



**HAL**  
open science

# Etude d'une nouvelle forme d'onde multiporteuses à PAPR réduit.

Marwa Chafii

► **To cite this version:**

Marwa Chafii. Etude d'une nouvelle forme d'onde multiporteuses à PAPR réduit.. Autre. CentraleSupélec, 2016. Français. ⟨NNT : 2016CSUP0008⟩. ⟨tel-01661427⟩

**HAL Id: tel-01661427**

**<https://theses.hal.science/tel-01661427v1>**

Submitted on 11 Dec 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

N° d'ordre : 2016-32-TH



CentraleSupélec

ANNÉE 2016



## THÈSE DE DOCTORAT

Domaine : STIC

SPECIALITE : Télécommunications

**École doctorale Matisse**

présentée par

**Marwa CHAFII**

Sujet :

---

**Étude d'une nouvelle forme d'onde multiporteuses à  
PAPR réduit**

---

Soutenue à Rennes le 07 Octobre 2016 devant le jury composé de :

<i>Dir. de thèse:</i>	<b>Jacques PALICOT</b>	Professeur, CentraleSupélec, Rennes
<i>Co-Dir. de thèse:</i>	<b>Rémi GRIBONVAL</b>	Directeur de recherche, Inria, Rennes
<i>Encadrant:</i>	<b>Faouzi BADER</b>	Enseignant-Chercheur, CentraleSupélec
<i>Rapporteurs:</i>	<b>Laurent JACQUES</b>	Professeur, UCLouvain, Belgique
	<b>Michel TERRÉ</b>	Professeur, CNAM, Paris
<i>Examineurs:</i>	<b>Cyrille SICLET</b>	Maître de conférences, UGA, Grenoble
	<b>Geneviève BAUDOIN</b>	Professeur, ESIEE, Noisy le Grand
	<b>Matthieu GAUTIER</b>	Maître de conférences, UR1, Lannion



*À mon père,  
Abdel-Ilah*



# Remerciements

Les travaux rapportés dans ce mémoire sont le résultat de trois années de doctorat au sein de l'équipe SCEE à CentraleSupélec, campus de Rennes. Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont fait partie de cette expérience, par leur conseil, leur soutien ou leur amitié.

Je tiens d'abord à remercier et à témoigner ma reconnaissance à mes deux directeurs de thèse Monsieur Jacques Palicot et Monsieur Rémi Gribonval ainsi qu'à mon encadrant Monsieur Carlos Faouzi Bader. Je les remercie pour la confiance qu'ils m'ont accordée dès le début de ma thèse, pour leur soutien et pour leurs encouragements qui représentaient une grande source de motivation pour moi. Je les remercie pour leur disponibilité malgré un emploi du temps chargé, pour leurs conseils et pour leur implication et contributions dans ces travaux. Je ne les remercierai jamais assez.

Merci à Monsieur Laurent Jacques et à Monsieur Michel Terré d'avoir rapporté sur ce travail, ainsi que le reste des membres de mon jury : Madame Geneviève Baudoin, Monsieur Matthieu Gautier et Monsieur Cyrille Siclet.

Je remercie également tous les membres de l'équipe SCEE pour leur soutien et leur accueil, tout particulièrement : Hanane, Lara, Lama, Eren, Abel, Oussama, Jérôme, Samba, Xiguang, Vincent Savaux, Vincent Gouldieff, Rémi, Sumit, Navik, Quentin, Ahmad, Mouna, Haifa, Rami et tous ceux ou celles que j'aurais oubliés.

Finalement j'adresse un grand merci à ma famille. Tout d'abord je remercie mes parents Abdel-Ilah et Naoual pour leurs conseils, leur présence et leur affection inconditionnelle. Je remercie mes frères Amine et Nizar et ma sœur Maria pour leur soutien et leur amour.

Merci à Hamza pour son attention et sa patience tout au long de ces trois années de thèse.



# Table des matières

Table des matières	0
Listes des acronymes et abréviations	5
Notations mathématiques	7
Introduction	9
<b>I État de l’art</b>	<b>17</b>
<b>1 Rappel d’Analyse temps-fréquence</b>	<b>19</b>
1.1 Notions temps-fréquence . . . . .	20
1.1.1 Représentation en temps et en fréquence . . . . .	20
1.1.2 Localisation temps-fréquence . . . . .	20
1.1.3 Principe d’incertitude . . . . .	21
1.1.4 Pavage temps-fréquence . . . . .	22
1.2 Transformée de Gabor . . . . .	23
1.2.1 Pavage temps-fréquence . . . . .	24
1.2.2 Famille de Gabor . . . . .	24
1.2.3 Exemples de fenêtres . . . . .	24
1.3 Transformée en ondelettes . . . . .	24
1.3.1 Pavage temps-fréquence . . . . .	25
1.3.2 Transformée en ondelettes continue . . . . .	25
1.3.3 Transformée en ondelettes discrète . . . . .	26
1.3.4 Analyse multirésolutions . . . . .	27
1.3.5 Filtres miroirs conjugués . . . . .	28
1.3.6 Transformée en ondelettes rapide . . . . .	29
1.3.7 Analyse des moments d’ordre 1 et 2 . . . . .	29
1.3.8 Exemples d’ondelettes . . . . .	30
1.4 Transformée en paquets d’ondelettes . . . . .	32
1.4.1 Pavage temps-fréquence . . . . .	33
1.4.2 Bases de paquets d’ondelettes . . . . .	33
1.4.3 Paquets d’ondelettes de Walsh . . . . .	35
1.4.4 Nombre de bases de paquets d’ondelettes . . . . .	36
1.4.5 Sélection d’une “meilleure” base selon un critère prédéfini . . . . .	37
<b>2 Modulations multiporteuses</b>	<b>39</b>
2.1 Multiporteuses basées sur la transformée de Gabor . . . . .	39
2.1.1 Notions d’orthogonalité et de biorthogonalité . . . . .	40
2.1.2 Systèmes orthogonaux . . . . .	41
2.1.2.1 OFDM . . . . .	41
2.1.2.2 FMT . . . . .	44
2.1.2.3 FBMC : systèmes orthogonaux dans $\mathbb{R}$ . . . . .	45

2.1.2.4	Systèmes UFMC . . . . .	47
2.1.3	Systèmes non-orthogonaux . . . . .	48
2.1.3.1	NOFDM . . . . .	48
2.1.3.2	GFDM . . . . .	48
2.2	Multiporteuses basées sur la transformée en ondelettes . . . . .	49
2.2.1	Les ondelettes dans les communications sans fils . . . . .	49
2.2.2	Wavelet-OFDM . . . . .	50
2.2.3	Wavelet Packet OFDM . . . . .	51
<b>3</b>	<b>État de l'art sur le problème du PAPR</b>	<b>53</b>
3.1	Problème du PAPR lors de l'amplification de puissance . . . . .	53
3.2	Mesures des variations du signal . . . . .	56
3.3	Fonction de répartition du PAPR pour l'OFDM . . . . .	57
3.4	Méthodes de réduction du PAPR . . . . .	60
3.4.1	Critères d'évaluation des techniques de réduction du PAPR . . . . .	61
3.4.2	Techniques d'ajout de signal . . . . .	61
3.4.3	Techniques probabilistes . . . . .	62
3.4.4	Techniques de codage . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Modulations adaptatives</b>	<b>65</b>
4.1	Contexte de la radio intelligente . . . . .	65
4.2	Hypothèses générales d'un système adaptatif . . . . .	66
4.3	Adaptation de la puissance allouée . . . . .	67
4.4	Adaptation de la modulation et du codage . . . . .	67
4.5	Adaptation de la largeur de bande . . . . .	68
4.6	Adaptation de l'intervalle de garde . . . . .	69
4.7	Limitations des modulations adaptatives . . . . .	69
<b>II</b>	<b>Contributions</b>	<b>71</b>
<b>5</b>	<b>Analyse théorique du PAPR pour les systèmes GWMC</b>	<b>73</b>
5.1	Expression du signal GWMC . . . . .	74
5.2	Hypothèses . . . . .	75
5.3	Définition générale du PAPR . . . . .	76
5.3.1	Cas continu . . . . .	76
5.3.2	Cas discret . . . . .	76
5.4	Borne supérieure du PAPR . . . . .	77
5.5	Approximation de la CCDF du PAPR . . . . .	78
5.5.1	Durée d'observation finie . . . . .	78
5.5.2	Durée d'observation infinie . . . . .	80
5.6	Application de l'approximation pour différents systèmes . . . . .	81
5.7	CCDF du PAPR pour l'OFDM classique pour différents paramètres . . . . .	83
<b>6</b>	<b>Problème de réduction du PAPR</b>	<b>87</b>
6.1	Simplification de la CCDF du PAPR . . . . .	88
6.2	Problème d'optimisation du PAPR . . . . .	89
6.3	Résolution du problème d'optimisation . . . . .	89
6.3.1	Aperçu des principaux résultats . . . . .	90
6.3.2	Discussion sur $\gamma_{crit}$ . . . . .	90
6.3.3	Preuve des principaux résultats . . . . .	91
6.4	Applications . . . . .	98
6.5	Classification des formes d'ondes vis-à-vis du PAPR . . . . .	101

<b>7</b>	<b>La modulation en ondelettes</b>	<b>103</b>
7.1	Variantes du Wavelet-OFDM	104
7.2	Performances en PAPR	104
7.3	Limitations de la DSP	105
7.3.1	Analyse de la DSP pour un signal GWMC	105
7.3.2	DSP du Wavelet-OFDM	107
7.3.3	DSP de la modulation en ondelettes de Haar	108
7.3.4	Largeur du lobe principal	109
7.3.5	Validation par simulation de la DSP de Haar Wavelet-OFDM	109
7.3.6	Comparaison avec l'OFDM	110
7.3.7	Discussions	110
7.3.8	DSP de Dmey Wavelet-OFDM	111
7.3.9	Effet de l'amplificateur de puissance sur la DSP	111
7.4	PAPR de Dmey pour différentes variantes et constellations	112
7.5	Performances en TEB	114
7.5.1	Canal AWGN et Flat Fading	114
7.5.2	Canal sélectif en fréquence	115
7.6	Complexité d'implémentation	116
<b>8</b>	<b>Étude d'une nouvelle modulation à forme d'onde adaptative</b>	<b>119</b>
8.1	Motivations	120
8.2	Principe de la modulation AWPM	120
8.2.1	Définitions et notations	121
8.2.2	Vue d'ensemble	122
8.2.3	Sélection d'une meilleure base	123
8.3	Méthodes d'échanges entre l'émetteur et le récepteur	124
8.4	Application dans un canal spécifique	125
8.4.1	Exemple d'un canal sélectif en fréquence $h$	125
8.4.2	Modulation AWPM pour le canal $h$	126
8.4.3	Comportement en PAPR et en TEB pour différents seuils sur le canal $h$	126
8.5	Performances de la modulation AWPM dans un canal ETU	128
8.5.1	Performances en PAPR et en TEB	128
8.5.2	Compromis monoporteuse/multiporteuses	129
	<b>Conclusion Générale et Perspectives</b>	<b>133</b>
<b>A</b>	<b>Complément du Chapitre 5</b>	<b>139</b>
A.1	Distribution de la partie réelle $x^R(t)$ du signal GWMC transmis	139
A.1.1	Théorème central limite de Lyapunov (L-CLT)	139
A.1.2	Condition de Lyapunov pour un système GWMC	140
A.1.3	Application du L-CLT	141
A.2	Théorème du Berry-Esseen	142
A.3	Expression de la puissance moyenne d'un signal GWMC	142
<b>B</b>	<b>La méthode <i>Adaptive Tone Reservation</i> (ATR)</b>	<b>145</b>
B.1	Principe de la technique <i>Tone Reservation</i> (TR)	145
B.1.1	Algorithme du gradient projeté (GP)	146
B.2	Principe de la méthode <i>Adaptive Tone Reservation</i> (ATR)	147
B.2.1	Algorithme	147
B.2.2	Exemple	147
B.2.3	Complexité	148
B.3	Résultats de simulation	149
B.3.1	Performances en TEB	149
B.3.2	Performances en PAPR	149

B.4 Conclusion . . . . .	151
<b>C Bilan des mobilités sortantes</b>	<b>153</b>
C.1 Université d'Oxford, Royaume-Uni . . . . .	153
C.2 Université nationale de Yokohama, Japon . . . . .	154
C.3 Université de York, Royaume-Uni . . . . .	154
C.4 Université de technologie de Poznan, Pologne . . . . .	155
<b>Table des figures</b>	<b>157</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>159</b>
<b>Liste des publications</b>	<b>161</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>174</b>

# Listes des acronymes et abréviations

<b>ATR</b>	Adaptive Tone Reservation
<b>AWPM</b>	Adaptive Wavelet Packet Modulation
<b>AWGN</b>	Additive White Gaussian Noise
<b>CAN</b>	Conversion Analogique Numérique
<b>CDF</b>	Cumulative Distribution Function
<b>CCDF</b>	Complementary Cumulative Distribution Function
<b>COFDM</b>	Coded Orthogonal Frequency Division Multiplexing
<b>CP</b>	Cyclic Prefix
<b>CSI</b>	Channel State Information
<b>DAB</b>	Digital Audio Broadcasting
<b>DSP</b>	Densité Spectrale de Puissance
<b>DVB-T</b>	Digital Video Broadcasting - Terrestrial
<b>DWT</b>	Discret Wavelet Transform
<b>EGF</b>	Extended Gaussian Function
<b>ETU</b>	Extended Typical Urban
<b>FBMC</b>	Filter Bank based MultiCarrier
<b>FFT</b>	Fast Fourier Transform
<b>FIR</b>	Finite Impulse Response
<b>FMT</b>	Filtered MultiTone
<b>GFDM</b>	Generalized Frequency Division Multiplexing
<b>GWMC</b>	Generalized Waveforms for Multicarrier Modulation
<b>GP</b>	Gradient Projecté
<b>HIPERLAN</b>	HIgh PERformance radio LAN
<b>IBO</b>	Input Back-Off
<b>ICI</b>	InterCarrier Intereference
<b>IDWT</b>	Inverse Discret Wavelet Transform
<b>IWPT</b>	Inverse Wavelet Packet Transform
<b>IFFT</b>	Inverse Fast Fourier Transform
<b>IOTA</b>	Isotropic Orthogonal Transform Algorithm
<b>ISI</b>	InterSymbol Interference
<b>KSP</b>	Known Symbol Padding

<b>L-CLT</b>	Lyapunov-Central Limit Theorem
<b>LTE</b>	Long Term Evolution
<b>MMSE</b>	Minimum Mean Square Error
<b>NOFDM</b>	Non-Orthogonal Frequency Division Multiplexing
<b>OBE</b>	Out-of-Band Energy
<b>OFDM</b>	Orthogonal Frequency Division Multiplexing
<b>OQAM</b>	Offset Quadrature Amplitude Modulation
<b>OWDM</b>	Orthogonal Wavelet Division Multiplexing
<b>PA</b>	Power Amplifier
<b>PAPR</b>	Peak-to-Average Power Ration
<b>PO</b>	Problème d'Optimisation
<b>PTS</b>	Partial Transmit Sequence
<b>PHYDYAS</b>	PHysical layer for DYnamic spectrum AccesS and cognitive radio
<b>QAM</b>	Quadrature Amplitude Modulation
<b>QPSK</b>	Quadrature Phase-Shift Keying
<b>RF</b>	Radio Fréquence
<b>RMS</b>	Root Mean Square
<b>RP</b>	Random Phasor
<b>SC-FDE</b>	Single Carrier-Frequency Division Equalization
<b>SINR</b>	Signal to Interference plus Noise Ratio
<b>SLM</b>	Selective Mapping
<b>SNR</b>	Signal-to-Noise Ratio
<b>SCR</b>	Signal-to-Clipping noise Ratio
<b>SRRC</b>	Square Root Raised Cosine
<b>TEB</b>	Taux d'Erreur Binaire
<b>TFD</b>	Transformée de Fourier Discrète
<b>TFDD</b>	Transformée de Fourier Discrète Directe
<b>TFDI</b>	Transformée de Fourier Discrète Inverse
<b>TR</b>	Tone Reservation
<b>UWB</b>	Ultra-WideBand
<b>UFMC</b>	Universal Filtered MultiCarrier
<b>VDSL</b>	Very-high-speed Digital Subscriber Line
<b>WCP-OFDM</b>	Weighted Cyclic Prefix-OFDM
<b>WH-MC</b>	Walsh-Hadamard MultiCarrier
<b>WPM</b>	Wavelet Packet Modulation
<b>WPT</b>	Wavelet Packet Transform
<b>ZF</b>	Zero Forcing
<b>ZP</b>	Zero Padded

# Notations mathématiques

$M$	nombre de porteuses dans un système multiporteuses
$T$	période symbole d'un système multiporteuses
$T_e$	fréquence d'échantillonnage
$P$	nombre d'échantillons dans une période symbole
$\Delta F$	espacement inter-porteuses dans un système multiporteuses
$x(t)$	signal à temps continu
$x[k]$	signal à temps discret
$h(t)$	réponse impulsionnelle d'un canal
$H(f)$	réponse fréquentielle d'un canal
$t_x$	moment temporel d'ordre 1 de la fonction $x$
$\Delta t_x$	moment temporel d'ordre 2 de la fonction $x$
$\omega_x$	moment fréquentiel d'ordre 1 de la fonction $x$
$\Delta \omega_x$	moment fréquentiel d'ordre 2 de la fonction $x$
$\zeta$	localisation temps-fréquence d'une fonction $x$
$L_2(I)$	espace des fonctions de carré intégrable définies sur $I$
$L_\infty(I)$	espace des fonctions essentiellement bornées définies sur $I$
$L_I^\infty$	espace des fonctions appartenant à $L_\infty(I)$ et qui s'annulent en dehors de $I$
$\ x\ $	$= \left( \int_{-\infty}^{+\infty}  x(t) ^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$ norme dans $L_2$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	produit scalaire dans $L_2$
$C_{m,n}$	symboles d'entrée à valeurs complexes, issus d'une technique de mappage
$\sigma_C^2$	variance du symbole $C_{m,n}$
$(g_m)_{m \in [0, M-1]}$	famille de fonctions représentant conjointement la base de modulation et le filtre de mise en forme
$\Pi_T$	fonction porte égale à 1 quand $t \in [0, T]$ et égale à 0 sinon
$\text{PAPR}_c^N$	PAPR pour un signal à temps continu et une durée d'observation $NT$
$\text{PAPR}_d^N$	PAPR pour un signal à temps discret pour $NP$ échantillons
$\text{PAPR}_{c,\text{sup}}$	supremum du PAPR
$P_{c,\text{moy}}$	puissance moyenne à temps continu
$P_{d,\text{moy}}$	puissance moyenne à temps discret
$\psi$	ondelette mère
$\phi$	fonction d'échelle mère

$\psi_{j,k}$	ondelette de l'échelle $j$ à la position $k$
$\phi_{j,k}$	fonction d'échelle $j$ à la position $k$
$J$	nombre maximale de décomposition idwt( $j$ )
$J_0$	première échelle considérée
$L$	nombre de niveau de décomposition considéré
$f^b$	filtre passe-bas
$f^h$	filtre passe-haut
$\mathcal{K}$	longueur des filtres $f^b$ et $f^h$
$a_{j,k}$	coefficient de détail positionné à la $k$ -ième position de l'échelle $j$
$w_{j,k}$	coefficient d'approximation positionné à la $k$ -ième position de l'échelle $j$
$P_j^m$	nœud d'un arbre en paquets d'ondelettes
$B_j^m$	sous-bande d'un arbre en paquets d'ondelettes
$f_k$	fréquence élémentaire de largeur $\Delta F$
$\alpha$	seuil d'atténuation
$\beta_0$	seuil de variations pour les sous-bandes atténuées
$\beta_1$	seuil de variations pour les sous-bandes non atténuées
$\Theta^{\alpha,0}$	l'ensemble des sous-bandes ne contenant que des fréquences non atténuées
$\Theta^{\alpha,1}$	l'ensemble des sous-bandes ne contenant que des fréquences non atténuées
$ x $	valeur absolue (resp module) de la fonction réelle (resp complexe) $x$
$E(.)$	espérance mathématique
TF(.)	transformée de Fourier

# Introduction Générale

## Contexte et problématiques

Depuis plusieurs décennies, le domaine des télécommunications est en plein essor. Les technologies de l'Information et de la Communication (TIC) ont connu l'arrivée de nouveaux services et de nouvelles générations de transmission numérique sans fil. Depuis quelques années, avec l'apparition d'Internet et l'émergence de nouvelles technologies, le taux de pénétration de la téléphonie mobile connaît une évolution croissante. Ainsi, la croissance de la demande sur les débits de transmission et le nombre d'abonnés se poursuit, la quantité d'information transmise augmente rapidement et les canaux radio-mobiles deviennent de plus en plus saturés. Cependant, cette croissance entraîne une consommation électrique inquiétante. En effet, l'industrie des TIC représente entre 2% à 10% des émissions CO<sub>2</sub> [1, 2]. Les différentes études sur cette évaluation complexe ne donnent pas un nombre exact pour mesurer l'impact des TIC sur l'environnement. A titre de comparaison, les émissions de l'aviation civile représente 2% des émissions CO<sub>2</sub>, ce qui représente aussi un quart des émissions des automobiles [3, 4]. En particulier, l'amplificateur de puissance représente plus de 60% de la consommation énergétique de l'émetteur [5]. Améliorer le rendement de l'amplificateur, contribue à réduire la consommation énergétique au niveau des équipements mobiles (avec des batteries qui se déchargent moins vite) et au niveau des stations de bases (avec des économies d'énergie et une baisse de la facture d'électricité pour les opérateurs téléphoniques). Par conséquent, cela peut contribuer à la réduction des émissions CO<sub>2</sub> ainsi que de la pollution environnementale. Pour contribuer à la tendance actuelle de l'éco-radio (*Green Radio*) qui vise à réduire l'impact des TIC sur l'environnement, nous pouvons agir sur les différentes étapes de la chaîne de transmission.

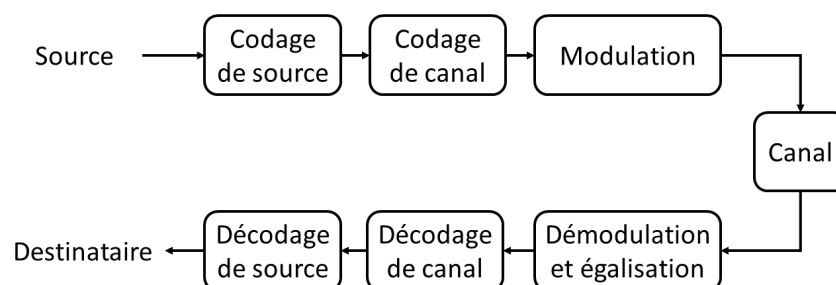


FIGURE 1 – Chaîne de transmission numérique.

**Chaîne de transmission numérique** Une communication que nous effectuons par un téléphone portable ou un ordinateur par exemple suit un mécanisme particulier. Les modules d'une chaîne de communication dite point-à-point, c'est-à-dire entre une seule source et un seul destinataire, sont décrits dans la Figure 1. Ce modèle présente la base des autres types de communications comme la communication multi-utilisateurs (plusieurs sources et un destinataire), la communication *broadcast* (une source et plusieurs destinataires) ou les réseaux *ad hoc* (plusieurs sources et plusieurs destinataires). Les différents modules d'une chaîne de transmission numérique sont ainsi détaillés :

- **Source** : une source numérique génère des messages appartenant à un alphabet discret et fini. Elle peut être engendrée à partir d'une source analogique par un processus de conversion analogique/numérique (CAN) qui se réalise par des étapes successives d'échantillonnage et de quantification et de codage binaire. Souvent on suppose que la source délivre des symboles indépendants et identiquement distribués (i.i.d).
- **Codage de source** : afin d'augmenter le débit de transmission et optimiser l'utilisation des ressources du système, le codeur de source compresse les données en éliminant les éléments binaires non significatifs. En d'autres termes, le codeur de source sert à fournir une représentation efficace des données tout en préservant l'information essentielle qu'elles portent.
- **Codage de canal** : le codeur de canal introduit une redondance pour protéger le signal contre les erreurs introduites par un canal de communication bruité. En connaissant la méthode du codage de canal utilisée, le récepteur est en mesure de détecter le signal et corriger les données binaires erronées. La fiabilité du système de transmission est ainsi améliorée.
- **Modulation** : c'est la partie de la chaîne que nous allons étudier le plus en détail. Le rôle de la modulation est de convertir une séquence, en un signal qui soit suffisamment robuste pour lutter contre les perturbations (évanouissements, réflexions, bruit ...) du canal de communication. La mise en forme du signal est réalisée par des formes d'ondes appropriées à un type de modulation.
- **Canal de propagation** : ce module décrit le support physique pour transmettre de l'information. Il représente les signaux extérieurs et le bruit qui affectent la transmission. Chaque système de communication ou application a un modèle de canal approprié. Nous nous intéressons dans ce rapport aux canaux de transmissions radio-mobiles, qui se basent sur la propagation des ondes électromagnétiques dans l'espace libre. Les canaux radio-mobiles qui seront particulièrement utilisés dans ces travaux sont :
  - **Canal additif à bruit blanc Gaussien AWGN** (*additive white Gaussian noise*) : représente une modélisation du bruit radio-électrique qui s'ajoute dans le récepteur. Sa densité spectrale de puissance est la même pour toutes les fréquences de la bande passante, et il suit une loi normal de moyenne et variance données.
  - **Canal plat** (*flat fading channel*) est un canal pour lequel toutes les composantes fréquentielles subissent le même niveau d'évanouissement.
  - **Canal sélectif en fréquence** : le signal subit différentes réflexions et atténuations dans le canal de propagation, il arrive alors déformé à la réception. Selon les obstacles rencontrés, des fréquences sont plus atténuées que d'autres. Le canal ne se comporte pas alors de la même façon suivant la fréquence du signal, on dit alors que le canal est sélectif en fréquence.
- **Démodulation du signal et égalisation** : en se basant sur l'observation bruitée du signal, le démodulateur traite le signal reçu et décide quel message a été émis. Le signal est ensuite décodé par des mécanismes inverses de ceux réalisés à l'émission.

L'égalisation vise à compenser les distorsions dues au canal afin d'éliminer les interférences subies par le signal. Dans nos simulations nous allons considérer deux méthodes d'égalisation : le ZF (*zero forcing*) qui consiste à diviser le signal reçu par la réponse fréquentielle du canal, et le MMSE (*minimum mean squared error*) qui a pour objectif de minimiser la variance de l'erreur du signal. Le MMSE permet de limiter l'augmentation du bruit par rapport au ZF.

Nous nous intéressons dans ces travaux particulièrement au processus de modulation. Plusieurs évolutions sont possibles pour envisager l'amélioration de la modulation du signal afin d'atteindre de bonnes performances et satisfaire les besoins des utilisateurs.

**Modulations OFDM** Les modulations multiporteuses sont les technologies les plus utilisées et les plus prometteuses. Elles consistent à diviser la bande allouée à plusieurs sous-bandes étroites, et envoyer les données parallèlement sur chacune de ces sous-porteuses. En particulier, l'OFDM (*orthogonal frequency division multiplexing*) est une modulation multiporteuses dite "orthogonale" largement utilisée dans des applications de communication filaires et sans fils, car elle garantit de très bonnes performances et permet une complexité relativement réduite. L'utilisation d'un intervalle de garde contenant un préfixe cyclique, et son implémentation à base de transformée de Fourier, permettent une grande efficacité en présence des canaux sélectifs en fréquence ainsi qu'une simple égalisation au récepteur. Grâce à l'utilisation de la transformée de Fourier et le préfixe cyclique qui réduit les interférences entre symboles OFDM, le processus d'égalisation consiste à simplement filtrer le signal reçu par la fonction de transfert. Il suffit de multiplier chaque signal reçu par le gain correspondant. De plus, l'application d'un codage avec entrelacement fréquentiel et temporel permet de contourner la sélectivité temporelle et fréquentielle des canaux, faisant ainsi du système résultant, le COFDM (*Coded OFDM*), un système de référence dans de nombreux standards de communications tels que les systèmes de radio numérique DAB, la télévision numérique terrestre DVB-T, le Wi-fi, et la quatrième génération de la téléphonie mobile LTE (*long term evolution*) et ses évolutions.

**Problème du PAPR et consommation énergétique** Certes, l'OFDM présente de nombreux avantages par rapport à la modulation monoporteuse, qui ne divise pas la bande spectrale, mais envoie à chaque instant un seul symbole occupant toute la bande. L'OFDM est ainsi plus robuste aux canaux sélectifs en fréquence et se caractérise par une simple égalisation. Cependant, l'OFDM subit quelques sérieuses limitations. En effet, le signal OFDM résulte de l'addition de plusieurs signaux, chacun modulé par une porteuse différente, cette addition peut être cohérente sur certains intervalles et engendre alors de grandes amplitudes ou pics de puissances. Ces fluctuations mesurées par le PAPR (*peak-to-average power ratio*) causent des distorsions non-linéaires quand on introduit le signal OFDM dans un équipement non-linéaire comme l'amplificateur de puissance. En effet, la caractéristique d'un amplificateur de puissance devient non-linéaire pour de grandes puissances d'entrée. Si l'enveloppe d'un signal présente une forte dynamique, elle sera déformée à la sortie de l'amplificateur. Pour s'éloigner de la zone non-linéaire de l'amplificateur et amplifier le signal dans la zone linéaire, on effectue typiquement un recul à l'entrée (*input back-off*). Or, l'amplificateur offre un faible rendement pour les faibles puissances d'entrée. Ainsi, plus le PAPR est élevé, plus le recul à l'entrée nécessaire est large, et donc plus le rendement énergétique est mauvais. Un PAPR élevé se traduit alors par une grande consommation d'énergie. Réduire le PAPR, et donc améliorer le rendement de l'amplificateur, contribue à réduire la consommation énergétique

**Techniques de réduction du PAPR et techniques de pré-distorsion** La réduction du PAPR pour un signal multiporteuses permet d'améliorer le rendement énergétique de l'amplificateur de puissance et de minimiser les distorsions induites par cet équipement non-linéaire. Plusieurs méthodes pour réduire le PAPR sont présentes dans la littérature. Dans [6],

une classification regroupant trois grandes familles de techniques de réduction du PAPR a été proposée :

- Les techniques dites d'ajouts de signal.
- Les techniques probabilistes.
- Les techniques de codage.

Il est important de savoir qu'en plus des méthodes de réduction du PAPR, il existe d'autres méthodes qui permettent de concilier rendement énergétique et linéarité : les techniques de pré-distorsion numérique [7, 8]. L'objectif est d'atténuer les distorsions induites par l'amplificateur en linéarisant les caractéristiques de l'amplificateur par insertion d'une fonction inverse.

**Nouvelle approche pour réduire le PAPR** Comme nous venons de souligner, il existe une multitude de techniques de réduction du PAPR dans la littérature, certaines agissent sur les données avant la modulation, comme les techniques de codage par exemple. D'autres agissent après la modulation comme les techniques de clipping. L'approche que nous étudions dans cette thèse est différente. L'objectif est de proposer une nouvelle structure de modulation qui génère un signal à PAPR réduit par construction. La solution évidente de modulation à faible PAPR est la monoporteuse, mais elle est très sensible à la sélectivité du canal. Cependant, notre besoin est certes de réduire le PAPR mais en maintenant, en même temps, une bonne robustesse aux canaux sélectifs en fréquence, l'avantage le plus important des modulations multiporteuses.

Dans tout ce rapport, on confond base de modulation, fonctions de modulations et forme d'onde.

## Objectifs de la thèse et contributions

Le premier objectif de la thèse est de proposer un système de modulation qui améliore le PAPR par rapport à l'OFDM classique, tout en permettant une bonne résistance à la sélectivité des canaux de transmission et en ne dégradant pas l'efficacité spectrale du système. C'est ainsi que nous nous sommes focalisés sur les axes suivants :

- Caractériser le comportement du PAPR vis-à-vis de la forme d'onde de modulation. En d'autres termes, définir une relation entre le PAPR et la base de modulation.
- Formuler le problème de réduction du PAPR en un problème d'optimisation sur les formes d'ondes. Une fois que le PAPR sera exprimé en fonction de la base de modulation, le problème de réduction du PAPR peut être réduit à une optimisation de cette expression sur les formes d'ondes.
- À travers la résolution du problème d'optimisation, tracer le cadre d'optimalité de l'OFDM en termes de PAPR. Plus généralement, une classification des formes d'ondes en termes de performances en PAPR peut être étudiée.
- Établir une condition nécessaire satisfaite par toute forme d'onde à performance en PAPR meilleure que l'OFDM.
- Étude d'une famille de modulations particulières satisfaisant cette condition nécessaire et définir les compromis résultants.
- Proposer une nouvelle structure de modulation qui répond aux compromis entre PAPR et taux d'erreur binaire, en d'autres termes, efficacité énergétique et efficacité spectrale.

## Organisation de la thèse

Cette thèse se compose de deux parties principales : la première partie sur l'état de l'art, répartie en quatre chapitres, rappelle des notions d'analyse temps-fréquence importantes pour la compréhension des enjeux de nos contributions et expose différents travaux sur les modulations multiporteuses, les techniques de réduction du PAPR et les techniques adaptatives. Cette partie est nécessaire pour situer la nouveauté de nos travaux. La deuxième partie sur les contributions, également composée de quatre chapitres, présente d'abord une étude détaillée de l'expression du PAPR en fonction de la base de modulation et la formulation du problème de réduction du PAPR en un problème d'optimisation. Ensuite, cette partie détaille la preuve du théorème qui développe une condition nécessaire sur les formes d'ondes pour avoir un meilleur PAPR que l'OFDM. Les performances de la modulation en ondelettes seront étudiées par la suite, et finalement la modulation adaptative en paquets d'ondelettes est proposée comme une structure de modulation répondant aux objectifs de la thèse.

Ci-après une vue d'ensemble de chacun des huit chapitres dont se constitue principalement ce rapport :

- Première partie : État de l'art
  - Le chapitre 1 rappelle quelques notions d'analyse temps-fréquence comme la localisation temps-fréquence d'une fonction représentant un signal et le principe d'incertitude qui établit le compromis entre la localisation temporelle et la localisation fréquentielle. Dans ce chapitre, la transformée de Gabor et ses caractéristiques temporelles et fréquentielles sont présentées afin d'introduire la section 2.1 des modulations multiporteuses basées sur la transformée de Gabor. Un rappel de la transformée en ondelettes est exposé, en détaillant les principaux notions d'analyse multirésolutions, les filtres miroirs conjugués associés aux ondelettes, ainsi que le théorème de Mallat qui définit une transformée rapide en ondelettes. Cette partie est nécessaire pour comprendre la modulation en ondelettes introduite dans la section 2.2.2 et développée dans le chapitre 7. Finalement, la transformée en paquets d'ondelettes, qui généralise la transformée en ondelettes, et dont l'utilité sera démontrée dans la section 2.2.3 et le chapitre 8, est expliquée dans la dernière partie du chapitre.
  - Le chapitre 2 propose une classification des modulations multiporteuses étudiées dans la littérature. Tout système de modulation est caractérisé par une base de modulation et de démodulation. La distinction présentée sur ce chapitre se base sur la manière dont le plan temps-fréquence est représenté par le signal transmis. Ainsi, une décomposition uniforme du plan temps-fréquence nous conduit vers des systèmes de modulation basés sur la transformée de Gabor, tandis qu'une décomposition non uniforme ou non nécessairement régulière se réfère à des systèmes de modulation basés sur la transformée en ondelettes. La première classe comprend l'OFDM classique, le NOFDM (*non-orthogonal frequency division multiplexing*), les systèmes FBMC (*filter bank based multicarrier*) qui se réfèrent notamment à l'OFDM/OQAM (*offset quadrature amplitude modulation*), l'UFMC (*universal filtered multicarrier*) entre autres. La deuxième classe contient toute modulation à base de transformée discrète en ondelettes ou de transformée en paquets d'ondelettes, comme le Wavelet-OFDM ou le Wavelet Packet OFDM.
  - Le chapitre 3 définit le problème du PAPR lors de l'amplification de puissance et retrace l'évolution de l'état de l'art de ce problème. Il situe notamment le problème du PAPR dans la littérature et la progression de l'intérêt que suscite cette problématique dans la communauté scientifique. Nous rappelons dans ce chapitre les différents termes associés au PAPR, et nous comparons les différentes études qui ont tenté de caractériser la distribution de cette variable aléatoire. Un résumé des principales techniques de réduction du PAPR est présenté dans ce chapitre afin

d'observer la différence entre les techniques classiques de réduction du PAPR et notre approche qui consiste à agir sur la modulation pour définir un signal à PAPR réduit par construction.

- Le chapitre 4, dont l'utilité sera justifiée par la structure adaptative proposée dans le chapitre 8, rapporte différents systèmes de transmission adaptatifs et explique les paramètres adaptés. Ce chapitre discute d'abord les hypothèses générales d'un système adaptatif. Ensuite, l'adaptation de quelques paramètres présents dans la littérature comme la puissance allouée, la modulation et le codage, la largeur de bande et l'intervalle de garde est présentée. Enfin, les différentes limitations que subissent les systèmes multiporteuses adaptatifs sont soulignées.
- Deuxième partie : Contributions
  - Le chapitre 5 est consacré à une analyse du problème de PAPR. Après avoir introduit cette problématique dans le chapitre 3, ce chapitre vient détailler une étude analytique du comportement du PAPR pour les systèmes multiporteuses à forme d'onde généralisée GWMC (*generalized waveforms for multicarrier modulation*). Une première approche déterministe consiste à dériver une borne supérieure du PAPR. Dans la mesure où le supremum du PAPR n'est que rarement atteint, une étude statistique de cette variable aléatoire s'impose. En supposant que le PAPR prend des valeurs suffisamment petites devant son supremum, et que les formes d'ondes ont un support temporel au moins égal au temps symbole, nous dérivons une approximation générale de la distribution du PAPR pour les systèmes GWMC. Dans ce chapitre, nous présentons une preuve détaillée illustrée par plusieurs exemples de systèmes multiporteuses. L'analyse conduite dans ce chapitre permet de confirmer que le PAPR dépend effectivement de la forme d'onde utilisée dans la modulation, ce qui n'était pas explicitement prédit par les approximations de la distribution du PAPR pour des formes d'ondes particulières comme l'OFDM.
  - Le chapitre 6 aborde le problème de réduction du PAPR sous un nouvel angle. Suite aux résultats du chapitre 5 qui prouvent que les performances en PAPR dépendent de la forme d'onde, le problème de réduction du PAPR est ainsi formulé comme un problème d'optimisation sur la famille de fonctions de modulation. La solution de ce problème nous mène à une condition nécessaire que doit satisfaire toute forme d'onde à PAPR meilleur que l'OFDM. En effet, nous prouvons analytiquement dans ce chapitre que pour toutes les formes d'ondes à support temporel au moins égal à la période symbole, l'OFDM ainsi qu'une large famille de systèmes multiporteuses réalisent les meilleures performances en termes de PAPR. Tout système présentant un meilleur PAPR que l'OFDM ne rentre nécessairement pas dans cette catégorie. Les bases en ondelettes ont fait partie, et c'est la raison pour laquelle nous choisissons de les étudier dans le chapitre 7.
  - Le chapitre 7 se consacre à l'étude et à l'évaluation des performances de la modulation en ondelettes basée sur la transformée en ondelettes discrète. Certes, l'ondelette de Haar atteint de meilleures performances en PAPR que les autres ondelettes, mais elle est soumise à une sérieuse limitation en termes de densité spectrale de puissance qui souffre d'un large lobe principal et de larges lobes secondaires. Nous présentons ainsi l'ondelette discrète de Meyer comme une alternative et nous comparons ses performances avec l'OFDM. En plus d'avoir un meilleur PAPR que l'OFDM, l'ondelette de Meyer atteint également un gain considérable en taux d'erreur binaire pour un égaliseur MMSE par rapport à l'OFDM non codé, sans dégradation de la densité spectrale de puissance, contrairement à Haar. Le prix à payer pour ces gains en performance se traduit par une plus grande complexité. Contrairement à l'OFDM, les porteuses de la modulation en ondelettes ne sont pas toutes autant localisées en fréquence. Par ailleurs, quand une connaissance de

l'état du canal est disponible à l'émetteur, l'OFDM a la possibilité de supprimer les porteuses atténuées par le canal et améliorer ainsi son taux d'erreur binaire. C'est dans ce contexte que nous étudions dans le chapitre 8 une nouvelle modulation adaptative en ondelettes, qui permet de contourner ce problème de la modulation en ondelettes classique.

- Le chapitre 8 est dédié à l'étude d'une modulation adaptative en paquets d'ondelettes. L'enjeu est de construire une modulation à faible PAPR par rapport à l'OFDM tout en maintenant de bonnes performances en taux d'erreur binaire et en efficacité spectrale. L'OFDM divise la bande allouée en des sous-bandes étroites pour lutter contre la sélectivité fréquentielle du canal, c'est ainsi qu'il devient efficace face aux environnements sélectifs en fréquence. Cependant, cette décomposition entière de la bande n'est pas tout le temps nécessaire. Souvent la réponse du canal n'est atténuée qu'aux alentours de certaines fréquences. Si l'émetteur dispose d'une connaissance de l'état du canal par un retour du récepteur, il peut adapter le découpage de la bande allouée aux caractéristiques du canal. La transformée en paquets d'ondelettes permet cette répartition non uniforme, et peut offrir une bonne localisation fréquentielle autour des évanouissements profonds du canal. Dans les parties de la bande où le canal ne connaît pas d'évanouissements, des ondelettes à court support temporel, et donc occupant de larges sous-bandes, sont utilisées pour permettre la réduction du PAPR. Ce chapitre développe ce concept, et évalue les performances du système résultant pour différents canaux et scénarios de transmission, et montre ainsi que la modulation en ondelettes offre un bon compromis entre la modulation monoporteuse et la modulation multiporteuses.

Nous avons rapporté en annexe A, un complément du chapitre 5, qui rappelle le théorème central limite de Lyapunov, et explique les conditions de Lyapunov pour un système GWMC ainsi que l'application de ce théorème pour dériver la distribution du PAPR d'un signal GWMC. Le théorème de Berry-Esseen qui donne une borne de l'erreur maximale de l'approximation résultante du théorème central limite est rappelé dans cette annexe. Les principales lignes de dérivation de la puissance moyenne d'un signal GWMC figurent également dans cette annexe. Ces éléments sont regroupés en annexe afin d'omettre quelques développements du chapitre principal et rendre sa lecture plus fluide.

L'annexe B est dédiée à la méthode de *tone reservation* adaptative, une méthode de réduction du PAPR à ajout de signal. L'objectif de cette méthode est d'adapter le choix de l'ensemble des porteuses réservées pour réduire le PAPR, à la sélectivité fréquentielle du canal. Les porteuses réservées sont celles les plus atténuées par l'évanouissement du canal, le taux d'erreur binaire est alors amélioré par rapport à une méthode classique de réservation de porteuses. J'ai choisi de placer cette étude en annexe, puisqu'elle ne s'inscrit pas explicitement dans les objectifs de ma thèse, mais elle représente le fruit d'une collaboration avec un autre doctorant de mon équipe de recherche.

Ces travaux ont également bénéficié de différents échanges et collaborations académiques avec des équipes de recherches à l'étranger, notamment à travers des séjours de mobilités effectués à l'université de technologie de Poznan (Pologne) en Mai-Juin 2014, à l'université de York (Royaume-Uni) en Juin-Juillet 2015, à l'université nationale de Yokohama (Japon) en Juillet-Août 2015 et à l'université d'Oxford (Royaume-Uni) en Juillet-Août 2016. Un bilan de ces mobilités sortantes est rapporté dans l'annexe C.

La réalisation de ce travail a demandé la consultation de plusieurs articles et thèses de référence dans le domaine, qui sont répertoriés dans la partie "Bibliographie" en dernière section du rapport.

Cette thèse a été réalisée dans le cadre du projet TEPN<sup>1</sup> (*Toward Energy Proportional Networks*) du Laboratoire d'Excellence CominLabs. Ce manuscrit tend à expliquer de manière plus détaillée les résultats que nous avons publiés dans des articles de conférence et des articles de revues énumérés dans la "liste des publications" en fin de ce rapport.

---

1. Plus de détails sur le projet TEPN sont disponibles dans ce lien : <http://www.tepn.cominlabs.ueb.eu/fr>.

Première partie  
État de l'art



# Chapitre 1

## Rappel d'Analyse temps-fréquence

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Notions temps-fréquence</b>	<b>20</b>
1.1.1	Représentation en temps et en fréquence	20
1.1.2	Localisation temps-fréquence	20
1.1.3	Principe d'incertitude	21
1.1.4	Pavage temps-fréquence	22
<b>1.2</b>	<b>Transformée de Gabor</b>	<b>23</b>
1.2.1	Pavage temps-fréquence	24
1.2.2	Famille de Gabor	24
1.2.3	Exemples de fenêtres	24
<b>1.3</b>	<b>Transformée en ondelettes</b>	<b>24</b>
1.3.1	Pavage temps-fréquence	25
1.3.2	Transformée en ondelettes continue	25
1.3.3	Transformée en ondelettes discrète	26
1.3.4	Analyse multirésolutions	27
1.3.5	Filtres miroirs conjugués	28
1.3.6	Transformée en ondelettes rapide	29
1.3.7	Analyse des moments d'ordre 1 et 2	29
1.3.8	Exemples d'ondelettes	30
<b>1.4</b>	<b>Transformée en paquets d'ondelettes</b>	<b>32</b>
1.4.1	Pavage temps-fréquence	33
1.4.2	Bases de paquets d'ondelettes	33
1.4.3	Paquets d'ondelettes de Walsh	35
1.4.4	Nombre de bases de paquets d'ondelettes	36
1.4.5	Sélection d'une "meilleure" base selon un critère prédéfini	37

---

Nous rappelons dans ce chapitre quelques propriétés et outils d'analyse temps-fréquence fondamentaux pour la compréhension des enjeux et des compromis des systèmes de modulations multiporteuses étudiés dans ce rapport. Les signaux multiporteuses traités dans cette thèse se construisent à partir de la transformée de Gabor et les transformées en ondelettes. Il semble nécessaire alors d'introduire ces transformées et décrire leurs caractéristiques temporelles et fréquentielles.

Dans notre analyse, nous nous sommes inspirés de l'étude entreprise par Stéphane Mallat dans son livre "Une exploration des signaux en ondelettes" [9]. Nous n'abordons que les éléments que nous avons jugés essentiels pour la compréhension de la suite du rapport.

## 1.1 Notions temps-fréquence

Les représentations temporelles et fréquentielles d'une fonction permettent d'exprimer son contenu dans chaque instant et pour chaque fréquence respectivement. Afin de mesurer la résolution temporelle ou fréquentielle de cette fonction, nous définissons la notion de localisation temps-fréquence et ses propriétés. Nous rappelons particulièrement le principe d'incertitude, une propriété importante qui exprime le compromis entre la localisation temporelle et fréquentielle.

### 1.1.1 Représentation en temps et en fréquence

Une fonction  $x$  peut être représentée dans le plan temps-fréquence par deux méthodes extrêmes :

- Représentation dans le graphe de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , cela consiste en une décomposition sur la base continue des distributions de Dirac

$$x(t) = \int_{\mathbb{R}} x(u)\delta(t-u) du.$$

- Représentation dans la base de Fourier

$$X(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-j\omega t} dt.$$

La première représentation donne une information sur la fonction  $x(t)$  à l'instant  $t$ , la valeur de  $x(t)$  indique l'intensité associée au temps  $t$ . En revanche,  $x(t)$  ne donne aucune information sur le comportement de la fonction en fréquence. À l'inverse, la représentation de Fourier donne une information sur le contenu fréquentiel de la fonction  $X(\omega)$  à la fréquence  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ , mais n'indique aucune information sur le comportement de la fonction en temps.

Naturellement, chacune de ces représentations contient les informations de l'autre. En effet, si la fonction  $X$  est intégrable, alors on peut exprimer  $x$  à partir de  $X$  par transformée de Fourier inverse :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} X(\omega)e^{-j\omega t} d\omega.$$

Néanmoins, chaque représentation explicite un seul type d'information sur la fonction, à savoir temporel *ou* fréquentiel.

### 1.1.2 Localisation temps-fréquence

Les observations de la section 1.1.1 peuvent être reformulées en disant que les distributions de Dirac sont très localisées en temps et très peu en fréquence, et qu'à l'inverse les fonctions de Fourier sont très localisées en fréquence et ne sont pas localisées en temps.

Afin de mesurer la localisation en temps et en fréquence d'une fonction  $x \in L_2(\mathbb{R})$ , on se réfère souvent au moment d'ordre 1 et au moment d'ordre 2 dans ces deux dimensions. Au premier ordre, les moments sont interprétés comme une moyenne temporelle  $t_x$  et une moyenne fréquentielle  $\omega_x$ , et au second ordre, on parle de localisation temporelle  $\Delta t_x$  et localisation fréquentielle  $\Delta \omega_x$ . Ils sont définis comme suit :

$$t_x = \frac{1}{\|x\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t|x(t)|^2 dt, \quad (1.1)$$

$$\Delta t_x = \frac{1}{\|x\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_x)^2 |x(t)|^2 dt, \quad (1.2)$$

$$\omega_x = \frac{1}{\|x\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |X(\omega)|^2 d\omega, \quad (1.3)$$

$$\Delta \omega_x = \frac{1}{\|x\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_x)^2 |X(\omega)|^2 d\omega. \quad (1.4)$$

Les moyennes  $t_x$  et  $\omega_x$  peuvent être interprétées par le centre temporel (fréquentiel resp.) moyen normalisé de la fonction  $x$ . On peut aussi dire que le spectre  $X$  est localisé autour de la fréquence  $\omega_x$ . Les paramètres  $\Delta t_x$  et  $\Delta \omega_x$  indiquent l'étalement ou la résolution temporelle et fréquentielle respectivement de la fonction  $x$ .

Les moments en fréquence peuvent être calculés à partir des moments en temps et vice versa en utilisant les formules de Parseval et Plancherel.

#### **Théorème 1.1.1. (Formules de Parseval et Plancherel)**

Soient  $x$  et  $y$  deux fonctions dans  $L_2(\mathbb{R})$  et soient  $X$  et  $Y$  leur transformée de Fourier, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)Y^*(\omega) d\omega.$$

En particulier, pour  $x = y$  :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega. \quad (1.5)$$

La localisation temps-fréquence s'exprime en fonction des moments d'ordre 2 et caractérise la localisation à la fois en temps et en fréquence d'une fonction  $x$ .

#### **Définition 1.1.1. (Localisation temps-fréquence)**

On définit la localisation temps-fréquence d'une fonction  $x$  dans  $L_2(\mathbb{R})$ , la quantité  $\xi(x)$  exprimée par :

$$\xi(x) = \frac{1}{4\pi\sqrt{\Delta t_x \Delta \omega_x}}. \quad (1.6)$$

La localisation temps-fréquence  $\xi(x)$  d'une fonction  $x$  est inversement proportionnelle au produit des moments temporel et fréquentiel d'ordre 2.

### **1.1.3 Principe d'incertitude**

Le principe d'incertitude (ou inégalité de de Heisenberg-Gabor) [10] nous indique l'intervalle de variations de la localisation temps-fréquence  $\xi$ .

#### **Théorème 1.1.2. (Inégalité de Heisenberg-Gabor)**

Si  $x \in L_2(\mathbb{R})$  alors  $0 \leq \xi(x) \leq 1$ .

Les fonctions pour lesquelles le paramètre  $\xi(x)$  atteint la valeur 1 sont les fonctions gaussiennes translatées et modulées. Cependant, cette famille de fonctions n'est pas orthogonale, ce qui limite son utilité dans certains systèmes de communications. Il faut comprendre que plus le paramètre  $\xi(x)$  associé à une fonction  $x$  est proche de 1, meilleure est la localisation de la fonction dans le plan temps-fréquence.

L'inégalité de Heisenberg-Gabor peut s'écrire autrement, en explicitant les moments d'ordre 2 en temps et en fréquence. De (1.6), il vient

$$\Delta t_x \Delta \omega_x \geq \frac{1}{16\pi^2}. \quad (1.7)$$

Cette inégalité interdit d'avoir une fonction aussi localisée, à la fois en temps et en fréquence, que l'on veut. En d'autres termes, si on associe la largeur d'une fonction à sa localisation, la contrainte (1.7) ne nous permet pas d'avoir une fonction avec des largeurs temporelle et fréquentielle toutes deux aussi petites que l'on veut.

L'inégalité (1.7) devient une égalité pour les fonctions gaussiennes, qui sont autant localisées en temps qu'en fréquence.

### 1.1.4 Pavage temps-fréquence

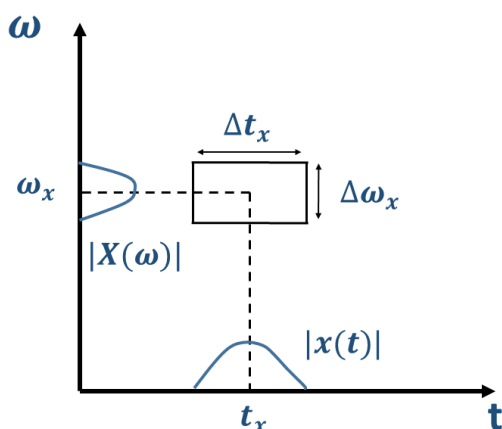


FIGURE 1.1 – Rectangles de Heisenberg ou pavé temps-fréquence représentant la localisation temps-fréquence d'une fonction  $x$ .

Le contenu temporel et fréquentiel d'une fonction  $x$  peut être représenté dans le plan temps-fréquence  $(t, \omega)$  par une région dont la position et la taille dépendent de l'étalement de  $x$  en temps et en fréquence.

Une fonction  $x$  contient une énergie  $|x(t)|^2$ , qui peut être interprétée comme une densité de probabilité centrée en  $t_x$ . Son étalement autour de  $t_x$  est mesuré par la variance  $\Delta t_x$ . La fréquence médiane de  $X$  est définie par  $\omega_x$  et son étalement autour de  $\omega_x$  est mesuré par  $\Delta \omega_x$ . La résolution temps-fréquence de la fonction  $x$  peut être représentée alors dans le plan temps-fréquence  $(t, \omega)$  par une boîte de Heisenberg comme illustré dans la Figure 1.1. Cette boîte est centrée en  $(t_x, \omega_x)$ , de largeur temporelle  $\Delta t_x$  et dont la largeur fréquentielle vaut  $\Delta \omega_x$ .

Le rectangle de Heisenberg ou pavé temps-fréquence est une représentation intuitive de la couverture en temps et en fréquence d'une fonction. On associe également à une base dans  $L_2(\mathbb{R})$  un pavage du plan temps-fréquence, qui est un recouvrement du plan  $(t, \omega)$  par des rectangles de couverture des fonctions de la base. Les dimensions des boîtes de Heisenberg sont

généralement choisies de telle manière que les boîtes forment une partition<sup>1</sup> du plan temps-fréquence.

Cette représentation a un aspect arbitraire, d'autant qu'aucun résultat ne lie le fait qu'une famille soit une base au fait que les pavés temps-fréquence de la famille recouvrent le plan. Néanmoins, le pavage temps-fréquence donne une idée sur les propriétés de localisation temps-fréquence des fonctions de la base.

**Bases de Dirac et de Fourier** Les pavages temps-fréquence correspondant aux bases de fonctions de Dirac et de fonctions de Fourier sont représentés par des rectangles allongés en fréquence ou en temps respectivement, et sont donc bien localisés en temps ou en fréquence comme illustré dans la Figure 1.2 et la Figure 1.3 respectivement. Comme expliqué dans la section 1.1.1, la première représentation permet une information précise dans le temps. Par contre, la transformée de Fourier est très précise en fréquence mais ne donne pas d'information sur le contenu temporel de la fonction puisque l'intégration sur le temps se fait de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

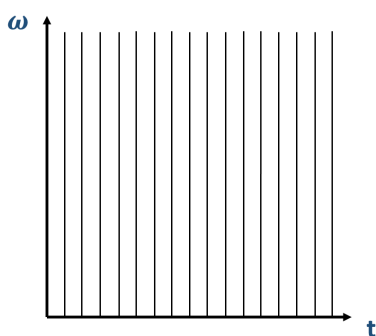


FIGURE 1.2 – Pavage temps-fréquence associé à la représentation de Dirac.

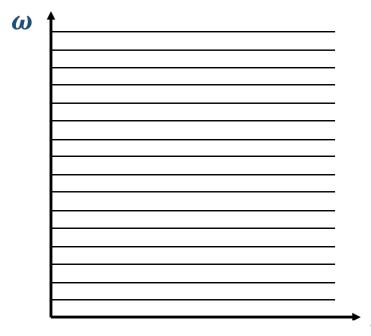


FIGURE 1.3 – Pavage temps-fréquence associé à la représentation de Fourier.

## 1.2 Transformée de Gabor

La transformée de Fourier est un outil important pour une grande variété d'applications, en particulier l'analyse des signaux stationnaires. Néanmoins, pour des phénomènes à caractères transitoires tels que le traitement des signaux non-stationnaires, la transformée de Fourier s'avère inadéquate puisqu'elle n'offre pas de détails sur l'évolution temporelle du signal. Or, la plupart des signaux ne sont pas stationnaires et c'est justement dans l'évolution de leurs caractéristiques que résident les informations. Une méthode intuitive pour analyser un signal non stationnaire est que l'analyse fréquentielle dépende du temps. Un signal non-stationnaire peut alors être divisé en des segments temporels durant lesquels il est considéré comme quasi-stationnaire. La transformée de Fourier est alors appliquée à chacun de ces segments. Ainsi, le domaine d'intégration temporelle est limité par une fenêtre, qu'on pourra faire glisser pour explorer le signal. Ce processus est appelé la transformée de Fourier à court terme, à fenêtre glissante de largeur fixe, ou la transformée de Gabor.

1. Une partition d'un ensemble  $\mathcal{A}$  est un ensemble de parties non vides de  $\mathcal{A}$  deux à deux disjointes et qui recouvrent l'ensemble  $\mathcal{A}$ .

### 1.2.1 Pavage temps-fréquence

Afin de fournir un premier aperçu des caractéristiques d'une base de Gabor dans le plan temps-fréquence, nous illustrons dans la Figure 1.4 le pavage temps-fréquence correspondant. On peut observer que le plan temps-fréquence est représenté par des boîtes translattées uniformément en temps et en fréquence.

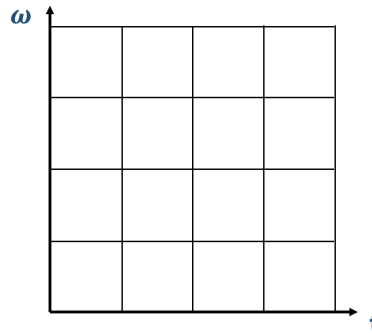


FIGURE 1.4 – Pavage temps-fréquence associé à la transformée de Fourier à court terme.

### 1.2.2 Famille de Gabor

#### Définition 1.2.1. (Famille de Gabor)

On définit une famille de Gabor de  $L_2(\mathbb{R})$ , toute famille de fonctions  $(g_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$  de  $L_2(\mathbb{R})$  qui vérifie :

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad g_{m,n}(t) = g(t - nT)e^{j2\pi mFt},$$

où  $g$  est une fonction prototype ou fenêtre,  $T$  est la période symbole et  $F$  est l'espacement entre porteuses. On appelle  $\rho = \frac{1}{TF}$  la densité de la famille de Gabor.

Dans un système de Gabor, on considère d'abord une fenêtre  $g$ , et ensuite on dérive les fonctions  $g_{m,n}$  par translation en temps et modulation en fréquence de la fonction prototype  $g$ . Les caractéristiques de la fenêtre  $g$  définissent les propriétés d'orthogonalité éventuelles du système de Gabor ainsi que ses propriétés temporelles et fréquentielles.

### 1.2.3 Exemples de fenêtres

Il existe différents types de fonctions de fenêtrage, chacun présentant des avantages et étant adapté à certaines applications. Une fenêtre idéale est une fenêtre dont la largeur du lobe principal est nulle et n'a pas de lobe secondaire. Mais il n'existe pas de solution miracle, le choix est fait en fonction des caractéristiques du signal. La fenêtre la plus usuelles est la fenêtre rectangulaire. Cette fenêtre peut être remplacée par d'autres fenêtre comme la fenêtre de Hamming, la fenêtre de Hanning et la fenêtre de Blackman entre autres.

Alors qu'avec la fenêtre rectangulaire chaque échantillon a le même poids, par exemple dans le calcul d'une transformée de Gabor, les autres fenêtres attribuent des poids différents aux échantillons selon leur position. Les échantillons centraux ayant plus de poids que ceux des bords. On parle de fenêtres de pondération ou de fonctions d'apodisation.

## 1.3 Transformée en ondelettes

Le pavage du plan temps-fréquence des systèmes de Gabor est régulier. Cependant, d'après le compromis entre les résolutions temporelle et fréquentielle exprimées dans le théorème 1.1.2, une résolution temporelle faible est liée à la détection des basses fréquences et

la détection des composantes hautes fréquences est associée à une résolution temporelle supérieure. Pour un pavage de l'espace temps-fréquence, il est plus judicieux que les deux résolutions varient en sens inverse en conservant un produit constant pour une énergie uniforme. Ainsi, l'espace temps-fréquence sera utilisé plus rationnellement en tenant en compte le compromis entre les deux résolutions. C'est ainsi que la transformée en ondelettes a été définie, en se caractérisant par un pavage non nécessairement régulier de l'espace temps-fréquence.

Dans cette section, nous proposons d'abord un premier aperçu du pavage temps-fréquence associé à une base en ondelettes et nous définissons la transformée en ondelettes continue ainsi que la transformée en ondelettes discrète. Ensuite, nous rappelons comment on peut construire à partir d'une fonction d'échelle  $\phi$  et une fonction d'ondelette  $\psi$  des bases dans  $L_2(\mathbb{R})$  pour une approximation multirésolution d'un signal. Nous expliquons comment la projection d'une fonction sur ces bases peut être implémentée par des filtres discrets. Finalement, on conclut que l'approximation d'un signal dans une base en ondelettes est une transformée en ondelettes et son calcul se fait par un algorithme rapide à base de filtres miroirs conjugués.

### 1.3.1 Pavage temps-fréquence

La Figure 1.5 propose un pavage temps-fréquence d'une transformée en ondelette discrète à un niveau maximal de décomposition. Il est simple d'interpréter qu'aux basses fréquences, la largeur (resp. la hauteur) des fenêtres est longue (resp. courte), donnant une bonne résolution fréquentielle (resp. une faible résolution temporelle). Dans les hautes fréquences, la largeur et la hauteur des fenêtres est courte et longue respectivement, permettant une bonne résolution temporelle et une faible résolution fréquentielle.

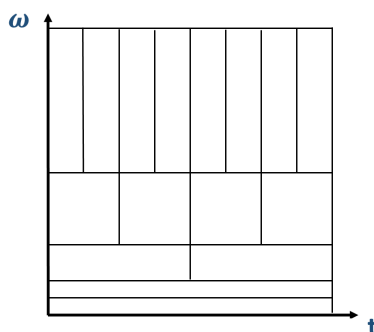


FIGURE 1.5 – Pavage temps-fréquence d'une transformée en ondelettes.

