilde{X}(t) = \tilde{A}\tilde{X}(t) + \tilde{B}_w w(t) \quad (4.58a)$$

$$e(t) = \tilde{C}\tilde{X}(t) + \tilde{D}_w w(t) \quad (4.58b)$$

$$z(t) = \tilde{C}_z \tilde{X}(t) + \tilde{D}_z w(t) \quad (4.58c)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{C}_z &= \begin{bmatrix} C_z + D_z K_u & -D_z K_u \end{bmatrix} \\ \tilde{D}_z &= D_{zw} \end{aligned}$$

Le problème posé ainsi, est de résoudre

$$\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} < \gamma \quad (4.59)$$

D'après la sous-section 4.3.3, en tenant compte de la remarque 4.3.5, nous obtenons le Théorème suivant

**Théorème 4.3.4.** *La fonction de transfert du système donnée par (4.58a, 4.58c) avec  $1 \leq \alpha < 2$  a une norme  $H_\infty$  bornée par  $\gamma$ , s'il existe deux matrices hermitiennes définies positives  $P_1$  et  $P_2$ , deux matrices  $K_u$  et  $\mathcal{Z}$ , telle que l'inégalité matricielle suivante*

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_{12}\Sigma_{11} & {}_{12}\Sigma_{12} \\ * & {}_{12}\Sigma_{22} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} {}_{12}\mathcal{X}_6^T & {}_{12}\mathcal{Y}_6^T \end{bmatrix} \\ * & \begin{bmatrix} -\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & -\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P_1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.60)$$

soit satisfaite, où

$${}_{12}\Sigma_{11} = \text{sym} \left\{ e^{j\theta} \begin{bmatrix} AP_1 + B_u \mathcal{K}_u & 0 \\ 0 & P_2 A - Z \Phi \mathbb{B}_N \end{bmatrix} \right\}$$

$${}_{12}\Sigma_{12} = \begin{bmatrix} \left[ \left( e^{j\theta} (C_z P_1 + D_z \mathcal{K}_u) \right)^T \right] \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_w \\ P_2 B_w - Z \Phi \mathbb{B}_{RJ} \end{bmatrix}$$

$${}_{12}\Sigma_{22} = \begin{bmatrix} -\gamma I & D_{zw} \\ * & -\gamma I \end{bmatrix}$$

et

$${}_{12}\mathcal{X}_6 = \begin{bmatrix} -e^{-j\theta} \mathcal{K}_u^T B_u^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}_{12}\mathcal{Y}_6 = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathcal{K}_u^T D_z^T & 0 \end{bmatrix}$$

avec

$$\mathbb{A}_R = I_n - \mathbb{A}_E C \qquad \mathbb{B}_R = \mathbb{B}_E C$$

D'autre part, les matrices gains  $K_u$  et  $Z$ , du contrôleur et de l'observateur  $H_\infty$ , sont données par

$$K_u = \mathcal{K}_u P_1^{-1} \qquad \tilde{Z} = P_2^{-1} Z$$

## 4.4 Exemples numériques

### 4.4.1 Approche basée sur la matrice Hamiltonienne

Considérons le système d'ordre fractionnaire incertain perturbé décrit par

$$D^{1.5} x(t) = \left( \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 15 & -20 \end{bmatrix} + \Delta A(t) \right) x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.25 \end{bmatrix} w(t) \quad (4.61a)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (4.61b)$$

La matrice d'incertitude  $\Delta A(t)$  est donnée par

$$\Delta A(t) = M F(t) N_A = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.5 \\ 0.25 & 0.4 \end{bmatrix} F(t) \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

où  $F(t) = \text{diag}(0.15 \sin(25t), 0.15 \sin(25t))$ .

Ainsi, la condition d'inégalité (4.41) peut être résolue en utilisant une procédure en deux étapes. Les résultats obtenus pour  $\gamma = 0.41$  sont donnés par

$$P_1 = \begin{bmatrix} 375.02 & -27.3 \\ -27.3 & 18.9 \end{bmatrix}, X_1 = \begin{bmatrix} -12342 & 970.71 \end{bmatrix} P_2 = \begin{bmatrix} 20449 & -0.025 \\ -0.025 & 26.4 \end{bmatrix},$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 14460 & 2024.2 & -14460 & -202.37 \\ 198.19 & 568.19 & -198.18 & -56.54 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, le contrôleur basé sur un observateur est donné par

$$D^{1.5}\eta(t) = \begin{bmatrix} -0.7 & -3e-06 \\ -0.01 & -21.7 \end{bmatrix} \eta(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.63a)$$

$$+ \begin{bmatrix} -7e-07 \\ 11.2 \end{bmatrix} y(t) \quad (4.63b)$$

$$\hat{x}(t) = \eta(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \end{bmatrix} y(t) \quad (4.63c)$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} -32.6 & 4.3 \end{bmatrix} \hat{x}(t) \quad (4.63d)$$

La figure (4.2) représente la réponse en boucle ouverte du système (4.61). Les figures (4.3-4.6) montrent les performances obtenues par la commande basée sur l'observateur  $H_\infty$  proposé. Les états réels sont présentés avec leurs estimations et les erreurs d'estimation obtenues en utilisant la méthode proposée dans ce paragraphe. Il est clair que l'estimation du vecteur pseudo-état  $\hat{x}(t)$  converge vers  $x(t)$ .

Nous pouvons constater dans les figures (4.3-4.6) que la perturbation  $w(t)$  est activée dans l'intervalle de temps entre cinq et dix secondes. Dans cet intervalle, l'estimation  $\hat{x}(t)$  poursuit le pseudo-état actuel  $x(t)$  avec une erreur qui ne dépasse pas 0.25. Ceci est en accord avec la faible valeur du critère d'atténuation  $\gamma = 0.41$  du signal de perturbation  $w(t)$  donné dans la Figure 4.1.

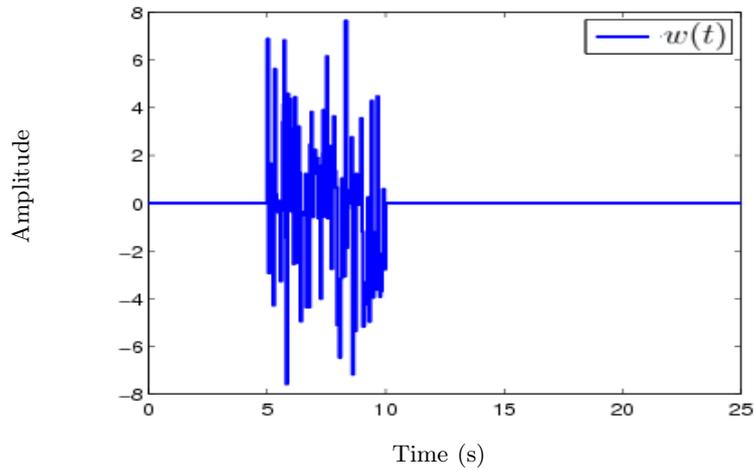


FIGURE 4.1 – Le signal des perturbations exogènes  $w(t)$

## 4.4.2 Approche basée sur le lemme de KYP

### 4.4.2.1 Cas où $0 < \alpha < 1$

Considérons le DU-FOS décrit par la représentation suivante

$$D^{0.5}x(t) = \left( \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} + \Delta A(t) \right) x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \end{bmatrix} w(t) \quad (4.64a)$$

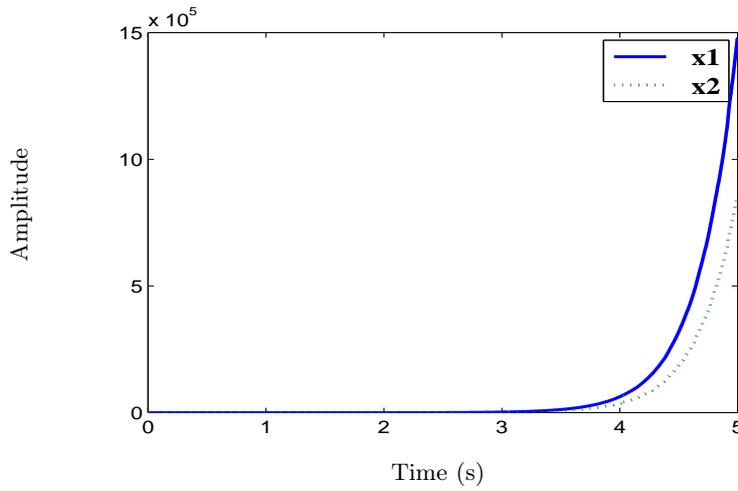


FIGURE 4.2 – L'évolution de  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  du système

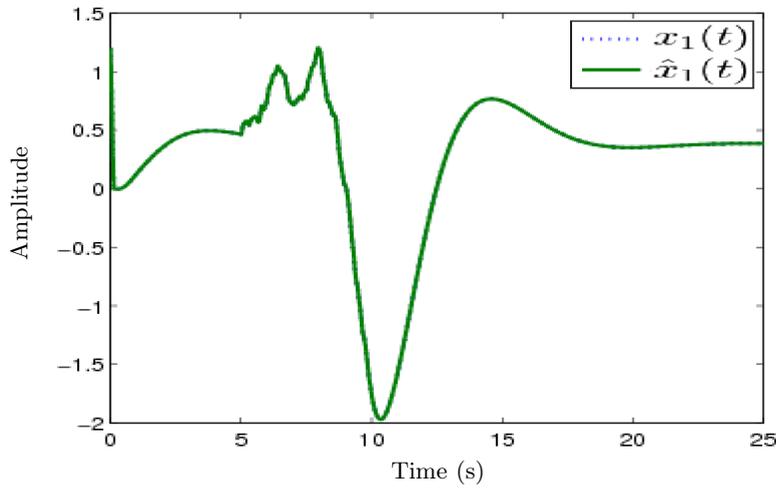


FIGURE 4.3 – L'évolution du pseudo-état  $x_1(t)$  et son estimation  $\hat{x}_1(t)$

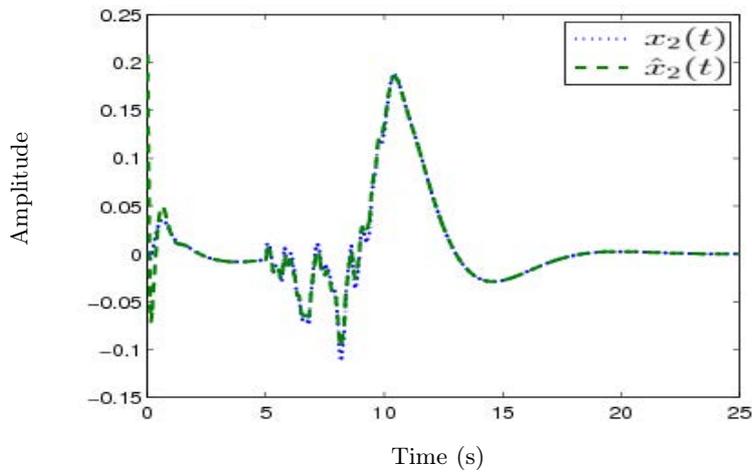
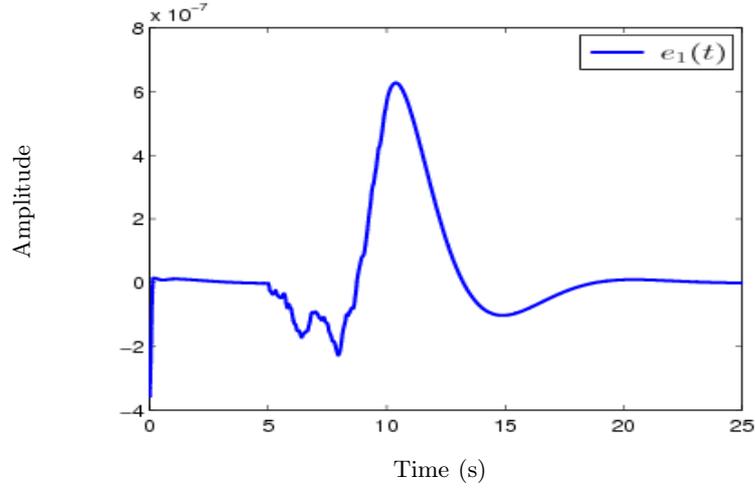
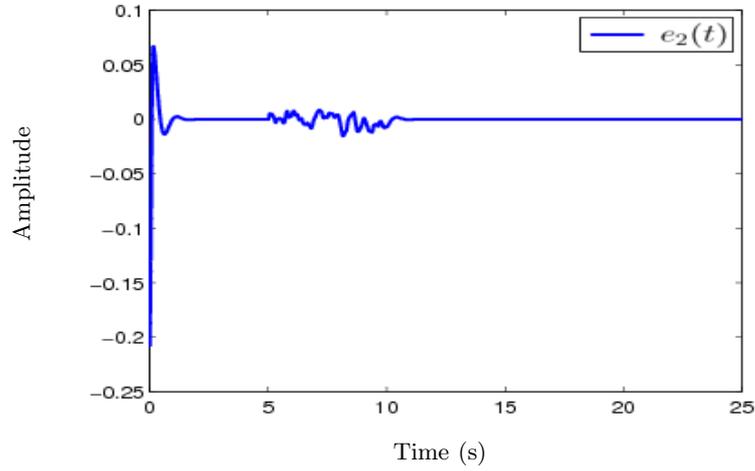


