



**HAL**  
open science

# Contributions aux équations d'évolution frac-différentielles

Rafika Lassoued

► **To cite this version:**

Rafika Lassoued. Contributions aux équations d'évolution frac-différentielles. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université de La Rochelle; Université de Monastir (Tunisie), 2016. Français. NNT : 2016LAROS001 . tel-01661424

**HAL Id: tel-01661424**

**<https://theses.hal.science/tel-01661424>**

Submitted on 11 Dec 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ DE LA ROCHELLE / UNIVERSITÉ DE MONASTIR

# THÈSE

présentée en première version en vue d'obtenir le grade de  
**Docteur**

SPÉCIALITÉ: MATHÉMATIQUES

par

**Rafika Lassoued**

## Contributions aux équations d'évolution frac-différentielles

Thèse dirigée par

Pr. **Mokhtar KIRANE**/Pr. **Ferdaous KELLIL**

soutenue le le 08 Janvier 2016 devant le jury composé de :

Pr. KAIS AMMARI	Université de Monastir	(Examineur)
Pr. MOHAMMED GUEDDA	Université de Picardie Jules Verne	(Rapporteur)
Pr. MOHAMMED ALI JENDOUBI	Université de Tunis El Manar	(Président)
Pr. FERDAOUS KELLIL	Université de Monastir	(Co-Directeur)
Pr. MOKHTAR KIRANE	Université de La Rochelle	(Co-Directeur)
Pr. MOHAMED MAJDOUB	Université de Tunis El Manar	(Rapporteur)



*À mes parents*



# REMERCIEMENTS

**M**ES chaleureux remerciements s'adressent aux professeurs Ferdaous KELLIL et Mokhtar KIRANE qui ont dirigé cette thèse en cotutelle entre l'université de Monastir et l'université de La Rochelle. Qu'ils trouvent ici ma profonde gratitude pour la confiance et la sympathie dont ils m'ont témoignées au cours des années de thèse. Leurs qualités, tant humaines que scientifiques furent pour moi un apport inestimable.

Je tiens à remercier vivement Professeur KIRANE pour m'avoir accueillie pendant mon séjour à l'université de La Rochelle avec beaucoup de bienveillance et de disponibilité malgré ses occupations multiples. J'ai beaucoup appris à son contact, j'espère avoir encore l'occasion de profiter de leur sens physique et de sa grande culture scientifique dans les années à venir.

Je suis très reconnaissante à Madame KELLIL qui m'a encouragée à choisir le chemin de la recherche ; elle m'a suivie et soutenue dès mon master de recherche avec une grande gentillesse et disponibilité. Elle a été toujours ma tutrice pédagogique. Elle s'est beaucoup impliquée dans la thèse et l'avant-thèse, me permettant de réaliser mon souhait professionnel, je ne la remercierai jamais assez pour cela.

Je tiens tout particulièrement à remercier Monsieur Mohammed Ali JENDOUBI, Professeur à la faculté des sciences de Tunis-Université de Tunis El Manar, pour m'avoir fait l'honneur d'être président du jury.

Je suis très sensible à l'intérêt qu'ont bien voulu porter à ce travail Monsieur Mohamed MAJDOUB, Professeur à la faculté des sciences de Tunis-Université de Tunis El Manar, et Monsieur Mohammed GUEDDA, Professeur à l'université de Picardie Jules Verne. Je tiens à les remercier pour m'avoir fait l'honneur d'être rapporteurs de ce mémoire.

Je suis honorée par la présence de Monsieur Kais AMMARI, Professeur à la faculté des sciences de Monastir-Université de Monastir . Je le remercie très chaleureusement d'accepter avec une grande sympathie d'être membre de mon jury.

J'adresse un grand merci à Monsieur Rabah KELLIL pour ses précieux conseils et ses encouragements.

Mes respectueux remerciements s'adressent au Monsieur Lotfi KAMOUN, Professeur à la faculté des sciences de Monastir-Université de Monastir, pour son aide et sa disponibilité.

Je tiens à remercier Monsieur Ali BAKLOUTI, directeur du laboratoire des Mathématiques Appliquées et d'Analyse Harmonique (LAMHA-Sfax) pour l'accord qu'il m'a donnée au financement de stages.

Je remercie également Madame Wassila secrétaire à la faculté des sciences de Monastir, mesdames Isabelle Hirsch, Jennifer De La Corte Gomez et Sylviane Picq secrétaires à l'université de La Rochelle pour leur aide dans les démarches administratives.

Enfin, je profite de cette occasion pour exprimer ma profonde gratitude à mon père, ma mère ainsi que mes frères et soeurs et tout le reste de ma famille pour leur amour et soutien tout au long de ces années d'études.

J'exprime mes sentiments de fraternité et d'amour à mes amies Dorsaf, Rawdha, Wided, Besma en témoignage de tous les moments que nous avons passés ensemble.

Monastir, le 8 Janvier 2016.

# RÉSUMÉ

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés aux équations différentielles fractionnaires. Nous avons commencé par l'étude d'une équation différentielle fractionnaire en temps. Ensuite, nous avons étudié trois systèmes fractionnaires non linéaires ; le premier avec un Laplacien fractionnaire et les autres avec une dérivée fractionnaire en temps définie au sens de Caputo.

Dans le premier chapitre, nous avons établi les propriétés qualitatives de la solution d'une équation différentielle fractionnaire en temps qui modélise l'évolution d'une certaine espèce. Plus précisément, l'existence et l'unicité de la solution globale sont démontrées pour certaines valeurs de la condition initiale. Dans ce cas, nous avons obtenu le comportement asymptotique de la solution en  $t^{-\alpha}$ . Sous une autre condition sur la donnée initiale, la solution explose en temps fini. Le profil de la solution et l'estimation du temps d'explosion sont établis et une confirmation numérique de ces résultats est présentée.

Les chapitres 4, 5 et 6 sont consacrés à l'étude théorique de trois systèmes fractionnaires : un système de la diffusion anormale qui décrit la propagation d'une épidémie infectieuse de type SIR dans une population confinée, le Brusselator avec une dérivée fractionnaire en temps et un système fractionnaire en temps avec une loi de balance.

Pour chaque système, on présente l'existence globale et le comportement asymptotique des solutions. L'existence et l'unicité de la solution locale pour les trois systèmes sont obtenues par le théorème de point fixe de Banach. Cependant, le comportement asymptotique est établi par des techniques différentes : le comportement asymptotique de la solution du premier système est démontré en se basant sur les estimations du semi-groupe et le théorème d'injection de Sobolev. Concernant le Brusselator fractionnaire, la technique utilisée s'appuie sur un argument de feedback. Finalement, un résultat de régularité maximale est utilisé pour l'étude du dernier système.

## Mots clés

Calcul fractionnaire, dérivée fractionnaire, Laplacien fractionnaire, système de réaction-diffusion, équation différentielle fractionnaire, solution explosive, temps d'explosion, existence globale, comportement asymptotique.



## Liste de publications

Les questions abordées dans cette thèse ont fait l'objet de deux articles publiés et de deux autres soumis :

1. D. Hnaien, F. Kellil, **R. Lassoued**, Blowing-up solutions and global solutions to a fractional differential equation, **publié dans Fractional Differential Calculus** 4(1) : 53-61, 2014.
2. D. Hnaien, F. Kellil, **R. Lassoued**, Asymptotic behavior of global solutions of an anomalous diffusion system, **publié dans Journal of Mathematical Analysis and Applications** 421 : 1519-1530, 2015.
3. Mahmoud Boutefnouchet, Mokhtar Kirane, **R. Lassoued**, Global existence and large time behavior of solutions of the time fractional Brusselator, **soumis dans Nonlinear Analysis Series B : Real World Applications**.
4. Ahmed Alsaedi, Mokhtar Kirane, **R. Lassoued**, Global existence and asymptotic behavior for a time fractional reaction-diffusion system, **soumis dans Computers and Mathematics with applications**.

*Dans les publications mathématiques, l'ordre des noms des auteurs est alphabétique.*

# ABSTRACT

In this thesis, we are interested in fractional differential equations. We begin by studying a time fractional differential equation. Then we study three fractional nonlinear systems; the first system contains a fractional Laplacian, while the others contain a time fractional derivative in the sense of Caputo.

In the second chapter, we establish the qualitative properties of the solution of a time fractional equation which describes the evolution of certain species. The existence and uniqueness of the global solution are proved for certain values of the initial condition. In this case, the asymptotic behavior of the solution is dominated by  $t^{-\alpha}$ . Under an other condition, the solution blows-up in a finite time. The solution profile and the blow-up time estimate are established and a numerical confirmation of these results is presented.

The chapters 4, 5 and 6 are dedicated to the study of three fractional systems : an anomalous diffusion system which describes the propagation of an infectious disease in a confined population with a SIR type, the time fractional Brusselator and a time fractional reaction-diffusion system with a balance law.

The study includes the global existence and the asymptotic behavior. The existence and uniqueness of the local solution for the three systems are obtained by the Banach fixed point theorem. However, the asymptotic behavior is investigated by different techniques. For the first system our results are proved using semi-group estimates and the Sobolev embedding theorem. Concerned the time fractional Brusselator, the used technique is based on an argument of feedback. Finally, a maximal regularity result is used for the last system.

## Keywords

Fractional calculus, fractional derivative, fractional Laplacian, reaction-diffusion system, fractional differential equation, blowing-up solution, blow-up time, global existence, asymptotic behavior.

## List of publications

The issues addressed in this thesis are the subjects of two articles published and two submitted :

1. D. Hnaien, F. Kellil, **R. Lassoued**, Blowing-up solutions and global solutions to a fractional differential equation, **published in : Fractional Differential Calculus** 4(1) : 53-61, 2014.
2. D. Hnaien, F. Kellil, **R. Lassoued**, Asymptotic behavior of global solutions of an anomalous diffusion system, **published in : Journal of Mathematical Analysis and Applications** 421 : 1519-1530, 2015.
3. Mahmoud Boutefnouchet, Mokhtar Kirane, **R. Lassoued**, Global existence and large time behavior of solutions of the time fractional Brusselator, **submitted to : Nonlinear Analysis Series B : Real World Applications**.
4. Ahmed Alsaedi, Mokhtar Kirane, **R. Lassoued**, Global existence and asymptotic behavior for a time fractional reaction-diffusion system, **submitted to : Computers and Mathematics with applications**.

*In mathematics, the order of authors in a paper is alphabetical.*

# TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	xi
LISTE DES FIGURES	xii
NOTATIONS	xiii
1 INTRODUCTION	1
1.1 STRUCTURE DE LA THÈSE . . . . .	1
1.2 EXEMPLES D'APPLICATIONS DE LA DÉRIVATION FRACTIONNAIRE . . . . .	2
1.3 PRÉSENTATION DES RÉSULTATS OBTENUS . . . . .	5
2 THÉORIE DU CALCUL FRACTIONNAIRE	15
2.1 HISTORIQUE . . . . .	17
2.2 OUTILS MATHÉMATIQUES ET FONCTIONS SPÉCIFIQUES . . . . .	17
2.3 INTÉGRATION ET DÉRIVATION FRACTIONNAIRE . . . . .	21
2.3.1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville . . . . .	21
2.3.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville . . . . .	22
2.3.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo . . . . .	24
2.4 LAPLACIEN FRACTIONNAIRE . . . . .	25
2.5 LES OPÉRATEURS DE MITTAG-LEFFLER . . . . .	27
3 BLOWING-UP SOLUTIONS AND GLOBAL SOLUTIONS TO A FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION	33
3.1 INTRODUCTION . . . . .	35
3.2 PRELIMINARIES . . . . .	35
3.3 MAIN RESULTS . . . . .	37
3.4 NUMERICAL IMPLEMENTATION . . . . .	40
4 ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF GLOBAL SOLUTIONS OF AN ANOMALOUS DIFFUSION SYSTEM	45
4.1 INTRODUCTION . . . . .	47
4.2 PRELIMINARIES . . . . .	48
4.3 LOCAL EXISTENCE . . . . .	50
4.4 GLOBAL EXISTENCE AND ASYMPTOTIC BEHAVIOR . . . . .	51
5 GLOBAL EXISTENCE AND LARGE TIME BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF THE TIME FRACTIONAL BRUSSELATOR	59
5.1 INTRODUCTION . . . . .	61

5.2	PRELIMINARIES AND DEFINITIONS . . . . .	61
5.3	LOCAL EXISTENCE . . . . .	64
5.4	GLOBAL EXISTENCE AND LARGE TIME BEHAVIOR . . . . .	67
6	GLOBAL EXISTENCE AND ASYMPTOTIC BEHAVIOR FOR A TIME FRACTIONAL REACTION-DIFFUSION SYSTEM	75
6.1	INTRODUCTION . . . . .	77
6.2	PRELIMINARY RESULTS . . . . .	78
6.3	LOCAL EXISTENCE . . . . .	80
6.4	GLOBAL EXISTENCE AND ASYMPTOTIC BEHAVIOR . . . . .	82
	CONCLUSION GÉNÉRALE	87
A	COMPLÉMENTS MATHÉMATIQUES	89
A.1	LEMES . . . . .	89
A.2	THÉORÈMES . . . . .	90
A.3	DÉMONSTRATION DE LA REMARQUE 4.2.4 . . . . .	91
	BIBLIOGRAPHIE	93

## LISTE DES FIGURES

1.1	Le profil de concentration total $P(x, t)$ dans un domaine de longueur $L = 1$ à un temps fixé, avec $d = 0.1$ , $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ , $v = 0$ et $dt = 0.0005$ . En noir $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ , en bleu $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.2$ . Les symboles représentent la méthode de Monte Carlo réalisée avec 100000 particules. Les lignes continues représentent l'intégration numérique de l'équation (1.3). . .	4
1.2	Le profil de concentration totale $P(x, t)$ dans un domaine de longueur $L = 1$ à un temps fixé, avec $d = 0.1$ , $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ , $v = 0.5$ et $\gamma_1 = 0.2$ , $\gamma_2 = 0.5$ . Les symboles représentent la simulation par la méthode de Monte Carlo et les lignes continues représentent l'intégration numérique de l'équation (1.3). . . . .	4
2.1	Fonction $E_\alpha(-t^\alpha)$ pour $0 < \alpha \leq 1$ et pour $0 < \alpha \leq 2$ . . . . .	19
3.1	Solutions for $\alpha = 0.5$ and $u_0 = 5, 3, 2$ . . . . .	42
3.2	Solutions for $u_0 = 5$ and $\alpha = 0.3, 0.5$ . . . . .	42

# NOTATIONS

## Ensembles

$\mathbb{N}$	l'ensemble des entiers naturels
$\mathbb{Z}$	l'ensemble des entiers relatifs
$\mathbb{R}, \mathbb{R}^+$	l'ensembles des réels et des réels positifs
$\mathbb{C}$	l'ensemble des nombres complexes
$\mathbb{R}^N$	l'espace réel euclidien de dimension $N \geq 1$
$\Omega$	un domaine borné régulier dans $\mathbb{R}^N$ ( $N \geq 1$ ) de bord $\partial\Omega$

## Fonctions, Espaces des fonctions

$E_\alpha(\cdot)$	la fonction de Mittag-Leffler à un paramètre
$E_{\alpha,\beta}(\cdot)$	la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres
$\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{L}^{-1}$ )	transformée de Laplace (resp. transformée de Laplace inverse)
$\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}^{-1}$ )	transformée de Fourier (resp. transformée de Fourier inverse)
$\mathcal{C}([0, T], X)$	l'ensemble des fonctions continues sur $[0, T]$ à valeurs dans $X$
$\mathcal{C}^n([0, T])$	l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[0, T]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
$L^p(\Omega)$	l'espace des fonctions mesurables $u$ sur $\Omega$ tel que $ u ^p$ est intégrable ( $1 \leq p < \infty$ )
$L^\infty(\Omega)$	l'espace des fonctions mesurables $u$ sur $\Omega$ tel qu'il existe une constante $C$ tel que $ u(x)  \leq C$ pour presque tout $x \in \Omega$
$L^q(0, T; X)$	l'espace des fonctions mesurables $u$ sur $I$ à valeurs dans $X$ et tel que $\ u\ _X^q$ est intégrable ( $1 \leq q < \infty$ )
$AC([0, T])$	l'espace des fonctions absolument continues sur $[0, T]$
$W^{m,1}([0, T])$	l'espace de Sobolev usuel
$\mathcal{L}(X)$	l'espace des fonctions linéaires continues de $X$ dans $X$ muni de la norme $\ \cdot\ _{\mathcal{L}(X)}$

## Normes

$$\|u\|_p := \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \text{ pour } u \in L^p(\Omega)$$
$$\|u\|_\infty := \inf\{C > 0, |u(x)| \leq C \text{ presque partout}\} \text{ pour } u \in L^\infty(\Omega)$$

$$\|u\|_{p,q,T} := \sup_{0 < t < T} \left( \int_0^t \|u(\tau)\|_p^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\|u\|_{p,q} := \sup_{0 < t < \infty} \left( \int_0^t \|u(\tau)\|_p^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X)} := \sup_{\|u\|_X \leq 1} \|Au\|_X$$

## Autres opérateurs mathématiques

- \* le produit de convolution
- $(\cdot, \cdot)$  le produit scalaire usuel
- $\arg(\cdot)$  l'argument d'un nombre complexe
- $Re(\cdot)$  la partie réelle d'un nombre complexe
- $|\cdot|$  le module d'un nombre complexe
- $J_t^\alpha$  l'opérateur de l'intégration fractionnaire
- $D_t^\alpha$  l'opérateur de la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville
- ${}^c D_t^\alpha$  l'opérateur de la dérivation fractionnaire au sens de Caputo

# INTRODUCTION



L'objectif principal de cette thèse est l'étude de l'existence et le comportement asymptotique des solutions de certaines équations différentielles fractionnaires.

## 1.1 Structure de la thèse

1. Dans la section suivante, nous présentons quelques exemples de processus décrits par des équations différentielles fractionnaires. Ensuite, nous exposons un résumé de nos principaux résultats qui sont développés dans les chapitres de ce mémoire.

2. Nous commençons par rappeler dans le deuxième chapitre l'histoire de la théorie du calcul fractionnaire. Ensuite, nous exposons l'intégration et la dérivation fractionnaire tout en passant par deux différentes approches. Nous présentons aussi les outils et fonctions spécifiques utilisés lors de l'étude des équations différentielles fractionnaires.

3. Afin de répondre à une question posée par Nakagawa, Sakamoto et Yamamoto[61], nous nous intéressons dans le troisième chapitre à l'équation

$${}^c D_t^\alpha u(t) = -u(t)(1 - u(t)), \quad t > 0 \quad (1.1)$$

où  $u(0) = u_0$  et  ${}^c D_t^\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , est la dérivée fractionnaire définie au sens de Caputo (voir la définition 2.3.7). Avec un changement de variable convenable, cette équation modélise l'évolution d'une certaine espèce.

Dans cette partie, on commence par montrer que la solution de l'équation (1.1) est globale pour certaines valeurs de  $u_0$ . Dans ce cas, on établit le comportement de la solution à l'infini. Cependant, quand la solution est locale et le temps maximal d'existence est relié à une alternative d'explosion, la solution explose en temps fini. Notre objectif, dans ce dernier cas, est d'obtenir une estimation bilatérale pour la solution et approximer le temps d'explosion.

4. Dans le quatrième chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution d'un système non linéaire fractionnaire dans un domaine borné. C'est un système de réaction-diffusion avec une puissance fractionnaire du Laplacien qui décrit la diffusion anormale d'une épidémie dans une



population confinée. En deuxième lieu, nous établissons le comportement asymptotique de la solution.

5. Le cinquième chapitre est consacré à un système non linéaire des équations différentielles fractionnaires en temps. C'est une généralisation du Brusselator qui est un système de réaction chimique auto-catalytique [11]. Notre but est de montrer que la solution du système est globale. On commence par établir une estimation  $L^2$  de la solution puis par la méthode de feedback [71] on obtient une estimation  $L^p$  pour tout  $p \geq 2$ . Ce résultat assure l'existence globale et le comportement de la solution à l'infini.

6. Le sixième chapitre est dédié à l'étude d'un système de réaction-diffusion avec des dérivées fractionnaires en temps. Notre objectif est d'établir l'existence globale et le comportement asymptotique des solutions. L'étude est basée sur un résultat de régularité maximale obtenu par Bajlekova [8].

## 1.2 Exemples d'applications de la dérivation fractionnaire

Le calcul fractionnaire apparait de plus en plus fréquemment dans les champs de recherche non seulement mathématique mais aussi physique. Cette théorie devient le sujet de plusieurs ouvrages regroupés dans [51]. Cependant, le problème posé au début est l'interprétation physique de la dérivation fractionnaire. L'absence d'une telle interprétation a été abordée lors de la première conférence internationale en 1974 qui a eu lieu à New Haven ainsi lors des autres conférences qui ont suivi en 1984 en Angleterre à l'université de Strathclyde et en 1989 à Tokyo. Récemment, plusieurs études théoriques et expérimentales ont été consacrées à cette question. Ils ont trouvé que certains systèmes thermiques [10], électrochimiques [21], viscoélastique [75] sont régis par des équations différentielles fractionnaires.

Les domaines d'applications du calcul fractionnaire deviennent de plus en plus nombreux, par exemple l'électrochimie, la finance[54], la mécanique [52], la biomédecine [9, 67], etc. Dans la suite, on cite quelques modèles physiques qui sont décrits par la dérivation fractionnaire.

### **Rhéologie :**

La dérivée fractionnaire procure un excellent instrument pour la description des propriétés de plusieurs matériaux et processus. Elle intervient lors de la modélisation mécanique des gommés et des caoutchoucs, plus généralement les matériaux à mémoire de forme, grâce à l'intégrale associée dans sa définition.

À titre d'exemple, dans [5, 7], les auteurs ont introduit la dérivation fractionnaire pour modéliser l'amortissement dans les équations de mouvement où les matériaux employés comme isolateurs ou amortisseurs

sont viscoélastiques. La nouveauté est que l'introduction de la dérivation fractionnaire réduit le nombre de paramètres du modèle ; par exemple pour la modélisation du comportement contrainte-déformation d'un solide, Bagley et Torvik [6] ont introduit un modèle à quatre paramètres au lieu d'une dizaine,

$$(1 + bD_t^\alpha)\sigma(t) = (G_0 + G_1D_t^\alpha)\varepsilon(t),$$

où  $\sigma$  et  $\varepsilon$  désignent respectivement la contrainte et la déformation et où  $b$ ,  $G_0$ ,  $G_1$  et  $\alpha$  sont les paramètres du modèle.

### Mécanique : Diffusion anormale

Beaucoup d'auteurs ont affirmé que l'usage des opérateurs fractionnaires est souhaitable pour la description des milieux hétérogènes. Par exemple, dans [14] et auparavant [28] ils ont remarqué que le milieu est capable de retenir une certaine mémoire, de plus le transport de masse n'obéit pas à la loi de diffusion normale. Pour modéliser ce phénomène, l'approche de dérivation fractionnaire est adaptée (voir Metzler et Klafter [57], Sokolov et al.[78]). On présente deux possibilités pour la modélisation de la diffusion anormale dans les milieux où les particules des fluides subissent des retards irréguliers.

#### 1. L'équation de Fokker-Planck fractionnaire :

Cette équation modélise le mouvement Brownien avec un champ des forces extérieures. Afin de décrire le transport anormale, Metzler et Klafter [58] ont introduit une version fractionnaire en temps

$$\partial_t P(x, t) = D_t^{1-\gamma}(\partial_x F(x) + \frac{d}{2}\partial_x^2)P(x, t), \quad (1.2)$$

où  $D_t^\gamma$  est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville (la définition 2.3.3),  $P(x, t)$ ,  $d$ ,  $F(x)$  sont respectivement la densité, le coefficient de la diffusion, la force extérieure.

#### 2. Le modèle mobile/immobile (MIM) fractionnaire :

Le modèle classique MIM est basé sur l'existence des milieux avec des zones stagnantes [26]. La version fractionnaire a été proposé par Schumer [74] ; l'utilisation de la dérivée fractionnaire est motivée par le fait que le MIM fractionnaire représente une combinaison entre les équations de transfert de masse dans les zones mobile et immobile, de plus ce modèle a des solutions qui décrivent fidèlement les caractéristiques importantes d'évolution du soluté. L'équation qui relie les densités des particules mobiles ( dans une région  $E_1$ ) et immobiles (dans  $E_2$ ) est donnée par

$$(\partial_t + \lambda_1 \mathbb{1}_{E_1}(x) {}^c D_t^{\gamma_1} + \lambda_2 \mathbb{1}_{E_2}(x) {}^c D_t^{\gamma_2})P(x, t) = \partial_x(d \partial_x - v)P(x, t), \quad (1.3)$$

où  ${}^c D_t^{\gamma_i}$ ,  $i = 1, 2$ , représente la dérivée fractionnaire au sens de Caputo,  $d$ ,  $v$ ,  $P(x, t)$  sont respectivement le coefficient de la diffusion, la vitesse d'advection et la densité. L'ordre de la dérivation  $\gamma_i$  est l'exposant de

stabilité de la densité des particules (mobiles et immobiles) et  $\lambda_i$  représente l'intensité de stagnation dans la région  $E_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Une preuve numérique [69] vérifie que la solution de l'équation (1.3) coïncide avec les résultats expérimentaux. Cette illustration montre aussi la souplesse des outils disponibles pour approximer les solutions des équations fractionnaires. La figure 1.1 représente cette comparaison dans le cas où  $\gamma_1 = \gamma_2$  et la figure 1.2 pour  $\gamma_1 \neq \gamma_2$ . Le cas particulier  $\gamma_2 = 0$  est traité dans [55].

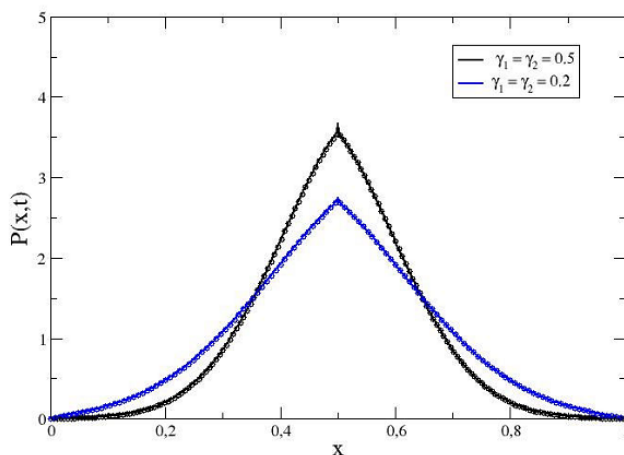


FIGURE 1.1 – Le profil de concentration total  $P(x,t)$  dans un domaine de longueur  $L = 1$  à un temps fixé, avec  $d = 0.1$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ,  $v = 0$  et  $dt = 0.0005$ . En noir  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ , en bleu  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.2$ . Les symboles représentent la méthode de Monte Carlo réalisée avec 100000 particules. Les lignes continues représentent l'intégration numérique de l'équation (1.3).

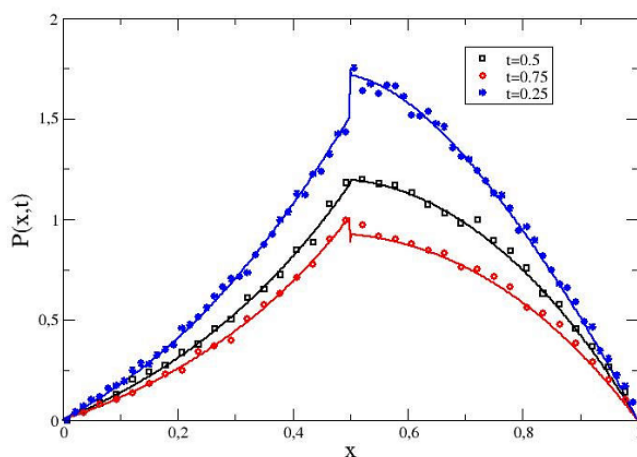


FIGURE 1.2 – Le profil de concentration totale  $P(x,t)$  dans un domaine de longueur  $L = 1$  à un temps fixé, avec  $d = 0.1$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ,  $v = 0.5$  et  $\gamma_1 = 0.2$ ,  $\gamma_2 = 0.5$ . Les symboles représentent la simulation par la méthode de Monte Carlo et les lignes continues représentent l'intégration numérique de l'équation (1.3).

Outre les quelques exemples développés ci-dessus, il y a de nombreux phénomènes physiques qui sont régis par les opérateurs fractionnaires

(dérivation et intégration), soit comme un outil de commande soit comme un outil de modélisation dans le domaine de biologie, mécanique, automatique, théorie du contrôle, finance,.. pour plus de détails voir [9, 48, 54].

Cependant, l'analyse théorique des équations différentielles fractionnaires n'a pas obtenue une attention importante. En particulier, la théorie d'explosion en temps fini n'a été étudiée qu'à partir des dernières décennies, on peut citer [43, 44].

La principale motivation de nos contributions est l'étude théorique des équations différentielles fractionnaires en temps et/ou en espace. Pour mettre en lumière les points importantes, nous présentons dans cette introduction des énoncés simplifiés de nos résultats. Des énoncés plus complets sont exposés dans les différents chapitres présentés ci-après.

## 1.3 Présentation des résultats obtenus

### Chapitre 3 : Solutions explosives et solutions globales d'une équation différentielle fractionnaire non linéaire

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'équation différentielle fractionnaire

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha u(t) &= -u(t)(1 - u(t)), \\ u(0) &= u_0, \end{cases} \quad (1.4)$$

où  $u_0 > 0$  et  ${}^c D_t^\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , représente la dérivée fractionnaire au sens de Caputo. Notons que, avec le changement de variable  $w := 1 - u$  l'équation (1.4) devient  ${}^c D_t^\alpha w(t) = w(t)(1 - w(t))$  qui modélise l'évolution d'une certaine espèce; le terme de la réaction  $w(1 - w)$  décrit la loi de l'augmentation de l'espèce.

Notre travail est une généralisation de l'équation bien connue  $u_t = -u(1 - u)$  pour laquelle on peut facilement établir que la solution est globale pour  $0 < u(0) < 1$ . Par contre, pour le cas où  $u(0) > 1$ , la solution ne peut pas exister globalement.

