



Modélisation du comportement des assemblages collés : analyse métrologique et prise en compte des dissipations plastique et visqueuse

Racine Ly

► To cite this version:

Racine Ly. Modélisation du comportement des assemblages collés : analyse métrologique et prise en compte des dissipations plastique et visqueuse. Mécanique [physics]. Université de Bordeaux, 2017. Français. ⟨NNT : 2017BORD0604⟩. ⟨tel-01662495⟩

HAL Id: tel-01662495

<https://theses.hal.science/tel-01662495v1>

Submitted on 13 Dec 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

THÈSE

PRÉSENTÉE À

UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

par **Racine LY**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : MÉCANIQUE

**Modélisation du comportement des assemblages collés
analyse métrologique et prise en compte des dissipations
plastique et visqueuse**

Soutenue le : 08 Juin 2017

Devant la commission d'examen composée de :

M. Frédéric	Lachaud	Professeur des Universités, ICA Toulouse	Président
M. Rafael	Estevez	Professeur des Universités, UJF Grenoble	Rapporteur
M. Yann	Monerie	Professeur des Universités, Université Montpellier	Rapporteur
M. Franck	Enguehard	Professeur des Universités, Ecole Centrale de Paris	Examineur
M. Ludovic	Ballere	Docteur, AIRBUS Defence and Space	Examineur
M. Florian	Lavelle	Ingénieur, Centre National d'Études Spatiales, CNES Paris	Invité
M. Julien	Jumel	Maître de Conférence, Université Bordeaux	Directeur

THÈSE

PRÉSENTÉE À

UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

par **Racine LY**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : MÉCANIQUE

**Modélisation du comportement des assemblages collés
analyse métrologique et prise en compte des dissipations
plastique et visqueuse**

Soutenue le : 08 Juin 2017

Devant la commission d'examen composée de :

M. Frédéric	Lachaud	Professeur des Universités, ICA Toulouse	Président
M. Rafael	Estevez	Professeur des Universités, UJF Grenoble	Rapporteur
M. Yann	Monerie	Professeur des Universités, Université Montpellier	Rapporteur
M. Franck	Enguehard	Professeur des Universités, Ecole Centrale de Paris	Examineur
M. Ludovic	Ballere	Docteur, AIRBUS Defence and Space	Examineur
M. Florian	Lavelle	Ingénieur, Centre National d'Études Spatiales, CNES Paris	Invité
M. Julien	Jumel	Maître de Conférence, Université Bordeaux	Directeur

À ma femme,
À ma famille.

J'ai fait de belles recontres durant ma thèse de doctorat. Je remercie toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'accomplissement de ce travail. Toutefois, je ne saurais m'empêcher d'en citer certaines.

Tout d'abord mon directeur de thèse, Julien JUMEL.

Je le remercie pour sa disponibilité et ses encouragements. J'ai beaucoup appris à tes côtés et y ait pris un réel plaisir.

Je remercie également le référent technique CNES (Centre National d'Etudes Spatiales), Florian LAVELLE pour son soutien et ses encouragements. Merci également pour le suivi effectué durant mes travaux.

Je remercie également l'ensemble des membres du jury pour avoir bien voulu évalué mes travaux de thèse de doctorat. Merci pour ces moments d'échanges.

Je remercie également le Centre National d'Études Spatiales et la région Aquitaine pour le financement de mes travaux de thèse.

Je remercie l'ensemble des membres du Laboratoire I2M pour ces agréables moments de sympathie, d'échanges aussi bien scientifiques qu'humains. Je tiens également à remercier tous mes collègues. Merci, pour la bonne ambiance de travail et des bons moments partagés au "Labo" et en dehors.

Je remercie ma mère, sans qui je n'en serai pas là. Merci Maman pour tous les sacrifices que tu as dû faire pour notre bonne éducation ainsi que ton amour infini.

Par ce manuscrit, je rends également hommage à mon père et je prie pour que la terre de Kaolack lui soit légère. Je tiens également à remercier ma sœur Mami qui m'a toujours poussé à aller de l'avant ainsi que mon frère Moustapha pour son soutien et son humour réjouissant et apaisant !

Je dédie également ce travail à Muhammad (pbuh), à Ahmad Tidjani, à Ibrahima Niass, à Muhammadul Amîne Ibrahima Niass et à Ibrahima Mahmoud Diop.

Enfin, je remercie mon épouse M.T.Kane LY pour son amour, sa compréhension et son écoute. Ta présence a été ma source d'énergie.

Table des matières

Introduction : Contexte et Objectifs	1
1 Étude Bibliographique	5
Introduction	7
1.1 L'essai DCB en mode I d'ouverture	7
1.1.1 Méthodes d'analyse de l'essai DCB	8
1.2 Cadres conceptuels de l'analyse de la fissuration dans les matériaux	15
1.2.1 Mécanique de la rupture	16
1.2.2 Mécanique de l'endommagement	20
1.3 Modèles de zone cohésive	21
1.3.1 Classification	22
1.3.2 Concepts de base	23
1.3.3 Applications et développements des lois de zone cohésive	25
1.4 Identification des modèles de zone cohésive	27
Cadre de l'étude	29
2 Conception d'expériences numériques - Essai de fissuration en mode I	33
Introduction	35
2.1 Essai DCB : Modélisation semi-analytique	37
2.1.1 Prise en compte d'un comportement d'interface non-linéaire	41
2.2 Principes des mesures	46
2.2.1 Approche énergétique : Intégrale de contour J	46
2.2.2 Suivi de fissuration par mesures de déformations de peau	49
2.2.3 Mesure de champs de déplacements	51
2.3 Analyse comparée des performances des méthodes de mesure	53
2.3.1 Identification inverse de loi - Optimisation non linéaire	53
2.3.2 Applications aux grandeurs observables	56
2.4 Analyse de robustesse	73
Conclusions	76

3	Contribution dans la modélisation de l'essai DCB - Fissuration en mode I - Cas des interfaces élasto-plastiques	81
	Introduction	83
3.1	Lois d'interface	84
3.2	Modélisation de l'essai DCB en mode I - Cas des chargements non monotones	86
3.2.1	Conditions aux bords	88
3.3	Résultats numériques et éléments de validation	91
3.3.1	Discussions	96
	Conclusions	99
4	Contribution dans la modélisation de l'essai DCB - Fissuration en mode I - Cas des interfaces visco-élastiques linéaires	101
	Introduction	103
4.1	Éléments de visco-élasticité linéaire	105
4.1.1	Mise en équation du modèle rhéologique SLS	106
4.2	Cadre Thermodynamique	109
4.2.1	Potentiel thermodynamique	109
4.2.2	Inégalité de Clausius-Duhem	112
4.2.3	Lois d'évolution des variables internes	114
4.3	Intégration au modèle de l'essai DCB	117
4.4	Résultats	121
4.5	Conclusions	130
	Conclusion générale et perspectives	133
	Bibliographie	138
	Annexes	152
	Annexe A	153
	Annexe B	158

Table des figures

1.1	Illustration du spécimen DCB en mode I d'ouverture	7
10figure.caption.10		
1.3	Calibration de la complaisance entre mesures expérimentales et formulation analytique	10
12figure.caption.12		
1.5	Mesure de G_{1c} à partir de la formulation SBT	12
1.6	Représentation schématique de l'évolution Force - Déplacement pour la méthode de surface	14
1.7	Illustration d'une rupture cohésive	16
1.8	Illustration d'une rupture adhésive	16
1.9	Illustration d'une rupture au sein des substrats	16
20figure.caption.21		
1.11	Illustration des différentes phases de phénoménologie avec une loi de zone cohésive bi-linéaire - Essai de fissuration en mode I d'ouverture - DCB . .	23
1.12	Loi cohésive Bi-linéaire	24
1.13	Loi cohésive Tri-linéaire	24
2.1	Illustration du spécimen d'essai DCB en mode I d'ouverture	37
2.2	Champs mécaniques des phases élastique et de propagation pour un essai DCB en chargement monotone avec une loi de zone cohésive élastique-fragile prise comme loi d'interface	40
2.3	Courbe de comparaison de l'évolution de la mesure $P(\Delta)$ pour trois lois d'interface différentes : Élastique-fragile, Élasto-plastique et Bi-linéaire / Mise en évidence de l'effet du taux de restitution critique de l'énergie G_c et des différences de comportements non-linéaires durant la phase d'amorçage de la fissure	41
2.4	Illustration de la loi de zone cohésive élasto-plastique parfaite	42
2.5	Champs mécaniques des phases élastique, plastique et de propagation pour un essai DCB en chargement monotone avec une loi de zone cohésive élasto-plastique parfaite prise comme loi d'interface	44

2.6	Evolution de la force P en fonction de l'ouverture en bout de spécimen Δ pour l'essai DCB en chargement monotone avec la loi de zone cohésive élasto-plastique parfaite prise comme loi d'interface	45
2.7	Contour 1 : Contour extérieur du spécimen DCB - Méthode $J(\delta)$	46
2.8	Contour 2 : Contour couche d'adhésif du spécimen DCB - Méthode $J(\delta)$	47
2.9	Illustration du spécimen DCB avec inclinomètres pour la mesure de l'intégrale $J(P, \theta)$	47
2.10	Evolution de l'énergie J en fonction de l'ouverture en front de fissure δ pour la loi d'interface élasto-plastique parfaite - Formulation intégrale de J	48
2.11	Illustration du spécimen DCB avec les jauges de déformation pour la mesure de la déformation de peau (BSM)	49
2.12	Signaux de jauges de la méthode BSM simulés pour l'essai DCB - modèle semi-analytique - Loi d'interface élasto-plastique parfaite	50
2.13	Illustration de la zone de mesure par corrélation d'image	51
2.14	Champs de déplacements horizontaux - Modèle semi-analytique	52
2.15	Champs de déplacements verticaux - Modèle semi-analytique	52
2.16	Évolution de la flèche v	52
2.17	Évolution de la rotation θ	52
2.18	Enveloppe E_a - $P(\Delta)$	57
2.19	Enveloppe σ_{max} - $P(\Delta)$	57
2.20	Enveloppe ε_{max} - $P(\Delta)$	57
2.21	Gradient - $P(\Delta)$	57
2.22	Nuage de point expérimental - $P(\Delta)$	58
2.23	Ellipsoïde - Région de confiance $\alpha = 0.95$ pour l'identification des paramètres de la loi de zone cohésive élasto-plastique parfaite et avec la mesure $P(\Delta)$	59
2.24	Projection de l'ellipsoïde dans le sous-espace (E_a, σ_{max}) - Identification avec la mesure $P(\Delta)$	59
2.25	Projection de l'ellipsoïde dans le sous-espace $(\sigma_{max}, \varepsilon_{max})$ - Identification avec la mesure $P(\Delta)$	59
2.26	Projection de l'ellipsoïde dans le sous-espace (E_a, ε_{max}) - Identification avec la mesure $P(\Delta)$	59
2.27	Histogramme de l'analyse Bootstrap sur le paramètre E_a - Mesure $P(\Delta)$	60
2.28	Histogramme de l'analyse Bootstrap sur le paramètre σ_{max} - Mesure $P(\Delta)$	60
2.29	Histogramme de l'analyse Bootstrap sur le paramètre ε_{max} - Mesure $P(\Delta)$	60
2.30	Lieu des χ^2 de l'analyse Bootstrap - Mesure $P(\Delta)$	60
2.31	Nuage de point expérimental $J(\delta)$	62

2.32	Enveloppe $E_a - J(\delta)$	62
2.33	Enveloppe $\sigma_{max} - J(\delta)$	62
2.34	Enveloppe $\varepsilon_{max} - J(\delta)$	62
2.35	Gradient - $J(\delta)$	62
2.36	Ellipsoïde - Région de confiance $\alpha = 0.95$ pour l'identification des paramètres de la loi de zone cohésive élasto-plastique parfaite et avec la mesure $J(\delta)$	63
2.37	Projection de l'ellipsoïde dans le sous-espace (E_a, σ_{max}) - Identification avec la mesure $J(\delta)$	63
2.38	Projection de l'ellipsoïde dans le sous-espace $(\sigma_{max}, \varepsilon_{max})$ - Identification avec la mesure $J(\delta)$	63
2.39	Projection de l'ellipsoïde dans le sous-espace (E_a, ε_{max}) - Identification avec la mesure $J(\delta)$	63
2.40	Histogramme de l'analyse Bootstrap sur le paramètre E_a - Mesure $J(\delta)$	64
2.41	Lieu des χ^2 de l'analyse Bootstrap - Mesure $J(\delta)$	64
2.42	Comparaison de la distribution statistique des paramètres identifiés pour 2 analyses Bootstrap - intervalles de confiance à $\alpha = 0.95$ sur les figures de droite - Mesure $J(\delta)$	65
2.43	Enveloppe $E_a - \varepsilon(a)$	66
2.44	Enveloppe $\sigma_{max} - \varepsilon(a)$	66
2.45	Enveloppe $\varepsilon_{max} - \varepsilon(a)$	66
2.46	Gradient - $\varepsilon(a)$	66
2.47	Nuage de points expérimental - $\varepsilon(a)$	67
2.48	Variation des paramètres identifiés durant l'analyse Bootstrap - $\varepsilon(a)$	68
2.49	Variations des écart-types asymptotiques durant l'analyse Bootstrap - $\varepsilon(a)$	68
2.50	Mesure de la flèche dans les phases élastique, plastique et de propagation - DIC	69
2.51	Mesure de la rotation dans les phases élastique, plastique et de propagation - DIC	69
2.52	Gradient de la flèche par rapport à E_a - DIC	70
2.53	Gradient de la rotation par rapport à E_a - DIC	70
2.54	Gradient de la flèche par rapport à σ_{max} - DIC	70
2.55	Gradient de la rotation par rapport à σ_{max} - DIC	70
2.56	Gradient de la flèche par rapport à ε_{max} - DIC	70
2.57	Gradient de la rotation par rapport à ε_{max} - DIC	70
2.58	Variation des écart-types asymptotiques du module de Young durant l'analyse Bootstrap - phase élastique - flèche - DIC	71

2.59	Variation des écart-types asymptotiques de E_a durant l'analyse Bootstrap - phase élastique - rotation - DIC	71
2.60	Données expérimentales synthétiques - flèche - phase de propagation	72
2.61	Données expérimentales synthétiques - rotation - phase de propagation . .	72
2.62	Variation des écart-types des trois paramètres identifiés à partir de la ro- tation et durant la phase de propagation - DIC	72
2.63	Lois de zone cohésive élasto-plastique et bilinéaire avec $G_c = 555 J.m^{-2}$. .	74
2.64	Robustesse sur la mesure $P(\Delta)$: Tracé de la réponse $P(\Delta)$ bi-linéaire et du résultat de l'identification avec la loi élasto-plastique ainsi que la variation des résidus	75
2.65	Résidus de l'analyse de robustesse sur $P(\Delta)$	75
2.66	Robustesse sur la mesure $J(\delta)$: Tracé de la réponse $J(\delta)$ bi-linéaire et du résultat de l'identification avec la loi élasto-plastique ainsi que la variation des résidus	75
2.67	Résidus de l'analyse de robustesse sur $J(\delta)$	75
2.68	Robustesse sur la mesure $\varepsilon(a)$: Tracé de la réponse $\varepsilon(a)$ bi-linéaire et du résultat de l'identification avec la loi élasto-plastique ainsi que la variation des résidus	76
2.69	Résidus de l'analyse de robustesse sur $\varepsilon(a)$	76
3.1	Loi de zone cohésive tri-linéaire	84
3.2	Loi d'interface à raideur sécante	85
3.3	Loi d'interface à raideur tangente	85
3.4	Illustration du Nœud virtuel $N + 1$	88
3.5	Schéma algorithmique global du modèle aux différences finies	90
3.6	chargement cyclique à décharges partielles	91
3.7	Réponse $P(\Delta)$ - Loi d'interface tri-linéaire - Chargement cyclique à dé- charges partielles - Approche à raideur sécante	92
3.8	Réponse $P(\Delta)$ - Loi d'interface tri-linéaire - Chargement cyclique à dé- charges partielles - Approche à raideur tangente	93
3.9	Instants du chargement Δ pour l'étude de l'évolution de la flèche et des déplacements plastiques durant une phase de décharge	93
3.10	Évolution de la flèche pour trois instants durant la phase de décharge . . .	94
3.11	Évolution du déplacement plastique pour trois instants durant la phase de décharge	94
3.12	Réponse $P(\Delta)$ avec loi de zone cohésive tri-linéaire et bi-linéaire - Approche à raideur sécante - Chargement cyclique à décharges partielles	95

3.13	Lois de zone cohésive Bi-linéaire et Tri-linéaire : Illustration du déplacement plastique	95
3.14	Réponse $P(\Delta)$ avec loi de zone cohésive tri-linéaire et bi-linéaire - Approche à raideur tangente - Chargement cyclique à décharges partielles	95
3.15	Illustration cycle de charge / décharge total en ouverture Δ	96
3.16	Saut de déplacement résiduel à l'interface après un cycle total de charge / décharge	96
3.17	Évolutions des sensibilités de v_p par rapport aux paramètres de loi de zone cohésive	97
3.18	Évolution de la longueur de fissure dans le cas d'une loi de zone cohésive à raideur tangente	98
3.19	Évolution de la longueur de fissure dans le cas d'une loi de zone cohésive à raideur sécante	98
4.1	Modèle rhéologique de Maxwell	105
4.2	Modèle rhéologique de Kelvin	105
4.3	Modèle rhéologique du solide linéaire standard	106
4.4	Éléments de base des modèles rhéologiques : Élasticité	106
4.5	Éléments de base des modèles rhéologiques : Viscosité	107
4.6	Branche 2 du modèle du SLS	107
4.7	Sollicitation de relaxation $\varepsilon(t)$ pour le modèle standard linéaire	109
4.8	Évolution de la contrainte en relaxation $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t)$ pour le modèle standard linéaire	109
4.9	Principe d'équivalence en déformation pour le solide linéaire standard	110
4.10	Loi de zone cohésive bi-linéaire	115
4.11	Schéma algorithmique de l'essai DCB - Fondation Winkler - Loi de zone cohésive viscoélastique linéaire - Modèle SLS	121
4.12	Évolution de $P(\Delta)$ pour G_{cmin} et G_{cmax}	122
4.13	Modèle d'interface pour les régimes de sollicitations élevées	122
4.14	Mise en évidence des bornes supérieure et inférieure de la loi rhéologique SLS	123
4.15	Évolution de la mesure $P(\Delta)$ pour l'essai DCB avec interface viscoélastique - $\dot{\Delta} = 1e^{-15}mm.min^{-1}$	124
4.16	Évolution de la flèche pour $\Delta = 0.50mm, 1mm$ et $1.5mm$	125
4.17	Évolution de la contrainte pour $\Delta = 0.50mm, 1mm$ et $1.5mm$	125
4.18	Évolution des raideurs d'interface pour le modèle SLS, G_{cmin} et G_{cmax} - $\dot{\Delta} = 1e^{-15}mm.min^{-1}$	125
4.19	Evolution de la mesure $P(\Delta)$ pour l'essai DCB avec interface viscoélastique - $\dot{\Delta} = 1e^9mm.min^{-1}$	126

4.20	Évolution des raideurs d'interface pour le modèle SLS, G_{cmin} et G_{cmax} - $\dot{\Delta} = 1e^9 mm.min^{-1}$	126
4.21	Évolution de la mesure $P(\Delta)$ pour l'essai DCB avec interface viscoélastique - $\dot{\Delta} = 20e^{-6} mm.min^{-1}$	127
4.22	Évolution des raideurs d'interface pour le modèle SLS, G_{cmin} et G_{cmax} - $\dot{\Delta} = 20e^{-6} mm.min^{-1}$	128
4.23	Points de mesure pour la comparaison des lois d'interfaces dans le cas d'une vitesse de sollicitation intermédiaire	128
4.24	Comparaison des évolutions de $\sigma(x) = f(v(x))$ pour les modèles SLS et BLS à $\Delta = 0.50mm$	129
4.25	Comparaison des évolutions de $\sigma(x) = f(v(x))$ pour les modèles SLS et BLS à $\Delta = 1mm$	129
4.26	Comparaison des évolutions de $\sigma(x) = f(v(x))$ pour les modèles SLS et BLS à $\Delta = 1.50mm$	129
4.27	Comparaison des évolutions de $\sigma(x) = f(v(x))$ pour les modèles SLS et BLS à $\Delta = 2mm$	129
4.28	Loi d'évolution de σ^r à $\Delta = 2mm$ - Zoom sur la phase de compression . . .	130

Liste des tableaux

2.1	Valeurs de paramètres de la loi élasto-plastique parfaite	56
2.2	Comparaison des intervalles de confiance avec la covariance et le bootstrap - les unités sont en [GPa] pour le module de Young - [MPa] pour la contrainte et [%] pour la déformation	73
2.3	Tableau comparatif des performances des différentes mesures de l'essai DCB en mode I d'ouverture et en chargement monotone pour les lois d'in- terface du type élasto-plastique	78
3.1	Valeurs des paramètres de la loi de zone cohésive tri-linéaire : Module [GPa] - Contrainte [MPa] - Déformation [%]	84
4.1	Variables d'état et duales (forces thermodynamiques)	113
4.2	Conditions thermodynamiques des variables internes du modèles SLS . . .	113
4.3	Tableau comparatif des performances des différentes mesures de l'essai DCB en mode I d'ouverture et en chargement monotone pour les lois d'interface du type élasto-plastique	135

Introduction : Contexte et Objectifs

Dans la conception et la fabrication des structures, l'assemblage des composants est une étape cruciale en termes de durabilité et de fiabilité. Les techniques d'assemblage dites mécaniques telles que le boulonnage, le rivetage et le soudage entre autres, ont longtemps été celles traditionnelles. Toutefois, les avancées dans l'étude et l'analyse de la fissuration au sein des matériaux ont permis de mettre en évidence certains de leurs inconvénients en tant que cause de rupture de ces structures à travers les concentrations de contraintes localisées et/ou l'altération mécanique ou thermique des propriétés locales des pièces assemblées. Ainsi, des techniques alternatives tel que le collage structural ont été développées permettant de s'affranchir ou plutôt de réduire ces effets indésirables lors de l'assemblage, pour le peu que le processus soit bien maîtrisé. Parmi les avantages les plus connus, le collage permet d'une part une meilleure transmission et répartition des efforts à l'interface réduisant ainsi l'endommagement en fatigue et augmentant la durée de vie de l'assemblage, et d'autre part, de conserver l'intégrité des pièces à assembler. D'autres avantages proviennent également de la conception des adhésifs structuraux qui, après l'application de traitements physico-chimiques permettent d'ajouter des propriétés thermiques, acoustiques et d'étanchéité.

Malgré ces avantages, le collage souffre d'une réputation de non fiabilité due aux manques d'outils de prédiction du comportement des joints collés. En effet, les paramètres qui influent sur le comportement de l'interface sont nombreux et sont souvent sources de variabilité sur la résistance du joint de colle. L'étude de cette ténacité des joints d'adhésif s'effectue grâce à des essais de fissuration selon différents modes de rupture qui cherchent à mesurer l'énergie de fissuration de l'assemblage. La connaissance de cette énergie permet d'être prédictif dans la plupart des cas sur la propagation des fissures pour le peu que nous soyons en mesure de décrire et de prédire le comportement de l'interface.

D'un point de vue numérique, de nombreuses techniques et formulations de loi de comportement ont été proposées dans un souci de reproduire le comportement de l'interface au sein des assemblages. Parmi ces dernières, celle des lois de zone cohésive semble être une

voie des plus prometteuses en terme de modélisation et de simulation des interfaces par son caractère local et discret. Parmi les avantages qu’elles procurent demeurent la prise en compte intrinsèque de l’endommagement et des phénoménologies du comportement du joint collé. En outre, de nombreuses études ont été entreprises pour identifier ces lois de zone cohésive en comparant des observations issues d’essais de fissuration et des sorties de modèle où elles sont utilisées. Cette identification se fait au moyen d’algorithmes itératifs de minimisation d’une fonction coût qui mesure la métrique entre observations et sorties de modèles. Toutefois, peu d’importance est attachée d’une part, aux sensibilités des techniques de mesure employées par rapport aux paramètres de loi de zone cohésive, et d’autre part, sur les incertitudes associées aux paramètres de loi de zone cohésive identifiés. **À notre connaissance, aucun travail sur ces deux derniers aspects n’a été mené et constitue ainsi le principal propos de ce mémoire de thèse.**

Les objectifs fixés sont :

1. Une analyse comparative des techniques de mesure de l’essai de fissuration en mode I d’ouverture à travers les grandeurs macroscopiques correspondantes et ce, sur trois aspects :
 - Leur sensibilité vis-à-vis des paramètres de loi de zone cohésive.
 - Les incertitudes associées aux paramètres de loi identifiés.
 - Leur robustesse vis-à-vis des formes de loi.
2. La modélisation de l’essai de fissuration avec la prise en compte de la plasticité et l’effet du type d’écrouissage sur le comportement macroscopique, ainsi que l’apport sur l’identification des paramètres de loi de zone cohésive.
3. La prise en compte de la visco-élasticité linéaire dans la formulation de la loi d’interface.

L’étude, fait suite à un certains nombres de questionnement du CNES¹, qui gère la politique spatiale de la France au sein de l’Europe. À ce titre, il invente les systèmes spatiaux du futur, maîtrise l’ensemble des techniques spatiales et garantit à la France un accès autonome à l’espace. L’utilisation du collage dans le domaine aérospatial est d’actualité et le CNES souhaite augmenter sa base de connaissance et évaluer la pertinence de la technique du collage pour répondre à ses besoins actuels et à venir.

Ce mémoire est divisé en quatre chapitres :

Le premier est consacré à une étude bibliographique. Nous y présenterons les différentes

1. Centre National d’Études Spatiales

méthodes d'analyse de l'essai DCB² de fissuration en mode I d'ouverture qui constitue l'essai de fissuration sur laquelle se base l'ensemble des développements de ce manuscrit. Ensuite nous présenterons les concepts de base des modèles de zone cohésive suivi d'une revue sur leur application. Par la suite, un état de l'art sur les travaux d'identification de ces modèles de zone cohésive est présentée.

Dans le second chapitre, nous y abordons le modèle semi-analytique de l'essai DCB qui a été développé. Dans un premier temps, nous exposerons et analyserons les résultats numériques obtenus pour chacune des méthodes de mesure les plus utilisées. Ensuite, nous présenterons les résultats obtenus sur l'analyse de sensibilité de ces grandeurs mesurables vis-à-vis des paramètres de loi d'interface, ainsi que ceux sur l'identification des paramètres de loi d'interface. Et enfin, il s'agira de discuter des incertitudes ainsi obtenues par la méthode dite asymptotique avec celles issues d'une analyse probabiliste Bootstrap. Ce chapitre s'achève avec une analyse de robustesse et d'une synthèse.

Le chapitre 3 correspond au second objectif qui consiste en la prise en compte de la plasticité dans la loi d'interface. Le modèle, ainsi que les résultats correspondants sont exposés et s'en suit une discussion sur l'apport en termes d'identification de loi d'interface.

Le quatrième et dernier chapitre consiste en la prise en compte de la visco-élasticité linéaire dans la formulation de la loi d'interface. Celà, à travers le couplage entre une loi de zone cohésive et le modèle rhéologique du solide linéaire standard également connu sous le vocable du modèle de Zener.

2. Double Cantilever Beam

Chapitre 1

Étude Bibliographique

Introduction

Dans ce chapitre, nous abordons les concepts de base nécessaires à notre étude.

Par là, nous entendons la présentation de l'essai DCB de fissuration en mode I d'ouverture ainsi que les méthodes d'analyse qui lui sont associées. Partant de là, nous présentons le concept de loi de zone cohésive prise comme loi d'interface au sein des assemblages collés et une revue quant aux travaux concernant leur identification. Sur la base de cette dernière, nous mettons ainsi en évidence le besoin d'une étude objective quant à l'adéquation des grandeurs macroscopiques des techniques de mesure les plus courants, utilisées comme variables dépendantes pour les analyses de type inverses.

1.1 L'essai DCB en mode I d'ouverture

L'essai de fissuration le plus utilisé pour mesurer la ténacité d'un joint collé est l'essai DCB qui est normalisé dans le standard européen ISO 25217 [1] et son équivalent américain ASTM D5528 [2]. Sa configuration la plus simple, conférer figure 2.1 consiste en l'assemblage par un adhésif, de deux substrats prismatiques et flexibles. Le chargement en mode I consiste en l'application sur l'une des extrémités du spécimen, d'une force ou d'un déplacement imposé afin d'amorcer une fissure. Cela s'effectue par la création d'une zone non-collée souvent faite à l'aide d'inserts. Cependant, le chargement en déplacement imposé est préféré car il permet une propagation plus stable de la fissure [Broek 1986].

Comme énoncé au début du paragraphe, l'objectif principal de cet essai est la mesure du taux de restitution critique de l'énergie noté G_{1c} et plusieurs techniques ont été développées à cet effet. Dans la section suivante, nous en proposons une revue de celles les plus couramment utilisées.

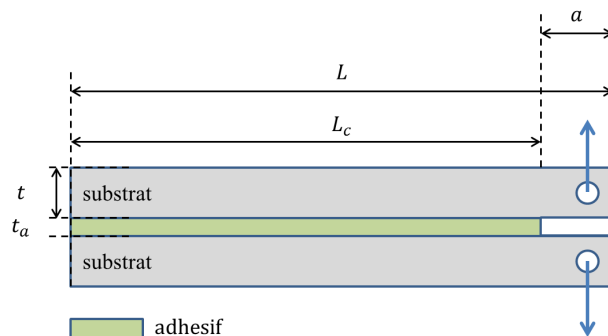


FIGURE 1.1 – Illustration du spécimen DCB en mode 1 d'ouverture

1.1.1 Méthodes d'analyse de l'essai DCB

Dans notre recherche bibliographique, il en ressort que les méthodes d'analyse de l'essai DCB sont de deux types : celles expérimentales, et celles analytiques. Par analytique nous sous entendons l'usage de la théorie des poutres. Les méthodes d'analyse sont pour la plupart basées sur la relation proposée par Irwin et Kies [3] qui stipule que le taux de restitution critique de l'énergie s'écrit :

$$G_{1c} = \frac{P^2}{2B} \frac{\partial C}{\partial a} \quad (1.1)$$

Où, P est la force mesurée, B est la largeur du joint de colle, C est la complaisance et a la longueur de fissure. Il convient de remarquer que la relation 1.1 ne dépend que de la géométrie de l'éprouvette et des mesures de P et a , donc, en ces termes, G_{1c} n'est pas un paramètre matériau mais une mesure de la ténacité du joint collé. La relation 1.1 signifie que la pente de la relation $C = g(a)$ pour une valeur de P et de a donnée donc en d'autres termes, pour une valeur de C et de a donnée et ce, pour une géométrie d'éprouvette quelconque, permet la connaissance de G_{1c} . Ainsi les différences notoires sur les méthodes d'analyse s'articulent autour de la détermination de la relation entre la complaisance et la longueur de fissure. Nous exposons les trois méthodes les plus couramment utilisées :

1. La méthode ECM¹ qui approxime la relation $C = g(a)$ par une loi en puissance ou polynomiale.
2. La méthode SBT² ou directe, basée sur la théorie des poutres classiques.
3. La méthode CBT³ qui repose également sur la théorie des poutres avec le rajout d'une correction sur la longueur de fissure.

Dans ce qui suit, nous présentons chacune de ces méthodes.

Méthode ECM

La méthode ECM ou en français la technique de calibration de la complaisance permet la mesure du taux de restitution critique de l'énergie, en déterminant la relation entre la complaisance et la longueur de fissure à partir de l'expérience. Durant l'essai DCB, sous un chargement monotone ou cyclique, la complaisance est mesurée comme le rapport entre l'ouverture notée Δ située à l'extrémité d'application de la sollicitation, et la force P . La mesure de l'évolution de la longueur de fissure a permet de tracer la courbe

1. Experimental Compliance Method
2. Simple Beam Theory
3. Corrected Beam Theory

$C = g(a)$. Ensuite, une forme de la fonction g est choisie et interpolée avec les données expérimentales. Une fois les coefficients de g ont été calibrés de sorte à ce qu'il y ait la meilleure superposition entre les observations et g , l'expression ainsi obtenue est dérivée au premier ordre par rapport à la longueur de fissure et ré-introduite dans la relation 1.1. Dans la littérature cette méthode est souvent attribuée à Berry [4] qui a proposé une loi en puissance qui dépend de deux paramètres matériaux k et n pour la forme de la fonction g . Notons que ces deux paramètres n'ont aucune signification physique propre.

$$C = ka^n \quad (1.2)$$

Ainsi le passage au logarithme de la relation 1.2 permet d'écrire une relation affine entre $\log(C)$ et $\log(a)$.

$$\log(C) = n\log(a) + \log(k) \quad (1.3)$$

Ainsi n correspond à la pente et $\log(k)$ à l'ordonnée à l'origine de la courbe interpolée. En introduisant la dérivée première de la relation 1.2 dans la relation 1.1, il vient :

$$G_{1c} = \frac{nkP^2}{2B}a^{n-1} \quad (1.4)$$

Une variante de la relation 1.4 a également été proposée dans la littérature ([2], [Rhee *et al.* 2000]), dans laquelle la complaisance écrite comme $C = \Delta_c/P_c$ est introduite en lieu et place de $C = ka^n$ dans 1.4. Ainsi il vient :

$$G_{1c} = \frac{nP_c\Delta_c}{2Ba} \quad (1.5)$$

Où Δ_c et P_c sont l'ouverture et la force critique c'est à dire, au moment de la propagation de fissure. Toutefois, [Davidson *et al.* 2006] ont montré que pour certains matériaux dont la fissuration s'accompagne de phénomènes non-linéaires, l'usage et la précision de la formulation 1.5 restent mitigés à cause des difficultés liées à la mesure de Δ_c donc il recommande l'usage de 1.4. D'autres formes notamment polynomiales, ont été proposées pour approximer la relation entre la complaisance et la longueur de fissure, Berer et Pinter [5], Kanters *et al.* [6], Monteiro *et al.* [7] Constante *et al.* [8] , néanmoins la méthodologie globale reste la même.

La méthode de calibration de la complaisance présente un avantage qui consiste en la connaissance relativement précise de la relation $C = g(a)$ à travers une procédure d'interpolation vis-à-vis des observations. Dans le cas des formes polynomiales, en agissant sur le degré du polynôme, l'interpolation avec les observations peut être assez fine. Toutefois, cet avantage sous entend une limitation majeure que constitue la précision sur la mesure de la longueur de fissure. En effet, toute incertitude de mesure sur a , se propage sur le calcul de G_{1c} comme en attestent les relations 1.4 et 1.5. Dans le cas des assemblages collés, la mesure de a est ardue et est souvent source d'erreurs.

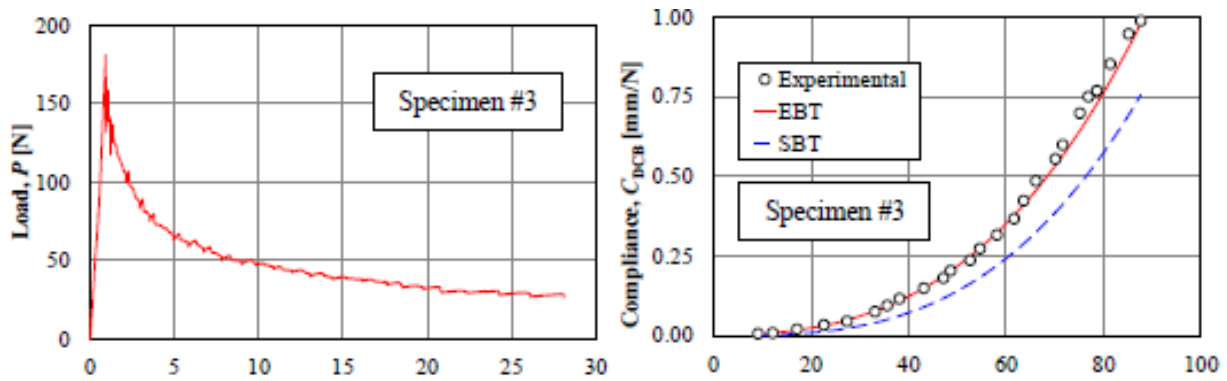


FIGURE 1.2 – Mesure Force - Ouverture pour la méthode de la calibration de la complaisance ^a FIGURE 1.3 – Calibration de la complaisance entre mesures expérimentales et formulation analytique

^a. Source : *An experimental compliance calibration strategy for mixed-mode bending tests*, 20th European Conference on Fracture (ECF20), S.Bennati and P.S.Valvo, Procedia Materials Science 3(2014)1988 – 1993

D'autres méthodes d'analyse de l'essai DCB basées sur la théorie des poutres ont été proposées et nous en proposons une revue ci-dessous.

Méthode SBT

La méthode SBT est basée sur la théorie des poutres.

Au vue de la configuration "historique" des éprouvettes de fissuration c'est à dire, de deux substrats assemblés, dans notre cas par une couche d'adhésif, cette méthode se trouve ainsi particulièrement adaptée. Elle fait l'hypothèse que le spécimen est encastré au droit du front de fissure et soumis à la sollicitation d'ouverture à l'autre extrémité. Ainsi, la méthode ne prend pas en compte la souplesse de la couche d'adhésive et de la rotation de la section droite des substrats. À partir de là, deux voies ont été proposées : la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli et celle de Timoshenko.

La première stipule que la section droite des substrats demeure orthogonale à la ligne neutre avant et après déformations. Dans le cas de l'essai DCB, elle ne sera adaptée que pour les substrats minces et élancés avec un film d'adhésif mince à l'interface. Et dans ce cas, la complaisance du spécimen s'écrit :

$$C = \frac{2a^3}{3EI} \quad (1.6)$$

Où E est le module de Young des substrats et I le moment d'inertie qui, dans le cas de poutres prismatiques s'écrit $I = Bh^3/12$, avec B la largeur du substrat et h son épaisseur. Dans le cas des substrats épais, le cisaillement transverse doit être pris en compte et le plus souvent cela revient à faire appel à la théorie des poutres de Timoshenko [9]. Cette théorie introduit une nouvelle variable cinématique qu'est la rotation de la section droite des substrats et elle est reliée à l'effort tranchant T par la relation :

$$T = \kappa GS \left[\frac{dv}{dx} - \phi(x) \right] \quad (1.7)$$

Dans ce cas, avec cette formulation, la complaisance du spécimen s'écrit :

$$C = \frac{2a^3}{3EI} + \frac{2a}{\kappa GS} \quad (1.8)$$

Où, κ est un facteur de correction de section réduite [10], G le module de cisaillement des substrats et S , leur section. La relation 1.8 est constituée de deux termes : la première est l'expression de la complaisance dans le cas de la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli, et la seconde est introduite par la prise en compte du cisaillement transverse. Les premiers développements de cette méthode, avec la prise en compte du cisaillement transverse sont attribués à Mostovoy *et al.* [11]. D'autres formulations ont également été proposées comme dans la norme ASTM D3433 qui propose l'expression 1.9 de la complaisance :

$$C = \frac{8(a^3 + ah^2)}{EBh^3} \quad (1.9)$$

Alors, dans ce cas, le taux de restitution critique de l'énergie s'écrit :

$$G_{1c} = \frac{4P^2}{EB^2} \left(\frac{3a^2}{h^3} + \frac{1}{h} \right) \quad (1.10)$$

Au vue de la relation 1.10, Naoufel *et al.* [9] stipule ainsi que la contribution du cisaillement transverse n'est sensible que lorsque l'épaisseur du substrat est proche de la longueur de fissure. Une variante de l'essai DCB a été développée sur la base de la relation 1.10 et est connue sous le nom de l'essai TDCB⁴. En effet, en faisant en sorte que le terme entre les parenthèses demeurent constant, le calcul de G_{1c} se résume au calcul du premier facteur. Cela se traduit par une forme d'éprouvette adaptée de sorte que la complaisance soit constante durant l'essai. Dans le cas de l'essai DCB, tel n'est pas le cas.

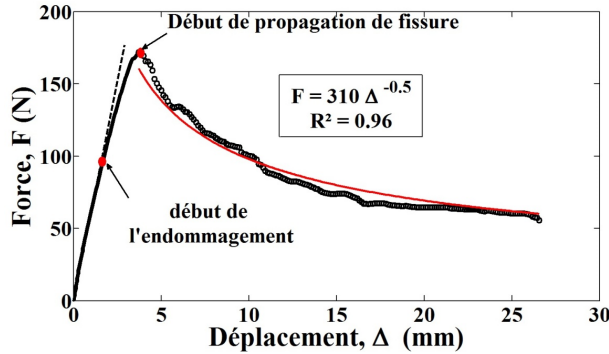


FIGURE 1.4 – Mesure Force - Ouverture^a

a. Source : B.S.Naoufel. *Fiabilité des assemblages structuraux collés pour applications spatiales*. These : Mécanique et ingénierie. Université Bordeaux 1, n4681, 2012.

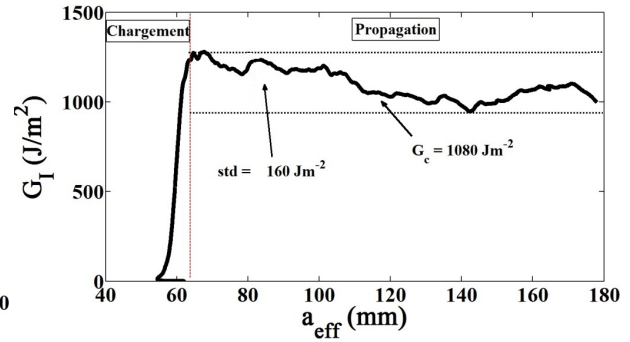


FIGURE 1.5 – Mesure de G_{1c} à partir de la formulation SBT

Dès lors que la plupart des méthodologies sont proposées pour mieux prendre en compte dans l'analyse des essais de fissuration, l'influence de l'interface, ou plutôt l'influence de la complaisance de l'interface sur la déformation globale de l'éprouvette, cette dernière peut être modélisée comme une poutre sur un lit de ressort communément appelé *fondation Winkler*. Cette contribution peut être traduite par une correction géométrique de la longueur de fissure sur laquelle se base la méthode *CBT* que nous présentons ci-dessous.

Méthode CBT

La complaisance globale du spécimen est souvent plus large que celle prédite par la méthode SBT qui rappelons le, suppose un encastrement au droit du front de fissure. Cela est due à la non prise en compte de la complaisance de la couche d'adhésif. Un moyen de remédier à cela est d'appliquer une correction ξ à la longueur de fissure qui est géométrique. En négligeant la contribution du cisaillement transverse dans la relation 1.9 la complaisance s'écrit :

4. Tapered Double Cantilever Beam

$$C = \frac{8(a + \xi)^3}{EBh^3} \quad (1.11)$$

La correction ξ est obtenue comme l'intersection entre l'évolution de $C^{\frac{1}{3}}$ en fonction de a , et l'axe des ordonnées. Dans le cas où, le spécimen DCB est sollicité par des blocs de chargement apposés sur les substrats, alors un facteur de correction N de la rigidité supplémentaire induite ainsi que la rotation de ces blocs, est appliqué à la relation 1.11 de sorte que :

$$C = \frac{8(a + \xi)^3}{EBh^3} N \quad (1.12)$$

Lorsque la sollicitation est directement appliquée sur les substrats, alors $N = 1$. De plus, pour prendre en compte les grandes déformations, un second facteur F de correction est appliqué de sorte que :

$$G_{1c} = \frac{3P\Delta}{2B(a + \xi)} \frac{F}{N} \quad (1.13)$$

Les expressions de F et N ont été proposées par William [12] et s'écrivent :

$$F = 1 - \frac{3}{10} \left(\frac{\Delta}{a} \right)^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{\Delta l_1}{a^2} \right) \quad (1.14)$$

$$N = 1 - \left(\frac{l_2}{a} \right)^3 - \frac{9}{8} \left[1 - \left(\frac{l_2}{a} \right)^2 \right] \left(\frac{\Delta l_1}{a^2} \right) - \frac{9}{35} \left(\frac{\Delta}{a} \right)^2 \quad (1.15)$$

Où l_1 et l_2 sont les dimensions des blocs et il vient :

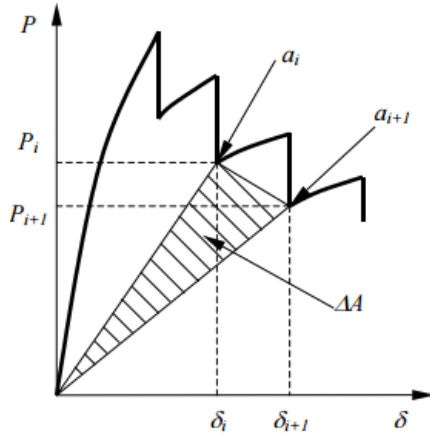
$$G_{Ic} = F \frac{12P_c^2(a + \xi)^2}{B^2 E h^3} \quad (1.16)$$

$$G_{Ic} = \frac{F}{N} \frac{3P_c \Delta_c}{2B(a + \xi)} \quad (1.17)$$

Autres méthodes

Une méthode dite de surface a été développée par [Hashemi *et al.* 1990b], [Charalambides et Williams 1994]. Cette approche calcule le taux de restitution de l'énergie à partir du

taux de variation de l'énergie de déformation en fonction de la variation des surfaces de fissuration.



$$G_{1c} = \frac{(P_i \delta_{i+1} - P_{i+1} \delta_i)}{2B(a_{i+1} - a_i)} \quad (1.18)$$

FIGURE 1.6 – Représentation schématique de l'évolution Force - Déplacement pour la méthode de surface

L'hypothèse de base faite dans ce cas est que la totalité de l'énergie de déformation est concentrée dans le processus de rupture. Lorsque d'autres phénomènes de dissipation tels que la viscosité ou l'endommagement (présence de micro-fissures ou de micro-défauts) sont présents, alors la méthode est inopérante. Un autre inconvénient de la méthode est qu'elle se base sur le taux de restitution de l'énergie calculé pour un certain nombre d'incréments de la longueur de fissure, ce qui peut être à l'origine d'imprécisions.

D'autres techniques numériques ont aussi été développées telles que le VCCT⁵ [13] ainsi que le XFEM⁶ [14] ou éléments finis étendus. Elles ont également été utilisées pour les assemblages collés [15], [16].

Choix de la méthode

Notre choix de la méthode d'analyse s'est porté sur la méthode SBT avec des poutres de Timoshenko. Les justifications sont issues de la nature de notre étude qui est numérique ainsi que de notre stratégie de modélisation. En effet, dès lors que notre travail a été purement numérique alors la méthode ECM est exclue ainsi que celle CBT car il n'y a pas lieu de prendre en compte une éventuelle correction de longueur de fissure.

En outre, les modèles développés dans ce mémoire sont basés sur ceux des poutres sur

5. Virtual Crack Closure Technique

6. Extended Finite Element Method

fondation Winkler où chaque éléments de la fondation, souvent abusivement appelée "élastique", suit une loi de zone cohésive. Cette approche de modélisation est très avantageuse en ce sens qu'elle permet non seulement d'avoir une description discrète du comportement de l'interface mais également une grande adaptabilité en terme de formulation mathématique dans la démarche de modélisation. Raison pour laquelle, elle est largement utilisée dans la littérature comme Wang *et al.* [17], Jumel *et al.* [18], Shokrieh *et al.* [19], Jiang *et al.* [20], [21], Cabello *et al.* [22].

1.2 Cadres conceptuels de l'analyse de la fissuration dans les matériaux

L'un des principaux défauts au sein des matériaux et des structures est la fissuration qui est une des craintes vis-à-vis de la fiabilité des structures durant leur durée de vie et leur fonctionnement en service. L'étude de la fissuration au sein des matériaux à longterm a été une préoccupation majeure au sein de la communauté scientifique. Le besoin de développer des outils théoriques prédictifs et de caractérisation de la problématique de fissuration a conduit à la proposition de multiples concepts et cadres théoriques introduits à cet effet. Initialement appliquées au domaine élastique, ces théories ont évolué progressivement vers des modèles plus sophistiqués permettant la prise en compte de comportements plus complexes, notamment non-linéaires. Cela s'est également traduit par l'élargissement des champs d'application avec l'avènement de nouvelles techniques industrielles donc de nouvelles problématiques. Ainsi le domaine du collage ne fait pas exception à cette tendance. Au sein des joints collés, nous distinguons trois types de rupture en fonction de l'endroit de la structure où survient la fissuration. Ainsi, elle peut apparaître au sein de la couche d'adhésif, au sein de l'un des substrats mais également aux interfaces entre substrats et adhésif.

1. **La rupture cohésive** : Elle survient lorsque la rupture intervient au sein de la couche d'adhésif. Dans ce cas la résistance de la couche d'adhésif au chargement, est supposée inférieure aux forces d'adhésion entre adhésif et substrats.
2. **La rupture adhésive** : La rupture adhésive ou interfaciale correspond à une rupture à l'interface comme son nom l'indique, entre substrats et adhésif. Toutefois, il convient de noter que cette rupture n'est jamais purement adhésive au sens de sa définition, car les observations montrent qu'il y a toujours un résidu d'adhésif sur le substrat après une telle rupture. Dans ce cas la nomenclature de "rupture dans l'interphase" est préférée par certains auteurs.

