HAL
open science

Contribution à la commande simultanée des systèmes linéaires

Houda Meddeb Mimouni

To cite this version:

Houda Meddeb Mimouni. Contribution à la commande simultanée des systèmes linéaires. Automatique / Robotique. Université de Lorraine, 2017. Français. NNT : 2017LORR0149 . tel-01661551

HAL Id: tel-01661551

https://theses.hal.science/tel-01661551v1

Submitted on 12 Dec 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

Ecole doctorale IAEM Lorraine
Université de Lorraine

Département de formation doctorale en automatique
UFR Sciences et Technologies

Contribution à la Commande Simultanée des Systèmes Linéaires

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 02 octobre 2017

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Lorraine
(spécialité automatique)

par

Houda MEDDEB MIMOUNI

Composition du jury

Président : Dimitri Peaucelle

Rapporteurs : Vincent Cocquempot Professeur à l'Université de Lille 1
Dimitri Peaucelle Directeur de recherche CNRS au LAAS

Examinateurs : Yasmina Becis Maître de conférences à l'Université d'Orléans
Latifa Boutat-Baddas Maître de conférences à l'Université de Lorraine
Christophe Fonte Ingénieur de recherche CNRS au CRAN
Michel Zasadzinski Professeur à l'Université de Lorraine

Centre de Recherche en Automatique de Nancy — UMR 7039

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

J'exprime mes profonds remerciements à mon directeur de thèse, le professeur Michel ZASADZINSKI pour son aide continue, pour sa patience et ses encouragements pour finir ce travail de recherche.

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à Christophe FONTE qui fut pour moi un co-directeur de thèse attentif et très disponible. Ses compétences scientifiques et ses qualités humaines m'ont beaucoup apporté et appris. Elles resteront des moteurs de mon travail de chercheur.

Je remercie toutes les personnes formidables que j'ai rencontrées par le biais du CRAN, surtout l'équipe de recherche de Longwy, Marouane ALMA, Latifa BOUTAT-BADDAS, Mohamed BOUTAYEB, Mohamed DAROUACH, Cédric DELATTRE, Hugues RAFARALAHY, Harouna SOULEY ALI et Ali ZEMOUCHE, ainsi que tous les thésards et thésardes de cette équipe, sans oublier Michel BORDET, Sebastien MONERET, Joëlle PINELLI et Jocelyne FILIPUZZI.

Je suis très sensible à l'intérêt qu'ont bien voulu porter à mon travail Monsieur Vincent COCQUEMPOT, professeur à l'Université de Lille 1, et Monsieur Dimitri PEAUCELLE, Directeur de recherche CNRS au LAAS. Je tiens à les remercier pour m'avoir fait l'honneur d'être rapporteurs de ce mémoire.

J'exprime tous mes remerciements à Madame Yasmina BECIS, maître de conférences à l'Université d'Orléans, et à Madame Latifa BOUTAT-BADDAS, maître de conférences à l'Université de Lorraine, pour m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury de thèse.

Je dédie cette thèse à l'âme de mes parents, avec toute ma reconnaissance,
à mes deux enfants Youssef et Yassine, à mon mari Sofiene,
à toute ma famille et à tous mes amis.

Table des matières

Remerciements **i**

Glossaire **xi**

Table des figures **xiii**

Introduction Générale **1**

1 Contexte et objectifs 1

2 Plan du manuscrit 3

Chapitre 1
Etat de l'art de la stabilisation simultanée des systèmes linéaires

1.1 Introduction 7

1.2 Stabilisation simultanée dans $\mathcal{H}_\infty$ 7

1.2.1 Fonctions rationnelles dans $\mathcal{H}_\infty$ 7

1.2.2 Stabilisation dans $\mathcal{H}_\infty$ 10

1.2.3 Etat de l'art de la commande simultanée dans $\mathcal{H}_\infty$ 13

1.2.3.1 Stabilisation simultanée de deux systèmes dans $\mathcal{H}_\infty$ 13

1.2.3.2 Stabilisation simultanée de trois systèmes dans $\mathcal{H}_\infty$ 17

1.2.3.3 Stabilisation simultanée de k systèmes dans $\mathcal{H}_\infty$ 19

1.3 Stabilisation simultanée dans l'espace des polynômes 21

1.3.1 Stabilisation dans l'espace des polynômes 21

1.3.2 Etat de l'art de la commande simultanée dans l'espace des polynômes . . 22

1.3.2.1 Stabilisation simultanée de trois systèmes dans l'espace des polynômes 23

1.3.2.2 Stabilisation simultanée de quatre systèmes dans l'espace des polynômes 26

1.3.2.3 Stabilisation simultanée de n systèmes dans l'espace des polynômes 26

1.3.2.3.1 Décomposition paire-impaire d'un polynôme 26

1.3.2.3.2 Critère de stabilité d'Hermite-Fujiwara 27

1.3.2.3.3 Conditions d'existence d'un correcteur simultané d'ordre fixe pour n systèmes 29
1.3.2.3.4 Formulation LMI 30
1.3.2.3.5 L'algorithme de synthèse 30
1.3.2.3.6 Examen de la méthode 31
1.4 Conclusion 31

Chapitre 2
Etat de l'art de la stabilisation simultanée d'un segment de systèmes 33

2.1 Introduction 33
2.2 Formulation du problème 33
2.2.1 Définition d'un segment de systèmes 33
2.2.2 Stabilisation simultanée d'un segment de systèmes 34
2.3 Etude des conditions de l'hurwitzité d'un segment de polynômes 35
2.3.1 Etude de l'hurwitzité d'un segment polynomial avec le théorème du franchissement de la frontière 36
2.3.2 Etude de l'hurwitzité d'un segment polynomial avec le principe d'exclusion du zéro 37
2.3.3 Etude de l'hurwitzité d'un segment polynomial avec le lemme du segment 38
2.3.4 Hurwitzité d'un segment polynomial avec les fonctions strictement réelles positives 39
2.4 Analyse de la stabilisabilité d'un segment de systèmes $G_\lambda(s)$ 41
2.4.1 Condition de stabilisabilité d'un segment de systèmes $G_\lambda(s)$ dans l'espace des polynômes 41
2.4.1.1 Etude de la stabilisabilité d'un segment $G_\lambda(s)$ avec le lemme du segment 41
2.4.1.2 Etude de la stabilisabilité d'un segment $G_\lambda(s)$ avec un régulateur d'ordre fixe 42
2.4.2 Condition de stabilisabilité d'un segment de systèmes $G_\lambda(s)$ dans $\mathcal{H}_\infty$ . . 44
2.5 Synthèse du régulateur simultané pour le segment de systèmes $G_\lambda(s)$ 46
2.5.1 Introduction 46
2.5.2 Interpolation des fonctions EP-SPR 48
2.5.3 Interpolation des fonctions SBR 48
2.5.4 Algorithme de synthèse d'un régulateur simultané pour le segment de systèmes $G_\lambda(s)$ 49
2.6 Conclusion 53

Chapitre 3
Commande simultanée d'un segment de systèmes avec des critères de stabilité polynomiaux **55**

3.1 Introduction 55
3.2 Formulation du problème 56
3.3 Formulation matricielle de $\Phi(G_1, C)(s)$ et $\Phi(G_2, C)(s)$ 57
3.4 Synthèse du régulateur simultané pour le segment de systèmes $G_\lambda(s)$ avec le critère d'Hermite-Fujiwara 61
3.4.1 Conditions sur le degré du compensateur simultané $C(s)$ 61
3.4.2 Condition d'existence d'un régulateur simultané 62
3.4.3 Formulation LMI des conditions d'existence de $C(s)$ 64
3.4.4 Algorithme de synthèse du régulateur simultané 64
3.5 Synthèse du régulateur simultané pour un segment de systèmes avec le critère d'Hermite-Biehler 66
3.5.1 Critère d'Hermite-Biehler 66
3.5.2 Généralisation du critère d'Hermite-Biehler 67
3.5.3 Ecriture matricielle du critère d'Hermite-Biehler 68
3.5.4 Condition d'existence d'un contrôleur simultané pour $G_\lambda(s)$ 69
3.5.5 Algorithme de synthèse du contrôleur simultané pour un segment de systèmes par la méthode d'Hermite-Biehler 70
3.6 Conclusion 72

Chapitre 4
Commande simultanée d'un segment de systèmes par un compensateur paramétré **73**

4.1 Introduction 73
4.2 Reformulation du problème de la stabilisation d'un segment de systèmes avec un correcteur simultané paramétré 73
4.3 Condition de causalité du régulateur $C(s)$ 75
4.4 Synthèse d'un régulateur simultané d'ordre fixe 77
4.4.1 Reformulation matricielle de $\Phi(G_1, C)(s)$ et $\Phi(G_2, C)(s)$ 77
4.4.2 Synthèse du régulateur simultané avec le critère d'Hermite-Fujiwara . . . 79
4.4.2.1 Condition d'existence d'un polynôme $N_Q(s)$ d'ordre fixe 79
4.4.2.2 Conditions d'existence du contrôleur simultané $C(s)$ 80
4.4.2.3 Formulation LMI 82
4.4.2.4 Algorithme de synthèse du contrôleur simultané 83

4.4.3 Synthèse d'un régulateur simultané avec le critère d'Hermite-Biehler . . . 84
4.4.3.1 Condition d'existence d'un régulateur simultané 84
4.4.3.2 Algorithme de synthèse du régulateur $C(s)$ 85
4.5 Synthèse d'un régulateur simultané d'ordre quelconque 87
4.5.1 Conditions d'existence d'un compensateur simultané $C(s)$ 87
4.5.2 Formulation du problème d'interpolation 89
4.5.3 Conditions d'interpolation d'un polynôme Hurwitz avec une partie paire fixe 91
4.5.4 Algorithme de synthèse du compensateur simultané $C(s)$ 93
4.6 Conclusion 95

Chapitre 5
Stabilisation robuste d'un polytope de systèmes LTI 97

5.1 Introduction 97
5.2 Sur la stabilisation des systèmes ayant des incertitudes polytopiques avec l'approche polynomiale 98
5.2.1 Approximation LMI du domaine de stabilité 98
5.2.2 Condition suffisante pour la stabilisation robuste 100
5.3 Stabilisation robuste d'un polytope de systèmes 103
5.4 Stabilisation robuste d'un polytope de systèmes avec un correcteur simultané . . 105
5.5 Synthèse du régulateur simultané pour le polytope de systèmes Ω_G avec le critère d'Hermite-Fujiwara 106
5.5.1 Condition sur le degré du compensateur simultané $C(s)$ 106
5.5.2 Condition d'existence d'un régulateur simultané 107
5.5.3 Formulation LMI des conditions d'existence de $C(s)$ 109
5.5.4 Algorithme de synthèse du régulateur simultané 109
5.6 Synthèse de régulateur simultané pour le polytope de systèmes Ω_G avec le critère d'Hermite-Biehler 113
5.6.1 Condition d'existence d'un contrôleur simultané pour le polytope de systèmes Ω 113
5.6.2 Algorithme de synthèse du contrôleur simultané pour un polytope de systèmes Ω_G par la méthode d'Hermite-Biehler 114
5.7 Conclusion 118

Conclusion générale et perspectives 119

1 Conclusions 119
2 Perspectives et problèmes ouverts 120

Annexe A
Interpolation dans $\mathcal{H}_\infty$ **121**

A.1 Condition d'existence d'une fonction d'interpolation dans $\mathcal{U}$ 121
A.2 Interpolation des zéros réels simples 121
A.3 Interpolation des zéros réels multiples 122
A.4 Interpolation des zéros à l'infini 123
A.5 Exemple 124

Annexe B
Application de la méthode d'interpolation dans $\mathcal{H}_\infty$ à la stabilisation simultanée de deux systèmes **125**

B.1 Méthode de synthèse d'un régulateur simultané pour deux systèmes dans $\mathcal{H}_\infty$ . . 125
B.2 Exemple 126

Annexe C
Stabilisation d'un polytope de systèmes avec une partie impaire commune **129**

C.1 Généralisation du critère d'Hermite-Biehler 129
C.1.1 Condition d'existence d'un contrôleur simultané pour le polytope de systèmes Ω_G 131
C.1.2 Algorithme de synthèse du contrôleur simultané pour un polytope de systèmes Ω_G par la méthode d'Hermite-Biehler 131

Annexe D
Compléments mathématiques **135**

D.1 Résultant des deux polynômes 135
D.2 Ecriture matricielle des polynômes $\Phi(G_i, C)^e(s^2)$ et $\Phi(G_i, C)^o(s^2)$ 135

Bibliographie **137**

Glossaire

Symboles et notations

$\mathcal{R}(s)$	l'ensemble des fonctions rationnelles à coefficients réels
$\mathcal{P}(s)$	l'ensemble des polynômes à coefficients réels
$\mathcal{P}_m(s)$	l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré m
$\mathcal{H}_\infty$	l'ensemble des fonctions rationnelles stables à coefficients réels
$\mathcal{U}$	l'ensemble des fonctions rationnelles bistables
$\mathbb{C}$	l'ensemble des complexes
$\mathbb{C}_+$	le demi plan complexe droit ($Re(s) \geqslant 0$)
$\mathbb{C}_{+_e}$	le demi plan complexe droit avec le point à l'infini
$\mathbb{R}$	l'ensemble des réels
$\mathbb{R}_+$	l'ensemble des réels positifs
$\mathbb{R}_{+_e}$	l'ensemble des réels positifs avec le point à l'infini
$\mathbb{Z}_+$	l'ensemble des entiers relatifs positifs
$\mathbb{H}$	l'ensemble des polynômes Hurwitz
j	nombre imaginaire pur ($j^2 = -1$)
$\mathcal{I}$	l'axe imaginaire (l'axe $j\omega$)
$\mathbb{C}^{m\times n}$	l'ensemble des matrices de dimension $(m \times n)$ dans $\mathbb{C}$
$\dim(A)$	la dimension de la matrice A
$\delta(P)$	le degré du polynôme réel $P(s)$
I_n	la matrice identité de dimension $n \times n$
$A[s]$	la matrice polynomiale d'indéterminée s
A^+	la pseudo-inverse de A vérifiant $A = AA^+A$
A^T	la transposée de la matrice A
A^{-1}	l'inverse de la matrice A
$\mathcal{R}_e(f)$	la partie réelle de la fonction f
A^*	la transposée conjuguée de la matrice A
$A > 0$	la matrice A définie positive
$A = \mathrm{Mdiag}(x)$	A est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les coordonnées du vecteur x

Abréviations

SISO	mono-entrée et mono-sortie
LTI	système linéaire invariant dans le temps
BMI	inégalité matricielle bilinéaire
LMI	inégalité matricielle linéaire
SPR	strictement réel positif
EP-SPR	bicausal et strictement réel positif
SBR	strictement réel borné
PIP	propriété d'entrelacement pair
EIP	propriété de double entrelacement pair
SIP	propriété d'entrelacement forte

Table des figures

1.1 Entrelacement des zéros instables de $f(s)$ et $g(s)$ 9
1.2 Système bouclé 10

2.1 Diagramme de Nyquist de la fonction rationnelle $\dfrac{P_2(s)}{P_1(s)} = \dfrac{s^4+5s^3+4s^2+5s+1}{s^4+3s^3+3s^2+4s+1}$ 38
2.2 Diagramme de Nyquist de $\dfrac{P_2(s)}{P_1(s)} = \dfrac{s^3+6s^2+3s+2}{s^3+4s^2+2s+1}$ 40
2.3 Diagramme de Nyquist de $\Upsilon(G_2, C)(s)$ 52
2.4 Diagramme de Nyquist de $\varphi(s) = \dfrac{\Upsilon(G_2, C)(s)}{\Upsilon(G_1, C)(s)}$ 53

5.1 Diagrammes de phase de $U_{12}(s)$ et de $U_{13}(s)$ 116
5.2 Diagrammes de phase de $U_{14}(s)$ et de $U_{23}(s)$ 117
5.3 Diagrammes de phase de $U_{24}(s)$ et de $U_{34}(s)$ 117

Introduction Générale

1 Contexte et objectifs

La théorie de la commande linéaire a connu un développement remarquable ces dernières années. Son essor est essentiellement du aux nouvelles possibilités offertes par les outils du calcul numérique et également par les méthodes de synthèse des lois de commande qui permettent de prendre en compte les incertitudes de modélisation dans la synthèse des correcteurs. Il s'agit donc d'un domaine en pleine évolution. A ce titre, la stabilisation des polytopes de systèmes avec un seul contrôleur linéaire stationnaire (LTI) demeure un problème ouvert en automatique. Jusqu'à maintenant, nous ne savons pas quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un polytope de systèmes soit stabilisable par un unique contrôleur LTI. Dans ce mémoire, nous montrons que stabiliser un polytope de systèmes avec un correcteur LTI ou stabiliser simultanément l'ensemble des segments de ce polytope avec ce correcteur sont deux problèmes de commande équivalents. Notons que la commande simultanée des segments de systèmes est une question mathématique indécidable [BT97] qui peut être classée comme un problème NP-complexe, dans le sens qu'il n'est pas possible de trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour stabiliser cette famille de systèmes avec un correcteur LTI qui soient testables en un nombre fini d'étapes en utilisant uniquement des opérations élémentaires arithmétiques et logiques [BG93, Blo94]. En conséquence, pour la stabilisation des polytopes de systèmes avec un correcteur LTI, il n'existe que des conditions testables qui sont soit suffisantes, soit nécessaires.

L'analyse de la commande robuste et de la commande simultanée des systèmes LTI a été amplement étudiée dans la littérature. Plusieurs conditions ont été établies et différentes approches ont été développées.

Avant de présenter la littérature sur la commande robuste et sur la commande simultanée, nous allons préciser ce que nous entendons par ces deux approches. Leur point commun est de chercher à stabiliser non pas un système, mais plusieurs systèmes avec un correcteur unique. Dans le cas de la commande robuste en stabilisant un système nominal ou un nombre fini de systèmes (par exemple les sommets d'un polytope convexe) nous cherchons à garantir la stabilisation d'un continuum de systèmes, ce dernier pouvant par exemple être défini par une boule avec la norme $\mathcal{H}_\infty$ ou par un polytope convexe en utilisant les fonctions de Lyapunov. Par contre, avec la commande simultanée, nous souhaitons stabiliser un ensemble discret de systèmes, c'est-à-dire dénombrable, avec un correcteur unique. Dans ce mémoire, nous allons utiliser les techniques de la commande simultanée pour obtenir une commande robuste en ajoutant des contraintes sur les dénominateurs en boucle fermée.

Concernant la commande simultanée, des conditions ont été données pour un nombre fini de systèmes dans l'espace des fonctions rationnelles $\mathcal{H}_\infty$. Pour deux systèmes, il a été montré que ces conditions sont réduites à la propriété d'entrelacement paire [VV82, Vid85]. Pour trois et quatre systèmes, des conditions suffisantes sont données dans [FZKD01]. Pour n systèmes LTI avec $n \geqslant 3$, il a été montré dans [BG93, Blo94] que le problème de la stabilisation simultanée est

indécidable. Dans l'espace des polynômes, ce sujet a également été abordé par quelques auteurs [Wei92, JA01, HŠT98, HTŠ99a, HB01]. Dans [HŠT98], [HTŠ99a] et [HB01], Henrion *et al.* ont donné des conditions sous la forme d'inégalités matricielles bilinéaires (BMI) pour stabiliser simultanément n systèmes avec un correcteur d'ordre fixe.

Des résultats fondamentaux ont été établis dans l'espace des fractions stables $\mathcal{H}_\infty$ dans [Gho86, CD93, CD94, ADPD95] pour la stabilisation simultanée d'un segment de systèmes LTI. Des conditions d'existence dépendantes du choix du compensateur initial stabilisant les extrémités du segment ont été fournies par Dorato *et al.* [ADPD95]. Un placement de pôle partiel simultané a été proposé dans [Gho86] et des conditions nécessaires ont été déduites. Dans [CD93, CD94], les auteurs ont étudié la question de la stabilisation forte pour cette classe de systèmes. La stabilisation d'un segment de systèmes dans l'espace des polynômes a été traitée par Ghosh qui a donné des conditions suffisantes d'existence d'un contrôleur simultané d'ordre fixe [Gho85]. De plus, des conditions permettant de vérifier la stabilisabilité de cette famille de systèmes ont été formulées dans [Fon08]. Notons que la détermination de régulateurs simultanés pour un segment de systèmes reste actuellement un problème ouvert car indécidable.

Le théorème de Kharitonov [Kha78] et sa généralisation dans [CB89b, CB89a] ont été à l'origine de nombreux résultats sur la commande robuste. D'autres méthodes d'analyse ont été étudiées dans la littérature, mais il existe peu de méthodes consacrées à la synthèse des lois de commande robuste avec les outils polynomiaux. Dans [Sid91], le principe d'exclusion du zéro a été utilisé pour donner des conditions permettant de tester la stabilité et concevoir des contrôleurs robustes. Plus récemment, dans [HAPŠ01, HŠK03, KKL07, KKL08], les auteurs proposent des contrôleurs d'ordre fixe pour stabiliser simultanémant les systèmes LTI ayant des incertitudes polytopiques. Les approches développées dans [HAPŠ01, HŠK03, KKL07, KKL08] sont basées sur un critère de stabilité qui nécessite la détermination de fonctions bicausales strictement réelles positives (EP-SPR). Dans [HAPŠ01, HŠK03], les auteurs ont combiné la théorie des polynômes positifs avec les propriétés des fonctions EP-SPR pour la stabilisation robuste d'un système polytopique avec un contrôleur d'ordre fixe. L'efficacité de la méthode proposée dans [HAPŠ01, HŠK03] dépend du choix d'un polynôme particulier appelé polynôme central. Afin d'éviter ce problème, Karimi *et al.* [KKL07, KKL08] ont proposé une méthode qui utilise le lemme de Kalman-Yakubovic-Popov. Toutes les méthodes décrites dans [HAPŠ01, HŠK03, KKL07, KKL08] se réfèrent à des conditions de stabilité suffisantes basées sur des approximations du domaine de stabilité.

Dans ce manuscrit, nous proposons une nouvelle approche pour la stabilisation des polytopes de systèmes SISO LTI avec un contrôleur d'ordre fixe. En utilisant le théorème des segments étendus [BHL88], nous montrons que, pour stabiliser un polytope de systèmes LTI, il suffit de stabiliser simultanément tous ses sommets en considérant une condition supplémentaire associée à ces derniers. Nous présentons également dans ce mémoire des méthodes originales pour la synthèse des contrôleurs simultanés en combinant les techniques polynomiales et l'optimisation linéaire. Avec les méthodes de synthèse proposées, nous montrons non seulement que le contrôleur stabilise simultanément les sommets du polytope de systèmes (commande simultanée), mais également tous les systèmes appartenant au polytope (commande robuste). Il s'agit donc de contrôleur simultané et robuste pour les polytopes de systèmes. Nous avons étudié la stabilité et la stabilisabilité des polytopes de systèmes avec les critères polynomiaux d'Hermite-Fujiwara et d'Hermite-Biehler.

Le *premier objectif* que nous nous sommes fixés dans ce mémoire, avant de pouvoir énoncer des résultats concernant la commande simultanée de l'ensemble des segments d'un polytope de systèmes, est l'étude de la commande d'un segment de systèmes avec un contrôleur LTI. Ce segment de systèmes est défini par les deux systèmes situés à chacune de ses extrémités et par

un paramètre appartenant à l'intervalle $[0,\ 1]$. La question de la stabilisation de cette classe de systèmes incertains est formulée comme celle d'un problème de stabilisation des systèmes aux extrémités avec un contrôleur simultané générant des polynômes caractéristiques en boucle fermée ayant la même partie paire (ou la même partie impaire). Des conditions d'existence d'un régulateur d'ordre fixe stabilisant un segment de systèmes sont données. Deux stratégies sont proposées pour synthétiser ce régulateur simultané.

- La première stratégie utilise le critère de stabilité d'Hermite-Fujiwara. Cette méthode produit un problème d'optimisation non convexe sous la contrainte d'inégalités matricielles bilinéaires (BMI). En transformant ce problème non convexe en un problème d'optimisation convexe sous la contrainte d'inégalités matricielles linéaires (LMI), un algorithme heuristique est proposé permettant de rechercher des régulateurs simultanés pour cette classe de systèmes.
- La deuxième stratégie utilise le critère de stabilité d'Hermite-Biehler. Cette approche est fondée essentiellement sur la propriété d'entrelacement des zéros réels. Cette méthode conduit à une formulation simple et plus facile à mettre en œuvre que dans le cas de l'étude avec le critère d'Hermite-Fujiwara.

Le *deuxième objectif* de ce mémoire est d'utiliser un paramétrage du régulateur simultané pour stabiliser un segment de systèmes afin de diminuer le nombre de contraintes à satisfaire. Ce paramétrage permet également de réduire la complexité du problème et facilite sa résolution. Les critères de stabilité d'Hermite-Fujiwara et d'Hermite-Biehler sont également mis en œuvre pour développer deux méthodes de synthèse distinctes. La première méthode fournit une condition d'existence d'un correcteur d'ordre fixe. La deuxième méthode donne une condition d'existence d'un correcteur d'ordre quelconque. Cette condition est formulée sous la forme d'un problème d'interpolation de polynômes Hurwitz.

La réalisation du premier et du second objectif nous permet de satisfaire *l'objectif final* de ce manuscrit qui est la stabilisation robuste d'un polytope de systèmes LTI. Il s'agit d'une application directe de la stabilisation simultanée de plusieurs segments de systèmes. La stabilisation d'un polytope de systèmes est réduite à la stabilisation de ses sommets avec un contrôleur simultané générant des polynômes caractéristiques en boucle fermée ayant la même partie paire (ou impaire). Des conditions d'existence de ces contrôleurs simultanés robustes d'ordre fixe sont données en utilisant les deux critères de stabilité mentionnés ci-dessus. Des algorithmes de synthèse sont également développés pour calculer ces régulateurs.

2 Plan du manuscrit

Ce manuscrit comporte cinq chapitres.

Chapitre 1 : Etat de l'art de la stabilisation simultanée des systèmes linéaires

Ce chapitre présente de manière détaillée le problème de la stabilité et la stabilisabilité simultanées des systèmes LTI avec des correcteurs d'ordre fixe ou des correcteurs d'ordre quelconque. Le contexte mathématique est celui de l'espace des fractions rationnelles stables et celui de l'anneau des polynômes. Cette étude bibliographique rappelle aussi les méthodes de synthèse et les conditions d'existence permettant de stabiliser simultanément un nombre fini de systèmes LTI.

Chapitre 2 : Etat de l'art de la stabilisation simultanée d'un segment de systèmes

Dans ce chapitre, des résultats de la littérature concernant la stabilisation simultanée des segment de systèmes LTI sont décrits. Divers outils mathématiques (théorème de la frontière, principe d'exclusion du zéro, lemme du segment et fonctions strictement réelles positives) sont utilisés pour établir les conditions d'existence de régulateurs pouvant stabiliser simultanément ces ensembles infinis de systèmes. Une méthode de synthése de correcteurs pour les segments de systèmes, basée sur l'interpolation des fonctions strictement réelles positives, est également proposée.

Chapitre 3 : Commande simultanée d'un segment de systèmes par un placement de pôles partiel

Le troisième chapitre propose une nouvelle méthode de commande pour stabiliser les segments de systèmes LTI avec des correcteurs d'ordre fixe. Cette approche est formulée comme un problème de commande simultanée sous la contrainte d'égalité des parties paires (ou impaires) des polynômes caractéristiques en boucle fermée de chacun des systèmes situés aux extrémités du segment. Pour résoudre ce problème, deux critères de stabilité polynomiale ont été utilisés : le critère d'Hermite-Fujiwara et le critère d'Hermite-Biehler. Dans le cas du critère de stabilité d'Hermite-Fujiwara, des conditions d'existence d'un compensateur simultané stabilisant un segment de systèmes sont formulées comme un problème d'optimisation non convexe sous la contrainte d'inégalités matricielles bilinéaires (BMI). Des conditions suffisantes sont établies sous forme d'inégalités matricielles linéaires (LMI). Dans le cas de l'utilisation du critère de stabilité d'Hermite-Biehler, des conditions d'existence sont formulées comme un problème de programmation linéaire avec des contraintes d'égalité. Une partie des développements exposés dans ce chapitre est publiée dans [MFZ13b].

Chapitre 4 : Commande simultanée d'un segment de systèmes par un compensateur paramétré

Dans le chapitre 4, deux méthodes de synthèse sont développées afin de réduire le nombre de contraintes à satisfaire pour la stabilisation d'un segment de systèmes LTI avec un correcteur unique. Elles utilisent un paramétrage particulier des contrôleurs simultanés. La première méthode permet de synthétiser des compensateurs simultanés d'ordre fixe avec le critère de stabilité d'Hermite-Fujiwara en réduisant le nombre de BMI à résoudre par rapport au cas sans paramétrage. La seconde utilise le critère de stabilité d'Hermite-Biehler. Cette seconde formulation permet de donner des conditions d'existence d'un régulateur stabilisant un segment de systèmes LTI indépendamment de l'ordre du correcteur. Ce problème est posé comme un problème d'interpolation de polynômes stables. Une nouvelle méthode de synthèse de ce régulateur en a été déduite. Une partie des travaux décrits dans ce chapitre est publiée dans [MFZ13a], [FMZ14a] et [FMZ14b].

Chapitre 5 : Stabilisation robuste d'un polytope de systèmes

Le cinquième chapitre concerne la stabilisation d'un polytope de systèmes LTI avec un contrôleur d'ordre fixe. Jusqu'à présent, la question de la stabilité ou de la stabilisation d'un polytope de systèmes LTI avec un contrôleur linéaire demeure une question ouverte. Dans ce chapitre, il est montré que, pour stabiliser un polytope de systèmes avec un correcteur LTI, il est nécessaire et

suffisant de stabiliser l'ensemble des segments de systèmes reliant les extrémités du polytope avec un correcteur LTI. Une approche inspirée de la méthode décrite dans le chapitre 3 est proposée pour stabiliser un polytope de systèmes. Nous montrons qu'il suffit de stabiliser les extrémités du polytope de systèmes moyennant une contrainte additionnelle sur les polynômes caractéristiques en boucle fermée pour stabiliser ce polytope avec un correcteur unique. Une partie des résultats présentés dans ce chapitre est soumise dans [FMZ17].

Chapitre 1

Etat de l'art de la stabilisation simultanée des systèmes linéaires

1.1 Introduction

La stabilisation simultanée des systèmes linéaires a pour objet de rechercher les conditions d'existence d'un correcteur unique stabilisant un ensemble fini de systèmes. La stabilisation simultanée des systèmes linéaires a été initialement étudiée dans l'espace des fractions stables $\mathcal{H}_\infty$ [SM82, VV82, Vid85]. Plusieurs travaux ont montré les limites de cette approche [Blo94, Tok96]. C'est la raison pour laquelle il est nécessaire d'étudier ce problème par d'autres approches, notamment dans l'espace des polynômes.

La stabilisation simultanée dans $\mathcal{H}_\infty$ n'est pas le thème central de ce mémoire, mais l'étude dans cet espace était fondamentale pour présenter des concepts dans l'anneau des polynômes. C'est pourquoi une grande partie de ce chapitre est consacrée à l'étude de la stabilisation simultanée des systèmes linéaires à temps invariant (LTI) dans l'espace des fractions stables.

Dans ce chapitre, nous détaillons tout d'abord des notions concernant les fonctions rationnelles stables. Ces notions sont utilisées par la suite pour présenter la stabilisation simultanée pour deux systèmes puis pour trois et k systèmes LTI dans l'espace des fonctions rationnelles stables. Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous introduisons les concepts présentés dans la littérature concernant la stabilisation simultanée dans l'espace des polynômes pour deux, trois et k systèmes.

1.2 Stabilisation simultanée dans $\mathcal{H}_\infty$

Dans cette partie, nous considérons les systèmes représentés dans l'espace d'un anneau commutatif par des fonctions rationnelles stables à coefficients réels. Cet espace est appelé $\mathcal{H}_\infty$ (ou $\mathcal{RH}_\infty$). Tout d'abord, nous allons donner une série de définitions et de résultats de la littérature décrivant les propriétés de cet espace. Puis, nous détaillons l'état de l'art de la commande simultanée pour deux, trois et k systèmes dans $\mathcal{H}_\infty$.

1.2.1 Fonctions rationnelles dans $\mathcal{H}_\infty$

Définition 1.2.1. *Pôle et zéro à l'infini.*

1) *Une fonction rationnelle $f(s)$ a un pôle à l'infini si et seulement si $\lim_{s\to\infty} f(s) = \infty$.*

2) *Une fonction rationnelle $f(s)$ a un zéro à l'infini si et seulement si $\lim_{s\to\infty} f(s) = 0$.*

La condition 1) est satisfaite si le degré du numérateur est strictement supérieur au degré du dénominateur, tandis que la condition 2) est vérifiée si le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur.

Définition 1.2.2. *Fonction rationnelle propre (ou causale).*
Une fonction rationnelle est propre (causale) si et seulement si elle n'a pas de pôles à l'infini, ou de manière équivalente si le degré du dénominateur est supérieur ou égal au degré du numérateur.

Définition 1.2.3. *Fonction rationnelle stable.*
Une fonction rationnelle est stable si elle n'a pas de pôle dans le demi plan complexe droit $\mathbb{C}_+ \cup \{\infty\}$ *noté* $\mathbb{C}_{+_e}$.

La fonction rationnelle $f(s) = \dfrac{s-1}{(s+2)^2}$ est une fonction rationnelle stable.

Définition 1.2.4. *Fonction rationnelle bistable.*
Une fonction rationnelle $f(s)$ *est bistable si elle est stable et si* $f^{-1}(s)$ *est stable.*

La fonction rationnelle $f(s) = \dfrac{(s+1)(s+3)}{(s+2)^2}$ est une fonction rationnelle bistable.

Définition 1.2.5. *Espace fonctionnel* $\mathcal{H}_\infty$.
On appelle $\mathcal{H}_\infty$ *(ou* $\mathcal{RH}_\infty$*), l'espace fonctionnel contenant toutes les fonctions rationnelles stables.*

Définition 1.2.6. *Espace fonctionnel* $\mathcal{U}$.
On appelle $\mathcal{U}$*, l'espace fonctionnel contenant toutes les fonctions rationnelles bistables.*

Nous définissons maintenant la notion de fonction copremière dans $\mathcal{H}_\infty$.

Définition 1.2.7. *Fonctions rationnelles copremières dans* $\mathcal{H}_\infty$.
Soit deux fonctions rationnelles $n(s) \in \mathcal{H}_\infty$ *et* $d(s) \in \mathcal{H}_\infty$*. Les fonctions rationnelles* $n(s)$ *et* $d(s)$ *sont copremières dans* $\mathcal{H}_\infty$ *si et seulement si elles n'ont pas de zéros communs dans* $\mathbb{C}_{+_e}$.

Toute fonction rationnelle $f(s) = N(s)/D(s)$ avec $N(s) \in \mathcal{P}(s)$ et $D(s) \in \mathcal{P}(s)$ et qui n'ont pas de zéros communs dans $\mathbb{C}_+$, peut être factorisée comme le rapport de deux fonctions rationnelles stables et copremières. Soit γ un réel strictement positif et $d = \max(\delta(N), \delta(D))$. Alors nous pouvons écrire

$$f(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{n(s)}{d(s)}$$

avec $n(s)$ et $d(s)$ deux fonctions rationnelles stables et copremières dans $\mathcal{H}_\infty$ telles que

$$n(s) = \frac{N(s)}{(s+\gamma)^d}, \quad d(s) = \frac{D(s)}{(s+\gamma)^d}$$

Théorème 1.2.1. *[Vid85] Identité de Diophante.*
$n(s) \in \mathcal{H}_\infty$ *et* $d(s) \in \mathcal{H}_\infty$ *sont deux fonctions rationnelles copremières dans* $\mathcal{H}_\infty$ *si et seulement s'il existe* $x(s) \in \mathcal{H}_\infty$ *et* $y(s) \in \mathcal{H}_\infty$ *vérifiant la relation suivante*

$$x(s)n(s) + y(s)d(s) = u(s) \tag{1.1}$$

avec $u(s) \in \mathcal{U}$.

Si $x(s)$ et $y(s)$ satisfont la relation (1.1) alors $x(s)$ et $y(s)$ sont deux fonctions rationnelles copremières dans $\mathcal{H}_\infty$. La relation (1.1) permet de démontrer que $(n(s), d(s))$ est une factorisation copremière d'une fonction rationnelle $f(s) = n(s)/d(s)$. Le théorème 1.2.2 donne l'ensemble des solutions de l'équation (1.1).

Théorème 1.2.2. *[Vid85] Soit $n(s)$ et $d(s)$ deux fonctions rationnelles copremières dans $\mathcal{H}_\infty$ et soit $x_1(s) \in \mathcal{H}_\infty$ et $y_1(s) \in \mathcal{H}_\infty$ une solution particulière de l'équation* (1.1) *alors l'ensemble de toutes les solutions de l'équation* (1.1) *est donné par les relations suivantes*

$$x(s) = x_1(s) + q(s)d(s)$$
$$y(s) = y_1(s) - q(s)n(s)$$

où $x(s)$ et $y(s)$ sont deux fonctions rationnelles copremières dans $\mathcal{H}_\infty$ pour tout $q(s)$ dans $\mathcal{H}_\infty$.

Dans l'espace $\mathcal{H}_\infty$, certaines conditions dans la théorie de la commande sont exprimées en terme d'emplacement des zéros et des pôles des systèmes étudiés dans le demi plan droit $\mathbb{C}_{+_e}$. C'est l'objet des définitions 1.2.8 et 1.2.9 données ci-dessous.

Définition 1.2.8. *[BGMR94] Propriété d'entrelacement pair (**PIP**).*
*Soit deux fonctions rationnelles $f(s) \in \mathcal{H}_\infty$ et $g(s) \in \mathcal{H}_\infty$. La fonction rationnelle $f(s)/g(s)$ vérifie la **PIP** si et seulement si le nombre de zéros réels de $g(s)$ (en comptant leur multiplicité) entre deux zéros réels de $f(s)$ dans $\mathbb{C}_{+_e}$ est pair.*

Exemple 1.2.1. Soit

$$f(s) = \frac{(s-2)}{(s+2)^2}, \quad g(s) = \frac{(s-3)(s-4)}{(s+2)^2}$$

La fonction rationnelle $f(s)$ possède deux zéros réels dans $\mathbb{C}_{+_e}$ donnés par $s_1 = 2$ et $s_2 = \infty$. De plus, nous observons que dans $[2, \infty]$ il y a les deux zéros réels dans $\mathbb{C}_{+_e}$ de la fonction $g(s)$ donnés par $s_3 = 3$ et $s_4 = 4$. On en déduit que la fonction rationnelle $f(s)/g(s)$ vérifie la **PIP**. ■

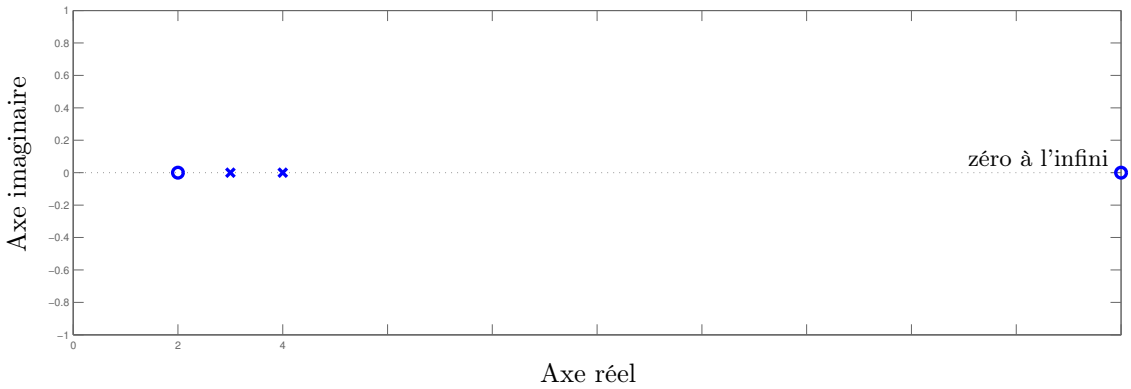

FIGURE 1.1 – Entrelacement des zéros instables de $f(s)$ et $g(s)$

Théorème 1.2.3. *[Vid85] Soit $f(s) \in \mathcal{H}_\infty(s)$ et $g(s) \in \mathcal{H}_\infty(s)$ deux fonctions rationnelles. Il existe une solution $x(s) \in \mathcal{H}_\infty(s)$ et $u(s) \in \mathcal{U}$ pour l'équation suivante*

$$g(s) + x(s)f(s) = u(s) \tag{1.2}$$

*si et seulement si la fonction rationnelle $f(s)/g(s)$ vérifie la **PIP**.*

Exemple 1.2.2. Soit les fonctions rationnelles $f(s)$ et $g(s)$ données dans l'exemple 1.2.1. La fonction rationnelle $f(s)/g(s)$ vérifie la **PIP**. Il existe donc une solution $x(s) \in \mathcal{H}_\infty$ telle que $g(s) + x(s)f(s) \in \mathcal{U}$.
Choisissons $u(s) \in \mathcal{U}$ de la forme

$$u(s) = \frac{s+1}{s+22}$$

alors la fonction $x(s) \in \mathcal{H}_\infty$ est donnée par

$$x(s) = -10\frac{(s-13)}{(s+22)}$$

■

Plusieurs méthodes ont été proposées pour résoudre l'équation (1.2) [Vid85, Dor00] (voir annexe A).

Définition 1.2.9. *[BGMR94] Propriété de double entrelacement pair (**EIP**).*
*Soit deux fonctions rationnelles $f(s) \in \mathcal{H}_\infty$ et $g(s) \in \mathcal{H}_\infty$. La fonction rationnelle $f(s)/g(s)$ vérifie l'**EIP** si et seulement si les fonctions rationnelles $f(s)/g(s)$ et $g(s)/f(s)$ vérifient la **PIP**.*

Exemple 1.2.3. Soit

$$f(s) = \frac{(s-1)(s-3)^2}{(s+2)^3}, \quad g(s) = \frac{(s-2)(s-2.5)(s+4)}{(s+2)^3}$$

- La fonction rationnelle $f(s)/g(s)$ vérifie la **PIP** parce que la fonction rationnelle $f(s)$ a deux zéros réels dans $\mathbb{C}_{+_e}$ $s_1 = 1$ et $s_2 = 3$ (de multiplicité 2). Dans l'intervalle $[1,\ 3]$ la fonction $g(s)$ a deux zéros réels $s_3 = 2$ et $s_4 = 2.5$.
- La fonction $g(s)/f(s)$ vérifie la **PIP** parce que la fonction rationnelle $g(s)$ a deux zéros réels dans $\mathbb{C}_{+_e}$ $s_3 = 2$ et $s_4 = 2.5$ et que la fonction $f(s)$ n'a aucun zéro réel dans l'intervalle $[2,\ 2.5]$.

On en déduit donc que la fonction rationnelle $f(s)/g(s)$ vérifie l'**EIP**. ■

1.2.2 Stabilisation dans $\mathcal{H}_\infty$

Dans cette section dédiée aux définitions et aux concepts de base concernant la stabilisation dans $\mathcal{H}_\infty$, nous considérons le système mono-entrée et mono-sortie (SISO) $G(s) = n(s)/d(s)$ bouclé avec un correcteur $C(s) = x(s)/y(s)$ tel que $(n(s), d(s)) \in \mathcal{H}_\infty$ et $(x(s), y(s)) \in \mathcal{H}_\infty$. Le système bouclé est donné dans la figure 1.2.

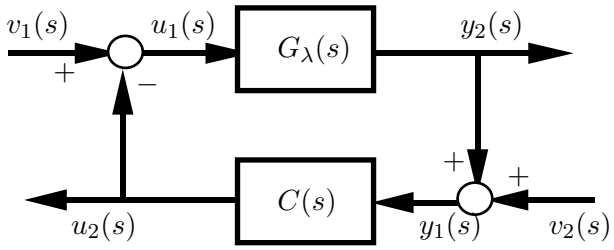

FIGURE 1.2 – Système bouclé

Les équations décrivant le système en boucle fermée sont

$$\begin{bmatrix} U_1(s) \\ Y_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+C(s)G(s)} & \dfrac{-C(s)}{1+G(s)C(s)} \\ \dfrac{G(s)}{1+G(s)C(s)} & \dfrac{1}{1+G(s)C(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

$$\begin{bmatrix} U_2(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} & \dfrac{C(s)}{1+G(s)C(s)} \\ \dfrac{G(s)}{1+G(s)C(s)} & \dfrac{-C(s)G(s)}{1+G(s)C(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

Définition 1.2.10. *[ZDG96] Stabilité interne.*
Le correcteur $C(s)$ stabilise le système $G(s)$ de manière interne si et seulement l'une des quatre conditions équivalentes suivantes est vérifiée.

1) *Quels que soient les signaux bornés $v_1(t)$ et $v_2(t)$, les signaux $u_1(t)$, $u_2(t)$, $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont bornés.*

2) *Les quatre fonctions rationnelles définies dans la relation (1.3) appartiennent à $\mathcal{H}_\infty$.*

3) *Les quatre fonctions rationnelles définies dans la relation (1.4) appartiennent à $\mathcal{H}_\infty$.*

4) *La fonction rationnelle $\dfrac{1}{1+C(s)G(s)}$ appartient à $\mathcal{H}_\infty$ et le produit $C(s)G(s)$ ne génère pas de simplification pôles/zéros dans $\mathbb{C}_{+_e}$.*

La stabilité interne peut aussi être caractérisée avec les factorisations copremières de $G(s)$ et de $C(s)$ en utilisant la définition ci-dessous.

Définition 1.2.11. *Soit $G(s) = n(s)/d(s)$ et $C(s) = x(s)/y(s)$ avec $(n(s), d(s))$ et $(x(s), y(s))$ les factorisations copremières dans $\mathcal{H}_\infty$ respectivement de $G(s)$ et $C(s)$. Nous définissons $\Upsilon(G, C)(s)$ comme suit*

$$\Upsilon(G, C)(s) = n(s)x(s) + d(s)y(s) \tag{1.5}$$

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour garantir la stabilité interne du système bouclé décrit par la figure 1.2.

Théorème 1.2.4. *[Vid85, Blo94] Soit le système bouclé $G(s)$ décrit par la figure 1.2. Le correcteur $C(s)$ stabilise le système $G(s)$ de manière interne si et seulement si $\Upsilon(G, C)(s) \in \mathcal{U}$.*

Dans la suite de ce manuscrit, nous écrirons que le correcteur $C(s)$ stabilise le système $G(s)$ lorsque la stabilité interne donnée dans la définition 1.2.10 est satisfaite.

Définition 1.2.12. *Stabilisation dans $\mathbb{R}_{+_e}$ ($\mathbb{R}_{+_e} = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$).*
Un contrôleur $C(s)$ stabilise dans $\mathbb{R}_{+_e}$ un système $G(s)$ si et seulement si $\Upsilon(G, C)(s)$ n'a pas des zéros dans $\mathbb{R}_{+_e}$.

Définition 1.2.13. *Un régulateur stable.*
Soit un régulateur $C(s) = x(s)/y(s)$ tel que $(x(s), y(s))$ représente sa factorisation copremière dans $\mathcal{H}_\infty$. $C(s)$ est un régulateur stable si et seulement si $y(s) \in \mathcal{U}$.

Définition 1.2.14. *Stabilisation forte.*
Un système est fortement stabilisable s'il existe un correcteur stable (c'est-à-dire appartenant à $\mathcal{H}_\infty$) qui stabilise ce système.

Ainsi, un système est fortement stabilisable si et seulement s'il peut être stabilisé par un compensateur $C(s) = x(s)/y(s)$ vérifiant $y(s) \in \mathcal{U}$ et $\Upsilon(G, C)(s) \in \mathcal{U}$.

Le problème de la stabilisation forte d'un système donné a été étudié et résolu par Youla *et al.* dans [YBL74] où l'équivalence entre la stabilisation forte et la propriété d'entrelacement pair (**PIP**) a été montrée.

Théorème 1.2.5. *[YBL74, Vid85] Un système $G(s)$ est fortement stabilisable si et seulement s'il vérifie la **PIP**.*

Exemple 1.2.4.

- Considérons un système $G_1(s)$ représenté par la fonction rationnelle suivante

$$G_1(s) = \frac{(s-2)}{(s-1)(s+2)}$$

  Ce système possède deux zéros réels dans C_{+e} donnés par $s_1 = 2$ et $s_2 = \infty$. De plus, entre ces deux zéros il n'y a aucun pôle réel donc $G_1(s)$ vérifie la **PIP**. Par conséquent, ce système est fortement stabilisable. Par exemple le correcteur $C(s) = \dfrac{-15s-32}{s^2+6s+30} \in \mathcal{H}_\infty$ stabilise $G_1(s)$.

- Considérons un système $G_2(s)$ tel que

$$G_2(s) = \frac{(s-1)}{(s-2)(s+2)}$$

  Ce système possède deux zéros réels dans C_{+e} donnés par $s_1 = 1$ et $s_2 = \infty$. De plus, entre ces deux zéros réels il existe un seul pôle réel en $s_3 = 2$. Par conséquent, le système $G_2(s)$ ne vérifie pas la **PIP**. Il n'est donc pas fortement stabilisable. ■

On en déduit que la stabilisation forte d'un système donné dépend uniquement des emplacements des pôles et des zéros réels instables du système.

Il est indiqué, dans [BGMR92] et [BGMR94], que l'examen de l'**EIP** n'est pas suffisant pour l'existence d'un contrôleur bistable. Cela est montré dans le théorème suivant.

Théorème 1.2.6. *[BGMR92, BGMR94] Soit un système $G(s) = n(s)/d(s)$ tel que $(n(s), d(s)) \in \mathcal{H}_\infty$. Il existe un contrôleur bistable qui stabilise $G(s)$ dans $\mathbb{R}_{+_e}$ si et seulement si $G(s)$ vérifie l'**EIP**.*

Par conséquent, l'**EIP** ne garantit pas l'existence d'un contrôleur bistable qui stabilise le système $G(s)$ dans $\mathbb{C}_{+_e}$, mais cette propriété garantit seulement l'existence d'un contrôleur bistable qui stabilise le système $G(s)$ dans $\mathbb{R}_{+_e}$.

Dans la section suivante, les propriétés de la **PIP** et de l'**EIP** seront utilisées pour obtenir des conditions pour stabiliser simultanément plusieurs systèmes avec un correcteur unique.

Définition 1.2.15. *Stabilisation simultanée.*
Soit $G_i(s) \in \mathcal{R}(s)$, $i = 1, \ldots, k$, k systèmes causaux. Les k systèmes $G_i(s)$ sont simultanément stabilisables si et seulement s'il existe un contrôleur $C(s) \in \mathcal{R}(s)$ qui stabilise tous les systèmes $G_i(s)$. Un tel contrôleur est appelé contrôleur stabilisant simultané.

Le problème de la stabilisation simultanée de k systèmes revient à trouver les conditions nécessaires et les conditions suffisantes pour que les k systèmes soient simultanément stabilisables.

1.2.3 Etat de l'art de la commande simultanée dans $\mathcal{H}_\infty$

Soit k systèmes LTI $G_i(s) = n_i(s)/d_i(s)$ tels que $(n_i(s), d_i(s)) \in \mathcal{H}_\infty$. Soit un correcteur $C(s) = x(s)/y(s)$ avec $(x(s), y(s)) \in \mathcal{H}_\infty$. L'objectif de cette section est de présenter l'état de l'art de la commande simultanée des systèmes $G_i(s)$ dans l'espace $\mathcal{H}_\infty$ et de chercher les conditions d'existence de $C(s)$ vérifiant $\Upsilon(G_i, C)(s) \in \mathcal{U}$, $i = 1, \ldots, k$ avec

$$\Upsilon(G_i, C)(s) = n_i(s)x(s) + d_i(s)y(s)$$

Dans la première partie de cette section nous rappelons une condition nécessaire et suffisante vérifiable pour stabiliser deux systèmes simultanément. En outre, nous montrons que le problème de la stabilisation simultanée de deux systèmes se réduit à un problème de stabilisation d'un système par un contrôleur stable. Il s'agit donc d'un problème de stabilisation forte qui a été résolu par Youla *et al.* dans [YBL74]. Puis, dans la seconde partie de cette section, nous étudions la stabilisation simultanée de trois systèmes. Pour clôturer cette section, nous exposons des résultats concernant la stabilisation simultanée de k systèmes.

1.2.3.1 Stabilisation simultanée de deux systèmes dans $\mathcal{H}_\infty$

Soit deux systèmes $G_1(s) = n_1(s)/d_1(s)$ et $G_2(s) = n_2(s)/d_2(s)$ tels que $(n_1(s), d_1(s)) \in \mathcal{H}_\infty$ et $(n_2(s), d_2(s)) \in \mathcal{H}_\infty$. Soit un correcteur simultané $C(s) = x(s)/y(s)$ avec $(x(s), y(s)) \in \mathcal{H}_\infty$. Nous avons

$$\Upsilon(G_1, C)(s) = n_1(s)x(s) + d_1(s)y(s) \tag{1.6a}$$
$$\Upsilon(G_2, C)(s) = n_2(s)x(s) + d_2(s)y(s) \tag{1.6b}$$

Le système (1.6) se réécrit comme

$$\begin{bmatrix} \Upsilon(G_1, C)(s) \\ \Upsilon(G_2, C)(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1(s) & d_1(s) \\ n_2(s) & d_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

Posons

$$\mathcal{G}_{12}(s) = n_1(s)d_2(s) - d_1(s)n_2(s) \tag{1.8}$$

D'après l'équation (1.7), on peut distinguer trois cas.

i) <u>Si $\mathcal{G}_{12}(s) \in \mathcal{U}$.</u>

Si $\mathcal{G}_{12}(s) \in \mathcal{U}$, on peut écrire la relation (1.7) comme suit

$$\begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathcal{G}_{12}(s)} \begin{bmatrix} d_2(s) & -d_1(s) \\ -n_2(s) & n_1(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Upsilon(G_1, C)(s) \\ \Upsilon(G_2, C)(s) \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

et le correcteur simultané $C(s) = x(s)/y(s)$ pour les systèmes $G_1(s)$ et $G_2(s)$ est donné par

$$x(s) = \frac{d_2(s)\Upsilon(G_1, C)(s) - d_1(s)\Upsilon(G_2, C)(s)}{\mathcal{G}_{12}(s)}$$
$$y(s) = \frac{-n_2(s)\Upsilon(G_1, C)(s) + n_1(s)\Upsilon(G_2, C)(s)}{\mathcal{G}_{12}(s)}$$

ii) Si $G_1(s)$ et $G_2(s)$ n'ont pas des pôles réels instables communs.
Dans ce cas, les conditions nécessaires et suffisantes ont été données dans [VV82] et [Vid85].

Théorème 1.2.7. *[VV82, Vid85] Soit deux systèmes $G_1(s) = n_1(s)/d_1(s)$ et $G_2(s) = n_2(s)/d_2(s)$ tels que $(n_1(s), d_1(s)) \in \mathcal{H}_\infty$ et $(n_2(s), d_2(s)) \in \mathcal{H}_\infty$. Supposons que $G_1(s)$ et $G_2(s)$ n'aient pas des pôles réels instables communs. Les deux systèmes sont simultanément stabilisables si et seulement si la différence des deux systèmes, $G_1(s) - G_2(s)$, est fortement stabilisable.*

Le problème de la commande simultanée de deux systèmes a donc été transformé en un problème de stabilisation forte du système "fictif" $G_1(s) - G_2(s)$, ce qui permet de formuler le corollaire suivant.

Corollaire 1.2.1. *[VV82, Vid85] Soit deux systèmes $G_1(s) = n_1(s)/d_1(s)$ et $G_2(s) = n_2(s)/d_2(s)$ tels que $(n_1(s), d_1(s)) \in \mathcal{H}_\infty$ et $(n_2(s), d_2(s)) \in \mathcal{H}_\infty$. $G_1(s)$ et $G_2(s)$ n'ont pas des pôles réels instables communs. Les deux systèmes sont simultanément stabilisables si et seulement si la différence des deux systèmes, $G_1(s) - G_2(s)$, vérifie la **PIP**.*

On a

$$G_1(s) - G_2(s) = \frac{\mathcal{G}_{12}(s)}{d_1(s)d_2(s)}$$

Ce deuxième cas ne fait pas d'hypothèse sur $\mathcal{G}_{12}(s)$, nous pouvons donc avoir $\mathcal{G}_{12}(s) \in \mathcal{U}$ ou $\mathcal{G}_{12}(s) \notin \mathcal{U}$.

Exemple 1.2.5.

a) Considérons les deux systèmes suivants

$$G_1(s) = \frac{(s-2)}{(s-5)}, \quad G_2(s) = \frac{(s-2)}{(s-3)}$$

On calcule la différence de deux systèmes $G_1(s)$ et $G_2(s)$

$$G_1(s) - G_2(s) = \frac{2(s-2)}{(s-3)(s-5)}$$

Le système $G_1(s) - G_2(s)$ a deux zéros réels dans $\mathbb{C}_{+_e}$, $s_1 = 2$, $s_2 = \infty$. Dans l'intervalle $[2,\ \infty[$, $G_1(s) - G_2(s)$ a deux pôles réels, $s_3 = 3$ et $s_4 = 5$. Le système $G_1(s) - G_2(s)$ vérifie donc la **PIP**. Par conséquent, $G_1(s)$ et $G_2(s)$ sont simultanément stabilisables.

b) Considérons les deux systèmes suivants

$$G_3(s) = \frac{(s-2)}{(s-1)}, \quad G_4(s) = \frac{(s-2)}{(s-3)}$$

On calcule la différence de deux systèmes $G_3(s)$ et $G_4(s)$

$$G_3(s) - G_4(s) = \frac{-2(s-2)}{(s-1)(s-3)}$$

Le système $G_3(s) - G_4(s)$ a deux zéros réels dans $\mathbb{C}_{+_e}$, $s_1 = 2$ et $s_2 = \infty$. Dans l'intervalle $[2,\ \infty[$, $G_3(s) - G_4(s)$ a un seul pôle réel $s_3 = 3$. Donc le système $G_3(s) - G_4(s)$ ne vérifie pas la **PIP**. Par conséquent, il n'existe pas de contrôleur simultané pour les deux systèmes $G_3(s)$ et $G_4(s)$. ■

iii) Cas général.

Le problème de la stabilisation simultanée de deux systèmes dans le cas général peut être traité en utilisant le paramétrage de Youla, aussi appelé paramétrage de Youla-Kucera. Ce dernier est utilisé pour résoudre de nombreux problèmes dans la théorie du contrôle des systèmes, notamment le problème de la stabilisation simultanée [SM82, VV82, Vid85, BCG93, Blo94, FBZ96].

Afin de trouver l'ensemble de tous les contrôleurs stabilisant le système $G(s) = n(s)/d(s)$, il suffit de considérer toutes les solutions de l'équation (1.1) telles que données dans le théorème 1.2.2. Ainsi, le paramétrage de Youla-Kucera [Kuč74, YJB76] donnant l'ensemble des contrôleurs stabilisant le système $G(s)$ est donné dans la définition suivante.

Définition 1.2.16. *[Kuč74, YJB76] Soit un système linéaire $G(s) = n(s)/d(s)$ avec $(n(s), d(s)) \in \mathcal{H}_\infty$ et copremiers. Choisissons $C_1(s) = x_1(s)/y_1(s)$ avec $(x_1(s), y_1(s)) \in \mathcal{H}_\infty$ un correcteur stabilisant le système $G(s)$. L'ensemble $\mathcal{S}(G)$ de tous les correcteurs $C(s)$ linéaires stabilisant $G(s)$ est donné par la relation suivante*

$$\mathcal{S}(G) = \left\{ C(s) \text{ tel que } C(s) = \frac{x_1(s) + q(s)d(s)}{y_1(s) - q(s)n(s)} \quad \forall\, q(s) \in \mathcal{H}_\infty \right\} \tag{1.10}$$

Soit deux systèmes $G_1(s) = n_1(s)/d_1(s)$ et $G_2(s) = n_2(s)/d_2(s)$ tels que $(n_1(s), d_1(s)) \in \mathcal{H}_\infty$ et $(n_2(s), d_2(s)) \in \mathcal{H}_\infty$. Soit $C_1(s) = x_1(s)/y_1(s)$ avec $(x_1(s), y_1(s)) \in \mathcal{H}_\infty$ un correcteur stabilisant le système $G_1(s)$. Nous avons donc $\Upsilon(G_1, C_1)(s) \in \mathcal{U}$.