Motivés par ces résultats, nous nous intéressons par l'étude théorique de l'équation (1.4). Plus précisément, l'existence locale est assurée par le théorème 3.3.1 [39] et nos contributions sont présentées dans le théorème suivant :

**Théorème 1.3.1** *Si  $0 < u_0 < 1$ , la solution du problème (1.4) est globale et elle satisfait à  $0 < u < 1$ . De plus, elle est donnée par*

$$u(t) = E_\alpha(-t^\alpha)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-(t-s)^\alpha) u^2(s) ds,$$

et il existe deux constantes  $c > 0$  et  $c_1 > 0$  telles que

$$0 < u(t) \leq \frac{1}{\frac{1}{cu_0} - \frac{c_1}{\alpha} t^\alpha}, \quad 0 < t < T_0 := \left( \frac{\alpha}{c_1 c u_0} \right)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (1.5)$$

De plus on a pour  $0 < \epsilon < 1$ ,

$$u(t) \leq \frac{c}{1 + \epsilon(1 - \epsilon)t^\alpha}, \quad t > 0. \quad (1.6)$$

Si  $u_0 > 1$ , la solution de (1.4) explose en un temps fini  $T^*$  :  $\lim_{t \rightarrow T^*} u(t) = +\infty$ .

De plus on a les estimations bilatérales suivantes :

$$\bar{w}(t) + 1 \leq u(t) \leq \tilde{w}(t) + 1,$$

et

$$\left( \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{4(u_0 - \frac{1}{2})} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq T^* \leq \left( \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{u_0 - 1} \right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

où

$$\tilde{w}(t) + \frac{1}{2} \sim \frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha)} (T_{\tilde{w}} - t)^{-\alpha}, \quad \text{si } t \rightarrow T_{\tilde{w}},$$

$$\bar{w}(t) \sim \frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha)} (T_{\bar{w}} - t)^{-\alpha}, \quad \text{si } t \rightarrow T_{\bar{w}},$$

où  $T_{\tilde{w}}$  est le temps d'explosion de  $\tilde{w}$ , qui vérifie

$$\left( \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{4(u_0 - \frac{1}{2})} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq T_{\tilde{w}} \leq \left( \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{u_0 - \frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

et  $T_{\bar{w}}$  est le temps d'explosion de  $\bar{w}$ , qui vérifie

$$\left( \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{4(u_0 - 1)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq T_{\bar{w}} \leq \left( \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{u_0 - 1} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

La démonstration du premier résultat ( $0 < u_0 < 1$ ) est basée sur le lemme A.1.1. Le comportement de la solution donnée par (1.6) se démontre en comparant la solution  $u$  avec  $\bar{u}(t) := E_\alpha(-\epsilon(1 - \epsilon)t^\alpha)$ ,  $0 < \epsilon < 1$ , où  $E_\alpha(t)$  est la fonction de Mittag-Leffler (voir la définition 2.2.4).

Ensuite, on obtient le profil de la solution dans le cas où  $u_0 > 1$ . En comparant la fonction  $w := 1 - u$  avec  $\tilde{w}$  et  $\bar{w}$  qui explosent en temps fini [45], on établit à la fois une estimation bilatérale de la solution  $u$  et du temps d'explosion qui dépend de la condition initiale  $u_0$  et de l'ordre de la dérivation  $\alpha$ .

Finalement, une approximation numérique de la solution de l'équation (1.4) est présentée en utilisant la méthode de la convolution quadratique. Cette illustration est une confirmation numérique du résultat théorique; elle montre que la solution explose en temps fini lorsque  $u_0 > 1$  (figure 3.1) et que le temps d'explosion dépend de  $u_0$  et  $\alpha$  (figure 3.2).

### Chapitre 4 : Comportement asymptotique des solutions globales d'un système de diffusion anormale

Dans ce chapitre, nous étudions le système de réaction-diffusion non linéaire avec un Laplacien fractionnaire

$$\begin{cases} u_t = -a(-\Delta)^\alpha u - \lambda uv & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ v_t = -b(-\Delta)^\beta v + \lambda uv - \mu v & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \end{cases} \quad (1.7)$$

assujetti aux conditions initiales et aux limites suivantes

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x) \quad \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \end{aligned} \quad (1.8)$$

où  $\Omega$  est un domaine borné régulier dans  $\mathbb{R}^N$  de bord  $\partial\Omega$ ,  $u_0$  et  $v_0$  sont des fonctions positives bornées données et les constantes positives  $a, b, \lambda$  et  $\mu$  sont les paramètres du modèle.

Ce système modélise la diffusion anormale d'une épidémie infectieuse de type SIR dans une population confinée. Les constantes  $\lambda$  et  $\mu$  représentent respectivement le taux d'infection et le taux de rétablissement;  $u(t, x)$  et  $v(t, x)$  sont respectivement les densités des individus susceptibles et infectés. On a supposé qu'il y a pas d'infection à travers la frontière en utilisant les conditions aux limites de type Neumann. La diffusion anormale qui est représentée par l'opérateur  $(-\Delta^\delta)$ ,  $\delta = \alpha$  ou  $\beta$ , décrit le fait que les individus ne se déplacent pas aussi librement; ils ralentissent leurs mouvements à cause des obstacles.

Dans [81], l'auteur a étudié le système (1.7) avec le Laplacien classique (diffusion normale) dans un espace unidimensionnel. Il a établi l'existence globale en donnant le comportement de la solution à l'infini. Plus tard, un modèle plus générale a été étudié par Haraux et Kirane [29]. On cite aussi l'article de Fitzgibbon et Morgan [25] qui ont développé le système étudié dans [81] mais dans un domaine borné arbitraire. Pour d'autres travaux concernant le modèle épidémique SIR, on peut voir [40, 50]. Notre motivation dans cette partie est de donner une généralisation de ce modèle qui tient compte de la diffusion anormale.

Afin de présenter le résultat d'existence locale de la solution du système (1.7)-(1.8), on a besoin de définir la solution douce.

#### Définition 1.3.2 Solution douce

Soient  $u_0, v_0 \in L^\infty(\Omega)$  et  $T > 0$ . On dit que  $(u, v) \in \mathcal{C}([0, T]; L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega))$  est une solution douce de (1.7) – (1.8) si pour tout  $t \in [0, T]$  on a

$$\begin{cases} u(t) = e^{-atA_p}u_0 - \lambda \int_0^t e^{-a(t-s)A_p}(uv)(s) ds, \\ v(t) = e^{-btB_p}v_0 + \lambda \int_0^t e^{-b(t-s)B_p}(uv)(s) ds - \mu \int_0^t e^{-b(t-s)B_p}v(s) ds, \end{cases} \quad (1.9)$$

où  $A_p$  (resp.  $B_p$ ) est la réalisation de  $(-\Delta_N)^\alpha$  ( resp.  $(-\Delta_N)^\beta$ ) dans  $L^p(\Omega)$ , et  $e^{-tA_p}$  (resp.  $e^{-tB_p}$ ) est le semi-groupe engendré par  $-A_p$  (resp.  $-B_p$ ).

Maintenant, on énonce le théorème suivant qui assure l'existence et l'unicité de la solution locale.

**Théorème 1.3.3** Soient  $u_0, v_0 \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ , alors il existe un temps maximale  $T_{max} > 0$  et une unique solution douce  $(u, v) \in \mathcal{C}([0, T_{max}); \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \times \mathcal{C}(\bar{\Omega}))$  du système (1.7) – (1.8). De plus, soit  $T_{max} = +\infty$ , soit  $T_{max} < +\infty$  et  $(\|u(t)\|_\infty + \|v(t)\|_\infty) \rightarrow +\infty$  lorsque  $t \rightarrow T_{max}$ .

Ce théorème se démontre en appliquant le théorème du point fixe de Banach (voir Théorème A.2.1).

Avant d'énoncer le résultat principale, nous présentons un lemme dont nous avons montré une estimation de semi-groupe utile dans la suite. Ce lemme est une généralisation d'un résultat obtenu dans [71].

**Lemme 1.3.4** Soient  $p, q, r \in [1, +\infty]$ ,  $r \leq p \leq q$  et  $\theta \in [0, 1]$  tels que  $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{r} + \frac{1-\theta}{q}$ , alors pour tout  $u \in L^r(\Omega)$  on a

$$\|e^{-tA_p}u\|_p \leq e^{-\lambda_1^\alpha \theta t} m(t)^{\frac{n}{2\alpha}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})} \|u\|_r, \quad (1.10)$$

où  $m(t) = \min\{t, 1\}$  et  $\lambda_1$  est la plus petite valeur propre strictement positive du Laplacien avec une condition aux limites de type Neumann homogènes .

Finalement, un résultat d'existence globale et de convergence de la solution du (1.7)-(1.8) est résumé dans le théorème suivant.

**Théorème 1.3.5** Soit  $(u_0, v_0) \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \times \mathcal{C}(\bar{\Omega})$  tel que  $u_0 \geq 0, v_0 \geq 0$ . Alors il existe une unique solution globale  $(u, v)$  de (1.7) – (1.8) vérifiant :

1.  $u(x, t) \geq 0, v(x, t) \geq 0; x \in \Omega, t \geq 0$ .
2.  $u \in \mathcal{C}_B(\mathbb{R}^+, \mathcal{C}(\bar{\Omega})), v \in \mathcal{C}_B(\mathbb{R}^+, \mathcal{C}(\bar{\Omega}))$ .
3.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|v(t)\|_\infty = 0; \exists u_\infty \geq 0$  tel que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(x, t) - u_\infty\|_\infty = 0$ .

La preuve du théorème 1.3.5 s'appuie sur un raisonnement similaire à celui qui est fait par Haraux et Kirane [29], pour montrer que la solution  $(u, v)$  est bornée. Ensuite, la convergence de  $(u, v)$  vers  $(u_\infty, 0)$  dans  $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$  est établi en se basant sur le lemme A.1.3 et le théorème d'injection de Sobolev.

Le théorème suivant expose le comportement asymptotique de la solution qui est décrit par le taux de convergence de  $(u, v)$  vers  $(u_\infty, 0)$  dans  $L^\infty(\Omega)$ ; sa démonstration est basée sur l'estimation (1.10).

**Théorème 1.3.6** On suppose que  $(u, v)$  est la solution de (1.7) – (1.9) et que  $\mu - \lambda u_\infty > 0$ . Alors il existe des constantes positives  $T$  et  $C$  telles que

$$\|u(t) - u_\infty\|_\infty \leq \begin{cases} Ce^{-\xi(t-T)}, & \text{si } h(u_\infty) \neq a\theta\lambda_1^\alpha, t \geq T, \\ C(t-T+1)e^{-\xi(t-T)} & \text{si } h(u_\infty) = a\theta\lambda_1^\alpha, t \geq T, \end{cases}$$

$$\|v(t)\|_\infty \leq Ce^{-h(u_\infty)(t-T)}, t \geq T,$$

où  $\xi = \min\{h(u_\infty), a\theta\lambda_1^\alpha\}$ ,  $h(u_\infty) = \mu - \lambda u_\infty > 0$ , et  $\theta$  est défini dans le lemme 1.3.4.

### Chapitre 5 : Existence globale et comportement asymptotique des solutions du Brusselator avec des dérivées fractionnaires en temps

Ce chapitre est dédié à l'étude du système non linéaire suivant

$$\begin{cases} {}^c D_t^\beta u &= d_1 \Delta u - (b+1)u + u^2 v + a, \\ {}^c D_t^\beta v &= d_2 \Delta v + bu - u^2 v, \end{cases} \quad (1.11)$$

dans  $\Omega \times \mathbb{R}^+$ , assujetti aux conditions aux limites et initiales suivantes

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x, t) = \frac{\partial v}{\partial \eta}(x, t) &= 0 && \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) &= v_0(x) && \text{dans } \Omega, \end{aligned} \quad (1.12)$$

où  $\Omega$  est un domaine borné régulier dans  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 1$ ) de bord  $\partial\Omega$ .  ${}^c D_t^\beta$ ,  $0 < \beta < 1$ , représente la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.  $u_0(x)$  et  $v_0(x)$  sont supposées positives et bornées ;  $u(x, t)$  et  $v(x, t)$  représentent les concentrations des espèces et  $d_1, d_2, a$  et  $b$  sont les paramètres du modèle.

Le système obtenu en remplaçant la dérivée fractionnaire par la dérivée classique est un système de réaction chimique auto-catalytique dit le Brusselator. Ce modèle a été proposé par Prigogine et Lefevre en 1968. Plus tard, le Brusselator a attiré une importante attention. À titre d'exemple, on cite Rothe[71], Bénilan et Labani[11], Hollis et al.[33], Kirane[41], etc.

En considérant les opérateurs de Mittag-Leffler  $\{E_\beta(-t^\beta A)\}_{t \geq 0}$  et  $\{E_{\beta, \beta}(-t^\beta A)\}_{t \geq 0}$  associés à l'opérateur sectoriel  $A$  (voir la définition 5.2.8), on introduit la solution douce du problème (1.11).

#### Définition 1.3.7 Solution douce

On suppose que  $u_0, v_0 \in L^\infty(\Omega)$ , et  $T > 0$ , on dit que  $(u, v) \in \mathcal{C}([0, T]; L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega))$  est une solution douce du système (1.11)-(1.12) si elle vérifie

$$u(t) = E_\beta(-t^\beta A_1)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta, \beta}(-(t-s)^\beta A_1) f(s, u(s), v(s)) ds,$$

$$v(t) = E_\beta(-t^\beta A_2)v_0 + \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta, \beta}(-(t-s)^\beta A_2) g(s, u(s), v(s)) ds,$$

pour tout  $t \in [0, T]$  où  $A_i$  est la réalisation de  $(-d_i \Delta)$  avec les conditions de Neumann homogènes dans  $L^p(\Omega)$ ,  $i = 1, 2$ , et  $f(u, v) = -(b+1)u + u^2 v$  et  $g(u, v) = bu - u^2 v$ .

Dans la première partie de notre travail, on présente le résultat d'existence locale de la solution du problème (1.11)-(1.12).



**Théorème 1.3.8** *Existence Locale*

Soient  $u_0, v_0 \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ , alors il existe un temps maximal  $T_{max} > 0$  et une unique solution douce  $(u, v) \in \mathcal{C}([0, T_{max}]; \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \times \mathcal{C}(\bar{\Omega}))$  du système (1.11)-(1.12) avec l'alternative :

- soit  $T_{max} = +\infty$ ;

- soit  $T_{max} < +\infty$ , et dans ce cas  $\lim_{t \rightarrow T_{max}} \|u(t)\|_\infty + \|v(t)\|_\infty = +\infty$ .

Si de plus  $u_0, v_0 \geq 0$ ,  $u_0, v_0 \not\equiv 0$ , alors on a  $u(t), v(t) > 0$  pour tout  $t \in (0, T_{max})$ .

La preuve de l'existence locale se base sur le théorème du point fixe de Banach (voir le théorème A.2.1). Pour montrer la positivité de la solution, on a utilisé les techniques standards et le lemme 5.2.3 qui a joué un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

Comme première contribution, on établit une estimation en norme  $L^2$  de  $u$  et en norme  $L^\infty$  de  $v$  dont on a besoin pour l'existence globale.

**Théorème 1.3.9** *Supposons que  $u_0, v_0 \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$  sont telles que  $u_0, v_0 \geq 0$ . Alors il existe une constante positive  $M$  telle que la solution  $(u, v) \in \mathcal{C}([0, T_{max}]; \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \times \mathcal{C}(\bar{\Omega}))$  satisfait aux estimations suivantes :*

$$\|v(\cdot, t)\|_\infty \leq M, \quad \text{pour } t > 0, \quad (1.13)$$

$$v^2(x, t) \leq E_\beta(-t^\beta A_2)v_0^2 + Mt^\beta, \quad \text{pour } (x, t) \in \Omega \times (0, T_{max}), \quad (1.14)$$

$$\|u(\cdot, t)\|_2^2 \leq M(1 + t^\beta), \quad \text{pour } t \in (0, T_{max}). \quad (1.15)$$

Pour donner une estimation en norme  $L^p$  de  $u$ , on a besoin du lemme suivant qui est obtenu en utilisant l'argument de feedback et l'estimation (1.15).

**Lemme 1.3.10** *Soient  $p_0, q_1, q_2 \in [1, \infty]$ ,  $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ ,  $\delta \in (0, 1)$  et  $\varepsilon \in (0, 1)$  tels que*

$$\varepsilon \leq (1 - 2\alpha)\delta, \quad (1.16)$$

$$\frac{N}{2} \left( \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p} \right) < 1, \quad (1.17)$$

$$\delta = \frac{N\beta}{2} \left( \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p} \right), \quad (1.18)$$

$$\frac{N}{2q_1} + \frac{1}{\beta q_2} + \frac{N}{2}(1 - \alpha) \leq 1 + (1 - 2\alpha) \frac{N}{2p}, \quad (1.19)$$

$$\frac{N\beta}{2} \left( \frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1} \right) < \frac{1}{q_2}. \quad (1.20)$$

Alors pour  $(u_0, v_0) \in L^{p_0}(\Omega) \times L^{q_0}(\Omega)$ , il existe des constantes positives  $M_1$  et  $M_2$  telles que

$$\sup_{0 < t < T} (m(t)^\delta \|u\|_p) \leq M_1 \|u_0\|_{p_0} + M_2 m(T)^\varepsilon (U + U^{\frac{1}{1-2\alpha}}) \quad (1.21)$$

où  $m(t) = \min(1, t)$  and  $U = \|v\|_{q_1, q_2} \|1 + u\|_{2, \infty}^{2(1-\alpha)} < \infty$ .

Finalement, nous présentons le résultat principal de notre travail qui assure d'une part l'existence globale dans le cas particulier  $p_0 = q_0 = p = q = \infty$  et d'autre part le comportement asymptotique de la solution du problème (1.11)-(1.12).

**Théorème 1.3.11** Soient  $N \leq 3$  et  $p_0, q_0 \in [2, \infty]$ . Pour  $(u_0, v_0) \in L^{p_0}(\Omega) \times L^{q_0}(\Omega)$ , le système (1.11)-(1.12) admet une unique solution globale qui satisfait aux estimations

$$\sup_{0 < t < \infty} m(t)^\delta \|u(\cdot, t)\|_p \leq M, \text{ pour } p_0 \leq p \leq \infty, \delta = \frac{N\beta}{2} \left( \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p} \right), \quad (1.22)$$

$$\sup_{0 < t < \infty} m(t)^\eta \|v(\cdot, t)\|_q \leq M, \text{ pour } q_0 \leq q \leq \infty, \eta = \frac{N\beta}{2} \left( \frac{1}{q_0} - \frac{1}{q} \right), \quad (1.23)$$

où  $m(t) = \min(1, t)$  et  $M$  une constante positive .

### Chapitre 6 : Existence globale et comportement asymptotique des solutions d'un système de réaction-diffusion d'équations différentielles fractionnaires en temps

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au système de réaction-diffusion fractionnaire suivant

$$\begin{cases} {}^c D_t^\beta u - \Delta u &= f(u)v, \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ {}^c D_t^\beta v - d\Delta v &= -f(u)v, \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (1.24)$$

avec les conditions aux limites et initiales suivantes

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x, t) &= \frac{\partial v}{\partial \eta}(x, t) = 0 && \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x) && \text{dans } \Omega, \end{aligned} \quad (1.25)$$

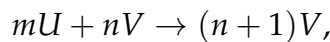
où  $\Omega$  est un domaine borné régulier dans  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 1$ ) de bord  $\partial\Omega$ ,  $u_0(x)$  et  $v_0(x)$  sont des fonctions positives données,  $d$  représente la constante de la diffusion;  ${}^c D_t^\beta$ ,  $0 < \beta < 1$ , est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo. Concernant la non-linéarité  $f$ , nous supposons qu'il existe des constantes positives  $M_1$  et  $M_2$  et un nombre réel  $p \geq 1$  tels que

$$0 \leq f(u) \leq M_1 |u|^p + M_2,$$

et pour  $|u|, |\tilde{u}| \leq R$ ,

$$|f(u) - f(\tilde{u})| \leq L|u - \tilde{u}|.$$

Avant de présenter nos résultats, nous citons quelques exemples dans la littérature concernant le système de réaction-diffusion avec une loi de balance. Lors de l'étude temporelle des concentrations spatio-temporelles des espèces  $U$  et  $V$  qui participent à la réaction moléculaire



on est amené au système de réaction-diffusion

$$\begin{cases} u_t - a\Delta u = -u^m v^n, & x \in \Omega, t > 0, \\ v_t - b\Delta v = u^m v^n, & x \in \Omega, t > 0, \end{cases} \quad (1.26)$$

où  $\Omega$  est le milieu dans le quel la réaction moléculaire a lieu,  $u(x, t)$  et  $v(x, t)$  sont les concentrations des espèces. Le système (1.26) a été étudié par Masuda [56], Hollis et al.[33], Kanel et Kirane [37] et Abdelmalek et Kouachi pour une situation plus générale [1] ; on cite aussi Ahmad et al. [3] qui ont étudié le système fractionnaire en espace suivant

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u = -f(u, v), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ v_t - (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} v = f(u, v), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \end{cases}$$

via l'argument de dualité.

Notre objectif est l'étude de l'influence de la dérivée fractionnaire en temps sur le comportement des solutions. Les dérivées fractionnaires sont introduites lorsque le système a lieu dans un milieu irrégulier ou fractal. Actuellement, les systèmes de réaction-diffusion sont largement étudiés non seulement pour le côté mathématique mais aussi pour leurs applications potentielles [46], [32], [30].

Dans cette partie, on établit l'existence locale de la solution du système (1.24)-(1.25). Ensuite, l'existence globale et le comportement asymptotique sont obtenus en utilisant un résultat de régularité maximale obtenu par Bajlekova [8]. On commence par définir la solution douce du système (1.24)-(1.25).

**Définition 1.3.12** *Solution douce*

On suppose que  $u_0, v_0 \in L^\infty(\Omega)$ , et  $T > 0$ , on dit que  $(u, v) \in \mathcal{C}([0, T]; L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega))$  est une solution douce du système (1.24)-(1.25) si elle vérifie

$$u(t) = E_\beta(-t^\beta A)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(-(t-s)^\beta A) f(u(s))v(s) ds, \quad (1.27)$$

$$v(t) = E_\beta(-t^\beta A)v_0 - \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(-(t-s)^\beta A) f(u(s))v(s) ds, \quad (1.28)$$

pour tout  $t \in [0, T]$ , où  $E_\beta(-t^\beta A)$  et  $E_{\beta,\beta}(-t^\beta A)$  sont les opérateurs de Mittag-Leffler définis dans [80] et  $A$  est la réalisation de  $(-\Delta)$  avec les conditions aux limites de type Neumann homogènes dans  $L^2(\Omega)$ .

Maintenant, nous présentons notre premier résultat d'existence locale obtenu en appliquant le théorème A.2.1 et les estimations des opérateurs  $E_\beta(-t^\beta A)$  et  $E_{\beta,\beta}(-t^\beta A)$  (voir Proposition 5.2.10)

**Théorème 1.3.13** *Existence Locale*

Soient  $u_0, v_0 \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ , alors il existe un temps maximal  $T_{max} > 0$  et une unique

solution douce  $(u, v) \in \mathcal{C}([0, T_{max}); \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \times \mathcal{C}(\bar{\Omega}))$  du système (1.24)-(1.25) avec l'alternative :

- soit  $T_{max} = +\infty$ ;
- soit  $T_{max} < +\infty$ , et dans ce cas  $\lim_{t \rightarrow T_{max}} \|u(t)\|_\infty + \|v(t)\|_\infty = +\infty$ .

Dans la suite, nous établissons l'existence globale et le comportement asymptotique de la solution en utilisant un résultat de régularité maximale (voir Lemme 6.2.7).

**Théorème 1.3.14** Soient  $u_0, v_0 \in L^\infty(\Omega)$  tels que  $u_0, v_0 \geq 0$ . Alors le système (1.24)-(1.25) admet une unique solution globale qui vérifie

$$u \geq 0, \quad v \geq 0, \quad (1.29)$$

$$\|v(\cdot, t)\|_\infty \leq \|v_0\|_\infty E_\beta(-\gamma t^\beta), \quad \text{pour } \gamma > 0, \quad t > 0, \quad (1.30)$$

$$\left\| u(\cdot, t) - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega (u_0 + v_0) dx \right\|_\infty \leq C E_\beta(-\gamma t^\beta), \quad \text{pour } t > 0, \quad (1.31)$$

où  $C$  est une constante positive.

L'existence globale est obtenu en montrant que la solution  $(u, v)$  est bornée pour tout  $t > 0$ . La limitation de  $v$  est simplement établi en utilisant l'estimation de l'opérateur  $E_\beta(-t^\beta A)$ . Par un raisonnement se basant sur un résultat de régularité maximale, on estime  $(u + dv)$  en norme infinie afin de borner  $u$ .

Ensuite, le comportement asymptotique de  $v$  est établi en montrant que  $\bar{v}(t) := \|v_0\|_\infty E_\beta(-\gamma t^\beta)$  est une sur-solution pour  $v$ . Pour décrire le comportement asymptotique de  $u$ , on donne le taux de convergence de  $u$  vers  $\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega (u_0 + v_0) dx$ . L'idée principale consiste à estimer  $\mathcal{P}u$  dans  $L^\infty(\Omega)$  où  $\mathcal{P}$  est la projection sur l'ensemble des fonctions de moyenne nulle définie par

$$\mathcal{P}u := u - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u dx.$$



# THÉORIE DU CALCUL FRACTIONNAIRE

# 2

## SOMMAIRE

3.1	INTRODUCTION . . . . .	35
3.2	PRELIMINARIES . . . . .	35
3.3	MAIN RESULTS . . . . .	37
3.4	NUMERICAL IMPLEMENTATION . . . . .	40

**C**E chapitre est consacré à la présentation des équations différentielles fractionnaires qui sont l'objet de développements des autres chapitres.

Dans la première partie, on donne un rappel historique de la théorie du calcul fractionnaire. Puis l'accent est mis sur deux différentes approches de la dérivation fractionnaire au sens Riemann-Liouville et au sens Caputo après l'introduction de quelques outils du calcul fractionnaire : la fonction Gamma, la fonction de Mittag-Leffler, la transformation de Laplace,...

En deuxième lieu, on introduit la définition du Laplacien fractionnaire et ses propriétés. Ensuite, l'étude de quelques équations différentielles fractionnaires est réalisée.



## 2.1 Historique

Le *calcul fractionnaire* est une extension des notions classiques de primitive et dérivation d'ordre entier non nul à tout ordre réel. Malgré que la dérivation fractionnaire a été définie par plusieurs approches aux noms de Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo, cette notion a été introduite en *XVII<sup>e</sup>* siècle lorsque Gottfried Leibniz a défini le symbole de la dérivation d'ordre entier positif, Guillaume l'Hôpital l'a interrogé sur la possibilité d'avoir une dérivée d'ordre  $\frac{1}{2}$ . Cette question a attiré l'attention des mathématiciens dont Euler ou Lagrange au *XVIII<sup>e</sup>* siècle suivi par Liouville en 1837, Riemann en 1847 ainsi que Grünwald 1867 et Letnikov en 1868. Pour plus de détails historique, on peut consulter [62, 70].

## 2.2 Outils mathématiques et fonctions spécifiques

Dans cette section, on présente des définitions et des propriétés de quelques fonctions spécifiques.

\* *Fonction Gamma* : Cette fonction joue un rôle important dans la théorie du calcul fractionnaire ; elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexes [39, 66, 52]. Pour le calcul fractionnaire on utilise la définition de la fonction Gamma comme l'intégrale d'Euler de deuxième espèce.

**Définition 2.2.1** *La fonction Gamma est définie sur  $D(\Gamma) := z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \dots\}$  par*

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} s^{z-1} e^{-s} ds, \quad \operatorname{Re}(z) > 0,$$

et

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z + 1). \quad (2.1)$$

De plus, on a pour  $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n + 1) = n!. \quad (2.2)$$

L'assertion (2.1) peut être démontrée par une intégration par partie, et (2.2) est une déduction directe.

**Théorème 2.2.2** *Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $\operatorname{Re}(z) > 0$ , alors on a*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} \mu^{-z} e^{\mu} d\mu, \quad (2.3)$$

avec  $Ha$  est le contour de Hankel, voir [52].

\* *Fonction Beta* : On définit une autre fonction qui est liée à la fonction Gamma, appelée la fonction Beta ou l'intégrale d'Euler du premier espèce.



**Définition 2.2.3** La fonction Beta notée  $B(z_1, z_2)$  est définie sur  $D(B) := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z_1) > 0, \operatorname{Re}(z_2) > 0\}$  par

$$B(z_1, z_2) := \int_0^1 s^{z_1-1} (1-s)^{z_2-1} ds.$$

De plus, on a

$$\Gamma(z_1)\Gamma(z_2) = \Gamma(z_1 + z_2)B(z_1, z_2). \quad (2.4)$$

La démonstration de (2.4) se fait en écrivant  $\Gamma(z_1)\Gamma(z_2)$  comme une intégrale double puis on introduit les coordonnées polaires.

\*La fonction de Mittag-Leffler :

La fonction exponentielle  $e^z$  joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier, la généralisation de cette fonction est la fonction de Mittag-Leffler notée  $E_\alpha(z)$ ,  $\alpha > 0$ , est nommée à l'honneur du mathématicien Magnus Gustaf Mittag-Leffler qui l'a introduite au début du XIX<sup>e</sup> siècle. Par la suite Agrawal a généralisé ces fonctions par des fonctions à deux paramètres ( $\alpha > 0$  et  $\beta \in \mathbb{C}$ ) et il les a appelées fonctions de Mittag-Leffler à deux paramètres [66, 27, 60].

**Définition 2.2.4** Soient  $\alpha > 0$  et  $\beta \in \mathbb{C}$ , on a

$$E_\alpha(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + 1)}, \quad z \in \mathbb{C};$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Dans le cas où  $\alpha = 1$ , on a

$$E_1(z) = \exp(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

La figure 2.1 ci-dessous montre le comportement de la fonction de Mittag-Leffler à une paramètre pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

**Théorème 2.2.5** ([72, 66])

Pour  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\beta > 0$  et  $\eta \geq 0$ , on a

$$E_{\alpha,\alpha}(\eta) \geq 0. \quad (2.5)$$

Pour  $m \in \mathbb{N}$ , on a

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m (E_\alpha(\eta t^\alpha)) = \eta t^{\alpha-m} E_{\alpha,\alpha-m+1}(\eta t^\alpha), \quad (2.6)$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m (t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\eta t^\alpha)) = t^{\beta-m-1} E_{\alpha,\beta-m}(\eta t^\alpha). \quad (2.7)$$

On s'intéresse maintenant au comportement asymptotique des fonctions de Mittag-Leffler qui va permettre d'étudier le comportement de la solution de certaines équations différentielles fractionnaires, voir [66, 47]. Le lemme suivant [66] décrit d'une manière générale le comportement de la fonction de Mittag-Leffler.