FIGURE 4.4 – L'évolution du pseudo-état  $x_2(t)$  et son estimation  $\hat{x}_2(t)$


 FIGURE 4.5 – L'évolution de l'erreur d'estimation  $e_1(t)$ 

 FIGURE 4.6 – L'évolution de l'erreur d'estimation  $e_2(t)$ 

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (4.64b)$$

où les incertitudes sont de la forme

$$\Delta A(t) = M_x F(t) N_x = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.01 \\ 0 & -0.4 \end{bmatrix} F \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

avec  $F = \text{diag}(0.75, 0.75)$ .

Les perturbations  $w(t)$  sont données dans la figure 4.7.

En appliquant le théorème 4.3.2, nous pouvons vérifier la faisabilité de l'inégalité (4.42). Les résultats obtenus pour  $\gamma = 1.0003$  et  $\mu_1 = 0.0012$  sont donnés par

$$\Upsilon_1 = \begin{bmatrix} 9.4878 & -0.21437 \\ -0.21437 & 0.01308 \end{bmatrix}, \quad \Upsilon_2 = \begin{bmatrix} 10787 & -568.78 \\ -568.78 & 31.702 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{K}_u = \begin{bmatrix} -730.09 & -3.2474 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Z} = \begin{bmatrix} 4.2059e^5 & -13554 \\ 13152 & 728.34 \end{bmatrix}$$

Ainsi, nous pouvons déduire le gain du contrôleur et le paramètre matriciel de l'observateur comme suit

$$K_u = \mathcal{K}_u \Upsilon_1^{-1} = \begin{bmatrix} -131.11 & -2397.1 \end{bmatrix}$$

$$Z = \Upsilon_2^{-1} \mathcal{Z} = \begin{bmatrix} 1126.7 & -0.83419 \\ 20629 & 8.008 \end{bmatrix}$$

Finalement, le contrôleur basé sur l'observateur est donné par

$$D^{0.5} \eta(t) = \begin{bmatrix} -1128.5 & 3.6684 \\ -20621 & -16.016 \end{bmatrix} \eta(t) + \begin{bmatrix} 1.8342 \\ -8.008 \end{bmatrix} u(t)$$

$$+ \begin{bmatrix} 2097.5 \\ 37703 \end{bmatrix} y(t) \quad (4.66a)$$

$$\hat{x}(t) = \eta(t) + \begin{bmatrix} -0.83419 \\ 8.008 \end{bmatrix} y(t) \quad (4.66b)$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} -131.11 & -2397.1 \end{bmatrix} \hat{x}(t) \quad (4.66c)$$

Les figures 4.10-4.15 montrent les performances et la robustesse de la commande basée sur l'observateur  $H_\infty$  proposée. Les figures 4.10 et 4.11 montrent la convergence des pseudo-états estimés vers les pseudo-états réels. Les figures 4.12 et 4.14 montrent les évolutions des erreurs d'estimations  $e_1$  et  $e_2$ .

Ces dernières sont agrandies (4.13 et 4.15) sur l'intervalle de temps  $t \in [4, 11]$ , afin de montrer l'influence de la perturbation  $w$  sur les erreurs d'estimation  $e_1$  et  $e_2$ . En premier lieu, les erreurs d'estimation convergent vers zéro, en dehors de la région où la perturbation  $w$  est activée. En revanche, l'effet de la perturbation  $w$  sur les erreurs d'estimation est minimisé par rapport à l'amplitude de la perturbation  $w$ , voir Figure 4.7.

Par conséquent, nous avons montré à travers les figures 4.7-4.15, que le contrôleur basé sur un observateur  $H_\infty$  stabilise robustement le système (4.64) via la commande donnée dans les Figures 4.8 et 4.9 avec un niveau de rejet des perturbations  $\gamma$ .

#### 4.4.2.2 Cas où $1 \leq \alpha < 2$

Dans cet exemple, nous utilisons les résultats obtenus dans la section 4.3.4, pour comparer les deux méthodes.

Considérons un système instable  $G(s)$  représenté dans la Figure 4.16. Ce système est décrit par le modèle suivant

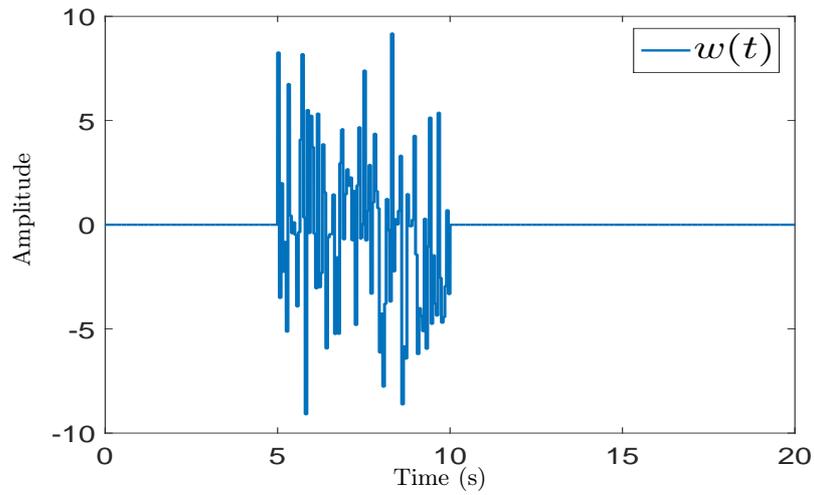
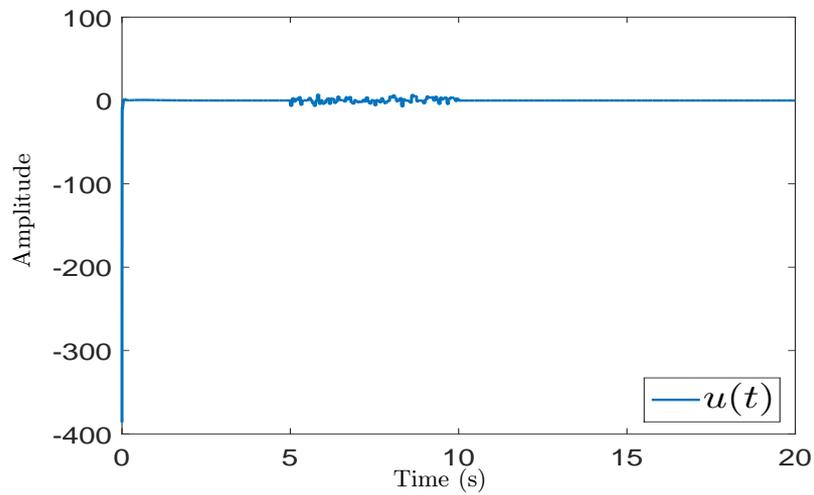
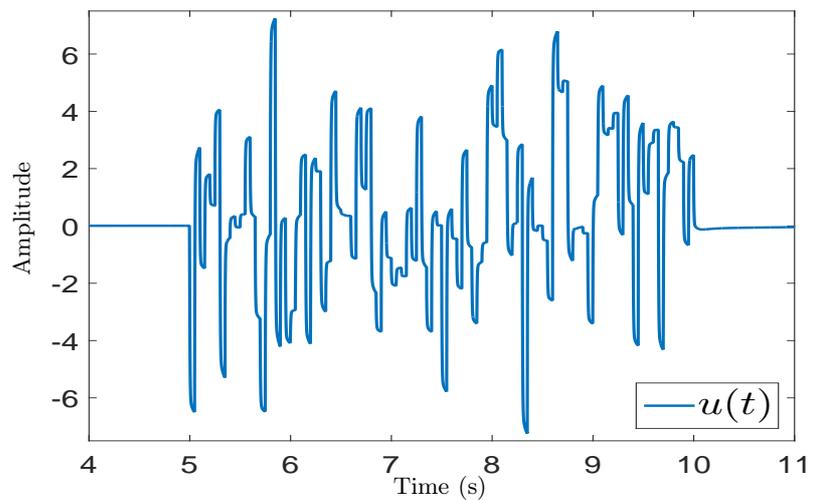
$$D^{1.25} x_g(t) = A_g x_g(t) + B_g u(t) \quad (4.67a)$$

$$y(t) = C_g x_g(t) \quad (4.67b)$$

Les fonctions de pondération considérées  $W_1(s)$  et  $W_2(s)$  comme le montre la Figure 4.16, ont la représentation suivante dans l'espace des pseudo-états

$$D^{1.25} x_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1(w(t) - y(t)) \quad (4.68a)$$

$$z_1(t) = C_1 x_1(t) + D_1(w(t) - y(t)) \quad (4.68b)$$

FIGURE 4.7 – Le signal des perturbations exogènes  $w(t)$ FIGURE 4.8 – Le signal de commande  $u(t)$ FIGURE 4.9 – Zoom sur l'évolution du signal de commande  $u(t)$  durant l'intervalle  $t \in [4, 11]$

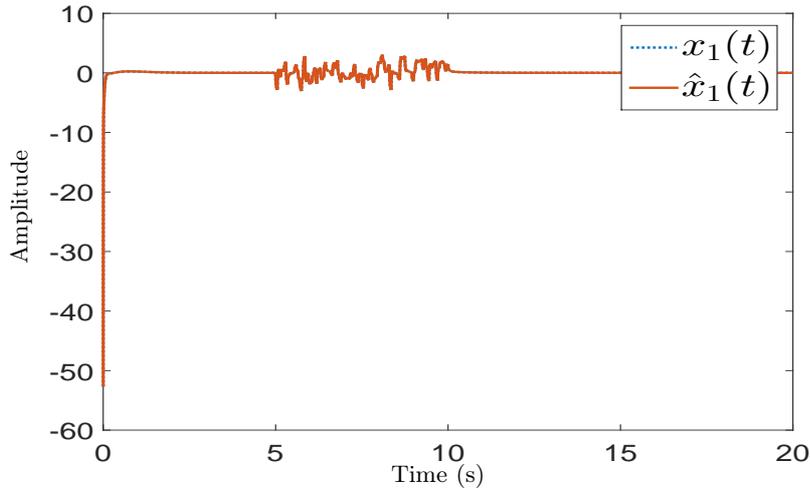


FIGURE 4.10 – Evolution du vecteur  $x_1(t)$  et de l'estimation  $\hat{x}_1(t)$  en boucle fermée