L'ensemble des correcteurs $C(s) = x(s)/y(s)$ qui stabilisent simultanément $G_1(s)$ et $G_2(s)$ est obtenu en recherchant les correcteurs qui stabilisent le système $G_2(s)$ parmi tous les correcteurs stabilisant $G_1(s)$ donnés par

$$x(s) = x_1(s) + q(s)d_1(s) \tag{1.11a}$$

$$y(s) = y_1(s) - q(s)n_1(s) \tag{1.11b}$$

où $q(s) \in \mathcal{H}_\infty$ est le paramètre de Youla.

Le théorème 1.2.8 suivant donne une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un correcteur simultané de deux systèmes $G_1(s)$ et $G_2(s)$ en utilisant le paramétrage de Youla.

Théorème 1.2.8. *[Vid85] Soit deux systèmes $G_1(s) = n_1(s)/d_1(s)$ et $G_2(s) = n_2(s)/d_2(s)$ tels que $(n_1(s), d_1(s)) \in \mathcal{H}_\infty$ et $(n_2(s), d_2(s)) \in \mathcal{H}_\infty$. Soit $C_1(s) = x_1(s)/y_1(s)$ avec $(x_1(s), y_1(s)) \in \mathcal{H}_\infty$ un correcteur stabilisant le système $G_1(s)$. Les deux systèmes $G_1(s)$ et $G_2(s)$ sont simultanément stabilisables si et seulement s'il existe $q(s) \in \mathcal{H}_\infty$ tel que*

$$\Upsilon(G_2, C_1)(s) + q(s)\mathcal{G}_{12}(s) \in \mathcal{U} \tag{1.12}$$

où

$$\mathcal{G}_{12}(s) = d_1(s)n_2(s) - n_1(s)d_2(s),$$
$$\Upsilon(G_2, C_1)(s) = n_2(s)x_1(s) + d_2(s)y_1(s).$$

La condition (1.12), c'est-à-dire l'existence d'un paramètre de Youla $q(s) \in \mathcal{H}_\infty$, est vérifiée quel que soit le correcteur initial $C_1(s)$.

En utilisant le théorème 1.2.1, une condition nésssaire pour que la condition (1.12) soit vérifiée est que les fonctions rationnelles $\mathcal{G}_{12}(s) \in \mathcal{H}_\infty$ et $\Upsilon(G_2, C_1) \in \mathcal{H}_\infty$ soient copremières.

La relation (1.12) peut être interprétée comme la stabilisation forte d'un système fictif dont la factorisation copremière est donnée par $(\mathcal{G}_{12}(s), \Upsilon(G_2, C_1)(s))$: le correcteur stable et stabilisant est $q(s)$. La stabilisation simultanée de deux systèmes est donc équivalente à une condition de **PIP** comme le montre le corollaire suivant.

Corollaire 1.2.2. *[VV82, Vid85] Les deux systèmes $G_1(s)$ et $G_2(s)$ sont simultanément stabilisables si et seulement si le système "fictif" $P(s)$*

$$P(s) = \frac{\mathcal{G}_{12}(s)}{\Upsilon(G_2, C_1)(s)} \tag{1.13}$$

*vérifie la **PIP**.*

Exemple 1.2.6. Reprenons l'exemple traité dans [FBZ96] en considérant deux systèmes $G_1(s)$ et $G_2(s)$ définis respectivement par leur factorisation copremière

$$(n_1(s), d_1(s)) = \Big(\frac{2}{s+2}, 1\Big), \quad (n_2(s), d_2(s)) = \Big(\frac{s-2}{(s+1)(s+5)}, \frac{s-5}{s+5}\Big)$$

Le correcteur $C_1(s)$ défini par la factorisation copremière $(x_1(s), y_1(s)) = (1, 1)$ stabilise $G_1(s)$ puisque

$$\Upsilon(G_1, C_1)(s) = \frac{2}{s+2} + 1 = \frac{s+4}{s+2} \in \mathcal{U}.$$

Le calcul de $\mathcal{G}_{12}(s)$ et de $\Upsilon(G_2, C_1)(s)$ donne

$$\mathcal{G}_{12}(s) = \frac{-(s+0.6904)(s-8.6904)}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$
$$\Upsilon(G_2, C_1)(s) = \frac{(s+1.5414)(s-4.5414)}{(s+1)(s+5)}$$

et le système "fictif" $P(s)$ est donné par

$$P(s) = \frac{\mathcal{G}_{12}(s)}{\Upsilon(G_2, C_1)(s)} = \frac{-(s+0.6904)(s-8.6904)}{(s+2)(s+1.5414)(s-4.5414)}$$

Le système "fictif" $P(s)$ vérifie la **PIP**. Les deux systèmes $G_1(s)$ et $G_2(s)$ sont donc simultanément stabilisables et il existe un paramètre $q(s) \in \mathcal{H}_\infty$ tel que $\Upsilon(G_2, C_1)(s) + q(s)\mathcal{G}_{12}(s) \in \mathcal{U}$.

Pour le calcul du paramètre $q(s)$, nous avons utilisé la méthode d'interpolation dans $\mathcal{H}_\infty$ [Dor00, Vid85] (voir annexe A). Le paramètre $q(s)$ est donné par l'équation suivante (voir annexe B)

$$q(s) = \frac{22.232(s+2)(s+1.526)}{(s+0.6904)(s+37.92)}$$

A partir de l'équation (1.11), on en déduit la factorisation copremière du correcteur simultané $C(s) = x(s)/y(s)$ avec

$$x(s) = \frac{23.232(s+1.004)(s+4.033)}{(s+0.6904)(s+37.92)},$$
$$y(s) = \frac{(s-10.01)(s+4.162)}{(s+0.6904)(s+37.92)},$$

ce qui donne les fonctions rationnelles $\Upsilon(G_1, C)(s)$ et $\Upsilon(G_2, C)(s)$ suivantes

$$\Upsilon(G_1, C)(s) = \frac{s^3 + 42.616s^2 + 180.6815s + 104.8156}{(s + 0.6904)(s + 37.92)(s + 2)} \in \mathcal{U}$$
$$\Upsilon(G_2, C)(s) = \frac{s^4 + 13.3840s^3 + 47.2860s^2 + 55.9167s + 20.1692}{(s + 0.6904)(s + 37.92)(s + 5)(s + 1)} \in \mathcal{U}$$

■

1.2.3.2 Stabilisation simultanée de trois systèmes dans $\mathcal{H}_\infty$

Plusieurs problèmes associés à la commande simultanée de trois systèmes linéaires ont été un enjeux important pour la communauté scientifique en automatique. A titre d'exemple, nous pouvons citer le problème proposé dans [BG93] dénommé FCP (French Champagne Problem) et le problème considéré dans [Blo94] dénommé BCP (Belgian Chocolate Problem). Ces deux problèmes ont été étudiés dans plusieurs travaux [Pat99, PDV02, BHLO06, CS07] et illustrent la complexité de la stabilisation simultanée de trois systèmes.

Malgré les nombreux efforts déployés pour résoudre le problème de la commande simultanée de trois systèmes [Vid85, BGMR92, BGMR94, Blo94, FZKD01], il s'agit encore d'un problème ouvert.

Dans cette section, nous allons montrer que le problème de la stabilisation simultanée de trois systèmes dépend de la différence des systèmes deux à deux selon qu'elle est bistable ou non. De plus, nous allons montrer que, contrairement au cas de deux systèmes, il n'existe pas de conditions nécessaires et suffisantes vérifiables garantissant l'existence d'un compensateur simultané pour trois systèmes linéaires. Les résultats disponibles s'énoncent sous la forme de conditions nécessaires [Gho86] ou de conditions suffisantes [Kwa82, WB88, BCG91] ou même de conditions nécessaires et suffisantes invérifiables [BGMR94, Blo94, Gho86].

Soit trois systèmes $G_1(s) = n_1(s)/d_1(s)$, $G_2(s) = n_2(s)/d_2(s)$ et $G_3(s) = n_3(s)/d_3(s)$ tels que $(n_1(s), d_1(s)) \in \mathcal{H}_\infty$, $(n_2(s), d_2(s)) \in \mathcal{H}_\infty$ et $(n_3(s), d_3(s)) \in \mathcal{H}_\infty$. Soit $C(s) = x(s)/y(s)$ un correcteur simultané avec $(x(s), y(s)) \in \mathcal{H}_\infty$. Nous avons

$$\Upsilon(G_1, C)(s) = n_1(s)x(s) + d_1(s)y(s) \tag{1.14a}$$
$$\Upsilon(G_2, C)(s) = n_2(s)x(s) + d_2(s)y(s) \tag{1.14b}$$
$$\Upsilon(G_3, C)(s) = n_3(s)x(s) + d_3(s)y(s) \tag{1.14c}$$

Les trois systèmes $G_i(s)$ $i = 1, \ldots, 3$ sont simultanément stabilisables par un correcteur $C(s) = x(s)/y(s)$ si et seulement si $\Upsilon(G_i, C)(s) \in \mathcal{U}$, $i = 1, \ldots, 3$.

Nous donnons ci-dessous une condition générale nécessaire et suffisante pour la stabilisation simultanée de trois systèmes, mais cette condition ne permet pas de synthétiser un contrôleur simultané pour trois systèmes.

Théorème 1.2.9. *[BGMR94] Les systèmes $G_1(s)$, $G_2(s)$ et $G_3(s)$ sont simultanément stabilisables si et seulement si l'équation* (1.15) *est vérifiée*

$$\mathcal{G}_{23}(s)\Upsilon(G_1, C)(s) + \mathcal{G}_{31}(s)\Upsilon(G_2, C)(s) + \mathcal{G}_{12}(s)\Upsilon(G_3, C)(s) = 0 \tag{1.15}$$

avec $\Upsilon(G_i, C)(s) \in \mathcal{U}$ et $\mathcal{G}_{ij}(s) = d_i(s)n_j(s) - n_i(s)d_j(s)$, $i = 1, \ldots, 3$.

Rappelons maintenant une condition nécessaire et suffisante pour stabiliser trois systèmes. Cette condition est basée sur le paramétrage de Youla.

Théorème 1.2.10. *[Vid85] Soit trois systèmes $G_1(s) = n_1(s)/d_1(s)$, $G_2(s) = n_2(s)/d_2(s)$ et $G_3(s) = n_3(s)/d_3(s)$ tels que $(n_1(s), d_1(s)) \in \mathcal{H}_\infty$, $(n_2(s), d_2(s)) \in \mathcal{H}_\infty$ et $(n_3(s), d_3(s)) \in \mathcal{H}_\infty$. Soit $C_1(s) = x_1(s)/y_1(s)$ un correcteur stabilisant $G_1(s)$ avec $(x_1(s), y_1(s)) \in \mathcal{H}_\infty$. Les trois systèmes sont simultanément stabilisables si et seulement s'il existe un paramètre $q(s) \in \mathcal{H}_\infty$ tel que*

$$\Upsilon(G_2, C)(s) = \Upsilon(G_2, C_1)(s) + q(s)\mathcal{G}_{12}(s) \in \mathcal{U} \tag{1.16a}$$

$$\Upsilon(G_3, C)(s) = \Upsilon(G_3, C_1)(s) + q(s)\mathcal{G}_{13}(s) \in \mathcal{U} \tag{1.16b}$$

où

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{12}(s) &= d_1(s)n_2(s) - n_1(s)d_2(s),\\
\mathcal{G}_{13}(s) &= d_1(s)n_3(s) - n_1(s)d_3(s),\\
\Upsilon(G_2, C_1)(s) &= n_2(s)x_1(s) + d_2(s)y_1(s),\\
\Upsilon(G_3, C_1)(s) &= n_3(s)x_1(s) + d_3(s)y_1(s).
\end{aligned}$$

En considérant les conditions (1.15) et (1.16) pour tout $\mathcal{G}_{ij}(s) \in \mathcal{H}_\infty$, les auteurs dans [Blo94, BG93, BB96] ont montré que le problème de la stabilisation simultanée de trois systèmes est un problème indécidable. Nous entendons par indécidable qu'il n'existe pas d'algorithme pour résoudre ce problème en un nombre fini d'étapes en utilisant uniquement des opérations élémentaires arithmétiques (addition, soustraction, division,...), logiques (et, ou, non,...) et les opérations de tests (inférieur, supérieur, égal, ...). Ce résultat est mentionné explicitement dans le théorème suivant.

Théorème 1.2.11. *[BG93] La stabilisation simultanée de trois systèmes est une question indécidable.*

En conséquence, il n'est pas possible de trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour stabiliser simultanément trois systèmes. Décrivons maintenant plusieurs résultats selon que les fonctions rationnelles $\mathcal{G}_{ij}(s)$, $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$, sont bistables ou non.

i) Si au moins deux de trois $\mathcal{G}_{ij}(s) \in \mathcal{U}$.

Théorème 1.2.12. *[WF94] Soit trois systèmes $G_1(s) = n_1(s)/d_1(s)$, $G_2(s) = n_2(s)/d_2(s)$ et $G_3(s) = n_3(s)/d_3(s)$ tels que $(n_1(s), d_1(s)) \in \mathcal{H}_\infty$, $(n_2(s), d_2(s)) \in \mathcal{H}_\infty$ et $(n_3(s), d_3(s)) \in \mathcal{H}_\infty$. Si au moins deux de trois $\mathcal{G}_{ij}(s) \in \mathcal{U}$, $(i, j = 1, 2, 3, i \neq j)$, alors les trois systèmes sont simultanément stabilisables. Dans ce cas il existe un réel positif r tel que le contrôleur simultané $C(s)$ peut s'écrire comme*

$$C(s) = \frac{-rd_1(s) + d_3(s)}{rn_1(s) - n_3(s)} \tag{1.17}$$

ii) Si l'un de trois $\mathcal{G}_{ij}(s) \in \mathcal{U}$.

Prenons par exemple $\mathcal{G}_{12}(s) \in \mathcal{U}$, $\mathcal{G}_{13}(s) \notin \mathcal{U}$ et $\mathcal{G}_{23}(s) \notin \mathcal{U}$. Alors d'après les équations (1.15), nous pouvons écrire

$$\mathcal{G}_{13}(s)\Upsilon(G_2, C)(s) + \mathcal{G}_{32}(s)\Upsilon(G_1, C)(s) = \mathcal{G}_{12}(s)\Upsilon(G_3, C)(s) \tag{1.18}$$

Puisque nous voulons avoir $\Upsilon(G_1, C)(s) \in \mathcal{U}$, $\Upsilon(G_2, C)(s) \in \mathcal{U}$ et $\mathcal{G}_{12}(s)\Upsilon(G_3, C)(s) \in \mathcal{U}$, le problème initial est équivalent à l'existence d'un compensateur bistable pour le système fictif $G^{'}(s)$ donné par

$$G^{'}(s) = \frac{d_1(s)n_3(s) - d_3(s)n_1(s)}{d_3(s)n_2(s) - d_2(s)n_3(s)} = \frac{\mathcal{G}_{13}(s)}{\mathcal{G}_{32}(s)} \tag{1.19}$$

Ce résultat est rappelé dans le théorème suivant.

Théorème 1.2.13. *[BGMR92, BGMR94] Soit trois systèmes $G_1(s) = n_1(s)/d_1(s)$, $G_2(s) = n_2(s)/d_2(s)$ et $G_3(s) = n_3(s)/d_3(s)$ tels que $(n_1(s), d_1(s)) \in \mathcal{H}_\infty$, $(n_2(s), d_2(s)) \in \mathcal{H}_\infty$ et $(n_3(s), d_3(s)) \in \mathcal{H}_\infty$. Supposons qu'il n'existe aucun point s_0 dans $\mathbb{C}_{+_e}$ tel que $G_1(s_0) = G_2(s_0)$. Alors les trois systèmes $G_i(s)$, $i = 1, 2, 3$ sont simultanément stabilisables si et seulement si le système fictif $G^{'}(s)$ défini par l'équation* (1.19) *est stabilisable avec un contrôleur bistable.*

D'après le théorème 1.2.6, nous savons qu'il existe un contrôleur bistable qui stabilise un système $G(s)$ dans $\mathbb{R}_{+_e}$ si et seulement si $G(s)$ vérifie l'**EIP**. En considérant ce résultat, nous pouvons déduire que les trois systèmes $G_i(s)$, $i = 1, 2, 3$ sont simultanément stabilisables dans $\mathbb{R}_{+_e}$ si et seulement si le système fictif $G^{'}(s)$ défini par l'équation (1.19) vérifie l'**EIP**.

iii) Si $\mathcal{G}_{ij}(s) \notin \mathcal{U}$ $\forall i$ et j.

Dans ce cas, [FZKD01] a donné dans le théorème suivant des conditions suffisantes pour stabiliser simultanément trois systèmes. Pour cela on suppose qu'il existe un régulateur simultané pour deux systèmes et on en déduit un régulateur simultané pour trois systèmes.

Théorème 1.2.14. *[FZKD01] Soit trois systèmes $G_1(s) = n_1(s)/d_1(s)$, $G_2(s) = n_2(s)/d_2(s)$ et $G_3(s) = n_3(s)/d_3(s)$ tels que $(n_1(s), d_1(s)) \in \mathcal{H}_\infty$, $(n_2(s), d_2(s)) \in \mathcal{H}_\infty$ et $(n_3(s), d_3(s)) \in \mathcal{H}_\infty$. Considérons les deux hypothèses suivantes.*

1) *Les deux systèmes $G_1(s)$ et $G_2(s)$ sont simultanément stabilisables par un compensateur $C_{12}(s) = x_{12}(s)/y_{12}(s)$ avec $(x_{12}(s), y_{12}(s)) \in \mathcal{H}_\infty$. Cette condition assure l'existence d'un paramètre $q_1(s) \in \mathcal{H}_\infty$ satisfaisant les deux relations suivantes*

$$\Upsilon(G_2, C_{12})^{-1}(s)d_2(s) = \Upsilon(G_1, C_{12})^{-1}(s)d_1(s) - q_1(s)x_{12}(s) \tag{1.20a}$$

$$\Upsilon(G_2, C_{12})^{-1}(s)n_2(s) = \Upsilon(G_1, C_{12})^{-1}(s)n_1(s) - q_1(s)y_{12}(s) \tag{1.20b}$$

2) *Il existe $q(s) \in \mathcal{H}_\infty$ tel que*

$$\Big(\Upsilon(G_3, C_{12})(s) + q(s)\mathcal{G}_{23}(s)\Big) \in \mathcal{U} \tag{1.21}$$

$$\Big(1 - q(s)\Upsilon(G_2, C_{12})(s)q_1(s)\Big) \in \mathcal{U} \tag{1.22}$$

où le paramètre $q_1(s)$ satisfait les relations (1.20) *avec $\Big(y_{12}(s) - q(s)n_2(s)\Big) \neq 0$.*

Alors les trois systèmes $G_1(s)$, $G_2(s)$ et $G_3(s)$ sont simultanément stabilisables par un compensateur $C(s)$ défini par la factorisation copremière suivante $(x(s), y(s))$ donnée par

$$x(s) = x_{12}(s) + q(s)d_2(s)$$
$$y(s) = y_{12}(s) - q(s)n_2(s)$$

1.2.3.3 Stabilisation simultanée de k systèmes dans $\mathcal{H}_\infty$

Soit k systèmes $G_i(s) = n_i(s)/d_i(s)$, $i = 1, \ldots, k$, $k \geqslant 4$ tels que $(n_i(s), d_i(s)) \in \mathcal{H}_\infty$. Il existe un compensateur simultané $C(s) = x(s)/y(s)$ avec $(x(s), y(s)) \in \mathcal{H}_\infty$ pour les k systèmes $G_i(s)$

si et seulement si la relation (1.23) est vérifiée avec $\Upsilon(G_i, C)(s) \in \mathcal{U}, i = 1, \ldots, k$.

$$\begin{bmatrix} n_1(s) & d_1(s) \\ n_2(s) & d_2(s) \\ \vdots & \vdots \\ n_k(s) & d_k(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Upsilon(G_1, C)(s) \\ \Upsilon(G_2, C)(s) \\ \vdots \\ \Upsilon(G_k, C)(s) \end{bmatrix} \tag{1.23}$$

En utilisant le paramétrage de Youla, [Vid85] a généralisé le théorème 1.2.8 dans le cas de k systèmes, $k > 3$.

Théorème 1.2.15. *[Vid85] Soit k systèmes $G_i(s) = n_i(s)/d_i(s)$ $(i = 1, \ldots, k)$ tels que $(n_i(s) \in \mathcal{H}_\infty, d_i(s)) \in \mathcal{H}_\infty$ et soit $C_1(s) = x_1(s)/y_1(s)$ un correcteur stabilisant le système $G_1(s)$ avec $(x_1(s), y_1(s)) \in \mathcal{H}_\infty$. Les k systèmes sont simultanément stabilisables si et seulement s'il existe un paramètre $q(s) \in \mathcal{H}_\infty$ tel que*

$$\Upsilon(G_i, C_1)(s) + q(s)\mathcal{G}_{1i}(s) \in \mathcal{U}, \quad , i = 2, \ldots, k \tag{1.24}$$

Décrivons maintenant deux cas particuliers en fonction de $\mathcal{G}_{1i}(s), i = 2, \ldots, k$.

i) Si $\mathcal{G}_{12}(s) \in \mathcal{U}$ et $\mathcal{G}_{1i}(s) \notin \mathcal{U}, i = 3, \ldots, k$.
Dans ce cas, le problème de la stabilisation simultanée de k systèmes peut être transformée en un problème de stabilisation simultanée de $k-2$ systèmes avec un compensateur bistable. Une condition nécessaire et suffisante est donnée dans le théorème suivant.

Théorème 1.2.16. *[Blo94] Soit k systèmes $G_i(s) = n_i(s)/d_i(s)$ tels que $(n_i(s), d_i(s)) \in \mathcal{H}_\infty$. Supposons qu'il n'existe aucun point s_0 dans $\mathbb{C}_{+_e}$ tel que $G_1(s_0) = G_2(s_0)$. Alors les k systèmes $G_i(s)$, $i = 1, \ldots, k$ sont simultanément stabilisables si et seulement si les $k-2$ systèmes $G_i^{'}(s)$, $i = 3, \ldots, k$, définis comme suit*

$$G_i^{'}(s) = \frac{d_2(s)n_i(s) - n_2(s)d_i(s)}{d_i(s)n_1(s) - n_i(s)d_1(s)} = \frac{\mathcal{G}_{2i}(s)}{\mathcal{G}_{i1}(s)}, \tag{1.25}$$

sont simultanément stabilisables par un contrôleur bistable.

ii) Si $\mathcal{G}_{1i}(s) \notin \mathcal{U}, i = 2, \ldots, k$.
Dans ce cas, il a été montré dans [Vid85] et [Blo94] que le problème de la stabilisation simultanée de k systèmes avec un compensateur commun est équivalent à celui de la stabilisation simultanée de $k-1$ systèmes en utilisant un compensateur commun stable.

Théorème 1.2.17. *[Vid85, Blo94] Soit k systèmes $G_i(s) = n_i(s)/d_i(s)$ $(i = 1, \ldots, k)$ tels que $(n_i(s), d_i(s)) \in \mathcal{H}_\infty$ et soit $C_1(s) = x_1(s)/y_1(s)$ est un correcteur stabilisant le système $G_1(s)$ avec $(x_1(s), y_1(s)) \in \mathcal{H}_\infty$. Les k systèmes sont simultanément stabilisables si et seulement si les $k-1$ systèmes $G_i^{''}(s)$, $i = 2, \ldots, k$ définis comme suit*

$$G_i^{''}(s) = \frac{d_i(s)n_1(s) - n_i(s)d_1(s)}{n_i(s)x_1(s) + d_i(s)y_1(s)} = \frac{\mathcal{G}_{i1}(s)}{\Upsilon(G_i, C_1)(s)} \tag{1.26}$$

sont simultanément stabilisables par un contrôleur stable.

D'une façon générale, il n'existe aucune condition nécessaire et suffisante vérifiable pour tester la stabilisation simultanée de k systèmes, $k \geqslant 3$. En effet, il a été montré par Blondel [Blo94, BAH95] que la question de la stabilisation simultanée de trois systèmes ou plus est une question rationnellement indécidable.

Pour des raisons pratiques, les contrôleurs doivent être causaux. Malheureusement, le paramétrage de Youla-Kucera donné dans (1.10), utilisé pour la synthèse du régulateur simultané, ne permet pas de garantir cette propriété.

A titre d'exemple, le correcteur causal $C_1(s) = x_1(s)/y_1(s)$ avec $x_1(s) = 1$ et $y_1(s) = 1$ stabilise le système $G(s) = n(s)/d(s)$ avec $n(s) = \dfrac{s+1}{s+2}$ et $d(s) = 1$. Si on choisit le paramètre de Youla bicausal $q(s) = \dfrac{s}{s+1}$, alors le correcteur stabilisant obtenu est $C(s) = \dfrac{(2s+1)(s+2)}{2(s+1)}$ et est non causal.

Ainsi, toutes les méthodes développées dans l'espace $\mathcal{H}_\infty$ ne permettent pas d'obtenir des correcteurs qui sont toujours causaux. Pour cela, d'autres approches ont été développées telles que celles utilisant l'espace des polynômes et présentées dans la section suivante.

1.3 Stabilisation simultanée dans l'espace des polynômes

Dans cette section, nous considérons les systèmes représentés dans l'espace des polynômes à coefficients réels. En premier lieu, nous donnons quelques résultats concernant la stabilisation des systèmes dans cet espace $\mathcal{P}(s)$. Puis, nous présentons en second lieu l'état de l'art de la commande simultanée pour n systèmes ($n \geqslant 3$).

Avant d'exposer les résultats de la littérature, la définition et le théorème suivants sont donnés.

Définition 1.3.1. *Polynômes copremiers dans $\mathbb{C}_+$.*
Soit deux polynômes $N(s) \in \mathcal{P}(s)$ et $D(s) \in \mathcal{P}(s)$. Les polynômes $N(s)$ et $D(s)$ sont copremiers dans $\mathbb{C}_+$ si et seulement s'ils n'ont pas de zéros communs dans $\mathbb{C}_+$.

Théorème 1.3.1. *Identité de Bezout.*
$N(s) \in \mathcal{P}(s)$ et $D(s) \in \mathcal{P}(s)$ sont deux polynômes copremiers dans $\mathbb{C}_+$ si et seulement s'il existe $X(s) \in \mathcal{P}(s)$ et $Y(s) \in \mathcal{P}(s)$ vérifiant la relation suivante

$$X(s)N(s) + Y(s)D(s) = Z(s) \tag{1.27}$$

avec $Z(s) \in \mathbb{H}$.

1.3.1 Stabilisation dans l'espace des polynômes

Dans cette section, nous considérons le système bouclé décrit par la figure 1.2 où $G(s) = N(s)/D(s)$ est un système causal et $C(s) = X(s)/Y(s)$ est un correcteur causal tels que $N(s) \in \mathcal{P}(s)$, $D(s) \in \mathcal{P}(s)$, $X(s) \in \mathcal{P}(s)$ et $Y(s) \in \mathcal{P}(s)$.

Dans le lemme suivant, nous donnons des conditions d'existence d'un correcteur $C(s)$ stabilisant le système $G(s)$ en boucle fermée.

Lemme 1.3.1. *Le correcteur $C(s)$ stabilise le système $G(s)$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées.*

1) *Le polynôme caractéristique en boucle fermée $\Phi(G, C)(s)$ est Hurwitz avec*

$$\Phi(G, C)(s) = N(s)X(s) + D(s)Y(s) \tag{1.28}$$

2) *Si* $\delta(N) = \delta(D)$ *et* $\delta(X) = \delta(Y)$ *alors*

$$\delta(NX + DY) = \delta(DY). \tag{1.29}$$

Démonstration. Le système bouclé $G(s)$ avec le correcteur $C(s)$ est stable si et seulement si chaque élément des matrices $T_1(s)$ et $T_2(s)$ données par

$$\begin{bmatrix} U_1(s) \\ Y_1(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+C(s)G(s)} & \dfrac{-C(s)}{1+G(s)C(s)} \\ \dfrac{G(s)}{1+G(s)C(s)} & \dfrac{1}{(1+G(s)C(s)} \end{bmatrix}}_{T_1(s)} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} \tag{1.30}$$

$$\begin{bmatrix} U_2(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} & \dfrac{C(s)}{1+G(s)C(s)} \\ \dfrac{G(s)}{1+G(s)C(s)} & \dfrac{-C(s)G(s)}{1+G(s)C(s)} \end{bmatrix}}_{T_2(s)} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} \tag{1.31}$$

est causal et stable.

Notons que la stabilité de chaque élément de $T_1(s)$ et $T_2(s)$ implique la condition 1).

Démontrons maintenant la causalité de $T_1(s)$ et $T_2(s)$. Si $G(s)$ ou $C(s)$ est strictement causal, alors toutes les fonctions de transfert de $T_1(s)$ et $T_2(s)$ sont toujours causales. Si, $\delta(N) = \delta(D)$ et $\delta(X) = \delta(Y)$ alors les termes de plus haut degré dans la relation (1.28) peuvent se simplifier. Dans ce cas, certains éléments de $T_1(s)$ et $T_2(s)$ peuvent être non causaux. Par conséquent, la condition supplémentaire donnée par (1.29) doit être vérifiée afin de garantir la causalité de toutes les fonctions de transfert données par $T_1(s)$ et $T_2(s)$. •

Dans la définition ci-dessous, nous présentons une notion de stabilisation moins restrictive qui sera utilisée par la suite pour montrer certaines conditions dans le cadre de la stabilisation simultanée de trois systèmes. Il s'agit de l'application de la définition 1.2.12 à l'espace des polynômes en remplaçant $\mathbb{R}_{+_e}$ par $\mathbb{R}_+$.

Définition 1.3.2. *Stabilisation dans* $\mathbb{R}_+$.
Un contrôleur stabilise un système dans $\mathbb{R}_+$ *si et seulement si le polynôme caractéristique du système en boucle fermée n'a pas des zéros réels positifs.*

1.3.2 Etat de l'art de la commande simultanée dans l'espace des polynômes

Considérons n systèmes LTI causaux $G_i(s) = N_i(s)/D_i(s)$ tels que $(N_i(s), D_i(s)) \in \mathcal{P}(s)$ et un correcteur causal $C(s) = X(s)/Y(s)$ avec $(X(s), Y(s)) \in \mathcal{P}(s)$.

L'objectif de cette section est de détailler l'état de l'art de la commande simultanée dans l'espace $\mathcal{P}(s)$ et de présenter les conditions d'existence d'un compensateur causal $C(s)$ vérifiant $\Phi(G_i, C)(s) \in \mathbb{H}$ avec

$$\Phi(G_i, C)(s) = N_i(s)X(s) + D_i(s)Y(s), \quad i = 1, \ldots, n \tag{1.32}$$

Dans la première partie de cette section, nous rappelons les conditions données par [Wei92] pour la stabilisation de trois systèmes. La condition fournie dans [Wei92] est une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un correcteur qui, d'une part, stabilise simultanément deux

systèmes $G_1(s)$ et $G_2(s)$ et qui, d'autre part, garantit que le système en boucle fermée formé avec $G_3(s)$ et le correcteur commun n'a pas de pôles réels positifs. Cette condition montrée par [Wei92] est équivalente à la résolution d'une équation polynomiale. Dans la seconde partie de cette section, nous détaillons une condition nécessaire et suffisante donnée dans [JA01] pour la stabilisation simultanée de quatre systèmes. Nous montrons ainsi que cette condition est équivalente à la résolution de deux équations polynomiales. A la fin de cette section, nous rappelons l'approche proposée dans [HŠT98, HTŠ99a, HTŠ99b] pour stabiliser simultanément n systèmes avec un contrôleur d'ordre fixe dans l'espace des polynômes. Ce problème est posé comme un problème d'optimisation non convexe sous forme de BMI (Inégalité Matricielle Bilinéaire). Nous montrons que cette formulation a été transformée en un problème d'optimisation convexe LMI (Inégalité Matricielle Linéaire) dans [HTŠ99a].

1.3.2.1 Stabilisation simultanée de trois systèmes dans l'espace des polynômes

Dans cette section, des résultats complémentaires à ceux présentés dans l'espace des fractions stables $\mathcal{H}_\infty$ sont donnés. Pour la stabilisation simultanée de trois systèmes dans l'espace des polynômes, Wei [Wei92] a introduit une propriété en fonction du lieu des zéros et des pôles réels dans $\mathbb{C}_+$. Cette propriété est rappelée dans la définition ci-dessous.

Définition 1.3.3. *[Wei92] Propriété d'entrelacement forte (**SIP**).*
*Considérons trois polynômes $E_1(s)$, $E_2(s)$ et $E_3(s)$. Soit α_i, β_i et γ_i respectivement les zéros réels de $E_1(s)$, $E_2(s)$ et $E_3(s)$ dans $\mathbb{C}_+$. Le triplet ($E_1(s)$, $E_2(s)$, $E_3(s)$) vérifie la propriété d'entrelacement forte **SIP** s'il existe des scalaires $\epsilon_i = 1$ ou $\epsilon_i = -1$, $i = 1, 2, 3$, tels que*

i) $\forall \gamma_i \quad \epsilon_1\epsilon_2 E_1(\gamma_i)E_2(\gamma_i) < 0$

ii) $\forall \beta_i \quad \epsilon_1\epsilon_3 E_1(\beta_i)E_3(\beta_i) < 0$

iii) $\forall \alpha_i \quad \epsilon_2\epsilon_3 E_2(\alpha_i)E_3(\alpha_i) < 0$

Exemple 1.3.1. Soit les trois polynômes suivants

$$\begin{aligned} E_1(s) &= (s-1)(s-4)(s-7) \\ E_2(s) &= (s-2)(s-5) \\ E_3(s) &= (s-3)(s-6) \end{aligned}$$

Les zéros de $E_1(s)$, $E_2(s)$ et $E_3(s)$ sont donnés par

$$\begin{aligned} E_1(s) = 0 \quad &\longrightarrow \quad s = \alpha_1 = 1, \;\; s = \alpha_2 = 4, \; s = \alpha_3 = 7 \\ E_2(s) = 0 \quad &\longrightarrow \quad s = \beta_1 = 2, \;\; s = \beta_2 = 5 \\ E_3(s) = 0 \quad &\longrightarrow \quad s = \gamma_1 = 3, \;\; s = \gamma_2 = 6 \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} &E_1(\gamma_i)E_2(\gamma_i) < 0, \; i = 1, 2 \\ &E_1(\beta_i)E_3(\beta_i) > 0, \; i = 1, 2 \\ &E_2(\alpha_i)E_3(\alpha_i) > 0, \; i = 1, \ldots, 3 \end{aligned}$$

En choisissant $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = 1$ et $\epsilon_3 = -1$, nous obtenons

$$\epsilon_1\epsilon_2 E_1(\gamma_i)E_2(\gamma_i) < 0, \; i = 1, 2$$

$$\epsilon_1\epsilon_3 E_1(\beta_i)E_3(\beta_i) < 0,\ i = 1,2$$
$$\epsilon_2\epsilon_3 E_2(\alpha_i)E_3(\alpha_i) < 0,\ i = 1,\ldots,3$$

Par conséquent, le triplet $\Big(E_1(s),\ E_2(s),\ E_3(s)\ \Big)$ vérifie la **SIP**. ■

Exemple 1.3.2. Considérons maintenant les trois polynômes suivants

$$E_1(s) = (s-1)(s-2)$$
$$E_2(s) = (s-3)(s-4)$$
$$E_3(s) = (s-5)(s-6)$$

Les zéros de $E_1(s)$, $E_2(s)$ et $E_3(s)$ sont donnés par

$$E_1(s) = 0 \quad\longrightarrow\quad s = \alpha_1 = 1,\ \ s = \alpha_2 = 2$$
$$E_2(s) = 0 \quad\longrightarrow\quad s = \beta_1 = 3,\ \ s = \beta_2 = 4$$
$$E_3(s) = 0 \quad\longrightarrow\quad s = \gamma_1 = 5,\ \ s = \gamma_2 = 6$$

Nous avons

$$E_1(\gamma_i)E_2(\gamma_i) > 0,\ i = 1,2$$
$$E_1(\beta_i)E_3(\beta_i) > 0,\ i = 1,2$$
$$E_2(\alpha_i)E_3(\alpha_i) > 0,\ i = 1,2$$

Nous pouvons remarquer qu'il n'existe pas $\epsilon_i = 1$ ou $\epsilon_i = -1$, $i = 1,2,3$, tels que

$$\epsilon_1\epsilon_2 E_1(\gamma_i)E_2(\gamma_i) < 0,\ i = 1,2$$
$$\epsilon_1\epsilon_3 E_1(\beta_i)E_3(\beta_i) < 0,\ i = 1,2$$
$$\epsilon_2\epsilon_3 E_2(\alpha_i)E_3(\alpha_i) < 0,\ i = 1,2$$

En conséquence, le triplet $\Big(E_1(s),\ E_2(s),\ E_3(s)\ \Big)$ ne vérifie pas la **SIP**. ■

La **SIP** est utilisée pour développer des conditions nécessaires et des conditions suffisantes pour la stabilisation simultanée de trois et de quatre systèmes. Cependant, lorsque le nombre de systèmes à stabiliser augmente ces conditions deviennent très compliquées et difficiles à résoudre.

Le problème de la stabilisation simultanée de trois systèmes étudiés dans [BGMR94, Blo94] dans l'espace des fractions stables (voir théorème 1.2.9) peut être reformulé dans l'espace des polynômes. On obtient le théorème suivant qui énonce une condition nécessaire et suffisante générale pour la stabilisation simultanée de trois systèmes dans l'espace des polynômes.

Théorème 1.3.2. *[Wei92] Soit trois systèmes $G_i(s) = N_i(s)/D_i(s)$, $i = 1,2,3$, avec $(N_i(s), D_i(s)) \in \mathcal{P}(s)$. Les trois systèmes sont simultanément stabilisables si et seulement s'il existe trois polynômes Hurwitz $H_1(s)$, $H_2(s)$ et $H_3(s)$ tels que*

$$\Delta_{12}(s)H_1(s) + \Delta_{31}(s)H_2(s) + \Delta_{23}(s)H_3(s) = 0 \tag{1.33}$$

où $\Delta_{12}(s)$, $\Delta_{23}(s)$ et $\Delta_{31}(s)$ sont copremiers entre eux dans $\mathbb{C}_+$ avec

$$\Delta_{12}(s) = N_1(s)D_2(s) - N_2(s)D_1(s) \tag{1.34a}$$
$$\Delta_{23}(s) = N_2(s)D_3(s) - N_3(s)D_2(s) \tag{1.34b}$$
$$\Delta_{31}(s) = N_3(s)D_1(s) - N_1(s)D_3(s) \tag{1.34c}$$

Notons qu'un résultat similaire au théorème 1.3.2 est donné dans [Gho86].

En se basant sur la propriété d'entrelacement forte (**SIP**), Wei [Wei92] a donné une condition nécessaire vérifiable pour la stabilisation simultanée de trois systèmes. Cette condition est présentée dans le théorème suivant.

Théorème 1.3.3. *[Wei92] Si $G_i(s) = N_i(s)/D_i(s)$, $i = 1, 2, 3$, sont simultanément stabilisables, alors le triplet ($\Delta_{12}(s)$, $\Delta_{23}(s)$, $\Delta_{31}(s)$) vérifie la **SIP**.*

L'équation (1.33) est un problème indécidable puisque sa résolution est équivalente à la stabilisation simultanée de 3 systèmes [BG93, BGMR94]. Wei [Wei92] a résolu partiellement le problème de la stabilisation simultanée de trois systèmes. En effet, Wei [Wei92] a donné une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un correcteur stabilisant simultanément deux systèmes dans $\mathbb{C}_+$ avec le troisième système stabilisé dans $\mathbb{R}_+$. Ce résultat est présenté dans le théorème ci-dessous.

Théorème 1.3.4. *[Wei92] Soit trois systèmes $G_i(s) = N_i(s)/D_i(s)$, $i = 1, 2, 3$, avec $(N_i(s), D_i(s)) \in \mathcal{P}(s)$ et $\Delta_{12}(s)$, $\Delta_{23}(s)$ et $\Delta_{31}(s)$ trois polynômes définis par (1.34). Supposons que $\Delta_{12}(s)$, $\Delta_{23}(s)$ et $\Delta_{31}(s)$ sont copremiers dans $\mathbb{C}_+$, alors il existe un contrôleur qui stabilise simultanément les deux systèmes $G_1(s)$ et $G_2(s)$ dans $\mathbb{C}_+$ et qui stabilise $G_3(s)$ dans $\mathbb{R}_+$ si et seulement s'il existe deux polynômes Hurwitz $H_1(s)$, $H_2(s)$ et un polynôme $H_3^{'}(s)$ n'ayant pas de zéros réels dans $\mathbb{C}_+$ tels que*

$$\Delta_{12}(s)H_1(s) + \Delta_{31}(s)H_2(s) + \Delta_{23}(s)H_3^{'}(s) = 0 \tag{1.35}$$

Le problème (1.35) a été résolu par [Wei92] et une condition nécessaire et suffisante vérifiable a été également démontrée.

Théorème 1.3.5. *[Wei92] Le problème (1.35) a une solution si et seulement si le triplet ($\Delta_{12}(s)$, $\Delta_{23}(s)$, $\Delta_{31}(s)$) vérifie la **SIP**.*

Exemple 1.3.3. Considérons les trois systèmes suivants

$$G_1(s) = \frac{s^2 - s + 3}{s^2 - 2s + 1}, \quad G_2(s) = \frac{4s + 2}{s - 1}, \quad G_3(s) = \frac{3s + 1}{s + 1}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
\Delta_{12}(s) &= -2s^3 + 3s^2 + 4s - 5 \\
\Delta_{23}(s) &= s^2 + 8s + 3 \\
\Delta_{31}(s) &= s^3 - 6s^2 - s - 2
\end{aligned}$$

Le triplet ($\Delta_{12}(s)$, $\Delta_{23}(s)$, $\Delta_{31}(s)$) vérifie la propriété d'entrelacement forte (**SIP**). En conséquence, il existe un correcteur $C(s)$ stabilisant simultanément deux des trois systèmes et stabilisant dans $\mathbb{R}_+$ le troisième système. ■

Les résultats dans [Wei92] ne permettent pas de résoudre totalement le problème de la stabilisation simultanée de trois systèmes, mais son approche a permis de développer des résultats tels que ceux donnés par [JA01] pour étudier la stabilisation simultanée de quatre systèmes.

1.3.2.2 Stabilisation simultanée de quatre systèmes dans l'espace des polynômes

Le théorème 1.3.6 est une extension des résultats présentés dans [Wei92] et donne une condition nécessaire et suffisante pour la stabilisation simultanée de quatre systèmes.

Théorème 1.3.6. *[JA01] Soit quatre systèmes $G_i(s) = N_i(s)/D_i(s)$, $i = 1, \ldots, 4$, avec $(N_i(s), D_i(s)) \in \mathcal{P}(s)$. Considérons les huit polynômes suivants*

$$\begin{aligned} F_1(s) &= N_3(s)\Delta_{24}(s), & F_1^{'}(s) &= D_3(s)\Delta_{24}(s), \\ F_2(s) &= N_4(s)\Delta_{31}(s), & F_2^{'}(s) &= D_4(s)\Delta_{31}(s), \\ F_3(s) &= N_1(s)\Delta_{42}(s), & F_3^{'}(s) &= D_1(s)\Delta_{42}(s), \\ F_4(s) &= N_2(s)\Delta_{13}(s), & F_4^{'}(s) &= D_2(s)\Delta_{13}(s), \end{aligned}$$

avec $\Delta_{ij}(s) = D_i(s)N_j(s) - D_j(s)N_i(s)$, les polynômes F_i et F_{i+1}, $i = 1, \ldots, 4$, ainsi que $F_i^{'}$ et $F_{i+1}^{'}$, $i = 1, \ldots, 4$, copremiers entre eux (F_5 et $F_5^{'}$ doivent être lus respectivement comme F_1 et $F_1^{'}$).

Les systèmes $G_i(s)$, $i = 1, \ldots, 4$ sont simultanément stabilisables si et seulement s'il existe quatre polynômes Hurwitz $H_i(s)$ $i = 1, \ldots, 4$ vérifiant

$$F_1(s)H_1(s) + F_2(s)H_2(s) + F_3(s)H_3(s) + F_4(s)H_4(s) = 0, \tag{1.36a}$$

$$F_1^{'}(s)H_1(s) + F_2^{'}(s)H_2(s) + F_3^{'}(s)H_3(s) + F_4^{'}(s)H_4(s) = 0. \tag{1.36b}$$

Dans [JA01], les auteurs ont montré que si l'une des deux équations polynomiales (1.36) a une solution alors il existe deux contrôleurs $C_1(s)$ et $C_2(s)$ ayant un dénominateur ou un numérateur commun de telle sorte que $C_1(s)$ stabilise simultanément $G_1(s)$ et $G_3(s)$ et $C_2(s)$ stabilise simultanément $G_2(s)$ et $G_4(s)$. Ce concept de stabilisation a été appelé "stabilisation simultanée en groupe" par [JA01].

Les conditions données dans [Wei92] et [JA01] pour la stabilisation simultanée de trois et quatre systèmes sont indécidables.

1.3.2.3 Stabilisation simultanée de n systèmes dans l'espace des polynômes

Concernant la question de la stabilisation simultanée de n systèmes, une approche différente de celles précédemment mentionnées dans les sections 1.3.2.1 et 1.3.2.2 a été adoptée dans [HŠT98], [HTŠ99a] et [HTŠ99b]. Le critère de stabilité polynomiale d'Hermite-Fujiwara est utilisé dans [HTŠ99a] et [HTŠ99b] pour donner des conditions d'existence d'un correcteur simultané d'ordre fixe pour stabiliser n systèmes.

Pour étudier le critère de stabilité d'Hermite-Fujiwara, nous avons besoin de la décomposition en partie paire et en partie impaire d'un polynôme réel $P(s)$ que nous rappelons ci-dessous.

1.3.2.3.1 Décomposition paire-impaire d'un polynôme

Un polynôme réel $P(s)$ peut être représenté comme suit

$$P(s) = P^e(s^2) + sP^o(s^2) = \sum_{i=0}^{m} \sigma_i s^i \tag{1.37}$$

où $P^e(s^2)$ et $P^o(s^2)$ désignent respectivement la partie paire et la partie impaire de $P(s)$ tels que

- si $\delta(P) = m = 2\ell$

$$P^e(s^2) = \sigma_0 + \sigma_2 s^2 + \ldots + \sigma_m s^{2\ell},$$
$$P^o(s^2) = \sigma_1 + \sigma_3 s^2 + \ldots + \sigma_{(m-1)} s^{2\ell-2},$$

- si $\delta(P) = m = 2\ell + 1$

$$P^e(s^2) = \sigma_0 + \sigma_2 s^2 + \ldots + \sigma_{(m-1)} s^{2\ell},$$
$$P^o(s^2) = \sigma_1 + \sigma_3 s^2 + \ldots + \sigma_m s^{2\ell}.$$

1.3.2.3.2 Critère de stabilité d'Hermite-Fujiwara

Dans ce paragraphe, nous nous sommes intéressés à la matrice d'Hermite-Fujiwara en tant que moyen d'analyse de la stabilité des polynômes. Certaines propriétés pertinentes de cette matrice sont examinées ci-dessous et seront utilisées dans le cadre de la stabilisation simultanée de n systèmes.

Définition 1.3.4. *[Dat78] Matrice Bézoutienne.*
Soit deux polynômes réels $P(s)$ et $Q(s)$ définis par

$$P(s) = p_0 + p_1 s + \ldots + p_m s^m$$
$$Q(s) = q_0 + q_1 s + \ldots + q_m s^m$$

La matrice Bézoutienne de $P(s)$ et $Q(s)$ est la matrice carrée symétrique $B(P(s), Q(s))$ d'ordre m dont les éléments sont donnés par la relation suivante

$$b_{jk} = \sum_{\ell=j+k-m-1}^{j-1} (p_{j+k-\ell-1} q_\ell - q_{j+k-\ell-1} p_\ell) \tag{1.38}$$

avec

$$p_\ell = q_\ell = 0 \text{ si } \ell > m \text{ ou } \ell < 0$$

Définition 1.3.5. *[Dat78] Matrice d'Hermite-Fujiwara.*
Soit deux polynômes $P(s)$ et $P^*(s)$ de degré m définis par

$$P(s) = P^e(s^2) + sP^o(s^2)$$
$$P^*(s) = P^e(s^2) - sP^o(s^2)$$

On note b_{jk} les éléments de $B(P(s), P^*(s))$, la matrice Bézoutienne de $P(s)$ et $P^*(s)$. La matrice d'Hermite-Fujiwara du polynôme $P(s)$, notée $H(P(s))$, est définie comme une matrice symétrique formée par les éléments h_{jk} avec $k \geqslant j \geqslant m$ vérifiant la relation suivante

$$h_{jk} = (-1)^j b_{jk}, \quad j, k = 0, \ldots, m-1 \tag{1.39}$$

Une propriété fondamentale de la matrice $H(P(s))$ est donnée par le théorème suivant.

Théorème 1.3.7. *[Dat78] Condition de stabilité d'Hermite-Fujiwara.*
Considérons un polynôme $P(s)$ de degré m. $P(s)$ est un polynôme Hurwitz si et seulement si la matrice d'Hermite-Fujiwara $H(P(s))$ est définie positive.

Exemple 1.3.4. Pour un polynôme de degré 3, la matrice d'Hermite-Fujiwara de $P(s)$ est la suivante

$$H(P(s)) = \begin{bmatrix} 2p_0p_1 & 0 & 2p_0p_3 \\ 0 & 2p_1p_2 - 2p_0p_3 & 0 \\ 2p_0p_3 & 0 & 2p_2p_3 \end{bmatrix}$$

Soit $P(s) = 2s^3 + 3s^2 + 1s + 1$. La matrice d'Hermite-Fujiwara de $P(s)$ est donnée par

$$H(P(s)) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

$H(P(s))$ est définie positive, donc le polynôme $P(s) \in \mathbb{H}$ est Hurwitz. ■

D'après la définition 1.3.5, les termes de la matrice d'Hermite-Fujiwara d'un polynôme $P(s)$ sont bilinéaires en fonction des coefficients de $P(s)$. Nous en déduisons la propriété suivante.

Propriété 1.3.1. *[HŠT98] Soit un réel z et un polynôme réel $P(s)$ de degré inférieur ou égal à m, alors nous avons*

$$H(P(s)) = z^2 H(P(s))$$

Définissons maintenant la matrice d'Hermite-Fujiwara de deux polynômes.

Définition 1.3.6. *[HŠT98] La matrice d'Hermite-Fujiwara de deux polynômes.*
Considérons deux polynômes $P_1(s)$ et $P_2(s)$ de degré respectivement inférieur ou égal à m définis par

$$P_1(s) = P_1^e(s^2) + sP_1^o(s^2)$$
$$P_2(s) = P_2^e(s^2) + sP_2^o(s^2)$$

avec $P_i^e(s^2)$ et $P_i^o(s^2)$ respectivement les parties paires et les parties impaires de $P_i(s)$.

La matrice d'Hermite-Fujiwara de $P_1(s)$ et $P_2(s)$, notée $H(P_1(s), P_2(s))$, est donnée par

$$H(P_1(s), P_2(s)) = H(P_1^e(s^2) + sP_2^o(s^2)) \tag{1.40}$$

L'application de la propriété 1.3.1 pour le cas de deux polynômes donne le résultat suivant.

Propriété 1.3.2. *[HŠT98] Soit deux réels z_0 et z_1 et deux polynômes réels $P_0(s)$ et $P_1(s)$ de degré inférieur ou égal à m, alors nous avons*

$$H(z_0P_0(s) + z_1P_1(s)) = z_0^2 H(P_0(s)) + z_0z_1\Big(H(P_0(s), P_1(s)) + H(P_1(s), P_0(s))\Big) + z_1^2 H(P_1(s))$$

La généralisation de la propriété 1.3.2 pour le cas de plusieurs polynômes réels est donnée par le lemme ci-dessous.

Lemme 1.3.2. *[HŠT98] Soit un vecteur $z = [z_0 \;\; z_1 \;\; \dots \;\; z_n]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $n+1$ polynômes réels $P_0(s)$,$P_1(s)$,..., $P_n(s)$ de degré inférieur ou égal à m. La relation suivante est vérifiée*

$$H\Big(\sum_{i=0}^{n} z_iP_i(s)\Big) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} z_jz_kH(P_j(s), P_k(s)) \tag{1.41}$$

1.3.2.3.3 Conditions d'existence d'un correcteur simultané d'ordre fixe pour n systèmes

Considérons n systèmes linéaires causaux $G_i(s) = N_i(s)/D_i(s)$, $i = 1, \ldots, n$, avec $(N_i(s), D_i(s)) \in \mathcal{P}(s)$ et un correcteur causal $C(s) = X(s)/Y(s)$ de degré fixé d avec $(X(s), Y(s)) \in \mathcal{P}(s)$. Les polynômes $X(s)$ et $Y(s)$ sont définis par

$$X(s) = z_0 + z_1 s + \ldots + z_d s^d \tag{1.42a}$$

$$Y(s) = z_{d+1} + z_{d+2} s + \ldots + z_{2d+1} s^d \tag{1.42b}$$

Le problème de la stabilisation simultanée de n systèmes qui est résolu dans [HTŠ99a] et [HŠT98] revient à déterminer $X(s)$ et $Y(s)$ tels que les polynômes $\Phi(G_i, C)(s)$ donnés par (1.32) soient Hurwitz.

Pour cela, nous définissons le vecteur colonne Z regroupant les paramètres du correcteur

$$Z = \begin{bmatrix} z_0 & z_1 & \ldots & z_r \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{r+1}, \quad r = 2d + 1$$

L'équation caractéristique en boucle fermée peut s'écrire comme

$$\Phi(G_i, C)(s) = \sum_{j=0}^{r} z_j P_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{1.43}$$

avec

$$P_{ij}(s) = s^j N_i(s),\ i = 1, \ldots, n,\ j = 0, \ldots, d$$
$$P_{ij}(s) = s^j D_i(s),\ i = 1, \ldots, n,\ j = d+1, \ldots, r$$

Rappelons que le polynôme $\Phi(G_i, C)(s)$ est Hurwitz si et seulement si la matrice d'Hermite-Fujiwara $H(\Phi(G_i, C)(s))$ est définie positive. D'après le lemme 1.3.2, la matrice d'Hermite Fujiwara de $\Phi(G_i, C)(s)$ s'écrit comme

$$H(\Phi(G_i, C)(s)) = \sum_{j=0}^{r} \sum_{k=0}^{r} z_j z_k H(P_{ij}(s), P_{ik}(s)), \quad i = 1, \ldots, n \tag{1.44}$$

Nous en déduisons le théorème suivant donnant une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un correcteur $C(s)$ de degré donné a priori stabilisant simultanément les n systèmes $G_i(s)$.

Théorème 1.3.8. *[HTŠ99a] Il existe un contrôleur $C(s) = X(s)/Y(s)$ de degré d stabilisant simultanément $G_i(s)$, $i = 1, \ldots, n$, si et seulement s'il existe z_j et z_k éléments du vecteur Z tels que les BMI suivantes*

$$\sum_{j=0}^{r} \sum_{k=0}^{r} z_j z_k H(P_{ij}(s), P_{ik}(s)) > 0 \quad i = 1, \ldots, n \tag{1.45}$$

sont satisfaites.

1.3.2.3.4 Formulation LMI

Pour résoudre ce problème d'optimisation non convexe, les BMI (1.45) ont été transformées en un problème LMI avec une contrainte de rang. Pour cela, les termes bilinéaires dans (1.45) sont représentés par

$$z_{jk} = z_j z_k \quad j,k = 0,1,\ldots,n-1 \tag{1.46}$$

où les z_{jk} sont les termes d'une matrice semi-définie positive W de rang égal à 1.

$$W = zz^T \geqslant 0 \tag{1.47}$$

En conséquence, le problème (1.45) devient un problème LMI avec une contrainte de rang, formulé comme suit [HŠT98, HTŠ99a]

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} z_{jk} H(p_{ij}(s), p_{ik}(s)) > 0, \qquad i = 1,\ldots,n \tag{1.48a}$$

$$W \geqslant 0, \tag{1.48b}$$

$$\operatorname{rang}(W) = 1 \tag{1.48c}$$

Il faut noter qu'un conservatisme est introduit dans la transformation des BMI (1.45) en un problème LMI avec une contrainte de rang (1.48). En effet, toutes les solutions de (1.48) vérifient (1.45), alors que certaines solutions de (1.45) peuvent ne pas satisfaire (1.48). Avec cette transformation, l'ensemble des solutions a donc été réduit. Notons qu'il n'y a pas d'équivalence entre (1.45) et (1.48), mais seulement une implication : (1.48) $\Longrightarrow$ (1.45).

1.3.2.3.5 L'algorithme de synthèse

Les LMI (1.48) sous une contrainte de rang sont des problèmes d'optimisation non convexes qu'il n'est pas possible de résoudre en utilisant les techniques classiques. Pour solutionner ce problème, une méthode de linéarisation est donnée dans [HB01]. Le problème d'optimisation (1.48) est ainsi formulé comme suit

$$\text{minimiser} \qquad \operatorname{trace}(W - zz^T) \tag{1.49a}$$

$$\text{sous les contraintes} \qquad \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} z_{jk} H(p_{ij}(s), p_{ik}(s)) > 0 \quad i = 1,\ldots,n \tag{1.49b}$$

$$\begin{bmatrix} W & z \\ z^T & 1 \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{1.49c}$$

Une autre idée est proposée dans [EOA97] pour formuler le problème d'optimisation (1.48).

$$\text{minimiser} \qquad \operatorname{trace}(\mathbf{WY}) \tag{1.50a}$$

$$\text{sous les contraintes} \qquad \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} z_{jk} H(p_{ij}(s), p_{ik}(s)) > 0 \quad i = 1,\ldots,n \tag{1.50b}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W & Z \\ Z^T & 1 \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{1.50c}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y & y \\ y^T & Z \end{bmatrix} \geqslant 0 \quad Y > 0 \tag{1.50d}$$

avec $Y = yy^T$.

Toutes les les solutions de (1.49) ou de (1.50) vérifient (1.48), alors que certaines solutions de (1.48) peuvent ne pas satisfaire (1.49) ou (1.50). Avec ces deux linéarisations, l'ensemble des solutions a donc été réduit. Notons qu'il n'y a pas d'équivalence entre (1.48) et (1.49) ou (1.50), mais seulement une implication : (1.49) $\Longrightarrow$ (1.48) et (1.50) $\Longrightarrow$ (1.48). Un avantage des problèmes d'optimisation (1.49) et (1.50), c'est qu'ils sont convexes et qu'il existe des solveurs efficients pour les résoudre avec Matlab, ce qui n'est pas le cas avec (1.45) ou (1.48) qui sont des problèmes non convexes dont on ne peut pas garantir que les solveurs existants trouveront une solution lorsque cette dernière existe.

Exemple 1.3.5. Soit les trois systèmes suivants

$$G_1(s) = \frac{-s+1}{2s+3}, \quad G_2(s) = \frac{4s+2}{5s-1}, \quad G_3(s) = \frac{3s+1}{s+1}$$

Choisissons un correcteur $C(s)$ d'ordre $d = 1$. Alors le vecteur Z est donné par

$$Z = \begin{bmatrix} z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}^T$$

La linéarisation et la résolution du problème d'optimisation (1.48) donne le résultat suivant

$$Z = \begin{bmatrix} 0.0076 & 0.0014 & 0.0055 & 0.0088 \end{bmatrix}^T$$

Nous en déduisons le correcteur simultané $C(s)$ stabilisant les trois systèmes $G_1(s)$, $G_2(s)$ et $G_3(s)$ est

$$C(s) = \frac{0.0014s + 0.0076}{0.0088s + 0.0055}$$

■

1.3.2.3.6 Examen de la méthode

Nous constatons que dans [HŠT98] et [HTŠ99a], Henrion *et al.* ont combiné les méthodes polynomiales basées sur le critère d'Hermite Fujiwara et une technique d'optimisation BMI afin de développer une méthode de synthèse de contrôleurs simultanés d'ordre fixe pour n systèmes dans l'espace des polynômes.