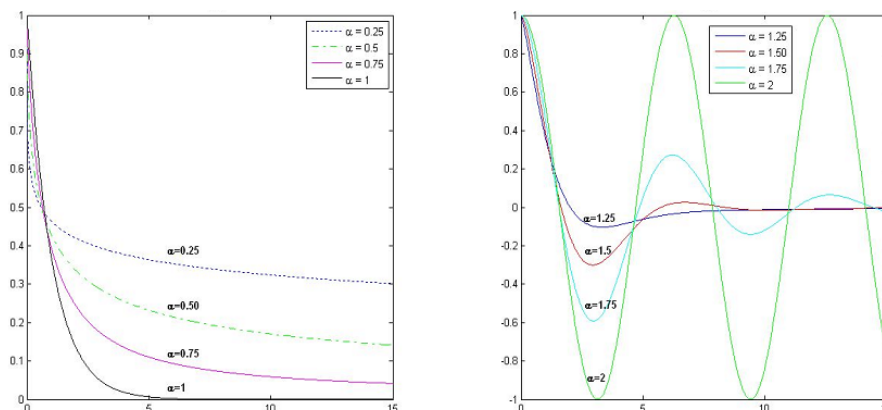


FIGURE 2.1 – Fonction  $E_\alpha(-t^\alpha)$  pour  $0 < \alpha \leq 1$  et pour  $0 < \alpha \leq 2$ .

**Lemme 2.2.6** Pour  $0 < \alpha < 2$ ,  $\beta > 0$  et  $\gamma$  est tel que  $\frac{\alpha\pi}{2} < \gamma < \min(\pi, \alpha\pi)$  il existe une constante  $C > 0$  tel que

$$|E_{\alpha,\beta}(z)| \leq \frac{C}{1 + |z|}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \gamma \leq |\arg(z)| \leq \pi.$$

En particulier, on a pour  $\lambda \geq 0$

$$|E_\alpha(-\lambda t^\alpha)| \leq \frac{C}{1 + \lambda t^\alpha}, \quad t \geq 0,$$

$$|t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha)| \leq C t^{\alpha-1}, \quad t > 0.$$

\*Transformation de Laplace :

La transformation de Laplace est utilisée pour résoudre les équations différentielles [22, 66]; l'avantage de la transformation de Laplace est que la plupart des opérations courantes sur la fonction  $f(t)$ , telle que la dérivation (classique ou fractionnaire) ou un décalage sur la variable  $t$ , ont une traduction plus simple par la transformée  $\mathcal{L}(f)(s)$ . De plus la transformation de Laplace tient compte des conditions initiales.

**Définition 2.2.7** On dit que  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est d'ordre exponentiel  $\sigma$ , s'il existe  $t_0$ ,  $M > 0$  et  $\sigma > 0$  tel que

$$|f(t)| < M e^{\sigma t}, \quad \text{pour tout } t \geq t_0.$$

En d'autres termes, la fonction  $f(t)$  ne doit croître pas plus vite qu'une certaine fonction exponentielle quand  $t$  tend vers l'infini.

**Définition 2.2.8** Pour  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  localement intégrable, on définit  $\mathcal{L}$  la transformée de Laplace d'une fonction  $f$  d'ordre exponentiel  $\sigma$  par

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad \text{pour } s \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma.$$

**Théorème 2.2.9**

Soient  $f, g$  deux fonctions définies sur  $[0, +\infty[$  localement intégrables et telles que  $\mathcal{L}f$  (resp.  $\mathcal{L}g$ ) existe pour  $\operatorname{Re}(s) > \sigma_1$  (resp.  $\operatorname{Re}(s) > \sigma_2$ ). Alors

1. Soient  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  et  $h = c_1f + c_2g$ , on a

$$\mathcal{L}h(s) = c_1\mathcal{L}f(s) + c_2\mathcal{L}g(s), \text{ pour } \operatorname{Re}(s) > \max(\sigma_1, \sigma_2).$$

2. Si  $h(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau$ , alors

$$\mathcal{L}h(s) = \mathcal{L}f(s)\mathcal{L}g(s) \text{ pour } \operatorname{Re}(s) > \max(\sigma_1, \sigma_2).$$

3. Si  $h(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ , alors pour  $\operatorname{Re}(s) > \max(\sigma_1, 0)$  on a

$$\mathcal{L}h(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}f(s).$$

4. Soit  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $h = D^m f$ , alors on a

$$\mathcal{L}h(s) = s^m \mathcal{L}f(s) - \sum_{k=1}^m s^{m-k} f^{(k-1)}(0).$$

On peut voir que la transformation de Laplace est un opérateur bijectif et continue (voir [66, 82]), donc on définit la transformation de Laplace inverse ( $\mathcal{L}^{-1}$ ) par l'intégrale de Bromwich.

**Théorème 2.2.10**

Soit  $f$  une fonction localement intégrable sur  $[0, +\infty[$  et d'ordre exponentiel  $\sigma$ , alors

$$f(t) := \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}f)(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathcal{L}f(s)e^{st} ds, \quad c = \operatorname{Re}(s) > \sigma.$$

Pour  $\alpha, \beta > 0$  les fonctions de Mittag-Leffler sont liées à l'intégrale de Laplace par la relation (voir [66, chap1])

$$\frac{1}{1-z} = \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-t} E_\alpha(z t^\alpha) dt & , |z| < 1, \\ \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(z t^\alpha) dt & , |z| < 1. \end{cases}$$

À l'aide d'un changement de variable on déduit les résultats suivants qui sont utiles lors de la résolutions des équations différentielles fractionnaires

$$\mathcal{L}(E_\alpha(\lambda t^\alpha))(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - \lambda}, \quad |s| > |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0, \quad (2.8)$$

$$\mathcal{L}(t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha))(s) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - \lambda}, \quad |s| > |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0. \quad (2.9)$$

\* Transformation de Fourier :

**Définition 2.2.11** Pour  $f$  une fonction intégrable sur  $\mathbb{R}^n$ , on définit sa transformée de Fourier notée  $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$  par

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x} f(x) dx.$$

Si  $\hat{f}$  est aussi intégrable, alors la transformation de Fourier inverse notée  $\mathcal{F}^{-1}$  est donnée par

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

## 2.3 Intégration et dérivation fractionnaire

Nombreuses sont les définitions de l'opérateur de la dérivation fractionnaire, nous présentons dans cette partie celles qui sont les plus utilisées. Selon l'approche de Riemann-Liouville du calcul fractionnaire la notion de l'intégrale fractionnaire est une conséquence naturelle de la formule bien connue de Cauchy qui réduit le calcul de la  $n^{\text{ème}}$  primitive d'une fonction  $f(t)$  à une seule intégrale

$$\begin{aligned} J^n f(t) &= \int_0^t d\tau_{n-1} \int_0^{\tau_{n-1}} d\tau_{n-2} \int_0^{\tau_{n-2}} d\tau_{n-3} \dots \int_0^{\tau_1} f(\tau_0) d\tau_0 \\ &:= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad t > 0, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

En utilisant la fonction Gamma ( $\Gamma(n) = (n-1)!$ ), la formule de Cauchy peut s'étendre naturellement au réel  $\alpha$  comme suit

$$J^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+. \quad (2.11)$$

### 2.3.1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Afin d'obtenir une définition formelle, on introduit une certaine terminologie. On considère la notation suivante pour  $\beta \geq 0$

$$g_\beta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\beta)} t^{\beta-1}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

et  $g_0(t) = 0$ . Cette fonction satisfait à la propriété de semi-groupe

$$g_\alpha * g_\beta = g_{\alpha+\beta}. \quad (2.13)$$

**Définition 2.3.1** Pour  $\alpha \geq 0$  et  $f \in L^1([0, T])$ ,  $T > 0$ . L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha$  notée par  $J_t^\alpha f$  est définie par

$$J_t^\alpha f(t) := \begin{cases} (g_\alpha * f)(t), & \alpha > 0 \\ f(t), & \alpha = 0 \end{cases}, \quad \text{presque partout sur } [0, T]. \quad (2.14)$$

En utilisant (2.13) et l'associativité du produit de convolution on conclut

**Théorème 2.3.2** Soient  $\alpha, \beta \geq 0$  et  $f \in L^1([0, T])$  alors

$$J_t^\alpha J_t^\beta f = J_t^{\alpha+\beta} f \quad \text{presque partout sur } [0, T]. \quad (2.15)$$

De plus  $\{J_t^\alpha : L^1([0, T]) \rightarrow L^1([0, T]), \alpha \geq 0\}$  forme un semi-groupe d'élément neutre  $J_t^0$ .

### 2.3.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Comme dans le cas classique l'opérateur de dérivation  $D^n$  d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$  est l'inverse à gauche de  $J^n$ , alors après avoir introduit la notion de l'intégration fractionnaire, celle de la dérivation fractionnaire devient une exigence.

Connaissant que l'opérateur  $D^n$  [22, Lemma 1.2] vérifie pour  $m, n \in \mathbb{N}^*$  tels que  $m \geq n$  et  $f$  une fonction de  $C^n([0, T])$

$$D^n f = D^m J^{m-n} f, \quad (2.16)$$

Riemann et Liouville ont donné la généralisation suivante sous certaines conditions sur  $f$ .

**Définition 2.3.3** Pour  $\alpha > 0$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ ;  $m - 1 < \alpha < m$  et  $f \in L^1([0, T])$  telle que  $g_{m-\alpha} * f \in W^{m,1}([0, T])$ . La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha$  notée  $D_t^\alpha f$  est définie par

$$D_t^\alpha f(t) := D^m J_t^{m-\alpha} f(t) = D^m (g_{m-\alpha} * f)(t), \quad (2.17)$$

presque partout sur  $[0, T]$  avec  $D^m := \frac{d^m}{dt^m}$ .

**Remarque 2.3.4** En particulier si  $\alpha \in (0, 1)$  et  $f \in AC([0, T])$  où  $AC([0, T])$  est l'espace des fonctions absolument continues sur  $[0, T]$  alors  $D_t^\alpha f$  existe presque partout sur  $[0, T]$ . De plus  $D_t^\alpha f \in L^p([0, T])$  pour  $1 \leq p < \frac{1}{\alpha}$ , voir [73, lemma 2.2].

**Exemple 2.3.1** Pour  $\alpha \in (0, 1)$  et  $\beta > -1$ , on a

$$D_t^\alpha t^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - \alpha)} t^{\beta - \alpha}.$$

La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction constante est donnée par

$$D_t^\alpha C = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} C.$$

On voit que la dérivée d'une constante est non-nulle.

**Théorème 2.3.5** *Sous les hypothèses de la définition 2.3.3 on a*

$$D_t^\alpha J_t^\alpha f(t) = f(t) \quad (2.18)$$

et

$$J_t^\alpha D_t^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} (g_{m-\alpha} * f)^{(k)}(0) g_{\alpha+k+1-m}(t) \quad (2.19)$$

presque partout sur  $[0, T]$ .

En particulier si  $g_{m-\alpha} * f \in W_0^{m,1}([0, T])$  on aura

$$J_t^\alpha D_t^\alpha f(t) = f(t). \quad (2.20)$$

*Démonstration :*

En utilisant le fait que  $J_t^\alpha f \in L^1([0, T])$  et  $g_{m-\alpha} * (J_t^\alpha f) = g_m * f \in W_0^{m,1}([0, T])$  on peut appliquer  $D_t^\alpha$  à  $J_t^\alpha f$

$$D_t^\alpha J_t^\alpha f = D^m J_t^{m-\alpha} J_t^\alpha f = D^m J^m f = f.$$

De la définition de l'espace  $W^{m,1}([0, T])$ ,  $g_{m-\alpha} * f$  est donnée par la représentation

$$g_{m-\alpha} * f = \sum_{k=0}^{m-1} c_k g_{k+1}(t) + g_m * \varphi, \quad (2.21)$$

avec  $\varphi \in L^1([0, T])$  et  $c_k = (g_{m-\alpha} * f)^{(k)}(0)$  alors

$$J_t^\alpha D_t^\alpha f = J_t^\alpha D^m (g_{m-\alpha} * f) = J_t^\alpha \varphi. \quad (2.22)$$

Par le produit de convolution de  $g_\alpha$  et (2.21) et la propriété de semi-groupe (2.15) on aura

$$g_m * f = \sum_{k=0}^{m-1} c_k g_{\alpha+k+1}(t) + g_{m+\alpha} * \varphi,$$

ce que implique

$$f = \sum_{k=0}^{m-1} c_k g_{\alpha+k+1-m}(t) + g_\alpha * \varphi. \quad (2.23)$$

En combinant (2.22) et (2.23), on obtient immédiatement (2.19).

Si  $g_{m-\alpha} * f \in W_0^{m,1}([0, T])$ , les coefficients  $c_k$  pour  $k = 0, 1, \dots, m-1$  sont tous nuls, il vient alors  $J_t^\alpha D_t^\alpha f = f$ .  $\square$

**Proposition 2.3.6** *Si  $f \in W^{m,1}([0, T])$  alors  $D_t^\alpha f$  existe presque partout sur  $[0, T]$ ; de plus elle est donnée par*

$$D_t^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) g_{k-\alpha+1}(t) + J_t^{m-\alpha} D^m f(t). \quad (2.24)$$

C'est une conséquence immédiate de la représentation des éléments de  $W^{m,1}([0, T])$  et la définition de  $D_t^\alpha$  (2.17).

La définition de la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a joué un rôle important dans le développement de la théorie du calcul fractionnaire mais lors de la modélisation des problèmes physiques elle mène à des conditions initiales contenant les valeurs limites des dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville en  $t = 0$ . Malgré que ces problèmes admettent des solutions mathématiques [66], en pratique elles n'ont aucune interprétation physique. Autre inconvénient de l'approche de Riemann-Liouville est que la dérivée d'une constante n'est pas nulle. Cependant, une certaine revision est demandée pour résoudre ce conflit entre la théorie mathématique et les besoins pratiques.

### 2.3.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Dans cette section, on s'intéresse à l'approche proposée par Caputo [16] et après par Caputo et Mainardi [17] grâce à son utilité pour la formulation des conditions initiales avec les valeurs des dérivées d'ordre entier en  $t = 0$  (vitesse, accélération...) comme pour le cas des équations différentielles d'ordre entier.

**Définition 2.3.7** Pour  $\alpha > 0$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ ;  $m - 1 < \alpha < m$  et  $f \in C^{m-1}([0, T])$  telle que  $g_{m-\alpha} * f \in W^{m,1}([0, T])$ . La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre  $\alpha$  notée  ${}^c D_t^\alpha f$  est définie par

$${}^c D_t^\alpha f(t) := D_t^\alpha \left( f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) g_{k+1}(t) \right) \quad (2.25)$$

presque partout sur  $[0, T]$ .

**Théorème 2.3.8** Soient  $\alpha > 0$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ ;  $m - 1 < \alpha < m$  et  $f \in C^m([0, T])$ . Alors  ${}^c D_t^\alpha f$  est continue sur  $[0, T]$ ; de plus on a

$${}^c D_t^\alpha f(t) = J_t^{m-\alpha} D^m f(t) \text{ pour tout } t \in [0, T] \quad (2.26)$$

avec  $D^m := \frac{d^m}{dt^m}$ .

En particulier si  $\alpha \in (0, 1)$  on a  ${}^c D_t^\alpha f(t) = J_t^{1-\alpha} D f(t)$ .

La démonstration se fait en utilisant [39, Theorem 2.2] pour montrer que  ${}^c D_t^\alpha f \in C([0, T])$ , et en combinant la proposition 2.3.6 et le fait que  $D_t^\alpha g_{k+1} = g_{k+1-\alpha}$  pour montrer (2.26).

L'opérateur de la dérivation fractionnaire de Caputo  ${}^c D_t^\alpha$  est aussi l'inverse à gauche de  $J_t^\alpha$  mais n'est pas l'inverse à droite :

**Proposition 2.3.9** Pour  $f \in L^1([0, T])$  on a  ${}^c D_t^\alpha J_t^\alpha f = f$ . Si  $f \in C^{m-1}([0, T])$  est telle que  $g_{m-\alpha} * f \in W^{m,1}([0, T])$ , alors on a

$$J_t^\alpha {}^c D_t^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) g_{k+1}(t). \quad (2.27)$$

Dans le cas où  $\alpha \in (0, 1)$  et  $f \in C([0, T])$  telle que  $g_{1-\alpha} * f \in W^{1,1}([0, T])$ , alors on a

$$J_t^{\alpha} {}^c D_t^{\alpha} f(t) = f(t) - f(0). \quad (2.28)$$

## 2.4 Laplacien fractionnaire

Dans cette partie, on introduit la définition du Laplacien fractionnaire et quelques propriétés utilisées lors de l'étude des systèmes de la diffusion anormale.

Le Laplacien fractionnaire est le plus important exemple de l'opérateur de Lévy  $L$  qui est un opérateur pseudo-différentiel défini par

$$Lu(x) := \mathcal{F}^{-1}(a(\xi)\mathcal{F}(u)(\xi))(x), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

où  $a(\xi)$  est le symbole du semi-groupe de convolution des mesures défini par la formule de Lévy-Khintchine [12, Chap1, Théorème 1].

Le Laplacien fractionnaire est un opérateur non local défini pour  $N \geq 1$  et  $0 < \alpha \leq 2$  par

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u(x) = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{\alpha} \mathcal{F}u(\xi))(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (2.29)$$

pour tout  $u \in D((-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}) = H^{\alpha}(\mathbb{R}^N)$  où  $H^{\alpha}(\mathbb{R}^N)$  est l'espace de Sobolev homogène d'ordre  $\alpha$  donné par

$$H^{\alpha}(\mathbb{R}^N) = \{u \in \mathcal{S}'; (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u \in L^2(\mathbb{R}^N)\}, \quad \text{si } \alpha \notin \mathbb{N},$$

$$H^{\alpha}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^N); (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u \in L^2(\mathbb{R}^N)\}, \quad \text{si } \alpha \in \mathbb{N},$$

où  $\mathcal{S}'$  est l'espace de Schwartz. Pour plus de détails voir [38, 13].

Par un calcul basé sur les propriétés de la transformation de Fourier, on peut montrer une équivalence entre la définition du Laplacien fractionnaire donnée par (2.29) et la définition suivante (voir [23]) :

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u(x) = -C(\alpha) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|\eta| \geq \varepsilon} \frac{u(x - \eta) - u(x)}{|\eta|^{N+\alpha}} d\eta. \quad (2.30)$$

où  $C(\alpha)$  est une constante positive qui dépend de  $\alpha$ .

En pratique, le Laplacien fractionnaire décrit le phénomène de la diffusion anormale dans les problèmes d'évolution.

Passons à la présentation de quelques outils concernant le semi-groupe engendré par  $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ . On considère l'équation linéaire de la diffusion anormale (voir [38, 2, 24])

$$u_t + (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad 0 < \alpha \leq 2, \quad (2.31)$$

dont la solution fondamentale  $S_{\alpha}$  est donnée par la formule

$$S_{\alpha}(t)(x) := S_{\alpha}(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tilde{\zeta} \cdot x - t|\tilde{\zeta}|^{\alpha}} d\tilde{\zeta}. \quad (2.32)$$



En utilisant l'inégalité du Young pour la convolution et la formule d'auto-similarité  $S_\alpha(x, t) = t^{-\frac{N}{\alpha}} S_\alpha(xt^{\frac{1}{\alpha}}, 1)$  qui est démontrée dans [38], on obtient l'estimation suivante :

**Lemme 2.4.1** *Pour tout  $u \in L^r(\mathbb{R}^N)$  et  $1 \leq r \leq q$ , on a  $S_\alpha * u \in L^q(\mathbb{R}^N)$  et*

$$\|S_\alpha(\cdot, t) * u(x)\|_q \leq Ct^{-\frac{N}{\alpha}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})} \|u\|_r, \quad t > 0, \quad (2.33)$$

où  $C$  est une constante positive.

Dans le cas d'un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , on présente la définition du Laplacien fractionnaire sur  $\Omega$  avec des conditions aux limites homogènes de type Neumann noté  $(-\Delta_N)^{\frac{\alpha}{2}}$ . Pour  $\lambda_k$  ( $k = 1, \dots, +\infty$ ), la valeur propre du Laplacien dans  $L^2(\Omega)$  avec les conditions aux limites homogènes de type Neumann et  $\varphi_k$  la fonction propre associée à  $\lambda_k$ , on a

$$\begin{cases} (-\Delta_N)^{\frac{\alpha}{2}} \varphi_k = \lambda_k^{\frac{\alpha}{2}} \varphi_k & \text{sur } \Omega, \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

**Définition 2.4.2** *Pour  $u \in D((-\Delta_N)^{\frac{\alpha}{2}})$ ,  $0 < \alpha \leq 2$ , on a*

$$(-\Delta_N)^{\frac{\alpha}{2}} u = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^{\frac{\alpha}{2}} \langle u, \varphi_k \rangle \varphi_k, \quad (2.34)$$

où  $D((-\Delta_N)^{\frac{\alpha}{2}}) := \left\{ u \in L^2(\Omega) / \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \text{ et } \sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k^{\frac{\alpha}{2}} \langle u, \varphi_k \rangle|^2 < \infty \right\}$ .

En utilisant la définition du Laplacien fractionnaire donnée par (2.34), on peut montrer la formule d'intégration par partie suivante :

**Lemme 2.4.3** *Pour  $u, v \in D((-\Delta_N)^{\frac{\alpha}{2}})$ ,  $0 < \alpha \leq 2$  on a*

$$\int_{\Omega} u(x) (-\Delta_N)^{\frac{\alpha}{2}} v(x) dx = \int_{\Omega} (-\Delta_N)^{\frac{\alpha}{2}} u(x) v(x) dx. \quad (2.35)$$

Maintenant, on présente l'inégalité de Strook-Varopoulos pour l'opérateur du Laplacien fractionnaire dont la démonstration est donnée dans [79].

**Lemme 2.4.4** [49, Theorem 1]

*Pour tout  $u \in L^p(\Omega)$  tel que  $(-\Delta_N)^{\frac{\alpha}{2}} u \in L^p(\Omega)$ ,  $0 < \alpha \leq 2$  on a*

$$\int_{\Omega} (|u|^{p-2} u) (-\Delta_N)^{\frac{\alpha}{2}} u dx \geq \frac{4(p-1)}{p^2} \int_{\Omega} |(-\Delta_N)^{\frac{\alpha}{4}} |u|^{\frac{p}{2}}|^2 dx. \quad (2.36)$$

Pour  $p \in (1, +\infty)$ , on note par  $A_p$  la réalisation de  $(-\Delta_N)^{\frac{\alpha}{2}}$  dans  $L^p(\Omega)$ . Il est bien connu que  $A_p$  est un opérateur sectoriel qui engendre le semi-groupe  $\{e^{-tA_p}\}_{t \geq 0}$ . La théorie des semi-groupes a été développée dans plusieurs ouvrages, voir par exemple [31, 38, 83].

**Lemme 2.4.5** *Pour tout  $u \in L^r(\Omega)$  et  $1 \leq r \leq q \leq \infty$  on a*

$$\|e^{-tA_p}u\|_{L^q(\Omega)} \leq Ct^{-\frac{N}{\alpha}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)} \|u\|_{L^r(\Omega)}, t > 0, \quad (2.37)$$

et

$$\|e^{-tA_p}u\|_{L^q(\Omega)} \leq Ce^{-\lambda_1^{\frac{\alpha}{2}}t} \|u\|_{L^q(\Omega)}, t > 0, \quad (2.38)$$

où  $\lambda_1$  est la plus petite valeur propre du Laplacien.

## 2.5 Les opérateurs de Mittag-Leffler

Dans cette section, on s'intéresse à l'opérateur de Mittag-Leffler  $E_\alpha(-t^\alpha A)$  défini pour un opérateur sectoriel positif  $A$  par

$$E_\alpha(-t^\alpha A) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-t^\alpha A)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

Cet opérateur intervient lors de la construction de la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha u(t) &= -Au(t), t > 0 \\ u(0) &= u_0 \in X \end{cases} \quad (2.39)$$

où  $0 < \alpha < 1$ ,  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  est un opérateur sectoriel positif et  $X$  est un espace de Banach.

On considère l'espace  $\mathcal{C}^\alpha([0, T], X)$  défini par

$$\mathcal{C}^\alpha([0, T], X) := \{u \in \mathcal{C}([0, T], X), {}^c D_t^\alpha u \in \mathcal{C}([0, T], X)\}$$

et la norme  $\|u\| := \|u\|_{\mathcal{C}([0, T], X)} = \sup_{t \in [0, T]} \|u\|_X$ .

**Définition 2.5.1** *On dit qu'une fonction continue  $u : [0, +\infty) \rightarrow X$  est une solution globale du problème (2.39), si  $u \in \mathcal{C}^\alpha([0, T], X)$  pour tout  $T > 0$  et vérifie (2.39).*

Pour montrer que le problème (2.39) admet une unique solution globale, on commence par établir l'équivalence entre (2.39) et une équation intégrale. Ensuite, on applique le théorème du point fixe de Banach donné par Weissinger ( voir le théorème A.2.2).

**Lemme 2.5.2** *Soit  $u \in \mathcal{C}([0, T], X)$  pour tout  $T > 0$ . Alors  $u$  est une solution globale du problème (2.39) si et seulement si elle vérifie l'équation suivante*

$$u(t) = u_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Au(s) ds, t \geq 0. \quad (2.40)$$

*Démonstration :*

D'une part, pour  $T > 0$  et  $u$  une solution globale de (2.39) on a  $u \in \mathcal{C}([0, T], X)$ ,  ${}^c D_t^\alpha u \in \mathcal{C}([0, T], X)$  et

$${}^c D_t^\alpha u(t) = -Au(t), t \in [0, T]. \quad (2.41)$$

En appliquant l'opérateur  $J_t^\alpha$  puis en utilisant (2.28) on obtient

$$\begin{aligned} u(t) &= u(0) - J_t^\alpha Au(t) \\ &= u_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Au(s) ds, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Puisque  $u$  vérifie l'équation (2.42) pour  $t \in [0, T]$  avec  $T$  arbitraire alors, elle vérifie l'équation (2.40) pour tout  $t \geq 0$ .

D'autre part, on choisit  $T > 0$  arbitraire tel que  $u \in \mathcal{C}([0, T], X)$  et vérifie l'équation

$$u(t) = u_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Au(s) ds, \quad (2.43)$$

pour tout  $t \in [0, T]$ .

En utilisant le fait que  $t \mapsto Au(t)$  est continue, on peut appliquer  ${}^c D_t^\alpha$  à l'équation (2.43) pour obtenir

$${}^c D_t^\alpha u(t) = -Au(t), \quad t \in [0, T], \quad (2.44)$$

ce qui implique que  ${}^c D_t^\alpha u \in \mathcal{C}([0, T], X)$ . De plus de l'équation (2.42) on voit que  $u(0) = u_0$ .

Puisque  $T$  est arbitraire,  $u$  est une solution globale du problème (2.39).  $\square$

**Théorème 2.5.3** *Pour  $\alpha \in (0, 1)$  et  $u_0 \in X$  alors le problème (2.39) admet une unique solution globale, donnée par*

$$u(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-t^\alpha A)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} u_0 = E_\alpha(-t^\alpha A) u_0.$$

*Démonstration :*

Pour  $T > 0$  on considère l'espace  $E_T := \{u \in \mathcal{C}([0, T], X), u(0) = u_0\}$  et l'opérateur  $B : E_T \rightarrow E_T$  défini par

$$B(u(t)) := u_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Au(s) ds.$$

Soient  $u, v \in E_T$  on a

$$\begin{aligned} \|B(u(t)) - B(v(t))\|_X &\leq \frac{\|A\|_{\mathcal{L}(X)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|u(s) - v(s)\|_X ds \\ &\leq \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|A\|_{\mathcal{L}(X)} \sup_{s \in [0, T]} \|u(s) - v(s)\|_X. \end{aligned}$$

Par itération, on obtient pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \|B^k(u(t)) - B^k(v(t))\|_X &\leq \frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} \|A\|_{\mathcal{L}(X)}^k \sup_{s \in [0, T]} \|u(s) - v(s)\|_X \\ &\leq \frac{T^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} \|A\|_{\mathcal{L}(X)}^k \sup_{s \in [0, T]} \|u(s) - v(s)\|_X \\ &\leq \omega_k \|u - v\|. \end{aligned}$$

On a  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)} \right)^{\frac{1}{k}} = 0$  puisque en utilisant la formule de Stirling on obtient lorsque  $k$  tend vers l'infini

$$\Gamma(\alpha k + 1) = \left( \frac{\alpha k}{e} \right)^{\alpha k} \sqrt{2\pi\alpha k} (1 + O(1)).$$

Alors la série  $\sum_{k=0}^{+\infty} \omega_k$  est convergente.

En appliquant le théorème A.2.2,  $B$  admet un unique point fixe  $u \in E_T$  pour tout  $T > 0$ . Par le lemme 2.5.2 le problème (2.39) admet une unique solution globale.

Pour la construction de la solution, on considère la suite  $(U_n)_{n \geq 0}$  définie par

$$\begin{cases} U_0 = u_0 \\ U_n = B^n u_0, n \geq 1. \end{cases}$$

Pour  $n = 1$  on a

$$B u_0 = u_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} A u_0 ds = u_0 - \frac{t^\alpha A}{\Gamma(\alpha+1)} u_0.$$

Par itération, on peut obtenir

$$U_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-t^\alpha A)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} u_0,$$

alors  $(U_n)_{n \geq 0}$  converge vers le point fixe  $u$ , et

$$u(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-t^\alpha A)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} u_0 = E_\alpha(-t^\alpha A) u_0.$$

□

Pour étudier une équation différentielle fractionnaire non linéaire, un autre opérateur intervient, il s'agit de  $\{E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A)\}_{t \geq 0}$ .

Dans la suite, on introduit les formules intégrales des opérateurs de Mittag-Leffler en utilisant la fonction de Mainardi  $\phi_\alpha$  [53, 52].

On présente quelques propriétés de cette fonction dans le lemme suivant.

**Lemme 2.5.4** Pour  $\alpha \in (0,1)$ ,  $-1 < r < \infty$  et  $s \in \mathbb{C}$ . La fonction de Mainardi  $\phi_\alpha$  vérifie les assertions suivantes

(A)  $\phi_\alpha(\theta) \geq 0, \theta > 0;$

(B)  $\int_0^\infty \phi_\alpha(\theta) d\theta = 1;$

(C)  $\int_0^\infty \theta^r \phi_\alpha(\theta) d\theta = \frac{\Gamma(1+r)}{\Gamma(1+\alpha r)};$

(D)  $\mathcal{L}(\phi_\alpha(\theta))(s) = E_\alpha(-s);$

(E)  $\mathcal{L}(\alpha\theta\phi_\alpha(\theta))(s) = E_{\alpha,\alpha}(-s).$

Pour la démonstration de ce lemme voir [52].

