



**HAL**  
open science

# Évaluation numérique des éléments finis DKMQ pour les plaques et les coques

Imam Jauhari Maknun

► **To cite this version:**

Imam Jauhari Maknun. Évaluation numérique des éléments finis DKMQ pour les plaques et les coques. Mécanique [physics.med-ph]. Université de La Rochelle, 2015. Français. NNT : 2015LAROS040 . tel-01661483

**HAL Id: tel-01661483**

**<https://theses.hal.science/tel-01661483>**

Submitted on 12 Dec 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université de La Rochelle-UFR Science et Technologie  
Laboratoire des Sciences de l'Ingénieur pour l'Environnement  
École Doctorale SIMMEA

## **T H È S E**

Présentée par

Imam Jauhari MAKNUN

Présentée pour le l'obtention du grade de DOCTEUR  
DE L'UNIVERSITE DE LA ROCHELLE

### **Évaluation Numérique des Éléments Finis DKMQ pour les Plaques et les Coques**

Spécialité : Mécanique

Soutenue le 19 Novembre 2015

Devant le jury composé de :

M. Jean-Louis Batoz	Professeur, Université Technologie de Compiègne	Président
M. Franck Delvare	Professeur, Université de Caen	Rapporteur
M. Jérôme Fortin	Professeur, Université de Picardie Jules Verne	Rapporteur
M. Aziz Hamdouni	Professeur, Université de La Rochelle	Directeur
M. Irwan Katili	Professeur, Universitas Indonesia	Examinateur
M. Erwan Liberge	Maître de conférence, Université de La Rochelle	Examinateur
M. Olivier Millet	Professeur, Université de La Rochelle	Co-directeur

# Remerciements

Pour m'avoir guidé, conseillé et encouragé, en encouragement mes initiatives tout au long de cette thèse, j'exprime mes remerciements le plus sincères et profondes à mes directeurs de thèse Messieurs les professeurs Aziz Hamdouni et Olivier Millet.

Je remercie Messieurs les professeurs Jérôme Fortin et Franck Delvare d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Ainsi que le professeur Jean-Louis Batoz qui m'a fait l'honneur de présider le jury.

Mes remerciements vont également à Monsieur le professeur Irwan Katili et Monsieur Erwan Liberge pour leur participation au jury. Je remercie encore en plus à Monsieur le professeur Irwan Katili qui me conseillé et encouragé dans ces travaux de thèse. Grâce à vous, j'ai eu l'occasion pour continuer mes études à La Rochelle depuis mon Master 2.

Je remercie également le Gouvernement de l'Indonésie et Gouvernement Français qui me donne de financement pour ce travail de thèse. Aussi, je remercie à mes amis du LaSIE.

Et enfin, un grand merci à mes parents Fadli et Maniyah, à mes frères Mohammad Ramli et Abdussakir, qui m'ont supportés. Et surtout Bismi Annisa, tu sais bien que cette thèse aurait été différente sans toi. Parfois le silence est bien plus significatif que des mots.

# Résumé

## Evaluation numérique des éléments finis DKMQ pour les plaques et les coques

Dans le cadre linéaire, les modèles de Mindlin-Reissner pour les plaques épaisses et de Naghdi pour les coques épaisses sont les plus utilisés. Il est connu que la discrétisation par éléments finis de ces modèles conduit à un phénomène de verrouillage numérique quand l'épaisseur tend vers zéro. Il s'agit du verrouillage en cisaillement dans les cas des plaques et du verrouillage en cisaillement et en membrane dans le cas des coques. Il existe quelques éléments finis qui permettent d'éviter ces difficultés ou du moins de les réduire. L'élément DKMQ pour les plaques et sa version DKMQ24 pour les coques, sont des éléments de bas ordre, basés sur une formulation mixte, qui ont été proposés il y a quelques années afin d'éviter ces phénomènes de verrouillage. Dans cette thèse, on s'est attaché à évaluer numériquement les performances de ces éléments. Outre les cas tests classiques, on s'est focalisé sur l'analyse de la condition inf-sup discrète pour l'élément DKMQ. Nous avons étudié également le test de la s-norme proposé par Bathe, pour l'élément DKMQ24. Enfin, nous avons effectué une analyse d'erreur a posteriori pour les éléments DKMQ et DKMQ24, en utilisant l'estimateur d'erreur  $Z^2$  (dû à Zienkiewicz et Zhu), associé aux techniques de recouvrement de la moyenne, de projection ou encore SPR. Les résultats obtenus ont permis de quantifier les performances de ces deux éléments finis pour les problèmes de verrouillage, et d'en dégager les limites. Deux applications importantes de ces éléments DKMQ et DKMQ24 ont été ensuite présentées, la première concerne la simulation des poutres à paroi minces à section ouverte et la seconde le calcul des plaques composites.

Mots clés : Théorie des plaques et des coques, éléments finis, DKMQ et DKMQ24, poutres à parois minces, plaques composites, s-norme, condition inf-sup, analyse d'erreur

# Summary

## Numerical evaluation of DKMQ element for plates and shells

In the linear case, the Mindlin-Reissner model for thick plates and the Naghdi model for thick shells are commonly used. The finite element discretization of these models leads to numerical locking phenomenon when the thickness approaches zero : shear locking for plates and both shear and membrane locking for shells. There are some finite elements that could reduce or even eliminate this phenomenon. DKMQ element for plates or DKMQ24 element for shells, are low-order elements, based on a mixed formulation, introduced a few years ago to prevent the numerical locking phenomenon. In this thesis, we concentrated on numerical evaluation of the performance of these elements. Besides the classical benchmark tests, we also focused on the analysis of discrete inf-sup condition for DKMQ element. We studied the s-norm test proposed by Bathe for DKMQ24 element. Finally, we performed a posteriori error estimation for DKMQ and DKMQ24 elements, using the error estimator  $Z^2$  (proposed by Zienkiewicz and Zhu), associated with the averaging, projection or SPR recovery methods. The results obtained have enabled us to quantify the performance of these two finite elements for locking problems, and to identify their limits. Two important applications of these elements DKMQ and DKMQ24 were then presented ; the first one concerns thin-walled beams with open cross-section and the second one composite plates.

Keywords : Plate and shell theory, finite elements, DKMQ and DKMQ24, thin-walled beam, composite plate, s-norm, inf-sup condition, error estimation

# Table des matières

Remerciements	i
Résumé	ii
Summary	iii
Table des matières	iv
Table des figures	viii
Liste des tableaux	xiv
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2 Présentation de la théorie de coques</b>	<b>7</b>
2.1 Introduction . . . . .	7
2.2 Rappels de géométrie des surfaces . . . . .	8
2.2.1 Paramétrisation de la coque . . . . .	8
2.2.2 Paramétrisation d'un point quelconque de la coque . . . . .	10
2.3 Les modèles de coque existants . . . . .	11
2.3.1 Cinématique . . . . .	11
2.3.2 Hypothèse de contraintes planes . . . . .	12
2.4 Les modèles classiques de coques élastiques . . . . .	13
2.4.1 Modèle de Naghdi . . . . .	14
2.4.2 Modèle de Koiter . . . . .	16
2.5 Les modèles de plaques élastiques . . . . .	16
2.5.1 Modèle de Reissner-Mindlin . . . . .	17
2.5.2 Le modèle de plaque de Kirchhoff-Love . . . . .	18
2.5.2.1 Modèle de flexion pure . . . . .	18
2.5.2.2 Modèle de membrane . . . . .	19
2.6 Comportement asymptotique du modèle de Naghdi . . . . .	19
2.6.1 Cas des coques inhibée en flexion pure . . . . .	20
2.6.2 Cas des coques non-inhibées en flexion pure . . . . .	21

<b>3</b>	<b>Evaluation des performances numériques du modèle DKMQ pour les plaques</b>	<b>23</b>
3.1	Élément DKMQ . . . . .	24
3.1.1	Présentation . . . . .	24
3.1.2	Choix de la matrice $\Psi$ pour l'élément DKMQ . . . . .	29
3.2	Validation de DKMQ . . . . .	31
3.2.1	Plaque carrée isotrope sous chargement uniforme, simplement appuyée ou encastree . . . . .	31
3.2.2	Plaque carrée isotrope sous chargement concentré, simplement appuyée sur son bord ou encastree . . . . .	35
3.2.3	Plaque circulaire sous chargement uniforme, simplement appuyée ou encastree . . . . .	37
3.2.4	Plaque biaise $60^\circ$ de Razzaque . . . . .	39
3.2.5	Plaque biaise $30^\circ$ de Morley . . . . .	40
3.2.6	Plaque carrée isotrope encastree sous chargement uniforme avec distorsion du maillage . . . . .	42
3.3	Test de la condition inf-sup numérique . . . . .	44
3.3.1	Plaque carrée encastree . . . . .	47
3.3.2	Plaque biaise $30^\circ$ de Morley encastree . . . . .	48
3.3.3	Plaque biaise $60^\circ$ de Razzaque encastree . . . . .	50
3.4	Analyse d'erreur a posteriori . . . . .	51
3.4.1	Estimateur a posteriori $Z^2$ . . . . .	51
3.4.2	Technique de recouvrement . . . . .	53
3.4.2.1	Technique de la moyenne . . . . .	54
3.4.2.2	Technique de projection . . . . .	54
3.4.2.3	Technique SPR . . . . .	55
3.4.3	Résultats numériques . . . . .	56
3.4.3.1	Plaque carrée sous chargement uniforme, simplement appuyée ou encastree . . . . .	56
3.4.3.2	Plaque circulaire sous chargement uniforme, simplement appuyée ou encastree . . . . .	59
3.4.3.3	Plaque biaise $30^\circ$ de Morley . . . . .	63
3.4.3.4	Plaque biaise $60^\circ$ de Razzaque . . . . .	66
3.5	Conclusion . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Evaluation des performances numériques du modèle DKMQ pour les coques</b>	<b>71</b>
4.1	Présentation générale du modèle de Naghdi . . . . .	71
4.1.1	Ecriture du modèle de Naghdi . . . . .	71
4.1.2	Composantes curvilignes du tenseur des déformations . . . . .	72
4.2	Formulation de l'élément de coque DKMQ24 . . . . .	73
4.2.1	La géométrie de la coque . . . . .	74
4.2.2	Représentation du déplacement $\mathbf{U}$ . . . . .	76

4.2.3	Représentation des déformations de membrane $\{e\}$ et de courbure $\{\chi\}$ . . . . .	80
4.2.4	"Assumed Natural Strain" . . . . .	81
4.2.5	Application de la technique discrète de Kirchhoff-Mindlin sur le côté des éléments . . . . .	83
4.2.6	Matrice de rigidité . . . . .	84
4.2.7	Rigidité fictive pour $\theta_z$ et la stabilisation de MacNeal . . . . .	85
4.3	Evaluation numérique . . . . .	87
4.3.1	Patch-tests . . . . .	87
4.3.2	Tests de convergence . . . . .	87
4.3.2.1	Hémisphère sous charges diamétralement opposées . . . . .	87
4.3.2.2	Panneau cylindrique soumis à son poids propre . . . . .	90
4.3.2.3	Cylindre pincé avec diaphragme . . . . .	94
4.3.2.4	Coque parabolique hyperboloïde . . . . .	100
4.3.2.5	Coques hélicoïdales sous charges concentrées . . . . .	102
4.3.3	S-norme . . . . .	105
4.3.3.1	Plaque carrée simplement appuyée ou encastree sous pression uniforme . . . . .	107
4.3.3.2	Coque parabolique hyperboloïde . . . . .	109
4.3.3.3	Hyperboloïde axisymétrique . . . . .	110
4.3.3.4	Calotte hémisphérique encastree . . . . .	112
4.3.3.5	Paraboloïde hyperbolique partiellement encastree . . . . .	113
4.3.4	Étude de l'estimation d'erreur . . . . .	114
4.3.4.1	Estimateur d'erreur $Z^2$ . . . . .	114
4.3.4.2	Technique de recouvrement . . . . .	115
4.3.4.3	Résultats numériques . . . . .	117
4.4	Conclusions . . . . .	127
<b>5</b>	<b>Application aux poutres à parois minces</b> . . . . .	<b>129</b>
5.1	Présentation des modèles des poutres à parois mince . . . . .	129
5.2	Modèle de Vlassov . . . . .	130
5.2.1	Solution analytique de l'équation de torsion de Vlassov . . . . .	132
5.3	Résultats numériques . . . . .	133
5.3.1	Poutre cantilever en $Z$ . . . . .	134
5.3.2	Poutre cantilever en $U$ . . . . .	136
5.3.3	Poutre cantilever en $H$ . . . . .	138
5.3.4	Poutre cantilever en double $T$ . . . . .	141
5.4	Conclusions . . . . .	144
<b>6</b>	<b>Composites</b> . . . . .	<b>146</b>
6.1	L'élément DKMQ pour les plaques composites . . . . .	147
6.2	Validation numérique de l'élément DKMQ pour les plaques composites . . . . .	150
6.2.1	Plaque carrée sandwich simplement appuyée sous chargement uniforme . . . . .	151

6.2.2	Plaque carrée composite à trois couches simplement appuyée sous chargement doublement sinusoïdal . . . . .	153
6.2.3	Plaque carrée composite à neuf couches soumise à un chargement doublement sinusoïdal . . . . .	154
6.3	Analyse de la convergence en utilisant la s-norme . . . . .	156
6.3.1	Plaque carrée sandwich simplement appuyée sous chargement uniforme . . . . .	156
6.3.2	Plaque carrée composite multi-couches sous chargement doublement sinusoïdal . . . . .	159
6.4	Analyse d'erreur d'une plaque carrée sandwich simplement appuyée sous chargement uniforme . . . . .	160
6.5	Conclusions . . . . .	164
<b>7</b>	<b>Conclusions et Perspectives</b>	<b>166</b>
7.1	Conclusions . . . . .	166
7.2	Perspectives . . . . .	167
	<b>Annexes</b>	<b>167</b>
<b>A</b>	<b>Analytical and Experimental Analysis of an Asymptotic thin-walled beam model</b>	<b>168</b>
<b>B</b>	<b>The development of DKMQ plate bending element for thick to thin shell analysis based on the Naghdi/Reissner/Mindlin shell theory</b>	<b>188</b>
<b>C</b>	<b>Application of DKMQ element for composite plate bending structures</b>	<b>206</b>
<b>D</b>	<b>Application of DKMQ24 shell element for twist of thin-walled beams : comparison with Vlassov theory</b>	<b>216</b>

# Table des figures

2.1	Paramétrisation de la surface moyenne de la coque . . . . .	9
2.2	Cinématique de déformation d'une plaque (avec ou sans cisaillement transverse). . . . .	17
3.1	Cinématique de l'élément DKMQ . . . . .	25
3.2	Géométrie et coordonnées tangentielles locales du côté $k$ . . . . .	26
3.3	$\gamma_s$ sur le côté de l'élément . . . . .	28
3.4	Plaque carrée sous chargement uniforme $E = 10.92 ; \nu = 0.3 ; L = 1000 ; q = 1$ . . . . .	31
3.5	Convergence du déplacement au centre de la plaque (cas SS1) . . . . .	33
3.6	Convergence du déplacement au centre de la plaque (cas E1) . . . . .	34
3.7	Plaque carrée soumise à une charge concentrée $E = 10.92 ; \nu = 0.3 ; L = 1000 ; t = 1 ; P = 1$ . . . . .	35
3.8	Convergence du déplacement $w_C$ au centre de la plaque SS . . . . .	36
3.9	Convergence du déplacement $w_C$ au centre de la plaque carrée encastree . . . . .	36
3.10	Plaque circulaire sous chargement uniforme $E = 10.92 ; \nu = 0.3 ; R = 5$ . . . . .	37
3.11	Plaque biaise de Razzaque $E = 1085 ; \nu = 0.31 ; L = 100 ; t = 0.1 ; q = 1$ . . . . .	39
3.12	Convergence du déplacement au centre de la plaque biaise de Razzaque . . . . .	39
3.13	Plaque biaise de Morley $E = 1000 ; \nu = 0.3 ; L = 100 ; t = 0.1 ; q = 1$ . . . . .	40
3.14	Convergence du déplacement au centre de la plaque biaise de Morley ( $t/L = 0.01$ ) . . . . .	41
3.15	Convergence du déplacement au centre de la plaque biaise de Morley ( $t/L = 0.001$ ) . . . . .	42
3.16	Plaque carrée sous chargement uniforme $E = 10.92 ; \nu = 0.3 ; L = 1000 ; t = 100 ; q = 1$ . . . . .	43
3.17	Convergence du déplacement au centre de la plaque $w_C$ . . . . .	43
3.18	Plaque carrée encastree avec le maillage $8 \times 8 ; E = 200000 \text{ Mpa} ; \nu = 0.3 ; L = 100 \text{ mm} ; t = 0.01$ . . . . .	47
3.19	Résultats inf-sup avec le maillage uniforme . . . . .	47
3.20	Distorsion du maillage ( maillage $4 \times 4$ et $8 \times 8$ ) . . . . .	48
3.21	Résultats inf-sup avec distorsion du maillage . . . . .	48
3.22	Plaque biaise $30^\circ$ de Morley encastree avec le maillage $4 \times 4 ; E = 200000 \text{ Mpa} ; \nu = 0.3 ; L = 100 \text{ mm} ; t = 0.01$ . . . . .	49
3.23	Résultats inf-sup pour la plaque biaise $30^\circ$ de Morley . . . . .	49

3.24	Plaque biaise $60^\circ$ de Razzaque encastrée avec le maillage $4 \times 4$ ; $E = 200000$ Mpa ; $\nu = 0.3$ ; $L = 100$ mm ; $t = 0.01$ . . . . .	50
3.25	Résultats inf-sup pour la plaque biaise $60^\circ$ de Razzaque . . . . .	50
3.26	Contraintes avant et après recouvrement . . . . .	54
3.27	Patch . . . . .	56
3.28	Plaque carrée sous chargement uniforme (maillage $8 \times 8$ ; $E = 1000$ ; $\nu = 0.3$ ; $L = 10$ ; $t = 0.1$ ; $q = 1$ ) . . . . .	57
3.29	Indicateur d'erreur relative $\phi^*$ pour une plaque carrée simplement appuyée . . . . .	58
3.30	Indicateur d'erreur relative $\phi^*$ pour une plaque carrée encastrée . . . . .	58
3.31	Plaque circulaire sous chargement uniforme $E = 1000$ ; $\nu = 0.3$ ; $R = 50$ ; $t = 1$ ; $q = 1$ . . . . .	59
3.32	Maillage uniforme $NELT = 192$ . . . . .	60
3.33	Maillage adaptatif dans le cas encastré avec $NELT = 328$ . . . . .	60
3.34	Indicateur d'erreur relative $\phi^*$ pour la plaque circulaire simplement appuyée (maillage uniforme) . . . . .	60
3.35	Indicateur d'erreur relative $\phi^*$ pour la plaque circulaire simplement appuyée (maillage adaptatif) . . . . .	61
3.36	Indicateur d'erreur relative $\phi^*$ pour la plaque circulaire encastrée (maillage uniforme) . . . . .	62
3.37	Indicateur d'erreur relative $\phi^*$ pour la plaque circulaire encastrée (maillage adaptatif) . . . . .	62
3.38	Plaque biaise $30^\circ$ de Morley $E = 1000$ ; $\nu = 0.3$ ; $L = 60$ ; $t = 1$ ; $q = 1$ . . . . .	63
3.39	Indicateur d'erreur relative $\phi^*$ pour la plaque biaise $30^\circ$ de Morley (maillage uniforme) . . . . .	64
3.40	Maillage adaptatif ( $NELT = 283$ ) . . . . .	64
3.41	Indicateur d'erreur relative $\phi^*$ pour la plaque biaise $30^\circ$ de Morley (maillage adaptatif) . . . . .	65
3.42	Plaque biaise $60^\circ$ de Razzaque $E = 1000$ ; $\nu = 0.3$ ; $L = 50$ ; $t = 1$ ; $q = 1$ . . . . .	66
3.43	Indicateur d'erreur relative $\phi^*$ pour la plaque biaise $60^\circ$ de Razzaque (maillage uniforme) . . . . .	67
3.44	Maillage adaptatif $NELT = 583$ . . . . .	67
3.45	Indicateur d'erreur relative $\phi^*$ pour la plaque biaise $60^\circ$ de Razzaque (maillage adaptatif) . . . . .	68
4.1	Base orthonormée locale . . . . .	73
4.2	Géométrie d'une coque représentée par des éléments quadrilatères . . . . .	74
4.3	Géométrie de l'élément DKMQ24 . . . . .	75
4.4	Système de coordonnées locales $x, y, z$ et système de coordonnées cartésiennes globales $X, Y, Z$ . . . . .	76
4.5	Composantes cartésiennes et curvilignes de $\mathbf{u}$ et $\boldsymbol{\theta}$ . . . . .	77
4.6	Variation de la rotation le long des côtés de l'élément . . . . .	78
4.7	Vecteur tangent unitaire sur le côté $k$ . . . . .	79
4.8	Degrés de liberté nodaux de l'élément DKMQ24 . . . . .	79

4.9	Patch-tests à efforts membranaires constants ( $E = 1000 ; \nu = 0.3$ ) . . .	87
4.10	Hémisphère pincé ouvert (maillage $N \times N = 4 \times 4 ; R = 10 m ; t = 0.04 m ; P = 2 N ; E = 6.825 \times 10^7 Pa ; \nu = 0.3$ ) . . . . .	88
4.11	Hémisphère pincé fermé (maillage $N \times N = 4 \times 4 ; R = 10 m ; t = 0.04 m ; P = 2 N ; E = 6.825 \times 10^7 Pa ; \nu = 0.3$ ) . . . . .	88
4.12	Convergence du déplacement de $U_A$ , hémisphère pincé ouvert . . . . .	89
4.13	Convergence du déplacement de $U_A$ . Hémisphère pincé fermé . . . . .	90
4.14	Panneau cylindrique soumis à son poids propre (maillage $N \times N = 2 \times 2 ; L = 6 m ; R = 3 m ; t = 0.03 m ; \phi = 40^\circ ; E = 3 \times 10^{10} Pa ; \nu = 0$ ). 91	
4.15	Convergence du déplacement $W_B$ . Panneau cylindrique soumis à son poids propre . . . . .	92
4.16	Convergence de déplacement $W_C$ Panneau cylindrique soumis à son poids propre . . . . .	93
4.17	Convergence de l'effort résultant $N_{YB}$ . Panneau cylindrique soumis à son poids propre . . . . .	93
4.18	Convergence de l'effort résultant $M_{XC}$ . Panneau cylindrique soumis à son poids propre . . . . .	94
4.19	Cylindre pincé ( $L = 6 m ; R = 3 m ; t = 0.03 m$ et $0.3 m ; \nu = 0, 3 ; E = 3 \times 10^{10} Pa$ . . . . .	95
4.20	Maillage uniforme et distordu (maillage $N \times N = 4 \times 4$ ) . . . . .	95
4.21	Convergence de déplacement $\mathbf{W}_C$ ( $t/R = 0.01$ ). Cylindre pincé avec un maillage uniforme . . . . .	96
4.22	Effort résultant $M_X$ le long de $DC$ ( $t/R = 0.01$ ). Cylindre pincé avec un maillage uniforme . . . . .	97
4.23	Convergence de déplacement $\mathbf{W}_C$ ( $t/R = 0.01$ ). Cylindre pincé avec maillage distordu . . . . .	98
4.24	Convergence de déplacement $\mathbf{W}_C$ ( $t/R = 0.1$ ). Cylindre pincé avec maillage uniforme . . . . .	99
4.25	Convergence de déplacement $\mathbf{W}_C$ ( $t/R = 0.1$ ). Cylindre pincé avec maillage distordu . . . . .	100
4.26	Parabolique hyperboloïde (maillage $N \times N = 4 \times 4 ; a = 50 cm ; b = 10 cm ; t = 0.8 cm ; E = 28500 kg/cm^2 ; \nu = 0.4$ ) . . . . .	100
4.27	Convergence de déplacement $\mathbf{W}_o$ . Parabolique hyperboloïde . . . . .	101
4.28	Coques hélicoïdales sous charges concentrées (maillage $N \times N = 2 \times 12 ; L = 12 m ; b = 1, 1 m ; t = 0.0032 m$ et $0.32 m ; E = 29 \times 10^6 Pa ; \nu = 0.22$ ) . . . . .	102
4.29	Convergence de déplacement $U_A$ . Coques hélicoïdales $t = 0.0032$ . . .	103
4.30	Convergence de déplacement $W_A$ . Coques hélicoïdales $t = 0.0032$ . . .	104
4.31	Convergence de déplacement $U_A$ . Coques hélicoïdales $t = 0.32$ . . . .	105
4.32	Convergence de déplacement $W_A$ . Coques hélicoïdales $t = 0.32$ . . . .	105
4.33	Plaque carrée sous pression uniforme (maillage $N \times N = 4 \times 4 ; E = 1.7472 \times 10^7 ; \nu = 0.3 ; L = 1 ; q = 1$ ) . . . . .	107
4.34	Convergence des éléments DKMQ et MITC4 dans le cas d'une plaque carrée simplement supportée en utilisant la s-norme . . . . .	107

4.35	Convergence des éléments DKMQ et MITC4 dans le cas d'une plaque carrée encastrée en utilisant la s-norme . . . . .	108
4.36	Parabolique hyperboloïde (maillage $N \times N = 4 \times 4$ ; $a = 50 \text{ cm}$ ; $b = 10 \text{ cm}$ ; $E = 28500 \text{ kg/cm}^2$ ; $\nu = 0.4$ ) . . . . .	109
4.37	Convergence pour le cas d'une coque parabolique hyperboloïde en utilisant la s-norme . . . . .	109
4.38	Hyperboloïde axisymétrique ( $L = 1.0$ ; $E = 1.0 \times 10^{11}$ ; $\nu = 1/3$ ) . . .	110
4.39	Hyperboloïde axisymétrique encastré-encastré (maillage $N \times N = 4 \times 4$ ; $L = 1.0$ ; $E = 1.0 \times 10^{11}$ ; $\nu = 1/3$ ) . . . . .	111
4.40	Convergence pour le cas d'un hyperboloïde axisymétrique encastré-encastré en utilisant la s-norme . . . . .	111
4.41	Calotte hémisphérique encastrée (maillage $N \times N = 4 \times 4$ ; $R = 1.0 \text{ m}$ ; $E = 1.0 \times 10^5 \text{ Mpa}$ ; $\nu = 1/3$ ; $p_0 = 1 \text{ Mpa}$ ) . . . . .	112
4.42	Convergence pour le cas de la calotte hémisphérique encastrée en utilisant la s-norme . . . . .	113
4.43	Paraboloïde hyperbolique partiellement encastrée (maillage $N \times N = 4 \times 8$ ; $L = 1.0 \text{ m}$ ; $E = 1.0 \times 10^5 \text{ Mpa}$ ; $\nu = 1/3$ ; $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$ ) . .	113
4.44	Convergence dans le cas d'une paraboloïde hyperbolique partiellement encastré en utilisant la s-norme . . . . .	114
4.45	Patch . . . . .	116
4.46	Patch . . . . .	117
4.47	Hémisphère pincé ouvert ( maillage $N \times N = 4 \times 4$ ; $R = 10 \text{ m}$ ; $t = 0.04 \text{ m}$ ; $P = 2 \text{ N}$ ; $E = 6.825 \times 10^7 \text{ Pa}$ ; $\nu = 0.3$ ) . . . . .	117
4.48	Indicateur d'erreur relative $\phi^*$ . Hémisphère sous charges diamétralement opposées . . . . .	118
4.49	Panneau cylindrique soumis à son poids propre (maillage $N \times N = 2 \times 2$ ; $L = 6 \text{ m}$ ; $R = 3 \text{ m}$ ; $h = 0.03 \text{ m}$ ; $\phi = 40^\circ$ ; $E = 3 \times 10^{10} \text{ Pa}$ ; $f_z = -0,625 \times 10^4 \text{ Pa}$ ) . . . . .	118
4.50	Indicateur d'erreur relative $\phi^*$ . Panneau cylindrique soumis à son poids propre . . . . .	119
4.51	Effort résultant $M_x$ au point C . . . . .	119
4.52	Effort résultant $N_y$ au point B . . . . .	120
4.53	Cylindre pincé ( $L = 6 \text{ m}$ ; $R = 3 \text{ m}$ ; $t = 0.03 \text{ m}$ et $0.3 \text{ m}$ ; $\nu = 0,3$ ; $E = 3 \times 10^{10} \text{ Pa}$ . . . . .	121
4.54	Indicateur d'erreur relative $\phi^*$ . Cylindre pincé mince . . . . .	121
4.55	Indicateur d'erreur relative $\phi^*$ . Cylindre pincé épais . . . . .	122
4.56	Effort résultant $N_x$ le long $DC$ . . . . .	122
4.57	Effort résultant $N_y$ le long $DC$ . . . . .	122
4.58	Effort résultant $M_x$ le long $DC$ . . . . .	123
4.59	Effort résultant $N_x$ le long $BC$ . . . . .	123
4.60	Effort résultant $N_y$ le long $BC$ . . . . .	123
4.61	Effort résultant $M_x$ le long $BC$ . . . . .	124
4.62	Parabolique hyperboloïde (maillage $N \times N = 4 \times 4$ ; $a = 50 \text{ cm}$ ; $b = 10 \text{ cm}$ ; $t = 0.8 \text{ cm}$ ; $E = 28500 \text{ kg/cm}^2$ ; $\nu = 0.4$ ; $f_z = 0.01 \text{ kg/cm}^2$ ) . .	124

4.63	Indicateur d'erreur relative $\phi^*$ . Parabolique hyperboloïde . . . . .	125
4.64	Coques hélicoïdales sous charges concentrées (maillage $N \times N = 2 \times 12$ ; $L = 12 m$ ; $b = 1,1 m$ ; $t = 0.0032 m$ et $0.32 m$ ; $E = 29 \times 10^6 Pa$ ; $\nu = 0.22$ ) . . . . .	125
4.65	Indicateur d'erreur relative $\phi^*$ pour une coque hélicoïdale mince ( $P_X = 0.001$ ) . . . . .	126
4.66	Indicateur d'erreur relative $\phi^*$ pour une coque hélicoïdale mince ( $P_Z = 0.001$ ) . . . . .	126
4.67	Indicateur d'erreur relative $\phi^*$ pour une coque hélicoïdale épais ( $P_x = 1000$ ) . . . . .	126
4.68	Indicateur d'erreur relative $\phi^*$ . Cas d'une coque hélicoïdale épaisse ( $P_z = 1000$ ) . . . . .	127
5.1	Poutre à parois minces à section ouverte considérée. . . . .	132
5.2	Détermination de l'angle de torsion $\theta$ . . . . .	134
5.3	Poutre cantilever en $Z$ ( $l = 10.0 m$ ; $a = 1.0 m$ ; $b = 2.0 m$ ; $t = 0.10 m$ ; $\nu = 0.3$ ; $E = 2.1 \times 10^5 Pa$ ). . . . .	134
5.4	Convergence de la contrainte $\sigma_{x_B}$ pour la poutre cantilever en $Z$ considérée. Valeur de référence donnée par [86]. . . . .	135
5.5	Variations de l'angle de torsion pour la poutre cantilever en $Z$ en fonction de $x_3$ . Comparaison avec la solution analytique de Vlassov. . . . .	135
5.6	Poutre cantilever en $U$ ( $l = 10.0 m$ ; $a = 1.0 m$ ; $b = 2.0 m$ ; $t = 0.10 m$ ; $\nu = 0.3$ ; $E = 21 \times 10^4 Pa$ ). . . . .	136
5.7	Convergence du déplacement $u_{3E}$ pour la poutre cantilever en $U$ . . . . .	137
5.8	Convergence du déplacement $u_{1F}$ pour la poutre cantilever en $U$ . . . . .	137
5.9	Variations de l'angle de torsion pour la poutre cantilever en $U$ en fonction de $x_3$ . Comparaison avec la solution analytique de Vlassov. . . . .	138
5.10	Poutre cantilever en $H$ et chargement appliqué générant un couple de torsion en $x_3 = l$ . Caractéristiques géométriques et mécaniques utilisées $l = 10.0 m$ ; $a = b = 1.0 m$ ; $t = 0.01 m$ ; $\nu = 0.3$ ; $E = 2.1 \times 10^{11} Pa$ . . . . .	139
5.11	Convergence de déplacement $u_{3A}$ pour la poutre cantilever en $H$ considérée. Valeur de référence correspondant à celle obtenue pour $NELT = 1356$ . . . . .	139
5.12	Convergence de déplacement $u_{1B}$ pour la poutre cantilever en $H$ considérée. Valeur de référence correspondant à celle obtenue pour $NELT = 1356$ . . . . .	140
5.13	Variations de l'angle de torsion pour la poutre cantilever en $H$ en fonction de $x_3$ . Comparaison avec la solution analytique de Vlassov. . . . .	140
5.14	Poutre cantilever en double $T$ et chargement appliqué générant un couple de torsion en $x_3 = l$ . Caractéristiques géométriques et mécaniques utilisées : $l = 10.0 m$ ; $a = b = 1.0 m$ ; $c = 0.5 m$ ; $t = 0.01 m$ ; $\nu = 0.3$ ; $E = 2.1 \times 10^{11} Pa$ . . . . .	142

5.15	Convergence de déplacement $u_{3A}$ pour la poutre cantilever en double $T$ considérée. Valeur de référence correspondant à celle obtenue pour $NELT = 1536$ . . . . .	142
5.16	Convergence de déplacement $u_{1B}$ pour la poutre cantilever en double $T$ considérée. Valeur de référence correspondant à celle obtenue pour $NELT = 1536$ . . . . .	143
5.17	Variations de l'angle de torsion pour la poutre cantilever en double $T$ en fonction de $x_3$ . Comparaison avec la solution analytique de Vlassov. . . . .	144
6.1	Couche orthotrope . . . . .	148
6.2	Couche orthotrope . . . . .	149
6.3	Coordonnées locales sur le côté $k$ de l'élément considéré. . . . .	150
6.4	Plaque carrée sandwich simplement appuyée soumise à un chargement uniforme ( $E_L = 3.4156MPa$ , $E_T = 1.7931MPa$ , $\nu_{LT} = 0.44$ , $G_{LT} = 1MPa$ , $G_{LZ} = 0.608MPa$ , $G_{TZ} = 1.015MPa$ .) . . . . .	151
6.5	Plaque carrée sandwich simplement appuyée avec distorsion du maillage. . . . .	152
6.6	Plaque carrée composite à trois couches simplement appuyée ( $E_L = 24MPa$ ; $E_T = 1MPa$ ; $\nu_{LT} = 0.25$ ; $G_{LT} = 0.5MPa$ ; $G_{TZ} = 0.2MPa$ ). . . . .	154
6.7	Plaque carrée composite à neuf couches simplement appuyée ( $E_L = 24MPa$ ; $E_T = 1MPa$ ; $\nu_{LT} = 0.25$ ; $G_{LT} = 0.5MPa$ ; $G_{TZ} = 0.2MPa$ ) . . . . .	155
6.8	Plaque carrée sandwich simplement appuyée (maillage uniforme). . . . .	157
6.9	Analyse de la convergence d'une plaque carrée sandwich simplement appuyée en utilisant la s-norme (maillage uniforme) . . . . .	157
6.10	Maillage avec distorsion géométrique . . . . .	158
6.11	Analyse de la convergence pour une plaque sandwich carrée simplement appuyée en utilisant la s-norme (maillage avec distorsion géométrique). . . . .	158
6.12	Plaque carrée composite à trois couches et à neuf couches simplement appuyée. . . . .	159
6.13	Etude de la convergence d'une plaque carrée composite à trois couches et à neuf couches simplement appuyée en utilisant la s-norme. . . . .	160
6.14	Plaque carrée sandwich simplement appuyée considérée ( $E_L = 3.4156MPa$ ; $E_T = 1.7931MPa$ ; $\nu_{LT} = 0.44$ ; $G_{LT} = 1MPa$ ; $G_{LZ} = 0.608MPa$ ; $G_{TZ} = 1.015MPa$ ). . . . .	161
6.15	Indicateur d'erreur relative $\phi^*$ $\mathbf{C} = 1$ . . . . .	162
6.16	Indicateur d'erreur relative $\phi^*$ $\mathbf{C} = 10$ . . . . .	163
6.17	Indicateur d'erreur relative $\phi^*$ $\mathbf{C} = 50$ . . . . .	163

# Liste des tableaux

3.1	Différents cas de simulation . . . . .	32
3.2	Comparaison du déplacement $w_C/w_{C_{REF}}$ au centre de la plaque pour le cas SS1 . . . . .	32
3.3	Comparaison du déplacement $w_C$ au centre de la plaque (cas SS2, SS3 et SS4) avec un maillage uniforme $N \times N = 8 \times 8$ . . . . .	33
3.4	Comparaison du déplacement $w_C/w_{C_{REF}}$ au centre de la plaque pour le cas E1 . . . . .	34
3.5	Comparaison du déplacement $w_C$ au centre de la plaque (cas E2, E3 et E4) avec un maillage uniforme $N \times N = 64 \times 64$ . . . . .	34
3.6	Comparaison du déplacement $w_C/w_{C_{REF}}$ au centre de la plaque SS . .	35
3.7	Comparaison du déplacement $w_C/w_{C_{REF}}$ au centre de la plaque carrée encastrée . . . . .	37
3.8	Valeurs de $w_A$ pour la plaque circulaire simplement appuyée sur son bord pour différentes valeurs de $t/R$ . . . . .	38
3.9	Valeurs de $w_A$ pour la plaque circulaire encastrée pour différentes valeurs de $t/R$ . . . . .	38
3.10	Comparaison du déplacement $W$ au centre de la plaque biaise de Razzaque . . . . .	40
3.11	Comparaison du déplacement $w_C$ au centre de la plaque plaque biaise de Morley ( $t/L = 0.01$ ) . . . . .	41
3.12	Comparaison du déplacement $w_C$ au centre de la plaque biaise de Morley ( $t/L = 0.001$ ) . . . . .	41
3.13	Comparaison du déplacement $w_C$ au centre de la plaque . . . . .	44
3.14	Moment au centre de la plaque carrée simplement appuyée . . . . .	57
3.15	Moment au centre de la plaque carrée encastrée . . . . .	58
3.16	Moment au centre de la plaque circulaire simplement appuyée (maillage uniforme) . . . . .	61
3.17	Moment au centre de la plaque circulaire simplement appuyée (maillage adaptatif) . . . . .	61
3.18	Moment au centre de la plaque circulaire encastrée (maillage uniforme)	63
3.19	Moment au centre de la plaque circulaire encastrée (maillage adaptatif)	63
3.20	Valeur de $M_1$ au centre de la plaque biaise $30^\circ$ de Morley (maillage uniforme) . . . . .	64
3.21	$M_2$ au centre de la plaque biaise $30^\circ$ de Morley (maillage uniforme) .	65
3.22	$M_1$ au centre de la plaque biaise $30^\circ$ de Morley (maillage adaptatif) .	65

3.23	Valeurs de $M_2$ au centre de la plaque biaise $30^\circ$ de Morley (maillage adaptatif) . . . . .	66
3.24	$M_y$ au centre de la plaque biaise $60^\circ$ de Razzaque (maillage uniforme) . . . . .	67
4.1	Déplacement $\mathbf{U}_A$ ( $\mathbf{U}_A = U_A \times 10^3$ ), hémisphère pincé ouvert . . . . .	89
4.2	Déplacement $\mathbf{U}_A$ ( $\mathbf{U}_A = U_A \times 10^3$ ). Hémisphère pincé fermé . . . . .	90
4.3	Déplacement $W_B$ . Panneau cylindrique soumis à son poids propre . . . . .	91
4.4	Déplacement $W_C$ . Panneau cylindrique soumis à son poids propre . . . . .	92
4.5	Efforts résultants $N_{YB}$ et $M_{XC}$ . Panneau cylindrique soumis à son poids propre . . . . .	94
4.6	Déplacement $\mathbf{W}_C$ ( $t/R = 0.01$ ). Cylindre pincé avec un maillage uniforme . . . . .	96
4.7	Déplacement $\mathbf{W}_C$ ( $t/R = 0.01$ ). Cylindre pincé avec maillage distordu . . . . .	97
4.8	Déplacement $\mathbf{W}_C$ ( $t/R = 0.1$ ). Cylindre pincé avec maillage uniforme . . . . .	98
4.9	Déplacement $\mathbf{W}_C$ ( $t/R = 0.1$ ). Cylindre pincé avec maillage distordu . . . . .	99
4.10	Déplacement $\mathbf{W}_o$ . Parabolique hyperboloïde . . . . .	101
4.11	Déplacement $U_A$ pour $t = 0.0032$ . Coques hélicoïdales . . . . .	103
4.12	Déplacement $W_A$ pour $t = 0.0032$ . Coques hélicoïdales . . . . .	103
4.13	Déplacement $U_A$ pour $t = 0.32$ . Coques hélicoïdales . . . . .	104
4.14	Déplacement $W_A$ pour $t = 0.32$ . Coques hélicoïdales . . . . .	104
4.15	Effort résultant $M_x$ au point C . . . . .	120
4.16	Effort résultant $N_y$ au point B . . . . .	120
5.1	Valeurs des rigidités à la torsion $J_\omega$ et du coefficient empirique de Vlassov 'a' intervenant dans l'expression de $J_d$ pour les profils minces considérés. . . . .	131
5.2	Erreur relative entre les valeurs numériques données par DKMQ24 et Q4 $\gamma$ 24 et les valeurs analytiques données par le modèle de Vlassov pour l'angle de torsion $\theta$ . . . . .	136
5.3	Erreur relative entre les valeurs numériques données par DKMQ24 et Q4 $\gamma$ 24 et les valeurs analytiques données par le modèle de Vlassov pour l'angle de torsion $\theta$ . . . . .	138
5.4	Erreur relative entre les valeurs numériques données par DKMQ24 et et Q4 $\gamma$ 24 les valeurs analytiques données par le modèle de Vlassov pour l'angle de torsion $\theta$ . . . . .	141
5.5	Erreur relative entre les valeurs numériques données par DKMQ24 et et Q4 $\gamma$ 24 les valeurs analytiques données par le modèle de Vlassov pour l'angle de torsion $\theta$ . . . . .	144
6.1	Déplacement vertical au point C (maillage uniforme). . . . .	152
6.2	Déplacement vertical au point C (distorsion du maillage). . . . .	153
6.3	Déplacement vertical au point C obtenu avec l'élément DKMQ pour la plaque carrée composite à trois couches simplement appuyée. . . . .	154
6.4	Déplacement vertical au point C de la plaque carrée composite à neuf couches simplement appuyée. . . . .	156

6.5	Comparaison des valeurs de $\sigma_{xc}$ obtenues avec les différentes techniques de recouvrement pour $\mathbf{C} = 1$ . . . . .	162
6.6	Comparaison des valeurs de $\sigma_{xc}$ obtenues avec les différentes techniques de recouvrement pour $\mathbf{C} = 10$ . . . . .	162
6.7	Comparaison des valeurs de $\sigma_{xc}$ obtenues avec les différentes techniques de recouvrement pour $\mathbf{C} = 50$ . . . . .	163



# Chapitre 1

## Introduction

Les structures minces et à parois minces (plaques, coques, poutres à parois minces) sont très utilisées dans les domaines du génie civil, de la mécanique et de l'aérospatial, car elles confèrent un maximum de rigidité avec un minimum de poids.

Afin de dimensionner les ouvrages et les structures, il est fondamental de disposer de modèles de plaques et de coques minces suffisamment évolués pour modéliser la physique des phénomènes étudiés, ainsi que de méthodes de résolution performantes. Le calcul analytique n'étant possible que dans des cas particuliers extrêmement simples, le recours à la résolution numérique est indispensable pour effectuer des calculs à l'échelle de la structure. Pour cela, il est nécessaire de disposer d'éléments finis robustes et performants.

Dans cette thèse, nous nous focaliserons sur les structures de type plaques et coques en élasticité linéaire, l'avant dernier chapitre étant consacré aux poutres à parois minces. De plus, nous nous limiterons au cas de l'élasticité linéaire, valable pour des petites déformations et des petits déplacements. La théorie des coques en grands déplacements ou en déplacements modérés (géométriquement non linéaire), voire en grandes déformations, ne sera pas abordée dans le cadre de cette thèse.

Les structures minces de type plaques et coques sont très sensibles à la géométrie de la surface moyenne, aux efforts appliqués et aux conditions aux limites. Leur comportement peut être complètement différent suivant le caractère inhibé ou non en flexion de la surface moyenne, qui dépend lui-même fortement de la géométrie initiale de la coque ainsi que des conditions aux limites associées. Il est donc important d'étudier au préalable le comportement asymptotique de la coque lorsque l'épaisseur tend vers zéro. En général, quand l'épaisseur tend vers zéro, nous avons deux comportements asymptotiques possibles complètement différents : un comportement où les effets de flexion dominant (cas des coques *non-inhibées* en flexion) et un comportement où les effets de membrane dominant (cas des *coques inhibées* en flexion). Dans le cas des coques non-inhibées, les efforts appliqués ne sont supportés que par les effets de flexion. Par contre, dans le cas des coques inhibées, la coque peut résister aux

efforts appliqués uniquement par les effets de membrane (et de cisaillement). Ces deux comportements sont directement liés au sous-espace des déplacements inextensionnels. C'est le sous-espace  $\mathcal{V}_0$  des déplacements cinématiquement admissibles  $\mathcal{V}$  qui annulent les énergies de membrane et de cisaillement. Il est également appelé sous-espace des déplacements en flexion pure.

Depuis une trentaine d'années, de nombreux éléments finis ont été développés en théorie des plaques et des coques. Les éléments finis, triangulaires à trois noeuds, ou rectangulaires à quatre noeuds, sont les plus utilisés. En outre, le développement des éléments finis d'ordre bas est très intéressant, car il permet de réduire de façon importante les coûts numériques associés, en particulier pour l'analyse non linéaire en grands déplacements, même si elle n'est pas abordée dans le cadre de cette thèse. De façon générale, un compromis entre le coût et la précision doit être trouvé.

Les éléments finis de coques doivent converger aussi bien dans le cas des coques non inhibées en flexion, que dans le cas des coques inhibées en flexion. Dans le cas des coques inhibées en flexion, les éléments finis standards, utilisant une formulation en déplacements, marchent bien. En revanche, dans le cas des coques non inhibées en flexion, le phénomène de verrouillage numérique (en membrane et en cisaillement) apparaît lorsque l'épaisseur devient très faible. Ce verrouillage numérique provient principalement du fait que les sous-espaces d'approximation  $\mathcal{V}_h$ , dans lesquels sont écrits la formulation éléments finis, ne contiennent pas les déplacements inextensionnels  $\mathcal{V}_0$ . Autrement dit, le verrouillage apparaît lorsque  $\mathcal{V}_h \cap \mathcal{V}_0 = \{0\}$ .

Afin de surmonter ce problème, d'autres stratégies de résolution ont été proposées comme la méthode d'intégration réduite introduite par Zienkiewicz et al. [97] et Pawsey et Clough [71], ou encore la méthode d'intégration sélective proposée par Hughes et al. [38] et Malkus et Hughes [59]. Même si elles améliorent les résultats numériques, elles ne permettent pas de faire disparaître complètement le phénomène de verrouillage numérique.

Une autre méthode de résolution, appelée *méthode des déformations modifiées*, a été introduite par Hughes et Tezduyar [39] et MacNeal [57]. Cette approche est basée sur une formulation mixte du problème en contraintes et déplacements, dont une justification mathématique a été proposée par Brezzi et al. [23]. Elle est parfois appelée également "Assumed Natural Strain" approach (ANS). Une variante de cette approche ANS a été proposée par Dvorkin et Bathe dans [5, 31].

Dans le cadre de ces approches ANS, pour les plaques minces et épaisses, Katili [42, 43] a introduit les éléments finis triangulaires à trois noeuds DKMT et rectangulaires à quatre noeuds DKMQ. Ces éléments finis DKMT et DKMQ sont basés un modèle de plaques épaisses de Mindlin-Reissner [60, 77] qui nécessite seulement une continuité  $C^0$ . Pour les plaques minces, lorsque l'épaisseur tend vers zéro, la solution obtenue avec l'élément DKMQ converge vers l'élément DKQ [10]. La méthode ANS

utilisée permet de réduire considérablement le verrouillage en cisaillement, voire de le supprimer dans certains cas. Les benchmarks tests classiques associés ont été passés avec succès.

Dans le cadre de cette thèse, nous proposons de généraliser l'élément de plaque DKMQ pour les coques élastiques, minces ou épaisses. Un nouvel élément fini de coque, quadrilatère à 4 noeuds et 6 degrés de liberté par noeud, a été développé. Cet élément est baptisé DKMQ24 (Discrete Kirchoff-Mindlin Quadrilateral 24). Cet élément fini a été construit à partir du modèle de Naghdi [64, 65] en utilisant une formulation similaire à celle développée dans [12]. Il permet de prendre en compte les effets de cisaillement transverse, comme l'élément DKMQ pour le cas des plaques.

Dans le cadre des formulations mixtes en contraintes-déplacements, sur lesquelles sont basées les approches ANS, il est important de s'assurer que la condition inf-sup est bien satisfaite. A la différence de la coercivité de la forme bilinéaire associée, qui est en générale assez aisée à prouver en s'appuyant sur les résultats mathématiques existants, il n'existe que très peu de résultats théoriques sur la condition inf-sup en théorie des coques. Il faut donc l'étudier numériquement.

La condition inf-sup a été étudiée par Chapelle et Bathe [2, 26] pour les problèmes d'élasticité incompressible, et par Iosilevich et al. [40] pour le problème de plaque épaisse de Mindlin-Reissner [60, 77]. Ils ont montré que les éléments finis de plaques de la famille MITC [4, 5] vérifient la condition inf-sup. De même, Bathe et al. [7] ont montré que la famille des éléments MITC-coque vérifient la condition inf-sup sur les exemples étudiés. Cependant, à notre connaissance, il n'existe pas de résultat théorique général. Signalons seulement les travaux de Bathe [3] qui a montré que si un élément vérifie numériquement la condition inf-sup, il devrait vérifier la condition inf-sup d'un point de vue théorique plus général.

En ce qui concerne l'analyse de la performance des éléments finis en théorie des coques, il existe de nombreux critères d'évaluation qui dépendent du problème considéré. Bathe et al. [6] ont proposé une mesure d'erreur en "norme énergie" au lieu de regarder la convergence d'un point en raffinant le maillage. Avec ce critère d'évaluation, les éléments de coque MITC se révèlent performants pour des problèmes où les effets de flexion ou de membrane sont dominants.

Un autre critère d'évaluation de la performance des éléments, appelé "s-norme", a été proposé dans [28, 37]. Il diffère de celui basé sur la mesure de l'erreur "en norme énergie". Ce nouveau critère d'évaluation, basé sur la "s-norme", a été utilisé pour évaluer les performances des éléments finis triangulaires MITC [9, 46, 50, 52]. Lee et Bathe [51] ont utilisé également la "s-norme" pour évaluer le comportement de l'élément MITC quadratique pour les problèmes de plaque. Dans le cas des coques, une analyse similaire a été effectuée dans [8].

Le deuxième chapitre de cette thèse est consacré à la présentation de la théorie des plaques et des coques. Nous commencerons par des rappels de géométrie des surfaces. Nous présenterons ensuite les modèles classiques de coques existants en élasticité linéaire, avec ou sans cisaillement transverse (Modèle de Nagdhi et de Koiter). Les modèles de plaques minces ou épaisses (Modèle de Mindlin-Reissner [60, 77] et de Kirchhoff-Love) seront présentés comme un cas particulier, pour une courbure nulle, des modèles de coques. Nous étudierons ensuite le comportement asymptotique du modèle de Nagdhi lorsque l'épaisseur tend vers zéro. Ce comportement dépend fortement du sous-espace des déplacements en flexion pure qui annulent les énergies de membrane et de cisaillement.

Le chapitre 3 concerne la présentation de l'élément fini DKMQ pour les plaques, ainsi que l'évaluation de ses performances numériques. La première partie du chapitre est consacrée à la présentation de l'élément DKMQ construit sur une formulation mixte du modèle de Mindlin-Reissner. Dans la seconde partie du chapitre, nous étudierons les performances numériques, la convergence associée, ainsi que la condition inf-sup, de l'élément DKMQ sur un certain nombre de benchmarks. Enfin, une étude de l'analyse d'erreur en utilisant l'estimateur d'erreur  $Z^2$ , les techniques de recouvrements de la moyenne, de projection ou encore SPR, sera effectuée.

La première partie du chapitre 4 est consacrée à l'extension de l'élément DKMQ pour les coques minces et épaisses. Ce nouvel élément, appelé DKMQ24 est basé sur une formulation mixte du modèle de Nagdhi. C'est un élément quadrilatère à 4 noeuds et 24 degrés de liberté, qui permet de prendre en compte les effets de cisaillement transversal. Dans la seconde partie du chapitre, les benchmarks tests proposés par Mac Neal et Harder [55] seront utilisés pour valider l'élément DKMQ24. On montrera en particulier que cet élément présente de bonnes propriétés de convergence, aussi bien dans des situations où les effets de flexion sont dominants, que dans des situations où les effets de membrane dominent. L'application de la condition inf-sup dans le cas des coques étant plus délicate car les coefficients intervenant dans le modèle de coque dépendant de la surface moyenne, le critère de la  $s$  - norme sera utilisé. Enfin, une analyse d'erreur sera effectuée, en utilisant les mêmes techniques et les mêmes critères d'évaluation que dans le cas des plaques pour l'élément DKMQ.

Le chapitre 5 est dédié à l'application de l'élément DKMQ24 aux poutres à parois minces. Dans ce chapitre, des poutres à parois minces à section ouverte, de différentes formes, encastées à une extrémité et soumises à un couple de torsion à l'autre extrémité, seront étudiées en utilisant l'élément DKMQ24. Les résultats obtenus seront comparés avec la solution analytique de Vlassov [92] et avec ceux obtenus en utilisant l'élément fini Q4 $\gamma$ 24 [12].

Le chapitre 6 est consacré à l'application de l'élément de plaque DKMQ au cas des plaques en composite. Après une présentation générale de la formulation par élé-

ments finis utilisée, des comparaisons avec les résultats obtenus par Pagano [69, 70] et Srinivas [88] permettront de valider l'extension aux plaques composites proposée.

Enfin, une conclusion et des perspectives de recherche, liées aux résultats obtenus dans cette thèse, concluront ce manuscrit.



# Chapitre 2

## Présentation de la théorie de coques

### 2.1 Introduction

Il existe dans la littérature un nombre important de modèles bidimensionnels linéaires de plaques et de coques élastiques, que ce soit des modèles où le cisaillement est négligé (modèle de Kirchhoff-Love, de Novozhilov-Donnell, de Koiter, de flexion pure ou de membrane), ou des modèles où le cisaillement transverse est pris en compte (modèle de Reissner-Mindlin, de Naghdi).

Les modèles de plaques (modèle de Kirchhoff-Love, de membrane ou de Reissner-Mindlin) peuvent être considérés comme un cas particulier, pour une courbure nulle, des modèles de coques. C'est la raison pour laquelle nous nous focaliserons dans ce chapitre sur les modèles de coques en élasticité linéaire (valables pour des petites déformations et des petits déplacements). La théorie des coques en grands déplacements ou en déplacements modérés (géométriquement non linéaires), voire en grandes déformations, ne sera pas abordée dans le cadre de cette thèse.

Les modèles bidimensionnels de coques élastiques peuvent être obtenus en utilisant principalement trois grands type d'approches (même si d'autres approches existent également). La première approche, historiquement la plus ancienne, consiste à introduire des hypothèses a priori (cinématiques et statiques) dans les équations tridimensionnelles de l'élasticité linéaire [47][48][49][60][65][68][77]. La seconde approche possible est une approche surfacique directe où la coque est modélisée par une surface plongée dans  $\mathbb{R}^3$  [20][21][22][63][91]. Une des limitations de cette approche surfacique est qu'elle nécessite également de faire des hypothèses a priori sur la loi de comportement surfacique associée.

Enfin, la troisième approche possible est une approche asymptotique, basée sur les techniques de perturbations singulières développées par J.L. Lions pour les problèmes contenant un petit paramètre [54]. Ces approches asymptotiques conduisent à une jus-

tification plus rigoureuse des modèles bidimensionnels de structures minces (plaques, coques et également poutre et poutres à parois minces), sans avoir besoin d'injecter des hypothèses a priori.

Dans ce chapitre, nous avons choisi volontairement de présenter les principaux modèles coques (et de plaques comme un cas particulier) à partir d'une approche tridimensionnelle basée sur des hypothèses a priori (hypothèses cinématiques ou statiques), de la même façon que ceux-ci ont été établis historiquement. Bien évidemment, les notations ont été adaptées afin de rester dans un cadre le plus général possible.

## 2.2 Rappels de géométrie des surfaces

### 2.2.1 Paramétrisation de la coque

Une coque est un solide tridimensionnel défini par une surface moyenne de longueur  $L$ , de largeur  $b$ , de rayon de courbure  $R$ , et d'épaisseur  $t$  très petite par rapport aux autres dimensions  $L$ ,  $b$  et  $R$ . Dans cette thèse, on considérera principalement les coques d'épaisseur constante, également répartie de chaque côté de la surface moyenne.

Soit  $\hat{m}(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$  un point courant d'un ouvert de référence  $\hat{A}$ . On note  $\varphi : \hat{A} \rightarrow A \subset \mathbb{R}^3$ , le plongement qui transforme  $\hat{A}$  en la surface  $A$  de  $\mathbb{R}^3$ , qui représentera la surface moyenne de la coque (voir figure.2.1).

En tout point  $m$  de la surface moyenne  $A$ , nous pouvons définir deux vecteurs tangents :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \\ \mathbf{a}_2 &= \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Le vecteur normal unitaire  $\mathbf{n}$  à la surface moyenne au point  $m$  est défini classiquement par :

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2|} \tag{2.2}$$

Notons  $O$  l'origine d'un repère orthonormé  $(O; e_1, e_2, e_3)$  choisi une fois pour toute et  $q$  un point quelconque de la coque situé à la distance  $z$  de la surface moyenne (cote suivant l'épaisseur). Le vecteur position du point  $q$  est représenté en fonction du vecteur unitaire  $\mathbf{n}$  suivant :

$$\vec{O}q(\xi, \eta, z) = \boldsymbol{\varphi}(\xi, \eta) + z\mathbf{n}(\xi, \eta) \quad (2.3)$$

$$-\frac{t(\xi, \eta)}{2} \leq z \leq +\frac{t(\xi, \eta)}{2}$$

dans le cas d'une épaisseur constante considérée ici, nous avons  $-\frac{t}{2} \leq z \leq +\frac{t}{2}$ .

Les vecteurs tangents ( $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ ) en  $m$  à la surface définissent la base covariante locale, qui en général n'est pas orthonormée. Pour faciliter les calculs, on introduit classiquement les vecteurs de la base contravariante  $\mathbf{a}^1$  et  $\mathbf{a}^2$ , définis par :

$$\mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta = \delta_\beta^\alpha \quad (2.4)$$

où,  $\delta$  désigne le symbole de Kronecker vérifiant  $\delta_\beta^\alpha = 0$  si  $\alpha \neq \beta$  et  $\delta_\beta^\alpha = 1$  si  $\alpha = \beta$ .

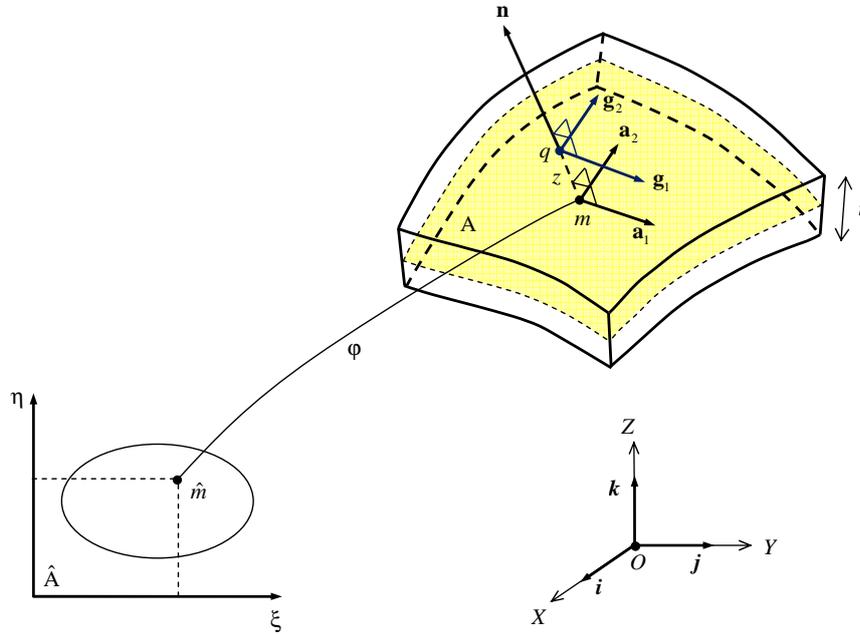


FIGURE 2.1 – Paramétrisation de la surface moyenne de la coque

La première forme fondamentale de la surface moyenne de la coque est le tenseur métrique  $\underline{a}$ , dont les composantes sont données par :

$$a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta \quad (2.5)$$

Dans la base contravariante, on a :

$$a^{\alpha\beta} = \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta \quad (2.6)$$

avec  $a^{\alpha\beta} = (a_{\alpha\beta})^{-1}$ .

L'élément d'aire  $dA$  au point  $m$  de la surface moyenne de la coque est défini par :

$$dA = \sqrt{a} d\xi d\eta \quad (2.7)$$

avec

$$a = a_{11}a_{22} - (a_{12})^2 \quad (2.8)$$

On définit également la deuxième forme fondamentale de la surface moyenne dont l'endomorphisme associé est appelé également tenseur de courbure  $\underline{b}$ . Il est défini par :

$$b_{\alpha\beta} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}_{\alpha,\beta} = -\mathbf{n}_{,\beta} \cdot \mathbf{a}_\alpha \quad (2.9)$$

La courbure moyenne  $H$  et la courbure totale ou gaussienne  $\mathcal{K}$  sont classiquement données par :

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} (b_1^1 + b_2^2) = \frac{1}{2} \text{tr } \underline{b} \\ \mathcal{K} &= b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2 = \det \underline{b} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Nous avons la relation suivante :

$$b_\beta^\alpha = a^{\alpha\lambda} b_{\lambda\beta} = -a^{\alpha\lambda} \mathbf{n}_{,\beta} \cdot \mathbf{a}_\lambda = -\mathbf{n}_{,\beta} \cdot \mathbf{a}^\alpha = \mathbf{a}_{,\beta}^\alpha \cdot \mathbf{n} \quad (2.11)$$

La troisième forme fondamentale  $\underline{c}$  est donnée par :

$$c_{\alpha\beta} = b_\alpha^\lambda b_{\lambda\beta} \quad (2.12)$$

Soit maintenant  $\mathbf{v}$  un vecteur tangent à la surface moyenne. On définit sa dérivée covariante sur la surface  $S$ , noté  $\frac{\hat{\partial} \mathbf{v}}{\partial m}$ , dont les composantes covariantes sont données par :

$$v_{\beta|\alpha} = v_{\beta,\alpha} - \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda v_\lambda \quad (2.13)$$

où  $\Gamma_{\beta\alpha}^\lambda$  désignent les symboles de Christoffel du système de coordonnées choisi. Ils sont définis par :

$$\Gamma_{\beta\alpha}^\lambda = \mathbf{a}_{\beta,\alpha} \cdot \mathbf{a}^\lambda \quad (2.14)$$

## 2.2.2 Paramétrisation d'un point quelconque de la coque

En utilisant la définition (2.3), en tout point  $q$  de la coque, on peut définir de façon similaire les vecteurs  $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$  de la base locale :

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_\alpha &= \frac{\partial \vec{O}q}{\partial \xi^\alpha} = \mathbf{a}_\alpha + z \mathbf{n}_{,\alpha} = \mathbf{a}_\alpha - z b_\alpha^\lambda \mathbf{a}_\lambda \\ \mathbf{g}_3 &= \frac{\partial \vec{O}q}{\partial z} = \mathbf{n} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Le tenseur métrique associé est défini par :

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta = a_{\alpha\beta} - 2zb_{\alpha\beta} + z^2c_{\alpha\beta} \\ g_{\alpha 3} &= \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_3 = 0 \\ g_{33} &= \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_3 = 1 \end{aligned} \quad (2.16)$$

et l'élément de volume élémentaire  $dV$  s'écrit

$$dV = \sqrt{g}d\xi d\eta dz \quad (2.17)$$

avec

$$\sqrt{g} = \sqrt{a} \left( 1 - 2Hz + \mathcal{K}z^2 \right) \quad (2.18)$$

où  $a, H$  et  $\mathcal{K}$  sont définis par (2.8) et (2.10).

## 2.3 Les modèles de coque existants

### 2.3.1 Cinématique

De façon générale, le déplacement  $\mathbf{U}$  d'un point quelconque de la coque peut s'écrire sous la forme [60, 77] :

$$q(\xi, \eta, z) = p(\xi, \eta) + z\mathbf{n} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{U}(\xi, \eta, z) = \mathbf{u}(\xi, \eta) + z\beta_\lambda(\xi, \eta)\mathbf{a}^\lambda(\xi, \eta) \quad (2.20)$$

où  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, w)$  représente le déplacement du point  $p$  de la surface moyenne en  $z = 0$  et  $\boldsymbol{\beta} = \beta_\lambda(\xi, \eta)\mathbf{a}^\lambda(\xi, \eta)$  le déplacement tangentiel correspondant à la rotation de la normale  $\mathbf{n}$ .

Dans le cas linéaire, le tenseur de déformation peut écrire sous la forme :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{U}_{,j} + \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{U}_{,i}) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.21)$$

La dérivation du champ de déplacements  $\mathbf{U}$  donné par (2.20) conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \xi^\alpha} &= (u_{\lambda|\alpha} - b_{\lambda\alpha}w + z\beta_{\lambda|\alpha}) \mathbf{a}^\lambda + (w_{,\alpha} + b_\alpha^\lambda u_\lambda + zb_\alpha^\lambda \beta_\lambda) \mathbf{n} \\ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} &= \beta_\lambda \mathbf{a}^\lambda \end{aligned} \quad (2.22)$$

Les composantes du tenseur des déformations (2.21) deviennent :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\mu} &= e_{\alpha\mu}(\mathbf{u}) + z\chi_{\alpha\mu}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}) - z^2\kappa_{\alpha\mu}(\boldsymbol{\beta}) \\ \varepsilon_{\alpha 3} &= \gamma_\alpha(\mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}) \\ \varepsilon_{33} &= 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

avec

$$\begin{aligned}
e_{\alpha\mu}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2} (u_{\alpha|\mu} + u_{\mu|\alpha}) - b_{\alpha\mu}w \\
\chi_{\alpha\mu}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}) &= \frac{1}{2} (\beta_{\alpha|\mu} + \beta_{\mu|\alpha} - b_{\mu}^{\lambda}u_{\lambda|\alpha} - b_{\alpha}^{\lambda}u_{\lambda|\mu}) + c_{\alpha\mu}w \\
\kappa_{\alpha\mu}(\boldsymbol{\beta}) &= \frac{1}{2} (b_{\mu}^{\lambda}\beta_{\lambda|\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda}\beta_{\lambda|\mu}) \\
\gamma_{\alpha}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}) &= \frac{1}{2} (\beta_{\alpha} + w_{,\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda}u_{\lambda})
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Il est important de noter que l'expression des composantes  $\varepsilon_{ij}$  du tenseur des déformations données par (2.23) et (2.24) est générale et permet de prendre en compte le cisaillement transverse dans l'épaisseur lorsque celui-ci ne peut être négligé. C'est le cas notamment des plaques et coques "épaisses". Cependant, dans le cas où le cisaillement peut-être négligé, l'hypothèse cinématique supplémentaire qu'il convient de rajouter est  $\varepsilon_{\alpha 3} = 0$ , qui s'écrit de façon équivalente, compte tenu de (2.24) :

$$\beta_{\alpha} = -w_{,\alpha} - b_{\alpha}^{\lambda}u_{\lambda} \tag{2.25}$$

Dans ce cas, l'expression du tenseur de variation de courbure  $\chi_{\alpha\beta}$  devient :

$$\chi_{\alpha\beta}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}) = -w_{|\alpha\beta} - \frac{1}{2} (b_{\alpha|\beta}^{\mu} + b_{\beta|\alpha}^{\mu}) u_{\mu} - b_{\alpha}^{\mu}u_{\mu|\beta} - b_{\beta}^{\mu}u_{\mu|\alpha} + c_{\alpha\beta}w \tag{2.26}$$

Comme on le verra à la section 2.4.2, c'est cette expression qui sera utilisée dans le modèle de coque de Koiter [48, 49]. Dans le cas du modèle de plaque de Kirchhoff [47], où toutes les composantes du tenseur de courbure  $b_{\alpha}^{\lambda} = 0$  sont nulles, la relation (2.25) se réduit à la relation classique de Kirchhoff-Love  $\beta_{\alpha} = -w_{,\alpha}$  et l'expression (2.26) du tenseur de variation de courbure devient :

$$\chi_{\alpha\beta} = -w_{|\alpha\beta} \tag{2.27}$$

### 2.3.2 Hypothèse de contraintes planes

En élasticité linéaire, le tenseur d'élasticité tridimensionnel est classiquement défini par

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl} \tag{2.28}$$

avec

$$\begin{aligned}
C^{ijkl} &= \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) \\
\lambda &= \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\
\mu &= \frac{E}{2(1+\nu)}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  désignent les constantes de Lamé du matériau.

L'hypothèse statique de contraintes planes, nécessaire à l'obtention des modèles classiques de plaques et coques, a été historiquement formulée par Kirchhoff et Love en se basant sur le raisonnement suivant. Si l'on considère une plaque non chargée sur ses faces supérieure et inférieure  $\Gamma^\pm$ , de normale extérieure  $n = \pm e_3$ , alors les conditions aux limites sur  $\Gamma^\pm$  impliquent que  $\sigma^{i3} = 0$ . On est donc dans un état de contraintes planes, que l'on étend à toute la plaque (ou la coque), compte tenu de sa faible épaisseur.

**Remarque 1** *Cette hypothèse de contraintes planes, pourtant en contradiction avec l'hypothèse cinématique de Kirchhoff-Love<sup>1</sup>, est classiquement utilisée pour obtenir la théorie des plaques de Kirchhoff-Love. En fait, les contraintes de cisaillement  $\sigma^{\alpha 3}$  et de pincement  $\sigma^{33}$  sont très faibles par rapport aux contraintes planes  $\sigma^{\alpha\beta}$  et sont donc négligeables, mais ne sont pas nulles.*

En utilisant l'hypothèse de contraintes planes  $\sigma^{33} = 0$ , la loi de comportement élastique linéaire tridimensionnelle se déduit à une loi en contraintes planes qui s'écrit :

$$\begin{aligned}\sigma^{\alpha\beta} &= C^{\alpha\beta\lambda\mu} \varepsilon_{\lambda\mu} \\ \sigma^{\alpha 3} &= \frac{1}{2} D^{\alpha\lambda} \varepsilon_{\lambda 3}\end{aligned}\tag{2.30}$$

avec

$$\begin{aligned}C^{\alpha\beta\lambda\mu} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left( g^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu} + g^{\alpha\mu} g^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1-\nu} g^{\alpha\beta} g^{\lambda\mu} \right) \\ D^{\alpha\lambda} &= \frac{2E}{(1+\nu)} g^{\alpha\lambda}\end{aligned}\tag{2.31}$$

## 2.4 Les modèles classiques de coques élastiques

A partir de la cinématique générale (2.20), et de la loi de comportement linéaire élastique en contraintes planes (2.30), on aboutit à la formulation faible suivante :

Trouver  $\mathbf{U} \in \mathcal{V}$  tel que :

$$\int_{\Omega} \left[ C^{\alpha\beta\lambda\mu} \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{U}) \varepsilon_{\lambda\mu}(\mathbf{U}^*) + D^{\alpha\lambda} \varepsilon_{\alpha 3}(\mathbf{U}) \varepsilon_{\lambda 3}(\mathbf{U}^*) \right] dV = \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^* dV, \quad \forall \mathbf{U}^* \in \mathcal{V}\tag{2.32}$$

où  $\mathcal{V}$  désigne un espace fonctionnel "adéquat" (espace des déplacements tests admissibles) afin d'assurer l'existence et l'unicité de la solution  $\mathbf{U}$ . Cet espace sera précisé

---

1. On ne peut pas avoir en même temps  $\sigma^{33}$  et  $\varepsilon_{33} = 0$  d'après la loi de comportement de Hooke.

par la suite lorsque cela sera nécessaire. De façon générale, on notera les déplacements tests  $\mathbf{U}^*$  sous la forme :

$$\mathbf{U}^*(\xi, \eta, z) = \mathbf{u}^*(\xi, \eta) + z\beta_\lambda^*(\xi, \eta)\mathbf{a}^\lambda(\xi, \eta) \quad (2.33)$$

Il est important de remarquer que la formulation (2.32) dépend explicitement de la variable d'épaisseur  $z$  à travers le tenseur des déformations  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  et l'élément de volume  $dV$  (voir expressions (2.17)-(2.18) et (2.23)-(2.24)). Afin d'obtenir des modèles bidimensionnels de plaques et de coques, il est nécessaire d'effectuer une intégration sur l'épaisseur dans la formulation (2.32), par rapport à la variable  $z$ .

L'épaisseur de la coque étant très petite devant les autres dimensions (même pour les coques "épaisses" où le cisaillement transverse est pris en compte), des approximations complémentaires sont en général effectuées, en ne gardant qu'une partie seulement du développement en  $z$ . De ce niveau d'approximation dépendra la richesse du modèle de coque qui sera obtenu. Dans les modèles de plaques et de coques usuels existant dans la littérature, les approximations suivantes sont effectuées.

1. Dans la relation (2.18), seul le terme à l'ordre zéro en  $z$  est conservé. Ainsi la relation (2.17) se réduit à :

$$dV = \sqrt{a}d\xi d\eta dz \quad (2.34)$$

2. Dans l'expression du tenseur des déformations, les termes en  $z$  sont conservés jusqu'à l'ordre 1. Ainsi, l'expression (2.23) devient :

$$\varepsilon_{\alpha\mu} = e_{\alpha\mu} + z\chi_{\alpha\mu} \quad (2.35)$$

où les expressions de  $e_{\alpha\mu}$  et  $\chi_{\alpha\mu}$  sont toujours données par (2.24).

3. Dans le tenseur d'élasticité en contraintes planes (2.31), seuls les termes à l'ordre zéro en  $z$  sont conservés. L'expression (2.31) se réduit à :

$$\begin{aligned} C^{\alpha\beta\lambda\mu} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left( a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} + a^{\alpha\mu} a^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} a^{\lambda\mu} \right) \\ D^{\alpha\lambda} &= \frac{2E}{(1+\nu)} a^{\alpha\lambda} \end{aligned} \quad (2.36)$$

### 2.4.1 Modèle de Nagdhi

Le modèle de coque de Nagdhi [65], qui tient compte du cisaillement transverse, est très utilisé dans le calcul par élément finis en théorie des coques épaisses ou dans des configurations où le cisaillement transverse ne peut pas être négligé. Ce modèle peut-être déduit directement de la formulation faible (2.32) en y injectant les hypothèses simplificatrices (2.34)-(2.36) et en intégrant sur l'épaisseur. On obtient alors

la formulation bidimensionnelle

Trouver  $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{V}$  tel que :

$$\begin{aligned} & \int_{\omega} C^{\alpha\beta\lambda\mu} \left[ t e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) e_{\lambda\mu}(\mathbf{u}^*) + \frac{t^3}{12} \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}) \chi_{\lambda\mu}(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\beta}^*) \right] dA \\ & + \int_{\omega} t D^{\alpha\lambda} \gamma_{\alpha}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}) \gamma_{\lambda}(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\beta}^*) dA = \int_{\omega} t \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}^* dA, \quad \forall \mathbf{U}^* = (\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\beta}^*) \in \mathcal{V} \end{aligned} \quad (2.37)$$

où les tenseurs de membrane  $\underline{e}$ , de flexion  $\underline{\chi}$  et de cisaillement  $\underline{\gamma}$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} e_{\lambda\mu}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2} (u_{\lambda|\mu} + u_{\mu|\lambda}) - b_{\lambda\mu} w \\ \chi_{\lambda\mu}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}) &= \frac{1}{2} (\beta_{\lambda|\mu} + \beta_{\mu|\lambda} - b_{\mu}^{\alpha} u_{\alpha|\lambda} - b_{\lambda}^{\alpha} u_{\alpha|\mu}) + c_{\lambda\mu} w \\ \gamma_{\alpha}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}) &= \frac{1}{2} (\beta_{\alpha} + w_{,\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda} u_{\lambda}) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Afin d'assurer l'existence et l'unicité de la solution  $\mathbf{U}$ , il convient de choisir l'espace fonctionnel [6, 27, 29, 28] :

$$\mathcal{V} = \{(\mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}) \in [H^1(\Omega)]^3 \times [H^1(\Omega)]^2\} \cap \mathcal{BC} \quad (2.39)$$

où  $\mathcal{BC}$  désigne les conditions aux limites cinématiques imposées à rajouter dans l'espace  $\mathcal{V}$ .

Dans les applications numériques utilisant le modèle de coque de Naghdi (résolution par éléments finis), un facteur de correction de cisaillement  $K$  est généralement rajouté. La relation (2.37) devient alors :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{U} = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{V} = [H_0^1(\Omega)]^3 \times [H_0^1(\Omega)]^2 \text{ tel que :} \\ & \int_{\omega} C^{\alpha\beta\lambda\mu} \left[ t e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) e_{\lambda\mu}(\mathbf{u}^*) + \frac{t^3}{12} \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}) \chi_{\lambda\mu}(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\beta}^*) \right] dA \\ & + K \int_{\omega} t D^{\alpha\lambda} \gamma_{\alpha}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}) \gamma_{\lambda}(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\beta}^*) dA = \int_{\omega} t \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}^* dA, \quad \forall \mathbf{U}^* = (\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\beta}^*) \in \mathcal{V} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Un facteur de cisaillement  $K$  est utilisé car le cisaillement transversal n'est pas constant dans toute l'épaisseur de la coque<sup>2</sup>, il est égal à zéro sur les faces supérieure et inférieure. Ce facteur de cisaillement  $K$ , qui est plus petit que 1, peut être déterminé en comparant l'énergie de cisaillement obtenu à partir de la distribution théorique et l'énergie calculée par le modèle de Mindlin. Pour une plaque à section rectangulaire, homogène et isotrope, la valeur de  $K$  égale à 5/6 dans le cas statique [77, 78] et égale à  $\pi^2/12$  dans le cas dynamique [60, 61].

---

2. Le cisaillement transversal est supposé constant sur l'épaisseur d'après l'hypothèse de Reissner-Mindlin [60, 77].

## 2.4.2 Modèle de Koiter

Le modèle de Koiter [48, 49] est le modèle de coques minces le plus utilisé dans les calculs par éléments finis en élasticité linéaire. Il peut être obtenu à partir du modèle de Naghdi en négligeant le cisaillement transverse. Dans ce cas, on a  $\gamma_\alpha(\mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}) = 0$ , ce qui conduit à la relation (2.25) et à l'expression (2.26) du tenseur de variation de courbure  $\chi_{\alpha\beta}$ .

$$\chi_{\alpha\beta}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}) = -w_{|\alpha\beta} - \frac{1}{2} \left( b_{\alpha|\beta}^\mu + b_{\beta|\alpha}^\mu \right) u_\mu - b_\alpha^\mu u_{\mu|\beta} - b_\beta^\mu u_{\mu|\alpha} + c_{\alpha\beta} w \quad (2.41)$$

En utilisant la relation  $b_{\alpha|\beta}^\mu = b_{\beta|\alpha}^\mu$ , l'expression (2.41) devient

$$\chi_{\alpha\beta}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}) = -\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \quad (2.42)$$

avec :

$$\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = w_{|\alpha\beta} + b_{\alpha|\beta}^\mu u_\mu + b_\alpha^\mu u_{\mu|\beta} + b_\beta^\mu u_{\mu|\alpha} - c_{\alpha\beta} w \quad (2.43)$$

On retrouve ainsi l'expression classique figurant dans la majorité des ouvrages (voir en particulier Bernadou [14], Destuynder[30], Sanchez [83], Koiter [48, 49]).

Ainsi, la formulation faible générale du modèle de Koiter se déduit de (2.37). Dans le cas d'une coque encastree sur tout son bord latéral<sup>3</sup>, elle s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \mathbf{u} = (u_1, u_2, w) \in \mathcal{V} = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \text{ tel que :} \\ \int_\omega C^{\alpha\beta\lambda\mu} \left[ t e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) e_{\lambda\mu}(\mathbf{u}^*) + \frac{t^3}{12} \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \rho_{\lambda\mu}(\mathbf{u}^*) \right] dA = \int_\omega t \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}^* dA, \quad \forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{V} \end{aligned} \quad (2.44)$$

où  $C^{\alpha\beta\lambda\mu}$ ,  $e_{\alpha\beta}$  et  $\rho_{\alpha\beta}$  sont définis par (2.36), (2.38) et (2.43) respectivement.

## 2.5 Les modèles de plaques élastiques

Comme on l'a vu précédemment, les modèles de plaques peuvent se déduire comme un cas particulier, pour une courbure nulle, des modèles de coques. Dans ce cas, la normale  $\mathbf{n}$  à la surface moyenne est constante et peut être identifiée au vecteur  $e_3$  de la base cartésienne orthonormée  $(e_1, e_2, e_3)$ . Les composantes  $b_{\alpha\beta}$  du tenseur de courbure sont identiquement nulles, ainsi que celles de la troisième forme fondamentale  $c_{\alpha\beta}$  sont égales à zéro.

Les calculs effectués précédemment dans le cas des coques peuvent être repris intégralement en annulant  $b_{\alpha\beta}$  et  $c_{\alpha\beta}$ , avec ou sans cisaillement transverse, selon le modèle

---

3. Pour des conditions aux limites autres, l'espace fonctionnel  $\mathcal{V}$  doit être adapté.

bidimensionnel que l'on souhaite obtenir. Un exemple de cinématique de déformation de plaque est présenté sur la figure 2.2. Dans la suite de cette section, nous nous limiterons à présenter les deux principaux modèles de plaques existants dans la littérature : le modèle de plaque de Reissner-Mindlin avec cisaillement transverse et le modèle de Kirchhoff-Love sans cisaillement transverse.

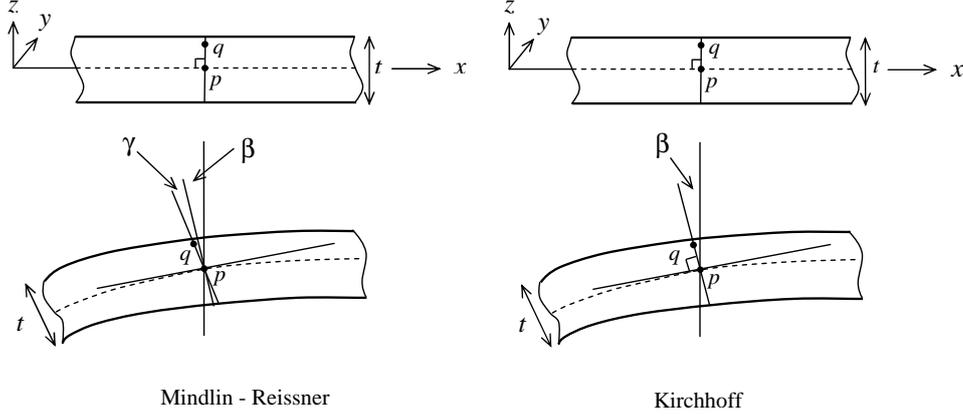


FIGURE 2.2 – Cinématique de déformation d'une plaque (avec ou sans cisaillement transverse).

### 2.5.1 Modèle de Reissner-Mindlin

L'équivalent du modèle de Naghdi est le modèle de Reissner-Mindlin [60, 77]. Ce modèle inclut du cisaillement transverse dans l'épaisseur. Il peut se déduire directement comme un cas particulier du modèle de Naghdi, à partir de la formulation (2.37) :

$$\begin{aligned}
 & \text{Trouver } \mathbf{U} = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{V} = [H_0^1(\Omega)]^3 \times [H_0^1(\Omega)]^2 \text{ tel que :} \\
 & \int_{\omega} C^{\alpha\beta\lambda\mu} \left[ t e_{\alpha\beta}(u_1, u_2) e_{\lambda\mu}(u_1^*, u_2^*) + \frac{t^3}{12} \chi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\beta}) \chi_{\lambda\mu}(\boldsymbol{\beta}^*) \right] dA \\
 & + K \int_{\omega} t D^{\alpha\lambda} \gamma_{\alpha}(w, \boldsymbol{\beta}) \gamma_{\lambda}(w^*, \boldsymbol{\beta}^*) dA = \int_{\omega} t \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}^* dA, \quad \forall \mathbf{U}^* = (\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\beta}^*) \in \mathcal{V}
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

où  $K$  est le facteur de correction de cisaillement,  $C^{\alpha\beta\lambda\mu}$  et  $D^{\alpha\lambda}$  sont définis dans (2.36). Les tenseurs de déformation membranaire  $e_{\alpha\beta}$ , de variation de courbure  $\chi_{\alpha\beta}$  et de cisaillement  $\gamma_{\alpha}$  se réduisent à :

$$\begin{aligned}
 e_{\alpha\mu}(u_1, u_2) &= \frac{1}{2} (u_{\alpha,\mu} + u_{\mu,\alpha}) \\
 \chi_{\lambda\mu}(\boldsymbol{\beta}) &= \frac{1}{2} (\beta_{\lambda,\mu} + \beta_{\mu,\lambda}) \\
 \gamma_{\alpha}(w, \boldsymbol{\beta}) &= \frac{1}{2} (\beta_{\alpha} + w_{,\alpha})
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

Notons que dans les expressions (2.46), les dérivées covariantes ont été remplacées par des dérivées classiques, ce qui revient à se placer dans une base cartésienne orthonormée  $(e_1, e_2, e_3)$  dont les symboles de Christoffel associés sont tous nuls.

Cependant, dans la littérature, le modèle de Reissner-Mindlin se trouve généralement écrit sous la forme simplifiée suivante :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } (\boldsymbol{\beta}, w) \in \mathcal{V} = \mathbb{B} \times W = [H_0^1(\Omega)]^2 \times [H_0^1(\Omega)] \text{ tel que :} \\ \frac{t^3}{12} \int_{\omega} C^{\alpha\beta\lambda\mu} \chi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\beta}) \chi_{\lambda\mu}(\boldsymbol{\beta}^*) dA \\ + K \int_{\omega} t D^{\alpha\lambda} \gamma_{\alpha}(w, \boldsymbol{\beta}) \gamma_{\lambda}(w^*, \boldsymbol{\beta}^*) dA = \int_{\omega} t F_3 \cdot w^* dA, \quad \forall (\boldsymbol{\beta}^*, w^*) \in \mathcal{V} \end{aligned} \quad (2.47)$$

où les effets de membrane ont été négligés.

## 2.5.2 Le modèle de plaque de Kirchhoff-Love

De même, le modèle de Kirchhoff-Love [47] est le pendant du modèle de Koiter pour les plaques minces élastiques. Sa formulation faible se déduit directement de (2.44) :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \mathbf{u} = (u_1, u_2, w) \in \mathcal{V} = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \text{ tel que :} \\ \int_{\omega} C^{\alpha\beta\lambda\mu} \left[ t e_{\alpha\beta}(u_1, u_2) e_{\lambda\mu}(u_1^*, u_2^*) + \frac{t^3}{12} \rho_{\alpha\beta}(w) \rho_{\lambda\mu}(w^*) \right] dA = \int_{\omega} t \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}^* dA, \quad \forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{V} \end{aligned} \quad (2.48)$$

avec

$$\begin{aligned} e_{\alpha\mu}(u_1, u_2) &= \frac{1}{2} (u_{\alpha,\mu} + u_{\mu,\alpha}) \\ \rho_{\lambda\mu}(w) &= w_{,\alpha\beta} \end{aligned} \quad (2.49)$$

### 2.5.2.1 Modèle de flexion pure

Sous la forme (2.48), le modèle de plaque de Kirchhoff-Love contient à la fois les effets de membrane et de flexion. Dans la littérature, on le trouve souvent formulé uniquement avec les effets de flexion, sous l'action d'efforts  $F_3$  normaux à la surface moyenne de la plaque. Dans ce cas, la rigidité en flexion étant beaucoup plus faible que celle en membrane, il convient d'effectuer une mise à l'échelle des efforts, en considérant des efforts en  $t^3$  et non en  $t$ . On obtient alors :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } w \in H_0^2(\Omega) \text{ tel que :} \\ \frac{t^3}{12} \int_{\omega} C^{\alpha\beta\lambda\mu} \rho_{\alpha\beta}(w) \rho_{\lambda\mu}(w^*) dA = \int_{\omega} t^3 F_3 w dA, \quad \forall w \in H_0^2(\Omega) \end{aligned} \quad (2.50)$$

### 2.5.2.2 Modèle de membrane

Dans le cas de plaques très minces ou de sollicitations en membrane uniquement (extension-compression dans le plan de la surface moyenne par exemple), les effets de flexion peuvent être négligés. Le modèle de Kirchhoff-Love se réduit alors au modèle de membrane qui s'écrit :

Trouver  $\bar{u} = (u_1, u_2) \in \mathcal{V} = H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega)$  tel que :

$$\int_{\omega} tC^{\alpha\beta\lambda\mu} e_{\alpha\beta}(\bar{u}) e_{\lambda\mu}(\bar{u}^*) dA = \int_{\omega} t\bar{F} \cdot \bar{u}^* dA, \quad \forall \bar{u} \in \mathcal{V} \quad (2.51)$$

avec

$$\bar{F} \cdot \bar{u}^* = F_1 u_1^* + F_2 u_2^* \quad (2.52)$$

où  $\bar{u}^* = (u_1^*, u_2^*)$  est un déplacement test tangentiel uniquement.

## 2.6 Comportement asymptotique du modèle de Naghdi

La formulation faible (2.40) du modèle de Naghdi peut écrire sous la forme :

Trouver  $\mathbf{U} \in \mathcal{V}$  tel que :

$$t^3 A_f(\mathbf{U}, \mathbf{U}^*) + t A_{mc}(\mathbf{U}, \mathbf{U}^*) = F(\mathbf{U}^*), \quad \forall \mathbf{U}^* \in \mathcal{V} \quad (2.53)$$

où  $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\beta})$  et  $\mathbf{U}^* = (\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\beta}^*)$  sont définis par (2.20) et (2.33) et où  $F(\mathbf{U}^*)$  désigne le travail des efforts extérieurs pour le déplacement test  $\mathbf{U}^*$ . Les formes bilinéaires symétriques  $A_f(\cdot, \cdot)$ ,  $A_m(\cdot, \cdot)$  et  $A_c(\cdot, \cdot)$  sont associées respectivement à l'énergie de déformation élastique en flexion, en membrane et en cisaillement. Elles sont données par :

$$A_f((\mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}), (\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\beta}^*)) = \frac{1}{12} \int_{\omega} C^{\alpha\beta\lambda\mu} \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}) \chi_{\lambda\mu}(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\beta}^*) dA$$

$$A_m(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) = \int_{\omega} C^{\alpha\beta\lambda\mu} e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) e_{\lambda\mu}(\mathbf{u}^*) dA \quad (2.54)$$

$$A_c((\mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}), (\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\beta}^*)) = K \int_{\omega} D^{\alpha\lambda} \gamma_{\alpha}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}) \gamma_{\lambda}(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\beta}^*) dA$$

où les composantes de  $\underline{\chi}$ ,  $\underline{e}$  et  $\underline{\gamma}$  sont données par (2.38). L'expression de  $C^{\alpha\beta\lambda\mu}$  et  $D^{\alpha\lambda}$  est celle de (2.36). Dans l'expression (2.53), les énergies de membrane et de cisaillement ont été volontairement regroupées en  $A_{mc}(\cdot, \cdot) = A_m(\cdot, \cdot) + A_c(\cdot, \cdot)$ .

Afin d'assurer l'existence et l'unicité de la solution  $U = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\beta})$ , on rappelle que l'espace  $\mathcal{V}$  est défini par :

$$\mathcal{V} = \{(\mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)\} \cap \mathcal{BC} \quad (2.55)$$

où  $\mathcal{BC}$  désigne les conditions aux limites cinématiques imposées à rajouter dans l'espace  $\mathcal{V}$  [6, 27, 28, 29].

Il est important d'étudier le comportement de la coque lorsque l'épaisseur tend vers zéro, ou de façon équivalente le comportement asymptotique du modèle de Naghdi (formulation (2.40)) quand tend vers zéro. Pour cela, introduisons  $\mathcal{V}_0$ , le sous-espace de  $\mathcal{V}$  défini par :

$$\mathcal{V}_0 = \{\mathbf{U}^* = (\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\beta}^*) \in \mathcal{V} \quad \text{tel que} \quad A_{ms}(\mathbf{U}^*, \mathbf{U}^*) = 0\} \quad (2.56)$$

Ce sous-espace joue un rôle fondamental dans le comportement asymptotique de la coque lorsque  $t$  tend vers zéro ; c'est le sous-espace des déplacements qui annulent les énergies de membrane et cisaillement. Il est également appelé sous-espace des déplacements en flexion pure. Il est lié, mais ne correspond pas exactement, au sous-espace des déplacements inextensionnels qui annulent l'énergie de membrane uniquement. On va voir dans la suite que le comportement limite (pour  $t = 0$ ) dépend de façon fondamentale du fait que  $\mathcal{V}_0$  est réduit ou non au déplacement nul.

### 2.6.1 Cas des coques inhibée en flexion pure

Commençons par considérer le cas des coques inhibées en flexion pure, où le sous-espace  $\mathcal{V}_0 = \{0\}$ . Autrement dit, il n'existe aucun déplacement, autre que le déplacement nul, qui annule l'énergie de membrane et de cisaillement. Compte tenu de la rigidité de la coque, plus importante en membrane qu'en flexion, il est nécessaire d'effectuer *l'up-scaling* suivant sur les efforts :

$$G(\mathbf{U}^*) = tF(\mathbf{U}^*)$$

La formulation faible (2.53) devient alors :

*Trouver*  $\mathbf{U} \in \mathcal{V}$  *tel que* :

$$A_{mc}(\mathbf{U}, \mathbf{U}^*) + t^2 A_f(\mathbf{U}, \mathbf{U}^*) = G(\mathbf{U}^*), \quad \forall \mathbf{U}^* \in \mathcal{V} \quad (2.57)$$

Dans le cas où  $\mathcal{V}_0 = \{0\}$ , il est possible de montrer que

$$A_{mc}(\mathbf{U}^*, \mathbf{U}^*) > 0, \quad \forall \mathbf{U}^* \in \mathcal{V}_0 \quad (2.58)$$

De plus,  $A_{mc}(\mathbf{U}^*, \mathbf{U}^*)^{\frac{1}{2}}$  définit une norme sur  $\mathcal{V}$ . Notons  $\mathcal{V}_m$  le complété de  $\mathcal{V}$  pour cette norme et considérons le problème limite pour  $t = 0$  :

Trouver  $\mathbf{U}_m \in \mathcal{V}_m$  tel que :

$$A_{mc}(\mathbf{U}_m, \mathbf{U}^*) = G(\mathbf{U}^*), \quad \forall \mathbf{U}^* \in \mathcal{V}_m \quad (2.59)$$

Le problème (2.59) est appelé problème membranaire ou problème de membrane. Il est important de noter que l'espace complété  $\mathcal{V}_m$  est bien plus grand que l'espace  $\mathcal{V}$ . De ce fait, pour que le problème limite soit bien posé (existence et unicité de la solution du problème en membrane (2.59)), il est nécessaire de vérifier que la condition suivante soit bien satisfaite :

$$G(\mathbf{U}^*) \leq cA_{mc}(\mathbf{U}^*, \mathbf{U}^*) \quad \forall \mathbf{U}^* \in \mathcal{V} \quad (2.60)$$

où  $c$  est une constante. Cette condition assure que la coque peut résister aux efforts appliqués uniquement par les effets de membrane (et de cisaillement).

## 2.6.2 Cas des coques non-inhibées en flexion pure

Considérons maintenant le cas des coques non-inhibées en flexion pure, qui correspond au cas où le sous-espace  $\mathcal{V}_0 \neq \{0\}$ . Dans ce cas, il convient de considérer l'upscaling suivant sur les efforts :

$$G(\mathbf{U}^*) = \frac{1}{t^3} F(\mathbf{U}^*)$$

La formulation faible (2.53) devient alors :

$$\text{Trouver } \mathbf{U} \in \mathcal{V} \text{ tel que } A_f(\mathbf{U}, \mathbf{U}^*) + \frac{1}{t^2} A_{mc}(\mathbf{U}, \mathbf{U}^*) = G(\mathbf{U}^*), \quad \forall \mathbf{U}^* \in \mathcal{V} \quad (2.61)$$

et le problème limite pour  $t = 0$  s'écrit :

Trouver  $\mathbf{U}_0 \in \mathcal{V}_0$  tel que :

$$A_f(\mathbf{U}_0, \mathbf{U}^*) = G(\mathbf{U}^*), \quad \forall \mathbf{U}^* \in \mathcal{V}_0 \quad (2.62)$$

Il est appelé problème en flexion pure. Il est également possible de montrer le résultat de convergence suivant [27, 29] :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} A_{mc}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = 0 \quad (2.63)$$

Dans le cas coque non-inhibées, les énergies de membrane et cisaillement tendent vers zéro. Les efforts appliqués ne sont supportés que par les effets de flexion.