Les BMI sont des problèmes d'optimisation non-convexes et la résolution des BMI est NP difficile [BT97, BT00] : c'est-à-dire qu'il n'est pas possible de garantir de trouver toujours une solution en une durée qui serait une fonction polynômiale du nombre des inconnues. Il est donc nécessaire de proposer des méthodes d'approximation efficaces qui peuvent fournir une solution lorsqu'elle existe. Ainsi, le problème BMI (1.45) a été transformé en un problème LMI avec une contrainte supplémentaire non convexe de rang. Cette formulation a permis de concevoir des algorithmes heuristiques. Selon [HŠT98] et [HTŠ99a], la convergence de ces algorithmes vers l'optimum global n'est pas garantie et la résolution numérique de ce problème d'optimisation est difficile. Il faut noter que cette complexité numérique dépend du nombre des inconnues, c'est-à-dire de l'ordre du contrôleur et de l'ordre et du nombre de systèmes à stabiliser.

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le problème de la commande simultanée des systèmes LTI dans l'espace des fractions stables $\mathcal{H}_\infty$ ainsi que dans l'espace des polynômes.

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons introduit les notions de la stabilisation simultanée dans l'espace $\mathcal{H}_\infty$. Puis, nous avons présenté l'état de l'art de la commande simultanée pour deux systèmes, ensuite pour trois et plus systèmes. Nous avons également montré que, contrairement au cas de deux systèmes, il n'existe pas de conditions nécessaires et suffisantes vérifiables pour trois systèmes ou plus dans l'espace des fractions stables. En conséquence, il n'existe pas de méthodes efficaces permettant de synthétiser des contrôleurs simultanés pour 3 systèmes et plus.

La deuxième partie de ce chapitre a été consacrée à l'étude du problème de la stabilisation simultanée dans l'espace des polynômes. Nous avons également détaillé l'état de l'art de la commande simultanée dans l'espace des polynômes en présentant les différents outils d'analyse exploités. Nous avons ainsi présenté des résultats concernant la commande simultanée de trois et de quatre systèmes. Pour conclure cette partie, nous avons donné une méthode de synthèse de contrôleurs simultanés d'ordre fixe pour n systèmes. Malheureusement, cette formulation a conduit à un problème d'optimisation non convexe difficile à résoudre. Dans les chapitres suivants, nous considérerons une autre formulation convexe à ce problème en utilisant le critère d'Hermite-Biehler.

Chapitre 2

Etat de l'art de la stabilisation simultanée d'un segment de systèmes

2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter, d'une manière synthétique, les résultats proposés dans la littérature pour la commande simultanée d'un segment de systèmes [Gho85, Gho86, Gho88, ADPD95, Fon08]. Ces résultats ont été développés dans l'espace des fonctions rationnelles stable $\mathcal{H}_\infty$ [Gho86, Gho88, ADPD95], ainsi que dans l'espace des polynômes [Gho85, Fon08].

Ce chapitre est organisé en quatre parties.

Dans la première partie, nous présentons le problème de la commande simultanée d'un segment de systèmes LTI avec un contrôleur LTI comme l'ont formulé [Gho85, Gho86, Gho88, ADPD95, Fon08].

La deuxième partie est consacrée à l'étude de l'hurwitzité d'un segment de polynômes en s'appuyant sur différents résultats fondamentaux : le théorème de franchissement de la frontière [BCK95], le principe d'exclusion du zéro [BCK95], le lemme du segment [BCK95] et les fonctions strictement réelles positives (SPR) [Zeb96, ADPD95].

Dans la troisième partie, des résultats concernant l'analyse de la stabilisabilité d'un segment de systèmes sont développés. Des conditions dans l'espace des polynômes formulées dans [Fon08] sont présentées. Ces conditions permettent de vérifier la stabilisabilité de cette classe de systèmes. Des conditions suffisantes d'existence d'un contrôleur simultané d'ordre fixe sont également rappelées [Gho85]. Finalement, des résultats donnés dans [Gho86] dans l'espace des fractions stables $\mathcal{H}_\infty$ sont énoncés.

Pour conclure ce chapitre, une méthode pour synthétiser des contrôleurs simultanés pour un segment de systèmes est détaillée dans la quatrième partie. Il s'agit de la méthode proposée par [ADPD95] en utilisant la technique d'interpolation des fonctions réelles positives [YS67, Pat96, Bat04, OMK91].

2.2 Formulation du problème

2.2.1 Définition d'un segment de systèmes

Un segment de systèmes est défini par

$$G_\lambda(s) = \frac{\lambda N_1(s) + (1-\lambda)N_2(s)}{\lambda D_1(s) + (1-\lambda)D_2(s)}, \qquad \lambda \in [0,\ 1] \tag{2.1}$$

avec $N_1(s)$, $N_2(s)$, $D_1(s)$ et $D_2(s)$ des polynômes réels.

Les segments de systèmes $G_\lambda(s)$ sont utilisés pour modéliser des procédés industriels dans [DA87, PLA06, GAT01]. Par exemple dans [GAT01], cette modélisation sert à contrôler la concentration du produit d'un réacteur exothermique continu et elle est utilisée pour commander un manipulateur dans [PLA06].

Le segment de systèmes (2.1) peut être vu comme un continuum de fonctions de transfert décrit par les deux systèmes aux extrémités $G_1(s)$ et $G_2(s)$ tels que

$$G_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_{1k}s^k}{\sum_{k=0}^{m} b_{1k}s^k}, \qquad G_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_{2k}s^k}{\sum_{k=0}^{m} b_{2k}s^k}. \tag{2.2}$$

Ces deux systèmes aux extrémités du segment sont obtenus respectivement en posant $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$ dans (2.1), où a_{1k}, a_{2k}, b_{1k} et b_{2k} sont des réels.

En posant

$$\begin{aligned} N_\lambda(s) &= \lambda N_1(s) + (1-\lambda)N_2(s) \\ D_\lambda(s) &= \lambda D_1(s) + (1-\lambda)D_2(s) \end{aligned}$$

le segment de systèmes (2.1) se réécrit comme suit

$$G_\lambda(s) = \frac{N_\lambda(s)}{D_\lambda(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{n} \Big(\lambda a_{1k} + (1-\lambda)a_{2k}\Big)s^k}{\sum_{k=0}^{m} \Big(\lambda b_{1k} + (1-\lambda)b_{2k}\Big)s^k} \tag{2.3}$$

Hypothèse 2.2.1. *Dans ce mémoire, concernant le segment de systèmes $G_\lambda(s)$ défini par* (2.1), *nous considérons les hypothèses suivantes :*

1) $\delta(D_1) = \delta(D_2)$, $\delta(D_1) \geqslant \delta(N_1)$ *et* $\delta(D_2) \geqslant \delta(N_2)$,

2) *les coefficients des termes de plus haut degré b_{1m} et b_{2m} des polynômes $D_1(s)$ et $D_2(s)$ sont de même signe,*

3) *le résultant des deux polynômes $N_\lambda(s)$ et $D_\lambda(s)$ est non nul (voir annexe D).*

Nous justifions les hypothèses 1) et 2) par la nécessité d'avoir le segment de polynômes $D_\lambda(s)$ de degré constant pour tout $\lambda \in [0,\ 1]$. Cela permet d'assurer la causalité de $G_\lambda(s)$. L'hypothèse 3) permet de garantir que $N_\lambda(s)$ et $D_\lambda(s)$ n'ont pas de zéros communs.

2.2.2 Stabilisation simultanée d'un segment de systèmes

Dans ce chapitre, nous examinons les conditions données dans la littérature pour stabiliser le segment de systèmes (2.1) avec un unique compensateur $C(s)$ linéaire causal à temps invariant de la forme suivante

$$C(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} \tag{2.4}$$

avec $X(s)$ et $Y(s)$ deux polynômes réels vérifiant $\delta(X) \leqslant \delta(Y)$.

De plus, nous considérons que le système $G_\lambda(s)$ bouclé avec $C(s)$ doit satisfaire les conditions de la stabilité données dans le lemme 1.3.1. C'est pourquoi, dans un premier temps, nous rappelons les conditions de stabilité en boucle fermée des systèmes linéaires explicitées dans le chapitre 1 pour les appliquer à la représentation (2.1).

Définition 2.2.1. *Stabilité et stabilisation du segment $G_\lambda(s)$.*
Nous dirons que le segment de systèmes $G_\lambda(s)$ bouclé avec le correcteur $C(s)$ est stable pour tout $\lambda \in [0,\ 1]$ si et seulement si chaque système de ce segment est stable avec le correcteur $C(s)$ au sens de la définition 1.2.10.

Le lemme suivant donne des conditions d'existence d'un correcteur $C(s)$ stabilisant le segment de systèmes $G_\lambda(s)$ en boucle fermée.

Lemme 2.2.1. *Le compensateur $C(s)$ donné par* (2.4) *stabilise le segment de systèmes $G_\lambda(s)$ défini par* (2.1) *si et seulement si le polynôme caractéristique en boucle fermée $\Phi(G_\lambda, C)(s)$ défini pat*

$$\Phi(G_\lambda, C)(s) = \lambda\Phi(G_1, C)(s) + (1-\lambda)\Phi(G_2, C)(s), \qquad \forall\, \lambda \in [0,\ 1], \tag{2.5}$$

avec

$$\Phi(G_1, C)(s) = N_1(s)X(s) + D_1(s)Y(s) \tag{2.6a}$$
$$\Phi(G_2, C)(s) = N_2(s)X(s) + D_2(s)Y(s) \tag{2.6b}$$

vérifie les deux conditions suivantes

1) $\Phi(G_\lambda, C)(s)$ *est Hurwitz,*

2) $\delta(\Phi(G_\lambda, C)(s)) = \delta(D_\lambda(s)Y(s)), \qquad \forall\, \lambda \in [0,\ 1].$

Démonstration. Le compensateur $C(s)$ stabilise $G_\lambda(s)$ si et seulement si les deux conditions du lemme 1.3.1 sont vérifiées pour tout $\lambda \in [0,\ 1]$, ce qui est le cas si les conditions les deux conditions du lemme 2.2.1 sont satisfaites. •

Avant d'examiner la question de la stabilisation simultanée du segment de systèmes (2.1) avec un correcteur $C(s)$, il est nécessaire d'étudier les conditions de stabilité données par le lemme 2.2.1. En d'autres termes, il est nécessaire d'étudier l'hurwitzité du polynôme $\Phi(G_\lambda, C)(s)$ donné par (2.5) pour tout $\lambda \in [0,\ 1]$.

2.3 Etude des conditions de l'hurwitzité d'un segment de polynômes

Dans cette partie, nous allons présenter des conditions pour l'hurwitzité d'un segment de polynômes à partir des résultats suivants :

- le théorème du franchissement de la frontière [BCK95] dans la section 2.3.1,
- le principe d'exclusion du zéro [BCK95] dans la section 2.3.2,
- le lemme du segment [BCK95] dans la section 2.3.3,
- les fonctions strictement réelles positives notées SPR [ADPD95, Zeb96] dans la section 2.3.4.

Donnons pour commencer la définition d'un segment de polynômes.

Définition 2.3.1. *Segment de polynômes.*
Le segment de polynômes $P_\lambda(s)$ est défini par

$$P_\lambda(s) = \lambda P_1(s) + (1-\lambda)P_2(s), \qquad \lambda \in [0,\ 1] \tag{2.7}$$

avec $\delta(P_1) = \delta(P_2) = m$ *et*

$$P_1(s) = \sum_{i=0}^{m} c_i s^i = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \ldots + c_m s^m, \tag{2.8}$$

$$P_2(s) = \sum_{i=0}^{m} d_i s^i = d_0 + d_1 s + d_2 s^2 + \ldots + d_m s^m, \tag{2.9}$$

Ce segment de polynômes peut se réécrire sous la forme suivante

$$P_\lambda(s) = \sum_{i=0}^{m} p_i(\lambda) s^i = p_0(\lambda) + p_1(\lambda) s + \ldots + p_m(\lambda) s^m \tag{2.10}$$

avec $p_i(\lambda) = \lambda c_i + (1-\lambda) d_i$, $i = 0, \ldots, m$.

Par hypothèse, nous choisissons $p_m(\lambda) \neq 0$, pour tout $\lambda \in [0,\ 1]$. Nous avons donc

$$\frac{c_m}{d_m} \neq -\frac{(1-\lambda)}{\lambda} \tag{2.11}$$

On en déduit que $\dfrac{c_m}{d_m} \notin\ ]-\infty,\ \ 0[$. En conséquence, c_m et d_m doivent être de même signe. Nous pouvons remarquer que (2.11) justifie l'item 2) dans l'hypothèse 2.2.1 pour l'équation (2.3).

D'une façon générale, l'hurwitzité des deux polynômes aux extrémités du segment ne garantit pas l'hurwitzité de tous les polynômes $P_\lambda(s)$ donnés par (2.7) pour tout $\lambda \in [0,\ 1]$. Par exemple, considérons le segment de polynômes $P_\lambda(s)$ défini par les extrémités suivantes

$$P_1(s) = s^4 + 2s^3 + 4s^2 + s + 1$$
$$P_2(s) = s^4 + 2s^3 + 8s^2 + 3s + 9$$

Nous pouvons observer que les deux polynômes $P_1(s)$ et $P_2(s)$ sont Hurwitz, mais que le polynôme $(P_1(s) + P_2(s))/2$ n'est pas Hurwitz car il possède une racine imaginaire pure.

Puisqu'il n'est pas suffisant de tester la stabilité de ses extrémités pour étudier l'hurwitzité d'un segment de polynômes, plusieurs résultats, donnés dans [BCK95, ADPD95, Zeb96] et présentés dans les sections suivantes, sont utilisés.

2.3.1 Etude de l'hurwitzité d'un segment polynomial avec le théorème du franchissement de la frontière

Selon (2.10), nous pouvons constater que les coefficients $p_0(\lambda)$, $p_1(\lambda)$, ..., $p_m(\lambda)$ sont des fonctions continues de λ avec $\lambda \in [0,\ 1]$. Donc chaque polynôme de la famille $P_\lambda(s)$ a ses coefficients qui dépendent d'une façon continue du paramètre λ. Dans [BCK95], il est démontré que, lorsque les coefficients du polynôme $P_\lambda(s)$ varient de manière continue, alors ses racines varient aussi de manière continue. Cette propriété permet de déduire le théorème du franchissement de frontière pour le polynôme $P_\lambda(s)$. Pour cela, nous définissons l'ensemble des complexes $\mathbb{C} = \mathbb{C}_- \cup \mathbb{C}_+$ et $\mathcal{I}$ l'axe des imaginaires représentant la frontière de $\mathbb{C}_-$ et de $\mathbb{C}_+$.

Théorème 2.3.1. *[BCK95] Théorème du franchissement de frontière.*
Soit $P_\lambda(s)$*, une famille de polynômes définie par* (2.7)*. Si* $P_1(s)$ *a toutes ses racines dans* $\mathbb{C}_-$ *et si* $P_2(s)$ *a au moins une racine dans* $\mathbb{C}_+$ *alors il existe au moins une valeur de* $\lambda \in (0,\ 1]$ *telle que les deux conditions suivantes sont satisfaites.*

- *$P_\lambda(s)$ a toutes ses racines dans $\mathbb{C}_- \cup \mathcal{I}$,*
- *$P_\lambda(s)$ a au moins une racine sur $\mathcal{I}$.*

Le théorème du franchissement de la frontière est utilisé pour détecter la présence des polynômes non Hurwitz dans une famille de polynômes $P_\lambda(s)$. En effet, pour étudier l'hurwitzité de $P_\lambda(s)$ pour tout $\lambda \in [0,\ 1]$, il suffit de regarder s'il existe un polynôme Hurwitz de $P_\lambda(s)$ et d'examiner si le polynôme $P_\lambda(s)$ n'a pas de racine sur l'axe des imaginaires du plan de Nyquist. Ce qui revient à dire que, pour toute valeur de $\lambda \in [0,\ 1]$, pour $s = j\omega$, $P_\lambda(j\omega)$ ne peut pas contenir l'origine en tant que racine avec ω variant dans l'intervalle $]0,\ +\infty[$.

2.3.2 Etude de l'hurwitzité d'un segment polynomial avec le principe d'exclusion du zéro

Nous donnons dans le théorème suivant une autre formulation du théorème du franchissement de la frontière appelé "principe d'exclusion du zéro".

Théorème 2.3.2. *[BCK95] Principe d'exclusion du zéro.*
Considérons la famille de polynômes $P_\lambda(s)$ définie dans (2.7) de degré constant. Supposons que $P_\lambda(s)$ contient au moins un polynôme Hurwitz, alors $P_\lambda(s)$ est Hurwitz si et seulement si

$$P_\lambda(j\omega) \neq 0 \quad \forall \omega \in]0, +\infty[, \quad \forall \lambda \in [0,\ 1] \tag{2.12}$$

La relation (2.12) implique que

$$\forall\, \lambda \in [0,\ 1] \quad \text{et} \quad \forall\, \omega \in]0, +\infty[, \quad \frac{P_2(j\omega)}{P_1(j\omega)} \neq -\frac{\lambda}{1-\lambda} \tag{2.13}$$

Si la condition (2.13) est satisfaite alors la fonction rationnelle $P_2(s)/P_1(s)$ ne coupe pas l'axe réel négatif du diagramme de Nyquist.

Exemple 2.3.1. Considérons les deux polynômes suivants :

$$P_1(s) = s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 4s + 1 \tag{2.14}$$

$$P_2(s) = s^4 + 5s^3 + 4s^2 + 5s + 1 \tag{2.15}$$

Nous allons examinons si $P_\lambda(s)$ est Hurwitz avec le théorème 2.3.2. Pour cela nous représentons le diagramme de Nyquist de la fonction rationnelle $P_2(s)/P_1(s)$ dans la figure 2.1. Nous observons que la fonction rationnelle $P_2(s)/P_1(s)$ ne coupe pas l'axe réel négatif du diagramme de Nyquist. De plus, $P_1(s)$ et $P_2(s)$ sont deux polynômes Hurwitz de même degré. Alors $P_\lambda(s)$ est Hurwitz pour toute valeur de $\lambda \in [0,\ 1]$. ■

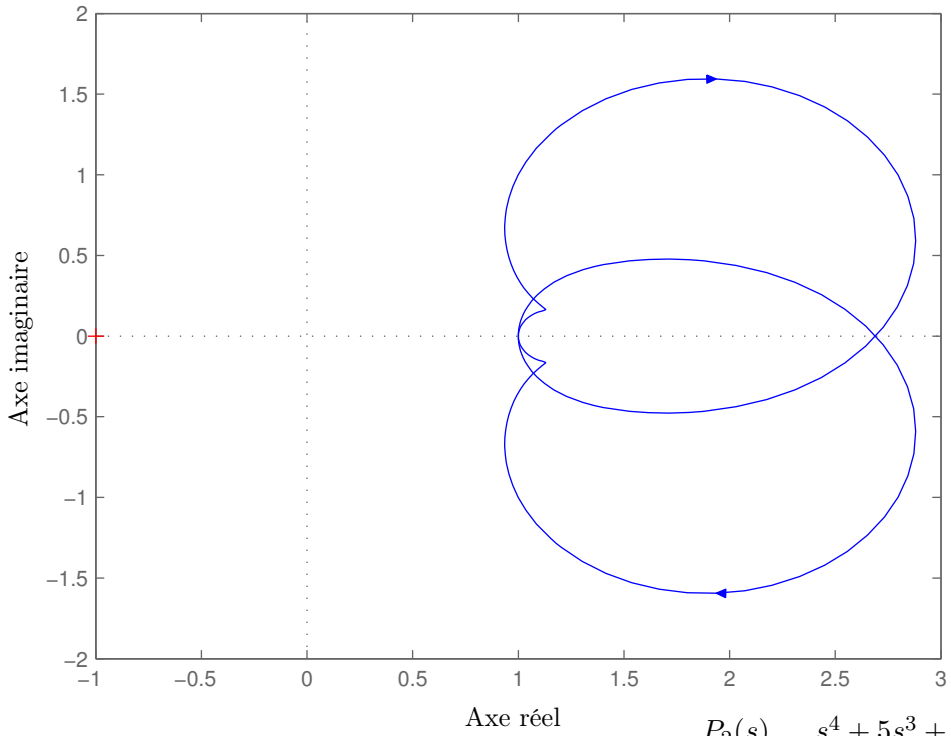

FIGURE 2.1 – Diagramme de Nyquist de la fonction rationnelle $\dfrac{P_2(s)}{P_1(s)} = \dfrac{s^4+5s^3+4s^2+5s+1}{s^4+3s^3+3s^2+4s+1}$

2.3.3 Etude de l'hurwitzité d'un segment polynomial avec le lemme du segment

Rappelons tout d'abord la décomposition en partie paire et en partie impaire d'un polynôme à coefficients réels $P(s)$

$$P(s) = P^e(s^2) + sP^o(s^2) \tag{2.16}$$

où $P^e(s^2)$ et $P^o(s^2)$ sont définies dans le chapitre 1, au paragraphe 1.3.2.3.1. Définissons $P^{even}(s)$ et $P^{odd}(s)$ comme suit

$$\begin{aligned} P^{even}(s) &= P^e(s^2) \\ P^{odd}(s) &= P^o(s^2) \end{aligned}$$

et nous avons

$$P(s) = P^{even}(s) + sP^{odd}(s) \tag{2.17}$$

En utilisant cette formulation, nous pouvons énoncer le lemme du segment. Ce lemme donne une condition nécessaire et suffisante d'hurwitzité du segment polynomial $P_\lambda(s)$.

Lemme 2.3.1. *[BCK95] Lemme du segment.*
Soit $P_1(s) = P_1^{even}(s) + sP_1^{odd}(s)$ et $P_2(s) = P_2^{even}(s) + sP_2^{odd}(s)$, deux polynômes Hurwitz de même degré avec les coefficients des termes de plus haut degré de même signe. Le segment de polynômes $P_\lambda(s)$ donné par (2.7) est Hurwitz si et seulement s'il n'existe aucun réel $\omega > 0$ tel que les relations suivantes

$$P_1^{even}(j\omega)P_2^{odd}(j\omega) - P_1^{odd}(j\omega)P_2^{even}(j\omega) = 0 \tag{2.18a}$$

$$P_1^{even}(j\omega)P_2^{even}(j\omega) \leqslant 0 \tag{2.18b}$$

$$P_1^{odd}(j\omega)P_2^{odd}(j\omega) \leqslant 0 \tag{2.18c}$$

sont satisfaites.

Le théorème suivant est une déduction du lemme 2.3.1.

Théorème 2.3.3. *[Fon08] Soit $P_1(s) = P_1^{even}(s) + sP_1^{odd}(s)$ et $P_2(s) = P_2^{even}(s) + sP_2^{odd}(s)$, deux polynômes Hurwitz de même degré avec les coefficients des termes de plus haut degré de même signe. Supposons qu'il existe des réels $\omega_i > 0$ tels que*

$$P_1^{even}(j\omega_i)P_2^{odd}(j\omega_i) - P_1^{odd}(j\omega_i)P_2^{even}(j\omega_i) = 0 \tag{2.19}$$

Le polynôme $P_\lambda(s)$ donné par (2.7) *est Hurwitz si et seulement si les ω_i vérifient soit la contrainte* (2.20a)*, soit la contrainte* (2.20b) *avec*

$$P_1^{even}(j\omega_i)P_2^{even}(j\omega_i) > 0 \tag{2.20a}$$

$$P_1^{odd}(j\omega_i)P_2^{odd}(j\omega_i) > 0 \tag{2.20b}$$

Exemple 2.3.2. Considérons les deux polynômes donnés par (2.21). Vérifions que $P_\lambda(s)$ défini par (2.7) est Hurwitz en appliquant le théorème 2.3.3 avec

$$P_1(s) = s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 4s + 1 \tag{2.21a}$$

$$P_2(s) = 2s^4 + 5s^3 + 2s^2 + 5s + 1 \tag{2.21b}$$

Il existe un réel $\omega_1 = 1.3247$ tel que l'équation (2.19) est vérifiée. De plus, la contrainte (2.20a) est satisfaite car

$$P_1^{even}(j\omega_1)P_2^{even}(j\omega_1) = 5.9257$$

Puisque $P_1(s)$ et $P_2(s)$ sont deux polynômes Hurwitz de même degré, alors le polynôme $P_\lambda(s)$ est Hurwitz. ■

2.3.4 Hurwitzité d'un segment polynomial avec les fonctions strictement réelles positives

Dans cette partie, les fonctions strictement réelles positives (SPR) sont utilisées pour démontrer l'hurwitzité du segment de polynômes $P_\lambda(s)$ pour tout $\lambda \in [0,\ 1]$. Rappelons la définition et les propriétés de ces fonctions.

Définition 2.3.2. *[MD95]Fonction strictement réelle positive (SPR).*
Soit une fonction rationnelle $u(s) = P_2(s)/P_1(s)$ avec $P_1(s)$ et $P_2(s)$ deux polynômes réels. La fonction rationnelle $u(s)$ est strictement réelle positive si

1) *$P_1(s)$ est un polynôme Hurwitz,*

2) *$\mathcal{R}_e(u(j\omega)) > 0$, $\forall\omega \geqslant 0$,*

3) *le degré relatif de $u(s)$ est -1, 0 ou 1.*

Certaines propriétés des fonctions SPR sont données ci-après.

Propriété 2.3.1. *[ADPD95, BTV01] Si $u(s)$ est une fonction SPR, alors la condition 2) de la définition 2.3.2 est équivalente à $|\arg(u(j\omega))| < \dfrac{\pi}{2}$, $\forall\omega \geqslant 0$.*

Propriété 2.3.2. *[AM71] Soit $u(s) = P_2(s)/P_1(s)$ avec $P_1(s)$ et $P_2(s)$ deux polynômes réels. Si $u(s)$ est une fonction SPR, alors $P_2(s)$ est Hurwitz.*

Définition 2.3.3. *[DB87, ADPD95] Fonction bicausale strictement réelle positive (EP-SPR). Une fonction bicausale strictement réelle positive (EP-SPR) est une fonction SPR avec un degré relatif nul.*

Propriété 2.3.3. *[DFM92] Si $u(s)$ est une fonction EP-SPR, alors $u(s) \in \mathcal{U}$.*

Ces résultats peuvent être utilisés pour étudier l'hurwitzité d'un segment de polynômes.

Théorème 2.3.4. *[Zeb96] Soit $P_1(s)$ et $P_2(s)$ deux polynômes réels. Si $P_2(s)/P_1(s)$ est une fonction EP-SPR, alors le segment polynomial $P_\lambda(s)$ défini par (2.7) est Hurwitz pour tout $\lambda \in [0,\ 1]$.*

Exemple 2.3.3. Soit $P_1(s)$ et $P_2(s)$ deux polynômes représentant les extrémités du segment de polynômes $P_\lambda(s)$ et donnés par

$$P_1(s) = s^3 + 4s^2 + 2s + 1 \tag{2.22a}$$

$$P_2(s) = s^3 + 6s^2 + 3s + 2 \tag{2.22b}$$

$P_1(s)$ et $P_2(s)$ sont deux polynômes Hurwitz et de même degré. De plus, d'après la figure 2.2 la condition 2) de la définition 2.3.2 est vérifiée. Donc $P_2(s)/P_1(s)$ est une fonction EP-SPR. En conséquence, le segment de polynômes $P_\lambda(s)$ est Hurwitz pour tout $\lambda \in [0,\ 1]$. ■

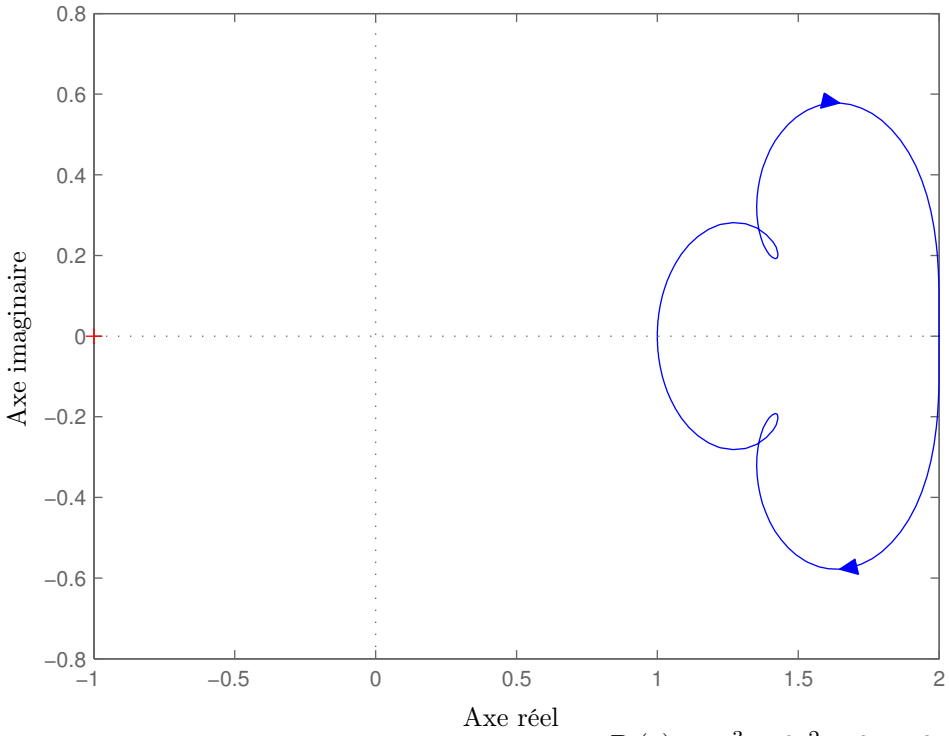

FIGURE 2.2 – Diagramme de Nyquist de $\dfrac{P_2(s)}{P_1(s)} = \dfrac{s^3 + 6s^2 + 3s + 2}{s^3 + 4s^2 + 2s + 1}$

Dans le théorème ci-dessous, nous rappelons une condition nécessaire et suffisante donnée dans [PD97] pour vérifier l'hurwitzité d'un segment de polynômes.

Théorème 2.3.5. *[PD97] $P_\lambda(s)$ défini par (2.7) est Hurwitz pour tout $\lambda \in [0,\ 1]$ si et seulement si l'une des trois conditions suivantes est vérifiée :*

- *$P_2(j\omega)/P_1(j\omega)$ est une fonction appartenant à $\mathcal{U}$ avec une marge de gain infinie,*
- *$P_2(j\omega)/P_1(j\omega)$ est une fonction appartenant à $\mathcal{U}$ avec $|\arg(P_2(j\omega)/P_1(j\omega))| < \pi$,*
- *le diagramme de Nyquist de $P_2(j\omega)/P_1(j\omega)$ ne coupe pas l'axe des réels négatifs.*

Dans la section suivante, les notions présentées concernant l'hurwitzité d'un segment de polynômes seront utilisées pour étudier les conditions de stabilisabilité du segment de systèmes $G_\lambda(s)$.

2.4 Analyse de la stabilisabilité d'un segment de systèmes $G_\lambda(s)$

L'objectif de cette partie est d'étudier les conditions de stabilisabilité d'un segment de systèmes $G_\lambda(s)$ défini par (2.1) dans l'espace des polynômes et dans l'espace des fonctions rationnelles $\mathcal{H}_\infty$.

2.4.1 Condition de stabilisabilité d'un segment de systèmes $G_\lambda(s)$ dans l'espace des polynômes

2.4.1.1 Etude de la stabilisabilité d'un segment $G_\lambda(s)$ avec le lemme du segment

A partir du théorème 2.3.3, Fonte a proposé dans [Fon08] des conditions nécessaires et suffisantes pour vérifier la stabilisabilité simultanée du segment de systèmes $G_\lambda(s)$ défini par (2.1) lorsqu'il existe un compensateur simultané $C(s) = X(s)/Y(s)$ qui stabilise simultanément les extrémités $G_1(s)$ et $G_2(s)$ du segment de systèmes $G_\lambda(s)$ donné par (2.1).

Nous allons appliquer le théorème 2.3.3 sur le segment de polynômes $\Phi(G, C)(s)$ donné par (2.5).

Les polynômes caractéristiques $\Phi(G_1, C)(s)$ et $\Phi(G_2, C)(s)$ donnés par (2.6) sont réécrits comme suit en posant $s = j\omega$

$$\begin{aligned}\Phi(G_1, C)(j\omega) &= \Phi(G_1, C)^e(j\omega) + j\omega\Phi(G_1, C)^o(j\omega)\\ \Phi(G_2, C)(j\omega) &= \Phi(G_2, C)^e(j\omega) + j\omega\Phi(G_2, C)^o(j\omega)\end{aligned}$$

Le calcul de $\Phi(G_i, C)^e(j\omega)$ et $\Phi(G_i, C)^o(j\omega)$, $i = 1, 2$, donne

$$\begin{aligned}\Phi(G_i, C)^e(j\omega) &= N_i^e(j\omega)X^e(j\omega) - \omega^2 N_i^o(j\omega)X^o(j\omega) + D_i^e(j\omega)Y^e(j\omega) - \omega^2 D_i^o(j\omega)Y^o(j\omega)\\ \Phi(G_i, C)^o(j\omega) &= N_i^e(j\omega)X^o(j\omega) + N_i^o(j\omega)X^e(j\omega) + D_i^e(j\omega)Y^o(j\omega) + D_i^o(j\omega)Y^e(j\omega)\end{aligned}$$

Par conséquent, la relation (2.19) peut être exprimée en fonction de $C(s)$ comme suit

$$\varphi_p(j\omega)^T M_p(j\omega)\psi_p(j\omega) = 0 \tag{2.23}$$

avec

$$\begin{aligned}\varphi_p(j\omega)^T &= \begin{bmatrix} X^o(j\omega) & X^e(j\omega) & Y^o(j\omega) & Y^e(j\omega)\end{bmatrix}\\ \psi_p(j\omega)^T &= \begin{bmatrix} X^e(j\omega) & -\omega^2 X^o(j\omega) & Y^e(j\omega) & -\omega^2 Y^o(j\omega)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$M_p(j\omega) = \begin{bmatrix} 0 & m_{1,2}(j\omega) & m_{1,3}(j\omega) & m_{1,4}(j\omega) \\ -m_{1,2}(j\omega) & 0 & m_{2,3}(j\omega) & m_{2,4}(j\omega) \\ -m_{1,3}(j\omega) & -m_{2,3}(j\omega) & 0 & m_{3,4}(j\omega) \\ -m_{1,4}(j\omega) & -m_{2,4}(j\omega) & -m_{3,4}(j\omega) & 0 \end{bmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} m_{1,2}(j\omega) &= N_1^o(j\omega)N_2^e(j\omega) - N_1^e(j\omega)N_2^o(j\omega) \\ m_{1,3}(j\omega) &= D_1^e(j\omega)N_2^e(j\omega) - N_1^e(j\omega)D_2^e(j\omega) \\ m_{1,4}(j\omega) &= D_1^o(j\omega)N_2^e(j\omega) - N_1^e(j\omega)D_2^o(j\omega) \\ m_{2,3}(j\omega) &= D_1^e(j\omega)N_2^o(j\omega) - N_1^o(j\omega)D_2^e(j\omega) \\ m_{2,4}(j\omega) &= D_1^o(j\omega)N_2^o(j\omega) - N_1^o(j\omega)D_2^o(j\omega) \\ m_{3,4}(j\omega) &= D_1^o(j\omega)D_2^e(j\omega) - D_1^e(j\omega)D_2^o(j\omega) \end{aligned}$$

En se basant sur le théorème 2.3.3, Fonte donne dans [Fon08] des conditions explicites qui nous permettent de tester la stabilisabilité du segment de polynômes $\Phi(G_\lambda, C)(s)$ pour tout $\lambda \in [0,\ 1]$ en admettant qu'il existe un contrôleur $C(s)$ stabilisant simultanément les deux extrémités $G_1(s)$ et $G_2(s)$.

Théorème 2.4.1. *[Fon08] Supposons qu'il existe deux polynômes Hurwitz $\Phi(G_1, C)(s)$ et $\Phi(G_2, C)(s)$ de même degré et de même signe et supposons qu'il existe des réels $\omega_i > 0$ donnés par $M_p(j\omega_i) = 0$ tels que $\psi_p(j\omega_i) \neq 0$ et $\varphi_p(j\omega_i) \neq 0$. Sous ces conditions, $\Phi(G_\lambda, C)(s)$ donné par (2.5) est Hurwitz si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites.*

1) *Les deux systèmes $G_1(s)$ et $G_2(s)$ vérifient les équations suivantes*

$$\frac{N_1(j\omega_i)}{N_2(j\omega_i)} > 0 \tag{2.24a}$$

$$D_1^o(j\omega_i)D_2^o(j\omega_i) + D_1^e(j\omega_i)D_2^e(j\omega_i) + N_1^o(j\omega_i)N_2^o(j\omega_i) + N_1^e(j\omega_i)N_2^e(j\omega_i) > 0 \tag{2.24b}$$

2) *Le contrôleur simultané $C(s)$ stabilisant les deux systèmes $G_1(s)$ et $G_2(s)$ vérifie une des inégalités suivantes*

$$(N_2^e(j\omega_i)X^e(j\omega_i))^2 + \omega^4(N_2^o(j\omega_i)X^o(j\omega_i))^2 + (D_2^e(j\omega_i)Y^e(j\omega_i))^2 + \omega^4(D_2^o(j\omega_i)Y^o(j\omega_i))^2 \neq 0 \tag{2.25a}$$

$$(N_2^e(j\omega_i)X^o(j\omega_i))^2 + (N_2^o(j\omega_i)X^e(j\omega_i))^2 + (D_2^e(j\omega_i)Y^o(j\omega_i))^2 + (D_2^o(j\omega_i)Y^e(j\omega_i))^2 \neq 0 \tag{2.25b}$$

$$(N_1^e(j\omega_i)X^e(j\omega_i))^2 + \omega^4(N_1^o(j\omega_i)X^o(j\omega_i))^2 + (D_1^e(j\omega_i)Y^e(j\omega_i))^2 + \omega^4(D_1^o(j\omega_i)Y^o(j\omega_i))^2 \neq 0 \tag{2.25c}$$

$$(N_1^e(j\omega_i)X^o(j\omega_i))^2 + (N_1^o(j\omega_i)X^e(j\omega_i))^2 + (D_1^e(j\omega_i)Y^o(j\omega_i))^2 + (D_1^o(j\omega_i)Y^e(j\omega_i))^2 \neq 0 \tag{2.25d}$$

Les conditions (2.24) et (2.25) permettent de tester la stabilisabilité du segment de systèmes $G_\lambda(s)$ lorsqu'il existe un régulateur simultané pour les deux extrémités de ce segment.

2.4.1.2 Etude de la stabilisabilité d'un segment $G_\lambda(s)$ avec un régulateur d'ordre fixe

Des conditions suffisantes d'existence d'un contrôleur simultané d'ordre fixe pour un segment de systèmes dans l'espace des polynômes ont été données dans [Gho85]. Rappelons ces conditions.

Soit le segment de systèmes $G_\lambda(s)$, défini par (2.1), avec $G_1(s)$ et $G_2(s)$ écrits comme suit

$$G_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{m-1} a_{1k}s^k}{\sum_{k=0}^{m-1} b_{1k}s^k + s^m}, \qquad G_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{m-1} a_{2k}s^k}{\sum_{k=0}^{m-1} b_{2k}s^k + s^m} \tag{2.26}$$

où a_{ik} et b_{ik}, $i = 1, 2$, des réels.

Par conséquent, $G_\lambda(s)$ peut se réécrire ainsi

$$G_\lambda(s) = \frac{N_\lambda(s)}{D_\lambda(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{m-1} \Big(\lambda a_{1k} + (1-\lambda) a_{2k}\Big) s^k}{\sum_{k=0}^{m-1} \Big(\lambda b_{1k} + (1-\lambda) b_{2k}\Big) s^k + s^m} \tag{2.27}$$

Soit le correcteur $C(s)$ de degré q, fixé a priori, donné par

$$C(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{q} r_k s^k}{\sum_{k=0}^{q-1} t_k s^k + s^q} \tag{2.28}$$

Soit les deux matrices $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ déterminées à partir des coefficients des systèmes $G_1(s)$ et $G_2(s)$

$$\mathcal{T}_1 = \begin{bmatrix} a_{20} & a_{21} & \dots & \dots & a_{2(m-1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{20} & b_{21} & \dots & \dots & b_{2(m-1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{20} & a_{21} & \dots & a_{2(m-2)} & a_{2(m-1)} & 0 & 0 & \\ 0 & b_{20} & b_{21} & \dots & b_{2(m-2)} & b_{2(m-1)} & 1 & 0 & \\ & & \ddots & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & a_{20} & a_{21} & \dots & \dots & a_{2(m-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{20} & b_{21} & \dots & \dots & b_{2(m-1)} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{20} & \dots & \dots & a_{2(m-2)} & a_{2(m-1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{20} & \dots & \dots & b_{2(m-2)} & b_{2(m-1)} \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

$$\mathcal{T}_2 = \begin{bmatrix} a_{10} & a_{11} & \dots & \dots & a_{1(m-1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{10} & b_{11} & \dots & \dots & b_{1(m-1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1(m-2)} & a_{1(m-1)} & 0 & 0 & \\ 0 & b_{10} & b_{11} & \dots & b_{1(m-2)} & b_{1(m-1)} & 1 & 0 & \\ & & \ddots & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & a_{10} & a_{11} & \dots & \dots & a_{1(m-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{10} & b_{11} & \dots & \dots & b_{1(m-1)} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{10} & \dots & \dots & a_{1(m-2)} & a_{1(m-1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{10} & \dots & \dots & b_{1(m-2)} & b_{1(m-1)} \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

Notons les colonnes de la matrice $\mathcal{T}_1$ par v_k^T, $k = 0, \dots, m+q-1$, et les colonnes de la matrice $\mathcal{T}_2$ par u_k^T, $k = 0, \dots, m+q-1$. Considérons Ψ, le vecteur contenant les paramètres du contrôleur $C(s)$, et V, le vecteur contenant les puissances de l'opérateur de Laplace, donnés par

$$\Psi = \begin{bmatrix} r_0 & t_0 & \dots & r_{q-1} & t_{q-1} & r_q & 1 \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 & s^{m+q-1} \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

Le polynôme caractéristique en boucle fermée du segment de systèmes (2.27) avec le correcteur (2.28) est donné par

$$\Psi\Big(\lambda \begin{bmatrix} u_0^T & u_1^T & \dots & u_{m+q-1}^T \end{bmatrix} + (1-\lambda) \begin{bmatrix} v_0^T & v_1^T & \dots & v_{m+q-1}^T \end{bmatrix}\Big) V^T + s^{m+q} \tag{2.33}$$

Nous en déduisons le théorème 2.4.2 donnant une condition suffisante d'existence d'un régulateur simultané stabilisant le segment de systèmes (2.27).

Théorème 2.4.2. *[Gho85] Si les quatre polynômes suivants*

$$\Psi \begin{bmatrix} v_0^T & v_1^T & \dots & v_{m+q-1}^T \end{bmatrix} V^T + s^{m+q} \tag{2.34a}$$

$$\Psi \begin{bmatrix} u_0^T & u_1^T & \dots & u_{m+q-1}^T \end{bmatrix} V^T + s^{m+q} \tag{2.34b}$$

$$\Psi \begin{bmatrix} v_0^T & u_1^T & v_2^T & u_3^T & \dots & (v_{m+q-1}^T \quad ou \quad u_{m+q-1}^T) \end{bmatrix} V^T + s^{m+q} \tag{2.34c}$$

$$\Psi \begin{bmatrix} u_0^T & v_1^T & u_2^T & v_3^T & \dots & (u_{m+q-1}^T \quad ou \quad v_{m+q-1}^T) \end{bmatrix} V^T + s^{m+q} \tag{2.34d}$$

sont Hurwitz avec v_k^T et u_k^T $k = 0, \dots, m+q-1$ respectivement les colonnes des matrices $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$, alors il existe un contrôleur $C(s)$ d'ordre q donné par (2.28) *stabilisant simultanément le segment de systèmes $G_\lambda(s)$ défini par* (2.27).

Le théorème 2.4.2 ne donne qu'une condition suffisante de stabilisabilité simultanée d'un segment de systèmes de la forme (2.27). Les conditions algébriques (2.34) ne permettent pas de synthétiser un régulateur simultané car elles ne fournissent des conditions explicites par rapport à celui-ci.

2.4.2 Condition de stabilisabilité d'un segment de systèmes $G_\lambda(s)$ dans $\mathcal{H}_\infty$

Dans cette partie, nous considérons le problème de la stabilisation simultanée dans l'espace $\mathcal{H}_\infty$ du segment de systèmes défini comme suit

$$G_\lambda(s) = \frac{n_\lambda(s)}{d_\lambda(s)} = \frac{\lambda n_1(s) + (1-\lambda) n_2(s)}{\lambda d_1(s) + (1-\lambda) d_2(s)}, \quad \lambda \in [0,\ 1] \tag{2.35}$$

avec

$$G_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} = \frac{n_1(s)}{d_1(s)}, \qquad G_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)} = \frac{n_2(s)}{d_2(s)}. \tag{2.36}$$

où $(n_i(s), d_i(s))$, $i = 1, 2$, une factorisation copremière de $G_i(s)$ dans $\mathcal{H}_\infty$ telle que $n_i(s) = N_i(s)/D(s)$ et $d_i(s) = D_i(s)/D(s)$ avec $N_i(s)$ et $D_i(s)$ deux polynômes réels et $D(s)$ un polynôme Hurwitz vérifiant $\delta(D) = \delta(D_i)$. En considérant l'équation (2.36), nous pouvons remarquer que le segment de systèmes défini par (2.35) est équivalent à celui donné par (2.1).

Soit le contrôleur $C(s)$ défini par

$$C(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{x(s)}{y(s)} \tag{2.37}$$

où $(x(s), y(s))$ est une factorisation copremière de $C(s)$ dans $\mathcal{H}_\infty$ telle que $x(s) = X(s)/D_c(s)$ et $y(s) = Y(s)/D_c(s)$ avec $X(s)$ et $Y(s)$ deux polynômes réels et $D_c(s)$ un polynôme Hurwitz vérifiant $\delta(D_c) = \delta(Y)$.

Nous en déduisons que $G_\lambda(s)$ est simultanément stabilisable par le compensateur $C(s)$ si et seulement si

$$\Upsilon(G_\lambda, C)(s) = n_\lambda(s) x(s) + d_\lambda(s) y(s) \in \mathcal{U}, \quad \lambda \in [0,\ 1] \tag{2.38}$$

Nous réécrivons l'équation (2.38) ainsi

$$\Upsilon(G_\lambda, C)(s) = \lambda \Upsilon(G_1, C)(s) + (1-\lambda) \Upsilon(G_2, C)(s) \tag{2.39}$$

avec

$$\Upsilon(G_1, C)(s) = n_1(s)x(s) + d_1(s)y(s) \tag{2.40a}$$
$$\Upsilon(G_2, C)(s) = n_2(s)x(s) + d_2(s)y(s) \tag{2.40b}$$

L'équation (2.39) est équivalente à

$$\Upsilon(G_\lambda, C)(s) = \frac{\lambda\Phi(G_1, C)(s) + (1-\lambda)\Phi(G_2, C)(s)}{D(s)D_c(s)} \tag{2.41}$$

avec

$$\Phi(G_1, C)(s) = N_1(s)X(s) + D_1(s)Y(s)$$
$$\Phi(G_2, C)(s) = N_2(s)X(s) + D_2(s)Y(s)$$

Le théorème ci-dessous donne une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un contrôleur qui stabilise simultanément le segment de systèmes $G_\lambda(s)$ donné par (2.35).

Théorème 2.4.3. *Le segment de systèmes $G_\lambda(s)$ donné par* (2.35) *est simultanément stabilisé par un correcteur $C(s)$ si et seulement si*

1) *les deux systèmes $G_1(s)$ et $G_2(s)$ vérifient la **PIP**,*

2) *il existe deux fonctions rationnelles $\Upsilon(G_1, C)(s) \in \mathcal{U}$ et $\Upsilon(G_2, C)(s) \in \mathcal{U}$ telles que $\varphi(s)$ donné par*

$$\varphi(s) = \frac{\Upsilon(G_2, C)(s)}{\Upsilon(G_1, C)(s)} \tag{2.42}$$

ne coupe pas l'axe réel négatif.

Démonstration. Si $\Upsilon(G_\lambda, C)(s) \in \mathcal{U}$, alors le segment de polynômes $\Phi(G_\lambda, C)(s)$ donné par

$$\Phi(G_\lambda, C)(s) = \lambda\Phi(G_1, C)(s) + (1-\lambda)\Phi(G_2, C)(s) \tag{2.43}$$

doit être Hurwitz $\forall\, \lambda \in [0,\ 1]$.

D'aprés le théorème 2.3.2, $\Phi(G_\lambda, C)(s)$ est Hurwitz si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées.

a) $\Phi(G_2, C)(s)$ et $\Phi(G_1, C)(s)$ sont Hurwitz et de même degré.

b) la fonction rationnelle $\overline{\varphi}(s)$ donnée par

$$\overline{\varphi}(s) = \frac{\Phi(G_2, C)(s)}{\Phi(G_1, C)(s)} \tag{2.44}$$

ne coupe pas l'axe réel négatif du diagramme de Nyquist.

En considérant le corollaire 1.2.1, alors les deux conditions a) et b) ci-dessus sont équivalentes respectivement aux conditions 1) et 2) du théorème 2.4.3 car $\overline{\varphi}(s) = \varphi(s)$. •

Notons qu'un résultat simulaire a été donné dans [Gho86]. Le théorème 2.4.3 donne des conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'un régulateur simultané pour un segment de systèmes $G_\lambda(s)$ défini par (2.35). Néanmoins, jusqu'à présent, nous ne disposons pas de méthodes de conception de régulateurs simultanés pour un segment de systèmes basées sur le théorème 2.4.3. Cependant, une méthode développée à partir des propriétés des fonctions EP-SPR a été proposée dans [ADPD95]. Une approche inspirée de celle de [ADPD95] est détaillée dans la section suivante.

2.5 Synthèse du régulateur simultané pour le segment de systèmes $G_\lambda(s)$

Dans cette partie, nous allons présenter une méthode décrite dans [ADPD95] permettant de synthétiser un régulateur simultané pour le segment de systèmes $G_\lambda(s)$ défini par (2.35). Cette approche consiste, dans une première étape, à stabiliser les deux systèmes aux extrémités de ce segment et à utiliser, dans une seconde étape, les propriétés des fonctions EP-SPR pour garantir la stabilisation du système $G_\lambda(s)$ avec un correcteur simultané pour tout $\lambda \in [0,\ 1]$.

2.5.1 Introduction

Pour la synthèse d'un contrôleur simultané stabilisant les deux systèmes aux extrémités du segment $G_\lambda(s)$ défini par (2.35), nous utilisons la méthode exposée dans la section 1.2.3.1 du chapitre 1.

Soit deux systèmes $G_1(s) = n_1(s)/d_1(s)$ et $G_2(s) = n_2(s)/d_2(s)$ tels que $(n_1(s), d_1(s)) \in \mathcal{H}_\infty$ et $(n_2(s), d_2(s)) \in \mathcal{H}_\infty$ et soit $C_1(s) = x_1(s)/y_1(s)$ tel que $(x_1(s), y_1(s)) \in \mathcal{H}_\infty$ sont des solutions de l'équation de Bézout

$$n_1(s)x_1(s) + d_1(s)y_1(s) = 1 \tag{2.45}$$

Nous en déduisons l'ensemble de tous les correcteurs $C(s)$ stabilisant le système $G_1(s)$ en utilisant le paramétrage de Youla

$$C(s) = \frac{x(s)}{y(s)} = \frac{x_1(s) + q(s)d_1(s)}{y_1(s) - q(s)n_1(s)}, \qquad q(s) \in \mathcal{H}_\infty \tag{2.46}$$

Selon le théorème 1.2.8, nous savons que $C(s)$ stabilise $G_2(s)$ si et seulement si

$$\Upsilon(G_2, C)(s) = \Upsilon(G_2, C_1)(s) + q(s)\mathcal{G}_{12}(s) \in \mathcal{U} \tag{2.47}$$

où

$$\begin{aligned} \Upsilon(G_2, C_1)(s) &= n_2(s)x_1(s) + d_2(s)y_1(s) \\ \mathcal{G}_{12}(s) &= d_1(s)n_2(s) - d_2(s)n_1(s) \end{aligned}$$

En conséquence, $C(s)$ stabilise $G_2(s)$ si et seulement s'il existe $q(s) \in \mathcal{H}_\infty$ vérifiant la relation suivante

$$q(s) = \frac{\Upsilon(G_2, C)(s) - \Upsilon(G_2, C_1)(s)}{\mathcal{G}_{12}(s)} \tag{2.48}$$

où $\Upsilon(G_2, C)(s) \in \mathcal{U}$ est une fonction rationnelle interpolant les zéros instables et distincts de $\mathcal{G}_{12}(s)$ aux valeurs de $\Upsilon(G_2, C_1)(s)$ (voir annex B).

Rappelons que le contrôleur $C(s)$ stabilise le segment de systèmes $G_\lambda(s)$ donné par (2.35) pour tout $\lambda \in [0,\ 1]$ si et seulement si $\Upsilon(G_\lambda, C)(s) \in \mathcal{U}$ avec

$$\Upsilon(G_\lambda, C)(s) = \Big(\lambda n_1(s) + (1-\lambda)n_2(s)\Big)x(s) + \Big(\lambda d_1(s) + (1-\lambda)d_2(s)\Big)y(s) \tag{2.49}$$

En insérant l'équation (2.46) dans (2.49), nous obtenons

$$\Upsilon(G_\lambda, C)(s) = \lambda(n_1(s)x_1(s) + d_1(s)y_1(s)) + (1-\lambda)(\Upsilon(G_2, C_1)(s) + \mathcal{G}_{12}(s)q(s)) \tag{2.50}$$

De plus, à partir de l'équation (2.48), nous pouvons en déduire

$$\Upsilon(G_2, C)(s) = \Upsilon(G_2, C_1)(s) + \mathcal{G}_{12}(s)q(s) \tag{2.51}$$

En considérant la relation (2.45) et en utilisant l'équation (2.51), la relation (2.50) peut être simplifiée comme suit

$$\Upsilon(G_\lambda, C)(s) = \lambda + (1-\lambda)\Upsilon(G_2, C)(s) \tag{2.52}$$

En posant $\Upsilon(G_2, C)(s) = n_u(s)/d_u(s)$, $\Upsilon(G_\lambda, C)(s)$ peut se réécrire ainsi

$$\Upsilon(G_\lambda, C)(s) = \frac{\lambda d_u(s) + (1-\lambda)n_u(s)}{d_u(s)} \tag{2.53}$$

En tenant compte de l'équation (2.53), nous en déduisons que $\Upsilon(G_\lambda, C)(s) \in \mathcal{U}$ si et seulement si le polynôme $\widetilde{\Upsilon(G_\lambda, C)}(s)$ donné par

$$\widetilde{\Upsilon(G_\lambda, C)}(s) = \lambda d_u(s) + (1-\lambda)n_u(s) \tag{2.54}$$

est Hurwitz.

D'après le théorème 2.3.5 et la propriété 2.3.3, le segment de polynôme $\widetilde{\Upsilon(G_\lambda, C)}(s)$ est Hurwitz si et seulement si l'une des trois propositions suivantes est satisfaite :

- $n_u(j\omega)/d_u(j\omega) \in \mathcal{U}$ est une fonction ayant une marge de gain infinie,
- $n_u(j\omega)/d_u(j\omega) \in \mathcal{U}$ est une fonction vérifiant $|\arg(n_u(j\omega)/d_u(j\omega))| < \pi$,
- le diagramme de Nyquist de $n_u(j\omega)/d_u(j\omega)$ ne coupe pas l'axe des réels négatifs.

$\widetilde{\Upsilon(G_\lambda, C)}(s)$ est donc Hurwitz pour tout $\lambda \in [0,\ 1]$ si et seulement si le diagramme de Nyquist de $\Upsilon(G_2, C)(j\omega) = n_u(j\omega)/d_u(j\omega)$ ne coupe pas l'axe des réels négatifs ou, de manière équivalente, si $|\arg(\Upsilon(G_2, C)(j\omega))| < \pi$ pour tout $\omega \geqslant 0$. En conséquence, le segment de systèmes $G_\lambda(s)$ est stabilisable par un contrôleur simultané $C(s)$ si et seulement si $\Upsilon(G_2, C)(s)$ vérifie les deux conditions suivantes

1) $\Upsilon(G_2, C)(s) \in \mathcal{U}$ interpole les points (α_i, β_i), $i = 1, \ldots, \ell$ avec α_i les zéros instables de $\mathcal{G}_{12}(s)$ dans $\mathbb{C}_+$ et $\beta_i = \Upsilon(G_2, C_1)(\alpha_i)$.

2) $|\arg(\Upsilon(G_2, C)(j\omega))| < \pi$, pour tout $\omega \geqslant 0$.

En considérant les propriétés 2.3.1 et 2.3.3, nous savons que si $u(s)$ est une fonction EP-SPR, alors $(u(s))^n \in \mathcal{U}$ et $|\arg((u(j\omega))^n)| < \dfrac{n\pi}{2}$, pour tout $\omega \geqslant 0$ avec n positif. Puisque dans notre cas $n = 2$, nous cherchons $|\arg((u(j\omega))^n)| < \pi$ pour tout $\omega \geqslant 0$. Comme $u(s) = (\Upsilon(G_2, C)(s))^{1/2}$, alors

$$u(\alpha_i) = \beta_i^{1/2}$$

Nous pouvons donc conclure que, s'il existe une fonction EP-SPR $u(s)$ qui interpole les points $(\alpha_i, \beta_i^{1/2})$, alors il existe une fonction $\Upsilon(G_2, C)(s) \in \mathcal{U}$ interpolant les points (α_i, β_i), $i = 1, \ldots, \ell$, et vérifiant $|\arg(\Upsilon(G_2, C)(j\omega))| < \pi$ pour tout $\omega \geqslant 0$.

En conséquence, le problème de synthèse d'un régulateur simultané pour le segment de systèmes $G_\lambda(s)$ se réduit à trouver une fonction EP-SPR $u(s)$ qui interpole les points $(\alpha_i, \beta_i^{1/2})$ avec α_i, $i = 1, \ldots, \ell$, les zéros instables de $\mathcal{G}_{12}(s)$ et $\beta_i = \Upsilon(G_2, C_1)(\alpha_i)$. Ce résultat a été initialement obtenu dans [Gho88] en utilisant une preuve différente. Dans la littérature, plusieurs auteurs [Gho86, Gho88, ADPD95] ont proposé d'utiliser la méthode d'interpolation de Nevanlinna-Pick pour résoudre ce problème. Nous présentons cette méthode dans la section suivante.

2.5.2 Interpolation des fonctions EP-SPR

Dans cette section, nous allons montrer comment le problème d'interpolation des fonctions EP-SPR peut être résolu en utilisant les fonctions strictement réelles bornées (SBR). Définissons tout d'abord les fonctions strictement réelles bornées.

Définition 2.5.1. *[Kim84] Fonction strictement réelle bornée (SBR).*
La fonction rationnelle $Z(s)$ est strictement réelle bornée si

- *$Z(s)$ est analytique pour $\mathcal{R}_e(s) \geqslant 0$,*
- *$|Z(j\omega)| < 1$, $\forall\omega$.*

Dans le lemme suivant, nous montrons que le problème d'interpolation d'une fonction EP-SPR est réduit à un problème d'interpolation d'une fonction SBR.