3. **La rupture au sein du substrat** : Un des scénarios envisageables est la rupture du substrat auquel cas, la ténacité de la couche d'adhésif n'est pas remise en cause, mais plutôt la rigidité du substrat suivant la sollicitation appliquée.



FIGURE 1.7 – Illustration d'une rupture cohésive



FIGURE 1.8 – Illustration d'une rupture adhésive



FIGURE 1.9 – Illustration d'une rupture au sein des substrats

Toutefois, il convient de noter qu'il peut y avoir une situation où le type de rupture est mixte, c'est à dire une combinaison de ruptures cohésive et adhésive à différents endroits du joint d'adhésif. **Dans notre cas, c'est à dire pour le mode I d'ouverture, nous considérons que la rupture est cohésive en ce sens que c'est la ténacité du joint d'adhésif qui nous interesse. Auquel cas, nous pouvons affirmer que c'est le comportement de l'adhésif qui pilote la propagation de fissure.**

1.2.1 Mécanique de la rupture

Les outils théoriques fondamentaux de la caractérisation de la fissuration au sein des matériaux sont présentés ici. Pour le mode I d'ouverture, les paramètres des critères de propagation les plus utilisés sont le taux de restitution de l'énergie en mode I, G_I , le facteur d'intensité de contrainte K_I et les intégrales de contour appliquées au mode I, J_I . La connaissance de leur valeur critique, c'est à dire au moment du début de la propagation de la fissure, constitue le plus souvent le seuil utilisé dans les critères de propagation. Dans la suite, nous abordons brièvement les critères de propagation de fissure les plus connus et associés à la mécanique de la rupture ainsi qu'une ébauche de la mécanique de l'endommagement. Ceci, afin de révéler leurs limitations et d'introduire le concept de modèle de zone cohésive.

Approche globale énergétique

La plupart des méthodes de mesures de l'essai DCB présentées en section 1.1 sont basées sur cette approche. Elle fait essentiellement référence à la mécanique linéaire de la rupture qui fût la première à être développée afin de se munir d'un critère de propagation de fissure. Comme son nom l'indique, cette théorie suppose un comportement élastique linéaire pour les matériaux fragiles jusqu'à rupture et propose un critère simple de propagation. Ainsi Griffith [23] propose un bilan énergétique basé sur la minimisation de l'énergie libérée lors de l'avancée de la fissure. Ce bilan stipule qu'il y a propagation de la fissure lorsque le taux de restitution de l'énergie est supérieur à l'énergie totale nécessaire à la propagation de la fissure. Pour le mode I, cela revient à écrire :

$$\begin{cases} \text{Si } G_I \geq G_{Ic} & \text{Il y a propagation} \\ \text{Si } G_I < G_{Ic} & \text{Il n'y a pas propagation} \end{cases}$$

Toutefois, l'une des principales limitations de l'approche du bilan énergétique de Griffith est le fait qu'elle nécessite la présence au préalable d'une fissure au sein du spécimen (il s'agit d'un critère de propagation). Donc cela signifie qu'elle ne permet pas l'étude de la phase d'initiation de la fissure qui est d'une grande importance dans le cas des assemblages collés. Un autre aspect limitant est sa validité d'utilisation vis-à-vis de l'échelle d'étude.

En effet, son usage nécessite que la ou les zone(s) de dissipation, c'est à dire celle(s) ne présentant pas un comportement élastique linéaire, ai(en)t une dimension faible par rapport aux autres dimensions de la structure. En fait, l'hypothèse sous-entendue est que cette approche considère qu'aucun phénomène de dissipation d'énergie n'est associé à la propagation de la fissure. Donc lorsque la zone de dissipation où, opèrent des phénomènes non-linéaires, devient très large ce qui peut souvent être le cas dans les assemblages collés, cette approche seule, devient inopérante.

Approche locale en contraintes

L'approche locale en contraintes est une extension de l'approche globale énergétique développée par Griffith et qui prédit l'initiation de la fissuration grâce à la connaissance du champ de contraintes dans une région délimitée par un rayon autour du front de fissure. Les premiers développements de cette approche ont été proposés en premier par Irwin [24] en introduisant un facteur d'intensité de contraintes noté K_I . Ce facteur dépend du

chargement appliqué ainsi que de la géométrie de la fissure. Une valeur critique K_{Ic} est définie de sorte que :

$$\begin{cases} \text{Si } K_I \geq K_{Ic} & \text{Il y a propagation} \\ \text{Si } K_I < K_{Ic} & \text{Il n'y a pas propagation} \end{cases}$$

Dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, le facteur d'intensité des contraintes en mode I est relié à G_I par la relation 1.19.

$$G_I = \frac{K_I^2}{E'} \quad (1.19)$$

Où $E' = E$ dans des conditions de contraintes planes et $E' = E/(1 - \nu^2)$ dans des conditions de déformations planes avec E le module de Young du matériau et ν son coefficient de Poisson. D'autres versions généralisées de la relation 1.19 ont été proposées. Par exemple, Sih *et al.* (1965) introduisent une relation similaire pour les matériaux homogènes et orthotropes où la fissure est supposée parallèle au plan de symétrie.

Un des inconvénients à utiliser les facteurs d'intensité de contraintes est le fait qu'ils ne sont pas facilement déterminés lorsque la fissure se propage près ou au sein d'une interface. Pour lever cette difficulté, certaines méthodes la combine avec l'approche globale énergétique de Griffith et ont été appliquées à certains matériaux composites et aux joints collés [25], [26], [27]. Une autre méthode proposée en vue d'améliorer l'approche locale en contraintes est les facteurs d'intensité de contraintes généralisés. Ces derniers ont permis de prédire l'initiation de l'endommagement pour les singularités géométriques des liaisons collés [28], [29] et pour diverses épaisseurs d'adhésifs. Ces méthodes fonctionnent bien pour des joints d'adhésif simples, mais elles deviennent suspectes pour des géométries et joints d'adhésifs complexes.

Enfin, malgré les limites de la mécanique linéaire de la rupture, elle demeure encore très utilisée dans l'industrie aéronautique et aérospatiale, où le concept de tolérance aux dommages, qui est en effet basé sur cette mécanique, demeure très populaire.

Approche globale des intégrales de contour

Le calcul du taux de restitution de l'énergie G est basé sur la mécanique linéaire de la rupture. L'hypothèse faite est qu'en la présence d'une fissure, la propagation se produit seulement si le taux de restitution de l'énergie atteint une valeur critique : critère énergétique de Griffith [23]. Rappelons le, cette formulation présente deux aspects limitants : le premier est qu'elle nécessite la présence d'une fissure donc elle ne permet pas d'étudier la phase d'initiation de la fissure. Le second est qu'elle se base également sur l'hypothèse selon laquelle la zone des déformations plastiques (ou la zone de dissipation de manière générale), soit négligeable vis-à-vis des autres dimensions de l'éprouvette. L'application du bilan énergétique de Griffith est donc mitigée lorsque la zone des déformations plastiques est large. C'est dans ce contexte que le calcul du taux de restitution de l'énergie avec les intégrales de contour en particulier la plus connue d'entre elles notée J , a été introduit notamment pour les matériaux à comportement élasto-plastique.

Deux paramètres ont été introduits pour décrire les champs mécaniques autour de la pointe de fissure : l'ouverture en front de fissure δ et le taux de restitution de l'énergie J . En assimilant le comportement des matériaux élasto-plastiques en traction monotone à celui des matériaux élastiques non-linéaires, Rice [30] montre que J correspond au taux de restitution de l'énergie pour ce type de matériau et qu'elle peut être écrite sous la forme d'une intégrale de contour indépendante du chemin d'intégration.

Plus tard, Hutchinson [31], Rice et Rosengreen [32] montrent que J caractérise de manière unique les contraintes et les déformations en front de fissure pour les matériaux à comportement non-linéaire : cette énergie peut être simultanément vue comme un paramètre énergétique et un facteur d'intensité de contraintes. Ils montrent également l'unicité de la relation entre l'énergie J et l'ouverture en front de fissure δ . Elle s'écrit en notation indicielle comme suit :

$$J_i = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left(W n_i - n_j \sigma_{jk} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) d\Gamma \quad (1.20)$$

J_i est la composante de l'intégrale J dans la direction x_i , ε est une petite région aux abords du front de fissure, Γ_ε est le chemin d'intégration, W est la densité d'énergie de déformation, n_i est la normale au contour Γ_ε suivant la direction x_i et u_k , le déplacement. Dans notre cas, nous nous intéressons au calcul de J_1 .

Ainsi son application dans le cas de l'essai DCB devient intéressante. En prenant le contour

extérieur des substrats comme contour d'intégration, une formulation analytique du taux de restitution critique de l'énergie en fonction de la longueur de fissure, de la force mesurée et des propriétés géométriques peut être écrite.

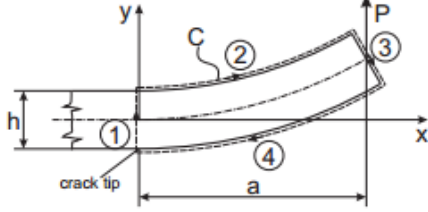


FIGURE 1.10 – Représentation schématique du contour d'intégration pour la méthode de l'intégrale J^a

$$J_{1c} = \frac{12P^2a^2}{b^2h^3E} \quad (1.21)$$

^a. Source : *J-integral for delaminated beam and plate models*, Periodica polytechnica, A.Szekrenyes, Mechanical Engineering 56 (2012) 63–71

1.2.2 Mécanique de l'endommagement

Une autre mécanique souvent utilisée pour la prédiction de la fissuration au sein des matériaux, est celle de l'endommagement.

L'origine de la distinction entre la mécanique de l'endommagement et la mécanique de la rupture est une question d'échelle d'étude. En effet, la rupture finale d'un solide est le résultat d'une succession de phénomènes complexes souvent classés en deux catégories : La naissance d'une fissure macroscopique et la propagation de celle-ci dans le solide et ce, qu'elle soit rapide ou lente. L'étude de l'évolution de la fissure impose la prise en compte de la modification des champs de déformations et de contraintes dans le solide et constitue le domaine d'application de la mécanique de la rupture. Cependant, l'étude et la prédiction de l'apparition de fissures macroscopiques est l'objet de la mécanique de l'endommagement. Les premiers développements sont attribués à Kachanov [33]. Par la suite, Rabotnov [34] propose une voie qui opère sur la contrainte, en définissant une contrainte effective σ_{eff} telle que :

$$\sigma_{eff} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (1.22)$$

Où D est la variable d'endommagement. Lorsque $D = 0$, cela signifie que le matériau est dépourvu de tout endommagement. Tandis que $D = 1$, traduit la rupture par endommagement de l'élément de volume qui équivaut à une contrainte effective infinie au moment de la rupture. Plusieurs formulations de variables d'endommagement ont été proposées

sous forme de scalaire ou de matrice selon la dimension du problème pour laquelle elle est définie. Les grandeurs mécaniques utilisées peuvent aller de la contrainte, à la vitesse de déformation, de la déformation au coefficient de Poisson entre autres [35]. Somme faite, la mécanique de l'endommagement peut être vue comme une variable d'endommagement associée à la mécanique des milieux continus.

Dès lors, son application aux assemblages collés devient intéressante grâce à la nature locale de sa conception. En fonction du type de chargement appliqué à un joint collé, les deux principaux modes de déformation qui domine la réponse de la couche d'adhésif sont la déformation de pelage et la déformation de cisaillement. Ainsi les essais de traction/cisaillement et les essais de type Arcan ont été mis en place à cet effet pour étudier la distribution des contraintes au sein du joint d'adhésif du début de chargement, jusqu'à rupture.

La mécanique de l'endommagement de par sa nature ne peut étudier (prédire l'apparition) de macro-fissures au sein des assemblages collés que dans un sens volumique. Par volumique nous entendons le suivi de l'évolution et/ou de la détérioration des propriétés mécaniques (parfois chimiques) dudit matériaux. Ainsi, elle ne permet pas la définition d'un critère de propagation de fissure ce qui constitue en soit un aspect limitant.

1.3 Modèles de zone cohésive

Une alternative aux limitations respectives de la mécanique de la rupture et de la mécanique de l'endommagement est les lois de zone cohésive. Il s'agit d'une représentation locale et discrète du comportement des surfaces de rupture avant et après fissuration. Elles s'écrivent de manière formelle comme la relation entre la distribution des contraintes et le saut de déplacements à l'interface considérée. De nos jours, ces modèles de zone cohésive sont très utilisés dans la représentation des lois d'interface notamment au sein des assemblages collés. Elles ont l'avantage de constituer une "association" entre les deux mécaniques présentées plus haut et ce, par une définition intrinsèque de l'endommagement par la dégradation de la raideur sécante de la loi, mais également par l'usage du taux de restitution critique de l'énergie qui correspond à l'énergie fournie pour la propagation de fissure. Dans ce qui suit, nous présentons une des classifications communément admise ainsi que les concepts de base des lois cohésives.

1.3.1 Classification

Un aspect important de la simulation des mécanismes de ruptures cohésives est la description de la relation entre contraintes et sauts de déplacement le long des surfaces de rupture. La description de ces interactions cohésives permet une approximation du comportement non-linéaire progressif aussi connu sous le nom de modèle de zone cohésive. Lorsque le saut de déplacement (déformation) le long de la surface de rupture atteint un seuil $[[\varepsilon]] \geq \varepsilon_{max}$, alors il y a rupture totale. L'usage des modèles de zone cohésive n'est pas seulement limité à la modélisation des flux d'efforts aux fronts de fissures mais elle permet également d'analyser ses phases d'initiation et de propagation. La formulation des relations constitutives des modèles de zone cohésive peut être classée en deux grands groupes : les modèles de zone cohésive basés sur la dérivation d'un potentiel énergétique et ceux qui ne le sont pas.

Pour les derniers, la formulation est simple en ce sens que la forme de la loi est définie par une fonction analytique continue ou par morceaux, et elle est adaptée au cas des fissurations en mode pure de sollicitations [36], [37], [38]. En effet, ces derniers ne garantissent pas la consistance des relations constitutives dans des conditions de mode mixte. Ainsi, plusieurs formes géométriques de loi sont disponibles dans la littérature pour cette catégorie et dépendent le plus souvent des phénoménologies associées au comportement attendu (en volumique) du matériau modélisé.

Pour le second groupe, la relation de traction-séparation le long des surfaces de rupture est dérivée à partir d'un potentiel qui caractérise le comportement de la fissuration. Au dépend de la nature du potentiel, de la première dérivée de ce dernier, découle la traction (interactions cohésives) au niveau des surfaces de rupture, et la seconde dérivée permet la détermination du module tangent. Plusieurs modèles ont également été proposés dans la littérature ; tels que ceux polynomiaux [39], [40], [41] et exponentiels [42], [43], [44], [45].

De manière générale, les deux approches doivent néanmoins être en accord avec certaines caractéristiques concernant la formulation des relations constitutives. Ces dernières sont énumérées ci-dessous :

1. La loi de zone cohésive est indépendante des éventuels mouvements de corps rigide.
2. Le travail fourni pour créer une nouvelle surface (pour propager une fissure) doit être fini et sa valeur correspond à l'énergie de rupture qui est égale à l'aire sous la courbe de la loi.
3. Il y a existence d'un déplacement limite à partir duquel il y a propagation de fissure.

Dans ce mémoire nous nous intéressons qu'aux lois de zone cohésive du second groupe.

1.3.2 Concepts de base

Une loi de zone cohésive aussi connue sous le nom de loi traction-séparation, décrit le comportement constitutif entre deux surfaces de fissuration par une relation reliant le déplacement relatif (déformation ε) entre ces deux surfaces, et la traction (contrainte σ). Il existe dans la littérature plusieurs types de lois de traction-séparation dont la majorité d'entre elles sont pour la plupart linéaires par morceaux ou non-linéaires et continues ou discontinues. Une loi de zone cohésive peut être divisée en deux parties. La première est située du déplacement nul jusqu'à l'initiation de l'endommagement. Cet intervalle peut donc être vu comme une raideur initiale de la structure. Le critère d'endommagement est le plus souvent décrit par la contrainte maximale σ_{max} , ou la déformation à la contrainte maximale ε_{max} pour un mode pur, et ces grandeurs sont souvent des propriétés mécaniques du matériau. Par exemple, dans le cas des assemblages collés, il peut s'agir des propriétés intrinsèques de l'adhésif en traction simple.

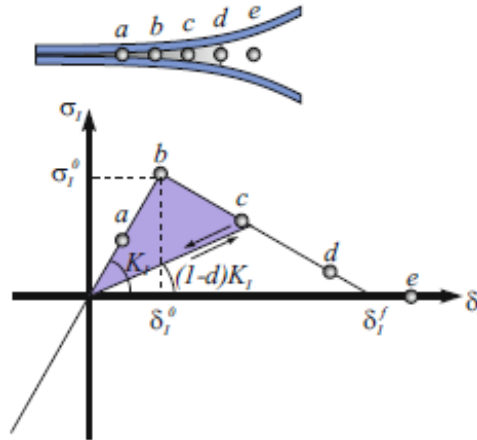


FIGURE 1.11 – Illustration des différentes phases de phénoménologie avec une loi de zone cohésive bi-linéaire - Essai de fissuration en mode I d'ouverture - DCB

Dès lors que l'endommagement est initié et que le saut de déplacement augmente (i.e. l'ouverture augmente), l'endommagement prend place et le comportement élastique initiale disparaît ce qui signifie que la loi de zone cohésive entre dans sa seconde phase de comportement. Cette dernière est située entre le début de l'endommagement et la propagation de la fissure. La phase de propagation est pilotée par le taux de restitution critique de l'énergie G_{1c} qui correspond à l'aire sous la courbe de la loi de traction-séparation comme l'indique l'égalité intégrale 1.23.

$$G_c = \int_0^{\varepsilon_{max}} \sigma(u) du \quad (1.23)$$

L'atteinte du taux de restitution critique de l'énergie peut coïncider aussi bien avec une contrainte nulle ou non nulle. Dans tous les cas, elle s'accompagne d'un endommagement total qui est synonyme de la propagation de la fissure et de la disparition de la zone cohésive. Toutefois, les formulations les plus répandues utilisent le premier scénario c'est à dire que la propagation de la fissure ($G_1 = G_{1c}$) se réalise avec une contrainte nulle de sorte qu'il n'y ait plus de forces pour maintenir les surfaces de fissuration. La première partie de la loi de zone cohésive est élastique et est le lieu de comportements réversibles. Quant à la seconde partie où l'endommagement est initié, les comportements sont irréversibles et la loi de zone cohésive est sujette de phénoménologies différentes lorsque survient une phase de décharge / recharge. En effet cela peut apparaitre sous deux formes : une recharge élastique (approche à raideur sécante) ou plastique (approche à raideur tangente) [46]. Toutefois, il convient de noter que la première approche est la plus répandue. Concernant l'endommagement, il peut être inclus dans la formulation de la loi de zone cohésive. Il demeure nul lorsque le comportement de la loi de zone cohésive est dans sa phase élastique, c'est à dire jusqu'à ce que σ_{max} ou ε_{max} soit atteint, et dans la partie endommageable, elle est comprise entre 0 et 1, 1 correspondant à un endommagement total et à la propagation de la fissure. La loi d'endommagement peut être exprimée sous plusieurs formes, ici nous la définissons comme la grandeur scalaire comprise entre 0 et 1 telle que :

$$D(k) = 1 - \frac{k}{k_0} \quad (1.24)$$

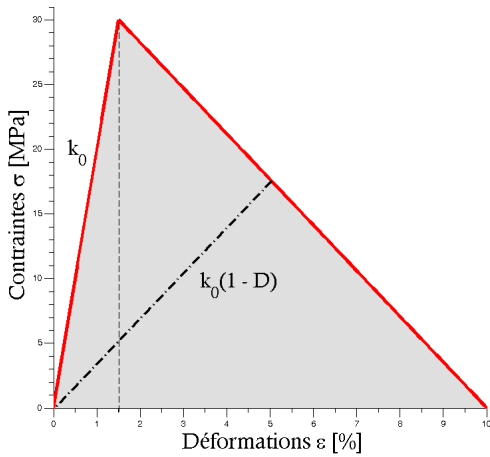


FIGURE 1.12 – Loi cohésive Bi-linéaire

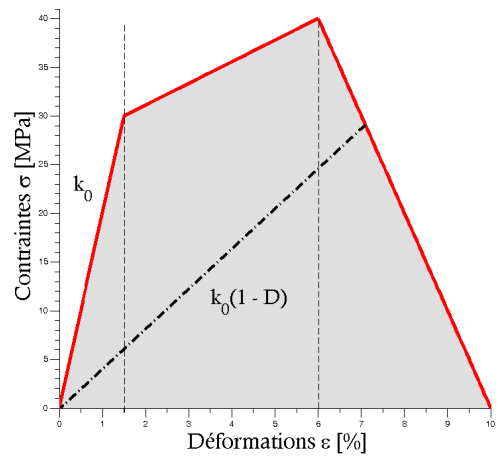


FIGURE 1.13 – Loi cohésive Tri-linéaire

Où k est la raideur instantanée et k_0 la raideur initiale. La plupart des lois de traction - séparation utilisées dans la littérature sont du type bi-linéaire, trapézoïdale et exponentielle [47]. Le choix de la géométrie de la loi dépend du type d'expérience, de la géométrie et des matériaux (type de comportement en volumique attendu). Ainsi la loi bi-linéaire est souvent utilisée pour des matériaux à comportement fragile [48], qui offre un bon compromis entre le coût de calcul et la précision des résultats. Pour les matériaux ductiles, la loi trapézoïdale est souvent préférée [49].

1.3.3 Applications et développements des lois de zone cohésive

Les modèles de zone cohésive ont largement été utilisés comme alternatives à la MR⁷. En effet, ils ont permis d'approximer la phénoménologie non-linéaire des matériaux dans des conditions de fissuration [50], [51], [52], [53], [54].

Initialement, Elliot [55] en étudiant la rupture d'un matériau à comportement non-linéaire, introduit une force d'attraction interatomique par unité de surface. Plus tard, le concept de modèle de zone cohésive fut introduit par Barenblatt [56], [57] pour mettre en évidence et prendre en compte l'existence d'une contrainte finie en front de fissure pour les matériaux fragiles. Dugdale [58] utilise une formulation similaire de loi de zone cohésive pour étudier la répartition des contraintes en front de fissure ainsi que la taille de la zone plastique. La contrainte le long de la zone cohésive était considérée comme constante avec un saut de déplacement à la surface de rupture inférieur à une valeur critique. Pour ces travaux précurseurs, les modèles de zone cohésive ont été introduits dans un souci de prendre en compte le comportement non-linéaire à la rupture, et leur formulation était équivalente au bilan énergétique de Griffith [23], la taille de la zone cohésive était petite devant la taille de la fissure et des autres caractéristiques géométriques du spécimen. Depuis lors, d'autres usages des modèles de zone cohésive et des formulations plus sophistiquées ont été proposés.

L'analyse de problèmes de fissuration sous l'hypothèse d'une taille de zone plastique faible vis-à-vis des autres dimensions de la structure, a souvent été menée pour différentes configurations avec les modèles de zone cohésive [59], [60], [61], [62]. En utilisant l'hypothèse que des forces cohésives existent le long des surfaces fissurées, Keer [63] calcule la distribution des contraintes dans le cadre de la théorie de l'élasticité classique. Sur la base de ces travaux, Cribb et Tomkins [64] obtiennent une relation entre les forces cohésives et le saut de déplacement qui correspond à une hypothétique distribution de contraintes en front de fissure pour un matériau parfaitement fragile. Par la suite, Smith [65] généralise

7. Mécanique de la Rupture

ce concept et obtient une série de lois de traction-séparation basée sur la simple connaissance des sauts de déplacement le long de la surface de fissuration.

Plus récemment, afin de prendre en compte les zones de dissipation non-linéaires relativement larges durant la fissuration dans les matériaux quasi-fragiles tels le béton et les roches, les lois de zone cohésive ont été également employées [66], [67], [68], [69], [70], [71], [72], [73], et le formalisme utilisé est souvent du type bi-linéaire avec la définition de deux énergies de fissuration : celle initiale G_e et celle totale G_c .

L'étude de la fissuration des polymères a également été étudiée avec les modèles de zone cohésive [74], [75], [76]. Ce processus de fissuration pourrait être subdivisé en trois parties : l'initiation, le durcissement et la rupture. Les réponses à ces phénomènes microstructuraux ont été approximées par une conjecture macroscopique des modèles de zone cohésive [77], [78]. Un volume élémentaire représentatif a été idéalisé par des microfibrilles immergées dans l'air et une loi de zone cohésive homogénéisée a été obtenue [79].

Les modèles de zone cohésive ont également été utilisés pour étudier l'effet d'une microstructure sur la réponse macroscopique d'un corps. Les hétérogénéités d'un matériau ont été modélisées en représentant l'interaction entre ses éléments de base par des interfaces cohésives [80], [81], [82], [83]. En outre, la fissuration intergranulaire et la décohésion entre matrice et particules ou fibres, ont également été décrits à l'aide de loi de zone cohésive [84], [85], [86], [87], [88], [89].

Le domaine du collage, demeure l'un des plus porteurs des modèles de zone cohésive pour étudier / décrire / analyser les phénomènes de rupture [90] et ce, associés à différentes échelles de temps et de structures tels que la propagation de fissure en fatigue [91], [92], [93], [94], [95], [96], [97], le "bond-slip" [98], [99], [100]. En utilisant la méthode de l'intégrale de contour J , une loi de zone cohésive peut être obtenue pour les spécimens du type DCB [101], [102], [103] et une analyse inverse a été utilisée pour calibrer cette loi de traction-séparation de sorte que la meilleure correspondance de la mesure force / déplacement macroscopique, prédite et mesurée soit atteinte [104], [105], [106].

Notre choix de la représentation de la loi d'interface pour l'essai de fissuration en mode I, s'est naturellement porté sur les lois de zone cohésive. Nous avons estimé qu'elles constituent à l'heure actuelle, le meilleur outil pour l'étude de la fissuration à une échelle locale. En effet, elle permet non seulement d'étudier les phases d'amorçage et de propagation de fissure, mais également elle permet une représentation

plus fine des phénoménologies opérantes. Toutefois, leur identification au moyen de méthodes inverses est devenue un sujet de recherche de plus en plus attirant dans le monde du collage. Nous proposons de discuter des travaux allant dans ce sens et qui nous ont semblé plus à même d'introduire notre cadre d'étude.

1.4 Identification des modèles de zone cohésive

Dans la littérature, la plupart des travaux identifient les modèles de zone cohésive par la minimisation d'une fonction coût qui mesure la différence entre les sorties d'un modèle et les observations. Ces méthodes inverses sont appliquées à une ou plusieurs lois de zone cohésive mais pour une même grandeur macroscopique d'observation. Le schéma classique est le suivant :

1. La modélisation de l'essai de fissuration considérée.
2. L'expérimentation correspondante.
3. Et enfin la calibration des paramètres du modèle vis-à-vis des observations au moyen de la minimisation d'une fonction coût.

Allant dans cette direction, Wang *et al.* [107] ont proposé une identification d'une loi de zone cohésive exponentielle couplée à la visco-élasticité, avec une méthode d'optimisation basée sur un algorithme génétique et ce, avec les observations d'un essai DCB et un modèle aux éléments finis. Une expérience indépendante après identification a permis de montrer l'adéquation de la méthode à prédire le comportement macroscopique classique $P(\Delta)$ de l'essai DCB pour différentes vitesses de chargement.

Valoroso *et al.* [108] ont également proposé une méthode d'identification d'une loi de zone cohésive intrinsèque à partir des données d'un essai DCB et d'un modèle aux éléments finis. Les grandeurs macroscopiques qui ont été utilisées sont la force P et la longueur de fissure a . Ainsi, la fonction coût qu'ils utilisent est hybride en ce sens qu'elle constitue une combinaison linéaire de la norme \mathbb{L}^2 des vecteurs des résidus normalisés de chacune des grandeurs dépendantes. Les paramètres du modèle sont le G_{1c} de la loi de zone cohésive utilisée comme loi d'interface et de sa déformation à rupture. Les auteurs concluent sur les résultats obtenus par le fait que la longueur de fissure introduit un biais sur la procédure de minimisation et que la base de données expérimentales devraient être enrichies par d'autre moyen de mesure telle que la corrélation d'image par exemple.

De la même manière, Xu *et al.* [109] ont identifié une loi de zone cohésive du type exponentielle implémentée dans un schéma XFEM pour un essai en mode mixte I+II. La

méthodologie employée pour le problème inverse, fait appel à une combinaison entre un algorithme génétique et le filtre de Kalman. La fonction coût fait soit appel à l'une des grandeurs macroscopiques que sont la force ou le chemin de fissuration, ou une combinaison de ces deux données. Chen *et al.* [110] quant à eux, proposent une identification de loi de zone cohésive à partir d'un essai Arcan et d'un modèle aux éléments finis avec l'algorithme itératif de Levenberg-Marquardt.

Les travaux ci-dessus, utilisent exclusivement ou partiellement, la force mesurée durant l'essai comme grandeur dépendante. D'autres travaux ont concerné l'identification des paramètres de loi de zone cohésive avec la corrélation d'image [111], [112], [113], [114]. Réthoré et Estevez [115] utilisent les mesurent des champs cinématiques d'une éprouvette volumique de PMMA⁸ en front de fissure, qu'ils comparent aux sorties d'un modèle XFEM avec une fonction coût au sens des moindres carrées. Oh *et al.* [116] vont dans le même sens avec un essai en mode I d'ouverture. Par la suite, Blaysat *et al.* [117] propose une identification à partir de la corrélation d'image sur un essai DCB et des images synthétiques comme modèle. Ce dernier aspect qu'est la génération de données expérimentales synthétiques sera utilisé dans la suite de ce manuscrit. Alfano *et al.* [118] ont également utilisé la corrélation d'image sur un essai DCB. Ils minimisent eux aussi une fonction coût au sens des moindres carrés, des champs de déplacements mesurés par corrélation d'image à certains instants de l'essai, et le modèle aux éléments finis qu'ils proposent. Cependant, ils effectuent une analyse de sensibilité de la fonction coût vis-à-vis des paramètres du modèle qui sont ceux de la loi de zone cohésive. Ces sensibilités sont à notre sens, une étape importante dans toute procédure inverse car elle renseigne sur le degré de non-linéarité de la fonction coût, facteur déterminant dans la procédure de minimisation.

Une méthodologie originale a également été proposée par Shanmugam *et al.* [119]. Ils proposent une approche probabiliste pour estimer les valeurs maximale et minimale des paramètres de loi de zone cohésive à partir de l'énergie J écrite de sorte à ne dépendre que de la force et de la longueur de fissure. Un échantillonnage LH⁹ a permis de construire une surface de réponse pour chacune des variables, permettant ainsi par la suite une analyse de Monte-Carlo.

Parmi les travaux rencontrés dans la littérature, ceux de Ardebili *et al.* [120] sont certainement ceux qui ont le plus de points en commun avec la démarche que nous proposons. Ils effectuent une étude de sensibilité et d'incertitudes sur les paramètres d'une loi de zone

8. poly(méthacrylate de méthyle)

9. Latin Hypercube

cohésive utilisée comme loi d'interface lors d'une expérience numérique de fissuration en mode I d'ouverture vis-à-vis des grandeurs macroscopiques. Sur la base de ces résultats ils concluent d'une part, sur l'influence des différents paramètres de la loi de zone cohésive avant et après le pic de force (généralement avant et après propagation de fissure), et d'autre part sur la probabilité de rupture du spécimen avec une surface de réponse comme critère de rupture. Toutefois ils n'appliquent la méthode que sur la mesure $P(\Delta)$.

Force est de constater que dans la littérature, la plupart des travaux concentrent leur intérêt sur les développements de modèle et peu attachent de l'importance sur les incertitudes des paramètres de loi identifiés. Il y a une tendance à considérer que plus un modèle prendrait en compte les conditions d'essais et les différentes phénoménologies et ce, à plusieurs échelles, plus il devrait reproduire au mieux l'expérimentation. Toutefois, cette complexité accrue dans le modèle ainsi défini, induit l'introduction de nouveaux paramètres et leurs influences sur ce dernier et sur la fonction coût (dans le cas d'une analyse inverse comme largement utilisée par la communauté du collage), doivent être connues.

Cadre de l'étude

Dès lors que les modèles de zone cohésive constituent un outil intéressant pour l'étude de la fissuration au sein des matériaux, son emploi pour les assemblages collés devient évident en tant que représentation de la loi d'interface. De nos jours, plusieurs techniques de mesure, ainsi que de nouvelles formulations de loi de zone cohésive ont été proposées pour étudier la distribution des contraintes au sein des interfaces des assemblages collés. La pratique commune chez les utilisateurs tend à les identifier en lieu et place d'une mesure directe, bien que certaines mesures sont supposées le permettre. En outre, d'autres études se sont également intéressées sur l'influence des paramètres de loi de zone cohésive sur les réponses macroscopiques des spécimens en fonction du mode d'ouverture. Celui le plus étudié est le DCB en mode I d'ouverture. Par exemple, Alfano et Fugiele [121] ont comparé des données expérimentales d'un essai DCB avec les résultats de simulation effectuée avec une loi de zone cohésive exponentielle. Ils ont obtenu une bonne correspondance entre les deux résultats et montrent que le taux de restitution critique de l'énergie est le seul paramètre qui influe durant la phase de propagation. Ils ont aussi montré que les lois bi-linéaire et exponentielle reproduisent bien la phase d'amorçage de la fissuration et que la loi trapézoïdale quant à elle surestime le pic de force souvent synonyme de début de propagation de fissure. Waas et Gustafson [122] ont conclu par une méthode de krigeage que la contrainte maximale des lois de zone cohésive n'influe pas de manière significative les sorties de mo-

dèle notamment pour l'essai DCB en mode I d'ouverture. Toutefois il est communément admis que G_{1c} et σ_{max} sont les paramètres les plus importants de la loi de zone cohésive, lorsqu'elle est utilisée comme loi d'interface dans les assemblages collés [123]. De la même manière, [101], [124], [125] ont travaillé sur l'influence et l'identification des paramètres de loi de zone cohésive sur les sorties des modèles mathématiques notamment de l'essai DCB.

Toutefois, il convient de s'interroger de manière objective sur ces procédures numériques d'identification des paramètres de loi de zone cohésive. En effet, elles s'effectuent au moyen d'algorithmes d'optimisation qui minimisent une fonction coût mesurant la métrique entre données expérimentales et simulées. Souvent peu d'importance est accordée aux intervalles de confiance de ces paramètres identifiés malgré qu'elles sont indicatrices sur le degré de non-linéarité de la fonction coût et donc de l'adéquation de la technique de mesure prise comme variable dépendante pour ce type d'étude. **À notre connaissance, aucun travail sur la métrologie des différentes techniques de mesure au sens des intervalles de confiance qu'ils procurent lorsqu'elles sont utilisées pour identifier les paramètres de loi de zone cohésive, n'a été faite.** Nous nous sommes donc consacrés à l'effectuer pour les techniques de mesure les plus répandues de nos jours et ce, pour l'essai DCB en mode I d'ouverture car elle est souvent considérée comme le plus critique en ce sens qu'elle nécessite le moins d'énergie pour amorcer une fissure comme l'ont évoqué Zhu *et al.* [126]. Ainsi, dans la suite, nous proposons une approche systématique décrite comme suit pour chaque variable dépendante macroscopique d'un essai DCB en mode I d'ouverture avec une loi de zone cohésive élasto-plastique parfaite prise comme loi d'interface.

1. Une étude de sensibilité vis-à-vis des différents paramètres de loi.
2. La génération de mesures expérimentales synthétiques suivie de l'identification inverse des paramètres de la loi d'interface par la minimisation au sens des moindres carrés avec la fonction coût χ^2 .
3. Le calcul des intervalles de confiance asymptotiques avec la matrice de covariance associée à l'identification.
4. L'application de la méthode Bootstrap pour une estimation probabiliste de ces intervalles de confiance pour mettre en évidence une éventuelle sensibilité à la forte non-linéarité de la fonction coût des différentes mesures.
5. Une analyse de robustesse des mesures macroscopiques par l'identification inverse des paramètres d'une loi élasto-plastique parfaite à partir de données issues d'une loi bi-linéaire.

La résolution du problème de minimisation de la fonction coût χ^2 permet de trouver les

valeurs des paramètres qui réalisent le minimum entre les sorties de modèle et les observations. En l'appliquant au modèle de l'essai DCB, nous recherchons les paramètres de loi de zone cohésive optimaux qui réalisent ce minimum. Ces paramètres optimaux peuvent être identifier avec chacune des mesures macroscopiques. Pour ce faire, le choix de l'algorithme de minimisation s'est porté sur celle de Levenberg-Marquardt dont la formulation mathématique est fournie en annexe A. Théoriquement, et pour la configuration de notre problème, elle semble être parmi celles qui ont la plus grande vitesse de convergence [110] et sa mise en oeuvre est relativement aisée. Cette étude est l'objet du chapitre 2 qui suit.

Chapitre 2

Conception d'expériences numériques - Essai de fissuration en mode I

Introduction

L'étude de l'initiation et de la propagation des décohésions au sein des assemblages collés met en œuvre des essais de fissurations sur éprouvettes modèles sur lesquelles sont appliquées des sollicitations représentatives de celles subies par la structure. Au préalable, le comportement de l'interface collée est caractérisé au moyen d'essais sous sollicitation élémentaire telle que les modes I, II ou III. L'énergie consommée pour initier et propager une fissure en mode I [2] étant généralement plus faible que pour les autres modes, il est considéré comme le plus critique et fait donc l'objet de plus d'attention. L'essai le plus employé pour appliquer ce type de sollicitation est l'essai de traction sur éprouvette DCB (Double Cantilever Beam) [127], [128]. Cet essai est également employé pour étudier les conditions de délaminage dans les matériaux stratifiés. Il a été initialement mis au point pour caractériser le taux de restitution critique d'énergie qui contrôle la décohésion totale de l'interface. Plus récemment, il a été également employé pour identifier des modèles de zone cohésive qui décrivent l'endommagement de cette interface par décohésion totale, et la propagation de la fissure au moyen d'une fonction contrainte / saut de déplacement. Parallèlement, des efforts importants ont été engagés pour développer des techniques de mesure avancées afin d'enrichir les données expérimentales disponibles et d'améliorer la mesure de ces lois d'interface. L'objectif de ce chapitre est de réaliser une comparaison objective des performances de ces différentes techniques.

L'identification de la loi d'interface à partir d'une éprouvette DCB fait usage de différents types de grandeurs macroscopiques mesurées au cours de l'essai de fissuration. En effet, la contrainte locale le long de l'interface ne pouvant être mesurée directement. Dans la littérature, plusieurs techniques sont utilisées pour contourner cette difficulté. La technique "historique" consiste à identifier la loi d'interface au moyen d'un algorithme d'optimisation permettant de superposer la réponse force (P) / ouverture (Δ) mesurée, à celle obtenue par simulation au moyen d'un modèle numérique ou analytique. Trois autres techniques nécessitant des mesures complémentaires ont été proposées depuis. L'approche $J(\delta)$ proposée par Sorensen nécessitant une mesure de l'ouverture de fissure δ en cours d'essai, parallèlement à une mesure ou un calcul de l'intégrale J . L'analyse de la déformation de l'échantillon au voisinage du front de fissure telle que mesurée par corrélation d'image. Le suivi extensométrique de la déformation locale des substrats lors de la propagation de fissure (BSM¹). Seules deux de ces techniques permettent une mesure "directe" de la loi d'interface ($J(\delta)$, BSM), les deux autres nécessitant une identification inverse reposant sur la minimisation d'une fonction coût, souvent au sens des moindres carrés

1. Backface Strain Monitoring

[129], qui mesure la métrique entre les données expérimentales et celles issues d'un modèle numérique [130], [131], [132], [114]. Ces modèles numériques nécessitent la définition d'une forme de loi d'interface et donc implique un certain à priori sur la forme de la loi de zone cohésive choisie. Ce choix est généralement fait de façon empirique, ainsi pour un comportement quasi-fragile, une loi de type bilinéaire est préconisée, tandis que pour un comportement élasto-plastique, une forme de loi trapézoïdale est utilisée.

Afin de comparer ces différentes techniques, nous chercherons dans un premier temps à déterminer laquelle permet d'évaluer la valeur des paramètres décrivant la forme de la loi de zone cohésive avec l'incertitude la plus faible. Les intervalles de confiance sont dans un premier temps estimés en utilisant une approximation quadratique de la fonction coût au voisinage du minimum. Cette estimation est ensuite affinée en utilisant une approche probabiliste du type Bootstrap plus à même de prendre en compte le caractère fortement non linéaire de la fonction coût. Cette étude théorique repose sur l'utilisation de données d'essais synthétiques, une forme de loi d'interface à identifier étant initialement définie, la réponse de l'éprouvette au cours de l'essai est simulée et bruitée pour rendre compte des incertitudes expérimentales.

Dans ce chapitre nous développons dans un premier temps les équations utilisées pour simuler la réponse d'une éprouvette DCB en présence d'une interface dont le comportement est décrit au moyen d'une loi de zone cohésive élasto-plastique parfaite. Cette modélisation de l'essai DCB, nous permet d'introduire les techniques de mesure évoquées ci-dessus pour déterminer les lois d'interface lors d'essai de fissuration en mode I ainsi que les résultats numériques associés. Les incertitudes associées à chacun des paramètres identifiés sont déterminées pour les quatre techniques de mesure. Enfin, une analyse de robustesse est menée, en vérifiant que l'identification d'une loi élasto-plastique en présence d'une loi en réalité bi-linéaire conduit à des réponses visiblement erronées. **Nous nous restreignons ici au cas unidimensionnel.**

2.1 Essai DCB : Modélisation semi-analytique

Un essai DCB présentant une symétrie par rapport à l'interface, seule la partie supérieure de l'éprouvette est ici modélisée (cf. figure ??). L'échantillon est réalisé par l'assemblage de deux substrats prismatiques élancés assimilables à des poutres. Un décollement partiel est réalisé sur un côté de cet assemblage généralement au moyen d'inserts, ensuite, des forces d'ouverture normales au plan de joint pour initier et propager la fissure sont appliquées. Par la suite, nous considérons une géométrie dont les caractéristiques sont les suivantes : longueur $L = 180mm$, largeur $b = 15mm$, épaisseur $t = 10mm$ et entaille / longueur de fissure initiale $a = 30mm$.

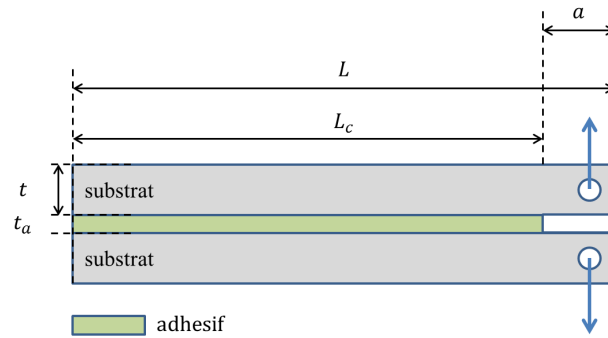


FIGURE 2.1 – Illustration du spécimen d'essai DCB en mode I d'ouverture

Le substrat étant élancé, celui-ci est modélisé au moyen d'une poutre de type Timoshenko qui permet de prendre en compte l'effet du cisaillement transverse. La manière la plus simple de représenter la contribution de l'interface sur la réponse de l'éprouvette DCB est de modéliser cette dernière par une distribution continue et uniforme de ressorts, ou fondation de Winkler, ainsi que proposé par [Kanninen 1973]. Pour déterminer la réponse de l'éprouvette, il convient dans un premier temps d'écrire les équations d'équilibre statique locales :

$$\frac{dM(x)}{dx} + T(x) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{dT(x)}{dx} - \sigma(x) = 0 \quad (2.2)$$

Où $M(x)$ et $T(x)$ sont respectivement le moment fléchissant et l'effort tranchant des efforts locaux de cohésion transitant dans le substrat, $\sigma(x)$ représente la contrainte normale de cohésion locale au sein de l'interface, ou contrainte de pelage. Les substrats étant assimilés à des poutres de Timoshenko, la flèche $v(x)$ et la rotation locale des sections droites $\phi(x)$, sont reliés à l'effort tranchant et au moment de flexion par les relations :

$$M(x) = \frac{d\phi(x)}{dx} \quad (2.3)$$

$$T(x) = \kappa GS \left[\frac{dv}{dx} - \phi(x) \right] \quad (2.4)$$

En dérivant la relation (2.4) et en substituant par les équations (2.3) et (2.2), il vient :

$$\sigma(x) = \kappa GS \left[\frac{d^2v}{dx^2} - \frac{M(x)}{EI} \right] \quad (2.5)$$

En procédant de la même manière avec les relations (2.1) et (2.2), nous obtenons la relation :

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} + \sigma(x) = 0 \quad (2.6)$$

Enfin, en dérivant deux fois la relation (2.5) et en utilisant la relation (2.6), nous obtenons :

$$\frac{d^2\sigma}{dx^2} = \kappa GS \left[\frac{d^4v}{dx^4} + \frac{1}{EI}\sigma(x) \right] \quad (2.7)$$

Dans les équations ci-dessous, κ est le coefficient de section réduite, G est le module de cisaillement des poutres, S est leur section, E le module de Young et I le moment d'inertie. En présence d'une interface élastique, la contrainte de pelage est reliée à la flèche par une simple relation de proportionnalité $\sigma(x) = k.v(x)$ où k est la raideur d'interface introduite par Winkler. Ainsi, de la relation (2.7), il vient une équation caractéristique qui contrôle l'évolution de la déformation du substrat et des efforts de cohésion au sein de l'interface le long de la partie collée de l'éprouvette :

$$\frac{d^4v}{dx^4} - \frac{k}{\kappa GS} \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{k}{EI} v(x) = 0 \quad (2.8)$$

La relation (2.8) est une équation différentielle d'ordre 4 dont la solution peut s'écrire sous la forme d'une somme de fonctions exponentielles. En effet, en posant :

$$\lambda = \left(\frac{k}{EI} \right)^{1/4} \quad (2.9)$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{kEI}}{2\kappa GS} \quad (2.10)$$

La solution s'écrit :

$$v(x) = \sum_{i=1}^2 A_i e^{\lambda_i x} + B_i e^{-\lambda_i(L+x)} \quad (2.11)$$

Où,

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \lambda \sqrt{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \\ &= \lambda \alpha_i \end{aligned} \quad (2.12)$$

La valeur des coefficients, A_i et B_i qui apparaissent dans l'équation (2.11) dépendent des conditions aux limites appliquées au frontière de la zone collée. Dans le cas d'un essai DCB, les conditions aux limites traduisant les conditions de chargement s'écrivent :

$$\begin{aligned} T(-L) &= 0 \\ T(0) &= P \end{aligned} \quad (2.13)$$

et,

$$\begin{aligned} M(-L) &= 0 \\ M(0) &= aP \end{aligned} \quad (2.14)$$

La détermination des coefficients A_i et B_i est effectuée par inversion numérique du système (2.13) (2.14). À ce stade, pour illustrer les évolutions des différents champs mécaniques définis précédemment, nous considérons une loi de zone cohésive élastique fragile définie par un module de Young $E_a = 2GPa$, une contrainte élastique $\sigma_{max} = 55.5MPa$ et une épaisseur de joint de colle de $t_a = 200\mu m$ de telle sorte que le taux de restitution critique

de l'énergie vaille $G_c = 555 J.m^{-2}$. Le chargement est piloté en déplacement jusqu'à une valeur maximale de $\Delta = 1.5 mm$. Pour ce type de loi, les solutions du modèle semi-analytique défini ci-dessus sont représentées à la figure 2.2.

