



**HAL**  
open science

# Invariants globaux des variétés hyperboliques quaternioniques

Zoe Philippe

► **To cite this version:**

Zoe Philippe. Invariants globaux des variétés hyperboliques quaternioniques. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Bordeaux, 2016. Français. NNT : 2016BORD0453 . tel-01661448

**HAL Id: tel-01661448**

**<https://theses.hal.science/tel-01661448>**

Submitted on 12 Dec 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

présentée à

**L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX**

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par Zoé PHILIPPE

sous la direction de Christophe BAVARD

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR**

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

\*\*\*\*\*

# Invariants globaux des espaces hyperboliques quaternioniques

(Global invariants of quaternionic hyperbolic spaces)

\*\*\*\*\*

Soutenue le 15 décembre 2016 à l'Institut de Mathématiques de Bordeaux

après avis de

Ruth KELLERHALS	Full Professor, Université de Fribourg – Suisse	Rapporteur
Martin DERAUX	Professeur, Université Grenoble Alpes	Rapporteur

et devant le jury de thèse composé de

Christophe BAVARD	Professeur, Université de Bordeaux	Directeur
Ruth KELLERHALS	Full Professor, Université de Fribourg – Suisse	Rapporteur
Elisha FALBEL	Professeur, Université Paris VI – Pierre et Marie Curie	Examinateur
Nicolas BERGERON	Professeur, Université Paris VI – Pierre et Marie Curie	Président du jury
Vincent KOZIARZ	Professeur, Université de Bordeaux	Examinateur

---

*Résumé*

Dans une première partie de cette thèse, nous donnons des minoration universelles – ne dépendant que de la dimension – explicites, de trois invariants globaux des quotients des espaces hyperboliques quaternioniques : leur *rayon maximal*, leur *volume*, ainsi que leur *caractéristique d’Euler*. Nous donnons également une majoration de leur *constante de Margulis*, montrant que celle-ci décroît au moins comme une puissance négative de la dimension.

Dans une seconde partie, nous étudions un réseau remarquable des isométries du plan hyperbolique quaternionique, le *groupe modulaire d’Hurwitz*. Nous montrons en particulier qu’il est engendré par quatre éléments, et construisons un domaine fondamental pour le sous-groupe des isométries de ce réseau qui stabilisent un point à l’infini.

MOTS CLÉS : *Espaces hyperboliques, espaces hyperboliques de dimension supérieure, espaces hyperboliques quaternioniques, réseaux des groupes de Lie, rayon maximal, constante de Margulis, caractéristique d’Euler, domaine de Ford, entiers d’Hurwitz, groupe modulaire d’Hurwitz*

---

*Abstract*

In the first part of this thesis, we derive explicit universal – that is, depending only on the dimension – lower bounds on three global invariants of quaternionic hyperbolic spaces : their *maximal radius*, their *volume*, and their *Euler characteristic*. We also exhibit an upper bound on their *Margulis constant*, showing that this last quantity decreases at least like a negative power of the dimension.

In the second part, we study a specific lattice of isometries of the quaternionic hyperbolic plane : the *Hurwitz modular group*. In particular, we show that this group is generated by four elements, and we construct a fundamental domain for the subgroup of isometries of this lattice stabilising a point on the boundary of the quaternionic hyperbolic plane.

KEY WORDS : *Hyperbolic spaces, hyperbolic spaces of higher dimension, quaternionic hyperbolic spaces, lattices in Lie groups, maximal radius, Margulis constant, Euler characteristic, Ford domain, Hurwitz integers, Hurwitz modular group*

---

Les travaux présentés dans cette thèse ont été partiellement soutenus par le Pool de Recherche de L’Université de Fribourg (Suisse).

---

*Table des matières*

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Les espaces hyperboliques quaternioniques</b>	<b>15</b>
1.1 L'algèbre des quaternions de Hamilton . . . . .	16
1.1.1 Structure de $\mathbb{H}$ . . . . .	16
1.1.2 Algèbre linéaire sur $\mathbb{H}$ . . . . .	18
1.2 Modèles standards pour $H_{\mathbb{H}}^n$ . . . . .	21
1.2.1 Modèle du demi-espace . . . . .	23
1.2.2 Modèle de la boule unité . . . . .	26
1.3 Les isométries de $H_{\mathbb{H}}^n$ . . . . .	27
1.3.1 Classification des isométries de $H_{\mathbb{H}}^n$ . . . . .	27
1.3.2 Sous-groupes élémentaires de $\text{Isom}(H_{\mathbb{H}}^n)$ . . . . .	28
1.4 Sous-espaces totalement géodésiques de $H_{\mathbb{H}}^n$ . . . . .	29
1.4.1 Géodésiques . . . . .	29
1.4.2 Sous-variétés quaternioniques : les $\mathbb{H}^k$ -plans . . . . .	29
1.4.3 Sous-variétés complexes : les $\mathbb{C}^k$ -plans . . . . .	31
1.4.4 Sous-variétés réelles : les $\mathbb{R}^k$ -plans . . . . .	31
1.5 Le sous-groupe parabolique $\mathcal{P}_{\infty}$ . . . . .	32
1.5.1 Décomposition de Langlands de $\mathcal{P}_{\infty}$ . . . . .	33
1.5.1.1 Le groupe $\mathcal{M}$ : les rotations d'Heisenberg. . . . .	34
1.5.1.2 Le groupe $\mathcal{A}$ : les dilatations d'Heisenberg. . . . .	35
1.5.1.3 Le groupe $\mathcal{N}$ : les translations d'Heisenberg . . . . .	36
1.5.1.4 Décomposition explicite des éléments de $\mathcal{P}_{\infty}$ . . . . .	36
1.5.2 Décomposition horosphérique de $H_{\mathbb{H}}^n$ . . . . .	37
<b>2 Rayon maximal dans <math>H_{\mathbb{H}}^n</math></b>	<b>39</b>
2.1 Inégalité de type Jørgensen et conséquences . . . . .	41
2.2 Résultats intermédiaires . . . . .	45
2.3 Preuve du théorème principal . . . . .	49
2.4 Autres invariants globaux : volume, constante de Margulis . . . . .	51
<b>3 Volume et caractéristique d'Euler des quotients de <math>H_{\mathbb{H}}^n</math></b>	<b>53</b>
3.1 Contexte . . . . .	55
3.1.1 Métriques canoniques et constantes de Wang de $G$ . . . . .	55
3.1.2 Submersion riemannienne et formules de courbures . . . . .	56
3.2 Une borne sur le volume de $\Gamma \backslash G$ . . . . .	58

3.2.1	Courbures sectionnelles de $G$ . . . . .	60
3.2.2	Volume d'une boule plongée dans $\Gamma \backslash G$ . . . . .	62
3.3	Volume des quotients de $H_{\mathbb{H}}^n$ . . . . .	64
3.3.1	L'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}(n, 1)$ . . . . .	64
3.3.2	Métrique standard normalisée sur $\mathbf{Sp}(n, 1)$ . . . . .	66
3.3.3	Minoration du volume de $\Gamma \backslash H_{\mathbb{H}}^n$ . . . . .	70
3.4	Caractéristique d'Euler des quotients de $H_{\mathbb{H}}^n$ . . . . .	72
3.4.1	Les constantes de Gauss-Bonnet pour $H_{\mathbb{H}}^n$ . . . . .	74
3.4.1.1	Matrice de courbure $\Omega$ de $H_{\mathbb{H}}^n$ . . . . .	74
3.4.1.2	Calcul de Pfaff ( $\Omega$ ) . . . . .	80
3.4.2	Minoration de la caractéristique d'Euler de $\Gamma \backslash H_{\mathbb{H}}^n$ . . . . .	83
3.5	Quotients de $H_{\mathbb{K}}^n$ , $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ . . . . .	85
3.5.1	Volume des quotients de $H_{\mathbb{K}}^n$ . . . . .	85
3.5.2	Caractéristique d'Euler des quotients de $H_{\mathbb{K}}^n$ . . . . .	88
<b>4</b>	<b>Construction d'un domaine fondamental dans <math>H_{\mathbb{H}}^2</math></b> . . . . .	<b>89</b>
4.1	Géométrie du bord de $H_{\mathbb{H}}^2$ dans le modèle du demi-espace . . . . .	92
4.1.1	Les isométries de $\mathcal{H}$ . . . . .	93
4.1.2	Action des éléments de $\mathcal{P}_{\infty}$ sur $\mathcal{H}$ . . . . .	95
4.2	Les entiers d'Hurwitz . . . . .	96
4.2.1	Description de $D_4$ . . . . .	96
4.2.2	Premières propriétés de $\Gamma$ . . . . .	98
4.3	Un domaine fondamental pour $\Gamma_{\infty}$ . . . . .	99
4.3.1	Un domaine fondamental pour $\Delta$ . . . . .	100
4.3.2	Une présentation de $\Delta$ . . . . .	105
4.3.3	Un système de générateurs et un domaine fondamental pour $\Gamma_{\infty}$ . . . . .	108
4.4	Un système générateur pour $\Gamma$ . . . . .	110
	<b>Quelques mots de conclusion</b> . . . . .	<b>111</b>
	<b>A Constante de Margulis des espaces hyperboliques</b> . . . . .	<b>115</b>
	<b>B Calcul de la constante de Gauss-Bonnet en dimension 2</b> . . . . .	<b>125</b>
	<b>C Tables du chapitre 4</b> . . . . .	<b>129</b>
	<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>135</b>



---

*Introduction*

**Invariants globaux des espaces symétriques de type non-compact**

Le contexte général dans lequel s'inscrit cette thèse est celui de la recherche de *bornes universelles* sur les invariants globaux des espaces *localement symétriques de courbure négative* (non nécessairement strictement), c'est-à-dire, des quotients d'un espace symétrique de type non-compact par un sous-groupe discret de son groupe d'isométries. Par *borne universelle* pour un tel objet, on entend une quantité ne dépendant que de son revêtement universel, autrement dit, que de l'espace globalement symétrique sur lequel est modelée sa géométrie.

Le *volume* de ces espaces par exemple, ne peut-être arbitrairement petit : si  $M$  est un espace globalement symétrique de type non-compact, il existe une constante strictement positive  $\mathbf{v}_M$  qui minore le volume de toutes les variétés ou orbifolds localement modelés sur  $M$ . C'est un premier exemple, naturel, d'invariant global possédant une minoration universelle.

Donnons tout de suite un second exemple. Si  $N$  est une variété riemannienne, le *rayon maximal* de  $N$  est le rayon de la plus grande boule plongée dans  $N$ . Une fois encore, pour les espaces symétriques de type non-compact, cette quantité ne peut être aléatoirement mince : si  $M$  est globalement symétrique, de type non-compact, il existe une constante strictement positive  $\mathbf{r}_M$  telle que toute variété modelée sur  $M$  contient une boule plongée de rayon  $\mathbf{r}_M$ . Le rayon maximal constitue ainsi un autre invariant global universellement minoré de ces espaces.

Il est immédiat que l'existence de la constante positive  $\mathbf{r}_M$  implique celle de  $\mathbf{v}_M$  : si un quotient de  $M$  contient une boule plongée de rayon  $\mathbf{r}_M$ , son volume est minoré par celui d'une telle boule dans  $M$ ,

$$\mathbf{v}_M \geq \text{Vol}(\text{boule de rayon } \mathbf{r}_M \text{ dans } M).$$

L'existence de la constante  $\mathbf{r}_M$  quand à elle, est connue au moins depuis les années 60, et est généralement attribuée à Daniel Každan et Gregory Margulis [KM68], et à Hsien-Chung Wang [Wan69]. Elle est impliquée par l'existence d'un troisième invariant global, défini comme suit : pour une variété riemannienne  $M$ , considérons la propriété *Pour toute variété  $N$  recouverte par  $M$ , et pour tout point  $x$  de  $N$ , le groupe engendré par les lacets géodésiques de  $N$  basés en  $x$ , et de longueur plus petite que  $\varepsilon$ , est virtuellement nilpotent.*

Par définition, la *constante de Margulis* de  $M$ ,  $\mu_M$ , est alors le sup des  $\varepsilon$  pour lesquels cette propriété est vraie. Un résultat fondamental de la géométrie des espaces symétriques, le *lemme de Margulis*, affirme que si  $M$  est globalement symétrique et de type non-compact, cette quantité est à nouveau, comme la borne inférieure du volume ou du rayon maximal des quotients de  $M$ , strictement positive.

Par ailleurs, la constante de Margulis est liée au rayon maximal par la relation

$$\mathbf{r}_M \geq \mu_M/2,$$

et la stricte positivité de  $\mu_M$  implique donc celle de  $\mathbf{r}_M$ .

Enfin, un quatrième invariant est celui de la *caractéristique d'Euler* d'un espace localement symétrique de type non-compact. Pour une variété riemannienne homogène (de dimension paire)  $M$ , le théorème de Gauss-Bonnet généralisé assure qu'il existe une constante  $\omega_M$  telle que

$$\chi(N) = \omega_M \cdot \text{Vol}(N),$$

pour tout quotient *compact*  $N$  de  $M$ . Si  $M$  est globalement symétrique et de type non-compact, les travaux de Mikhaïl Gromov [Gro82, Théorème C'], dans les années 80, ont montré que cette relation reste vraie pour tous les quotients de  $M$ , compacts ou non. Sachant par ailleurs que le volume de ces quotients ne peut être arbitrairement petit, on en conclut qu'il en va de même de leur caractéristique d'Euler : il existe une constante strictement positive  $\chi_M$  qui minore la caractéristique d'Euler de toutes les variétés ou orbifolds modelés sur  $M$ .

Dans cette thèse, nous donnons une description quantitative de ces quatre invariants, et plus particulièrement du rayon maximal  $\mathbf{r}_M$  et du volume  $\mathbf{v}_M$ , lorsque les espaces globalement symétriques  $M$  sont les *espaces hyperboliques quaternioniques*  $H_{\mathbb{K}}^p$ .

Avant d'entrer plus avant dans la description de ces quantités, synthétisons ce qui précède : pour un espace globalement symétrique de type non-compact  $M$ , nous disposons de quatre invariants,  $\mathbf{v}_M$ ,  $\mathbf{r}_M$ ,  $\mu_M$  et  $\chi_M$ , et ces quantités vérifient les relations

$$\mathbf{r}_M \geq \mu_M/2 > 0,$$

puis

$$\mathbf{v}_M \geq \text{Vol}(B(\mathbf{r}_M)) > 0$$

et enfin

$$\chi_M = w_M \cdot \mathbf{v}_M.$$


---



## Rayon maximal et volume des quotients des espaces hyperboliques

Les espaces localement symétriques de courbure *strictement* négative sont les quotients des espaces hyperboliques  $H_{\mathbb{K}}^n$  sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$ , et ceux du plan hyperbolique sur les octaves de Cayley,  $H_{\mathbb{O}}^2$ .

L'étude quantitative des invariants globaux de ces objets est la plus avancée pour les variétés et les orbifolds hyperboliques réels de dimension 2 et 3, mais les variétés et orbifolds hyperboliques réels de dimensions supérieures, ou hyperboliques complexes, sont aussi largement étudiés. Pour ce qui est des invariants globaux des quotients des espaces hyperboliques sur  $\mathbb{H}$ , avant cette thèse, seuls deux résultats étaient connus, que nous mentionnons plus bas (une minoration du rayon maximal des *variétés* hyperboliques quaternioniques *fermées*, dûe à Peter Buser et Hermann Karcher [BK81, § 2.5], ainsi qu'une minoration du volume des *variétés ouvertes* recouvertes par  $H_{\mathbb{H}}^n$ , dûe à Inkang Kim et John R. Parker [KP03]).

Esquissons rapidement un panorama de ce que l'on connaît du rayon maximal et du volume des variétés et orbifolds hyperboliques. Dans la suite, nous notons respectivement  $\widetilde{\mathcal{F}}_{n,\mathbb{K}}$  et  $\mathcal{F}_{n,\mathbb{K}}$  les familles des espaces localement symétriques et des variétés recouverts par  $H_{\mathbb{K}}^n$  :

$$\widetilde{\mathcal{F}}_{n,\mathbb{K}} = \{ \Gamma \backslash H_{\mathbb{K}}^n \mid \Gamma \subset \text{Isom}(H_{\mathbb{K}}^n) \text{ discret} \}$$

et

$$\mathcal{F}_{n,\mathbb{K}} = \{ \Gamma \backslash H_{\mathbb{K}}^n \mid \Gamma \subset \text{Isom}(H_{\mathbb{K}}^n) \text{ discret et sans torsion} \}.$$

**Rayon maximal.** Si  $N$  est une *variété*, notons

$$r(N) = \sup_{x \in N} \left\{ \sup_{r > 0} \{ B(x, r) \text{ est plongée dans } N \} \right\},$$

son rayon maximal, puis

$$\mathbf{r}_{n,\mathbb{K}} = \inf_{\mathcal{F}_{n,\mathbb{K}}} \{ r(N) \}.$$

Dans cette généralité, aucune valeur exacte de  $\mathbf{r}_{n,\mathbb{K}}$  n'est connue (on en connaît si l'on se restreint aux variétés réelles *ouvertes*, ou *orientables*, dans certaines dimensions, voir plus bas) : nous ne disposons que de bornes minorant cette constante.

*Cas hyperbolique réel.* En dimension 2, si l'on se restreint aux variétés *orientables*, une borne inférieure optimale sur  $\mathbf{r}_{2,\mathbb{R}}$  a été déterminée par Akira Yamada [Yam82].

Pour les variétés hyperboliques réelles *ouvertes*, Matthieu Gendulpe [Gen15] a produit une borne, indépendante de la dimension et optimale en dimension 3 (et ce beau résultat semble indiquer que contrairement au comportement des bornes connues par ailleurs, le rayon maximal pourrait être minoré uniformément, voir croître avec la dimension).

L'article de Matthieu Gendulpe présente un panorama exhaustif des résultats connus sur le sujet, et nous reproduisons ci-dessous telle quelle une table, extraite de cet article,

synthétisant ces résultats (et renvoyons à la discussion détaillée qui l'accompagne pour plus de détails sur le sujet).

Minoration	Référence
$r(M^2) \geq \operatorname{arcsinh}(2/\sqrt{3})$ ( $M^2$ orientable) ( <b>optimale</b> )	A. Yamada [Yam82]
$r(M^3) \geq 0.04$ ( $M^3$ orientable)	P. L. Waterman [Wat84]
$r(M^3) \geq 0.24$ ( $M^3$ fermée orientable)	A. Prezworski [Prz01, § 4]
$r(M^3) \geq \operatorname{arccosh}(\sqrt{5}/2)$ ( $M^3$ ouverte) ( <b>optimale</b> )	M. Gendulphe [Gen15]
$r(M^5) > 0.033\dots$ ( $M^5$ fermée orientable)	R. Kellerhals [Kel03, § 3]
$r(M^n) \geq 1/4^{n+3}$ ( $M^n$ fermée)	P. Buser et H. Karcher [BK81, § 2.5]
$\mathbf{r}_{\mathbf{n},\mathbb{R}} \geq 0.0025/17^{\lfloor n/2 \rfloor}$	G. Martin [Mar89b], S. Friedland et
où $\lfloor n/2 \rfloor$ désigne la partie entière de $n/2$	S. Hersonsky [FH93, § 4]
$r(M^n) > 1/((n+3) \cdot \pi^{n-1})$ ( $M^n$ orientable)	R. Kellerhals [Kel04]
$r(M^n) \geq \operatorname{arccosh}(\sqrt{5}/2)$ ( $M^n$ ouverte)	M. Gendulphe [Gen15]

Table des minorations de  $\mathbf{r}_{\mathbf{n},\mathbb{R}}$ , extraite de [Gen15].

*Cas hyperbolique complexe et quaternionique.* Dans ces cas, même en se restreignant à des familles plus petites de quotients, aucune borne optimale sur le rayon maximal n'est connue.

Notons tout d'abord que la minoration de Peter Buser et Hermann Karcher mentionnée dans la table ci-dessus [BK81, § 2.5] reste valable pour les variétés riemanniennes fermées avec courbure pincée  $-1 \leq K < 0$ . Elle est donc en particulier valable pour tous les espaces localement symétriques de rang 1, et si  $M$  est *fermée* et recouverte par  $H_{\mathbb{K}}^n$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$ ,

$$r(M^n) \geq 1/4^{n+3}.$$

Dans le cas complexe, adaptant les techniques développées par Gaven J. Martin dans le cas réel [Mar89b], Bao-Hua Xie, Jie-Yan Wang, et Yue-Ping Jiang [XWJ14] ont montré que

$$\mathbf{r}_{\mathbf{n},\mathbb{C}} \geq \frac{0.01}{17^{n-1}}.$$

Utilisant ces mêmes techniques, et les affinant légèrement, nous établissons dans [Phi15] que

$$\mathbf{r}_{\mathbf{n},\mathbb{H}} \geq \frac{1}{40} \cdot \frac{1}{9^{n+1}}.$$

Indépendamment de nos travaux, mais avec le même type d'arguments, Wensheng Cao a également obtenu récemment une borne [Cao16] (légèrement moins bonne que la notre) comparable sur  $\mathbf{r}_{\mathbf{n},\mathbb{H}}$ .

**Volume.** Notons  $\tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{n},\mathbb{K}}$  le volume minimal d'un orbifold recouvert par  $H_{\mathbb{K}}^n$  et  $\mathbf{v}_{\mathbf{n},\mathbb{K}}$  le volume minimal d'une variété recouverte par  $H_{\mathbb{K}}^n$  :

$$\tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{n},\mathbb{K}} = \inf_{N \in \tilde{\mathcal{F}}_{\mathbf{n},\mathbb{K}}} \{ \operatorname{Vol}(N) \} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_{\mathbf{n},\mathbb{K}} = \inf_{N \in \mathcal{F}_{\mathbf{n},\mathbb{K}}} \{ \operatorname{Vol}(N) \}.$$

Dans l'étude de ces quantités, certains outils sont spécifiques aux quotients ouverts des espaces hyperboliques, et d'autres aux quotients fermés. On introduit ainsi les constantes

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{n},\mathbb{K}}^f &= \inf_{N \in \tilde{\mathcal{F}}_{n,\mathbb{K}}} \{\text{Vol}(N) \mid N \text{ fermé}\} & \text{et} & \quad \tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{n},\mathbb{K}}^o = \inf_{N \in \tilde{\mathcal{F}}_{n,\mathbb{K}}} \{\text{Vol}(N) \mid N \text{ ouvert}\} \\ \mathbf{v}_{\mathbf{n},\mathbb{K}}^f &= \inf_{N \in \mathcal{F}_{n,\mathbb{K}}} \{\text{Vol}(N) \mid N \text{ fermée}\} & \text{et} & \quad \mathbf{v}_{\mathbf{n},\mathbb{K}}^o = \inf_{N \in \mathcal{F}_{n,\mathbb{K}}} \{\text{Vol}(N) \mid N \text{ ouverte}\}. \end{aligned}$$

*Bornes en dimension quelconque.* Nous avons déjà remarqué qu'une borne sur le rayon maximal donnait immédiatement une borne sur le volume. En corollaire des travaux donnant des bornes sur  $\mathbf{r}_{\mathbf{n},\mathbb{K}}$  cités plus haut, on obtient donc des bornes sur le volume :

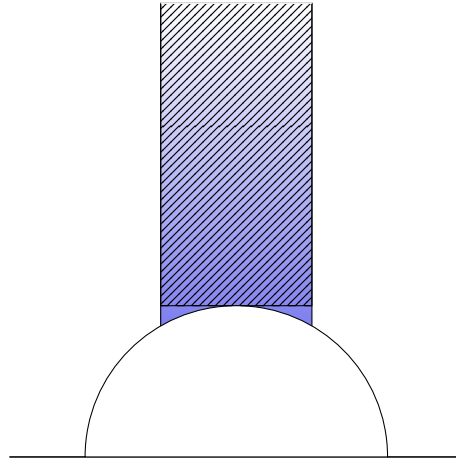
- Gaven J. Martin [Mar89b] obtient une minoration de  $\mathbf{v}_{\mathbf{n},\mathbb{R}}$  ;
- Bao-Hua Xie, Jie-Yan Wang, et Yue-Ping Jiang [XWJ14] obtiennent une minoration de  $\mathbf{v}_{\mathbf{n},\mathbb{C}}$  ;
- nous avons ainsi obtenu [Phi15] une minoration de  $\mathbf{v}_{\mathbf{n},\mathbb{H}}$  ;
- les travaux de Peter Buser et Hermann Karcher [BK81, § 2.5] permettent également de minorer  $\mathbf{v}_{\mathbf{n},\mathbb{K}}^f$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$  ;
- les travaux de Matthieu Gendulphé [Gen15] permettent enfin de minorer  $\mathbf{v}_{\mathbf{n},\mathbb{R}}^o$  ;

Toutes ces bornes dépendent de  $n$  et décroissent exponentiellement vite avec la dimension : le volume d'une boule de rayon *fixé*, déjà, diminue exponentiellement avec la dimension. Ainsi, même d'une minoration *uniforme* du rayon maximal (comme celle donnée par les travaux de Matthieu Gendulphé), on ne déduit qu'une minoration (rapidement) décroissante du volume. À ce phénomène de décroissance du volume d'une boule vient s'ajouter la décroissance des bornes inférieures sur le rayon maximal (autres que celle donnée par Matthieu Gendulphé) : en général, les minoration universelles du volume des variétés hyperboliques que l'on déduit des minoration du rayon maximal décroissent donc *super-exponentiellement* avec la dimension. (Et le rayon maximal semble pour l'instant être un mauvais moyen d'estimer le volume minimal).

Pour ce qui est du volume des orbifolds, une adaptation des méthodes de Gaven J. Martin a permis à Ilesanmi Adeboye [Ade08] d'obtenir une minoration de  $\tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{n},\mathbb{R}}$ , dépendant de la dimension et de l'ordre maximal de torsion du sous-groupe discret d'isométries de  $H_{\mathbb{R}}^n$ . Ses techniques ont été transposées dans le cas complexe, par Xi Fu, Liulan Li et Xang-Tao Wang [FLW11] qui obtiennent ainsi une minoration de  $\tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{n},\mathbb{C}}$ , dépendant à nouveau de la dimension et de l'ordre maximal de torsion du sous-groupe discret d'isométries de  $H_{\mathbb{C}}^n$ .

Ilesanmi Adeboye obtient plus tard, avec Guofang Wei, [AW12] puis [AW14], une minoration de  $\tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{n},\mathbb{R}}$ , puis de  $\tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{n},\mathbb{C}}$  ne dépendant plus que de la dimension. Les méthodes employées par les deux auteurs sont cette fois-ci différentes de celles de Gaven J. Martin, et reposent sur les résultats quantitatifs sur le rayon maximal établis par Hsien-Chung Wang [Wan69]. Elles ne dépendent plus de l'ordre de torsion, mais à nouveau, ces bornes décroissent exponentiellement vite avec la dimension.

Par des méthodes similaires, nous avons obtenu [Phi16] une borne sur  $\tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{n},\mathbb{H}}$ .



L'essentiel du volume d'un orbifold ouvert de petit volume (en couleur) est concentré dans sa pointe (en hachuré).

Pour les quotients *ouverts* des espaces hyperboliques, une stratégie plus fine est d'estimer le volume des pointes. Il est en effet raisonnable de penser que, pour les quotients de petits volumes, l'essentiel du volume est concentré dans les pointes (voir le schéma ci-dessus). Une minoration optimale du volume de ces dernières donnerait alors une bonne minoration du volume des quotients. Par cette stratégie, dont la mise en œuvre repose sur une utilisation du *lemme de Shimizu*, plusieurs auteurs ont donné des bornes sur le volume des variétés et orbifolds hyperboliques ouverts, qui dépendent de la dimension et *du nombre de pointes* du quotient :

- une minoration de  $\mathbf{v}_{\mathbf{n},\mathbb{R}}^o$  est connue, dépendant de la dimension et du nombre de pointes de la variété, et cette minoration est optimale en dimension 2 et 3 (Ruth Kellerhals, [Kel98]). de l'orbifold (Saar Hersonsky et Frédérique Paulin [HP96], John Parker [Par98])
- une minoration de  $\tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{n},\mathbb{C}}^o$  est connue, dépendant de la dimension et du nombre de pointes de l'orbifold (Saar Hersonsky et Frédéric Paulin [HP96], John Parker [Par98])
- une minoration de  $\tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{n},\mathbb{H}}^o$  est connue, dépendant de la dimension et du nombre de pointes de l'orbifold (Inkang Kim et John Parker [KP03]).

*Valeurs exactes.* La question du volume minimal des orbifolds et variétés hyperboliques est largement étudiée, et ce depuis la fin du XIX<sup>e</sup> siècle et les travaux d'Adolf Hurwitz [Hur92]. Dans les cas réels et complexes, de nombreux résultats sont ainsi connus, pour chacune des six quantités définies plus haut, et nous choisissons ici d'en lister seulement quelques uns. Des survols tout à fait complets du sujet dans le cas réel ont été écrits par Mikhaïl Belolipetsky [Bel14a] et par Ruth Kellerhals [Kel14]. Dans le cas complexe, Ilesanmi Adeboye et Guofang Wei font un point sur l'état de l'art sur cette question à la fin de leur article sur le volume des orbifolds hyperboliques complexes [AW14, § 4]. Nous renvoyons à ces références pour un exposé plus détaillé.

Concernant le volume minimal des *orbifolds* hyperboliques *réels* par exemple,

- $\tilde{\mathbf{v}}_{2,\mathbb{R}}$ ,  $\tilde{\mathbf{v}}_{2,\mathbb{R}}^o$  et  $\tilde{\mathbf{v}}_{2,\mathbb{R}}^f$  sont connus, ainsi que les orbifold réalisant ces volumes (Carl Ludwig Siegel [Sie45]);
- $\tilde{\mathbf{v}}_{3,\mathbb{R}}$  est connu, ainsi que l'orbifold réalisant ce volume (Ted Chinburg et Eduardo Friedman [CF86], Frederick W. Gehring et Gaven J. Martin [GM09], Timothy H. Marshall et Gaven J. Martin [MM12]);
- $\tilde{\mathbf{v}}_{3,\mathbb{R}}^o$  est connu, ainsi que l'orbifold réalisant ce volume (Robert Meyerhoff [Mey85]);
- $\tilde{\mathbf{v}}_{4,\mathbb{R}}^o$  est connu, ainsi que l'unique orbifold réalisant ce volume (Thierry Hild et Ruth Kellerhals [HK07]);
- pour  $n \leq 9$ ,  $\tilde{\mathbf{v}}_{n,\mathbb{R}}^o$  est connu, ainsi que l'orbifold réalisant ce volume (Thierry Hild [Hil07a] et [Hil07b]).

Si l'on se restreint encore à des classes plus petites de quotients (orientables par exemple), d'autres valeurs des volumes minimaux sont connues, et sont indiquées dans les survols mentionnés plus haut. Un champ de recherche actif et fructueux est celui de l'étude du volume minimal des quotients *arithmétiques* de  $H_{\mathbb{R}}^n$ . Les travaux de Mikhaïl Belolipetsky et Vincent Emery [Bel04a] [Bel07] [Eme09] et [BE12] ont permis d'identifier en toute dimension  $n \geq 4$ , l'unique orbifold hyperbolique réel, orientable et arithmétique, de volume minimal.

Pour les *variétés* hyperboliques réelles également, de nombreuses valeurs exactes des volumes minimaux sont connues,  $\mathbf{v}_{3,\mathbb{R}}$  ou  $\mathbf{v}_{3,\mathbb{R}}^o$ ,  $\mathbf{v}_{4,\mathbb{R}}^o$ ,  $\mathbf{v}_{6,\mathbb{R}}^o \dots$  (voir notamment les travaux de David Gabaï et de Daniel Ratcliff).

Dans le cas complexe,

- $\mathbf{v}_{2,\mathbb{C}}^f$  est connu (Saar Hersensky et Frédéric Paulin [HP96]), ainsi qu'une liste de 51 exemples de variétés réalisant ce volume (Gopal Prasad et Sai-Kee Yeung [PY07], Donald I. Cartwright et Tim Steger [CS10]), et cette liste est exhaustive (Sai-Kee Yeung [Yeu13]);
- $\mathbf{v}_{2,\mathbb{C}}^o$  est connu, ainsi qu'un exemple de variété réalisant ce volume (John R. Parker [Par98]);
- $\tilde{\mathbf{v}}_{2,\mathbb{C}}^o \geq 1/4$ , et conjecturellement,  $\tilde{\mathbf{v}}_{2,\mathbb{C}}^o = \pi^2/27$  (John R. Parker [Par98]).

Dans le cas quaternionique enfin, aucune valeur exacte, pour aucune des six quantités introduites au début de ce paragraphe, n'est connue. Notons cependant, qu'une utilisation du théorème de Gauss-Bonnet nous a permis d'établir, dans [Phi16], des bornes probablement proches d'être optimales sur  $\mathbf{v}_{n,\mathbb{H}}$ , si  $2 \leq n \leq 4$  (si  $n = 1$ , comme la droite hyperbolique quaternionique est isométrique à l'espace hyperbolique réel, les bornes sur  $\mathbf{v}_{1,\mathbb{H}}$  sont celles sur  $\mathbf{v}_{4,\mathbb{R}}$ ) :

- $\mathbf{v}_{2,\mathbb{H}} \geq \frac{2^5 \pi^4}{3^2 \times 5}$  ;
  - $\mathbf{v}_{3,\mathbb{H}} \geq \frac{2^6 \pi^6}{3^2 \times 5 \times 7}$  ;
  - $\mathbf{v}_{4,\mathbb{H}} \geq \frac{2^9 \pi^8}{3^4 \times 5^2 \times 7}$ .
-

### Survol des travaux présentés, principaux résultats

Dans notre étude des invariants globaux des quotients de  $H_{\mathbb{H}}^n$ , nous avons opté pour deux approches, d'abord relativement indépendants, et correspondant à deux optiques distinctes : d'une part, celle d'obtenir des bornes générales sur les invariants globaux, en toute dimension, et de discuter de leur comportement asymptotique ; d'autre part, en dimension 2, d'obtenir des bornes optimales. Présentons rapidement ici nos principaux résultats, ces deux approches étant décrites en détail dans la section suivante.

**Bornes en toute dimension.** La première approche s'inscrit dans la continuité de la théorie classique des groupes de Lie, telle qu'initiée par Hans Julius Zassenhaus et Ludwig Bieberbach, puis développée par Gregory Margulis et Hsien-Chung Wang. Plus récemment, nos travaux prolongent ceux de Gaven J. Martin, puis d'Ilanmi Adeboye et Guofang Wei cités à la section précédente. L'idée directrice est l'étude des boules inscrites dans un domaine de Dirichlet d'un groupe discret d'isométries de  $H_{\mathbb{H}}^n$ , vu comme agissant, soit par isométries sur l'espace hyperbolique  $H_{\mathbb{H}}^n$ , soit par translations sur  $\text{Isom}(H_{\mathbb{H}}^n)$ .

Ces techniques sont développées dans les **chapitres 2 et 3**. Nous y obtenons les résultats originaux suivants, sur chacun des quatre invariants discutés en introduction de ce chapitre, pour lesquels aucune estimation explicite n'était connue auparavant :

**Théorème 1** (Rayon maximal des variétés quotients de  $H_{\mathbb{H}}^n$ , **Théorème 2.3.1**).

Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret et sans torsion agissant par isométries sur  $H_{\mathbb{H}}^n$ . Alors la variété quotient  $\Gamma \backslash H_{\mathbb{H}}^n$  contient une boule plongée de rayon

$$r_{n,\mathbb{H}} \geq \frac{1}{40} \cdot \frac{1}{9^{n+1}}.$$

**Théorème 2** (Volume des orbifolds quotients de  $H_{\mathbb{H}}^n$ , **Théorème 3.3.21**).

Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret agissant par isométries sur  $H_{\mathbb{H}}^n$ . Alors le volume de l'orbifold quotient  $\Gamma \backslash H_{\mathbb{H}}^n$  est minoré par

$$\tilde{v}_{n,\mathbb{H}} \geq \frac{1}{2^{6d-3} \cdot (2d-1) \cdot \pi^{2+n^2}} \cdot \frac{\sigma_{d-1}}{\sigma_{2n}}$$

(où  $d = 2n^2 + 5n + 3$  est la dimension de  $\text{Isom}(H_{\mathbb{H}}^n)$ , et  $\sigma_k = \frac{2\pi^{\frac{k+1}{2}}}{\Gamma(\frac{k+1}{2})}$  désigne le volume de la sphère  $S^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ ).

**Théorème 3** (Caractéristique d'Euler des orbifolds quotients de  $H_{\mathbb{H}}^n$ , **Théorème 3.4.29**).

Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret agissant par isométries sur  $H_{\mathbb{H}}^n$ . Alors la valeur absolue de la caractéristique d'Euler de l'orbifold quotient  $\Gamma \backslash H_{\mathbb{H}}^n$  est minoré par

$$|\chi_{n,\mathbb{H}}| \geq \frac{1}{2^{6d+3(n-1)} \cdot (2d-1) \cdot \pi^{n^2+2n+2}} \cdot \frac{\sigma_{d-1}}{\sigma_{2n}}$$

(où  $d = 2n^2 + 5n + 3$  est la dimension de  $\text{Isom}(H_{\mathbb{H}}^n)$ , et  $\sigma_k = \frac{2\pi^{\frac{k+1}{2}}}{\Gamma(\frac{k+1}{2})}$  désigne le volume de la sphère  $S^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ ).

**Théorème 4** (Constante de Margulis de  $H_{\mathbb{H}}^n$ , **Théorème 2.4.4**).

*Il existe une constante  $C > 0$ , indépendante de la dimension, telle que  $\mu_{n,\mathbb{H}} \leq \frac{C}{\sqrt{n}}$ .*

**Géométrie extrémale en dimension 2.** La seconde approche est celle de l'étude d'un orbifold hyperbolique quaternionique de dimension 2 spécifique, *via* la construction d'un domaine fondamental. Cette approche est dans le prolongement des travaux d'Elisha Falbel et John R. Parker [FP06] et [FFP11], et est à rapprocher des travaux de John R. Parker et Inkang Kim, ainsi que de ceux de Saar Hersensky et Frédéric Paulin, sur le volume des pointes cités à la section précédente.

Nous nous sommes donc employés, dans le **chapitre 4** de ce texte, à construire un domaine fondamental pour un orbifold particulier, quotient de l'action du *groupe modulaire d'Hurwitz* sur  $H_{\mathbb{H}}^2$ . C'est un revêtement double d'un orbifold réalisant le minimum du volume des pointes en dimensions 2 [KP03]. La connaissance d'un domaine fondamental permettrait de calculer explicitement toutes les quantités auxquelles nous nous intéressons, mais donne également une connaissance plus profonde du sous-groupe d'isométries concerné : on peut par exemple en déduire une présentation de ce groupe.

Les principaux résultats que nous avons obtenus dans cette partie sont les suivants :

**Proposition 5** (Domaine fondamental, **Proposition 4.3.22**).

*Notons  $\Gamma_{\infty}$  le sous-groupe du groupe modulaire d'Hurwitz stabilisant le point à l'infini dans  $H_{\mathbb{H}}^2$ . Un domaine fondamental pour  $\Gamma_{\infty}$  est donné par le produit d'un 4-simplexe par un cube.*

**Théorème 6** (Système générateur, **Théorème 4.4.2**).

*Le groupe modulaire d'Hurwitz est engendré par quatre éléments.*

## Plan détaillé du manuscrit

### *Chapitre 1 : Les espaces hyperboliques quaternioniques*

C'est un chapitre standard, dans lequel nous exposons les prérequis nécessaires à la lecture de la suite de notre texte. Nous y présentons les principaux modèles des espaces hyperboliques sur  $\mathbb{H}$  (celui du demi-espace et celui de la boule unité), y décrivons les sous-variétés totalement géodésiques de  $H_{\mathbb{H}}^n$ , la classification de ses isométries... Tous ces résultats sont classiques – au moins dans les cas réels et complexes, et la géométrie de  $H_{\mathbb{H}}^n$  est très semblable à celle de  $H_{\mathbb{C}}^n$ . Nous les énonçons donc pour la plupart sans démonstration (mais donnons des références dans lesquelles trouver ces démonstrations).

La dernière partie de ce chapitre est peut-être un peu plus originale : nous y décrivons une *décomposition horosphérique* du sous-groupe parabolique de  $\mathbf{Sp}(n, 1) = \text{Isom}(H_{\mathbb{H}}^n)$ . Cette décomposition nous fournit une bonne description de la géométrie du bord de  $H_{\mathbb{H}}^n$  dans le modèle du demi-espace, description qui se révélera éclairante dans le chapitre 4, dans lequel nous construisons un domaine fondamental pour un réseau de  $\mathbf{Sp}(n, 1)$  ayant une unique pointe.

### Chapitre 2 : Rayon maximal dans $H_{\mathbb{H}}^n$

Dans ce chapitre, nous adaptons une stratégie développée par Gaven J. Martin dans le cas réel [Mar89b], pour obtenir le **théorème 1**, donnant une minoration du rayon maximal des variétés recouvertes par  $H_{\mathbb{H}}^n$  en toute dimension.

Les techniques employées sont issues de la théorie classique des groupes de Lie, et les deux ingrédients principaux de la preuve sont la détermination explicite d'un *domaine de Zassenhaus*, puis l'utilisation d'une *inégalité de type Jørgensen*, pour les éléments de  $\text{Isom}(H_{\mathbb{H}}^n) = \mathbf{PSp}(n, 1)$ .

Une telle inégalité « à la Jørgensen » a d'abord été obtenue par Gaven J. Martin [Mar89a], pour des sous-groupes discrets de  $\mathbf{PO}(n, 1)$ , puis (améliorée et) étendue à une large classe de groupes de Lie par Schmuël Friedland et Saar Hersonsky [FH93]. C'est leur généralisation que nous utilisons, de manière cruciale, dans notre démonstration.

Une question intéressante est celle du comportement du rayon maximal en fonction de la dimension (peut-on le minorer uniformément ? Pourrait-il croître avec la dimension ?). Le problème semble pour l'instant mal compris : comme nous l'avons déjà mentionné, les résultats obtenus par Matthieu Gendulphé [Gen15] indiquent qu'il pourrait effectivement être uniformément minoré, mais toutes les bornes générales connues décroissent exponentiellement vite avec la dimension.

Un problème voisin est celui de la compréhension du comportement de la *constante de Margulis*  $\mu_{n, \mathbb{K}}$  des espaces hyperboliques sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$  en fonction de la dimension.

Dans cette optique, nous remarquons qu'un argument dû à Mikhaïl Kapovitch et mentionné dans un article de Mikhaïl Belolipetsky [Bel14b] permet d'observer que la constante de Margulis de  $H_{\mathbb{H}}^n$  décroît au moins comme une puissance de la dimension, et obtenons ainsi le **théorème 4**. (Nous remarquons en réalité plus généralement, que l'estimation du théorème 4 est valable pour tous les espaces hyperboliques, réels, complexes, ou quaternioniques). Il faut bien noter cependant que si une minoration uniforme de  $\mu_{n, \mathbb{K}}$  impliquerait une minoration uniforme de  $r_{n, \mathbb{K}}$ , en revanche, la décroissance de cette première quantité n'implique pas la décroissance de la seconde. Typiquement, les variétés avec une petite constante de Margulis que nous exhibons sont de volume infini, et contiennent de larges boules plongées.

Enfin, le théorème 1 nous fournit immédiatement une borne sur le volume des variétés hyperboliques quaternioniques. Cependant, ces estimations sont probablement bien mau-



vaies, et ce, d'autant plus dans le contexte quaternionique : en effet, par un résultat de Kevin Corlette [Cor92] et de Mikhaïl Gromov et Richard Schoen [GS92], les variétés hyperboliques quaternioniques de volume fini sont *arithmétiques*. Il est donc probable que des méthodes arithmétiques (voir par exemple les travaux de Mikhaïl Belolipetsky et Vincent Emery cités plus haut) permettent d'estimer mieux leur volume.

Une telle minoration du volume pour les *orbifolds* quotients de  $H_{\mathbb{H}}^n$  est quand à elle plus riche d'informations : le volume d'un orbifold est proportionnel à sa caractéristique d'Euler, et une estimation de l'un équivaut à une estimation de l'autre. Le théorème 1 n'est plus valable si le groupe  $\Gamma$  a de la torsion, et les techniques exposées dans ce chapitre ne permettent donc pas d'appréhender cette quantité dans le contexte des orbifolds. L'étude des volumes et des caractéristiques d'Euler des quotients de  $H_{\mathbb{H}}^n$  fait l'objet de notre chapitre suivant.

### *Chapitre 3 : Volume et caractéristique d'Euler des quotients de $H_{\mathbb{H}}^n$*

Ce chapitre est divisé en trois parties. Dans un premier temps, nous donnons une minoration des covolumes des sous-groupes discrets d'un groupe de Lie semi-simple quelconque. Dans un second temps, nous utilisons cette borne pour minorer le volume des quotients de  $H_{\mathbb{H}}^n$ . Enfin, dans un dernier temps, nous en déduisons une minoration de la caractéristique d'Euler des quotients de  $H_{\mathbb{H}}^n$ .

*Première partie.* En 1969, Hsieng-Chung Wang [Wan69] donne le résultat suivant :

**Théorème** (Wang). *Soit  $G$  un groupe semi-simple sans facteur compact, et  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $G$ . Alors, il existe un  $r_G > 0$ , tel que tout sous-groupe discret  $\Gamma$  de  $G$  possède un domaine fondamental dans  $G$  contenant une boule de rayon  $r_G/2$  (cette constante est explicite et ne dépend que du groupe  $G$ ).*

(La métrique sur  $G$  est ici la métrique naturelle provenant de la forme de Killing de  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ ).

Le premier résultat de ce chapitre est l'établissement d'une borne sur les courbures sectionnelles d'un groupe semi-simple de type non-compact  $G$  (muni de la métrique standard donnée par Killing) :

**Théorème** (théorème 3.2.6). *Soit  $G$  un groupe de Lie semi-simple sans facteur compact. Alors les courbures sectionnelles de  $G$  sont majorées par  $k_G$ , avec*

$$k_G = \frac{9}{2} \cdot C_1^2 + \frac{1}{4} \cdot C_2^2$$

où les constantes  $C_1$  et  $C_2$  sont explicites (données par Hsien-Chung Wang [Wan69]) et ne dépendent que du groupe  $G$ .

Puis, utilisant la borne explicite  $r_G$  donnée par Wang, nous en déduisons une minoration du covolume des sous-groupes discrets de  $G$  :

**Corollaire (Théorème 3.2.13).**

$$\text{Vol}(\Gamma \backslash G) \geq V(d, r_G, k_G),$$

où  $d$  est la dimension de  $G$ , et  $V(d, r_G, k_G)$  le volume d'une boule de rayon  $r_G$  dans la variété riemannienne complète et simplement connexe, de dimension  $d$ , à courbure sectionnelle constante  $k_G$ .

*Seconde partie.* Nous appliquons ensuite ces résultats au groupe de lie semi-simple  $\mathbf{Sp}(n, 1)$  des isométries de  $H_{\mathbb{H}}^n$  afin d'obtenir le **théorème 2**, donnant une minoration des volumes des quotients de  $H_{\mathbb{H}}^n$ .

*Troisième partie.* Enfin, d'après le théorème de Gauss-Bonnet, la caractéristique d'Euler et le volume d'un quotient de  $H_{\mathbb{H}}^n$  sont proportionnels, et leur rapport est explicitement donné par le pfaffien de la matrice des 2-formes de courbure de  $H_{\mathbb{H}}^n$ . Nous estimons donc ce rapport (propositions 3.4.26 et 3.4.26), puis en déduisons le **théorème 3**, donnant une minoration des caractéristiques d'Euler des quotients de  $H_{\mathbb{H}}^n$ .

L'établissement de chacun des deux résultats précédents passe par une (grande) partie calculatoire nécessaire, car la plupart des constantes entrant en jeux dans nos résultats, si elles étaient décrites par la théorie, n'avaient jamais été explicitement données. Ceci n'est pas le cas pour  $H_{\mathbb{R}}^n$  et  $H_{\mathbb{C}}^n$ , espaces pour lesquels toutes ces données sont déjà explicites. En conclusion de ce chapitre, nous utilisons donc les résultats généraux établis dans la première partie, et dressons des tables donnant des minoration du volume et de la caractéristique d'Euler des quotients de  $H_{\mathbb{K}}^n$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$ .

#### Chapitre 4 : Construction d'un domaine fondamental dans $H_{\mathbb{H}}^2$

Dans ce dernier chapitre, nous construisons un domaine fondamental pour le sous-groupe parabolique d'un réseau d' $\text{Isom}(H_{\mathbb{H}}^2)$  particulier, le *groupe modulaire d'Hurwitz*. C'est le réseau  $\Gamma = \mathbf{Sp}(2, 1; D_4)$ , formé par le groupe des isométries de  $H_{\mathbb{H}}^2$  dont les matrices sont à coefficients dans l'ordre d'Hurwitz  $D_4$ . L'objectif final est bien entendu l'obtention d'un domaine pour le réseau tout entier, et ce travail est encore en cours.

En 2006, Elisha Falbel et John Parker [FP06] ont construit un domaine fondamental remarquablement simple (c'est un simplexe) pour le groupe des isométries de  $H_{\mathbb{C}}^2$  dont les matrices ont des coefficients appartenant aux entiers d'Eisenstein  $\mathbb{Z}[\omega]$ . Les entiers d'Eisenstein forment le réseau le plus dense en dimension 2. L'ordre d'Hurwitz est le réseau euclidien le plus dense en dimension 4, et notre étude de ce groupe particulier a été motivée par l'analogie avec les résultats d'Elisha Falbel et John Parker.

Le réseau  $\Gamma$  n'a qu'une pointe, et utilisant une méthode de construction de domaines fondamentaux dûe à Ford, nous avons étudié l'action du sous-groupe parabolique de  $\Gamma$ ,  $\Gamma_{\infty}$ , sur le bord de  $H_{\mathbb{H}}^2$ . Dans une première partie de ce chapitre, nous décrivons donc précisément la géométrie du bord de  $H_{\mathbb{H}}^2$  privé d'un point, qui porte la structure d'un *groupe*

de Heisenberg généralisé  $\mathcal{H} = \mathbb{H} \times \mathfrak{Im}(\mathbb{H})$ . Nous explicitons en particulier la suite exacte (4.1.9)

$$0 \longrightarrow \mathfrak{Im}(\mathbb{H}) \longrightarrow \text{Isom}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\Pi^*} \text{Isom}(\mathbb{H}) \longrightarrow 1. \quad (0.0.1)$$

provenant de la description de  $\mathcal{H}$  comme extension centrale de  $\mathbb{H}$  par  $\mathfrak{Im}(\mathbb{H})$ . Cette description permet de diviser l'étude de l'action de  $\Gamma_\infty$  sur  $\mathcal{H} \simeq \partial H_{\mathbb{H}}^2 - q_\infty$  en deux étapes :

- l'étude de l'action de  $\Pi^*(\Gamma_\infty)$  sur  $\mathbb{H}$  tout d'abord,
- puis celle du relèvement de cette action 'a  $\mathcal{H}$ .

Nous avons explicité un domaine fondamental pour l'action de  $\Pi^*(\Gamma_\infty)$  sur  $\mathbb{H}$ , le plus simple possible (c'est un 4-simplexe dans  $\mathbb{H}$ , théorème 4.3.11). Utilisant le théorème du polyèdre de Poincaré, nous en déduisons une présentation de  $\Pi^*(\Gamma_\infty)$  (théorème 4.3.17).

Nous obtenons ensuite notre **proposition 5**, donnant un domaine fondamental pour  $\Gamma_\infty$  agissant sur le bord privé d'un point, ainsi qu'un système de générateurs pour  $\Gamma_\infty$  (proposition 4.3.21), en relevant les générateurs de  $\Pi^*(\Gamma_\infty)$ . Ce système est de cardinal 3, et l'on en déduit immédiatement un système de générateurs pour  $\Gamma$ , de cardinal 4 : c'est le **théorème 6**, qui conclut notre étude de  $\Gamma_\infty$ .

---



---

*Les espaces hyperboliques quaternioniques*

Sans surprise, nous introduisons dans ce premier chapitre les protagonistes de cette thèse, les espaces hyperboliques quaternioniques. Donnons en ici, et sans plus attendre, une première définition :

**Définition 1.0.1.** *L'espace hyperbolique quaternionique de dimension  $n$ ,  $H_{\mathbb{H}}^n$ , est l'espace symétrique (de type non-compact) associé au groupe de Lie semi-simple  $G = \mathbf{Sp}(n, 1)$ . C'est donc l'espace des classes à gauche*

$$H_{\mathbb{H}}^n = G/K$$

où  $K$  est un sous-groupe compact maximal de  $\mathbf{Sp}(n, 1)$ , c'est-à-dire un conjugué du groupe

$$\mathbf{Sp}(n) \times \mathbf{Sp}(1) = \left\{ \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} \mid U \in \mathbf{Sp}(n), q \in \mathbf{Sp}(1) \right\}.$$

L'algèbre des quaternions de Hamilton  $\mathbb{H}$ , est probablement (injustement?) plus méconnue que ses deux petits frères commutatifs,  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ . Nous consacrons donc la première partie de ce chapitre à exposer quelques résultats élémentaires, sur la structure de  $\mathbb{H}$ , puis d'algèbre linéaire sur  $\mathbb{H}$ , dont nous aurons besoin dans la suite de ce texte.

Dans la section 1.2, nous définissons les *modèles projectifs* de l'espace hyperbolique quaternionique, puis présentons rapidement les deux modèles les plus standards : celui du demi-espace, et celui de la boule unité. Nous nous attardons un peu plus sur le modèle du demi-espace, car c'est essentiellement avec celui-ci que nous travaillons dans les chapitres qui suivent.

La section 1.4 décrit les sous-espaces totalement géodésiques des espaces hyperboliques sur  $\mathbb{H}$ . Tout comme dans les cas réel et complexe, ils peuvent être entièrement appréhendés au moyen de l'algèbre linéaire. Ils se répartissent en trois familles : ceux de type *quaternionique*, ceux de type *complexe*, et ceux de type *réel*.

En 1.3, nous présentons brièvement les isométries de  $H_{\mathbb{H}}^n$ , les ventilant selon la traditionnelle trichotomie en éléments elliptiques, paraboliques ou loxodromiques, et introduisant la notion de *sous-groupe élémentaire* de  $\mathbf{Sp}(n, 1)$ .

Tous ces objets et résultats sont standards, et nous les énonçons pour la plupart sans démonstration. Il peuvent quasiment tous être trouvés, démontrés et détaillés, dans trois

références classiques : l'article de Shyan S. Chen et Leon Greenberg sur les espaces hyperboliques [CG74] ; le survol de John R. Parker [Par08] ; et enfin l'article d'Inkang Kim et John R. Parker sur la géométrie des variétés hyperboliques quaternioniques [KP03]. Par ailleurs, la géométrie des espaces hyperboliques sur  $\mathbb{H}$  est à maints égards semblable à celle des espaces hyperboliques sur  $\mathbb{C}$  : beaucoup des résultats cités dans notre cadre se démontrent par une transposition exacte de la démonstration de leurs analogues complexes. Ainsi nous renvoyons également à l'ouvrage de référence de William Goldman [Gol99] de géométrie hyperbolique complexe.

Enfin, la dernière section de ce chapitre (section 1.5) est peut-être un peu plus originale. Nous nous sommes attachés à y décrire le sous-groupe parabolique  $\mathcal{P}_\infty$  des isométries de  $H_{\mathbb{H}}^n$  fixant un point du bord, selon sa *décomposition de Langlands*. Cette décomposition fait naturellement apparaître les trois types d'isométries du bord de  $H_{\mathbb{H}}^n$  (*rotations, translations et dilatations d'Heisenberg*), ainsi qu'une *décomposition horosphérique* de  $H_{\mathbb{H}}^n$  dans le modèle du demi-espace, éclairant un système de coordonnées introduit dans un paragraphe précédent (les *coordonnées horosphériques*, voir le 1.2.1).