### 1.3.2 Transformée en ondelettes continue

Une ondelette  $\psi$  est une fonction dans  $L_2(\mathbb{R})$  de moyenne nulle :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0.$$

L'ondelette  $\psi$  est normalisée à  $\|\psi\|^2 = 1$ . Une famille d'ondelettes  $\psi_{k,s}$  s'obtient par une dilatation par un paramètre d'échelle  $s$ , et par une translation de  $k$  de l'ondelette mère :

$$\psi_{k,s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-k}{s}\right).$$

Les fonctions  $\psi_{k,s}$  restent de norme  $\|\psi\|_{k,s}^2 = 1$ . La transformée en ondelettes d'une fonction  $x$  à l'échelle  $s$  et à la position  $k$  se calcule par la projection de  $x$  sur l'ondelette correspondante :

$$\begin{aligned} W_x(k, s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi_{k,s}^*(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^*\left(\frac{t-k}{s}\right) dt, \end{aligned}$$

où  $\psi^*$  est la fonction complexe conjuguée de  $\psi$ .

La fonction  $x$  peut être reconstruite par la transformée inverse

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_x(k, s) \psi^*\left(\frac{t-k}{s}\right) \frac{dk}{|k|^2} ds,$$

où l'on suppose

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < +\infty.$$

Avec  $\Psi$  est la transformée de Fourier de  $\psi$ . La condition  $C_\psi < +\infty$  s'appelle la condition d'admissibilité. Si  $\Psi(0) = 0$ , et  $\Psi$  est continûment différentiable, alors la condition d'admissibilité est satisfaite.

### 1.3.3 Transformée en ondelettes discrète

Morlet a proposé de construire des bases de fonctions satisfaisant

$$\psi_{j,k}(t) = b^{-j/2} \psi(b^{-j}t - k).$$

avec  $b$  un paramètre d'échelle et  $k$  un paramètre de translation. Une gamme d'échelles couramment utilisée est la gamme des échelles dyadiques  $b = 2$ , on obtient alors

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k).$$

En posant  $j \rightarrow -j$  on obtient

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k). \quad (1.8)$$

De la même façon, on définit les fonctions d'échelles

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k). \quad (1.9)$$

La transformée en ondelette discrète (DWT) décompose un signal en des coefficients de détails qui correspondent à sa projection sur les fonctions en ondelettes, et des coefficients d'approximation qui correspondent à sa projection sur les fonctions d'échelle de la première échelle considérée.

Dans [11], Mallat a étudié la relation entre les fonctions de représentation temps-échelle et les filtres miroirs conjugués. C'est ainsi qu'il a défini une transformée en ondelettes rapide. Comme nous allons le présenter dans la section 1.3.5, les ondelettes et les fonctions d'échelles sont associées à des filtres passe-haut et passe-bas respectivement. Nous allons rappeler que la décomposition du signal (DWT) est obtenue en filtrant successivement le signal par un filtre passe-bas et un filtre passe-haut suivi par un sous-échantillonnage. Nous commençons d'abord par l'étude des approximations multirésolution.

### 1.3.4 Analyse multirésolutions

Les approximations multirésolution calculent l'approximation d'un signal à plusieurs résolutions par projection orthogonale sur une famille d'espaces  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ .

**Définition 1.3.1. (Approximation multirésolution)** Une approximation multirésolution est une famille de sous-espaces fermés  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  de  $L^2(\mathbb{R})$  qui vérifie les propriétés suivantes :

$$\forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2, \quad x(t) \in V_j \Leftrightarrow x(t - 2^{-j}k) \in V_j, \quad (1.10)$$

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad V_j \subset V_{j+1}, \quad (1.11)$$

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad x(t) \in V_j \Leftrightarrow x(2t) \in V_{j+1}, \quad (1.12)$$

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}, \quad (1.13)$$

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L_2(\mathbb{R}). \quad (1.14)$$

$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j}$  représente l'adhérence de l'espace  $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ . Nous pouvons faire les remarques suivantes :

- D'après la propriété (1.10),  $V_j$  est invariant par toute translation de longueur proportionnelle à l'échelle  $2^{-j}$ .
- L'inclusion (1.11) est une propriété de causalité qui signifie qu'une approximation à la résolution  $2^{j+1}$  dans l'espace  $V_{j+1}$  contient toute l'information nécessaire au calcul d'une approximation à une résolution plus grossière  $2^j$  dans l'espace  $V_j$ .
- La contraction par 2 des fonctions de  $V_j$  agrandit les détails d'un facteur de 2 et la condition (1.12) garantit que l'on a alors une approximation à une résolution plus fine  $2^{j+1}$ .
- Selon (1.13), lorsque la résolution  $2^j$  tend vers 0, on perd tous les détails du signal, et la norme de sa projection est égale à 0.
- Quand la résolution  $2^j$  tend vers l'infini, l'approximation converge vers le signal comme exprimé dans (1.14).

Une approximation multirésolution de  $x$  à la résolution  $2^j$  est définie comme sa projection orthogonale sur un espace  $V_j \subset L_2$ . Or, on peut montrer [11] qu'il existe une fonction dite fonction d'échelle  $\phi(t) \in L_2(\mathbb{R})$  qui, par contractions et translations, engendre une base orthonormée de  $V_j$  :  $\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\phi(2^j t - k)$ . Alors, la projection orthogonale de  $x$  sur  $V_j$  est la décomposition de  $x$  sur la base des fonctions d'échelle et les coefficients de cette décomposition constituent l'approximation à l'échelle  $-j$  de  $x$ .

On définit maintenant pour chaque  $V_j$  son complément orthogonal  $W_j$  dans  $V_{j+1}$  appelé espace des détails tel que

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad \text{et} \quad L_2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j. \quad (1.15)$$

Les sous espaces  $W_j$  sont orthogonaux entre eux et ne forment pas une famille d'espaces emboîtés comme  $V_j$ , mais les propriétés d'échelle et d'invariance par translation sont conservées. On peut montrer [11] qu'il existe une fonction  $\psi$  appelée ondelette, qui par contractions et translations engendre une base orthonormée des  $W_j$  :  $\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k)$ .

La décomposition en ondelettes discrète peut être représentée par un arbre binaire illustré dans la Figure 1.6. Les nœuds de l'arbre représentent des sous-espaces vectoriels.  $V_j$  représente la racine de l'arbre et correspond au plus grand espace vectoriel (au sens de l'inclusion). Chaque nœud  $V_j$  est décomposé en deux nœud fils  $V_{j-1}$  et  $W_{j-1}$  en somme directe selon l'équation (1.15).

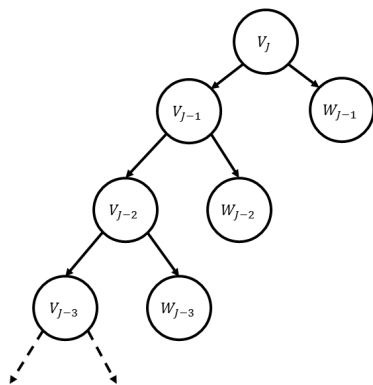


FIGURE 1.6 – Arbre binaire associé à une décomposition en ondelettes.

### 1.3.5 Filtres miroirs conjugués

En se basant sur la propriété (1.11), nous avons en particulier  $2^{-1/2}\phi(t/2) \in V_{-1} \subset V_0$ . Comme  $\{\phi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $V_0$ , on a

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\phi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f^b[n]\phi(t-n),$$

avec

$$f^b[n] = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\phi\left(\frac{t}{2}\right) \middle| \phi(t-n) \right\rangle.$$

La suite  $f^b[n]$  peut être considérée comme un filtre discret. Par ailleurs, toute fonction d'échelle est caractérisée par un filtre discret appelé *filtre miroir conjugué*.

**Théorème 1.3.1. (Mallat, Meyer)** Soit  $\phi \in L_2(\mathbb{R})$  une fonction d'échelle intégrable. Alors la série de Fourier de  $f^b[n] = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\phi\left(\frac{t}{2}\right) \middle| \phi(t-n) \right\rangle$  vérifie

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, |F^b(\omega)|^2 + |F^b(\omega + \pi)|^2 = 2, \quad (1.16)$$

$$\text{et } F^b(0) = \sqrt{2}. \quad (1.17)$$

Les filtres discrets dont la fonction de transfert vérifie (1.16) et (1.17) s'appellent des filtres miroirs conjugués.

Similairement, d'après la propriété (1.15), on a  $V_0 = V_{-1} \oplus W_{-1}$ . Sachant que  $\frac{1}{\sqrt{2}}\psi\left(\frac{t}{2}\right) \in W_{-1}$ , alors  $\frac{1}{\sqrt{2}}\psi\left(\frac{t}{2}\right) \in V_0$ , d'où

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\psi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f^h[n]\phi(t-n),$$

avec

$$f^h[n] = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\psi\left(\frac{t}{2}\right) \middle| \phi(t-n) \right\rangle.$$

$f^h[n]$  étant un filtre miroir conjugué. On peut montrer [11] que  $f^b[n]$  et  $f^h[n]$  sont liés par la relation suivante

$$f^h[n] = (-1)^{1-n} f^b[1-n].$$

Nous pouvons conclure que la fonction d'échelle  $\phi$  et l'ondelette  $\psi$  sont entièrement définies par des filtres discrets  $f^b$  et  $f^h$ . Les formules sont

$$\begin{aligned}\Phi(\omega) &= \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{F^b(2^{-n}\omega)}{\sqrt{2}}, \\ \Psi(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}} F^h\left(\frac{\omega}{2}\right) \Phi\left(\frac{\omega}{2}\right).\end{aligned}$$

Ces filtres fournissent une procédure simple pour construire des bases orthogonales d'ondelettes. Ainsi, la décomposition d'un signal sur une base orthonormée d'ondelettes s'effectue à l'aide des filtres miroirs conjugués associés à la fonction d'échelle et l'ondelette associée.

### 1.3.6 Transformée en ondelettes rapide

Une transformée en ondelettes rapide calcule les coefficients de la projection d'un signal sur  $V_j$  et les coefficients d'ondelettes correspondant dans  $W_j$ , à partir de son approximation dans l'espace  $V_{j+1}$ . À la reconstruction, la projection du signal sur  $V_{j+1}$  est calculée à partir des coefficients de sa projection sur  $V_j$  et  $W_j$ . La décomposition et la reconstruction se font à l'aide d'un algorithme rapide qui cascade des convolutions discrètes avec les filtres  $f^b$  et  $f^h$  comme annoncé dans le théorème 1.3.2.

**Théorème 1.3.2. (Mallat)** *Lors de la décomposition, on a*

$$a_j[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f^b[n-2k]a_{j+1}[n] = a_{j+1} \star f^b[-2k], \quad (1.18)$$

$$w_j[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f^h[n-2k]a_{j+1}[n] = a_{j+1} \star f^h[-2k]. \quad (1.19)$$

*Lors de la reconstruction on a*

$$a_{j+1}[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f^b[k-2n]a_j[n] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f^h[k-2n]w_j[n] \quad (1.20)$$

$$= a_j \star f^b[k] + w_j \star f^h[k]. \quad (1.21)$$

Le théorème 1.3.2 décrit un algorithme rapide pour implémenter la transformée en ondelettes. Une représentation schématique de cet algorithme est illustrée dans la Figure 1.7. Pour calculer les coefficients  $a_j$  et  $w_j$ , on prend un échantillon sur deux de la convolution de  $a_{j+1}$  avec un filtre passe-bas  $f^b$  et un filtre passe-haut  $f^h$  respectivement. Le filtre  $f^b$  enlève les hautes fréquences de la suite  $a_{j+1}$ , alors que  $f^h$  récupère les hautes fréquences supprimées. La reconstruction procède à un suréchantillonnage de la suite des symboles  $a_j$  et  $w_j$  doublant ainsi leur longueur, puis à un filtrage. Ce processus correspond à un seul niveau de décomposition d'une transformée en ondelettes, et ce qui représente une division d'un nœud père en deux nœuds fils dans l'arbre binaire (Figure 1.6).

### 1.3.7 Analyse des moments d'ordre 1 et 2

Afin de mettre en évidence les relations entre les ondelettes constituant une base d'ondelettes, en temps et en fréquence, nous allons nous référer aux moments d'ordre un et deux en temps et en fréquence définis dans (1.1), (1.2), (1.3) et (1.4).

Soit  $\psi$  une ondelette dans  $L_2(\mathbb{R})$  et  $\Psi$  sa transformée de Fourier. Sans perte de généralité, nous considérons que le moment d'ordre 1 en temps est nul ( $t_\psi = 0$ ). Les moments d'ordre un

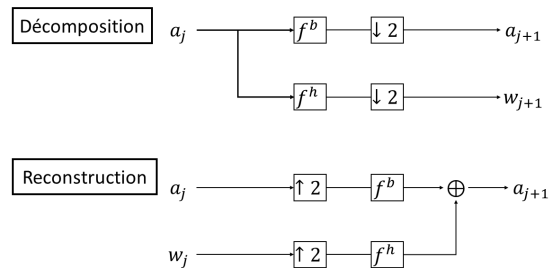


FIGURE 1.7 – Niveau de décomposition et reconstruction d'une transformée en ondelettes discrètes.

et deux des fonctions  $(\psi_{j,k})_{j \in \llbracket J_0, J-1 \rrbracket, k \in \llbracket 0, 2^j-1 \rrbracket}$  dans les domaines temporel et fréquentiel, sont déduit des moments d'ordre un et deux de la fonction d'ondelette mère  $\psi$  comme suivant :

$$t_{\psi_{j,k}} = 2^{-j}(t_{\psi} + k) = 2^{-j}(k), \quad (1.22)$$

$$f_{\Psi_j} = 2^j f_{\Psi}, \quad (1.23)$$

$$\Delta t_{\psi_{j,k}} = 2^{-j} \Delta t_{\psi}, \quad (1.24)$$

$$\Delta f_{\Psi_j} = 2^j \Delta f_{\Psi}. \quad (1.25)$$

Nous pouvons observer que, dans le domaine temporel, les ondelettes de chaque échelle sont translatées dans le temps, et ont la même localisation temporelle. Dans le domaine fréquentiel, les ondelettes de chaque échelle ont la même localisation fréquentielle, et occupent ainsi la même bande passante. En passant d'un niveau au suivant, la localisation temporelle est divisée par 2, et la localisation fréquentielle est multipliée par un facteur de 2.

Les fonctions d'échelle  $(\phi_{J_0,k})_{k \in \llbracket 0, 2^{J_0}-1 \rrbracket}$  vérifient des relations similaires avec la fonction d'échelle mère.

### 1.3.8 Exemples d'ondelettes

On étudie dans cette section quelques classes importantes d'ondelettes : les ondelettes de Shannon et de Meyer qui ont un support fréquentiel fini et les ondelettes de Daubechies à support temporel fini.

**Ondelette de Shannon** Dans le domaine fréquentiel, l'ondelette de Shannon ainsi que la fonction d'échelle associée sont définies par

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) &= \mathbf{1}_{[-\pi, \pi]}, \\ \Psi(\omega) &= \begin{cases} \exp(-i\omega/2), & \text{si } \omega \in [-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi] \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Dans le domaine temporel, l'ondelette de Shannon est exprimée par

$$\psi(t) = \frac{\sin 2\pi(t-1/2)}{2\pi(t-1/2)} - \frac{\sin \pi(t-1/2)}{\pi(t-1/2)}.$$

Cette ondelette est de classe  $C^\infty$  et décroît lentement à l'infini. Ceci vient du fait que  $\Psi(\omega)$  est à support compact mais a des discontinuités en  $\pm\pi$  et  $\pm 2\pi$ . L'ondelette de Shannon est à support temporel infini.

**Ondelettes de Meyer** La transformée de Fourier d'une ondelette de Meyer [12] a un support compact, comme l'ondelette de Shannon, tout en étant régulière, contrairement à l'ondelette de Shannon. Cette régularité conduit à une décroissance en temps plus rapide à l'infini. Dans le domaine fréquentiel, la fonction d'échelle est donnée par

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} 2^{-1/2} F^b(\omega/2), & \text{si } |\omega| \leq 4\pi/3 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.26)$$

Avec  $F^b(\omega)$  le filtre miroir conjugué associé à  $\Phi$  et qui est défini par

$$F^b(\omega) = \begin{cases} \sqrt{2}, & \text{si } \omega \in [-\pi/3, \pi/3] \\ 0, & \text{si } \omega \in [-\pi, -2\pi/3] \cup [-2\pi/3, \pi]. \end{cases}$$

Sur les bandes intermédiaires  $[-2\pi/3, -\pi/3] \cup [\pi/3, 2\pi/3]$ , le choix du  $F^b(\omega)$  doit vérifier la condition de quadrature suivante

$$|F^b(\omega)|^2 + |F^b(\omega + \pi)|^2 = 2.$$

L'ondelette correspondante à la fonction d'échelle définie dans (1.26) vaut

$$\Psi(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{si } |\omega| \leq 2\pi/3 \\ 2^{-1/2} F^h(\omega/2), & \text{si } 2\pi/3 \leq |\omega| \leq 4\pi/3 \\ 2^{-1/2} \exp(-i\omega/2) F^b(\omega/4), & \text{si } 4\pi/3 \leq |\omega| \leq 8\pi/3 \\ 0, & \text{si } |\omega| > 8\pi/3. \end{cases}$$

Avec  $F^h(\omega)$  le filtre miroir conjugué associé à  $\Psi$  et qui est défini par

$$F^h(\omega) = e^{-i\omega} F^{b*}(\omega + \pi).$$

Les fonctions  $\psi$  et  $\phi$  sont de classe  $C^\infty$  car leur transformée de Fourier est à support compact.

La Figure 1.8 représente une ondelette de Meyer discrète (Dmey)<sup>2</sup> et sa fonction d'échelle associée. Dmey est une approximation de l'ondelette de Meyer à base d'un filtre à réponse impulsionnelle finie. L'ondelette de Dmey est orthogonale et compatible avec la transformée en ondelettes discrète.

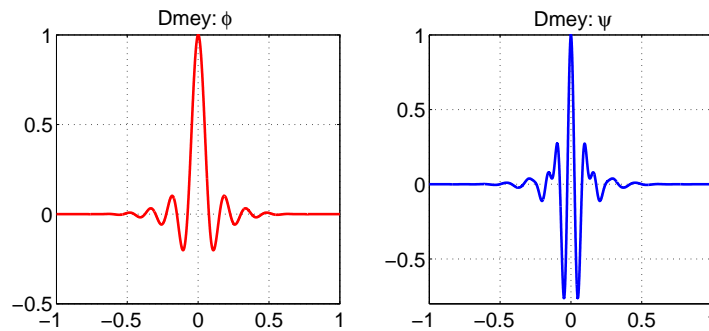


FIGURE 1.8 – Ondelette de Meyer  $\psi$  et sa fonction d'échelle associée  $\phi$ .

2. Les fonctions d'ondelettes et d'échelle sont générées en utilisant la commande Matlab wavefun('dmey') du Wavelet Toolbox.

**Ondelette de Haar** L'ondelette de Haar est l'ondelette orthogonale dont le support temporel est le plus petit. Elle correspond à une multirésolution de fonctions constantes par morceaux. La fonction d'échelle ainsi que la fonction d'ondelette sont illustrées dans la Figure 1.9. Elles sont définies par

$$\phi(t) = \mathbf{1}_{[0,1]},$$

$$\psi(t) = \begin{cases} -1, & \text{pour } 0 \leq t < 1/2 \\ 1, & \text{pour } 1/2 \leq t < 1 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

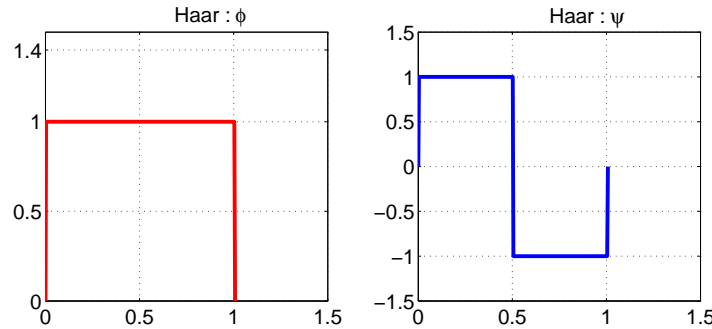


FIGURE 1.9 – Ondelette de Haar  $\psi$  et sa fonction d'échelle associée  $\phi$ .

**Ondelettes de Daubechies** Les ondelettes de Daubechies sont caractérisées par le nombre  $p$  des moments nuls. Elles sont à support compact et se calculent donc à partir de filtres miroirs conjugués  $f^b$  de réponse impulsionnelle finie. Pour que  $\psi$  ait  $p$  moments nuls, il faut que  $F^b(\omega)$ , la transformée de Fourier de  $f^b$ , ait un zéro d'ordre  $p$  en  $\omega = \pi$ . Ainsi,  $F^b(\omega)$  est exprimé par

$$F^b(\omega) = \sqrt{2} \left( \frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^p R(e^{-i\omega}), \quad (1.27)$$

avec  $R(e^{-i\omega})$  un polynôme de degré minimum  $p - 1$  et satisfaisant la condition

$$|F^b(\omega)|^2 + |F^b(\omega + \pi)|^2 = 2.$$

Quand  $p$  vaut 1, on obtient l'ondelette de Haar définie précédemment. la Figure 1.10 montre les graphes de  $\phi$  et  $\psi$  pour  $p = 2, 3, 4, 5$ .

Ils existent d'autres familles d'ondelettes dans la littérature, que nous avons choisi de ne pas aborder ici, comme les Symlettes, les Coiffettes ou les ondelettes biorthogonales. Ces ondelettes ont été construites pour être utilisées dans différentes applications.

## 1.4 Transformée en paquets d'ondelettes

Bien que la transformée en ondelettes soit flexible par rapport à la transformée de Gabor, elle est contrainte par un découpage à croissance dyadique du plan temps-fréquence. La transformée en paquets d'ondelettes, comme nous allons le voir dans cette section, permet plus de flexibilité dans la découpe du plan temps-fréquence. La transformée en ondelettes ne représente ainsi qu'un cas particulier de la transformée en paquets d'ondelettes. Nous allons voir les différentes décompositions possibles qu'offre la transformée en paquets d'ondelettes et donc les différentes bases possibles en paquets d'ondelettes. Nous introduisons la notion d'une "meilleure" base en paquets d'ondelettes, qui nous sera d'une grande utilité dans la chapitre 8.

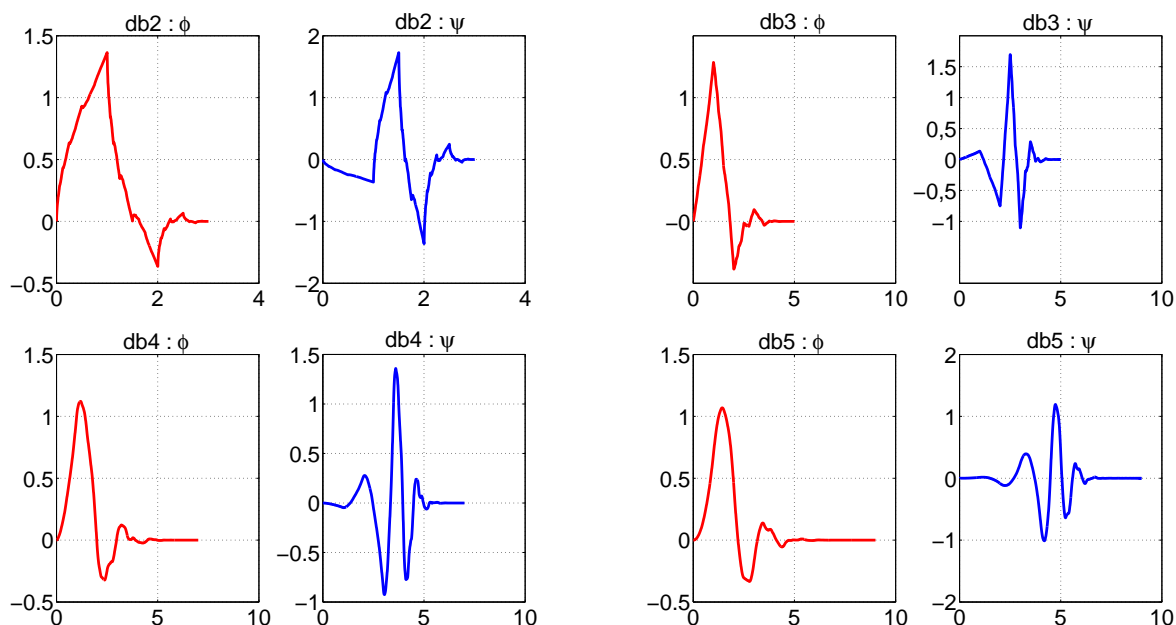


FIGURE 1.10 – Fonctions d'échelles  $\psi$  et ondelettes  $\phi$  de Daubechies avec  $p = 2, 3, 4, 5$  moments nuls.

### 1.4.1 Pavage temps-fréquence

Une transformée en ondelettes découpe l'axe temporel en des intervalles dyadiques dont les largeurs ont une croissance exponentielle, comme le montre la Figure 1.11. Les paquets d'ondelettes généralisent cette construction dyadique en découpant les fréquences en plusieurs intervalles dont les largeurs peuvent varier d'une manière plus flexible. La division de l'axe fréquentiel par les paquets d'ondelettes est effectuée par des ondelettes translatées uniformément dans le temps.

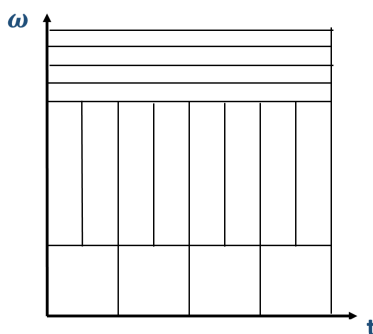


FIGURE 1.11 – Pavage temps-fréquence d'une transformée en paquets d'ondelettes.

### 1.4.2 Bases de paquets d'ondelettes

Les paquets d'ondelettes ont été définis par Coifman, Meyer et Wickerhauser [13]. Au lieu de diviser seulement les espaces d'approximation  $V_j$  pour construire des bases d'ondelettes, on peut également diviser les espaces de détails  $W_j$  pour en déduire de nouvelles bases. L'ensemble des bases en paquets d'ondelettes peut être illustré par un arbre binaire comme décrit dans la Figure 1.12. L'espace vectoriel  $P_j^0 = V_j$  dénote la racine de l'arbre binaire correspondante à cette décomposition en paquets d'ondelettes. On repère chaque nœud de cet arbre par

l'indice  $(j, m)$  où  $J - j$  est la profondeur de l'arbre et  $m$  est le nombre de nœuds qui se trouvent à gauche à la même profondeur. À chaque nœud est associé un espace  $\mathcal{P}_j^m = \mathcal{P}_{j-1}^{2m} \oplus \mathcal{P}_{j-1}^{2m+1}$  qui admet une base orthonormale  $\mathcal{B}_j^m = \{\mathcal{P}_j^m(2^j t - k)\}$ . On a alors  $\mathcal{P}_J^0 = \phi_J$ .

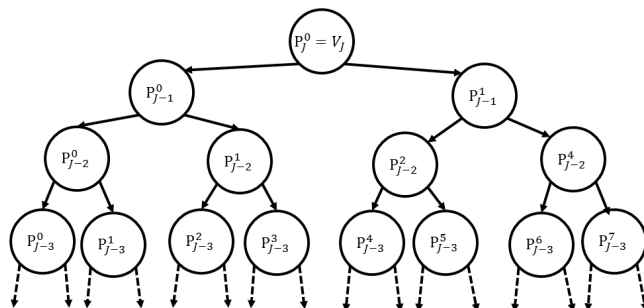


FIGURE 1.12 – Arbre binaire associé à une décomposition en paquets d'ondelettes.

**Arbre admissible** À partir d'un arbre binaire (Figure 1.12), nous pouvons identifier plusieurs arbres admissibles. Un arbre est dit *admissible* si chaque nœud de l'arbre a 0 ou 2 nœuds fils, comme dans la Figure 1.13. Les nœuds au long des branches de cet arbre représentent des espaces vectoriels deux à deux orthogonaux. La réunion des bases de paquets d'ondelettes correspondant définit une base orthogonale de la racine de l'arbre  $\mathcal{P}_J^0 = V_J$ .

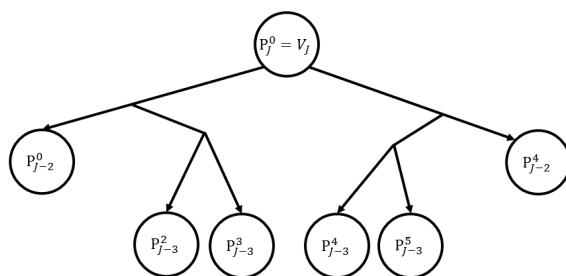


FIGURE 1.13 – Arbre binaire admissible de paquets d'ondelettes.

**Filtres en paquets d'ondelettes** Une base orthonormale à paquets d'ondelettes  $\{\mathcal{P}_j^m(t)\}$  est dérivée en appliquant récursivement un filtre passe-haut  $f^h$  et un filtre passe-bas  $f^b$  :

$$\mathcal{P}_{j-1}^{2m}(t) = \sum_k f^b(k) \mathcal{P}_j^m(2^{-j}t - k) \quad (1.28)$$

$$\mathcal{P}_{j-1}^{2m+1}(t) = \sum_k f^h(k) \mathcal{P}_j^m(2^{-j}t - k). \quad (1.29)$$

Les filtres miroirs  $f^b$  et  $f^h$  sont reliés par la relation suivante

$$f^h[k] = (-1)^k f^b[1-k].$$

Leurs réponses impulsionnelles satisfont les conditions

$$\sum_k f^b(k-2n)f^b(k-2l) = \delta_{nl}, \quad \text{et} \quad \sum_k f^b(k) = \sqrt{2}$$

$$\sum_k f^h(k-2n)f^h(k-2l) = \delta_{nl}, \quad \text{et} \quad \sum_k f^h(k) = \sqrt{2}.$$

**Algorithme de décomposition en paquets d'ondelettes** On note  $\tilde{x}$  le signal obtenu en insérant un zéro entre chaque échantillon de  $x$ . La proposition suivante permet de calculer itérativement les coefficients en paquets d'ondelettes.

**Proposition 1.4.1.** (Transformée rapide en paquets d'ondelettes)

Lors de la décomposition, on a

$$w_{j-1}^{2m}[k] = w_j^m \star f^b[-2k], \quad (1.30)$$

$$w_{j-1}^{2m+1}[k] = w_j^m \star f^h[-2k]. \quad (1.31)$$

Lors de la reconstruction on a

$$w_j^m[k] = w_{j-1}^{2m} \star f^b[k] + w_{j-1}^{2m+1} \star f^h[k]. \quad (1.32)$$

L'algorithme exprimé dans la proposition 1.4.1 peut être illustré dans le schéma de la Figure 1.14. Notons  $x_-[k] = x[-k]$ . Les coefficients des paquets d'ondelettes fils  $w_{j-1}^{2m}$  et  $w_{j-1}^{2m+1}$  s'obtiennent en sous-échantillonnant les convolutions de  $w_j^m$  par  $f^b[-k]$  et  $f^h[-k]$ . En itérant les relations (1.30),(1.31) et (1.32), nous pouvons calculer tous les coefficients des paquets d'ondelettes.

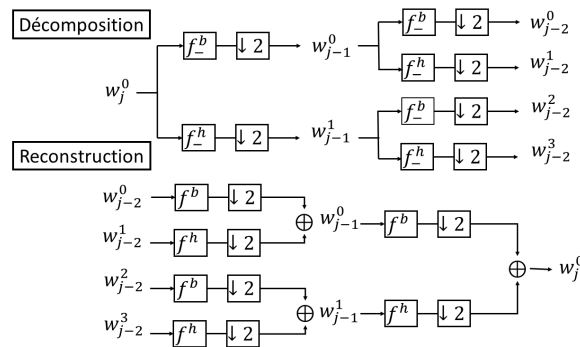


FIGURE 1.14 – Niveau de décomposition et reconstruction d'une transformée en paquets d'ondelettes.

### 1.4.3 Paquets d'ondelettes de Walsh

Dans les sections 5.6 et 6.4, nous étudions des systèmes de communications à base de fonctions de Walsh. Ces fonctions correspondent à des paquets d'ondelettes de Walsh engendrés par le filtre miroir conjugué de Haar.

$$f_{\text{haar}}^b[k] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{pour } k = 0, 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Les fonctions de Walsh  $\mathcal{P}_j^m$  sont constantes par morceaux et ont un support de taille  $2^j$ . Les relations (1.28) et (1.29) deviennent

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{j-1}^{2m}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{P}_j^m(2^{-j}t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{P}_j^m(2^{-j}t - 1) \\ \mathcal{P}_{j-1}^{2m+1}(t) &= \sum_k \mathcal{P}_j^m(2^{-j}t) - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{P}_j^m(2^{-j}t - 1).\end{aligned}$$

Le support temporel des paquets d'ondelettes de Walsh est de longueur  $2^j$ . Sur son support, l'ondelette  $\mathcal{P}_j^m$  prend deux valeurs possibles  $2^{-j/2}$  ou  $-2^{-j/2}$ . Soit  $0 \leq p \leq 2^j$ , le nombre de changement de signe  $N_p$  est défini par la relation de permutation suivante

$$\begin{aligned}N_{2p} &= \begin{cases} 2N_p, & \text{pour } N_p \text{ pair} \\ 2N_p + 1, & \text{pour } N_p \text{ impair} \end{cases} \\ N_{2p+1} &= \begin{cases} 2N_p + 1, & \text{pour } N_p \text{ pair} \\ 2N_p, & \text{pour } N_p \text{ impair} \end{cases}.\end{aligned}$$

Un paquet d'ondelettes de Walsh est donc un signal à  $N_p$  oscillations sur un support de taille  $2^j$ .

Par ailleurs, les colonnes d'une matrice de Hadamard de dimension  $M = 2^Q$ , définissent une base  $\{W_q\}$  de fonctions de Walsh (voir la Figure 1.15 pour  $Q = 3$ ). La matrice de Hadamard est définie par la formule récursive suivante

$$H_w(2^1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

et pour  $2 \leq q \leq Q$  :

$$H_w(2^q) = \begin{pmatrix} H_w(2^{q-1}) & H_w(2^{q-1}) \\ H_w(2^{q-1}) & -H_w(2^{q-1}) \end{pmatrix} = H_w(2) \otimes H_w(2^{q-1}),$$

où  $\otimes$  désigne le produit de Kronecker.

L'implémentation de la transformée de Walsh-Hadamard basée sur les paquets d'ondelettes de Walsh ou la matrice de Hadamard a une simple structure basée sur des soustractions et des additions seulement. En effet, on constate que la matrice de Hadamard se compose seulement des entrées  $+1$  et  $-1$ , et la transformée de Walsh-Hadamard peut être implémentée en utilisant l'algorithme de radix-2, ce qui rend le nombre d'additions complexes nécessaires limité à l'ordre  $\mathcal{O}(M \log_2 M)$  [14].

#### 1.4.4 Nombre de bases de paquets d'ondelettes

La proposition suivante montre qu'il y a au moins  $2^{2^J-1}$  bases orthogonales de paquets d'ondelettes contenues dans un arbre de profondeur  $J$ .

**Proposition 1.4.2.** *Le nombre  $\mathcal{B}_J$  de bases orthogonales de paquets d'ondelettes dans un arbre de profondeur  $J$  vérifie*

$$2^{2^J-1} \leq \mathcal{B}_J \leq 2^{\frac{5}{4}2^J-1}.$$

La preuve de cette proposition se fait par récurrence [11].

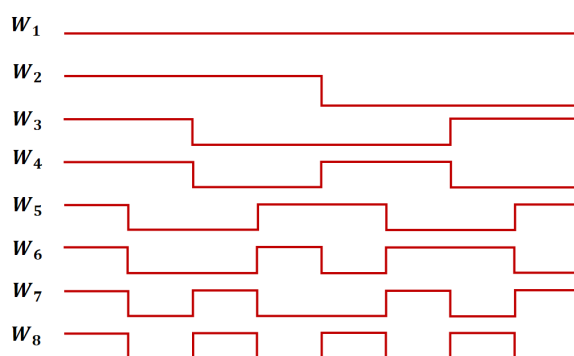


FIGURE 1.15 – Fonctions de Walsh-Hadamard.

### 1.4.5 Sélection d’une “meilleure” base selon un critère prédéfini

Comme donné par la proposition 1.4.2, le nombre de bases de paquets d’ondelettes possibles pour un signal de taille  $M = 2^J$  dépasse  $2^{M/2}$  bases. Si à chaque base on associe un coût, la recherche de la meilleure base nécessiterait  $M2^{M/2}$  opérations, ce qui n’est pas pratiquement abordable. L’algorithme de programmation dynamique rapide proposé par Coifman et Wickerhauser [15] sélectionne la meilleure base en réduisant le nombre d’opérations nécessaires à l’ordre de  $\mathcal{O}(M \log_2 M)$ .

**Principe de la programmation dynamique** Un arbre de paquets d’ondelettes contient plusieurs nœuds (voir la Figure 1.12), et chaque nœud d’un arbre représente un espace vectoriel  $P_j^m$ . Celui-ci est divisé en deux sous-espaces orthogonaux  $P_{j-1}^{2m}$  et  $P_{j-1}^{2m+1}$  représentant les nœuds fils. L’espace orthogonal  $P_j^m$  admet une base  $\mathcal{B}_j^m$ . Nous pouvons construire une nouvelle base de  $P_j^m$  par réunion des bases orthogonales  $\mathcal{B}_{j-1}^{2m}$  et  $\mathcal{B}_{j-1}^{2m+1}$  de  $P_{j-1}^{2m}$  et  $P_{j-1}^{2m+1}$  respectivement.

En attribuant à chaque base  $\mathcal{B}_j^m$  du nœud  $P_j^m$  un coût  $\mathcal{C}(\mathcal{B}_j^m)$  additif, la meilleure base de ce nœud est celle qui minimise ce coût parmi toutes les bases pouvant être construites avec les vecteurs de l’arbre.

## Conclusion

Nous avons rappelé dans ce chapitre quelques propriétés importantes d’analyse temps-fréquence. Nous avons vu que, selon la transformée appliquée, le signal résultant est représenté différemment dans le plan temps-fréquence. Pour évaluer le contenu informatif du signal autour d’un certain instant ou une certaine fréquence, nous utilisons une mesure de localisation temps-fréquence basée sur les moments d’ordre 2 de ce signal. Par ailleurs, les résolutions temporelles et fréquentielles sont contraintes au compromis du principe d’incertitude. Ensuite, nous avons traité deux représentations du signal : la transformée de Gabor qui se caractérise par un pavage temps-fréquence rigide et régulier, et les transformées en ondelettes et en paquets d’ondelettes qui permettent un pavage temps-fréquence plus flexible et offrent ainsi un degré de liberté supplémentaire. Comme nous allons le voir dans le chapitre suivant, les différentes façons de représenter un signal engendrent différents systèmes de communications, chacun se caractérise par des propriétés et des performances distinctes.



# Chapitre 2

## Modulations multiporteuses

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Multiporteuses basées sur la transformée de Gabor . . . . .</b>	<b>39</b>
2.1.1	Notions d'orthogonalité et de biorthogonalité . . . . .	40
2.1.2	Systèmes orthogonaux . . . . .	41
2.1.3	Systèmes non-orthogonaux . . . . .	48
<b>2.2</b>	<b>Multiporteuses basées sur la transformée en ondelettes . . . . .</b>	<b>49</b>
2.2.1	Les ondelettes dans les communications sans fils . . . . .	49
2.2.2	Wavelet-OFDM . . . . .	50
2.2.3	Wavelet Packet OFDM . . . . .	51

---

La manière dont les données sont multiplexées et modulées définit l'occupation temporelle et fréquentielle du signal résultant. Par exemple, les symboles peuvent être transmis successivement dans le temps, tels que pour chaque période donnée, le symbole occupe toute la bande disponible. Ou bien, les symboles peuvent être transmis simultanément dans le temps, occupant des bandes parallèles. La durée temporelle ainsi que la largeur de bande peuvent être allouées uniformément ou non-uniformément à chaque symbole. En fonction de la méthode de multiplexage et de modulation choisie, la représentation du signal dans le plan temps-fréquence diffère. Dans ce chapitre, nous proposons une classification des modulations multiporteuses en fonction des caractéristiques temporelles et fréquentielles du signal transmis. Cette classification est résumée brièvement dans la Figure 2.1.

Dans le contexte de la transmission des données, les modulations multiporteuses se réfèrent à une structure dans laquelle plusieurs symboles sont envoyés en même temps en occupant des sous-bandes différentes. La décomposition de la bande peut être uniforme ce qui conduit à des modulations basées sur les systèmes de Gabor, ou non-uniforme ce qui génère des systèmes de modulation en ondelettes ou en paquets d'ondelettes.

### 2.1 Multiporteuses basées sur la transformée de Gabor

Dans une famille de Gabor, on considère une fonction de mise en forme  $g$  comme une fonction prototype, et les autres fonctions  $g_{m,n}$  sont dérivées du premier filtre prototype  $g$  par translation en temps et modulation en fréquence. Les caractéristiques du filtre prototype ainsi que la base de modulation et de démodulation définissent si le système multiporteuses (base de modulation et base de démodulation) est orthogonal ou non-orthogonal.

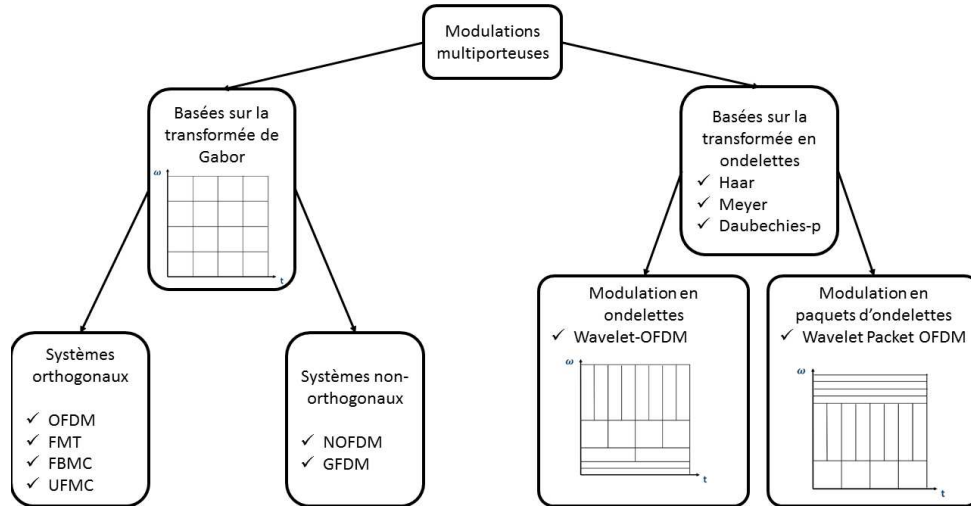


FIGURE 2.1 – Classification des modulations multiporteuses.

### 2.1.1 Notions d'orthogonalité et de biorthogonalité

Soit  $\{g_m\}_{m \in I}$  et  $\{\tilde{g}_m\}_{m \in I}$  deux familles de fonctions dans  $L_2(\mathbb{R})$ . L'analyse d'un signal dans la base  $\{\tilde{g}_m\}$  est la décomposition du signal en plusieurs composantes à travers sa projection sur cette base. La synthèse consiste à combiner plusieurs coefficients en un seul signal exprimé dans la base  $\{g_m\}$ .

Dans le contexte des modulations multiporteuses, la famille d'analyse du signal représente la base de démodulation au récepteur, et la famille de synthèse représente la base de modulation à l'émetteur.

**Définition 2.1.1. (Biorthogonalité)** Soit  $\{\tilde{g}_m\}$  une famille d'analyse et  $\{g_m\}$  une famille de synthèse. On dit que le système  $(\{\tilde{g}_m\}, \{g_m\})$  est biorthogonal si et seulement si

$$\forall (m, n) \in I^2, \quad \langle g_m, \tilde{g}_n \rangle = \delta_{(m,n)}, \quad (2.1)$$

avec  $\delta_{(m,n)}$  est le delta de Kronecker qui prend la valeur 1 si  $m = n$ , et la valeur 0 sinon. On peut aussi dire que le système  $(\{g_m\}_{m \in I}, \{\tilde{g}_m\}_{m \in I})$  est à reconstruction parfaite. Le préfixe "bi" est censée rappeler que deux bases sont utilisées, une pour l'analyse (démodulation) et l'autre pour la synthèse (modulation).

En particulier, si  $\{\tilde{g}_m\}_{m \in I} = \{g_m\}_{m \in I}$  et la condition (2.1) est satisfaite, le système est dit *orthogonal*.

**Définition 2.1.2. (Biorthogonalité dans  $\mathbb{R}$ )** Le système  $(\{\tilde{g}_m\}, \{g_m\})$  est dit biorthogonal dans  $\mathbb{R}$  si et seulement si

$$\forall (m, n) \in I^2, \quad \mathcal{R}\{\langle g_m, \tilde{g}_n \rangle\} = \delta_{(m,n)}. \quad (2.2)$$

$\mathcal{R}(\cdot)$  désigne la partie réelle.

En particulier, si  $\{\tilde{g}_m\}_{m \in I} = \{g_m\}_{m \in I}$  et la condition (2.2) est satisfaite, le système est dit *orthogonal dans  $\mathbb{R}$* .

Tout système  $(\{g_m\}_{m \in I}, \{\tilde{g}_m\}_{m \in I})$  qui ne satisfait pas la condition de biorthogonalité dans  $\mathbb{R}$  (2.2) est dit *non-orthogonal*.

On se positionne maintenant à l'émission ou à la réception. Pour analyser les propriétés d'orthogonalité de la base de modulation ou de la base de démodulation, nous rappelons les définitions suivantes.

**Définition 2.1.3. (Orthogonalité d'une famille  $\{g_m\}_{m \in I}$ )**

Une famille de fonctions  $\{g_m\}_{m \in I}$  est orthogonale si et seulement si

$$\forall (m, n) \in I^2, \quad \langle g_m, g_n \rangle = \delta_{(m,n)}. \quad (2.3)$$

**Définition 2.1.4. (Orthogonalité dans  $\mathbb{R}$  d'une famille  $\{g_m\}_{m \in I}$ )**

Une famille de fonctions  $\{g_m\}_{m \in I}$  est orthogonale dans  $\mathbb{R}$  si et seulement si

$$\forall (m, n) \in I^2, \quad \mathcal{R}\{\langle g_m, g_n \rangle\} = \delta_{(m,n)}.$$

Il est important de préciser que pour un système biorthogonal, la famille d'analyse ou la famille de synthèse n'est pas nécessairement orthogonale c-à-d ne satisfait pas nécessairement la condition (2.3). Pour un système non-orthogonal, la famille d'analyse  $\{\tilde{g}_m\}_{m \in I}$  ou la famille de synthèse  $\{g_m\}_{m \in I}$  peut être orthogonale (2.3), mais le système  $(\{\tilde{g}_m\}_{m \in I}, \{g_m\}_{m \in I})$  ne doit pas satisfaire la condition de biorthogonalité dans  $\mathbb{R}$  (2.2).

## 2.1.2 Systèmes orthogonaux

Les modulations multiporteuses orthogonales sont basées sur une unique famille de modulation et démodulation  $\{g_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$  orthogonal. Nous définissons d'abord dans cette partie l'OFDM et le FMT (*filtered multitone*), des exemples de modulations multiporteuses orthogonales dans  $\mathbb{C}$ . Ensuite nous introduisons l'OFDM/OQAM, un exemple de modulation multiporteuses orthogonale dans  $\mathbb{R}$ . Les notions d'orthogonalité sont détaillées dans la section 2.1.1.

### 2.1.2.1 OFDM

L'OFDM et ses variantes que nous étudions dans cette section, sont les systèmes multiporteuses les plus populaires et qui ont été adoptés par plusieurs standards tels que l'Hyperlan2 [16], le DAB (*digital audio broadcasting*) [17], le DVB-T2 (*digital video broadcasting-terrestrial*) [18], le WiMax (*worldwide interoperability for microwave access*) [19, 20, 21] basé sur le standard IEEE 802.16, le Wifi (IEEE 802.11) et plus récemment dans le LTE (*long term evolution*) et ses évolutions [22].

L'OFDM classique basé sur la fonction rectangulaire et la transformée rapide inverse de Fourier (IFFT) est un système multiporteuses orthogonal. Le principe de cette modulation consiste à multiplexer le flux de données de haut débit  $R$  à  $M$  flux de débit  $\frac{R}{M}$  en modulant parallèlement  $M$  porteuses orthogonales à bande étroite, augmentant ainsi la durée totale du symbole par un facteur  $M$ .

**Génération des porteuses en utilisant la IFFT** L'OFDM se caractérise par une simple implémentation au niveau de la transmission et la réception, ceci grâce à l'utilisation de la TFD (transformée de Fourier discrète) : la TFDI (transformée inverse) à l'émission et la TFDD (transformée directe) à la réception. Pour implémenter efficacement la TFD, un algorithme moins complexe et plus simple est utilisé : la IFFT.

En effet, Le signal OFDM transmis est exprimé en bande de base par :

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{M-1} C_{m,n} e^{j2\pi m t} \Pi_T(t - nT), \quad (2.4)$$

avec :

- $\Pi_T$  : fonction porte définie par :  $\begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$ .

Considérons une observation limitée à un seul bloc de symbole  $n'$  :  $t$  appartient alors à  $\llbracket n'T, (n'+1)T \rrbracket$ , l'expression du signal devient :

$$\begin{aligned} x_{n'}(t) &= \sum_{m=0}^{M-1} C_{m,n'} e^{j2\pi mt} \Pi_T(t - n'T) \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} C_{m,n'} e^{j2\pi mt} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Considérons maintenant le signal (2.5) à temps discret, en considérant  $M$  échantillons par bloc de symbole, on a :  $t = n'T + \frac{kT}{M}$ ,  $0 \leq k \leq M$ . On définit  $x_{n'}[k] := x(n'T + \frac{kT}{M})$ , on obtient

$$\begin{aligned} x_{n'}[k] &= \sum_{m=0}^{M-1} C_{m,n'} e^{j2\pi mk/M}, \\ &= \text{TFDI}[C_{n'}][k]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

avec  $k \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket$ .

La modulation OFDM n'est alors que la transformée de Fourier discrète inverse du vecteur des symboles d'entrée  $C_{n'}$ .

Pour calculer la TFDI exprimée dans (2.6), il faut effectuer  $M^2$  multiplications complexes, et  $M(M-1)$  additions complexes. Mais si on suit un algorithme efficace, comme l'algorithme de FFT de Cooley-Tukey, on réduit le nombre de multiplication à  $\frac{M}{2} \log_2(M)$  [23]. On utilise alors pour l'implémentation la IFFT car elle permet de réduire le nombre d'opérations arithmétiques à effectuer, en particulier le nombre de multiplications.

**Intervalle de garde** Afin de réduire les interférences entre symboles OFDM (ISI), un intervalle de garde est introduit entre chaque deux symboles OFDM. Cet intervalle de garde doit être de durée supérieure au retard de propagation dû aux multitrajets. Ainsi on ne permet pas aux symboles d'un bloc d'interférer avec les symboles du prochain bloc, les ISI seront alors éliminées. Cependant, l'ajout d'un intervalle de garde entraîne une perte de débit. Différentes variantes de l'OFDM classique ajoutant un intervalle de garde pour chaque symbole ont été définies.

- Le CP-OFDM (*cyclic prefix*) [24] est la variante la plus utilisée. Dans le CP-OFDM, on reproduit, au début de chaque symbole OFDM, une copie de ses derniers échantillons. C'est ce qu'on appelle un préfixe cyclique (CP). Le signal qu'on met dans l'intervalle de garde est alors une partie qu'on copie de la fin du bloc de symbole, et on la rajoute à son début. Ce préfixe cyclique a deux propriétés :
  - Éliminer ISI comme illustré dans la Figure 2.2.
  - Simplifier l'égalisation : le préfixe cyclique et l'utilisation de la transformée de Fourier permettent de transformer le produit de convolution linéaire dans l'équation d'égalisation, à un produit de convolution circulaire facile à égaliser. L'égalisation devient alors simplifiée, il suffit d'effectuer des inversions scalaires au lieu des inversions matricielles pour extraire le signal [25].
- Le ZP-OFDM (*zero-padded*) ajoute un temps de garde à l'OFDM classique pour combattre les ISI [26, 27, 28, 29]. Pour chaque bloc d'une transmission ZP-OFDM, des zéros sont ajoutés aux symboles après la IFFT. Contrairement au CP-OFDM, dans le ZP-OFDM, aucun signal n'est transmis, et donc l'intervalle de garde n'engendre pas de perte en puissance. À la réception, au lieu d'utiliser une seule FFT comme pour le cas du CP-OFDM, un filtrage FIR ou *zero forcing* est utilisé, ce qui augmente la complexité du récepteur. Parmi les solutions développées pour remédier à ce problème, des égaliseurs

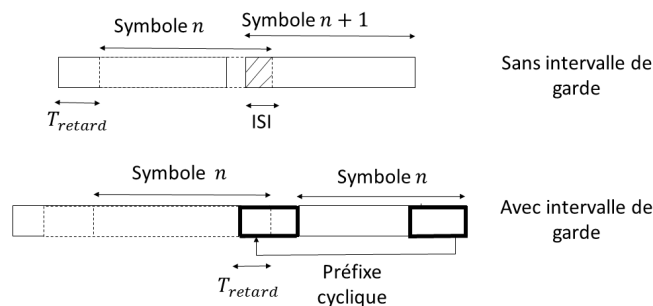


FIGURE 2.2 – Élimination des ISI par l'intervalle de garde.

basés sur des combinaisons des techniques OLA/FAST/MMSE (*overlap-add*) ont été évalués et étudiés dans le contexte d'Hiperlan2 en utilisant un codage de Viterbi [29]. Ces techniques promettent une réduction de la complexité à la réception, mais restent moins simples que le CP-OFDM.

Il est également important de rappeler que le fait d'ajouter un intervalle de garde, réduit l'efficacité spectrale du système, puisque aucune donnée utile n'est transmise durant toute la durée de l'intervalle de garde.

**COFDM** La modulation OFDM divise le canal en plusieurs sous-canaux, et émet les données dans chaque sous canal. Si l'information émise sur un sous canal subit une forte atténuation, elle sera perdue. Pour remédier à ce problème, on introduit un codage correcteur d'erreur associé à un entrelacement dans la chaîne de transmission OFDM, ce qui nous a conduit à un système COFDM (coded orthogonal frequency division multiplexing).

On peut par exemple considérer un codage convolutif qui consiste à lier chaque bit à un ou plusieurs bits précédents ce qui permet de le retrouver en cas d'erreurs. À la sortie du codage, on peut considérer un entrelaceur fréquentiel qui consiste à distribuer les bits d'une longue suite binaire sur différentes porteuses, ainsi, si quelques porteuses subissent des atténuations, on peut tout de même reconstituer le signal, parce qu'on évite d'avoir une longue séquence de bits erronés. Cette méthode est employée par la norme DVB-T utilisée en France pour la télévision numérique terrestre. Les systèmes DAB et Hiperlan2 utilisent également ce procédé de codage de canal COFDM.

Dans nos travaux (chapitres 7, 8), nous n'avons pas considéré les techniques de codage d'erreur et d'entrelacement dans le calcul du taux d'erreur binaire, puisque notre objectif est d'évaluer l'effet de la forme d'onde "seule" sur le taux d'erreur binaire.

**Choix des paramètres OFDM** Pour faire le bon choix des paramètres OFDM, il faut penser à définir d'abord les contraintes à respecter pour satisfaire les performances exigées dans notre application. Généralement, on commence par déterminer la bande passante BW, le débit de transmission et le retard de propagation toléré  $T_{\text{retard}}$  [30]. Ensuite, pour le système OFDM avec intervalle de garde qui est utilisé en pratique, on peut fixer la durée de l'intervalle de garde  $T_{\text{garde}}$  et la durée  $T$  du symbole OFDM. En effet,  $T_{\text{garde}}$  doit être supérieur à  $T_{\text{retard}}$  pour pouvoir éliminer les interférences entre symboles (ISI).  $T$  doit être supérieur à  $T_{\text{garde}}$  pour avoir une bonne efficacité spectrale, mais ne doit pas être très grand pour ne pas réduire l'espacement entre les porteuses et augmenter ainsi la sensibilité aux erreurs de synchronisation.

On peut prendre alors  $T \geq 5 T_{\text{garde}}$ . Le nombre de porteuses peut ensuite être calculé par la relation :  $M = \frac{\text{BW}}{\Delta F}$ , avec  $\Delta F = T^{-1}$  l'espacement entre chaque deux porteuses adjacentes.

**Avantages de l'OFDM classique** L'OFDM et ses variantes présentent plusieurs avantages :

- Utilisation optimale de la bande passante, en comparaison avec le multiplexage fréquentiel classique. Ceci est dû à l'orthogonalité entre les porteuses qui leur permet de se chevaucher sans interférer entre elles.
- L'OFDM diminue l'ISI dû au retard de propagation multitrajets en augmentant la durée du symbole.
- Égalisation simple grâce au préfixe cyclique.
- Les canaux deviennent non sélectifs en fréquence, car on divise la bande passante du signal OFDM en plusieurs sous-bandes de largeur petite et donc la réponse du canal est considérée plate sur chaque sous-bande.

**Limitations de l'OFDM classique** Toutefois, plusieurs problèmes limitent la simplicité et l'efficacité de la technique de modulation OFDM :

- Problèmes du facteur de crête : l'enveloppe du signal OFDM présente de grands pics ce qui sature rapidement l'amplificateur de puissance. Ce problème sera développé dans le chapitre 3.
- Problèmes de synchronisation : le processus de démodulation, et en particulier l'opération de décodage, nécessite une synchronisation très précise. On doit être capable de trouver l'instant du début et la fin de chaque symbole OFDM, et la fréquence du récepteur doit être synchronisée avec celle de l'émetteur. Les systèmes OFDM sont sensibles aux erreurs de synchronisation. Les sources et les conséquences de ces erreurs peuvent être classées comme suit [31] :
  - Décalage entre l'instant et la période d'échantillonnage considérés par l'horloge du récepteur et ceux du signal reçu. Ceci engendre des ISI.
  - Décalage en phase et en fréquence entre la porteuse générée par l'oscillateur local et celle du signal reçu. Ceci cause des interférences entre porteuses (ICI), des atténuations et des déphasages du signal utile.

### 2.1.2.2 FMT

La modulation *filtered multitone* (FMT) [32, 33, 34] est une modulation multiporteuses qui ne permet pas le chevauchement spectral entre les porteuses contrairement à l'OFDM. Les ICI deviennent ainsi négligeables. Le système FMT n'utilise pas d'intervalle de garde, il a alors besoin d'un égaliseur pour combattre les ISI. Le FMT a l'avantage d'être moins sensible au décalage fréquentiel en comparaison avec l'OFDM. La technique FMT a été proposée pour la transmission des données dans le standard VDSL (*very-high-speed digital subscriber lines*) [35] pour assurer des transmissions à haut débit et une simplicité dans la gestion spectrale [36].

Le signal FMT peut être défini par

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in [0, M-1]} C_{m,n} g(t - nT) \exp\left(\frac{j2\pi mt(1 + \alpha)}{T}\right).$$

La variable  $\alpha$  est un paramètre de modulation et  $g(t)$  est le filtre prototype. Les filtres de mise en forme sont construits de telle sorte que les interférences entre les porteuses adjacentes sont les plus faibles possibles. Les porteuses ne doivent pas alors se chevaucher en fréquence mais

par contre, dans le domaine temporel, elles peuvent se chevaucher. Le signal FMT peut utiliser différents filtres prototypes, mais le plus utilisé est le filtre de Nyquist en racine de cosinus surélevé SRRC à un facteur de *roll-off*  $\alpha$ .

### 2.1.2.3 FBMC : systèmes orthogonaux dans $\mathbb{R}$

L'OFDM se caractérise par sa robustesse aux canaux sélectifs en fréquence et une simple égalisation, grâce à l'utilisation d'un préfixe cyclique. Cependant, l'utilisation de cet intervalle de garde réduit l'efficacité spectrale de l'OFDM, puisqu'on ne transmet pas de données utiles durant la période de transmission du CP. En plus, l'OFDM classique utilise le filtre rectangulaire et ne peut donc pas être localisé en temps et en fréquence, il souffre ainsi des lobes secondaires qui génèrent des interférences. Les systèmes FBMC (*filter bank based multicarrier*) ont été proposés afin d'augmenter l'efficacité spectrale de l'OFDM en n'utilisant pas d'intervalle de garde, et en filtrant séparément chaque porteuse par un filtre bien localisé en temps et en fréquence.

Nous étudions dans cette section l'OFDM-OQAM (offset QAM), la technique FBMC la plus populaire et qui présente les meilleures performances en termes d'atténuations hors bande [37]. L'OFDM/OQAM est implémenté à base de bancs de filtres. Pour permettre une bonne localisation en temps et en fréquence, chaque porteuse est filtrée séparément par un filtre bien choisi. Le choix adéquat du filtre permet aussi la réduction des interférences sans l'utilisation du préfixe cyclique, ce qui augmente l'efficacité spectrale du système.

**Problème de localisation temps-fréquence** Dans cette partie nous expliquons comment l'OFDM/OQAM a été introduit comme une alternative à l'OFDM/QAM (l'OFDM utilisant une constellation QAM) et qui remplace la forme d'onde rectangulaire par d'autres filtres dont nous présentons quelques exemples.

#### **Théorème 2.1.1.** Balian-Low

Soit  $T$  la période symbole d'une famille de Gabor et  $F$  l'espacement entre les porteuses. On définit  $\rho = \frac{1}{TF}$  la densité de cette famille.

Soit  $(g_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{Z}}$  une famille de Gabor de densité  $\rho = 1$  dans  $L_2(\mathbb{R})$ , formant une base orthogonale, alors :

$$\|\Delta t_g\| \|\Delta f_g\| = +\infty.$$

La localisation temps-fréquence  $\xi$  du filtre prototype  $g$  va tendre alors vers zéro. Suite à cela, nous avons la propriété suivante :

**Propriété 2.1.1.** On ne peut avoir que deux de ces caractéristiques simultanément :

1.  $\rho = 1$ .
2. Système orthogonal.
3. Forme d'onde bien localisée en temps et en fréquence.

Le signal OFDM satisfait les conditions de la famille de Gabor, sa fonction prototype est exponentiellement modulée. Ce signal a une densité égale à 1, et à la réception, la reconstruction est assurée grâce à l'orthogonalité complexe. Suivant la propriété 2.1.1, pour trouver une alternative à l'OFDM qui a une bonne localisation, il faut appliquer l'une des solutions suivantes :

- Alléger la contrainte de l'orthogonalité complexe de l'OFDM.
- Diminuer la densité  $\rho = \frac{1}{FT}$ .

La première solution a conduit à l'OFDM/OQAM [38] qui satisfait l'orthogonalité réelle mais ne satisfait pas l'orthogonalité complexe.

TABLE 2.1 – Stratégie de transmission des symboles en OFDM/OQAM

Fréquence	Temps	
	$nT - \frac{T}{2}$	$nT$
$(2m + 1)\Delta F$	$C_{2m+1,n-1}^R$	$jC_{2m+1,n}^I$
$2m\Delta F$	$jC_{2m,n-1}^I$	$C_{2m,n}^R$

**Principe de l'OFDM/OQAM** Au lieu d'envoyer des symboles complexes comme dans l'OFDM/QAM, l'OFDM/OQAM envoie la partie réelle du symbole suivi de sa partie imaginaire, en introduisant un décalage (*Offset*) de  $\frac{T}{2}$  entre les deux, n'émettant ainsi que des symboles réels. L'orthogonalité est donc allégée dans le sens qu'elle se vérifie dans l'ensemble des réels  $\mathbb{R}$  et non plus dans l'ensemble des complexes  $\mathbb{C}$ . En plus, on n'introduit pas de préfixe cyclique dans l'OFDM/OQAM et donc on ne perd pas en termes d'efficacité spectrale.