# Chapitre 3

## Evaluation des performances numériques du modèle DKMQ pour les plaques

Depuis une trentaine d'années, de nombreux éléments finis ont été développés pour le modèle de plaque de Mindlin-Reissner. Les éléments finis, triangulaires à trois nœuds, ou rectangulaires à quatre nœuds, sont les plus utilisés. Ces éléments finis d'ordre bas sont très intéressants, car ils permettent de réduire de façon importante le coût du calcul numérique.

Mais une difficulté importante apparaît : le phénomène de verrouillage numérique (lorsque l'épaisseur devient très faible). Afin de surmonter ce problème, d'autres stratégies de résolution ont été proposées comme la méthode d'intégration réduite introduite par Zienkiewics et al. [97] et Pawsey et Clough [71], ou encore la méthode d'intégration sélective proposée par Hughes et al. [38] et Malkus et Hughes [59]. Même si elles améliorent les résultats numériques, elles ne permettent pas de faire disparaître complètement le phénomène de verrouillage numérique.

Une autre méthode de résolution, appelée *méthode des déformations modifiées*, a été introduite par Hughes et Tezduyar [39] et MacNeal [57]. Cette approche est basée sur une formulation mixte du problème en contraintes et déplacements, dont une justification mathématique a été proposée par Brezzi et al. [23]. Elle est parfois appelée également "Assumed Natural Strain" approach (ANS). Une variante de cette approche ANS a été proposée par Dvorkin et Bathe dans [5, 31].

Dans le cadre de ces approches ANS, pour les plaques minces et épaisses, Katili [42, 43] a introduit les éléments finis triangulaires à trois nœuds DKMT et rectangulaires à quatre nœuds DKMQ. Ces éléments finis DKMT et DKMQ sont basés sur le modèle de plaques épaisses de Mindlin-Reissner [60, 77] qui nécessite seulement une continuité  $C^0$ . Pour les plaques minces, lorsque l'épaisseur tend vers zéro, la solution

obtenue avec l'élément DKMQ converge vers l'élément DKQ [10]. La méthode ANS utilisée permet de réduire considérablement le verrouillage en cisaillement, voire de le supprimer dans certains cas. Les benchmarks classiques associés aux problèmes de plaques ont été testés avec succès. Mais ces tests ne sont pas une garantie complète de la robustesse de la méthode vis à vis du cisaillement quand l'épaisseur tend vers zéro. Une autre condition importante pour les problèmes mixtes en contraintes-déplacements, sur lesquelles sont basées les approches ANS, est qu'ils doivent vérifier la condition inf-sup discrète. La condition inf-sup a été étudiée par Chapelle et Bathe [2, 26] pour les problèmes d'élasticité incompressible, et par Iosilevich et al. [40] pour le problème de plaque épaisse de Mindlin-Reissner [60, 77]. Ils ont montré que les éléments finis de plaques de la famille MITC [4, 5] vérifient la condition inf-sup. Cependant, la condition inf-sup est délicate à vérifier théoriquement pour des éléments finis donnés. Aussi, elle est souvent remplacée par un critère numérique plus simple à manier. Quand ce critère est vérifié, il permet d'assurer pour la plupart des cas que la condition inf-sup discrète est vérifiée aussi. On parlera dans ce cas là de condition inf-sup numérique ou de critère numérique d'inf-sup. Nous étudierons ce critère pour l'élément DKMQ.

Dans ce chapitre on se propose d'évaluer les performances numériques de la formulation éléments finis de plaque DKMQ proposée par Katili [43]. La validation numérique portant sur des tests particuliers a été effectuée dans [43]. Nous reproduirons dans un premier temps ces tests puis nous en proposons une évaluation de la formulation éléments finis basée sur la condition inf-sup. Nous terminerons enfin par une analyse d'erreurs a posteriori. Mais nous commençons d'abord par rappeler la formulation des éléments finis DKMQ pour les plaques.

## 3.1 Élément DKMQ

### 3.1.1 Présentation

La formulation DKMQ est basée sur un élément à quatre nœuds et 12 degrés de liberté. Elle a été proposée par Katili [43] (voir figure 3.1). Nous en donnons ici une formulation légèrement différente.

Nous avons vu dans le chapitre 2 la formulation faible du modèle de Mindlin-Reissner pour une plaque encadrée (problème 2.47). Nous pouvons associer à cette formulation faible l'énergie suivante :

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\omega} \hat{\chi}^T H_f \hat{\chi} dA + \frac{1}{2} \int_{\omega} \hat{\gamma}^T H_c \hat{\gamma} dA - \int_{\omega} f w dA \quad (3.1)$$

où  $\hat{\chi}$  est le vecteur associé à  $\chi$  et  $\hat{\gamma}$  le vecteur associé à  $\gamma$  (par la relation (3.3)). Le terme  $tF_3$  du problème (2.47) est noté ici  $f$ , désignant les efforts surfaciques. De plus, les moments  $M$  (les efforts résultants de flexion) et les efforts tranchants peuvent être

calculés par la relation suivante

$$\begin{aligned}\widehat{M} &= H_f \widehat{\chi} \\ \widehat{T} &= H_c \widehat{\gamma}\end{aligned}\quad (3.2)$$

où

$$\begin{aligned}\widehat{\chi} &= \begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{bmatrix} \\ \widehat{\gamma} &= \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{,x} + \beta_x \\ w_{,y} + \beta_y \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.3)$$

et :

$$H_f = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} = D_b \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}\quad (3.4)$$

$$H_c = KGt \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = D_s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\quad (3.5)$$

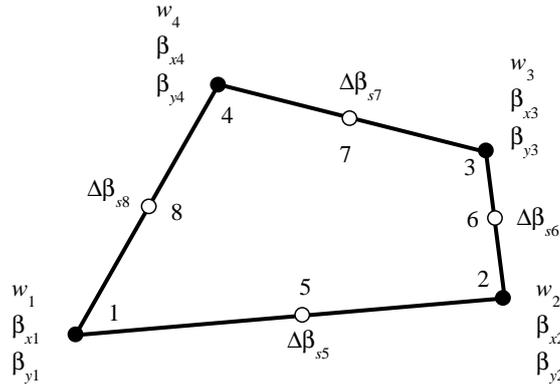


FIGURE 3.1 – Cinématique de l'élément DKMQ

L'interpolation bilinéaire est utilisée pour le déplacement vertical et celle quadratique incomplète pour les rotations :

$$\begin{aligned}w &= \sum_{i=1}^4 N_i w_i \\ \beta_x &= \sum_{i=1}^4 N_i \beta_{xi} + \sum_{i=5}^8 P_k C_k \Delta \beta_{sk} \\ \beta_y &= \sum_{i=1}^4 N_i \beta_{yi} + \sum_{i=5}^8 P_k S_k \Delta \beta_{sk}\end{aligned}\quad (3.6)$$

où  $C_k$  et  $S_k$  sont les cosinus directions (voir figure 3.2).  $N_i$  et  $P_k$  sont donnés par

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \quad (3.7)$$

avec :

$$\begin{aligned} P_5 &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \\ P_6 &= \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2) \\ P_7 &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta) \\ P_8 &= \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2) \end{aligned} \quad (3.8)$$

L'énergie totale est la somme des énergies de chaque élément :

$$\Pi = \sum_{e=1, N_e} \Pi_e \quad (3.9)$$

où  $N_e$  est le nombre d'élément. En utilisant la relation (3.1), nous avons :

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \int_{\omega_e} \hat{\chi}^T H_f \hat{\chi} dA^e + \frac{1}{2} \int_{\omega_e} \hat{\gamma}^T H_c \hat{\gamma} dA^e - \int_{\omega_e} f w dA^e \quad (3.10)$$

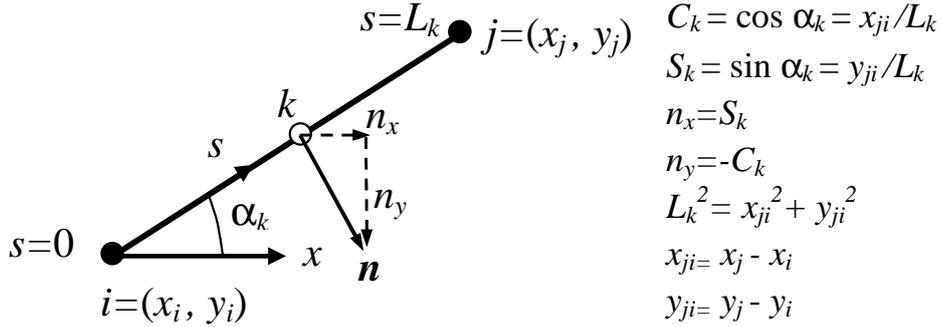


FIGURE 3.2 – Géométrie et coordonnées tangentielles locales du côté  $k$

On suppose que  $\hat{\gamma} = \underline{\hat{\gamma}}$  avec

$$\underline{\hat{\gamma}} = \mathbb{I}_e \underline{\hat{\gamma}}_s \quad (3.11)$$

où la matrice  $\mathbb{I}_e$  est donnée par

$$\mathbb{I}_e = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\eta) & 0 & \frac{1}{2}(1+\eta) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

et où l'on a supposé que :

$$\hat{\underline{\gamma}}_s = \Phi \Delta \hat{\beta} \quad (3.13)$$

Nous verrons plus loin comment calculer la matrice  $\Phi$  et  $\Delta \hat{\beta} = \langle \Delta \beta_{s5} \Delta \beta_{s6} \Delta \beta_{s7} \Delta \beta_{s8} \rangle^T$ . Pour mettre en évidence le nombre  $t/L$ , nous posons :

$$\Phi = \left( \frac{t}{L} \right)^2 \Psi \quad (3.14)$$

où  $\Psi$  est une matrice  $4 \times 4$ .

Nous pouvons donc réécrire la relation (3.11) suivant :

$$\hat{\underline{\gamma}} = \left( \frac{t}{L} \right)^2 \mathbb{I}_e \Psi \Delta \hat{\beta} = B_s \Delta \hat{\beta} \quad (3.15)$$

avec

$$B_s = \left( \frac{t}{L} \right)^2 \mathbb{I}_e \Psi. \quad (3.16)$$

Pour exprimer  $\Delta \hat{\beta}$  en fonction du vecteur nodal, nous utilisons la relation

$$\int_0^{L_k} (\gamma_s^k - \underline{\gamma}_s^k) ds = 0 \quad (3.17)$$

où sur chaque côté d'élément nous avons

$$\gamma_s^k(w, \beta) = \left( \beta_s^k + \frac{\partial w_s^k}{\partial s} \right) \quad (3.18)$$

avec :

$$\begin{aligned} w_s^k &= \left( 1 - \frac{s}{L_k} \right) w_{si}^k + \frac{s}{L_k} w_{sj}^k \\ \beta_n^k &= \left( 1 - \frac{s}{L_k} \right) \beta_{ni}^k + \frac{s}{L_k} \beta_{nj}^k \\ \beta_s^k &= \left( 1 - \frac{s}{L_k} \right) \beta_{si}^k + \frac{s}{L_k} \beta_{sj}^k + 4 \frac{s}{L_k} \left( 1 - \frac{s}{L_k} \right) \Delta \beta_{sk} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Pour la définition des indices  $i$  et  $j$ , on pourra se rapporter à la figure 3.2.

Les relations (3.18) et (3.19) donnent l'expression de  $\gamma_s$  sur chaque côté  $k$  :

$$\gamma_s^k = \frac{w_{sj}^k - w_{si}^k}{L_k} + \left( 1 - \frac{s}{L_k} \right) \beta_{si}^k + \frac{s}{L_k} \beta_{sj}^k + 4 \frac{s}{L_k} \left( 1 - \frac{s}{L_k} \right) \Delta \beta_{sk} \quad (3.20)$$

En utilisant la relation (3.17), nous obtenons :

$$\frac{w_{sj}^k - w_{si}^k}{L_k} + \frac{1}{2}\beta_{si}^k + \frac{1}{2}\beta_{sj}^k + \left(\frac{2}{3} - \left(\frac{t}{L}\right)^2 \sum_{l=5}^8 \Phi_{kl}\right) \Delta\beta_{sk} = 0 \quad (3.21)$$

Si nous appliquons la relation (3.21) sur les quatre côtés de l'élément, nous obtenons

$$\left[\frac{2}{3}I - \left(\frac{t}{L}\right)^2 \Psi\right] \Delta\hat{\beta}_{sk} = -\mathbb{U}^e \hat{u}_e \quad (3.22)$$

où  $\mathbb{U}^e$  est la matrice de composantes

$$\frac{w_{sj}^k - w_{si}^k}{L_k} + \frac{1}{2}\beta_{si}^k + \frac{1}{2}\beta_{sj}^k \quad (3.23)$$

associée au vecteur des déplacements nodaux  $\hat{u}_e$ . Finalement,  $\Delta\hat{\beta}_{sk}$  peut être exprimé en fonction de  $\hat{u}_e$  suivant

$$\Delta\hat{\beta}_{sk} = - \underbrace{\left[\frac{2}{3}I - \left(\frac{t}{L}\right)^2 \Psi\right]^{-1}}_{\mathbb{A}_n} \mathbb{U}^e \hat{u}_e \quad (3.24)$$

et la relation (3.15) peut s'écrire :

$$\hat{\gamma} = B_s \mathbb{A}_n \hat{u}_e \quad (3.25)$$

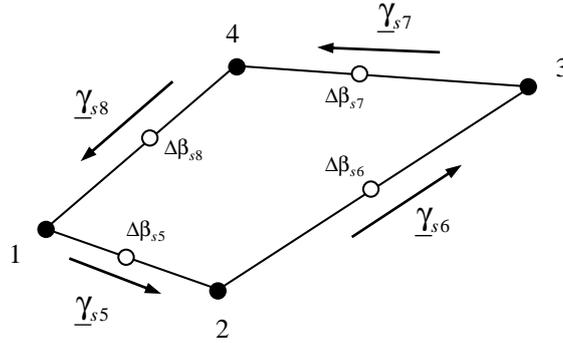


FIGURE 3.3 –  $\gamma_s$  sur le côté de l'élément

En utilisant l'hypothèse  $\hat{\gamma} = \underline{\hat{\gamma}}$ , la relation (3.10) devient

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \int_{\omega_e} \hat{\chi}^T H_f \hat{\chi} dA^e + \frac{1}{2} \int_{\omega_e} \underline{\hat{\gamma}}^T H_c \underline{\hat{\gamma}} dA^e - \int_{\omega_e} f w dA^e \quad (3.26)$$

avec

$$\begin{aligned}\hat{\chi}_{\omega_e} &= [\mathbb{D}_1 + \mathbb{D}_2 \mathbb{A}_n] \hat{u}_e = \mathbb{D}_e \hat{u}_e \\ \hat{\gamma}_{\omega_e} &= B_s \mathbb{A}_n \hat{u}_e = \mathbb{B}_s \hat{u}_e \\ w_{\omega_e} &= \mathbb{L}_e^T \hat{u}_e\end{aligned}\quad (3.27)$$

où  $\mathbb{D}_1$  est la matrice associée à la partie linéaire des fonctions d'interpolation pour la rotation et  $\mathbb{D}_2$  est associée à la partie quadratique. De plus,  $\mathbb{L}_e$  est associée au déplacement  $w$ . Nous avons

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \int_{\omega_e} \hat{u}_e^T \mathbb{D}_e^T H_f \mathbb{D}_e \hat{u}_e dA^e + \frac{1}{2} \int_{\omega_e} \hat{u}_e^T \mathbb{B}_s^T H_c \mathbb{B}_s \hat{u}_e dA^e - \int_{\omega_e} f \mathbb{L}_e^T \hat{u}_e dA^e \quad (3.28)$$

$$\Pi_e = \hat{u}_e^T [\mathbf{K}_f^e + \mathbf{K}_c^e] \hat{u}_e - J^e \hat{u}_e \quad (3.29)$$

avec :

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_f^e &= \int_{\omega_e} \mathbb{D}_e^T H_f \mathbb{D}_e dA^e \\ \mathbf{K}_c^e &= \int_{\omega_e} \mathbb{B}_s^T H_c \mathbb{B}_s dA^e \\ J^e &= \int_{\omega_e} f \mathbb{L}_e^T dA^e\end{aligned}\quad (3.30)$$

Finalement, on obtient le système linéaire après assemblage qui écrit :

$$\mathbb{M} \hat{u} = J \quad (3.31)$$

avec :

$$\mathbb{M}^e = \mathbf{K}_f^e + \mathbf{K}_c^e \quad (3.32)$$

### 3.1.2 Choix de la matrice $\Psi$ pour l'élément DKMQ

En utilisant les indices  $n$  et  $s$  pour désigner le système de coordonnées locales sur chaque côté  $k$  du bord de l'élément considéré, la relation (3.2) devient :

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} M_s \\ M_n \\ M_{ns} \end{Bmatrix} &= D_b \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_{s,s} \\ \beta_{n,n} \\ \beta_{s,n} + \beta_{n,s} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} T_s \\ T_n \end{Bmatrix} &= D_s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_s \\ \gamma_n \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad (3.33)$$

La déformation de cisaillement imposée sur le côté  $k$  basée sur l'équation (3.33) peut être définie comme :

$$\gamma_s = \frac{T_s}{D_s} \quad (3.34)$$

L'équation d'équilibre de chaque côté doit être ajoutée à l'équation (3.34). Elle s'écrit :

$$T_s = M_{s,s} + M_{ns,n} \quad (3.35)$$

A partir de l'équation (3.33), nous avons

$$\begin{aligned} M_s &= D_b (\beta_{s,s} + v\beta_{n,n}) \\ M_{ns} &= D_b \left( \frac{1-v}{2} (\beta_{s,n} + \beta_{n,s}) \right) \end{aligned} \quad (3.36)$$

et les relations (3.34) à (3.36) nous donnent :

$$\underline{\gamma}_s = \frac{D_b}{D_s} \left( \beta_{s,ss} + v\beta_{n,ns} + \frac{1-v}{2} (\beta_{s,nn} + \beta_{n,ns}) \right) \quad (3.37)$$

En utilisant les relations (3.19), nous avons

$$\beta_{s,ss} = \frac{-8}{L_k^2} \Delta\beta_{sk} \quad (3.38)$$

et il est facile de voir que :

$$\beta_{s,nn} = 0 \quad (3.39)$$

Nous supposons en plus que  $\beta_{n,ns}$  est négligeable par rapport aux autres termes dans la relation (3.37) :

$$\beta_{n,ns} \cong 0 \quad (3.40)$$

L'expression  $\underline{\gamma}_{sk}$  sur le côté  $k$  devient alors

$$\underline{\gamma}_{sk} = \frac{D_b}{D_s} \left( \frac{-8}{L_k^2} \Delta\beta_{sk} \right) \quad (3.41)$$

ce qui permet d'écrire :

$$\underline{\gamma}_{sk} = -\frac{4}{3K(1-v)} \left( \frac{t}{L_k} \right)^2 \Delta\beta_{sk} \quad (3.42)$$

Finalement, la matrice  $\Psi$  s'écrit :

$$\Psi = -\frac{4}{3K(1-v)} \begin{bmatrix} \left(\frac{L}{L_5}\right)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{L}{L_6}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{L}{L_7}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{L}{L_8}\right)^2 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Dans la suite, nous utiliserons cette expression pour la matrice  $\Psi$ .

## 3.2 Validation de DKMQ

Dans cette section, nous allons présenter des résultats numériques permettant de vérifier la convergence, la précision et l'efficacité de l'élément DKMQ. La validation numérique de l'élément DKMQ a été faite par Katili [43]. Un benchmark a été utilisé pour réaliser des tests de flexion, de cisaillement et ainsi que tous les tests habituellement proposés pour valider la convergence d'un nouvel élément finis. Nous présentons les résultats obtenus lors de cette étude et les comparons à l'élément MITC4 [4, 31].

### 3.2.1 Plaque carrée isotrope sous chargement uniforme, simplement appuyée ou encadrée

Nous présentons dans cette partie les résultats pour huit configurations d'une plaque carrée isotrope sous chargement uniforme  $q = 1$ . Quatre correspondent à des conditions aux limites de type plaque simplement appuyée et quatre autres correspondent à une plaque encadrée. Pour les deux types de conditions aux limites, une épaisseur dite "mince" ( $t = 1$ ) et trois épaisseurs dites "épaisses" ( $t = 50, 100, 200$ ) seront analysées. Les différents cas de simulations ont été répertoriés comme indiqué dans le tableau 3.1. Les cas SS1, SS2, SS3 et SS4 correspondent aux conditions aux limites de type simplement appuyées avec un rapport  $t/L$  respectivement égal à 0.001, 0.05, 0.1 et 0.2. Les cas E1, E2, E3 et E4 correspondent aux conditions aux limites d'encastrement avec un rapport  $t/L$  respectivement égal à 0.001, 0.05, 0.1 et 0.2. Sur la figure 3.4 nous présentons le modèle de plaque carrée que nous avons analysé au cours de cette étude. Seul le sous-domaine  $ABCD$  est étudié ici, les résultats pourront être généralisés par symétrie à l'ensemble du domaine. Un maillage uniforme  $4 \times 4$  est représenté dans le sous-domaine  $ABCD$  (voir figure 3.4).

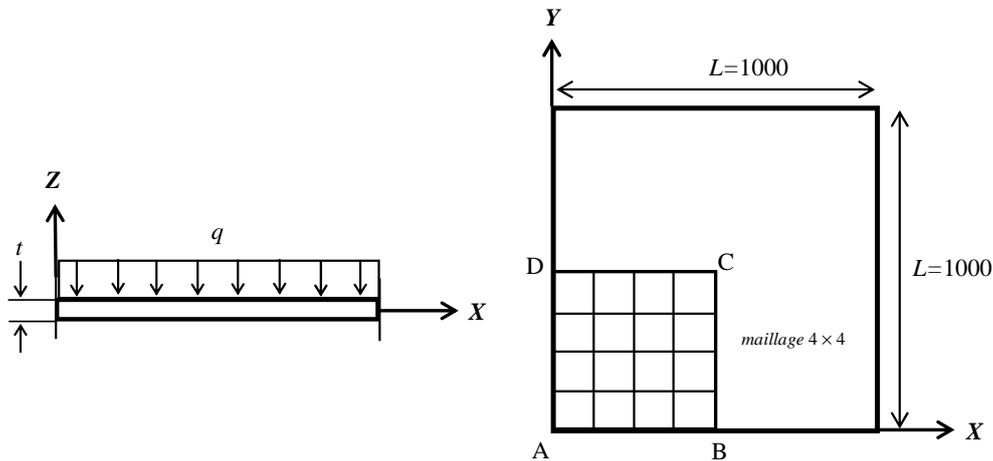


FIGURE 3.4 – Plaque carrée sous chargement uniforme  $E = 10.92$  ;  $\nu = 0.3$  ;  $L = 1000$  ;  $q = 1$

Rapport $t/L$	Simplement appuyée	Encastrée
$t/L = 0.001$	SS1	E1
$t/L = 0.05$	SS2	E2
$t/L = 0.1$	SS3	E3
$t/L = 0.2$	SS4	E4

Tableau 3.1 – Différents cas de simulation

Les conditions aux limites pour le cas de la plaque simplement appuyée sont  $w = \beta_s = 0$  sur  $AB$  et  $AD$ . Pour le cas où la plaque est encastrée, elles sont  $w = \beta_y = 0$  sur  $AB$  et  $w = \beta_x = 0$  sur  $AD$ . Les conditions de symétrie pour les deux cas sont  $\beta_x = 0$  sur  $BC$  et  $\beta_y = 0$  sur  $CD$ .

Pour étudier la convergence de la méthode pour les plaques dites minces (cas  $SS1$  et  $E1$ ), six maillages uniformes différents ont été utilisés pour le sous-domaine  $ABCD$  :  $2 \times 2$ ,  $4 \times 4$ ,  $8 \times 8$ ,  $16 \times 16$ ,  $32 \times 32$  et  $64 \times 64$  (voir figure 3.4). Un maillage uniforme  $N \times N = 8 \times 8$  est utilisé pour les cas  $SS2$ ,  $SS3$  et  $SS4$ . Les cas  $E2$ ,  $E3$  et  $E4$  sont analysés en utilisant un maillage  $N \times N = 64 \times 64$ .

$N \times N$	$w_C/w_{C_{REF}}$	
	DKMQ	MITC4
$2 \times 2$	0.996	0.977
$4 \times 4$	1.000	0.995
$8 \times 8$	1.000	0.999
$16 \times 16$	1.000	1.000
$32 \times 32$	1.000	1.000
$64 \times 64$	1.000	1.000

Tableau 3.2 – Comparaison du déplacement  $w_C/w_{C_{REF}}$  au centre de la plaque pour le cas  $SS1$

Les résultats numériques pour le déplacement  $w_C$  au centre de la plaque pour le cas  $SS1$  sont présentés dans le tableau 3.2 et sur la figure 3.5. Nous comparons avec des résultats de l'élément MITC4 et nous utilisons la solution de Kirchhoff [89] comme valeur de référence

$$w_{C_{REF}} = \alpha q L^4 / D_b \quad (3.44)$$

avec  $\alpha = 4.062 \times 10^{-3}$ . Les résultats montrent que l'élément DKMQ converge plus vite que l'élément MITC4. Il est plus précis pour un maillage grossier. Par contre, à partir du maillage  $16 \times 16$  les deux éléments convergent vers la même valeur de référence.

Les résultats numériques obtenus pour les cas  $SS2$ ,  $SS3$  et  $SS4$  sont présentés dans le

tableau 3.3. Les valeurs données par Salerno et Goldberg [82] sont utilisées comme valeurs de référence. Les deux éléments DKMQ et MITC4 donnent des résultats similaires proches de la valeur de référence.

Le tableau 3.4 et la figure 3.6 présentent les résultats numériques du déplacement  $w_C$  au centre de la plaque pour le cas E1 qui sont comparés aux résultats obtenus à partir de l'élément MITC4 et à la solution de référence de Kirchhoff [89] :

$$w_{C_{REF}} = \alpha q L^4 / D_b \quad (3.45)$$

avec  $\alpha = 1.265 \times 10^{-3}$ . L'élément DKMQ a un comportement similaire à l'élément MITC4. Les deux éléments convergent vers la valeur de référence.

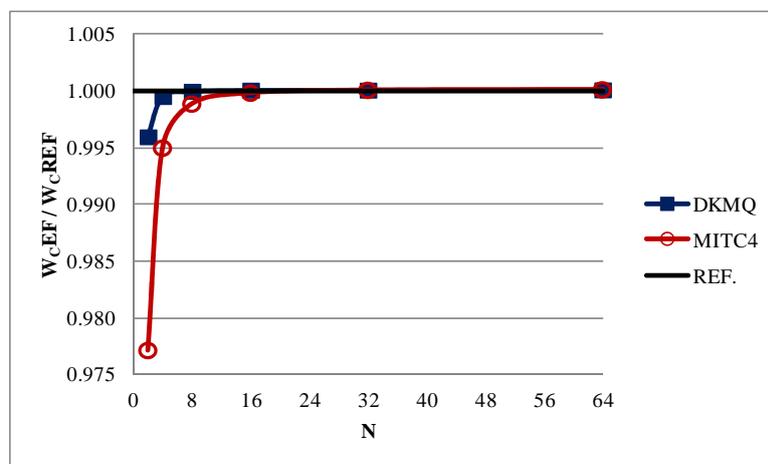


FIGURE 3.5 – Convergence du déplacement au centre de la plaque (cas SS1)

Élément	SS2	SS3	SS4
DKMQ	4.110	4.267	4.900
MITC4	4.110	4.268	4.902
Salerno et Goldberg [82]	4.108	4.242	4.908

Tableau 3.3 – Comparaison du déplacement  $w_C$  au centre de la plaque (cas SS2, SS3 et SS4) avec un maillage uniforme  $N \times N = 8 \times 8$

$N \times N$	$w_C/w_{C_{REF}}$	
	DKMQ	MITC4
$2 \times 2$	1.155	0.958
$4 \times 4$	1.043	0.989
$8 \times 8$	1.011	0.997
$16 \times 16$	1.003	1.000
$32 \times 32$	1.001	1.000
$64 \times 64$	1.001	1.000

Tableau 3.4 – Comparaison du déplacement  $w_C/w_{C_{REF}}$  au centre de la plaque pour le cas E1

Pour les cas E2, E3 et E4, les résultats numériques obtenus sont présentés dans le tableau 3.5. Ils sont comparés aux valeurs données par Srinivas et Rao [87]. Encore une fois, nous obtenons des résultats similaires pour les deux éléments.

Élément	E1	E2	E3
DKMQ	892.920	63.542	5.785
MITC4	892.752	63.533	5.785
Srinivas et Rao [87]	890.300	62.830	5.604

Tableau 3.5 – Comparaison du déplacement  $w_C$  au centre de la plaque (cas E2, E3 et E4) avec un maillage uniforme  $N \times N = 64 \times 64$

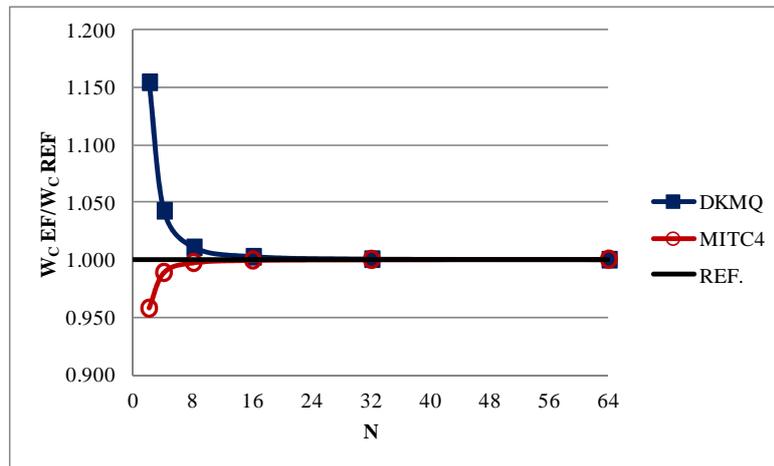


FIGURE 3.6 – Convergence du déplacement au centre de la plaque (cas E1)

### 3.2.2 Plaque carrée isotrope sous chargement concentré, simplement appuyée sur son bord ou encadrée

Dans les tests présentés ici nous considérons les deux types de conditions aux limites précédentes : plaque simplement appuyée sur son bord (SS) et plaque encadrée (E). Par contre, cette fois la plaque est soumise à des charges concentrées  $P$  (voir figure 3.7). Nous nous intéressons uniquement au problème de verrouillage, et par conséquent on n'étudiera que le cas d'une plaque mince. Comme précédemment, grâce à la symétrie du domaine, le calcul peut se réduire à la partie  $ABCD$ .

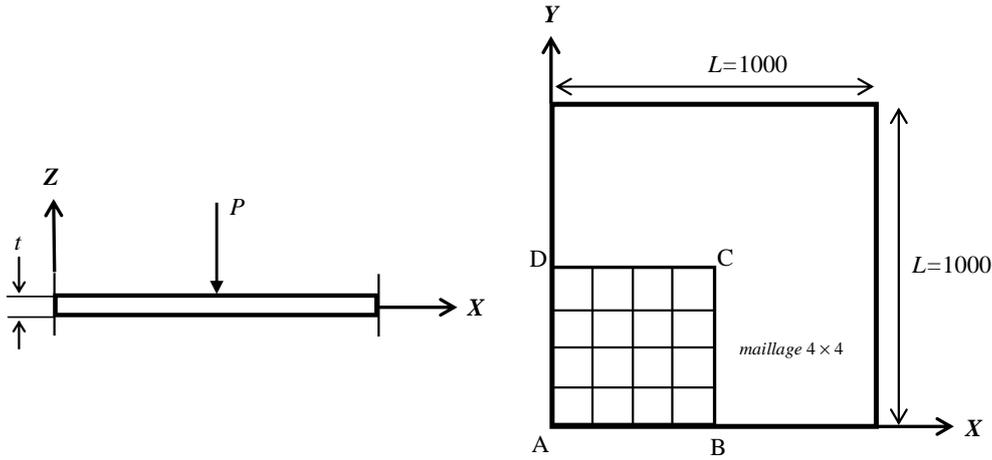


FIGURE 3.7 – Plaque carrée soumise à une charge concentrée  $E = 10.92$  ;  $\nu = 0.3$  ;  $L = 1000$  ;  $t = 1$  ;  $P = 1$

$N \times N$	$w_C/w_{C_{REF}}$	
	DKMQ	MITC4
$2 \times 2$	1.094	0.992
$4 \times 4$	1.029	0.995
$8 \times 8$	1.009	0.998
$16 \times 16$	1.002	0.999
$32 \times 32$	1.001	1.000
$64 \times 64$	1.001	1.000

Tableau 3.6 – Comparaison du déplacement  $w_C/w_{C_{REF}}$  au centre de la plaque SS

Les résultats numériques du déplacement  $w_C$  au centre de la plaque SS sont présentés dans le tableau 3.6 et sur la figure 3.8. Ils sont comparés à ceux obtenus à partir de l'élément MITC4 et à la solution de référence de Kirchhoff [89] :

$$w_{C_{REF}} = \alpha PL^2/D_b \quad (3.46)$$

où la constante  $\alpha$  vaut  $\alpha = 11.601 \times 10^{-3}$ . Nous remarquons que l'élément DKMQ converge moins vite que l'élément MITC4. Mais pour le maillage  $16 \times 16$ , les résultats deviennent similaires.

Pour le cas encastré, les résultats numériques obtenus sont reportés dans le tableau 3.7 ainsi que sur la figure 3.9. La valeur de référence de comparaison est celle donnée dans [89] par :

$$w_{C_{REF}} = \alpha PL^2 / D_b \quad (3.47)$$

avec  $\alpha = 5.612 \times 10^{-3}$ . Nous observons le même comportement pour les deux éléments.

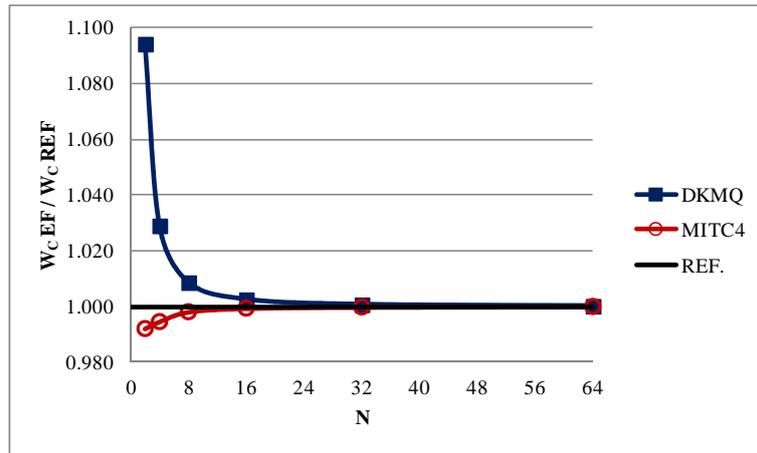


FIGURE 3.8 – Convergence du déplacement  $w_C$  au centre de la plaque SS

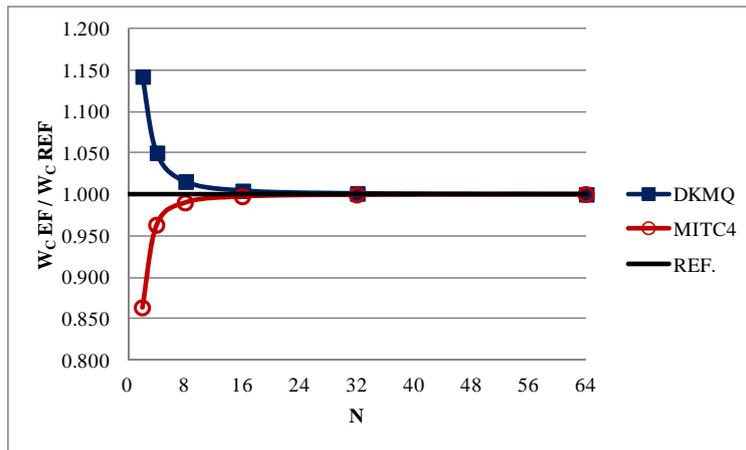


FIGURE 3.9 – Convergence du déplacement  $w_C$  au centre de la plaque carrée encastrée

$N \times N$	$w_C/w_{C_{REF}}$	
	DKMQ	MITC4
$2 \times 2$	1.142	0.863
$4 \times 4$	1.050	0.963
$8 \times 8$	1.016	0.990
$16 \times 16$	1.005	0.997
$32 \times 32$	1.001	0.999
$64 \times 64$	1.000	1.000

Tableau 3.7 – Comparaison du déplacement  $w_C/w_{C_{REF}}$  au centre de la plaque carrée encastrée

### 3.2.3 Plaque circulaire sous chargement uniforme, simplement appuyée ou encastrée

La configuration étudiée est représentée sur la figure 3.10. La plaque circulaire de rayon  $R$  est soumise à un chargement uniforme  $q$ . La symétrie du problème nous permet de réduire le domaine d'étude au quart de la plaque (partie  $ABC$  de la figure 3.10). Différentes simulations sont réalisées en utilisant des maillages  $2 \times 2$ ,  $4 \times 4$ ,  $8 \times 8$ ,  $16 \times 16$ ,  $32 \times 32$  et  $64 \times 64$  ainsi que plusieurs rapports  $t/R$  ( $t/R = 0.02, 0.2, 0.5$ ). Le maillage  $4 \times 4$  pour la partie  $ABC$  est représenté sur la figure 3.10.

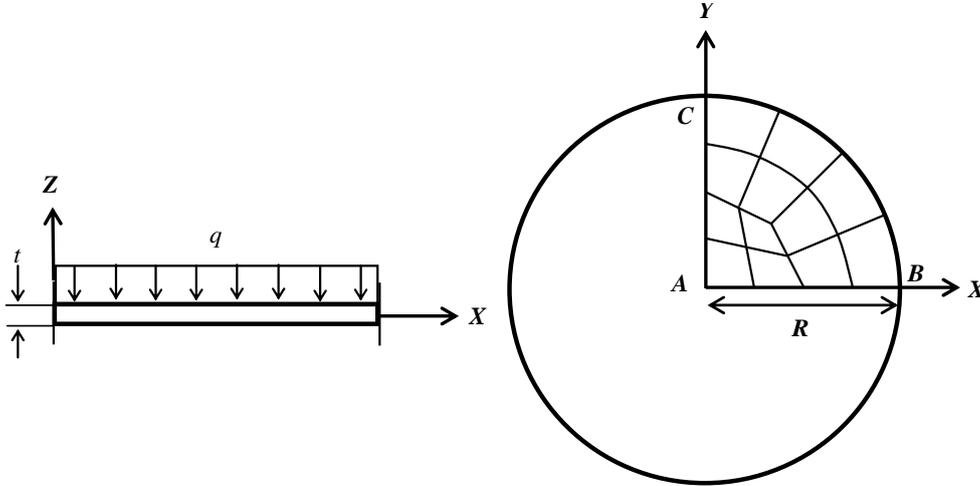


FIGURE 3.10 – Plaque circulaire sous chargement uniforme  $E = 10.92$  ;  $\nu = 0.3$  ;  $R = 5$

Les résultats numériques sont comparés aux solutions analytiques proposées par Battoz et Dhatt [11]. Pour le cas où la plaque est simplement appuyée sur son bord, la

solution analytique est :

$$w_A = \frac{qR^4}{64D_b} \left( \frac{5 + \nu}{1 + \nu} + \frac{8(t/R)^2}{3K(1 - \nu)} \right) \quad (3.48)$$

Pour le cas où la plaque est encadrée sur son bord, la solution analytique s'écrit :

$$w_A = \frac{qR^4}{64D_b} \left( 1 + \frac{8(t/R)^2}{3K(1 - \nu)} \right). \quad (3.49)$$

N × N	t/R = 0.02		t/R = 0.2		t/R = 0.5	
	DKMQ	MITC4	DKMQ	MITC4	DKMQ	MITC4
2 × 2	10214.000	8876.300	11.796	10.532	1.298	1.222
4 × 4	9914.700	9562.800	11.593	11.291	1.326	1.308
8 × 8	9763.600	9673.500	11.498	11.428	1.331	1.326
16 × 16	9720.100	9698.500	11.476	11.458	1.331	1.330
32 × 32	9709.400	9704.400	11.470	11.466	1.332	1.331
64 × 64	9707.100	9705.900	11.469	11.468	1.332	1.332
REF.[11]	9783.482		11.551		1.339	

Tableau 3.8 – Valeurs de  $w_A$  pour la plaque circulaire simplement appuyée sur son bord pour différentes valeurs de  $t/R$

N × N	t/R = 0.02		t/R = 0.2		t/R = 0.5	
	DKMQ	MITC4	DKMQ	MITC4	DKMQ	MITC4
2 × 2	37208.000	35906.000	38.791	37.498	3.026	2.950
4 × 4	38979.000	38366.000	40.673	40.359	3.189	3.171
8 × 8	39348.000	39220.000	41.111	41.038	3.227	3.222
16 × 16	39433.000	39398.000	41.222	41.204	3.236	3.235
32 × 32	39453.000	39444.000	41.250	41.245	3.239	3.238
64 × 64	39460.000	39458.000	41.257	41.256	3.239	3.239
REF.[11]	39831.559		41.599		3.262	

Tableau 3.9 – Valeurs de  $w_A$  pour la plaque circulaire encadrée pour différentes valeurs de  $t/R$

Les résultats numériques obtenus sont présentés dans le tableau 3.8 dans les cas où la plaque est simplement appuyée et dans le tableau 3.9 dans les cas de la plaque encadrée. Pour les deux conditions aux limites, les deux éléments donnent des résultats proches des valeurs de référence correspondant aux différents rapports  $t/R$ .

### 3.2.4 Plaque biaise 60° de Razzaque

Le cas test considéré ici est celui d'une plaque biaise 60° soumise à une charge uniforme  $q$  (voir figure 3.11). La plaque est mince avec un rapport  $t/L = 0.001$ . Elle est simplement appuyée sur les bords  $(AB)$  et  $(DC)$  et libre sur  $(AD)$  et  $(BC)$ . Cette configuration est connue sous le nom de la plaque biaise de Razzaque [74]. La flèche au centre de la plaque s'écrit sous la forme :

$$W = w \times 10^3 L^4 D_b / q \quad (3.50)$$

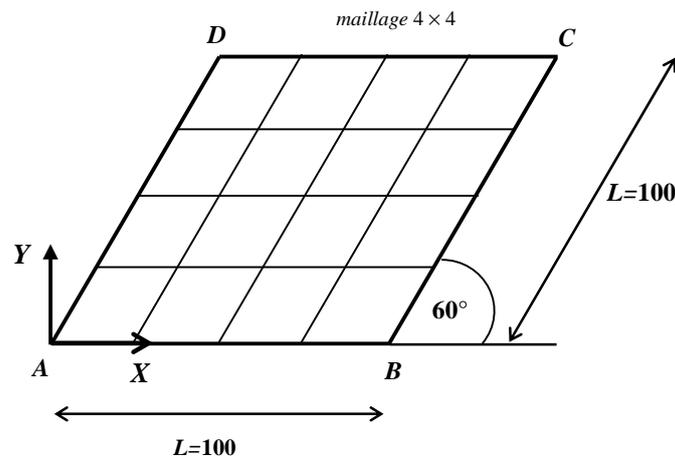


FIGURE 3.11 – Plaque biaise de Razzaque  $E = 1085$  ;  $\nu = 0.31$  ;  $L = 100$  ;  $t = 0.1$  ;  $q = 1$

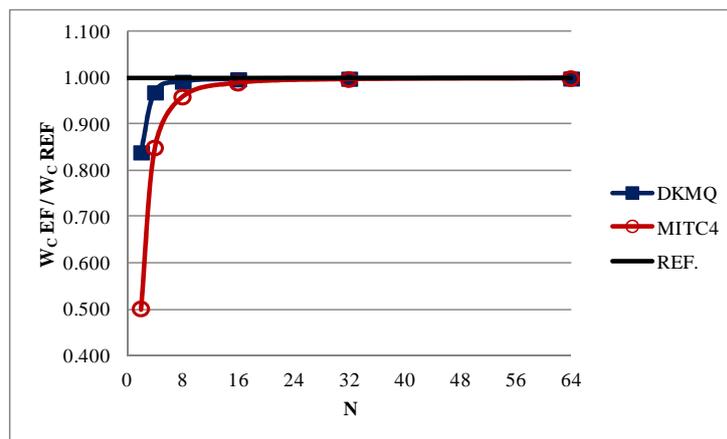


FIGURE 3.12 – Convergence du déplacement au centre de la plaque biaise de Razzaque

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 3.10 et sur la figure 3.12. Pour le maillage grossier, l'élément DKMQ est plus précis que l'élément MITC4. De plus, la convergence de l'élément DKMQ est plus rapide que celle de l'élément MITC4. Pour le maillage fin, les résultats obtenus par élément DKMQ sont plus proches de la valeur de référence que ceux fournis par l'élément MITC4.

$N \times N$	DKMQ	MITC4
$2 \times 2$	6.667	3.977
$4 \times 4$	7.696	6.737
$8 \times 8$	7.877	7.610
$16 \times 16$	7.920	7.849
$32 \times 32$	7.930	7.911
$64 \times 64$	7.933	7.928
REF.[74]	7.945	

Tableau 3.10 – Comparaison du déplacement  $W$  au centre de la plaque biaise de Razzaque

### 3.2.5 Plaque biaise 30° de Morley

Il s'agit d'un test semblable au précédent mais où l'angle de biais est de 30°. Cette configuration est connue sous l'intitulé "plaque biaise de Morley" [62] (voir figure 3.13). Deux rapports  $t/L$  seront étudiés  $t/L = 0.01$  et  $t/L = 0.001$ . La solution de Morley [62] sera utilisée comme valeur de référence :

$$w_C = 0.408 \times 10^{-3} L^4 q / D_b \quad (3.51)$$

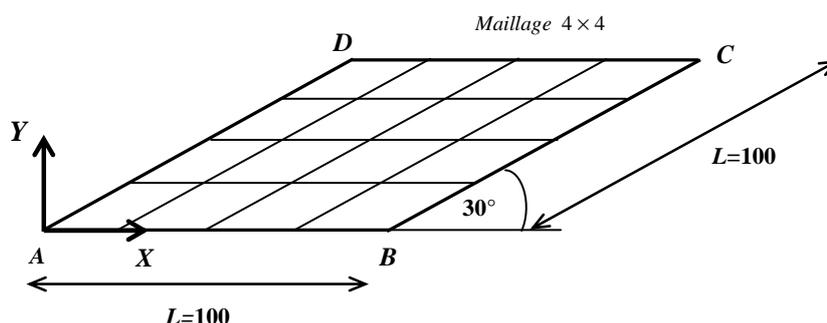


FIGURE 3.13 – Plaque biaise de Morley  $E = 1000$  ;  $\nu = 0.3$  ;  $L = 100$  ;  $t = 0.1, 1$  ;  $q = 1$

$N \times N$	DKMQ	MITC4
$2 \times 2$	1.903	0.255
$4 \times 4$	0.757	0.359
$8 \times 8$	0.504	0.357
$16 \times 16$	0.441	0.383
$32 \times 32$	0.423	0.404
$64 \times 64$	0.419	0.415
REF.[62]	0.408	

Tableau 3.11 – Comparaison du déplacement  $w_C$  au centre de la plaque plaque biaise de Morley ( $t/L = 0.01$ )

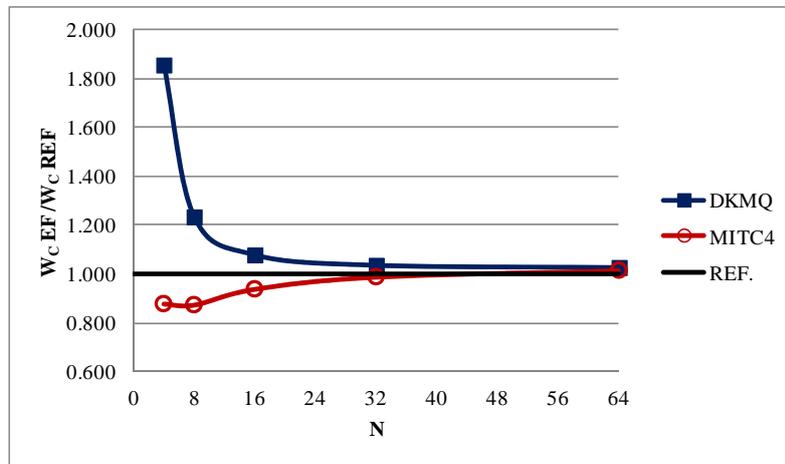


FIGURE 3.14 – Convergence du déplacement au centre de la plaque biaise de Morley ( $t/L = 0.01$ )

$N \times N$	DKMQ	MITC4
$2 \times 2$	1.905	0.254
$4 \times 4$	0.760	0.358
$8 \times 8$	0.507	0.343
$16 \times 16$	0.443	0.343
$32 \times 32$	0.425	0.362
$64 \times 64$	0.418	0.381
REF.[62]	0.408	

Tableau 3.12 – Comparaison du déplacement  $w_C$  au centre de la plaque biaise de Morley ( $t/L = 0.001$ )

Les résultats obtenus pour le rapport de  $t/L = 0.01$  sont présentés dans le tableau 3.11 et sur la figure 3.14. Pour le rapport de  $t/L = 0.001$ , les résultats sont présentés dans le tableau 3.12 et sur la figure 3.15. Les simulations montrent que l'élément DKMQ converge plus rapidement que l'élément MITC4 pour les deux rapports  $t/L$  traités. Dans les deux cas, l'élément DKMQ converge vers la valeur de référence. Par contre, dans le cas de la plaque mince  $t/L = 0.001$ , l'élément MITC4 est moins précis que l'élément DKMQ.

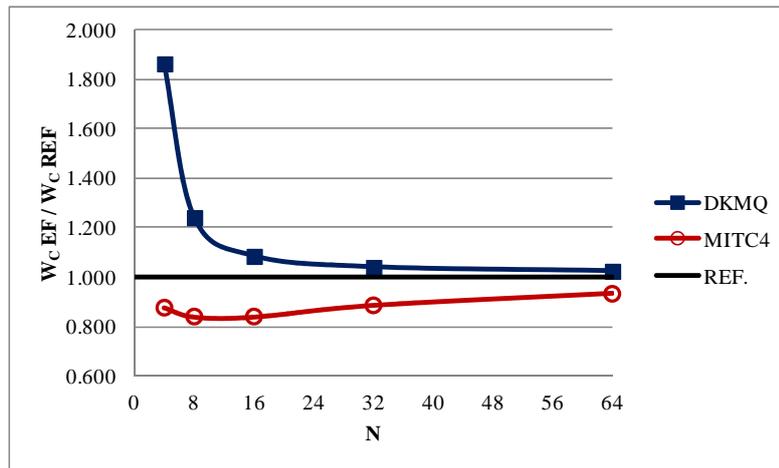


FIGURE 3.15 – Convergence du déplacement au centre de la plaque biaise de Morley ( $t/L = 0.001$ )

### 3.2.6 Plaque carrée isotrope encastree sous chargement uniforme avec distorsion du maillage

Le dernier test est celui d'une plaque carrée isotrope encastree sous chargement uniforme avec une épaisseur  $t/L = 0.1$  pour laquelle le maillage utilisé possède une distorsion géométrique (voir figure 3.16). Deux finesses de maillage sont présentées sur la figure 3.16.

Le tableau 3.13 et la figure 3.17 présentent les résultats numériques du déplacement  $w_C$  au centre de la plaque pour les deux éléments DKMQ et MITC4. Les valeurs de référence sont celles données par Srinivas et Rao [87]. Les résultats obtenus montrent que les deux éléments ne sont pas sensibles à la distorsion du maillage. Ils convergent vers la bonne valeur de référence.

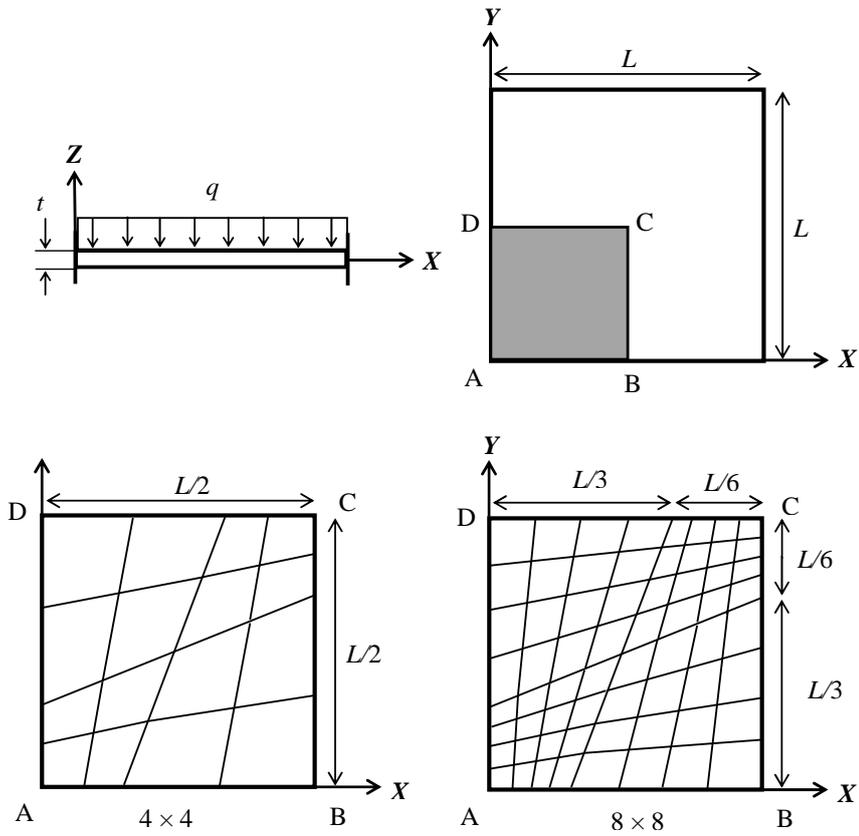


FIGURE 3.16 – Plaque carrée sous chargement uniforme  $E = 10.92$  ;  $\nu = 0.3$  ;  $L = 1000$  ;  $t = 100$  ;  $q = 1$

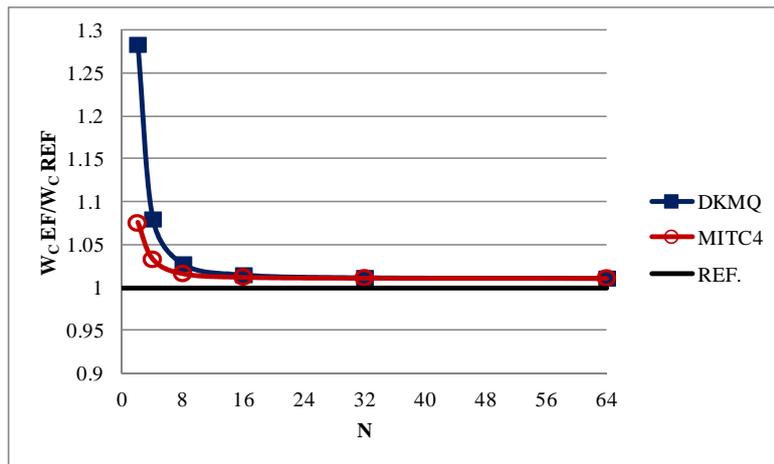


FIGURE 3.17 – Convergence du déplacement au centre de la plaque  $w_C$

N × N	DKMQ	MITC4
2 × 2	80.653	67.570
4 × 4	67.876	64.907
8 × 8	64.596	63.874
16 × 16	63.798	63.617
32 × 32	63.601	63.554
64 × 64	63.550	63.538
REF.[87]	62.830	

Tableau 3.13 – Comparaison du déplacement  $w_C$  au centre de la plaque

### 3.3 Test de la condition inf-sup numérique

Nous nous intéressons dans cette partie au test de la condition inf-sup numérique qui apparaît naturellement dans les formulations mixtes. Cette condition (en plus de celle de la coercivité) permet d'assurer la convergence de l'approximation numérique du problème par des éléments finis mixtes. C'est une condition de compatibilité entre l'espace de discrétisation des déplacements et celui des contraintes de cisaillement. La littérature sur le sujet est assez abondante, on peut trouver une bonne synthèse dans le livre [28]. Il est maintenant largement admis que le problème de verrouillage numérique peut s'expliquer par le non respect de la condition inf-sup. Aussi, nous proposons dans cette partie d'évaluer la capacité de l'élément fini DKMQ à vérifier cette condition.

Nous allons au préalable reformuler le problème dans un langage plus adapté à l'écriture de cette condition.

Pour le problème continu, la formulation variationnelle mixte pour le modèle Mindlin-Reissner d'une plaque encadrée peut s'écrire :

Trouver  $\mathbf{u} = (\boldsymbol{\beta}, w) \in V = \mathbb{B} \times W = [H_0^1(\Omega)]^2 \times [H_0^1(\Omega)]$  et  $\gamma \in \mathbb{G}$  tel que :

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}^*) + (\boldsymbol{\gamma}, (\nabla w^* + \boldsymbol{\beta}^*)) &= (g, w^*) \quad \forall \mathbf{u}^* = (\boldsymbol{\beta}^*, w^*) \in V \\ \left(\frac{t^2}{KG} \boldsymbol{\gamma} - (\nabla w + \boldsymbol{\beta}), \boldsymbol{\gamma}^*\right) &= 0 \quad \forall \boldsymbol{\gamma}^* \in \mathbb{G} \end{aligned} \quad (3.52)$$

avec

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}^*) &= \frac{1}{12} \int_{\omega} C^{\alpha\beta\lambda\mu} \chi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\beta}) \chi_{\lambda\mu}(\boldsymbol{\beta}^*) dA \\ (f, w^*) &= t \int_{\omega} F_3 w^* dA \end{aligned} \quad (3.53)$$

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  est le module de cisaillement et  $g = (f/t^3)$ .

Un point important dans cette formulation est la définition de l'espace  $\mathbb{G}$  des contraintes de cisaillement  $\gamma$ . L'idée qui guide le choix de cet espace est que la formulation mixte doit être bien posée et que  $\|\gamma\|_{\mathbb{G}} \leq \text{constante}$  indépendamment de  $t$ . Ce qui permet de montrer que la solution du modèle de Mindlin-Reissner tend vers celle du modèle de Kirchhof Love quand  $t$  tend vers 0. Un choix qui permet d'assurer ce résultat est [40] :

$$\mathbb{G} = \Gamma'$$

où  $\Gamma'$  désigne le dual topologique de  $\Gamma$ .

$$\begin{aligned} \Gamma' &= H^{-1}(\text{div}; \Omega) = \left\{ \gamma^*, \gamma^* \in [H^{-1}(\Omega)]^2, \nabla \cdot \gamma^* \in H^{-1}(\Omega) \right\} \\ \|\gamma^*\|_{H^{-1}(\text{div}; \Omega)}^2 &= \|\gamma^*\|_{H^{-1}}^2 + \|\nabla \cdot \gamma^*\|_{H^{-1}}^2 \end{aligned} \quad (3.54)$$

$\Gamma'$  est le dual de l'espace  $\Gamma = H_0(\text{rot}; \Omega)$  qui est défini par :

$$\begin{aligned} \Gamma &= H_0(\text{rot}; \Omega) = \left\{ \chi, \chi \in [L^2(\Omega)]^2, \text{rot} \chi \in L^2(\Omega), \chi \cdot \tau = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\} \\ \|\chi\|_{H_0(\text{rot}; \Omega)}^2 &= \|\chi\|_{L^2}^2 + \|\text{rot} \chi\|_{L^2}^2 \end{aligned} \quad (3.55)$$

Alors, en plus de la coercivité, on peut montrer que la condition inf-sup qui assure le caractère bien posé du problème mixte est vérifiée, à savoir :

$$\inf_{\gamma^* \in \Gamma'} \sup_{\mathbf{u}^* \in V} \frac{(\gamma^*, (\nabla w^* + \beta^*))}{\|\mathbf{u}^*\|_V \|\gamma^*\|_{\Gamma'}} \geq k_0 > 0 \quad (3.56)$$

où  $k_0$  est une constante.

C'est cette condition importante qui doit être vérifiée par les espaces choisis pour la discrétisation. Dans la suite, nous donnons sa traduction au niveau discret ainsi qu'un critère numérique pour l'évaluer.

D'une manière générale, nous pouvons discrétiser le problème (3.52) sous la forme :

*Trouver  $\mathbf{u}_h = (\beta_h, w_h) \in V_h = \mathbb{B}_h \times W_h$  et  $\gamma_h \in \mathbb{G}_h = R_h(V_h)$  tel que :*

$$\begin{aligned} a(\beta_h, \beta_h^*) + (\gamma_h, R_h(\nabla w_h^* + \beta_h^*)) &= (g, w_h^*) \quad \forall \mathbf{u}_h^* = (\beta_h^*, w_h^*) \in V_h \\ \left( \frac{t^2}{KG} \gamma_h - R_h(\nabla w_h + \beta_h), \gamma_h^* \right) &= 0 \quad \forall \gamma_h^* \in \mathbb{G}_h \end{aligned} \quad (3.57)$$

où  $R_h$  est un opérateur de réduction, qui tient compte d'une éventuelle intégration réduite ou d'une projection de la contrainte de cisaillement sur un sous espace particulier.

Alors la condition inf-sup qui permet d'assurer la convergence de la méthode s'écrit :

$$\inf_{\gamma_h^* \in G_h} \sup_{\mathbf{u}_h^* \in V_h} \frac{(\gamma_h^*, R_h(\nabla w_h^* + \beta_h^*))}{\|\mathbf{u}_h^*\|_V \|\gamma_h^*\|_{\Gamma'}} \geq k_0 > 0 \quad (3.58)$$

Cette condition étant difficile à vérifier dans la pratique, Iosilevich et al. [40] proposent une condition "inf-sup numérique" moins forte que la condition ci-dessus

$$\inf_{\gamma_h^* \in \Gamma_h} \sup_{\mathbf{u}_h^* \in V_h} \frac{(\gamma_h^*, R_h(\nabla w_h^* + \beta_h^*))}{\|\mathbf{u}_h^*\|_V \|\gamma_h^*\|_{\Gamma'_h}} \geq \beta > 0 \quad (3.59)$$

avec  $\beta$  indépendant de  $h$  et :

$$\|\gamma_h^*\|_{\Gamma'_h} = \sup_{\boldsymbol{\chi}_h \in \Gamma_h} \frac{(\gamma_h^*, \boldsymbol{\chi}_h)}{\|\boldsymbol{\chi}_h\|_{\Gamma}} \quad (3.60)$$

C'est cette relation (3.59) qui sera utilisée pour tester la condition "inf-sup numérique".

L'évaluation numérique des normes des espaces  $V$  et de  $\Gamma$  se fait en utilisant les polynômes d'interpolation pour  $\mathbf{u}_h^* = (\boldsymbol{\beta}_h^*, w_h^*)$  et  $\gamma_h^*$ . Pour une plaque encadrée sur l'ensemble de son bord (ou sur une partie), on sait que la norme  $\|\cdot\|_V$  sur  $V$  est équivalente à la norme de  $H_0^1$  (grâce au théorème de Poincaré). On peut ainsi écrire :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_h^*\|_V^2 &\approx |\mathbf{u}_h^*|_{\{H_0^1\}}^2 = |\boldsymbol{\beta}_h^*|_{\{H_0^1\}}^2 + |w_h^*|_{H_0^1}^2 \\ &= L^2 \sum_{i,j=1}^2 \left\| \frac{\partial \beta_{h,i}^*}{\partial x_j} \right\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial w_h^*}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 = \mathbf{V}^T \mathbf{S} \mathbf{V} \end{aligned} \quad (3.61)$$

où  $L$  est une longueur caractéristique, typiquement la longueur ou la largeur de la plaque. Cette longueur de référence ou caractéristique est choisie afin de mettre les deux termes intervenant dans l'expression de la norme à la même échelle.  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^n$  est un vecteur des déplacements nodaux contenant les degrés de liberté de  $\beta$  et de  $w$ . Ainsi  $\mathbf{S}$  est la matrice associée au produit scalaire induit sur  $V_h$ .

Nous pouvons de même évaluer numériquement la norme sur l'espace  $\Gamma$  par :

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\chi}_h\|_{\Gamma}^2 &= \|\boldsymbol{\chi}_h\|_{H_0(\text{rot};\Omega)}^2 = \|\boldsymbol{\chi}_h\|_{L^2}^2 + L^2 \|\text{rot} \boldsymbol{\chi}_h\|_{L^2}^2 \\ &= \mathbf{W}^T \mathbf{D} \mathbf{W} \end{aligned} \quad (3.62)$$

Alors en suivant la même démarche que dans [40], nous pouvons montrer que la condition inf-sup numérique peut se ramène à vérifier :

$$\beta \geq \beta^* = \sqrt{\frac{\delta_{min}}{\sigma_{max}}} \quad (3.63)$$

où  $\delta_{min}$  est la plus petite valeur propre de  $\mathbf{D}$  et  $\sigma_{max}$  est la plus grande valeur propre de  $\mathbf{S}$ .

### 3.3.1 Plaque carrée encastrée

Deux configurations tests seront considérées : la plaque carrée encastrée avec maillage uniforme (figure 3.18) et avec distorsion du maillage (figure 3.20). La plaque est soumise à un chargement uniforme  $q$ .

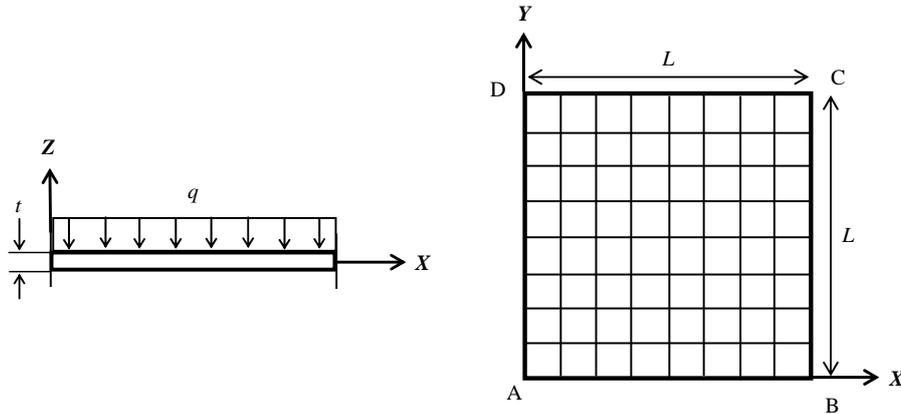


FIGURE 3.18 – Plaque carrée encastrée avec le maillage  $8 \times 8$  ;  $E = 200000$  Mpa ;  $\nu = 0.3$  ;  $L = 100$  mm ;  $t = 0.01$

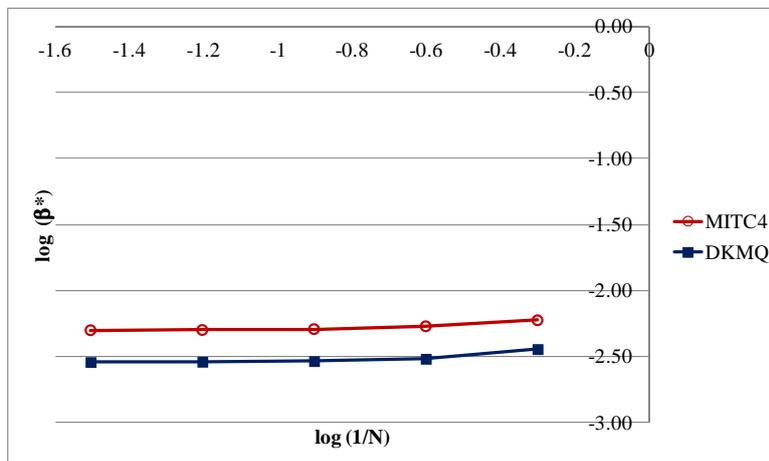


FIGURE 3.19 – Résultats inf-sup avec le maillage uniforme

Sur les figures 3.19 et 3.21, nous avons représenté l'évolution des valeurs de  $\beta^*$  en fonction de la taille de l'élément ( $h = 1/N$ ) pour les deux configurations considérées.

Pour les deux éléments finis DKMQ et MITC4, la valeur limite de  $\beta^*$  quand  $h$  tend vers 0 est une constante non nulle. Ce qui montre que ces deux éléments vérifient la condition inf-sup numérique.

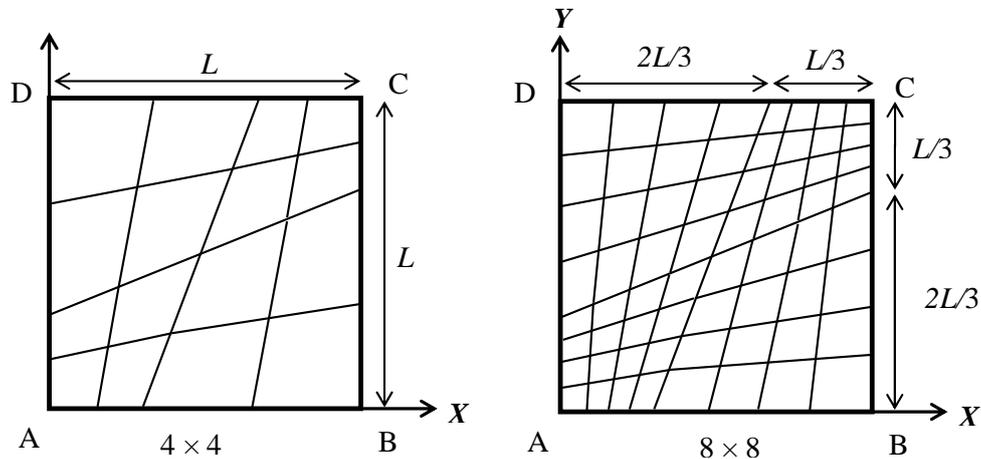


FIGURE 3.20 – Distorsion du maillage ( maillage  $4 \times 4$  et  $8 \times 8$ )

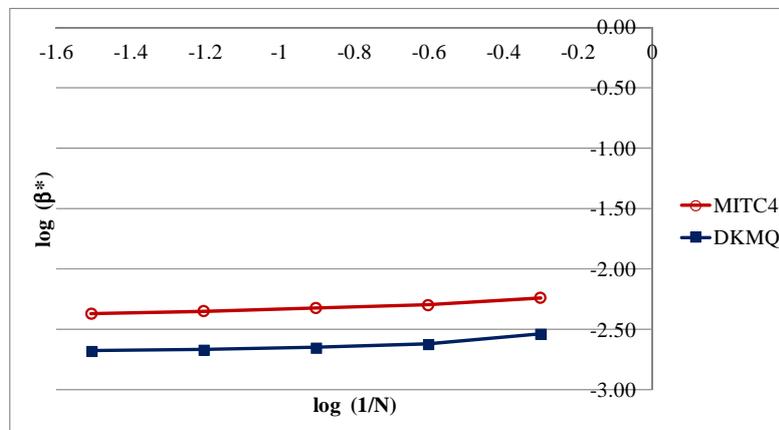


FIGURE 3.21 – Résultats inf-sup avec distorsion du maillage

### 3.3.2 Plaque biaise $30^\circ$ de Morley encastrée

Nous allons montrer maintenant les résultats de la condition inf-sup numérique pour la plaque biaise  $30^\circ$  de Morley encastrée (figure 3.22). Sur la figure 3.23, nous

avons représenté l'évolution des valeurs de  $\beta^*$  en fonction de la taille de l'élément ( $h = 1/N$ ) pour la configuration considérée. Pour les deux éléments finis DKMQ et MITC4, la valeur limite de  $\beta^*$  quand  $h$  tend vers 0 est une constante non nulle. Ce qui montre que ces deux éléments vérifient la condition inf-sup numérique.

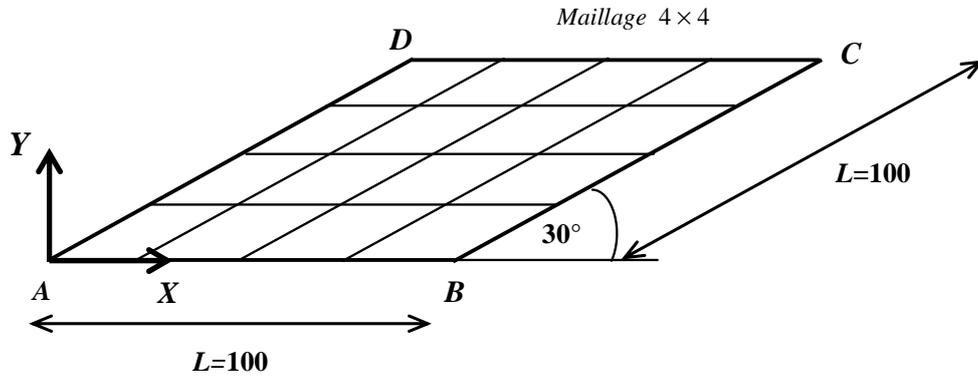


FIGURE 3.22 – Plaque biale 30° de Morley encastree avec le maillage 4 × 4 ;  $E = 200000$  Mpa ;  $\nu = 0.3$  ;  $L = 100$  mm ;  $t = 0.01$

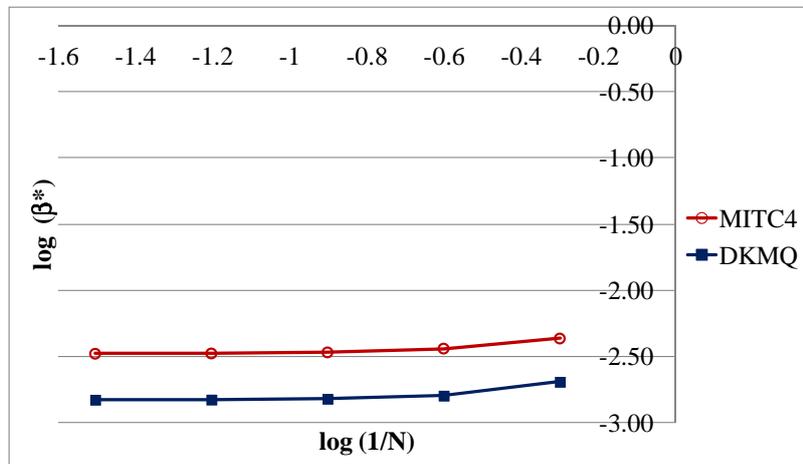


FIGURE 3.23 – Résultats inf-sup pour la plaque biale 30° de Morley

### 3.3.3 Plaque biaise 60° de Razzaque encastrée

Nous allons présenter maintenant les résultats de la condition inf-sup numérique pour la plaque biaise 60° de Razzaque encastrée (figure 3.24). Sur la figure 3.25, nous avons représenté l'évolution des valeurs de  $\beta^*$  en fonction de la taille de l'élément ( $h = 1/N$ ) pour la configuration considérée. Pour les deux éléments finis DKMQ et MITC4, la valeur limite de  $\beta^*$  quand  $h$  tend vers 0 est une constante non nulle. Ainsi, les deux éléments vérifient la condition inf-sup numérique.

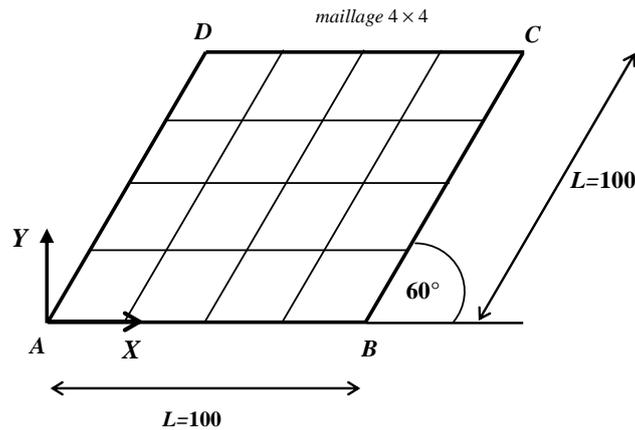


FIGURE 3.24 – Plaque biaise 60° de Razzaque encastrée avec le maillage 4 × 4 ;  $E = 200000$  Mpa ;  $\nu = 0.3$  ;  $L = 100$  mm ;  $t = 0.01$

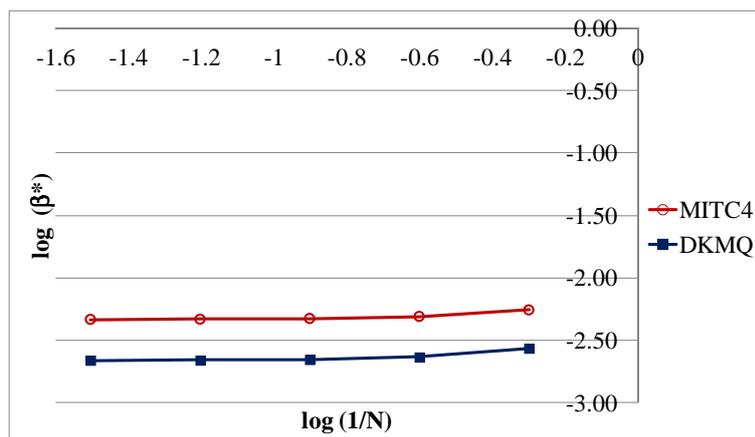


FIGURE 3.25 – Résultats inf-sup pour la plaque biaise 60° de Razzaque

## 3.4 Analyse d'erreur a posteriori

Dans cette partie nous allons nous intéresser à l'analyse des erreurs a posteriori pour l'élément DKMQ. Notre analyse sera basée sur l'estimateur d'erreur dit  $Z^2$  proposé par Zienkiewicz et Zhu [98]. Il est très simple à mettre en oeuvre. Cet estimateur est basé sur une technique de recouvrement, dont Zienkiewicz et Zhu ont proposé plusieurs variantes [99, 102, 100, 101] : technique de moyenne, projection ou SPR (Superconvergent Patch Recovery). Yunus et al. [94] ont montré l'efficacité des techniques de recouvrement par moyenne ou par projection dans l'analyse d'erreur de problèmes de plaques et des coques. Cependant, ces deux techniques sont moins précises que la méthode SPR.

D'autres techniques de recouvrement ont été proposées par différents auteurs. On peut citer les travaux de Boroomand et al. [18, 17, 16], Ubertini [90], Zhang [95] et Payen et Bathe [72, 73]. La comparaison avec la méthode de recouvrement SPR proposée par Zienkiewicz et Zhu (voir par exemple [96]) ne semble pas montrer un avantage net en faveur des autres techniques. Aussi, dans cette partie, et comme il est dit plus haut, nous nous appuierons sur les méthodes de recouvrement proposées par Zienkiewicz et Zhu pour faire l'étude des erreurs a posteriori de l'élément DKMQ. Nous commencerons par présenter l'estimateur  $Z^2$  et les différentes techniques de recouvrement associées dues à Zienkiewicz et Zhu.

### 3.4.1 Estimateur a posteriori $Z^2$

#### Fiabilité et efficacité de l'estimateur d'erreur :

L'erreur est la différence entre la solution exacte et la solution approximée par éléments finis. Pour les champs des contraintes, l'erreur en chaque point s'écrit :

$$e = \sigma - \sigma^h \quad (3.64)$$

où  $e$  est l'erreur en contraintes,  $\sigma$  la valeur exacte des contraintes et  $\sigma^h$  les contraintes calculées par la méthode des éléments finis. Dans la pratique, la solution exacte est inconnue. C'est pour cette raison que l'on ne sait construire que des estimateurs d'erreur. Si on note  $E^*$  un estimateur d'erreur, deux conditions sont exigées pour que l'on puisse le considérer comme pertinent. Il s'agit de la fiabilité et de l'efficacité, qui se traduisent par :

1. Un estimateur d'erreur  $E^*$  est dit fiable s'il vérifie :  
 $\exists C_1$  une constante positive indépendante de  $h$  telle que :

$$\|\sigma - \sigma^h\| \leq C_1 E^* \quad (3.65)$$

2. Un estimateur d'erreur  $E^*$  est dit efficace s'il vérifie :  
 $\exists C_2$  une constante positive indépendante de  $h$  telle que :

$$E^* \leq C_2 \|\sigma - \sigma^h\| \quad (3.66)$$

Si la solution exacte est connue on peut définir l'indice d'efficacité d'un estimateur d'erreur par :

$$\eta = \frac{E^*}{\|e\|} \quad (3.67)$$

L'estimateur d'erreur est dit asymptotiquement exact lorsque son indice d'efficacité tend vers 1 quand  $h$  tend vers zéro.

Une méthode classique pour déterminer un estimateur d'erreur consiste à construire à partir d'une solution approchée  $\sigma^h$  une solution améliorée notée  $\sigma^*$  (les techniques de recouvrement permettent d'effectuer cette construction). Alors un estimateur d'erreur peut être :

$$E^* = \|e^*\| \quad \text{où} \quad e^* = \sigma^* - \sigma^h \quad (3.68)$$

Montrons qu'un tel estimateur est asymptotiquement exact. En effet, si l'erreur sur  $\sigma$  de l'approximation par éléments finis est

$$\|(\sigma - \sigma^h)\| = O(h^p), \quad (3.69)$$

alors par définition, l'erreur de la solution améliorée est plus faible :

$$\|(\sigma - \sigma^*)\| = O(h^{p+\alpha}) \quad \alpha > 0 \quad (3.70)$$

On peut alors en déduire à partir de

$$E^* = \|e^*\| = \|\sigma^* - \sigma^h\| = \|(\sigma - \sigma^h) - (\sigma - \sigma^*)\| \quad (3.71)$$

que l'on a :

$$\left| \|(\sigma - \sigma^h)\| - \|(\sigma - \sigma^*)\| \right| \leq E^* \leq \|(\sigma - \sigma^h)\| + \|(\sigma - \sigma^*)\| \quad (3.72)$$

En divisant par  $\|e\| = \|(\sigma - \sigma^h)\|$ , nous pouvons encadrer l'indice d'efficacité de l'estimateur d'erreur  $E^*$  comme suit :

$$\left| 1 - \frac{\|(\sigma - \sigma^*)\|}{\|(\sigma - \sigma^h)\|} \right| \leq \eta \leq 1 + \frac{\|(\sigma - \sigma^*)\|}{\|(\sigma - \sigma^h)\|} \quad (3.73)$$

En utilisant (3.69) et (3.70) on obtient :

$$1 - O(h^\alpha) \leq \eta \leq 1 + O(h^\alpha) \quad (3.74)$$

La relation (3.74) montre que cet estimateur est asymptotiquement exact car son indice d'efficacité tend vers 1 quand  $h$  tend vers zéro.

Aussi, nous utiliserons cet estimateur dans la suite. Comme Zienkiewicz et Zhu [98], l'erreur relative sera calculée comme étant le rapport entre l'estimateur et la norme de la solution améliorée :

$$\phi^* = \frac{\|e^*\|}{\|\sigma^*\|} \quad (3.75)$$

Dans la pratique, un seuil  $\varepsilon_\phi^*$  de cette erreur relative sera utilisé pour arrêter le raffinement du maillage.

Pour les plaques, les calculs d'erreur s'effectuent en utilisant la norme énergétique suivante

$$\|e\|^2 = \sum_{i=1}^m (\|e_M\|_i^2 + \|e_T\|_i^2) \quad (3.76)$$

où  $m$  le nombre d'éléments dans la structure (qui est désigné par  $NELT$  dans les graphiques) et où

$$\|e_M\|_i^2 = \int_{A^i} \langle e_M \rangle [H_f]^{-1} \{e_M\} dA^i \quad (3.77)$$

$$\|e_T\|_i^2 = \int_{A^i} \langle e_T \rangle [H_c]^{-1} \{e_T\} dA^i \quad (3.78)$$

On note

$$\{e_M\} = \{M\} - \{M^h\}$$

l'erreur locale sur les moments et

$$\{e_T\} = \{T\} - \{T^h\}$$

l'erreur locale sur les efforts tranchants.

De même, l'estimateur  $E^*$  peut être calculé à partir de l'estimateur dans chaque élément  $E_i^*$  par :

$$E^{*2} = \sum_{i=1}^m (E_i^*)^2 \quad (3.79)$$

Nous allons dans la section suivante préciser comment déterminer une solution améliorée grâce à la technique de recouvrement.

### 3.4.2 Technique de recouvrement

La formulation éléments finis de plaque basée sur le modèle de Mindlin-Reissner [60, 77] ne nécessite que la continuité de type  $C^0$ . Par conséquent, les déplacements à la frontière de deux éléments voisins sont continus. Par contre, les contraintes qui

sont calculées en utilisant les dérivées des déplacements ne sont pas continues. La technique de recouvrement nous permet de construire des contraintes améliorées qui sont continues dans la structure (figure 3.26).

Nous allons décrire les trois méthodes de recouvrement proposées par Zienkiewicz et Zhu, à savoir la technique de la moyenne [98], la technique de projection [98] et l'approche SPR [102, 100, 101].

### 3.4.2.1 Technique de la moyenne

La technique de la moyenne est la plus simple et la plus utilisée dans l'analyse d'erreur. Pour chaque nœud d'un élément, nous pouvons définir

$$\begin{aligned} \{M^*\} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{M^h\}_i \\ \{T^*\} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{T^h\}_i \end{aligned} \quad (3.80)$$

où  $n$  est le nombre d'éléments qui sont connectés au nœud  $i$ ,  $\langle M^* \rangle_i = \langle M_x^* \ M_y^* \ M_{xy}^* \rangle_i$  et  $\langle T^* \rangle_i = \langle T_x^* \ T_y^* \rangle_i$  sont les moments et les efforts tranchants continus obtenus après recouvrement ;  $\langle M^h \rangle_i = \langle M_x^h \ M_y^h \ M_{xy}^h \rangle_i$  et  $\langle T^h \rangle_i = \langle T_x^h \ T_y^h \rangle_i$  sont les moments et les efforts tranchants calculés par éléments finis.

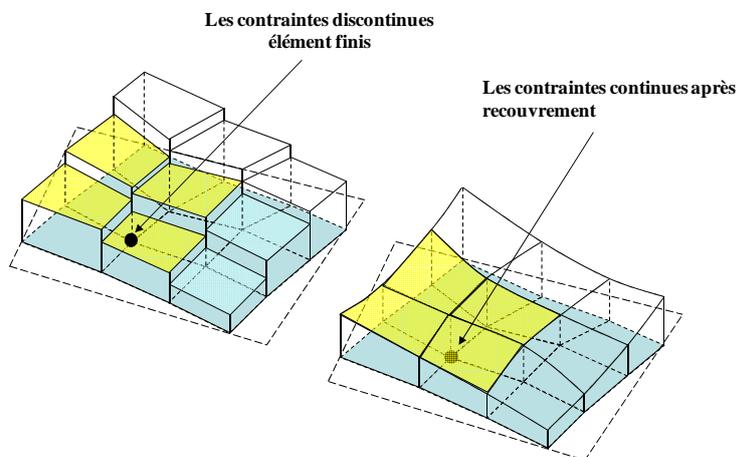


FIGURE 3.26 – Contraintes avant et après recouvrement

### 3.4.2.2 Technique de projection

La technique de projection qui a été proposée par Zienkiewicz et Zhu [98] permet de construire des contraintes continues dans la structure. La valeur du moment

amélioré  $M_\alpha^*$  dans un élément ( $\alpha = x, y$  ou  $xy$ ) est calculée à partir des polynômes d'interpolation des déplacements  $\langle N \rangle$  de l'élément considéré suivant :

$$M_\alpha^* = \langle N \rangle \{M_\alpha^*\} \quad (3.81)$$

Le vecteur  $\{M_\alpha^*\}$  est alors déterminé grâce à la minimisation de la fonctionnelle

$$\mathcal{I} = \int_{A^e} (M_\alpha^* - M_\alpha^h)^2 dA^e \quad (3.82)$$

Un calcul classique montre que

$$\{M_\alpha^*\} = [B]^{-1} \int_{A^e} \{N\} M_\alpha^h dA^e \quad (3.83)$$

avec :

$$[B] = \int_{A^e} \{N\} \langle N \rangle dA^e$$

On fait de même pour les efforts tranchants. On obtient un résultat similaire à (3.83) :

$$\{T_\alpha^*\} = [B]^{-1} \int_{A^e} \{N\} T_\alpha^h dA^e \quad (3.84)$$

### 3.4.2.3 Technique SPR

La technique SPR proposée par Zienkiewicz et Zhu [102, 100, 101] est basée sur l'utilisation d'un patch construit à partir de la réunion d'éléments autour d'un nœud (voir figure 3.27). Elle est relativement simple à utiliser dans les codes d'éléments finis. La construction des patches est détaillée dans [44]. Pour déterminer le moment amélioré  $M_\alpha^*$  sur un patch, on écrit

$$M_\alpha^* = \langle P \rangle \{a\} \quad (3.85)$$

avec, pour l'élément DKMQ, nous utilisons :

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \langle 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2 \rangle \\ \langle a \rangle &= \langle a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 \rangle \end{aligned} \quad (3.86)$$

La détermination des coefficients inconnus  $a_n$  de chaque patch s'effectue en minimisant la fonctionnelle suivante :

$$\mathcal{J}_\alpha = \sum_{k=1}^r \left( M_\alpha^h(\xi_k, \eta_k) - \langle P(\xi_k, \eta_k) \rangle \{a\} \right)^2 \quad (3.87)$$

où  $r$  est le nombre de points de Gauss dans le patch considéré,  $(\xi_k, \eta_k)$  les coordonnées des points de Gauss et  $(M_\alpha^h(\xi_k, \eta_k))$  le moment calculé par éléments finis dans le patch. La minimisation de la fonctionnelle (3.87) donne classiquement

$$\{a\} = [A]^{-1} \{b\} \quad (3.88)$$

où :

$$[A] = \sum_{k=1}^r \langle P(\xi_k, \eta_k) \rangle^T \langle P(\xi_k, \eta_k) \rangle \quad (3.89)$$

$$\{b\} = \langle P(\xi_k, \eta_k) \rangle^T M_\alpha^h(\xi_k, \eta_k)$$

La même démarche est effectuée pour les efforts tranchants.

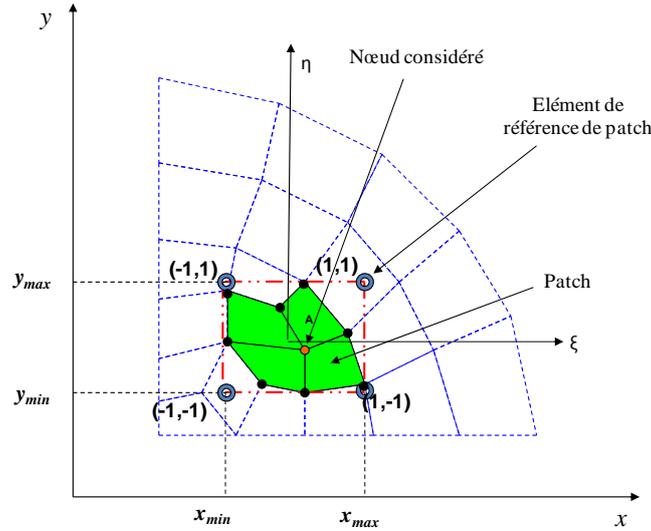


FIGURE 3.27 – Patch

### 3.4.3 Résultats numériques

Nous présentons l'application de l'estimateur d'erreur  $Z^2$  pour l'élément DKMQ. Nous appliquons les 3 méthodes de recouvrement décrites plus haut. Nous utiliserons des maillages uniformes et adaptatifs.

#### 3.4.3.1 Plaque carrée sous chargement uniforme, simplement appuyée ou encadrée

La première configuration étudiée est celle d'une plaque carrée de longueur  $L$  sous chargement uniforme  $q$  (voir figure 3.28). Les maillages uniformes  $4 \times 4$ ,  $8 \times 8$  et  $16 \times 16$  sont utilisés. La solution de référence pour le moment au centre de la plaque est celle que l'on trouve dans Batoz et Dhatt [11]. Pour le cas où la plaque est simplement appuyée sur son bord, la solution analytique est :

$$M = 0.0479qL^2 \quad (3.90)$$

Dans le cas où la plaque est encadrée sur son bord, la solution analytique s'écrit :

$$M = 0.0231qL^2 \quad (3.91)$$

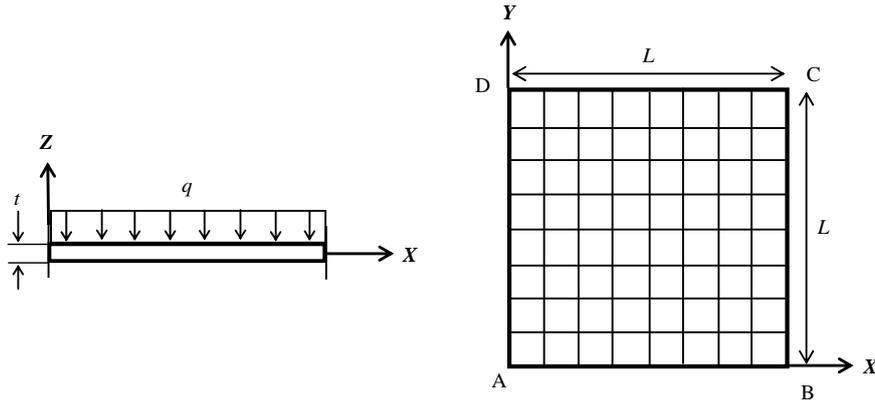


FIGURE 3.28 – Plaque carrée sous chargement uniforme (maillage  $8 \times 8$  ;  $E = 1000$  ;  $\nu = 0.3$  ;  $L = 10$  ;  $t = 0.1$  ;  $q = 1$ )

$NELT$	Moyenne	Projection	SPR
16	5.006	4.294	4.490
64	4.839	4.667	4.536
256	4.801	4.758	4.779
REF.[11]	4.790		

Tableau 3.14 – Moment au centre de la plaque carrée simplement appuyée

Pour le cas simplement appuyé, l'indicateur d'erreur relative est représenté sur la figure 3.29. En utilisant le maillage  $16 \times 16$  ou  $NELT = 256$ , toutes les techniques de recouvrement ont une erreur relative inférieure à 5% fixée comme valeur du seuil  $\varepsilon_\phi^*$ . Notons cependant, que la technique de projection converge moins rapidement que les autres méthodes de recouvrement. Les moments au centre de la plaque sont présentés dans le tableau 3.14. Pour  $NELT = 256$ , les techniques de la moyenne et de SPR donnent des résultats plus proches de la valeur de référence, alors que la technique de projection est moins précise.

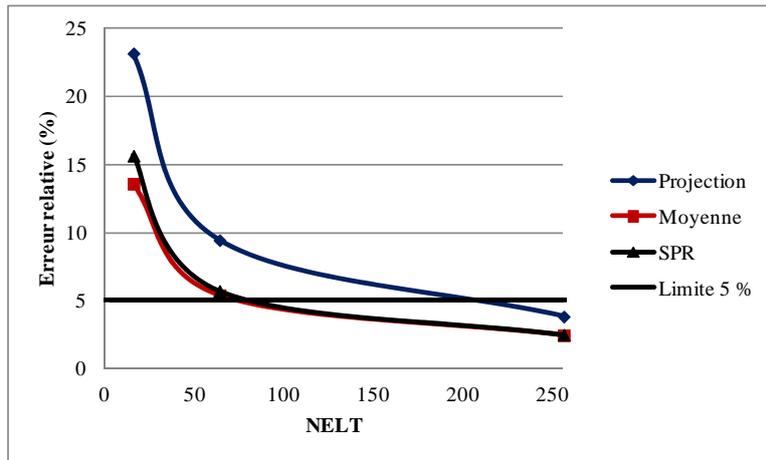


FIGURE 3.29 – Indicateur d’erreur relative  $\phi^*$  pour une plaque carrée simplement appuyée

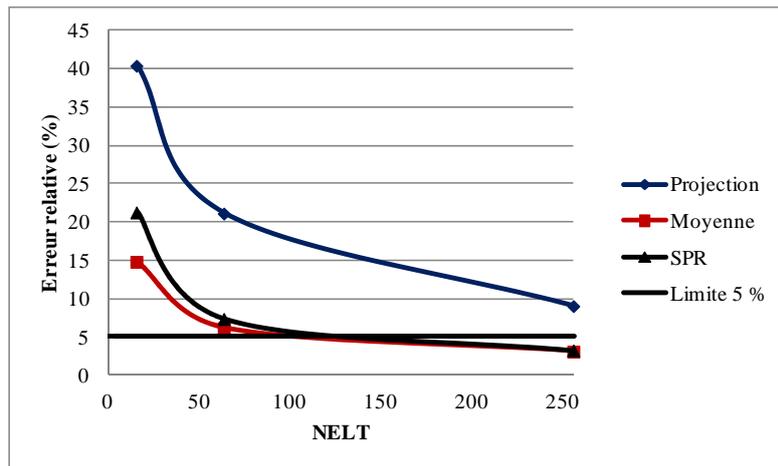


FIGURE 3.30 – Indicateur d’erreur relative  $\phi^*$  pour une plaque carrée encadrée

$NELT$	Moyenne	Projection	SPR
16	2.865	2.129	2.311
64	2.433	2.260	2.332
256	2.326	2.283	2.304
REF.[11]	2.310		

Tableau 3.15 – Moment au centre de la plaque carrée encadrée

Dans le cas encastéré, l'indicateur d'erreur relative est représenté sur la figure 3.30. Nous obtenons pour cette configuration les mêmes résultats que précédemment.

### 3.4.3.2 Plaque circulaire sous chargement uniforme, simplement appuyée ou encastérée

Le test considéré ici est celui de la plaque circulaire où sa configuration est représentée sur la figure 3.31. La symétrie nous permet d'étudier seulement la partie  $ABC$ . Le maillage uniforme (figure 3.32) et le maillage adaptatif (figure 3.33) sont utilisés.