## 1.1 L'algèbre des quaternions de Hamilton

### 1.1.1 Structure de $\mathbb{H}$

Dans la suite,  $\mathbb{H}$  désignera l'algèbre des quaternions de Hamilton,

$$\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R} \oplus j\mathbb{R} \oplus k\mathbb{R},$$

où  $i, j$  et  $k$  vérifient  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$  et  $ij = -ji = k$ .

On dispose sur  $\mathbb{H}$  d'une involution  $\mathbb{R}$ -linéaire, la *conjugaison* :

$$z = a + ib + jc + kd \mapsto \bar{z} = a - ib - jc - kd.$$

Elle vérifie notamment

$$z\bar{z} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = |z|^2 \text{ et } \overline{zw} = \bar{w}\bar{z}.$$

Notons  $\mathbb{H}_0$  et  $\mathfrak{Im}(\mathbb{H})$  les sous-espaces propres de cette involution, associés aux valeurs propres 1 et  $-1$  respectivement.  $\mathbb{H}_0 = \mathbb{H} \cap \mathbb{R}$  est le centre de  $\mathbb{H}$  et les éléments de  $\mathfrak{Im}(\mathbb{H})$  sont appelés *imaginaires purs*. On note aussi, pour  $z \in \mathbb{H}$

$$\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \text{ et } \Im(z) = \frac{1}{2}(z - \bar{z}).$$

On considère à présent la forme réelle bilinéaire  $(z, w) = \Re(\bar{z}w)$  qui correspond à la forme quadratique  $|z|^2$ . Le groupe multiplicatif  $\mathbb{H} - \{0\}$  agit sur lui-même par multiplication à gauche. On désigne  $\mathbf{Sp}(1)$  le sous-groupe de  $\mathbb{H} - \{0\}$  préservant cette forme quadratique. C'est le *groupe unitaire de dimension 1* (voir le paragraphe 1.1.2), et il est formé des quaternions de module 1.

Si  $\mathcal{W}$  est un sous-espace  $\mathbb{R}$ -linéaire de  $\mathbb{H}$ ,  $\mathcal{W}^\perp$  désigne son orthogonal pour cette forme.

**Notations 1.1.1.** Dans la suite de cette section :

- Les lettres grecques minuscules ( $\mu, \tau, \eta \dots$ ) désignent des quaternions imaginaires purs de module 1 (qui forment une sphère  $S^2$ );
- étant donné un tel  $\mu$ ,  $\mu^\perp$  désigne l'ensemble des quaternions imaginaires purs de module 1 orthogonaux à  $\mu$  ( $\mu^\perp$  est un cercle  $S^1$ ).

Considérons un sous-corps commutatif maximal de  $\mathbb{H}$ ,  $\mathbb{K}$ . Il existe un élément de  $\mathbf{Sp}(1) \cap \mathfrak{Im}(\mathbb{H})$ , unique au signe près, tel que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}[\mu] = \mathbb{R} \oplus \mu\mathbb{R}$ . On note  $\mathbb{C}_\mu$  un tel sous-corps dont on a distingué la base réelle  $(1, \mu)$ . On peut décrire exactement les éléments de  $\mathbb{C}_\mu^\perp$  :

$$\mathbb{C}_\mu^\perp = \{w \in \mathbb{H} \mid \forall z \in \mathbb{C}_\mu, zw = w\bar{z}\} = \{w \in \mathbb{H} \mid w\mu = -\mu w\}.$$

Étant donné  $\tau$  dans  $\mathbf{Sp}(1) \cap \mathbb{C}_\mu^\perp$  (nécessairement  $\tau \in \mathfrak{Im}(\mathbb{H})$ ), on a la décomposition orthogonale

$$\mathbb{C}_\mu^\perp = \mathbb{R}\tau \oplus \mathbb{R}\mu\tau.$$

À un tel choix correspond la décomposition orthogonale de  $\mathbb{H}$

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &= \mathbb{C}_\mu \oplus \mathbb{C}_\mu^\perp = \mathbb{R}[\mu] \oplus (\mathbb{R}\tau \oplus \mathbb{R}\mu\tau) \\ z &= z_1 + z_2 = (a + \mu b) + \tau(c + \mu d), \end{aligned}$$

et on peut associer à chacun de ces corps une involution  $\mathbb{C}_\mu$ -linéaire, la  $\mathbb{C}_\mu$ -conjugaison (c'est la symétrie orthogonale par rapport à  $\mathbb{C}_\mu$ ), que l'on note  $\overline{\cdot}^\mu$  :

$$\overline{\cdot}^\mu : z \mapsto \bar{z}^\mu = z_1 - z_2 = (a + \mu b) - \tau(c + \mu d). \quad (1.1.2)$$

Cette application est indépendante des choix de  $\mu$  et de  $\tau$  et possède deux sous-espaces propres, de valeurs propres  $-1$  et  $1$ , donnés par  $\mathbb{C}_\mu$  et  $\mathbb{C}_\mu^\perp$  respectivement. La projection orthogonale sur  $\mathbb{C}^\perp$ , de noyau  $\mathbb{C}$  est donnée par

$$\text{proj}_\mu : z \mapsto \frac{1}{2}(z + \bar{z}^\mu). \quad (1.1.3)$$

Un quaternion de module 1 – non nécessairement imaginaire – s'écrit

$$q = \cos(a) + \sin(a)\mu, \quad a \in [0, \pi], \quad \mu \in S^2.$$

On appelle parfois  $a$  et  $\mu$  l'*angle* et l'*axe* de  $q$ . Pour désigner un quaternion comme ci-dessus, on utilise souvent la notation plus compacte

$$\cos(a) + \sin(a)\mu = e^{\mu(a)}.$$

Cette notation vérifie  $e^{\mu(a)}e^{\mu(b)} = e^{\mu(a+b)}$ , et en particulier,

$$\overline{e^{\mu(a)}} = e^{\mu(a)^{-1}} = e^{\mu(-a)}.$$

Si  $q$  est un quaternion quelconque, notant  $r$  son module,  $q$  s'écrit alors

$$r(\cos(a) + \sin(a)\mu) = re^{\mu(a)}, \quad r \in [0, +\infty[, \quad a \in [0, \pi], \quad \mu \in S^2,$$

et cette écriture est unique si de plus  $q$  n'est pas dans  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire si  $r \neq 0$  et  $a \notin \{0, \pi\}$ . Ceci fait apparaître la décomposition suivante des quaternions non-réels :

$$\mathbb{H} - \mathbb{R} = ]0, +\infty[ \times ]0, \pi[ \times S^2. \quad (1.1.4)$$

Le groupe des unités  $\mathbf{Sp}(1)$  agit par conjugaison sur  $\mathbb{H}$ . Cette action est réduite à l'identité sur le centre de  $\mathbb{H}$ ,  $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$ , et se restreint en une action sur les quaternions non-réels. L'action induite fixe point par point les deux premiers facteurs de la décomposition (1.1.4), et est transitive sur  $S^2$ .

Pour  $q \in \mathbb{H}$ , la classe de conjugaison de  $q$ ,

$$O(q) = \{z^{-1}qz, z \in \mathbb{H}, z \neq 0\} = \{\bar{w}qw, q \in \mathbf{Sp}(1)\},$$

est donc réduite à un point si  $q$  est réel, et est une sphère  $S^2$  sinon. Finalement, pour tout sous-corps  $\mathbb{C}_\mu$  de  $\mathbb{H}$ , l'ensemble des éléments de  $\mathbb{C}_\mu$  de partie imaginaire positive ou nulle,

$$\mathbb{C}_\mu^+ = \{q \in \mathbb{C}_\mu \mid \Im(q) \geq 0\}, \quad (1.1.5)$$

forme un système de représentants des orbites de cette action.

### 1.1.2 Algèbre linéaire sur $\mathbb{H}$

La plupart des résultats de l'algèbre linéaire classique se transposent aisément au cadre non-commutatif : nous donnons par exemple plus bas un énoncé du théorème spectral pour les endomorphismes unitaires d'un espace vectoriel sur  $\mathbb{H}$ . Dans la théorie des *déterminants* cependant, la commutativité peut sembler jouer un rôle central. Cette théorie est en fait aujourd'hui bien comprise dans le contexte non-commutatif, et ce depuis longtemps – au moins depuis les travaux de Jean Dieudonné [Die43] : nous n'en parlons pas dans ce paragraphe, et n'y faisons qu'une brève allusion dans la suite du texte (dans la Remarque 3.3.3 du Chapitre 3), mais elle constitue la première généralisation non triviale d'un objet d'algèbre linéaire dans ce contexte, et nous a semblé mériter à ce titre qu'on la mentionne.

Pour un exposé détaillé d'algèbre linéaire sur  $\mathbb{H}$  on peut par exemple consulter le survol de Zhang [Zha97], ou – pour la théorie spectrale plus particulièrement – le papier de Farenick et Pidkowich [FP03].

$\mathbb{H}^n$  désigne l'espace vectoriel de dimension  $n$  à droite sur  $\mathbb{H}$  (ce qui nous permet de travailler en faisant agir classiquement les matrices à gauche sur  $\mathbb{H}^n$ ).

Les vecteurs de  $\mathbb{H}^n$  sont désignés par des lettres minuscules grasses ( $\mathbf{z}, \mathbf{y}, \dots$ ).

On désigne par des lettres capitales romaines ( $A, B, P \dots$ ) les matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{H})$ , et par la lettre  $I$  la matrice identité.

*Le groupe unitaire sur  $\mathbb{H}$*

Étant donnée  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{H})$ ,  $A^* = {}^t\bar{A}$  désigne sa transconjuguée.



Les crochets  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$  désignent le produit scalaire euclidien usuel sur  $\mathbb{H}^n$  :

$$\langle\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle\rangle = \mathbf{w}^* \mathbf{z}.$$

Le groupe  $\mathbf{Sp}(n)$  est le groupe des *matrices unitaires* de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{H})$  :

$$\mathbf{Sp}(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{H}) \mid A^* A = Id\}.$$

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{H})$ . Un *vecteur propre* de  $A$  est un vecteur  $\mathbf{z} \in \mathbb{H}^n$  tel que  $A \cdot \mathbf{z} = \mathbf{z} \lambda$  pour un  $\lambda \in \mathbb{H}$ . Un tel  $\lambda$  est appelé *valeur propre à droite* de  $A$ , ou simplement *valeur propre* de  $A$ . Étant donnés  $\mathbf{z}$  et  $\lambda$  comme ci-dessus, observons que

$$A \cdot (\mathbf{z}q) = \mathbf{z}q(q^{-1}\lambda q), \quad \forall q \in \mathbb{H}, q \neq 0.$$

Ainsi, si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ , il est en de même de tout élément de la classe de conjugaison  $O(\lambda)$  de  $\lambda$ .

Une *valeur propre standard* de  $A$  est une valeur propre pour  $A$ , appartenant à l'ensemble  $\mathbb{C}_i^+$  (voir (1.1.5)). L'ensemble des valeurs propres standards de  $A$  correspond donc bijectivement à l'ensemble des classes de conjugaison des valeurs propres de  $A$ . Cet ensemble est appelé le *spectre* de  $A$ , et noté  $\sigma(A)$ .

Le *rayon spectral* de  $A$  est le nombre

$$r_\sigma(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

La norme  $\|\cdot\|$  désigne la *norme spectrale* sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{H})$  :

$$\|A\| = \sqrt{r_\sigma(A^* A)}.$$

**Notation 1.1.6.** Dans toute la suite de ce texte, la norme  $\|A\|$  d'un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{H})$  désignera toujours sa norme spectrale.

Si  $U$  est une matrice unitaire, pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{H})$ ,

$$(UAU^{-1})^* \cdot (UAU^{-1}) = UAU^{-1}.$$

Comme dans les cas réels et complexes, les valeurs propres standards sont des invariants de similitude (voir par exemple l'exposé de Fuzhen Zhang, [Zha97, théorème 8.1]). Faisons donc ici tout de suite une remarque simple qui nous sera utile plus loin :

*Remarque 1.1.7.* La norme spectrale est invariante par changement de base unitaire : si  $U \in \mathbf{Sp}(n)$ ,  $\|UAU^{-1}\| = \|A\|$ .

Dans ce cadre, le théorème spectral s'énonce (voir par exemple l'exposé de Douglas R. Farenick et Barbara A. F. Pidkowich [FP03, théorème 3.3]) :

**Théorème 1.1.8.** *Si  $A$  est une matrice normale (en particulier si  $A$  est unitaire), il existe une matrice unitaire  $U$  telle que  $U^*AU$  soit diagonale et que ses éléments diagonaux soient dans  $\mathbb{C}^+$ .*

*Remarque 1.1.9.* L'orbite  $O(q)$  d'un quaternion  $q$  contient toujours son conjugué  $\bar{q}$ . En particulier, tout nombre complexe  $\lambda \in \mathbb{C} = \mathbb{C}_i$  est unitairement équivalent, dans  $\mathbb{H}$ , à son conjugué  $\bar{\lambda}$ . Insistons ici sur le fait que dans le théorème spectral sur  $\mathbb{H}$ , on peut donc choisir les coefficients de la matrices diagonale de partie imaginaire *positive*, ce qui n'est pas le cas sur  $\mathbb{C}$ .

Le groupe  $\mathbf{Sp}(n, 1)$

Dans la suite de ce texte, les crochets  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désignent une forme hermitienne de signature  $(n, 1)$  sur  $\mathbb{H}^{n+1}$ , c'est-à-dire, une forme vérifiant, pour tout  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathbb{H}^{n,1}$ , et tout  $a, b \in \mathbb{H}$ ,

- $\langle \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2, \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{z}_1 \rangle + \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{z}_2 \rangle + \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{z}_1 \rangle + \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{z}_2 \rangle$  ;
- $\langle \mathbf{w}_1 \cdot a, \mathbf{z}_1 \cdot b \rangle = \bar{a} \cdot \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{z}_1 \rangle \cdot b$  et
- $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{z}_1 \rangle = \overline{\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}$ .

L'espace vectoriel  $\mathbb{H}^{n+1}$  muni d'une telle forme est noté  $\mathbb{H}^{n,1}$ .

Le sous-groupe des matrices – agissant à gauche sur  $\mathbb{H}^{n,1}$  – préservant  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est noté de  $\mathbf{Sp}(n, 1) \subset GL_{n+1}(\mathbb{H})$ . Si  $J$  désigne la matrice de cette forme, c'est donc le sous-groupe

$$\mathbf{Sp}(n, 1) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{H}) \mid A^*JA = J\}$$

de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{H})$ .

Ce groupe dépend bien sûr de la forme  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  choisie, et si l'on change de forme, on obtient un groupe isomorphe au précédent, qui lui est conjugué. Dans les différents chapitres et sections qui suivent, nous avons besoin ou non d'expliciter la forme avec laquelle on travaille (selon la nature calculatoire ou théorique des résultats que nous souhaitons utiliser ou établir).

**Notation 1.1.10.** La lettre  $J$  désigne la matrice de cette forme, dans le contexte le plus général où l'on ne souhaite pas l'expliciter. Dans les contextes explicites (par exemple au moment de décrire différents modèles pour  $H_{\mathbb{H}}^n$ , à la section 1.2), on utilise l'une ou l'autre de deux formes : la première est donnée par la matrice que l'on note  $J_1$ ,

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;$$

la seconde par la matrice notée  $J_2$ ,

$$J_2 = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

**Définition 1.1.11.** Un endomorphisme unitaire qui conjugue deux groupes correspondant à des formes hermitiennes différentes est appelé *transformation de Cayley*.

*Exemple.* La matrice unitaire  $C_{1,2}$

$$C_{1,2} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & I_{n-1} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (1.1.12)$$

est la matrice d'une transformation de Cayley conjuguant le groupe donné par  $J_1$  à celui donné par  $J_2$ .

Une remarque élémentaire mais importante pour la suite est que deux tels groupes sont conjugués par une transformation *unitaire* de  $GL_{n+1}(\mathbb{H})$ . En particulier, d'après la Remarque 1.1.7, avec le choix de norme que nous faisons, le passage d'un groupe à l'autre n'affecte pas la norme des éléments.

Notons que la propriété remarquée en 1.1.7 est bien spécifique au groupe unitaire :

*Remarque 1.1.13.* La norme spectrale n'est pas invariante par conjugaison par les éléments de  $Sp(n, 1)$ . Par exemple, les matrices

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

préservent toutes les deux la forme hermitienne donnée par la matrice  $J_1$  définie aux notations 1.1.10 (avec la terminologie introduite au paragraphe 1.5.1,  $D$  est la dilatation d'Heisenberg de facteur 2, et  $A$  est la translation d'Heisenberg (verticale) par  $(0, 2i)$ ). Un calcul immédiat montre que

$$\|A\| = 1,$$

quand

$$\|D \cdot A \cdot D^{-1}\| = 7 + 4\sqrt{3}.$$

## 1.2 Modèles standards pour $H_{\mathbb{H}}^n$

D'après la Définition 1.0.1 (page 15), l'espace hyperbolique quaternionique est l'ensemble des classes à gauche  $G/K$ . Un *modèle* pour  $H_{\mathbb{H}}^n$  est une réalisation de ce quotient, c'est-à-dire un espace homogène sous l'action de  $G$ , dans lequel le stabilisateur d'un point s'identifie à  $K$ .

Le centre de  $G$  est le sous-groupe fini d'ordre 2,  $Z(G) = \{\pm I\}$  – remarquons que contrairement aux cas réels et complexes, les matrices scalaires ne sont plus centrales – et est contenu dans  $K$  quelque soit le sous-groupe  $K$  comme dans la définition 1.0.1. Notant

$$\mathbf{PSp}(n, 1) = \mathbf{Sp}(n, 1)/\{\pm I\}$$

le quotient de  $G$  par son centre, et  $PK$  le quotient de  $K$  par son centre, on a donc aussi

$$H_{\mathbb{H}}^n = \mathbf{PSp}(n, 1)/PK.$$

Cette remarque conduit naturellement à toute une famille de modèles, les *modèles projectifs* pour  $H_{\mathbb{H}}^n$  : le groupe projectivisé  $\mathbf{PSp}(n, 1)$  agit sur la grassmannienne  $\mathcal{G} \subset \mathbb{H}\mathbb{P}^n$  des droites négatives pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , et c'est cet espace homogène que l'on choisit pour représenter  $H_{\mathbb{H}}^n$ .

Précisément, notant

$$\begin{aligned} V_- &= \{ \mathbf{z} \in \mathbb{H}^{n,1} \mid \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle < 0 \} ; \\ V_0 &= \{ \mathbf{z} \in \mathbb{H}^{n,1} \mid \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = 0 \} \text{ et} \\ V_+ &= \{ \mathbf{z} \in \mathbb{H}^{n,1} \mid \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle > 0 \} , \end{aligned}$$

les cônes des vecteurs négatifs, isotropes, ou positifs pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , et  $P$  la projection

$$P : \mathbb{H}^{n,1} - \{0\} \mapsto \mathbb{H}\mathbb{P}^n = \{ \mathbb{H}^{n,1} - \{0\} \} / \sim$$

où  $\sim$  est la relation d'équivalence sur  $\mathbb{H}^{n,1} - \{0\}$

$$\mathbf{z} \sim \mathbf{z}' \iff \text{il existe } q \in \mathbb{H}, \text{ non nul, tel que } \mathbf{z} = \mathbf{z}'q,$$

on donne la définition suivante :

**Définition 1.2.1** (Modèle projectif de l'espace hyperbolique). L'*espace hyperbolique quaternionique* est la grassmannienne des droites de  $\mathbb{H}^{n,1}$  négatives pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , c'est-à-dire,

$$H_{\mathbb{H}}^n = P(V_-).$$

Le *bord* de  $H_{\mathbb{H}}^n$  est formé des droites isotropes pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , c'est donc le projectivisé du cône isotrope  $V_0$  :

$$\partial H_{\mathbb{H}}^n = P(V_0).$$

Dans la suite, et sauf si la situation prête à confusion, les crochets  $[ * \cdot * ]$  désigneront indifféremment un vecteur de  $\mathbb{H}^{n,1}$  ou son image dans  $\mathbb{H}\mathbb{P}^n$ .

La métrique sur  $H_{\mathbb{H}}^n$  est donnée par (voir par exemple le livre de Georges D. Mostow [Mos73, p.135])

$$ds^2 = \frac{-4}{\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle^2} \det \begin{pmatrix} \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle & \langle d\mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle \\ \langle \mathbf{z}, d\mathbf{z} \rangle & \langle d\mathbf{z}, d\mathbf{z} \rangle \end{pmatrix},$$

ou, de manière équivalente, par la distance  $\rho$  donnée par la formule

$$\cosh \left( \frac{\rho(P\mathbf{z}, P\mathbf{w})}{2} \right)^2 = \frac{|\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle|^2}{\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle} \quad (1.2.2)$$

(le membre de droite de cette formule est homogène et ne dépend donc pas des relevés  $\mathbf{z}$  et  $\mathbf{w}$  de  $P\mathbf{z}$  et  $P\mathbf{w}$  choisis). Le groupe des isométries de  $H_{\mathbb{H}}^n$  est le groupe  $\mathbf{PSp}(n, 1)$ .

*Remarque 1.2.3.* Dans notre exposé, nous avons choisi de normaliser la métrique sur  $H_{\mathbb{H}}^n$  de sorte que la courbure sectionnelle soit pincée entre  $-1$  et  $-1/4$ . L'autre normalisation que l'on peut trouver dans la littérature, et qui est celle choisie par George D. Mostow dans le livre cité plus haut, donne une courbure sectionnelle pincée entre  $-4$  et  $-1$ . Contrairement aux ouvrages dans lequel c'est ce dernier choix qui est fait, il apparaît donc un facteur 4 dans l'expression que nous donnons de la métrique, et un facteur  $1/\sqrt{4} = 1/2$  dans le membre de gauche de l'équation (1.2.2) (ce qui multiplie la distance  $\rho$  par un facteur 2 par rapport à celle donnée dans ces ouvrages).

Nous faisons ce choix motivés par le fait suivant : les plans sur lesquels la courbure vaut  $-1$  correspondent alors à des sous-variétés totalement géodésique de  $H_{\mathbb{H}}^n$  isométrique à la droite hyperbolique complexe  $H_{\mathbb{C}}^1$  (qui est isométrique à  $H_{\mathbb{R}}^2$ ) munie de sa métrique de Poincaré classique. Avec notre choix, on retrouve donc sur ces sous-variétés le modèle standard, à courbure  $-1$ , pour  $H_{\mathbb{R}}^2$  (les plans sur lesquels la courbure vaut  $-1/4$  correspondent aussi à des copies du plan hyperbolique réel, mais muni de la métrique moins courante du modèle de Klein).

*Remarque 1.2.4.* Le groupe  $\mathbf{P}\mathbf{Sp}(n, 1)$  agit transitivement sur cet espace, et on voit aisément que le stabilisateur d'une droite (sur  $\mathbb{H}$ ) s'identifie au groupe  $P(\mathbf{Sp}(n) \times \mathbf{Sp}(1))$  (le groupe  $\mathbf{Sp}(n)$  étant le groupe des transformations unitaires de l'orthogonal de cette droite quaternionique, le groupe  $\mathbf{Sp}(1)$  celui des transformations unitaires de la droite) : on retrouve (rassurés) la Définition 1.0.1.

À chaque choix de forme  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  correspond un modèle projectif explicite. Nous en présentons à présents deux, les plus fréquemment utilisés, et qui sont ceux avec lesquels nous travaillons dans la suite. Ce sont les deux modèles donnés par les formes  $J_1$  et  $J_2$  définies dans les Notations 1.1.10.

### 1.2.1 Modèle du demi-espace

C'est le modèle obtenu en choisissant la forme donnée par la matrice  $J_1$  (Notations 1.1.10). Le cône négatif  $V_-$  vaut alors

$$\begin{aligned} V_- &= \{ \mathbf{z} \in \mathbb{H}^{n,1} \mid \mathbf{z}^* J_1 \mathbf{z} < 0 \} \\ &= \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{H}^{n,1} \mid 2\Re(\overline{z_1} z_{n+1}) + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 < 0 \right\}, \end{aligned}$$

et  $H_{\mathbb{H}}^n = P(V_-)$  est tout entier contenu dans la carte  $\{z_{n+1} \neq 0\}$  de  $\mathbb{H}\mathbb{P}^n$ . Notant  $P^*$  la section standard de la projection  $P$  au-dessus de cette carte,

$$P^* : {}^t[z_1 \ \dots \ z_n \ z_{n+1}] \mapsto {}^t[z_1 z_{n+1}^{-1} \ \dots \ z_n z_{n+1}^{-1} \ 1],$$

on obtient la description de  $H_{\mathbb{H}}^n$

$$H_{\mathbb{H}}^n = \left\{ {}^t[z_1 \ \dots \ z_n \ 1] \in \mathbb{H}^{n,1} \mid 2\Re(z_1) + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 < 0 \right\} \simeq P^*(P(V_-)).$$

Nous désignons les points de  $H_{\mathbb{H}}^n$  – comme les vecteurs de  $\mathbb{H}^m$  – par des lettres minuscules grasses ( $\mathbf{z}, \mathbf{w}, \dots$ ) et, sauf mention explicite du contraire, nous les confondons avec leur

expression en coordonnées inhomogènes. Si toutefois la situation présente une ambiguïté, nous appellerons parfois *relevé standard* d'un point  $\mathbf{z}$  de  $H_{\mathbb{H}}^n$  le vecteur de  $\mathbb{H}^{n,1}$

$$\tilde{\mathbf{z}} = P^*(\mathbf{z}) = {}^t[z_1 \dots z_n \ 1].$$

Décrivons à présent le bord de l'espace hyperbolique dans ce modèle. Le cône isotrope vaut

$$V_0 = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{H}^{n,1} \mid 2\Re(\bar{z}_1 z_{n+1}) + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 = 0 \right\},$$

et nous constatons que les seuls points de  $V_0$  dont la dernière coordonnée est nulle sont les vecteurs  ${}^t[z_1 \ 0 \dots 0]$  de  $\mathbb{H}^{n,1}$ . Tous les autres points sont contenus dans l'ouvert  $\{z_{n+1} \neq 0\}$ . Le bord de  $H_{\mathbb{H}}^n$  est ainsi formé de points que nous appellerons *finis*, auxquels on ajoute un *point à l'infini*,  $q_\infty = {}^t[1 \ 0 \dots 0]$ , qui est le seul point de  $P(V_0)$  non contenu dans la carte affine  $\{z_{n+1} = 1\}$  :

$$\partial H_{\mathbb{H}}^n = \left\{ {}^t[z_1 \dots z_n \ 1] \mid 2\Re(z_1) + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 = 0 \right\} \cup q_\infty : \quad (1.2.5)$$

Les points finis du bord portent naturellement la structure d'un *groupe de Heisenberg généralisé* de dimension  $n$  : c'est par définition le groupe

$$\mathcal{H}_n = \mathbb{H}^{n-1} \times \mathfrak{Im}(\mathbb{H}),$$

muni de la loi de groupe

$$(\mathbf{z}_1, v_1)(\mathbf{z}_2, v_2) = (\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2, v_1 + v_2 + 2\Re\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle),$$

et la description (1.2.5) fait apparaître un système de coordonnées rendant compte de cette structure. On définit la paramétrisation

$$\varphi : \partial H_{\mathbb{H}}^n - \{q_\infty\} \longrightarrow \mathcal{H}_n$$

$$\mathbb{H}^{n,1} \ni \begin{bmatrix} z_1 \\ \mathbf{z} \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto (\mathbf{z}, v) = (\mathbf{z}, 2\mathfrak{Im}(z_1)).$$

Par analogie avec les coordonnées euclidiennes dans le modèle du demi-plan de Poincaré pour  $H_{\mathbb{R}}^2$  (analogie qui se trouvera justifiée plus bas, à la remarque 1.5.14), on étend cette paramétrisation à  $H_{\mathbb{H}}^n$  tout entier. On ajoute une coordonnée réelle (de hauteur), nulle pour les points finis du bord, donnée à nouveau naturellement par l'équation (1.2.5). On note

encore  $\varphi$  la paramétrisation étendue à tout l'espace :

$$\varphi : \overline{H_{\mathbb{H}}^n} - \{q_{\infty}\} \longrightarrow \mathcal{H}_n \times \mathbb{R}$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \mathbf{z} \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto (\mathbf{z}, v, u) = (\mathbf{z}, 2\Im(z_1), -(2\Re(z_1) + |\mathbf{z}|^2)).$$

La paramétrisation inverse, permettant de passer de ces nouvelles coordonnées aux coordonnées inhomogènes, est donnée par

$$\varphi^{-1} : \mathbf{w} = (\mathbf{z}, v, u) \mapsto \tilde{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \frac{-|\mathbf{z}|^2 - u + v}{2} \\ \mathbf{z} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dans ces coordonnées, le produit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  vaut

$$\langle (\mathbf{z}_1, v_1, u_1), (\mathbf{z}_2, v_2, u_2) \rangle = \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle - \frac{|\mathbf{z}_1|^2 + |\mathbf{z}_2|^2 + u_1 + u_2 + v_1 + v_2}{2},$$

et en particulier

$$\langle (\mathbf{z}, v, u), (\mathbf{z}, v, u) \rangle = -u. \quad (1.2.6)$$

L'horosphère de hauteur  $t > 0$ ,  $H_t$ , est l'hypersurface de  $H_{\mathbb{H}}^n$  formée des points  $\mathbf{w}$  vérifiant  $\langle \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{w}} \rangle = -t$ . D'après (1.2.6), en a ainsi la description :

$$H_t = \{(\mathbf{z}, v, u) \mid u = t\}. \quad (1.2.7)$$

L'analogie avec les coordonnées euclidiennes donne donc une bonne intuition de la géométrie de  $H_{\mathbb{H}}^n$  dans ce modèle (le point de coordonnées  $(x, y)$  dans  $H_{\mathbb{R}}^2$  est situé sur l'horosphère de hauteur  $y$ ). Motivés par cette remarque – et anticipant sur le paragraphe 1.5.2 et la remarque 1.5.14 – on appelle  $(\mathbf{z}, v, u)$  les *coordonnées horosphériques* d'un point de  $H_{\mathbb{H}}^n$ , et  $u$  la *hauteur horosphérique* d'un tel point.

On appelle *géodésiques verticales* les géodésiques  $\mathcal{D}_{q_0}$  ayant pour extrémités  $q_{\infty}$  et un point fini du bord  $q_0 = (\mathbf{z}_0, v_0, 0)$ . On en a à nouveau une paramétrisation analogue à celle que l'on trouve dans  $H_{\mathbb{R}}^2$  :

$$\mathcal{D}_{q_0} = \{(\mathbf{z}_0, v_0, u) \mid u \in ]0, +\infty[ \}.$$

On distingue enfin une *origine*, notée  $\mathbf{o}$ , donnée en coordonnées inhomogènes par

$$\mathbf{o} = {}^t[-1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]$$

et par

$$\mathbf{o} = (0, 0, 2)$$

en coordonnées horosphériques; et un point parmi les points finis du bord, le point  $q_0$ , de coordonnées horosphériques

$$q_0 = (0, 0, 0)$$

et dont les coordonnées inhomogènes sont

$$q_0 = {}^t[-1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1].$$

Pour conclure ce paragraphe, donnons la forme générale de la matrice d'une isométrie de  $H_{\mathbb{H}}^n$  dans ce modèle. Par définition, une matrice de  $\mathbf{Sp}(n, 1)$  vérifie  $G^{-1} = J_1 G^* J_1$ . On peut donc l'écrire

$$G = \begin{bmatrix} a & \mathbf{a}^* & b \\ \mathbf{b} & A & \mathbf{c} \\ c & \mathbf{d}^* & d \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad G^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{d} & \mathbf{b}^* & \bar{b} \\ \mathbf{d} & A^* & \mathbf{a} \\ \bar{c} & \mathbf{b}^* & \bar{a} \end{bmatrix} \quad (1.2.8)$$

où  $a, b, c, d \in \mathbb{H}$ ,  $A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{H})$ , et  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$  sont des vecteurs colonnes de  $\mathbb{H}^{n-1}$ . (Il y a bien entendu des conditions supplémentaires sur chacun de ces éléments, mais seule cette forme générale nous sera utile par la suite : nous ne les explicitons donc pas ici).

### 1.2.2 Modèle de la boule unité

Dans la suite de ce texte, nous travaillons peu dans ce deuxième modèle, notamment parce que – nous le verrons plus bas, à la section 1.5 puis au chapitre 4 – le modèle du demi-espace offre une description agréable de la géométrie du bord de  $H_{\mathbb{H}}^n$ .

Il est cependant un moment où nous le préférons au premier, c'est lorsque nous travaillons avec le sous-groupe compact maximal  $K$  des isométries stabilisant un point de  $H_{\mathbb{H}}^n$  (et ceci car nous trouvons les calculs dans ce sous-groupe plus élégants dans ce cadre).

Le modèle de la boule unité est donné par le choix de la forme représentée par la matrice  $J_2$  introduite dans les Notations 1.1.10. Dans ce cadre,

$$V_- = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{H}^{n,1} \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 - |z_{n+1}|^2 < 0 \right\}$$

et  $H_{\mathbb{H}}^n = P(V_-)$  est à nouveau entièrement contenu dans la carte  $\{z_{n+1} = 1\}$  de  $\mathbb{H}\mathbb{P}^n$ . Dans cette carte,

$$H_{\mathbb{H}}^n \simeq \left\{ {}^t[z_1 \ \dots \ z_n \ 1] \in \mathbb{H}^{n,1} \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 < 1 \right\}$$

s'identifie donc à la boule unité de  $\mathbb{H}^n$ . Cette fois, le bord de  $H_{\mathbb{H}}^n$ ,  $P(V_0)$ , est lui aussi entièrement contenu dans la carte affine  $\{z_{n+1} = 1\}$ , et s'identifie à la sphère unité de  $\mathbb{H}^n$ ,

$$\partial H_{\mathbb{H}}^n \simeq \left\{ |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1 \right\}.$$



Rappelons que le passage d'un modèle à l'autre se fait au moyen d'une *transformation de Cayley*, c'est-à-dire une transformation conjuguant les deux formes données par  $J_1$  et  $J_2$ . Nous en présentons une à la section 1.1.2 de l'Introduction, donnée par la matrice  $C_{1,2}$  définie en (1.1.12).

L'origine  $\mathbf{o}$  distinguée dans le modèle du demi-espace est envoyée par cette transformation sur le centre 0 de la boule (le point  ${}^t[0 \dots 0 \ 1]$  en coordonnées inhomogènes).

Décrivons succinctement les éléments du stabilisateur de l'origine dans ce modèle. En utilisant le fait que les matrices avec lesquelles nous travaillons stabilisent  $J_2$ , un calcul immédiat montre que ce sont les matrices de  $\mathbf{Sp}(n, 1)$  de la forme

$$G = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & e^{\mu(a)} \end{bmatrix}, \quad A \in \mathbf{Sp}(n, 1),$$

et l'on retrouve bien l'isomorphisme attendu

$$\text{Stab}(0) \simeq P(\mathbf{Sp}(n) \times \mathbf{Sp}(1)).$$

Nous faisons alors ici la remarque suivante, que nous utilisons dans la suite :

*Remarque 1.2.9.* Les éléments de ce sous-groupe sont donc de norme 1. Ils sont en correspondance, *via* la transformation de Cayley  $C_{1,2}$ , avec les éléments stabilisant l'origine  $\mathbf{o}$  dans le modèle du demi-espace. Ainsi,  $C_{1,2}$  étant une transformation unitaire, la Remarque 1.1.7 montre que les éléments du stabilisateur de l'origine dans le demi-espace sont de norme 1.

## 1.3 Les isométries de $H_{\mathbb{H}}^n$

### 1.3.1 Classification des isométries de $H_{\mathbb{H}}^n$

Les éléments de  $\text{Isom}(H_{\mathbb{H}}^n)$  agissent sur l'espace projectif en fixant globalement l'adhérence  $\overline{H_{\mathbb{H}}^n} = H_{\mathbb{H}}^n \cup \partial H_{\mathbb{H}}^n$  de  $H_{\mathbb{H}}^n$ , qui est une boule fermée. Tout élément de  $\text{Isom}(H_{\mathbb{H}}^n)$  possède donc au moins un point fixe dans  $\overline{H_{\mathbb{H}}^n}$ , et l'on classe les isométries de  $H_{\mathbb{H}}^n$  selon la nature de l'ensemble de leurs points fixes.

Par des considérations d'algèbre linéaire élémentaires, on montre que si un élément  $G$  de  $\text{Isom}(H_{\mathbb{H}}^n)$  fixe strictement plus de deux points au bord  $\partial H_{\mathbb{H}}^n$  de  $H_{\mathbb{H}}^n$ , nécessairement,  $G$  fixe point par point toute une sous-variété totalement géodésique de  $H_{\mathbb{H}}^n$  (on trouvera par exemple une démonstration de ce fait dans l'article de Shyan S. Chen et Leon Greenberg [CG74, Lemme 3.1.1]). Ce résultat implique la traditionnelle trichotomie – bien connue dans l'espace hyperbolique réel – en éléments *paraboliques*, *loxodromiques* ou *elliptiques* :

**Définition 1.3.1.** Soit  $G$  un élément de  $\text{Isom}(H_{\mathbb{H}}^n)$ .  $G$  est dit de type

- *parabolique* s'il possède exactement un point fixe au bord  $\partial H_{\mathbb{H}}^n$  (et pas de point fixe à l'intérieur de l'espace hyperbolique  $H_{\mathbb{H}}^n$ );
- *loxodromique* s'il possède exactement deux points fixes au bord  $\partial H_{\mathbb{H}}^n$  (et pas de point fixe à l'intérieur de l'espace hyperbolique  $H_{\mathbb{H}}^n$ );
- *elliptique* s'il possède (au moins) un point fixe dans l'espace hyperbolique  $H_{\mathbb{H}}^n$ .

### 1.3.2 Sous-groupes élémentaires de $\text{Isom}(H_{\mathbb{H}}^n)$

La notion de groupe élémentaire peut-être définie dans un cadre plus large que celui des sous-groupes d'isométries des espaces hyperboliques. Pour une définition tout à fait générale, on pourra par exemple consulter l'article de Mikhaïl Gromov sur les groupes hyperboliques [Gro87]. Nous les définissons dans le cadre qui nous concerne, celui des sous-groupes discrets de  $\text{Isom}(H_{\mathbb{H}}^n)$ , et la définition que nous en donnons, ainsi que ses deux formulations équivalentes, se trouvent détaillées dans la référence ci-dessus.

Commençons par donner la définition suivante :

**Définition 1.3.2.** L'ensemble limite d'un sous-groupe discret  $\Gamma$  d'isométries de  $H_{\mathbb{H}}^n$  est l'ensemble des points d'accumulation de l'orbite d'un point arbitraire  $x \in \overline{H_{\mathbb{H}}^n}$ , et est noté  $L(\Gamma)$ .

Alors,

**Définition 1.3.3.** Un sous-groupe discret  $\Gamma$  d'isométrie de  $H_{\mathbb{H}}^n$  est *non-élémentaire* si

$$L(\Gamma) > 2.$$

Si ce n'est pas le cas,  $\Gamma$  est dit *élémentaire*.

La proposition suivante décrit précisément les sous-groupes élémentaires de  $\text{Isom}(H_{\mathbb{H}}^n)$ .

**Proposition 1.3.4** (Définition 1.3.3 (bis)). *Soit  $\Gamma \subset \text{Isom}(H_{\mathbb{H}}^n)$  sous-groupe discret. Alors, si  $\Gamma$  est élémentaire,*

1. *soit  $L(\Gamma) = \emptyset$ , auquel cas  $\Gamma$  est fini ;*
2. *soit  $L(\Gamma) = \{x_0\}$ , et dans ce cas, les éléments d'ordre infini de  $\Gamma$  sont tous paraboliques de point fixe  $x_0 \in \partial H_{\mathbb{H}}^n$  ;*
3. *soit  $L(\Gamma) = \{x_0, y_0\}$  et dans ce cas, les éléments d'ordre infini de  $\Gamma$  sont tous loxodromiques de points fixes  $x_0$  et  $y_0 \in \partial H_{\mathbb{H}}^n$ .*

*Remarque 1.3.5.* En particulier, si  $\Gamma \subset \text{Isom}(H_{\mathbb{H}}^n)$  est discret, élémentaire et *sans torsion*, les éléments de  $\Gamma$  sont soit *tous* paraboliques, soit *tous* loxodromiques. Cette propriété très simple des groupes élémentaires est essentiellement la seule dont nous nous servirons dans la suite de ce texte. Nous l'invoquerons dans le chapitre 2 : elle se révélera cruciale dans la démonstration du théorème 2.1.7, théorème donnant ensuite l'inégalité centrale du chapitre 2.

Donnons enfin, pour clore ce paragraphe, une dernière caractérisation équivalente des sous-groupes élémentaires dans ce contexte, en lien avec la discussion que nous menons à la fin du chapitre 2 (section 2.4).

**Proposition 1.3.6** (Définition 1.3.3 (ter)). *Soit  $\Gamma \subset \text{Isom}(H_{\mathbb{H}}^n)$  sous-groupe discret. Alors,  $\Gamma$  est élémentaire, si et seulement si,  $\Gamma$  est virtuellement nilpotent.*

### 1.4 Sous-espaces totalement géodésiques de $H_{\mathbb{H}}^n$

Le contenu de ce paragraphe est entièrement explicité dans l'article de Shyan S. Chen et Leon Greenberg que nous avons déjà mentionné plus haut [CG74]. Nous démontrons donc une proposition (la proposition 1.4.4), pour donner une idée de la saveur (d'algèbre linéaire) des preuves, et nous nous contentons ensuite d'énoncer les résultats, sans démonstration, renvoyant à cet article pour les détails.

Comme nous l'avons déjà signalé en introduction de ce chapitre, la géométrie de  $H_{\mathbb{H}}^n$  est très similaire à celle de  $H_{\mathbb{C}}^n$ , et l'analogie avec la géométrie hyperbolique complexe fonctionne parfaitement pour ce paragraphe. On pourra donc aussi consulter le livre de William Goldman [Gol99] sur le sujet.

#### 1.4.1 Géodésiques

Étant donnés deux points  $\mathbf{z}$  et  $\mathbf{w}$  de  $H_{\mathbb{H}}^n \cup \partial H_{\mathbb{H}}^n$ , il existe une unique géodésique  $\gamma_{\mathbf{z},\mathbf{w}}$  les joignant.

La proposition suivante donne une paramétrisation des géodésiques de  $H_{\mathbb{H}}^n$  en fonction de leurs extrémités. Donnons nous deux points du bord  $\mathbf{z}$  et  $\mathbf{w} \in \partial H_{\mathbb{H}}^n$ , et choisissons deux relevés  $\tilde{\mathbf{z}}$  et  $\tilde{\mathbf{w}}$  dans  $\mathbb{H}^{n,1}$  normalisés de sorte que  $\langle \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{w}} \rangle = -1$ . Alors :

**Proposition 1.4.1.** *Soit  $t \in \mathbb{R}$ , et notons  $\gamma(t)$  le point de  $H_{\mathbb{H}}^n$  correspondant au point  $e^{t/2}\tilde{\mathbf{z}} + e^{-t/2}\tilde{\mathbf{w}}$  de  $\mathbb{H}^{n,1}$ . Alors l'ensemble*

$$\gamma = \{\gamma(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset H_{\mathbb{H}}^n$$

*est la géodésique de  $H_{\mathbb{H}}^n$  joignant  $\mathbf{z}$  et  $\mathbf{w}$ , paramétrée par la longueur d'arc  $t$ .*

*Démonstration.* Tout d'abord, comme  $\mathbf{z}$  et  $\mathbf{w}$  sont des points du bord,  $\langle \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{z}} \rangle = \langle \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{w}} \rangle = 0$ . Avec le choix de normalisation que l'on a fait, on a donc

$$\langle e^{t/2}\tilde{\mathbf{z}} + e^{-t/2}\tilde{\mathbf{w}}, e^{t/2}\tilde{\mathbf{z}} + e^{-t/2}\tilde{\mathbf{w}} \rangle = -2.$$

Donnons nous deux réels  $s$  et  $t$ . Il suffit de voir que  $\rho(\gamma(s), \gamma(t)) = |t - s|$ , ce que montre un calcul immédiat (rappelons que la distance est donnée par la formule (1.2.2) indiquée à la section 1.2) :

$$\begin{aligned} \cosh\left(\frac{\rho(\mathbf{z}, \mathbf{w})}{2}\right)^2 &= \frac{|\langle e^{t/2}\tilde{\mathbf{z}} + e^{-t/2}\tilde{\mathbf{w}}, e^{s/2}\tilde{\mathbf{z}} + e^{-s/2}\tilde{\mathbf{w}} \rangle|^2}{\langle e^{t/2}\tilde{\mathbf{z}} + e^{-t/2}\tilde{\mathbf{w}}, e^{t/2}\tilde{\mathbf{z}} + e^{-t/2}\tilde{\mathbf{w}} \rangle \langle e^{s/2}\tilde{\mathbf{z}} + e^{-s/2}\tilde{\mathbf{w}}, e^{s/2}\tilde{\mathbf{z}} + e^{-s/2}\tilde{\mathbf{w}} \rangle} \\ &= \left(\frac{e^{-\frac{t-s}{2}} + e^{\frac{s-t}{2}}}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

□

#### 1.4.2 Sous-variétés quaternioniques : les $\mathbb{H}^k$ -plans

Ces sous-variétés sont les points fixes de réflexions orthogonales (définition 1.4.2), qui sont des isométries de  $H_{\mathbb{H}}^n$ , ce qui implique immédiatement qu'elles sont totalement géodésiques

(dans une variété riemannienne, les points fixes d'une isométrie forment un sous-espace totalement géodésique). On commence donc par expliciter ces isométries.

Soit  $\mathcal{V}$  un sous- $\mathbb{H}$ -espace vectoriel de  $\mathbb{H}^{n,1}$  tel que la restriction de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  à  $\mathcal{V}$  soit non-dégénérée. On a la décomposition orthogonale

$$\mathbb{H}^{n,1} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^\perp,$$

et on note  $\pi_{\mathcal{V}}$  et  $\pi_{\mathcal{V}^\perp}$  les projections orthogonales sur  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{V}^\perp$ . Alors, pour tous vecteurs  $\mathbf{z}$  et  $\mathbf{w}$  de  $\mathbb{H}^{n,1}$ ,

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = \langle \pi_{\mathcal{V}}(\mathbf{z}), \pi_{\mathcal{V}}(\mathbf{w}) \rangle + \langle \pi_{\mathcal{V}^\perp}(\mathbf{z}), \pi_{\mathcal{V}^\perp}(\mathbf{w}) \rangle.$$

Ainsi, la transformation

$$\xi_{\mathcal{V}} : \mathbf{z} \mapsto \pi_{\mathcal{V}}(\mathbf{z}) - \pi_{\mathcal{V}^\perp}(\mathbf{z})$$

est un élément de  $\mathbf{Sp}(n, 1)$ .

**Définition 1.4.2.** La transformation  $\xi_{\mathcal{V}}$  est appelée *réflexion orthogonale par rapport à  $\mathcal{V}$* , ou simplement *réflexion par rapport à  $\mathcal{V}$* .

*Remarque 1.4.3.* Dans le cas complexe, on a toute une famille à un paramètre de telles transformations, donnée par

$$\xi^\mu : \mathbf{z} \mapsto \pi_{\mathcal{V}}(\mathbf{z}) + \pi_{\mathcal{V}^\perp}(\mathbf{z}) \cdot \mu,$$

où  $\mu$  est un nombre complexe de module 1 (voir par exemple la discussion dans le livre de William Goldman [Gol99, 3.1.2]). Dans notre cas, si  $\mu$  est un quaternion de module 1 différent de 1 et de  $-1$ ,  $\mu$  n'est pas central et

$$\begin{aligned} & \langle \pi_{\mathcal{V}}(\mathbf{z}) + \pi_{\mathcal{V}^\perp}(\mathbf{z}) \cdot \mu, \pi_{\mathcal{V}}(\mathbf{w}) + \pi_{\mathcal{V}^\perp}(\mathbf{w}) \cdot \mu \rangle \\ &= \langle \pi_{\mathcal{V}}(\mathbf{z}), \pi_{\mathcal{V}}(\mathbf{w}) \rangle + \bar{\mu} \cdot \langle \pi_{\mathcal{V}^\perp}(\mathbf{z}), \pi_{\mathcal{V}^\perp}(\mathbf{w}) \rangle \cdot \mu \\ &\neq \langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle. \end{aligned}$$

Cette transformation n'est donc pas dans  $\mathbf{Sp}(n, 1)$ .

On peut à présent donner la proposition suivante :

**Proposition 1.4.4.** *Soit  $\mathcal{V}$  un sous- $\mathbb{H}$ -espace vectoriel de  $\mathbb{H}^{n,1}$ , de dimension  $k+1$  ( $1 \leq k < n+1$ ) qui intersecte  $V_-$ . Alors  $\mathcal{M} = P(\mathcal{V}) \cap H_{\mathbb{H}}^n$  est une sous-variété totalement géodésique (de dimension  $k$  sur  $\mathbb{H}$ , de dimension réelle  $4k$ ) de  $H_{\mathbb{H}}^n$ , isométrique à  $H_{\mathbb{H}}^k$ .*

**Définition 1.4.5.** On appelle  $\mathbb{H}^k$ -plan une telle sous-variété de  $H_{\mathbb{H}}^n$ . Si  $k=1$ , on parlera de droite quaternionique de  $H_{\mathbb{H}}^n$ .

*Preuve (de la Proposition 1.4.4).* Déjà,  $\mathcal{M}$  est une sous-variété totalement géodésique de  $H_{\mathbb{H}}^n$ , car égale à l'ensemble des points fixes de la symétrie  $\xi_{\mathcal{V}}$  définie au début du paragraphe. Montrons que cette sous-variété est isométrique à  $H_{\mathbb{H}}^k$ . Plaçons nous pour ce faire dans le modèle de la boule. Tout d'abord, comme  $\mathbf{PSp}(n, 1)$  agit transitivement sur  $H_{\mathbb{H}}^n$ , on peut

supposer que  $\mathcal{M}$  contient l'origine 0 de la boule. Ensuite, comme  $\mathbf{Sp}(n) \subset \mathbf{PSp}(n, 1)$  agit transitivement sur les sous- $\mathbb{H}$ -espaces vectoriels de dimension  $k$  de  $\mathbb{H}^n$ , il existe une isométrie  $A \in \mathbf{PSp}(n, 1)$  telle que  $A(P(\mathcal{V})) = \{0'\} \times \mathbb{H}^k$ . Ainsi,  $A$  est une isométrie envoyant  $\mathcal{M}$  sur  $H_{\mathbb{H}}^k$ .  $\square$

*Remarque 1.4.6.* Dans la démonstration ci-dessus, nous remarquons que le sous-groupe  $\mathbf{Sp}(n)$  agit transitivement sur les  $\mathbb{H}^k$ -plans. En particulier, *l'action du groupe  $\mathbf{Sp}(n, 1)$  est transitive sur les  $\mathbb{H}^k$  plans.*

### 1.4.3 Sous-variétés complexes : les $\mathbb{C}^k$ -plans

Rappelons qu'étant donné un quaternion pur de module 1  $\mu$ , on note  $\mathbb{C}_\mu$  la copie de  $\mathbb{C}$  engendrée par  $\mu$  et que l'on dispose alors des opérations de symétrie orthogonale par rapport à  $\mathbb{C}_\mu$  et de projection orthogonale sur  $\mathbb{C}_\mu^\perp$  (voir (1.1.2) et (1.1.3) page 17).

#### Définitions 1.4.7.

- Soit  $\mathcal{W}$  un sous- $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de  $\mathbb{H}^{n,1}$ , et  $\mathbb{C}_\mu \simeq \mathbb{C}$  un sous-corps commutatif maximal de  $\mathbb{H}$ . On dit que  $\mathcal{W}$  est un sous-espace  $\mathbb{C}_\mu$ -isotrope si pour tout élément  $w, w' \in \mathcal{W}$ ,  $\langle w, w' \rangle \in \mathbb{C}_\mu$ , c'est-à-dire si

$$\text{proj}_{\mathbb{C}_\mu} \circ \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathcal{W}} \equiv 0.$$

- Un sous-espace  $\mathbb{C}_\mu$ -isotrope de dimension maximale est appelé un  $\mathbb{C}_\mu$ -lagrangien de  $\mathbb{H}^{2,1}$ .

*Remarque 1.4.8.* Les  $\mathbb{C}_\mu$ -lagrangiens de  $\mathbb{H}^{n,1}$  sont donc des sous-espaces de dimension réelle  $4(n+1)/2 = 2n+2$ , de dimension « complexe »  $n+1$ .

**Proposition 1.4.9.** *Soit  $\mathcal{W}$  un sous-espace  $\mathbb{C}_\mu$ -isotrope de  $\mathbb{H}^{n,1}$ , de dimension complexe  $k+1$ , qui intersecte  $V_-$ . Alors  $\mathcal{M} = P(\mathcal{W}) \cap H_{\mathbb{H}}^n$  est une sous-variété totalement géodésique de  $H_{\mathbb{H}}^n$ , de dimension réelle  $2k$ , isométrique à  $H_{\mathbb{C}}^k$ .*

**Définition 1.4.10.** Une telle sous-variété est appelée  $\mathbb{C}_\mu^k$ -plan de  $H_{\mathbb{H}}^2$ . Lorsque la distinction ne sera pas nécessaire, on appellera simplement ces sous-variétés des  $k$ -plans complexes ou  $\mathbb{C}^k$ -plans.

*Remarque 1.4.11.* Tout comme pour les  $k$ -plans quaternioniques, nous remarquons que *l'action du groupe  $\mathbf{Sp}(n, 1)$  est transitive sur les  $\mathbb{C}^k$ -plans.*

Il reste enfin un dernier type de sous-variétés totalement géodésiques dans  $H_{\mathbb{H}}^n$ , que l'on peut à nouveau exhiber par des raisonnements d'algèbre linéaire, ou que l'on peut déduire de la connaissance des sous-variétés totalement géodésiques des espaces hyperboliques complexes : les  $\mathbb{R}^k$ -plans.

### 1.4.4 Sous-variétés réelles : les $\mathbb{R}^k$ -plans

**Définition 1.4.12.** Soit  $\mathcal{U}$  un sous- $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de  $\mathbb{H}^{n,1}$ . On dit que  $\mathcal{U}$  est un sous-espace *totalement réel* de  $\mathbb{H}^{2,1}$  si pour tout élément  $u, u' \in \mathcal{U}$ ,  $\langle u, u' \rangle \in \mathbb{R}$ .

**Proposition 1.4.13.** Soit  $\mathcal{U}$  un sous-espace linéaire totalement réel de  $\mathbb{H}^{n,1}$ , de dimension réelle  $k+1$ , qui intersecte  $V_-$ . Alors  $\mathcal{M} = P(\mathcal{U}) \cap H_{\mathbb{H}}^n$  est une sous-variété totalement géodésique de  $H_{\mathbb{H}}^n$ , de dimension réelle  $k$ , isométrique à  $H_{\mathbb{R}}^k$ .

**Définition 1.4.14.** Une telle sous-variété est appelée  $\mathbb{R}^k$ -plan de  $H_{\mathbb{H}}^n$ .

*Remarque 1.4.15.* À nouveau, on peut vérifier que l'action du groupe  $\mathbf{Sp}(n, 1)$  est transitive sur les  $\mathbb{R}^k$ -plans.