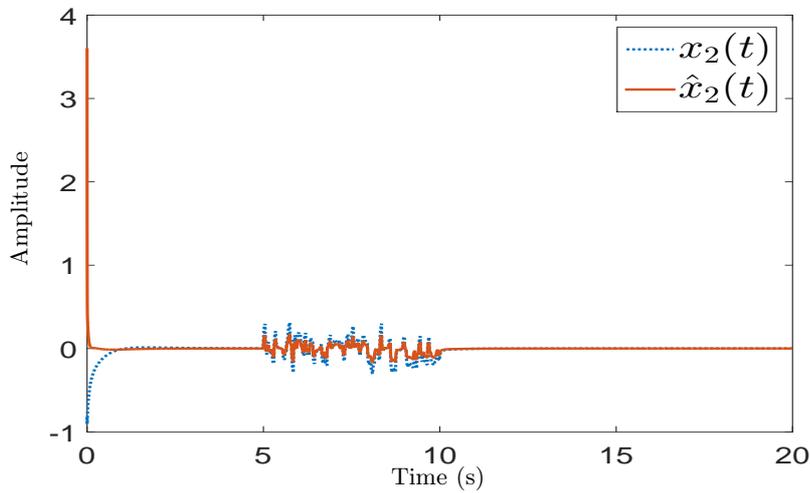


FIGURE 4.11 – Evolution du vecteur  $x_2(t)$  et de l'estimation  $\hat{x}_2(t)$  en boucle fermée

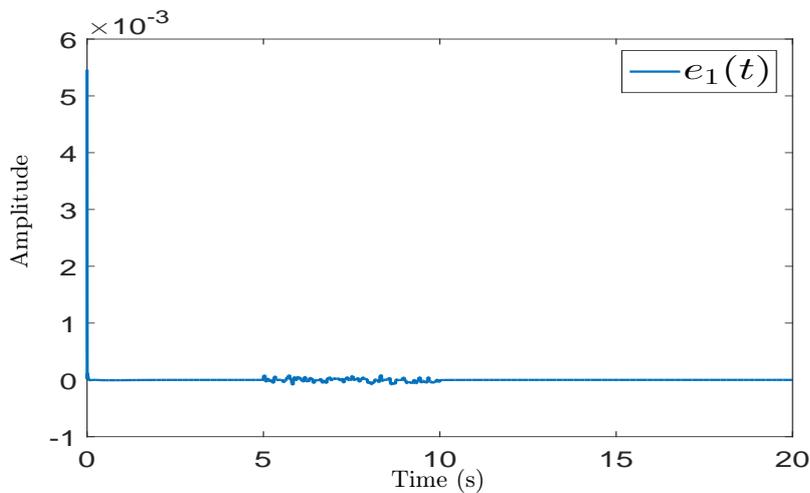
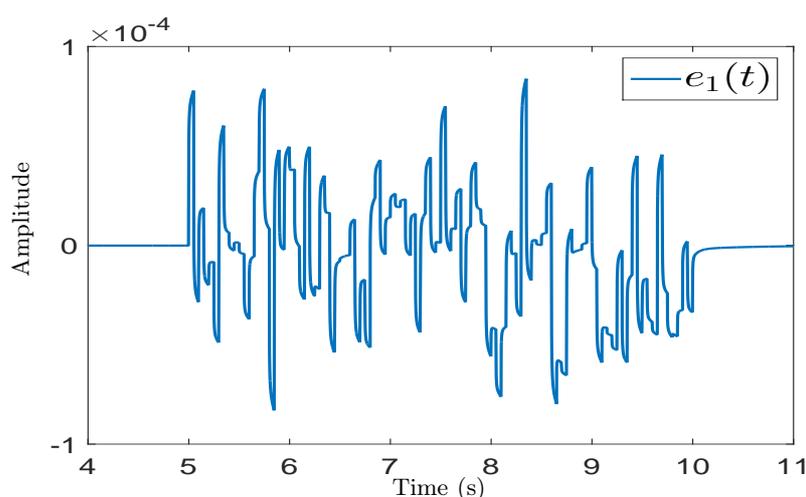
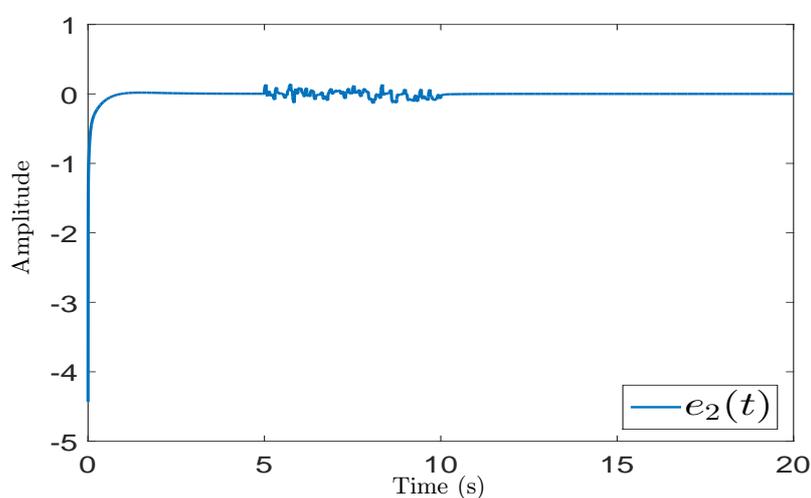


FIGURE 4.12 – Evolution de l'erreur d'estimation  $e_1(t)$

FIGURE 4.13 – Zoom sur l'évolution de l'erreur d'estimation  $e_1(t)$  durant l'intervalle  $t \in [4, 11]$ FIGURE 4.14 – Evolution de l'erreur d'estimation  $e_2(t)$ 

$$D^{1.25}x_2(t) = A_2x_2(t) + B_2y(t) \quad (4.69a)$$

$$z_2(t) = C_2x_2(t) + D_2y(t) \quad (4.69b)$$

Le problème de contrôle du système (4.67) avec les contraintes de pondération imposées (4.68) et (4.69) peut être reformulé comme étant un problème d'optimisation  $H_\infty$  (4.52) (Voir [FFSS13] pour plus de détails).

Les matrices qui définissent la représentation dans l'espace des pseudo-états (4.64), (4.68) et (4.69) sont données par

$$A_g = \begin{bmatrix} -0.5 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = -1, \quad A_2 = -2,$$

$$B_g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = 1, \quad B_2 = 1,$$

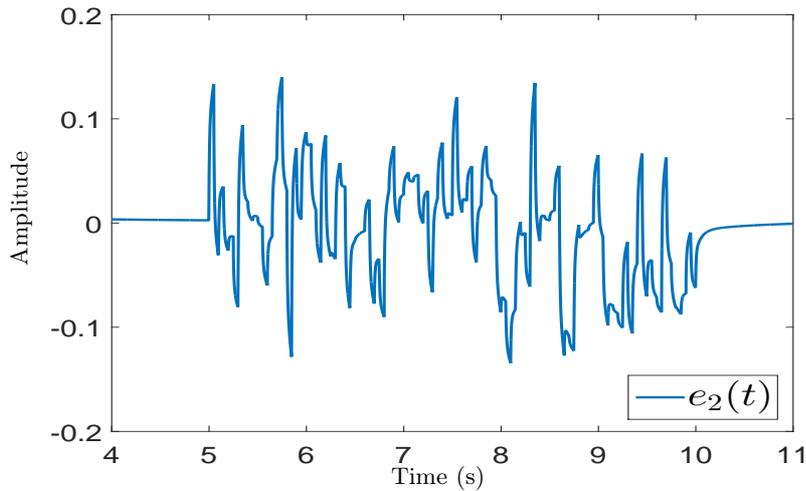


FIGURE 4.15 – Zoom sur l'évolution de l'erreur d'estimation  $e_2(t)$  durant l'intervalle  $t \in [4, 11]$

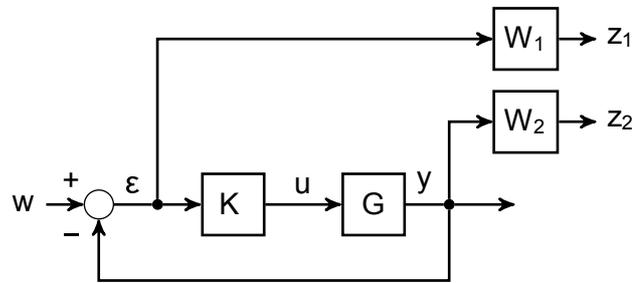


FIGURE 4.16 – Le système en boucle fermée

$$\begin{aligned}
 C_g &= \begin{bmatrix} 2.5 & 0 \end{bmatrix}, & C_1 &= 1.2744, & C_2 &= 6.965, \\
 D_g &= 0, & D_1 &= 0.0216, & D_2 &= 1.99e^{-5}.
 \end{aligned}$$

Le problème d'optimisation (4.60) donné dans le théorème 4.3.4 est résolu pour la valeur de  $\gamma = 2.3093$ . Alors que pour l'approche proposée par [FFSS13] nous obtenons  $\gamma_1 = 3.9071$ .

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la synthèse de la commande basée sur un observateur  $H_\infty$  garantissant la stabilisation robuste du DU-FOS. Les conditions d'existence d'une telle commande ainsi que la robustesse vis-à-vis des incertitudes et des perturbations ont été étudiées. Ces conditions sont données sous formes d'inégalités matricielles. L'observateur robuste avec performance  $H_\infty$  synthétisé, assure la stabilisation de la boucle fermée et minimise l'effet des perturbations malgré que le système est incertain et soumis à des perturbations. Enfin, des exemples numériques ont été proposés pour montrer l'efficacité des méthodes proposées.

# Conclusion générale

L'ensemble de ce travail de thèse est consacré aux systèmes d'ordre fractionnaire avec et sans retards. Le travail développé dans les chapitres de ce manuscrit concerne cette classe de systèmes et se divise en quatre parties, qui sont l'analyse de stabilité, la synthèse d'observateurs dans le cas nominal, la synthèse d'observateurs robustes et la conception de lois de commande basées sur les observateurs obtenus. Dans ce qui suit, nous résumons nos contributions et nous proposons quelques perspectives.

Il a été démontré que la stabilité d'un système fractionnaire à retards variant dans le temps peut être analysée en se basant sur les approches temporelles de type Lyapunov. En effet, la condition obtenue offre un cadre de travail approprié pour l'étude et la conception de différents types d'observateurs pour ces systèmes.

Dans un deuxième temps, le problème de conception de différents types d'observateurs, d'ordre plein, réduit et fonctionnel pour des systèmes d'ordre fractionnaire a été traité. Des conditions nécessaires et suffisantes de convergence de l'erreur d'estimation ont été obtenues grâce à l'utilisation d'une LMI dans le cas où  $1 < \alpha < 2$  et d'une *GLMI* dans le cas où  $0 < \alpha < 1$ . De plus, dans le cas de présence de retard variant dans le temps dans la dynamique de cette classe de systèmes, une méthodologie de construction d'observateurs fonctionnels a été présentée. Des conditions d'existence de ces observateurs ont été obtenues sous forme de contraintes à satisfaire. Puis, en utilisant l'analyse de stabilité, une condition suffisante permettant d'assurer la stabilité de l'erreur d'estimation sous forme de LMI a été déduite.