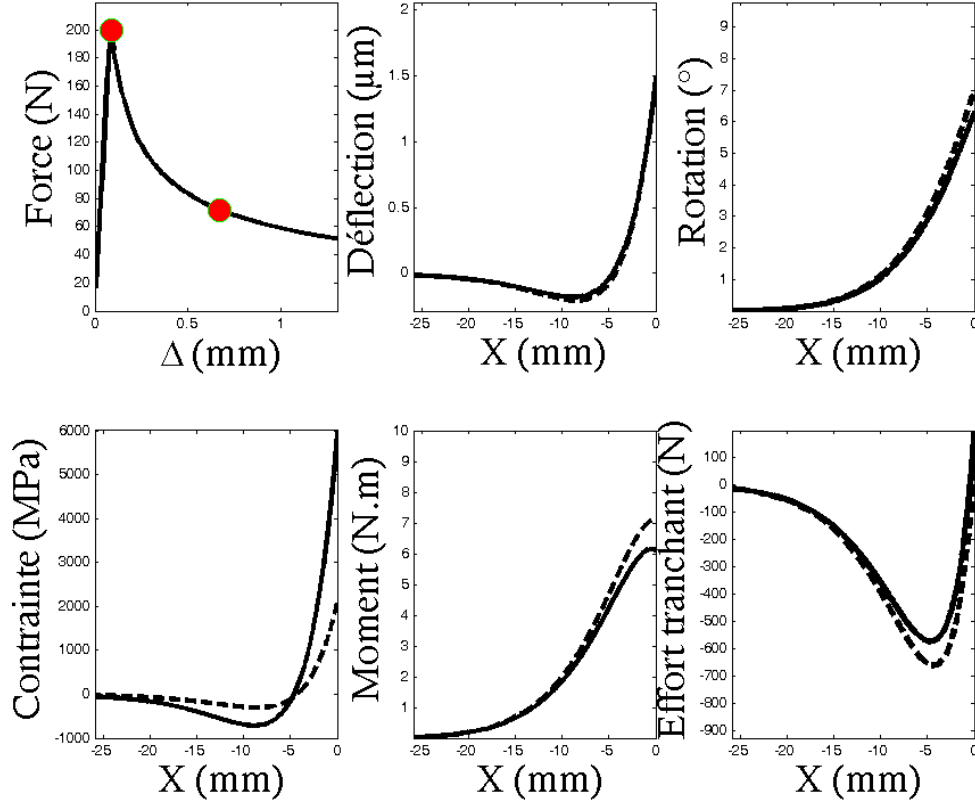


FIGURE 2.2 – Champs mécaniques des phases élastique et de propagation pour un essai DCB en chargement monotone avec une loi de zone cohésive élastique-fragile prise comme loi d'interface

L'évolution de la force P en fonction de l'ouverture Δ présente deux phases : une première phase d'amorce et une seconde qui correspond à la propagation de la fissure. La première est élastique linéaire et traduit la phase lui correspondant sur la loi d'interface. Ensuite, dès lors que le maximum de la force est atteint, la phase de propagation apparaît et se caractérise par une diminution de la complaisance qui est le rapport de l'ouverture par la force. Cependant, la question qu'il convient de poser serait quelles sont les différences notoires qu'ils seraient possibles d'observer lorsqu'une autre forme de loi est utilisée à la place de celle élastique fragile. En effet, pour une même énergie de fissuration G_c , les évolutions de la mesure $P(\Delta)$ sont illustrées à la figure 2.3, pour les lois élastique fragile, bi-linéaire et élasto-plastique parfaite. Ces différentes lois se distinguent de part leur forme géométrique respective et donc des paramètres qui les définissent.

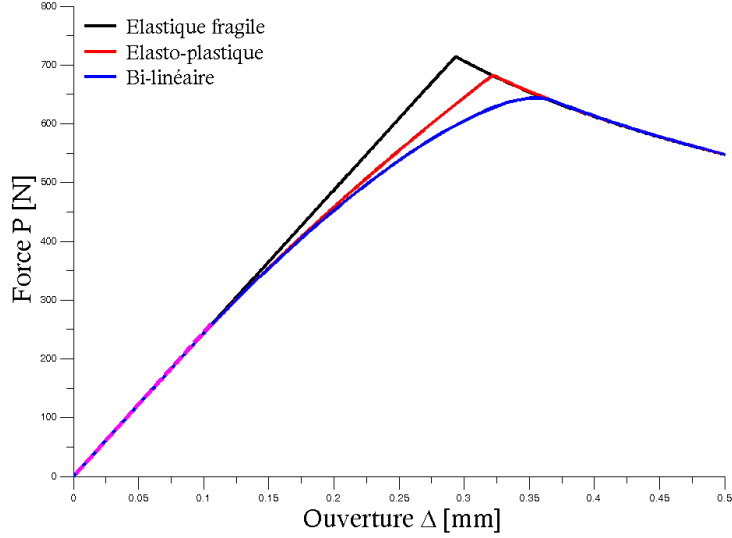


FIGURE 2.3 – Courbe de comparaison de l'évolution de la mesure $P(\Delta)$ pour trois lois d'interface différentes : Élastique-fragile, Élasto-plastique et Bi-linéaire / Mise en évidence de l'effet du taux de restitution critique de l'énergie G_c et des différences de comportements non-linéaires durant la phase d'amorçage de la fissure

Les trois lois d'interface ont le même comportement élastique et cela se traduit par la superposition de l'évolution de la mesure $P(\Delta)$ sur cette phase : cette pente initiale est donc contrôlée par la raideur élastique de l'interface. Par la suite, nous observons une perte de linéarité pour les réponses des lois élasto-plastique et bilinéaire. Pour la loi élastique fragile, cet aspect n'apparaît pas car comme son nom l'indique, elle suit une évolution élastique linéaire jusqu'à propagation. Cependant, durant cette phase de propagation, il convient de remarquer que les courbes $P(\Delta)$ se superposent et cela est attribué au fait que le taux de restitution critique de l'énergie est la même pour ces trois lois. Ainsi nous en déduisons que c'est ce dernier paramètre qui la pilote.

2.1.1 Prise en compte d'un comportement d'interface non-linéaire

Une loi élastique fragile n'est pas suffisante pour décrire la réponse mécanique des interfaces collées qui varie selon la nature de l'adhésif, ni pour faire apparaître l'ensemble des typologies de comportement (plasticité, viscosité, endommagement, ...) qui engendrent une réponse non linéaire de l'échantillon lors de l'essai. La résolution semi-analytique présentée précédemment peut être adaptée pour étudier la réponse d'une éprouvette DCB sous chargement monotone à ouverture imposée et en présence d'une interface présentant un comportement non linéaire. Nous nous intéressons ici, pour illustrer cette démarche, au cas d'une zone cohésive élasto-plastique parfaite ainsi que présentée sur la figure (2.4). Un unique paramètre supplémentaire qu'est l'allongement à rupture ε_{max} , est introduit pour décrire ce comportement. Pour déterminer en cours d'essai les évolutions de la déforma-

tion des substrats et de la distribution des contraintes de cohésion le long de l'interface, il faut à nouveau résoudre les équations (2.13) à (2.14) en prenant en compte la présence d'une zone plastique en pointe de fissure où la contrainte de pelage est constante.

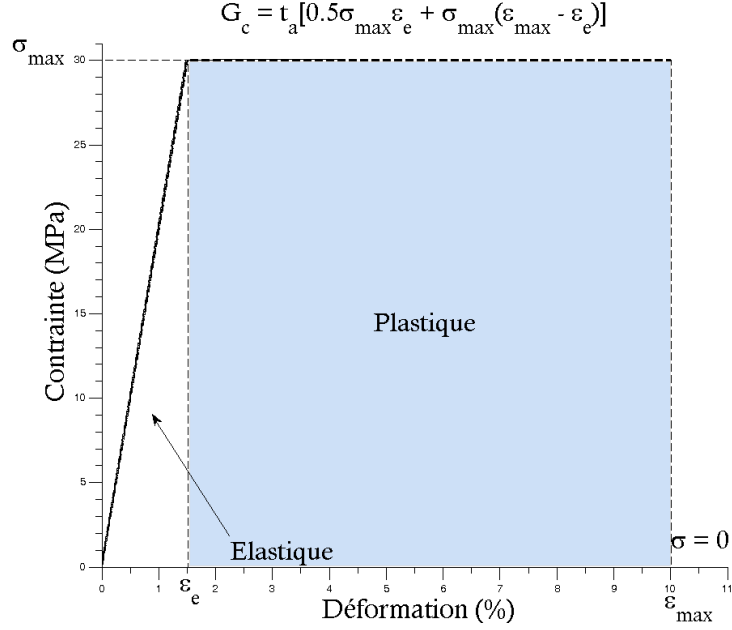


FIGURE 2.4 – Illustration de la loi de zone cohésive élasto-plastique parfaite

L'échantillon est divisé en trois zones (zone collée élastique, zone plastique, zone fissurée) dans lesquelles les équations d'équilibre et de comportement sont résolues. Pour la partie plastique, les champs mécaniques ont pour solution :

$$\sigma(x) = \sigma_{\max} \quad (2.15)$$

$$T(x) = P + b\sigma_{\max}x \quad (2.16)$$

$$M(x) = aP - Px - \frac{1}{2}b\sigma_{\max}x^2 \quad (2.17)$$

$$\phi(x) = \frac{1}{EI} \left[aPx - \frac{1}{2}Px^2 - \frac{1}{6}b\sigma_{\max}x^3 \right] + \phi_0 \quad (2.18)$$

$$v(x) = \frac{1}{EI} \left[\phi_0x + \frac{1}{2}aPx^2 - \frac{1}{6}Px^3 - \frac{1}{24}b\sigma_{\max}x^4 \right] + Px + \frac{1}{2}b\sigma_{\max}x^2 + v_0 \quad (2.19)$$

À la jonction entre zone élastique et zone plastique les conditions de continuité sur les grandeurs M , T , ϕ et v doivent être assurées. Cela impose quatre conditions supplémen-

taires aux équations (2.13) et (2.14). Il s'agit de l'annulation du saut de déplacement et de sa dérivée première ($\llbracket v \rrbracket = 0, \llbracket \frac{dv}{dx} \rrbracket = 0$), mais également de l'annulation du saut de rotation et de sa dérivée première ($\llbracket \phi \rrbracket = 0, \llbracket \frac{d\phi}{dx} \rrbracket = 0$).

La résolution est effectuée en trois étapes. Tout d'abord un calcul élastique est effectué pour déterminer l'effort pour lequel la condition $v = (v_e = \varepsilon_e \cdot t_a)$ est atteinte en pointe de fissure. Ensuite on s'intéresse à l'étude du développement de la zone plastique, la longueur l_p de la zone plastique sert de paramètre de contrôle, un solveur non linéaire est alors utilisé pour déterminer la valeur des A_i , B_i , ϕ_0 , v_0 et P qui assurent le respect des conditions aux limites et la condition $v = v_e$ à la jonction entre zone élastique et plastique. Dans une troisième étape correspondant à la phase de propagation de la fissure, la même démarche est utilisée, il s'agit alors de déterminer le jeu de paramètres A_i , B_i , ϕ_0 , v_0 , P et l_p qui permettent de vérifier les conditions précédentes ainsi que la condition $v = (v_{max} = \varepsilon_{max} \cdot t_a)$ en pointe de fissure.

En outre, initialement l'essai DCB a été conçu pour mesurer le taux de restitution d'énergie critique d'interfaces collées entre substrats flexibles. Le bilan énergétique proposé par Griffith [23] permet d'obtenir une expression analytique de ce paramètre étant connue celle de la complaisance de l'éprouvette. En supposant que la complaisance de l'interface est négligeable, la complaisance de l'échantillon assimilé à deux poutres en flexion simple s'écrit :

$$C_{SBT} = \frac{2a^3}{3EI} + \frac{2a}{\kappa GS} \quad (2.20)$$

Le second terme de la relation (2.20) correspond à la complaisance de cisaillement des substrats et peut être négligée car la longueur des éprouvettes est souvent assez grande pour faire cette hypothèse. Une estimation simple de cette longueur de fissure peut être faite en utilisant la relation proposée par [de Morais et Pereira, 2007] :

$$a_{sbt} = \left(\frac{3}{2} EI \frac{\Delta}{P} \right)^{1/3} \quad (2.21)$$

Ce paramètre phénoménologique donne une estimation simple de l'endommagement le long de l'interface. Il convient néanmoins de noter que a_{sbt} surestime la longueur géométrique du front de fissure a qui correspond à la position où l'interface est entièrement endommagée. Grâce à la mécanique linéaire de la rupture, nous savons que la propagation de la fissure est pilotée par le taux de restitution de l'énergie G_1 qui peut être exprimé à

partir de la complaisance du spécimen comme suit :

$$G_{sbt} = \frac{1}{2b} \frac{\partial C_{sbt}}{\partial a} P^2 \quad (2.22)$$

$$= \frac{a^2}{EI} \frac{P^2}{b} \quad (2.23)$$

En égalisant les expressions de la longueur de fissure a dans les relations (2.21) et (2.23), et en prenant en compte le fait que le taux de restitution de l'énergie est le paramètre qui pilote la phase de propagation de la fissure, nous en déduisons une relation entre la force P et l'ouverture en extrémité d'éprouvette Δ durant cette phase de propagation sous l'hypothèse d'une énergie de fissuration stationnaire i.e. $G_{sbt} = G_c$. Il vient alors [9] :

$$P = \left(\frac{4EI}{9} \right)^{1/4} (bG_c)^{3/4} \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \quad (2.24)$$

Ci-dessous sont représentés les champs mécaniques solutions pour l'essai DCB avec la loi d'interface élasto-plastique parfaite.

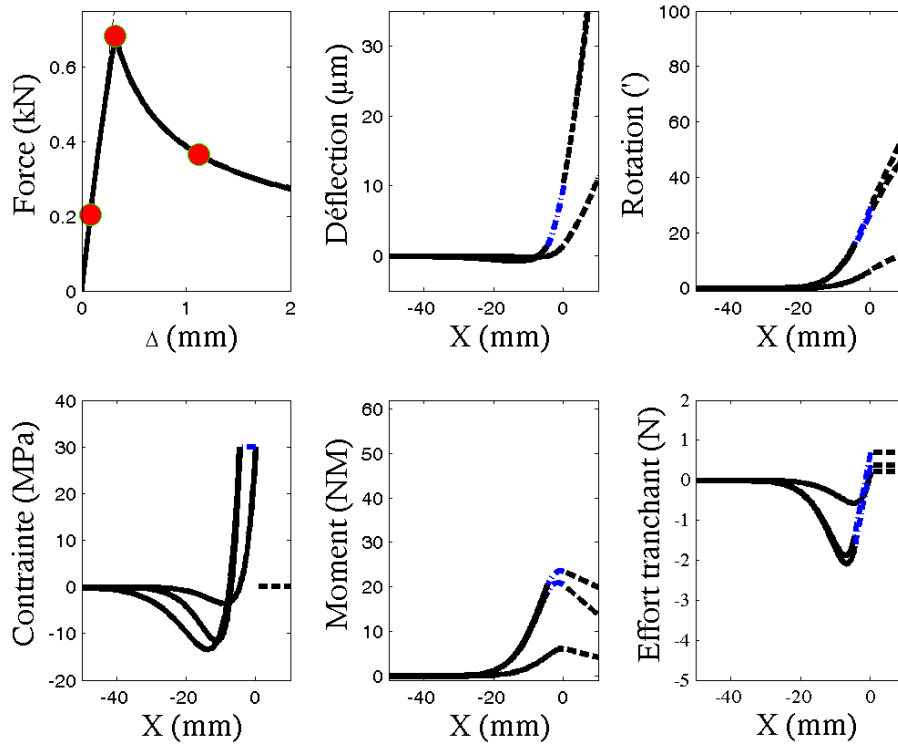


FIGURE 2.5 – Champs mécaniques des phases élastique, plastique et de propagation pour un essai DCB en chargement monotone avec une loi de zone cohésive élasto-plastique parfaite prise comme loi d'interface

Le résultat de la mesure $P(\Delta)$ issue du modèle semi-analytique est illustré à la figure 2.6. Nous distinguons trois phases d'évolution correspondantes aux trois phases de la loi de zone cohésive élasto-plastique parfaite ainsi que les trois étapes du calcul évoquées plus haut. La première phase est linéaire en ce sens que la complaisance de l'éprouvette est constante et elle traduit le comportement élastique linéaire de la loi cohésive ; cette phase est illustrée par la courbe rouge sur la figure 2.6. La perte de la linéarité correspond du point de vue phénoménologique, au comportement plastique parfait de la loi d'interface où la contrainte le long du joint d'adhésif est constante. La troisième et dernière phase est la phase de propagation qui se traduit par la diminution de la force alors que le déplacement imposé en extrémité d'éprouvette est croissant ; durant cette phase, la complaisance de l'éprouvette augmente. En outre, l'évolution théorique obtenue à partir de la relation (2.24) est également représentée sur la même figure et nous observons une superposition parfaite avec le modèle semi-analytique développé. Dans une démarche d'identification des paramètres qui régissent la loi de zone cohésive, nous notons que le taux de restitution critique de l'énergie G_c peut être identifié en exploitant la relation (2.24) durant la phase de propagation. La raideur d'interface peut être évaluée en quantifiant l'augmentation de la complaisance initiale en comparaison de celle calculée au moyen de l'approximation SBT. Seule l'évolution de la réponse $P(\Delta)$ entre ces deux phases est indicatif de la forme de la loi d'interface. Celle-ci est généralement identifiée au moyen de méthodes d'optimisation numérique puisqu'il n'existe pas à notre connaissance de relations analytiques explicites décrivant l'évolution de la réponse $P(\Delta)$ en fonction des paramètres de loi de zone cohésive.

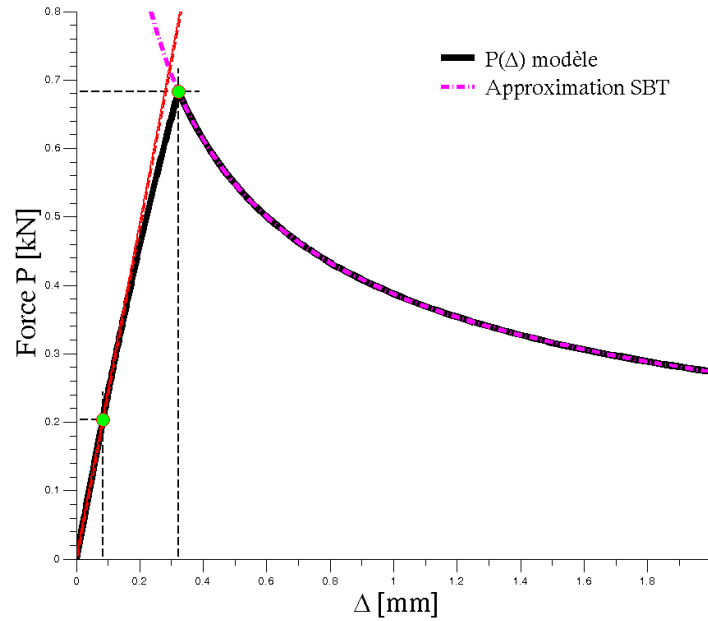


FIGURE 2.6 – Evolution de la force P en fonction de l'ouverture en bout de spécimen Δ pour l'essai DCB en chargement monotone avec la loi de zone cohésive élasto-plastique parfaite prise comme loi d'interface

Le comportement mécanique d'une interface collée peut être représenté en première approche par une loi de zone cohésive. Au stade ultime de l'endommagement, la propagation du front de fissure est pilotée par le taux de restitution critique d'énergie correspondant à l'aire sous la courbe décrivant la loi de séparation de l'interface. Contrôler les conditions de propagation sous chargement monotone seules, peut s'avérer suffisant dans une approche tolérance aux dommages. Cependant, pour bien appréhender le comportement de l'interface, son degré d'endommagement, en particulier sous chargement complexe, la forme exacte de cette loi d'interface doit être précisément décrite. Se pose alors la question de la méthodologie à mettre en place pour caractériser ce comportement. Les approches existantes sont présentées ci-dessous ainsi qu'un bilan en termes de performance métrologique.

2.2 Principes des mesures

2.2.1 Approche énergétique : Intégrale de contour J

Parmi les méthodes de mesures novatrices proposées ces dernières années permettant la "mesure" plutôt que l'identification de loi d'interface, la méthode $J(\delta)$ a été probablement la plus reprise par différentes équipes intéressées par la caractérisation des assemblages collés et du délaminage. Comme son nom l'indique, elle repose sur une mesure de l'ouverture de fissure simultanée à une mesure ou un calcul de l'intégrale J caractérisant macroscopiquement l'intensité de la sollicitation appliquée à l'entaille et calculée au moyen d'une intégrale de contour donnée par la relation :

$$J_i = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left(W n_i - n_j \sigma_{jk} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) d\Gamma \quad (2.25)$$

Les relations permettant la reconstruction de la loi d'interface sont obtenues en utilisant deux contours d'intégration distincts et sont illustrées ci-dessous dans le cas de l'essai DCB [133], [101], [134]. Le premier contour correspond à la frontière extérieure de l'éprouvette entière, le second décrit la frontière de l'interface seule (cf. figures 2.7, 2.8).

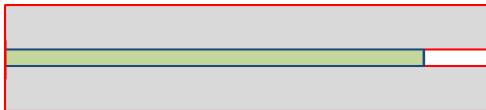


FIGURE 2.7 – Contour 1 : Contour extérieur du spécimen DCB - Méthode $J(\delta)$

$$J = \frac{2}{b} \left[P\theta + \frac{P^2}{2\kappa GS} \right] \quad (2.26)$$

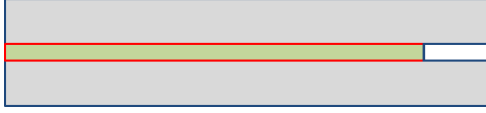


FIGURE 2.8 – Contour 2 : Contour couche d'adhésif du spécimen DCB - Méthode $J(\delta)$

$$J = \int \sigma(u) du \quad (2.27)$$

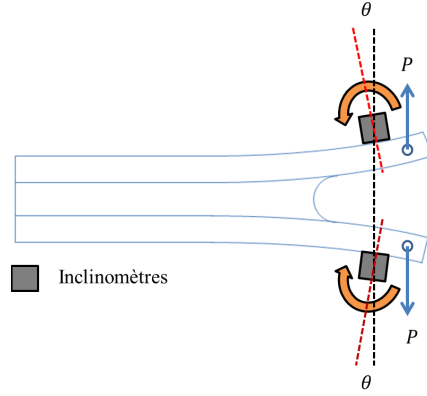


FIGURE 2.9 – Illustration du spécimen DCB avec inclinomètres pour la mesure de l'intégrale $J(P, \theta)$

Dans les équations 2.26 et 2.27, δ est l'ouverture en front de fissure² qui peut être mesurée par corrélation d'image par exemple. Ces deux relations permettent de déterminer la même quantité (intégrale J) à partir d'informations macroscopiques mesurables telles que la force P et la rotation des substrats θ , mais également par intégration de la loi d'interface. Par dérivation de la relation 2.27, nous obtenons la relation :

$$\sigma = \frac{\partial J}{\partial \delta} \quad (2.28)$$

Qui montre qu'en mesurant/calculant l'intégrale J en parallèle de la mesure simultanée de l'ouverture de fissure, il devient possible de reconstruire la loi de séparation d'interface par simple dérivation. Ainsi nous disposons de plusieurs méthodes pour déterminer l'évolution de l'intégrale J au cours d'un essai DCB tel que simulé précédemment. En premier lieu, l'évolution $J(\delta)$ peut être calculée par intégration de la relation (2.28) à partir de l'expression de la loi d'interface. Dans le cas de la loi élasto-plastique précédemment utilisée, il vient :

2. En anglais : CTOD (Crack Tip Opening Displacement)

$$J = \begin{cases} J_e = \frac{E_a}{2t_a} \delta^2 & \text{si } 0 < \delta < \delta_e \\ J_p = \sigma_m (\delta - \delta_e) & \text{si } \delta_e \leq \delta < \delta_{max} \\ J_{prop} = \frac{E_a}{2t_a} \delta_e^2 + \sigma_m (\delta_{max} - \delta_e) & \text{si } \delta \geq \delta_{max} \end{cases}$$

Malgré que cette évolution soit considérée comme exacte, nous pouvons également calculer l'intégrale J à partir des données macroscopiques simulées (P, Δ, θ) et en utilisant les relations issues des approximations de type SBT.

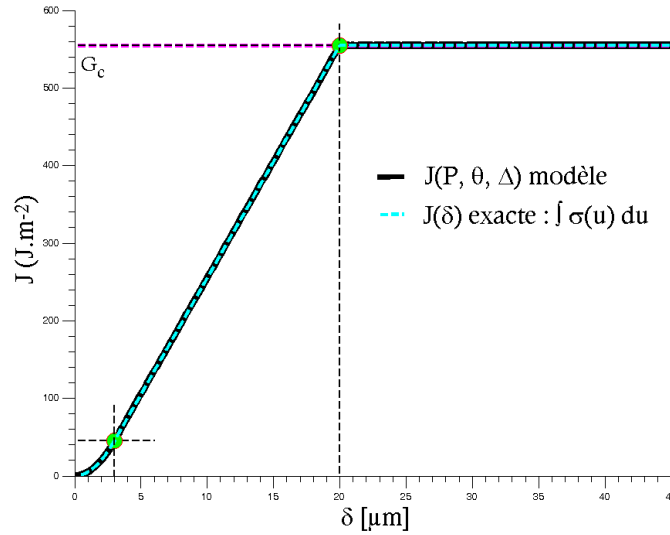


FIGURE 2.10 – Evolution de l'énergie J en fonction de l'ouverture en front de fissure δ pour la loi d'interface élasto-plastique parfaite - Formulation intégrale de J

Sur la figure 2.10 est représentée les évolutions du taux de restitution de l'énergie J en fonction de l'ouverture en front de fissure δ pour la loi de zone cohésive élasto-plastique parfaite (cf. figure 2.4). Comme la loi d'interface, cette évolution se décompose en trois phases. Tout d'abord, La phase parabolique de la réponse $J(\delta)$ correspond au comportement linéaire élastique de l'interface, la partie linéaire au plateau plastique. Enfin, une fois l'élongation à rupture atteinte en front de fissure, la phase de propagation débute et l'intégrale J sature et atteint la valeur critique correspondant au taux de restitution d'énergie critique de l'interface.

2.2.2 Suivi de fissuration par mesures de déformations de peau

Une troisième technique de mesure développée pour investiguer le comportement mécanique des interfaces consiste en la mesure de l'évolution de la déformation locale des substrats durant la propagation de la fissure [135], [136]. Selon l'épaisseur des substrats, la déformation a été mesurée sur les faces externes (déformation longitudinale) ou latérales (déformation de cisaillement) des substrats donnant ainsi accès respectivement au moment de flexion et effort tranchant local transitant dans les substrats. Cette méthode est illustrée sur la figure 2.11.

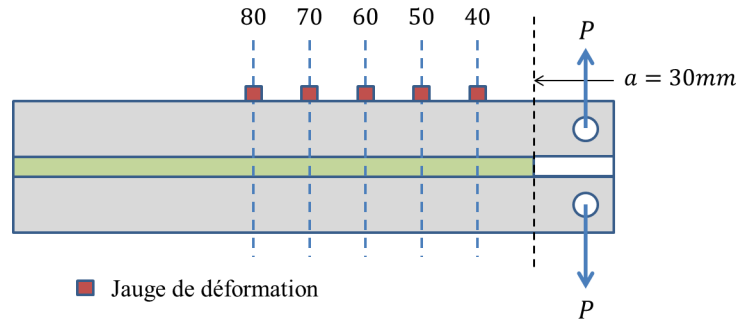


FIGURE 2.11 – Illustration du spécimen DCB avec les jauges de déformation pour la mesure de la déformation de peau (BSM)

En supposant que les substrats sont assimilables à des poutres, la déformation de peau est reliée à la rotation locale de la section droite par la relation :

$$\varepsilon = \frac{M(x)}{EI} \frac{t}{2} \quad (2.29)$$

$$= \frac{d\phi}{dx} \frac{t}{2} \quad (2.30)$$

En substituant la relation 2.29 dans la relation 2.6, il vient :

$$EI \frac{2}{t} \frac{d^2\varepsilon}{dx^2} = -\sigma \quad (2.31)$$

Cette expression permet de relier la contrainte de pelage et la déformation de peau locale. De même en assimilant à nouveau les substrats à des poutres de Timoshenko, et en remplaçant 2.29 et 2.31 dans 2.5, il vient :

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{EI}{\kappa GS} \frac{2}{t} \frac{d^2\varepsilon}{dx^2} + \frac{2}{t} \varepsilon \quad (2.32)$$

Cette expression relie, déformation de peau et saut de déplacement à l'interface par l'intermédiaire d'une intégrale double. La même mesure de l'évolution de la déformation permet de reconstruire par une opération de dérivation et d'intégration, la loi d'interface. Cependant pour être effectuée, cette opération nécessite de mesurer à chaque instant l'évolution de la déformation le long du substrat avec à la fois une forte sensibilité et une forte résolution ce qui est en pratique très ardu avec les techniques de mesure actuelles et impossible avec les capteurs conventionnels à jauge. Pour contourner cette difficulté, en profitant de la stationnarité de l'énergie de rupture et de l'évolution des champs mécaniques en pointe de fissure durant la propagation, la variable x , est remplacée par la longueur de fissure instantanée mesurée en cours d'essai. Cette mesure n'est donc applicable qu'en présence d'une propagation stable et un régime de propagation stationnaire.

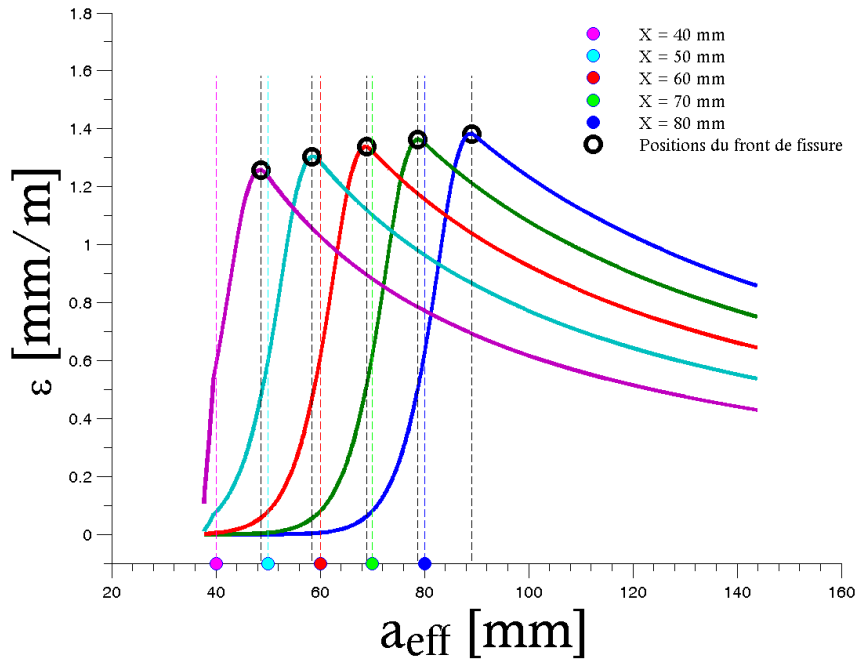


FIGURE 2.12 – Signaux de jauges de la méthode BSM simulés pour l'essai DCB - modèle semi-analytique - Loi d'interface élasto-plastique parfaite

Ci-dessus, sont représentées les évolutions de la déformation de peau mesurées théoriquement telles que simulée dans les mêmes conditions que présentées précédemment (interface élasto-plastique). Des jauges supposées ponctuelles ont été placées de façon équidistante en cinq positions de l'échantillon sur la face extérieure du substrat supérieur en $X = [40, 50, 60, 70, 80]$ mm du point d'application de la force. La phase qui correspond à un signal de jauge nul signifie que celle-ci ne se trouve pas encore au droit de la "process zone". Cela veut dire que le joint d'adhésif est intact et n'est le lieu d'aucuns phénomènes. La zone où le signal est négatif traduit une zone de compression qui correspond à l'apparition de la « process zone ». L'amplitude du signal subit une montée rapide jusqu'à

un maximum qui indique que la jauge est au droit du front de fissure. Une fois que ce front de fissure traverse la position de la jauge, le signal recueilli diminue ce qui indique que la jauge est désormais placée au-dessus d'une zone fissurée, l'évolution du signal est similaire à celui de la force appliquée.

À partir de cette technique de mesure, certaines informations peuvent être recueillies. En effet, le passage du signal nul à son maximum d'amplitude, renseigne sur la taille de la process zone, mais également la mesure de la distance entre les maxima de deux signaux de jauges juxtaposées, correspond à l'avancée de la fissure. Toutefois ces informations sont acceptables sous l'hypothèse d'un régime stationnaire pour la process zone. Cette hypothèse se justifie ici par le fait que les courbes de signaux ont une évolution similaire et se comporte comme s'il s'agissait du même signal répété dans le temps et sur la direction longitudinale. Notons que ces signaux de jauges virtuels sont obtenus avec la longueur de fissure effective issue de la relation (2.21). Il convient de noter, que cette dernière surestime la longueur de fissure réelle dont nous supposons renseignée ici par la position des maxima des signaux de jauges.

2.2.3 Mesure de champs de déplacements

Plus récemment, l'essor et la convivialité grandissante des systèmes d'imagerie, les techniques de mesure de champs de déplacement ont été employées pour observer la zone au voisinage du front de fissure durant la phase conduisant à la propagation de la fissure. Si différentes techniques sont envisageables (moirée, interférométrie), c'est essentiellement la corrélation d'image qui a été employée pour mesurer les champs cinématiques au voisinage du front de fissure [137]. La zone de mesure est illustré à la figure 2.13. La face latérale est le plus souvent observée pour mesurer au cours de l'essai l'évolution des champs de déplacement que produit la déformation des substrats.

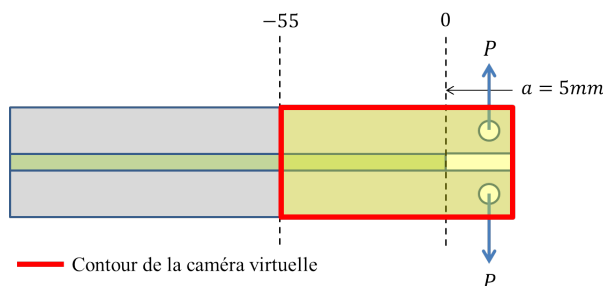


FIGURE 2.13 – Illustration de la zone de mesure par corrélation d'image

En supposant à nouveau que les substrats sont assimilables à des poutres, leur déformation est décrite par deux fonctions que sont, le déplacement normal / flèche $v(x)$ et la rotation

$\phi(x)$ de chaque section droite. Les composantes longitudinales et normales du déplacement sont alors obtenues par les relations :

$$U(x, y) = \phi(x) \left[\frac{t}{2} - |y| \right] \quad (2.33)$$

$$V(x, y) = v(x) \quad (2.34)$$

Inversement ces équations permettent de déterminer les évolutions $\phi(x)$ et $v(x)$ à partir des champs de déplacement mesurés à chaque étape du chargement. La flèche est calculée comme la moyenne des déplacements dans l'épaisseur, la rotation comme la pente des déplacements horizontaux selon l'épaisseur des substrats. En utilisant le modèle élasto-plastique présenté précédemment, nous pouvons calculer ces évolutions $\phi(x)$ et $v(x)$ et représenter le résultat obtenu théoriquement tel que estimé au moyen des relations (2.33) et (2.34). Nous considérons ici la configuration d'essai suivante : la face latérale du spécimen observée est située entre les positions $X = -5mm$ et $X = -50mm$ selon la direction horizontale, l'origine du repère correspondant ici à la limite entre zone collée et fissurée. Ces courbes correspondent à un déplacement $\Delta = 1.12mm$ et une force $P = 365N$ sur la courbe de mesure $P(\Delta)$.

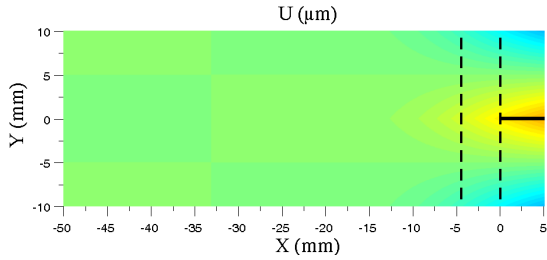


FIGURE 2.14 – Champs de déplacements horizontaux - Modèle semi-analytique

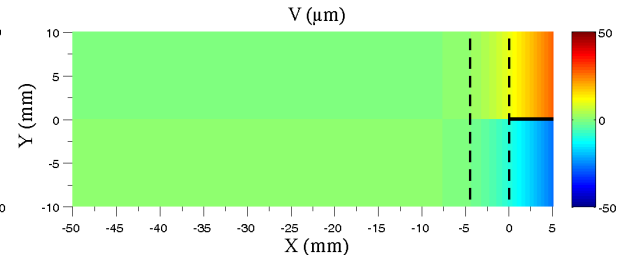


FIGURE 2.15 – Champs de déplacements verticaux - Modèle semi-analytique

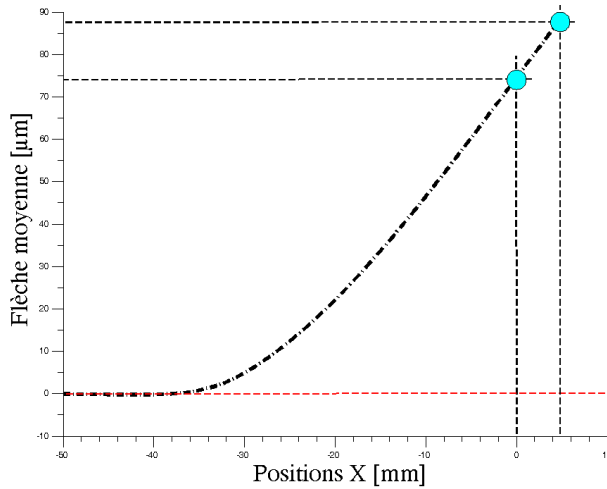


FIGURE 2.16 – Évolution de la flèche v

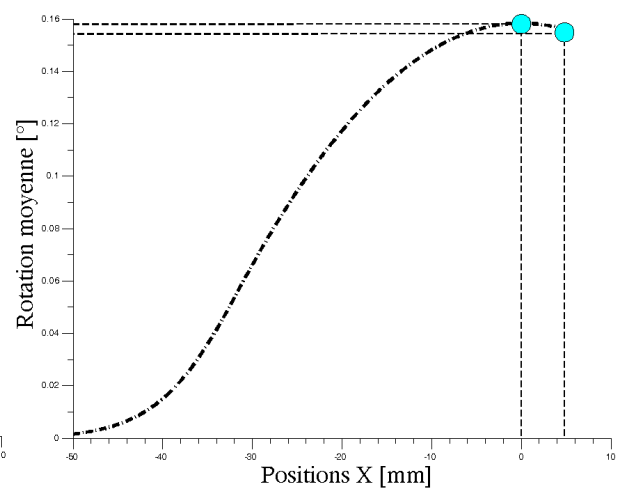


FIGURE 2.17 – Évolution de la rotation θ

En première approximation, nous pouvons donc considérer que l'identification d'une loi d'interface à partir d'une mesure de champs de déplacement durant un essai DCB consiste en l'identification inverse de cette loi à partir des données $\phi(x, \Delta)$ et $v(x, \Delta)$. En conséquence, nous disposons donc de 4 techniques pour identifier/mesurer la loi de séparation d'une interface sollicitée lors d'un essai DCB. **À notre connaissance aucun travail n'a été mené pour comparer les performances métrologiques de ces 4 techniques (propagation d'erreur, sensibilité).** Cet aspect est traité ci-dessous en utilisant des données expérimentales synthétisées à partir du modèle DCB élasto-plastique présenté ci-dessus.

2.3 Analyse comparée des performances des méthodes de mesure

Dans ce qui suit, nous décrivons une analyse systématique pour comparer les performances des méthodes de caractérisation des lois d'interface décrites précédemment en terme de sensibilité aux paramètres de la loi d'interface mais également de robustesse au sens de la capacité à discriminer la forme de la loi d'interface. La détermination des paramètres caractéristiques de la loi d'interface est généralement effectuée par identification inverse au sens de la minimisation d'une fonction coût permettant d'évaluer la distance entre données expérimentales et résultat d'un modèle. Des analyses statistiques permettent ensuite de déterminer les intervalles de confiance sur ces paramètres identifiés. Ces intervalles de confiances sont un moyen simple de quantifier la sensibilité de la technique employée aux différents paramètres et les couplages éventuels sur la réponse mesurée. Nous rappelons dans un premier temps le principe de ces techniques d'identification et analyse statistique en les illustrant par l'analyse de la mesure traditionnelle de l'évolution $P(\Delta)$ avant d'appliquer cette même méthode aux mesures $J(\delta)$, $\varepsilon(a)$ ainsi qu'aux mesures des champs cinématiques. Pour ce faire, des données expérimentales synthétiques obtenues à partir du modèle DCB avec interface élasto-plastique sont utilisées.

2.3.1 Identification inverse de loi - Optimisation non linéaire

L'identification des paramètres est réalisée en employant des algorithmes d'optimisation/minimisation non linéaires itératifs dont nous rappelons ci-dessous le principe. La fonction à minimiser décrit l'écart entre données expérimentales et simulées et s'exprime sous la forme de la fonction :

$$\chi^2(p) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{Y(t_i) - \hat{Y}(p, t_i)}{\sigma_{Y(t_i)}} \right]^2 \quad (2.35)$$

Où, p est le vecteur des paramètres de la loi de zone cohésive à identifier, Y est la variable dépendante qui dans notre cas est soit P , J , ε ou $(\phi(x), v(x))$, t_i est la variable indépendante (Δ , δ , a , ou x) et $\sigma_{Y(t_i)}$ est l'incertitude de mesure en chaque point. La fonction χ^2 correspond à la somme du carré des résidus, pondérés par l'inverse des incertitudes de mesure en chaque point. La capacité des différentes techniques à identifier finement les différents paramètres de la loi d'interface peut être quantifiée en étudiant le comportement de la fonction χ^2 au voisinage du minimum. En effet, une augmentation rapide de la fonction erreur pour une faible variation de la valeur d'un paramètre devrait conduire à une estimation fiable de ce paramètre. Il reste maintenant à quantifier cette "fiabilité" au moyen d'une approche rigoureuse. La fonction χ^2 peut être écrite selon l'expression :

$$\chi^2(p) = Y^T \mathbb{W} Y - 2Y^T \mathbb{W} \hat{Y} + \hat{Y}^T \mathbb{W} \hat{Y} \quad (2.36)$$

Où \mathbb{W} est une matrice diagonale contenant l'inverse des écart-types de chaque point de mesure au carré. L'utilisation de la fonction χ^2 n'est pertinente que lorsque la statistique sur les erreurs / bruits de mesures $\sigma_{Y(t_i)}$ est représentée par une fonction densité de probabilité de la classe des exponentielles (normale, exponentielle, gamma, beta, etc.). Dans le cas où les erreurs ne suivent pas l'une de ces lois, l'identification des paramètres de modèle est effectuée par les estimateurs du principe du maximum de vraisemblance, mais si cette condition est respectée, alors les deux méthodes sont équivalentes.

En l'absence d'incertitude expérimentales sur les données mesurées, et dans le cas où le modèle est exact, la fonction χ^2 est théoriquement nulle lorsque les paramètres sont identifiés. En présence de bruit de mesure et si le modèle reste exact, le résidu $\Delta\chi^2$ correspondant au minimum de la fonction est représentatif des incertitudes expérimentales. En supposant le bruit gaussien, le résidu déterminé à l'issue de l'identification permet d'évaluer l'incertitude sur les données expérimentales par la relation :

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{N - k + 1} \sum_{i=1}^N (Y_{mes} - Y_{modele}) \quad (2.37)$$

Plus encore, en supposant que les bruits de mesure ne sont pas corrélés, l'évolution de la

fonction χ^2 au voisinage du minimum peut être approximée par une fonction quadratique :

$$\Delta\chi^2 = \frac{1}{\sigma_Y^2} \delta p^T \mathbb{C}^{-1} \delta p \quad (2.38)$$

Où la matrice \mathbb{C} représente la matrice de covariance :

$$\mathbb{C} = [J_{cob}^T \mathbb{W} J_{cob}]^{-1} \quad (2.39)$$

Et, J_{cob} est la matrice jacobienne définies par :

$$J = \left[\frac{\partial Y_{modele}}{\partial p} \right] \quad (2.40)$$

Chaque terme de ce jacobien contient la fonction de sensibilité aux paramètres p_i . La valeur $\Delta\chi^2(k, \alpha)$ considérée pour l'analyse est fonction du nombre de paramètres à identifier k et de la fiabilité attendue, α , et peut être déterminée à partir de table statistique. Ce calcul est valable pour un nombre de données expérimentales important. Dans le cas où le nombre de donnée est plus faible, on utilise la fonction de Fisher pour évaluer la variation de la fonction au voisinage du minimum :

$$kF(k, N - k, \alpha) = \frac{1}{\sigma_Y^2} \delta p^T \mathbb{C}^{-1} \delta p \quad (2.41)$$

Une première estimation (majorante) de la taille des intervalles de confiance est obtenue par la relation :

$$\sigma_p = \sqrt{diag(\mathbb{C})} \quad (2.42)$$

Où le couplage entre paramètre n'est pas pris en compte. Les intervalles de confiances sont en pratique décrit par un ellipsoïde dans un espace de dimension k , tel que décrit par la relation (2.38) et dont nous pouvons tracer les projections dans les plans (p_i, p_j) pour identifier les plages maximales de variations autorisées pour chaque paramètre mais également les couplages éventuels entre paramètres.

En conclusion pour évaluer la sensibilité d'une expérimentation vis-à-vis de la mesure d'un paramètre identifié, nous pouvons utiliser les calculs présenté ci-dessous en utilisant

des données expérimentales synthétiques, où les bruits expérimentaux et le nombre de point de mesure utilisés sont représentatifs des conditions expérimentales réelles. La comparaison des intervalles de confiances permettra de classer les performances des différentes méthodes considérées.

2.3.2 Applications aux grandeurs observables

Suivant la méthodologie exposée ci-dessus, nous nous proposons maintenant de calculer pour les quatre techniques étudiées les fonctions de sensibilité et intervalles de confiance théoriques estimés à partir de données expérimentales synthétiques en considérant un nombre de données expérimentales et bruit de mesure représentatifs. Nous appliquons cette démarche à l'identification d'une loi de comportement d'interface type élasto-plastique parfaite décrit au moyen de trois paramètres ce qui permet une représentation des intervalles de confiance sous la forme d'un ellipsoïde. Les valeurs nominales choisies pour ces trois paramètres régissant la loi d'interface sont reportés au Tableau 2.1.

Paramètres	Valeur nominale	Unités
E_a	2	GPa
σ_{max}	30	MPa
ε_{max}	10	%

TABLE 2.1 – Valeurs de paramètres de la loi élasto-plastique parfaite

En premier lieu, nous appliquons une variation de $\delta p = \pm 5\%$ de la valeur nominale sur chaque paramètre de la loi afin de calculer les fonctions de sensibilité par différences finies centrées.

Application à la mesure $P(\Delta)$

Les fonctions de sensibilité de la mesure $P(\Delta)$ aux trois paramètres caractérisant la loi de zone cohésive élasto-plastique, sont présentés sur les figures 2.18, 2.19 et 2.20. Sur la figure 2.21, les sensibilités relatives aux trois paramètres sont représentées. Ce dernier graphique permet de comparer les sensibilités relative entres paramètres dont les valeurs couvrent plusieurs ordre de grandeur. Trois phases distinctes sont clairement identifiables qui correspondent aux trois étapes de l'essai, c'est-à-dire la phase de chargement élastique, le développement de la zone plastique précédant la dernière phase de propagation stable de la fissure. Cette loi simple a été retenue pour illustrer la démarche et à fin de comparaison des méthodes, car l'influence des différents paramètres sur la réponse est bien connue. Ainsi qu'exposé dans la sous-section 2.1.1, la réponse durant la phase de chargement

élastique est linéaire. La pente est essentiellement contrôlée par le paramètre $\lambda.a$ c'est-à-dire par la raideur d'interface. Ce résultat implique également que toute erreur sur la rigidité de flexion des substrats se propage sur l'évaluation de la raideur d'interface.