Lemme 2.5.1. *[DFM92] Si $Z(s)$ est une fonction SBR vérifiant*

$$Z(\alpha_i) = \sigma_i = \frac{\beta_i^{1/2} - 1}{\beta_i^{1/2} + 1}$$

alors $u(s) = \dfrac{1 + Z(s)}{1 - Z(s)}$ est une fonction EP-SPR qui interpole les points $(\alpha_i, \beta_i^{1/2})$.

Nous pouvons en déduire que le problème de synthèse d'une fonction EP-SPR qui interpole les points $(\alpha_i, \beta_i^{1/2})$ revient à chercher une fonction SBR $Z(s)$ qui interpole les points (α_i, σ_i). En conséquence, pour synthétiser un régulateur simultané pour le segment de systèmes $G_\lambda(s)$, il est suffisant de trouver une fonction SBR $Z(s)$ qui interpole les points (α_i, σ_i).

2.5.3 Interpolation des fonctions SBR

Dans ce paragraphe, nous présentons l'algorithme de Pick-Nevanlinna permettant de générer des fonctions SBR. Ces fonctions interpolent les points (α_i, σ_i). Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une telle fonction.

Théorème 2.5.1. *[Kim84, OMK91, Pat96, Bat04] Il existe une fonction SBR qui interpole les valeurs (α_i, σ_i) si et seulement si la matrice de Nevanlinna-Pick $A_{NP} \in \mathbb{R}^{\ell\times\ell}$ donnée par*

$$A_{NP} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sigma_1 + \bar{\sigma_1}}{\alpha_1 + \bar{\alpha_1}} & \cdots & \dfrac{\sigma_1 + \bar{\sigma_\ell}}{\alpha_1 + \bar{\alpha_\ell}} \\ \dfrac{\sigma_2 + \bar{\sigma_1}}{\alpha_2 + \bar{\alpha_1}} & \cdots & \dfrac{\sigma_2 + \bar{\sigma_\ell}}{\alpha_2 + \bar{\alpha_\ell}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\sigma_\ell + \bar{\sigma_1}}{\alpha_\ell + \bar{\alpha_1}} & \cdots & \dfrac{\sigma_\ell + \bar{\sigma_\ell}}{\alpha_\ell + \bar{\alpha_\ell}} \end{bmatrix} \tag{2.55}$$

est définie positive.

Pour généraliser les résultats du théorème 2.5.1, nous imposons les deux conditions d'interpolation supplémentaires en $s = 0$ et $s = \infty$ données par

$$Z(0) = \sigma_0 \tag{2.56a}$$

$$Z(\infty) = \sigma_{\ell+1} \tag{2.56b}$$

La condition de résolution du problème de Nevanlima-Pick est donnée dans le lemme suivant.

Lemme 2.5.2. *[Kim84] Il existe une fonction SBR dans $\mathcal{H}_\infty$ qui interpole les valeurs (α_i, σ_i) avec les condition supplémentaires* (2.56a) *et* (2.56b) *si et seulement si la matrice A_{NP} donnée par* (2.55) *est définie positive et si*

$$|\sigma_0| < 1, \quad |\sigma_{\ell+1}| < 1$$

La procédure pour trouver une fonction rationnelle SBR $Z(s)$ telle que $Z(\alpha_i) = \sigma_i$ vérifiant la condition donnée dans le théorème 2.5.1 est discutée dans les travaux publiés dans [Kim84, DFM92, Bre95]. Rappelons les différentes étapes permettant de synthétiser des fonctions SBR.

- Tout d'abord construisons le tableau de Fenyves comme suit

$$\begin{array}{cccc} \sigma_1^1 & \sigma_2^1 & \dots & \sigma_\ell^1 \\ & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_\ell^2 \\ & & & \vdots \\ & & & \sigma_\ell^\ell \end{array} \tag{2.57}$$

  avec

$$\begin{aligned} &\sigma_i^1 = \sigma_i, i = 1, \dots, \ell, \\ &\sigma_i^{j+1} = u_{j+1}(\alpha_{j+1}) = \frac{(\sigma_i^j - \sigma_j^j)(\alpha_i + \bar{\alpha}_j)}{(1 - \sigma_i^j \bar{\sigma}_j^j)(\alpha_i - \alpha_j)}, \quad 1 \leqslant j \leqslant i-1 \leqslant \ell - 1 \end{aligned}$$

- Déterminons dans une séconde étape les fonctions $u_j(s)$.

$$u_j(s) = \frac{\sigma_j^j + \dfrac{s + \bar{\alpha}_j}{s - \alpha_j} u_{j+1}(s)}{1 + \bar{\sigma}_j^j \dfrac{s + \bar{\alpha}_j}{s - \alpha_j} u_{j+1}(s)}, \quad 1 \leqslant j \leqslant i-1 \leqslant \ell - 1 \tag{2.58}$$

  où $u_{\ell+1}$ est une fonction réelle bornée quelconque.

- Enfin, nous pouvons déduire la fonction SBR $Z(s)$ qui interpole les points (α_i, σ_i) ainsi

$$Z(s) = u_1(s) \qquad \text{si } u_1(s) \text{ est réelle} \tag{2.59a}$$

$$Z(s) = \frac{u_1(s) + \bar{u}_1(\bar{s})}{2} \qquad \text{si } u_1(s) \text{ n'est pas réelle} \tag{2.59b}$$

  Toutes les solutions sont paramétrées par les relations (2.58) et (2.59).

2.5.4 Algorithme de synthèse d'un régulateur simultané pour le segment de systèmes $G_\lambda(s)$

Comme nous l'avons montré dans la section 2.5.2, la synthèse d'un régulateur simultané pour le segment de systèmes $G_\lambda(s)$ défini par (2.35) revient à chercher une fonction SBR $Z(s)$ telle que $Z(\alpha_i) = \sigma_i$, $i = 1, \dots, \ell$, avec $\alpha_i \in \mathbb{C}_{+_e}$ les zéros instables de $\mathcal{G}_{12}(s)$ et les σ_i donnés par

$$\sigma_i = \frac{\beta_i^{1/2} - 1}{\beta_i^{1/2} + 1}, \quad \text{où} \quad \beta_i = \Upsilon(G_2, C_1)(\alpha_i)$$

L'algorithme de synthèse du régulateur simultané pour le segment de systèmes $G_\lambda(s)$ défini par (2.35) est décrit par les étapes suivantes.

- **Etape 1 :** Calculer les zéros instables α_i de $\mathcal{G}_{12}(s)$, $i = 1, \ldots, \ell$.
- **Etape 2 :** Choisir $C_1(s) = x_1(s)/y_1(s)$ avec $(x_1(s), y_1(s))$ solutions de l'équation de Bézout (2.45).
- **Etape 3 :** Vérifier que le système fictif $\dfrac{\mathcal{G}_{12}(s)}{\Upsilon(G_2, C_1)(s)}$ vérifie la **PIP**.
- **Etape 4 :** Calculer $\beta_i = \Upsilon(G_2, C_1)(\alpha_i)$, $i = 1, \ldots, \ell$, et $\sigma_i = \dfrac{\beta_i^{1/2} - 1}{\beta_i^{1/2} + 1}$.
- **Etape 5 :** En déduire le tableau de Fenyves et vérifier que A_{NP} est définie positive.
- **Etape 6 :** Utiliser la méthode d'interpolation en appliquant l'algorithme donné dans la section 2.5.3 afin de déterminer une fonction SBR $Z(s)$ qui interpole les points (α_i, σ_i).
- **Etape 7 :** Déterminer la fonction $\Upsilon(G_2, C)(s)$ qui interpole les points initiaux (α_i, β_i) telle que
$$\Upsilon(G_2, C)(s) = \Big(\frac{1 + Z(s)}{1 - Z(s)}\Big)^2$$
- **Etape 8 :** Calculer $q(s)$ à partir de l'équation (2.48).
- **Etape 9 :** Finalement, calculer $C(s)$ à partir de l'équation (2.46).

Exemple 2.5.1. L'objectif de cet exemple est de synthétiser un régulateur simultané pour le segment de systèmes $G_\lambda(s)$ donné par (2.35) avec $G_1(s)$ et $G_2(s)$ définis respectivement par leur factorisation copremière

$$(n_1(s), d_1(s)) = \Big(\frac{-0.0370s + 0.3210}{(s + 1.6618)(s + 0.6812)}, \frac{s^2 + 2.3800s + 0.8113}{(s + 1.6618)(s + 0.6812)}\Big),$$
$$(n_2(s), d_2(s)) = \Big(\frac{(-2s + 1)(-s + 2)}{(s + 1.6618)(s + 0.6812)}, \frac{6s^2 + s + 3}{(s + 1.6618)(s + 0.6812)}\Big)$$

- **Etape 1 :** $\mathcal{G}_{12}(s)$ est donné par
$$\mathcal{G}_{12}(s) = \frac{(s + 2.26)(s + 0.2328)(s - 2.2192)(s - 0.2825)}{(s + 1.6618)^2(s + 0.6812)^2}$$
- **Etape 2 :** La solution de l'équation de Bézout (2.45) est $(x_1(s), y_1(s))$
$$(x_1(s), y_1(s)) = \Big(\frac{4.0370s + 2.7490}{s^2 + 1.6540s + 2.0330}, \frac{s^2 + 2.6640s + 3.1950}{s^2 + 1.6540s + 2.0330}\Big)$$
- **Etape 3 :** $\Upsilon(G_2, C_1)(s)$ est donnée par
$$\Upsilon(G_2, C_1)(s) = \frac{6s^4 + 25.0580s^3 + 10.1470s^2 + 5.5160s + 15.0830}{(s + 1.6618)(s + 0.6812)(s^2 + 1.6540s + 2.0330)}$$

  Puisque $\Upsilon(G_2, C_1)(s)$ a deux zéros complexes instables en $s_1 = 0.2918 + 0.7582i$ et $s_2 = 0.2918 - 0.7582i$ et que $\mathcal{G}_{12}(s)$ a deux zéros réels instables en $s = 0.2825$ et en $s = 2.2192$, alors le système fictif $\dfrac{\mathcal{G}_{12}(s)}{\Upsilon(G_2, C_1)(s)}$ vérifie la **PIP**. En conséquence, les deux systèmes sont simultanément stabilisables.

- **Etape 4 :** Le calcul des β_i, $i = 1, \ldots, \ell$, donne

$$\beta_1 = \Upsilon(G_2, C_1)(0.2825) = 3.7346$$
$$\beta_2 = \Upsilon(G_2, C_1)(2.2192) = 4.1516$$

Nous en déduisons

$$\sigma_1^1 = 0.3180$$
$$\sigma_2^1 = 0.3416$$

- **Etape 5 :** Calculons σ_2^2

$$\sigma_2^2 = \frac{(\sigma_2^1 - \sigma_1^1)(\alpha_2 + \bar{\alpha}_1)}{(1 - \sigma_2^1\bar{\sigma}_1^1)(\alpha_2 - \alpha_1)} = 0.0342$$

Nous en déduisons le tableau de Fenyves

$$\begin{array}{ll} 0.3180 & 0.3416 \\ & 0.0342 \end{array}$$

La matrice A_{NP} est donnée par

$$A_{NP} = \begin{bmatrix} 1.1256 & 0.3607 \\ 0.2636 & 0.1539 \end{bmatrix}$$

La matrice A_{NP} est définie positive. Il existe donc une fonction SBR $Z(s)$ qui interpole les points (α_i, σ_i).

- **Etape 6 :** La fonction qui interpole les valeurs (α_i, σ_i), $i = 1, 2$, est donnée par

$$u_2(s) = \frac{\sigma_2^2 + \dfrac{s + \bar{\alpha}_2}{s - \alpha_2} u_3(s)}{1 + \bar{\sigma}_2^2 \dfrac{s + \bar{\alpha}_2}{s - \alpha_2} u_3(s)}$$

Choisissons $u_3(s) = 0$, on obtient alors

$$u_2(s) = \sigma_2^2 = 0.0342$$

et

$$Z(s) = u_1(s) = \frac{\sigma_1^1 + \dfrac{s + \bar{\alpha}_1}{s - \alpha_1} u_2(s)}{1 + \bar{\sigma}_1^1 \dfrac{s + \bar{\alpha}_1}{s - \alpha_1} u_2(s)} = \frac{0.3522s + 0.0802}{1.0109s + 0.2794}$$

- **Etape 7 :** Nous en déduisons la fonction $\Upsilon(G_2, C)(s)$ qui interpole les points (α_i, β_i)

$$\Upsilon(G_2, C)(s) = \Upsilon(G_2, C)(s) = \frac{1 + Z(s)}{1 - Z(s)} = \frac{1.8579s^2 + 0.9803s + 0.1293}{0.4339s^2 + 0.2625s + 0.0397}$$

Le diagramme de Nyquist de $\Upsilon(G_2, C)(s)$ est donné par la figure 2.3.

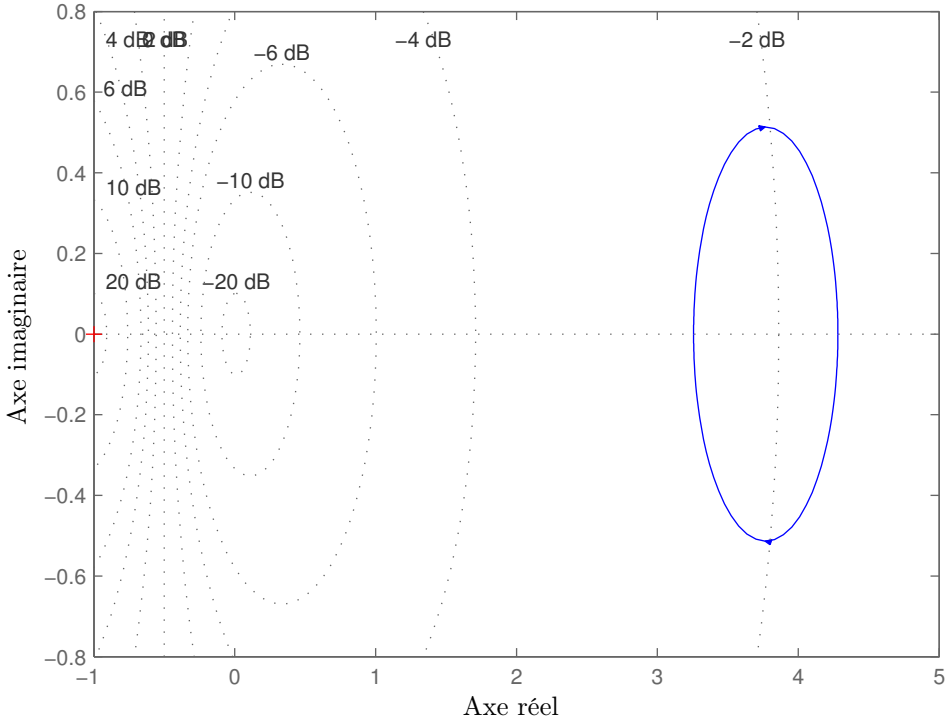

FIGURE 2.3 – Diagramme de Nyquist de $\Upsilon(G_2, C)(s)$

- **Etape 8 :** Le calcul $q(s)$ à partir de l'équation (2.48) donne

$$q(s) = \frac{-0.7455s^6 - 7.6529s^5 - 23.0814s^4 - 29.9798s^3 - 18.4571s^2 - 5.2173s - 0.5439}{0.8678s^6 + 4.1235s^5 + 8.0551s^4 + 8.9902s^3 + 4.5761s^2 + 1.0330s + 0.0849} \in \mathcal{H}_\infty$$

- **Etape 9 :** Avec l'équation (2.46), la factorisation copremière du correcteur simultané $C(s) = x(s)/y(s)$ stabilisant le segment de systèmes $G_\lambda(s)$ est donnée par

$$x(s) = \frac{-0.7455s^6 - 4.1773s^5 - 9.8231s^4 - 13.5598s^3 - 8.9123s^2 - 2.6039s - 0.2750}{0.8678s^6 + 4.1235s^5 + 8.0551s^4 + 8.9902s^3 + 4.5761s^2 + 1.0330s + 0.0849}$$
$$y(s) = \frac{0.8678s^6 + 4.9723s^5 + 11.7991s^4 + 15.5618s^3 + 9.7607s^2 + 2.7686s + 0.2877}{0.8678s^6 + 4.1235s^5 + 8.0551s^4 + 8.9902s^3 + 4.5761s^2 + 1.0330s + 0.0849}$$

et les polynômes $\Upsilon(G_1, C)(s)$ et $\Upsilon(G_2, C)(s)$ obtenus sont les suivants

$$\Upsilon(G_1, C)(s) = \frac{0.4339s^6 + 2.4510s^5 + 5.7882s^4 + 7.6322s^3 + 4.7893s^2 + 1.3472s + 0.1380}{0.4339s^6 + 1.9968s^5 + 4.1436s^4 + 4.8859s^3 + 3.0199s^2 + 0.8676s + 0.0914}$$
$$\Upsilon(G_2, C)(s) = \frac{1.8579s^6 + 8.4062s^5 + 17.1276s^4 + 19.7469s^3 + 11.6912s^2 + 3.1143s + 0.2976}{0.4339s^6 + 1.9968s^5 + 4.1436s^4 + 4.8859s^3 + 3.0199s^2 + 0.8676s + 0.0914}$$

Puisque $\Upsilon(G_1, C)(s) \in \mathcal{U}$ et $\Upsilon(G_2, C)(s) \in \mathcal{U}$, $C(s)$ stabilise simultanément les systèmes $G_1(s)$ et $G_2(s)$. D'après la figure 2.4, nous observons que $\varphi(s) = \Upsilon(G_2, C)(s)/\Upsilon(G_1, C)(s)$ ne coupe pas l'axe réel négatif.

Nous en déduisons que $C(s)$ stabilise le segment de systèmes $G_\lambda(s)$. ■

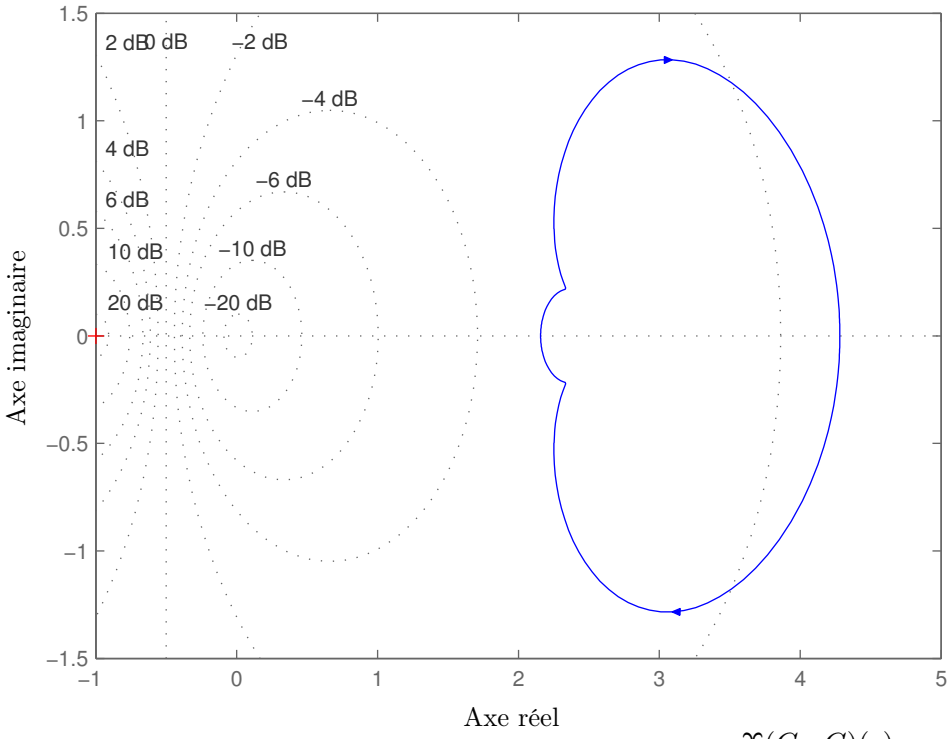

FIGURE 2.4 – Diagramme de Nyquist de $\varphi(s) = \dfrac{\Upsilon(G_2, C)(s)}{\Upsilon(G_1, C)(s)}$

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons détaillé l'état de l'art de la commande simultanée d'un segment de systèmes dans l'espace des fractions stables ainsi que dans l'espace des polynômes.

Dans la première partie de ce chapitre, des concepts concernant l'hurwitzité d'un segment de polynômes ont été présentés. Ces concepts ont été utilisés dans la troisième partie de ce chapitre pour étudier la question de la stabilisabilité d'un segment de systèmes. Nous avons également rappelé des conditions d'existence des régulateurs simultanés formulées dans la littérature.

Pour clôturer ce chapitre, nous avons présenté une approche de synthèse inspirée de la méthode proposée dans [ADPD95] permettant de déterminer des contrôleurs simultanés pour un segment de systèmes dans l'espace $\mathcal{H}_\infty$. Ces développements mathématiques utilisent la notion d'interpolation des fonctions bicausales strictement réelles positives avec un argument inférieur à π. De plus, ils n'imposent aucune contrainte sur le degré du compensateur paramétré avec une fonction bistable dans $\mathcal{H}_\infty$. Malheureusement, cette méthode d'interpolation ne peut pas être généralisée pour la stabilisation de plusieurs segments de systèmes.

Dans le chapitres 3, nous proposerons des approches pour stabiliser simultanément un segment de systèmes en fixant a priori les pôles de la partie paire ou impaire. Ces approches seront utilisées dans le chapitre 4 en introduisant un paramétrage du correcteur. Le dernier chapitre sera dédié à la stabilisation, non pas d'un segment de systèmes, mais d'un polytope de systèmes dont les arêtes sont des segments de systèmes.

Chapitre 3

Commande simultanée d'un segment de systèmes avec des critères de stabilité polynomiaux

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons de nouvelles méthodes de synthèse d'un correcteur linéaire à temps invariant (LTI) stabilisant un segment de systèmes linéaires. Ce problème est traité dans l'espace des polynômes.

Beaucoup de travaux se sont intéressés à l'analyse de la stabilisabilité d'un segment de systèmes par un correcteur LTI [Gho85, Gho86, Gho88, ADPD95, Fon08], mais très peu de travaux ont abordé la question de la synthèse de ce type de contrôleur (voir le chapitre 2). En effet, une seule méthode a été proposée par [ADPD95] dans l'espace des fonctions rationnelles stables $\mathcal{H}_\infty$. Cette technique, basée sur les propriétés des fonctions SPR et EP-SPR, est décrite dans le chapitre précédent. Elle nécessite d'interpoler des fonctions EP-SPR via des fonctions SBR. Les conditions pour obtenir un correcteur sumultané avec cette méthode sont suffisantes.

La commande d'un segment de systèmes linéaires par un régulateur LTI reste donc un problème ouvert. Nous proposons dans ce chapitre des nouvelles approches permettant de synthétiser des contrôleurs stabilisant cette famille de systèmes en utilisant les critères de stabilité polynomiaux suivants :

- le critère d'Hermite-Fujiwara [Dat78] basé sur la positivité de la matrice d'Hermite-Fujiwara,
- le critère d'Hermite-Biehler [Gan59] qui utilise la propriété d'entrelacement des zéros réels.

Ce chapitre est scindé en trois grandes parties. Dans la première partie, nous reformulons le problème de la stabilisation simultanée d'un segment de systèmes en se référant aux résultats de la littérature. Nous étudions dans la seconde partie le problème de la commande simultanée d'un segment de systèmes avec un compensateur d'ordre fixe en utilisant le critère de stabilité d'Hermite-Fujiwara. Puis, dans la troisième partie, nous examinons ce problème à l'aide du critère de stabilité d'Hermite-Biehler. Dans chacune de ces parties, des conditions d'existence d'un compensateur stabilisant un segment de systèmes sont données et une solution algorithmique est développée.

3.2 Formulation du problème

Considérons le segment de systèmes $G_\lambda(s)$ donné par (2.1) où $N_i(s)$ et $D_i(s)$, $i = 1, 2$, sont des polynômes réels et vérifiant l'hypothèse 2.2.1.

Dans le chapitre 2, nous avons montré que le problème de la commande du segment de systèmes $G_\lambda(s)$ revient à chercher les conditions d'existence d'un correcteur causal $C(s) = X(s)/Y(s)$ vérifiant les conditions de stabilité interne données par le lemme 2.2.1. Par conséquent, $C(s) = X(s)/Y(s)$ doit assurer l'hurwitzité du polynôme caractéristique en boucle fermée $\Phi(G_\lambda, C)(s)$ défini par

$$\Phi(G_\lambda, C)(s) = \lambda\Phi(G_1, C)(s) + (1 - \lambda)\Phi(G_2, C)(s) \tag{3.1}$$

avec

$$\Phi(G_1, C)(s) = N_1(s)X(s) + D_1(s)Y(s)$$
$$\Phi(G_2, C)(s) = N_2(s)X(s) + D_2(s)Y(s)$$

Dans cette partie, nous étudions la condition d'hurwitzité du segment de polynômes défini dans (3.1) en considérant le théorème ci-après.

Théorème 3.2.1. *[FD11] Considérons deux polynômes $\Phi(G_1, C)(s)$ et $\Phi(G_2, C)(s)$ de même degré avec les coefficients des termes de plus haut degré de même signe et avec la même partie paire ($\Phi(G_1, C)^e(s^2) = \Phi(G_2, C)^e(s^2)$) ou la même partie impaire ($\Phi(G_1, C)^o(s^2) = \Phi(G_2, C)^o(s^2)$). Alors le segment de polynômes $\Phi(G_\lambda, C)(s)$ dans (3.1) est Hurwitz pour toute valeur de $\lambda \in [0,\ 1]$ si et seulement si $\Phi(G_1, C)(s)$ et $\Phi(G_2, C)(s)$ sont Hurwitz.*

A partir de ce théorème, nous pouvons énoncer des conditions pour stabiliser le segment de systèmes $G_\lambda(s)$ en réécrivant $\Phi(G_i, C)(s)$ comme suit

$$\Phi(G_i, C)(s) = \Phi(G_i, C)^e(s^2) + s\Phi(G_i, C)^o(s^2), \quad i = 1, 2$$

Théorème 3.2.2. *Si $C(s)$ stabilise simultanément les deux systèmes $G_1(s)$ et $G_2(s)$ tels que les polynômes caractéristiques $\Phi(G_1, C)(s)$ et $\Phi(G_2, C)(s)$ aient les trois propriétés suivantes*

- *le même degré,*
- *les coefficients des termes de plus haut degré de même signe,*
- *la même partie paire ($\Phi(G_1, C)^e(s^2) = \Phi(G_2, C)^e(s^2)$) ou la même partie impaire ($\Phi(G_1, C)^o(s^2) = \Phi(G_2, C)^o(s^2)$),*

alors $C(s)$ stabilise simultanément le segment de systèmes $G_\lambda(s)$.

Démonstration. Considérons un compensateur $C(s)$ qui stabilise simultanément les deux systèmes $G_1(s)$ et $G_2(s)$ avec $\Phi(G_1, C)^e(s^2) = \Phi(G_2, C)^e(s^2)$ ou $\Phi(G_1, C)^o(s^2) = \Phi(G_2, C)^o(s^2)$. Selon le théorème 3.2.1, le polynôme caractéristique $\Phi(G_\lambda, C)(s)$ défini par (3.1) est Hurwitz pour tout $\lambda \in [0, 1]$. En tenant compte du lemme 2.2.1, nous pouvons déduire que le compensateur $C(s)$ stabilise simultanément le segment de systèmes $G_\lambda(s)$ défini par (2.1). •

Remarque 3.2.1. Dans le théorème 3.2.2, la contrainte d'égalité peut être imposée indifféremment, soit sur la partie paire des polynômes caractéristiques $\Phi(G_1, C)(s)$ et $\Phi(G_2, C)(s)$, soit sur leur partie impaire. Dans la suite de ce travail, nous avons choisi de ne considérer que la contrainte d'égalité sur la partie paire. ■

D'après le théorème 3.2.2, la question de la commande d'un segment de systèmes $G_\lambda(s)$ par un correcteur causal $C(s) = X(s)/Y(s)$ peut être formulée comme un problème de commande simultanée des deux systèmes aux extrémités $G_1(s)$ et $G_2(s)$ de ce segment où $G_1(s)$ et $G_2(s)$ doivent satisfaire la condition $\Phi(G_1, C)^e(s^2) = \Phi(G_2, C)^e(s^2)$.

Par conséquent, le problème de la commande d'un segment de systèmes $G_\lambda(s)$ par un correcteur $C(s)$ se résume aux deux conditions suivantes

$$\Phi(G_i, C)(s) \in \mathbb{H}, \quad i = 1, 2 \tag{3.2a}$$

$$\Phi(G_1, C)^e(s^2) = \Phi(G_2, C)^e(s^2) \tag{3.2b}$$

Pour étudier les équations (3.2), nous écrivons les polynômes $\Phi(G_i, C)(s)$, $\Phi(G_i, C)^e(s^2)$ et $\Phi(G_i, C)^o(s^2)$, $i = 1, 2$ sous une forme matricielle et nous considérons un régulateur $C(s)$ d'ordre fixe.

3.3 Formulation matricielle de $\Phi(G_1, C)(s)$ et $\Phi(G_2, C)(s)$

L'objectif de cette partie est de séparer les paramètres du correcteur $C(s)$ de ceux des systèmes $G_1(s)$ et $G_2(s)$ dans les expressions de $\Phi(G_1, C)(s)$ et $\Phi(G_2, C)(s)$. Pour cela, nous décomposons ces deux polynômes en une partie connue et en une partie inconnue. Les paramètres connus étant ceux des systèmes $G_1(s)$ et $G_2(s)$ et les paramètres inconnus étant ceux du correcteur $C(s)$.

Les polynômes $N_1(s)$, $N_2(s)$, $D_1(s)$, $D_2(s)$, $X(s)$ et $Y(s)$ représentant respectivement les systèmes $G_1(s)$ et $G_2(s)$ et le régulateur $C(s)$, peuvent être exprimés en fonction de leur partie paire et de leur partie impaire comme suit pour $i = 1, 2$

$$\begin{aligned}
N_i(s) &= N_i^e(s^2) + sN_i^o(s^2) \\
D_i(s) &= D_i^e(s^2) + sD_i^o(s^2) \\
X(s) &= X^e(s^2) + sX^o(s^2) \\
Y(s) &= Y^e(s^2) + sY^o(s^2)
\end{aligned}$$

Donc, nous pouvons écrire de la manière suivante $\Phi(G_i, C)^e(s^2)$ et $\Phi(G_i, C)^o(s^2)$ pour $i = 1, 2$

$$\Phi(G_i, C)^e(s^2) = N_i^e(s^2)X^e(s^2) + s^2N_i^o(s^2)X^o(s^2) + D_i^e(s^2)Y^e(s^2) + s^2D_i^o(s^2)Y^o(s^2) \tag{3.3a}$$

$$\Phi(G_i, C)^o(s^2) = N_i^o(s^2)X^e(s^2) + N_i^e(s^2)X^o(s^2) + D_i^o(s^2)Y^e(s^2) + D_i^e(s^2)Y^o(s^2) \tag{3.3b}$$

et les formes polynomiales de $N_i(s)$, $D_i(s)$, $X(s)$ et $Y(s)$ sont données par, pour $i = 1, 2$

$$N_i(s) = \sum_{k=0}^{p^e} n_k^{ie} s^{2k} + s \sum_{k=0}^{p^o} n_k^{io} s^{2k} \tag{3.4a}$$

$$D_i(s) = \sum_{k=0}^{d^e} d_k^{ie} s^{2k} + s \sum_{k=0}^{d^o} d_k^{io} s^{2k} \tag{3.4b}$$

$$X(s) = \sum_{k=0}^{\alpha^e} x_k^e s^{2k} + s \sum_{k=0}^{\alpha^o} x_k^o s^{2k} \tag{3.4c}$$

$$Y(s) = \sum_{k=0}^{\beta^e} y_k^e s^{2k} + s \sum_{k=0}^{\beta^o} y_k^o s^{2k} \tag{3.4d}$$

A partir des équations (3.3) et (3.4), nous en déduisons les formes polynômiales de $\Phi(G_i, C)^e(s^2)$ et $\Phi(G_i, C)^o(s^2)$, pout $i = 1, 2$

$$\Phi(G_i, C)^e(s^2) = \sum_{k=0}^{p^e+\alpha^e} \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \leqslant p^e, k-j \leqslant \alpha^e}}^{k} n_j^{ie} x_{k-j}^e \right) s^{2k} + \sum_{k=0}^{p^o+\alpha^o} \left(\sum_{\substack{j=0 \\ p^o \leqslant k, k-j \leqslant \alpha^o}}^{k} n_j^{io} x_{k-j}^o \right) s^{2(k+1)}$$
$$+ \sum_{k=0}^{d^e+\beta^e} \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \leqslant d^e, k-j \leqslant \beta^e}}^{k} d_j^{ie} y_{k-j}^e \right) s^{2k} + \sum_{k=0}^{d^o+\beta^o} \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \leqslant d^o, k-j \leqslant \beta^o}}^{k} d_j^{io} y_{k-j}^o \right) s^{2(k+1)} \quad (3.5a)$$

$$\Phi(G_i, C)^o(s^2) = \sum_{k=0}^{p^o+\alpha^e} \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \leqslant p^o, k-j \leqslant \alpha^e}}^{k} n_j^{io} x_{k-j}^e \right) s^{2k} + \sum_{k=0}^{p^e+\alpha^o} \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \leqslant p^e, k-j \leqslant \alpha^o}}^{k} n_j^{ie} x_{k-j}^o \right) s^{2k}$$
$$+ \sum_{k=0}^{d^o+\beta^e} \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \leqslant d^o, k-j \leqslant \beta^e}}^{k} d_j^{io} y_{k-j}^e \right) s^{2k} + \sum_{k=0}^{d^e+\beta^o} \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \leqslant d^e, k-j \leqslant \beta^o}}^{k} d_j^{ie} y_{k-j}^o \right) s^{2k} \quad (3.5b)$$

Nous supposons que $\delta(\Phi(G_i, C)) = m$ alors, pour $i = 1, 2$

- $\delta(\Phi(G_i, C)^e) = \ell$ et $\delta(\Phi(G_i, C)^o) = \ell$ si $m = 2\ell + 1$
- $\delta(\Phi(G_i, C)^e) = \ell$ et $\delta(\Phi(G_i, C)^o) = \ell - 1$ si $m = 2\ell$

avec

$$\ell = \max\left(d^e + \beta^e, d^o + \beta^o + 1, p^o + \alpha^e, p^e + \alpha^o + 1, d^o + \beta^e, d^e + \beta^o\right)$$

Remarque 3.3.1. Dans la suite de ce travail, nous ne considérons que le cas $m = 2\ell + 1$, c'est-à-dire que $\delta(\Phi(G_i, C)^e) = \ell$ et $\delta(\Phi(G_i, C)^o) = \ell$. Le cas $m = 2\ell$ est omis parce qu'il peut être directement déduit du cas $m = 2\ell + 1$. ■

Afin de donner une formulation matricielle de $\Phi(G_i, C)^e(s^2)$ et $\Phi(G_i, C)^o(s^2)$, il faut réécrire les polynômes $N_i(s)$ et $D_i(s)$, définis dans (3.4a) et (3.4b), afin que les parties paires et impaires de ces deux polynômes aient le même nombre de coefficients. Soit $\overline{\ell}$ ce nombre de coefficients, nous avons l'inégalité suivante

$$\max(p^e, p^o, d^e, d^o) \leqslant \overline{\ell} \leqslant \ell$$

Afin de ne pas alourdir les notations, nous pouvons choisir, sans perte de généralité, $\overline{\ell} = \ell$ et les $N_i(s)$ et $D_i(s)$ se réécrivent comme suit, pour $i = 1, 2$

$$N_i(s) = \sum_{k=0}^{\ell} n_k^{ie} s^{2k} + s \sum_{k=0}^{\ell} n_k^{io} s^{2k} \quad (3.6a)$$

$$D_i(s) = \sum_{k=0}^{\ell} d_k^{ie} s^{2k} + s \sum_{k=0}^{\ell} d_k^{io} s^{2k} \quad (3.6b)$$

avec

$$\begin{aligned} n_k^{ie} &= 0 \quad \text{si } k > p^e \\ n_k^{io} &= 0 \quad \text{si } k > p^o \\ d_k^{ie} &= 0 \quad \text{si } k > d^e \\ d_k^{io} &= 0 \quad \text{si } k > d^o \end{aligned}$$

En utilisant les notations introduites dans (3.6), les expressions (3.5) sont équivalentes aux relations suivantes pour $i = 1, 2$

$$\Phi(G_i, C)^e(s^2) = \sum_{k=0}^{\ell} \left(\sum_{\substack{j=0 \\ k-j \leqslant \alpha^e}}^{k} n_j^{ie} x_{k-j}^e + \sum_{\substack{j=0 \\ k-j-1 \leqslant \alpha^o}}^{k-1} n_j^{io} x_{k-j-1}^o + \sum_{\substack{j=0 \\ k-j \leqslant \beta^e}}^{k} d_j^{ie} y_{k-j}^e + \sum_{\substack{j=0 \\ k-j-1 \leqslant \beta^o}}^{k-1} d_j^{io} y_{k-j-1}^o \right) s^{2k} \tag{3.7a}$$

$$\Phi(G_i, C)^o(s^2) = \sum_{k=0}^{\ell} \left(\sum_{\substack{j=0 \\ k-j \leqslant \alpha^e}}^{k} n_j^{io} x_{k-j}^e + \sum_{\substack{j=0 \\ k-j \leqslant \alpha^o}}^{k} n_j^{ie} x_{k-j}^o + \sum_{\substack{j=0 \\ k-j \leqslant \beta^e}}^{k} d_j^{io} y_{k-j}^e + \sum_{\substack{j=0 \\ k-j \leqslant \beta^o}}^{k} d_j^{ie} y_{k-j}^o \right) s^{2k} \tag{3.7b}$$

Reformulons sous forme matricielle les expressions $\Phi(G_i, C)^e(s^2)$ et $\Phi(G_i, C)^o(s^2)$, $i = 1, 2$, données par les équations (3.7a) et (3.7b). Pour cela, considérons un vecteur C_v donné par (3.8) défini comme suit à partir des coefficients inconnus des polynômes $X^e(s^2)$, $X^o(s^2)$, $Y^e(s^2)$ et $Y^o(s^2)$

$$C_v = S\widehat{C}_v = \begin{bmatrix} C_{Xe}^T & C_{Xo}^T & C_{Ye}^T & C_{Yo}^T \end{bmatrix}^T \tag{3.8}$$

où

$$\begin{aligned} \widehat{C}_v &= \begin{bmatrix} C_{Xe}^T & C_{Xo}^T & C_{Ye}^T & C_{Yo}^T \end{bmatrix}^T, \\ C_{Xe} &= \begin{bmatrix} x_0^e & x_1^e & \dots & x_{\alpha^e}^e \end{bmatrix}^T, \\ C_{Xo} &= \begin{bmatrix} x_0^o & x_1^o & \dots & x_{\alpha^o}^o \end{bmatrix}^T, \\ C_{Ye} &= \begin{bmatrix} y_0^e & y_1^e & \dots & y_{\beta^e}^e \end{bmatrix}^T, \\ C_{Yo} &= \begin{bmatrix} y_0^o & y_1^o & \dots & y_{\beta^o}^o \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

et la matrice $S \in \mathbb{R}^{r \times \widehat{r}}$ est une matrice de sélection dont chacune des r lignes a un seul élément égal à 1 et $\widehat{r} - 1$ éléments égaux à 0 dont chacune des $\widehat{r}$ colonnes contient soit un seul élément égal à 1, soit aucun élément égal à 1. La matrice S permet de tenir compte de la structure du correcteur en éliminant dans C_v les éléments "structurellement" nuls de $\widehat{C}_v$. Puisque le vecteur C_v contient tous les élements non nuls de $\widehat{C}_v$, nous avons donc

$$\widehat{C}_v = S^T C_v$$

La relation ci-dessus traduit le fait que $SS^T = I_r$ et donc que $S^T = S^+$.

La dimension des vecteurs C_υ et $\widehat{C}_\upsilon$ est donnée par

$$\dim(C_\upsilon) = r \leqslant \dim(\widehat{C}_\upsilon) = \widehat{r} = \alpha^e + \alpha^o + \beta^e + \beta^o + 4 \tag{3.9}$$

avec

$$\alpha^e = \delta(X^e), \quad \alpha^o = \delta(X^o), \quad \beta^e = \delta(Y^e) \quad \beta^o = \delta(Y^o)$$

Exemple 3.3.1. Afin d'illustrer la relation entre $\widehat{C}_\upsilon$ et C_υ, considérons le correcteur suivant

$$C(s) = \frac{5s^3 + 2s^2 + 3}{s^4 - 3s^3 + 4s^2 + 6} = \frac{x_1^o s^3 + x_1^e s^2 + x_0^e}{y_2^e s^4 + y_1^o s^3 + y_1^e s^2 + y_0^e}$$

avec $\alpha^e = 1$, $\alpha^o = 1$, $\beta^e = 2$ et $\beta^o = 1$, $\widehat{r} = 9$ et $r = 7$. Les vecteurs $\widehat{C}_\upsilon$ et C_υ et la matrice S sont donnés par

$$\widehat{C}_\upsilon = \begin{bmatrix} x_0^e \\ x_1^e \\ x_0^o \\ x_1^o \\ y_0^e \\ y_1^e \\ y_2^e \\ y_0^o \\ y_1^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad C_\upsilon = \begin{bmatrix} x_0^e \\ x_1^e \\ x_1^o \\ y_0^e \\ y_1^e \\ y_2^e \\ y_1^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Les termes x_0^o et y_0^o sont nuls car ils n'apparaissent pas dans $C(s)$. Ils sont éliminés de C_υ grâce à la matrice de sélection S car $C_\upsilon = S\widehat{C}_\upsilon$. En effet, puisque l'application des critéres de stabilité d'Hermite-Fujiwara et d'Hermite-Biehler ne doit se faire que sur les coefficients inconnus du correcteur simultané $C(s)$ à synthétiser, il est nécessaire d'extraire ces coefficients du vecteur $\widehat{C}_\upsilon$. Ainsi, la matrice S permet de regrouper les coefficients inconnus de $C(s)$ dans le vecteur C_υ sur lequel seront appliqués les critéres de stabilité d'Hermite-Fujiwara et d'Hermite-Biehler dans la suite de ce manuscrit. ■

A partir des équations (3.7a) et (3.7b), nous pouvons déduire la forme matricielle des polynômes $\Phi(G_i, C)^e(s^2)$, $\Phi(G_i, C)^o(s^2)$ et $\Phi(G_i, C)(s)$, $i = 1, 2$, qui est donnée dans le lemme suivant.

Lemme 3.3.1. *Les polynômes $\Phi(G_i, C)^e(s^2)$ et $\Phi(G_i, C)^o(s^2)$, $i = 1, 2$, donnés dans* (3.7a) *et* (3.7b)*, se réécrivent de la manière équivalente suivante*

$$\Phi(G_i, C)^e(s^2) = V[s]\Lambda_i^e C_\upsilon, \quad i = 1, 2 \tag{3.10a}$$

$$\Phi(G_i, C)^o(s^2) = V[s]\Lambda_i^o C_\upsilon, \quad i = 1, 2 \tag{3.10b}$$

où le vecteur $V[s]$ de dimension $\ell + 1$ est défini par

$$V[s] = \begin{bmatrix} 1 & s^2 & \dots & s^{2\ell} \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

et les matrices Λ_i^e, Λ_i^o, $i = 1, 2$, de dimension $(\ell + 1 \times r)$ sont données par

$$\Lambda_i^e = \begin{bmatrix} A_i^e & B_i^e & C_i^e & D_i^e \end{bmatrix} S^T \tag{3.12a}$$

$$\Lambda_i^o = \begin{bmatrix} A_i^o & B_i^o & C_i^o & D_i^o \end{bmatrix} S^T \tag{3.12b}$$

avec les matrices A_i^e, B_i^e, C_i^e, D_i^e, A_i^o, B_i^o, C_i^o et D_i^o définies dans l'annexe D.

Démonstration. La preuve est omise car elle peut être immédiatement déduite des relations (3.7). •

Les relations (3.10) conduisent à

$$\Phi(G_i, C)(s) = \Lambda_i[s]C_v, \quad i = 1, 2 \tag{3.13}$$

où $\Lambda_i[s]$ est un vecteur de dimension r donné par

$$\Lambda_i[s] = V[s](\Lambda_i^e + s\Lambda_i^o). \tag{3.14}$$

A partir de l'écriture matricielle des polynômes $\Phi(G_i, C)^e(s^2)$ et $\Phi(G_i, C)^o(s^2)$ donnée par (3.10), nous allons étudier les équations (3.2) en utilisant successivement le critère de stabilité d'Hermite-Fujiwara (section 3.4) et le critère de stabilité d'Hermite-Biehler (section 3.5).

3.4 Synthèse du régulateur simultané pour le segment de systèmes $G_\lambda(s)$ avec le critère d'Hermite-Fujiwara

Le critère d'Hermite-Fujiwara a été initialement utilisé par [HŠT98], [HTŠ99a], [HTŠ99b] pour synthétiser des régulateurs simultanés d'ordre fixe pour n systèmes linéaires (voir chapitre 1, section 1.3.2.3.2). Dans cette partie, nous allons adapter cette méthode au cas de la commande simultanée d'un segment de systèmes $G_\lambda(s)$ devant satisfaire les contraintes (3.2).

3.4.1 Conditions sur le degré du compensateur simultané $C(s)$

Dans cette partie, nous étudions les conditions d'existence d'un régulateur $C(s)$ devant vérifier la contrainte $\Phi(G_1, C)^e(s^2) = \Phi(G_2, C)^e(s^2)$. Une condition sur les degrés du numérateur et du dénominateur du correcteur est déduite.

D'après le lemme 3.3.1, il existe un correcteur $C(s) = X(s)/Y(s)$ vérifiant $\Phi(G_1, C)^e(s^2) = \Phi(G_2, C)^e(s^2)$ si et seulement si

$$V[s]\Lambda_1^e C_v = V[s]\Lambda_2^e C_v$$

où Λ_1^e et Λ_2^e sont deux matrices définies par (3.12) et C_v est le vecteur donné par (3.8). Nous obtenons donc

$$V[s](\Lambda_1^e - \Lambda_2^e)C_v = 0 \tag{3.15}$$

Soit L une matrice de dimension $(\ell + 1) \times r$ donnée par

$$L = \Lambda_1^e - \Lambda_2^e \tag{3.16}$$

Puisque l'équation (3.15) doit être vérifiée quel que soit s et pour chaque puissance de s, alors (3.15) est équivalente à

$$LC_v = 0 \tag{3.17}$$

Le théorème 3.4.1 ci-dessous donne une condition d'existence d'une solution à l'équation (3.17).

Théorème 3.4.1. *L'équation* (3.17) *possède au moins une solution non nulle si et seulement si la condition suivante*

$$\text{rang}(L) < r \tag{3.18}$$

est vérifiée.

La solution générale de (3.17) *est donnée par*

$$C_v = (I_r - L^+L)Z \tag{3.19}$$

où Z est un vecteur quelconque tel que $\dim(Z) = \dim(C_v) = r$ *et L^+ est une inverse généralisée de L satisfaisant $L = LL^+L$.*

Démonstration. Voir [LT85]. •

L'équation (3.17) est un système linéaire homogène. Ce système possède au moins une solution non nulle si et seulement si le nombre d'équations indépendantes est inférieur au nombre des inconnues. Donc le nombre de lignes indépendantes de la matrice L doit être inférieur au nombre de colonnes. Nous pouvons en déduire que la relation (3.18) donne la taille minimale r du vecteur C_v vérifiant $\Phi(G_1, C)^e(s^2) = \Phi(G_2, C)^e(s^2)$. Rappelons que α^e, α^o, β^e et β^o sont respectivement les degrés de la partie paire et de la partie impaire de $X(s)$ et $Y(s)$. Si la condition (3.18) n'est pas vérifiée pour un r donné, alors elle peut être satisfaite en augmentant l'ordre du contrôleur simultané, donc la valeur de r. En outre, si cette condition est satisfaite, cela ne signifie pas qu'il existe un contrôleur stabilisant simultanément le segment de systèmes $G_\lambda(s)$ donné par (2.1).

3.4.2 Condition d'existence d'un régulateur simultané

Dans cette section, nous donnons une condition d'existence d'un compensateur simultané $C(s)$ d'ordre fixe stabilisant simultanément l'ensemble des systèmes décrit par $G_\lambda(s)$ donné par (2.1) en utilisant le critère de stabilité d'Hermite-Fujiwara.

Rappelons que le problème d'existence d'un régulateur simultané pour $G_\lambda(s)$ revient à chercher les conditions d'existence des polynômes caractéristiques $\Phi(G_i, C)(s)$, $i = 1, 2$ vérifiant (3.2). Pour étudier l'hurwitzité des polynômes $\Phi(G_1, C)(s)$ et $\Phi(G_2, C)(s)$, nous ferons appel aux propriétés des matrices d'Hermite-Fujiwara étudiées dans la section 1.3.2.3.2 du chapitre 1.

Tout d'abord, déterminons les matrices d'Hermite-Fujiwara de $\Phi(G_1, C)(s)$ et $\Phi(G_2, C)(s)$ vérifiant (3.2b). Pour cela définissons une matrice polynomiale $F_i[s]$, pour $i = 1, 2$, définie par

$$F_i[s] = \Lambda_i[s](I_r - L^+L) = \begin{bmatrix} P_{i1}(s) & P_{i2}(s) & \dots & P_{ir}(s) \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

avec $\Lambda_i[s]$ et L décrites respectivement par (3.14) et (3.16).

Lemme 3.4.1. *Les matrices d'Hermite-Fujiwara de $\Phi(G_1, C)(s)$ et $\Phi(G_2, C)(s)$ satisfaisant* (3.2b) *s'écrivent ainsi*

$$H(\Phi(G_i, C)(s)) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} z_j z_k H(P_{ij}(s), P_{ik}(s)), \quad i = 1, 2 \tag{3.21}$$

où z_j et z_k sont respectivement le $j^{ème}$ et le $k^{ème}$ élément d'un vecteur quelconque Z. Les polynômes $P_{ij}(s)$ et $P_{ik}(s)$ sont les éléments de la matrice polynomiale $F_i[s]$ donnée par (3.20).

Démonstration. Nous avons $\Phi(G_1, C)^e(s^2)$=$\Phi(G_2, C)^e(s^2)$ si et seulement si (3.17) possède au moins une solution non nulle C_v donnée par la relation (3.19). D'après (3.13) et (3.19) nous pouvons écrire $\Phi(G_i, C)(s)$ comme

$$\Phi(G_i, C)(s) = \Lambda_i[s](I_r - L^+L)Z, \quad i = 1, 2$$

On en déduit

$$\Phi(G_i, C)(s) = F_i[s]Z, \quad i = 1, 2 \tag{3.22}$$

où les matrices $\Lambda_i[s]$ et L sont décrites respectivement par (3.14) et (3.16), Z est un vecteur quelconque et $F_i[s]$ est donnée par (3.20).

Nous pouvons ainsi réécrire la relation (3.22) sous la forme suivante

$$\Phi(G_i, C)(s) = F_i[s]Z = \sum_{t=1}^{r} z_t P_{it}(s)$$

où z_t, $t = 1, \ldots, r$ sont les éléments du vecteur Z et $P_{it}(s)$ sont les éléments de la matrice polynomiale $F_i[s]$. En utilisant le lemme 1.3.2, nous obtenons l'expression suivante de $H(F_i[s]Z)$

$$H(F_i[s]Z) = H\Big(\sum_{t=1}^{r} z_t P_{it}(s)\Big) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} z_j z_k H(P_{ij}(s), P_{ik}(s)),$$

ce qui implique

$$H(\Phi(G_i, C)(s)) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} z_j z_k H(P_{ij}(s), P_{ik}(s)), \quad i = 1, 2$$

•

Remarque 3.4.1. Pour calculer la matrice d'Hermite-Fujiwara $H(P_{ij}(s), P_{ik}(s))$, nous utiliserons la définition 1.3.6 donnée dans le chapitre 1. ■

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un correcteur $C(s)$ d'ordre donné stabilisant $G_1(s)$ et $G_2(s)$ et vérifiant $\Phi(G_1, C)^e(s^2)$=$\Phi(G_2, C)^e(s^2)$.

Théorème 3.4.2. *Les polynômes $\Phi(G_1, C)(s)$ et $\Phi(G_2, C)(s)$ satisfaisant $\Phi(G_1, C)^e(s^2) = \Phi(G_2, C)^e(s^2)$ sont Hurwitz si et seulement s'il existe z_j et z_k, des éléments du vecteur Z, vérifiant les deux BMI suivantes*

$$\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} z_j z_k H(P_{ij}(s), P_{ik}(s)) > 0, \quad i = 1, 2 \tag{3.23}$$

Démonstration. Les matrices d'Hermite-Fujiwara de $\Phi(G_1, C)(s)$ et $\Phi(G_2, C)(s)$ vérifiant (3.2b) sont données par (3.21). D'après le théorème 1.3.7, le polynôme $\Phi(G_i, C)(s)$ est Hurwitz si et seulement si la matrice d'Hermite-Fujiwara du polynôme $\Phi(G_i, C)(s)$ est définie positive. Par conséquent, les deux polynômes $\Phi(G_1, C)(s)$ et $\Phi(G_2, C)(s)$ vérifient (3.2) si et seulement s'il existe un vecteur Z satisfaisant les inégalités matricielles (3.23). •

Nous en déduisons le corollaire suivant.

Corollaire 3.4.1. *Si les deux BMI* (3.23) *sont satisfaites, alors il existe un contrôleur simultané $C(s)$ d'ordre fixe stabilisant le segment de systèmes $G_\lambda(s)$ donné par* (2.1).

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence des théorèmes 3.2.2 et 3.4.2. •

3.4.3 Formulation LMI des conditions d'existence de $C(s)$

Les deux BMI (3.23) conduisent à un problème d'optimisation non convexe. Cette formulation peut être transformée en un problème LMI avec une contrainte de rang, voir [HTŠ99a, HŠT98]. Pour cela, nous définissons la matrice X suivante

$$X = ZZ^T \tag{3.24}$$

formée par les éléments $x_{jk} = z_j z_k$.

Le problème (3.23) devient

$$\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} x_{jk} H(P_{ij}(s), P_{ik}(s)) > 0, \quad i = 1, 2 \tag{3.25a}$$

$$\text{rang}(X) = 1 \tag{3.25b}$$

$$X \geqslant 0 \tag{3.25c}$$

Pour obtenir un problème convexe, nous avons utilisé la méthode de linéarisation décrite dans [HTŠ99a, HŠT98] résumée par le problème d'optimisation suivant

$$\text{minimiser} \qquad \text{trace}(X - ZZ^T) \tag{3.26a}$$

$$\text{sous les contraintes} \qquad \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} x_{jk} H(P_{ij}(s), P_{ik}(s)) > 0, \quad i = 1, 2 \tag{3.26b}$$

$$\begin{bmatrix} X & Z \\ Z^T & 1 \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{3.26c}$$

Si $\text{trace}(X - ZZ^T) = 0$ alors les solutions du problème (3.26) sont les solutions du problème d'optimisation non convexe (3.25).

3.4.4 Algorithme de synthèse du régulateur simultané

Dans ce paragraphe, nous proposons un algorithme permettant de synthétiser un régulateur simultané $C(s)$ basé sur le problème d'optimisation (3.26).

- **Etape 1 :** Déterminer la matrice L et les matrices d'Hermite-Fujiwara.
- **Etape 2 :** Trouver une solution au problème d'optimisation (3.26) en appliquant l'algorithme suivant :
  - **a)** $h = 0$, trouver une solution intiale X et Z_0 sans minimiser le critère (3.26a).
  - **b)** $h \longleftarrow h + 1$, trouver X et Z_{h+1} solutions du problème linéarisé

$$\text{minimiser} \qquad \text{trace}(X - Z_{h+1} Z_h^T) \tag{3.27a}$$

$$\text{sous les contraintes} \qquad \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} x_{jk} H(P_{ij}(s), P_{ik}(s)) > 0 \; i = 1, 2 \tag{3.27b}$$

$$\begin{bmatrix} X & Z_{h+1} \\ Z_{h+1}^T & 1 \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{3.27c}$$

c) Choisir ε strictement positif et suffisamment petit. Si $\left|\text{trace}(X - Z_{h+1}Z_h^T)\right| \leqslant \varepsilon$, alors passer à l'étape 3. Sinon, relancer l'étape b) jusqu'à ce que le critère $\left|\text{trace}(X - Z_{h+1}Z_h^T)\right| \leqslant \varepsilon$ soit satisfait. Si ce critère n'est pas atteignable, on quitte l'algorithme.

- **Etape 3 :** Calculer les coefficients du correcteur avec l'équation

$$C_\upsilon = (I_r - L^+L)Z_{h+1}.$$

Nous pouvons utiliser les solveurs YALMIP et SeDuMi pour résoudre le problème d'optimisation (3.27).

Pour illustrer les résultats donnés par le corollaire 3.4.1, nous appliquons l'algorithme ci-dessus sur l'exemple suivant.

Exemple 3.4.1. Nous considérons le segment de systèmes $G_\lambda(s)$ défini par les deux extrémités suivantes

$$G_1(s) = \frac{s+1}{2s^2 - s + 1}, \qquad G_2(s) = \frac{s+2}{s^2 + 2s - 1}.$$

Considérons le correcteur $C(s)$ suivant

$$C(s) = \frac{x_0^e + x_0^o s}{y_0^e + y_0^o s}$$

- **Etape 1 :** La matrice L est donnée par

$$L = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Pour résoudre le problème d'optimisation (3.26), il est ici nécessaire de calculer 32 matrices d'Hermite-Fujiwara de taille 3×3.

- **Etape 2 :** En appliquant l'algorithme donné dans le paragraphe 3.4.4 avec les solveurs YALMIP et SeDuMi, nous trouvons les résultats suivants

$$X = \begin{bmatrix} 0.0010 & 0.0010 & 0.0005 & 0.0008 \\ 0.0010 & 0.0011 & 0.0005 & 0.0008 \\ 0.0005 & 0.0005 & 0.0002 & 0.0004 \\ 0.0008 & 0.0008 & 0.0004 & 0.0006 \end{bmatrix}$$

et

$$Z = \begin{bmatrix} 0.0308 & 0.0324 & 0.0154 & 0.0253 \end{bmatrix}^T$$

- **Etape 3 :** Les coefficients du correcteur sont donnés par

$$C_\upsilon = \begin{bmatrix} 0.0335 & 0.0324 & 0.0167 & 0.0056 \end{bmatrix}^T$$

et nous en déduisons sa fonction de transfert

$$C(s) = \frac{0.0324s + 0.0335}{0.0056s + 0.0167}$$

Nous pouvons alors calculer les polynômes $\Phi(G_1, C)(s)$ et $\Phi(G_2, C)(s)$ suivants

$$\Phi(G_1, C)(s) = 0.0112s^3 + 0.0603s^2 + 0.0547s + 0.0502,$$
$$\Phi(G_2, C)(s) = 0.0056s^3 + 0.0603s^2 + 0.1262s + 0.0502.$$

Nous constatons que $\Phi(G_1, C)(s)$ et $\Phi(G_2, C)(s)$ sont Hurwitz et satisfont $\Phi(G_1, C)^e(s^2) = \Phi(G_2, C)^e(s^2)$. En utilisant le théorème 3.2.2, nous pouvons vérifier que le correcteur $C(s)$ stabilise simultanément le segment de systèmes $G_\lambda(s)$. ■

3.5 Synthèse du régulateur simultané pour un segment de systèmes avec le critère d'Hermite-Biehler

Dans cette section, nous allons étudier les équations (3.2) en utilisant maintenant le critère de stabilité d'Hermite-Biehler. Dans une première partie, nous rappelons ce critère de stabilité et ses extensions permettant de vérifier l'hurwitzité d'un ensemble de polynômes ayant une partie paire ou impaire commune. Dans une deuxième partie, nous utilisons la propriété d'entrelacement des zéros réels donnée par le critére d'Hermite-Biehler afin de synthétiser un régulateur simultané pour le segment de systèmes $G_\lambda(s)$.