## 1.5 Le sous-groupe parabolique $\mathcal{P}_\infty$

Dans le chapitre 4, nous nous intéressons à la construction d'un domaine fondamental pour l'action d'un certain réseau de  $\mathbf{PSp}(2, 1)$  sur le plan hyperbolique quaternionique,  $H_{\mathbb{H}}^2$ . Mimant la construction d'un *domaine de Ford* dans  $H_{\mathbb{R}}^2$  ou  $H_{\mathbb{C}}^2$ , nous nous plaçons pour ce faire dans le modèle du demi-espace, et nous avons besoin d'une étude un peu plus fine des isométries stabilisant le point à l'infini  $q_\infty$  dans ce modèle.

Dans cette section, nous présentons le stabilisateur de ce point en dimension  $n$  quelconque, l'exposition de cette généralité étant strictement similaire à celle du cas particulier de  $H_{\mathbb{H}}^2$ .

**Notation 1.5.1.** On note  $\mathcal{P}_\infty$  le stabilisateur de  $q_\infty$  dans le modèle du demi-espace.

Rappelons que nous avons donné au paragraphe 1.2.1, en (1.2.8), la forme générale de la matrice d'une isométrie de  $H_{\mathbb{H}}^n$  dans le modèle du demi-espace. Remarquons que si une isométrie  $B$  fixe  $q_\infty$ , son inverse aussi. De cette remarque et de (1.2.8), on déduit ainsi que les éléments de  $\mathcal{P}_\infty$  sont représentés par des matrices triangulaires supérieures par blocs, de la forme

$$F = \begin{bmatrix} a & \mathbf{a}^* & b \\ 0 & A & \mathbf{c} \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}.$$

Explicitant l'appartenance d'une telle matrice au groupe  $\mathbf{Sp}(n, 1)$ , c'est-à-dire, écrivant

$$F^* J_2 F = J_2,$$

on trouve que nécessairement, ces matrices sont de la forme

$$F = \begin{bmatrix} ru & \mathbf{a}^* & b \\ 0 & A & \mathbf{c} \\ 0 & 0 & \frac{1}{r}u \end{bmatrix}, \quad \text{où } r \in \mathbb{R}^+, u \in \mathbf{Sp}(1), A \in \mathbf{Sp}(n-1), \quad (1.5.2)$$

et  $\mathbf{a}, \mathbf{c}$  sont des vecteurs colonnes de  $\mathbb{H}^{n-1}$ ,  $b \in \mathbb{H}$ .

Le groupe  $\mathcal{P}_\infty$  est un sous-groupe dit *parabolique* de  $\mathbf{PSp}(n, 1)$ . Dans notre cadre, on peut donner la définition suivante :

**Définition 1.5.3.** Un sous-groupe parabolique de  $\mathbf{PSp}(n, 1)$  est le stabilisateur d'un point  $P(\mathbf{z})$  du bord  $P(V_0)$  de  $H_{\mathbb{H}}^n$ .

La définition algébrique générale (dans le cadre large de l'étude des groupes algébriques développée par Armand Borel et Harish-Chandra) de ces objets sort grandement du cadre de notre présentation. On en trouvera (par exemple) un exposé complet dans l'ouvrage collectif édité par Garth Warner [War72], et un exposé plus synthétique dans le livre d'Armand Borel et Lizhen Ji [BJ06, I.1].

Dans cette dernière référence, l'exposé est motivé par le lien entre les structures d'un sous-groupe parabolique (*décomposition de Langlands* de  $\mathcal{P}$ ) et du voisinage d'un point à l'infini (*décomposition horosphérique* de  $H_{\mathbb{H}}^n$ ), et c'est cette philosophie que nous suivons dans notre exposition.

### 1.5.1 Décomposition de Langlands de $\mathcal{P}_\infty$

La *Décomposition de Langlands* d'un sous-groupe parabolique d'un groupe de Lie semi-simple  $G$  est définie à partir d'une *décomposition d'Iwasawa* de  $G$ . Dans le cadre de ce texte, une présentation générale de cette dernière décomposition ne présente pas beaucoup d'intérêt. Par ailleurs, c'est un outil classique de la théorie des groupes de Lie, et chacun des ouvrages de référence sur les groupes algébriques ou sur les espaces symétriques que nous avons cités depuis le début de ce chapitre en contient une description.

Nous donnons ainsi ici la définition *ad hoc* suivante, et renvoyons à la littérature pour une définition générale.

**Définition 1.5.4.** La *décomposition d'Iwasawa standard* de  $\mathbf{Sp}(n, 1)$  est l'écriture

$$\mathbf{PSp}(n, 1) = \mathcal{K} \mathcal{A} \mathcal{N} \tag{1.5.5}$$

où (dans le modèle du demi-espace)

- $\mathcal{K}$  est le stabilisateur de l'origine  $\mathbf{o}$  ;
- $\mathcal{A}$  est formé des éléments loxodromiques fixant les deux points du bord  $q_0$  et  $q_\infty$  ;
- $\mathcal{N}$  est formé des éléments paraboliques fixant le point du bord  $q_\infty$ .

Dans tout autre modèle, la *décomposition d'Iwasawa standard* de  $\mathbf{Sp}(n, 1)$  s'obtient en conjuguant l'écriture (1.5.5) par la transformation de Cayley de ce modèle vers celui du demi-espace.

Rappelons que le groupe des isométries de  $H_{\mathbb{H}}^n$  agit transitivement sur le bord. De la définition 1.5.3, on déduit donc immédiatement que tous les sous-groupes paraboliques de  $\mathbf{PSp}(n, 1)$  sont conjugués. Nous présentons ici des résultats de structure concernant le sous-groupe parabolique qui nous intéresse pour la suite,  $\mathcal{P}_\infty$ , mais signalons que ces résultats sont plus généraux et s'étendent à tous les sous-groupes paraboliques de  $\mathbf{PSp}(n, 1)$ .

**Proposition 1.5.6** (Décomposition de Langlands de  $\mathcal{P}_\infty$ , voir par exemple [BJ06, I.1]). *Considérons la décomposition d'Iwasawa standard*

$$\mathbf{PSp}(n, 1) = \mathcal{K} \mathcal{A} \mathcal{N}$$

donnée en (1.5.5). La décomposition de Langlands de  $\mathcal{P}_\infty$  associée est l'écriture

$$\mathcal{P}_\infty = \mathcal{M}\mathcal{A}\mathcal{N} \simeq \mathcal{M} \times \mathcal{A} \ltimes \mathcal{N}, \quad (1.5.7)$$

où  $\mathcal{M} = \mathcal{P}_\infty \cap \mathcal{K}$  est le centralisateur de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{P}_\infty$ .

*Remarque 1.5.8.* De plus, l'application

$$\mathcal{M} \times \mathcal{A} \ltimes \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P}_\infty, \quad (M, A, N) \mapsto MAN$$

est un isomorphisme analytique entre variétés lisses.

Nous décrivons à présent explicitement les trois sous-groupes  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{N}$ . Avec cette description, et connaissant – voir (1.5.2) – la forme générale des éléments de  $\mathcal{P}_\infty$ , l'isomorphisme (1.5.7) peut-être donné explicitement, ce que nous faisons dans la dernière partie de ce paragraphe.

La terminologie que nous employons (rotations, dilatations et translations d'Heisenberg), est celle employée par InKang Kim et John R. Parker dans leur article [KP03], et est analogue à la terminologie que l'on peut trouver dans le cas hyperbolique complexe.

#### 1.5.1.1 Le groupe $\mathcal{M}$ : les rotations d'Heisenberg.

C'est le sous-groupe formé des éléments elliptiques de  $\mathcal{P}_\infty$  fixant l'origine  $\mathbf{o}$  et  $q_\infty$ . Remarquons que de tels éléments fixent nécessairement toute la géodésique passant par  $\mathbf{o}$  et  $q_\infty$ . En particulier, ils fixent le point du bord  $q_0$ .

Le groupe unitaire  $\mathbf{Sp}(n-1)$  agit par rotation. En coordonnées horosphériques, cette action est donnée par

$$R_U : (\mathbf{z}, v, u) \mapsto (U\mathbf{z}, v, u).$$

Matriciellement,  $R_U$  s'écrit

$$R_U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Les points fixes d'une telle application forment un sous-espace  $\mathbb{H}$ -linéaire de  $\mathbb{H}^{n,1}$ , et la sous-variété totalement géodésique de  $H_{\mathbb{H}}^n$  correspondante est une copie de  $H_{\mathbb{H}}^k$ . Cette action est l'analogie exact de l'action du groupe unitaire  $\mathbf{O}(n-1)$  sur l'espace hyperbolique complexe.

En revanche, dans le cas quaternionique, il existe un autre type d'éléments elliptiques, donné par l'action des matrices scalaires de  $\mathbf{PSp}(n, 1)$  – qui, comme on l'a déjà remarqué au début de la section 1.2, ne sont pas dans le centre de  $\mathbf{Sp}(n, 1)$ . Soit  $w \in \mathbf{Sp}(1)$  un quaternion unitaire. La matrice  $wI$  agit sur  $\mathbb{H}^{n,1}$  à gauche, et quand on projectivise à droite, on obtient l'action suivante en coordonnées horosphériques :

$$R_w : (\mathbf{z}, v, u) \mapsto (w\mathbf{z}w^{-1}, wvw^{-1}, u).$$



*Remarque 1.5.9.* Cette action par conjugaison correspond à l'action du groupe

$$\mathbf{PSp}(1) = \mathbf{Sp}(1)/\pm 1 \simeq \mathbf{SO}(3).$$

Elle est triviale sur la partie réelle des coordonnées d'un point, et induit une action de  $\mathbf{SO}(3)$  sur la partie imaginaire des coordonnées (voir par exemple la description des groupes de Lie  $\mathbf{U}(2)$  et  $\mathbf{SO}(3)$  donnée par Graeme Segal dans [CSM95, p.54]).

Les points fixes de cette action forment alors un sous-espace  $\mathbb{C}_\mu$ -linéaire de  $\mathbb{H}^{n,1}$  pour un certain  $\mu \in \mathbf{Sp}(1) \cap \mathfrak{Im}(\mathbb{H})$ . En effet, considérons les points fixes de l'action  $z \mapsto uzu^{-1}$  sur  $\mathbb{H}$ . C'est un sous-espace  $\mathbb{R}$ -linéaire, engendré par 1 et par un vecteur  $\mu \in \mathbf{Sp}(1) \cap \mathfrak{Im}(\mathbb{H})$ , correspondant à un vecteur propre associé à la valeur propre 1 pour l'action de l'élément de  $\mathbf{SO}(3)$  sur  $\mathfrak{Im}(\mathbb{H})$  correspondante. C'est donc une copie  $\mathbb{C}_\mu = \mathbb{R}[\mu]$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{H}$ . Répétant cette observation coordonnée par coordonnée, on obtient le sous-espace  $\mathbb{C}_\mu^{n+1}$  de  $\mathbb{H}^{n,1}$ . La sous-variété totalement géodésique correspondante est donc une copie de  $H_{\mathbb{C}}^n$  dans  $H_{\mathbb{H}}^n$ .

Le groupe  $\mathcal{M}$  est le sous-groupe formé par les rotations d'Heisenberg, il est donc constitué des matrices de la forme

$$R_{wU} = \begin{bmatrix} w & 0 & 0 \\ 0 & wU & 0 \\ 0 & 0 & w \end{bmatrix}, \quad w \in \mathbf{SO}(3), U \in \mathbf{Sp}(n-1).$$

On constate que le sous-groupe  $\mathbf{Sp}(n-1)$  y est distingué, et  $\mathcal{M}$  a ainsi une structure de produit semi-direct

$$\mathcal{M} = \mathbf{SO}(3) \ltimes \mathbf{Sp}(n-1).$$

*Remarque 1.5.10.* En dimension 2, on a une description agréable de ce groupe. En effet, si  $n = 2$ , les éléments de  $\mathcal{M}$  sont dans  $\mathbf{SO}(3) \times \mathbf{Sp}(1) \simeq \mathbf{SO}(4)$ . Cet isomorphisme – qui n'a pas d'analogue en dimension supérieure – nous sera utile lors de la construction de domaines fondamentaux pour des sous-groupes de  $\mathbf{Sp}(2,1)$  agissant sur  $H_{\mathbb{H}}^2$ , au chapitre suivant (voir en particulier la remarque 4.1.10).

### 1.5.1.2 Le groupe $\mathcal{A}$ : les dilatations d'Heisenberg.

C'est le groupe formé des éléments loxodromiques de  $\mathcal{P}_\infty$  fixant  $q_0$  et  $q_\infty$ .

L'ensemble des nombres réels positifs  $\mathbb{R}_*^+$  agit par dilatation sur  $H_{\mathbb{H}}^n$ . La *dilatation d'Heisenberg de facteur*  $r > 0$  est l'isométrie dont l'action est donnée, en coordonnées horosphériques, par

$$(\mathbf{z}, v, u) \mapsto (r\mathbf{z}, r^2v, r^2u).$$

Elle est représentée par la matrice de  $\mathbf{Sp}(n,1)$

$$D_r = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 1/r \end{bmatrix}.$$

Le groupe  $\mathcal{A}$  est le sous-groupe formé par les dilatations d'Heisenberg. C'est donc le groupe abélien

$$\mathcal{A} \simeq \mathbb{R}_*^+.$$

### 1.5.1.3 Le groupe $\mathcal{N}$ : les translations d'Heisenberg

C'est le sous-groupe formé des éléments unipotents de  $\mathcal{P}_\infty$ .

Le groupe d'Heisenberg  $\mathcal{H}_n$  agit sur lui-même par translation à gauche. Pour

$$q_0 = (\mathbf{z}_0, v_0) \in \mathcal{H}_n,$$

on note

$$\tau_{q_0} : (\mathbf{z}, v) \mapsto q_0 \cdot (\mathbf{z}, v) = (\mathbf{z}_0 + \mathbf{z}, v_0 + v + 2\Re\langle \mathbf{z}_0, \mathbf{z} \rangle).$$

Cette action s'étend à  $H_{\mathbb{H}}^n$  – par l'inverse de la perspective géodésique – en une action préservant chaque horosphère. La *translation de Heisenberg par  $q_0$* ,  $T_{q_0}$ , est l'élément de  $\mathbf{Sp}(n, 1)$  dont l'action en coordonnées horosphériques est donnée par

$$T_{q_0} : (\mathbf{z}, v, u) \mapsto (\tau_{q_0}(\mathbf{z}, v), u).$$

Matriciellement,  $T_{q_0}$  s'écrit

$$T_{q_0} = \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{z}_0^* & \frac{-|\mathbf{z}_0|^2 + v_0}{2} \\ 0 & I & \mathbf{z}_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le groupe  $\mathcal{N}$  est le sous-groupe formé par les translations d'Heisenberg. C'est donc le groupe nilpotent

$$\mathcal{N} \simeq \mathcal{H}^{n-1}.$$

### 1.5.1.4 Décomposition explicite des éléments de $\mathcal{P}_\infty$

Montrons enfin que tout élément de  $\mathcal{P}_\infty$  s'écrit de manière unique comme produit d'un élément de  $\mathcal{M}$ , d'un élément de  $\mathcal{A}$  et d'un élément de  $\mathcal{N}$ . Soit  $F \in \mathcal{P}_\infty$  une isométrie représentée par la matrice donnée en (1.5.2) :

$$F = \begin{bmatrix} ru & \mathbf{a}^* & b \\ 0 & A & \mathbf{c} \\ 0 & 0 & \frac{1}{r}u \end{bmatrix}. \quad (1.5.11)$$

Alors

$$F = R_{uA} \cdot D_r \cdot T_{(\mathbf{z}_0, v_0)} \in \mathcal{M} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathcal{N}$$

où  $\mathbf{z}_0 = \frac{1}{r}A^*\mathbf{c}$  et  $v_0 = 2\Re(b)$ . Cette écriture est unique : il est clair que l'intersection de deux des trois sous-groupes  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{N}$  est réduite à l'identité.

Par ailleurs, on a déjà vu que le produit  $\mathcal{M} \cdot \mathcal{A}$  est direct. On voit aisément que  $\mathcal{N}$  est normal dans  $\mathcal{P}_\infty$  : le produit  $\mathcal{M}\mathcal{A} \cdot \mathcal{N}$  est semi-direct, et finalement,

$$\mathcal{P}_\infty = (\mathbf{SO}(3) \times \mathbf{Sp}(n-1)) \times \mathbb{R}^+ \times \mathcal{H}^{n-1} \quad (1.5.12)$$

est la décomposition recherchée.

### 1.5.2 Décomposition horosphérique de $H_{\mathbb{H}}^n$

Nous explicitons à présent une *décomposition horosphérique* de  $H_{\mathbb{H}}^n$ . À nouveau, il n'est pas ici question de donner une exposition générale de cet outil – nous aurions dû pour cela donner auparavant une exposition générale des sous-groupes paraboliques – et nous renvoyons au livre d'Armand Borel et Lizhen Ji [BJ06, I.1] pour un tel exposé.

Nous définissons ainsi ce concept dans le cadre bien particulier du modèle du demi-espace pour l'espace hyperbolique quaternionique, notre but étant essentiellement d'illustrer les liens entre la structure de  $\mathcal{P}_\infty$  et celle de l'espace symétrique  $H_{\mathbb{H}}^n$ , en éclairant l'origine des coordonnées horosphériques introduites au paragraphe 1.2.1.

L'action de  $\mathcal{H}^{n-1}$  sur lui-même par translation est clairement transitive. Ainsi,  $\mathcal{N} \simeq \mathcal{H}^{n-1}$  – qui agit par translation de Heisenberg en préservant chaque horosphère  $H_t$  (dont la description est donnée en (1.2.7) au paragraphe 1.2.1) – agit transitivement sur chaque horosphère.

Par ailleurs, une dilatation de Heisenberg de facteur  $r > 0$  envoie l'horosphère  $H_t$  sur  $H_{r^2t}$ . De ceci on déduit immédiatement que  $\mathcal{A}$  agit transitivement sur les horosphères, puis que le produit  $\mathcal{A}\mathcal{N}$  agit transitivement sur  $H_{\mathbb{H}}^n$ . On peut ainsi définir :

**Définition 1.5.13.** La *décomposition horosphérique* de  $H_{\mathbb{H}}^n$  (associée à la décomposition de Langlands (1.5.7) de  $\mathcal{P}_\infty$ ) est l'écriture

$$H_{\mathbb{H}}^n = \mathcal{P}_\infty / \mathcal{P}_\infty \cap K = \mathcal{P}_\infty / \mathcal{M} = \mathcal{A}\mathcal{N}.$$

Les coordonnées horosphériques sont ainsi les coordonnées donnés par cette décomposition :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \times & \mathcal{N} & \longrightarrow & H_{\mathbb{H}}^n \\ \begin{bmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 1/u \end{bmatrix} & \times & \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{z}^* & \frac{-|\mathbf{z}|^2+v}{2} \\ 0 & I & \mathbf{z} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \longmapsto & (u, (\mathbf{z}, v)). \end{array}$$

En conclusion de cette section, nous faisons brièvement la remarque suivante, justifiant une intuition que nous avons donnée au paragraphe 1.2.1 :

*Remarque 1.5.14.* Les coordonnées horosphériques dans le modèle du demi-espace pour  $H_{\mathbb{H}}^n$  sont bien une généralisation des coordonnées euclidiennes dans le modèle du demi-plan de

Poincaré pour  $H_{\mathbb{R}}^2$ . En effet, dans ce modèle, le stabilisateur du point à l'infini dans  $\text{Isom}(H_{\mathbb{R}}^2)$  s'écrit

$$\mathcal{P}_{\infty} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1/a \end{bmatrix} \mid a \neq 0, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Une décomposition de Langlands de ce groupe est alors donnée par  $\mathcal{P}_{\infty} = \mathcal{M}\mathcal{A}\mathcal{N}$  avec

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \left\{ \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}; \\ \mathcal{A} &= \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{bmatrix}, a > 0 \right\}; \\ \mathcal{N} &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Les coordonnées euclidiennes  $z = b + ia$  d'un point de  $H_{\mathbb{R}}^2$  sont donc les coordonnées correspondant à la décomposition horosphérique de  $H_{\mathbb{R}}^2$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \times \mathcal{N} &\longrightarrow H_{\mathbb{R}}^2 \\ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &\mapsto (b, a). \end{aligned}$$


---

---

*Rayon maximal dans  $H_{\mathbb{H}}^n$*

It has been known since the end of the 1960's with the work of Každan and Margulis [KM68], that any locally symmetric manifold of non-compact type contains an embedded ball of radius  $\mathbf{r}_X > 0$  depending only on its universal cover  $X$ . More precisely, if  $M$  is a locally symmetric manifold, covered by a symmetric space  $X$ , denoting by  $\mathbf{r}(x, M)$  its injectivity radius at a given point  $x$ , the *maximal radius* of  $M$ ,

$$\mathbf{r}(M) = \sup \{ \mathbf{r}(x, M) \mid x \in M \},$$

is the radius of the largest ball embedded in  $M$ . Then, the number  $\mathbf{r}_X$  is

$$\mathbf{r}_X = \inf \{ \mathbf{r}(M) \mid M \text{ is a manifold covered by } X \},$$

and the above-mentioned work of Každan and Margulis showed that this quantity is *strictly positive*.

Given a symmetric space  $X$ , a lower bound on  $r_X$  provides geometric information on any manifold obtained as a quotient of  $X$  : for instance, one can then deduce a lower bound on the maximal injectivity radius of any such manifold, and information about its thick-thin decomposition.

In this first chapter we focus on the case where  $X$  is the quaternionic hyperbolic space  $H_{\mathbb{H}}^n$ . We adapt techniques developed by Martin [Mar89b] in the real hyperbolic setting to obtain a bound  $\lambda_n/2$  on the maximal radius of a real hyperbolic  $n$ -manifold. These ideas were recently adapted to the complex hyperbolic case by Jiang, Wang and Xie [XWJ14].

The main result of this chapter is the following :

**Théorème** (Théorème 2.3.1). *Let  $\Gamma \subset \mathbf{Sp}(n, 1)$  be a discrete, torsion-free, non-elementary subgroup acting by isometries on the quaternionic hyperbolic space  $H_{\mathbb{H}}^n$ . There exists a point  $p \in H_{\mathbb{H}}^n$  such that, for all  $\gamma \in \Gamma$ ,*

$$\rho(p, \gamma(p)) \geq \lambda_n,$$

where  $\lambda_n = \frac{0.05}{9^{n+1}}$ . Any quaternionic hyperbolic manifold thus contains an embedded ball of radius  $\lambda_n/2$ .

Putting  $\mathbf{r}_{n, \mathbb{H}} = \mathbf{r}_{H_{\mathbb{H}}^n}$ , this theorem thus shows that

$$\mathbf{r}_{n, \mathbb{H}} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{0.05}{9^{n+1}}.$$

No bounds were previously known on this quantity, and further, our result somewhat improves the earlier bounds known in the real and complex case (see remark 2.3.4).

Martin's work crucially relies on a Jørgensen-like inequality, established in [Mar89a]. This inequality in turn depends on the explicit determination of a *Zassenhauss neighbourhood* of the isometric group of the hyperbolic real space. In [FH93], Friedland and Hersensky improved Martin's inequality slightly, and used this new version to deduce a better bound on the maximal radius of real hyperbolic manifolds. It is this improved inequality that Jiang, Wang and Xie use in [XWJ14], and it is the one we shall use in this paper.

Section 2.1 is devoted to the presentation of these results : first we exhibit a Zassenhauss neighbourhood of  $\mathbf{PSp}(n, 1)$ , the group of orientation preserving isometries of the quaternionic hyperbolic space. We then deduce the Martin-Jørgensen inequality and, following Martin, a stronger inequality satisfied by the torsion-free lattices in  $\mathbf{PSp}(n, 1)$  (Theorem 2.1.7).

In Section 2.2, we make explicit the fact that when  $A$  is an element of  $\mathbf{PSp}(n, 1)$ ,  $\|A\|$  and  $\|A - I\|$  have to be small if  $A$  doesn't displace enough a given point  $\mathbf{o}$  of  $H_{\mathbb{H}}^n$ . We finish by combining these results and Theorem 2.1.7 to reach our conclusion in the section 2.3.

The bounds on the maximal radius given by the authors we first mentionned, and the one presented here, both decrease exponentially with the dimension, though the methods employed do not allow us to discuss their optimality. The description of the behaviour of the maximal radius with the dimension (can it be uniformly bounded? Could it grow with dimension?) is a matter that doesn't seem well understood yet.

On the other hand, for *open* real hyperbolic manifold, Gendulpe [Gen15] recently derived a bound for the maximal radius, which is dimension-free, and optimal in dimension 3. His constructions greatly rely on packing theorems and cannot obviously be adapted to the case of spaces of non-constant sectional curvature.

Related to that matter, is the question of the behavior of the *Margulis constant* with the dimension. This is the constant given by the following famous result, know as the *Margulis Lemma* (see for exemple [Thu80, lemma 5.10.1]) :

**Théorème 2.0.1** (Margulis). *For all  $n$ , there exists a positive constant  $\mu_{H_{\mathbb{H}}^n}$  such that, for all discrete subgroup  $\Gamma \subset \text{Isom}(H_{\mathbb{H}}^n)$ , and for all point  $x \in H_{\mathbb{H}}^n$ , the group*

$$\Gamma_x(\epsilon) = \langle g \in \Gamma \mid d(x, g(x)) \leq \epsilon \rangle$$

*is elementary.*

This theorem implies in particular that there is an embedded ball of radius  $\mu_{H_{\mathbb{H}}^n}/2$  in any quotient of  $H_{\mathbb{H}}^n$  by a discrete subgroup of its isometry group, so that

$$\mu_{H_{\mathbb{H}}^n} \leq r_{\text{Isom}(H_{\mathbb{H}}^n)}.$$

In the last section of this chapter, using a result of Mikhaïl Kapovich mentioned in a paper of Belolipetsky [Bel14b], we give an argument showing that the Margulis constant of  $H_{\mathbb{H}}^n$  (in fact, of  $H_{\mathbb{K}}^n$ , for  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  or  $\mathbb{H}$ ) goes to 0 as the dimension  $n$  goes to infinity. This of course does not answer the question of the behavior of the maximal radius with the dimension, but we believe that it further shows that this matter is of interest.

## 2.1 Inégalité de type Jørgensen et conséquences

As we announced, we begin by giving a Zassenhaus neighbourhood for  $\mathbf{Sp}(n, 1)$ , that is a neighbourhood of the identity in  $\mathbf{Sp}(n, 1)$  such that any discrete subgroup of  $\mathbf{Sp}(n, 1)$  generated by elements of this neighbourhood is nilpotent.

Recall, from paragraph 1.1.2 of chapter 1 the definition of the *spectral norm* on  $\mathcal{M}_n(\mathbb{H})$ . This is the norm we will be using throughout this chapter.

**Théorème 2.1.1.**  $\Omega = B(I, \tau)$  is a Zassenhaus neighbourhood for  $\mathbf{Sp}(n, 1)$ , where  $\tau \simeq 0.2971..$  is the positive root of the equation  $2\tau(1 + \tau)^2 = 1$ .

This result, with a slightly less good bound, was established by Martin in [Mar89a] : he obtained the Zassenhaus neighbourhood  $\Omega_{O^+(1, n)} = B(I, 2 - \sqrt{3})$ . It was then improved and generalized by Friedland and Hersonsky in [FH93] who obtained  $\Omega_G = B(I, \tau)$  for a large class of Lie groups  $G$ . Friedland and Hersonsky's improvement comes from an elementary remark which in our setting can be stated in this way :

$$\text{for } A \in \mathbf{Sp}(n, 1), \quad \|A^{-1}\| = \|A\|.$$

We give the proof of Theorem 2.1.1, for the reader convenience, and for it reveals a crucial inequality (Inequality (2.1.2)) which we shall constantly reuse.

*Démonstration.* Let then  $A, B$  be in  $\Omega = \{M \in \mathbf{Sp}(n, 1), \|M - I\| < \tau\}$ . We have

$$\begin{aligned} [A, B] - I &= ABA^{-1}B^{-1} - I \\ &= (AB - BA)A^{-1}B^{-1} \\ &= ((A - I)(B - I) - (B - I)(A - I))A^{-1}B^{-1}. \end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned} \|[A, B] - I\| &\leq 2\|A - I\|\|B - I\|\|A^{-1}\|\|B^{-1}\| \\ &< 2\tau^2(1 + \tau)^2 = \tau. \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Now, if  $\Gamma \subset \mathbf{Sp}(n, 1)$  is a discrete subgroup,  $\Gamma \cap \Omega = \{A_1, \dots, A_n\}$  is finite, and there exists  $\tau, r < \tau < 1$ , such that  $\|A - I\| < r$  for all  $A_i \in \Gamma \cap \Omega$ .

From Inequality (2.1.2), we thus have, for all elements  $A_{i_0}, \dots, A_{i_k}$  of  $\Gamma \cap \Omega$ ,

$$\|[A_{i_1}, A_{i_0}] - I\| < 2r(1+r)^2 \|A_{i_0} - I\| < r \|A_{i_0} - I\|,$$

and

$$\|[A_{i_k}, \dots, [A_{i_1}, A_{i_0}] \dots] - I\| < r^k \|A_{i_0} - I\|.$$

Hence,  $\Gamma$  being discrete, there exists an integer  $m$  such that for all sequence  $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$  given by

$$B_k = [A_{i_k}, \dots, [A_{i_1}, A_{i_0}] \dots],$$

and  $B_j = I \ \forall j \geq m$ . The group  $\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle$  is thus nilpotent.  $\square$

*Remarque 2.1.3.* A discrete and non-elementary group being non-nilpotent, we immediately see that if two elements  $A$  and  $B$  of  $\mathbf{Sp}(n, 1)$  generate a discrete non-elementary subgroup, necessarily  $\max\{\|A - I\|, \|B - I\|\} \geq \tau$ . Furthermore, if one asks  $\langle A, B \rangle$  to be torsion-free,  $A$  must be parabolic or loxodromic, and it is easily seen that  $\langle A, B^{-1}AB \rangle$  stabilises one or two points of the boundary of  $H_{\mathbb{H}}^n$ , if and only if the group  $\langle A, B \rangle$  does too. Therefore, when  $\langle A, B \rangle$  is discrete and torsion-free,  $\langle A, B^{-1}AB \rangle = \langle A, [A, B] \rangle$  is elementary if and only if  $\langle A, B \rangle$  is. Theorem 2.1.1 thus has an —almost— immediate corollary :

**Corollaire 2.1.4.** *Let  $\Gamma \subset \mathbf{Sp}(n, 1)$  be a discrete, torsion-free subgroup, and  $A$  and  $B$  be two elements of  $\Gamma$ . We have the following alternative :*

1. *either  $A$  and  $B$  generate an elementary subgroup of  $\Gamma$  ;*
2. *or*

$$\max\{\|A - I\|, \|B - I\|\} \geq \tau$$

*and*

$$\max\{\|A - I\|, \|[A, B] - I\|\} \geq \tau.$$

We are now ready to established a Jørgensen-like inequality. This inequality is originally due to Martin, in [Mar89b]. We state it here in its improved version, as derived by Friedland and Hersonsky in [FH93].

**Corollaire 2.1.5** (Jørgensen-Martin inequality). *Let  $\Gamma \subset \mathbf{Sp}(n, 1)$  be a discrete torsion-free subgroup and  $A$  and  $B$  be two elements of  $\Gamma$ . Then, either  $A$  and  $B$  generate an elementary subgroup of  $\Gamma$ , or*

$$\max\{\|B\| \|B - I\|, \|A\| \|A - I\|\} \geq \omega$$

where  $\omega = (\frac{\tau}{2})^{1/2} \simeq 0.3854..$  is the positive root of the equation  $2\omega(2\omega^2 + 1) = 1$ .

*Démonstration.* Suppose that  $A$  and  $B$  are two elements of  $\Gamma$  that do not generate an elementary subgroup of  $\Gamma$  and such that

$$\|A\| \|A - I\| < \omega \quad \text{and} \quad \|B\| \|B - I\| < \omega.$$



Using Inequality (2.1.2) derived in the proof of Theorem 2.1.1, we get

$$\|[A, B] - I\| \leq 2\|A\|\|A - I\|\|B\|\|B - I\| < 2\omega^2 = \tau.$$

Next, since  $\langle [A, B], A \rangle$  cannot be elementary (see Remark 2.1.3), by Corollary 2.1.4 we must have

$$\|[A, [A, B]] - 1\| \geq \tau.$$

Therefore, using Inequality (2.1.2) again,

$$2\|A\|\|A - 1\|\|[A, B]\|[A, B] - 1\| \geq \tau,$$

so

$$2\omega\|[A, B]\| \geq 1.$$

However

$$\|[A, B]\| \leq 1 + \|[A, B] - 1\| < 1 + \tau = \frac{1}{2\omega}$$

which is a contradiction.  $\square$

*Remarque 2.1.6.* Friedland and Hersonsky's improvement is an immediate consequence of their gain in the Zassenhaus' neighbourhood. Martin considers the neighbourhood  $B(1, 2 - \sqrt{3})$  and obtains the bound  $(\frac{2-\sqrt{3}}{2})^{1/2}$ .

The main result of this section is the following :

**Théorème 2.1.7.** *Let  $\Gamma$  be a discrete, torsion-free, non-elementary subgroup of  $\mathbf{Sp}(n, 1)$ . There exists an  $H \in \mathbf{Sp}(n, 1)$  such that*

$$\|A\|\|A - 1\| \geq \omega \quad \text{for all } A \in H\Gamma H^{-1}. \quad (2.1.8)$$

*Remarque 2.1.9.* Recall, from remark 1.1.13, that the spectral norm  $\|\cdot\|$  is *not* invariant under conjugacy by a general element of  $\mathbf{Sp}(n, 1)$ .

*Démonstration.* Let us assume, without loss of generality, that no nontrivial element of  $\Gamma$  fixes  $q_\infty$  or 0 (the point of  $\partial H_{\mathbb{H}}^n$  with horospherical coordinates  $(0, 0, 0)$ ). Denote by  $h_t$  the loxodromic flow from 0 to  $q_\infty$ , and by  $H_t$  the corresponding elements of  $\mathbf{Sp}(n, 1)$ .  $h_t$  converges to the (quasi)-constant map  $q_\infty$  locally uniformly on  $\overline{H_{\mathbb{H}}^n} \setminus \{0, q_\infty\}$  as  $t$  goes to  $+\infty$ , and  $h_t^{-1} = h_{-t}$  converges to 0 locally uniformly on  $\overline{H_{\mathbb{H}}^n} \setminus \{0, q_\infty\}$ .

Reason by contradiction and suppose that there is no  $t \in \mathbb{R}$  for which  $H_t\Gamma H_t^{-1}$  satisfies (2.1.8).

Firstly, remark that for a fixed, non-trivial, element  $A$  of  $\mathbf{Sp}(n, 1)$ ,  $\|H_t A H_t^{-1}\|$  goes to infinity as  $t$  does. Indeed, denote by  $\gamma$  the isometry corresponding to  $A$ . By assumption,  $\gamma$  does not fix 0, so

$$\gamma h_t^{-1}(\mathbf{o}) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \gamma(0) \in \partial H_{\mathbb{H}}^2 - \{0\}$$

(recall, from chapter 1, page 25, that  $\mathbf{o} = {}^t[-1 \ 0 \ \cdots \ 1]$  is a distinguished origin in the half-space model of  $H_{\mathbb{H}}^n$ ). Consequently, the convergence being locally uniform,

$$h_t \gamma h_t^{-1}(\mathbf{o}) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} q_\infty.$$

Put

$$h_t \gamma h_t^{-1} = (a_{i,j}(t))_{1 \leq i,j \leq n+1},$$

then

$$h_t \gamma h_t^{-1}(\mathbf{o}) = {}^t \left[ \begin{array}{cccc} a_{1,1}(t) + a_{1,n+1}(t) & a_{2,1}(t) + a_{2,n+1}(t) & \cdots & a_{n+1,1}(t) + a_{n+1,n+1}(t) \end{array} \right].$$

Hence,

$$h_t \gamma h_t^{-1}(\mathbf{o}) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} q_\infty \quad \text{if and only if} \quad a_{1,1}(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty \text{ or } a_{1,n+1}(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty,$$

so that  $\|H_t A H_t^{-1}\|_\infty \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \infty$ , and finally, all norms being equivalent,

$$\|H_t A H_t^{-1}\| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \infty. \quad (2.1.10)$$

Naturally, a similar argument using the fact that  $\gamma$  does not fix  $q_\infty$  shows that  $\|H_t A H_t^{-1}\|$  goes to infinity as  $t$  goes to  $-\infty$ .

Next, we exhibit a sequence  $t_i$  going to infinity and a sequence of distinct elements  $A_i$  of  $\Gamma$  such that

$$\|H_{t_i} A_i H_{t_i}^{-1}\| \|H_{t_i} A_i H_{t_i}^{-1} - I\| < \omega \quad (2.1.11)$$

and

$$\|H_{t_i} A_{i+1} H_{t_i}^{-1}\| \|H_{t_i} A_{i+1} H_{t_i}^{-1} - I\| < \omega. \quad (2.1.12)$$

To make the notation less cluttered, for  $t \in \mathbb{R}$  and  $A \in \Gamma$ , we put

$$N(t, A) = \|H_t A H_t^{-1}\| \|H_t A H_t^{-1} - I\|.$$

We are thus looking for two sequences  $t_i$  and  $A_i$ , satisfying

$$N(t_i, A_i) < \omega \text{ and } N(t_i, A_{i+1}) < \omega.$$

To achieve that, for any element  $A$  of  $\Gamma$  put

$$V_A = \{t \in \mathbb{R}, N(t, A) < \omega\}.$$

Since  $N(t, A)$  goes to infinity as  $t$  does, if  $V_A$  is non-empty,  $V_A$  is a bounded open set. Further, by assumption, for all  $t \in \mathbb{R}$  there is an element  $A \in \Gamma$  contradicting (2.1.8), and the set  $\{V_A, A \in \Gamma\}$  thus forms an open cover of  $\mathbb{R}$  by bounded sets.

Now, choose a locally finite open refinement of that cover,  $\mathcal{V} = \{V'\}$ . Put  $t_0 = 0$ .  $t_0$  is in some  $V' \in \mathcal{V}$  which is in turn contained in some  $V_B$ . Put  $A_0 = B$ .

We then construct the sequences by induction. Suppose  $t_i$  and  $A_i$  are constructed. We want to exhibit an element  $A_{i+1} \neq A_i$  such that  $t_i \in V_{A_{i+1}}$  (so that (2.1.12) is satisfied).  $t_i$  is in some set  $V' \subset V_{A_i}$  of  $\mathcal{V}$ . Any real number close enough to the supremum of  $V'$  is contained in another set  $V''$  of  $\mathcal{V}$ . If  $V'' \subset V_B$  with  $B \neq A_i$ , choose any such real number for  $t_{i+1}$  and put  $A_{i+1} = B$ . If this is not the case, do the same procedure with the supremum of  $V''$ . Since  $\mathcal{V}$  is locally finite, we are ensured to exit  $V_{A_i}$  after a finite number of steps. The sequence  $t_i$  constructed in this way is strictly increasing and further, by local finiteness of  $\mathcal{V}$  it can not accumulate and consequently goes to infinity. Also by construction,  $t_i \in V_{A_i} \cap V_{A_{i+1}}$  and  $A_i \neq A_{i+1}$  for all  $i$ .

Finally, (2.1.11) and (2.1.12) are satisfied, and from the Jørgensen-Martin inequality (Corollary 2.1.5), we see that the group generated by  $H_{t_i} A_{i+1} H_{t_i}^{-1}$  and  $H_{t_i} A_i H_{t_i}^{-1}$  must be elementary, hence its conjugate  $\langle A_i, A_{i+1} \rangle$  must be too.

Consequently (see remark 1.3.5 p.28), either  $A_i$  and  $A_{i+1}$  are both parabolic and fix the same point  $x_0$  of the boundary, or they are both loxodromic and fix the two same points  $x_0$  and  $y_0$  of the boundary. That being true for all  $i$ , we see that the  $A_i$  either are all parabolic or are all loxodromic, and have a common fix point  $x_0$  on the boundary. Further, denoting by  $f_i$  the isometries corresponding to the  $A_i$ , we can assume – extracting a subsequence if necessary,

$$f_i(x) \rightarrow x_0$$

locally uniformly on  $\overline{H_{\mathbb{H}}^n}$  if all the  $f_i$  are parabolic, and locally uniformly on  $\overline{H_{\mathbb{H}}^n} \setminus \{y_0\}$  if they are all loxodromic.

Now, consider the sequence  $h_i f_i h_i^{-1}$ , with  $h_i = h_{t_i}$ . Since 0 and  $q_\infty$  are not fixed by any element of  $\Gamma$ ,  $\{0, q_\infty\} \cap \{x_0, y_0\} = \emptyset$ , and, the convergence being locally uniform,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} h_i f_i h_i^{-1}(0) = \lim_{i \rightarrow \infty} \left( h_i \left( \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(0) \right) \right) = \lim_{i \rightarrow \infty} h_i(x_0) = q_\infty.$$

This shows – the argument is similar to the one used to derive (2.1.10) – that necessarily  $\|H_i A_i H_i^{-1}\| \rightarrow \infty$ . However here, we see from (2.1.11) that  $\|H_i A_i H_i^{-1}\|$  is bounded (indeed, if  $X$  satisfies  $\|X\| \|X - I\| < \omega$ , then  $\|X\| \| \|X\| - 1 \| < \omega$ , and  $\|X\|$  has to be smaller than  $\frac{1 + \sqrt{1 + 4\omega}}{2}$ ). We thus get a contradiction, which concludes the proof of the theorem.  $\square$

## 2.2 Résultats intermédiaires

We now want to use Theorem 2.1.7 to derive the Main Theorem. To that end, given  $f$  an element of a discrete, torsion-free subgroup of isometries of  $H_{\mathbb{H}}^n$  and  $A$  the corresponding matrix, we seek to bound the quantity

$$\|A\| \|A - I\|$$

from above by a function of the distance  $\rho(\mathbf{o}, f(\mathbf{o}))$ , in order to obtain a contradiction if  $f$  does not displace the point  $\mathbf{o}$  enough (we are working in the half-space model for  $H_{\mathbb{H}}^n$ , and again,

$$\mathbf{o} = {}^t [-1 \ 0 \ \cdots \ 1]$$

is the distinguished origin defined in chapter 1, on page 25).

In the rest of this section,  $f$  is an isometry of  $H_{\mathbb{H}}^n$  and  $A \in \mathbf{Sp}(n, 1)$  is the corresponding matrix. We put

$$\delta = \rho(\mathbf{o}, f(\mathbf{o}))$$

and

$$r = \exp(\delta/2).$$

We also put  $K = \text{Stab}(\mathbf{o}) \simeq \mathbf{P}(\mathbf{Sp}(n) \times \mathbf{Sp}(1))$ . Recall, from Remark 1.2.9 p. 27, that elements of  $K$  have norm 1.

After conjugating  $A$  by an element of  $\mathbf{Sp}(n, 1)$ , we can assume that  $f$  sends  $\mathbf{o}$  to a point on the vertical geodesic  $(0, \infty)$ , at distance  $\delta$  from  $\mathbf{o}$ . We thus suppose that

$$f(\mathbf{o}) = {}^t \begin{bmatrix} -r^2 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim {}^t \begin{bmatrix} -r & 0 & \dots & 0 & 1/r \end{bmatrix}.$$

The *dilatation associated to  $f$*  is the loxodromic element fixing 0 and  $q_\infty$  sending  $\mathbf{o}$  to  $f(\mathbf{o})$ , with corresponding matrix

$$D = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & I_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1/r \end{bmatrix}$$

(This is indeed a representative of this loxodromic element :  $D \cdot \mathbf{o} = {}^t [r \ 0 \ \dots \ 0 \ -1/r]$ , and

$$\langle D \cdot \mathbf{o}, D \cdot \mathbf{o} \rangle = -2 \quad , \quad \langle D \cdot \mathbf{o}, \mathbf{o} \rangle = -r - 1/r,$$

so that, denoting by  $d$  the isometry corresponding to  $D$ , (recall formula 1.2.2),

$$\cosh \left( \frac{\rho(\mathbf{o}, d(\mathbf{o}))}{2} \right)^2 = \left( \frac{r + 1/r}{2} \right)^2 = \left( \frac{e^{\delta/2} + e^{-\delta/2}}{2} \right)^2,$$

thus  $\rho(\mathbf{o}, d(\mathbf{o})) = \delta$ .)

In particular, this element satisfies

$$AD^{-1} \in K,$$

and an immediate computation shows that

$$\|D\| = r \quad \text{and} \quad \|D - I\| = \|D^{-1} - I\| = r - 1.$$

We easily bound  $\|A\|$  from above :

**Lemme 2.2.1.**  $\|A\| \leq r$ .

*Démonstration.* Since  $AD^{-1} \in K$ ,  $\|AD^{-1}\| = 1$  and

$$\|A\| = \|AD^{-1}D\| \leq \|AD^{-1}\| \|D\| = r. \quad \square$$

*Remarque 2.2.2.* Also, note that this implies that, for all integer  $q$ ,

$$\|A^q\| \leq r^q.$$

This very simple remark is responsible for a slight improvement in the final bound we derive (in theorem 2.3.1), compared to those previously known for the real and complex cases (compare this equation to the one at the bottom of page 772 of the article of Xie, Wang and Jiang [XWJ14] for instance).

Bounding  $\|A - I\|$  from above turns out to be more subtle : for some given element in  $\mathbf{Sp}(n, 1)$ , it is not *a priori* clear whether it is close to the identity or not. For an element  $R$  of  $K$  however, either  $R$  is of finite order, or it is an *irrational rotation* : it is therefore possible to approach  $I$  arbitrarily close by some power of  $R$ , and this is what we make explicit in Lemma 2.2.7. We then use the triangle inequality to bound  $\|A - I\|$  —actually  $\|A^q - I\|$ — from above :

$$\|A^q - I\| \leq \|A^q - R^q\| + \|R^q - I\|. \quad (2.2.3)$$

The following lemma gives a bound for the first part of the right side of this expression :

**Lemme 2.2.4.** *There exists an element  $R$  of  $K$  such that*

$$\|A^q - R^q\| \leq r(r^q - 1).$$

*Démonstration.* Let  $R \in K$ . Recall the identity

$$A^q - R^q = (A - R)A^{q-1} + R(A - R)A^{q-2} + R^2(A - R)A^{q-3} + \dots + R^{q-1}(A - R). \quad (2.2.5)$$

Using the fact that  $\|A\| = r$  and that  $\|R\| = 1$  we then obtain, for all  $R \in K$ ,

$$\|A^q - R^q\| \leq \frac{r^q - 1}{r - 1} \|A - R\|.$$

Set  $R = AD^{-1}$ . Then

$$\|A - AD^{-1}\| \leq \|A\| \|1 - D^{-1}\| \leq r(r - 1),$$

and finally we get

$$\|A^q - (AD^{-1})^q\| \leq r(r^q - 1). \quad \square$$

Next, we have to bound the second part of the right side of (2.2.3) from above. We shall do so by using the Dirichlet's pigeon-hole principle, which we recall (see for example [Hin08, chpt 3 §3]) :

**Lemme 2.2.6** (Dirichlet's pigeon-hole principle). *Given  $n$  real numbers  $\theta_i \in [0, 1]$ ,  $1 \leq i \leq n$ , for all  $Q \geq 1$ , there exists an integer  $q \leq Q^n$  and integers  $p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  such that*

$$\left| \theta_i - \frac{p_i}{q} \right| \leq \frac{1}{qQ}.$$

We deduce :

**Lemme 2.2.7.** *Let  $R$  be in  $K$ . Then, for all  $Q > 1$ , there exists an integer  $q$ ,  $1 \leq q \leq Q^{n+1}$  such that*

$$\|R^q - I\| \leq \frac{\pi}{Q}.$$

*Démonstration.* For this proof, we place ourselves in the ball model. Recall that  $K \simeq K'$ , where  $K'$  is the stabilizer of the origin 0 of the ball, the isomorphism being given by the conjugation by the Cayley transform  $C$ , which is unitary. By Remark 1.1.7 p.19, we thus see that proving Lemma 2.2.7 for elements of  $K'$  amounts to proving it for elements of  $K$ .

Let then  $R$  be an element of  $K'$ , and write  $R = \begin{bmatrix} R' & 0 \\ 0 & e^{i\mu_1(2\pi\theta_{n+1})} \end{bmatrix}$ . Without loss of generality, we can actually assume that

$$R = \begin{bmatrix} R' & 0 \\ 0 & e^{i(\pi\theta_{n+1})} \end{bmatrix}, \quad R' \in \mathbf{Sp}(n), \theta_{n+1} \in [0, 1].$$

We diagonalize  $R'$  (by the spectral theorem, see paragraph theorem ?? in chapter 1) :

$$R' = P' \text{Diag}(e^{i(\pi\theta_1)}, \dots, e^{i(\pi\theta_n)}) P'^{-1},$$

with  $P' \in \mathbf{Sp}(n)$ . Then

$$R = PR_1P^{-1},$$

with

$$R_1 = \text{Diag}(e^{i(\pi\theta_1)}, \dots, e^{i(\pi\theta_n)}, e^{i\pi(\theta_{n+1})})$$

and

$$P = \begin{bmatrix} P' & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in K'.$$

Let  $Q > 1$  be an integer, and let  $q, p_i, i = 1 \dots n + 1$  be integer corresponding to the  $\theta_i$  as in Lemma 2.2.6. Put

$$B = PB_1P^{-1} \in K',$$

where

$$B_1 = \text{Diag}(e^{i(\pi\frac{p_1}{q})}, e^{i(\pi\frac{p_2}{q})}, \dots, e^{i(\pi\frac{p_n}{q})}, e^{i(\pi\frac{p_{n+1}}{q})}).$$

Then

$$\begin{aligned}
\|R - B\| = \|R_1 - B_1\| &= \sqrt{r_\sigma((R_1^* - B_1^*)(R_1 - B_1))} \\
&= \max \sqrt{\left| e^{i(\pi\theta_i)} - e^{i(\pi\frac{p_i}{q})} \right|^2} \\
&= \max \sqrt{|2 - 2\cos(\pi(\theta_i - \frac{p_i}{q}))|} \\
&= \max \sqrt{|4\sin^2(\frac{\pi}{2}(\theta_i - \frac{p_i}{q}))|} \\
&= 2 \max |\sin(\frac{\pi}{2}(\theta_i - \frac{p_i}{q}))| \\
&\leq \pi \max |\theta_i - \frac{p_i}{q}| \leq \frac{\pi}{qQ}.
\end{aligned}$$

Finally we use Identity (2.2.5) stated in Lemma 2.2.4 and the fact that  $\|R\| = \|B\| = 1$  to obtain :

$$\begin{aligned}
\|R^q - I\| &= \|R^q - B^q\| \\
&\leq q\|R - B\| \\
&\leq \frac{\pi}{Q}.
\end{aligned}$$

□

*Remarque 2.2.8.* Let us emphasise the fact that the eigenvalues of  $R'$  can be all chosen to have *positive* imaginary part is specific to the quaternionic setting (see remark 1.1.9 after the statement of the spectral theorem in chapter 1). This is responsible for an improvement of the constant  $\lambda_n$  bounding the maximal radius from below in the quaternionic setting (compare with [XWJ14, lemma 4.2] in the complex setting).

Let us summarise the results obtained in this section :

**Lemme 2.2.9.** *Let  $f$  be an isometry of  $H_{\mathbb{H}}^n$ , and  $A \in \mathbf{Sp}(n, 1)$  be the corresponding matrix. Put  $\delta = \rho(\mathbf{o}, f(\mathbf{o}))$  and  $r = \exp(\delta/2)$ . Then, for all  $Q > 1$ , there exists an integer  $q$ ,  $1 < q \leq Q^{n+1}$ , such that*

$$\|A^q\| \|A^q - I\| \leq r^q \left( r(r^q - 1) + \frac{\pi}{Q} \right).$$

*Démonstration.* As noted in remark 2.2.2,  $\|A^q\| \leq r^q$ . Combining (2.2.3), Lemma 2.2.4 and Lemma 2.2.7 we thus obtain

$$\|A^q - I\| \leq r(r^q - 1) + \frac{\pi}{Q}.$$

□

## 2.3 Preuve du théorème principal

We are now ready to give a proof of the main theorem of this chapter, which we state here again for convenience :

**Théorème 2.3.1.** *Let  $\Gamma \subset \mathbf{Sp}(n, 1)$  be a discrete, torsion-free, non-elementary subgroup acting by isometries on the quaternionic hyperbolic space  $H_{\mathbb{H}}^n$ . There exists a point  $p \in H_{\mathbb{H}}^n$  such that, for all  $A \in \Gamma - \{I\}$ , denoting by  $\gamma$  the corresponding isometry,*

$$\rho(p, \gamma(p)) \geq \lambda_n,$$

where  $\lambda_n = \frac{0.05}{9^{n+1}}$ . Every quaternionic hyperbolic manifold thus contains an embedded ball of radius  $\lambda_n/2$ .

*Démonstration.* Firstly, from Theorem 2.1.11, we know that there exists an  $H \in \mathbf{Sp}(n, 1)$  such that, for all  $C \in H\Gamma H^{-1}$ ,  $C \neq I$ ,

$$\|C\| \|C - I\| \geq \omega \simeq 0.3854... \quad (2.3.2)$$

Denoting by  $h$  the isometry of  $H_{\mathbb{H}}^n$  corresponding to  $H$ , we shall prove the theorem with  $p = h^{-1}(\mathbf{o})$ .

Assume on the contrary that there is an isometry  $\gamma$  not satisfying the inequality of the theorem. Denote by  $A$  the corresponding matrix in  $\mathbf{Sp}(n, 1)$ , put  $\hat{A} = HAH^{-1}$  and  $\hat{\gamma}$  the corresponding isometry. Also, put  $r = \exp(\rho(\mathbf{o}, \hat{\gamma}(\mathbf{o}))/2)$ .

Next, apply Lemma 2.2.9 with  $Q = 9$  : there exists an integer  $q \leq 9^{n+1}$  such that

$$\|\hat{A}^q\| \|\hat{A}^q - I\| \leq r^q \left( r(r^q - 1) + \frac{\pi}{9} \right). \quad (2.3.3)$$

By assumption  $r < e^{\lambda_n/2}$ , so (since  $n \geq 2$ )

$$\begin{aligned} r &< e^{\frac{0.025}{9^{n+1}}} \leq e^{\frac{0.025}{9^3}} \quad \text{and} \\ r^q &\leq r^{9^{n+1}} < e^{\frac{\lambda_n}{2} \cdot 9^{n+1}} = e^{0.025}. \end{aligned}$$

Consequently

$$\|\hat{A}\| \|\hat{A} - I\| < e^{0.025} \left( e^{\frac{0.025}{9^3}} (e^{0.025} - 1) + \frac{\pi}{9} \right) \simeq 0.3838.. < 0.3854..$$

which contradicts (2.3.2).  $\square$

*Remarque 2.3.4.* We pointed out earlier, in remark 2.2.2 and 2.2.8, two facts that allowed us to improve the previously known bound on the maximal radius in the real and in the complex case. Precisely, in those two cases, instead of our inequality 2.3.3, the authors estimates are

$$\|\hat{A}^q\| \|\hat{A}^q - I\| \leq (r(r^q - 1) + 1) \left( r(r^q - 1) + \frac{2\pi}{Q} \right)$$

(with  $Q$  as in lemma 2.2.6), and ultimately, this explains the differences between their results and ours.