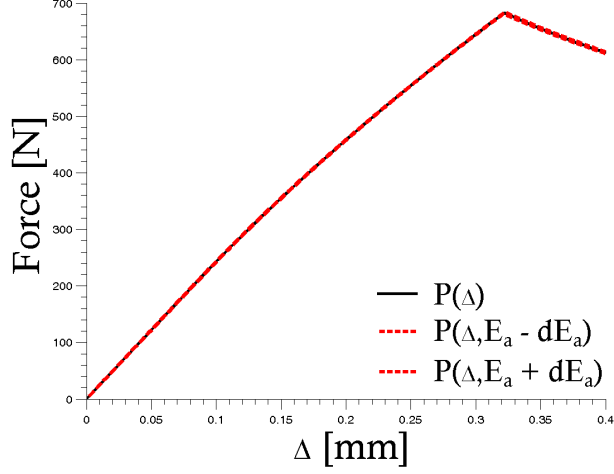


FIGURE 2.18 – Enveloppe $E_a - P(\Delta)$

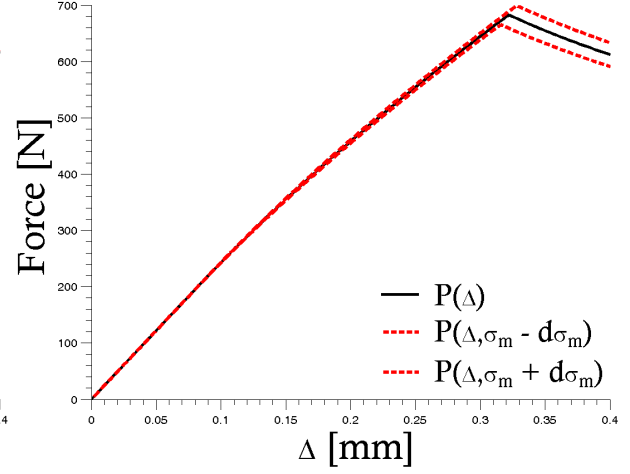


FIGURE 2.19 – Enveloppe $\sigma_{max} - P(\Delta)$

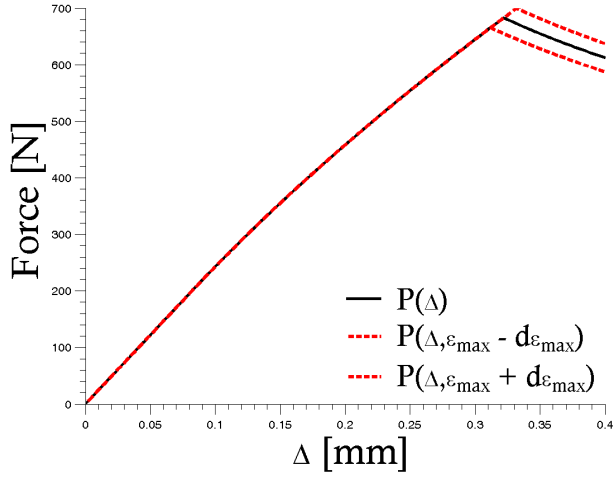


FIGURE 2.20 – Enveloppe $\varepsilon_{max} - P(\Delta)$

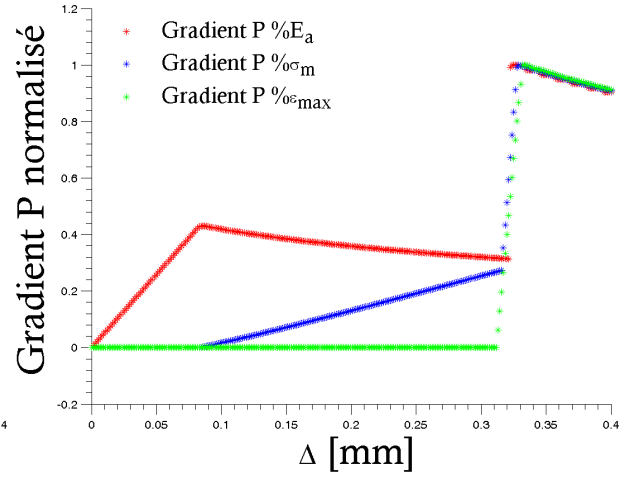


FIGURE 2.21 – Gradient - $P(\Delta)$

Durant la phase de propagation, l'évolution $P(\Delta)$ est contrôlée par le taux de restitution d'énergie critique donnée par la relation (2.24). L'ensemble des paramètres retenus pour cette première analyse influe apparemment la réponse de façon couplée. En réalité durant cette étape de l'expérience, seul G_c contrôle la réponse. Le choix du jeu de paramètre à identifier, qui doit se faire par une analyse mécanique préalable, est important pour guider et faciliter l'analyse des résultats. Enfin, durant l'étape de développement de la zone plastique, seuls deux paramètres (E_a, σ_m) contrôlent la réponse force-déplacement, les sensibilités relatives à ces deux paramètres durant cette étape de la mesure ont des ordres de grandeur comparables mais évoluent en sens inverse lorsque la charge appliquée augmente, ce qui suggère que les influences de ces deux paramètres sur la réponse sont décorréliées. Des données expérimentales sont synthétisées à partir des données de la figure

2.6 à laquelle est rajoutée un bruit gaussien de moyenne nulle et d'écart-type $10N$. La valeur de l'écart-type est choisie de sorte à générer un bruit suffisamment conséquent sur la mesure. Les données expérimentales ainsi obtenues sont constituées de 300 points de mesure, uniformément répartis sur l'ensemble de la mesure. À partir des données de la figure 2.22, les paramètres de la loi de zone cohésive élasto-plastique parfaite sont identifiés à travers la minimisation du χ^2 . Nous comparons les intervalles de confiance ainsi obtenus avec ceux issus d'une analyse Bootstrap. Toutefois, notons que pour cette étude, l'ensemble de la courbe d'évolution $P(\Delta)$ n'est pas considéré. Nous avons fait le choix de tronquer la mesure jusqu'au début de la phase de propagation vu que le paramètre qui pilote cette partie est connu c'est à dire le taux de restitution critique de l'énergie.

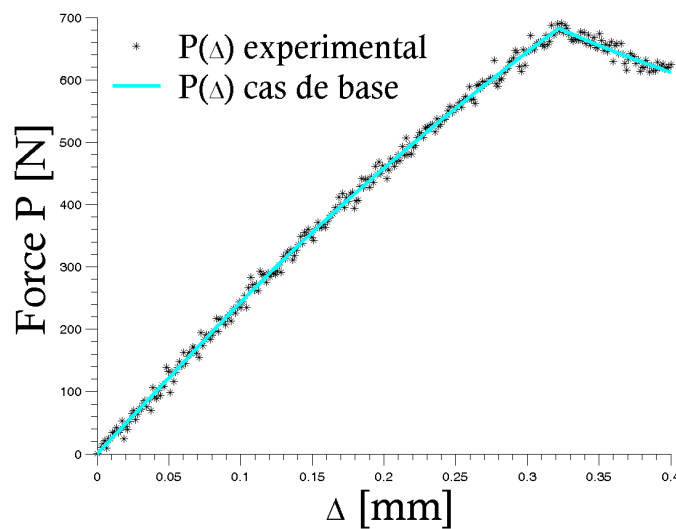


FIGURE 2.22 – Nuage de point expérimental - $P(\Delta)$

La procédure d'optimisation explicitée précédemment entre ces données expérimentales et les résultats du modèle semi-analytique appliquée à la mesure $P(\Delta)$, pour des variations "simultanées" des paramètres de loi d'interface, est effectuée afin d'estimer les intervalles de confiance associés aux paramètres identifiés.

Ainsi pour des valeurs initiales de paramètres telles que $E_a = 3GPa$, $\sigma_{max} = 25MPa$ et $\varepsilon_{max} = 7\%$, un minimum local a été obtenu à $E_a = 1.99GPa$, $\sigma_{max} = 30.01MPa$ et $\varepsilon_{max} = 10.01\%$ avec des intervalles de confiance à $\alpha = 95\%$ de $[1.72; 2.27]GPa$ pour le module de Young, $[29.09; 30.90]MPa$ pour la contrainte à la limite élastique et enfin $[9.81; 10.21]\%$ pour la déformation à la rupture.

Ces intervalles de confiance rappelons le, sont obtenus avec la méthode dite asymptotique qui fait usage de la matrice de covariance associée aux estimateurs (cf. relation 2.42). L'ellipsoïde correspondant à ces intervalles de confiance (région de confiance à 95%), est

représentée à la figure 2.23. Cette représentation est en fait le calcul des distances quadratiques de Mahalanobis [138] et est une représentation de la relation 2.41 pour une probabilité de confiance $\alpha = 0.95$.

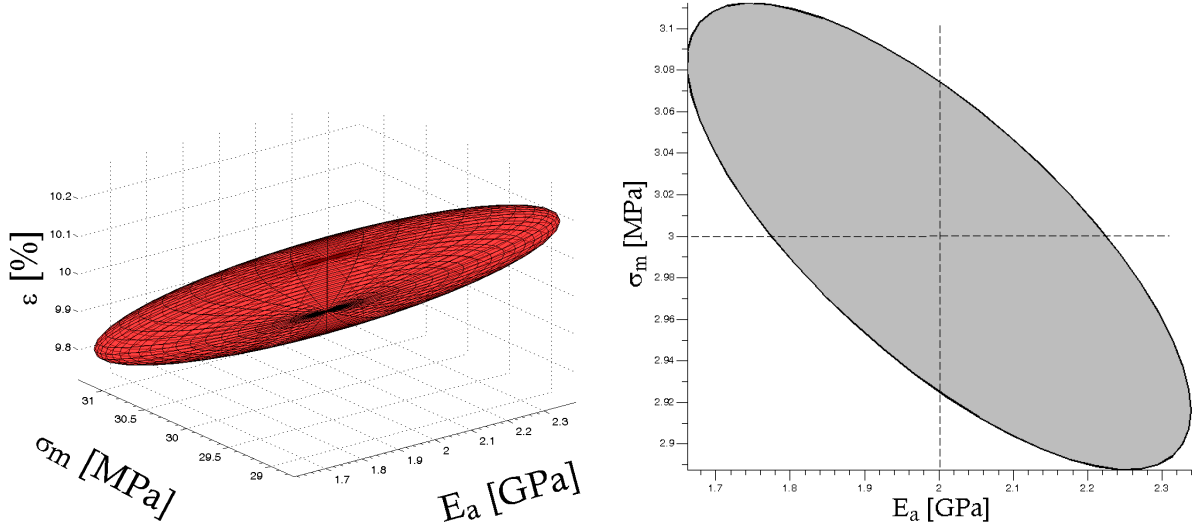


FIGURE 2.23 – Ellipsoïde - Région de confiance $\alpha = 0.95$ pour l'identification des le sous-espace (E_a, σ_{max}) - Identification avec paramètres de la loi de zone cohésive élasto-plastique parfaite et avec la mesure $P(\Delta)$

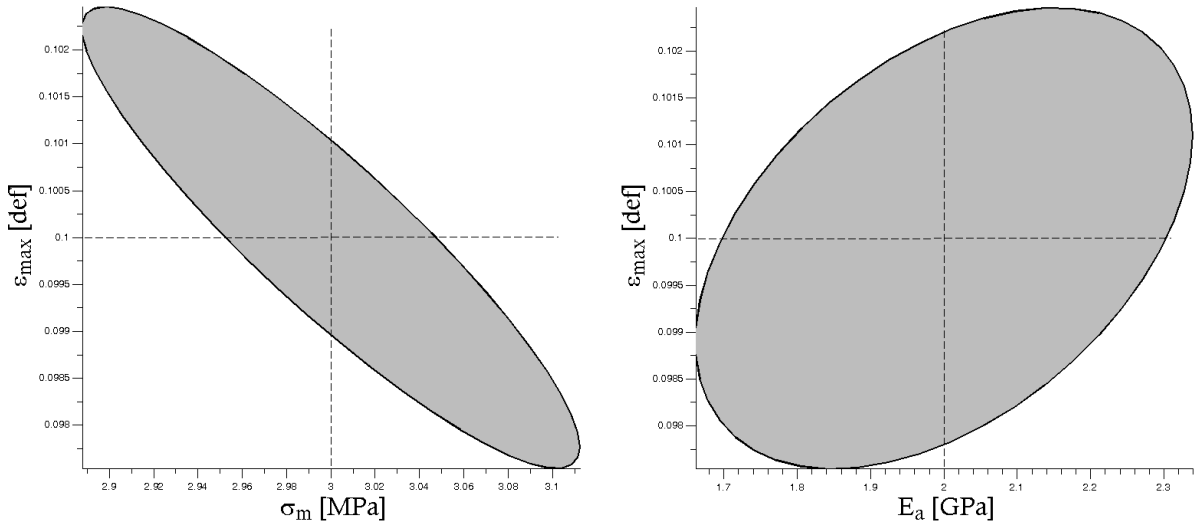


FIGURE 2.25 – Projection de l'ellipsoïde dans le sous-espace $(\sigma_{max}, \epsilon_{max})$ - Identification avec la mesure $P(\Delta)$

FIGURE 2.26 – Projection de l'ellipsoïde dans le sous-espace (E_a, ϵ_{max}) - Identification avec la mesure $P(\Delta)$

La projection de cette ellipsoïde sur les sous espaces (p_i, p_j) des paramètres, permet une meilleure observation des intervalles de confiance ainsi calculés. Ces projections sont naturellement des ellipses et sont centrés sur les valeurs nominales des paramètres. Leur forme renseigne sur la qualité de l'identification des paramètres au sens de leur intervalle

de confiance et de la matrice de covariance associé. En effet, la largeur des intervalles de confiance est traduite par la forme de l'ellipse. Plus elles sont larges plus l'ellipse est arrondie, à l'opposé plus elles sont resserrées, plus l'ellipse sera aplatie ; un cercle signifierai la même intervalle de confiance en relatif car les effets d'échelle sont également à prendre en compte.

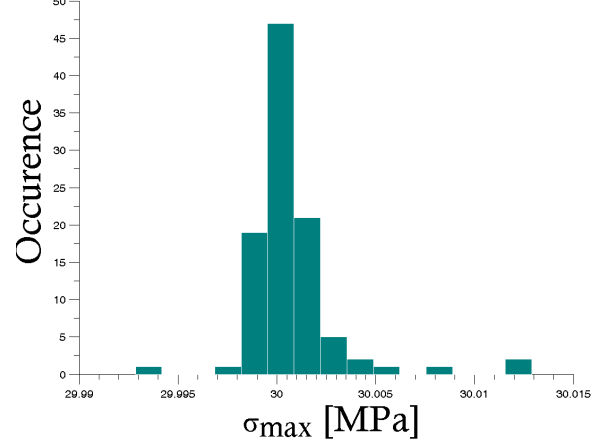
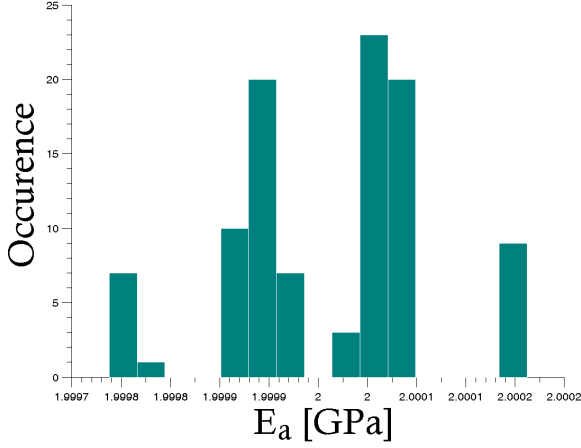


FIGURE 2.27 – Histogramme de l'analyse Bootstrap sur le paramètre E_a - Mesure $P(\Delta)$

FIGURE 2.28 – Histogramme de l'analyse Bootstrap sur le paramètre σ_{max} - Mesure $P(\Delta)$

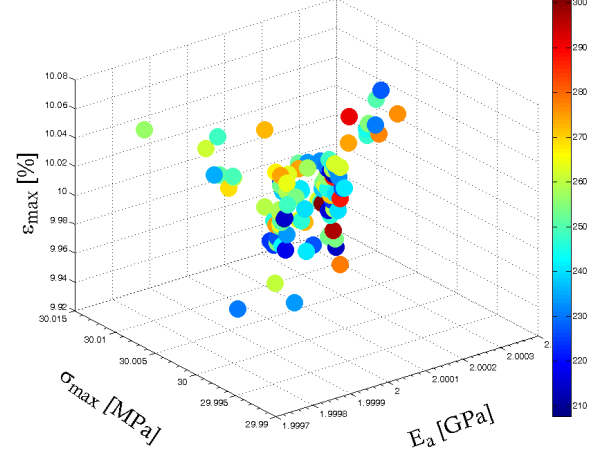
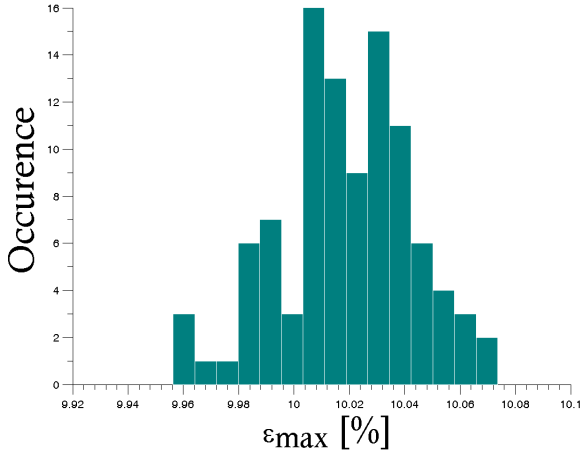


FIGURE 2.29 – Histogramme de l'analyse Bootstrap sur le paramètre ϵ_{max} - Mesure $P(\Delta)$

FIGURE 2.30 – Lieu des χ^2 de l'analyse Bootstrap - Mesure $P(\Delta)$

Comme évoqué plus haut, nous comparons les intervalles de confiance obtenus avec la covariance, avec ceux calculés avec la technique dite de Bootstrap. Il s'agit d'une méthode statistique qui permet d'approximer les intervalles de confiance pour un estimateur issu d'une minimisation au sens des moindres carrés. Le principe est qu'après une première minimisation entre les résultats d'un modèle ($\hat{P}(\Delta_i)$) et les observations (P_i), les résidus ϵ_i sont calculés pour chacun des points de mesures. Par la suite, un nouveau

vecteur de résidus ε_i^* issu des originaux, est calculé par un ré-échantillonnage de sorte que chaque composante de ce nouveau vecteur soit choisie de manière équiprobable. Cela signifie, que certaines valeurs de ε_i seront choisies, tandis que d'autres ne le seront pas. Ensuite, ε_i^* est rajouté à la mesure prédite par le modèle afin de créer une mesure $P_{boot}(\Delta)$ considéré comme une reproduction indépendante de l'expérience. Par une seconde procédure de minimisation, un nouveau estimateur des paramètres à identifier est calculé. Cette expérience est ainsi répétée plusieurs fois et à chaque itération une nouvelle mesure $P_{boot}(\Delta)$ est générée et un nouvel estimateur des paramètres étudiés, est calculé et stocké. Ainsi l'ensemble des paramètres optimaux obtenus par la minimisation de $(\hat{P}(\Delta_i))$ et des $P_{boot}(\Delta)$ constitue le support sur lequel l'estimation des intervalles de confiance des estimateurs des paramètres est effectué. Ainsi sur cette population obtenue, les intervalles de confiance avec une probabilité à $\alpha = 0.95$ sont les 2.5^{eme} et 97.5^{eme} percentiles. Pour cette analyse, $N_{boot} = 100$ expériences indépendantes ont été réalisées. Le comptage des occurrences des valeurs des estimateurs est effectué sur chaque paramètre. Nous obtenons un intervalle de confiance de $[1.99; 2.02]GPa$ pour le module de Young, $[29.99; 30.08]MPa$ pour la contrainte à la limite élastique et $[9.96; 10.06]\%$ pour la déformation à la rupture. Le résultat qu'il convient de retenir est que la méthode de Bootstrap permet en effet, une estimation plus fine des intervalles de confiance. Ce gain de précision est attribué au fait que par un nombre suffisamment élevé de répétition de l'expérience, l'influence de la forte non-linéarité de la fonction coût au voisinage du minimum est réduite là où la méthode asymptotique (avec la covariance) l'approxime par une formulation quadratique.

La démarche établie, nous l'appliquons aux autres grandeurs macroscopiques mesurables afin de comparer leur performance quant à l'identification des paramètres de la loi de zone cohésive élasto-plastique parfaite et de leur intervalle de confiance associé.

Application à la mesure $J(\delta)$

En ce qui concerne la mesure $J(\delta)$, l'évolution de sa formulation exacte (intégration de la loi de zone cohésive) est utilisée pour la synthèse des données expérimentales ainsi que pour l'identification des paramètres de loi d'interface. La même configuration que pour la mesure $P(\Delta)$ est conservée pour la génération du nuage de points expérimentaux représenté ci-dessous. Une première analyse de sensibilité a permis d'étudier l'influence individuelle des différents paramètres de la loi d'interface sur la mesure. À l'image de la figure 2.35, nous observons que tous les paramètres sont influents en fonction de la phase de comportement. En effet durant celle élastique, seul le module de Young est influent. La phase plastique suivante est sensible aux deux paramètres E_a et σ_{max} , tandis que durant la phase de propagation, l'ensemble des paramètres sont sensibles.

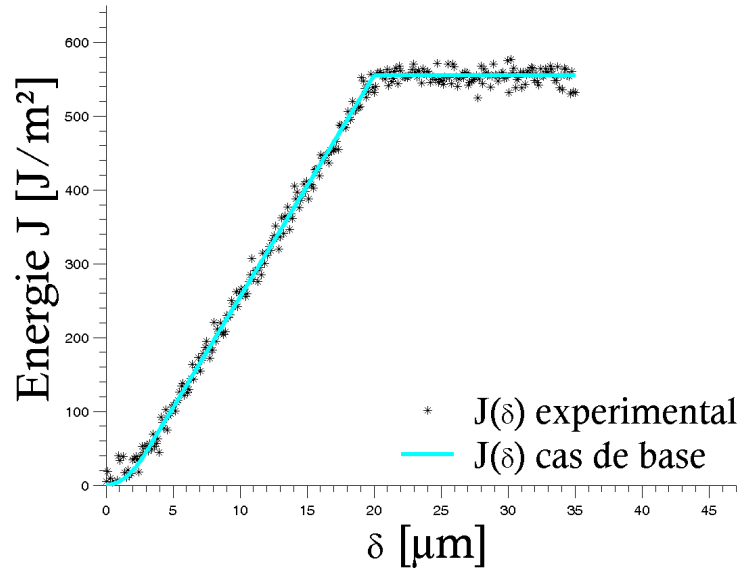


FIGURE 2.31 – Nuage de point expérimental $J(\delta)$

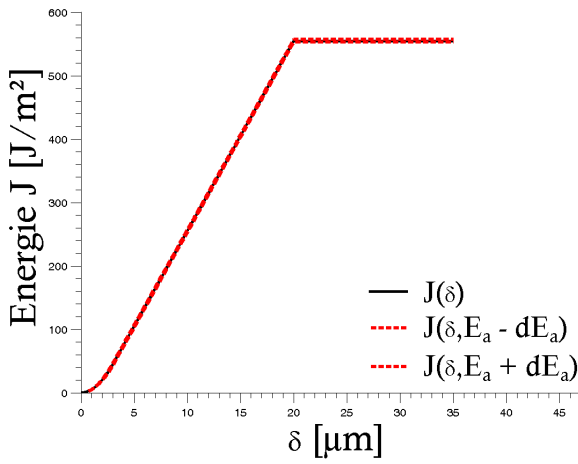


FIGURE 2.32 – Enveloppe $E_a - J(\delta)$

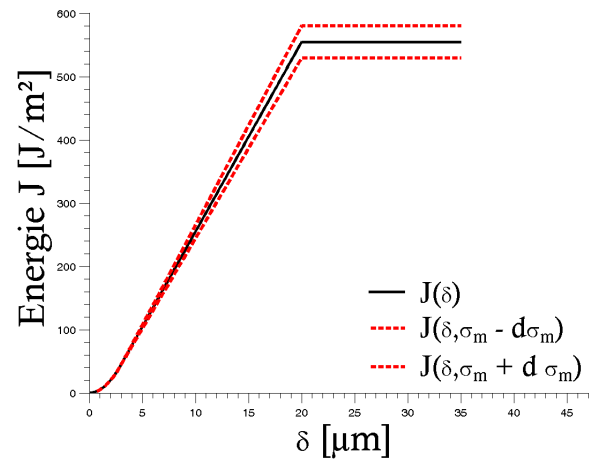


FIGURE 2.33 – Enveloppe $\sigma_{max} - J(\delta)$

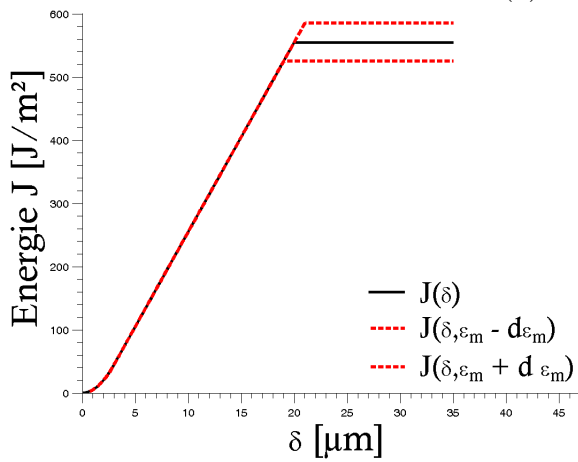


FIGURE 2.34 – Enveloppe $\varepsilon_{max} - J(\delta)$

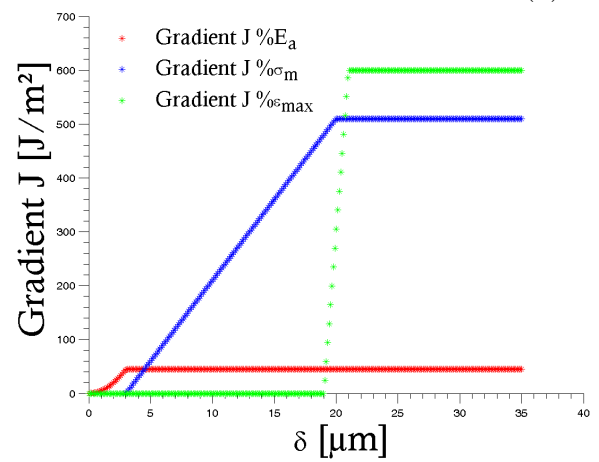


FIGURE 2.35 – Gradient - $J(\delta)$

En définissant des valeurs initiales de paramètres de loi telles que : $E_a = 3GPa$, $\sigma_{max} = 55MPa$ et $\varepsilon_{max} = 30\%$, la recherche d'un minimum local de la fonction coût entre les données expérimentales et résultats numériques, a permis d'identifier $E_a = 2.07GPa$, $\sigma_{max} = 29.73MPa$ et $\varepsilon_{max} = 10.03\%$ comme le triplet de paramètres qui le réalise.

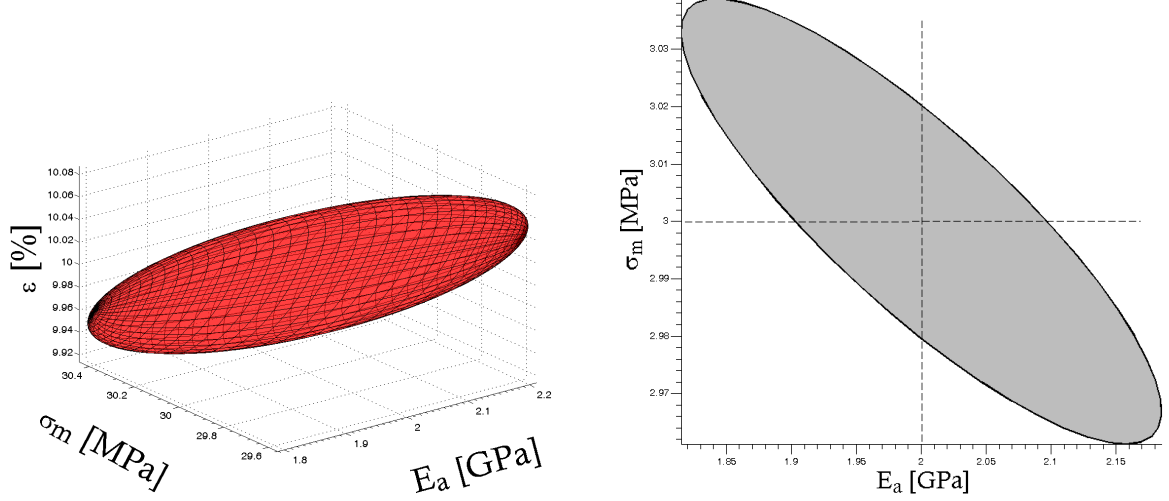


FIGURE 2.36 – Ellipsoïde - Région de confiance $\alpha = 0.95$ pour l'identification des le sous-espace (E_a, σ_{max}) - Identification avec paramètres de la loi de zone cohésive élasto-plastique parfaite et avec la mesure $J(\delta)$

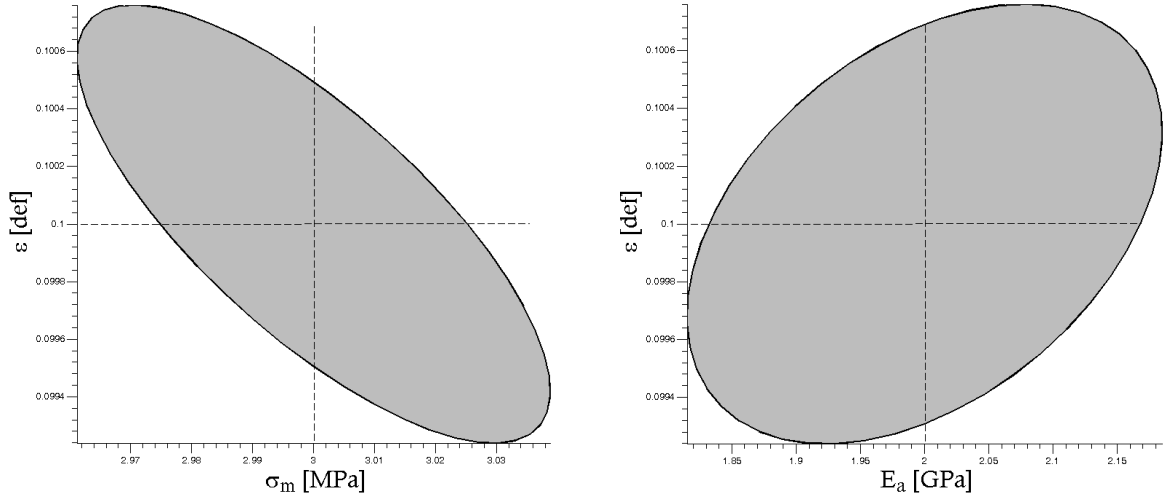


FIGURE 2.38 – Projection de l'ellipsoïde dans le sous-espace $(\sigma_{max}, \varepsilon_{max})$ - Identification avec la mesure $J(\delta)$

FIGURE 2.39 – Projection de l'ellipsoïde dans le sous-espace (E_a, ε_{max}) - Identification avec la mesure $J(\delta)$

Les intervalles de confiance associés à $\alpha = 0.95$ sont $[1.92; 2.22]GPa$ pour le module de Young, $[29.42; 30.05]MPa$ pour la contrainte à la limite élastique et $[9.97; 10.09]\%$ pour la déformation à la rupture. Avec cette mesure les intervalles de confiance obtenus avec la méthode asymptotique sont assez resserrés autour des valeurs nominales, comme en témoigne le tracé de la région de confiance et ses projections sur les sous-espaces des couples de

paramètres. Au vue des intervalles de confiance ainsi obtenu, une analyse Bootstrap n'est pas nécessaire. En effet lorsque l'approximation asymptotique des intervalles de confiance est convenable (i.e. resserrées), la technique du Bootstrap et celle faisant usage de la covariance sont équivalentes. Pour la mesure $J(\delta)$, $N_{boot} = 1.10^6$ expériences indépendantes ont été menées et donc à priori l'estimation des intervalles de confiance des paramètres devrait s'en trouver améliorer. Le nombre de répétition est donc plus large que celui fixé pour la mesure $P(\Delta)$ et cela est dû au fait que la mesure $J(\delta)$ peut s'écrire de manière analytique en fonction des paramètres de la loi de zone cohésive, tel n'est pas le cas pour les autres mesures : l'argument est donc le coût de calcul.

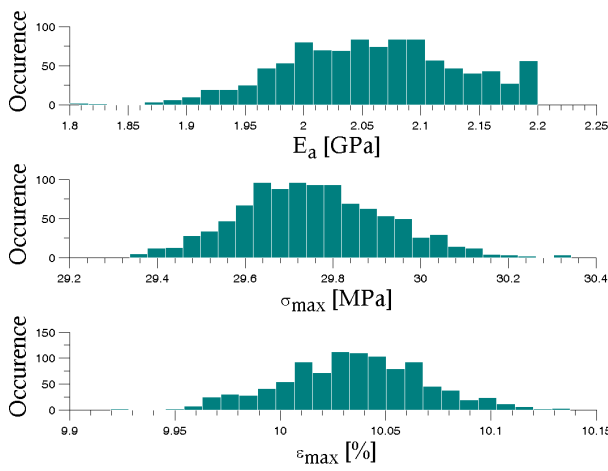


FIGURE 2.40 – Histogramme de l'analyse Bootstrap sur le paramètre E_a - Mesure $J(\delta)$ Bootstrap - Mesure $J(\delta)$

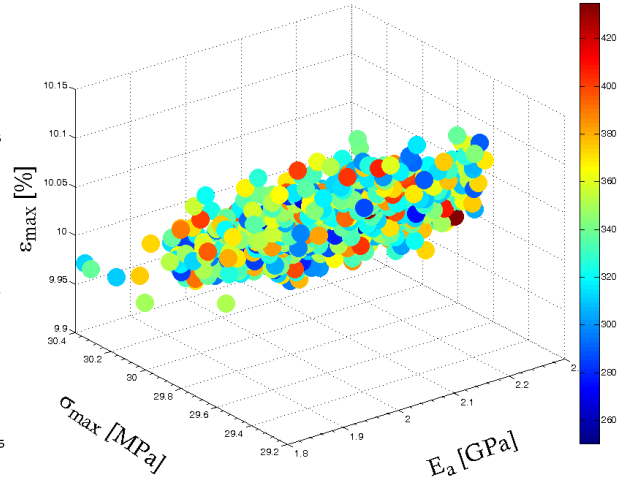


FIGURE 2.41 – Lieu des χ^2 de l'analyse Bootstrap - Mesure $J(\delta)$

Les intervalles de confiance à $\alpha = 0.95$ sont $[1.91; 2.20]GPa$ pour le module de Young, $[29.44; 30.09]MPa$ pour la contrainte à la limite élastique et $[9.96; 10.10]\%$ pour la déformation à la rupture. Nous observons en effet que l'intervalle de confiance du module de Young et de la contrainte à la limite élastique sont identiques avec l'analyse Bootstrap. Cependant, pour la déformation à la rupture, nous observons une légèrement dégradation de la borne inférieure. Un autre aspect qu'il convient d'étudier de manière systématique / complémentaire et qui renseigne sur le comportement statistique des paramètres dans une démarche d'identification inverse, est la métrique des paramètres entre deux analyses Bootstrap. De nouveau, le choix s'est porté d'effectuer cette dernière uniquement pour la mesure $J(\delta)$ (formulation analytique) pour des raisons de coût de calcul.

Les intervalles de confiance permettent d'estimer le lieu à α probabilité de chance de trouver la vraie valeur (que nous ne sommes pas sensés connaître) d'un estimateur à l'issu d'une procédure de minimisation. Bien que dans certains cas, les valeurs des paramètres peuvent être proches de celles vraies, et les intervalles de confiance associés très étroits

de sorte à réduire l'incertitude sur la valeur recherchée, il n'en demeure pas moins que ces approximations peuvent varier d'une estimation à une autre. La question à la quelle il convient de répondre est de savoir de combien elle varie.

Pour répondre à cela, dans le cas de la mesure $J(\delta)$, nous avons dans un premier temps effectué une analyse Bootstrap pour obtenir une première matrice des paramètres estimés p_1^{boot} . En effectuant la même analyse à l'identique, nous obtenons une seconde matrice p_2^{boot} . Les seules différences entre les deux analyses sont d'une part, la génération du bruit pour la construction des données expérimentales synthétiques qui dépend du générateur de nombres aléatoires, et d'autre part le ré-échantillonnage des résidus effectué de manière équiprobable. Ainsi, en étudiant l'intervalle de confiance de la différence $p_2^{boot} - p_1^{boot}$, il devient possible de conclure sur le paramètre qui est le moins enclin à varier entre deux approximations.

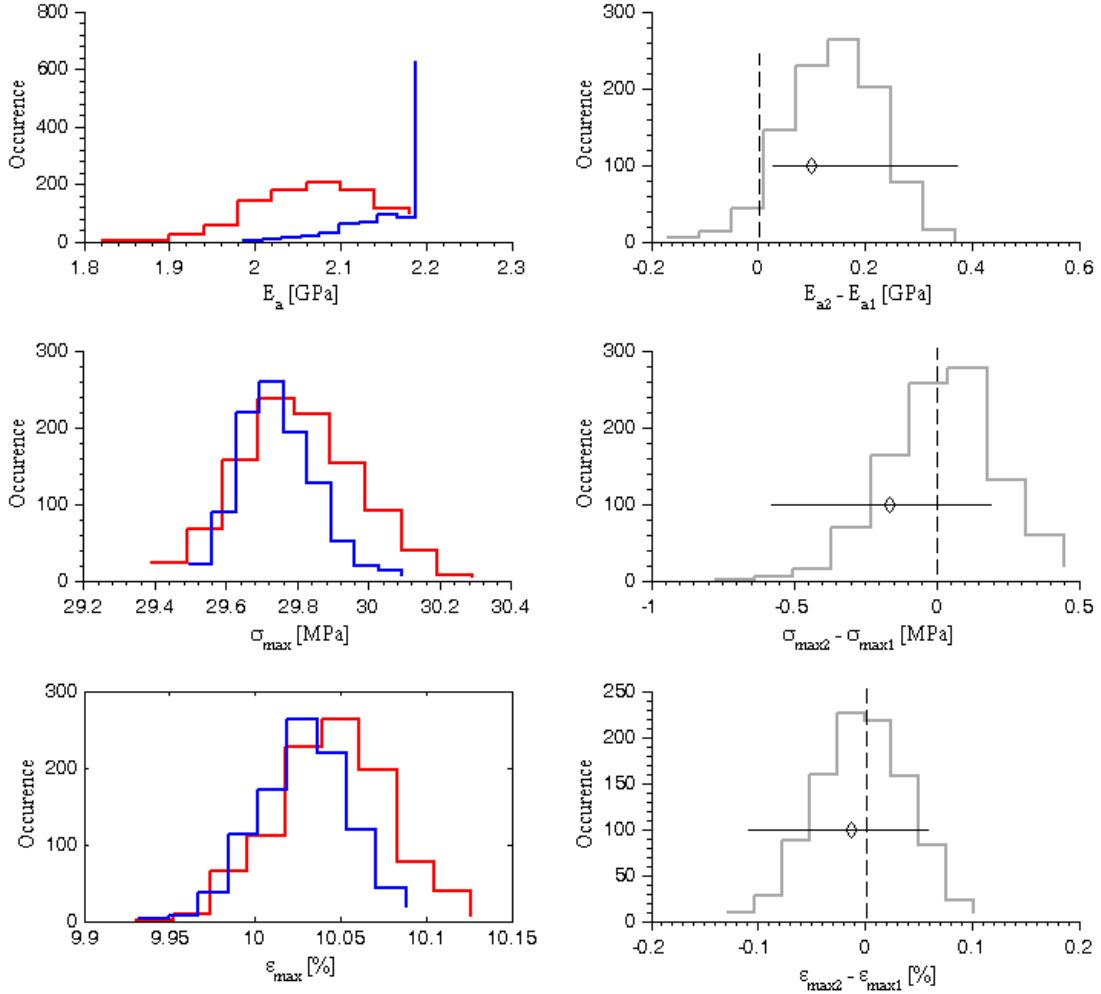


FIGURE 2.42 – Comparaison de la distribution statistique des paramètres identifiés pour 2 analyses Bootstrap - intervalles de confiance à $\alpha = 0.95$ sur les figures de droite - Mesure $J(\delta)$

Cette information est utile car elle permet de savoir après une identification des paramètres de la loi d'interface, quelle(s) est le(s) paramètre(s) sur lequel l'attention doit se porter soit pour une analyse plus fine de son influence sur la sortie du modèle, ou sur l'enrichissement de la base de connaissance le concernant. Les résultats obtenus sont illustrés ci-dessus. Le résultat qui émane de la figure 2.42 est que dans une démarche d'identification des paramètres de la loi de zone cohésive élasto-plastique parfaite pour un essai DCB et avec la mesure $J(\delta)$, le module de Young est le paramètre le plus "instable" entre deux campagnes d'identification. En effet, l'intervalle de confiance à 95% de $E_{a2} - E_{a1}$ ne croise pas la droite vertical qui est située au zéro. À l'opposé, les mêmes intervalles de confiance calculés sur $\sigma_{a2} - \sigma_{a1}$ et $\varepsilon_{a2} - \varepsilon_{a1}$ croisent la droite verticale nulle.

Application à la mesure $\varepsilon(a)$

De nouveau, pour effectuer la même analyse sur la mesure $\varepsilon(a)$, nous prenons celle qui se trouve à la position $X = 80\text{mm}$. La mesure est tronquée de sorte à n'utiliser que certains points de mesure, c'est à dire entre les positions 60 et 100 mm.

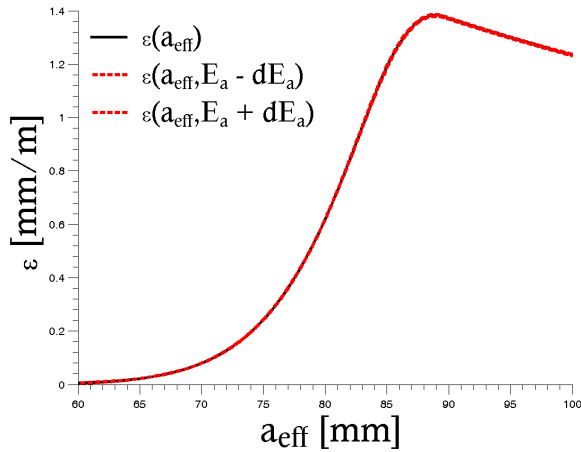


FIGURE 2.43 – Enveloppe $E_a - \varepsilon(a)$

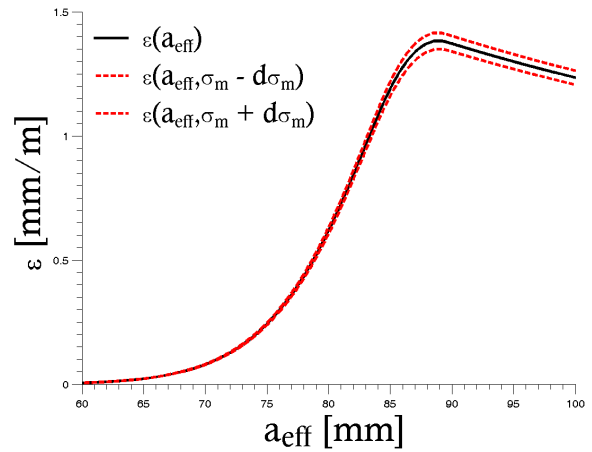


FIGURE 2.44 – Enveloppe $\sigma_{max} - \varepsilon(a)$

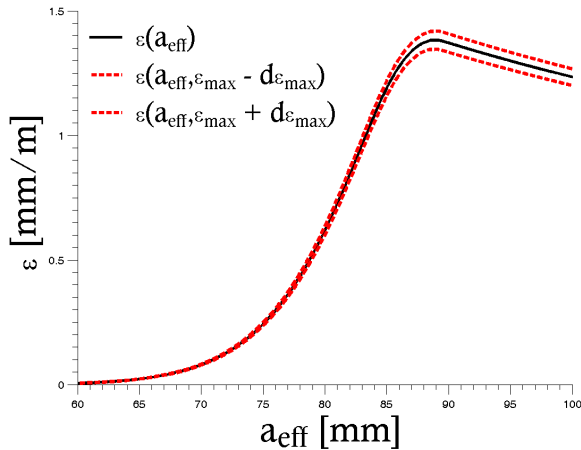


FIGURE 2.45 – Enveloppe $\varepsilon_{max} - \varepsilon(a)$

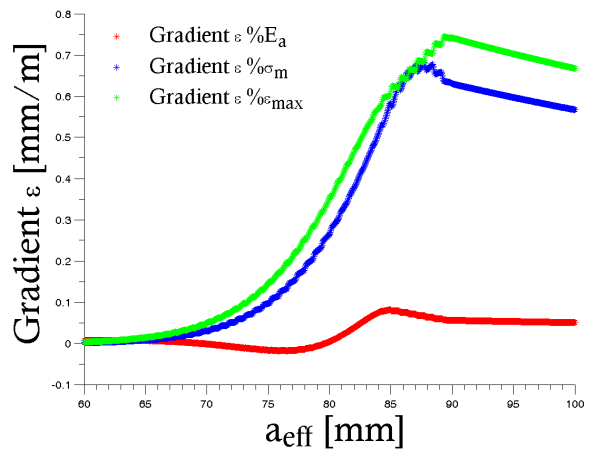


FIGURE 2.46 – Gradient - $\varepsilon(a)$

Ce choix est motivé d'une part par le fait que le début de la courbe n'est le lieu d'aucun processus faisant intervenir les paramètres de la loi de zone cohésive (signal nul), et d'autre part, la partie correspondant à la propagation pour cette mesure, traduit le comportement d'une poutre en flexion pure, donc comme un simple corps d'épreuve. L'analyse de sensibilité révèle que tous les paramètres sont sensibles à la mesure mais avec des proportions différentes comme en atteste la figure 2.46. Toutefois la contrainte à la limite élastique ainsi que le déformation à la rupture, sont plus sensibles dans la phase de la mesure correspondant à la propagation de la fissure. En outre, de la même manière que les mesures macroscopiques précédentes, cette mesure est entachée d'un bruit gaussien d'écart-type 0.5 mm/m pour la synthèse de données expérimentales génériques. Le nuage de points correspondant est illustré à la figure 2.47.

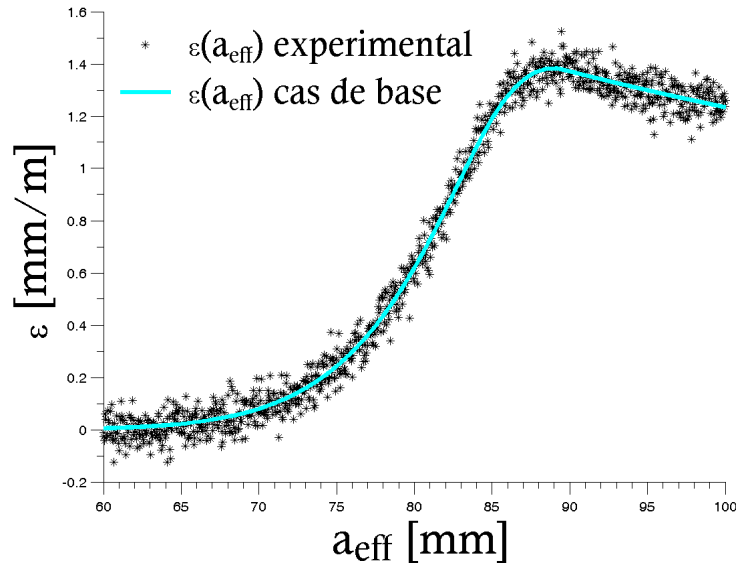


FIGURE 2.47 – Nuage de points expérimental - $\varepsilon(a)$

Par la suite, afin d'effectuer une identification inverse des paramètres de la loi de zone cohésive à travers le modèle et ces mesures expérimentales synthétisées, une minimisation a été faite. Les valeurs des paramètres sont initiées à 9 GPa pour le module de Young, 55 MPa pour la contrainte à la limite élastique et 30% pour la déformation à la rupture. À l'issu de la procédure d'optimisation, les valeurs optimales qui réalisent le minimum sont estimées à 2.02 GPa, 30.02 MPa et 10.01 % avec des intervalles de confiance de [1.43 ; 2.56] GPa, [25.22 ; 34.82] MPa et [8.77 ; 11.25] % respectivement. Remarquons que les paramètres sont bien approximés bien que les intervalles de confiance demeurent assez larges. Lorsque nous avons effectué une analyse Bootstrap dans un souci de comparaison avec ces intervalles de confiance et afin de voir s'ils peuvent être améliorés, il a été remarqué que les valeurs de paramètres optimaux à chaque itération étaient très proches de leur valeurs nominales.

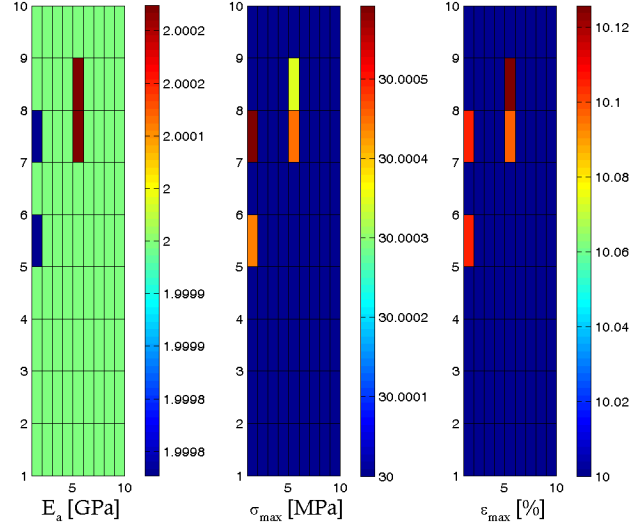


FIGURE 2.48 – Variation des paramètres identifiés durant l'analyse Bootstrap - $\varepsilon(a)$

Cependant, nous nous sommes intéressés à la variation des écart-types asymptotiques à chaque itération de l'analyse Bootstrap afin d'observer si ces dernières étaient aussi "stables" que les paramètres identifiés. En effet si tel est le cas, cela signifierai que cette mesure pourrait être exploitée de manière systématique dans une démarche d'identification et en première approximation. Les résultats sont illustrés ci-dessous et nous observons que les fluctuations des intervalles de confiances à $\alpha = 0.95$ des différents paramètres sont trop faibles pour être considérées comme variables. Donc la recommandation ci-dessous prend un sens.