**Théorème 2.5.5** [76, Lemma 9]

Pour  $\alpha \in (0, 1)$  et  $A$  un opérateur sectoriel positif, on a

$$E_\beta(-t^\beta A) = \int_0^\infty \phi_\beta(\theta) e^{-\theta t^\beta A} d\theta, \quad t \geq 0, \quad (2.45)$$

et

$$E_{\beta,\beta}(-t^\beta A) = \int_0^\infty \beta \theta \phi_\beta(\theta) e^{-\theta t^\beta A} d\theta, \quad t \geq 0, \quad (2.46)$$

où  $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}$  est le semi-groupe engendré par  $-A$ .

Maintenant, on présente des estimations des opérateurs de Mittag-Leffler qui sont utilisées dans les chapitres 5 et 6.

**Proposition 2.5.6** Pour  $1 \leq r \leq p \leq \infty$  tel que  $\frac{N}{2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) < 1$  on a

$$\|E_\alpha(-t^\alpha A)u\|_p \leq Ct^{-\frac{N}{2}\alpha \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right)} \|u\|_r, \quad t > 0, \quad (2.47)$$

$$\|E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A)u\|_p \leq Ct^{-\frac{N}{2}\alpha \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right)} \|u\|_r, \quad t > 0. \quad (2.48)$$

De plus,

$$\|E_\alpha(-t^\alpha A)u\|_\infty \leq \|u\|_\infty E_\alpha(-t^\alpha \delta), \quad t > 0, \quad (2.49)$$

et

$$\|E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A)u\|_\infty \leq \|u\|_\infty E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha \delta), \quad t > 0, \quad (2.50)$$

où  $\delta < \operatorname{Re} \lambda$  est tel que  $\lambda \in \sigma(A)$  (le spectre de  $A$ ) et  $C$  une constante positive.

*Démonstration :*

En utilisant les estimations du semi-groupe  $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}$  et le lemme 2.5.4, on obtient

$$\begin{aligned} \|E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A)u\|_p &\leq \int_0^\infty \alpha \theta \phi_\alpha(\theta) \|e^{-\theta t^\alpha A} u\|_p d\theta \\ &\leq Ct^{-\frac{N}{2}\alpha \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right)} \int_0^\infty \alpha \theta^{-\frac{N}{2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right)} \phi_\alpha(\theta) d\theta \|u\|_r \\ &\leq C\alpha \frac{\Gamma\left(-\frac{N}{2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) + 1\right)}{\Gamma\left(-\frac{N}{2} \alpha \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) + 1\right)} t^{-\frac{N}{2}\alpha \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right)} \|u\|_r, \end{aligned}$$

de la même manière on montre la première assertion.

En utilisant l'estimation suivante donnée dans [31]

$$\|e^{-tA}\| \leq e^{-t\delta}, \quad t > 0, \quad \delta < \operatorname{Re}(\lambda), \quad \lambda \in \sigma(A), \quad (2.51)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \|E_\alpha(-t^\alpha A)u\|_\infty &\leq \int_0^\infty \phi_\alpha(\theta) \|e^{-\theta t^\alpha A} u\|_\infty d\theta \\ &\leq \int_0^\infty \phi_\alpha(\theta) e^{-\theta t^\alpha \delta} d\theta \|u\|_\infty \\ &\leq \|u\|_\infty \mathcal{L}(\phi_\alpha(\theta))(t^\alpha \delta) = \|u\|_\infty E_\alpha(-t^\alpha \delta). \end{aligned}$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned} \|E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha A)u\|_\infty &\leq \int_0^\infty \alpha \theta \phi_\alpha(\theta) \|e^{-\theta t^\alpha A}u\|_\infty d\theta \\ &\leq \int_0^\infty \alpha \theta \phi_\alpha(\theta) e^{-\theta t^\alpha \delta} d\theta \|u\|_\infty \\ &\leq \|u\|_\infty \mathcal{L}(\alpha \theta \phi_\alpha(\theta))(t^\alpha \delta) = \|u\|_\infty E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha \delta). \end{aligned}$$

□

**Remarque 2.5.7** *Bien que l'étude du problème (2.39) garantit que la solution suit les mêmes propriétés de la construction que celle du cas ordinaire (avec une dérivée classique), nous pouvons vérifier que l'opérateur de Mittag-Leffler ne satisfait pas la propriété du semi-groupe [64, 65]*

$$E_\alpha(-(t+s)^\alpha A) \neq E_\alpha(-t^\alpha A)E_\alpha(-s^\alpha A).$$

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit la théorie du calcul fractionnaire à partir d'un rappel sur les fonctions spécifiques et deux différentes définitions de la dérivation fractionnaire. Nous avons présenté aussi le Laplacien fractionnaire comme un opérateur non local qui décrit la diffusion anormale dans le quatrième chapitre.

Enfin, les opérateurs de Mittag-Leffler sont introduits dans la clôture de ce chapitre. Nous avons exposé les définitions de ces opérateurs et quelques propriétés utilisées ci-après dans les chapitres 5 et 6.



# BLOWING-UP SOLUTIONS AND GLOBAL SOLUTIONS TO A FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION

## SOMMAIRE

4.1	INTRODUCTION . . . . .	47
4.2	PRELIMINARIES . . . . .	48
4.3	LOCAL EXISTENCE . . . . .	50
4.4	GLOBAL EXISTENCE AND ASYMPTOTIC BEHAVIOR . . . . .	51

## Abstract

In this paper, we give a positive answer to a problem posed by Nakagawa, Sakamoto and Yamamoto concerning a nonlinear equation with a fractional derivative.

**Keywords** Fractional differential equation, global existence, asymptotic behavior, blow-up time, blow-up profile.

**MSC[2010]** : 34A08, 35A01, 35B01, 35B44.





## 3.1 Introduction

In their overview paper concerning the mathematical analysis of fractional equations, Nakagawa, Sakamoto and Yamamoto [61] posed the problem concerning global solutions and blowing-up in a finite time of solutions to the equation

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha u(t) &= -u(t)(1 - u(t)), \quad t > 0, \\ u(0) &= u_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

where  ${}^c D_t^\alpha$  is the Caputo derivative defined for  $g \in C^1[0, T]$  by

$${}^c D_t^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{-\alpha} g'(\tau) d\tau,$$

for  $0 < \alpha < 1$ .

Let us recall, in the case  $\alpha = 1$ , the results concerning solutions of (3.1) :

- For  $0 < u(0) < 1$ , the solution exists globally. Moreover,

$$|u(t)| \leq \frac{1}{e^t(1 - u_0)} \rightarrow 0, \text{ as } t \rightarrow +\infty.$$

- For  $u(0) > 1$ , the solution can not exist globally.

Here, we show that the same conclusions are valid for equation (3.1). Moreover we analyse :

1. The large time behavior of the global solution.
2. The blow-up time and profile of the blowing-up solutions.

Note that if we set  $w = u - 1$ , then (3.1) reads

$${}^c D_t^\alpha w(t) = w(t)(1 + w(t)),$$

which describes the evolution of a certain species; the reaction term  $w(1 + w)$  describes the law of increase of the species.

## 3.2 Preliminaries

In this section, we present some definitions and results concerning fractional calculus that will be used in the sequel. For more information see [39].

The Riemann-Liouville fractional integral of order  $0 < \alpha < 1$  of the integrable function  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  is

$$J_{0+}^{\alpha} f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > 0,$$

where  $\Gamma(\alpha)$  is the Euler Gamma function.

The Riemann-Liouville fractional derivative of an absolutely continuous function  $f(t)$  of order  $0 < \alpha < 1$  is

$$D_t^{\alpha} f(t) := \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t - \tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau.$$

The Caputo fractional derivative of an absolutely continuous function  $f(t)$  of order  $0 < \alpha < 1$  is defined by

$${}^c D_t^{\alpha} f(t) := J_{0+}^{1-\alpha} f'(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau.$$

Both derivatives present a drawback :

- The Riemann-Liouville derivative of a constant is different from zero,

$$D_t^{\alpha} C \neq 0,$$

while the Caputo derivative require  $f'(t)$  to calculate  ${}^c D_t^{\alpha} f(t)$ , for  $0 < \alpha < 1$ .

- We know that the Riemann-Liouville derivative of the Weierstrass function exists for any  $0 < \alpha < 1$ , but not for  $\alpha = 1$ .

But for regular function with  $f(0) = 0$ , both definitions coincide.

Next, we recall a lemma that will be used hereafter.

**Lemma 3.2.1** ( see [42]). *Let  $a, b, K, \psi$  be non-negative continuous functions on the interval  $I = (0, T)$  ( $0 < T \leq \infty$ ), let  $\omega : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  be a continuous, non-negative and non-decreasing function with  $\omega(0) = 0$  and  $\omega(u) > 0$  for  $u > 0$ , and let  $A(t) = \max_{0 \leq s \leq t} a(s)$  and  $B(t) = \max_{0 \leq s \leq t} b(s)$ . Assume that*

$$\psi(t) \leq a(t) + b(t) \int_0^t K(s) \omega(\psi(s)) ds, \quad t \in I.$$

Then

$$\psi(t) \leq H^{-1} \left[ H(A(t)) + B(t) \int_0^t K(s) ds \right], \quad t \in (0, T_1),$$

where  $H(v) = \int_{v_0}^v \frac{d\tau}{\omega(\tau)}$  ( $v \geq v_0 > 0$ ),  $H^{-1}$  is the inverse of  $H$  and  $T_1 > 0$  is such that  $H(A(t)) + B(t) \int_0^t K(s) ds \in D(H^{-1})$  for all  $t \in (0, T_1)$ .

Here, we consider the problem

$$\begin{cases} {}^c D_t^{\alpha} u(t) &= -u(t)(1 - u(t)), \\ u(0) &= u_0, \end{cases} \quad (3.2)$$

for  $0 < \alpha < 1$  and  $u_0 > 0$ .

### 3.3 Main results

The local existence of solutions to (3.2) is assured by the

**Theorem 3.3.1** (see [39]) *We consider the fractional differential equation of Caputo's type given by*

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha u(t) = f(t, u(t)), & t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (3.3)$$

For  $0 < \alpha < 1$ ,  $u_0 \in \mathbb{R}$ ,  $b > 0$  and  $T > 0$ .

Assume that

1.  $f \in C(R_0, \mathbb{R})$  where  $R_0 = \{(t, u), 0 \leq t \leq T, |u - u_0| \leq b\}$  and  $|f(t, u)| \leq M$  on  $R_0$ ;
2.  $|f(t, u) - f(t, v)| \leq L|u - v|$ ,  $L > 0$ ,  $(t, u) \in R_0$ .

Then there exists a unique solution  $u \in C([0, h])$  for (3.3), where  $h = \min \left\{ T, \left( \frac{b\Gamma(\alpha + 1)}{M} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right\}$ .

**Theorem 3.3.2** *Let  $u$  be the solution of problem (3.2). We have :*

- If  $0 < u_0 < 1$ , the solution is global and it satisfies  $0 < u < 1$ . Moreover,  $u$  is given by

$$u(t) = E_\alpha(-t^\alpha)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-(t-s)^\alpha) u^2(s) ds,$$

and for some constants  $c > 0$  and  $c_1 > 0$ , we have

$$0 < u(t) \leq \frac{1}{\frac{1}{cu_0} - \frac{c_1}{\alpha} t^\alpha}, \quad 0 < t < T_0 := \left( \frac{\alpha}{c_1 c u_0} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

In addition, we have for  $0 < \epsilon < 1$

$$u(t) \leq \frac{c}{1 + \epsilon(1 - \epsilon) t^\alpha}, \quad t > 0$$

- If  $u_0 > 1$ , the solution blows-up in a finite time  $T^*$  :  $\lim_{t \rightarrow T^*} u(t) = +\infty$ .

Moreover, we have the bilateral estimate :

$$\bar{w}(t) + 1 \leq u(t) \leq \tilde{w}(t) + 1,$$

and

$$\left( \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{4(u_0 - \frac{1}{2})} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq T^* \leq \left( \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{u_0 - 1} \right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

where

$$\tilde{w}(t) + \frac{1}{2} \sim \frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha)} (T_{\tilde{w}} - t)^{-\alpha}, \quad \text{as } t \rightarrow T_{\tilde{w}},$$

$$\bar{w}(t) \sim \frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha)} (T_{\bar{w}} - t)^{-\alpha}, \text{ as } t \longrightarrow T_{\bar{w}}.$$

Here,  $T_{\bar{w}}$  is the blow-up time of  $\bar{w}$ , which satisfies

$$\left( \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{4(u_0 - \frac{1}{2})} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq T_{\bar{w}} \leq \left( \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{u_0 - \frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

and  $T_{\bar{w}}$  is the blow-up time of  $\bar{w}$ , which satisfies

$$\left( \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{4(u_0 - 1)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq T_{\bar{w}} \leq \left( \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{u_0 - 1} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

### Proof of Theorem 3.3.2

**Part 1.** If  $0 < u_0 < 1$ , then the solution is global.

The solution to (3.2) is given by

$$u(t) = E_{\alpha}(-t^{\alpha})u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-(t-s)^{\alpha}) u^2(s) ds. \quad (3.4)$$

Where the Mittag-Leffler functions  $E_{\alpha}(-t^{\alpha})$  and  $E_{\alpha,\alpha}(-t^{\alpha})$  are defined by :

$$E_{\alpha}(-t^{\alpha}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j t^{\alpha j}}{\Gamma(\alpha j + 1)},$$

$$E_{\alpha,\alpha}(-t^{\alpha}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j t^{\alpha j}}{\Gamma(\alpha j + \alpha)}.$$

If  $u_0 > 0$ , then  $u(t) > 0$  as  $E_{\alpha}(-t^{\alpha}) > 0$  and  $E_{\alpha,\alpha}(-t^{\alpha}) > 0$ .

Now, we set the function  $\bar{u}(t) = 1, t > 0$ .

As  $0 < u_0 < 1$ , then  $u_0 < \bar{u}(0)$ . In addition, we have

$${}^c D_t^{\alpha} \bar{u}(t) = 0 = -\bar{u}(t)(1 - \bar{u}(t)).$$

Hence  $\bar{u}$  is an upper solution of the equation (3.2), and we have  $u(t) < \bar{u}(t) = 1$ , (see [48], Thm. 2.4.3, p. 32).

Now, we examine the large time behavior of the global solution  $0 < u < 1$ .

For, let us recall the estimates ( see [47]) :

- For  $0 < \alpha < 1$  and  $\mu > 0$ , there exists a constant  $c > 0$  such that,

$$0 < E_{\alpha}(-\mu t^{\alpha}) \leq \frac{c}{1 + \mu t^{\alpha}} \leq c, \quad t > 0. \quad (3.5)$$

- For  $0 < \alpha < 1$ , there exists a constant  $c_1 > 0$  such that

$$0 < t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha) \leq c_1 t^{\alpha-1}, \quad t > 0. \quad (3.6)$$

From (3.4) and using the inequalities (3.5) and (3.6), we obtain

$$u(t) \leq cu_0 + c_1 \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} u^2(s) ds. \quad (3.7)$$

We apply Lemma 3.2.1 to (3.7) with  $\omega(x) = x^2$ ,  $K(s) = (t-s)^{\alpha-1}$ ,  $A(t) = cu_0$ ,  $B(t) = c_1$ .

For  $0 < t < T_0$ , we have

$$H(cu_0) + \frac{c_1}{\alpha} t^\alpha \in D(H^{-1}),$$

where  $H(v) = \frac{1}{v_0} - \frac{1}{v}$  and  $H^{-1}(z) = \frac{1}{\frac{1}{v_0} - z}$ ,  $z \neq \frac{1}{v_0}$ .

So we obtain,

$$u(t) \leq H^{-1} \left[ H(cu_0) + \frac{c_1}{\alpha} t^\alpha \right].$$

Therefore

$$u(t) \leq \frac{1}{\frac{1}{cu_0} - \frac{c_1}{\alpha} t^\alpha}, \quad 0 < t < T_0.$$

Let  $0 < \epsilon < 1$ , we observe that for the function  $\bar{u}(t) := E_{\alpha,1}(-\epsilon(1-\epsilon)t^\alpha)$  we have

$$\begin{cases} {}^C D_{0+}^\alpha \bar{u}(t) &= -\epsilon(1-\epsilon)\bar{u}(t) \\ \bar{u}(0) &= 1 > u(0), \end{cases}$$

from the comparison principle [48] and inequality (3.5) it follows that

$$u(t) \leq \frac{c}{1 + \epsilon(1-\epsilon)t^\alpha}, \quad t > 0.$$

**Part 2.** If  $u_0 > 1$ , then the solution blows-up in a finite time.

1. We show that  $u > 1$ . For, let us define the new unknown function  $w = u - 1$ . The function  $w$  satisfies

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha w(t) &= w(t)(1+w(t)), \\ w(0) := w_0 &= u_0 - 1. \end{cases} \quad (3.8)$$

As  $u_0 > 1$ , then  $w_0 > 0$ . Moreover, we have ([39])

$$w(t) = E_\alpha(t^\alpha)w_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha) w^2(s) ds.$$

Therefore,  $w > 0$ ; hence  $u > 1$ .

2. We prove that  $u$  blows-up in a finite time.

Since we have  $w(t) = u(t) - 1$ , it is seen that if  $u(t) \rightarrow \infty$  as  $t \rightarrow T^*$ , then  $w(t) \rightarrow \infty$  as  $t \rightarrow T^*$  and vice versa. That is  $w$  and  $u$  will have the same blow-up time.

We now must examine the blow-up properties of  $w$ , the solution of problem (3.8). These are obtained by comparing  $w(t)$  with the solutions of the following problems :

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha \bar{w}(t) &= \bar{w}^2(t), \\ \bar{w}(0) &= w_0, \end{cases} \quad (3.9)$$

and

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha \tilde{w}(t) &= (\tilde{w}(t) + \frac{1}{2})^2, \\ \tilde{w}(0) &= w_0. \end{cases} \quad (3.10)$$

We see by comparison ([48]) that

$$\bar{w}(t) \leq w(t) \leq \tilde{w}(t), \quad 0 \leq t < \min\{T_{\bar{w}}, T_{\tilde{w}}\}.$$

Following the paper of Kirk, Olmstead and Roberts [45], we may assert that the solution  $\bar{w}$  ( resp.  $\tilde{w}$ ) blows-up in a finite time  $T_{\bar{w}}$  ( resp.  $T_{\tilde{w}}$ ), such that

$$\left(\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{4w_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq T_{\bar{w}} \leq \left(\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{w_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

and

$$\left(\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{4(w_0 + \frac{1}{2})}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq T_{\tilde{w}} \leq \left(\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{w_0 + \frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

So we have the following estimates

$$T_{\tilde{w}} \leq T^* \leq T_{\bar{w}}.$$

Whereupon

$$\left(\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{4(w_0 + \frac{1}{2})}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq T^* \leq \left(\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{w_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

□

### 3.4 Numerical implementation

In this section, we will approximate the solution  $u$  given by (3.4). For, we need a numerical approximation of the convolution integral ; this can be obtained using the convolution quadrature method.

As it has been explained in [44], a convolution quadrature approximates the continuous convolution

$$\int_0^t K(t-s)f(s) ds, \quad t > 0,$$

by a discrete convolution with a step size  $h > 0$ . Then

$$\int_0^{t_n} K(t_n-s)f(s) ds \sim \sum_{j=0}^n \omega_{n-j}f(t_j),$$

where  $t_j = jh$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, n$  and the convolution quadrature weights  $\omega_j$  are determined from their generating power series as

$$\sum_{j=0}^{\infty} \omega_j \zeta^j = \mathcal{L}\left\{K(t) : \frac{\delta(\zeta)}{h}\right\}.$$

Here  $\mathcal{L}\{K(t) : s\}$  is the Laplace transform of  $K(t)$  and  $\delta(\zeta)$  is the generating polynomial for a linear multistep method.

Let  $u_n$  be the approximation of  $u(t_n)$  for  $n \geq 0$ . Using the convolution quadrature method we obtain

$$u_n = (1 - \omega_0)^{-1} \left[ E_\alpha(-t^\alpha)u_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \omega_{n-j}u_j \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Now, we introduce the following algorithm which gives the numerical approximation of solution to equation (3.2).

**Algorithm**

**Input :** Give  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$  and  $u_0$ ,  $u_0 > 1$ .

**Initializations :** Discretize the time with a step size  $h > 0$ ;  $t_i = ih$ , for all  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $u_{appx}^1 = u_0$ ,  $u^1 = (u_0)^2$ .

**Step 1 :** Approximate the Mittag-Leffler function **GML**.

**Step 2 :** Calculate convolution quadrature weights **W** using the fast Fourier transform (FFT).

**Step 3 :** Calculate  $u_{appx}^i$ .

$$u^i = \mathbf{GML} * u_{appx}^1 + \mathbf{W} * u^{i-1}.$$

**do**  $u_{appx}^i = (1 - \mathbf{W}(1))^{-1} * u^i$ .

$$u^i = (u_{appx}^i)^2.$$

$$i = i + 1.$$

**until** ( $u_{appx}^i$  blows up) or ( $i > n$ ).

**Output :** Numerical approximation of  $u$ .

**Example 3.4.1** For Figure 3.1, we set  $\alpha = 0.5$ ; the initial conditions are respectively  $u_0 = 5$ ,  $u_0 = 3$  and  $u_0 = 2$ .

For Figure 3.2, we take the initial condition  $u_0 = 5$  and we plot the solutions; the dotted curve is the solution for  $\alpha = 0.3$  and the solid curve corresponds to



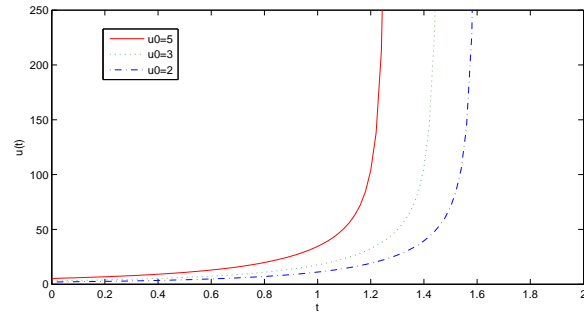


FIGURE 3.1 – Solutions for  $\alpha = 0.5$  and  $u_0 = 5, 3, 2$ .

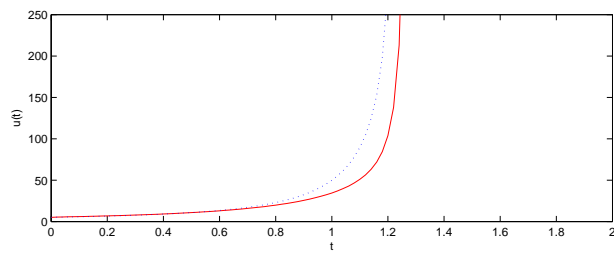


FIGURE 3.2 – Solutions for  $u_0 = 5$  and  $\alpha = 0.3, 0.5$ .

*the solution for  $\alpha = 0.5$ .*

*As it has been proved, the solution blows up in a finite time which depends on  $u_0$  and  $\alpha$ .*



# ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF GLOBAL SOLUTIONS OF AN ANOMALOUS DIFFUSION SYSTEM

# 4

## SOMMAIRE

5.1	INTRODUCTION . . . . .	61
5.2	PRELIMINARIES AND DEFINITIONS . . . . .	61
5.3	LOCAL EXISTENCE . . . . .	64
5.4	GLOBAL EXISTENCE AND LARGE TIME BEHAVIOR . . . . .	67

## Abstract

This paper deals with an anomalous diffusion system which describes the spread of epidemics among a population. The analysis includes some results of the asymptotic behavior of global bounded solutions for this system with homogeneous Neumann boundary conditions.

**Keywords :** parabolic system, fractional Laplacian, local and global existence, asymptotic behavior.

**MSC[2010] :** 35K51, 35A01, 35B40.



## 4.1 Introduction

In this paper, we study the global existence and large time behavior of solutions to the system

$$\begin{cases} u_t = -a(-\Delta)^\alpha u - \lambda uv & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ v_t = -b(-\Delta)^\beta v + \lambda uv - \mu v & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

supplemented with the boundary and initial conditions

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{ in } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x) & \text{ in } \Omega. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Here  $\Omega$  is a bounded regular domain in  $\mathbb{R}^N$  with boundary  $\partial\Omega$  and  $u_0, v_0$  are given nonnegative bounded functions, the constants  $a, b, \lambda$  and  $\mu$  are positive.

This system describes the spread of epidemics within a confined population. The functions  $u(x, t)$ ,  $v(x, t)$  represent densities of susceptible and infected individuals. The positive constants  $\lambda$  and  $\mu$  represent the infection rate and the removal rate respectively (see [81]). The Neumann boundary conditions implies that there is no infection across the boundary. The presence of the non local operator  $(-\Delta)^\delta$  ( $0 < \delta < 1$ ,  $\delta = \alpha$  or  $\beta$ ) which accounts for the anomalous diffusion [38, 36] means that the sub-populations face some obstacles that slow their movement. In recent years, this phenomena of anomalous diffusion have been observed in many areas such that physics, finance and hydrology (see [58, 59] and references therein ).

The system obtained from (4.1) by replacing the anomalous diffusion operator by the standard Laplacian operator  $(-\Delta)$  was firstly studied in one-dimensional space by Webb [81]; he showed the existence of global bounded solutions and analyzed their behavior as  $t$  goes to  $+\infty$ . Later on, a more general model was studied by Haraux and Kirane [29]. They took different diffusion coefficients for the two equations and general nonlinear terms. They proved the existence of global bounded solutions and investigated their asymptotic behavior. We can also mention the paper of Fitzgibbon and Morgan [25] who studied Webb's system in arbitrary bounded domain.

Recently, in [77], the authors developed a model of the spreading of an epidemic among three populations. The existence, uniform bounds and asymptotic behavior of solutions were investigated. An SIR epidemic system with equal diffusion coefficients was studied in [19]; local and global asymptotical stability were given by linearization and using a Lyapunov functional. These results were verified numerically. For other works on various types of the SIR epidemic model, the reader may be referred to [40, 50] for example and the references therein.

Our model is a further extension as it contains super-diffusion terms.

The remainder of this paper is organized as follows. In section 2, we present some definitions and preliminaries. In section 3, we prove the

existence of a local mild solution for the system (4.1) – (4.2). Finally, global existence and asymptotic behavior of solutions are studied in section 4.

## 4.2 Preliminaries

Let us recall some facts that will be used in the sequel. In an open bounded domain  $\Omega$ , we denote  $(-\Delta_N)^\alpha$  the fractional power of the Laplacian in  $\Omega$  with homogeneous Neumann boundary condition. Let  $\lambda_k$  ( $k = 0, 1, \dots, +\infty$ ) be the eigenvalues of the Laplacian operator in  $L^2(\Omega)$  with homogeneous Neumann boundary condition and let  $\varphi_k$  be the corresponding eigenfunction *i.e.*

$$\begin{cases} (-\Delta_N)^\alpha \varphi_k = \lambda_k^\alpha \varphi_k & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

and

$$D((-\Delta_N)^\alpha) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \|(-\Delta_N)^\alpha u\|_{L^2(\Omega)} < +\infty \right\},$$

$$\|(-\Delta_N)^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k^\alpha \langle u, \varphi_k \rangle|^2.$$

So for  $u \in D((-\Delta_N)^\alpha)$  we have

$$(-\Delta_N)^\alpha u = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^\alpha \langle u, \varphi_k \rangle \varphi_k.$$

We have the following integration by parts formula

$$\int_{\Omega} u(x) (-\Delta_N)^\alpha v(x) dx = \int_{\Omega} v(x) (-\Delta_N)^\alpha u(x) dx, \quad \text{for } u, v \in D((-\Delta_N)^\alpha). \quad (4.3)$$

We will use the following important inequalities of Stroock and Varopoulos (see [49, Theorem 1])

$$\int_{\Omega} u(x) (-\Delta_N)^\alpha u(x) dx \geq 0, \quad \text{for } u \in D((-\Delta_N)^\alpha). \quad (4.4)$$

$$\int_{\Omega} u^{p-1} (-\Delta_N)^\alpha u dx \geq \frac{4(p-1)}{p^2} \int_{\Omega} \left| (-\Delta_N)^{\frac{\alpha}{2}} u^{\frac{p}{2}} \right|^2 dx \geq 0, \quad p > 1, \quad (4.5)$$

for all  $u \in L^p(\Omega)$  such that  $(-\Delta_N)^{\frac{\alpha}{2}} u \in L^p(\Omega)$ .

**Definition 4.2.1** For  $p \in (1, +\infty)$ , we denote  $A_p$  (resp.  $B_p$ ) the realisation of  $(-\Delta)^\alpha$  (resp.  $(-\Delta)^\beta$ ) with a homogeneous Neumann boundary condition in  $L^p(\Omega)$ .

It is well known that  $-A_p$  (resp.  $-B_p$ ) is a sectorial operator ( see [31]); so that  $-A_p$  (resp.  $-B_p$ ) generates an analytic semigroup  $\{e^{-tA_p}\}_{t \geq 0}$  (resp.  $\{e^{-tB_p}\}_{t \geq 0}$ ).

**Lemma 4.2.2** (See [35])

For  $\theta \in [0, 1]$  and  $\rho \in \mathbb{R}$ , there exists a constant  $C(\theta, \rho)$  such that, for all  $t > 0$ ,

$$\int_0^t m(s)^{-\theta} e^{\rho s} ds \leq \begin{cases} C(\theta, \rho) e^{\rho t}, & \text{if } \rho > 0, \\ C(\theta, \rho)(t + 1), & \text{if } \rho = 0, \\ C(\theta, \rho), & \text{if } \rho < 0, \end{cases}$$

where  $m(t) = \min\{t, 1\}$ .

**Lemma 4.2.3** Let  $p, q, r \in [1, +\infty]$ ,  $r \leq p \leq q$  and  $\theta \in [0, 1]$  be such that  $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{r} + \frac{1-\theta}{q}$ , we have

$$\|e^{-tA_p} u\|_p \leq e^{-\lambda_1^\alpha \theta t} m(t)^{\frac{-N}{2\alpha}(\frac{1}{r} - \frac{1}{p})} \|u\|_r \text{ for all } u \in L^r(\Omega).$$

**Proof**

By the interpolation inequality [31], we get

$$\|e^{-tA_p} u\|_p \leq \|e^{-tA_p} u\|_r^\theta \|e^{-tA_p} u\|_q^{1-\theta}. \quad (4.6)$$

Using the following inequalities (see [31] or [38])

$$\|e^{-tA_p} u\|_r \leq e^{-\lambda_1^\alpha t} \|u\|_r \quad (4.7)$$

and

$$\|e^{-tA_p} u\|_q \leq t^{\frac{-N}{2\alpha}(\frac{1}{r} - \frac{1}{q})} \|u\|_r, \quad (4.8)$$

we have

$$\|e^{-tA_p} u\|_p \leq e^{-\lambda_1^\alpha \theta t} t^{\frac{-N}{2\alpha}(1-\theta)(\frac{1}{r} - \frac{1}{q})} \|u\|_r, \quad (4.9)$$

where  $(1-\theta)(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}) = \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$ .