3.5.1 Critère d'Hermite-Biehler

Considérons un polynôme $f(s) \in \mathcal{P}_m(s)$ donné par

$$f(s) = f^e(s^2) + sf^o(s^2) = \sum_{i=0}^{m} \sigma_i s^i, \qquad \sigma_i \in \mathbb{R}$$

où les polynômes $f^e(s^2)$ et $f^o(s^2)$ sont respectivement la partie paire et la partie impaire de $f(s)$ et s'écrivent ainsi

- si $\delta(f) = m = 2\ell$

$$f^e(u) = \sigma_0 + \sigma_2 u + \ldots + \sigma_m u^\ell,$$
$$f^o(u) = \sigma_1 + \sigma_3 u + \ldots + \sigma_{(m-1)} u^{(\ell-1)},$$

- si $\delta(f) = m = 2\ell + 1$

$$f^e(u) = \sigma_0 + \alpha_2 u + \ldots + \sigma_{(m-1)} u^\ell,$$
$$f^o(u) = \sigma_1 + \sigma_3 u + \ldots + \sigma_m u^\ell.$$

Remarque 3.5.1. Dans la suite de ce travail, nous ne considérons que le cas $m = 2\ell + 1$. Le cas $m = 2\ell$ est omis parce qu'il peut être directement déduit du cas $m = 2\ell + 1$. ■

Rappelons maintenant la propriété d'entrelacement des zéros de $f(s)$.

Définition 3.5.1. *[Gan59] Propriété d'entrelacement des zéros.*
Soit $f(s) = f^e(s^2) + sf^o(s^2)$ un polynôme réel avec $\delta(f) = m$, $\delta(f^e) = \ell$, $\delta(f^o) = \ell$. Les racines de $f^e(s^2)$ et $f^o(s^2)$ sont définies par les deux ensembles suivants

$$racines(f^e(s^2)) = \{a_1, \ldots, a_\ell\},$$
$$racines(f^o(s^2)) = \{b_1, \ldots, b_\ell\}.$$

Alors $f^e(s^2)$ et $f^o(s^2)$ vérifient la propriété d'entrelacement des zéros si et seulement si

a) *$f^e(s^2)$ et $f^o(s^2)$ ont des racines réelles, négatives, simples et distinctes,*

b) *les coefficients des termes du plus haut degré des polynômes $f^e(s^2)$ et $f^o(s^2)$ sont de même signe,*

c) *les racines de $f^e(s^2)$ alternent avec les racines de $f^o(s^2)$ comme suit*

$$b_1 < a_1 < b_2 \ldots < b_\ell < a_\ell < 0.$$

Le lien entre la propriété d'entrelacement des zéros et l'hurwitzité d'un polynôme réel est formalisé par le théorème d'Hermite-Biehler que nous rappelons ci-dessous.

Théorème 3.5.1. *[Gan59] Théorème d'Hermite-Biehler.*
Le polynôme réel $f(s) = f^e(s^2) + sf^o(s^2)$ est Hurwitz si et seulement si $f^e(s^2)$ et $f^o(s^2)$ vérifient la propriété d'entrelacement des zéros.

Le théorème d'Hermite-Biehler ci-dessus peut être reformulé avec le lemme suivant.

Lemme 3.5.1. *[FD10] Le polynôme $f(s)$ est Hurwitz si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites.*

i) *Les racines $(a_1, \ldots, a_\ell)$ de $f^e(s^2)$ sont réelles, simples et négatives.*

ii) *Tous les réels c_k dans* (3.28) *sont positifs avec*

$$f^o(s^2) = c_0 f^e(s^2) + \sum_{k=1}^{\ell} c_k \frac{f^e(s^2)}{s^2 - a_k}. \tag{3.28}$$

Notons que $c_0 = 0$ si $m = 2\ell$.

3.5.2 Généralisation du critère d'Hermite-Biehler

Considérons maintenant n polynômes réels $f_i(s) = f^e(s^2) + sf_i^o(s^2)$ $(i = 1, \ldots, n)$ ayant la même partie paire $f^e(s^2)$. Une généralisation de la propriété d'entrelacement des zéros pour ces polynômes $f_i(s)$ ayant la même partie paire est donnée dans la définition 3.5.2.

Définition 3.5.2. *Propriété d'entrelacement commun pair.*
Considérons un nombre fini de polynômes $f_i^o(s^2)$, $i = 1, \ldots, n$, avec les coefficients des termes de plus haut degré de même signe et $\delta(f_i^o) = \ell$, $i = 1, \ldots, n$. Les polynômes $f_i^o(s^2)$ ont des racines réelles, négatives et distinctes définies par l'ensemble suivant

$$racines(f_i^o(s^2)) = \{b_1^i, \ldots, b_\ell^i\}.$$

Les polynômes $f_i^o(s^2)$ vérifient la propriété d'entrelacement commun pair si et seulement si, pour chaque polynôme $f_i^o(s^2)$, il existe un polynôme $f^e(s^2)$ de degré ℓ tel que les ℓ racines de $f_i^o(s^2)$ alternent avec les ℓ racines de $f^e(s^2)$ comme suit

$$b_1^i < a_1 < b_2^i < a_2 < \ldots < b_\ell^i < a_\ell < 0$$

où $\{a_1, \ldots, a_\ell\}$ est l'ensemble des racines réelles, négatives et distinctes de $f^e(s^2)$.

Notons que si les polynômes $f_i^o(s^2)$ vérifient la propriété d'entrelacement commun pair avec $f^e(s^2)$, alors, pour toute $j^{\text{ème}}$ racine, nous avons

$$\max(b_j^i) < a_j < \min(b_{j+1}^i)$$

En se basant sur la propriété d'entrelacement commun pair, une extension du lemme 3.5.1 est maintenant déduite. Ce résultat donne des conditions qui garantissent l'hurwitzité des polynômes $f_i(s)$ ayant la même partie paire.

Corollaire 3.5.1. *Les polynômes $f_i(s) = f^e(s^2) + s f_i^o(s^2)$ avec $f_i(s) \in \mathcal{P}_m(s)$, $i = 1, \ldots, n$, sont Hurwitz si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites.*

i) *Les racines $(a_1, \ldots, a_\ell)$ de $f^e(s^2)$ sont réelles, simples et négatives.*

ii) *Tous les réels $c_{i,k}$ dans (3.29) sont positifs avec*

$$f_i^o(s^2) = c_{i,0} f^e(s^2) + \sum_{k=1}^{\ell} c_{i,k} \frac{f^e(s^2)}{s^2 - a_k}. \tag{3.29}$$

Démonstration. Ce résultat est une conséquence du lemme 3.5.1. •

Remarque 3.5.2. Dans le lemme 3.5.1 et dans le corollaire 3.5.1, nous avons choisi de fixer les racines de la partie paire du polynôme et nous calculons la partie impaire dans (3.28) et (3.29). Dans l'annexe C, ce sont les racines de la partie impaire qui sont fixée et la partie paire qui est déduite. ■

3.5.3 Ecriture matricielle du critère d'Hermite-Biehler

Nous allons maintenant présenter une écriture matricielle du corollaire 3.5.1.

Puisque nous avons

$$f^e(s^2) = \sum_{j=0}^{\ell} h_j^e s^{2j} = \gamma^e \prod_{j=1}^{\ell} (s^2 - a_j) \tag{3.30}$$

alors la relation (3.29) peut être simplifiée comme suit

$$\begin{aligned} f_i^o(s^2) &= c_{i,0} \gamma^e \prod_{j=1}^{\ell} (s^2 - a_j) + \gamma^e \sum_{k=1}^{\ell} c_{i,k} \prod_{j=1, j \neq k}^{\ell} (s^2 - a_j) \\ &= \sum_{k=0}^{\ell} c_{i,k} \sum_{j=0}^{\ell-1} \upsilon_{j,k} s^{2j} \end{aligned} \tag{3.31}$$

avec $c_{i,0} = 0$ si $m = 2\ell$.

A partir des relations (3.30) et (3.31), nous déduisons que $f_i^o(s^2)$ et $f^e(s^2)$ peuvent se réécrire sous la forme matricielle suivante

$$f_i^o(s^2) = V[s] A \Psi_i, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{3.32}$$

$$f^e(s^2) = V[s] H \tag{3.33}$$

avec $V[s]$ donné par (3.11) et Ψ_i, A et H donnés par

$$\Psi_i = \begin{bmatrix} c_{i0} & c_{i1} & \ldots & c_{i\ell} \end{bmatrix}^T \tag{3.34a}$$

$$A = \begin{bmatrix} \upsilon_{00} & \upsilon_{01} & \ldots & \upsilon_{0\ell} \\ \upsilon_{10} & \upsilon_{11} & \ldots & \upsilon_{1\ell} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \upsilon_{\ell 0} & \upsilon_{\ell 1} & \ldots & \upsilon_{\ell\ell} \end{bmatrix} \tag{3.34b}$$

$$H = \begin{bmatrix} h_0^e, & h_1^e & \ldots & h_\ell^e \end{bmatrix}^T \tag{3.34c}$$

Notons que la matrice A dépend uniquement de la partie paire $f^e(s^2)$.

Nous énonçons ci-dessous une extension du corollaire 3.5.1 pour garantir la stabilité de n polynômes réels ayant le même degré m et la même partie paire.

Corollaire 3.5.2. *Les polynômes $f_i(s) = f^e(s^2) + sf_i^o(s^2)$ avec $f_i(s) \in \mathcal{P}_m(s)$, $i = 1, \ldots, n$, sont Hurwitz si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites.*

i) *Les racines $(a_1, \ldots, a_\ell)$ de $f^e(s^2)$ sont réelles, simples et négatives.*

ii) *Toutes les composantes du vecteur $\Psi_i > 0$ donné par* (3.34a) *sont positives.*

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence de l'écriture de (3.29) sous la forme (3.32). •

3.5.4 Condition d'existence d'un contrôleur simultané pour $G_\lambda(s)$

Dans cette partie, nous étudions les conditions d'existence d'un contrôleur d'ordre fixe vérifiant l'équation (3.2) en utilisant le critère d'Hermite-Biehler dans le but de stabiliser le segment de systèmes $G_\lambda(s)$.

Soit C_v et Ψ_i, $i = 1, 2$, définis respectivement par (3.8) et (3.34a). En considérant le corollaire 3.5.2, nous pouvons formuler le lemme suivant.

Lemme 3.5.2. *Considérons $\{a_1, \ldots, a_\ell\}$ un ensemble de réels négatifs et distincts. S'il existe un compensateur $C(s)$ qui vérifie les équations suivantes*

$$\Phi(G_i, C)^e(s^2) = V[s]H, \qquad i = 1, 2 \tag{3.35a}$$

$$\Phi(G_i, C)^o(s^2) = V[s]A\Psi_i, \qquad i = 1, 2 \tag{3.35b}$$

avec les éléments de Ψ_i, $i = 1, 2$, strictements positifs, alors $C(s)$ stabilise le segment de systèmes $G_\lambda(s)$ avec A et H définis respectivement par (3.34b) *et* (3.34c).

Démonstration. Ce résultat est une conséquence du théorème 3.2.2 et du corollaire 3.5.2. •

A partir des lemmes 3.3.1 et 3.5.2, nous pouvons énoncer le théorème suivant.

Théorème 3.5.2. *Considérons $\{a_1, \ldots, a_\ell\}$ un ensemble des réels négatifs et distincts. S'il existe un vecteur C_v et Ψ_i, $i = 1, 2$, satisfaisant les équations suivantes*

$$H = \Lambda_i^e C_v, \qquad i = 1, 2 \tag{3.36a}$$

$$A\Psi_i = \Lambda_i^o C_v, \qquad i = 1, 2 \tag{3.36b}$$

avec les éléments de Ψ_i, $i = 1, 2$, strictements positifs, alors $C(s)$ stabilise le segment de systèmes $G_\lambda(s)$ avec Λ_i^e, Λ_i^e, A et H définis respectivement par (3.12), (3.34b) *et* (3.34c).

Démonstration. En considérant les relations (3.10) et (3.35), nous pouvons déduire les égalités suivantes

$$V[s](H - \Lambda_i^e C_v) = 0, \qquad i = 1, 2 \tag{3.37a}$$

$$V[s](A\Psi_i - \Lambda_i^o C_v) = 0, \qquad i = 1, 2 \tag{3.37b}$$

Le système (3.37) doit être satisfait pour chaque puissance de s. Cela signifie que le système (3.37) est équivalent à

$$H - \Lambda_i^e C_v = 0, \qquad i = 1, 2 \tag{3.38a}$$

$$A\Psi_i - \Lambda_i^o C_v = 0, \qquad i = 1, 2 \tag{3.38b}$$

En conséquence, les relations (3.36) sont démontrées. De plus, selon le lemme 3.5.2, s'il existe C_v et $\Psi_i > 0$, $i = 1, 2$, satisfaisant les équations (3.36), alors $C(s)$ stabilise le segment de systèmes $G_\lambda(s)$. •

3.5.5 Algorithme de synthèse du contrôleur simultané pour un segment de systèmes par la méthode d'Hermite-Biehler

D'après le théorème 3.5.2, la synthèse d'un régulateur simultané au segment de systèmes $G_\lambda(s)$ revient à trouver un vecteur C_v et Ψ_i, $i = 1, 2$ positif vérifiant (3.36).

Les relations (3.36) peuvent se réécrire comme suit

$$B = \Theta \begin{bmatrix} \psi \\ C_v \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

où

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H \\ H \end{bmatrix}, \ \Theta = \begin{bmatrix} A & 0 & -\Lambda_1^o \\ 0 & A & -\Lambda_2^o \\ 0 & 0 & \Lambda^e \\ 0 & 0 & \Lambda^e \end{bmatrix}, \tag{3.40a}$$

$$\psi = \begin{bmatrix} \Psi_1^T & \Psi_2^T \end{bmatrix}^T \tag{3.40b}$$

Le théorème 3.5.3 donne une condition d'existence d'une solution à l'équation (3.39).

Théorème 3.5.3. *L'équation* (3.39) *a une solution si et seulement si*

$$\operatorname{rang}\Big(\begin{bmatrix} B & \Theta \end{bmatrix}\Big) = \operatorname{rang}(\Theta). \tag{3.41}$$

Les solutions générales ψ et C_v de (3.39) *sont*

$$\psi = W_1 \left(\Theta^+ B + (I - \Theta^+\Theta)Z\right) \tag{3.42a}$$

$$C_v = W_2 \left(\Theta^+ B + (I - \Theta^+\Theta)Z\right) \tag{3.42b}$$

où $W_1 = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}$, $W_2 = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$, *$Z$ est un vecteur quelconque vérifiant* $\dim(Z) = \dim(\psi) + \dim(C_v)$ *et Θ^+ est une inverse généralisée de Θ satisfaisant $\Theta = \Theta\Theta^+\Theta$.*

Démonstration. Voir [BIG74]. •

Notons que si $\operatorname{rang}(\Theta) = \dim(\psi) + \dim(C_v)$, alors l'équation (3.39) a une solution unique ψ et C_v car $(I - \Theta^+\Theta) = 0$ pour tout Θ^+.

Une condition suffisante pour la stabilisation du segment $G_\lambda(s)$ est donnée par le corollaire suivant.

Corollaire 3.5.3. *S'il existe un vecteur Z tel que l'inégalité suivante*

$$\operatorname{Mdiag}(W_1 \left(\Theta^+ B + (I - \Theta^+\Theta)Z\right)) > 0 \tag{3.43}$$

soit satisfaite, alors le segment de systèmes $G_\lambda(s)$ est simultanément stabilisable par un compensateur d'ordre fixe $C(s)$.

Démonstration. Ce résultat est une déduction des théorèmes 3.5.2 et 3.5.3. •

Ainsi d'après le corollaire 3.5.3, le problème de la stabilisation simultanée du segment de systèmes $G_\lambda(s)$ donné par (2.1) a été réduit à la recherche d'un vecteur Z tel que chaque élément du vecteur ψ défini dans (3.40b) soit positif. Par conséquent, le problème de la stabilisation simultanée du segment $G_\lambda(s)$ par un compensateur d'ordre fixe $C(s)$ est équivalent à trouver une solution vérifiant l'inégalité (3.43).

L'algorithme de synthèse du régulateur simultané est décrit par les étapes suivantes.

- **Etape 1 :** Donner un ensemble des réels négatifs et distincts $\{a_1, \ldots, a_\ell\}$.
- **Etape 2 :** Déterminer H, A, Λ_i^e et Λ_i^o, $i = 1, 2$.
- **Etape 3 :** Tester la condition de rang donnée par la relation (3.41). Si la condition de rang est satisfaite alors passer à l'étape 4. Sinon, relancer l'étape 1 en modifiant l'ensemble $\{a_1, \ldots, a_\ell\}$.
- **Etape 4 :** Trouver une solution faisable pour l'inégalité (3.43).
- **Etape 5 :** En déduire le régulateur simultané $C(s)$.

Afin d'illustrer notre approche, nous proposons l'exemple suivant.

Exemple 3.5.1. Nous considérons le segment de systèmes $G_\lambda(s)$ défini par les deux extrémités suivantes

$$G_1(s) = \frac{s-1}{s^2 - s + 1}, \qquad G_2(s) = \frac{s-1}{s^2 + s + 1}$$

Nous pouvons observer que le système $G_1(s)$ n'est pas stabilisable par un simple gain.

- **Etape 1 :** Soit un ensemble $\{a_1, a_2\}$ de deux nombres réels négatifs et distincts donnés par $a_1 = -5.8284, \quad a_2 = -0.1716$.
- **Etape 2 :** Pour ces données, nous pouvons calculer les matrices A, H, Λ_i^e et Λ_i^o, $i = 1, 2$, et nous obtenons

$$A = \begin{bmatrix} 0.1716 & 5.8284 \\ 1.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}, \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$\Lambda_1^e = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \Lambda_2^e = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_1^o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \Lambda_2^o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Etape 3 :** Nous pouvons vérifier que la condition de rang (3.41) est satisfaite et qu'il existe une solution pour (3.39).
- **Etape 4 :** Une solution faisable de (3.43) est donnée par

$$Z = \begin{bmatrix} 2.1075 & 0.5445 & -0.08 & 2.732 & 6.1872 & 2.652 & 6.1872 & 0 & -3.5352 \end{bmatrix}^T$$

$$\psi = \begin{bmatrix} 0.7129 & 0.001 & 0.001 & 2.7129 \end{bmatrix}^T$$

$$C_v = \begin{bmatrix} 6.8421 & 1.7139 & -1.1282 & 7.8421 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

- **Etape 5 :** On en déduit le contrôleur simultané $C(s)$ suivant

$$C(s) = \frac{1.7139s^2 - 1.1282s + 6.8421}{s^2 + 7.8421}$$

Les deux polynômes caractéristiques en boucle fermée associés au deux extrémités sont donnés par

$$\Phi(G_1, C)(s) = s^4 + 0.7139s^3 + 6s^2 + 0.1282s + 1$$
$$\Phi(G_2, C)(s) = s^4 + 2.7139s^3 + 6s^2 + 15.8124s + 1$$

Puisque les deux polynômes $\Phi(G_1, C)(s)$ et $\Phi(G_2, C)(s)$ sont de même degré et Hurwitz, alors le compensateur $C(s)$ stabilise les deux extrémités $G_1(s)$ et $G_2(s)$. De plus, ces polynômes ont la même partie paire avec les coefficients des termes de plus haut degré de même signe. Le compensateur $C(s)$ stabilise donc le segment de systèmes $G_\lambda(s)$. Le compensateur $C(s)$ stabilise donc le segment de systèmes $G_\lambda(s)$. ■

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité le problème de la stabilisation simultanée d'un segment de systèmes LTI avec un contrôleur d'ordre fixe et nous avons montré que la question de la stabilisation de cette classe particulière de systèmes peut être formulée comme celle d'un problème de stabilisabilité simultanée de deux systèmes aux extrémités du segment avec une condition supplémentaire à satisfaire. En effet, des conditions d'existence ont été données pour stabiliser simultanément les deux extrémités du segment avec une contrainte d'égalité des parties paires de chacun des deux polynômes caractéristiques en boucle fermée.

Pour la synthèse du régulateur simultané, nous avons utilisé dans un premier temps le critère de stabilité d'Hermite-Fujiwara. Ce critère a fourni un problème d'optimisation BMI qui a été transformé en un problème d'optimisation convexe sous la contrainte d'inégalités matricielles linéaires (LMI) avec une condition de rang à satisfaire. Cette formulation a engendré un algorithme heuristique dont la convergence n'est pas garantie. En effet, si le critère d'optimisation ne converge pas, il n'est pas possible de savoir si cela est dû à la non existence de solutions (non existence de régulateurs simultanés) ou si cela est dû à l'algorithme d'optimisation lui-même (optimum local et non global). Par ailleurs, cette méthode de synthèse présente une complexité de calcul numérique qui dépend de l'ordre du contrôleur et de l'ordre des deux systèmes aux extrémités du segment. En conséquence, cette complexité numérique dépend du nombre et de la taille des matrices d'Hermite-Fujiwara à prendre en compte. De plus, la formulation de ce problème a été établie pour un correcteur d'ordre fixe. En conséquence, nous n'avons pas de solutions générales avec cette approche qui soient indépendantes de l'ordre du correcteur, d'où la nécessité de développer d'autres méthodes de synthèse.

Dans une dernière partie, nous avons utilisé le critère de stabilité d'Hermite-Biehler. Cette méthode de synthèse est fondée sur la propriété d'entrelacement des zéros réels et sur le choix des racines de la partie paire (ou impaire) des polynômes caractéristiques aux extrémités. Cela nous a conduit à un problème d'optimisation convexe. Cette formulation est simple et plus facile à mettre en œuvre que dans le cas de synthèse avec le critère d'Hermite-Fujiwara. Puisque nous devons choisir a priori les racines de cette partie paire (ou impaire), nous obtenons des conditions suffisantes. Il s'en suit que nous ne pouvons pas conclure sur la stabilisation du segment de systèmes $G_\lambda(s)$ lorsque l'algorithme ne converge pas.

Chapitre 4

Commande simultanée d'un segment de systèmes par un compensateur paramétré

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, un paramétrage particulier des contrôleurs simultanés pour stabiliser un segment de systèmes est proposé. Nous en avons déduit de nouvelles méthodes de synthèse qui réduisent la complexité numérique inhérente aux approches développées dans le chapitre précédent.

Dans la première partie de ce chapitre, nous reformulons le problème de la commande d'un segment de systèmes en considérant un paramétrage spécifique des contrôleurs simultanés. Des conditions de stabilisation d'un segment de systèmes $G_\lambda(s)$ sont également explicitées.

Dans la deuxième partie, des conditions d'existence d'un compensateur simultané d'ordre fixe sont données en utilisant les critères de stabilité polynomiale d'Hermite-Fujiwara et d'Hermite-Biehler. Deux algorithmes de synthèse basés sur ces critères sont proposés pour stabiliser un segment de systèmes.

Dans la troisième partie, en utilisant le critère d'Hermite-Biehler, nous proposons une méthode qui permet de synthétiser des correcteurs simultanés d'ordre quelconque. Le problème de la stabilisation d'un segment de systèmes est alors traité en utilisant une méthode d'interpolation des polynômes Hurwitz lorsque les parties paires (ou impaires) des polynômes caractéristiques sont fixées.

4.2 Reformulation du problème de la stabilisation d'un segment de systèmes avec un correcteur simultané paramétré

Soit $C(s)$, le correcteur paramétré défini par

$$C(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{D_Q(s)X_1(s) + N_Q(s)D_1(s)}{D_Q(s)Y_1(s) - N_Q(s)N_1(s)} \tag{4.1}$$

qui stabilise une des extrémités $G_1(s) = N_1(s)/D_1(s)$ du segment de systèmes $G_\lambda(s)$ donné par (2.1), avec $C_1(s) = X_1(s)/Y_1(s)$ un régulateur causal stabilisant le système $G_1(s)$. $D_Q(s)$ est un polynôme Hurwitz donné a priori et $N_Q(s)$ est un polynôme inconnu tel que $\delta(D_Q) \geqslant \delta(N_Q)$.

Nous pouvons remarquer que comme $\Phi(G_1, C_1)(s) \in \mathbb{H}$ et $D_Q(s) \in \mathbb{H}$ alors $\Phi(G_1, C)(s) \in \mathbb{H}$. Par conséquent, $C(s)$ stabilise $G_1(s)$ quel que soit $Q(s) = N_Q(s)/D_Q(s)$ avec $Q(s)$ une fonction rationnelle causale. De plus, puisque $D_Q(s)$ est un polynôme donné a priori, le paramétrage du compensateur (4.1) ne correspond pas à celui de Youla. En conséquence, le paramétrage de $C(s)$ défini par $Q(s)$ ne génère pas tout l'ensemble des contrôleurs stabilisant le système $G_1(s)$.

Le problème de la stabilisation d'un segment de systèmes $G_\lambda(s)$ donné par (2.1) avec le correcteur $C(s)$ donné par (4.1) revient à résoudre les équations suivantes

$$\Phi(G_2, C)(s) \in \mathbb{H}, \tag{4.2a}$$

$$\Phi(G_1, C)^e(s^2) = \Phi(G_2, C)^e(s^2) \tag{4.2b}$$

Ce paramétrage spécifique des contrôleurs simultanés permet de minimiser le nombre d'équations (3.2) à résoudre. En effet, pour stabiliser un segment de systèmes avec ce nouveau contrôleur paramétré, il suffit de considérer la seule équation (3.2a) au lieu des deux équations (3.2a) et (3.2b).

Dans la suite, nous reformulons les conditions (4.2) en fonction du paramétrage $Q(s) = N_Q(s)/D_Q(s)$.

En préliminaire, une condition simple pour stabiliser le système $G_2(s)$ avec le compensateur $C(s)$ défini par (4.1) est donnée ci-dessous.

Lemme 4.2.1. *Le compensateur $C(s)$ donné par* (4.1) *stabilise $G_2(s)$ si et seulement s'il existe un polynôme $N_Q(s)$ vérifiant la condition*

$$\Big(\Phi(G_2, \widetilde{C_1})(s) + N_Q(s)\Delta_{12}(s)\Big) \in \mathbb{H}, \tag{4.3}$$

avec

$$\widetilde{C_1}(s) = \frac{\widetilde{X_1}(s)}{\widetilde{Y_1}(s)} = \frac{D_Q(s)X_1(s)}{D_Q(s)Y_1(s)}, \tag{4.4a}$$

$$\Delta_{12}(s) = N_2(s)D_1(s) - D_2(s)N_1(s) \tag{4.4b}$$

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned}\Phi(G_2, C)(s) &= D_Q(s)\Big(N_2(s)X_1(s) + D_2(s)Y_1(s)\Big) + N_Q(s)\Big(N_2(s)D_1(s) - D_2(s)N_1(s)\Big)\\ &= \Phi(G_2, \widetilde{C_1})(s) + N_Q(s)\Delta_{12}(s)\end{aligned} \tag{4.5}$$

Si $C(s)$ vérifie $\Phi(G_2, C)(s) \in \mathbb{H}$, alors la relation (4.3) est satisfaite. Inversement si la relation (4.3) est vraie, alors il existe un compensateur $C(s)$ défini par (4.1) tel que $\Phi(G_2, C)(s) \in \mathbb{H}$. •

Si la relation (4.3) est satisfaite, alors nous montrons que $C(s)$ stabilise simultanément les deux systèmes $G_1(s)$ et $G_2(s)$.

Lemme 4.2.2. *Le compensateur $C(s)$ donné par* (4.1) *est un compensateur simultané pour les deux systèmes $G_1(s)$ et $G_2(s)$ si et seulement si la relation* (4.3) *est satisfaite.*

Démonstration. Nous avons par hypothèse $\Phi(G_1, C)(s) \in \mathbb{H}$. De plus, si la relation (4.3) est vraie, alors $\Phi(G_2, C)(s) \in \mathbb{H}$. Par conséquent, $C(s)$ donné par (4.1) stabilise simultanément les deux systèmes $G_1(s)$ et $G_2(s)$. Inversement, si $C(s)$ est un compensateur simultané pour les deux systèmes $G_1(s)$ et $G_2(s)$, alors $\Phi(G_2, C)(s) \in \mathbb{H}$ et la relation (4.3) est satisfaite. •

En considérant le théorème 3.2.2, nous savons qu'il suffit de stabiliser les deux systèmes $G_1(s)$ et $G_2(s)$ aux extrémités du segment de systèmes $G_\lambda(s)$ avec un compensateur $C(s)$ et de considérer $\Phi(G_1, C)^e(s^2) = \Phi(G_2, C)^e(s^2)$ pour stabiliser simultanément le segment $G_\lambda(s)$. Nous pouvons alors énoncer le résultat suivant.

Théorème 4.2.1. *S'il existe un polynôme $N_Q(s)$ satisfaisant les conditions suivantes*

$$\Big(\Phi(G_2, \widetilde{C_1})(s) + N_Q(s)\Delta_{12}(s)\Big) \in \mathbb{H} \tag{4.6a}$$

$$\Phi(G_2, C)^e(s^2) = \Phi(G_1, \widetilde{C_1})^e(s^2) \tag{4.6b}$$

où $\widetilde{C_1}(s)$ et $\Delta_{12}(s)$ sont donnés par (4.4)*, et que les coefficients des termes de plus haut degré de $\Phi(G_1, C)(s)$ et $\Phi(G_2, C)(s)$ sont de même signe, alors $C(s)$ donné par* (4.1) *stabilise simultanément le segment $G_\lambda(s)$ donné par* (2.1)*.*

Démonstration. Ce résultat est une conséquence du théorème 3.2.2 et des lemmes 4.2.1 et 4.2.2. •

En conséquence, le problème de la commande simultanée du segment de systèmes $G_\lambda(s)$ peut être formulé comme la recherche d'un compensateur $C(s)$ satisfaisant les contraintes (4.6), ces dernières étant équivalentes aux relations (4.2).

4.3 Condition de causalité du régulateur $C(s)$

Afin de prendre en compte la contrainte de causalité du correcteur dans la résolution des équations (4.6), nous développons dans cette partie quelques conditions devant être satisfaites par le régulateur initial $C_1(s)$.

Dans le lemme ci-dessous, nous donnons une condition suffisante pour que le correcteur $C(s)$ défini par (4.1) soit causal et pour que les deux polynômes caractéristiques $\Phi(G_1, C)(s)$ et $\Phi(G_2, C)(s)$ soient de même degré quelle que soit la fonction rationnelle causale $Q(s)$.

Lemme 4.3.1. *Si la relation suivante*

$$0 \leqslant \delta(D_1) \leqslant \delta(Y_1) \tag{4.7}$$

est satisfaite, alors le compensateur simultané $C(s)$ défini par (4.1) *est causal pour toute fonction rationnelle causale $Q(s)$.*

Démonstration. Suivant l'équation (4.1), le compensateur $C(s)$ est causal si et seulement si

$$\max(\delta(Y_1) + \delta(D_Q), \delta(N_Q) + \delta(N_1)) \geqslant \max(\delta(X_1) + \delta(D_Q), \delta(N_Q) + \delta(D_1))$$

Puisque le régulateur $C_1(s)$ et le système $G_1(s)$ sont causaux, on a

$$\delta(Y_1) \geqslant \delta(X_1)$$
$$\delta(N_Q) + \delta(D_1) \geqslant \delta(N_Q) + \delta(N_1)$$

Par conséquent, si l'expression (4.7) est vérifiée, alors $C(s)$ est causal. •

Corollaire 4.3.1. *Si la relation* (4.7) *est satisfaite alors $\delta(\Phi(G_1, C)) = \delta(\Phi(G_2, C))$ pour toute fonction rationnelle causale $Q(s)$.*

Démonstration. Nous avons

$$\Phi(G_2, C)(s) = \Phi(G_2, \widetilde{C_1})(s) + N_Q(s)\Delta_{12}(s)$$

où $\widetilde{C_1}(s)$ et $\Delta_{12}(s)$ sont donnés par (4.4). On en déduit

$$\delta(\Phi(G_2, C)) = \max(\delta(\Phi(G_2, \widetilde{C_1})), \delta(N_Q) + \delta(\Delta_{12}))$$

Rappelons que

$$\delta(\Delta_{12}) = \max(\delta(D_1) + \delta(N_2), \delta(D_2) + \delta(N_1))$$

et

$$\delta(\Phi(G_2, \widetilde{C_1})) = \delta(D_Q) + \delta(D_2) + \delta(Y_1)$$

Nous pouvons distinguer deux cas suivants.

1) Si $\delta(\Delta_{12}) = \delta(D_1) + \delta(N_2)$, alors

$$\delta(\Phi(G_2, C)) = \max(\delta(D_Q) + \delta(D_2) + \delta(Y_1), \delta(N_Q) + \delta(D_1) + \delta(N_2))$$

Sachant que $\delta(D_2) \geqslant \delta(N_2)$ et compte tenu de la condition (4.7), on en déduit

$$\delta(\Phi(G_2, C)) = \delta(D_Q) + \delta(D_2) + \delta(Y_1)$$

2) Si $\delta(\Delta_{12}) = \delta(D_2) + \delta(N_1)$, alors

$$\delta(\Phi(G_2, C)) = \max(\delta(D_Q) + \delta(D_2) + \delta(Y_1), \delta(N_Q) + \delta(D_2) + \delta(N_1))$$

A partir des conditions (4.7), on en déduit également

$$\delta(\Phi(G_2, C)) = \delta(D_Q) + \delta(D_2) + \delta(Y_1)$$

Par hypothèse, nous avons $\delta(D_1) = \delta(D_2)$ et

$$\delta(\Phi(G_1, C)) = \delta(D_Q) + \delta(D_1) + \delta(Y_1)$$

Nous pouvons ainsi conclure que si la condition (4.7) est vérifiée, alors

$$\delta(\Phi(G_1, C)) = \delta(\Phi(G_2, C))$$

•

Remarque 4.3.1. Nous pouvons remarquer que la condition (4.7) dépend du choix du compensateur $C_1(s)$ et qu'elle est toujours satisfaite si l'on choisit le degré du contrôleur $C_1(s)$ suffisamment grand. ■

En considérant les conditions (4.6) et (4.7), nous proposons, dans la suite de ce chapitre, deux méthodes pour stabiliser le segment de systèmes $G_\lambda(s)$ avec un compensateur paramétré $C(s)$ de la forme (4.1). La première méthode permet de synthétiser des compensateurs simultanés d'ordre fixe (section 4.4). La deuxième méthode permet de générer des régulateurs d'ordre quelconque (section 4.5).

4.4 Synthèse d'un régulateur simultané d'ordre fixe

D'après le théorème 4.2.1, le problème de la stabilisation simultanée du segment de systèmes $G_\lambda(s)$ avec un correcteur $C(s)$ de la forme (4.1) revient à chercher les conditions d'existence d'un polynôme $N_Q(s)$ satisfaisant les conditions (4.6) et (4.7). Ces résultats sont utilisés par la suite pour développer des conditions d'existence d'un correcteur $C(s)$ d'ordre fixe de la forme (4.1) stabilisant le segment de systèmes $G_\lambda(s)$.

4.4.1 Reformulation matricielle de $\Phi(G_1, C)(s)$ et $\Phi(G_2, C)(s)$

Réécrivons les polynômes $\Phi(G_i, C)^e(s^2)$ et $\Phi(G_i, C)^o(s^2)$, $i = 1, 2$ sous forme matricielle en considérant un régulateur $C(s)$ d'ordre fixe donné par (4.1). Nous avons

$$\begin{aligned}\Phi(G_1, C)(s) &= \Phi(G_1, \widetilde{C_1})(s)\\ \Phi(G_2, C)(s) &= \Phi(G_2, \widetilde{C_1})(s) + N_Q(s)\Delta_{12}(s)\end{aligned}$$

Les polynômes $\Phi(G_1, \widetilde{C_1})(s)$, $\Phi(G_2, \widetilde{C_1})(s)$, $\Delta_{12}(s)$ et $N_Q(s)$ peuvent être exprimés en fonction de leur partie paire et de leur partie impaire comme suit

$$\begin{aligned}\Delta_{12}(s) &= \Delta_{12}^e(s^2) + s\Delta_{12}^o(s^2)\\ N_Q(s) &= N_Q^e(s^2) + sN_Q^o(s^2)\\ \Phi(G_i, \widetilde{C_1})(s) &= \Phi(G_i, \widetilde{C_1})^e(s^2) + s\Phi(G_i, \widetilde{C_1})^o(s^2), \quad i = 1, 2\end{aligned}$$

Nous pouvons donc écrire $\Phi(G_i, C)^e(s^2)$ et $\Phi(G_i, C)^o(s^2)$ de la manière suivante pour $i = 1, 2$

$$\Phi(G_1, C)^e(s^2) = \Phi(G_1, \widetilde{C_1})^e(s^2) \tag{4.8a}$$

$$\Phi(G_1, C)^o(s^2) = \Phi(G_1, \widetilde{C_1})^o(s^2) \tag{4.8b}$$

$$\Phi(G_2, C)^e(s^2) = \Phi(G_2, \widetilde{C_1})^e(s^2) + N_Q^e(s^2)\Delta_{12}^e(s^2) + s^2N_Q^o(s^2)\Delta_{12}^o(s^2) \tag{4.8c}$$

$$\Phi(G_2, C)^o(s^2) = \Phi(G_2, \widetilde{C_1})^o(s^2) + N_Q^e(s^2)\Delta_{12}^o(s^2) + N_Q^o(s^2)\Delta_{12}^e(s^2) \tag{4.8d}$$

De plus, $\Phi(G_i, \widetilde{C_1})(s)$, $i = 1, 2$, $\Delta_{12}(s)$ et $N_Q(s)$ peuvent s'exprimer également sous la forme polynomiale suivante

$$\Phi(G_i, \widetilde{C_1})(s) = \sum_{k=0}^{\ell} h_k^{ie} s^{2k} + s\sum_{k=0}^{\ell} h_k^{io} s^{2k} \tag{4.9a}$$

$$\Delta_{12}(s) = \sum_{k=0}^{\rho^e} \tau_k^e s^{2k} + s\sum_{k=0}^{\rho^o} \tau_k^o s^{2k} \tag{4.9b}$$

$$N_Q(s) = \sum_{k=0}^{n^e} q_k^e s^{2k} + s\sum_{k=0}^{n^o} q_k^o s^{2k} \tag{4.9c}$$

A partir des équations (4.8) et (4.9), nous déduisons la forme polynômiale ci-dessous pour $\Phi(G_i, C)^e(s^2)$ et $\Phi(G_i, C)^o(s^2)$, $i = 1, 2$,

$$\Phi(G_1, C)^e(s^2) = \sum_{k=0}^{\ell} h_k^{1e} s^{2k} \tag{4.10a}$$

$$\Phi(G_1,C)^o(s^2) = \sum_{k=0}^{\ell} h_k^{1o} s^{2k} \tag{4.10b}$$

$$\Phi(G_2,C)^e(s^2) = \sum_{k=0}^{\ell} h_k^{2e} s^{2k} + \sum_{k=0}^{\rho^e+n^e} \Big(\sum_{\substack{j=0 \\ j\leqslant\rho^e, k-j\leqslant n^e}}^{k} \tau_j^{ie} q_{k-j}^e \Big) s^{2k} + \sum_{k=0}^{\rho^o+n^o} \Big(\sum_{\substack{j=0 \\ j\leqslant\rho^o, k-j-1\leqslant n^o}}^{k-1} \tau_j^{o} q_{k-j-1}^o \Big) s^{2k} \tag{4.10c}$$

$$\Phi(G_2,C)^o(s^2) = \sum_{k=0}^{\ell} h_k^{2o} s^{2k} + \sum_{k=0}^{\rho^e+n^o} \Big(\sum_{\substack{j=0 \\ j\leqslant\rho^e, k-j\leqslant n^o}}^{k} \tau_j^{ie} q_{k-j}^o \Big) s^{2k} + \sum_{k=0}^{\rho^o+n^e} \Big(\sum_{\substack{j=0 \\ j\leqslant\rho^o, k-j\leqslant n^e}}^{k} \tau_j^{o} q_{k-j}^e \Big) s^{2k} \tag{4.10d}$$

Définissons un vecteur Q_N, de dimension donnée n, composé des coefficients du polynôme $N_Q(s)$ inconnu

$$Q_N = \begin{bmatrix} q_0^e & \dots & q_{n^e}^e & q_0^o & \dots & q_{n^o}^o \end{bmatrix}^T \tag{4.11}$$

Afin de construire les matrices Γ^e et Γ^o intervenant dans les équations (4.14c) et (4.14c) dans le lemme 4.4.1, il faut réécrire le polynôme $\Delta_{12}(s)$, défini dans (4.9b), afin que les parties paires et impaires de ces deux polynômes aient le même nombre de coefficients que le polynôme $\Phi(G_i,\widetilde{C_1})(s)$ défini dans (4.9a). En réécrivant $\Delta_{12}(s)$ comme suit

$$\Delta_{12}(s) = \sum_{k=0}^{\ell} \tau_k^e s^{2k} + s \sum_{k=0}^{\ell} \tau_k^o s^{2k} \tag{4.12}$$

avec

$$\begin{aligned} \tau_k^e &= 0 \quad \text{si } k > \rho^e \\ \tau_k^o &= 0 \quad \text{si } k > \rho^o \end{aligned}$$

En utilisant les notations introduites dans (4.12), les expressions (4.10c) et (4.10d) sont équivalentes aux relations suivantes

$$\Phi(G_2,C)^e(s^2) = \sum_{k=0}^{\ell} \left(h_k^{2e} + \sum_{\substack{j=0 \\ k-j\leqslant n^e}}^{k} \tau_j^{ie} q_{k-j}^e + \sum_{\substack{j=0 \\ k-j-1\leqslant n^o}}^{k-1} \tau_j^{o} q_{k-j-1}^o \right) s^{2k} \tag{4.13a}$$

$$\Phi(G_2,C)^o(s^2) = \sum_{k=0}^{\ell} \left(h_k^{2o} + \sum_{\substack{j=0 \\ k-j\leqslant n^o}}^{k} \tau_j^{ie} q_{k-j}^o + \sum_{\substack{j=0 \\ k-j\leqslant n^e}}^{k} \tau_j^{o} q_{k-j}^e \right) s^{2k} \tag{4.13b}$$

A partir des équations (4.10a), (4.10b) et (4.13), nous pouvons déduire la forme matricielle des polynômes $\Phi(G_i,C)^e(s^2)$ et $\Phi(G_i,C)^o(s^2)$, $i = 1,2$.

Lemme 4.4.1. *Les polynômes $\Phi(G_i,C)^e(s^2)$ et $\Phi(G_i,C)^o(s^2)$, $i = 1,2$, sont équivalents aux relations suivantes*

$$\Phi(G_1,C)^e(s^2) = V[s]\Phi_1^e, \tag{4.14a}$$

$$\Phi(G_1,C)^o(s^2) = V[s]\Phi_1^o, \tag{4.14b}$$

$$\Phi(G_2, C)^e(s^2) = V[s](\Phi_2^e + \Gamma^e Q_N), \tag{4.14c}$$

$$\Phi(G_2, C)^o(s^2) = V[s](\Phi_2^o + \Gamma^o Q_N), \tag{4.14d}$$

avec $V[s]$ *donné par*

$$V[s] = \begin{bmatrix} 1 & s^2 & \dots & s^{2\ell} \end{bmatrix}, \tag{4.15}$$

Φ_i^e *et* Φ_i^o, $i = 1, 2$, *de dimension* $(\ell + 1)$ *donnés*

$$\Phi_i^e = \begin{bmatrix} h_0^{ie} & h_1^{ie} & \dots & h_\ell^{ie} \end{bmatrix}^T, \tag{4.16a}$$

$$\Phi_i^o = \begin{bmatrix} h_0^{io} & h_1^{io} & \dots & h_\ell^{io} \end{bmatrix}^T, \tag{4.16b}$$

ainsi que Γ^e *de dimension* $(\ell+1) \times (n^e + n^o)$ *et* Γ^o *de dimension* $(\ell+1) \times (n^e + n^o)$ *données par*

$$\Gamma^e = \begin{bmatrix} \tau_0^e & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau_1^e & \tau_0^e & \dots & 0 & \tau_0^o & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tau_\ell^e & \tau_{\ell-1}^e & \dots & \tau_{\ell-n^e-1}^e & \tau_{\ell-1}^o & \tau_{\ell-2}^o & \dots & \tau_{\ell-n^o-1}^o \end{bmatrix}, \tag{4.17a}$$

$$\Gamma^o = \begin{bmatrix} \tau_0^o & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau_1^o & \tau_0^o & \dots & 0 & \tau_1^e & \tau_0^e & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tau_\ell^o & \tau_{\ell-1}^o & \dots & \tau_{\ell-n^e-1}^o & \tau_\ell^e & \tau_{\ell-1}^e & \dots & \tau_{\ell-n^o-1}^e \end{bmatrix}. \tag{4.17b}$$

Démonstration. La preuve est omise car elle peut être immédiatement déduite des relations (4.10a), (4.10b) et (4.13). •

Dans la suite de cette partie, nous examinons les conditions (4.6) et (4.7) en utilisant, dans un premier temps, le critère de stabilité polynomial d'Hermite-Fujiwara développé dans le paragraphe 1.3.2.3.2 (section 4.4.2) et en utilisant, dans un second temps, le critère de stabilité polynomial d'Hermite-Biehler développé dans le paragraphe 3.5.1 (section 4.4.3).

4.4.2 Synthèse du régulateur simultané avec le critère d'Hermite-Fujiwara

4.4.2.1 Condition d'existence d'un polynôme $N_Q(s)$ d'ordre fixe

Dans cette section, une condition d'existence de $N_Q(s)$ est donnée afin de satisfaire la contrainte $\Phi(G_1, C)^e(s^2) = \Phi(G_2, C)^e(s^2)$.

Considérons $\Phi(G_1, C)^e(s^2)$ et $\Phi(G_2, C)^e(s^2)$ exprimés dans (4.14a) et (4.14c), et le vecteur Q_N donné par (4.11), alors nous avons $\Phi(G_1, C)^e(s^2) = \Phi(G_2, C)^e(s^2)$ si et seulement si

$$V[s]\Phi_1^e = V[s](\Phi_2^e + \Gamma^e Q_N),$$

ce qui implique

$$V[s](\Phi_1^e - \Phi_2^e - \Gamma^e Q_N) = 0$$

Définissons la matrice M comme suit

$$M = \Phi_1^e - \Phi_2^e \tag{4.18}$$

avec Φ_1^e et Φ_2^e donnés par (4.16a).

Alors, pour tout $V[s]$ défini dans (3.11), nous avons

$$M = \Gamma^e Q_N \tag{4.19}$$

où Γ^e est donné par (4.17a).

Une condition d'existence d'une solution pour l'équation (4.19) est présentée dans le théorème suivant.

Théorème 4.4.1. *[LT85]*

L'équation (4.19) *a au moins une solution non nulle Q_N si et seulement si la condition* (4.20) *est satisfaite*

$$\text{rang}([M \quad \Gamma^e]) = \text{rang}(\Gamma^e) \tag{4.20}$$

La solution générale de (4.19) *est donnée par*

$$Q_N = \Gamma^{e+} M + (I - \Gamma^{e+}\Gamma^e)U \tag{4.21}$$

où U est un vecteur quelconque tel que $\dim(U) = \dim(Q_N)$ *et Γ^{e+} est une inverse généralisée de Γ^e satisfaisant $\Gamma^e = \Gamma^e\Gamma^{e+}\Gamma^e$.*

Démonstration. Voir [LT85]. •

Notons que si $\text{rang}(\Gamma^e) = \dim(Q_N)$, alors l'équation (4.19) a une solution unique Q_N car $(I - \Gamma^{e+}\Gamma^e) = 0$ pour tout Γ^{e+}.

Remarque 4.4.1. Comme les deux matrices Γ^{e+} et M sont construites en fonction de $\widetilde{C_1}(s)$ donné par (4.4a), nous pouvons remarquer que, si la condition (4.20) n'est pas vérifiée, alors elle peut être satisfaite en considérant un autre compensateur initial donné par $C_1(s) = X_1(s)/Y_1(s)$ ou par un nouveau paramètre $D_Q(s)$. ■

4.4.2.2 Conditions d'existence du contrôleur simultané $C(s)$

Dans cette section, nous formulons une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un polynôme $N_Q(s)$ d'ordre fixe satisfaisant (4.6). Puis, nous en déduisons une condition suffisante pour stabiliser le segment de systèmes $G_\lambda(s)$ avec un contrôleur $C(s)$ défini par (4.1).

Nous allons ainsi adopter la même démarche que dans l'approche sans paramétrage présentée dans le chapitre 3.

Pour commencer, formulons la matrice d'Hermite-Fujiwara de $\Phi(G_2, C)(s)$ vérifiant (4.6b). Rappelons que $\Phi(G_1, C)^e(s^2) = \Phi(G_2, C)^e(s^2)$ si et seulement si l'équation (4.19) a au moins une solution non nulle Q_N donnée par la relation (4.21). De plus, nous avons

$$\Phi(G_2, C)(s) = \Phi(G_2, C)^e(s^2) + s\Phi(G_2, C)^o(s^2)$$

En utilisant les relations (4.14c) et (4.14d), nous pouvons réécrire $\Phi(G_2, C)(s)$ comme suit

$$\Phi(G_2, C)(s) = V[s](\Phi_2^e + s\Phi_2^o) + V[s](\Gamma^e + s\Gamma^o)Q_N \tag{4.22}$$

En insérant la relation (4.21) dans (4.22), nous obtenons

$$\Phi(G_2, C)(s) = (V[s](\Phi_2^e + s\Phi_2^o)) + (V[s](\Gamma^e + s\Gamma^o)(\Gamma^{e+}M + (I - \Gamma^{e+}\Gamma^e)U)) \tag{4.23}$$

où U est un vecteur quelconque tel que $\dim(U) = \dim(Q_N)$.

Pour simplifier (4.23), nous définissons une matrice polynomiale $R_1[s]$ et un polynôme $P_1(s)$ donnés par

$$P_1(s) = V[s](\Phi_2^e + s\Phi_2^o) + V[s](\Gamma^e + s\Gamma^o)(\Gamma^{e+}M) \tag{4.24}$$
$$R_1[s] = V[s](\Gamma^e + s\Gamma^o)(I - \Gamma^{e+}\Gamma^e) \tag{4.25}$$

Nous obtenons donc la relation suivante

$$\Phi(G_2, C)(s) = P_1(s) + R_1[s]U \tag{4.26}$$

L'équation (4.26) est équivalente à

$$\Phi(G_2, C)(s) = R[s]X \tag{4.27}$$

où $R[s]$ et X sont définis par

$$R[s] = \begin{bmatrix} P_1(s) & R_1[s] \end{bmatrix} \tag{4.28a}$$
$$X = \begin{bmatrix} 1 & U^T \end{bmatrix}^T \tag{4.28b}$$

Lemme 4.4.2. *La matrice d'Hermite-Fujiwara de $\Phi(G_2, C)(s)$ satisfaisant $\Phi(G_1, C)^e(s^2) = \Phi(G_2, C)^e(s^2)$ est donnée par la relation suivante*

$$H(\Phi(G_2, C)(s)) = \sum_{j=1}^{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} x_j x_k H(P_j(s), P_k(s)) \tag{4.29}$$

où x_j et x_k sont le $j^{ème}$ et le $k^{ème}$ élément d'un vecteur quelconque X donné par (4.28b) *et où $P_j(s)$, $P_k(s)$ sont les éléments de la matrice polynomiale $R[s]$ donnée par* (4.28a).

Démonstration. Nous avons

$$\Phi(G_2, C)(s) = R[s]X$$

Nous pouvons ainsi réécrire $\Phi(G_2, C)(s)$ sous la forme suivante

$$\Phi(G_2, C)(s) = \sum_{t=1}^{n} x_t P_t(s)$$

où x_t, $t = 1, \ldots, n$, sont les éléments du vecteur X et $P_t(s)$ sont les éléments de la matrice polynomiale $R[s]$. En utilisant le lemme 1.3.2, nous obtenons l'expression suivante de $H(R[s]X)$

$$H(R[s]X) = H\Big(\sum_{t=1}^{n} x_t P_t(s)\Big) = \sum_{j=1}^{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} x_j x_k H(P_j(s), P_k(s)),$$

ce qui implique

$$H(\Phi(G_2, C)(s)) = \sum_{j=1}^{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} x_j x_k H(P_j(s), P_k(s))$$

•

Le lemme 4.4.2 nous permet d'énoncer une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un polynôme $N_Q(s)$ d'ordre fixe vérifiant (4.6).

Théorème 4.4.2. *Il existe un polynôme $N_Q(s)$ d'ordre fixe n vérifiant* (4.6) *si et seulement s'il existe x_j et x_k, éléments du vecteur X, tels que la BMI suivante*

$$\sum_{j=1}^{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} x_j x_k H(P_j(s), P_k(s)) > 0, \tag{4.30}$$

soit satisfaite.

Démonstration. D'après le théorème 1.3.7, $\Phi(G_2, C)(s)$ est Hurwitz si et seulement si la matrice d'Hermite-Fujiwara du polynôme $\Phi(G_2, C)(s)$ est définie positive. Le lemme 4.4.2 montre que la matrice d'Hermite-Fujiwara du polynôme $\Phi(G_2, C)(s)$ donnée par (4.29) satisfait $\Phi(G_1, C)^e(s^2) = \Phi(G_2, C)^e(s^2)$. Par conséquent, le polynôme $\Phi(G_2, C)(s)$ vérifie (4.6) si et seulement s'il existe x_j et x_k, éléments du vecteur X, tels que la BMI (4.30) soit satisfaite. On en déduit qu'il existe un polynôme $N_Q(s)$ d'ordre fixe n vérifiant (4.6) si et seulement si l'inégalité (4.30) est satisfaite. •

Nous pouvons en déduire une condition suffisante pour stabiliser la segment de systèmes $G_\lambda(s)$ avec le régulateur $C(s)$.

Corollaire 4.4.1. *Si la condition* (4.30) *est satisfaite, alors il existe un contrôleur simultané $C(s)$ défini par* (4.1) *stabilisant le segment de systèmes $G_\lambda(s)$.*

Démonstration. D'après les théorèmes 4.2.1 et 4.4.2, il existe un régulateur simultané pour les deux systèmes $G_1(s)$ et $G_2(s)$ satisfaisant $\Phi(G_1, C)^e(s^2) = \Phi(G_2, C)^e(s^2)$ si et seulement si la condition (4.30) est vérifiée. En utilisant le théorème 3.2.2, si la condition (4.30) est vraie, alors il existe un contrôleur simultané $C(s)$ paramétré par $N_Q(s)$ stabilisant le segment de systèmes $G_\lambda(s)$. •

De façon similaire à la première partie du chapitre 3, nous allons transformer la condition (4.30) en un problème d'optimisation convexe de type LMI.

4.4.2.3 Formulation LMI

Définissons une matrice W satisfaisant (4.31) formée par les éléments $w_{jk} = x_j x_k$ comme suit

$$W = XX^T \tag{4.31}$$

Le problème (4.30) devient

$$\sum_{j=1}^{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} w_{jk} H(P_j(s), P_k(s)) > 0 \tag{4.32a}$$

$$\text{rang}(W) = 1 \tag{4.32b}$$

$$W \geqslant 0 \tag{4.32c}$$

Suite à la linéarisation du problème (4.32), on obtient un problème d'optimisation exprimé sous une contrainte LMI

$$\text{minimiser} \qquad \text{trace}(W - XX^T) \tag{4.33a}$$

$$\text{sous les contraintes} \qquad \sum_{j=1}^{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} w_{jk} H(P_j(s), P_k(s)) > 0 \tag{4.33b}$$

$$\begin{bmatrix} W & X \\ X^T & 1 \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{4.33c}$$

Par conséquent, les solutions du problème (4.33) sont les solutions du problème d'optimisation non convexe (4.32) si $\text{trace}(W - XX^T) = 0$.

4.4.2.4 Algorithme de synthèse du contrôleur simultané

L'algorithme de synthèse du contrôleur simultané est donné comme suit.

- **Etape 1 :** Calculer les matrices d'Hermite nécessaires pour la résolution du problème (4.33).
- **Etape 2 :** Trouver une solution faisable pour la LMI (4.33) en utilisant l'algorithme suivant :
  - **a)** $h = 0$, trouver une solution initiale faisable W et X_0 du problème (4.33) sans minimiser le critère(4.33a).
  - **b)** $h \longleftarrow h+1$, trouver W et $X_{(h+1)}$ une solution faisable du problème linéarisé suivant

$$\text{minimiser} \qquad \text{trace}(W - X_{(h+1)}X_h^T) \tag{4.34a}$$

$$\text{sous les contraintes} \qquad \sum_{j=1}^{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} w_{jk} H(P_j(s), P_k(s)) > 0 \tag{4.34b}$$

$$\begin{bmatrix} W & X_{(h+1)} \\ X_{(h+1)}^T & 1 \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{4.34c}$$

  - **c)** Choisir ε strictement positif et suffisamment petit. Si $\left|\text{trace}(W - X_{(h+1)}X_h^T)\right| \leqslant \varepsilon$, alors passer à l'étape 3. Sinon, relancer l'étape b) jusqu'à ce que le critère $\left|\text{trace}(W - X_{(h+1)}X_h^T)\right| \leqslant \varepsilon$ soit satisfait. Si ce critère n'est pas atteignable, on quitte l'algorithme.
- **Etape 3 :** Déduire le vecteur U vérifiant (4.28b) et calculer $Q_N = \Gamma^{e+}M + (I - \Gamma^{e+}\Gamma^e)U$ contenant les coefficients de $N_Q(s)$.
- **Etape 4 :** Déterminer $C(s)$ à partir de l'équation (4.1).

Appliquons cet algorithme sur l'exemple ci-dessous.

Exemple 4.4.1. Nous considérons le segment de systèmes $G_\lambda(s)$ défini par les deux extrémités suivantes

$$G_1(s) = \frac{-s+1}{3s+2}, \qquad G_2(s) = \frac{s+3}{s+1}$$

Considérons $C_1(s)$ un compensateur initial stabilisant $G_1(s)$ et vérifiant (4.7).

$$C_1(s) = \frac{-0.0037s - 0.0053}{0.0524s + 0.0741}$$

Soit $D_Q(s) = s + 1$ et un polynôme inconnu $N_Q(s) = q_0^o s + q_0^e$. Cherchons s'il existe un correcteur $C(s)$ vérifiant (4.2).

- **Etape 1 :** Nous avons calculé 36 matrices d'Hermite-Fujiwara de taille 3×3 nécessaires pour résoudre le problème d'optimisation.
- **Etape 2 et étape 3 :** En appliquant, l'algorithme donné dans le paragraphe 4.4.2.4, nous obtenons
$$Q_N = \begin{bmatrix} 0.0169 & 0.0239 \end{bmatrix}^T$$
et on déduit
$$N_Q(s) = 0.0239s + 0.0169$$

— **Etape 4 :** Le contrôleur $C(s)$ assurant la stabilité de deux systèmes $G_1(s)$ et $G_2(s)$ et satisfaisant $\Phi(G_1, C)^e(s^2) = \Phi(G_2, C)^e(s^2)$ est le suivant
$$C(s) = \frac{0.0680s^2 + 0.0896s + 0.0286}{0.0763s^2 + 0.1195s + 0.0572}$$
On en déduit
$$\Phi(G_1, C)(s) = 0.1609s^3 + 0.4896s^2 + 0.4716s + 0.1429$$
$$\Phi(G_2, C)(s) = 0.1444s^3 + 0.4896s^2 + 0.4742s + 0.1429$$

■

4.4.3 Synthèse d'un régulateur simultané avec le critère d'Hermite-Biehler

Dans cette partie, nous étudions les conditions d'existence du polynôme $N_Q(s)$ d'ordre donné a priori vérifiant l'équation (4.6) en utilisant le critère d'Hermite-Biehler développé dans la section 3.5.1. Ces conditions permettent de synthétiser un contrôleur d'ordre fixe vérifiant (4.1) et stabilisant le segment de systèmes $G_\lambda(s)$.