La valeur de référence du moment au centre de la plaque est donnée par Batoz et Dhatt [11]. Dans le cas où la plaque est simplement appuyée sur son bord, la solution analytique est :

$$M = \frac{qR^2}{16}(3 + \nu) \quad (3.92)$$

Dans le cas où la plaque est encastérée sur son bord, la solution analytique s'écrit :

$$M = \frac{qR^2}{16}(1 + \nu) \quad (3.93)$$

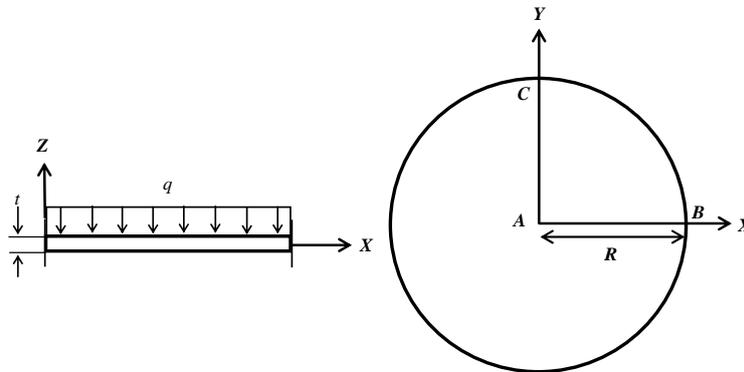


FIGURE 3.31 – Plaque circulaire sous chargement uniforme  $E = 1000$  ;  $\nu = 0.3$  ;  $R = 50$  ;  $t = 1$  ;  $q = 1$

Dans le cas simplement appuyé, la figure 3.34 et le tableau 3.16 présentent les résultats numériques obtenus avec le maillage uniforme. Pour le maillage adaptatif, les résultats sont reportés sur la figure 3.35 ainsi que dans le tableau 3.17. Le maillage adaptatif donne des meilleurs résultats que le maillage uniforme. Dans le cas du maillage adaptatif,  $\varepsilon_\phi^* = 5\%$  est atteint avec  $NELT = 33$ . Pour le maillage uniforme,

la technique SPR converge plus rapidement que les 2 autres techniques de recouvrement. Par contre, dans le cas du maillage adaptatif, la technique de la moyenne est plus performante.

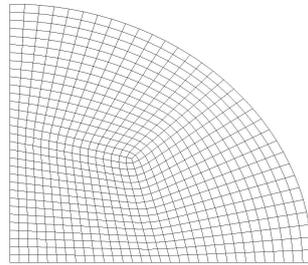


FIGURE 3.32 – Maillage uniforme  $NELT = 192$

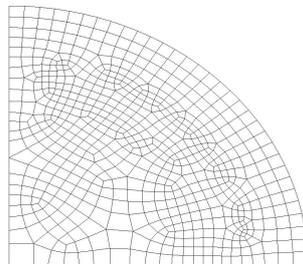


FIGURE 3.33 – Maillage adaptatif dans le cas encastré avec  $NELT = 328$

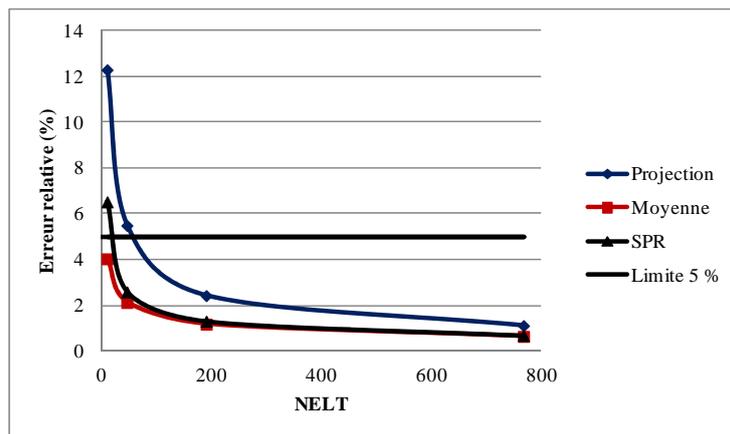


FIGURE 3.34 – Indicateur d'erreur relative  $\phi^*$  pour la plaque circulaire simplement appuyée (maillage uniforme)

<i>NELT</i>	Moyenne	Projection	SPR
12	526.030	509.930	515.120
48	518.270	514.120	515.860
192	516.320	515.220	515.650
768	515.830	515.530	515.620
REF.[11]	515.625		

Tableau 3.16 – Moment au centre de la plaque circulaire simplement appuyée (maillage uniforme)

<i>NELT</i>	Moyenne	Projection	SPR
33	515.500	499.740	505.730
111	516.050	512.050	513.780
396	516.290	512.340	514.020
REF.[11]	515.625		

Tableau 3.17 – Moment au centre de la plaque circulaire simplement appuyée (maillage adaptatif)

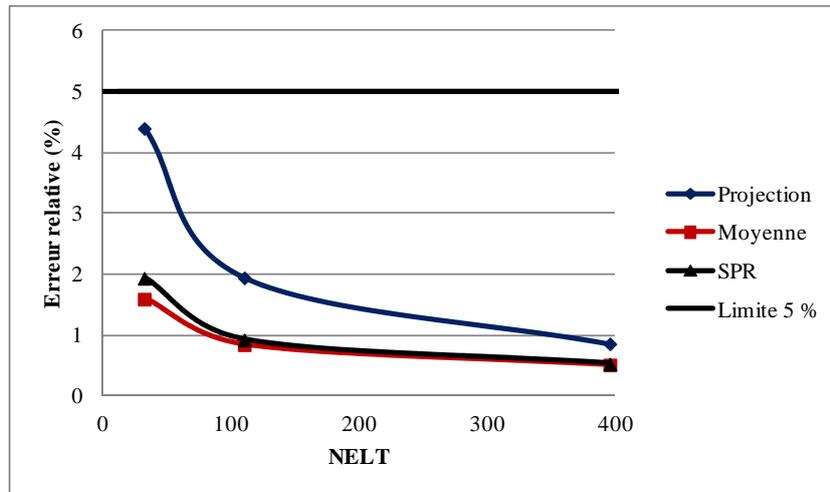


FIGURE 3.35 – Indicateur d'erreur relative  $\phi^*$  pour la plaque circulaire simplement appuyée (maillage adaptatif)

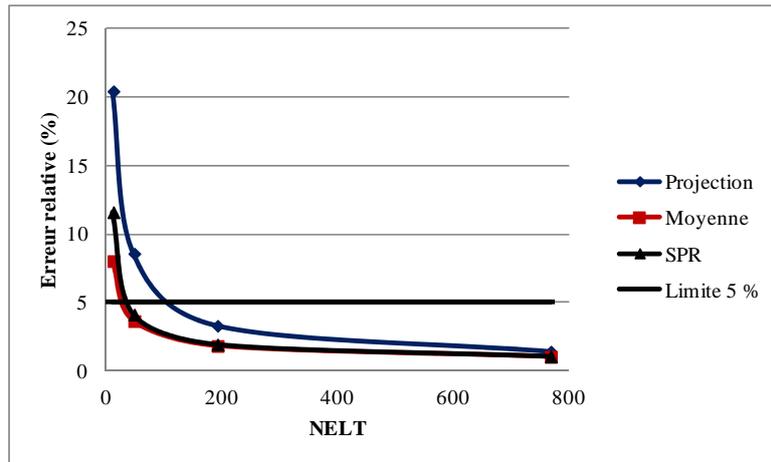


FIGURE 3.36 – Indicateur d’erreur relative  $\phi^*$  pour la plaque circulaire encastrée (maillage uniforme)

Dans le cas encastré, les résultats obtenus en utilisant le maillage uniforme et le maillage adaptatif sont présentés dans les figures 3.36 et 3.37 et les tableaux 3.18 et 3.19. Les résultats obtenus pour cette condition aux limites confirment ceux du cas de la plaque simplement appuyée, avec cependant, des résultats similaires pour les 2 techniques de recouvrement de la moyenne et SPR.

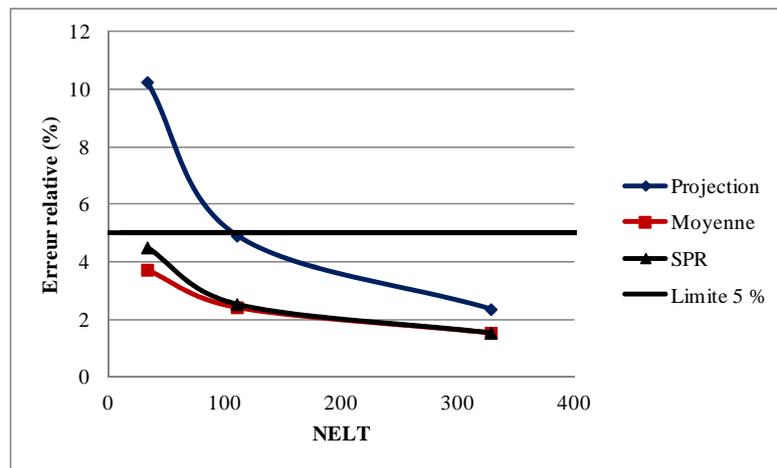


FIGURE 3.37 – Indicateur d’erreur relative  $\phi^*$  pour la plaque circulaire encastrée (maillage adaptatif)

<i>NELT</i>	Moyenne	Projection	SPR
12	215.020	198.630	202.060
48	206.080	201.920	203.660
192	203.880	202.780	203.210
768	203.330	203.030	203.120
REF.[11]	203.125		

Tableau 3.18 – Moment au centre de la plaque circulaire encastree (maillage uniforme)

<i>NELT</i>	Moyenne	Projection	SPR
33	206.800	191.030	197.020
110	206.010	203.830	204.480
328	203.950	201.640	202.540
REF.[11]	203.125		

Tableau 3.19 – Moment au centre de la plaque circulaire encastree (maillage adaptatif)

### 3.4.3.3 Plaque biaise 30° de Morley

La plaque biaise de Morley [62] (figure 3.38) est étudiée. Grâce à la symétrie, seule la partie *OBC* est analysée. La solution pour les moments principaux  $M_1$  et  $M_2$  proposée par Morley [62] sera utilisée comme solution de référence :

$$\begin{aligned} M_1 &= 1.91 \times 10^{-2} qL^2 \\ M_2 &= 1.08 \times 10^{-2} qL^2 \end{aligned} \quad (3.94)$$

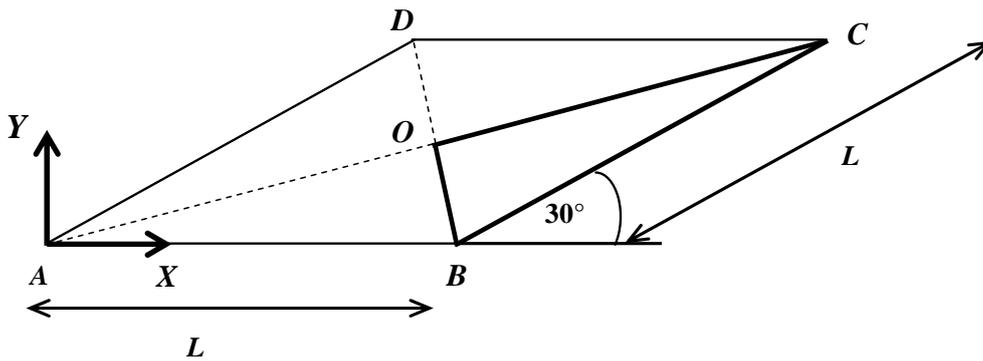


FIGURE 3.38 – Plaque biaise 30° de Morley  $E = 1000$  ;  $\nu = 0.3$  ;  $L = 60$  ;  $t = 1$  ;  $q = 1$

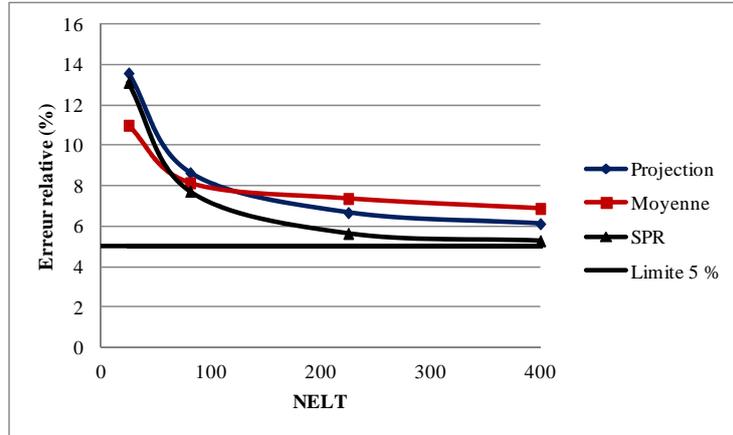


FIGURE 3.39 – Indicateur d’erreur relative  $\phi^*$  pour la plaque biaise  $30^\circ$  de Morley (maillage uniforme)

$NELT$	Moyenne	Projection	SPR
25	75.366	72.812	72.938
81	73.596	73.022	73.131
225	73.029	72.854	72.934
400	72.871	72.780	72.835
REF. [62]	68.760		

Tableau 3.20 – Valeur de  $M_1$  au centre de la plaque biaise  $30^\circ$  de Morley (maillage uniforme)

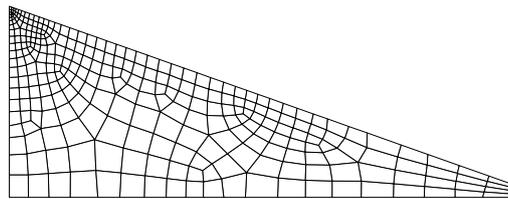


FIGURE 3.40 – Maillage adaptatif ( $NELT = 283$ )

Nous représentons sur la figure 3.39 l’indicateur d’erreur relative  $\phi^*$  dans le cas où on utilise un maillage uniforme. La technique SPR s’avère être la plus performante. Pour  $NELT = 400$ , l’indicateur d’erreur relative de SPR est proche de la limite  $\varepsilon_\phi^* = 5\%$ . Les techniques de la moyenne et de projection donnent un indicateur d’erreur relative entre 6% et 7%. Les valeurs des moments principaux au centre de la plaque sont

reportées dans les tableaux 3.20 et 3.21. En utilisant  $NELT = 400$ , l'erreur calculée au centre de la plaque par rapport à la valeur de référence est d'environ 6% pour  $M_1$  et 10% pour  $M_2$ .

$NELT$	Moyenne	Projection	SPR
25	47.908	41.289	47.511
81	43.862	41.680	43.395
225	42.379	41.624	42.151
400	41.955	41.549	41.830
REF.[62]	37.880		

Tableau 3.21 –  $M_2$  au centre de la plaque biaise  $30^\circ$  de Morley (maillage uniforme)

$NELT$	Moyenne	Projection	SPR
25	75.366	72.812	72.938
193	72.992	72.531	72.781
283	72.882	72.463	72.690
REF.[62]	68.760		

Tableau 3.22 –  $M_1$  au centre de la plaque biaise  $30^\circ$  de Morley (maillage adaptatif)

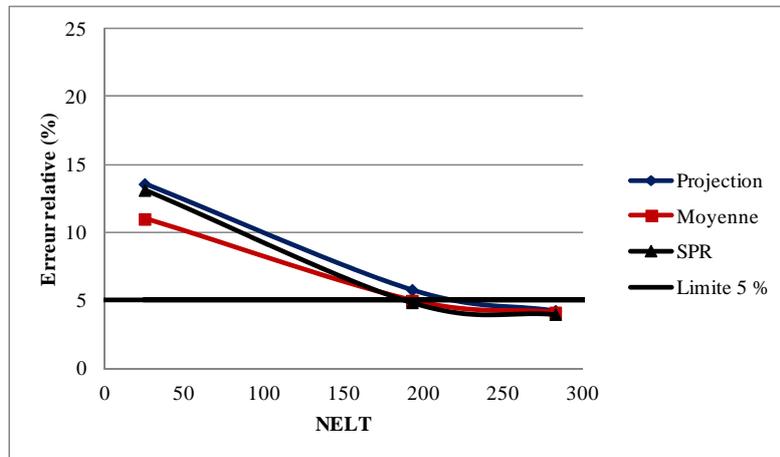


FIGURE 3.41 – Indicateur d'erreur relative  $\phi^*$  pour la plaque biaise  $30^\circ$  de Morley (maillage adaptatif)

Pour le maillage adaptatif, les résultats obtenus sont présentés sur la figure 3.41 et

dans les tableaux 3.22 et 3.23. Les résultats obtenus sont meilleurs que dans le cas du maillage uniforme.

<i>NELT</i>	Moyenne	Projection	SPR
25	47.908	41.289	47.511
193	42.121	41.819	42.089
283	41.870	41.573	41.833
REF.[62]	37.880		

Tableau 3.23 – Valeurs de  $M_2$  au centre de la plaque biaise  $30^\circ$  de Morley (maillage adaptatif)

### 3.4.3.4 Plaque biaise $60^\circ$ de Razzaque

Le dernier test est celui d'une plaque biaise  $60^\circ$  de Razzaque [74] (voir figure 3.42). La plaque est simplement appuyée sur les bords  $AB$  et  $DC$  et libre sur  $AD$  et  $BC$ . La valeur de  $M_y$  donnée dans [74] sera utilisée comme valeur de référence :

$$M_y = 0.09589qL^2 \quad (3.95)$$

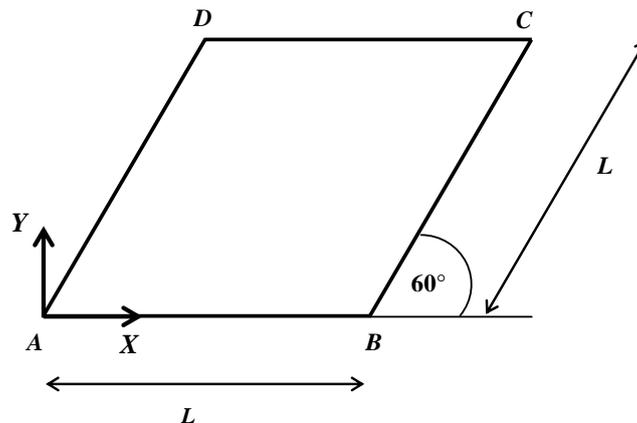


FIGURE 3.42 – Plaque biaise  $60^\circ$  de Razzaque  $E = 1000$  ;  $\nu = 0.3$  ;  $L = 50$  ;  $t = 1$  ;  $q = 1$

Les résultats obtenus pour le maillage uniforme sont synthétisés sur la figure 3.43 et dans le tableau 3.24. Toutes les techniques donnent la même valeur pour l'indicateur d'erreur pour  $NELT = 1089$ . Cependant, et comme pour les autres cas, la technique de projection converge moins rapidement que les autres techniques. La comparaison avec la valeur du moment  $M_y$  au centre de la plaque montre les mêmes tendances (tableau 3.24).

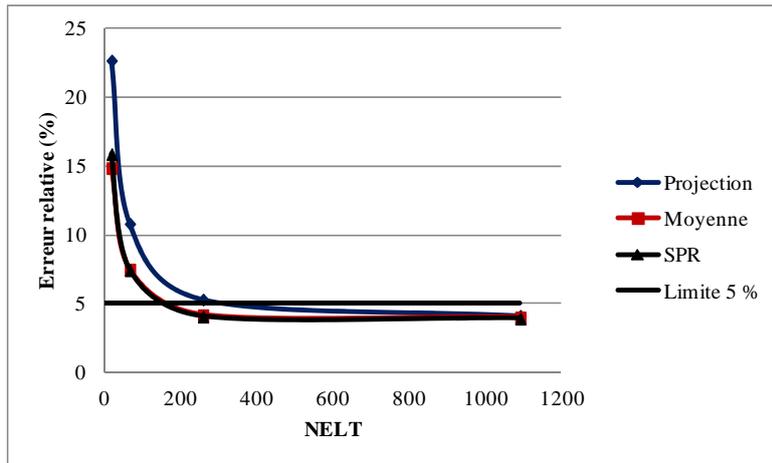


FIGURE 3.43 – Indicateur d’erreur relative  $\phi^*$  pour la plaque biaise  $60^\circ$  de Razzaque (maillage uniforme)

<i>NELT</i>	Moyenne	Projection	SPR
16	239.070	219.590	228.870
64	239.610	234.800	237.540
256	239.700	238.670	239.470
1089	240.150	239.950	240.170
REF.[74]	239.725		

Tableau 3.24 –  $M_y$  au centre de la plaque biaise  $60^\circ$  de Razzaque (maillage uniforme)

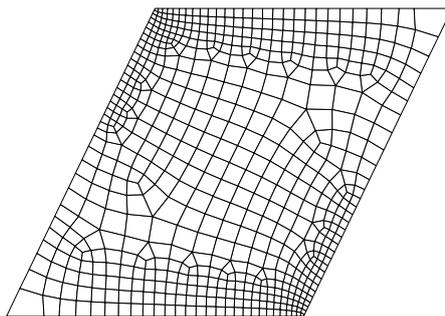


FIGURE 3.44 – Maillage adaptatif  $NELT = 583$

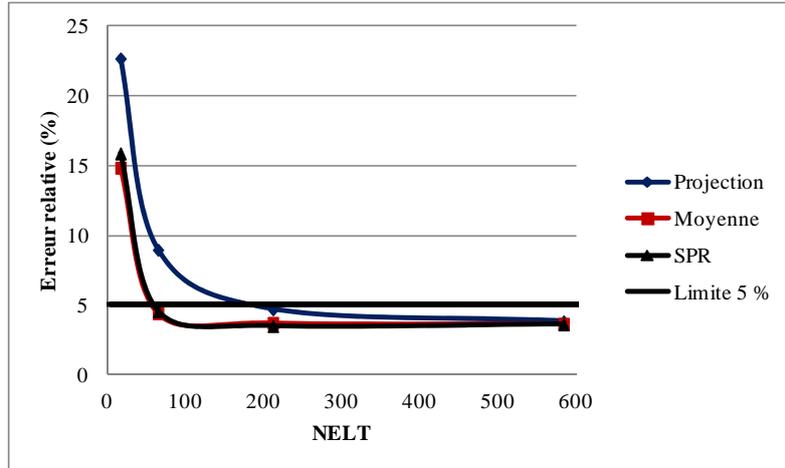


FIGURE 3.45 – Indicateur d’erreur relative  $\phi^*$  pour la plaque biaise  $60^\circ$  de Razzaque (maillage adaptatif)

Pour le maillage adaptatif (figure 3.44), les résultats présentés sur la figure 3.45 montrent que les techniques de moyenne et de SPR permettent d’atteindre le seuil de  $\varepsilon_\phi^* = 5\%$  à partir de  $NELT = 64$ . Par contre, pour la technique de projection, il faut  $NELT = 211$  pour atteindre ce seuil.

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés à la validation numérique de l’élément de plaque DKMQ. Nous avons commencé par étudier les cas tests figurant dans [43]. Nous avons montré que cet élément avait les mêmes performances que l’élément MITC4. Dans le cas test de la plaque biaise de Morley à  $30^\circ$ , pour une plaque très mince  $t/L = 0.001$ , l’élément MITC4 semble converger difficilement alors que l’élément DKMQ converge rapidement vers la valeur de référence du déplacement au centre de la plaque. Nous avons ensuite étudié le comportement de l’élément DKMQ vis à vis du critère inf-sup. Et enfin, on s’est focalisé sur l’analyse des erreurs à posteriori.

Pour le critère inf-sup, qui est maintenant admis comme étant le bon indicateur du blocage en cisaillement, on s’est ramené à un problème aux valeurs propres en suivant la démarche proposée dans [40]. Nous avons pu calculer, à partir des opérateurs d’interpolation intervenant dans la formulation de l’élément DKMQ, les normes associées aux espaces de discrétisation des déplacements et des efforts tranchants. Par la suite, nous avons déterminé les valeurs propres permettant d’exprimer la condition

inf-sup. Nous avons effectué les tests sur les deux configurations présentées dans [40]. L'élément DKMQ vérifie la condition inf-sup pour ces deux configurations, aussi bien que l'élément MITC4.

Enfin, nous avons utilisé la méthode  $Z^2$  pour effectuer l'analyse d'erreur a posteriori de l'élément DKMQ. Trois techniques de recouvrement ont été utilisées : la technique de la moyenne, celle de la projection et enfin la technique SPR. Les résultats obtenus sont similaires pour la technique de la moyenne et SPR pour des maillages réguliers. La technique de projection converge moins vite que les deux autres techniques de recouvrement. Dans le cas des maillages adaptatifs, c'est la technique SPR qui est la plus performante. D'une manière générale, l'élément DKMQ permet, après raffinement de maillage (lorsque cela est nécessaire) de prédire les bonnes valeurs pour les différents moments, ce qui confirme sa "robustesse".

Pour finir, en ce qui concerne le blocage en cisaillement, le comportement de l'élément DKMQ peut se voir directement sur l'expression du cisaillement sur le côté de chaque élément. On a en effet :

$$\gamma_s = -c_1 \left(\frac{t}{L}\right)^2 \Psi \left( c_2 I - \left(\frac{t}{L}\right)^2 \Psi \right)^{-1} \mathbb{U}^e \hat{u}^e \quad (3.96)$$

où  $c_1, c_2$  sont des constantes réelles indépendantes de  $t/L$ ,  $\Psi$  et  $\mathbb{U}^e$  sont des matrices constantes ne dépendant pas de  $t/L$ . Le vecteur  $\hat{u}^e$  regroupe les déplacements nodaux.

L'expression (3.96) permet de voir que le cisaillement tend vers zéro lorsque la plaque devient mince, c'est à dire  $t/L$  tend vers 0. Cela montre que l'élément DKMQ est sans blocage en cisaillement.



# Chapitre 4

## Evaluation des performances numériques du modèle DKMQ pour les coques

### 4.1 Présentation générale du modèle de Naghdi

#### 4.1.1 Ecriture du modèle de Naghdi

Comme on a vu à la section 2.4.1, la formulation faible du modèle de Naghdi s'écrit dans le cas d'une coque encastrée :

*Trouver*  $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{V} = [H_0^1(\Omega)]^3 \times [H_0^1(\Omega)]^2$  tel que :

$$t^3 A_f(\mathbf{U}, \mathbf{U}^*) + t(A_m(\mathbf{U}, \mathbf{U}^*) + A_c(\mathbf{U}, \mathbf{U}^*)) = F(\mathbf{U}^*), \quad \forall \mathbf{U}^* \in \mathcal{V} \quad (4.1)$$

Les formes bilinéaires symétriques  $A_f(\cdot, \cdot)$ ,  $A_m(\cdot, \cdot)$  et  $A_c(\cdot, \cdot)$  sont associées respectivement à l'énergie de déformation élastique en flexion, en membrane et en cisaillement suivante

$$\begin{aligned} A_f((\mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}), (\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\beta}^*)) &= \frac{1}{12} \int_{\omega} C^{\alpha\beta\lambda\mu} \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}) \chi_{\lambda\mu}(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\beta}^*) dA \\ A_m(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) &= \int_{\omega} C^{\alpha\beta\lambda\mu} e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) e_{\lambda\mu}(\mathbf{u}^*) dA \\ A_c((\mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}), (\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\beta}^*)) &= K \int_{\omega} D^{\alpha\lambda} \gamma_{\alpha}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}) \gamma_{\lambda}(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\beta}^*) dA \end{aligned} \quad (4.2)$$

où les tenseurs de déformation de membrane  $\underline{e}$ , de flexion  $\underline{\chi}$  et de cisaillement  $\underline{\gamma}$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} e_{\lambda\mu}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2} (u_{\lambda|\mu} + u_{\mu|\lambda}) - b_{\lambda\mu} w \\ \chi_{\lambda\mu}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}) &= \frac{1}{2} (\beta_{\lambda|\mu} + \beta_{\mu|\lambda} - b_{\mu}^{\alpha} u_{\alpha|\lambda} - b_{\lambda}^{\alpha} u_{\alpha|\mu}) + c_{\lambda\mu} w \\ \gamma_{\alpha}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\beta}) &= \frac{1}{2} (\beta_{\alpha} + w_{,\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda} u_{\lambda}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

et

$$\begin{aligned} C^{\alpha\beta\lambda\mu} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left( a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} + a^{\alpha\mu} a^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} a^{\lambda\mu} \right) \\ D^{\alpha\lambda} &= \frac{2E}{(1+\nu)} a^{\alpha\lambda} \end{aligned} \quad (4.4)$$

#### 4.1.2 Composantes curvilignes du tenseur des déformations

Nous allons d'abord choisir une base de  $\mathbb{R}^3$  liée à la surface moyenne pour écrire nos équations. Soit  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  une base orthonormée directe fixée de  $\mathbb{R}^3$  (associée aux coordonnées cartésiennes). En chaque point  $p$  de la surface de la coque  $\omega$ , notons  $\mathbf{n}$ , la normale extérieure. On pose :

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= \mathbf{n} \wedge \mathbf{k} \\ \mathbf{t}_2 &= \mathbf{n} \wedge \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_1 &= \mathbf{i} \quad \text{si} \quad \mathbf{n} = \pm \mathbf{k} \end{aligned} \quad (4.5)$$

où  $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n})$  est une base mobile orthonormée de  $\mathbb{R}^3$ .  $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$  est une base dans le plan tangent à  $\omega$  au point  $p$ .

On introduit la matrice orthogonale (voir figure 4.1) :

$$[Q] = [\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n}] \quad (4.6)$$

La base naturelle covariante au plan tangent  $T_p\omega$  est notée  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$  (2.1). On pose :

$$[F_p] = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{n}] \quad (4.7)$$

Alors, les tenseurs de membrane  $\underline{e}$ , de flexion  $\underline{\chi}$  et de cisaillement  $\underline{\gamma}$  définis par (4.3) peuvent être exprimés en composantes curvilignes suivant

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_2 & \mathbf{t}_1 \end{bmatrix} [C^p]^T \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{,\xi} \\ \mathbf{u}_{,\eta} \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_2 & \mathbf{t}_1 \end{bmatrix} [bc]^T \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{,\xi} \\ \mathbf{u}_{,\eta} \end{Bmatrix} + [C^p]^T \begin{Bmatrix} \beta_{,\xi} \\ \beta_{,\eta} \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix} = [C^p]^T \begin{Bmatrix} \gamma_\xi \\ \gamma_\eta \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^\alpha} &= (u_{\lambda|\alpha} - b_{\lambda\alpha}) \mathbf{a}^\lambda + (w_{,\alpha} + b_\alpha^\lambda u_\lambda) \mathbf{n} \\ \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} (\beta_\lambda \mathbf{a}^\lambda) &= \beta_{\lambda|\alpha} \mathbf{a}^\lambda + b_\alpha^\lambda \beta_\lambda \mathbf{n} \end{aligned} \quad (4.11)$$

où  $[C^p]$  et  $[bc]$  sont définis par :

$$\begin{aligned} [C^p] &= \begin{bmatrix} C_{11}^p & C_{12}^p \\ C_{21}^p & C_{22}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{t}_1 & \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{t}_1 & \mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{t}_2 \end{bmatrix} \\ [bc] &= \begin{bmatrix} bc_{11} & bc_{12} \\ bc_{21} & bc_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{n}_{,\eta} & -\mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{n}_{,\eta} \\ -\mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{n}_{,\xi} & \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{n}_{,\xi} \end{bmatrix} [C^p] \end{aligned} \quad (4.12)$$

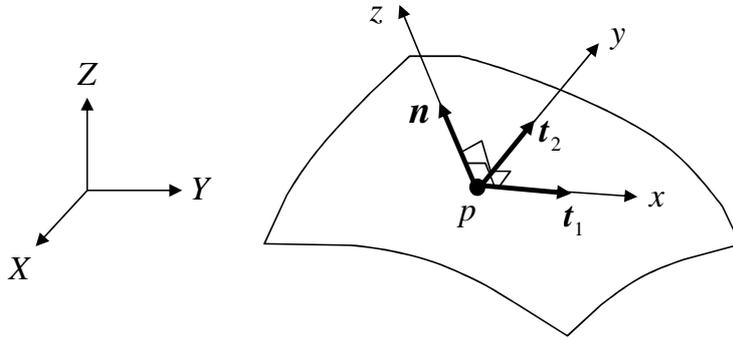


FIGURE 4.1 – Base orthonormée locale

## 4.2 Formulation de l'élément de coque DKMQ24

Un nouvel élément fini de coque quadrilatère constitué de 4 nœuds et 6 degrés de liberté par nœud est développé dans ces travaux de thèse. Cet élément est baptisé DKMQ24 (Discrete Kirchoff-Mindlin Quadrilateral 24). En utilisant le modèle de Naghdi [64, 65, 66, 67] et la formulation de l'élément de coque figurant dans [12], nous avons étendu l'élément de plaque DKMQ à l'élément de coque DKMQ24. Les

fonctions d'interpolation quadratiques incomplètes pour la rotation utilisées dans la formulation de l'élément DKMQ24 constituent une originalité de l'approche proposée. Dans cet élément, le couplage entre l'énergie de flexion et de membrane est pris en compte dans l'expression de la déformation de courbure.

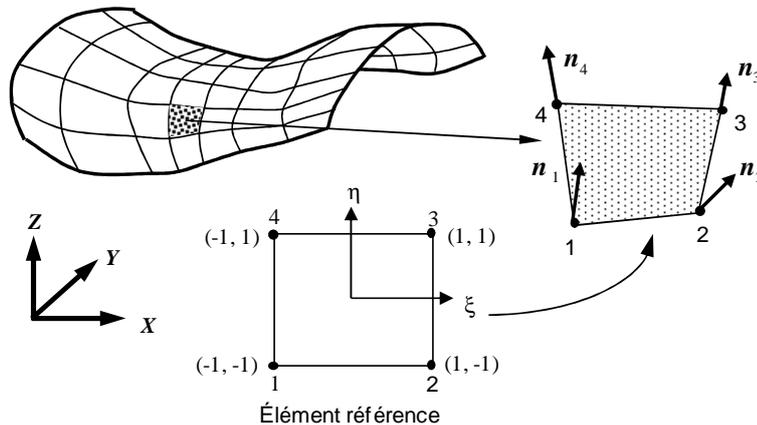


FIGURE 4.2 – Géométrie d'une coque représentée par des éléments quadrilatères

### 4.2.1 La géométrie de la coque

L'interpolation du vecteur position  $\mathbf{x}_q$  d'un point arbitraire  $q$  s'exprime en fonction des coordonnées paramétriques  $\xi, \eta, z$  de l'élément de référence :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_q(\xi, \eta, z) &= \mathbf{x}_p(\xi, \eta) + z\mathbf{n}(\xi, \eta) \\ \mathbf{x}_q(\xi, \eta, z) &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta)\mathbf{x}_i + zN_i(\xi, \eta)\mathbf{n}_i \end{aligned} \quad (4.13)$$

avec

- $\mathbf{x}_p$  : coordonnées du point  $p(X, Y, Z)$  dans le repère global définies par  $(\xi, \eta, z = 0)$ .
- $\mathbf{x}_q$  : coordonnées du point  $q(X_q, Y_q, Z_q)$  dans dans le repère global définies par  $(\xi, \eta, z)$ .
- $\mathbf{x}_i$  : coordonnées du nœud  $i(X_i, Y_i, Z_i)$  dans le système global de coordonnées cartésiennes  $(i, j, k)$ .
- $N_i(\xi, \eta)$  : fonctions de forme de l'élément quadrilatéral exprimées en fonction des coordonnées paramétriques  $(\xi, \eta)$  de l'élément de référence avec  $(-1 < \xi, \eta < +1)$  (relation (4.14)).
- $\mathbf{n}_i$  : direction normale au nœud  $i$  (voir figure 4.3).

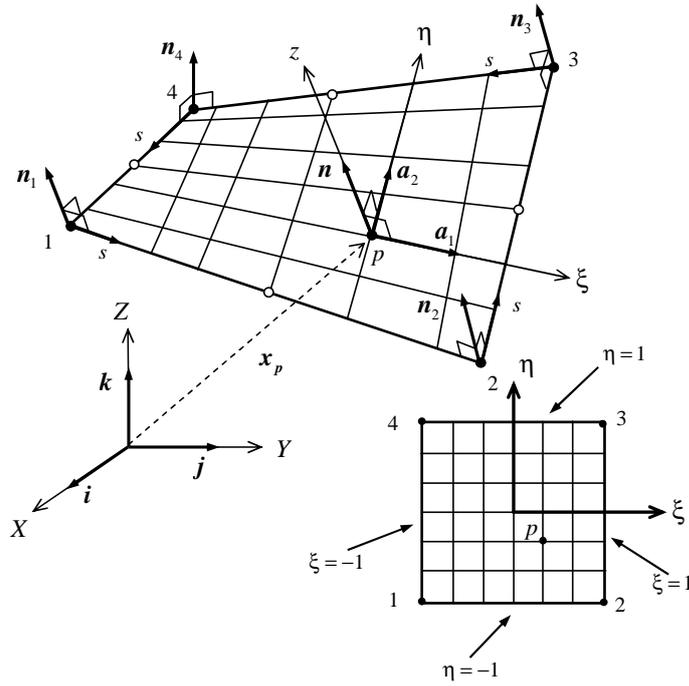


FIGURE 4.3 – Géométrie de l'élément DKMQ24

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta) \\
 N_2 &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta) \\
 N_3 &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta) \\
 N_4 &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta)
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

On a la relation suivante reliant les coordonnées cartésiennes et les coordonnées naturelles peut s'écrire

$$d\mathbf{x}_p = \begin{Bmatrix} dX_p \\ dY_p \\ dZ_p \end{Bmatrix} = \langle \mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \rangle \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} \tag{4.15}$$

où  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2$  sont les vecteurs tangents (figure 4.3) qui sont définis par :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_1 &= \mathbf{x}_{p,\xi} = \sum_{i=1}^4 N_{i,\xi} \mathbf{x}_i \\
 \mathbf{a}_2 &= \mathbf{x}_{p,\eta} = \sum_{i=1}^4 N_{i,\eta} \mathbf{x}_i
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

$N_{i,\xi}$  et  $N_{i,\eta}$  sont les dérivées premières des fonctions de forme  $N_i$  par rapport à  $\xi$  et  $\eta$ . En utilisant les vecteurs de la base contravariante, l'équation (4.15) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{a}^1 \rangle \\ \langle \mathbf{a}^2 \rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dX_p \\ dY_p \\ dZ_p \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

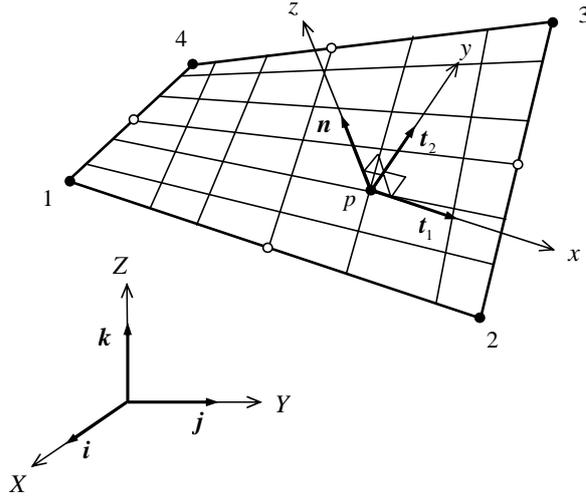


FIGURE 4.4 – Système de coordonnées locales  $x, y, z$  et système de coordonnées cartésiennes globales  $X, Y, Z$

La relation différentielle entre les coordonnées cartésiennes globales  $X, Y, Z$  et les coordonnées locales  $x, y, z$  peut être écrite (voir figure 4.4) :

$$\begin{Bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{Bmatrix} = [Q] \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

### 4.2.2 Représentation du déplacement $\mathbf{U}$

Le déplacement intervenant dans la relation (4.1) peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{U}(\xi, \eta, z) = \mathbf{u}(\xi, \eta) + z\boldsymbol{\beta}(\xi, \eta) \quad (4.19)$$

avec

$$\mathbf{u}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

et :

$$\boldsymbol{\beta}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \boldsymbol{\beta}_i + \sum_{k=5}^8 P_k(\xi, \eta) \Delta \beta_{sk} \mathbf{t}_{sk} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\beta}_i = \boldsymbol{\theta}_i \wedge \mathbf{n}_i \quad (4.21)$$

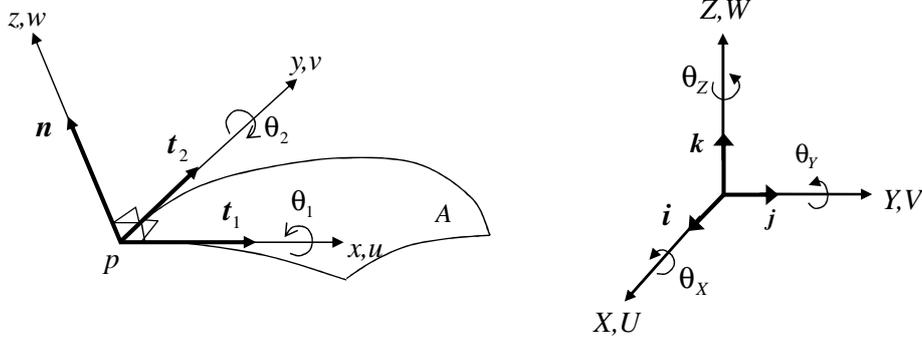


FIGURE 4.5 – Composantes cartésiennes et curvilignes de  $\mathbf{u}$  et  $\boldsymbol{\theta}$

Dans les bases orthonormées locale et globale fixes, le vecteur  $\boldsymbol{\theta}$  s'écrit (figure 4.5)

$$\boldsymbol{\theta} = \theta_1 \mathbf{t}_1 + \theta_2 \mathbf{t}_2 + \theta_3 \mathbf{n} = \theta_X \mathbf{i} + \theta_Y \mathbf{j} + \theta_Z \mathbf{k} \quad (4.22)$$

avec :

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = [Q]^T \begin{Bmatrix} \theta_X \\ \theta_Y \\ \theta_Z \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

Nous avons ainsi l'expression de  $\boldsymbol{\beta}$

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{n} = (\theta_1 \mathbf{t}_1 + \theta_2 \mathbf{t}_2 + \theta_3 \mathbf{n}) \wedge \mathbf{n} = -\theta_1 \mathbf{t}_2 + \theta_2 \mathbf{t}_1 \quad (4.24)$$

et sous forme matricielle équivalente :

$$\{\boldsymbol{\beta}\} = \begin{bmatrix} -\mathbf{t}_2 & \mathbf{t}_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n_Z & -n_Y \\ -n_Z & 0 & n_X \\ n_Y & -n_X & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_X \\ \theta_Y \\ \theta_Z \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

Enfin, la relation (4.21) devient

$$\boldsymbol{\beta}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) [RN]_i \begin{Bmatrix} \theta_{Xi} \\ \theta_{Yi} \\ \theta_{Zi} \end{Bmatrix} + \sum_{k=5}^8 P_k(\xi, \eta) \{t_{sk}\} \Delta \beta_{sk} \quad (4.26)$$

avec :

$$[RN]_i = \left[ \{RN1\}_i \quad \{RN2\}_i \quad \{RN3\}_i \right] = \begin{bmatrix} 0 & n_{Zi} & -n_{Yi} \\ -n_{Zi} & 0 & n_{Xi} \\ n_{Yi} & -n_{Xi} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Les  $N_i$  sont des fonctions de forme linéaires définies par la relation (4.14). Les  $P_k$  sont les fonctions de forme quadratiques incomplètes suivantes :

$$\begin{aligned} P_5 &= \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 - \eta) \\ P_6 &= \frac{1}{2} (1 + \xi) (1 - \eta^2) \\ P_7 &= \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta) \\ P_8 &= \frac{1}{2} (1 - \xi) (1 - \eta^2) \end{aligned} \quad (4.28)$$

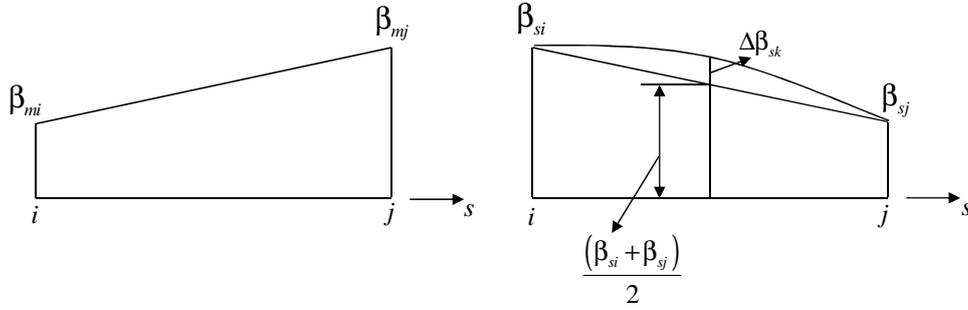


FIGURE 4.6 – Variation de la rotation le long des côtés de l'élément

$\Delta\beta_{sk}$  ( $k = 5, 6, 7, 8$ ) sont des degrés de liberté supplémentaires. Ils représentent l'incrément de la moyenne de  $\beta_{si}$  et  $\beta_{sj}$  dans le milieu de chaque côté (figure 4.6).  $\mathbf{t}_{sk} = \mathbf{x}_{ji}/L_k$  ( $k = 5, 6, 7, 8$ ) est un vecteur tangent unitaire sur le côté  $k$  (figures 4.7 et 4.8). Les rotations  $\beta_s$  et  $\beta_m$  sont :

$$\begin{aligned} \beta_s &= \beta \cdot \mathbf{t}_s \\ \beta_m &= \beta \cdot \mathbf{t}_m \end{aligned} \quad (4.29)$$

La rotation  $\beta_s$  (dans le plan  $s - z$ ) est quadratique en  $s$ . La rotation  $\beta_m$  (dans le plan  $m - z$  où  $m$  est perpendiculaire à  $s$  et  $\mathbf{n}$ ) est linéaire en  $s$ . Par exemple, sur le côté  $i - j$  (voir 4.6), nous avons :

$$\begin{aligned} \beta_s &= \left(1 - \frac{s}{L_k}\right) \beta_{si} + \frac{s}{L_k} \beta_{sj} + 4 \frac{s}{L_k} \left(1 - \frac{s}{L_k}\right) \Delta\beta_{sk} \\ \beta_m &= \left(1 - \frac{s}{L_k}\right) \beta_{mi} + \frac{s}{L_k} \beta_{mj} \end{aligned} \quad (4.30)$$

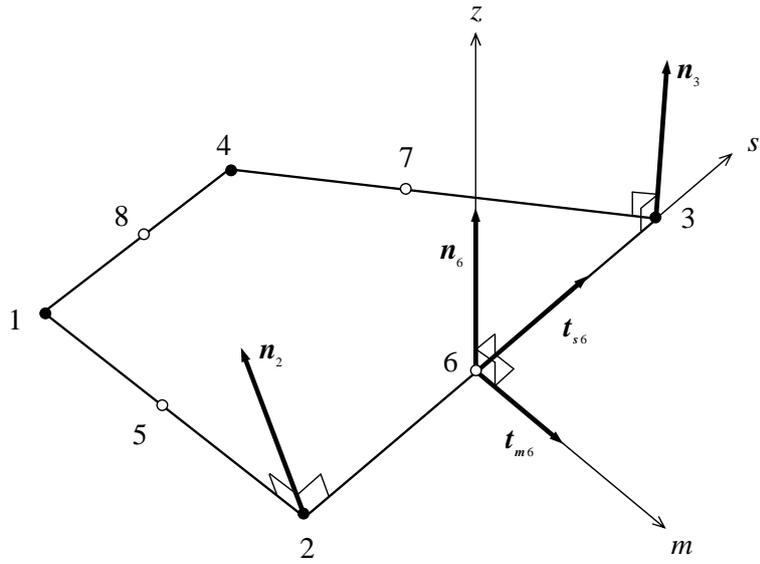


FIGURE 4.7 – Vecteur tangent unitaire sur le côté  $k$

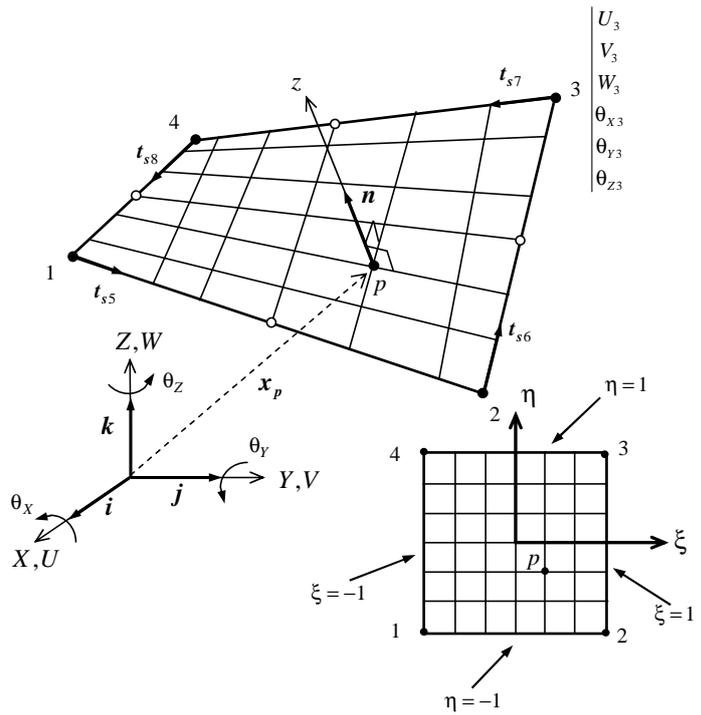


FIGURE 4.8 – Degrés de liberté nodaux de l'élément DKMQ24

### 4.2.3 Représentation des déformations de membrane $\{e\}$ et de courbure $\{\chi\}$

L'expression (4.8) de la déformation de membrane s'écrit :

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_2 & \mathbf{t}_1 \end{bmatrix} [C^p]^T \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{p,\xi} \\ \mathbf{u}_{p,\eta} \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

En injectant (4.20) dans (4.31), nous obtenons

$$\{e\} = [B_m] \{u_n\} \quad (4.32)$$

où

$$\{u_n\}^T = \langle u_n \rangle = \langle \dots \quad U_i \quad V_i \quad W_i \quad \theta_{Xi} \quad \theta_{Yi} \quad \theta_{Zi} \quad \dots \rangle \quad i = 1, 4 \quad (4.33)$$

et

$$[B_m] = \begin{bmatrix} \dots & \langle t_1 \rangle N_{i,x} & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \langle t_2 \rangle N_{i,y} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \langle t_1 \rangle N_{i,y} + \langle t_2 \rangle N_{i,x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad i = 1, 4 \quad (4.34)$$

$N_{i,x}$  et  $N_{i,y}$  sont définis par :

$$\begin{aligned} N_{i,x} &= N_{i,\xi} C_{11}^p + N_{i,\eta} C_{21}^p \\ N_{i,y} &= N_{i,\xi} C_{12}^p + N_{i,\eta} C_{22}^p \end{aligned} \quad (4.35)$$

Les composantes du tenseur de courbure sont données par (4.9) :

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_2 & \mathbf{t}_1 \end{bmatrix} [bc]^T \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{p,\xi} \\ \mathbf{u}_{p,\eta} \end{Bmatrix} + [C^p]^T \begin{Bmatrix} \beta_{,\xi} \\ \beta_{,\eta} \end{Bmatrix} \quad (4.36)$$

En tenant compte de (4.20) et de (4.26), nous obtenons

$$\{\chi\} = [B_{b\beta}] \{u_n\} + [B_{b\Delta\beta}] \{\Delta\beta_n\} \quad (4.37)$$

avec

$$\langle \Delta\beta_n \rangle = \langle \Delta\beta_{s5} \quad \Delta\beta_{s6} \quad \Delta\beta_{s7} \quad \Delta\beta_{s8} \rangle \quad (4.38)$$

et :

$$[B_{b\beta}] = \begin{bmatrix} \dots & \langle t_1 \rangle Nbc1_i & \langle V_{1i} \rangle N_{i,x} \\ \dots & \langle t_2 \rangle Nbc2_i & \langle V_{2i} \rangle N_{i,y} & \dots \\ \dots & \langle t_1 \rangle Nbc2_i + \langle t_2 \rangle Nbc1_i & \langle V_{1i} \rangle N_{i,y} + \langle V_{2i} \rangle N_{i,x} \end{bmatrix} \quad i = 1, 4 \quad (4.39)$$

Définissons également

$$\begin{aligned}
Nbc1_i &= N_{i,\xi}bc_{11} + N_{i,\eta}bc_{21} \\
Nbc2_i &= N_{i,\xi}bc_{12} + N_{i,\eta}bc_{22} \\
\langle V_{1i} \rangle &= \langle (\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{RN1}_i) \quad (\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{RN2}_i) \quad (\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{RN3}_i) \rangle \\
\langle V_{2i} \rangle &= \langle (\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{RN1}_i) \quad (\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{RN2}_i) \quad (\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{RN3}_i) \rangle
\end{aligned} \tag{4.40}$$

$[bc]$  et  $[\mathbf{RN}]$  sont définis par les relations (4.12) et (4.27) et la matrice  $[B_{b\Delta\beta}]$  s'écrit

$$[B_{b\Delta\beta}] = \begin{bmatrix} \dots & \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_{sk} P_{k,x} & \dots \\ \dots & \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{t}_{sk} P_{k,y} & \dots \\ \dots & \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_{sk} P_{k,y} + \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{t}_{sk} P_{k,x} & \dots \end{bmatrix} \quad k = 5, 8 \tag{4.41}$$

avec :

$$\begin{aligned}
P_{k,x} &= P_{k,\xi}C_{11}^p + P_{k,\eta}C_{21}^p \\
P_{k,y} &= P_{k,\xi}C_{12}^p + P_{k,\eta}C_{22}^p
\end{aligned} \tag{4.42}$$

#### 4.2.4 "Assumed Natural Strain"

La déformation de cisaillement transversal  $\underline{\gamma}$  est interpolée de façon indépendante comme dans [12, 41]

$$\begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_x \\ \underline{\gamma}_y \end{Bmatrix} = [C^p]^T \begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_\xi \\ \underline{\gamma}_\eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^p & C_{24}^p \\ C_{12}^p & C_{22}^p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_\xi \\ \underline{\gamma}_\eta \end{Bmatrix} \tag{4.43}$$

que l'on peut s'écrire également [4, 5, 43] :

$$\begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_\xi \\ \underline{\gamma}_\eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\eta) & 0 & \frac{1}{2}(1+\eta) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_{\xi 5} \\ \underline{\gamma}_{\eta 6} \\ \underline{\gamma}_{\xi 7} \\ \underline{\gamma}_{\eta 8} \end{Bmatrix} = [N_\gamma] \{ \underline{\gamma}_{\xi n} \} \tag{4.44}$$

où  $\underline{\gamma}_{\xi 5}, \underline{\gamma}_{\eta 6}, \underline{\gamma}_{\xi 7}, \underline{\gamma}_{\eta 8}$  sont les contraintes de cisaillement sur les côtés 5, 6, 7, 8.

D'autre part, nous avons aussi :

$$\begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_{\xi 5} \\ \underline{\gamma}_{\eta 6} \\ \underline{\gamma}_{\xi 7} \\ \underline{\gamma}_{\eta 8} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_5}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_6}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{L_7}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{L_8}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_{s5} \\ \underline{\gamma}_{s6} \\ \underline{\gamma}_{s7} \\ \underline{\gamma}_{s8} \end{Bmatrix} = [A_\gamma] \{ \underline{\gamma}_{sn} \} \tag{4.45}$$

Finalement à partir des relations (4.43), (4.44) et (4.45) nous obtenons

$$\{ \underline{\gamma} \} = \begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_x \\ \underline{\gamma}_y \end{Bmatrix} = [B_{s\gamma}] \{ \underline{\gamma}_{sn} \} \tag{4.46}$$

avec  $[B_{s\gamma}] = [C^p]^T [N_\gamma] [A_\gamma]$ .

En notant  $m - s$  le système de coordonnées locales sur le côté de l'élément considéré (voir figure 4.7), la déformation de cisaillement sur le côté  $k$  s'écrit à partir de loi de comportement

$$\underline{\gamma}_s = \frac{T_s}{D_s} \quad D_s = \frac{KEt}{2(1+\nu)} \quad (4.47)$$

où  $E$  est le module de Young,  $\nu$  le coefficient de Poisson,  $t$  l'épaisseur de la coque,  $K = 5/6$  le facteur de correction de cisaillement. L'équation d'équilibre sur chaque côté doit être ajouté à l'équation (4.47) :

$$T_s = M_{s,s} + M_{ms,m} \quad (4.48)$$

La loi de comportement pour le moment sur chaque côté, est donnée par :

$$\begin{aligned} M_s &= D_b (\beta_{s,s} + \nu\beta_{m,m}) \\ M_{ms} &= D_b \frac{(1-\nu)}{2} (\beta_{s,m} + \nu\beta_{m,s}) \end{aligned} \quad (4.49)$$

avec  $D_b = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ .

La relation cinématique entre la contrainte de cisaillement transversale et les rotations dans la direction normale de chaque côté, obtenue à partir des relations (4.47) à (4.49), est la suivante [42, 43] :

$$\underline{\gamma}_s = \frac{D_b}{D_s} \left[ \beta_{s,ss} + \nu\beta_{m,ms} + \frac{(1-\nu)}{2} (\beta_{s,mm} + \nu\beta_{m,ms}) \right] \quad (4.50)$$

Les rotations  $\beta_s(s)$  et  $\beta_m(s)$  ont été introduites dans la relation (4.30). Nous avons supposé que

$$\beta_{m,ms} = \beta_{s,mm} = 0 \quad (4.51)$$

de sorte que

$$\underline{\gamma}_s = \frac{D_b}{D_s} \beta_{s,ss} \quad (4.52)$$

et sur le côté  $k$  :

$$\begin{aligned} \underline{\gamma}_{sk} &= -\frac{2}{3} \phi_k \Delta \beta_{sk} \\ \phi_k &= \frac{D_b}{D_s} \frac{12}{(L_k)^2} = \frac{2}{K(1-\nu)} \left( \frac{t}{L_k} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Le facteur  $\phi_k$  (qui caractérise l'influence du cisaillement) explique le comportement de l'élément. En effet, à cause du facteur  $\left(\frac{t}{L_k}\right)^2$ , l'élément DKMQ24 se comporte

comme le modèle de Mindlin-Reissner pour une coque épaisse et comme le modèle de Kirchhoff Love pour une coque mince. Dans le second cas, le facteur  $(\frac{t}{L_k})^2$  est proche de zéro, de sorte que la déformation du cisaillement transversal s'annule. En conséquence, le verrouillage en cisaillement n'apparaît pas. En utilisant (4.53), nous avons [43] :

$$\begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_{s5} \\ \underline{\gamma}_{s6} \\ \underline{\gamma}_{s7} \\ \underline{\gamma}_{s8} \end{Bmatrix} = -\frac{2}{3} \begin{bmatrix} \phi_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\beta_{s5} \\ \Delta\beta_{s6} \\ \Delta\beta_{s7} \\ \Delta\beta_{s8} \end{Bmatrix} = [A_\phi] \{\Delta\beta_n\} \quad (4.54)$$

Finalement à partir de (4.43) et (4.54), on a :

$$\{\underline{\gamma}\} = \begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_x \\ \underline{\gamma}_y \end{Bmatrix} = [B_{s\gamma}] [A_\phi] \{\Delta\beta_n\} \quad (4.55)$$

#### 4.2.5 Application de la technique discrète de Kirchhoff-Mindlin sur le côté des éléments

En utilisant les relations cinématiques pour la déformation du cisaillement transversal, la technique discrète de Kirchhoff-Mindlin [42, 43], peut être utilisée sur chaque côté de l'élément pour obtenir  $\{\chi\}$  et  $\{\gamma\}$  en fonction des degrés de liberté nodaux. Nous avons

$$\int_0^{L_k} (\gamma_{sk} - \underline{\gamma}_{sk}) ds = 0 \quad (4.56)$$

avec :

$$\begin{aligned} \gamma_{sk} &= \mathbf{u}_{p,s} \cdot \mathbf{n}_k + \beta \cdot \mathbf{t}_{sk} \\ \underline{\gamma}_{sk} &= -\frac{2}{3} \phi_k \Delta\beta_{sk} \end{aligned} \quad (4.57)$$

Ainsi,

$$\int_0^{L_k} \left( \mathbf{u}_{p,s} \cdot \mathbf{n}_k + \beta \cdot \mathbf{t}_{sk} + \frac{2}{3} \phi_k \Delta\beta_{sk} \right) ds = 0 \quad (4.58)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal unitaire d'un point  $s$  du côté  $k$  de l'élément. Sur chaque côté  $k$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{p,s} &= \frac{1}{L_k} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \\ \beta \cdot \mathbf{t}_{sk} &= \left( \left( 1 - \frac{s}{L_k} \right) \beta_{si} + \frac{s}{L_k} \beta_{sj} \right) \mathbf{t}_{sk} + 4 \frac{s}{L_k} \left( 1 - \frac{s}{L_k} \right) \Delta\beta_{sk} \end{aligned} \quad (4.59)$$

La valeur de  $\mathbf{n}$  varie linéairement, de sorte que

$$\mathbf{n}_k = \frac{1}{2} (\mathbf{n}_i + \mathbf{n}_j) \quad (4.60)$$

En appliquant la relation (4.58), nous avons :

$$\frac{1}{L_k} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \mathbf{n}_k + \frac{1}{2} (\beta_i + \beta_j) \mathbf{t}_{sk} + \frac{2}{3} (1 + \phi_k) \Delta\beta_{sk} = 0 \quad (4.61)$$

Finalement, nous obtenons :

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3} (1 + \phi_k) \Delta\beta_{sk} &= \frac{1}{L_k} \langle \mathbf{n}_k \rangle \{ \mathbf{u}_{ji} \} \\ &+ \frac{1}{2} \left\langle \begin{matrix} \mathbf{t}_{sk} \cdot \mathbf{RN1}_i & \mathbf{t}_{sk} \cdot \mathbf{RN2}_i & \mathbf{t}_{sk} \cdot \mathbf{RN3}_i \end{matrix} \right\rangle \{ \theta_{xi} \} \\ &+ \frac{1}{2} \left\langle \begin{matrix} \mathbf{t}_{sk} \cdot \mathbf{RN1}_j & \mathbf{t}_{sk} \cdot \mathbf{RN2}_j & \mathbf{t}_{sk} \cdot \mathbf{RN3}_j \end{matrix} \right\rangle \{ \theta_{xj} \} \end{aligned} \quad (4.62)$$

Si (4.62) est appliquée sur les quatre côtés, les paramètres indépendants  $\{\Delta\beta_n\}$  sont des fonctions des valeurs nodales  $\{u_n\}$  :

$$\begin{aligned} \{\Delta\beta_n\} &= [A_\Delta]^{-1} [A_u] \{u_n\} \\ \{\Delta\beta_n\} &= [A_n] \{u_n\} \\ [A_n] &= [A_\Delta]^{-1} [A_u] \end{aligned} \quad (4.63)$$

#### 4.2.6 Matrice de rigidité

Comme on l'a vu, la déformation de membrane est définie par la relation (4.32) :

$$\{e\} = [B_m(\xi, \eta)] \{u_n\} \quad (4.64)$$

En substituant (4.63), dans (4.36) nous obtenons finalement l'expression de la déformation de courbure

$$\{\chi\} = [B_b(\xi, \eta)] \{u_n\} \quad (4.65)$$

où :

$$[B_b(\xi, \eta)] = [B_{b\beta}(\xi, \eta)] + [B_{b\Delta\beta}(\xi, \eta)] [A_n] \quad (4.66)$$

En substituant (4.63) dans l'expression de la déformation du cisaillement transversal (4.55), nous obtenons

$$\{\underline{\gamma}\} = [B_s(\xi, \eta)] \{u_n\} \quad (4.67)$$

où :

$$[B_s(\xi, \eta)] = [B_{s\gamma}(\xi, \eta)] [A_\phi] [A_n] \quad (4.68)$$

D'autre part, l'énergie de déformation de membrane est donnée par

$$\Pi_{int}^m = \frac{1}{2} \int_{A^e} \langle e \rangle [H_m] \{e\} dA^e = \frac{1}{2} \langle u_n \rangle [\mathbf{K}_m] \{u_n\} \quad (4.69)$$

où

$$[\mathbf{K}_m] = \int_{A^e} [B_m]^T [H_m] [B_m] dA^e \quad (4.70)$$

et  $[H_m]$  est défini par :

$$[H_m] = \frac{Et}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

De manière similaire, l'énergie de déformation de flexion s'écrit

$$\Pi_{int}^f = \frac{1}{2} \int_{A^e} \langle \chi \rangle [H_f] \{ \chi \} dA^e = \frac{1}{2} \langle u_n \rangle [\mathbf{K}_f] \{ u_n \} \quad (4.72)$$

avec

$$[\mathbf{K}_f] = \int_{A^e} [B_b]^T [H_f] [B_b] dA^e \quad (4.73)$$

et où  $[H_f]$  est défini par :

$$[H_f] = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

Finalement, l'énergie de déformation de cisaillement est donnée par

$$\Pi_{int}^c = \frac{1}{2} \int_{A^e} \langle \gamma \rangle [H_c] \{ \gamma \} dA^e = \frac{1}{2} \langle u_n \rangle [\mathbf{K}_c] \{ u_n \} \quad (4.75)$$

avec

$$[\mathbf{K}_c] = \int_{A^e} [B_s]^T [H_c] [B_s] dA^e \quad (4.76)$$

où  $[H_c]$  est défini par :

$$[H_c] = KGt \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

Ainsi, la matrice de rigidité  $[\mathbf{K}]$  de l'élément s'exprime par :

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{K}_m] + [\mathbf{K}_f] + [\mathbf{K}_c] \quad (4.78)$$

#### 4.2.7 Rigidité fictive pour $\theta_z$ et la stabilisation de MacNeal

Pour éviter les difficultés des opérations numériques (modes parasites), il est classique d'introduire un rigidité fictive et une stabilisation de MacNeal [56, 57, 58]. On a

$$\Pi_{int} = \Pi_{int}^m + \Pi_{int}^{\theta_z} + \Pi_{int}^{\overline{\theta_z}} \quad (4.79)$$

où  $\Pi_{int}^m = \Pi_{int}^m + \Pi_{int}^f + \Pi_{int}^c$  sont définis dans les relations (4.69), (4.72) et (4.75). De plus, nous avons :

$$\Pi_{int}^{\theta_z} = \frac{1}{2} \frac{Et^3}{12} 10^{-3} \int_{A^e} (\theta_{z,x} \theta_{z,x} + \theta_{z,y} \theta_{z,y}) dA^e = \frac{1}{2} \langle \theta_n \rangle [\mathbf{K}_{\theta_z}] \{ \theta_n \} \quad (4.80)$$

où

$$\theta_z(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \theta_{zi} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \langle n_i \rangle \{ \theta_n \} = \langle N \rangle \langle n_i \rangle \begin{Bmatrix} \theta_{Xi} \\ \theta_{Yi} \\ \theta_{Zi} \end{Bmatrix} \quad (4.81)$$

avec

$$\begin{aligned} \langle n_i \rangle &= \langle n_{Xi} \quad n_{Yi} \quad n_{Zi} \rangle \\ \langle \theta_n \rangle &= \langle \theta_{X1} \quad \theta_{Y1} \quad \theta_{Z1} \quad \dots \quad \theta_{X4} \quad \theta_{Y4} \quad \theta_{Z4} \rangle \end{aligned} \quad (4.82)$$

et :

$$\begin{Bmatrix} \theta_{z,x} \\ \theta_{z,y} \end{Bmatrix} = [C^p]^T \begin{Bmatrix} \theta_{z,\xi} \\ \theta_{z,\eta} \end{Bmatrix} \quad (4.83)$$

Nous avons en plus :

$$\Pi_{int}^{\bar{\theta}_z} = \frac{1}{2} \frac{Et}{2(1+\nu)} 10^{-3} \int_{A^e} (\bar{\theta}_z \cdot \bar{\theta}_z) dA^e = \frac{1}{2} \langle u_n \rangle [\mathbf{K}_{\bar{\theta}_z}^-] \{ u_n \} \quad (4.84)$$

En utilisant la relation

$$\bar{\theta}_z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^4 (\theta_{zi} - \theta_{z0}) \quad (4.85)$$

où  $\theta_{z0}$  est la rotation au centre d'élément définie par :

$$\theta_{z0} = \frac{1}{2} (V_{,x} - U_{,y}) \quad (4.86)$$

On a :

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_z &= \frac{1}{4} (\theta_{z1} - \theta_{z0} + \theta_{z2} - \theta_{z0} + \theta_{z3} - \theta_{z0} + \theta_{z4} - \theta_{z0}) \\ \bar{\theta}_z &= \frac{1}{4} (\theta_{z1} + \theta_{z2} + \theta_{z3} + \theta_{z4} - 4\theta_{z0}) \end{aligned} \quad (4.87)$$

En utilisant la relation (4.86), nous pouvons écrire la relation (4.87) suivant :

$$\bar{\theta}_z = \frac{1}{4} (\theta_{z1} + \theta_{z2} + \theta_{z3} + \theta_{z4} - 2(V_{,x} - U_{,y})) \quad (4.88)$$

La forme finale de la matrice de rigidité est :

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{K}_m] + [\mathbf{K}_f] + [\mathbf{K}_c] + [\mathbf{K}_{\theta_z}] + [\mathbf{K}_{\bar{\theta}_z}^-] \quad (4.89)$$

## 4.3 Evaluation numérique

### 4.3.1 Patch-tests

Les patch-tests à courbure constante et à déformation de cisaillement constante ont été effectués par Katili dans [43]. L'élément DKMQ24 a passé les tests avec succès. L'élément DKMQ24 passe également les trois patch-tests à l'effort membranaire constant ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\sigma_{xy}$ ) représentés sur la figure 4.9.

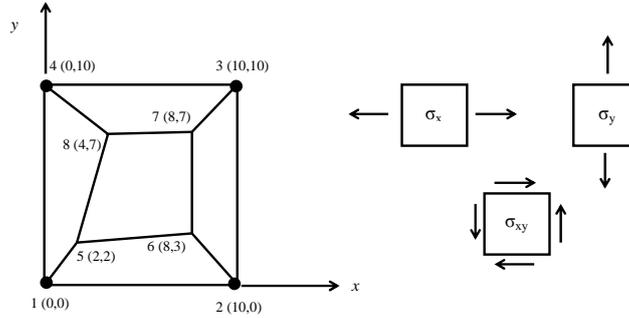


FIGURE 4.9 – Patch-tests à efforts membranaires constants ( $E = 1000$  ;  $\nu = 0.3$ )

### 4.3.2 Tests de convergence

Nous présentons dans cette partie les résultats de convergence obtenus pour l'élément DKMQ24. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux de l'élément Q4 $\gamma$ 24 qui est présenté dans [12].

#### 4.3.2.1 Hémisphère sous charges diamétralement opposées

Le cas qui est souvent utilisé pour évaluer la performance d'un élément de coque est un hémisphère sous charges diamétralement opposées représenté sur la figure 4.10 dans le cas ouvert et sur la figure 4.11 pour le cas fermé.

Le rapport de  $t/R = 0.004$  est fixé. Ce problème est utilisé pour prouver l'absence de blocage membranaire et la bonne représentation des mouvements de corps rigides. La symétrie nous permet d'étudier seulement un quart de la structure. Les conditions aux limites pour le cas ouvert sont celles des bords libres sur  $AB$  et  $CD$ . De plus, les conditions de symétrie sont  $V = \theta_X = \theta_Z = 0$  sur  $AD$  et  $U = \theta_Y = \theta_Z = 0$  sur  $BC$ . Pour le cas fermé, le bord  $AB$  est libre et les conditions de symétries associées sont  $V = \theta_X = \theta_Z = 0$  sur  $AC$  et  $U = \theta_Y = \theta_Z = 0$  sur  $BC$ .

La valeur de référence donnée par Mac Neal et Harder [55] est utilisée comme valeur de référence. Pour le cas ouvert, on a  $U_A = -V_B = 0.0940 m$  et pour le cas fermé  $U_A = -V_B = 0.0924 m$ .

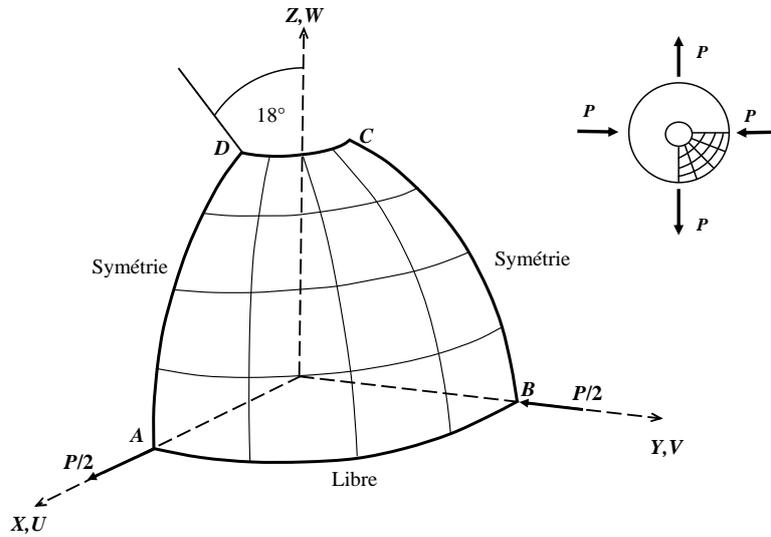


FIGURE 4.10 – Hémisphère pincé ouvert (maillage  $N \times N = 4 \times 4$  ;  $R = 10\text{ m}$  ;  $t = 0.04\text{ m}$  ;  $P = 2\text{ N}$  ;  $E = 6.825 \times 10^7\text{ Pa}$  ;  $\nu = 0.3$ )

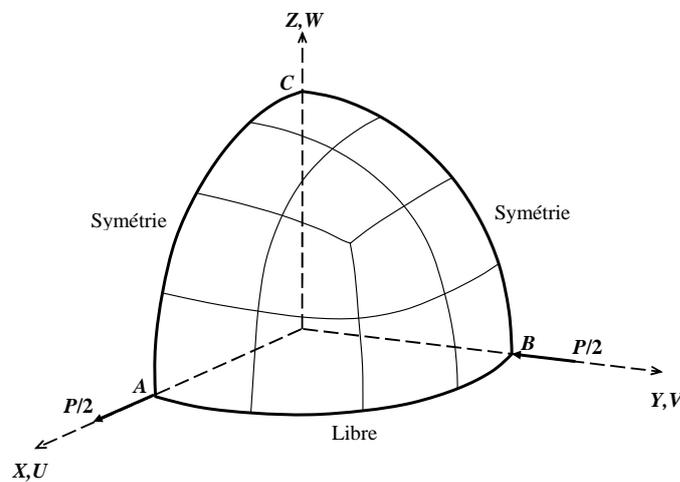


FIGURE 4.11 – Hémisphère pincé fermé (maillage  $N \times N = 4 \times 4$  ;  $R = 10\text{ m}$  ;  $t = 0.04\text{ m}$  ;  $P = 2\text{ N}$  ;  $E = 6.825 \times 10^7\text{ Pa}$  ;  $\nu = 0.3$ )

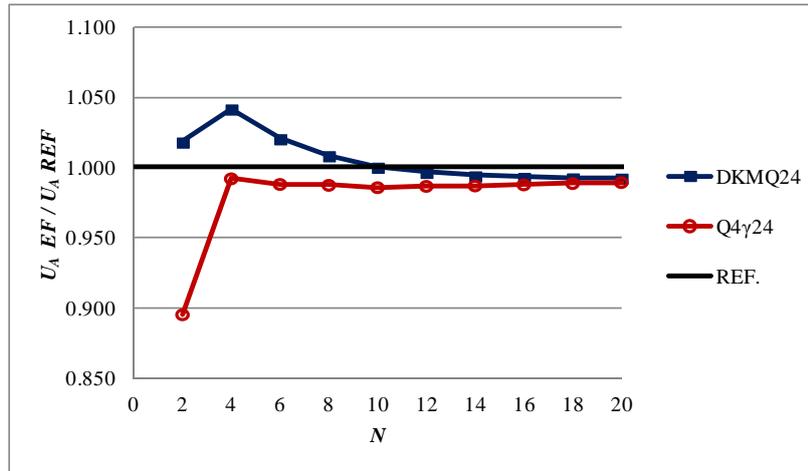


FIGURE 4.12 – Convergence du déplacement de  $U_A$ , hémisphère pincé ouvert

N × N	DKMQ24	Q4γ24
2 × 2	95.722	84.202
4 × 4	97.935	93.284
6 × 6	95.948	92.909
8 × 8	94.811	92.848
10 × 10	94.041	92.692
12 × 12	93.698	92.779
14 × 14	93.466	92.809
16 × 16	93.359	92.878
18 × 18	93.327	92.967
20 × 20	93.308	93.031
REF. [55]	94.000	

Tableau 4.1 – Déplacement  $\mathbf{U}_A$  ( $U_A = U_A \times 10^3$ ), hémisphère pincé ouvert

Pour le cas ouvert, les résultats du déplacement  $U_A$  présentés dans le tableau 4.1 et sur la figure 4.12 montrent que l'élément DKMQ24 converge plus rapidement que l'élément Q4γ24. En plus, les résultats sont proches de la valeur de référence. Pour le cas fermé, les résultats numériques obtenus sont reportés dans le tableau 4.2 et sur la figure 4.13. Nous observons le même comportement pour les deux éléments que dans le cas ouvert.

$N \times N$	DKMQ24	Q4 $\gamma$ 24
$4 \times 4$	78.721	75.053
$6 \times 6$	93.963	90.574
$8 \times 8$	93.624	91.394
$10 \times 10$	92.996	91.401
$12 \times 12$	92.601	91.459
$14 \times 14$	92.371	91.545
$16 \times 16$	92.246	91.637
$18 \times 18$	92.184	91.726
$20 \times 20$	92.158	91.807
REF.[55]	92.400	

Tableau 4.2 – Déplacement  $U_A$  ( $U_A = U_A \times 10^3$ ). Hémisphère pincé fermé

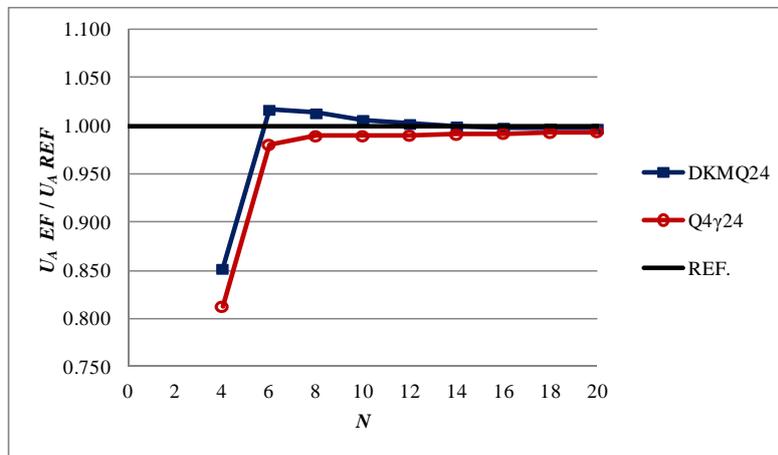


FIGURE 4.13 – Convergence du déplacement de  $U_A$ . Hémisphère pincé fermé

#### 4.3.2.2 Panneau cylindrique soumis à son poids propre

Les caractéristiques géométriques et mécaniques de ce test sont données sur la figure 4.14. Les bords droits sont libres et les bords courbes reposent sur un diaphragme rigide dans leurs plans. Le poids propre de la structure par unité de surface est  $f_Z = -0,625 \times 10^4 Pa$ . Les déformations de cisaillement sont très petites donc peuvent être négligées. Les déformations de membrane sont plus importantes par rapport aux déformations de flexion. Seule la partie  $ABCD$  est analysée avec les conditions aux limites  $U = W = \theta_Y = 0$  sur  $AD$ .

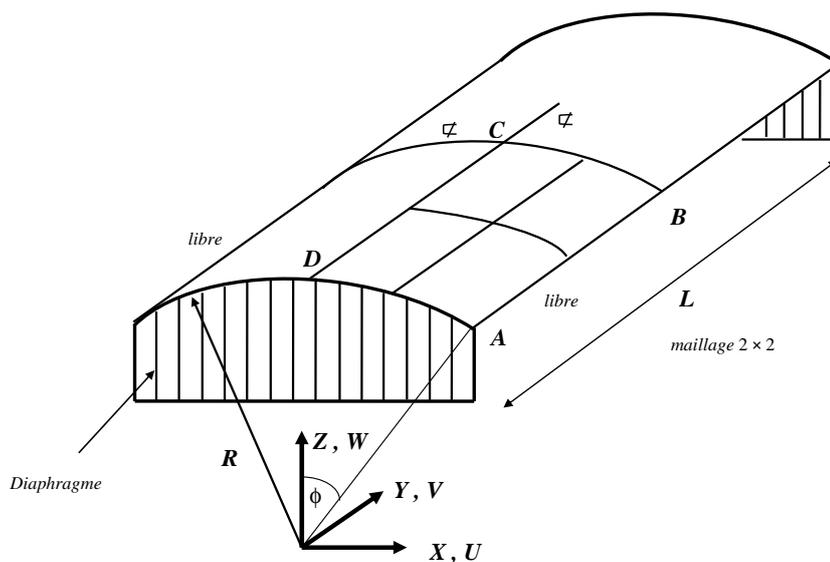


FIGURE 4.14 – Panneau cylindrique soumis à son poids propre (maillage  $N \times N = 2 \times 2$ ;  $L = 6\text{ m}$ ;  $R = 3\text{ m}$ ;  $t = 0.03\text{ m}$ ;  $\phi = 40^\circ$ ;  $E = 3 \times 10^{10}\text{ Pa}$ ;  $\nu = 0$ ).

Les valeurs de référence pour le cas des coques profondes ou des coques surbaissées, sont basées sur les travaux de Scordelis et Lo [84]. Pour le cas des coques profondes, on a  $W_B = -3.61\text{ cm}$  et  $W_C = 0.541\text{ cm}$ . Dans le cas des coques surbaissées, on a  $W_B = -3.703\text{ cm}$  et  $W_C = 0.525\text{ cm}$ .

$N \times N$	DKMQ24	Q4 $\gamma$ 24
$2 \times 2$	-4.392	-4.285
$4 \times 4$	-3.425	-3.418
$6 \times 6$	-3.484	-3.488
$8 \times 8$	-3.528	-3.539
$10 \times 10$	-3.554	-3.570
$12 \times 12$	-3.569	-3.590
$14 \times 14$	-3.579	-3.604
$16 \times 16$	-3.585	-3.613
$18 \times 18$	-3.590	-3.620
$20 \times 20$	-3.593	-3.625
REF.[84]coques "profondes"	-3.610	
REF.[84]coques surbaissées	-3.703	

Tableau 4.3 – Déplacement  $W_B$ . Panneau cylindrique soumis à son poids propre

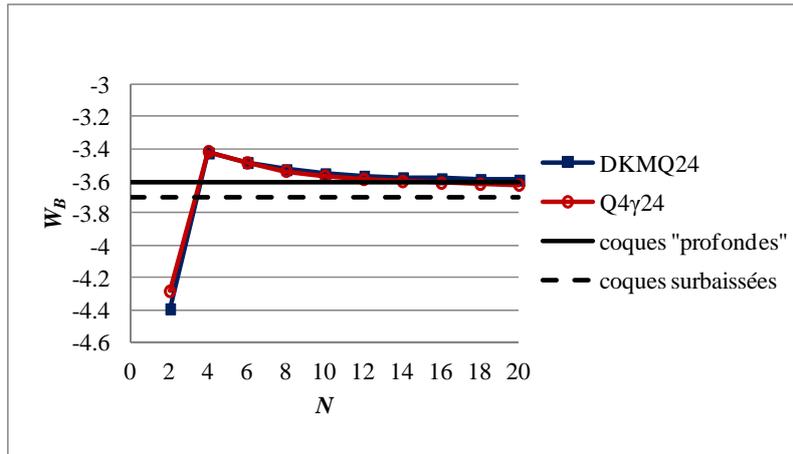


FIGURE 4.15 – Convergence du déplacement  $W_B$ . Panneau cylindrique soumis à son poids propre

Les résultats obtenus pour le déplacement  $W_B$  sont présentés dans le tableau 4.3 et sur la figure 4.15. Les résultats obtenus sont assez similaires pour les deux éléments. Ils convergent vers la solution basée sur la théorie des coques profondes. Pour le déplacement  $W_C$  (tableau 4.4 et figure 4.16), les deux éléments donnent des résultats similaires, proches de la solution de référence basée sur la théorie des coques profondes.

N × N	DKMQ24	Q4 $\gamma$ 24
2 × 2	0.593	0.629
4 × 4	0.513	0.508
6 × 6	0.523	0.521
8 × 8	0.529	0.530
10 × 10	0.533	0.536
12 × 12	0.535	0.539
14 × 14	0.537	0.542
16 × 16	0.538	0.543
18 × 18	0.539	0.545
20 × 20	0.539	0.546
REF.[84]coques "profondes"	0.541	
REF.[84]coques surbaissées	0.525	

Tableau 4.4 – Déplacement  $W_C$ . Panneau cylindrique soumis à son poids propre

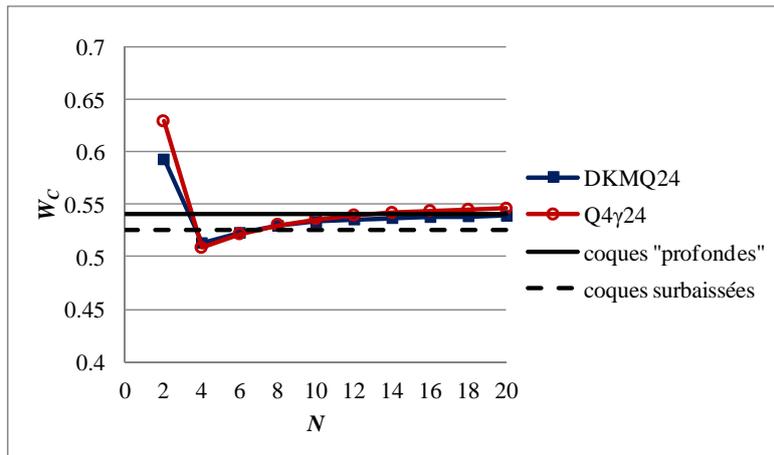


FIGURE 4.16 – Convergence de déplacement  $W_C$  Panneau cylindrique soumis à son poids propre

Les résultats obtenus pour la convergence de l'effort résultant de membrane au point  $B$  et pour le moment au point  $C$  sont représentés dans le tableau 4.5 et sur les figures 4.17 et 4.18. La solution théorique des coques profondes, donnée par Scordelis et Lo [84] est considérée comme valeur de référence. Pour l'effort résultant de membrane, les deux éléments donnent des résultats similaires. Par contre, pour le moment, l'élément DKMQ24 donne des résultats plus proches de la valeur de référence. En utilisant le maillage  $64 \times 64$ , nous voyons dans le tableau 4.5 que l'élément DKMQ24 donne la valeur  $M_{XC} = 2.061$  (la valeur de référence  $M_{XC} = 2.056$ ) et l'élément Q4 $\gamma$ 24 donne la valeur  $M_{XC} = 2.075$ .

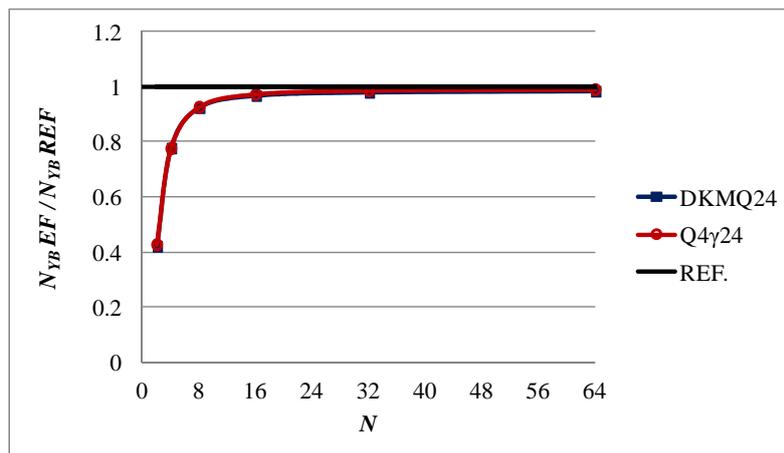


FIGURE 4.17 – Convergence de l'effort résultant  $N_{YB}$ . Panneau cylindrique soumis à son poids propre

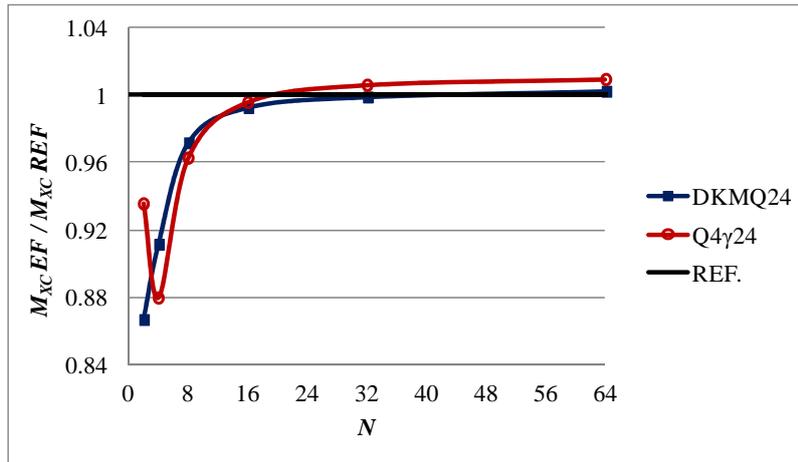


FIGURE 4.18 – Convergence de l’effort résultant  $M_{XC}$ . Panneau cylindrique soumis à son poids propre

$N \times N$	$N_{YB}$ DKMQ24	$M_{XC}$ DKMQ24	$N_{YB}$ Q4 $\gamma$ 24	$M_{XC}$ Q4 $\gamma$ 24
$2 \times 2$	269.440	1.782	272.880	1.923
$4 \times 4$	498.430	1.874	496.730	1.808
$8 \times 8$	592.680	1.998	593.170	1.979
$16 \times 16$	620.750	2.041	623.120	2.047
$32 \times 32$	628.280	2.054	631.550	2.068
$64 \times 64$	631.110	2.061	633.900	2.075
REF. [84]	641.000	2.056	641.000	2.056

Tableau 4.5 – Efforts résultants  $N_{YB}$  et  $M_{XC}$ . Panneau cylindrique soumis à son poids propre

#### 4.3.2.3 Cylindre pincé avec diaphragme

La structure présentée sur la figure 4.19 est un cylindre pincé soumis à deux charges concentrées diamétralement opposées. À ses deux extrémités, il y a des diaphragmes rigides dans leur plan. Cet exemple est un test difficile pour l’élément de coque à cause de la complexité de la déformation de membrane. De plus, la partie sous charge concentrée est dominée par l’effet de flexion  $\pm 70\%$ .

Deux rapports  $t/R$  ( $t/R = 0.01$  et  $t/R = 0.1$ ) sont étudiés. La symétrie nous permet d’analyser seulement  $1/8$  de la coque (partie  $ABCD$ ). Les maillages uniformes et distordus présentés sur la figure 4.20 sont utilisés. Pour  $t/R = 0.01$ , une solution analytique (théorie de Kirchhoff) est proposée par Lindberg et al. [53] en considérant la solution donnée par Flügge [32] comme valeur de référence. Pour le déplacement au point  $C$ , la valeur de référence est  $\mathbf{W}_C = EhW_C/P = -164,24$ . Pour  $t/R = 0.1$ ,

la valeur de référence correspond à la solution analytique prenant en compte les effets de cisaillement transversal. Elle est donnée par Bhaskar et Varadan [15], sa valeur est  $\mathbf{W}_C = EhW_C/P = -11,351$ .

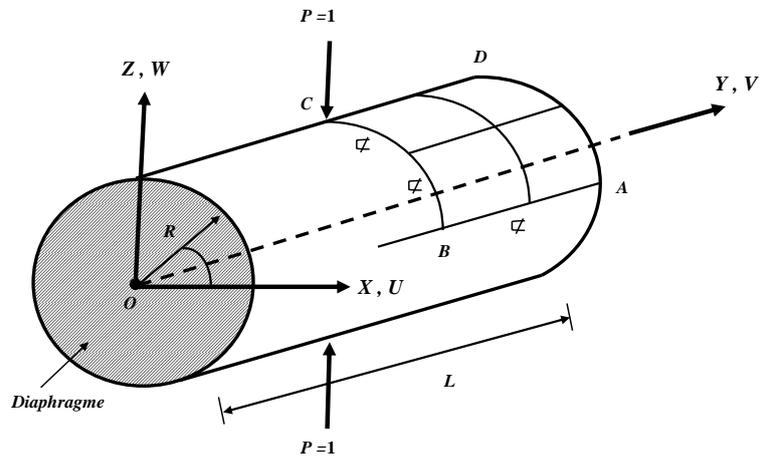


FIGURE 4.19 – Cylindre pincé ( $L = 6\text{ m}$  ;  $R = 3\text{ m}$  ;  $t = 0.03\text{ m}$  et  $0.3\text{ m}$  ;  $\nu = 0,3$  ;  $E = 3 \times 10^{10}\text{ Pa}$ )

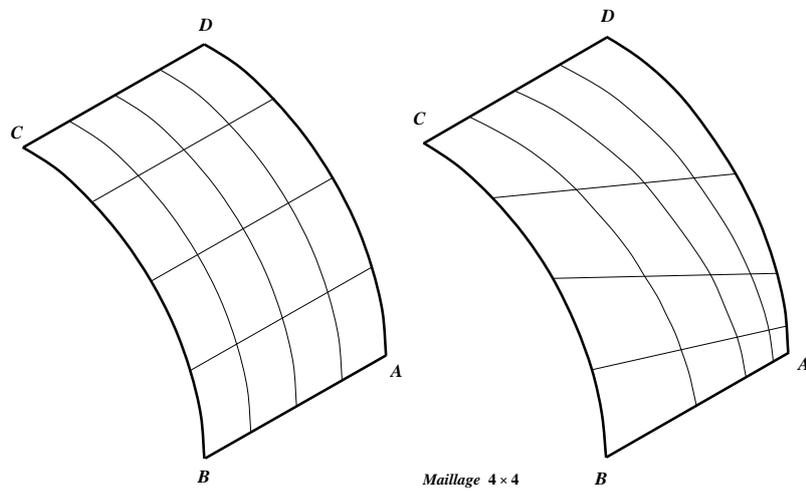


FIGURE 4.20 – Maillage uniforme et distordu (maillage  $N \times N = 4 \times 4$ )

$N \times N$	DKMQ24	Q4 $\gamma$ 24
$2 \times 2$	-14.070	-6.157
$4 \times 4$	-101.295	-60.957
$6 \times 6$	-138.213	-99.738
$8 \times 8$	-155.214	-122.094
$10 \times 10$	-162.576	-135.324
$12 \times 12$	-165.636	-143.532
$14 \times 14$	-166.896	-148.905
$16 \times 16$	-167.391	-152.586
$18 \times 18$	-167.571	-155.214
$20 \times 20$	-167.589	-157.158
REF. [53]	-164.240	

Tableau 4.6 – Déplacement  $\mathbf{W}_C$  ( $t/R = 0.01$ ). Cylindre pincé avec un maillage uniforme

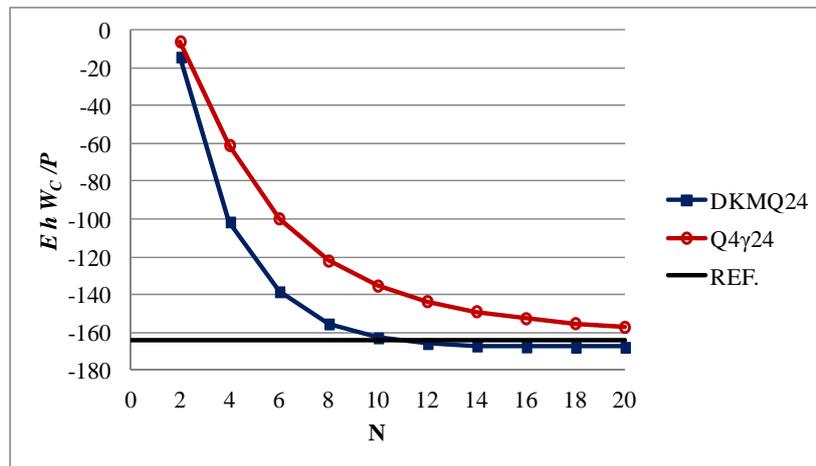


FIGURE 4.21 – Convergence de déplacement  $\mathbf{W}_C$  ( $t/R = 0.01$ ). Cylindre pincé avec un maillage uniforme

Le tableau 4.6 et la figure 4.21 montrent les résultats obtenus pour le déplacement  $\mathbf{W}_C$  dans le cas  $t/R = 0.01$  avec le maillage uniforme. L'élément DKMQ24 converge beaucoup plus rapidement que l'élément Q4 $\gamma$ 24. Pour le maillage grossier, il donne des résultats plus précis que l'élément Q4 $\gamma$ 24. Nous observons des résultats similaires pour le maillage distordu (voir tableau 4.7 et figure 4.23). La vitesse de convergence pour le maillage distordu est moins rapide que pour le maillage uniforme.