## 2.4 Autres invariants globaux : volume, constante de Margulis

An immediate corollary of Main Theorem is that one can bound below the volume of a quaternionic hyperbolic manifold  $\Gamma \backslash H_{\mathbb{H}}^n$  by the volume of such a ball. To compute the later, we will need the following lemma, that can be found for instance, in an article of Alfred Gray [Gra73] :

**Lemme 2.4.1.** *The volume of a ball of radius  $R$  in the quaternionic hyperbolic space is*

$$\text{Vol}(B(R)) = \frac{(4\pi)^{2n}}{(2n+1)!} \sinh^{4n} \left( \frac{R}{2} \right) \left( 2n \cosh^2 \left( \frac{R}{2} \right) + 1 \right)$$

**Corollaire 2.4.2.** *Let  $M$  be a quaternionic hyperbolic manifold of dimension  $n$ . Then*

$$\text{Vol}(M) \geq \frac{(4\pi)^{2n}}{(2n+1)!} \sinh^{4n} \left( \frac{0.0175}{9^{n+1}} \right)$$

However, as was shown by Corlette [Cor92] and Gromov and Schoen [GS92], all lattices in  $\mathbf{Sp}(n, 1)$  are arithmetic. Hence, one could likely give a lower bound on the volume of (finite volume) quaternionic hyperbolic manifolds *via* arithmetic methods. Those methods have proven to be fruitful in the real hyperbolic case — see for example the work of Belolipetsky [Bel04b] and Belolipetsky and Emery [BE12] — and could probably be used to improve Corollary 2.4.2.

Nevertheless, an information about the maximal radius of a manifold is not the same as, though related to, an information on the volume of such a manifold. In particular, in this paper, the subgroup  $\Gamma$  need not be a lattice, but only a discrete subgroup of isometries, and the result of Main Theorem remains valid if  $M$  is of *infinite volume*.

As we mentioned in the introduction, another quantity closely related to the maximal radius is the *Margulis constant*  $\mu_n$  of an hyperbolic manifold of dimension  $n$ . For this number too, an interesting problem is to understand how it depends on the dimension. If we restrict our attention to the arithmetic case, conjecturally,  $\mu_n^{\text{arithm.}}$  is uniformly bounded by below. On the other hand, there is an argument for why the Margulis constant of an *infinite volume* hyperbolic manifold can behave differently than the finite volume case, due to Mikhail Kapovich, which can be found in Belolipetsky's 2014 ICM adress.

To conclude this chapter, we show that Belolipetsky's arguments implies that if we take  $n$  large enough, we can exhibit a discrete subgroup  $\Gamma \subset \mathbf{Sp}(n, 1)$ , of *infinite covolume*, with Margulis constant arbitrarily small, for it further motivates the methods we employed over the arithmetic ones.

**Proposition 2.4.3** (Kapovich, see [Bel14b, Proposition 5.2]). *There exists a constant  $C > 0$  such that  $\mu_{H_{\mathbb{R}}^n} \leq \frac{C}{\sqrt{n}}$ .*

Which can be reformulated

**Proposition 2.4.3 (bis).** *For all  $n$ , one can construct a discrete subgroup  $\Gamma$  of  $\text{Isom}(H_{\mathbb{R}}^n)$  and a point  $x \in H_{\mathbb{R}}^n$  such that*

$$\Gamma_x(\epsilon) = \langle g \in \Gamma \mid d(x, g(x)) \leq \epsilon \rangle$$

*is not virtually nilpotent, where  $\epsilon = \frac{C}{\sqrt{n}}$ .*

Further, the group  $\Gamma$  exhibited in the proof of Proposition 2.4.3 has infinite covolume in  $\text{Isom}(H_{\mathbb{R}}^n)$  (see the construction below, in paragraph A).

Now, this proposition in turn implies

**Théorème 2.4.4.** *There exists a constant  $C > 0$  such that  $\mu_{H_{\mathbb{H}}^n} \leq \frac{C}{\sqrt{n}}$ .*

*Démonstration.* Indeed, fix an  $n$ , and let  $\Gamma \subset \mathbf{SO}(n, 1)$  and  $x \in H_{\mathbb{R}}^n$  be the discrete group of isometries and point of  $H_{\mathbb{R}}^n$  given by Proposition 2.4.3. The group  $\mathbf{SO}(n, 1)$  is embedded in  $\mathbf{Sp}(n, 1)$ ,

$$\iota : \mathbf{SO}(n, 1) \hookrightarrow \mathbf{Sp}(n, 1),$$

and stabilises a  $\mathbb{R}^n$ -plane in  $H_{\mathbb{H}}^n$  (see Definition 1.4.12 of chapter 1), that is a totally geodesic isometric copy  $\iota_*(H_{\mathbb{R}}^n)$  of  $H_{\mathbb{R}}^n$ . So  $\Gamma$  itself is a discrete subgroup of  $\mathbf{Sp}(n, 1)$ , acting on  $\iota_*(H_{\mathbb{R}}^n)$ , and the group

$$\Gamma_{\iota_*(x)}(\epsilon) = \langle g \in \Gamma \mid d(\iota_*(x), g(\iota_*(x))) \leq \epsilon \rangle$$

is not virtually abelian. □

Note that the proof above also works for  $H_{\mathbb{C}}^n$ , so that ultimately Proposition 2.4.3 implies

**Proposition 2.4.5.** *There exists a constant  $C > 0$  such that*

$$\mu_{H_{\mathbb{K}}^n} \leq \frac{C}{\sqrt{n}},$$

for  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  or  $\mathbb{H}$ .

We give a detailed proof of Proposition 2.4.3, in Annexe A, for Belolipetsky's article only sketches its main arguments, and for we found this construction beautiful enough to deserve a comprehensive exposition.

---

## Chapitre 3

---

### *Volume et caractéristique d'Euler des quotients de $H_{\mathbb{H}}^n$*

Le résultat principal du chapitre 2 est l'obtention d'une constante positive  $\lambda_n$  telle que toute variété recouverte par  $H_{\mathbb{H}}^n$  contient une boule plongée de rayon  $\lambda_n/2$  (c'est l'objet du théorème 2.3.1). Conséquence directe de ce résultat, nous obtenons une borne sur le volume de telles variétés, en le minorant par le volume d'une boule de rayon  $\lambda_n/2$  dans  $H_{\mathbb{H}}^n$  (corollaire 2.4.2). Ce corollaire est en réalité plus anecdotique que satisfaisant, et nous nous sommes attachés, dans la fin du chapitre 2, à décrire certaines raisons indiquant qu'une information sur le rayon maximal n'équivaut pas à une information sur le volume (voir la discussion au paragraphe 2.4).

Ajoutons à ceci deux constats allant dans le même sens. Tout d'abord, la minoration du volume des variétés hyperboliques quaternioniques ainsi obtenue décroît exponentiellement vite avec la dimension. Or, dans le cas hyperbolique réel, les travaux d'Armand Borel et de Gopal Prasad, puis de Mikhaïl Belolipetsky et Vincent Emery (voir par exemple le survol de Mikhaïl Belolipetsky [Bel14a, §3] sur le sujet) montrent que le volume minimal des variétés *arithmétiques* recouvertes par  $H_{\mathbb{R}}^n$  *croît* avec la dimension. Dans le cas quaternionique, les variétés de volume fini étant toutes arithmétiques (comme l'ont montré Kevin Corlette [Cor92] et Mikhaïl Gromov et Richard Schoen [GS92]), on peut donc également s'attendre à ce que le volume minimal soit une fonction croissante de la dimension.

D'autre part, et c'est surtout ce deuxième point qui nous intéresse dans ce chapitre, une telle approximation ne traite pas le cas des *orbifolds* recouverts par  $H_{\mathbb{H}}^n$ . Notre but ici est donc d'exposer une méthode aboutissant à une minoration du volume des quotients de  $H_{\mathbb{H}}^n$  par un groupe discret quelconque (avec ou sans torsion) de  $\text{Isom}(H_{\mathbb{H}}^n)$ . Comme d'après le théorème de Gauss-Bonnet généralisé, le volume d'un orbifold est proportionnel à sa caractéristique d'Euler, une minoration du volume est riche d'informations, et nous permet en particulier, connaissant le ratio de ces deux quantités, d'estimer la caractéristique d'Euler des quotients de  $H_{\mathbb{H}}^n$ .

Le point de départ de ce chapitre est une observation faite par Ilesanmi Adeboye et Guofang Wei dans les cas hyperboliques réels [AW12] puis complexes [AW14], et valable également pour  $H_{\mathbb{H}}^n$  :

*La projection naturelle  $\pi : \text{Isom}(H_{\mathbb{H}}^n) = G \longrightarrow G/K = H_{\mathbb{H}}^n$  est une submersion riemannienne.*

Donnons nous un réseau  $\Gamma$  de  $G$ , auquel nous pensons indifféremment comme agissant à

gauche par translations sur  $G$ , ou agissant par isométries sur  $H_{\mathbb{H}}^n$ . D'après la remarque ci-dessus, dès que nous avons une estimation du type

$$\text{Vol}(\Gamma \backslash G) \geq V_G, \quad (3.0.1)$$

nous avons une estimation du volume du quotient  $\Gamma \backslash H_{\mathbb{H}}^n$ , car alors

$$\text{Vol}(\Gamma \backslash H_{\mathbb{H}}^n) \geq \frac{V_G}{\text{Vol}(K)},$$

et les volumes des groupes compacts classiques sont connus.

Cette observation n'a bien sûr rien de spécifique aux espaces hyperboliques, et est plus généralement valable pour tous les espaces symétriques. Par ailleurs, pour les espaces symétriques de type non-compact, nous sommes en mesure d'obtenir une minoration de type (3.0.1).

En effet, si  $G$  est un groupe de Lie semi-simple sans facteur compact, Hsien-Chung Wang a exhibé, en 1979, [Wan69], un nombre positif  $r_G$  tel que tout sous-groupe discret de  $G$  possède un domaine fondamental contenant une boule de rayon  $r_G/2$ . Ce nombre est explicite, et dépend de deux constantes liées au groupe  $G$ , les *constantes de Wang*  $C_1$  et  $C_2$  de  $G$ , introduites dans ce même article. Alors, si nous connaissons une borne explicite  $k_G$  majorant les courbures sectionnelles de  $G$ , appliquant un théorème classique de comparaison des volumes entre une variété à courbure sectionnelle bornée et la variété modèle à courbure sectionnelle constante  $M^{k_G}$ , nous minorons le volume  $\text{Vol}(\Gamma \backslash G)$  par celui d'une boule de rayon  $r_G/2$  dans  $M^{k_G}$ .

Nous avons donc structuré ce chapitre en trois parties.

Les sections 3.1 et 3.2 sont consacrées à l'obtention d'une estimation de type (3.0.1) pour un groupe de Lie semi-simple et sans facteur compact quelconque.

Nous y détaillons tout d'abord le contexte géométrique et riemannien dans lequel nous nous trouvons : nous introduisons ainsi les définitions de *métrique canonique* d'une algèbre de Lie semi-simple (définition 3.1.2); celles des *constantes de Wang*  $C_1$ ,  $C_2$  et du *rayon de Wang*  $r_G$  (définitions 3.1.4 et définition 3.2.1); nous décrivons également rapidement la configuration de submersion riemannienne observée plus haut.

Nous exhibons ensuite une borne explicite  $k_G$  sur les courbures sectionnelles de  $G$  (c'est le théorème 3.2.6), qui ne dépend que des constantes de Wang  $C_1$  et  $C_2$ , donc que du groupe  $G$ . Enfin, comme annoncé, nous utilisons un résultat de comparaison pour minorer le volume des quotients de  $G$  (théorème 3.2.13 et corollaire 3.2.17).

Dans les sections 3.3 et 3.4, nous appliquons ces résultats au groupe de Lie semi-simple  $\mathbf{Sp}(n, 1) = \text{Isom}(H_{\mathbb{H}}^n)$  et à l'étude des quotients de  $H_{\mathbb{H}}^n$ .

Nous munissons tout d'abord  $\mathbf{Sp}(n, 1)$  de sa métrique invariante induisant une courbure sectionnelle pincée entre  $-1$  et  $-1/4$  sur  $H_{\mathbb{H}}^n$ , la *métrique standard normalisée* (définition 3.3.11). À l'aide de cette dernière, nous calculons explicitement toutes les quantités

intervenant dans la borne (minorant le volume d'un quotient de  $\mathbf{Sp}(n, 1)$ ) obtenue aux sections précédentes. Connaissant le volume du sous-groupe compact maximal de  $\mathbf{Sp}(n, 1)$ , nous obtenons finalement une borne sur le volume des quotients de  $H_{\mathbb{H}}^n$  (théorème 3.3.21).

Comme nous le remarquons en introduction de ce chapitre, le théorème de Gauss-bonnet généralisé nous permet alors d'estimer la caractéristique d'Euler des orbifolds hyperboliques quaternioniques. Les constantes intervenant dans ce résultat n'étaient pas explicitement connues avant notre étude, et nous commençons donc par expliciter la matrice des 2-formes de courbure de  $H_{\mathbb{H}}^n$  (propositions 3.4.19, 3.4.20 et 3.4.21,) afin d'estimer ces constantes (propositions 3.4.26 et 3.4.28). Nous en déduisons ensuite une minoration de la caractéristique d'Euler des quotients de  $H_{\mathbb{H}}^n$  (c'est le théorème 3.4.29).

Le travail général des sections 3.1 et 3.2 s'applique bien entendu à tous les espaces hyperboliques, et les quantités calculées pour  $H_{\mathbb{H}}^n$  dans les sections 3.3 et 3.4 se trouvaient déjà dans la littérature pour  $H_{\mathbb{R}}^n$  et  $H_{\mathbb{C}}^n$ .

Dans une troisième et dernière partie, nous dressons donc des tables (tables 3.1 et 3.2, page 87) donnant des minoration des volumes et des caractéristiques d'Euler des quotients des espaces hyperboliques réels, complexes et quaternioniques.

## 3.1 Contexte

### 3.1.1 Métriques canoniques et constantes de Wang de $G$

Soit  $G$  un groupe de Lie semi-simple de type non-compact. On dispose sur l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$  de la *forme de Killing*, donnée par

$$\mathcal{B}(X, Y) = \text{Trace}(\text{ad}_X \circ \text{ad}_Y),$$

qui est symétrique et non-dégénérée (car  $G$  est semi-simple). Étant donnée une décomposition de Cartan

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$$

de  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathcal{B}$  est positive sur  $\mathfrak{p}$ , négative sur  $\mathfrak{k}$ , et l'on munit l'algèbre de Lie d'un produit euclidien en posant

$$\langle X, Y \rangle_0 = \begin{cases} \mathcal{B}(X, Y) & \text{pour } X, Y \in \mathfrak{p} \\ -\mathcal{B}(X, Y) & \text{pour } X, Y \in \mathfrak{k} \\ 0 & \text{si } X \in \mathfrak{p}, Y \in \mathfrak{k} \end{cases} . \quad (3.1.1)$$

L'identification de  $\mathfrak{g}$  avec l'espace tangent en l'identité de  $G$  permet alors d'étendre  $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$  en une métrique riemannienne, invariante à gauche, sur  $G$ .

**Définition 3.1.2.** La *métrique canonique* sur  $G$  est la métrique  $g_0$  donnée par le produit  $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$  défini en (3.1.1).

La borne sur les courbures de  $G$  que nous exhibons plus bas (théorème 3.2.6) dépend de deux constantes liées au groupe  $G$ . Ces constantes ont été introduites par Hsien-Chung Wang dans [Wan69], et nous reprenons ici ses notations.

**Notation 3.1.3.** Étant donnée une application linéaire  $f \in \text{End}(\mathfrak{g})$ , on note  $N(f)$  la norme d'opérateur de  $f$  sur  $\mathfrak{g}$  :

$$N(f) = \sup \{ \|f(X)\|_0, X \in \mathfrak{g}, \|X\|_0 = 1 \},$$

où  $\| \cdot \|_0$  désigne la norme associée à la métrique canonique  $g_0$  sur  $G$ .

**Définition 3.1.4** (Constantes de Wang [Wan69]). Les *constantes de Wang du groupe  $G$*  sont les constantes

$$C_1 = \sup \{ N(\text{ad}_X), X \in \mathfrak{p}, \|X\|_0 = 1 \}$$

et

$$C_2 = \sup \{ N(\text{ad}_U), U \in \mathfrak{k}, \|U\|_0 = 1 \}.$$

(Ces deux constantes sont ainsi les normes de l'application bilinéaire  $\text{ad}$ , restreinte à  $\mathfrak{p} \times \mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{k} \times \mathfrak{g}$  respectivement).

À la fin de l'article mentionné plus haut, Hsien-Chung Wang dresse une table des constantes  $C_1$  et  $C_2$  pour les groupes de Lie semi-simples de type non-compact et non-exceptionnels. Il y remarque en particulier que ces deux constantes sont soit égales, soit l'une vaut  $\sqrt{2}$  fois l'autre :

**Lemme 3.1.5** (Wang [Wan69]). *Pour tout  $G$  semi-simple de type non-compact, non-exceptionnel,*

$$C_2 = C_1 \text{ ou } C_2 = \sqrt{2}C_1.$$

Donnons enfin la définition suivante :

**Définition 3.1.6.** Une *métrique standard* sur  $G$  est une métrique  $g$  donnée par un multiple scalaire de la métrique canonique  $g_0$  :

$$g = c \cdot g_0.$$

Dans la suite de ce paragraphe, nous fixons une métrique standard  $g = c \cdot g_0$  sur  $G$ , et nous notons  $\| \cdot \|$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  la norme et le produit euclidiens associés.

### 3.1.2 Submersion riemannienne et formules de courbures

Notons  $\pi$  la projection du groupe de Lie  $G$  vers l'espace symétrique associé,

$$\pi : G \longrightarrow G/K. \tag{3.1.7}$$

La configuration riemannienne ci-dessus est bien particulière : l'application  $\pi$  est une *submersion riemannienne* à fibres totalement géodésiques.

Dans son article de 1968, Barrett O’Neill [O’N66] étudie la géométrie différentielle locale d’une telle configuration. Il y introduit deux tenseurs  $T$  et  $A$  liés à la submersion,  $T$  étant essentiellement la seconde forme fondamentale des fibres, et  $A$  mesurant le défaut d’intégrabilité de la distribution horizontale. Ces deux tenseurs lui permettent d’établir les formules liant les courbures de l’espace total et celles de la base qui portent aujourd’hui son nom (dans notre cas, les fibres étant totalement géodésiques, le tenseur  $T$  s’annule).

Les résultats de Barrett O’Neill sont repris et exposés dans l’ouvrage de Jeff Cheeger et David G. Ebin [CE08, chpt 3], et c’est leurs notations que nous adoptons ici.

Cette notion est aujourd’hui standard, et nous indiquons donc rapidement les définitions, résultats et notations que nous utilisons dans la suite. En plus des deux références données plus haut, une exposition minutieuse, insistant sur l’exemple – qui nous concerne – des espaces homogènes, peut en être trouvée dans le livre d’Arthur Besse [Bes08, chpt 9] ; le traité de Sylvestre Gallot, Dominique Hulin et Jacques Lafontaine [GHL90] contient également de nombreux détails et exemples de cette situation.

**Notations 3.1.8.** Soit  $\pi : (M^{n+k}, g) \longrightarrow (B^n, h)$  une submersion entre deux variétés riemanniennes. Pour tout point  $p$  de  $N$ ,  $\pi^{-1}(p)$  est une sous-variété de dimension  $k$  de  $M$ , et l’on note

- $V_q$  l’espace tangent à  $\pi^{-1}(p)$  en  $q \in \pi^{-1}(p)$  ;
- $H_q = V_q^\perp$  l’orthogonal de  $V_q$  (pour  $g$ ) dans  $T_qM$ .
- On a donc  $T_qM = V \oplus H$  et l’on note par des exposants  $X^v$  et  $X^h$  les composantes d’un vecteur  $X$  de  $T_qM$  dans  $V$  et dans  $H$  respectivement.

**Définition 3.1.9.** Les deux sous-espaces  $V_q$  et  $H_q$  de  $T_qM$  sont appelés respectivement *sous-espace vertical* et *sous-espace horizontal*. Les composantes  $X^v$  et  $X^h$  d’un vecteur  $X$  de  $T_qM$  sont appelées respectivement *composante verticale* et *composante horizontale* de  $X$ .

Nous donnons enfin la définition centrale de ce paragraphe :

**Définition 3.1.10.** Une submersion  $\pi : (M^{n+k}, g) \longrightarrow (B^n, h)$  entre deux variétés riemanniennes est une *submersion riemannienne* si pour tout  $q \in M$ ,

$$d\pi | H : H \longrightarrow T_{\pi(q)}B$$

est une isométrie.

Revenons à la configuration (3.1.7) et au groupe  $G$ , que nous considérons muni d’une métrique standard  $g$  (au sens de la définition 3.1.2). Nous munissons  $G/K$  de la métrique  $\pi_*(g)$ . Le résultat suivant est classique (voir par exemple la discussion dans le livre de Jeff Cheeger et David G. Ebin [CE08, p.68], ou l’énoncé donné par Arthur Besse [Bes08, théorème 9.80]).

**Proposition 3.1.11.** *Soit  $g$  une métrique standard sur  $G$  (définition 3.1.6). L’application  $\pi$  donnée en (3.1.7) est une submersion riemannienne de  $(G, g)$  sur  $(G/K, \pi_*(g))$ , dont les fibres sont totalement géodésiques.*

**Notations 3.1.12.** On note

- $\nabla$  la connection associée à la métrique standard (invariante à gauche)  $g$  sur  $G$  :

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2} \{ \langle [X, Y], Z \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle \} ;$$

- $R$  le tenseur de courbure riemannien associé :

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z ;$$

- $K$  la courbure sectionnelle d'un plan dans  $G$  :

$$K(X, Y) = \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{\|X\|^2 \|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2} ;$$

- et  $K_b = K_b(d\pi(X), d\pi(Y))$  la courbure sectionnelle d'un plan dans  $G/K$ .

Les courbures  $K$  et  $K_b$  sont alors liées par une formule établie dans l'article de Barrett O'Neill [O'N66] (voir aussi [CE08, théorème 3.20]) :

**Théorème 3.1.13** (O'Neill [O'N66]). *Soient  $\check{X}$  et  $\check{Y}$  deux champs vecteurs orthonormaux de  $G/K$ , et  $X$  et  $Y$  leurs relevés horizontaux à  $G$ . Alors*

$$K_b(\check{X}, \check{Y}) = K(X, Y) + \frac{3}{4} \|[X, Y]^v\|^2.$$

Concluons ce paragraphe par une série de formules explicitant le tenseur de courbure  $R$  dans les plans horizontaux, les plans verticaux et les plans transverses, en fonction du crochet sur  $\mathfrak{g}$ . Ces formules sont établies par Ilesanmi Adeboye et Guofang Wei dans leur article sur le volume des orbifolds hyperboliques [AW12].

**Proposition 3.1.14** ([AW12, Proposition 3.3]). *Soient  $X, Y, Z \in \mathfrak{p}$  trois vecteurs horizontaux, et  $U, V, W \in \mathfrak{k}$  trois vecteurs verticaux. Alors*

$$\langle R(U, V)W, X \rangle = 0 \tag{3.1.15}$$

$$\langle R(X, Y)Z, U \rangle = 0 \tag{3.1.16}$$

$$\langle R(X, Y)Y, X \rangle = -\frac{7}{4} \|[X, Y]\|^2 \tag{3.1.17}$$

$$\langle R(U, V)V, U \rangle = \frac{1}{4} \|[U, V]\|^2 \tag{3.1.18}$$

$$\langle R(U, X)X, U \rangle = \frac{1}{4} \|[U, X]\|^2 \tag{3.1.19}$$

$$R(X, Y)V = \frac{3}{4} ([X, [V, Y]] + [Y, [X, V]]) \tag{3.1.20}$$

$$R(X, V)Y = -\frac{1}{4} [[X, V], Y] + \frac{1}{2} [[Y, V], X]. \tag{3.1.21}$$

### 3.2 Une borne sur le volume de $\Gamma \backslash G$

Considérons à présent un sous-groupe discret  $\Gamma$  de  $G$ , agissant par translation à gauche sur  $G$ . Dans son article de 1969 [Wan69], Hsien-Chung Wang exhibe une constante  $r_G$  telle que  $\Gamma$  possède un domaine fondamental dans  $G$  contenant une boule de rayon  $r_G/2$  :



**Définition 3.2.1** (Rayon de Wang [Wan69]). Soit  $G$  un groupe de Lie semi-simple de type non-compact, et  $C_1, C_2$  les deux constantes définies en 3.1.4. Le *rayon de Wang*  $r_G$  est le plus petit zéro strictement positif de la fonction

$$F(t) = \exp C_1 t - 1 + 2 \sin C_2 t - \frac{C_1 t}{\exp C_1 t - 1}.$$

**Théorème 3.2.2** (Wang [Wan69]). Soit  $G$  un groupe de Lie semi-simple sans facteur compact, et  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $G$ . Supposons  $G$  muni d'une métrique standard

$$g = c \cdot g_0.$$

Il existe un élément  $\alpha$  de  $G$  tel que

$$B(e, \sqrt{c} \cdot r_G) \cap \alpha \Gamma \alpha^{-1} = \{e\} \quad (3.2.3)$$

où  $B(e, \sqrt{c} \cdot r_G)$  est la boule de rayon  $\sqrt{c} \cdot r_G$  centrée en l'identité dans  $G$ .

**Corollaire 3.2.4.** Tout sous-groupe discret  $\Gamma$  de  $(G, g)$  possède un domaine fondamental dans  $G$  contenant une boule de rayon  $\sqrt{c} \cdot r_G/2$ .

*Démonstration.* Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $G$ , et soit  $\alpha$  vérifiant l'équation (3.2.3) du théorème de Wang. Le domaine de Dirichlet centré en  $e$  du sous-groupe

$$\Gamma' = \alpha \Gamma \alpha^{-1}$$

contient la boule  $B = B(e, \frac{\sqrt{c} \cdot r_g}{2})$ . En effet, notons

$$\mathcal{D}_{\Gamma'} = \{q \in G \mid \forall \gamma \in \Gamma', \quad d(e, q) \leq d(\gamma \cdot e, q) = d(\gamma, q)\}$$

ce domaine, et soit  $q$  tel que

$$d(e, q) \leq \frac{\sqrt{c} \cdot r_g}{2} \quad (3.2.5)$$

un point de  $B$ . Alors, pour tout  $\gamma \in \Gamma'$ , par l'inégalité triangulaire,

$$d(\gamma, q) \geq d(\gamma, e) - d(e, q),$$

donc, par (3.2.5) et l'équation (3.2.3) du théorème de Wang,

$$d(\gamma, q) \geq \sqrt{c} \cdot r_g - \frac{\sqrt{c} \cdot r_g}{2} = \frac{\sqrt{c} \cdot r_g}{2} \geq d(e, q).$$

Ainsi  $q \in \mathcal{D}_{\Gamma'}$ , donc  $B \subset \mathcal{D}_{\Gamma'}$ , et finalement, le domaine de Dirichlet centré en  $\alpha$  du groupe initial  $\Gamma$  contient une boule de rayon  $\frac{\sqrt{c} \cdot r_g}{2}$  centré en  $\alpha$ .  $\square$

Comme corollaire immédiat, on peut borner le covolume de  $\Gamma$  dans  $G$  par le volume d'une telle boule  $B\left(e, \frac{\sqrt{c} \cdot r_g}{2}\right)$ . Cette section se divise donc en deux parties. Dans un premier temps, nous déterminons une borne supérieure  $k_G$  sur les courbures sectionnelles du groupe  $G$ . Cette borne ne dépend que des constantes  $C_1$  et  $C_2$  introduites en 3.1.4 (et du facteur de normalisation  $c$  de la métrique). Dans un second temps, nous appliquons un théorème de comparaison dans une variété riemannienne à courbure majorée pour borner le volume d'une boule de rayon  $\frac{\sqrt{c} \cdot r_g}{2}$  dans  $G$ .

### 3.2.1 Courbures sectionnelles de $G$

**Théorème 3.2.6.** *Soit  $G$  un groupe de Lie semi-simple sans facteur compact. Supposons  $G$  muni d'une métrique standard (au sens de la définition 3.1.6)*

$$g = c \cdot g_0,$$

notons  $C_1$  et  $C_2$  les constantes de Wang associées à  $G$  (définies en 3.1.4), et posons

$$k_G = \frac{9}{2} \cdot C_1^2 + \frac{1}{4} \cdot C_2^2. \quad (3.2.7)$$

Alors les courbures sectionnelles de  $(G, g)$  sont majorées par  $\frac{k_G}{c}$ .

*Démonstration.* Nous montrons que les courbures sectionnelles de  $G$  muni de sa métrique canonique  $g_0$  (définition 3.1.2) sont majorées par  $k_G$ . La majoration des courbures sectionnelles de  $(G, g)$  par  $\frac{k_g}{c}$ , où  $c$  est le facteur de normalisation de la métrique  $g$ , s'en déduit immédiatement.

Rappelons que l'on note  $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$  et  $\| \cdot \|_0$  la norme et le produit euclidiens associés à la métrique canonique sur  $G$ . Soit  $\mathcal{P}$  un plan de  $G$ , et choisissons une base  $(X + U, Y + V)$  de  $T_e \mathcal{P} \subset \mathfrak{g}$ , avec  $X, Y \in \mathfrak{p}$  et  $U, V \in \mathfrak{k}$ , c'est-à-dire

$$(X + U)^h = X, \quad (X + U)^v = U \quad \text{et} \quad (Y + V)^h = Y, \quad (Y + V)^v = V.$$

Choisissons de plus cette base orthonormale pour  $g_0$  :

$$\langle X + U, Y + V \rangle_0 = 0 \quad \text{et} \quad \|X + U\|_0 = \|Y + V\|_0 = 1. \quad (3.2.8)$$

Notant  $K_0$  la courbure sectionnelle d'un plan dans  $G$  muni de sa métrique canonique  $g_0$ , on a alors (voir les notations 3.1.12) :

$$K_0(\mathcal{P}) = \langle R(X + U, Y + V)(Y + V), X + U \rangle_0.$$

Nous développons cette expression par bilinéarité et la simplifions à l'aide des identités données à la proposition 3.1.14. Tout d'abord, par (3.1.15) et (3.1.16), tous les termes du développement qui contiennent trois vecteurs verticaux et un vecteur horizontal, ou trois vecteurs horizontaux et un vertical sont nuls. Il reste donc :

$$\begin{aligned} K_0(\mathcal{P}) &= \underbrace{\langle R(X, Y)Y, X \rangle_0}_{(1)} + \underbrace{\langle R(U, V)V, U \rangle_0}_{(2)} + \underbrace{\langle R(U, Y)Y, U \rangle_0}_{(3)} \\ &\quad + \underbrace{\langle R(X, V)V, X \rangle_0}_{(4)} + 2 \underbrace{\langle R(X, Y)V, U \rangle_0}_{(5)} + 2 \underbrace{\langle R(X, V)Y, U \rangle_0}_{(6)}. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Remarquons que vu le choix de base que nous avons fait, chacun des vecteurs apparaissant dans l'expression ci-dessus est de norme plus petite que 1 : par (3.2.8),  $\|X\|, \|Y\|, \|U\|$  et  $\|V\| \leq 1$ . Étudions chacun des termes de (3.2.9).

(1) Par (3.1.17),

$$\langle R(X, Y)Y, X \rangle_0 = -\frac{7}{4} \| [X, Y] \|_0^2$$

donc

$$(1) \leq 0.$$

(2) Par (3.1.18),

$$\langle R(U, V)V, U \rangle_0 = \frac{1}{4} \| [U, V] \|_0^2 \leq \frac{1}{4} N(\text{ad}_U)^2$$

donc

$$(2) \leq \frac{1}{4} C_2^2.$$

(3) Par (3.1.19),

$$\langle R(U, Y)Y, U \rangle_0 = \frac{1}{4} \| [U, X] \|_0^2 \leq \begin{cases} \frac{1}{4} N(\text{ad}_U)^2 \\ \frac{1}{4} N(\text{ad}_X)^2 \end{cases}$$

donc

$$(3) \leq \frac{1}{4} \min(C_1^2, C_2^2).$$

(4) De même,

$$(4) \leq \frac{1}{4} \min(C_1^2, C_2^2).$$

(5) Par (3.1.20),

$$\begin{aligned} 2\langle R(X, Y)V, U \rangle_0 &= \frac{3}{2} (\langle [X, [V, Y]], U \rangle_0 + \langle [Y, [X, V]], U \rangle_0) \\ &= \frac{3}{2} (\langle [V, Y], [X, U] \rangle_0 + \langle [X, V], [Y, U] \rangle_0) \end{aligned}$$

donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$(5) \leq \frac{3}{2} (\| [U, X] \|_0 \cdot \| [V, Y] \|_0 + \| [V, X] \|_0 \cdot \| [U, Y] \|_0).$$

Par le même raisonnement que pour (3), nous majorons à nouveau chacune de ces normes par  $C_1$  et  $C_2$  et finalement,

$$(5) \leq 3 \min(C_1^2, C_2^2).$$

(6) Enfin, par (3.1.21),

$$\begin{aligned} 2\langle R(X, V)Y, U \rangle_0 &= -\frac{1}{2} \langle [[X, V], Y], U \rangle_0 + \langle [[Y, V], X], U \rangle_0 \\ &= -\frac{1}{2} \langle [X, V], [Y, U] \rangle_0 + \langle [Y, V], [X, U] \rangle_0. \end{aligned}$$

Appliquant une nouvelle fois l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et la majoration des normes par  $C_1$  et  $C_2$ , nous obtenons

$$(6) \leq \min(C_1^2, C_2^2).$$

Pour conclure, rappelons que d'après le lemme 3.1.5, on a toujours

$$C_1 \leq C_2.$$

En sommant les estimations ci-dessus, on obtient donc (3.2.7). Finalement, les courbures sectionnelles de  $(G, g_0)$  sont majorées par  $k_G$ , et celles de  $(G, g)$  par  $\frac{k_G}{c}$ .  $\square$

*Remarque 3.2.10.* L'estimation (3.2.7) pourrait peut-être être légèrement améliorée, si au lieu de considérer les constantes  $C_1$  et  $C_2$  de Hsien-Chung Wang, on introduisait les deux constantes

$$C_{(\mathfrak{k}, \mathfrak{k})} = \sup \{ \sup \{ \text{ad}_U(V) \mid V \in \mathfrak{k}, \|V\| = 1 \} \mid U \in \mathfrak{k}, \|U\| = 1 \}$$

et

$$C_{(\mathfrak{p}, \mathfrak{k})} = \sup \{ \sup \{ \text{ad}_X(U) \mid U \in \mathfrak{k}, \|U\| = 1 \} \mid X \in \mathfrak{p}, \|X\| = 1 \},$$

correspondant à la norme de  $\text{ad}$ , restreinte à  $\mathfrak{k} \times \mathfrak{k}$  et à  $\mathfrak{p} \times \mathfrak{k}$  respectivement. (Ces constantes majorent les normes du crochet de deux vecteurs verticaux et du crochet d'un vecteur horizontal et d'un vecteur vertical respectivement). Cependant, même si un calcul montrait effectivement que ces constantes sont meilleures que  $C_1$  et  $C_2$ , il est peu probable que cette amélioration soit importante.

D'autre part, bien que la borne  $k_G$  possède un intérêt en soi, indépendamment de l'utilisation que nous en faisons dans la suite, notre but est ici de borner le volume d'une boule dans  $G$ . Ce volume dépend du volume de la boule unité euclidienne, et décroît par conséquent exponentiellement vite avec la dimension. Une amélioration de l'estimation de  $k_G$  (même polynomiale en la dimension) n'aurait donc pas d'impact significatif sur notre résultat final.

Enfin, un dernier argument en faveur des constantes  $C_1$  et  $C_2$ , purement esthétique quand à lui, est que le rayon  $r_G$  de Hsien-Chung Wang dépend lui aussi de  $C_1$  et  $C_2$ . En les gardant dans l'expression de  $k_G$ , nous évitons de multiplier les constantes dans l'expression finale du volume d'une boule dans  $G$ .

### 3.2.2 Volume d'une boule plongée dans $\Gamma \backslash G$

Dans l'article donnant  $r_G$ , Hsien-Chung Wang montre également que *le rayon d'injectivité de  $\Gamma \backslash G$  est plus grand que  $r_G$*  pour tout sous-groupe discret  $\Gamma$  de  $G$ . Nous pouvons donc utiliser un résultat classique de comparaison, dû à Paul Günther en 1960 [Gün60] (un exposé plus moderne de ce résultat se trouve par exemple dans le livre de Sylvestre Gallot, Dominique Hulin et Jacques Lafontaine [GHL90, 3.101]) :

**Théorème 3.2.11** (Günther). *Soit  $(M^d, g)$  une variété riemannienne complète, et supposons que les courbures sectionnelles de  $M$  sont majorées par une constante  $k$ . Donnons nous un point  $m$  de  $M$ , et notons  $B_m(r)$  la boule de rayon  $r$  centrée en  $m$  dans  $M$ . Alors, si  $r$  est inférieur au rayon d'injectivité de  $M$  en  $m$ ,*

$$\text{Vol}(B_m(r)) \geq V(d, r, k)$$

où  $V(d, r, k)$  est le volume d'une boule de rayon  $r$  dans la variété riemannienne complète et simplement connexe, de dimension  $d$ , à courbure sectionnelle constante  $k$ .

Pour conclure, il nous suffit de rappeler la valeur de la quantité  $V(d, r, k)$ , quand  $k$  est strictement positif :

**Lemme 3.2.12.** *Le volume d'une boule de rayon  $r$  dans la variété riemannienne complète et simplement connexe, de dimension  $d$ , à courbure sectionnelle constante  $k > 0$  vaut*

$$V(d, r, k) = \frac{\sigma_{d-1}}{\sqrt{k}^d} \int_0^{\sqrt{k} \cdot r} \sin^{d-1}(\rho) d\rho$$

où  $\sigma_{d-1} = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$  est le volume de la sphère unité  $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ .

(Ce résultat classique peut par exemple être trouvé dans le livre de Luis A. Santaló [San76, (17.47)]).

Rassemblant alors le théorème de Wang (théorème 3.2.2), notre théorème 3.2.6, le théorème de Günther (théorème 3.2.11) et le lemme 3.2.12, nous obtenons le

**Théorème 3.2.13.** *Soit  $G$  un groupe de Lie semi-simple sans facteur compact, de dimension  $d$ , et muni d'une métrique standard (définition 3.1.6)*

$$g = c \cdot g_0.$$

Rappelons que l'on note  $r_G$  le rayon de Wang (définition 3.2.1), et

$$k_G = \frac{9}{2} \cdot C_1^2 + \frac{1}{4} \cdot C_2^2$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont les deux constantes de Wang (définition 3.1.4). Alors, pour tout sous-groupe discret  $\Gamma$  de  $G$ , on a

$$\text{Vol}(\Gamma \backslash G) \geq \sigma_{d-1} \left( \frac{c}{k_G} \right)^{\frac{d}{2}} \int_0^{\sqrt{k_G} \cdot r_G / 2} \sin^{d-1}(\rho) d\rho$$

où  $\sigma_{d-1} = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$  est le volume de la sphère unité  $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ .

*Remarque 3.2.14.* Un corollaire plus grossier mais plus agréable de ce résultat est facilement formulable. En effet, dans [Wan69], Hsien-Chung Wang indique que  $r_G$  et  $C_1$  sont comparables. Précisément, le produit  $r_G \cdot C_1$  vaut soit  $\frac{288}{1000}$  soit  $\frac{277}{1000}$ . En particulier, nous avons toujours

$$\frac{1}{4} \leq r_G \cdot C_1 \leq \frac{2}{5}. \quad (3.2.15)$$

Par ailleurs, comme  $C_2$  vaut  $C_1$  ou  $\sqrt{2} \cdot C_1$  (c'est le lemme 3.1.5), nous avons aussi toujours

$$2C_1 \leq \sqrt{\frac{19}{4}} \cdot C_1 \leq \sqrt{k_G} \leq \sqrt{\frac{19}{4}} \sqrt{2} \cdot C_1 \leq \frac{5}{2} \sqrt{2} \cdot C_1. \quad (3.2.16)$$

Ainsi, pour tout  $G$ ,

$$\frac{1}{4} \leq \sqrt{k_G} \cdot r_G \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Minorant alors  $\sin(x)$  par  $x^2$  sur  $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ , on trouve

$$\text{Vol}(\Gamma \backslash G) \geq \sigma_{d-1} \sqrt{c}^d \sqrt{k_G}^{d-1} r_G^{2d-1} \frac{1}{2^{2d-1} 2d-1}$$

puis, utilisant (3.2.15) et (3.2.16) :

**Corollaire 3.2.17.** *Soit  $G$  un groupe de Lie semi-simple sans facteur compact, de dimension  $d$ , muni d'une métrique standard (définition 3.1.6)*

$$g = c \cdot g_0,$$

et rappelons que  $C_1$  est la constante de Wang de la définition 3.1.4. Alors, pour tout sous-groupe discret  $\Gamma$  de  $G$ , on a

$$\text{Vol}(\Gamma \backslash G) \geq V_G$$

avec

$$V_G = \frac{1}{2^{6d-3} \cdot (2d-1)} \cdot \sigma_{d-1} \cdot c^{\frac{d}{2}} \cdot C_1^{-d}, \quad (3.2.18)$$

où  $\sigma_{d-1} = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$  est le volume de la sphère unité  $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ .

### 3.3 Volume des quotients de $H_{\mathbb{H}}^n$

Dans cette section, nous commençons par expliciter une métrique standard pour le groupe  $G = \mathbf{Sp}(n, 1)$  des isométries de  $H_{\mathbb{H}}^n$ , induisant la métrique usuelle sur  $H_{\mathbb{H}}^n$ , à courbure sectionnelle pincée entre  $-1$  et  $-1/4$  (définition 3.3.11).

Grâce au corollaire 3.2.17, nous en déduisons une borne sur le covolume d'un sous-groupe discret de  $\mathbf{Sp}(n, 1)$  (proposition 3.3.18), puis, utilisant la configuration de submersion riemannienne donnée en (3.1.7), une borne sur le volume d'un quotient de  $H_{\mathbb{H}}^n$  par un sous-groupe discret de son groupe d'isométries (c'est le théorème 3.3.21).

#### 3.3.1 L'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}(n, 1)$

Nous nous plaçons dans le modèle de la boule pour l'espace hyperbolique quaternionique, c'est-à-dire le modèle donné par le choix de la forme quadratique (rappelons les notations 1.1.10) :

$$J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}.$$

Le groupe  $\mathbf{Sp}(n, 1)$  est formé des endomorphismes de  $\mathbb{H}^{n,1}$  préservant  $J_2$ ,

$$\mathbf{Sp}(n, 1) = \{A \in \text{Gl}(n+1, \mathbb{H}) \mid A^* J_2 A = J_2\}. \quad (3.3.1)$$

Différenciant l'expression (3.3.1), on obtient la description de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sp}(n, 1)$  suivante :

$$\mathfrak{sp}(n, 1) = \{X \in M_{n+1}(\mathbb{H}) \mid J_2 X^* J_2 = -X\}. \quad (3.3.2)$$

*Remarque 3.3.3.* Comme dans le cas des groupes d'isométries des espaces hyperboliques réels ou complexes,  $\mathbf{SO}(n, 1)$  ou  $\mathbf{SU}(n, 1)$ , la relation (3.3.1) force les éléments du groupe à avoir un déterminant de module 1. Dans les cas réels et complexes, pour considérer les groupes *spéciaux* orthogonaux et unitaires, on ajoute de plus la condition  $\det(A) = 1$ . Les matrices que nous considérons sont à coefficients dans un corps non-commutatif,  $\mathbb{H}$ , et la bonne notion de déterminant est celle introduite par Jean Dieudonné [Die43]. Il s'agit d'un morphisme à valeur dans l'abélianisé du corps de base, ici  $\mathbb{R}$ . Ainsi les seules matrices dont le déterminant est de *module* 1 sont en fait les matrices de déterminant 1, et la condition  $\det(A) = 1$  est superflue. Pour cette raison, la condition  $\text{Trace}(X) = 0$  n'apparaît pas dans l'écriture (3.3.2) : les éléments de  $\mathfrak{sp}(n, 1)$  ne sont pas nécessairement de trace nulle, contrairement à ceux de  $\mathfrak{so}(n, 1)$  ou de  $\mathfrak{su}(n, 1)$ .

La relation (3.3.2) se réécrit

$$X = \begin{bmatrix} E & \beta \\ \beta^* & q \end{bmatrix}$$

où  $E$  est une matrice  $n \times n$  antihermitienne,  $E^* = -E$ ,  $q$  est un quaternion imaginaire pur,  $\bar{q} = -q$ , et  $\beta$  est un élément de  $M_{n \times 1}(\mathbb{H})$ .

Cette écriture met en évidence une décomposition de Cartan de l'algèbre de Lie, comme somme directe des deux sous-espaces propres (associés aux valeurs propres 1 et  $-1$ ) de l'involution  $\theta : X \mapsto -X^*$  :

**Lemme 3.3.4** (Décomposition de Cartan de  $\mathfrak{sp}(n, 1)$ ).

$$\mathfrak{sp}(n, 1) = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$$

où

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ \beta^* & 0 \end{bmatrix} \mid \beta \in M_{n \times 1}(\mathbb{H}) \right\}$$

et

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} \mid E^* = -E, \bar{q} = -q \right\}.$$

**Notations 3.3.5.** Dans la suite de ce chapitre, nous notons

- $e_{m,l}$  la matrice élémentaire  $(n+1) \times (n+1)$  ayant un 1 en position  $(m, l)$  et des zéros partout ailleurs ;
- $f_{m,l} = e_{m,l} + e_{l,m}$  ;
- $g_{m,l} = e_{m,l} - e_{l,m}$ .

**Définition 3.3.6.** Les familles

$$\mathcal{P} = (f_{m,n+1}, ig_{m,n+1}, jg_{m,n+1}, kg_{m,n+1})_{1 \leq m \leq n}$$

et

$$\mathcal{K} = (ie_{m,m}, je_{m,m}, ke_{m,m})_{1 \leq m \leq n+1} \cup (g_{m,l}, if_{m,l}, jf_{m,l}, kf_{m,l})_{1 \leq m < l \leq n}$$

forment la *base standard* de  $\mathfrak{p}$  (resp. de  $\mathfrak{k}$ ). Leur union forme la *base réelle standard*, ou simplement *base standard* de  $\mathfrak{sp}(n, 1)$ .

*Remarque 3.3.7.* Nous retrouvons bien  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{p}) = 4n$  (qui correspond à la dimension réelle de l'espace hyperbolique quaternionique) et

$$d = \dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{sp}(n, 1)) = 2n^2 + 5n + 3.$$

### 3.3.2 Métrique standard normalisée sur $\mathbf{Sp}(n, 1)$

Nous disposons sur  $\mathbf{Sp}(n, 1)$  de sa métrique canonique  $g_0$  (définition 3.1.2), associée à la décomposition de Cartan donnée au lemme 3.3.4. Nous souhaitons normaliser  $g_0$ , de sorte que la métrique induite sur les plans complexes de l'espace symétrique (nous renvoyons au paragraphe 1.4 du chapitre 1 pour la définition de ces sous-espaces) vaille  $-1$ . Avec une telle normalisation, la droite hyperbolique sur  $\mathbb{H}$ ,  $H_{\mathbb{H}}^1$ , est de courbure scalaire constante  $-1$ , et nous retrouvons le modèle usuel de l'espace hyperbolique réel de dimension 4.

Avec l'expression de  $g_0$  donnée par (3.1.1), le calcul d'un simple produit de vecteurs est pénible. Nous explicitons donc tout d'abord la relation entre la forme de Killing de  $\mathfrak{sp}(n, 1)$  et la trace des matrices de  $\mathfrak{sp}(n, 1)$ , relation qui nous permet de mener à bien nos calculs de normalisation.

**Lemme 3.3.8.** *Pour tout  $X, Y \in \mathfrak{sp}(n, 1)$ ,*

$$\mathcal{B}(X, Y) = 4(n+2)\Re(\text{Trace}(XY)).$$

Notons, avant de donner une preuve du lemme 3.3.8, le fait suivant :

**Lemme 3.3.9.** *L'espace  $\text{Sym}_{\mathbf{Sp}(n,1)}(\mathfrak{sp}(n, 1))$  des formes bilinéaires symétriques  $Ad$ -invariantes sur  $\mathfrak{sp}(n, 1)$  est de dimension 1.*

*Démonstration.* Ce fait est par exemple un corolaire d'un résultat démontré dans un texte d'Yves De Cornulier sur les formes bilinéaires invariantes [dC04, théorème 1.16] : l'algèbre  $\mathfrak{sp}(n, 1)$  étant simple, l'action adjointe est irréductible et le théorème 1.16 de ce texte indique alors les différentes dimensions possibles de l'espace  $\text{Sym}_{\mathbf{Sp}(n,1)}(\mathfrak{sp}(n, 1))$ . Cette dimension n'est pas nulle, car la forme de Killing appartient à cet espace. Les cas du théorème où la dimension est strictement plus grande que 1 (cas (3) et (6)) correspondent aux cas où les éléments de  $\text{Sym}_{\mathbf{Sp}(n,1)}(\mathfrak{sp}(n, 1))$  sont de signature  $(k, k)$ . Or la forme de Killing de  $\mathfrak{sp}(n, 1)$  est de signature

$$(\dim(\mathfrak{p}), \dim(\mathfrak{k})) = (4n, 2n^2 + n + 3),$$

et n'est donc jamais de signature  $(k, k)$ . Ces cas sont ainsi exclus, et finalement,

$$\dim\left(\text{Sym}_{\mathbf{Sp}(n,1)}(\mathfrak{sp}(n, 1))\right) = 1.$$

□



*Démonstration (du lemme 3.3.8).* Notons  $\rho$  la forme bilinéaire Ad-invariante sur  $\mathfrak{sp}(n, 1)$

$$\rho(X, Y) = \Re(\text{Trace}(XY)). \quad (3.3.10)$$

D'après le lemme 3.3.9, il existe une constante  $c$  telle que

$$\mathcal{B} = c\rho.$$

Calculons cette constante. Calculons cette constante. Il nous suffit pour cela d'évaluer  $\mathcal{B}(X, X)$  et  $\Re(\text{Trace}(XX))$  pour un  $X$  de  $\mathcal{P}$  (par exemple) donné. Nous prenons

$$X = f_{1,n+1}$$

et calculons successivement

$[X, [X, Y]] = 0$	si $Y = f_{1,n+1}$ ;
$= f_{m,n+1}$	si $Y = f_{m,n+1}, m = 2 \dots n$ ;
$= 4$	si $Y = ig_{1,n+1}$ ;
$= ig_{m,n+1}$	si $Y = ig_{m,n+1}, m = 2 \dots n$ ;
$= 4$	si $Y = jg_{1,n+1}$ ;
$= jg_{m,n+1}$	si $Y = jg_{m,n+1}, m = 2 \dots n$ ;
$= 4$	si $Y = kg_{1,n+1}$ ;
$= kg_{m,n+1}$	si $Y = kg_{m,n+1}, m = 2 \dots n$ ;
$= 2ie_{1,1} - 2ie_{n+1,n+1}$	si $Y = ie_{1,1}$ ;
$= 0$	si $Y = ie_{m,m}, m = 2 \dots n$ ;
$= 2ie_{n+1,n+1} - 2ie_{1,1}$	si $Y = ie_{n+1,n+1}$ ;
$= 2je_{1,1} - 2je_{n+1,n+1}$	si $Y = je_{1,1}$ ;
$= 0$	si $Y = je_{m,m}, m = 2 \dots n$ ;
$= 2je_{n+1,n+1} - 2je_{1,1}$	si $Y = je_{n+1,n+1}$ ;
$= 2ke_{1,1} - 2ke_{n+1,n+1}$	si $Y = ke_{1,1}$ ;
$= 0$	si $Y = ke_{m,m}, m = 2 \dots n$ ;
$= 2ke_{n+1,n+1} - 2ke_{1,1}$	si $Y = ke_{n+1,n+1}$ ;
$= g_{1,m}$	si $Y = g_{1,m}, m = 2 \dots n$ ;
$= if_{1,m}$	si $Y = if_{1,m}, m = 2 \dots n$ ;
$= jf_{1,m}$	si $Y = jf_{1,m}, m = 2 \dots n$ ;
$= kf_{1,m}$	si $Y = kf_{1,m}, m = 2 \dots n$ .

Finalement,

$$\mathcal{B}(X, X) = \text{Trace}(\text{ad}X^2) = 8(n-1) + 3 \times 4 + 3 \times 2 \times 2 = 8(n+2).$$

Par ailleurs,

$$XX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\Re(\text{Trace}(XX)) = 2,$$

d'où le résultat.  $\square$

Munis de ce lemme, nous pouvons faire un choix de métrique pour  $\mathbf{Sp}(n, 1)$ .

**Définition 3.3.11.** La *métrique standard normalisée* de  $\mathbf{Sp}(n, 1)$  est la métrique

$$g = \frac{1}{2(n+2)} \cdot g_0$$

où  $g_0$  est la métrique canonique de  $\mathbf{Sp}(n, 1)$  (définition 3.1.2), associée à la décomposition de Cartan donnée au lemme 3.3.4. D'après le lemme 3.3.8, c'est donc la métrique donnée par le produit

$$\langle X, Y \rangle_0 = \begin{cases} 2\Re \text{Trace}(XY) & \text{pour } X, Y \in \mathfrak{p} \\ -2\Re \text{Trace}(XY) & \text{pour } X, Y \in \mathfrak{k} \\ 0 & \text{si } X \in \mathfrak{p}, Y \in \mathfrak{k} \end{cases}.$$

**Notations 3.3.12.** Désormais,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et  $\| \cdot \|$  désignent le produit et la norme associés au choix de métrique canonique  $g$ ;  $K$  désigne la courbure sectionnelle d'un plan de  $(\mathbf{Sp}(n, 1), g)$ , et  $K_b$  la courbure sectionnelle induite sur  $H_{\mathbb{H}}^n$ .

*Remarque 3.3.13.* Un calcul direct montre que la base standard de  $\mathfrak{sp}(n, 1)$ , définie en 3.3.6, est orthogonale (mais pas orthonormale) pour  $g$  (et la norme des éléments de cette base sera par ailleurs calculée plus tard, voir la remarque 3.3.16).

Montrons enfin que la métrique standard normalisée induit bien la métrique que l'on souhaite sur  $H_{\mathbb{H}}^n$ .

**Lemme 3.3.14.** La métrique  $g$  définie ci-dessus est invariante par l'action à gauche de  $\mathbf{Sp}(n, 1)$  et induit une métrique invariante  $\pi_*(g)$  sur  $H_{\mathbb{H}}^n$  dont la courbure sectionnelle est constante égale à  $-1$  sur les plans complexes.

*Démonstration.* Soit  $\pi : \mathbf{Sp}(n, 1) \longrightarrow H_{\mathbb{H}}^n$  la submersion riemannienne donnée par la projection naturelle du groupe de Lie  $\mathbf{Sp}(n, 1)$  vers l'espace symétrique  $H_{\mathbb{H}}^n$ . Le choix d'un point  $p$  de  $H_{\mathbb{H}}^n$  permet d'identifier  $T_p H_{\mathbb{H}}^n$  au sous-espace  $\mathfrak{p}$  de  $\mathfrak{sp}(n, 1)$  et les vecteurs de la base standard

$$X = f_{1,n+1} \text{ et } Y = ig_{1,n+1}$$

engendrent un plan  $P_{X,Y}$  dont l'image est un plan complexe de  $T_p H_{\mathbb{H}}^n$ .