**Stratégie de transmission des symboles** Soit  $C_{m,n} = C_{m,n}^R + jC_{m,n}^I$  le symbole complexe d'entrée. Au lieu d'envoyer  $C_{m,n}$  porté par la fréquence  $m\Delta F$  et à l'instant  $nT$ , on envoie d'abord  $C_{m,n}^R$ , et après une période de  $\frac{T}{2}$ , on envoie  $C_{m,n}^I$  et ainsi de suite. Cela peut être résumé dans la Table 2.1.

**Expression du signal OFDM/OQAM à temps continu** On suppose que le nombre de porteuses est pair  $M = 2M'$ . Soit  $g$  le filtre prototype à l'émission. En appliquant la stratégie de transmission exprimée dans la Table 2.1, on peut exprimer le signal OFDM/OQAM par [39] :

$$x(t) = \sum_{m=0}^{M'-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (C_{2m,n}^R g(t - nT) + jC_{2m,n}^I g(t - nT - \frac{T}{2})) e^{j2\pi(2m)\Delta Ft} \\ + (C_{2m+1,n}^R g(t - nT - \frac{T}{2}) + jC_{2m+1,n}^I g(t - nT)) e^{j2\pi(2m+1)\Delta Ft}.$$

En faisant le changement de notation suivant :

$$\begin{aligned} g_{2m,2n}(t) &= g(t - nT) e^{j2\pi(2m)\Delta Ft}, & a_{2m,2n} &= C_{2m,n}^R \\ g_{2m,2n+1}(t) &= jg(t - nT - \frac{T}{2}) e^{j2\pi(2m)\Delta Ft}, & a_{2m,2n+1} &= C_{2m,n}^I \\ g_{2m+1,2n}(t) &= jg(t - nT) e^{j2\pi(2m+1)\Delta Ft}, & a_{2m+1,2n} &= C_{2m+1,n}^I \\ g_{2m+1,2n+1}(t) &= g(t - nT - \frac{T}{2}) e^{j2\pi(2m+1)\Delta Ft}, & a_{2m+1,2n+1} &= C_{2m+1,n}^R. \end{aligned}$$

On obtient une expression du signal plus condensée :

$$x(t) = \sum_{m=0}^{M'-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{m,n} g_{m,n}(t).$$

La base de modulation est la famille des fonctions  $(g_{m,n})_{(m \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket, n \in \mathbb{Z})}$  exprimées par :

$$g_{m,n}(t) = g(t - n\frac{T}{2}) e^{j2\pi m\Delta Ft} e^{j\phi_{m,n}}.$$

avec  $\phi_{m,n} = \frac{\pi}{2}(m+n)$ . Elle représente alors une famille de Gabor, de fenêtre  $g$ , période symbole  $\frac{T}{2}$ , et espacement entre porteuses de  $\Delta F$ .

**Fonctions et filtres prototypes** Le choix des fonctions et des filtres prototypes dépend de certaines propriétés [40]. D'abord, l'énergie hors bande doit être minimale pour diminuer les interférences. Cette contrainte peut être abordée différemment, en maximisant l'énergie dans

la bande utile ou en minimisant le maximum des lobes hors bande. Une deuxième condition consiste à maximiser la localisation en temps et en fréquence.

De nombreuses fonctions peuvent être utilisées comme filtres prototypes :

- **La fonction rectangulaire ou fenêtre** : elle satisfait la contrainte d'orthogonalité réelle, elle n'est pas bien localisée et c'est la fonction prototype utilisée dans l'OFDM.
- **La forme d'onde en racine de cosinus surélevé** ou "*square root raised cosinus*" (SRRC) : Cette forme d'onde est très utilisée dans les communications numériques. Le SRRC est mieux localisé en fréquence qu'un filtre rectangulaire, mais au prix d'une perte de localisation en temps.
- **La fonction gaussienne** se caractérise par une bonne localisation en temps et en fréquence, mais elle n'est pas orthogonale, et donc ne peut pas être considérée comme une fonction prototype pour différentes applications.
- **Le filtre IOTA** (*isotropic orthogonal transform algorithm*) : pour tirer profit de l'avantage de la fonction gaussienne, on a pensé à lui appliquer une double orthogonalisation, et cela nous a conduit à la fonction IOTA [41]. Elle se caractérise par une localisation quasi optimale, la mesure de sa localisation temps-fréquence est :  $\xi = 0,977$ , et donc  $\Delta t_g \approx \Delta f_g$ .
- **Le filtre EGF** (*extended gaussian function*) : cette forme d'onde se base sur la fonction gaussienne par un procédé d'orthogonalisation [38]. Le filtre EGF est différent du filtre IOTA, car il permet une pondération de la localisation en temps et de la localisation en fréquence.
- **Filtre prototype PHYDYAS** (*physical layer for dynamic spectrum access and cognitive radio*<sup>1</sup>) [42] ce filtre a été proposé dans [43], suite au projet européen PHYDYAS. Les coefficients du filtre peuvent être calculés suivant les paramètres suivants : nombre de porteuses, facteur de chevauchement et le paramètre du roll-off. Le filtre PHYDYAS est plus localisé en fréquence et moins localisé en temps que le filtre IOTA.

#### 2.1.2.4 Systèmes UFMC

La modulation UFMC (*universal filtered multicarrier*) [44, 45, 46] a été introduite comme une généralisation des modulations FBMC et OFDM. Au lieu d'appliquer un filtre sur chaque porteuse comme c'est le cas pour le FBMC ou bien appliquer un filtre sur l'ensemble des porteuses comme c'est le cas pour l'OFDM, l'UFMC applique un filtrage par bloc de porteuses de telle sorte que chaque bloc ait des émissions hors bandes réduites. La modulation UFMC a la flexibilité du choix du filtre ainsi que le nombre des sous-blocs considérés souvent appelés blocs de ressources (*resource block*). L'UFMC offre l'avantage d'avoir un niveau de lobes secondaires moins élevé que l'OFDM.

Le vecteur  $\mathbf{x}$  du signal UFMC émis est exprimé par :

$$\underset{(N_{\text{fft}}+\mathcal{L}-1,1)}{\mathbf{x}} = \sum_{b=1}^{N_b} \underset{(N_{\text{fft}}+\mathcal{L}-1,N_{\text{fft}})}{\mathbf{F}_b} \underset{(N_{\text{fft}},n_b)}{\mathbf{V}_b} \underset{(n_b,1)}{\mathbf{C}_b},$$

avec  $N_{\text{fft}}$  la taille de la FFT,  $N_b$  le nombre des blocs de ressources et  $n_b$  le nombre des symboles numériques dans chaque bloc de ressources  $b$ . Le vecteur  $\mathbf{C}_b$  rassemble les symboles numériques de chaque bloc de ressources  $b$ , et la matrice IDFT (transformée de Fourier discrète)  $\mathbf{V}_b$  est appliquée sur chaque vecteur  $\mathbf{C}_b$ .  $\mathbf{F}_b$  est une matrice de Toeplitz construite à partir de la réponse impulsionnelle du filtre utilisé, dont la taille est notée  $\mathcal{L}$ . La Figure 2.3 illustre le schéma d'une modulation UFMC.

1. Plus de détails sur <http://www.ict-phydyas.org/>

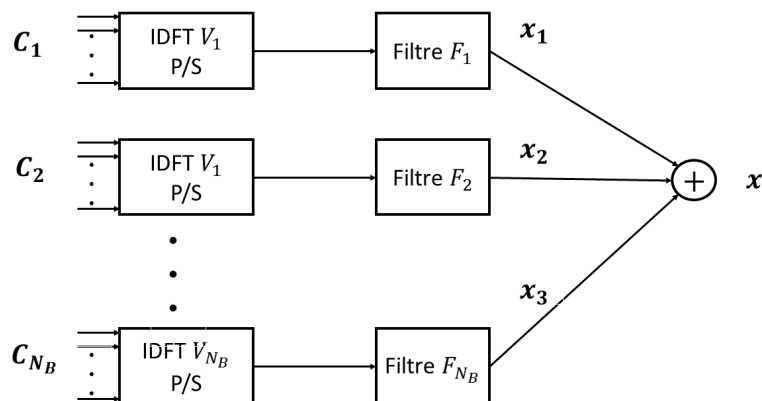


FIGURE 2.3 – Modulation UFM.

### 2.1.3 Systèmes non-orthogonaux

On appelle des systèmes multiporteuses non-orthogonaux, les systèmes dont la base de modulation et la base de démodulation ne satisfont pas la condition de biorthogonalité (2.2). Ces systèmes nécessitent un traitement supplémentaire à la démodulation afin de récupérer les données. subsectionSystèmes non-orthogonaux

#### 2.1.3.1 NOFDM

Le système NOFDM (*non-orthogonal frequency division multiplexing*) [47] n'impose pas de règle d'orthogonalité aux porteuses, ce qui donne plus de liberté dans le choix des filtres. Contrairement à l'OFDM classique, les filtres peuvent être créés de telle sorte que les lobes secondaires de la fenêtre rectangulaire soient réduits, mais ainsi on perd l'orthogonalité entre porteuses. La relaxation de la restriction d'orthogonalité permet de construire des filtres se chevauchant en temps et en fréquence, ce qui améliore l'efficacité spectrale. Ce chevauchement associé à la non-orthogonalité génère de l'interférence *self-interference*, mais ces interférences peuvent être contrôlées par un choix adéquat du filtre prototype. En particulier, on peut aussi construire des filtres à faibles niveaux de lobes secondaires réduisant ainsi les émissions hors bandes. NOFDM souffre d'un autre problème, celui du PAPR. Le filtrage réalisé par les filtres polyphases peut augmenter instantanément l'amplitude du signal, causant de larges pics de puissance. Une méthode de réduction du PAPR nommée *active constellation expansion* a été proposée pour les systèmes NOFDM. Il a été montré dans [48] que cette méthode réduit le PAPR aussi efficacement que dans le cas de l'OFDM.

Lorsque la démodulation du NOFDM est basée sur une famille de fonctions qui satisfait la condition de biorthogonalité définie dans la section 2.1.1 avec la famille de modulation, alors le système NOFDM est dit biorthogonal.

#### 2.1.3.2 GFDM

Le système GFDM (*generalized frequency division multiplexing*) [49] [50] est une modulation non orthogonale qui offre plus de degrés de liberté grâce à l'utilisation d'un large choix de filtres. Les radiations hors bandes du signal GFDM transmis sont contrôlées par un filtre de mise en forme ajustable, qui est appliqué à chacune des porteuses. Dans le GFDM, la structure des données est ajustable à deux dimensions : on regroupe les symboles des données dans un bloc pour lequel le nombre de porteuses et les durées temporelles sont ajustables. La taille des blocs est variable, ce qui permet de pouvoir implémenter de longs filtres ou de réduire le

nombre total des sous-porteuses. Similairement à l'OFDM, le GFDM utilise aussi un préfixe cyclique pour combattre les ISI, sauf que le préfixe cyclique est utilisé pour chaque bloc, et la durée de chaque bloc peut être plusieurs fois la durée de la période symbole, et donc le préfixe cyclique est utilisé moins fréquemment que dans l'OFDM.

## 2.2 Multiporteuses basées sur la transformée en ondelettes

La propriété principale de la transformée en ondelettes réside dans sa flexibilité dans la mesure où le choix des ondelettes est très large et les fonctions d'une base d'ondelette se caractérisent par une flexibilité dans la localisation temps-fréquence, la résolution des deux domaines peut ainsi être non uniforme. Les ondelettes ont été largement utilisées dans plusieurs applications du traitement du signal, comme un outil de représentation du signal en mettant en valeur ses propriétés. Parmi ces applications, on distingue notamment l'approximation d'un signal dans une base en ondelettes, l'estimation de signaux bruités et la compression de signaux et d'images.

Dans la section suivante, nous présentons les applications des ondelettes particulièrement dans le domaine des communications sans fils.

### 2.2.1 Les ondelettes dans les communications sans fils

La base de Fourier a longtemps servi comme une base unique pour représenter le signal dans les applications de communications sans fils avant que les ondelettes ne soient introduites comme une base alternative proposant plusieurs avantages.

- La transformée en ondelettes a la flexibilité de construire des porteuses à largeur de bande et à durée temporelle différentes. Cette propriété peut être utilisée par exemple dans les systèmes de communications qui exigent un délai de transmission différent pour chaque bloc de données.
- La flexibilité de la localisation temps-fréquence du signal. Selon l'ondelette choisie et le nombre d'échelle sélectionné, la localisation temps-fréquence du signal change, et permet de s'adapter aux perturbations du canal.
- Flexibilité du nombre de porteuses : la transformée en ondelettes représente plusieurs variantes. Pour la même période symbole et l'espacement entre porteuses, le nombre de porteuses "effectif" ainsi que la durée utile de chaque porteuse sont configurables. L'émetteur devient alors reconfigurable selon le protocole de communication utilisé.

Les applications des ondelettes dans les communications sans fil qui ont été rapportées dans la littérature sont nombreuses, nous en exposons ci-après quelques unes :

**Modélisation des canaux de propagation** Grâce à ses propriétés de localisation conjointe en temps et en fréquence, la base d'ondelettes permet de bien modéliser la nature variante des canaux de propagation sans fils. La sélectivité en temps et en fréquence peut être précisément représentée par des bases d'ondelettes [51, 52, 53]. Dans [54], l'auteur a étudié comment choisir la meilleure base d'ondelettes pour représenter les dispersions fréquentielles et temporelles et les évanouissements des canaux.

**Les ondelettes dans l'ingénierie électromagnétique** Plusieurs algorithmes à bases d'ondelettes ont été développés pour résoudre des problèmes liés aux applications électromagnétiques et la conception des antennes et l'amélioration du coût de la complexité d'implémentation [55].

**Reconstruction du signal à partir des données bruitées** Différentes techniques de séparation du signal utile du bruit ont été rapportées dans la littérature [56, 57, 58, 59]. En général, une transformée en ondelettes est appliquée sur le signal bruité, ensuite un seuil adaptatif est considéré. Les coefficients en ondelettes sous le seuil contiennent du bruit et sont donc éliminés. Le reste des coefficients est complété par des zéros et une transformée en ondelettes inverse est appliquée pour retourner le signal estimé.

**Réduction des interférences ISI et ICI** Les interférences sont affectées par la dispersion temporelle (due au phénomène multitrajets) et la dispersion fréquentielle (due à l'effet Doppler) des canaux radio-mobiles. La nature de la forme d'onde affecte également la réponse du signal aux interférences. La flexibilité de la transformée en ondelettes permet de concevoir des formes d'ondes mieux adaptées à contourner l'impact du canal sur le signal. Dans [60, 61, 62], il a été prouvé que pour un choix adéquat de la transformée en ondelettes, la suppression des ISI et ICI est meilleure que dans le cas de l'utilisation de la base de Fourier.

**Radio intelligente** Les ondelettes peuvent être utilisées pour l'accès opportuniste au spectre dans le contexte de la radio intelligente. L'estimation du spectre afin d'identifier un spectre libre sans interférences peut être faite à base d'ondelettes comme proposé dans [63, 64, 65].

**Communications Ultra-Wideband (UWB)** Les systèmes UWB fonctionnent dans de large bandes, et le spectre est partagé par plusieurs utilisateurs. Des interférences peuvent ainsi se produire. En remplaçant les porteuses sinusoïdales de Fourier, la transformée en ondelettes peut choisir des formes d'ondes causant de faibles interférences. Dans [66], les auteurs montrent que les ondelettes permettent une réduction des interférences et permettent ainsi la coexistence des utilisateurs dans des systèmes UWB.

**Modulation et multiplexage** Dans le contexte des modulations multiporteuses, au lieu de moduler les symboles d'entrée par les fonctions exponentielles de Fourier, les fonctions d'ondelettes peuvent être utilisées pour la transmission des données. Pour surmonter les limitations de l'OFDM classique, plusieurs systèmes alternatifs ont été proposés dont le Wavelet-OFDM. Le large choix de la nature des ondelettes ainsi que la flexibilité de la transformée en ondelettes rend cette alternative prometteuse [67, 68].

Nous nous intéressons dans la suite à l'application des ondelettes dans le domaine des modulations multiporteuses.

## 2.2.2 Wavelet-OFDM

La base d'ondelettes a été proposée comme base de modulation pour les systèmes multiporteuses. Le système résultant s'appelle le Wavelet-OFDM [69], [70], ou le OWDM (*orthogonal wavelet division multiplexing*) [71]. Dans ce rapport, nous allons utiliser le terme "Wavelet-OFDM" pour la modulation en ondelettes parce que le nom "Wavelet-OFDM" est celui le plus utilisé dans la littérature quoique l'appellation "OWDM" semble plus correcte, puisque la modulation en ondelettes n'est pas une variante de l'OFDM et ne fait pas explicitement un multiplexage fréquentiel. La modulation en ondelettes est une représentation temps-échelle, et il en résulte une décomposition du domaine fréquentiel due à la relation inversement proportionnelle entre l'échelle et la fréquence [72]. Les ondelettes ainsi que les fonctions d'échelles associées peuvent être considérées comme des formes d'ondes pour la transmission des données [73], de la même façon que la base de Fourier est utilisée pour l'OFDM conventionnel. Le système de modulation  $(g_m)_{m \in [0, M-1]}$  est représenté par des ondelettes  $(\psi_{j,k})_{j \in [J_0, J-1], k \in [0, 2^j-1]}$  et des

fonctions d'échelles  $(\phi_{J_0,k})_{k \in \llbracket 0, 2^{J_0} - 1 \rrbracket}$  de la première échelle. Les formes d'ondes  $(g_m)_{m \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket}$  correspondent alors à

$$\begin{aligned} \{g_m\}_{m \in \llbracket 0, 2^{J_0+1} - 1 \rrbracket} &:= \{\psi_{J_0,k}\}_{k \in \llbracket 0, 2^{J_0} - 1 \rrbracket} \cup \{\phi_{J_0,k}\}_{k \in \llbracket 0, 2^{J_0} - 1 \rrbracket}, \\ \{g_m\}_{m \in \llbracket 2^{J_0+1}, 2^J - 1 \rrbracket} &:= \{\psi_{j,k}\}_{j \in \llbracket J_0, J-1 \rrbracket, k \in \llbracket 0, 2^j - 1 \rrbracket}. \end{aligned}$$

- $M$  : nombre des porteuses,
- $J - 1$  : dernière échelle considérée, avec  $M = 2^J$ ,
- $J_0$  : première échelle considérée, avec  $(J_0 \leq j \leq J - 1)$ ,
- $\psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j t - kT)$  : les fonctions d'ondelettes, avec  $T$  la durée de l'ondelette mère,
- $\phi_{J_0,k} = 2^{J_0/2} \phi(2^{J_0} t - kT)$  : les fonctions d'échelle à la première échelle  $J_0$ , avec  $T$  la durée de la fonction d'échelle mère.

Par conséquent, le signal Wavelet-OFDM est exprimé par

$$x(t) = \sum_n \sum_{j=J_0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} w_{j,k} \psi_{j,k}(t - nT) + \sum_n \sum_{q=0}^{2^{J_0}-1} a_{J_0,q} \phi_{J_0,q}(t - nT). \quad (2.7)$$

- $w_{j,k}$  : coefficient de détail positionné à la  $k$ -ième position de l'échelle  $j$ ,
- $a_{J_0,k}$  : coefficient d'approximation positionné à la  $k$ -ième position de la première échelle  $J_0$ .

L'ondelette mère et la fonction d'échelle correspondent aux indices  $(j, k) = (J_0, k) = (0, 0)$ . À chaque niveau  $j$  correspondent  $2^j$  ondelettes translatées. D'un niveau  $j$  au suivant, le nombre des ondelettes est alors multiplié par deux et leur durée est divisée par deux. Le premier niveau  $J_0$  est couvert par  $2^{J_0}$  fonctions d'échelle. D'après l'expression (2.7), on remarque que le système Wavelet-OFDM a plusieurs variantes selon la première échelle considérée  $J_0$ . Une étude plus détaillée sur ces variantes sera développée dans le chapitre 7.

### 2.2.3 Wavelet Packet OFDM

Les premiers travaux sur la modulation en paquets d'ondelettes reviennent à Lindsey [74], qui a étudié les applications des bases en paquets d'ondelettes dans le multiplexage orthogonal des systèmes de communications. Au lieu de décomposer seulement les basses fréquences du signal comme dans le cas de la transformée en ondelettes, la transformée en paquets d'ondelettes divise également les hautes fréquences.

La modulation Wavelet Packet OFDM ou WPM (*wavelet packet modulation*) [75, 76, 77] est basée sur la transformée en paquets d'ondelettes (WPT) dont certaines propriétés ont été rappelées dans la section 1.4. Grâce aux caractéristiques de la WPT, ce système présente plus d'avantages que le Wavelet-OFDM en termes de flexibilité du choix des caractéristiques temporelles et fréquentielles du signal. D'ailleurs, le système Wavelet-OFDM peut être considéré comme un cas particulier du Wavelet Packet OFDM.

## Conclusion

Plusieurs tentatives de classer les systèmes de modulation multiporteuses ont été proposées dans la littérature. Dans ce chapitre, nous avons présenté une classification des multiporteuses suivant les propriétés temporelles et fréquentielles de la base de modulation. D'abord, nous avons présenté les systèmes à bases de la famille de Gabor qui correspondent à une translation uniforme en temps et en fréquence d'une fonction prototype. Cette fonction associée à un filtre définit l'orthogonalité de la structure de modulation. Nous avons distingué des systèmes orthogonaux comme l'OFDM et le FMT, des systèmes orthogonaux seulement dans  $\mathbb{R}$  comme l'OFDM/OQAM, ou des systèmes non orthogonaux comme le NOFDM qui peut satisfaire dans certains cas la condition de biorthogonalité, et le GFDM. Ensuite, nous avons introduit les bases d'ondelettes, qui résultent des translations en temps et en échelle des fonctions mères. Cette translation n'est pas nécessairement uniforme ce qui rend le pavage temps-fréquence correspondant non obligatoirement régulier. Les ondelettes ont plusieurs applications grâce à leur flexibilité dans le choix d'une base d'ondelettes adéquate. La modulation en ondelettes et la modulation en paquets d'ondelettes sont des exemples d'application de cette transformée dans le contexte de modulation et de multiplexage.

Les performances des systèmes multiporteuses basés sur des familles de Gabor ou des familles d'ondelettes dépendent du choix de la transformée et du filtre ou de l'ondelette considérés ainsi que de leurs propriétés. Comme nous allons le voir dans les chapitres qui suivent, nous serons amenés à des compromis dans le choix de la "meilleure" base multiporteuses. Ce compromis est souvent associé aux contraintes liées au pavage temps-fréquence.

# Chapitre 3

## État de l'art sur le problème du PAPR

### Sommaire

---

3.1	Problème du PAPR lors de l'amplification de puissance . . .	53
3.2	Mesures des variations du signal . . . . .	56
3.3	Fonction de répartition du PAPR pour l'OFDM . . . . .	57
3.4	Méthodes de réduction du PAPR . . . . .	60
3.4.1	Critères d'évaluation des techniques de réduction du PAPR . .	61
3.4.2	Techniques d'ajout de signal . . . . .	61
3.4.3	Techniques probabilistes . . . . .	62
3.4.4	Techniques de codage . . . . .	62

---

Bien qu'elle soit une technique de modulation de référence dans plusieurs standards de communications, la modulation multiporteuses souffre de grandes variations de puissance du signal transmis. La nature de son signal limite l'efficacité énergétique au niveau de l'amplificateur de puissance et engendre des déformations non-linéaires du signal. C'est pour cette raison que la modulation multiporteuses n'a pas été choisie dans le standard LTE *uplink*. Une grande consommation d'énergie au niveau des équipements mobiles n'est plus tolérable, surtout que l'utilisateur exige une grande autonomie de son téléphone portable. Cependant, dans le LTE *downlink*, la modulation multiporteuses est toujours utilisée pour ses différents avantages.

Nous retraçons dans ce chapitre, les différentes mesures qui ont été introduites dans la littérature pour étudier le problème des fluctuations du signal multiporteuses. Ensuite, nous exposons des approximations qui ont été développées afin d'étudier le PAPR (*peak-to-average power ratio*), une mesure des variations du signal. Finalement, quelques méthodes de réduction du PAPR sont présentées et classifiées.

### 3.1 Problème du PAPR lors de l'amplification de puissance

Dans la modulation monoporteuse, les données sont modulées par une porteuse occupant toute la bande de fréquence. C'est pour cette raison que les variations de l'enveloppe du signal modulé ne dépendent que de la constellation [78] et du filtre de mise en forme : par exemple, une modulation numérique 16-QAM génère un signal plus variant qu'une modulation QPSK, un filtre RRC (*root raised cosine*) engendre plus de variations qu'un filtre rectangulaire, les fluctuations dépendent également du facteur roll-off considéré du filtre RRC [79]. En général,

ces variations ne sont pas très importantes.

Contrairement à la modulation monoporteuse, dans la modulation multiporteuses, la bande allouée est divisée en plusieurs sous-bandes, et les données sont modulées parallèlement sur plusieurs fréquences porteuses. L'addition de ces porteuses engendre une forte dynamique de l'enveloppe du signal. La puissance instantanée varie considérablement par rapport à la puissance moyenne.

Afin d'avoir suffisamment de puissance pour lutter contre les évanouissements du canal et être détecté par le récepteur, le signal émis est introduit dans un amplificateur de puissance (PA), un dispositif dont la caractéristique de la tension de sortie en fonction de la tension d'entrée est non-linéaire.

**Caractéristique AM/AM** La caractéristique de l'amplificateur AM/AM (pour Amplitude/Amplitude), appelée également courbe de transfert ou compression AM/AM, traduit la variation de l'amplitude (ou la puissance) de la tension de sortie en fonction de celle de l'entrée. Trois zones peuvent être distinguées sur la courbe AM/AM illustrée dans la Figure 3.1. D'abord nous avons la zone linéaire (zone 1), la puissance de sortie  $P_s$  est proportionnelle à la puissance d'entrée  $P_e$ , leur rapport est constant et appelé le gain de l'amplificateur. En général, cette zone ne représente pas de distorsions. Ensuite, la zone de compression (zone 2) présente une courbe non-linéaire, et la puissance de sortie n'est alors plus proportionnelle à la puissance d'entrée. Cette zone est caractérisée par un point particulier, dit le point de compression à 1 dB, c'est le point où l'écart entre le gain linéaire idéal et la caractéristique AM/AM vaut 1 dB. Finalement, dans la zone de saturation (zone 3), la puissance de sortie reste quasi-constante et égale à la puissance de saturation, quelle que soit la puissance d'entrée. Les distorsions dans cette zone sont très importantes.

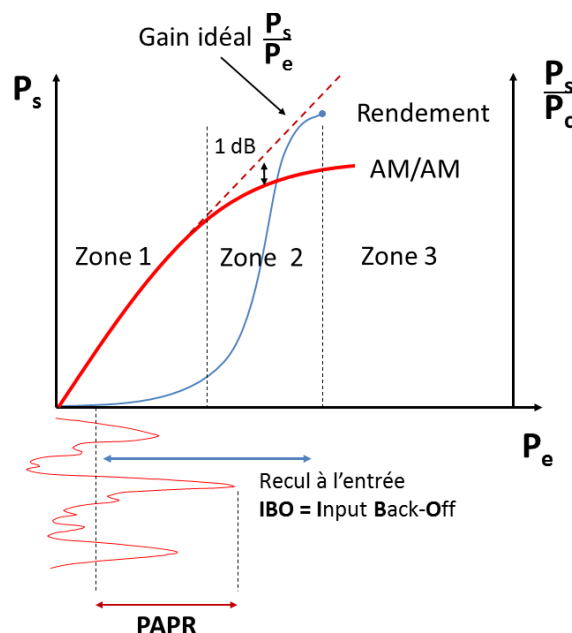


FIGURE 3.1 – Caractéristique AM/AM d'un amplificateur de puissance.

**Rendement en puissance de l'amplificateur** Afin d'amplifier le signal et assurer correctement l'acheminement des informations, l'amplificateur consomme une puissance de son alimentation pour injecter une puissance au signal de sortie. Le transfert de l'énergie vers le

signal se fait avec une perte. D'où la notion du rendement qui exprime le rapport entre la puissance de sortie et la puissance fournie par l'alimentation (la puissance consommée  $P_c$ ). La courbe de rendement en puissance d'un amplificateur est représentée dans la Figure 3.1. Nous pouvons constater que plus on s'approche de la zone linéaire, plus le rendement est faible.

**Influence de la non-linéarité de l'amplificateur** Si le signal à l'entrée présente des pics de puissance au delà du point de compression à 1 dB, le signal à la sortie connaît des distorsions significatives. Ces distorsions sont de plus en plus importantes, quand on s'approche du point de saturation. Les distorsions en bande et hors bande générées par les larges variations du signal d'entrée, causent des interférences et dégradent le taux d'erreur binaire.

Pour modéliser le problème de la non-linéarité, on peut approximer la partie non-linéaire de la caractéristique AM/AM l'amplificateur par un polynôme du  $n^{\text{ème}}$  degré :

$$s(t) = K_1 e(t) + K_2 e^2(t) + \dots + K_n e^n(t),$$

avec  $e(t)$  le signal d'entrée et  $s(t)$  le signal de sortie.

- Pour un signal d'entrée :  $e(t) = A \cos(\omega t)$ , on obtient en sortie :

$$s(t) = K_1 A \cos(\omega t) + K_2 A^2 \cos^2(\omega t) + \dots + K_n A^n \cos^n(\omega t).$$

En linéarisant les puissances du cosinus on trouve :

$$s(t) = K_1 A \cos(\omega t) + \left(K_2 \frac{A^2}{2}\right)(\cos(2\omega t) + 1) + \left(K_3 \frac{A^3}{4}\right)(3 \cos(\omega t) + \cos(3\omega t)) \dots$$

En développant, on fait apparaître des termes de la forme  $Q_p \cos(p\omega t)$ , avec  $p \in \mathbb{N}$ , ces termes représentent les harmoniques du signal d'entrée. Nous pouvons les voir dans la représentation schématique du spectre du signal de sortie sur la Figure 3.2. On conclut

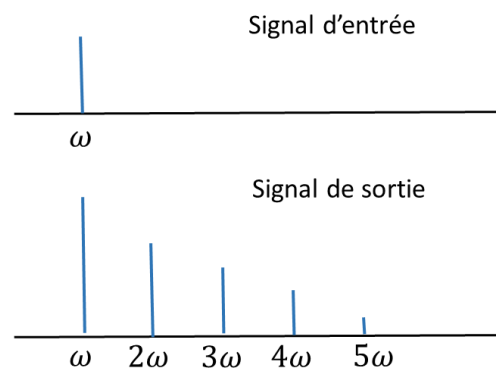


FIGURE 3.2 – Comparaison du spectre du signal d'entrée avec celui du signal de sortie.

alors que la non-linéarité engendre des distorsions harmoniques dans le signal de sortie. Et donc il ne sera plus sinusoïdal, mais déformé.

- Prenons maintenant un signal d'entrée de la forme :  $e(t) = A \cos(\omega_1 t) + B \cos(\omega_2 t)$ . Le signal de sortie s'écrit alors :

$$\begin{aligned} s(t) = & K_1 A \cos(\omega_1 t) + K_1 B \cos(\omega_2 t) \\ & + [K_2 A^2 \cos^2(\omega_1 t) + 2K_2 AB \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t) + K_2 B^2 \cos^2(\omega_2 t)] \\ & + [K_3 A^3 \cos^3(\omega_1 t) + 3K_3 A^2 B \cos^2(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t) + K_3 B^3 \cos^3(\omega_2 t) \\ & + 3K_3 AB^2 \cos^2(\omega_1 t) \cos^2(\omega_2 t)] + \dots \end{aligned}$$

En développant, on fait apparaître des termes de la forme  $Q_{p,q} \cos(p\omega_1 t \pm q\omega_2 t)$ , avec  $p, q \in \mathbb{N}$ . C'est un produit d'intermodulation qui engendre des distorsions d'intermodulation dans le signal de sortie.

**Recul à l'entrée** Afin d'éviter ces distorsions non-linéaires, un recul à l'entrée (*input back-off*) est effectué par rapport au point de compression à 1 dB ou par rapport au point de saturation, pour faire fonctionner l'amplificateur dans la zone linéaire. Comme illustré dans la Figure 3.3, la zone linéaire correspond à un faible rendement. Plus larges sont les variations du signal, plus grand est le recul à l'entrée nécessaire, plus faible est le rendement de l'amplificateur.

Par contre, si le signal ne présente pas de grandes fluctuations de puissance comme celui illustré dans la Figure 3.3, le recul à l'entrée est moins important, et le rendement est ainsi meilleur. Un mauvais rendement de l'amplificateur se traduit par une consommation énergétique élevée. Réduire la dynamique du signal contribue à améliorer la consommation d'énergie au niveau des équipements mobiles et au niveau des stations de base. Finalement, cela peut contribuer à la réduction des émissions de CO<sub>2</sub> ainsi que de la pollution environnementale. Il paraît nécessaire alors d'étudier les variations du signal, dans le but de réduire ces fluctuations et par conséquent réduire la consommation énergétique.

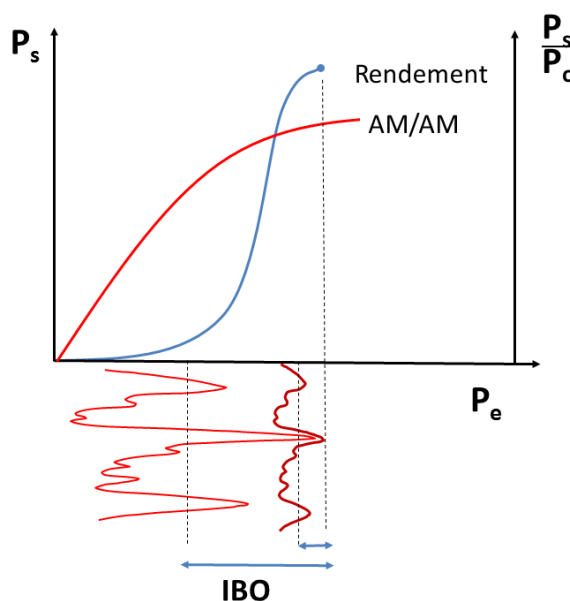


FIGURE 3.3 – Comparaison du recul à l'entrée pour deux signaux à variations d'enveloppe différentes.

## 3.2 Mesures des variations du signal

De nombreuses mesures ont été introduites dans la littérature pour analyser les variations du signal. Dans [80], le facteur pic (*peak factor*) a été défini par la différence de la valeur maximale du signal et sa valeur minimale, divisée par la norme  $L_2([0, T])$  du signal,  $T$  étant la période symbole. Le facteur pic d'un signal  $x(t)$  sur un intervalle  $[0, T]$  est exprimé par

$$PF_1 = \frac{\max_{t \in [0, T]} x(t) - \min_{t \in [0, T]} x(t)}{\sqrt{\int_0^T |x(t)|^2 dt}}$$

Plus tard, une deuxième définition du facteur pic a été introduite dans [81], elle mesure le rapport entre le maximum de la puissance instantanée du signal et la puissance moyenne

$$PF_2 = \frac{\max_{t \in [0, T]} |x(t)|^2}{\|x(t)\|_2^2}.$$

Plusieurs appellations sont apparues dans la littérature par la suite : le PMEPR (*peak-to-mean envelope power ratio*) [82], le rapport PAP (*peak-to-average power*) [83], le PAR (*peak-to-average power ratio*) [84] ou le PAPR (*peak-to-average power ratio*). En même temps, d'autres définitions ont été également utilisées, notamment le facteur crête (*crest factor*) [85] ou le PEP (*peak envelope power*) [86] définis par

$$CF = \frac{\|x(t)\|_\infty}{\|x(t)\|_2} = \frac{\max_{t \in [0, T]} |x(t)|}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2}}$$

$$PEP = \max_{t \in [0, T]} |x(t)|^2.$$

Afin d'unifier ces différentes définitions et notations, le terme PR (*power ratio*) a été proposé dans [87]. Le PR est défini pour différents états du signal (signal continu ou discret), et différents temps d'intégration (intervalle fini ou infini). Même si le terme PR semble être plus général, c'est le terme PAPR qui est largement répandu dans la communauté scientifique. Dans la suite, nous utilisons le PAPR comme mesure de la dynamique en puissance du signal modulé.

À temps continu, pour un signal complexe en bande de base, le PAPR peut être défini comme suivant

$$PAPR_{BB} = \frac{\max_{t \in [0, T]} |x(t)|^2}{\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2}.$$

Quand le signal est transporté en radio fréquence telle que la fréquence porteuse est  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ , le PAPR est exprimé par

$$PAPR_{RF} = \frac{\max_t |\operatorname{Re}(x(t)e^{j\omega_0 t})|^2}{\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\operatorname{Re}(x(t)e^{j\omega_0 t})|^2}.$$

La relation entre  $PAPR_{BB}$  et  $PAPR_{RF}$  est donnée dans [88] par

$$PAPR_{RF} \approx PAPR_{BB} + 3\text{dB}.$$

Pour raisons de simplicité, nous étudions dans la suite le PAPR en bande de base.

### 3.3 Fonction de répartition du PAPR pour l'OFDM

Le PAPR est une variable aléatoire qui mesure les variations de l'enveloppe d'un signal multiporteuses comme l'OFDM. Le caractère aléatoire de cette variable vient du fait que les symboles d'entrée arrivent aléatoirement à l'entrée de la modulation. Chaque symbole est porté par une fonction porteuse, et l'addition de ces porteuses peut être cohérente sur certains instants, engendrant ainsi des pics d'amplitude. L'analyse du PAPR peut être conduite par une étude déterministe qui consiste à calculer sa valeur maximale ou une borne supérieure, ou une étude statistique souvent réalisée à l'aide de la fonction de répartition CDF (*Cumulative distribution function*) ou sa fonction complémentaire CCDF (*Complementary Cumulative distribution function*).

Pour un système OFDM à  $M$  porteuses, la valeur maximale du PAPR est prouvée dans [89] être égale à

$$\text{PAPR}_{\max} = M.$$

Cette valeur n'est pas très significative, puisqu'elle n'est atteinte que dans le cas particulier de symboles d'entrée  $(1, 1, \dots, 1)$ . En effet, pour 64 porteuses par exemple, la probabilité d'avoir un PAPR égal au nombre de porteuses est d'environ  $2^{-64} \approx 10^{-19}$ . L'étude déterministe ne donne pas alors suffisamment d'informations sur les variations du signal.

Dès lors, il est plus judicieux d'étudier le caractère aléatoire du PAPR à travers l'analyse de sa CCDF qui est définie par la probabilité qu'une variable aléatoire dépasse une certaine valeur qu'on note  $\gamma$ .

$$\text{CCDF}(\text{PAPR}) = \Pr(\text{PAPR} \geq \gamma).$$

Plusieurs tentatives de dériver une expression ou une approximation de la CCDF du PAPR sont présentes dans la littérature. Van Nee et De Wild [90] ont développé une approximation de la CCDF pour un signal discret, en se basant sur le théorème central limite. Le signal OFDM est la somme de plusieurs variables aléatoires, sa loi tend vers une loi gaussienne, son amplitude suit une loi de Rayleigh et sa puissance suit une loi de Chi-deux. C'est ainsi qu'on peut arriver à l'approximation suivante

$$\Pr(\text{PAPR} \geq \gamma) \approx 1 - (1 - e^{-\gamma})^M. \quad (3.1)$$

Cependant, quand on procède à un suréchantillonnage pour modéliser un signal OFDM dans le cas continu, la courbe de la CCDF du PAPR est légèrement décalée. Si on ne fait pas de suréchantillonnage, il est possible de rater l'échantillon présentant le plus grand pic de puissance. Une approximation empirique correspondant au cas continu du signal OFDM a également été donnée par Van Nee et De Wild, en modélisant le processus de suréchantillonnage comme la considération d'un nombre plus grand d'échantillons indépendants entre eux. Cette approximation est donnée par

$$\Pr(\text{PAPR} \geq \gamma) \approx 1 - (1 - e^{-\gamma})^{\alpha M}, \quad \text{avec } \alpha = 2.8. \quad (3.2)$$

Un facteur de suréchantillonnage de 4 suffit pour représenter le signal OFDM dans le cas continu, puisque pour un facteur plus élevé, on retrouve la même courbe de la CCDF du PAPR.

Une autre approche est proposée par Ochiai et Imai [91]. Elle consiste à compter le nombre de fois que l'amplitude du signal continu atteint une valeur seuil  $\sqrt{\bar{\gamma}}$  fixée. En augmentant la valeur de  $\sqrt{\bar{\gamma}}$ , le décompte résultant se traduit par le nombre de pics dépassant la valeur du seuil. Pour  $\sqrt{\bar{\gamma}} = \pi$ , l'approximation dérivée donne une courbe assez proche de la courbe du PAPR pour un signal continu. Cette approximation est exprimée par

$$\Pr(\text{PAPR} \geq \gamma) \approx \begin{cases} 1 & \text{si } \gamma \leq \bar{\gamma}, \\ 1 - (1 - \frac{\sqrt{\bar{\gamma}}e^{-\gamma}}{\sqrt{\bar{\gamma}}e^{-\bar{\gamma}}})^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}M\sqrt{\bar{\gamma}}e^{-\bar{\gamma}}} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.3)$$

Plus tard, Zhou et Caffery [92] dérivent une borne supérieure de la CCDF du PAPR pour un signal OFDM continu, en supposant que la probabilité que le PAPR dépasse une certaine valeur  $\gamma$  est équivalente à ce que l'amplitude du signal coupe la valeur  $\sqrt{\bar{\gamma}}$  au moins une fois durant une période symbole OFDM. La borne dérivée qui donne de bons résultats à partir d'un nombre de porteuses égal à  $M = 64$  est exprimée par

$$\Pr(\text{PAPR} \geq \gamma) \leq \sqrt{\frac{\pi}{3}}M\sqrt{\bar{\gamma}}e^{-\gamma}. \quad (3.4)$$

Avec l'apparition d'autres variantes de l'OFDM, comme l'OFDM/OQAM (*offset QAM*) ou l'OFDM suréchantillonnée, Skrzypczak *et al.* [93, 94] proposent une approximation du signal discret des modulations multiporteuses à forme d'onde, exprimée par

$$\Pr(\text{PAPR} \geq \gamma) \approx \prod_{k=0}^{K-1} 1 - (1 - e^{-\alpha_k \gamma}), \quad \text{avec} \quad \alpha_k = \frac{1}{P \sum_{n \in \mathbb{Z}} h^2[k - nP]}.$$

Avec  $P$  le nombre d'échantillons par période symbole et  $h$  le filtre de mise en forme utilisé.

En se basant sur la borne supérieure de Zhou et Caffery, Hussain et Louët [95] dérivent une approximation de la CCDF du PAPR pour un signal OFDM continu, en utilisant le moment d'ordre 1 de la CCDF du PAPR. Cette approximation est donnée par

$$\Pr(\text{PAPR}_{\text{RF}} \geq \gamma)_{L \gg 1} \approx 1 - (1 - e^{-\frac{\gamma}{2}})^{\tau M \mu}, \quad (3.5)$$

$$\text{où } \tau = \left(\frac{5.12}{\sqrt{e}}\right)^{1.07} e^{-\zeta} \quad \text{et} \quad \mu = 1.07. \quad (3.6)$$

$\zeta = 0.577$  étant la constante d'Euler et  $L$  le facteur de suréchantillonnage.

Plus récemment, Jiang *et al.* [96] ont dérivé une approximation de la distribution du PAPR basée sur la théorie de la valeur extrême du processus Chi-deux du signal OFDM. Cette démarche ne prend pas comme hypothèse l'uniformité de l'allocation de la puissance, mais considère que la puissance n'est pas allouée de la même manière aux différentes porteuses. Soit  $M_{\text{tot}}$  le nombre total de porteuses,  $M$  le nombre de porteuses actives,  $P_m$  la puissance allouée à la  $m^{\text{ième}}$  porteuse et  $P_{\text{moy}}$  la puissance moyenne du signal OFDM. Une approximation de la distribution du PAPR pour un signal OFDM est exprimée par

$$\Pr(\text{PAPR} > \gamma) \approx 1 - \exp \left\{ -2e^{-\gamma} \sqrt{\frac{\pi \gamma}{M_{\text{tot}} P_{\text{moy}}} \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}} m^2 P_m} \right\}.$$

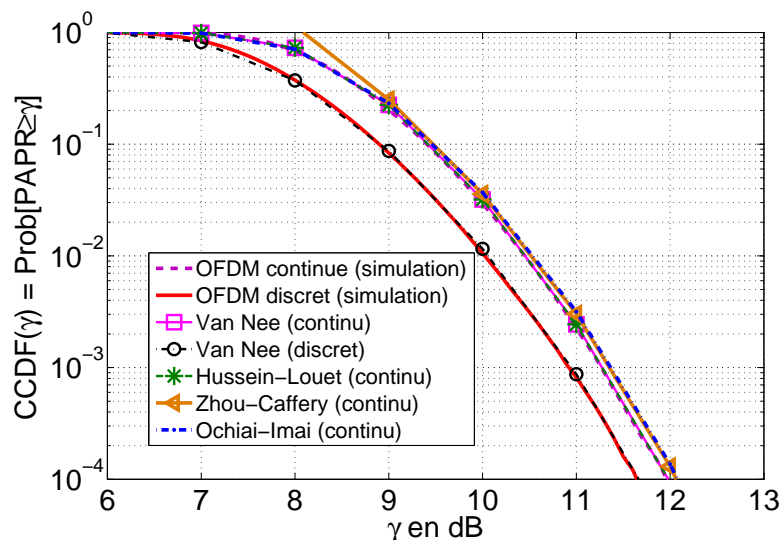


FIGURE 3.4 – Comparaison des approximations de la CCDF du PAPR pour un système OFDM à  $M = 256$  porteuses.

**Comparaison des approximations des CCDF du PAPR** Un signal OFDM à temps discret correspond à un échantillonnage critique. Pour un signal à temps continu, on applique

un suréchantillonnage d'un facteur de 4. Afin de simuler la CCDF du PAPR d'un signal OFDM (continu ou discret) de  $M$  porteuses, nous générons d'abord  $M$  symboles numériques à partir d'une constellation et nous effectuons une IFFT de taille  $M$  pour le cas discret, et de taille  $4M$  pour le cas continu. Ensuite, nous calculons le PAPR du symbole OFDM résultant en faisant le rapport entre son maximum et sa moyenne. Pour une CCDF de  $10^{-n}$ , nous effectuons  $n_{\text{iter}} = 10^{n+2}$  itérations (génération d'un symbole OFDM et calcul de son PAPR). Pour calculer  $\text{CCDF} = \Pr(\text{PAPR} \geq \gamma)$ , nous calculons pour chaque valeur de  $\gamma$  le rapport suivant : nombre de fois où la valeur du PAPR dépasse la valeur  $\gamma$  durant  $n_{\text{iter}}$  itérations sur le nombre total d'itérations  $n_{\text{iter}}$ . Les simulations effectuées dans cette thèse considèrent des valeurs de CCDF dans  $[0, 10^{-4}]$  pour évaluer et mesurer les performances en PAPR, et elles se limitent à des valeurs de CCDF dans  $[0, 10^{-2}]$  pour des illustrations ou des comparaisons.

La Figure 3.4 indique que l'équation (3.4) est effectivement une borne supérieure du PAPR, mais pour de grandes valeurs de PAPR, l'approximation devient proche de la simulation. L'approximation (3.3) donne des résultats en phase avec la simulation d'un signal OFDM continu. Les approximations (3.2) et (3.6) sont les plus proches des simulations de l'OFDM en cas continu, même si l'approximation (3.2) n'est qu'empirique. Pour un signal OFDM discret (sans suréchantillonnage), l'approximation (3.1) correspond bien à la simulation.

Nous remarquons sur cette même figure, qu'il y a un certain décalage entre la CCDF du signal OFDM continu et celle du signal OFDM discret. En effet, dans le cas discret, à échantillonnage critique, si l'instant d'échantillonnage ne correspond pas à l'instant où la puissance est maximale, le pic à échantillonnage critique sera différent du pic à suréchantillonnage, et donc le PAPR dans le cas discret sera différent du PAPR dans le cas continu, ce qui explique le décalage entre les deux CCDF.

Une dernière remarque concernant les approximations des CCDF, c'est qu'elles ne dépendent pas des symboles d'entrée ou de la constellation, pourvu que les symboles restent indépendants et identiquement distribués. Le nombre de porteuses  $M$  semble être le seul facteur qui agit explicitement sur la valeur du PAPR. Plus  $M$  est grand, plus la somme résultante des porteuses est grande, plus la dynamique du signal OFDM est importante. Par contre, aucune dépendance explicite de la forme d'onde n'est visible dans les approximations dérivées. Nous allons dériver dans le chapitre 5 une approximation de la CCDF du PAPR qui montre explicitement cette dépendance.

### 3.4 Méthodes de réduction du PAPR

La réduction du PAPR a pour objectif d'atténuer les fluctuations de l'enveloppe du signal, afin de pouvoir amplifier le signal le plus près possible de la zone de saturation, permettant ainsi un meilleur rendement énergétique. Ce problème a été soulevé à peu près en même temps que les problèmes d'analyse de sa distribution vers la fin des années 50 [97, 98] et au début des années 70 [80]. Cependant, ce n'est qu'avec l'utilisation de la modulation OFDM dans certains standards de télécommunications (DVB-T, DAB), que l'intérêt pour la réduction du PAPR s'est développé. C'est ainsi que plusieurs méthodes de réduction du PAPR ont été proposées dans la littérature à partir des années 90.

Différentes manières de classer les méthodes de réduction du PAPR sont envisageables. On trouve principalement trois catégories de méthodes de réduction du PAPR dans la littérature, à savoir les techniques d'ajout de signal, les techniques probabilistes et les techniques de codage. Comme l'objectif de la thèse ne porte pas sur les techniques de réduction du PAPR mais sur une nouvelle modulation à PAPR réduit, l'état de l'art sur les méthodes de réduction du PAPR sera brièvement présenté dans ce chapitre.

### 3.4.1 Critères d'évaluation des techniques de réduction du PAPR

Outre la réduction effective du PAPR, la performance des techniques de réduction du PAPR est évaluée suivant plusieurs critères.

- **Compatibilité descendante** : dans une méthode à compatibilité descendante, l'émetteur n'a pas besoin de communiquer au récepteur de l'information concernant le traitement appliqué à l'émission pour la réduction du PAPR. Ainsi, le récepteur n'est pas modifié et n'opère pas de traitement supplémentaire.
- **Dégradation du taux d'erreurs binaire (TEB)** : certaines méthodes de réduction du PAPR modifient la structure du signal, en introduisant des distorsions. Le signal reçu est alors modifié et souvent sa courbe de TEB est dégradée.
- **Modification de la densité spectrale de puissance à l'émission** : les distorsions apportées au signal émis peuvent augmenter ses lobes secondaires et bruyier la bande utile du signal.
- **Variation de la puissance moyenne** : avec l'ajout d'un signal correcteur ou l'écrêtage des pics, la puissance moyenne du signal peut augmenter ou diminuer, ce qui représente un impact fort sur la qualité de transmission [99].
- **Diminution du débit utile** : l'émetteur peut être amené à envoyer de l'information sur son traitement de réduction du PAPR au récepteur, afin que celui-ci puisse démoduler correctement le signal. Cette information réduit le débit utile du système.
- **Complexité** : si l'algorithme de réduction du PAPR est très complexe et lent à être exécuté, cela limitera son utilisation, même si la réduction du PAPR est considérable.

### 3.4.2 Techniques d'ajout de signal

Les Techniques d'ajout de signal consistent à ajouter un signal correcteur en temps ou en fréquence au signal d'origine de telle sorte que le signal résultant ait un PAPR plus faible que le signal d'origine. Nous introduisons brièvement quelques exemples.

- **Le clipping et filtrage** est considéré comme une technique d'ajout de signal [100]. Il consiste à écrêter les pics qui dépassent un certain seuil prédéterminé, avant d'introduire le signal dans un amplificateur de puissance. Cet effet réduit la puissance maximale et également la puissance moyenne du signal. Le clipping, étant une opération non linéaire, engendre des distorsions dans la bande utile qui dégradent le TEB, et des distorsions hors bandes qui causent des interférences. Un bon codage canal et un filtrage sont donc nécessaires pour améliorer le TEB et atténuer les interférences. De nombreuses méthodes ont été développées pour lutter contre les inconvénients du clipping, notamment le *deep clipping* [101, 102], le *smooth clipping* [103], le clipping inversible [104, 105] et plus récemment le clipping adaptatif [106].
- **La TR (*tone reservation*)** consiste à réserver des porteuses afin de les utiliser pour la réduction du PAPR. Cette technique a été introduite d'abord par Tellado [107], l'émetteur et le récepteur se mettent d'accord sur le nombre et la position des porteuses réservées. Plus tard, d'autres travaux [108, 109] ont proposé la *tone reservation* à compatibilité descendante, en utilisant les porteuses nulles par exemple pour la réduction du PAPR. Par ailleurs, la performance en réduction du PAPR dépend du nombre et de la position des porteuses réservées.

### 3.4.3 Techniques probabilistes

L'idée de base des techniques probabilistes est de représenter le signal OFDM d'origine sous plusieurs versions, en modifiant soit la phase, l'amplitude et/ou la position des porteuses, et sélectionner par la suite la copie qui présente le PAPR le plus faible. Ces techniques ont l'inconvénient de ne pas être à compatibilité descendante puisqu'il faut informer le récepteur de la copie sélectionnée afin qu'il puisse récupérer le signal. Le débit utile est également réduit pour la même raison. Parmi les techniques probabilistes populaires, on distingue :

- La technique SLM (*selective mapping*) [83] : le principe est de multiplier les symboles d'entrée issus d'une modulation numérique par une série de différents vecteurs générant plusieurs versions du signal OFDM à différentes phases après le passage IFFT. La version du signal qui représente la meilleure performance en PAPR est retenue. Cet algorithme est complexe, surtout qu'il requiert d'effectuer la IFFT autant de fois qu'il y a de versions.
- La technique PTS (*partial transmit sequence*) [110, 111] : l'idée de cette méthode est de diviser les  $M$  porteuses en plusieurs blocs de porteuses. Toute porteuse utilisée dans un bloc est rendue inactive (remise à zéro) dans les autres blocs. Ensuite, la méthode SLM est appliquée après la IFFT en effectuant plusieurs pondérations de chaque bloc, et générant ainsi plusieurs versions du signal OFDM. Naturellement, la version ayant la meilleure performance en PAPR est transmise.
- La technique RP (*random phasor*) [112] : cette technique est plus simple que la technique SLM classique. Elle consiste à vérifier d'abord si le PAPR d'un symbole OFDM est supérieur à un certain seuil. Si c'est le cas, une pondération est effectuée sur les symboles fréquentiels afin de réduire le PAPR.

### 3.4.4 Techniques de codage

Les techniques de codage consistent à exploiter la redondance introduite par un choix adéquat du code, afin d'éviter de transmettre les symboles OFDM à fort PAPR. Le code va servir également à sa fonction primaire, la correction d'erreurs. Ces techniques ne sont pas à compatibilité descendante puisqu'il faut informer le récepteur du codage choisi pour permettre le décodage correspondant. Les méthodes de réduction du PAPR basées sur les techniques de codage ont généralement des gains très importants en PAPR, mais elles ne sont réalisables en pratique que pour un faible nombre de porteuses. Leur utilisation n'est donc pas envisageable pour des applications de transmissions à grand nombre de porteuses.

- Les codes en blocs : pour un nombre de porteuses et une longueur de mots donnés, il est possible de générer la liste complète des séquences possibles. Ensuite, les séquences à faible PAPR sont sélectionnées [113, 86]. Il existe plusieurs méthodes de sélection de séquences à faible PAPR pour la réduction du PAPR par des « codes en blocs », comme la sélection issus de séquences complémentaires de Golay proposée dans [114, 115] par exemple. Cette méthode est d'autant plus complexe que le nombre de porteuses est grand, puisqu'il faut calculer le PAPR de chaque séquence générée.
- Les codes de Reed Muller : l'objectif de cette méthode est d'insérer un code correcteur basé sur les codes de Reed Muller, générant des séquences complémentaires avant la IFFT. L'avantage de ce code est qu'il apporte un PAPR constant de 3 dB, et qu'il conduit en même temps à un bon gain de codage [116, 117]. L'inconvénient de cette technique est qu'elle n'est applicable qu'aux modulations numériques de phases, ce qui réduit considérablement son champs d'application. Par ailleurs, cette méthode n'est applicable en pratique que pour un nombre faible de porteuses.

## Conclusion

Nous avons rapporté dans ce chapitre un état de l'art du problème du PAPR. Plusieurs mesures et appellations ont été introduites dans la littérature pour désigner les variations du signal multiporteuses. Le PAPR reste le terme le plus utilisé par les auteurs. La distribution du PAPR pour le système OFDM a été étudiée pour les deux contextes discret et continu, nous avons rappelé ces différentes approximations. Nous avons introduit et analysé brièvement les trois grandes classes des techniques de réduction du PAPR ; les techniques d'ajout de signal, les techniques probabilistes et les techniques de codage.



# Chapitre 4

## Modulations adaptatives

### Sommaire

---

4.1	Contexte de la radio intelligente . . . . .	65
4.2	Hypothèses générales d'un système adaptatif . . . . .	66
4.3	Adaptation de la puissance allouée . . . . .	67
4.4	Adaptation de la modulation et du codage . . . . .	67
4.5	Adaptation de la largeur de bande . . . . .	68
4.6	Adaptation de l'intervalle de garde . . . . .	69
4.7	Limitations des modulations adaptatives . . . . .	69

---

Ce court chapitre est consacré aux techniques d'adaptation dans la modulation multipor-teuses. Il est utile de rappeler les hypothèses générales d'un système adaptatif et quelques techniques d'adaptation, pour se positionner par rapport à la nouvelle technique d'adaptation qu'on propose au chapitre 8.

Plusieurs techniques adaptatives de transmission ont été présentées dans la littérature. La modulation adaptative appliquée à l'OFDM a été proposée en 1989 par Kalet [118] et a été développée plus tard par Chow *et al.* [119] et Czulwik *et al.* [120]. Elle consiste à adapter des paramètres de transmission pour chaque porteuse aux caractéristiques du canal sélectif en fréquence. Différents paramètres peuvent être adaptés : la puissance allouée à chaque porteuse, le schéma de modulation ou la constellation qui représente le nombre de bits alloués à chaque porteuse, le codage, l'espacement entre les porteuses ou la largeur de bande de la porteuse, et la longueur de l'intervalle de garde du symbole OFDM. Le but de ces adaptations est d'améliorer les performances du système en termes d'efficacité spectrale, débit binaire, et taux d'erreur binaire (TEB) dans les communications sans fils à haut débit.

### 4.1 Contexte de la radio intelligente

Même si les modulations adaptatives existent depuis très longtemps, bien avant la forma-lisation du concept de Radio Intelligente *cognitive radio*, comme ce dernier est à la base des études du laboratoire d'accueil SCEE<sup>1</sup> [121], nous replaçons ces techniques dans le contexte plus général de la radio intelligente. Un système adaptatif peut alors être décrit par un cycle intelligent classique comprenant trois étapes : Apprentissage et estimation, Prise de décision,

---

1. Signal, Communication et Électronique Embarquée

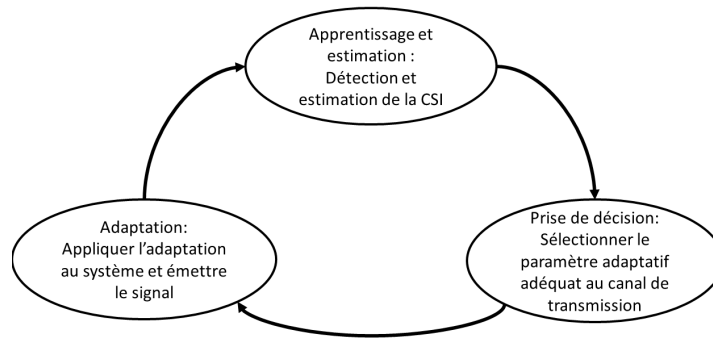


FIGURE 4.1 – Cycle simplifié d'un scénario de radio intelligente.

Adaptation. Durant la période d'apprentissage et d'estimation, le récepteur estime le canal de transmission. Ensuite, le paramètre d'adaptation est calculé durant l'étape de prise de décision et sera enfin transmis à l'émetteur afin d'être utilisé dans l'étape d'adaptation. La Figure 4.1 représente ce cycle de radio intelligente.

Nos travaux au chapitre 8 entrent aussi dans le contexte radio intelligente, et plus particulièrement dans le contexte de l'éco-radio intelligente *green cognitive radio* [122]. L'éco-radio intelligente considère des contraintes écologiques comme la diminution de la consommation énergétique, l'objectif principal de notre travail.

## 4.2 Hypothèses générales d'un système adaptatif

Les techniques adaptatives conviennent seulement aux communications "duplex" entre deux stations, car les paramètres de transmissions doivent être adaptés en utilisant une transmission dans les deux sens permettant l'estimation du canal et la signalisation. Toute technique d'adaptation doit en général passer par les étapes suivantes :

- **Estimation du canal et retour à l'émetteur** : La connaissance de l'état du canal ou *channel state information* (CSI) ne peut être disponible que par prédiction des estimations de la qualité du canal précédent, ce qui ne serait efficace que dans des conditions d'un canal peu variant. En général, le récepteur doit faire une estimation fiable du canal et transmettre l'information à l'émetteur. Celui-ci a besoin de savoir les caractéristiques du canal durant la prochaine trame émise. Cette information est prédite à partir de la CSI de la dernière transmission, et donc cela suppose que le canal n'a pas beaucoup varié durant cette période là. Le délai entre l'estimation de l'état du canal et la transmission actuelle du symbole OFDM est crucial dans une technique d'adaptation. Si la CSI est obsolète au moment de l'émission, les performances du système seront dégradées.
- **Choix d'un paramètre approprié pour la prochaine transmission** : en se basant sur la réponse fréquentielle estimée du canal, une pré-égalisation spectrale est effectuée à l'émetteur afin d'éviter complètement ou partiellement la sélectivité en fréquence du canal. Il existe plusieurs façons de sélectionner les paramètres appropriés au canal, cela sera présenté dans la suite du chapitre.
- **Signalisation ou détection aveugle par le récepteur du paramètre utilisé** : Le paramètre d'adaptation choisi à l'émetteur doit être communiqué au récepteur pour pouvoir démoduler et décoder le symbole OFDM. Si la signalisation de l'information est corrompue, alors le récepteur est généralement incapable de décoder correctement le symbole

OFDM. Une méthode alternative est la détection aveugle [123], qui requiert peu ou pas de signalisation, mais qui souffre d'une augmentation de la complexité.

### 4.3 Adaptation de la puissance allouée

La puissance d'émission est d'habitude allouée uniformément à toutes les porteuses. Pourtant, les porteuses ne s'évanouissent pas de la même manière dans un canal sélectif en fréquence, et subissent différemment l'impact du bruit. Une adaptation de la puissance permet une allocation de puissance variable aux porteuses selon l'évanouissement du canal subi par chaque porteuse.