4.4.3.1 Condition d'existence d'un régulateur simultané

Soit $\widetilde{C_1}(s)$, un régulateur stabilisant le système $G_1(s)$ et soit $\{a_1, \ldots, a_\ell\}$, un ensemble des nombres réels, négatifs et distincts représentant les racines de $\Phi(G_1, \widetilde{C_1})^e(s^2)$. En considérant ces hypothèses, nous pouvons donner le lemme suivant.

Lemme 4.4.3. *S'il existe un compensateur $C(s)$ qui vérifie les conditions suivantes*
$$\Phi(G_2, C)^o(s^2) = VA\Psi_2 \tag{4.35a}$$
$$\Phi(G_2, C)^e(s^2) = VH, \tag{4.35b}$$
avec les éléments de Ψ_2, donné par (3.34a)*, strictement positifs, où V, A et H sont donnés respectivement par* (3.11)*,* (3.34b) *et* (3.34c)*, alors le contrôleur $C(s)$ défini par* (4.1) *stabilise simultanément le segment de systèmes $G_\lambda(s)$.*

Démonstration. Ce résultat est déduit du lemme 3.5.2. •

Rappelons que
$$\Phi(G_2, C)^e(s^2) = V[s](\Phi_2^e + \Gamma^e Q_N)$$
$$\Phi(G_2, C)^o(s^2) = V[s](\Phi_2^o + \Gamma^o Q_N)$$

Nous en déduisons alors le lemme suivant.

Lemme 4.4.4. *S'il existe un polynôme $N_Q(s)$ d'ordre fixe donné par Q_N et un vecteur Ψ_2, donné par* (3.34a) *et ayant tous ses éléments strictement positifs, satisfaisant les conditions suivantes*

$$A\Psi_2 = \Phi_2^o + \Gamma^o Q_N \tag{4.36a}$$
$$H = \Phi_2^e + \Gamma^e Q_N, \tag{4.36b}$$

avec A et H donnés respectivement par (3.34b) *et* (3.34c)*, alors $C(s)$ défini par* (4.1) *stabilise simultanément le segment de systèmes $G_\lambda(s)$.*

Démonstration. Ce résultat est déduit à partir du lemme 4.4.3. •

4.4.3.2 Algorithme de synthèse du régulateur $C(s)$

Les équations (4.36) peuvent s'écrire comme

$$B_q = \Theta_q \begin{bmatrix} \Psi_2 \\ Q_N \end{bmatrix} \tag{4.37}$$

avec

$$B_q = \begin{bmatrix} \Phi_2^o \\ H - \Phi_2^e \end{bmatrix}, \ \Theta_q = \begin{bmatrix} A & -\Gamma^o \\ 0 & \Gamma^e \end{bmatrix} \tag{4.38a}$$

Les solutions générales de l'équation (4.37) sont données dans le théorème suivant.

Théorème 4.4.3. *L'équation* (4.37) *a une solution si et seulement si*

$$\operatorname{rang}\Big(\begin{bmatrix} B_q & \Theta_q \end{bmatrix}\Big) = \operatorname{rang}(\Theta_q). \tag{4.39}$$

Les solutions générales Ψ_2 et Q_N de (4.37) *sont*

$$\Psi_2 = W_1 \left(\Theta_q^+ B_q + (I - \Theta_q^+ \Theta_q) Z_q\right) \tag{4.40a}$$
$$Q_N = W_2 \left(\Theta_q^+ B_q + (I - \Theta_q^+ \Theta_q) Z_q\right) \tag{4.40b}$$

où $W_1 = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}$, $W_2 = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$, Z_q est un vecteur quelconque vérifiant $\dim(Z_q) = \dim(\Psi_2) + \dim(Q_N)$ et Θ_q^+ est une inverse généralisée de Θ_q satisfaisant $\Theta_q = \Theta_q \Theta_q^+ \Theta_q$.

Démonstration. Voir [BIG74]. •

Notons que si $\operatorname{rang}(\Theta_q) = \dim(\Psi_2) + \dim(Q_N)$ alors l'équation (4.37) a une solution unique Ψ_2 et Q_N car $(I - \Theta_q^+ \Theta_q) = 0$ pour tout Θ_q^+.

Une condition suffisante pour stabiliser le segment $G_\lambda(s)$ est formulée par le corollaire suivant.

Corollaire 4.4.2. *S'il existe un vecteur Z_q tel que l'inégalité suivante*

$$\operatorname{Mdiag}(W_1 \left(\Theta_q^+ B_q + (I - \Theta_q^+ \Theta_q) Z_q\right)) > 0 \tag{4.41}$$

soit satisfaite, alors il existe un compensateur $C(s)$ défini par (4.1) *stabilisant simultanément le segment de systèmes $G_\lambda(s)$.*

Démonstration. Ce résultat est une déduction du lemme 4.4.4 et du théorème 4.4.3. •

Ainsi, d'après le corollaire 4.4.2, le problème de la stabilisation simultanée du segment de systèmes $G_\lambda(s)$ par un correcteur paramétré d'ordre fixe $C(s)$ a été réduit à la recherche d'un vecteur Z_q tel que chaque élément du vecteur Ψ_2 soit positif. En conséquence, cela revient à trouver une solution faisable à l'inégalité (4.41).

L'algorithme de synthèse du régulateur simultané est décrit par les étapes suivantes.

- **Etape 1 :** Trouver un compensateur initial causal $\widetilde{C_1}(s)$ stabilisant $G_1(s)$.
- **Etape 2 :** Calculer $\Phi(G_1, \widetilde{C_1})(s)$, extraire l'ensemble des racines réelles distinctes $\{a_1, \ldots, a_\ell\}$ de $\Phi(G_1, \widetilde{C_1})^e(s^2)$ et en déduire les matrices H et A.
- **Etape 3 :** Calculer $\Phi(G_2, \widetilde{C_1})(s)$ et $\Delta_{12}(s)$ et en déduire les matrices Φ_2^e, Φ_2^o, Γ^e et Γ^o.
- **Etape 4 :** Tester la condition de rang donnée par la relation (4.39). Si la condition de rang est satisfaite alors passer à l'étape 5. Sinon, relancer l'étape 1 en modifiant le régulateur initial $\widetilde{C_1}(s)$.
- **Etape 5 :** Trouver une solution faisable Z_q pour l'inégalité (4.41).
- **Etape 6 :** Déterminer Q_N à partir de l'équation (4.40b).
- **Etape 7 :** En déduire le régulateur simultané $C(s)$.

Afin d'illustrer notre approche, nous proposons l'exemple suivant.

Exemple 4.4.2. Considérons l'exemple donné dans la section 4.4.2.4.

- **Etape 1 :** Soit un compensateur initial $C_1(s)$ donné par

$$C_1(s) = \frac{-2s - 1.5}{s + 2}$$

et stabilisant $G_1(s)$ et vérifiant (4.7).

Soit $D_Q(s) = s + 1$ et un polynôme inconnu $N_Q(s) = q_0^o s + q_0^e$. Cherchons s'il existe un correcteur $C(s)$ vérifiant (4.2).

- **Etape 2 :** Calculons $\Phi(G_1, \widetilde{C_1})(s)$

$$\Phi(G_1, \widetilde{C_1})(s) = 5s^3 + 12.5s^2 + 10s + 2.5$$

On en déduit H et A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 12.5 \end{bmatrix}$$

- **Etape 3 :** Φ_2^e, Φ_2^o, Γ^e et Γ^o sont donnés respectivement par

$$\Phi_2^e = \begin{bmatrix} -2.5 & -5.5 \end{bmatrix}^T, \quad \Phi_2^o = \begin{bmatrix} -7 & -1 \end{bmatrix}^T$$
$$\Gamma^e = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}^T, \quad \Gamma^o = \begin{bmatrix} 11 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^T$$

- **Etape 4 :** La condition du rang (4.39) est satisfaite.
- **Etape 5 :** Nous avons $\text{rang}(\Theta_q) = \dim(\Psi_2) + \dim(Q_N)$ alors l'équation (4.37) a une solution unique Ψ_2 et Q_N donnée par

$$\Psi_2 = \begin{bmatrix} 0.8182 & 1.9091 \end{bmatrix}^T, \quad Q_N = \begin{bmatrix} 1 & 1.2727 \end{bmatrix}^T$$

- **Etape 6 :** Par conséquent
$$N_Q(s) = 1.2727s + 1$$
- **Etape 7 :** Le contrôleur $C(s)$ est le suivant
$$C(s) = \frac{1.8182s^2 + 2.0455s + 0.5}{2.2727s^2 + 2.7273s + 1}$$

On en déduit

$$\Phi(G_1, C)(s) = 5s^3 + 12.5s^2 + 10s + 2.5$$
$$\Phi(G_2, C)(s) = 4.0909s^3 + 12.5s^2 + 10.3636s + 2.5$$

Les deux polynômes $\Phi(G_1, C)(s)$ et $\Phi(G_2, C)(s)$ sont de même degré et sont Hurwitz, le compensateur $C(s)$ stabilise donc les deux extrémités $G_1(s)$ et $G_2(s)$. De plus, ces polynômes ont la même partie paire avec les coefficients des termes de plus haut degré de même signe. Le compensateur $C(s)$ stabilise donc le segment de systèmes $G_\lambda(s)$. ■

4.5 Synthèse d'un régulateur simultané d'ordre quelconque

Dans cette partie, nous allons étudier les conditions d'existence d'un polynôme $N_Q(s)$ d'ordre quelconque satisfaisant les conditions (4.6) en utilisant le critère de stabilité polynomial d'Hermite-Biehler présenté dans la section 3.5.1. Ces résultats sont utilisés pour synthétiser un correcteur $C(s)$ d'ordre quelconque de la forme (4.1) stabilisant le segment de systèmes $G_\lambda(s)$.

4.5.1 Conditions d'existence d'un compensateur simultané $C(s)$

D'après le théorème 4.2.1, le problème d'existence d'un compensateur $C(s)$ stabilisant le segment de systèmes $G_\lambda(s)$ revient à chercher les conditions d'existence d'un polynôme $N_Q(s)$ d'ordre quelconque vérifiant (4.6). En étudiant le problème posé par les équations (4.6), nous pouvons distinguer deux cas.

- Si $\Delta_{12}(s) \in \mathbb{H}$.
  Dans ce cas, une solution évidente à ce problème est donnée en choisissant par exemple $D_Q(s)$ et $\Phi(G_2, C)(s)$ tels que
$$D_Q(s) = \Delta_{12}(s)$$
$$\Phi(G_2, C)(s) = D_Q(s)\Phi(G_1, C_1)(s) = \Phi(G_1, \widetilde{C_1})(s)$$
  où $\Phi(G_1, C_1)(s) \in \mathbb{H}$. De plus, nous avons $\Phi(G_1, C)(s) = D_Q(s)\Phi(G_1, C_1)(s)$, ce qui donne $\Phi(G_1, C)^e(s^2) = \Phi(G_2, C)^e(s^2)$. En considérant l'équation (4.5), nous obtenons
$$D_Q(s)\Phi(G_1, C_1)(s) = D_Q(s)\Phi(G_2, C_1)(s) + D_Q(s)N_Q(s) \tag{4.42}$$
  Nous en déduisons
$$N_Q(s) = \Phi(G_1, C_1)(s) - \Phi(G_2, C_1)(s)$$
- Si $\Delta_{12}(s) \notin \mathbb{H}$.
  Dans ce cas, il existe un polynôme $N_Q(s)$ vérifiant (4.6) si et seulement s'il existe un polynôme Hurwitz $\Phi(G_2, C)(s)$ tel que
$$\Phi(G_2, C)(s) = \Phi(G_2, \widetilde{C_1})(s) + N_Q(s)\Delta_{12}(s) \tag{4.43}$$

Par conséquent, $\Phi(G_2, C)(s) - \Phi(G_2, \widetilde{C_1})(s)$ doit être divisible par $\Delta_{12}(s)$ où $\widetilde{C_1}(s)$ est donné par (4.4). Cela signifie qu'il existe $N_Q(s)$ si et seulement s'il existe un polynôme Hurwitz $\Phi(G_2, C)(s)$ qui interpole les valeurs de $\Phi(G_2, \widetilde{C_1})(s)$ aux zéros de $\Delta_{12}(s)$ en tenant compte de leur multiplicité. Ce résultat nous permet d'énoncer le théorème suivant.

Théorème 4.5.1. *Il existe un compensateur simultané $C(s)$ donné par* (4.1) *pour les deux systèmes $G_1(s)$ et $G_2(s)$ dans le cas où $\Phi(G_1, C)(s)$ et $\Phi(G_2, C)(s)$ ont la même partie paire si et seulement s'il existe un polynôme stable $\Phi(G_2, C)(s)$ avec $\Phi(G_2, C)^e(s^2) = \Phi(G_1, C)^e(s^2)$ qui interpole les valeurs de $\Phi(G_2, \widetilde{C_1})(s)$ aux zéros de $\Delta_{12}(s)$ en tenant compte de leur multiplicité.*

Démonstration. Pour montrer ce résultat, il suffit d'écrire $\Phi(G_2, C)(s)$ sous la forme donnée par (4.43) et de considérer les deux polynômes $\Delta_{12}(s)$ et $\Phi(G_2, \widetilde{C_1})(s)$ comme étant respectivement le diviseur et le reste d'une division euclidienne dans l'ensemble des polynômes. Notons que la paire inconnue $(\Phi(G_2, C)(s), N_Q(s))$ représente respectivement le dividende et le quotient de (4.43). Cette paire n'est pas nécessairement unique. On en déduit que $\Delta_{12}(s)$ doit être un facteur de $\Big(\Phi(G_2, C)(s) - \Phi(G_2, \widetilde{C_1})(s)\Big)$ pour assurer que $N_Q(s)$ soit un polynôme avec $\Phi(G_2, C)(s) \in \mathbb{H}$ tel que $\Phi(G_2, C)^o(s^2)$ soit un polynôme à déterminer donné par

$$\Phi(G_2, C)^e(s^2) = \Phi(G_1, C)^e(s^2) = \Phi(G_1, \widetilde{C_1})^e(s^2)$$

Dans ce cas, il existe un compensateur simultané $C(s)$ pour les deux systèmes $G_1(s)$ et $G_2(s)$ tel que $\Phi(G_1, C)(s)$ et $\Phi(G_2, C)(s)$ aient la même partie paire. De plus, $\Phi(G_2, C)(s)$ interpole les valeurs de $\Phi(G_2, \widetilde{C_1})(s)$ aux zéros de $\Delta_{12}(s)$ en tenant compte de leurs multiplicités.

Inversement, si $\Phi(G_2, C)(s)$ est un polynôme Hurwitz qui interpole les valeurs de $\Phi(G_2, \widetilde{C_1})(s)$ aux zéros de $\Delta_{12}(s)$ en tenant compte de leurs multiplicités, alors, puisqu'il satisfait $\Phi(G_1, C)^e(s^2) = \Phi(G_2, C)^e(s^2)$, il existe un polynôme $N_Q(s)$ vérifiant (4.43). On en déduit qu'il existe un compensateur simultané $C(s)$ pour les deux systèmes $G_1(s)$ et $G_2(s)$. •

Le corollaire 4.5.1 ci-dessous donne des conditions suffisantes d'existence d'un compensateur simultané $C(s)$ pour le segment de systèmes $G_\lambda(s)$.

Corollaire 4.5.1. *S'il existe un compensateur $C(s)$ vérifiant les deux conditions suivantes*

i) *$\Phi(G_1, C)(s)$ et $\Phi(G_2, C)(s)$ sont deux polynômes Hurwitz avec leurs coefficients des termes de plus haut degré de même signe,*

ii) *$\Phi(G_2, C)(s)$ interpole les valeurs de $\Phi(G_2, \widetilde{C_1})(s)$ aux zéros de $\Delta_{12}(s)$ en tenant compte de leurs multiplicités et vérifie $\Phi(G_2, C)^e(s^2) = \Phi(G_1, \widetilde{C_1})^e(s^2)$.*

Alors $C(s)$ stabilise le segment de systèmes $G_\lambda(s)$ donné par (2.1).

Démonstration. La preuve de ce corollaire se déduit des théorèmes 3.2.2 et 4.5.1. Notons que, selon le paramétrage de $C(s)$, nous avons $\Phi(G_1, C)(s) = \Phi(G_1, \widetilde{C_1})(s)$ alors $\Phi(G_1, C)^e(s^2) = \Phi(G_1, \widetilde{C_1})^e(s^2)$. •

A partir des conditions données dans le corollaire 4.5.1, nous allons détailler la méthode d'interpolation dans la section suivante. Pour des raisons de simplicité nous allons étudier le cas où les zéros de $\Delta_{12}(s)$ sont simples.

4.5.2 Formulation du problème d'interpolation

L'objectif de cette partie est de formuler le problème d'existence d'un polynôme d'interpolation $\Phi(G_2, C)(s)$ Hurwitz tel que $\Phi(G_2, C)^e(s^2) = \Phi(G_1, \widetilde{C_1})^e(s^2)$.

Soit σ_i, $i \in \{1, \ldots, 2m\}$, les zéros complexes de $\Delta_{12}(s)$ et σ_j, $j \in \{2m+1, \ldots, 2m+n\}$, les zéros réels distincts de $\Delta_{12}(s)$. Définissons

$$\begin{aligned}
\beta_i &= \Phi(G_2, \widetilde{C_1})(\sigma_i), \quad i \in \{1, \ldots, m\} \\
\bar{\beta}_i &= \Phi(G_2, \widetilde{C_1})(\bar{\sigma}_i), \quad i \in \{m+1, \ldots, 2m\} \\
\beta_j &= \Phi(G_2, \widetilde{C_1})(\sigma_j), \quad j \in \{2m+1, \ldots, 2m+n\}
\end{aligned}$$

Considérons l'ensemble $\mathbb{E}$ suivant

- m paires de nombres complexes (σ_i, β_i), $(\bar{\sigma}_i, \bar{\beta}_i)$ avec $i \in \{1, \ldots, 2m\}$ et tel qu'aucun σ_i^2 ne soit identique,
- n paires de nombres réels (σ_j, β_j) avec $j \in \{2m+1, \ldots, 2m+n\}$ et tel qu'aucun σ_j ne soit identique.

Nous désirons interpoler les $2m+n$ points de l'ensemble $\mathbb{E}$ avec le polynôme réel Hurwitz $\Phi(G_2, C)(s)$. Le polynôme $\Phi(G_2, C)(s)$ doit vérifier les trois conditions suivantes

1) $\Phi(G_2, C)(s) \in \mathbb{H}$

2) $\Phi(G_2, C)^e(s^2) = \Phi(G_1, \widetilde{C_1})^e(s^2)$

3)

$$\begin{aligned}
\beta_i &= \Phi(G_2, C)(\sigma_i), i \in \{1, \ldots, m\} \\
\bar{\beta}_i &= \Phi(G_2, C)(\bar{\sigma}_i), i \in \{m+1, \ldots, 2m\} \\
\beta_j &= \Phi(G_2, C)(\sigma_j), j \in \{2m+1, \ldots, 2m+n\}
\end{aligned}$$

avec σ_ν, $\nu \in \{1, \ldots, 2m+n\}$, les zéros distincts de $\Delta_{12}(s)$.

Examinons maintenant ces conditions en considérant $\Phi(G_2, C)(s) = \Phi(G_2, C)^e(s^2) + s\ \Phi(G_2, C)^o(s^2)$.

Le polynôme $\Phi(G_2, C)^o(s^2)$ peut se réécrire comme suit

$$\Phi(G_2, C)^o(s^2) = c_0 \Phi(G_2, C)^e(s^2) + \sum_{k=1}^{\ell} c_k \frac{\Phi(G_2, C)^e(s^2)}{s^2 - a_k}$$

avec $\{a_1, \ldots, a_\ell\}$ les racines de $\Phi(G_2, C)^e(s^2)$.

On en déduit les expressions suivantes

$$\beta_i = \Phi(G_2, C)^e(\sigma_i^2) + \sigma_i \left(c_0 \Phi(G_2, C)^e(\sigma_i^2) + \sum_{k=1}^{\ell} c_k \frac{\Phi(G_2, C)^e(\sigma_i^2)}{\sigma_i^2 - a_k} \right), \quad i \in \{1, \ldots, m\} \tag{4.44a}$$

$$\bar{\beta}_i = \Phi(G_2, C)^e(\bar{\sigma}_i^2) + \bar{\sigma}_i \left(c_0 \Phi(G_2, C)^e(\bar{\sigma}_i^2) + \sum_{k=1}^{\ell} c_k \frac{\Phi(G_2, C)^e(\bar{\sigma}_i^2)}{\bar{\sigma}_i^2 - a_k} \right), \quad i \in \{m+1, \ldots, 2m\} \tag{4.44b}$$

$$\beta_j = \Phi(G_2, C)^e(\sigma_j^2) + \sigma_j \left(c_0 \Phi(G_2, C)^e(\sigma_j^2) + \sum_{k=1}^{\ell} c_k \frac{\Phi(G_2, C)^e(\sigma_j^2)}{\sigma_j^2 - a_k} \right), \quad j \in \{2m+1, \ldots, 2m+n\} \tag{4.44c}$$

Ce qui implique

$$\frac{\beta_1}{\prod_{k=1}^{\ell}(\sigma_1^2 - a_k)} - 1 = c_0\sigma_1 + c_1 \frac{\sigma_1}{\sigma_1^2 - a_1} + \ldots + c_\ell \frac{\sigma_1}{\sigma_1^2 - a_\ell} \tag{4.45a}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\beta_m}{\prod_{k=1}^{\ell}(\sigma_m^2 - a_k)} - 1 = c_0\sigma_m + c_1 \frac{\sigma_m}{\sigma_m^2 - a_1} + \ldots + c_\ell \frac{\sigma_m}{\sigma_m^2 - a_\ell} \tag{4.45b}$$

$$\frac{\bar{\beta}_{m+1}}{\prod_{k=1}^{\ell}(\bar{\sigma}_{m+1}^2 - a_k)} - 1 = c_0\bar{\sigma}_{m+1} + c_1 \frac{\bar{\sigma}_{m+1}}{\bar{\sigma}_{m+1}^2 - a_1} + \ldots + c_\ell \frac{\bar{\sigma}_{m+1}}{\bar{\sigma}_{m+1}^2 - a_\ell} \tag{4.45c}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\bar{\beta}_{2m}}{\prod_{k=1}^{\ell}(\bar{\sigma}_{2m}^2 - a_k)} - 1 = c_0\bar{\sigma}_{2m} + c_1 \frac{\bar{\sigma}_{2m}}{\bar{\sigma}_{2m}^2 - a_1} + \ldots + c_\ell \frac{\bar{\sigma}_{2m}}{\bar{\sigma}_{2m}^2 - a_\ell} \tag{4.45d}$$

$$\frac{\beta_{2m+1}}{\prod_{k=1}^{\ell}(\sigma_{2m+1}^2 - a_k)} - 1 = c_0\sigma_{2m+1} + c_1 \frac{\sigma_{2m+1}}{\sigma_{2m+1}^2 - a_1} + \ldots + c_\ell \frac{\sigma_{2m+1}}{\sigma_{2m+1}^2 - a_\ell} \tag{4.45e}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\beta_{2m+n}}{\prod_{k=1}^{\ell}(\sigma_{2m+n}^2 - a_k)} - 1 = c_0\sigma_{2m+n} + c_1 \frac{\sigma_{2m+n}}{\sigma_{2m+n}^2 - a_1} + \ldots + c_\ell \frac{\sigma_{2m+n}}{\sigma_{2m+n}^2 - a_\ell} \tag{4.45f}$$

Par conséquent, le problème d'interpolation d'un polynôme Hurwitz $\Phi(G_2, C)(s)$ est exprimé sous la forme d'un système d'équations (4.45) à résoudre où les variables inconnues $c_{k,k\in\{0\ldots,\ell\}}$ représentent un ensemble de paramètres positifs. Par hypothèse, l'ensemble des racines négatives distinctes $a_{k,k\in\{1\ldots,\ell\}}$ de $\Phi(G_2, C)^e(s^2)$ sont connues et données par la partie paire du polynôme Hurwitz $\Phi(G_1, \widetilde{C_1})(s) = \Phi(G_1, C)(s)$. Le système d'équations (4.45) est équivalent à

$$\Sigma\ \Psi = \Omega \tag{4.46}$$

avec

$$\Omega = \begin{bmatrix} \dfrac{\beta_1}{\prod_{k=1}^{\ell}(\sigma_1^2 - a_k)} - 1 \\ \\ \dfrac{\bar{\beta}_1}{\prod_{k=1}^{\ell}(\bar{\sigma}_1^2 - a_k)} - 1 \\ \vdots \\ \dfrac{\beta_{2m}}{\prod_{k=1}^{\ell}(\sigma_{2m}^2 - a_k)} - 1 \\ \\ \dfrac{\bar{\beta}_{2m}}{\prod_{k=1}^{\ell}(\bar{\sigma}_{2m}^2 - a_k)} - 1 \\ \\ \dfrac{\beta_{2m+1}}{\prod_{k=1}^{\ell}(\sigma_{2m+1}^2 - a_k)} - 1 \\ \vdots \\ \dfrac{\beta_{2m+n}}{\prod_{k=1}^{\ell}(\sigma_{2m+n}^2 - a_k)} - 1 \end{bmatrix} \tag{4.47a}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dfrac{\sigma_1}{\sigma_1^2 - a_1} & \cdots & \dfrac{\sigma_1}{\sigma_1^2 - a_\ell} \\ \\ \bar{\sigma}_1 & \dfrac{\bar{\sigma}_1}{\bar{\sigma}_1^2 - a_1} & \cdots & \dfrac{\bar{\sigma}_1}{\bar{\sigma}_1^2 - a_\ell} \\ & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{2m} & \dfrac{\sigma_{2m}}{\sigma_{2m}^2 - a_1} & \cdots & \dfrac{\sigma_{2m}}{\sigma_{2m}^2 - a_\ell} \\ \\ \bar{\sigma}_{2m} & \dfrac{\bar{\sigma}_{2m}}{\bar{\sigma}_{2m}^2 - a_1} & \cdots & \dfrac{\bar{\sigma}_{2m}}{\bar{\sigma}_{2m}^2 - a_\ell} \\ \\ \sigma_{2m+1} & \dfrac{\sigma_{2m+1}}{\sigma_{2m+1}^2 - a_1} & \cdots & \dfrac{\sigma_{2m+1}}{\sigma_{2m+1}^2 - a_\ell} \\ & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{2m+n} & \dfrac{\sigma_{2m+n}}{\sigma_{2m+n}^2 - a_1} & \cdots & \dfrac{\sigma_{2m+n}}{\sigma_{2m+n}^2 - a_\ell} \end{bmatrix} \tag{4.47b}$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_\ell \end{bmatrix}^T \tag{4.47c}$$

4.5.3 Conditions d'interpolation d'un polynôme Hurwitz avec une partie paire fixe

En considérant l'équation (4.46), le théorème suivant présente une condition nécessaire et suffisante pour l'interpolation d'un polynôme Hurwitz $\Phi(G_2, C)(s)$ qui garantit que $\Phi(G_2, C)^e(s^2) = \Phi(G_1, \widetilde{C_1})^e(s^2)$ et qui satisfait les contraintes d'interpolation $\Phi(G_2, C)(\sigma_\nu) = \beta_\nu$ où σ_ν, $\nu \in \{1 \dots 2m + n\}$, sont les zéros distincts de $\Delta_{12}(s)$.

Théorème 4.5.2. *Soit $2m+n$ paires de nombres (σ_ν, β_ν), $\nu \in \{1 \dots 2m+n\}$. $\Phi(G_2, C)(s)$ est un polynôme Hurwitz qui interpole (σ_ν, β_ν) si et seulement s'il existe un vecteur Ψ avec des éléments strictement positifs tel que la relation* (4.46) *soit satisfaite où $a_{k,k\in\{1\dots,\ell\}}$ est un ensemble de nombres réels, négatifs et distincts représentant les racines de $\Phi(G_2, C)^e(s^2) = \Phi(G_1, \widetilde{C_1})^e(s^2)$.*

Démonstration. Par hypothèse, les racines $a_{k,k\in\{1\dots,\ell\}}$ de $\Phi(G_2, C)^e(s^2) = \Phi(G_1, \widetilde{C_1})^e(s^2)$ sont des nombres réels, négatifs et distincts. Donc, d'après le lemme 3.5.1, le polynôme $\Phi(G_2, C)(s)$ est Hurwitz si et seulement si les réels $c_{k,k\in\{0\dots,\ell\}}$ définis par (4.44) sont positifs. Par conséquent, $\Phi(G_2, C)(s)$ est un polynôme Hurwitz qui interpole les paires (σ_ν, β_ν) si et seulement si les réels $c_{k,k\in\{0\dots,\ell\}}$ définis par (4.45) sont positifs. Puisque l'équation (4.46) est déduite de la relation (4.45), alors $\Phi(G_2, C)(s)$ est un polynôme Hurwitz qui interpole (σ_ν, β_ν) si et seulement s'il existe un vecteur Ψ avec des éléments strictement positifs tel que (4.46) soit satisfaite. •

Théorème 4.5.3. *Soit $\Sigma \in \mathbb{C}^{(2m+n+3)\times(\ell+1)}$ et $\Omega \in \mathbb{C}^{(\ell+1)}$ donnés par* (4.47a) *et* (4.47b)*. L'équation* (4.46) *a une solution si et seulement si*

$$\operatorname{rang}\Big(\begin{bmatrix}\Omega & \Sigma\end{bmatrix}\Big) = \operatorname{rang}(\Sigma). \tag{4.48}$$

La solution générale de (4.46) *est donnée par*

$$\Psi = \Sigma^+\Omega + (I - \Sigma^+\Sigma)Y \tag{4.49}$$

où Y est un vecteur quelconque tel que $\dim(Y) = \dim(\Psi)$ et Σ^+ est une inverse généralisée de Σ satisfaisant $\Sigma = \Sigma\Sigma^+\Sigma$.

Démonstration. Voir [BIG74]. •

Dans notre cas, Ψ doit être un vecteur de nombres réels positifs avec $\Psi \in \mathbb{R}^{(\ell+1)}$.

Le corollaire ci-dessous donne une condition suffisante d'existence d'un polynôme Hurwitz $\Phi(G_2, C)(s)$ vérifiant les contraintes d'interpolation $\Phi(G_2, C)(\sigma_\nu) = \beta_\nu$, $\nu \in \{1 \dots 2m+n\}$, tel que $\Phi(G_2, C)^e(s^2) = \Phi(G_1, \widetilde{C_1})^e(s^2)$.

Corollaire 4.5.2. *Si Ψ donné par* (4.49) *est un vecteur de nombres réels et l'inégalité suivante*

$$\operatorname{Mdiag}(\Sigma^+\Omega + (I - \Sigma^+\Sigma)Y) > 0 \tag{4.50}$$

est satisfaite, où Y est un vecteur quelconque valué dans $\mathbb{R}$ tel que $\dim(Y) = \dim(\Psi)$, alors il existe un polynôme $\Phi(G_2, C)(s)$ Hurwitz qui interpole les points (σ_ν, β_ν) et qui vérifie $\Phi(G_2, C)^e(s^2) = \Phi(G_1, \widetilde{C_1})^e(s^2)$.

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence des théorèmes 4.5.2 et 4.5.3. •

Corollaire 4.5.3. *Si Ψ donné par* (4.49) *est un vecteur de nombres réels et l'inégalité* (4.50) *est satisfaite, alors il existe un compensateur $C(s)$ de la forme* (4.1) *stabilisant le segment de systèmes $G_\lambda(s)$.*

Démonstration. Ce résultat est déduit des corollaires 4.5.1 et 4.5.2. •

4.5.4 Algorithme de synthèse du compensateur simultané $C(s)$

En se basant sur les résultats précédents, nous présentons l'algorithme à mettre en œuvre pour déterminer un compensateur simultané $C(s)$ stabilisant le segment de systèmes $G_\lambda(s)$.

- **Etape 1 :** Calculer les racines σ_ν de $\Delta_{12}(s)$ avec $\Delta_{12}(s) = N_2(s)D_1(s) - D_2(s)N_1(s)$. Si $\Delta_{12}(s) \in \mathbb{H}$, alors la solution est évidente (voir section 4.5.1). Si $\Delta_{12}(s) \notin \mathbb{H}$ alors aller à l'étape 2).
- **Etape 2 :** Poser $\Delta_{12}(s) = \Delta_{12}^-(s)\Delta_{12}^+(s)$ où $\Delta_{12}^-(s)$ et $\Delta_{12}^+(s)$ représentent respectivement la partie stable et la partie instable de $\Delta_{12}(s)$.
- **Etape 3 :** Trouver un contrôleur initial causal $C_1(s) = X_1(s)/Y_1(s)$ stabilisant le système $G_1(s)$.
- **Etape 4 :** Choisir $D_Q(s) = P(s)\Delta_{12}^-(s)$ où $P(s)$ est un polynôme quelconque Hurwitz et en déduire $\widetilde{C_1} = D_Q(s)X_1(s)/D_Q(s)Y_1(s)$.
- **Etape 5 :** Calculer $\Phi(G_1, \widetilde{C_1})(s)$ et $\Phi(G_2, \widetilde{C_1})(s)$ et en déduire a_k l'ensemble des racines réelles distinctes et négatives de $\Phi(G_1, \widetilde{C_1})^e(s^2)$.
- **Etape 6 :** Calculer $\Phi(G_2, \widetilde{C_1})(\sigma_\nu) = \beta_\nu$ et en déduire les matrices Ω et Σ.
- **Etape 7 :** Tester la condition de rang donnée par la relation (4.48). Si la condition de rang (4.48) est satisfaite alors passer à l'étape 8. Sinon, aller l'étape 3 en modifiant le régulateur $C_1(s)$.
- **Etape 8 :** Trouver une solution faisable pour l'inégalité (4.50). Puis, calculer Ψ à partir de la relation (4.49).
- **Etape 9 :** Calculer $\Phi(G_2, C)(s)$ et déterminer $N_Q(s)$ à partir de la relation $\Phi(G_2, C)(s) = \Phi(G_2, \widetilde{C_1})(s) + N_Q(s)\Delta(s)$.
- **Etape 10 :** Calculer $C(s)$ donné par (4.1).

Afin d'illustrer notre approche, nous proposons l'exemple suivant.

Exemple 4.5.1. Nous considérons le segment de systèmes $G_\lambda(s)$ défini par les deux extrémités suivantes

$$G_1(s) = \frac{s^2 + s + 2}{s^2 + 2s + 1}, \qquad G_2(s) = \frac{3s + 2}{2s^2 - s + 2}$$

- **Etape 1 :** $\Delta_{12}(s)$ est donné par

$$\Delta_{12}(s) = -2s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 7s - 2$$

Les racines σ_ν de $\Delta_{12}(s)$ sont données par l'ensemble E

$$E = \{2.2613,\ 0.2545,\ -0.7579 + j1.0787,\ -0.7579 - j1.0787\}$$

- **Etape 2 :** Notons que $\Delta_{12}(s)$ a deux zéros instables. On en déduit

$$\Delta_{12}^-(s) = s^2 + 1.5158s + 1.7380$$

- **Etape 3 :** Soit $C_1(s)$ un compensateur initial qui stabilise le système $G_1(s)$

$$C_1(s) = \frac{s + 1}{s^2 + s + 1}$$

- **Etape 4 :** Soit $P(s) = s^2 + 1.02s + 0.02$. Puisque $D_Q(s) = \Delta_{12}^-(s)P(s)$ alors

$$D_Q(s) = s^4 + 2.5358s^3 + 3.3041s^2 + 1.8031s + 0.0348$$

On en déduit $\widetilde{C_1}(s) = D_Q(s)X_1(s)/D_Q(s)Y_1(s)$.

- **Etape 5 :** Ce qui entraîne

$$\begin{aligned}\Phi(G_1, \widetilde{C_1})(s) &= s^8 + 6.5358s^7 + 19.4473s^6 + 36.2344s^5 + 45.2866s^4 + 38.3897s^3 \\ &\quad + 20.9394s^2 + 5.6178s + 0.1043 \\ \Phi(G_2, \widetilde{C_1})(s) &= 2s^8 + 6.0716s^7 + 15.1440s^6 + 28.1251s^5 + 40.9121s^4 + 40.8212s^3 \\ &\quad + 24.2435s^2 + 7.4209s + 0.139\end{aligned}$$

Ceci implique

$$\Phi(G_1, C)^e(s^2) = s^8 + 19.4473s^6 + 45.2866s^4 + 20.9394s^2 + 0.1043$$

Les racines a_i de $\Phi(G_1, C)^e(s^2)$ sont données par l'ensemble S

$$S = \{-16.8304,\ -1.9950,\ -0.6169,\ -0.0050\}$$

- **Etape 6 :** Calculons les valeurs $\Phi(G_2, \widetilde{C_1})(\sigma_\nu) = \beta_\nu$

$$\begin{aligned}\Phi(G_2, \widetilde{C_1})(2.2613) &= 8.5739 \times 10^3 \\ \Phi(G_2, \widetilde{C_1})(0.2545) &= 4.4757 \\ \Phi(G_2, \widetilde{C_1})(-0.7579 + j1.0787) &= 0 \\ \Phi(G_2, \widetilde{C_1})(-0.7579 - j1.0787) &= 0\end{aligned}$$

Ceci implique

$$\Omega^T = [0.8739\ \ 1.7040\ \ -1.0000\ \ -1.0000]$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.103 & 0.318 & 0.394 & 0.441 \\ 0.0151 & 0.123 & 0.373 & 3.648 \\ -0.052 + j0.061 & -0.608 + j0.059 & -0.667 - j0.452 & -0.438 - j0.62 \\ -0.052 - j0.061 & -0.608 - j0.059 & -0.667 + j0.452 & -0.438 + j0.62 \end{bmatrix}$$

- **Etape 7 :** La condition de rang (4.48) est satisfaite.
- **Etape 8 :** Le vecteur Ψ contenant les c_k, $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, est donné

$$\Psi^T = [3.4640\ \ 1.0091\ \ 0.0315\ \ 0.4154]$$

avec $c_0 = 0$.
Ψ est positif, il existe donc un polynôme stable $\Phi(G_2, C)(s)$ qui interpole les valeurs de $\Phi(G_2, \widetilde{C_1})(s)$ aux zéros de $\Delta_{12}(s)$ et vérifie $\Phi(G_2, C)^e(s^2) = \Phi(G_1, \widetilde{C_1})^e(s^2)$.

- **Etape 9 :** Nous obtenons

$$\Phi(G_2, C)(s) = s^8 + 4.92s^7 + 19.4473s^6 + 35.3457s^5 + 45.2866s^4 \\ + 34.7062s^3 + 20.9394s^2 + 8.6827s + 0.1043$$

On en déduit $N_Q(s)$

$$N_Q(s) = 0.5s^4 + 1.0758s^3 - 0.3258s^2 - 0.5725s + 0.0168$$

- **Etape 10 :** Le compensateur simultané $C(s) = X(s)/Y(s)$ est le suivant :

$$X(s) = 0.5s^6 + 3.0758s^5 + 5.8616s^4 + 5.6916s^3 + 3.6532s^2 + 1.2989s + 0.0516$$
$$Y(s) = 0.5s^6 + 1.9600s^5 + 5.0899s^4 + 6.3897s^3 + 6.3493s^2 + 2.9660s + 0.0012$$

Nous pouvons vérifier que le compensateur $C(s)$ stabilise simultanément $G_1(s)$ et $G_2(s)$ avec les deux polynômes caractéristiques $\Phi(G_1, C)(s)$ et $\Phi(G_2, C)(s)$ suivants

$$\Phi(G_1, C)(s) = s^8 + 6.5358s^7 + 19.4473s^6 + 36.2344s^5 + 45.2866s^4 \\ + 38.3897s^3 + 20.9394s^2 + 5.6178s + 0.1043$$
$$\Phi(G_2, C)(s) = s^8 + 4.9200s^7 + 19.4472s^6 + 35.3459s^5 + 45.2867s^4 \\ + 34.7051s^3 + 20.9380s^2 + 8.6835s + 0.1043$$

Nous observons que $\Phi(G_1, C)(s)$ et $\Phi(G_2, C)(s)$ sont deux polynômes de même degré avec les coefficients des termes de plus haut degré de même signe et ayant la même partie paire. Par conséquent, le segment de systèmes $G_\lambda(s)$ est stabilisé par le compensateur causal $C(s)$. ■

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité le problème de la stabilisation simultanée d'un segment de systèmes LTI en utilisant un paramétrage particulier du contrôleur simultané. Des nouvelles conditions de stabilisation de cette famille de systèmes ont été données tout en assurant la causalité du régulateur simultané.

Dans la première partie de ce chapitre, les critères de stabilité d'Hermite-Fujiwara et d'Hermite-Biehler ont été mis en œuvre pour développer deux méthodes de synthèse des régulateurs simultanés d'ordre fixe. Le critère d'Hermite-Fujiwara a permis d'exprimer la question de la stabilisation d'un segment de systèmes comme un problème d'optimisation BMI. En utilisant le paramétrage des contrôleurs simultanés, nous avons montré qu'une seule contrainte BMI est nécessaire au lieu de deux contraintes BMI données dans le troisième chapitre. Cependant, la transformation de cette BMI en un problème d'optimisation convexe a engendré un algorithme heuristique dont la convergence n'est pas garantie. De plus, l'analyse et la formulation de ce problème ont été établies pour un correcteur d'ordre donné a priori. Le critère de stabilité d'Hermite-Biehler a conduit à une formulation simple et facile à mettre en œuvre. Cette approche dépend du choix du régulateur initial.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous avons étudié la commande simultanée d'un segment de systèmes en utilisant la méthode d'interpolation des polynômes Hurwitz. Cette formulation a été obtenue en utilisant le critère de stabilité d'Hermite-Biehler. Un algorithme pour synthétiser des contrôleurs d'ordre quelconque stabilisant le segment de systèmes $G_\lambda(s)$ a été donné. Nous avons montré que la méthode d'interpolation proposée permet de donner des conditions d'existence quel que soit l'ordre du régulateur considéré.

Chapitre 5

Stabilisation robuste d'un polytope de systèmes LTI

5.1 Introduction

La modélisation des systèmes physiques peut générer des modèles incertains à cause des non-linéarités, des variations paramétriques, des erreurs de modélisation, etc. Il est donc nécessaire de développer des méthodes de commande robuste qui tiennent compte de ces incertitudes. Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à la classe particulière de systèmes incertains que sont les polytopes de systèmes LTI.

Dans les chapitres précédents, nous avons étudié le problème de la stabilisation simultanée d'un segment de systèmes dans l'espace des polynômes. Dans ce chapitre, à l'aide du théorème des segments étendus [BHL88], nous allons étendre cette étude à la stabilisation d'un polytope de systèmes SISO. Il s'agit d'une application de la méthode de commande développée dans le chapitre 3 généralisée à plusieurs segments de systèmes. Dans ce chapitre, nous montrons que, pour stabiliser un polytope de systèmes, il suffit de stabiliser ses sommets en satisfaisant une condition supplémentaire qui dépend des polynômes caractéristiques en boucle fermée associés aux sommets de ce polytope. Une méthodologie complète pour synthétiser un contrôleur stabilisant un polytope de systèmes sera développée. Ce contrôleur ne stabilise pas seulement les sommets du polytope simultanément, mais il stabilise aussi l'ensemble des systèmes appartenant au polytope. Il s'agit donc d'un contrôleur simultané robuste pour un polytope de systèmes SISO.

Une revue de la littérature révèle qu'il y a peu de méthodes disponibles pour stabiliser des polytopes de systèmes avec l'approche polynomiale [HAPŠ01, Hen02, HŠK03, KKL07, KKL08]. Toutes ces approches se réfèrent à des conditions de stabilité basées sur des approximations du domaine de stabilité et sur les fonctions strictement positives réelles (SPR). En outre, l'une des difficultés lorsque nous appliquons ces méthodes consiste à sélectionner un polynôme particulier, appelé polynôme central dans [HŠK03]. En conséquence, ces méthodes ne proposent pas une solution systématique et générale pour stabiliser un polytope de systèmes, d'où l'importance de chercher d'autres approches n'utilisant pas des approximations du domaine de stabilité.

Pour stabiliser un polytope de systèmes, nous proposons dans ce chapitre une stratégie de commande qui n'utilise pas les fonctions rationnelles strictement positives réelles, mais le théorème des segments étendus [BHL88]. Cette approche permet de construire des fonctions bistables qui peuvent ne pas être SPR.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Dans la première partie, nous détaillons l'état de l'art de la stabilisation d'un polytope de systèmes. Dans la deuxième partie, nous étudions

le problème de la stabilisation robuste d'un polytope de systèmes dans l'espace des polynômes. Puis dans la troisième partie, nous développons une méthode de synthèse pour un contrôleur simultané stabilisant un polytope de systèmes. Cette approche utilise le critère de stabilité d'Hermite-Fujiwara. Dans la dernière partie, à partir du critère de stabilité d'Hermite-Biehler, nous proposons une méthode de synthèse basée essentiellement sur la propriété d'entrelacement des zéros de la partie paire (ou impaire) des polynômes caractéristiques en boucle fermée et sur le choix des racines de cette partie paire (ou impaire).

5.2 Sur la stabilisation des systèmes ayant des incertitudes polytopiques avec l'approche polynomiale

Dans ce manuscrit, nous ne traitons pas explicitement de l'approche dite de Kharitonov (voir [BCK95]) car cette dernière n'aborde pas la stabilisation robuste des systèmes par intervalles, mais traite uniquement la question de l'analyse de la stabilité robuste de ces systèmes.

A notre connaissance, la seule méthode développée pour la stabilisation d'un système affecté par une incertitude polytopique modélisé dans l'espace des polynômes est celle de [HŠK03]. Dans cette approche, Henrion *et al.* ont combiné la théorie des polynômes positifs avec les propriétés des fonctions SPR dans le but de concevoir un régulateur robuste d'ordre fixe stabilisant ce type de systèmes. Dans [HŠK03], le domaine de stabilité proposé est décrit par une inégalité matricielle linéaire (LMI). Ce domaine de stabilité LMI est paramétré par un polynôme stable donné, appelé polynôme central. Il s'agit donc d'une approximation convexe de la région de stabilité considérée. De cette manière, le problème de synthèse d'un contrôleur robuste revient à résoudre un problème d'optimisation convexe de type LMI que nous détaillons ci-dessous.

Les travaux publiés dans [HB01, KKL07, KKL08] seront discutés à la fin de cette section.

Dans la première partie de cette section, nous rappelons la notion d'approximation LMI d'un domaine de stabilité quelconque et la condition de stabilité d'un polynôme réel dans ce domaine. Dans la seconde partie, nous détaillons une condition suffisante développée par [HŠK03] pour stabiliser un système avec des incertitudes polytopiques.

5.2.1 Approximation LMI du domaine de stabilité

Soit $\mathcal{D}$ une région de stabilité dans le plan complexe satisfaisant

$$\mathcal{D} = \left\{ s \in \mathbb{C} : \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}^* \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12}^* & d_{22} \end{bmatrix}}_{D} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} \right\} \tag{5.1}$$

avec D une matrice hermitienne ayant une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative [Bac98]. Deux choix standard pour D sont le demi-plan gauche ($d_{11} = 0$, $d_{12} = 1$ et $d_{22} = 0$) et le disque unitaire ($d_{11} = -1$, $d_{12} = 0$ et $d_{22} = 1$).

Considérons $\partial\mathcal{D}$ la frontière de $\mathcal{D}$ telle que

$$\partial\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{C} : d_{11} + d_{12}s + d_{22}ss^* = 0\}$$

Définissons un polynôme D-stable et une fonction D-SPR.

Définition 5.2.1. *[HŠK03] Un polynôme D-stable.*
Un polynôme est D-stable si toutes ses racines appartiennent à $\mathcal{D}$.

Définition 5.2.2. *[HŠK03] Une fonction D-réelle strictement positive (D-SPR). Une fonction est D-SPR si sa partie réelle est positive pour tout $s \in \partial\mathcal{D}$.*

Nous avons le lemme suivant.

Lemme 5.2.1. *[HŠK03] Soit deux polynômes réels $d(s)$ et $c(s)$ de degré m tels que*

$$d(s) = d_0 + d_1 s + \ldots + d_m s^m$$
$$c(s) = c_0 + c_1 s + \ldots + c_m s^m$$

Un polynôme $c(s)$ est D-stable si et seulement s'il existe un polynôme D-stable $d(s)$ tel que la fonction rationnelle $c(s)/d(s)$ est D-SPR.

Nous en déduisons le corollaire suivant.

Corollaire 5.2.1. *[HŠK03] Soit un polynôme donné D-stable $d(s)$, alors $c(s)$ est un polynôme D-stable si la fonction rationnelle $c(s)/d(s)$ est D-SPR.*

La condition D-SPR donnée dans le corollaire 5.2.1 est formulée comme une condition de positivité polynomiale.

Lemme 5.2.2. *[HŠK03] Considérons γ un réel positif donné. Soit la condition D-SPR suivante*

$$\mathcal{R}_e\left(\frac{c(s)}{d(s)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{c^*(s)}{d^*(s)} + \frac{c(s)}{d(s)}\right) = \frac{c^*(s)d(s) + d^*(s)c(s)}{2d^*(s)d(s)} \geqslant \gamma, \quad \forall s \in \partial\mathcal{D} \tag{5.2}$$

La condition (5.2) *est équivalente à*

$$p(s) = c^*(s)d(s) + d^*(s)c(s) - 2\gamma d^*(s)d(s) \geqslant 0, \quad \forall s \in \partial\mathcal{D} \tag{5.3}$$

Pour formuler la condition de positivité polynomiale (5.3) comme une expression LMI, nous définissons les vecteurs d et c contenant respectivement les coefficients des deux polynômes $d(s)$ et $c(s)$ comme suit

$$d = \begin{bmatrix} d_0 & d_1 & \ldots & d_m \end{bmatrix}$$
$$c = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_m \end{bmatrix}$$

ainsi que les expressions $P(c)$ et $D(Q)$ comme suit

$$P(c) = c^* d + d^* c - 2\gamma d^* d \tag{5.4a}$$

$$D(Q) = \Pi^* \begin{bmatrix} d_{11}Q & d_{12}Q \\ d_{12}^* Q & d_{22}Q \end{bmatrix} \Pi \tag{5.4b}$$

avec

- γ un réel positif,
- d_{11}, d_{12} et d_{22} les éléments de la matrice D définie par (5.1),
- Q une matrice symétrique de dimension $m \times m$,

- Π une matrice donnée par

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Une formulation LMI équivalente à la condition (5.3) est donnée dans le lemme suivant.

Lemme 5.2.3. *[HŠK03] Le polynôme $p(s)$ dans* (5.3) *est positif pour tout $s \in \partial\mathcal{D}$ si et seulement s'il existe une matrice Q vérifiant la LMI suivante*

$$P(c) + D(Q) \geqslant 0, \quad Q = Q^* \tag{5.5}$$

Maintenant, nous pouvons rappeler le résultat fondamental suivant.

Théorème 5.2.1. *[HŠK03] Soit un polynôme donné D-stable $d(s)$ de degré m, alors $c(s)$ est un polynôme D-stable si et seulement s'il existe une matrice $Q = Q^*$ satisfaisant la LMI* (5.5).

Dans la section suivante, nous donnons une condition suffisante pour étudier la stabilité d'un polytope de polynômes dans un domaine $\mathcal{D}$ en utilisant la LMI (5.5). Cette formulation permet de synthétiser des correcteurs d'ordre fixe pour un système ayant des incertitudes polytopiques.

5.2.2 Condition suffisante pour la stabilisation robuste

Dans cette partie, nous rappelons l'approche proposée par [HŠK03] pour étudier la stabilisation robuste d'un système avec une incertitude polytopique.

Soit un système $\widetilde{G}(s) = a(s)/b(s)$ et un contrôleur $C(s) = x(s)/y(s)$ avec $a(s)$ et $b(s)$ deux polynômes de degré m et $x(s)$ et $y(s)$ deux polynômes de degré r. Supposons que le système $\widetilde{G}(s)$ soit incertain et appartienne à un polytope décrit par ses n sommets donnés par $\widetilde{G_i}(s) = a_i(s)/b_i(s)$, $i = 1, \ldots, n$. On dit que le système $\widetilde{G}(s)$ est polytopique.

Les polynômes caractéristiques en boucle fermée pour $\widetilde{G}(s)$ et pour chaque sommet du polytope sont donnés par

$$\Phi(\widetilde{G}, C)(s) = a(s)x(s) + b(s)y(s) \tag{5.6a}$$

$$\Phi(\widetilde{G_i}, C)(s) = a_i(s)x(s) + b_i(s)y(s), \quad i = 1, \ldots, n \tag{5.6b}$$

Dans [HŠK03], le problème de la stabilisation robuste du système incertain $\widetilde{G}(s)$ est posé comme celui de l'existence d'un contrôleur $C(s)$ tel que le polytope de polynômes $\Phi(\widetilde{G}, C)(s)$, défini par ses sommets $\Phi(\widetilde{G_i}, C)(s)$, $i = 1, \ldots, n$, soit D-stable.

En reformulant $\Phi(\widetilde{G_i}, C)(s)$ par identification des coefficients des puissances successives de l'indéterminée s, nous obtenons le vecteur c^i suivant

$$c^i = \begin{bmatrix} c_0^i & c_1^i & \ldots & c_{m+r}^i \end{bmatrix} = ZS^i, \quad i = 1, \ldots, n \tag{5.7}$$

qui contient les coefficients du polynôme $\Phi(\widetilde{G_i}, C)(s)$ et qui est une fonction linéaire des paramètres du régulateur, où S^i est la matrice de Sylvester regroupant les paramètres d'un sommet $\widetilde{G_i}(s)$ et Z est le vecteur des paramètres de régulateur $C(s)$ qui sont donnés par

$$Z = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_r & y_0 & y_1 & \dots & y_r \end{bmatrix}$$

$$S^i = \begin{bmatrix} a_0^i & a_1^i & \dots & a_m & & & \\ & a_0^i & a_1^i & \dots & a_m^i & & \\ & & \ddots & & \ddots & & \\ & & a_0^i & a_1^i & \dots & a_m^i \\ b_0^i & b_1^i & \dots & b_m^i & & & \\ & b_0^i & b_1^i & \dots & b_m^i & & \\ & & \ddots & & \ddots & & \\ & & b_0^i & b_1^i & \dots & b_m^i \end{bmatrix}$$

Comme dans (5.4a), nous définissons la matrice $P(c^i)$ ainsi

$$P(c^i) = (c^i)^* d + d^* c^i - 2\gamma d^* d, \quad i = 1, \dots, n \tag{5.8}$$

L'équation (5.8) est équivalente à

$$P^i(Z) = (S^i)^* Z^* d + d^* Z S^i - 2\gamma d^* d, \quad i = 1, \dots, n \tag{5.9}$$

En se basant sur le théorème 5.2.1, une condition suffisante d'existence d'un contrôleur $C(s)$ d'ordre fixe stabilisant le système incertain $\widetilde{G}(s)$ est donnée dans le théorème suivant.

Théorème 5.2.2. *[HŠK03] Soit $a_i(s)$ et $b_i(s)$, $i = 1, \dots, n$, des polynômes réels de degré m représentant les sommets $\widetilde{G_i}(s)$ du système polytopique $\widetilde{G}(s)$, avec $\delta(a_i) \leqslant \delta(b_i)$ et $\delta(b_i) = m$ constant. Soit $d(s)$ un polynôme D-stable donné de degré $m + r$. S'il existe une matrice Q^i telle que la LMI suivante*

$$P^i(Z) + D(Q^i) \geqslant 0, \quad Q^i = (Q^i)^*, \quad i = 1, \dots, n \tag{5.10}$$

soit satisfaite alors le contrôleur $C(s) = x(s)/y(s)$ D-stabilise le système polytopique $\widetilde{G}(s)$ avec $\delta(y) = r$.

Exemple 5.2.1. Soit le système polytopique $\widetilde{G}(s)$ décrit par les trois sommets suivants

$$\widetilde{G_1}(s) = \frac{a_1(s)}{b_1(s)} = \frac{-0.25s + 0.5}{s^2 - 5s + 11} \tag{5.11a}$$

$$\widetilde{G_2}(s) = \frac{a_2(s)}{b_2(s)} = \frac{-0.25s - 0.5}{s^2 - 2.25s - 2.25} \tag{5.11b}$$

$$\widetilde{G_3}(s) = \frac{a_3(s)}{b_3(s)} = \frac{-0.25s - 0.5}{s^2 - 3.5s - 3.5} \tag{5.11c}$$

L'objectif est de stabiliser $\widetilde{G}(s)$ avec un régulateur $C(s) = x_0/y_0$. Nous en déduisons le vecteur $Z = [x_0 \;\; y_0]$.

De plus, nous avons

$$S^1 = \begin{bmatrix} 0.5000 & -0.2500 & 0 \\ 11.0000 & -5.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$
$$S^2 = \begin{bmatrix} -0.5000 & -0.2500 & 0 \\ -2.2500 & -2.5000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$
$$S^3 = \begin{bmatrix} -0.5000 & -0.2500 & 0 \\ -3.5000 & -3.5000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

Le polynôme D-stable est choisi comme $d(s) = (s+1)^2$, ce qui donne le vecteur $d = [1 \;\; 2 \;\; 1]$.

Nous considérons le demi-plan gauche comme domaine de stabilité, ce qui donne la matrice D suivante (voir (5.1))

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous en déduisons alors $D(Q)$ comme suit (voir (5.4b))

$$D(Q) = \Pi^* \begin{bmatrix} 0 & Q \\ Q & 0 \end{bmatrix} \Pi$$

où $Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ une matrice symétrique à déterminer et Π est une matrice donnée par

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En choisissant $\gamma = 0.2$, la résolution de LMI (5.10) donne

$$Q = \begin{bmatrix} -4.4530 & -2.0221 \\ -2.0221 & -11.9416 \end{bmatrix}$$
$$Z = \begin{bmatrix} -166.0318 & 7.8447 \end{bmatrix}$$

Nous en déduisons le régulateur $C(s) = -21.1649$. En conséquence, les polynômes caractéristiques en boucle fermée de trois sommets sont donnés par

$$\Phi(\widetilde{G_1}, C)(s) = s^2 + 0.2912s + 0.4176,$$
$$\Phi(\widetilde{G_2}, C)(s) = s^2 + 2.7912s + 8.3324,$$
$$\Phi(\widetilde{G_3}, C)(s) = s^2 + 1.7912s + 7.0824.$$

Comme la condition donnée par le théorème 5.2.2 est satisfaite, alors $C(s)$ stabilise le système polytopique $\widetilde{G}(s)$. ■

Remarque 5.2.1. Si nous ne trouvons pas une solution faisable pour la LMI (5.10), alors nous ne pouvons pas conclure sur la stabilisation robuste du système $\widetilde{G}(s)$ lorsque l'algorithme de synthèse ne converge pas. ■

Une approche similaire à celle de Henrion *et al.* dans [HŠK03] est proposée par Karimi *et al.* dans [KKL07] et [KKL08]. Cette approche utilise le lemme de Kalman-Yakubovich-Popov [LC00, LLM97], afin d'obtenir des fonctions de transfert en boucle fermée qui soient SPR, au lieu des polynômes positifs. Ces méthodes se réfèrent à des conditions de stabilité suffisantes basées sur des approximations de région de stabilité. De plus, elles génèrent des fonctions EP-SPR représentant une famille particulière des fonctions rationnelles stables et bicausales.

Dans [HB01], les auteurs appliquent le critère de stabilité d'Hermite-Fujiwara au théorème de Kharitonov pour proposer un correcteur simultané d'ordre fixe stabilisant des systèmes LTI à intervalles. Les auteurs résolvent les BMI générées par cette approche en utilisant la méthode développée dans [HTŠ99a, HŠT98].

5.3 Stabilisation robuste d'un polytope de systèmes

Dans cette section, nous étudions le problème de la stabilisation robuste d'un polytope de systèmes. Nous montrons que cette question est équivalente à la stabilisation simultanée de ses segments. Pour cela, nous généralisons pour n segments de systèmes les résultats démontrés dans le chapitre 3.

Considérons le polytope de systèmes défini comme suit.