So we obtain

$$\begin{aligned} \|e^{-tA_p} u\|_p &\leq e^{-\lambda_1^\alpha \theta t} t^{\frac{-N}{2\alpha}(\frac{1}{r} - \frac{1}{p})} \|u\|_r \\ &\leq e^{-\lambda_1^\alpha \theta t} m(t)^{\frac{-N}{2\alpha}(\frac{1}{r} - \frac{1}{p})} \|u\|_r \end{aligned} \quad (4.10)$$

where  $m(t) = \min\{t, 1\}$ . □

**Remark 4.2.4** An important result in [29] becomes in our case

$\forall \varepsilon > 0, \exists C(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+$  such that

$$\|e^{-tB_p} v\|_\infty \leq C(\varepsilon) t^{\frac{-N}{(N+\varepsilon)\beta}} \|v\|_{\frac{N}{2} + \varepsilon}, \quad (4.11)$$

for all  $v \in L^\infty(\Omega)$  and all  $t > 0$ .

The inequality (4.11) with  $\beta = 1$  combined with a successive iterations method have been used in [29] to show that the solutions are bounded in  $C(\bar{\Omega})$  (see Proposition 3.3 [29]).



### 4.3 Local existence

In this section, we derive the existence of a local mild solution for the system (4.1) – (4.2).

**Definition 4.3.1** (*Mild solution*)

Let  $u_0, v_0 \in L^\infty(\Omega)$  and  $T > 0$ .

We say that  $(u, v) \in \mathcal{C}([0, T]; L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega))$  is a mild solution of (4.1) – (4.2) if  $u, v$  satisfy the following integral equations for  $t \in [0, T]$  :

$$\begin{cases} u(t) &= e^{-atA_p}u_0 - \lambda \int_0^t e^{-a(t-s)A_p}(uv)(s) ds, \\ v(t) &= e^{-btB_p}v_0 + \lambda \int_0^t e^{-b(t-s)B_p}(uv)(s) ds - \mu \int_0^t e^{-b(t-s)B_p}v(s) ds. \end{cases} \quad (4.12)$$

**Theorem 4.3.2** (*Local existence*)

Let  $u_0, v_0 \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ , then there exist a maximal time  $T_{max} > 0$  and a unique mild solution  $(u, v) \in \mathcal{C}([0, T_{max}]; \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \times \mathcal{C}(\bar{\Omega}))$  to the problem (4.1) – (4.2), with the alternative :

- either  $T_{max} = +\infty$ ;

- or  $T_{max} < +\infty$  and  $\lim_{t \rightarrow T_{max}} (\|u(t)\|_\infty + \|v(t)\|_\infty) = +\infty$ .

**Proof**

For arbitrary  $T > 0$ , we define the Banach space :

$$E_T := \left\{ (u, v) \in \mathcal{C}([0, T]; \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \times \mathcal{C}(\bar{\Omega})); \|(u, v)\| \leq 2\|(u_0, v_0)\| = R \right\},$$

where  $\|\cdot\|_\infty := \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$  and  $\|\cdot\|$  is the norm of  $E_T$  defined by :

$$\|(u, v)\| := \|u\|_{L^\infty([0, T]; L^\infty(\Omega))} + \|v\|_{L^\infty([0, T]; L^\infty(\Omega))}.$$

Next, for every  $(u, v) \in E_T$ , we define  $\Psi(u, v) := (\Psi_1(u, v), \Psi_2(u, v))$  where for  $t \in [0, T]$

$$\Psi_1(u, v) := e^{-atA_p}u_0 - \lambda \int_0^t e^{-a(t-s)A_p}(uv)(s) ds$$

and

$$\Psi_2(u, v) := e^{-btB_p}v_0 + \lambda \int_0^t e^{-b(t-s)B_p}(uv)(s) ds - \mu \int_0^t e^{-b(t-s)B_p}v(s) ds.$$

We will prove the local existence by the Banach fixed point theorem.

•  $\Psi : E_T \rightarrow E_T$  : Let  $(u, v) \in E_T$ . Using the estimate (4.8) (with  $r = p = \infty$ ), we obtain

$$\begin{aligned} \|\Psi_1(u, v)\|_\infty &\leq \|u_0\|_\infty + \lambda \int_0^t \|uv(s)\|_\infty ds \\ &\leq \|u_0\|_\infty + \lambda R^2 T. \end{aligned}$$

Similarly, we have

$$\|\Psi_2(u, v)\|_\infty \leq \|v_0\|_\infty + \lambda R^2 T + \mu RT.$$

So we have,

$$\begin{aligned} \|\Psi(u, v)\| &\leq \|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty + 2\lambda R^2 T + \mu RT \\ &\leq 2(\|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty), \end{aligned}$$

by choosing  $T$  such that  $T \leq \frac{1}{4\lambda R + 2\mu}$ .

Then  $\Psi(u, v) \in E_T$  for  $T \leq \frac{1}{4\lambda R + 2\mu}$ .

•  $\Psi$  is a contraction map : for  $(u, v), (\tilde{u}, \tilde{v}) \in E_T$ , we have

$$\begin{aligned} \|\Psi_1(u, v) - \Psi_1(\tilde{u}, \tilde{v})\|_\infty &\leq \lambda \int_0^t \|\tilde{u}\tilde{v}(s) - uv(s)\|_\infty ds \\ &\leq \lambda \int_0^t \|u(\tilde{v} - v) + \tilde{v}(\tilde{u} - u)\|_\infty ds \\ &\leq \lambda RT(\|\tilde{v} - v\|_\infty + \|\tilde{u} - u\|_\infty). \end{aligned}$$

Similarly, we obtain

$$\begin{aligned} \|\Psi_2(u, v) - \Psi_2(\tilde{u}, \tilde{v})\|_\infty &\leq \lambda RT(\|\tilde{u} - u\|_\infty + \|\tilde{v} - v\|_\infty) + \mu T\|\tilde{v} - v\|_\infty \\ &\leq (\lambda RT + \mu T)(\|\tilde{u} - u\|_\infty + \|\tilde{v} - v\|_\infty). \end{aligned}$$

These estimates imply that

$$\begin{aligned} \|\Psi(u, v) - \Psi(\tilde{u}, \tilde{v})\|_\infty &\leq (2\lambda RT + \mu T)\|(u, v) - (\tilde{u}, \tilde{v})\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|(u, v) - (\tilde{u}, \tilde{v})\|, \end{aligned}$$

for  $T \leq \frac{1}{4\lambda R + 2\mu}$ .

Hence, by the Banach fixed point theorem, the system (4.1) – (4.2) admits a unique mild solution  $(u, v) \in E_T$ .

The solution can be extended on a maximal interval  $[0, T_{max})$  where  $T_{max} := \sup \left\{ T > 0; (u, v) \text{ is a solution to (4.1) – (4.2) in } E_T \right\}$ .  $\square$

## 4.4 Global existence and asymptotic behavior

**Theorem 4.4.1** *Let  $(u_0, v_0) \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \times \mathcal{C}(\bar{\Omega})$  be such that  $u_0 \geq 0, v_0 \geq 0$ . Then there exists a unique global solution  $(u, v)$  of (4.1) – (4.2) which satisfies :*

1.  $u(x, t) \geq 0, v(x, t) \geq 0; x \in \Omega, t \geq 0$ .
2.  $u \in \mathcal{C}_B(\mathbb{R}^+, \mathcal{C}(\bar{\Omega})), v \in \mathcal{C}_B(\mathbb{R}^+, \mathcal{C}(\bar{\Omega}))$ .
3.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|v(t)\|_\infty = 0; \exists u_\infty \geq 0$  such that  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(x, t) - u_\infty\|_\infty = 0$ .

**Proof.**

*Part 1.*

We define  $u^+ = \max(0, u)$  and  $u^- = \max(0, -u)$ .

We write  $u = u^+ - u^-$ , multiply the first equation of problem (4.1) by  $(-u^-)$  and integrate over  $\Omega$ ; we obtain

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u^-}{\partial t} u^- dx = -a \int_{\Omega} A_p u^- u^- dx - \lambda \int_{\Omega} (u^-)^2 v dx.$$

By inequality (4.4), we get

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u^-)^2 dx \leq -2\lambda \int_{\Omega} (u^-)^2 v dx.$$

We observe that  $v$  is bounded on  $[0, T]$ , for  $T < T_{max}$ , so there exists a constant  $C(t)$  depending on  $t$  such that  $\|v(t)\|_{\infty} \leq C(t)$ . Whereupon,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u^-)^2 dx \leq 2\lambda C(t) \int_{\Omega} (u^-)^2 dx. \quad (4.13)$$

As  $\int_{\Omega} (u^-)^2(0) dx = 0$ , Gronwall's inequality [31] allows us to obtain

$$\int_{\Omega} (u^-)^2 dx = 0; \text{ consequently, } u \geq 0.$$

Similarly, we obtain

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v^-}{\partial t} v^- dx = -b \int_{\Omega} B_p v^- v^- dx + \int_{\Omega} (\lambda u - \mu)(v^-)^2 dx.$$

Using (4.4), we have

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v^-}{\partial t} v^- dx \leq \int_{\Omega} (\lambda u - \mu)(v^-)^2 dx.$$

We note that  $u$  is bounded on  $[0, T]$ , for  $T < T_{max}$ , so there exists a constant  $M(t)$  depending on  $t$  such that  $\|u(t)\|_{\infty} \leq M(t)$ . Then we have

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (v^-)^2 dx \leq 2(\lambda M(t) - \mu) \int_{\Omega} (v^-)^2 dx.$$

By integration we get  $v^- = 0$  which gives  $v \geq 0$ .

*Part 2.*

We will derive a uniform bound of  $\|u(t)\|_{\infty}$ .

Multiplying the first equation of (4.1) by  $u^{p-1}$  and integrating over  $\Omega$ , we obtain  $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^p dx \leq 0$  thanks to inequality (4.5). Consequently, we have

$$\|u(t)\|_{\infty} \leq \|u_0\|_{\infty}, \quad \forall t \in [0, T_{max}). \quad (4.14)$$

We integrate the first equation of (4.1) over  $\Omega$  and use the integration by parts formula (4.3) which gives  $\int_{\Omega} (-\Delta_N)^{\alpha} u(x) dx = 0$ ; we obtain

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} dx = -\lambda \int_{\Omega} uv dx \leq 0.$$

So the function  $t \mapsto \int_{\Omega} u(x, t) dx$  is nonincreasing. As  $u \geq 0$ , then it admits a limit as  $t \rightarrow +\infty$  :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x, t) dx = u_{\infty} \geq 0.$$

We add the equations of (4.1) and we integrate over  $\Omega$  to obtain

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u + v) dx = -\mu \int_{\Omega} v dx \leq 0. \quad (4.15)$$

We observe that the function  $t \mapsto \int_{\Omega} (u + v) dx \geq 0$  is nonincreasing, hence admits a limit; so we have

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} v(x, t) dx = l \geq 0.$$

Consequently  $v \in L^{\infty}(\mathbb{R}^+; L^1(\Omega))$ . Thanks to inequality (4.11) we can proceed analogously to the proof of [29, Proposition 3.3], hence we get  $v \in \mathcal{C}_B(\mathbb{R}^+, \mathcal{C}(\bar{\Omega}))$ .

*Part 3.*

Integrating the equation (4.15) over  $[0, t]$ , we obtain

$$\begin{aligned} \mu \int_0^t \int_{\Omega} v(x, s) dx ds &= \int_{\Omega} (u_0 + v_0) dx - \int_{\Omega} (u + v)(x, t) dx \\ &\leq \int_{\Omega} (u_0 + v_0) dx. \end{aligned}$$

So,  $\int_0^{+\infty} \int_{\Omega} v(x, s) dx ds$  is finite. Moreover  $v(x, t)$  is uniformly continuous in  $t$ .

In fact, let  $h > 0$  and  $0 < t < t + h < T_{max}$ , it follows that  $\|v(t + h) - v(t)\|_{\infty}$

$$\begin{aligned} &\leq \|(e^{-hbB_p} - I)e^{-tbB_p}v_0\|_{\infty} + \lambda \int_0^t \|(e^{-hbB_p} - I)e^{-(t-s)bB_p}(uv)(s)\|_{\infty} ds \\ &+ \mu \int_0^t \|(e^{-hbB_p} - I)e^{-(t-s)bB_p}v(s)\|_{\infty} ds + \lambda \int_t^{t+h} \|e^{-(t+h-s)bB_p}(uv)(s)\|_{\infty} ds \\ &+ \mu \int_t^{t+h} \|e^{-(t+h-s)bB_p}v(s)\|_{\infty} ds \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5. \end{aligned}$$

Using Lemma A.1.2([34, Lemma 2.1]), we find that for every  $\gamma \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C_2(\gamma)h^{\gamma} \|B_p^{\gamma} e^{-tbB_p}v_0\|_{\infty} \\ &\leq C_2(\gamma)C_1(\gamma)h^{\gamma} t^{-\gamma} e^{-b\lambda_1^{\beta}t} \|v_0\|_{\infty}. \end{aligned}$$

We also have

$$I_2 \leq C_2(\gamma)C_1(\gamma)h^{\gamma} \int_0^t (t-s)^{-\gamma} e^{-b\lambda_1^{\beta}(t-s)} \|uv(s)\|_{\infty} ds.$$

By Lemma 4.2.2, we can see that

$$\int_0^t (t-s)^{-\gamma} e^{-b\lambda_1^\beta(t-s)} ds \leq C_3(\gamma, -b\lambda_1^\beta).$$

As  $v \in \mathcal{C}_B(\mathbb{R}^+, \mathcal{C}(\bar{\Omega}))$  we have  $\|v(t)\|_\infty \leq M$ , for all  $t > 0$ , where  $M$  is a positive constant.

So, we obtain

$$I_2 \leq C_2(\gamma)C_1(\gamma)C_3(\gamma, -b\lambda_1^\beta)Mh^\gamma\|u_0\|_\infty.$$

Likewise, it follows that

$$I_3 \leq C_2(\gamma)C_1(\gamma)C_3(\gamma, -b\lambda_1^\beta)Mh^\gamma.$$

Using the inequality (see [38])

$$\|e^{-tbB_p}u\|_\infty \leq C\|u\|_\infty,$$

we get

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^h \|e^{-\tau bB_p}(uv)(t+h-\tau)\|_\infty d\tau \\ &\leq CMh\|u_0\|_\infty. \end{aligned}$$

Consequently, for all  $t \geq \delta > 0$

$$\|v(t+h) - v(t)\|_\infty \leq C(\gamma, \beta, \delta)h^\gamma.$$

Then  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_\Omega v(x, t) dx = 0$ .

Moreover, for  $\gamma \in (0, 1)$ , applying  $B_p^\gamma$  to both sides of the second equation of (4.12) and estimate, we obtain

$$\|B_p^\gamma v(t)\|_p \leq \|B_p^\gamma e^{-bB_p t} v_0\|_p + \lambda \int_0^t \|B_p^\gamma e^{-bB_p(t-s)} uv(s)\|_p ds.$$

Using Theorem 1.4.3 [31], we get

$$\begin{aligned} \|B_p^\gamma v(t)\|_p &\leq Cm(t)^{-\gamma} e^{-b\lambda_1^\beta t} \|v_0\|_p \\ &\quad + \lambda C |\Omega|^{\frac{1}{p}} \|u_0\|_\infty \|v_0\|_\infty \int_0^t m(t-s)^{-\gamma} e^{-b\lambda_1^\beta(t-s)} ds. \end{aligned}$$

So by Lemma 4.2.2 and for all  $t \geq \delta$ , we have  $\|B_p^\gamma v(t)\|_p \leq C(\gamma, p, \delta)$ .

Then  $\{v(t)\}_{t \geq \delta}$  is uniformly bounded in  $D(B_p^\gamma)$ ; so by Sobolev's imbedding theorem, the compactness of  $\{v(t)\}_{t \geq \delta}$  in  $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$  is assured.

Therefore, there exists a sequence  $\{t_j\}_{j \geq 0}$ ,  $t_j \rightarrow +\infty$  such that  $v(t_j) \rightarrow v^*$  in  $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$  as  $j \rightarrow +\infty$ .

So we obtain  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|v(t)\|_\infty = 0$ .

By the same way, we can show that  $\{u(t)\}_{t \geq \delta}$  is precompact in  $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$ ; so there exists a sequence  $\{\tau_j\}_{j \geq 0}$ ,  $\tau_j \rightarrow +\infty$  such that  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(\tau_j) = u^*$  in  $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$ .

We have  $(u + v)(t) \rightarrow u^*$  in  $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$ , which implies that  $(u + v)(t) \rightarrow u^*$  in  $L^1(\Omega)$  as  $t \rightarrow +\infty$ .

Using the fact that  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} v(x, t) dx = 0$  and  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x, t) dx = u_{\infty}$ , we obtain

$(u + v)(t) \rightarrow u_{\infty}$  in  $L^1(\Omega)$  as  $t \rightarrow +\infty$ . By uniqueness of the limit,  $u^* = u_{\infty}$ .

**Theorem 4.4.2** *Let  $(u, v)$  be the solution of (4.1) – (4.2). Moreover assume that  $\mu - \lambda u_{\infty} > 0$ . Then there exist positive constants  $T$  and  $C$  such that*

$$\|u(t) - u_{\infty}\|_{\infty} \leq \begin{cases} Ce^{-\xi(t-T)}, & \text{if } h(u_{\infty}) \neq a\theta\lambda_1^{\alpha}, \quad t \geq T, \\ C(t-T+1)e^{-\xi(t-T)} & \text{if } h(u_{\infty}) = a\theta\lambda_1^{\alpha}, \quad t \geq T, \end{cases}$$

$$\|v(t)\|_{\infty} \leq Ce^{-h(u_{\infty})(t-T)}, \quad t \geq T,$$

where  $\xi = \min\{h(u_{\infty}), a\theta\lambda_1^{\alpha}\}$ ,  $h(u_{\infty}) = \mu - \lambda u_{\infty} > 0$ , and  $\theta$  is as in Lemma 4.2.3.

**Proof.**

For  $\varepsilon > 0$ , there exists a constant  $T > 0$  such that for all  $t \geq T$   $u_{\infty} - \varepsilon < u(t) < u_{\infty} + \varepsilon$ .

We take  $\varepsilon$  satisfying  $0 < \varepsilon < \frac{\mu}{\lambda} - u_{\infty}$ .

We multiply the second equation by  $v^{p-1}$  and integrate over  $\Omega$ ; it holds that

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} v^p dx \leq p \int_{\Omega} (\lambda u - \mu)v^p dx, \quad \forall t \geq T,$$

in the light of inequality (4.5).

Hence

$$\frac{d}{dt} \|v(t)\|_p^p \leq p(\lambda(u_{\infty} + \varepsilon) - \mu) \|v(t)\|_p^p, \quad \forall t \geq T.$$

So that for  $1 \leq p \leq +\infty$ , we have

$$\|v(t)\|_p \leq \|v(T)\|_p e^{(\lambda(u_{\infty} + \varepsilon) - \mu)(t-T)}, \quad t \geq T. \quad (4.16)$$

This in turn implies

$$\|v(t)\|_{\infty} \leq \|v(T)\|_{\infty} e^{(\lambda(u_{\infty} + \varepsilon) - \mu)(t-T)}, \quad t \geq T. \quad (4.17)$$

For the rate of convergence of  $\|u(t) - u_{\infty}\|_{\infty}$  to zero, we define as in [81] two bounded linear operators  $M$  and  $Q$  by

$$Mw := \langle w \rangle, \quad Qw := w - \langle w \rangle, \quad \text{where } \langle w \rangle := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} w(x, t) dx.$$

Adding the two equations of problem (4.1) and integrating over  $\Omega$ , we obtain

$$\langle u(t) \rangle = - \langle v(t) \rangle + \langle u_0 \rangle + \langle v_0 \rangle - \mu \int_0^t \langle v(s) \rangle ds,$$

when  $t \rightarrow +\infty$ , it follows that

$$u_\infty = \langle u_0 \rangle + \langle v_0 \rangle - \mu \int_0^{+\infty} \langle v(s) \rangle ds.$$

So,

$$| \langle u(t) \rangle - u_\infty | \leq \langle v(t) \rangle + \mu \int_t^{+\infty} \langle v(s) \rangle ds.$$

Using (4.16) we obtain

$$\begin{aligned} \int_t^{+\infty} \langle v(s) \rangle ds &\leq \langle v(T) \rangle \int_t^{+\infty} e^{(\lambda(u_\infty + \varepsilon) - \mu)(s-T)} ds \\ &\leq C_1 \langle v(T) \rangle e^{(\lambda(u_\infty + \varepsilon) - \mu)(t-T)}, \quad t \geq T, \end{aligned}$$

where  $C_1 = \frac{1}{\mu - \lambda(u_\infty + \varepsilon)}$ . Then

$$|Mu(t) - u_\infty| \leq C_2 \langle v(T) \rangle e^{(\lambda(u_\infty + \varepsilon) - \mu)(t-T)}, \quad t \geq T, \quad (4.18)$$

where  $C_2 = \max\{1, \mu C_1\}$ .

As  $u(t)$  satisfies the integral equation for  $t \geq T$ ,

$$u(t) = e^{-aA_p t} u_0 - \lambda \int_0^t e^{-aA_p(t-s)} (uv)(s) ds,$$

we have

$$u(t) = e^{-aA_p(t-T)} u(T) - \lambda \int_T^t e^{-aA_p(t-s)} (uv)(s) ds.$$

Then we obtain

$$Qu(t) = e^{-aA_p(t-T)} Qu(T) - \lambda \int_T^t e^{-aA_p(t-s)} Q(uv)(s) ds.$$

Using Lemma 4.2.3, we obtain the estimate

$$\|e^{-aA_p(t-T)} Qu(T)\|_p \leq C e^{-\lambda_1^\alpha \theta(t-T)} \|u(T)\|_p. \quad (4.19)$$

Here we set

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_T^t \|e^{-aA_p(t-s)} Q(uv)(s)\|_p ds \\ &\leq C \int_T^t m(t-s)^{\frac{-N}{2\alpha}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} e^{-a\lambda_1^\alpha \theta(t-s)} \|v(s)\|_q ds. \end{aligned}$$

Using (4.16) we obtain

$$\begin{aligned} I(t) &\leq C \|v(T)\|_q \int_T^t m(t-s)^{\frac{-N}{2\alpha}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} e^{-a\lambda_1^\alpha \theta(t-s)} e^{(\lambda(u_\infty + \varepsilon) - \mu)(s-T)} ds \\ &\leq C \|v(T)\|_q \int_0^{t-T} m(t-T-\tau)^{\frac{-N}{2\alpha}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} e^{-a\lambda_1^\alpha \theta(t-T-\tau)} e^{(\lambda(u_\infty + \varepsilon) - \mu)\tau} d\tau \\ &\leq C \|v(T)\|_q e^{(\lambda(u_\infty + \varepsilon) - \mu)(t-T)} \\ &\times \int_0^{t-T} m(t-T-\tau)^{\frac{-N}{2\alpha}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} e^{(-\lambda(u_\infty + \varepsilon) + \mu - a\lambda_1^\alpha \theta)(t-T-\tau)} d\tau. \end{aligned}$$

We denote

$$I_\varepsilon(t) = \int_0^{t-T} m(t-T-\tau)^{\frac{-N}{2\alpha}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} e^{(-\lambda(u_\infty+\varepsilon)+\mu-a\lambda_1^\alpha\theta)(t-T-\tau)} d\tau.$$

If we choose  $p$  and  $q$  satisfying  $0 \leq \frac{N}{2\alpha}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}) < 1$  and use Lemma 4.2.2, we obtain :

- when  $a\lambda_1^\alpha\theta < -\lambda u_\infty + \mu = h(u_\infty)$ , we choose  $\varepsilon$  such that  $0 < \lambda\varepsilon < h(u_\infty) - a\lambda_1^\alpha\theta$ , then

$$I_\varepsilon(t) \leq C\left(\frac{N}{2\alpha}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right), h(u_\infty) - a\lambda_1^\alpha\theta - \lambda\varepsilon\right) e^{(h(u_\infty)-a\lambda_1^\alpha\theta-\lambda\varepsilon)(t-T)}.$$

- when  $a\lambda_1^\alpha\theta \geq h(u_\infty)$ ,

$$I_\varepsilon(t) \leq C\left(\frac{N}{2\alpha}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right), h(u_\infty) - a\lambda_1^\alpha\theta - \lambda\varepsilon\right).$$

Therefore

$$I(t) \leq C\|v(T)\|_q e^{-\rho(t-T)}, \quad (4.20)$$

where  $\rho = \begin{cases} a\lambda_1^\alpha\theta & \text{if } a\lambda_1^\alpha\theta < h(u_\infty), \\ h(u_\infty) - \lambda\varepsilon & \text{if } a\lambda_1^\alpha\theta \geq h(u_\infty). \end{cases}$

Combining estimates (4.19) and (4.20), we get

$$\|Qu(t)\|_p \leq C\|(u, v)(T)\|_p e^{-\rho(t-T)}, \quad t \geq T. \quad (4.21)$$

Then we obtain from (4.18) and (4.21)

$$\|u(t) - u_\infty\|_\infty \leq C\|(u, v)(T)\|_\infty e^{-\rho(t-T)}, \quad t \geq T.$$

Now we have

$$u_\infty - Ce^{-\rho(t-T)} < u(t) < u_\infty + Ce^{-\rho(t-T)}, \quad t \geq T.$$

So we can assert that for every  $1 \leq p \leq \infty$ ,

$$\|v(t)\|_p \leq C\|v(T)\|_p e^{-h(u_\infty)(t-T)}, \quad t \geq T.$$

Then  $Mu(t) - u_\infty$  can be estimated as

$$|Mu(t) - u_\infty| \leq C|Mu(T)| e^{-h(u_\infty)(t-T)}, \quad t \geq T,$$

and

$$\|Qu(t)\|_\infty \leq \begin{cases} Ce^{-\xi(t-T)}, & \text{if } h(u_\infty) \neq a\theta\lambda_1^\alpha \\ C(t-T+1)e^{-\xi(t-T)}, & \text{if } h(u_\infty) = a\theta\lambda_1^\alpha, \end{cases}$$

where  $\xi = \min\{h(u_\infty), a\theta\lambda_1^\alpha\}$ .

Consequently,

$$\|u(t) - u_\infty\|_\infty \leq \begin{cases} Ce^{-\xi(t-T)}, & \text{if } h(u_\infty) \neq a\theta\lambda_1^\alpha \\ C(t-T+1)e^{-\xi(t-T)}, & \text{if } h(u_\infty) = a\theta\lambda_1^\alpha. \end{cases}$$

□





# GLOBAL EXISTENCE AND LARGE TIME BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF THE TIME FRACTIONAL BRUSSELATOR

# 5

## SOMMAIRE

6.1	INTRODUCTION . . . . .	77
6.2	PRELIMINARY RESULTS . . . . .	78
6.3	LOCAL EXISTENCE . . . . .	80
6.4	GLOBAL EXISTENCE AND ASYMPTOTIC BEHAVIOR . . . . .	82

## Abstract

In this paper, it is proved that the time fractional Brusselator admits a global solution. Furthermore, some results of the asymptotic behavior for this solution are obtained.

**Keywords** fractional calculus, Caputo derivative, local and global existence, large time behavior.

**MSC[2010]** : 35B01, 35B40, 26A33.



## 5.1 Introduction

In this work, we are interested in the fractional Brusselator model which arises in the modelling of autocatalytic reactions. We study the global existence and large time behavior of the solution for the following fractional-order Brusselator

$$\begin{cases} {}^c D_t^\beta u &= d_1 \Delta u - (b+1)u + u^2 v + a, \\ {}^c D_t^\beta v &= d_2 \Delta v + bu - u^2 v, \end{cases} \quad (5.1)$$

in  $\Omega \times \mathbb{R}^+$ , and supplemented with the boundary and initial conditions

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x, t) = \frac{\partial v}{\partial \eta}(x, t) = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \quad (5.2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x) \quad \text{in } \Omega, \quad (5.3)$$

where  $\Omega$  is a regular bounded domain in  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 1$ ) with smooth boundary  $\partial\Omega$ ,  $\frac{\partial}{\partial \eta}$  denotes the normal derivative on  $\partial\Omega$ ,  $\Delta$  stands for the Laplacian operator,  $d_1$ ,  $d_2$  and  $a$  are positive constants and  $b$  is a nonnegative constant,  $u_0$  and  $v_0$  are nonnegative functions,  ${}^c D_t^\beta$ , for  $\beta \in (0, 1)$ , is the Caputo fractional derivative of order  $\beta$ .

The system, obtained by replacing the fractional derivative by the classical one, is known as the chemical reaction diffusion Brusselator. This model was proposed by Prigogine and Lefever in 1968. Later on, the Brusselator model has attracted significant attention. It has been a subject of a number of papers, for example Rothe [71], Bénilan et al. [11], Hollis et al. [33], Kirane [41], etc.

Our paper is organized as follows. In section 5.2, we present some preliminaries and definitions which will be used in the following sections. In section 5.3, the definition of mild solution of the system (5.1) and the theorem of local existence are given. The main results of global existence and large time behavior for the solution are presented in section 5.4.

## 5.2 Preliminaries and definitions

In this section, we introduce some notations, definitions, see [73], and lemmas which will be used in the sequel.

**Definition 5.2.1** For  $T > 0$ , let  $f \in L^1(0, T)$  and  $\beta \geq 0$ , the expression

$$J_t^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} f(s) ds, \quad t > 0, \quad 0 < \beta < 1$$

with  $J_t^0 f(t) = f(t)$  is called the Riemann-Liouville integral of order  $\beta$  of  $f$ .

**Definition 5.2.2** Let  $\beta \in (0,1)$  and  $f \in AC(0,T)$ . The Caputo fractional derivative of order  $\beta$  of  $f$  is defined by

$${}^c D_t^\beta f(t) = D_t^1 J_t^{1-\beta}(f(t) - f(0)), \quad (5.4)$$

where  $D_t^1 = \frac{d}{dt}$ .