Soit  $h_m$  le gain du canal pour chaque porteuse  $m$ . On note  $P_m$  la puissance de transmission de chaque porteuse  $m$ , et  $P_{\text{totale}}$  la puissance totale. Le débit maximal pour une transmission fiable est :

$$\mathcal{R} = \sum_{m=0}^{M-1} \log \left( 1 + \frac{P_m |h_m|^2}{N_0} \right), \quad (4.1)$$

avec  $N_0$  la densité de puissance du bruit. L'allocation de puissance a pour objectif de maximiser le débit exprimé dans (4.1). Elle représente alors la solution du problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} & \underset{\{P_m\}_{m \in [0, M-1]}}{\text{maximiser}} && \sum_{m=0}^{M-1} \log \left( 1 + \frac{P_m |h_m|^2}{N_0} \right) \\ & \text{sous la contrainte} && \sum_{m=0}^{M-1} P_m = P_{\text{totale}} \quad P_m \geq 0, m \in [0, M-1]. \end{aligned}$$

Il existe différents algorithmes adaptatifs dans la littérature pour atteindre une puissance optimale ou proche de la distribution de la puissance optimale [124, 125, 126]. L'algorithme le plus populaire de l'allocation de puissance est l'algorithme du *waterfilling*. Dans le contexte de la radio intelligente, les auteurs proposent dans [127] un algorithme d'allocation de puissance qui a une capacité de transmission meilleure que le *waterfilling* sous des contraintes sur les interférences et le budget de puissance.

### 4.4 Adaptation de la modulation et du codage

L'OFDM utilise une modulation numérique (constellation) fixe et uniforme pour les différentes porteuses. Dans la présence d'un canal multitrajets, certaines porteuses sont plus affectées que d'autres, et ont un faible SNR. Pour lutter contre cet évanouissement des porteuses, plusieurs techniques de codage et d'entrelacement peuvent être employées. Une autre solution est l'utilisation de l'OFDM adaptatif qui permet un schéma variable de modulation des porteuses ; envoyer moins de bits dans les porteuses les plus affectées par le canal, et envoyer plus de bits dans les porteuses non affectées par l'évanouissement du canal. Les porteuses très corrompues peuvent être laissées vides, ou utilisées par exemple pour la réduction du PAPR. Ainsi, la constellation utilisée pour chaque porteuse peut être adaptée au SNR correspondant [128]. Le SNR instantané  $\text{SNR}_m$  pour chaque porteuse  $m$  est estimé par le récepteur. Il peut être exprimé par :

$$\text{SNR}_m = |H_m|^2 \text{SNR}_{\text{tot}}.$$

$H_m$  est la réponse du canal pour la porteuse d'indice  $m$ .  $\text{SNR}_{\text{tot}}$  est le SNR global. La sélection du mode de la modulation pour chaque porteuse dépend de la valeur du SNR correspondante. Si le canal est très mauvais sur une porteuse  $m$ , une modulation robuste (QPSK par exemple)

est utilisée sur cette porteuse, et si le canal est de bonne qualité, une modulation à bonne efficacité spectrale (64-QAM par exemple) est utilisée. Pour réduire la complexité de la sélection de la modulation adéquate, nous pouvons diviser la bande passante en plusieurs sous-bandes, et allouer aux porteuses de chaque sous-bandes le même mode de modulation. Dans ce cas là, nous pouvons considérer la plus petite valeur du SNR pour chaque sous-bande, ou une valeur moyenne du SNR sur toutes les porteuses de la sous-bande. La division de la bande en sous-bandes dépend des contraintes de l'application, chaque sous-bande peut correspondre par exemple à un utilisateur.

Ainsi, pour un système non adaptatif, soit nous utilisons une grande constellation (telle que 64-QAM) pour améliorer le débit, mais qui dégrade les performances en TEB, soit nous utilisons une constellation robuste (telle que 4-QAM) en TEB, mais avec un débit plus limité. La modulation adaptative permet d'augmenter le débit en évitant de dégrader les performances en TEB. Conjointement avec l'adaptation de la modulation, le codage canal peut également être adapté en adaptant le taux de code, l'entrelacement, la perforation pour les codes convolutionnels et le turbo code, ainsi que la longueur des blocs pour les blocs de codes [129] [130] [131]. L'objectif est d'améliorer le débit global de transmission sans dégrader le TEB. Il est vrai que l'information envoyée à l'émetteur constitue une perte de débit utile, mais cette perte potentielle en débit peut être compensée en utilisant des modes de modulation à un ordre élevé pour les porteuses à grandes valeurs de SNR.

L'adaptation de modulation et de codage a été proposée pour des systèmes de communications filaires comme l'ADSL [132], ainsi que pour des systèmes de communications sans-fils comme le LTE [133]. Dans le standard LTE, l'adaptation de modulation et du codage permet un taux d'erreur par bloc inférieur à 10%. Le taux d'erreur par bloc pour un utilisateur, est défini comme le rapport entre le nombre des ressources erronées dans un bloc sur le nombre total des ressources du bloc. Dans l'OFDM adaptatif du LTE descendant (*downlink*), l'utilisateur (récepteur) estime l'état du canal, et envoie un indicateur de cet état à la station de base (émetteur). Cet indicateur peut être une mesure du SINR (*signal to interference plus noise ratio*), en tant que valeur moyenne des SINR sur toutes les porteuses allouées à cet utilisateur, ou sa plus petite valeur sur ces porteuses. Quand la station de base reçoit l'indicateur du canal, elle identifie la modulation et le codage correspondant, dans une base de données de correspondance préalablement implémentée. Des recherches ont été menées pour améliorer l'adaptation de la modulation et du codage en LTE. Dans [134] [135] [136], les auteurs montrent qu'au lieu d'utiliser une correspondance statique pour déterminer la modulation et le codage appropriés, nous pouvons implémenter un agent de prise de décision en se basant sur les techniques d'apprentissage par renforcement. Cela permettra de sélectionner un facteur de correction que nous pouvons appliquer à l'indicateur du canal reçu en considérant les précédentes valeurs de ces indicateurs. Le choix de la modulation et du codage sera alors plus efficace. Dans ce même but, au lieu de considérer un seul schéma de modulation et codage par utilisateur, nous pouvons effectuer une adaptation sur chaque porteuse en considérant le SINR de chaque porteuse au lieu de la seule valeur du SINR moyen.

## 4.5 Adaptation de la largeur de bande

La largeur de bande est généralement pré-définie et reste fixe pour la durée de la transmission. Elle est choisie suffisamment grande pour lutter contre l'étalement de Doppler introduit par le canal. En supposant une connaissance de l'étalement de Doppler à l'émetteur, celui ci peut adapter dynamiquement la largeur de bande allouée à chaque porteuse, afin de combattre les ICI puisqu'ils sont inversement proportionnels à la bande passante de la porteuse. Dans [137], la méthode d'adaptation de la largeur de bande est étudiée conjointement avec l'allocation des bits par porteuse. D'abord une première valeur de largeur de bande est sélectionnée

dans un ensemble de valeurs possibles. Le SINR est ensuite évalué pour chaque porteuse, après avoir estimé au préalable la valeur de l'étalement de Doppler [138]. La modulation pour chaque porteuse peut ensuite être choisie en fonction du SINR, et le TEB associé peut être calculé. Ainsi, le débit pour chaque porteuse peut être estimé. Cette opération est répétée pour chaque valeur possible de largeur de bande. Finalement, la largeur de bande sélectionnée est celle qui donne le plus grand débit estimé. Notons que le nombre de porteuses peut changer d'un symbole à l'autre, pour permettre des largeurs de bande différentes pour les porteuses. Le débit est alors amélioré sans dégrader les performances de robustesse contre les ICI. La complexité au récepteur est aussi réduite du fait qu'on ait plus besoin d'implémenter les méthodes d'annulation d'interférences ICI.

## 4.6 Adaptation de l'intervalle de garde

Pour lutter contre les interférences inter-symboles, l'OFDM utilise un préfixe cyclique (CP). La longueur du CP est fixe et peut arriver jusqu'à 25% du signal utile. Cette longueur est généralement calculée en se basant sur la moyenne des retards de propagation (retard RMS ou *root mean square*), ou le RMS maximal que le terminal mobile peut connaître. Le CP doit être de longueur quatre ou cinq fois plus grande que le RMS moyen introduit par le canal. Pourtant, Le RMS n'est pas constant dans un environnement de communication sans-fils. D'après plusieurs mesures du canal effectuées sur différents environnements [139, 30], il est constaté que le retard RMS varie à partir de quelques dizaines de nano-secondes à quelques centaines de nano-secondes. Sous ces conditions d'environnement, le CP utilisé est plus grand que le RMS maximal, ce qui va sanctionner les dispositifs à faible RMS par un long CP non nécessaire. Dans [69] et [140], les auteurs proposent une adaptation du CP en fonction du RMS introduit par le canal. A partir de l'estimation du RMS du retard de propagation, la longueur du préfixe cyclique est adaptée dynamiquement. La longueur du CP choisie doit être communiquée entre l'émetteur et le récepteur, mais elle peut être présentée dans quelques bits seulement, cela ne représente pas une grande perte pour le système. En plus, il est montré dans [69] que l'estimation du RMS n'est pas biaisée, et la variance de l'estimation est faible, et donc les erreurs d'estimation n'influencent pas beaucoup sur la valeur sélectionnée de la longueur du CP. Ainsi, l'efficacité spectrale est améliorée sans dégrader la puissance consommée ou les performances en TEB.

## 4.7 Limitations des modulations adaptatives

Même si les techniques de l'OFDM adaptatif présentent de nombreux avantages, elles sont soumises à plusieurs limitations. En effet, les systèmes adaptatifs conviennent en général seulement à une communication duplex entre deux terminaux pour permettre le retour du récepteur à l'émetteur. L'adaptation se base sur la disponibilité de la CSI à l'émission par retour du récepteur et suppose alors un canal peu variant dans le temps. Cependant, le canal varie dans le temps, et donc un retard entre l'estimation du canal et le résultat d'estimation utilisé dans la transmission est inévitable en pratique, ce qui rend l'information du canal reçue à l'émetteur obsolète pour un long retard. En plus, les estimateurs du canal introduisent des erreurs d'estimation, et donc l'information du canal reçue par l'émetteur est imparfaite. Ceci introduit des erreurs d'adaptation. Plusieurs études ont été menées dans ce contexte là. Dans [141], les auteurs étudient l'impact d'une connaissance imparfaite du canal à l'émission, due à une vraie estimation (non parfaite) et un canal variant dans le temps (effet Doppler), sur les performances de l'OFDM adaptatif. Comme solution, ils proposent la prédiction du canal qui donne de meilleures performances en termes de TEB. Au lieu de calculer l'allocation des bits basée sur l'estimation courante du canal, l'allocation peut être basée sur l'état prédite du canal par un FIR de Wiener. Dans le même contexte, une solution basée sur plusieurs esti-

mateurs sur différentes fréquences a été proposée dans [142]. Comme dans le cas du IEEE 802.11a par exemple, les symboles d'apprentissage sont envoyés avant les données utiles, ce qui permet une estimation du canal sur toutes les fréquences. Dans d'autres cas, l'estimation sur quelques fréquences adjacentes suffit pour avoir de meilleures performances en termes de densité spectrale de puissance.

## Conclusion

Les modulations adaptatives sont des techniques prometteuses puisqu'elles permettent de réaliser des gains importants en termes de débit, taux d'erreur binaire, efficacité spectrale entre autres. L'adaptation de plusieurs paramètres a été traitée dans ce chapitre à savoir l'allocation de puissance, la modulation et le codage, la largeur de bande et l'intervalle de garde. Cependant, les techniques adaptatives ne sont pas efficaces dans tout type d'environnements de transmission, puisqu'elles supposent une faible mobilité du canal et une connaissance suffisante de l'état du canal à l'émetteur. Dans ce rapport (chapitre 8), nous proposons une nouvelle méthode d'adaptation des formes d'ondes à la sélectivité fréquentielle du canal qui, certes, souffrent de quelques limitations, mais apportera de nouvelles solutions pour l'éco-radio intelligente.

# Deuxième partie

## Contributions



# Chapitre 5

## Analyse théorique du PAPR pour les systèmes GWMC

### Sommaire

---

5.1	Expression du signal GWMC . . . . .	74
5.2	Hypothèses . . . . .	75
5.3	Définition générale du PAPR . . . . .	76
5.3.1	Cas continu . . . . .	76
5.3.2	Cas discret . . . . .	76
5.4	Borne supérieure du PAPR . . . . .	77
5.5	Approximation de la CCDF du PAPR . . . . .	78
5.5.1	Durée d'observation finie . . . . .	78
5.5.2	Durée d'observation infinie . . . . .	80
5.6	Application de l'approximation pour différents systèmes . . .	81
5.7	CCDF du PAPR pour l'OFDM classique pour différents pa- ramètres . . . . .	83

---

L'objectif de ma thèse est de générer un signal multiporteuses à PAPR réduit par construction. Cette approche diffère des méthodes classiques de réduction du PAPR où on génère un signal à PAPR élevé et on lui applique une des techniques de réduction de PAPR comme celles présentées dans le chapitre 3. Or, les approximations de la distribution du PAPR de l'OFDM présentes dans la littérature, et que nous avons rappelées dans le chapitre 3, ne font pas sortir explicitement la dépendance du PAPR de la forme d'onde de modulation. Dès lors, il faut d'abord vérifier si le PAPR dépend effectivement de la base de modulation. C'est ainsi que dans ce chapitre, nous dérivons une approximation générale de la distribution du PAPR qui dévoile explicitement cette dépendance. Pour cela, nous considérons un système multiporteuses à forme d'onde généralisée GWMC (*generalized waveforms for multicarrier systems*) que nous définissons ci-après. Ensuite, nous exposons le cadre des hypothèses considérées dans notre analyse, et finalement nous dérivons une approximation de la distribution du PAPR pour le système GWMC. Le comportement du PAPR pour différents scénarios et conditions de transmissions est également étudié.

Les travaux présentés dans ce chapitre ont fait l'objet de deux articles de conférence internationale [143, 144] et de leur extension en un article de revue [145].

## 5.1 Expression du signal GWMC

Nous considérons un scénario de transmission général : une transmission infinie de données et une durée d'observation variable, finie ou infinie. Les symboles numériques d'entrée, représentant les données à transmettre et issus d'une constellation de modulation numérique, sont décomposés en plusieurs blocs. Chaque bloc de symboles numériques est inséré en parallèle dans la modulation du système multiporteuses, générant à la sortie un symbole multiporteuses temporel comme montré dans la Figure 5.1. Après la modulation, un signal GWMC peut être exprimé par [144] :

**Définition 5.1.1.** (Signal GWMC)

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{M-1} C_{m,n} \underbrace{g_m(t - nT)}_{g_{m,n}(t)}. \quad (5.1)$$

- $M$  : nombre de porteuses qu'on suppose plus grand que 8. Cette hypothèse est nécessaire pour la validité du théorème central limite que nous allons utiliser pour dériver une approximation de la distribution du PAPR dans la section 5.5. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer au théorème de Berry-Essen rapporté dans l'annexe A.2.
- $C_{m,n} = C_{m,n}^R + jC_{m,n}^I$  : symboles d'entrée à valeurs complexes, issus d'une constellation (modulation numérique).
- $T$  : période d'un symbole GWMC, correspondant à la durée de  $M$  symboles numériques complexes  $C_{m,n}$ .
- $(g_m)_{m \in [0, M-1]}$  :  $\in L_2(\mathbb{R})$ , famille de fonctions représentant conjointement la base de modulation et le filtre de mise en forme, avec  $g_{m,n}(t) = g_{m,n}^R(t) + jg_{m,n}^I(t)$ , avec  $g_{m,n}^R(t)$  la partie réelle de  $g_{m,n}(t)$  et  $g_{m,n}^I(t)$  sa partie imaginaire.
- $x(t) = x^R(t) + jx^I(t)$  : le signal GWMC émis, avec  $x^R(t)$  la partie réelle de  $x(t)$  et  $x^I(t)$  sa partie imaginaire.

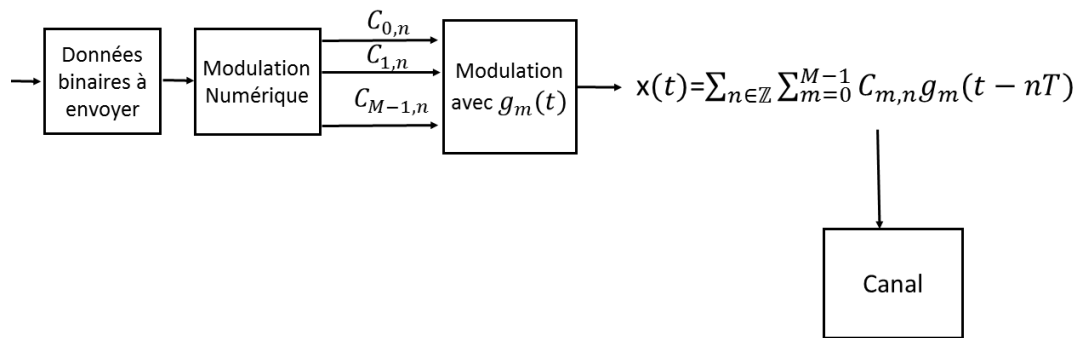


FIGURE 5.1 – Modulation GWMC.

## 5.2 Hypothèses

Comme nous allons voir dans la section 5.5, pour satisfaire les conditions du théorème central limite de Lyapunov (L-CLT), une version généralisée du théorème central limite, le système GWMC doit satisfaire les deux hypothèses suivantes.

**Hypothèse 5.2.1.** (Indépendance des symboles d'entrée)

- $(C_{m,n}^R)_{(m \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket, n \in \mathbb{Z})}$  sont deux à deux indépendants, chacun est de moyenne nulle et de variance  $\frac{\sigma_C^2}{2}$ .
- $(C_{m,n}^I)_{(m \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket, n \in \mathbb{Z})}$  sont deux à deux indépendants, chacun est de moyenne nulle et de variance  $\frac{\sigma_C^2}{2}$ .
- $(\forall m, p \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket), (\forall n, q \in \mathbb{Z}) C_{m,n}^R$  et  $C_{p,q}^I$  sont indépendants.

Par conséquent,

$$E(C_{m,n}^R C_{p,q}^R) = \frac{\sigma_C^2}{2} \delta_{m,p} \delta_{n,q}, \quad (5.2)$$

$$E(C_{m,n}^I C_{p,q}^I) = \frac{\sigma_C^2}{2} \delta_{m,p} \delta_{n,q}, \quad (5.3)$$

$$E(C_{m,n}^R) = E(C_{m,n}^I) = 0, \quad (5.4)$$

$$E(C_{m,n}^R C_{p,q}^I) = E(C_{m,n}^R) E(C_{p,q}^I) = 0. \quad (5.5)$$

Les symboles issus des constellations des modulations numériques usuelles comme QAM, ou QPSK satisfont ces conditions [78].

**Hypothèse 5.2.2.** (Hypothèses sur la base de modulation)

1. On suppose que les formes d'ondes  $\{g_m\}_{m \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket}$  appartiennent à  $L_I^\infty$ , où  $L_I^\infty$  est l'espace des fonctions essentiellement bornées et qui s'annulent en dehors d'un intervalle fini  $I$ . Ainsi on a

$$\forall m \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket \quad \forall t \notin I \quad g_m(t) = 0. \quad (5.6)$$

2. On suppose également que

$$A := \min_{m,t} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_{m,n}(t)|^2 > 0. \quad (5.7)$$

La propriété (5.6) est toujours satisfaite en pratique, et elle implique que

$$B := \max_{m,t} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_m(t - nT)| < +\infty. \quad (5.8)$$

**Interprétation de l'équation (5.7)** De façon générale, (5.7) signifie que les versions translattées de chaque porteuse  $g_m$  se chevauchent dans le temps, et la forme d'onde  $g_m$  ne s'annule pas durant la période symbole  $T$ .

En d'autres termes, s'il existe au moins un indice  $m_0 \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket$  tel que  $g_{m_0}$  s'annule dans un intervalle de temps dans la période symbole  $T$ , et que la longueur de son support ne dépasse pas  $T$ , alors la famille de fonctions  $\{g_m\}_{m \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket}$  ne satisfait pas (5.7). Dans ce cas, nous pouvons également dire que  $g_{m_0}$  a un support temporel strictement plus petit que la période symbole  $T$ .

Une conséquence particulière est que la porteuse  $g_{m_0}$  pourrait probablement avoir un support plus large en fréquence, et donc une mauvaise localisation fréquentielle. Cela est dû à la mesure de localisation temps-fréquence limitée par le principe d'incertitude de Heisenberg, qui indique que la fonction ne peut pas être limitée à la fois en temps et en fréquence (voir section 1.1.3).

Comme présenté dans l'annexe A.1.2, l'hypothèse 5.2.2 est une condition suffisante pour satisfaire la condition de Lyapunov, nécessaire pour appliquer le L-CLT qui traite des variables aléatoires non nécessairement identiquement distribuées [146]. Le lecteur peut se référer à l'annexe A.1.1 pour de plus amples détails sur la relation entre l'hypothèse 5.2.2 et la condition de Lyapunov.

## 5.3 Définition générale du PAPR

Dans cette partie nous proposons une définition du PAPR dans le cas continu et le cas discret. Le scénario de transmission suppose une durée de transmission infinie et une observation du signal de durée finie.

### 5.3.1 Cas continu

Pour une durée d'observation finie  $NT$ , on définit le PAPR d'un signal GWMC exprimé dans (5.1) comme suit

$$\text{PAPR}_c^N = \frac{\max_{t \in [0, NT]} |x(t)|^2}{P_{c, moy}}. \quad (5.9)$$

L'indice  $c$  correspond au contexte continu, l'exposant  $N$  représente le nombre des symboles GWMC observé et  $P_{c, moy}$  est la puissance moyenne du signal GWMC définie dans le Lemme suivant.

**Lemme 5.3.1.** (Puissance moyenne du signal GWMC à temps continu)

$$\begin{aligned} P_{c, moy} &= \lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \frac{1}{2t_0} \int_{-t_0}^{t_0} E(|x(t)|^2) dt \\ &= \frac{\sigma_C^2}{T} \sum_{m=0}^{M-1} \|g_m\|^2. \end{aligned} \quad (5.10)$$

L'opérateur  $E(\cdot)$  désigne l'espérance statistique. La puissance moyenne  $P_{c, moy}$  est définie sur un temps d'intégration infini, car notre scénario suppose une durée de transmission infinie. Les détails de la dérivation de son expression (5.10), sont expliqués dans l'annexe A.3.

### 5.3.2 Cas discret

Soit  $T_e = \frac{T}{P}$  la période d'échantillonnage du signal  $x(t)$  défini dans (5.1), avec  $P$  le nombre d'échantillons considéré dans une période  $T$ . On a alors

$$x(kT_e) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{M-1} C_{m,n} g_m(kT_e - nPT_e). \quad (5.11)$$

Notons  $x[k] := x(kT_e)$ , on obtient

$$x[k] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{M-1} C_{m,n} \underbrace{g_m[k - nP]}_{g_{m,n}[k]}. \quad (5.12)$$

Par conséquent, le PAPR à temps discret peut être défini par :

**Définition 5.3.1.** (PAPR à temps discret d'un signal GWMC à durée d'observation finie)

$$\text{PAPR}_d^N = \frac{\max_{k \in [0, NP-1]} |x[k]|^2}{P_{d,moy}}.$$

L'indice  $d$  correspond au contexte discret et  $P_{d,moy}$  à la puissance moyenne à temps discret.

**Lemme 5.3.2.** (Puissance moyenne du signal GWMC à temps discret)

$$P_{d,moy} = \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{k=-K}^K E(|x[k]|^2) \quad (5.13)$$

$$= \frac{\sigma_C^2}{P} \sum_{m=0}^{M-1} \|g_m\|^2, \quad (5.14)$$

$$\text{tel que } \|g_m\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |g_m[k]|^2.$$

En effet, C. Siclet a dérivé dans sa thèse [147], la puissance moyenne discrète du signal BFDQAM (*biorthogonal frequency division multiplexing*) qui est exprimée par :

$$x[k] = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_m[k - nP],$$

tel que  $f_m[k]$  est le filtre d'analyse. Les différentes étapes du développement de cette expression n'utilisent pas les propriétés exponentielles de  $f_m[k]$ . Nous pouvons ainsi suivre la même démarche pour obtenir (5.14).

La définition du PAPR à temps discret sera considérée dans la section 5.5 afin de simplifier les dérivations d'une approximation de la distribution du PAPR.

## 5.4 Borne supérieure du PAPR

Soient  $M$  un nombre fini de porteuses et  $(g_m)_{m \in [0, M-1]}$  une famille de modulation qui satisfait l'hypothèse 5.2.2. Pour un intervalle d'observation  $I$  et des symboles d'entrées, on a

$$\text{PAPR}_c(I) = \frac{\max_{t \in I} |x(t)|^2}{P_{c,moy}}, \quad (5.15)$$

d'une part on a

$$\begin{aligned} \max_{t \in I} |x(t)| &= \max_{t \in I} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{M-1} C_{m,n} g_m(t - nT) \right| \\ &\leq \max_{t \in I} \sum_{m=0}^{M-1} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_{m,n} g_m(t - nT) \right| \\ &\leq \max_{m,n} \sum_{m=0}^{M-1} |C_{m,n}| \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_m(t - nT)| \\ &\leq M \max_{m,n} |C_{m,n}| B, \end{aligned} \quad (5.16)$$

et d'autre part on a

$$P_{c,moy} = \frac{\sigma_C^2}{T} \sum_{m=0}^{M-1} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_m(t - nT)|^2 dt, \quad (5.17)$$

$$\text{d'où } MA\sigma_C^2 \leq P_{c,moy} \leq MB^2\sigma_C^2. \quad (5.18)$$

Ainsi,

$$\text{PAPR}_c(I) \leq \frac{\max_{m,n} |C_{m,n}|^2 B^2}{\sigma_C^2 A} M. \quad (5.19)$$

**Lemme 5.4.1.** (Borne supérieure du PAPR)

Pour un nombre fini de porteuse  $M$ , et une famille de fonctions  $(g_m)_{m \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket}$  qui satisfait l'Hypothèse 5.2.2, on a pour toute durée d'observation  $I$ , et des symboles d'entrée  $\{C_{m,n}\}$ ,

$$\begin{aligned} \text{PAPR}_c(I) &\leq \mathcal{C}M := \text{PAPR}_{c,\text{borne}}, \\ \text{avec } \mathcal{C} &= \frac{\max_{m,n} |C_{m,n}|^2 B^2}{\sigma_C^2 A}. \end{aligned}$$

Remarquons que  $\text{PAPR}_{c,\text{sup}} = \sup_I \text{PAPR}_c(I) \leq \text{PAPR}_{c,\text{borne}}$ .

En se basant sur le Lemme 5.4.1, il existe un supremum fini  $\text{PAPR}_{c,\text{sup}}$  tel que, pour tout  $\gamma > \text{PAPR}_{c,\text{sup}}$  et pour toute observation finie de durée  $I$ , on a  $\Pr(\text{PAPR}_c(I) \leq \gamma) = 1$ . La CCDF est alors égale à zéro au delà de  $\text{PAPR}_{c,\text{sup}}$  (voir la Figure 5.2). On peut également mentionner que cette borne tend vers l'infini quand le nombre de porteuses  $M$  tend vers l'infini, la CCDF est alors égale à 1 pour toute valeur de  $\gamma$ . Dans la suite, nous considérons des valeurs de  $\gamma$  suffisamment petites devant  $\text{PAPR}_{c,\text{sup}}$ .

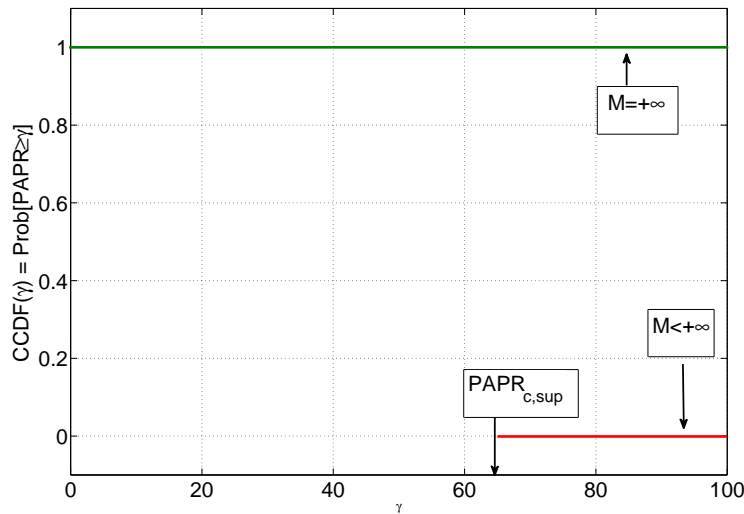


FIGURE 5.2 – Comportement du PAPR au delà de son supremum.

## 5.5 Approximation de la CCDF du PAPR

Dans ce qui suit, nous dérivons une approximation de la CDF du PAPR pour un  $\gamma$  suffisamment petit devant  $\text{PAPR}_{c,\text{sup}}$ .

### 5.5.1 Durée d'observation finie

En considérant une durée d'observation limitée à  $N$  symboles GWMC de  $P$  échantillons chacun, et en approchant les échantillons  $x[0], x[1], x[2], \dots, x[NP - 1]$  comme étant indépendants (cette approximation simplificatrice a été également considérée dans [30] dans le cas de

l'absence d'un échantillonnage critique), la CDF du PAPR pour un système GWMC peut être exprimée par

$$\begin{aligned}
\Pr(\text{PAPR}_d^N \leq \gamma) &= \Pr\left[\max_{k \in [0, NP-1]} |x[k]|^2 \leq \gamma P_{d, \text{moy}}\right] \\
&= \Pr(\forall k \in [0, NP-1] |x[k]|^2 \leq \gamma P_{d, \text{moy}}) \\
&\approx \prod_{k \in [0, NP-1]} \Pr(|x[k]|^2 \leq \gamma P_{d, \text{moy}}). \tag{5.20}
\end{aligned}$$

Nous devons maintenant chercher la distribution de  $|x[k]|^2$ . D'abord nous allons trouver la distribution de sa partie réelle  $x^R[k]$ , et ensuite suivre la même démarche pour sa partie imaginaire  $x^I[k]$ . Notons

$$\begin{aligned}
x_m^R[k] &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_{m,n}^R g_{m,n}^R[k] - C_{m,n}^I g_{m,n}^I[k] \\
x_m^I[k] &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_{m,n}^R g_{m,n}^I[k] + C_{m,n}^I g_{m,n}^R[k], \\
\text{tel que } x^R[k] &= \sum_{m=0}^{M-1} x_m^R[k] \\
x^I[k] &= \sum_{m=0}^{M-1} x_m^I[k].
\end{aligned}$$

Les variables aléatoires  $x_0^R[k], x_1^R[k], x_2^R[k], \dots, x_{M-1}^R[k]$  sont indépendantes, à moyenne nulle et satisfont la condition de Lyapunov d'après l'Hypothèse 5.2.2<sup>1</sup>. Ainsi, pour un large  $M$ , nous pouvons appliquer le L-CLT (voir Annexe A.1.3) et obtenir

$$\sum_{m=0}^{M-1} x_m^R[k] \sim \mathcal{N}\left(0, \underbrace{\frac{\sigma_C^2}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{M-1} |g_{m,n}[k]|^2}_{\frac{\sigma_x^2[k]}{2}}\right),$$

$$\text{d'où } x^R[k] \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_x^2[k]}{2}\right).$$

En procédant de la même manière, on trouve

$$x^I[k] \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_x^2[k]}{2}\right).$$

Le signal  $x[k]$  suit alors un processus Gaussien complexe de moyenne nulle et de variance  $\sigma_x^2[k] = \sigma_C^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{M-1} |g_m[k - nP]|^2$ . D'où,

$$\begin{aligned}
|x[k]|^2 &\sim \chi^2 \text{ à deux degrés de liberté.} \tag{5.21} \\
\text{Désignant } y[k] &= \frac{P_{d, \text{moy}}}{\sigma_x^2[k]},
\end{aligned}$$

il découle de (5.20) et (5.21) les résultats suivants.

---

1. L'Hypothèse 5.2.2 est utilisée uniquement dans cette étape. Afin de généraliser notre analyse, en considérant une famille plus large de formes d'ondes, il ne faut pas passer par le L-CLT.

**Théorème 5.5.1.** (Distribution du PAPR d'un signal GWMC de durée d'observation finie)  
 Pour un grand  $M$  et en considérant les hypothèses simplificatrices, on a

$$\Pr(\text{PAPR}_d^N \leq \gamma) \approx \prod_{k \in \llbracket 0, NP-1 \rrbracket} [1 - e^{-y[k]\gamma}], \quad (5.22)$$

$$\text{avec } y[k] = \frac{\sum_{m=0}^{M-1} \|g_m\|^2}{P \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{M-1} |g_m[k - nP]|^2}.$$

Remarquons que l'approximation de la distribution du PAPR dépend de la famille des fonctions de modulation  $(g_m)_{m \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket}$  mais également du nombre de porteuses  $M$  utilisé. De plus, elle dépend du paramètre  $N$ , le nombre des symboles GWMC observés.

En prenant en compte les hypothèses simplificatrices de nos dérivations, nous pouvons facilement étudier les performances du PAPR de tout système multiporteuses. L'expression d'approximation de la CDF du PAPR est comparée à la CDF empirique dans la section 5.6 pour différentes modulations multiporteuses.

### 5.5.2 Durée d'observation infinie

Dans cette section, on étudie le comportement de la distribution du PAPR pour une période d'observation infinie. En considérant un nombre infini de symboles GWMC observés, on a

$$\Pr(\text{PAPR}_d^\infty \leq \gamma) = \Pr\left[\frac{\max_{k \in \mathbb{N}} |x[k]|^2}{P_{d, \text{moy}}} \leq \gamma\right]. \quad (5.23)$$

Afin de formuler la distribution du PAPR dans ce cas, on fait tendre  $N$  vers l'infini dans (5.22), on obtient alors l'expression suivante.

**Corollaire 5.5.1.** (Distribution du PAPR d'un signal GWMC pour une durée d'observation infinie)

Pour un large  $M$  et en considérant les hypothèses simplificatrices, on a

$$\Pr(\text{PAPR}_d^\infty \leq \gamma) = 0. \quad (5.24)$$

En effet, on a

$$\Pr(\text{PAPR}_d^\infty \leq \gamma) = \prod_{k \in \mathbb{N}} [1 - e^{-y[k]\gamma}], \quad (5.25)$$

$$\text{avec } y[k] = \frac{\sum_{m=0}^{M-1} \|g_m\|^2}{P \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{M-1} |g_m[k - nP]|^2}.$$

$$\text{Et on a } \sum_{m=0}^{M-1} \|g_m\|^2 = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{P-1} |g_m[k - nP]|^2,$$

$$\text{alors } AMP < \sum_{m=0}^{M-1} \|g_m\|^2 < B^2 MP, \quad (5.26)$$

$$\text{et } \frac{1}{B^2 MP} < \frac{1}{M \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{M-1} |g_{m,n}[k]|^2} < \frac{1}{AMP}. \quad (5.27)$$

À partir de (5.26) et (5.27), on trouve

$$\frac{A}{B^2} < y[k] < \frac{B^2}{A}, \quad (5.28)$$

d'où

$$(1 - e^{-y[k]})^\gamma < 1 - e^{-\frac{B^2}{A}\gamma} < 1. \quad (5.29)$$

Ainsi, pour une durée d'observation infinie, et pour un  $\gamma$  suffisamment petit devant  $\text{PAPR}_{c,\text{sup}}$ , il vient

$$\Pr(\text{PAPR}_d^\infty \leq \gamma) = 0. \quad (5.30)$$

La CCDF est alors égale à 1 pour tout  $\gamma$  appartenant à notre intervalle d'intérêt (voir la Fi-

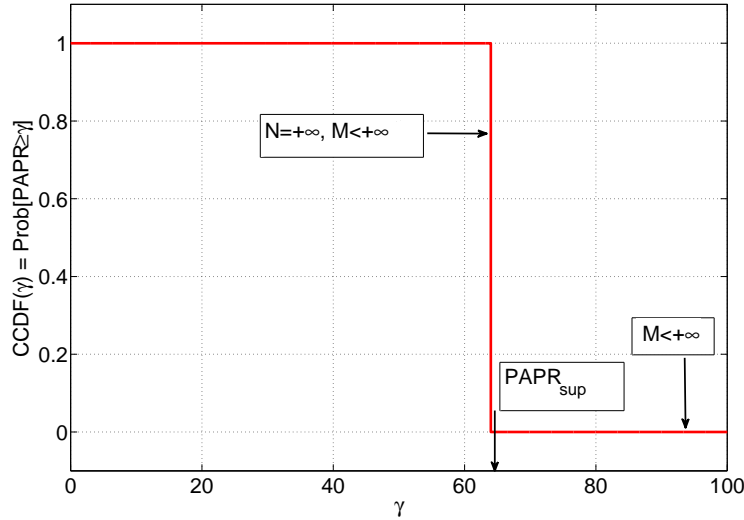


FIGURE 5.3 – CCDF du PAPR pour une durée d'observation infinie.

gure 5.3). L'équation (5.30) peut être interprétée par le fait qu'on ne peut pas contrôler le PAPR d'un nombre infini de symboles GWMC, parce qu'on obtiendra inévitablement des symboles GWMC à larges pics. Ainsi, pour  $M \geq 8$  et  $\gamma$  suffisamment petit devant  $\text{PAPR}_{c,\text{sup}}$  et pour une durée d'observation finie, il n'y a pas de famille de fonctions de modulation  $(g_m)_{m \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket}$  qui peut nous éviter les larges pics. En se basant sur cette conclusion, nous comptons optimiser les performances en PAPR pour un nombre fini de symboles GWMC.

## 5.6 Application de l'approximation pour différents systèmes

Le PAPR est une variable aléatoire, la dérivation de sa distribution peut être complexe, notamment si on doit répéter ces dérivations à chaque fois que les fonctions de modulation changent. L'équation (5.22) est une approximation à forme fermée (*closed-form*), elle permet alors de trouver directement une approximation de la CDF du PAPR sans opérations complexes. Pour illustrer cela, nous considérons les exemples suivants.

**L'OFDM conventionnel** Afin de retrouver l'expression du PAPR dérivée par Van Nee [30] de l'OFDM conventionnel dans le cas discret, on considère

- La base de Fourier est utilisée dans la modulation avec un filtre rectangulaire.

$$g_m[k] = e^{\frac{j2\pi mk}{P}} \Pi_{[0,P]}[k],$$

avec  $\Pi_{[0,P]}[k] = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq k \leq P, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$

- L'observation est limitée à un seul symbole OFDM et un nombre d'échantillons de  $M$ , alors  $P = M$ .

L'expression du signal GWMC dans (5.12) devient

$$x[k] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{M-1} C_{m,n} e^{\frac{j2\pi m[k-nP]}{P}} \Pi_{[0,P]}[k-nP]. \quad (5.31)$$

On applique (5.22), l'approximation de la CDF du PAPR pour  $N = 1$ . On obtient

$$y[k] = \frac{MP}{P \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{M-1} |e^{\frac{j2\pi m[k-nP]}{P}} \Pi_{[0,P]}[k-nP]|^2} = 1,$$

alors,

$$\Pr(\text{PAPR}_d^1 \leq \gamma) = [1 - e^{-\gamma}]^M. \quad (5.32)$$

On retrouve la même expression dérivée par Van Nee dans le cas discret.

**Systèmes FBMC** On choisit l'OFDM/OQAM comme un exemple des systèmes FBMC (voir section 2.1.2.3 pour plus de détails), et on vérifie l'expression dérivée par A.Skrzypczak [148]. On considère dans ce cas

- Les fonctions de modulation sont

$$\begin{aligned} g_m[k-nP] &= h_{OQAM}[k-nP] e^{j2\pi \frac{m}{M} [k-D/2]} e^{j\theta_{m,n}}, \\ \text{alors } |g_m[k-nP]|^2 &= h_{OQAM}^2[k-nP], \end{aligned}$$

où  $h_{OQAM}$  est un filtre prototype (IOTA, SRRC, PHYDYAS...).

- La durée d'observation est limitée à un bloc par symbole et le nombre d'échantillons considéré est  $M$ , alors  $P = M$ .
- $\|g_m\|^2 = 1$ .

L'expression du signal GWMC dans (5.12) devient

$$x[k] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{M-1} C_{m,n} h_{OQAM}(k-nP) e^{j2\pi \frac{m}{M} (k-D/2)} e^{j\theta_{m,n}}.$$

En appliquant (5.22) pour un seul symbole  $N = 1$ , on trouve

$$x[k] = \frac{1}{M \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{OQAM}^2[k-nP]},$$

d'où

$$\Pr(\text{PAPR}_d^1 \leq \gamma) = \prod_{k=0}^{M-1} [1 - e^{\frac{-\gamma}{M \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{OQAM}^2(k-nP)}}].$$

Le résultat est identique à celui dérivé par A. Skrzypczak.

**Systèmes UFMC** Afin d'appliquer notre approximation pour le cas de l'UFMC, nous avons considéré différents nombres de porteuses dans nos simulations :  $M = 64$ ,  $M = 256$ ,  $M = 1024$ . Le nombre de porteuses par blocs de ressources est fixé à 16. La fenêtre du filtrage considéré est celle de Chebyshev. La Figure 5.4 illustre la CCDF théorique du PAPR basée sur la formule (5.1), avec  $P = M$  et  $N = 1$ , et la CCDF expérimentale simulée en générant  $10^4$  réalisations des symboles UFMC, pour différents nombres de porteuses.

On observe que, plus grand est le nombre de porteuses, plus précise est la courbe théorique obtenue. Cela est dû au fait que nos dérivations sont basées sur le L-CLT qui suppose un nombre élevé de porteuses, en plus nous avons considéré l'hypothèse de l'indépendance des échantillons.

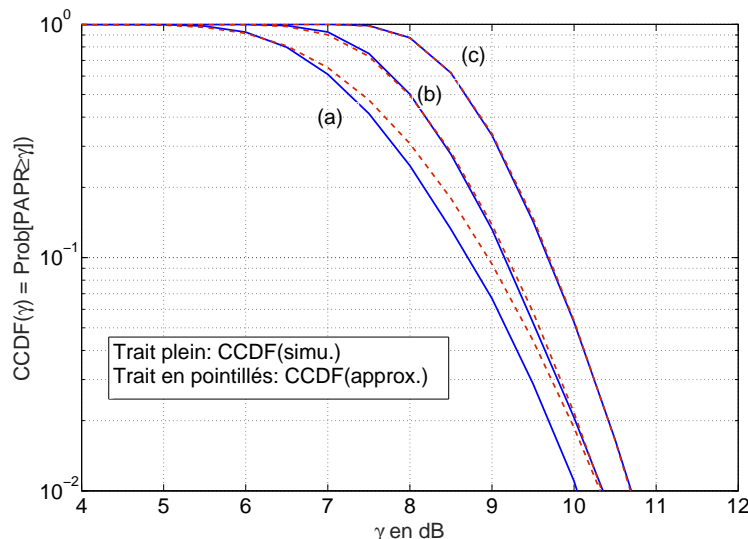


FIGURE 5.4 – CCDF du PAPR simulée et théorique pour une modulation UPMC utilisant la fenêtre de Chebyshev pour différents nombres de porteuses : (a)  $M = 64$ , (b)  $M = 256$ , (c)  $M = 1024$ .

**Systèmes NOFDM** On considère un exemple du système NOFDM, basé sur la fenêtre non orthogonale de Hamming  $w(t)$ . Les fonctions de modulation sont formulées comme suit

$$g_m(t) = e^{\frac{j2\pi mt}{T}} g(t),$$

$$g(t) = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos(2\pi \frac{t}{T}) & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

La Figure 5.5 présente la CCDF théorique du PAPR basée sur la formule (5.1), avec  $P = M$  et  $N = 1$ , et la CCDF expérimentale simulée en générant  $10^4$  réalisations des symboles NOFDM, pour différents nombres de porteuses. Même remarque que précédemment, plus grand est le nombre de porteuses, plus précise est la courbe théorique obtenue.

**Systèmes de Walsh-Hadamard** La Figure 5.6 montre la CCDF théorique du PAPR basée sur (5.22) avec  $P = M$  et  $N = 1$ , et la CCDF expérimentale générée par  $10^4$  réalisations des symboles, pour différents nombres de porteuses. On observe qu'on a une bonne approximation dès  $M \geq 64$ .

## 5.7 CCDF du PAPR pour l'OFDM classique pour différents paramètres

La CCDF du PAPR dépend du nombre de porteuses  $M$ , de la durée d'observation  $NT$  et du paramètre  $\gamma$  avec lequel le PAPR est comparé. Pour un nombre infini de porteuses, le PAPR est toujours large et la CCDF est ainsi égale à 1 pour tout  $\gamma$ . Si le nombre de porteuses  $M$  est fini, la CCDF du PAPR est égale à 0 pour  $\gamma$  plus grand que  $\text{PAPR}_{c,sup}$ . Et pour un  $\gamma$  plus petit que  $\text{PAPR}_{c,sup}$ , la CCDF dépend de la durée d'observation : si on considère une observation de durée infinie, la CCDF est alors égale à 1, mais si on se limite à une durée d'observation sur un nombre fini de symboles, la CCDF est alors définie par la formule (5.22) appliquée à l'OFDM classique. La Figure 5.7 illustre ces différents cas possibles.

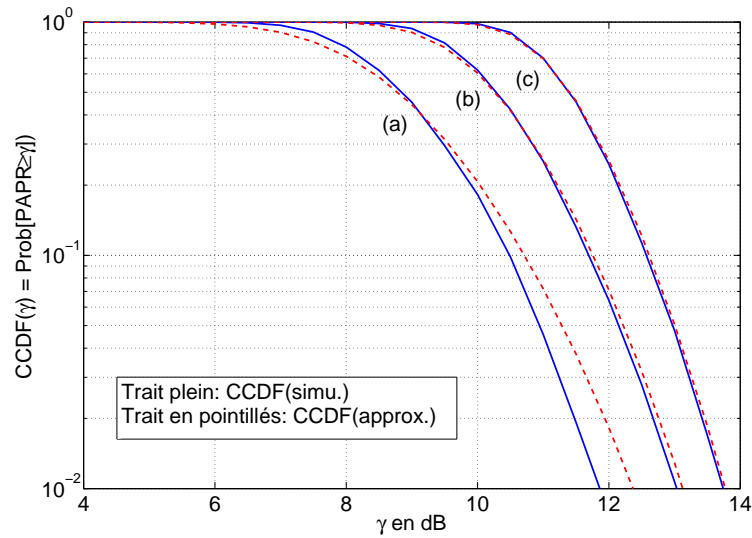


FIGURE 5.5 – CCDF du PAPR simulée et théorique pour une modulation NOFDM utilisant la fenêtre de Hamming pour différents nombres de porteuses : (a)  $M = 64$ , (b)  $M = 256$ , (c)  $M = 1024$ .

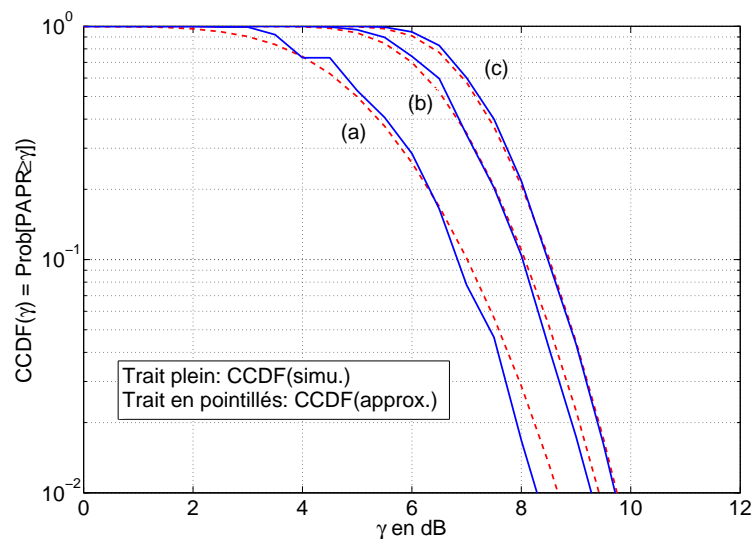


FIGURE 5.6 – CCDF du PAPR expérimentale et théorique pour un système de Walsh-Hadamard pour différents nombres de porteuses : (a)  $M = 64$ , (b)  $M = 256$ , (c)  $M = 1024$ .

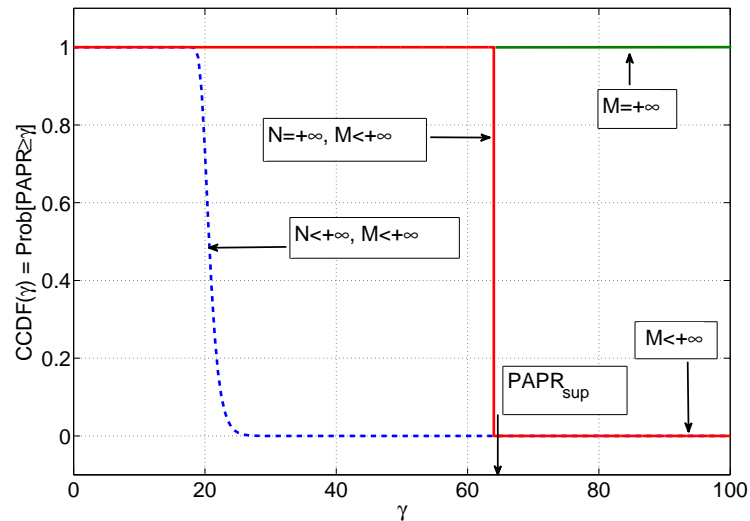


FIGURE 5.7 – Distribution du PAPR pour différents scénarios de transmission.

## Conclusion

Réduire le PAPR en agissant sur la modulation est une nouvelle approche, différente des techniques de réduction du PAPR exposées au chapitre 3. Nous venons de prouver que le comportement du PAPR dépend effectivement des fonctions de modulation, et qu'en agissant sur la modulation, nous pouvons changer la CCDF du PAPR. Une suite naturelle de ces conclusions est de chercher les fonctions de modulation qui optimisent les performances en PAPR du signal modulé. C'est ce que nous développons dans le chapitre suivant.



# Chapitre 6

## Problème de réduction du PAPR

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Simplification de la CCDF du PAPR . . . . .</b>	<b>88</b>
<b>6.2</b>	<b>Problème d'optimisation du PAPR . . . . .</b>	<b>89</b>
<b>6.3</b>	<b>Résolution du problème d'optimisation . . . . .</b>	<b>89</b>
6.3.1	Aperçu des principaux résultats . . . . .	90
6.3.2	Discussion sur $\gamma_{crit}$ . . . . .	90
6.3.3	Preuve des principaux résultats . . . . .	91
<b>6.4</b>	<b>Applications . . . . .</b>	<b>98</b>
<b>6.5</b>	<b>Classification des formes d'ondes vis-à-vis du PAPR . . . . .</b>	<b>101</b>

---

Après avoir montré dans le chapitre 5 que le PAPR dépend de la forme d'onde utilisée dans la modulation, nous proposons dans ce chapitre, une classification des formes d'ondes vis-à-vis des performances en PAPR. En se basant sur l'approximation de la CCDF du PAPR que nous avons dérivée dans le chapitre 5, nous formulons un problème d'optimisation associé au problème de réduction du PAPR. La résolution de ce problème d'optimisation nous permettra d'établir une condition nécessaire qui doit être satisfaite par toute forme d'onde multiporteuses à PAPR meilleure que l'OFDM. Par conséquent, nous montrons que l'OFDM atteint les meilleures performances en PAPR parmi tous les systèmes multiporteuses ne satisfaisant pas cette condition nécessaire. Nous identifions également une famille infinie de multiporteuses qui a les mêmes performances en PAPR que l'OFDM. Pour illustrer ces résultats théoriques, des résultats de simulations du comportement du PAPR sont présentées pour différents systèmes multiporteuses, y compris certains qui ont de meilleures performances en PAPR que l'OFDM.

Les principaux résultats que nous prouvons dans ce chapitre et qui ont fait l'objet d'un article de conférence nationale [149] et son extension en un article de revue [150], sont :

1. Pour les systèmes multiporteuses à base de formes d'ondes de support égal ou plus grand que la période symbole, on prouve que
  - La distribution du PAPR est optimale seulement quand la somme du module au carré des formes d'ondes multiporteuses reste constante dans le temps.
  - Il y a une infinité de systèmes multiporteuses optimaux en termes de performance en PAPR.
  - L'OFDM appartient à cette classe de systèmes multiporteuses.
  - Une meilleure performance en PAPR n'est pas possible sans réduire le support temporel des formes d'ondes.

2. Les systèmes multiporteuses peuvent atteindre une meilleure performance en PAPR en réduisant le support temporel des formes d'ondes (e.g. Wavelet-OFDM).

Ainsi, l'objectif de ce chapitre est de proposer une étude théorique du comportement du PAPR vis-à-vis des formes d'ondes. La section 6.2 présente une formulation du problème de réduction du PAPR comme un problème d'optimisation sur les formes d'ondes. La section 6.3 expose ensuite une résolution de ce problème d'optimisation et prouve les principaux résultats mentionnés plus haut. Enfin, la section 6.4 vient illustrer les résultats théoriques par des simulations de différents systèmes multiporteuses.

## 6.1 Simplification de la CCDF du PAPR

Soit  $x[k]$  un signal GWMC défini dans (5.12). Chercher les fonctions  $\{g_m[k]\}$  qui donnent les meilleurs performances en PAPR revient à maximiser sur les  $\{g_m[k]\}$ , l'approximation de  $\Pr(\text{PAPR} \leq \gamma)$  exprimée dans (5.22). Nous avons fait le choix de faire cette analyse dans le domaine continu car non seulement il nous semble intéressant et plus judicieux d'optimiser sur des fonctions  $\{g_m(t)\}$  à temps continu, mais nous disposons aussi d'outils d'analyse mathématique plus simples à utiliser dans le domaine continu. Pour cela, nous allons faire quelques approximations sur la  $\Pr(\text{PAPR} \leq \gamma)$ . En appliquant une somme de Riemann, nous allons d'abord approximer la puissance moyenne à temps discret  $P_{\text{moy}}^d$ , par la puissance moyenne à temps continu  $P_{\text{moy}}^c$  et ensuite nous allons approximer le dénominateur de  $y[k]$  dans (5.22).

D'une part on a

**Lemme 6.1.1.**

$$\begin{aligned} P_{\text{moy}}^d &\approx \frac{\sigma_C^2}{T} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^T |g_{m,n}(t)|^2 \\ &=: P_{\text{moy}}^c. \end{aligned}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} P_{\text{moy}}^d &= \frac{\sigma_C^2}{P} \sum_{m=0}^{M-1} \|g_m[k]\|^2 \\ &= \frac{\sigma_C^2}{P} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{P-1} |g_m[k - nP]|^2 \\ &= \frac{\sigma_C^2}{P} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{P-1} |g_m(k \frac{T}{P} - nT)|^2 \\ &= \frac{\sigma_C^2}{P} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{P-1} |g_{m,n}(k \frac{T}{P})|^2. \end{aligned}$$

Par somme de Riemann, on obtient

$$\begin{aligned} P_{\text{moy}}^d &\approx \frac{\sigma_C^2}{T} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^T |g_{m,n}(t)|^2 \\ &=: P_{\text{moy}}^c. \end{aligned}$$

D'après (5.22) et pour  $N = 1$ , il vient

$$\Pr(\text{PAPR} \leq \gamma) \approx \prod_{k \in [0, P-1]} \left[ 1 - e^{-\gamma \frac{P_{\text{moy}}^c}{\sigma_C^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{M-1} |g_m[k-nP]|^2}} \right].$$

D'autre part, on définit

$$\begin{aligned} \ln(\Pr(\text{PAPR} \leq \gamma)) &\approx \sum_{k=0}^{P-1} \ln\left(1 - e^{-\frac{P_{\text{moy}}^c}{\sigma_C^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{M-1} |g_{m,n}(k \frac{T}{P})|^2} \gamma}\right) \\ &=: S_P \end{aligned}$$

et on pose

$$\mathcal{R}_\gamma[k] = \ln\left(1 - e^{-\frac{P_{\text{moy}}^c}{\sigma_C^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{M-1} |g_{m,n}[k]|^2} \gamma}\right).$$

On a  $\mathcal{R}_\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue par morceaux sur l'intervalle  $[0, T]$ , et on a

$$\begin{aligned} \frac{T}{P} S_P &= \frac{T}{P} \sum_{k=0}^{P-1} \mathcal{R}_\gamma\left(k \frac{T}{P}\right) \quad \text{est une somme de Riemann, alors} \\ \frac{T}{P} S_P &\approx \int_0^T \mathcal{R}_\gamma(t) dt \\ \Rightarrow S_P &= \frac{P}{T} \int_0^T \mathcal{R}_\gamma(t) dt + o(P) \\ \Rightarrow \Pr(\text{PAPR} \leq \gamma) &\approx e^{\frac{P}{T} \int_0^T \mathcal{R}_\gamma(t) dt}. \end{aligned}$$

Maximiser  $\Pr(\text{PAPR} \leq \gamma)$  revient à maximiser  $\int_0^T \mathcal{R}_\gamma(t) dt$ . Ainsi,

$$\text{maximiser}_{\{g_m\}} \Pr(\text{PAPR} \leq \gamma) \text{ revient à maximiser}_{\{g_m\}} \int_0^T \ln\left(1 - e^{-\frac{\sum_{m=0}^{M-1} \|g_m(t)\|^2}{T \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{M-1} |g_{m,n}(t)|^2} \gamma}\right) dt. \quad (6.1)$$

## 6.2 Problème d'optimisation du PAPR

Soit  $\{g_m\}$  une famille de fonctions appartenant à l'espace  $L_I^\infty$ . D'après la section 6.1, le problème de réduction du PAPR peut être formulé comme un problème d'optimisation sous contraintes.

**Problème d'optimisation (PO).**

$$\begin{aligned} &\text{maximiser}_{\{g_m\}_{m \in [0, M-1]}} \int_0^T \ln\left(1 - e^{-\frac{\gamma \sum_{m=0}^{M-1} \|g_m\|^2}{T \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{M-1} |g_{m,n}(t)|^2}}\right) dt, \\ &\text{sous la contrainte} \quad A := \min_{m,t} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_{m,n}(t)|^2 > 0. \end{aligned}$$

La quantité maximisée dans le PO est équivalente à minimiser l'approximation de la CCDF du PAPR, sous la contrainte (5.7) sur les formes d'onde  $\{g_m\}$  (voir Hypothèse 5.2.2).

## 6.3 Résolution du problème d'optimisation

Dans cette section, une résolution du PO est développée. Le cadre de l'optimalité de l'OFDM classique est également prouvé et discuté. Les premiers travaux dans ce contexte reviennent à l'étude entreprise par A. Skrzypczak et al. dans [151] pour les systèmes OFDM/OQAM et l'OFDM sur-échantillonné, où il a été montré analytiquement que les performances en PAPR de ces deux systèmes multiporteuses basés sur différents filtres de mise en forme ne sont pas meilleures que l'OFDM conventionnel à filtre rectangulaire.

En se basant sur des résultats de simulation, A. Kliks [152] a constaté que, quand on évalue par simulation la CCDF du PAPR des systèmes OFDM et NOFDM pour différents filtres, les plus petites valeurs sont obtenues pour le filtre rectangulaire. Concernant l'analyse menée dans nos travaux, nous considérons le système GWMC, qui représente une généralisation des systèmes multiporteuses classiques, basé sur un large choix des structures de modulation.

### 6.3.1 Aperçu des principaux résultats

Soit  $\mathcal{H}_0 \approx 0.63$  la solution unique de l'équation  $1 - 2\mathcal{H}_0 + 2\mathcal{H}_0 e^{\frac{-1}{\mathcal{H}_0}} = 0$  (voir la section 6.3.3). Pour un système GWMC donné  $\{g_m\}$ , on définit la valeur critique de  $\gamma$  pour ce système comme suivant

$$\gamma_{\text{crit}}(\{g_m\}) := \sup_{t \in [0, T]} \frac{T \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_{m,n}(t)|^2}{\mathcal{H}_0 \sum_{m=0}^{M-1} \|g_m\|^2}. \quad (6.2)$$

Le principal résultat issu de la résolution du PO est exposé dans la proposition suivante, dont la preuve sera présentée dans la section 6.3.3.

**Propriété 6.3.1.** (*Condition suffisante d'optimalité*)

On suppose que  $\gamma \geq 1/\mathcal{H}_0$  et on considère tout système GWMC  $\{g_m^*\}$  satisfaisant la condition (5.7) et

$$\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_{m,n}^*(t)|^2 \quad \text{est constant dans le temps.} \quad (6.3)$$

Pour ce système,  $\gamma_{\text{crit}}(\{g_m^*\}) = 1/\mathcal{H}_0$  prend la plus petite valeur possible. La CCDF du PAPR pour le système  $\{g_m^*\}$  est inférieure (correspondant à une meilleure performance en PAPR) à celle de tout autre système  $\{g_m\}$  satisfaisant la condition (5.7) tel que  $\gamma \geq \gamma_{\text{crit}}(\{g_m\})$ .

En d'autres termes, le système GWMC  $\{g_m^*\}$  réalise globalement une performance optimale en PAPR, parmi tous les systèmes GWMC satisfaisant (5.7) et  $\gamma \geq \gamma_{\text{crit}}(\{g_m\})$ .

La condition dans (6.3) signifie que la moyenne statistique de la puissance instantanée du signal transmis  $E(|x(t)|^2)$  est constante dans le temps.

**Corollaire 6.3.1.** (*Optimalité de l'OFDM conventionnel*)

Soit  $\{g_m\}$  un système GWMC qui satisfait (5.7). Pour tout  $\gamma \geq \gamma_{\text{crit}}(\{g_m\})$ , la performance en PAPR réalisée par ce système, n'est pas meilleure que celle de l'OFDM, le système de Walsh Hadamard et tout autre système GWMC satisfaisant (6.3).

Ces résultats seront illustrés dans les sections 6.4 et 6.4. Ainsi, la contraposition logique du Corollaire 6.3.1 donne le théorème suivant.

**Théorème 6.3.1.** (*Condition nécessaire pour améliorer les performances en PAPR*)

Soit  $\{g_m\}$  un système GWMC et  $\gamma \geq \gamma_{\text{crit}}(\{g_m\})$ . Si ce système GWMC atteint une performance en PAPR meilleure que l'OFDM, alors le système  $\{g_m\}$  viole la condition (5.7).

Comme expliqué dans la section 5.2, le fait qu'un système GWMC viole la condition (5.7) signifie que le support temporel d'au moins une fonction de modulation doit être strictement plus petit que la période symbole. Ainsi, nous sommes menés à un compromis entre la localisation fréquentielle des formes d'ondes et la performance en PAPR.

Ce phénomène va être illustré dans la section 6.4.

### 6.3.2 Discussion sur $\gamma_{\text{crit}}$

Pour l'ensemble de l'analyse, la condition  $\gamma \geq \gamma_{\text{crit}}(\{g_m\})$  doit être satisfaite par les systèmes GWMC étudiés. En d'autres termes, cela signifie que nos résultats sont valides pour les valeurs de  $\gamma$  plus grandes que la valeur seuil  $\gamma_{\text{crit}}(\{g_m\})$  correspondant au système GWMC.

Pour tout système GWMC remplissant la condition (5.7) comme l'OFDM ou le système de Walsh-Hadamard, on obtient  $\gamma_{\text{crit}} \approx 2\text{dB}$ . Par ailleurs, concernant le système *WCP-OFDM* qui va être traité dans la section 6.4, on trouve  $\gamma_{\text{crit}} \approx \frac{1.2}{\mathcal{H}_0} = 2.7\text{dB}$ .