Dans le troisième chapitre, le cas des systèmes d'ordre fractionnaire à retard variant dans le temps en présence de plusieurs types de perturbations (endogènes ou exogènes) a été considéré. Différents observateurs ont été proposés pour ces systèmes. Tout d'abord, nous avons étudié le problème de conception des observateurs pour cette classe de systèmes. Des contraintes algébriques sous forme de système d'équations à résoudre ont été obtenues à partir de l'analyse de l'erreur d'estimation. Par la suite, le problème de conception d'observateurs a été réduit à la détermination d'une matrice de paramétrage. Le problème de la détermination de cette matrice de paramétrage a été formulé en un problème d'optimisation donné sous forme des LMI. Ces différentes classes d'observateurs synthétisés peuvent être utiles par la suite afin de générer des lois de commande basées sur observateurs pour ces systèmes, ainsi que pour la détection de défauts et le diagnostic. Des exemples numériques ont été présentés pour illustrer toutes les procédures présentées dans ce manuscrit.

Dans le dernier chapitre, le problème de synthèse de commande robuste basée sur un observateur avec des performances de type  $H_\infty$  qui assure la stabilisation robuste du DU-FOS a été abordé. Les conditions d'existence d'un tel observateur ont été obtenues, ainsi que la stabilisation robuste satisfaisant l'exigence de performance en boucle fermée en présence d'incertitudes et de perturbations a été étudiée. En se basant sur les contraintes algébriques dérivées de l'analyse de la dynamique d'erreur d'estimation, des conditions suffisantes assurant les exigences citées

auparavant sont déduites. Ces conditions sont données sous formes d'inégalités matricielles. L'observateur robuste avec performance  $H_\infty$  synthétisé, assure la stabilisation de la boucle fermée et minimise l'effet des perturbations sur le système et l'erreur d'estimation malgré que le système est incertain et soumis à des perturbations bornées. Enfin, des exemples numériques ont été proposés pour montrer l'efficacité des méthodes proposées.

Les perspectives de ce travail peuvent être dans l'extension de nos résultats aux systèmes non linéaires d'ordre fractionnaire. Des sujets importants dans la pratique qui sont la détection, la localisation des défauts et le problème de commande tolérante aux défauts et sur lesquels il n'existe que peu de travaux dans le cas des systèmes d'ordre fractionnaire.

# Annexe A

## Inégalités matricielles linéaires et compléments mathématiques

### Sommaire

---

<b>A.1 Normes vectorielles et matricielles . . . . .</b>	<b>113</b>
A.1.1 Relations sur les normes vectorielles et matricielles . . . . .	113
<b>A.2 Pseudo-inverses et solutions des équations linéaires . . . . .</b>	<b>114</b>
A.2.1 Solutions d'une équation linéaire et pseudo-inverses . . . . .	114
A.2.2 Pseudo-inverses réflexives . . . . .	116
A.2.3 Pseudo-inverse de Moore-Penrose . . . . .	116
A.2.4 Condition d'existence d'une solution . . . . .	116
<b>A.3 Inégalités matricielles linéaires (LMI) . . . . .</b>	<b>117</b>
A.3.1 Lemme de Schur . . . . .	117

---

### A.1 Normes vectorielles et matricielles

#### A.1.1 Relations sur les normes vectorielles et matricielles

La norme euclidienne, aussi appelée norme 2 ou norme de Frobenius, du vecteur  $x \in \mathbb{C}^n$  est

$$\|x\| = \|x\|_2 = \|x\|_F = \sqrt{x^H x} = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.1.1})$$

La décomposition en valeurs singulières de la matrice  $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$  est définie par

$$A = USV^H \quad (\text{A.1.2})$$

où  $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$  et  $V \in \mathbb{C}^{m \times m}$  sont des matrices unitaires ( $UU^H = U^H U = I_n$  et  $VV^H = V^H V = I_m$ )

et  $S$  est une matrice diagonale donnée par

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_1(A) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2(A) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_r(A) & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0_{n-r \times m-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{S} & 0_{r \times m-r} \\ 0_{n-r \times r} & 0_{n-r \times m-r} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.3})$$

avec  $S \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\text{rang}(S) = r$ ,  $\sigma_i(A) > 0$  et  $\sigma_{i+1}(A) = \lambda_{i+1}(A^H A) \geq \sigma_i(A) = \lambda_i(A^H A)$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Si  $i = \min(n, m) > r$ , alors  $\sigma_i(A) = 0$ .

La norme euclidienne, aussi appelée norme de Frobenius, de la matrice  $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$  est donnée par

$$\|A\| = \|A\|_F = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |A_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{k=1}^{\min(n,m)} \sigma_k^2(A) \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\text{tr}(A^H A)}. \quad (\text{A.1.4})$$

La norme 2, aussi appelée norme 2 induite, de la matrice  $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$  est donnée par

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \max_{\|x\|_2 \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sigma_{\max}(A). \quad (\text{A.1.5})$$

La norme 2 vérifient les inégalités suivantes (avec  $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ,  $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  et  $C \in \mathbb{C}^{m \times p}$ ) [HJ85]

$$\|A + B\|_2 \leq \|A\|_2 + \|B\|_2, \quad (\text{A.1.6a})$$

$$\|AC\|_2 \leq \|A\|_2 \|C\|_2, \quad (\text{A.1.6b})$$

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n} \|A\|_2, \quad (\text{A.1.6c})$$

$$\|A\|_2 = \|UAV\|_2, \quad (\text{A.1.6d})$$

$$\max(|A_{i,j}|) \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{nm} \max(|A_{i,j}|), \quad (\text{A.1.6e})$$

$$\max(|\lambda_i(A)|) \leq \|A\|_2, \quad (\text{A.1.6f})$$

où  $U$  et  $V$  sont des matrices unitaires.

## A.2 Pseudo-inverses et solutions des équations linéaires

Les relations présentées dans cette section sont extraites de [RM71, BG74, YTT11].

### A.2.1 Solutions d'une équation linéaire et pseudo-inverses

Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ .  $A^\dagger \in \mathbb{C}^{m \times n}$  est une pseudo-inverse de  $A$  si

$$A = AA^\dagger A. \quad (\text{A.2.1})$$

La pseudo-inverse  $A^\dagger$  vérifie

$$\text{rang}(A^\dagger) \geq \text{rang}(A) = \text{rang}(AA^\dagger) = \text{rang}(A^\dagger A) = \text{rang}(A^\dagger A^\dagger A). \quad (\text{A.2.2})$$

Toutes les pseudo-inverses  $X = A^\dagger$  sont paramétrées par

$$X = A^\dagger + U - A^\dagger A U A A^\dagger \quad (\text{A.2.3})$$

ou par

$$X = A^\dagger + V(I_n - A A^\dagger) + (I_m - A^\dagger A)W \quad (\text{A.2.4})$$

où  $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $V \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $W \in \mathbb{R}^{m \times n}$  sont des matrices arbitraires.

$A A^\dagger$  est un projecteur sur  $\text{Im}(A)$  le long de  $\mathcal{W}$  et  $A^\dagger A$  est un projecteur sur  $\overline{\mathcal{V}}$  le long de  $\ker(A)$  avec

$$\text{Im}(A A^\dagger) = \text{Im}(A), \quad (\text{A.2.5a})$$

$$\ker(A A^\dagger) = \text{Im}(I_n - A A^\dagger), \quad (\text{A.2.5b})$$

$$\ker(A^\dagger A) = \ker(A) = \text{Im}(I_m - A^\dagger A), \quad (\text{A.2.5c})$$

$$\mathbb{R}^n = \text{Im}(A A^\dagger) \oplus \text{Im}(I_n - A A^\dagger), \quad (\text{A.2.5d})$$

$$\mathbb{R}^m = \text{Im}(A^\dagger A) \oplus \text{Im}(I_m - A^\dagger A). \quad (\text{A.2.5e})$$

Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ,  $B \in \mathbb{C}^{p \times q}$  et  $C \in \mathbb{C}^{n \times q}$  L'équation linéaire

$$A X B = C \quad (\text{A.2.6})$$

a une solution  $X \in \mathbb{C}^{m \times p}$  si et seulement si

$$A A^\dagger C B^\dagger B = C \quad (\text{A.2.7})$$

ou si et seulement si

$$(I_n - A A^\dagger)C = 0 \quad \text{et} \quad C(I_q - B^\dagger B) = 0. \quad (\text{A.2.8})$$

La solution générale de l'équation (A.2.6) est

$$X = A^\dagger C B^\dagger + Z - A^\dagger A Z B B^\dagger \quad (\text{A.2.9})$$

où  $Z \in \mathbb{C}^{m \times p}$  est une matrice arbitraire.

En utilisant la propriété (A.2.5a), la condition (A.2.8) est équivalente à

$$\text{Im}(C) \subset \text{Im}(A) \quad \text{et} \quad \text{Im}(C^T) \subset \text{Im}(B^T) \quad (\text{A.2.10})$$

et donc est équivalente à la condition de rang suivante

$$\text{rang}(A) = \text{rang}\left(\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}\right) \quad \text{et} \quad \text{rang}(B) = \text{rang}\left(\begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix}\right). \quad (\text{A.2.11})$$

La décomposition en valeurs singulières d'une matrice  $A$  peut être utilisée pour construire une pseudo-inverse  $A^\dagger$  de  $A$ . Si  $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$  et  $\text{rang}(A) = r$ , alors la matrice  $X$

$$X = V \begin{bmatrix} \overline{S}^{-1} & S_1 \\ S_2 & S_3 \end{bmatrix} U^H \quad (\text{A.2.12})$$

est une pseudo-inverse de  $A$  car  $A = A X A$  où les matrices  $U$ ,  $V$  et  $\overline{S}$  sont définies dans (A.1.2) et (A.1.3), les matrices  $S_1 \in \mathbb{C}^{r \times m-r}$ ,  $S_2 \in \mathbb{C}^{n-r \times r}$  et  $S_3 \in \mathbb{C}^{n-r \times m-r}$  sont arbitraires.

### A.2.2 Pseudo-inverses réflexives

Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ .  $A^\dagger \in \mathbb{C}^{m \times n}$  est une pseudo-inverse réflexive de  $A$  si elle vérifie (A.2.1) et

$$A^+ = A^+ A A^+. \quad (\text{A.2.13})$$

La relation (A.2.2) est remplacée par

$$\text{rang}(A^+) = \text{rang}(A) = \text{rang}(A A^+) = \text{rang}(A^+ A) \quad (\text{A.2.14})$$

et cette pseudo-inverse vérifie les relations (A.2.5a)-(A.2.5e) en remplaçant (A.2.5b) par

$$\ker(A A^+) = \ker(A^+) = \text{Im}(I_n - A A^+).$$

Toutes les pseudo-inverses  $X = A^+$  sont paramétrées par

$$A^+ = A_1 A A_2 \quad (\text{A.2.15})$$

où  $A_1 = A^\dagger$  et  $A_2 = A^\dagger$  sont deux pseudo-inverses de  $A$  vérifiant (A.2.1).

Si  $S_3 = S_2 \overline{S} S_1$  dans (A.2.12), alors  $X = A^+$ .

### A.2.3 Pseudo-inverse de Moore-Penrose

Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ .  $A^- \in \mathbb{C}^{m \times n}$  est la pseudo-inverse de Moore-Penrose  $A$  si elle vérifie (A.2.1), (A.2.13) et

$$A A^- = (A A^-)^H, \quad (\text{A.2.16})$$

$$A^- A = (A^- A)^H, \quad (\text{A.2.17})$$

La pseudo-inverse de Moore-Penrose est réflexive et unique.

Si  $S_1 = 0$ ,  $S_2 = 0$  et  $S_3 = 0$  dans (A.2.12), alors  $X = A^-$ .

### A.2.4 Condition d'existence d'une solution

Soit un système d'équations algébrique donné sous la forme matricielle suivante

$$\mathcal{X} \mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 \quad (\text{A.2.18})$$

Le lemme suivant donne une condition nécessaire et suffisante de l'existence d'une solution pour le système d'équation (A.2.18).