Définition 5.3.1. *Polytope de systèmes.*
Un polytope convexe de systèmes Ω_G, généré par n systèmes SISO LTI appelés $G_i(s) = N_i(s)/D_i(s)$ avec $i = 1, \dots n$, est défini par

$$\Omega_G \triangleq \left\{ G(s) : G(s) = N(s)/D(s), N(s) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i N_i(s),\ D(s) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i D_i(s), \lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\} \tag{5.12}$$

où $N_i(s)$ et $D_i(s)$ sont des polynômes réels avec $\delta(N_i) \leqslant \delta(D_i)$. Les polynômes $D_i(s)$ sont de même degré avec les coefficients des termes de plus haut degré de même signe.

L'ensemble des segments du polytope de systèmes Ω_G est défini ci-dessous.

Définition 5.3.2. *Segments du polytope de systèmes Ω_G.*
L'ensemble des segments de systèmes $\Omega_{G_{i,j}}$ d'un polytope de systèmes Ω_G est défini comme suit

$$\begin{aligned}\Omega_{G_{i,j}} \triangleq \Big\{ & G_{i,j}(s) : G_{i,j}(s) = N_{i,j}(s)/D_{i,j}(s),\ N_{i,j}(s) = \alpha N_i(s) + (1-\alpha) N_j(s), \\ & D_{i,j}(s) = \alpha D_i(s) + (1-\alpha) D_j(s), \alpha \in [0,\ 1],\ i = 1, \dots, n-1,\ \ j = i+1, \dots, n \Big\}\end{aligned} \tag{5.13}$$

avec le résultant des polynômes $N_{i,j}(s)$ et $D_{i,j}(s)$ non nul.

Notons que $G_{i,j}(s)$ est le segment joignant les deux systèmes aux extrémités $G_i(s) = N_i(s)/D_i(s)$ et $G_j(s) = N_j(s)/D_j(s)$.

L'objectif de la suite de ce chapitre est de proposer un contrôleur causal LTI d'ordre fixe $C(s) = X(s)/Y(s)$ stabilisant le polytope de systèmes Ω_G. En conséquence, nous allons étudier les conditions d'existence du contrôleur $C(s)$ satisfaisant la condition suivante

$$\Phi(G, C)(s) = \Big(N(s)X(s) + D(s)Y(s)\Big) \in \mathbb{H} \qquad \forall\, G(s) \in \Omega_G$$

Montrons que le problème de la stabilisation d'un polytope de systèmes Ω_G est équivalent à la question de la stabilisation de ses segments $G_{i,j}(s)$ définis par (5.13).

Théorème 5.3.1. *Le compensateur $C(s)$ stabilise le polytope de systèmes Ω_G si et seulement si $C(s)$ stabilise $\Omega_{G_{i,j}}$.*

Démonstration. Le correcteur $C(s)$ stabilise le polytope de systèmes Ω_G si et seulement si

$$\Phi(G, C)(s) = N(s)X(s) + D(s)Y(s) = \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (N_i(s)X(s) + D_i(s)Y(s))\Big) \in \mathbb{H}$$

ou si et seulement si $\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Phi(G_i, C)(s)\Big) \in \mathbb{H}$ avec $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

En conséquence, le compensateur $C(s)$ stabilise le polytope de systèmes Ω_G si et seulement si le polytope de polynômes ϕ donné par

$$\phi \triangleq \left\{\Phi(G, C)(s) : \Phi(G, C)(s) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Phi(G_i, C)(s), \lambda_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\right\} \tag{5.14}$$

est Hurwitz, où ϕ est un polytope convexe de polynômes réels décrit par ses sommets $\Phi(G_i, C)(s)$ de même degré. Selon le théorème des segments étendus donné dans [BHL88], ϕ est Hurwitz si et seulement si $\phi_{i,j}$ donné par

$$\begin{aligned}\phi_{i,j} \triangleq \Big\{&\Phi(G_{i,j}, C)(s) : \Phi(G_{i,j}, C)(s) = \alpha\Phi(G_i, C)(s) + (1-\alpha)\Phi(G_j, C)(s),\\ &\alpha \in [0,\ 1], i = 1, \ldots, n-1,\ \ j = i+1, \ldots, n\Big\}\end{aligned} \tag{5.15}$$

est Hurwitz. •

De manière équivalente, $C(s)$ stabilise tous les systèmes $G(s)$ appartenant au polytope Ω_G si et seulement si $C(s)$ stabilise les segments de systèmes $G_{i,j}(s)$ de Ω_G.

Une condition nécessaire et suffisante équivalente à celle donnée dans le théorème 5.3.1, déduite du théorème 2.3.5, est formulée dans le corollaire ci-dessous.

Corollaire 5.3.1. *Soit le polytope de système Ω_G et le contrôleur $C(s)$. Considérons les fonctions $U_{ij}(s) \in \mathcal{U}$ telles que*

$$U_{ij}(s) = \frac{\Phi(G_i, C)(s)}{\Phi(G_j, C)(s)}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad j = i+1, \ldots, n \tag{5.16}$$

Le polytope de systèmes Ω_G bouclé avec le contrôleur $C(s)$ est stable si et seulement si

$$|\arg(U_{ij}(j\omega))| < 180^\circ$$

Démonstration. Ce résultat est déduit du théorème 2.3.5 donné dans [PD97]. •

Pour étudier le problème de la stabilisation robuste d'un polytope de systèmes, nous proposons une méthode basée sur le théorème des arêtes [BHL88]. Cette méthode génère des fonctions rationnelles stables et bicausales $U_{ij}(s)$ vérifiant la relation (5.16) et telles que les polynômes $\Phi(G_i, C)(s)$ et $\Phi(G_j, C)(s)$ aient les mêmes parties paires (ou impaires). Les fonctions $U_{ij}(s)$ ne sont pas nécessairement EP-SPR et leur phase appartient à l'intervalle $[-180°,\ 180°]$ (voir le théorème 2.3.5). En conséquence, la phase de $U_{ij}(s)$ peut être inférieure à $-90°$ ou supérieure à $90°$.

5.4 Stabilisation robuste d'un polytope de systèmes avec un correcteur simultané

Supposons maintenant que tous les sommets du polytope ϕ aient la même partie paire. Nous pouvons alors simplifier la question de la stabilisation du polytope de systèmes Ω_G en considérant le théorème 3.2.1. Pour cela nous écrivons $\Phi(G_i, C)(s)$ comme suit

$$\Phi(G_i, C)(s) = \Phi(G_i, C)^e(s^2) + s\Phi(G_i, C)^o(s^2)$$

et nous formulons le théorème suivant.

Théorème 5.4.1. *Considérons un polytope de systèmes Ω_G. S'il existe un compensateur $C(s)$ tel que les coefficients des termes de plus haut degré de $\Phi(G_i, C)(s)$ sont de même signe et satisfaisant les relations suivantes*

$$\Phi(G_i, C)(s) \in \mathbb{H}, \quad i = 1, \ldots, n \tag{5.17a}$$

$$\Phi(G_1, C)^e(s^2) = \Phi(G_j, C)^e(s^2), \quad j = 2, \ldots, n \tag{5.17b}$$

alors $C(s)$ stabilise le polytope de systèmes Ω_G.

Démonstration. Considérons $G_i(s)$, $i = 1, \ldots, n$, les sommets d'un polytope de systèmes Ω_G défini par (5.12). Supposons qu'il existe un compensateur $C(s)$ qui stabilise simultanément les sommets $G_i(s)$ avec les coefficients des termes de plus haut degré de $\Phi(G_i, C)(s)$ de même signe. De plus, si $C(s)$ vérifie $\Phi(G_1, C)^e(s^2) = \Phi(G_j, C)^e(s^2)$, $j = 2, \ldots, n$, alors le polytope de polynômes $\phi_{i,j}$ est Hurwitz. En conséquence, $C(s)$ stabilise les segments de systèmes $\Omega_{G_{i,j}}$. D'après le théorème 5.3.1, nous pouvons conclure que le compensateur $C(s)$ stabilise le polytope de systèmes Ω_G. •

Remarque 5.4.1. Dans le théorème 5.4.1, on peut imposer la contrainte d'égalité soit sur la partie paire des polynômes caractéristiques $\Phi(G_i, C)(s)$, soit sur leur partie impaire. Dans la suite de ce travail, nous avons choisi de ne considérer que la contrainte d'égalité sur la partie paire. Le problème de la stabilisation du polytope de systèmes Ω_G avec un régulateur garantissant la même partie impaire $\Phi(G_i, C)^o(s^2)$ est traité dans l'annexe C. ■

En se basant sur le théorème 5.4.1, nous pouvons observer que le problème de la stabilisation du polytope de systèmes Ω_G est réduit à la question de la stabilisation de ses sommets $G_i(s)$ avec un compensateur simultané $C(s)$ garantissant la même partie paire $\Phi(G_i, C)^e(s^2)$, $i = 1, \ldots, n$. Le nombre de sommets d'un polytope est toujours inférieur ou égal au nombre de ses segments, la question de la stabilisation d'un polytope de systèmes est ainsi simplifiée. Ce résultat est montré dans le lemme suivant.

Lemme 5.4.1. *Soit le polytope de systèmes Ω_G donné par* (5.12) *et décrit par ses n sommets $G_i(s)$. Le nombre de segments $G_{i,j}(s)$ du polytope Ω_G noté $\overline{n}$ est donné par*

$$\overline{n} = \sum_{i=1}^{n-1}(n-i) \geqslant n, \quad n > 2 \tag{5.18}$$

Démonstration. Chaque sommet $G_i(s)$, $i = 1, \ldots, n-1$, est connecté par $n-i$ segments différents à $n-i$ sommets. On en déduit que le nombre total des segments du polytope $G_{i,j}(s)$ est $\overline{n}$ donné par (5.18). Comparons alors n à $\overline{n}$.

$$\begin{aligned}\overline{n} - n &= (n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots + 2 + 1 - n \\ &= (n-2)(n-3) + \ldots + 2 \geqslant 0\end{aligned}$$

Puisque $\overline{n} - n \geqslant 0$, alors $\overline{n} \geqslant n$. •

Pour étudier la stabilisabilité du polytope de systèmes Ω_G il est seulement nécessaire d'examiner la stabilisabilité de n sommets au lieu de $\overline{n}$ segments ($n \leqslant \overline{n}$) avec $n > 2$.

Dans les sections suivantes, nous allons étudier les équations 5.17 en utilisant successivement le critère de stabilité d'Hermite-Fujiwara et le critère de stabilité d'Hermite-Biehler dans le but de synthétiser un régulateur simultané pour le polytope de systèmes Ω_G.

5.5 Synthèse du régulateur simultané pour le polytope de systèmes Ω_G avec le critère d'Hermite-Fujiwara

Nous avons présenté, dans les chapitres 3 et 4, une méthode basée sur le critère d'Hermite-Fujiwara pour synthétiser des régulateurs simultanés d'ordre fixe stabilisant un seul segment de systèmes. Dans cette partie, nous allons adapter cette méthode au cas de la commande simultanée d'un polytope de systèmes Ω_G décrit par l'équation (5.12). Il résulte du théorème 5.4.1 que la question de la stabilisation du polytope de systèmes Ω_G est réduite à la stabilisation simultanée de ses sommets $G_i(s)$, $i = 1, \ldots, n$, avec une contrainte supplémentaire à satisfaire qui sera détaillée par la suite.

5.5.1 Condition sur le degré du compensateur simultané $C(s)$

Dans cette section, nous étudions les conditions d'existence d'un régulateur simultané $C(s)$ pour n systèmes devant vérifier la contrainte $\Phi(G_1, C)^e(s^2) = \Phi(G_i, C)^e(s^2)$.

D'après le lemme 3.3.1, il existe un correcteur $C(s) = X(s)/Y(s)$ vérifiant $\Phi(G_1, C)^e(s^2) = \Phi(G_i, C)^e(s^2)$ si et seulement si

$$V[s]\Lambda_1^e C_v = V[s]\Lambda_i^e C_v, \qquad i = 2, \ldots, n$$

où Λ_i^e sont deux matrices définies par (3.12) et C_v est le vecteur donné par (3.8) et de dimension r (voir (3.9)), ce qui implique

$$V[s](\Lambda_1^e - \Lambda_i^e)C_v = 0, \qquad i = 2, \ldots, n \tag{5.19}$$

Soit $\widetilde{L}$ une matrice de dimension $n(\ell+1)\times r$ donnée par

$$\widetilde{L} = \begin{bmatrix} \Lambda_1^e - \Lambda_2^e \\ \Lambda_1^e - \Lambda_3^e \\ \vdots \\ \Lambda_1^e - \Lambda_n^e \end{bmatrix} \tag{5.20}$$

Puisque l'équation (5.19) doit être vérifiée quel que soit s et pour chaque puissance de s, alors (5.19) est équivalente à

$$\widetilde{L}C_v = 0 \tag{5.21}$$

Le théorème 5.5.1 ci-dessous donne une condition d'existence d'une solution à l'équation (5.21).

Théorème 5.5.1. *L'équation* (5.21) *possède au moins une solution non nulle si et seulement si la condition suivante*

$$\text{rang}(\widetilde{L}) < r \tag{5.22}$$

est vérifiée.

La solution générale de (5.21) *est donnée par*

$$C_v = (I_r - \widetilde{L}^+\widetilde{L})Y \tag{5.23}$$

où Y est un vecteur quelconque tel que $dim(Y) = dim(C_v) = r$ et $\widetilde{L}^+$ est une inverse généralisée de $\widetilde{L}$ satisfaisant $\widetilde{L} = \widetilde{L}\widetilde{L}^+\widetilde{L}$.

Démonstration. Voir [LT85]. •

5.5.2 Condition d'existence d'un régulateur simultané

Dans cette section, nous donnons une condition d'existence d'un compensateur simultané $C(s)$ d'ordre fixe vérifiant (5.17) en utilisant le critère de stabilité d'Hermite-Fujiwara, puis une condition suffisante pour stabiliser simultanément le polytope de systèmes Ω_G est déduite.

Rappelons que le problème d'existence d'un régulateur simultané pour Ω_G revient à chercher les conditions d'existence des polynômes caractéristiques $\Phi(G_i, C)(s)$, $i = 1, \ldots, n$ vérifiant (5.17). Pour étudier l'hurwitzité des polynômes $\Phi(G_i, C)(s)$, nous ferons appel aux propriétés des matrices d'Hermite-Fujiwara.

Tout d'abord, déterminons les matrices d'Hermite-Fujiwara de $\Phi(G_i, C)(s)$, $i = 1, \ldots, n$, vérifiant (5.17b). Pour cela définissons une matrice polynomiale $\widetilde{F}_i[s]$ pour $i = 1, \ldots, n$ donnée par

$$\widetilde{F}_i[s] = \Lambda_i[s](I_r - \widetilde{L}^+\widetilde{L}) = \begin{bmatrix} P_{i1}(s) & P_{i2}(s) & \ldots & P_{ir}(s) \end{bmatrix} \tag{5.24}$$

avec $\Lambda_i[s]$ et $\widetilde{L}$ décrites respectivement par (3.14) et (5.20).

Lemme 5.5.1. *Les matrices d'Hermite-Fujiwara de $\Phi(G_i, C)(s)$, $i = 1, \ldots, n$, satisfaisant* (5.17b) *s'écrivent ainsi*

$$H(\Phi(G_i, C)(s)) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} y_j y_k H(P_{ij}(s), P_{ik}(s)), \quad i = 1, \ldots, n \tag{5.25}$$

où y_j et y_k sont respectivement le $j^{ème}$ et le $k^{ème}$ élément d'un vecteur quelconque Y. Les polynômes $P_{ij}(s)$ et $P_{ik}(s)$ sont les éléments de la matrice polynomiale $\widetilde{F}_i[s]$ donnée par (5.24).

Démonstration. $\Phi(G_1, C)^e(s^2)$=$\Phi(G_i, C)^e(s^2)$ si et seulement si l'équation (5.21) possède au moins une solution non nulle C_v donnée par la relation (5.23). D'après (5.23) et (5.24) nous pouvons écrire $\Phi(G_i, C)(s)$ comme suit

$$\Phi(G_i, C)(s) = \Lambda_i[s](I_r - \widetilde{L}^+\widetilde{L})Y, \quad i = 1, \ldots, n$$

On en déduit

$$\Phi(G_i, C)(s) = \widetilde{F}_i[s]Y, \quad i = 1, \ldots, n \tag{5.26}$$

où $\Lambda_i[s]$ et $\widetilde{L}$ sont décrites respectivement par (3.14) et (5.20), Y est un vecteur quelconque et $\widetilde{F}_i[s]$ est donnée par (5.24). Nous pouvons ainsi réécrire la relation (5.26) sous la forme suivante

$$\Phi(G_i, C)(s) = \widetilde{F}_i[s]Y = \sum_{t=1}^{r} y_t P_{it}(s)$$

où y_t, $t = 1, \ldots, r$, sont les éléments du vecteur Y et $P_{it}(s)$ sont les éléments de la matrice polynomiale $\widetilde{F}_i[s]$. En utilisant le lemme 1.3.2, nous obtenons l'expression suivante de $H(\widetilde{F}_i[s]Y)$.

$$H(\widetilde{F}_i[s]Y) = H\left(\sum_{t=1}^{r} y_t P_{it}(s)\right) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} y_j y_k H(P_{ij}(s), P_{ik}(s)),$$

ce qui implique la relation (5.25). •

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un correcteur $C(s)$ d'ordre donné stabilisant $G_i(s)$, $i = 1, \ldots, n$ et vérifiant $\Phi(G_1, C)^e(s^2)$=$\Phi(G_i, C)^e(s^2)$.

Théorème 5.5.2. *$\Phi(G_i, C)(s)$, $i = 1, \ldots, n$ sont Hurwitz tels que $\Phi(G_1, C)^e(s^2) = \Phi(G_j, C)^e(s^2)$, $j = 2, \ldots, n$, si et seulement s'il existe y_j et y_k, éléments du vecteur Y, satisfaisant les BMI suivantes*

$$\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} y_j y_k H(P_{ij}(s), P_{ik}(s)) > 0, \quad i = 1, \ldots, n \tag{5.27}$$

Démonstration. Les matrices d'Hermite-Fujiwara de $\Phi(G_i, C)(s)$ vérifiant (5.17b) sont données par (5.25). D'après le théorème 1.3.7, le polynôme $\Phi(G_i, C)(s)$ est Hurwitz si et seulement si la matrice d'Hermite-Fujiwara du polynôme $\Phi(G_i, C)(s)$ est définie positive. Par conséquent, les polynômes $\Phi(G_i, C)(s)$, $i = 1, \ldots, n$, vérifient (5.17) si et seulement s'il existe un vecteur Y satisfaisant les inégalités matricielles (5.27). •

Si la condition donnée par le corollaire ci-dessous est satisfaite, alors nous pouvons déterminer un régulateur simultané $C(s)$ pour le polytope de systèmes Ω_G.

Corollaire 5.5.1. *Si les BMIs* (5.27) *sont satisfaites, alors il existe un contrôleur simultané $C(s)$ d'ordre fixe stabilisant le polytope de systèmes Ω_G donné par* (5.12).

Démonstration. La démonstration de ce corollaire est déduite directement à partir des théorèmes 5.4.1 et 5.5.2. •

5.5.3 Formulation LMI des conditions d'existence de $C(s)$

Comme dans les chapitres précédents, nous transformons les BMIs (5.27) en un problème d'optimisation LMI avec une contrainte de rang [HTŠ99a, HŠT98]. Pour cela, nous définissons une matrice Q satisfaisant (5.28) et formée par les éléments $q_{jk} = y_j y_k$ comme suit

$$Q = YY^T \tag{5.28}$$

Le problème (5.27) devient

$$\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} q_{jk} H(P_{ij}(s), P_{ik}(s)) > 0, \quad i = 1, \ldots, n \tag{5.29a}$$

$$\operatorname{rang}(Q) = 1 \tag{5.29b}$$

$$Q \geqslant 0 \tag{5.29c}$$

Pour obtenir un problème convexe, nous avons utilisé une méthode de linéarisation décrite dans [HTŠ99a] et [HŠT98]. Cette approche est résumée par les relations suivantes

$$\text{minimiser} \qquad \operatorname{trace}(Q - YY^T) \tag{5.30a}$$

$$\text{sous les contraintes} \qquad \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} q_{jk} H(P_{ij}(s), P_{ik}(s)) > 0, \quad i = 1, \ldots, n \tag{5.30b}$$

$$\begin{bmatrix} Q & Y \\ Y^T & 1 \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{5.30c}$$

Par conséquent, les solutions du problème (5.30) sont les solutions du problème d'optimisation non convexe (5.29) si

$$\operatorname{trace}(Q - YY^T) = 0.$$

5.5.4 Algorithme de synthèse du régulateur simultané

Pour résoudre le problème (5.30) afin de synthétiser un régulateur simultané $C(s)$, nous proposons l'algorithme ci-dessous.

- **Etape 1 :** Déterminer la matrice $\widetilde{L}$. Si la condition (5.22) est vérifiée alors aller à l'étape 2.
- **Etape 2 :** Calculer les matrices d'Hermite-Fujiwara et trouver une solution faisable des LMIs (5.30) en appliquant l'algorithme suivant :
  - **a)** $h = 0$, trouver une solution initiale Q et Y_0 du problème (5.30) sans minimiser le critère (5.30a).
  - **b)** $h \longleftarrow h + 1$, trouver Q et Y_{h+1} solutions du problème linéarisé

$$\text{minimiser} \qquad \operatorname{trace}(Q - Y_{h+1}Y_h^T) \tag{5.31a}$$

$$\text{sous les contraintes} \qquad \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} q_{jk} H(P_{ij}(s), P_{ik}(s)) > 0 \; i = 1, \ldots, n \tag{5.31b}$$

$$\begin{bmatrix} Q & Y_{h+1} \\ Y_{h+1}^T & 1 \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{5.31c}$$

c) Choisir ε strictement positif et suffisamment petit. Si $\left|\text{trace}(Q - Y_{h+1}Y_h^T)\right| \leqslant \varepsilon$ passer à l'étape 3. Sinon, relancer l'étape b) jusqu'à ce que ce critère soit atteint. Si ce critère n'est pas atteignable, on quitte l'algorithme.

- **Etape 3 :** Calculer les coefficients du correcteur suivant l'équation

$$C_v = (I_r - \widetilde{L}^+\widetilde{L})Y_{h+1}.$$

Pour illustrer les résultats donnés précédemment, nous proposons l'exemple suivant.

Exemple 5.5.1. Nous considérons le système à intervalles suivant

$$\widetilde{G}(s) = \frac{s^2 + \epsilon}{2s^2 + \eta s + 1} \tag{5.32}$$

avec $\epsilon \in [\epsilon_{\min}, \epsilon_{\max}]$ et $\eta \in [\eta_{\min}, \eta_{\max}]$. Notons que ce système $\widetilde{G}(s)$ représente plusieurs procédés physiques réels. Nous voulons stabiliser ce système par un compensateur LTI causal $C(s) = X(s)/Y(s)$.

Tout d'abord, montrons dans le lemme suivant que $\widetilde{G}(s)$ appartient à la famille des polytopes de systèmes Ω_G avec 4 sommets.

Lemme 5.5.2. *Pour tout $\epsilon \in [\epsilon_{\min}, \epsilon_{\max}]$ et $\eta \in [\eta_{\min}, \eta_{\max}]$, il existe un polytope de systèmes Ω_G défini par ses quatre sommets $G_i(s) = N_i(s)D_i(s)^{-1}$, $i = 1, \ldots, 4$, donnés par*

$$G_1(s) = \frac{s^2 + \epsilon_{\min}}{2s^2 + \eta_{\min}s + 1} \tag{5.33a}$$

$$G_2(s) = \frac{s^2 + \epsilon_{\max}}{2s^2 + \eta_{\min}s + 1} \tag{5.33b}$$

$$G_3(s) = \frac{s^2 + \epsilon_{\min}}{2s^2 + \eta_{\max}s + 1} \tag{5.33c}$$

$$G_4(s) = \frac{s^2 + \epsilon_{\max}}{2s^2 + \eta_{\max}s + 1} \tag{5.33d}$$

tel que $\widetilde{G}(s) \subset \Omega_G$.

Démonstration. Considérons $G(s) = N(s)D(s)^{-1}$ avec

$$N(s) = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i N_i(s),\ D(s) = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i D_i(s),\ \sum_{i=1}^{4} \lambda = 1 \text{ et } \lambda_i \geqslant 0,$$

ou de manière équivalente

$$\begin{aligned} N(s) =& s^2 + (\lambda_1 + \lambda_3)\epsilon_{\min} + (\lambda_2 + \lambda_4)\epsilon_{\max} \\ D(s) =& 2s^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\eta_{\min}s + (\lambda_3 + \lambda_4)\eta_{\max}s + 1 \end{aligned}$$

avec $\sum_{i=1}^{4}\lambda_i = 1$ et $\lambda_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, 4$. Soit

$$\alpha_1 = \lambda_1 + \lambda_3 \tag{5.34a}$$

$$1 - \alpha_1 = \lambda_2 + \lambda_4 \tag{5.34b}$$

$$\alpha_2 = \lambda_1 + \lambda_2 \tag{5.34c}$$
$$1 - \alpha_2 = \lambda_3 + \lambda_4 \tag{5.34d}$$

Maintenant, démontrons que pour tout $\alpha_i \in [0,\ 1]$, $i = 1, 2$, il existe $\lambda_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, 4$ avec $\sum_1^4 \lambda_j = 1$. D'après (5.34), nous remarquons que pour tout $\alpha_i \in [0,\ 1]$,$i = 1, 2$, nous pouvons toujours choisir $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant 1$ qui soit une solution du système suivant

$$0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \alpha_1 \leqslant 1 \tag{5.35a}$$
$$0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant 1 \tag{5.35b}$$
$$-1 \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 - 1 \leqslant \lambda_1 \leqslant 1 \tag{5.35c}$$

A partir des relations (5.34) et (5.35), nous pouvons déduire que, pour tout $\alpha_i \in [0,\ 1]$, $i = 1, 2$, il existe $\lambda_2 \geqslant 0$, $\lambda_3 \geqslant 0$ et $\lambda_4 \geqslant 0$ tels que $\sum_1^4 \lambda_j = 1$ satisfaisant les relations (5.36).

$$0 \leqslant \lambda_2 = \alpha_2 - \lambda_1 \leqslant 1 \tag{5.36a}$$
$$0 \leqslant \lambda_3 = \alpha_1 - \lambda_1 \leqslant 1 \tag{5.36b}$$
$$0 \leqslant \lambda_4 = 1 - \alpha_1 - \alpha_2 + \lambda_1 \leqslant 1 \tag{5.36c}$$

Nous pouvons noter que, pour tout $\alpha_i \in [0,\ 1]$, $i = 1, 2$, il existe toujours une solution vérifiant $0 \leqslant \lambda_j \leqslant 1$, $j = 1, \ldots, 4$, satisfaisant (5.35) et (5.36). Pour cela il suffit de choisir $\lambda_1 = \min(\alpha_1, \alpha_2)$. •

Par conséquent, s'il existe un compensateur $C(s)$ qui stabilise le polytope de systèmes Ω_G défini par ses quatre sommets (5.33), alors ce compensateur stabilise $\widetilde{G}(s)$. Notons que pour stabiliser le polytope de systèmes Ω_G, il suffit de stabiliser simultanément les quatre sommets (5.33) au lieu de six segments comme dans le cas du théorème 5.3.1.

Considérons, maintenant, $\widetilde{G}(s)$ défini par (5.32) avec $\epsilon_{\min} = 1$, $\epsilon_{\max} = 2$, $\eta_{\min} = -1$ et $\eta_{\max} = 1$.

Puisque $\eta_{\min}$ et $\eta_{\max}$ sont de signe différent, $\widetilde{G}(s)$ n'est pas stabilisable par un correcteur de degré 0 donné par $C(s) = K$.

Nous avons choisi un régulateur de la forme

$$C(s) = \frac{x_1^o s^3 + x_0^o s}{y_2^e s^4 + y_1^e s^2 + y_0^e}$$

En conséquence, le vecteur C_v est donné par

$$C_v = \begin{bmatrix} x_0^o & x_1^o & y_0^e & y_1^e & y_2^e \end{bmatrix}^T$$

- **Etape 1 :** Les matrices Λ_i^e $i = 1, \ldots, 4$, sont données par

$$\Lambda_i^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \ldots, 4$$

Nous en déduisons

$$\widetilde{L} = 0_{12\times 5}$$

En conséquence, la condition (5.22) est toujours vérifiée. Dans ce cas, $\widetilde{F}_i[s] = \Lambda_i[s]$ et $C_v = Y$ avec

$$\Lambda_1[s] = \begin{bmatrix} s^3+s \\ s^5+s^3 \\ 2s^2-s+1 \\ 2s^4-s^3+s^2 \\ 2s^6-s^5+s^4 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_2[s] = \begin{bmatrix} s^3+2s \\ s^5+2s^3 \\ 2s^2-s+1 \\ 2s^4-s^3+s^2 \\ 2s^6-s^5+s^4 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_3[s] = \begin{bmatrix} s^3+s \\ s^5+s^3 \\ 2s^2+s+1 \\ 2s^4+s^3+s^2 \\ 2s^6+s^5+s^4 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_4[s] = \begin{bmatrix} s^3+2s \\ s^5+2s^3 \\ 2s^2+s+1 \\ 2s^4+s^3+s^2 \\ 2s^6+s^5+s^4 \end{bmatrix}.$$

- **Etape 2 :** Nous avons calculé 25 matrices d'Hermite-Fujiwara $H(P_{ij}(s), P_{ik}(s))$, $j = 1, \ldots, 5$, $k = 1, \ldots, 5$ de taille 6×6 pour chaque sommet $i = 1, \ldots, 4$. Donc, 100 matrices d'Hermite-Fujiwara sont nécessaires pour résoudre le problème d'optimisation (5.30). En utilisant les solveurs YALMIP et SeDuMi de MATLAB, l'algorithme n'a pas convergé.

  Nous remarquons que $H(P_{i1}(s), P_{ik}(s)) = 0$ et $H(P_{i2}(s), P_{ik}(s)) = 0$ pour $i = 1, \ldots, 4$ et $k = 1, \ldots, 5$. Ainsi, parmi les 100 matrices d'Hermite-Fujiwara $H(P_{ij}(s), P_{ik}(s))$, 40 sont nulles. En conséquence, les termes q_{11} et q_{22} n'interviennent pas dans la résolution de LMI (5.30b), tandis que les termes q_{jk}, $j = 1, 2$ et $k = 3, 4, 5$ sont laissés "libres" car ils sont multipliés par d'autres matrices d'Hermite-Fujiwara non nulles. Les termes q_{12} et q_{21} ne sont pas utilisés car ils sont déterminés en fonction de q_{11} et q_{22}. Nous devons donc imposer les valeurs de q_{11} et q_{22} afin d'assurer la convergence de l'algorithme. En choisissant $q_{11} = 253$ et $q_{22} = 16936$, nous obtenons les solutions suivantes de la LMI (5.30)

$$Q = \begin{bmatrix} 253 & 2069.9 & 7.4 & 84.82 & 16.22 \\ 2069 & 16936 & 60.54 & 694.05 & 132.78 \\ 7.4 & 60.54 & 0.216 & 2.48 & 0.47 \\ 84.82 & 694.05 & 2.48 & 28.44 & 5.44 \\ 16.22 & 132.78 & 0.47 & 5.44 & 1.04 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 15.9060 & 130.1384 & 0.4652 & 5.3332 & 1.0204 \end{bmatrix}^T$$

- **Etape 3 :** Puisque $\widetilde{L} = 0$, nous obtenons $C_v = Y$.
  On en déduit le contrôleur $C(s)$ comme suit

$$C(s) = \frac{130.1384s^3 + 15.9060s}{1.0204s^4 + 5.3332s^2 + 0.4652}$$

Les quatre polynômes caractéristiques en boucle fermée associés aux quatre sommets du polytope Ω_G

$$\Phi(G_1, C)(s) = 2.0407s^6 + 129.1180s^5 + 11.6867s^4 + 140.7112s^3 + 6.2637s^2 + 15.4407s + 0.4652$$

$$\Phi(G_2, C)(s) = 2.0407s^6 + 129.1180s^5 + 11.6867s^4 + 270.8496s^3 + 6.2637s^2 + 31.3467s + 0.4652$$
$$\Phi(G_3, C)(s) = 2.0407s^6 + 131.1587s^5 + 11.6867s^4 + 151.3775s^3 + 6.2637s^2 + 16.3712s + 0.4652$$
$$\Phi(G_4, C)(s) = 2.0407s^6 + 131.1587s^5 + 11.6867s^4 + 281.5159s^3 + 6.2637s^2 + 32.2772s + 0.4652$$

Les polynômes $\Phi(G_1, C)(s)$, $\Phi(G_2, C)(s)$, $\Phi(G_3, C)(s)$ et $\Phi(G_4, C)(s)$ sont de même degré et Hurwitz. De plus, ces polynômes ont la même partie paire avec les coefficients des termes de plus haut degré de même signe. Donc $C(s)$ stabilise le polytope de systèmes Ω_G. Par conséquent, $C(s)$ stabilise $\widetilde{G}(s)$. ■

5.6 Synthèse de régulateur simultané pour le polytope de systèmes Ω_G avec le critère d'Hermite-Biehler

Dans cette partie, nous étudions les conditions d'existence d'un contrôleur d'ordre fixe vérifiant les conditions (5.17) en utilisant le critère d'Hermite-Biehler dans le but de stabiliser le polytope de systèmes Ω_G. Par la suite, une méthode de synthèse d'un régulateur simultané est déduite pour le polytope de systèmes Ω_G.

5.6.1 Condition d'existence d'un contrôleur simultané pour le polytope de systèmes Ω

Dans le lemme suivant, nous posons la question de la stabilisation du polytope de systèmes Ω_G comme un problème particulier de placement de pôles.

Lemme 5.6.1. *Considérons $\{a_1, \ldots, a_\ell\}$ un ensemble des nombres réels, négatifs et distincts et les matrices V, A, H données respectivement par* (3.11), (3.34b) *et* (3.34c). *S'il existe un compensateur $C(s)$ donné par C_v tel que tous les éléments des vecteurs Ψ_i donnés par* (3.34a), *$i = 1, \ldots, n$, soient strictement positifs et qui vérifie les conditions suivantes*

$$\Phi(G_i, C)^e(s^2) = VH, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{5.37a}$$
$$\Phi(G_i, C)^o(s^2) = VA\Psi_i, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{5.37b}$$

alors le polytope de systèmes Ω_G défini par (5.12) *est stabilisé par le correcteur $C(s)$.*

Démonstration. Ce résultat est déduit à partir du lemme 3.5.2 et du théorème 5.3.1. •

Rappelons que

$$\Phi(G_i, C)^e(s^2) = V\Lambda_i^e C_v, \quad i = 1, \ldots, n \tag{5.38a}$$
$$\Phi(G_i, C)^o(s^2) = V\Lambda_i^o C_v, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{5.38b}$$

Nous déduisons alors le lemme suivant.

Lemme 5.6.2. *Considérons $\{a_1, \ldots, a_\ell\}$ un ensemble des nombres réels, négatifs et distincts. A et H sont donnés respectivement par* (3.34b) *et* (3.34c). *S'il existe un compensateur $C(s)$ donné par C_v tel que tous les éléments des vecteurs Ψ_i donnés par* (3.34a), *$i = 1, \ldots, n$, soient strictement positifs et qui vérifie les conditions suivantes*

$$\Lambda_i^e C_v = H, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{5.39a}$$
$$\Lambda_i^o C_v = A\Psi_i, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{5.39b}$$

alors le polytope de systèmes Ω_G défini par (5.12) *est stabilisé par le correcteur $C(s)$.*

Démonstration. Ce résultat est déduit à partir du lemme 5.6.1. •

D'une façon similaire au problème de stabilisation du segment de systèmes $G_\lambda(s)$, la synthèse d'un régulateur simultané pour un polytope de systèmes Ω_G revient à trouver des vecteurs Ψ_i, $i = 1, \ldots, n$, ayant tous les éléments strictement postifs et un vecteur C_v afin que les conditions (5.39) soient vérifiées.

5.6.2 Algorithme de synthèse du contrôleur simultané pour un polytope de systèmes Ω_G par la méthode d'Hermite-Biehler

Les équations (5.39) peuvent s'écrire

$$\widetilde{B} = \widetilde{\Theta} \begin{bmatrix} \widetilde{\psi} \\ C_v \end{bmatrix} \tag{5.40}$$

où

$$\widetilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ H \\ H \\ \vdots \\ H \end{bmatrix}, \ \widetilde{\Theta} = \begin{bmatrix} A & 0 & \ldots & 0 & -\Lambda_1^o \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & A & -\Lambda_n^o \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \Lambda_1^e \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \Lambda_2^e \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \Lambda_n^e \end{bmatrix}, \tag{5.41a}$$

$$\widetilde{\psi} = \begin{bmatrix} \Psi_1^T & \Psi_2^T & \Psi_3^T & \ldots & \Psi_n^T \end{bmatrix}^T. \tag{5.41b}$$

Une condition d'existence d'une solution à l'équation (5.40) est donnée dans le théorème suivant.

Théorème 5.6.1. *L'équation* (5.40) *a une solution si et seulement si*

$$\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} \widetilde{B} & \widetilde{\Theta} \end{bmatrix}\right) = \operatorname{rang}(\widetilde{\Theta}) \tag{5.42}$$

Les solutions générales $\widetilde{\psi}$ *et* C_v *de* (5.40) *sont*

$$\widetilde{\psi} = W_1 \left(\widetilde{\Theta}^+ \widetilde{B} + (I - \widetilde{\Theta}^+ \widetilde{\Theta}) \widetilde{Z}\right) \tag{5.43a}$$

$$C_v = W_2 \left(\widetilde{\Theta}^+ \widetilde{B} + (I - \widetilde{\Theta}^+ \widetilde{\Theta}) \widetilde{Z}\right) \tag{5.43b}$$

où $W_1 = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}$, $W_2 = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$, $\widetilde{Z}$ *est un vecteur quelconque vérifiant* $\dim(\widetilde{Z}) = \dim(\widetilde{\psi}) + \dim(C_v)$ *et* $\widetilde{\Theta}^+$ *est une inverse généralisée de* $\widetilde{\Theta}$ *satisfaisant* $\widetilde{\Theta} = \widetilde{\Theta}\widetilde{\Theta}^+\widetilde{\Theta}$.

Démonstration. Voir [BIG74]. •

Notons que si $\operatorname{rang}(\widetilde{\Theta}) = \dim(\widetilde{\psi}) + \dim(C_v)$, alors l'équation (5.40) a une solution unique $\widetilde{\psi}$ et C_v car $(I - \widetilde{\Theta}^+\widetilde{\Theta}) = 0$ pour tout $\widetilde{\Theta}^+$.

Une condition suffisante pour la stabilisation du polytope de systèmes Ω_G est donnée par le corollaire suivant.

Corollaire 5.6.1. *S'il existe un vecteur $\widetilde{Z}$ tel que l'inégalité suivante*

$$\mathrm{Mdiag}(W_1\left(\widetilde{\Theta}^+\widetilde{B} + (I - \widetilde{\Theta}^+\widetilde{\Theta})\widetilde{Z}\right)) > 0 \tag{5.44}$$

soit satisfaite, alors le polytope de systèmes Ω_G est simultanément stabilisable par un compensateur d'ordre fixe $C(s)$.

Démonstration. Ce résultat est une déduction du lemme 5.6.2 et du théorème 5.6.1. •

Par conséquent, la synthèse d'un compensateur simultané $C(s)$ stabilisant le polytope de systèmes Ω_G est réduite à trouver une solution faisable de l'inégalité (5.44).

L'algorithme de synthèse du régulateur simultané est décrit par les étapes suivantes.

- **Etape 1 :** Donner un ensemble des réels négatifs et distincts $\{a_1, \ldots, a_\ell\}$.
- **Etape 2 :** Déterminer H, A, Λ_i^e et Λ_i^o, $i = 1, \ldots, n$.
- **Etape 3 :** Tester la condition de rang donnée par la relation (5.42). Si la condition de rang est satisfaite alors passer à l'étape 4. Sinon, relancer l'étape 1 en modifiant l'ensemble $\{a_1, \ldots, a_\ell\}$.
- **Etape 4 :** Trouver une solution faisable de l'inégalité (5.44).
- **Etape 5 :** En déduire le régulateur simultané $C(s)$.

Afin d'illustrer notre approche, nous proposons l'exemple suivant.

Exemple 5.6.1. Pour illustrer les résultats présentés dans cette partie, nous allons considérer le polytope de systèmes Ω_G utilisé dans l'exemple 5.5.1 et défini par ses quatre sommets $G_i(s) = N_i(s)D_i(s)^{-1}$, $i = 1, \ldots, 4$, donnés par (5.33) avec $\epsilon_{\min} = 1$, $\epsilon_{\max} = 2$, $\eta_{\min} = -1$ et $\eta_{\max} = 1$.

Considérons un ensemble de trois nombres réels négatifs et distincts donnés par $a_1 = -2.2418$, $a_2 = -0.5$ et $a_3 = -0.0797$.

Nous avons choisi la même forme du régulateur que dans l'exemple 5.5.1

$$C(s) = \frac{x_1^o s^3 + x_0^o s}{y_2^e s^4 + y_1^e s^2 + y_0^e}$$

Les matrices Λ_i^e et Λ_i^o $i = 1, \ldots, 4$, sont données dans l'exemple 5.5.1.

En considérant les racines de la partie paire a_1, a_2 et a_3, le vecteur H est donné comme suit

$$H = \begin{bmatrix} 0.0005 & 0.0075 & 0.0158 & 0.0056 \end{bmatrix}^T$$

Pour ces données, la condition de rang (5.42) est satisfaite et il existe une solution pour (5.40) donnée par

$$\begin{aligned}
\widetilde{Z} &= [1.6251\ \ 0.6\ \ 0.1\ \ 0.3164\ \ 1.8\ \ 0.2087\ \ 1.6251\ \ 0.6\ \ 0.1\ \ 0.3164\ \ 1.8\ \ 0.2087\ \ 0.0016\ \ 0.0130\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^T \\
\widetilde{\psi} &= [1.6251\ \ 0.1\ \ 0.1\ \ 0.3164\ \ 1.3\ \ 0.2087\ \ 1.6251\ \ 1.1\ \ 0.1\ \ 0.3164\ \ 2.3\ \ 0.2087]^T \\
C_v &= [0.0016\ \ 0.0130\ \ 0.0005\ \ 0.0065\ \ 0.0028]^T
\end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'obtenir le contrôleur simultané $C(s)$ suivant

$$C(s) = \frac{130s^3 + 16s}{28s^4 + 65s^2 + 5}$$

Nous déterminons alors les quatre polynômes caractéristiques en boucle fermée associés aux quatre sommets

$$\begin{aligned}
\Phi(G_1, C)(s) &= 56s^6 + 102s^5 + 158s^4 + 81s^3 + 75s^2 + 11s + 5 \\
\Phi(G_2, C)(s) &= 56s^6 + 102s^5 + 158s^4 + 211s^3 + 75s^2 + 27s + 5 \\
\Phi(G_3, C)(s) &= 56s^6 + 158s^5 + 158s^4 + 211s^3 + 75s^2 + 21s + 5 \\
\Phi(G_4, C)(s) &= 56s^6 + 158s^5 + 158s^4 + 341s^3 + 75s^2 + 37s + 5
\end{aligned}$$

Les polynômes $\Phi(G_1, C)(s)$, $\Phi(G_2, C)(s)$, $\Phi(G_3, C)(s)$ et $\Phi(G_4, C)(s)$ sont de même degré et Hurwitz, le compensateur $C(s)$ stabilise donc les quatre sommets $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$ et $G_4(s)$. De plus, ces polynômes ont la même partie paire avec les coefficients des termes de plus haut degré de même signe. Donc $C(s)$ stabilise le polytope de systèmes Ω_G. Par conséquent, $C(s)$ stabilise $\widetilde{G}(s)$.

Définissons $U_{ij}(s)$ comme suit

$$U_{ij}(s) = \frac{\Phi(G_i, C)(s)}{\Phi(G_j, C)(s)}, \quad i = 1, \ldots, 3,\ j = i+1, \ldots, 4$$

La figure 5.3 représente les digrammes de phase des fonctions $U_{ij}(s)$. Nous pouvons remarquer que $|\arg(U_{ij}(j\omega))| < 180°$. ■

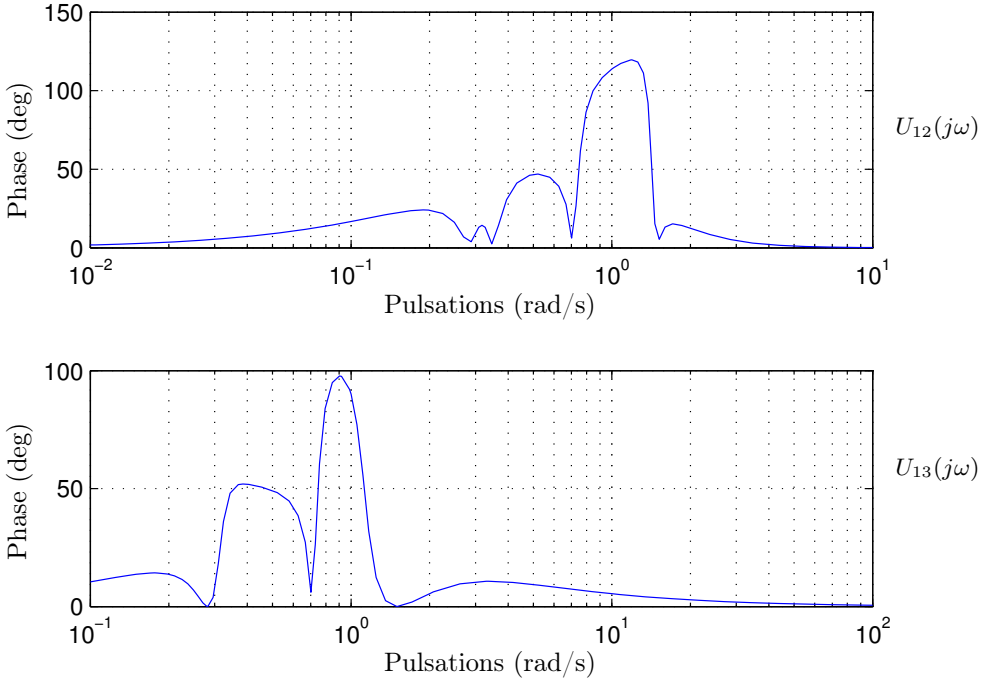

FIGURE 5.1 – Diagrammes de phase de $U_{12}(s)$ et de $U_{13}(s)$

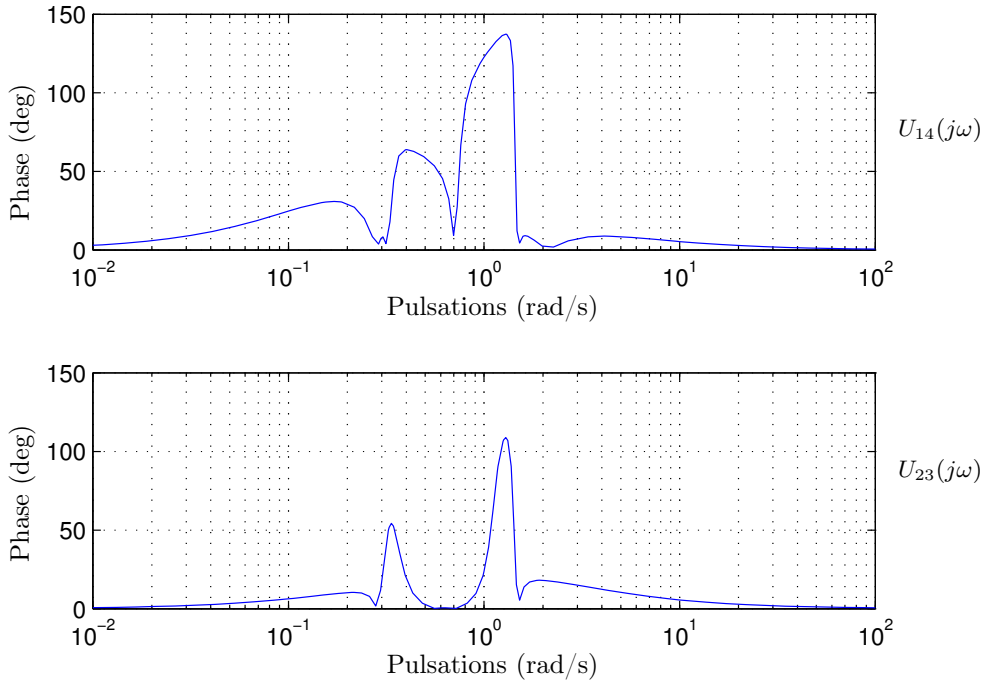

FIGURE 5.2 – Diagrammes de phase de $U_{14}(s)$ et de $U_{23}(s)$

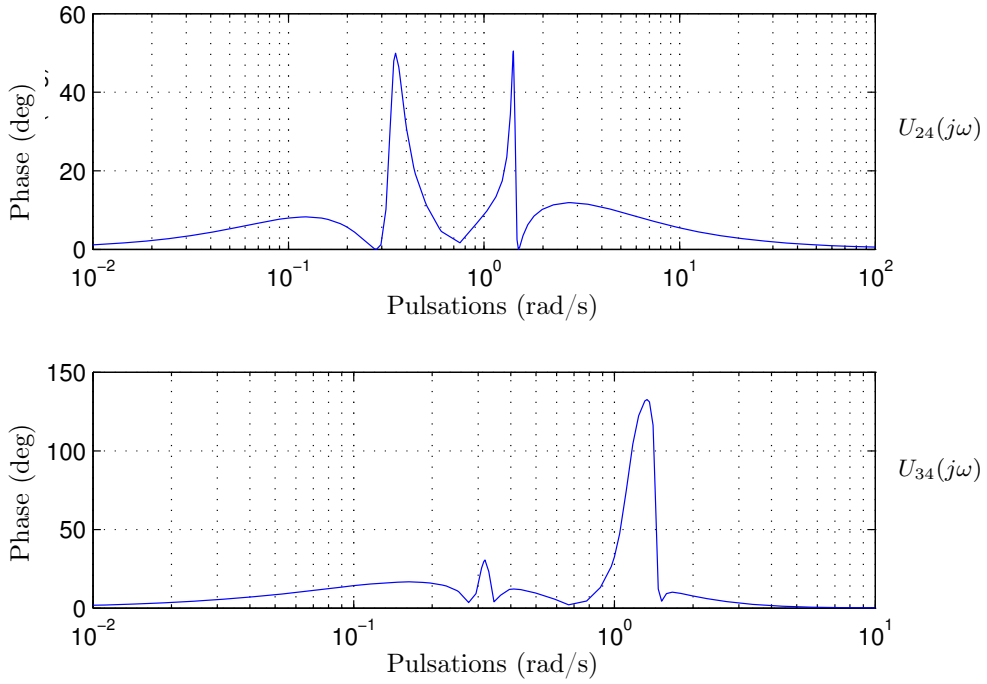

FIGURE 5.3 – Diagrammes de phase de $U_{24}(s)$ et de $U_{34}(s)$

Remarque 5.6.1. Dans les exemples 5.5.1 et 5.6.1, nous avons considéré le même polytope de systèmes Ω_G et un correcteur sumultané et robuste $C(s)$ de structure identique.

Comme dans la méthode basée sur le critre d'Hermite-Biehler dans l'exemple 5.6.1 où il faut choisir les racines de la partie paire des polynômes caractérisitiques aux sommets de Ω_G, la methode basée sur le critère d'Hermite-Fujiwara a aussi nécessité de choisir a priori les paramètres q_{11} et q_{22} car les 8 matrices d'Hermite-Fujiwara $H(P_{i1}(s), P_{i1}(s))$ et $H(P_{i2}(s), P_{i2}(s))$ sont nulles pour les 4 sommets ($i = 1, \ldots, 4$).

La méthode basée sur le critère d'Hermite-Fujiwara requiert de résoudre un problème d'optimisation complexe donné par (5.30) avec 60 matrices d'Hermite-Fujiwara $H(P_{ij}(s), P_{ik}(s))$ ($i = 1, \ldots, 4$, $j = 1, \ldots, 5$, $k = 1, \ldots, 5$) de dimension 6×6 avec $60 = 4 \times 5 \times 5 - 40$. La méthode basée sur le critère d'Hermite-Biehler est plus simple à mettre en œuvre car il suffit de résoudre le problème de programmation linéaire (5.44) de dimension $17 = 4 \times 3 + 5$. ■

5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité la question de la stabilisation robuste d'un polytope de systèmes LTI avec un contrôleur d'ordre fixe. Nous avons simplifié ce problème par l'étude de la stabilisation simultanée de ses segments. Nous avons aussi montré que, pour stabiliser un polytope de systèmes LTI, il est suffisant de stabiliser simultanément ses sommets avec une condition supplémentaire à satisfaire concernant les parties paires (ou impaires) des polynômes caractéristiques associés aux sommets.

Pour la synthèse du régulateur simultané, nous avons utilisé, dans un premier temps, le critère de stabilité d'Hermite-Fujiwara. Ce critère a fourni un problème d'optimisation BMI qui a été transformé par la suite en un problème d'optimisation convexe sous la contrainte d'inégalités matricielles linéaires (LMI). Dans une seconde partie, nous avons utilisé le critère de stabilité d'Hermite-Biehler pour proposer une méthode de synthèse basée sur l'égalité des parties paires (ou impaires) des polynômes caractéristiques en boucle fermée associés aux sommets du polytope de systèmes.

Conclusion générale et perspectives

Ce mémoire est consacré à la commande simultanée robuste d'un polytope de systèmes SISO LTI dans l'espace des polynômes. En utilisant le théorème des segments étendus [BHL88], nous avons montré que ce problème est équivalent à la stabilisation simultanée de ses segments. Nous avons établi que cette question peut être réduite à celle de la stabilisation simultanée des systèmes aux extrémités avec une contrainte supplémentaire à satisfaire. En conséquence, le problème de la stabilisation d'un polytope de systèmes revient à stabiliser tous ses sommets avec un contrôleur simultané donnant des polynômes caractéristiques qui ont la même partie paire (ou impaire). Dans ce manuscrit, nous avons proposé des conditions d'existence d'un correcteur d'ordre fixe stabilisant cette famille de systèmes et nous avons proposé des méthodes de synthèse de ces correcteurs en utilisant les deux critères de stabilité suivants : le critère d'Hermite-Fujiwara et celui d'Hermite-Biehler. Le contrôleur que nous avons proposé ne stabilise pas seulement les sommets du polytope simultanément, mais il stabilise aussi l'ensemble des systèmes appartenant au polytope. Il s'agit donc d'un contrôleur simultané robuste pour un polytope de systèmes SISO LTI.

1 Conclusions

Dans un premier temps, nous avons traité le problème de la commande simultanée d'un segment de systèmes. Ce problème a été réduit au problème de la stabilisation simultanée des deux systèmes aux extrémités de ce segment sous la contrainte d'égalité des parties paires de chacun des polynômes caractéristiques associés à ces deux systèmes. Deux stratégies pour la synthèse des contrôleurs simultanés sont développées. La première est basée sur la positivité des matrices d'Hermite-Fujiwara. La seconde exploite la propriété d'entrelacement des zéros réels du théorème d'Hermite-Biehler.

La première approche est une méthode inspirée de la littérature qui pose le problème de la commande simultanée d'un segment de systèmes comme un problème d'optimisation. En effet, le critère d'Hermite-Fujiwara est étendu pour définir l'hurwitzité d'une combinaison linéaire de deux polynômes. Cette approche donne des conditions d'existence d'un régulateur d'ordre fixe stabilisant un segment de systèmes. Ces conditions ont été formulées comme un problème d'optimisation d'inégalités matricielles bilinéaires (BMI) qui est non convexe. La résolution des BMI est un problème NP-complexe. C'est la raison pour laquelle ces conditions ont été converties en inégalités matricielles linéaires (LMI) avec une contrainte de rang. La résolution de ce problème d'optimisation produit un algorithme heuristique sans garantie de trouver des solutions à ce problème lorsqu'elles existent. De plus, cette approche génère une complexité numérique élevée liée à la taille et au nombre de matrices Hermite-Fujiwara, d'où la nécessité de développer d'autres approches plus efficaces.

La deuxième approche, basée sur le critère d'Hermite-Biehler, est fondée sur la propriété

d'entrelacement des zéros réels et sur le choix des racines de la partie paire (ou impaire) des polynômes caractéristiques aux extrémités. Cette formulation est simple et plus facile à mettre en œuvre que la première approche utilisant le critère d'Hermite-Fujiwara. Cependant, puisque cette seconde approche est basée sur une condition de stabilité suffisante, nous ne pouvons pas conclure sur la stabilisabilité du segment de systèmes lorsque l'algorithme ne converge pas. Cette méthode nécessite de connaître a priori les racines de la partie paire du polynôme caractéristique du système en boucle fermée.

Afin de réduire le nombre de contraintes à satisfaire dans le problème de la stabilisation d'un segment de systèmes, un paramétrage particulier des contrôleurs simultanés est utilisé. Deux méthodes de synthèse sont proposées. La première méthode permet de synthétiser des compensateurs simultanés d'ordre fixe avec le critère de stabilité d'Hermite-Fujiwara en réduisant le nombre de BMI à résoudre par rapport au cas sans paramétrage. La seconde traite la question de la stabilisation simultanée d'un segment de systèmes comme un problème d'interpolation des polynômes stables en utilisant le critère de stabilité d'Hermite-Biehler. La technique d'interpolation permet de donner des conditions d'existence générales du régulateur simultané indépendamment de l'ordre du correcteur. Elle permet également de déterminer des régulateurs simultanés sans résoudre un problème d'optimisation.

Les résultats obtenus pour la commande simultanée d'un segment de systèmes sont généralisés au cas de la stabilisation d'un polytope de systèmes. Une condition suffisante satisfaisant une contrainte sur la partie paire (ou impaire) des polynômes caractéristiques en boucle fermée associés aux sommets du polytope est prouvée. Deux méthodes de synthèse sont développées en utilisant d'abord le critère de stabilité d'Hermite-Fujiwara, puis celui d'Hermite-Biehler. En appliquant le critère d'Hermite-Fujiwara, nous devons gérer une complexité de calcul qui est due, d'une part, à la transformation du problème BMI initial en une optimisation basée sur des LMI avec une contrainte de rang, cette optimisation pouvant de pas avoir de solution, et, d'autre part, au nombre et à la taille des matrices Hermite-Fujiwara à prendre en compte. Avec le critère d'Hermite Biehler, cette complexité de calcul est considérablement réduite car nous obtenons un problème de programmation linéaire.

2 Perspectives et problèmes ouverts

Suite aux travaux exposés dans ce mémoire, les extensions et les perspectives suivantes nous semblent être des pistes de recherche à approfondir :

- Développer des conditions d'existence d'un correcteur stabilisant un segment ou un polytope de systèmes LTI en utilisant d'autres critères de stabilité que ceux d'Hermite-Fujiwara et d'Hermite-Biehler.
- Développer des méthodes permettant d'avoir un choix adéquat du régulateur initial et des racines de la partie paire (ou impaire) donnée a priori.
- Etudier la stabilisation simultanée des polytopes de systèmes avec des retards, d'une part, et prendre en compte d'autres régions de stabilité que le demi-plan complexe gauche, d'autre part.
- Généraliser les problèmes traités dans ce mémoire à la stabilisation simultanée des polytopes de systèmes multivariables.
- Enfin, il serait intéressant de valider les résultats présentés dans ce mémoire sur des processus réels.

Annexe A

Interpolation dans $\mathcal{H}_\infty$

Dans la littérature, il existe différents algorithmes d'interpolation [Dor00, YBL74, Vid85]. Dans cette annexe, nous détaillons l'algorithme d'interpolation décrit dans [Vid85].