Notre analyse ne couvre pas les valeurs de  $\gamma$  plus petites que  $\gamma_{\text{crit}}$ . En pratique, le PAPR des modulations multiporteuses est plus grand que  $\gamma_{\text{crit}}$ . Ainsi, cet intervalle ne représente pas un intervalle d'intérêt.

TABLE 6.1 – Étude de la positivité de la fonction  $s$ .

$\mathcal{H}$	0	$\mathcal{H}_0$	$+\infty$
$s''(\mathcal{H})$		+	
$s'(\mathcal{H})$		-2	0
$s(\mathcal{H})$	1	0	-1

### 6.3.3 Preuve des principaux résultats

Nous allons prouver dans cette section la propriété 6.3.1. Le corollaire 6.3.1 et le théorème 6.3.1 en découlent directement comme expliqué précédemment.

**Calcul de  $\mathcal{H}_0$**  On étudie les variations de l'équation  $s(\mathcal{H}) = 1 - 2\mathcal{H} + 2\mathcal{H}e^{-\frac{1}{\mathcal{H}}}$ , on a

$$\begin{aligned}
 s'(\mathcal{H}) &= -2 + 2e^{-\frac{1}{\mathcal{H}}} + \frac{2}{\mathcal{H}}e^{-\frac{1}{\mathcal{H}}} \\
 s''(\mathcal{H}) &= \frac{2}{\mathcal{H}^2}e^{-\frac{1}{\mathcal{H}}} + 2\left(-\frac{1}{\mathcal{H}^2}e^{-\frac{1}{\mathcal{H}}} + \frac{1}{\mathcal{H}}\frac{1}{\mathcal{H}^2}e^{-\frac{1}{\mathcal{H}}}\right) \\
 &= \frac{2}{\mathcal{H}^3}e^{-\frac{1}{\mathcal{H}}} \geq 0.
 \end{aligned}$$

Comme nous pouvons constater sur la Table 6.1, la fonction  $s$  est positive lorsque  $0 < \mathcal{H} \leq \mathcal{H}_0$ . Une approximation numérique donne  $\mathcal{H}_0 \approx 0.63$ .

**Remplacer le PO par un problème plus simple** Afin de caractériser les optimaux du PO, nous montrons d'abord qu'il peut être réécrit dans une forme plus simple. On commence d'abord par remarquer que les fonctions  $\{g_m\}_{m \in [0, M-1]}$  jouent le même rôle, et que seule la somme  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{M-1} |g_{m,n}(t)|^2$  est impliquée dans la quantité maximisée. La maximisation peut ainsi être effectuée sur une fonction positive  $\mathcal{G}(t)$ , telle que

$$\mathcal{G}(t) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_{m,n}(t)|^2. \tag{6.4}$$

Notons que la condition (5.7) implique que  $a := \inf_t \mathcal{G}(t) > 0$ . Similairement,  $\mathcal{G} \in L^\infty([0, T])$ , avec  $L^\infty$  est l'espace des fonctions essentiellement bornées. En plus,

$$\begin{aligned} \int_0^T \mathcal{G}(\tau) d\tau &= \int_0^T \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_{m,n}(t)|^2 dt \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{nT}^{nT+T} |g_m(t)|^2 dt \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \int_{-\infty}^{+\infty} |g_m(t)|^2 dt \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \|g_m\|^2. \end{aligned}$$

Le PO peut alors être exprimé par

$$\begin{aligned} \text{maximiser}_{\mathcal{G} \in L^\infty([0, T])} \quad & \beta(\mathcal{G}) = \int_0^T \ln\left(1 - e^{-\frac{\gamma \int_0^T \mathcal{G}(\tau) d\tau}{T \mathcal{G}(t)}}\right) dt, \\ \text{sous la contrainte} \quad & \exists a \text{ tel que} \\ & \mathcal{G}(t) \geq a > 0. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Finalement, la condition  $\gamma \geq \gamma_{\text{crit}}(\{g_m\})$  est équivalente à

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathcal{G}(t) \leq \gamma \mathcal{H}_0 \int_0^T \mathcal{G}(\tau) d\tau.$$

**Remarque 6.3.1.** En définissant  $\mathcal{H}(t) := \mathcal{G}(Tt)$ , on obtient

$$\begin{aligned} \beta(\mathcal{G}) &= T \int_0^1 \ln\left(1 - e^{-\frac{\gamma \int_0^1 \mathcal{H}(\tau) d\tau}{\mathcal{H}(t)}}\right) dt \\ &=: T \tilde{\beta}(\mathcal{H}), \\ \text{et} \quad & \mathcal{H} \geq a > 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Maximiser  $\beta$  sur la fonction  $\mathcal{G} \in L^\infty([0, T])$  est alors équivalent à maximiser  $\tilde{\beta}$  sur la fonction  $\mathcal{H} \in L^\infty([0, 1])$ .

En outre, l'expression de  $\tilde{\beta}(\mathcal{H})$  ne change pas quand on multiplie la fonction  $\mathcal{H}(t)$  par un scalaire : pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$ , on a

$$\tilde{\beta}(\lambda \mathcal{H}) = \tilde{\beta}(\mathcal{H}).$$

Il s'ensuit que si le problème dans (6.5) a une solution optimale, alors il existe un ensemble infini de solutions optimales obtenues en multipliant la première solution par un scalaire.

Suite à la remarque 6.3.1, on peut chercher le maximisant de  $\tilde{\beta}$  sous, en plus, la contrainte de normalisation suivante

$$\gamma \int_0^1 \mathcal{H}(\tau) d\tau = 1. \quad (6.8)$$

Si  $\mathcal{G}$  est un optimum du problème (6.5), alors  $\mathcal{H}(t) := \frac{T \mathcal{G}(tT)}{\gamma \int_0^T \mathcal{G}(\tau) d\tau}$  est un optimum du problème d'optimisation suivant

$$\begin{aligned} \text{maximiser}_{\mathcal{H} \in L^\infty([0, 1])} \quad & \tilde{\beta}(\mathcal{H}) := \int_0^1 \ln\left(1 - e^{-\frac{1}{\mathcal{H}(t)}}\right) dt. \\ \text{sous les contraintes} \quad & \mathcal{H} \text{ satisfait (6.8) et } \exists a \text{ tel que} \\ & \mathcal{H}(t) \geq a > 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Vice-versa, si  $\mathcal{H}$  est un optimum du problème ci-dessus, alors  $\mathcal{G}(t) = \mathcal{H}(t/T)$  est un optimum du problème (6.5). Par conséquent, le reste de l'étude se focalise sur la caractérisation des optimaux du problème (6.9).

Remarquons que la condition  $\gamma \geq \gamma_{\text{crit}}(\{g_m\})$  se lit maintenant

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathcal{H}(t) \leq \mathcal{H}_0.$$

**Analyse théorique** On définit les sous ensembles convexes de  $L^\infty$  suivants :

- $\mathcal{F} := \left\{ \mathcal{H} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{*+} \text{ tel que } \int_0^1 \mathcal{H}(\tau) d\tau = \frac{1}{\gamma} \right\}$ ,
- $\mathcal{F}_a := \mathcal{F} \cap \{ \mathcal{H} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{*+} \text{ tel que } \mathcal{H} \geq a \}$ ,
- $\mathcal{F}_+ := \bigcup_{a>0} \mathcal{F}_a$ .

On considère ici le problème d'optimisation exprimé dans (6.9). Afin de caractériser ses optimaux, nous rappelons d'abord la définition de ses points stationnaires.

**Définition 6.3.1.** *On dit qu'une fonction  $\mathcal{H}^* \in \mathcal{F}_a$  est un point stationnaire de  $\tilde{\beta}$  définie dans (6.9) si et seulement si : pour tout  $\varphi \in L^\infty([0, 1])$  tel que*

$$\int_0^1 \varphi(t) dt = 0, \quad (6.10)$$

on a

$$\left. \frac{d\tilde{\beta}(\mathcal{H}^* + \epsilon\varphi)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0. \quad (6.11)$$

Notons que pour tout  $\varphi$  satisfaisant (6.10), la fonction  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^* + \epsilon\varphi$  satisfait (6.8). Pour un  $\epsilon$  assez petit,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^* + \epsilon\varphi$  satisfait également (6.7).

La solution du PO est organisée comme suivant

**Lemme 6.3.1.**

*Soit  $\mathcal{H}_0$  la solution unique de l'équation  $1 - 2\mathcal{H}_0 + 2\mathcal{H}_0 e^{\frac{-1}{\mathcal{H}_0}} = 0$ . Pour tout  $\varphi \in L^\infty([0, 1])$  satisfaisant (6.10), on a : pour tout  $\mathcal{H} \in \mathcal{F}_+$ ,*

$$\text{si } \sup_t \mathcal{H}(t) \leq \mathcal{H}_0, \quad \text{alors } \left. \frac{d^2\tilde{\beta}(\mathcal{H}^* + \epsilon\varphi)}{d\epsilon^2} \right|_{\epsilon=0} \leq 0.$$

**Lemme 6.3.2.**

*La fonction constante  $\mathcal{H}^* = \frac{1}{\gamma}$  est l'unique point stationnaire du problème d'optimisation (6.9) sur l'ensemble  $\mathcal{F}_+$ .*

**Corollaire 6.3.2.** *Si  $\gamma \geq \frac{1}{\mathcal{H}_0}$ , alors la fonction constante  $\mathcal{H}^* = \frac{1}{\gamma}$  est un maximum local du problème (6.9). De plus, elle représente un maximum global de (6.9) parmi tous les fonctions  $\mathcal{H}$  telles que  $\sup_t \mathcal{H}(t) \leq \mathcal{H}_0$ .*

Ci-après, les preuves sont développées.

**Preuve du lemme 6.3.1** Soit  $\mathcal{H}_0$  la solution unique de l'équation  $1 - 2\mathcal{H}_0 + 2\mathcal{H}_0 e^{\frac{-1}{\mathcal{H}_0}} = 0$ , et  $\mathcal{H} \in \mathcal{F}_+$ .

Puisque  $\mathcal{H} \in \mathcal{F}_+$  et  $\varphi$  est bornée, il existe un  $\epsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $\epsilon$  vérifiant  $|\epsilon| \leq \epsilon_0$ , la condition dans (6.7) est remplie. Nous allons maintenant expliciter les dérivées impliquées dans (6.11). On a

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}(\mathcal{H} + \epsilon\varphi) &= \int_0^1 \ln(1 - e^{\frac{-1}{\mathcal{H}(t) + \epsilon\varphi(t)}}) dt \\ \frac{d\tilde{\beta}(\mathcal{H} + \epsilon\varphi)}{d\epsilon} &= \int_0^1 \frac{\frac{-\varphi(t)}{(\mathcal{H}(t) + \epsilon\varphi(t))^2} e^{\frac{-1}{\mathcal{H}(t) + \epsilon\varphi(t)}}}{1 - e^{\frac{-1}{\mathcal{H}(t) + \epsilon\varphi(t)}}} dt \\ \frac{d^2\tilde{\beta}(\mathcal{H} + \epsilon\varphi)}{d\epsilon^2} &= \int_0^1 \frac{d}{d\epsilon} \left( \frac{\frac{-\varphi(t)}{(\mathcal{H}(t) + \epsilon\varphi(t))^2} e^{\frac{-1}{\mathcal{H}(t) + \epsilon\varphi(t)}}}{1 - e^{\frac{-1}{\mathcal{H}(t) + \epsilon\varphi(t)}}} \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{\left( \frac{2\varphi(t)^2}{(\mathcal{H}(t) - \epsilon\varphi(t))^3} + \frac{\varphi(t)^2}{(\mathcal{H}(t) + \epsilon\varphi(t))^4} \right) e^{\frac{-1}{\mathcal{H}(t) + \epsilon\varphi(t)}} (1 - e^{\frac{-1}{\mathcal{H}(t) + \epsilon\varphi(t)}})}{(1 - e^{\frac{-1}{\mathcal{H}(t) + \epsilon\varphi(t)}})^2} dt \\ &\quad + \int_0^1 \frac{\left( \frac{\varphi(t)}{(\mathcal{H}(t) + \epsilon\varphi(t))^2} e^{\frac{-1}{\mathcal{H}(t) + \epsilon\varphi(t)}} \right) \left( \frac{-\varphi(t)}{(\mathcal{H}(t) + \epsilon\varphi(t))^2} e^{\frac{-1}{\mathcal{H}(t) + \epsilon\varphi(t)}} \right)}{(1 - e^{\frac{-1}{\mathcal{H}(t) + \epsilon\varphi(t)}})^2} dt \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2\tilde{\beta}(\mathcal{H}(t) + \epsilon\varphi(t))}{d\epsilon^2} \right|_{\epsilon=0} &= - \int_0^1 \frac{\left( \frac{-2\varphi(t)^2}{\mathcal{H}(t)^3} + \frac{\varphi(t)^2}{\mathcal{H}(t)^4} \right) e^{\frac{-1}{\mathcal{H}(t)}} (1 - e^{\frac{-1}{\mathcal{H}(t)}})}{(1 - e^{\frac{-1}{\mathcal{H}(t)}})^2} dt \\ &\quad - \int_0^1 \frac{\frac{\varphi(t)^2}{\mathcal{H}(t)^4} e^{\frac{-2}{\mathcal{H}(t)}}}{(1 - e^{\frac{-1}{\mathcal{H}(t)}})^2} dt. \end{aligned}$$

$$\left. \frac{d^2\tilde{\beta}(\mathcal{H} + \epsilon\varphi)}{d\epsilon^2} \right|_{\epsilon=0} = - \underbrace{\int_0^1 \frac{\frac{\varphi^2}{\mathcal{H}^4} e^{\frac{-1}{\mathcal{H}}}}{(1 - e^{\frac{-1}{\mathcal{H}}})^2}}_{\geq 0} \underbrace{(1 - 2\mathcal{H} + 2\mathcal{H}e^{\frac{-1}{\mathcal{H}}})}_{s(\mathcal{H})} dt.$$

Nous avons montré précédemment que  $s(\mathcal{H}) \geq 0$  pour tout  $\mathcal{H} \leq \mathcal{H}_0$ . On conclue que, si  $\sup_t \mathcal{H}(t) \leq \mathcal{H}_0$  alors

$$\frac{d^2\tilde{\beta}(\mathcal{H}^* + \epsilon\varphi)}{d\epsilon^2} \leq 0.$$

**Preuve du lemme 6.3.2** Soit  $\mathcal{H}^* \in \mathcal{F}_+$ . Soit  $\varphi \in L^\infty([0, 1])$  tel que la condition (6.10) est remplie. De l'équation (6.12), il vient

$$\left. \frac{d\tilde{\beta}(\mathcal{H} + \epsilon\varphi)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_0^1 \frac{\frac{-\varphi(t)}{\mathcal{H}^2(t)} e^{\frac{-1}{\mathcal{H}(t)}}}{1 - e^{\frac{-1}{\mathcal{H}(t)}}} dt.$$

En définissant

$$\zeta(t) = \frac{e^{\frac{-1}{\mathcal{H}^*(t)}}}{[1 - e^{\frac{-1}{\mathcal{H}^*(t)}}] \mathcal{H}^{*2}(t)}, \quad (6.13)$$

il en découle que (6.11) est équivalente à

$$\int_0^1 \varphi(t)\zeta(t)dt = 0. \quad (6.14)$$

A ce stade, on peut vérifier que si  $\mathcal{H}^* = \frac{1}{\gamma}$  alors  $\zeta(t) = c_0$  ne dépend pas du  $t$ , ainsi nous avons établi que pour tout  $\varphi(t)$  satisfaisant (6.10), on doit avoir :  $\int_0^1 \zeta(t)\varphi(t)dt = c_0 \int_0^1 \varphi(t)dt = 0$ , i.e. l'équation (6.11) est vérifiée. Ceci montre que, comme affirmé,  $\mathcal{H}^* = \frac{1}{\gamma}$  est un point stationnaire de (6.9) sous les contraintes (6.7) et (6.8). Nous allons prouver maintenant la réciproque.

Supposons que  $\mathcal{H}^* \in F_+$  est un point stationnaire de (6.9) sous les contraintes (6.7) et (6.8). Ce que nous venons juste d'établir est que la condition (6.14) doit être vérifiée pour tout  $\varphi$  satisfaisant (6.10). La fonction  $\zeta$  est alors orthogonale sur toutes les fonctions  $\varphi \in L^\infty$  de moyenne nulle. Il en découle que  $\zeta$  est une constante  $c_0$ , i.e.

$$\frac{e^{\frac{-1}{\mathcal{H}^*(t)}}}{[1 - e^{\frac{-1}{\mathcal{H}^*(t)}}]\mathcal{H}^{*2}(t)} = c_0. \quad (6.15)$$

D'où,  $\exists c_0 \in \mathbb{R}$  telle que  $\forall t \in [0, 1]$ ,  $\mathcal{H}^*(t)$  appartient à l'ensemble des solutions de l'équation  $J(\mathcal{H}) = c_0$  avec

$$J(\mathcal{H}) = \frac{e^{\frac{-1}{\mathcal{H}}}}{[1 - e^{\frac{-1}{\mathcal{H}}}]\mathcal{H}^2}.$$

Pour conclure que la fonction  $\mathcal{H}^*$  est elle même constante, nous analysons maintenant les variations de la fonction  $J(\mathcal{H})$ .

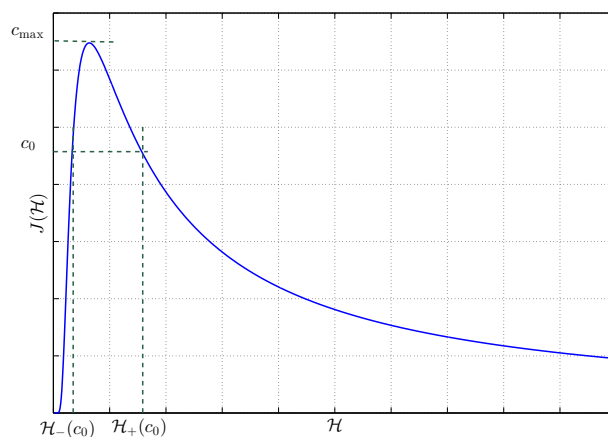


FIGURE 6.1 – Courbe de la fonction  $J(\mathcal{H})$ .

La représentation de  $J(\mathcal{H})$  dans la Figure 6.1, montre que pour une certaine valeur  $c_0$ , l'équation  $J(\mathcal{H}) = c_0$  et la courbe de la fonction  $J$  se croisent dans un unique point qui coïncide avec la valeur maximale de  $J$  qu'on note  $c_{\max}$ , et se croisent dans deux points distincts lorsque  $c_0$  est inférieure à  $c_{\max}$ . Dès que  $c_0$  devient supérieure à  $c_{\max}$ , la ligne ne coupe plus la courbe de  $J$ .

Ainsi, l'ensemble  $S_J$  des solutions de (6.15) est

$$S_J = \begin{cases} \mathcal{H}_+(c_0), \mathcal{H}_-(c_0) & \text{if } 0 < c_0 \leq c_{\max}, \\ \emptyset & \text{if } c_0 > c_{\max}. \end{cases}$$

TABLE 6.2 – Solutions de l'équation (6.15) pour différentes valeurs de  $c_0$ .

$c_0$	$\mathcal{H}_-(c_0)$	$\mathcal{H}_+(c_0)$
0.64	0.720	00.72
0.62	0.510	00.83
0.60	0.450	00.90
0.50	0.360	01.34
0.40	0.300	01.90
0.30	0.250	02.76
0.20	0.210	04.46
0.10	0.170	09.48
0.05	0.145	19.50
0.02	0.091	49.49
0.01	0.085	99.49

Notons que lorsque  $c_0 = c_{\max}$ , on obtient  $\mathcal{H}_+(c_0) = \mathcal{H}_-(c_0)$ . La fonction  $\mathcal{H}_+(c_0)$  est associée à la plus grande solution, et la fonction  $\mathcal{H}_-(c_0)$  correspond à la plus petite solution ( $\mathcal{H}_-(c_0) \leq \mathcal{H}_+(c_0)$ ).

Les propriétés suivantes synthétisent ce que nous venons de prouver

**Propriété 6.3.2.** Soit  $\mathcal{H}^* \in \mathcal{F}_+$  un point stationnaire de  $\tilde{\beta}$ , sous les contraintes (6.7) et (6.8). Il existe une constante  $c_0 \in [0, c_{\max}]$ , un ensemble  $\mathcal{A}_+$  et un ensemble  $\mathcal{A}_- = [0, 1] \setminus \mathcal{A}_+$  tels que

$$\mathcal{H}|_{\mathcal{A}_+} = \mathcal{H}_+(c_0), \quad \text{et} \quad \mathcal{H}|_{\mathcal{A}_-} = \mathcal{H}_-(c_0).$$

$\mathcal{H}|_{\mathcal{A}_+}$  ( $\mathcal{H}|_{\mathcal{A}_-}$  respectivement) est la restriction de la fonction  $\mathcal{H}$  sur l'ensemble  $\mathcal{A}_+ \subset [0, 1]$  ( $\mathcal{A}_- \subset [0, 1]$  respectivement).

**Corollaire 6.3.3.** La mesure de Lebesgue d'un intervalle  $\mathcal{A}_+$  peut être exprimée par

$$\tilde{L}_{\mathcal{A}_+(c_0)} = \frac{\frac{1}{\gamma} - \mathcal{H}_-(c_0)}{\mathcal{H}_+(c_0) - \mathcal{H}_-(c_0)} \in [0, 1].$$

En effet, de (6.8) et de la propriété 6.3.1, il vient

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{\mathcal{A}_+(c_0)}\mathcal{H}_+(c_0) + (1 - \tilde{L}_{\mathcal{A}_+(c_0)})\mathcal{H}_-(c_0) &= \frac{1}{\gamma} \\ \tilde{L}_{\mathcal{A}_+(c_0)}(\mathcal{H}_+(c_0) - \mathcal{H}_-(c_0)) &= \frac{1}{\gamma} - \mathcal{H}_-(c_0). \end{aligned}$$

**Propriété 6.3.3.** Soit  $\mathcal{H}^* \in \mathcal{F}_+$  un point stationnaire de  $\tilde{\beta}$ , sous les contraintes (6.7) et (6.8). Alors, la valeur de  $c_0$  résout le problème d'optimisation suivant

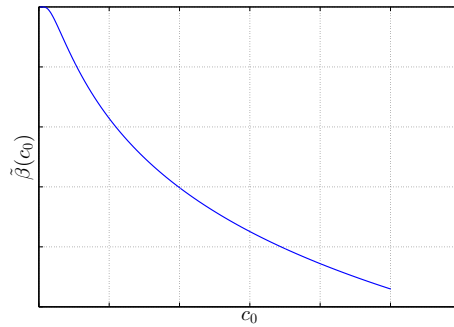
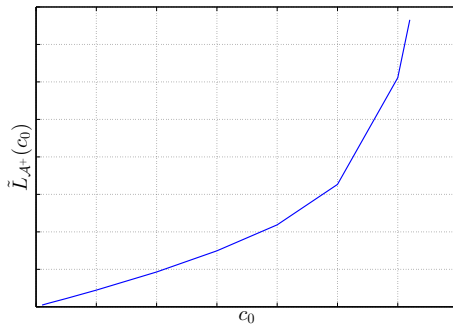
$$\begin{aligned} \underset{c_0}{\text{maximiser}} \quad & \tilde{\beta}(c_0) = \tilde{L}_{\mathcal{A}_+(c_0)} \ln(1 - e^{-\frac{1}{\mathcal{H}_+(c_0)}}) \\ & + (1 - \tilde{L}_{\mathcal{A}_+(c_0)}) \ln(1 - e^{-\frac{1}{\mathcal{H}_-(c_0)}}), \\ \text{sous la contrainte} \quad & \tilde{L}_{\mathcal{A}_+(c_0)} \in [0, 1]. \end{aligned}$$

TABLE 6.3 – Variations de  $\mathcal{H}_+$ ,  $\mathcal{H}_-$  et  $\frac{1}{\mathcal{H}_+ - \mathcal{H}_-}$  comme une fonction de  $c_0$ .

$c_0$	0	$c_{\max}$
$\mathcal{H}_+$	$+\infty$	$\mathcal{H}_{\max}$
$\mathcal{H}_-$	0	$\mathcal{H}_{\max}$
$\frac{1}{\mathcal{H}_+ - \mathcal{H}_-}$	0	$+\infty$

**Résultats numériques** La Table 6.2 présente l'ensemble des solutions  $S_J$  de (6.15) pour chaque valeur de  $c_0$ . À partir de cette table nous pouvons observer que  $\mathcal{H}_-(c_0)$  est une fonction décroissante en fonction de  $c_0$ , et  $\mathcal{H}_+(c_0)$  est une fonction décroissante en fonction de  $c_0$ , ces conclusions peuvent être résumées dans la Table 6.3.

Nous devons étudier maintenant les variations de  $\tilde{\beta}(c_0)$ , qui dépendent de la monotonie de  $\tilde{L}_{\mathcal{A}^+}$ . On a  $\frac{1}{\gamma} \geq \mathcal{H}_-$  puisque  $\tilde{L}_{\mathcal{A}^+}$  est positive. On ne peut pas alors décider directement de la monotonie de  $\tilde{L}_{\mathcal{A}^+}$ , puisqu'elle est le produit d'une fonction décroissante positive  $c_0 \mapsto \frac{1}{\gamma} - \mathcal{H}_-(c_0)$  et une fonction croissante positive  $c_0 \mapsto \frac{1}{\mathcal{H}_+(c_0) - \mathcal{H}_-(c_0)}$ . Nous avons alors simulé les variations de  $\tilde{L}_{\mathcal{A}^+}$  et  $\tilde{\beta}(c_0)$  comme illustré dans la Figure 6.2 et la Figure 6.3 respectivement.


 FIGURE 6.2 – Courbe de la fonction  $\tilde{L}_{\mathcal{A}^+}(c_0)$ . FIGURE 6.3 – Courbe de la fonction  $\tilde{\beta}(c_0)$ .

Afin de maximiser  $\tilde{\beta}$ , nous devons minimiser  $\tilde{L}_{\mathcal{A}^+}$  sous la contrainte  $0 \leq \tilde{L}_{\mathcal{A}^+} \leq 1$ . Pour  $\tilde{L}_{\mathcal{A}^+} = 0$ , on a  $\mathcal{H}_- = \frac{1}{\gamma}$  et  $\tilde{\beta}^* = \ln(1 - e^{-\gamma})$ . Ainsi,  $\mathcal{H}^*$  prend une unique valeur  $\mathcal{H}_-$  et  $\mathcal{H}^* = \frac{1}{\gamma}$ . Pour conclure, pour un point stationnaire  $\mathcal{H}^* \in \mathcal{F}_+$  de  $\tilde{\beta}$  sous la contrainte (6.8), on a  $\mathcal{H}^* = \frac{1}{\gamma}$ . Ceci achève la preuve du lemme 6.3.2.

**Preuve du corollaire 6.3.2** L'ensemble  $\mathcal{F}_+ \cap \{\mathcal{H} : \sup_t \mathcal{H}(t) \leq \mathcal{H}_0\}$  est convexe. On déduit du lemme 6.3.1 que  $\tilde{\beta}$  est une fonction concave sur cet ensemble convexe. Donc, son maximum local est un maximum global sur cet ensemble [153]. Du lemme 6.3.2 il vient que  $\mathcal{H}^* = \frac{1}{\gamma}$  est l'unique point stationnaire de  $\tilde{\beta}$  sur  $\mathcal{F}_+$ , il représente ainsi un maximum global de  $\tilde{\beta}$  sur  $\mathcal{F}_+ \cap \{\mathcal{H} : \sup_t \mathcal{H}(t) \leq \mathcal{H}_0\}$ .

**Preuve de la propriété 6.3.1** La propriété 6.3.1 découle du corollaire 6.3.2 en se basant sur deux simples observations que nous avons déjà soulignées, et que nous rappelons ci-dessous :

- La propriété (6.3) est équivalente à la condition  $\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}^*(t) = \frac{P}{\gamma T}$ .

- La propriété  $\gamma \geq \gamma_{\text{crit}}(\{g_m\})$  est équivalente à la condition  $\sup_t \mathcal{H}(t) \leq \mathcal{H}_0$ .

## 6.4 Applications

Afin d'illustrer les résultats théoriques de la section 6.3.1, on considère trois différents systèmes de modulation multiporteuses, basés sur différentes familles de formes d'ondes, et nous analysons la CCDF de leur PAPR. Une comparaison de la performance en PAPR entre chaque système multiporteuses et l'OFDM classique est présentée.

**Walsh-Hadamard-MC (WH-MC)** La Figure 1.15 illustre les fonctions de Walsh pour  $Q = 3$ . Comme on peut constater, toutes les fonctions ont le même module et ce module est constant dans le temps. Du corollaire 6.3.1, le système WH-MC atteint la même performance en PAPR que l'OFDM conventionnel.

Afin de vérifier cette déduction par simulation, nous générons 10000 réalisations du symbole WH-MC en utilisant la constellation QPSK, et un nombre de porteuse égal à  $M = 64$  carriers. Les CCDF du PAPR du WH-MC et l'OFDM sont comparées dans la Figure 6.4.

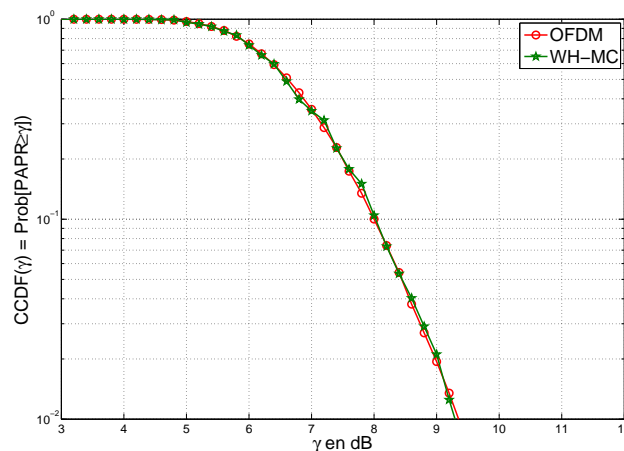


FIGURE 6.4 – CCDF du PAPR pour l'OFDM classique et le système WH-MC.

Nous pouvons observer que l'OFDM et le WH-MC ont la même performance en PAPR. Cette observation est en effet cohérente avec les prédictions théoriques annoncées dans le corollaire 6.3.1 .

**WCP-OFDM** Le système Weighted cyclic prefix-OFDM (WCP-OFDM) [154] est un système de modulation multiporteuses qui propose une version pondérée du système OFDM à préfixe cyclique, en utilisant des filtres de mise en forme non nécessairement rectangulaires.

Le filtre prototype OBE (*out-of-band energy*) défini dans [155] est un exemple des filtres utilisés dans la structure WCP-OFDM. Dans ce cas, la famille de modulation est exprimée par

$g_m[k] = g[k]e^{j2\pi\frac{m}{M}k}$  telle que  $g[k]$  est défini par <sup>1</sup>

$$g[k]e^{j2\pi\frac{m}{M}k} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{M'}} \cos(a + b\frac{2k+1}{2\Delta})e^{j2\pi\frac{m}{M}[k]} & \text{si } 0 \leq k \leq \Delta - 1, \\ \frac{1}{\sqrt{M'}} e^{j2\pi\frac{m}{M}[k]} & \text{si } \Delta \leq k \leq M' - 1, \\ \frac{1}{\sqrt{M'}} \cos(a + b\frac{2(M-k)+1}{2\Delta})e^{j2\pi\frac{m}{M}[k]} & \text{si } M' \leq k \leq M - 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec  $g[k]$  est le filtre OBE.

Nous pouvons facilement vérifier que  $g[k]$  satisfait la condition (5.7). Par ailleurs, on constate que  $\forall m \in \llbracket 0, M - 1 \rrbracket$  le module  $|g_m[k]|^2 = |g[k]e^{j2\pi\frac{m}{M}k}|^2 = |g[k]|^2$  dépend du temps. Du corollaire 6.3.1, la performance en PAPR du système WCP-OFDM ne peut pas être meilleure que l'OFDM conventionnel.

Afin de confirmer cette conclusion, nous simulons la CCDF du PAPR en considérant le filtre OBE précédemment défini.

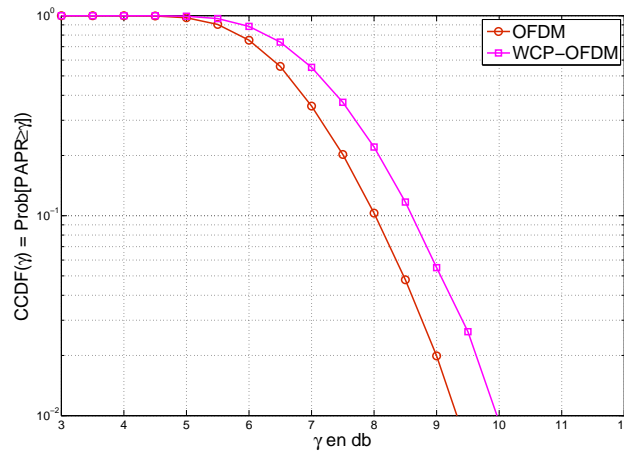


FIGURE 6.5 – CCDF du PAPR pour l'OFDM classique et le WCP-OFDM.

La Figure 6.5 représente une comparaison entre l'OFDM classique et le WCP-OFDM. La CCDF du WCP-OFDM est décalée vers la droite en comparaison avec l'OFDM. Ainsi, l'OFDM a une meilleure performance en PAPR que le WCP-OFDM, ce qui est bien cohérent avec notre résultat théorique.

**UFMC** La Figure 6.6 compare les performances en PAPR de l'UFMC utilisant un filtre de Chebychev et l'OFDM classique pour  $M = 64$  porteuses et un facteur de suréchantillonnage de 4. L'UFMC étudié ici ne satisfait pas la condition d'optimalité (6.3), ses performances en PAPR sont alors plus mauvaises que l'OFDM. La Figure 6.6 confirme ce résultat.

**Wavelet-OFDM** Le choix de l'ondelette utilisée dans le Wavelet-OFDM est très large (e.g. ondelettes de Daubechies, les Coiffettes, les Symlettes) et dépend de l'application. Nous allons traiter dans cette section l'exemple de l'ondelette de Haar qui appartient à la famille des Daubechies.

1.  $M = 80$ ,  $M' = 4/5M$ ,  $\Delta = M' - M$ ,  $M_0 = \frac{M}{\Delta}$ ,  $b = \frac{1}{\alpha + \beta M_0}$ ,  $a = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}b$ ,  $\alpha = -0.1714430594740783$ ,  $\beta = -0.5852184808129936$ .

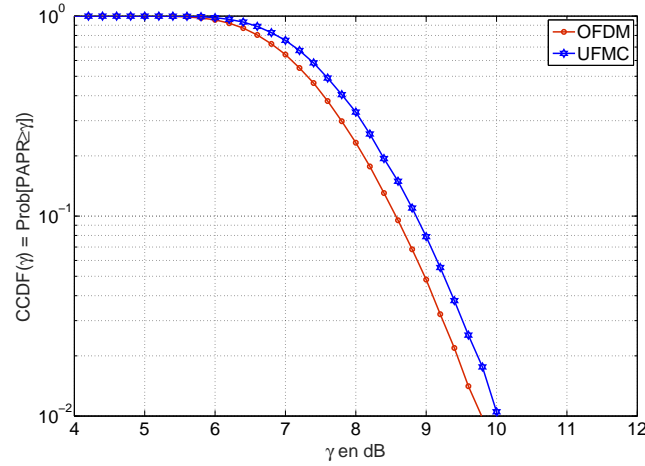


FIGURE 6.6 – CCDF du PAPR pour l'OFDM classique et l'UFMC.

L'ondelette mère de Haar  $\psi_{\text{haar}}(t)$  est exprimée par :

$$\psi_{\text{haar}}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}} & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{T}{2}, \\ -\frac{1}{\sqrt{T}}, & \text{si } \frac{T}{2} \leq t \leq T, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction d'échelle  $\phi_{\text{haar}}(t)$  vaut :

$$\phi_{\text{haar}}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}} & \text{si } 0 \leq t \leq T, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

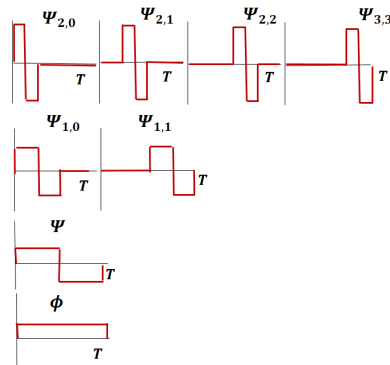


FIGURE 6.7 – Base d'ondelettes de Haar.

La Figure 6.7 décrit les ondelettes de Haar  $\psi_{j,k}^{\text{haar}}$  et la fonction d'échelle associée à la première échelle  $\phi^{\text{haar}}$ , pour  $J_0 = 0$  et  $M = 8$ . Comme observé sur la figure, le support temporel des versions contractées de l'ondelette mère  $\psi^{\text{haar}}$  est plus court que la période symbole  $T$ , cette famille de fonctions ne satisfait pas alors la contrainte (5.7). Suivant la propriété 6.3.1, nous pouvons réaliser des performances en PAPR meilleures que celle de l'OFDM. Afin de vérifier cette conclusion par simulation, on considère la transformée en ondelettes de Haar et on extrait les coefficients d'approximation et de détails au niveau maximal 6 ( $J_0 = 0$ ) pour un nombre de porteuses  $M = 64$ .

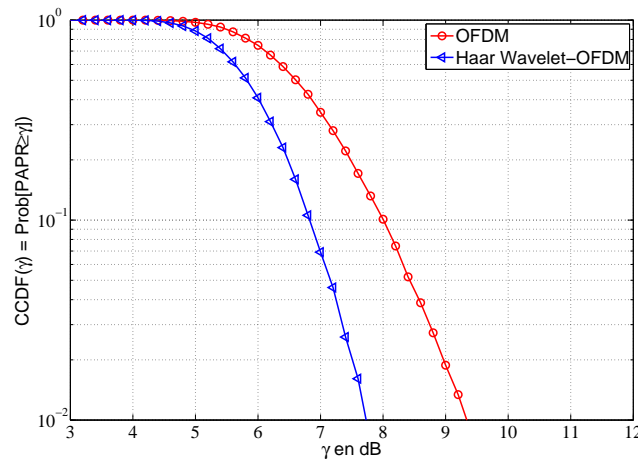


FIGURE 6.8 – CCDF du PAPR pour l'OFDM classique et le Haar Wavelet-OFDM.

Selon la Figure 6.8, la courbe associée à Haar Wavelet-OFDM est décalée vers la gauche par rapport à celle de l'OFDM. Haar Wavelet-OFDM a de meilleure performance en PAPR que l'OFDM.

Il est important de mentionner que le PAPR est réduit pour cet exemple en changeant uniquement la forme d'onde de modulation. Cela confirme que, sans utiliser les techniques classiques de réduction de PAPR, le PAPR peut être réduit en choisissant une forme d'onde appropriée.

D'autres exemples de systèmes de modulation multiporteuses dans la littérature peuvent également être discutés

- Le PAPR du NOFDM est évalué expérimentalement en utilisant la fenêtre de Hamming et Kaiser dans [156] où il a été montré que la performance en PAPR du NOFDM n'est pas meilleure que celle de l'OFDM. Le corollaire 6.3.1 fournit une explication théorique de ces résultats de simulation.
- D'après le théorème de la condition nécessaire, nous comprenons maintenant pourquoi les systèmes FBMC basés sur le filtre IOTA ou SRRC par exemple, ainsi que les systèmes UFMC n'ont pas de meilleure performance en PAPR que l'OFDM, puisqu'ils ne remplissent pas la condition nécessaire établit dans le théorème 6.3.1.

## 6.5 Classification des formes d'ondes vis-à-vis du PAPR

L'analyse entreprise dans ce chapitre nous conduit à une classification des formes d'ondes en termes de performances en PAPR des systèmes multiporteuses associés. La Figure 6.9 expose un résumé des conclusions de cette étude. Le rectangle présente l'ensemble des formes d'ondes GWMC appartenant à  $L_I^\infty$ . Le problème d'optimisation analysé dans ces travaux concerne les formes d'ondes appartenant à l'ensemble  $A$ , i.e. satisfaisant la condition (5.7). Les systèmes appartenant à  $A \cap B$  ( $\gamma$  compris OFDM, WH-MC) ont la meilleure performance en PAPR possible *parmi tous les systèmes dans A*. Tout système à performance en PAPR meilleure que l'OFDM doit être dans  $C$ . Il existe effectivement des systèmes (Daubechies 20, Symlet 3, Coiflet 2) dans  $C$  à performance en PAPR meilleure que l'OFDM. Certains appartiennent même à l'ensemble  $B$  (ondelettes de Haar), mais pas à l'ensemble  $A$ .

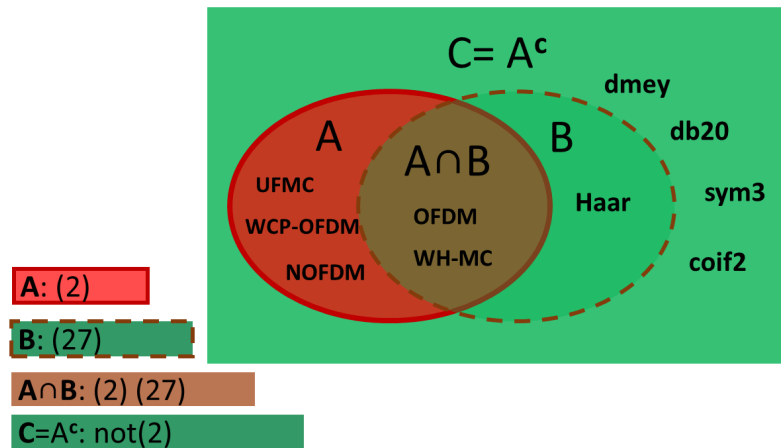


FIGURE 6.9 – Taxonomie des formes d’ondes multiporteuses vis-à-vis des performances en PAPR.

## Conclusion

L’analyse du problème de PAPR dans ce chapitre concerne les systèmes multiporteuses à forme d’onde généralisée GWMC. Nous avons montré analytiquement que : tout système multiporteuses dont les formes d’ondes (transformée de modulation et filtre de mise en forme) ne s’annulent pas durant la période symbole, est optimal en termes de performance en PAPR si et seulement si la moyenne statistique de la puissance instantanée du signal transmis est constante dans le temps. Nous avons conclu alors qu’il existe une infinité de systèmes GWMC optimaux en termes de performance en PAPR. L’OFDM classique basé sur la transformée de Fourier et le filtre rectangulaire appartient à cette famille. Par ailleurs, nous avons déduit que la performance en PAPR d’un système GWMC ne peut être meilleure que celle de l’OFDM que si et seulement si le support temporel d’au moins une fonction de modulation est inférieur à la période symbole.

Nous avons traité plusieurs exemples pour appuyer nos résultats théoriques :

- La modulation de Walsh-Hadamard satisfait la condition nécessaire et suffisante d’optimalité, on a montré théoriquement et expérimentalement qu’elle a les mêmes performances en PAPR que l’OFDM.
- Les modulations WCP-OFDM et UFMC ne satisfont pas la condition nécessaire d’optimalité. On retrouve par simulation qu’elles sont caractérisées par des performances en PAPR moins bonnes que celles de l’OFDM.
- Les modulations NOFDM et FBMC ont été étudiées dans la littérature, et leur performances en PAPR ont été montrées par simulations pas meilleures que celles de l’OFDM. L’étude analytique exposée dans ce chapitre donne une explication théorique de ces performances.
- Le Wavelet-OFDM satisfait la condition nécessaire pour avoir un meilleur PAPR que l’OFDM.

Dès lors, il semble intéressant d’étudier le Wavelet-OFDM, qui a la propriété de générer un signal à PAPR réduit. Le chapitre suivant analyse les performances du système Wavelet-OFDM et les compare avec celles de l’OFDM.

# Chapitre 7

## La modulation en ondelettes

### Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>Variantes du Wavelet-OFDM</b>	<b>104</b>
<b>7.2</b>	<b>Performances en PAPR</b>	<b>104</b>
<b>7.3</b>	<b>Limitations de la DSP</b>	<b>105</b>
7.3.1	Analyse de la DSP pour un signal GWMC	105
7.3.2	DSP du Wavelet-OFDM	107
7.3.3	DSP de la modulation en ondelettes de Haar	108
7.3.4	Largeur du lobe principal	109
7.3.5	Validation par simulation de la DSP de Haar Wavelet-OFDM	109
7.3.6	Comparaison avec l'OFDM	110
7.3.7	Discussions	110
7.3.8	DSP de Dmey Wavelet-OFDM	111
7.3.9	Effet de l'amplificateur de puissance sur la DSP	111
<b>7.4</b>	<b>PAPR de Dmey pour différentes variantes et constellations</b>	<b>112</b>
<b>7.5</b>	<b>Performances en TEB</b>	<b>114</b>
7.5.1	Canal AWGN et Flat Fading	114
7.5.2	Canal sélectif en fréquence	115
<b>7.6</b>	<b>Complexité d'implémentation</b>	<b>116</b>

---

Nous nous intéressons dans ce chapitre au système Wavelet-OFDM, une modulation multiporteuses basée sur une transformée en ondelettes, et qui satisfait la condition nécessaire pour avoir de meilleures performances en PAPR que l'OFDM.

Suite à la comparaison des performances en PAPR et en densité spectrale de puissance (DSP) de plusieurs ondelettes et variantes, nous montrons que l'ondelette de Meyer atteint un bon compromis. Quoique l'ondelette de Haar présente les meilleurs performances en PAPR, l'étude détaillée de sa densité spectrale de puissance montre que son utilité est limitée. C'est ainsi que nous proposons une modulation en ondelettes basée sur l'ondelette discrète de Meyer, et nous évaluons ses performances en PAPR, en taux d'erreur binaire (TEB) dans différents modèles de canaux de communications et en termes de complexité d'implémentation. Ces performances seront comparées à l'OFDM.

Les différents résultats obtenus dans ce chapitre ont été publiés dans deux articles de conférences [157, 158] et leur extension en un article de revue [159].

## 7.1 Variantes du Wavelet-OFDM

Dans la section 2.2.2, nous avons introduit le système Wavelet-OFDM et nous avons donné l'expression du signal modulé en ondelettes (2.7). Nous remarquons que différentes variantes du Wavelet-OFDM peuvent être construites, selon le premier niveau de décomposition  $J_0$  sélectionné, qui détermine le nombre de niveaux fréquentiels résultants. La Figure 7.1 fournit les différentes variantes du Wavelet-OFDM pour un nombre de porteuses  $M = 8$  et donc un nombre total de niveaux  $J = \log_2(M) = 3$ . Par convention,  $J_0 = J$  correspond à une base de  $2^J$  fonctions d'échelle  $\phi_{j,k}$ , aucune ondelette n'est considérée dans ce cas. Ce système correspond alors à une modulation **monoporteuse**.

La position des fonctions dans la Figure 7.1 représente le pavage du plan temps-fréquence et donne alors une idée sur la localisation temps-fréquence des porteuses. Nous pouvons observer que ces propriétés changent d'une variante à l'autre et la sélection de la variante va dépendre de l'application pour laquelle la base d'ondelettes est envisagée. En général, les ondelettes du même niveau occupent la même bande de fréquence et sont translatées dans le temps. Elles ont les mêmes résolutions temps-fréquence. En passant d'un niveau au suivant, la largeur de la bande passante des porteuses est multipliée par un facteur de deux, et leur durée temporelle est divisée par deux.

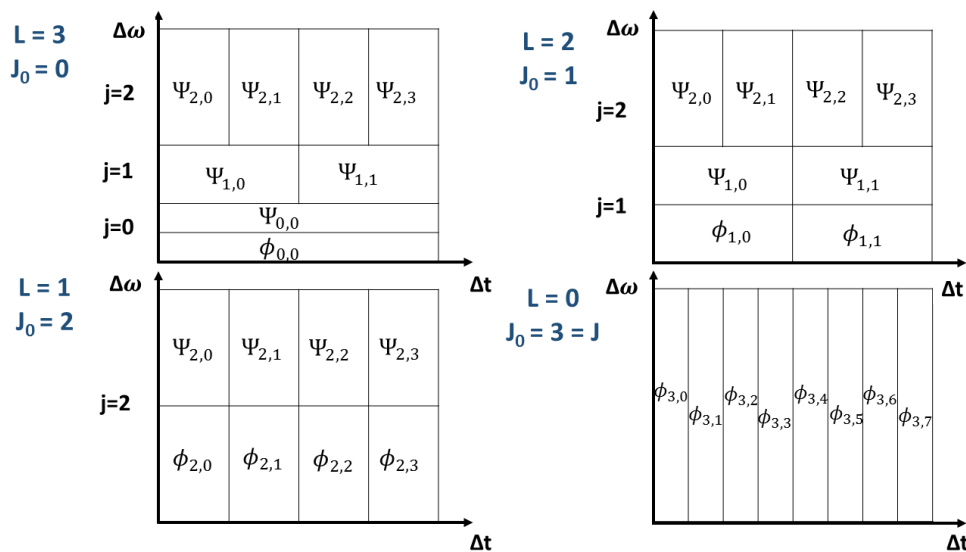


FIGURE 7.1 – Variantes du Wavelet-OFDM.

## 7.2 Performances en PAPR

Une comparaison en termes de CCDF du PAPR est présentée dans la Figure 7.2 pour un nombre de porteuses  $M = 64$ ,  $J_0 = 0$  et une constellation 4-QAM. Différentes ondelettes sont considérées : l'ondelette de Haar, les ondelettes de Daubechies 3 et 20, ainsi que l'ondelette discrète de Meyer (Dmey). Les courbes de CCDF des différentes ondelettes sont décalées vers la gauche par rapport à celle de l'OFDM, et donc les différentes ondelettes sont meilleures que

l'OFDM en termes de PAPR. En particulier, l'ondelette de Haar donne les meilleures performances. Le Wavelet-OFDM est caractérisé par un PAPR plus faible devant l'OFDM. Intuitivement, cela peut être expliqué par le fait que dans le Wavelet-OFDM, seulement  $L = J - J_0$  porteuses s'ajoutent à chaque instant dans le temps, ce qui ne favorise pas la construction des larges pics de puissance. Le paramètre  $L$  indique aussi le nombre d'échelles considérées ou le nombre de niveaux de décomposition (voir section 7.6).

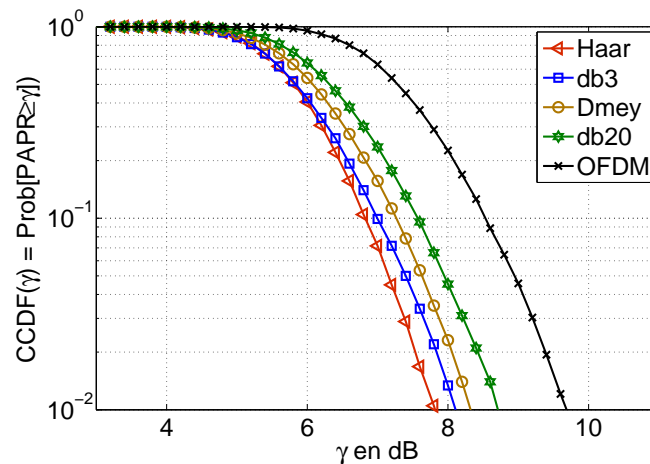


FIGURE 7.2 – Performances en PAPR du Wavelet-OFDM.

### 7.3 Limitations de la DSP

Comme constaté dans la section 7.2, Haar offre la meilleure performance en PAPR, ce qui a aussi été affirmé dans [160, 161]. Les performances de l'ondelette de Haar ont été largement étudiées dans la littérature. Dans [69], les auteurs affirment que l'ondelette de Haar réduit mieux les interférences inter-symboles et inter-porteuses en comparant avec l'OFDM, dans le contexte des communications courants porteurs en ligne (PLC ou *power line communications*). Selon [162] et [161], l'ondelette de Haar atteint des performances en TEB meilleures que l'OFDM et les autres ondelettes. Il a été également montré que Haar est l'ondelette qui requiert la plus faible complexité de calcul grâce au nombre de coefficients de ses filtres limité à deux [163].

Cependant, l'efficacité spectrale du Wavelet-OFDM a été rarement traitée dans la littérature. La pensée la plus répandue est que le Wavelet-OFDM améliore l'efficacité spectrale par rapport à l'OFDM, puisqu'il n'utilise pas de préfixe cyclique comme précisé dans plusieurs références [161, 163, 164, 165, 166]. Pourtant, il existe d'autres facteurs qui peuvent avoir un effet plus significatif sur l'efficacité spectrale, ce qui nous a motivé à mener une étude plus rigoureuse de la densité spectrale de puissance (DSP) du Wavelet-OFDM qui met en évidence le prix à payer pour les avantages que nous venons d'énumérer, notamment dans le cas de l'ondelette de Haar. Ainsi, d'autres ondelettes alternatives peuvent être considérées pour remplacer l'ondelette de Haar.

#### 7.3.1 Analyse de la DSP pour un signal GWMC

Nous étudions d'abord l'expression de la DSP pour tout signal GWMC, et ensuite nous appliquons la formule dérivée pour exprimer la DSP du Wavelet-OFDM et évaluer le cas particulier de l'ondelette de Haar. Nous considérons alors un signal GWMC que nous rappelons ici

son expression :

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{M-1} C_{m,n} \underbrace{g_m(t - nT)}_{g_{m,n}(t)}. \quad (7.1)$$

La transformée de Fourier du signal GWMC est définie par

$$X(\omega) = \sum_n \sum_{m=0}^{M-1} C_{m,n} G_m(\omega) e^{-i\omega nT}. \quad (7.2)$$

$G_m(\omega)$  est la transformée de Fourier de  $g_m(t)$ , et  $\omega = 2\pi f$ .

**Définition 7.3.1.** Fonction d'auto-corrélation

$$\Gamma_x(t, \tau) := E(x(t)\bar{x}(t - \tau)).$$

où  $\bar{x}$  est le conjugué de  $x$ , et  $E(\cdot)$  l'espérance.

Un signal  $x$  est dit stationnaire à l'ordre 2 si sa fonction d'auto-corrélation ne dépend que du retard  $\tau$ , soit

$$\Gamma_x(t, \tau) = \Gamma_x(\tau). \quad (7.3)$$

Pour un signal stationnaire, la DSP peut être calculée en appliquant la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation. Vérifions la condition de stationnarité pour le signal GWMC (7.1). On a

$$\begin{aligned} \Gamma_x(t, \tau) &= \sum_{n, n'} \sum_{m, m'} E(C_{m,n} \bar{C}_{m', n'}) g_{m,n}(t) \bar{g}_{m', n'}(t - \tau) \\ \Gamma_x(t, \tau) &= \sum_n \sum_{m=0}^{M-1} g_m(t - nT) \bar{g}_m(t - nT - \tau). \end{aligned}$$

Nous observons alors que la condition (7.3) n'est pas satisfaite. Cependant, remarquons que la fonction d'auto-corrélation du signal GWMC satisfait la propriété suivante :

$$\Gamma_x(t + T, \tau) = \Gamma_x(t, \tau). \quad (7.4)$$

En plus, comme les symboles  $\{C_{m,n}\}$  sont centrés, nous avons :

$$E(x(t)) = 0. \quad (7.5)$$

D'après (7.4) et (7.5), le signal GWMC satisfait la propriété de cyclostationnarité, et sa DSP peut être calculée en appliquant la transformée de Fourier sur sa fonction d'auto-corrélation moyenne, qu'on définit ci-après.

**Définition 7.3.2.** Fonction d'auto-corrélation moyenne

$$\bar{\Gamma}_x(\tau) := \frac{1}{T} \int_0^T \Gamma_x(t, \tau) dt.$$

Pour calculer la fonction d'auto-corrélation moyenne du signal GWMC, on note  $\tilde{g}_m(t) = \bar{g}_m(-t)$ , et on a

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_x(\tau) &= \frac{1}{T} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_n \int_0^T g_m(t - nT) \bar{g}_m(t - nT - \tau) dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_n \int_{-nT}^{-(n-1)T} g_m(t) \bar{g}_m(t - \tau) dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{m=0}^{M-1} \int_{-\infty}^{+\infty} g_m(t) \bar{g}_m(t - \tau) dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{m=0}^{M-1} (g_m \star \tilde{g}_m)(\tau), \end{aligned}$$

où  $\star$  représente le produit de convolution.

**Définition 7.3.3.** Densité spectrale de puissance

Soit  $x$  un signal cyclostationnaire, la DSP de  $x$  est exprimée par :

$$\gamma_x(\omega) = TF(\bar{\Gamma}_x(\tau)),$$

où TF désigne la transformée de Fourier.

On calcule la DSP du signal GWMC :

$$\begin{aligned} \gamma_x(\omega) &= TF\left(\frac{1}{T} \sum_{m=0}^{M-1} (g_m \star \tilde{g}_m)(\tau)\right) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{m=0}^{M-1} TF(g_m(\tau))TF(\tilde{g}_m(\tau)) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{m=0}^{M-1} G_m(\omega)\bar{G}_m(\omega) \end{aligned}$$

En conclusion, la DSP d'un signal GWMC est exprimée par la relation suivante :

$$\boxed{\gamma_x(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{m=0}^{M-1} |G_m(\omega)|^2.} \quad (7.6)$$

### 7.3.2 DSP du Wavelet-OFDM

Dans le cas d'un système Wavelet-OFDM, soient  $\Psi(\omega)$  et  $\Phi(\omega)$  les transformées de Fourier de  $\psi(t)$  et  $\phi(t)$  respectivement. D'après (7.6) on obtient

$$\gamma_{x_{\text{wavelet}}}(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{j=J_0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} |\Psi_{j,k}(\omega)|^2 + \frac{1}{T} \sum_{q=0}^{2^{J_0}-1} |\Phi_{J_0,q}(\omega)|^2.$$

$$\text{Par ailleurs, on a } TF(\psi_{j,k}) = 2^{\frac{j}{2}} TF(\psi(2^j t - kT))$$

$$TF(\psi(2^j t)) = \frac{1}{2^j} \Psi\left(\frac{\omega}{2^j}\right)$$

$$TF(\psi(2^j t - kT)) = \frac{1}{2^j} e^{-i\frac{\omega}{2^j} kT} \Psi\left(\frac{\omega}{2^j}\right).$$

En procédant similairement pour la fonction d'échelle, on trouve

$$TF(\phi(2^{J_0} t - kT)) = \frac{1}{2^{J_0}} e^{-i\frac{\omega}{2^{J_0}} kT} \Phi\left(\frac{\omega}{2^{J_0}}\right),$$

d'où

$$\begin{aligned} \gamma_{x_{\text{wavelet}}}(\omega) &= \frac{1}{T} \sum_{j=J_0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} 2^{-j} \left| \Psi\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \right|^2 + \frac{1}{T} \sum_{q=0}^{2^{J_0}-1} 2^{-J_0} \left| \Phi\left(\frac{\omega}{2^{J_0}}\right) \right|^2 \\ &= \frac{1}{T} \sum_{j=J_0}^{J-1} |\Psi_j(\omega)|^2 + \frac{1}{T} |\Phi_{J_0}(\omega)|^2. \end{aligned} \quad (7.7)$$

### 7.3.3 DSP de la modulation en ondelettes de Haar

Considérons maintenant l'ondelette de Haar, qui est l'ondelette la plus simple et qui admet une expression exacte dans le domaine temporel et fréquentiel. L'ondelette mère de Haar et l'ondelette d'échelle mère s'écrivent pour une période  $[0, T]$  :

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}} & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{T}} & \text{si } \frac{T}{2} \leq t \leq T, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad (7.8)$$

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}} & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \quad (7.9)$$

Afin de calculer la DSP de Haar Wavelet-OFDM, on exprime d'abord  $|\Psi(\omega)|$  et  $|\Phi(\omega)|$ .

$$\begin{aligned} \Psi(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-i\omega t} dt - \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{\frac{T}{2}}^T e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{1 - e^{-i\frac{\omega T}{2}}}{i\omega} + \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{e^{-i\omega T} - e^{-i\frac{\omega T}{2}}}{i\omega} \\ &= \sqrt{T} e^{-i\frac{\omega T}{4}} \frac{e^{i\frac{\omega T}{4}} - e^{-i\frac{\omega T}{4}}}{4i\frac{\omega T}{4}} + \sqrt{T} e^{-i\frac{\omega T}{2}} e^{-i\frac{\omega T}{4}} \frac{e^{-i\frac{\omega T}{4}} - e^{i\frac{\omega T}{4}}}{4i\frac{\omega T}{4}} \\ &= \sqrt{T} \frac{e^{-i\frac{\omega T}{4}}}{2} \frac{\sin \frac{\omega T}{4}}{\frac{\omega T}{4}} - \sqrt{T} \frac{e^{-i\frac{3\omega T}{4}}}{2} \frac{\sin \frac{\omega T}{4}}{\frac{\omega T}{4}} \\ &= \sqrt{T} \frac{\sin \frac{\omega T}{4}}{\frac{\omega T}{4}} \frac{e^{-i\frac{\omega T}{4}} - e^{-i\frac{3\omega T}{4}}}{2} \\ &= \sqrt{T} \frac{\sin \frac{\omega T}{4}}{\frac{\omega T}{4}} i e^{-i\frac{\omega T}{2}} \frac{e^{i\frac{\omega T}{4}} - e^{-i\frac{\omega T}{4}}}{2i} \\ &= i\sqrt{T} e^{-i\frac{\omega T}{2}} \frac{\sin^2 \frac{\omega T}{4}}{\frac{\omega T}{4}}, \end{aligned}$$

$$\text{d'où } |\Psi(\omega)| = \sqrt{T} \left| \frac{\sin^2 \frac{\omega T}{4}}{\frac{\omega T}{4}} \right|. \quad (7.10)$$

$$\text{On en déduit que } \Psi_{j,k}(\omega) = i2^{\frac{j}{2}} \frac{1}{2^j} \sqrt{T} e^{-i\frac{\omega}{2^j} kT} e^{-i\frac{\omega T}{2^{j+1}}} \frac{\sin^2 \frac{\omega T}{2^{j+2}}}{\frac{\omega T}{2^{j+2}}}, \quad (7.11)$$

$$\text{d'où } |\Psi_{j,k}(\omega)| = 2^{-\frac{j}{2}} \sqrt{T} \left| \frac{\sin^2 \frac{\omega T}{2^{j+2}}}{\frac{\omega T}{2^{j+2}}} \right|. \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned} \text{De même } \Phi(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= \sqrt{T} e^{-i\frac{\omega T}{2}} \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}, \end{aligned}$$

$$\text{d'où } |\Phi(\omega)| = \sqrt{T} \left| \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right|,$$

$$\text{donc } \Phi_{J_0,k} = 2^{\frac{J_0}{2}} \frac{1}{2^{J_0}} \sqrt{T} e^{-i\frac{\omega}{2^{J_0}} k T} e^{-i\frac{\omega T}{2^{J_0+1}}} \frac{\sin \frac{\omega T}{2^{J_0+1}}}{\frac{\omega T}{2^{J_0+1}}}, \quad (7.13)$$

$$\text{d'où } |\Phi_{J_0,k}| = 2^{-\frac{J_0}{2}} \sqrt{T} \left| \frac{\sin \frac{\omega T}{2^{J_0+1}}}{\frac{\omega T}{2^{J_0+1}}} \right|. \quad (7.14)$$

À partir de (7.7), (7.12), et (7.14), on obtient l'expression suivante de la DSP de Haar Wavelet-OFDM

$$\gamma_{x_{\text{haar}}}(\omega) = \sum_{j=J_0}^{J-1} 2^j \left| 2^{-\frac{j}{2}} \frac{\sin^2 \frac{\omega T}{2^{j+2}}}{\frac{\omega T}{2^{j+2}}} \right|^2 + 2^{J_0} \left| 2^{-\frac{J_0}{2}} \frac{\sin \frac{\omega T}{2^{J_0+1}}}{\frac{\omega T}{2^{J_0+1}}} \right|^2.$$

La DSP du signal Haar Wavelet-OFDM est ainsi exprimée par la formule suivante :

$$\boxed{\gamma_{x_{\text{haar}}}(\omega) = \sum_{j=J_0}^{J-1} \left| \frac{\sin^2 \frac{\pi f T}{2^{j+1}}}{\frac{\pi f T}{2^{j+1}}} \right|^2 + \left| \text{sinc}\left(\frac{\pi f T}{2^{J_0}}\right) \right|^2.} \quad (7.15)$$

La fonction  $\text{sinc}(\cdot)$  représente le sinus cardinal défini par  $\text{sinc}(x) := \frac{\sin(x)}{x}$ .