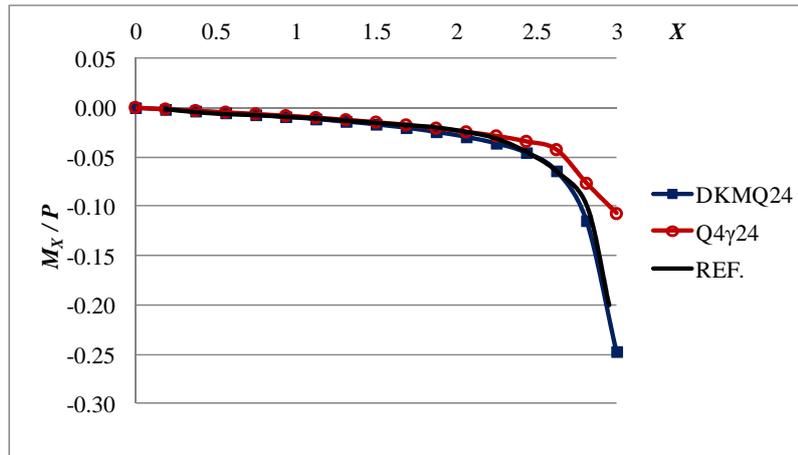


FIGURE 4.22 – Effort résultant  $M_X$  le long de  $DC$  ( $t/R = 0.01$ ). Cylindre pincé avec un maillage uniforme

La figure 4.22 présente la comparaison de l'effort résultant de flexion  $M_X$  le long de  $DC$  en utilisant le maillage  $N \times N = 16 \times 16$ . La valeur donnée par Lindberg et al. [53] est prise comme valeur de référence. Les résultats obtenus avec l'élément DKMQ24 sont plus proches de la solution de référence, en particulier le point où la charge concentrée est appliquée.

$N \times N$	DKMQ24	Q4 $\gamma$ 24
$4 \times 4$	-21.571	-17.066
$6 \times 6$	-72.599	-45.015
$8 \times 8$	-110.934	-77.401
$10 \times 10$	-131.058	-102.375
$12 \times 12$	-142.812	-119.214
$14 \times 14$	-149.868	-130.491
$16 \times 16$	-154.296	-138.258
$18 \times 18$	-157.203	-143.775
$20 \times 20$	-159.201	-147.834
REF. [53]	-164.240	

Tableau 4.7 – Déplacement  $\mathbf{W}_C$  ( $t/R = 0.01$ ). Cylindre pincé avec maillage distordu

Dans le deuxième cas, pour  $t/R = 0.1$ , les résultats obtenus pour le maillage uniforme sont présentés sur la figure 4.24 et dans le tableau 4.8. Dans ce cas là, l'effet du cisaillement transversal est pris en compte. Pour cette raison, l'élément DKQ24 présenté dans [41] (semblable à l'élément DKMQ24 mais qui ne prend pas en compte l'effet du

cisaillement transversal) donne des résultats moins satisfaisants. Il ne converge pas du tout vers la valeur de référence. Par contre, les éléments DKMQ24 et Q4 $\gamma$ 24 donnent des résultats similaires et convergent vers la solution de référence. Les simulations montrent que l'élément DKMQ24 converge plus vite que l'élément Q4 $\gamma$ 24.

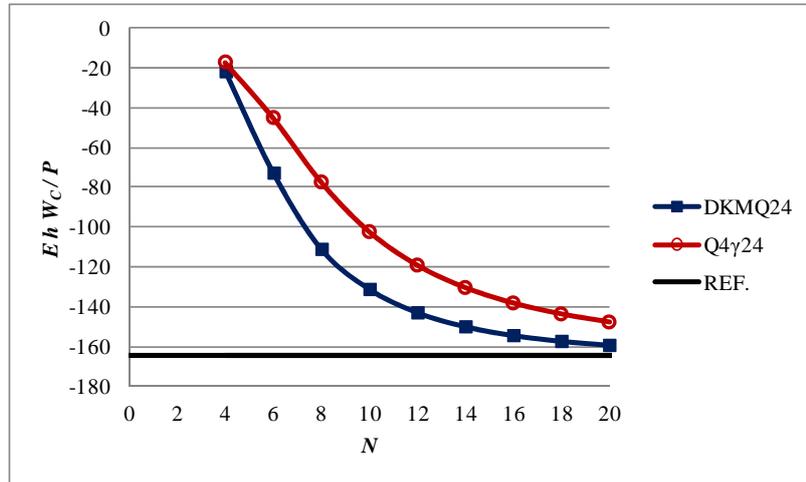


FIGURE 4.23 – Convergence de déplacement  $\mathbf{W}_C$  ( $t/R = 0.01$ ). Cylindre pincé avec maillage distordu

N $\times$ N	DKQ24	DKMQ24	Q4 $\gamma$ 24
2 $\times$ 2	-7.153	-7.284	-4.951
4 $\times$ 4	-9.616	-10.301	-8.628
6 $\times$ 6	-9.713	-10.740	-9.827
8 $\times$ 8	-9.679	-10.962	-10.408
10 $\times$ 10	-9.642	-11.138	-10.767
12 $\times$ 12	-9.613	-11.291	-11.024
14 $\times$ 14	-9.592	-11.425	-11.221
16 $\times$ 16	-9.576	-11.540	-11.380
18 $\times$ 18	-9.564	-11.640	-11.509
20 $\times$ 20	-9.555	-11.727	-11.617
REF. [15]		-11.351	

Tableau 4.8 – Déplacement  $\mathbf{W}_C$  ( $t/R = 0.1$ ). Cylindre pincé avec maillage uniforme

La figure 4.25 et le tableau 4.9 montrent les résultats pour le maillage distordu. Nous observons le même comportement que le cas ci-dessus.

Dans les deux cas traités ici, l'élément DKMQ24 donne de meilleurs résultats que l'élément Q4 $\gamma$ 24. Cela est dû aux fonctions d'interpolation quadratiques incomplètes

pour les rotations qui sont utilisées dans l'élément DKMQ24, tandis que pour l'élément Q4 $\gamma$ 24 on utilise des fonctions d'interpolation bilinéaires.

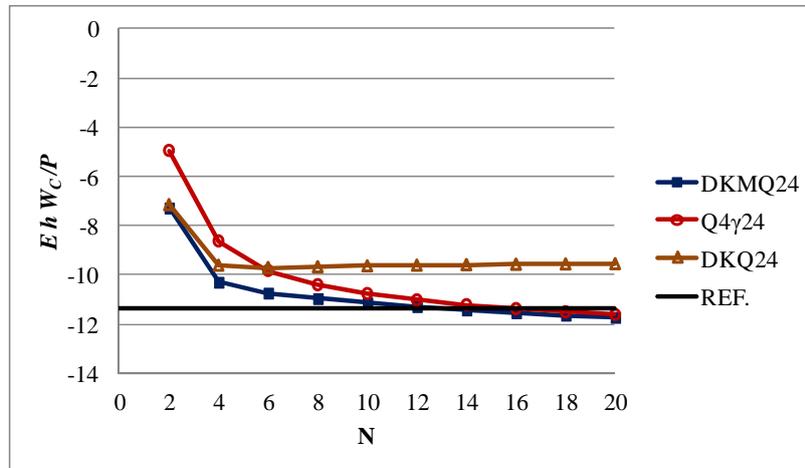


FIGURE 4.24 – Convergence de déplacement  $W_C$  ( $t/R = 0.1$ ). Cylindre pincé avec maillage uniforme

N $\times$ N	DKQ24	DKMQ24	Q4 $\gamma$ 24
4 $\times$ 4	-7.225	-7.755	-6.337
6 $\times$ 6	-8.689	-9.611	-8.643
8 $\times$ 8	-9.124	-10.299	-9.702
10 $\times$ 10	-9.292	-10.668	-10.270
12 $\times$ 12	-9.367	-10.915	-10.633
14 $\times$ 14	-9.406	-11.104	-10.892
16 $\times$ 16	-9.428	-11.257	-11.092
18 $\times$ 18	-9.441	-11.386	-11.253
20 $\times$ 20	-9.449	-11.497	-11.387
REF.[15]	-11.351		

Tableau 4.9 – Déplacement  $W_C$  ( $t/R = 0.1$ ). Cylindre pincé avec maillage distordu

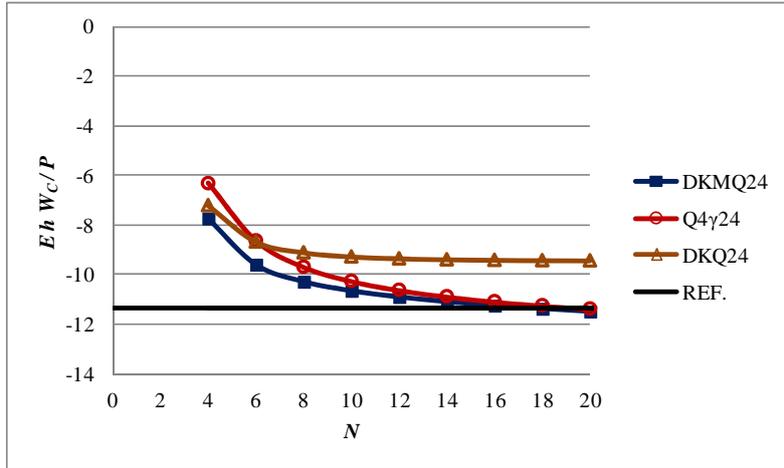


FIGURE 4.25 – Convergence de déplacement  $W_C$  ( $t/R = 0.1$ ). Cylindre pincé avec maillage distordu

#### 4.3.2.4 Coque parabolique hyperboloïde

Un autre problème classique qui est souvent utilisé pour valider le schéma de discrétisation est le problème d'une coque parabolique hyperboloïde encadrée soumise à un chargement réparti dans la direction normale  $f_z = 0.01 \text{ kg/cm}^2$ . Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont données dans la figure 4.26. C'est une coque particulière qui a une courbure gaussienne négative et sa géométrie correspond à une coque profonde. Sa surface est définie par l'équation :

$$Z = \left(\frac{b}{a^2}\right)XY \quad (4.90)$$

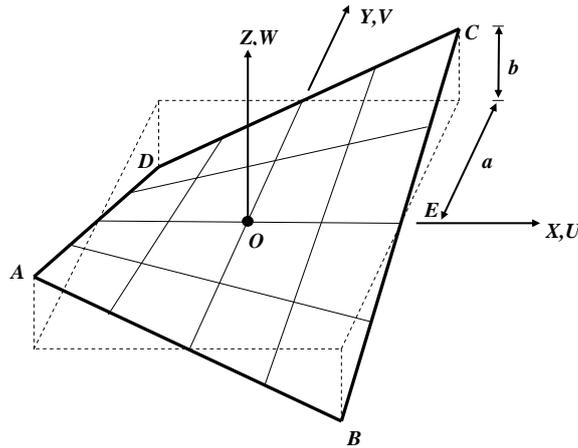


FIGURE 4.26 – Parabolique hyperboloïde (maillage  $N \times N = 4 \times 4$  ;  $a = 50 \text{ cm}$  ;  $b = 10 \text{ cm}$  ;  $t = 0.8 \text{ cm}$  ;  $E = 28500 \text{ kg/cm}^2$  ;  $\nu = 0.4$ )

La projection sur l'axe  $Z$  a une forme rectangulaire avec des bases  $2a \times 2a$ . La valeur de référence proposée par Brebbia et Connor [19] sera utilisée pour valider nos calculs :

$$\mathbf{W}_o = W_o \times 10^3 = 24.60 \quad (4.91)$$

Les résultats présentés dans le tableau 4.10 et sur la figure 4.27 montrent que l'élément DKMQ24 converge plus rapide que l'élément Q4 $\gamma$ 24. Nous présentons aussi sur la figure 4.27 et dans le tableau 4.10 les résultats de l'élément à facettes planes DKQ24FP figurant dans [41]. L'élément DKQ24FP donne de résultats moins satisfaisants, il ne converge pas vers la valeur de référence.

$N \times N$	DKMQ24	DKQ24FP	Q4 $\gamma$ 24
$2 \times 2$	35.900	18.88	13.637
$4 \times 4$	27.074	23.4	50.409
$6 \times 6$	25.337	23.48	31.432
$8 \times 8$	25.023	23.25	27.582
$10 \times 10$	24.929	23.06	26.381
$12 \times 12$	24.892	22.9	25.842
$14 \times 14$	24.874	22.65	25.550
$16 \times 16$	24.864	-	25.371
$18 \times 18$	24.859	-	25.253
$20 \times 20$	24.854	-	25.171
REF.[19]	24.600		

Tableau 4.10 – Déplacement  $\mathbf{W}_o$ . Parabolique hyperboloïde

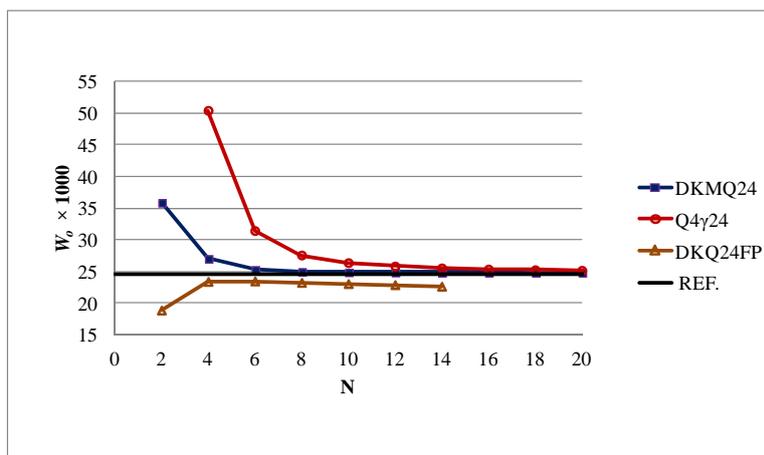


FIGURE 4.27 – Convergence de déplacement  $\mathbf{W}_o$ . Parabolique hyperboloïde

#### 4.3.2.5 Coques hélicoïdales sous charges concentrées

Le dernier test est celui d'une coque hélicoïdale encastrée à son extrémité et avec un chargement concentrée appliqué sur l'autre côté (4.28). Ce test, introduit par MacNeal et Harder [55], est devenu un test très important pour valider un nouvel élément fini de coque. La rotation entre  $O$  et  $A$  est  $90^0$ . La géométrie de la surface moyenne est définie par les paramètres  $s$  et  $\theta$  suivants :

$$\begin{aligned} X &= s \cos\theta & ; & & Y &= 2\theta L/\pi & ; & & Z &= s \sin\theta \\ 0 &\leq \theta \leq \pi/2 & ; & & -0.5b &\leq s \leq +0.5b \end{aligned} \quad (4.92)$$

Ce cas présente des difficultés importantes pour les éléments quadrilatère à facettes planes. Nous pouvons voir dans les tableaux 4.11 à 4.14 que l'élément à facettes planes DKQ24FP présenté dans [41] ne converge pas vers la valeur de référence.

Les résultats obtenus pour  $t = 0.0032 m$  sont présentés dans les tableaux 4.11 et 4.12 et sur les figures 4.29 et 4.30. Les maillages  $2 \times 12$ ,  $4 \times 24$ ,  $6 \times 36$  et  $8 \times 48$  sont utilisés. Les éléments DKMQ24 et Q4 $\gamma$ 24 donnent des résultats similaires et satisfaisants, ils convergent vers la valeur de référence.

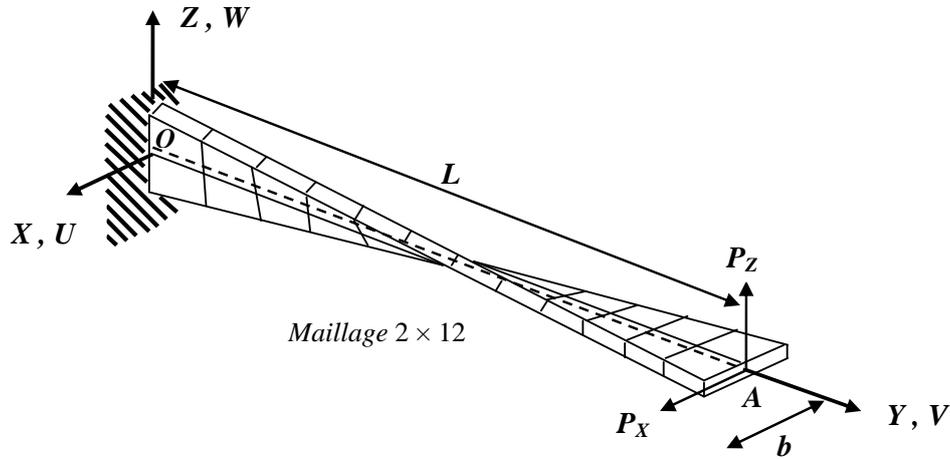


FIGURE 4.28 – Coques hélicoïdales sous charges concentrées (maillage  $N \times N = 2 \times 12$  ;  $L = 12 m$  ;  $b = 1, 1 m$  ;  $t = 0.0032 m$  et  $0.32 m$  ;  $E = 29 \times 10^6 Pa$  ;  $\nu = 0.22$ )

Le même comportement est trouvé dans le cas  $t = 0.32 m$ . Les résultats obtenus pour cette configuration sont présentés dans les tableaux 4.13 et 4.14 et sur les figures 4.31 et 4.32. Les deux éléments donnent des résultats similaire convergeant vers la valeur de référence.

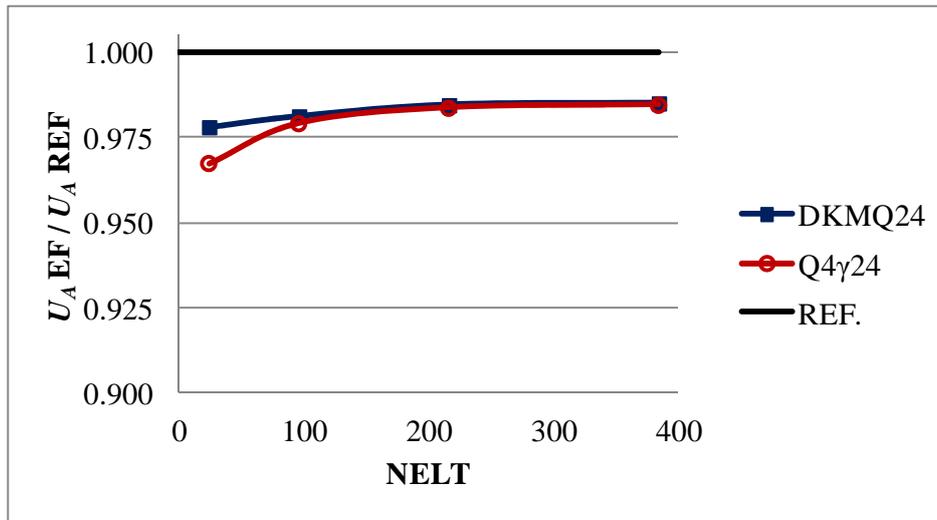


FIGURE 4.29 – Convergence de déplacement  $U_A$ . Coques hélicoïdales  $t = 0.0032$

Load	$N \times N = \text{NELT}$	DKMQ24	Q4 $\gamma$ 24	DKQ24FP
$P_x = 0.001 ; P_z = 0$	$2 \times 12 = 24$	5.200	5.143	2.72
	$4 \times 24 = 96$	5.217	5.205	9.39
	$6 \times 36 = 216$	5.235	5.229	20.6
	$8 \times 48 = 384$	5.238	5.234	-
REF.[12]	$U_A = 5.316$			

Tableau 4.11 – Déplacement  $U_A$  pour  $t = 0.0032$ . Coques hélicoïdales

Load	$N \times N = \text{NELT}$	DKMQ24	Q4 $\gamma$ 24	DKQ24FP
$P_x = 0 ; P_z = 0.001$	$2 \times 12 = 24$	1.274	1.260	0.970
	$4 \times 24 = 96$	1.285	1.282	2.660
	$6 \times 36 = 216$	1.290	1.288	5.330
	$8 \times 48 = 384$	1.290	1.289	-
REF.[12]	$W_A = 1.296$			

Tableau 4.12 – Déplacement  $W_A$  pour  $t = 0.0032$ . Coques hélicoïdales

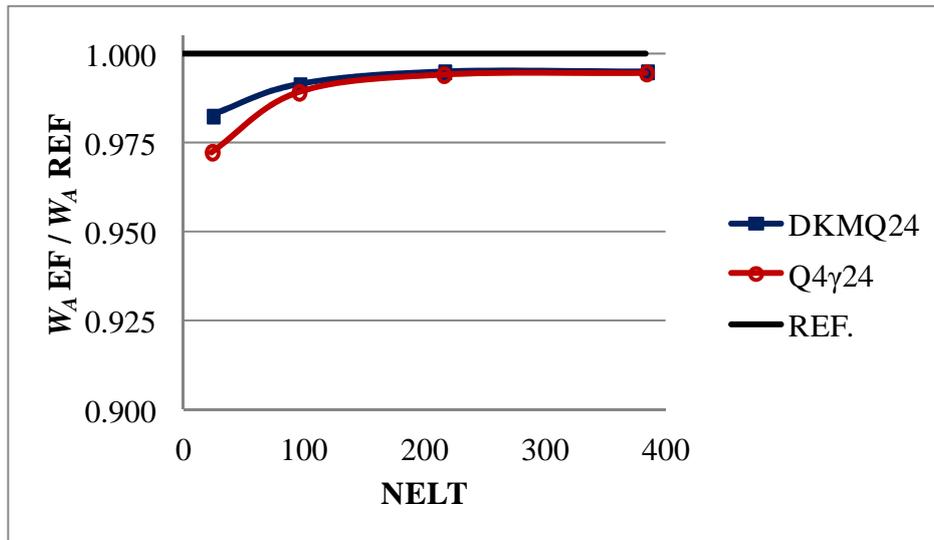


FIGURE 4.30 – Convergence de déplacement  $W_A$ . Coques hélicoïdales  $t = 0.0032$

Load	$N \times N = \text{NELT}$	DKMQ24	Q4 $\gamma$ 24	DKQ24FP
$P_x = 1000; P_z = 0$	$2 \times 12 = 24$	5.393	5.364	2.077
	$4 \times 24 = 96$	5.403	5.397	6.328
	$6 \times 36 = 216$	5.408	5.405	12.312
	$8 \times 48 = 384$	5.410	5.409	-
REF.[55]	$U_A = 5.424$			

Tableau 4.13 – Déplacement  $U_A$  pour  $t = 0.32$ . Coques hélicoïdales

Load	$N \times N = \text{NELT}$	DKMQ24	Q4 $\gamma$ 24	DKQ24FP
$P_x = 0; P_z = 1000$	$2 \times 12 = 24$	1.624	1.611	0.920
	$4 \times 24 = 96$	1.711	1.708	2.049
	$6 \times 36 = 216$	1.733	1.731	3.945
	$8 \times 48 = 384$	1.740	1.740	-
REF.[55]	$W_A = 1.754$			

Tableau 4.14 – Déplacement  $W_A$  pour  $t = 0.32$ . Coques hélicoïdales

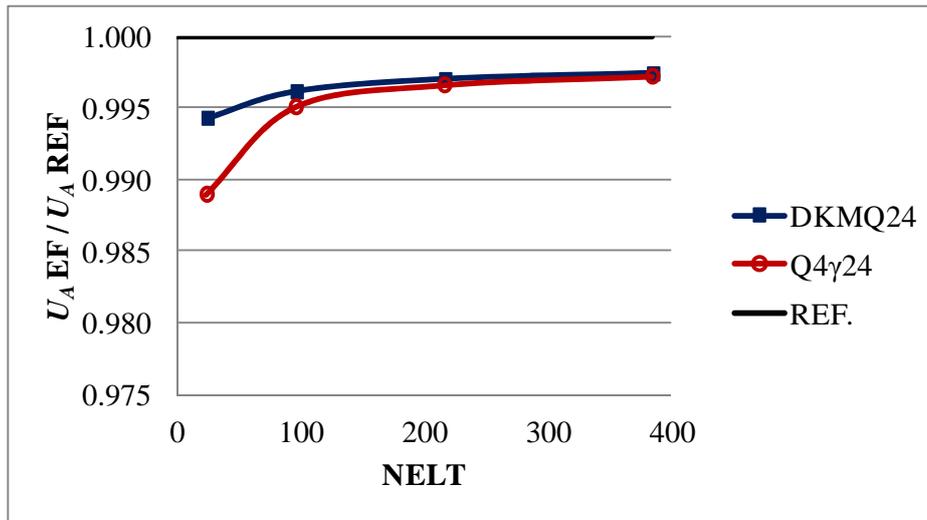


FIGURE 4.31 – Convergence de déplacement  $U_A$ . Coques hélicoïdales  $t = 0.32$

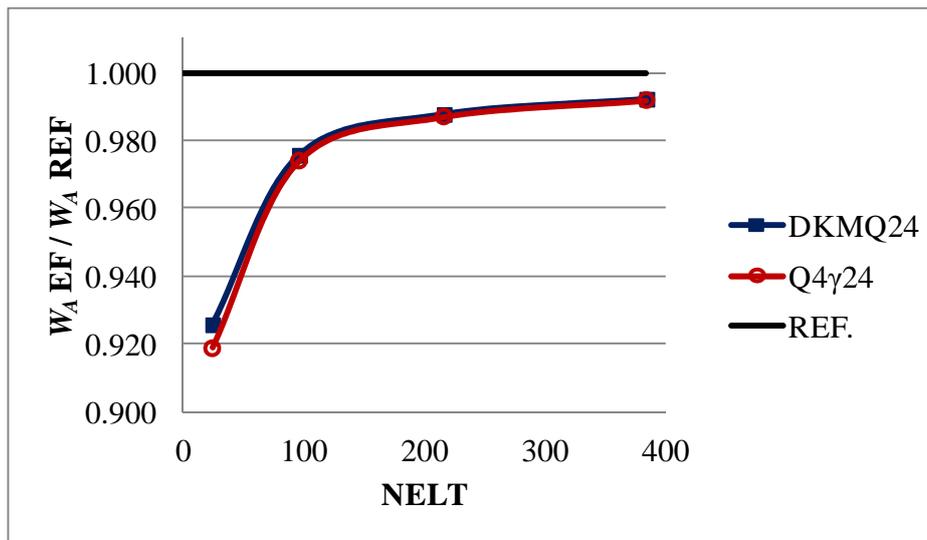


FIGURE 4.32 – Convergence de déplacement  $W_A$ . Coques hélicoïdales  $t = 0.32$

### 4.3.3 S-norme

Les résultats de convergence présentés précédemment portent pour l'essentiel sur la comparaison avec une valeur de référence en un point. Ils n'assurent pas une convergence globale de la solution sur l'ensemble de la structure. Aussi, dans cette

partie, nous allons nous intéresser aux tests utilisant la s-norme proposées par Hiller et al. [8, 28, 37]. Ces tests sont des indicateurs d'une convergence globale.

La s-norme permet de vérifier si l'élément fini proposé assure une convergence optimale et uniforme. On entend par convergence optimale le fait que l'ordre de convergence est le même que l'ordre de l'interpolation de l'élément utilisé. De plus, la convergence est dite uniforme si elle ne dépend pas de l'épaisseur de la coque. Pour cela, la s-norme est très efficace.

En utilisant la s-norme, l'erreur est mesurée [37, 28, 8] par :

$$\|\mathbf{u}_{ref} - \mathbf{u}_h\|_s^2 = \int_{\Omega} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \Delta \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (4.93)$$

avec  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{ref} - \boldsymbol{\varepsilon}_h$  et  $\Delta \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{ref} - \boldsymbol{\sigma}_h$ . Ici, nous calculons la différence entre les déformations ou les contraintes exactes et les déformations ou les contraintes calculées par éléments finis. D'après Hiller et Bathe [37], nous pouvons remplacer les déformations ou les contraintes exactes par celles des déformations ou des contraintes calculées par éléments finis en utilisant un maillage très fins.

L'erreur relative est donnée par

$$E_s = \frac{\|\mathbf{u}_{ref} - \mathbf{u}_h\|_s^2}{\|\mathbf{u}_{ref}\|_s^2} \quad (4.94)$$

alors que l'erreur théorique s'écrit sous la forme

$$E_{st} \cong ch^{2k} \quad (4.95)$$

où  $c$  est une constante,  $h$  la taille de l'élément et  $k$  l'ordre de l'interpolation. Dans la suite nous allons comparer les résultats obtenus en utilisant la s-norme (équation (4.94)) à l'erreur théorique donnée par la relation (4.95) avec :

- $k = 1$  qui correspond à une convergence linéaire.
- $k = 2$  qui correspond à une convergence quadratique.

Nous rappelons que l'élément DKMQ24 utilise une fonction d'interpolation bilinéaire pour les déplacements et quadratique incomplète pour les rotations. Nous présenterons d'abord les résultats pour le cas d'une plaque carrée simplement appuyée ou encastree. Pour ces cas, l'élément DKMQ24 (respectivement Q4 $\gamma$ 24) devient l'élément DKMQ [43] (respectivement MITC4 [4]). Nous étudierons ensuite les configurations suivantes : coque parabolique hyperboloïde, coque axisymétrique hyperboloïde, calotte hémisphérique encastree et enfin paraboloid hyperbolique partiellement encastree.

### 4.3.3.1 Plaque carrée simplement appuyée ou encastree sous pression uniforme

Nous allons présenter dans cette partie les résultats obtenus pour la s-norme pour la plaque carrée simplement appuyée et encastree sous une pression uniforme. La configuration étudiée est présentée à la figure 4.33.

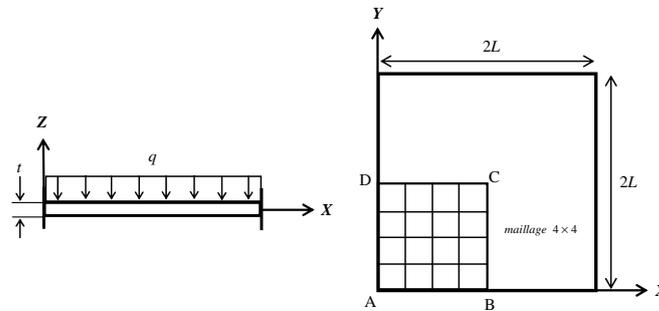


FIGURE 4.33 – Plaque carrée sous pression uniforme (maillage  $N \times N = 4 \times 4$  ;  $E = 1.7472 \times 10^7$  ;  $\nu = 0.3$  ;  $L = 1$  ;  $q = 1$ )

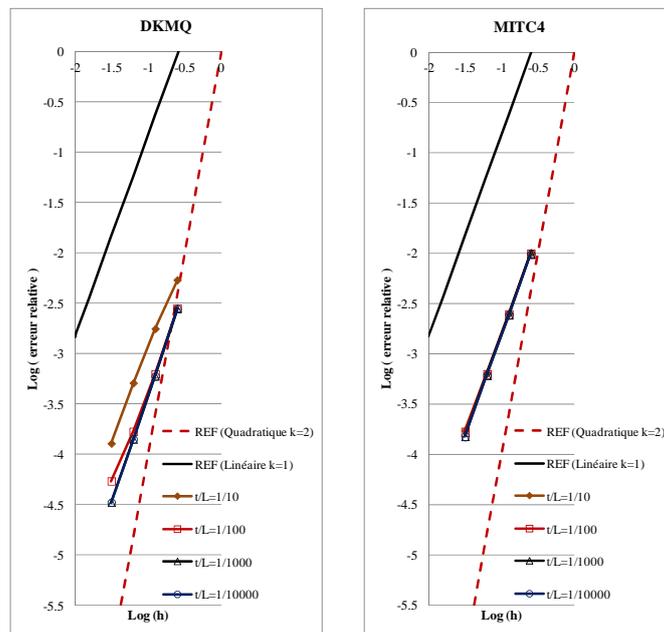


FIGURE 4.34 – Convergence des éléments DKMQ et MITC4 dans le cas d'une plaque carrée simplement supportée en utilisant la s-norme

Grâce à la symétrie, seul la partie ABCD est étudiée. Les conditions aux limites pour

le cas simplement supporté sont  $w = \beta_s = 0$  sur AB et AD. Pour le cas encastré, elles sont données par  $w = \beta_y = 0$  sur AB et  $w = \beta_x = 0$  sur AD. Les conditions de symétrie pour les deux cas sont  $\beta_x = 0$  sur BC et  $\beta_y = 0$  sur CD.

Plusieurs rapports entre l'épaisseur et la longueur ( $t/L$ ) sont considérés ( $t/L = 1/10$ ,  $t/L = 1/100$ ,  $t/L = 1/1000$  et  $t/L = 1/10000$ ). Les maillages uniformes  $N \times N = 4 \times 4, 8 \times 8, 16 \times 16$  et  $32 \times 32$  sont étudiés. La valeur obtenue avec l'élément DKMQ24 en utilisant le maillage  $N \times N = 128 \times 128$  est prise comme valeur de référence.

Les résultats pour la plaque carrée simplement supportée sont présentés sur la figure 4.34. L'élément DKMQ a un comportement intermédiaire entre linéaire et quadratique, tandis que l'élément MITC4 a un comportement linéaire. Ceci est cohérent avec l'ordre d'interpolation utilisé dans la formulation des deux éléments.

La figure 4.35 montre les résultats obtenus pour le cas encastré. Dans ce cas, les deux éléments ont un comportement linéaire. Par contre, l'erreur relative de l'élément DKMQ est très inférieure à celle de l'élément MITC4. L'élément DKMQ semble être plus performant que l'élément MITC4.

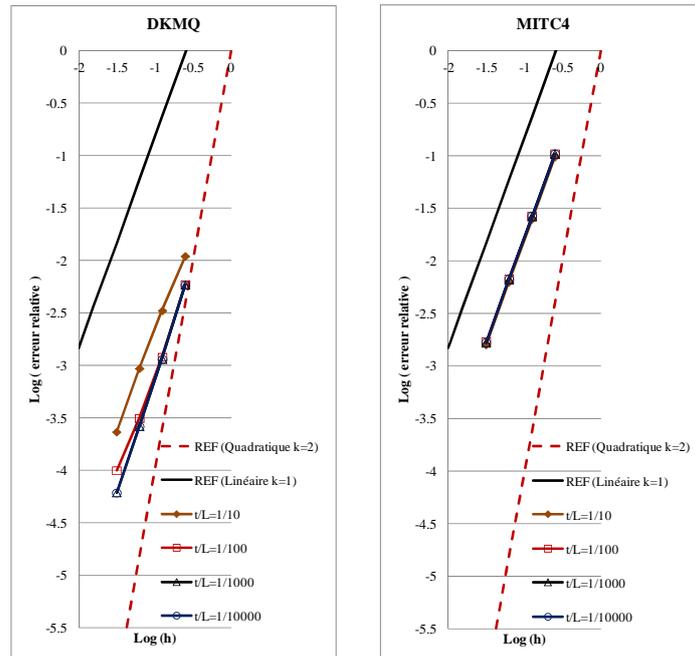


FIGURE 4.35 – Convergence des éléments DKMQ et MITC4 dans le cas d'une plaque carrée encastrée en utilisant la s-norme

### 4.3.3.2 Coque parabolique hyperboloïde

Nous présentons dans cette partie le résultats obtenus pour une coque parabolique hyperboloïde soumise à un chargement réparti dans la direction normale  $f_z = 0.01 kg/cm^2$ . Ce problème a été étudié à la section 4.3.2.4. Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont précisés sur la figure 4.36. Les bords sont encastres sur tous les côtés ( $U = V = W = \theta_X = \theta_Y = \theta_Z = 0$  sur ABCD).

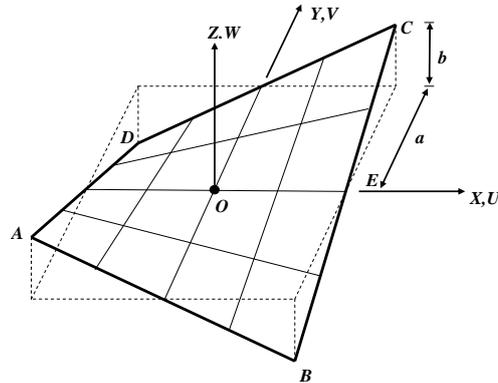


FIGURE 4.36 – Parabolique hyperboloïde (maillage  $N \times N = 4 \times 4$  ;  $a = 50 cm$  ;  $b = 10 cm$  ;  $E = 28500 kg/cm^2$  ;  $\nu = 0.4$ )

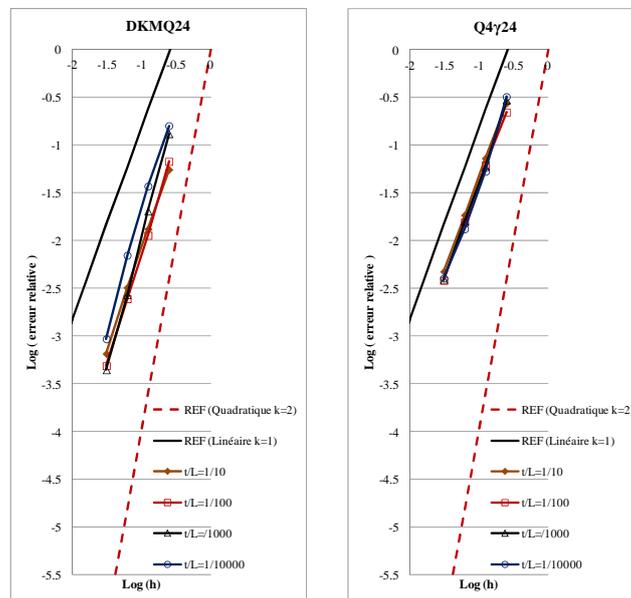


FIGURE 4.37 – Convergence pour le cas d'une coque parabolique hyperboloïde en utilisant la s-norme

Les rapports  $t/L = 1/10$ ,  $t/L = 100$ ,  $t/L = 1000$  et  $t/L = 10000$  sont considérés. Les maillages  $N \times N = 4 \times 4$ ,  $8 \times 8$ ,  $16 \times 16$  et  $32 \times 32$  sont analysés. La valeur obtenue avec l'élément DKMQ24 en utilisant le maillage  $N \times N = 64 \times 64$  est considérée comme valeur de référence.

Le résultat de convergence est présenté sur la figure 4.37. L'élément DKMQ24 a un comportement linéaire pour  $t/L = 1/10$  et  $t/L = 100$ . Son comportement est intermédiaire entre linéaire et quadratique pour  $t/L = 1000$  et il est quadratique pour  $t/L = 10000$ . Par contre, l'élément Q4 $\gamma$ 24 a un comportement linéaire pour tous les rapports de  $t/L$ .

### 4.3.3.3 Hyperboloïde axisymétrique

La figure 4.38 représente une coque axisymétrique en forme d'hyperboloïde. Sa surface moyenne est donnée par l'équation :

$$X^2 + Z^2 = 1 + Y^2, \quad Y \in [-L, L] \quad (4.96)$$

Elle est soumise à une pression de la forme :

$$P(\theta) = p_0 \cos(2\theta) \quad (4.97)$$

où  $p_0$  est une constante. Les conditions aux limites sont de type encasté-encasté. Ce test, proposé par Hiller et al. [8, 37], correspond au problème de membrane dominante. Les rapports de  $t/L = 100$ ,  $t/L = 1000$  et  $t/L = 10000$  seront utilisés dans ce test.

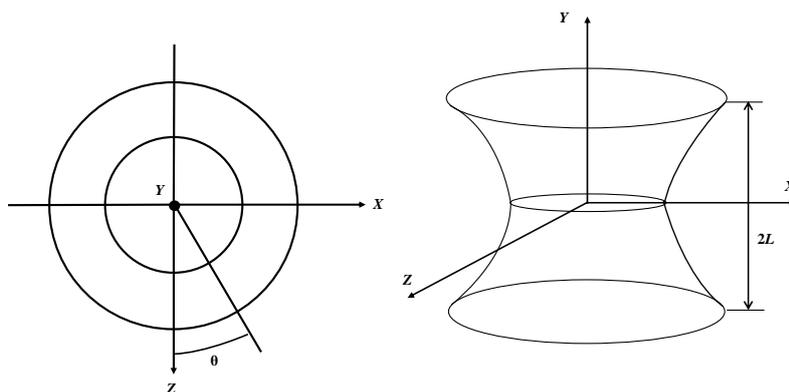


FIGURE 4.38 – Hyperboloïde axisymétrique ( $L = 1.0$  ;  $E = 1.0 \times 10^{11}$  ;  $\nu = 1/3$ )

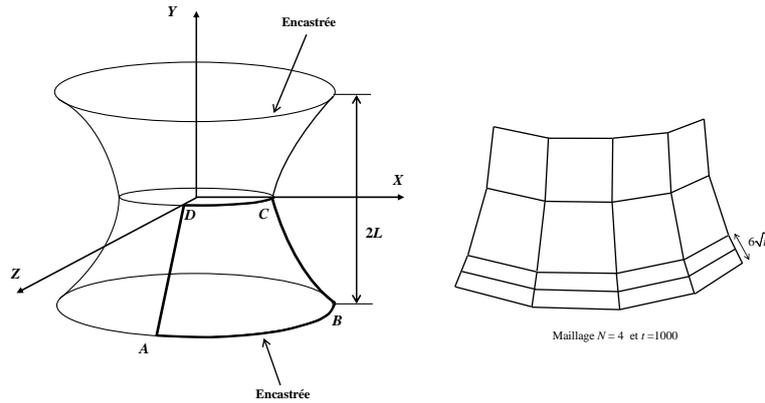


FIGURE 4.39 – Hyperboloïde axisymétrique encastré-encastré (maillage  $N \times N = 4 \times 4$  ;  $L = 1.0$  ;  $E = 1.0 \times 10^{11}$  ;  $\nu = 1/3$ )

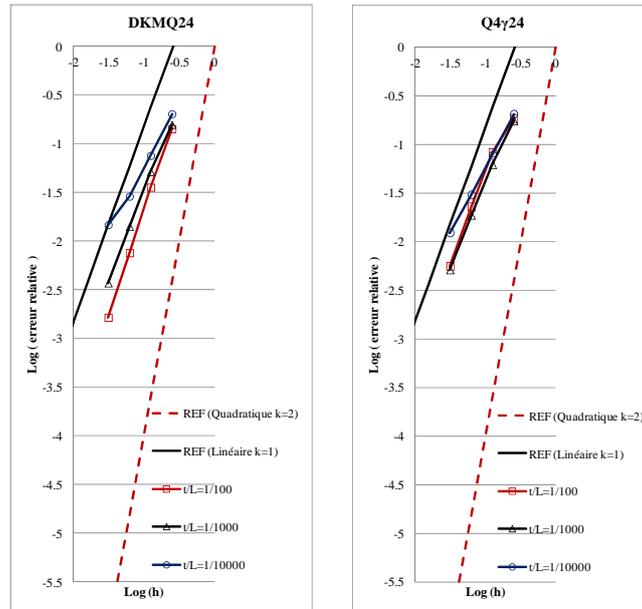


FIGURE 4.40 – Convergence pour le cas d'un hyperboloïde axisymétrique encastré-encastré en utilisant la s-norme

Sur la figure 4.39, nous avons représenté les conditions aux limites de type encastré-encastré imposés à la coque ainsi que le maillage  $4 \times 4$ . La symétrie nous permet d'analyser seulement la partie ABCD. Le maillage  $N \times N = 4 \times 4$  utilisé est représenté sur la figure 4.39. La largeur de la couche limite utilisée est égale à  $6\sqrt{t}$  où  $t$  est l'épaisseur étudiée. Les maillages  $N \times N = 4 \times 4, 8 \times 8, 16 \times 16$  et  $32 \times 32$  sont considérés.

La valeur obtenue avec l'élément DKMQ24 en utilisant le maillage  $N \times N = 96 \times 96$  est considérée comme valeur de référence.

Les résultats de convergence sont représentés sur la figure 4.40. Nous observons que la convergence de l'élément DKMQ24 est linéaire pour les rapports  $t/L = 1/1000$  et  $t/L = 1/10000$ . Par contre pour  $t/L = 1/100$ , la convergence est intermédiaire entre linéaire et quadratique. L'élément Q4 $\gamma$ 24 a un taux de convergence linéaire. Nous remarquons aussi que pour le cas  $t/L = 1/10000$  pour le deux éléments finis, la vitesse de convergence diminue entre  $N = 16$  et  $N = 32$ .

#### 4.3.3.4 Calotte hémisphérique encastrée

Considérons la calotte hémisphérique encastrée représentée sur la figure 4.41. C'est un cas de membrane dominante. Les paramètres du problème et le maillage  $N \times N = 4 \times 4$  sont représentés sur la figure 4.41.

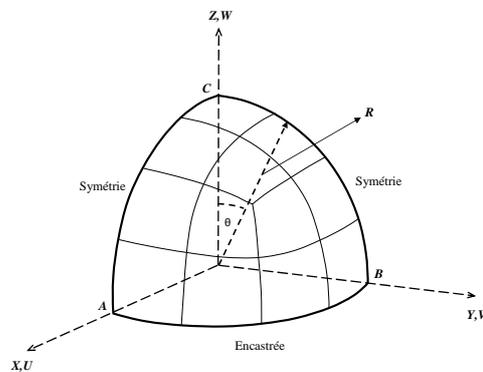


FIGURE 4.41 – Calotte hémisphérique encastrée (maillage  $N \times N = 4 \times 4$  ;  $R = 1.0 \text{ m}$  ;  $E = 1.0 \times 10^5 \text{ Mpa}$  ;  $\nu = 1/3$  ;  $p_0 = 1 \text{ Mpa}$ )

Grâce à la symétrie du domaine, seule la partie ABC est analysée en utilisant des maillages  $N \times N = 8 \times 8, 16 \times 16, 24 \times 24$  et  $32 \times 32$ . La charge appliquée est une pression distribuée de façon axisymétrique  $P_0(\theta) = p_0 \cos(2\theta)$ . Les épaisseurs  $t = 0.1$ ,  $t = 0.01$ ,  $t = 0.001$  et  $t = 0.0001$  sont considérées. La valeur obtenue avec l'élément DKMQ24 en utilisant le maillage  $N \times N = 64 \times 64$  est considérée comme valeur de référence.

La figure 4.42 montre les résultats de convergence pour le cas de la calotte hémisphérique encastrée. Nous observons que la convergence de l'élément DKMQ24 et Q4 $\gamma$ 24 est linéaire pour toutes les rapports  $t/R$  analysés. Les deux éléments donnent des résultats similaires. Pour les deux éléments, nous remarquons aussi que pour le cas  $t/R = 1/1000$  et  $t/R = 1/10000$ , la vitesse de convergence diminue.

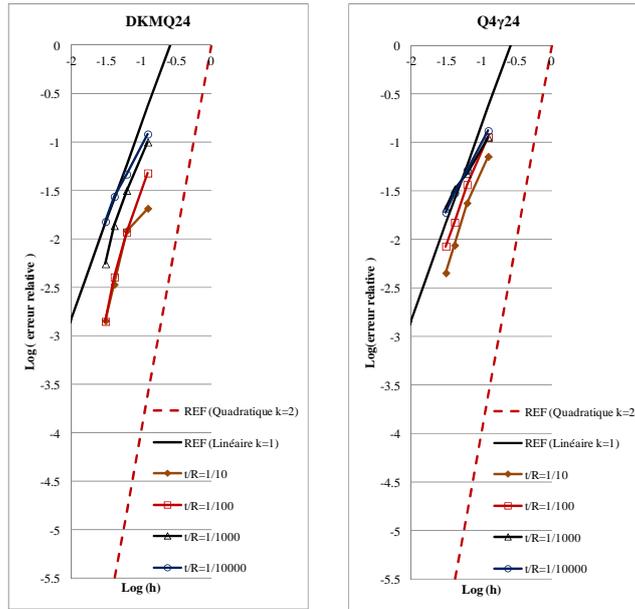


FIGURE 4.42 – Convergence pour le cas de la calotte hémisphérique encastrée en utilisant la s-norme

#### 4.3.3.5 Paraboloïde hyperbolique partiellement encastré

La figure 4.43 représente une coque partiellement encastrée dont la surface moyenne est un paraboloïde hyperbolique. L'équation de la surface moyenne est donnée par :

$$Z = X^2 - Y^2 \quad ; \quad (X, Y) \in [-L/2, L/2]^2 \quad (4.98)$$

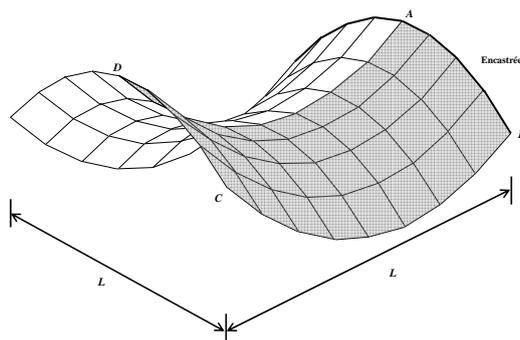


FIGURE 4.43 – Paraboloïde hyperbolique partiellement encastrée (maillage  $N \times N = 4 \times 8$  ;  $L = 1.0 \text{ m}$  ;  $E = 1.0 \times 10^5 \text{ Mpa}$  ;  $\nu = 1/3$  ;  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$ )

C'est un cas de flexion dominante. La symétrie nous permet d'analyser seulement la partie ABCD. Le type de maillage utilisé avec  $N \times M = 4 \times 8$  est représenté aussi sur la figure 4.43. On considère des épaisseurs,  $t = 0.1$ ,  $t = 0.01$ ,  $t = 0.001$  et  $t = 0.0001$ . Les maillages  $N \times M = 2 \times 4$ ,  $4 \times 8$ ,  $8 \times 16$  et  $16 \times 32$  sont étudiés. La valeur obtenue avec l'élément DKMQ24 en utilisant le maillage  $N \times M = 32 \times 64$  est prise comme valeur de référence.

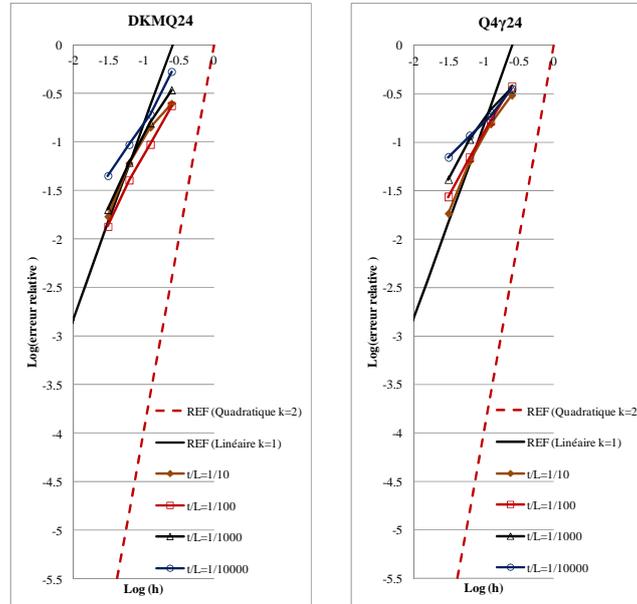


FIGURE 4.44 – Convergence dans le cas d'une paraboloïde hyperbolique partiellement encastré en utilisant la s-norme

Les résultats de convergence sont représentés sur la figure 4.44. Nous observons que la convergence des éléments DKMQ24 et Q4γ24 sont similaires. Pour le cas mince où  $t/L = 1/1000$  et  $t/L = 1/10000$ , l'élément DKMQ24 donne de meilleurs résultats que l'élément Q4γ24. Et ce, grâce à l'utilisation des fonctions d'interpolation quadratiques incomplètes pour la rotation dans la formulation de l'élément DKMQ24, qui assurent une meilleure performance pour la flexion.

### 4.3.4 Étude de l'estimation d'erreur

#### 4.3.4.1 Estimateur d'erreur $Z^2$

L'estimateur d'erreur  $Z^2$  [98] a été détaillé dans la section 3.4. Nous présentons ici son application à l'élément DKMQ24 dans le cas des coques. En ajoutant les erreurs sur les efforts résultants de membrane à la relation de l'erreur globale, la relation (3.76) devient :

$$\|e\|^2 = \sum_{i=1}^m \left( \|e_N\|_i^2 + \|e_M\|_i^2 + \|e_T\|_i^2 \right) \quad (4.99)$$

où  $\|e_M\|_i^2$  et  $\|e_T\|_i^2$  sont définis par la relation (3.77) et (3.78). De plus,

$$\|e_N\|_i^2 = \int_{A^i} \langle e_N \rangle [H_m]^{-1} \{e_N\} dA^i \quad (4.100)$$

avec

$$\{e_N\} = \{N\} - \{N^h\}$$

#### 4.3.4.2 Technique de recouvrement

Comme dans le cas de la plaque à la section 3.4, nous nous intéressons aux méthodes de la moyenne [98], de projection [98] et SPR [102, 100, 101] comme techniques de recouvrement.

Pour les techniques de la moyenne et de projection, la même démarche que dans la section 3.4 sera utilisée. Par contre, pour la technique SPR, nous utilisons une stratégie différente. Pour déterminer le moment amélioré  $M_\alpha^*$  sur un patch, on écrit :

$$M_\alpha^* = \langle P \rangle \{a\} \quad (4.101)$$

Pour l'élément DKMQ24, nous utilisons :

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \left\langle \begin{matrix} 1 & r_k & s_k & r_k^2 & r_k s_k & s_k^2 & r_k^2 s_k & r_k s_k^2 \end{matrix} \right\rangle \\ \langle a_n \rangle &= \left\langle \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \end{matrix} \right\rangle \end{aligned} \quad (4.102)$$

Les coordonnées  $(r_k, s_k)$  sont les coordonnées locales du patch calculées de la façon suivante :

##### 1. Caractéristiques du patch

Le Patch est un sous-domaine de la structure qui contient certains éléments (voir figure 4.45). Quand un patch est formé, nous pouvons définir son centre ( $C$ ). De plus, nous avons les coordonnées globales de chaque nœud et de chaque point de Gauss dans le patch. Les coordonnées globales de chaque point de Gauss sont notées  $[X_k, Y_k, Z_k]$ . Les coordonnées globales du centre de patch sont notées  $[X_C, Y_C, Z_C]$ .

##### 2. Création d'un système de coordonnées locales du patch

Les normales unitaires à chaque élément au centre du patch sont différentes. La normale au centre du patch est alors définie en prenant la moyenne des normales aux éléments :

$$\mathbf{T}_3^C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \{\mathbf{n}\}_i \quad (4.103)$$

où  $m$  est le nombre des éléments qui sont connectés au centre de patch  $C$  et  $\{\mathbf{n}_i\}$  le vecteur normal unitaire de l'élément  $i$ . Nous pouvons calculer ensuite les vecteurs orthonormés  $\mathbf{T}_1^C$  et  $\mathbf{T}_2^C$  suivant :

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_1^C &= \mathbf{T}_3^C \wedge \mathbf{k} \\ \mathbf{T}_2^C &= \mathbf{T}_3^C \wedge \mathbf{T}_1^C \\ \mathbf{T}_1^C &= \mathbf{i} \quad \text{si} \quad \mathbf{T}_3^C = \pm \mathbf{k}\end{aligned}\tag{4.104}$$

Nous obtenons ainsi la base locale orthonormée du patch  $[\mathbf{T}_1^C, \mathbf{T}_2^C, \mathbf{T}_3^C]$ .

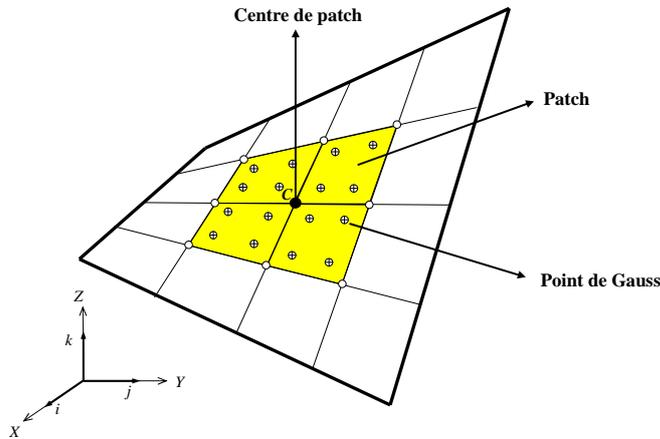


FIGURE 4.45 – Patch

### 3. Transformation des coordonnées des points de Gauss

Dans la technique SPR, les coordonnées locales d'un point de Gauss sont déterminées par :

$$\begin{bmatrix} r_k \\ s_k \\ z_k \end{bmatrix} = [\mathbf{T}_1^C \quad \mathbf{T}_2^C \quad \mathbf{T}_3^C]^T \begin{bmatrix} X_k - X_C \\ Y_k - Y_C \\ Z_k - Z_C \end{bmatrix}\tag{4.105}$$

où  $[\mathbf{T}_1^C, \mathbf{T}_2^C, \mathbf{T}_3^C]$  est la base locale du patch,  $[X_k, Y_k, Z_k]$  les coordonnées globales de chaque point de Gauss,  $[X_C, Y_C, Z_C]$  les coordonnées globales du centre de patch. Ici, nous n'utilisons que les coordonnées  $(r_k, s_k)$  car les moindres carrés sont calculés dans le plan tangent au centre de patch (voir figure 4.46).

La détermination des coefficients  $a_n$  de chaque patch s'effectue de la même manière à partir des relations (3.87) à (3.89).

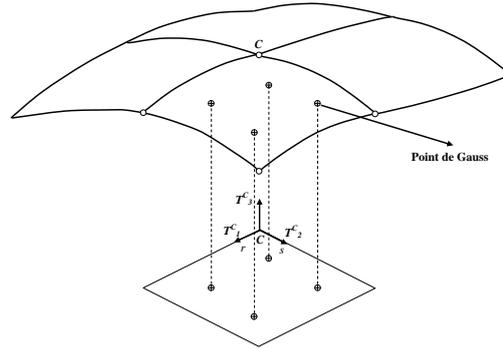


FIGURE 4.46 – Patch

#### 4.3.4.3 Résultats numériques

Dans cette partie, nous présentons les résultats d'analyse d'erreur obtenus grâce à l'estimateur d'erreur  $Z^2$ . Les techniques de recouvrement de la moyenne, projection et SPR sont étudiées. Les cas tests présentés ici ont fait l'objet de l'analyse de convergence présentée à la section 4.3.2. Nous utiliserons des maillages uniformes pour ces tests.

##### 1. Hémisphère sous charges diamétralement opposées

La configuration est représentée à la figure 4.47. Les maillages uniformes  $4 \times 4$ ,  $8 \times 8$ ,  $16 \times 16$  et  $32 \times 32$  sont utilisés. L'évolution de l'erreur relative en fonction du nombre d'éléments  $N$  est reportée sur la figure 4.48. Toutes les techniques de recouvrement ont une erreur relative inférieure à 5% fixée comme valeur du seuil  $\varepsilon_\phi^*$  pour le maillage  $32 \times 32$ . Les techniques de la moyenne et SPR donnent de meilleurs résultats que la technique de projection.

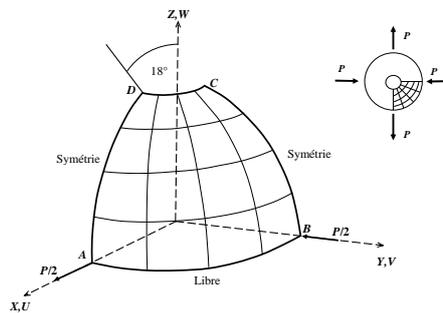


FIGURE 4.47 – Hémisphère pincé ouvert ( maillage  $N \times N = 4 \times 4$  ;  $R = 10 m$  ;  $t = 0.04 m$  ;  $P = 2 N$  ;  $E = 6.825 \times 10^7 Pa$  ;  $\nu = 0.3$ )

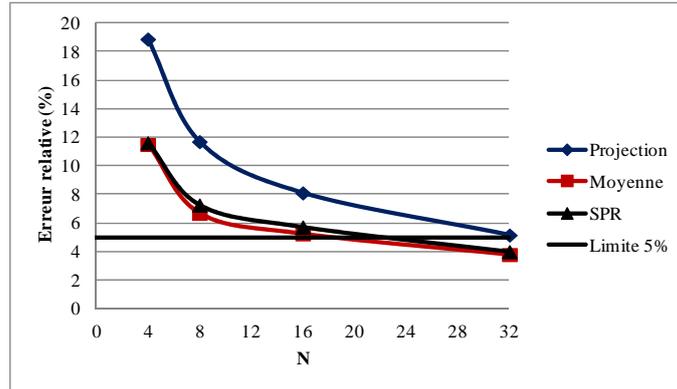


FIGURE 4.48 – Indicateur d’erreur relative  $\phi^*$ . Hémisphère sous charges diamétralement opposées

## 2. Panneau cylindrique soumis à son poids propre

Les maillages uniformes  $4 \times 4$ ,  $8 \times 8$ ,  $16 \times 16$  et  $32 \times 32$  sont utilisés pour la partie ABCD sur la figure 4.49. L’indicateur d’erreur relative est présenté sur la figure 4.50. Toutes les techniques de recouvrement donnent un indicateur d’erreur relative proche du seuil  $\varepsilon_\phi^* = 5\%$  avec le maillage  $32 \times 32$ .

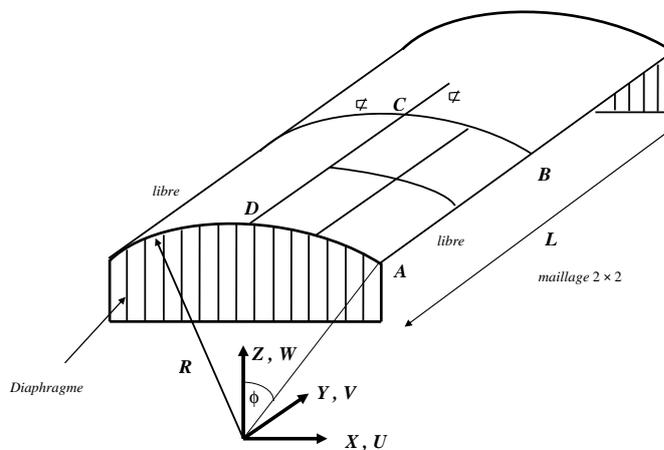


FIGURE 4.49 – Panneau cylindrique soumis à son poids propre (maillage  $N \times N = 2 \times 2$  ;  $L = 6 \text{ m}$  ;  $R = 3 \text{ m}$  ;  $h = 0.03 \text{ m}$  ;  $\phi = 40^\circ$  ;  $E = 3 \times 10^{10} \text{ Pa}$  ;  $f_z = -0,625 \times 10^4 \text{ Pa}$ )

Les techniques de la moyenne et SPR donnent de meilleurs résultats que la technique de projection. Ce phénomène se traduit dans les résultats du moment  $M_x$  au point  $C$  et de membrane  $N_y$  au point  $B$ . Les valeurs données par Scordelis et al. [84] sont utilisées comme valeurs de référence.

Pour le moment  $M_x$  au point  $C$  (voir figure 4.51 et tableau 4.15), les trois techniques donnent des résultats qui sont proches de la valeur de référence. Mais le meilleur résultat est obtenu grâce à la technique de la moyenne. Les efforts résultants de membrane  $N_y$  au point  $B$  sont représentés sur la figure 4.52 et dans le tableau 4.16. La technique de projection converge moins rapidement que les techniques de la moyenne et SPR. Même en utilisant un maillage  $32 \times 32$ , la valeur de  $N_y$  au point  $B$ , obtenue par la méthode de projection, reste loin de la valeur de référence.

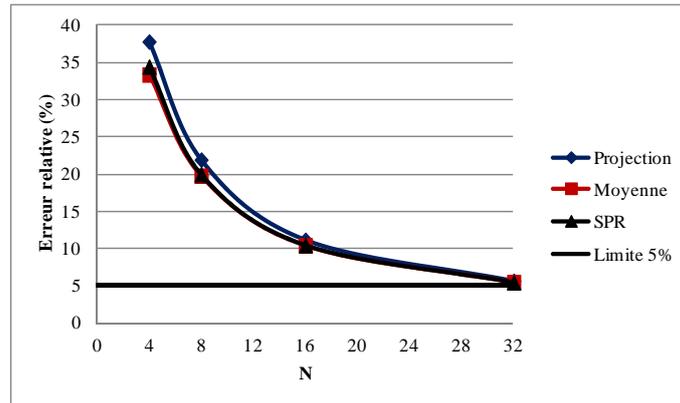


FIGURE 4.50 – Indicateur d’erreur relative  $\phi^*$ . Panneau cylindrique soumis à son poids propre

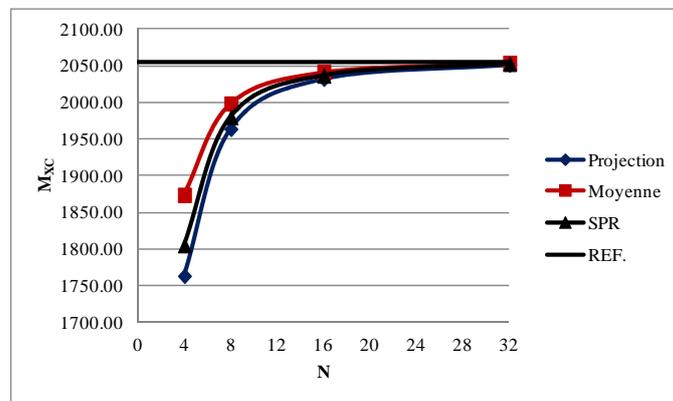


FIGURE 4.51 – Effort résultant  $M_x$  au point  $C$

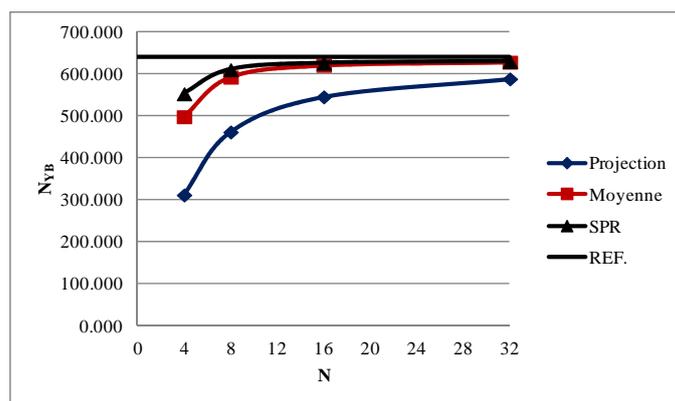


FIGURE 4.52 – Effort résultant  $N_y$  au point B

$N \times N$	Moyenne	Projection	SPR
$4 \times 4$	1873.80	1763.30	1805.00
$8 \times 8$	1998.30	1963.70	1979.80
$16 \times 16$	2041.30	2032.00	2036.30
$32 \times 32$	2053.80	2051.30	2052.30
REF.[84]	2056		

Tableau 4.15 – Effort résultant  $M_x$  au point C

$N \times N$	Moyenne	Projection	SPR
$4 \times 4$	498.430	312.020	552.820
$8 \times 8$	592.680	461.930	610.200
$16 \times 16$	620.750	545.710	625.610
$32 \times 32$	628.280	588.400	629.550
REF.[84]	641.000		

Tableau 4.16 – Effort résultant  $N_y$  au point B

### 3. Cylindre pincé avec diaphragme

Le cylindre pincé avec diaphragme est représenté sur la figure 4.53. Nous considérons les cas mince  $t/R = 0.01$  et épais  $t/R = 0.1$  et seule la partie ABCD sera étudiée.

L'indicateur d'erreur relative est représenté sur la figure 4.54 pour le cas mince et sur la figure 4.55 pour le cas épais. L'erreur relative reste supérieure à 5% pour toutes les techniques de recouvrement utilisées. Les techniques de la moyenne et SPR donnent des résultats similaires. Par contre, la convergence de la technique de projection est moins rapide. Même avec un maillage  $32 \times 32$  son erreur relative est de l'ordre de 13%.

Les techniques de la moyenne et SPR donnent un indicateur d'erreur relative proche du seuil de 5%. Pour le cas épais, nous observons le même comportement. Mais, l'indicateur d'erreur relative donné par ces techniques devient plus proche du seuil de 5%.

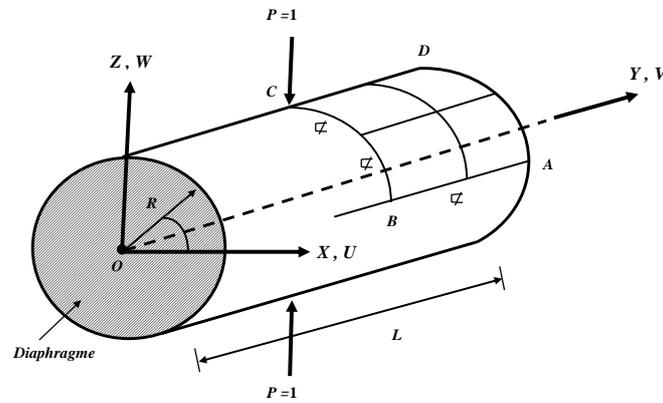


FIGURE 4.53 – Cylindre pincé ( $L = 6\text{ m}$  ;  $R = 3\text{ m}$  ;  $t = 0.03\text{ m}$  et  $0.3\text{ m}$  ;  $\nu = 0,3$  ;  $E = 3 \times 10^{10}\text{ Pa}$ )

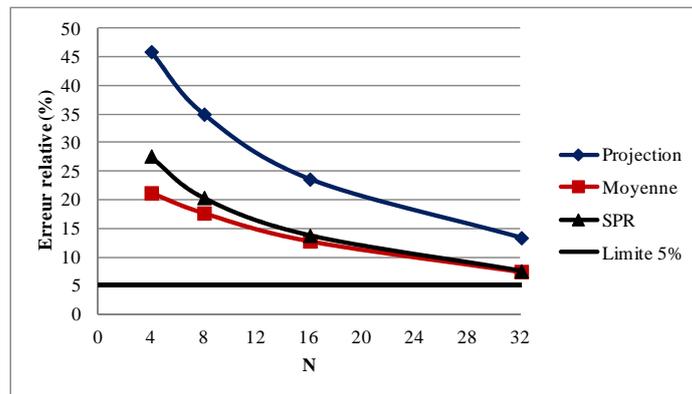


FIGURE 4.54 – Indicateur d'erreur relative  $\phi^*$ . Cylindre pincé mince

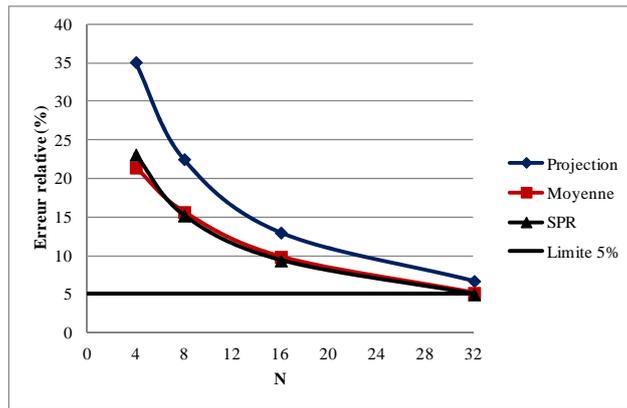


FIGURE 4.55 – Indicateur d'erreur relative  $\phi^*$ . Cylindre pincé épais

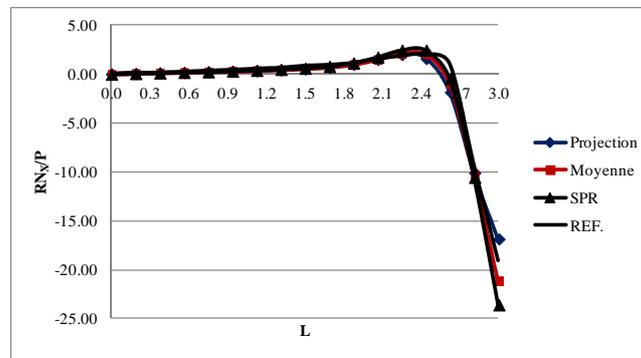


FIGURE 4.56 – Effort résultant  $N_x$  le long  $DC$

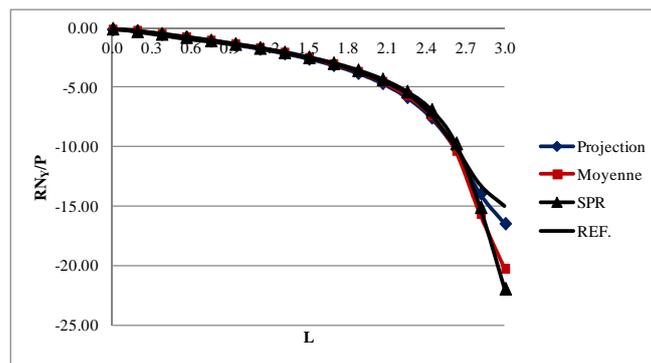


FIGURE 4.57 – Effort résultant  $N_y$  le long  $DC$

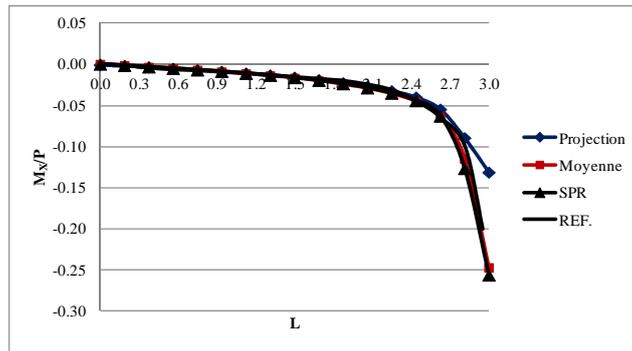


FIGURE 4.58 – Effort résultant  $M_x$  le long  $DC$

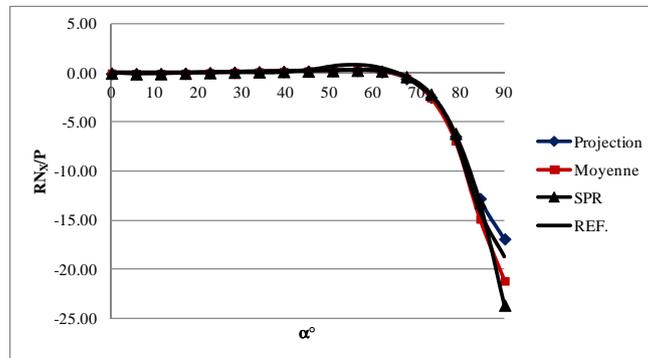


FIGURE 4.59 – Effort résultant  $N_x$  le long  $BC$

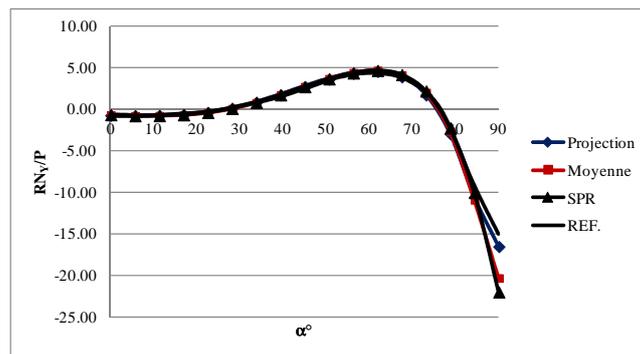


FIGURE 4.60 – Effort résultant  $N_y$  le long  $BC$

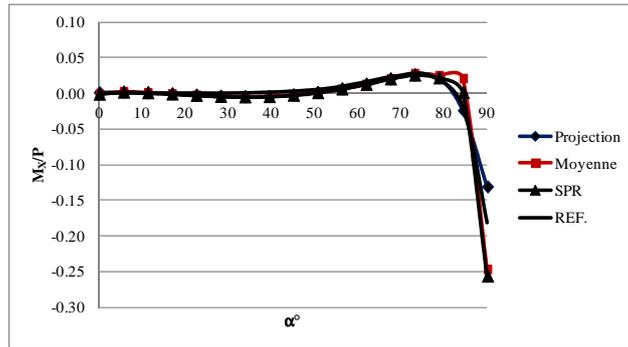


FIGURE 4.61 – Effort résultant  $M_x$  le long  $BC$

Pour le cas mince, la répartition des efforts résultants  $N_x, N_y$  et  $M_x$  sur  $DC$  et  $BC$  sont représentées dans les figures 4.56-4.61. Les efforts résultants sont calculés au point de chargement. En général, les techniques de la moyenne et SPR donnent des résultats similaires et meilleurs que ceux obtenus par la technique de projection.

#### 4. Parabolique hyperboloïde

Dans la figure 4.62 ci-dessous, nous avons présenté une coque en forme de parabolique hyperboloïde. Nous considérons que les bords sont encastés.

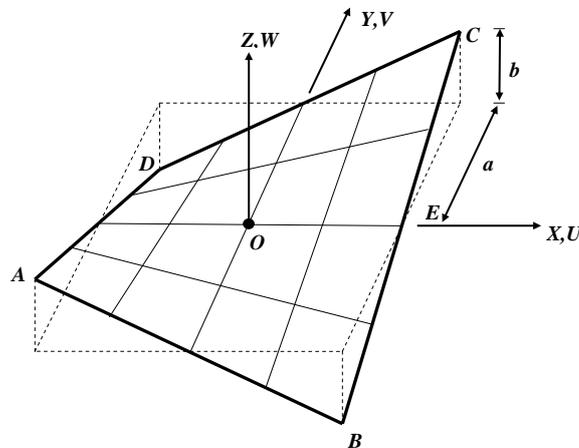


FIGURE 4.62 – Parabolique hyperboloïde (maillage  $N \times N = 4 \times 4$  ;  $a = 50 \text{ cm}$  ;  $b = 10 \text{ cm}$  ;  $t = 0.8 \text{ cm}$  ;  $E = 28500 \text{ kg/cm}^2$  ;  $\nu = 0.4$  ;  $f_z = 0.01 \text{ kg/cm}^2$ )

L'indicateur d'erreur relative est représenté à la figure 4.63. Dans ce cas, la technique SPR converge plus vite que la technique de la moyenne et de projection. Mais pour le maillage  $32 \times 32$ , les résultats deviennent similaires.

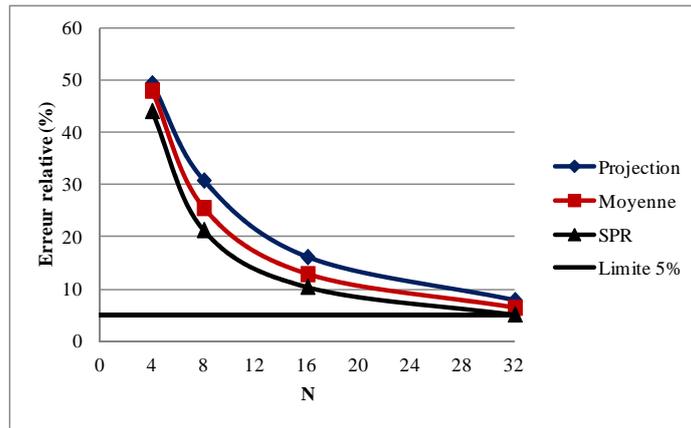


FIGURE 4.63 – Indicateur d’erreur relative  $\phi^*$ . Parabolique hyperboloïde

### 5. Coques hélicoïdales sous charges concentrées

Comme dernier exemple, nous avons étudié une coque hélicoïdale sous charges concentrées (Figure 4.64). En utilisant les maillages uniformes avec un nombre d’élément ( $NELT$ ) = 24, 96, 216 et 384, l’indicateur d’erreur relative est représenté sur les figures 4.65 et 4.66 pour le cas mince, et sur les figures 4.67 et 4.68 pour le cas épais.

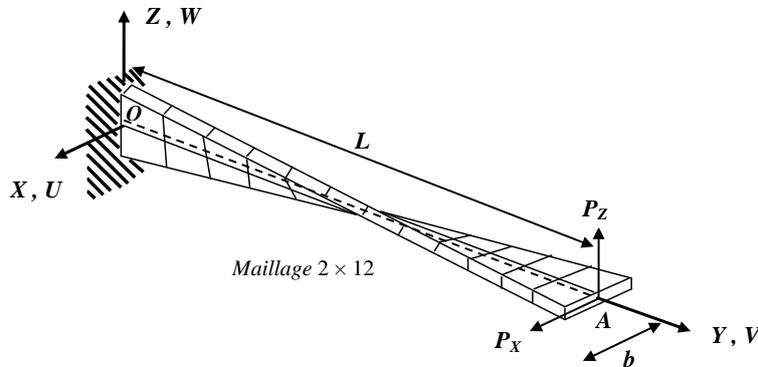


FIGURE 4.64 – Coques hélicoïdales sous charges concentrées (maillage  $N \times N = 2 \times 12$  ;  $L = 12\text{ m}$  ;  $b = 1,1\text{ m}$  ;  $t = 0.0032\text{ m}$  et  $0.32\text{ m}$  ;  $E = 29 \times 10^6\text{ Pa}$  ;  $\nu = 0.22$ )

Pour le cas mince, avec une charge concentrée suivant  $X$ , la technique de la moyenne est moins rapide que les techniques de projection et SPR. Dans ce cas, la technique SPR donne les meilleurs résultats. On obtient des résultats similaires dans le cas où la charge concentrée est appliquée suivant  $Z$ .

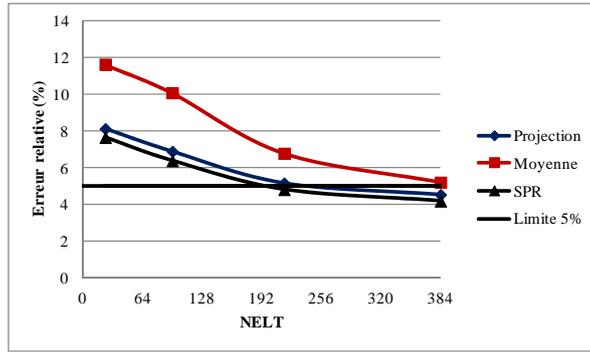


FIGURE 4.65 – Indicateur d’erreur relative  $\phi^*$  pour une coque hélicoïdale mince ( $P_X = 0.001$ )

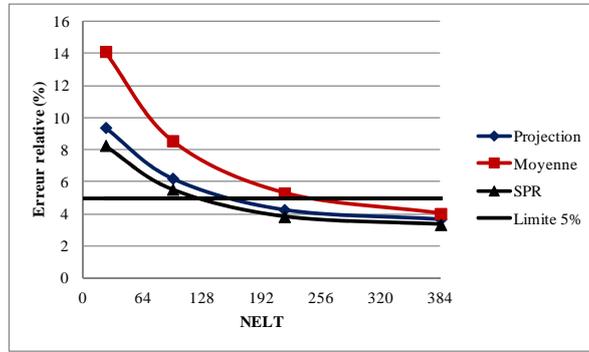


FIGURE 4.66 – Indicateur d’erreur relative  $\phi^*$  pour une coque hélicoïdale mince ( $P_Z = 0.001$ )

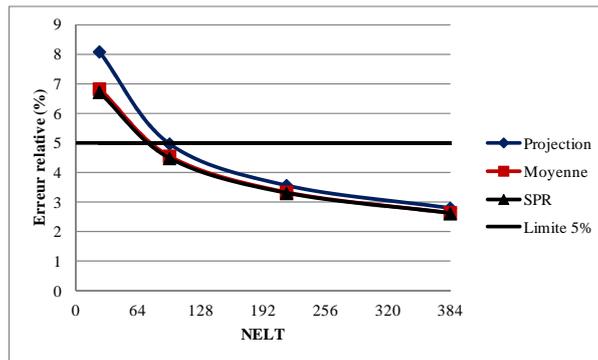


FIGURE 4.67 – Indicateur d’erreur relative  $\phi^*$  pour une coque hélicoïdale épais ( $P_x = 1000$ )

Dans le case épais, toutes les techniques de recouvrement donnent des résultats similaires. Dans le cas où le charge concentrée est appliqué suivant  $X$ , toutes les techniques donnent une erreur relative qui est en dessous du seuil de 5% à

partir de  $NELT=96$ . Dans le cas où la charge concentrée est appliqué suivant  $Z$ , toutes les techniques donnent un indicateur d'erreur relative proche de 7% pour  $NELT=384$ .

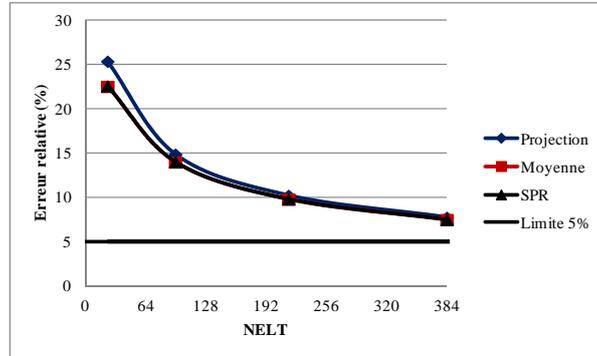


FIGURE 4.68 – Indicateur d'erreur relative  $\phi^*$ . Cas d'une coque hélicoïdale épaisse ( $P_z = 1000$ )

## 4.4 Conclusions

Dans cette partie, nous nous sommes intéressés à l'extension de l'élément DKMQ pour les coques minces et épaisses. Ce nouvel élément, appelé DKMQ24 est basé sur une formulation mixte du modèle de Naghdi. C'est un élément quadrilatère à 4 noeuds et 24 degrés de liberté, qui permet de prendre en compte les effets de cisaillement transversal. Il a passé avec succès les benchmarks tests classiques existant dans la littérature. Il présente de bonnes propriétés de convergence, aussi bien dans des situations où les effets de flexion sont dominants, que dans des situations où les effets de membrane dominant.

Nous avons ensuite testé l'élément DKMQ24 en utilisant la s-norme. Cette dernière permet de vérifier la convergence globale de la méthode de discrétisation. D'autre part, elle permet de vérifier l'optimalité de la convergence de l'élément (l'erreur globale ayant le même comportement asymptotique en fonction de la taille du maillage que l'erreur d'interpolation de l'élément). L'élément DKMQ24 s'est révélé performant pour ce test. L'erreur de convergence est optimale pour les tests effectués.

Finalement, l'analyse d'erreur effectuée, en utilisant les mêmes techniques et les mêmes critères d'évaluation que dans le cas des plaques pour l'élément DKMQ, a donné de bons résultats. Il faut signaler cependant que les méthodes de recouvrement par les techniques de moyenne ou SPR donnent de meilleurs résultats que les méthodes de projection. Ainsi, l'élément DKMQ24 a donné des résultats comparables, parfois même meilleurs dans certains cas, que les éléments MITC-coque, tout en étant plus aisés à mettre en oeuvre.



# Chapitre 5

## Application aux poutres à parois minces

### 5.1 Présentation des modèles des poutres à parois mince

Le modèle le plus utilisé en théorie linéaire élastique des poutres voiles est le modèle de Vlassov [92], établi à partir des équations tridimensionnelles de l'élasticité linéaire, en utilisant des hypothèses a priori sur la cinématique et les contraintes.

La justification du modèle de Vlassov, qui repose sur des hypothèses en contradiction avec la loi de comportement élastique tridimensionnelle (loi de Hooke), a été initié par Rodriguez et Viano [79, 81] et Trabucho et Viano [80], en utilisant une approche asymptotique. Leur approche est basée sur un développement asymptotique des équations de l'élasticité tridimensionnelle linéaire, au second ordre par rapport au diamètre du profil (petit devant l'élongation de la poutre). Ils obtiennent ainsi un modèle de poutre de type Timoshenko avec cisaillement, et passent ensuite à la limite d'un profil mince dont l'épaisseur est elle-même très petite par rapport au diamètre. Une autre approche asymptotique plus rigoureuse a été proposée dans Grillet et al. [33] et Hamdouni et Millet [36]. Les deux petits paramètres géométriques caractérisant la poutre (épaisseur relative et élancement) sont supposés être du même ordre de grandeur et tendre vers zéro en même temps. En procédant ainsi, ils obtiennent un modèle différent de celui de Vlassov, avec notamment un couplage entre les effets de torsion et de flexion. D'autre part, en procédant de la sorte, ils obtiennent une expression analytique exacte de la rigidité en torsion  $J_d$  intervenant dans l'équation de torsion, alors que celle donnée par Vlassov fait intervenir un coefficient empirique déterminé expérimentalement. L'équation de torsion obtenue est également du quatrième ordre, similaire à celle obtenue par Vlassov [92].

Enfin, signalons les travaux de Bechet et al. [13], qui ont cherché à obtenir le modèle de Vlassov par développement asymptotique des coques de Koiter [48] pour un élan-

ement très important. Ils ont obtenus un modèle unidimensionnel similaire à celui de Vlassov, justifiant ainsi le coefficient empirique intervenant dans la rigidité en torsion donnée par Vlassov [92].

Dans la suite de ce chapitre, nous allons nous concentrer sur l'étude de la torsion d'un certain nombre de profils minces, le déversement du à la torsion étant souvent la cause de flambement des structures minces. Pour cela, nous proposons d'utiliser les éléments finis de coque DKMQ24 et Q4 $\gamma$ 24 dans un certain nombre de cas tests où des solutions de référence (analytique et/ou numérique) sont connues. Les résultats obtenus seront comparés à ceux donnés par l'équation de torsion de la théorie de Vlassov, dont une solution analytique sera donnée dans la section 5.2.1. L'étude de la convergence de l'élément DKMQ24 sera également effectuée dans tous les exemples abordés.

## 5.2 Modèle de Vlassov

Les équation d'équilibre classiques de la théorie de Vlassov [92] se simplifient considérablement lorsqu'elles sont écrites dans la base réduite, dont les directions  $e_1$  et  $e_2$  correspondent à l'axe principal d'inertie du profil. L'origine de la section droite coïncide avec le centre de gravité du profil et l'origine de la surface sectorielle avec le centre du cisaillement.

Les équations d'équilibre "réduites" du modèle de Vlassov s'écrivent dans la base réduite [35, 36, 34, 92] :

$$ES \frac{d^2 u_3}{dx_3^2} = -P_3 \quad (5.1)$$

$$EJ_\omega \frac{d^4 \theta}{dx_3^4} - \mu J_d \frac{d^2 \theta}{dx_3^2} = m \quad (5.2)$$

$$EJ_2 \frac{d^4 u_1^C}{dx_3^4} = P_1 \quad (5.3)$$

$$EJ_1 \frac{d^4 u_2^C}{dx_3^4} = P_2 \quad (5.4)$$

où  $u_3$  représente le déplacement de traction dans la direction  $e_3$  de l'axe du profil,  $u_1$  et  $u_2$  les déplacements de flexion dans les directions  $e_1$  et  $e_2$ , et  $\theta$  l'angle de torsion des sections droites. Les coefficients géométriques intervenant sont la surface de la section  $S$ , les rigidités à la torsion  $J_\omega$  et  $J_d$  et les moments d'inertie  $J_1$  et  $J_2$ .

En notant  $d$  la largeur du profil (ou son diamètre dans le cas de sections circulaires)

et  $t$  son épaisseur, l'expression générale de la rigidité de torsion  $J_d$  donnée par Vlassov est :

$$J_d = \frac{a}{3} \sum dt^3 \quad (5.5)$$

où ' $a$ ' est un coefficient empirique dont certaines valeurs sont données dans [92]. Dans Béchet et al. [13], en partant du modèle de coques de Koiter, l'expression de la rigidité à la torsion obtenue ne fait plus intervenir de coefficient empirique. Elle s'écrit :

$$J_d = \frac{1}{3} \sum dt^3 \quad (5.6)$$

Notons que ce coefficient est voisin de 1 dans la cas d'une cornière (cf. page 134 de [92]).

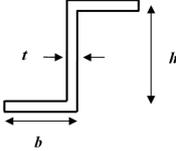
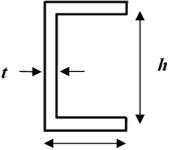
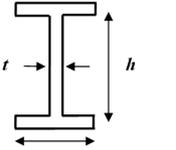
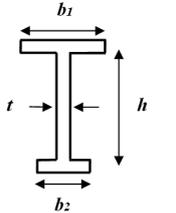
Section	$J_\omega$	Coefficient de Vlassov
	$J_\omega = \frac{th^2b^3}{12} \left( \frac{b+2h}{2b+h} \right)$	$a=1.16$
	$J_\omega = \frac{th^2b^3}{12} \left( \frac{2h+3b}{h+6b} \right)$	$a=1.12$
	$J_\omega = \frac{th^2b^3}{24}$	$a=1.29$
	$J_\omega = \frac{h^2t^2b_1^3b_2^3}{12t(b_1^3+b_2^3)}$	$a=1.31$

Tableau 5.1 – Valeurs des rigidités à la torsion  $J_\omega$  et du coefficient empirique de Vlassov ' $a$ ' intervenant dans l'expression de  $J_d$  pour les profils minces considérés.

Les valeurs des coefficients  $J_\omega$  et  $J_d$  qui seront utilisés par la suite dans les calculs,

sont ceux figurant sur le tableau 5.1. Les valeurs moyennes du coefficient empirique 'a' ont été précisées dans la troisième colonne du tableau. La rigidité à la torsion  $J_d$  se calcule en utilisant l'expression (5.5) de Vlassov.

### 5.2.1 Solution analytique de l'équation de torsion de Vlassov

Nous proposons ici de déterminer une solution analytique exacte de l'équation de torsion de Vlassov (5.2), dans le cas d'un profil, de longueur  $l$ , encastré en  $x_3 = 0$  et soumis à couple de torsion  $M_t$  à l'autre extrémité  $x_3 = l$  (figure 5.1).

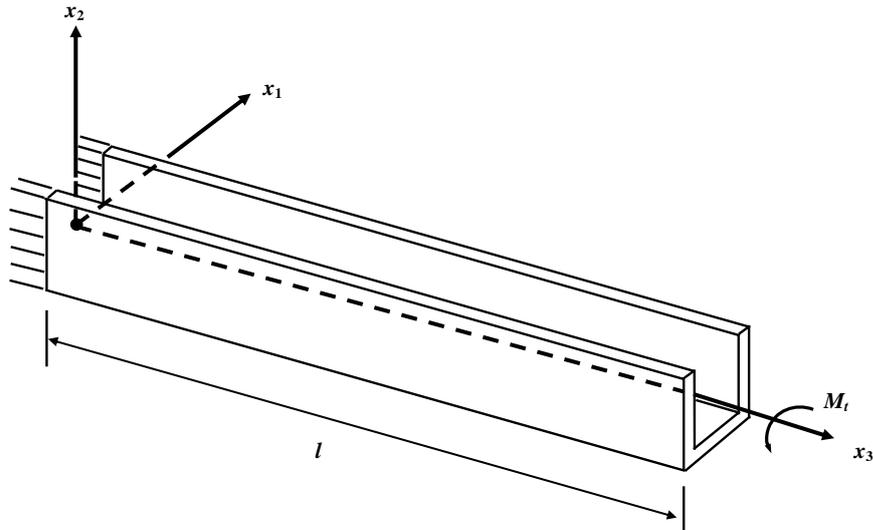


FIGURE 5.1 – Poutre à parois minces à section ouverte considérée.

En l'absence de moment linéique  $m$ , l'équation (5.7) se réduit à :

$$E J_w \frac{d^4 \theta}{dx_3^4} - \mu J_d \frac{d^2 \theta}{dx_3^2} = 0 \quad (5.7)$$

avec les conditions aux limites associées :

$$\theta(0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\theta}{dx_3}(0) = 0 \quad (5.8)$$

$$\frac{d^2 \theta(l)}{dx_3^2} = 0; \quad E J_w \frac{d^3 \theta(l)}{dx_3^3} - \mu J_d \frac{d\theta(l)}{dx_3} = M_t \quad (5.9)$$

L'équation (5.7) peut se mettre sous la forme

$$\frac{d^4 \theta}{dx_3^4} - \frac{p^2}{q^2} \frac{d^2 \theta}{dx_3^2} = 0 \quad (5.10)$$

où l'on a posé :

$$\frac{p^2}{q^2} = \frac{\mu J_d}{E J_\omega} \quad (5.11)$$

La solution générale de l'équation (5.10) est donnée par (voir Hamdouni et al. [34]) :

$$\theta(x_3) = c_1 + c_2 x_3 + c_3 \cosh\left(\frac{p}{q} x_3\right) + c_4 \sinh\left(\frac{p}{q} x_3\right) \quad (5.12)$$

où les constantes  $c_1$  à  $c_4$  sont déterminées en utilisant les quatre conditions aux limites associées (5.8) et (5.9).

Après les calculs, en utilisant des conditions aux limites (5.8) et (5.9), nous obtenons :

$$c_1 = -c_3 = c_4 \tanh(p) ; \quad c_2 = \frac{p}{q} c_4 ; \quad c_1 = M_t \frac{q}{p} \frac{1}{\mu J_d} \quad (5.13)$$

Finalement, l'expression de l'angle de torsion  $\theta(x_3)$  est donné par (5.12) :

$$\theta(x_3) = M_t C \frac{q}{p} \left[ \tanh(p) - \frac{p}{q} x_3 - \tanh(p) \cosh\left(\frac{p}{q} x_3\right) + \sinh\left(\frac{p}{q} x_3\right) \right] \quad (5.14)$$

avec

$$C = \frac{1}{\mu J_d} ; \quad \frac{q}{p} = \sqrt{\frac{E J_\omega}{\mu J_d}} \quad (5.15)$$

### 5.3 Résultats numériques

Dans cette partie, nous proposons de calculer numériquement l'angle de torsion  $\theta(x_3)$  en utilisant les éléments finis DKMQ24 et Q4 $\gamma$ 24, pour les 4 profils minces considérés au tableau 5.1. La poutre est encastée en  $x_3 = 0$  et un couple de torsion  $M_t$  est appliqué en  $x_3 = l$ . Les déplacements sont d'abord calculés en tout point de la poutre, l'angle de torsion est ensuite déduit de la façon suivante :

$$\theta = \arctan\left(\frac{\|u_A\| + \|u_B\|}{d}\right) \quad (5.16)$$

où  $u_A$  et  $u_B$  représentent les déplacements verticaux du point A et B et  $d$  la largeur du profil (figure. 5.2).

Pour chaque cas étudié, nous présentons les résultats de convergence des éléments finis utilisés (DKMQ24 ou Q4 $\gamma$ 24) par rapport à une solution de référence donnée dans la littérature. Nous comparons les valeurs obtenus pour l'angle de torsion à celles données par la solution analytique du modèle de Vlassov (équation 5.14) pour la même géométrie et les mêmes conditions aux limites. Les valeurs des rigidités à la torsion  $J_\omega$  et  $J_d$  qui seront utilisées sont celle du tableau 5.1.