**Lemme A.2.1.** [RM71] *Le système (A.2.18) admet une solution si et seulement si la condition suivante*

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \mathcal{M}_1 \\ \mathcal{M}_2 \end{bmatrix} = \text{rang} \mathcal{M}_1 \quad (\text{A.2.19})$$

*est satisfaite.*

Si la condition de rang donné par l'équation (A.2.19) est satisfaite alors la solution générale est donnée sous la forme suivante

$$\mathcal{X} = \mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1^+ - Z(I - \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_1^+) \quad (\text{A.2.20})$$

où  $\mathcal{M}_1^+$  est l'inverse généralisé de la matrice  $\mathcal{M}_1$  [RM71] (c-à-d  $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_1^+ \mathcal{M}_1$ ) et  $Z$  est une matrice arbitraire de dimensions appropriées.

## A.3 Inégalités matricielles linéaires (LMI)

### A.3.1 Lemme de Schur

Lemme de Schur s'agit d'un résultat préliminaire qui permettra, dans ce qui suit, de simplifier des expressions matricielles.

**Lemme A.3.1 (Lemme de Schur).** [KJ72] Soit trois matrices réelles  $A = A^T$ ,  $B$  et  $C = C^T$ , alors

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} > 0 \iff A > 0 \text{ et } C - B^T A^{-1} B > 0 \iff C > 0 \text{ et } A - B C^{-1} B^T > 0, \quad (\text{A.3.1})$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \geq 0 &\iff A \geq 0 \text{ et } C - B^T A^+ B \geq 0 \text{ et } B = A A^+ B \\ &\iff C \geq 0 \text{ et } A - B C^+ B^T \geq 0 \text{ et } B = B C^+ C \\ &\iff A \geq 0 \text{ et } C - B^T A^\dagger A A^\dagger B \geq 0 \text{ et } B = A A^\dagger B \\ &\iff C \geq 0 \text{ et } A - B C^\dagger C C^\dagger B^T \geq 0 \text{ et } B = B C^\dagger C. \end{aligned} \quad (\text{A.3.2})$$



# Annexe B

## Liste des publications

### Sommaire

---

B.1 Journaux et ouvrages de synthèse . . . . .	119
B.2 Conférences internationales avec actes et comité de lecture . . . . .	119

---

### B.1 Journaux et ouvrages de synthèse

1. Y. Boukal, M. Darouach, M. Zasadzinski, N.E Radhy, **Robust  $H_\infty$  observer-based control of fractional order systems with gain parametrization**, *IEEE Transactions on Automatic Control*, article accepté.
2. Y. Boukal, M. Darouach, M. Zasadzinski, N.E Radhy, **Correction to the Unknown Input Observer Design for Linear Fractional-Order Time-Delay Systems & a new Enhanced LMI condition**. *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*, article accepté.
3. O. Lahoucine, Y. Boukal, M. El Ganaoui, M. Darouach, M. Zasadzinski, N.E Radhy, A. Mimet, **A general fractional order heat transfer model for photovoltaic/thermal (PVT) hybrid systems and its observer design**. *Article sélectionné pour être publié dans : Energy Procedia*.
4. Y. Boukal, M. Zasadzinski, M. Darouach, N.E Radhy, **Robust  $H_\infty$  Observer-based stabilization of disturbed uncertain fractional order systems using a two-step procedure**. *Lecture Notes in Electrical Engineering 357 : Theoretical Developments and Applications of Non-Integer Order Systems*, Part : III - Chapter : 14, pp. 167-180. Springer International Publishing (2016).
5. Y. Boukal, M. Darouach, M. Zasadzinski, and N.E. Radhy, **Unknown input observer design for linear fractional order time-delay systems**. *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*, 2015, vol. 4, no 2, p. 117-130.

### B.2 Conférences internationales avec actes et comité de lecture

1. Y. Boukal, M. Zasadzinski, M. Darouach, N.E Radhy,  **$H_\infty$  Dynamic Output Feedback Controller Design For Disturbed Fractional-Order Systems**, IFAC WC 2017, article accepté.

2. Y. Boukal, M. Darouach, M. Zasadzinski, N.E Radhy,  **$H_\infty$  observer-based-controller for fractional-order time-varying-delay systems**, MED 2017, article accepté.
3. Y. Boukal, M. Zasadzinski, M. Darouach, N.E Radhy, **Robust functional observer design for uncertain fractional order time-varying delay systems**, dans *American Control Conference (ACC)*, 2016, pp 2741-2746.
4. Y. Boukal, M. Zasadzinski, M. Darouach, N.E Radhy, **Stability and stabilizability analysis of fractional-order time-varying-delay systems via diffusive representation**, dans *5th International Conference on Systems and Control (ICSC)*, 2016, pp 262-266.
5. Y. Boukal, M. Zasadzinski, M. Darouach, N.E Radhy,  **$H_\infty$  filters design for fractional order time-varying delay systems**, dans *European Control Conference (ECC)*, pp. 1243-1248, 2015.
6. O. Lahoucine, Y. Boukal, M. El Ganaoui, M. Darouach, M. Zasadzinski, N.E Radhy, A. Mimet, **A general fractional order heat transfer model for photovoltaic/thermal (PVT) hybrid systems and its observer design**, dans *International Conference on Materials & Energy, (ICOME'15)*, 2015.
7. Y. Boukal, M. Darouach, M. Zasadzinski, and N.E. Radhy,  **$H_\infty$  observer design for linear fractional-order systems in time and frequency domains**, dans *European Control Conference (ECC)*, 2014, pp. 2975-2980.
8. Y. Boukal, M. Darouach, M. Zasadzinski, and N.E Radhy, **Design of functional fractional order observers for linear time-delay fractional order systems in the time domain**, dans *International IEEE Conference on Fractional Differentiation and Its Applications, (ICFDA'14)*, 2014.
9. Y. Boukal, N.E. Radhy, M. Darouach, and M. Zasadzinski, **Design of full and reduced orders observers for linear fractional order systems in the time and frequency domains**, dans *3rd IEEE International Conference on Systems and Control (ICSC)*, 2013, pp. 171-176.

# Bibliographie

- [AC08] H.S. Ahn and Y.Q. Chen. Necessary and sufficient stability condition of fractional-order interval linear systems. *Automatica*, 44 :2985–2988, 2008.
- [ACP07] H.S. Ahn, Y.Q. Chen, and I Podlubny. Robust stability test of a class of linear time-invariant interval fractional-order system using Lyapunov inequality. *Applied Mathematics and Computation*, 187 :27–34, 2007.
- [AHL07] B.N. Achar, T.T. Hartley, and C.F. Lorenzo. *Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*, chapter The Caputo fractional derivative : initialization issues relative to fractional differential equations, pages 27–42. Springer, Berlin, 2007.
- [AM00] VV Anh and Ross McVinish. Fractional differential equations driven by lévy noise. *International Journal of Stochastic Analysis*, 16(2) :97–119, 1900.
- [Arg53] R.P. Argarwal. A propos d’une note de M. Pierre Humbert. *C.R. Académie des Sciences*, 236 :2031–2032, 1953.
- [AS03] W.M. Ahmad and J.C. Sprott. Chaos in fractional-order autonomous nonlinear systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 16 :339–351, 2003.
- [Bac98] O. Bachelier. *Commande des Systèmes Linéaires Incertains : Placement de Pôles Robuste en  $\mathcal{D}$ -Stabilité*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, France, 1998.
- [Bag79] R.L. Bagley. *Application of Generalized Derivatives to Viscoelasticity*. PhD thesis, Air Force Institute of Technologie, USA, 1979.
- [Bag89] R.L. Bagley. The initial value problem for fractional order differential equations with constant coefficients. Technical Report AFIT-TR-88-1, Air Force Institute of Technologie, 1989.
- [BC91] R.L. Bagley and R.A. Calico. Fractional order state equations for the control of viscoelastically damped structures. *J. Guidance, Contr. & Dynamics*, 14 :304–311, 1991.
- [BD01] M. Boutayeb and M. Darouach. Observers for discrete-time systems with multiple delays. *IEEE Trans. Aut. Control*, 46 :746–750, 2001.
- [BDZR14a] Y. Boukal, M. Darouach, M. Zasadzinski, and N.E. Radhy. Design of functional fractional-order observers for linear time-delay fractional-order systems in the time domain. In *Fractional Differentiation and Its Applications (ICFDA), International Conference on*, pages 1–6, Catania, Italy, June 2014.

- [BDZR14b] Y. Boukal, M. Darouach, M. Zasadzinski, and N.E. Radhy.  $H_\infty$  observer design for linear fractional-order systems in time and frequency domain. In *Proc. European Contr. Conf.*, pages 2975 – 2980, Strasbourg, France, 2014.
- [BDZR15] Y. Boukal, M. Darouach, M. Zasadzinski, and N.E. Radhy. Unknown input observer design for linear fractional-order time-delay systems. *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*, 4 :117–130, 2015.
- [BDZR17] Y. Boukal, M. Darouach, M. Zasadzinski, and N. E. Radhy. Robust  $H_\infty$  observer-based control of fractional-order systems with gain parametrization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, to appear, 2017.
- [BG74] A. Ben-Israel and T. N. E. Greville. *Generalized Inverses : Theory and Applications*. Wiley, New York, 1974.
- [BH95] G. Besançon and H. Hammouri. Reduced order observer for a class of non-uniformly observable systems. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Control*, New Orleans, USA, 1995.
- [BM12] E. A. Boroujeni and H. R. Momeni. Non-fragile nonlinear fractional order observer design for a class of nonlinear fractional order systems. *Signal Processing*, 92(10) :2365–2370, 2012.
- [BMB11] M. K. Bouafoura, O. Moussi, and N. B. Braiek. A fractional state space realization method with block pulse basis. *Signal Processing*, 91(3) :492–497, 2011.
- [Bou01] M. Boutayeb. Observer design for linear time-delay systems. *Syst. & Contr. Letters*, 44 :103–109, 2001.
- [BP01] C. Bonnet and J.R. Partington. Stabilization of fractional exponential systems including delays. *Kybernetika*, 37 :345–353, 2001.
- [BP02] C. Bonnet and J.R. Partington. Analysis of fractional delay systems of retarded and neutral type. *Automatica*, 38(7) :1133 – 1138, 2002.
- [BRDZ13] Y. Boukal, N.E. Radhy, M. Darouach, and M. Zasadzinski. Design of full and reduced observers for linear fractional-order systems in the time and frequency domains. In *Proc. International Conference on Systems and Control*, Algiers, Algeria, 2013.
- [BT83] R.L. Bagley and P.J. Torvik. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. *Journal of Rheology*, 27 :201–210, 1983.
- [BT84] R.L. Bagley and P.J. Torvik. On the appearance of the fractional derivatives in the behaviour of real materials. *J. Applied Mechanics*, 41 :294–298, 1984.
- [BT86] R.L. Bagley and P.J. Torvik. On fractional calculus models of viscoelastic behavior. *Journal of Rheology*, 23 :918–925, 1986.
- [Bus08] M. Busłowicz. Stability of linear continuous-time fractional order systems with delays of the retarded type. *Bulletin Of The Polish Academy Of Sciences Technical Sciences*, 56(4) :237–240, 2008.