### 7.3.4 Largeur du lobe principal

La largeur du lobe principal de la DSP représente une mesure de l'efficacité spectrale du signal. Nous calculons dans cette partie la largeur du lobe principal  $\Delta f_{\text{haar}}$  de la DSP du Haar Wavelet-OFDM exprimée dans (7.15).

$$\begin{aligned} \gamma_{x_{\text{haar}}}(f) &= 0 \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \forall j \in [J_0, J-1] & \left| \frac{\sin^2 \frac{\pi f T}{2^{j+1}}}{\frac{\pi f T}{2^{j+1}}} \right|^2 = 0 \\ \text{et} & \left| \text{sinc}\left(\frac{\pi f T}{2^{J_0}}\right) \right|^2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \forall j \in [J_0, J-1] & \frac{f T}{2^{j+1}} = k_j, \quad k_j \in \mathbb{Z}^* \\ \text{et} & \frac{f T}{2^{J_0}} = k_L, \quad k_L \in \mathbb{Z}^* \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \forall j \in [J_0-1, J-1] & f T = 2^{j+1} k_j, \quad k_j \in \mathbb{Z}^* \end{cases} \\ \Leftrightarrow &f T = 2^J k, \quad k \in \mathbb{Z}^*. \end{aligned}$$

La largeur du lobe principal est  $\Delta f_{\text{haar}} = f_1 - f_{-1}$ , telle que  $f_1 = \frac{2^J}{T}$  et  $f_{-1} = \frac{-2^J}{T}$ . On a alors

$$\begin{aligned} \Delta f_{\text{haar}} &= \frac{2^{J+1}}{T} \\ &= \frac{2M}{T}. \end{aligned}$$

Notons ici que la largeur du lobe principale est la même pour toutes les variantes, puisqu'elle ne dépend pas de la première échelle  $J_0$ .

### 7.3.5 Validation par simulation de la DSP de Haar Wavelet-OFDM

La Figure 7.3 montre la DSP simulée et théorique du Haar Wavelet-OFDM en fonction de la fréquence normalisée (7.15). La DSP expérimentale est simulée sur Matlab, et estimée via la méthode de périodogramme à fenêtre rectangulaire. Avant d'appliquer la modulation en ondelettes basée sur la IDWT, un *zero padding* de facteur 4 est effectué sur le signal d'entrée dans le domaine fréquentiel. Le nombre de porteuses considéré est de  $M = 16$ . La courbe expérimentale est cohérente avec la courbe théorique.

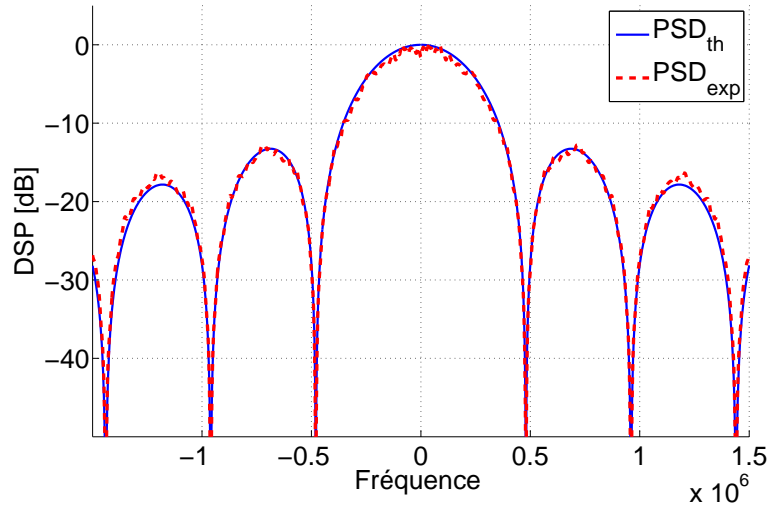


FIGURE 7.3 – DSP théorique et expérimentale de Haar Wavelet-OFDM.

### 7.3.6 Comparaison avec l'OFDM

En se basant sur les mêmes paramètres de simulation que précédemment, les DSP de Haar Wavelet-OFDM et de l'OFDM sans préfixe cyclique sont comparées dans la Figure 7.4. La largeur du lobe principal de la DSP de Haar Wavelet-OFDM est le double de celui de l'OFDM. En plus, Haar possède de larges lobes secondaires. Plusieurs applications ne peuvent pas tolérer ces mauvaises propriétés du spectre. Il est vrai que le signal basé sur l'ondelette de Haar peut être filtré pour réduire les effets des lobes secondaires, mais cela va changer les performances du système.

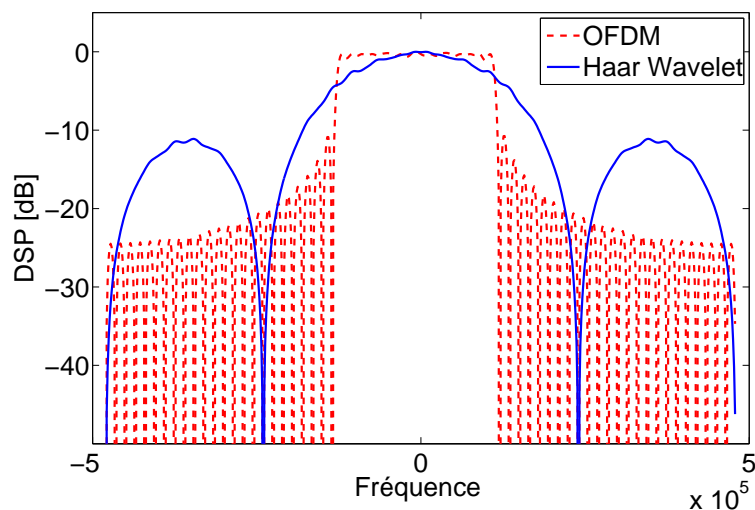


FIGURE 7.4 – DSP du Haar Wavelet-OFDM.

### 7.3.7 Discussions

Comme expliqué dans la section 1.3.7, la localisation fréquentielle des ondelettes est doublée d'une échelle à l'autre. La largeur du lobe principal de la DSP dépend alors de l'ondelette correspondant à la plus petite échelle. La Figure 7.5 (à voir en couleur) montre la somme du

carré de l'amplitude des ondelettes de chaque échelle en fréquence, et la somme sur toutes les échelles donne la DSP exprimée dans (7.6). Comme nous pouvons le voir, les ondelettes de la petite échelle ont le plus large lobe principal, ce qui définit la largeur du lobe principal de la DSP. Parmi les ondelettes usuelles, l'ondelette de Shannon offre la meilleure localisation

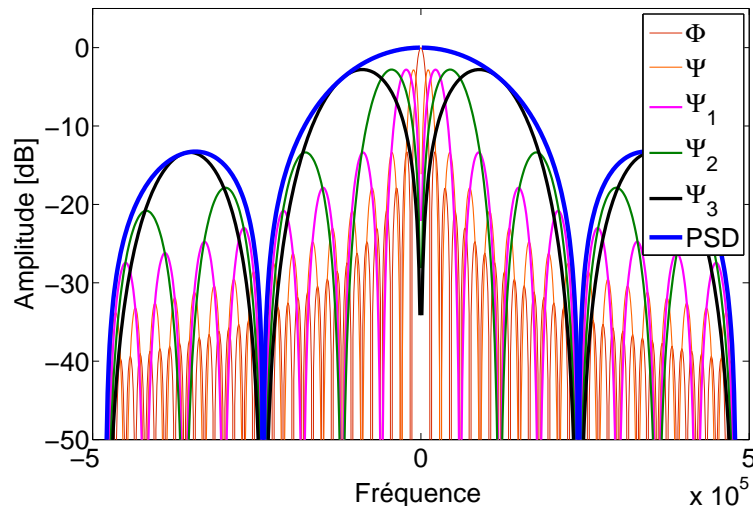


FIGURE 7.5 – Ondelettes en fréquence pour chaque échelle.

fréquentielle, mais elle n'est pas orthogonale et décroît lentement en temps. En plus, l'étude de ce chapitre se focalise sur la DWT, tandis que l'ondelette de Shannon n'est pas compatible avec l'algorithme rapide de DWT [9].

### 7.3.8 DSP de Dmey Wavelet-OFDM

L'ondelette de Meyer est une ondelette plus attractive que celle de Shannon dans la mesure où elle se caractérise par une décroissance plus rapide et satisfait les conditions d'orthogonalité. Une approximation discrète de l'ondelette de Meyer appelée *Dmey* est possible, elle représente l'ondelette de Meyer en se basant sur un filtre à réponse impulsionnelle finie (FIR) [167] comme illustré dans la Figure 1.8. Par conséquent, la DWT peut être appliquée sur Dmey.

Comme présenté dans la Figure 7.6, Dmey Wavelet-OFDM a une meilleure efficacité spectrale que Haar Wavelet-OFDM, et elle est comparable à l'OFDM. Les paramètres de simulations sont :  $M = 128$ ,  $L = 1$ , suréchantillonnage d'un facteur de 4 et constellation 4-QAM.

### 7.3.9 Effet de l'amplificateur de puissance sur la DSP

Nous évaluons dans cette section l'effet d'un amplificateur de puissance sur les propriétés de la DSP. Un amplificateur est un dispositif électronique utilisé pour augmenter la puissance du signal d'entrée. Il est conçu pour offrir au signal la puissance de transmission nécessaire pour atteindre le récepteur.

On introduit le signal OFDM et le signal de Dmey Wavelet-OFDM dans un amplificateur de puissance sans mémoire suivant le modèle de Saleh [168]. Un facteur de suréchantillonnage de 4 est appliqué dans le domaine fréquentiel au signal d'entrée. Le nombre de porteuses considéré est  $M = 128$  ( $J = 7$ ) et la variante sélectionné est  $J_0 = 6$ .

Comme observé dans la Figure 7.7, l'OFDM connaît une remontée de lobes secondaires plus grande que Dmey, à cause de son grand PAPR. La remontée des lobes secondaires est causée par la non-linéarité de l'amplificateur. Quand un signal à grande variation d'enveloppe

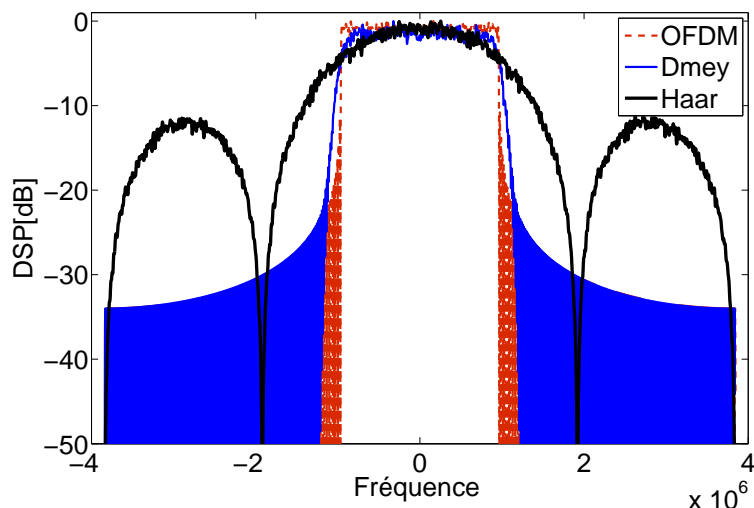


FIGURE 7.6 – DSP de Dmey Wavelet-OFDM.

est introduit dans un amplificateur non-linéaire, sa bande spectrale s'élargit à cause des non-linéarités qui génèrent des produits d'intermodulation entre les composantes fréquentielles individuelles du spectre. La remontée des lobes secondaires conduit à des interférences avec les canaux adjacents.

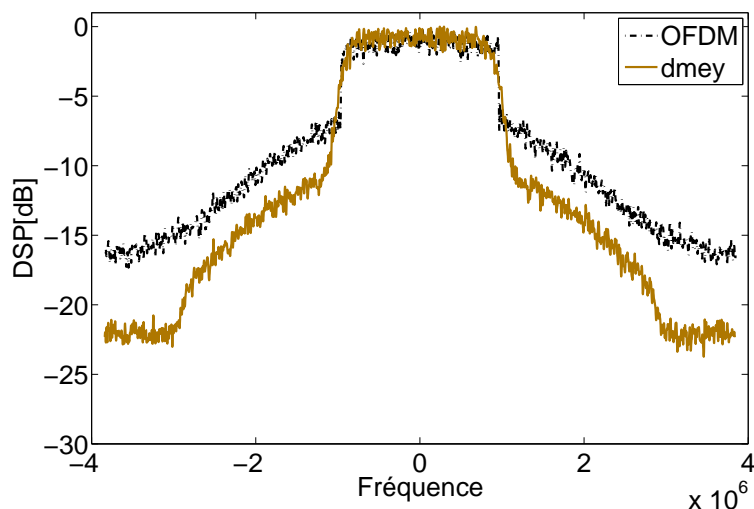


FIGURE 7.7 – Comparaison de la DSP de Dmey et de l'OFDM à la sortie d'un amplificateur de puissance.

## 7.4 PAPR de Dmey pour différentes variantes et constellations

Les performances en PAPR de plusieurs variantes de Dmey Wavelet-OFDM sont comparées aux performances de l'OFDM. Les simulations sont réalisées pour les constellations 4-QAM et 16-QAM, un nombre de porteuses  $M = 128$  et pour  $10^6$  itérations. Le facteur de sur-échantillonnage est fixé à 4.

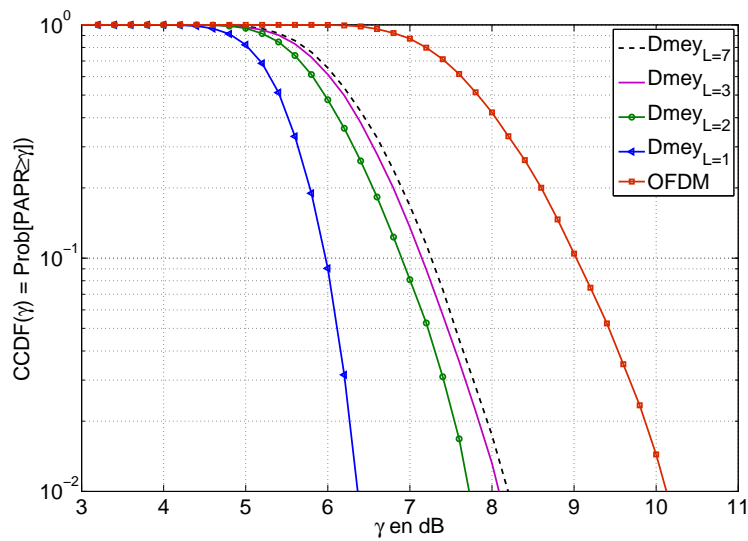


FIGURE 7.8 – Comparaison des performances en PAPR de Dmey pour une constellation 4-QAM.

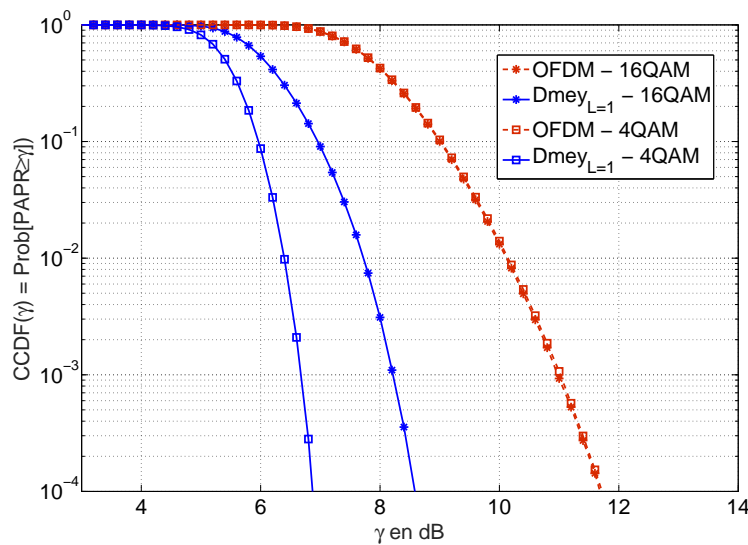


FIGURE 7.9 – Comparaison des performances en PAPR de Dmey pour une constellation 16-QAM.

La première conclusion à tirer de la Figure 7.8 est que la performance en PAPR de Dmey dépend du nombre des niveaux de décomposition  $L$ . Quand  $L$  augmente, la CCDF est décalée vers la droite, les performances en PAPR sont alors dégradées. Cela peut être interprété par le fait que pour chaque niveau de décomposition  $j$ , les ondelettes occupent la même bande et sont seulement translatées dans le temps : c'est le principe de la modulation monoporteuse. Le nombre de porteuses qui s'additionnent "effectivement" en temps est en général égal au nombre des niveau de décomposition. Comme la monoporteuse ne souffre pas d'un grand PAPR, plus petit est  $L$ , plus petit est l'effet observé du PAPR. Par ailleurs, le PAPR des différentes variantes de Dmey Wavelet-OFDM est meilleure que celui de l'OFDM. La variante  $L = 1$

TABLE 7.1 – Paramètres de simulation.

Paramètres	Définition	Valeurs
$M$	Nombre de porteuses	128
$S$	Nombre de symboles	100
SNR	Rapport signal sur bruit en dB	0 : 5 : 25 and 0 : 5 : 35
$n_{\text{iter}}$	Nombre d'itérations	100000
$\Delta F$	Espacement inter-porteuses	15 KHz
$L$	nombre de niveaux de décomposition considéré	$L = 1$

TABLE 7.2 – Délais et gains de puissance du canal ETU du standard LTE.

Délais ( $ns$ )	0	50	120	200	230	500	1600	2300	5000
Gains moyens de puissance (dB)	-1.0	-1.0	-1.0	0.0	0.0	0.0	-3.0	-5.0	-7.0

atteint les meilleures performances en PAPR.

Dans la Figure 7.9, la variante  $L = 1$  de Dmey est comparée à l'OFDM en termes de performances en PAPR. Comme illustré dans cette figure, pour une CCDF de  $10^{-3}$ , pour une constellation 4-QAM (16-QAM respectivement), le PAPR de Dmey est réduit de 4.5 dB (3 dB respectivement) par rapport à l'OFDM. Dmey offre un PAPR plus petit que l'OFDM grâce à la bonne localisation temporelle de ses formes d'ondes, puisque le Wavelet-OFDM a des ondelettes à support plus court, notamment pour les petites échelles ( $j$  est grand). Nous pouvons également remarquer que, contrairement à l'OFDM, les performances en PAPR de Dmey dépendent de la constellation utilisée. En effet, pour chaque instant le nombre de porteuses qui s'ajoutent dans le temps est réduit à  $\log_2(M)$  tandis qu'il arrive jusqu'à  $M$  pour l'OFDM. Donc l'influence de la constellation sur la valeur du PAPR n'est pas absorbée par le nombre effectif des porteuses, contrairement à l'OFDM.

## 7.5 Performances en TEB

Les performances en TEB de Dmey Wavelet-OFDM et l'OFDM sont évaluées en utilisant les paramètres exposés dans la Table 7.1. Les constellations 4-QAM et 16-QAM sont choisies pour les simulations dans cette section.

### 7.5.1 Canal AWGN et Flat Fading

Dans cette partie, nous comparons le TEB de Dmey Wavelet-OFDM avec l'OFDM dans un canal AWGN et un canal à brouilleur à bande étroite ou *flat fading*. Puisque les formes d'ondes de ces systèmes sont orthogonales, on ne peut que s'attendre à ce que leurs performances en TEB soient les mêmes. Les simulations de la Figure 7.10 confirment que Dmey offre les mêmes performances que l'OFDM dans les canaux AWGN et les canaux plats.

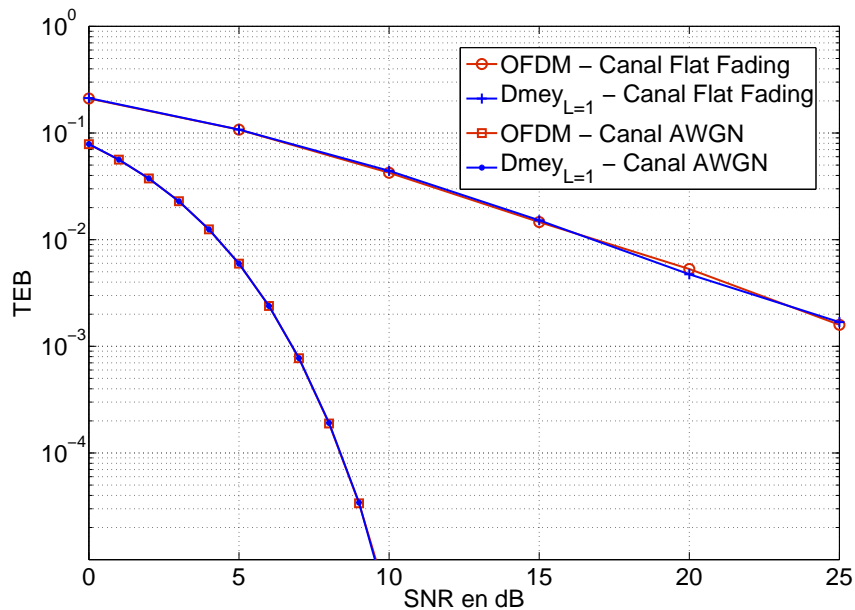


FIGURE 7.10 – Comparaison du TEB dans des canaux AWGN et flat fading.

### 7.5.2 Canal sélectif en fréquence

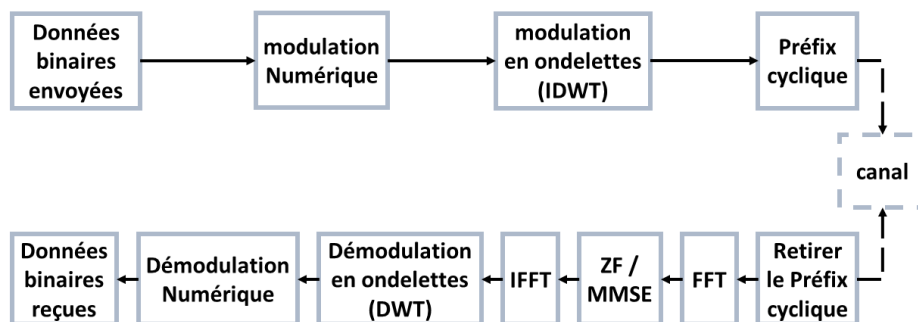


FIGURE 7.11 – Chaîne de transmission de la modulation en ondelettes dans un canal sélectif en fréquence.

Dans un canal sélectif en fréquence, un préfixe cyclique est ajouté en temps au signal Wavelet-OFDM émis, et une égalisation fréquentielle est effectuée à la réception. Une égalisation ZF (*zero forcing*) ou MMSE (*minimum mean-square error*) peut être utilisée comme présenté dans la Figure 7.11. L'égalisation ZF consiste à une simple multiplication par l'inverse du canal :  $\frac{1}{H(f)}$ , tandis que la multiplication en MMSE prend en compte le SNR :  $\frac{H(f)^*}{|H(f)|^2 + \frac{1}{\text{SNR}}}$ .

Le modèle ETU (*extended typical urban*) pour le standard canal LTE multi-trajets [169], défini par les délais et les gains donnés dans la Table 7.2, est utilisé dans cette section. Comme

montré dans la Figure 7.12, l'OFDM réalise plus de gain que Dmey en termes de TEB sous les conditions d'un canal sélectif en fréquence lorsque l'égaliseur ZF est utilisé. Les porteuses de l'OFDM sont plus localisées en fréquence que celles du Wavelet-OFDM, puisque ce dernier utilise des ondelettes de support temporel plus court pour les petites échelles. Cependant, quand l'égaliseur MMSE est utilisé comme présenté dans la Figure 7.13, Dmey réalise un gain de 6.5 dB en termes de SNR pour un TEB de  $10^{-3}$  pour une constellation 4-QAM en comparaison avec l'OFDM. Pour des constellations supérieures à 16-QAM, et pour de larges valeurs de SNR, la performance de l'OFDM est comparable à celle de Dmey. À partir de  $\text{SNR} = 25$  dB, Dmey devient meilleure que l'OFDM. Notons que, contrairement au Wavelet-OFDM, le récepteur MMSE ne change pas le SNR dans le cas de l'OFDM, et donc ne change pas le TEB du système OFDM.

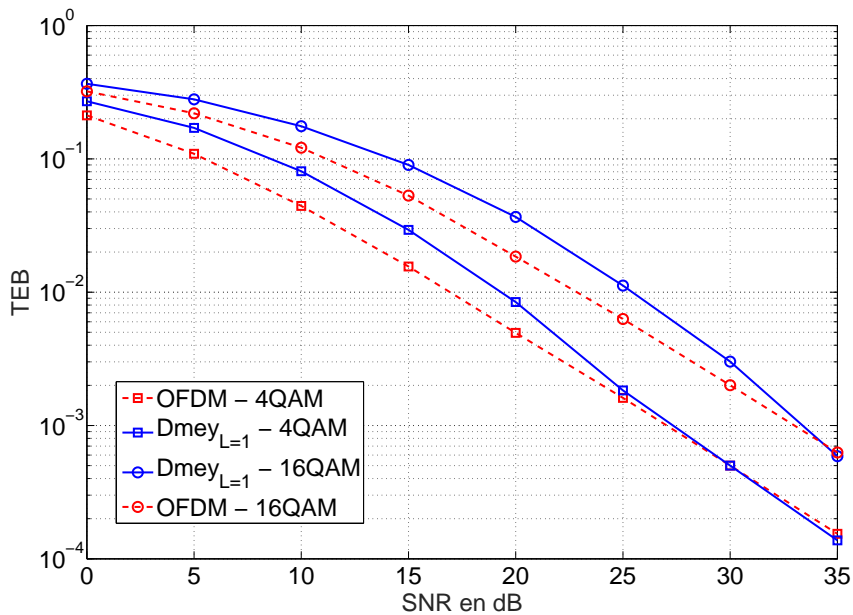


FIGURE 7.12 – Performances en TEB dans un canal sélectif en fréquence pour une égalisation ZF.

**Remarque 7.5.1.** *Nous sommes conscients que lorsque les techniques de codage canal sont utilisées, le gain en termes de SNR sera vraisemblablement moins significatif et pourra aussi dépendre de l'efficacité de la technique de codage utilisée. Similairement, si on utilise une technique a posteriori de réduction de PAPR, les deux systèmes peuvent ne pas réagir de la même façon. Nous avons décidé de ne pas utiliser de codage ni de technique a posteriori de réduction de PAPR pour évaluer uniquement l'effet de la structure de modulation sur les performances en TEB et en PAPR.*

## 7.6 Complexité d'implémentation

**Implémentation de la modulation en ondelettes** Le signal Wavelet-OFDM transmis, dont l'expression est donnée par (2.7), peut être implémenté en appliquant l'algorithme de Mallat comme montré dans le théorème 1.3.2. Soit  $L = J - J_0$  le nombre d'échelles sélectionné correspondant au nombre des niveaux de décomposition. L'implémentation d'un niveau de décomposition  $j$ , suivant l'algorithme de Mallat, s'effectue suivant la boucle (1.21). Nous rappelons qu'une boucle consiste à suréchantillonner par un facteur de deux et filtrer les coefficients d'échelle et les coefficients d'ondelettes par un filtre passe-bas  $f^b$  et un filtre passe-haut

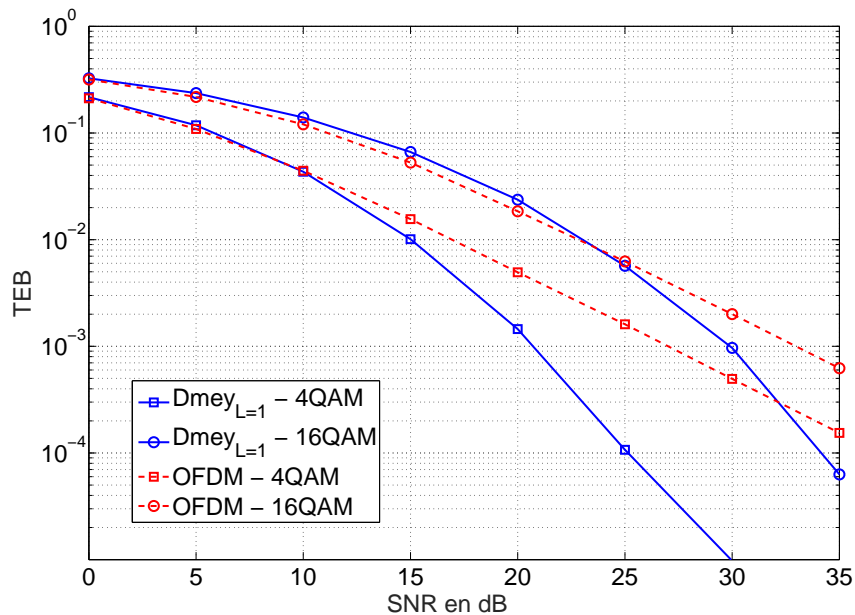


FIGURE 7.13 – Performances en TEB dans un canal sélectif en fréquence pour une égalisation MMSE.

$f^h$ , dont les réponses sont dérivées de l'ondelette considérée. Pour implémenter un signal à  $L$  niveaux de décomposition, la boucle (1.21) doit être répétée  $L$  fois.

Soit  $C_n$  un vecteur de  $M$  symboles complexes d'entrée  $C_{m,n}$ . Les  $2^{J_0}$  premiers symboles  $C_{m,n}$  correspondent aux  $2^{J_0}$  coefficients d'échelle  $(a_{J_0,q})_{q \in \llbracket 0, 2^{J_0}-1 \rrbracket}$ . Les deuxièmes  $2^{J_0}$  symboles correspondent aux coefficients d'ondelettes  $(w_{J_0,k})_{k \in \llbracket 0, 2^{J_0}-1 \rrbracket}$  du niveau  $J_0$ . En premier lieu, une opération (1.21) est effectuée, et retourne  $2^{J_0+1}$  coefficients d'échelle. En deuxième lieu, on extrait les  $2^{J_0+1}$  coefficients suivants du vecteur  $C_n$  et on les considère comme des coefficients d'ondelettes, puis on applique une deuxième opération (1.21). Les symboles suivants sont traités de la même manière jusqu'à ce que le niveau  $j = J - 1$  soit atteint. Ainsi, le vecteur  $C_n$  peut être exprimé par :

$$\begin{aligned}
 C_n &= (a_{J_0,0}, a_{J_0,1}, \dots, a_{J_0,2^{J_0}-1}) \bullet (w_{J_0,0}, w_{J_0,1}, \dots, w_{J_0,2^{J_0}-1}) \\
 &\quad \bullet (w_{J_0+1,0}, w_{J_0+1,1}, \dots, w_{J_0+1,2^{J_0+1}-1}) \bullet \dots \bullet (w_{j,0}, w_{j,1}, \dots, w_{j,2^j-1}) \\
 &\quad \bullet \dots \bullet (w_{J-1,0}, w_{J-1,1}, \dots, w_{J-1,2^{J-1}-1}).
 \end{aligned} \tag{7.16}$$

Le symbole  $\bullet$  dans (7.16) représente l'opérateur de concaténation.

**Exemple** Soit  $C_n$  un vecteur de  $M = 8$  symboles d'entrée de la  $n^{\text{ième}}$  période  $T$ , on considère deux variantes :

- $J_0 = 0$ , le nombre des niveaux de décomposition est égal alors à  $L = 3$ . Le vecteur  $C_n$  est exprimé par

$$\begin{aligned}
 C_n &= \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8\} \\
 &= \{a_{0,0}, w_{0,0}, w_{1,0}, w_{1,1}, w_{2,0}, w_{2,1}, w_{2,2}, w_{2,3}\}.
 \end{aligned}$$

- $J_0 = 1$ , le nombre des niveaux de décomposition est égal alors à  $L = 2$ . Le vecteur  $C_n$  est exprimé par

$$\begin{aligned}
 C_n &= \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8\} \\
 &= \{a_{1,0}, a_{1,1}, w_{1,0}, w_{1,1}, w_{2,0}, w_{2,1}, w_{2,2}, w_{2,3}\}.
 \end{aligned}$$

**Évaluation de la complexité** Dans un environnement caractérisé par la sélectivité en fréquence, la chaîne du Wavelet-OFDM a besoin de deux blocs supplémentaires (IDWT, DWT) en comparaison avec l'OFDM comme illustré dans la Figure 7.11. La complexité d'implémentation correspondante est donc plus importante que celle de l'OFDM. Afin de calculer la complexité de la modulation en ondelettes (IDWT) et la démodulation en ondelettes (DWT), on se réfère au théorème 1.3.2 de Mallat.

Soit  $\mathcal{K}$  la longueur des filtres  $f^b$  et  $f^h$ . Soit  $M = 2^J$  le nombre de porteuses qui est égal au nombre des symboles d'entrée. Les équations (1.18) et (1.19) calculent  $a_j$  et  $w_j$  à partir de  $a_{j+1}$  par  $2^j \mathcal{K}$  additions et multiplications ( $a_j$  et  $w_j$  ont  $2^j$  échantillons). La transformée en ondelettes rapide (démodulation en ondelettes) est calculée avec un nombre d'opérations borné par

$$\begin{aligned} \sum_{j=J_0+1}^J 2^j \mathcal{K} &\leq \sum_{j=1}^J 2^j \mathcal{K} \\ &= 2M\mathcal{K}. \end{aligned}$$

L'ordre de complexité en termes de nombre d'additions et multiplications est estimé alors à  $\mathcal{O}(M\mathcal{K})$ . Sachant que l'ordre de la complexité de la FFT et IFFT est  $\mathcal{O}(M \log_2(M))$ , le surcoût en termes de complexité est estimé à  $\mathcal{O}(\frac{\mathcal{K}}{\log_2(M)})$ , ce qui est abordable puisque  $\mathcal{K}$  est borné, et le nombre de porteuses  $M$  est souvent large.

Notons que Dmey a un long filtre ( $\mathcal{K} = 47$ ) par rapport aux autres ondelettes (par exemple dans le cas de Haar  $\mathcal{K} = 2$ ), en utilisant des ondelettes plus courtes, il est possible de diminuer la complexité. Toutefois, l'ondelette sélectionnée doit maintenir un bon compromis avec les autres performances.

## Conclusion

Nous avons étudié la modulation en ondelettes pour ses performances en PAPR, c'est une modulation qui génère un signal à PAPR réduit par construction. L'ondelette de Dmey est proposée pour le Wavelet-OFDM pour ses caractéristiques spectrales comparables à l'OFDM contrairement à l'ondelette de Haar. À la sortie de l'amplificateur de puissance, Dmey Wavelet-OFDM souffre moins de la remontée des lobes secondaires que l'OFDM. La variante  $L = 1$  du Dmey Wavelet-OFDM est comparée à l'OFDM en termes de performances en PAPR et en TEB. Aucune technique de codage ni de réduction de PAPR n'est utilisée dans ces comparaisons. Dmey Wavelet-OFDM permet d'atteindre jusqu'à 4.5 dB de gain en PAPR pour une CCDF de  $10^{-3}$  et jusqu'à 6.5 dB de gain en SNR pour un TEB de  $10^{-3}$  dans un canal ETU du standard LTE. Ces performances sont réalisées pour une constellation 4-QAM, et deviennent moins importantes pour les grandes constellations. Pour combattre la sélectivité en fréquence du canal, on ajoute un préfixe cyclique au Wavelet-OFDM et on effectue une égalisation fréquentielle à la réception. Ainsi, la croissance de la complexité du Wavelet-OFDM par rapport à l'OFDM est de l'ordre de  $\mathcal{O}(\frac{\mathcal{K}}{\log_2(M)})$ .

# Chapitre 8

## Étude d'une nouvelle modulation à forme d'onde adaptative

### Sommaire

---

<b>8.1</b>	<b>Motivations . . . . .</b>	<b>120</b>
<b>8.2</b>	<b>Principe de la modulation AWPM . . . . .</b>	<b>120</b>
8.2.1	Définitions et notations . . . . .	121
8.2.2	Vue d'ensemble . . . . .	122
8.2.3	Sélection d'une meilleure base . . . . .	123
<b>8.3</b>	<b>Méthodes d'échanges entre l'émetteur et le récepteur . . . . .</b>	<b>124</b>
<b>8.4</b>	<b>Application dans un canal spécifique . . . . .</b>	<b>125</b>
8.4.1	Exemple d'un canal sélectif en fréquence $h$ . . . . .	125
8.4.2	Modulation AWPM pour le canal $h$ . . . . .	126
8.4.3	Comportement en PAPR et en TEB pour différents seuils sur le canal $h$ . . . . .	126
<b>8.5</b>	<b>Performances de la modulation AWPM dans un canal ETU .</b>	<b>128</b>
8.5.1	Performances en PAPR et en TEB . . . . .	128
8.5.2	Compromis monoporteuse/multiporteuses . . . . .	129

---

L'évanouissement sélectif en fréquence des canaux de transmission sans fils dégrade certaines parties de la bande fréquentielle. La modulation multiporteuses, grâce à ses porteuses à bande étroite, résiste à ces atténuations dans la mesure où la dégradation d'une partie de la bande n'affecte pas tous les symboles transmis sur cette bande. Dans le chapitre précédent, nous avons étudié la modulation en ondelettes basée sur l'ondelette de Meyer et nous avons montré que même si cette modulation ne divise pas toute la bande en des bandes étroites, le taux d'erreur binaire (TEB) moyen calculé dans le cas d'une égalisation MMSE reste inférieure à celui de l'OFDM non codé. Cependant, dans le cas d'une connaissance du canal à l'émission, l'OFDM permet "d'éviter" les porteuses atténuées par les évanouissements profonds du canal, ce qui ne peut pas être effectué efficacement avec le Wavelet-OFDM. Dans ce chapitre, nous nous plaçons dans ce contexte de connaissance du canal à l'émission, et nous proposons une nouvelle structure de modulation adaptative, qui offre un bon compromis PAPR/TEB, en permettant de bien "isoler" les porteuses affectées par les perturbations du canal.

La modulation adaptative en paquets d'ondelettes AWPM<sup>1</sup> (*adaptive wavelet packet modulation*) est proposée et analysée dans ce chapitre. Nous commençons d'abord par décrire le principe de cette nouvelle modulation, ensuite nous détaillons le processus d'adaptation, et finalement nous étudions les performances de la modulation AWPM dans des canaux sélectifs en fréquence et nous la comparons avec l'OFDM. Le choix de l'ondelette qui peut être utilisée dans une modulation AWPM est flexible. Cependant, nous considérons dans les simulations de ce chapitre, l'exemple de l'ondelette de Dmey pour ses bonnes caractéristiques de densité spectrale de puissance comme étudié dans le chapitre 7.

## 8.1 Motivations

Les modulations multiporteuses classiques, et en particulier l'OFDM, divisent la bande allouée en des sous-bandes étroites, permettant ainsi une bonne localisation des porteuses en fréquence. La localisation fréquentielle des porteuses offre une bonne robustesse contre les canaux sélectifs en fréquence. Ainsi, si la réponse du canal est atténuée autour d'une certaine fréquence, seule la porteuse correspondante à cette fréquence sera affectée. Cette propriété n'est pas remplie pour la modulation monoporteuse, puisqu'elle ne divise pas la bande spectrale, mais envoie un seul symbole en même temps, occupant toute la bande.

Cependant, l'OFDM, ainsi que les systèmes multiporteuses en général, souffrent d'un grand PAPR, résultant de la somme de plusieurs porteuses. Comme la monoporteuse n'envoie qu'un seul symbole à chaque instant, elle ne souffre pas d'un large PAPR.

Nous pouvons constater que, d'une part, la division uniforme de la bande favorise la résistance aux dégradations des canaux sélectifs en fréquence mais engendre une mauvaise performance en PAPR. D'autre part, la non décomposition de la bande favorise une bonne performance en PAPR mais ne résiste pas à la sélectivité du canal. D'où l'intérêt d'étudier la possibilité d'une répartition non uniforme de la bande spectrale, qui s'adapte aux évanouissements profonds du canal.

## 8.2 Principe de la modulation AWPM

Nous avons vu dans le chapitre 1 que la transformée de Gabor se caractérise par une division uniforme du plan temps-fréquence, et que la transformée en ondelettes permet une division plus flexible. Pour générer un signal multiporteuses pour lequel les porteuses occupent des sous-bandes de largeurs différentes, nous devons moduler les symboles d'entrée par une transformée qui découpe l'axe fréquentiel (i.e la bande allouée) d'une manière plus flexible. La transformée en paquets d'ondelettes que nous avons décrite dans la section 1.4 peut être particulièrement utilisée dans ce contexte, puisqu'elle permet une décomposition flexible de l'axe fréquentiel.

Il est vrai que la division complète de la bande en des sous-bandes étroites augmente la résistance du signal à la sélectivité du canal, mais est-il vraiment nécessaire de diviser toute la bande ? En effet, les évanouissements du canal affectent seulement quelques fréquences et n'affectent pas toute la bande. Il serait alors plus judicieux de diviser la bande seulement là où les porteuses sont atténuées. Comme les parties de la bande non atténuées par le canal ne seront pas divisées, le nombre de porteuses qui s'ajoutent en temps à chaque instant est réduit, et par conséquent le PAPR sera plus faible.

---

1. La modulation AWPM a fait l'objet d'un brevet qui a été déposé le 15 Juillet 2016, et fait l'objet d'une revue à soumettre dans les prochaines semaines.

Ainsi, afin d'avoir un bon compromis entre la consommation énergétique et l'efficacité spectrale, les systèmes de modulation et démodulation peuvent être adaptés aux caractéristiques de sélectivité du canal, permettant un découpage adaptatif de la bande allouée. En outre, le compromis entre les larges variations du signal (mesurées par le PAPR), et les interférences et les erreurs introduites par la sélectivité du canal (mesurées par le TEB) s'améliorent en adaptant l'occupation spectrale de la forme d'onde aux caractéristiques du canal, en favorisant une bonne localisation fréquentielle pour les porteuses atténuées par les évanouissements du canal, et en favorisant une bonne localisation temporelle pour le reste des porteuses.

### 8.2.1 Définitions et notations

**Fréquence élémentaire  $f_k$**  On suppose que la totalité de la bande spectrale peut être divisée en  $M$  sous-bandes élémentaires  $\{B_0^m\}_{m \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket}$ , associées à  $M$  fréquences élémentaires  $\{f_k\}_{k \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket}$  représentées par les feuilles  $\{P_0^m\}_{m \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket}$  de l'arbre.

**Sous-bande  $B_j^m$**  Chaque nœud  $P_j^m$  d'un arbre en paquets d'ondelettes représente une sous-bande  $B_j^m$ .  $B_j^m$  est un ensemble de fréquences élémentaires.

$$f \in B_j^m \iff f \in \{f_k\}_{k \in \llbracket m2^j, (m+1)2^j - 1 \rrbracket}.$$

**Mesure de l'état du canal** Pour évaluer l'évanouissement d'un canal de transmission, plusieurs paramètres peuvent être envisagés. Par exemple, on considère la réponse fréquentielle  $H(f)$  d'un canal  $h$ . On peut dire que plus l'amplitude  $|H(f)|$  est faible, plus la fréquence associée est atténuée par l'évanouissement du canal. D'autres mesures peuvent être utilisées comme la puissance  $|H(f)|^2$  ou le SNR (*signal-to-noise ratio*).

Afin d'évaluer la sélectivité d'un canal dans une sous-bande spectrale  $B_j^m$ , nous pouvons évaluer la variation du canal dans cette sous-bande. Cette variation du canal peut être mesurée en comparant le rapport ou la différence entre les indicateurs de l'état du canal associés aux fréquences élémentaires  $f_k$  de cette sous-bande  $B_j^m$ .

Dans ce qui suit, nous allons considérer l'amplitude en fréquence du canal  $|H(f)|$  comme indicateur sur l'état du canal. La différence entre les  $|H(f_k)|$  des fréquences élémentaires appartenant à une sous-bande  $B_j^m$  sera considérée comme un indicateur de la sélectivité du canal dans cette sous-bande.

**Seuil d'atténuations  $\alpha$**  Soit  $\alpha$  un nombre réel appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$ . Pour chaque fréquence élémentaire  $f_k$ , on associe un paramètre  $\theta^\alpha(f_k) \in \{0, 1\}$  défini comme suit

$$\theta^\alpha(f_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } |H(f_k)| \geq \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \quad (8.1)$$

Lorsque  $\theta^\alpha(f_k) = 1$ , on dit que la fréquence  $f_k$  est non atténuée par l'évanouissement du canal. Sinon elle est dite atténuée. Rappelons qu'on peut remplacer  $|H(f_k)|$  dans (8.1) par une autre mesure du canal telle que  $\log(|H(f_k)|)$  ou  $|H(f_k)|^2$  ou  $\text{SNR}(f_k)$  entre autres.

On définit  $\Theta^{\alpha,1}$  l'ensemble des sous-bandes  $B_j^m$  ne contenant que des fréquences non atténuées, et similairement on définit  $\Theta^{\alpha,0}$  l'ensemble des sous-bandes  $B_j^m$  ne contenant que des fréquences atténuées, i.e

$$B_j^m \in \Theta^{\alpha,1} \iff \forall f_k \in B_j^m \quad \theta^\alpha(f_k) = 1, \quad (8.2)$$

$$B_j^m \in \Theta^{\alpha,0} \iff \forall f_k \in B_j^m \quad \theta^\alpha(f_k) = 0. \quad (8.3)$$

**Seuil de variations  $\beta_0$**  Soit  $\beta_0$  un nombre réel appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$ . Pour chaque sous-bande "atténuée"  $B_j^m \in \Theta^{\alpha,0}$ , on associe un paramètre  $\delta^{\beta_0}(B_j^m) \in \{0, 1\}$  défini comme suit :

$$\delta^{\beta_0}(B_j^m) = \begin{cases} 1 & \text{si } \max_{f_k \in B_j^m} |H(f_k)| - \min_{f_k \in B_j^m} |H(f_k)| \leq \beta_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Lorsque  $\delta^{\beta_0}(B_j^m) = 1$ , la différence des réponses fréquentielles du canal ne dépasse par le seuil  $\beta_0$  pour chaque paire de fréquences élémentaires  $f_k$  appartenant à la sous-bande  $B_j^m$ . En d'autres termes, le canal  $h$  ne varie pas beaucoup par rapport au seuil  $\beta_0$  pour cette sous-bande.

**Seuil de variations  $\beta_1$**  Soit  $\beta_1$  un nombre réel appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$ . Pour chaque sous-bande "non-atténuée"  $B_j^m \in \Theta^{\alpha,1}$ , on associe un paramètre  $\delta^{\beta_1}(B_j^m) \in \{0, 1\}$  défini comme suit

$$\delta^{\beta_1}(B_j^m) = \begin{cases} 1 & \text{si } \max_{f_k \in B_j^m} |H(f_k)| - \min_{f_k \in B_j^m} |H(f_k)| \leq \beta_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Similairement au seuil  $\beta_0$ , lorsque  $\delta^{\beta_1}(B_j^m) = 1$ , on peut dire que le canal  $h$  ne varie pas beaucoup par rapport au seuil  $\beta_1$  pour cette sous-bande.

Il est utile d'évoquer que les seuils  $\beta_0$  et  $\beta_1$  peuvent être comparés au rapport  $\frac{\min_{f_k \in B_j^m} |H(f_k)|}{\max_{f_k \in B_j^m} |H(f_k)|}$  au

lieu de la différence, ou bien le rapport  $\frac{\min_{f_k \in B_j^m} \text{SNR}(f_k)}{\max_{f_k \in B_j^m} \text{SNR}(f_k)}$  ou tout autre mesure reflétant la sélectivité du canal.

## 8.2.2 Vue d'ensemble

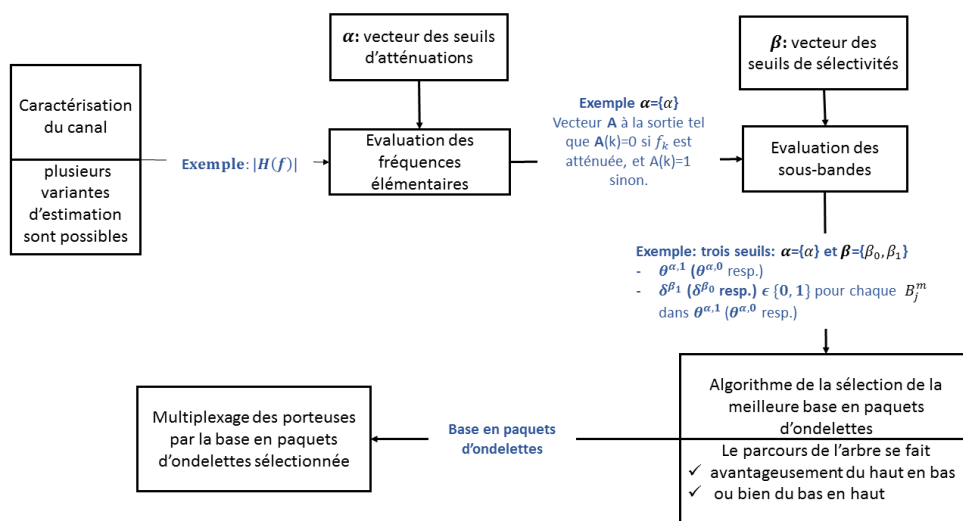


FIGURE 8.1 – Schéma d'une modulation AWPM.

Supposons que l'émetteur dispose d'une connaissance parfaite de l'état du canal et que les hypothèses générales d'un système adaptatif traitées dans la section 4.2 sont satisfaites.

Notre objectif est de sélectionner la forme d'onde qui donne le meilleur compromis PAPR/TEB correspondant à cet état du canal.

Afin de sélectionner une forme d'onde adéquate, nous nous basons sur la transformée en paquets d'ondelettes. Ce choix est justifié par la flexibilité de la transformée en paquets d'ondelettes dans la représentation du plan temps-fréquence que nous avons décrite dans la section 1.4.1. Notre objectif se traduit alors par la recherche d'une "meilleure" base en paquets d'ondelettes suivant le critère du compromis PAPR/TEB.

Nous avons vu dans la section 1.4 que les bases possibles en paquets d'ondelettes peuvent être représentées par un ensemble de nœuds formant un arbre binaire (voir Figure 1.12). Chaque arbre admissible est associé à une base en paquets d'ondelettes.

En d'autres termes, la transformée en ondelettes permet de diviser la bande d'une manière flexible. L'ensemble des possibilités de découpage de la bande représente l'ensemble des arbres admissibles et donc l'ensemble des bases possibles en paquets d'ondelettes. Par exemple, un découpage complet de la bande (le cas de l'OFDM par exemple) correspond à sélectionner les nœuds profonds (les feuilles) de l'arbre. Ne pas diviser la bande revient à sélectionner seulement la racine de l'arbre (le cas de la monoporteuse par exemple). Ainsi, sélectionner la meilleure division de la bande passante suivant un critère défini, revient à choisir le meilleur arbre parmi tous les arbres admissibles possibles.

Le schéma donné par la Figure 8.1 représente une vue d'ensemble de la technique de modulation adaptative qu'on propose. Lorsqu'une caractérisation du canal est disponible, nous évaluons les fréquences élémentaires par rapport à un certain seuil  $\alpha$ , si  $|H(f_k)| < \alpha$  alors  $f_k$  est dite atténuée, sinon, elle est dite non-atténuée. ces informations sur les atténuations des  $f_k$  seront nécessaires pour évaluer les variations des sous-bandes. Les sous-bandes "atténuées" sont évaluées par rapport au seuil  $\beta_0$ , et les sous-bandes "non-atténuées" sont évaluées par rapport au seuil  $\beta_1$ . Ensuite, l'arbre binaire correspondant aux bases de paquets d'ondelettes est parcouru afin de sélectionner le meilleur arbre correspondant à nos critères. La sélection de cet arbre sera expliquée dans la section 8.2.3. L'arbre sélectionné correspond à une base en paquets d'ondelettes avec laquelle les données seront modulées et multiplexées.

### 8.2.3 Sélection d'une meilleure base

Afin de sélectionner la meilleure division de la bande suivant nos critères et donc sélectionner le meilleur arbre admissible en paquets d'ondelettes nous suivons les étapes suivantes :

1. On suppose qu'on connaît la réponse du canal  $h$ . On sélectionne un nombre  $M$  de fréquences élémentaires ainsi que les seuils  $\alpha$ ,  $\beta_0$  et  $\beta_1$ .
2. On analyse toutes les fréquences élémentaires de l'ensemble  $\{f_k\}_{k \in [0, M-1]}$  pour décider si elles sont atténuées par les évanouissements du canal  $h$  par rapport à un seuil  $\alpha$ . Ainsi l'ensemble des paramètres  $\theta^\alpha(f_k) \in \{0, 1\}$  pour chaque fréquence  $f_k$  est mis à jour.
3. Par la suite, nous parcourons l'ensemble des nœuds de l'arbre du haut vers le bas (de la racine de l'arbre vers les feuilles de l'arbre) pour décider si on garde le nœud  $B_j^m$  ou bien on le divise. Pour prendre cette décision, nous évaluons la sous-bande  $B_j^m$ 
  - Si  $B_j^m \in \Theta^{\alpha, 1}$  ( $B_j^m$  est non atténuée par rapport à  $\alpha$ ), alors
    - Si  $\delta^{\beta_1}(B_j^m) = 1$  (le canal est très variant dans  $B_j^m$  par rapport à  $\beta_1$ ) alors on divise la sous-bande  $B_j^m$ .
    - Sinon, on ne divise pas la sous-bande  $B_j^m$ .

- Si  $B_j^m \in \Theta^{\alpha,0}$  ( $B_j^m$  est atténuée par rapport à  $\alpha$ ), alors
  - Si  $\delta^{\beta_0}(B_j^m) = 1$  (le canal est très variant dans  $B_j^m$  par rapport à  $\beta_0$ ) alors on divise la sous-bande  $B_j^m$ .
  - Sinon, on ne divise pas la sous-bande  $B_j^m$ .
- Si  $B_j^m \notin \Theta^{\alpha,1} \cup \Theta^{\alpha,0}$  ( $B_j^m$  contient un mélange de fréquences atténuées et non-atténuées) alors on divise la sous-bande  $B_j^m$ .

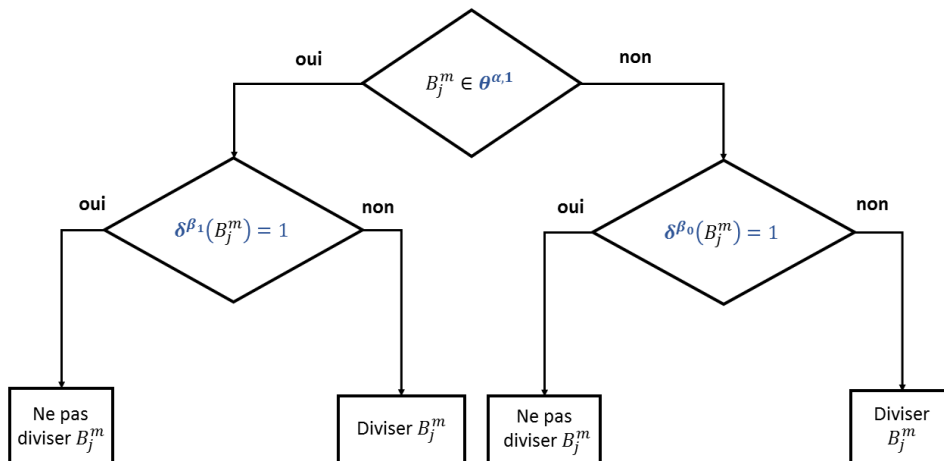


FIGURE 8.2 – Organigramme représentant la sélection d'une meilleure base en paquets d'ondelettes.

Ces étapes sont décrites brièvement dans l'organigramme 8.2. En parcourant l'arbre en paquets d'ondelettes, on récupère un arbre admissible correspondant à un découpage de la bande. La base en paquets d'ondelettes correspondante est immédiatement déterminée.

### 8.3 Méthodes d'échanges entre l'émetteur et le récepteur

L'estimation du canal est importante dans le contexte des systèmes AWPM, puisqu'on a besoin de connaître les caractéristiques du canal pour pouvoir sélectionner les fréquences atténuées, et définir par la suite une base de modulation adaptée à ce canal. Généralement, le récepteur estime le canal et une communication est établie entre l'émetteur et le récepteur pour échanger les informations sur l'état du canal CSI (*channel state information*). Plusieurs modes d'échanges entre l'émetteur et le récepteur sont possibles. Le choix de la méthode d'échange doit tenir compte, selon l'application, des contraintes de débit, de complexité et de fiabilité. Nous présentons quelques exemples des modes d'échanges :

- Le récepteur réalise l'estimation du canal, calcule une caractéristique du canal et envoie cette information à l'émetteur.
  - Si la caractéristique du canal calculée par le récepteur représente la base de modulation AWPM, l'émetteur se base sur cette nouvelle base de modulation lors de sa prochaine transmission. À la réception, la démodulation s'effectue proprement puisque le récepteur connaît déjà la base utilisée.

TABLE 8.1 – Coefficients d'un exemple de canal à évanouissement sélectif en fréquence.

$h_0$	$h_1$	$h_2$	$h_3$
$-0.3699 - i0.5782$	$-0.4053 - i0.5750$	$-0.0834 - i0.0406$	$0.1587 - i0.0156$

- Si la caractéristique du canal n'est pas la base de modulation AWPM, on a deux cas : soit l'émetteur va calculer la base de modulation et envoyer l'information au récepteur, soit le récepteur va aussi calculer la base de modulation et donc l'émetteur n'a pas besoin de transmettre cette information au récepteur.

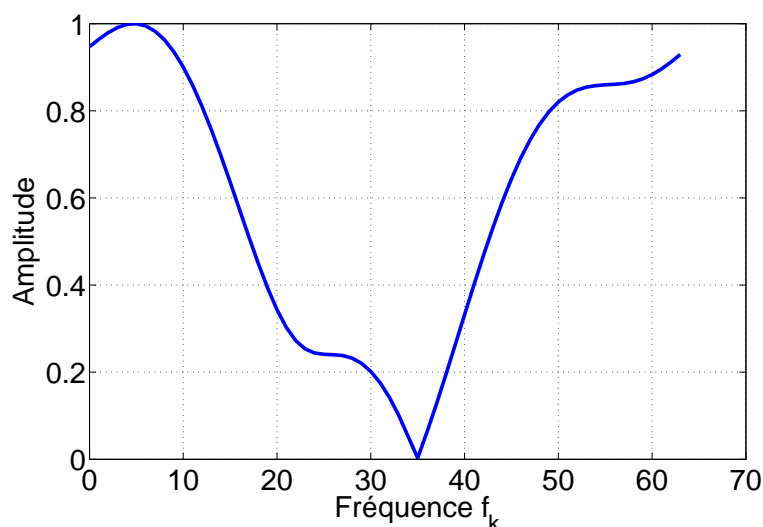
Le calcul de la base de modulation est effectué en temps réel. Il est aussi possible de calculer préalablement la base de modulation pour tous les cas possibles, et stocker les résultats dans une base de données. La correspondance se fera alors sur cette base de données pré-calculée.

## 8.4 Application dans un canal spécifique

Dans cette partie, nous appliquons la modulation AWPM à un canal déterministe. L'objectif est de mettre en évidence la répartition de la bande spectrale pour différentes valeurs de seuils, et évaluer les performances en TEB et en PAPR correspondant à ces modulations AWPM.

### 8.4.1 Exemple d'un canal sélectif en fréquence $h$

Soit  $M = 64$  le nombre de fréquences élémentaires et considérons un canal de réponse impulsionnelle  $h$  donnée par la Table 8.1, les retards associés sont  $[0, 1, 2, 3]$ . La Figure 8.3 décrit la réponse fréquentielle  $|H(f_k)|$  correspondante, avec  $\{f_k\}_{k \in [0, M-1]}$  l'ensemble des fréquences élémentaires. Nous pouvons observer que ce canal est à évanouissements sélectifs en fréquence. Un évanouissement spectral profond est présent autour de la fréquence  $f_{35}$ , les coefficients du canal autour d'elle ont une très petite valeur, et le bruit sera donc très élevé lors de l'inversion du canal pour égalisation à la réception.

FIGURE 8.3 – Réponse fréquentielle  $|H(f)|$  du canal  $h$ .

### 8.4.2 Modulation AWPМ pour le canal $h$

Soit  $BW_{\text{totale}} = M\Delta F = 64\Delta F$  la bande totale allouée, telle que  $\Delta F$  est la largeur de chaque sous-bande élémentaire  $f_k$ . On considère l'ensemble des seuils suivants ( $\alpha = 0.3$ ,  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_0 = 1$ ). Les seuils  $\beta_1$  et  $\beta_0$  sont remis à 1 pour favoriser le PAPR. On remarque que les fréquences  $f_k$  à indices  $k \in \llbracket 23, 40 \rrbracket$  sont affectées par un grand évanouissement par rapport au seuil  $\alpha$  ( $|H(f_k)| < \alpha$ ). En appliquant la modulation AWPМ, la bande spectrale  $BW_m$  occupée par chaque fonction  $g_m$  de la base de modulation  $\{g_m\}_{m \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket}$  est exprimée par

$$BW_m = \begin{cases} 4\Delta F & \text{si } m \in \llbracket 17, 20 \rrbracket \\ 2\Delta F & \text{si } m \in \llbracket 21, 24 \rrbracket \\ 8\Delta F & \text{si } m \in \llbracket 25, 48 \rrbracket \\ 16\Delta F & \text{sinon} \end{cases}. \quad (8.4)$$

En considérant deux autres exemples de seuils, on donne le découpage de la bande spectrale associé :

- ( $\alpha = 0.3, \beta_1 = 1, \beta_0 = 0.06$ ) :

$$BW_m = \begin{cases} 4\Delta F & \text{si } m \in \llbracket 17, 20 \rrbracket \\ 2\Delta F & \text{si } m \in \llbracket 21, 24 \rrbracket \\ 4\Delta F & \text{si } m \in \llbracket 25, 32 \rrbracket \\ 2\Delta F & \text{si } m \in \llbracket 33, 36 \rrbracket \\ \Delta F & \text{si } m \in \llbracket 37, 40 \rrbracket \\ 8\Delta F & \text{si } m \in \llbracket 41, 48 \rrbracket \\ 16\Delta F & \text{sinon} \end{cases}. \quad (8.5)$$

- ( $\alpha = 0.3, \beta_1 = 1, \beta_0 = 0$ ) :

$$BW_m = \begin{cases} 4\Delta F & \text{si } m \in \llbracket 17, 20 \rrbracket \\ 2\Delta F & \text{si } m \in \llbracket 21, 22 \rrbracket \\ \Delta F & \text{si } m \in \llbracket 23, 40 \rrbracket \\ 8\Delta F & \text{si } m \in \llbracket 41, 48 \rrbracket \\ 16\Delta F & \text{sinon} \end{cases}. \quad (8.6)$$

Les répartitions de la bande correspondantes aux seuils ( $\alpha = 0.3, \beta_1 = 1, \beta_0 = 1$ ), ( $\alpha = 0.3, \beta_1 = 1, \beta_0 = 0.06$ ) et ( $\alpha = 0.3, \beta_1 = 1, \beta_0 = 0$ ) peuvent être illustrées dans la Figure 8.4.