On a déjà remarqué (en 3.3.13) que  $X$  et  $Y$  sont orthogonaux pour  $g$ . Calculons  $\|X\|$  et  $\|Y\|$ . D'après la définition 3.3.11,

$$\|X\|^2 = 2\Re\mathfrak{e}(\text{Trace}(XX)) \text{ et } \|Y\|^2 = 2\Re\mathfrak{e}(\text{Trace}(YY)).$$

Or

$$XX = e_{1,1} + e_{n+1,n+1} \text{ et } YY = e_{1,1} + e_{n+1,n+1},$$

donc

$$\|X\|^2 = 4 \text{ et } \|Y\|^2 = 4.$$

Posons

$$\tilde{X} = \frac{X}{2} \text{ et } \tilde{Y} = \frac{Y}{2}.$$

Alors  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$  forme une base orthonormale du plan  $P_{X,Y} \subset \mathfrak{sp}(n, 1)$  pour  $g$  et sa courbure sectionnelle est donnée par (rappelons les notations 3.1.12) :

$$K(\mathcal{P}_{X,Y}) = \langle R(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Y}, \tilde{X} \rangle.$$

Comme  $\tilde{X}$  et  $\tilde{Y}$  sont deux vecteurs horizontaux, d'après l'équation (3.1.17) de la proposition 3.1.14,

$$K(\mathcal{P}_{X,Y}) = -\frac{7}{4}\|[\tilde{X}, \tilde{Y}]\|^2.$$

D'après la formule d'O'Neill (théorème 3.1.13), la courbure sectionnelle du plan image de  $P_{X,Y}$  dans  $T_p H_{\mathbb{H}}^n$  vaut

$$K_b(\pi_*(P_{X,Y})) = K(\mathcal{P}_{X,Y}) + \frac{3}{4}\|[\tilde{X}, \tilde{Y}]^v\|^2.$$

Par ailleurs, comme  $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$ ,  $[\tilde{X}, \tilde{Y}]^v = [\tilde{X}, \tilde{Y}]$ , et finalement,

$$K_b(\pi_*(P_{X,Y})) = -\|[\tilde{X}, \tilde{Y}]\|^2. \quad (3.3.15)$$

Or

$$\begin{aligned} [\tilde{X}, \tilde{Y}] &= \frac{1}{4}i((e_{1,n+1} + e_{n+1,1})(e_{1,n+1} - e_{n+1,1}) - (e_{1,n+1} - e_{n+1,1})(e_{1,n+1} + e_{n+1,1})) \\ &= \frac{1}{2}i(-e_{1,1} + e_{n+1,n+1}) \end{aligned}$$

donc

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}][\tilde{X}, \tilde{Y}] = -\frac{1}{4}(e_{1,1} + e_{n+1,n+1})$$

et

$$\|[\tilde{X}, \tilde{Y}]\|^2 = -2\Re\mathfrak{e}(\text{Trace}([\tilde{X}, \tilde{Y}][\tilde{X}, \tilde{Y}])) = 1.$$

Finalement, d'après (3.3.15),

$$K_b(\pi_*(P_{X,Y})) = -1$$

ce qu'on voulait.  $\square$

*Remarque 3.3.16.* La démonstration ci-dessus fait apparaître une base orthonormale de  $\mathfrak{p}$  pour la métrique standard normalisée  $g$  : nous avons déjà remarqué que la base  $\mathcal{P}$  était orthogonale, et de plus, les calculs menés ci-dessus montrent que si  $X \in \mathcal{P}$ , alors  $\tilde{X} = \frac{X}{2}$  est de norme 1 pour  $g$ . Nous introduisons donc la définition suivante :

**Définition 3.3.17.** La *base standard normalisée* de  $\mathfrak{p}$  est la base

$$\tilde{\mathcal{P}} = \left( \tilde{X} = \frac{X}{2} \right)_{X \in \mathcal{P}}$$

où  $\mathcal{P}$  est la base standard de  $\mathfrak{p}$  (définition 3.3.6). C'est une base orthonormale pour la métrique standard normalisée  $g$ .

### 3.3.3 Minoration du volume de $\Gamma \backslash H_{\mathbb{H}}^n$

Rappelons (voir la remarque 3.3.7) que le groupe  $\mathbf{Sp}(n, 1)$  est de dimension

$$d = 2n^2 + 5n + 3.$$

La constante de Wang  $C_1$  associée à  $\mathbf{Sp}(n, 1)$  (définition 3.1.4) est donnée à la fin de l'article de Hsien-Chung Wang [Wan69] et vaut

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2(n+2)}}.$$

En application directe du corollaire 3.2.17, nous obtenons alors la

**Proposition 3.3.18.** *Considérons  $\mathbf{Sp}(n, 1)$  muni de la métrique standard normalisée  $g = \frac{1}{2(n+2)} \cdot g_0$ , où  $g_0$  est sa métrique canonique (définie en 3.1.2). Alors, pour tout sous-groupe discret  $\Gamma$  de  $\mathbf{Sp}(n, 1)$ ,*

$$\text{Vol}(\Gamma \backslash \mathbf{Sp}(n, 1)) \geq V_{\mathbf{Sp}(n, 1)} = \frac{1}{2^{6d-3} \cdot (2d-1)} \cdot \sigma_{d-1}$$

où  $d = 2n^2 + 5n + 3$  est la dimension de  $\mathbf{Sp}(n, 1)$ , et  $\sigma_{d-1} = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$  est le volume de la sphère unité  $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ .

Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $\mathbf{Sp}(n, 1)$ . La submersion riemannienne donnée en (3.1.7)

$$\pi : \mathbf{Sp}(n, 1) \longrightarrow H_{\mathbb{H}}^n$$

dont les fibres sont (totalement géodésiques et) isométriques à  $K = \mathbf{Sp}(n) \times \mathbf{Sp}(1)$ , induit une submersion

$$\tilde{\pi} : \Gamma \backslash \mathbf{Sp}(n, 1) \longrightarrow \Gamma \backslash H_{\mathbb{H}}^n.$$

Ainsi,

$$[\text{Vol}(\Gamma \backslash H_{\mathbb{H}}^n)] \cdot [\text{Vol}(K)] = [\text{Vol}(\tilde{\pi}^{-1}(\Gamma \backslash H_{\mathbb{H}}^n))] = \text{Vol}(\Gamma \backslash \mathbf{Sp}(n, 1)). \quad (3.3.19)$$

Les volumes des groupes compacts classiques sont connus et sont par exemple explicitement donnés dans un ouvrage de Robert Gilmore [Gil94, p.399].

**Lemme 3.3.20.** *Le volume du groupe unitaire  $\mathbf{Sp}(n)$  muni de la métrique induite par la métrique standard  $g$  sur  $\mathbf{Sp}(n, 1)$  (définie en 3.1.6) vaut*

$$\text{Vol}(\mathbf{Sp}(n)) = \frac{2^n \cdot \pi^{n(n+1)}}{(2n-1)! \cdot (2n-3)! \cdots 5! \cdot 3!}.$$

En particulier,

$$\text{Vol}(\mathbf{Sp}(1)) = 2\pi^2$$

et

$$\text{Vol}(K) = \text{Vol}(\mathbf{Sp}(n) \times \mathbf{Sp}(1)) = \frac{2^{n+1} \cdot \pi^{n(n+1)+2}}{(2n-1)! \cdot (2n-3)! \cdots 5! \cdot 3!}.$$

Utilisant

$$(2n-1)! \cdot (2n-3)! \cdots 5! \cdot 3! = \frac{2^n \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}},$$

puis

$$\sigma_{2n} = \frac{2\pi^{\frac{2n+1}{2}}}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)},$$

nous réécrivons ce volume

$$\text{Vol}(K) = \sigma_{2n} \cdot \pi^{2+n^2}.$$

Rassemblant la proposition 3.3.18, l'équation (3.3.19) et l'équation précédente, nous obtenons finalement le résultat central de cette section :

**Théorème 3.3.21.** *Soit  $\mathcal{O}$  un orbifold recouvert par  $H_{\mathbb{H}}^n$ , où  $H_{\mathbb{H}}^n$  est muni de sa métrique  $\mathbf{Sp}(n, 1)$  invariante à courbure sectionnelle pincée entre  $-1$  et  $-1/4$ . Alors le volume de  $\mathcal{O}$  est minoré par  $V_{n, \mathbb{H}}$ , une constante explicite ne dépendant que de la dimension  $n$  et valant*

$$V_{n, \mathbb{H}} = \frac{1}{2^{6d-3} \cdot (2d-1) \cdot \pi^{2+n^2}} \cdot \frac{\sigma_{d-1}}{\sigma_{2n}}$$

(où  $d = 2n^2 + 5n + 3$  est la dimension de  $\mathbf{Sp}(n, 1)$ , et  $\sigma_k$  désigne le volume de la sphère  $S^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ ).

*Remarque 3.3.22.* En conclusion de cette section, remarquons que le théorème 3.3.21 permet d'obtenir une borne de type *borne d'Hurwitz* pour les quotients de  $H_{\mathbb{H}}^n$ . En effet,

*Lemme 3.3.23.* *Soit  $G$  un groupe de Lie semi-simple,  $K$  un sous-groupe compact maximal de  $G$ , et  $\Gamma$  un réseau de  $G$ . Alors, le groupe*

$$\text{Isom}(\Gamma \backslash G / K) = N_{\Gamma} / \Gamma$$

(où  $N_{\Gamma}$  désigne le normalisateur de  $\Gamma$  dans  $G$ ) est fini.

Ce résultat semble bien connu, mais nous n'en avons pas trouvé de preuve dans la littérature. Nous en mentionnons donc rapidement une ici, qui nous a été communiquée par Jean-François Quint. Cette preuve est presque élémentaire, à condition cependant d'admettre deux résultats de la théorie des groupes de Lie. Le fait (hautement non-élémentaire) que  $\Gamma$  est de *type fini* tout d'abord (voir l'ouvrage de Gregory Margulis sur les sous-groupes

discrets des groupes de Lie semi-simples [Mar91]), puis le théorème classique *de densité de Borel* (exposé par exemple dans le livre de Robert J. Zimmer [Zim84, pp.42 – 43]), qui affirme que  $\Gamma$  est Zariski-dense dans  $G$ .

*Démonstration.* Le réseau  $\Gamma$  étant de type fini, notons  $\mathcal{S} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$  un système générateur de  $\Gamma$ . Si un élément  $\alpha$  du normalisateur  $N_\Gamma$  est suffisamment petit, alors  $\alpha$  centralise chacun des  $\gamma_i \in \mathcal{S}$ , donc  $\Gamma$  tout entier. Ainsi,  $\Gamma$  étant Zariski-dense dans  $G$  par le théorème de densité de Borel, les petits éléments de  $N_\Gamma$  centralisent  $G$  tout entier. Il existe donc un  $r > 0$ , tel que

$$B(e, r) \cap N_\Gamma \subset Z(G).$$

En particulier,  $Z(G)$  étant fini,  $B(e, r) \cap N_\Gamma$  l'est aussi, et le groupe  $N_\Gamma$  est donc discret. Finalement,  $N_\Gamma$  est un réseau qui contient  $\Gamma$ , et  $N_\Gamma/\Gamma$  est fini.  $\square$

Nous en déduisons

*Corollaire 3.3.24.* Soit  $M$  une variété recouverte par  $H_{\mathbb{H}}^n$ . Alors

$$|Isom(M)| \leq \frac{Vol(M)}{V_{n, \mathbb{H}}}.$$

### 3.4 Caractéristique d'Euler des quotients de $H_{\mathbb{H}}^n$

D'après la théorie de Chern-Weil et le théorème de Gauss-Bonnet généralisé, la classe d'Euler d'une variété riemannienne compacte de dimension paire est représentée par le pfaffien de la matrice de ses 2-formes de courbure sur  $2\pi$  :

**Théorème 3.4.1** (Gauss-Bonnet généralisé). Soit  $(M^{2d}, g)$  une variété riemannienne compacte de dimension paire  $2d$ , et soit  $\Omega$  la matrice des 2-formes de courbure de  $g$ . Alors

$$[E(M)] = \left[ Pfaff \left( \frac{\Omega}{2\pi} \right) \right].$$

On en déduit

$$\chi(M) = \int_M Pfaff \left( \frac{\Omega}{2\pi} \right),$$

puis

**Corollaire 3.4.2.** Soit  $(M^{2d}, g)$  une variété riemannienne compacte de dimension paire  $2d$ , et soit  $\Omega$  la matrice des 2-formes de courbure de  $g$ . Alors

$$\chi(M) = \omega \cdot Vol(M)$$

où  $\omega$  est la constante vérifiant

$$\omega \cdot vol = Pfaff \left( \frac{\Omega}{2\pi} \right).$$

Un exposé global de la théorie des classes caractéristiques peut-être trouvé dans le livre de John Milnor et James Stasheff [MS74]. Les auteurs y détaillent, dans l'annexe C, les liens entre courbure et classe caractéristique, et y donnent une démonstration éclairante du théorème de Gauss-Bonnet en dimension 2. Pour un exposé très détaillé du théorème de Gauss-Bonnet généralisé et de sa démonstration, on peut aussi consulter le tome V du traité de Michael Spivak [Spi99].

Le théorème 3.4.2 est *a priori* vrai pour les variétés riemanniennes compactes. Les travaux de Mickaël Gromov [Gro82] ont montré qu'il restait valable pour les variétés de volume fini et de courbure sectionnelle négative ou nulle bornée. Il s'applique donc en particulier à toutes les variétés hyperboliques, réelles (de dimension paire), complexes, ou quaternioniques, compactes ou non :

**Théorème 3.4.3** (Gauss-Bonnet hyperbolique). *Soit  $M$  une variété recouverte par  $(H_{\mathbb{K}}^n, g)$ , où  $g$  est héritée d'une métrique standard sur  $\text{Isom}(H_{\mathbb{K}}^n)$  (définition 3.1.6). Notons  $\Omega^{n, \mathbb{K}}$  la matrice des 2-formes de courbure de  $g$ . Alors, si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et  $n$  est pair, ou si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$ ,*

$$\chi(M) = \omega_{n, \mathbb{K}} \cdot \text{Vol}(M)$$

où  $\omega_{n, \mathbb{K}, g}$  est la constante vérifiant

$$\omega_{n, \mathbb{K}} \cdot \text{vol} = \text{Pfaff} \left( \frac{\Omega^{n, \mathbb{K}}}{2\pi} \right).$$

Pour les variétés hyperboliques réelles de dimension paire, ce résultat a également été montré par des méthodes purement combinatoires, différentes de celles de Mickaël Gromov, par Ruth Kellerhals et Thomas Zehrt, dans un article de 2001 [KZ01]. Dans cet article, les auteurs donnent explicitement les constantes  $\omega_{n, \mathbb{R}}$  (avec  $n$  pair). Leur démonstration est reprise est détaillée dans la section consacrée au théorème de Gauss-Bonnet du traité de John G. Ratcliffe [Rat06, § 11.3].

**Proposition 3.4.4** (voir [KZ01, 0.1]). *Munissons  $H_{\mathbb{R}}^n$  de sa métrique à courbure sectionnelle constante  $-1$ . Alors, si  $n = 2m$  est pair,*

$$\omega_{n, \mathbb{R}} = (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{2}{\sigma_n}$$

où  $\sigma_n = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$  est le volume de la sphère unité  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .

Dans le cas hyperbolique complexe, ce résultat peut également être vu comme une conséquence du théorème de proportionnalité d'Hirzebruch (que l'on peut par exemple trouver dans le livre de Friedrich Hirzebruch [Hir66, théorème 22.2.1]). Les constantes  $\omega_{n, \mathbb{C}}$  ont aussi été explicitement calculées, par Friedrich Hirzebruch notamment [Hir57], ou encore par Rolf-Peter Holzappel [Hol81]. Dans leur article sur le volume des variétés hyperboliques complexes [HP96], Saar Hersensky et Frédéric Paulin en donnent la valeur exacte quand la métrique standard sur  $\mathbf{SU}(n, 1)$  est celle induisant une métrique à courbure sectionnelle holomorphe constante  $-1$  sur  $H_{\mathbb{C}}^n$ .

**Proposition 3.4.5** (voir [HP96, p.720]). Munissons  $H_{\mathbb{C}}^n$  de sa métrique  $g$  à courbure sectionnelle holomorphe constante  $-1$ . Alors,

$$\omega_{n,\mathbb{C}} = \frac{(n+1)!}{(-\pi)^n 2^{2n}} = (-1)^n \cdot \frac{2}{\sigma_{2n}} \cdot \frac{n!(n+1)!}{(2n)!}$$

où  $\sigma_{2n} = \frac{2\pi^{\frac{2n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{2n+1}{2})}$  est le volume de la sphère unité  $S^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ .

À notre connaissance cependant, les valeurs exactes des constantes  $\omega_{n,\mathbb{H}}$  ne se trouvent pas dans la littérature. Le premier paragraphe de cette section est donc purement calculatoire : nous y déterminons dans un premier temps (propositions 3.4.19, 3.4.20 et 3.4.21, figure 3.1) la forme générale de la matrice  $\Omega^{n,\mathbb{H}}$  des 2-formes de courbure de la métrique sur  $H_{\mathbb{H}}^n$  héritée de la métrique standard normalisée sur  $\mathbf{Sp}(n, 1)$  (définition 3.3.11).

Dans un second temps, nous en déduisons la valeur exacte de  $\omega_{n,\mathbb{H}}$ , pour  $n \leq 3$ , et une minoration de  $\omega_{n,\mathbb{H}}$  pour  $n$  quelconque (propositions 3.4.26 et 3.4.28).

Ce résultat nous permet finalement, dans le dernier paragraphe de cette section, d'obtenir une minoration de la caractéristique d'Euler d'un orbifold recouvert par  $H_{\mathbb{H}}^n$  (théorème 3.4.29).

### 3.4.1 Les constantes de Gauss-Bonnet pour $H_{\mathbb{H}}^n$

#### 3.4.1.1 Matrice de courbure $\Omega$ de $H_{\mathbb{H}}^n$

Pour alléger (un peu) la (lourde) lecture de la suite, nous noterons jusqu'à la fin de ce chapitre

$$\Omega = \Omega^{n,\mathbb{H}}$$

la matrice de courbure de l'espace  $H_{\mathbb{H}}^n$ . Rappelons que l'on note

$$\pi : \mathbf{Sp}(n, 1) \longrightarrow H_{\mathbb{H}}^n$$

la submersion riemannienne décrite en 3.1.7. Nous munissons  $\mathbf{Sp}(n, 1)$  de la métrique standard normalisée (définition 3.3.11), et notons  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit euclidien associé.

Si  $p$  est un point de  $H_{\mathbb{H}}^n$ , l'espace tangent  $T_p H_{\mathbb{H}}^n$  s'identifie au sous-espace  $\mathfrak{p}$  de  $\mathfrak{sp}(n, 1)$ , et la métrique induite par  $g$  sur  $H_{\mathbb{H}}^n$ ,  $\pi_*(g)$ , est la restriction de  $g$  à  $\mathfrak{p}$ .

Dans ce paragraphe, nous faisons les abus de notations suivants :

**Notations 3.4.6.** Nous notons encore  $g = \pi_*(g)$  la métrique induite sur  $H_{\mathbb{H}}^n$  par la métrique standard normalisée de  $\mathbf{Sp}(n, 1)$ . De plus, nous notons encore  $X = \pi_*(X)$  un vecteur de  $T_p H_{\mathbb{H}}^n$  image d'un vecteur horizontal  $X \in \mathfrak{p}$ .

Notons

$$\left( \tilde{X}_\alpha \right)_{1 \leq \alpha \leq 4n}$$

les vecteurs de la base standard normalisée de  $\mathfrak{p} \simeq T_p H_{\mathbb{H}}^n$  (définition 3.3.17), et notons

$$\left( \tilde{X}^\alpha \right)_{1 \leq \alpha \leq 4n}$$



ceux de la base duale. Comme cette base est orthonormale pour  $g$ , la matrice  $\Omega$  des 2-formes de courbure de  $g$  est donnée par

$$\text{pour } 1 \leq l_1, l_2 \leq 4n, \Omega_{l_1, l_2} = \sum_{\alpha < \beta} \langle R(\tilde{X}_\alpha, \tilde{X}_\beta) \tilde{X}_{l_2}, \tilde{X}_{l_1} \rangle \cdot \tilde{X}^\alpha \wedge \tilde{X}^\beta, \quad (3.4.7)$$

où  $R(X, Y)Z$  est le tenseur de courbure de  $g$ . Par ailleurs, si  $X, Y, Z$  et  $T$  sont des vecteurs de  $\mathfrak{p}$ ,

$$\langle R(X, Y)Z, T \rangle = \langle [X, Y], [T, Z] \rangle. \quad (3.4.8)$$

Ces formules usuelles de géométrie riemannienne et de géométrie des espaces symétriques sont établies dans de nombreux ouvrages classiques. On trouvera par exemple (3.4.7) à la page 44 du traité de Sigurdur Helgason [Hel01], et (3.4.8) est une conséquence immédiate du théorème 4.2 du même ouvrage. Ainsi, revenant à la définition 3.3.11 de  $g$ , nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} \Omega_{l_1, l_2} &= \sum_{\alpha < \beta} \langle [\tilde{X}_\alpha, \tilde{X}_\beta], [\tilde{X}_{l_1}, \tilde{X}_{l_2}] \rangle \cdot \tilde{X}^\alpha \wedge \tilde{X}^\beta \\ &= 2 \sum_{\alpha < \beta} \Re(\text{Trace}([\tilde{X}_\alpha, \tilde{X}_\beta][\tilde{X}_{l_1}, \tilde{X}_{l_2}])) \cdot \tilde{X}^\alpha \wedge \tilde{X}^\beta \end{aligned}$$

ou encore, écrivant  $\tilde{X}_\alpha = \frac{X_\alpha}{2}$  où  $X_\alpha$  est un élément de la base standard  $\mathcal{P}$  de  $\mathfrak{p}$  (définition 3.3.6),

$$\Omega_{l_1, l_2} = \frac{1}{8} \sum_{\alpha < \beta} \Re(\text{Trace}([X_\alpha, X_\beta][X_{l_1}, X_{l_2}])) \cdot \tilde{X}^\alpha \wedge \tilde{X}^\beta. \quad (3.4.9)$$

Nous sommes à présent en mesure de calculer les coefficients  $\Omega_{l_1, l_2}$ . Introduisons tout d'abord quelques notations (rappelons les notations 3.3.5 et la définition 3.3.6 donnant une base de  $\mathfrak{p}$ ).

**Notations 3.4.10.** Nous ordonnons les éléments de  $\mathcal{P}$  en notant

$$X_l = \begin{cases} f_{m, n+1} & \text{si } l = 4m - 3 = 4(m - 1) + 1 \\ ig_{m, n+1} & \text{si } l = 4m - 2 = 4(m - 1) + 2 \\ jg_{m, n+1} & \text{si } l = 4m - 1 = 4(m - 1) + 3 \\ kg_{m, n+1} & \text{si } l = 4m = 4(m - 1) + 4 \end{cases}.$$

Posant  $l_1 = 4(s - 1) + r_1$ ,  $l_2 = 4(m - 1) + r_2$  avec  $1 \leq r_1, r_2 \leq 4$ , (3.4.9) se réécrit

$$\Omega_{4(s-1)+r_1, 4(m-1)+r_2} = \frac{1}{8} \sum_{\alpha < \beta} \Re(\text{Trace}([X_\alpha, X_\beta][X_{4(s-1)+r_1}, X_{4(m-1)+r_2}])) \cdot \tilde{X}^\alpha \wedge \tilde{X}^\beta.$$

**Notation 3.4.11.** Notons

$$X_{s, m}^{r_1, r_2} = [X_{4(s-1)+r_1}, X_{4(m-1)+r_2}] \text{ et } [X_\alpha, X_\beta] = X_{\alpha, \beta}.$$

Avec ces notations, les coefficients de  $\Omega$  sont donc donnés par Pour  $1 \leq s, m \leq n$  et  $1 \leq r_1, r_2 \leq 4$ ,

$$\Omega_{4(s-1)+r_1, 4(m-1)+r_2} = \frac{1}{8} \sum_{\alpha < \beta} \Re(\text{Trace}(X_{\alpha, \beta} \cdot X_{s, m}^{r_1, r_2})) \cdot \tilde{X}^\alpha \wedge \tilde{X}^\beta. \quad (3.4.12)$$

Calculons ensuite les crochets des éléments de la base standard  $\mathcal{P}$  entre eux.

**Proposition 3.4.13.** *Les crochets de deux éléments de la base  $\mathcal{P}$  de  $\mathfrak{p}$  sont donnés par, pour*

$$1 \leq s, m \leq n \text{ et } 1 \leq r_1, r_2 \leq 4$$

— Si  $l_1 = 4(s-1) + r_1, l_2 = 4(s-1) + r_2$ , et  $r_1 \neq r_2$ ,  $[X_{l_1}, X_{l_2}] = X_{s, s}^{r_1, r_2}$  vaut :

$$\begin{aligned} X_{s, s}^{1, 2} &:= [f_{s, n+1}, ig_{s, n+1}] &= 2i(e_{n+1, n+1} - e_{s, s}) & (3.4.14) \\ X_{s, s}^{1, 3} &:= [f_{s, n+1}, jg_{s, n+1}] &= 2j(e_{n+1, n+1} - e_{s, s}) \\ X_{s, s}^{1, 4} &:= [f_{s, n+1}, kg_{s, n+1}] &= 2k(e_{n+1, n+1} - e_{s, s}) \\ X_{s, s}^{2, 3} &:= [ig_{s, n+1}, jg_{s, n+1}] &= -2k(e_{s, s} + e_{n+1, n+1}) \\ X_{s, s}^{2, 4} &:= [ig_{s, n+1}, kg_{s, n+1}] &= 2j(e_{s, s} + e_{n+1, n+1}) \\ X_{s, s}^{3, 4} &:= [jg_{s, n+1}, kg_{s, n+1}] &= -2i(e_{s, s} + e_{n+1, n+1}) \end{aligned}$$

— Si  $l_1 \equiv l_2 \pmod{4}, l_1 = 4(s-1) + r, l_2 = 4(m-1) + r$  et ,  $m \neq s$ ,  $[X_{l_1}, X_{l_2}] = X_{s, m}^{r, r}$  vaut :

$$\begin{aligned} X_{s, m}^{1, 1} &:= [f_{s, n+1}, f_{m, n+1}] &= g_{s, m} & (3.4.15) \\ X_{s, m}^{2, 2} &:= [ig_{s, n+1}, ig_{m, n+1}] &= g_{s, m} \\ X_{s, m}^{3, 3} &:= [jg_{s, n+1}, jg_{m, n+1}] &= g_{s, m} \\ X_{s, m}^{4, 4} &:= [kg_{s, n+1}, kg_{m, n+1}] &= g_{s, m} \end{aligned}$$

— Si  $l_1 = 4(s-1) + r_1, l_2 = 4(m-1) + r_2$ , et  $m \neq s, r_1 \neq r_2$ ,  $[X_{l_1}, X_{l_2}] = X_{s, m}^{r_1, r_2}$  vaut :

$$\begin{aligned} X_{s, m}^{1, 2} &:= [f_{s, n+1}, ig_{m, n+1}] &= -if_{s, m} & (3.4.16) \\ X_{s, m}^{1, 3} &:= [f_{s, n+1}, jg_{m, n+1}] &= -jf_{s, m} \\ X_{s, m}^{1, 4} &:= [f_{s, n+1}, kg_{m, n+1}] &= -kf_{s, m} \\ X_{s, m}^{2, 3} &:= [ig_{s, n+1}, jg_{m, n+1}] &= -kf_{s, m} \\ X_{s, m}^{2, 4} &:= [ig_{s, n+1}, kg_{m, n+1}] &= jf_{s, m} \\ X_{s, m}^{3, 4} &:= [jg_{s, n+1}, kg_{m, n+1}] &= -if_{s, m} \\ \\ X_{s, m}^{2, 1} &:= [ig_{s, n+1}, f_{m, n+1}] &= if_{s, m} \\ X_{s, m}^{3, 1} &:= [jg_{s, n+1}, f_{m, n+1}] &= jf_{s, m} \\ X_{s, m}^{4, 1} &:= [kg_{s, n+1}, f_{m, n+1}] &= kf_{s, m} \\ X_{s, m}^{3, 2} &:= [jg_{s, n+1}, ig_{m, n+1}] &= kf_{s, m} \\ X_{s, m}^{4, 2} &:= [kg_{s, n+1}, ig_{m, n+1}] &= -jf_{s, m} \\ X_{s, m}^{4, 3} &:= [kg_{s, n+1}, jg_{m, n+1}] &= if_{s, m} \end{aligned}$$

**Notations 3.4.17.** Notons

$$\mathcal{F}_{s,s} = \{X_{s,s}^{1,2}, X_{s,s}^{1,3}, X_{s,s}^{1,4}, X_{s,s}^{2,3}, X_{s,s}^{2,4}, X_{s,s}^{3,4}\}$$

$$\mathcal{F}_{s,m}^{\text{diag}} = \{X_{s,m}^{1,1}, X_{s,m}^{2,2}, X_{s,m}^{3,3}, X_{s,m}^{4,4}\}$$

$$\mathcal{F}_{s,m}^{\text{non-diag}} = \{X_{s,m}^{1,2}, X_{s,m}^{1,3}, X_{s,m}^{1,4}, X_{s,m}^{2,3}, X_{s,m}^{2,4}, X_{s,m}^{3,4}, X_{s,m}^{2,1}, X_{s,m}^{3,1}, X_{s,m}^{4,1}, X_{s,m}^{3,2}, X_{s,m}^{4,2}, X_{s,m}^{4,3}\}$$

les trois familles de crochets correspondant respectivement aux cas (3.4.14), (3.4.15) et (3.4.16) de la proposition 3.4.13.

La proposition suivante montre que le produit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de deux crochets n'appartenant pas à la même famille est nul.

**Proposition 3.4.18.** Soient  $Y_1 = [X_{\alpha_1}, X_{\beta_1}]$  et  $Y_2 = [X_{\alpha_2}, X_{\beta_2}]$  où  $X_{\alpha_1}, X_{\beta_1}, X_{\alpha_2}, X_{\beta_2}$  sont des éléments de  $\mathcal{P}$ . Alors

- Si  $Y_1 \in \mathcal{F}_{s,s}$ , et  $Y_2 \in \mathcal{F}_{p,q}^{\text{diag}}, \forall (p,q)$  ou  $Y_2 \in \mathcal{F}_{p,q}^{\text{non-diag}}, \forall (p,q)$ ; ou bien,
- si  $Y_1 \in \mathcal{F}_{s,m}^{\text{diag}}$  et  $Y_2 \in \mathcal{F}_{p,q}^{\text{diag}}, (p,q) \neq (s,m)$  ou  $Y_2 \in \mathcal{F}_{p,q}^{\text{non-diag}}, \forall (p,q)$ ,

le produit  $\Re(\text{Trace}(Y_1 \cdot Y_2))$  est nul.

*Démonstration.* En effet,

- $(e_{n+1,n+1} - e_{s,s}) \cdot g_{s,m} = -e_{s,m}$ , qui est de trace nulle, donc le produit d'un élément de  $\mathcal{F}_{s,s}$  et d'un élément de  $\mathcal{F}_{s,m}^{\text{diag}}$  est toujours nul.
- $(e_{n+1,n+1} - e_{s,s}) \cdot f_{s,m} = e_{s,m}$ , qui est de trace nulle, donc le produit d'un élément de  $\mathcal{F}_{s,s}$  et d'un élément de  $\mathcal{F}_{s,m}^{\text{non-diag}}$  est toujours nul.
- si  $s \notin (p,q)$ , le produit d'un élément de  $\mathcal{F}_{s,s}$  et d'un élément de  $\mathcal{F}_{p,q}^{\text{diag}}$  ou de  $\mathcal{F}_{p,q}^{\text{non-diag}}$  est toujours nul.

Ensuite

- Si  $(s,m) \neq (p,q)$ ,  $g_{s,m} \cdot g_{p,q}$ , et  $g_{s,m} \cdot f_{p,q}$  sont de trace nulle, donc, si  $(s,m) \neq (p,q)$ , le produit d'un élément de  $\mathcal{F}_{s,m}^{\text{diag}}$  et d'un élément de  $\mathcal{F}_{p,q}^{\text{diag}}$  ou de  $\mathcal{F}_{p,q}^{\text{non-diag}}$  est toujours nul;
- $\text{Trace}(g_{s,m} \cdot i f_{s,m})$ ,  $\text{Trace}(g_{s,m} \cdot j f_{s,m})$ , ou  $\text{Trace}(g_{s,m} \cdot k f_{s,m})$  est toujours de partie réelle nulle, donc le produit d'un élément de  $\mathcal{F}_{s,m}^{\text{diag}}$  et d'un élément de  $\mathcal{F}_{s,m}^{\text{non-diag}}$  est toujours nul.

□

L'équation (3.4.12) et la proposition précédente montrent qu'un coefficient

$$\Omega_{l_1, l_2} = \Omega_{4(s-1)+r_1, 4(m-1)+r_2}$$

peut-être de trois sortes, selon la famille (donnée aux notations 3.4.17) à laquelle  $X_{s,m}^{r_1, r_2}$  appartient. Les trois propositions qui suivent explicitent chacun de ces types de coefficient, et leur contenu est synthétisé dans la figure 3.1 :

- les coefficients  $\Omega_{l_1, l_2}$  d'un bloc  $4 \times 4$  diagonal sont donnés par la proposition 3.4.19;

- dans un bloc  $4 \times 4$  non diagonal donné, les coefficients diagonaux sont donnés par la proposition 3.4.20 ;
- tous les autres coefficients (représentés par le symbole  $\star$ ) sont donnés par la proposition 3.4.21.

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{1,2} & \Omega_{1,3} & \Omega_{1,4} & \bullet & \star & \star & \star & & \bullet & \star & \star & \star \\ & 0 & \Omega_{2,3} & \Omega_{2,4} & -\star & \bullet & \star & -\star & \dots & -\star & \bullet & \star & -\star \\ & \dots & 0 & \Omega_{3,4} & -\star & -\star & \bullet & \star & \dots & -\star & -\star & \bullet & \star \\ & & & 0 & -\star & \star & -\star & \bullet & & -\star & \star & -\star & \bullet \\ & & & & & & & & & \bullet & \star & \star & \star \\ & & & & & & & & & -\star & \bullet & \star & -\star \\ & & & & & & & & & -\star & -\star & \bullet & \star \\ & & & & & & & & & -\star & \star & -\star & \bullet \\ & & & & & & & & & 0 & \Omega_{4n-3,4n-2} & \Omega_{4n-3,4n-1} & \Omega_{4n-3,4n} \\ & & & & & & & & & & 0 & \Omega_{4n-2,4n-1} & \Omega_{4n-2,4n} \\ & & & & & & & & & & \dots & 0 & \Omega_{4n-1,4n} \\ & & & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

FIGURE 3.1 – Vision schématique des trois familles de coefficients de la matrice (antisymétrique)  $\Omega$  des 2-formes de courbure de  $H_{\mathbb{H}}^n$ .

**Proposition 3.4.19.** *Les coefficients d'un bloc  $4 \times 4$  diagonal en position  $(s+1, s+1)$  de  $\Omega$  sont donnés par, pour  $0 \leq s \leq n-1$ ,*

$$\begin{aligned} \Omega_{4s+1,4(s-1)+2} &= -\tilde{X}^{4s+1} \wedge \tilde{X}^{4s+2} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{0 \leq p \leq n-1 \\ p \neq s}} \tilde{X}^{4p+1} \wedge \tilde{X}^{4p+2} - \tilde{X}^{4p+3} \wedge \tilde{X}^{4p+4} \\ \Omega_{4s+1,4(s-1)+3} &= -\tilde{X}^{4s+1} \wedge \tilde{X}^{4s+3} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{0 \leq p \leq n-1 \\ p \neq s}} \tilde{X}^{4p+1} \wedge \tilde{X}^{4p+3} + \tilde{X}^{4p+2} \wedge \tilde{X}^{4p+4} \\ \Omega_{4s+1,4(s-1)+4} &= -\tilde{X}^{4s+1} \wedge \tilde{X}^{4s+4} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{0 \leq p \leq n-1 \\ p \neq s}} \tilde{X}^{4p+1} \wedge \tilde{X}^{4p+4} - \tilde{X}^{4p+2} \wedge \tilde{X}^{4p+3} \\ \Omega_{4s+2,4s+3} &= -\tilde{X}^{4s+2} \wedge \tilde{X}^{4s+3} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{0 \leq p \leq n-1 \\ p \neq s}} \tilde{X}^{4p+2} \wedge \tilde{X}^{4p+3} - \tilde{X}^{4p+1} \wedge \tilde{X}^{4p+4} \\ \Omega_{4s+2,4s+4} &= -\tilde{X}^{4s+2} \wedge \tilde{X}^{4s+4} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{0 \leq p \leq n-1 \\ p \neq s}} \tilde{X}^{4p+2} \wedge \tilde{X}^{4p+4} + \tilde{X}^{4p+1} \wedge \tilde{X}^{4p+3} \\ \Omega_{4(s-1)+3,4(s-1)+4} &= -\tilde{X}^{4s+3} \wedge \tilde{X}^{4s+4} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{0 \leq p \leq n-1 \\ p \neq s}} \tilde{X}^{4p+3} \wedge \tilde{X}^{4p+4} - \tilde{X}^{4p+1} \wedge \tilde{X}^{4p+2} \end{aligned}$$

*Démonstration.* Calculons par exemple  $\Omega_{4s+1,4s+2}$ . D'après (3.4.12),

$$\Omega_{4s+1,4s+2} = \frac{1}{8} \sum_{\alpha < \beta} \Re(\text{Trace}(X_{\alpha,\beta} \cdot X_{s+1,s+1}^{1,2})) \cdot \tilde{X}^\alpha \wedge \tilde{X}^\beta.$$

Ce qui vaut encore, d'après la proposition 3.4.18,

$$\begin{aligned}\Omega_{4s+1,4s+2} &= \frac{1}{8} \sum_{X_{\alpha,\beta} \in \mathcal{F}_{p,p}, 0 \leq p \leq n-1} \Re(\text{Trace}(X_{\alpha,\beta} \cdot X_{s+1,s+1}^{1,2})) \cdot \tilde{X}^\alpha \wedge \tilde{X}^\beta \\ &= \frac{1}{8} \sum_{\substack{0 \leq p \leq n-1 \\ 1 \leq r_1 < r_2 \leq 4}} \Re(\text{Trace}(X_{p+1,p+1}^{r_1,r_2} \cdot X_{s+1,s+1}^{1,2})) \cdot \tilde{X}^{4p+r_1} \wedge \tilde{X}^{4p+r_2}.\end{aligned}$$

Ensuite, d'après le cas (3.4.14) de la proposition 3.4.13, si

$$(r_1, r_2) \notin \{(1, 2), (3, 4)\},$$

la partie réelle de  $\text{Trace}(X_{p+1,p+1}^{r_1,r_2} \cdot X_{s+1,s+1}^{1,2})$  est nulle. Enfin, (ici  $p+1 \neq s+1$ ),

$$\begin{aligned}\Re\left(\text{Trace}\left(X_{p+1,p+1}^{1,2} \cdot X_{s+1,s+1}^{1,2}\right)\right) &= -4(\text{Trace}((e_{n+1,n+1} - e_{p+1,p+1})(e_{n+1,n+1} - e_{s+1,s+1}))) \\ &= -4(\text{Trace}(e_{n+1,n+1})) = -4; \\ \Re\left(\text{Trace}\left(X_{p+1,p+1}^{3,4} \cdot X_{s+1,s+1}^{1,2}\right)\right) &= 4(\text{Trace}((e_{n+1,n+1} + e_{p+1,p+1})(e_{n+1,n+1} - e_{s+1,s+1}))) \\ &= 4(\text{Trace}(e_{n+1,n+1})) = 4; \\ \Re\left(\text{Trace}\left(X_{s+1,s+1}^{1,2} \cdot X_{s+1,s+1}^{1,2}\right)\right) &= -4(\text{Trace}((e_{n+1,n+1} - e_{s+1,s+1})(e_{n+1,n+1} - e_{s,s}))) \\ &= -4(\text{Trace}(e_{n+1,n+1} + e_{s+1,s+1})) = -8; \\ \Re\left(\text{Trace}\left(X_{s+1,s+1}^{3,4} \cdot X_{s+1,s+1}^{1,2}\right)\right) &= 4(\text{Trace}((e_{n+1,n+1} + e_{s+1,s+1})(e_{n+1,n+1} - e_{s,s}))) \\ &= 4(\text{Trace}(e_{n+1,n+1} - e_{s+1,s+1})) = 0.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\Omega_{4s+1,4s+2} = -\tilde{X}^{4s+1} \wedge \tilde{X}^{4s+2} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq p \leq n \\ p \neq s}} \tilde{X}^{4p+1} \wedge \tilde{X}^{4p+2} - \tilde{X}^{4p+1} \wedge \tilde{X}^{4p+2}.$$

Le même raisonnement montre le résultat pour  $\Omega_{4s+1,4s+2}$ ,  $\Omega_{4s+1,4s+2}$ ,  $\Omega_{4s+1,4s+2}$ ,  $\Omega_{4s+1,4s+3}$ ,  $\Omega_{4s+1,4s+4}$ ,  $\Omega_{4s+2,4s+3}$ ,  $\Omega_{4s+2,4s+4}$ ,  $\Omega_{4s+3,4s+4}$ ,  $i$ ,  $j$  et  $k$  jouant le même rôle.  $\square$

Les deux propositions qui suivent se démontrent de la même façon que la précédente (les ingrédients essentiels en sont donc la formule (3.4.12), puis les proposition 3.4.13 et 3.4.18). Ces calculs sont pénibles mais sans difficulté, et par souci de lisibilité, nous omettons ici les preuves des deux propositions suivantes.

**Proposition 3.4.20.** *Les coefficients diagonaux d'un bloc  $4 \times 4$  non-diagonal en position  $(s+1, m+1)$  de  $\Omega$  (représentés par le symbole  $\bullet$  dans la figure 3.1) valent, pour  $0 \leq s, m \leq n-1$ ,*

$$\Omega_{4s+r,4m+r} = -\frac{1}{4}(\tilde{X}^{4s+1} \wedge \tilde{X}^{4m+1} + \tilde{X}^{4s+2} \wedge \tilde{X}^{4m+2} + \tilde{X}^{4s+3} \wedge \tilde{X}^{4m+3} + \tilde{X}^{4s+4} \wedge \tilde{X}^{4m+4}),$$

pour tout  $1 \leq r \leq 4$ .

**Proposition 3.4.21.** *Les coefficients non-diagonaux d'un bloc  $4 \times 4$  non-diagonal en position  $(s+1, m+1)$  de  $\Omega$  (représentés par le symbole  $\star$  dans la figure 3.1) sont donnés par, pour  $0 \leq s, m \leq n-1$ ,*

$$\begin{aligned} \star &: \Omega_{4s+1, 4m+2} = \Omega_{4s+3, 4s+4} = -\Omega_{4s+2, 4m+1} = -\Omega_{4s+4, 4s+3} \\ &= -\frac{1}{4} \left( \tilde{X}^{4s+1} \wedge \tilde{X}^{4m+2} + \tilde{X}^{4s+3} \wedge \tilde{X}^{4m+4} - \tilde{X}^{4s+2} \wedge \tilde{X}^{4m+1} - \tilde{X}^{4s+4} \wedge \tilde{X}^{4m+3} \right) \\ \star &: \Omega_{4s+1, 4m+3} = -\Omega_{4s+2, 4s+4} = -\Omega_{4s+3, 4m+1} = \Omega_{4s+4, 4s+2} \\ &= -\frac{1}{4} \left( \tilde{X}^{4s+1} \wedge \tilde{X}^{4m+3} - \tilde{X}^{4s+2} \wedge \tilde{X}^{4m+4} - \tilde{X}^{4s+3} \wedge \tilde{X}^{4m+1} + \tilde{X}^{4s+4} \wedge \tilde{X}^{4m+2} \right) \\ \star &: \Omega_{4s+1, 4m+4} = \Omega_{4s+2, 4s+3} = -\Omega_{4s+4, 4m+1} = -\Omega_{4s+3, 4s+2} \\ &= -\frac{1}{4} \left( \tilde{X}^{4s+1} \wedge \tilde{X}^{4m+4} + \tilde{X}^{4s+2} \wedge \tilde{X}^{4m+3} - \tilde{X}^{4s+4} \wedge \tilde{X}^{4m+1} - \tilde{X}^{4s+3} \wedge \tilde{X}^{4m+2} \right). \end{aligned}$$

### 3.4.1.2 Calcul de Pfaff( $\Omega$ )

Pour obtenir les constantes recherchées, il s'agit à présent de calculer le pfaffien de la matrice  $\Omega$ . Rappelons la définition suivante :

**Définition 3.4.22.** Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq 2m} \in \mathcal{M}_{2m}$  une matrice carrée de dimension paire, antisymétrique. Notant  $(e^i)_{1 \leq i, j \leq 2m}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^{2m}$ , on associe à  $A$  le bivecteur

$$\alpha = \sum_{1 \leq i < j \leq 2m} a_{i,j} e^i \wedge e^j \in \Lambda^2 \mathbb{R}^{2m}.$$

Le *pfaffien* de  $A$ , noté  $\text{Pfaff}(A)$  est le scalaire vérifiant

$$\frac{1}{m!} \alpha^m = \text{Pfaff}(A) e^1 \wedge e^2 \wedge \dots \wedge e^{2m}.$$

Explicitement,  $\text{Pfaff}(A)$  est donné par la formule suivante :

**Lemme 3.4.23.** Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq 2m} \in \mathcal{M}_{2m}$  une matrice carrée de dimension paire, antisymétrique. Alors

$$\text{Pfaff}(A) = \frac{1}{2^m m!} \sum_{\sigma \in S_{2m}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^m a_{\sigma(2i-1), \sigma(2i)}$$

où  $S_{2m}$  désigne le groupe symétrique, et  $\varepsilon$  la signature d'une permutation de  $S_{2m}$ .

Cette formulation peut-être simplifiée. Considérons les ensembles

$$S = \{(h_1, k_1), (h_2, k_2), \dots, (h_m, k_m)\}$$

avec  $1 \leq h_j < h_{j+1} \leq 2m$  et  $1 \leq h_j < k_j \leq 2m$ , et notons  $\mathcal{S}$  la collection de ces ensembles. Notons également

$$\varepsilon(S) = \varepsilon \left( \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & 2j-1 & 2j & \dots & 2m \\ h_1 & k_1 & \dots & h_j & k_j & \dots & k_m \end{bmatrix} \right).$$

(Le  $\varepsilon$  du membre de droite de cette expression désignant la signature usuelle d'une permutation). Alors

**Lemme 3.4.24.** Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2m} \in \mathcal{M}_{2m}$  une matrice carrée de dimension paire, antisymétrique. Avec les notations ci-dessus,

$$\text{Pfaff}(A) = \sum_{S \in \mathcal{S}} \varepsilon(S) \prod_{(h,k) \in S} a_{h,k}.$$

La définition et les formules des deux lemmes ci-dessus peuvent par exemple être trouvées dans le traité sur l'algèbre de Nicolas Bourbaki [Bou07, § 5,  $n^\circ 2$ ].

La forme générale de la matrice  $\Omega$  en dimension quelconque, donnée par les propositions 3.4.19, 3.4.20 et 3.4.21, et schématisée dans la figure 3.1, fait du calcul de son pfaffien un délicat exercice combinatoire. En dimension 1, ce calcul peut bien évidemment se faire à la main. En dimension 2 déjà,  $\Omega$  est de taille  $8 \times 8$ , et bien qu'il puisse être mené à son terme en temps raisonnable, un calcul manuel brutal, sans vision combinatoire, est pénible.

À partir de la dimension 3, un calcul grossier est trop onéreux, et la nécessité d'une formule générale apparait clairement.

Une petite procédure de calcul du pfaffien est implémentable, soit en utilisant directement l'équation (3.4.9), soit à l'aide des propositions 3.4.19, 3.4.20 et 3.4.21. Une telle procédure ne fournit évidemment pas d'expression générale de  $\text{Pfaff}(\Omega)$  en fonction de  $n$ , et par ailleurs, elle est si naïve et brutale (si l'on ne trouve pas de simplification combinatoire) qu'elle est extrêmement couteuse.

La constante  $\omega_{2,\mathbb{H}}$  nous intéresse, indépendamment de l'étude que nous menons dans ce chapitre : une partie importante de nos travaux de thèse a été dévolue à l'étude d'un réseau particulier de  $\text{Isom}(H_{\mathbb{H}}^2)$  (chapitre 4). Si nous connaissons un domaine fondamental de ce réseau dans  $H_{\mathbb{H}}^2$ , sa caractéristique d'Euler est facilement calculable, de manière purement combinatoire. La connaissance de  $\omega_{2,\mathbb{H}}$  nous donne alors immédiatement le volume de ce réseau.

Nous avons donc calculé la valeur exacte de  $\omega_{2,\mathbb{H}}$ , et indiquons dans l'annexe B comment il est possible de procéder pour réaliser un tel calcul à la main. Nous donnons également les valeurs de  $\omega_{3,\mathbb{H}}$ , et  $\omega_{4,\mathbb{H}}$ , calculées à l'ordinateur. Pour les dimensions supérieures, en attendant une formule close générale, et gardant à l'esprit notre objectif – qui est d'obtenir une minoration de la caractéristique d'Euler des quotients de  $H_{\mathbb{H}}^n$  – nous nous contentons pour l'instant de donner une minoration de  $\omega_{n,\mathbb{H}}$ .

### Valeurs exactes de la constante de Gauss-Bonnet en dimension $n \leq 4$

*Remarque 3.4.25.* L'espace hyperbolique quaternionique de dimension 1 est isométrique à l'espace hyperbolique réel de dimension 4 muni – avec notre choix de normalisation – de sa métrique à courbure sectionnelle constante  $-1$ . La constante de Gauss-Bonnet est connue pour les espaces  $H_{\mathbb{R}}^n$  (voir la proposition 3.4.4) et on s'attend donc à trouver

$$\omega_{1,\mathbb{H}} = \omega_{4,\mathbb{R}} = \frac{2}{\sigma_3} = \frac{3}{4\pi^2}.$$

**Proposition 3.4.26.** *Nous munissons les espaces  $H_{\mathbb{H}}^n, n \leq 3$ , de la métrique induite par la métrique standard normalisée sur  $\mathbf{Sp}(n, 1)$  (définition 3.3.11). Leurs constantes de Gauss-Bonnet respectives, définies au théorème 3.4.3, valent alors*

- $\omega_{1, \mathbb{H}} = \omega_{4, \mathbb{R}} = \frac{3}{4\pi^2}$ ;
- $\omega_{2, \mathbb{H}} = \frac{3^2 \times 5}{2^5 \pi^4}$ ;
- $\omega_{3, \mathbb{H}} = \frac{3^2 \times 5 \times 7}{2^6 \pi^6}$ ;
- $\omega_{4, \mathbb{H}} = \frac{3^4 \times 5^2 \times 7}{2^9 \pi^8}$ .

*Démonstration.* *Constante en dimension 1.* Pour la droite hyperbolique quaternionique  $H_{\mathbb{H}}^1$ , la matrice des 2-formes de de courbure est

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\tilde{X}^1 \wedge \tilde{X}^2 & -\tilde{X}^1 \wedge \tilde{X}^3 & -\tilde{X}^1 \wedge \tilde{X}^4 \\ -\tilde{X}^2 \wedge \tilde{X}^1 & 0 & -\tilde{X}^2 \wedge \tilde{X}^3 & -\tilde{X}^2 \wedge \tilde{X}^4 \\ -\tilde{X}^3 \wedge \tilde{X}^1 & -\tilde{X}^3 \wedge \tilde{X}^2 & 0 & -\tilde{X}^3 \wedge \tilde{X}^4 \\ -\tilde{X}^4 \wedge \tilde{X}^1 & -\tilde{X}^4 \wedge \tilde{X}^2 & -\tilde{X}^4 \wedge \tilde{X}^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \text{Pfaff}(\Omega^{1, \mathbb{H}}) &= \tilde{X}^1 \wedge \tilde{X}^2 \wedge \tilde{X}^3 \wedge \tilde{X}^4 - \tilde{X}^1 \wedge \tilde{X}^3 \wedge \tilde{X}^2 \wedge \tilde{X}^4 + \tilde{X}^1 \wedge \tilde{X}^4 \wedge \tilde{X}^2 \wedge \tilde{X}^3 \\ &= 3\text{vol} \end{aligned}$$

et

$$\text{Pfaff}\left(\frac{\Omega^{1, \mathbb{H}}}{2\pi}\right) = \frac{3}{4\pi^2} \text{vol}$$

ce qu'on voulait.

*Constante en dimension 2.* Le détail de ce calcul est indiqué à l'annexe B. On trouve

$$\text{Pfaff}(\Omega^{2, \mathbb{H}}) = \frac{45}{2} \text{vol} = \frac{3^2 \times 5}{2} \text{vol}$$

d'où

$$\text{Pfaff}\left(\frac{\Omega^{2, \mathbb{H}}}{2\pi}\right) = \frac{3^2 \times 5}{2^5 \pi^4} \text{vol}$$

et

$$\omega_{2, \mathbb{H}} = \frac{3^2 \times 5}{2^5 \pi^4}.$$

*Constante en dimensions 3 et 4.* Enfin, à l'aide de l'ordinateur, on trouve

$$\text{Pfaff}(\Omega^{3, \mathbb{H}}) = 315\text{vol} = 3^2 \times 5 \times 7\text{vol} \quad \text{et} \quad \text{Pfaff}(\Omega^{4, \mathbb{H}}) = \frac{14175}{2} \text{vol} = \frac{3^4 \times 5^2 \times 7}{2} \text{vol}$$

d'où

$$\text{Pfaff}\left(\frac{\Omega^{3, \mathbb{H}}}{2\pi}\right) = \frac{3^2 \times 5 \times 7}{2^6 \pi^6} \text{vol} \quad \text{et} \quad \text{Pfaff}\left(\frac{\Omega^{4, \mathbb{H}}}{2\pi}\right) = \frac{3^4 \times 5^2 \times 7}{2^9 \pi^8} \text{vol}$$

et

$$\omega_{3, \mathbb{H}} = \frac{3^2 \times 5 \times 7}{2^6 \pi^6} \quad \text{et} \quad \omega_{4, \mathbb{H}} = \frac{3^4 \times 5^2 \times 7}{2^9 \pi^8}.$$

□



En corollaire immédiat de ce résultat, nous obtenons une bonne minoration des volumes des *variétés* hyperboliques quaternioniques de dimension plus petite que 4 :

**Corollaire 3.4.27.** *Soit  $M$  une variété hyperbolique quaternionique de dimension  $n$ . Alors,*

- si  $n = 1$ ,  $\text{Vol}(M) \geq \frac{4\pi^2}{3}$  ;
- si  $n = 2$ ,  $\text{Vol}(M) \geq \frac{2^5 \pi^4}{3^2 \times 5}$  ;
- si  $n = 3$ ,  $\text{Vol}(M) \geq \frac{2^6 \pi^6}{3^2 \times 5 \times 7}$  ;
- si  $n = 4$ ,  $\text{Vol}(M) \geq \frac{2^9 \pi^8}{3^4 \times 5^2 \times 7}$ .