Observe that if  $f \in C^1(0,T)$ , then we have

$${}^c D_t^\beta f(t) = J_t^{1-\beta} D_t^1 f(t). \quad (5.5)$$

**Lemma 5.2.3** (see Córdoba-Córdoba [20], [4, Remark 1])

Let  $f$  be an absolutely continuous function and  $\beta \in (0,1)$ , then we have

$${}^c D_t^\beta f^2(t) \leq 2f(t) {}^c D_t^\beta f(t). \quad (5.6)$$

**Definition 5.2.4** For  $p \in (1,\infty)$ , we denote by  $A_i$ , for each  $i \in \{1,2\}$ , the realization of  $-d_i \Delta$  with homogeneous Neumann boundary condition in  $L^p(\Omega)$ , i.e.

$$D(A_i) = \left\{ \phi \in W^{2,p}(\Omega); \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0 \text{ on } \partial\Omega \right\} := W_N^{2,p}(\Omega)$$

$$A_i \phi = -d_i \Delta \phi \text{ for } \phi \in W_N^{2,p}(\Omega).$$

**Remark 5.2.5** For  $p \in (1,\infty)$ , it is well known that, for each  $i \in \{1,2\}$ ,  $-A_i$  is a sectorial operator (see [31]); so it generates an analytic semigroup  $\{T_i(t) := e^{-tA_i}\}_{t \geq 0}$ .

**Lemma 5.2.6** ([13, Lemma 3.4])

For  $1 \leq r \leq p \leq \infty$ , there exists a positive constant  $C$  such that

$$\|T(t)u\|_p \leq C \|u\|_p, \quad t > 0, \quad (5.7)$$

$$\|T(t)u\|_p \leq C t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})} \|u\|_r, \quad t > 0, \quad (5.8)$$

where  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  is the semigroup generated by  $-A$ .

Hereafter, we present some properties of the Mittag-Leffler function which is defined by

$$E_{\beta,\alpha}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\beta k + \alpha)}; \quad z \in \mathbb{C},$$

where  $\beta > 0$  and  $\alpha \in \mathbb{R}$  are arbitrary constants.

For  $\alpha = 1$ ,

$$E_{\beta,1}(z) := E_\beta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\beta k + 1)}; \quad z \in \mathbb{C}.$$

**Lemma 5.2.7** (see [72])

For  $\lambda > 0$  and  $\beta > 0$ , we have

$$\frac{d}{dt}E_\beta(-\lambda t^\beta) = -\lambda t^{\beta-1}E_{\beta,\beta}(-\lambda t^\beta), \quad t > 0. \quad (5.9)$$

For  $\eta \geq 0$  and  $0 < \beta < 1$ , we have

$$E_{\beta,\beta}(-\eta) \geq 0, \quad t > 0. \quad (5.10)$$

To define the mild solution, we need two operator families  $\{E_\beta(-t^\beta A)\}_{t \geq 0}$  and  $\{E_{\beta,\beta}(-t^\beta A)\}_{t \geq 0}$  ( $A$  a sectorial operator) and their properties. These operators are based on the generalized Mittag-Leffler functions and the resolvent operators associated to the sectorial operator  $A$  (see [76, 80]).

**Definition 5.2.8** (see [76, Lemma 6])

Let  $\beta \in (0, 1)$  and suppose that  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  is a positive sectorial operator, then we have

$$E_\beta(-t^\beta A) := \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} e^{\lambda t} \lambda^{\beta-1} (\lambda^\beta + A)^{-1} d\lambda; \quad t \geq 0, \quad (5.11)$$

and

$$E_{\beta,\beta}(-t^\beta A) := \frac{t^{1-\beta}}{2\pi i} \int_{Ha} e^{\lambda t} (\lambda^\beta + A)^{-1} d\lambda; \quad t \geq 0, \quad (5.12)$$

where  $Ha \subset \rho(-A)$  is the Hankel path.

Let  $\phi_\beta(\theta)$  be the probability density function defined on  $(0, \infty)$  (see [53, 80]), which satisfies :

- (A)  $\phi_\beta(\theta) \geq 0, \quad \theta > 0;$
- (B)  $\int_0^\infty \phi_\beta(\theta) d\theta = 1;$
- (C)  $\int_0^\infty \theta^r \phi_\beta(\theta) d\theta = \frac{\Gamma(1+r)}{\Gamma(1+\beta r)},$  for  $-1 < r < \infty.$

**Theorem 5.2.9** (see [76, Lemma 9])

Under the hypotheses of Definition 5.2.8, we can rewrite the operators  $\{E_\beta(-t^\beta A)\}_{t \geq 0}$  and  $\{E_{\beta,\beta}(-t^\beta A)\}_{t \geq 0}$  as follows

$$E_\beta(-t^\beta A) = \int_0^\infty \phi_\beta(\theta) T(\theta t^\beta) d\theta, \quad t \geq 0, \quad (5.13)$$

and

$$E_{\beta,\beta}(-t^\beta A) = \int_0^\infty \beta \theta \phi_\beta(\theta) T(\theta t^\beta) d\theta, \quad t \geq 0, \quad (5.14)$$

where  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  is the semigroup generated by  $-A$ .

**Proposition 5.2.10** For  $1 \leq r \leq p \leq \infty$ , let  $A : D(A) \subset L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$  where  $A = -d_i \Delta$ ,  $i \in \{1, 2\}$ .

Then there exists a constant  $C > 0$  such that

$$\|E_\beta(-t^\beta A)u\|_p \leq C \|u\|_p, \quad t > 0, \quad (5.15)$$

$$\|E_{\beta,\beta}(-t^\beta A)u\|_p \leq C\|u\|_p, \quad t > 0, \quad (5.16)$$

and for  $\frac{N}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}) < 1$

$$\|E_\beta(-t^\beta A)u\|_p \leq Ct^{-\frac{N}{2}\beta(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})}\|u\|_r, \quad t > 0, \quad (5.17)$$

$$\|E_{\beta,\beta}(-t^\beta A)u\|_p \leq Ct^{-\frac{N}{2}\beta(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})}\|u\|_r, \quad t > 0. \quad (5.18)$$

**Proof.** The proof is based on the semigroup estimates given in Lemma 5.2.6.

Combining (5.13), (5.7) and (B) we obtain

$$\begin{aligned} \|E_\beta(-t^\beta A)u\|_p &\leq \int_0^\infty \phi_\beta(\theta) \|T(\theta t^\beta)u\|_p d\theta \\ &\leq C \int_0^\infty \phi_\beta(\theta) d\theta \|u\|_p \leq C\|u\|_p. \end{aligned}$$

Similarly, by (5.14), (5.8) and (C) we have

$$\begin{aligned} \|E_{\beta,\beta}(-t^\beta A)u\|_p &\leq \int_0^\infty \beta \theta \phi_\beta(\theta) \|T(\theta t^\beta)u\|_p d\theta \\ &\leq C\beta \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1+\beta)} \|u\|_p \leq C\|u\|_p. \end{aligned}$$

If  $\frac{N}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}) < 1$ , it follows from (5.8) and (C) that

$$\begin{aligned} \|E_{\beta,\beta}(-t^\beta A)u\|_p &\leq \int_0^\infty \beta \theta \phi_\beta(\theta) \|T(\theta t^\beta)u\|_p d\theta \\ &\leq Ct^{-\frac{N}{2}\beta(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})} \int_0^\infty \beta \theta^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})} \phi_\beta(\theta) d\theta \|u\|_r \\ &\leq C\beta \frac{\Gamma(-\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})+1)}{\Gamma(-\frac{N}{2}\beta(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})+1)} t^{-\frac{N}{2}\beta(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})} \|u\|_r. \end{aligned}$$

□

### 5.3 Local existence

In this section, we investigate the local existence and uniqueness of mild solutions to the problem (5.1) which can be written as follows

$$\begin{cases} {}^c D_t^\beta u &= -A_1 u + f(u, v), \\ {}^c D_t^\beta v &= -A_2 v + g(u, v), \end{cases} \quad (5.19)$$

in  $\Omega \times \mathbb{R}^+$ , and supplemented with the initial conditions (5.3) where  $f(u, v) = -(b+1)u + u^2v$  and  $g(u, v) = bu - u^2v$ .

**Definition 5.3.1** (Mild solution)

Let  $u_0, v_0 \in L^\infty(\Omega)$ ; for  $T > 0$ , we say that  $(u, v) \in C([0, T]; L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega))$  is a mild solution of the system (5.19)-(5.3) if it satisfies the integral equations

$$u(t) = E_\beta(-t^\beta A_1)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(-(t-s)^\beta A_1) f(s, u(s), v(s)) ds,$$

$$v(t) = E_\beta(-t^\beta A_2)v_0 + \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(-(t-s)^\beta A_2) g(s, u(s), v(s)) ds,$$

for  $t \in [0, T]$ .

**Theorem 5.3.2** (Local existence)

Let  $u_0, v_0 \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ , then there exist a maximal  $T_{max} > 0$  and a unique mild solution  $(u, v) \in C([0, T_{max}); \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \times \mathcal{C}(\bar{\Omega}))$  to the problem (5.1)-(5.2)-(5.3) with the alternative :

- either  $T_{max} = +\infty$ ;

- or  $T_{max} < +\infty$ , and in this case  $\lim_{t \rightarrow T_{max}} \|u(t)\|_\infty + \|v(t)\|_\infty = +\infty$ .

**Proof.**

For  $T > 0$  and  $R := 2C(\|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty)$ , we define the following Banach space

$$E := \{(u, v) \in C([0, T]; L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)); \|(u, v)\| \leq R\}$$

where  $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$  and

$$\|(u, v)\| := \|u\| + \|v\| := \|u\|_{L^\infty([0, T]; L^\infty(\Omega))} + \|v\|_{L^\infty([0, T]; L^\infty(\Omega))}.$$

For every  $(u, v) \in E$ , we define

$$\Psi(u, v) = (\Psi_1(u, v), \Psi_2(u, v)),$$

where

$$\Psi_1(u, v) := E_\beta(-t^\beta A_1)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(-(t-s)^\beta A_1) f(s, u(s), v(s)) ds,$$

and

$$\Psi_2(u, v) := E_\beta(-t^\beta A_2)v_0 + \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(-(t-s)^\beta A_2) g(s, u(s), v(s)) ds.$$

We will prove the local existence by the Banach fixed point theorem (see Theorem ??).

•  $\Psi : E \rightarrow E$  : Let  $(u, v) \in E$ , we have

$$\begin{aligned} \|\Psi_1(u, v)\|_\infty &\leq C\|u_0\|_\infty + (b+1)C \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \|u(s)\|_\infty ds \\ &\quad + C \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \|(u^2 v)(s)\|_\infty ds + aC \int_0^t (t-s)^{\beta-1} ds \\ &\leq C\|u_0\|_\infty + (b+1)RC \frac{T^\beta}{\beta} + R^3C \frac{T^\beta}{\beta} + aC \frac{T^\beta}{\beta}. \end{aligned}$$



Similarly, we obtain

$$\|\Psi_2(u, v)\| \leq C\|v_0\|_\infty + bRC\frac{T^\beta}{\beta} + R^3C\frac{T^\beta}{\beta}.$$

Whereupon

$$\|\Psi(u, v)\| \leq C(\|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty) + ((2b + 1)R + 2R^3 + a)C\frac{T^\beta}{\beta};$$

if we choose  $T$  such that  $T^\beta \leq \frac{\beta(\|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty)}{(2b + 1)R + 2R^3 + a}$  we get  $\Psi(u, v) \in E$ .

•  $\Psi$  is a contraction map : For  $(u, v), (\tilde{u}, \tilde{v}) \in E$  we have

$$\|\Psi_1(u, v) - \Psi_1(\tilde{u}, \tilde{v})\| \leq (b + 1)C\frac{T^\beta}{\beta}\|u - \tilde{u}\| + C\frac{T^\beta}{\beta}\|u^2v - \tilde{u}^2\tilde{v}\|.$$

Using the inequality

$$\|u^2v - \tilde{u}^2\tilde{v}\| \leq \|u\|^2\|v - \tilde{v}\| + \|\tilde{v}\|(\|u\| + \|\tilde{u}\|)\|u - \tilde{u}\|, \quad (5.20)$$

we obtain

$$\|\Psi_1(u, v) - \Psi_1(\tilde{u}, \tilde{v})\| \leq \left( (b + 1)C\frac{T^\beta}{\beta} + 3CR^2\frac{T^\beta}{\beta} \right) \|(u, v) - (\tilde{u}, \tilde{v})\|.$$

Similarly, it follows that

$$\|\Psi_2(u, v) - \Psi_2(\tilde{u}, \tilde{v})\| \leq \left( bC\frac{T^\beta}{\beta} + 3CR^2\frac{T^\beta}{\beta} \right) \|(u, v) - (\tilde{u}, \tilde{v})\|;$$

so,

$$\begin{aligned} \|\Psi(u, v) - \Psi(\tilde{u}, \tilde{v})\| &\leq \left( (2b + 1)C\frac{T^\beta}{\beta} + 6CR^2\frac{T^\beta}{\beta} \right) \|(u, v) - (\tilde{u}, \tilde{v})\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|(u, v) - (\tilde{u}, \tilde{v})\| \end{aligned}$$

for  $T^\beta \leq \frac{\beta}{2C((2b + 1) + 6R^2)}$ .

Therefore, in view of the Banach fixed point theorem,  $\Psi$  admits a fixed point on  $E$ . Thus the system (5.1)-(5.2)-(5.3) has a mild solution.

• Uniqueness of the solution : Let  $(u, v), (\tilde{u}, \tilde{v}) \in E$  be two mild solutions in  $E$ , for  $T > 0$ . Using (5.16) and (5.20), we have for  $t \in [0, T]$  :

$$\begin{aligned} &\|u(t) - \tilde{u}(t)\|_\infty \\ &\leq (b + 1)C \int_0^t (t - s)^{\beta-1} \|u(s) - \tilde{u}(s)\|_\infty ds \\ &\quad + C \int_0^t (t - s)^{\beta-1} \|(u^2v)(s) - (\tilde{u}^2\tilde{v})(s)\|_\infty ds \\ &\leq ((b + 1)C + 3CR^2) \int_0^t (t - s)^{\beta-1} (\|u(s) - \tilde{u}(s)\|_\infty + \|v(s) - \tilde{v}(s)\|_\infty) ds \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
& \|v(t) - \tilde{v}(t)\|_\infty \\
& \leq bC \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \|u(s) - \tilde{u}(s)\|_\infty ds \\
& + C \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \|(\tilde{u}^2 \tilde{v})(s) - (u^2 v)(s)\|_\infty ds \\
& \leq (bC + 3CR^2) \int_0^t (t-s)^{\beta-1} (\|u(s) - \tilde{u}(s)\|_\infty + \|v(s) - \tilde{v}(s)\|_\infty) ds.
\end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned}
& \|u(t) - \tilde{u}(t)\|_\infty + \|v(t) - \tilde{v}(t)\|_\infty \\
& \leq C(2b + 1 + 6R^2) \int_0^t (t-s)^{\beta-1} (\|u(s) - \tilde{u}(s)\|_\infty + \|v(s) - \tilde{v}(s)\|_\infty) ds,
\end{aligned}$$

by the Gronwall inequality (see Lemma A.1.4), the uniqueness follows.  $\square$

## 5.4 Global existence and large time behavior

**Lemma 5.4.1** *Let  $(u_0, v_0) \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \times \mathcal{C}(\bar{\Omega})$  be such that  $u_0 \geq 0$  and  $v_0 \geq 0$ , then the solution  $(u, v)$  of (5.1)-(5.2)-(5.3) is positive.*

**Proof.** We define  $u^+ = \max(0, u)$  and  $u^- = \max(0, -u)$ ;  $u = u^+ - u^-$ . We have

$$\int_{\Omega} (u^-)^c {}^c D_t^\beta u^- dx \leq -d_1 \int_{\Omega} (\nabla u^-)^2 dx - \int_{\Omega} (u^-)^3 v dx.$$

Since  $(u, v)$  is a local solution on  $[0, T_{max})$ , then  $u$  and  $v$  are bounded on  $[0, T]$  for  $T < T_{max}$ ; hence there exist continuous functions  $c(t)$  and  $h(t)$  such that  $\|v(t)\|_\infty \leq c(t)$  and  $\|u(t)\|_\infty \leq h(t)$ . It follows that

$$\int_{\Omega} u^- {}^c D_t^\beta u^- dx \leq h(t)c(t) \int_{\Omega} (u^-)^2 dx.$$

Lemma 5.2.3 allows us to obtain

$$\int_{\Omega} {}^c D_t^\beta (u^-)^2 dx \leq 2h(t)c(t) \int_{\Omega} (u^-)^2 dx.$$

Consider the function  $\psi(t) = \int_{\Omega} (u^-)^2 dx$  where  $\psi(0) = 0$  and

$${}^c D_t^\beta \psi(t) \leq 2h(t)c(t)\psi(t);$$

it is obvious that  $\psi(t) = 0$  and consequently,  $u \geq 0$ .

Similarly, we have

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} {}^c D_t^\beta \int_{\Omega} (v^-)^2 dx & \leq \int_{\Omega} (v^-) {}^c D_t^\beta v^- dx \\
& \leq -d_2 \int_{\Omega} (\nabla v^-)^2 dx - \int_{\Omega} u^2 (v^-)^2 dx - b \int_{\Omega} uv^- dx,
\end{aligned}$$

then

$${}^c D_t^\beta \int_{\Omega} (v^-)^2 dx \leq 0.$$

Applying  $J_t^\beta$ , it follows that  $\int_{\Omega} (v^-)^2 dx \leq \int_{\Omega} (v^-)^2(0) dx = 0$ , hence  $v \geq 0$ . □

Now, we present the  $L^2$ -estimate of the component  $u$  and an  $L^\infty$ -estimate for the component  $v$ .

**Proposition 5.4.2** *Under the same assumptions as Lemma 5.4.1, there exists a positive constant  $M$  such that the solution  $(u, v) \in C([0, T_{max}], C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega}))$  of the system (5.1)-(5.2)-(5.3) satisfies*

$$\|v(\cdot, t)\|_\infty \leq M, \quad \text{for all } t > 0, \quad (5.21)$$

$$v^2(x, t) \leq E_\beta(-t^\beta A_2) v_0^2 + M t^\beta, \quad \text{for all } (x, t) \in \Omega \times (0, T_{max}), \quad (5.22)$$

$$\|u(\cdot, t)\|_2^2 \leq M(1 + t^\beta), \quad \text{for all } t \in (0, T_{max}). \quad (5.23)$$

**Proof.** For the proof, we need the following lemma.

**Lemma 5.4.3** *It holds*

$$u(t) \geq \frac{a}{b+1} (1 - E_\beta(-(b+1)t^\beta)), \quad t > 0. \quad (5.24)$$

**Proof.** Let  $\bar{m}(t) = \min\{u(x, t); x \in \bar{\Omega}\}$ .

For any  $t > 0$ , there exists  $x^* \in \bar{\Omega}$  such that  $\bar{m}(t) = u(x^*, t)$  and  ${}^c D_t^\beta \bar{m}(t) = {}^c D_t^\beta u(x^*, t)$ .

Using the fact that  $v \geq 0$ , we obtain

$${}^c D_t^\beta \bar{m}(t) \geq -(b+1)\bar{m}(t) + a.$$

Let  $\tilde{m}(t)$  the solution of the problem

$${}^c D_t^\beta \tilde{m}(t) = -(b+1)\tilde{m}(t) + a, \quad \tilde{m}(0) = 0.$$

By comparison, it follows that

$$\bar{m}(t) \geq \tilde{m}(t) = \frac{a}{b+1} (1 - E_\beta(-(b+1)t^\beta)),$$

hence

$$u(t) \geq \frac{a}{b+1} (1 - E_\beta(-(b+1)t^\beta)), \quad t > 0. \quad \square$$

Now, we pass to the proof of (5.21). Let us fix  $\tau > 0$  such that  $\tau < T_{max}$ . By Theorem 5.3.2, the problem (5.1)-(5.2)-(5.3) has a unique solution in  $[0, T_{max})$  which implies that  $(u, v)$  is bounded in  $[0, \tau]$ . Hence

$$\|v(\cdot, t)\|_\infty \leq C_1 \quad \text{for any } t \leq \tau. \quad (5.25)$$

For  $t \geq \tau$ , let  $M(t) = \max\{v(x, t); x \in \bar{\Omega}\}$ .

For any  $t > 0$ , there exists  $\hat{x} \in \bar{\Omega}$  such that  $M(t) = v(\hat{x}, t)$  and  ${}^c D_t^\beta M(t) = {}^c D_t^\beta v(\hat{x}, t)$ .

It is clear that

$${}^c D_t^\beta M(t) \leq u(\hat{x}, t)(b - u(\hat{x}, t)M(t)).$$

Let  $\gamma$  be the increasing function defined by

$$\gamma(\tau) := \frac{a}{b+1}(1 - E_\beta(-(b+1)\tau^\beta)).$$

From this and Lemma 5.4.3, we obtain

$${}^c D_t^\beta M(t) \leq \psi(\gamma(\tau)), \quad t \geq \tau; \quad (5.26)$$

where the nonincreasing function  $\psi : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  is defined as follows

$$\psi(y) = \begin{cases} y(b - yM(t)) & \text{for } y \geq \frac{b}{2\gamma(\tau)}, \\ \frac{b}{4M(t)} & \text{for } y \leq \frac{b}{2\gamma(\tau)}. \end{cases}$$

Consider  $\tilde{M}(t)$  the solution of the initial value problem

$${}^c D_t^\beta \tilde{M}(t) = -\gamma^2(\tau)\tilde{M}(t) + b\gamma(\tau), \quad \tilde{M}(\tau) = \frac{b}{2\gamma(\tau)}, \quad (5.27)$$

which is given by

$$\begin{aligned} \tilde{M}(t) &= \frac{b}{2\gamma(\tau)} E_\beta(-\gamma^2(\tau)(t-\tau)^\beta) \\ &\quad + b\gamma(\tau) \int_\tau^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(-\gamma^2(\tau)(t-s)^\beta) ds. \end{aligned}$$

According to (5.9), we have

$$\int_\tau^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(-\gamma^2(\tau)(t-s)^\beta) ds = \frac{1}{\gamma^2(\tau)} \left(1 - E_\beta(-\gamma^2(\tau)(t-\tau)^\beta)\right); \quad (5.28)$$

hence,

$$\tilde{M}(t) = \frac{b}{\gamma(\tau)} \left(1 - \frac{1}{2} E_\beta(-\gamma^2(\tau)(t-\tau)^\beta)\right), \quad t \geq \tau. \quad (5.29)$$

Combining (5.26) and (5.29), we conclude that

$$M(t) \leq \frac{b}{\gamma(\tau)} \left(1 - \frac{1}{2} E_\beta(-\gamma^2(\tau)(t-\tau)^\beta)\right) \leq \frac{b}{\gamma(\tau)}, \quad t \geq \tau, \quad (5.30)$$

whereupon,

$$M(t) \leq \frac{b}{\left(\frac{a}{b+1}(1 - E_\beta(-(b+1)\tau^\beta))\right)}, \quad t \geq \tau. \quad (5.31)$$

We also have,

$${}^c D_t^\beta M(t) \leq \frac{b}{4M(t)}, \quad \text{for any } t \geq 0, \quad (5.32)$$

using Lemma 5.2.3 and operating with  $J_t^\beta$  on (5.32), we obtain

$$M^2(t) \leq (M(0))^2 + \frac{bt^\beta}{2\Gamma(\beta+1)}, \quad t \geq 0. \quad (5.33)$$

By the definition of  $M(t)$  and the estimates (5.31) and (5.33), we can assert that

$$\|v(\cdot, t)\|_\infty \leq C_2 \quad \text{for } t \geq \tau, \quad (5.34)$$

which follows by choosing  $C_2 \geq \frac{b(b+1)}{a}$ .

The assertion (5.21) is proved with  $M = \max\{C_1, C_2\}$  in view of estimates (5.25) and (5.34).

Passing now to the proof of (5.22).

Let  $w = v^2$ . Using Lemma 5.2.3 and the second equation of (5.1), we obtain

$$\begin{aligned} {}^c D_t^\beta w &\leq 2v {}^c D_t^\beta v \\ &\leq 2d_2 v \Delta v - 2(uv)^2 + 2buv \\ &\leq d_2 \Delta w - 2\left(uv - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{b^2}{2}; \end{aligned}$$

whereupon

$${}^c D_t^\beta w \leq d_2 \Delta w + \frac{b^2}{2} \quad \text{in } \Omega \times (0, T)$$

and  $w = 0$  on  $\partial\Omega \times (0, T)$  for any  $T < \tau$ .

By comparison, it follows that

$$w(x, t) \leq E_\beta(-t^\beta A_2) v_0^2 + \frac{b^2}{2} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta, \beta}(-(t-s)^\beta A_2) ds;$$

then estimate (5.22) holds by applying Proposition 5.2.10.

Now, we estimate the component  $u$ . Adding the two equations of problem (5.1), yields

$${}^c D_t^\beta (u + v) - \Delta(d_1 u + d_2 v) = a - u, \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty).$$

Multiplying by  $(u + v)$ , integrating over  $\Omega$  and using Lemma 5.2.3, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_\Omega {}^c D_t^\beta (u + v)^2 dx &+ \int_\Omega [d_1 (\nabla u)^2 + (d_1 + d_2) \nabla u \cdot \nabla v + d_2 (\nabla v)^2] dx \\ &\leq \int_\Omega (a - u)(u + v) dx. \end{aligned} \quad (5.35)$$

As

$$d_1 (\nabla u)^2 + (d_1 + d_2) \nabla u \cdot \nabla v + d_2 (\nabla v)^2 \geq \frac{d_1}{2} (\nabla u)^2 - \frac{d_1^2 + d_2^2}{2d_1} (\nabla v)^2,$$

so, from (5.35), we obtain

$$\begin{aligned} {}^c D_t^\beta \int_{\Omega} (u+v)^2 dx + d_1 \int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx \\ \leq \frac{d_1^2 + d_2^2}{d_1} \int_{\Omega} (\nabla v)^2 dx + 2 \int_{\Omega} (a-u)(u+v) dx. \end{aligned} \quad (5.36)$$

From the second equation of (5.1), we have that

$${}^c D_t^\beta \int_{\Omega} v^2 dx + 2d_2 \int_{\Omega} (\nabla v)^2 dx \leq 2 \int_{\Omega} uv(b-uv) dx. \quad (5.37)$$

Let us consider the non-increasing function  $\varphi : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  defined by

$$\varphi(y) = \begin{cases} 2(b\sqrt{y} - y), & \text{for } y \geq \frac{b^2}{4}, \\ \frac{b^2}{2}, & \text{for } y \leq \frac{b^2}{4}. \end{cases}$$

It follows from (5.37) that

$${}^c D_t^\beta \int_{\Omega} v^2 dx + 2d_2 \int_{\Omega} (\nabla v)^2 dx \leq \frac{b^2}{2}. \quad (5.38)$$

Combining (5.36) and (5.38), we see that the function  $w$  defined by  $w = (u+v)^2 + \frac{d_1^2 + d_2^2}{2d_1d_2}v^2$  satisfies the following estimate

$${}^c D_t^\beta \int_{\Omega} w dx + d_1 \int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx \leq 2 \int_{\Omega} (a-u)(u+v) dx + \frac{b^2(d_1^2 + d_2^2)}{4d_1d_2}. \quad (5.39)$$

If we set  $M(b, d_1, d_2) = \frac{b^2(d_1^2 + d_2^2)}{4d_1d_2} + \frac{d_1^2 + d_2^2}{2d_1d_2} \|v(\cdot, t)\|_2^2$ , then we have

$$\left[ {}^c D_t^\beta + 1 \right] \int_{\Omega} w dx \leq M(b, d_1, d_2) + 2 \int_{\Omega} (a+v)(u+v) dx. \quad (5.40)$$

We clearly have

$$2 \int_{\Omega} (a+v)(u+v) dx \leq 2\|a+v\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u+v\|_2^2; \quad (5.41)$$

by estimates (5.40) and (5.41), we get, as  $v$  is bounded,

$${}^c D_t^\beta \int_{\Omega} w dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} w dx \leq M,$$

where  $M$  is a positive constant.

Finally, we conclude that

$$\|u(\cdot, t)\|_2^2 \leq \int_{\Omega} w dx \leq \frac{Mt^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + \|u_0 + v_0\|_2^2 + \frac{d_1^2 + d_2^2}{2d_1d_2} \|v_0\|_2^2.$$

□

Hereafter, we will obtain bounds on  $\|u(\cdot, t)\|_p$  by using the feedback argument of Rothe [71].

Let  $\|v\|_{q_1, q_2, T} := \sup_{0 < t < T} \left[ \int_0^t \|v(\cdot, \tau)\|_{q_1}^{q_2} d\tau \right]^{\frac{1}{q_2}}$  and  $\|v\|_{q_1, q_2} = \|v\|_{q_1, q_2, \infty}$ .

**Proposition 5.4.4** *Let  $p_0, q_1, q_2 \in [1, \infty]$ ,  $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ ,  $\delta \in (0, 1)$  and  $\varepsilon \in (0, 1)$  be such that*

$$\varepsilon \leq (1 - 2\alpha)\delta, \quad (5.42)$$

$$\frac{N}{2} \left( \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p} \right) < 1, \quad (5.43)$$

$$\delta = \frac{N\beta}{2} \left( \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p} \right), \quad (5.44)$$

$$\frac{N}{2q_1} + \frac{1}{\beta q_2} + \frac{N}{2}(1 - \alpha) \leq 1 + (1 - 2\alpha) \frac{N}{2p}, \quad (5.45)$$

$$\frac{N\beta}{2} \left( \frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1} \right) < \frac{1}{q_2}. \quad (5.46)$$

Then for  $(u_0, v_0) \in L^{p_0}(\Omega) \times L^{q_0}(\Omega)$ , there exist two positive constants  $M_1$  and  $M_2$  such that

$$\sup_{0 < t < T} (m(t)^\delta \|u\|_p) \leq M_1 \|u_0\|_{p_0} + M_2 m(T)^\varepsilon (U + U^{\frac{1}{1-2\alpha}}) \quad (5.47)$$

where we have set  $m(t) = \min(1, t)$  and  $U = \|v\|_{q_1, q_2} \|1 + u\|_{2, \infty}^{2(1-\alpha)} < \infty$ .

**Proof.** From estimates (5.17) and (5.18), we obtain

$$\|u\|_p \leq Ct^{-\frac{N\beta}{2}(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p})} \|u_0\|_{p_0} + C \int_0^t (t - \tau)^{\beta-1 - \frac{N\beta}{2}(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{p})} \|f(u, v)\|_{s_1} d\tau, \quad (5.48)$$

where  $s_1 \in [1, \infty]$  is such that  $0 < \frac{N}{2} \left( \frac{1}{s_1} - \frac{1}{p} \right) < 1$ .