### 8.4.3 Comportement en PAPR et en TEB pour différents seuils sur le canal $h$

Nous comparons dans cette section les performances en PAPR et en TEB pour différents seuils, ( $\alpha = 0.3, \beta_1 = 1, \beta_0 = 1$ ), ( $\alpha = 0.3, \beta_1 = 1, \beta_0 = 0.06$ ) et ( $\alpha = 0.3, \beta_1 = 1, \beta_0 = 0$ ), dont la répartition de la bande spectrale est illustrée dans la Figure 8.4. Les simulations, pour tous les schémas de modulation, ont été effectuées en considérant le canal déterministe décrit dans la Table 8.1, un nombre de porteuses égal à  $M = 64$ , une constellation 4-QAM et une égalisation ZF (*Zero Forcing*). Un filtrage en racine de cosinus surélevé (SRRC) d'un facteur de retombée de 0.2 (*roll-off*) est considéré pour la modulation SC-FDE [170, 171] (*single carrier-frequency division equalization*).

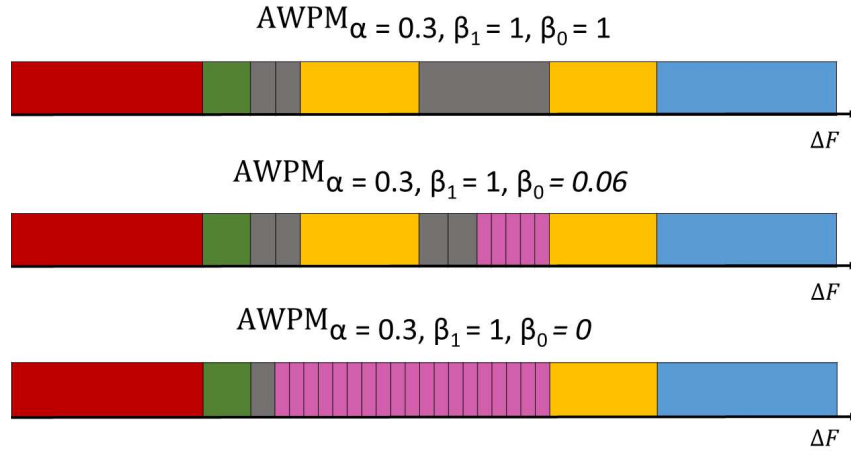


FIGURE 8.4 – Répartition de la bande spectrale associée à un canal  $h$  dans une modulation AWPM pour différents seuils  $(\alpha, \beta_1, \beta_0)$ .

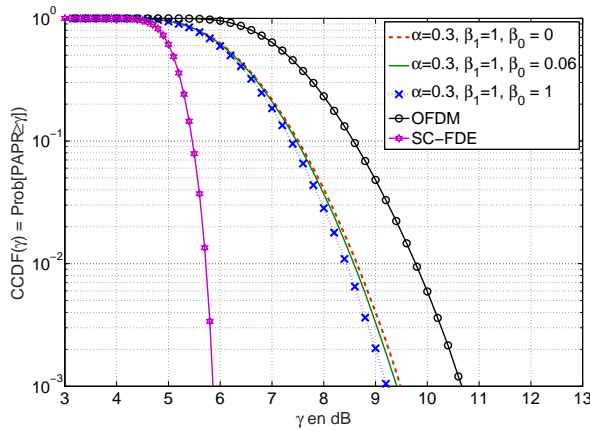


FIGURE 8.5 – Comparaison des performances en PAPR pour différents seuils  $(\alpha, \beta_1, \beta_0)$ .

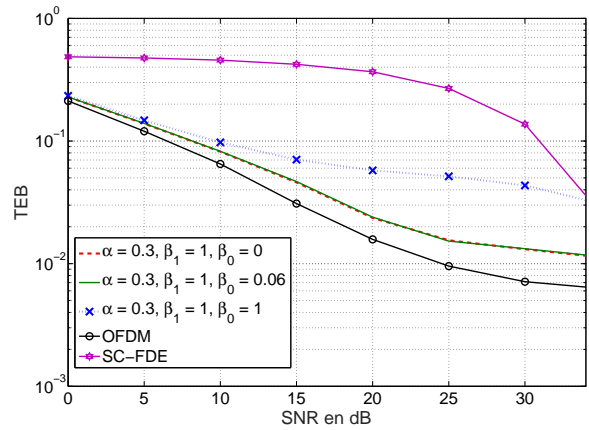


FIGURE 8.6 – Comparaison des performances en PAPR pour différents seuils  $(\alpha, \beta_1, \beta_0)$ .

La Figure 8.5 et la Figure 8.6 montrent que la modulation AWPM  $\alpha=0.3, \beta_1=1, \beta_0=1$  atteint les meilleures performances en PAPR et les plus faibles performances en TEB. En comparaison avec AWPM  $\alpha=0.3, \beta_1=1, \beta_0=0.06$  et AWPM  $\alpha=0.3, \beta_1=1, \beta_0=0$ , cette modulation est celle qui divise le moins la bande spectrale, favorisant ainsi le non-chevauchement des porteuses (et donc un meilleur PAPR), mais ne permettant pas de suffisamment isoler en des sous-bandes étroites les porteuses atténuées par un évanouissement profond du canal (et donc un mauvais TEB). Les modulations AWPM  $\alpha=0.3, \beta_1=1, \beta_0=0.06$  et AWPM  $\alpha=0.3, \beta_1=1, \beta_0=0$  présentent les mêmes performances en TEB, avec un léger gain en PAPR pour la première. Nous pouvons ainsi réaliser un gain en PAPR (quoique léger dans cet exemple) tout en gardant les mêmes performances en TEB. Les modulations SC-FDE et OFDM représentent les cas “extrêmes” d’une répartition de la bande spectrale. Le SC-FDE est une modulation monoporteuse qui ne divise pas la bande, tandis que l’OFDM la divise entièrement. Le SC-FDE, dont la répartition de la bande peut être comparée à une modulation AWPM  $\alpha=0, \beta_1=1, \beta_0=1$ , ne souffre pas d’un large PAPR (pour une constellation 4-QAM) mais a un très mauvais TEB. L’OFDM, dont la répartition de la bande peut être comparée à une modulation AWPM  $\alpha=1, \beta_1=0, \beta_0=0$ , a le plus mauvais PAPR, mais offre les meilleures performances en TEB.

TABLE 8.2 – Paramètres de simulation

Paramètres	Définition	Valeurs
$M$	Nombre des porteuses	128
$S$	Nombre de symboles	100
SNR	Rapport signal sur bruit	0 : 5 : 35
$n_{\text{iter}}$	Nombre d'itérations	$10^6$
$\Delta F$	Espacement entre porteuses	15 kHz
$N$	Constellation N-QAM	4 ou 16
$\beta_1$	Seuil sur les fréquences non atténuées	1
$\beta_0$	Seuil sur les fréquences atténuées	1
$roll-off$	Facteur de retombée du filtre SRRC	0.2

Le système AWPM permet une modulation reconfigurable s'adaptant à l'application et à ses contraintes de performances souhaitées. Les seuils  $(\alpha, \beta_1, \beta_0)$  peuvent ainsi être fixés selon l'application envisagée ou définis adaptativement comme proposé dans les perspectives de ce travail au dernier chapitre.

## 8.5 Performances de la modulation AWPM dans un canal ETU

Dans cette section, on utilise le canal ETU du standard LTE, dont les délais et les gains sont définis dans la Table 7.2.

Les performances du TEB et du PAPR sont évaluées en utilisant les paramètres définies dans la Table 8.2. L'objectif étant d'évaluer l'impact de la forme d'onde multiporteuses sur les performances en PAPR et en TEB, les techniques de codages et les techniques de réduction du PAPR ne sont pas considérées dans ces simulations. Nous supposons que le récepteur estime parfaitement le canal et envoie la CSI à l'émetteur. Le canal est supposé stationnaire durant cette période. Un préfixe cyclique de 25% est ajouté aux symboles OFDM, AWPM et SC-FDE. Une égalisation ZF dans le domaine fréquentiel est réalisée au niveau du récepteur AWPM et SC-FDE. Les trois modulations sont comparées pour le même nombre de porteuses et la même efficacité spectrale.

### 8.5.1 Performances en PAPR et en TEB

La Figure 8.8 présente les performances en TEB du système AWPM pour  $\alpha = 0.2$ . La Figure 8.7 donne les performances en PAPR associées. Les deux seuils  $\beta_0$  et  $\beta_1$  sont fixés à 1 afin de favoriser le PAPR. Les paramètres de simulations sont résumés dans la Table 8.2.

La modulation AWPM $_{\alpha=0.2}$  atteint jusqu'à 1 dB (pour 16-QAM) et 1.2 dB (pour 4-QAM) de gain en termes de PAPR pour une CCDF =  $10^{-3}$  par rapport à l'OFDM, avec une perte de 2 dB et (pour 16-QAM) et 1.5 dB (pour 4-QAM) en termes de SNR pour un TEB =  $10^{-2}$ . Remarquons que la CCDF de l'OFDM ne change pas avec la constellation, l'influence du nombre des porteuses "effectif" sur la CCDF "cache" l'effet de la constellation. Par contre, la CCDF du SC-FDE varie considérablement avec la constellation utilisée. Ces variations sont moins intéressantes pour l'AWPM. Rappelons que, d'une part, les performances en PAPR vont s'améliorer si on

utilise une des techniques classiques de réduction du PAPR (section 3.4). D'autre part, les performances en TEB vont également changer en utilisant un codage canal, et vont dépendre du type du codage utilisé. Ces performances dépendront aussi des méthodes d'estimations considérées. L'introduction des méthodes de réduction du PAPR, de codage et d'estimations dans les systèmes AWPM fait partie de notre futur travail.

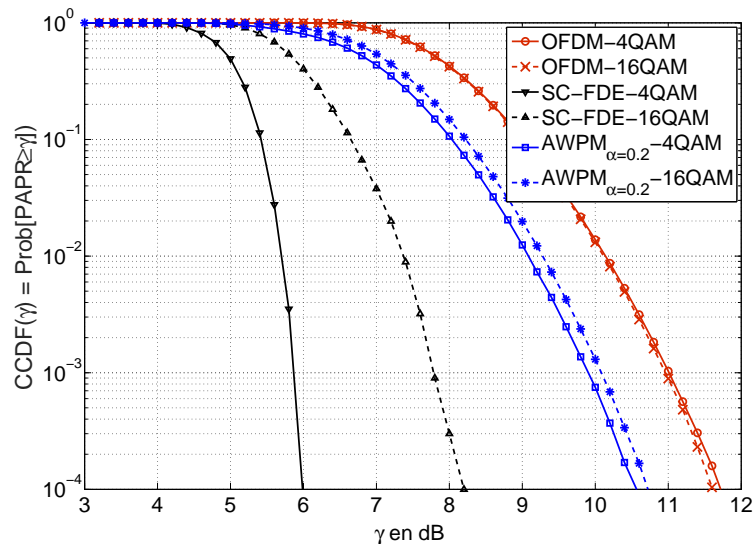


FIGURE 8.7 – Comparaison du PAPR de l'AWPM $_{\alpha=0.2}$ , l'OFDM et le SC-FDE dans un canal ETU.

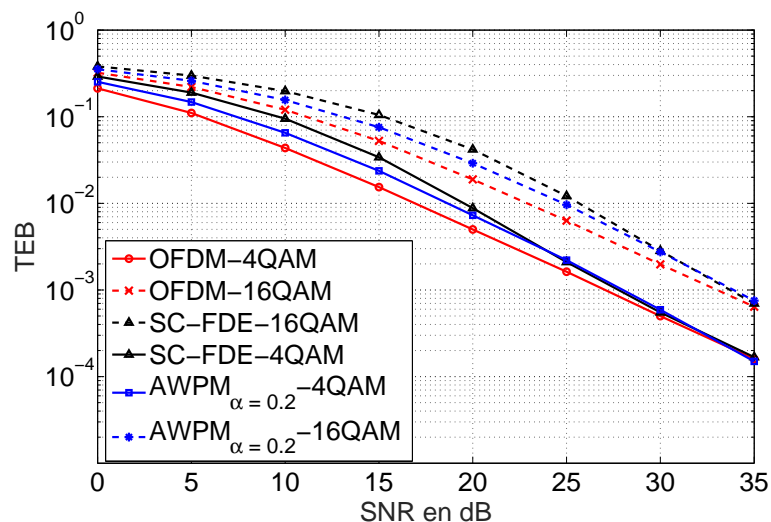


FIGURE 8.8 – Comparaison du TEB de l'AWPM $_{\alpha=0.2}$ , l'OFDM et le SC-FDE dans un canal ETU pour une égalisation ZF.

### 8.5.2 Compromis monoporteuse/multiporteuses

Dans cette section, nous souhaitons mettre en évidence le compromis TEB/PAPR qu'offre la modulation AWPM, représenté aussi par un compromis entre la modulation monoporteuse

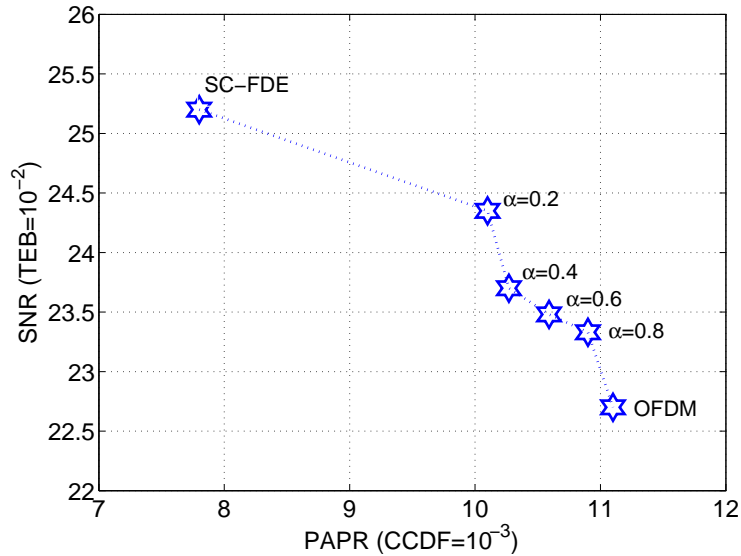


FIGURE 8.9 – Compromis PAPR/TEB dans un canal ETU.

(SC-FDE) et la modulation multiporteuses (OFDM). Dans cette partie, le canal ETU est considéré, le seuil  $\beta_0$  est fixé à 0 i.e on isole chaque fréquence atténuée par le canal et le seuil  $\beta_1$  est fixé à 1 i.e on regroupe les fréquences contiguës non atténuées dans la même sous-bande.

La Figure 8.9 représente les valeurs de PAPR et de SNR pour une CCDF de  $10^{-3}$  et un TEB de  $10^{-2}$  pour la modulation SC-FDE, l'OFDM et la modulation AWPM, pour différents seuils  $\alpha \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$ . La constellation 16-QAM est utilisée pour cette comparaison. Nous observons que les points (PAPR,SNR) des différentes modulations AWPM se situent entre le SC-FDE et l'OFDM et représentent ainsi un compromis entre les bonnes performances en PAPR du SC-FDE et les bonnes performances en SNR de l'OFDM. Nous pouvons affirmer, encore une fois, que la modulation AWPM est une modulation intermédiaire entre la monoporteuse (SC-FDE) et la multiporteuses (OFDM).

Rappelons que le choix des seuils  $(\alpha, \beta_1, \beta_0)$  est très flexible, et dépendra des contraintes de l'application pour laquelle la modulation AMPM est envisagée.

**Avantages de l'AWPM par rapport à la monoporteuse** La modulation SC-FDE, quoiqu'elle atteint de meilleures performances en PAPR, ne permet pas d'appliquer plusieurs techniques d'adaptations comme l'allocation de puissance par porteuse. En plus, si on connaît les caractéristiques du canal à l'émission, on peut éviter de transmettre des données utiles sur certaines fréquences atténuées, et utiliser ces porteuses pour la réduction du PAPR par exemple (voir Annexe B). La réalisation de ces techniques n'est pas possible pour la modulation SC-FDE.

**Avantages de l'AWPM par rapport à la multiporteuses** En comparaison avec l'OFDM, la modulation AWPM permet d'avoir un meilleur PAPR en choisissant une répartition adéquate de la bande spectrale. La flexibilité du découpage de la bande offre à la modulation AWPM la possibilité d'utiliser d'une manière plus flexible certaines techniques d'adaptation. En particulier, une adaptation par sous-bandes de largeurs variables, peut être appliquée aux techniques AMC (section 4.4). Par ailleurs, la modulation AWPM permet un large choix de familles d'ondelettes.

Finalement, nous pouvons conclure que la modulation AWPM permet de dépasser certaines limitations de la modulation monoporteuse, en remplissant plusieurs avantages des modulations multiporteuses classiques, et en permettant d'autres possibilités d'adaptation qui n'étaient pas compatibles avec les schémas de modulation actuels.

## Conclusion

La modulation AWPM proposée dans ce chapitre est une modulation qui adapte la forme d'onde en paquets d'ondelettes en fonction de l'état du canal. La flexibilité et les caractéristiques temps-fréquence de la transformée en paquets d'ondelettes permettent à la modulation AWPM de répartir non uniformément la bande spectrale l'adaptant ainsi aux évanouissements sélectifs du canal de transmission. Nous avons proposé une méthode d'adaptation pour la modulation AWPM, basée sur un ensemble de seuils  $(\alpha, \beta_1, \beta_0)$ . Le seuil  $\alpha$  permet de sélectionner les fréquences atténuées par un évanouissement du canal, le seuil  $\beta_1$  permet de rassembler en une seule sous-bande les fréquences non atténuées et non affectées par la sélectivité du canal et enfin le seuil  $\beta_0$  qui permet de rassembler en une seule sous-bande les fréquences atténuées et non affectées par la sélectivité du canal. Pour procéder à cette répartition, et trouver la base de modulation associée à ce découpage de bande spectrale, nous avons proposé une méthode d'adaptation, qui permet de choisir la meilleure base en paquets d'ondelettes satisfaisant nos contraintes de seuils. Nous avons appliqué d'abord l'algorithme d'adaptation de la modulation AWPM à un canal spécifique pour mieux comprendre l'effet des seuils, et ensuite nous avons évalué les performances de la modulation AWPM dans un canal du standard LTE. La modulation AWPM permet d'atteindre un bon compromis entre les performances en PAPR et les performances en TEB.



# Conclusion Générale et Perspectives

## Conclusion Générale

L'objectif de cette thèse était de proposer une nouvelle forme d'onde multiporteuses à PAPR réduit par construction. Notre première contrainte était d'abord d'atteindre de meilleures performances en PAPR que le schéma classique de l'OFDM. La condition "multiporteuses" suggère une bonne résistance envers les canaux sélectifs en fréquence. L'objectif se traduit alors par la proposition d'une nouvelle structure de modulation satisfaisant de bonnes performances en PAPR sans dégrader les performances en taux d'erreur binaire (TEB).

**Problématique** Les modulation multiporteuses, en particulier l'OFDM, sont largement utilisées dans différents standards de communications. Les caractéristiques de l'OFDM en termes de résistance aux canaux sélectifs en fréquence en font une technique de modulation très privilégiée. Cependant, les variations de son enveloppe, mesurées par le PAPR, causent des distorsions non-linéaires au niveau de l'amplificateur de puissance. Ce phénomène engendre une grande consommation énergétique. L'objectif alors était de proposer une nouvelle modulation à faible PAPR, sans perdre les avantages de la modulation multiporteuses, à savoir la robustesse aux canaux sélectifs en fréquence.

**Résumé des contributions** Pour répondre à cette problématique, nous nous sommes penchés en premier lieu à décrire le comportement du PAPR en fonction de la forme d'onde multiporteuses. En d'autres termes, nous avons cherché à trouver une formule reliant le PAPR et la forme d'onde de modulation. C'est ainsi que nous avons défini un modèle théorique appelé modulation multiporteuses à forme d'onde généralisée (GWMC) qui modélise tout système multiporteuses. Afin de dériver une expression de la fonction de répartition (CDF) du PAPR pour un signal GWMC, nous avons besoin de considérer une hypothèse de départ sur les formes d'ondes : les fonctions de la base de modulation ne s'annulent pas durant la période symbole GWMC. Nous avons ainsi caractérisé le comportement du PAPR de tout signal GWMC dont la base de modulation satisfait notre hypothèse. L'approximation dérivée prouve que le PAPR dépend de la base de modulation, ce qui n'était pas explicitement prévisible par les approximations des fonctions de répartition du PAPR dérivées dans la littérature. Il s'est avéré alors qu'en agissant sur la forme d'onde, nous pouvons effectivement changer le comportement du PAPR. L'approximation de la CDF du PAPR ne permet pas seulement de faire ce constat, mais elle permet également de retrouver des approximations de la CDF du PAPR déjà présentes dans la littérature (OFDM, FBMC) et permet aussi d'obtenir des approximations de la CCDF du PAPR pour de nouveaux systèmes GWMC satisfaisant notre hypothèse de départ, comme les schémas de modulation NOFDM, UPMC et GFDM.

Suite à la caractérisation de la distribution du PAPR pour un signal GWMC satisfaisant l'hypothèse de départ, nous avons formulé le problème de réduction du PAPR en un problème d'optimisation. La réduction du PAPR d'un signal GWMC revient à maximiser sur la base de modulation, la CDF du PAPR dérivée, sous notre hypothèse de départ sur les formes

d'ondes. La résolution de ce problème d'optimisation nous a permis de définir une grande famille de formes d'ondes optimales, dont l'OFDM fait partie. Nous avons ainsi classifié les formes d'ondes par rapport à leurs performances en PAPR. D'abord on trouve les formes d'ondes qui entrent dans notre cadre d'analyse (satisfont notre hypothèse sur les formes d'ondes) et qui ne satisfont pas la condition nécessaire et suffisante d'optimalité, ces signaux GWMC ont nécessairement un PAPR plus mauvais que l'OFDM. Toute base de modulation, satisfaisant notre hypothèse sur les formes d'ondes et la condition d'optimalité, a des performances optimales en termes de PAPR. L'OFDM et le Walsh-Hadamard en font partie. En résolvant ce problème d'optimisation, nous espérons trouver une base de modulation optimale différente de l'OFDM, nous avons prouvé néanmoins un autre résultat intéressant. Afin d'espérer trouver une base de modulation meilleure que la base de Fourier utilisée par l'OFDM, il faut sortir du cadre de notre analyse et il faut donc que cette base de modulation ne satisfasse pas notre hypothèse sur les formes d'ondes. C'est ainsi que nous avons prouvé le théorème d'une condition nécessaire satisfaite par toute forme d'onde à PAPR plus faible que l'OFDM. Cette condition nécessaire veut dire, globalement parlant, qu'au moins une fonction de la base de modulation s'annule durant la période symbole. Si cette condition nécessaire n'est pas satisfaite, on ne peut pas obtenir de meilleures performances en PAPR que l'OFDM.

La base d'ondelettes est une famille de fonctions satisfaisant la condition nécessaire que nous avons développée. En plus, certaines bases d'ondelettes qui satisfont les conditions d'orthogonalité, admettent un algorithme rapide d'implémentation et permettent une grande flexibilité dans le choix des ondelettes. Les ondelettes peuvent ainsi être utilisées comme formes d'ondes pour la transmission des données. Pour ces raisons, nous nous sommes intéressés à la modulation en ondelettes. Dans le chapitre 7, nous avons proposé une modulation en ondelettes basée sur l'ondelette de Dmey (approximation discrète de l'ondelette de Meyer). Cette modulation atteint de bonnes performances en PAPR en comparaison avec l'OFDM, et a des propriétés comparables en termes de densité spectrale de puissance. L'ondelette de Dmey souffre moins des remontés des lobes secondaires par rapport à l'OFDM à la sortie d'un amplificateur de puissance. Quand un préfixe cyclique est ajouté dans le domaine temporel au signal émis, et en effectuant une égalisation fréquentielle à la réception basée sur un égaliseur MMSE, la modulation en ondelettes basée sur l'ondelette de Dmey permet un meilleur taux d'erreur binaire par rapport à l'OFDM dans un canal sélectif en fréquence sans codage canal. Or, ces gains réalisés en termes de TEB subissent deux limitations. D'une part, l'utilisation d'un codage canal va certainement changer les performances en TEB. Afin de mesurer le gain de performances en TEB, il faut réaliser un codage canal adéquat pour la modulation en ondelettes, c'est ce qu'on va souligner dans les perspectives de notre futur travail. D'autre part, si l'émetteur dispose d'une connaissance de l'état du canal, l'OFDM peut éviter de transmettre des données utiles dans les porteuses atténuées par des évanouissements profonds du canal, ou bien utiliser des techniques d'allocation de puissance pour améliorer le TEB, cette technique ne sera pas efficace dans le cas du schéma classique de la modulation en ondelettes. C'est pour cela que nous avons considéré cette hypothèse de connaissance du canal et nous avons proposé par la suite une nouvelle structure de modulation permettant de garder les avantages de l'OFDM.

La modulation adaptative en paquets d'ondelettes (AWPM) est la nouvelle structure de modulation proposée dans ces travaux. On suppose que l'état du canal est connu à l'émetteur, qu'il y a un échange entre l'émetteur et le récepteur et que le canal ne varie pas beaucoup durant cette période d'échange. Ce sont des hypothèses classiques de tout système adaptatif. L'idée que nous avons proposée est d'adapter la base de modulation aux caractéristiques du canal afin d'atteindre un bon compromis entre le PAPR et le TEB. Grâce à la flexibilité de la transformée en paquets d'ondelettes et sa répartition flexible de l'axe fréquentiel, la division de la bande spectrale est adaptée à la sélectivité et aux évanouissements du canal. En effet, la bande spectrale est entièrement divisée dans le cas de l'OFDM,

le nombre de porteuses se chevauchant dans le temps est alors élevé, ce qui se traduit par un PAPR élevé. Pour la modulation monoporteuse, la bande spectrale est entièrement occupée par un seul symbole à la fois, la robustesse aux canaux sélectifs en fréquence est faible dans ce cas. Par contre, dans l'AWPM, la bande spectrale est divisée seulement autour des fréquences atténuées par des évanouissements profonds ou une grande sélectivité du canal. Pour le reste des fréquences, la bande spectrale n'est pas répartie afin de favoriser le PAPR. C'est ainsi qu'on arrive à atteindre un bon compromis entre le PAPR et le TEB, en permettant un système adaptatif entre la monoporteuse et la multiporteuses.

Cette thèse tend à montrer que la modulation en paquets d'ondelettes est une technique prometteuse dans les communications sans fils. Nous avons souligné et prouvé que la flexibilité de la transformée en paquets d'ondelettes permet de construire des systèmes de modulations reconfigurables et adaptatifs. Cette technique de modulation, qui n'a pas encore reçu toute l'attention de la communauté scientifique, semble être très intéressante dans la mesure où elle répond au compromis monoporteuse/multiporteuses, puisqu'elle permet une structure entre les deux schémas classiques de modulation. Particulièrement, quand l'application permet de disposer d'une connaissance de canal à l'émission, la transformée en paquets d'ondelettes adaptatives permet alors de répondre au mieux au compromis PAPR/TEB. En plus, l'ondelette de Dmey offre de meilleures propriétés spectrales que l'OFDM qui lui souffre d'une plus grande remontée des lobes secondaires à la sortie de l'amplificateur de puissance.

## Perspectives

Nous avons proposé dans cette thèse, pour la première fois, une modulation adaptative dont les performances satisfont un compromis entre celles des modulations monoporteuse et multiporteuses. Comme toute nouvelle idée, celle-ci génère un grand nombre de questions et d'études complémentaires pour la qualifier complètement. Pour cette raison, ci-après est cité un grand nombre de perspectives relatives à cette nouvelle modulation.

- **Sélection automatique des seuils d'atténuations et de variations** : dans nos simulations, les seuils sont fixés au préalable, et l'adaptation est effectuée en fonction de ces seuils. Une amélioration de ce processus consiste à sélectionner plus intelligemment les seuils d'adaptation en utilisant par exemple des outils d'apprentissage.
- **Définition d'une fonction de coût pour trouver la meilleure base selon ce coût** : La recherche d'une meilleure base en paquets d'ondelettes selon un critère prédéfini parmi toutes les bases en paquets d'ondelettes possibles est un problème classique qui a été appliqué dans différents contextes dans la littérature. La méthodologie classique est de définir d'abord un coût pour chaque nœud de l'arbre, et ensuite parcourir l'arbre récursivement en décidant pour chaque nœud père et deux nœuds fils, s'il faut fusionner les deux nœuds fils pour garder le nœud père ou le contraire. La décision est prise en comparant le coût du nœud père avec la somme des coûts des deux nœuds fils. Il serait intéressant alors de définir, dans notre cas, un coût qui représente notre contrainte, et trouver la meilleure base suivant cette contrainte.
- **Codage canal et entrelacement temporel et fréquentiel pour la transformée en ondelettes** : dans nos travaux, aucune technique de codage canal ou d'entrelacement n'a été utilisée pour les modulations étudiées. Nous savons que les techniques de codage canal et d'entrelacement sont efficaces pour l'OFDM et permettent d'améliorer considérablement ses performances en TEB. Qu'en est il alors pour la modulation en paquets d'ondelettes ? Une perspective intéressante de notre travail serait d'étudier une technique de codage et d'entrelacement adéquate pour la modulation en paquets d'ondelettes, et évaluer comment va-t-elle réagir à ces techniques.

- **Comparaison pour plusieurs égaliseurs et méthodes d'estimations** : dans nos simulations, nous avons supposé qu'on a estimé parfaitement le canal et nous avons utilisé un égaliseur ZF. Un scénario plus réaliste peut être étudié, en considérant des méthodes d'estimations du canal qui offrent une connaissance non parfaite de celui-ci. D'autres égaliseurs peuvent aussi être testés comme le MMSE. Les modulations mono-porteuse, l'OFDM et l'AWPM vont réagir différemment en fonction de la méthode d'égalisation considérée et à la qualité du canal estimé. Comme les techniques d'égalisation et d'estimation sort du champ d'étude de cette thèse, nous avons choisi de mettre cela en perspective.
- **Application des techniques de réduction du PAPR pour la modulation AWPM** : outre la réduction du PAPR par construction du signal, des méthodes de réduction du PAPR peuvent être appliquées pour atteindre un meilleur gain en PAPR.
- **Allocation de puissance adaptative pour l'AWPM** : puisque le schéma AWPM suppose une connaissance de l'état du canal à l'émission, l'allocation de puissance peut être utilisée en même temps que l'adaptation de la forme d'onde, ce qui permettrait de meilleures performances en TEB.
- **Application de la technique *adaptive tone reservation* à la modulation AWPM** : la modulation AWPM suppose une connaissance de l'état du canal à l'émission. Nous pouvons ainsi isoler les porteuses atténuées par la sélectivité du canal et ne pas les utiliser pour transmettre des données utiles. Ces porteuses peuvent être utilisées pour réduire le PAPR, en appliquant la méthode ATR qu'on propose dans l'Annexe B.
- **Techniques adaptatives de modulation et de codage (AMC) pour l'AWPM** : en se basant sur une valeur estimée du SNR, les techniques AMC permettent de choisir le type de codage et la modulation numérique adéquate pour la transmission. Puisque l'AWPM découpe la bande spectrale en plusieurs sous-bandes de largeurs non uniformes, l'adaptation du codage et de la modulation numérique peuvent être appliquées pour chaque sous-bande, permettant ainsi l'utilisation des constellations 64-QAM dans les sous-bandes non atténuées, et des 4-QAM dans les sous-bandes atténuées par exemple.
- **Relation entre PAPR et SNR** : un gain en PAPR peut-il se traduire par un gain en SNR ? Cette idée suggère d'étudier la relation entre un gain en PAPR et un gain en SNR. Si on atteint un gain significatif en PAPR, nous pouvons avoir une plus grande puissance d'entrée et donc une meilleure résistance au bruit qui se traduit par un gain en SNR. Cette relation dépend des caractéristiques de l'amplificateur et du canal de transmission. Dans de futurs travaux, il est envisageable de modifier la figure 8.9 en tenant compte des caractéristiques de l'amplificateur. Mentionnons que dans cette thèse, le gain en PAPR est volontairement utilisé pour diminuer la consommation énergétique de l'amplificateur de puissance.
- **Égalisation pour la modulation en paquets d'ondelettes** : la chaîne de transmission d'un système de modulation en paquets d'ondelettes ajoute un préfixe cyclique au signal émis, et applique une égalisation fréquentielle à la réception. Cette opération rend la modulation en paquets d'ondelettes plus complexe que l'OFDM en termes d'opérations de calcul. Une égalisation plus simple, basée simplement sur une opération d'inversion de matrice par exemple, pourrait contribuer à diminuer la complexité de la modulation en ondelettes.
- **Nouvelle ondelette adaptée à la transmission des données** : dans nos simulations, nous avons utilisé quelques ondelettes classiques comme l'ondelette de Haar, les ondelettes de Meyer ou les ondelettes de Daubechies. Cependant, ces ondelettes n'ont pas été construites spécialement pour la transmission des données et pour répondre

aux contraintes d'efficacité spectrale et d'efficacité énergétique. Puisque la modulation en ondelettes a prouvé son utilité dans le domaine de transmission des données, il serait judicieux de construire une ondelette adaptée à ce contexte.

- **Modulation adaptative basée sur des fonctions de Fourier** : en nous inspirant de la manière dont sont construites les bases en paquets d'ondelettes, nous pouvons construire à partir de la base de Fourier, des familles de fonctions qui découpent l'axe fréquentiel d'une manière encore plus flexible (sans contrainte de division binaire) que la transformée en paquets d'ondelettes. Nous avons introduit cette nouvelle base adaptative dans notre brevet déposé (voir liste des publications). Cette base adaptative de Fourier ne représente ni une famille de Gabor ni une base en paquets d'ondelettes. L'avantage de cette modulation par rapport à la modulation en paquets d'ondelettes c'est qu'elle peut s'ajouter "facilement" dans les modulations déjà existantes (OFDM) par une simple opération de précodage. En plus, son découpage de la bande n'est pas binaire et donc beaucoup plus flexible que la modulation en paquets d'ondelettes. Par contre, cette dernière a l'avantage d'avoir plus de choix dans la sélection de l'ondelette utilisée. Nous sommes actuellement entrain d'évaluer les performances de cette nouvelle modulation, et donc elle fait partie des perspectives de nos travaux.



# Annexe A

## Complément du Chapitre 5

### Sommaire

---

<b>A.1</b>	<b>Distribution de la partie réelle <math>x^R(t)</math> du signal GWMC transmis</b>	<b>139</b>
A.1.1	Théorème central limite de Lyapunov (L-CLT)	139
A.1.2	Condition de Lyapunov pour un système GWMC	140
A.1.3	Application du L-CLT	141
<b>A.2</b>	<b>Théorème du Berry-Esseen</b>	<b>142</b>
<b>A.3</b>	<b>Expression de la puissance moyenne d'un signal GWMC</b>	<b>142</b>

---

### A.1 Distribution de la partie réelle $x^R(t)$ du signal GWMC transmis

#### A.1.1 Théorème central limite de Lyapunov (L-CLT)

Soient  $(x_m)_{m \in [1, M]}$  une suite de variables aléatoires indépendantes, chacune de moyenne finie  $\mu_m$  et de variance  $\sigma_m^2$ . On définit

$$s_M^2 = \sum_{m=1}^M \sigma_m^2,$$

et le moment centré d'ordre 3

$$r_M^3 = \sum_{m=1}^M E(|x_m - \mu_m|^3).$$

La condition de Lyapunov est exprimée par

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{r_M^3}{s_M^3} = 0.$$

On pose  $S_M = x_1 + x_2 + \dots + x_M$ . L'espérance de  $S_M$  vaut  $m_M = \sum_{m=1}^M \mu_m$  et sa déviation standard est  $s_M$ .

Si la condition de Lyapunov est satisfaite, alors  $\frac{S_M - m_M}{s_M}$  converge en distribution vers une variable aléatoire normale standard, quand  $M$  tend vers l'infini.

$$\frac{S_M - m_M}{s_M} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

### A.1.2 Condition de Lyapunov pour un système GWMC

**Propriété A.1.1.** (*Condition de Lyapunov*)

Quand l'Hypothèse 5.2.2 est vérifiée, ils existent  $A > 0$ ,  $A' > 0$ ,  $B < +\infty$  et  $B' < +\infty$  tels que pour tout  $m, t$  on a

$$0 < A' \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_m(t - nT)| \leq B < +\infty \quad (\text{A.1})$$

$$\text{et } 0 < A \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_m(t - nT)|^2 \leq B' < +\infty, \quad (\text{A.2})$$

en plus

$$\frac{\sqrt[3]{\sum_{m=0}^{M-1} E |\sum_{n \in \mathbb{Z}} C_{m,n}^R g_{m,n}^R(t) - C_{m,n}^I g_{m,n}^I(t)|^3}}{\sqrt{\frac{\sigma_c^2}{2} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_m(t - nT)|^2}} < \epsilon_M \ll 1, \quad (\text{A.3})$$

$$\text{et } \frac{\sqrt[3]{\sum_{m=0}^{M-1} E |\sum_{n \in \mathbb{Z}} C_{m,n}^R g_{m,n}^I(t) + C_{m,n}^I g_{m,n}^R(t)|^3}}{\sqrt{\frac{\sigma_c^2}{2} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_m(t - nT)|^2}} < \epsilon'_M \ll 1. \quad (\text{A.4})$$

*Preuve :* Soient  $B = \max_{m,t} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_m(t - nT)| < +\infty$  et  $A = \min_{m,t} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_m(t - nT)|^2 > 0$ , on a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_m(t - nT)| \leq B < +\infty \quad (\text{A.5})$$

$$\Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_m(t - nT)|^2 \leq B^2 < +\infty$$

$$\Rightarrow \max_{m,t} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_m(t - nT)|^2 = B' \leq B^2 < +\infty, \quad (\text{A.6})$$

et on a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_m(t - nT)|^2 \geq A > 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_m(t - nT)| \geq \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_m(t - nT)|^2} \geq \sqrt{A}$$

$$\Rightarrow \min_{m,t} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_m(t - nT)| = A' \geq \sqrt{A} > 0. \quad (\text{A.8})$$

On cherche à prouver la validité de la condition de Lyapunov. On a

$$\frac{1}{\sqrt{B'M \frac{\sigma_c^2}{2}}} \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma_c^2}{2} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_m(t - nT)|^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{AM \frac{\sigma_c^2}{2}}} \quad (\text{A.9})$$

et on a

$$\begin{aligned} |C_{m,n}^R g_{m,n}^R(t)| &\leq \underbrace{\max_{m,n} C_{m,n}^R}_{C_R} |g_{m,n}^R(t)| \text{ et } |C_{m,n}^I g_{m,n}^I(t)| \leq \underbrace{\max_{m,n} C_{m,n}^I}_{C_I} |g_{m,n}^I(t)| \\ \sum_{n \in \mathbb{Z}} |C_{m,n}^R g_{m,n}^R(t)| &\leq C_R B \text{ et } \sum_{n \in \mathbb{Z}} |C_{m,n}^I g_{m,n}^I(t)| \leq C_I B, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{alors } \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_{m,n}^R g_{m,n}^R(t) - C_{m,n}^I g_{m,n}^I(t) \right| &\leq \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_{m,n}^R g_{m,n}^R(t) \right| + \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_{m,n}^I g_{m,n}^I(t) \right| \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |C_{m,n}^R g_{m,n}^R(t)| + \sum_{n \in \mathbb{Z}} |C_{m,n}^I g_{m,n}^I(t)| \\ &\leq C_R B + C_I B, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_{m,n}^R g_{m,n}^R(t) - C_{m,n}^I g_{m,n}^I(t) \right|^3 \leq (C_R B + C_I)^3 \\ \text{d'où} \quad & E \left( \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_{m,n}^R g_{m,n}^R(t) - C_{m,n}^I g_{m,n}^I(t) \right|^3 \right) \leq (C_R B + C_I)^3. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

À partir de (A.9) et (A.10), on a

$$\frac{\sqrt[3]{\sum_{m=0}^{M-1} E \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_{m,n}^R g_{m,n}^R(t) - C_{m,n}^I g_{m,n}^I(t) \right|^3}}{\sqrt{\frac{\sigma_c^2}{2} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_m(t - nT)|^2}} \leq \frac{\sqrt[3]{M(C_R B + C_I)^3}}{\sqrt{AM \frac{\sigma_c^2}{2}}}. \quad (\text{A.11})$$

Pour un  $M$  très grand, on a

$$\frac{\sqrt[3]{\sum_{m=0}^{M-1} E \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_{m,n}^R g_{m,n}^R(t) - C_{m,n}^I g_{m,n}^I(t) \right|^3}}{\sqrt{\frac{\sigma_c^2}{2} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_m(t - nT)|^2}} < \epsilon_M = O(M^{-1/6}) \ll 1.$$

On peut prouver la deuxième partie de la condition de Lyapunov (A.4) en procédant de la même manière. L'Hypothèse 5.2.2 est alors une condition suffisante pour la condition de Lyapunov.

### A.1.3 Application du L-CLT

On pose  $x_m^R(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_{m,n}^R g_{m,n}^R(t) - C_{m,n}^I g_{m,n}^I(t)$  tel que  $x^R(t) = \sum_{m=0}^{M-1} x_m^R(t)$ . Dans notre cas, on a  $x_0^R(t), x_1^R(t), x_2^R(t), \dots, x_{M-1}^R(t)$  une suite de variables aléatoires indépendantes (Hypothèse 5.2.1). Et on a

- En appliquant (5.4),  $\forall m \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket E(x_m^R(t)) = 0$ ,
- $\text{Variance}(x_m^R(t)) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sigma_c^2}{2} |g_{m,n}(t)|^2$ .

En effet

$$\begin{aligned} \text{Variance}(x_m^R(t)) &= E(x_m^R(t)^2) \\ &= E \left( \sum_{n,p \in \mathbb{Z}} [C_{m,n}^R g_{m,n}^R(t) - C_{m,n}^I g_{m,n}^I(t)] \times [C_{m,p}^R g_{m,p}^R(t) - C_{m,p}^I g_{m,p}^I(t)] \right) \\ &= E \left( \sum_{n,p \in \mathbb{Z}} [C_{m,n}^R C_{m,p}^R g_{m,n}^R(t) g_{m,p}^R(t) - C_{m,n}^R C_{m,p}^I g_{m,n}^R(t) g_{m,p}^I(t) \right. \\ &\quad \left. - C_{m,n}^I C_{m,p}^R g_{m,n}^I(t) g_{m,p}^R(t) + C_{m,n}^I C_{m,p}^I g_{m,n}^I(t) g_{m,p}^I(t)] \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sigma_c^2}{2} [(g_{m,n}^R(t))^2 + (g_{m,n}^I(t))^2] \quad ((5.2), (5.3), (5.4), (5.5)) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sigma_c^2}{2} |g_{m,n}(t)|^2. \end{aligned}$$

- $r_M = \sqrt[3]{\sum_{m=0}^{M-1} E \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_{m,n}^R g_{m,n}^R(t) - C_{m,n}^I g_{m,n}^I(t) \right|^3}$ ,
- $s_M = \sqrt{\sum_{m=0}^{M-1} \text{Variance}(x_m^R)} = \sqrt{\frac{\sigma_c^2}{2} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_{m,n}(t)|^2}$ .

De l'Hypothèse 5.2.2 et la Propriété A.1.1, il vient  $\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{r_M}{s_M} = 0$ . La condition de Lyapunov est ainsi satisfaite. En appliquant le L-CLT, on trouve pour un grand  $M$

$$\frac{\sum_{m=0}^{M-1} x_m^R(t)}{\frac{\sigma_c^2}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{M-1} |g_{m,n}(t)|^2} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\sum_{m=0}^{M-1} x_m^R(t) \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_c^2}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{M-1} |g_{m,n}(t)|^2\right).$$

## A.2 Théorème du Berry-Esseen

Dans la théorie de probabilité, le théorème central limite indique que, sous certaines circonstances, la distribution de probabilité de la moyenne d'un échantillon aléatoire converge vers une distribution normale quand la taille de l'échantillon tend vers l'infini. Sous des hypothèses plus fortes, le théorème de Berry-Esseen, ou l'inégalité de Berry-Esseen, spécifie la vitesse avec laquelle cette convergence a lieu, en donnant une borne de l'erreur maximale d'approximation, entre la distribution normale et la vraie distribution de la moyenne d'échantillons. Dans le cas où les échantillons sont indépendants, la vitesse de convergence est  $\sqrt{\frac{1}{M}}$ . En général, nous obtenons une bonne approximation d'une courbe gaussienne pour  $M > 8$ .

Dans notre cas, nous effectuons des simulations en considérons un nombre de porteuses égal à  $M = 64 > 8$ . Sous cette hypothèse, les conditions de Lyapunov suivantes

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{\sum_{m=0}^{M-1} E \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_{m,n}^R g_{m,n}^R(t) - C_{m,n}^I g_{m,n}^I(t) \right|^3}}{\sqrt{\frac{\sigma_c^2}{2} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_m(t - nT)|^2}} = 0,$$

et

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{\sum_{m=0}^{M-1} E \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_{m,n}^R g_{m,n}^I(t) + C_{m,n}^I g_{m,n}^R(t) \right|^3}}{\sqrt{\frac{\sigma_c^2}{2} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_m(t - nT)|^2}} = 0.$$

deviennent

$$\frac{\sqrt[3]{\sum_{m=0}^{M-1} E \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_{m,n}^R g_{m,n}^R(t) - C_{m,n}^I g_{m,n}^I(t) \right|^3}}{\sqrt{\frac{\sigma_c^2}{2} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_m(t - nT)|^2}} < \epsilon_M \ll 1,$$

et

$$\frac{\sqrt[3]{\sum_{m=0}^{M-1} E \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_{m,n}^R g_{m,n}^I(t) + C_{m,n}^I g_{m,n}^R(t) \right|^3}}{\sqrt{\frac{\sigma_c^2}{2} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_m(t - nT)|^2}} < \epsilon'_M \ll 1.$$

## A.3 Expression de la puissance moyenne d'un signal GWMC

La puissance moyenne est calculée par la formule suivante

$$P_{c,moy} = \lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \frac{1}{2t_0} \int_{-t_0}^{t_0} E(|x(t)|^2) dt$$

$$= \lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \frac{1}{2t_0} \int_{-t_0}^{t_0} E\left( \sum_{m,m'=0}^{M-1} \sum_{n,n' \in \mathbb{Z}} C_{m,n} C_{m',n'}^* g_{m,n}(t) g_{m',n'}^*(t) \right) dt$$

Hypothèse 5.2.1

$$= \lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \frac{1}{2t_0} \int_{-t_0}^{t_0} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sigma_c^2 |g_{m,n}(t)|^2 dt$$

$$= \sigma_c^2 \lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \frac{1}{2t_0} \sum_{m=0}^{M-1} \int_{-t_0}^{t_0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_{m,n}(t)|^2 dt.$$

On pose  $t_0 = \frac{KT}{2}$ ,  $K \in \mathbb{N}$

$$P_{c,moy} = \frac{\sigma_c^2}{T} \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{1}{K} \sum_{m=0}^{M-1} \int_{-\frac{KT}{2}}^{\frac{KT}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_{m,n}(t)|^2 dt.$$

On remarque que  $t \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{M-1} |g_m(t - nT)|^2$  est périodique de période  $T$ , alors

$$\begin{aligned} P_{c,moy} &= \frac{\sigma_c^2}{T} \sum_{m=0}^{M-1} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g_m(t - nT)|^2 dt \\ &\stackrel{\text{(par périodicité)}}{=} \frac{\sigma_c^2}{T} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{nT - \frac{T}{2}}^{nT + \frac{T}{2}} |g_m(t - nT)|^2 dt \\ &= \frac{\sigma_c^2}{T} \sum_{m=0}^{M-1} \int_{-\infty}^{+\infty} |g_m(t)|^2 dt \\ P_{c,moy} &= \frac{\sigma_c^2}{T} \sum_{m=0}^{M-1} \|g_m\|^2. \end{aligned}$$



# Annexe B

## La méthode *Adaptive Tone Reservation* (ATR)

### Sommaire

---

<b>B.1 Principe de la technique <i>Tone Reservation</i> (TR)</b>	<b>145</b>
B.1.1 Algorithme du gradient projeté (GP)	146
<b>B.2 Principe de la méthode <i>Adaptive Tone Reservation</i> (ATR)</b>	<b>147</b>
B.2.1 Algorithme	147
B.2.2 Exemple	147
B.2.3 Complexité	148
<b>B.3 Résultats de simulation</b>	<b>149</b>
B.3.1 Performances en TEB	149
B.3.2 Performances en PAPR	149
<b>B.4 Conclusion</b>	<b>151</b>

---

Cette annexe est consacrée à la technique ATR, une nouvelle approche de la technique TR (*tone reservation*), qui propose de choisir les porteuses réservées en fonction de la qualité du canal de transmission. Cette technique, contrairement à toutes les études conduites sur les choix des porteuses réservées, ne vise pas à améliorer les performances en PAPR. L'objectif de l'ATR est d'améliorer le taux d'erreur binaire (TEB) du système en adaptant le choix des porteuses réservées à la qualité du canal.

Ce travail représente le fruit d'une collaboration avec MAMADOU LAMARANA DIALLO, un doctorant au sein de l'équipe SCEE<sup>1</sup> et qui travaille sur les méthodes d'ajout de signal pour la réduction du PAPR, sous l'encadrement de JACQUES PALICOT et FAOUZI BADER. Ce travail a fait l'objet d'une publication [172].

### B.1 Principe de la technique *Tone Reservation* (TR)

Nous avons décrit dans la section 3.4, différentes méthodes de réduction du PAPR qui ont été développées dans la littérature. Cette annexe porte sur la technique TR, une des méthodes les plus utilisées, et qui consiste à réserver des porteuses pour porter un signal correcteur

---

1. Signal, Communication et Électronique Embarquée, IETR, CentraleSupélec, campus de Rennes.

$c(t)$  afin d'obtenir un signal  $x(t) + c(t)$  à PAPR réduit, comme présenté dans la Figure B.1. La méthode TR réduit le PAPR en agissant sur les porteuses réservées, le récepteur n'effectue pas de traitement supplémentaire sur le signal pour extraire les données. En plus, le calcul du signal correcteur peut être réalisé grâce à des algorithmes d'optimisation efficaces comme la programmation de cône de second ordre [108] ou l'algorithme de gradient projeté (GP) [107]. Ces implémentations pratiques ont rendu la TR, une technique prometteuse pour les standards commerciaux comme le DVB-T2 (*digital video broadcasting-terrestrial*). Nous définissons dans ce qui suit l'algorithme GP, qui sera utilisé dans les simulations de la section B.3.

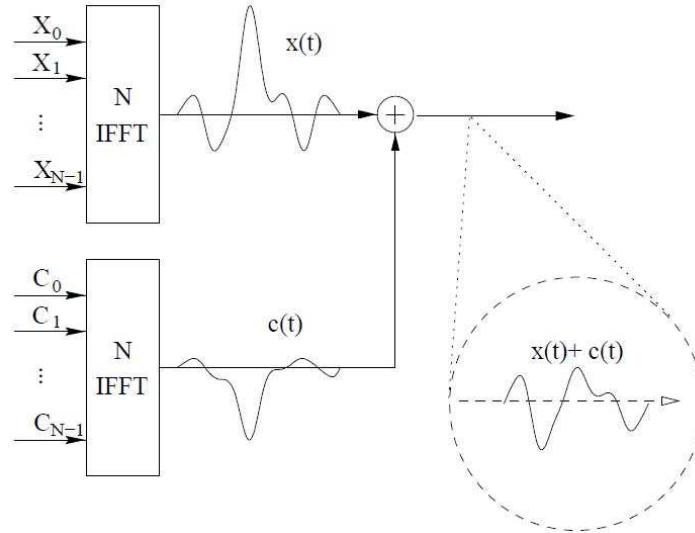


FIGURE B.1 – Schéma général d'une méthode d'ajout de signal pour la réduction du PAPR.

### B.1.1 Algorithme du gradient projeté (GP)

**Notations** On note  $\mathbb{F}_{M\mathcal{L}, M\mathcal{R}}^{\mathcal{R}}$  la sous-matrice de la matrice de la transformée de Fourier inverse discrète, contenant seulement les colonnes indexées dans l'ensemble des porteuses réservées. Le paramètre  $\mathcal{L}$  représente le coefficient de suréchantillonnage.  $\mathbf{Q}_l$  correspond à la  $l$ -ème ligne de la matrice  $\mathbf{Q} = \mathbb{F}_{M\mathcal{L}, M\mathcal{R}}^{\mathcal{R}} \left( \mathbb{F}_{M\mathcal{L}, M\mathcal{R}}^{\mathcal{R}} \right)^H$ .  $\mathbf{C}$  est le vecteur des composantes du signal correcteur.

L'algorithme GP a pour objectif de calculer le signal de correction de telle sorte que le signal résultant (la somme du signal original et le signal de correction) se rapproche le plus possible de la fonction du clipping définie par :

$$f(r) = \begin{cases} Ae^{j\arg(r)}, & \text{if } |r| \geq A \\ r & \text{sinon} \end{cases}. \quad (\text{B.1})$$

La constante  $A$  représente un seuil prédéfini. Ajouter des porteuses à un signal OFDM  $x(t)$  correspond à remplacer ce signal par un nouveau signal  $x + \mathbb{F}_{M\mathcal{L}, M\mathcal{R}}^{\mathcal{R}} \mathbf{C}$ .

La GP a pour objectif de maximiser le rapport de la puissance du signal et la puissance du bruit du clipping (*signal to clipping noise ratio*, SCR). Ce dernier est défini comme suit

$$\text{SCR} = \frac{\|\mathbf{x}\|_2^2}{\left\| \mathbf{x} + \mathbb{F}_{M\mathcal{L}, M\mathcal{R}}^{\mathcal{R}} \mathbf{C} - f\left(\mathbf{x} + \mathbb{F}_{M\mathcal{L}, M\mathcal{R}}^{\mathcal{R}} \mathbf{C}\right) \right\|_2^2}. \quad (\text{B.2})$$

Maximiser (B.2) est équivalent à minimiser son dénominateur en résolvant le problème d'optimisation suivant

$$\min_{\mathbf{C}} \left( \|\mathbf{x} + \mathbb{F}_{M_{\mathcal{L}}, M_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}} \mathbf{C} - f(\mathbf{x} + \mathbb{F}_{M_{\mathcal{L}}, M_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}} \mathbf{C})\|_2^2 \right). \quad (\text{B.3})$$

En commençant par une condition initiale  $\mathbf{c}^{(0)} = \mathbf{0}_{M_{\mathcal{R}}}$ , le signal de correction peut être calculé itérativement grâce à l'algorithme GP suivant l'équation suivante [107]

$$\mathbf{c}^{(i+1)} = \mathbf{c}^{(i)} - \mu \sum_{|x_l^{(i)}| > A} \left( x_l + c_l^{(i)} - A e^{j \arg(x_l + c_l^{(i)})} \right) \mathbf{Q}_l. \quad (\text{B.4})$$

Ainsi, en ajoutant le signal utile  $\mathbf{x}$  dans les deux termes de (B.4), on obtient un signal à PAPR réduit après les  $(i + 1)$  itérations comme suit

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{x}^{(i)} - \mu \sum_{|x_l^{(i)}| > A} \left( x_l + c_l^{(i)} - A e^{j \arg(x_l + c_l^{(i)})} \right) \mathbf{Q}_l, \quad (\text{B.5})$$

où  $\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{x} + \mathbf{c}^{(i+1)}$ .

On définit  $N_{\max}$  le nombre maximal d'itérations, au delà duquel l'algorithme s'arrête.

## B.2 Principe de la méthode *Adaptive Tone Reservation* (ATR)

Au lieu de réserver aléatoirement les porteuses, ou suivant un ensemble d'indices prédéfini et connu à l'émetteur et au récepteur comme dans le DVB-T2, elles peuvent être sélectionnées différemment dans le but d'améliorer les performances en TEB du système. La méthode qu'on propose consiste à sélectionner les porteuses les plus atténuées par l'évanouissement sélectif du canal, et les utiliser pour porter le signal de correction, au lieu de porter des informations utiles. Puisque ces porteuses vont être supprimées à la réception, l'information utile va être émise dans les porteuses les moins affectées, ce qui contribue à améliorer les performances en TEB.

Ainsi, pour un canal  $h$  à évanouissement sélectif en fréquence, les  $M_{\mathcal{R}}$  porteuses qui correspondent aux plus petites valeurs de  $|H(f)|$  sont réservées pour le processus de réduction du PAPR, selon un algorithme qu'on définit dans la section B.2.1. Comme tout système adaptatif, nous supposons que la connaissance de l'état du canal CSI (*channel state information*) est disponible à l'émission par un retour du récepteur, et que les variations du canal sont négligeables durant cette période de temps.

### B.2.1 Algorithme

Soit  $\mathcal{R}$  l'ensemble qui contient les indices des  $M_{\mathcal{R}}$  porteuses réservées. Dans l'ATR, cet ensemble est défini suivant l'Algorithme 1.

### B.2.2 Exemple

Afin de comprendre cette nouvelle méthode de sélection, on considère en premier lieu un canal déterministe. La Table B.1 définit le canal sélectif en fréquence de Proakis C [78], pour un nombre de porteuses égal à  $M = 1024$ . Cette figure nous indique que le canal a un évanouissement spectral profond autour des porteuses indices 396 et 630. Les coefficients en fréquence autour de ces indices sont très petits, le bruit relatif autour d'eux est alors très élevé.

**Algorithm 1** Sélection des porteuses réservées**Require:**  $H, M_{\mathcal{R}}$  $positions \leftarrow [ ]$ Ordonner les éléments du canal  $H$  dans un ordre ascendant et retourner leurs indices $[-, indices] \leftarrow sort(H)$ Sélectionner les premiers  $M_{\mathcal{R}}$  indices qui correspondent aux  $M_{\mathcal{R}}$  plus petites valeurs de  $H$ **for**  $i \leftarrow 1 : M_{\mathcal{R}}$  **do**

Retourner les positions des porteuses réservées correspondant aux porteuses les plus affectées par la sélectivité du canal

 $positions \leftarrow [positions, indices(i)]$ **end for**

TABLE B.1 – Coefficients du canal Proakis C.

$h_0$	$h_1$	$h_2$	$h_3$	$h_4$
0.027	0.460	0.688	0.460	0.027

En appliquant la méthode de sélection proposée, les  $M_{\mathcal{R}}$  porteuses réservées ( $M_{\mathcal{R}}$  est égal à 12 dans ce cas) sont sélectionnées comme décrit l'Algorithme 1, elles correspondent à l'ensemble des indices suivant :

$$\text{Porteuses réservées} = [397, 629, 396, 630, 398, 628, 395, 631, 399, 627, 394, 632].$$

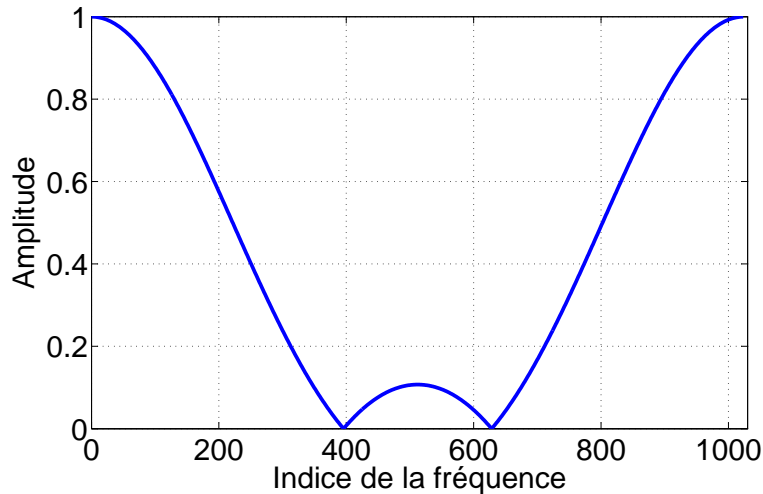


FIGURE B.2 – Réponse en amplitude du canal Proakis C.

**B.2.3 Complexité**

Dans l'approche TR, l'ensemble des positions des porteuses réservées est prédéfini (c'est le même pour chaque  $\mathbf{x}$ ), la matrice  $\mathbb{Q} = \mathbb{F}_{M_{\mathcal{L}}, M_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}} \left( \mathbb{F}_{M_{\mathcal{L}}, M_{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}} \right)^H$  peut être pré-calculée et stockée. La complexité de cette méthode TR est de l'ordre de  $\mathcal{O}(M_{\mathcal{L}})$ .

A la différence de la méthode TR, la matrice de projection dans le cadre de la méthode ATR ne peut pas être pré-calculée et stockée du fait que les porteuses réservées sont définies en fonction du canal de transmission et donc peuvent changer d'une trame à l'autre. Ainsi, le calcul de la matrice de projection est à tenir en compte concernant la complexité de la méthode ATR. Cependant, dans [107], l'auteur a montré que la matrice  $\mathbb{Q} = \mathbb{F}_{M\mathcal{L}, M\mathcal{R}}^{\mathcal{R}} (\mathbb{F}_{M\mathcal{L}, M\mathcal{R}}^{\mathcal{R}})^H$  peut être entièrement déterminée à partir de sa première colonne  $\mathbf{Q}_0^{\text{Col}}$  via un *shift* circulaire, autrement dit on a :

$$\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0^{\text{Col}}[0] & \mathbf{Q}_0^{\text{Col}}[M\mathcal{L} - 1] & \mathbf{Q}_0^{\text{Col}}[M\mathcal{L} - 2] & \dots & \mathbf{Q}_0[1] \\ \mathbf{Q}_0^{\text{Col}}[1] & \mathbf{Q}_0^{\text{Col}}[0] & \mathbf{Q}_0^{\text{Col}}[M\mathcal{L} - 1] & \dots & \mathbf{Q}_0[2] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{Q}_0^{\text{Col}}[M\mathcal{L} - 1] & \mathbf{Q}_0^{\text{Col}}[M\mathcal{L} - 2] & \mathbf{Q}_0^{\text{Col}}[M\mathcal{L} - 3] & \dots & \mathbf{Q}_0^{\text{Col}}[0] \end{bmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

Avec  $\mathbf{Q}_0^{\text{Col}}[p]$  désignant la  $p$ -ième composante de  $\mathbf{Q}_0^{\text{Col}}$ . En exploitant cette propriété, on remarque alors que le coût de calcul de la matrice de projection  $\mathbb{Q}$  est de  $\mathcal{O}(M\mathcal{L}M\mathcal{R})$ . Il vient alors que la complexité numérique de la méthode ATR-GP est de  $\mathcal{O}(M\mathcal{L}N_{\text{max}}) + \mathcal{O}(M\mathcal{L}M\mathcal{R}) = \mathcal{O}(M\mathcal{L}(M\mathcal{R} + N_{\text{max}}))$  contre  $\mathcal{O}(M\mathcal{L}N_{\text{max}})$  pour la méthode TR-GP classique. Cette croissance de complexité est due au fait que les porteuses réservées dans la méthode ATR-GP changent en fonction du canal de transmission.