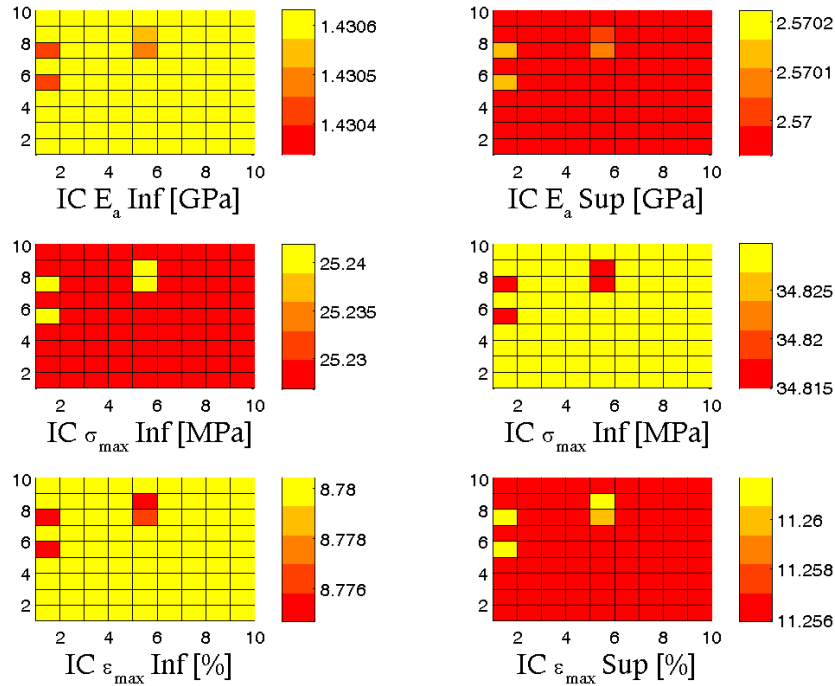


FIGURE 2.49 – Variations des écart-types asymptotiques durant l'analyse Bootstrap - $\varepsilon(a)$

Application à la mesure par corrélation d'image

Concernant la mesure par corrélation d'image, les évolutions de la flèche $v(x)$ et de la rotation $\phi(x)$ sont mesurées pour toutes les positions X allant de -50 à -25 mm du point d'application du chargement, et ce, pour tous les pas de chargement Δ de 0 à 4 mm d'ouverture. L'identification des paramètres de la loi de zone cohésive élasto-plastique parfaite avec cette méthode de mesure est faite à trois différents instants de l'essai DCB en fonction de la phénoménologie opérante, c'est à dire sur les phases élastique, plastique et de propagation. Pour cela les mesures correspondants aux ouvertures $\Delta = 0.05$ mm, $\Delta = 0.2$ mm et $\Delta = 0.4$ mm de la mesure $P(\Delta)$ sont choisies. De nouveau, la même démarche que pour les autres grandeurs a été appliquée. Dans un premier temps une analyse de sensibilité suivie d'une identification des paramètres de loi ainsi qu'une estimation de leur intervalle de confiance avec la matrice de covariance. Ensuite, une analyse Bootstrap est effectuée dans un souci d'améliorer ces intervalles de confiance en réduisant l'effet de la non-linéarité de la fonction coût au voisinage du minimum.

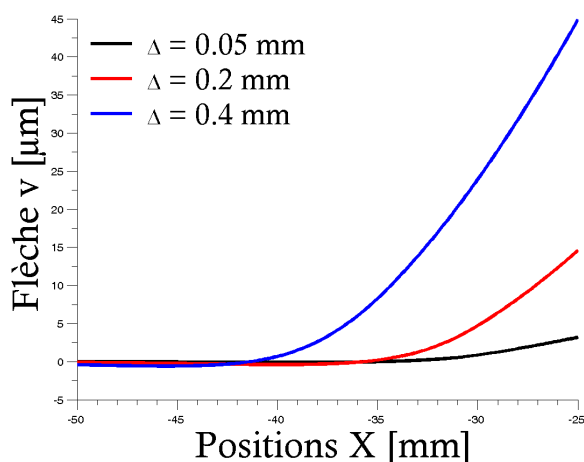


FIGURE 2.50 – Mesure de la flèche dans les phases élastique, plastique et de propagation - DIC

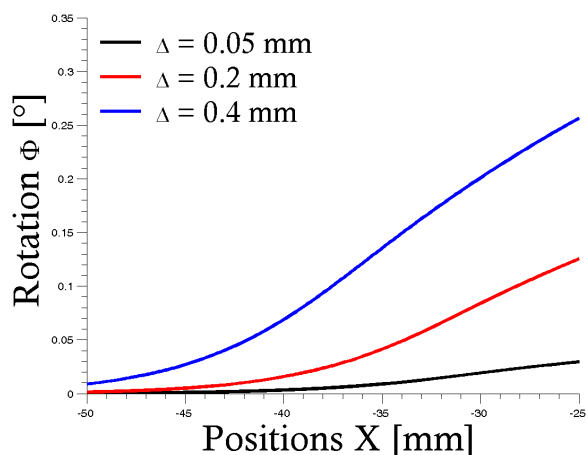


FIGURE 2.51 – Mesure de la rotation dans les phases élastique, plastique et de propagation - DIC

Pour l'identification des paramètres de loi durant la phase élastique, les mesures $v(x)$ et $\phi(x)$ ont été entachées d'un bruit gaussien de $5\mu\text{m}$ et de $5.7.10^{-4}^\circ$ respectivement. Une première tentative d'identification des trois paramètres simultanément n'a pas été fructueuse en ce sens que les intervalles de confiance qui en découlaient étaient infinis. En effet à travers l'analyse de sensibilité (cf. figures 2.52 à 2.57), nous observons que le seul paramètre sensible durant la phase élastique est le module de Young, celles des autres paramètres étant nulles. Ainsi l'inversion de la matrice de covariance pour le calcul des écart-types (cf. relation 2.39) affiche des valeurs infinies. Donc il convient de n'identifier que le module de Young durant cette phase.

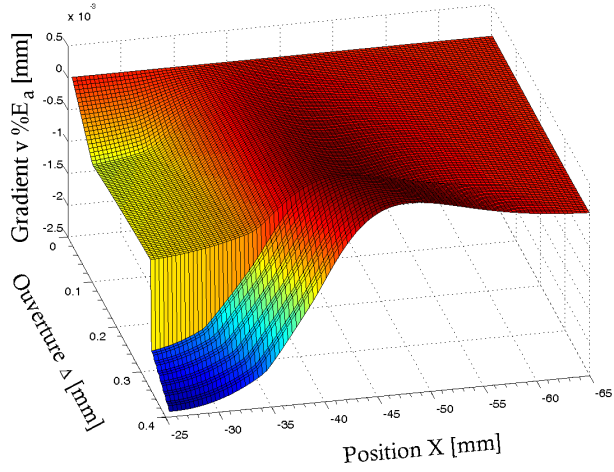


FIGURE 2.52 – Gradient de la flèche par rapport à E_a - DIC

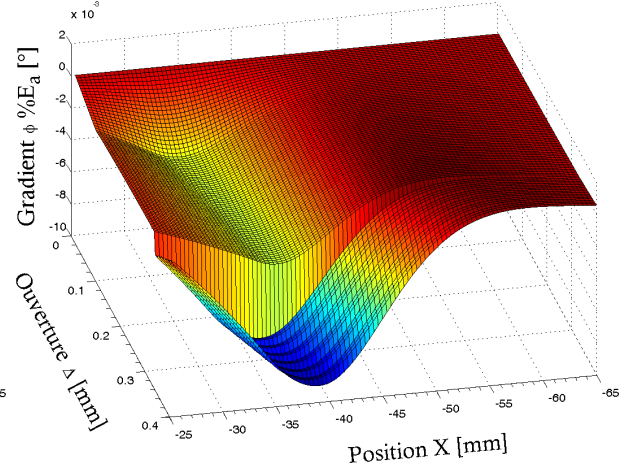


FIGURE 2.53 – Gradient de la rotation par rapport à E_a - DIC

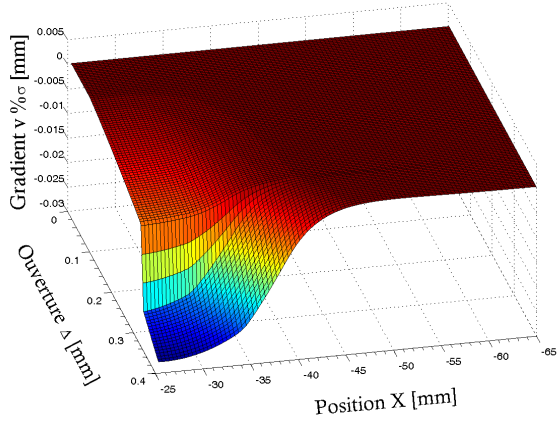


FIGURE 2.54 – Gradient de la flèche par rapport à σ_{max} - DIC

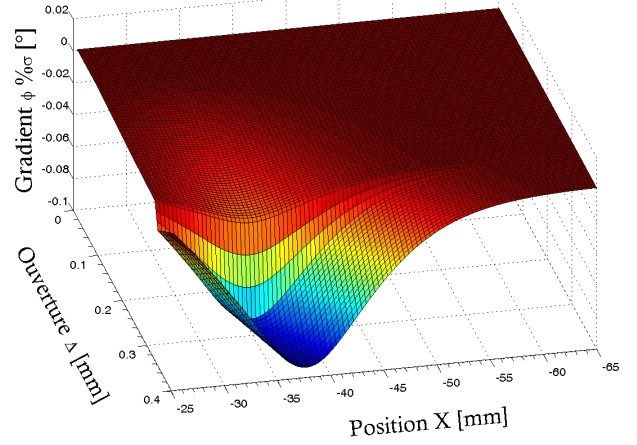


FIGURE 2.55 – Gradient de la rotation par rapport à σ_{max} - DIC

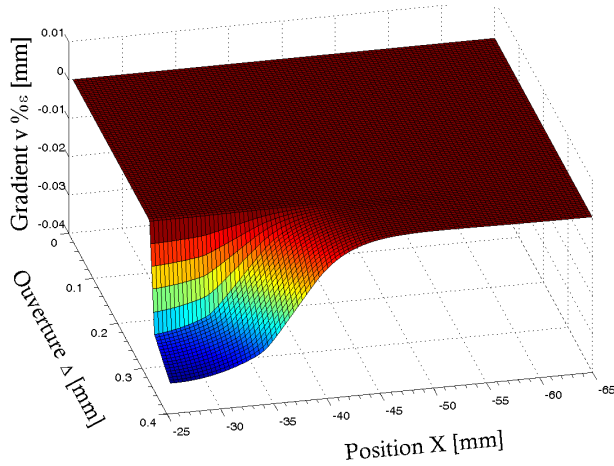


FIGURE 2.56 – Gradient de la flèche par rapport à ϵ_{max} - DIC

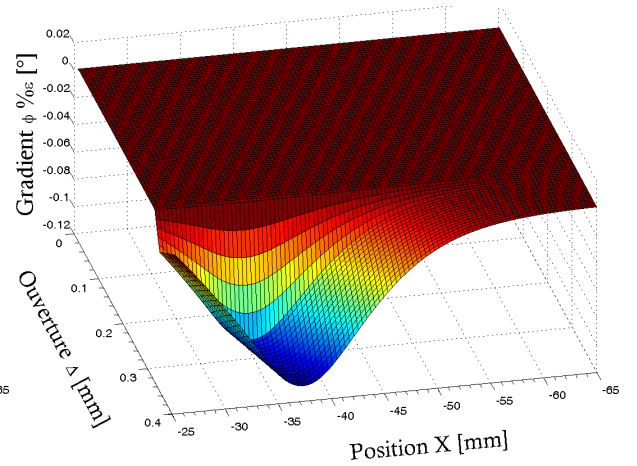


FIGURE 2.57 – Gradient de la rotation par rapport à ϵ_{max} - DIC

Pour amorcer cette identification, le module est initié à $3GPa$ et le minimum local so-

lution a été estimé à 2GPa qui correspond à la valeur nominale. Toutefois les intervalles de confiance asymptotiques à $\alpha = 0.95$ sont de $[1.95; 2.04]\text{GPa}$ avec la flèche et de $[1.88; 2.11]\text{GPa}$ avec la rotation.

En outre, l'analyse Bootstrap n'a pas permis d'affiner les intervalles de confiance en ce sens que les valeurs identifiées à chaque itération sont proches de la valeur nominale. Donc l'étude des 2.5^e et 97.5^e percentiles n'a pas de sens. Par contre les variations des intervalles de confiance asymptotiques à chaque itération ont été étudiées et les résultats obtenus sont illustrés à la figure ci-dessous.

Sur les figures 2.58 et 2.59 les vecteurs des écart-types asymptotiques sont réécrites en matrice et le code couleur représente leur valeur. Nous observons qu'en effet les écart-types varient peu d'une itération à une autre, cette variation étant de l'ordre de $1/10^4$. Un constat demeure que les intervalles de confiance sont plus étroites en utilisant la flèche comme variable dépendante.

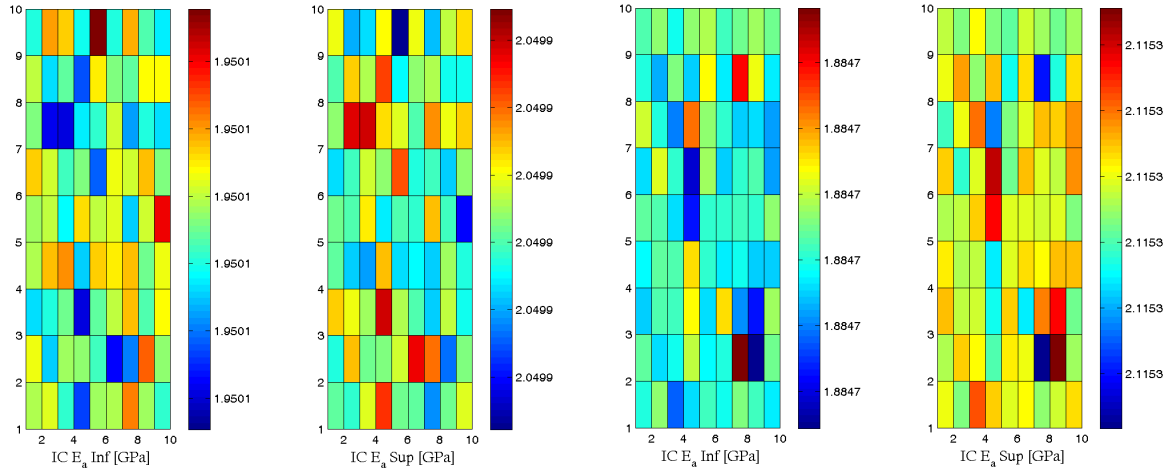


FIGURE 2.58 – Variation des écart-types asymptotiques du module de Young durant l'analyse Bootstrap - phase élastique - flèche trap - phase élastique - rotation - DIC

De la même manière, l'analyse de sensibilité montre que seuls le module de Young et la contrainte à la limite élastique peuvent être identifiés durant la phase plastique. le minimum local solution a permis d'obtenir des valeurs optimaux égales aux valeurs nominales. Toutefois les intervalles de confiance sont de $[1.66; 2.33]\text{GPa}$ et $[28.71; 31.28]\text{MPa}$ respectivement. L'analyse Bootstrap montre que les valeurs identifiées sont toujours proches des valeurs nominales, mais les intervalles de confiance asymptotiques sont également "stationnaires". Quant à la phase de propagation, nous savons de l'analyse de sensibilité, que l'ensemble des paramètres sont influentes. Ainsi ils peuvent être identifiés durant la même

procédure d'identification. Les mesures bruitées prises en guise de valeurs expérimentales synthétiques sont représentées ci-dessous.

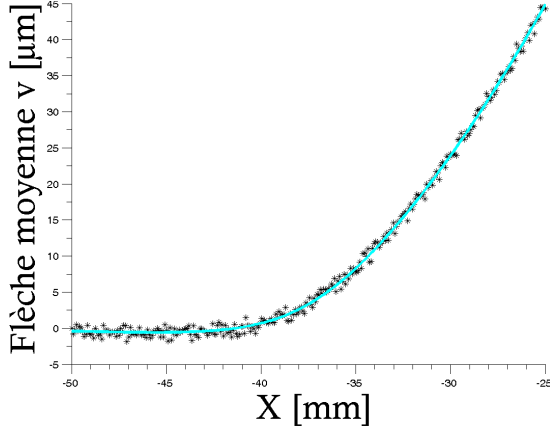


FIGURE 2.60 – Données expérimentales synthétiques - flèche - phase de propagation

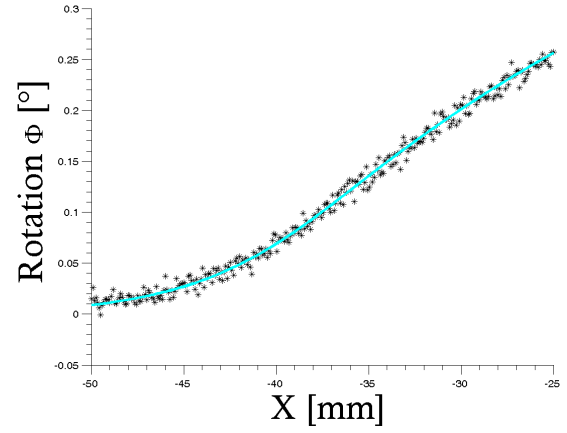


FIGURE 2.61 – Données expérimentales synthétiques - rotation - phase de propagation

Les écarts entre valeurs identifiées et valeurs nominales sont quasi-nuls. Nous avons ici aussi calculé les écart-types à chaque itération de l'analyse Bootstrap aussi bien pour la flèche que pour la rotation prises comme variable dépendante.

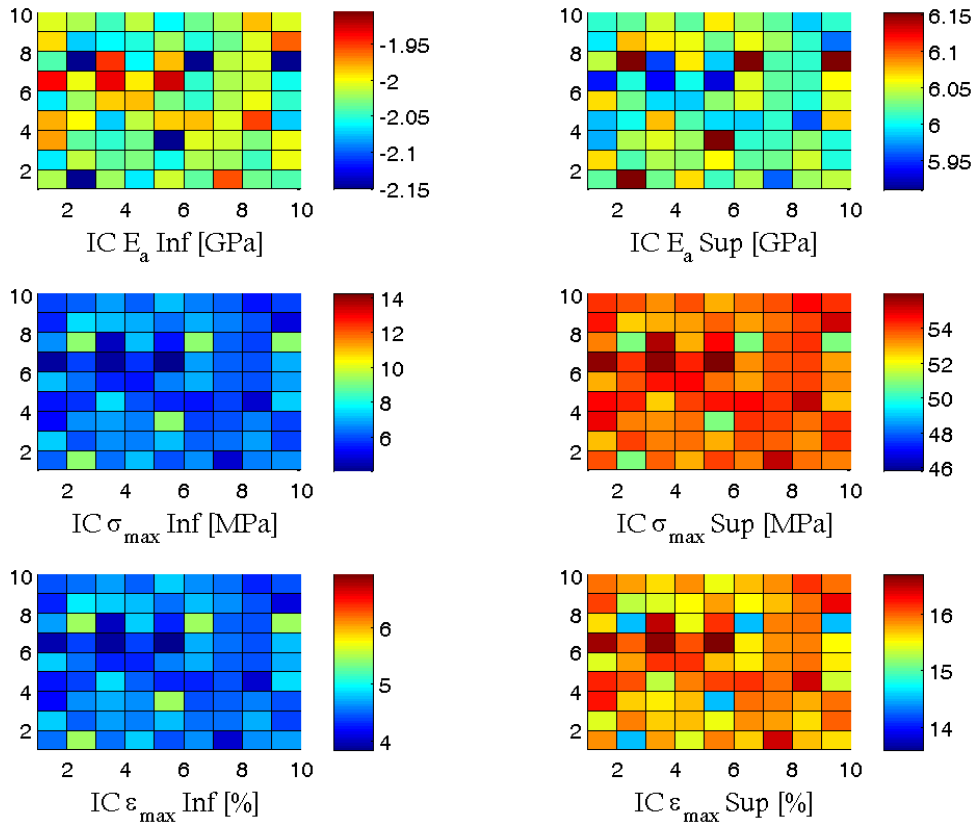


FIGURE 2.62 – Variation des écart-types des trois paramètres identifiés à partir de la rotation et durant la phase de propagation - DIC

Il apparait que l'identification du module de Young et de la contrainte à la limite élastique n'est pas envisageable avec la rotation car pour la première les bornes inférieures sont négatives et pour la seconde, les IC sont plus étroits avec la flèche. En effet avec cette dernière nous obtenons [1.35; 2.64] GPa pour le module de Young, [24.52; 35.47] MPa pour la contrainte et [8.39; 11.60] % pour la déformation à la rupture.

IC	Param	Méthodes de mesure			
		$P(\Delta)$	$J(\delta)$	$\varepsilon(a)$	$v(x)$
Cov	E_a	[1.79–2.27]	[1.92–2.22]	[1.43–2.56]	[1.55–2.44]
	σ_{max}	[29.09–30.90]	[29.42–30.05]	[25.22–34.82]	[20.52–39.47]
	ε_{max}	[9.81–10.21]	[9.97–10.09]	[8.77–11.25]	[5.49–9.66]
Boot	E_a	[1.99–2.02]	[1.91–2.20]	-	-
	σ_{max}	[29.99–30.08]	[29.44–30.09]	-	-
	ε_{max}	[9.96–10.06]	[9.96–10.10]	-	-

TABLE 2.2 – Comparaison des intervalles de confiance avec la covariance et le bootstrap - les unités sont en [GPa] pour le module de Young - [MPa] pour la contrainte et [%] pour la déformation

2.4 Analyse de robustesse

Les lois d'interface sont pour la plupart des cas identifiées au moyen d'algorithme d'optimisation itérative qui minimise la distance entre les observations et les résultats de modèle par l'intermédiaire de la minimisation d'une fonction coût. Pour le cas de l'essai DCB, une loi d'interface est prédéfinie pour calculer les différentes grandeurs macroscopiques, réponse du spécimen ici à une sollicitation en mode I d'ouverture, à partir du modèle correspondant. Toutefois, cette loi présumée est choisie de manière empirique en fonction du type de comportement de l'interface attendu.

Cette approche présente deux principales limitations, la première consiste sur le choix de la loi d'interface en fonction du comportement intrinsèque de l'interface. En effet, ce choix n'est pas nécessairement représentatif du comportement de l'interface en ce sens qu'elle diffère selon qu'il est étudié seul (i.e. en volumique) ou au sein d'un assemblage. La seconde limitation fait référence à la nature des lois de zone cohésive.

En effet, le choix d'une forme géométrique de loi ne correspondant pas au type de comportement de l'interface, introduit forcément un biais sur la réponse du spécimen ; Nous

nous intéressons ici à l'analyse de robustesse du modèle semi-analytique développé dans ce chapitre en identifiant les paramètres d'une loi élasto-plastique avec les résultats de la simulation de l'essai DCB en présence d'une loi en réalité bi-linéaire. La loi bi-linéaire utilisée est également définie par trois paramètres que sont le module de Young, la contrainte à la limite élastique et la déformation à la rupture. Leur valeur sont choisies de sorte que cette loi ait le même taux de restitution critique de l'énergie que celle élasto-plastique i.e. $G_c = 555 J.m^{-2}$.

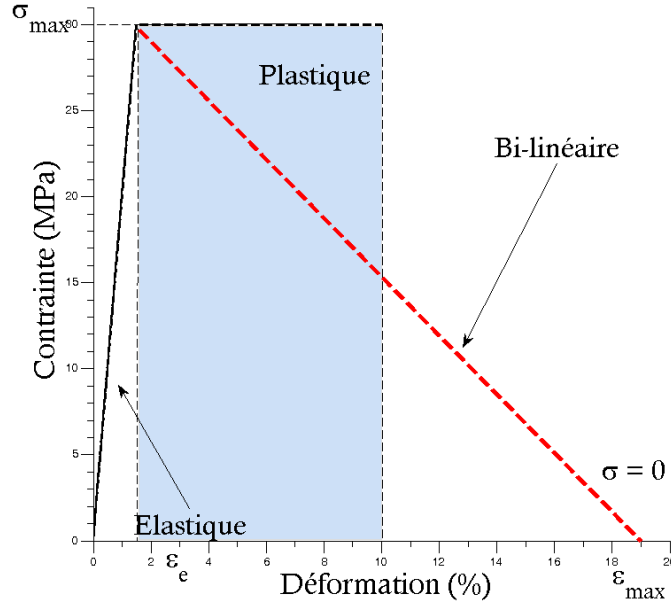


FIGURE 2.63 – Lois de zone cohésive élasto-plastique et bilinéaire avec $G_c = 555 J.m^{-2}$

Il convient de noter au vue de la figure ci-dessous, que ces deux lois ont par construction, un comportement élastique identique. Des données des mesures macroscopiques de l'essai DCB en mode I d'ouverture sont générées et stockées à partir de la loi bi-linéaire. La même procédure d'identification que celle utilisée tout au long de ce chapitre, c'est à dire au sens des moindres carrés, est employée pour identifier les paramètres de la loi de zone cohésive avec le modèle semi-analytique, la loi élasto-plastique prise comme loi d'interface.

La démarche de l'étude de robustesse évoquée ci-dessus est appliquée dans un premier temps à la mesure $P(\Delta)$. Pour toutes les mesures, les valeurs des paramètres de la loi d'interface sont initiées à $E_a = 3 GPa$, $\sigma_{max} = 25 MPa$ et $\varepsilon_{max} = 30\%$.

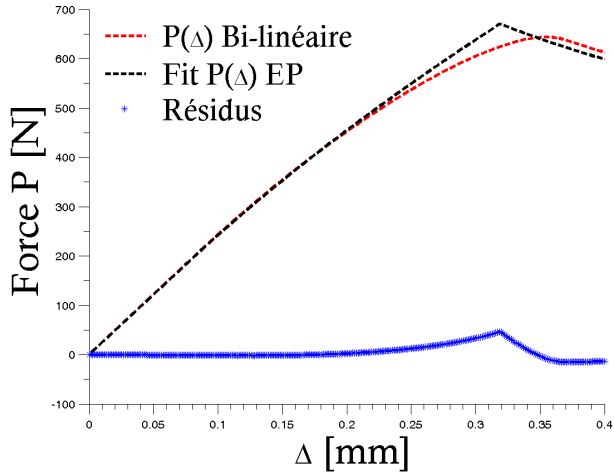


FIGURE 2.64 – Robustesse sur la mesure $P(\Delta)$: Tracé de la réponse $P(\Delta)$ bi-linéaire et du résultat de l'identification avec la loi élasto-plastique ainsi que la variation des résidus

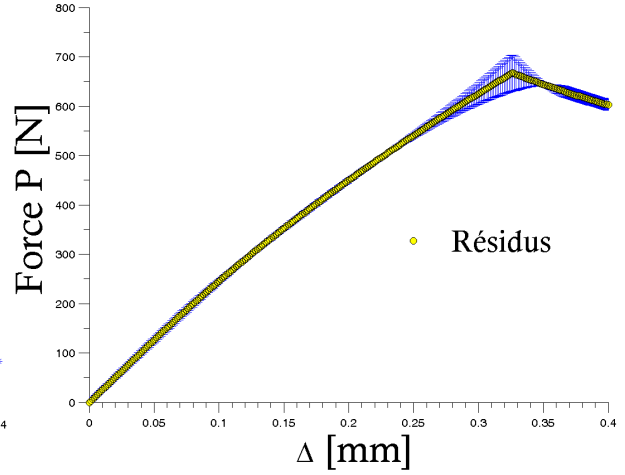


FIGURE 2.65 – Résidus de l'analyse de robustesse sur $P(\Delta)$

Sur la courbe 2.64, nous observons que la partie élastique ainsi que la partie propagation sont convenablement identifiées au vue des résidus représentés sur la même figure et ceux sur la figure 2.65. Toutefois, la partie plastique de la loi élasto-plastique ne permet pas une bonne reproduction de la mesure sur cette phase : la mesure $P(\Delta)$ n'est pas robuste.

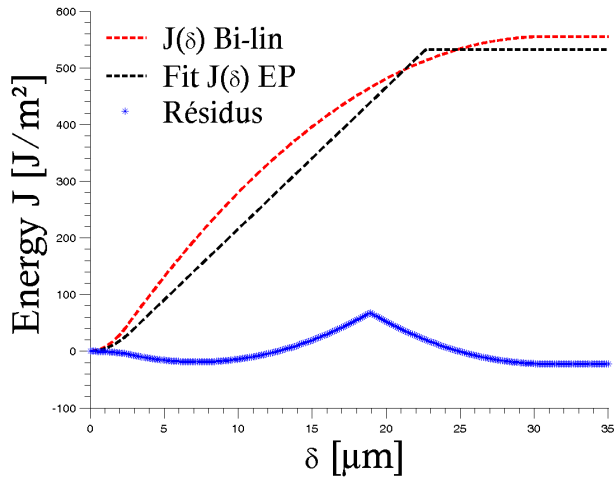


FIGURE 2.66 – Robustesse sur la mesure $J(\delta)$: Tracé de la réponse $J(\delta)$ bi-linéaire et du résultat de l'identification avec la loi élasto-plastique ainsi que la variation des résidus

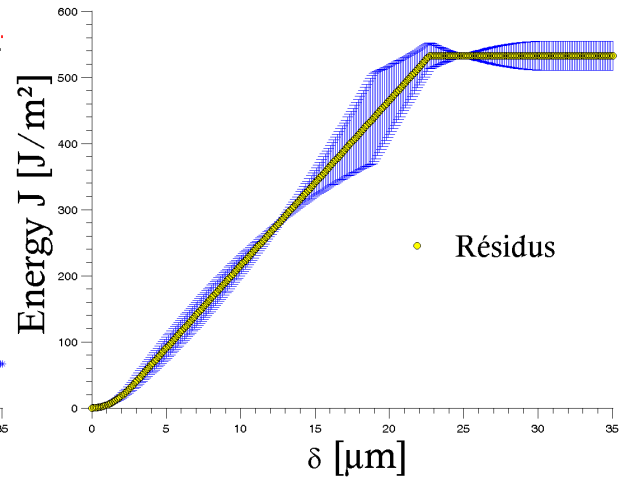


FIGURE 2.67 – Résidus de l'analyse de robustesse sur $J(\delta)$

Cependant, pour la mesure $J(\delta)$, les résidus sur l'ensemble des phases de comportement révèlent que l'identification d'une loi élasto-plastique avec les données d'une loi d'interface

bi-linéaire n'est pas envisageable. En effet cette méthode bien qu'elle soit réputée pour la mesure directe d'une loi d'interface pour les essais de type DCB, n'est pas enclin à être utilisée pour une identification inverse dans le cas d'une loi différente ce qui montre sa robustesse (cf. 2.67). Quant à la (BSM) c'est à dire la mesure des déformations de peau par jauges extensométriques, celle située à la position $X = 80mm$ a été choisie pour l'étude. Ce choix s'est fait arbitrairement car en effet, chacune des mesures de jauges aurait pu être choisie pour mener l'analyse de robustesse pour ce peu qu'elle soit suffisamment éloignée de la zone non collée en début d'éprouvette. Si tel aurait été le cas, la phase d'amorçage de la fissure serait inexistante. Pour cette mesure, l'analyse de robustesse affiche la même tendance que celle de $P(\Delta)$. En effet les parties correspondants à l'amorçage (apparition de la process zone) et celle traduisant une zone fissurée sont bien reproduites. Toutefois, les maxima de résidus sont observés à la transition de la fin de la zone plastique à la zone de propagation : la méthode BSM n'est pas non plus robuste.

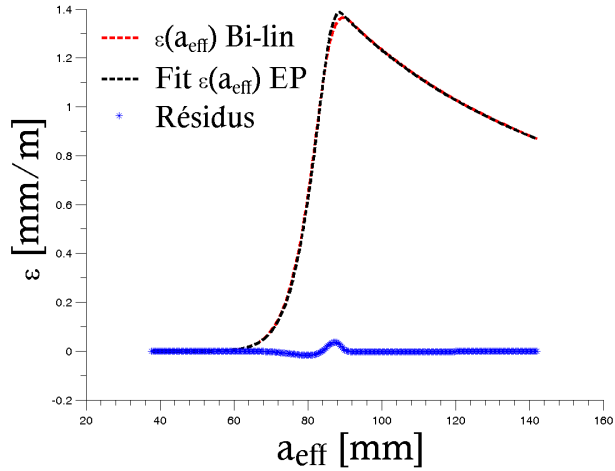


FIGURE 2.68 – Robustesse sur la mesure $\varepsilon(a)$: Tracé de la réponse $\varepsilon(a)$ bi-linéaire et du résultat de l'identification avec la loi élasto-plastique ainsi que la variation des résidus

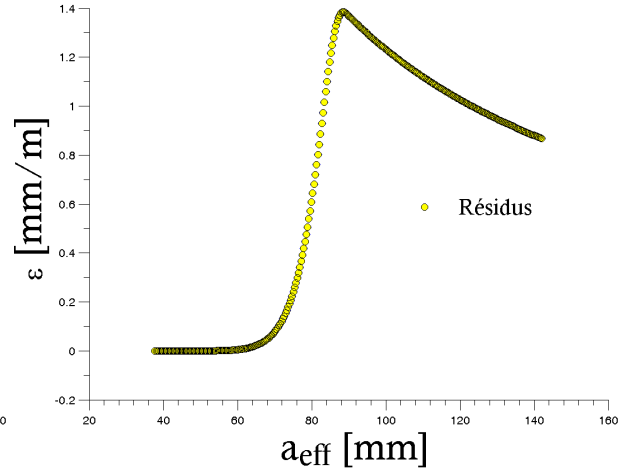


FIGURE 2.69 – Résidus de l'analyse de robustesse sur $\varepsilon(a)$

Conclusions

Dans ce chapitre, il a été question de mener une analyse comparative des méthodes de mesure les plus usitées quant à l'identification des lois d'interface au sein des assemblages collés. Cette étude purement numérique a été effectuée dans le cas de l'essai DCB sous un chargement monotone et en mode I d'ouverture. La loi de zone cohésive considérée est du type élasto-plastique dont les influences des paramètres sur les mesures macroscopiques sont connues. Un modèle semi-analytique a été développé pour reproduire l'essai DCB de

manière virtuelle avec les paramètres reproduisant au mieux les conditions réelles des essais. Dans la démarche d'identification des paramètres de la loi d'interface, des données expérimentales synthétiques ont été générées en rajoutant aux données issues de ce modèle, un bruit gaussien. Ainsi les paramètres "réelles" sont connus ce qui permet d'étudier les dispersions statistiques des différents paramètres de loi. La procédure d'identification est faite par la minimisation d'une fonction coût, celle des moindres carrées avec l'algorithme de Levenberg-Marquardt. Le principal aspect étudié est la comparaison des intervalles de confiance obtenue d'une part avec la méthode asymptotique qui fait appel à la matrice de covariance, et d'autre part avec la méthode de Bootstrap qui permet l'étude des intervalles de confiance en "reproduisant" la dispersion statistique des mesures dans le cas où elles auraient été répétées. Par la suite, une analyse de robustesse a permis de discriminer la forme de la loi d'interface dans la procédure d'identification numérique.

Pour la mesure $P(\Delta)$, il convient de noter qu'elle permet une approximation du taux de restitution critique de l'énergie grâce à la relation analytique qui relie l'ouverture Δ et la force P en phase de propagation grâce au G_c et pour les lois d'interface du type élasto-plastique (cf. relation 2.24). La phase élastique linéaire permet également d'approximer la raideur initiale. Les intervalles de confiance obtenus lors de l'identification de la loi d'interface sont réalistes et peuvent être affinés par une analyse fréquentiste telle que le Bootstrap. Toutefois, la principale limitation de la méthode de mesure réside dans le fait qu'elle n'est pas robuste.

Quant à la mesure $J(\delta)$, elle permet une identification fine des paramètres de loi d'interface pour le peu qu'elle soit connue (ce qui n'est pas le souvent le cas). Les intervalles de confiance sont étroites de sorte à ce que une analyse Bootstrap n'est pas nécessaire. Toutefois, cette dernière permet d'étudier la "stationnarité" des paramètres c'est à dire qu'entre deux descriptions statistiques de la mesure, quels sont les paramètres qui sont susceptibles de changer en terme de valeur identifiée. Cette analyse complémentaire est applicable à chaque mesure ayant un sens physique et permet d'identifier les paramètres les plus fluctuants. Dans notre cas et avec cette mesure $J(\delta)$, il s'agit du module de Young de la loi d'interface. Cette mesure est robuste au sens que l'identification d'une loi d'interface différente de celle réelle, affiche des résidus considérables. Donc elle est celle qui est préconisée pour discriminer la forme géométrique de la loi une fois qu'elle a été choisie.

Les mesures ε_a et de la corrélation d'image, lorsqu'elles sont employées pour identifier par une procédure d'optimisation les paramètres d'une loi d'interface, sont très performantes avec ce modèle. Toutefois, les intervalles de confiance obtenus dans ce cas sont assez larges

mais stationnaires. Par stationnaires nous entendons que lorsque nous utilisons l'analyse Bootstrap pour une description plus fine des intervalles de confiance (les paramètres identifiés étant toujours très proches de ceux nominaux), ces derniers fluctuent peu au cours des itérations. Cela confère à ces méthodes une certaine stabilité quant aux paramètres identifiés et leur intervalle de confiance qui demeurent néanmoins grossiers. À terme, ces deux méthodes permettront d'avoir un premier aperçu des valeurs des paramètres recherchés et de leur intervalle de confiance mais seulement en première approximation car leur non-robustesse fait qu'elles ne permettent pas de discriminer la forme de loi employée pour reproduire le comportement de l'interface.

En outre notons que l'identification des paramètres de loi avec la mesure par corrélation d'image devrait plutôt se faire en utilisant les champs de déplacement plutôt que la rotation au vue des intervalles de confiance qu'elle suggère.

Somme faite, la conclusion qui émane de notre étude numérique, est qu'aucune de ces méthodes utilisées seule, ne permet une identification des paramètres de loi d'interface dans le cas de l'essai DCB lors d'un chargement monotone. Mais chacune d'entre elle présente un avantage dans ce processus. En effet, au vue de ces résultats, une démarche systématique qui pourrait être adoptée face à des données expérimentales réelles consisterait dans un premier temps à approximer la raideur initiale et le taux de restitution de l'énergie critique G_c grâce à la mesure $P(\Delta)$.

	$P(\Delta)$	$J(\delta)$	$\varepsilon(a)$	$v(x)$
Sensibilité	***	***	***	***
Identification	**	***	***	***
I.confiance	**	***	*	*
Robustesse	*	***	*	*
Stationnarité IC	*	*	***	**

TABLE 2.3 – Tableau comparatif des performances des différentes mesures de l'essai DCB en mode I d'ouverture et en chargement monotone pour les lois d'interface du type élasto-plastique

En second lieu, l'usage de la mesure $J(\delta)$ permettra de discriminer la forme de la loi jusqu'à

l'obtention d'une géométrie convenable et ayant le même G_c obtenue avec la première mesure. Cette dernière peut être comparée avec la dérivation de l'énergie J par rapport à l'ouverture en front de fissure δ mesurée par corrélation d'image par exemple. Et enfin, une procédure d'identification inverse numérique entre le modèle et la loi ainsi obtenue permettrait de faire un recalibrage des paramètres ainsi que les intervalles de confiance associés. Il convient également de notifier que la définition de la forme de loi d'interface et des phénoménologies associés est l'aspect le plus essentiel dans une démarche d'identification surtout pour les mesures BSM et par corrélation d'image.

Néanmoins, notons que ces résultats ont été obtenus avec une loi du type élasto-plastique et pour un chargement monotone. Aucune considération sur la dépendance au temps de la loi d'interface n'a été prise en compte, ni l'aspect des chargements complexes. La modélisation de l'essai dans le cas de ce type de chargement est l'objet du prochain chapitre.

Chapitre 3

Contribution dans la modélisation de
l'essai DCB - Fissuration en mode I -
Cas des interfaces élasto-plastiques

Introduction

Dans le chapitre 2, nous avons étudié l'identification des paramètres de loi de zone cohésive prise comme loi d'interface durant un essai DCB sous un chargement monotone par la comparaison des intervalles de confiance des paramètres identifiés pour les différentes méthodes de mesures que sont $P(\Delta)$, $J(\delta)$, $\varepsilon(a)$ et celles par corrélation d'image $[v(x), \phi(x)]$. Les lois de zone cohésive considérées jusque là ne prenaient pas en compte le cas des chargements non monotones. Ces types de chargement sont néanmoins importants pour la tenue en service des structures contenant des joints d'adhésif, d'autant plus qu'ils sont souvent une succession / combinaison de chargements monotones, cycliques et stationnaires entre autres. De ce fait, il est primordial d'être en mesure de décrire le comportement des joints d'adhésif face à ce type de sollicitations, mais également de pouvoir prédire la ténacité de la structure. Pour cela, la formulation des lois de zone cohésive doit être adaptée. L'objectif de ce chapitre est la proposition d'une modélisation de l'essai DCB avec des lois de zone cohésive permettant la prise en compte d'un chargement cyclique à décharges partielles.

Dans la suite, nous présentons dans un premier temps les deux approches de lois de zone cohésive retenues pour la prise en compte des chargements non monotones : l'approche à raideur sécante et l'approche à raideur tangente. Le modèle semi-analytique développé précédemment, ne permettant pas de prendre en compte les chargements non-monotones, nous présenterons dans un second temps la stratégie de modélisation du modèle aux différences finies développées à cet effet ainsi que les résultats obtenus. **Nous nous restreignons ici au cas unidimensionnel.**

3.1 Lois d'interface

Dans ce chapitre, nous considérons une loi de zone cohésive tri-linéaire décrite par cinq paramètres : la partie élastique est définie par le module de Young E_a et la contrainte à la limite élastique σ_{max} , la phase non-linéaire de la loi est segmentée en deux parties linéaires définies par deux paramètres σ_r et ε_r et enfin la déformation à la rupture ε_{max} à laquelle le taux de restitution critique de l'énergie est atteinte et est synonyme de propagation de fissure. Leur valeur respective sont reportées au Tableau 3.1.

	E_a	σ_{max}	σ_r	ε_r	ε_{max}
Valeurs	2	30	40	6.6	10.43

TABLE 3.1 – Valeurs des paramètres de la loi de zone cohésive tri-linéaire : Module [GPa]
- Contrainte [MPa] - Déformation [%]

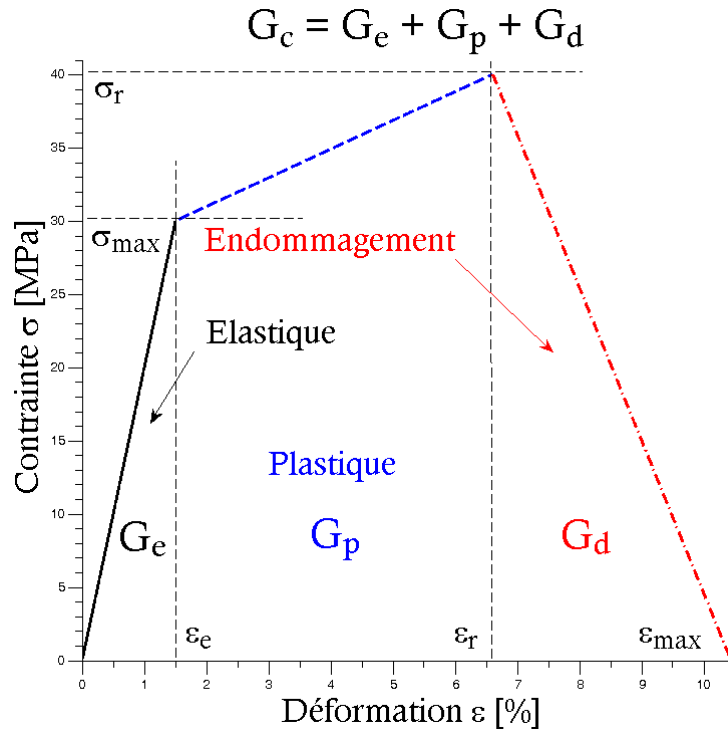


FIGURE 3.1 – Loi de zone cohésive tri-linéaire

Il convient de définir dans quelle mesure, la loi de zone cohésive prend en compte les décharges partielles. L'approche par raideur sécante les prend en compte à travers un comportement quasi-fragile. Lors d'une décharge, le chemin suivi par le point courant (σ, ε) sur la loi d'interface, suit la droite sécante à l'origine qui lui est associée et il n'y a donc pas de prise en compte de déformations résiduelles.

Deux cas de figures sont à considérées en fonction du moment où la décharge survient : le premier correspond à lorsqu'elle se produit durant la phase élastique, le second si elle survient dans la phase plastique/endommagement et/ou durant la phase de propagation. Pour le premier cas, la réponse est confondue avec celle élastique linéaire car sur la loi de zone cohésive cela revient à parcourir la phase linéaire en sens opposé. Le second cas quant à lui, apparait lorsque la phase élastique est révolue, dès lors, la courbe de réponse converge vers l'origine en suivant la droite sécante correspondante. Dans la configuration des lois de zone cohésive à raideur sécante, notons que l'endommagement est pris en compte par la variation de la raideur sécante apparente au sens de la définition de Kachanov [33], c'est à dire par la dégradation des propriétés mécaniques, ici, la raideur sécante effective.

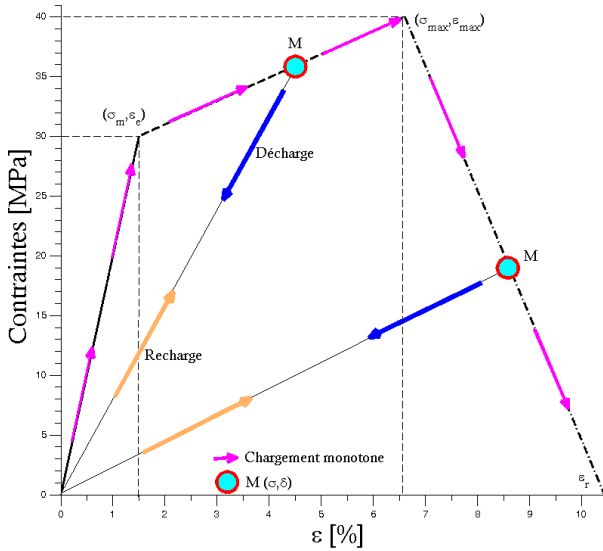


FIGURE 3.2 – Loi d'interface à raideur sé-

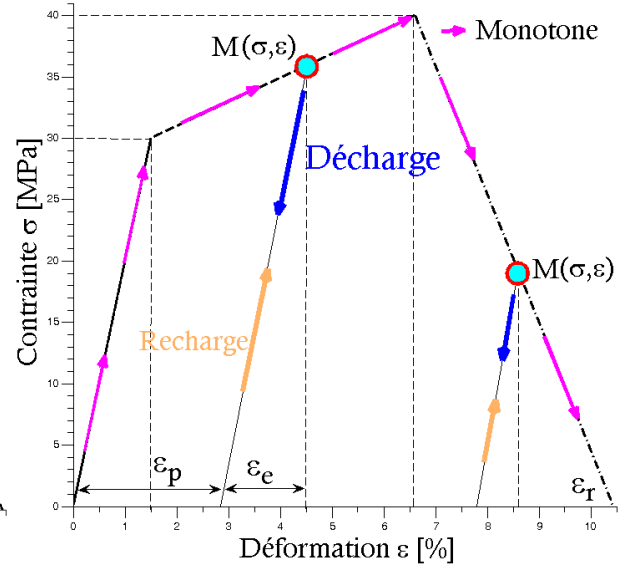


FIGURE 3.3 – Loi d'interface à raideur tan-

gente. En ce qui concerne l'approche à raideur tangente, l'endommagement est pris en compte de la même manière que pour celle à raideur sécante. La seule différence réside sur la prise en compte des déplacements résiduels plastiques. Cela se traduit pour le point courant (σ, ε) sur la loi de zone cohésive et durant une décharge, par la diminution de la contrainte et du saut de déplacement à l'interface suivant la droite " tangente " à la raideur initiale. Il apparait donc la déformation résiduelle ε_p de sorte que la déformation totale ε soit égale à la somme du déplacement élastique (déplacement effectif à la fin de la phase élastique de la loi d'interface) et de ε_p .