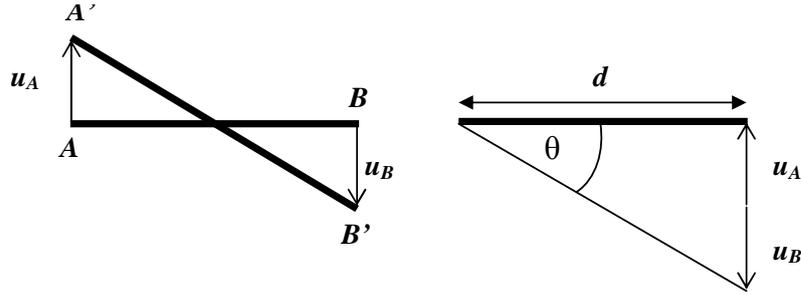


FIGURE 5.2 – Détermination de l'angle de torsion  $\theta$ .

### 5.3.1 Poutre cantilever en Z

Considérons une poutre cantilever en forme de Z (figure 5.3), encastrée sur une extrémité en  $x_3 = 0$ , et libre à l'autre extrémité en  $x_3 = l$ . Les conditions limites sur le côté encastrée sont  $u_1 = u_2 = u_3 = \theta_{x_1} = \theta_{x_2} = \theta_{x_3} = 0$ , où  $u_1$  et  $u_2$  désignent les déplacements en flexion, et  $u_3$  le déplacement en traction/compression. Un couple  $M_t = 1.2 \text{ Nm}$  est appliqué en  $x_3 = l$ . La valeur de la contrainte au point B ( $\sigma_{x_B} = 36 \text{ MPa}$ ), donnée par Shrinivasa et Rao [86], est utilisée comme valeur de référence.

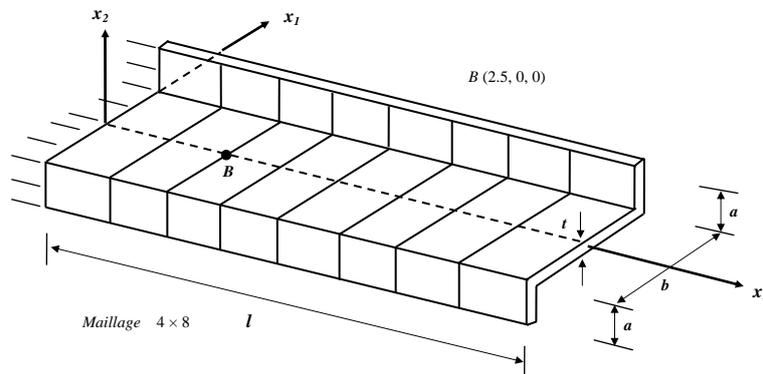


FIGURE 5.3 – Poutre cantilever en Z ( $l = 10.0 \text{ m}$  ;  $a = 1.0 \text{ m}$  ;  $b = 2.0 \text{ m}$  ;  $t = 0.10 \text{ m}$  ;  $\nu = 0.3$  ;  $E = 2.1 \times 10^5 \text{ Pa}$ ).

Les résultats de convergence en fonction du nombre d'éléments ( $NELT$ ) sont présentés sur la figure 5.4, pour un nombre total d'éléments  $NELT$  de 16, 32, 64, 128, 256, 512 et 1024. Les éléments DKMQ24 et Q4 $\gamma$ 24 montrent un bon comportement de convergence : les résultats numériques convergent vers la valeur de référence donnée par Shrinivasa et Rao [86].

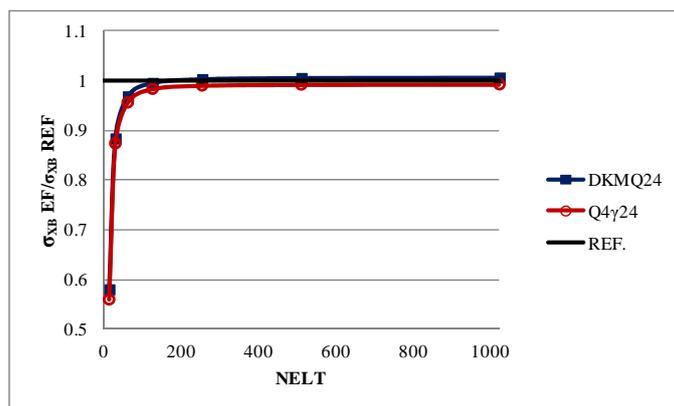


FIGURE 5.4 – Convergence de la contrainte  $\sigma_{x_B}$  pour la poutre cantilever en  $Z$  considérée. Valeur de référence donnée par [86].

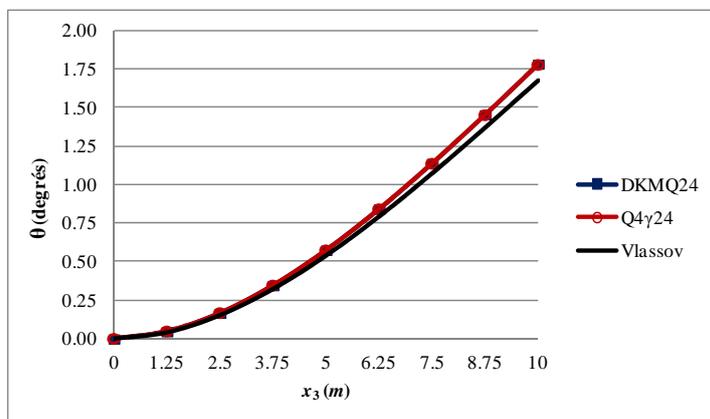


FIGURE 5.5 – Variations de l'angle de torsion pour la poutre cantilever en  $Z$  en fonction de  $x_3$ . Comparaison avec la solution analytique de Vlassov.

La figure 5.5 présente les variations de l'angle de torsion dans la direction  $x_3$  calculés en utilisant les éléments DKMQ24 et Q4γ24 avec un nombre total d'éléments  $NELT = 1024$ . Nous observons que les résultats obtenus avec les éléments DKMQ24 et Q4γ24 sont très proches de la solution analytique de l'équation de torsion de Vlassov donnée par (5.14).

Enfin, dans le tableau 5.2, nous calculons les erreurs relatives par rapport à la solution analytique de Vlassov. Les erreurs relatives sont d'environ 6% à l'extrémité  $x_3 = l$  où le chargement est appliqué, et 19% au voisinage de l'encastrement (en  $x_3 = 0$ ). Ces erreurs, d'autant plus importantes que les angles de torsion sont petits, sont dues principalement à la valeur empirique de la constante ' $a = 1.16$ ' qui est utilisée pour

la comparaison (Tableau 5.1).

$x_3$	Vlassov	DKMQ24	Erreur(%)	Q4 $\gamma$ 24	Erreur(%)
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.25	0.040	0.048	19.900	0.048	19.769
2.50	0.152	0.168	10.403	0.167	10.207
3.75	0.321	0.347	8.026	0.347	7.791
5.00	0.538	0.576	7.125	0.575	6.848
6.25	0.791	0.844	6.745	0.842	6.448
7.50	1.070	1.141	6.626	1.137	6.299
8.75	1.366	1.457	6.648	1.452	6.291
10.0	1.671	1.785	6.808	1.779	6.435

Tableau 5.2 – Erreur relative entre les valeurs numériques données par DKMQ24 et Q4 $\gamma$ 24 et les valeurs analytiques données par le modèle de Vlassov pour l'angle de torsion  $\theta$ .

### 5.3.2 Poutre cantilever en $U$

Dans l'exemple suivant, nous considérons une poutre cantilever en forme de  $U$  encastrée en  $x_3 = 0$  et libre à l'autre extrémité en  $x_3 = l$  (figure 5.6). Les conditions limites sur le côté encastrée sont  $u_1 = u_2 = u_3 = \theta_{x_1} = \theta_{x_2} = \theta_{x_3} = 0$ , Un couple  $M_t = 1.2 Nm$  est appliqué en  $x_3 = l$ .

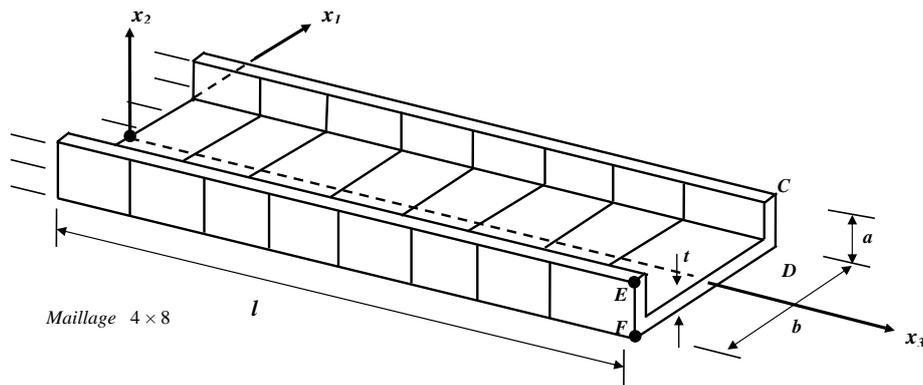


FIGURE 5.6 – Poutre cantilever en  $U$  ( $l = 10.0 m$  ;  $a = 1.0 m$  ;  $b = 2.0 m$  ;  $t = 0.10 m$  ;  $\nu = 0.3$  ;  $E = 21 \times 10^4 Pa$ ).

Nous considérons à nouveau un nombre d'éléments  $NELT$  variant de 16 à 1024.

En utilisant les résultats obtenus avec l'élément fini DKMQ24 pour  $NELT = 1024$  comme valeur de référence, les résultats de convergence du déplacement aux points  $E$  et  $F$  sont présentés sur les figures 5.7 et 5.8. Les deux éléments DKMQ24 et Q4 $\gamma$ 24 donnent des résultats similaires, et convergent vers la valeur de référence.

La figure 5.9 présente les variations de l'angle de torsion de la poutre obtenues numériquement avec  $NELT = 1024$ , qui sont comparées à la solution théorique de Vlassov (relation (5.14)). Nous observons que les résultats sont en très bon accord avec la solution analytique de la théorie de Vlassov.

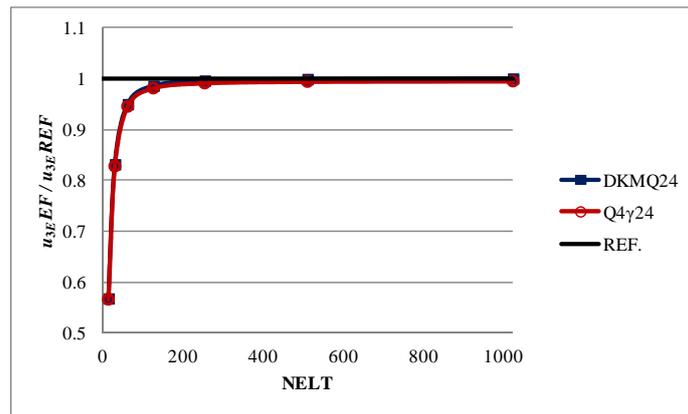


FIGURE 5.7 – Convergence du déplacement  $u_{3E}$  pour la poutre cantilever en  $U$ .

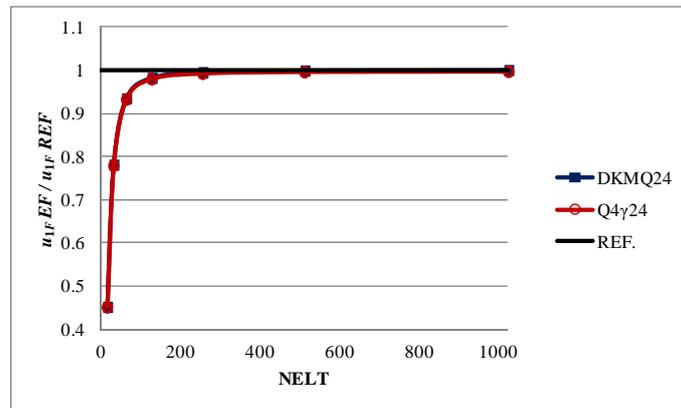


FIGURE 5.8 – Convergence du déplacement  $u_{1F}$  pour la poutre cantilever en  $U$ .

Les erreurs relatives par rapport à la solution théorique de Vlassov sont présentées dans le tableau 5.3. Nous observons des erreurs relatives d'environ 5% au niveau de la charge appliquée, et de 11% à proximité de l'encastrement. Les résultats obtenus

sont meilleurs que pour la poutre cantilever en  $Z$ . Cela s'explique entre autres par une meilleure valeur de la rigidité à la torsion  $J_d$  déterminée à partir des mesures expérimentales de Vlassov [92], donnant ainsi une valeur moyenne à la constante empirique  $a$ .

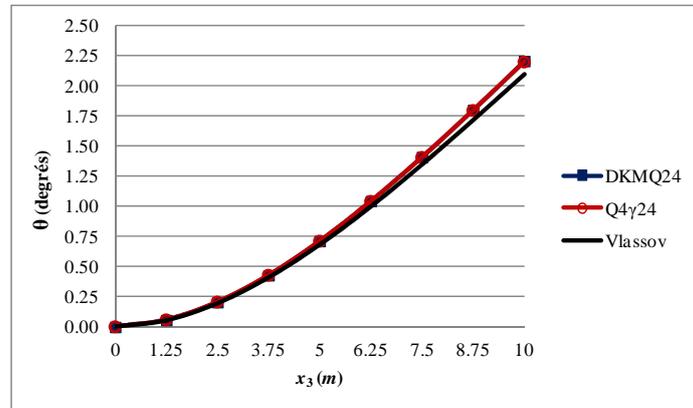


FIGURE 5.9 – Variations de l'angle de torsion pour la poutre cantilever en  $U$  en fonction de  $x_3$ . Comparaison avec la solution analytique de Vlassov.

$x_3$	Vlassov	DKMQ24	Erreur(%)	Q4 $\gamma$ 24	Erreur(%)
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.25	0.052	0.058	11.131	0.058	10.987
2.50	0.194	0.206	5.890	0.205	5.663
3.75	0.410	0.429	4.744	0.428	4.463
5.00	0.683	0.714	4.440	0.711	4.113
6.25	1.001	1.045	4.436	1.041	4.070
7.50	1.350	1.412	4.575	1.407	4.176
8.75	1.721	1.803	4.798	1.796	4.366
10.00	2.101	2.208	5.101	2.199	4.641

Tableau 5.3 – Erreur relative entre les valeurs numériques données par DKMQ24 et Q4 $\gamma$ 24 et les valeurs analytiques données par le modèle de Vlassov pour l'angle de torsion  $\theta$ .

### 5.3.3 Poutre cantilever en $H$

Nous considérons une poutre cantilever en forme de  $H$ , encastée en  $x_3 = 0$ . Comme pour les exemples précédents, nous avons  $u_1 = u_2 = u_3 = 0$  et  $\theta_{x_1} = \theta_{x_2} = \theta_{x_3} = 0$  en  $x_3 = 0$ . En  $x_3 = l$ , une charge  $F_{x_1} = 10^4 N$  est appliquée sur les côtés AC et DF de façon opposée, afin d'engendrer un couple de torsion. Le nombre total d'éléments  $NELT$  que nous allons considérer dans cet exemple 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768

et 1536.

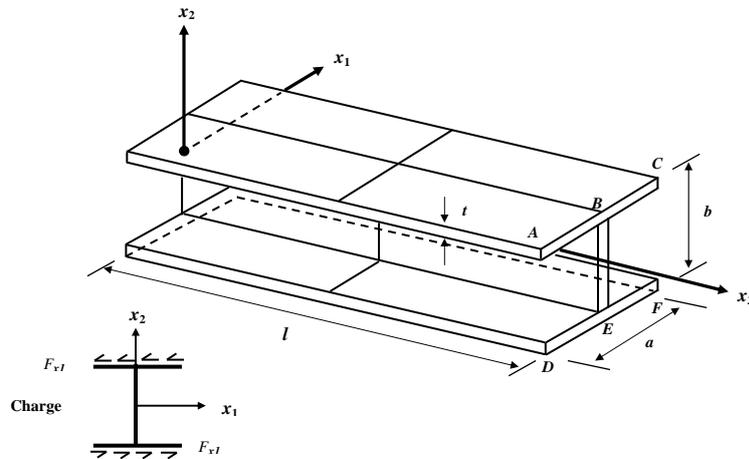


FIGURE 5.10 – Poutre cantilever en  $H$  et chargement appliqué générant un couple de torsion en  $x_3 = l$ . Caractéristiques géométriques et mécaniques utilisées  $l = 10.0\text{ m}$  ;  $a = b = 1.0\text{ m}$  ;  $t = 0.01\text{ m}$  ;  $\nu = 0.3$  ;  $E = 2.1 \times 10^{11}\text{ Pa}$ .

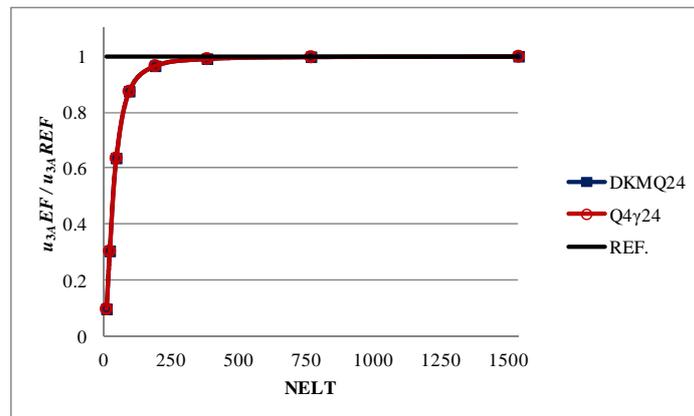


FIGURE 5.11 – Convergence de déplacement  $u_{3A}$  pour la poutre cantilever en  $H$  considérée. Valeur de référence correspondant à celle obtenue pour  $NELT = 1356$ .

Les résultats de convergence des déplacements  $u_{3A}$  et  $u_{1B}$  sont présentés sur les figures 5.11 et 5.12, en utilisant les résultats obtenus par l'élément DKMQ24 avec  $NELT = 1536$  comme la solution de référence. Nous observons que les deux éléments DKMQ24 et Q4 $\gamma$ 24 convergent rapidement vers la valeur de référence.

La figure 5.13 présente les variations de l'angle de torsion obtenues avec  $NELT =$

1536 qui sont comparées à la solution analytique (5.14) de Vlassov. La valeur de  $a = 1,29$  est utilisée comme valeur empirique pour calculer la rigidité à la torsion  $J_d$  (tableau 5.1). Les résultats obtenus avec les éléments DKMQ24 et Q4 $\gamma$ 24 sont très proches de la solution analytique de Vlassov.

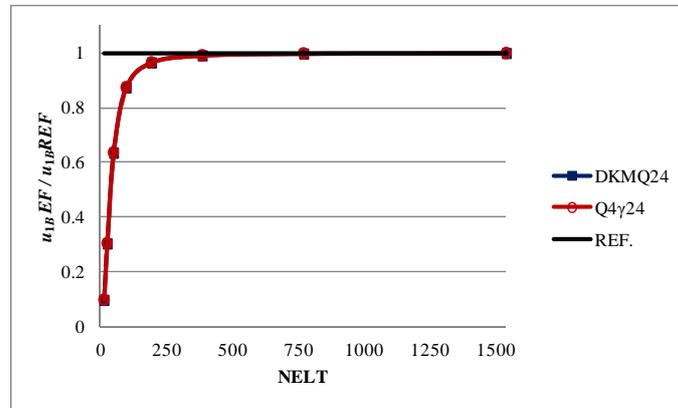


FIGURE 5.12 – Convergence de déplacement  $u_{1B}$  pour la poutre cantilever en  $H$  considérée. Valeur de référence correspondant à celle obtenue pour  $NELT = 1356$ .

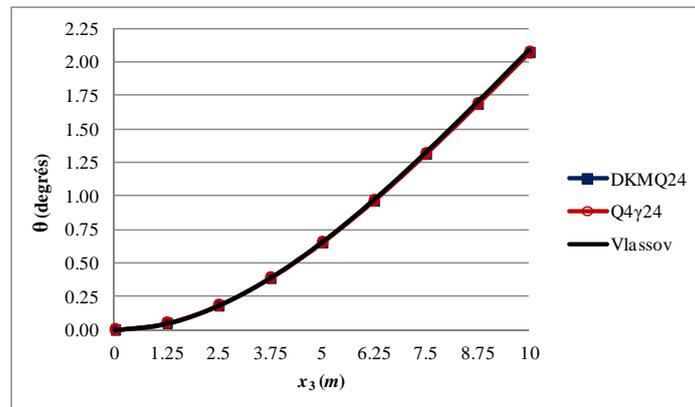


FIGURE 5.13 – Variations de l'angle de torsion pour la poutre cantilever en  $H$  en fonction de  $x_3$ . Comparaison avec la solution analytique de Vlassov.

Le tableau 5.4 présente l'erreur relative par rapport à la solution théorique de Vlassov pour l'angle de torsion. Nous pouvons constater que les résultats sont très proches, avec des erreurs relatives de moins de 1% au niveau de la charge appliquée et de 3.5% à proximité de l'encastrement.

$x_3$	Vlassov	DKMQ24	Erreur(%)	Q4 $\gamma$ 24	Erreur(%)
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.25	0.047	0.049	3.592	0.049	3.565
2.50	0.180	0.181	0.588	0.181	0.563
3.75	0.386	0.386	0.110	0.385	0.143
5.00	0.653	0.650	0.395	0.650	0.430
6.25	0.968	0.963	0.538	0.963	0.575
7.50	1.320	1.312	0.622	1.311	0.657
8.75	1.696	1.684	0.672	1.684	0.713
10.0	2.084	2.069	0.709	2.068	0.748

Tableau 5.4 – Erreur relative entre les valeurs numériques données par DKMQ24 et et Q4 $\gamma$ 24 les valeurs analytiques données par le modèle de Vlassov pour l'angle de torsion  $\theta$ .

### 5.3.4 Poutre cantilever en double $T$

Le dernier exemple que nous allons considérer est une poutre cantilever en forme double  $T$  encadrée en  $x_3 = 0$  et libre à l'autre extrémité en  $x_3 = l$  (figure 5.14). Le chargement et les conditions aux limites sont identiques à l'exemple précédent. Une charge  $F_{x_1} = 10^4 N$  est appliquée sur les côtés AC et DF de façon opposée, afin d'engendrer un couple de torsion. Le nombre total d'éléments  $NELT$  varie de 12 à 1536.

Nous considérons les résultats obtenus par l'élément DKMQ24 avec  $NELT = 1536$  comme valeur de référence. Les résultats de convergence du déplacement  $u_{3A}$  et  $u_{1B}$  aux points  $A$  et  $B$  sont présentés sur les figures 5.15 et 5.16. Les deux éléments montrent le même comportement au niveau de la convergence : ils convergent tous les deux rapidement vers la valeur de référence.

Les valeurs de l'angle de torsion obtenues numériquement avec  $NELT = 1536$ , en utilisant les éléments finis DKMQ24 et Q4 $\gamma$ 24, sont comparées à celle donnée par la solution théorique de Vlassov (5.14) sur la figure 5.17. Nous observons un très bon accord entre les résultats même avec un petit nombre d'éléments.

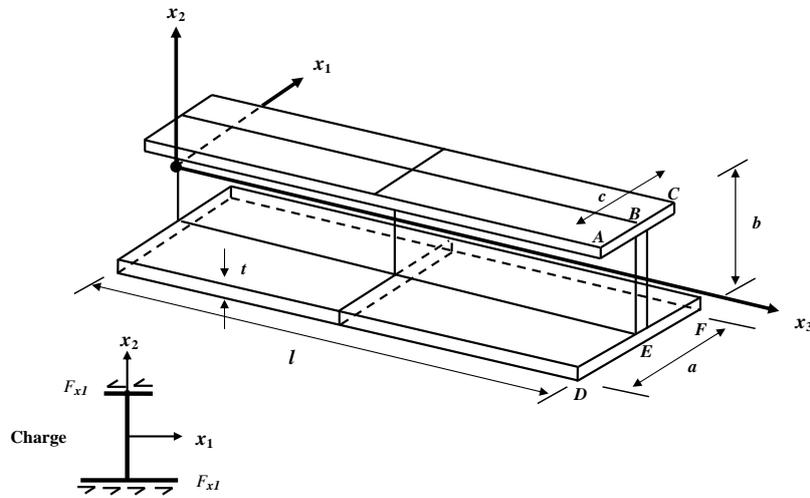


FIGURE 5.14 – Poutre cantilever en double  $T$  et chargement appliqué générant un couple de torsion en  $x_3 = l$ . Caractéristiques géométriques et mécaniques utilisées :  $l = 10.0 \text{ m}$  ;  $a = b = 1.0 \text{ m}$  ;  $c = 0.5 \text{ m}$  ;  $t = 0.01 \text{ m}$  ;  $\nu = 0.3$  ;  $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$ .

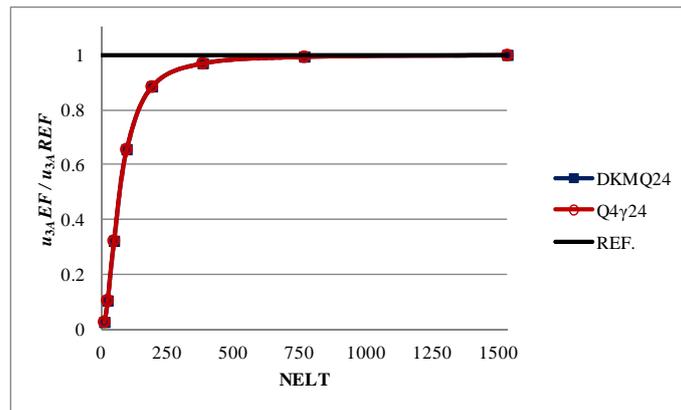


FIGURE 5.15 – Convergence de déplacement  $u_{3A}$  pour la poutre cantilever en double  $T$  considérée. Valeur de référence correspondant à celle obtenue pour  $NELT = 1536$ .

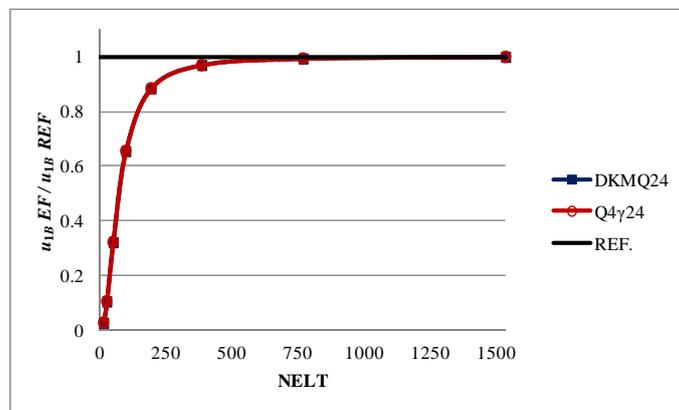


FIGURE 5.16 – Convergence de déplacement  $u_{1B}$  pour la poutre cantilever en double  $T$  considérée. Valeur de référence correspondant à celle obtenue pour  $NELT = 1536$ .

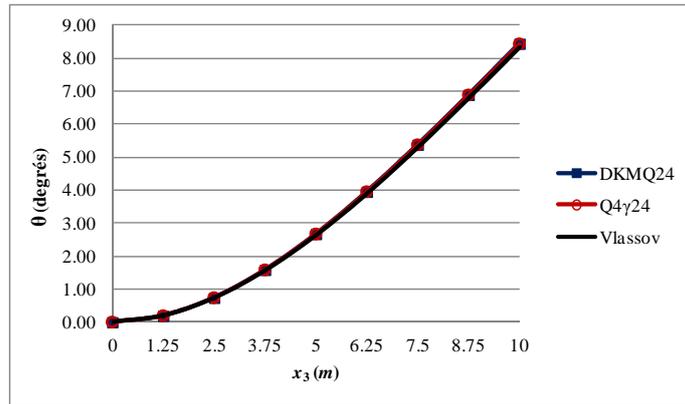


FIGURE 5.17 – Variations de l’angle de torsion pour la poutre cantilever en double  $T$  en fonction de  $x_3$ . Comparaison avec la solution analytique de Vlassov.

Dans le tableau 5.5, nous montrons l’erreur relative par rapport à la solution théorique de Vlassov. Nous pouvons observer encore que les résultats sont très proches, ce qui indique une très bonne valeur du coefficient empirique de Vlassov  $a = 1,31$  et de la rigidité de torsion  $J_d$  déterminé à partir des mesures expérimentales de Vlassov [92]. Nous observons les erreurs relatives à peu près de 1.4% sur le côté de la charge de torsion appliquée et 1.2% sur le côté de l’encastrement.

$x_3$	Vlassov	DKMQ24	Erreur(%)	Q4 $\gamma$ 24	Erreur(%)
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.25	0.191	0.194	1.249	0.194	1.179
2.50	0.728	0.740	1.581	0.739	1.510
3.75	1.556	1.583	1.683	1.581	1.605
5.00	2.625	2.671	1.740	2.668	1.656
6.25	3.883	3.951	1.749	3.948	1.662
7.50	5.283	5.373	1.705	5.368	1.612
8.75	6.777	6.885	1.595	6.878	1.501
10.0	8.317	8.435	1.426	8.427	1.327

Tableau 5.5 – Erreur relative entre les valeurs numériques données par DKMQ24 et et Q4 $\gamma$ 24 les valeurs analytiques données par le modèle de Vlassov pour l’angle de torsion  $\theta$ .

## 5.4 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons étudié la torsion d’un certain nombre de profils minces, en utilisant les éléments finis de coque DKMQ24 et Q4 $\gamma$ 24. Les résultats

obtenus ont permis de montrer la bonne convergence de la solution vers la solution de référence. Les résultats obtenus montrent également le bon comportement des éléments finis DKMQ24 lors du passage coque-poutre à parois mince, lorsque la coque devient très élancée. Les résultats montrent qu'il n'y a pas de blocage lorsque l'élancement devient très grand.

Enfin, la résolution numérique des problèmes de poutres voiles en torsion en utilisant l'élément fini DKMQ24 peut être utilisée comme autre façon de déterminer la valeur de la rigidité à la torsion  $J_d$  de Vlassov, qui dépend d'un coefficient empirique  $\alpha$  dans la littérature.

# Chapitre 6

## Composites

Les matériaux composites sont aujourd'hui très utilisés dans les industries mécaniques et aérospatiales pour leurs propriétés mécaniques (rigidité très importante pour un poids très faible). Ils sont généralement utilisés pour réaliser des pièces de petite taille ou encore comme renforts sur des structures plus grandes. Compte tenu des progrès réalisés sur la conception (et le coût associé) de ces matériaux, ils sont parfois même utilisés aujourd'hui comme constituants principaux de structures plus importantes. Par exemple, les fuselages des avions Boeing sont aujourd'hui entièrement réalisés avec des matériaux composites à base de carbone (dans les Airbus, pour l'instant seuls les renforts du fuselage sont en carbone). Il est évident que des calculs numériques à l'échelle de la structure doivent être au préalable réalisés, afin de certifier la résistance mécanique répondant aux normes des constructeurs, avant de se lancer dans la réalisation à grande échelle.

Les solutions analytiques des problèmes de plaques et de coques minces en composites étant quasiment inexistantes compte tenu de la complexité du problème, il est fondamental de disposer d'outils numériques performants permettant des calculs à l'échelle de la structure. Les théories des structures multicouches peuvent se classer en deux grandes catégories [75, 76] : les théories 3D et les théories monocouche équivalente (Equivalent Single Layer (ESL)). Les théories 3D sont encore aujourd'hui trop onéreuses au niveau du temps de calcul, compte tenu des moyens existants. Au sein des théories d'ESL, on peut trouver différentes approches dans la littérature : Classical Laminated Theory (CLT), First-order Shear Deformation Theory (FSDT), High-order Shear Deformation Theory (HSDT) et Layer-wise Lamination Theory (LLT). Dans les modèles CLT, FSDT et HSDT, les degrés de liberté sont définis sur la surface moyenne, alors que dans le modèle de LLT, ils sont définis dans chaque couche de la structure composite.

Le modèle CLT, basé sur l'hypothèse de Kirchhoff [47] où le cisaillement transversal est négligé, est le modèle le plus simple existant pour les plaques minces en composites. Le modèle FSDT, qui permet de prendre en compte les effets de cisaillement transverse, a été introduit par Whitney et Pagano [93] en utilisant l'hypothèse de Mindlin-

Reissner [60, 77]. Dans ce modèle, valable également pour les plaques épaisses, les contraintes de cisaillement transverse sont supposées constantes dans l'épaisseur. Il est donc nécessaire d'introduire un facteur de correction de cisaillement  $K$ , les résultats numériques dépendant fortement du choix effectué pour ce facteur  $K$ . Le modèle d'ordre supérieur HSDT, qui permet de s'affranchir du facteur de cisaillement  $K$ , est beaucoup plus onéreux en temps de calcul.

Les modèles CLT, FSDT et HSDT permettent de calculer facilement le comportement global des structures étudiées, mais ne donnent pas accès aux informations locales au sein de chaque couche. Les théories par couche ou Layer-wise Lamination Theory, (LLT), proposées par [85], permettent d'avoir accès aux informations locales, grâce à l'introduction de degrés de liberté supplémentaires dans chaque couche, mais sont beaucoup plus onéreux en temps de calcul quand le nombre de couches est important.

Ainsi, parmi tous les modèles existants, le modèle FSDT présente un bon compromis en termes de simplicité, de temps de calcul et de précision, pour l'analyse de structure composites de type plaque épaisse ou plaque mince. En se basant sur ce modèle, plusieurs éléments finis, et leur formulation associée, ont été proposés. Citons entre autres les travaux de Castellazzi et al. [25], Castellazzi et Krysl [24], Alfano et al. [1]. Ce dernier a obtenu des résultats satisfaisants en utilisant les éléments finis MITC à 4 noeuds et à 9 noeuds.

Nous proposons dans ce chapitre d'utiliser l'élément DKMQ pour les structures de type plaques en composites. La formulation utilisée, qui constitue une extension aux plaques composites de la formulation développée au chapitre 3 pour les plaques minces et épaisses, permet d'obtenir des résultats précis avec des temps de calcul relativement faibles et une bonne convergence. Les résultats obtenus par Pagano [69, 70] et Srinivas [88] seront utilisés dans un premier temps pour valider cette formulation sur des benchmarks existants. Dans un second temps, une étude de la convergence de l'élément DKMQ pour la plaque composite, basée sur la  $s$ -norme, sera présentée.

## 6.1 L'élément DKMQ pour les plaques composites

Les structures de type plaque en composites sont généralement formées d'un ensemble des couches constituées elles-mêmes d'un assemblage de fibres. Les fibres forment un assemblage tridimensionnel orthotrope caractérisé par les axes d'orthotropie  $L - T - Z$ . L'agencement et le comportement des fibres est isotrope dans le plan  $T - Z$  (voir figure 6.1). Les directions d'orthotropie  $L$  et  $T$  peuvent varier d'une couche à l'autre. Elles sont caractérisée par l'angle  $\theta$  entre l'axe de référence global  $X$  et la direction  $L$  associé à la couche en questions (figure 6.1). Chaque couche satisfait à l'hypothèse de contrainte plane ( $\sigma_Z = 0$ ) et la continuité cinématique est supposée

être vérifiée entre les couches.

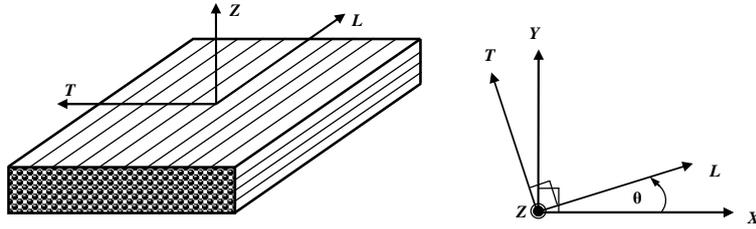


FIGURE 6.1 – Couche orthotrope

La loi de comportement élastique s'écrit dans les axes d'orthotropie ( $L - T - Z$ ) :

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [H_L] \{\varepsilon\} \\ \{\tau\} &= [G_L] \{\gamma\} \end{aligned} \quad (6.1)$$

où

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \langle \sigma_L \quad \sigma_T \quad \sigma_{LT} \rangle \quad ; \quad \langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_L \quad \varepsilon_T \quad 2\varepsilon_{LT} \rangle \\ \langle \tau \rangle &= \langle \tau_{LZ} \quad \tau_{TZ} \rangle \quad ; \quad \langle \gamma \rangle = \langle \gamma_{LZ} \quad \gamma_{TZ} \rangle \end{aligned} \quad (6.2)$$

et :

$$[H_L] = \begin{bmatrix} H_{LL} & H_{LT} & 0 \\ & H_{TT} & 0 \\ sym & & G_{LT} \end{bmatrix} \quad ; \quad [G_L] = \begin{bmatrix} G_{LZ} & 0 \\ 0 & G_{TZ} \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

Les coefficients des matrices  $H_L$  et  $G_L$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} H_{LL} &= \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} \quad ; \quad H_{TT} = \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} \\ H_{LT} &= \frac{E_T\nu_{LT}}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} = \frac{E_L\nu_{TL}}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} \\ G_{LZ} &= G_{LT} \quad ; \quad G_{TZ} = \frac{E_T}{2(1 + \nu_{TZ})} \end{aligned} \quad (6.4)$$

où  $E_L$  désigne le module d'Young selon l'axe  $L$  et  $E_T$  le module d'Young dans la direction est perpendiculaire à l'axe  $L$ .  $\nu_{LT}$  et  $\nu_{TL}$  sont les coefficients de Poisson dans le plan d'orthotropie  $LT$ .

Les matrices de changement de base entre les axes d'orthotropie et les coordonnées cartésiennes peuvent s'écrire sous la forme

$$[R_{L1}] = \begin{bmatrix} C^2 & S^2 & CS \\ S^2 & C^2 & -CS \\ -2CS & 2CS & C^2 - S^2 \end{bmatrix} \quad ; \quad [R_{L2}] = \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

où l'on a posé  $C = \cos\theta$  et  $S = \sin\theta$ .

Dans le système de coordonnées cartésiennes  $(X, Y, Z)$ , la loi de comportement de la  $i$ -ème couche s'écrit

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [H]_i \{\varepsilon\} \\ \{\tau\} &= [G]_i \{\gamma\} \end{aligned} \quad (6.6)$$

où les contraintes et les déformations sont définies par :

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \langle \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_{xy} \rangle \quad ; \quad \langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad 2\varepsilon_{xy} \rangle \\ \langle \tau \rangle &= \langle \tau_x \quad \tau_y \rangle \quad ; \quad \langle \gamma \rangle = \langle \gamma_x \quad \gamma_y \rangle \\ [H]_i &= [R_{L1}]^T [H_L] [R_{L1}] \quad ; \quad [G]_i = [R_{L2}]^T [G_L] [R_{L2}] \end{aligned} \quad (6.7)$$

Avec les mêmes notations qu'au chapitre 3, les moments et les efforts tranchants peuvent s'écrire sous la forme :

$$\{\mathbf{M}\} = [H_f] \{\boldsymbol{\chi}\} \quad ; \quad \{\mathbf{T}\} = [H_c] \{\boldsymbol{\gamma}\} \quad (6.8)$$

En utilisant la technique classique de stratification, les matrices homogénéisées  $[H_f]$  et  $[H_c]$  sont données par

$$[H_f] = \begin{bmatrix} H_{f11} & H_{f12} & H_{f13} \\ & H_{f22} & H_{f23} \\ sym & & H_{f33} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{nc} [H]_i (z_{i+1}^3 - z_i^3) \quad (6.9)$$

$$[\bar{H}_c] = \begin{bmatrix} \bar{H}_{c11} & \bar{H}_{c12} \\ \bar{H}_{c21} & \bar{H}_{c22} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{nc} [G]_i (z_{i+1} - z_i) \quad (6.10)$$

où  $nc$  désigne le nombre de couches orthotropes et  $z_i$  et  $z_{i+1}$  les coordonnées de la partie supérieure et inférieure de la couche  $i$  (figure 6.2).

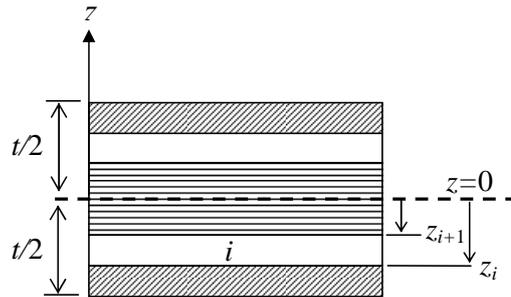


FIGURE 6.2 – Couche orthotrope

La matrice  $[H_c]$ , qui tient compte des composantes  $[\bar{H}_c]$  et du facteur de correction de cisaillement  $K$ , peut se mettre sous la forme

$$[H_c] = \begin{bmatrix} K_{11}\overline{H}_{c11} & K_{12}\overline{H}_{c12} \\ sym & K_{22}\overline{H}_{c22} \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

où  $K_{11}$ ,  $K_{12}$  et  $K_{22}$  sont les facteurs de correction de cisaillement. On peut noter que les matrices  $[H_f]$ ,  $[\overline{H}_c]$  et  $[H_c]$  sont symétriques.

Le choix du facteur d'influence de cisaillement  $\phi_k$  est important pour des applications aux structures composites. On peut montrer dans [45] qu'il est donné par

$$\phi_k = \left( H_{ck21}^{inv} H_{fk32} + H_{ck22}^{inv} H_{fk22} \right) \frac{12}{L_k^2} \quad (6.12)$$

avec

$$\begin{aligned} [H_{fk}] &= [QE]^T [H_f] [QE] \\ [H_{ck}] &= [Q]^T [H_c] [Q] \end{aligned} \quad (6.13)$$

où  $[H_f]$  et  $[H_c]$  sont définis par les relations (6.9) et (6.11) et

$$\begin{aligned} [QE] &= \begin{bmatrix} n_x^2 & n_y^2 & -n_x n_y \\ n_y^2 & n_x^2 & n_x n_y \\ 2n_x n_y & -2n_x n_y & n_x^2 - n_y^2 \end{bmatrix} \\ [Q] &= \begin{bmatrix} n_x & -n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.14)$$

Les composantes  $n_x$  et  $n_y$  de la normale sur le côté  $k$  de l'élément considéré sont représentées sur la figure 6.3.

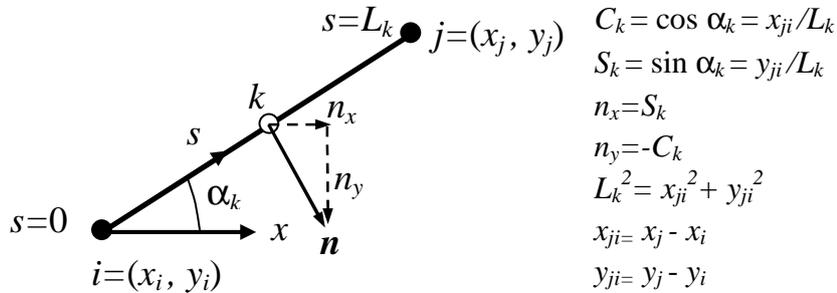


FIGURE 6.3 – Coordonnées locales sur le côté  $k$  de l'élément considéré.

## 6.2 Validation numérique de l'élément DKMQ pour les plaques composites

Dans cette partie nous allons utiliser les benchmarks tests proposés par Srinivas [88] et Pagano [69, 70] pour valider numériquement l'élément DKMQ pour les plaques composites. La convergence sera également étudiée.

## 6.2.1 Plaque carrée sandwich simplement appuyée sous chargement uniforme

Dans ce premier exemple, on considère une plaque carrée sandwich simplement appuyée, soumise à un chargement uniforme  $f_z$  (figure 6.4). La plaque est constituée de 3 couches 0/0/0 symétriques.

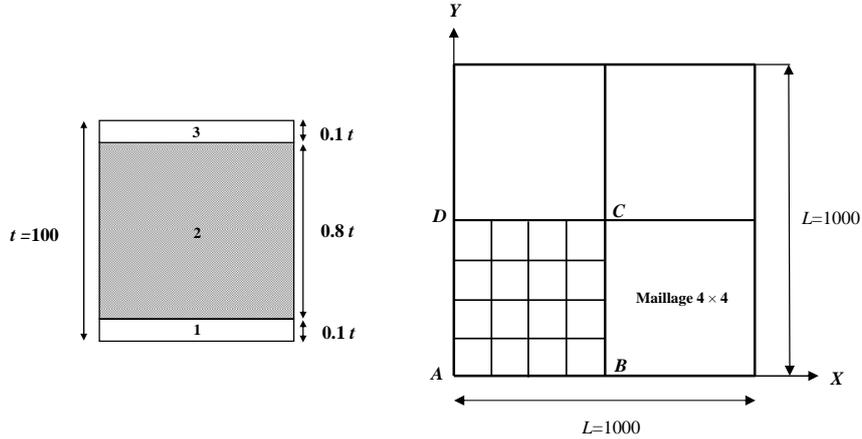


FIGURE 6.4 – Plaque carrée sandwich simplement appuyée soumise à un chargement uniforme ( $E_L = 3.4156MPa$ ,  $E_T = 1.7931MPa$ ,  $\nu_{LT} = 0.44$ ,  $G_{LT} = 1MPa$ ,  $G_{LZ} = 0.608 MPa$ ,  $G_{TZ} = 1.015 MPa$ .)

En raison de la symétrie du problème, seule la partie ABCD est étudiée. Les conditions aux limites sont données par  $w = \beta_s = 0$  sur AB et AD. Les conditions de symétrie s'écrivent  $\beta_x = 0$  sur BC et  $\beta_y = 0$  sur CD. Les maillages uniformes  $N \times N = 2 \times 2, 4 \times 4, 8 \times 8, 16 \times 16, 32 \times 32$  et  $64 \times 64$  (la figure 6.4 représente un maillage  $4 \times 4$ ) seront ceux utilisés dans cette étude.

Les propriétés mécaniques du matériau constituant la couche 2 (coeur) sont proportionnelles à celles des couches 1 et 3. Les valeurs de  $E$  et  $G$  du coeur sont  $\mathbf{C}$  fois plus faibles que celles de la peau. Dans ce test, on considère  $\mathbf{C} = 1$ ,  $\mathbf{C} = 10$  et  $\mathbf{C} = 50$ . Le cas de  $\mathbf{C} = 1$  correspond à une plaque orthotrope, tandis que  $\mathbf{C} = 50$  correspond à une structure sandwich.

Le facteur de correction de cisaillement utilisé pour cet exemple dépend des valeurs de  $\mathbf{C}$  choisies. Il est donné par :

- pour  $\mathbf{C} = 1$  ;  $K_{11} = K_{22} = 0.8333$  ;  $K_{12} = 0$
- pour  $\mathbf{C} = 10$  ;  $K_{11} = K_{22} = 0.3521$  ;  $K_{12} = 0$
- pour  $\mathbf{C} = 50$  ;  $K_{11} = K_{22} = 0.0938$  ;  $K_{12} = 0$

La solution analytique de ce problème a été proposée par Srinivas [88] dans le cadre

de l'élasticité tridimensionnelle. Le déplacement vertical au point  $C$  est exprimé sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\underline{w}_c = \frac{w_c G_{LT}(\text{coeur})}{t f_z} \quad (6.15)$$

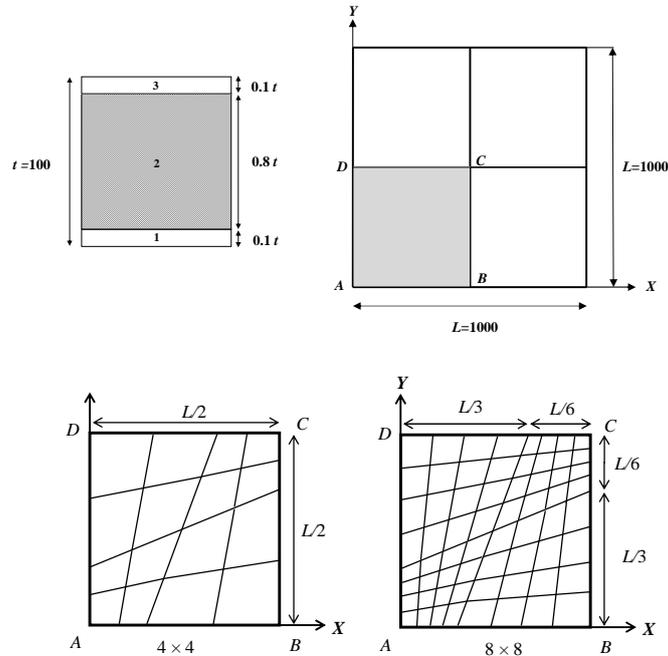


FIGURE 6.5 – Plaque carrée sandwich simplement appuyée avec distorsion du maillage.

$N \times N$	$C = 1$	$C = 10$	$C = 50$
$2 \times 2$	179.599	41.776	17.120
$4 \times 4$	180.621	41.912	16.902
$8 \times 8$	181.115	41.973	16.854
$16 \times 16$	181.290	41.992	16.842
$32 \times 32$	181.339	41.996	16.839
$64 \times 64$	181.351	41.998	16.838
REF. [88]	181.050	41.910	16.750

Tableau 6.1 – Déplacement vertical au point  $C$  (maillage uniforme).

Les valeurs numériques obtenues pour le déplacement vertical au point  $C$  (centre de la plaque) figurent dans le tableau 6.1. Nous constatons que les résultats numériques obtenus avec l'élément DKMQ donne des résultats qui correspondent à la solution tridimensionnelle donnée par Srinivas [88] dans tous les cas traités.

Les résultats obtenus avec distorsion du maillage (figure 6.5) sont présentés dans le tableau 6.2. Nous constatons, encore une fois, que l'élément DKMQ donne des résultats qui sont très proches de la solution tridimensionnelle de référence donnée par Srinivas [88]. Ainsi, l'élément DKMQ n'est pas sensible à la distorsion du maillage.

$N \times N$	$C = 1$	$C = 10$	$C = 50$
$2 \times 2$	190.642	43.594	17.645
$4 \times 4$	182.776	42.269	17.028
$8 \times 8$	181.515	42.052	16.884
$16 \times 16$	181.374	42.011	16.849
$32 \times 32$	181.358	42.001	16.841
$64 \times 64$	181.356	41.999	16.838
REF.[88]	181.050	41.910	16.750

Tableau 6.2 – Déplacement vertical au point  $C$  (distorsion du maillage).

### 6.2.2 Plaque carrée composite à trois couches simplement appuyée sous chargement doublement sinusoïdal

Dans ce test, proposé par Pagano et Hatfield [70], nous considérons une plaque carrée de côté  $L = 1000$ , simplement appuyée et soumise à un chargement doublement sinusoïdal  $f_z = f_0 \sin(\pi x/L) \sin(\pi y/L)$  (figure 6.6). La plaque elle-même est constituée d'un matériau composite stratifié à 3 couches 0/90/0. Le comportement de la plaque est étudiée pour différentes épaisseurs ( $t = 250, 100, 20$  et  $10$ ). Les épaisseurs totales des couches à  $0^\circ$  ( $t_1 + t_3$ ) et à  $90^\circ$  ( $t_2$ ) sont égales ; de plus, les couches ayant la même orientation ont toute la même épaisseur.

Les conditions aux limites associés à cet exemple sont  $w = \beta_s = 0$  sur AB et AD. Les conditions de symétrie s'écrivent  $\beta_x = 0$  sur BC et  $\beta_y = 0$  sur CD. Les valeurs des facteurs de correction de cisaillement que l'on considère sont respectivement  $K_{11} = 0.570$  ;  $K_{22} = 0.882$  ;  $K_{12} = 0$ .

Le tableau 6.3 présente les valeurs du déplacement vertical au centre de la plaque (au point  $C$ ) obtenus avec l'élément DKMQ, comparés à la solution tridimensionnelle de référence donnée par Pagano et Hatfield [70]. Les valeurs de référence des déplacements verticaux au centre de la plaque ont été calculés en utilisant l'expression adimensionnelle suivante :

$$\underline{w} = \frac{\pi^4 w Q}{12 S^4 t f_0} \quad (6.16)$$

avec

$$Q = 4G_{LT} + \frac{[E_L + E_T(1 + 2\nu_{TT})]}{1 - 2\nu_{LT}\nu_{TL}} ; S = \frac{t}{L}$$

On constate que les résultats obtenus avec l'élément DKMQ sont très proches de la solution de référence. Pour  $t/L = 0.25$ , avec un maillage  $N \times N = 64 \times 64$ , l'erreur est d'environ 5%. Par contre, pour  $t/L = 0.1, 0.02$  et  $0.01$ , l'erreur obtenue est de moins de 2%, ce qui montre l'efficacité de l'élément DKMQ pour les plaques composites.

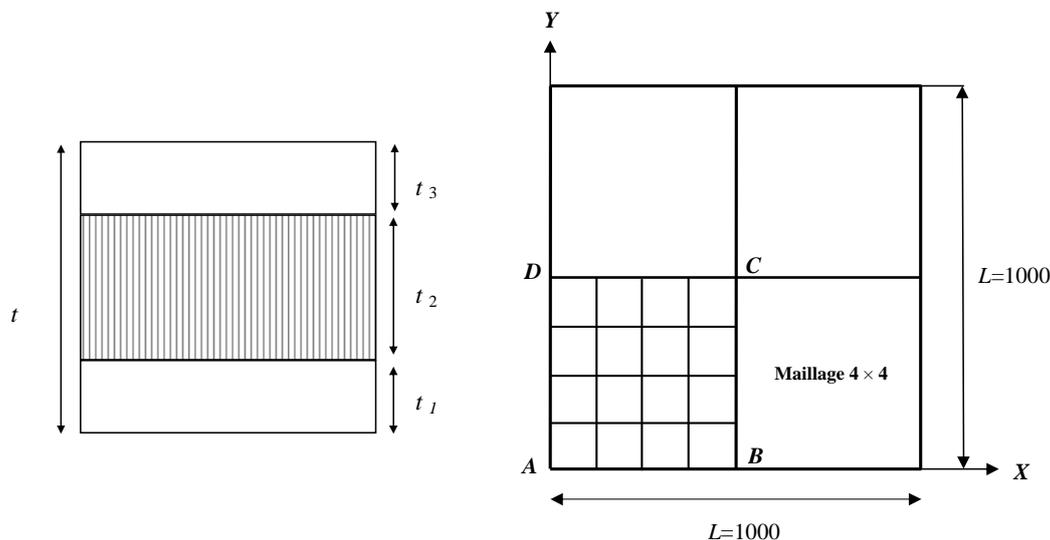


FIGURE 6.6 – Plaque carrée composite à trois couches simplement appuyée ( $E_L = 24MPa$  ;  $E_T = 1MPa$  ;  $\nu_{LT} = 0.25$  ;  $G_{LT} = 0.5MPa$  ;  $G_{TZ} = 0.2MPa$ ).

$N \times N$	$t/L = 0.25$	$t/L = 0.1$	$t/L = 0.02$	$t/L = 0.01$
$4 \times 4$	4.785	1.746	1.030	1.005
$8 \times 8$	4.755	1.740	1.030	1.005
$16 \times 16$	4.748	1.738	1.030	1.006
$32 \times 32$	4.746	1.738	1.030	1.006
$64 \times 64$	4.745	1.738	1.030	1.006
REF. [70]	4.491	1.709	1.031	1.008

Tableau 6.3 – Déplacement vertical au point C obtenu avec l'élément DKMQ pour la plaque carrée composite à trois couches simplement appuyée.

### 6.2.3 Plaque carrée composite à neuf couches soumise à un chargement doublement sinusoïdal

Dans cet exemple, proposé également par Pagano et Hatfield [70], on considère une plaque carrée de longueur  $L = 1000$ , soumise à un chargement doublement

sinusoïdal  $f_z = f_0 \sin(\pi x/L) \sin(\pi y/L)$  (figure 6.6). La plaque, constituée d'un assemblage de neuf couches de composites, est simplement appuyée sur son bord latéral. Les conditions aux limites associées s'écrivent  $w = \beta_s = 0$  sur AB et AD, auxquelles il convient d'ajouter les conditions de symétrie  $\beta_x = 0$  sur BC et  $\beta_y = 0$  sur CD (le problème n'est étudié que sur un quart de la plaque).

Nous étudierons différentes épaisseurs totales de la plaque et des couches associées :  $t = 250, 100, 20$  et  $10$ . Une stratification symétrique à 9 couches  $0/90/0/90/0/90/0/90/0$  est considérée. Dans cet exemple, les épaisseurs totales des couches à  $0^\circ$  ( $t_1 + t_3 + t_5 + t_7 + t_9$ ) et à  $90^\circ$  ( $t_2 + t_4 + t_6 + t_8$ ) sont supposées égales et les couches ayant la même orientation ont la même épaisseur. Les valeurs du facteur de correction de cisaillement qui seront utilisés sont  $K_{11} = 0.670$  ;  $K_{22} = 0.666$  ;  $K_{12} = 0$ . Ces valeurs dépendent de l'exemple considéré.

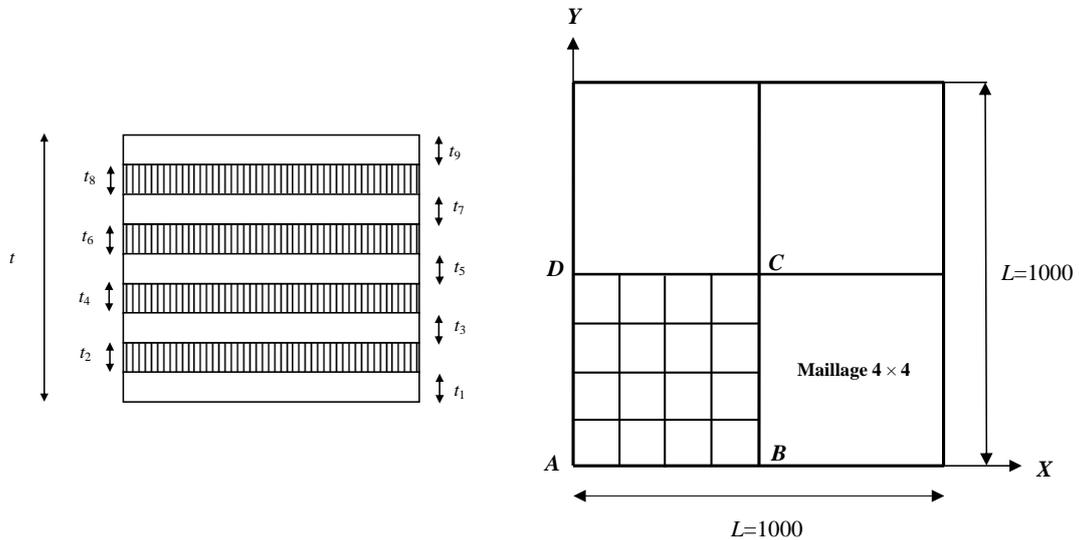


FIGURE 6.7 – Plaque carrée composite à neuf couches simplement appuyée ( $E_L = 24MPa$  ;  $E_T = 1MPa$  ;  $\nu_{LT} = 0.25$  ;  $G_{LT} = 0.5MPa$  ;  $G_{TZ} = 0.2MPa$ )

Les valeurs de référence des déplacements verticaux au centre de la plaque sont exprimées sous la forme adimensionnelle suivante (voir [70] pour plus de détails) :

$$\underline{w} = \frac{\pi^4 w Q}{12 S^4 t f_0} \quad (6.17)$$

avec

$$Q = 4G_{LT} + \frac{[E_L + E_T(1 + 2\nu_{TT})]}{1 - 2\nu_{LT}\nu_{TL}} ; S = \frac{t}{L}.$$

Les résultats obtenus pour le déplacement vertical au centre de la plaque (point C)

sont présentés dans le tableau 6.4. La solution tridimensionnelle donnée par Pagano et Hatfield [70] est utilisée comme valeur de référence. Une très bonne corrélation est trouvée entre les valeurs obtenues en utilisant l'élément DKMQ et la solution de référence. Dans tous les cas traités, l'erreur obtenue en utilisant le maillage isotrope  $N \times N = 64 \times 64$  est de moins de 2%, ce qui permet de valider à nouveau l'élément DKMQ utilisé pour les plaques composites et la formulation associée.

$N \times N$	$t/L = 0.25$	$t/L = 0.1$	$t/L = 0.02$	$t/L = 0.01$
$4 \times 4$	4.200	1.517	1.018	1.002
$8 \times 8$	4.170	1.512	1.018	1.003
$16 \times 16$	4.162	1.511	1.018	1.003
$32 \times 32$	4.160	1.511	1.018	1.003
$64 \times 64$	4.160	1.511	1.018	1.003
REF. [70]	4.079	1.512	1.021	1.005

Tableau 6.4 – Déplacement vertical au point C de la plaque carrée composite à neuf couches simplement appuyée.

## 6.3 Analyse de la convergence en utilisant la s-norme

Nous proposons dans cette partie de d'étudier la convergence de l'élément DKMQ pour les plaques composites en utilisant la s-norme [37, 28, 8], qui a été présentée en détails au chapitre 4.

### 6.3.1 Plaque carrée sandwich simplement appuyée sous chargement uniforme

Reprenons le cas test qui a déjà été étudié précédemment dans ce chapitre. Nous conservons les mêmes caractéristiques géométriques et les mêmes propriétés des matériaux composites. Les maillages uniformes  $N \times N = 4 \times 4, 8 \times 8, 16 \times 16$  et  $32 \times 32$  sont considérés, ainsi que plusieurs épaisseurs relatives  $t/L = 1/10, 1/100, 1/1000, 1/10000$ .

En utilisant les résultats obtenus pour le maillage  $N \times N = 64 \times 64$  comme solution de référence, les résultats de convergence obtenus avec la s-norme sont présentés sur la figure 6.9. Nous remarquons que la convergence de l'élément DKMQ varie entre une convergence linéaire et une convergence quadratique pour les rapports  $t/L$  étudiés.

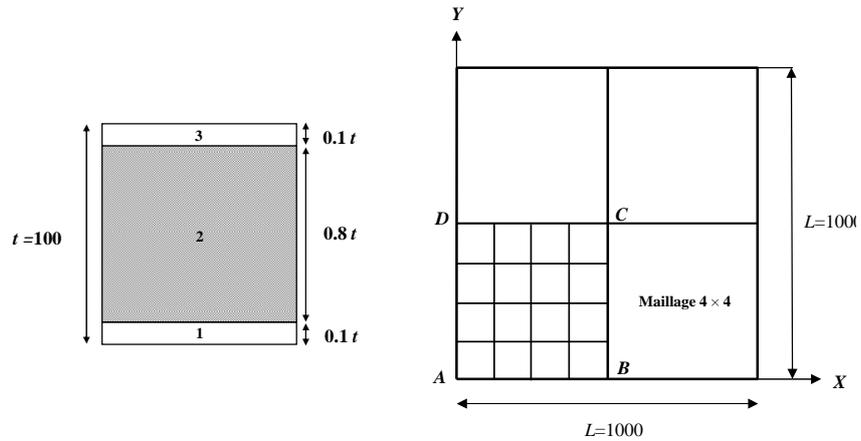


FIGURE 6.8 – Plaque carrée sandwich simplement appuyée (maillage uniforme).

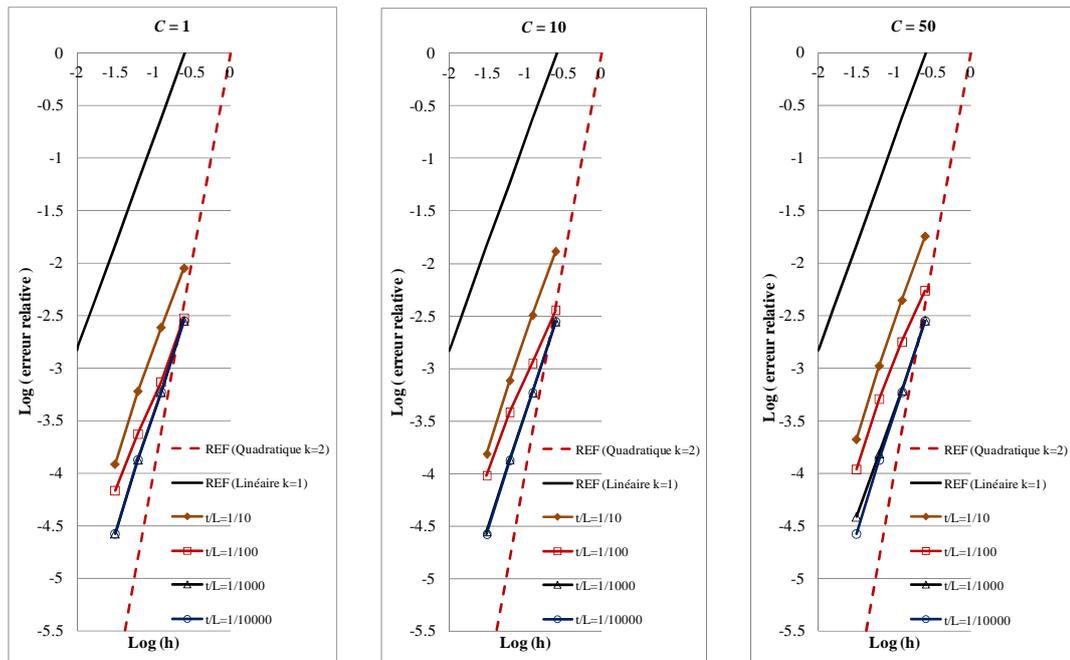


FIGURE 6.9 – Analyse de la convergence d’une plaque carrée sandwich simplement appuyée en utilisant la s-norme (maillage uniforme)

Ces résultats sont cohérents avec le degré d’interpolation utilisé par l’élément DKMQ. En effet, l’élément DKMQ utilise une fonction d’interpolation bilinéaire pour les déplacements et quadratique incomplète pour les rotations.

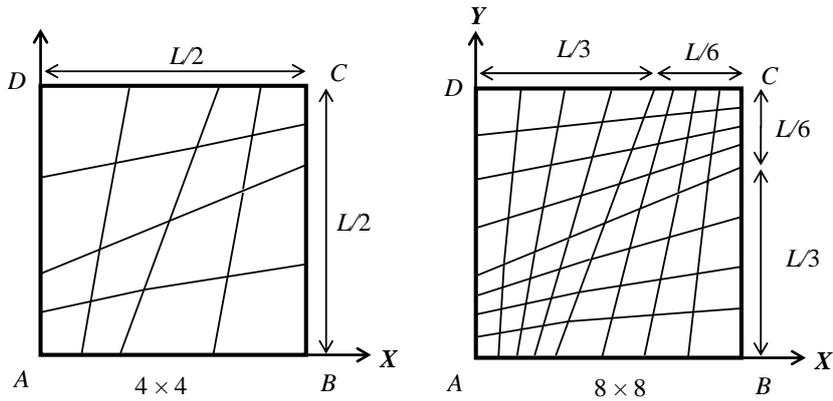


FIGURE 6.10 – Maillage avec distorsion géométrique

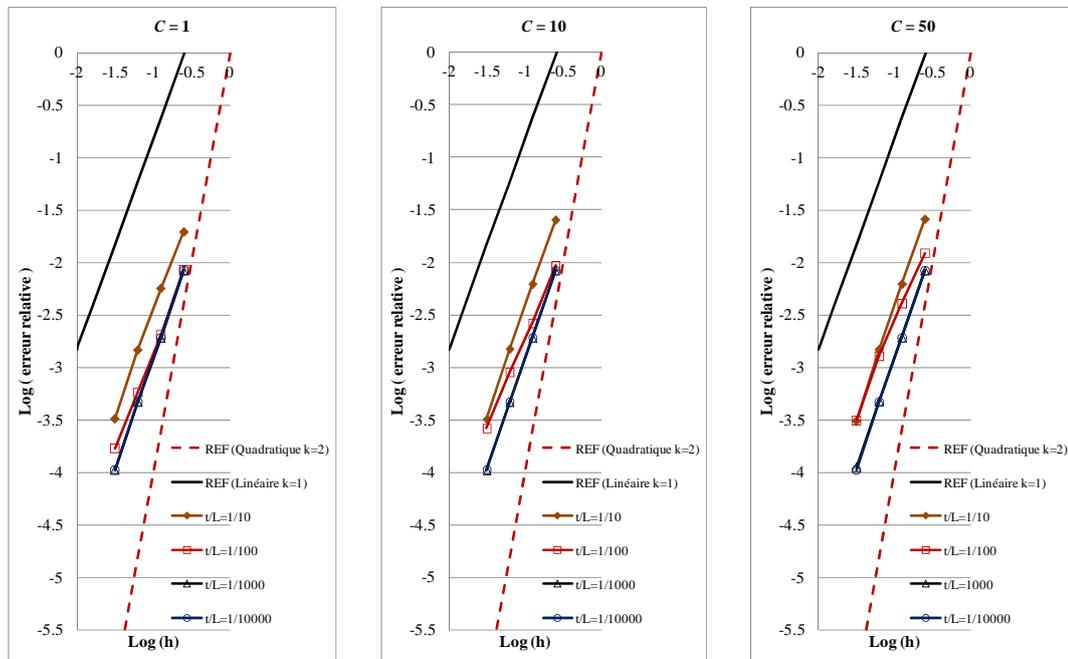


FIGURE 6.11 – Analyse de la convergence pour une plaque sandwich carrée simplement appuyée en utilisant la s-norme (maillage avec distorsion géométrique).

Reprenons maintenant l'analyse de la convergence de l'exemple précédent, mais en utilisant un maillage possédant une certaine distorsion géométrique (figure 6.10). Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 6.11. La solution de référence considérée est celle obtenue avec le maillage  $N \times N = 64 \times 64$ . Comme dans le cas du maillage

uniforme, la convergence varie entre un comportement linéaire et un comportement quadratique. Ces résultats montrent que l'élément DKMQ n'est pas sensible à la distorsion géométrique. De plus, on constate que la convergence de l'élément DKMQ pour les plaques composites est uniforme (elle ne dépend pas de l'épaisseur) et optimale (elle est en cohérence avec l'ordre d'interpolation utilisée).

### 6.3.2 Plaque carrée composite multi-couches sous chargement doublement sinusoïdal

Comme second exemple, nous proposons de considérer une plaque carrée composite à trois couches puis à neuf couches simplement appuyée (figure 6.12). Ce cas test a été proposé par Pagano et Hatfield [70] et déjà étudié aux sections 6.2.2 et 6.2.3.

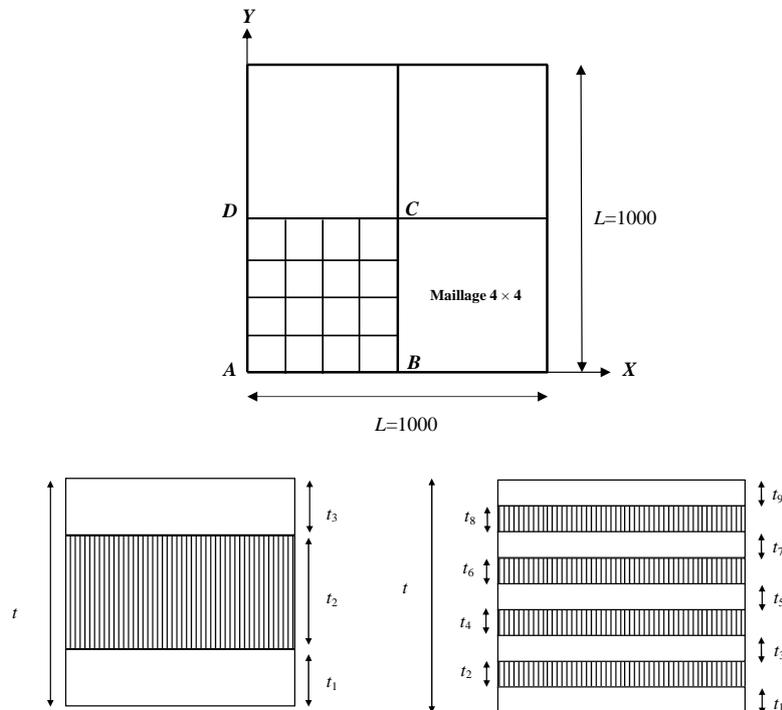


FIGURE 6.12 – Plaque carrée composite à trois couches et à neuf couches simplement appuyée.

La convergence de la solution, calculée, avec l'élément DKMQ, est analysée avec les mêmes maillages et pour les mêmes épaisseurs relatives que dans l'exemple précédent. Les résultats obtenus sont représentés sur la figure 6.13, en utilisant comme solution de référence celle obtenue pour le maillage  $N \times N = 64 \times 64$ . Les résultats obtenus sont similaires quelque soit le nombre de couches. La convergence varie entre un

comportement linéaire et un comportement quadratique. Encore une fois, l'élément DKMQ donne des résultats de convergence qui sont optimaux et uniformes.

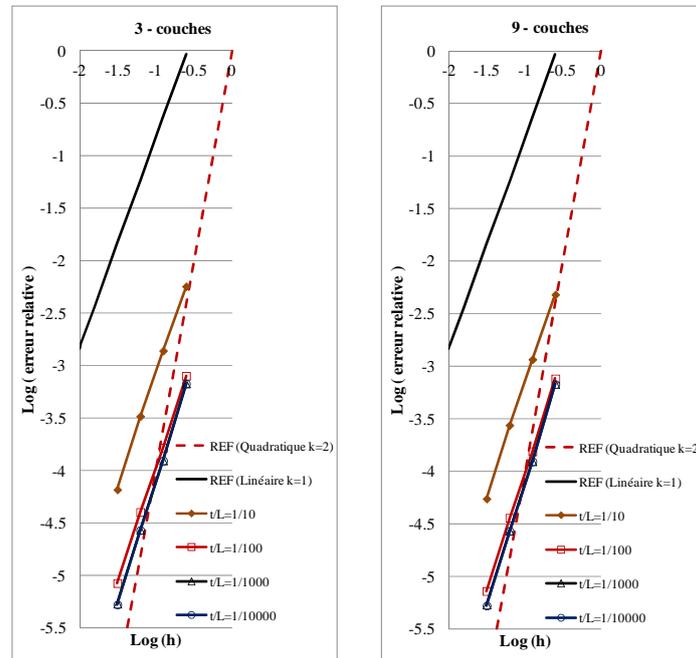


FIGURE 6.13 – Etude de la convergence d'une plaque carrée composite à trois couches et à neuf couches simplement appuyée en utilisant la s-norme.

## 6.4 Analyse d'erreur d'une plaque carrée sandwich simplement appuyée sous chargement uniforme

Pour terminer cette étude sur les plaques composites avec l'élément DKMQ, nous proposons d'effectuer une analyse d'erreur dans le cas d'une plaque sandwich carrée simplement appuyée, soumise à un chargement uniforme, en utilisant l'estimateur d'erreur  $Z^2$ .

La plaque sandwich considérée est représentée sur la figure 6.14. Nous considérons ici les mêmes caractéristiques géométriques et les mêmes propriétés mécaniques des couches qu'à la section 6.2.1. Les facteurs de corrections de cisailment considérés, qui dépendent des valeurs de  $\mathbf{C}$  choisies, sont également identiques à eux considérés à la section 6.2.1.

L'analyse d'erreur est effectuée en considérant les maillages uniformes  $N \times N =$

$4 \times 4$ ,  $8 \times 8$ ,  $16 \times 16$  et  $32 \times 32$ . Les techniques de recouvrement de la moyenne, de projection, ainsi que la technique SPR sont utilisées pour améliorer les résultats des éléments finis. Elles ont été déjà présentées au chapitre 3.

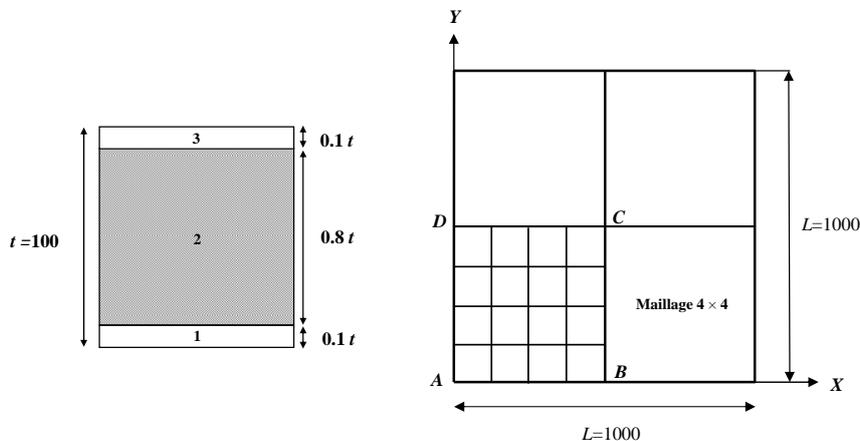


FIGURE 6.14 – Plaque carrée sandwich simplement appuyée considérée ( $E_L = 3.4156MPa$  ;  $E_T = 1.7931MPa$  ;  $\nu_{LT} = 0.44$  ;  $G_{LT} = 1MPa$  ;  $G_{LZ} = 0.608MPa$  ;  $G_{TZ} = 1.015MPa$ ).

Les figures 6.15, 6.16 et 6.17 présentent les résultats obtenus pour l'indicateur d'erreur  $\phi^*$  pour  $\mathbf{C} = 1$ ,  $\mathbf{C} = 10$  et  $\mathbf{C} = 50$  respectivement. Toutes les techniques de recouvrement utilisées passent le seuil de  $\varepsilon_\phi^* = 5\%$  à partir du maillage  $N \times N = 8 \times 8$ , sauf pour la technique de la moyenne qui passe le seuil de  $\varepsilon_\phi^* = 5\%$  à partir du maillage  $N \times N = 4 \times 4$  dans le cas  $\mathbf{C} = 50$ . La technique de la moyenne permet d'obtenir une convergence plus rapide que les techniques de projection ou la technique SPR, même si les résultats obtenus sont identiques pour le maillage  $N \times N = 32 \times 32$ .

Pour finir, nous proposons de comparer les résultats obtenus pour la contrainte au point  $C$  dans la direction  $x$ , notée  $\sigma_{xc}$ . Les résultats sont donnés dans les tableaux 6.5 à 6.7 pour la contrainte adimensionnelle

$$\underline{\sigma}_{xc} = \frac{\sigma_{xc}}{f_z} \quad (6.18)$$

en considérant la technique de recouvrement et en utilisant le maillage  $N \times N = 32 \times 32$ . Les résultats donnés par Srinivas [88] sont considérés comme valeur de référence.

Le tableau 6.5 compare les valeurs de  $\sigma_{xc}$  obtenues avec les différentes techniques de recouvrement pour  $\mathbf{C} = 1$ , correspondant au cas orthotrope. Nous constatons que la technique SPR donne le meilleur résultat qui est très proche de la valeur de référence. D'autre part, on peut vérifier la continuité de la contrainte à la traversée des couches, pour  $\mathbf{C} = 1$ .

Pour  $C = 10$ , les résultats sont présentés dans le tableau 6.6. Dans ce cas, la technique de la moyenne donne de meilleurs résultats que la technique SPR ou que la technique de projection utilisée. Enfin, on observe que les erreurs deviennent plus importantes dans le cas  $C = 50$ .

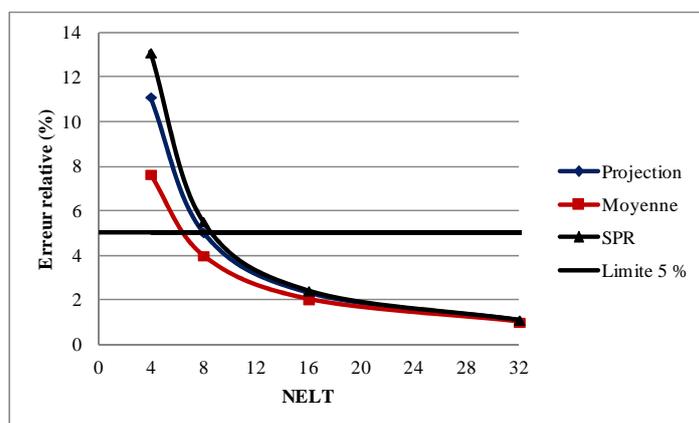


FIGURE 6.15 – Indicateur d'erreur relative  $\phi^*$   $C = 1$

Méthodes	$\underline{\sigma}_{xc}(-2t^+/5)$	erreur(%)	$\underline{\sigma}_{xc}(-2t^-/5)$	erreur(%)	$\underline{\sigma}_{xc}(-t/2)$	erreur(%)
Projection	28.095	1.575	28.095	1.575	35.119	2.284
Moyenne	28.350	0.684	28.350	0.684	35.437	1.399
SPR	28.642	0.340	28.642	0.340	35.803	0.382
REF.[88]	28.545		28.545		35.940	

Tableau 6.5 – Comparaison des valeurs de  $\sigma_{xc}$  obtenues avec les différentes techniques de recouvrement pour  $C = 1$

Méthodes	$\underline{\sigma}_{xc}(-2t^+/5)$	erreur(%)	$\underline{\sigma}_{xc}(-2t^-/5)$	erreur(%)	$\underline{\sigma}_{xc}(-t/2)$	erreur(%)
Projection	4.992	2.722	49.923	2.701	62.404	4.113
Moyenne	5.038	3.663	50.380	3.642	62.976	3.234
SPR	5.104	5.017	51.038	4.995	63.798	1.970
REF.[88]	4.860		48.610		65.080	

Tableau 6.6 – Comparaison des valeurs de  $\sigma_{xc}$  obtenues avec les différentes techniques de recouvrement pour  $C = 10$

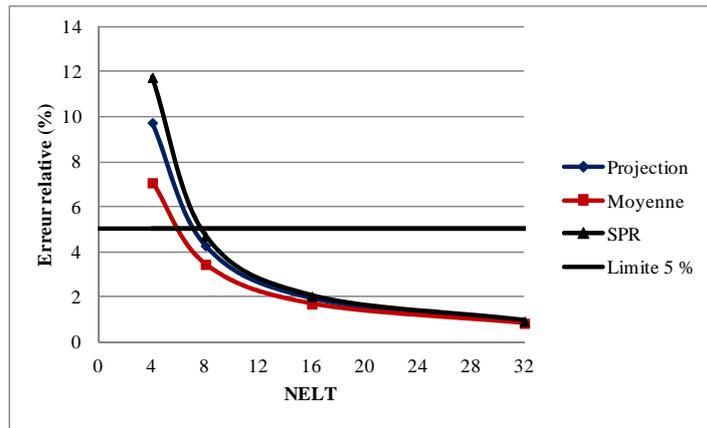


FIGURE 6.16 – Indicateur d'erreur relative  $\phi^*$   $C = 10$

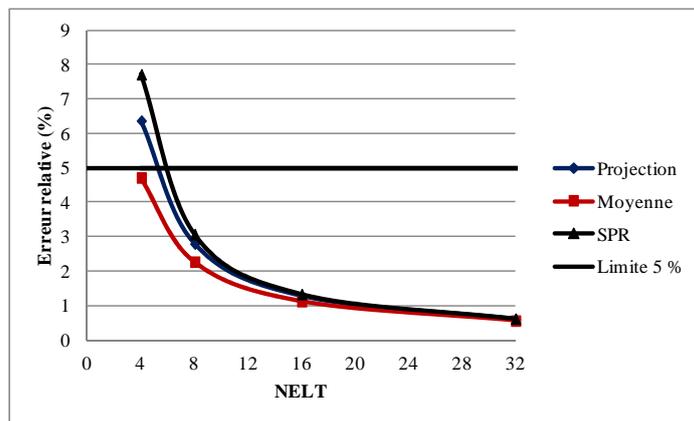


FIGURE 6.17 – Indicateur d'erreur relative  $\phi^*$   $C = 50$

Méthodes	$\underline{\sigma}_{xc}(-2t^+/5)$	erreur(%)	$\underline{\sigma}_{xc}(-2t^-/5)$	erreur(%)	$\underline{\sigma}_{xc}(-t/2)$	erreur(%)
Projection	0.925	24.973	46.240	24.468	57.800	13.603
Moyenne	0.934	26.259	46.716	25.749	58.395	12.713
SPR	0.947	28.032	47.372	27.515	59.215	11.488
REF.[88]	0.740		37.150		66.900	

Tableau 6.7 – Comparaison des valeurs de  $\sigma_{xc}$  obtenues avec les différentes techniques de recouvrement pour  $C = 50$

## 6.5 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons proposé d'étendre l'élément fini de plaque DKMQ au cas des plaques composites. La formulation utilisée a été validée sur des benchmarks existants dans la littérature. L'élément DKMQ permet d'obtenir des résultats précis avec des temps de calcul relativement faibles et une bonne convergence dans le cas des plaques composites, sur les exemples qui ont été étudiés.

Le test de la  $s$ -norme qui a été utilisé a mis en évidence une convergence optimale et uniforme de l'élément DKMQ dans le cas des plaques composites. L'analyse d'erreur effectuée a également donné de bons résultats, témoignant des bonnes performances de l'élément DKMQ pour les structures de type plaques composites.



# Chapitre 7

## Conclusions et Perspectives

### 7.1 Conclusions

Dans la première partie de cette thèse, nous nous sommes focalisés sur l'étude complète et exhaustive de l'élément fini DKMQ, construit sur une formulation mixte du modèle de Mindlin-Reissner, développé initialement par Katili [43] pour les plaques. Cet élément DKMQ a été tout d'abord validé sur un nombre important de cas tests existants dans la littérature, soulignant ainsi sa robustesse et de bonnes propriétés de convergence. Nous avons également analysé la capacité de l'élément proposé à satisfaire la condition inf-sup associée à la formulation mixte utilisée. A la vue des résultats obtenus, l'élément DKMQ satisfait sur les configurations traitées la condition inf-sup. Il n'est pas sensible au problème de verouillage numérique, comme c'est le cas pour la plupart des autres éléments. Enfin, l'analyse d'erreur a posteriori qui a été effectuée, en utilisant l'estimateur d'erreur  $Z^2$  associé aux techniques de recouvrement de la moyenne, de projection ou encore SPR, a donné des résultats très satisfaisants.

Dans la seconde partie de cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'extension de l'élément DKMQ pour les coques minces et épaisses. Ce nouvel élément, appelé DKMQ24 est basé sur une formulation mixte du modèle de Naghdi. C'est un élément quadrilatère à 4 noeuds et 24 degrés de liberté, qui permet de prendre en compte les effets de cisaillement transversal. Il a passé avec succès les benchmarks tests classiques existant dans la littérature. Il présente de bonnes propriétés de convergence, aussi bien dans des situations où les effets de flexion sont dominants, que dans des situations où les effets de membrane dominant. L'application de la condition inf-sup dans le cas des coques est plus délicate car les coefficients intervenant dans le modèle de coque dépendant de la surface moyenne. Aussi, un autre critère proposé dans [37, 28, 8], intitulé test de  $s$  - norme, a été utilisé. L'élément DKMQ24 s'est révélé performant pour ce test. Finalement, l'analyse d'erreur effectuée, en utilisant les mêmes techniques et les mêmes critères d'évaluation que dans le cas des plaques pour l'élément DKMQ, a donné de bons résultats. Ainsi, les éléments DKMQ et DKMQ24 ont donné des résultats comparables, parfois même meilleurs dans certains cas, que les éléments finis MITC-plaque ou MITC-coque, tout en étant plus aisés à mettre en

œuvre.

Dans la troisième partie de ce travail, nous avons présenté une application de l'élément DKMQ24 pour les poutres à parois mince à section ouverte. Les résultats obtenus ont été comparés avec ceux de l'élément Q4 $\gamma$ 24, ainsi qu'avec la solution analytique de Vlassov. Les deux éléments ont donné des résultats similaires, avec une bonne vitesse de convergence vers la valeur de référence. Cela prouve l'efficacité de l'élément DKMQ24 dans tous les cas testés. Les résultats obtenus ont également permis de clarifier le choix de la valeur de la rigidité à la torsion  $J_d$  de Vlassov [92], qui dépend d'un coefficient empirique  $a$ .

Enfin, dans le dernier chapitre de cette thèse, nous avons présenté une extension de l'élément de plaque DKMQ au cas des plaques composites. Là encore, dans tous les cas testés, l'élément DKMQ a donné des résultats très satisfaisants, aussi bien au niveau de la précision des calculs qu'au niveau de la vitesse de convergence.

## 7.2 Perspectives

Pour la suite de ce travail, il nous semble d'abord important de reformuler l'élément DKMQ et son extension pour les coques dans un cadre fonctionnel plus clair permettant d'exhiber l'opérateur de projection qui le rend "non verrouillant" en cisaillement. Cela permettra dans le cas des plaques de donner une preuve théorique de la vérification de la condition inf-sup, sans se contenter de la validation de type "expérience numérique". L'extension de la preuve dans le cas des coques peut s'avérer délicate pour une coques quelconques. Mais on pourrait obtenir des résultats pour une classe de surfaces moyennes (par exemple dans le cas d'une surface cylindrique).

Nous souhaitons dans un deuxième temps, utiliser l'élément proposé pour étudier les problèmes de vibrations linéaires.

L'extension aux problèmes non linéaires peut être envisagée assez rapidement. L'étude des problèmes des bifurcations et des instabilités sera assez discriminant pour confronter ou remettre en cause la pertinence de l'élément DKMQ.

Enfin, nous souhaitons intégrer cet élément dans la résolution des problèmes d'interaction fluide-structure qui représentent un enjeu important dans différents domaines d'applications.

## **Annexe A**

# **Analytical and Experimental Analysis of an Asymptotic thin-walled beam model**

This article was downloaded by: [University of La Rochelle]

On: 09 October 2013, At: 06:31

Publisher: Taylor & Francis

Informa Ltd Registered in England and Wales Registered Number: 1072954 Registered office: Mortimer House, 37-41 Mortimer Street, London W1T 3JH, UK



## European Journal of Environmental and Civil Engineering

Publication details, including instructions for authors and subscription information:

<http://www.tandfonline.com/loi/tece20>

### Analytical and experimental analysis of an asymptotic thin-walled beam model

A. Hamdouni<sup>a</sup>, I. Katili<sup>b</sup>, I.J. Maknun<sup>b</sup> & O. Millet<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Laboratoire des Sciences de l'Ingénieur pour l'Environnement FRE-CNRS 3474, Université de La Rochelle, France

<sup>b</sup> Civil Engineering Department of the Universitas Indonesia  
Published online: 22 Oct 2012.

To cite this article: A. Hamdouni, I. Katili, I.J. Maknun & O. Millet (2013) Analytical and experimental analysis of an asymptotic thin-walled beam model, *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 17:1, 1-18, DOI: [10.1080/19648189.2012.699705](https://doi.org/10.1080/19648189.2012.699705)

To link to this article: <http://dx.doi.org/10.1080/19648189.2012.699705>

PLEASE SCROLL DOWN FOR ARTICLE

Taylor & Francis makes every effort to ensure the accuracy of all the information (the "Content") contained in the publications on our platform. However, Taylor & Francis, our agents, and our licensors make no representations or warranties whatsoever as to the accuracy, completeness, or suitability for any purpose of the Content. Any opinions and views expressed in this publication are the opinions and views of the authors, and are not the views of or endorsed by Taylor & Francis. The accuracy of the Content should not be relied upon and should be independently verified with primary sources of information. Taylor and Francis shall not be liable for any losses, actions, claims, proceedings, demands, costs, expenses, damages, and other liabilities whatsoever or howsoever caused arising directly or indirectly in connection with, in relation to or arising out of the use of the Content.

This article may be used for research, teaching, and private study purposes. Any substantial or systematic reproduction, redistribution, reselling, loan, sub-licensing, systematic supply, or distribution in any form to anyone is expressly forbidden. Terms & Conditions of access and use can be found at <http://www.tandfonline.com/page/terms-and-conditions>

## Analytical and experimental analysis of an asymptotic thin-walled beam model

A. Hamdouni<sup>a</sup>, I. Katili<sup>b</sup>, I.J. Maknun<sup>b</sup> and O. Millet<sup>a\*</sup>

<sup>a</sup>Laboratoire des Sciences de l'Ingénieur pour l'Environnement FRE-CNRS 3474, Université de La Rochelle, France; <sup>b</sup>Civil Engineering Department of the Universitas Indonesia

(Received 24 December 2011; final version received 6 May 2012)

In this paper, we present the study of an asymptotic linear one-dimensional model for thin-walled beams with open strongly curved cross-section, which is different from the classical Vlassov model. After recalling the main steps of the asymptotic procedure leading to the equilibrium equations of the thin-walled beam model, an analytical resolution of the twist equation is performed. Then comparisons with experimental measurements and with the Vlassov model are carried out. The relevance of the asymptotic thin-walled beam model presented is put in a prominent position.

**Keywords:** thin-walled beam model; linear elasticity; asymptotic methods; experimental analysis; analytical solution

### 1. Introduction

Thin and thin-walled structures, in particular thin-walled beams, are widely used in civil engineering constructions because they provide a maximum of stiffness with a minimum of weight. Asymptotic methods enable rigorous deduction of plate, shell and beam models from the three-dimensional equations without making any a priori assumption. In linear plate and shell theory, since the pioneering work of Goldenveizer (1963), there has existed a large amount of literature on the subject (Ciarlet & Destuynder, 1979; Destuynder, 1985; Sanchez-Hubert & Sanchez-Palencia, 1997; Sanchez-Palencia, 1989a, b, 1990). In linear theory of beams, the first works on the subject are due to Rigolot (1977). More recently, other justifications of linear and non-linear beam models by asymptotic expansion have been developed in Cimetière, Geymonat, Le Dret, Raoult, and Tutek (1988), Madani (1998), Marigo, Ghidouche and Sedkaoui (1998), Marigo and Madani (1998), Sanchez-Hubert and Sanchez-Palencia (1999), and Trabucho and Viaño (1989, 1990, 1996). These results then were extended to thin-walled beams. The approach used is based on the asymptotic behaviour of the Poisson equation in a thin domain when the thickness tends towards zero (Rodriguez & Viaño, 1995a,b; Trabucho & Viaño, 1996). This way, Rodriguez and Viaño (1997) have justified a linear elastic model for a thin-walled beam by an asymptotic method similar to that of Vlassov. Their approach is based on an expansion at the second order of the equations with respect to the diameter  $\varepsilon$  and then the relative thickness  $\eta$  is assumed to tend towards zero. These

---

\*Corresponding author. Email: [olivier.millet@univ-lr.fr](mailto:olivier.millet@univ-lr.fr)

two operations do not a priori commute and the result depends on the choice made (Caillerie, 1984; Geymonat, 1987; Hamdouni & Millet, 2011; Lewinski, 1991).

To build models of thin-walled beams with strongly curved profile, we proposed in Hamdouni and Millet (2011) a constructive asymptotic approach, already developed by the authors for plates (Millet, Cimetière, & Hamdouni, 2003; Millet, Hamdouni, & Cimetière, 1997a, 1997b, 1997c, 1998a, 1998b, 2001, 2003), shells (Elamri, Hamdouni, & Millet, 1999; Hamdouni & Millet, 2003a, 2003b) and thin-walled beams (Grillet, Hamdouni, & Millet, 2004, 2005; Hamdouni & Millet, 2006). The one-dimensional model obtained is different from the Vlassov model. Even if the kinematics, the one-dimensional traction and twist equilibrium equations obtained in Hamdouni and Millet (2011) are similar to the Vlassov ones (Vlassov, 1962), the one-dimensional bending equations differ. They involve a supplementary term coupling bending and torsion effects, whereas they are uncoupled in the Vlassov model. Moreover, with the asymptotic approach developed, we obtain a general analytical expression of the twist rigidity  $J_{\omega d}$ , whereas Vlassov only gives an empirical value depending on the profile.

The work presented in this paper is a continuation of Hamdouni and Millet (2011) and focuses on improving the identification of the torsional rigidity of a thin-walled beam with open cross-section. The theoretical calibration of the twist rigidity coefficient, based only on geometrical data and on elastic properties of the thin-walled beam, may find applications in numerous areas, in particular for civil engineering problems containing thin-walled beam concrete elements (Belletti, 2009; Foure & Hannachi, 1999). After recalling the notations and the main steps leading to the asymptotic one-dimensional model detailed in Hamdouni and Millet (2011) (Section 2), we construct an analytical solution for a particular configuration (Section 3). Sections 4 and 5 are devoted to experimental measurements of the twist angle for three profiles in different configurations. The results obtained are compared with the analytical solution given by our model and by that of Vlassov. The relevance of our asymptotic thin-walled beam model is put in a prominent position.

## 2. Asymptotic thin-walled model

### 2.1. Notations and three-dimensional problem

We assume once and for all that an origin  $O$  and an orthonormal basis  $(e_1, e_2, e_3)$  have been chosen in  $\mathbb{R}^3$ . We index by a star (\*) all dimensional variables and the variables without a star will denote dimensionless ones. Let  $\omega^*$  be an open cylindrical surface of  $\mathbb{R}^3$ ,  $(Oe_3)$  its axis, whose length is  $L$  and diameter  $d$ . We note  $\gamma_g^*$  and  $\gamma_d^*$  its lateral boundary,  $\gamma_1^* = \omega^* \times \{0\}$  and  $\gamma_2^* = \omega^* \times \{L\}$  its extremities.

Let us consider now a thin-walled beam with open cross-section and  $2h$  thickness, whose middle surface is  $\omega^*$ . The thin-walled beam occupies the set  $\overline{\Omega}^* = \overline{\omega}^* \times [-h, h]$  of  $\mathbb{R}^3$  in its reference configuration. We call  $\Gamma_1^* = \gamma_1^* \times ]-h, h[$  and  $\Gamma_2^* = \gamma_2^* \times ]-h, h[$  the extreme faces,  $\Gamma_g^* = \gamma_g^* \times ]-h, h[$  and  $\Gamma_d^* = \gamma_d^* \times ]-h, h[$  the lateral faces,  $\Gamma_{\pm}^* = \omega^* \times \{\pm h\}$  the upper and lower faces.