- 
- [BZDR15] Y. Boukal, M. Zasadzinski, M. Darouach, and N.E. Radhy.  $H_\infty$  filters design for fractional-order time-varying delay systems. In *Proc. European Contr. Conf.*, pages 1243–1248, Linz, Austria, 2015.
- [BZDR16a] Y. Boukal, M. Zasadzinski, M. Darouach, and N. E. Radhy. Robust functional observer design for uncertain fractional-order time-varying delay systems. In *2016 American Control Conference (ACC)*, pages 2741–2746, July 2016.
- [BZDR16b] Y. Boukal, M. Zasadzinski, M. Darouach, and N.E Radhy. Stability and stabilizability analysis of fractional-order time-varying delay systems via diffusive representation. In *Systems and Control (ICSC), 2016 5th International Conference on*, pages 262–266. IEEE, 2016.
- [Cap67] M. Caputo. Linear model of dissipation whose  $Q$  is almost frequency independent. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 13 :529–539, 1967.
- [CAP06] Y.Q. Chen, H.S. Ahn, and I. Podlubny. Robust stability check of fractional order linear time invariant systems with interval uncertainties. *Signal Processing*, 86 :2611–2618, 2006.
- [CDFP10] R. Caponetto, G. Dongola, L. Fortuna, and I. Petráš. *Fractional Order Systems : Modeling and Control Applications*. World scientific series on nonlinear science, Series A. World scientific, Singapore, 2010.
- [CG96] M. Chilali and P. Gahinet.  $\mathcal{H}_\infty$  design with pole placement constraints : an LMI approach. *IEEE Trans. Aut. Control*, 41 :358–367, 1996.
- [CGA99] M. Chilali, P. Gahinet, and P. Apkarian. Robust pole placement in LMI regions. *IEEE Trans. Aut. Control*, 44 :2257–2270, 1999.
- [CH64] G Carlson and C Halijak. Approximation of fractional capacitors  $(\frac{1}{s})^{(\frac{1}{n})}$  by a regular newton process. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 11(2) :210–213, 1964.
- [Chi96] M. Chilali. *Méthodes LMI pour l'Analyse et la Synthèse Multi-critère*. PhD thesis, Université de Paris IX, Paris, France, 1996.
- [CM71] M. Caputo and F. Mainardi. A new dissipation model based on memory mechanism. *Pure and Applied Geophysics*, 91 :134–137, 1971.
- [CSTO92] A Charef, HH Sun, YY Tsao, and B Onaral. Fractal system as represented by singularity function. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(9) :1465–1470, 1992.
- [CVP03] Y.Q Chen, B.M. Vinagre, and I. Podlubny. On fractional order disturbance observer. In *ASME 2003 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, pages 617–624. American Society of Mechanical Engineers, 2003.
- [CVP04] Y. Chen, Blas M. Vinagre, and I. Podlubny. Fractional order disturbance observer for robust vibration suppression. *Nonlinear Dynamics*, 38(1-4) :355–367, 2004.
- [CYC06] H. Chyi and C. Yi-Cheng. A numerical algorithm for stability testing of fractional delay systems. *Automatica*, 42(5) :825 – 831, 2006.

- [Dar00] M. Darouach. Existence and design of functional observers for linear systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, 45 :940–943, 2000.
- [Dar01] M. Darouach. Linear functional observers for systems with delays in state variable. *IEEE Trans. Aut. Control*, 46 :491–496, 2001.
- [Dar07] M. Darouach. Unknown inputs observers design for delay systems. *Asian Journal of Control*, 9 :426–434, 2007.
- [Dar09] M. Darouach. Complements to full order observer design for linear systems with unknown inputs. *Applied Mathematics Letters*, 22 :1107–1111, 2009.
- [Das08] S. Das. *Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls*. Springer-Verlag, Heidelberg, 2008.
- [DM11] S. Dadras and H.R Momeni. Fractional sliding mode observer design for a class of uncertain fractional order nonlinear systems. In *Decision and control and european control conference (CDC-ECC), 2011 50th IEEE conference on*, pages 6925–6930. IEEE, 2011.
- [Dor94] L. Dorckák. Numerical models for simulation the fractional-order control systems. Technical Report UEF-04-94, Institute of Experimental Physics, Academy of Sciences, Slovakia, 1994.
- [DS06] A. Dzielinski and D. Sierociuk. Observer for discrete fractional order state-space systems. In *2nd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications*, pages 511 – 516, July 2006.
- [DZ92] M. Darouach and M. Zasadzinski. State estimation for a class of singular systems. *Int. J. Syst. Sci.*, 23 :517–530, 1992.
- [Dzh66] M. M. Dzhrbashyan. Integral transforms and representations of functions in the complex domain. *Nauka, Moskow*, 1966.
- [DZX94] M. Darouach, M. Zasadzinski, and S.J. Xu. Full-order observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Trans. Aut. Control*, 39 :606–609, 1994.
- [El-96] A.M.A. El-Sayed. Fractional-order diffusion wave equation. *International Journal of Theoretical Physics*, 35 :311–322, 1996.
- [EMOT81] A Erdélyi, W Magnus, F Oberhettinger, and FG Tricomi. Higher transcendental functions, vol. iii. 1981, 1981.
- [Eng96] N. Engheta. On fractional calculus and fractional multipoles in electromagnetism. *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, 44 :554–566, 1996.
- [Erd55a] A. Erdélyi. *Higher Transcendental Functions*, volume 1. McGraw-Hill, New York, 1955.
- [Erd55b] A. Erdélyi. *Higher Transcendental Functions*, volume 2. McGraw-Hill, New York, 1955.
- [Erd55c] A. Erdélyi. *Higher Transcendental Functions*, volume 3. McGraw-Hill, New York, 1955.

- 
- [FFS13] C. Farges, L. Fadiga, and J. Sabatier.  $H_\infty$  analysis and control of commensurate fractional order systems. *Mechatronics*, 23(7) :772–780, 2013.
- [FFSS13] L. Fadiga, C. Farges, J. Sabatier, and K. Santugini.  $\mathcal{H}_\infty$  output feedback control of commensurate fractional order systems. In *European Control Conference (ECC)*, pages 4538–4543, July 2013.
- [FHZ84] B.A. Francis, J.W. Helton, and G. Zames. On  $\mathcal{H}_\infty$ -optimal feedback controllers for linear multivariable systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, 29 :888–900, 1984.
- [FM09] M. B. Farshad and K. G. Masoud. An efficient numerical algorithm for stability testing of fractional-delay systems. *{ISA} Transactions*, 48(1) :32 – 37, 2009.
- [FMS10] C. Farges, M. Moze, and J. Sabatier. Pseudo-state feedback stabilization of commensurate fractional order systems. *Automatica*, 46 :1730–1734, 2010.
- [FSF13] L Fadiga, J Sabatier, and C Farges.  $H_\infty$  state feedback control of commensurate fractional order systems. In *Proceedings of the 6th IFAC SSSC-FDA Joint Conference*, pages 54–59, 2013.
- [FT13] T. Fernando and H. Trinh. A procedure for designing linear functional observers. *Applied Mathematics Letters*, 26(2) :240–243, 2013.
- [FTJ10] T.L. Fernando, H.M. Trinh, and L. Jennings. Functional observability and the design of minimum order linear functional observers. *IEEE Trans. Aut. Control*, 55 :1268–1273, 2010.
- [FW72] T.E. Fortmann and D. Williamson. Design of low-order observers for linear feedback control law. *IEEE Trans. Aut. Control*, 17 :301–308, 1972.
- [GDB08] S. Guermah, S. Djennoune, and M. Bettayeb. Controllability and observability of linear discrete-time fractional-order systems. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 18(2) :213–222, 2008.
- [GKMR14] R. Gorenflo, A. A. Kilbas, F. Mainardi, and S. V. Rogosin. *Mittag-Leffler functions, related topics and applications*. Springer, 2014.
- [HA53] P Humbert and RP Agarwal. Sur la fonction de mittag-leffler et quelques-unes de ses généralisations. *Bull. Sci. Math*, 77(2) :180–185, 1953.
- [Hil00] R. Hilfer. *Applications of Fractional Calculus in Physics*. World Scientific Publishing, Singapore, 2000.
- [HJ85] R.A. Horn and C.A. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, USA, 1985.
- [HL02] Tom T. Hartley and Carl F. Lorenzo. Dynamics and control of initialized fractional-order systems. *Nonlinear Dynamics*, 29(1-4) :201–233, 2002.
- [HL09] T.T Hartley and C.F Lorenzo. The initialization response of linear fractional-order systems with constant history function. In *ASME 2009 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, pages 1321–1325. American Society of Mechanical Engineers, 2009.

- [HLQ95] T.T. Hartley, C.F. Lorenzo, and H.K. Qammer. Chaos in a fractional order Chua's system. *IEEE Trans. Circ. Syst. I : Fund. Theory & Appl.*, 42 :485–490, 1995.
- [HLT13] T. T Hartley, C. F Lorenzo, J.C. Trigeassou, and N. Maamri. Equivalence of history-function based and infinite-dimensional-state initializations for fractional-order operators. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 8(4) :041014, 2013.
- [HM98] D. Heleschewitz and D. Matignon. Diffusive realisations of fractional integrodifferential operators : structural analysis under approximation. *IFAC Proceedings Volumes*, 31(18) :227–232, 1998.
- [Hor63] I.M. Horowitz. *Synthesis of Feedback Systems*. Academic Press, New York, 1963.
- [Hot98] R. Hotzel. *Contribution à la Théorie Structurelle et à la Commande des Systèmes Linéaires Fractionnaires*. PhD thesis, Université de Paris XI, Orsay, France, 1998.
- [HS75] I.M. Horowitz and U. Shaked. Superiority of transfer function over state-variable methods in linear time-invariant feedback system design. *IEEE Trans. Aut. Control*, 20 :84–97, 1975.
- [Hum53] P Humbert. Quelques résultats relatifs à la fonction de mittag-leffler. *COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SEANCES DE L ACADEMIE DES SCIENCES*, 236(15) :1467–1468, 1953.
- [HW79] G.H Hardy and E.M Wright. *An introduction to the theory of numbers*. Oxford University Press, 1979.
- [JM09] I. S. Jesus and JA Tenreiro Machado. Development of fractional order capacitors based on electrolyte processes. *Nonlinear Dynamics*, 56(1-2) :45–55, 2009.
- [JT05] J. Jin and M.J. Tahk. Time-delayed state estimator for linear systems with unknown inputs. *Int. J. Cont., Autom. Syst.*, 3 :117–121, 2005.
- [JZ11] Z. Jiao and Y. Zhong. Robust stability for fractional-order systems with structured and unstructured uncertainties. arXiv, 2011. 1106.1224v1.
- [Kal60] R.E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *ASME Trans. - Part D, J. Basic Engineering*, 82 :34–45, 1960.
- [Kha92] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Macmillan Publishing Company, New York, 1992.
- [KHL81a] S.A.G.R. Karunathilaka, N.A. Hampson, R. Leek, and T.J. Sinclair. The impedance of the alkaline zinc-manganese dioxide cell. i. variation with state of charge. *Journal of Applied Electrochemistry*, 11 :365–372, 1981.
- [KHL81b] S.A.G.R. Karunathilaka, N.A. Hampson, R. Leek, and T.J. Sinclair. The impedance of the alkaline zinc-manganese dioxide cell. ii. an interpretation of the data. *Journal of Applied Electrochemistry*, 11 :715–721, 1981.
- [KJ72] E. Kreindler and A. Jameson. Conditions for nonnegativeness of partitioned matrices. *IEEE Trans. Aut. Control*, 17 :147–148, 1972.