3.2 Modélisation de l'essai DCB en mode I - Cas des chargements non monotones

Le modèle semi analytique développé au chapitre 2 ne permet pas de prendre en compte les chargements non monotones. La formulation qui était proposée permettait de calculer l'évolution des champs mécaniques par la résolution d'un problème inverse qui cherche les coefficients intervenant dans la solution analytique en déplacements, les valeurs de la rotation et de la force qui assurent le respect des conditions aux limites et des conditions supplémentaires en déplacements à la jonction des zones élastique, plastique et en pointe de fissure. Cette approche ne fonctionne que pour des chargements monotones. **Pour des chargements non-monotones, le besoin de prendre en compte les déformations résiduelles dans la résolution des équations de champs et de les garder en mémoire pour les phases de recharge, suggère une nouvelle formulation. Pour cela, l'essai DCB est modélisé ici, par un schéma aux différences finies.**

Toujours en considérant que la contrainte de pelage est reliée à la flèche et au déplacement plastique par une relation de proportionnalité $\sigma(x) = k[v(x) - v_p(x)]$, où k est la raideur d'interface introduite par Winkler, les équations de champs pour l'approche à raideur tangente s'écrivent comme suit :

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} + kv(x) = kv_p(x) \quad (3.1)$$

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} - \frac{M(x)}{EI} - \frac{k}{\kappa GS} v(x) = \frac{-k}{\kappa GS} v_p(x) \quad (3.2)$$

Le système d'équations différentielles au second ordre ci-dessus a comme inconnues le moment fléchissant $M(x)$, la flèche $v(x)$ et le déplacement plastique $v_p(x)$ en tout point x de la couche d'adhésif suivant la direction longitudinale. Notons qu'ici nous ne présentons que la modélisation de l'essai DCB par une approche à raideur tangente en ce sens qu'elle équivaut à celle par raideur sécante pour des déplacements plastiques nuls. Cela se traduit dans la formulation du modèle, par des seconds termes nuls pour les équations matricielles directrices et celles qui traduisent les conditions aux bords. Un maillage régulier de la couche d'adhésif suivant la direction longitudinale x a été effectué avec un pas Δx . Ainsi la position du $i + 1^e$ nœud est $x_i + \Delta x$. En outre, les équations 3.1 et 3.2 sont réécrites avec un schéma aux différences finies centrées pour les dérivées d'ordre 2 et un schéma aux différences finies décentré à gauche pour les dérivées du premier ordre. En posant pour une variable B quelconque : $B(x_i) = B_i$ et $B(x_i + \Delta x) = B_{i+1}$, il vient que :

$$M_{i-1} - 2M_i + \Delta x^2 k v_i + M_{i+1} = k \Delta x^2 v_{p_i} \quad (3.3)$$

$$v_{i-1} - \frac{\Delta x^2}{EI} M_i - \left[2 + \frac{\Delta x^2 k}{\kappa GS} v_i \right] + v_{i+1} = \frac{\Delta x^2 k}{\kappa GS} v_{p_i} \quad (3.4)$$

Les équations 3.3 et 3.4 sont représentées sous la forme d'une équation matricielle qui s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & \frac{k \Delta x^2}{\kappa GS} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\Delta x^2}{EI} & -\left[2 + \frac{\Delta x^2 k}{\kappa GS} v_i \right] & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{i-1} \\ v_{i-1} \\ M_i \\ v_i \\ M_{i+1} \\ v_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \Delta x^2 v_{p_i} \\ -\frac{k \Delta x^2}{\kappa GS} v_{p_i} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Le système matriciel 3.5 est résolu pour chaque pas de chargement en ouverture. Par inversion, nous en déduisons les inconnues que sont le moment fléchissant et la flèche. En utilisant les équations 2.3 et 2.4 du chapitre 2, nous en déduisons l'effort tranchant $T(x)$, la rotation $\phi(x)$ et la force P au point d'application du chargement. La raideur dans le cas d'une loi d'interface à raideur tangente, se détermine de deux manières différentes selon que le chargement est en phase de charge ou de décharge. Dans le premier cas, elle est calculée à partir de la relation de proportionnalité entre la contrainte de pelage et la flèche, de l'approche à raideur sécante i.e. $\sigma(x) = k v(x)$, tout en se basant sur les équations constitutives de la loi cohésive ; Notons que la même technique est aussi utilisée pour le calcul des champs mécaniques lors d'une décharge avec l'approche à raideur sécante. Dans le second cas, la raideur n'a pas à être calculée car elle est identique à celle de la phase élastique de la loi d'interface. Cependant le déplacement plastique nécessite d'être mis à jour et cela s'effectue au moyen de la relation $\sigma(x) = k [v(x) - v_p(x)]$. Nous écrivons donc :

$$v_{p_i} = \frac{\sigma_i}{k} - v_i \quad (3.6)$$

3.2.1 Conditions aux bords

Conditions au bord droit

Maintenant, nous introduisons les conditions aux bords de notre modèle aux différences finies. Le bord droit correspond au point d'application du chargement en déplacement imposé Δ . Le maillage contenant N nœuds alors connaissant la flèche v_N , sa dérivée première ainsi que la longueur de fissure a , le déplacement imposé est connu et s'écrit :

$$\Delta = \frac{Pa}{\kappa GS} + \frac{Pa^3}{3EI} + a \frac{dv}{dx} + v_N \quad (3.7)$$

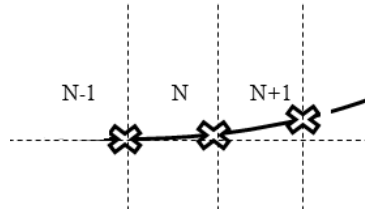


FIGURE 3.4 – Illustration du Nœud virtuel $N + 1$

La connaissance de la première dérivée du déplacement au nœud N requiert l'usage de la technique dite du nœud virtuel. En effet en considérant qu'il existe un nœud $N + 1^*$ de sorte que $x_{N+1}^* = x_N + \Delta x$, nous obtenons à l'aide d'une écriture aux différences finies centrées que :

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v_{N+1}^* - v_{N-1}}{2\Delta x} \quad (3.8)$$

En introduisant 3.8 dans 3.4 appliquée aux nœuds $N - 1$, N et $N + 1^*$, il vient que :

$$\frac{dv}{dx} = \left[\frac{1}{dx} + \frac{kdx}{2\kappa GS} \right] v_N + \frac{dx}{2EI} M_N - \frac{1}{dx} v_{N-1} - \frac{kdx}{2\kappa GS} v_{p_N} \quad (3.9)$$

En outre, en remarquant qu'au point d'application du chargement, $M_N = aP$, alors la relation 3.7 peut s'écrire comme :

$$\left[\frac{dx}{\kappa GS} + \frac{a^2 dx}{3EI} + \frac{adx^2}{2EI} \right] M_N + \left[a + dx + \frac{akdx^2}{2\kappa GS} \right] v_N - v_{N-1} = \Delta \cdot dx + \frac{akdx^2}{2\kappa GS} v_{p_N} \quad (3.10)$$

De la même manière, nous pouvons également écrire $M_N = aT_N$. En utilisant l'équation 2.1, il vient :

$$T_N = \frac{M_{N-1} - M_{N+1}^*}{2dx} \quad (3.11)$$

De nouveau, l'équation de champs 3.1 appliquée à $N - 1$, N et $N + 1^*$ permet d'écrire :

$$\left[1 + \frac{dx}{a}\right] M_N - M_{N-1} - \frac{kdx^2}{2} v_N = \frac{-kdx^2}{2} v_{p_N} \quad (3.12)$$

Ainsi remarquons que les deux équations 3.10 et 3.12 peuvent également s'écrire sous la forme d'une équation matricielle telle que :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a & \left[\frac{dx}{\kappa GS} + \frac{a^2 dx}{3EI} + \frac{adx^2}{2EI}\right] & \left[a + dx + \frac{akdx^2}{2\kappa GS}\right] \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \left[1 + \frac{dx}{a}\right] & \frac{-kdx^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{N-1} \\ v_{N-1} \\ M_N \\ v_N \\ M_{N+1} \\ M_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta \cdot \Delta x + \frac{akdx^2}{2\kappa GS} v_{p_N} \\ -\frac{kdx^2}{2} v_{p_N} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

L'équation 3.13 représente ainsi la formulation mathématique de la condition au bord droit du spécimen DCB dans le cas d'un chargement à déplacement imposé.

Conditions au bord gauche

Sur le bord gauche du spécimen, des conditions de bord libre sont considérées. Cependant, pour prendre en compte la réaction sur la partie collée, des conditions aux bords élastiques sont considérées en écrivant la rotation et la flèche comme fonction de l'effort tranchant et du moment fléchissant. Cela revient à écrire :

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{\phi M} & K_{\phi T} \\ K_{v M} & K_{v T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 \\ T_1 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Où les rigidités K_{ij} sont déterminées en résolvant analytiquement le problème qui consiste en une poutre de longueur finie sur fondation élastique et chargée soit par un moment fléchissant unitaire, ou un effort tranchant unitaire. En utilisant la même méthodologie

que pour les conditions du bord droit, il a été obtenu :

$$\begin{pmatrix} \left[\frac{-\Delta x^2}{2EI} - \Delta x K_{\phi M} - K_{\phi T} - \frac{1}{\kappa GS} \right] & \left[\frac{k\Delta x^2 K_{\phi T}}{2} - 1 \right] & \left[K_{\phi T} + \frac{1}{\kappa GS} \right] & 1 & 0 & 0 \\ [K_{vM}\Delta x + K_{vT}] & \left[-\Delta x - \frac{k\Delta x^2 K_{vT}}{2} \right] & -K_{vT} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ v_1 \\ M_2 \\ v_2 \\ M_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k\Delta x^2 K_{\phi T}}{2} v_p^1 \\ \frac{k\Delta x^2 K_{vT}}{2} v_p^1 \end{pmatrix}$$

Les équations matricielles 3.5, 3.13 et celle ci-dessus, sont les équations principales implémentées pour la simulation de l'essai DCB par une approche du type poutre sur fondation élastique. La loi de zone cohésive prise comme loi d'interface est définie de sorte à prendre en compte un chargement cyclique à décharges partielles imposé au spécimen en mode I d'ouverture.

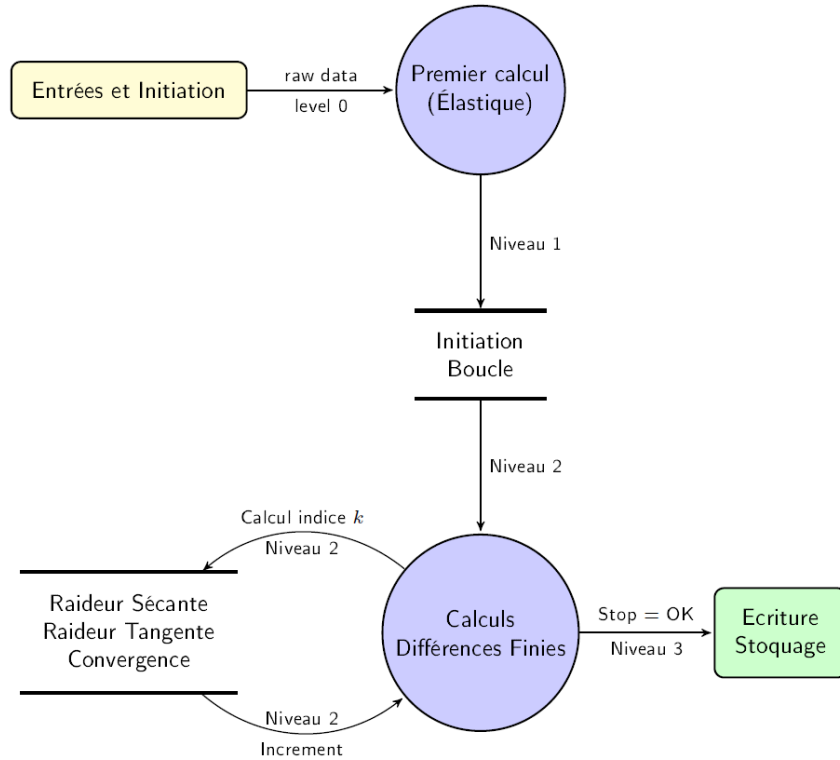


FIGURE 3.5 – Schéma algorithmique global du modèle aux différences finies

L'implémentation numérique du modèle de l'essai DCB est illustrée à la figure 3.5. Après l'initialisation des paramètres du calcul (niveau 0) c'est à dire les variables et paramètres algorithmiques, un premier calcul initial élastique (niveau1) est effectué et sert de données

d'entrée à la boucle aux différences finies (niveau 2). Cette boucle calcule le moment fléchissant, le déplacement normal à l'interface via le calcul de la raideur à l'interface à chaque pas de chargement. La convergence est calculée sur cette raideur sécante, ainsi le chargement ne subit pas de nouveau incrément tant que la condition 3.15 n'est pas satisfaite pour une valeur fixée de ε_{conv} .

$$\|k^{actuel} - k^{precedent}\| \leq \varepsilon_{conv} \quad (3.15)$$

3.3 Résultats numériques et éléments de validation

Les mêmes caractéristiques mécaniques et géométriques que celles du précédent chapitre pour le spécimen DCB, sont reconduites. Les seules différences résident ici sur la prise en compte de décharges partielles lors du chargement durant l'essai, avec les approches à raideur sécante et tangente. Le chargement en ouverture Δ varie entre 0 et 2 mm et les décharges partielles apparaissent à intervalles réguliers tout au long du chargement de sorte qu'il soit constitué de 4 cycles. Pour un cycle, la décharge est l'équivalente à l'opposée de la moitié de la partie correspondant à la phase de charge précédente. La figure 3.6 ci-dessous représente le séquençage ainsi défini.

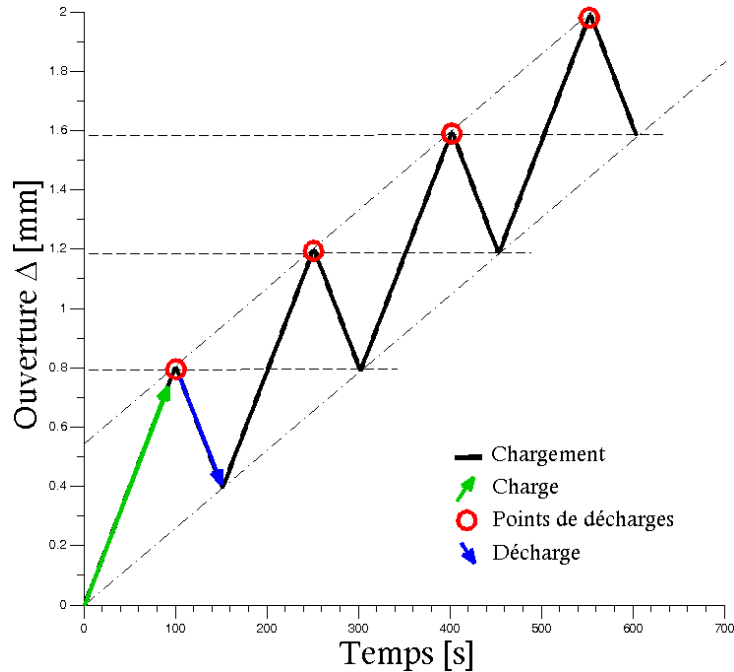


FIGURE 3.6 – chargement cyclique à décharges partielles

La réponse du modèle avec une loi d'interface quasi-fragile (loi de zone cohésive à raideur sécante) a été dans un premier temps étudiée. Nous nous sommes intéressés à la réponse

$P(\Delta)$. L'évolution de cette mesure subissant le chargement de la figure 3.6 est représentée ci-dessous.

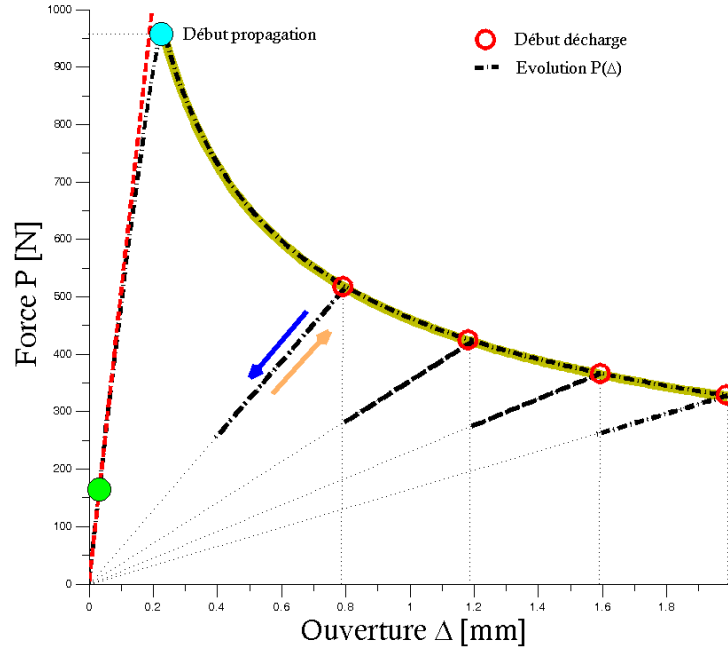


FIGURE 3.7 – Réponse $P(\Delta)$ - Loi d'interface tri-linéaire - Chargement cyclique à décharges partielles - Approche à raideur sécante

Sur cette réponse, nous observons les évolutions habituelles qui dépendent de la géométrie de la loi de zone cohésive. En effet, la première partie de la réponse est linéaire élastique. Ensuite, s'en suit une perte de linéarité qui correspond aux phases plastique et d'endommagement. Il est important à ce stade de noter que les influences des deux parties linéaires situées entre la fin de la partie élastique et le début de la phase de propagation sur la loi d'interface, ne sont pas distinguables. Ici de nouveau, il y a une parfaite correspondance entre l'évolution $P(\Delta)$ durant la phase de propagation avec la formulation analytique esquissée en section 2.1.1. À $\Delta = 0.8$ mm survient la première décharge qui se traduit par une complaisance constante car en effet, comme expliciter plus haut, l'approche à raideur sécante ne prend pas en compte les déformations résiduelles et durant cette phase de décharge, la force et l'ouverture converge vers l'origine sans l'atteindre étant donné que la décharge est partielle. La phase de recharge s'effectue suivant cette même courbe affine.

Dans un second temps, nous présentons les résultats avec une approche à raideur tangente pour la loi d'interface. Cette dernière permet de prendre en compte les déformations résiduelles en l'occurrence plastiques. Aucune différence ne subsiste sur les enveloppes de la réponse $P(\Delta)$ entre les deux approches sauf durant les phases de décharge / recharge. En effet, durant ces phases, les prolongations de la réponse montrent qu'elles ne convergent

pas vers l'origine ce qui traduit la prise en compte de déformations résiduelles.

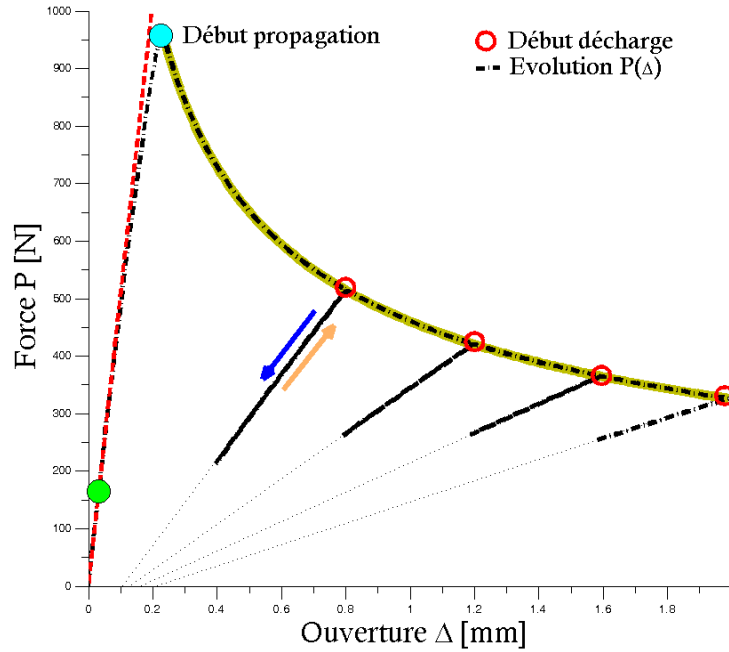


FIGURE 3.8 – Réponse $P(\Delta)$ - Loi d'interface tri-linéaire - Chargement cyclique à décharges partielles - Approche à raideur tangente

À ce stade, nous nous intéressons aux évolutions de la flèche et du déplacement plastique à différents moments de la phase de décharge. Les instants à $\Delta = 0.60$ mm, $\Delta = 0.56$ mm et $\Delta = 0.52$ mm sont considérés comme illustrer sur la figure 3.9 ci-dessous.

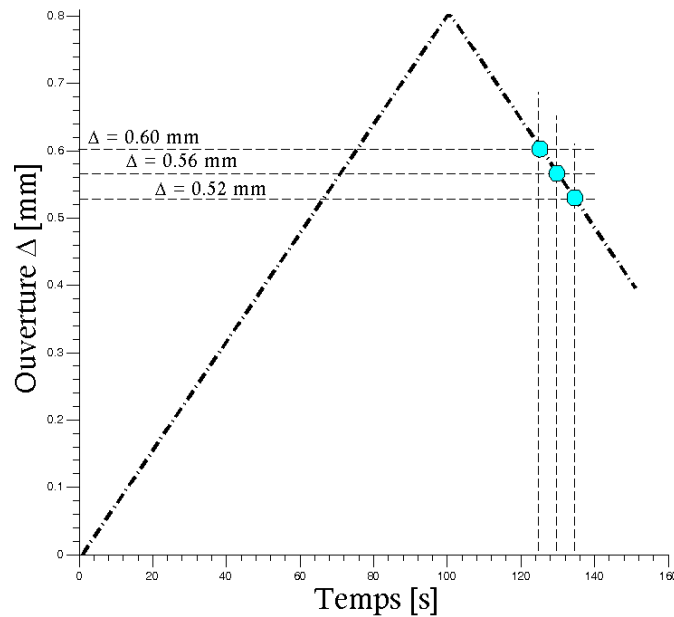


FIGURE 3.9 – Instants du chargement Δ pour l'étude de l'évolution de la flèche et des déplacements plastiques durant une phase de décharge

Pour des raisons évidentes, il n'y a pas lieu d'observer les évolutions des grandeurs mécaniques durant la phase de décharge avec l'approche à raideur sécante. Cependant ce besoin s'impose dans le cas de celle présentant de la plasticité. En effet la conformité vis-à-vis de deux aspects, principalement, doit être vérifiée. La première est la non variation de la déformation plastique durant les phases de décharge / recharge, et la seconde est le respect de la phénoménologie de la propagation de fissure c'est à dire, les nœuds déjà fissurés le demeurent durant ces phases.

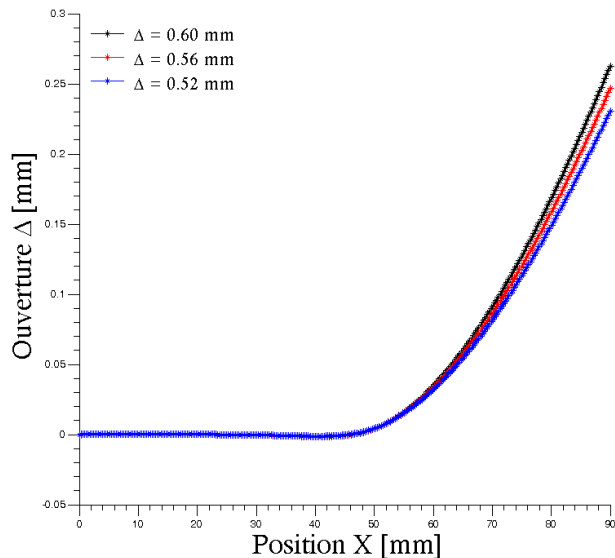


FIGURE 3.10 – Évolution de la flèche pour trois instants durant la phase de décharge

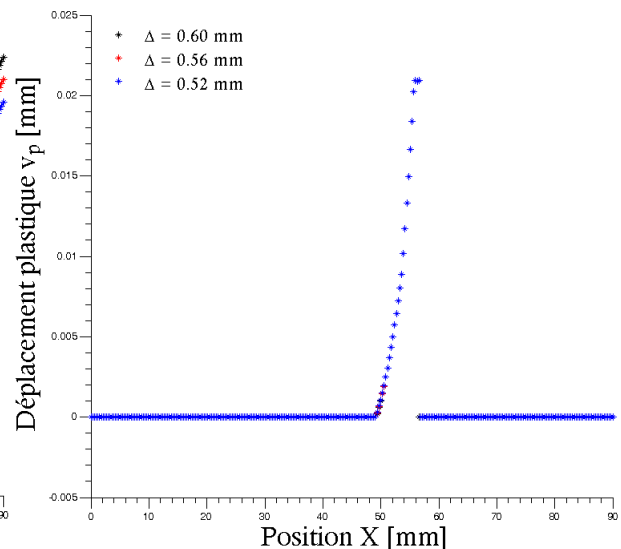


FIGURE 3.11 – Évolution du déplacement plastique pour trois instants durant la phase de décharge

En effet, sur la figure 3.11 nous observons qu'il n'y a pas d'évolutions de v_p durant cette phase et que la partie fissurée ($v_p = 0$ sur la partie droite de la courbe) le reste.

Dans la même approche de validation, nous nous sommes proposés de comparer les réponses force - ouverture du modèle ainsi développé avec la loi de zone cohésive tri-linéaire à raideur sécante avec celle bi-linéaire. Avec le cas de chargement cyclique à décharges partielles, la réponse attendue est la superposition parfaite des deux évolutions. En effet, pour la même énergie de rupture G_c , la différence dans la réponse macroscopique considérée ne devrait apparaître que sur les phases de réponse non-linéaires. Les phases de décharges / recharges devraient également se superposer avec l'approche à raideur sécante dès lors qu'il n'y a pas de prise en compte de déformations plastiques. Les sorties du modèle obtenus confirment cela comme illustré sur la figure 3.12.

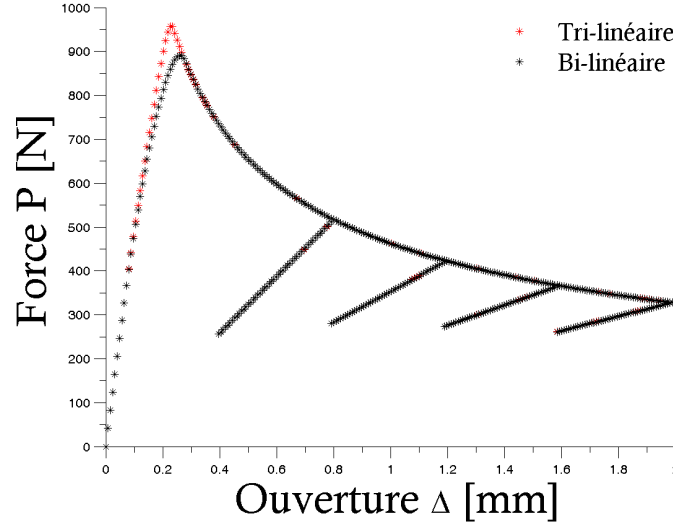


FIGURE 3.12 – Réponse $P(\Delta)$ avec loi de zone cohésive tri-linéaire et bi-linéaire - Approche à raideur sécante - Chargement cyclique à décharges partielles

Dans un second temps, nous effectuons la même comparaison mais cette fois-ci avec l'approche à raideur tangente pour les lois de zone cohésive tri-linéaire et bi-linéaire. Ici, le comportement attendu est une superposition parfaite pour l'enveloppe $P(\Delta)$. Toutefois, durant les phases de décharges / recharges, il est attendu que la réponse avec la loi bi-linéaire ait une ouverture résiduelle plus importante. Pour le même G_c , et pour le même déplacement v , le déplacement plastique pour les deux lois montrent que dans tous les cas, la loi bi-linéaire aura un v_p supérieur et cela devrait être observé sur la réponse macroscopique. Cela se confirme avec les figures 3.13 et 3.14.

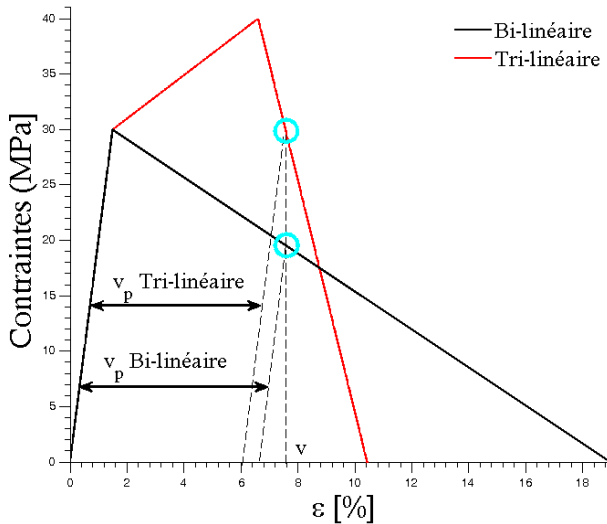


FIGURE 3.13 – Lois de zone cohésive Bi-linéaire et Tri-linéaire : Illustration du déplacement plastique

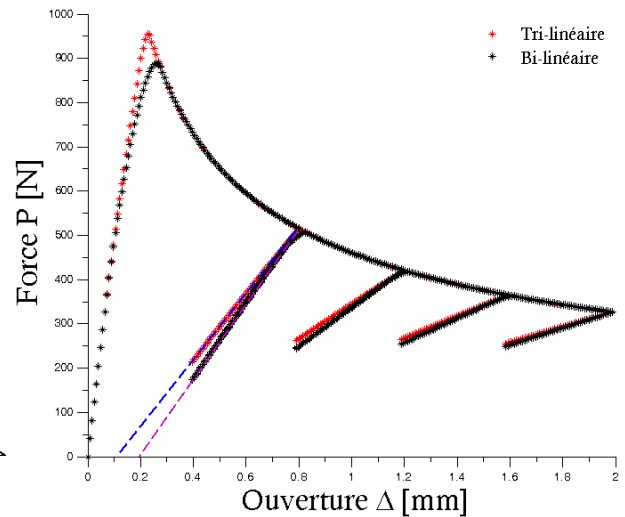


FIGURE 3.14 – Réponse $P(\Delta)$ avec loi de zone cohésive tri-linéaire et bi-linéaire - Approche à raideur tangente - Chargement cyclique à décharges partielles

3.3.1 Discussions

Le modèle développé ci-dessus considère que la flèche totale est égale à la somme du déplacement élastique et de celle plastique. En réalité, le principe de partitionnement des déformations [139] stipule que la déformation totale d'un matériau soumis à une sollicitation, peut être divisée en la somme d'une contribution élastique et d'une autre qui prend en compte les phénomènes de dissipation, ici, nous avons alors choisi qu'il s'agit de la plasticité.

Dans le cadre de la formulation d'une loi de zone cohésive prise comme loi d'interface, les développements ainsi proposés permettent de renseigner sur la forme d'écrouissage qu'il y a lieu de prendre en compte dans le cas où des phénomènes de plasticité opèrent. Pour cela, un moyen simple serait d'effectuer un cycle de charge / décharge totale et d'observer la variation de la flèche globale. Ici nous faisons allusion à la flèche globale en ce sens qu'expérimentalement, aucun moyen à notre connaissance ne permet d'extraire de manière directe la déformation plastique que subit un matériau surtout dans le cas des assemblages collés. À la fin du cycle, si des déformations résiduelles subsistent (macroscopiquement si le déplacement imposé est non nul, microscopiquement si le champ de déplacement mesuré par corrélation d'image par exemple, est non nul), alors, il convient de les prendre en compte dans la formulation des lois de zone cohésive. Pour le modèle proposé, cela s'apparente aux figures 3.15 et 3.16 ci-dessous.

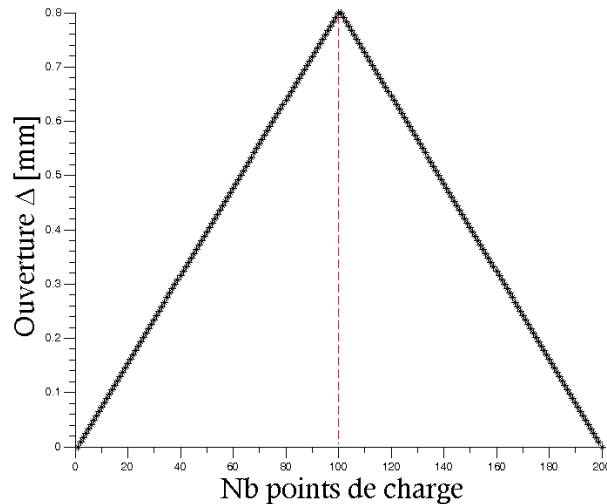


FIGURE 3.15 – Illustration cycle de charge / décharge total en ouverture Δ

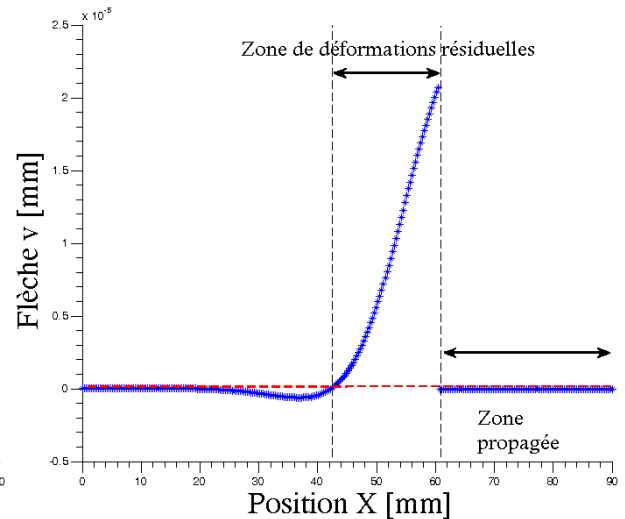


FIGURE 3.16 – Saut de déplacement résiduel à l'interface après un cycle total de charge / décharge

Ainsi, si le choix est fait que les déformations résiduelles sont l'œuvre de phénomènes de plasticité alors en soustrayant de la flèche, la contribution élastique de la loi de zone

cohésive choisie, il devient possible d'observer une hypothétique évolution de v_p . Ainsi une sollicitation de cyclage permettrait de renseigner sur le type d'écrouissage mais également sur la limite élastique selon l'amplitude de la sollicitation. En effet, une sollicitation de cyclage dans la zone de comportement élastique n'aurait pas d'intérêt et ne permettrait pas d'observer l'évolution de v_p . Celui effectué ci-dessus pour un cycle a été effectué pour $\Delta = 0.8mm$ qui se situe dans la phase de propagation comme en atteste la figure 3.8.

La construction de notre modèle nous permet un accès au déplacement plastique. Il serait intéressant d'observer l'influence des paramètres de la loi de zone cohésive sur le déplacement plastique en fin de cycle du chargement 3.15. Pour ce faire, nous avons calculé les gradients du v_p résiduel vis-à-vis des différents paramètres pris séparément. Ce gradient est en première approximation la sensibilité recherchée (cf. section 2.3.1). Chaque paramètre subit une perturbation de $\pm 5\%$ de sa valeur nominale reportée au tableau 3.1.

Les variations obtenues sont reportées sur la figure 3.17.

La première information qu'il convient d'extraire est la taille de la zone plastique. En effet, ces courbes peuvent être divisées en trois parties distinctes : la première correspond aux nœuds qui n'ont pas encore subis de sollicitation en traction ou qui se situent dans la phase de comportement élastique. Pour ceux là, le déplacement plastique est nul. La seconde partie correspond au lieu des déformations plastiques. Enfin, la dernière correspond aux nœuds qui ont déjà fissurés.

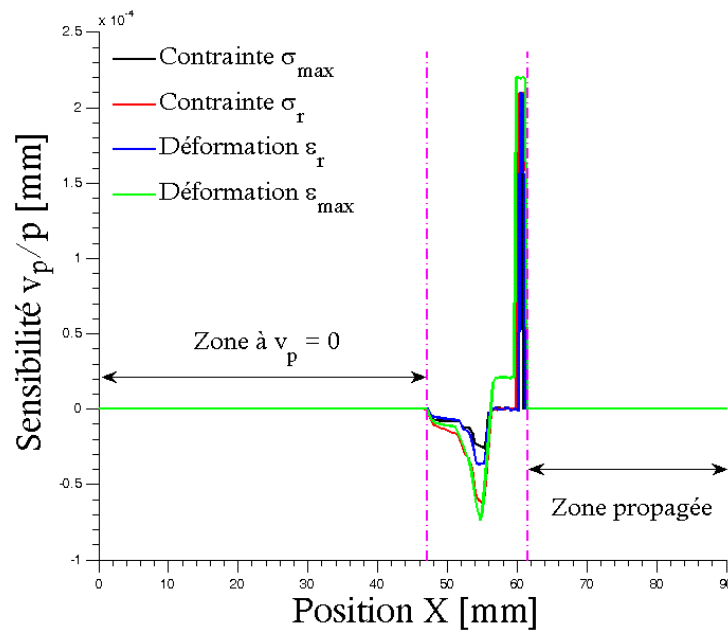


FIGURE 3.17 – Évolutions des sensibilités de v_p par rapport aux paramètres de loi de zone cohésive

En effet, tous les paramètres de la loi de zone cohésive sont sensibles dans la zone plastique. Toutefois, remarquons que la forme tri-linéaire choisie est équivalente à celle élasto-plastique parfaite utilisée dans le chapitre 2 avec le rajout d'un point phénoménologique dans le plateau. Il existe aucune relation entre σ_r et ε_r et leur sensibilité par rapport à v_p est la même à un facteur prêt. Remarquons que toutes les sensibilités ont les mêmes tendances d'évolution avec différentes amplitudes. Nous estimons qu'elles peuvent être révélatrices du nombre de segments linéaires présents dans la zone plastique.

Un autre point de discussion concerne l'évolution de la longueur de fissure du moment que les formulations de G_{1c} dépendent d'elle. Dans le cas de chargements cycliques, dans notre cas avec décharges partielles, une attention devrait lui être portée. En effet, lors des phases de décharges / recharges et d'un point de vue phénoménologique, la longueur de fissure devrait affichée une évolution constante. Toutefois, cela n'est vrai que dans le cas d'un comportement du type élastique fragile c'est à dire avec l'approche à raideur sécante. Une illustration avec le modèle développé est fournie à la figure 3.19.

L'évolution de la longueur de fissure avec le modèle à loi de zone cohésive à raideur tangente, montre une légère différence en fin de décharge / début de recharge. Cela est attribué à la contribution "plastique" sur l'ouverture Δ . Ainsi dans l'optique d'appréhender la phénoménologie d'une loi de zone cohésive dans le cas de chargement cyclique, la mesure de la longueur de fissure pourrait également renseigner sur la typologie du comportement.

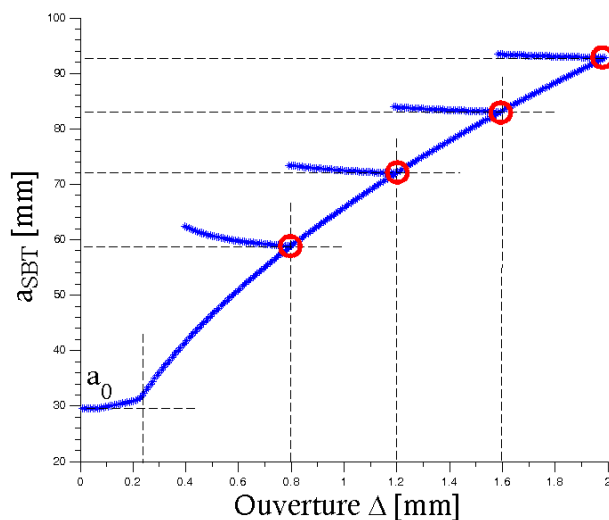


FIGURE 3.18 – Évolution de la longueur de fissure dans le cas d'une loi de zone cohésive à raideur tangente

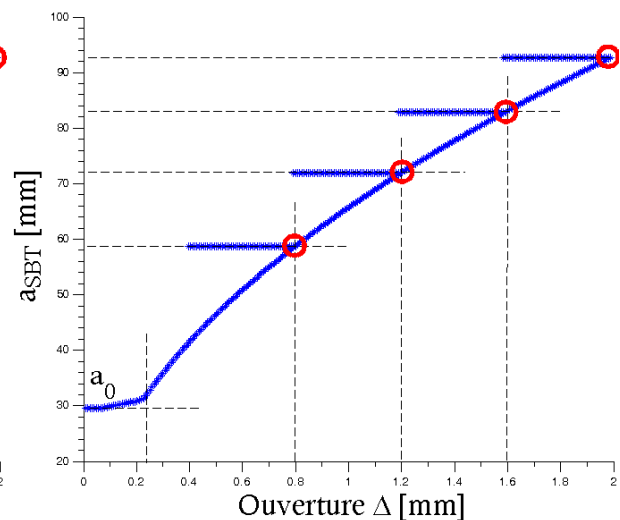


FIGURE 3.19 – Évolution de la longueur de fissure dans le cas d'une loi de zone cohésive à raideur sécante

Conclusions

Dans ce chapitre il a été question de proposer une modélisation de l'essai DCB avec une formulation de la loi d'interface qui permet la prise en compte des déformations résiduelles plastiques durant l'essai DCB sous un chargement cyclique à décharges partielles. Deux approches ont été considérées : la première à raideur sécante qui est la plus employée et la seconde à raideur tangente (cf section 3.1). L'enveloppe de la réponse $P(\Delta)$ obtenue est identique pour les deux cas et la relation analytique 2.24 affiche une correspondance avec les sorties du modèle.

La mesure des déplacements plastiques à trois instants durant une phase de décharge a permis de valider le respect du modèle vis-à-vis du type d'écrouissage implémenté. Par la suite, nous avons mis en évidence l'existence de déformations résiduelles sur un cycle de charge / décharge complet. Dans une démarche de modélisation du comportement de l'interface d'un joint collé pour le mode I, nous estimons que la mise en œuvre de ce type d'essai permettra d'avoir en première approximation les types de dissipation qui opèrent à l'interface (ici plastiques).

En outre, le calcul de la sensibilité de v_p vis-à-vis des paramètres de la loi d'interface nous a permis de déterminer la taille de la zone plastique, information qui a son importance. Dans un second temps nous estimons que ces sensibilités devraient permettre à terme, de déterminer le nombre de segments existants sur la zone plastique de la loi de zone cohésive. Cette hypothèse devra être vérifiée en perspective, par l'expérience.

Enfin, nous allons dans le sens de Valoroso *et al.* [108], mais au niveau de la couche d'adhésif. Ils affirment que la prise en compte de la déformation plastique des substrats permettrait de diminuer le bruit de mesure lors d'une identification inverse des paramètres de loi de zone cohésive. Dans notre cas, nous estimons que la prise en compte des déformations plastiques dans les modèles des lois de zone cohésive permettrait non seulement d'affiner la forme de la loi comme évoquée au paragraphe précédent, mais également sur le type d'écrouissage.

Dans le chapitre suivant nous proposons, toujours dans le cadre de la modélisation, la prise en compte de la visco-élasticité linéaire dans la formulation de la loi de zone cohésive prise comme loi d'interface pour l'essai DCB en mode I d'ouverture.

Chapitre 4

Contribution dans la modélisation de
l'essai DCB - Fissuration en mode I -
Cas des interfaces visco-élastiques
linéaires

Introduction

La formulation effectuée au chapitre 3 pour l’essai DCB fait usage des lois de zones cohésive dont l’endommagement est pris en compte comme la variation de la raideur sécante. L’évolution de cet endommagement est calculée au sens de la définition de Kachanov c’est à dire, le complémentaire du rapport entre la raideur sécante actuelle et celle initiale.

$$d = 1 - \frac{k}{k_0} \quad (4.1)$$

Cette formulation est adéquate pour les matériaux ayant un comportement élastique ou élasto-plastique. Cependant, pour les matériaux présentant un comportement dépendant du temps et de la vitesse de chargement, l’évolution de l’endommagement au sens de l’équation 4.1 n’est plus satisfaisante lorsqu’elle est utilisée seule sans prise en compte de l’historique du chargement. Le développement d’une formulation prenant en compte un comportement visqueux est d’autant plus important que les adhésifs utilisés pour l’assemblage des structures par collage dit structural, sont à base de polymères dont le comportement peut présenter une composante viscoélastique.

Dans la littérature, plusieurs approches ont été proposées pour prendre en compte le comportement visqueux des joints d’adhésifs au sein des assemblages. Allen et Searcy [79] propose une approche d’homogénéisation des contraintes au sein d’un élément de volume élémentaire représentatif dans la zone endommagée. Ils postulent qu’au sein de l’interface, le matériau qui est supposé viscoélastique présente des hétérogénéités dues à la formation de vides et de fibres. Ils définissent comme loi d’interface, une relation constitutive contraintes-déformations d’un corps à comportement viscoélastique linéaire pour des transformations isothermes et l’évolution de l’endommagement est définie de manière phénoménologique. Ce même modèle a été repris par Upadhyaya et Roy [140] mais cette fois-ci, l’endommagement est entièrement caractérisé par des données expérimentales.

Une seconde et récente approche a été employée par Musto et Alfano [141] pour prendre en compte la dépendance au temps dans la modélisation du comportement des interfaces au sein des assemblages collés. Ils utilisent le concept du calcul fractionnaire qui est une branche de l’analyse mathématique qui étudie l’existence d’opérateurs différentiels élevés à des puissances non entières. Les origines du calcul fractionnaire sont attribuées à Liouville [1832], ainsi, appliqué au calcul d’intégrales, il aboutit à la formule de Cauchy pour l’intégration successive qui trouve une application intéressante dans la prise en compte de l’historique du chargement pour les matériaux viscoélastiques dans le calcul de la réponse

en contrainte de ce type de matériau, comme l'ont abordé de manière exhaustive Mainardi *et al.* [142].

Enfin, une autre approche fait appel à la TPI¹. Une énergie libre est définie et elle dépend de variables d'état et de variables internes en fonction du phénomène modélisé. Les lois d'évolution de ces variables sont établies dans un premier temps, en imposant l'inégalité de Clausius-Duhem qui est une conséquence directe de la seconde loi de la thermodynamique. En second lieu, le principe du maximum d'entropie est appliqué pour obtenir les conditions de Kunh-Tucker aussi connues comme lois de normalité. Plusieurs travaux sont basés sur ce concept, notamment [143], [144], [145], [146], [147], [148]. **Dans ce chapitre, nous utiliserons cette approche.**

L'objectif de ce chapitre, est la prise en compte de la dépendance au temps et de la vitesse de chargement dans la modélisation de l'essai de fissuration en mode I. Nous considérons ici une loi de zone cohésive bi-linéaire couplée à la visco-élasticité linéaire. Pour ce faire, nous présenterons quelques éléments de la visco-élasticité pour introduire le modèle rhéologique choisi pour le comportement de l'interface. Dans un second temps nous exposerons les équations directrices ainsi que le schéma d'intégration temporel. L'effet de la vitesse de chargement sur le comportement macroscopique du spécimen DCB est mise en évidence à travers la validation du schéma d'intégration.

1. Thermodynamique des Procédés Irréversibles

4.1 Éléments de visco-élasticité linéaire

Les adhésifs à base de polymères sont le plus souvent des matériaux thermodurcissables et leurs microstructures jouent un rôle essentiel dans leur comportement macroscopique. Le principe de l'état local [149] et le principe de partitionnement des déformations [139] permettent de considérer les déformations qui agissent au sein d'un solide comme la somme d'une partie élastique et d'une partie inélastique. La première représente les comportements instantanés (rapides tels que l'élasticité), et le second devient non-négligeable lorsque des dissipations apparaissent. Il existe différents mécanismes de dissipation comme la plasticité, la viscosité, la thermique ainsi que le couplage entre eux. Pour les polymères, la dissipation est souvent associée à la viscosité. En prenant en compte ces considérations, il est mécaniquement et phénoménologiquement licite d'écrire la déformation globale comme la somme d'une contribution élastique et d'une contribution visqueuse.

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^v \quad (4.2)$$

La théorie de la visco-élasticité linéaire permet de prendre en compte les évolutions réversibles dépendant du temps, des corps visqueux. Ces comportements peuvent être reproduits par un système mécanique équivalent constitué de ressorts hookéens et d'amortisseurs supposés contenir un fluide newtonien. À chaque ressort est assigné une raideur analogue à la contribution d'un module de cisaillement, et à chaque amortisseur est assigné une résistance de friction analogue à une contribution de viscosité.

Les modèles rhéologiques les plus connus sont ceux de Kelvin et de Maxwell. Le premier consiste en une raideur et un amortisseur visqueux mis en parallèle, alors que le second correspond à la configuration en série.

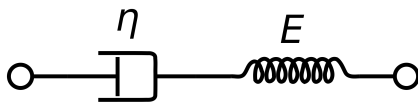


FIGURE 4.1 – Modèle rhéologique de Maxwell

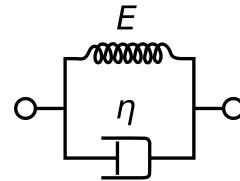


FIGURE 4.2 – Modèle rhéologique de Kelvin

Ces deux modèles rhéologiques ne représentent pas de manière adéquate la réponse de certains corps visqueux selon qu'ils soient de nature solide ou liquide. En effet, le modèle de Maxwell ne peut pas être utilisé pour la relaxation de matériaux visqueux solides car, la contrainte tend vers zéro pour des temps de relaxation longs, cela n'est valable que

pour les liquides visqueux.

En outre, le modèle de Kelvin a la particularité de ne pas prendre en compte le comportement élastique instantané, et la conséquence est que sa fonction de relaxation n'est pas continue et dérivable : à un saut de déplacement initial correspond une contrainte infinie de sorte que ce modèle n'est pas adéquat pour un chargement en relaxation de contraintes sauf si la charge est progressive.