By writing

$$|f(\tau, u, v)| \leq |c(x, \tau)(1 + u(\tau))^2|$$

where  $c(x, \tau) > \max(v(x, \tau), a, b + 1)$ , we have :

- In the case where  $c(x, \tau) = v(x, \tau)$ ,

$$\|f(\tau, u, v)\|_{s_1} \leq \|v(\cdot, \tau)\|_{q_1} \|1 + u(\tau)\|_2^{2(1-\alpha)} \|1 + u(\tau)\|_p^{2\alpha}, \quad (5.49)$$

where  $q_1 \in [1, \infty]$  and  $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$  such that  $\frac{1}{q_1} + \frac{2(1-\alpha)}{2} + \frac{2\alpha}{p} \leq \frac{1}{s_1}$ .

So for  $\delta = \frac{N\beta}{2} \left( \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p} \right)$ , we obtain by using (5.49)

$$\begin{aligned} m(t)^\delta \|u\|_p &\leq C \|u_0\|_{p_0} \\ &+ Cm(t)^\delta \left( \int_0^t (t - \tau)^{\beta-1 - \frac{N\beta}{2}(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{p})} m(\tau)^{-2\alpha\delta} \|v(\cdot, \tau)\|_{q_1} \|1 + u\|_2^{2(1-\alpha)} d\tau \right) \\ &\times m(t)^{2\alpha\delta} \|1 + u\|_p^{2\alpha}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Let

$$J(t) = m(t)^\delta \int_0^t (t - \tau)^{\beta-1 - \frac{N\beta}{2}(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{p})} G(\tau) d\tau, \quad (5.51)$$

where  $G(\tau) := \|v(\cdot, \tau)\|_{q_1} \|1 + u(\tau)\|_2^{2(1-\alpha)}$ .

From estimates (5.22), (5.17) and (5.18), we get for  $q_1 \geq q_0 \geq 2$  and  $N\left(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1}\right) < 1$ ,

$$\|v(\cdot, t)\|_{q_1}^2 \leq Ct^{-N\beta(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1})} \|v_0\|_{q_0}^2 + C\frac{b^2}{2} t^{\beta - N\beta(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1})}. \quad (5.52)$$

Then

$$\|v\|_{q_1, q_2} \leq Ct^{-\frac{N\beta}{2}(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1}) + \frac{1}{q_2}} \|v_0\|_{q_0} + C\frac{b^2}{2} t^{\frac{\beta}{2} - \frac{N\beta}{2}(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1}) + \frac{1}{q_2}}, \quad (5.53)$$

where  $q_2 \in [1, \infty]$ ,  $\frac{N\beta}{2}\left(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1}\right) < \frac{1}{q_2}$ .

It follows that for  $s_2 \in [1, \infty]$  verifying  $\frac{1}{q_2} \leq \frac{1}{s_2}$ ,

$$|G(\cdot)|_{s_2} := \left( \int_0^t |G(\tau)|^{s_2} d\tau \right)^{\frac{1}{s_2}} \leq \|v\|_{q_1, q_2} \|1 + u\|_{2, \infty}^{2(1-\alpha)} = U < \infty. \quad (5.54)$$

Let  $s \in [1, \infty]$  be such that  $\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s} = 1$  and  $\gamma = 1 - \beta + \frac{N\beta}{2}\left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{p}\right) < \frac{1}{s}$ , it yields

$$|J(t)| \leq m(t)^\delta \left( \int_0^t (t - \tau)^{-\gamma s} m(\tau)^{-2\alpha\delta s} d\tau \right)^{\frac{1}{s}} |G(\cdot)|_{s_2}. \quad (5.55)$$

There exists then  $\varepsilon \in (0, 1)$ ,  $\varepsilon \leq (1 - 2\alpha)\delta$  such that

$$|J(t)| \leq Cm(t)^\varepsilon U. \quad (5.56)$$

Combining estimates (5.56) and (5.50), we obtain

$$m(t)^\delta \|u\|_p \leq C\|u_0\|_{p_0} + Cm(t)^\varepsilon U(m(t)^\delta \|u\|_p)^{2\alpha}, \quad \alpha \in (0, \frac{1}{2}). \quad (5.57)$$

Applying the feedback argument to (5.57), we get

$$\sup_{0 < t < T} (m(t)^\delta \|u\|_p) \leq M_1 \|u_0\|_{p_0} + M_2 m(T)^\varepsilon (U + U^{\frac{1}{1-2\alpha}}) \quad \text{for all } T < T_{max}.$$

• In the other case ( $c(x, \tau) = a$  or  $(b + 1)$ ), we obtain for  $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$  such that  $\frac{2(1-\alpha)}{2} + \frac{2\alpha}{p} \leq \frac{1}{s_1}$ ,

$$\|f(\tau, u, v)\|_{s_1} \leq C \|1 + u(\tau)\|_2^{2(1-\alpha)} \|1 + u(\tau)\|_p^{2\alpha}; \quad (5.58)$$

we repeat the same steps as before but with  $q_1 = \infty$ .  $\square$



**Theorem 5.4.5** *Let  $N \leq 3$  and  $p_0, q_0 \in [2, \infty]$ . For  $(u_0, v_0) \in L^{p_0}(\Omega) \times L^{q_0}(\Omega)$ , the system (5.1)-(5.2)-(5.3) has a unique global solution which satisfies*

$$\sup_{0 < t < \infty} m(t)^\delta \|u(\cdot, t)\|_p \leq M, \text{ for all } p \in [p_0, \infty], \delta = \frac{N\beta}{2} \left( \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p} \right), p \geq p_0, \quad (5.59)$$

$$\sup_{0 < t < \infty} m(t)^\eta \|v(\cdot, t)\|_q \leq M, \text{ for all } q \in [q_0, \infty], \eta = \frac{N\beta}{2} \left( \frac{1}{q_0} - \frac{1}{q} \right), q \geq q_0, \quad (5.60)$$

where  $m(t) = \min(1, t)$  and  $M$  is a positive constant.

**Proof.**

Let  $q_1, q_2 \in [1, \infty]$  be such that

$$\frac{N}{2q_0} < \frac{N}{2q_1} + \frac{1}{\beta q_2},$$

then there exist  $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$  and  $\varepsilon \in (0, 1)$  satisfying the assumptions (5.42) and (5.45) of the proposition 5.4.4 for  $p = \infty$ .

So, it follows that

$$\|u(\cdot, t)\|_\infty \leq Mm(t)^{-\delta} (\|u_0\|_{p_0} + m(T)^\varepsilon (U + U^{\frac{1}{1-2\alpha}})), \quad (5.61)$$

where in this case  $\delta = \frac{N\beta}{2p_0}$ .

In the general case  $p \in [p_0, \infty)$ , we use the interpolation inequality

$$\|u\|_p \leq \|u\|_{p_0}^{\frac{p_0}{p}} \|u\|_\infty^{1-\frac{p_0}{p}}. \quad (5.62)$$

The first result is obtained in view of estimates (5.61) and (5.62).

The second result is given by (5.22) and (5.17) (see the proof of Proposition 5.4.4). □

# GLOBAL EXISTENCE AND ASYMPTOTIC BEHAVIOR FOR A TIME FRACTIONAL REACTION-DIFFUSION SYSTEM

# 6

## Abstract

This paper is concerned with the existence of global in time solutions of a reaction-diffusion system with time fractional derivatives. Furthermore, the large time behavior of bounded solutions is investigated. Our method of proof relies on a maximal regularity result for fractional linear reaction-diffusion equations that has been recently derived by Bajlekova [8].

**Keywords** fractional calculus, reaction-diffusion equations, balance law, global existence, asymptotic behavior.

**MSC[2010]** : 35K57, 35B01, 35B40, 26A33.



## 6.1 Introduction

This paper is concerned with the existence of global in time positive solutions of the time fractional reaction-diffusion system with a balance law

$$\begin{cases} {}^c D_t^\beta u - \Delta u &= f(u)v, \text{ in } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ {}^c D_t^\beta v - d\Delta v &= -f(u)v, \text{ in } \Omega \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (6.1)$$

supplemented with the boundary and initial conditions

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x, t) = \frac{\partial v}{\partial \eta}(x, t) = 0 \text{ on } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \quad (6.2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x) \text{ in } \Omega, \quad (6.3)$$

where  $\Omega$  is a regular bounded domain in  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 1$ ) with smooth boundary  $\partial\Omega$ ,  $\frac{\partial}{\partial \eta}$  denotes the normal derivative on  $\partial\Omega$ ,  $\Delta$  stands for the Laplacian operator,  $d$  is the diffusion constant,  $u_0$  and  $v_0$  are nonnegative functions,  ${}^c D_t^\beta$ , for  $\beta \in (0, 1)$ , is the Caputo fractional derivative of order  $\beta$ .

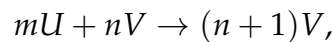
Concerning the nonlinearity  $f$ , we assume that there exist positive constants  $M_1$  and  $M_2$  and a real number  $p \geq 1$  such that

$$0 \leq f(u) \leq M_1|u|^p + M_2, \quad (6.4)$$

and for all  $|u|, |\tilde{u}| \leq R$ ,

$$|f(u) - f(\tilde{u})| \leq L|u - \tilde{u}|. \quad (6.5)$$

Before presenting our results with their proofs, let us dwell upon some literature concerning reaction-diffusion systems with a balance law. When considering the time evolution of the spatio-temporal concentrations of the species  $U$  and  $V$  of the molecular combination



one is lead to the reaction-diffusion system

$$\begin{cases} u_t - a\Delta u &= -u^m v^n, \quad x \in \Omega, t > 0, \\ v_t - b\Delta v &= u^m v^n, \quad x \in \Omega, t > 0, \end{cases} \quad (6.6)$$

where  $\Omega$  is the medium in which the molecular combination takes place. System (6.6) has been successfully studied by Masuda [56], Martin, Hollis and Pierre [33], Kanel and Kirane [37] and Abdelmalek and Kouachi for a very general situation [1]; Ahmad et al. [3] studied the space fractional system

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u &= -f(u, v), \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ v_t - (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} v &= f(u, v), \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \end{cases}$$

via the duality argument.

Here, we want to see the influence of the fractional time derivatives on the behavior of the solutions.

Fractional derivatives occur when the system takes place in an irregular or fractal medium. Needless to say that fractional reaction-diffusion equations and system are currently extensively studied not only for the mathematical side but also for their potential applications [46], [32], [30].

In this paper, we first prove that system (6.1)-(6.2)-(6.3) admits global solutions by relying on a maximal regularity result derived by Bajlekova. We also derive the large time behavior of bounded solutions.

## 6.2 Preliminary results

In this section, we introduce some basic definitions of fractional calculus which are used here after, see [73].

**Definition 6.2.1** For an integrable function  $f$ , the Riemann-Liouville integral of order  $\beta \in (0, 1)$  is defined by

$$J_t^\beta f(t) := \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} f(s) ds, \quad t > 0,$$

where  $\Gamma$  is the Euler Gamma function.

**Definition 6.2.2** For an absolutely continuous function  $f$ , the Caputo fractional derivative of order  $\beta \in (0, 1)$  is

$${}^c D_t^\beta f(t) := D_t^\beta (f(t) - f(0)), \quad t > 0, \tag{6.7}$$

where  $D_t^\beta$  is the Riemann-Liouville fractional derivative of order  $\beta$  given by

$$D_t^\beta f(t) := \frac{d}{dt} J_t^{1-\beta} f(t). \tag{6.8}$$

**Lemma 6.2.3** It holds

$$J_t^\beta {}^c D_t^\beta f(t) = f(t) - f(0), \quad t > 0, \tag{6.9}$$

and

$${}^c D_t^\beta J_t^\beta f(t) = f(t), \quad t > 0. \tag{6.10}$$

**Definition 6.2.4** We denote by  $A$  the realization of  $-\Delta$  with homogeneous Neumann boundary conditions in  $L^2(\Omega)$ .

Let  $0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$  be the eigenvalues of  $A$  and let  $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$  be the orthonormal eigenfunction system corresponding to  $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ ;  $A\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$ .

As it is known [80], the mild solution of the problem (6.1)-(6.2)-(6.3) can be expressed as follows.

**Definition 6.2.5** (*Mild solution*)

Let  $u_0, v_0 \in L^\infty(\Omega)$  and  $T > 0$ . We say that  $(u, v) \in C([0, T]; L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega))$  is a mild solution of the system (6.1)-(6.3) if it satisfies

$$u(t) = E_\beta(-t^\beta A)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(-(t-s)^\beta A) f(u(s)) v(s) ds, \quad (6.11)$$

$$v(t) = E_\beta(-dt^\beta A)v_0 - \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(-(t-s)^\beta A) f(u(s)) v(s) ds, \quad (6.12)$$

for all  $t \in [0, T]$ , where  $E_\beta(-t^\beta A)$  and  $E_{\beta,\beta}(-t^\beta A)$  are the linear operators defined in [80].

Now, we give some important properties of the families  $\{E_\beta(-t^\beta A)\}_{t>0}$  and  $\{E_{\beta,\beta}(-t^\beta A)\}_{t>0}$ .

**Lemma 6.2.6** For  $u \in L^\infty(\Omega)$ , we have the estimates

$$\|E_\beta(-t^\beta A)u\|_\infty \leq \|u\|_\infty, \quad t > 0, \quad (6.13)$$

$$\|E_{\beta,\beta}(-t^\beta A)u\|_\infty \leq \frac{1}{\beta\Gamma(\beta)} \|u\|_\infty, \quad t > 0. \quad (6.14)$$

Moreover, there exists  $\delta > 0$  such that

$$\|E_\beta(-t^\beta A)u\|_\infty \leq \|u\|_\infty E_\beta(-\delta t^\beta), \quad (6.15)$$

$$\|E_{\beta,\beta}(-t^\beta A)u\|_\infty \leq \|u\|_\infty E_{\beta,\beta}(-\delta t^\beta), \quad t > 0, \quad (6.16)$$

where  $E_\beta(z)$  is the Mittag-Leffler function [47].

The proofs of estimates (6.13)-(6.16) are based on the estimates of the semigroup  $\{T(t) := e^{-tA}\}_{\{t \geq 0\}}$  [31, 38] and the relationship between the semigroup and the solution operator given in [76, Lemma 9] by

$$E_\beta(-t^\beta A) = \int_0^\infty \phi_\beta(\theta) T(\theta t^\beta) d\theta, \quad t \geq 0, \quad (6.17)$$

and

$$E_{\beta,\beta}(-t^\beta A) = \int_0^\infty \beta \theta \phi_\beta(\theta) T(\theta t^\beta) d\theta, \quad t \geq 0, \quad (6.18)$$

where  $\phi_\beta(\theta)$  is the probability density function defined on  $(0, \infty)$  (see [53, 80]).

Now, we give a regularity result of type  $L^q$  for the fractional differential equation with Riemann-Liouville derivative of order  $\beta \in (0, 1)$ ,

$$D_t^\beta u(t) + Au(t) = \theta(t), \quad \text{for } t \in (0, T), \quad (6.19)$$

with the initial condition  $J_t^{1-\beta} u(0) = 0$  which is useful in the sequel.

We begin by fixing some notations. Recall that a Banach space  $X$  belongs

to the class  $\mathcal{HT}$ , if the Hilbert transform is bounded on  $L^2(\mathbb{R}; X)$ . We say that a sectorial operator  $A$  admits bounded imaginary powers and write  $A \in \mathcal{BIP}(X)$  if the imaginary powers  $A^{is}$  form a bounded  $C_0$ -group on  $X$ . The type  $\theta_A$  of this group is called the power angle of  $A$ . Then for any  $\varphi_A > \theta_A$  there exists a constant  $M = M(\varphi_A) \geq 1$  such that  $\|A\|_{\mathcal{B}(X)} \leq Me^{\varphi_A(s)}$ ,  $s \in \mathbb{R}$  (see [84, 8]).

**Lemma 6.2.7** ([8, Corollary 4.7]) *Let  $A$  be a positive operator in  $\mathcal{HT}$  space  $X$  satisfying  $A \in P_K(X) \cap \mathcal{BIP}(X; \varphi_A)$  with  $\varphi_A < \pi(1 - \frac{\beta}{2})$ . Then the problem (6.19), for  $\theta \in L^q((0, T); X)$ , has maximal  $L^q$  regularity on  $(0, T)$  in  $X$ . More precisely,*

$$\|u\|_{L^q((0, T); X)} + \|D_t^\beta u\|_{L^q((0, T); X)} + \|Au\|_{L^q((0, T); X)} \leq C\|\theta\|_{L^q((0, T); X)}.$$

### 6.3 Local existence

**Theorem 6.3.1** *Let  $u_0, v_0 \in C(\bar{\Omega})$ , then there exist a maximal time  $T_{max} > 0$  and a unique mild solution  $(u, v) \in C([0, T_{max}); C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega}))$  to the problem (6.1)-(6.2)-(6.3) with the alternative :*

- either  $T_{max} = +\infty$ ;
- or  $T_{max} < +\infty$ , and in this case  $\lim_{t \rightarrow T_{max}} \|u(t)\|_\infty + \|v(t)\|_\infty = +\infty$ .

**Proof.** The existence of a local solution is obtained by the Banach fixed point theorem (see Theorem A.2.1 ).

Even through this is well documented part, we present it for the sake of completeness. For arbitrary  $T > 0$ , we define the following Banach space

$$E := \{(u, v) \in C([0, T]; C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega})) ; \|(u, v)\| \leq R\},$$

where  $R := 2(\|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty)$  such that  $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$  and

$$\|(u, v)\| := \|u\| + \|v\| := \|u\|_{L^\infty([0, T]; L^\infty(\Omega))} + \|v\|_{L^\infty([0, T]; L^\infty(\Omega))}.$$

Next, for every  $(u, v) \in E$ , we define

$$\Psi(u, v) = (\Psi_1(u, v), \Psi_2(u, v)),$$

where for  $t \in [0, T]$ ,

$$\Psi_1(u, v) := E_\beta(-t^\beta A)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta, \beta}(-(t-s)^\beta A) f(u(s))v(s) ds,$$

and

$$\Psi_2(u, v) := E_\beta(-dt^\beta A)v_0 - \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta, \beta}(-d(t-s)^\beta A) f(u(s))v(s) ds.$$

We first prove that  $\Psi$  maps  $E$  onto  $E$  : Let  $(u, v) \in E$ , using (6.13) and (6.14), we have

$$\begin{aligned} \|\Psi_1(u, v)\|_\infty &\leq \|u_0\|_\infty + \frac{1}{\beta\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \|f(u(s))v(s)\|_\infty ds \\ &\leq \|u_0\|_\infty + \frac{T^\beta R}{\beta\Gamma(\beta+1)} (M_1 R^p + M_2). \end{aligned}$$

Similarly, we obtain

$$\|\Psi_2(u, v)\| \leq \|v_0\|_\infty + \frac{T^\beta R}{\beta\Gamma(\beta+1)} (M_1 R^p + M_2).$$

Whereupon

$$\|\|\Psi(u, v)\|\| \leq (\|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty) + 2 \frac{T^\beta R}{\beta\Gamma(\beta+1)} (M_1 R^p + M_2).$$

If we choose  $T$  such that  $T^\beta \leq \frac{\beta\Gamma(\beta+1)}{4(M_1 R^p + M_2)}$ , we conclude that  $\Psi(u, v) \in E$ .

Now, we show that  $\Psi$  is a contraction map : For  $(u, v), (\tilde{u}, \tilde{v}) \in E$ , we have

$$\|\Psi_1(u, v) - \Psi_1(\tilde{u}, \tilde{v})\| \leq \frac{T^\beta}{\beta} \|f(u)v - f(\tilde{u})\tilde{v}\|.$$

Using

$$|f(u)v - f(\tilde{u})\tilde{v}| \leq |v| |f(u) - f(\tilde{u})| + |f(\tilde{u})| |v - \tilde{v}|,$$

and the assumptions (6.4) and (6.5), we get

$$|f(u)v - f(\tilde{u})\tilde{v}| \leq L|v| |u - \tilde{u}| + (M_1 |\tilde{u}|^p + M_2) |v - \tilde{v}|; \quad (6.20)$$

hence,

$$\|\Psi_1(u, v) - \Psi_1(\tilde{u}, \tilde{v})\| \leq \frac{(LR + M_1 R^p + M_2)}{\beta\Gamma(\beta+1)} T^\beta \|\|(u, v) - (\tilde{u}, \tilde{v})\|\|.$$

Similarly, we obtain

$$\|\Psi_2(u, v) - \Psi_2(\tilde{u}, \tilde{v})\| \leq \frac{(LR + M_1 R^p + M_2)}{\beta\Gamma(\beta+1)} T^\beta \|\|(u, v) - (\tilde{u}, \tilde{v})\|\|$$

whereupon

$$\begin{aligned} \|\|\Psi(u, v) - \Psi(\tilde{u}, \tilde{v})\|\| &\leq \frac{2(LR + M_1 R^p + M_2)}{\beta\Gamma(\beta+1)} T^\beta \|\|(u, v) - (\tilde{u}, \tilde{v})\|\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|\|(u, v) - (\tilde{u}, \tilde{v})\|\|, \end{aligned}$$

for  $T^\beta \leq \frac{\beta\Gamma(\beta+1)}{4(LR + M_1 R^p + M_2)}$ .

Therefore, in view of the Banach fixed point theorem  $\Psi$  admits a fixed



point on  $E$ . Thus the system (6.1)-(6.2)-(6.3) has a mild solution.

Uniqueness : If  $(u, v)$  and  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  are two mild solutions in  $E$  for some  $T > 0$ , using (6.14) and (6.20), we obtain

$$\begin{aligned} \|(u, v) - (\tilde{u}, \tilde{v})\|_\infty &\leq \frac{1}{\beta\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \|f(u)v - f(\tilde{u})\tilde{v}\|_\infty ds \\ &\leq \frac{2(LR + M_1R^p + M_2)}{\beta\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \|(u, v) - (\tilde{u}, \tilde{v})\|_\infty ds; \end{aligned}$$

so, the uniqueness follows by Lemma A.1.4 (the Gronwall's inequality).

□

## 6.4 Global existence and asymptotic behavior

**Theorem 6.4.1** *Let  $u_0, v_0 \in L^\infty(\Omega)$  be such that  $u_0 \geq 0$  and  $v_0 \geq 0$ . Then the system (6.1)-(6.2)-(6.3) admits a unique global solution which satisfies*

$$u \geq 0, \quad v \geq 0, \quad (6.21)$$

$$\|v(\cdot, t)\|_\infty \leq \|v_0\|_\infty E_\beta(-\gamma t^\beta), \quad \text{for } \gamma > 0, \quad t > 0, \quad (6.22)$$

$$\left\| u(\cdot, t) - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega (u_0 + v_0) dx \right\|_\infty \leq C E_\beta(-\gamma t^\beta), \quad \text{for } t > 0, \quad (6.23)$$

where  $C$  is a positive constant.

**Proof.** *Step1.* (Positivity of the solution) We define  $v^+ = \max(0, v)$  and  $v^- = \max(0, -v)$ ;  $v = v^+ - v^-$ .

Multiplying the second equation of (6.1) by  $(-v^-)$  and integrating over  $\Omega$ , we obtain

$$\int_\Omega (v^-)^c D_t^\beta v^- dx = -d \int_\Omega (\nabla u^-)^2 dx - \int_\Omega f(u)(v^-)^2 dx.$$

As  $f(u) \geq 0$ , it follows that  ${}^c D_t^\beta \int_\Omega (v^-)^2 dx \leq 0$ , thanks to [4, Remark 1].

Operating with  $J_t^\beta$ , we get by using (6.9)

$$\int_\Omega (v^-)^2(t) dx \leq \int_\Omega (v^-)^2(0) dx = 0;$$

it follows then  $v^- = 0$ , hence  $v \geq 0$ .

Following the same argument, we show that  ${}^c D_t^\beta \int_\Omega (u^-)^2 dx \leq 0$  thanks to the positivity of  $v$  and  $f(u)$ . Then  $u^- = 0$  and consequently  $u \geq 0$ .

*Step2.* Our goal is to prove the global existence; we proceed by contradiction. Assume that  $T_{max} < +\infty$ .

Combining the fact that  $f(u)v \geq 0$  and the estimate (6.13), we get

$$\|v(\cdot, t)\|_\infty \leq \|E_\beta(-dt^\beta A)v_0\|_\infty \leq \|v_0\|_\infty; \quad (6.24)$$

hence,  $v$  is uniformly bounded.

Now, we have to get the  $L^\infty$  bounds of  $u$ . Adding the two equations of (6.1) and setting  $w = u + dv$ , we obtain

$${}^c D_t^\beta w - \Delta w = (d-1) {}^c D_t^\beta v. \quad (6.25)$$

Applying  $J_t^\beta$  to both sides of (6.25), we get

$$J_t^\beta {}^c D_t^\beta w - J_t^\beta \Delta w = (d-1) J_t^\beta {}^c D_t^\beta v. \quad (6.26)$$

In view of (6.9), (6.10) and the fact that  $J_t^\beta \Delta = \Delta J_t^\beta$ , it follows that

$${}^c D_t^\beta J_t^\beta w - \Delta J_t^\beta w = (d-1)(v - v_0) + w_0. \quad (6.27)$$

Let  $W(x, t) = J_t^\beta w$  be the solution of the following equation

$${}^c D_t^\beta W - \Delta W = (d-1)v + v_0 + u_0. \quad (6.28)$$

From the local existence result,  $w$  is continuous on  $[0, T]$  for  $T < T_{max}$ , hence it is bounded and there exists  $t^* \in [0, T]$  such that  $w(t) \leq w(t^*)$ .

Then  $W(0) := J_t^\beta w(t)|_{t=0} = 0$ . Therefore, the equation (6.28) is supplemented by the initial condition  $W(0) = 0$ .

Now, let us consider two bounded linear operators  $\mathcal{M}$  and  $\mathcal{P}$  defined by

$$\mathcal{M}w := \langle w \rangle, \quad \mathcal{P}w := w - \langle w \rangle \quad \text{where } \langle w \rangle := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} w(x, t) dx.$$

Applying  $\mathcal{P}$  to (6.28), it follows that  $\mathcal{P}W$  satisfies the following problem

$$\begin{cases} {}^c D_t^\beta \mathcal{P}W - \Delta \mathcal{P}W &= (d-1)\mathcal{P}v + \mathcal{P}(v_0 + u_0), \\ \mathcal{P}W(0) &= 0. \end{cases} \quad (6.29)$$

Using (6.16) and the fact that  $\mathcal{P}v$  and  $\mathcal{P}(u_0 + v_0)$  are bounded, we get

$$\|\mathcal{P}W\|_\infty \leq \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta, \beta}(-\delta(t-s)^\beta) (\|\mathcal{P}v(s)\|_\infty + \|\mathcal{P}(v_0 + u_0)\|_\infty) ds \leq C, \quad (6.30)$$

thanks to the estimate  $\int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta, \beta}(-\delta(t-s)^\beta) ds < +\infty$  (see [68]).

On the other hand, in view of  ${}^c D_t^\beta \mathcal{P}W = D_t^\beta \mathcal{P}W$ , the function  $\mathcal{P}W$  satisfies the equation

$$D_t^\beta \mathcal{P}W - \Delta \mathcal{P}W = \theta, \quad (6.31)$$

with the initial condition  $J_t^{1-\beta} W(0) = J_t^1 w(t)|_{t=0} = 0$  and  $\theta := (d-1)\mathcal{P}v + \mathcal{P}(v_0 + u_0)$ .

As  $v$ ,  $u_0$  and  $v_0$  are bounded, we can assert that  $\theta \in L^q((0, T); \mathcal{C}(\bar{\Omega}))$  for  $q > 1$ . In view of Lemma 6.2.7, it follows that the problem (6.31) has

maximal  $L^q$  regularity on  $(0, T)$ . More precisely, we have, for  $q > 1$  and  $C_q$  a positive constant,

$$\|D_t^\beta \mathcal{P}W\|_{L^q((0,T); \mathcal{C}(\bar{\Omega}))} \leq C_q. \quad (6.32)$$

Therefore, as  $D_t^\beta \mathcal{P}W = \mathcal{P}w = \mathcal{P}(u + dv)$ , we obtain

$$\|\mathcal{P}u\|_{L^q((0,T); \mathcal{C}(\bar{\Omega}))} = \|\mathcal{P}(D_t^\beta W - dv)\|_{L^q((0,T); \mathcal{C}(\bar{\Omega}))} \leq C_q. \quad (6.33)$$

To estimate  $\mathcal{M}u$ , we add the two equations of (6.1) and integrate over  $\Omega$ ,

$${}^c D_t^\beta \int_{\Omega} (u + v) dx = 0.$$

Operating with  $J_t^\beta$ , it yields  $\int_{\Omega} (u + v) dx = \int_{\Omega} (u_0 + v_0) dx$ ; whereupon

$$\mathcal{M}u = \mathcal{M}(v_0 + u_0) - \mathcal{M}v. \quad (6.34)$$

By writing  $u = \mathcal{M}u + \mathcal{P}u$ , we have from (6.5)

$$f(u) = f(\mathcal{M}u + \mathcal{P}u) \leq M_1 |\mathcal{M}u + \mathcal{P}u|^p + M_2;$$

hence,

$$f(u) \leq M_1 (|\mathcal{M}u|^p + |\mathcal{P}u|^p) + M_2.$$

Gathering (6.33) and (6.34), we can assert that

$$\begin{aligned} \|f(u)\|_{L^{\frac{q}{p}}((0,T); \mathcal{C}(\bar{\Omega}))} &\leq M_1 (\|\mathcal{M}u\|_{\infty}^q T^{\frac{p}{q}} + C_q) + M_2 T^{\frac{p}{q}} \\ &\leq M(1 + T^{\frac{p}{q}}). \end{aligned} \quad (6.35)$$

In the light of (6.13) and (6.14), we get

$$\|u\|_{\infty} \leq \|u_0\|_{\infty} + \frac{1}{\beta \Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \|f(u)v(s)\|_{\infty} ds.$$

Consequently, as  $v$  is bounded, we obtain

$$\|u\|_{\infty} \leq \|u_0\|_{\infty} + \frac{C}{\beta \Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \|f(u)\|_{\infty} ds. \quad (6.36)$$

Using the Hölder inequality and (6.35), it holds, for  $\beta > \frac{p}{q}$ ,

$$\begin{aligned} J(t) &:= \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \|f(u)\|_{\infty} ds \\ &\leq \left( \int_0^t (t-s)^{\frac{(\beta-1)q}{q-p}} ds \right)^{\frac{q-p}{q}} \|f(u)\|_{L^{\frac{q}{p}}((0,t); \mathcal{C}(\bar{\Omega}))} \\ &\leq Mt^{\beta} (1 + t^{-\frac{p}{q}}); \end{aligned}$$

hence, for any  $t > 0$ , we have

$$\|u\|_\infty \leq M(1 + t^\beta). \quad (6.37)$$

Combining the local existence result, (6.24) and (6.37), the system (6.1)-(6.2)-(6.3) admits a unique global solution.