## B.3 Résultats de simulation

Les simulations dans cette section ont été effectuées pour un système OFDM à  $M = 1024$  porteuses. Le nombre de porteuses réservées est  $M_{\mathcal{R}} = 12$ . Les constellations 4-QAM, 16-QAM et 64-QAM sont utilisées pour évaluer les performances en TEB, et la constellation 4-QAM est utilisée dans la comparaison des performances en PAPR. L'espacement entre porteuse est fixé à  $\Delta F = 15$  kHz. Le TEB et les simulations du PAPR sont réalisées pour  $n_1 = 10^8$  et  $n_2 = 10^6$  boucles d'itérations respectivement.

### B.3.1 Performances en TEB

Nous évaluons les performances en TEB dans un canal de Rayleigh sélectif en fréquence pour un système OFDM qui utilise la méthode ATR. Ces performances seront comparées avec l'OFDM utilisant une méthode de sélection classique qui consiste à réserver les  $M_{\mathcal{R}}$  premières porteuses.

Le canal ETU dont le délai  $\tau$  et le gain moyen du trajet  $G_{\text{av}}$  ont été définis dans la Table 7.2, est choisi dans nos simulations. L'algorithme du gradient projeté est utilisé pour calculer le signal de correction pour un nombre d'itération de  $N_{\text{max}} = 20$ , un pas de  $\mu = 0.25$ , et un seuil de  $A$  correspondant à 6.5 dB.

La Figure B.3 donne les performances en TEB du système OFDM, basé sur la méthode de sélection adaptative et les compare avec une sélection des porteuses spécifique. Comme observé dans la Figure B.3, pour un TEB de  $10^{-3}$ , la méthode proposée permet de réaliser un gain de 5 dB en termes de SNR pour différentes constellations (4-QAM, 16-QAM, 64-QAM). Ceci peut être expliqué par le fait que les porteuses atténuées par un évanouissement profond du canal ne portent pas d'informations utiles, et elles sont supprimées au récepteur. Ces évanouissements n'engendrent pas alors des erreurs à la réception, ce qui améliore le TEB utile du système.

### B.3.2 Performances en PAPR

La technique de sélection qu'on propose améliore le TEB dans un canal sélectif en fréquence, sans réduire les performances en PAPR en comparaison avec une méthode classique

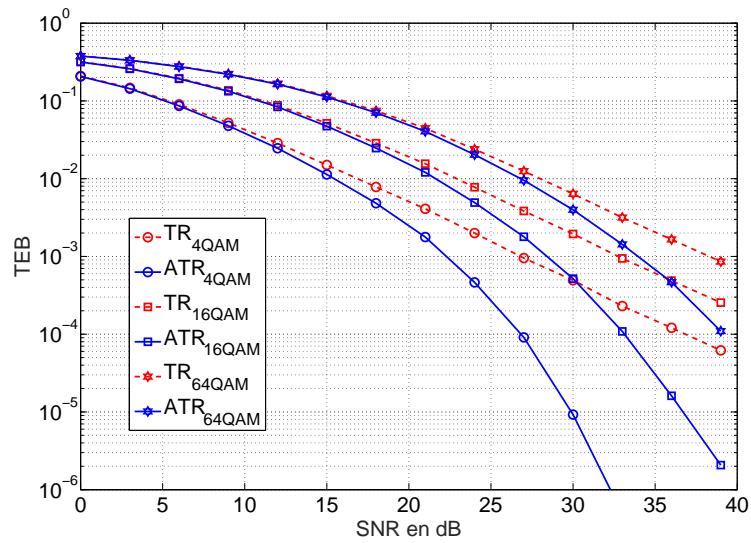


FIGURE B.3 – Performances en TEB d'un système OFDM sans codage, basé sur la méthode ATR pour différentes constellations.

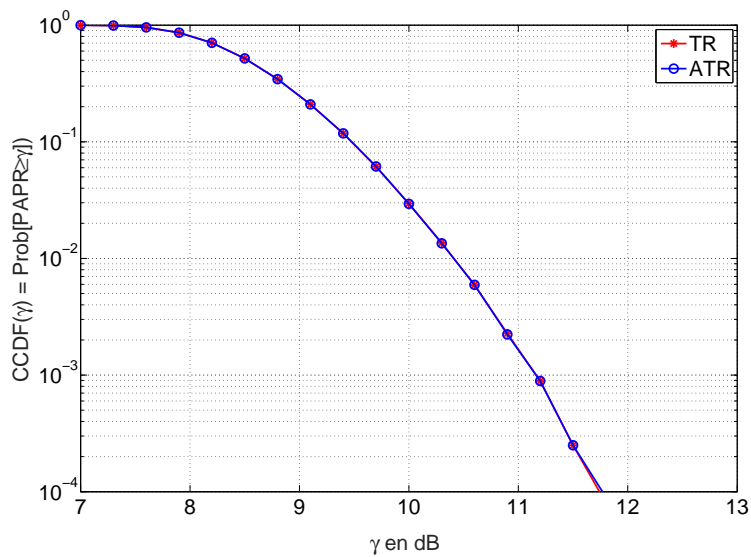


FIGURE B.4 – Comparaison des performances en PAPR entre l'OFDM basé sur l'ATR et l'OFDM basé sur la TR.

de sélection des porteuses réservées. Afin de confirmer ce constat, nous évaluons les performances en PAPR en utilisant la méthode TR basée sur la sélection adaptative (ATR) et on la compare avec une sélection spécifique qui consiste à réserver les  $M_{\mathcal{R}}$  premières porteuses. Les performances en PAPR sont comparées à travers l'évaluation de leur CCDF. La Figure B.4 confirme qu'il n'y a pas de dégradation du PAPR quand la nouvelle méthode de sélection adaptative est utilisée.

## B.4 Conclusion

Dans cette annexe, nous avons proposé une nouvelle méthode de sélection des porteuses pour la méthode *tone reservation* (TR). Nous avons montré à travers des simulations, que la technique de sélection proposée permet d'atteindre 5 dB de gain en termes de SNR pour un TEB de  $10^{-3}$ , pour différentes constellations, dans un canal Rayleigh sélectif en fréquence pour un système OFDM sans codage, sans aucune dégradation des performances en PAPR en comparaison avec une méthode de sélection classique des porteuses réservées.



# Annexe C

## Bilan des mobilités sortantes

### Sommaire

---

C.1	Université d'Oxford, Royaume-Uni . . . . .	153
C.2	Université nationale de Yokohama, Japon . . . . .	154
C.3	Université de York, Royaume-Uni . . . . .	154
C.4	Université de technologie de Poznan, Pologne . . . . .	155

---

Durant mes trois années de thèse, j'ai eu l'opportunité de visiter plusieurs équipes de recherche à l'étranger. Ce fut une expérience très enrichissante. D'une part, j'étais exposée à de nouveaux environnements et méthodes de travail et j'ai travaillé avec des chercheurs qui ont différentes perspectives de recherche. D'autre part, mes séjours à l'étranger m'ont permis de découvrir d'autres pays et de nouvelles cultures et d'accroître mon développement personnel. En plus, les mobilités à l'étranger sont un moyen très efficace pour développer son réseau académique. Dans ce qui suit, je donne un résumé des collaborations internationales durant mes trois années de thèse.

### C.1 Université d'Oxford, Royaume-Uni

Période de mobilité	Juillet-Août 2016
Collaborateur	Dr. JUSTIN P. COON
Équipe de recherche	<i>J.P. Research Group, Department of Engineering Science, Oriel College</i>
Sujet de recherche	Analyse des performance des schémas de modulation "Non-orthogonal Multi-tone FSK"

**Objectifs** Ils existent différents schémas de modulation *multi-tone FSK*. Certains sont proches de la modulation F-QAM (proposée pour des systèmes cellulaires de la 5G par Samsung). La variante *multi-tone FSK* non orthogonale sera étudiée. L'effet de la forme d'onde sur les interférences entre symboles, le taux d'erreur binaire et l'efficacité spectrale sera analysé.

## C.2 Université nationale de Yokohama, Japon

Période de mobilité	Juillet-Août 2015
Collaborateur	Prof. HIDEKI OCHIAI
Équipe de recherche	<i>Ochiai Research Group, Communication Theory Laboratory, Department of Electrical and Computer Engineering</i>
Sujet de recherche	Étude du compromis : Localisation fréquentielle des porteuses et le PAPR

**Résumé :** Il a été prouvé que le PAPR dans les modulations multiporteuses dépend de la forme d'onde utilisée dans la modulation. Il est possible alors d'agir sur la forme d'onde pour réduire le PAPR. En se basant sur ce résultat, le problème de réduction du PAPR est formulé en un problème d'optimisation. La solution du problème d'optimisation montre que parmi toutes les modulations multiporteuses basées sur des fonctions de modulation qui ont un support temporel plus large que la période symbole, l'OFDM (*orthogonal frequency division multiplexing*) est optimal en termes des performances en PAPR. Ainsi, pour avoir une modulation multiporteuses meilleure que l'OFDM en termes de performance en PAPR, le support temporel de cette forme d'onde doit être strictement inférieur que la période symbole. Cette nouvelle considération de la forme d'onde a un impact sur la localisation fréquentielle de la forme d'onde. Un compromis peut être caractérisé entre l'amélioration des performances en PAPR et l'amélioration de la localisation fréquentielle des porteuses.

## C.3 Université de York, Royaume-Uni

Période de mobilité	Juin-Juillet 2015
Collaborateur	Prof. ALISTER G. BURR
Équipe de recherche	<i>Department of Electronics</i>
Sujet de recherche	Étude des performances de la transformée en ondelettes : PAPR, efficacité spectrale, taux d'erreur binaire pour différents canaux

**Résumé :** Le Wavelet-OFDM basé sur la transformée en ondelettes discrète a reçu une attention considérable dans la communauté scientifique, grâce à certaines caractéristiques prometteuses. Nous comparons les performances du Wavelet-OFDM basé sur l'ondelette de Meyer avec l'OFDM, en termes de PAPR, de taux d'erreur binaire pour différents canaux et différents égaliseurs, de la complexité d'implémentation et de la densité spectrale de puissance. Nos résultats de simulations montre que, sans réduire l'efficacité spectrale, la structure proposée basée sur l'ondelette de Meyer, atteint jusqu'à 4.5 dB de gain en termes de PAPR par rapport à l'OFDM et jusqu'à 6.5 dB de gain en termes de SNR, quand on utilise l'égaliseur MMSE sans codage canal, au prix d'une augmentation de la complexité.

Cette collaboration a donné deux articles de conférences internationales [158, 157].

## C.4 Université de technologie de Poznan, Pologne

Période de mobilité	Juin-Juillet 2014
Collaborateur	Dr. ADRIAN KLIKS
Équipe de recherche	<i>Chair of Wireless Communications</i>
Sujet de recherche	Analyses temps-fréquence pour différentes transformée orthogonales pour des modulations multiporteuses

### Résumé :

- Analyses temps-fréquence des systèmes multiporteuses.
- Exploration de nouvelles formes d'onde à PAPR réduit.
- Étude de l'impact d'un canal multitrajets et de l'effet Doppler sur un système multiporteuses pour différentes formes d'onde.
- Discussions des aspects clés de la transformée de Gabor et des méthodes de calcul des bases duales (utilisées au récepteur).



# Table des figures

1	Chaîne de transmission numérique. . . . .	9
1.1	Rectangles de Heisenberg ou pavé temps-fréquence représentant la localisation temps-fréquence d'une fonction $x$ . . . . .	22
1.2	Pavage temps-fréquence associé à la représentation de Dirac. . . . .	23
1.3	Pavage temps-fréquence associé à la représentation de Fourier. . . . .	23
1.4	Pavage temps-fréquence associé à la transformée de Fourier à court terme. . . . .	24
1.5	Pavage temps-fréquence d'une transformée en ondelettes. . . . .	25
1.6	Arbre binaire associé à une décomposition en ondelettes. . . . .	28
1.7	Niveau de décomposition et reconstruction d'une transformée en ondelettes discrètes. . . . .	30
1.8	Ondelette de Meyer $\psi$ et sa fonction d'échelle associée $\phi$ . . . . .	31
1.9	Ondelette de Haar $\psi$ et sa fonction d'échelle associée $\phi$ . . . . .	32
1.10	Fonctions d'échelles $\psi$ et ondelettes $\phi$ de Daubechies avec $p = 2, 3, 4, 5$ moments nuls. . . . .	33
1.11	Pavage temps-fréquence d'une transformée en paquets d'ondelettes. . . . .	33
1.12	Arbre binaire associé à une décomposition en paquets d'ondelettes. . . . .	34
1.13	Arbre binaire admissible de paquets d'ondelettes. . . . .	34
1.14	Niveau de décomposition et reconstruction d'une transformée en paquets d'ondelettes. . . . .	35
1.15	Fonctions de Walsh-Hadamard. . . . .	37
2.1	Classification des modulations multiporteuses. . . . .	40
2.2	Élimination des ISI par l'intervalle de garde. . . . .	43
2.3	Modulation UFMC. . . . .	48
3.1	Caractéristique AM/AM d'un amplificateur de puissance. . . . .	54
3.2	Comparaison du spectre du signal d'entrée avec celui du signal de sortie. . . . .	55
3.3	Comparaison du recul à l'entrée pour deux signaux à variations d'enveloppe différentes. . . . .	56
3.4	Comparaison des approximations de la CCDF du PAPR pour un système OFDM à $M = 256$ porteuses. . . . .	59
4.1	Cycle simplifié d'un scénario de radio intelligente. . . . .	66
5.1	Modulation GWMC. . . . .	74
5.2	Comportement du PAPR au delà de son supremum. . . . .	78
5.3	CCDF du PAPR pour une durée d'observation infinie. . . . .	81
5.4	CCDF du PAPR simulée et théorique pour une modulation UFMC utilisant la fenêtre de Chebychev pour différents nombres de porteuses : (a) $M = 64$ , (b) $M = 256$ , (c) $M = 1024$ . . . . .	83
5.5	CCDF du PAPR simulée et théorique pour une modulation NOFDM utilisant la fenêtre de Hamming pour différents nombres de porteuses : (a) $M = 64$ , (b) $M = 256$ , (c) $M = 1024$ . . . . .	84

5.6	CCDF du PAPR expérimentale et théorique pour un système de Walsh-Hadamard pour différents nombres de porteuses : (a) $M = 64$ , (b) $M = 256$ , (c) $M = 1024$ .	84
5.7	Distribution du PAPR pour différents scénarios de transmission.	85
6.1	Courbe de la fonction $J(\mathcal{H})$ .	95
6.2	Courbe de la fonction $\tilde{L}_{\mathcal{A}^+}(c_0)$ .	97
6.3	Courbe de la fonction $\tilde{\beta}(c_0)$ .	97
6.4	CCDF du PAPR pour l'OFDM classique et le système WH-MC.	98
6.5	CCDF du PAPR pour l'OFDM classique et le WCP-OFDM.	99
6.6	CCDF du PAPR pour l'OFDM classique et l'UFMC.	100
6.7	Base d'ondelettes de Haar.	100
6.8	CCDF du PAPR pour l'OFDM classique et le Haar Wavelet-OFDM.	101
6.9	Taxonomie des formes d'ondes multiporteuses vis-à-vis des performances en PAPR.	102
7.1	Variantes du Wavelet-OFDM.	104
7.2	Performances en PAPR du Wavelet-OFDM.	105
7.3	DSP théorique et expérimentale de Haar Wavelet-OFDM.	110
7.4	DSP du Haar Wavelet-OFDM.	110
7.5	Ondelettes en fréquence pour chaque échelle.	111
7.6	DSP de Dmey Wavelet-OFDM.	112
7.7	Comparaison de la DSP de Dmey et de l'OFDM à la sortie d'un amplificateur de puissance.	112
7.8	Comparaison des performances en PAPR de Dmey pour une constellation 4-QAM.	113
7.9	Comparaison des performances en PAPR de Dmey pour une constellation 16-QAM.	113
7.10	Comparaison du TEB dans des canaux AWGN et flat fading.	115
7.11	Chaîne de transmission de la modulation en ondelettes dans un canal sélectif en fréquence.	115
7.12	Performances en TEB dans un canal sélectif en fréquence pour une égalisation ZF.	116
7.13	Performances en TEB dans un canal sélectif en fréquence pour une égalisation MMSE.	117
8.1	Schéma d'une modulation AWPM.	122
8.2	Organigramme représentant la sélection d'une meilleure base en paquets d'ondelettes.	124
8.3	Réponse fréquentielle $ H(f) $ du canal $h$ .	125
8.4	Répartition de la bande spectrale associée à un canal $h$ dans une modulation AWPM pour différents seuils $(\alpha, \beta_1, \beta_0)$ .	127
8.5	Comparaison des performances en PAPR pour différents seuils $(\alpha, \beta_1, \beta_0)$ .	127
8.6	Comparaison des performances en TEB pour différents seuils $(\alpha, \beta_1, \beta_0)$ .	127
8.7	Comparaison du PAPR de l'AWPM $_{\alpha=0.2}$ , l'OFDM et le SC-FDE dans un canal ETU.	129
8.8	Comparaison du TEB de l'AWPM $_{\alpha=0.2}$ , l'OFDM et le SC-FDE dans un canal ETU pour une égalisation ZF.	129
8.9	Compromis PAPR/TEB dans un canal ETU.	130
B.1	Schéma général d'une méthode d'ajout de signal pour la réduction du PAPR.	146
B.2	Réponse en amplitude du canal Proakis C.	148
B.3	Performances en TEB d'un système OFDM sans codage, basé sur la méthode ATR pour différentes constellations.	150
B.4	Comparaison des performances en PAPR entre l'OFDM basé sur l'ATR et l'OFDM basé sur la TR.	150

# Liste des tableaux

2.1	Stratégie de transmission des symboles en OFDM/OQAM . . . . .	46
6.1	Étude de la positivité de la fonction $s$ . . . . .	91
6.2	Solutions de l'équation (6.15) pour différentes valeurs de $c_0$ . . . . .	96
6.3	Variations de $\mathcal{H}_+$ , $\mathcal{H}_-$ et $\frac{1}{\mathcal{H}_+ - \mathcal{H}_-}$ comme une fonction de $c_0$ . . . . .	97
7.1	Paramètres de simulation. . . . .	114
7.2	Délais et gains de puissance du canal d'un canal ETU du standard LTE. . . . .	114
8.1	Coefficients d'un exemple de canal à évanouissement sélectif en fréquence. . .	125
8.2	Paramètres de simulations . . . . .	128
B.1	Coefficients du canal Proakis C. . . . .	148



# Liste des publications

## Articles de revue

- Marwa Chafii, Jacques Palicot, and Rémi Gribonval. "Closed-form Approximations of the Peak-to-Average Power Ratio Distribution for Multi-Carrier Modulation and their Applications". volume 2014, pages 1-13. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, Springer, 2014.
- Marwa Chafii, Jacques Palicot, Rémi Gribonval, and Faouzi Bader. "A Necessary Condition for Waveforms with better PAPR than OFDM". IEEE Transactions on Communications. 64(8) :3395–3405, Aug 2016.
- Marwa Chafii, Jacques Palicot, and Rémi Gribonval. "Wavelet-OFDM : An Alternative Modulation with low Energy Consumption". Accepté au Special Issue "Energy in Radiosciences", "Compte Rendus de l'Académie des Sciences (CRAS)".
- Marwa Chafii and Justin Coon. DCT-OFDM with Index Modulation. Soumis à IEEE Communications Letters.
- Marwa Chafii, Jacques Palicot, and Rémi Gribonval. " Adaptive Wavelet Packet Modulation". En préparation.

## Articles de conférences internationales

- Marwa Chafii, Jacques Palicot, and Rémi Gribonval. "Closed-form Approximations of the PAPR distribution for Multi-Carrier Modulation Systems". EUSIPCO, Lisbon, Portugal, 2014.
- Marwa Chafii, Jacques Palicot, and Rémi Gribonval. "A PAPR Upper Bound of Generalized Waveforms for Multi-Carrier Modulation Systems". ISCCSP, 6th International Symposium on Communications, Control and Signal Processing, Athens, Greece, 2014. Invited Paper.
- Marwa Chafii, M Lamarana Diallo, Jacques Palicot, Faouzi Bader, and Rémi Gribonval. "Adaptive Tone Reservation for better BER Performance in a Frequency Selective Fading Channel". In IEEE VTC2016-Spring, 2016.
- Marwa Chafii, Yahya Harbi, and Alister Burr. "Wavelet-OFDM vs. OFDM : Performance Comparison". In International Conference on Telecommunications (ICT). Thessaloniki, Greece, 2016.
- Marwa Chafii, Jacques Palicot, Rémi Gribonval, and Alister Burr. "Power Spectral Density Limitations of the Wavelet-OFDM System". EUSIPCO 2016, Budapest, Hungary, 2016
- M Lamarana Diallo, Marwa Chafii, Jacques Palicot, Rémi Gribonval, and Faouzi Bader. "Modified Tone-Reservation for Peak-to-Average Power Ratio Reduction in OFDM Systems". EUSIPCO 2016, Budapest, Hungary, 2016

## Articles de conférences nationales

- Marwa Chafii, Jacques Palicot, and Rémi Gribonval. "L'optimalité de l'OFDM en termes de performance en PAPR". GRETSI, Lyon, France, 2015.
- Marwa Chafii, Jacques Palicot, and Rémi Gribonval. "La modulation en ondelettes : une modulation alternative à faible consommation d'énergie". URSI, Rennes, France, 2016. Best Paper Award.

## Brevet

- Marwa Chafii, Jacques Palicot, and Rémi Gribonval. "Nouvelle modulation temps-fréquence adaptative". Déposé. Numéro de demande : 1656806, Numéro de soumission 1000356937

## Communications sans actes

- Marwa Chafii "Classification des modulations multiporteuses en termes de performance en PAPR.", journée des doctorants de l'IETR, juin 2014, Rennes, France
- Marwa Chafii "Performance Analysis of Wavelet-OFDM", séminaire de l'équipe Ochiai Lab., Août 2015, Yokohama, Japon
- Marwa Chafii "Étude et comparaison des performances de l'OFDM et le Wavelet-OFDM en termes de PAPR, DSP et TEB", séminaire SCEE, Novembre 2015, Rennes, France

# Bibliographie

- [1] Gartner, “Gartner estimates ict industry accounts for 2 percent of global co2 emissions,” <https://www.gartner.com/newsroom/id/503867>, 2007.
- [2] Mark P Mills, “The cloud begins with coal : Big data, big networks, big infrastructure, and big power,” *Digital Power Group*, [http://www.tech-pundit.com/wp-content/uploads/2013/07/Cloud\\_Begins\\_With\\_Coal.pdf?c761ac](http://www.tech-pundit.com/wp-content/uploads/2013/07/Cloud_Begins_With_Coal.pdf?c761ac), 2013.
- [3] Jonathan G Koomey et al., “Estimating total power consumption by servers in the us and the world,” 2007.
- [4] Gerhard Fettweis and Ernesto Zimmermann, “Ict energy consumption-trends and challenges,” in *Proceedings of the 11th International Symposium on Wireless Personal Multimedia Communications*. (Lapland, 2008, vol. 2, p. 6.
- [5] Hanna Bogucka and Andrea Conti, “Degrees of freedom for energy savings in practical adaptive wireless systems,” *Communications Magazine, IEEE*, vol. 49, no. 6, pp. 38–45, 2011.
- [6] Y. Louet et S. Zabre J. Palicot, “Traitement numériques des non-linéarités : Un état de l’art de la littérature,” Tech. Rep., Contrat Étude Supélec-France Telecom,, Février 2005.
- [7] R. Marsalek, P. Jardin, and G. Baudoin, “From post-distortion to pre-distortion for power amplifiers linearization,” *Communications Letters, IEEE*, vol. 7, no. 7, pp. 308–310, July 2003.
- [8] Oussoulare Gouba, *Approche conjointe de la réduction du facteur de crête et de la linéarisation dans le contexte OFDM.*, Ph.D. thesis, Supélec, 2013.
- [9] Stéphane Mallat, *Une exploration des signaux en ondelettes*, Editions Ecole Polytechnique, 2000.
- [10] NG De Bruijn, “Uncertainty Principles in Fourier Analysis,” *Inequalities*, vol. 2, pp. 57–71, 1967.
- [11] Stéphane Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic press, 2008.
- [12] Yves Meyer, “Principe d’incertitude, bases hilbertiennes et algèbres d’opérateurs,” *Séminaire Bourbaki*, vol. 28, pp. 209–223, 1985.
- [13] Ronald R Coifman, Yves Meyer, and Victor Wickerhauser, “Wavelet analysis and signal processing,” in *In Wavelets and their Applications*. Citeseer, 1992.
- [14] BG Evans et al., “Hardware structure for walsh-hadamard transforms,” *Electronics Letters*, vol. 34, no. 21, pp. 2005–2006, 1998.
- [15] Ronald R Coifman and M Victor Wickerhauser, “Entropy-based algorithms for best basis selection,” *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 38, no. 2, pp. 713–718, 1992.
- [16] TS ETSI, “101 475 v1. 3.1 (2001-12), broadband radio access networks (bran) ; hiperlan type 2 ; physical (phy) layer,” 2001.

- [17] ETS Etsi, "300 401, radio broadcasting systems : digital audio broadcasting (dab) to mobile, portable and fixed receivers," *European Standard (Telecommunications series), Valbonne, France, 1995.*
- [18] EN ETSI, "302 755 v1. 1.1 digital video broadcasting (dvb)," *Frame structure channel coding and modulation for a second generation digital terrestrial television broadcasting system (DVB-T2), 2009.*
- [19] K Fazel and S Kaiser, "Multi-carrier and spread spectrum systems : From ofdm and mc-cdma to lte and wimax. 2008," .
- [20] Kamran Etemad and Ming-Yee Lai, *WiMAX Technology and Network Evolution*, vol. 6, John Wiley & Sons, 2011.
- [21] Kamran Etemad, "Overview of mobile wimax technology and evolution," *Communications magazine, IEEE*, vol. 46, no. 10, pp. 31–40, 2008.
- [22] Harri Holma and Antti Toskala, *LTE for UMTS-OFDMA and SC-FDMA based radio access*, John Wiley & Sons, 2009.
- [23] G Baudoin and J Bercher, "Transformée de fourier discrète," *Notes de cours, ESIEE, Paris, France, 2001.*
- [24] John AC Bingham, "Multicarrier modulation for data transmission : An idea whose time has come," *Communications Magazine, IEEE*, vol. 28, no. 5, pp. 5–14, 1990.
- [25] Abraham Peled and Antonio Ruiz, "Frequency domain data transmission using reduced computational complexity algorithms," in *Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE International Conference on ICASSP'80. IEEE*, 1980, vol. 5, pp. 964–967.
- [26] Georgios B Giannakis, "Filterbanks for blind channel identification and equalization," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 4, no. 6, pp. 184–187, 1997.
- [27] Anna Scaglione, Georgios B Giannakis, and Sergio Barbarossa, "Redundant filterbank precoders and equalizers. i. unification and optimal designs," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 47, no. 7, pp. 1988–2006, 1999.
- [28] Zhengdao Wang and Georgios B Giannakis, "Wireless multicarrier communications where fourier meets shannon," *Signal Processing Magazine, IEEE*, 2000.
- [29] Bertrand Muquet, Zhengdao Wang, Georgios B Giannakis, Marc De Courville, and Pierre Duhamel, "Cyclic prefixing or zero padding for wireless multicarrier transmissions?," *Communications, IEEE Transactions on*, vol. 50, no. 12, pp. 2136–2148, 2002.
- [30] Richard van Nee and Ramjee Prasad, *OFDM for Wireless Multimedia Communications*, Artech House, Inc., 2000.
- [31] Anh Tai Ho, *Application des techniques multiporteuses de type OFDM pour les futurs systèmes de télécommunications par satellite*, Ph.D. thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2009.
- [32] Giovanni Cherubini, Evangelos Eleftheriou, and Sedat Ölçer, "Filtered multitone modulation for vdsl," in *Global Telecommunications Conference, 1999. GLOBECOM'99. IEEE*, 1999, vol. 2, pp. 1139–1144.
- [33] Giovanni Cherubini, Evangelos Eleftheriou, Sedat Oker, and John M Cioffi, "Filter bank modulation techniques for very high speed digital subscriber lines," *Communications Magazine, IEEE*, vol. 38, no. 5, pp. 98–104, 2000.

- [34] Tiejun Ronald Wang, John G Proakis, and James R Zeidler, "Interference analysis of filtered multitone modulation over time-varying frequency-selective fading channels," *Communications, IEEE Transactions on*, vol. 55, no. 4, pp. 717–727, 2007.
- [35] Giovanni Cherubini, Evangelos Eleftheriou, and Sedat Ölçer, "Filtered multitone modulation for very high-speed digital subscriber lines," *Selected Areas in Communications, IEEE Journal on*, vol. 20, no. 5, pp. 1016–1028, 2002.
- [36] Nevio Benvenuto, Giovanni Cherubini, and Luciano Tomba, "Achievable bit rates of dmt and fnt systems in the presence of phase noise and multipath," in *Vehicular Technology Conference Proceedings, 2000. VTC 2000-Spring Tokyo. 2000 IEEE 51st*. IEEE, 2000, vol. 3, pp. 2108–2112.
- [37] Peiman Amini, Roland Kempter, and Behrouz Farhang-Boroujeny, "A comparison of alternative filterbank multicarrier methods for cognitive radio systems," in *Proc. of the SDR Technical Conference and Product Exposition, 2006*.
- [38] Bernard Le Floch, Michel Alard, and Claude Berrou, "Coded orthogonal frequency division multiplex," *Proceedings of the IEEE*, vol. 83, no. 6, pp. 24–182, 1995.
- [39] B. Hirosaki, S. Hasegawa, and A. Sabato, "Advanced groupband data modem using orthogonally multiplexed qam technique," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COMM-34, no. 6, pp. 587—592, June 1986.
- [40] Youssef Dandach, *Etude de nouvelles méthodes de design, d'implémentation de synchronisation et d'égalisation pour le système de modulation FBMC/OQAM*, Ph.D. thesis, Université de rennes I, 2012.
- [41] M Alard, C Roche, and P Siohan, "A new family of function with a nearly optimal time-frequency localization," *Technical Report of the RNRT Project Modyr*, 1999.
- [42] M Bellanger, D Le Ruyet, D Roviras, M Terré, J Nossek, L Baltar, Q Bai, D Waldhauser, M Renfors, T Ihalainen, et al., "Fbmc physical layer : a primer," *PHYDYAS, January*, 2010.
- [43] Maurice G Bellanger, "Specification and design of a prototype filter for filter bank based multicarrier transmission," in *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2001. Proceedings. (ICASSP'01). 2001 IEEE International Conference on*. IEEE, 2001, vol. 4, pp. 2417–2420.
- [44] Frank Schaich, Thorsten Wild, and Yejian Chen, "Waveform contenders for 5g-suitability for short packet and low latency transmissions," in *2014 IEEE 79th Vehicular Technology Conference (VTC Spring)*. IEEE, 2014, pp. 1–5.
- [45] Gerhard Wunder, Peter Jung, Martin Kasparick, Thorsten Wild, Frank Schaich, Yejian Chen, Stephan Ten Brink, Ivan Gaspar, Nicola Michailow, Andreas Festag, et al., "5gnow : non-orthogonal, asynchronous waveforms for future mobile applications," *IEEE Communications Magazine*, vol. 52, no. 2, pp. 97–105, 2014.
- [46] Vida Vakilian, Thorsten Wild, Frank Schaich, Stephan ten Brink, and Jean-François Frigon, "Universal-filtered multi-carrier technique for wireless systems beyond lte," in *2013 IEEE Globecom Workshops (GC Wkshps)*. IEEE, 2013, pp. 223–228.
- [47] Werner Kozek and Andreas F Molisch, "Nonorthogonal pulseshapes for multicarrier communications in doubly dispersive channels," *Selected Areas in Communications, IEEE Journal on*, vol. 16, no. 8, pp. 1579–1589, 1998.

- [48] Adrian Kliks and Hanna Bogucka, "Improving effectiveness of the active constellation extension method for papr reduction in generalized multicarrier signals," *Wireless Personal Communications*, vol. 61, no. 2, pp. 323–334, 2011.
- [49] Gerhard Fettweis, Marco Krondorf, and Steffen Bittner, "Gfdm-generalized frequency division multiplexing," in *Vehicular Technology Conference, 2009. VTC Spring 2009. IEEE 69th*. IEEE, 2009, pp. 1–4.
- [50] Nicola Michailow, Ivan Gaspar, Stefan Krone, Michael Lentmaier, and Gerhard Fettweis, "Generalized frequency division multiplexing : Analysis of an alternative multi-carrier technique for next generation cellular systems," in *Wireless Communication Systems (ISWCS), 2012 International Symposium on*. IEEE, 2012, pp. 171–175.
- [51] Miloš I Doroslovački and Howard Fan, "Wavelet-based linear system modeling and adaptive filtering," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 44, no. 5, pp. 1156–1167, 1996.
- [52] Hongbing Zhang, H Howard Fan, and Alan Lindsey, "A wavelet packet based model for time-varying wireless communication channels," in *Wireless Communications, 2001.(SPAWC'01). 2001 IEEE Third Workshop on Signal Processing Advances in*. IEEE, 2001, pp. 50–53.
- [53] Emmanuel Jaffrot, "Wavelet based channel model for ofdm systems," in *IEEE International Symposium on Personal, Indoor, and Mobile Radio Communications, 2004*, pp. 704–708.
- [54] Michail K Tsatsanis and Georgios B Giannakis, "Time-varying system identification and model validation using wavelets," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 41, no. 12, pp. 3512–3523, 1993.
- [55] Tapan K Sarkar, Magdalena Salazar-Palma, and Michael C Wicks, *Wavelet applications in engineering electromagnetics*, Artech House, 2002.
- [56] Maurício Henrique Costa Dias and Gláucio Lima Siqueira, "On the use of wavelet-based denoising to improve power delay profile estimates from 1.8 ghz indoor wideband measurements," *Wireless Personal Communications*, vol. 32, no. 2, pp. 153–175, 2005.
- [57] Spiros D Mantis, *Localization of wireless communication emitters using Time Difference of Arrival (TDOA) methods in noisy channels*, Ph.D. thesis, Monterey, California. Naval Postgraduate School, 2001.
- [58] Xavier N Fernando, Srithar Krishnan, Hongbo Sun, and Kamyar Kazemi-Moud, "Adaptive denoising at infrared wireless receivers," in *AeroSense 2003*. International Society for Optics and Photonics, 2003, pp. 199–207.
- [59] Richard SC Wong and Vijay K Bhargava, "Denoising of low snr signals using composite wavelet shrinkage," in *Communications, Computers and Signal Processing, 1997. 10 Years PACRIM 1987-1997-Networking the Pacific Rim. 1997 IEEE Pacific Rim Conference on*. IEEE, 1997, vol. 1, pp. 302–305.
- [60] BG Negash and H Nikookar, "Wavelet-based multicarrier transmission over multipath wireless channels," *Electronics Letters*, vol. 36, no. 21, pp. 1787–1788, 2000.
- [61] Gregory W Wornell, "Emerging applications of multirate signal processing and wavelets in digital communications," *Proceedings of the IEEE*, vol. 84, no. 4, pp. 586–603, 1996.
- [62] Martin Vetterli and Jelena Kovacevic, *Wavelets and subband coding*, Number LCAV-BOOK-1995-001. Prentice-hall, 1995.

- [63] Marion J Lee, Michael A Temple, Roger L Claypoole Jr, and Richard A Raines, "Transform domain communications and interference avoidance using wavelet packet decomposition," in *Wireless Communications and Networking Conference, 2002. WCNC2002. 2002 IEEE*. IEEE, 2002, vol. 1, pp. 255–259.
- [64] Marion J Lee, Michael A Temple, Roger L Claypoole Jr, RA Raines, and James P Stephens, "Wavelet domain communication system : bit error sensitivity characterization for geographically separated transceivers (u)," in *MILCOM 2002. Proceedings*. IEEE, 2002, vol. 2, pp. 1378–1382.
- [65] RW Klein, MA Temple, RA Raines, and RL Claypoole Jr, "Interference avoidance communications using wavelet domain transformation techniques," *Electronics Letters*, vol. 37, no. 15, pp. 1, 2001.
- [66] Kohei Ohno, Takanori Ikebe, and Tetsushi Ikegami, "A proposal for an interference mitigation technique facilitating the coexistence of biphase uwb and other wideband systems," in *Ultra Wideband Systems, 2004. Joint with Conference on Ultrawideband Systems and Technologies. Joint UWBST & IWUWBS. 2004 International Workshop on*. IEEE, 2004, pp. 50–54.
- [67] Homayoun Nikookar, *Wavelet Radio : Adaptive and Reconfigurable Wireless Systems Based on Wavelets*, Cambridge University Press, 2013.
- [68] Matthieu Gautier, Marylin Arndt, and Joël Lienard, "Efficient wavelet packet modulation for wireless communication," in *Telecommunications, 2007. AICT 2007. The Third Advanced International Conference on*. IEEE, 2007, pp. 19–19.
- [69] Zhao-yang Zhang and Li-feng Lai, "A Novel OFDM Transmission Scheme with Length-Adaptive Cyclic Prefix," *Journal of Zhejiang University Science*, vol. 5, no. 11, pp. 1336–1342, 2004.
- [70] Stefano Galli and Oleg Logvinov, "Recent Developments in the Standardization of Power Line Communications within the IEEE," *Communications Magazine, IEEE*, vol. 46, no. 7, pp. 64–71, 2008.
- [71] Scott L Linfoot, Mohammad K Ibrahim, and Marwan M Al-Akaidi, "Orthogonal Wavelet Division Multiplex : An Alternative to OFDM," *Consumer Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 53, no. 2, pp. 278–284, 2007.
- [72] Christopher Liner, "An overview of wavelet transform concepts and applications," *University of Houston*, pp. 1–17, 2010.
- [73] Madan Kumar Lakshmanan and Homayoun Nikookar, "A review of wavelets for digital wireless communication," *Wireless Personal Communications*, vol. 37, no. 3-4, pp. 387–420, 2006.
- [74] A.R. Lindsey, "Wavelet packet modulation for orthogonally multiplexed communication," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 45, pp. 1336–1339, May 1997.
- [75] Matthieu Gautier and Joël Lienard, "Application de la modulation multiporteuse par paquets d'ondelettes aux transmissions sans fil," in *Annales Des Télécommunications*. Springer, 2007, vol. 62, pp. 871–893.
- [76] Matthieu Gautier, Christian Lereau, Marylin Arndt, and Joël Lienard, "Papr analysis in wavelet packet modulation," in *Communications, Control and Signal Processing, 2008. ISCCSP 2008. 3rd International Symposium on*. IEEE, 2008, pp. 799–803.

- [77] Matthieu Gautier, Marylin Arndt, and Joël Lienard, "Nouvelles formes d'ondes par paquets d'ondelettes pour les modulations multiporteuses," in *21<sup>e</sup> Colloque GRETSI, Troyes, FRA, 11-14 septembre 2007*. GRETSI, Groupe d'Etudes du Traitement du Signal et des Images, 2007.
- [78] John G Proakis, *Digital Communications*, McGraw-Hill Inc, 2001.
- [79] Steredenn Daumont, Basel Rihawi, and Yves Lout, "Root-raised cosine filter influences on papr distribution of single carrier signals," in *Communications, Control and Signal Processing, 2008. ISCCSP 2008. 3rd International Symposium on*. IEEE, 2008, pp. 841–845.
- [80] Manfred Schroeder, "Synthesis of low-peak-factor signals and binary sequences with low autocorrelation," *Information Theory, IEEE transactions on*, vol. 16, no. 1, pp. 85–89, 1970.
- [81] Larry J Greenstein and Patrick J Fitzgerald, "Phasing multitone signals to minimize peak factors," *Communications, IEEE Transactions on*, vol. 29, no. 7, pp. 1072–1074, 1981.
- [82] James Davis, Jonathan Jedwab, et al., "Peak-to-mean power control in ofdm, golay complementary sequences, and reed-muller codes," *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 45, no. 7, pp. 2397–2417, 1999.
- [83] Robert W Bäuml, Robert FH Fischer, and Johannes B Huber, "Reducing the peak-to-average power ratio of multicarrier modulation by selected mapping," *Electronics Letters*, vol. 32, no. 22, pp. 2056–2057, 1996.
- [84] Chintha Tellambura, "Computation of the continuous-time par of an ofdm signal with bpsk subcarriers," *Communications Letters, IEEE*, vol. 5, no. 5, pp. 185–187, 2001.
- [85] M. Friese, "Multitone signals with low crest factor," *Communications, IEEE Transactions on*, vol. 45, no. 10, pp. 1338–1344, Oct 1997.
- [86] M Friese, "Multicarrier modulation with low peak-to-average power ratio," *Electronics Letters*, vol. 32, no. 8, pp. 713–714, 1996.
- [87] Jacques Palicot and Yves Louët, "Power ratio definitions and analysis in single carrier modulations," in *EUSIPCO, 2005*. IEEE, 2005, pp. 1–4.
- [88] Yves Louët and Jacques Palicot, "Synthèse de la notion de facteur de crête et application aux modulations monoporteuse," in *20<sup>e</sup> Colloque sur le traitement du signal et des images, FRA, 2005*. GRETSI, Groupe d'Etudes du Traitement du Signal et des Images, 2005.
- [89] Slimane Ben Slimane, "Peak-to-average power ratio reduction of ofdm signals using pulse shaping," in *Global Telecommunications Conference, 2000. GLOBECOM'00*. IEEE. IEEE, 2000, vol. 3, pp. 1412–1416.
- [90] Richard Van Nee and Amout De Wild, "Reducing the peak-to-average power ratio of ofdm," in *Vehicular Technology Conference, 1998. VTC 98. 48th IEEE*. IEEE, 1998, vol. 3, pp. 2072–2076.
- [91] Hideki Ochiai and Hideki Imai, "On the distribution of the peak-to-average power ratio in ofdm signals," *Communications, IEEE Transactions on*, vol. 49, no. 2, pp. 282–289, 2001.
- [92] Xuefu Zhou and James Caffery Jr, "A new distribution bound and reduction scheme for ofdm papr," in *Wireless Personal Multimedia Communications, 2002. The 5th International Symposium on*. IEEE, 2002, vol. 1, pp. 158–162.

- [93] Alexandre Skrzypczak, Pierre Siohan, and Jean-Philippe Javaudin, "Analysis of the peak-to-average power ratio of the oversampled ofdm," in *Acoustics, Speech and Signal Processing, 2006. ICASSP 2006 Proceedings. 2006 IEEE International Conference on*. IEEE, 2006, vol. 4, pp. IV–IV.
- [94] Alexandre Skrzypczak, Pierre Siohan, and Jean-Philippe Javaudin, "Analysis of the peak-to-average power ratio for ofdm/oqam," in *Signal Processing Advances in Wireless Communications, 2006. SPAWC'06. IEEE 7th Workshop on*. IEEE, 2006, pp. 1–5.
- [95] Yves Louët and Sajjad Hussain, "Peak-to-mean envelope power ratio statistical analysis of continuous ofdm signal," in *Vehicular Technology Conference, 2008. VTC Spring 2008. IEEE*. IEEE, 2008, pp. 1681–1685.
- [96] Tao Jiang, Mohsen Guizani, Hsiao-Hwa Chen, Weidong Xiang, and Yiyang Wu, "Derivation of papr distribution for ofdm wireless systems based on extreme value theory," *Wireless Communications, IEEE Transactions on*, vol. 7, no. 4, pp. 1298–1305, 2008.
- [97] Harold S Shapiro, *Extremal problems for polynomials and power series*, Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1951.
- [98] Walter Rudin, "Some theorems on fourier coefficients," *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 10, no. 6, pp. 855–859, 1959.
- [99] Désiré Guel and Jacques Palicot, "A figure-of-merit for evaluating the overall performance of ofdm papr reduction techniques in the presence of high power amplifier," in *Wireless and Mobile Communications, 2009. ICWMC'09. Fifth International Conference on*. IEEE, 2009, pp. 217–222.
- [100] Désiré Guel and Jacques Palicot, "Clipping formulated as an adding signal technique for ofdm peak power reduction," in *Vehicular Technology Conference, 2009. VTC Spring 2009. IEEE 69th*. IEEE, 2009, pp. 1–5.
- [101] Satoshi Kimura, Takashi Nakamura, Masato Saito, and Minoru Okada, "Papr reduction for ofdm signals based on deep clipping," in *Communications, Control and Signal Processing, 2008. ISCCSP 2008. 3rd International Symposium on*. IEEE, 2008, pp. 911–916.
- [102] Alexandre Skrzypczak, Yves Louët, Cédric Lehouey, Stéphane Molton, and Olivier Rousset, "Improving a dvt-h modulator performance by using deep clipping," in *Telecommunications (ICT), 2010 IEEE 17th International Conference on*. IEEE, 2010, pp. 204–210.
- [103] P Boonsrimuang, E Puttawong, H Kobayashi, and T Paungma, "Papr reduction using smooth clipping in ofdm system," in *The 3rd information and computer engineering post-graduate workshop*, 2003, pp. 158–161.
- [104] Salvatore Ragusa, Jacques Palicot, Yves Louët, and Christian Lereau, "Invertible clipping for increasing the power efficiency of ofdm amplification," in *ICT 2006*, 2006.
- [105] Salvatore Ragusa, *Écrêtage inversible pour l'amplification non-linéaire des signaux OFDM dans les terminaux mobiles*, Ph.D. thesis, Université Joseph-Fourier-Grenoble I, 2006.
- [106] Lamarana Mamadou Diallo, Jacques Palicot, and Faouzi Bader, "A step forward on adaptive iterative clipping approach for papr reduction in ofdm system," *International Journal On Advances in Telecommunications*, vol. 9, no. 1 & 2, 2016.
- [107] Jose Tellado-Mourelo, *Peak to average power reduction for multicarrier modulation*, Ph.D. thesis, Stanford University, 1999.

- [108] Sidkiéta Zabré, Jacques Palicot, Yves Louët, and Christian Lereau, "Soep approach for ofdm peak-to-average power ratio reduction in the signal adding context," in *Signal Processing and Information Technology, 2006 IEEE International Symposium on*. IEEE, 2006, pp. 834–839.
- [109] Sidkiéta Zabre, "Amplification non-linéaire d'un multiplex de porteuses modulées à fort facteur de crête," *These de Doctorat, Université de Rennes I*, 2007.
- [110] Stefan H Müller and Johannes B Huber, "Ofdm with reduced peak-to-average power ratio by optimum combination of partial transmit sequences," *Electronics letters*, vol. 33, no. 5, pp. 368–369, 1997.
- [111] Stefan H Müller and Johannes B Huber, "A comparison of peak power reduction schemes for ofdm," in *Global Telecommunications Conference, 1997. GLOBECOM'97.*, IEEE. IEEE, 1997, vol. 1, pp. 1–5.
- [112] Denis JG Mestdagh and Paul MP Spruy, "A method to reduce the probability of clipping in dmt-based transceivers," *Communications, IEEE Transactions on*, vol. 44, no. 10, pp. 1234–1238, 1996.
- [113] TA Wilkinson and AE Jones, "Minimisation of the peak to mean envelope power ratio of multicarrier transmission schemes by block coding," in *Vehicular Technology Conference, 1995 IEEE 45th*. IEEE, 1995, vol. 2, pp. 825–829.
- [114] Richard DJ Van Nee, "Ofdm codes for peak-to-average power reduction and error correction," in *Global Telecommunications Conference, 1996. GLOBECOM'96. 'Communications : The Key to Global Prosperity*. IEEE, 1996, vol. 1, pp. 740–744.
- [115] Kenneth G Paterson and Vahid Tarokh, "On the existence and construction of good codes with low peak-to-average power ratios," *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 46, no. 6, pp. 1974–1987, 2000.
- [116] James Arthur Davis and Jonathan Jedwab, "Peak-to-mean power control and error correction for ofdm transmission using golay sequences and reed-muller codes," *Electronics Letters*, vol. 33, no. 4, pp. 267–268, 1997.
- [117] Yves Louët, "Etudes et performances des codes de reed-muller pour la réduction du facteur de crête dans les modulations ofdm," *These de Doctorat, Université de Rennes I*, 2000.
- [118] Irving Kalet, "The multitone channel," *Communications, IEEE Transactions on*, vol. 37, no. 2, pp. 119–124, 1989.
- [119] Peter S Chow, John M Cioffi, JA Bingham, et al., "A practical discrete multitone transceiver loading algorithm for data transmission over spectrally shaped channels," *IEEE Transactions on communications*, vol. 43, no. 234, pp. 773–775, 1995.
- [120] A. Czylik, "Adaptive OFDM for Wideband Radio Channels," in *Global Telecommunications Conference, 1996. GLOBECOM '96. 'Communications : The Key to Global Prosperity*, Nov 1996, vol. 1, pp. 713–718 vol.1.
- [121] Jacques Palicot, Honggang Zhang, and Christophe Moy, "On the road towards green radio," *The Radio Science Bulletin*, , no. 347, pp. 40–56, 2013.
- [122] Jacques Palicot, "Cognitive radio : an enabling technology for the green radio communications concept," in *Proceedings of the 2009 International Conference on Wireless Communications and Mobile Computing : Connecting the World Wirelessly*. ACM, 2009, pp. 489–494.

- [123] T Keller and L Hanzo, "Blind-detection Assisted Sub-band Adaptive Turbo-Coded OFDM Schemes," in *Vehicular Technology Conference, 1999 IEEE 49th*. IEEE, 1999, vol. 1, pp. 489–493.
- [124] Zukang Shen, Jeffrey G Andrews, and Brian L Evans, "Adaptive resource allocation in multiuser ofdm systems with proportional rate constraints," *Wireless Communications, IEEE Transactions on*, vol. 4, no. 6, pp. 2726–2737, 2005.
- [125] Pengfei Xia, Shengli Zhou, and Georgios B Giannakis, "Adaptive MIMO-OFDM based on Partial Channel State Information," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 52, no. 1, pp. 202–213, 2004.
- [126] Masoud Olfat, Farrokh R Farrokhi, and KJ Liu, "Power allocation for ofdm using adaptive beamforming over wireless networks," *Communications, IEEE Transactions on*, vol. 53, no. 3, pp. 505–514, 2005.
- [127] Gourab Bansal, Md Jahangir Hossain, and Vijay K Bhargava, "Adaptive Power Loading for OFDM-based Cognitive Radio Systems with Statistical Interference Constraint," *Wireless Communications, IEEE Transactions on*, vol. 10, no. 9, pp. 2786–2791, 2011.
- [128] J Faezah and K Sabira, "Adaptive Modulation for OFDM Systems," *International Journal of Communication Networks and Information Security (IJCNIS)*, vol. 1, no. 2, 2009.
- [129] Lajos Hanzo, Choon Hin Wong, and Mong-Suan Yee, *Adaptive Wireless Transceivers : Turbo-Coded, Turbo-Equalised and Space-Time Coded TDMA, CDMA and OFDM Systems*, John Wiley & Sons, 2002.
- [130] Lei Ye and Alister Burr, "Adaptive modulation and Code Rate for Turbo Coded OFDM Transmissions," in *Vehicular Technology Conference, 2007. VTC2007-Spring. IEEE 65th*. IEEE, 2007, pp. 2702–2706.
- [131] Thomas Keller, Tong-Hooi Liew, and Lajos Hanzo, "Adaptive Redundant Residue Number System Coded Multicarrier Modulation," *Selected Areas in Communications, IEEE Journal on*, vol. 18, no. 11, pp. 2292–2301, 2000.
- [132] ANSI/T1E1.4/94-007 AINSI, "Asymmetric Digital Subscriber Line (ADSL) Metallic Interface," Tech. Rep., August 1997.
- [133] 3GPP TS (36.213 version 11.3.0 Release 11), "LTE :Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA) ; Physical layer procedures," July 2013.
- [134] Robert C Daniels, Constantine M Caramanis, and Robert W Heath, "Adaptation in Convolutionally Coded MIMO-OFDM Wireless Systems through Supervised Learning and SNR Ordering," *Vehicular Technology, IEEE Transactions on*, vol. 59, no. 1, pp. 114–126, 2010.
- [135] Joao P Leite, Paulo Henrique P De Carvalho, and Robson D Vieira, "A Flexible Framework based on Reinforcement Learning for Adaptive Modulation and Coding in OFDM Wireless Systems," in *Wireless Communications and Networking Conference (WCNC), 2012 IEEE*. IEEE, 2012, pp. 809–814.
- [136] Raffaele Bruno, Antonino Masaracchia, and Andrea Passarella, "Robust Adaptive Modulation and Coding (AMC) Selection in LTE Systems Using Reinforcement Learning," in *Vehicular Technology Conference (VTC Fall), 2014 IEEE 80th*. IEEE, 2014, pp. 1–6.
- [137] Suvra S Das, Elisabeth De Carvalho, and Ramjee Prasad, "Performance Analysis of OFDM Systems with Adaptive Subcarrier Bandwidth," *Wireless Communications, IEEE Transactions on*, vol. 7, no. 4, pp. 1117–1122, 2008.

- [138] Jueping Cai, Wentao Song, and Zan Li, “Doppler Spread Estimation for Mobile OFDM Systems in Rayleigh Fading Channels,” *Consumer Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 49, no. 4, pp. 973–977, 2003.
- [139] KVS Hari, DS Baum, AJ Rustako, RS Roman, and D Trinkwon, “Channel Models for Fixed Wireless Applications,” *IEEE 802.16 Broadband Wireless Access Working Group*, 2003.
- [140] Suvra S Das, Suvra S Das, Muhammad I Rahman, FHP Fitzek, and Ramjee Prasad, “Variable Guard Interval for OFDM based WLANs,” *PIMRC 2005*, 2005.
- [141] Michael R Souryal and Raymond L Pikholtz, “Adaptive Modulation with Imperfect Channel Information in OFDM,” in *Communications, 2001. ICC 2001. IEEE International Conference on*. IEEE, 2001, vol. 6, pp. 1861–1865.
- [142] Sigen Ye, Rick S Blum, and Leonard J Cimini Jr, “Adaptive OFDM systems with imperfect channel state information,” *Wireless Communications, IEEE Transactions on*, vol. 5, no. 11, pp. 3255–3265, 2006.
- [143] M. Chafii, J. Palicot, and R. Gribonval, “A PAPR upper bound of Generalized Waveforms for Multi-Carrier modulation systems,” *ISCCSP, 6th International Symposium on Communications, Control and Signal Processing, Athens, Greece*, 2014.
- [144] M. Chafii, J. Palicot, and R. Gribonval, “Closed-form Approximations of the PAPR distribution for Multi-Carrier Modulation systems,” *Eusipco, Lisbon, Portugal*, 2014.
- [145] Marwa Chafii, Jacques Palicot, and Rémi Gribonval, “Closed-form approximations of the peak-to-average power ratio distribution for multi-carrier modulation and their applications,” *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, vol. 2014, no. 1, pp. 1–13, 2014.
- [146] Brian Knaeble, *Variations on the projective central limit theorem*, Ph.D. thesis, University of Utah, 2010.
- [147] C. Siclet, *Application de la théorie des bancs de filtres à l’analyse et à la conception de modulations multiporteuses orthogonales et biorthogonales*, Ph.D. thesis, Université Rennes 1, France, 2002.
- [148] A. Skrzypczak, *Contribution à l’étude des modulations multiporteuses OFDM/OQAM et OFDM suréchantillonnées*, Ph.D. thesis, Rennes 1 University, France, 2007.
- [149] Marwa Chafii, Jacques Palicot, and Rémi Gribonval, “L’optimalité de l’ofdm en termes de performance en papr,” in *25ème Colloque Grets 2015*, 2015.
- [150] Marwa Chafii, Jacques Palicot, Rémi Gribonval, and Faouzi Bader, “A Necessary Condition for Waveforms with Better PAPR than OFDM,” *to be published in Communications, IEEE Transactions on*, 2016.
- [151] Alexandre Skrzypczak, Pierre Siohan, and Jean-Philippe Javardin, “Peak-to-Average Power Ratio Issues for Pulse-Shaped Multicarrier Modulations,” in *Advances on Processing for Multiple Carrier Schemes : OFDM & OFDMA*, Faouzi Bader and Nizar Zorba, Eds., pp. 43–90. Nova Science Publishers, Inc., 2011.
- [152] Adrian Kliks, *New Transmission and Reception Techniques of the Generalized Multicarrier Signals*, Ph.D. thesis, Poznan University of Technology, 2011.
- [153] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, 2004.

- [154] Damien Roque and Cyrille Siclet, "Performances of weighted cyclic prefix ofdm with low-complexity equalization," *IEEE Communications Letters*, vol. 17, no. 3, pp. 439–442, 2013.
- [155] Damien Roque, *Modulations Multiporteuses WCP-OFDM : évaluation des performances en environnement radiomobile*, Ph.D. thesis, Université de Grenoble, 2012.
- [156] Hanna Bogucka, Alexander M Wyglinski, Srikanth Pagadarai, and Adrian Kliks, "Spectrally Agile Multicarrier Waveforms for Opportunistic Wireless Access," *Communications Magazine, IEEE*, vol. 49, no. 6, pp. 108–115, 2011.
- [157] M. Chafii, J. Palicot, R. Gribonval, and A. Burr, "Power Spectral Density Limitations of the Wavelet-OFDM System," *23rd International Conference on Telecommunications (ICT), Thessaloniki, Greece*, 2016.
- [158] M. Chafii, J. Palicot, R. Gribonval, and A. Burr, "Power Spectral Density Limitations of the Wavelet-OFDM System," *Eusipco, Budapest, Hungary*, 2016.
- [159] Marwa Chafii, Jacques Palicot, and Rémi Gribonval, "The Wavelet Modulation : an Alternative Modulation with Low Energy Consumption," *Submitted to Special Issue "Energy in Radiosciences", "Compte Rendus de l'Académie des Sciences (CRAS)"*, 2016.
- [160] Waleed Saad, N El-Fishawy, S El-Rabaie, and Mona Shokair, "An Efficient Technique for OFDM Dystem using Discrete Wavelet Transform," in *Advances in Grid and Pervasive Computing*, pp. 533–541. Springer, 2010.
- [161] Jamaluddin Zakaria and Mohd Fadzli Mohd Salleh, "Wavelet-based OFDM Analysis : BER Performance and PAPR Profile for Various Wavelets," in *Industrial Electronics and Applications (ISIEA), 2012 IEEE Symposium on*. IEEE, 2012, pp. 29–33.
- [162] Deepak Gupta, Vipin B Vats, and Kamal K Garg, "Performance Analysis of DFT-OFDM, DCT-OFDM, and DWT-OFDM Systems in AWGN Channel," in *Wireless and Mobile Communications, 2008. ICWMC'08. The Fourth International Conference on*. IEEE, 2008, pp. 214–216.
- [163] Marius Oltean and Miranda Naforniță, "Efficient Pulse Shaping and Robust Data Transmission Using Wavelets," in *Intelligent Signal Processing, 2007. WISP 2007. IEEE International Symposium on*. IEEE, 2007, pp. 1–6.
- [164] Alaa Ghaith, Rima Hatoum, Hiba Mrad, and Ali Alaeddine, "Performance Analysis of the Wavelet-OFDM New Scheme in AWGN Channel," in *Communications and Information Technology (ICCIT), 2013 Third International Conference on*. IEEE, 2013, pp. 225–229.
- [165] Swati Sharma and Sanjeev Kumar, "BER Performance Evaluation of FFT-OFDM and DWT-OFDM," *International Journal of Network and Mobile Technologies*, vol. 2, no. 2, pp. 110–116, 2011.
- [166] Kavita Trivedi, Anshu Khare, and Saurabh Dixit, "BER Performance of OFDM with Discrete Wavelet Transform for Time Dispersive Channel," *International Journal of Research in Engineering and Technology*, vol. 3, pp. 2319–1163, 2014.
- [167] M Vetterli and TA Tony Verma, "Filterbank implementation of meyer's wavelet," *EE392G Stanford University*, 1998.
- [168] Adel AM Saleh, "Frequency-independent and frequency-dependent nonlinear models of twt amplifiers," *IEEE Transactions on communications*, vol. 29, no. 11, pp. 1715–1720, 1981.
- [169] TS ETSI, "136 101 V8. 23.0 (3GPP TS 36.101 V8. 23.0 Release 8)," .

- [170] David Falconer, Sirikiat Lek Ariyavisitakul, Anader Benyamin-Seeyar, and Brian Eidson, "Frequency domain equalization for single-carrier broadband wireless systems," *IEEE Communications Magazine*, vol. 40, no. 4, pp. 58–66, 2002.
- [171] F. Pancaldi, G. M. Vitetta, R. Kalbasi, N. Al-Dhahir, M. Uysal, and H. Mheidat, "Single-carrier frequency domain equalization," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 25, no. 5, pp. 37–56, September 2008.
- [172] Marwa Chafii, M Lamarana Diallo, Jacques Palicot, Faouzi Bader, and Rémi Gribonval, "Adaptive tone reservation for better ber performance in a frequency selective fading channel," in *IEEE VTC-Spring*, 2016.



# Résumé

L'OFDM est une technique de modulation multiporteuses largement utilisée dans des applications de communications filaires et sans-fils comme le DVB-T/T2, le Wifi, et la 4G, grâce à sa robustesse contre les canaux sélectifs en fréquence en comparaison avec la modulation monoporteuse. Cependant, le signal OFDM souffre de grandes variations d'amplitude. Les fluctuations de l'enveloppe du signal OFDM génèrent des distorsions non-linéaires quand on introduit le signal dans un équipement non-linéaire comme l'amplificateur de puissance. Réduire les variations du signal améliore le rendement de l'amplificateur, réduit la consommation énergétique et diminue les émissions de CO<sub>2</sub> des transmissions numériques.

Le PAPR (rapport de la puissance crête sur la puissance moyenne) est une variable aléatoire qui a été introduite pour mesurer les variations du signal. Il existe plusieurs systèmes multiporteuses basés sur différentes bases de modulation et filtres de mise en forme. Nous prouvons d'abord dans ces travaux que le PAPR dépend de cette structure de modulation. Ensuite, nous étudions le comportement du PAPR vis-à-vis des formes d'ondes utilisées dans la modulation. Le problème de réduction du PAPR est ainsi formulé en un problème d'optimisation. Par ailleurs, une condition nécessaire pour construire des formes d'ondes avec un meilleur PAPR que l'OFDM est développée. Cette condition est notamment satisfaite par des bases en ondelettes. Enfin, une nouvelle forme d'onde en paquets d'ondelettes adaptative est proposée, permettant des gains significatifs en PAPR, tout en maintenant les avantages des modulations multiporteuses.

**Mots clés :** Facteur de crête, OFDM, Modulations en ondelettes, Modulations adaptatives.

# Abstract

OFDM is a multicarrier modulation system widely used in wireline and wireless applications such as DVB-T/T2, Wifi, and 4G, due to its resilience against frequency selective channels compared with the single carrier modulation systems. However, the OFDM signal suffers from large amplitude variations. The fluctuations of the OFDM envelope generate non-linear distortions when we introduce the signal into a non-linear device like the power amplifier. Reducing the variations of the signal improves the power amplifier efficiency, reduces the energy consumption and decreases CO<sub>2</sub> emissions.

The peak-to-average power ratio (PAPR) has been introduced as a random variable that measures the power variations of the signal. There exist several multicarrier modulation systems based on different modulation basis and shaping filters. We first prove in this work that the PAPR depends on this modulation structure. Moreover, the behaviour of the PAPR regarding to the modulation waveforms is analysed and the PAPR reduction problem is formulated as an optimization problem. Furthermore, a necessary condition for designing waveforms with better PAPR than OFDM is developed. This necessary condition is particularly satisfied by wavelet basis. Finally, a new adaptive wavelet packet waveform is proposed, allowing significant gain in terms of PAPR, while keeping the advantages of multicarrier modulations.

**Keywords :** PAPR, OFDM, Wavelet modulation, Adaptive modulation.