*Démonstration.* On utilise les valeurs exactes des constantes de Gauss-Bonnet données par la proposition 3.4.26 et le fait que  $|\chi(M)| \geq 1$  si  $M$  est une *variété*.  $\square$

### Minoration de la constante de Gauss-Bonnet en dimension $n$ quelconque

**Proposition 3.4.28.** *Considérons l'espace  $H_{\mathbb{H}}^n$  muni de la métrique héritée de la métrique standard normalisée sur  $\mathbf{Sp}(n, 1)$  (définition 3.3.11). Sa constante de Gauss-Bonnet,  $\omega_{n, \mathbb{H}}$ , introduite dans le théorème 3.4.3, vérifie*

$$|\omega_{n, \mathbb{H}}| \geq w_{n, \mathbb{H}}$$

où

$$w_{n, \mathbb{H}} = \frac{1}{(8\pi)^{2n}}.$$

*Démonstration.* Le pfaffien de  $\Omega$  est un multiple de la forme volume de  $H_{\mathbb{H}}^n$ ,

$$\text{Pfaff}(\Omega) = C \cdot \text{vol}.$$

Il nous suffit ensuite de remarquer que les coefficients de  $\Omega$ , (donnés redisons-le, par les propositions 3.4.19, 3.4.20 et 3.4.21), sont des 2-formes à coefficients dans  $\mathbb{Z}[\frac{1}{4}]$ , et la constante  $C$  est alors nécessairement dans  $\mathbb{Z}[(\frac{1}{4})^{2n}]$ . Ainsi,

$$\omega_{n, \mathbb{H}} = \text{Pfaff}\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right) \in \mathbb{Z}\left[\left(\frac{1}{8\pi}\right)^{2n}\right],$$

et comme par ailleurs – d'après le théorème de Gauss-Bonnet –  $\omega_{n, \mathbb{H}}$  n'est pas nulle,

$$|\omega_{n, \mathbb{H}}| \geq \frac{1}{(8\pi)^{2n}}.$$

$\square$

### 3.4.2 Minoration de la caractéristique d'Euler de $\Gamma \backslash H_{\mathbb{H}}^n$

Nous rassemblons enfin les résultats des paragraphes 3.3.3 et 3.4.1 pour obtenir une minoration de la caractéristique d'Euler d'un quotient de  $H_{\mathbb{H}}^n$ .

**Théorème 3.4.29.** *Soit  $\Gamma$  un réseau de  $\mathbf{Sp}(n, 1)$ . Alors,*

$$|\chi(\Gamma \backslash H_{\mathbb{H}}^n)| \geq \frac{1}{2^{6d+3(n-1)} \cdot (2d-1) \cdot \pi^{n^2+2n+2}} \cdot \frac{\sigma_{d-1}}{\sigma_{2n}}$$

où  $d = 2n^2 + 5n + 3$  est la dimension de  $\mathbf{Sp}(n, 1)$ , et  $\sigma_{k-1}$  désigne le volume de la sphère unité de  $\mathbb{R}^k$ .

*Démonstration.* Tout d'abord, par le théorème de Gauss-Bonnet (théorème 3.4.3),

$$\chi(\Gamma \backslash H_{\mathbb{H}}^n) = \omega_{n, \mathbb{H}} \cdot \text{Vol}(\Gamma \backslash H_{\mathbb{H}}^n)$$

Ensuite, d'après le théorème 3.3.21, le volume du quotient  $\Gamma \backslash H_{\mathbb{H}}^n$  est minoré par

$$V_{n, \mathbb{H}} = \frac{1}{2^{6d-3} \cdot (2d-1) \cdot \pi^{2+n^2}} \cdot \frac{\sigma_{d-1}}{\sigma_{2n}}$$

donc

$$|\chi(\Gamma \backslash H_{\mathbb{H}}^n)| \geq |\omega_{n, \mathbb{H}}| \cdot \frac{1}{2^{6d-3} \cdot (2d-1) \cdot \pi^{2+n^2}} \cdot \frac{\sigma_{d-1}}{\sigma_{2n}}$$

Injectant dans l'équation les estimations de  $\omega_{n, \mathbb{H}}$  données par la proposition 3.4.28, on obtient le résultat annoncé.  $\square$

*Remarque 3.4.30.* Des minoration légèrement meilleures (mais à peine moins grossières) peuvent être obtenues pour les espaces  $H_{\mathbb{H}}^1$ ,  $H_{\mathbb{H}}^2$  et  $H_{\mathbb{H}}^3$ , pour lesquels nous connaissons les valeurs exactes des constantes de Gauss-Bonnet (proposition 3.4.26). Nous obtenons ainsi l'estimation de  $\chi_{1, \mathbb{H}}$  suivante :

$$|\chi(\Gamma \backslash H_{\mathbb{H}}^1)| \geq \frac{1}{\pi} \frac{3}{2^{64} \cdot 5 \cdot 19}.$$

À titre récréatif, indiquons que la minoration ainsi obtenue pour  $\chi_{2, \mathbb{H}}$  est

$$|\chi(\Gamma \backslash H_{\mathbb{H}}^2)| \geq \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{2^{120} \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 41}$$

quand celle pour  $\chi_{3, \mathbb{H}}$  vaut

$$|\chi(\Gamma \backslash H_{\mathbb{H}}^3)| \geq \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{2^{223} \cdot 3^5 \cdot 5^6 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 71},$$

et celle pour  $\chi_{4, \mathbb{H}}$  vaut

$$|\chi(\Gamma \backslash H_{\mathbb{H}}^4)| \geq \frac{1}{\pi^3} \frac{1}{2^{313} \cdot 3^6 \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 109}.$$

*Remarque 3.4.31.* Pour terminer ce paragraphe sur la caractéristique d'Euler, faisons ici une remarque. Pour les espaces hyperboliques réels et complexes, les constantes de Gauss-Bonnet, donc les caractéristiques d'Euler des quotients de ces espaces, sont tour à tour positives puis négatives, selon la parité de  $p/2$ , où  $p$  est la taille de la matrice de courbure de  $H_{\mathbb{K}}^n$  (ainsi,  $p = n$  pour  $H_{\mathbb{R}}^n$ , et  $p = 2n$  pour  $H_{\mathbb{C}}^n$ ).

Dans le cas quaternionique,  $\Omega$  est de taille  $4n$ , et sa demi-taille  $p/2 = 2n$  est toujours paire. Ceci pourrait suggérer que contrairement aux cas réels et complexes, *la caractéristique d'Euler d'un quotient de  $H_{\mathbb{H}}^n$  est toujours positive*. Cette idée se trouve justifiée par deux constats :

- les calculs des constantes de Gauss-Bonnet pour les trois premières dimensions (proposition 3.4.26) ne montrent pas d’alternance de signe ;
- lors du calcul de  $\omega_{2,\mathbb{H}}$  (voir l’annexe B), on constate que toutes les formes apparaissant dans la somme donnant le pfaffien de  $\Omega$  sont des multiples *positifs* de la forme volume (voir la remarque B.0.7).

Ceci n’a bien sûr rien d’évident *a priori*, et il serait agréable de trouver un argument justifiant cette impression.

### 3.5 Quotients de $H_{\mathbb{K}}^n$ , $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$

En cloture de ce chapitre, nous donnons, comme application du corollaire 3.2.17, une minoration des volumes des quotients des espaces hyperboliques  $H_{\mathbb{K}}^n$ , où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$ , par un sous-groupe discret de leurs groupes d’isométries respectifs, ainsi qu’une minoration de la caractéristique d’Euler de ces quotients.

Toutes les constantes apparaissant dans les résultats des sections précédentes (constante de Wang  $C_1$ , facteur  $c$  de normalisation de la métrique canonique, volume des sous-groupes compacts maximaux, constante  $\omega_{n,\mathbb{K}}$  de Gauss-Bonnet) sont connues dans les cas réel et complexe, et le raisonnement est strictement analogue à celui mené pour l’espace hyperbolique quaternionique :

**Démarche.** Notons  $G = \text{Isom}(H_{\mathbb{K}}^n)$ , et donnons nous  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $G$ . Alors,

- connaissant la constante  $C_1$  de Wang, et étant munis d’une métrique standard normalisée  $g = c \cdot g_0$ , nous appliquons le corollaire 3.2.17 pour obtenir une borne  $V_G$  minorant le volume de  $\Gamma \backslash G$  ;
- connaissant le volume du sous-groupe compact maximal  $K$  de  $G$ , nous en déduisons alors une borne  $V_{n,\mathbb{K}}$  minorant le volume de  $\Gamma \backslash H_{\mathbb{K}}^n$  ;
- enfin, connaissant les constantes de Gauss-Bonnet  $\omega_{n,\mathbb{K}}$ , nous en déduisons une borne  $\chi_{n,\mathbb{K}}$  minorant la caractéristique d’Euler des quotients de  $H_{\mathbb{K}}^n$ .

Nous indiquons donc les valeurs des constantes, et synthétisons sans plus de rédaction nos résultats dans deux tables : la table 3.1 donne les minoration des volumes des quotients des espaces  $H_{\mathbb{K}}^n$ , quand la table 3.2 reprend les bornes sur les caractéristiques d’Euler des orbifolds hyperboliques.

#### 3.5.1 Volume des quotients de $H_{\mathbb{K}}^n$

- Le volume de la sphère unité  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  vaut

$$\sigma_n = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})};$$

- les groupes d’isométries des espaces hyperboliques sur  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{H}$  sont munis de leur *métrique standard normalisée* :

- pour  $\mathbf{SO}(n, 1)$ , il s'agit de la métrique standard induisant une courbure sectionnelle constante égale à  $-1$  sur  $H_{\mathbb{R}}^n$ . Cette métrique est explicitée dans l'article de 2012 d'Ilesanmi Adeboye et Guofang Wei [AW12], et vaut

$$g = \frac{1}{2(n-1)}g_0$$

où  $g_0$  est la métrique canonique de  $\mathbf{SO}(n, 1)$  ;

- pour  $\mathbf{SU}(n, 1)$ , il sagit de la métrique standard induisant une courbure sectionnelle holomorphe constante égale à  $-1$  sur  $H_{\mathbb{C}}^n$  (de sorte que la droite hyperbolique complexe est isométrique au modèle standard du plan hyperbolique réel à courbure  $-1$ ). Cette métrique a elle aussi été explicitée par Ilesanmi Adeboye et Guofang Wei, dans leur second article [AW14], et vaut

$$g = \frac{1}{n+1}g_0$$

où  $g_0$  est la métrique canonique de  $\mathbf{SU}(n, 1)$  ;

- enfin, pour  $\mathbf{Sp}(n, 1)$ , il s'agit de la métrique standard normalisée définie en 3.3.11. Rappelons qu'elle induit une courbure sectionnelle égale à  $-1$  sur les plans complexes de  $H_{\mathbb{H}}^n$  (de sorte que la droite hyperbolique quaternionique est isométrique au modèle standard de  $H_{\mathbb{R}}^4$  à courbure  $-1$ ), et vaut

$$g = \frac{1}{2(n+2)}g_0$$

où  $g_0$  est la métrique canonique de  $\mathbf{Sp}(n, 1)$  ;

- les constantes  $C_1$  et  $C_2$  des groupes classiques sont explicitées par Hsien-Chung Wang, à la fin de [Wan69] ;
- la constante  $V_G$  de la table 3.1 est celle donnée dans le corollaire 3.2.17. Elle s'exprime en fonction de la constante de Wang  $C_1$ . Elle minore le volume des quotients d'un groupe  $G$  muni d'une métrique standard ;
- les volumes des groupes compacts classiques sont connus et explicités, par exemple, dans l'ouvrage de Robert Gilmore [Gil94, p.399] ;
- nous minorons alors le volume des quotients des espaces  $H_{\mathbb{K}}^n$  par  $V_{n,\mathbb{K}} = \frac{V_G}{\text{Vol}K}$ .

$\mathbf{G}$ $\mathbf{K}$ $\mathbf{G}/\mathbf{K}$	$\mathbf{SO}(n, 1), n \geq 3$ $\mathbf{S}(\mathbf{O}(n) \times \mathbf{O}(1))$ $H_{\mathbb{R}}^n, n \geq 3$	$\mathbf{SU}(n, 1)$ $\mathbf{S}(\mathbf{U}(n) \times \mathbf{U}(1))$ $H_{\mathbb{C}}^n$	$\mathbf{Sp}(n, 1)$ $\mathbf{Sp}(n) \times \mathbf{Sp}(1)$ $H_{\mathbb{H}}^n$	
$d = \dim_{\mathbb{R}}(G)$	$d = \frac{n(n+1)}{2}$	$d = (n+1)^2 - 1$	$d = 2n^2 + 5n - 3$	
Constante de Wang $C_1$	$\frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}$	$\frac{1}{\sqrt{n+1}}$	$\frac{1}{\sqrt{2(n+2)}}$	
Facteur de normalisation $c$	$\frac{1}{2(n-1)}$	$\frac{1}{n+1}$	$\frac{1}{2(n+2)}$	
Rapport $c^{\frac{d}{2}} \cdot C_1^{-d}$	1	1	1	
$V_G$	$\frac{\sigma_{d-1}}{2^{6d-3} \cdot (2d-1)}$	$\frac{\sigma_{d-1}}{2^{6d-3} \cdot (2d-1)}$	$\frac{\sigma_{d-1}}{2^{6d-3} \cdot (2d-1)}$	
$\text{Vol}(K)$	$\frac{n=2m}{2^{m-1} \cdot (2\pi)^{m^2-m} \cdot \sigma_{2m-1}}$	$\frac{n=2m+1}{2^{m-1} \cdot (2\pi)^{m^2} \cdot \sigma_{2m}}$	$2^{n-1} \cdot \pi^{\frac{2n+1}{2}} \cdot \sigma_{2n-1}$	$\pi^{n^2+2} \cdot \sigma_{2n}$
$V_{n, \mathbb{K}}$	$\frac{n=2m}{2^{6d-3} \cdot 2^{m-1} \cdot (2d-1) \cdot (2\pi)^{m^2}}$	$\frac{n=2m+1}{2^{6d-3} \cdot 2^{m-1} \cdot (2d-1) \cdot (2\pi)^{m^2}}$	$\frac{\sigma_{d-1}/\sigma_{2n-1}}{2^{6d-3} \cdot 2^{n-1}} \cdot (2d-1)$	$\pi^{\frac{n^2+2}{2} \cdot \frac{\sigma_{d-1}/\sigma_{2n}}{2^{6d-3} \cdot (2d-1) \cdot \pi^{2+n^2}}}$

 TABLE 3.1 – Le volume des quotients de  $H_{\mathbb{K}}^n$  est minoré par  $V_{n, \mathbb{K}}$ .

### 3.5.2 Caractéristique d'Euler des quotients de $H_{\mathbb{K}}^n$

- Les constantes de Gauss-Bonnet pour  $H_{\mathbb{R}}^n$ ,  $n$  pair, et  $H_{\mathbb{C}}^n$  sont indiquées aux propositions 3.4.4 et 3.4.5;
- possédant une borne  $V_{n,\mathbb{K}}$  sur le volume d'un quotient  $\Gamma \backslash H_{\mathbb{K}}^n$ , on en déduit une borne sur la *valeur absolue* de sa caractéristique d'Euler :

$$|\chi(\Gamma \backslash H_{\mathbb{K}}^n)| \geq \chi_{n,\mathbb{K}} = |\omega_{n,\mathbb{K}}| \cdot V_{n,\mathbb{K}}.$$

$\mathbf{G/K}$	$H_{\mathbb{R}}^n, n \geq 3, n = 2m$	$H_{\mathbb{C}}^n$	$H_{\mathbb{H}}^n$
$V_{n,\mathbb{K}}$	$\frac{\sigma_{d-1}/\sigma_{2m}}{2^{6d-3} \cdot 2^{m-1} \cdot (2d-1) \cdot (2\pi)^{m^2-m}}$	$\frac{\sigma_{d-1}/\sigma_{2n-1}}{2^{6d-3} \cdot 2^{n-1}} \cdot (2d-1) \cdot \frac{n^2+2}{\pi^{\frac{n^2+2}{2}}}$	$\frac{\sigma_{d-1}/\sigma_{2n}}{2^{6d-3} \cdot (2d-1) \cdot \pi^{2+n^2}}$
Constante de Gauss-Bonnet $\omega_{n,\mathbb{K}}$	$(-1)^m \cdot \frac{2}{\sigma_{2m}}$	$(-1)^n \cdot \frac{2}{\sigma_{2n}} \cdot \frac{n!(n+1)!}{(2n)!}$	$ \omega_{n,\mathbb{H}}  \geq \frac{1}{(8\pi)^{2n}}$
$\chi_{n,\mathbb{K}}$	$\frac{\sigma_{d-1}/\sigma_{2m}^2}{2^{6d-3} \cdot 2^m \cdot (2d-1) \cdot (2\pi)^{m^2-m}}$	$\frac{\sigma_{d-1}/(\sigma_{2n-1}\sigma_{2n})}{2^{6d-3} \cdot 2^n \cdot (2d-1) \cdot \pi^{\frac{n^2+2}{2}}} \cdot \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$	$\frac{\sigma_{d-1}/\sigma_{2n}}{2^{6d-3} \cdot 2^{3n} \cdot (2d-1) \cdot \pi^{n^2+2n+2}}$

TABLE 3.2 – La valeur absolue de la caractéristique d'Euler d'un orbifolds recouvert par  $H_{\mathbb{K}}^n$  est minorée par  $\chi_{n,\mathbb{K}}$ .

---

*Construction d'un domaine fondamental dans  $H_{\mathbb{H}}^2$*

Les premiers travaux de notre thèse ont été motivés par un article d'Elisha Falbel et John R. Parker [FP06]. Dans cet article, les auteurs construisent un domaine fondamental pour l'action du groupe  $\mathbf{PU}(2, 1; A_2)$  (le « groupe modulaire d'Eisenstein-Picard ») sur  $H_{\mathbb{C}}^2$ , où  $A_2 = \mathbb{Z}[\omega]$  ( $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ ) est l'anneau des entiers d'Eisenstein. Le résultat inespéré de cet article est que le domaine obtenu est combinatoirement extrêmement simple, on ne pourrait espérer mieux : c'est un 4-simplexe. Ce fait remarquable fait dire aux auteurs « *One should think of that domain as the analogue of the famous 2-simplex, with one ideal vertex, which is the fundamental domain for  $PSL(2, \mathbb{Z})$  in the hyperbolic plane,  $H_{\mathbb{C}}^1$*  ». Par ailleurs, l'explicitation d'un domaine fondamental leur permet, en utilisant la version adéquate du théorème du polyèdre de Poincaré, de déterminer une présentation du groupe  $\mathbf{PU}(2, 1; A_2)$  (c'est la proposition 5.10 de [FP06]). Ils montrent que l'on obtient une telle présentation en adjoignant un élément à une présentation de  $PSL(2, \mathbb{Z})$ .

Avant ces travaux, l'orbifold  $M_\omega = \mathbf{PU}(2, 1; A_2) \backslash H_{\mathbb{C}}^2$  était déjà bien connu pour posséder plusieurs jolies propriétés extrémales. Son volume vaut

$$\text{Vol}(M_\omega) = \frac{\pi^2}{27}$$

(ce résultat est généralement attribué à Rolf-Peter Holzapfel [Hol81]), et conjecturellement, c'est le plus petit volume d'un orbifold complexe à pointes de dimension 2. John R. Parker a montré, dans [Par98], que l'unique pointe de  $M_\omega$  réalise la borne inférieure sur le volume des pointes d'un orbifold hyperbolique complexe (ce volume vaut  $\frac{1}{4}$ ). Cette propriété est un bon argument en faveur de la minimalité du volume de  $M_\omega$  (il est raisonnable de penser, pour les orbifold ouverts de petit volume, que l'essentiel du volume est concentré dans la pointe). Enfin (et ceci est encore montré dans l'article de John R. Parker cité ci-dessus),  $M_\omega$  est un quotient d'une *variété* hyperbolique complexe de volume minimal. Ce volume vaut  $\frac{8\pi^2}{3}$  et la variété exhibée est un revêtement de  $M_\omega$ , obtenu comme quotient de  $H_{\mathbb{C}}^2$  par un sous-groupe sans torsion d'ordre 72 de  $\mathbf{PU}(2, 1; A_2)$ .

Il est alors tout à fait naturel de chercher des analogues de cet objet dans d'autres contextes. On peut par exemple se demander quel pourrait être le groupe généralisant le groupe modulaire d'Eisenstein-Picard pour les espaces hyperboliques complexes de dimensions supérieures. Par ailleurs – et c'est ce qui nous a préoccupé au début de notre thèse – au cœur de la construction de  $M_\omega$  se trouve le réseau d'Eisenstein  $A_2$ . C'est le réseau hexagonal euclidien de dimension 2, qui possède de frappantes qualités extrémales : c'est notamment le réseau euclidien de densité maximale en dimension 2 (mais il répond aussi aux problèmes d'extrémalité de recouvrement, de « kissing number »... Pour (beaucoup)

plus de détails sur le réseau d'Eisenstein et sur la théorie des réseaux euclidiens, on peut consulter la bible de John H. Conway et Neil J. A. Sloane [CS99]).

Ce réseau euclidien possède une structure algébrique supplémentaire (c'est un anneau d'entier) qui en fait un réseau de  $\mathbb{C}$ . Parmi les réseaux euclidiens de densité maximale (il sont connus jusqu'en dimension 8, et en dimension 24), le premier réseau après  $A_2$  à posséder une structure algébrique supplémentaire est le réseau  $D_4$  des *entiers d'Hurwitz* (que nous définissons précisément à la section 4.2). C'est le réseau le plus dense en dimension 4, et on peut le réaliser comme un réseau de  $\mathbb{H}$ . Nous avons ainsi un candidat naturel pour généraliser le groupe d'Eisenstein-Picard, c'est un sous-groupe du groupe d'isométries du plan hyperbolique *quaternionique*. Dans la suite de ce chapitre, on adopte la notation suivante :

**Notation 4.0.1.** On note  $\Gamma = \mathbf{PSp}(2, 1; D_4)$  le sous-groupe de  $\mathbf{PSp}(2, 1)$  formé des matrices à coefficients dans l'ordre d'Hurwitz  $D_4$ .

**Définition 4.0.2.** Le sous-groupe  $\Gamma$  est le *sous-groupe modulaire d'Hurwitz*.

Dans une première section, nous présentons brièvement l'anneau des entiers d'Hurwitz, en insistant sur la description du groupe  $U_{D_4}$  de ses unités, car cette description nous est nécessaire dans la suite.

Le reste de ce chapitre est consacrée à la construction d'un domaine fondamental pour  $\Gamma$ . Indiquons tout de suite ce que nous entendons par domaine fondamental dans la suite :

**Définition 4.0.3.** Soit  $\Lambda$  un sous-groupe (ou simplement une partie) du groupe d'isométries de l'espace hyperbolique quaternionique  $H_{\mathbb{H}}^2$ . Une *région fondamentale* pour  $\Lambda$  est un ouvert  $\mathbf{D}$  de  $H_{\mathbb{H}}^2$  dont les translatsés sont deux à deux disjoints, et tel que la famille  $\{\lambda \cdot \overline{\mathbf{D}} \mid \lambda \in \Lambda\}$  (où  $\overline{\mathbf{D}}$  désigne l'adhérence de  $\mathbf{D}$  dans  $H_{\mathbb{H}}^2$ ) recouvre  $H_{\mathbb{H}}^2$ . Si  $\mathbf{D}$  est de plus connexe, on dit que  $\mathbf{D}$  est un *domaine fondamental* pour l'action de  $\Lambda$  sur  $H_{\mathbb{H}}^2$ .

Rappelons également la définition suivante :

**Définition 4.0.4.** Un sous-groupe  $\Lambda$  de  $\mathbf{PSp}(2, 1)$  est un *réseau* s'il est discret (ou, de manière équivalente, si son action sur  $H_{\mathbb{H}}^2$  est discrète), et si le quotient  $\Lambda \backslash \mathbf{PSp}(2, 1)$  est de mesure de Haar finie (ou, de manière équivalente, si l'orbifold hyperbolique quotient  $\Lambda \backslash H_{\mathbb{H}}^2$  est de volume fini).

*Remarque 4.0.5.* Dans tout ce chapitre, nous travaillons en dimension 2, sur le plan hyperbolique quaternionique  $H_{\mathbb{H}}^2$ . Les définitions, proposition et méthodes employées se transposent quasiment toutes telles quelles en dimension  $n$  quelconque. Nous indiquons par des remarques ponctuelles les rares points spécifiques à la dimension 2.

Le groupe  $\Gamma$  est un sous-groupe *arithmétique* de  $\mathbf{PSp}(2, 1)$ , et en tant que tel, c'est un réseau de  $\mathbf{PSp}(2, 1)$  (ce résultat général est détaillé –par exemple– dans l'ouvrage d'Armand Borel sur les groupes arithmétiques [Bor69, 13.2]). Nous ne disons rien ici de la théorie des



groupes arithmétiques, qui dépasse largement le cadre de notre étude, et ceci peut aussi se voir « à la main » : il est clair que  $\Gamma$  est discret, et pour voir qu'il est de covolume fini, nous remarquerons qu'il ne possède qu'un sous-groupe parabolique à conjugaison près (c'est la proposition 4.2.9). L'orbifold quotient  $\Gamma \backslash H_{\mathbb{H}}^2$  est ainsi ouvert, n'a qu'une seule pointe et est de volume fini.

La méthode de construction que nous adoptons dans notre recherche d'un domaine fondamental pour  $\Gamma$  est originellement due à Lester R. Ford qui l'expose –dans le cas réel– dans son livre [For51] ; il y définit en particulier les *cercles isométriques*, qui sont les briques de base des domaines qui portent aujourd'hui son nom. Cette méthode se généralise à tous les espaces symétriques de rang 1, comme le montre Anke D. Pohl dans l'article [Poh10] (notons au passage que cette exposition est tout à fait globale, en ce sens qu'elle n'utilise pas la classification des espaces symétriques). Décrivons succinctement les étapes d'une telle construction. Pour comprendre que ces étapes sont tout à fait naturelles, se souvenant de la remarque d'Elisha Falbel et John R. Parker citée en introduction de ce chapitre, il est bon d'avoir à l'esprit le domaine fondamental pour l'action de  $PSL(2, \mathbb{Z})$  sur le demi-plan  $H_{\mathbb{R}}^2$ . Nous illustrons donc systématiquement ces étapes par cet exemple.

Rappelons que l'on note  $\mathcal{P}_{\infty}$  le stabilisateur de  $q_{\infty}$  dans  $\mathbf{Sp}(2, 1)$ . Nous noterons

$$\Gamma_{\infty} = \mathcal{P}_{\infty} \cap \Gamma$$

le stabilisateur du point à l'infini dans  $\Gamma$ . Alors  $\Gamma_{\infty} \subset \mathcal{MN}$  (où  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sont les sous-groupes de la décomposition de Langlands de  $\mathcal{P}_{\infty}$  donnée en 1.5.1) et l'action de  $\Gamma_{\infty}$  préserve chaque horosphère. La première étape consiste donc en la détermination d'un domaine  $\mathbf{D}$  pour l'action de  $\Gamma_{\infty}$  sur le bord de  $H_{\mathbb{H}}^2$  (privé de  $q_{\infty}$ ), ce que nous faisons dans la section 4.3 (c'est la proposition 4.3.22). Enfin, un domaine fondamental pour l'action de  $\Gamma_{\infty}$  sur tout  $H_{\mathbb{H}}^2$  est obtenu en prenant le cône géodésique de base  $\mathbf{D}$ .

Dans le cas de  $PSL(2, \mathbb{Z})$ , le stabilisateur du point à l'infini est formé des translations entières  $z \mapsto z + n, n \in \mathbb{Z}$ . Le segment de longueur 1  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  est un domaine fondamental pour l'action de ce groupe sur le bord de  $H_{\mathbb{R}}^2$ , et le cône géodésique de base  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  est la bande verticale

$$\mathbf{PSP}(\mathcal{F}_{\infty} = \left\{ z \in H_{\mathbb{R}}^2 \mid |\Re(z)| < \frac{1}{2} \right\})$$

qui est le domaine fondamental classique pour l'action du sous-groupe parabolique de  $PSL(2, \mathbb{Z})$  sur  $H_{\mathbb{R}}^2$ .

Dans le modèle du demi-espace pour  $H_{\mathbb{H}}^2$  (en fait, pour tout espace symétrique de rang 1), il existe une distance naturelle, adaptée à la géométrie de son bord, donc à sa décomposition horosphérique (que nous avons décrite en 1.5.2). Pour l'espace hyperbolique réel par exemple, le bord étant un espace euclidien  $\mathbb{R}^{n-1}$ , cette distance est simplement la distance euclidienne. Dans les cas des espaces hyperboliques complexes et quaternioniques, cette distance est la *distance de Cygan*  $\rho_{\mathcal{H}}$  définie en 4.1.2.

À chaque élément  $g$  de  $\Gamma$  ne fixant pas  $q_{\infty}$ , on associe une sous-variété  $I(g)$  de codimension 1 de  $H_{\mathbb{H}}^2$ , la *sphère isométrique* de  $g$ . Cette sous-variété est la *bissecteur* entre  $q_{\infty}$

et  $g^{-1}(q_{\infty})$  (au sens de George D. Mostow [Mos80], ou de William M. Goldman [Gol99]), et est une sphère pour la métrique  $\rho_{\mathcal{H}}$  sur le demi-espace. Nous explicitons plus bas deux feuilletages de ces sous-variétés par des sous-espaces totalement géodésiques, et les utilisons pour munir les sphères isométriques d'un système de coordonnées rendant compte de leur géométrie, similaire à celui introduit par William M. Goldman dans le livre sus-cité.

Revenons à notre exemple fil rouge : les sphères isométriques des éléments non paraboliques de  $PSL(2, \mathbb{Z})$  sont des demi-cercles euclidiens, orthogonaux à l'axe réel, centrés aux points de coordonnées rationnelles  $(\frac{p}{q}, 0)$ . Les sphères de rayon maximal sont celles centrées aux points entiers, elles sont de rayon 1, et chacune des sphères isométriques est contenue dans une sphère de rayon maximal.

Étant donné un  $g \in \Gamma \setminus \Gamma_{\infty}$ ,  $I(g)$  sépare  $H_{\mathbb{H}}^2$  en deux composantes connexes, et l'on note  $ext(I(g))$  celle de ces deux composantes qui contient  $q_{\infty}$ . Alors (voir par exemple l'article d'Anke D. Pohl cité plus haut [Poh10, § 3]) :

**Théorème 4.0.6.** *La région*

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\infty} \cap \bigcap_{g \in \Gamma \setminus \Gamma_{\infty}} ext(I(g))$$

est un domaine fondamental pour l'action de  $\Gamma$  sur le plan hyperbolique quaternionique  $H_{\mathbb{H}}^2$ .

Dans le cas de  $PSL(2, \mathbb{Z})$ , l'intersection

$$\bigcap_{g \in PSL(2, \mathbb{Z}), g(q_{\infty}) \neq q_{\infty}} ext(I(g))$$

est la région supérieure délimitée par tous les demi-cercles de rayon 1 centrés aux points de coordonnées  $(n, 0)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  :

$$\mathcal{F}_{\infty} = \{z \in H_{\mathbb{R}}^2 \mid \exists n \in \mathbb{Z}, |z - n| > 1\}.$$

Quand on intersecte cette région avec la bande  $\mathcal{F}_{\infty}$  déterminée à la première étape, on retrouve le domaine bien connu

$$\mathcal{F} = \left\{ z \in H_{\mathbb{R}}^2 \mid |z| > 1 \text{ et } |\Re(z)| < \frac{1}{2} \right\}.$$

#### 4.1 Géométrie du bord de $H_{\mathbb{H}}^2$ dans le modèle du demi-espace

Comme nous l'avons mentionné en introduction de ce chapitre, la première et cruciale étape de la construction d'un domaine fondamental pour  $\Gamma$  est la compréhension de son action sur bord du plan hyperbolique  $H_{\mathbb{H}}^2$ . Dans le modèle du demi-espace pour  $H_{\mathbb{H}}^2$ , le bord porte la structure d'un groupe de Heisenberg généralisé (voir le paragraphe 1.2.1) :

$$\partial H_{\mathbb{H}}^2 \simeq \mathcal{H} = \mathfrak{Im}(\mathbb{H}) \rtimes \mathbb{H}.$$

Nous décrivons dans un premier temps une géométrie naturelle sur  $\mathcal{H}$ , provenant de sa structure de groupe, qui est à rapprocher de celle du groupe de Heisenberg standard  $Nil$ .

Cette géométrie est préservée par le sous-groupe parabolique  $\mathcal{P}_{\infty}$  de  $\mathbf{PSp}(2, 1)$ , et nous décrivons ensuite explicitement l'action par isométrie de ses éléments sur le bord.

#### 4.1.1 Les isométries de $\mathcal{H}$

Le centre de  $\mathcal{H}$  est le groupe de Lie de dimension 3

$$Z(\mathcal{H}) = \mathfrak{Im}(\mathbb{H}) \simeq \mathbb{R}^3,$$

et tout comme le groupe de Heisenberg standard  $Nil$  est une extension de  $\mathbb{C}$ ,  $\mathcal{H}$  est une extension centrale de  $\mathbb{H}$

$$1 \longrightarrow \mathfrak{Im}(\mathbb{H}) \xrightarrow{p} \mathcal{H} \xrightarrow{\Pi} \mathbb{H} \longrightarrow 1.$$

(Remarquons que cette extension n'est pas scindée : par exemple, le commutateur de  $(1, 0)$  et de  $(i, 0)$  vaut  $(0, -4i)$  et n'est pas dans le noyau de  $p$ ).

Dans le cas du groupe  $Nil$ , cette suite exacte permet d'exprimer le groupe des isométries de  $Nil$  comme extension du groupe des isométries euclidiennes de  $\mathbb{C}$ . Ceci est explicité dans le survol de Peter Scott sur la géométrie des 3-variétés [Sco83, p.467]. Décrivons à présent comment une réalisation analogue peut-être donnée pour le groupe des isométries de  $\mathcal{H} \simeq \partial H_{\mathbb{H}}^2 - \{q_{\infty}\}$ .

En tant que groupe de Lie,  $\mathcal{H}$  peut être muni d'une métrique invariante à gauche. La *métrique de Cygan* sur  $\mathcal{H}$  est une métrique provenant d'une *norme de groupe* sur  $\mathcal{H}$  :

**Définition 4.1.1.** Soit  $(\mathcal{G}, \cdot)$  un groupe, d'élément neutre  $1_{\mathcal{G}}$ . Une application  $|\cdot|_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une *norme de groupe* si elle vérifie :

1.  $|g|_{\mathcal{G}} = 0$  ssi  $g = 1_{\mathcal{G}}$  ;
2.  $|g^{-1}|_{\mathcal{G}} = |g|_{\mathcal{G}}$  ;
3.  $|gh|_{\mathcal{G}} \leq |g|_{\mathcal{G}} + |h|_{\mathcal{G}}$ .

**Définition 4.1.2.** La *métrique de Cygan* sur  $\mathcal{H}$  est la métrique correspondant à la norme de groupe sur  $\mathcal{H}$

$$|(z, v)|_{\mathcal{H}} = \left| |z|^2 + v \right|^{1/2} = (|z|^4 + |v|^2)^{1/4}.$$

C'est donc la métrique donnée par la fonction distance

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{H}}((z_1, v_1), (z_2, v_2)) &= |(z_1, v_1)^{-1}(z_2, v_2)|_{\mathcal{H}} \\ &= |(z_1 - z_2, v_1 - v_2 - 2\mathfrak{Im}(\bar{z}_2 z_1))|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

*Remarque 4.1.4.* Cette métrique s'étend naturellement, par l'inverse de la perspective géométrique, en une métrique sur tout  $H_{\mathbb{H}}^2$ , que l'on notera encore  $|\cdot|_{\mathcal{H}}$  :

$$|(z, v, u)|_{\mathcal{H}} = \left| |z|^2 + u + v \right|^{1/2} = \left( (|z|^2 + u)^2 + |v|^2 \right)^{1/4}. \quad (4.1.5)$$

*Remarque 4.1.6.* Le bord de tout espace symétrique de rang 1 peut-être muni d'une métrique analogue, provenant d'une norme de groupe. Pour plus de précision sur ces normes, et pour la construction générale des métriques de Cygan sur le bord des espaces symétriques de rang 1, voir l'article de Anke D. Pohl [Poh10, § 3.2].

Cette métrique étant par construction invariante à gauche,  $\mathcal{H}$  agit par isométries sur lui-même par translations. Il existe une action supplémentaire sur  $\mathcal{H}$  par isométries : le groupe  $\mathbf{SO}(4)$  agit sur  $\mathcal{H}$  en préservant la métrique  $\rho_{\mathcal{H}}$ . L'isomorphisme

$$\mathbf{Sp}(1) \times \mathbf{PSp}(1) \simeq \mathbf{SO}(4)$$

permet de décrire agréablement cette action :

$$\mathbf{Sp}(1) \times \mathbf{PSp}(1) \ni (\mu, \nu) \cdot (z, v) = (\mu\nu z\nu^{-1}, \nu v\nu^{-1}).$$

(On vérifie aisément à l'aide de (4.1.3) que  $\rho_{\mathcal{H}}$  est invariante par une telle transformation).

*Remarque 4.1.7.* Ceci est à rapprocher de l'action du cercle  $S^1 \simeq \mathbf{SO}(2)$  sur le groupe *Nil* (voir la description de Peter Scott [Sco83, p.468]).

Ces deux actions forment la totalité de la composante neutre du groupe des isométries de  $\mathcal{H}$  :

**Proposition 4.1.8.** *Notons  $\text{Isom}(\mathcal{H}) = \text{Isom}(\mathcal{H}, \rho_{\mathcal{H}})$  la composante neutre du groupe des isométries du groupe de Heisenberg généralisé muni de la métrique de Cygan. Alors*

$$\text{Isom}(\mathcal{H}) \simeq \mathbf{SO}(4) \ltimes \mathcal{H}.$$

L'action d'un élément  $((\mu, \nu), (z_0, v_0)) \in (\mathbf{Sp}(1) \times \mathbf{PSp}(1)) \ltimes \mathcal{H} \simeq \mathbf{SO}(4) \ltimes \mathcal{H}$  sur un point  $(z, v)$  de  $\mathcal{H}$  est donnée par

$$((\mu, \nu), (z_0, v_0)) \cdot (z, v) = (\mu\nu z\nu^{-1} + z_0, \nu v\nu^{-1} + t_0 + 2\mathfrak{Im}(\overline{\mu\nu z\nu^{-1}}z_0)).$$

Notons  $\text{Isom}(\mathbb{H})$  le groupe des isométries euclidiennes de  $\mathbb{H}$  préservant l'orientation :

$$\text{Isom}(\mathbb{H}) \simeq \mathbf{SO}(4) \ltimes \mathbb{H}.$$

On a finalement une description de  $\text{Isom}(\mathcal{H})$ , analogue à celle de  $\text{Isom}(\text{Nil})$  que l'on trouve dans l'article de Peter Scott [Sco83, p.467], comme extension centrale

$$0 \longrightarrow \mathfrak{Im}(\mathbb{H}) \longrightarrow \text{Isom}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\Pi^*} \text{Isom}(\mathbb{H}) \longrightarrow 1. \quad (4.1.9)$$

*Remarque 4.1.10.* En dimension supérieure, le bord de  $H_{\mathbb{H}}^n$  porte la structure d'un groupe de Heisenberg généralisé de dimension  $n - 1$

$$\mathcal{H}^{n-1} = \mathbb{H}^{n-1} \ltimes \mathfrak{Im}(\mathbb{H}),$$

et son groupe d'isométries n'est plus  $P(\mathbf{Sp}(1) \times \mathbf{Sp}(1)) \ltimes \mathcal{H}$ , mais

$$\text{Isom}(\mathcal{H}^{n-1}) = P(\mathbf{Sp}(1) \times \mathbf{Sp}(n-1)) \ltimes \mathcal{H}^{n-1}.$$

Or, comme on l'a déjà signalé (c'est la remarque 1.5.10), l'isomorphisme

$$P(\mathbf{Sp}(1) \times \mathbf{Sp}(1)) \simeq \mathbf{SO}(4)$$

n'a pas d'analogue en dimension supérieure. La suite (4.1.9) ne s'adapte donc pas en dimension  $n$  quelconque.

#### 4.1.2 Action des éléments de $\mathcal{P}_{\infty}$ sur $\mathcal{H}$

Rappelons (voir la section 1.5 du chapitre 1) que le groupe  $\mathcal{P}_{\infty}$  des éléments de  $\mathbf{PSp}(2, 1)$  stabilisant  $q_{\infty}$  se décompose en trois sous-groupes  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{N}$ . Les groupes  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  agissent par *translations* et *rotations d'Heisenberg* en préservant chaque horosphère, et leur action en coordonnées horosphériques, décrite en 1.5.1 est exactement l'action par isométries de  $\text{Isom}(\mathcal{H})$  sur  $\mathcal{H}$ . On a ainsi :

$$\mathcal{M}\mathcal{N} \simeq \text{Isom}(\mathcal{H}).$$

(Remarquons également que les éléments de  $\mathcal{N}$ , les *dilatations d'Heisenberg*, dilatent linéairement la métrique de Cygan).

On peut alors écrire explicitement la projection  $\Pi^*$  de (4.1.9). En effet, la connaissance de la forme matricielle des éléments de  $\mathcal{M}\mathcal{N}$  nous donne une représentation matricielle des éléments de  $\text{Isom}(\mathcal{H})$  : ce sont les matrices de  $GL(3, \mathbb{H})$  de la forme

$$\begin{bmatrix} \nu & -\bar{z}_0\nu & \left(\frac{-|z_0|^2+v_0}{2}\right)\nu \\ 0 & \mu\nu & z_0\nu \\ 0 & 0 & \nu \end{bmatrix},$$

$$(\mu, \nu) \in \mathbf{Sp}(1) \times \mathbf{Sp}(1), (z_0, v_0) \in \mathcal{H}.$$

Par ailleurs, les éléments de  $\text{Isom}(\mathbb{H})$  se représentent par les matrices de  $GL(2, \mathbb{H})$  de la forme

$$\begin{bmatrix} \mu\nu & z_0\nu \\ 0 & \nu \end{bmatrix} \mid (\mu, \nu) \in \mathbf{Sp}(1) \times \mathbf{Sp}(1), z_0 \in \mathbb{H},$$

leur action sur  $\mathbb{H}$  étant donnée par l'action projective :

$$\begin{bmatrix} \mu\nu & z_0\nu \\ 0 & \nu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu\nu \cdot z + z_0\nu \\ \nu \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \mu\nu \cdot z \cdot \nu^{-1} + z_0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Le morphisme  $\Pi^*$  est alors la projection

$$\Pi^* : \begin{bmatrix} \nu & -\bar{z}_0\nu & \left(\frac{-|z_0|^2+v_0}{2}\right)\nu \\ 0 & \mu\nu & z_0\nu \\ 0 & 0 & \nu \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \mu\nu & z_0\nu \\ 0 & \nu \end{bmatrix},$$

et son noyau, qui est le centre de  $\text{Isom}(\mathcal{H})$ , vaut

$$\ker(\Pi^*) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{v_0}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \simeq \mathfrak{Im}(\mathbb{H}).$$

**Définition 4.1.11.** Les éléments de  $\ker(\Pi^*)$  sont appelés les *translations d'Heisenberg verticales*, ou simplement les *translations verticales*. L'élément

$$T_{(0, v_0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{v_0}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

est ainsi appelé *translation verticale par  $v_0$* .

## 4.2 Les entiers d'Hurwitz

Nous décrivons à présent brièvement les entiers d'Hurwitz, n'en présentant que les propriétés nécessaires à l'étude  $\Gamma$ .

### 4.2.1 Description de $D_4$

L'essentiel du contenu de ce paragraphe (et bien plus encore) se trouve dans l'ouvrage de John H. Conway et Neil J. A. Sloane [CS99]. Une bonne exposition de l'ordre d'Hurwitz est aussi donnée dans le plus petit livre de John H. Conway et Derek A. Smith [CS03]. Enfin, une étude algébrique détaillée (donnant par exemple la liste des idéaux maximaux de  $D_4$ ) est menée par James M. Woodward dans sa thèse [Woo06].

**Définition 4.2.1.** L'anneau des *entiers d'Hurwitz* est l'ordre de  $\mathbb{H}$  constitué des quaternions dont toutes les coordonnées sont entières, ou dont toutes les coordonnées sont demi-entières :

$$D_4 = \{a + ib + jc + kd \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ ou } a, b, c, d \in \mathbb{Z} + 1/2\} \subset \mathbb{H}.$$

Nous aurons besoin à la section suivante d'une bonne description du groupe des unités de cet anneau,  $U_{D_4}$ . Il est de cardinal 24 et est constitué de deux familles de points. D'une part, les quaternions de norme 1 dont toutes les coordonnées sont entières (il y en a 8), d'autre part, les quaternions de norme 1 dont toutes les coordonnées sont demi-entières (il y en a 16). Notons

$$\omega = 1/2(-1 + i + j + k),$$

et

$$\begin{aligned} \omega^i &= i^{-1}\omega i = 1/2(-1 + i - j - k), \\ \omega^j &= j^{-1}\omega j = 1/2(-1 - i + j - k), \\ \omega^k &= k^{-1}\omega k = 1/2(-1 - i - j + k). \end{aligned}$$

Alors le groupe des unités de  $D_4$  est le groupe

$$U_{D_4} = \{p_i \mid i = 1, \dots, 24\},$$

où

**Notations 4.2.2.**

— les  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$  (dans cet ordre) sont les quaternions

$$\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k;$$

— les  $p_i$ ,  $i = 9, \dots, 24$  (dans cet ordre) sont les quaternions

$$\pm\omega, \pm\omega^i, \pm\omega^j, \pm\omega^k, \pm\bar{\omega}, \pm\bar{\omega}^i, \pm\bar{\omega}^j, \pm\bar{\omega}^k.$$

Les coordonnées de ces points sont listées en annexe, dans la table C.1.

Les éléments de  $U_{D_4}$  forment les sommets d'un polyèdre régulier dans  $\mathbb{H}$ , le 24-cellules ou *icositétrachore*. Son bord est composé de 24 faces de dimension 3, qui sont des octaèdres réguliers, et en chaque sommet, 6 tels octaèdres se rencontrent.

**Notation 4.2.3.** On note  $\mathcal{U}_{D_4}$  le 24-cellule formé par les éléments de  $U_{D_4}$ .

Comme nous en aurons besoin explicitement dans la suite, nous allons numéroter les faces de  $\mathcal{U}_{D_4}$ .

Commençons par en choisir une, qui contient le sommet  $p_1$  : pour la déterminer, on regarde les distances entre les sommets. Ces distances sont listées en annexe, dans la table C.3. Nommons cette première face  $O_1$  :

$$O_1 = (p_1, p_3, p_{14}, p_{16}, p_{18}, p_{20}). \quad (4.2.4)$$

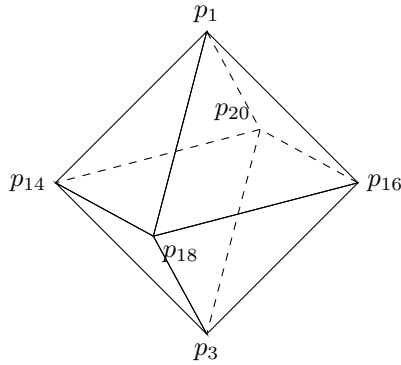
Nous listons ses sommets par couple de sommets opposés, voir la figure 4.1. Pour nommer les 23 faces octaédrales restantes, on procède comme suit : à chacun des  $p_i$  correspond une rotation de l'espace euclidien de dimension 4, donnée par la multiplication à gauche par  $p_i$ . On attribue le numéro  $i$  à la face image par cette rotation de la face de base  $O_1$ .

**Notation 4.2.5.** On note  $\{O_i \mid i = 1, \dots, 24\}$  les faces de  $\mathcal{U}_{D_4}$ . La face de base est la face

$$O_1 = (p_1, p_3, p_{14}, p_{16}, p_{18}, p_{20}),$$

la face  $O_i$  est l'image de la face  $O_1$  par la rotation donnée par  $p_i$ . Les 24 faces de  $\mathcal{U}_{D_4}$  sont listées en annexe, dans la table C.4. Dans cette table, les sommets de chaque face sont listés comme dans (4.2.4), par couple de sommets opposés.

Un autre polyèdre important dans la suite de notre étude est une *cellule de Dirichlet-Voronoi* de  $D_4$ .

FIGURE 4.1 – La face  $O_1$  du 24-cellules formé par les unités de  $D_4$ .

**Définition 4.2.6.** Une cellule de Dirichlet-Voronoi d'un réseau est un domaine fondamental pour les translations par les éléments du réseau.

Dans le cas des entiers d'Hurwitz, la cellule de Dirichlet-Voronoi centrée en 0 est le 24-cellules dual de celui formé par les unités de  $D_4$ .

**Notations 4.2.7.** — On note  $\mathcal{V}_{D_4}$  la cellule de Dirichlet-Voronoi de  $D_4$  centrée en 0.

- Ses sommets, notés  $\{q_i\}_{i=1\dots 24}$  sont les centres des faces  $\{O_i\}_{i=1,\dots,24}$ . Leurs coordonnées sont listées en annexe, dans la table C.2
- On a nommé les faces du 24-cellules de départ, et de manière duale, on nomme celles de  $V_H$  :  $O'_1$  est la face de sommets  $q_1, q_3, q_{14}, q_{16}, q_{18}, q_{20}$ , et  $O'_i$  est l'image de  $O'_1$  par la rotation donnée par la multiplication à gauche par  $p_i$ .

Terminons ce paragraphe en indiquant une propriété algébrique de  $D_4$  qui nous sera utile au paragraphe suivant. On en trouvera une démonstration dans la thèse de James M. Woodward.

**Proposition 4.2.8** (Voir par exemple [Woo06, thm 5.3.3]). *Tous les idéaux de  $D_4$  (bilatères, à gauche ou à droite) sont principaux.*

#### 4.2.2 Premières propriétés de $\Gamma$

Nous clôturons cette section par les deux première propriétés de  $\Gamma$  que l'on peut en déduire :  $\Gamma$  n'a qu'une pointe (proposition 4.2.9), et  $\Gamma_\infty$  contient pas d'élément loxodromique (lemme 4.2.10).

**Proposition 4.2.9.** *Tout élément parabolique de  $\Gamma$  est conjugué dans  $\Gamma$  à un élément fixant  $q_\infty$  : l'orbifold quotient  $\Gamma \backslash H_{\mathbb{H}}^2$  n'a qu'une pointe.*

La remarque suivante est élémentaire mais importante :

**Lemme 4.2.10.** *Le sous-groupe  $\Gamma_\infty$  ne contient pas d'éléments loxodromique et est entièrement contenu dans  $\text{Isom}(\mathcal{H})$ .*



*Démonstration.* On a vu à la section 1.5, en (1.5.11), la forme générale d'une matrice  $F$  de  $\mathbf{Sp}(n, 1)$  représentant une isométrie fixant  $q_\infty$ . Dans le contexte de ce chapitre, en dimension 2, une telle matrice est donc triangulaire supérieure, de la forme

$$F = \begin{bmatrix} r\mu & * & * \\ 0 & \nu\mu & * \\ 0 & 0 & \frac{1}{r}\mu \end{bmatrix} \mid r \in \mathbb{R}_+, \mu, \nu \in SP(1).$$

Si  $F$  est de plus un élément de  $\Gamma$ ,  $F^{-1}$  aussi, et les coefficients de  $F$  et de  $F^{-1}$  sont dans  $D_4$ . Ainsi, si  $F$  est dans  $\Gamma_\infty$ , ses coefficients diagonaux sont des inversibles de  $D_4$ , donc appartiennent au groupe  $U_{D_4}$  des unités de  $D_4$ . Alors nécessairement,  $r = 1$  et  $F$  n'a pas de facteur de dilatation.  $\square$

### 4.3 Un domaine fondamental pour $\Gamma_\infty$

Par le lemme 4.2.10, le sous-groupe  $\Gamma_\infty$  s'insère dans la suite exacte (4.1.9) :

$$0 \longrightarrow \ker(\Pi^*) \cap \Gamma_\infty \longrightarrow \Gamma_\infty \xrightarrow{\Pi^*} \Pi^*(\Gamma_\infty) \longrightarrow 1.$$

Le noyau de cette nouvelle suite est constitué des matrices de la forme

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{v_0}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, v_0 \in \mathfrak{Im}(\mathbb{H}), \frac{v_0}{2} \in D_4.$$

Comme  $\frac{v_0}{2}$  est un quaternion imaginaire pur, sa première coordonnée est nulle, et pour que ce quaternion soit dans  $D_4$ , il faut donc que ses autres coordonnées soit entières. Les coordonnées de  $v_0$  sont ainsi nécessairement des entiers pairs, et

$$\ker(\Pi^*) \cap \Gamma_\infty \simeq 2i\mathbb{Z} \oplus 2j\mathbb{Z} \oplus 2k\mathbb{Z}.$$

Nous étudions donc la suite :

$$0 \longrightarrow 2i\mathbb{Z} \oplus 2j\mathbb{Z} \oplus 2k\mathbb{Z} \longrightarrow \Gamma_\infty \xrightarrow{\Pi^*} \Pi^*(\Gamma_\infty) \longrightarrow 1. \quad (4.3.1)$$

Les éléments de  $\Gamma_\infty$  sont représentés par les matrices de  $\mathbf{Sp}(2, 1)$  de la forme

$$\begin{bmatrix} \mu & (-\bar{\tau}) \cdot (\mu\nu) & \frac{-|\tau|^2+t}{2} \cdot \mu \\ 0 & \mu\nu & \tau \cdot \mu \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix},$$

$$\mu, \nu \in U_{D_4}, \quad \tau \in D_4, \quad t \in i\mathbb{Z} \oplus j\mathbb{Z} \oplus k\mathbb{Z} \text{ tel que } \frac{-|\tau|^2+t}{2} \in D_4,$$

et ceux de  $\Pi^*(\Gamma_\infty)$  par les matrices

$$P_{\mu,\nu,\tau} = \begin{bmatrix} \mu\nu & \tau\mu \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \quad | \quad \mu, \nu \in U_{D_4}, \quad \tau \in D_4.$$

Un tel élément agit sur  $\mathbb{H}$  par une rotation de  $\mathbf{SO}(4)$  (donnée par la multiplication à gauche par  $\mu\nu \in U_{D_4}$  et à droite par  $\nu \in U_{D_4}$  suivie d'une translation par  $\tau \in D_4$ ).

Pour alléger la lecture de la suite de ce chapitre, introduisons les

**Notations 4.3.2.** On note  $\Delta = \Pi^*(\Gamma_\infty)$  l'image de la suite exacte (4.3.1). C'est un réseau du groupe des isométries directes de  $\mathbb{H}$ ,  $\text{Isom}(\mathbb{H}) = \mathbf{SO}(4) \times \mathbb{H}$ . On note également  $\Delta_R$  le sous-groupe de  $\Delta$  formé des rotations pures :

$$\Delta_R = \Delta \cap (\mathbf{SO}(4) \times \{0\}) = \left\{ \begin{bmatrix} \mu\nu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \mid \mu, \nu \in U_{D_4} \right\},$$

et  $\Delta_T$  le sous-groupe de  $\Delta$  formé des translations pures,

$$\Delta_T = \Delta \cap (\{I\} \times \mathbb{H}) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid \tau \in D_4 \right\}.$$

L'étude de l'action de  $\Gamma_\infty$  sur  $\mathcal{H} \simeq \partial H_{\mathbb{H}}^2 - q_\infty$  se fait alors en deux temps. Dans un premier temps, nous étudions l'action de  $\Delta$  sur  $\mathbb{H}$ . Nous déterminons un domaine fondamental pour cette action qui est un 4-simplexe dans  $\mathbb{H}$  (théorème 4.3.11). En utilisant le théorème du polyèdre de Poincaré, nous déduisons une présentation de  $\Delta$  (théorème 4.3.17).