Pour cela, le modèle de Kelvin doit être monté en série avec une raideur et le modèle résultant est celui du SLS² aussi connu sous le nom de modèle de Zener (cf. figure 4.3). **Nous utilisons ce dernier, pour la prise en compte de la visco-élasticité linéaire dans la formulation du comportement du joint d'adhésif de l'essai DCB avec les modèles de zone cohésive.**

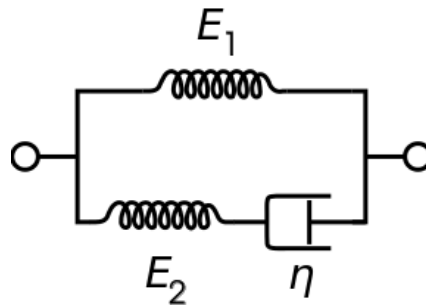


FIGURE 4.3 – Modèle rhéologique du solide linéaire standard

4.1.1 Mise en équation du modèle rhéologique SLS

La formulation mathématique des modèles rhéologiques sont des équations différentielles du premier ordre du fait de leur dépendance à la vitesse de déformation. Cela est due à la présence de l'amortisseur visqueux qui est le bloc qui introduit la dépendance à $\dot{\varepsilon}$. Le comportement des schémas rhéologiques doit être vu comme celui d'un ensemble dont chaque entité apporte sa contribution en terme de déformation ou de contrainte vis-à-vis de la sollicitation appliquée. Ainsi pour les ressorts hookéens il s'agit de la loi d'élasticité de Hooke classique et pour les amortisseurs, la loi d'un fluide newtonien. **Nous nous restreignons ici au cas unidimensionnel.**



FIGURE 4.4 – Éléments de base des modèles rhéologiques : Élasticité

$$\sigma = E\varepsilon \quad (4.3)$$

2. Solide Linéaire Standard



FIGURE 4.5 – Éléments de base des modèles rhéologiques : Viscosité

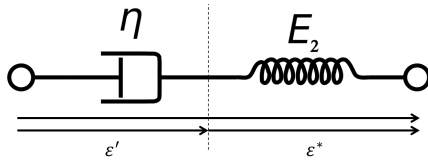
$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon} \quad (4.4)$$

La loi de comportement globale du modèle est obtenue en combinant les contributions des différents blocs avec celle de la sollicitation globale dans chaque branche du modèle. Dans le cas du modèle SLS, il y a deux branches montées en parallèle : la première est constituée d'un ressort hookéen de module E_1 et la seconde branche est composée d'un ressort de module E_2 et d'un amortisseur de coefficient de viscosité η montés en série. L'ensemble est porté à une sollicitation en contrainte σ (fluage) ou en déformation ε (relaxation) sur une de ses extrémités tandis que l'autre est supposée encastree. La déformation est supposée homogène dans le modèle de sorte qu'elle est égale dans chaque branche, mais la contrainte totale est égale à la somme des contraintes de chaque branche. Cela se traduit par le système suivant :

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \\ \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \end{cases}$$

Dans les notations ci-dessus, l'indice 1 correspond à la branche du haut constituée du ressort hookéen E_1 seul et l'indice 2 pour la seconde branche.

Maintenant, il convient de décrire la loi de chaque branche. La plus simple est celle élastique et sa loi est $\sigma_1 = E_1 \varepsilon$. Dans la seconde, le développement ci-dessous permet d'obtenir sa relation constitutive.



$$\begin{cases} \varepsilon_2 = \varepsilon^* + \varepsilon' \\ \sigma_2 = \sigma^* = \sigma' \end{cases}$$

FIGURE 4.6 – Branche 2 du modèle du SLS

Dans les relations ci-dessus, l'exposant * correspond aux contributions du ressort E_2 , tandis que l'exposant ' correspond à celles de l'amortisseur. En ré-écrivant la seconde relation relative à la déformation ε_2 et en tenant en compte les comportements de ses composantes c'est à dire $\sigma^* = E_2 \varepsilon^*$ et $\sigma' = \eta \dot{\varepsilon}'$, alors il vient que :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon^* + \varepsilon' \quad (4.5)$$

$$\dot{\varepsilon}_2 = \frac{1}{E_2} \dot{\sigma}_2 + \frac{1}{\eta} \sigma_2 \quad (4.6)$$

Ainsi nous pouvons écrire pour la contrainte totale :

$$\sigma = E_1 \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon} - \frac{\eta}{E_2} \dot{\sigma}_2 \quad (4.7)$$

En prenant en compte le fait que $\dot{\sigma}_2 = \dot{\sigma} - \dot{\sigma}_1$, alors il vient que :

$$\sigma = E_1 \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon} - \frac{\eta}{E_2} (\dot{\sigma} - E_1 \dot{\varepsilon}) \quad (4.8)$$

$$= E_1 \varepsilon + \eta \left(1 + \frac{E_1}{E_2} \right) \dot{\varepsilon} - \frac{\eta}{E_2} \dot{\sigma} \quad (4.9)$$

En ré-arrangeant, nous obtenons la relation constitutive du modèle rhéologique du solide linéaire standard :

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{E_2}{\eta} \sigma = \frac{E_1 E_2}{\eta} \varepsilon + (E_1 + E_2) \dot{\varepsilon} \quad (4.10)$$

Et enfin nous faisons apparaître les temps caractéristiques de fluage et de relaxation de sorte que :

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\tau_R} \sigma = (E_1 + E_2) \left[\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{1}{\tau_F} \varepsilon \right] \quad (4.11)$$

Où

$$\tau_R = \frac{\eta}{E_2}$$

Et

$$\tau_F = \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_1 E_2}$$

Ainsi, nous écrivons le module $\mathbb{E} = E_1 + E_2$ comme le module instantané du modèle rhéologique avec E_1 le module du système lorsque les contraintes sont totalement relaxées (chargement de relaxation). La relaxation des contraintes correspond à l'application au

modèle d'une déformation constante ε_0 pondérée d'une impulsion de Heaviside retardée $H(t - T)$, où T est l'instant d'application de la sollicitation. La fonction de transfert correspondante qui est en réalité la fonction de relaxation c'est à dire $E_r(t)$ telle que $\sigma(t) = E_r(t)\varepsilon_0$ vaut :

$$E_r(t) = \left[E_1 + E_2 \exp\left(\frac{-(t - T)}{\tau_R}\right) \right] H(t - T) \quad (4.12)$$

Il existe d'autres modèles rhéologiques plus complexes permettant de décrire la déformation des solides dans le cadre de la visco-élasticité linéaire. Toutefois, il ne s'agira que d'une combinaison plus sophistiquée des blocs de base abordés plus haut c'est à dire les ressorts hookéens et les amortisseurs (fluide newtonien). Ces blocs peuvent être rajoutés à volonté et les combinaisons effectuées de différentes manières possibles dans un souci de reproduire au mieux des observations expérimentales par exemple. Mais nous attirons l'attention sur le fait que dans ce cas, le risque de perdre un certain sens physique du modèle, est réelle, d'où l'avantage du modèle SLS dont l'influence des modules et paramètres est bien connu.

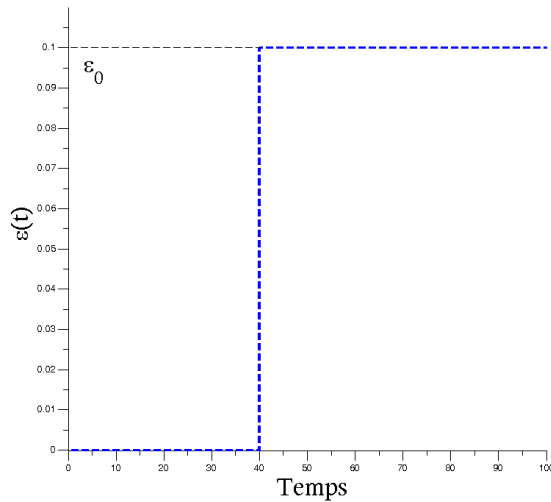


FIGURE 4.7 – Sollicitation de relaxation $\varepsilon(t)$ pour le modèle standard linéaire

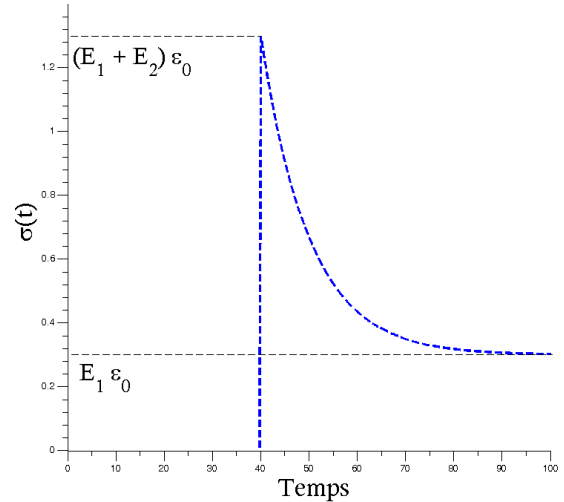


FIGURE 4.8 – Évolution de la contrainte en relaxation $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t)$ pour le modèle standard linéaire

4.2 Cadre Thermodynamique

4.2.1 Potentiel thermodynamique

La formulation thermodynamique de la loi de zone cohésive couplée à la visco-élasticité linéaire avec le modèle SLS, passe par la définition d'une énergie libre du système. Cette

énergie libre est un potentiel thermodynamique qui correspond à l'énergie du système lorsqu'il n'est pas couplé à des variables cachées.

Dans un premier temps, concernant les variables, elles doivent être clairement définies car elles influent sur la formulation. Deux types de variables existent :

- Les variables d'état qui renseignent, comme leur nom l'indique, sur l'état du système et qui sont mesurables. Par exemple la température, les déformations, la force ; Dans notre cas, il s'agira de la déformation totale ε .
- Le second type de variables sont celles internes (cachées). En effet, certaines grandeurs ne sont pas mesurables de manière directe lors des expérimentations malgré qu'elles renseignent également sur l'état du système. Pour notre étude, il s'agira de l'endommagement et de la déformation visqueuse ε_v .

Ainsi le potentiel thermodynamique n'ayant pas encore subi d'endommagement, peut être écrit comme l'énergie de déformation élastique. Nous utilisons le principe d'équivalence en déformation pour l'écrire, en considérant un état vierge et un état endommagé.

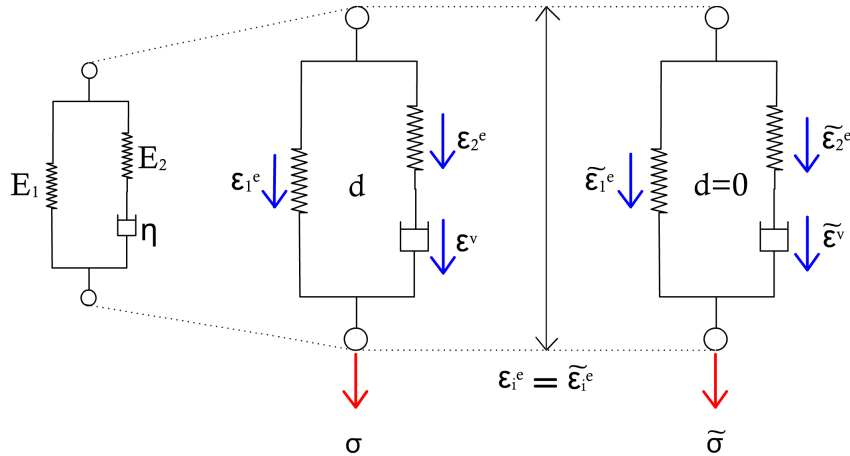


FIGURE 4.9 – Principe d'équivalence en déformation pour le solide linéaire standard

Nous écrivons :

$$\Phi(\sigma_i^e, \varepsilon_i^e) = \frac{1}{2} \sigma_i^e \varepsilon_i^e$$

$$i = 1, 2$$

En utilisant la contrainte effective définie par Kachanov, il vient :

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_i^e &= \frac{\sigma_i^e}{1-d} \\ &= E_i \tilde{\varepsilon}_i^e\end{aligned}\tag{4.13}$$

Nous obtenons avec le principe d'équivalence en déformation :

$$\sigma_i^e = E_i(1-d)\varepsilon_i^e\tag{4.14}$$

Vu que nous utilisons la même fonction pour calculer l'énergie libre, alors nous obtenons :

$$\begin{aligned}\Phi(\sigma_i^e, \varepsilon_i^e, d) &= \frac{1}{2}E_i(1-d)\varepsilon_i^{e2} \\ \Phi(\sigma_i^e, \varepsilon_i^e) &= \frac{1}{2}E_i\varepsilon_i^{e2}\end{aligned}$$

Au vue des paramètres du modèle de la figure 4.9, nous obtenons :

$$\Phi(\varepsilon, \varepsilon_v) = \frac{1}{2}E_1\varepsilon^2 + \frac{1}{2}E_2(\varepsilon - \varepsilon_v)^2\tag{4.15}$$

Sous cette forme, l'endommagement est prise en compte par la détérioration des propriétés mécaniques du modèle. Cela revient donc à écrire :

$$\Phi(\varepsilon, \varepsilon_v, d) = \frac{1}{2}(\textcolor{red}{1-d})E_1\varepsilon^2 + \frac{1}{2}(\textcolor{red}{1-d})E_2(\varepsilon - \varepsilon_v)^2\tag{4.16}$$

À ce stade, quelques commentaires méritent d'être émis.

1. En effet, la formulation 4.16 sous-entend que le coefficient de viscosité ne subit pas d'endommagement. Cette hypothèse simplificatrice peut être faite sans pertes de généralités. Le potentiel de dissipation associé à $\dot{\varepsilon}_v$ s'écrit $\phi(\dot{\varepsilon}_v) = 1/2\eta\dot{\varepsilon}_v^2$ dont la dérivée par rapport à $\dot{\varepsilon}_v$ est imposée nulle pour l'obtention de la loi 4.11. Ainsi, cela permet l'obtention de $\eta\dot{\varepsilon}_v = E_2(\varepsilon - \varepsilon_v)$.
2. La seconde remarque concerne la variable d'endommagement que nous considérons

être la même pour les deux branches du modèle rhéologique. Là aussi, cette approximation peut être faite dès lors que le modèle SLS est vu comme un bloc global dans la formulation de la loi d'interface.

Ci-dessous, nous abordons l'application du second principe de la thermodynamique et les conditions qui en découlent pour les différentes variables du système.

4.2.2 Inégalité de Clausius-Duhem

Dans le cadre de la TPI, les conditions thermodynamiques que doivent respecter les lois d'évolution des variables internes sont obtenues à partir de l'inégalité de Clausius-Duhem qui correspond à la seconde loi de la thermodynamique pour des transformations ici, isothermes et homogènes en température. Cela revient ainsi à écrire :

$$\dot{\Phi}(\varepsilon, \varepsilon_v, d) - \sigma \dot{\varepsilon} \geq 0 \quad (4.17)$$

La différentielle totale exacte de Φ par rapport au temps s'écrit :

$$\frac{D\Phi(\varepsilon, \varepsilon_v, d)}{Dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_v} \dot{\varepsilon}_v + \frac{\partial \Phi}{\partial d} \dot{d} \quad (4.18)$$

En introduisant 4.18 dans 4.17 il vient :

$$\left(\sigma - \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} \right) \dot{\varepsilon} - \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_v} \dot{\varepsilon}_v - \frac{\partial \Phi}{\partial d} \dot{d} \geq 0 \quad (4.19)$$

L'inégalité 4.19 peut être ré-écrite sous la forme :

$$\left(\sigma - \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} \right) \dot{\varepsilon} + \mathbb{A} \dot{\varepsilon}_v + \mathbb{B} \dot{d} \geq 0 \quad (4.20)$$

Où \mathbb{A} et \mathbb{B} sont les forces thermodynamiques induites par les flux des variables internes ε_v et d respectivement. La relation 4.20 est en réalité une fonction de dissipation dès lors qu'elle s'écrit comme le produit de forces thermodynamiques et des flux qui les ont induits. Elle correspond à la dissipation élastique augmentée des dissipations associées aux autres variables internes et est une fonction à valeur scalaire continue et convexe par rapport aux variables flux.

Forces thermodynamiques	Variables internes
$\mathbb{A} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon^v}$	ε^v
$\mathbb{B} = -\frac{\partial \Phi}{\partial d}$	d

TABLE 4.1 – Variables d'état et duales (forces thermodynamiques)

Des conditions suffisantes pour respecter l'inégalité de Clausius-Duhem sont les suivantes :

$$\sigma - \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} = 0 \quad (4.21)$$

$$(\mathbb{A}, \dot{\varepsilon}_v) \in \mathbb{R}_+^2 \quad (4.22)$$

$$(\mathbb{B}, \dot{d}) \in \mathbb{R}_+^2 \quad (4.23)$$

Ainsi, la relation 4.21 permet d'écrire la loi de comportement du système et les relations 4.22 et 4.23 sont les conditions que les lois d'évolution des variables internes doivent respecter pour être en accord avec la seconde loi de la thermodynamique qui impose l'augmentation de la dissipation intrinsèque de tout système soumis à des sollicitations extérieures. Cela revient à écrire :

$$\sigma = (1 - d)E_1\varepsilon + (1 - d)E_2(\varepsilon - \varepsilon_v) \quad (4.24)$$

$$\mathbb{A} = (1 - d)E_2(\varepsilon - \varepsilon_v) \quad (4.25)$$

$$\mathbb{B} = \frac{1}{2}E_1\varepsilon^2 + \frac{1}{2}E_2(\varepsilon - \varepsilon_v)^2 \quad (4.26)$$

À ce stade, les conditions 4.22 et 4.23 deviennent :

Variables internes	Conditions
Endommagement d	$\dot{d} \geq 0$ et $d \leq 1$
Déformation ε_v	$\dot{\varepsilon}_v \geq 0$ et $\varepsilon \geq \varepsilon_v$

TABLE 4.2 – Conditions thermodynamiques des variables internes du modèles SLS

La première condition sur l'endommagement traduit le fait qu'il augmente toujours dans le temps et la seconde stipule qu'elle a comme borne supérieure l'unité respectant ainsi l'intervalle de variation communément admise. Quant aux conditions sur la déformation visqueuse, la première met en évidence le fait que sa variation par rapport au temps est toujours croissante et qu'elle est inférieure à la déformation globale ε . Ce dernier aspect est vérifié avec la relation 4.2.

Somme faite, telles sont les conditions que peuvent vérifier les lois d'évolution des variables internes du modèle SLS. Nous abordons ces derniers dans la section suivante.

4.2.3 Lois d'évolution des variables internes

Dans le cadre de la TPI, les lois d'évolution des variables internes sont habituellement obtenues à l'aide de fonctions seuil, et l'usage du théorème du maximum d'entropie également connu comme loi de normalité. Par la suite, le respect des conditions ébauchées en section 4.2.2 est vérifié. Cependant, tout candidat aux lois d'évolution respectant ces conditions peut être choisi. Dans notre cas, l'objectif est de coupler la loi SLS à une loi de zone cohésive bi-linéaire ce qui permet l'usage d'une part des équations constitutives du modèle SLS et de celles de la loi de zone cohésive.

Déformation visqueuse ε_v

Un bon candidat pour la loi d'évolution de la déformation visqueuse est celui issu de la loi rhéologique SLS. En effet, en utilisant la relation 4.2, il vient que :

$$\sigma = E_1 \varepsilon + \sigma_2 \quad (4.27)$$

$$= E_1 \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon}_v \quad (4.28)$$

D'où,

$$\dot{\varepsilon}_v = \frac{\sigma - E_1 \varepsilon}{\eta} \quad (4.29)$$

Or, nous savons que :

$$\sigma_1 - E_1 \varepsilon = \sigma_2 \quad (4.30)$$

$$= E_2 (\varepsilon - \varepsilon_v) \quad (4.31)$$

$$= E_2 \varepsilon_e \quad (4.32)$$

Ainsi, nous pouvons écrire :

$$\dot{\varepsilon}_v = \frac{E_2 \varepsilon_e}{\eta} \quad (4.33)$$

Ainsi, le signe de $\dot{\varepsilon}_v$ dépend de celui de ε_e . La condition thermodynamique selon laquelle, $\dot{\varepsilon}_v \geq 0$ est vérifiée si la branche élastique du modèle SLS est en traction.

Loi d'endommagement

Pour la loi d'évolution de l'endommagement, nous nous basons sur la phénoménologie d'une loi de zone cohésive bi-linéaire. Elle peut être divisée en deux parties comme évoquée en 1.3.2. La première partie où $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ est le lieu des comportements élastiques et est considérée sans dissipation et $d = 0$. La seconde partie où $\varepsilon > \varepsilon_0$ est dédiée aux phénomènes dissipatifs d'endommagement i.e. $d \neq 0$.

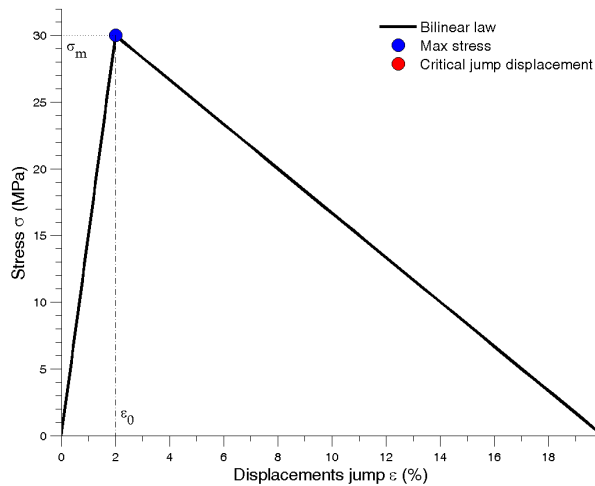


FIGURE 4.10 – Loi de zone cohésive bi-linéaire

Les expressions de l'énergie élastique G_0 et du taux de restitution critique de l'énergie G_c s'expriment comme suit :

$$G_0 = \frac{1}{2} \sigma_m \varepsilon_0 \quad (4.34)$$

$$G_c = \frac{1}{2} \sigma_m \varepsilon_m \quad (4.35)$$

Maintenant, nous introduisons une fonction seuil d'endommagement $\mathbf{F}(d)$ qui contrôle l'initiation et l'évolution de d en fonction de l'historique du déplacement v . Lorsque $\mathbf{F}(d)$ est négatif ou nul, il n'y a pas d'endommagement et dans les autres cas, il y a endommagement. Elle s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{F}(d) = \mathbf{A} - \xi(d) \quad (4.36)$$

En se basant sur la loi de zone cohésive bi-linéaire, nous pouvons écrire pour $\xi(d)$:

$$\xi(d) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sigma_m \frac{v_0}{t_a} & \text{si } d = 0 \text{ c'est à dire } v \leq v_0 \\ \frac{1}{2} \frac{(1-d) \sigma_m v_0}{t_a \left[1 - \left(\frac{v_m - v_0}{v_m}\right) d\right]^2} & \text{si } 0 \leq d \leq 1 \text{ c'est à dire } v_0 \leq v < v_m \\ \text{Max}_{t \leq \tau} [\xi(\tau)] & \text{si } d = 1 \text{ c'est à dire } v \geq v_m \end{cases} \quad (4.37)$$

Avec cette formulation, le seuil d'endommagement est égale à G_0 lorsque $d = 0$ et nous retrouvons cela avec la relation 4.37.2. Pour cette dernière, lorsque $d = 1$, elle est nulle ce qui ne respecte pas la condition thermodynamique. Pour cela il faut contraindre $\xi(d)$ à sa plus grande valeur durant l'historique du chargement ce qui correspond à la relation 4.37.3. En procédant à l'inverse pour l'endommagement, il vient que :

$$d = \begin{cases} 0 & \text{si } v \leq v_0 \\ \left[1 - \frac{v_0}{v}\right] \frac{v_m}{v_m - v_0} & \text{si } v \geq v_0 \end{cases} \quad (4.38)$$

Synthèse sur la TPI

L'objectif ici, est la prise en compte d'un comportement viscoélastique linéaire dans la formulation d'une loi de zone cohésive prise comme loi d'interface pour modéliser le comportement du joint d'adhésif lors d'un essai de fissuration en mode I d'ouverture, DCB. Pour cela, deux types de variables ont été définies : les variables d'état et les variables

internes. Pour notre configuration, la déformation (déplacement) globale de l'interface ε (ou v) est considérée comme la variable d'état. Les variables internes sont la contribution visqueuse de la déformation ε_v et l'endommagement d , bien qu'ici seul l'endommagement est utilisé au vu de notre formalisme de modélisation.

Leur loi d'évolution ont été obtenue d'une part, en utilisant les équations constitutives de la loi rhéologique SLS. Et d'autre part, en exploitant la phénoménologie de la loi de zone cohésive, ici choisie comme étant celle bi-linéaire. Nous avons également mis en évidence leur respect des conditions thermodynamiques qui viennent de l'inégalité de Clausius-Duhem.

Maintenant, il convient de les intégrer dans le schéma de modélisation global de l'essai DCB et ce, sous deux aspects :

1. La prise en compte de l'historique du chargement dans la formulation de la contrainte σ à l'interface. La relation 4.24 ne le permet pas à ce stade.
2. L'écriture du modèle DCB avec une modélisation du type poutre sur fondation Winkler.

Ces deux aspects sont traités dans la section suivante.

4.3 Intégration au modèle de l'essai DCB

Pour la prise en compte de l'historique de la réponse du modèle SLS, nous utilisons le principe de superposition de Boltzmann. Ainsi, pour un matériau dépourvu de déformation initiale et de contrainte, sa réponse à un échelon ε_0 à un instant T s'écrit $\sigma(t) = E_r(t)\varepsilon_0$ (cf. relation 4.12). Si un autre échelon ε_0^* est appliqué à l'instant T^* , alors ce principe stipule que la réponse est additive et s'écrit :

$$\sigma(t) = \sum_{k=0}^N \Delta\sigma_k \quad (4.39)$$

$$= \sum_{k=0}^N E_r(t - t_k) \Delta\varepsilon(t_k) \quad (4.40)$$

Avec, $t > t_k$, $\Delta\varepsilon(t_k) = \varepsilon(t_{k+1}) - \varepsilon(t_k)$ et $\Delta\sigma_k = E_r(t - t_k)\Delta\varepsilon(t_k)$. Cependant, les histoires des sollicitations peuvent ne pas être que des échelons de déformation. Donc il faut passer à la limite de sorte que :

$$\sigma(t) = \lim_{\Delta\sigma_k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^N \Delta\sigma(t_k) \quad (4.41)$$

$$\sigma(t) = \lim_{\Delta\varepsilon(t_k) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^N E_r(t - t_k) \Delta\varepsilon(t_k) \quad (4.42)$$

$$\sigma(t) = \int_{\varepsilon(-\infty)}^{\varepsilon(t)} E_r(t - t') d\varepsilon(t') \quad (4.43)$$

En utilisant le fait que la déformation ε ne dépend pas de t' , alors il vient :

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t E_r(t - t') \frac{d\varepsilon(t')}{dt'} dt' \quad (4.44)$$

En appliquant la relation 4.44 à un temps t_i et en utilisant la propriété de sommation des intégrales, nous pouvons écrire :

$$\sigma(t_i) = \int_{-\infty}^{t_{i-1}} E_r(t_i - t') \frac{d\varepsilon(t')}{dt'} dt' + \int_{t_{i-1}}^{t_i} E_r(t_i - t') \frac{d\varepsilon(t')}{dt'} dt' \quad (4.45)$$

Une approximation usuelle est de considérée que la vitesse de déformation est constante dans chaque intervalle Δt , $[t_i, t_{i+1}]$ et ici, nous l'approximons par un schéma aux différences finies décentré à gauche :

$$\frac{d\varepsilon(t')}{dt'} \approx \frac{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i}{\Delta t} \quad (4.46)$$

Les détails du calcul de la relation 4.45 sont fournis en annexe B. Ils permettent d'écrire une relation de recurrence pour la mise à jour de la contrainte à l'interface à deux temps de réponse consécutifs. Elle s'écrit comme :

$$\sigma_{i+1} = \alpha\sigma_i + \beta v_i + \gamma v_{i+1} \quad (4.47)$$

$$\alpha = \exp\left(\frac{-\Delta t}{\tau_R}\right) \quad (4.48)$$

$$\beta = -\mathbb{E}\left[\frac{\tau_R}{\tau_F}\exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_R}\right) + \frac{\tau_R}{\Delta t}\left(1 - \frac{\tau_R}{\tau_F}\right)\left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_R}\right)\right]\right] \quad (4.49)$$

$$\gamma = \mathbb{E}\left[\frac{\tau_R}{\tau_F} + \frac{\tau_R}{\Delta t}\left(1 - \frac{\tau_R}{\tau_F}\right)\left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_R}\right)\right]\right] \quad (4.50)$$

Remarquons que le coefficient γ peut être vu comme la raideur apparente au temps t_{i+1} . Toutefois, la loi incrémentale de la contrainte ne peut pas être implémentée de la sorte en ce sens qu'elle peut être vue comme une variable interne. En effet, Allen et Searcy [79] stipule que la contrainte à l'interface est celle de la loi incrémentale pondérée par le complémentaire de l'endommagement. Ainsi il vient que la contrainte à l'interface est égale à :

$$\sigma_i^r = (1 - d_i)\sigma_i \quad (4.51)$$

Maintenant, pour la modélisation de l'essai DCB, nous utilisons la même approche que celle du chapitre 3 qui consiste en la représentation du spécimen comme une poutre sur une fondation Winkler. Sauf que ici, chaque élément de la fondation suit une loi de zone cohésive bi-linéaire couplée au modèle rhéologique SLS. La contrainte à l'interface étant égale σ^r .

En utilisant les équations de champs 3.1 et 3.2 nous obtenons :

$$\frac{d^2 M(x, t)}{dx^2} + \sigma^r(x, t) = 0 \quad (4.52)$$

$$\frac{d^2 v(x, t)}{dx^2} - \frac{M(x, t)}{EI} - \frac{\sigma^r(x, t)}{\kappa GS} = 0 \quad (4.53)$$

En utilisant la discrétisation spatiale utilisée au chapitre 3 et en la combinant à celle temporelle, il vient :

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 M(x_k, t_i)}{dx^2} + [1 - d(x_k, t_i)] \gamma v(t_i) = \\ & - [1 - d(x_k, t_i)] [\alpha \sigma(x_k, t_{i-1}) + \beta v(x_k, t_{i-1})] \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 v(x_k, t_i)}{dx^2} - \frac{M(x_k, t_i)}{EI} - [1 - d(x_k, t_i)] \frac{\gamma}{\kappa GS} v(t_i) = \\ & [1 - d(x_k, t_i)] \frac{1}{\kappa GS} [\alpha \sigma(x_k, t_{i-1}) + \beta v(x_k, t_{i-1})] \end{aligned} \quad (4.55)$$

L'avantage de l'approche de modélisation que nous avons proposé au chapitre 3 et que nous réutilisons ici, est que pour une formulation de loi de zone cohésive différente, les matrices de "raideurs" ainsi obtenues demeurent inchangées. En effet, les différences avec les relations 3.5 et 3.13 sont les seconds membres et la raideur k qui devient ici $(1 - d)\gamma$. Ainsi, pour ce modèle, le second membre de la relation 3.5 devient :

$$\begin{pmatrix} -\Delta x^2 \mathbb{H}_k^{i-1} \\ \frac{\Delta x^2}{\kappa GS} \mathbb{H}_k^{i-1} \end{pmatrix}$$

Où, $\mathbb{H}_k^{i-1} = [1 - d(x_k, t_i)] (\alpha \sigma_k^{i-1} + \beta v_k^{i-1})$.

Pour les conditions au bord droit, la condition de déplacement imposé est conservé et le second membre de la relation 3.13 devient :

$$\begin{pmatrix} \Delta \cdot \Delta x - \frac{\alpha \Delta x^2}{2 \kappa GS} \mathbb{H}_N^{i-1} \\ -\frac{\Delta x^2}{2} \mathbb{H}_N^{i-1} \end{pmatrix}$$

Sur le bord gauche, les conditions de poutre sur fondation élastique sont conservées. Cette dernière n'est pas appropriée et à notre connaissance, il n'y a pas d'équivalent de la relation 3.14 dans le cas d'une fondation viscoélastique. Ainsi, d'une part, nous définissons la vitesse de chargement de sorte à ce que la longueur de fissure finale reste dans la zone maillée, et d'autre part la complaisance est prise faible de sorte que la partie non maillée soit rigidifiée.

En outre, pour la convergence du calcul, une procédure itérative est utilisée pour ré-estimer la flèche, l'endommagement, les contraintes σ et σ^r à chaque incrément en temps.

Un calcul élastique initial est effectué durant lequel ces grandeurs sont stockées. Ensuite, un second calcul est fait avec les valeurs de v_i , d_i , σ_i et σ_i^r obtenus précédemment. Dans le cas où la variation de la raideur est plus petite qu'une limite fixée, alors le calcul pour le prochain incrément en temps est fait. Dans le cas contraire, la même procédure est répétée jusqu'à ce que le critère soit atteint.

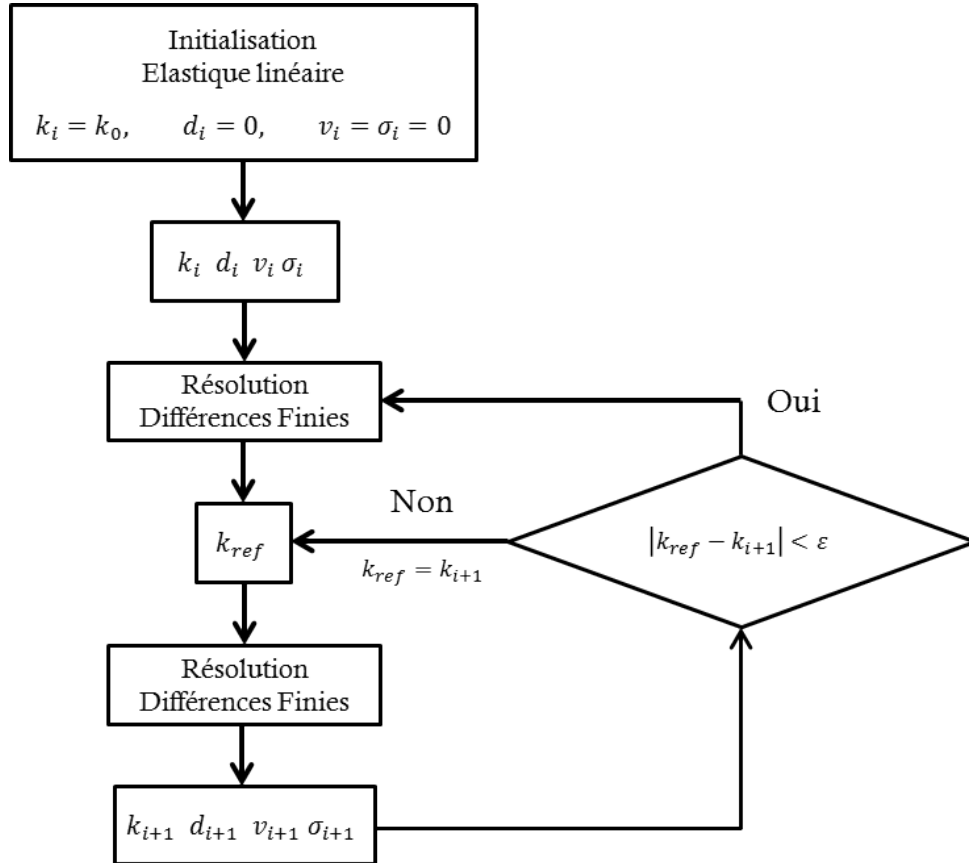


FIGURE 4.11 – Schéma algorithmique de l'essai DCB - Fondation Winkler - Loi de zone cohésive viscoélastique linéaire - Modèle SLS

4.4 Résultats

Dans ce qui suit nous présentons les résultats obtenus pour l'essai DCB en mode I d'ouverture, lorsque la loi du joint collé est prise comme le couplage entre une loi de zone cohésive bi-linéaire et le modèle rhéologique du solide linéaire standard. Dans un premier temps, il s'agira de discuter des modes de comportement du modèle viscoélastique linéaire utilisée, pour ensuite illustrer les résultats de la mesure macroscopique $P(\Delta)$. L'effet de la vitesse de sollicitation sera mise en évidence et ensuite nous ferons une comparaison des évolutions de la contrainte locale σ^r en fonction de la flèche v , avec celle d'une loi bilinéaire à raideur sécante.

Régimes de comportement de la loi rhéologique SLS

Le modèle rhéologique SLS suggère deux régimes de comportement en fonction de la vitesse de sollicitation. En effet, lorsqu'elle est faible, le pas de temps est élevé ce qui a pour conséquence sur la loi incrémentale : $\alpha = 0$, β faible et $\gamma = E_1$. Ainsi elle peut être vue comme une loi de zone cohésive bi-linéaire à raideur sécante avec un module élastique égale à E_1 qui induit une énergie que nous écrivons G_{cmin} . Cela est d'autant plus justifié que l'histoire sur la contrainte σ_{i-1} n'est pas prise en compte dans le calcul car $\alpha = 0$.

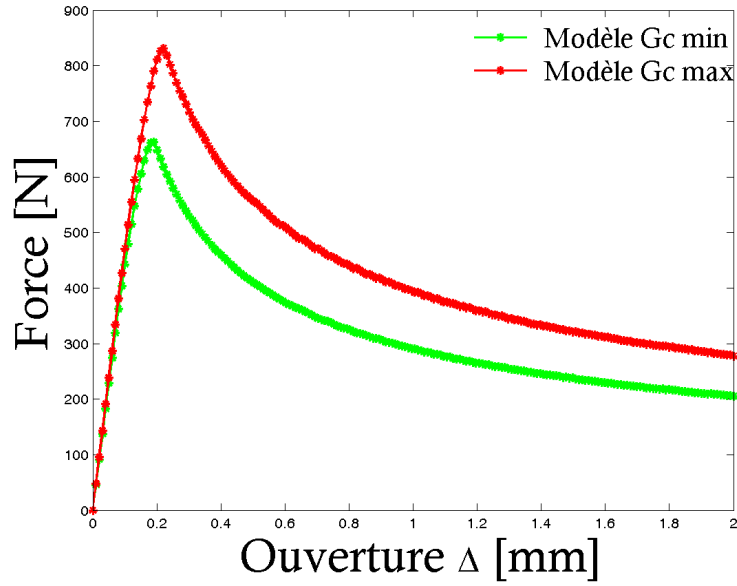


FIGURE 4.12 – Évolution de $P(\Delta)$ pour G_{cmin} et G_{cmax}

À l'opposé, dans le cas des vitesses de sollicitation élevées, le pas de temps est faible ce qui a pour conséquence sur σ_i : $\alpha \approx 1$, β faible en absolu et γ est égale à $E_1 + E_2$.

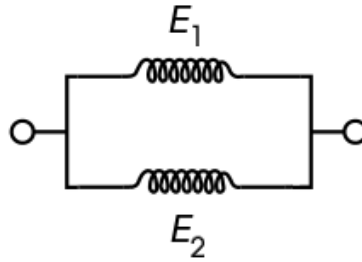


FIGURE 4.13 – Modèle d'interface pour les régimes de sollicitations élevées

De la même manière, cela s'apparente à une loi de zone cohésive bi-linéaire à raideur sécante pour un module élastique de $E_1 + E_2$ ce qui revient à une loi rhéologique avec les raideurs seules en parallèle (cf. figure 4.13). Cela induit également une énergie $G_{cmax} > G_{cmin}$.

Maintenant dans le cas des vitesses intermédiaires, l'histoire sur la contrainte est plus prépondérante et la loi $\sigma^r = f(v)$ est située entre les deux précédemment abordées ci-dessus.

Ainsi, le modèle SLS présente des bornes naturelles qui dépendent du régime de sollicitation. Afin de confirmer cela, nous testons la loi en imposant une flèche monotone de sorte que $v_{i+1} = (i+1)\Delta v$ où Δv est le pas. La flèche à la limite élastique est égale à celle de la loi de zone cohésive implémentée (cf. figure 4.10) c'est à dire $v_0 = \varepsilon_0 t_a = 1.5\%$ et celle à la rupture $v_m = \varepsilon_m t_a = 10\%$. L'endommagement est calculé en utilisant l'expression définie à la relation 4.38. Le pas de temps varie de 0.1 à 3s et le résultat obtenu est illustré ci-dessous.

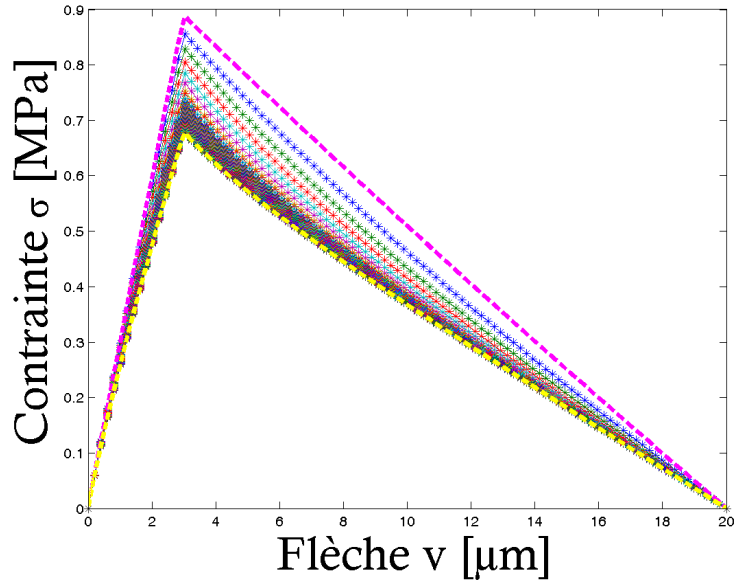


FIGURE 4.14 – Mise en évidence des bornes supérieure et inférieure de la loi rhéologique SLS

Sur la figure 4.14 nous observons que l'ensemble des évolutions de $\sigma^r = f(v)$ sont bornées par les lois de zone cohésives bi-linéaires. Celle matérialisée en magenta correspond à celle des vitesses élevées (Module $E_1 + E_2$, G_{cmax}) et celle en jaune représente celle des vitesses basses (E_1 , G_{cmin}). En outre, il apparaît également l'effet de l'histoire σ_{i-1} sur la contrainte σ_r par l'évolution non-linéaire durant la phase comprise entre la fin du comportement élastique et le début de la propagation (i.e. $0 \leq d \leq 1$).

Maintenant nous présentons les résultats obtenus avec le modèle aux différences finies de l'essai DCB.

Simulation de l'essai DCB : Mise en évidence macroscopique des régimes de sollicitation

En ce qui concerne la simulation de l'essai DCB avec le modèle d'interface viscoélastique linéaire, les propriétés géométriques et mécaniques des substrats sont identiques à celles utilisées au chapitre 2. L'épaisseur du joint de colle est de $t_a = 200\mu m$ et les modules du modèle SLS sont $E_1 = 2GPa$, $E_2 = 1GPa$, le coefficient de viscosité $\eta = 2e^{10}Pa.s$. Nous soumettons le modèle dans un premier temps à une vitesse de sollicitation faible c'est à dire $V = 1e^{-15}mm.min^{-1}$ et le chargement est monotone.

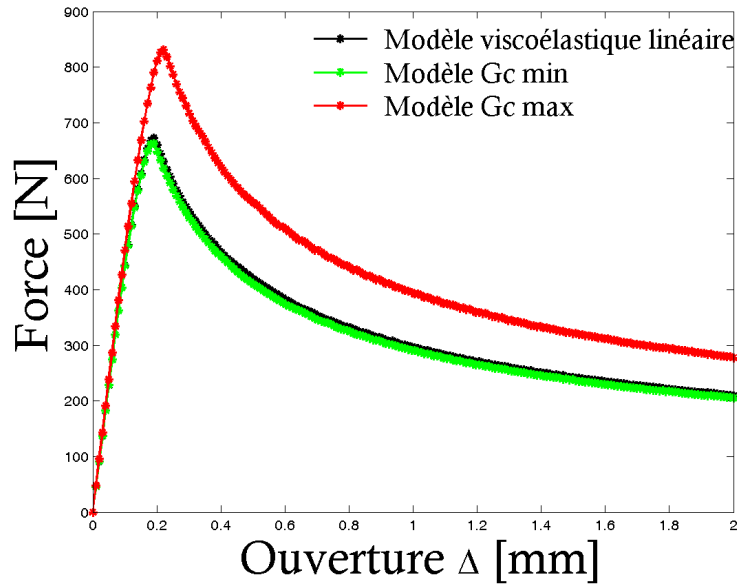


FIGURE 4.15 – Évolution de la mesure $P(\Delta)$ pour l'essai DCB avec interface viscoélastique - $\dot{\Delta} = 1e^{-15}mm.min^{-1}$

Le résultat est illustré sur la figure 4.15. Nous observons qu'en effet la réponse macroscopique correspond à celle avec la loi bi-linéaire de module E_1 . En effet, bien que les contraintes et les flèches soient calculées différemment pour les deux modèles, la grandeur qui pilote le comportement macroscopique est la raideur d'interface K . Ainsi, son évolution pour le modèle SLS devrait être égale à celle de la loi bi-linéaire à raideur sécante de module élastique E_1 .

Nous traçons les évolutions de ces contraintes et flèches pour trois instants de l'essai correspondant à $\Delta = 0.50mm$, $1mm$ et $1.5mm$. Les évolutions obtenus sont illustrées ci-dessous et les courbes en vert sont celles obtenues avec la loi bi-linéaire, et celles noires à parir de la réponse avec le modèle viscoélastique.

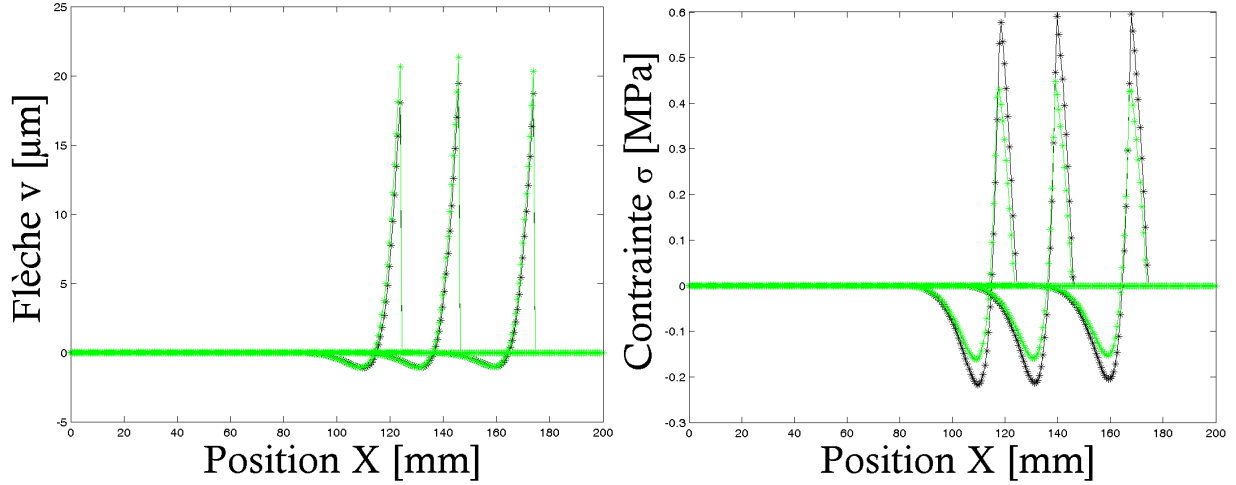


FIGURE 4.16 – Évolution de la flèche pour $\Delta = 0.50\text{mm}$, 1mm et 1.5mm FIGURE 4.17 – Évolution de la contrainte pour $\Delta = 0.50\text{mm}$, 1mm et 1.5mm

Sur la figure 4.16 la flèche a été multipliée par le vecteur issu de la condition $d < 1$ afin de mettre en évidence la "process zone" et sur la figure 4.17, la contrainte nulle correspond à la propagation de la fissure. En outre, nous observons la phase de compression en amont du front de fissure qui ici ne subit pas d'endommagement. Cependant, comme énoncé plus haut le paramètre qui pilote la propagation de la fissure est la raideur d'interface et son évolution est illustrée ci-dessous pour $\Delta = 0.5\text{mm}$.