- 
- [KK95] S. Kawaji and H.S. Kim. Full order observer for linear descriptor systems with unknown-inputs. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Control*, New Orleans, USA, 1995.
- [KPZ90] P.P. Khargonakar, I.R. Petersen, and K. Zhou. Robust stabilization of uncertain linear systems : quadratic stability and  $H_\infty$  control theory. *IEEE Trans. Aut. Control*, 35 :356–361, 1990.
- [Las99] A. Lasia. *Modern Aspects of Electrochemistry*. Kluwer Academic/Plenum, New York, 1999.
- [Laz20] Mihailo Lazarević. Further results on fractional order control of a mechatronic system. *Scientific Technical Review, ISSN*, 206 :2013, 1820.
- [LC09] J.G. Lu and G. Chen. Robust stability and stabilization of fractional-order interval systems : an LMI approach. *IEEE Trans. Aut. Control*, 54 :1294–1299, 2009.
- [LC10] J.G. Lu and Y.Q. Chen. Robust stability and stabilization of fractional-order interval systems with the fractional-order  $\alpha$  : The  $0 < \alpha < 1$  case. *IEEE Trans. Aut. Control*, 55 :152–158, 2010.
- [LCP09] Y. Li, Y.Q. Chen, and I. Podlubny. Mittag-Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems. *Automatica*, 45 :1965–1969, 2009.
- [LCP10] Y. Li, Y.Q. Chen, and I. Podlubny. Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems : Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability. *Computers & Mathematics with Applications*, 59 :1810–1821, 2010.
- [Let68] AV Letnikov. Theory of differentiation of fractional order. *Mat. Sb*, 3(1), 1868.
- [LF97] H. Li and M. Fu. A linear matrix inequality approach to robust  $\mathcal{H}_\infty$  filtering. *IEEE Trans. Sign. Proc.*, 45 :2338–2350, 1997.
- [LGC<sup>+</sup>14] Y. H. Lan, H. B. Gu, C. X. Chen, Y. Zhou, and Y. P. Luo. An indirect lyapunov approach to the observer-based robust control for fractional-order complex dynamic networks. *Neurocomputing*, 136 :235–242, 2014.
- [LH01] C.F. Lorenzo and T.T. Hartley. Initialization in fractional order systems. In *Proc. European Contr. Conf.*, Porto, Portugal, 2001.
- [LH07] Wen Li and Yoichi Hori. Vibration suppression using single neuron-based pi fuzzy controller and fractional-order disturbance observer. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 54(1) :117–126, 2007.
- [LMM13] P. Lanusse, R. Malti, and P. Melchior. Crone control system design toolbox for the control engineering community : tutorial and case study. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 371(1990) :20120149, 2013.
- [Lof04] Johan Lofberg. Yalmip : A toolbox for modeling and optimization in Matlab. In *Computer Aided Control Systems Design, 2004 IEEE International Symposium on*, pages 284–289. IEEE, 2004.
- [LOS96] P. Lanusse, A. Oustaloup, and D. Sutter. Multi-scalar CRONE control of multivariable plants. In *Wsc'96-Isiac*, Montpellier, France, 1996.

- [LS10] L. Liqiong and Z. Shouming. Finite-time stability analysis of fractional-order with multi-state time delay. *International Journal of Information and Mathematical Sciences*, 6(4) :237–240, 2010.
- [LT85] P. Lancaster and M. Tismenetsky. *The Theory of Matrices*. Academic Press, Orlando, USA, 2nd edition, 1985.
- [Lu06] Jun Guo Lu. Nonlinear observer design to synchronize fractional-order chaotic systems via a scalar transmitted signal. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 359 :107–118, 2006.
- [Lue63] David G Luenberger. *Determining the state of a linear system with observers of low dynamic order*. Department of Electrical Engineering, Stanford University., 1963.
- [Lue64] David G Luenberger. Observing the state of a linear system. *IEEE transactions on military electronics*, 8(2) :74–80, 1964.
- [Lue66] D.G. Luenberger. Observers for multivariable systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, 11 :190–197, 1966.
- [Lue71] D.G. Luenberger. An introduction to observers. *IEEE Trans. Aut. Control*, 16 :596–603, 1971.
- [LWP<sup>+</sup>15] Shu Liang, Yi-Heng Wei, Jin-Wen Pan, Qing Gao, and Yong Wang. Bounded real lemmas for fractional order systems. *International Journal of Automation and Computing*, 12(2) :192–198, 2015.
- [Lya92a] A.M. Lyapunov. *The General Problem of Stability of Motion*. PhD thesis, Kharkov Mathematical Society, 1892.
- [Lya92b] A.M. Lyapunov. *The General Problem of Stability of Motion*. PhD thesis, Kharkov Mathematical Society, 1892. Publié dans "IJC, Lyapunov Centenary Issue, vol. 55, num. 3, march 1992".
- [Lya92] A.M. Lyapunov. The general problem of stability of motion. *Int. J. Contr.*, 55 :531–773, 1992. Lyapunov Centenary Issue.
- [LYT11] X. Lianglin, Z. Yun, and J. Tao. Stability analysis of linear fractional order neutral system with multiple delays by algebraic approach. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 5(4) :758–761, 2011.
- [MA09] P. L. Mihailo and M. S. Aleksandar. Finite-time stability analysis of fractional order time-delay systems : Gronwall’s approach. *Mathematical and Computer Modelling*, 49(3 - 4) :475 – 481, 2009.
- [MALO11] R. Malti, M. Aoun, F. Levron, and A. Oustaloup. Analytical computation of the  $\infty$ -norm of fractional commensurate transfer functions. *Automatica*, 47(11) :2425 – 2432, 2011.
- [MAN96] D. Matignon and B. Andréa-Novel. Some results on controllability and observability of finite-dimensional fractional differential systems. In *Proc. Mathematical Theory of Networks and Systems Symposium*, Lille, France, 1996.

- 
- [MAN97] D. Matignon and B. Andréa-Novel. Observer-based for fractional differential systems. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Control*, San Diego, USA, 1997.
- [Mat94] D. Matignon. *Représentation en Variables d'État de Modèles de Guides d'Ondes avec Dérivation Fractionnaire*. PhD thesis, Université de Paris XI, Orsay, France, 1994.
- [Mat96] D. Matignon. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. In *Proc. IEEE-IMACS Syst. Man Cyber. Conf.*, Lille, France, 1996.
- [ML03] G.M. Mittag-Leffler. Sur la nouvelle fonction  $E_\alpha(x)$ . *C.R. Académie des Sciences*, 137 :554–558, 1903.
- [ML05] G.M. Mittag-Leffler. Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction homogène. *Acta Mathematica*, 29 :101–182, 1905.
- [MM95] B. Mbodje and G. Montseny. Boundary fractional derivative control of the wave equation. *IEEE Trans. Aut. Control*, 40 :378–382, 1995.
- [MMLO11] R. Malti, P. Melchior, P. Lanusse, and A. Oustaloup. Towards an object oriented crone toolbox for fractional differential systems. In *Proceedings of 18th IFAC World Congress*, volume 44, pages 10830 – 10835, 2011.
- [MMLO12] R. Malti, P. Melchior, P. Lanusse, and A. Oustaloup. Object-oriented crone toolbox for fractional differential signal processing. *Signal, Image and Video Processing*, 6(3) :393–400, 2012.
- [Mon98] Gérard Montseny. Diffusive representation of pseudo-differential time-operators. In *ESAIM : Proceedings, Fractional Differential Systems : Models, Methods and Applications*, volume 5, pages 159–175. EDP Sciences, 1998.
- [Mra04] N. Mrani. *Contribution à l'Étude des Systèmes Fractionnaires : Théorie et Applications*. PhD thesis, Ecole Mohammadia d'Ingénieurs, Rabat, Maroc, 2004.
- [MSO05a] M. Moze, J. Sabatier, and A. Oustaloup. LMI tools for stability analysis of fractional systems. In *Proc. ASME IDET/CIE conferences*, Long-Beach, USA, 2005.
- [MSO05b] M. Moze, J. Sabatier, and A. Oustaloup. On fractional systems  $H_\infty$ -norm computation. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Control*, Seville, Spain, 2005.
- [MSO08] M. Moze, J. Sabatier, and A. Oustaloup. On bounded real lemma for fractional systems. In *Proc. Triennial IFAC World Congress*, Seoul, Korea, 2008.
- [Nak97] Takayoshi Nakamizo. Reduced-order functional estimator for linear stochastic systems. *Statistical methods in control and signal processing*, 1997.
- [N'D11] I. N'Doye. *Généralisation du Lemme de Gronwall-Bellman pour la Stabilisation des Systèmes Fractionnaires*. PhD thesis, Université Henri Poincaré-Nancy I, France, et Université Hassan II Aïn Chock, Casablanca, Maroc, 2011.
- [NDVZ13] I. N'Doye, M. Darouach, H. Voos, and M. Zasadzinski. Design of unknown input fractional-order observers for fractional-order systems. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 23 :491–500, 2013.

- [NDZ12a] I. N'Doye, M. Darouach, and M. Zasadzinski. Functional observers for fractional-order systems with unknown inputs. In *Proc. International Conference on Systems and Control*, Marrakesh, Morocco, 2012.
- [NDZ12b] I. N'Doye, M. Darouach, and M. Zasadzinski. Observers design for linear and non-linear fractional-order systems. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Control*, Maui, Hawaii, USA, 2012. to appear.
- [NDZR11] I. N'Doye, M. Darouach, M. Zasadzinski, and N.E. Radhy. Observers design for singular fractional-order systems. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Control*, Orlando, USA, 2011.
- [NDZR13] I. N'Doye, M. Darouach, M. Zasadzinski, and N.E. Radhy. Robust stabilization of uncertain descriptor fractional-order systems. *Automatica*, 49 :1907–1913, 2013.
- [NVD<sup>+</sup>13] I. N'Doye, H. Voos, M. Darouach, J.G. Schneider, and N. Knauf.  $H_\infty$  static output feedback control for a fractional-order glucose-insulin system. In *Fractional Differentiation and Its Applications*, volume 6, pages 266–271, 2013.
- [NZDR09] I. N'Doye, M. Zasadzinski, M. Darouach, and N.E. Radhy. Observer-based control for fractional-order continuous-time systems. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Control*, Shanghai, P.R. China, 2009.
- [OLMN00] A. Oustaloup, F. Levron, B. Mathieu, and F.M. Nanot. Frequency-band complex noninteger differentiator : characterization and synthesis. *Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, vol. 47(1) :25 – 39, jan 2000.
- [ON99] G. Olsson and B. Newell. *Wastewater Treatment Systems : Modelling, Diagnosis and Control*. IWA Publishing, London, 1999.
- [OSL<sup>+</sup>08] A. Oustaloup, J. Sabatier, P. Lanusse, R. Malti, P. Melchior, X. Moreau, M. Moze, et al. An overview of the crone approach in system analysis, modeling and identification, observation and control. In *Proc. of the 17th World Congress IFAC*, pages 6 – 11, 2008.
- [Ous91] A. Oustaloup. *La Commande CRONE*. Hermes, Paris, 1991.
- [Ous95] A. Oustaloup. *La Dérivation Non Entière : Synthèse et Applications*. Hermes, Paris, 1995.
- [OZ93] J.G. Owen and G. Zames. Duality theory of robust disturbance attenuation. *Automatica*, 29 :695–705, 1993.
- [PCV04] I. Petráš, Y. Chen, and B.M. Vinagre. *Unsolved problems in the mathematics of systems and control*, volume 38, chapter Robust stability test for interval fractional-order linear systems, pages 208–210. Princeton University Press, Princeton, 2004. Ed. V. Blondel and A. Megretski.
- [PCVP05] I. Petráš, Y.Q. Chen, B.M. Vinagre, and I. Podlubny. Stability of linear time invariant systems with interval fractional-order and interval coefficients. In *Proc. Int. Conf. on Computational Cybernetics*, Vienna, Austria, 2005.