A.1 Condition d'existence d'une fonction d'interpolation dans $\mathcal{U}$

On considère $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$, un ensemble de points dans $\mathbb{C}_{+_e}$, et $R = \{r_{ij},\ j = 0, \ldots, m_i - 1; i = 1, \ldots, n\}$, un ensemble de points correspondant dans $\mathbb{C}$. Le problème est de trouver une fonction rationnelle $u(s) \in \mathcal{U}$ telle que [1]

$$u^{(j)}(s_i) = r_{ij},\ j = 0, \ldots, m_i - 1; i = 1, \ldots, n \tag{A.1}$$

Le théorème A.1.1 donne une condition nécessaire et suffisante d'existence de $u(s) \in \mathcal{U}$ vérifiant (A.1).

Théorème A.1.1. *[Vid85] Soit l'ensemble $S = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_\ell, s_{\ell+1}, \ldots, s_n\}$ où $\sigma_1, \ldots, \sigma_\ell$ sont des nombres réels non négatifs étendus* [2] *et distincts, et $s_{\ell+1}, \ldots, s_n$ sont des nombres complexes distincts à partie imaginaire positive. Soit $R = \{r_{ij}, j = 0, \ldots, m_i - 1; i = 1, \ldots, n\}$ un ensemble de nombres dans $\mathbb{C}$ où r_{ij} est un nombre réel si $j = 0, \ldots, m_i - 1$ et $i = 1, \ldots, \ell$ et où $r_{i0} \neq 0$ pour tout i. Il existe une fonction $u(s) \in \mathcal{U}$ satisfaisant* (A.1) *si et seulement si les nombres r_{i0}, $i = 1, \ldots, \ell$ ont tous le même signe.*

Dans la suite de cette annexe, nous utilisons la fonction $u_k(s)$ définie comme suit

$$u_k(s) = (1 + bf(s))^a u_{k-1}(s) \tag{A.2}$$

où $f(s)$ est une fonction donnée dans $\mathcal{U}$. Notons que $u_k(s) \in \mathcal{U}$ si et seulement si $a > 0$ et $|b| < \|f(s)\|^{-1}$ avec $\|f(s)\| = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |f(j\omega)|$ [Vid85].

A.2 Interpolation des zéros réels simples

Considérons $S = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_\ell\}$ un ensemble de nombres réels positifs et distincts. Nous devons chercher une fonction $u(s) \in \mathcal{U}$ vérifiant la relation suivante

$$u^{(j)}(\sigma_i) = r_{ij}, \qquad j = 0, \ldots, m_i - 1; i = 1, \ldots, k-1, k \leqslant \ell \tag{A.3}$$

1. $u^{(j)}(s_i)$ est la $j^{\text{ème}}$ dérivée de la fonction $u(s)$ par rapport à la variable s évaluée en $s = s_i$
2. Au moins un σ_i peut être infini.

Nous construisons une fonction $u(s)$ qui satisfait (A.3) et $u(\sigma_k) = r_{k0}$. Nous distiguons deux cas [Vid85].

1) Si $k = 1$, alors $u(s) = u_k(s) = r_{k0}$.

2) Si $k \neq 1$ alors nous suivons les étapes données ci-dessous.

- Prenons $u_0(s) = r_{10}$ et définissons une fonction $f(s)$ telle que

$$f(s) = \prod_{i=1}^{k-1} \left(\frac{s - \sigma_i}{s + 1} \right)^{m_i} \tag{A.4}$$

- En considérant l'équation (A.2), nous pouvons écrire

$$u_k(\sigma_k) = (1 + bf(\sigma_k))^a u_{k-1}(\sigma_k) = r_{k0} \tag{A.5}$$

- Nous en déduisons b comme suit

$$b = \frac{\left(\dfrac{r_{k0}}{u_{k-1}(\sigma_k)} \right)^{\frac{1}{a}} - 1}{f(\sigma_k)} \tag{A.6}$$

  Nous pouvons remarquer que, si a est suffisamment grand, alors $|b| < \|f(s)\|^{-1}$ et, par conséquent, $u_k(s) \in \mathcal{U}$.

- Nous obtenons $u(s) = u_k(s)$.

A.3 Interpolation des zéros réels multiples

Soit $S = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_\ell\}$, un ensemble de nombres réels positifs et distincts. Chaque σ_i, $i = 1, \ldots, \ell$ est de multiplicité m_i. Nous devons trouver une fonction $u(s) \in \mathcal{U}$ satisfaisant les relations suivantes

$$u^{(j)}(\sigma_i) = r_{ij}, \qquad j = 0, \ldots, m_i - 1; i = 1, \ldots, k-1, k \leqslant \ell \tag{A.7a}$$

$$u^{(j)}(\sigma_k) = r_{kj}, \qquad j = 0, \ldots, t-1, t \leqslant m_k \tag{A.7b}$$

Pour interpoler les zéros réels multiples, nous appliquons l'algorithme ci-dessous [Vid85].

- Choisissons $u_0(s) = r_{10}$ et définissons la fonction $f(s)$ par

$$f(s) = \left(\frac{s - \sigma_k}{s + 1} \right)^t \prod_{i=1}^{k-1} \left(\frac{s - \sigma_i}{s + 1} \right)^{m_i} \tag{A.8}$$

- Soit $u_k(s)$ donné par (A.2) et vérifiant les relations (A.7a) et (A.7b). Le développement binomial de l'équation (A.2) donne

$$u_k(s) = u_{k-1}(s) + au_{k-1}(s)bf(s) + u_{k-1}(s) \sum_{j=2}^{a} q_{aj}(bf(s))^j \tag{A.9}$$

- Comme $u_k(s)$ satisfait l'équation (A.5), nous en déduisons

$$u_k^{(t)}(\sigma_k) = u_{k-1}^{(t)}(\sigma_k) + (au_{k_1}(\sigma_k)bf(\sigma_k))^{(t)} \tag{A.10}$$

- En appliquant la règle de Leibnitz sur les deux équations (A.9) et (A.10), nous obtenons l'égalité suivante

$$\begin{aligned}(au_{k-1}(\sigma_k)bf(\sigma_k))^{(t)} &= ab\sum_{j=0}^{t} q_{aj}u_{k-1}^{(t-j)}(\sigma_k)f^{(j)}(\sigma_k)\\ &= abu_{k-1}(\sigma_k)f^{(t)}(\sigma_k) \end{aligned} \tag{A.11}$$

- Nous en déduisons b

$$b = \frac{r_{kt} - u_{k-1}^{(t)}(\sigma_k)}{af^{(t)}(\sigma_k)u_{k-1}(\sigma_k)} \tag{A.12}$$

  Nous pouvons remarquer que, si a est suffisamment grand, alors $|b| < \|f(s)\|^{-1}$ et, par conséquent, $u_k(s) \in \mathcal{U}$.

- Nous obtenons $u(s) = u_k(s)$.

A.4 Interpolation des zéros à l'infini

Pour un zéro à l'infini simple (de multiplicité égale à 1), nous appliquons l'algorithme proposé dans la section A.2 en choisissant $f(s)$ de la forme

$$f(s) = \frac{1}{(s+1)}$$

Pour un zéro à l'infini multiple (multiplicité > 1) ce n'est pas possible car en calculant b à partir de l'équation (A.12), nous divisons par la dérivée de $f(s)$ qui s'annule à l'infini. Pour résoudre ce problème, nous supposons que nous allons chercher une fonction $u(s) \in \mathcal{U}$ qui interpole les valeurs d'une fonction $g(s)$ à l'infini avec une multiplicité $m = n$. Appliquons alors l'algorithme ci-dessous.

- Nous faisons la décomposition de $g(s)$ en éléments simples

$$g(s) = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i s^i}{(s+q)^n} = c_1 + \frac{c_2}{(s+q)} + \frac{c_3}{(s+q)^2} + \dots \tag{A.13}$$

  ce qui implique

$$\begin{aligned} g(\infty) &= c_1 \\ g(\infty^2) &= c_1 + \frac{d_2}{(s+q)} \\ &\vdots \end{aligned}$$

- Nous proposons une fonction $u(s)$ telle que

$$u(s) = u_1 + \frac{u_2}{(s+p)} + \frac{u_3}{(s+p)^2} + \dots. \tag{A.14}$$

- Par identification, nous pouvons déterminer $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n$ et en déduire $u(s)$.

A.5 Exemple

Considérons $S = \{\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2\}$ avec σ_2 de multiplicité 2 et $R = \{r_{10} = 0.1250,\ r_{20} = 0.2963,\ r_{21} = 0.1481\}$. Cherchons s'il existe une fonction $u(s) \in \mathcal{U}$ vérifiant (A.1).

Puisque les éléments de l'ensemble R sont de même signe, il existe donc une fonction $u(s) \in \mathcal{U}$ vérifiant les relations suivantes

$$\begin{aligned} u(\sigma_1) &= r_{10} = 0.1250 \\ u(\sigma_2) &= r_{20} = 0.2963 \\ u^{(1)}(\sigma_2) &= r_{21} = 0.1481 \end{aligned}$$

La procédure permettant de générer la fonction $u(s)$ est donnée par les étapes suivantes.

- Choisissons $u_0 = r_{10} = 0.1250$.
- Pour interpoler la valeur $\sigma_2 = 2$, définisons $f(s)$ comme suit

$$f(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

- Calculons b à partir de l'équation (A.6)

$$b = \frac{\left(\dfrac{r_{20}}{u_0}\right)^{\frac{1}{a}} - 1}{f(\sigma_2)} = 0.7224$$

- Choisissons $a = 4$ pour que $|b| < \|f(s)\|^{-1}$
- Calculons la nouvelle fonction $u_1(s)$ à partir de l'équation (A.2) comme suit

$$u_1(s) = (1 + bf(s))^a u_0 = \frac{1.1002(s + 0.1612)^4}{(s+1)^4} \in \mathcal{U}$$

- Définissons $f(s)$ selon l'équation (A.8)

$$f(s) = \frac{(s-2)(s-1)}{(s+1)^2}$$

- Calculons b en utilisant l'équation (A.12) comme suit

$$b = \frac{r_{21} - u_1^{(1)}(\sigma_2)}{af^{(1)}(\sigma_2)u_1(\sigma_2)} = -0.1578$$

- En choisissant $a = 1$, nous pouvons déterminer $u_2(s)$

$$u_2(s) = (1 + bf(s))^a u_1(s) = \frac{0.92654(s + 2.628)(s + 0.3092)(s + 0.1612)^4}{(s+1)^6} \in \mathcal{U}$$

- Nous obtenons $u(s) = u_2(s)$.
- Vérifions le résultat en calculant $u(\sigma_1)$, $u(\sigma_2)$ et $u^{(1)}(\sigma_2)$, ce qui donne

$$\begin{aligned} u(\sigma_1) &= 0.1250 \\ u(\sigma_2) &= 0.2963 \\ u^{(1)}(\sigma_2) &= 0.1481 \end{aligned}$$

Annexe B

Application de la méthode d'interpolation dans $\mathcal{H}_\infty$ à la stabilisation simultanée de deux systèmes

B.1 Méthode de synthèse d'un régulateur simultané pour deux systèmes dans $\mathcal{H}_\infty$

Soit deux systèmes $G_1(s) = n_1(s)/d_1(s)$ et $G_2(s) = n_2(s)/d_2(s)$ tels que $(n_1(s), d_1(s)) \in \mathcal{H}_\infty$ et $(n_2(s), d_2(s)) \in \mathcal{H}_\infty$. Soit $C_1(s) = x_1(s)/y_1(s)$ où $(x_1(s), y_1(s)) \in \mathcal{H}_\infty$ un correcteur stabilisant le système $G_1(s)$ de manière interne. Selon le théorème 1.2.8, les deux systèmes $G_1(s)$ et $G_2(s)$ sont simultanément stabilisables si et seulement s'il existe $q(s) \in \mathcal{H}_\infty$ tel que

$$\Upsilon(G_2, C)(s) = \Upsilon(G_2, C_1)(s) + q(s)\mathcal{G}_{12}(s), \quad \Upsilon(G_2, C)(s) \in \mathcal{U} \tag{B.1}$$

où les notations $\Upsilon(G, C)(s)$ et $\mathcal{G}_{12}(s)$ sont données respectivement dans (1.5) et dans (1.8).

Le correcteur simultané est donné par

$$x(s) = x_1(s) + q(s)d_1(s) \tag{B.2a}$$

$$y(s) = y_1(s) - q(s)n_1(s) \tag{B.2b}$$

Notons que la fonction rationnelle $\mathcal{G}_{12}(s)$ peut être factorisée comme $\mathcal{G}(s) = \mathcal{G}_{12}^-(s)\mathcal{G}_{12}^+(s)$ où $\mathcal{G}_{12}^-(s) \in \mathcal{U}$, $\mathcal{G}(s)_{12}^+(s) \in \mathcal{H}_\infty$ et $\mathcal{G}(s)_{12}^+(s) \notin \mathcal{U}$. La relation B.1 devient alors

$$\widetilde{\Upsilon}(G_2, C)(s) = \widetilde{\Upsilon}(G_2, C_1)(s) + q(s)\mathcal{G}_{12}^+(s) \in \mathcal{U} \tag{B.3}$$

avec

$$\widetilde{\Upsilon}(G_2, C)(s) = \mathcal{G}_{12}^-(s)\Upsilon(G_2, C)(s) \tag{B.4a}$$

$$\widetilde{\Upsilon}(G_2, C_1)(s) = \mathcal{G}_{12}^-(s)\Upsilon(G_2, C_1)(s) \tag{B.4b}$$

Puisque $\widetilde{\Upsilon}(G_2, C_1)(s)$ et $\mathcal{G}_{12}^+(s)$ sont copremières dans $\mathcal{H}_\infty$, il existe donc $\mathcal{N}(s) \in \mathcal{H}_\infty$ et $\mathcal{K}(s) \in \mathcal{H}_\infty$ telles que

$$\mathcal{N}(s)\widetilde{\Upsilon}(G_2, C_1)(s) + \mathcal{K}(s)\mathcal{G}_{12}^+(s) = 1 \tag{B.5}$$

Le problème d'existence d'une fonction rationnelle $\widetilde{\Upsilon}(G_2, C)(s) \in \mathcal{U}$ qui interpole les valeurs $\Upsilon(G_2, C_1)(s)$ aux zéros de $\mathcal{G}_{12}^+(s)$ est équivalent à l'existence d'une fonction rationnelle $V(s) \in \mathcal{H}_\infty$ interpolant les valeurs de $\mathcal{N}(s)$ aux zéros de $\mathcal{G}_{12}^+(s)$. En conséquence, il existe une fonction $V(s) \in \mathcal{U}$ telle que $(V(s) - \mathcal{N}(s))$ soit divisible par $\mathcal{G}_{12}^+(s)$ dans $\mathcal{H}_\infty$.

Si $(V(s) - \mathcal{N}(s))$ est divisible par $\mathcal{G}_{12}^+(s)$ dans $\mathcal{H}_\infty$, alors, il existe une fonction $Z(s)$ satisfaisant

$$V(s) - \mathcal{N}(s) = Z(s)\mathcal{G}_{12}^+(s) \tag{B.6}$$

et la relation (B.6) peut s'écrire comme suit

$$\mathcal{N}(s) + Z(s)\mathcal{G}_{12}^+(s) = V(s) \tag{B.7}$$

En divisant l'équation (B.7) par $V(s)$, nous obtenons

$$\mathcal{N}(s)R(s) + P(s)\mathcal{G}_{12}^+(s) = 1 \tag{B.8}$$

avec $R(s) = \dfrac{1}{V(s)}$ et $P(s) = \dfrac{Z(s)}{V(s)}$.

En considérant les relations (B.5) et (B.8), nous pouvons écrire

$$\mathcal{N}(s)(R(s) - \widetilde{\Upsilon}(G_2, C_1)(s)) = \mathcal{G}_{12}^+(s)(\mathcal{K}(s) - P(s)) \tag{B.9}$$

Nous pouvons noter que $\mathcal{G}_{12}^+(s)$ divise le produit $\mathcal{N}(s)(R(s) - \widetilde{\Upsilon}(G_2, C_1)(s))$ dans $\mathcal{H}_\infty$. De plus, les fonctions rationnelles $\mathcal{G}_{12}^+(s)$ et $\mathcal{N}(s)$ étant copremières dans $\mathcal{H}_\infty$, $\mathcal{G}_{12}^+(s)$ divise $(R(s) - \widetilde{\Upsilon}(G_2, C_1)(s))$ dans $\mathcal{H}_\infty$, ce qui est équivalent à

$$R(s) = \widetilde{\Upsilon}(G_2, C_1)(s) + q(s)\mathcal{G}_{12}^+(s), \quad q(s) \in \mathcal{H}_\infty \tag{B.10}$$

Nous en déduisons alors $q(s)$

$$q(s) = \frac{R(s) - \widetilde{\Upsilon}(G_2, C_1)(s)}{\mathcal{G}_{12}^+(s)} = \frac{\dfrac{1}{V(s)} - \widetilde{\Upsilon}(G_2, C_1)(s)}{\mathcal{G}_{12}^+(s)} \tag{B.11}$$

B.2 Exemple

Pour illustrer les calculs ci-dessus, considérons l'exemple 1.2.6 donné dans le chapitre 1 à la section 1.2.3.1. Soit deux systèmes $G_1(s)$ et $G_2(s)$ définis respectivement par leur factorisation copremière

$$(n_1(s), d_1(s)) = \Big(\frac{2}{s+2}, 1\Big), \quad (n_2(s), d_2(s)) = \Big(\frac{s-2}{(s+1)(s+5)}, \frac{s-5}{s+5}\Big)$$

Choisissons un compensateur $C_1(s)$ défini par sa factorisation copremière dans $\mathcal{H}_\infty$ donnée par $(x_1(s), y_1(s)) = (1, 1)$ et stabilisant $G_1(s)$. Le calcul de $\mathcal{G}_{12}(s)$ et de $\Upsilon(G_2, C_1)(s)$ donne

$$\mathcal{G}_{12}(s) = \frac{-(s + 0.6904)(s - 8.6904)}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$
$$\Upsilon(G_2, C_1)(s) = \frac{(s + 1.5414)(s - 4.5414)}{(s+1)(s+5)}$$

On en déduit

$$\frac{\mathcal{G}_{12}(s)}{\Upsilon(G_2, C_1)(s)} = \frac{-(s+0.6904)(s-8.6904)}{(s+2)(s+1.5414)(s-4.5414)}$$

Puisque la fonction rationnelle $\mathcal{G}_{12}(s)/\Upsilon(G_2, C_1)(s)$ vérifie la **PIP**, les deux systèmes sont donc simultanément stabilisables. Pour chercher $q(s)$, nous appliquons la méthode développée dans la section B.1, ce qui nécessite de trouver une fonction rationnelle $V(s) \in \mathcal{U}$ interpolant les valeurs de $\mathcal{N}(s)$ aux zéros de $\mathcal{G}_{12}^{+}(s)$.

Les fonctions rationnelles $\mathcal{G}_{12}^{-}(s)$ et $\mathcal{G}(s)_{12}^{+}(s)$ sont données par

$$\mathcal{G}_{12}^{+}(s) = \frac{s-8.6904}{(s+2)^2}$$
$$\mathcal{G}_{12}^{-}(s) = \frac{-(s+0.6904)(s+2)}{(s+5)(s+1)}$$

La réalisation d'état de la fonction $\mathcal{N}(s)$ définie dans (B.8) est donnée par l'équation suivante [Vid85]

$$\mathcal{N}(s) = I + (C - DK_0)(sI - A_0)^{-1}F_0 \tag{B.12}$$

où les matrices (A, B, C, D) sont les matrices de la représentation d'état du système $\overline{P}(s) = \mathcal{G}_{12}^{+}(s)/\Upsilon(G_2, C_1)(s)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 13 & 14 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -8 & -6 \end{bmatrix}, \quad D = 0 \tag{B.13}$$

Les deux matrices F_0 et K_0 sont calculées afin que les matrices $A_1 = A - BK_0$ et $A_0 = A - F_0C$ soient stables. Un choix particulier pour K_0 et F_0 est donné par

$$K_0 = \begin{bmatrix} 3.7879 & 18.2704 & 16.1166 \end{bmatrix}, \quad F_0 = \begin{bmatrix} -7.5947 & -1.3477 & -0.2113 \end{bmatrix}^T$$

et on obtient

$$\mathcal{N}(s) = \frac{s^3 + 7.243s^2 + 115.3s + 76.19}{s^3 + 2.788s^2 + 5.273s + 2.121}$$

La fonction rationnelle $V(s) \in \mathcal{U}$ doit vérifier les relations suivantes

$$V(\infty) = \mathcal{N}(\infty) = 1$$
$$V(8.6904) = \mathcal{N}(8.6904) = 2.4939$$

En utilisant l'algorithme d'interpolation dans $\mathcal{H}_\infty$ donné dans l'annexe A, nous obtenons

$$V(s) = \frac{s+37.9227}{s+10} \in \mathcal{U}$$

Nous en déduisons $q(s)$

$$q(s) = \frac{22.232(s+2)(s+1.526)}{(s+0.6904)(s+37.92)}$$

Par conséquent, la factorisation copremière du correcteur simultané $C(s)$ est donnée par

$$x(s) = \frac{23.232(s+1.004)(s+4.033)}{(s+0.6904)(s+37.92)}$$
$$y(s) = \frac{(s-10.01)(s+4.162)}{(s+0.6904)(s+37.92)}$$

Annexe C

Stabilisation d'un polytope de systèmes avec une partie impaire commune

C.1 Généralisation du critère d'Hermite-Biehler

Après avoir énoncer la propriété d'entrelacement commun pair dans la définition 3.5.2 (section 3.5.2), nous donnons la propriété d'entrelacement commun impair afin de synthétiser un régulateur simultané pour le polytope de systèmes Ω_G défini par (5.12).

Soit n polynômes réels $f_i(s) = f^e(s^2) + sf_i^o(s^2)$, $i = 1, \ldots, n$, ayant la même partie impaire $f^o(s^2)$. Une généralisation de la propriété d'entrelacement des zéros défini dans pour ces polynômes $f_i(s)$ est donnée dans la définition C.1.1.

Définition C.1.1. *Propriété d'entrelacement commun impair.*
Considérons un nombre fini de polynômes $f_i^e(s^2)$, $i = 1, \ldots, n$, et un polynôme $f^o(s^2)$ dont les coefficients des termes de plus haut degré sont de même signe avec $\delta(f_i^e) = \delta(f^o) = \ell$, $i = 1, \ldots, n$. Les polynômes $f_i^e(s^2)$ ont des racines réelles, négatives et distinctes définies par l'ensemble suivant

$$racines(f_i^e(s^2)) = \{a_1^i, \ldots, a_\ell^i\}.$$

Les polynômes $f_i^e(s^2)$ vérifient la propriété d'entrelacement commun impair avec $f^o(s^2)$ si et seulement si les ℓ racines pour chaque polynôme $f_i^e(s^2)$ alternent avec les ℓ racines de polynôme $f^o(s^2)$ comme suit

$$a_1^i < b_1 < a_2^i < b_2 < \ldots < a_\ell^i < b_\ell < 0$$

où $\{b_1, \ldots, b_\ell\}$ est l'ensemble des racines réelles, négatives et distinctes de $f^o(s^2)$.

Notons que si les polynômes $f_i^e(s^2)$ vérifient la propriété d'entrelacement commun impair avec $f^o(s^2)$, alors, pour toute $j^{\text{ème}}$ racine, nous avons

$$\max(a_j^i) < b_j < \min(a_{j+1}^i)$$

En se basant sur la propriété d'entrelacement commun impair, nous donnons des conditions qui garantissent l'hurwitzité des polynômes $f_i(s) = f_i^e(s^2) + sf^o(s^2)$.

Corollaire C.1.1. *Les polynômes $f_i(s) = f_i^e(s^2) + sf^o(s^2)$ avec $f_i(s) \in \mathcal{P}_m(s)$, $i = 1, \ldots, n$, sont Hurwitz si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites.*

i) *Les racines* $(b_1, \ldots, b_\ell)$ *de* $f^o(s^2)$ *sont réelles, simples et négatives.*

ii) *Tous les réels* $c_{i,k}$ *dans* (C.1) *sont positifs avec*

$$f_i^e(s^2) = c_{i,0} f^o(s^2) - \sum_{k=1}^{\ell} c_{i,k} \frac{f^o(s^2)}{s^2 - b_k}. \tag{C.1}$$

A partir du corollaire C.1.1, nous déduisons la formulation matricielle de $f_i^e(s^2)$ et $f^o(s^2)$. Puisque

$$f^o(s^2) = \sum_{j=0}^{\ell} h_j^o s^{2j} = \gamma^o \prod_{j=1}^{\ell} (s^2 - b_j) \tag{C.2}$$

alors la relation (C.1) peut être simplifiée comme suit

$$\begin{aligned} f_i^e(s^2) &= c_{i,0}\gamma^o \prod_{j=1}^{\ell} (s^2 - b_j) + \gamma^o \sum_{k=1}^{\ell} c_{i,k} \prod_{j=1, j\neq k}^{\ell} (s^2 - b_j) \\ &= \sum_{k=0}^{\ell} c_{i,k} \sum_{j=0}^{\ell-1} \upsilon_{j,k} s^{2j} \end{aligned} \tag{C.3}$$

A partir des relations (C.2) et (C.3), nous déduisons que $f_i^e(s^2)$ et $f^o(s^2)$ peuvent se réécrire sous la forme matricielle suivante

$$f_i^e(s^2) = V[s] A^o \Psi_i^o, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{C.4}$$

$$f^o(s^2) = V[s] H^o \tag{C.5}$$

avec $V[s]$ donné par (3.11) et Ψ_i^o, A^o et H^o donnés par

$$\Psi_i^o = \begin{bmatrix} c_{i0} & c_{i1} & \ldots & c_{i\ell} \end{bmatrix}^T \tag{C.6a}$$

$$A^o = \begin{bmatrix} \upsilon_{00} & \upsilon_{01} & \ldots & \upsilon_{0\ell} \\ \upsilon_{10} & \upsilon_{11} & \ldots & \upsilon_{1\ell} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \upsilon_{\ell 0} & \upsilon_{\ell 1} & \ldots & \upsilon_{\ell\ell} \end{bmatrix} \tag{C.6b}$$

$$H^o = \begin{bmatrix} h_0^o, & h_1^o & \ldots & h_\ell^o \end{bmatrix}^T \tag{C.6c}$$

Une reformulation du corollaire C.1.1 est déduite.

Corollaire C.1.2. *Les polynômes* $f_i(s) = f_i^e(s^2) + s f^o(s^2)$ *avec* $f_i(s) \in \mathcal{P}_m(s)$, $i = 1, \ldots, n$, *sont Hurwitz si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites.*

i) *Les racines* $(b_1, \ldots, b_\ell)$ *de* $f^o(s^2)$ *sont réelles, simples et négatives.*

ii) *Toutes les composantes du vecteur* Ψ_i^o *données par* (C.6a) *sont positives.*

C.1.1 Condition d'existence d'un contrôleur simultané pour le polytope de systèmes Ω_G

Supposons maintenant que l'ensemble des segments $\phi_{i,j}$ défini par (5.15) du polytope ϕ donné par (5.14) ont la même partie impaire, alors nous pouvons simplifier la question de la stabilisation du polytope de systèmes Ω_G défini par (5.12) en utilisant le théorème 3.2.1.

Théorème C.1.1. *Considérons un polytope de systèmes Ω défini par ses sommets $G_i(s)$, $i = 1, \ldots, n$, donné par* (5.12)*. S'il existe un compensateur $C(s)$ tel que les coefficients des termes de plus haut degré de $\Phi(G_i, C)(s)$ sont de même signe et satisfaisant les relations suivantes*

$$\Phi(G_i, C)(s) \in \mathbb{H}, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{C.7a}$$

$$\Phi(G_i, C)^o(s^2) = \Phi(G_j, C)^o(s^2), \qquad i = 1, \ldots, n-1,\ j = i+1, \ldots, n \tag{C.7b}$$

alors le compensateur $C(s)$ stabilise le polytope de systèmes Ω_G.

Dans le lemme suivant, nous traitons la stabilisation du polytope de systèmes Ω_G comme un problème de placement de pôles particulier.

Lemme C.1.1. *Considérons $\{b_1, \ldots, b_\ell\}$ un ensemble des nombres réels, négatifs et distincts. A^o et H^o sont donnés respectivement par* (C.6b) *et* (C.6c)*. S'il existe un compensateur $C(s)$ donné par C_v tel que tous les éléments des vecteurs Ψ_i^o donnés par* (C.6a)*, $i = 1, \ldots, n$, soient strictement positifs et qui vérifie les conditions suivantes*

$$\Lambda_i^o C_v = H^o, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{C.8a}$$

$$\Lambda_i^e C_v = A^o \Psi_i \qquad i = 1, \ldots, n \tag{C.8b}$$

alors le polytope de systèmes Ω_G défini par (5.12) *est stabilisé par le correcteur $C(s)$.*

C.1.2 Algorithme de synthèse du contrôleur simultané pour un polytope de systèmes Ω_G par la méthode d'Hermite-Biehler

Les équations (C.8) peuvent s'écrire

$$B^o = \Theta^o \begin{bmatrix} \psi^o \\ C_v \end{bmatrix} \tag{C.9}$$

où

$$B^o = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ H^o \\ H^o \\ \vdots \\ H^o \end{bmatrix}, \ \Theta^o = \begin{bmatrix} A^o & 0 & \ldots & 0 & -\Lambda_1^e \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & A^o & -\Lambda_n^e \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \Lambda_1^o \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \Lambda_2^o \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \Lambda_n^o \end{bmatrix}, \tag{C.10a}$$

$$\widetilde{\psi} = \begin{bmatrix} \Psi_1^{oT} & \Psi_2^{oT} & \Psi_3^{oT} & \ldots & \Psi_n^{oT} \end{bmatrix}^T. \tag{C.10b}$$

Une condition d'existence d'une solution à l'équation (C.9) est donnée ci-après.

Théorème C.1.2. *L'équation* (C.9) *a une solution si et seulement si*

$$\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} B^o & \Theta^o \end{bmatrix}\right) = \operatorname{rang}(\Theta^o). \tag{C.11}$$

Les solutions générales ψ^o et C_υ de (C.9) *sont*

$$\psi^o = W_1\left(\Theta^{o+}B^o + (I - \Theta^{o+}\Theta^o)Z^o\right) \tag{C.12a}$$
$$C_\upsilon = W_2\left(\Theta^{o+}B^o + (I - \Theta^{o+}\Theta^o)Z^o\right) \tag{C.12b}$$

où $W_1 = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}$, $W_2 = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$, *$Z^o$ est un vecteur quelconque vérifiant* $\dim(Z^o) = \dim(\psi^o) + \dim(C_\upsilon)$ *et Θ^{o+} est une inverse généralisée de Θ^o satisfaisant $\Theta^o = \Theta^o\Theta^{o+}\Theta^o$.*

Une condition suffisante pour la stabilisation du polytope de systèmes Ω_G est donnée par le corollaire suivant.

Corollaire C.1.3. *S'il existe un vecteur Z^o tel que l'inégalité suivante*

$$\operatorname{Mdiag}(W_1\left(\Theta^{o+}B^o + (I - \Theta^{o+}\Theta^o)Z^o\right)) > 0 \tag{C.13}$$

soit satisfaite, alors le polytope de systèmes Ω_G est simultanément stabilisable par un compensateur d'ordre fixe $C(s)$.

L'algorithme de synthèse du régulateur simultané est décrit par les étapes suivantes.

- **Etape 1 :** Donner un ensemble des réels négatifs et distincts $\{b_1, \ldots, b_\ell\}$.
- **Etape 2 :** Déterminer H^o, A^o, Λ_i^e et Λ_i^o, $i = 1, \ldots, n$.
- **Etape 3 :** Tester la condition de rang donnée par la relation (C.11). Si la condition de rang est satisfaite alors passer à l'étape 4. Sinon, relancer l'étape 1 en modifiant l'ensemble $\{b_1, \ldots, b_\ell\}$.
- **Etape 4 :** Trouver une solution faisable de l'inégalité (C.13).
- **Etape 5 :** En déduire le régulateur simultané $C(s)$.

Afin d'illustrer notre approche, nous proposons l'exemple suivant.

Exemple C.1.1. Soit le système à intervalles suivant

$$\widetilde{G}(s) = \frac{s^2 + \epsilon}{2s^2 + \eta s + 1} \tag{C.14}$$

avec $\epsilon \in [\epsilon_{\min}, \epsilon_{\max}]$ et $\eta \in [\eta_{\min}, \eta_{\max}]$.

Nous avons démontré dans l'exemple 5.5.1 (section 5.5.4 du chapitre 5) que, pour $\epsilon \in [\epsilon_{\min}, \epsilon_{\max}]$ et $\eta \in [\eta_{\min}, \eta_{\max}]$, il existe un polytope de systèmes Ω_G défini par ses quatre sommets $G_i(s) = N_i(s)D_i(s)^{-1}$, $i = 1, \ldots, 4$, donnés par

$$G_1(s) = \frac{s^2 + \epsilon_{\min}}{2s^2 + \eta_{\min}s + 1} \tag{C.15a}$$
$$G_2(s) = \frac{s^2 + \epsilon_{\max}}{2s^2 + \eta_{\min}s + 1} \tag{C.15b}$$
$$G_3(s) = \frac{s^2 + \epsilon_{\min}}{2s^2 + \eta_{\max}s + 1} \tag{C.15c}$$

$$G_4(s) = \frac{s^2 + \epsilon_{\max}}{2s^2 + \eta_{\max} s + 1} \tag{C.15d}$$

tel que $\widetilde{G}(s) \subset \Omega_G$.

Considérons, maintenant, $\widetilde{G}(s)$ défini par (C.14) avec $\epsilon_{\min} = 1$, $\epsilon_{\max} = 2$, $\eta_{\min} = -1$ et $\eta_{\max} = 1$. Choisissons un ensemble de deux nombres réels négatifs et distincts donnés par $b_1 = -2.3704$ et $b_2 = -0.5$.

Le régulateur à synthétiser a la forme suivante

$$C(s) = \frac{x_1^e s^2 + x_0^e}{y_1^o s^3 + y_0^o s}$$

Pour ces données, la condition de rang (C.11) est satisfaite et il existe une solution pour (C.9) donnée par

$$Z^o = [1.6251 \;\; 0.6 \;\; 0.1 \;\; 0.3164 \;\; 1.8 \;\; 0.2087 \;\; 1.6251 \;\; 0.6 \;\; 0.1 \;\; 0.3164 \;\; 1.8 \;\; 0.2087 \;\; 0.0016 \;\; 0.0130 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0]^T$$
$$\psi^o = [3.5926 \;\; 0.198 \;\; 6.8363 \;\; 3.5926 \;\; 1.0941 \;\; 1.8476 \;\; 4.5926 \;\; 0.6980 \;\; 6.8363 \;\; 4.5926 \;\; 1.5941 \;\; 1.8476]^T$$

Ce qui nous permet d'obtenir le contrôleur simultané $C(s)$ suivant

$$C(s) = \frac{221s^2 + 20}{27s^3 + 64s}$$

Nous déterminons alors les quatre polynômes caractéristiques en boucle fermée associés au quatre sommets

$$\begin{aligned}
\Phi(G_1, C)(s) &= 54s^5 + 194s^4 + 155s^3 + 177s^2 + 64s + 20 \\
\Phi(G_2, C)(s) &= 54s^5 + 194s^4 + 155s^3 + 398s^2 + 64s + 40 \\
\Phi(G_3, C)(s) &= 54s^5 + 248s^4 + 155s^3 + 305s^2 + 64s + 20 \\
\Phi(G_4, C)(s) &= 54s^5 + 248s^4 + 155s^3 + 526s^2 + 64s + 40
\end{aligned}$$

Les polynômes $\Phi(G_1, C)(s)$, $\Phi(G_2, C)(s)$, $\Phi(G_3, C)(s)$ et $\Phi(G_4, C)(s)$ sont de même degré et Hurwitz, le compensateur $C(s)$ stabilise donc les quatre sommets $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$ et $G_4(s)$. De plus, ces polynômes ont la même partie impaire avec les coefficients des termes de plus haut degré de même signe. Donc $C(s)$ stabilise le polytope de systèmes Ω_G. Par conséquent, $C(s)$ stabilise $\widetilde{G}(s)$. ■

Annexe D

Compléments mathématiques

D.1 Résultant des deux polynômes

Soit $P(s)$ et $Q(s)$ deux polynômes de degrés respectifs n et m à coefficients réels tels que

$$P(s) = \sum_{i=0}^{i=n} a_i s^i, \qquad Q(s) = \sum_{j=0}^{j=m} b_j s^j$$

Le résultant des deux polynômes $P(s)$ et $Q(s)$ est le déterminant de leur matrice de Sylvester M donnée par

$$M = \begin{bmatrix} a_n & 0 & \dots & 0 & b_m & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \ddots & \vdots & \vdots & b_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & a_{n-1} & \ddots & 0 & \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_n & b_1 & \dots & \dots & b_m \\ a_0 & \dots & \dots & a_{n-1} & b_0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \dots & \vdots & 0 & \ddots & b_1 & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_0 & \vdots & \vdots & \ddots & b_0 & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & a_0 & 0 & \dots & 0 & b_0 \end{bmatrix}$$

D.2 Ecriture matricielle des polynômes $\Phi(G_i, C)^e(s^2)$ et $\Phi(G_i, C)^o(s^2)$

Rappelons les relations (3.7a) et (3.7b)

$$\Phi(G_i, C)^e(s^2) = \sum_{k=0}^{\ell} \left(\sum_{\substack{j=0 \\ k-j \leqslant \ell}}^{k} n_j^{ie} x_{k-j}^e + \sum_{\substack{j=0 \\ k-j \leqslant \ell}}^{k-1} n_j^{io} x_{k-j-1}^o + \sum_{\substack{j=0 \\ k-j \leqslant \ell}}^{k} d_j^{ie} y_{k-j}^e + \sum_{\substack{j=0 \\ k-j \leqslant \ell}}^{k-1} d_j^{io} y_{k-j-1}^o \right) s^{2k}$$

$$\Phi(G_i, C)^o(s^2) = \sum_{k=0}^{\ell} \left(\sum_{\substack{j=0 \\ k-j \leqslant \ell}}^{k} n_j^{io} x_{k-j}^e + \sum_{\substack{j=0 \\ k-j \leqslant \ell}}^{k} n_j^{ie} x_{k-j}^o + \sum_{\substack{j=0 \\ k-j \leqslant \ell}}^{k} d_j^{io} y_{k-j}^e + \sum_{\substack{j=0 \\ k-j \leqslant \ell}}^{k} d_j^{ie} y_{k-j}^o \right) s^{2k}$$

La formulation matricielle des expressions $\Phi(G_i, C)^e(s^2)$ et $\Phi(G_i, C)^o(s^2)$, $i = 1, 2$, est donnée par les équations suivantes

$$\Phi(G_i, C)^e(s^2) = V[s]\Lambda_i^e C_\upsilon, \quad i = 1, 2$$
$$\Phi(G_i, C)^o(s^2) = V[s]\Lambda_i^o C_\upsilon \quad i = 1, 2$$

où les vecteurs C_υ et $V[s]$ sont donnés respectivement par (3.8) et (3.11).

Les matrices Λ_i^e, Λ_i^o, $i = 1, 2$, de dimension $((\ell + 1) \times r)$ sont données par

$$\Lambda_i^e = \begin{bmatrix} A_i^e & B_i^e & C_i^e & D_i^e \end{bmatrix} S^T$$
$$\Lambda_i^o = \begin{bmatrix} A_i^o & B_i^o & C_i^o & D_i^o \end{bmatrix} S^T$$

où S est une matrice de sélection définie dans (3.8) et

$$A_i^e = \begin{bmatrix} n_0^{ie} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n_1^{ie} & n_0^{ie} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n_{\alpha^e}^{ie} & \vdots & \vdots & n_1^{ie} & n_0^{ie} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n_\ell^{ie} & n_{\ell-1}^{ie} & \dots & \dots & n_{\ell-\alpha^e-1}^{ie} \end{bmatrix}, \qquad A_i^o = \begin{bmatrix} n_0^{io} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n_1^{io} & n_0^{io} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n_{\alpha^e}^{io} & \vdots & \vdots & n_1^{io} & n_0^{io} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n_\ell^{io} & n_{\ell-1}^{io} & \dots & \dots & n_{\ell-\alpha^e-1}^{io} \end{bmatrix},$$

$$B_i^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n_0^{io} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n_{\alpha^o}^{io} & \vdots & \vdots & n_1^{io} & n_0^{io} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n_{\ell-1}^{io} & n_{\ell-2}^{io} & \dots & \dots & n_{\ell-\alpha^o-1}^{io} \end{bmatrix}, \qquad B_i^o = \begin{bmatrix} n_0^{ie} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n_1^{ie} & n_0^{ie} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n_{\alpha^o}^{ie} & \vdots & \vdots & n_1^{ie} & n_0^{ie} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n_\ell^{ie} & n_{\ell-1}^{ie} & \dots & \dots & n_{\ell-\alpha^o-1}^{ie} \end{bmatrix},$$

$$C_i^e = \begin{bmatrix} d_0^{ie} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ d_1^{ie} & d_0^{ie} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{\beta^e}^{ie} & \vdots & \vdots & d_1^{ie} & d_0^{ie} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_\ell^{ie} & d_{\ell-1}^{ie} & \dots & \dots & d_{\ell-\beta^e-1}^{ie} \end{bmatrix}, \qquad C_i^o = \begin{bmatrix} d_0^{io} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ d_1^{io} & d_0^{io} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{\beta^e}^{io} & \vdots & \vdots & d_1^{io} & d_0^{io} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_\ell^{io} & d_{\ell-1}^{io} & \dots & \dots & d_{\ell-\beta^e-1}^{io} \end{bmatrix},$$

$$D_i^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ d_0^{io} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{\beta^o}^{io} & \vdots & \vdots & d_1^{io} & d_0^{io} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{\ell-1}^{io} & d_{\ell-2}^{io} & \dots & \dots & d_{\ell-\beta^o-1}^{io} \end{bmatrix}, \qquad D_i^o = \begin{bmatrix} d_0^{ie} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ d_1^{ie} & d_0^{ie} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{\beta^o}^{ie} & \vdots & \vdots & d_1^{ie} & d_0^{ie} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_\ell^{ie} & d_{\ell-1}^{ie} & \dots & \dots & d_{\ell-\beta^o-1}^{ie} \end{bmatrix}.$$

Bibliographie

[ADPD95] C.T. Abdallah, P. Dorato, F. Prez, and D. Docampo. Controller synthesis for a class of interval plants. *Automatica*, 31 :341–343, 1995.

[AM71] B.D.O. Anderson and J.B. Moore. *Linear Optimal Control.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.

[Bac98] O. Bachelier. *Commande des Systèmes Linéaires Incertains : Placement de Pôles Robuste en $\mathcal{D}$-Stabilité.* PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, 1998.

[BAH95] V. Blondel, C.T. Abdallah, and G.L. Heileman. Complexity issues and decision methods in control systems. *Journal of Symbolic Computation*, 11 :1–12, 1995.

[Bat04] P. Batra. Real interpolating units via positive functions. In *Proc. Mathematical Theory of Networks and Systems Symposium*, Leuven, Belgium, 2004.

[BB96] D. Bertilsson and V. Blondel. Transcendence in simultaneous stabilization. *Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control*, 6 :1–22, 1996.

[BCG91] V. Blondel, G. Campion, and M.R. Gevers. Avoidance and intersection in the complex plane, a tool for simultaneous stabilization. In *Proc. IEEE Conference on Decision and Control.*, Brighton, UK, 1991.

[BCG93] V. Blondel, G. Campion, and M.R. Gevers. A sufficient condition for simultaneous stabilization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38 :1264–1268, 1993.

[BCK95] S.P. Bhattacharyya, H. Chapellat, and L.H. Keel. *Robust Control, The parametric Approach.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1995.

[BG93] V. Blondel and M.R. Gevers. The simultaneous stability of three plants is rationally undecidable. *Mathematics of Control Signals and Systems*, 6 :135–145, 1993.

[BGMR92] V. Blondel, M.R. Gevers, R. Mortini, and R. Rupp. Stabilizable by a stable and by an inverse stable but not by a stable and inverse stable. In *Proc. IEEE Conference on Decision and Control.*, Tucson, USA, 1992.

[BGMR94] V. Blondel, M.R. Gevers, R. Mortini, and R. Rupp. Simultaneous stabilization of three or more plants conditions on the positive real axis do not suffice. *SIAM Journal on Control and Optimization.*, 32 :572–590, 1994.

[BHL88] A.C. Bartlett, C.V. Hollot, and H. Lin. Root locations of an entire polytope of polynomials : It suffices to check the edges. *Mathematics of Control Signals and Systems*, 1 :61–71, 1988.

[BHLO06] J.V. Burke, D. Henrion, A.S. Lewis, and M.L. Overton. Stabilization via nonsmooth, nonconvex optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51 :1760–1769, 2006.

[BIG74] A. Ben-Israel and T.N.E. Greville. *Generalized Inverses : Theory and Applications.* Wiley, New York, 1974.

[Blo94] V. Blondel. *Simultaneous Stabilization of Linear Systems*, volume 191 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences.* Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[Bre95] M. Bredemann. *Feedback Controller Design for Simultaneous Stabilization.* PhD thesis, University of New Mexico, Albuquerque, USA, 1995.

[BT97] V. Blondel and J.N. Tsitsiklis. NP-hardness of some linear control design problems. *SIAM Journal on Control and Optimization.*, 35 :2118–2127, 1997.

[BT00] V. Blondel and J.N. Tsitsiklis. A survey of computational complexity results in systems and control. *Automatica*, 36 :1249–1274, 2000.

[BTV01] G. Bianchini, A. Tesi, and A. Vicino. Synthesis of robust strictly positive real systems with l_2 parametric uncertainty. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications*, CAS-48 :438–450, 2001.

[CB89a] H. Chapellat and S.P. Bhattacharyya. An alternative proof of Kharitonov's theorem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34 :448–450, 1989.

[CB89b] H. Chapellat and S.P. Bhattacharyya. A generalization of the Kharitonov's theorem : robust stability of interval plants. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39 :306–311, 1989.

[CD93] G. Chockalingam and S. Dasgupta. Minilality, stabilizability and strong stabilizability of uncertain plants. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38 :1651–1661, 1993.

[CD94] G. Chockalingam and S. Dasgupta. Strong stabilizability of systems with multiaffine uncertainties and numerator denominator coupling. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39 :1955–1958, 1994.

[CS07] Y. Chang and N.V. Sahinidis. Global optimization in stabilizing controller design. *Journal of Global Optimization*, 38 :509–526, 2007.

[DA87] S. Dasgupta and B.D.O. Anderson. Physically based parametrizations for designing adaptive algorithms. *Automatica*, 23 :469–477, 1987.

[Dat78] B.N. Datta. On the Routh-Hurwitz-Fujiwara and the Schur-Cohn-Fujiwara theorems for the root-separation problem. *Linear Algebra and its Applications*, 22 :235–245, 1978.

[DB87] S. Dasgupta and A.S. Bhagwat. Conditions for designing strictly positive real transfer functions for adaptive output error identification. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 34 :731–736, 1987.

[DFM92] P. Dorato, L. Fortuna, and G. Muscato. *Robust Control for Unstructured Perturbations : An Introduction*, volume 168 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences.* Springer-Verlag, New York, 1992.

[Dor00] P. Dorato. *Analytic Feedback System Design : An Interpolation Approach.* Pacific Grove, CA, USA, 2000.

[EOA97] L. El Ghaoui, F. Oustry, and M. Aït Rami. A cone complementary linearization algorithm for static output-feedback and related problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42 :1171–1176, 1997.

[FBZ96] C. Fonte, C. Bernier-Kazantsev, and M. Zasadzinski. An algebraic design for the simultaneous stabilization of two systems, 1996. Research Report 3043, INRIA, France.

[FD10] C. Fonte and C. Delattre. Conditions for interpolation of stable polynomials. *Proc. Mathematical Theory of Networks and Systems Symposium*, 2010.

[FD11] C. Fonte and C. Delattre. Wronskian-based tests for stability of polynomial combinations. *Systems and Control Letters*, 60 :590–595, 2011.

[FMZ14a] C. Fonte, H. Meddeb, and M. Zasadzinski. Design of simultaneous compensators for a segment of systems by using an interpolation approach with stable polynomial interpolants. In *Proc. Mathematical Theory of Networks and Systems Symposium*, Groningen, The Netherlands, 2014.

[FMZ14b] C. Fonte, H. Meddeb, and M. Zasadzinski. An interpolation approach with stable polynomial interpolants applied to the simultaneous stabilization of a segment of systems. In *Proc. IEEE Conference on Decision and Control.*, Los Angeles, USA, 2014.

[FMZ17] C. Fonte, H. Meddeb, and M. Zasadzinski. Stabilization of polytopes of plants by their vertices. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2017. Soumis.

[Fon08] C. Fonte. Conditions for the simultaneous stabilizability of a segment of polynomials. In *Proc. IEEE American Control Conference*, Seattle, USA, 2008.

[FZKD01] C. Fonte, M. Zasadzinski, C. Kazantsev, and M. Darouach. On the simultaneous stabilization of three or more plants. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46 :1101–1107, 2001.

[Gan59] F.R. Gantmacher. *Théorie des Matrices.* Chelsea Publishing Company, New York, 1959.

[GAT01] J.G. Trejot G.F. Anaya and A.F. Tlacuahuac. Stabilization with interpolated controllers : application to the tracking control of a continuous stirred tank reactor. In *Proc. IEEE International Conference on Control Applications*, Mexico City, Mexico, 2001.

[Gho85] B.K. Ghosh. Some new results on the simultaneous stabilizability of single input, single output systems. *Systems and Control Letters*, 6 :39–45, 1985.

[Gho86] B.K. Ghosh. Simultaneous partial pole-placement : a new approach to multimode system design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31 :440–443, 1986.

[Gho88] B.K. Ghosh. An approach to simultaneous system design, part ii : Nonswiting gain and dynamic feedback compensation by algebraic geometric methods. *SIAM Journal on Control and Optimization.*, 26 :919–963, 1988.

[HAPŠ01] D. Henrion, D. Arzelier, D. Peaucelle, and M. Šebek. An LMI condition for robust stability of polynomial matrix polytopes. *Automatica*, 37 :461–468, 2001.

[HB01] D. Henrion and O. Bachelier. Low-order robust controller design for interval plants. *International Journal of Control*, 74 :1–9, 2001.

[Hen02] D. Henrion. Stabilisation robuste de systèmes polytopiques par contrôleur d'ordre fixe avec la boîe à outils polynomiale pour Matlab. In *Proc. Conféerence Internationale Francophone d'Automatique*, Nantes. France, 2002.

[HŠK03] D. Henrion, M. Šebek, and V. Kučera. Positive polynomials and robust stabilization with fixed-order controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48 :1178–1186, 2003.

[HŠT98] D. Henrion, M. Šebek, and S. Tarbouriech. Algebraic approach to robust controller design : a geometric interpretation. In *Proceedings of the American Control Conference*, Philadelphia, 1998.

[HTŠ99a] D. Henrion, S. Tarbouriech, and M. Šebek. Rank-one LMI approach to simultaneous stabilization of linear systems. *Systems and Control Letters*, 38 :79–89, 1999.

[HTŠ99b] D. Henrion, S. Tarbouriech, and M. Šebek. Rank-one LMI approach to simultaneous stabilization of linear systems. In *Proc. European Control Conference*, Karlsruhe, Germany, 1999.

[JA01] Y. Jia and J.E. Ackermann. Condition and algorithm for simultaneous stabilization of linear plants. *Automatica*, 37 :1425–1434, 2001.

[Kha78] V.L. Kharitonov. Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations. *Differential'nye Uravneniya*, 14 :2086–2088, 1978.

[Kim84] H. Kimura. Robust stabilizability for a class of transfer functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29 :788–793, 1984.

[KKL07] A. Karimi, H. Khatibi, and R. Longchamp. Robust control of polytopic systems by convex optimization. *Automatica*, 43 :1395–1402, 2007.

[KKL08] H. Khatibi, A. Karimi, and R. Longchamp. Fixed-order controller design for polytopic systems using LMIs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53 :428–434, 2008.

[Kuč74] V. Kučera. Closed loop stability of discrete linear single variable systems. *Kybernetika*, 10 :146–171, 1974.

[Kwa82] H. Kwakernaak. A condition for robust stabilizability. *Systems and Control Letters*, 2 :1–5, 1982.

[LC00] L. Lee and J.L. Chen. Strictly positive real lemma for discrete-time descriptor systems. In *Proc. IEEE Conference on Decision and Control.*, Sydney, Australia, 2000.

[LLM97] I.D. Landau, R. Lozano, and M. M'Saad. *Adaptive Control.* Springer, London, 1997.

[LT85] P. Lancaster and M. Tismenetsky. *The Theory of Matrices.* Academic Press, Orlando, USA, 2nd edition, 1985.

[MD95] H.J. Marquez and C.J. Damaren. On the design of strictly positive real transfer functions. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications*, 42 :214–218, 1995.

[MFZ13a] H. Meddeb, C. Fonte, and M. Zasadzinski. Simultaneous stabilization of a segment of systems by a parameterized compensator. In *Proc. IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation*, Platanias-Chania, Greece, 2013.

[MFZ13b] H. Meddeb, C. Fonte, and M. Zasadzinski. Stabilisation simultanée d'un segment de systèmes par un compensateur d'ordre fixe. In *Journées Doctorales Modélisation, Analyse et Conduite des Systèmes Dynamiques*, Strasbourg, France, 2013.

[OMK91] Y. Ohta, H. Maeda, and S. Kodama. Unit interpolation in $\mathcal{H}_\infty$: bounds of norm and degree of interpolants. *Systems and Control Letters*, 17 :251–256, 1991.

[Pat96] V.V. Patel. On least-degree unit interpolation in $\mathcal{H}_\infty$. *Automatica*, 32 :1333–1335, 1996.

[Pat99] V.V. Patel. Solution to the "Champagne problem" on the simultaneous stabilization of three plants. *Systems and Control Letters*, 37 :173–175, 1999.

[PD97] V.V. Patel and K.B. Datta. Classification of units in $\mathcal{H}_\infty$ and an alternative proof Kharitonov's theorem. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications*, 44 :454–458, 1997.

[PDV02] V.V. Patel, G. Deodhare, and T. Viswanath. Some applications of randomized algorithms for control system design. *Automatica*, 38 :2085–2092, 2002.

[PLA06] H. Procházka, A. Lanzon, and B.D.O. Anderson. Synthesis of parameter-dependent controllers yielding affine-in-parameters characteristic polynomials. In *Proc. IEEE Conference on Decision and Control.*, San Diego, USA, 2006.

[Sid91] A. Sideris. An efficient algorithm for checking the robust stability of a polytope of polynomials. *Mathematics of Control Signals and Systems*, 4 :315–337, 1991.

[SM82] R. Saeks and J. Murray. Fractional representations, algebraic geometry and the simultaneous stabilization problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 27 :895–903, 1982.

[Tok96] O. Toker. On the order of the simultaneous stabilizing compensators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41 :430–433, 1996.

[Vid85] M. Vidyasagar. *Control System Synthesis : A Factorization Approach.* MIT Press, Cambridge, USA, 1985.

[VV82] M. Vidyasagar and N. Viswanadham. Algebraic design techniques for reliable stabilization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 27 :1085–1095, 1982.

[WB88] K. Wei and B.R. Barmish. An iterative design procedure for simultaneous stabilization of MIMO systems. *Automatica*, 24 :643–652, 1988.

[Wei92] K. Wei. The solution of a transcendental problem and its application in simultaneous stabilization problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37 :1305–1315, 1992.

[WF94] S. Wang and F.W. Fairman. On the simultaneous stabilization of three plants. *International Journal of Control*, 59 :1095–1106, 1994.

[YBL74] D.C. Youla, J.J. Bongiorno, and C.N. Lu. Single-loop feedback stabilization of linear multivariable dynamical plants. *Automatica*, 10 :159–173, 1974.

[YJB76] D.C. Youla, H.A. Jabr, and J.J. Bongiorno. Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers, Part ii : the multivariable case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21 :319–338, 1976.

[YS67] D.C. Youla and M. Saito. Interpolation with positive real functions. *Journal of the Franklin Institute*, 284 :77–108, 1967.

[ZDG96] K. Zhou, J.C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.

[Zeb96] E. Zebeb. On the characterization and formation of local convex directions for Hurwitz stability. *International Series of Numerical Mathematics*, 121 :173–180, 1996.

Abstract

In this manuscript, a new approach is proposed for the stabilization of polytopes of SISO LTI systems with a fixed order controller. Using the extended segment theorem, we have shown that to stabilize a polytope of LTI systems, it is sufficient to simultaneously stabilize all its vertices by considering an additional condition associated with them. In this paper, we have also presented original methods for the synthesis of simultaneous controllers by combining polynomial techniques and linear optimization. With the proposed synthesis methods, we have shown not only that the controller simultaneously stabilizes the vertices of the system polytope (simultaneous control), but also all systems belonging to the polytope (robust control). It is therefore a simultaneous and robust controller for system polytopes. Before stating results concerning the simultaneous control of all the segments of a polytope of systems, we have studied the control of a segment of systems with an LTI controller. This segment of systems is defined by the two systems located at each of its ends and by a parameter belonging to a given interval. The question of the stabilization of this class of uncertain systems has been formulated as that of a problem of simultaneous control of two systems located at the ends with an equal constraint of the even parts of each of the two characteristic polynomials in closed loop. Conditions of existence of a stabilizing controller for a segment of systems have been given using two polynomial stability criteria : the Hermite-Fujiwara criterion and the Hermite-Biehler criterion. The results obtained for the simultaneous control of a segment of systems have been extended to the stabilization of a polytope of systems. This problem has been reduced to the stabilization of the vertices of the polytope with a simultaneous controller generating closed loop characteristic polynomials having the same even (or odd) part. The existence conditions of these robust, fixed-order and simultaneous controllers are given using the two stability criteria mentioned above. Synthesis algorithms are also developed to design these controllers.

Keywords: Simultaneous stabilization, segment of systems, polytope of systems, polynomial approach, linear optimization

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons proposé une nouvelle approche pour la stabilisation des polytopes de systèmes SISO LTI avec un contrôleur d'ordre fixe. En utilisant le théorème des segments étendus, nous avons montré que, pour stabiliser un polytope de systèmes LTI, il suffit de stabiliser simultanément tous ses sommets en considérant une condition supplémentaire associée à ces derniers. Nous avons présenté également dans ce mémoire des méthodes originales pour la synthèse des contrôleurs simultanés en combinant les techniques polynomiales et l'optimisation linéaire. Avec les méthodes de synthèse proposées, nous avons montré non seulement que le contrôleur stabilise simultanément les sommets du polytope de systèmes (commande simultanée), mais également tous les systèmes appartenant au polytope (commande robuste). Il s'agit donc de contrôleur simultané et robuste pour les polytopes de systèmes. Avant de pouvoir énoncer des résultats concernant la commande simultanée de l'ensemble des segments d'un polytope de systèmes, nous avons étudié la commande d'un segment de systèmes avec un contrôleur LTI. Ce segment de systèmes est défini par les deux systèmes situés à chacune de ses extrémités et par un paramètre appartenant à un intervalle donné. La question de la stabilisation de cette classe de systèmes incertains a été formulée comme celle d'un problème de commande simultanée de deux systèmes situés aux extrémités avec une contrainte d'égalité des parties paires de chacun des deux polynômes caractéristiques en boucle fermée. Des conditions d'existence d'un régulateur stabilisant un segment de systèmes ont été données en utilisant deux critères de stabilité polynomiaux : le critère d'Hermite-Fujiwara et le critère d'Hermite-Biehler. Les résultats obtenus pour la commande simultanée d'un segment de systèmes ont été étendus à la stabilisation d'un polytope de systèmes. Ce problème a été réduit à la stabilisation des sommets du polytope avec un contrôleur simultané générant des polynômes caractéristiques en boucle fermée ayant la même partie paire (ou impaire). Des conditions d'existence de ces contrôleurs simultanés robustes d'ordre fixe sont données en utilisant les deux critères de stabilité mentionnés ci-dessus. Des algorithmes de synthèse sont également développés pour calculer ces régulateurs.

Mots-clés: Stabilisation simultanée, segment de systèmes, polytope de systèmes, approche polynomiale, optimisation linéaire