Let  $M^*$  be a generic point of the beam. We decompose the vector  $\overrightarrow{OM^*}$  as follows:

$$\overrightarrow{OM^*} = x_3^* e_3 + \overrightarrow{G^* C^*} + \overrightarrow{C^* m^*} + r^* n, \quad (1)$$

where  $x_3^*$  is the coordinate of the current cross-section containing  $M^*$  on the axis  $(0x_3^*)$ ,  $G^*$  is the point of intersection between the axis  $(0x_3^*)$  and the current cross-section,

$C^*$  is an arbitrary chosen point in the plane of the cross-section (see Figure 1) located by its cartesian coordinates  $(x_1^{c^*}, x_2^{c^*})$ , and  $r^*$  is the thickness variable. We call  $C^*$  the intersection curve between  $\omega^*$  and the cross-section. The orthogonal projection  $m^*$  of  $M^*$  on the middle surface is located by its cartesian coordinates  $x^* = (x_1^*, x_2^*)$  or by its curvilinear abscissa  $s^*$  along  $C^*$ . The origin  $s_0^*$  of the curvilinear abscissa is an arbitrary chosen point of  $C^*$ . We note  $n$  the unit normal and  $t$  the unit tangent vector of  $C^*$ . Moreover, we call  $l^*$  and  $q^*$  the coordinates of the vector  $\overrightarrow{C^*m^*}$  in the basis  $(t, n)$ . Finally, we call  $\alpha^*$  the angle  $(e_1, t)$  and  $c^*$  the curvature of the curve  $C^*$  (Figure 1).

In what follows, we consider only thin-walled beams such as  $d/L \ll 1, h/d \ll 1$  and  $h\|c^*\|_\infty \ll 1$ . We assume that the beam is subjected to the applied body forces  $f^* = f_t^*t + f_n^*n + f_3^*e_3 : \bar{\Omega}^* \rightarrow \mathbb{R}^3$  and to the applied surface forces  $g^{*\pm} = g_t^{*\pm}t + g_n^{*\pm}n + g_3^{*\pm}e_3 : \bar{\Gamma}_{0\pm}^* \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Moreover, the beam is assumed to be clamped on its extremities  $\Gamma_1^*$  and  $\Gamma_2^*$ , and free on its lateral faces  $\Gamma_g^*$  and  $\Gamma_d^*$ . The unknown of the problem is then the displacement  $U^* : \bar{\Omega}^* \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Within the framework of linear elasticity, the displacement  $U^*$  and the Cauchy stress tensor  $\sigma^*$  satisfy the linear equilibrium equations and the constitutive law of the Hookean material.

We decompose  $U^*$  in the Frenet basis  $(t, n, e_3)$  of the initial configuration:

$$U^* = u_t^*t + u_n^*n + u_3^*e_3. \tag{2}$$

The three-dimensional equilibrium equations can be decomposed in the basis  $(t, n, e_3)$  and written in  $\Omega^*$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{tn}^*}{\partial r^*} + k^* \left( \frac{\partial \sigma_{tt}^*}{\partial s^*} - 2c^* \sigma_{tn}^* \right) + \frac{\partial \sigma_{t3}^*}{\partial x_3^*} = -f_t^*, \\ \frac{\partial \sigma_{nn}^*}{\partial r^*} + k^* \left( \frac{\partial \sigma_{nn}^*}{\partial s^*} + c^* \sigma_{tt}^* - c^* \sigma_{nn}^* \right) + \frac{\partial \sigma_{n3}^*}{\partial x_3^*} = -f_n^*, \\ \frac{\partial \sigma_{n3}^*}{\partial r^*} + k^* \left( \frac{\partial \sigma_{t3}^*}{\partial s^*} - c^* \sigma_{n3}^* \right) + \frac{\partial \sigma_{33}^*}{\partial x_3^*} = -f_3^* \end{cases}$$

with  $k^* = (1 - r^*c^*)^{-1}$ .

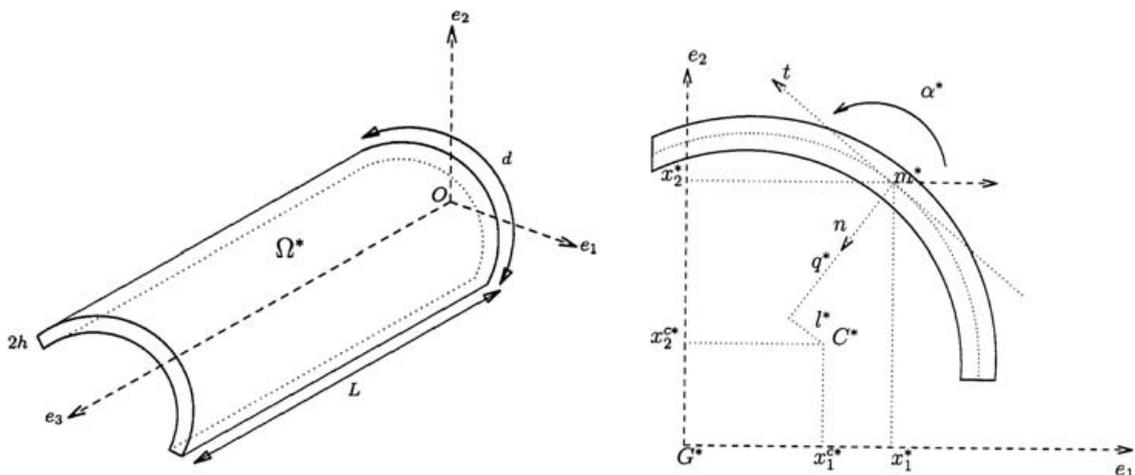


Figure 1. Scheme of the beam and of the profile in the plane of a section.

The associated boundary conditions are given by:

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha n}^* = g_{\alpha}^{\pm*} & \text{on } \Gamma_{\pm}^* \quad (\text{on the upper and lower faces}), \\ \sigma_{t\alpha}^* = 0 & \text{on } \Gamma_{g,d}^* \quad (\text{on the lateral extremities}). \end{cases}$$

with  $\alpha \in \{t, n, 3\}$ .

It is important to notice that a boundary layer with respect to the shear stress  $\sigma_{t3}^*$  appears on the free lateral extremities. This is a classical phenomenon in plate and shell theory. In order to avoid this boundary layer which is not the subject of this paper, we relax the boundary conditions on  $\Gamma_{g,d}^*$  as follows:

$$\int_{-h}^h \sigma_{t3}^* dr = 0.$$

## 2.2. Dimensionless equilibrium equations

### 2.2.1. Dimensionless numbers

Let us define the following dimensionless physical data and dimensionless unknowns of the problem (see Hamdouni and Millet (2011) for more details):

$$u_{\alpha} = \frac{u_{\alpha}^*}{u_{\alpha r}^*}, \quad \zeta = \text{diag} \left( \frac{1}{d}, \frac{1}{h}, \frac{1}{L} \right) \zeta^*, \quad c = \frac{c^*}{c_r}, \quad f_{\alpha} = \frac{f_{\alpha}^*}{f_{\alpha r}^*}, \quad g_{\alpha} = \frac{g_{\alpha}^*}{g_{\alpha r}^*},$$

where the variables indexed by  $(r)$  are the reference ones,  $\alpha \in \{t, n, 3\}$  and  $\zeta^* = (s^*, r^*, x_3^*)^T$ . The new variables which appear (without a star) are dimensionless. To avoid any assumption on the order of magnitude of the displacement components, the reference scales  $u_{\alpha r}^*$  are firstly assumed to be equal to  $h$ . Thus we a priori allow small displacements in the framework of the theory of linear elasticity. We introduce also  $c_r = \|c^*\|_{\infty}$  which denotes the maximum of curvature (the smaller radius of curvature) of the middle surface  $\omega^*$ . As in shell theory, the order of magnitude of the curvature is a fundamental datum in the asymptotic expansion of equations. Here we consider beams with strongly curved profile.

The dimensional analysis naturally lets the following dimensional numbers characterizing the thin-walled beam problems in linear elasticity appear:

$$\varepsilon = \frac{d}{L}, \quad \eta = \frac{h}{d}, \quad \nu = hc_r, \quad \mathcal{F}_{\alpha} = \frac{hf_{\alpha r}^*}{\mu}, \quad \mathcal{G}_{\alpha} = \frac{g_{\alpha r}^*}{\mu},$$

where  $\mu$  is the Lamé constant of the material. Their physical interpretation is as given below.

(1) Small geometric parameters

- $\varepsilon$  characterizes the shape ratio (the inverse of the shooting-pain) of the beam.
- $\eta$  is the ratio of the beam thickness  $h$  to the length of the profile. For thin-walled beams,  $\eta = \varepsilon$ .

- $\nu = hc_r$  is the ratio of the thickness to the smaller radius of curvature of the middle surface  $\omega$  of the beam. Here we consider beams with strongly curved profile for which  $\nu = \varepsilon$ .

(2) Dimensionless numbers characteristic of applied loads

The force ratios  $\mathcal{F}_\alpha, \mathcal{G}_\alpha$  ( $\alpha \in \{t, n, 3\}$ ) represent respectively the ratio of the resultant on the thickness of the body forces (respectively of the surface forces) to  $\mu$  considered as a reference stress. These numbers only depend on known physical quantities and must be considered as known data of the problem. Here  $\mathcal{F}_\beta = \mathcal{G}_\beta = \varepsilon^6$  for  $\beta = t$  or  $n$  and  $\mathcal{F}_3 = \mathcal{G}_3 = \varepsilon^5$ . These force ratios characterize the level of applied forces considered, in order for all kinds of loading to be involved at the same order in the asymptotic one-dimensional equilibrium equations.

2.2.2. Dimensionless equilibrium equations

Let us consider a thin-walled beam with a strongly curved profile corresponding to  $\nu = \varepsilon$ , submitted to force levels such as  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_n = \varepsilon^6, \mathcal{G}_t = \mathcal{G}_n = \varepsilon^6$  and  $\mathcal{F}_3 = \mathcal{G}_3 = \varepsilon^5$ . The problem now reduces to the following one-scale problem in  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_m}{\partial r} + \varepsilon(1 - \varepsilon rc)^{-1} \left( \frac{\partial \sigma_{tt}}{\partial s} - 2c\sigma_m \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial \sigma_{t3}}{\partial x_3} &= -\varepsilon^6 f_t, \\ \frac{\partial \sigma_{nn}}{\partial r} + (1 - \varepsilon rc)^{-1} \left( \frac{\partial \sigma_{nn}}{\partial s} + c\sigma_{tt} - c\sigma_{nn} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial \sigma_{n3}}{\partial x_3} &= -\varepsilon^6 f_n, \\ \frac{\partial \sigma_{n3}}{\partial r} + \varepsilon(1 - \varepsilon rc)^{-1} \left( \frac{\partial \sigma_{t3}}{\partial s} - c\sigma_{n3} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} &= -\varepsilon^5 f_3. \end{aligned} \tag{3}$$

The boundary conditions on the upper and lower faces become on  $\Gamma_\pm$  (for  $r = \pm 1$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \varepsilon^6 g_t^\pm, \\ \sigma_{nn} &= \varepsilon^6 g_n^\pm, \\ \sigma_{n3} &= \varepsilon^5 g_3^\pm. \end{aligned} \tag{4}$$

The boundary conditions on the lateral surface  $\Gamma_{g,d}$  (for  $s = s_g$  and  $s = s_+$ ) reduce to:

$$\begin{aligned} \sigma_{tt} &= 0, \\ \sigma_m &= 0, \\ \int_{-1}^1 \sigma_{t3} dr &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

with

$$(1 - \varepsilon rc)^{-1} = 1 + \varepsilon rc + (\varepsilon rc)^2 + \dots$$

### 2.3. Asymptotic model

The standard asymptotic technique proceeds as follows. First we postulate that the solution  $U = (u_t, u_n, u_3)$  of the problem admits a formal expansion with respect to the powers of  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} u_t &= u_t^0 + \varepsilon u_t^1 + \varepsilon^2 u_t^2 + \dots, \\ u_n &= u_n^0 + \varepsilon u_n^1 + \varepsilon^2 u_n^2 + \dots, \\ u_3 &= u_3^0 + \varepsilon u_3^1 + \varepsilon^2 u_3^2 + \dots. \end{aligned} \quad (6)$$

The expansion of  $U$  with respect to  $\varepsilon$  implies an expansion of the components of the stresses  $\sigma$  with respect to  $\varepsilon$  as well. Then we replace  $u_t, u_n, u_3$  by their expansions in equilibrium equations and we equate to zero the factor of the successive powers of  $\varepsilon$ . This way, we obtain a succession of coupled problems  $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots$  whose resolution leads to the search asymptotic one-dimensional model corresponding to the force levels considered.

According to the force levels considered  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_n = \varepsilon^6$ ,  $\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_n = \varepsilon^6$  and  $\mathcal{F}_3 = \mathcal{G}_3 = \varepsilon^5$ , we can prove that  $u_0^3 = 0$  (see Hamdouni & Millet, 2011). Thus, the dimensionless equilibrium equations must be written again with  $u_{3r} = \varepsilon h$  and  $u_{tr} = u_{nr} = h$  as reference scales. The dimensionless components of the displacement will still be noted with  $u_t, u_n$  and  $u_3$ . For the level forces considered here, the new dimensionless equilibrium equations are the same as (3). Only  $u_3$  must be changed into  $\varepsilon u_3$  in the new expressions of the components of the stresses. Then we assume again that there exists a formal expansion with respect to  $\varepsilon$ , similar to (6), of the new dimensionless solution  $(u_t, u_n, u_3)$ . The calculations detailed in Hamdouni and Millet (2011) lead to the following results.

#### 2.3.1. Vlassov kinematics

##### Result 1.

For applied force levels such as  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_n = \varepsilon^6$ ,  $\mathcal{F}_3 = \varepsilon^5$ ,  $\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_n = \varepsilon^6$  and  $\mathcal{G}_3 = \varepsilon^5$  the leading term  $(u_t^0, u_n^0, u_3^0)$  is a displacement of Vlassov type which satisfies:

$$\begin{cases} \tilde{u}_t^0 &= \bar{u}_1^c \cos(\alpha) + \bar{u}_2^c \sin(\alpha) - q(s)\bar{\Theta}^0, \\ \tilde{u}_n^0 &= -\bar{u}_1^c \sin(\alpha) + \bar{u}_2^c \cos(\alpha) + l(s)\bar{\Theta}^0, \\ \tilde{u}_3^0 &= \bar{u}_3 - x_1 \frac{d\bar{u}_1^c}{dx_3} - x_2 \frac{d\bar{u}_2^c}{dx_3} - \omega \frac{d\bar{\Theta}^0}{dx_3}, \end{cases}$$

where

- $\bar{u}_3$  denotes the axial or traction displacement.
- $\bar{u}_1^c$  and  $\bar{u}_2^c$  denote the tangential displacements of point C.
- $\bar{\Theta}^0$  denotes the angle of rotation around the axis  $(C, e_3)$ .
- $\omega$  is called the sectorial area defined as follows

$$\frac{d\omega}{ds} = -q.$$

2.3.2. Traction equation

**Result 2.**

For applied level forces such as  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_n = \varepsilon^6$ ,  $\mathcal{F}_3 = \varepsilon^5$ ,  $\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_n = \varepsilon^6$  and  $\mathcal{G}_3 = \varepsilon^5$ , the leading terms of the displacements  $\bar{u}_3$ ,  $\bar{\Theta}^0$ ,  $\bar{u}_1^c$  and  $\bar{u}_2^c$  satisfy the following traction equation:

$$ES \frac{d^2 \bar{u}_3}{dx_3^2} - ES_1 \frac{d^3 \bar{u}_1^c}{dx_3^3} - ES_2 \frac{d^3 \bar{u}_2^c}{dx_3^3} - ES_\omega \frac{d^3 \bar{\Theta}^0}{dx_3^3} = -\mu P_3,$$

where  $E$  and  $\mu$  are respectively the Young modulus and the Lamé coefficient of the material, and where:

$$\begin{aligned} S &= \int_{s_-}^{s_+} \int_{-1}^1 dr ds, & S_\omega &= \int_{s_-}^{s_+} \int_{-1}^1 \omega dr ds, \\ S_1 &= \int_{s_-}^{s_+} \int_{-1}^1 x_1 dr ds, & S_2 &= \int_{s_-}^{s_+} \int_{-1}^1 x_2 dr ds, \\ P_3 &= \int_{s_-}^{s_+} \int_{-1}^1 f_3 dr ds, + \int_{s_-}^{s_+} [g_3^+ - g_3^-] ds. \end{aligned}$$

2.3.3. Twist equation

**Result 3.**

For applied forces such as  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_n = \varepsilon^6$ ,  $\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_n = \varepsilon^6$  and  $\mathcal{F}_3 = \mathcal{G}_3 = \varepsilon^5$ , the leading terms of the displacement  $\bar{u}_3$ ,  $\bar{\Theta}^0$ ,  $\bar{u}_1^c$  and  $\bar{u}_2^c$  satisfy the following twist equation:

$$\frac{E}{\mu} S_\omega \frac{d^3 \bar{u}_3}{dx_3^3} - \frac{E}{\mu} J_{1\omega} \frac{d^4 \bar{u}_1^c}{dx_3^4} - \frac{E}{\mu} J_{2\omega} \frac{d^4 \bar{u}_2^c}{dx_3^4} - \frac{E}{\mu} J_{\omega\omega} \frac{d^4 \bar{\Theta}^0}{dx_3^4} + J_{\omega d} \frac{d^2 \bar{\Theta}^0}{dx_3^2} = -M_t - \frac{dM_3}{dx_3},$$

where

$$\begin{aligned} S_\omega &= \int_{s_-}^{s_+} \int_{-1}^1 \omega dr ds, & J_{\omega\omega} &= \int_{s_-}^{s_+} \int_{-1}^1 \omega^2 dr ds, \\ J_{1\omega} &= \int_{s_-}^{s_+} \int_{-1}^1 x_1 \omega dr ds, & J_{2\omega} &= \int_{s_-}^{s_+} \int_{-1}^1 x_2 \omega dr ds, \\ J_{\omega d} &= \int_{s_-}^{s_+} \int_{-1}^1 2r^2(1 - cq) dr ds \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} M_t &= \int_{s_-}^{s_+} \int_{-1}^1 l f_n dr ds + \int_{s_-}^{s_+} l [g_n^+ - g_n^-] ds - \int_{s_-}^{s_+} \int_{-1}^1 q f_t dr ds - \int_{s_-}^{s_+} q [g_t^+ - g_t^-] ds, \\ M_3 &= \int_{s_-}^{s_+} \int_{-1}^1 \omega f_3 dr ds + \int_{s_-}^{s_+} \omega [g_3^+ - g_3^-] ds. \end{aligned}$$

2.3.4. *Bending equations***Result 4.**

For force levels such as  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_n = \varepsilon^6$ ,  $\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_n = \varepsilon^6$  and  $\mathcal{F}_3 = \mathcal{G}_3 = \varepsilon^5$ , the leading terms of the displacements  $\bar{u}_3$ ,  $\bar{\Theta}^0$ ,  $\bar{u}_1^c$  and  $\bar{u}_2^c$  are solutions of the following bending equations:

$$\frac{E}{\mu} S_1 \frac{d^3 \bar{u}_3}{dx_3^3} - \frac{E}{\mu} J_{11} \frac{d^4 \bar{u}_1^c}{dx_3^4} - \frac{E}{\mu} J_{12} \frac{d^4 \bar{u}_2^c}{dx_3^4} - \frac{E}{\mu} J_{1\omega} \frac{d^4 \bar{\Theta}^0}{dx_3^4} + J_{1d} \frac{d^2 \bar{\Theta}^0}{dx_3^2} = -P_1 - \frac{dM_{31}}{dx_3},$$

$$\frac{E}{\mu} S_2 \frac{d^3 \bar{u}_3}{dx_3^3} - \frac{E}{\mu} J_{12} \frac{d^4 \bar{u}_1^c}{dx_3^4} - \frac{E}{\mu} J_{22} \frac{d^4 \bar{u}_2^c}{dx_3^4} - \frac{E}{\mu} J_{2\omega} \frac{d^4 \bar{\Theta}^0}{dx_3^4} + J_{2d} \frac{d^2 \bar{\Theta}^0}{dx_3^2} = -P_2 - \frac{dM_{32}}{dx_3},$$

where

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{s_-}^{s_+} \int_{-1}^1 x_1 \, dr \, ds, & S_2 &= \int_{s_-}^{s_+} \int_{-1}^1 x_2 \, dr \, ds, & J_{11} &= \int_{s_-}^{s_+} \int_{-1}^1 x_1^2 \, dr \, ds, \\ J_{22} &= \int_{s_-}^{s_+} \int_{-1}^1 x_2^2 \, dr \, ds, & J_{12} &= \int_{s_-}^{s_+} \int_{-1}^1 x_1 x_2 \, dr \, ds, & J_{1\omega} &= \int_{s_-}^{s_+} \int_{-1}^1 x_1 \omega \, dr \, ds, \\ J_{2\omega} &= \int_{s_-}^{s_+} \int_{-1}^1 x_2 \omega \, dr \, ds, & J_{1d} &= \int_{s_-}^{s_+} \int_{-1}^1 2r^2 c \cos \alpha \, dr \, ds, & J_{2d} &= \int_{s_-}^{s_+} \int_{-1}^1 2r^2 c \sin \alpha \, dr \, ds \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} P_1 &= \int_{s_-}^{s_+} \int_{-1}^1 \cos \alpha \, f_t \, dr \, ds + \int_{s_-}^{s_+} \cos \alpha [g_t^+ - g_t^-] \, ds \\ &\quad - \int_{s_-}^{s_+} \int_{-1}^1 \sin \alpha \, f_n \, dr \, ds - \int_{s_-}^{s_+} \sin \alpha [g_n^+ - g_n^-] \, ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= \int_{s_-}^{s_+} \int_{-1}^1 \sin \alpha \, f_t \, dr \, ds + \int_{s_-}^{s_+} \sin \alpha [g_t^+ - g_t^-] \, ds \\ &\quad + \int_{s_-}^{s_+} \int_{-1}^1 \cos \alpha \, f_n \, dr \, ds + \int_{s_-}^{s_+} \cos \alpha [g_n^+ - g_n^-] \, ds, \end{aligned}$$

$$M_{31} = \int_{s_-}^{s_+} \int_{-1}^1 x_1 \, f_3 \, dr \, ds + \int_{s_-}^{s_+} x_1 [g_3^+ - g_3^-] \, ds,$$

$$M_{32} = \int_{s_-}^{s_+} \int_{-1}^1 x_2 \, f_3 \, dr \, ds + \int_{s_-}^{s_+} x_2 [g_3^+ - g_3^-] \, ds.$$

2.3.5. Back to physical variables in the reduced basis

The above equations shall be reduced after going back to dimensional quantities, following the procedure detailed in Hamdouni and Millet (2011). Then, the obtained equations are written in the reduced basis whose directions  $e_1$  and  $e_2$  correspond to the principal inertial axis of the profile. Moreover the origin of the frame coincides with the centre of gravity of the profile and the origin of the sectorial area with the shear centre. The following result stands:

**Result 5.**

For force levels such as  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_n = \varepsilon^6$ ,  $\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_n = \varepsilon^6$  and  $\mathcal{F}_3 = \mathcal{G}_3 = \varepsilon^5$ , the leading terms of the displacements  $\bar{u}_3^*$ ,  $\bar{\Theta}^{*0}$ ,  $\bar{u}_1^{*c}$  and  $\bar{u}_2^{*c}$  are the solution of the following reduced one-dimensional equilibrium equations:

$$ES^* \frac{d^2 \bar{u}_3^{*0}}{dx_3^{*2}} = -P_3^*, \tag{7}$$

$$EJ_{\omega^* \omega^*}^* \frac{d^4 \bar{\Theta}^{*0}}{dx_3^{*4}} - \mu J_{\omega^* d}^* \frac{d^2 \bar{\Theta}^{*0}}{dx_3^{*2}} = M_t^* + \frac{dM_3^*}{dx_3^*}, \tag{8}$$

$$EJ_{11}^* \frac{d^4 \bar{u}_1^{*c}}{dx_3^{*4}} - \mu J_{1d}^* \frac{d^2 \bar{\Theta}^{*0}}{dx_3^{*2}} = P_1^* + \frac{dM_{31}^*}{dx_3^*}, \tag{9}$$

$$EJ_{22}^* \frac{d^4 \bar{u}_2^{*c}}{dx_3^{*4}} - \mu J_{2d}^* \frac{d^2 \bar{\Theta}^{*0}}{dx_3^{*2}} = P_2^* + \frac{dM_{32}^*}{dx_3^*} \tag{10}$$

with

$$\begin{aligned} S^* &= \int_{s_-^*}^{s_+^*} \int_{-h}^h dr^* ds^*, & J_{11}^* &= \int_{s_-^*}^{s_+^*} \int_{-h}^h x_1^{*2} dr^* ds^*, & J_{22}^* &= \int_{s_-^*}^{s_+^*} \int_{-h}^h x_2^{*2} dr^* ds^*, \\ J_{\omega^* \omega^*}^* &= \int_{s_-^*}^{s_+^*} \int_{-h}^h \omega^{*2} dr^* ds^*, & J_{\omega^* d}^* &= \int_{s_-^*}^{s_+^*} \int_{-h}^h 2r^{*2} (1 - c^* q^*) dr^* ds^*, \\ J_{1d}^* &= \int_{s_-^*}^{s_+^*} \int_{-h}^h 2r^{*2} c^* \cos \alpha dr^* ds^*, & J_{2d}^* &= \int_{s_-^*}^{s_+^*} \int_{-h}^h 2r^{*2} c^* \sin \alpha dr^* ds^* \end{aligned} \tag{11}$$

and where the forces on the right-hand side are the dimensional ones, deduced from those of Result 4 like the geometric constants above.

Note that in the coupled model obtained rigorously by asymptotic expansions from the three-dimensional elasticity equations, the expression of the twist rigidity  $J_{\omega^* d}^*$  only involves geometric data of the profile (expression (11)). Oppositely, in the Vlassov model classically used in the literature (Vlassov, 1962), only an empirical expression is given. Even if the general form of the twist equation is identical, the values of the twist angle  $\bar{\Theta}^{*0}$  may be very different, the solution of Equation (8) depending strongly of the value of the twist rigidity  $J_{\omega^* d}^*$ .

### 3. Analytical resolution of coupled model

#### 3.1. Twist equation

We propose in this section to solve analytically the twist equation of the coupled model given by Equation (8), before comparing the solution with experimental measurements in the next section. In the sequel, for the simplicity of the notations, the star in the dimensional equations of Result 5 will be omitted, and the twist angle will be denoted as  $\theta_c$  (instead of  $\overline{\Theta}^{*0}$ ). Therefore, the twist equation (8) can be rewritten as follows:

$$\frac{d^4 \theta_c}{dx_3^4} - \frac{\mu J_{\omega d} d^2 \theta_c}{E J_{\omega \omega} dx_3^2} = 0, \quad (12)$$

where  $\theta_c$  denotes the twist angle and with  $M_t = M_3 = 0$  in the example addressed.<sup>1</sup> The two twist rigidities  $J_{\omega \omega}$  and  $J_{\omega d}$  are given by:

$$J_{\omega \omega} = \frac{4}{3} h R^5 \left( \theta_0^3 - 6 \frac{(\sin \theta_0 - \theta_0 \cos \theta_0)^2}{\theta_0 - \sin \theta_0 \cos \theta_0} \right) \quad (13)$$

and

$$J_{\omega d} = \frac{16 R h^3}{3} \left( \theta_0 - \sin \theta_0 \frac{\sin \theta_0 - \theta_0 \cos \theta_0}{\theta_0 - \sin \theta_0 \cos \theta_0} \right), \quad (14)$$

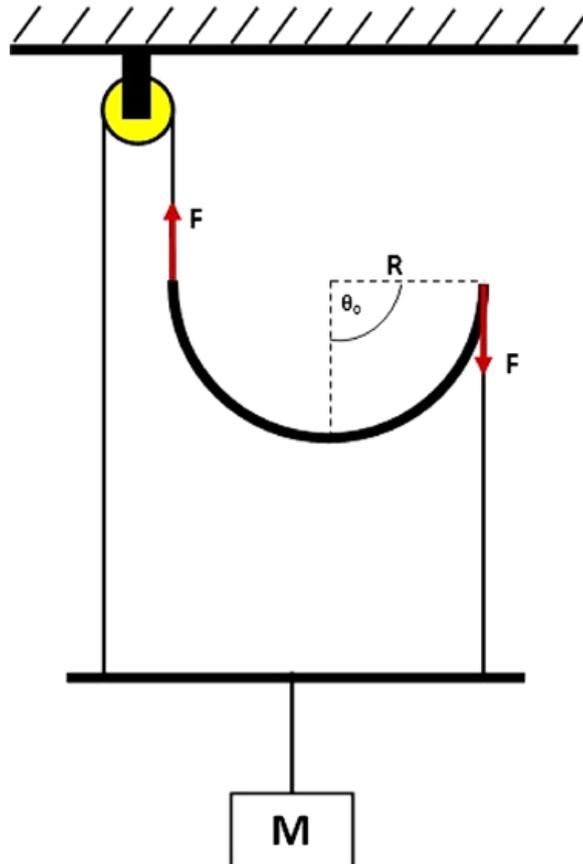


Figure 2. Scheme of the experimental device. Imposed torque at the extremity  $x_3 = l$ .

where  $\theta_0$  denotes the opening angle of the section (Figure 2),  $h$  and  $R$  being respectively the half-thickness and the radius of the profile.

Now setting

$$\frac{k^2}{l^2} = \frac{\mu J_{\omega d}}{E J_{\omega \omega}} \tag{15}$$

in Equation (12), it gives:

$$\frac{d^4 \theta_c}{dx_3^4} - \frac{k^2}{l^2} \frac{d^2 \theta_c}{dx_3^2} = 0. \tag{16}$$

The general solution of Equation (16) is classically written as:

$$\theta_c(x_3) = c_1 + c_2 x_3 + c_3 ch\left(\frac{kx_3}{l}\right) + c_4 sh\left(\frac{kx_3}{l}\right). \tag{17}$$

As the thin-walled beam is clamped at  $x_3 = 0$ , we have

$$\theta_c(0) = 0, \quad \frac{d\theta_c}{dx_3}(0) = 0. \tag{18}$$

At the other extremity, a torque  $M_t$  is applied at  $x_3 = l$ , leading to the boundary conditions:

$$\frac{d^2 \theta_c}{dx_3^2}(l) = 0, \quad J_{\omega \omega} \frac{d^3 \theta_c}{dx_3^3}(l) - \mu J_{\omega d} \frac{d\theta_c}{dx_3}(l) = M_t. \tag{19}$$

After a few calculations, using boundary conditions (18) and (19), one has:

$$c_1 = -c_3 = c_4 th(k), \quad c_2 = -\frac{k}{l} c_4, \quad c_4 = M_t \frac{l}{k} \frac{1}{\mu J_{\omega d}}.$$

Setting  $C = \frac{1}{\mu J_{\omega d}}$ , we get  $c_4 = M_t C l / k$ . Accordingly, the analytical resolution of the twist equation (12) for the boundary conditions considered leads to:

$$\theta_c(x_3) = M_t C \frac{l}{k} \left[ \tanh(k) - \frac{k}{l} x_3 - \tanh(k) \cosh\left(\frac{k}{l} x_3\right) + \sinh\left(\frac{k}{l} x_3\right) \right] \tag{20}$$

with:

$$C = \frac{1}{\mu J_{\omega d}} \quad \text{and} \quad \frac{l}{k} = \sqrt{\frac{E J_{\omega \omega}}{\mu J_{\omega d}}}$$

and where  $\tanh$ ,  $\cosh$ , and  $\sinh$  denote respectively the hyperbolic tangent, cosine and sine.

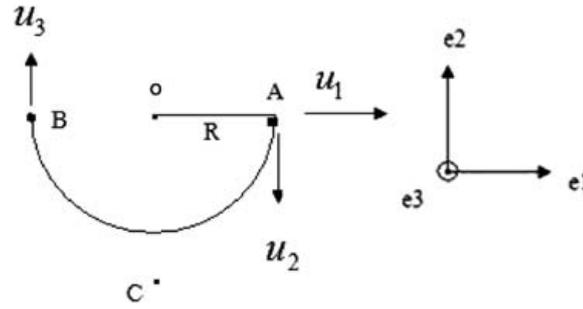


Figure 3. Measured displacements  $u_1, u_2$  at points A and B.

#### 4. Experimental measurement of the twist angle

To compare the relevance of the coupled model or Result 5 with respect to that of Vlasov, and in particular the calibration of the twist rigidity  $J_{\omega d}$ , we perform some twist experiments on thin-walled beams to measure accurately the twist angle. The experiments will be performed on three different beams with circular sections with half-opening angle  $\theta_0 = \pi/2$  (Figure 2). The exact geometry of the profiles tested will be detailed in Section 5.1. The beam is clamped at one extremity (at  $x_3 = 0$ ) and a torque  $M_t$  is applied at the other extremity at  $x_3 = l$  according to the experimental device described in Figure 2. A mass  $M$  is applied at the middle of a steel bar, linked to the extremities of the profile by a very thin steel cable. A pulley fixed to a rigid frame (on the top left) enable one to apply a torque  $M_t = 2RF$  around  $e_3$  on the extremity of the profile (see Figure 2 for the orientation chosen), with  $F = Mg/2$  according to the experimental device (Figure 2). Thus, we have:

$$M_t = MRg, \quad (21)$$

where  $R$  denotes the radius of the profile, and  $g$  the gravity.

Using micrometer comparators, we measure the two vertical displacements  $u_2$  and  $u_3$  at points  $A$  and  $B$  for a fixed value of  $x_3$  (Figure 3). The measurements are repeated for different values of  $x_3$  along the length of the profile. For a fixed value of  $x_3$ , the two vertical displacements  $u_2$  and  $u_3$  enable one to determine the twist angle  $\theta$  as follows:

$$\theta = -\arctan\left(\frac{|u_2| + |u_3|}{2R}\right) \quad (22)$$

the sign minus coming from the sense of the rotation.

## 5. Experimental results

### 5.1. Description of the profiles used

To validate the theoretical coupled model proposed, experiments are performed on three different profiles with a circular section and a half-opening angle  $\theta_0 = \pi/2$ . The length of the three thin-walled beams is  $l = 70\text{cm}$ , but their radius  $R$  and their thickness  $2h$  differ. In the sequel, we will consider:

- profile 1:  $R = 4.98$  cm,  $2h = 3.9$  mm,  $l = 70$  cm.
- profile 2:  $R = 5.215$  cm,  $2h = 3.9$  mm,  $l = 70$  cm.
- profile 3:  $R = 5.64$  cm,  $2h = 3.8$  mm,  $l = 70$  cm.

The Young modulus of the three steel beams is  $E = 210,000$  MPa.

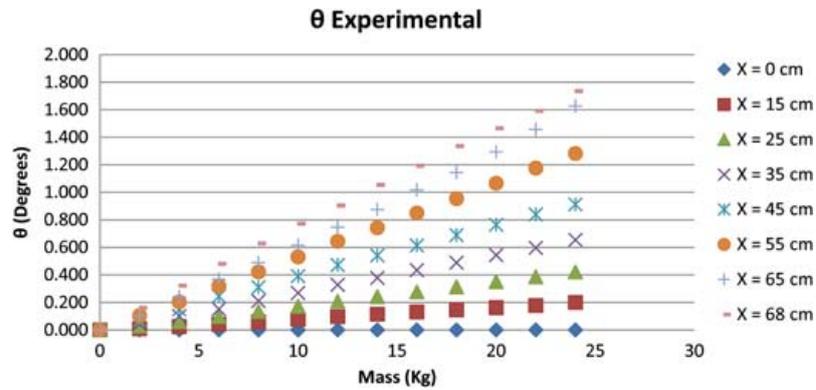


Figure 4. Variations of the twist angle  $\theta$  versus the mass  $M$  for several values of  $x_3$ . Profile 1:  $R = 4.98$  cm,  $2h = 3.9$  mm,  $l = 70$  cm.

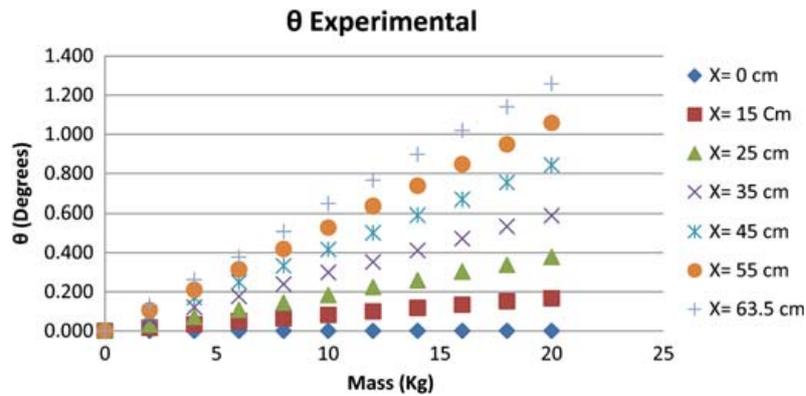


Figure 5. Variations of the twist angle  $\theta$  versus the mass  $M$  for several values of  $x_3$ . Profile 2:  $R = 5.215$  cm,  $2h = 3.9$  mm,  $l = 70$  cm.

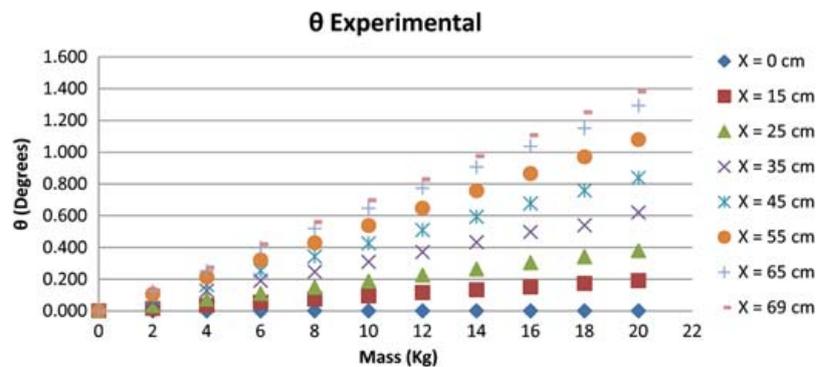


Figure 6. Variations of the twist angle  $\theta$  versus the mass  $M$  for several values of  $x_3$ . Profile 3:  $R = 5.64$  cm,  $2h = 3.8$  mm,  $l = 70$  cm.

### 5.2. Variation of the twist angle $\theta$ versus the applied mass

Using (22), measurements of the vertical displacements  $u_2$  and  $u_3$  of points A and B allowed us to obtain the following experimental curves of  $\theta$  for different masses and for different values of  $x_3$  (along the profile of the tested beams). For each value of  $x_3$ , the variations of the twist angle  $\theta$  with respect to the mass (and therefore to the applied torque  $M_t$  through (21)) are plotted on Figures 4 to 6 for the three profiles tested.

We observe for the three profiles tested that the variation of the twist angle versus the applied torque  $M_t$  (or equivalently versus the mass  $M$ ) is linear, at any point  $x_3$  of the profile. These first measurements enable verification that we stay in the linear range for the twist angles measured, as these results will be compared in the next subsection with the analytical resolution of the linear twist equation (12).

### 5.3. Comparison between the theoretical and experimental results

In this section, we compare for the three profiles:

- experimental values of  $\theta$  given by the experiments,
- theoretical values of  $\theta_c$  given by the coupled model (12),
- values of  $\theta$  given by the solution of the Vlassov model.

These comparisons will be performed, both for the variations of the twist angle versus the mass for  $x_3$  fixed, and for the variations of the twist angle versus  $x_3$  for a fixed value of the mass  $M$ . Note that the values of the twist angle given by the Vlassov model depend on the twist rigidity  $J_{od}^{Vlassov}$  considered, the latter depending on an empirical constant  $a$  through (Vlassov, 1962):

$$J_{od}^{Vlassov} = \frac{16}{3}h^3 a R \theta_0.$$

For the comparison, the value of the empirical constant  $a$  that will be considered is the mean value given in Vlassov (1962) for a corner, i.e  $a = 1$ .

#### 5.3.1. Profile 1

We observe, for the first profile tested (profile 1), that the values of the twist angle given by the analytical resolution of the coupled model are very close to the experimental ones. Conversely, the values of the twist angle given by the Vlassov model underestimate (about 30%) the experimental ones. (See Figures 7 and 8.)

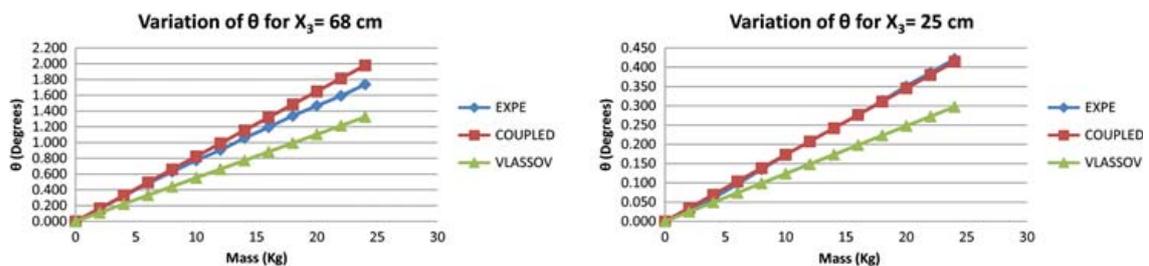


Figure 7. Variations of the twist angle versus the mass for several values of  $x_3$ . Profile 1:  $R = 4.98$  cm,  $2h = 3.9$  mm,  $l = 70$  cm.

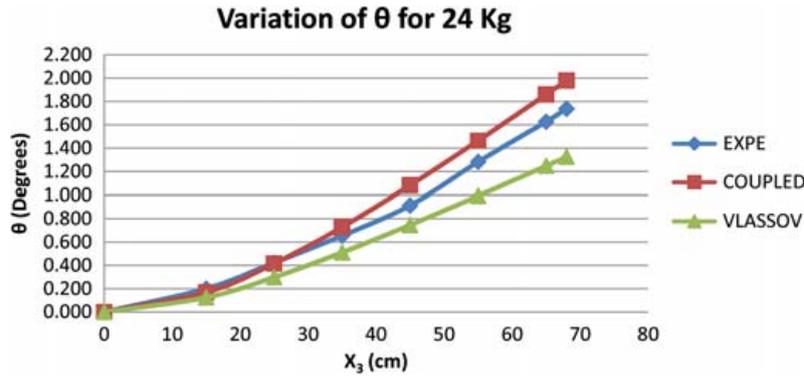


Figure 8. Variations of the twist angle versus  $x_3$  for  $M = 24kg$ . Profile 1:  $R = 4.98$  cm,  $2h = 3.9$  mm,  $l = 70$  cm.

5.3.2. Profile 2

We observe, as for profile 1, that the values of the twist angle given by the analytical resolution of the coupled model are very close to the experimental ones, whereas the Vlassov model underestimates the experimental twist angle (see Figures 9 and 10).

5.3.3. Profile 3

Once again, for profile 3, the values of the twist angle given by the resolution of the coupled model are very close to the experimental ones. The Vlassov model underestimates values of the twist experimental angle. (See Figures 11 and 12.)

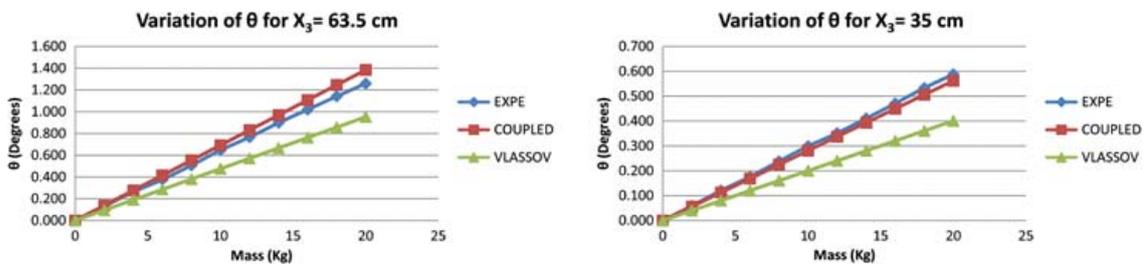


Figure 9. Variations of the twist angle versus the mass for several values of  $x_3$ . Profile 2:  $R = 5.215$  cm,  $2h = 3.9$  mm,  $l = 70$  cm.

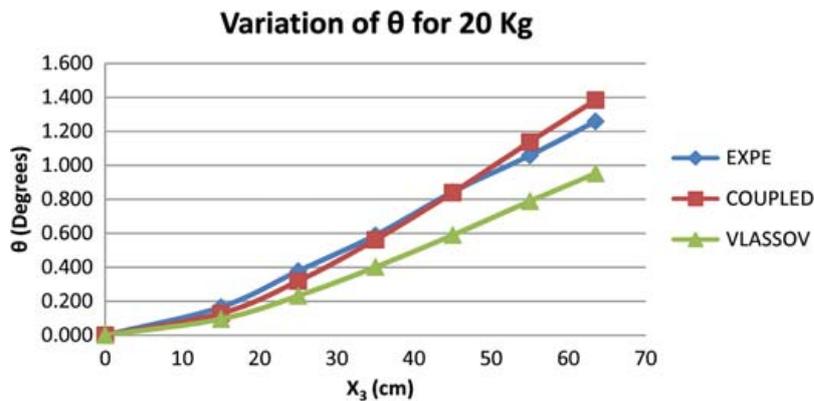


Figure 10. Variations of the twist angle versus  $x_3$  for  $M = 20kg$ . Profile 2:  $R = 5.215$  cm,  $2h = 3.9$  mm,  $l = 70$  cm.

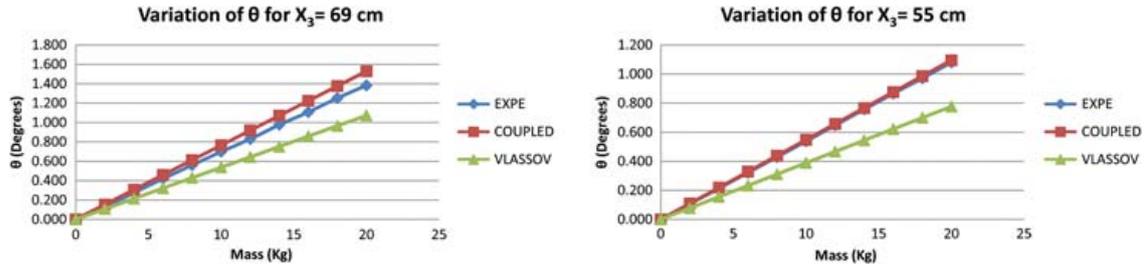


Figure 11. Variations of the twist angle versus the mass for several values of  $x_3$ . Profile 3:  $R = 5.64$  cm,  $2h = 3.8$  mm,  $l = 70$  cm.

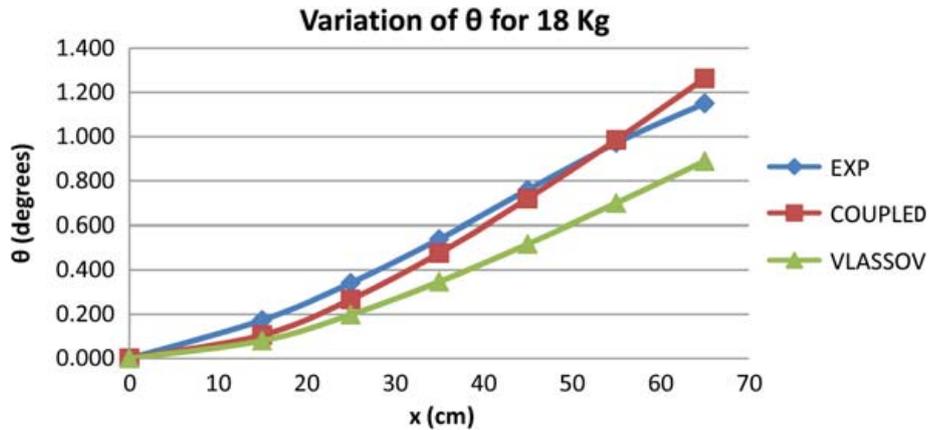


Figure 12. Variations of the twist angle versus  $x_3$  for  $M = 18$  kg. Profile 3:  $R = 5.64$  cm,  $2h = 3.8$  mm,  $l = 70$  cm.

## 6. Conclusion

For the three profiles tested, the theoretical resolution of the twist equation of the coupled model, deduced from asymptotic expansion of the three-dimensional elasticity equations, gives values of the twist angle very close to the experimental ones. The exact values of the twist rigidities  $J_{\omega\omega}$  and  $J_{\omega d}$  have been calculated using the geometrical data of the profile (opening angle, thickness, radius). These comparisons enable one to validate the theoretical analysis performed, leading to the asymptotic coupled model for a thin-walled beam presented in Results 1 to 5.

Conversely, the values of the twist angle given by the Vlassov model underestimate the experimental ones by up to 30%. This highlights the interest of the coupled model presented, where an exact analytical expression of  $J_{\omega d}$  is obtained, whose computation is easy for any profile. With the Vlassov model, only an empirical expression of  $J_{\omega d}^{\text{Vlassov}}$  is given. For each profile, it is necessary to carry out new experiments in order to determine the specific mean value of the empirical coefficient  $a$ . The mean value of  $a$  given in the book by Vlassov (1962) underestimates the twist angle for all the profiles tested.

Equation (12) must be completed with boundary conditions (18) and (19) when a torque is applied at one extremity of the beam, the other one being clamped.

## Note

- Equation (12) must be completed with boundary conditions (18) and (19) when a torque is applied at one extremity of the beam, the other one being clamped.

## References

- Belletti, B. (2009). Evaluation of the interaction effects in coupled thin walled prestressed concrete roof elements. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 13, 745–764.
- Caillerie, D. (1984). Thin elastic and periodic plates. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 6, 159–191.
- Ciarlet, P.G., & Destuynder, P. (1979). Justification of the two-dimensional linear plate model. *Journal de Mécanique*, 18, 315–344.
- Cimetièrre, A., Geymonat, G., Le Dret, H., Raoult, A., & Tutek, Z. (1988). Asymptotic theory and analysis for displacements and stress distribution in nonlinear elastic straight slender rods. *Journal of Elasticity*, 19, 111–161.
- Cimetièrre, A., Hamdouni, A., & Millet, O. (1998). Le modèle linéaire usuel de plaque déduit de l'élasticité non linéaire tridimensionnelle. *Comptes Rendus de l'Académie Sciences, Paris, Série IIB*, 326, 159–162.
- Destuynder, P. (1985). A classification of thin shell theories. *Acta Applicandae Mathematicae*, 4, 15–63.
- Elamri, K., Hamdouni, A., & Millet, O. (1999). Le modèle linéaire de Novozhilov-Donnell déduit de l'élasticité non linéaire tridimensionnelle. *Comptes Rendus de l'Académie Sciences, Paris, Série IIB* 327, 1285–1290.
- Fouré, B., & Hannachi, N.E. (1999). Rigidité de torsion des poutres en béton armé fissurées en flexion. *Revue Française de Génie Civil*, 3, 115–154.
- Geymonat, G. (1987). Sur la commutativité des passages à la limite en théorie asymptotique des poutres composites. *Comptes Rendus de l'Académie Sciences, Paris, Série II*, 305, 225–228.
- Gjelsvik, A. (1981). *The theory of thin-walled bars*. New York: Wiley.
- Goldenevizer, A.L. (1963). Derivation of an approximate theory of shells by means of asymptotic integration of the equations of the theory of elasticity. *Prikladnoi Matematiki Mekhanika*, 27, 593–608.
- Grillet, L., Hamdouni, A., & Millet, O. (2004). An asymptotic non-linear model for thin-walled rods. *Comptes Rendus de l'Académie Sciences, Paris, Série Mécanique*, 332, 123–128.
- Grillet, L., Hamdouni, A., & Millet, O. (2005). Justification of the kinematic assumptions for thin-walled rods with shallow profile. *Comptes Rendus de l'Académie Sciences, Paris*, 333, 493–489.
- Hamdouni, A., & Millet, O. (2003a). Classification of thin shell models deduced from the nonlinear three-dimensional elasticity. Part I: the shallow shells. *Archives of Mechanics*, 55, 135–175.
- Hamdouni, A., & Millet, O. (2003b). Classification of thin shell models deduced from the nonlinear three-dimensional elasticity. Part II: the strongly curved shells. *Archives of Mechanics*, 55, 177–219.
- Hamdouni, A., & Millet, O. (2006). An asymptotic non-linear model for thin-walled rods with strongly curved open cross-section. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 41, 396–416.
- Hamdouni, A., & Millet, O. (2011). An asymptotic linear thin-walled rod model coupling twist and bending. *International Applied Mechanics*, 46, 1072–1092.
- Lewinski, T. (1991). Effective models of composite periodic plates. I – asymptotic solution. *International Journal of Solids Structures*, 27, 1155–1172.
- Madani, K. (1998). Étude des structures élastiques élancées à rayon de courbure faiblement variable: Une classification de modèles asymptotiques. *Comptes Rendus de l'Académie Sciences, Paris, Série IIB*, 326, 605–608.
- Marigo, J.J., Ghidouche, H., & Sedkaoui, Z. (1998). Des poutres flexibles aux fils extensibles: Une hiérarchie de modèles asymptotiques. *Comptes Rendus de l'Académie Sciences, Paris, Série IIB*, 326, 79–84.
- Marigo, J.J., & Madani, K. (1998). Quelques modèles d'anneaux élastiques suivant les types de chargement. *Comptes Rendus de l'Académie Sciences, Paris, Série IIB*, 326, 805–810.
- Millet, O., Cimetièrre, A., & Hamdouni, A. (2003). An asymptotic elastic-plastic plate model for moderate displacements and strong strain hardening. *European Journal of Mechanics, A: Solids*, 22, 369–384.
- Millet, O., Hamdouni, A., & Cimetièrre, A. (1997a). Justification du modèle bidimensionnel linéaire de plaque par développement asymptotique de l'équation de Navier. *Comptes Rendus de l'Académie Sciences, Paris, Série IIB*, 324, 289–292.

- Millet, O., Hamdouni, A., & Cimetière, A. (1997b). Justification du modèle bidimensionnel non linéaire de plaque par développement asymptotique des équations d'équilibre. *Comptes Rendus de l'Académie Sciences, Paris, Série IIb*, 324, 349–354.
- Millet, O., Hamdouni, A., & Cimetière, A. (1997c). Construction d'un modèle eulérien de plaques en grands déplacements par méthode asymptotique. *Comptes Rendus de l'Académie Sciences, Paris, Série IIb*, 325, 257–261.
- Millet, O., Hamdouni, A., & Cimetière, A. (1998a). Dimensional analysis and asymptotic expansions of the equilibrium equations in nonlinear elasticity. Part I: The membrane model. *Archives of Mechanics*, 50, 853–873.
- Millet, O., Hamdouni, A., & Cimetière, A. (1998b). Dimensional analysis and asymptotic expansions of the equilibrium equations in nonlinear elasticity. Part II: The “Von Karman Model”. *Archives of Mechanics*, 50, 975–1001.
- Millet, O., Hamdouni, A., & Cimetière, A. (2001). A classification of thin plate models by asymptotic expansion of nonlinear three-dimensional equilibrium equations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 36, 165–186.
- Millet, O., Hamdouni, A., & Cimetière, A. (2003). An eulerian approach of membrane theory for large displacements. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 38, 1403–1420.
- Rigolot, A. (1977). Déplacements finis et petites déformations des poutres droites: Analyse asymptotique de la solution à grande distance des bases. *Journal Mécanique Appliquée*, 1, 175–206.
- Rodriguez, J.M., & Viaño, J.M. (1995a). Asymptotic analysis of Poisson's equation in a thin domain. Application to thin-walled elastic beams. In P.G. Ciarlet, L. Trabucho & J.M. Viano (Eds.), *Asymptotic methods for elastic structures* (pp. 181–193). Berlin: Walter de Gruyter.
- Rodriguez, J.M., & Viaño, J.M. (1995b). Asymptotic general bending and torsion models for thin-walled elastic beams. In P.G. Ciarlet, L. Trabucho, & J.M. Viano (Eds.), *Asymptotic methods for elastic structures* (pp. 255–274). Berlin: Walter de Gruyter.
- Rodriguez, J.M., & Viaño, J.M. (1997). Asymptotic derivation of a general linear model for thin-walled elastic rods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 147, 287–321.
- Sanchez-Palencia, E. (1989a). Statique et dynamique des coques minces, I – Cas de flexion pure non inhibée. *Comptes Rendus de l'Académie Sciences, Paris, Série I*, 309, 411–417.
- Sanchez-Palencia, E. (1989b). Statique et dynamique des coques minces, I – Cas de flexion pure inhibée – Approximation membranaire. *Comptes Rendus de l'Académie Sciences, Paris, Série I*, 309, 531–537.
- Sanchez-Palencia, E. (1990). Passage à la limite de l'élasticité tridimensionnelle à la théorie asymptotique des coques minces. *Comptes Rendus de l'Académie Sciences, Paris, Série IIb*, 311, 909–916.
- Sanchez-Hubert, J., & Sanchez-Palencia, E. (1997). *Coques élastiques minces. Propriétés asymptotiques*. Paris: Masson.
- Sanchez-Hubert, J., & Sanchez-Palencia, E. (1999). Statics of curved rods on account of torsion and flexion. *European Journal of Mechanics, A: Solids*, 18, 365–390.
- Trabucho, L., & Viaño, J.M. (1989). Existence and characterization of higher-order terms in an asymptotic expansion method for linearized elastic beams. *Asymptotic Analysis*, 2, 223–255.
- Trabucho, L., & Viaño, J.M. (1990). A new approach of Timoshenko's beam theory by asymptotic expansion method. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 5, 651–680.
- Trabucho, L., & Viaño, J.M. (1996). Mathematical modelling of rods. In P.G. Ciarlet & J.L. Lions (Eds.), *Handbook of numerical analysis* (Vol. IV, pp. 487–974). Amsterdam: North Holland.
- Vlassov, V.Z. (1962). *Pièces longues en voiles minces*. Paris: Eyrolles.

## **Annexe B**

**The development of DKMQ plate bending element for thick to thin shell analysis based on the Naghdi/Reissner/Mindlin shell theory**



Contents lists available at ScienceDirect

# Finite Elements in Analysis and Design

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/finel](http://www.elsevier.com/locate/finel)

## The development of DKMQ plate bending element for thick to thin shell analysis based on the Naghdi/Reissner/Mindlin shell theory



Irwan Katili<sup>a,\*</sup>, Jean-Louis Batoz<sup>b</sup>, Imam Jauhari Maknun<sup>a,c</sup>, Aziz Hamdouni<sup>c</sup>, Olivier Millet<sup>c</sup>

<sup>a</sup> Universitas Indonesia, Depok 16424, Indonesia

<sup>b</sup> Université de Technologie de Compiègne, Compiègne Cedex 60206, France

<sup>c</sup> Université de La Rochelle, La Rochelle 17000, France

### ARTICLE INFO

#### Article history:

Received 5 February 2014

Received in revised form

16 February 2015

Accepted 19 February 2015

#### Keywords:

DKMQ24

Quadrilateral

Thick and thin shell

Warping effect

Bending-Membrane Energy

### ABSTRACT

This paper presents a new simple four-node quadrilateral shell element with 24-*dof* which can be used to analyze thick and thin shell problems. This element which is developed from DKMQ plate element using the Naghdi/Mindlin/Reissner shell theory can take into account warping effects and coupling bending-membrane energy. This element, called DKMQ24, passed patch tests for membrane, bending and shear problems. It has also successfully passed benchmark tests in the case of thick and thin shells without shear locking. Moreover, the numerical results obtained with DKMQ24 converge toward the reference solution.

© 2015 Elsevier B.V. All rights reserved.

### 1. Introduction

Researches on the finite element method are still being conducted, specifically to obtain better elements. The formulation of a simple and efficient shell element which has a good accuracy in numerical analysis is highly desirable. Furthermore, the development of low-order shell finite elements is very interesting, because it enables to reduce in an important way the associated numerical costs especially for large scale non-linear analysis. A compromise between cost and accuracy must be found.

Generally, the developments of shell element are based on 3-nodal (triangular) and 4-nodal (quadrilateral) elements. The associated formulations allow to take into account a wide variety of thicknesses, irregular geometry, different boundary conditions and rough discretization.

MITC elements [1,2] are commonly used in engineering analysis and revealed to be effective in membrane-dominated and bending-dominated shell problems [3,4].

Brissoulis [5] has introduced an analytical approach to study the asymptotic behavior of shell elements. The asymptotic behavior of finite shell elements in membrane-dominated, bending-dominated and mixed membrane-bending shell problems were

evaluated using the explicit expressions for the characteristic asymptotic displacement.

By using the Assumed Natural Strains (ANS) and Discrete Shear method to define the shear strains, the development of three nodes DKT [6] and four nodes DKQ [7] elements for thick plate bending has been proposed by Batoz and Lardeur [8,9]. These two elements rely on plate equilibrium equations including shear (Reissner–Mindlin model). The first one, called Discrete Shear Triangular (DST) has 9 *d.o.f* and the second one, called Discrete Shear Quadrilateral (DSQ), has 12 *d.o.f*. DST and DSQ elements converge towards to DKT and DKQ plate elements for thin plate problems.

A modified DST element, called DST-BK element, based on the formulation proposed by Bergan and Nygard [10], has been proposed by Batoz and Katili [11]. This element is free of shear locking and the numerical results obtained converge towards the reference solutions for all benchmark tests.

Katili [12,13] has introduced DKMT and DKMQ element to analyze thick and thin plate problems. These elements are based on Reissner–Mindlin [14,15] hypothesis which require only  $C^0$  continuity. In the case of thin plate problem, the solution obtained with DKMT element converges to DKT [6] element, while the solution obtained with DKMQ element converges to DKQ [7] element. DKMT and DKMQ elements revealed to be free of shear locking and passed the classical patch tests associated. The problem of shear locking, when the thickness of the plate decreases, is resolved using the Discrete Kirchhoff Mindlin method proposed by Katili [12,13]. The capability of DKMQ and DKMT

\* Corresponding author. Tel.: +62 811 888 8876; fax: +62 21 727 0028.  
E-mail address: [irwan.katili@gmail.com](mailto:irwan.katili@gmail.com) (I. Katili).

plate element has been tested in [12,13] for thin and thick plate problems.

The adaptation of DKMT and DKMQ elements to hybrid-mixed formulations has been introduced by Thermo [16] and Ayad et al. [17,18]. This hybrid-mixed formulation is free of shear locking and passed all patch test from thick to thin plate analysis. Ayad et al. [19] has extended the formulation of DKMT element to laminated composite plate structures. Another ANS method, called DRM, based on the additional degrees of freedom on the middle edges, has been proposed by Onate et al. [20,21]. Although the triangular DRM element uses additional degrees of freedom in each sides of the element, the results are similar as those obtained with DMT element [22]. The formulation of DKMT plate element with facet shell element using the optimal membrane triangular OPT element for the geometrically nonlinear analysis of laminated composite structures has been introduced by Khosravi et al. [23].

Regarding the good results of DKMQ plate element, it is interesting to develop a shell element based on the generalization of DKMQ. In this paper, we will introduce a new quadrilateral shell element constituted of 4 nodes and 6 degrees of freedom per node (Section 2). This element has 24 *d.o.f.*, is called Discrete Kirchoff-Mindlin Quadrilateral 24 (DKMQ24). Using the Naghdi shell theory [24–27] and the formulation of shell element of [28], we have extended DKMQ plate element to DKMQ24 shell element. Its formulation is based on a generalization of the Discrete Kirchoff Mindlin method including the transverse shear effects, and is valid for thin and thick shells.

The incomplete quadratic interpolation functions for the rotation used in DKMQ24 element constitute one of the originality of the approach proposed and give the better performance in bending behavior. Warping effects are taken into account by computing the coupling bending-membrane in the curvature equations. This DKMQ24 element passed the classical patch tests in several thick and thin shell configurations and converged without shear locking towards the reference solution for benchmarks tested.

**2. DKMQ24 shell element**

The main characteristics of DKMQ24 shell element are as follows:

- a. The geometry of the shell is represented by a set of quadrilateral elements with bilinear approach in which four of these nodes are non-coplanar [29,30].
- b. Vector position  $x_p$  in the middle surface is continuous, but the direction of normal vector  $n$  maybe discontinuous between two elements adjacent.
- c. The approximation of displacement function or translation in the middle surface  $u_p(\xi, \eta)$  uses a linear function, while the interpolation of rotations  $\beta(\xi, \eta)$  uses an incomplete quadratic function [29,30].
- d. Shear deformation vector is approximated independently (Assumed Strain Shear Displacement Field).
- e. There are 24 degrees of freedom on each element, six degrees of freedom for each node  $i(U_i, V_i, W_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi})$  following the global coordinates system.

**Table 1**  
Linear function  $N_i$  and quadratic function  $P_k$ .

$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$	$P_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$
$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$	$P_6 = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$
$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$	$P_7 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$
$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$	$P_8 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$

- f. The formulation uses the Modified Functional elements of Hu-Washizu [31].
- g. DKMQ24 element behaves in accordance with the theory of Kirchoff and Reissner-Mindlin, due to the use of a shear influence factor  $\phi_k$  which is a function of shell thickness ratio ( $L/h$ ).

**2.1. Geometry of shell element**

The interpolation of a vector position  $x_q$  at an arbitrary point  $q$ , when expressed as functions of the parametric coordinate  $\xi, \eta, z$  on the reference element:

$$x_q(\xi, \eta, z) = x_p(\xi, \eta) + z \eta(\xi, \eta) \tag{1}$$

$$x_q(\xi, \eta, z) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta)x_i + z \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta)\eta_i \tag{2}$$

The notations used are the following:

- $x_p$ : the coordinates of point  $p$  ( $X, Y, Z$ ) in the global coordinate system which is defined in  $(\xi, \eta, z=0)$ .
- $x_q$ : the coordinates of point  $q$  ( $X_q, Y_q, Z_q$ ) in the global coordinate system  $(\xi, \eta, z)$ .
- $x_i$ : the nodal coordinates  $i$  ( $X_i, Y_i, Z_i$ ) is the Cartesian global coordinate system  $i, j, k$ .
- $N_i(\xi, \eta)$  is the shape function of the quadrilateral element, depending on the parametric coordinates  $(\xi, \eta)$  in the reference element (see Table 1).
- $\eta_i$ :  $\langle n_{xi} \ n_{yi} \ n_{zi} \rangle$  denotes the normal direction at the surface of the element in the nodal  $i$  (see Fig. 1).

Relation differential element in Cartesian and natural coordinate systems at point  $p$  can be written as:

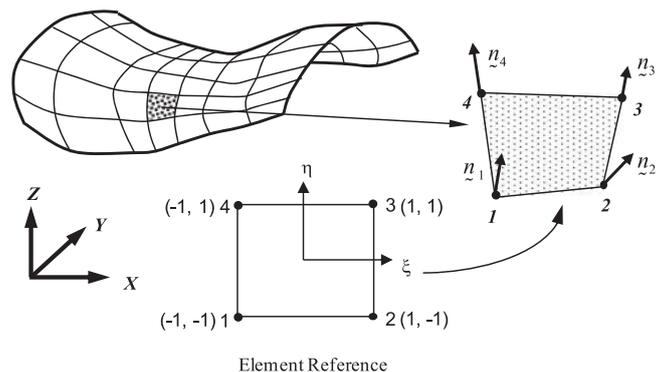
$$dx_p = \begin{Bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{Bmatrix} = [a_1 \ a_2] \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} \tag{3}$$

where  $a_1$  and  $a_2$  are tangential vectors in direction  $\xi$  ( $\eta = \text{constant}$ ) and  $\eta$  ( $\xi = \text{constant}$ ).  $a_1$  and  $a_2$  are called the *covariant base*. Vector  $a_1$  and  $a_2$  (see Fig. 2) are given by:

$$a_1 = x_{p,\xi} = \sum_{i=1}^4 N_{i,\xi} x_i \ ; \ a_2 = x_{p,\eta} = \sum_{i=1}^4 N_{i,\eta} x_i \tag{4}$$

where  $N_{i,\xi}$  and  $N_{i,\eta}$  are the first derivatives of shape functions  $N_i$  with respect to  $\xi$  and  $\eta$ . In all this paper  $f_{,\xi}$  will denote the partial derivative of  $f$  with respect to  $\xi$ .

Local basis at  $z=0$ :



**Fig. 1.** Shell geometry represented by a set of quadrilateral elements.

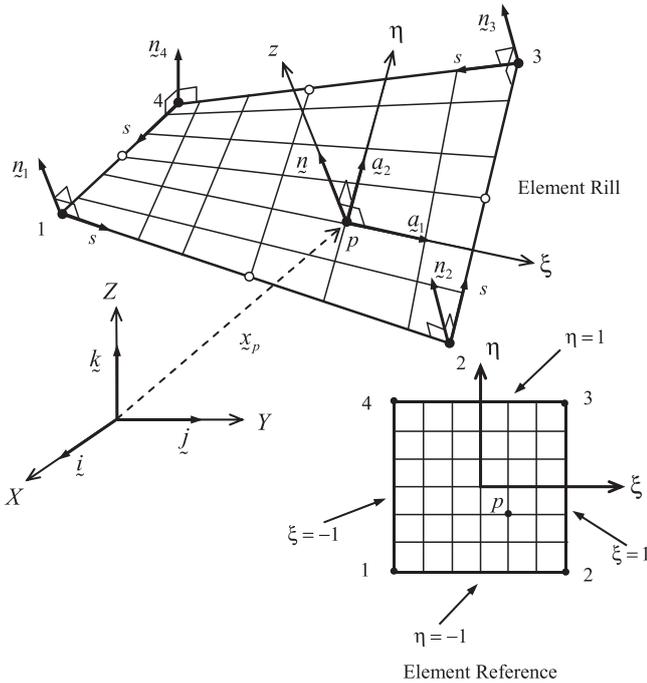


Fig. 2. Geometry of DKMQ24 shell element.

The local basis at  $z=0$ , noted  $[F_0]$ , written as:

$$[F_0] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & n \\ a_1 \times a_2 & n \end{bmatrix} ; \det[F_0] = (a_1 \times a_2) \cdot n ; n = \frac{a_1 \times a_2}{|a_1 \times a_2|} \quad (5)$$

The length  $ds$  on the surface classically given by:

$$(ds)^2 = dx_i dx_i = \langle d\xi d\eta \rangle [a] \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} \quad (6)$$

where  $[a]$  is the metric tensor of the middle surface. It is a symmetric positive-definite matrix ( $a_{12}=a_{21}$ ) defined as:

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot a_1 & a_1 \cdot a_2 \\ a_2 \cdot a_1 & a_2 \cdot a_2 \end{bmatrix} ; a = \det[a] ; a_{11} > 0 ; a_{22} > 0 ; \det[a] > 0 \quad (7)$$

The area of element  $dA$  expressed as:

$$dA = a_1 d\xi \times a_2 d\eta = |a_1 \times a_2| d\xi d\eta n = \sqrt{a} d\xi d\eta n = dA n \quad (8)$$

$$dA = \sqrt{a} d\xi d\eta \quad (9)$$

To simplify the calculations, we introduce the vectors  $a^1$  and  $a^2$  which are the classical contravariant vectors<sup>1</sup> (Fig. 3). The matrix  $[F_0]^{-1}$  is:

$$[F_0]^{-1}[F_0] = [I] \text{ where: } [F_0]^{-T} = \begin{bmatrix} a^1 & a^2 & n \\ a^1 & a^2 \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} a^1 & a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} [a]^{-1} \quad (10)$$

The vectors  $a^1$  and  $a^2$  are given by:

$$a^1 = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} a_{22} a_1 - a_{12} a_2 \\ -a_{21} a_1 + a_{11} a_2 \end{pmatrix} ; a^2 = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} -a_{21} a_1 + a_{11} a_2 \\ a_{22} a_1 - a_{12} a_2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

<sup>1</sup> We recall that contravariant vectors satisfy:  $a^1 \cdot a_1 = a^2 \cdot a_2 = 1 ; a^1 \cdot a_2 = a^2 \cdot a_1 = 0$ .

Relation (3) can be written as:

$$\begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle a^1 \rangle \\ \langle a^2 \rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{Bmatrix} \quad (12)$$

The relation of differential calculation between global cartesian coordinate  $X, Y, Z$  and local coordinate system  $x, y, z$  can be written (see Fig. 4) as:

$$\begin{Bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{Bmatrix} = [Q] \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} \text{ with: } [Q] = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & n \\ t_1 & t_2 & n \\ t_1 & t_2 & n \end{bmatrix} ; t_1 = n \times k ; t_2 = n \times t_1 ; t_1 = i \text{ if } n = \pm k \quad (13)$$

Relation (12) and (13) becomes [28–30]:

$$\begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} = [C^o] \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} ; [C^o] = \begin{bmatrix} C_{11}^o & C_{12}^o \\ C_{21}^o & C_{22}^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^1 \cdot t_1 & a^1 \cdot t_2 \\ a^2 \cdot t_1 & a^2 \cdot t_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Local Basis at  $z \neq 0$ :

The local basis  $[F_z]$  at  $z \neq 0$  at an arbitrary point  $q$  can be written as:

$$[F_z] = \begin{bmatrix} a_{1z} & a_{2z} & n \\ n_{,\xi} & n_{,\eta} & 0 \end{bmatrix} = [F_0] + z[F_n] ; [F_n] = \begin{bmatrix} n_{,\xi} & n_{,\eta} & 0 \\ n_{,\xi} & n_{,\eta} & 0 \end{bmatrix} ; [F_z] = [F_0]([I] + z[b_n]) \quad (15)$$

where  $[I]$  is the identity matrix and [28–30]:

$$[b_n] = [F_0]^{-1}[F_n] ; [b_n] = \begin{bmatrix} b_{n11} & b_{n12} & 0 \\ b_{n21} & b_{n22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^1 \cdot n_{,\xi} & a^1 \cdot n_{,\eta} & 0 \\ a^2 \cdot n_{,\xi} & a^2 \cdot n_{,\eta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad (16)$$

If the four nodes in an element are coplanar, then the matrix  $[bn]$  has a zero column because  $n$  is constant in this element.

### 2.2. Representation of displacement $u_q$

The displacement of  $u_q$  is [29,30]:

$$u_q(\xi, \eta, z) = u_p(\xi, \eta) + z \beta(\xi, \eta) \text{ with } \beta \cdot n = 0 \quad (17)$$

where:

$$u_p(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{Bmatrix} \quad (18)$$

$$\beta(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \beta_i + \sum_{k=5}^8 P_k(\xi, \eta) \Delta \beta_{sk} t_{sk} ; \beta_i = \theta_i \times n_i \quad (19)$$

$$\beta = \sum_{i=1}^4 N_i [RN]_i \begin{Bmatrix} \theta_{Xi} \\ \theta_{Yi} \\ \theta_{Zi} \end{Bmatrix} + \sum_{k=5}^8 P_k \{t_{sk}\} \Delta \beta_{sk} \quad (20)$$

$$[RN]_i = [\{RN1\}_i \ \{RN2\}_i \ \{RN3\}_i] = \begin{bmatrix} 0 & n_{Zi} & -n_{Yi} \\ -n_{Zi} & 0 & n_{Xi} \\ n_{Yi} & -n_{Xi} & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

where  $N_i$  is a linear function and  $P_k$  is a quadratic function (see Table 1).

$\Delta \beta_{sk}$  ( $k=5,6,7,8$ ) is a supplementary degree of freedom on each side of the element. It represents the increment from the average

of  $\beta_{s_i}$  and  $\beta_{s_j}$  in the middle side (Fig. 5).  $t_{s_k} = x_{ji}/L_k$  ( $k=5,6,7,8$ ) is a unit vector tangential on the side of  $k$  (Figs. 6 and 7).

Rotations  $\beta_s$  and  $\beta_m$  are:

$$\beta_s = \beta_{\underline{s}} \cdot \underline{t}_s \quad ; \quad \beta_m = \beta_{\underline{m}} \cdot \underline{t}_m \tag{22}$$

Rotation  $\beta_s$  (in the plane  $s$ - $z$  where  $s$  is the tangential coordinate on the considered side) is a quadratic function with respect to  $s$ . Rotation  $\beta_m$  (in the plane  $m$ - $z$  where  $m$  is perpendicular to  $s$  and  $n$ ) is a linear function to  $s$ . For an example, in the side

of  $i$ - $j$  (see Fig. 5), we have [6–9,12,13]:

$$\beta_s = \left(1 - \frac{s}{L_k}\right)\beta_{s_i} + \frac{s}{L_k}\beta_{s_j} + 4\frac{s}{L_k}\left(1 - \frac{s}{L_k}\right)\Delta\beta_{s_k}; \quad \beta_m = \left(1 - \frac{s}{L_k}\right)\beta_{m_i} + \frac{s}{L_k}\beta_{m_j} \tag{23}$$

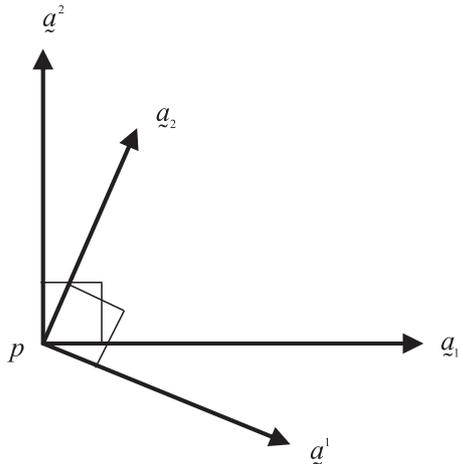


Fig. 3. Covariant and contravariant basis.

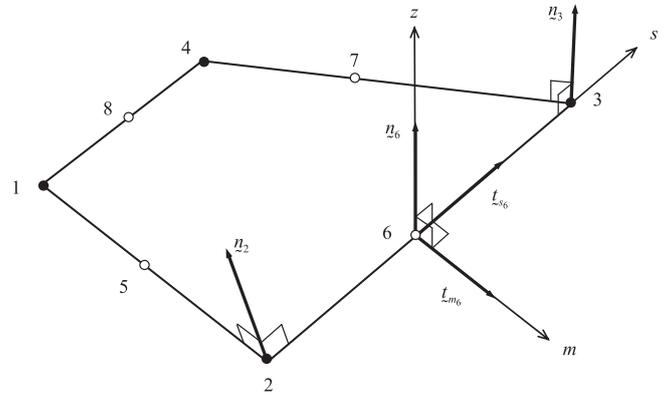


Fig. 6. Tangential unit vector on side  $k$ .

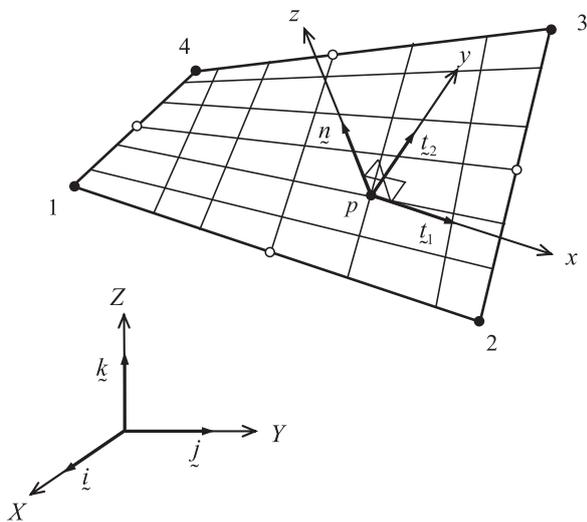


Fig. 4. Local coordinate system  $x, y, z$  and global cartesian coordinate system  $X, Y, Z$ .

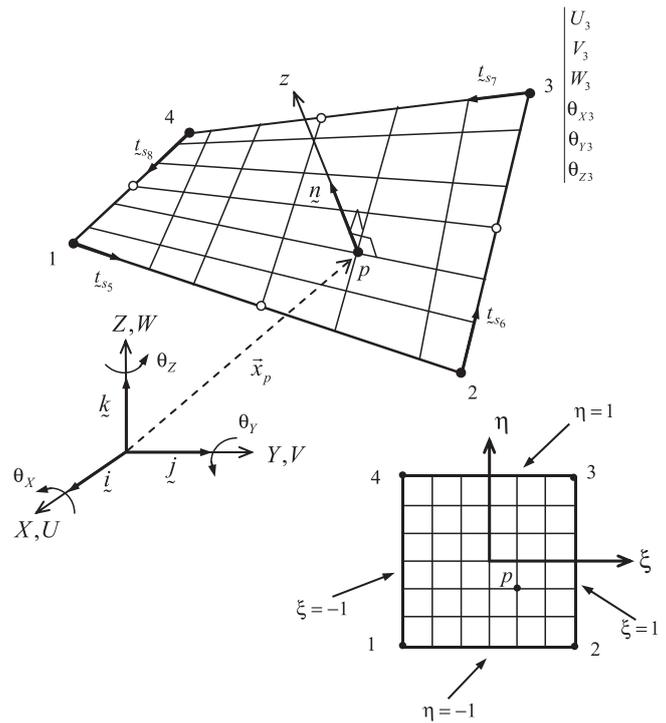


Fig. 7. Nodal degrees freedom of DKMQ24 shell element.

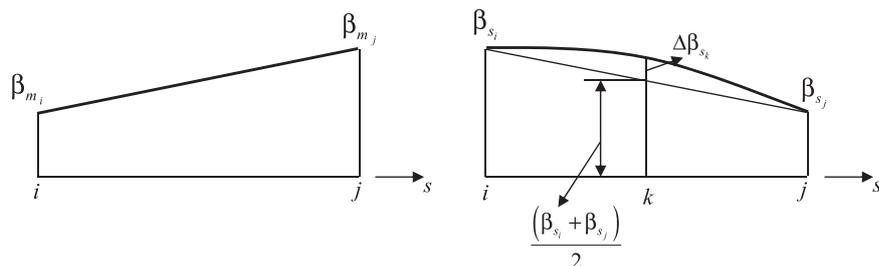


Fig. 5. Variation of rotation along the sides of element.

2.3. Representation of membrane deformation {e} and curvature deformation {χ}

From [28–30] the membrane deformation is:

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \\ t_2 & t_1 \end{bmatrix} [C^0]^T \begin{Bmatrix} u_{p,\xi} \\ u_{p,\eta} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

By introducing (18) into (24), we get:

$$\{e\} = [B_m]\{u_n\} \quad (25)$$

$$\{u_n\}^T = \langle u_n \rangle = \langle \dots U_i \ V_i \ W_i \ \theta_{X_i} \ \theta_{Y_i} \ \theta_{Z_i} \ \dots \rangle_{i=1,4}$$

(see Fig. 7)

From [28–30] we have:

$$[B_m] = \begin{bmatrix} \dots & \langle t_1 \rangle N_{i,x} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \langle t_2 \rangle N_{i,y} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \langle t_1 \rangle N_{i,y} + \langle t_2 \rangle N_{i,x} & 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}_{(3 \times 24)} \quad i = 1, 4 \quad (26)$$

$$N_{i,x} = N_{i,\xi} C_{11}^0 + N_{i,\eta} C_{21}^0 \quad ; \quad N_{i,y} = N_{i,\xi} C_{12}^0 + N_{i,\eta} C_{22}^0 \quad (27)$$

The components of the curvature tensor are given by [28–30]:

$$\begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \\ t_2 & t_1 \end{bmatrix} \left[ [bc]^T \begin{Bmatrix} u_{p,\xi} \\ u_{p,\eta} \end{Bmatrix} + [C^0]^T \begin{Bmatrix} \beta_{,\xi} \\ \beta_{,\eta} \end{Bmatrix} \right] \quad (28)$$

By introducing (18) and (20) into (28), we have [29,30]:

$$\{\chi\} = [B_{b\beta}]\{u_n\} + [B_{b\Delta\beta}]\{\Delta\beta_n\} \quad (29)$$

with:

$$\langle \Delta\beta_n \rangle = \langle \Delta\beta_{s_5} \ \Delta\beta_{s_6} \ \Delta\beta_{s_7} \ \Delta\beta_{s_8} \rangle$$

and

$$[B_{b\beta}] = \begin{bmatrix} \dots & \langle t_1 \rangle Nbc1_i & \langle V1_i \rangle N_{i,x} & \dots \\ \dots & \langle t_2 \rangle Nbc2_i & \langle V2_i \rangle N_{i,y} & \dots \\ \dots & \langle t_1 \rangle Nbc2_i + \langle t_2 \rangle Nbc1_i & \langle V1_i \rangle N_{i,y} + \langle V2_i \rangle N_{i,x} & \dots \end{bmatrix} \quad \times i = 1, 4 \quad (30)$$

$$Nbc1_i = N_{i,\xi} bc_{11} + N_{i,\eta} bc_{21} \quad ; \quad Nbc2_i = N_{i,\xi} bc_{12} + N_{i,\eta} bc_{22} \quad (31)$$

$$\langle V1_i \rangle = \left\langle \left( \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \end{matrix} \cdot RN1_i \right) \left( \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \end{matrix} \cdot RN2_i \right) \left( \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \end{matrix} \cdot RN3_i \right) \right\rangle \quad ;$$

$$\langle V2_i \rangle = \left\langle \left( \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \end{matrix} \cdot RN1_i \right) \left( \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \end{matrix} \cdot RN2_i \right) \left( \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \end{matrix} \cdot RN3_i \right) \right\rangle \quad (32)$$

From [28–30] we have:

$$[bc] = \begin{bmatrix} bc_{11} & bc_{12} \\ bc_{21} & bc_{22} \end{bmatrix} = [\hat{b}] [C^0]; \quad [\hat{b}] = \begin{bmatrix} b_{n22} & -b_{n12} \\ -b_{n21} & b_{n11} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} a^2 \cdot n_{,\eta} & -a^1 \cdot n_{,\eta} \\ -a^2 \cdot n_{,\xi} & a^1 \cdot n_{,\xi} \end{bmatrix} \quad (33)$$

We can see there is a coupling between bending and membrane for the curvature equations in (30). This happens if the four nodes in the element are not coplanar  $[bc] \neq [0]$ . If the four nodes in an element are coplanar, then the matrix  $[bc] = [0]$  (because  $n$  is constant for this element). In this situation the formulation will give the same results with the facet shell model.

$$[B_{b\Delta\beta}] = \begin{bmatrix} t_1 \cdot t_{s_k} P_{k,x} & & & \\ \dots & t_2 \cdot t_{s_k} P_{k,y} & & \\ t_1 \cdot t_{s_k} P_{k,y} + t_2 \cdot t_{s_k} P_{k,x} & & \dots & k = 5, 8 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$P_{k,x} = P_{k,\xi} \cdot C_{11}^0 + P_{k,\eta} \cdot C_{21}^0 \quad ; \quad P_{k,y} = P_{k,\xi} \cdot C_{12}^0 + P_{k,\eta} \cdot C_{22}^0 \quad (35)$$

2.4. Assumed shear strain fields

The transversal shear strain  $\{\underline{\gamma}\}$  is interpolated independently by [28–30]:

$$\begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_x \\ \underline{\gamma}_y \end{Bmatrix} = [C^0]^T \begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_\xi \\ \underline{\gamma}_\eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^0 & C_{12}^0 \\ C_{21}^0 & C_{22}^0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_\xi \\ \underline{\gamma}_\eta \end{Bmatrix} \quad (36)$$

From Refs. [1,2,13,28–30], we have:

$$\begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_\xi \\ \underline{\gamma}_\eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\eta) & 0 & \frac{1}{2}(1+\eta) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_{\xi 5} \\ \underline{\gamma}_{\eta 6} \\ \underline{\gamma}_{\xi 7} \\ \underline{\gamma}_{\eta 8} \end{Bmatrix} = [N_\gamma] [\underline{\gamma}_{sn}] \quad (37)$$

where  $\underline{\gamma}_{\xi 5}, \underline{\gamma}_{\eta 6}, \underline{\gamma}_{\xi 7}, \underline{\gamma}_{\eta 8}$  denote natural shear strains on the sides 5,6,7,8.

On the other hand, we have:

$$\begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_{\xi 5} \\ \underline{\gamma}_{\eta 6} \\ \underline{\gamma}_{\xi 7} \\ \underline{\gamma}_{\eta 8} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} L_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -L_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_{s5} \\ \underline{\gamma}_{s6} \\ \underline{\gamma}_{s7} \\ \underline{\gamma}_{s8} \end{Bmatrix} = [A_\gamma] \{\underline{\gamma}_{sn}\} \quad (38)$$

Finally, from (36)–(38) we obtain:

$$\{\underline{\gamma}\} = \begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_x \\ \underline{\gamma}_y \end{Bmatrix} = [B_{s_\gamma}]_{(2 \times 4)} \{\underline{\gamma}_{sn}\}_{(4 \times 1)}$$

where:

$$[B_{s_\gamma}] = [C^0]^T [N_\gamma] [A_\gamma] \quad (39)$$

Stating that  $m-s$  is the local coordinate system on the side of the considered element, (see Fig. 6), the tangential shear strain on the side  $k$  based on the constitutive law can be defined as:

$$\underline{\gamma}_s = \frac{T_s}{D_s} \quad ; \quad D_s = \frac{KEh}{2(1+\nu)} \quad (40)$$

where  $E$  is the Young Modulus of Elasticity,  $\nu$  the Poisson ratio,  $h$  the thickness of shell.  $K=5/6$  is the shear correction factor of Reissner–Mindlin.

The equilibrium equation of the each side must be added to Eq. (40):

$$T_s = M_{s,s} + M_{m,s} \quad (41)$$

The constitutive law for the bending moment on each side:

$$M_s = D_b (\beta_{s,s} + \nu \beta_{m,m}) \quad ; \quad M_{m,s} = D_b \frac{(1-\nu)}{2} (\beta_{s,m} + \nu \beta_{m,s}); \\ D_b = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (42)$$

The kinematic relationship between tangential shear strain and the rotation at normal direction on each side obtained from (40)–(42) is as follows [12,13]:

$$\underline{\gamma}_s = \frac{D_b}{D_s} \left[ \beta_{s,ss} + \nu \beta_{m,ms} + \frac{(1-\nu)}{2} (\beta_{s,mm} + \nu \beta_{m,ms}) \right] \quad (43)$$

The rotation  $\beta_s(s)$  and  $\beta_m(s)$  had been stated in (23). We get:

$$\beta_{s,mm} = \nu \beta_{m,ms} = 0 \quad (44)$$

We get on side  $k$  with quadratic function of  $\beta_s$  in  $s$  direction (23):

$$\underline{\gamma}_{s_k} = -\frac{2}{3} \phi_k \Delta \beta_{s_k} \quad \text{With: } \phi_k = \frac{D_b 12}{D_s L_k^2} = \frac{2}{K(1-\nu)} \left( \frac{h^2}{L_k^2} \right) \quad (45)$$

The factor  $\phi_k$  (characterizing the influence of shear) maintains the consistency of element. The factor  $h^2/L_k^2$ , in that equation explains why DKMQ24 element behaves as the *Reissner–Mindlin* theory for thick shell and as the *Kirchhoff–Love* theory for thin shell. In the thin shell problems, the factor  $h^2/L_k^2$  is close to zero, so that the transversal shear deformation is automatically ignored, as a result the *shear locking* resolved by this Discrete Kirchhoff Mindlin method. From Eq. (45), we get [13]:

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{s5} \\ \gamma_{s6} \\ \gamma_{s7} \\ \gamma_{s8} \end{Bmatrix} = -\frac{2}{3} \begin{bmatrix} \phi_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\beta_{s_5} \\ \Delta\beta_{s_6} \\ \Delta\beta_{s_7} \\ \Delta\beta_{s_8} \end{Bmatrix} \text{ or} \quad (46)$$

$$\{\underline{\gamma}_{sn}\} = [A_\phi] \{\Delta\beta_n\}$$

Finally, from (39) and (46) we obtain:

$$\{\underline{\gamma}\} = \begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix} = [B_{s_y}]_{(2 \times 4)} [A_\phi]_{(4 \times 4)} \{\Delta\beta_n\}_{(4 \times 1)} \quad (47)$$

### 2.5. Modified Hu-Washizu functional

The modified *Hu-Washizu* functional used to develop our DKMQ24 shell element is classical. We only recall here the modified *Hu-Washizu* principle, whose details can be found in reference [31]. *Hu-Washizu* principle reads:

$$\begin{aligned} \Pi &= \Pi_{int} - \Pi_{ext} \\ \Pi_{int} &= \Pi_{int}^m + \Pi_{int}^b + \Pi_{int}^s \quad ; \\ \Pi_{ext} &= \int_A w f_z dA + \int_s (w f_z + \beta_x m_x + \beta_y m_y) ds \end{aligned} \quad (48)$$

where  $\Pi_{int}^m, \Pi_{int}^b$  and  $\Pi_{int}^s$  respectively membrane, bending and shear strain energy.  $f_z$  is the distributed load in the  $z$  direction and

$$\Pi_{int}^s = \frac{1}{2} \int_A \langle \underline{\gamma} \rangle [H_s] \langle \underline{\gamma} \rangle dA + \int_A (T) (\{\gamma\} - \{\underline{\gamma}\}) dA \quad (49)$$

By stating the variation  $\Pi$  with respect to  $T$  (shear force), we get the condition:

$$\int_A \langle \delta T \rangle (\{\gamma\} - \{\underline{\gamma}\}) dA = 0 \quad (50)$$

This equation which can be viewed as a constraint equation and is equivalent to:

$$\int_0^{L_k} \delta T_{s_k} (\gamma_{s_k} - \underline{\gamma}_{s_k}) ds = 0 \quad , \quad k = 5, 6, 7, 8 \quad (51)$$

### 2.6. Application of discrete Kirchhoff–Mindlin method on the side of elements

Using the kinematic relationships for transversal shear deformation, the Discrete Kirchhoff–Mindlin method [12,13] can be stated on element for getting  $\{\chi\}$  and  $\{\gamma\}$  as function of nodal degrees of freedom. From (51), we have:

$$\int_0^{L_k} (\gamma_{s_k} - \underline{\gamma}_{s_k}) ds = 0 \quad (52)$$

with

$$\gamma_{s_k} = u_{p,s} \cdot n_k + \beta \cdot t_{s_k} \quad ; \quad \underline{\gamma}_{s_k} = -\frac{2}{3} \phi_k \Delta\beta_{s_k} \quad (53)$$

Therefore

$$\int_0^{L_k} \left( u_{p,s} \cdot n + \beta \cdot t_{s_k} + \frac{2}{3} \phi_k \Delta\beta_{s_k} \right) ds = 0 \quad (54)$$

where  $n$  is a unit normal vector from one point  $s$  on the side  $k$  of element. On the each side  $k$ , we have:

$$u_{p,s} = \frac{1}{L_k} (u_j - u_i) \quad ; \quad \beta \cdot t_{s_k} = \left( \left( 1 - \frac{s}{L_k} \right) \beta_i + \frac{s}{L_k} \beta_j \right) t_{s_k} + \left( 4 \frac{s}{L_k} \left( 1 - \frac{s}{L_k} \right) \right) \Delta\beta_{s_k} \quad (55)$$

On each side, the value  $n_k$ :

$$n_k = \frac{1}{2} (n_i + n_j) \quad (56)$$

Equivalently, we have:

$$\frac{1}{L_k} (u_j - u_i) n_k + \frac{1}{2} (\beta_i + \beta_j) t_{s_k} + \frac{2}{3} (1 + \phi_k) \Delta\beta_{s_k} = 0 \quad (57)$$

Finally, we get:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3} (1 + \phi_k) \Delta\beta_{s_k} &= \frac{1}{L_k} \langle n_k \rangle \langle u_{ji} \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \langle t_{s_k} \cdot RN1_i \quad ; \quad t_{s_k} \cdot RN2_i \quad ; \quad t_{s_k} \cdot RN3_i \rangle \langle \theta_{x_i} \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \langle t_{s_k} \cdot RN1_j \quad ; \quad t_{s_k} \cdot RN2_j \quad ; \quad t_{s_k} \cdot RN3_j \rangle \langle \theta_{x_j} \rangle \end{aligned} \quad (58)$$

If (58) is applied on all four sides, then the independent parameter  $\{\Delta\beta_n\}$  is a function of degrees of freedom  $\{u_n\}$ , namely:

$$\{\Delta\beta_n\}_{(4 \times 1)} = [A_\Delta]_{(4 \times 4)}^{-1} [A_u]_{(4 \times 24)} \{u_n\}_{(24 \times 1)} \quad (59)$$

where:

$$[A_\Delta] = -\frac{2}{3} \begin{bmatrix} (1 + \phi_5) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 + \phi_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 + \phi_7) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 + \phi_8) \end{bmatrix} \quad (60)$$

### 2.7. Element stiffness matrix

$$\text{The membrane deformation is : } \{e\} = [B_m(\xi, \eta)] \{u_n\} \quad (61)$$

By substituting (59) into (29) we finally obtain the expression of the curvature deformation:

$$\{\chi\} = [B_b(\xi, \eta)] \{u_n\}$$

where:

$$[B_b(\xi, \eta)] = [B_{b_\beta}(\xi, \eta)] + [B_{b_{\Delta\beta}}(\xi, \eta)] [A_\Delta]^{-1} [A_u] \quad (62)$$

Substituting (59) into the expression of transversal shear strain deformation (47), we obtain [30]:

$$\{\underline{\gamma}\} = [B_s(\xi, \eta)] \{u_n\}$$

where

$$[B_s(\xi, \eta)] = [B_{s_y}(\xi, \eta)] [A_\phi] [A_\Delta]^{-1} [A_u] \quad (63)$$

On the other hand, membrane deformation energy for an element with the area  $A$ :

$$\Pi_{int}^m = \frac{1}{2} \int_A \langle e \rangle [H_m] \langle e \rangle dA = \frac{1}{2} \langle u_n \rangle [k_m] \{u_n\} \quad (64)$$

where

$$[k_m] = \int_A [B_m]^T [H_m] [B_m] dA \quad (65)$$

and

$$[H_m] = D_m \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{sym} & & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} ; D_m = \frac{Eh}{1-\nu^2} \quad (66)$$

In the similar way, bending deformation energy for an element with the area  $A$  is given by:

$$\Pi_{\text{int}}^b = \frac{1}{2} \int_A \langle \chi \rangle [H_b] \{ \chi \} dA = \frac{1}{2} \langle u_n \rangle [k_b] \{ u_n \} \quad (67)$$

where

$$[k_b] = \int_A [B_b]^T [H_b] [B_b] dA \text{ and } : [H_b] = D_b \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{sym} & & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (68)$$

Finally, transversal shear deformation energy for an element with the area  $A$ :

$$\Pi_{\text{int}}^s = \frac{1}{2} \int_A \langle \gamma \rangle [H_s] \{ \gamma \} dA = \frac{1}{2} \langle u_n \rangle [k_s] \{ u_n \} \quad (69)$$

With

$$[k_s] = \int_A [B_s]^T [H_s] [B_s] dA \text{ and } : [H_s] = D_s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (70)$$

Accordingly, the stiffness matrix  $[k]$  is the sum of the stiffness matrices due to membrane, bending and transversal shear.

$$[k] = [k_m] + [k_b] + [k_s] \quad (71)$$

Stiffness matrix is determined using numerical integration with Gauss integration point. Standard Gauss integration  $2 \times 2$  point is enough to integrate the stiffness matrix (65), (68) and (70).