Dans un deuxième temps nous en déduisons un système de générateurs pour  $\Gamma_\infty$  (proposition 4.3.21), en relevant les générateurs de  $\Delta$ . Ce système est de cardinal 3, et l'on en déduit immédiatement un système de générateurs pour  $\Gamma$  (théorème 4.4.2), de cardinal 4, répondant ainsi par l'affirmative à une question posée par James M. Woodward dans sa thèse [Woo06, conjecture 1 p.225]. Nous n'obtenons pas encore une présentation de  $\Gamma$  ou de  $\Gamma_\infty$ , car notre construction d'un domaine fondamental exploitable pour  $\Gamma_\infty$  n'a pas abouti pendant le temps de notre thèse (nous avons obtenu un domaine fondamental – c'est la proposition 4.3.22 – combinatoirement trop complexe). Nous expliquons brièvement les difficultés rencontrées durant cette étape, et en conclusion de ce manuscrit, nous donnerons les pistes que nous souhaitons explorer par la suite pour clore entièrement cette question.

### 4.3.1 Un domaine fondamental pour $\Delta$

Un domaine fondamental pour le sous-groupe des translations pures est déjà connu : c'est la cellule de Dirichlet-Voronoi du réseau,  $\mathcal{V}_{D_4}$ , décrite dans les notations 4.2.7.

Reste à étudier l'action du groupe des rotations  $\Delta_R$  sur  $\mathcal{V}_{D_4}$ , et un domaine fondamental pour cette dernière action est un domaine fondamental pour celle de  $\Delta$  sur  $\mathbb{H}$ .

Rappelons que  $\Delta_R$  agit transitivement sur les faces de  $\mathcal{V}_{D_4}$  (la  $i$ -ème face  $O'_i$  est l'image par

$$P_{1,p_i,0} = \begin{bmatrix} p_i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de la face  $O'_1$ , voir à nouveau les notations 4.2.7 et 4.2.2).

**Lemme 4.3.3.** *Le groupe de rotations  $\Delta_R$  est d'ordre 288. C'est un sous-groupe d'indice 2 du groupe des isométries directes du 24-cellules, qui est d'ordre 576. Le stabilisateur d'une face est ainsi d'ordre  $\frac{288}{24} = 12$ , et c'est un sous-groupe d'indice 2 du groupe des isométries directes de l'octaèdre.*

*Démonstration.* L'action d'une rotation  $R_{ij}$  de  $\Delta_R$  sur  $\mathbb{H}$  s'écrit

$$R_{ij} : z \mapsto p_i \cdot z \cdot p_j$$

où  $p_i$  et  $p_j$  sont dans  $U_{D_4}$ . Ainsi, si  $(i, j)$  est différent de  $(k, l)$ ,  $R_{ij}$  est différent de  $R_{kl}$ , sauf si  $p_i = -p_k$  et  $p_j = -p_l$ . Comme  $U_{D_4}$  est de cardinal 24, il y a  $\frac{24 \times 24}{2} = 288$  éléments différents dans  $\Delta_R$ .  $\square$

La détermination d'un domaine fondamental pour  $\Delta$  se fait alors en trois étapes, schématisées dans la figure 4.2 :

1. nous déterminons le stabilisateur d'une face de  $\mathcal{V}_{D_4}$  ;
2. nous trouvons un domaine fondamental pour l'action du stabilisateur sur cette face ;
3. prenant le cône sur ce domaine, de base 0 (le centre de  $\mathcal{V}_{D_4}$ ), nous obtenons un domaine fondamental pour l'action de  $\Delta_R$  sur  $\mathcal{V}_{D_4}$ , donc pour l'action de  $\Delta$  sur  $\mathbb{H}$ .

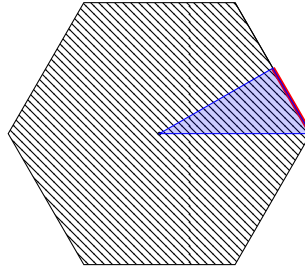


FIGURE 4.2 – La cellule de Dirichlet-Voronoi (hachurée) est un domaine fondamental pour les translations. Les rotations agissent transitivement sur ses faces. Un domaine pour le stabilisateur d'une face est représenté par le trait rouge plus épais. On obtient un domaine pour tout le groupe en prenant le cône sur ce domaine (en bleu).

#### 1. Détermination du stabilisateur d'une face.

Choisissons par exemple la face

$$O'_1 = (q_1, q_3, q_{14}, q_{16}, q_{18}, q_{20}).$$

Pour déterminer son stabilisateur, nous nous aidons du logiciel Maple. Nous n'ajoutons pas à ce texte les feuilles de calcul Maple (l'intérêt de leur ajout étant très certainement inversement proportionnel à l'ennui de leur lecture), mais décrivons succinctement comment nous avons procédé.

Chaque élément de  $\Delta_R$  permute les 24 sommets de  $\mathcal{V}_{D_4}$ , et  $\Delta_R$  s'injecte dans le groupe symétrique  $\mathcal{S}_{24}$  des permutations d'un ensemble à 24 éléments.

À l'aide de Maple nous explicitons les 48 permutations de  $\mathcal{S}_{24}$  correspondant aux multiplications à gauche ( $z \mapsto p_i \cdot z$ ) ou à droite ( $z \mapsto z \cdot p_i$ ) par chacun des éléments de  $U_{D_4}$ . Nous encodons ensuite  $\Delta_R$  par le groupe de permutations engendré par ces 48 éléments. Enfin, nous listons avec Maple les permutations de  $\Delta_R$  stabilisant l'ensemble  $\{1, 3, 14, 16, 18, 20\}$  des numéros des sommets de la face  $O'_1$ .

Le lemme suivant décrit les éléments du stabilisateur de  $O'_1$ . Les permutations correspondantes sont listées en annexe, dans la table C.5 (dans cette table, par souci de lisibilité, nous n'écrivons pas toute la permutation des 24 sommets, mais simplement les cycles qui correspondent à la permutation des 6 sommets de  $O'_1$ ).

**Lemme 4.3.4.** *Le stabilisateur de la face  $O'_1$  dans  $\Delta_R$ ,  $Stab(O'_1)$ , est constitué des éléments suivants (voir la figure 4.3) :*

- l'identité ;
- les trois demi-tours d'axe deux sommets opposés ;
- les quatres rotations d'axe les centres de deux faces opposées, d'angle  $2\pi/3$  ;
- les quatres rotations d'axe les centres de deux faces opposées, d'angle  $4\pi/3$ .

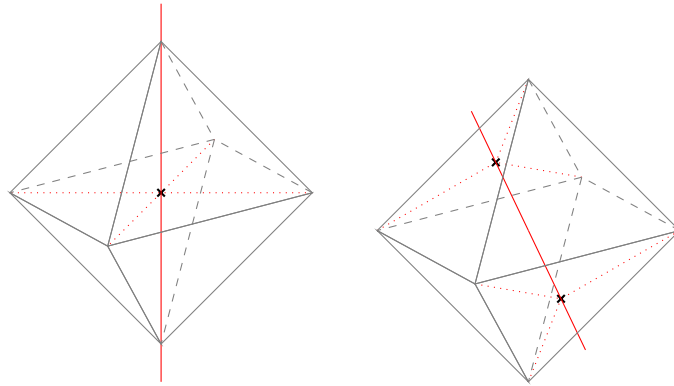


FIGURE 4.3 – Les axes des deux types de rotations du stabilisateur d'une face de  $\mathcal{V}_{D_4}$ .

*Remarque 4.3.5.* Ici, toutes les faces de l'octaèdre ne sont pas équivalentes, elles forment deux orbites sous l'action de  $Stab(O'_1)$ . Par exemple, deux faces opposées ne sont jamais dans la même orbite et forment un système de représentants des faces.

*Remarque 4.3.6.* Pour obtenir le groupe entier de l'octaèdre, il manque

- les six rotations d'axe deux sommets opposés, d'angle  $\pi/2$  et  $3\pi/2$  ;

- les six rotations d'angle  $\pi$  d'axe les centres de deux arêtes opposées.

Ce groupe peut-être obtenu en adjoignant à  $Stab(O'_1)$  un élément, par exemple n'importe quelle rotation d'axe deux sommets opposés, d'angle  $\pi/2$ .

## 2. Un domaine fondamental pour $Stab(O'_1)$ .

D'après la remarque 4.3.5, il suffit, pour obtenir un domaine fondamental pour  $Stab(O'_1)$ , de déterminer un domaine fondamental pour le stabilisateur d'un couple de faces opposées. C'est ce que nous faisons dans le paragraphe qui suit, et la figure 4.4 résume notre démarche.

Nous choisissons le couple de face opposées

$$(q_1, q_{14}, q_{16}) \text{ et } (q_3, q_{18}, q_{20}). \quad (4.3.7)$$

**Notations 4.3.8.** Dans la suite nous notons

- $q_0$  le centre de  $O'_1$  :  $q_0 = \frac{i}{2}$  ;
- $c_1$  le centre de  $(q_1, q_{14}, q_{16})$  :  $c_1 = \frac{1}{2}(1 + i\frac{1}{3} + j + k)$  ;
- $c_2$  le centre de  $(q_3, q_{18}, q_{20})$  :  $c_2 = \frac{1}{2}(-1 + i\frac{1}{3} - j - k)$  ;
- $t_1$  le tétraèdre de sommets  $(q_0, c_1, q_{14}, q_{18})$  ;
- $t_2$  le tétraèdre de sommets  $(q_0, c_2, q_{16}, q_{20})$  ;

Le stabilisateur du couple (4.3.7) dans  $Stab(O'_1)$  est le groupe d'ordre 3 engendré par la rotation d'angle  $\pi/3$ , d'axe  $(c_1, c_2)$ . L'union des deux tétraèdres  $t_1$  et  $t_2$  forme un domaine fondamental pour l'action de ce groupe sur la face  $O'_1$ . Par conséquent,

**Lemme 4.3.9.** *L'ouvert  $t_1 \cup t_2$  est un domaine fondamental pour l'action de  $Stab(O'_1)$  sur  $O'_1$ .*

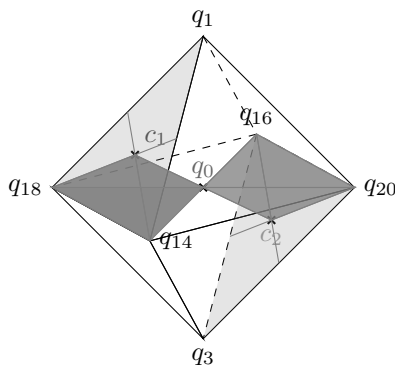


FIGURE 4.4 – L'union de ces deux tétraèdres constitue un domaine fondamental pour  $Stab(O'_1)$

3. Un domaine fondamental pour  $\Delta$ .

**Notations 4.3.10.** Nous notons dans la suite :

- $C_1$  le cône de base  $t_1$  et de sommet 0, c'est donc le 4-simplexe de sommets

$$(q_0, c_1, q_{14}, q_{18}, 0);$$

- $C_2$  le cône de base  $t_2$  et de sommet 0, c'est donc le 4-simplexe de sommets

$$(q_0, c_2, q_{16}, q_{20}, 0).$$

D'après le lemme 4.3.9, et conformément aux étapes annoncées à la page 101, l'ouvert  $C_1 \cup C_2$  est un domaine fondamental pour  $\Delta$  agissant sur  $\mathbb{H}$ . Ce domaine n'est pas très satisfaisant : il n'est pas convexe, ce n'est même pas un polyèdre ! Nous allons donc utiliser des transformations de  $\Delta$  pour déplacer  $C_2$ , puis le recoller le long d'une face de  $C_1$ , afin d'obtenir un nouveau domaine, qui sera cette fois un simplexe de dimension 4.

La figure 4.5 représente schématiquement ce que l'on fait : par la rotation antipodale – la multiplication par  $-1$  – on envoie  $C_2$  sur un simplexe opposé  $C'_2$ . Puis, par une translation du réseau – qui envoie 0 sur une certaine unité  $p_i \in U_{D_4}$ , c'est-à-dire sur le centre d'une cellule de Dirichlet-Voronoi adjacente – on recolle  $C'_2$  le long d'une face de  $C_1$ . Rappelons

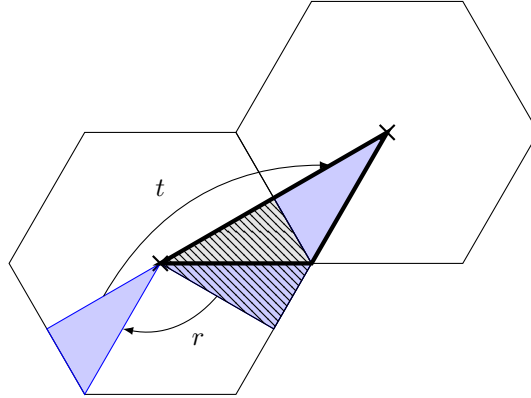


FIGURE 4.5 – Au départ, le domaine fondamental trouvé (schématisé par la partie hachurée) n'est pas un simplexe. On déplace la partie bleue par une rotation du réseau,  $r$ . En appliquant la translation  $t$ , on envoie 0 sur le centre d'une cellule de Voronoi voisine. 0, le centre de la face et le centre de la cellule de Voronoi voisine sont alignés, donc le nouveau domaine obtenu (en gras) est un simplexe.

que nous listons en annexe les faces de  $\mathcal{V}_{D_4}$  et les coordonnées de ses sommets. La rotation donnée par  $p_2 = -1$  envoie la face  $O'_1$  sur la face  $O'_2 = (q_2, q_4, q_{13}, q_{15}, q_{17}, q_{19})$ , et envoie le simplexe  $C_2$  sur

$$C'_2 = (q'_0, c'_2, q_{15}, q_{19}, 0)$$

où  $q'_0 = \frac{i}{2}$  est le centre de  $O'_2$  et  $c'_2 = \frac{1}{2}(1 - i\frac{1}{3} + j + k)$  est le centre de la face triangulaire  $(q_4, q_{15}, q_{19})$  de  $O'_2$ .

On translate ensuite  $C'_2$  par  $i \in D_4$ . Le simplexe ainsi obtenu a pour sommets

$$(q_{14}, q_{18}, c_1, q_0, i = p_3)$$

et on le recolle à  $C_1$  le long de leur face commune  $(q_{14}, q_{18}, c_1, q_0)$  (voir la figure 4.5).

Comme  $0, q_0$  et  $p_3$  sont alignés ( $q_0$  est le centre du segment  $(0, p_3)$ ), le polyèdre  $\mathbf{S}$  obtenu n'a que 5 sommets,  $(0, q_{14}, q_{18}, c_1, p_3)$ , c'est donc un simplexe et nous avons obtenu le

**Théorème 4.3.11.** *Le simplexe de dimension 4,  $\mathbf{S}$ , de sommets*

$$\mathbf{S} : (0, q_{14}, q_{18}, c_1, p_3)$$

*est un domaine fondamental pour l'action de  $\Delta$  sur  $\mathbb{H}$ .*

### 4.3.2 Une présentation de $\Delta$

À présent, sachant que  $\mathbf{S}$  est un domaine fondamental pour  $\Delta$ , le *théorème du polyèdre de Poincaré* nous en donne une présentation : un système de générateurs est donné par les éléments de  $\Delta$  qui appartiennent aux faces de codimension 1 de  $\mathbf{S}$ ; les relations entre ces générateurs sont données par les relations de cycle entre les faces de codimension 2 et par les relations de réflexions.

*Remarque 4.3.12.* Ce théorème est valable dans d'autres contextes tout à fait généraux : une exposition globale pour les espaces à courbure sectionnelle constante, de dimension quelconque, en est par exemple donnée dans le survol de David B. A. Epstein et Carlo Petronio [EP94]; une version hyperbolique complexe a été écrite par Elisha Falbel et Valentino Zocca, dans [FZ99]. Pour en saisir l'idée centrale cependant, il suffit peut-être de lire la très élégante et très éclairante démonstration qu'en donne John Milnor (dans le cas particulier d'un groupe de triangle) dans son article [Mil75, théorème 2.2].

La figure 4.6 donne une vision schématique de  $\mathbf{S}$  ainsi que les distances entre ses sommets. Ce 4-simplexe possède 5 faces tétraédrales de codimension 1 :

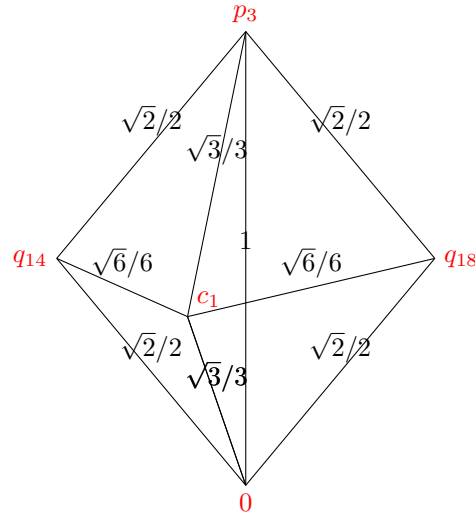
$$T_1 = (0, c_1, q_{14}, q_{18}), \quad T_2 = (0, p_3, q_{14}, q_{18}), \quad T_3 = (0, p_3, c_1, q_{14}),$$

$$T_4 = (0, p_3, c, q_{18}), \quad T_5 = (q_{14}, q_{18}, c, p_3).$$

Cherchons les transformations appartenant aux faces de  $\mathbf{S}$ . Les distances entre les sommets, représentées sur la figure 4.6, imposent les premières contraintes suivantes :

- $T_1$  ne peut être apparié qu'à  $T_5$  ou lui-même et  $T_5$  à  $T_1$  ou lui-même ;
- $T_2$  ne peut être apparié qu'à lui-même ;
- $T_3$  ne peut être apparié qu'à  $T_4$  ou lui-même, et  $T_4$  qu'à  $T_3$  ou lui-même.

Remarquons également tout de suite qu'une contrainte supplémentaire est donnée par la nature des sommets :

FIGURE 4.6 – Vision schématique du simplexe  $\mathbf{S}$  avec les distances entre les sommets.

*Remarque 4.3.13.* Une transformation appariante, qui est un élément de  $\Delta$ , ne peut envoyer le sommet 0 que sur lui-même – auquel cas c'est une rotation pure – ou sur le sommet  $p_3 = i$ . Sinon, sa partie affine n'est pas un élément de  $D_4$ .

Nous pouvons à présent déterminer les cycles des faces de codimension 1.

*Le cycle  $(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_5)$*

Soit  $P$  l'élément de  $\Delta$  envoyant  $T_1$  sur  $T_5$ . Nécessairement, le sommet 0 est envoyé sur  $p_3$ . Le sommet  $c_1$ , qui est à distance  $\sqrt{3}/3$  de 0 doit être envoyé sur un sommet à distance  $\sqrt{3}/3$  de  $p_3$  : il est donc fixé. Nous cherchons ainsi l'élément de  $\Delta$  qui envoie le quadruplet (ordonné)  $(0, c_1, q_{14}, q_{18})$  sur  $(p_3, c_1, q_{14}, q_{18})$ . C'est l'élément

$$P = \begin{bmatrix} \frac{-1+i+j-k}{2} & \frac{1-i+j+k}{2} \\ 0 & \frac{-1-i+j-k}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.3.14)$$

On remarque également que  $P^3 = Id$ . Le premier cycle est donc

$$T_1 \xrightarrow{P} T_5 \xrightarrow{P^2} T_1.$$

*Le cycle  $(\mathbf{T}_2)$*

Notons  $S$  l'élément de  $\Delta$  qui envoie  $T_2$  sur lui-même. Si  $S$  fixe 0,  $S$  fixe aussi  $p_3$  qui est le seul sommet de  $\mathbf{S}$  à distance 1 de 0.  $S$  est alors une rotation qui échange  $q_{14}$  et  $q_{18}$ . Ceci est impossible puisque  $q_{14}$  et  $q_{18}$  ne sont pas antipodaux.  $S$  doit donc envoyer 0 sur  $p_3$ , et par suite envoyer  $p_3$  sur 0. La partie translation de  $S$  vaut  $i$ . Cherchons sa partie rotationnelle.  $S$  est de la forme  $z \mapsto M \cdot z + i$ , donc  $M$  est une matrice de  $\mathbf{SO}(4)$



vérifiant  $S \cdot p_3 = 0 = M \cdot p_3 + i$ , soit  $M \cdot p_3 = -i = -p_3$ . Sachant de plus que  $S$  fixe  $q_{14}$  et  $q_{18}$ , on trouve alors que  $M$  correspond à la conjugaison par  $i$ ,  $z \mapsto i \cdot z \cdot i^{-1}$  et

$$S = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix}. \quad (4.3.15)$$

Le deuxième cycle est donc

$$T_2 \xrightarrow{S} T_2 \xrightarrow{S} T_2.$$

*Le cycle ( $\mathbf{T}_3, \mathbf{T}_4$ )*

Soit  $Q$  l'élément de  $\Delta$  qui envoie  $T_3$  sur  $T_4$ . Comme  $c_1$  est le seul sommet à distance  $\sqrt{3}/3$  de 0 et de  $p_3$ , il est fixé par  $Q$ . Donc  $Q$  fixe globalement le triplet  $(q_{14}, q_{18}, q_1)$ . Si  $Q$  ne fixe pas 0, il échange  $p_3$  et 0. Mais alors, comme pour le cycle précédent, il fixe  $q_{14}$  et  $q_{18}$ , donc  $Q = S$ . Ceci est exclu, par exemple parce que  $S \cdot q_1 = q_2$ , donc  $S$  ne fixe pas  $c_1$ . Ainsi, nécessairement,  $Q$  fixe 0,  $p_3$  et  $c$ . C'est donc la rotation de  $\Delta$  qui envoie  $q_{14}$  sur  $q_{18}$  et fixe le triplet  $(q_{14}, q_{18}, q_1)$ . Finalement

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{-1+i+j-k}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1+i-j+k}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.3.16)$$

Par ailleurs  $Q^3 = Id$ , et le troisième cycle est donné par

$$T_3 \xrightarrow{Q} T_4 \xrightarrow{Q^2} T_3.$$

Les cycles des faces de codimension 2 sont donnés par (nous désignons une face de codimension 2 par le triplet ordonné de ses sommets) :

$$(0, c_1, q_{18}) \xrightarrow{Q^2} (0, c_1, q_{14}) \xrightarrow{P} (p_3, c_1, q_{14}) \xrightarrow{Q} (p_3, c_1, q_{18}) \xrightarrow{P^2} (0, c_1, q_{18})$$

et  $P^2QPQ^2$  vaut l'identité;

$$(0, q_{14}, q_{18}) \xrightarrow{S} (p_3, q_{14}, q_{18}) \xrightarrow{P^2} (0, q_{14}, q_{18})$$

et  $P^2S$  est d'ordre 3;

$$(c_1, q_{14}, q_{18}) \xrightarrow{P} (c_1, q_{14}, q_{18})$$

et  $P$  est d'ordre 3;

$$(c_1, 0, p_3) \xrightarrow{Q} (c_1, 0, p_3)$$

et  $Q$  est d'ordre 3;

$$(0, p_3, q_{14}) \xrightarrow{Q} (0, p_3, q_{18}) \xrightarrow{S} (p_3, 0, q_{18}) \xrightarrow{Q^2} (p_3, 0, q_{14}) \xrightarrow{S} (0, p_3, q_{14})$$

et  $SQ^2SQ$  est d'ordre 2.

Finalement, nous obtenons le

**Théorème 4.3.17.** *Le groupe  $\Delta$  est engendré par les trois appariements de faces  $P, Q$  et  $S$  définis en (4.3.14), (4.3.16) et (4.3.15). Une présentation en est donnée par*

$$\Delta = \langle P, Q, S \mid S^2 = P^3 = Q^3 = (SQ^2SQ)^2 = P^2QPQ^2 = (P^2S)^3 \rangle,$$

ou, de manière équivalente, par

$$\Delta = \langle P, Q, S \mid S^2 = P^3 = Q^3 = (SQ^{-1}SQ)^2 = P^{-1}QPQ^{-1} = (P^{-1}S)^3 \rangle.$$

### 4.3.3 Un système de générateurs et un domaine fondamental pour $\Gamma_{\infty}$

Revenons au groupe parabolique entier  $\Gamma_{\infty}$ , et considérons à nouveau la suite (4.3.1). Les 3 éléments de  $\Gamma_{\infty}$

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} \frac{-1-i+j-k}{2} & \frac{-1-i+j+k}{2} & \frac{1-i-j+k}{2} \\ 0 & \frac{-1+i+j-k}{2} & \frac{1-i+j+k}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-1-i+j-k}{2} \end{bmatrix}; \quad (4.3.18)$$

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} \frac{-1+i-j+k}{2} & 0 & \frac{-1+i+j-k}{2} \\ 0 & \frac{-1+i+j-k}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1+i-j+k}{2} \end{bmatrix}; \quad (4.3.19)$$

et

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} -i & 1 & \frac{1+i+j+k}{2} \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \quad (4.3.20)$$

se projettent par  $\Pi^*$  sur les trois générateurs de  $\Delta = \Pi^*(\Gamma_{\infty})$   $P, Q$  et  $S$  respectivement.

De plus,

$$\tilde{P}^3 = \tilde{Q}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & i-j+k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

et  $\tilde{P}^3$  (ou  $\tilde{Q}^3$ ) est la translation verticale par  $2i - 2j + 2k$ ;

$$\tilde{S}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -i \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

et  $\tilde{S}^2$  est la translation verticale par  $2i$ .

Enfin, si l'on relève avec  $\tilde{P}, \tilde{Q}$  et  $\tilde{S}$  la cinquième relation de la présentation donnée au théorème 4.3.17, on constate que

$$\tilde{P}^{-1}\tilde{Q}\tilde{P}\tilde{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -i-j \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

et le produit  $\tilde{P}^{-1}\tilde{Q}\tilde{P}\tilde{Q}^{-1}$  est la translation verticale par  $-2i - 2j$ .

Ces trois translations verticales engendrent le noyau  $2i\mathbb{Z} \oplus 2j\mathbb{Z} \oplus 2k\mathbb{Z}$  de la suite exacte (4.3.1), par conséquent  $\tilde{P}, \tilde{Q}$  et  $\tilde{S}$  engendrent ce noyau. Comme nous savons par ailleurs que leurs projetés  $P, Q$  et  $S$  engendrent l'image de la suite, nous obtenons la

**Proposition 4.3.21.** *Les trois éléments  $\tilde{P}, \tilde{Q}$  et  $\tilde{S}$  de  $\mathbf{Sp}(2,1)$  forment un système de générateurs de  $\Gamma_\infty$ .*

Pour ce qui est d'obtenir un domaine fondamental pour  $\Gamma_\infty$ , un premier constat, immédiat et naïf, est le suivant : le noyau de (4.3.1) est engendré par 3 translations verticales, dans chacune des directions de  $\mathfrak{Im}(\mathbb{H})$ ,  $2i$ ,  $2j$  et  $2k$ . Le cube  $\mathbf{C}$  de sommets

$$\mathbf{C} : (\pm i, \pm j, \pm k) \subset \mathfrak{Im}(\mathbb{H})$$

est donc un domaine fondamental pour son action sur  $\mathfrak{Im}(\mathbb{H})$ . Nous connaissons par ailleurs un domaine fondamental,  $\mathbf{S}$ , pour l'action de l'image de (4.3.1) sur  $\mathbb{H}$ , nous en déduisons donc la

**Proposition 4.3.22.** *Le polyèdre produit*

$$\mathbf{D} = \mathbf{S} \times \mathbf{C} \subset \mathbb{H} \times \mathfrak{Im}(\mathbb{H}) = \mathcal{H}$$

*est un domaine fondamental pour l'action de  $\Gamma_\infty$  sur  $\partial H_{\mathbb{H}}^2 - \{q_\infty\} \simeq \mathcal{H}$ .*

Ce domaine fondamental est cependant combinatoirement bien trop compliqué pour être exploitable : le théorème de Poincaré est un outil théorique pour obtenir une présentation. En pratique, l'explicitation des appariements de faces dans le cas d'un polyèdre tel que celui de la proposition 4.3.22 est bien trop fastidieuse pour qu'on songe à la faire à la main (d'ailleurs, si l'on y parvenait, la présentation obtenue serait elle aussi peu exploitable car bien trop longue).

Mais il faut surtout garder à l'esprit que notre premier but est d'obtenir un domaine fondamental pour le groupe  $\Gamma$  tout entier. L'étape suivante, comme nous l'avons annoncé en introduction de ce chapitre, est de prendre le cône géodésique sur le domaine pour  $\Gamma_\infty$ , puis de l'intersecter avec l'extérieur des sphères isométriques de  $\Gamma$ . Partant d'un polyèdre avec tant de faces, nous ne pouvons espérer obtenir une description raisonnable de cette intersection.

Il s'agirait donc d'améliorer ce domaine, en opérant des découpages et des collages sur  $\mathbf{D}$  au moyen de transformations de  $\Gamma_{\infty}$ . Nos tentatives dans cette direction n'ont pas abouti. Nous décrivons rapidement, dans la dernière partie de cette thèse, les différentes stratégies que nous avons adoptées, et y présentons plus en détails celle qui nous le pensons devraient finalement aboutir.

Pour finir ici cette étude sur une note positive néanmoins, nous consacrons la (courte) section suivante à l'exposition d'un système de générateurs pour le groupe  $\Gamma$  tout entier.

#### 4.4 Un système générateur pour $\Gamma$

Une transformation de  $\mathbf{Sp}(2, 1)$  particulièrement importante dans notre étude est l'involution

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.4.1)$$

Cette isométrie échange les points  $q_{\infty}$  et  $q_0$  du bord de  $H_{\mathbb{H}}^2$ . On obtient le groupe complet des isométries de  $H_{\mathbb{H}}^2$  en adjoignant  $R$  au groupe parabolique  $\mathcal{P}$  : si  $G$  est une isométrie quelconque de  $H_{\mathbb{H}}^2$  ne fixant pas  $q_{\infty}$ , alors, notant  $T$  la translation d'Heisenberg par  $G \cdot q_{\infty}$ ,  $T$  fixe  $q_{\infty}$  et  $RTG$  aussi. Ainsi, l'isométrie  $G$  s'écrit bien comme produit de  $R$  et d'éléments de  $\mathcal{P}$ ,

$$G = T^{-1} \cdot R \cdot RTG.$$

En particulier, comme  $R$  appartient à  $\Gamma$ , on obtient  $\Gamma$  tout entier en adjoignant  $R$  à  $\Gamma_{\infty}$ , et on trouve bien le système de 4 générateurs annoncé plus haut :

**Théorème 4.4.2.** *Le groupe  $\Gamma$  est engendré par 4 éléments,*

$$\Gamma = \langle \tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{S}, R \rangle.$$


---

---

### Quelques mots de conclusion

À la fin de cette thèse, plusieurs questions restent encore en suspens. Tout d'abord bien sûr, l'objectif initial que nous nous étions fixé au commencement des travaux présentés dans le chapitre 4 n'est que partiellement atteint.

Les travaux présentés dans les chapitres 2 et 3 quand à eux, forment un ensemble abouti, mais suscitent néanmoins de nombreuses interrogations.

En conclusion de ce manuscrit, nous souhaitons indiquer brièvement quelques unes des questions soulevées par les résultats exposés dans les premiers chapitres, puis donner quelques pistes qui pourraient mener à clore le travail du chapitre 4.

**Questions soulevées par les chapitres 2 et 3.** Commençons par dire que pour terminer tout à fait le travail présenté dans le chapitre 3, nous aimerions obtenir une formule close pour le pfaffien de la matrice de courbure des espaces  $H_{\mathbb{H}}^n$ . Cet exercice combinatoire est probablement réalisable en temps fini (et raisonnable), et nous espérons l'achever prochainement.

Ensuite, plusieurs questions se posent à la suite de nos travaux. Indiquons en deux, les plus générales (et pour lesquelles nous n'avons à l'heure actuelle pas d'élément de réponse) :

1. Bien évidemment, nous l'avons déjà signalé à de nombreuses reprises, il serait très agréable de comprendre le comportement du rayon maximal avec la dimension. Il faudrait pour cela très certainement de nouveaux outils. Pour l'instant, la seule idée que l'on peut se faire de ce comportement est donnée par la connaissance de minoration optimales, pour certaines dimensions, et certaines sous-familles de variétés hyperboliques (à pointes, orientables, ...). Une méthode générale, se passant de l'exhibition d'exemples réalisant le minimum, est-elle envisageable? Est il raisonnable d'espérer une méthode englobant tout à la fois les variétés ouvertes et fermées?
2. Qu'en est-il du rayon maximal des *orbifolds*? Les travaux de Hsien-Chung Wang minorent (explicitement) le rayon d'injectivité d'un sous-groupe discret quelconque d'un groupe de Lie semi-simple de type non-compact  $G$ , agissant par translation sur  $G$ . On dispose donc d'une borne sur le rayon d'une boule dans  $\Gamma \backslash G$ , que  $\Gamma$  ait de la torsion ou non. Il serait intéressant d'étudier de plus près la submersion riemannienne décrite au chapitre 3, pour tenter de comprendre comment se comportent les boules vis-à-vis de la fibration induite.

### Pistes pour le chapitre 4.

*Modification du domaine fondamental pour  $\Delta$ .* La première grande étape, si l'on souhaite obtenir un domaine fondamental combinatoirement simple pour le groupe modulaire d'Hurwitz, est d'obtenir un domaine fondamental combinatoirement simple pour l'action du sous-groupe parabolique  $\Gamma_\infty$  sur le bord de  $H_{\mathbb{H}}^2$  privé d'un point

$$\partial H_{\mathbb{H}}^2 - \{q_\infty\} \simeq \mathcal{H} = \mathbb{H} \times \mathfrak{Im}(\mathbb{H}).$$

Rappelons que la projection sur le premier facteur  $\Pi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{H}$  induit une projection  $\Pi_\star : \Gamma_\infty \rightarrow \Delta \subset \text{Isom}(\mathbb{H})$  (voir la suite exacte 4.1.9), et que cette étape à son tour se divise en deux : obtenir un domaine fondamental « simple » pour l'action de  $\Delta$  sur  $\mathbb{H}$ , puis relever ce domaine à  $\mathcal{H}$  en un domaine pour l'action de  $\Gamma_\infty$ . Nous avons construit un domaine fondamental  $\mathbf{S}$ , combinatoirement le plus simple possible (c'est un simplexe) pour l'action de  $\Delta$  sur  $\mathbb{H}$  (théorème 4.3.11). Le noyau de la projection  $\Pi_\star$  est le groupe engendré par trois translations verticales, par  $2i$ ,  $2j$ , et  $2k$ ,

$$\ker(\Pi_\star) \simeq \mathbb{Z}^3 \subset \text{Isom}(\mathfrak{Im}(\mathbb{H})),$$

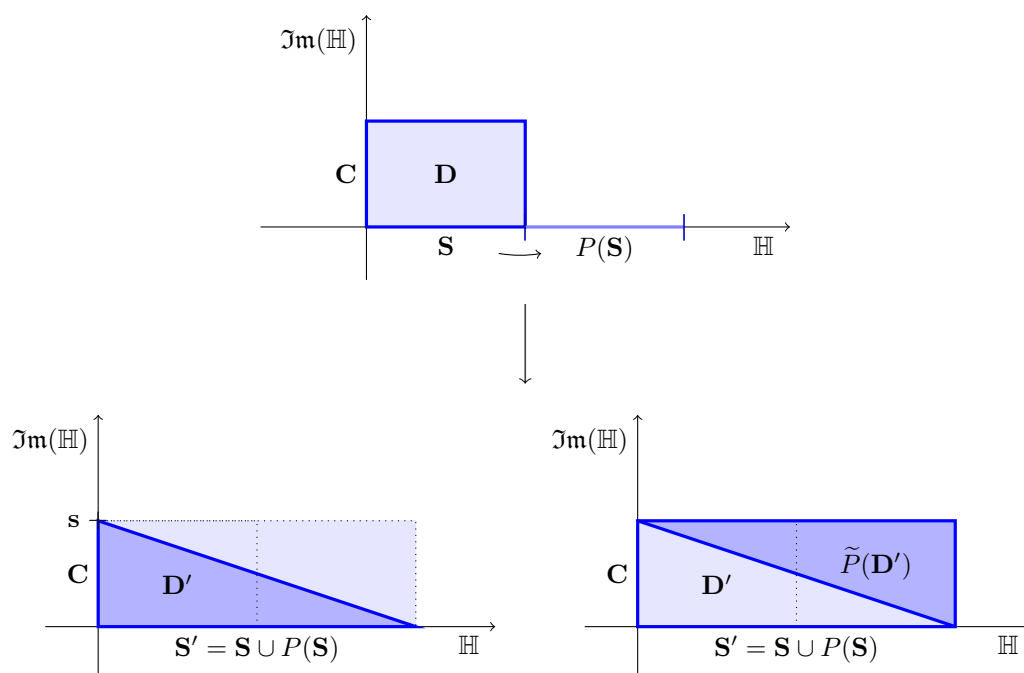
et un domaine fondamental pour l'action de ce groupe est simplement un cube. Nous déduisons ainsi un domaine fondamental  $\mathbf{D}$  pour  $\Gamma_\infty$ , donné par le produit de ce cube et du simplexe trouvé précédemment (proposition 4.3.22).

Cet objet n'est pas si complexe combinatoirement, mais il est déjà très difficile à manier manuellement (il a par exemple  $5 \times 8 = 40$  sommets. . .). Nous aimerions donc procéder à des découpages/collages (par des éléments du groupe) sur  $\mathbf{D}$ , pour en simplifier la combinatoire. Les possibilités sont infinies, et nous n'avons pas les outils informatiques pour automatiser ces opérations : sans stratégie, l'aboutissement de cette entreprise relèverait du miracle.

Ainsi, après avoir – longuement – tenté quelques approches, nous avons décidé de mettre de côté cette question jusqu'à la fin de notre thèse. Nous aimerions à présent revenir sur le sujet. Une stratégie qui nous paraît intéressante est la suivante : quand on fait le produit brutal du simplexe  $\mathbf{S}$  par le cube  $\mathbf{C}$ , on ajoute beaucoup trop de sommets pour espérer obtenir une combinatoire simple (partant de notre simplexe  $\mathbf{S}$  en dimension 4, il ne faut ajouter que 3 sommets pour obtenir un simplexe en dimension 7 (la dimension de  $\partial H_{\mathbb{H}}^2$ ) : on souhaite donc en ajouter 3, ou « pas beaucoup plus » que 3). Le volume du domaine fondamental est bien sûr invariant, et on le connaît : il vaut

$$\text{Vol}(\mathbf{D}) = \text{Vol}(\mathbf{S}) \cdot \text{Vol}(\mathbf{C}).$$

Si l'on veut rajouter moins de sommets verticaux, il nous faut donc agrandir la base. Ceci pourrait se faire en accolant la base  $\mathbf{S}$  à ses images par un sous-groupe (fini) bien choisi de  $\Delta$ . Le prisme produit de cette nouvelle base  $\mathbf{S}'$  par le domaine vertical  $\mathbf{C}$  serait alors pavé par des relevés (convenables) des transformations ayant servi à agrandir  $\mathbf{S}$  (voir le schéma plus bas).



Au départ, notre domaine fondamental  $D$  est simplement le produit de  $S$  par  $C$ . Au moyen de la transformation  $P$  de  $\Delta$ , on agrandit la base  $S$  en  $S'$ . On obtiendrait alors un domaine fondamental  $D'$  en ajoutant seulement quelques sommets à la nouvelle base (sur le schéma, en ajoutant seulement le sommet  $s$ ). Le prisme  $S' \times C$  est pavé par les images de  $D'$  par le groupe engendré par un relevé de  $P$ ,  $\tilde{P} \subset \Gamma_\infty$ .

La question est alors de choisir le sous-groupe de  $\Delta$  au moyen duquel nous agrandissons la base. Pour cela, au moins deux candidats naturels nous semblent mériter qu'on les étudie :

- nous avons obtenu une présentation de  $\Delta$  (c'est le théorème 4.3.17), et nous connaissons les cycles des sommets de  $S$ . Nous pourrions essayer d'agrandir  $S$  en « tournant autour des sommets », c'est-à-dire, en lui accolant ses images par l'un (ou plusieurs) des sous-groupes (finis) engendrés par les cycles dans notre présentation ;
- d'autres sous-groupes finis très naturels dont nous pourrions étudier l'action sur la base sont ceux donnés par la réduction modulo un idéal principal de l'ordre d'Hurwitz. Ils ont été bien étudiés, par exemple, par James Woodward dans sa thèse [Woo06].

*Intersection des sphères isométriques.* Rappelons que si nous obtenons un domaine agréable pour le sous-groupe parabolique, l'étape suivante, probablement bien plus délicate, est d'étudier son intersection avec l'extérieur des sphères isométriques des éléments du groupe ne stabilisant pas  $q_\infty$ .

Pour anticiper cette étape, et choisir un domaine fondamental pour le parabolique s'intersectant agréablement avec les sphères isométriques, nous pourrions aussi procéder dans l'ordre inverse. Il s'agirait d'étudier tout d'abord l'intersection des sphères isométriques (en fait, étudier l'intersection de certaines sphères seulement : il y a une sphère isométrique

centrale, c'est celle associée à l'involution  $R$ , introduite au paragraphe 4.4, et il suffirait probablement d'étudier l'intersection de cette sphère et de ses voisines). La projection de cette intersection sur le bord de  $H_{\mathbb{H}}^2$  nous donne un polyèdre : comprendre comment ce polyèdre est pavé par le groupe parabolique nous indiquerait des transformations privilégiées pour découper/recoller notre domaine fondamental.

*Étude d'un groupe plus gros que  $\Gamma$ .* Si  $\Theta$  est un réseau de  $\text{Isom}(H_{\mathbb{H}}^2)$ , son sous-groupe parabolique  $\Theta_{\infty}$  fournit un réseau de  $\text{Isom}(\mathcal{H})$ . Un tel réseau possède un sous-réseau, formé uniquement de translations de Heisenberg (un tel sous-groupe est appelé *réseau de Bieberbach*), d'indice fini dans  $\Theta_{\infty}$ , et cet indice est *majoré par 576* (voir par exemple le livre de Peter Buser et Hermann Karcher [BK81], pour les réseaux de Bieberbach, ou, pour cette borne précisément, l'article d'Inkang Kim et John R. Parker, [KP03, p. 310]).

Dans notre cas, le réseau de Bieberbach est le sous-groupe de  $\Gamma_{\infty}$  formé par les translations d'Heisenberg représentées par des matrices à coefficients dans  $D_4$ . Un domaine fondamental pour l'action induite de ce réseau sur  $\mathbb{H}$  est la cellule de Dirichlet-Voronoi  $\mathcal{V}_{D_4}$  décrite à la page 98. L'indice de ce réseau dans  $\Gamma_{\infty}$  est l'ordre du sous-groupe  $\Delta_R$  (voir les notations 4.3.2) stabilisant  $\mathcal{V}_{D_4}$ . Or nous l'avons remarqué (c'est le lemme 4.3.3),  $\Delta_R$  n'est pas le groupe entier des isométries du 24-cellules, mais simplement *un sous-groupe d'indice 2* de ce groupe. Le groupe du 24-cellules est d'ordre 576, et l'ordre de  $\Delta_R$  (donc l'indice du réseau de Bieberbach de  $\Gamma_{\infty}$ ) est 288.

D'après la remarque 4.3.6, on obtient tout le groupe du 24-cellule en ajoutant un élément à  $\Delta_R$ . Ajoutant à  $\Gamma_{\infty}$  une isométrie se projetant sur un tel élément, on obtient un réseau réalisant la borne sur l'indice du réseau de Bieberbach. Par exemple, le groupe

$$\hat{\Gamma} = \left\langle \Gamma, \begin{bmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\rangle$$

contient  $\Gamma$  (et  $\Gamma$  y est d'indice 2), et réalise cette borne. Il serait probablement intéressant d'étudier ce groupe-ci plutôt que  $\Gamma$ .

---



---

*Constante de Margulis des espaces hyperboliques*

We now give a detailed proof of proposition 2.4.3, which we state here again for the reader's convenience :

**Proposition** (Proposition 2.4.3). *For all  $n$ , one can construct a discrete subgroup  $\Gamma$  of  $\text{Isom}(H_{\mathbb{R}}^n)$  and a point  $x \in H_{\mathbb{R}}^n$  such that*

$$\Gamma_x(\epsilon) = \langle g \in \Gamma \mid d(x, g(x)) \leq \epsilon \rangle$$

*is not virtually nilpotent, where  $\epsilon = \frac{C}{\sqrt{n}}$ .*

Recall, from chapter 2 (theorem 2.4.4), that this proposition implies

**Théorème.** *There exists a constant  $C > 0$  such that*

$$\mu_{H_{\mathbb{K}}^n} \leq \frac{C}{\sqrt{n}},$$

*for  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  or  $\mathbb{H}$ .*

### A.1 Stratégie

Consider the free group on two generators  $F_2 = \langle f, g \rangle$ , and  $\mathcal{G}$  its Cayley graph (relatively to the generating system  $\{f, g\}$ ). Suppose we have constructed an  $F_2$ -equivariant map

$$\sigma : \mathcal{G} \longrightarrow H_{\mathbb{R}}^n,$$

sending the root of  $\mathcal{G}$  and its two first edges  $f$  and  $g$  on a point  $x = p_0$  in  $H_{\mathbb{R}}^n$  and two geodesic segments of length  $\epsilon$  based at  $p_0$ .

Then, if  $\sigma$  is injective, the group

$$\sigma(F_2)_\epsilon(p_0) = \langle \gamma \in \sigma(F_2) \mid d(p_0, \gamma(p_0)) \leq \epsilon \rangle$$

is  $F_2$  itself, highly non virtually abelian. Therefore, once we have constructed such a map an proved that it is an embedding, Proposition 2.4.3 is proved, provided *the image of  $F_2$  in  $\text{Isom}(H_{\mathbb{H}}^n)$  is discrete.*

At first, we thus construct a local embedding  $\sigma : \mathcal{G} \rightarrow H_{\mathbb{H}}^n$ ,  $F_2$ -equivariant, sending the first two edges of the graph on two geodesic segments of length  $\epsilon$  (Definition A.2.2).

Secondly, we show that for  $\epsilon \geq \frac{C}{\sqrt{n}}$ , this map is a *quasi-isometric embedding* (Proposition A.5.1). This ensures that the image of  $F_2$  is discrete (see for instance Mickaïl Kapovich's article [Kap05, Lemme 2.2]), and ends the proof.

## A.2 Construction du plongement local

Fix an origin  $p_0 \in H_{\mathbb{H}}^n$ , and choose two orthogonal geodesics through  $p_0$ ,  $L_F$  and  $L_G$ . We shall construct two loxodromic elements of  $\text{Isom}^+(H_{\mathbb{R}}^n)$ ,  $F$  and  $G$ , with axes  $L_F$  and  $L_G$  respectively, with translation length  $\epsilon$ , and use them to embed  $\mathcal{G}$ . Figure A.1 gives a schematic view of what we are describing below (in dimension 3).

We start by choosing a point  $p_f$  on  $L_F$ , and a point  $p_g$  on  $L_G$ , both  $\epsilon$  away from  $p_0$ . By doing so, we define the images of the edges  $f$  and  $g$  emanating from the origin in the graph (the geodesic segments  $[p_0, p_f]$  and  $[p_0, p_g]$ ), and the images of the vertex of the graph corresponding to the words  $f$  and  $g$ .

Next, we construct the images of all the reduced words of the form  $fgf \dots fg$  or  $gfg \dots gf$  of length  $k < n$ . Let us detail the construction of the words of the form

$$fg, fgf, fgfg, \dots,$$

for instance, the construction process for the words  $gfg \dots$  being strictly symmetrical.

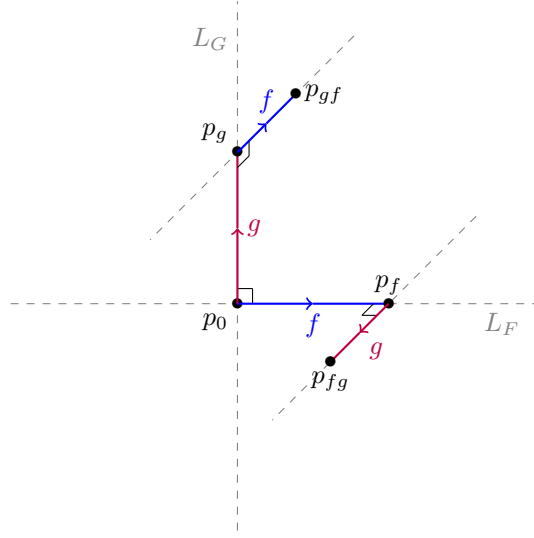
Start by choosing a geodesic segment through  $p_f$ , of length  $\epsilon$ , orthogonal to  $[p_0, p_f]$ , label it  $g$  and name its other end  $p_{fg}$ . Again, pick a geodesic segment through  $p_{fg}$ , of length  $\epsilon$ , orthogonal to both  $[p_0, p_f]$  and  $[p_f, p_{fg}]$ , label it  $f$  and name its other end  $p_{fgf}$ . Proceed as such to construct all the vertex  $p_m$ , where  $m = fgf \dots fg$  is a word of length  $k < n$ , choosing at each step a segment of length  $\epsilon$ , orthogonal to all the preceding segments, and labelling it successively  $f$  then  $g$ .

At step  $n - 1$ , we have constructed the images of the vertex of the graph corresponding to the reduced words  $fgf \dots fg$  of length smaller than  $n$ , and of the corresponding edges  $f, g, f, \dots$ . To construct the images of the vertex corresponding to the words  $gfg \dots gf$ , we follow the exact same steps, starting from  $L_G$  and  $p_g$ . Let us consider the four regular orthoschemes

- $S_f$ , with vertex  $p_0, p_f, p_{fg}, \dots, p_{m_f}$  where  $m_f = fgf \dots f$  is of length  $n - 2$ ;
- $S_g$ , with vertex  $p_0, p_g, p_{gf}, \dots, p_{m_g}$  where  $m_g = gfg \dots g$  is of length  $n - 2$ ;
- $S_{fg}$ , with vertex  $p_f, p_{fg}, \dots, p_{m_{fg}}$  where  $m_{fg} = fgf \dots g$  is of length  $n - 1$ ;
- $S_{gf}$ , with vertex  $p_g, p_{gf}, \dots, p_{m_{gf}}$  where  $m_{gf} = gfg \dots f$  is of length  $n - 1$ .

We are now ready to define  $F$  and  $G$ , and the desired map  $\sigma$  :

**Définition A.2.1.** Let  $F$  be the unique loxodromic element of  $\text{Isom}^+(H_{\mathbb{R}}^n)$  with axe  $L_F$ , with translation length  $\epsilon$ , and sending  $S_g$  on  $S_{fg}$ , and let  $G$  be the unique loxodromic element of  $\text{Isom}^+(H_{\mathbb{R}}^n)$  with axe  $L_G$ , with translation length  $\epsilon$ , and sending  $S_f$  on  $S_{gf}$ .


FIGURE A.1 – Construction of the first vertex and edges for  $n = 3$ .

The existence of these isometries can be checked using linear algebra on  $\mathbb{R}^{n,1}$ . Also, the conditions on  $F$  and  $G$  define them uniquely: if an element of  $\text{Isom}(H_{\mathbb{H}}^n)$  fixes, say, the  $n$  points  $p_0, p_f, p_{fg}, \dots, p_{fgf\dots g}$ , it then fixes the smallest totally geodesic subspace containing all these points. By construction, this subspace has to be the whole of  $H_{\mathbb{R}}^n$ , and the isometry has to be the identity.

**Définition A.2.2.** Let  $\sigma : \mathcal{G} \rightarrow H_{\mathbb{R}}^n$  be the local embedding sending a word  $m$  on a point  $p_m = M(p_0)$ , where  $M$  is the isometry of  $H_{\mathbb{R}}^n$  formed by a product of  $F$ 's and  $G$ 's composed in the order of the letters of  $m$ .

It remains to check that the map  $\sigma$  is an embedding—that is, that  $\sigma$  is injective—and that it is a quasi-isometry, from  $\mathcal{G}$  onto  $\sigma(\mathcal{G}) \subset H_{\mathbb{R}}^n$ . In order to do that, letting  $m_1$  and  $m_2$  be two reduced words, and denoting by  $p_{m_1}$  and  $p_{m_2}$  their images in  $H_{\mathbb{R}}^n$ , we need to bound the quantity  $\rho(p_{m_1}, p_{m_2})$ . We can assume that  $p_{m_1} = p_0$ , and thus, the quantity we will be interested in is  $\rho(p_0, p_m)$ , where  $m$  is a reduced word and  $p_m$  its image in  $H_{\mathbb{H}}^n$ .

Note that by construction, if  $m$  is a word of length  $l$ , there is a path made of  $l$  geodesic segments of length  $\epsilon$  from  $p_0$  to  $p_m$ . So we already have, by the triangle inequality,

$$\rho(p_0, p_m) \leq \epsilon l \tag{A.2.3}$$

which is the right side of the inequality we are seeking.

The main purpose of the sequel is thus to bound  $\rho(p_0, p_m)$  by *below*, by a positive quantity, to be able to conclude that  $\sigma$  is injective, and by a quantity depending on the length of  $m$ , which, together with Inequality (A.2.3), will ensure that  $\sigma$  is a quasi-isometry, and hence end the proof of Proposition 2.4.3.

We first take care of the case where  $m$  is a reduced word of length strictly smaller than the dimension, and then move on to the case where  $\text{length}(m) \geq n$ .

### A.3 Minoration de $\rho(p_0, p_m)$ , quand $m$ est un petit mot

First, note that if  $m$  is a reduced word of length strictly smaller than  $n$ , paragraph A gives us a good description of the image of the path in  $\mathcal{G}$  from the origin to  $m$ . Indeed, recall the definitions of  $F$  and  $G$  (Definition A.2.1) : the path in  $H_{\mathbb{R}}^n$  corresponding to the words  $ff, gg, f^{-1}f^{-1}$  or  $g^{-1}g^{-1}$  is a geodesic segment of length  $2\epsilon$ , and the path corresponding to the other words of length 2 is made of two orthogonal segments of length  $\epsilon$ . The construction being equivariant, we see that adding a letter to a word corresponds to adding a segment of length  $\epsilon$ , either aligned with the preceding segment of the path, or orthogonal to the whole path.

In the main, we have the following lemma :

**Lemme A.3.1.** *Let  $m$  be a reduced word of length  $l < n$ ,  $p_m = \sigma(m)$  be its image in  $H_{\mathbb{R}}^n$ , and consider the path in  $H_{\mathbb{R}}^n$  from  $p_0$  to  $p_m$  image of the path in  $\mathcal{G}$  from the origin to  $m$ . It is made of  $k$  geodesic segments (where  $1 \leq k \leq l$ ), of respective length*

$$l_1\epsilon, l_2\epsilon, \dots, l_k\epsilon,$$

with

$$\sum l_j = l.$$

Further, denoting by  $p_1, p_2, \dots, p_k = p_m$  the extremities of these segments, for all  $j < k$ , the paths

$$[p_0, p_1] \cup \dots \cup [p_{j-1}, p_j] \text{ and } [p_j, p_{j+1}] \cup \dots \cup [p_{k-1}, p_m]$$

are orthogonal.