*Step3.* Large time estimate of  $v$ .

Using the positivity of  $f(u)$  and  $v$ , we get

$${}^c D_t^\beta u(x, t) - \Delta u(x, t) \geq 0. \quad (6.38)$$

Let  $\bar{u}$  be the solution of the problem

$$\begin{cases} {}^c D_t^\beta \bar{u}(x, t) - \Delta \bar{u}(x, t) = 0, \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}(x, t) = 0, \\ \bar{u}(x, 0) = u_0. \end{cases} \quad (6.39)$$

By the comparison theorem, we have  $u(x, t) \geq \bar{u}(x, t)$ , for all  $t > 0$ . Therefore, from Theorem 2.1 [72], it follows that

$$u(x, t) \geq \sum_{n=0}^{+\infty} (u_0, \varphi_n) E_\beta(-\lambda_n t^\beta) \varphi_n(x), \quad (6.40)$$

where  $(\cdot, \cdot)$  is the usual scalar product in  $L^2(\Omega)$ .

As  $\lim_{t \rightarrow +\infty} E_\beta(-\lambda_n t^\beta) = 0$ , for  $\lambda_n > 0$  [47], we obtain

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (u_0, \varphi_n) E_\beta(-\lambda_n t^\beta) \varphi_n(x) = (u_0, \varphi_0) \varphi_0 = \int_\Omega u_0 dx. \quad (6.41)$$

In view of (6.38) and (6.40), it holds that for  $t \gg T > 0$ ,

$$u(x, t) \geq \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u_0 dx. \quad (6.42)$$

So, there exists a positive constant  $\gamma$  such that

$$f(u) \geq \gamma, \quad \text{for all } t \gg T. \quad (6.43)$$

Consequently, we have

$${}^c D_t^\beta v(x, t) - d\Delta v(x, t) \leq -\gamma v(x, t). \quad (6.44)$$

Moreover, using the fact that  $v$  is positive and bounded, it follows that  $0 \leq v(x, T) \leq \|v_0\|_\infty$ .

On the other hand, the function  $\bar{v}(t) := \|v_0\|_\infty E_\beta(-\gamma t^\beta)$  satisfies

$$\begin{cases} {}^c D_t^\beta \bar{v}(t) = -\gamma \bar{v}(t), \\ \bar{v}(0) = \|v_0\|_\infty. \end{cases}$$

By comparison, it comes that

$$v(x, t) \leq \|v_0\|_\infty E_\beta(-\gamma t^\beta), \text{ for all } t \gg T.$$

To prove (6.23), we begin by applying  $\mathcal{P}$  to the first equation of (6.1); we obtain

$$({}^c D_t^\beta - \Delta)\mathcal{P}u = \mathcal{P}(f(u)v) \leq CE_\beta(-\gamma t^\beta), \quad (6.45)$$

where  $C$  is a positive constant. So, it follows that

$$\|\mathcal{P}u\|_\infty \leq CE_\beta(-\gamma t^\beta), \quad t \gg T. \quad (6.46)$$

From (6.34) and the definition of  $\mathcal{P}u$ , we can write

$$\mathcal{P}u = u - \langle u_0 + v_0 \rangle + \langle v \rangle. \quad (6.47)$$

Hence,

$$\|u - \langle u_0 + v_0 \rangle\|_\infty \leq \|\mathcal{P}u - \langle v \rangle\|_\infty \leq \|\mathcal{P}u\|_\infty. \quad (6.48)$$

Combining (6.46) and (6.48), the estimate (6.23) follows. □

# CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans cette thèse, nous avons étudié une équation non-linéaire avec une dérivée fractionnaire, et trois systèmes de réaction-diffusions dont un comporte des dérivées fractionnaires en espace et les deux autres des dérivées fractionnaires en temps.

Dans le troisième chapitre, nous avons étudié une équation fractionnaire en temps avec une non-linéarité de type Fisher-Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov. Nous avons répondu à des questions concernant l'existence ou la non-existence globale de solutions positives, laissées ouvertes dans l'article review de Nakagawa, Sakamoto et Yamamoto [72]. Sous une certaine condition sur la donnée initiale, nous avons établi l'existence de la solution globale. De plus, nous avons étudié leur comportement asymptotique. Dans le cas complémentaire, nous avons montré que les solutions explosent en un temps fini, et avons donné une estimation bilatérale du temps d'explosion.

Dans le chapitre quatre, nous avons considéré un système de type SIR (susceptibles, infectés, retirés ou mis en quarantaine) avec une diffusion anormale décrite par une puissance fractionnaire de Laplacien qui rend compte d'une situation sous-diffusive. Outre l'existence globale de solutions bornées, nous avons montré la convergence de la solution vers  $(u_\infty, 0)$  ( $u_\infty$  : l'état final de la population des individus susceptibles et  $0$  : l'état final des individus infectés). L'exposant du Laplacien fractionnaire influence sur le comportement asymptotique en temps de  $u$  vers  $u_\infty$ .

Le chapitre cinq a été consacré à l'étude du Brusselator fractionnaire en temps qui décrit une réaction chimique auto-catalytique dans un milieu fractal. En utilisant un argument de feedback dû à F. Rothe, nous avons montré l'existence globale en temps, puis nous avons analysé son comportement à l'infini qui est influencé par l'exposant de la dérivée fractionnaire temporelle.

Dans le dernier chapitre, nous avons analysé un système de réaction-diffusion fractionnaire en temps qui est régi par une loi de balance. Le système a été validé par un théorème d'existence de solution globale unique via des estimations uniformes sur une des composantes et l'utilisation d'un résultat de régularité maximale pour les équations fractionnaires pour borner la deuxième composante.

## Perspectives

L'extension logique de notre travail est l'étude des systèmes de réaction-diffusion fractionnaires en temps et en espace. Dans ce contexte, nous pouvons proposer comme perspectives l'étude des systèmes suivants :

1. le Brusselator fractionnaire en temps avec un Laplacien fractionnaire.
2. un système de réaction-diffusion fractionnaire en temps avec un Laplacien fractionnaire et une non-linéarité qui suit la loi de balance.

Nous prévoyons que les solutions garderont les mêmes comportements asymptotiques mais avec l'apparition de la puissance fractionnaire du Laplacien dans les estimations.

Notre travail ouvre la voie à l'étude d'autres systèmes fractionnaires avec diverses non-linéarités.

Il serait intéressant de mettre les résultats obtenus dans un cadre pratique.

Nous introduisons dans cette annexe quelques lemmes et théorèmes qui sont utilisés dans ce manuscrit.

## A.1 Lemmes

**Lemme A.1.1** (voir [42, 15])

Soient  $a, b, K, \psi$  des fonctions continues sur l'intervalle  $I = (0, T)$  ( $0 < T \leq \infty$ ), soit  $\omega : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, positive et croissante tel que  $\omega(0) = 0$  et  $\omega(u) > 0$  pour  $u > 0$  et  $A(t) = \max_{0 \leq s \leq t} a(s)$  et  $B(t) = \max_{0 \leq s \leq t} b(s)$ . On suppose que

$$\psi(t) \leq a(t) + b(t) \int_0^t K(s) \omega(\psi(s)) ds, \quad t \in I.$$

Alors

$$\psi(t) \leq H^{-1} \left[ H(A(t)) + B(t) \int_0^t K(s) ds \right], \quad t \in (0, T_1),$$

où  $H(v) = \int_{v_0}^v \frac{d\tau}{\omega(\tau)}$  ( $v \geq v_0 > 0$ ),  $H^{-1}$  est la fonction réciproque de  $H$  et  $T_1 > 0$  est tel que  $H(A(t)) + B(t) \int_0^t K(s) ds \in D(H^{-1})$  pour tout  $t \in (0, T_1)$ .

Pour la démonstration on cite [15].

Maintenant, nous présentons le résultat suivant concernant le semi-groupe des opérateurs linéaires bornés  $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}$  dans  $X$ .

**Lemme A.1.2** [34, Lemma 2.1]

Pour tout  $\gamma \geq 0$ , il existe une constante positive  $C_1(\gamma)$  tel que

$$\|A^\gamma e^{-tA} v\|_\infty \leq C_1(\gamma) t^{-\gamma} e^{-\lambda t} \|v\|_\infty, \quad v \in X, \quad t > 0,$$

où  $\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) > \lambda > 0\}$ .

Pour tout  $0 \leq \gamma \leq 1$ , il existe une constante positive  $C_2(\gamma)$  tel que

$$\|(e^{-tA} - I)v\|_\infty \leq C_2(\gamma) t^\gamma \|A^\gamma v\|_\infty, \quad t > 0,$$

pour  $v \in D(A^\gamma)$ .



On peut consulter [31, Theorem 1.4.3] ou [63, Theorem 2.6.13] pour la démonstration.

Le lemme suivant a joué un rôle important dans les preuves des théorèmes 4.4.1 et 4.4.2.

**Lemme A.1.3** (voir [35])

Pour  $\theta \in [0, 1]$  et  $\rho \in \mathbb{R}$ , il existe une constante  $C(\theta, \rho)$  tel que, pour tout  $t > 0$ ,

$$\int_0^t m(s)^{-\theta} e^{\rho s} ds \leq \begin{cases} C(\theta, \rho) e^{\rho t}, & \text{si } \rho > 0, \\ C(\theta, \rho)(t + 1), & \text{si } \rho = 0, \\ C(\theta, \rho), & \text{si } \rho < 0, \end{cases}$$

où  $m(t) = \min\{t, 1\}$ .

**Lemme A.1.4** (Lemme de Gronwall, voir [18, Lemma 4.2.1])

Pour  $T > 0$  et  $k \in L^1(0, T)$  tel que  $k \geq 0$  et  $C_1, C_2 \geq 0$ . Soit  $\varphi \in L^1(0, T)$  tel que  $k\varphi \in L^1(0, T)$  et

$$\varphi(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t k(s) \varphi(s) ds, \quad t \in (0, T)$$

alors

$$\varphi(t) \leq C_1 \exp\left(C_2 \int_0^t k(s) ds\right), \quad t \in (0, T).$$

## A.2 Théorèmes

Dans cette partie, nous rappelons quelques résultats utilisés pour démontrer l'existence locale des solutions des systèmes étudiés.

**Théorème A.2.1** (Théorème du point fixe de Banach [39])

Soient  $(E, d)$  un espace métrique complet non vide,  $0 \leq \omega < 1$  et  $T : E \rightarrow E$  une application tel que pour tout  $u, v \in E$  on a

$$d(Tu, Tv) \leq \omega d(u, v). \quad (\text{A.1})$$

Alors l'opérateur  $T$  admet un unique point fixe  $u^*$  dans  $E$ .

De plus, si  $T^k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) est la suite des opérateurs définie par

$$T^1 = T \text{ et } T^k = TT^{k-1}, \quad k > 1,$$

alors pour tout  $u_0 \in E$  la suite  $\{T^k u_0\}_{k=1}^{\infty}$  converge vers ce point fixe  $u^*$ .

On note que l'application  $T : E \rightarrow E$  vérifiant (A.1) est dite contractante.

Maintenant, nous présentons une généralisation du théorème du point fixe de Banach donnée par Weissinger.

**Théorème A.2.2** ([39, Theorem 1.10])

Soient  $(E, d)$  un espace métrique complet non vide,  $\omega_k \geq 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$

tel que la série  $\sum_{k=0}^{+\infty} \omega_k$  converge et  $T : E \rightarrow E$  une application tel que pour tout  $u, v \in E$  on a

$$d(T^k u, T^k v) \leq \omega_k d(u, v), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (\text{A.2})$$

Alors  $T$  admet un unique point fixe  $u^*$  dans  $E$ .

De plus, pour tout  $u_0 \in E$  la suite  $\{T^k u_0\}_{k=1}^{\infty}$  converge vers ce point fixe  $u^*$ .

### A.3 Démonstration de la remarque 4.2.4

On veut montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $C(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+$  tel que

$$\|e^{-tB_p} v\|_{\infty} \leq C(\varepsilon) t^{\frac{-N}{(N+\varepsilon)\beta}} \|v\|_{\frac{N}{2}+\varepsilon}. \quad (\text{A.3})$$

En utilisant l'inégalité de Nirenberg-Gagliardo [31], il existe une constante positive  $C(\theta)$  tel que

$$\|e^{-tB_p} v\|_{\infty} \leq C(\theta) \|e^{-tB_p} v\|_{2,p}^{\theta} \|e^{-tB_p} v\|_r^{1-\theta} \quad (\text{A.4})$$

où  $\|\cdot\|_{2,p}$  est la norme sur  $W^{2,p}(\Omega)$ .

Grâce à l'injection de Sobolev ( $D(-\Delta) \subset W^{2,p}(\Omega)$ ) et [3, Lemma 1] on trouve

$$\|e^{-tB_p} v\|_{2,p} \leq C t^{-\frac{1}{\beta}} \|v\|_p \quad \text{pour tout } t > 0. \quad (\text{A.5})$$

En combinant (A.4), (A.6) et l'estimation

$$\|e^{-tB_p} v\|_r \leq C \|v\|_r, \quad t > 0, \quad (\text{A.6})$$

on obtient

$$\|e^{-tB_p} v\|_{\infty} \leq C(\theta) t^{-\frac{\theta}{\beta}} \|v\|_p^{\theta} \|v\|_r^{1-\theta}. \quad (\text{A.7})$$

Il en résulte (A.3) en choisissant  $p = r = \frac{N}{2} + \varepsilon$  et  $\theta = \frac{N}{N+\varepsilon}$ .



# BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. Abdelmalek and S. Kouachi. Proof of existence of global solution for m-component reaction diffusion systems with mixed boundary conditions via lyapunov functional method. *J. Phys. A.*, 40(41) :12335–12350, 2007. (Cité pages 12 et 77.)
- [2] S. Abea and S. Turner. Anomalous diffusion in view of enstein’s 1905 theory of brownian motion. *Phys. A : Statistical Machanics and its Apllications*, 356 :403–407, 2005. (Cité page 25.)
- [3] B. Ahmad, M. S. Alhothuali, H. H. Alsulami, M. Kirane, and S. Timoshin. Proof of existence of global solution for m-component reaction diffusion systems with mixed boundary conditions via lyapunov functional method. *Abstr. Appl. Anal.*, Art. ID 804784 :6 pages, 2014. (Cité pages 12, 77 et 91.)
- [4] A. Alsaedi, B. Ahmad, and M. Kirane. Maximum principle for certain generalized time and space-fractional diffusion equations. *Quart. Appl. Math.*, 73 :163–175, 2015. (Cité pages 62 et 82.)
- [5] R.L. Bagley. Application of generalized derivatives to viscoelasticity. *PhD thesis, Air Force Institute of Technologie*, 1979. (Cité page 2.)
- [6] R.L. Bagley and P.J. Torvik. On the appearance of the fractional derivatives in the behavior of real materials. *J. Appl. Mech.*, 51(2) :294–298, 1984. (Cité page 3.)
- [7] R.L. Bagley and P.J. Torvik. On fractional calculus models of viscoelastic behavior. *J. Rheol.*, 23 :918–925, 1986. (Cité page 2.)
- [8] E. G. Bajlekova. Fractional evolution equations in banach spaces. *PhD. thesis, Eindhoven university of technology*, 2001. (Cité pages 2, 12, 75 et 80.)
- [9] D. Baleanu, Z.B. Guvençu, and J.A.T. Machado. New trends in nanotechnology and fractional calculus applications. *Springer Verlag*, 2009. (Cité pages 2 et 5.)
- [10] J. Battaglia, L. Le Lay, J.C. Batsale, A. Oustaloup, and O. Cois. Heat flux stimation through inverted non integer identification models. *Int. J. Therm. Sci.*, 39 :374–389, 2000. (Cité page 2.)

- [11] P. Bénilan and H. Labani. Existence of attractors for the brusselator, "recent advances in nonlinear elliptic and parabolic problems", (M. Bénilan, M. Chipot, L. C. Evans and M. Pierre, eds.). *Pitman Research Notes in Mathematics*, Series No. 208, Longman, Harlow, 1989. (Cité pages 2, 9 et 61.)
- [12] J. Berton. Lévy processus. *Cambridge University Press*, 1996. (Cité page 25.)
- [13] P. Biler, G. Karch, and W. A. Woyczyński. Critical nonlinearity exponent and self-similar asymptotics for lévy conservation laws. *Ann. I. H. Poincaré-Analyse non linéaire*, 18 :613–637, 2001. (Cité pages 25 et 62.)
- [14] M. Bromly and C. Hinz. On the appearance of the fractional derivatives in the behavior of real materials. *Water Resour. Res.*, 40(77), 2004. (Cité page 3.)
- [15] G. Bultler and T. Rogers. A generalization of lemma of bihari and applications to pointwise estimates for integral equations. *Journal of mathematical analysis and applications*, 33 :77–81, 1971. (Cité page 89.)
- [16] M. Caputo. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent, part ii. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 13 :529–539, 1967. (Cité page 24.)
- [17] M. Caputo and F. Mainardi. Theory and applications of fractional differential equations. *Riv. Nuovo Cimento (Ser II)*, 1 :161–198, 1971. (Cité page 24.)
- [18] T. Cazenave and A. Haraux. Critical nonlinearity exponent and self-similar asymptotics for lévy conservation laws. *Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires*, Ellipses, Paris, 1990. (Cité page 90.)
- [19] S. Chinviriyasit and W. Chinviriyasit. Numerical modelling of an sir epidemic model with diffusion. *Appl. Math. comput.*, 216 :395–409, 2010. (Cité page 47.)
- [20] A. Córdoba and D. Córdoba. A maximum principle applied to quasi-geostrophic equations. *Comm. Math. Phys.*, 249(3) :511–528, 2004. (Cité page 62.)
- [21] R. Darling and J. Newmann. On the short behaviour of porous interaction electrodes. *J. Electrochem. Soc.*, 144 :3057–3063, 1997. (Cité page 2.)
- [22] K. Diethelm. Introduction to asymptotic and special functions. *Lecture Notes in Math.*, Springer-Verlag, Berlin, 2004. (Cité pages 19 et 22.)
- [23] J. Droniou and C. Imbert. Fractal first order partial differential equations. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 182 :299–331, 2006. (Cité page 25.)

- [24] S.D. Eidelman and A.N. Kochubei. Cauchy problem for fractional diffusion equations. *J. Differ. Equations*, 199 :211–255, 2004. (Cité page 25.)
- [25] W.E. Fitzgibbon and J.J. Morgan. A diffusive epidemic model on a bounded domain of arbitrary dimension. *Differential Integral Equations*, 1 :125–132, 1988. (Cité pages 7 et 47.)
- [26] J.P. Gaudet, H. Jégat, G. Vachaud, and P.J. Wierenga. Solute transfer, with exchange between mobile and stagnant water, through unsaturated sand. *Soil Science society of American Journal*, 41(4) :665–671, 1977. (Cité page 3.)
- [27] R. Gorenflo and F. Mainardi. Fractional calculus, integral and differential equations of fractional order, in : A. Carpinteri, F. Mainardi (eds), fractal and fractional calculus in continuum mechanics. *CISM Courses and Lectures*, 378, Springer :223–276, 1997. (Cité page 18.)
- [28] C. Grasser and V. Sitta. Water and solute transport in homogeneous and stratified media. *Swiss Fed. Inst. of Technol. (ETH), Zurich*, 1993. (Cité page 3.)
- [29] A. Haraux and M. Kirane. Estimations  $c^1$  pour des problèmes paraboliques semi-linéaires. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*, 5 :265–280, 1983. (Cité pages 7, 8, 47, 49 et 53.)
- [30] B. I. Henry, T. A. M. Langlands, and S. L. Wearne. Turing pattern formation in fractional activator-inhibitor systems. *Phys. Rev. E*(3), 72(2) :14 pages, 2005. (Cité pages 12 et 78.)
- [31] D. Henry. Geometric theory of semilinear parabolic equations,. *Lecture Notes in Math.*, 840 :Springer Verlag, Berlin, 1981. (Cité pages 26, 30, 49, 52, 54, 62, 79, 90 et 91.)
- [32] R. Hilfer. Applications of fractional calculus in physics. *World scientific*, Singapore :14 pages, 2000. (Cité pages 12 et 78.)
- [33] S. L. Hollis, R. H. Martin, and M. Pierre. Global existence and boundedness in reaction diffusion systems. *SIAM J. Math. Anal.*, 18 :744–761, 1987. (Cité pages 9, 12, 61 et 77.)
- [34] H. Hoshino and Y. Yamada. Solvability and smoothing effect for semilinear parabolic equations. *Funkcial. Ekvac.*, 34 :475–494, 1991. (Cité pages 53 et 89.)
- [35] H. Hoshino and Y. Yamada. Asymptotic behavior of global solutions for some reaction-diffusion systems. *Nonlinear Anal.*, 23 :639–650, 1994. (Cité pages 49 et 90.)

- [36] M. Ilic, F. Liu, I. Turner, and V. Anh. Numerical approximation of a fractional-in-space diffusion equation (ii)- with nonhomogeneous boundary conditions. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 9 :333–349, 2006. (Cité page 47.)
- [37] J. I. Kanel and M. Kirane. Global solutions of reaction-diffusion systems with a balance law and nonlinearities of exponential growth. *J. Differential Equations*, 165(1) :24–41, 2000. (Cité pages 12 et 77.)
- [38] G. Karch. Nonlinear evolution equations with anomalous diffusion. qualitative properties of solutions to partial differential equations. *Jindřich Nečas Cent. Math. Model. Lect. Notes*, 5 ,Matfyzpress, Prague :25–68, 2009. (Cité pages 25, 26, 47, 49, 54 et 79.)
- [39] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo. Theory and applications of fractional differential equations. *Elsevier*, 2006. (Cité pages 5, 17, 24, 35, 37, 39 et 90.)
- [40] K. I. Kim, Z. Lin, and Q. Zhang. An SIR epidemic model with free boundary. *Nonlinear Anal. Real world Appl.*, 14 :1992–2001, 2013. (Cité pages 7 et 47.)
- [41] M. Kirane. Unbounded solutions for the brusselator. *Canad. Appl. Math. Quart.*, 3 :744–761, 1995. (Cité pages 9 et 61.)
- [42] M. Kirane and N. e. Tatar. Convergence rates for a reaction-diffusion system. *J. Math. Anal. Appl.*, 20 :347–357, 2001. (Cité pages 36 et 89.)
- [43] M. Kirane, Y. Laskri, and N e Tatar. Critical exponents of Fujita type for certain evolution equations and systems with spatio-temporal fractional derivatives. *J. Math. Anal. Appl.*, 312 :488–501, 2005. (Cité page 5.)
- [44] M. Kirane and S. A. Malik. The profile of blowing up solutions to a nonlinear system of fractional differential equations. *Nonlinear Anal-Theor*, 73 :3723–3736, 2010. (Cité pages 5 et 41.)
- [45] C. M. Kirk, W. E. Olmstead, and C. A. Roberts. A system of nonlinear volterra equations with blow-up solutions. *J. Integral Equations Appl.*, pages 347–357, 2012. (Cité pages 6 et 40.)
- [46] J. Klafter, M. F. Schlesinger, and G. Zumofen. Beyond brownian motion. *Physics Today*, 49(2) :33–39, 1996. (Cité pages 12 et 78.)
- [47] A. M. Krägeloh. Two families of functions related to the fractional powers of generators of strongly continuous contraction semi-groups. *J. Math. Anal. Appl.*, 283 :459–467, 2003. (Cité pages 18, 38, 79 et 85.)
- [48] V. Lakshmikantham, S. Leela, and J. Vasundhara Devi. Theory of fractional dynamic systems. *Cambridge Scientific Pubshers*, 2009. (Cité pages 5, 38, 39 et 40.)

- [49] V.A. Liskevich and Yu.A. Semenov. Some inequalities for submarkovian generators and their applications to the perturbation theory. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 119 :1171–1177, 1993. (Cité pages 26 et 48.)
- [50] W. Liu, H.W. Hethcote, and S.A. Levin. Dynamical behavior of epidemiological models with nonlinear incidence rates. *J. Math. Biol.*, 25 :359–380, 1987. (Cité pages 7 et 47.)
- [51] J.T. Machado, V. Kiryakova, and F. Mainardi. Recent history of fractional calculus. *Commun Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 16 :1140–1153, 2011. (Cité page 2.)
- [52] F. Mainardi. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. *Imperial College Press*, London, 2010. (Cité pages 2, 17, 29 et 30.)
- [53] F. Mainardi, P. Paradisi, and R. Gorenflo. Probability distributions generated by fractional diffusion equations. *Fracalmo pre-print*, 2004. (Cité pages 29, 63 et 79.)
- [54] F. Mainardi, M. Roberto, R. Gorenflo, and E. Scalas. Fractional calculus and continuous-time finance ii : The waiting time distribution. *Physica A*, 287 :468–481, 2000. (Cité pages 2 et 5.)
- [55] B. Maryshev, M. Jelson, D. Lyubimov, T. Lyuabimov, and M.C. Néel. Non fickian flux for advection-dispersion with immobile periods. *J. Phys. A : Math. Theor.*, 42 :115001, 2009. (Cité page 4.)
- [56] K. Masuda. On the global existence and asymptotic behavior of solutions of reaction-diffusion equations. *Hokkaido Math. J.*, 12 :360–370, 1983. (Cité pages 12 et 77.)
- [57] R. Metzler and J. Klafter. The random walk’s guide to anomalous diffusion : a fractional dynamics approach. *Physics Reports*, 339 :1–77, 2000. (Cité page 3.)
- [58] R. Metzler and J. Klafter. The restaurant at the end of the random walk : Recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics. *J. Phys.*, A37 :R161–R208, 2004. (Cité pages 3 et 47.)
- [59] T.M. Michelitsch, G.A. Maugin, A.F. Nowakowski, F.C.G.A. Nicol-leau, and M. Rahman. The fractional laplacian as a limiting case of a self-similar spring model and applications to n-dimensional anomalous diffusion. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 16 :827–859, 2013. (Cité page 47.)
- [60] K. S. Miller and B. Ross. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. *Wiley*, Wiley, 1993. (Cité page 18.)



- [61] J. Nakagawa, K. Sakamoto, and M. Yamamoto. Overview to mathematical analysis for fractional diffusion equations - new mathematical aspects motivated by industrial collaboration. *J. Math-for- Ind.*, 2 :99–108, 2010. (Cité pages 1 et 35.)
- [62] K.B. Oldham and J. Spanier. The fractional calculus. *Academic Press*, New York, 1974. (Cité page 17.)
- [63] A. Pazy. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations,. *Appl. Math. Sci.*, 44 :Springer Verlag, New York, 1983. (Cité page 90.)
- [64] J-G. Peng and K-X. Peng. A note on property of the mittag-leffler function. *J. Math. Anal. Appl.*, 370 :635–638, 2010. (Cité page 31.)
- [65] J-G. Peng and K-X. Peng. A novel characteristic of solution operator for the fractional abstract cauchy problem. *J. Math. Anal. Appl.*, 385 :786–796, 2012. (Cité page 31.)
- [66] I. Podlubny. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. *in Mathematics in Science and Engineering*, 198, Academic Press, San Diego, 1999. (Cité pages 17, 18, 19, 20 et 24.)
- [67] S. Pooseh, H.S. Rodrigues, and D.F.M. Torres. Fractional derivatives in Dengue epidemics. *AIP conf. Proc.*, 1389 :739–742. (Cité page 2.)
- [68] T. R. Prabhakar. A singular integral equation with a generalized mittag-leffler function in the kernel. *Yokohama Math. J.*, 19 :7–15, 1971. (Cité page 83.)
- [69] S. H. Rakotonasy. Modèle fractionnaire pour la sous-diffusion : version stochastique et edp. *PhD thesis, Université d'avignon*, France, 2012. (Cité page 4.)
- [70] B. Ross. Fractional calculus and its applications. *Lecture Notes in Mathematics*, 457, Springer-Verlag, New York, 1975. (Cité page 17.)
- [71] F. Rothe. Global solutions of reaction systems. *Lecture Notes in Math.* 1072, Springer, Berlin, 1984. (Cité pages 2, 8, 9, 61 et 72.)
- [72] K. Sakamoto and M. Yamamoto. Initial values/boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 382 :426–447, 2011. (Cité pages 18, 63, 85 et 87.)
- [73] S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev. Fractional integrals and derivatives, theory and applications. *Gordon and Breach Science Publishers*, Springer, Berlin, 1987. (Cité pages 22, 61 et 78.)
- [74] R. Schumer, D.A. Benson, and M.M. Meerschaert. Fractal mobile/immobile solute transport. *Water Resour. Res.*, 39(10) :1296, 2003. (Cité page 3.)

- [75] C.R. Serment. Synthèse d'un isolateur d'ordre entier fondé sur une architecture arborescente d'éléments viscoélectriques quasi-identiques. *PhD thesis, Université Bordeaux 1, France, 2001.* (Cité page 2.)
- [76] X-B. Shu and F. Xu. The existence of solutions for impulsive fractional partial neutral differential equations. *Journal of Mathematics*, 2013 :Article ID147193, 9 pages, 2013. (Cité pages 30, 63 et 79.)
- [77] H. Shuxiang, X. Shiming, and X. Chunhong. Theoretical analysis to a reaction-diffusion system arising in a diffusive epidemic model. *Acta Math. Sci. Ser. B Engl.*, Ed.24 :175–184, 2004. (Cité page 47.)
- [78] I.M. Sokolov, J. Klafter, and A. Blumen. Fractional kinetics. *Physics Today*, 55 :48–54, 2002. (Cité page 3.)
- [79] N. Th. Varopoulos, L. Scoff-Coste, and T. Coulhon. Analysis and geometry on groups. *Cambridge University Press*, 1992. (Cité page 26.)
- [80] R-N. Wang, D-H. Chen, and T-J. Xiao. Abstract fractional cauchy problems with almost sectorial operators. *J. Differ. Equations*, 252 :202–235, 2012. (Cité pages 12, 63, 78 et 79.)
- [81] G.F. Webb. A reaction-diffusion model for a deterministic diffusive epidemic. *J. Math. Anal. Appl.*, 84 :150–161, 1981. (Cité pages 7, 47 et 55.)
- [82] D. V. Widder. The laplace transform. *Princeton University Press*, London, 1946. (Cité page 20.)
- [83] K. Yosida. Functional analysis, sixth edition. *Springer-Verlag*, Berlin Heidelberg, New York. (Cité page 26.)
- [84] R. Zacher. Maximal regularity of type  $l_p$  for abstract parabolic volterra equations. *J. Evol. Equa.*, 5 :79–103, 2005. (Cité page 80.)