Shear strain deformation energy depends on the value of factor  $\phi_k$  and this energy becomes zero if  $\phi_k \approx 0$ . In thin shell problem ( $\phi_k \approx 0$ ), the DKMQ24 element converges to DKQ24 element in reference [29]. Therefore, shear stiffness becomes zero and there is no shear locking for thin shell with the element DKMQ24.

2.8. Fictitious stiffness for  $\theta_z$  and MacNeal stabilization

In the field of real kinematic, there is no rotation around the normal axis ( $\theta_z$ ). Then the stiffness matrix  $[k]$  (71) will contain the value zero at the nodal variables  $\theta_{z_i}$ . As a result, it will arise four spurious modes at elements. If all elements are combined into a plane that is coplanar, then the sum of rigidity matrix (rigidity assemblage matrix) will become singular. Therefore, to avoid the difficulties of numerical operations (spurious modes), we used a

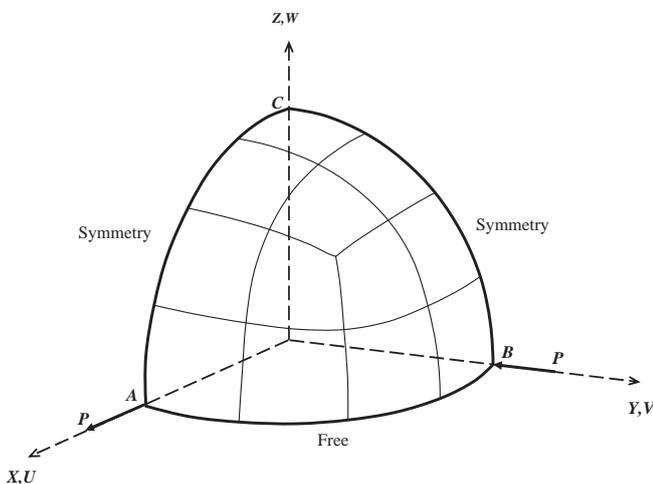


Fig. 8. Hemispherical Shell.

Table 2

Deflection  $U_A$  ( $U_A = U_A \times 10^3$ ) Pinched hemispherical shell.

N × N	DKMQ24	Q4r24
4 × 4	78.721	75.053
6 × 6	93.963	90.574
8 × 8	93.624	91.394
10 × 10	92.996	91.401
12 × 12	92.601	91.459
14 × 14	92.371	91.545
16 × 16	92.246	91.637
18 × 18	92.184	91.726
20 × 20	92.158	91.807
Ref. [35]	92.400	

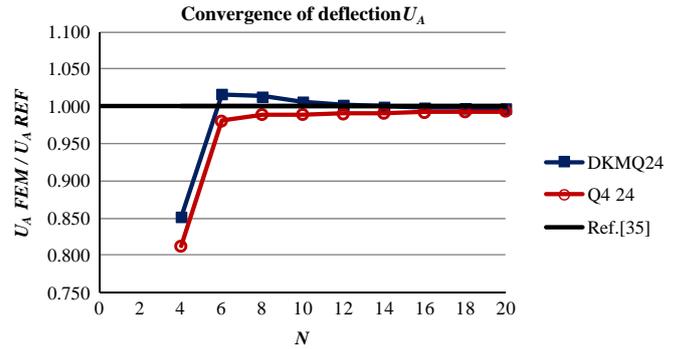


Fig. 9. Convergence of Deflection  $U_A$  for the pinched hemispherical shell.

fictitious stiffness. With the addition of fictitious stiffness, three spurious modes will vanish, while the other spurious mode will be eliminated by MacNeal stabilization [32–34].

$$\Pi_{\text{int}} = \Pi_{\text{int}} + \Pi_{\text{int}}^{\theta_z} + \Pi_{\text{int}}^{\bar{\theta}_z} \quad (72)$$

a. We define a fictitious stiffness such as:

$$\Pi_{\text{int}}^{\theta_z} = \frac{1}{2} \frac{Eh^3}{12} 10^{-3} \int_A (\theta_{z,x} \theta_{z,x} + \theta_{z,y} \theta_{z,y}) dA = \frac{1}{2} \langle \theta_n \rangle [k_{\theta_z}] \{ \theta_n \} \quad (73)$$

$$\theta_z(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \theta_{z_i} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \langle n_i \rangle \{ \theta_n \} = \langle N \rangle \langle n_i \rangle \begin{Bmatrix} \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \\ \theta_{z_i} \end{Bmatrix} \quad (74)$$

where:

$$\langle n_i \rangle = \langle n_{x_i} \quad n_{y_i} \quad n_{z_i} \rangle ;$$

$$\langle \theta_n \rangle = \langle \theta_{x_1} \quad \theta_{y_1} \quad \theta_{z_1} \quad \dots \quad \theta_{x_4} \quad \theta_{y_4} \quad \theta_{z_4} \rangle$$

and

$$\begin{Bmatrix} \theta_{z,x} \\ \theta_{z,y} \end{Bmatrix} = [C^0]^T \begin{Bmatrix} \theta_{z,\xi} \\ \theta_{z,\eta} \end{Bmatrix} \quad (75)$$

Matrix  $[k_{\theta_z}]_{12 \times 12}$  is expanded into matrix  $[k_{\theta_z}]_{24 \times 24}$  to adjust the nodal variables in the element stiffness matrix.

b. According to Mac Neal Stabilization, we defined also:

$$\Pi_{\text{int}}^{\bar{\theta}_z} = \frac{1}{2} \frac{Eh}{2(1+\nu)} 10^{-3} \int_A (\bar{\theta}_z \cdot \bar{\theta}_z) dA = \frac{1}{2} \langle u_n \rangle [k_{\bar{\theta}_z}^-] \{ u_n \} \quad (76)$$

Thus the final form of stiffness matrix is

$$: [k] = [k_m] + [k_b] + [k_s] + [k_{\theta_z}] + [k_{\bar{\theta}_z}^-] \quad (77)$$

In this example, it is important to notice that:

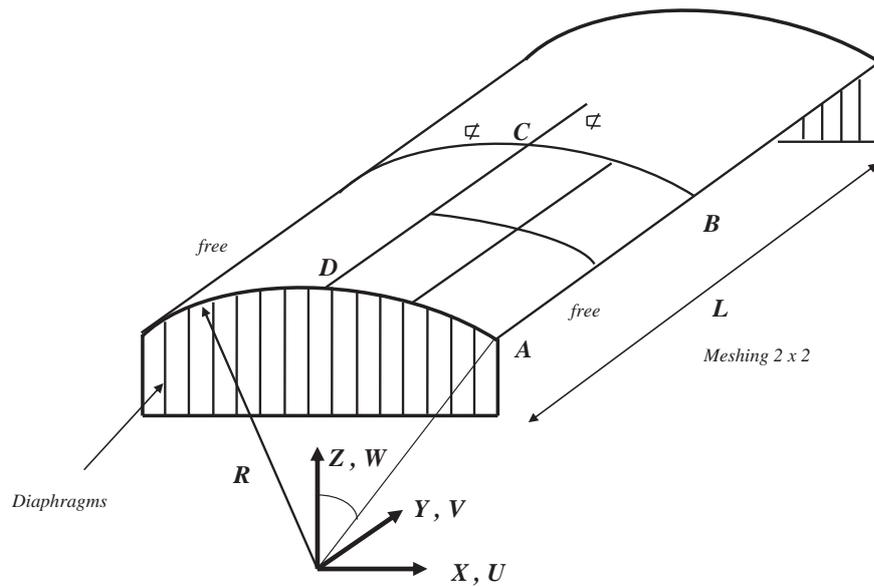


Fig. 10. Scordelis–Lo roof problem.

Table 3  
Deflection  $W_B$  for the Scordelis–Lo roof problem.

$N \times N$	DKMQ24	Q4 $\gamma$ 24
2 × 2	−4.392	−4.285
4 × 4	−3.425	−3.418
6 × 6	−3.484	−3.488
8 × 8	−3.528	−3.539
10 × 10	−3.554	−3.570
12 × 12	−3.569	−3.590
14 × 14	−3.579	−3.604
16 × 16	−3.585	−3.613
18 × 18	−3.590	−3.620
20 × 20	−3.593	−3.625
Deep Shell Ref. [36]	−3.610	
Shallow Shell Ref. [36]	−3.703	

Table 4  
Deflection  $W_C$  for the Scordelis–Lo roof problem.

$N \times N$	DKMQ24	Q4 $\gamma$ 24
2 × 2	0.593	0.629
4 × 4	0.513	0.508
6 × 6	0.523	0.521
8 × 8	0.529	0.530
10 × 10	0.533	0.536
12 × 12	0.535	0.539
14 × 14	0.537	0.542
16 × 16	0.538	0.543
18 × 18	0.539	0.545
20 × 20	0.539	0.546
Deep Shell Ref. [36]	0.541	
Shallow Shell Ref. [36]	0.525	

1. The number of rank matrix  $[k_{\theta_z}]$  is three and rank of matrix  $[k_{\theta_z}^-]$  is one.
2. The addition of small fictitious stiffness  $[k_{\theta_z}]$  and  $[k_{\theta_z}^-]$  will not affect the precision and the convergence speed. In Eqs. (73) and (76), we used a small arbitrary factor of stabilization of  $10^{-3}$  that we found empirically. This small factor will not affect the results but enable to avoid singularities.
3. The matrix  $[k_{\theta_z}]$  eliminates the numerical singularity in the element when the four nodes are coplanar, and eliminates

Table 5  
Convergence of  $N_{YB}$  and  $M_{XC}$  for the Scordelis–Lo roof problem.

$N \times N$	DKMQ24		Q4 $\gamma$ 24	
	$N_{YB}$	$M_{XC}$	$N_{YB}$	$M_{XC}$
2 × 2	269.440	1.782	272.880	1.923
4 × 4	498.430	1.874	496.730	1.808
8 × 8	592.680	1.998	593.170	1.979
16 × 16	620.750	2.041	623.120	2.047
32 × 32	628.280	2.054	631.550	2.068
64 × 64	631.110	2.061	633.900	2.075
Shallow Shell Ref. [36]	641.000	2.056	641.000	2.056

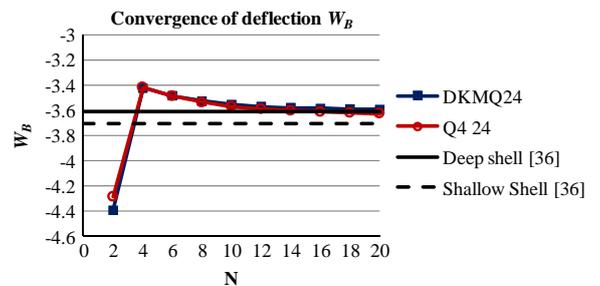


Fig. 11. Convergence of deflection  $W_B$  for the Scordelis–Lo roof problem.

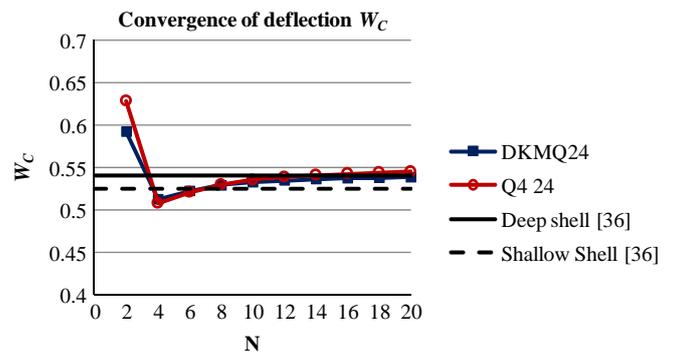


Fig. 12. Convergence of deflection  $W_C$  for the Scordelis–Lo roof problem.

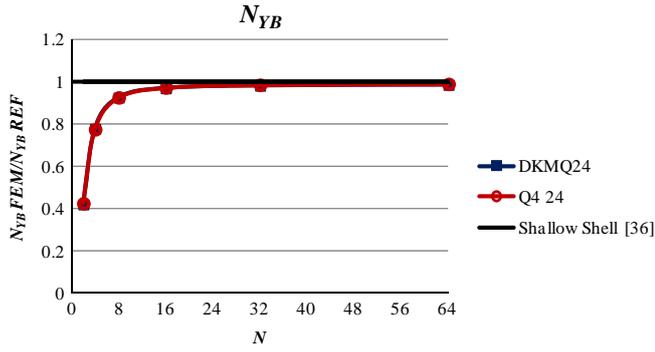


Fig. 13. Convergence of  $N_{YB}$  for the Scordelis–Lo roof problem.

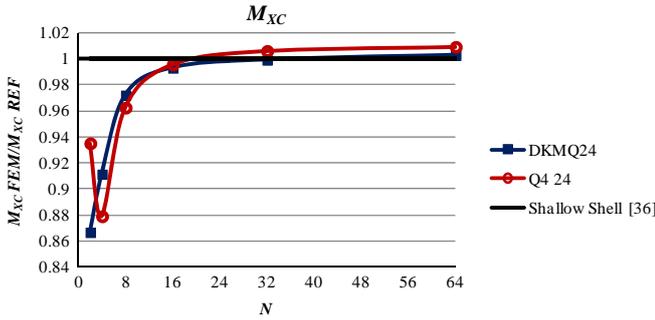


Fig. 14. Convergence of  $M_{XC}$  for the Scordelis–Lo roof problem.

three Spurious Modes, whereas the matrix  $[k_{\theta_z}^-]$  eliminates one spurious mode.

- Finally the DKMQ24 element has rank=18, with 6 RBM (Rigid Body Motion) without any spurious modes and without any spurious constrains when the four nodes are coplanar.

### 2.9. Load vector

The equivalent nodal force to average distributed load  $f_z$  leads to:

$$P_{\text{ext}} = \int_A f_z w dA = \langle F_n \rangle \{u_n\} \quad (78)$$

where:

$$\langle F_n \rangle = \langle \dots \quad 0 \quad 0 \quad F_{Z_i} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \rangle \quad i = 1, 4; F_{Z_i} = f_z \int_A N_i dA \quad (79)$$

### 3. Q4 $\gamma$ 24 shell element

In this paper, we will compare the performance of DKMQ24 element with Q4 $\gamma$ 24 element inspired by [1,2]. We can find de detail of formulation Q4 $\gamma$ 24 in [28]. We can see that there are some similarities in both elements and we need only to explain the differences. The Q4 $\gamma$ 24 element uses bi-linear function for both  $u_p$  and  $\beta$ . The displacement of  $u_q$  is given by:

$$u_q(\xi, \eta, z) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{Bmatrix} + z \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) [RN]_i \begin{Bmatrix} \theta_{X_i} \\ \theta_{Y_i} \\ \theta_{Z_i} \end{Bmatrix} \quad (80)$$

For membrane stiffness, Q4 $\gamma$ 24 uses the same membrane element stiffness as DKMQ24 in the (65). While, for bending stiffness, we have the same equation as in (68) with

$$[B_b(\xi, \eta)] = [B_{b_p}(\xi, \eta)] \quad (81)$$

Finally for shear stiffness, Q4 $\gamma$ 24 element uses modified functional of Hellinger-Reissner, where the shear deformation is given by

$$\gamma_s = \frac{1}{L_k} \int_0^{L_k} \gamma_s ds = \frac{1}{L_k} \int_0^{L_k} \left( u_{p,s} \cdot n + \beta \cdot t_s \right) ds \quad (82)$$

where  $n$  is a unit normal vector from one point  $s$  in the side  $k$  of the element. We have:

$$\gamma_{s_k} = \frac{1}{L_k} \langle n_k \rangle \left\{ u_{ji} \right\} + \frac{1}{2} \langle t_{s_k} \cdot RN1_i \quad : \quad t_{s_k} \cdot RN2_i \quad : \quad t_{s_k} \cdot RN3_i \rangle \left\{ \theta_{X_i} \right\} \\ + \frac{1}{2} \langle t_{s_k} \cdot RN1_j \quad : \quad t_{s_k} \cdot RN2_j \quad : \quad t_{s_k} \cdot RN3_j \rangle \left\{ \theta_{X_j} \right\} \quad (83)$$

If (83) is applied on all four sides, then the independent parameter  $\{\gamma_{s_n}\}$  is a function of degrees of freedom  $\{u_n\}$ , and we obtain:

$$\{\gamma_{s_n}\}_{(4 \times 1)} = [A_u]_{(4 \times 24)} \{u_n\}_{(24 \times 1)} \quad (84)$$

From (39) and (84) we get:

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix} = [B_s] \{u_n\} \quad \text{with} \quad [B_s] = [B_{s_r}] [A_u] \quad (85)$$

For shear stiffness, we can obtain an equation similar to (70) with  $[B_s]$  given from (85).

## 4. Convergence test

The convergence test introduced here includes benchmark test suggested by Mac Neal and Harder [35], are: the hemispherical shell, the Scordelis–Lo roof problem, the pinched cylindrical shell with end diaphragms, the hyperbolic paraboloid shell and the twisted beam. We will present also the results for plate problems in the two last examples. In all cases, the shells are analyzed with a constant thickness. The boundary conditions are known, and there is no initial deformation.

### 4.1. The hemispherical shell

A case which is often used to evaluate the performance of a thin hemispherical shell element ( $R/h=250$ ) is presented in Fig. 8. We have free boundary conditions and 4 pieces point load. This case is introduced to prove the absence of membrane locking. The structure is divided into four sections due to the symmetry. The deflection  $U_A = -V_B$  which is a results of numerical test is presented in Table 2 and Fig. 9.

Data:  $R = 10 \text{ m}$ ;  $h = 0.04 \text{ m}$ ;  $R/h = 250$ ;  $P = 1 \text{ N}$ ;  $E = 6.825 \times 10^7 \text{ Pa}$ ;  $\nu = 0.3$

Symmetry condition:  $V = \theta_X = \theta_Z = 0$  on the side AC;  $U = \theta_Y = \theta_Z = 0$  on the side BC

Boundary condition:  $W = 0$  at the point C: Reference value [35]:  $U_A = -V_B = 0.0924 \text{ m}$

The reference value of calculations based on classical theory is  $U_A = 0.0924 \text{ m}$ . We can see in Table 2 and Fig. 9 that DKMQ24 element converges faster than Q4 $\gamma$ 24 element and gives better results, closer to the reference value.

### 4.2. Scordelis–Lo roof problem

Data:  $L = 6 \text{ m}$ ;  $R = 3 \text{ m}$ ;  $h = 0.03 \text{ m}$ ;  $\phi = 40^\circ$ ;  $E = 3 \times 10^{10} \text{ Pa}$ ;  $\nu = 0$ ;  $f_z = -0.625 \times 10^4 \text{ Pa}$

Boundary condition:  $U = W = \theta_Y = 0$  on the side AD

Symmetry condition:  $U = \theta_Y = \theta_Z = 0$  on the side CD;  $V = \theta_X = \theta_Z = 0$  on the side CB

Reference value (theory of deep shell) [36]:  $W_B = -3.61 \text{ cm}$  and  $W_C = 0.541 \text{ cm}$

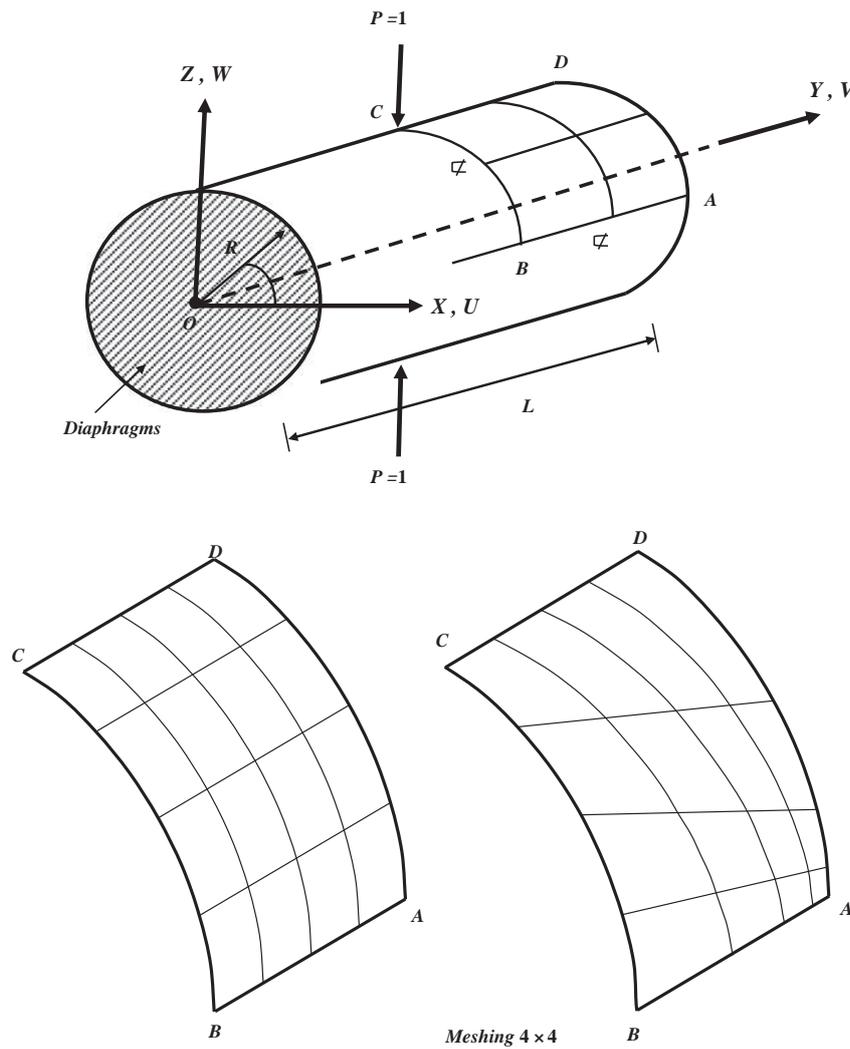


Fig. 15. Pinched cylindrical shell with end diaphragms.

**Table 6**  
Deflection  $W_C$  ( $R/h=100$ ) for the thin pinched cylindrical shell with uniform mesh.

$N \times N$	DKMQ24	Q4γ24
2 × 2	-14.070	-6.157
4 × 4	-101.295	-60.957
6 × 6	-138.213	-99.738
8 × 8	-155.214	-122.094
10 × 10	-162.576	-135.324
12 × 12	-165.636	-143.532
14 × 14	-166.896	-148.905
16 × 16	-167.391	-152.586
18 × 18	-167.571	-155.214
20 × 20	-167.589	-157.158
Ref. [37]	-164.240	

**Table 7**  
Deflection  $W_C$  ( $R/h=100$ ) for the thin pinched cylindrical shell with distorted mesh.

$N \times N$	DKMQ24	Q4γ24
4 × 4	-21.571	-17.066
6 × 6	-72.599	-45.015
8 × 8	-110.934	-77.401
10 × 10	-131.058	-102.375
12 × 12	-142.812	-119.214
14 × 14	-149.868	-130.491
16 × 16	-154.296	-138.258
18 × 18	-157.203	-143.775
20 × 20	-159.201	-147.834
Ref. [37]	-164.240	

Analytical solution (theory of shallow shell) [36]:  $W_B = -3.703$  cm and  $W_C = 0.525$  cm

The case presented in Fig. 10 is a problem which is used to compare the performance of flat facet approach, curved, and isoparametric. This structure has a cylindrical panel with free boundary conditions along the cylinder and on the other transverse direction field of the panel. Geometry and mechanical characteristics can be seen in Fig. 10. This shell has its own load (vertical distributed load)  $f_z = -0.625 \times 10^4$  Pa across the surface.

Transversal shear deformations are very small, so they can be ignored, and the membrane deformation is more dominant

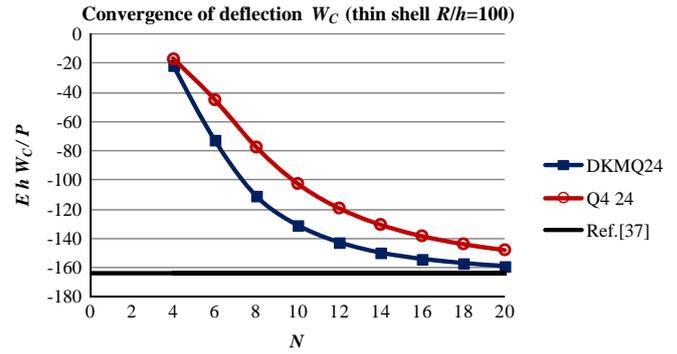
than the bending deformation. We analyzed only a quarter of the structure because of the symmetry. In this example, membrane effect is more dominant. The results of numerical test for Q4γ24 and DKMQ24 elements are presented in Tables 3–5, and in Figs. 11–14. We observed that these elements converge to the deep shell theory solution. The results are quite similar. However, we can see once again in Tables 3 and 4 that DKMQ24 element gives better results, closer to the theoretical solution of deep shell. Table 5 and Figs. 13 and 14 present the convergence of membrane force in point B and bending moment in point C compared to the theoretical solution of shallow shell [36].

**Table 8**  
Deflection  $W_C$  ( $R/h=10$ ) for the thick pinched cylindrical shell with uniform mesh.

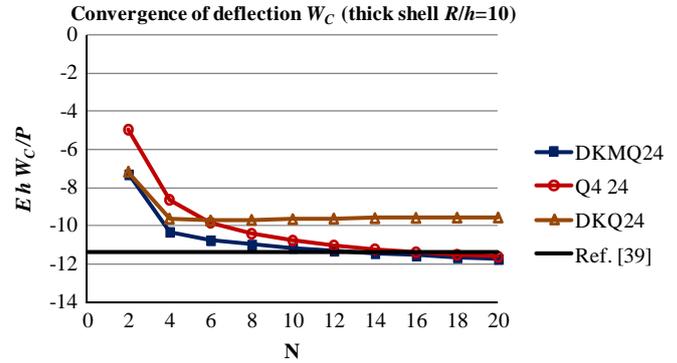
$N \times N$	DKQ24	DKMQ24	Q4 $\gamma$ 24
2 × 2	-7.153	-7.284	-4.951
4 × 4	-9.616	-10.301	-8.628
6 × 6	-9.713	-10.740	-9.827
8 × 8	-9.679	-10.962	-10.408
10 × 10	-9.642	-11.138	-10.767
12 × 12	-9.613	-11.291	-11.024
14 × 14	-9.592	-11.425	-11.221
16 × 16	-9.576	-11.540	-11.380
18 × 18	-9.564	-11.640	-11.509
20 × 20	-9.555	-11.727	-11.617
Ref. [39]	-11.351		

**Table 9**  
Deflection  $W_C$  ( $R/h=10$ ) for the thick pinched cylindrical shell with distorted mesh.

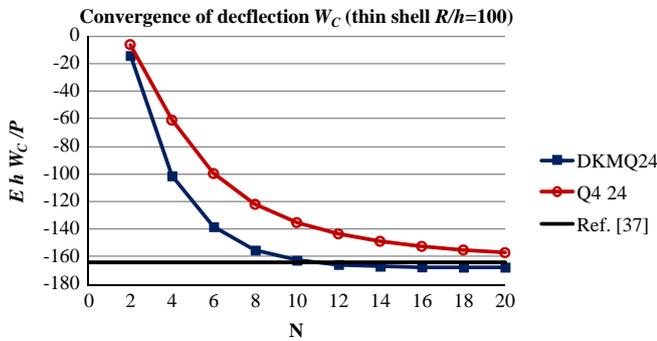
$N \times N$	DKQ24	DKMQ24	Q4 $\gamma$ 24
4 × 4	-7.225	-7.755	-6.337
6 × 6	-8.689	-9.611	-8.643
8 × 8	-9.124	-10.299	-9.702
10 × 10	-9.292	-10.668	-10.270
12 × 12	-9.367	-10.915	-10.633
14 × 14	-9.406	-11.104	-10.892
16 × 16	-9.428	-11.257	-11.092
18 × 18	-9.441	-11.386	-11.253
20 × 20	-9.449	-11.497	-11.387
Ref. [39]	-11.351		



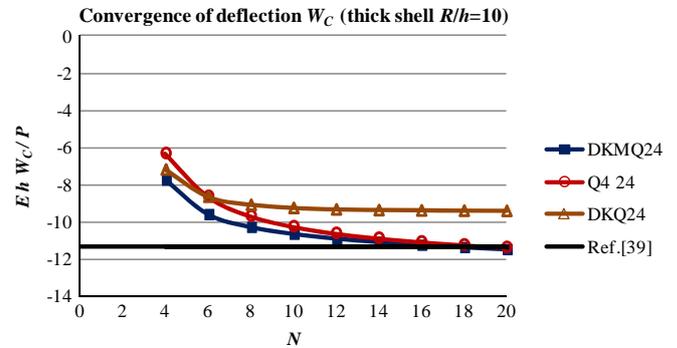
**Fig. 18.** Convergence of deflection  $W_C$  ( $R/h=100$ ) thin pinched cylindrical shell with distorted mesh.



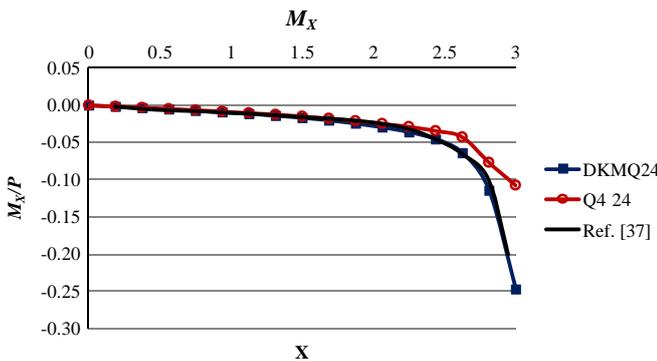
**Fig. 19.** Convergence of deflection  $W_C$  ( $R/h=10$ ) thick pinched cylindrical Shell with uniform mesh.



**Fig. 16.** Convergence of deflection  $W_C$  ( $R/h=100$ ) thin pinched cylindrical shell with uniform mesh.



**Fig. 20.** Convergence of deflection  $W_C$  ( $R/h=10$ ) thick pinched cylindrical Shell with distorted mesh.



**Fig. 17.** Bending moment  $M_x$  along  $DC$  ( $R/h=100$ ) thin pinched cylindrical shell with uniform mesh.

4.3. Pinched cylindrical shell with end diaphragms

Data:  
 $L=6$  m;  $R=3$  m;  $h=0.03$  m and  $0.3$  m;  $\nu=0.3$ ;  $E=3 \times 10^{10}$  Pa  
 Boundary condition:  $U=W=\theta_Y=0$  on the side  $AD$   
 Symmetry conditions:  
 $W=\theta_Y=\theta_X=0$  on the side  $AB$ ;  $V=\theta_X=\theta_Z=0$  on the side  $BC$ ;  
 $U=\theta_Y=\theta_Z=0$  on the side  $CD$   
 We consider two cases:

**Case 1.** Reference value ( $R/h=100$ );  $W_C= Eh W_C/P = -164.24$

**Case 2.** Reference value ( $R/h=10$ );  $W_C= Eh W_C/P = -11.351$

The shell presented in Fig.15 is a pinched cylinder with two concentrated loads located in opposite direction. At both ends, there is a rigid diaphragm. This example is difficult test for the shell element which is indicating the complex deformation of the

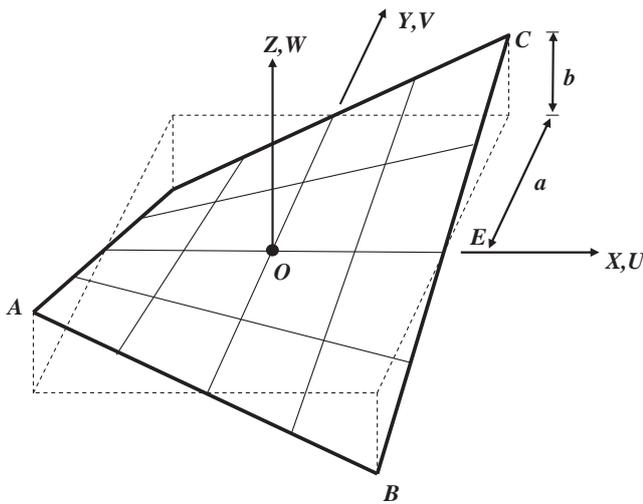


Fig. 21. Hyperbolic paraboloid shells.

Table 10  
Deflection  $W_0$  ( $W_0 = W_0 \times 10^3$ ) Hyperbolic paraboloid shell.

N × N	DKMQ24	Q4γ24	DKQ24FP
2 × 2	35.900	13.637	18.88
4 × 4	27.074	50.409	23.4
6 × 6	25.337	31.432	23.48
8 × 8	25.023	27.582	23.25
10 × 10	24.929	26.381	23.06
12 × 12	24.892	25.842	22.9
14 × 14	24.874	25.550	22.65
16 × 16	24.864	25.371	18.88
18 × 18	24.859	25.253	-
20 × 20	24.854	25.171	-
Ref. [40]	24.600		

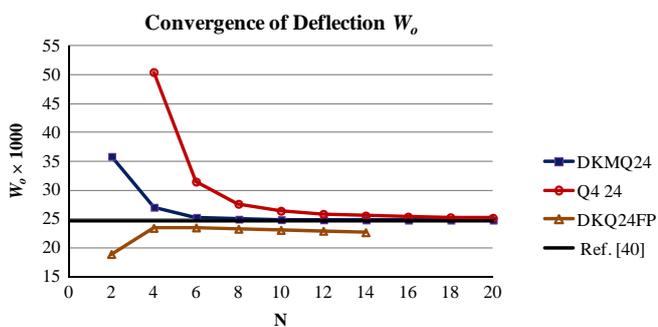


Fig. 22. Convergence of deflection  $W_0$  – Hyperbolic paraboloid shell.

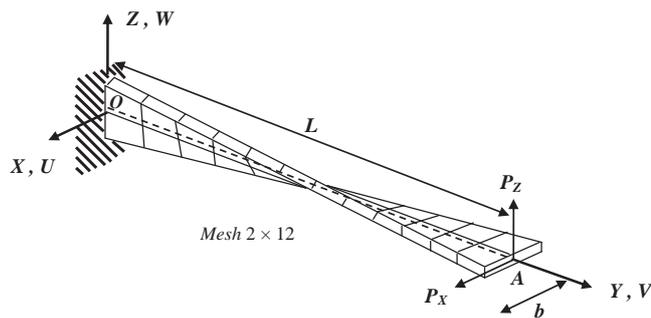


Fig. 23. Twisted beam.

Table 11  
Deflection  $U_A$  for  $h=0.0032$  of Twisted beam.

Load	N × N=NELT	DKMQ24	Q4γ24	DKQ24FP
$P_x=0.001$	2 × 12=24	5.200	5.143	2.72
$P_z=0$	4 × 24=96	5.217	5.205	9.39
	6 × 36=216	5.235	5.229	20.60
	8 × 48=384	5.238	5.234	-
Ref. [29]		$U_A=5.316$		

Table 12  
Deflection  $W_A$  for  $h=0.0032$  of Twisted beam.

Load	N × N=NELT	DKMQ24	Q4γ24	DKQ24FP
$P_x=0$	2 × 12=24	1.274	1.260	0.97
$P_z=0.001$	4 × 24=96	1.285	1.282	2.66
	6 × 36=216	1.290	1.288	5.33
	8 × 48=384	1.290	1.289	-
Ref. [29]		$W_A=1.296$		

Table 13  
Deflection  $U_A$  for  $h=0.32$  of Twisted beam.

Load	N × N=NELT	DKMQ24	Q4γ24	DKQ24FP
$P_x=1000$	2 × 12=24	5.393	5.364	2.077
$P_z=0$	4 × 24=96	5.403	5.397	6.328
	6 × 36=216	5.408	5.405	12.312
	8 × 48=384	5.410	5.409	-
Ref. [35]		$U_A=5.424$		

Table 14  
Deflection  $W_A$  for  $h=0.32$  of Twisted beam.

Load	N × N=NELT	DKMQ24	Q4γ24	DKQ24FP
$P_x=0$	2 × 12=24	1.624	1.611	0.920
$P_z=1000$	4 × 24=96	1.711	1.708	2.049
	6 × 36=216	1.733	1.731	3.945
	8 × 48=384	1.740	1.740	-
Ref. [35]		$W_A=1.754$		

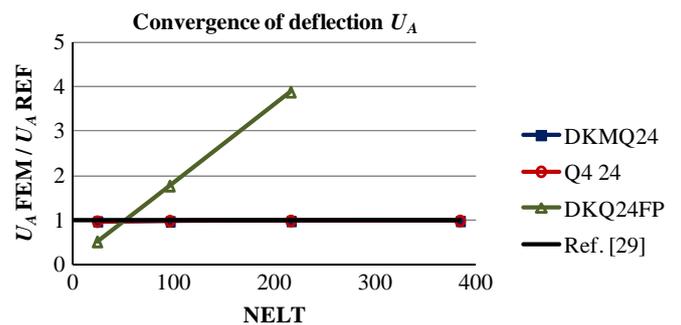


Fig. 24. Convergence of deflection  $U_A$ -Twisted beam  $h=0.0032$ .

membrane where most of the structure (under concentrated load) is dominated by bending effect  $\pm 70\%$ . In this case, DKMQ24 element gives better results than Q4γ24 element. This is due to the quadratic interpolation functions for the rotation used in DKMQ24, while Q4γ24 element used linear interpolation functions. Presented in two thickness ratio,  $R/h=100$  (thin shell) and  $R/h=10$  (thick shell). For  $R/h=100$ , an analytical solution (Kirchhoff) theory was proposed by Lindberg et al. [37] with respect to the solution of Flügge [38] using Fourier series. For  $R/h=10$ , the analytical solutions (the Mindlin theory) takes into account the transversal shear effects and is

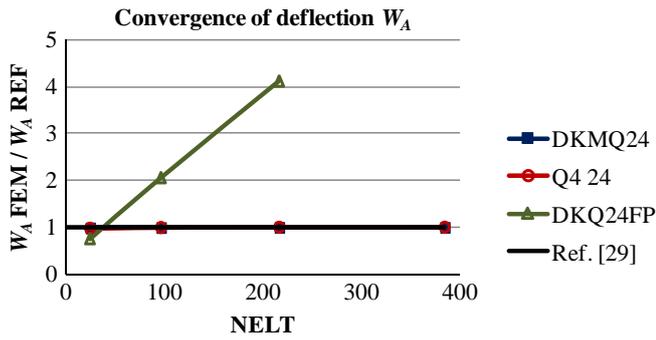


Fig. 25. Convergence of deflection  $W_A$ -Twisted beam  $h=0.0032$ .

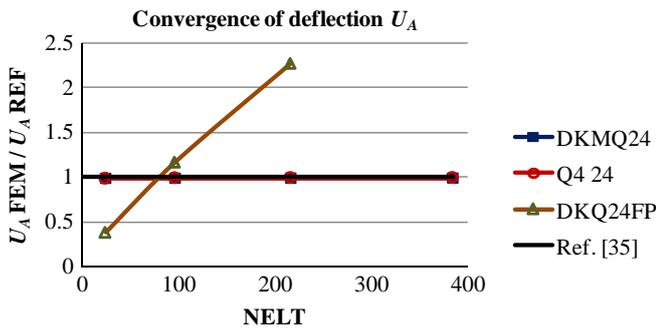


Fig. 26. Convergence of deflection  $U_A$ -Twisted beam  $h=0.32$ .

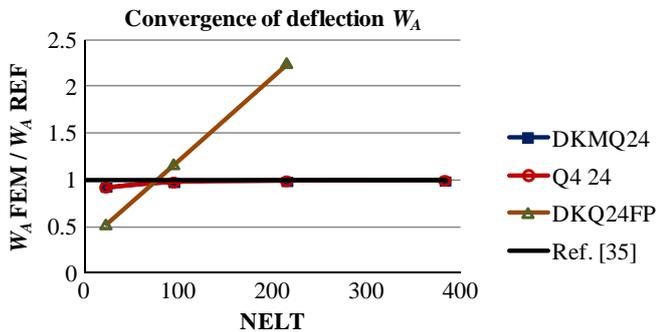


Fig. 27. Convergence of deflection  $W_A$ -Twisted beam  $h=0.32$ .

presented in Bhaskar and Varadan [39]. In the 2 cases, only 1/8 of the cylinder may be analyzed accounting for the symmetries. Moreover, the uniform and distorted meshes are analyzed. A bias factor of 10 was used for distorted mesh.

The numerical results ( $W_c$  versus the number the elements) obtained with the different elements for  $R/h=100$  and 10 are presented in Tables 6–9 and in Figs. 16–20. We can see, in particular in Fig. 16, that DKMQ24 element converges much faster than Q4γ24 element. For  $N=10$  (NELT=100), DKMQ24 has nearly converged, whereas Q4γ24 gives results far from the reference value. Fig. 17 presents the comparison of bending moment  $M_x$  along DC with [37] using  $16 \times 16$  elements. The results obtained with DKMQ24 element are closer to the reference solution than those obtained with Q4γ24 element. The same results are also obtained with distorted mesh in Fig. 18.

In Case 2 for  $R/h=10$  (thick shell), results presented in Figs. 19 and 20, reveal the effects of transversal shear. Indeed, the elements DKQ24 [29] (similar to DKMQ24 element which does not take into account the effect of transversal shear  $\phi_k=0$ ) gives less satisfactory results than the Q4γ24 and DKMQ24 elements.

The numerical solution does not converge at all toward the reference one. DKMQ24 and Q4γ24 elements give similar results for convergence in uniform and distorted meshes.

#### 4.4. Hyperbolic paraboloid shell

Another classic problem is the problem of a hyperbolic paraboloid shell with a distributed load in the normal direction  $f_z$ . Geometry and mechanical characteristics can be viewed in Fig. 21. This particular shell has a negative Gaussian curvature with boundary conditions in the straight line. The projection on to the Z-axis is a rectangular-shaped, with bases  $2a \times 2a$ , and clamped on the sides. This shell geometry corresponds to a shallow shell. Table 10 and Fig. 22 present the convergence of the deflection versus the number of elements.

Data:

$a=50$  cm;  $b=10$  cm;  $h=0.8$  cm;  $E=28500$  kg/cm<sup>2</sup>;  $\nu=0.4$   
 $f_z=0.01$  kg/cm<sup>2</sup>: distributed load in the normal direction;  $Z=(b/a^2)XY$

Boundary conditions:  $U=V=W=\theta_x=\theta_y=\theta_z=0$  along sides ABCD

Reference solution [40]:  $W_0=2.460 \times 10^{-2}$  cm

We observe that the results given by Q4γ24 and DKMQ24 elements converge to the given reference value [40]. However, the convergence with DKMQ24 element is much faster. We present in Table 10 and Fig. 22 the results given by facet shell approach with the element we called DKQ24FP in reference [29] as a superposition DKQ plate element [7] and Q4 standard quadrilateral membrane element with 4 nodes and degree of freedom  $u_i, v_i$  in each node  $i$ . The fictitious stiffness for  $\theta_z$  and MacNeal stabilization is added into DKQ24FP element stiffness to avoid rigid body motion. We can see clearly the facet shell DKQ24FP element gives the different results with DKMQ24 shell element proposed in this paper. In this example DKMQ24 gives the same results with DKQ24 in reference [29] since the shear deformations are very small.

#### 4.5. Twisted beam

Data: Rotation=90° between O and A

$L=12$  m;  $b=1.1$  m;  $h=0.0032$  m and 0.32 m;  $E=29 \times 10^6$  Pa;  $\nu=0.22$

Boundary condition:  $U=V=W=\theta_x=\theta_y=\theta_z=0$  on the support  
 Geometry of the middle surface with respect to  $s$  and  $\theta$ :

$X=s \cos \theta$ ;  $Y=2\theta L/\pi$ ;  $Z=s \sin \theta$ ;  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ;  $-0.5b \leq s \leq +0.5b$

This example addressed is a shell with helicoidal shaped with one side clamped. A concentrated load is applied on the other side (Fig. 23). This test was introduced by MacNeal and Harder [35] and became one of major tests to validate a new shell element.

This case presents important difficulties for the elements resulting from the flat facet shell approach in quadrilateral shaped. The element facet shell DKQ24FP in [29] (superposition of membrane and flexural/transversal shear, without the curved side) gives the same difficulties. We can see in Tables 11–14 and Figs. 24–27 the results given by DKQ24FP are divergent from reference values. The reference solution is based on the beam theory (which ignores the deformation in transverse direction), and with or without taking into account the transverse shear deformation. For this example we can see that the DKMQ24 proposed in this paper gives the same results with DKQ24 element in reference [29]. The results obtained for  $h=0.0032$  m and 0.32 m are presented in Figs. 24–27 and Tables 11–14 with meshing  $2 \times 12, 4 \times 24, 6 \times 36$  and  $8 \times 48$  respectively. DKMQ24 and Q4γ24 elements give satisfactory and similar results converging towards the reference solution.

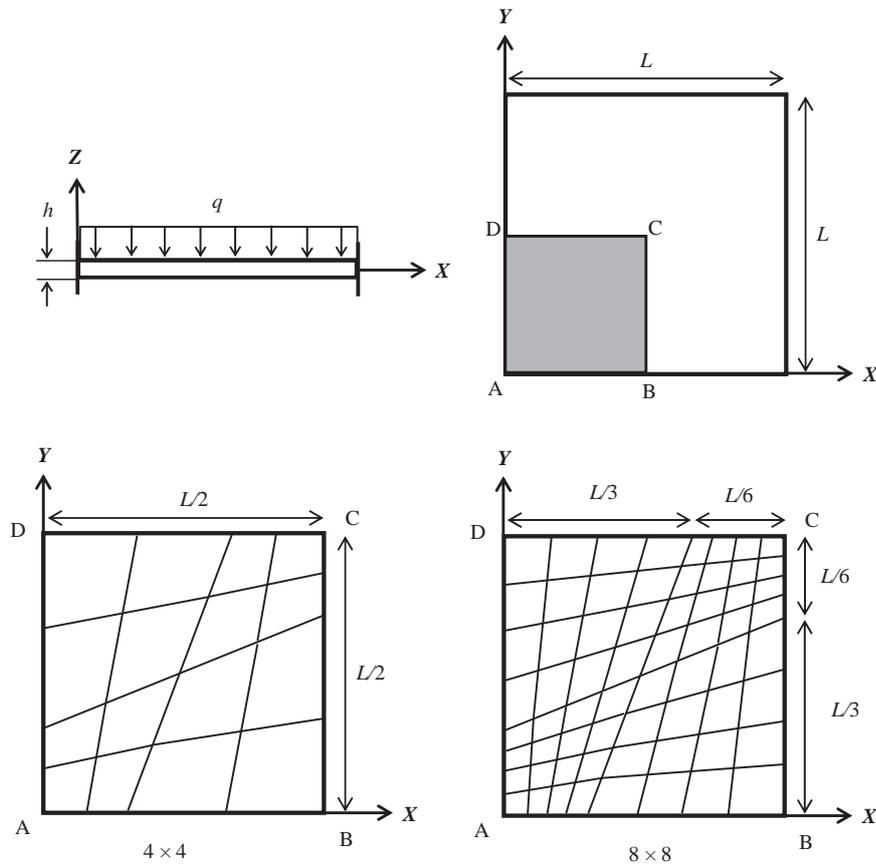


Fig. 28. Square clamped plate under uniform loading.

Table 15  
Deflection  $W_C$  Square clamped plate under uniform loading.

$N \times N$	DKMQ24	Q4 $\gamma$ 24
2 × 2	80.653	67.570
4 × 4	67.876	64.907
6 × 6	65.436	64.142
8 × 8	64.596	63.874
10 × 10	64.210	63.748
12 × 12	64.004	63.685
14 × 14	63.878	63.643
16 × 16	63.798	63.617
18 × 18	63.739	63.601
20 × 20	63.701	63.588
Ref. [41]	62.830	

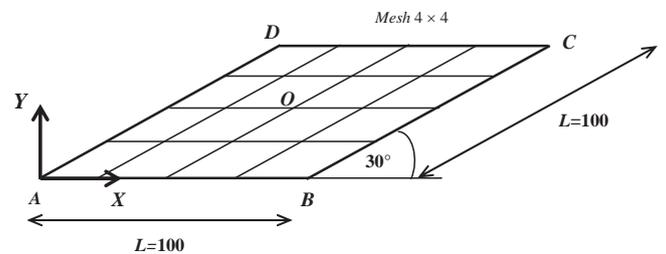


Fig. 30. Morley skew plate.

Table 16  
Deflection  $W_O$  ( $W_O = W_O \times 10^3 \times D_b/q L^4$ ) Morley's skew plate.

$N \times N$	DKMQ24	Q4 $\gamma$ 24
4 × 4	0.760	0.358
6 × 6	0.572	0.351
8 × 8	0.507	0.343
10 × 10	0.476	0.340
12 × 12	0.460	0.340
14 × 14	0.450	0.341
16 × 16	0.443	0.343
18 × 18	0.438	0.345
20 × 20	0.435	0.348
Ref. [42]	0.408	

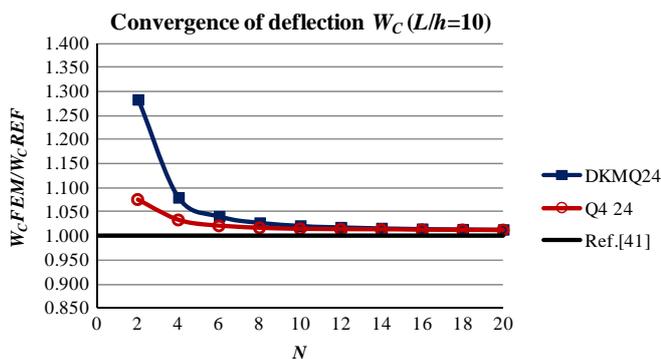


Fig. 29. Convergence of deflection  $W_C$  square clamped plate under uniform loading.

4.6. Square clamped plate under uniform loading with distorted mesh

Fig. 28 shows square clamped plate under uniform loading. We will analyze only the section ABCD due to the symmetry. The

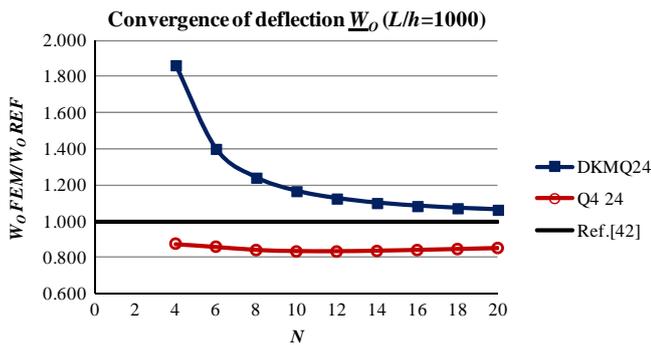


Fig. 31. Convergence of deflection  $W_0$  – Morley's skew plate.

rapport  $L/h=10$  and distorted mesh are employed. The numerical results obtained with DKMQ24 and Q4 $\gamma$ 24 elements are presented in Table 15 and Fig. 29. Note that for plate problems, Q4 $\gamma$ 24 element has been developed following [1,2] and is therefore similar to MITC4 element for plate. DKMQ24 and Q4 $\gamma$ 24 elements give satisfactory and similar results converging towards the reference solution. Moreover, the results reveal that DKMQ24 and Q4 $\gamma$ 24 are not sensitive to distortion.

Data:

$$L=1000; h=100; E=10.92; \nu=0.3; q=1$$

Boundary conditions:  $W=\beta_y=0$  along sides  $AB$  and  $W=\beta_x=0$  along sides  $AD$

Symmetry conditions:  $\beta_x=0$  along sides  $BC$  and  $\beta_y=0$  along sides  $CD$

$$\text{Reference solution [41]: } W_c=62.830$$

#### 4.7. Morley's skew plate

The problem considered in Fig. 30 is a Morley's skew plate which sometimes poses severe difficulties for numerical methods since bending moments possess a singularity at the obtuse corner. This case has been already analyzed in [13]. The numerical results for vertical displacement at plate center obtained with DKMQ24 and Q4 $\gamma$ 24 elements for  $L/h=1000$  are reported in Table 16 and Fig. 31. DKMQ24 elements give satisfactory results and converge towards the reference solution.

Data:

$$L=100; h=0.1; E=10.92; \nu=0.3; q=1$$

Boundary conditions:  $W=0$  on  $ABCD$

$$\text{Reference solution [42]: } W_0=0.408$$

## 5. Conclusions

The new four nodes and 24 *dof* quadrilateral shell element DKMQ24, using incomplete quadratic interpolation functions for the rotation, has been evaluated and presented in thick and thin shell problems. The results of the analysis show that this element passed all convergence test presented, without membrane locking. It is also free of shear-locking, as for the DKMQ plate element [13].

In membrane dominated problems (Scordelis–Lo roof for instance), the results are quite similar because both elements use the same membrane stiffness matrix. In bending dominated problems (pinched cylindrical shell), results obtained with DKMQ24 element are much better, in particular the convergence is faster than with Q4 $\gamma$ 24 element. This is due to the quadratic interpolation functions for the rotation used in DKMQ24. For thick pinched cylindrical shell, DKMQ24 and Q4 $\gamma$ 24 elements give similar results for convergence while DKQ24 element [29] gives less satisfactory results because it does not take into account the effect of transversal shear. For shell analysis which has a negative

Gaussian curvature presents in the examples 4.4 and 4.5, we can show the element DKMQ24 proposed in this paper is not a facet shell model and the element gives the different results with DKQ24FP facet shell model.

## Acknowledgments

The financial support from the Indonesian Ministry of Research, Technology and Higher Education (KEMENRISTEKDIKTI) and Institut Français d'Indonésie (IFI), French Embassy in Jakarta are gratefully acknowledged.

## References

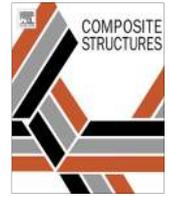
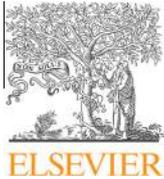
- [1] K.J. Bathe, E.N. Dvorkin, A formulation of general shell elements – the use of mixed interpolation of tensorial components, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 22 (1986) 697–722.
- [2] K.J. Bathe, E.N. Dvorkin, A four-node plate bending element based on Mindlin–Reissner plate theory and a mixed interpolation, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 21 (1985) 367–383.
- [3] K.J. Bathe, A. Iosilevich, D. Chapelle, An evaluation of the MITC shell elements, *Comput. Struct.* 75 (2000) 1–30.
- [4] P.S. Lee, K.J. Bathe, On the asymptotic behavior of shell structures and the evaluation in finite element solutions, *Comput. Struct.* 80 (2002) 235–255.
- [5] D. Briassoulis, Asymptotic deformation modes of benchmark problems suitable for evaluating shell elements, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 194 (2005) 2385–2405.
- [6] J.L. Batoz, K.J. Bathe, L.W. Ho, A study of three-node triangular plate bending elements, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 15 (1980) 1771–1812.
- [7] J.L. Batoz, M. Ben Tahar, Evaluation of a new thin plate quadrilateral element, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 18 (1982) 1655–1678.
- [8] J.L. Batoz, P. Lardeur, A discrete shear triangular nine dof element for the analysis of thick to very thin plates, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 28 (1989) 533–560.
- [9] P. Lardeur, Développement et Evaluation de Deux Nouveaux Éléments Finis de Plaques et Coques Composites avec Influences du Cisaillement Transverse Thèse de Doctorat, Université de Technologie Compiègne, France, 1990.
- [10] P.G. Bergan, M.K. Nygaard, Finite elements with increased freedom in choosing shape functions, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 20 (1984) 643–663.
- [11] J.L. Batoz, I. Katili, A. On, Simple triangular Reissner/Mindlin plate element based on incompatible modes and discrete constraints, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 35 (1992) 1603–1632.
- [12] I. Katili, A new discrete Kirchhoff–Mindlin element based on Mindlin–Reissner plate theory and assumed shear strain fields – part I: an extended DKT element for thick-plate bending analysis, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 36 (1993) 1859–1883.
- [13] I. Katili, A new discrete Kirchhoff–Mindlin element based on Mindlin–Reissner plate theory and assumed shear strain fields – part II: An extended DKQ element for thick plate bending analysis, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 36 (1993) 1885–1908.
- [14] E. Reissner, The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *J. Appl. Mech. Eng. ASME* 12 (1943) A69–A77.
- [15] R.D. Mindlin, Influence of rotator inertia and shear on flexural motion of isotropic elastic plates, *J. Appl. Mech.* 18 (1951) 31–38.
- [16] Thermanto DSS, Formulasi Elemen Hibrida DKMQ, Master Thesis, Universitas Indonesia, Indonesia 1999.
- [17] R. Ayad, A. Rigolot, N. Talbi, An improved three-node hybrid-mixed element for Mindlin/Reissner plates, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 51 (2001) 919–942.
- [18] R. Ayad, A. Rigolot, An improved four-node hybrid-mixed element based upon Mindlin's plate theory, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 55 (2002) 705–731.
- [19] R. Ayad, N. Talbi, T. Ghomari, Modified discrete Mindlin hypotheses for laminated composite structures, *Compos. Sci. Technol.* 69 (2009) 125–128.
- [20] E. Onate, O.C. Zienkiewicz, B. Suarez, R.L. Taylor, A general methodology for deriving shear constrained Reissner–Mindlin plate elements, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 33 (1992) 345–367.
- [21] E. Onate, J. Castro, Derivation of plate based on assumed shear strain fields, in: P. Ladeveze, O.C. Zienkiewicz (Eds.), *New Advances in Computational Structural Mechanics*, Elsevier, Amsterdam, 1992, pp. 237–288.
- [22] J. Aalto, From Kirchhoff to mindlin plate element, *Commun. Appl. Numer. Methods* 4 (1988) 231–241.
- [23] P. Khosravi, R. Ganesan, R. Sedaghati, An efficient facet shell element for corotational nonlinear analysis of thin and moderately thick laminated composite structures, *Comput. Struct.* 86 (2008) 850–858.
- [24] P.M. Naghdi, On the theory of thin elastic shells, *Q. Appl. Math.* 14 (1957) 369–380.
- [25] P.M. Naghdi, Foundations of elastic shells theory, in: I.N. Sneddon, R. Hill (Eds.), *Progress in Solid Mechanics IV*, North-Holland, 1963, Chapter 1.
- [26] P.M. Naghdi, On a variational theorem in elasticity and its application to shell theory, *J. Appl. Mech. (ASME)*, 31, 1964647–653.

- [27] P.M. Naghdi, The theory of shells and plate, in: Flugge (Ed.), *Handbuch der Physik VI, A2*, Springer Verlag, Berlin, 1972.
- [28] J.L. Batoz, G. Dhatt, *Modélisation des Structures par Eléments Finis*, vol. 3, Coques. Editions Hermes, Paris, 1992.
- [29] I. Katili, *Formulation et évaluation des Nouveaux éléments finis pour l'analyse linéaire des plaques et coques de forme quelconque* Thèse Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 1993.
- [30] I. Katili, *Rancang Bangun Elemen Unggulan dan Pengembangannya pada Analisa Struktur Pelat dan Cangkang dengan Metode Elemen Hingga*, Internal Repport, Universitas Indonesia, Indonesia, 1995.
- [31] K. Washizu, *Variational methods in elasticity and plasticity*, 3rd ed., Pergamon Press, 1982.
- [32] R.H. Mac Neal, A simple quadrilateral shell element, *Comput. Struct.* 8 (1978) 175–183.
- [33] R.H. Mac Neal, Derivation of element stiffness matrices by assumed strain distributions, *Nuclear Eng. Des.* 70 (1982) 3–12.
- [34] R.H. Mac Neal, The evolution of lower order plate and shell elements in Msc/Nastran, in: Hughes, Hinton (Eds.), *FEM for plate and shell structures*, 1, 1986, pp. 85–127.
- [35] R. Mac Neal, R.L. Harder, A proposed standard set of problems to test finite element accuracy, *Finite Elem. Anal. Des.* 1 (1985) 3–20.
- [36] A.C. Scordelis, K.S. Lo, Computer analysis of cylindrical shells, *J. Am. Concr. Inst.* 61 (1969) 539–562.
- [37] G.M. Lindberg, M.D. Olson, G.R. Cowper New developments in finite element analysis of shells. *Quarterly Bulletin of the Division of Mechanical Engineering and the National Aeronautical Establishment, National Research Council of Canada*, vol. 4, 1969.
- [38] W. Flügge, *Stresses in Shells*, Springer Verlag, Berlin, 1960.
- [39] K. Bhaskar, T.K. Varadan, Analytical solution for a pinched laminated cylinder, *J. Appl. Mech. (ASME)* 57 (1990) 1082–1083.
- [40] C.A. Brebia, J.J. Connor, *Fundamentals of Finite Element Techniques for Structural Engineers*, John Wiley and Sons, N.Y., 1974.
- [41] L.S.D. Srinivas, A.K. Rao, Flexure of thick rectangular plates, *J. Appl. Mech. Trans. ASME* (1973) 298–299.
- [42] L.S.D. Morley, *Skew Plates and Structures*, Pergamon, Press, Oxford, 1963.



## Annexe C

# Application of DKMQ element for composite plate bending structures



# Application of DKMQ element for composite plate bending structures



Irwan Katili<sup>a,\*</sup>, Imam Jauhari Maknun<sup>a,b</sup>, Aziz Hamdouni<sup>b</sup>, Olivier Millet<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Universitas Indonesia, Depok 16424, Indonesia

<sup>b</sup> Université de La Rochelle, La Rochelle 17000, France

## ARTICLE INFO

### Article history:

Available online 6 May 2015

### Keywords:

DKMQ  
Composite structure  
Pagano  
Srinivas

## ABSTRACT

This paper presents an application of DKMQ plate bending element to analyze composite structures. DKMQ element is an element proposed by Katili that passed the patch test and gives good results in many plate bending applications. It can be used to analyze thick and thin plate problem without shear locking. The application of DKMQ plate bending element for composite plate has been analyzed; the convergence of displacement is presented. As validation, the solution of Srinivas and Pagano are employed. Moreover, measuring the convergence using the *s-norm* is addressed. DKMQ plate bending element gives a good performance and can be used as one of tools in analyzing composite structure.

© 2015 Elsevier Ltd. All rights reserved.

## 1. Introduction

In civil, mechanical and aerospace engineering applications, the composite structures are widely used. They provide a maximum of stiffness with a minimum of weight. The researches in experimental and numerical analysis of composite structure are still conducted. The development of composite structure becomes a great interest in structural analysis. In numerical analysis, it is interesting to develop a formulation which can be used to analyze composite structures.

DKMT and DKMQ elements which are able to analyze thick to thin plate bending problems have been proposed by Katili [1,2]. In the case of thin plate problem, the solution obtained with DKMT element converges to that given by DKT [3] element while the solution obtained with of DKMQ element converges to that given by DKQ [4]. It proved that DKMT and DKMQ elements are free of shear locking in thin plate problems.

The formulation of DKMQ and DKMT plate elements are based on Reissner–Mindlin [5,6] hypothesis which only require  $C^0$  continuity. They passed the patch test for thin to thick plate bending problems. The phenomenon of shear locking when the plate becomes progressively thinner is solved by using the Discrete Kirchhoff Mindlin method proposed by Katili [1,2]. The capability of DKMQ and DKMT plates elements has been tested in [1,2]. They give a good result for the problem of thin to thick plate. The development of DKMQ plate element to DKMQ24 shell element using Naghdi/Mindlin/Reissner shell theory which can take into account warping effects and coupling bending-membrane

energy has been presented in [7]. Therefore, there is a great interest to apply the formulation of DKMQ element for composite structure.

Ayad et al. [8], have developed laminated composite structures by using modified discrete Mindlin hypothesis for plate structure. The formulation of DKMT plate element into facet shell element by using the optimal membrane triangular OPT element for the geometrically nonlinear analysis of laminated composite structures has been introduced by Khosravi et al. [9]. Botello et al. [10] proposed a new triangle finite element for analysis of composite plate and shells structures. They use quadratic interpolation for in-plane degrees of freedom whereas a linear-wise approximation used for the normal displacement. This element gave a good behavior for analysis of composite plate and shell structures.

In this paper, we will analyze the application of DKMQ element for composite plate. The results proposed by Pagano [11,12] and Srinivas [13] will be used to validate this formulation.

In general, the convergence of finite element formulation is measured using the displacement or stress at some point of the structures in function of mesh refinement. It only gives the information of these points. To get the behavior of the whole structure, the *s-norm* is proposed in [14,15]. It was used for triangular family of MITC element [16–19]. Lee and Bathe [20] used the *s-norm* to evaluate the quadratic MITC plate and MITC shell elements in plate bending problems. Moreover, the application of *s-norm* for analyzing the shell element has been tested in [21].

## 2. Formulation of DKMQ isotropic and orthotropic

DKMQ (Discrete Kirchhoff–Mindlin Quadrilateral) element [2] was developed by Katili. It has four nodes and three *d.o.f* per node

\* Corresponding author. Tel.: +62 811 8888876.

E-mail address: [irwan.katili@gmail.com](mailto:irwan.katili@gmail.com) (I. Katili).

only. DKMQ is a very good quadrilateral element which can take into account the transverse shear strain and it gives a good result in isotropic plate problems. It passed the patch test and gave good results in thin to thick plate problems.

2.1. Equilibrium equations

$$\begin{aligned} M_{x,x} + M_{xy,y} - T_x &= 0 \\ M_{xy,x} + M_{y,y} - T_y &= 0 \\ T_{x,x} + T_{y,y} + f_z &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

where  $M_x, M_y, M_{xy}$  are the bending moments per unit length,  $T_x$  and  $T_y$  are the shear forces per unit length and  $f_z$  is a static distributed load. The resultants are related to the Cartesian stresses  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}, \sigma_{xz} = \tau_x$  and  $\sigma_{yz} = \tau_y$  given by:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z dz; \quad M_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y z dz; \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xy} z dz \\ T_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_x dz; \quad T_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_y dz \end{aligned} \tag{2}$$

with  $h$  is the thickness of plate.

2.2. Kinematic relations

The bending strain  $\langle \varepsilon \rangle$  and the curvature  $\langle \chi \rangle$  are given by:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon \rangle &= \langle \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad 2\varepsilon_{xy} \rangle = z \langle \chi \rangle \\ \langle \chi \rangle &= \langle \beta_{x,x} \quad \beta_{y,y} \quad \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \rangle \end{aligned} \tag{3}$$

while the transverse shear strain are:

$$\langle \gamma \rangle = \langle \gamma_x \quad \gamma_y \rangle = \langle w_{,x} + \beta_x \quad w_{,y} + \beta_y \rangle \tag{4}$$

where  $\beta_x$  and  $\beta_y$  are the rotations and  $w$  is the transverse displacement.

2.3. Constitutive law

In the composite laminated plate structures the material is formed by orthotropic layers with orthotropic axes  $L$ - $T$ - $Z$  and isotropic in the plane  $TZ$  (see Fig. 1). The  $L$  axis defines the direction of the longitudinal fibers which are embedded in a matrix of polymeric or metallic material. Each layer satisfies the plane stress assumption ( $\sigma_z = 0$ ). In each layer, the constitutive relationships in the orthotropy axes ( $L$ - $T$ - $Z$ ) are:

$$\begin{aligned} \{\sigma_L\} &= [H_L] \{\varepsilon_L\} \\ \{\tau_L\} &= [G_L] \{\gamma_L\} \end{aligned} \tag{5}$$

where:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_L \rangle &= \langle \sigma_L \quad \sigma_T \quad \sigma_{LT} \rangle; \quad \langle \tau_L \rangle = \langle \tau_{LZ} \quad \tau_{TZ} \rangle \\ \langle \varepsilon_L \rangle &= \langle \varepsilon_L \quad \varepsilon_T \quad 2\varepsilon_{LT} \rangle; \quad \langle \gamma_L \rangle = \langle \gamma_{LZ} \quad \gamma_{TZ} \rangle \end{aligned} \tag{6}$$

$$[H_L] = \begin{bmatrix} H_{LL} & H_{LT} & 0 \\ & H_{TT} & 0 \\ \text{sym} & & G_{LT} \end{bmatrix}; \quad [G_L] = \begin{bmatrix} G_{LZ} & 0 \\ 0 & G_{TZ} \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} H_{LL} &= \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}}; \quad H_{TT} = \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}}; \\ H_{LT} &= \frac{E_T \nu_{LT}}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} = \frac{E_L \nu_{TL}}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} \\ G_{LZ} &= G_{LT}; \quad G_{TZ} \left( \text{or } \nu_{TZ} \text{ with } G_{TZ} = \frac{E_T}{2(1 + \nu_{TZ})} \right) \end{aligned} \tag{8}$$

$E_L$  is Young Modulus in the fiber direction and  $E_T$  is Young Modulus in the direction transverse to the fiber.  $\nu_{LT}$  and  $\nu_{TL}$  are the poisons's ratio in the  $L$ - $T$  plane of orthotropy. The constitutive parameters in matrices  $[H_L]$  and  $[G_L]$  can be measured experimentally. The orthotropy direction  $L$  and  $T$  can vary for each layer and are represented by angle  $\theta$  between the global axis  $X$  and the directions  $L_i$  of the  $i^{th}$  layer (Fig. 1). The matrix transformation from orthotropic to Cartesian coordinates:

$$\begin{aligned} [R_{L1}] &= \begin{bmatrix} C^2 & S^2 & CS \\ S^2 & C^2 & -CS \\ -2CS & 2CS & C^2 - S^2 \end{bmatrix} \quad \text{and} : \quad [R_{L2}] = \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix} \\ \text{where} : \quad C &= \cos\theta; \quad S = \sin\theta \end{aligned} \tag{9}$$

Finally in Cartesian coordinate systems ( $X$ - $Y$ ), we can write the constitutive law's as:

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [H] \{\varepsilon\} \\ \{\tau\} &= [G] \{\gamma\} \end{aligned} \tag{10}$$

where stresses and strains are:

$$\{\sigma\} = \langle \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_{xy} \rangle^T; \quad \{\varepsilon\} = \langle \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad 2\varepsilon_{xy} \rangle^T; \quad \{\tau\} = \langle \tau_x \quad \tau_y \rangle^T \text{ and } \langle \gamma \rangle = \langle \gamma_x \quad \gamma_y \rangle$$

$$[H] = [R_{L1}]^T [H_L] [R_{L1}]; \quad [G] = [R_{L2}]^T [G_L] [R_{L2}] \tag{11}$$

For the isotropic material:

$$[H] = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}; \quad [G] = \frac{E}{2(1 + \nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

$E$ : Young modulus,  $\nu$ : poison ratio and  $G$ : shear modulus.

The constitutive equation for the bending moments and the shear forces from Eq. (2) are given by:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= [H_b] \begin{Bmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{with} : \quad \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ (\beta_{x,y} + \beta_{y,x}) \end{Bmatrix}; \\ \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} &= [H_s] \begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{13}$$

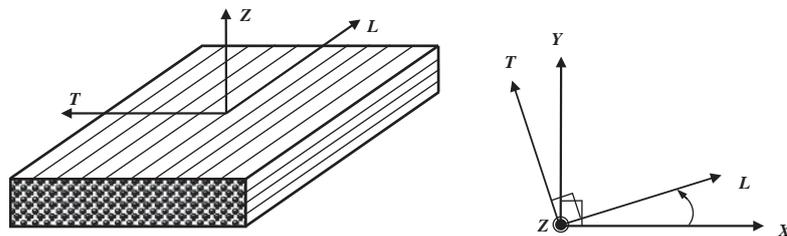


Fig. 1. Layer orthotropic.

For sandwich structures,  $[H_b]$  and  $[H_s]$  matrixes homogenized using the layering technique will be given by:

$$[H_b] = \begin{bmatrix} H_{b11} & H_{b12} & H_{b13} \\ H_{b22} & H_{b23} & \\ \text{Sym.} & & H_{b33} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{nl} [H]_i (z_{i+1}^3 - z_i^3) \quad (14)$$

$$[\bar{H}_s] = \begin{bmatrix} \bar{H}_{s11} & \bar{H}_{s12} \\ \text{Sym.} & \bar{H}_{s22} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{nl} [G]_i (z_{i+1} - z_i) \quad (15)$$

where  $nl$  is the number of layer in the structures.  $[H]_i$  is the in-plane constitutive matrix for  $i^{th}$  layer and  $[G]_i$  is the out of plane constitutive matrix for  $i^{th}$  layer. They are given by Eq. (11) for orthotropic material and by Eq. (12) for isotropic material. Matrix  $[H_s]$  is defined so that the shear strain energy density obtained for an exact 3D distribution of the transverse shear stresses  $\tau_x$  and  $\tau_y$  is identical to the shear energy associated to the Reissner–Mindlin plate model (denoted as  $\Pi_{int}^s$  in Eq. (57)). The aims is that the transverse shear stiffness of the plate model corresponds as much as possible with that deduced from 3D analysis. We have  $[H_s]$  for the constitutive equation for the shear forces in Eq. (13):

$$[H_s] = \begin{bmatrix} k_{11} \bar{H}_{s11} & k_{12} \bar{H}_{s12} \\ \text{Sym.} & k_{22} \bar{H}_{s22} \end{bmatrix} \quad (16)$$

where:

- $k_{11}$ ,  $k_{12}$  and  $k_{22}$  identifies the transverse shear correction parameters.
- $[H_b]$ ,  $[\bar{H}_s]$  and  $[H_s]$  are symmetry.

In the case of isotropic structures the matrix  $[H_b]$  and  $[H_s]$  are given by:

$$[H_b] = D_b \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}; \quad D_b = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (17)$$

$$[H_s] = D_s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad D_s = kGh \quad (18)$$

for the isotropic material  $k = 5/6$ .

The method for computing the transverse shear correction parameters of Eq. (16) and (18) based on considerations of static equivalences [22,23].

#### 2.4. Displacement function

DKMQ plate element uses the linear interpolation for vertical displacement and quadratic interpolation for the rotations.

$$w = \sum_{i=1,4} N_i w_i \quad (19)$$

$$\beta_x = \sum_{i=1,4} N_i \beta_{xi} + \sum_{k=5,8} P_k C_k \Delta \beta_{sk}$$

$$\beta_y = \sum_{i=1,4} N_i \beta_{yi} + \sum_{k=5,8} P_k S_k \Delta \beta_{sk}$$

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta); \quad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \quad (20)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta); \quad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

$$P_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta); \quad P_6 = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \quad (21)$$

$$P_7 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta); \quad P_8 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$$

$\beta_{xi}$  and  $\beta_{yi}$  are the nodal values at the corner 1–4.  $\Delta \beta_{sk}$  are the nodal values at the mid-nodes 5–8 (Fig. 2). While  $C_k$  and  $S_k$  are the direction cosines of side  $k$  (Fig. 3).

The matrix transformation from  $s$ - $n$  coordinate system to the Cartesian system (See Fig. 4):

- The rotations of  $\beta_n$  and  $\beta_s$  at side  $k$ :

$$\begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = [Q] \begin{Bmatrix} \beta_n \\ \beta_s \end{Bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{Bmatrix} \beta_n \\ \beta_s \end{Bmatrix} = [Q]^T \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} \quad (22)$$

- Shear deformations at side  $k$ :

$$\begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix} = [Q] \begin{Bmatrix} \gamma_n \\ \gamma_s \end{Bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{Bmatrix} \gamma_n \\ \gamma_s \end{Bmatrix} = [Q]^T \begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix} \quad (23)$$

- Shear forces at side  $k$ :

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = [Q] \begin{Bmatrix} T_n \\ T_s \end{Bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{Bmatrix} T_n \\ T_s \end{Bmatrix} = [Q]^T \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} \quad (24)$$

- Curvature at side  $k$ :

$$\begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = [QE] \begin{Bmatrix} \chi_s \\ \chi_n \\ \chi_{sn} \end{Bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{Bmatrix} \chi_s \\ \chi_n \\ \chi_{sn} \end{Bmatrix} = [QE]^T \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

- Moment resultants at side  $k$ :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [QE] \begin{Bmatrix} M_n \\ M_s \\ M_{ns} \end{Bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{Bmatrix} M_n \\ M_s \\ M_{ns} \end{Bmatrix} = [QE]^T \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

where:

$$[Q] = \begin{bmatrix} n_x & -n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad [Q]^T = [Q]^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & n_y \\ -n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$[QE] = \begin{bmatrix} n_x^2 & n_y^2 & -n_x n_y \\ n_y^2 & n_x^2 & n_x n_y \\ 2n_x n_y & -2n_x n_y & n_x^2 - n_y^2 \end{bmatrix}; \quad (28)$$

$$[QE]^T = [QE]^{-1} = \begin{bmatrix} n_x^2 & n_y^2 & 2n_x n_y \\ n_y^2 & n_x^2 & -2n_x n_y \\ -n_x n_y & n_x n_y & n_x^2 - n_y^2 \end{bmatrix}$$

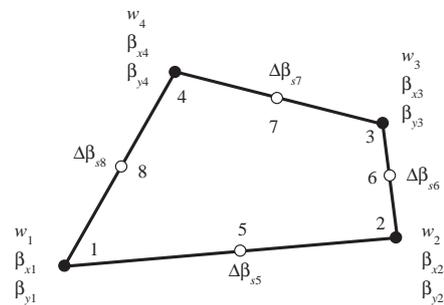


Fig. 2. Verticals displacement and rotations on side the elements.

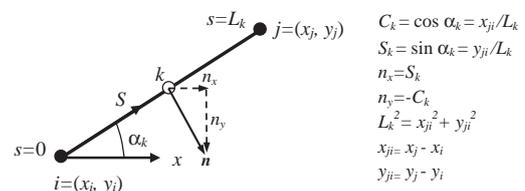


Fig. 3. Geometry and local tangential Coordinates on side  $k$ .

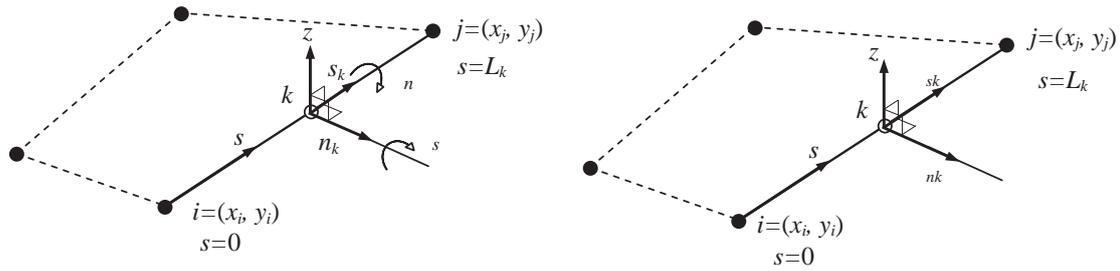


Fig. 4.  $\beta_s$ ,  $\beta_n$ ,  $\gamma_{sk}$  and  $\gamma_{nk}$  on side  $k$ .

– Constitutive laws:

From Eq. (22)–(28) and Eq. (13), we have

$$\begin{Bmatrix} T_n \\ T_s \end{Bmatrix} = [H_{sk}] \begin{Bmatrix} \gamma_n \\ \gamma_s \end{Bmatrix} \quad \text{with:} \quad \begin{Bmatrix} \gamma_n \\ \gamma_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{,n} + \beta_n \\ w_{,s} + \beta_s \end{Bmatrix} \quad (29)$$

and:  $[H_{sk}] = [Q]^T [H_s] [Q]$

$$\begin{Bmatrix} M_n \\ M_s \\ M_{ns} \end{Bmatrix} = [H_{bk}] \begin{Bmatrix} \chi_n \\ \chi_s \\ \chi_{ns} \end{Bmatrix} \quad \text{with:} \quad \begin{Bmatrix} \chi_n \\ \chi_s \\ \chi_{ns} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_{n,n} \\ \beta_{s,s} \\ (\beta_{n,s} + \beta_{s,n}) \end{Bmatrix} \quad (30)$$

and:  $[H_{bk}] = [QE]^T [H_b] [QE]$

For isotropic material:  $[H_{sk}] = [H_s]$  and  $[H_{bk}] = [H_b]$

– The equilibrium equation at side  $k$ :

$$\begin{aligned} T_s &= M_{s,s} + M_{sn,n} \\ T_n &= M_{sn,s} + M_{n,n} \end{aligned} \quad (31)$$

– Displacement and rotation at side  $k$ :

From Eqs. (19)–(22) we have:

And:

$$\begin{aligned} w &= \left(1 - \frac{s}{L_k}\right) w_i + \frac{s}{L_k} w_j \\ \beta_s &= \left(1 - \frac{s}{L_k}\right) \beta_{si} + \frac{s}{L_k} \beta_{sj} + 4 \frac{s}{L_k} \left(1 - \frac{s}{L_k}\right) \Delta \beta_{sk} \\ \beta_n &= \left(1 - \frac{s}{L_k}\right) \beta_{ni} + \frac{s}{L_k} \beta_{nj} \end{aligned} \quad (32)$$

### 2.5. The assumed shear strain fields

From Eq. (22)–(31), we can define the independent shear deformation  $\underline{\gamma}_s$ :

$$\begin{aligned} \underline{\gamma}_s &= H_{sk21}^{inv} (H_{bk31} \beta_{n,ns} + H_{bk32} \beta_{s,ss} + H_{bk33} (\beta_{s,ns} + \beta_{n,ss})) \\ &+ H_{bk11} \beta_{n,nn} + H_{bk12} \beta_{s,sn} + H_{bk13} (\beta_{s,nn} + \beta_{n,sn}) \\ &+ H_{sk22}^{inv} (H_{bk21} \beta_{n,ns} + H_{bk22} \beta_{s,ss} + H_{bk23} (\beta_{s,ns} + \beta_{n,ss})) + H_{bk31} \beta_{n,nn} \\ &+ H_{bk32} \beta_{s,sn} + H_{bk33} (\beta_{s,nn} + \beta_{n,sn}) \end{aligned} \quad (33)$$

Using Eq. (32) for the rotations of  $\beta_s$  and  $\beta_n$  and we assumed that:

$$\beta_{s,nn} = \beta_{s,ns} = \beta_{n,ns} = \beta_{n,nn} = \beta_{n,ss} = 0 \quad (34)$$

From (33) we have:

$$\underline{\gamma}_s = \left( H_{sk21}^{inv} H_{bk32} + H_{sk22}^{inv} H_{bk22} \right) \beta_{s,ss} \quad \text{and on side } k: \underline{\gamma}_s = -\frac{2}{3} \phi_k \Delta \beta_{sk} \quad (35)$$

with:

$$\phi_k = \left( H_{sk21}^{inv} H_{bk32} + H_{sk22}^{inv} H_{bk22} \right) \left( \frac{12}{L_k^2} \right) \quad (36)$$

$\phi_k$  is the shear influence factor in orthotropic plate,  $L_k$  is the length of the side  $k$ ,  $[H_{sk}]$  and  $[H_{bk}]$  are defined in Eqs. (29) and (30).

We will use this new factor for the application of DKMQ in plate bending composite structure. With these methods, we are able to compute the composite structure for thick and thin plate problems. Also, it will become a tool for the computation in modeling the structure with composite material.

In case isotropic material, we have:

$$\underline{\gamma}_s = \frac{D_b}{D_s} \left( \beta_{s,ss} + \nu \beta_{n,ns} + \frac{1-\nu}{2} (\beta_{s,nn} + \beta_{n,ns}) \right) \quad (37)$$

From (34) we have:  $\beta_{s,nn} = \beta_{n,ns} = 0$

So that:

$$\underline{\gamma}_s = \frac{D_b}{D_s} \beta_{s,ss} \quad \text{and on side } k: \underline{\gamma}_{sk} = -\frac{2}{3} \phi_k \Delta \beta_{sk} \quad (38)$$

with:

$$\phi_k = \frac{D_b}{D_s} \frac{12}{L_k^2} = \frac{2}{k(1-\nu)} \left( \frac{h^2}{L_k^2} \right) \quad (39)$$

$\phi_k$  is the shear influence factor in isotropic plate,  $k = 5/6$  is the shear correction factor,  $\nu$  is the Poisson's ratio,  $h$  is the thickness of plate and  $L_k$  is the length of the side  $k$ .

The factor  $\phi_k$  (characterizing the influence of shear) maintains the consistency of element. The factor  $h^2/L_k^2$ , in that equation explains why DKMQ element behaves as *Reissner–Mindlin* theory for thick plate and as *Kirchhoff–Love* theory for thin plate. In the latter case, the factor  $h^2/L_k^2$  is close to zero, so that the transversal shear deformation is automatically ignored, as a result the *shear locking* resolved by this method.

### 2.6. The curvatures and shear deformations

The computation of curvature from (3) and (19)–(21) is straightforward:

$$\langle \chi \rangle = [B_{b\beta}] \{u_n\} + [B_{b,\beta}] \{A_n\} \quad (40)$$

where the bending strain matrices are:

$$[B_{b\beta}] = \begin{bmatrix} 0 & N_{i,x} & 0 & & \\ \dots & 0 & 0 & N_{i,y} & \dots \\ & 0 & N_{i,y} & N_{i,x} & \end{bmatrix} \quad i = 1, 4 \quad (41)$$

$$N_{i,x} = j_{11} N_{i,\xi} + j_{12} N_{i,\eta}; \quad N_{i,y} = j_{21} N_{i,\xi} + j_{22} N_{i,\eta}$$

$$[B_{b,\beta}] = \begin{bmatrix} & P_{k,x} C_k & & \\ \dots & P_{k,y} S_k & \dots & \\ & P_{k,y} C_k + P_{k,x} S_k & & \end{bmatrix} \quad k = 5, 8 \quad (42)$$

$$P_{k,x} = j_{11} P_{k,\xi} + j_{12} P_{k,\eta}; \quad P_{k,y} = j_{21} P_{k,\xi} + j_{22} P_{k,\eta}$$

$$\begin{aligned} \langle u_n \rangle &= \langle w_1 \ \beta_{x1} \ \beta_{y1} \ w_2 \ \beta_{x2} \ \beta_{y2} \ w_3 \ \beta_{x3} \ \beta_{y3} \ w_4 \ \beta_{x4} \ \beta_{y4} \rangle \\ \langle \Delta_n \rangle &= \langle \Delta\beta_{s5} \ \Delta\beta_{s6} \ \Delta\beta_{s7} \ \Delta\beta_{s8} \rangle \end{aligned} \quad (43)$$

As in MITC4 Bathe and Dvorkin [24] element, the transverse shear strains  $\{\underline{\gamma}\}$  are interpolated independently, with:

$$\{\underline{\gamma}\} = \begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_x \\ \underline{\gamma}_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_\xi \\ \underline{\gamma}_\eta \end{Bmatrix} \quad (44)$$

$$\begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_\xi \\ \underline{\gamma}_\eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\eta) & 0 & \frac{1}{2}(1+\eta) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_{\xi 5} \\ \underline{\gamma}_{\eta 6} \\ \underline{\gamma}_{\xi 7} \\ \underline{\gamma}_{\eta 8} \end{Bmatrix} \quad (45)$$

where  $\underline{\gamma}_{\xi 5}$ ,  $\underline{\gamma}_{\eta 6}$ ,  $\underline{\gamma}_{\xi 7}$ ,  $\underline{\gamma}_{\eta 8}$  are the natural shear strain at sides 5–8. On the other hand, we have:

$$\begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_{\xi 5} \\ \underline{\gamma}_{\eta 6} \\ \underline{\gamma}_{\xi 7} \\ \underline{\gamma}_{\eta 8} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} L_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -L_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_{s5} \\ \underline{\gamma}_{s6} \\ \underline{\gamma}_{s7} \\ \underline{\gamma}_{s8} \end{Bmatrix} \quad (46)$$

From Eqs. (44)–(46) and by using Eq. (38) for isotropic plate and Eq. (35) for orthotropic plate, we obtain:

$$\{\underline{\gamma}\} = \begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_x \\ \underline{\gamma}_y \end{Bmatrix} = [B_{s,ip}] \{\Delta\beta_n\} \quad (47)$$

With the shear strain matrix:

$$[B_{s,ip}] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -j_{11}(1-\eta)L_5\phi_5 & -j_{12}(1+\xi)L_6\phi_6 & j_{11}(1+\eta)L_7\phi_7 & j_{12}(1-\xi)L_8\phi_8 \\ -j_{21}(1-\eta)L_5\phi_5 & -j_{22}(1+\xi)L_6\phi_6 & j_{21}(1+\eta)L_7\phi_7 & j_{22}(1-\xi)L_8\phi_8 \end{bmatrix} \quad (48)$$

- **Case isotropic:**  $\phi_k = \frac{D_b}{D_s} \frac{12}{L_k^2} = \frac{2}{k(1-\nu)} \left( \frac{h^2}{L_k^2} \right); k = 5, 6, 7, 8$
- **Case orthotropic:**  $\phi_k = \left( H_{sk21}^{inv} H_{bk32} + H_{sk22}^{inv} H_{bk22} \right) \left( \frac{12}{L_k^2} \right); k = 5, 6, 7, 8$

### 2.7. Discrete Kirchhoff Mindlin

Based on Discrete Kirchhoff–Mindlin Method [1,2], we have:

$$\int_0^{L_k} (\gamma_s - \underline{\gamma}_s) = 0 \quad (49)$$

On each side from (29) we have:  $\gamma_s = w_{,s} + \beta_s$ .

From (32), (35) and (49) we have:

$$\frac{w_j - w_i}{L_k} + \frac{1}{2} (C_k \beta_{xi} + S_k \beta_{yi} + C_k \beta_{xj} + S_k \beta_{yj}) + \frac{2}{3} (1 + \phi_k) \Delta\beta_{sk} = 0 \quad (50)$$

Finally, we have:

$$\Delta\beta_{sk} = \frac{3}{2(1 + \phi_k)} \left[ \frac{w_j - w_i}{L_k} + \frac{1}{2} (C_k \beta_{xi} + S_k \beta_{yi}) + \frac{1}{2} (C_k \beta_{xj} + S_k \beta_{yj}) \right] \quad (51)$$

When (51) is applied to the four side of element, the independent parameters  $\{\Delta\beta_n\}$  can be related to the final degree of freedom  $\{u_n\}$ , by:

$$\{\Delta\beta_n\} = [A_n] \{u_n\} \quad \text{with} : [A_n] = [A_\Delta]^{-1} [A_u] \quad (52)$$

where:

$$[A_\Delta] = -\frac{2}{3} \begin{bmatrix} (1 + \phi_5) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 + \phi_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 + \phi_7) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 + \phi_8) \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$[A_u] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\frac{2}{L_5} C_5 & S_5 & \frac{2}{L_5} C_5 & S_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{L_6} C_6 & S_6 & \frac{2}{L_6} C_6 & S_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{L_7} C_7 & S_7 & \frac{2}{L_7} C_7 & S_7 & 0 \\ \frac{2}{L_8} C_8 & S_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{L_8} C_8 & S_8 & 0 \end{bmatrix} \quad (54)$$

Substitution of Eqs. (52)–(54) into the Eq. (40) we have:

$$\{\chi\} = [B_b] \{u_n\} \quad \text{with} \quad [B_b] = [B_{b\beta}] + [B_{b,ip}] [A_n] \quad (55)$$

Substitution of Eqs. (52)–(54) into the Eq. (47) we have:

$$\{\underline{\gamma}\} = [B_s] \{u_n\} \quad \text{with} \quad [B_s] = [B_{s,ip}] [A_n] \quad (56)$$

The internal energy of DKMQ element:

$$\begin{aligned} \Pi_{int} &= \Pi_{int}^b + \Pi_{int}^s \\ \Pi_{int}^b &= \frac{1}{2} \int_A \langle \chi \rangle [H_b] \{ \chi \} dA = \frac{1}{2} \langle u_n \rangle [k_b] \{ u_n \} \quad (\text{bending energy}) \\ \Pi_{int}^s &= \frac{1}{2} \int_A \langle \gamma \rangle [H_s] \{ \gamma \} dA = \frac{1}{2} \langle u_n \rangle [k_s] \{ u_n \} \quad (\text{shear energy}) \end{aligned} \quad (57)$$

We have:

$$\Pi_{int} = \Pi_{int}^b + \Pi_{int}^s = \frac{1}{2} \langle u_n \rangle [k] \{ u_n \} \quad (58)$$

And:

$$\begin{aligned} [k] &= [k_b] + [k_s] \quad (\text{element stiffness}) \\ [k_b] &= \int_A [B_b]^T [H_b] [B_b] dA \quad (\text{bending stiffness}) \\ [k_s] &= \int_A [B_s]^T [H_s] [B_s] dA \quad (\text{shear stiffness}) \end{aligned} \quad (59)$$

## 3. Numerical analysis

### 3.1. Simply supported (SS) under uniform loading of a sandwich plate

In this test, we will analyze simply supported square sandwich plate (hard support conditions:  $w = \beta_s = 0$ ) under uniform loading  $f_z$ . We can see the details of this test in Fig. 5. Because of symmetry, we will only analyze area ABCD.

Data material (skin and hearth orthotropic):

$E_L = 3.4156$  MPa;  $E_T = 1.7931$  MPa;  $\nu_{LT} = 0.44$ ;  $G_{LT} = 1$  MPa;  $G_{LZ} = 0.608$  MPa;  $G_{TZ} = 1.015$  MPa; Stratification: sandwich; 3 layers 0/0/0 symmetrical.

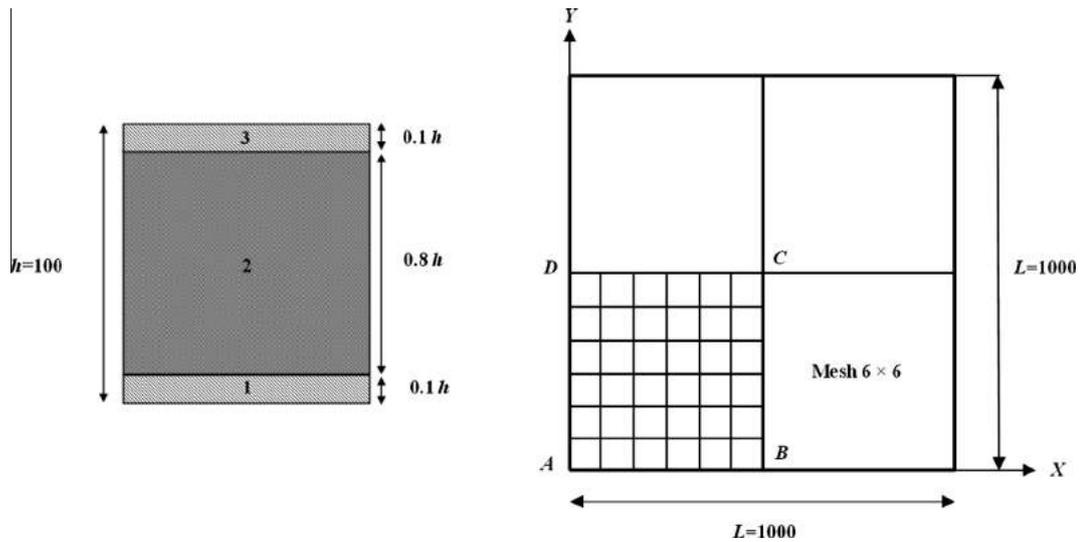


Fig. 5. Simply supported square sandwich plate under uniform loading.

Table 1  
Convergence of central deflection  $w_c$ .

$N \times N$	$C$		
	$C = 1$	$C = 10$	$C = 50$
	$k_{11} = k_{22} = 0.8333$ $k_{12} = 0$	$k_{11} = k_{22} = 0.3521$ $k_{12} = 0$	$k_{11} = k_{22} = 0.0938$ $k_{12} = 0$
$2 \times 2$	180.550	42.181	17.235
$4 \times 4$	181.110	42.041	16.932
$8 \times 8$	181.280	42.008	16.861
$16 \times 16$	181.340	41.826	16.843
$32 \times 32$	181.350	41.999	16.839
$64 \times 64$	181.350	41.998	16.838
$96 \times 96$	181.350	41.998	16.838
<b>Srinivas [13]</b>	<b>181.050</b>	<b>41.910</b>	<b>16.750</b>

The skin material (layer 1 and 3 in Fig. 5) and the core are formed by orthotropic material with the same axes of orthotropy. While the layer 2 (core) properties are proportional to those of layers 1 and 3. The  $E$  and  $G$  values of the core are  $C$  times weaker than those of the skin. In this test we will use  $C = 1, 10$ , and  $50$ . For  $C = 1$ , the structure corresponds to the plate orthotropic, while for  $C = 10$  and  $C = 50$ , it corresponds to the structure sandwich.