From this lemma, the distance  $\rho(p_0, p_m)$ , when  $m$  is a small reduced word, can be explicitly computed, and thus bounded :

**Lemme A.3.2.** *If  $m$  is a reduced word of length  $l < n$ , and  $p_m$  is its image by  $\sigma$  in  $H_{\mathbb{H}}^n$ ,*

$$\cosh(\epsilon)^l \leq \cosh(\rho(p_0, p_m)).$$

*Démonstration.* Consider the path from  $p_0$  to  $p_m$  in  $H_{\mathbb{H}}^n$ , obtained as the image of the path from the origin to  $m$  in the graph, and let  $p_1, p_2, \dots, p_k = p_m$  be as in Lemma A.3.1. For all  $j \leq k$ , the geodesic segment  $[p_{j-1}, p_j]$  has length  $l_j\epsilon$  (with  $\sum l_j = l$ ), and the geodesic triangle  $(p_0, p_{j-1}, p_j)$  is right-angled at  $p_{j-1}$ . Applying Pythagore Theorem (in its hyperbolic version), we see that, for all  $j \leq k$ ,

$$\cosh(d(p_0, p_j)) = \cosh(d(p_0, p_{j-1})) \cosh(d(p_{j-1}, p_j)),$$

i.e.

$$\cosh(d(p_0, p_j)) = \cosh(d(p_0, p_{j-1})) \cosh(l_j \epsilon),$$

and by induction,

$$\cosh(d(p_0, p_k)) = \cosh(l_1 \epsilon) \cosh(l_2 \epsilon) \cdots (l_k \epsilon).$$

But also,

$$\cosh(l_1 \epsilon) \cosh(l_2 \epsilon) \cdots \cosh(\epsilon) \geq \cosh(\epsilon)^{\sum l_j} = \cosh(\epsilon)^l$$

which is the desired bound.  $\square$

#### A.4 Découpage du chemin $[p_0, p_m]$ , quand $\text{long}(m) \geq n$

Next, we need to estimate  $\rho(p_0, p_m)$  when  $m$  is a word of length  $l$  greater or equal to the dimension  $n$  : let  $m$  be a word of length  $l \geq n$ , and let  $p_m$  be its image in  $H_{\mathbb{H}}^n$ .

In order to ease the reading of the end of this proof, let us immediately introduce some notations :

**Notations A.4.1.** We put  $d = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ , and let  $(q, r)$  be the quotient and remainder of the euclidean division of  $l$  by  $d$  (note that  $q$  is at least 2, since  $l$  is strictly greater than  $n-1$ ).

Now, consider the path from  $p_0$  to  $p_m$  in  $H_{\mathbb{H}}^n$ , image of the path from the origin to  $m$  in the graph (it is made of  $l$  geodesic segments of length  $\epsilon$ ), and divide it into  $q$  subpaths made of  $d$  geodesic segments (and a last one made of  $r$  segments). We name the ends of these subpaths  $p_0, p_1, \dots, p_q, p_m$ , (with  $p_q = p_m$  if  $r = 0$ ), and draw the bissectors between each pair of consecutive ends,  $\mathfrak{E}_{(p_i, p_{i+1})}$  (see Figure A.2).

We shall now prove that in the configuration depicted in Figure A.2, two consecutive bissectors are separated by a positive distance  $\delta$ , provided  $\epsilon$  is large enough. Since the path from  $p_0$  to  $p_m$  has to cross all the intermediate bissectors, this will ensure that the distance  $\rho(p_0, p_m)$  is at least  $\delta \cdot (q-1)$ , and allow us to reach our conclusion, in paragraph A.

Let us look at the figure formed by three consecutive ends  $p_{i-1}, p_i, p_{i+1}$  and their bissectors (Figure A.3).

We will need the following lemma :

**Lemme A.4.2.** *Let  $m$  be a word of length  $l$  greater or equal to the dimension  $n$ , and let  $p_m$  be its image in  $H_{\mathbb{H}}^n$ . Cut the path from  $p_0$  to  $p_m$  as described depicted in Figures A.2 and A.3. Then the angle at each  $p_i$ ,  $\gamma_i$ , is greater or equal to  $\pi/2$ , for  $i$  from 1 to  $q-1$ .*

*Démonstration.* Let  $i$  be an integer between 1 and  $q-1$ , and consider the geodesic triangle  $T_i = (p_{i-1}, p_i, p_{i+1})$ . We want to estimate the length of the sides of  $T_i$ . Let  $m_1, m_2$  and  $m_3$  be the words in  $F_2$  corresponding respectively to the paths  $[p_{i-1}, p_i]$ ,  $[p_i, p_{i+1}]$  and  $[p_{i+1}, p_{i+1}] \subset \sigma(\mathcal{G})$ . Since these three words have length  $d < n$ ,  $d < n$  and  $2d < n$  respectively, by Lemma A.3.1, we know precisely their shapes. Divide them as in Lemma A.3.1 :

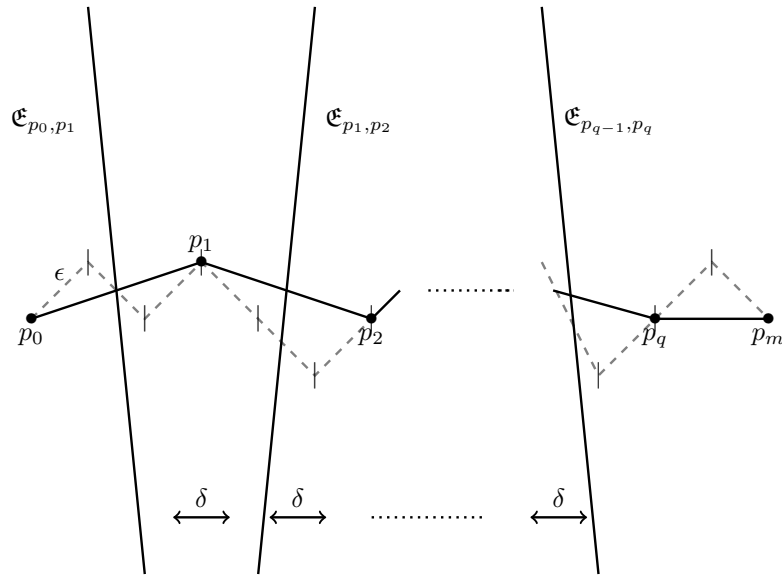


FIGURE A.2 – Schematic vision of the division of the path corresponding to a word  $m$  of length  $l > n$  (here  $d = 4$ ).

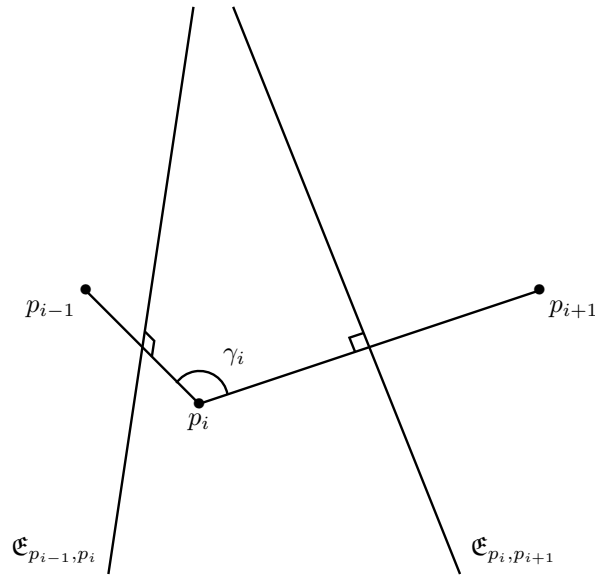


FIGURE A.3 – Configuration of two successive bisectors.

- $m_1$  is made of  $k_1$  mutually orthogonal geodesic segments of length  $l_1\epsilon, \dots, l_{k_1}\epsilon$ ;
- $m_2$  is made of  $k_2$  mutually orthogonal geodesic segments of length  $l'_1\epsilon, \dots, l'_{k_2}\epsilon$ ;
- $m_3$  is made of  $k_3$  mutually orthogonal geodesic segments.

Also, put

$$a = \rho(p_{i-1}, p_i), \quad b = \rho(p_i, p_{i+1}) \quad \text{and} \quad c = \rho(p_{i-1}, p_{i+1}).$$

If  $T_i$  is rectangle at  $p_i$ ,  $k_1 + k_2 = k_3$ , and

$$\cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b).$$

If not,

$$k_1 + k_2 = k_3 - 1,$$

and

$$\begin{aligned} \cosh(c) &= \cosh(l_1 \epsilon) \cdots \cosh((l_{k_1} + l'_1) \epsilon) \cdots \cosh(l'_{k_2} \epsilon) \\ &> \cosh(l_1 \epsilon) \cdots \cosh(l_{k_1} \epsilon) \cosh(l'_1 \epsilon) \cdots \cosh(l'_{k_2} \epsilon) = \cosh(a) \cosh(b). \end{aligned}$$

In that case, since by the cosine rule

$$\cos(\gamma_i) = \frac{\cosh(a) \cosh(b) - \cosh(c)}{\sinh(a) \sinh(b)},$$

we have  $\cos(\gamma_i) < 0$  and  $\gamma_i > \frac{\pi}{2}$ . Finally, in both cases,

$$\gamma_i \geq \frac{\pi}{2}.$$

□

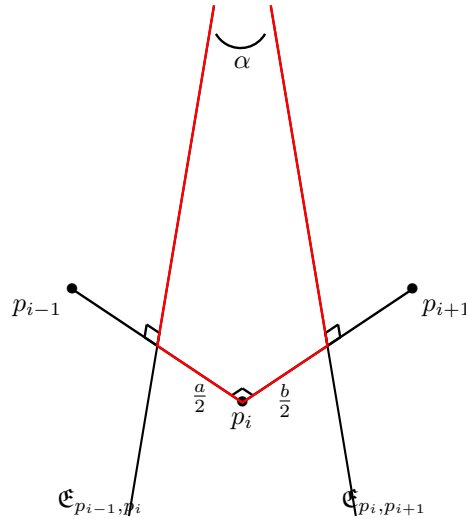


FIGURE A.4 – Configuration of two successive bissectors, when  $\gamma_i = \frac{\pi}{2}$

**Proposition A.4.3.** *Suppose we are in the configuration depicted in Figure A.3. Then the bissectors  $\mathfrak{E}_{p_{i-1}, p_i}$  and  $\mathfrak{E}_{p_i, p_{i+1}}$  do not intersect, provided*

$$\cosh(\epsilon)^{\frac{d}{2}} \geq 4.$$

*Démonstration.* Since, by Lemma A.4.2, the angle at  $p_i$  is greater or equal to  $\frac{\pi}{2}$ , the angle between the two bissectors  $\mathfrak{E}_{p_i, p_{i+1}}$  and  $\mathfrak{E}_{p_{i-1}, p_i}$  is smaller or equal to  $\alpha$  (see Figure A.4). As in the proof of Lemma A.4.2, put

$$a = \rho(p_{i-1}, p_i) \quad \text{and} \quad b = \rho(p_i, p_{i+1}).$$

The quadrilateral formed by the red segments in figure A.4 is a *Lambert quadrilateral*, hence

$$\mathfrak{E}_{p_i, p_{i+1}} \cap \mathfrak{E}_{p_{i-1}, p_i} = \emptyset \iff \sinh\left(\frac{a}{2}\right) \sinh\left(\frac{b}{2}\right) > 1$$

(see for instance [Bea95, §7.17] for a discussion about Lambert quadrilaterals). Now, by Lemma A.3.2, we know that  $\cosh(a)$  and  $\cosh(b)$  are both greater or equal to  $\cosh(\epsilon)^{\frac{d}{2}}$ . Using

$$\sinh\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh(a) - 1}{2}} \geq \sqrt{\frac{\cosh(\epsilon)^{\frac{d}{2}} - 1}{2}},$$

and

$$\sinh\left(\frac{b}{2}\right) \geq \sqrt{\frac{\cosh(\epsilon)^{\frac{d}{2}} - 1}{2}},$$

we see that the two bissectors do not intersect, provided

$$\frac{\cosh(\epsilon)^{\frac{d}{2}} - 1}{2} > 1 \iff \cosh(\epsilon)^{\frac{d}{2}} > 3$$

thus the conclusion.  $\square$

**Corollaire A.4.4.** *If  $\cosh(\epsilon)^d \geq 4$ , there exists  $\delta > 0$  such that, if  $m$  is an arbitrary word of length  $l \geq n$ , and  $\mathfrak{E}_{p_{i-1}, p_i}^m, i = 1, \dots, q$ , are the bissectors obtained from  $m$ , (see the construction on page 119 and in Figures A.2 and A.3), then*

$$\rho(\mathfrak{E}_{p_{i-1}, p_i}^m, \mathfrak{E}_{p_i, p_{i+1}}^m) \geq \delta \quad \text{for all } i \text{ from } 1 \text{ to } q - 1.$$

*Démonstration.* If  $\cosh(\epsilon)^d \geq 4$ , then, by Proposition A.4.3, two consecutive bissectors obtained by the construction described on page 119 do not intersect, and are thus separated by a strictly positive distance. Since there are only finitely many words of length  $d$  and  $2d$ , there are also only finitely many configurations corresponding to the schematic picture drawn in Figure A.3. Hence, the set of all possible distances separating a pair of consecutive bissectors is finite. The minimum of this set,  $\delta$ , is a strictly positive number satisfying the hunted conclusion.  $\square$

## A.5 L'application $\sigma$ est un plongement quasi-isométrique

We are now ready to prove that  $\sigma$  is a quasi-isometric embedding, for all  $\epsilon \geq \frac{6}{\sqrt{n}}$ , which will conclude the proof of Proposition 2.4.3.

**Proposition A.5.1.** *For  $\epsilon \geq \frac{6}{\sqrt{n}}$ , the map  $\sigma$  is a quasi-isometric embedding.*

*Démonstration.* Let  $\epsilon$  be greater or equal to  $\frac{6}{\sqrt{n}}$ . To begin with, note that in that case, the inequality needed to reach the conclusions of Proposition A.4.3, hence of Corollary A.4.4, is satisfied. Indeed, we have

$$\cosh(\epsilon)^{\frac{d}{2}} \geq \left(1 + \frac{\epsilon^2}{2}\right)^{\frac{d}{2}}$$



and

$$\left(1 + \frac{\epsilon^2}{2}\right)^{\frac{d}{2}} \geq 1 + \frac{d}{4}\epsilon^2.$$

Next, recall that  $d$  is  $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ , so that  $d \geq \frac{n}{3}$  and

$$1 + \frac{d}{4}\epsilon^2 \geq 1 + \frac{n}{12}\epsilon^2.$$

Hence, if  $\epsilon \geq \frac{6}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{36}{n}}$ ,  $\frac{n}{12}\epsilon^2 \geq 3$  and

$$\cosh(\epsilon)^{\frac{d}{2}} \geq 1 + \frac{n}{12}\epsilon^2 \geq 4.$$

First, we need to make sure that the map  $\sigma$  is an embedding, that is, we need to check that it is injective. Let  $m$  be a non-trivial reduced word in  $F_2$ , and let  $p_m$  be its image in  $H_{\mathbb{H}}^n$ . If the length  $l$  of  $m$  is strictly smaller than the dimension, then, by Lemma A.3.2,

$$\cosh(\epsilon)^l \leq \cosh(\rho(p_0, p_m)),$$

hence  $\rho(p_0, p_m) \neq 0$ .

If the length  $l$  of  $m$  is greater or equal to the dimension, cut the path from  $p_0$  to  $p_m$  as described on page 119 and depicted in Figures A.2 and A.3. Recall Notations A.4.1 :  $d$  is  $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ ,  $q$  is the quotient of the division of  $l$  by  $d$ , and  $q$  is at least 2. By Corollary A.4.4, there exists  $\delta > 0$  such that two consecutive bisectors appearing in this cutting are separated by a distance at least equal to  $\delta$ . Since the geodesic joining  $p_0$  to  $p_m$  must intersect all the intermediate bisectors, we thence have

$$\delta \cdot (q - 1) \leq \rho(p_0, p_m), \tag{A.5.2}$$

and again,  $\rho(p_0, p_m) \neq 0$ . In the main, we verified that if  $m$  is an arbitrary (non-trivial) reduced word in  $F_2$ ,  $\sigma(m) \neq \sigma(e) = p_0$ , in other words, we checked that  $\sigma$  is injective.

Denote by  $d_{\mathcal{G}}$  the distance on  $\mathcal{G}$ . We now need to find constants  $A, B, C$  and  $D$  such that for all reduced words  $m_1$  and  $m_2$ ,

$$Ad_{\mathcal{G}}(m_1, m_2) - B \leq \rho(p_{m_1}, p_{m_2}) \leq Cd_{\mathcal{G}}(m_1, m_2) + D.$$

Since we can assume that  $p_{m_1} = p_0$ , this reduces to showing that if  $m$  is a reduced word of length  $l$ ,

$$Al - B \leq \rho(p_0, p_m) \leq Cl + D. \tag{A.5.3}$$

As we noticed at the end of paragraph A, the right side of this inequality is easily taken care of (see Inequality (A.2.3) on page 117).

We want to derive the left part of Inequality (A.5.3). If  $m$  is a reduced word of length  $l$  strictly greater than the dimension, since  $q < \frac{l}{d} < \frac{2}{n-1}l$ , rewriting Inequality (A.5.2) gives

$$\frac{2\delta}{n-1}l - \delta \leq \rho(p_0, p_m)$$

which is the sought left side of Inequality (A.5.3). □



---

*Calcul de la constante de Gauss-Bonnet en dimension 2*

Pour calculer le pfaffien de la matrice  $\Omega = (\Omega_{h,k})$  des formes de courbure de  $H_{\mathbb{H}}^2$ , nous utilisons le lemme 3.4.24 (que nous rappelons ci-dessous). La dimension  $n$  vaut 2, la matrice  $\Omega$  est de taille  $8 \times 8$ , et  $m = \dim(\Omega)/2 = 4$ .

**Notations B.0.1.**

— Notons  $\mathcal{S}$  ensemble des partitions de  $1, \dots, 8$  de la forme

$$S = \{(h_1, k_1), (h_2, k_2), (h_3, k_3), (h_4, k_4)\} \text{ avec } 1 \leq h_j < h_{j+1} \leq 8 \text{ et } 1 \leq h_j < k_j \leq 8.$$

— Si  $S$  est une telle partition,

$$w_S = \varepsilon(S) \prod_{(h,k) \in S} \Omega_{h,k}$$

désigne la forme  $-$  multiple de la forme volume  $\text{vol} = \tilde{X}^1 \wedge \tilde{X}^2 \wedge \dots \wedge \tilde{X}^8$  de  $H_{\mathbb{H}}^2$  qui lui est associée.

Alors :

**Lemme** (Lemme 3.4.24).

$$\text{Pfaff}(\Omega) = \sum_{S \in \mathcal{S}} w_S.$$

Le cardinal de l'ensemble d'indices  $\mathcal{S}$  vaut

$$|\mathcal{S}| = (8-1)!! = 7 \times 5 \times 3 = 105,$$

et pour chaque  $S \in \mathcal{S}$ , nous souhaitons calculer  $w_S$ .

La figure ci-dessous représente  $\Omega$ , et un exemple de forme  $w_S$  (rappelons que les valeurs des coefficients  $\Omega_{l_1, l_2}$  des blocs diagonaux sont données par la proposition 3.4.19, et celles des coefficients des blocs non-diagonaux ( $\bullet$ ,  $\star$ ,  $\star$  et  $\star$ ) sont données par les propositions 3.4.20 et 3.4.21).

**Notations B.0.2.** La matrice  $\Omega$  est divisée en trois zones :

- nous notons  $\mathbf{T}_1$  le premier triangle diagonal (la partie supérieure du premier bloc  $4 \times 4$ ) de  $\Omega$ ;
- nous notons  $\mathbf{C}$  le bloc  $4 \times 4$  supérieur droit de  $\Omega$ ;

— enfin nous notons  $\mathbf{T}_2$  le second triangle diagonal (la partie supérieure du dernier bloc  $4 \times 4$ ).

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{1} \\
 \mathbf{2} \\
 \mathbf{3} \\
 4 \\
 5 \\
 6 \\
 \mathbf{7} \\
 8
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & 2 & 3 & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & 7 & \mathbf{8} \\
 0 & \Omega_{12} & \Omega_{13} & \boxed{\Omega_{14}} & \bullet & \star & \star & \star \\
 & 0 & \Omega_{23} & \Omega_{24} & \boxed{- \star} & \bullet & \star & - \star \\
 \dots & & 0 & \Omega_{34} & - \star & \boxed{- \star} & \bullet & \star \\
 & \dots & & 0 & - \star & \star & - \star & \bullet \\
 & & \dots & & 0 & \Omega_{56} & \Omega_{57} & \Omega_{58} \\
 \dots & & & \dots & & 0 & \Omega_{67} & \Omega_{68} \\
 & & \dots & & & \dots & 0 & \boxed{\Omega_{78}} \\
 & & & \dots & & & & 0
 \end{pmatrix}$$

On considère l'élément  $S = (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)(7\ 8) \in \mathcal{S}$ .

La permutation lui correspondant est

$$\sigma = \begin{bmatrix}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
 1 & 4 & 2 & 5 & 3 & 6 & 7 & 8
 \end{bmatrix}.$$

Ainsi  $\varepsilon(S) = -1$ , et la forme de degré maximal associée à  $S$  est

$$\omega_S = -1 \times \Omega_{14} \times - \star \times - \star \times \Omega_{78} = -\Omega_{14} \star \star \Omega_{78}.$$

Donnons nous  $S = \{(h_1, k_1), (h_2, k_2), (h_3, k_3), (h_4, k_4)\}$  un élément de  $\mathcal{S}$ . Alors nécessairement

- soit  $\Omega_{h_1, k_1}, \Omega_{h_2, k_2} \in \mathbf{T}_1$  et  $\Omega_{h_3, k_3}, \Omega_{h_4, k_4} \in \mathbf{T}_2$  ;
- soit  $\Omega_{h_1, k_1}, \Omega_{h_2, k_2}, \Omega_{h_3, k_3}, \Omega_{h_4, k_4} \in \mathbf{C}$  ;
- soit deux des  $\Omega_{h_i, k_i}$  sont dans  $\mathbf{C}$ , un est dans  $\mathbf{T}_1$  et l'autre est dans  $\mathbf{T}_2$ .

**Notations B.0.3.** Les sous-ensembles de  $\mathcal{S}$  formés des partitions correspondant à chacun des cas listé ci-dessus sont notés respectivement  $\mathcal{S}^1$ ,  $\mathcal{S}^2$  et  $\mathcal{S}^3$  :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}^1 \amalg \mathcal{S}^2 \amalg \mathcal{S}^3.$$

Le dénombrement des éléments de  $\mathcal{S}^1$  est aisé, il y en a 9 :

$$\mathcal{S}^1 = \left\{ (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8), (1\ 2)(3\ 4)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 2)(3\ 4)(5\ 8)(6\ 7), \right. \\
 (1\ 3)(2\ 4)(5\ 6)(7\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 8)(6\ 7), \\
 \left. (1\ 4)(2\ 3)(5\ 6)(7\ 8), (1\ 4)(2\ 3)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 4)(2\ 3)(5\ 8)(6\ 7) \right\}.$$

Pour chaque  $S \in \mathcal{S}$ , nous calculons la forme  $w_S$  associée. Par exemple, si

$$S = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8),$$

$$w_S = \varepsilon(S) \cdot \Omega_{1,2} \wedge \Omega_{3,4} \wedge \Omega_{5,6} \wedge \Omega_{7,8} = \frac{9}{4} \text{vol}.$$

Ces formes valent (dans l'ordre dans lequel elles sont listées ci-dessus) :

$$\frac{9}{4}\text{vol}, \frac{5}{4}\text{vol}, \frac{5}{4}\text{vol}; \frac{5}{4}\text{vol}, \frac{9}{4}\text{vol}, \frac{5}{4}\text{vol}; \frac{5}{4}\text{vol}, \frac{5}{4}\text{vol}, \frac{9}{4}\text{vol},$$

et

$$\sum_{S \in \mathcal{S}^1} w_S = 3 \times \frac{19}{4}\text{vol} = \frac{57}{4}\text{vol}. \quad (\text{B.0.4})$$

Un élément de  $\mathcal{S}_2$  s'écrit  $(1 \ l_1)(2 \ l_2)(3 \ l_3)(4 \ l_4)$  où  $(l_1, l_2, l_3, l_4)$  est une permutation de  $(5, 6, 7, 8)$ . Il y a donc  $4! = 24$  telles partitions. Listant toutes ces partitions et écrivant pour chacune d'entre elle la forme  $w_S$  associée, nous trouvons

$$\begin{aligned} \sum_{S \in \mathcal{S}^2} w_S &= \bullet\bullet\bullet\bullet + \star\star\star\star + \color{red}{\star\star\star\star} + \color{green}{\star\star\star\star} \\ &+ 2(\bullet\bullet\star\star + \bullet\bullet\color{red}{\star\star} + \bullet\bullet\color{green}{\star\star} + \star\star\color{red}{\star\star} + \star\star\color{green}{\star\star} + \color{red}{\star\star}\color{green}{\star\star}) \\ &+ (-1 + 1 - 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1) \underset{=0}{\bullet\star\star\star}, \end{aligned}$$

puis

$$\sum_{S \in \mathcal{S}^2} w_S = \left( \frac{3}{32} + \frac{3}{32} + \frac{3}{32} + \frac{3}{32} + 2 \left( \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} \right) \right) \text{vol} = \frac{3}{4}\text{vol}. \quad (\text{B.0.5})$$

Enfin, pour construire un élément de  $\mathcal{S}_3$ , le choix des deux éléments dans  $\mathbf{C}$  impose celui de l'élément de  $\mathbf{T}_1$  et de celui de l'élément de  $\mathbf{T}_2$ . Pour choisir deux éléments dans  $\mathbf{C}$ , on choisit deux indices (de lignes) parmi  $(1, 2, 3, 4)$  : il y a 6 possibilités ; on choisit ensuite un indice (de colonne) parmi  $(5, 6, 7, 8)$  : il y a 4 possibilités ; et on choisit enfin un indice (de colonne) parmi les 3 restants.

L'ensemble  $\mathcal{S}_3$  est donc de cardinal  $6 \times 4 \times 3 = 72$ .

Nous listons ci-dessous les formes associées aux éléments de  $\mathcal{S}^3$  (les signes tiennent bien compte des signatures des permutations) :

$$\begin{aligned} \sum_{S \in \mathcal{S}^3} w_S &= \Omega_{3,4} \left[ (-\star\color{green}{\star} + \bullet\color{red}{\star}) \Omega_{5,8} + (\bullet\color{green}{\star} + \star\color{red}{\star}) \Omega_{6,8} + (-\bullet\bullet - \star\star) \Omega_{7,8} + \right. \\ &\quad \left. (-\star\color{red}{\star} - \bullet\color{green}{\star}) \Omega_{5,7} + (-\bullet\color{red}{\star} + \star\color{green}{\star}) \Omega_{6,7} + (\color{red}{\star\star} + \color{green}{\star\star}) \Omega_{5,6} \right] \\ &+ \Omega_{2,4} \left[ (\bullet\star + \color{red}{\star\star}) \Omega_{5,8} + (-\bullet\bullet - \color{red}{\star\star}) \Omega_{6,8} + (-\bullet\color{green}{\star} + \star\color{red}{\star}) \Omega_{7,8} + \right. \\ &\quad \left. (-\star\star - \color{green}{\star\star}) \Omega_{5,7} + (\bullet\star + \color{red}{\star\star}) \Omega_{6,7} + (\star\color{red}{\star} - \bullet\color{green}{\star}) \Omega_{5,6} \right] \\ &+ \Omega_{2,3} \left[ (\star\star + \color{red}{\star\star}) \Omega_{5,8} + (-\bullet\star + \color{red}{\star\star}) \Omega_{6,8} + (-\bullet\color{red}{\star} - \star\color{green}{\star}) \Omega_{7,8} + \right. \\ &\quad \left. (\bullet\star - \color{red}{\star\star}) \Omega_{5,7} + (-\bullet\bullet - \color{green}{\star\star}) \Omega_{6,7} + (-\bullet\color{red}{\star} - \star\color{green}{\star}) \Omega_{5,6} \right] \\ &+ \Omega_{1,4} \left[ (-\bullet\bullet - \color{green}{\star\star}) \Omega_{5,8} + (-\bullet\star + \color{red}{\star\star}) \Omega_{6,8} + (-\star\color{green}{\star} - \bullet\color{red}{\star}) \Omega_{7,8} + \right. \\ &\quad \left. (\bullet\star - \color{red}{\star\star}) \Omega_{5,7} + (\star\star + \color{red}{\star\star}) \Omega_{6,7} + (-\star\color{green}{\star} - \bullet\color{red}{\star}) \Omega_{5,6} \right] \\ &+ \Omega_{1,3} \left[ (-\bullet\star - \color{red}{\star\star}) \Omega_{5,8} + (-\star\star - \color{green}{\star\star}) \Omega_{6,8} + (-\star\color{red}{\star} + \bullet\color{green}{\star}) \Omega_{7,8} + \right. \\ &\quad \left. (-\bullet\bullet - \color{red}{\star\star}) \Omega_{5,7} + (-\bullet\star - \color{red}{\star\star}) \Omega_{6,7} + (\bullet\color{green}{\star} - \star\color{red}{\star}) \Omega_{5,6} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Omega_{1,2} \left[ (-\star\star + \bullet\star) \Omega_{5,8} + (\star\star + \bullet\star) \Omega_{6,8} + (\star\star + \star\star) \Omega_{7,8} + \right. \\
& \quad \left. (-\bullet\star - \star\star) \Omega_{5,7} + (\bullet\star - \star\star) \Omega_{6,7} + (-\bullet\bullet - \star\star) \Omega_{5,6} \right].
\end{aligned}$$

Ainsi, après calcul de chacun de ces produits,

$$\begin{aligned}
\sum_{S \in \mathcal{S}^3} w_S &= \left( \left[ \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \right] \right. \\
&+ \left[ \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right] \\
&+ \left[ \frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \right] \\
&+ \left[ \frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \right] \\
&+ \left[ \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right] \\
&\left. + \left[ \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \right] \right) \text{vol},
\end{aligned}$$

et finalement,

$$\sum_{S \in \mathcal{S}^3} w_S = 6 \times \frac{5}{4} \text{vol} = \frac{15}{2} \text{vol}. \quad (\text{B.0.6})$$

En conclusion, sommant (B.0.4), (B.0.5) et (B.0.6), nous trouvons

$$\text{Pfaff}(\Omega) = \sum_{S \in \mathcal{S}} w_S = \sum_{S \in \mathcal{S}^1} w_S + \sum_{S \in \mathcal{S}^2} w_S + \sum_{S \in \mathcal{S}^3} w_S = \frac{57}{4} + \frac{3}{4} + \frac{15}{2} = \frac{45}{2}.$$

*Remarque B.0.7.* Observons ici, en lien avec une question posée dans le chapitre 3 (remarque 3.4.31), que les formes  $w_S$ ,  $S \in \mathcal{S}$  sont toutes des multiples *positifs* de la forme volume.

---

Annexe C

*Tables du chapitre 4*

TABLE C.1 – Coordonnées des unités du réseau  $D_4$  dans  $\mathbb{H}$ .

Unité	Coordonnées	Unité	Coordonnées	Unité	Coordonnées
$p_1$	1	$p_9$	$\frac{-1+i+j+k}{2}$	$p_{17}$	$\frac{-1-i-j-k}{2}$
$p_2$	-1	$p_{10}$	$\frac{1-i-j-k}{2}$	$p_{18}$	$\frac{1+i+j+k}{2}$
$p_3$	$i$	$p_{11}$	$\frac{-1+i-j-k}{2}$	$p_{19}$	$\frac{-1-i+j+k}{2}$
$p_4$	$-i$	$p_{12}$	$\frac{1-i+j+k}{2}$	$p_{20}$	$\frac{1+i-j-k}{2}$
$p_5$	$j$	$p_{13}$	$\frac{-1-i+j-k}{2}$	$p_{21}$	$\frac{-1+i-j+k}{2}$
$p_6$	$-j$	$p_{14}$	$\frac{1+i-j+k}{2}$	$p_{22}$	$\frac{1-i+j-k}{2}$
$p_7$	$k$	$p_{15}$	$\frac{-1-i-j+k}{2}$	$p_{23}$	$\frac{-1+i+j-k}{2}$
$p_8$	$-k$	$p_{16}$	$\frac{1+i+j-k}{2}$	$p_{24}$	$\frac{1-i-j+k}{2}$

TABLE C.2 – Coordonnées des sommets de la cellule de Voronoï  $\mathcal{V}_{D_4}$  dans  $\mathbb{H}$ .

Sommet	Coordonnées	Sommet	Coordonnées	Sommet	Coordonnées
$q_1$	$\frac{1+i}{2}$	$q_9$	$\frac{-1+j}{2}$	$q_{17}$	$\frac{-i-j}{2}$
$q_2$	$\frac{-1-i}{2}$	$q_{10}$	$\frac{1-j}{2}$	$q_{18}$	$\frac{i+j}{2}$
$q_3$	$\frac{-1+i}{2}$	$q_{11}$	$\frac{-1-j}{2}$	$q_{19}$	$\frac{-i+j}{2}$
$q_4$	$\frac{1-i}{2}$	$q_{12}$	$\frac{1+j}{2}$	$q_{20}$	$\frac{i-j}{2}$
$q_5$	$\frac{j-k}{2}$	$q_{13}$	$\frac{-i-k}{2}$	$q_{21}$	$\frac{-1+k}{2}$
$q_6$	$\frac{-j+k}{2}$	$q_{14}$	$\frac{i+k}{2}$	$q_{22}$	$\frac{1-k}{2}$
$q_7$	$\frac{j+k}{2}$	$q_{15}$	$\frac{-i+k}{2}$	$q_{23}$	$\frac{-1-k}{2}$
$q_8$	$\frac{-j-k}{2}$	$q_{16}$	$\frac{i-k}{2}$	$q_{24}$	$\frac{1+k}{2}$

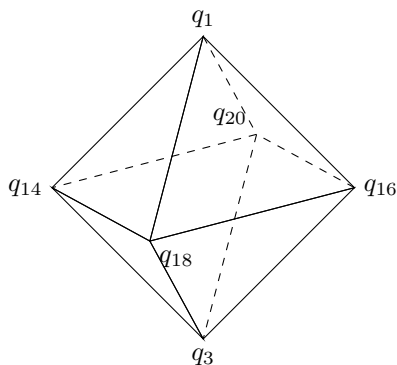




TABLE C.4 – Liste des faces du 24-cellule formé par les unités de  $D_4$  et de celles de la cellule de Voronoï  $\mathcal{V}_{D_4}$ .

Face	Sommets
$O_1 \mid O'_1$	$(p_1, p_3, p_{14}, p_{16}, p_{18}, p_{20}) \mid (q_1, q_3, q_{14}, q_{16}, q_{18}, q_{20})$
$O_2 \mid O'_2$	$(p_2, p_4, p_{13}, p_{15}, p_{17}, p_{19}) \mid (q_2, q_4, q_{13}, q_{15}, q_{17}, q_{19})$
$O_3 \mid O'_3$	$(p_3, p_2, p_{11}, p_9, p_{21}, p_{23}) \mid (q_3, q_2, q_{11}, q_9, q_{21}, q_{23})$
$O_4 \mid O'_4$	$(p_4, p_1, p_{12}, p_{10}, p_{22}, p_{24}) \mid (q_4, q_1, q_{12}, q_{10}, q_{22}, q_{24})$
$O_5 \mid O'_5$	$(p_5, p_8, p_{16}, p_{13}, p_{23}, p_{22}) \mid (q_5, q_8, q_{16}, q_{13}, q_{23}, q_{22})$
$O_6 \mid O'_6$	$(p_6, p_7, p_{15}, p_{14}, p_{24}, p_{21}) \mid (q_6, q_7, q_{15}, q_{14}, q_{24}, q_{21})$
$O_7 \mid O'_7$	$(p_7, p_5, p_9, p_{12}, p_{19}, p_{18}) \mid (q_7, q_5, q_9, q_{12}, q_{19}, q_{18})$
$O_8 \mid O'_8$	$(p_8, p_6, p_{10}, p_{11}, p_{20}, p_{17}) \mid (q_8, q_6, q_{10}, q_{11}, q_{20}, q_{17})$
$O_9 \mid O'_9$	$(p_9, p_{13}, p_{23}, p_{19}, p_2, p_5) \mid (q_9, q_{13}, q_{23}, q_{19}, q_2, q_5)$
$O_{10} \mid O'_{10}$	$(p_{10}, p_{14}, p_{24}, p_{20}, p_1, p_6) \mid (q_{10}, q_{14}, q_{24}, q_{20}, q_1, q_6)$
$O_{11} \mid O'_{11}$	$(p_{11}, p_{15}, p_{17}, p_{21}, p_6, p_2) \mid (q_{11}, q_{15}, q_{17}, q_{21}, q_6, q_2)$
$O_{12} \mid O'_{12}$	$(p_{12}, p_{16}, p_{18}, p_{22}, p_5, p_1) \mid (q_{12}, q_{16}, q_{18}, q_{22}, q_5, q_1)$
$O_{13} \mid O'_{13}$	$(p_{13}, p_{10}, p_{22}, p_{17}, p_8, p_4) \mid (q_{13}, q_{10}, q_{22}, q_{17}, q_8, q_4)$
$O_{14} \mid O'_{14}$	$(p_{14}, p_9, p_{21}, p_{18}, p_7, p_3) \mid (q_{14}, q_9, q_{21}, q_{18}, q_7, q_3)$
$O_{15} \mid O'_{15}$	$(p_{15}, p_{12}, p_{19}, p_{24}, p_4, p_7) \mid (q_{15}, q_{12}, q_{19}, q_{24}, q_4, q_7)$
$O_{16} \mid O'_{16}$	$(p_{16}, p_{11}, p_{20}, p_{23}, p_3, p_8) \mid (q_{16}, q_{11}, q_{20}, q_{23}, q_3, q_8)$
$O_{17} \mid O'_{17}$	$(p_{17}, p_{24}, p_4, p_6, p_{10}, p_{15}) \mid (q_{17}, q_{24}, q_4, q_6, q_{10}, q_{15})$
$O_{18} \mid O'_{18}$	$(p_{18}, p_{23}, p_3, p_5, p_9, p_{16}) \mid (q_{18}, q_{23}, q_3, q_5, q_9, q_{16})$
$O_{19} \mid O'_{19}$	$(p_{19}, p_{22}, p_5, p_4, p_{13}, p_{12}) \mid (q_{19}, q_{22}, q_5, q_4, q_{13}, q_{12})$
$O_{20} \mid O'_{20}$	$(p_{20}, p_{21}, p_6, p_3, p_{14}, p_{11}) \mid (q_{20}, q_{21}, q_6, q_3, q_{14}, q_{11})$
$O_{21} \mid O'_{21}$	$(p_{21}, p_{19}, p_2, p_7, p_{15}, p_9) \mid (q_{21}, q_{19}, q_2, q_7, q_{15}, q_9)$
$O_{22} \mid O'_{22}$	$(p_{22}, p_{20}, p_1, p_8, p_{16}, p_{10}) \mid (q_{22}, q_{20}, q_1, q_8, q_{16}, q_{10})$
$O_{23} \mid O'_{23}$	$(p_{23}, p_{17}, p_8, p_2, p_{11}, p_{13}) \mid (q_{23}, q_{17}, q_8, q_2, q_{11}, q_{13})$
$O_{24} \mid O'_{24}$	$(p_{24}, p_{18}, p_7, p_1, p_{12}, p_{14}) \mid (q_{24}, q_{18}, q_7, q_1, q_{12}, q_{14})$

TABLE C.5 – Les éléments non triviaux du stabilisateur de  $O'_1$  dans  $\Delta_R$ , écrits comme permutation des 6 sommets (la face est dessinée ci-dessous pour faciliter la lecture de cette table).



— Les trois demi-tours d'axe deux sommets opposés :

Permutation correspondante	Axe
$(1)(3)(14, 16)(18, 20)$	$(q_1, q_3)$
$(1, 3)(14, 16)(18)(20)$	$(q_{18}, q_{20})$
$(1, 3)(14)(16)(18, 20)$	$(q_{14}, q_{16})$

— Les quatre rotations d'angle  $2\pi/3$  d'axe les centres de deux faces opposées :

Permutation correspondante	Axe
$(1, 14, 20)(3, 16, 18)$	centres des faces $(q_1, q_{14}, q_{20})$ et $(q_3, q_{16}, q_{18})$
$(1, 14, 18)(3, 16, 20)$	centres des faces $(q_1, q_{14}, q_{18})$ et $(q_3, q_{16}, q_{20})$
$(1, 16, 20)(3, 14, 18)$	centres des faces $(q_1, q_{16}, q_{20})$ et $(q_3, q_{14}, q_{18})$
$(1, 16, 18)(3, 14, 20)$	centres des faces $(q_1, q_{16}, q_{18})$ et $(q_3, q_{14}, q_{20})$

— Les quatre rotations d'angle  $4\pi/3$  d'axe les centres de deux faces opposées :

Permutation correspondante	Axe
$(1, 20, 14)(3, 18, 16)$	centres des faces $(q_1, q_{14}, q_{20})$ et $(q_3, q_{16}, q_{18})$
$(1, 18, 14)(3, 20, 16)$	centres des faces $(q_1, q_{14}, q_{18})$ et $(q_3, q_{16}, q_{20})$
$(1, 20, 16)(3, 18, 14)$	centres des faces $(q_1, q_{16}, q_{20})$ et $(q_3, q_{14}, q_{18})$
$(1, 18, 16)(3, 20, 14)$	centres des faces $(q_1, q_{16}, q_{18})$ et $(q_3, q_{14}, q_{20})$



---

*Bibliographie*

- [Ade08] Ilesanmi Adeboye. Lower bounds for the volume of hyperbolic  $n$ -orbifolds. *Pacific J. Math.*, 237(1) :1–19, 2008.
- [AW12] Ilesanmi Adeboye and Guofang Wei. On volumes of hyperbolic orbifolds. *Algebr. Geom. Topol.*, 12(1) :215–233, 2012.
- [AW14] Ilesanmi Adeboye and Guofang Wei. On volumes of complex hyperbolic orbifolds. *Michigan Math. J.*, 63(2) :355–369, 2014.
- [BE12] Mikhail Belolipetsky and Vincent Emery. On volumes of arithmetic quotients of  $PO(n, 1)^\circ$ ,  $n$  odd. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 105(3) :541–570, 2012.
- [Bea95] Alan F. Beardon. *The geometry of discrete groups*, volume 91 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. Corrected reprint of the 1983 original.
- [Bel04a] Mikhail Belolipetsky. On volumes of arithmetic quotients of  $SO(1, n)$ . *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 3(4) :749–770, 2004.
- [Bel04b] Mikhail Belolipetsky. On volumes of arithmetic quotients of  $SO(1, n)$ . *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 3(4) :749–770, 2004.
- [Bel07] Mikhail Belolipetsky. Addendum to : "On volumes of arithmetic quotients of  $SO(1, n)$ " [Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **3** (2004), no. 4, 749–770; mr2124587]. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 6(2) :263–268, 2007.
- [Bel14a] Mikhail Belolipetsky. Hyperbolic orbifolds of small volume. *arXiv preprint arXiv :1402.5394*, 2014.
- [Bel14b] Mikhail Belolipetsky. Hyperbolic orbifolds of small volume. *arXiv preprint arXiv :1402.5394*, 2014.
- [Bes08] Arthur L. Besse. *Einstein manifolds*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2008. Reprint of the 1987 edition.
- [BJ06] Armand Borel and Lizhen Ji. *Compactifications of symmetric and locally symmetric spaces*. Mathematics : Theory & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2006.
- [BK81] Peter Buser and Hermann Karcher. *Gromov's almost flat manifolds*, volume 81 of *Astérisque*. Société Mathématique de France, Paris, 1981.

- [Bor69] Armand Borel. *Introduction aux groupes arithmétiques*. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XV. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1341. Hermann, Paris, 1969.
- [Bou07] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitre 9*. Springer-Verlag, Berlin, 2007. Reprint of the 1959 original.
- [Cao16] Wensheng Cao. Balls in quaternionic hyperbolic manifolds. *Kodai Math. J.*, 39(2) :439–454, 2016.
- [CE08] Jeff Cheeger and David G. Ebin. *Comparison theorems in Riemannian geometry*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2008. Revised reprint of the 1975 original.
- [CF86] Ted Chinburg and Eduardo Friedman. The smallest arithmetic hyperbolic three-orbifold. *Invent. Math.*, 86(3) :507–527, 1986.
- [CG74] S. S. Chen and L. Greenberg. Hyperbolic spaces. In *Contributions to analysis (a collection of papers dedicated to Lipman Bers)*, pages 49–87. Academic Press, New York, 1974.
- [Cor92] Kevin Corlette. Archimedean superrigidity and hyperbolic geometry. *Ann. of Math. (2)*, 135(1) :165–182, 1992.
- [CS99] J. H. Conway and N. J. A. Sloane. *Sphere packings, lattices and groups*, volume 290 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, third edition, 1999. With additional contributions by E. Bannai, R. E. Borcherds, J. Leech, S. P. Norton, A. M. Odlyzko, R. A. Parker, L. Queen and B. B. Venkov.
- [CS03] John H. Conway and Derek A. Smith. *On quaternions and octonions : their geometry, arithmetic, and symmetry*. A K Peters, Ltd., Natick, MA, 2003.
- [CS10] Donald I. Cartwright and Tim Steger. Enumeration of the 50 fake projective planes. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 348(1-2) :11–13, 2010.
- [CSM95] Roger Carter, Graeme Segal, and Ian Macdonald. *Lectures on Lie groups and Lie algebras*, volume 32 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. With a foreword by Martin Taylor.
- [dC04] Yves de Cornulier. Formes bilinéaires invariantes. [http://www.normalesup.org/~cornulier/bil\\_inv.pdf](http://www.normalesup.org/~cornulier/bil_inv.pdf), août 2004.
- [Die43] Jean Dieudonné. Les déterminants sur un corps non commutatif. *Bull. Soc. Math. France*, 71 :27–45, 1943.
- [Eme09] Vincent Emery. *Du volume des quotients arithmétiques de l'espace hyperbolique*. PhD thesis, Université de Fribourg, 2009.
- [EP94] David B. A. Epstein and Carlo Petronio. An exposition of Poincaré's polyhedron theorem. *Enseign. Math. (2)*, 40(1-2) :113–170, 1994.
- [FFP11] Elisha Falbel, Gábor Francsics, and John R. Parker. The geometry of the Gauss-Picard modular group. *Math. Ann.*, 349(2) :459–508, 2011.

- [FH93] Shmuel Friedland and Sa'ar Hersonsky. Jorgensen's inequality for discrete groups in normed algebras. *Duke Math. J.*, 69(3) :593–614, 1993.
- [FLW11] X. Fu, L. Li, and X. Wang. A lower bound for the volumes of complex hyperbolic orbifolds. *Geom. Dedicata*, 155 :21–30, 2011.
- [For51] Lester R Ford. *Automorphic functions*, volume 85. American Mathematical Soc., 1951.
- [FP03] Douglas R. Farenick and Barbara A. F. Pidkowich. The spectral theorem in quaternions. *Linear Algebra Appl.*, 371 :75–102, 2003.
- [FP06] Elisha Falbel and John R. Parker. The geometry of the Eisenstein-Picard modular group. *Duke Math. J.*, 131(2) :249–289, 2006.
- [FZ99] Elisha Falbel and Valentino Zocca. A Poincaré's polyhedron theorem for complex hyperbolic geometry. *J. Reine Angew. Math.*, 516 :133–158, 1999.
- [Gen15] Matthieu Gendulphe. Systole et rayon interne des variétés hyperboliques non compactes. *Geom. Topol.*, 19(4) :2039–2080, 2015.
- [GHL90] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, and Jacques Lafontaine. *Riemannian geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1990.
- [Gil94] Robert Gilmore. *Lie groups, Lie algebras, and some of their applications*. Robert E. Krieger Publishing Co., Inc., Malabar, FL, 1994. Reprint of the 1974 original.
- [GM09] Frederick W. Gehring and Gaven J. Martin. Minimal co-volume hyperbolic lattices. I. The spherical points of a Kleinian group. *Ann. of Math. (2)*, 170(1) :123–161, 2009.
- [Gol99] William M. Goldman. *Complex hyperbolic geometry*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1999. Oxford Science Publications.
- [Gra73] Alfred Gray. The volume of a small geodesic ball of a Riemannian manifold. *Michigan Math. J.*, 20 :329–344 (1974), 1973.
- [Gro82] Michael Gromov. Volume and bounded cohomology. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (56) :5–99 (1983), 1982.
- [Gro87] M. Gromov. Hyperbolic groups. In *Essays in group theory*, volume 8 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 75–263. Springer, New York, 1987.
- [GS92] Mikhail Gromov and Richard Schoen. Harmonic maps into singular spaces and  $p$ -adic superrigidity for lattices in groups of rank one. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (76) :165–246, 1992.
- [Gün60] Paul Günther. Einige Sätze über das Volumenelement eines Riemannschen Raumes. *Publ. Math. Debrecen*, 7 :78–93, 1960.
- [Hel01] Sigurdur Helgason. *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, volume 34 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Corrected reprint of the 1978 original.

- [Hil07a] Thierry Hild. The cusped hyperbolic orbifolds of minimal volume in dimensions less than ten. *J. Algebra*, 313(1) :208–222, 2007.
- [Hil07b] Thierry Hild. The cusped hyperbolic orbifolds of minimal volume in dimensions less than ten. *J. Algebra*, 313(1) :208–222, 2007.
- [Hin08] Marc Hindry. *Arithmétique*. Calvage Mounet, 2008.
- [Hir57] Friedrich Hirzebruch. Characteristic numbers of homogeneous domains. In *Seminars on analytic functions*, volume 2, pages 92–104, 1957.
- [Hir66] F. Hirzebruch. *Topological methods in algebraic geometry*. Third enlarged edition. New appendix and translation from the second German edition by R. L. E. Schwarzenberger, with an additional section by A. Borel. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 131. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1966.
- [HK07] Thierry Hild and Ruth Kellerhals. The FCC lattice and the cusped hyperbolic 4-orbifold of minimal volume. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 75(3) :677–689, 2007.
- [Hol81] R.-P. Holzapfel. Invariants of arithmetic ball quotient surfaces. *Math. Nachr.*, 103 :117–153, 1981.
- [HP96] Sa’ar Hersonsky and Frédéric Paulin. On the volumes of complex hyperbolic manifolds. *Duke Math. J.*, 84(3) :719–737, 1996.
- [Hur92] A. Hurwitz. Ueber algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich. *Math. Ann.*, 41(3) :403–442, 1892.
- [Kap05] Michael Kapovich. Representations of polygons of finite groups. *Geom. Topol.*, 9 :1915–1951 (electronic), 2005.
- [Kel98] Ruth Kellerhals. Volumes of cusped hyperbolic manifolds. *Topology*, 37(4) :719–734, 1998.
- [Kel03] Ruth Kellerhals. Quaternions and some global properties of hyperbolic 5-manifolds. *Canad. J. Math.*, 55(5) :1080–1099, 2003.
- [Kel04] Ruth Kellerhals. On the structure of hyperbolic manifolds. *Israel J. Math.*, 143 :361–379, 2004.
- [Kel14] Ruth Kellerhals. Hyperbolic orbifolds of minimal volume. *Comput. Methods Funct. Theory*, 14(2-3) :465–481, 2014.
- [KM68] D.A. Každan and G. A. Margulis. A proof of Selberg’s conjecture. *Math. USSR-Sbornik*, 4(1), 1968.
- [KP03] InKang Kim and John R. Parker. Geometry of quaternionic hyperbolic manifolds. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 135(2) :291–320, 2003.
- [KZ01] Ruth Kellerhals and Thomas Zehrt. The Gauss-Bonnet formula for hyperbolic manifolds of finite volume. *Geom. Dedicata*, 84(1-3) :49–62, 2001.
- [Mar89a] G. J. Martin. On discrete Möbius groups in all dimensions : a generalization of Jørgensen’s inequality. *Acta Math.*, 163(3-4) :253–289, 1989.



- [Mar89b] Gaven J. Martin. Balls in hyperbolic manifolds. *J. London Math. Soc. (2)*, 40(2) :257–264, 1989.
- [Mar91] G. A. Margulis. *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, volume 17 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [Mey85] Robert Meyerhoff. The cusped hyperbolic 3-orbifold of minimum volume. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 13(2) :154–156, 1985.
- [Mil75] John Milnor. On the 3-dimensional Brieskorn manifolds  $M(p, q, r)$ . In *Knots, groups, and 3-manifolds (Papers dedicated to the memory of R. H. Fox)*, pages 175–225. Ann. of Math. Studies, No. 84. Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1975.
- [MM12] T. H. Marshall and G. J. Martin. Minimal co-volume hyperbolic lattices, II : Simple torsion in a Kleinian group. *Ann. of Math. (2)*, 176(1) :261–301, 2012.
- [Mos73] G. D. Mostow. *Strong rigidity of locally symmetric spaces*. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1973. Annals of Mathematics Studies, No. 78.
- [Mos80] G. D. Mostow. On a remarkable class of polyhedra in complex hyperbolic space. *Pacific J. Math.*, 86(1) :171–276, 1980.
- [MS74] John W. Milnor and James D. Stasheff. *Characteristic classes*. Princeton University Press, Princeton, N. J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1974. Annals of Mathematics Studies, No. 76.
- [O’N66] Barrett O’Neill. The fundamental equations of a submersion. *Michigan Math. J.*, 13 :459–469, 1966.
- [Par98] John R. Parker. On the volumes of cusped, complex hyperbolic manifolds and orbifolds. *Duke Math. J.*, 94(3) :433–464, 1998.
- [Par08] John R. Parker. Hyperbolic spaces. *Jyväskylä Lectures in Mathematics*, 2, 2008.
- [Phi15] Zoé Philippe. Maximal radius of quaternionic hyperbolic manifolds. *arXiv :1509.02875*, 2015. En révisions aux Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.
- [Phi16] Zoé Philippe. Volume and Euler characteristic of quaternionic hyperbolic orbifolds. 2016. En préparation.
- [Poh10] Anke D. Pohl. Ford fundamental domains in symmetric spaces of rank one. *Geom. Dedicata*, 147 :219–276, 2010.
- [Prz01] Andrew Przeworski. Cones embedded in hyperbolic manifolds. *J. Differential Geom.*, 58(2) :219–232, 2001.
- [PY07] Gopal Prasad and Sai-Kee Yeung. Fake projective planes. *Invent. Math.*, 168(2), 2007.

- [Rat06] John G. Ratcliffe. *Foundations of hyperbolic manifolds*, volume 149 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2006.
- [San76] Luis A. Santaló. *Integral geometry and geometric probability*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Amsterdam, 1976. With a foreword by Mark Kac, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Vol. 1.
- [Sco83] Peter Scott. The geometries of 3-manifolds. *Bull. London Math. Soc.*, 15(5) :401–487, 1983.
- [Sie45] Carl Ludwig Siegel. Some remarks on discontinuous groups. *Ann. of Math. (2)*, 46 :708–718, 1945.
- [Spi99] Michael Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry*. Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., third edition, 1999.
- [Thu80] William P. Thurston. *The geometry and topology of 3-manifolds*. 1980. Distributed by Princeton University. Disponible à l'adresse <http://library.msri.org/books/gt3m/>.
- [Wan69] Hsien-chung Wang. Discrete nilpotent subgroups of Lie groups. *J. Differential Geometry*, 3 :481–492, 1969.
- [War72] Garth Warner. *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups. I*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 188.
- [Wat84] P. L. Waterman. An inscribed ball for Kleinian groups. *Bull. London Math. Soc.*, 16(5) :525–530, 1984.
- [Woo06] James M. Woodward. *Integral lattices and hyperbolic manifolds*. PhD thesis, University of York, 2006.
- [XWJ14] BaoHua Xie, JieYan Wang, and YuePing Jiang. Balls in complex hyperbolic manifolds. *Sci. China Math.*, 57(4) :767–774, 2014.
- [Yam82] Akira Yamada. On Marden's universal constant of Fuchsian groups. II. *J. Analyse Math.*, 41 :234–248, 1982.
- [Yeu13] Sai-Kee Yeung. Classification of surfaces of general type with Euler number 3. *J. Reine Angew. Math.*, 679 :1–22, 2013.
- [Zha97] Fuzhen Zhang. Quaternions and matrices of quaternions. *Linear Algebra Appl.*, 251 :21–57, 1997.
- [Zim84] Robert J. Zimmer. *Ergodic theory and semisimple groups*, volume 81 of *Monoographs in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.