- 
- [Pet11] I. Petráš. *Fractional Order Nonlinear Systems : Modeling, Analysis and Simulation*. Springer-Verlag, Berlin, 2011.
- [PFTV92] W. H Press, B. P Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling. Numerical recipes in c : The art of scientific computing, vol. 1, 1992.
- [Pod99] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations*. Academic, New York, 1999.
- [PUR11] A. Pisano, E. Usai, and Z. Rapaić, M. and Jelčić. Second-order sliding mode approaches to disturbance estimation and fault detection in fractional-order systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1) :2436–2441, 2011.
- [RM71] C.R. Rao and S.K. Mitra. *Generalized Inverse of Matrices and its Applications*. Wiley, New York, 1971.
- [Roy67] SD Roy. On the realization of a constant-argument immittance or fractional operator. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 14(3) :264–274, 1967.
- [RR85] M. Rosenblum and J. Rovnyak. *Hardy Classes and Operator Theory*. Oxford University Press, New York, 1985.
- [RSES09] A.G. Radwan, A.M Soliman, A.S. Elwakil, and A. Sedeek. On the stability of linear systems with fractional-order elements. *Chaos, Solitons & Fractals*, 40(5) :2317–2328, 2009.
- [SADB09] A. Si-Ammour, S. Djennoune, and M. Bettayeb. A sliding mode control for linear fractional systems with input and state delays. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(5) :2310 – 2318, 2009.
- [SD71] V. H. Schmidt and J. E. Drumheller. Dielectric properties of lithium hydrazinium sulfate. *Physical Review B*, 4 :4582–4597, 1971.
- [SFMF12] J. Sabatier, C. Farges, M. Merveillaut, and L. Feneteau. On observability and pseudo state estimation of fractional order systems. *European J. Contr.*, 18 :260–271, 2012.
- [SGC97] C. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. *IEEE Trans. Aut. Control*, 42 :896–911, 1997.
- [SH05] S. Sundaram and C.N. Hadjicotis. Comments on “Time-delayed state estimator for linear systems with unknown inputs”. *Int. J. Cont., Autom. Syst.*, 3 :646–647, 2005.
- [SK98] M. Saigo and A. A. Kilbas. On mittag-leffler type function and applications. *Integral Transforms and Special Functions*, 7(1-2) :97–112, 1998.
- [SL14] J. Shen and J. Lam. State feedback  $H_\infty$  control of commensurate fractional-order systems. *International Journal of Systems Science*, 45(3) :363–372, 2014.
- [SMF10a] J. Sabatier, M. Moze, and C. Farges. LMI conditions for fractional order systems. *Computers & Mathematics with Applications*, 59 :1594–1609, 2010.
- [SMF10b] J. Sabatier, M. Moze, and C. Farges. LMI stability conditions for fractional order systems. *Comput. Math. Appl.*, 59(5) :1594 – 1609, March 2010.

- [SMFO09] J. Sabatier, M. Merveillaut, L. Fenetau, and A. Oustaloup. On observability of fractional order systems. In *ASME 2009 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, pages 253–260. American Society of Mechanical Engineers, 2009.
- [SMO05] J. Sabatier, M. Moze, and A. Oustaloup. On fractional systems  $H_\infty$ -norm computation. In *Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC '05. 44th IEEE Conference on*, pages 5758–5763, 2005.
- [Sou96] M. Soula. *Étude du Comportement Mécanique des Matériaux Viscoélastiques par les Dérivées Fractionnaires*. PhD thesis, Conservatoire National des Arts et Métiers de Paris, France, 1996.
- [TM09] J-C Trigeassou and N. Maamri. State space modeling of fractional differential equations and the initial condition problem. In *Systems, Signals and Devices, 2009. SSD '09. 6th International Multi-Conference on*, pages 1–7, March 2009.
- [TM11] J.C. Trigeassou and N. Maamri. Initial conditions and initialization of linear fractional differential equations. *Signal Processing*, 91 :427–436, 2011.
- [TMO09] J.C Trigeassou, N. Maamri, and A. Oustaloup. A lyapunov approach to the stability of fractional differential equations. In *Symposium on Fractional Signal and Systems, May 2009, Lisbonne, Portugal. 2009*, 2009.
- [TMO13] Jean-Claude Trigeassou, Nezha Maamri, and Alain Oustaloup. The infinite state approach : Origin and necessity. *Computers & Mathematics with Applications*, 66(5) :892–907, 2013.
- [TMSO11] J.C. Trigeassou, N. Maamri, J. Sabatier, and A. Oustaloup. A Lyapunov approach to the stability of fractional differential equations. *Signal Processing*, 91 :437–445, 2011.
- [TMSO12a] J.C Trigeassou, N. Maamri, J. Sabatier, and A. Oustaloup. State variables and transients of fractional order differential systems. *Computers & Mathematics with Applications*, 64(10) :3117–3140, 2012.
- [TMSO12b] J.C Trigeassou, N. Maamri, J. Sabatier, and A. Oustaloup. Transients of fractional-order integrator and derivatives. *Signal, Image and Video Processing*, pages 1–14, 2012.
- [TNT08] H. Trinh, S. Nahavandi, and T.D Tran. Algorithms for designing reduced-order functional observers of linear systems. *International journal of innovative computing, information and control*, 4(2) :321–333, 2008.
- [Tsu04] C.C Tsui. An overview of the applications and solutions of a fundamental matrix equation pair. *Journal of the Franklin Institute*, 341(6) :465–475, 2004.
- [Vid69] M. Vidyasagar. On matrix measures and convex Liapunov functions. *J. of Mathematical Analysis and Applications*, 62 :90–103, 1969.
- [Vid93] M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 2nd edition, 1993.

- 
- [VPHF00] B. M. Vinagre, I. Podlubny, A. Hernández, and V. Feliu. *Some Approximations of Fractional Order Operators used in Control Theory and Applications*, volume 3, chapter 3, pages 231–248. Fractional Calculus & Applied Analysis, 2000.
- [VV82] M. Vidyasagar and A. Vanelli. New relationships between input-output and Lyapunov stability. *IEEE Trans. Aut. Control*, 27 :481–483, 1982.
- [Wim05] Adders Wiman. Über den fundamentalsatz in der theorie der funktionene a (x). *Acta Mathematica*, 29(1) :191–201, 1905.
- [Xd90] L. Xie and C.E. de Souza. Robust  $\mathcal{H}_\infty$  control for linear time-invariant systems with norm-bounded uncertainty in the input matrix. *Syst. & Contr. Letters*, 14 :389–396, 1990.
- [Xd92] L. Xie and C.E. de Souza. Robust  $\mathcal{H}_\infty$  control for linear systems with norm-bounded time-varying uncertainties. *IEEE Trans. Aut. Control*, 37 :1188–1191, 1992.
- [XdF91] L. Xie, C.E. de Souza, and M. Fu.  $\mathcal{H}_\infty$  estimation for discrete-time linear uncertain systems. *Int. J. Robust & Nonlinear Contr.*, 1 :111–123, 1991.
- [XL09] S.Y. Xing and J.G. Lu. Robust stability and stabilization of fractional-order linear systems with nonlinear uncertain parameters : an LMI approach. *Chaos, Solitons & Fractals*, 42 :1163–1169, 2009.
- [XLZY04] S. Xu, J. Lu, S. Zhou, and C. Yang. Design of observers for a class of discrete-time uncertain nonlinear systems with time delay. *J. of the Franklin Institute*, 341 :295–308, 2004.
- [YTT11] H. Yanai, K. Takeuchi, and Y. Takane. *Projection Matrices, Generalized Inverse Matrices, and Singular Value Decomposition*. Springer, New York, 2011.
- [YW88] F. Yang and R.W. Wilde. Observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Trans. Aut. Control*, 33 :677–681, 1988.
- [Zam81] G. Zames. Feedback and optimal sensitivity : Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(2) :301–320, 1981.
- [ZBB06] A. Zemouche, M. Boutayeb, and G.I. Bara. On observers design for nonlinear time-delay systems. In *Proc. IEEE American Control Conf.*, Minneapolis, USA, 2006.
- [ZDG96] K. Zhou, J.C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.
- [ZMD00] M. Zasadzinski, E. Magarotto, and M. Darouach. Unknown input reduced order observer for singular bilinear systems with bilinear measurements. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Control*, Sydney, Australia, 2000.



## Résumé

Ce travail de thèse concerne la synthèse des observateurs et des lois de commande des systèmes d'ordre fractionnaire. Le document présenté est constitué de 4 chapitres :

Le premier chapitre du manuscrit de thèse contient une introduction, traitant les notions mathématiques de base et de stabilités des systèmes d'ordre fractionnaire ainsi qu'une présentation des différentes définitions. Les conditions de stabilités de ces systèmes et quelques exemples de systèmes modélisés par des équations différentielles fractionnaires sont présentés.

Dans le deuxième chapitre, nous nous sommes intéressés à la conception de plusieurs types d'observateurs dits d'ordre réduit, d'ordre plein et des observateurs fonctionnels pour les systèmes d'ordre fractionnaire avec et sans retards. Dans le cas où il n'y a pas de retards dans la dynamique du système, des observateurs d'ordres plein et réduit ont été synthétisés afin d'assurer l'estimation des pseudo-états. Dans un deuxième temps, un observateur fonctionnel a été synthétisé dans le cas où le retard est présent dans la dynamique du système.

Dans le chapitre 3, nous avons travaillé sur la synthèse d'observateur pour les systèmes d'ordre fractionnaire incertains. Nos contributions sont classées en trois grandes lignes : premièrement, quand le système considéré est affecté par des entrées inconnues, un observateur fonctionnel a été proposé. En deuxième partie, des observateurs  $H_\infty$  pour les systèmes d'ordre fractionnaire avec et sans retards ont été synthétisés afin d'assurer la stabilité de l'erreur d'observation. Il s'agit en fait de garantir une borne du gain  $\mathcal{L}_2$  entre l'erreur d'observation et les perturbations non mesurables affectant la dynamique du système : ce gain  $\mathcal{L}_2$  est aussi appelé norme  $H_\infty$ . Ce chapitre présente aussi la synthèse d'un observateur robuste vis-à-vis des incertitudes de modélisation pour cette classe de systèmes. Les conditions suffisantes de convergence des erreurs d'estimations des pseudo-états obtenues sont établies sous la forme d'un ensemble d'inégalités matricielles LMIs.

Le dernier chapitre du manuscrit est consacré à la commande basée sur les différents observateurs obtenus. Nous nous sommes intéressés à la commande basée sur un observateur pour les systèmes d'ordre fractionnaire. Cette commande est basée sur les observateurs proposés dans les chapitres précédents. Des conditions de stabilité et des procédures de synthèse sont présentées.

**Mots-clés:** systèmes dynamiques d'ordre non entier, systèmes à retard, commande, observation, robustesse, fonctions de Lyapunov

## Abstract

This work focuses on the synthesis of observers and the controller laws for fractional order systems. The presented document consists of 4 chapters :

The first chapter of the theses manuscript contains an introduction dealing with the basic mathematical notions and the stability analysis of fractional systems as well as a presentation of the different definitions. The stability conditions of these systems and some examples of systems modeled by fractional differential equations are presented.

In the second chapter, we were interested in the design of several types of observers of reduced order, full order, and functional observers for fractional systems with and without delays. In the case where there are no delays in the dynamics of the system, observers of full and reduced orders have been synthesized in order to ensure the estimation of the pseudo-states. In a second step, a functional observer was synthesized in the case where the delay is present in the dynamics of the system.

In Chapter 3, we worked on observer synthesis for uncertain fractional order systems. Our contributions are classified into three main lines : first, when the system under consideration is affected by unknown inputs, a functional observer has been proposed.

In the second part,  $H_\infty$  observers for fractional order systems with and without delays have been synthesized to ensure the stability of the estimation error. It is a question of guaranteeing a bound of the  $\mathcal{L}_2$  gain between the observation error and the non-measurable perturbations affecting the dynamics of the system : this gain  $\mathcal{L}_2$  is also called  $H_\infty$  norm. In last part of this chapter, the synthesis of a robust observer with respect to modeling uncertainties for this class of systems is presented. The sufficient conditions of convergence of the estimation errors of the pseudo-states obtained are established in the form of a set of matrix inequalities LMIs.

The last chapter of the manuscript is devoted to the command based on the different observers obtained. We were interested in observer-based control for fractional order systems. This command is based on the observers proposed in the previous chapters. Stability conditions and synthesis procedures are presented.

**Keywords:** Non-integer order systems, time-delay systems, control, observation, robustness, Lyapunov functions