The results of central deflection of point  $C$  are reported on the Table 1. An analytical solution using 3D elasticity theory was reported by Srinivas [13]. The central displacement is expressed in the form:

$$w_c = \frac{w_c G_{LT}(\text{Core})}{hf_z} \tag{60}$$

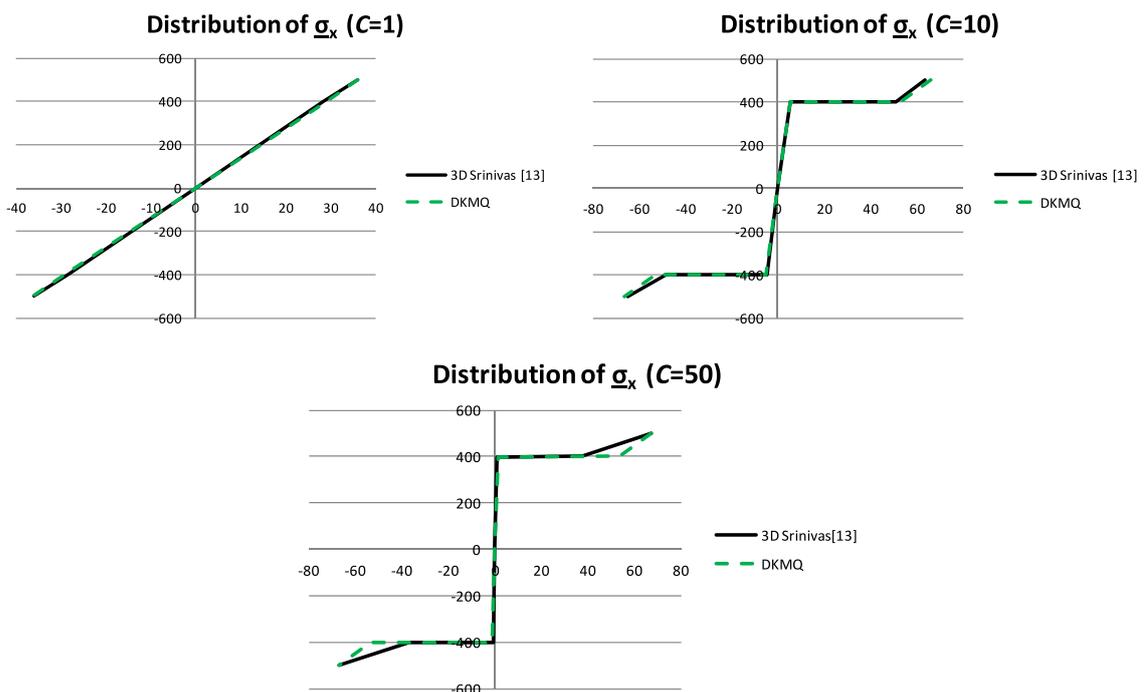


Fig. 6. Distribution of  $\sigma_x = \frac{\sigma_x}{f_z}$  at the plate center of SS (hard) sandwich square plate.

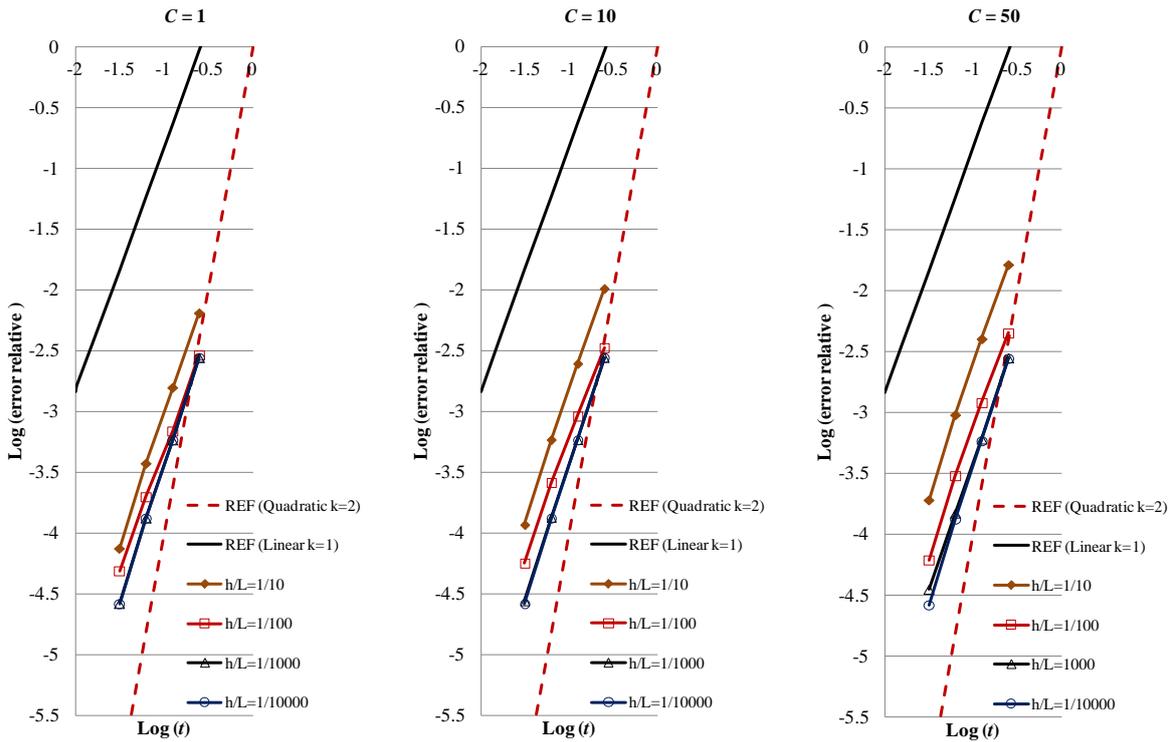


Fig. 7. Convergence behavior of SS (hard) sandwich square plate by using *s-norm*.

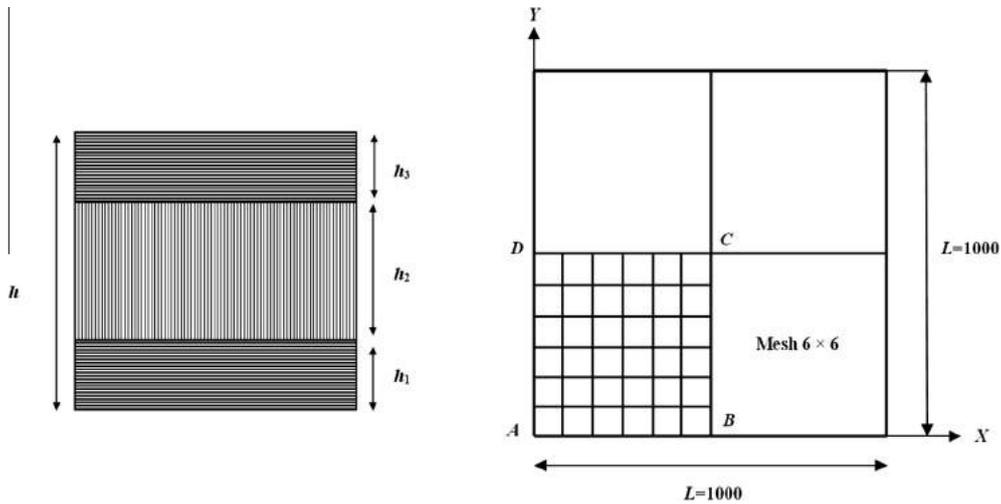


Fig. 8. Simply supported 3-layer (0/90/0) square plate under sinusoidal pressure load.

Table 1 present the central deflection of  $w_C$  for  $C = 1, 10$  and  $50$ . We use  $N \times N = 2 \times 2, 4 \times 4, 8 \times 8, 16 \times 16, 32 \times 32, 64 \times 64$  and  $96 \times 96$ . We found an accordance results and they are very close to reference solution. Satisfactory results are also obtained for  $\sigma_x$  shown in Fig. 6.

To get the behavior of the whole structure, the convergence is measured with respect to the *s-norm* defined in [14,15] by:

$$\|\vec{u}_{ref} - \vec{u}_h\|_s^2 = \int_{\Omega} \Delta \vec{e}^T \Delta \vec{\sigma} d\Omega \tag{61}$$

For the comparison, we use the reference solution obtained with DKMQ element with  $64 \times 64$  elements ( $N = 64$ ). For this test, we use a target mesh of  $N \times N$  elements with  $N = 4, 8, 16$  and  $32$ . Finally, the relative error is computed using:

Table 2  
Convergence of the deflection at point C for 3-layer (0/90/0) square plate.

$L/h$		4	10	50	100
$w$	Mesh $6 \times 6$	4.761	1.741	1.029	1.005
	Mesh $10 \times 10$	4.752	1.739	1.029	1.005
<b>Pagano and Hatfield [12]</b>		<b>4.491</b>	<b>1.709</b>	<b>1.031</b>	<b>1.008</b>

$$E_S = \frac{\|\vec{u}_{Ref} - \vec{u}_h\|_s^2}{\|\vec{u}_{Ref}\|_s^2} \tag{62}$$

The theoretical convergence behavior is given by:

$$E_S \cong ct^{2k} \tag{63}$$

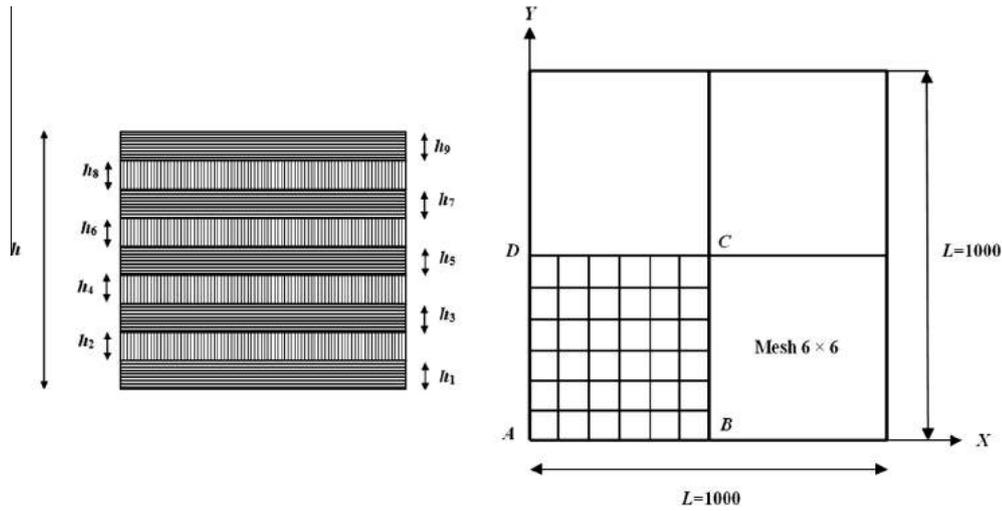


Fig. 9. Simply supported 9-layer (0/90/0/90/0/90/0/90/0) square plate under sinusoidal pressure load.

where  $c$  is a constant,  $t$  is the element size and  $k$  is the interpolation order. We use two reference lines for Eq. (63),  $k = 1$  corresponding to a linear convergence and  $k = 2$  to a quadratic convergence. We recall that for DKMQ element, we use bilinear interpolation functions for transverse displacement and quadratic incomplete interpolation functions for the rotations.

Using  $h/L = 1/10, 1/100, 1/1000$  and  $1/10000$ , the convergence behavior of DKMQ element in composite application is presented in Fig. 7. We found that DKMQ converge to linear behavior for the problems tested. Moreover, the  $s$ -norm test shows that DKMQ element give uniform and optimal convergence for thin and thick composite problems.

### 3.2. A simply supported 3-layer square plate under sinusoidal pressure load

In this test, we will analyze a simply supported 3-layer unidirectional square laminated with  $L = 1000$  and the thickness varies ( $h = 250, 100, 20$  and  $10$ ). We will use DKMQ plate element with  $6 \times 6$  and  $10 \times 10$  mesh size. This test is proposed by Pagano and Hatfield [12]. The sum of thickness of  $0^\circ$  layer ( $h_1 + h_3$ ) is equal to the thickness of  $90^\circ$  layer ( $h_2$ ), where  $h_1$  is equal to  $h_3$  (see Fig. 8).

Material properties:  $E_L = 25$  MPa;  $E_T = 1$  MPa;  $\nu_{LT} = 0.25$ ;  $G_{LT} = 0.5$  MPa;  $G_{TZ} = 0.2$  MPa  $k_{11} = 0.570$ ;  $k_{22} = 0.882$ ;  $k_{12} = k_{21} = 0$ . We will use 3 layers 0/90/0 symmetrical;  $f_z = f_0 \sin(\pi x/L) \sin(\pi y/L)$ .

The solution can be expressed with the following form:

$$\frac{w}{Q} = \frac{\pi^4 w Q}{12 S^4 h f_z} \quad (64)$$

$$Q = 4G_{LT} + [E_L + E_T(1 + 2\nu_{TT})]/(1 - 2\nu_{LT}\nu_{TL})$$

We can see in Table 2 the central displacement and stresses in point C compared with solution given by Pagano and Hatfield [12]. We found a good correlation between DKMQ element and reference solution.

### 3.3. A simply supported 9-layer square plate under sinusoidal pressure load

In this test, we will analyze a simply supported 9-layer unidirectional square laminated with  $L = 1000$  and the thickness varies ( $h = 250, 100, 20$  and  $10$ ). We will use DKMQ plate element with

Table 3

Convergence of the deflection at point C for 9-layer (0/90/0/90/0/90/0/90/0) square plate.

$L/h$		4	10	50	100
$w$	Mesh $6 \times 6$	4.177	1.513	1.018	1.002
	Mesh $10 \times 10$	4.166	1.512	1.018	1.003
<b>Pagano and Hatfield [12]</b>		<b>4.079</b>	<b>1.512</b>	<b>1.021</b>	<b>1.005</b>

$6 \times 6$  and  $10 \times 10$  mesh size. This test is proposed by Pagano & Hatfield [12].

The sum of thickness of  $0^\circ$  layer ( $h_1 + h_3 + h_5 + h_7 + h_9$ ) is equal to the sum of thickness of  $90^\circ$  layer ( $h_2 + h_4 + h_6 + h_8$ ) whereas layer at the same direction have similar thicknesses ( $h_1 = h_3 = h_5 = h_7 = h_9$ ) and ( $h_2 = h_4 = h_6 = h_8$ ) (see Fig. 9).

Material properties:

$E_L = 25$  MPa;  $E_T = 1$  MPa;  $\nu_{LT} = 0.25$ ;  $G_{LT} = 0.5$  MPa;  $G_{TZ} = 0.2$  MPa  $k_{11} = 0.670$ ;  $k_{22} = 0.666$ ;  $k_{12} = k_{21} = 0$ . We will use 9 layers 0/90/0/90/0/90/0/90/0 symmetrical;  $f_z = f_0 \sin(\pi x/L) \sin(\pi y/L)$ .

The solution can be expressed with the following form:

$$\frac{w}{Q} = \frac{\pi^4 w Q}{12 S^4 h f_z} ; \quad Q = 4G_{LT} + [E_L + E_T(1 + 2\nu_{TT})]/(1 - 2\nu_{LT}\nu_{TL}) \quad (65)$$

We can see in Table 3 the central displacement and stresses in point C compared with solution given by Pagano and Hatfield [12]. We found a good correlation between DKMQ element and reference solution.

## 4. Conclusions

The application of DKMQ plate bending element has been presented. We found a good correlation to reference solution for all test proposed to validate composite structure. Moreover, the  $s$ -norm test shows that DKMQ element give uniform and optimal convergence for thin and thick composite problems. Finally, DKMQ plate bending element can be used as a tools to analyze composite structure.

## Acknowledgment

The financial support from the Indonesian Ministry of Research, Technology and Higher Education (KEMENRISTEKDIKTI) is gratefully acknowledged.

## References

- [1] Katili I. A new discrete Kirchhoff–Mindlin element based on Mindlin–Reissner plate theory and assumed shear strain fields- part I: an extended DKT element for thick-plate bending analysis. *Int J Numer Meth Eng* 1993;36:1859–83.
- [2] Katili I. A new discrete Kirchhoff–Mindlin element based on Mindlin–Reissner plate theory and assumed shear strain fields- part II: an extended DKQ element for thick plate bending analysis. *Int J Numer Meth Eng* 1993;36:1885–908.
- [3] Batoz JL, Bathe KJ, Ho LW. A study of three-node triangular plate bending elements. *Int J Numer Meth Eng* 1980;15:1771–812.
- [4] Batoz JL, Ben Tahar M. Evaluation of a new thin plate quadrilateral element. *Int J Numer Meth Eng* 1982;18:1655–78.
- [5] Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J Appl Mech Eng ASME* 1943;12:A69–77.
- [6] Mindlin RD. Influence of rotator inertia and shear on flexural motion of isotropic elastic plates. *J Appl Mech* 1951;18:31–8.
- [7] Katili I, Batoz JL, Maknun IJ, Hamdouni A, Millet O. The development of DKMQ plate bending element for thick to thin shell analysis based on Naghdi/Reissner/Mindlin shell theory. *Finite Elem Anal Des* 2015;100:12–27.
- [8] Ayad R, Talbi N, Ghomari T. Modified discrete Mindlin hypotheses for laminated composite structures. *Compos Sci Tech* 2009;69:125–8.
- [9] Khosravi P, Ganesan R, Sedaghati R. An efficient facet shell element for corotational nonlinear analysis of thin and moderately thick laminated composite structures. *Comput Struct* 2008;86:850–8.
- [10] Botella S, Onate E, Canet JM. A layer-wise triangle for analysis of laminated composite plates and shells. *Comput Struct* 1999;70:635–46.
- [11] Pagano NJ. Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates. *J Compos Mater* 1970;4:20–34.
- [12] Pagano NJ, Hatfield SJ. Elastic behaviour of multilayered bidirectional composites. *AIAA J* 1972;10:931–3.
- [13] Srinivas S. A refined analysis of composite laminates. *J Sound Vib* 1973;30(4):495–507.
- [14] Chapelle D, Bathe KJ. *The finite element analysis of shells – fundamentals*. 2nd ed. Springer; 2011.
- [15] Hiller JF, Bathe KJ. Measuring convergence of mixed finite element discretizations: an application to shell structures. *Comput Struct* 2003;81:639–54.
- [16] Lee PS, Bathe KJ. Development of MITC isotropic triangular shell finite elements. *Comput Struct* 2004;82:945–62.
- [17] Lee PS, Noh HC, Bathe KJ. Insight into 3-node triangular shell finite elements: the effects of element isotropy and mesh patterns. *Comput Struct* 2007;85:404–18.
- [18] Kim DY, Bathe KJ. A triangular six-node shell elements. *Comput Struct* 2009;87:1451–60.
- [19] Bathe KJ, Lee PS, Hiller JF. Towards improving the MITC9 shell element. *Comput Struct* 2003;81:477–89.
- [20] Lee PS, Bathe KJ. The quadratique MITC plate and MITC shell elements in plate bending. *Adv Eng Softw* 2010;41:712–28.
- [21] Bathe KJ, Lee PS. Measuring the convergence behavior of shell analysis schemes. *Comput Struct* 2011;89:285–301.
- [22] Batoz JL, Dhatt G. *Modélisation des structures par éléments finis. Poutres et Plaques*, vol. 2. Hermes; 1990.
- [23] Oñate E. *Structural analysis with the finite element method. Beams, plates and shells*, vol. 2. Springer; 2012.
- [24] Bathe KJ, Dvorkin EN. A four-node plate bending element based on Mindlin–Reissner plate theory and a mixed interpolation. *Int J Numer Meth Eng* 1985;21:367–83.

## Annexe D

# Application of DKMQ24 shell element for twist of thin-walled beams : comparison with Vlassov theory

Submitted : Applied Numerical Mathematics

# Application of DKMQ24 shell element for twist of thin-walled beams: comparison with Vlassov theory

Imam Jauhari MAKUN<sup>a,b\*</sup>, Irwan KATILI<sup>a</sup>, Olivier MILLET<sup>b</sup>, Aziz HAMDOUNI<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Universitas Indonesia, Depok 16424, Indonesia*

<sup>b</sup>*Université de La Rochelle, La Rochelle 17000, France*

## Abstract

This paper presents the application of DKMQ24 shell element for twist of thin-walled beams. This element passed the patch tests for membrane, bending and shear problems and gave fine results for plate and shell problems analysis without shear locking [15]. Thin-walled cantilever beams are analyzed using this element. DKMQ24 gives good results for cantilever beams with open and close cross-section for a very few number of element. Moreover, the comparison of the results obtained with Vlassov analytical solution enables to evaluate the accuracy of the twist rigidity  $J_d$  which depends on an empirical coefficient in Vlassov theory.

Keywords: Thin-walled beam, DKMQ24, Vlassov, Twist

## 1. Introduction

In civil, mechanical and aerospace engineering applications, thin and thin-walled structures, especially thin-walled beams, are widely used. They provide a maximum of stiffness with a minimum of weight. Researches in experimental and numerical analysis of thin-walled beam are still ongoing. In numerical analysis, it is interesting to develop a formulation which can be used to analyze thin-walled beam structures.

Torsion stiffness is an important factor to be taken into account for the design of advanced construction, particularly for open cross-section thin-walled beam. Vlassov has developed a theory based on mechanical and geometrical assumptions to analyze thin-walled beams with open (and close) cross-section [1]. Gurujee and Shah [2] have proposed a computer program based on Vlassov's theory which is capable of analyzing thin-walled frames. The computer program to determine the geometrical properties in Vlassov's theory has been presented by Prokic [3].

Dvorkin et al. [4] have also proposed a finite element for the analysis of thin-walled beam based on Vlassov beam theory [1,5]. Shakourzadeh et al. [6] have also developed a finite element formulation for the torsion problems of thin-walled beams based on Bencaster's beam theory [7,8,9,10]. This element can be used to analyze beams in torsion with open and close cross-section; it gives similar results to Vlassov theory for thin-walled beams with open cross-section.

Prokić and Lukić [11] have proposed a simple, rapid and accurate analytical method that can be used to evaluate coupled bending-torsion vibrations of braced thin-walled beams. For the simply supported beam, they found a good agreement between analytical method proposed and the numerical results obtained from the finite element method. Erkmén and Mohareb [12] have developed two finite elements which capture the shear deformation effect for the torsional analysis of thin-walled structures. Using their proposed finite elements formulation, they found that the twist angle is larger than when the shear deformation is neglected. Pavazza [13] has introduced an approximate analytical approach to the torsion of thin-walled beams with open cross-section where the influence of shear is considered. Taktak et al. [14] have presented two node finite element with 6 *d.o.f* per node and take into account the shear strains effects which can be used to analyze helical beam .

Shell finite element formulation (called DKMQ24 element) that takes into account the shear deformation effect has been introduced and tested in [15]. It passed the patch tests for membrane, bending and shear problems and also the benchmark test for thick and thin shell problems. DKMQ24 shell element is an extension of the robust DKMQ plate element proposed by Katili [16]. FEAP program developed by Robert L. Taylor [17] is used in numerical analysis with DKMQ24 element.

In this paper, thin-walled beams with open cross-section subjected to pure torsion will be analyzed using DKMQ24 shell element. To validate the results, a comparison with Vlassov analytical solution is performed [1]. This comparison enables to evaluate the accuracy of the twist rigidity  $J_d$ , depending on an empirical coefficient which can be found in the literature [1]. Finally, a last example with a cantilever beam with close cross-section is addressed. The numerical results obtained confirmed well with the theoretical analysis performed in [18].

## 2. Basic elements of parameterization of surfaces and shell theory

We briefly recall the fundamental definitions and notations of differential geometry for surface theory. The vector position  $x_q$  at an arbitrary point  $q$  on the reference element can be expressed in the parametric coordinates  $\xi, \eta, z$  (see Figure 1) reads:

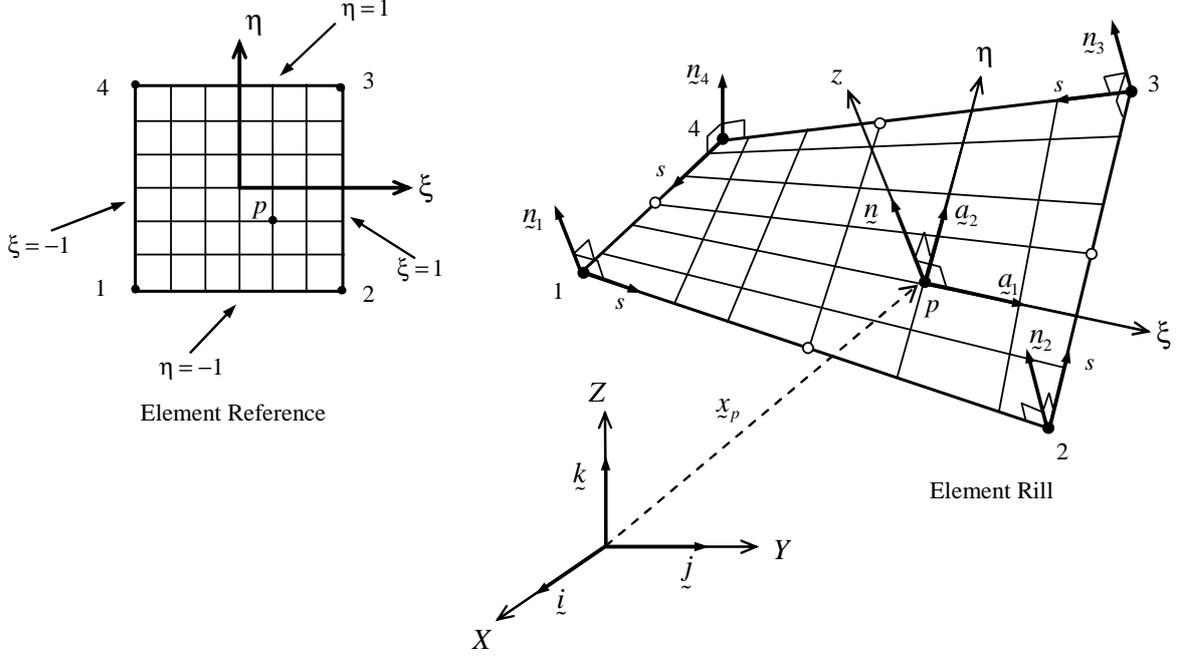
$$x_q(\xi, \eta, z) = x_p(\xi, \eta) + z \underline{n}(\xi, \eta) \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (1)$$

where  $x_p$  denote the coordinates of point  $p$  ( $X, Y, Z$ ) of the middle surface,  $h$  is the shell thickness and  $\underline{n}$  is the normal direction to the middle surface at  $p$ . From equation (1), we can define the covariant basis of the tangent map as

$$\begin{aligned} \underline{a}_1 &= \underline{x}_{p,\xi} \\ \underline{a}_2 &= \underline{x}_{p,\eta} \end{aligned} \quad (2)$$

and the unit normal vector to the tangential plane:

$$\underline{n} = \frac{\underline{a}_1 \times \underline{a}_2}{|\underline{a}_1 \times \underline{a}_2|} \quad (3)$$



**Figure 1.** Geometry of shell elements

The first fundamental form at  $p$  of the middle surface expresses as:

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{a}_1 \cdot \underline{a}_1 & \underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2 \\ \underline{a}_2 \cdot \underline{a}_1 & \underline{a}_2 \cdot \underline{a}_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

It can also be expressed with contravariant base:

$$[a] = \begin{bmatrix} a^{11} & a^{12} \\ a^{21} & a^{22} \end{bmatrix} \quad (5)$$

The oriented area of element  $dA$  is classically given by:

$$d\underline{A} = \underline{a}_1 d\xi \times \underline{a}_2 d\eta = |\underline{a}_1 \times \underline{a}_2| d\xi d\eta \underline{n} = \sqrt{a} d\xi d\eta \underline{n} = dA \underline{n} \quad (6)$$

The second fundamental form in the middle surface is defined as:

$$[b] = \begin{bmatrix} \underline{n} \cdot \underline{a}_{1,\xi} & \underline{n} \cdot \underline{a}_{1,\eta} \\ \underline{n} \cdot \underline{a}_{2,\xi} & \underline{n} \cdot \underline{a}_{2,\eta} \end{bmatrix} \quad (7)$$

The shell model that will be used in this paper for the numerical simulations is developed from DKMQ plate element using Naghdi/Mindlin/Reissner shell theory [19-24]. Therefore, the warping and coupled bending-membrane effects are taken into account in the formulation of the finite

element. Its formulation is based on a generalization of the Discrete Kirchhoff-Mindlin method including the transverse shear effects and on the generalization of DKMQ plate element to DKMQ24 shell element [25]. The reader may find more details about this new finite element in [15], where the formulation is briefly recalled in the next section.

### 3. DKMQ24 finite element formulation

The finite element formulation of DKMQ24 is based on Naghdi shell model (see [15]). Introducing the interpolation functions  $N_i(\xi, \eta)$ , the position vectors  $\underline{x}_q$  of a current point  $q$  of the shell can be written as:

$$\underline{x}_q(\xi, \eta, z) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \underline{x}_i + z \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \underline{n}_i \quad (8)$$

The displacement of  $\underline{u}_q$  is given by

$$\underline{u}_q(\xi, \eta, z) = \langle u_p(\xi, \eta) \rangle + z \underline{\beta}(\xi, \eta) \quad \text{with} \quad \underline{\beta} \cdot \underline{n} = 0 \quad (9)$$

where  $\underline{\beta}(\xi, \eta)$  represents the rotation vector.

Moreover, we have:

$$\underline{u}_q(\xi, \eta, z) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{Bmatrix} + z \left( \sum_{i=1}^4 N_i [RN]_i \begin{Bmatrix} \theta_{Xi} \\ \theta_{Yi} \\ \theta_{Zi} \end{Bmatrix} + \sum_{k=5}^8 P_k \{t_{sk}\} \Delta\beta_{sk} \right) \quad (10)$$

We chose for  $N_i$  linear functions of interpolation and for  $P_k$  incomplete quadratic ones (Table 1).

**Table 1.** Linear interpolation functions  $N_i$  and quadratic functions  $P_k$

$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$	$P_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$
$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$	$P_6 = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$
$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$	$P_7 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$
$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$	$P_8 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$

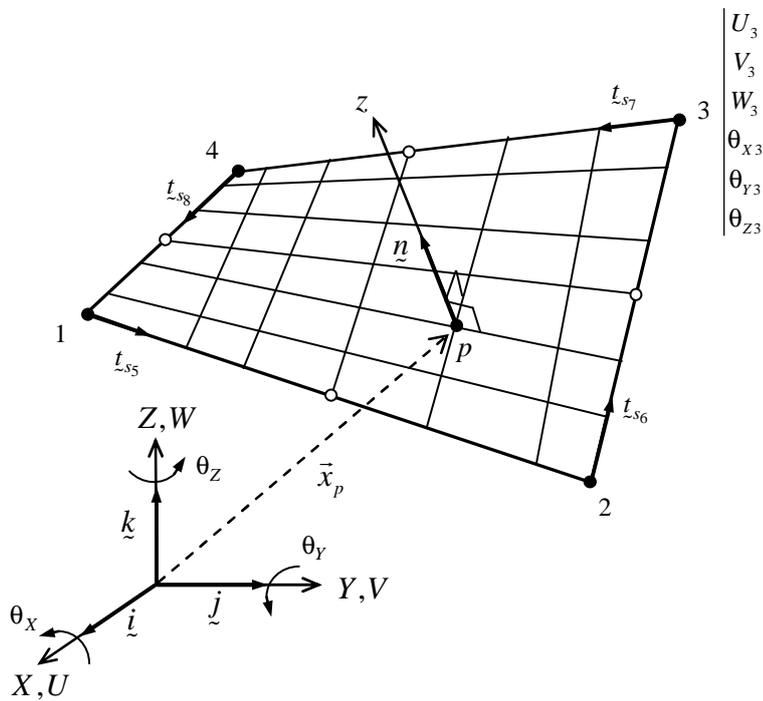
The vector  $\underline{t}_{s_k} = \underline{x}_{ji} / L_k$  ( $k=5,6,7,8$ ) is a unit vector tangential on the side of element. Moreover,  $\Delta\beta_{s_k}$  ( $k=5,6,7,8$ ) is a degree of freedom in the middle side of element and will be eliminated using

discrete Kirchhoff-Mindlin method (see the detail in [15]). Figure 2 show the nodal degrees of freedom for DKMQ24 element.

The key assumption in this formulation is the choice of the interpolation for the transversal shear strain as

$$\begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_\xi \\ \underline{\gamma}_\eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\eta) & 0 & \frac{1}{2}(1+\eta) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_{\xi 5} \\ \underline{\gamma}_{\eta 6} \\ \underline{\gamma}_{\xi 7} \\ \underline{\gamma}_{\eta 8} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

where  $\underline{\gamma}_\xi$  and  $\underline{\gamma}_\eta$  represent transversal shear strain imposed in the element.



**Figure 2.** Degrees of freedom

On the other hand, we have:

$$\begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_{\xi 5} \\ \underline{\gamma}_{\eta 6} \\ \underline{\gamma}_{\xi 7} \\ \underline{\gamma}_{\eta 8} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_5}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_6}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{L_7}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{L_8}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\gamma}_{s5} \\ \underline{\gamma}_{s6} \\ \underline{\gamma}_{s7} \\ \underline{\gamma}_{s8} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Using the constitutive law

$$\underline{\gamma}_s = \frac{T_s}{D_s} \quad \text{and} \quad D_s = \frac{KEh}{2(1+\nu)} \quad (13)$$

and the equilibrium equation on the side of each element:

$$T_s = M_{s,s} + M_{ms,m} \quad (14)$$

We deduce after a few calculations that are not detailed here (see [15] for more details) that

$$\underline{\gamma}_{s_k} = -\frac{2}{3}\phi_k \Delta\beta_{s_k} \quad (15)$$

Where:

$$\phi_k = \frac{D_b}{D_s} \frac{12}{L_k^2} = \frac{2}{K(1-\nu)} \left( \frac{h^2}{L_k^2} \right)$$

In relation (15), the factor  $\phi_k$  is fundamental to conserve the consistency of the shell element DKMQ24 (this constitutes one of the originality of this element). The factor  $h^2/L_k^2$  explains why DKMQ24 element behaves as *Reissner-Mindlin* theory for thick shell and as *Kirchhoff-Love* theory for thin shell. In the latter case, where  $h^2/L_k^2$  is close to zero, the transversal shear deformation automatically vanishes. Another originality of the DKMQ24 element is the utilisation of the incomplete quadratic interpolation functions for the rotation that give the better performance in bending behaviour.

#### 4. Vlassov equilibrium equation

In Katili *et al.* [11], we had validated that DKMQ24 element on several benchmark tests. In this paper, we propose to apply this new element to thin-walled structures. Let us first recall the classical twist equation of Vlassov theory that will be used for comparison (and validation) with the numerical results obtained with DKMQ24 shell element. In the reduced basis<sup>1</sup> [26-28], the twist equation of Vlassov theory classically stands as

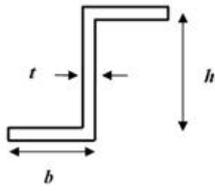
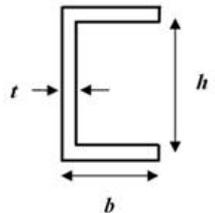
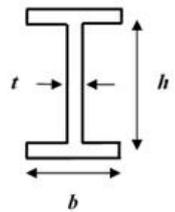
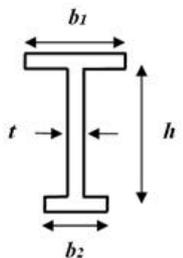
$$EJ_w \frac{d^4\theta}{dx_3^4} - \mu J_d \frac{d^2\theta}{dx_3^2} = m \quad (16)$$

with the associated boundary conditions. Denoting  $d$  the width of the beam and  $h$  its thickness, the twist rigidity  $J_d$  is given by  $J_d = \frac{a}{3} \sum d h^3$ , where ‘a’ is an empirical coefficient whose values may be found in Vlassov [1].

The values of the twist rigidity coefficient  $J_d$  and  $J_w$  are summarized in Table 2. Note that  $J_w$  may be calculated from a general analytical expression that can be found in [26-30]. Its values for the profiles considered are recalled in Table 2.

<sup>1</sup>The directions  $e_1$  and  $e_2$  correspond to the principal inertial axis of the profile. Moreover the origin of the frame coincides with the center of gravity of the profile and the origin of the sectorial area with the shear center.

**Table 2.** Values of twist rigidities  $J_w$  and empirical Vlassov coefficient 'a' for the profiles considered (according to [1])

Cross section	$J_w$	Vlassov coefficient (a)
	$J_w = \frac{th^2b^3}{12} \left( \frac{b+2h}{2b+h} \right)$	a = 1.16
	$J_w = \frac{h^2b^3t}{12} \frac{2h+3b}{h+6b}$	a = 1.12
	$J_w = \frac{h^2tb^3}{24}$	a = 1.29
	$J_w = \frac{h^2t^2b_1^3b_2^3}{12t(b_1^3+b_2^3)}$	a = 1.31

When there is no linear twist  $m$  applied, equation (16) reduces to

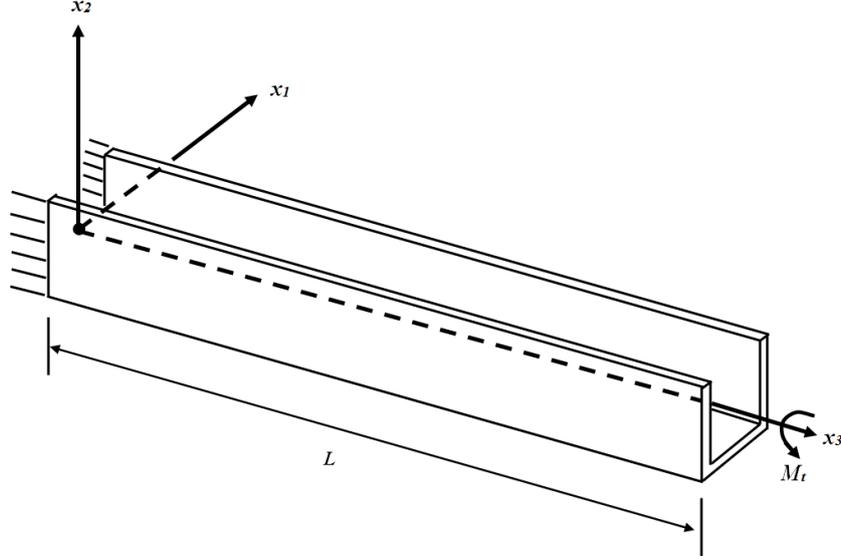
$$\frac{d^4\theta}{dx_3^4} - \frac{k^2}{l^2} \frac{d^2\theta}{dx_3^2} = 0 \quad (17)$$

where:

$$\frac{k^2}{l^2} = \frac{\mu J_d}{E J_w} \quad (18)$$

Classically, the general solution of (20) is given by:

$$\theta(x_3) = c_1 + c_2x_3 + c_3ch\left(\frac{kx_3}{l}\right) + c_4ch\left(\frac{kx_3}{l}\right) \quad (19)$$



**Figure 3.** Cantilever beam with open cross-section

Let us write now the four boundary conditions to determine the constants  $c_1$  to  $c_4$ . As the thin-walled beam is clamped in  $x_3 = 0$  (Figure 3), we have:

$$\theta(0) = 0 \quad \text{and} \quad \frac{d\theta}{dx_3}(0) = 0 \quad (20)$$

On the other hand, at the other extremity at  $x_3 = l$ , a torque  $M_t$  is applied, so we have:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta(l)}{dx_3^2} &= 0 \\ EJ_w \frac{d^3\theta(l)}{dx_3^3} - \mu J_d \frac{d\theta(l)}{dx_3} &= M_t \end{aligned} \quad (21)$$

After calculations, using boundary conditions (20) and (21), we get (as in [28]):

$$\begin{aligned} c_1 &= -c_3 = c_4 \tanh(k) \\ c_2 &= -\frac{k}{l} c_4 \\ c_1 &= M_t \frac{l}{k} \frac{1}{\mu J_d} \end{aligned} \quad (22)$$

Finally, the twist angle  $\theta(x_3)$  is given by

$$\theta(x_3) = -M_t C \frac{l}{k} \left[ \tanh(k) - \frac{k}{l} x_3 - \tanh(k) \cosh\left(\frac{k}{l} x_3\right) + \sinh\left(\frac{k}{l} x_3\right) \right] \quad (23)$$

with:

$$C = \frac{1}{\mu J_d}, \quad \frac{l}{k} = \sqrt{\frac{EJ_w}{\mu J_d}}$$

## 5. Numerical results for cantilever beams with open cross-section

### 5.1. Z cantilever beam

Let us consider a thin Z cantilever beam clamped on one side (at  $x=0$ ) and free on the other side (Figure 4). The data used for testing DKMQ24 element following [31] are given as follows.

*Geometry and material:*

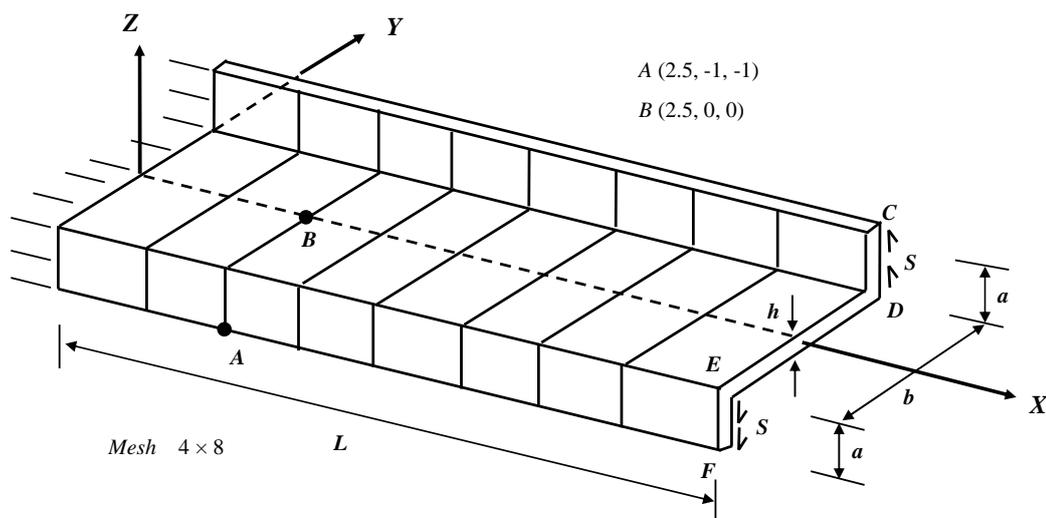
$$L = 10.0 \text{ m}; a = 1.0 \text{ m}; b = 2.0 \text{ m}; h = 0.10 \text{ m}; \nu = 0.3; E = 21 \times 10^4 \text{ Pa}$$

$$S = 0.60 \text{ N along sides } CD \text{ and } EF$$

*Boundary conditions:*

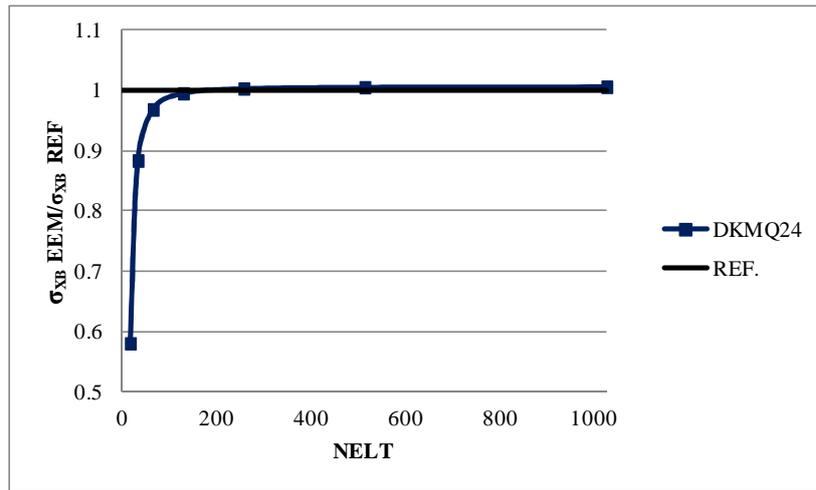
$$U = V = W = \theta_X = \theta_Y = \theta_Z = 0 \text{ on side clamped}$$

*Reference value of the stress at B:*  $\sigma_{XB} = 36 \text{ MPa}$

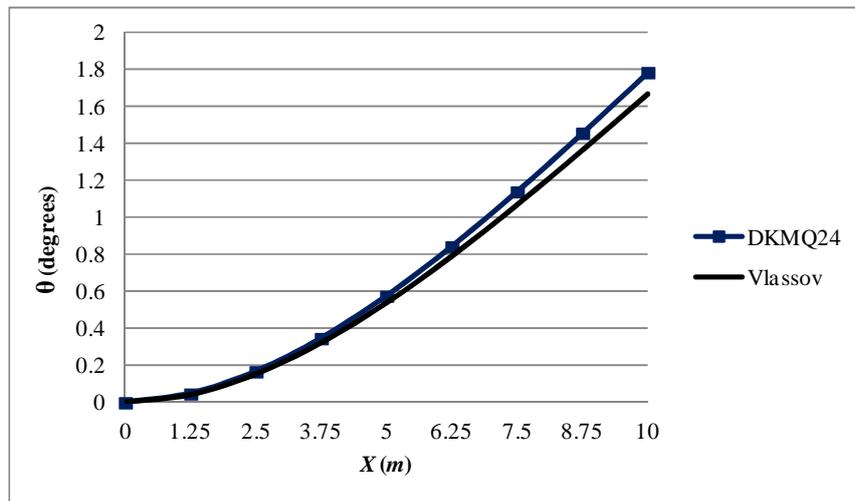


**Figure 4.** Z cantilever beam

A 1.2 Nm torque is applied to the beam on the free side. The convergence results in function of the total number of elements (NELT) are presented in figure 5. There is a good convergence to the reference solution with DKMQ24 element. Figure 6 presents the variations of the twist angle in the x direction compared with Vlassov theory (23). The results obtained with DKMQ24 element are very close to Vlassov analytical solution (23).



**Figure 5.** Convergence of  $\sigma_{XB}$  for the Z cantilever beam considered



**Figure 6.** Twist angle for the Z cantilever beam considered

**Table 3.** Error on the twist angle compared with Vlassov analytical solution

X	Vlassov	DKMQ24	Error (%)
0.00	0.000	0.000	0.000
1.25	0.040	0.048	19.900
2.50	0.152	0.168	10.403
3.75	0.321	0.347	8.026
5.00	0.538	0.576	7.125
6.25	0.791	0.844	6.745
7.50	1.070	1.141	6.626
8.75	1.366	1.457	6.648
10.0	1.671	1.785	6.808

Finally, in Table 3, we have computed the relative errors compared with Vlassov solution. They are due mainly to the empirical value of the constant ‘ $a=1.16$ ’ which is used for such a beam (Table 2).

## 5.2. $U$ cantilever beam

For the next test, let us consider a thin  $U$  cantilever beam clamped on one side (at  $x=0$ ) and free on the other side (Figure 7). The data used are specified thereafter.

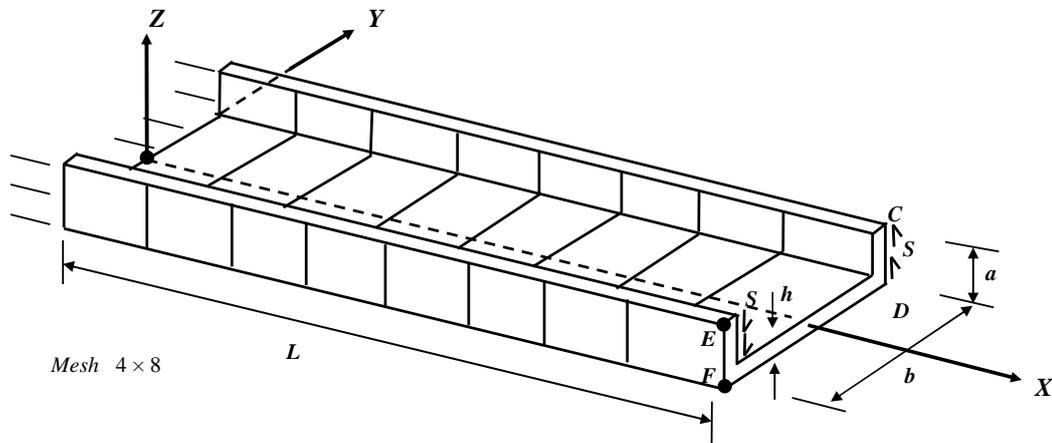
*Geometry and material:*

$$L = 10.0 \text{ m}; a = 1.0 \text{ m}; b = 2.0 \text{ m}; h = 0.10 \text{ m}; \nu = 0.3; E = 21 \times 10^4 \text{ Pa}$$

$$S = 0.60 \text{ N along sides } CD \text{ and } EF$$

*Boundary conditions:*

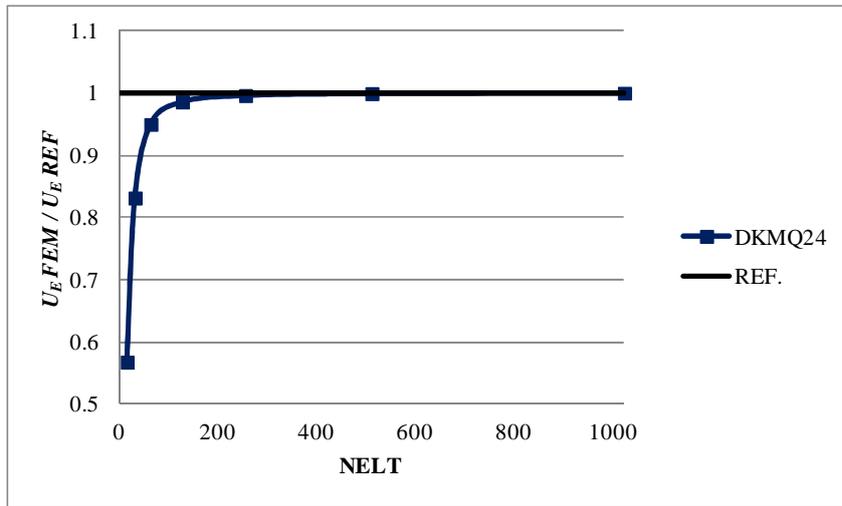
$$U = V = W = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0 \text{ on side clamped}$$



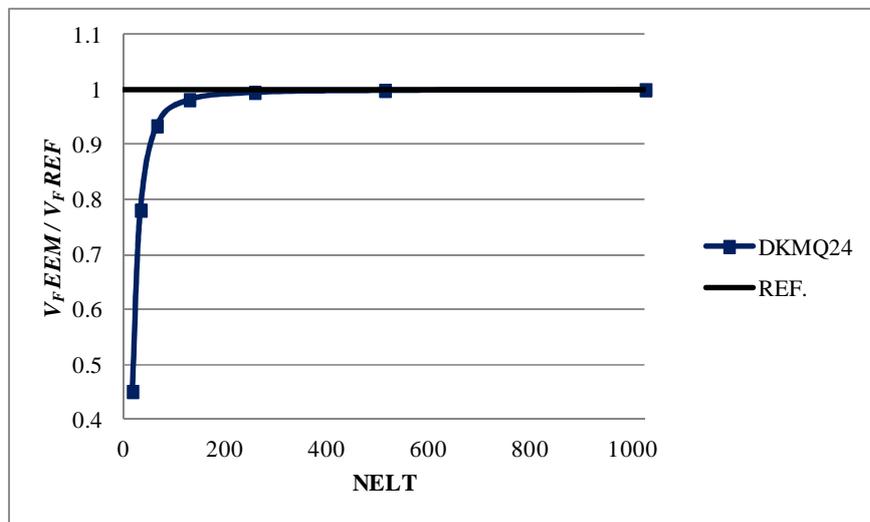
**Figure 7.**  $U$  cantilever beam

A 1.2 Nm torque is applied on the free side of the cantilever beam. In this test, we use NELT 16, 32, 64, 128, 256, 512 and 1024. Using the results obtained for 1024 ( $4 \times 256$ ) elements as the reference solution, the convergence results at point  $E$  and  $F$  of  $U$  cantilever are plotted in figures 8 and 9. Figure 10 presents the variations of the twist angle for the  $U$  cantilever beam obtained numerically compared with the theoretical solution of Vlassov (23). We observed that the results are again in very good accordance with a very few elements.

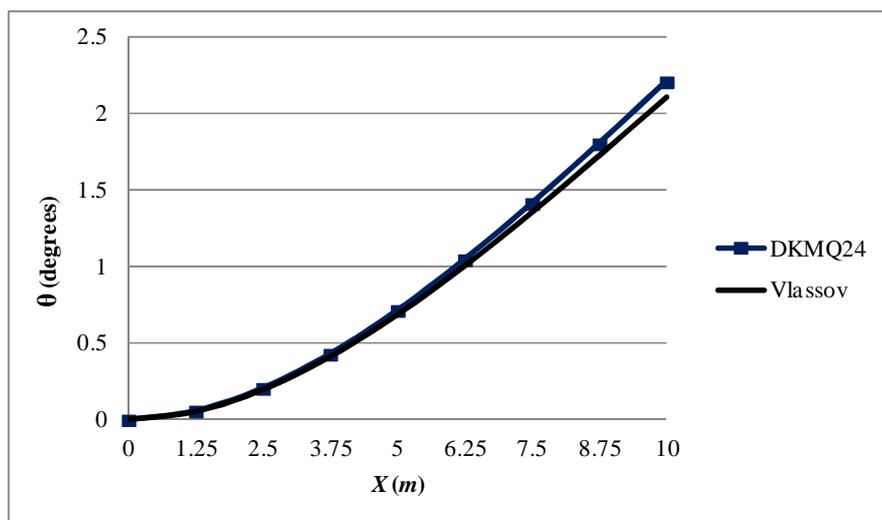
The relative error with respect to Vlassov theoretical solution is plotted in Table 4. The results are better than for  $Z$  cantilever beam, that traduces a better value of the twist rigidity  $J_d$  determined from experimental twist measurement Vlassov [1].



**Figure 8.** Convergence of deflection  $U_E$  for the  $U$  cantilever beam considered



**Figure 9.** Convergence of deflection  $V_F$  for the  $U$  cantilever beam considered



**Figure 10.** Twist angle for the  $U$  cantilever beam considered

**Table 4.** Error on the twist angle compared with Vlassov analytical solution

X	Vlassov	DKMQ24	Error (%)
0.00	0.000	0.000	0.000
1.25	0.052	0.058	11.131
2.50	0.194	0.206	5.890
3.75	0.410	0.429	4.744
5.00	0.683	0.714	4.440
6.25	1.001	1.045	4.436
7.50	1.350	1.412	4.575
8.75	1.721	1.803	4.798
10.0	2.101	2.208	5.101

### 5.3. *H* cantilever beam

We will consider a thin *H* cantilever beam clamped on one side (at  $x=0$ ) and free on the other side (Figure 11). The data used are given below.

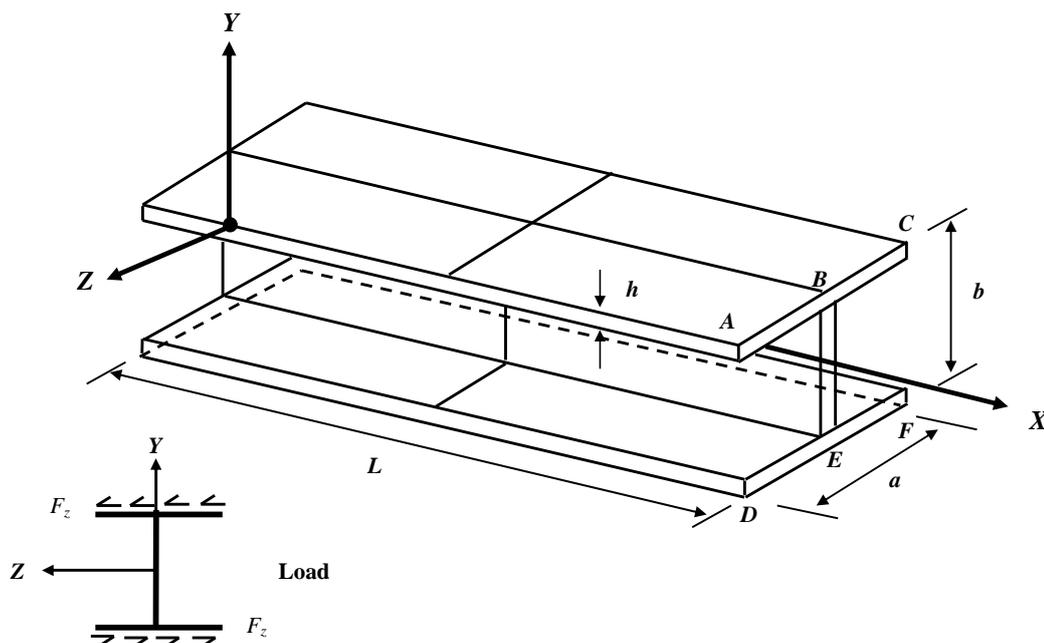
*Geometry and material:*

$$L = 10.0 \text{ m}; a = b = 1.0 \text{ m}; h = 0.01 \text{ m}; \nu = 0.3; E = 21 \times 10^{11} \text{ Pa}$$

$$F_z = 10^4 \text{ N alongside AC and DF}$$

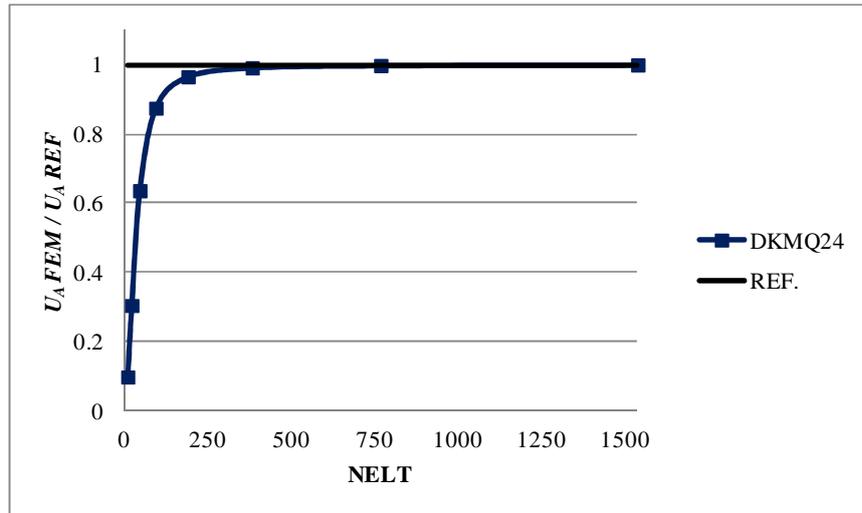
*Boundary conditions:*

$$U = V = W = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0 \text{ on the side clamped}$$

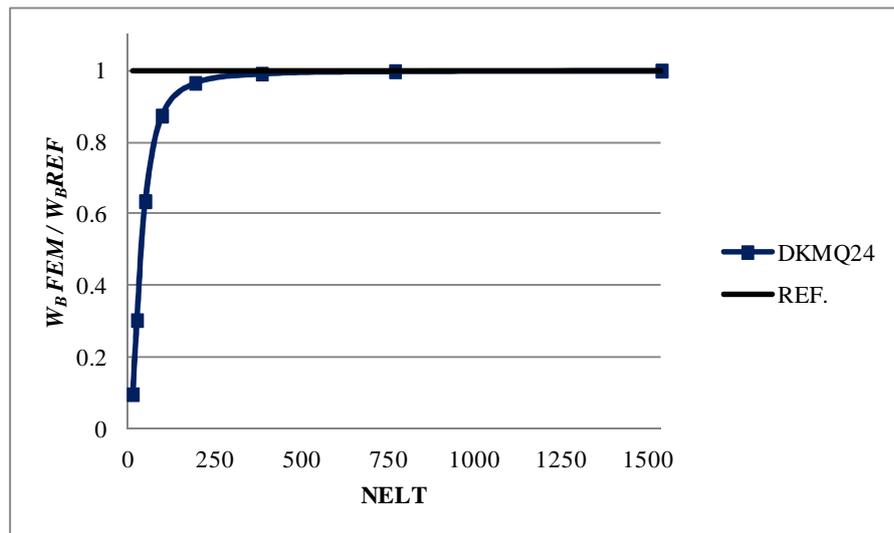


**Figure 11.** *H* cantilever beam

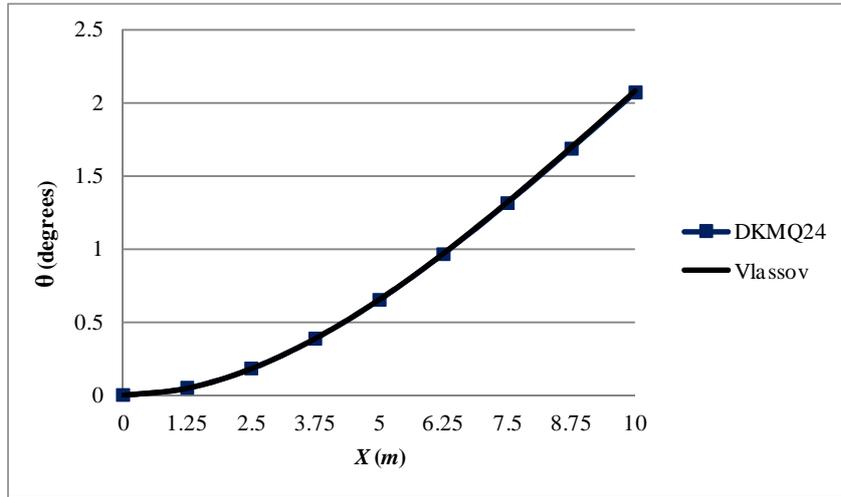
A  $10^4$  N shear force is applied to the beam on the free side. We use 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768 and 1536 as total number of elements (NELT). Using the results obtained for NELT 1536 as the reference solution, the convergence results of  $U_A$  and  $W_B$  are presented in Figures 12 and 13. While, figure 14 presents the variations of the twist angle compared with Vlassov analytical solution (23). We found that the results obtained with DKMQ24 are similar to Vlassov analytical solution (23) with the value of Vlassov empirical coefficients  $a=1.29$  (Table 2).



**Figure 12.** Convergence of deflection  $U_A$  for the  $H$  cantilever beam considered



**Figure 13.** Convergence of deflection  $W_B$  for the  $H$  cantilever beam considered



**Figure 14.** Twist angle for the  $H$  cantilever beam considered

**Table 5.** Error on the twist angle compared with Vlassov analytical solution

X	Vlassov	DKMQ24	Error(%)
0.00	0.000	0.000	0.000
1.25	0.047	0.049	3.592
2.50	0.180	0.181	0.588
3.75	0.386	0.386	0.110
5.00	0.653	0.650	0.395
6.25	0.968	0.963	0.538
7.50	1.320	1.312	0.622
8.75	1.696	1.684	0.672
10.0	2.084	2.069	0.709

Table 5 presents the relative error with respect to Vlassov theoretical solution (23). We can take note that the results are very close, that indicates a better value of the twist rigidity  $J_d$  determined from experimental twist measurement Vlassov [1].

#### 5.4. Double $T$ cantilever beam

The final test for cantilever beam with open cross-section is a thin double  $T$  cantilever beam clamped on one side (at  $x=0$ ) and free on the other side (Figure 15). The data used are as follows.

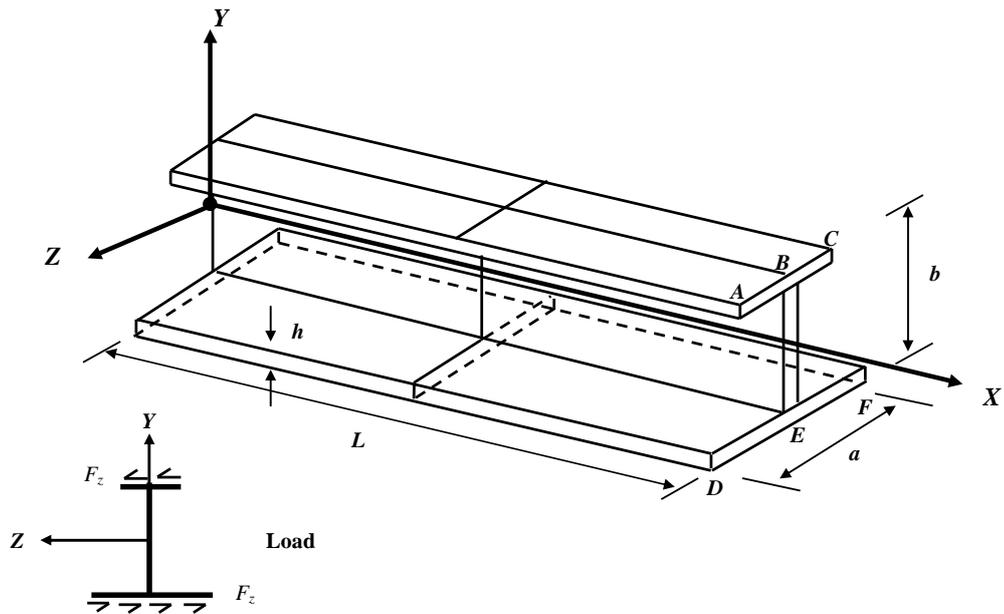
*Geometry and material:*

$$L = 10.0 \text{ m}; a = b = 1.0 \text{ m}, c = 0.5 \text{ m}; h = 0.01 \text{ m}; \nu = 0.3; E = 21 \times 10^{11} \text{ Pa}$$

$$F_z = 10^4 \text{ N alongside AC and DF}$$

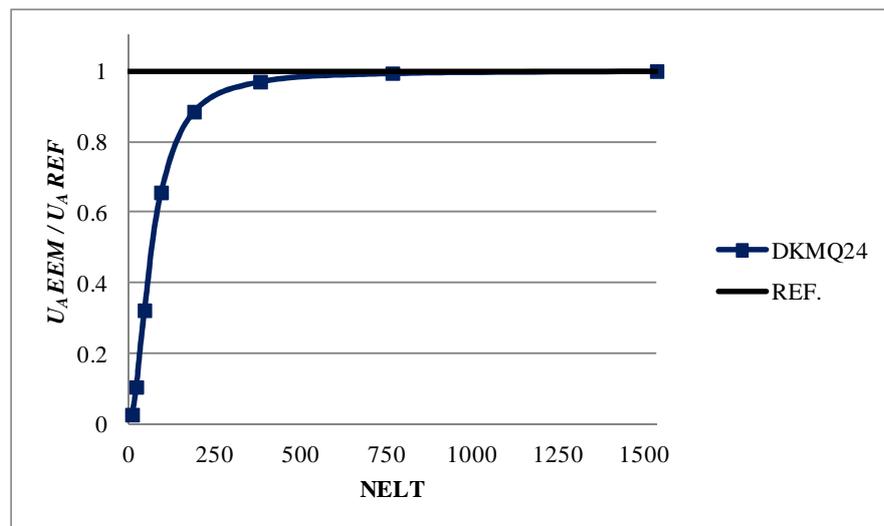
*Boundary conditions:*

$$U = V = W = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0 \text{ on the side clamped}$$

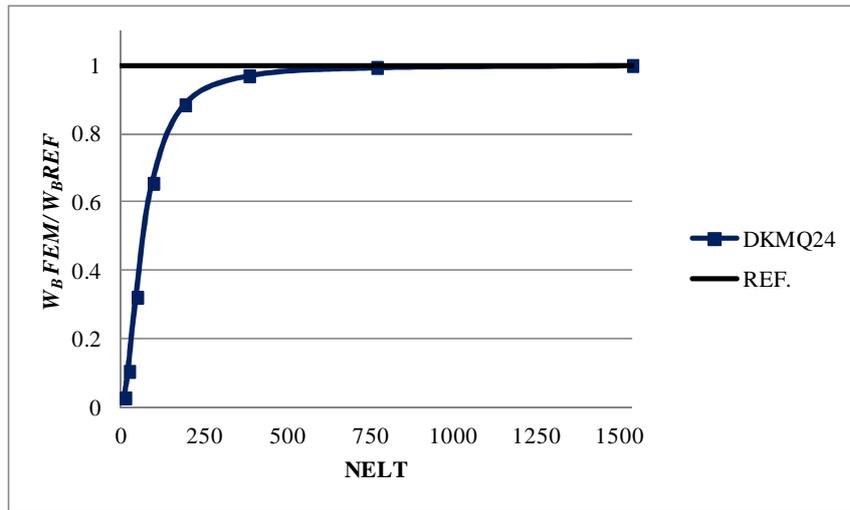


**Figure 15.** Double *T* cantilever beam

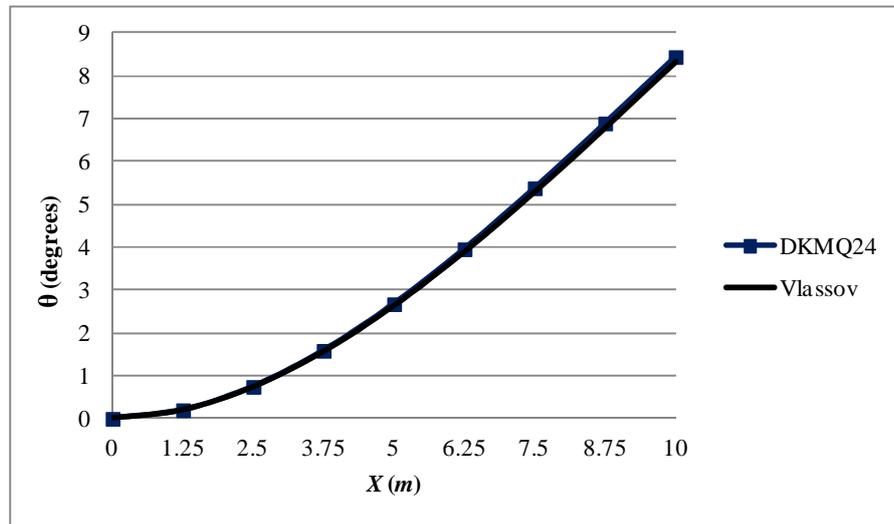
We apply a  $10^4$  N shear force on the free side of the cantilever beam. NELT 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768 and 1536 are used in this test. The convergence results of  $U_A$  and  $W_B$  are presented in Figures 16 and 17 using the result obtained for NELT 1536 as the reference solution. The comparison of the twist angle values obtained numerically are compared with Vlassov theoretical solution (23) (Figure 18). We observed a very good agreement between the results for a very few elements.



**Figure 16.** Convergence of deflection  $U_A$  for the double *T* cantilever beam considered



**Figure 17.** Convergence of deflection  $W_B$  for the double  $T$  cantilever beam considered



**Figure 18.** Twist angle for the double  $T$  cantilever considered

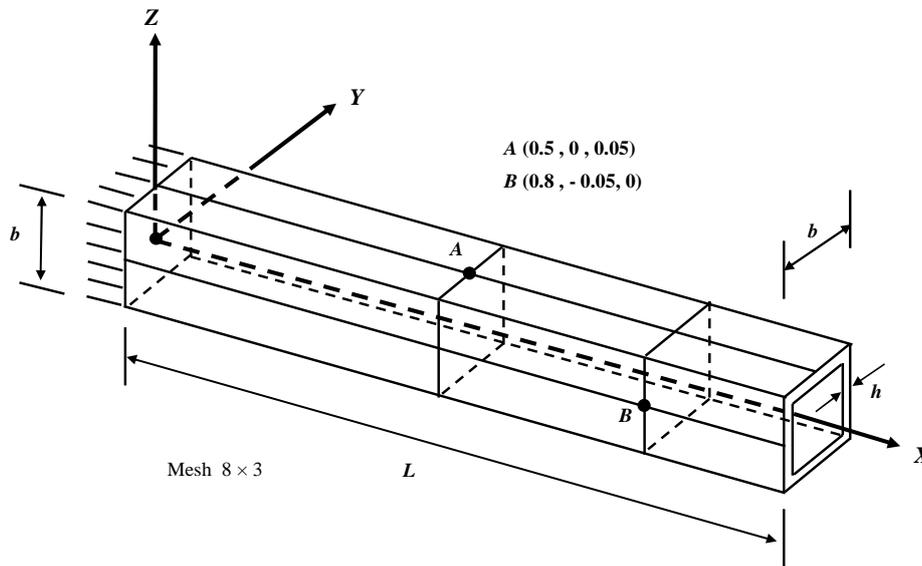
**Table 6.** Error on the twist angle compared with Vlassov analytical solution

X	Vlassov	DKMQ24	Error(%)
0.00	0.000	0.000	0.000
1.25	0.191	0.196	2.715
2.50	0.728	0.742	1.910
3.75	1.556	1.585	1.810
5.00	2.625	2.672	1.799
6.25	3.883	3.953	1.780
7.50	5.283	5.374	1.719
8.75	6.777	6.885	1.605
10.0	8.317	8.435	1.426

In Table 6, we have calculated the relative error with respect to Vlassov theoretical solution. We can observe again that the results are very close, that indicates a very good value of the empirical Vlassov coefficients  $a=1.31$  and of the twist rigidity  $J_d$  determined from experimental twist measurements Vlassov [1].

## 6. Convergence test for a cantilever beam with close cross-section

To finish, let us consider the cantilever beam with close cross-section of figure 19. The reference solution (associated with the data considered below for the numerical simulation) will be used to compare and validate again the efficiency of DKMQ24 element for thin-walled beams with close cross-section.



**Figure 19.** Box cantilever beam

*Geometry and material:*

$$L = 1.0 \text{ m}; b = 0.1 \text{ m}; h = 0.005 \text{ m}; E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}; \nu = 0.3$$

$$M = 10 \text{ Nm on the free side}$$

*Boundary conditions:*

$$U = V = W = \theta_X = \theta_Y = \theta_Z = 0 \text{ on the support}$$

*Reference value for comparison [32]:*

$$\text{On node A: } V = -6.17 \times 10^{-7} \text{ m}, \theta_X = 1.23 \times 10^{-5} \text{ rad}, \sigma_{XY} = -1.1 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$\text{On node B: } W = -9.87 \times 10^{-7} \text{ m}, \theta_X = 1.97 \times 10^{-5} \text{ rad}, \sigma_{XY} = -1.1 \times 10^5 \text{ Pa}$$

The thin box cantilever beam considered in this example is clamped on one side and free on the other side. A 10 Nm torque is applied on the free edge. The results obtained with a  $8 \times 3$  and  $8 \times 6$  mesh are given in Tables 7 and 8 at nodes A and B, for the displacement  $V$  and  $W$ , the twist angle around  $x$  and the stress  $\sigma_{XY}$ . They are in very good accordance with the reference solution.

**Table 7.** Node A

NELT	$V$	$\theta_x$	$\sigma_{XY}$
24	$-6.168 \times 10^{-7}$	$1.234 \times 10^{-5}$	$-9.980 \times 10^4$
48	$-6.169 \times 10^{-7}$	$1.234 \times 10^{-5}$	$-9.970 \times 10^4$
REF	$-6.170 \times 10^{-7}$	$1.230 \times 10^{-5}$	$-1.100 \times 10^5$

**Table 8.** Node B

NELT	$W$	$\theta_x$	$\sigma_{XY}$
24	$-9.881 \times 10^{-7}$	$1.973 \times 10^{-5}$	$-9.872 \times 10^4$
48	$-9.867 \times 10^{-7}$	$1.975 \times 10^{-5}$	$-1.006 \times 10^5$
REF	$-9.870 \times 10^{-7}$	$1.970 \times 10^{-5}$	$-1.100 \times 10^5$

## 7. Conclusions

In this article, the numerical finite element computations using DKMQ24 shell element have been presented for twist of thin-walled beams with open or close cross-section. Thin-walled cantilever beams with open cross-section in the form  $Z$ ,  $U$ ,  $H$ , and double  $T$  have been analyzed in pure twist. On one hand, we have obtained a high speed of convergence of the numerical computations towards the reference value with a very few number of elements. That proves the efficiency of DKMQ24 element in all the cases tested.

Moreover, the twist angle obtained with DKMQ24 finite element simulations is very close to Vlassov reference solution, in particular for  $H$  and double  $T$  cantilever beams. These results prove that the value of the twist rigidity  $J_d$ , which depends on an empirical coefficient 'a' in Vlassov theory [1], are satisfactory for the profiles tested in particular for  $H$  and double  $T$  cantilever beams.

In the examples addressed, as the thickness is very small with respect to the other dimension, the shear is negligible and the DKMQ24 element behaves as classical finite elements based on Koiter model. According to the numerical results obtained, Vlassov thin-walled beam model and Koiter shell model give similar results, that is consistent with the theoretical analysis performed in [18].

Finally, the results obtained for a thin-walled beam with close cross-section are nearly identical to the reference solution that proves again the very high efficiency of DKMQ24 finite element in various situations. Regarding the very good results obtained for cantilever beams with open cross-section as well as for close cross-section addressed in this paper, numerical computations using the finite element DKMQ24 may be considered as an alternative way to analyze thin-walled beams.

## Acknowledgments

The financial support from the Indonesian Ministry of Research, Technology and Higher Education (KEMENRISTEK - DIKTI) and Institut Français d'Indonésie (IFI), French Embassy in Jakarta are gratefully acknowledged.

## References

- [1] Vlassov, B.Z. Pièces longues en voiles minces. Paris: *Editions Eyrolles* (1962).
- [2] Gurujee, C.S., Shah, K.R. A computer program for thin walled frame analysis. *Advances in Engineering Software*, 11(2), 58–70 (1989).
- [3] Prokić, A. Computer program for determination of geometrical properties of thin-walled beams with open profile. *Advances in Engineering Software*, 30(2), 109–119 (1999).
- [4] Dvorkin, E.N., Celentano, D., Cuitino, A., Gioia, G. A Vlasov beam element. *Computer and Structures*, 33(1), 187–96 (1989).
- [5] Krajcinovic, D. Matrix force analysis of thin-walled structures. *J. Struct. Eng. ASCE*, 96(1), 107–20 (1970).
- [6] Shakourzadeh, H., Guo, Y.Q., Batoz, J.L. A torsion bending element for thin-walled beams with open and closed cross sections. *Computer and Structures*, 55(6), 1045–1054 (1995).
- [7] Bescoter, S.U. A theory of torsion bending for multicell beams. *J. appl. Mech*, 21, 25-34 (1954).
- [8] Dziewolski, R. Torsion non uniforme des poutres à parois minces et à profils composés d'éléments fermés et ouverts. *Construct. metall.* 1 (1964).
- [9] Gjelsvik, A. The Theory of thin-walled bars. New York: Wiley (1981).
- [10] V. De Ville De Goyet. L'analyse statique non linéaire par la méthode des éléments finis des structures spatiales formées de poutres à section non symétrique. Thèse orientée à l'université de Liège (1988-1989).
- [11] Prokić, A., Lukić, D. Dynamic Behavior of Braced Thin-Walled Beams. *International Applied Mechanics*, 43(11), 129–143 (2007).
- [12] Erkmén, R.E., Mohareb, M. Torsion analysis of thin-walled beams including shear deformation effects. *Thin-Walled Structures*, 44, 1096–1108 (2006).
- [13] Pavazza, R. Torsion of thin-walled beams of open cross-section with influence of shear. *International Journal of Mechanical Sciences*, 47(7), 1099–1122 (2005).
- [14] Taktak, M., Dammak, F., Abid, S., Haddar, M. A mixed-hybrid finite element for three-dimensional isotropic helical beam analysis. *International Journal of Mechanical Sciences*, 47(2), 209–229 (2005).

- [15] Katili, I., Batoz, J.L., Maknun, I.J., Hamdouni, A., Millet, O. The Development of DKMQ Plate Bending Element for Thick to Thin Shell Analysis Based on Naghdi/Reissner/Mindlin Shell Theory. *Finite Elements in Analysis and Design*, 100, 12-27 (2015) .
- [16] Katili, I. A new discrete Kirchhoff-Mindlin element based on Mindlin-Reissner plate theory and assumed shear strain fields-part II: An extended DKQ element for thick plate bending analysis. *IJNME*, 36, 1885-1908 (1993).
- [17] Taylor, R.L. FEAP - A Finite Element Analysis Program: User Manual, Theoretical Manual, Dept. of Civil Engineering, University of California at Berkeley, California 94720-1710, Version 8.3., August. (2012),
- [18] Béchet, F., Millet, O., Sanchez-Palencia, E. Limit behavior of Koiter model for long cylindrical shells and Vlassov model. *International Journal of Solid and Structures*, 47, 365-373 (2010).
- [19] Mindlin, R.D. Influence of rotator inertia and shear on flexural motion of isotropic elastic plates. *J.Appl.Mech.*, 18, 31-38 (1951).
- [20] Naghdi, P.M. On the theory of thin elastic shells. *Q. Appl.Math.*, 14, 369-380 (1957).
- [21] Naghdi, P.M. Foundations of elastic shells theory, *Progress in Solid Mechanics*; IV, Chapter 1 (ed. I.N. Sneddon and R. Hill), North-Holland (1963).
- [22] Naghdi, P.M. On a variational theorem in elasticity and its application to shell theory. *Journal of Applied Mechanics (ASME)*, 31 N°4, 647-653 (1964).
- [23] Naghdi, P.M. The theory of shells and plate. *Handbuch der Physik*, VI, A2 (Flügge Ed.), Springer Verlag: Berlin (1972).
- [24] Reissner, E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *Journal of Applied. Mech. in Engineering ASME*, 12, A69-A77 (1943).
- [25] Batoz, J.L., Dhatt, G. Modélisation des Structures par Eléments Finis, vol. 3: Coques. Editions Hermes: Paris (1992).
- [26] Hamdouni, A., Millet, O. An asymptotic linear thin-walled rod model coupling twist and bending. *International Applied Mechanics*, 46, 1072–1092 (2011).
- [27] Hamdouni, A., Millet, O. An asymptotic non-linear model for thin-walled rods with strongly curved open cross-section. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 41, 396–416 (2006).
- [28] Hamdouni, A., Katili, I., Maknun, I.J., Millet, O. Analytical and experimental analysis of an asymptotic thin-walled beam model. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 17(1), 1-18 (2013).
- [29] Grillet, L., Hamdouni, A., Millet, O. An asymptotic non-linear model for thin-walled rods. *Comptes Rendus de l'Academie Sciences, Paris, Série Mécanique*, 332, 123–128 (2004).

- [30] Grillet, L., Hamdouni, A., Millet, O. Justification of the kinematic assumptions for thin-walled rods with shallow profile. *Comptes Rendus de l'Academie Sciences, Paris*, 333, 493–489 (2005).
- [31] Shrinivasa, U., Rao, K.M. A set of pathological tests to validate new finite elements. *Sadhana*, 26(6), 549-590 (2001).
- [32] Societe Francaise des Mecaniciens. Guide de validation des progiciels de calcul de structures. Paris, Afnor Technique, 1990. Test No. SSLS05/89.

# Bibliographie

- [1] G Alfano, F Auricchio, L Rosati, and E Sacco. MITC finite elements for laminated composite plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50 :707–738, 2001.
- [2] KJ Bathe. Finite element procedures in engineering analysis, 2nd edn. *Prentice-Hall*, 1996.
- [3] KJ Bathe. The inf-sup condition and its evaluation for mixed finite elements methods. *Computer and Structures*, 79 :243–252, 2001.
- [4] KJ Bathe and EN Dvorkin. A four-node plate bending element based on mindlin-reissner plate theory and a mixed interpolation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21 :367–383, 1985.
- [5] KJ Bathe and EN Dvorkin. A formulation of general shell elements – the use of mixed interpolation of tensorial components. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 22 :697–722, 1986.
- [6] KJ Bathe, A Iosilevich, and D Chapelle. An evaluation of the MITC shell elements. *Computers and Structures*, 75 :1–30, 2000.
- [7] KJ Bathe, A Iosilevich, and D Chapelle. An inf-sup test for shell finite elements. *Computers and Structures*, 75 :439–456, 2000.
- [8] KJ Bathe and PS Lee. Measuring the convergence behavior of shell analysis schemes. *Computer and Structures*, 89 :285–301, 2011.
- [9] KJ Bathe, PS Lee, and JF Hiller. Towards improving the MITC9 shell element. *Computer and Structures*, 81 :477–489, 2003.
- [10] JL Batoz and M Ben Tahar. Evaluation of a new thin plate quadrilateral element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18 :1655–1678, 1982.
- [11] JL Batoz and G Dhatt. Modélisation des structures par éléments finis, vol. 2 : Poutres et plaques. *Editions Hermes ; Paris*, 1990.
- [12] JL Batoz and G Dhatt. Modélisation des structures par éléments finis, vol.3 :coques. *Editions Hermes, Paris*, 1992.
- [13] F Béchet, O Millet, and E Sanchez-Palencia. Limit behavior of koiter model for long cylindrical shells and vlassov model. *International Journal of Solid and Structures*, 47 :365–373, 2010.

- [14] M Bernadou. Finite elements methods for thin shells. *Lectures Notes in Math*, 1996.
- [15] K Bhaskar and TK Varadan. Analytical solution for a pinched laminated cylinder. *Journal of Applied Mechanics (ASME)*, 57(4) :1082–1084, 1990.
- [16] B Boroomand, M Ghaffarian, and OC Zienkiewicz. On application of two superconvergent recovery procedures to plate problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61 :1644–1673, 2004.
- [17] B Boroomand and OC Zienkiewicz. An improved REP recovery and the effectivity robustness test. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40 :3247–3277, 1997.
- [18] B Boroomand and OC Zienkiewicz. Recovery by equilibrium in patches REP. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40 :137–164, 1997.
- [19] CA Brebbia and JJ Connor. Fundamentals of finite element techniques for structural engineers. *John Wiley and Sons, N.Y.*, 1974.
- [20] J Breuneval. Schéma d’une théorie générale des coques minces élastiques. *Journal de mécanique*, 10, 1971.
- [21] J Breuneval. Géométrie des déformations des surfaces et équations de la mécanique des coques. *Thèse d’état*, 1972.
- [22] J Breuneval. Principe des travaux virtuels et équations des coques. *Journal de Mécanique*, 12 :137–149, 1973.
- [23] F Brezzi, KJ Bathe, and M Fortin. Mixed-interpolated elements for reissner-mindlin plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28(8) :1787–1801, 1989.
- [24] G Castellazzi and P Krysl. Displacement-based finite elements with nodal intergaration for reissner-mindlin plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 80(2) :135–162, 2009.
- [25] G Castellazzi, P Krysl, and I Bartoli. A displacement-based finite element formulation for the analysis of laminated composite plates. *Composite Structures*, 95 :518–527, 2013.
- [26] D Chapelle and KJ Bathe. The inf-sup test. *Computer and Structures*, 47(4/5) :537–545, 1993.
- [27] D Chapelle and KJ Bathe. Fundamental considerations for the finite element analysis of shell structures. *Computer and Structures*, 66(1) :19–36, 1998.
- [28] D Chapelle and KJ Bathe. The finite element analysis of shells - fundamentals. *Springer, Second edition*, 2011.
- [29] D Chapelle, DL Oliveira, and ML Bucalem. MITC elements or a classical shell model. *Computer and Structures*, 81 :523–533, 2003.
- [30] P Destuynder. Modélisation des coques minces élastiques. *Masson*, 1990.
- [31] EN Dvorkin and KJ Bathe. A continuum mechanics based on four-node shell element for general non-linear analysis. *Eng.Comput.*, 1 :77–88, 1984.

- [32] W Flugge. Stresses in shells. *Springer Verlag*, 1960.
- [33] L Grillet, A Hamdouni, and C Allery. Modèle asymptotique linéaire de poutres voiles fortement courbés. *Comptes Rendus de l'Academie Sciences, Paris*, I Ib 332 :123–128, 2000.
- [34] A Hamdouni, I Katili, IJ Maknun, and O Millet. Analytical and experimental analysis of an asymptotic thin-walled beam model. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 17(1) :1–18, 2013.
- [35] A Hamdouni and O Millet. An asymptotic non-linear model for thin-walled rods with strongly curved open cross-section. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 41 :396–416, 2006.
- [36] A Hamdouni and O Millet. An asymptotic linear thin-walled rod model coupling twist and bending. *International Applied Mechanics*, 46 :1072–1092, 2011.
- [37] JF Hiller and KJ Bathe. Measuring convergence of mixed finite element discretizations : an application to shell structures. *Computer and Structures*, 81 :639–654, 2003.
- [38] TJR Hughes, M Cohen, and M Haroun. Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates. *Nuclear Engineering and Design*, 46 :203–222, 1978.
- [39] TJR Hughes and TE Tezduyar. Finite elements based upon mindlin plate theory with particular reference to the four-node bilinear isoparametric element. *Journal of Applied Mechanics*, 48(3) :587–596, 1981.
- [40] A Iosilevich, KJ Bathe, and F Brezzi. On evaluating the inf-sup condition for plate bending elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40 :3639–3663, 1997.
- [41] I Katili. Formulation et évaluation des nouveaux éléments finis pour l'analyse linéaire des plaques et coques de forme quelconque. *Thèse Doctorat, Université de Technologie de Compiègne*, 1993.
- [42] I Katili. A new discrete kirchhoff-mindlin element based on mindlin-reissner plate theory and assumed shear strain fields- part I : An extended DKT element for thick-plate bending analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36 :1859–1883, 1993.
- [43] I Katili. A new discrete kirchhoff-mindlin element based on mindlin-reissner plate theory and assumed shear strain fields- part II : An extended DKQ element for thick plate bending analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36 :1885–1908, 1993.
- [44] I Katili. Metode elemen hinggga untuk pelat lentur. *UI-PRESS*, 2004.
- [45] I Katili, IJ Maknun, A Hamdouni, and O Millet. Application of DKMQ element for composite plate bending structures. *Composites Structures*, 132 :166–174, 2015.
- [46] DY Kim and KJ Bathe. A triangular six-node shell elements. *Computer and Structures*, 87 :1451–1460, 2009.

- [47] G Kirchhoff. Uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheinbe. *J.Reine Angew.Math*, 40 :51–58, 1950.
- [48] WT Koiter. A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells. *Proc. I.U.T.A.M. Symp. on the Theory of Thin Elastic Shells*, pages 12–32, 1960.
- [49] WT Koiter. On the nonlinear theory of thin elastic shell. *Proc. Kon. Ned.Ak. Wet*, B69 :1–54, 1966.
- [50] PS Lee and KJ Bathe. Development of MITC isotropic triangular shell finite elements. *Computer and Structures*, 82 :945–962, 2004.
- [51] PS Lee and KJ Bathe. The quadratique MITC plate and MITC shell elements in plate bending. *Advances in Engineering Software*, 41 :712–728, 2010.
- [52] PS Lee, HC Noh, and KJ Bathe. Insight into 3-node triangular shell finite elements : the effects of element isotropy and mesh patterns. *Computer and Structures*, 85 :404–418, 2007.
- [53] GM Lindberg, MD Olson, and GR Cowper. New developments in finite element analysis of shells. *Q. Bull. Div. Mech. Eng. and Nat. Aeronautical Establishment, National Research Council of Canada*, 4, 1969.
- [54] JL Lions. Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal. *John Wiley and Sons Ltd*, 1973.
- [55] R MacNeal and RL Harder. A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. *Finite Element in Analysis and Design*, 1 :3–20, 1985.
- [56] RH MacNeal. A simple quadrilateral shell element. *Computers and Structures*, 8 :175–183, 1978.
- [57] RH MacNeal. Derivation of element stiffness matrices by assumed strain distributions. *Nuclear Engineering and Design*, 70 :3–12, 1982.
- [58] RH MacNeal. The evolution of lower order plate and shell elements in msc/nastran, in FEM for plate and shell structures. *Hughes and Hinton Eds*, 1 :85–127, 1986.
- [59] DS Malkus and TJR Hughes. Mixed finite element methods-reduced and selective integration techniques : a unification of concepts. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 15(1) :63–81, 1978.
- [60] RD Mindlin. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic elastic plates. *Journal of Applied Mech.*, 18 :31–38, 1951.
- [61] RD Mindlin and H Deresiewicz. Thimoshenko’s shear coefficient for flexural vibrations of beams. *Proc.2nd Us National Congress of Appl. Mech.*, pages 175–178, 1954.
- [62] LSD Morley. Skew plates and structures. *Pergamon press,Oxford*, 1963.
- [63] M Naghdi. The theory of shells and plates. *Flugge’s Handbuch der Physik*, VIa/2 :Springer–Verlag, 1972.

- [64] PM Naghdi. On the theory of thin elastic shells. *Q. Appl.Math.*, 14 :369–380, 1957.
- [65] PM Naghdi. Foundations of elastic shells theory. *Progress in Solid Mechanics; IV, Chapter 1 (ed. I.N. Sneddon and R. Hill), North-Holland, 1963.*
- [66] PM Naghdi. On a variational theorem in elasticity and its application to shell theory. *Journal of Applied Mechanics (ASME)*, 31 No.4 :647–653, 1964.
- [67] PM Naghdi. The theory of shells and plate. *Handbuch der Physik, VI, A2 (Flugge Ed.), Springer Verlag, Berlin, 1972.*
- [68] VV Novozhilov. The theory of thin shells. *Walters Noordhoff Publ., Groningen, 1959.*
- [69] NJ Pagano. Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates. *J. Compos.Mater.*, 4 :20–34, 1970.
- [70] NJ Pagano and SJ Hatfield. Elastic behaviour of multilayered bidirectional composites. *AIAA Journal*, 10 no.7 :931–933, 1972.
- [71] SF Pawsey and RW Clough. Improved numerical integration of thick shell finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 3 :575–586, 1971.
- [72] DJ Payen and KJ Bathe. The use of nodal point forces to improve element stresses. *Computers and Structures*, 89 :485–495, 2011.
- [73] DJ Payen and KJ Bathe. A stress improvement procedure. *Computers and Structures*, 112–113 :311–326, 2012.
- [74] A Razzaque. Program for triangular bending elements with derivative smoothing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 6 :333–345, 1973.
- [75] JN Reddy. A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates. *Communications in Applied Numerical Methods*, 3 :173–180, 1987.
- [76] JN Reddy. On refined theories of composite laminates. *Meccanica*, 25 :230–238, 1990.
- [77] E Reissner. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mech. in Engineering ASME*, 12 :A69–A77, 1945.
- [78] E Reissner. On bending of elastic plates. *Quartely of Applied Mathematics*, 5 :55–68, 1947.
- [79] AR Rodriguez and JM Viano. Asymptotic analysis of poisson’s equation in a thin domain. application to the thin-walled elastic beams. *Ciarlet, PG,Trabucho, L, Viano, JM (Eds.), Asymptotic Methods for Elastic Structures. Walter de Gruyer, Berlin, pages 181–193, 1995.*
- [80] AR Rodriguez and JM Viano. Mathematical modeling of rods. *Ciarlet, PG,Lions, JL (Eds.), Handbook of Numerical Analysis, vol. IV. North Holland, Amsterdam, pages 487–974, 1996.*

- [81] AR Rodriguez and JM Viano. Asymptotic of a general linear model for thin-walled elastic rods. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 47 :287–321, 1997.
- [82] PG Salerno and MA Goldberg. Effect of shear deformation on the bending of rectangular plates. *Transaction of the ASME*, 27 :54–58, 1960.
- [83] E Sanchez-Palencia, O Millet, and F Béchet. Singular problems in shells theory. *Springer-Verlag*, 2010.
- [84] AC Scordelis and KS Lo. Computer analysis of cylindrical shells. *Journal of American Concrete Institute*, 61 :539–562, 1969.
- [85] P Seide. An improved approximate theory for the bending of laminated plates. *Mechanics Today*, 5 :451–466, 1980.
- [86] U Shrinivasa and Rao KM. A set of pathological tests to validate new finite elements. *Sadhana*, 26(6) :549–590, 2001.
- [87] LSD Srinivas and AK Rao. Flexure of thick rectangular plates. *J.Appl.Mech.Trans ASME*, pages 298–299, 1973.
- [88] S Srinivas. A refined analysis of composite laminates. *J. Sound.Vib.*, 30 no.4 :495–507, 1973.
- [89] S Timoshenko and S Woinowsky-Krieger. Théorie des plaques et coques. *Dunod*, 1959.
- [90] F Ubertini. Patch recovery based on complimentary energy. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59 :1501–1538, 2004.
- [91] R Valid. Fondements de la théorie des coques : une présentation surfacique simple. *John Wiley and Sons Ltd*, 1995.
- [92] BZ Vlassov. Pièces longues en voiles minces. *Editions Eyrolles*, 1962.
- [93] JM Whitney and NJ Pagano. Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates. *J. Appl. Mech*, 37(4) :1031–1036, 1970.
- [94] SM Yunus, TP Pawlak, and JM Wheeler. Application of the zienkiewicz-zhu error estimaor for plate and shell analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29 :1281–1298, 1990.
- [95] Z Zhang and A Naga. Polynomial preserving gradient recovery and a posteriori estimate for bilinear element on irregular quadrilaterals. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 1(1) :1–24, 2004.
- [96] OC Zienkiewicz, B Boroomand, and JZ Zhu. Recovery procedures in error estimation and adaptivity part I :adaptivity in linear problems. *Comput.Methods Appl. Mech. Engrg.*, 176 :111–125, 1999.
- [97] OC Zienkiewicz, RL Taylor, and JM Too. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 3 :275–290, 1971.
- [98] OC Zienkiewicz and JZ Zhu. A simple error estimator and adative procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24 :337–357, 1987.

- [99] OC Zienkiewicz and JZ Zhu. Error estimates and adaptive refinement for plate bending problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28 :2839–2853, 1989.
- [100] OC Zienkiewicz and JZ Zhu. The superconvergence patch recovery and a posteriori error estimation in the finite element method, part 1 : The recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33 :1331–1364, 1992.
- [101] OC Zienkiewicz and JZ Zhu. The superconvergence patch recovery and a posteriori error estimation in the finite element method, part 2 : Error estimates and adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33 :1365–1382, 1992.
- [102] OC Zienkiewicz and JZ Zhu. The superconvergence patch recovery SPR and adaptive finite element refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 101 :207–224, 1992.