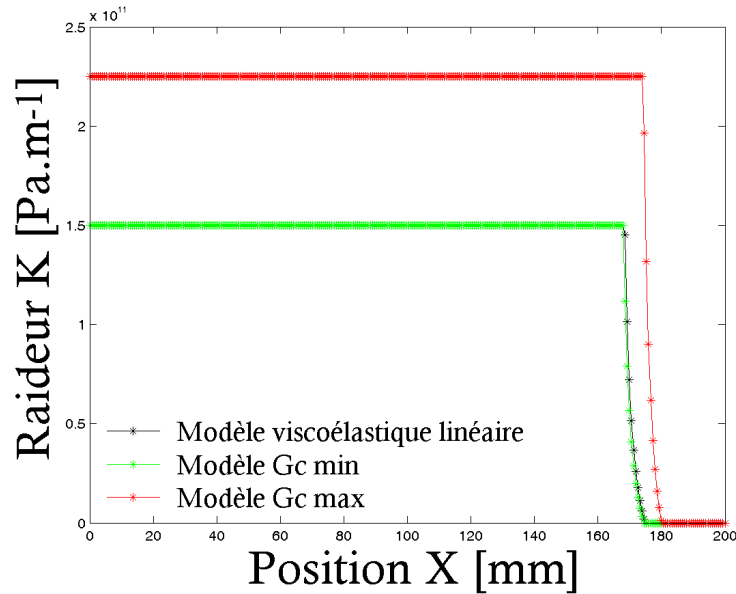


FIGURE 4.18 – Évolution des raideurs d'interface pour le modèle SLS, G_{cmin} et G_{cmax} - $\dot{\Delta} = 1e^{-15}\text{mm.min}^{-1}$

Ensuite, nous procédons de la même manière en appliquant le déplacement imposé avec une vitesse élevée $V = 1e^9\text{mm.min}^{-1}$. Au vue de l'étude de la loi d'interface 4.4, le

résultat attendu est que la mesure $P(\Delta)$ soit similaire à celle obtenue avec la loi bilinéaire de module $E_1 + E_2$. Ainsi, il vient que :

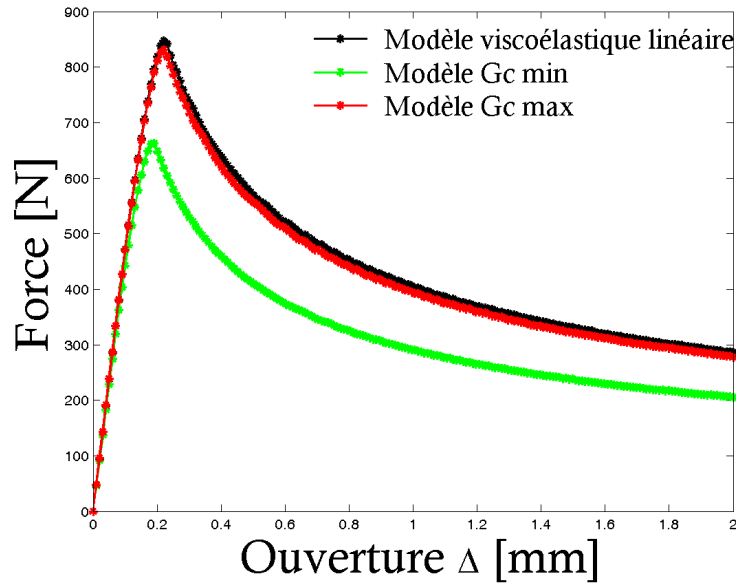


FIGURE 4.19 – Evolution de la mesure $P(\Delta)$ pour l'essai DCB avec interface viscoélastique - $\dot{\Delta} = 1e^9 mm.min^{-1}$

Ici également, nous observons qu'il y a correspondance entre les deux évolutions pour une vitesse de sollicitation élevée et cela est également observable pour l'évolution de la raideur à $\Delta = 0.5 mm$.

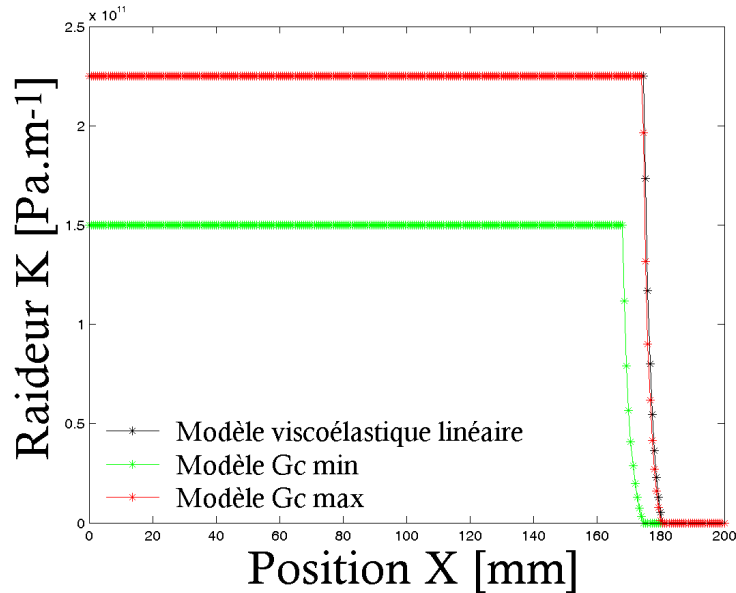


FIGURE 4.20 – Évolution des raideurs d'interface pour le modèle SLS, G_{cmin} et G_{cmax} - $\dot{\Delta} = 1e^9 mm.min^{-1}$

Ces résultats montrent bien que notre modèle est en accord avec les solutions de réfè-

rence qui sont celles obtenues avec les lois de zone cohésive bi-linéaires à raideur sécante respectivement de module E_1 et $E_1 + E_2$. Maintenant, nous abordons le cas des vitesses intermédiaires.

Cas des vitesses de sollicitations intermédiaires

Maintenant, nous appliquons une vitesse intermédiaire à savoir $V = 20e^{-6}mm.min^{-1}$ à notre modèle. Ainsi, le pas de temps est modifié et donc les coefficients α , β et γ . Au vue des résultats précédents, la courbe de réponse $P(\Delta)$ devrait être située entre celle obtenue avec les lois bi-linéaires. En effet, nous observons :

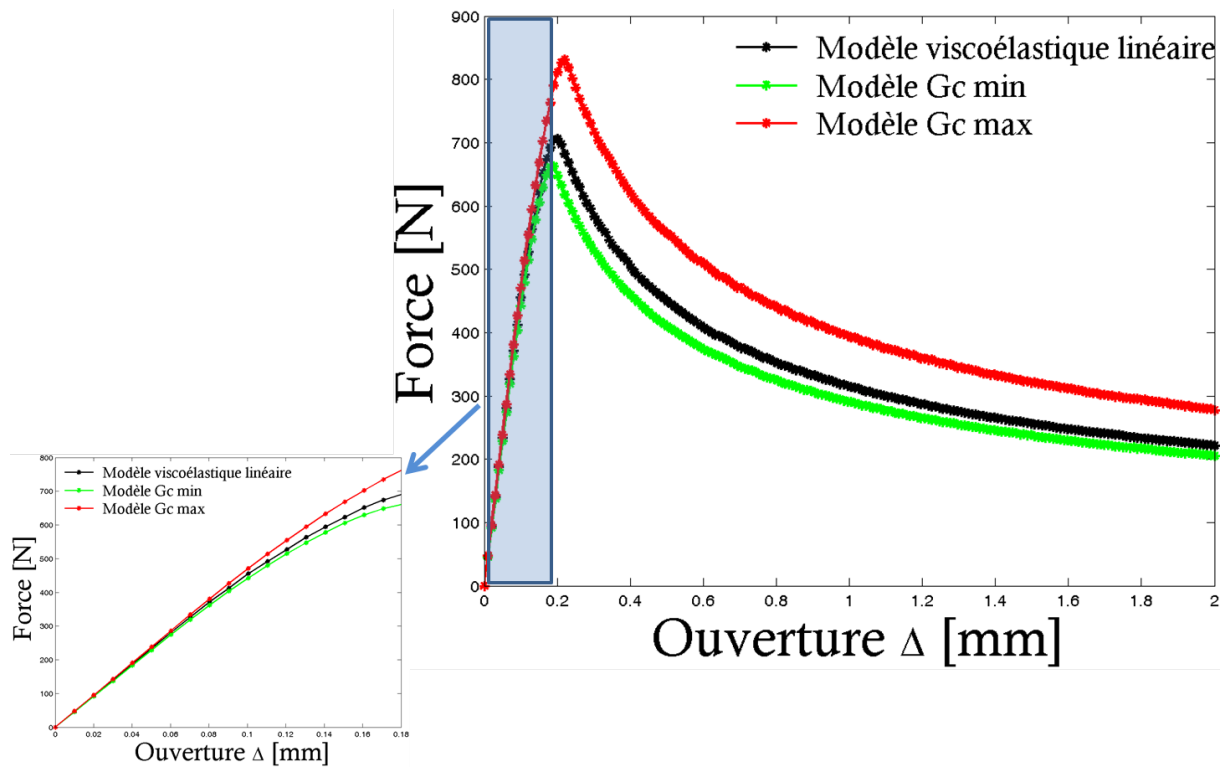


FIGURE 4.21 – Évolution de la mesure $P(\Delta)$ pour l'essai DCB avec interface viscoélastique - $\dot{\Delta} = 20e^{-6}mm.min^{-1}$

De plus, le zoom sur la partie correspondant à l'amorce de la fissure montre bien que la raideur d'interface est située entre les deux bornes ce qui valide ainsi le schéma numérique. Et cela est également observable sur la figure 4.22

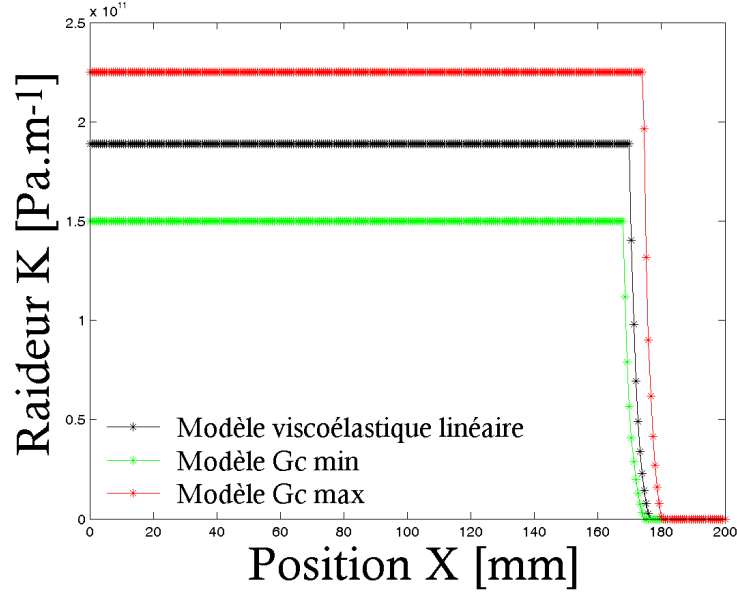


FIGURE 4.22 – Évolution des raideurs d'interface pour le modèle SLS, G_{cmin} et G_{cmax} - $\dot{\Delta} = 20e^{-6}mm.min^{-1}$

En dernier lieu, nous proposons de comparer les évolutions des lois d'interfaces σ_r , σ_{E_1} et $\sigma_{E_1+E_2}$ pour cette vitesse intermédiaire. Les contraintes σ_{E_1} et $\sigma_{E_1+E_2}$ correspondent à celles obtenues avec les lois bi-linéaires à raideur sécante et les indices correspondent aux modules élastiques. Quatre points de mesure ont été choisis afin de comparer ces lois d'interface : il s'agit de ceux à $\Delta = 0.5mm$, $1mm$, $1.5mm$ et enfin $2mm$. Ces points sont représentés par les carrés rouges sur la courbes ci-dessous.

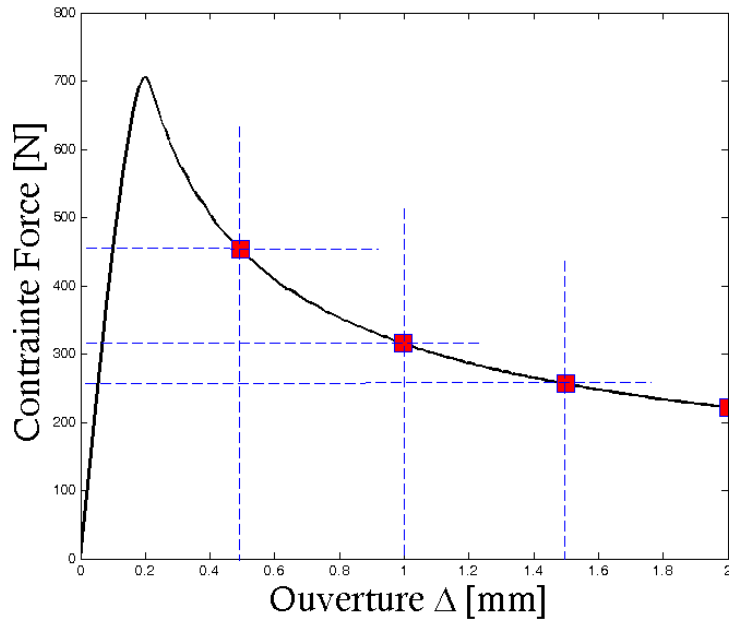


FIGURE 4.23 – Points de mesure pour la comparaison des lois d'interfaces dans le cas d'une vitesse de sollicitation intermédiaire

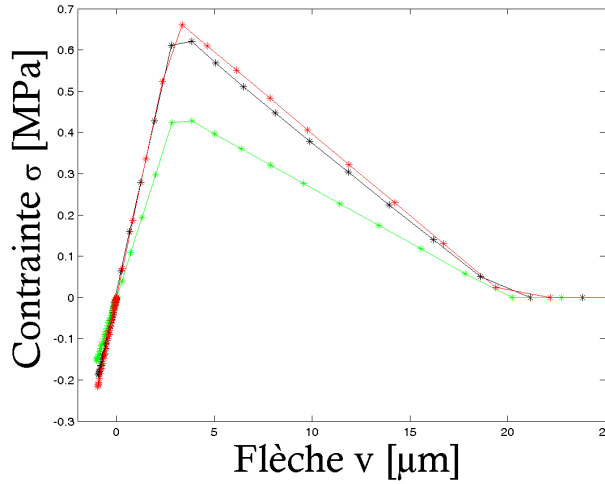


FIGURE 4.24 – Comparaison des évolutions de $\sigma(x) = f(v(x))$ pour les modèles SLS et BLS à $\Delta = 0.50mm$

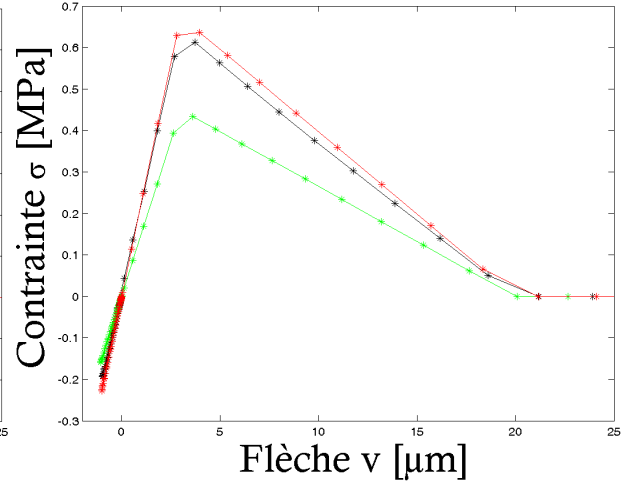


FIGURE 4.25 – Comparaison des évolutions de $\sigma(x) = f(v(x))$ pour les modèles SLS et BLS à $\Delta = 1mm$

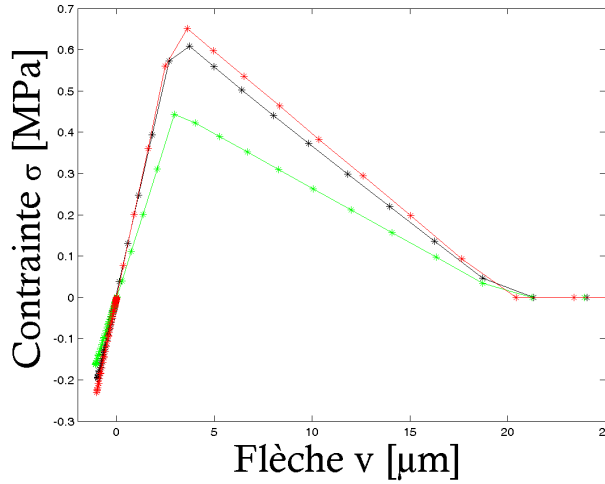


FIGURE 4.26 – Comparaison des évolutions de $\sigma(x) = f(v(x))$ pour les modèles SLS et BLS à $\Delta = 1.50mm$

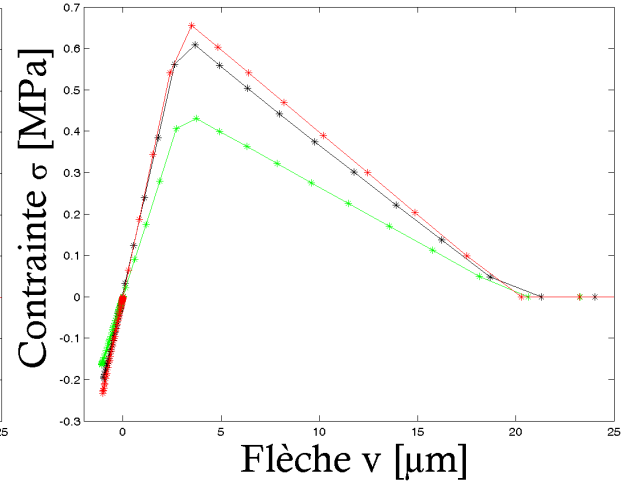


FIGURE 4.27 – Comparaison des évolutions de $\sigma(x) = f(v(x))$ pour les modèles SLS et BLS à $\Delta = 2mm$

Ainsi, nous obtenons les évolutions ci-dessus. La loi $\sigma_r = f(v)$ est située entre les bornes des deux lois bilinéaires. Nous y voyons également les phases de compression des trois lois durant lesquelles rappelons-le, l'endommagement n'est pas appliqué. Ce résultat montre que la formulation proposée, pour la modélisation de l'essai DCB avec une loi de zone cohésive bi-linéaire couplée au modèle rhéologique SLS, rend bien compte de la dépendance au temps qui renvoie à l'influence de la vitesse de sollicitation.

L'un des principaux avantages de cette formulation est son caractère paramétrable dans le sens où, elle nécessite uniquement, à priori, d'effectuer l'intégration en temps de la loi rhéologique utilisée comme loi d'interface au sein des assemblages collés.

4.5 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons proposé un modèle de loi d'interface qui couple une loi de zone cohésive bi-linéaire avec le modèle rhéologique SLS viscoélastique linéaire. Ce couplage a été effectué dans un cadre thermodynamique et la loi d'évolution de la contrainte à l'interface a été obtenue. Cette loi a été par la suite intégrée dans un schéma global qui représente le spécimen DCB comme une poutre sur une fondation Winkler.

Ensuite, l'étude de la relation incrémentale de la loi SLS a permis de mettre en évidence l'effet de la vitesse donc du pas de temps sur cette loi. L'encadrement par les lois de zone cohésive à raideur sécante de modules initiales E_1 et $E_1 + E_2$ a permis de mettre en évidence les mêmes types de bornes pour les évolutions macroscopiques $P(\Delta)$. Ainsi les résultats montrent la superposition de ces dernières pour des vitesses de sollicitation rapide et lente aussi bien en phase d'amorce que durant la propagation. De plus, pour des vitesses de sollicitations intermédiaires, la réponse du modèle montre que la mesure de la force en fonction de l'ouverture en bout d'éprouvette, ainsi que les évolutions locales de la contraintes restent dans cet intervalle ; $[P_{Gcmin} P_{Gcmax}]$ pour le premier et $[\sigma_{E_1} \sigma_{E_1+E_2}]$ pour les seconds.

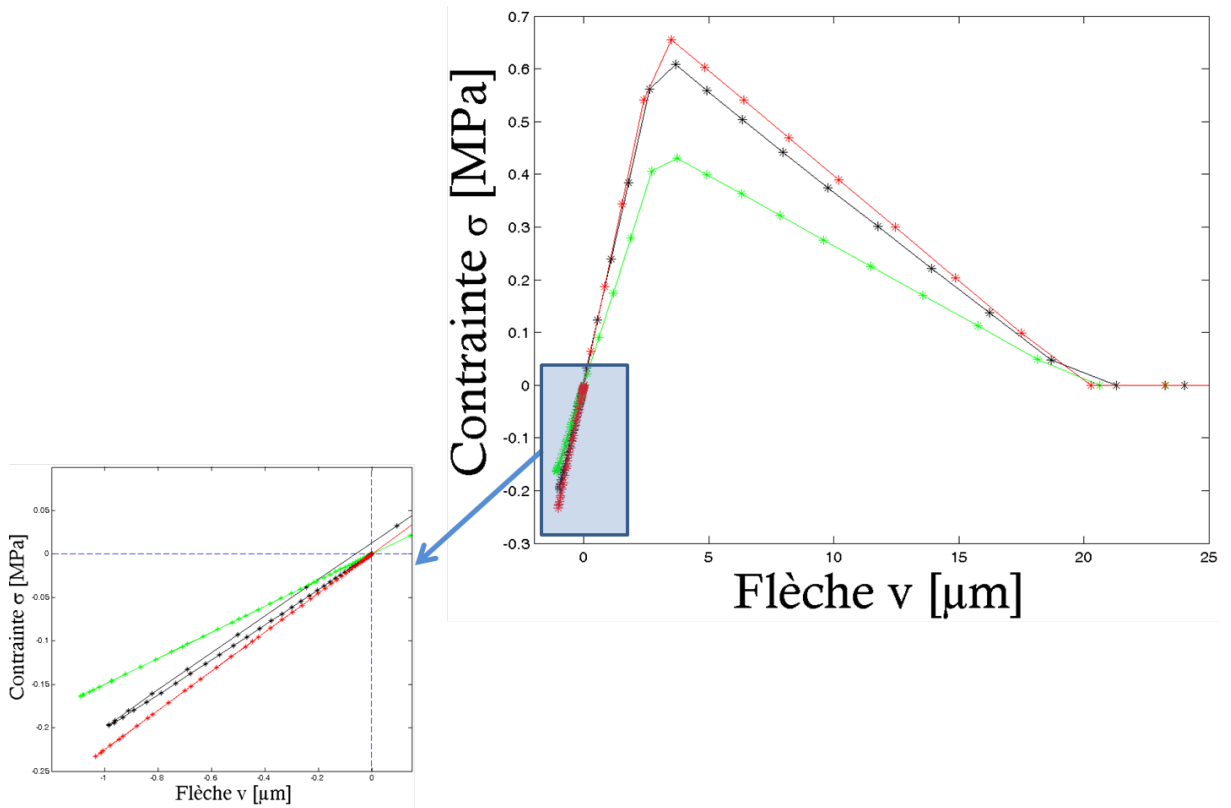


FIGURE 4.28 – Loi d'évolution de σ^r à $\Delta = 2\text{mm}$ - Zoom sur la phase de compression

Un résultat intéressant est l'évolution de la contrainte du modèle viscoélastique linéaire lors des phases de compression. En effet, durant ces dernières, la contrainte σ^r effectue une boucle avant d'évoluer en phase de traction. Cet aspect montre l'aspect non-linéaire avec l'effet plus prononcé de l'histoire σ_{i-1} sur la contrainte réelle. Dans le cas des lois de zone cohésive à raideur sécante, comme le montre la figure 4.28, les évolutions restent linéaires.

À terme, nous estimons que ce formalisme ainsi que le modèle d'interface couplée pourront être utilisés pour représenter le comportement des joints d'adhésifs aux interfaces des assemblages collés et demeurent transposable à différents types de loi rhéologique dès lors qu'une relation incrémentale de la contrainte en fonction de l'histoire est obtenue ainsi qu'un critère de convergence adapté.

Conclusion générale et perspectives

Les objectifs fixés pour ce travail ont été numériques et ont consisté en :

1. Une analyse comparative des techniques de mesure de l'essai de fissuration en mode I d'ouverture à travers les grandeurs macroscopiques correspondantes et ce, sur trois aspects :
 - Leur sensibilité vis-à-vis des paramètres de loi de zone cohésive.
 - Les incertitudes associées aux paramètres de loi identifiés.
 - Leur robustesse vis-à-vis des formes de loi.
2. La modélisation de l'essai de fissuration avec la prise en compte de la plasticité et l'effet du type d'écrouissage sur le comportement macroscopique.
3. La prise en compte de la visco-élasticité linéaire dans la formulation de la loi d'interface.

Pour cela, nous avons dans un premier temps effectué une revue bibliographique axée sur les deux principaux supports de notre étude que sont d'une part, l'essai de fissuration en mode I le plus utilisé qu'est l'essai DCB, et d'autre part, les lois de zone cohésive et leur identification à l'aide de méthode inverse basée sur la minimisation d'une fonction coût. Pour le premier, nous avons effectué une revue des différentes techniques d'analyse et avons opté pour celle dite SBT pour son adéquation à notre problématique de modélisation. Ensuite, les cadres conceptuels les plus utilisés pour la définition des critères de propagation de fissure ont été abordés et notre choix s'est naturellement porté sur ceux de la mécanique linéaire de la rupture avec le critère énergétique de propagation G_{1c} , choix induit par la technique de mesure SBT. Pour le second, c'est à dire les modèles de zone cohésive, nous avons présenté une des classifications existantes et qui semblait la plus adéquate à notre étude. Par la suite, il a été question d'expliquer les concepts de base ainsi que les développements le concernant. Une revue sur les travaux les plus pertinents sur l'identification des lois de zone cohésive a été effectuée afin d'introduire le besoin de l'étude qui consistait en notre premier objectif.

En second lieu, nous avons proposé une modélisation semi-analytique de l'essai DCB par une approche de type Winkler en représentant le comportement du joint collé par une

loi de zone cohésive. Une première comparaison a été faite sur l'influence de la forme de loi sur la réponse macroscopique "historique" $P(\Delta)$. Cela a permis de confirmer que c'est le taux de restitution critique de l'énergie qui pilote la phase de propagation et de bien mettre en évidence les comportements non-linéaires caractéristiques à chaque loi.

Ensuite nous avons présenté l'ensemble des techniques de mesure utilisée dans ce mémoire : $J(\delta)$, $\varepsilon(a)$, la corrélation d'image et les résultats de leur mise en œuvre avec notre modèle. L'analyse de sensibilité de ces grandeurs macroscopiques vis-à-vis des paramètres de la loi d'interface a permis de révéler leur zone d'influence et cela permet à terme le choix des phases de comportement pour une identification. L'identification inverse des paramètres de loi d'interface à partir de ces mesures également, a montré l'influence de la non-linéarité de la fonction au voisinage du minimum. En effet, les intervalles de confiances obtenus de manière asymptotique c'est à dire avec la matrice de covariance peuvent être larges voire même erronées. Notre démarche a permis de soulever cette problématique qui provient des simplifications faites sur la topologie de la fonction coût autour du minimum local, et d'ainsi proposer une alternative avec une méthode probabiliste. En effet avec l'analyse Bootstrap nous avons calculé des intervalles de confiance plus fiables. Nous estimons que cette procédure doit être incluse durant chaque identification entre données expérimentales et numériques.

L'analyse de robustesse est également essentielle pour discriminer les grandeurs macroscopiques utilisées pour l'identification. Souvent cette dernière est effectuée sur une seule méthode de mesure sans une vérification à priori de sa pertinence. Ici, nous concluons pour le mode I que la mesure $J(\delta)$ est la plus à même de discriminer la forme de loi bien que les autres grandeurs donnent également accès à certaines informations supplémentaires. Nous avons classé l'ensemble de ces méthodes selon les critères issues des résultats de notre étude et de là, il a été proposé un protocole d'essai pour améliorer la précision et la fiabilité des lois de zone cohésive identifiées.

Nous proposons une combinaison de l'ensemble des méthodes de mesure. L'utilisation de ce protocole pourrait être utilisée en mode I et la transposition aux autres modes d'ouverture devrait être directe.

La prise en compte de la plasticité dans la formulation de la loi de zone cohésive a également permis d'étudier deux types d'écrouissage. L'évolution des gradients de la contribution plastique sur la flèche à l'interface suggère la possibilité de renseigner sur le nombre d'éventuels segments linéaires existants dans la zone plastique dans le cas de loi de zone

cohésive "discontinues" c'est à dire qui ne dérivent pas d'un potentiel.

	$P(\Delta)$	$J(\delta)$	$\varepsilon(a)$	$v(x)$
Sensibilité	***	***	***	***
Identification	**	***	***	***
I.confiance	**	***	*	*
Robustesse	*	***	*	*
Stationnarité IC	*	*	***	**

TABLE 4.3 – Tableau comparatif des performances des différentes mesures de l'essai DCB en mode I d'ouverture et en chargement monotone pour les lois d'interface du type élasto-plastique

En perspective, nous avons identifié certains points qui méritent d'être approfondis / étudiés.

1. L'identification des paramètres de loi de zone cohésive avec la corrélation d'image a été faite avec des fonctions coût à une entrée c'est à dire, avec une seule variable dépendante : soit la flèche, soit la rotation. La même étude avec une fonction-objectif combinant les deux grandeurs, pourrait être réalisée afin d'observer une éventuelle amélioration des intervalles de confiance.
2. Le protocole proposé en fin de chapitre 2, combiné aux observations faites en conclusion du chapitre 3, devront être réalisés / validés dans un cadre expérimental.
3. Le modèle de fondation viscoélastique linéaire pourra être amélioré avec :
 - La prise en compte d'une seconde variable d'endommagement dans la zone de compression en amont du front de fissure.
 - L'étude paramétrique des modules viscoélastiques linéaires sur la réponse macroscopiques de l'essai DCB.
4. Enfin cette étude a été faite dans le cadre unidimensionnel, une extension au cas tridimensionnel devra être envisagée.

Pour conclure, ces trois années de thèse ont permis d'une part, de mettre en évidence l'attention qu'il convient de porter à l'identification des lois de zone cohésive à travers les grandeurs dépendantes utilisées et les approximations faites sur les fonctions coût.

Sur cette base d'étude numérique, une alternative originale est proposée avec la méthode Bootstrap et un protocole d'essai a été proposé pour une meilleure précision de l'identification des lois de zone cohésive utilisées comme loi d'interface au sein des assemblages collés en mode I de sollicitation. Elles ont également permis de proposer deux autres modèles : la première prenant en compte la plasticité et le second la visco-élasticité linéaire. Les résultats sont prometteurs et permettront à court et moyen termes de prendre en compte les phénomènes de dissipation opérants au sein des assemblages collés.

Bibliographie

Bibliographie

- [1] Determination of the mode 1 adhesive fracture energy of structural adhesive joints using double cantilever beam and tapered double cantilever beam specimens. *International Organization for Standardization*, 2009.
- [2] Mode i interlaminar fracture toughness of unidirectional fiber-reinforced polymer matrix composites1. 2007.
- [3] G.R.Irwin and J.Kies. Fracturing and fracture dynamics. *Welding Journal - Research Supplement*, pages 95–100, 1952.
- [4] J.P.Berry. Some kinetic considerations of the griffith criterion of fracture-i ; eqns of motion at constant deformation. *J. Mech. Phys. Solids*, 8 :207–223, 1960.
- [5] M. Berer and G. Pinter. Determination of crack growth kinetics in non-reinforced semi-crystalline thermoplastics using the linear elastic fracture mechanics (lefm) approach. *Polymer Testing*, 32(5) :870 – 879, 2013.
- [6] Marc J.W. Kanters, Jan Stolk, and Leon E. Govaert. Direct comparison of the compliance method with optical tracking of fatigue crack propagation in polymers. *Polymer Testing*, 46 :98 – 107, 2015.
- [7] R.D.S.G.Campilho J.P.R.Monteiro and E.A.S.Marques. Experimental estimation of the mechanical and fracture properties of a new epoxy adhesive. *Appl. Adhes. Sci*, pages 3–25, 2015.
- [8] C.J. Constante, R.D.S.G. Campilho, and D.C. Moura. Tensile fracture characterization of adhesive joints by standard and optical techniques. *Engineering Fracture Mechanics*, 136 :292 – 304, 2015.
- [9] B.S.Naoufel. Fiabilite des assemblages structuraux colles pour applications spatiales. these : Mecanique et ingenierie. universite bordeaux 1, n4681, 2012.
- [10] G.R.Cowper. The shear coefficient in timoshenko’s beam theory. *J. Appl. Mechanics*, 33(1922) :125–131, 1966.
- [11] S.Mostovoy and E.J.Ripling. Fracture toughness of an epoxy system. *J. Appl. Polym. Sci*, 10(9) :1351–1371, 1966.

- [12] J.G. William. Large displacement and end block effects in the dcb interlaminar test in modes i and ii. *J. Compos. Mater*, 21 :330–377, 1987.
- [13] Andrzej Leski. Implementation of the virtual crack closure technique in engineering {FE} calculations. *Finite Elements in Analysis and Design*, 43(3) :261 – 268, 2007.
- [14] Zhiyong Wang, Li Ma, Linzhi Wu, and Hongjun Yu. Numerical simulation of crack growth in brittle matrix of particle reinforced composites using the xfem technique. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 25(1) :9 – 21, 2012.
- [15] Jarno Jokinen, Markus Wallin, and Olli Saarela. Applicability of {VCCT} in mode i loading of yielding adhesively bonded joints a case study. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 62 :85 – 91, 2015.
- [16] Florin Adrian Stuparu, Dragos Alexandru Apostol, Dan Mihai Constantinescu, Catalin Radu Picu, Marin Sandu, and Stefan Sorohan. Cohesive and {XFEM} evaluation of adhesive failure for dissimilar single-lap joints. *Procedia Structural Integrity*, 2 :316 – 325, 2016. 21st European Conference on Fracture, ECF21, 20-24 June 2016, Catania, Italy.
- [17] Jialai Wang and Chao Zhang. Three-parameter, elastic foundation model for analysis of adhesively bonded joints. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 29(5) :495 – 502, 2009.
- [18] Julien Jumel, Michal K. Budzik, and Martin E.R. Shanahan. Beam on elastic foundation with anticlastic curvature : Application to analysis of mode i fracture tests. *Engineering Fracture Mechanics*, 78(18) :3253 – 3269, 2011.
- [19] M.M. Shokrieh, M. Heidari-Rarani, and M.R. Ayatollahi. Calculation of for a multi-directional composite double cantilever beam on two-parametric elastic foundation. *Aerospace Science and Technology*, 15(7) :534 – 543, 2011.
- [20] Zhengwen Jiang, Shui Wan, Zhipeng Zhong, Minghong Li, and Kongjian Shen. Determination of mode-i fracture toughness and non-uniformity for {GFRP} double cantilever beam specimens with an adhesive layer. *Engineering Fracture Mechanics*, 128 :139 – 156, 2014.
- [21] Zhengwen Jiang, Shui Wan, Minghong Li, and Lei Ma. Analytical solutions for non-uniformity of energy release rate of orthotropic double cantilever beam specimens with an adhesive layer. *Engineering Fracture Mechanics*, 164 :46 – 59, 2016.
- [22] M. Cabello, J. Zurbitu, J. Renart, A. Turon, and F. Martínez. A general analytical model based on elastic foundation beam theory for adhesively bonded {DCB} joints either with flexible or rigid adhesives. *International Journal of Solids and Structures*, 94 :21 – 34, 2016.

- [23] A.A.Griffith. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transaction of the Royal Society of London*, 221(582-593) :163–198, 1921.
- [24] G.R.Irwin. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *J.Applied Mechanics*, 24 :361–364, 1957.
- [25] J.R.Reeder and J.H. Crews. Mixed-mode bending method for delamination testing. *AIAA Journal*, 28(7) :1270–1276, 1990.
- [26] P.Y.B.Jar C.Fan and J.J.R.Cheng. Cohesive zone with continuum damage properties for simulation of delamination development in fiber composites and failure of adhesive joints. *Eng. Fracture Mechanics*, 75(13) :3866–3880, 2008.
- [27] K.Shahin and F.Taheri. The strain energy release rates in adhesively bonded balanced and unbalanced specimens and lap joints. *Int.J.Solids and Structures*, 45(25-26) :6284–6300, 2008.
- [28] H.L.Groth. Stress singularities and fracture at interface corners in bonded joints. *Int.J.Solids and Structures*, 8(2) :107–113, 1988.
- [29] Y.H.Liu J.Q.Xu and X.G.Wang. Numerical methods for the determination of multiple stress singularities and related stress intensity coefficients. *Eng. Fracture Mechanics*, 63(6) :775–790, 2008.
- [30] J.R. Rice. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 35 :379–386, 1968.
- [31] J.W. Hutchinson. Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material. *Journal of the mechanics and physics solids*, 16 :13–31, 1968.
- [32] G.F. Rosengreen J.R. Rice. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. *Journal of the mechanics and physics solids*, 16 :1–12, 1968.
- [33] L.M. Kachanov. Time of the rupture process under creep conditions. *Izv Akad Nauk S.S.R. Otd. Tekh Nauk*, (8) :26–31, 1958.
- [34] Y.N. Rabotnov. Creep rupture. *Proc.XII Int. Cong. Appl. Mech. StandFord-Springer*, 1969.
- [35] J.Lemaitre and R.Desmorat. *Engineering Damage Mechanics*. 2005.
- [36] M.E.Gurtin. An introduction to continuum mechanics. *Academic Press New York*, 1981.
- [37] A.Needleman. Micromechanical modeling of interfacial decohesion. *UltraMicroscopy*, 40(3) :203–214, 1992.
- [38] J.R.Roesler K.Park, G.H.Paulino. A unified potential-based cohesive model of mixed-mode fracture. *J. Mech. Phys. Solids*, 57(6) :891–908, 2009.

- [39] A.Needleman. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. *ASME J. Appl. Mech*, 54(3) :525–531, 1987.
- [40] L. Banks-Sills Y.Freed. A new cohesive zone model for mixed mode interface fracture in bimetals. *Eng. Fract. Mech*, 75(15) :4583–4593, 2008.
- [41] Kyoungsoo Park and Glaucio H. Paulino. Computational implementation of the {PPR} potential-based cohesive model in abaqus : Educational perspective. *Engineering Fracture Mechanics*, 93 :239 – 262, 2012.
- [42] A.Needleman. An analysis of decohesion along an imperfect interface. *Int. J. Fract*, 42(1) :21–40, 1990.
- [43] A.Needleman. An analysis of tensile decohesion along an interface. *J. Mech. Phys. Solids*, 38(3) :289–324, 1990.
- [44] J.R.Rice G.E.Beltz. Dislocation nucleation versus cleavage decohesion at crack tips. *The Minerals, Metals and Materials Society, Harvard University, Cambridge, MA*, pages 457–480, 1991.
- [45] A.Needleman X.P.Xu. Void nucleation by inclusion debonding in a crystal matrix. *Model. Simul. Mater. Sci. Eng*, 1(2) :111–132, 1993.
- [46] P.J.G.Schreurs. Fracture mechanics, lecture notes. *Eindhoven Technical University of Technology*, 2011.
- [47] G.Alfano. On the influence of the shape of the interface law on the application of cohesive zone models. *Composites Science and Technology*, 66(6) :723–730, 2006.
- [48] A.Turon. Simulation of delamination in composites under quasi-static and fatigue loading using cohesive zone models. *Ph.D. thesis, Universitat de Girona*, 2006.
- [49] H.M.Jensen P.Feraren. Cohesive zone modeling of interface fracture near flaws in adhesive joints. *Eng. Fract. Mech*, 71 :2125–2142, 2004.
- [50] M.F.Kanninen and C.H.Popelar. Advanced fracture mechanics. *Oxford University Press, New York*, 1985.
- [51] Z.P. Bazant and L.Cedolin. Stability of structures : Elastic, inelastic, fracture, and damage theories. *Oxford University Press, New York*, 1991.
- [52] T.L.Anderson. *Fracture Mechanics : Fundamentals and Applications*. 1995.
- [53] S.Suresh. *Fatigue of Materials*. 1998.
- [54] K.B.Broberg. *Cracks and Fracture*. 1999.
- [55] H.A.Elliott. An analysis of the conditions for rupture due to griffith cracks. *Proc. Phys. Soc*, 59(2) :208–223, 1947.

- [56] G.I.Barenblatt. The formation of equilibrium cracks during brittle fracture : General ideas and hypotheses, axially symmetric cracks. *Appl. Math. Mech*, 23(3) :622–636, 1959.
- [57] G.I.Barenblatt. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Adv. Appl. Mech*, 7 :55–129, 1959.
- [58] D.S.Dudgale. Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids*, 8(2) :100–104, 1960.
- [59] A.H.Cottrell B.A.Bilby and K.H. Swinden. Spread of plastic yield from notch. *R. Soc. Proc. Ser. A*, 272(1350) :304–314, 1963.
- [60] B.A.Bilby and K.H. Swinden. Representation of plasticity at notches by linear dislocations arrays. *R. Soc. Proc. Ser. A*, 285(1400) :22–33, 1963.
- [61] J.R.Rice. Mathematical analysis in the mechanics of fracture. *Fracture : An Advanced Treatise*, 2(H. Liebowitz, ed. Academic Press, New York) :191–311, 1968.
- [62] E.Smith. The structure in the vicinity of a crack tip : A general theory based on the cohesive zone model. *Eng. Fract. Mech*, 6(2) :213–222, 1974.
- [63] L.M.Keer. Stress distribution at the edge of an equilibrium crack. *J. Mech. Phys. Solids*, 12(3) :149–163, 1964.
- [64] J.L.Cribb and B.Tomkins. On the nature of the stress at the tip of a perfectly brittle crack. *J. Mech. Phys. Solids*, 15(2) :135–140, 1967.
- [65] E.Smith. A generalization of elliot’s model of a crack tip. *Int. J. fract*, 11(2) :295–299, 1975.
- [66] Seong Hyeok Song, Glaucio H. Paulino, and William G. Buttlar. A bilinear cohesive zone model tailored for fracture of asphalt concrete considering viscoelastic bulk material. *Engineering Fracture Mechanics*, 73(18) :2829 – 2848, 2006.
- [67] Yao Yao, Lu Liu, and Leon M. Keer. Pore pressure cohesive zone modeling of hydraulic fracture in quasi-brittle rocks. *Mechanics of Materials*, 83 :17 – 29, 2015.
- [68] HanYi Wang. Numerical modeling of non-planar hydraulic fracture propagation in brittle and ductile rocks using {XFEM} with cohesive zone method. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 135 :127 – 140, 2015.
- [69] Kyoungsoo Park, Kyungsu Ha, Habeun Choi, and Changjoon Lee. Prediction of interfacial fracture between concrete and fiber reinforced polymer (frp) by using cohesive zone modeling. *Cement and Concrete Composites*, 63 :122 – 131, 2015.
- [70] Mahdi Haddad and Kamy Sepehrnoori. Simulation of hydraulic fracturing in quasi-brittle shale formations using characterized cohesive layer : Stimulation controlling factors. *Journal of Unconventional Oil and Gas Resources*, 9 :65 – 83, 2015.

- [71] Y. Gui, H.H. Bui, and J. Kodikara. An application of a cohesive fracture model combining compression, tension and shear in soft rocks. *Computers and Geotechnics*, 66 :142 – 157, 2015.
- [72] Wei Zhou, Longwen Tang, Xinghong Liu, Gang Ma, and Mingxiang Chen. Mesoscopic simulation of the dynamic tensile behaviour of concrete based on a rate-dependent cohesive model. *International Journal of Impact Engineering*, 95 :165 – 175, 2016.
- [73] Yi-Lin Gui, Ha H. Bui, Jayantha Kodikara, Qian-Bing Zhang, Jian Zhao, and Timon Rabczuk. Modelling the dynamic failure of brittle rocks using a hybrid continuum-discrete element method with a mixed-mode cohesive fracture model. *International Journal of Impact Engineering*, 87 :146 – 155, 2016. SI : Experimental Testing and Computational Modeling of Dynamic Fracture.
- [74] R.Long C.Y.Hui, A.Ruina and A.Jagota. Cohesive zone models and fracture. *J.Adhes*, 87(1) :1–52, 2011.
- [75] S. Li, M.D. Thouless, A.M. Waas, J.A. Schroeder, and P.D. Zavattieri. Use of a cohesive-zone model to analyze the fracture of a fiber-reinforced polymer- matrix composite. *Composites Science and Technology*, 65(3â4) :537 – 549, 2005. JNC13-AMAC-Strasbourg.
- [76] J. Rodriguez, A. Salazar, F.J. Gomez, Y. Patel, and J.G. Williams. Fracture of notched samples in epoxy resin experiments and cohesive model. *Engineering Fracture Mechanics*, 149 :402–411, 2015.
- [77] E. Van der Giessen M.G.A.Tijssens and L.J.Sluys. Modeling of crazing using a cohesive surface methodology. *Mech. Mater*, 32(1) :19–35, 2000.
- [78] M.G.A.Tijssens R.Estevez and E.V. der Giessen. Modeling of the competition between shear yielding and crazing in glassy polymers. *J. Mech. Phys. Solids*, 48(12) :2585–2617, 2000.
- [79] C.R. Searcy D.H. Allen. A micromechanical model for a viscoelastic cohesive zone. *International Journal of Fracture*, 107 :159–176, 2001.
- [80] J.E.Bolander and N.Sukumar. Irregular lattice model for quasi-static crack propagation. *Phys. Rev. B.*, 71(9) :94–106, 2005.
- [81] S.Li and S.Ghosh. Extended voronoi cell finite element model for multiple cohesive crack propagation in brittle materials. *Int. J. Numer. Methods Eng*, 65(7) :1028–1067, 2006.
- [82] J.E.Bishop. Simulating the pervasive fracture of materials and structures using randomly close packed voronoi tessellations. *Comput. Mech.*, 44(4) :455–471, 2009.

- [83] Bentang Arief Budiman, Kosuke Takahashi, Kazuaki Inaba, and Kikuo Kishimoto. Evaluation of interfacial strength between fiber and matrix based on cohesive zone modeling. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 90 :211–217, 2016.
- [84] A.Needleman X.P.Xu. Void nucleation by inclusion debonding in a crystal matrix. *Model. Simul. Mater. Sci. Eng*, 1(2) :111–132, 1993.
- [85] M.Ortiz M.E.Walter, G.Ravichandran. Computational modeling of damage evolution in unidirectional fiber reinforced ceramic matrix composites. *Comput. Mech*, 20(1-2) :192–198, 1997.
- [86] M.Paggi A.Carpinteri and G.Zavarise. Snap-back instability in micro-structured composites and its connection with superplasticity. *Strength, Fract. complexity*, 3(2-4) :61–72, 2005.
- [87] L.Brinson A.Needleman, T.L.Borders and V.M.flores. Effect of an interphase region on debonding of a cnt reinforces polymer composite. *Compos. Sci. Technol.*, 70(15) :2207–2215, 2010.
- [88] G.H.paulino D.Ngo, K.Park and Y.Huang. On the constitutive relation of materials with microstructure using a potential-based cohesive model for interface interaction. *Eng. fract. Mech*, 77(7) :1153–1174, 2010.
- [89] K.K.Kar P.K.Agnihotri and S.Basu. Cohesive zone model of carbon nanotube-coated carbon fiber/polyester composites. *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.*, 77(7), 2012.
- [90] W.Brocks and A.Comec. Guest editorial : Cohesive models. *Eng. fract. Mech*, 20 :1741–1742, 2003.
- [91] F. Moroni and A. Pirondi. A procedure for the simulation of fatigue crack growth in adhesively bonded joints based on a cohesive zone model and various mixed-mode propagation criteria. *Engineering Fracture Mechanics*, 89 :129–138, 2012.
- [92] Huck Beng Chew. Cohesive zone laws for fatigue crack growth : Numerical field projection of the micromechanical damage process in an elasto-plastic medium. *International Journal of Solids and Structures*, 51(6) :1410 – 1420, 2014.
- [93] G. Giuliese, A. Pirondi, and F. Moroni. A cohesive zone model for three-dimensional fatigue debonding/delamination. *Procedia Materials Science*, 3 :1473 – 1478, 2014.
- [94] Stephan Roth and Meinhard Kuna. Fatigue modelling with a cyclic cohesive zone approach. *Procedia Materials Science*, 3 :325 – 330, 2014.
- [95] M.F.S.F. de Moura and J.P.M. Gonçalves. Cohesive zone model for high-cycle fatigue of composite bonded joints under mixed-mode i + ii loading. *Engineering Fracture Mechanics*, 140 :31 – 42, 2015.

- [96] Stephen Jimenez and Ravindra Duddu. On the parametric sensitivity of cohesive zone models for high-cycle fatigue delamination of composites. *International Journal of Solids and Structures*, 82 :111 – 124, 2016.
- [97] Ahmad Amiri-Rad, Mohammad Mashayekhi, and Frans P. van der Meer. Cohesive zone and level set method for simulation of high cycle fatigue delamination in composite materials. *Composite Structures*, 160 :61 – 69, 2017.
- [98] W.H.Gerstle A.R.Ingraffea and P.Gergely. Fracture mechanics of bond in reinforced concrete. *J. Struct. Eng.*, 110(4) :871–890, 1984.
- [99] M.V.K.V.Prasad and C.S. Krishnamoorthy. Computational model for discrete crack growth in plain and reinforced concrete. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 191(25-26) :2699–2725, 2002.
- [100] Jialai Wang. Debonding of frp-plated reinforced concrete beam, a bond-slip analysis. i. theoretical formulation. *International Journal of Solids and Structures*, 43(21) :6649 – 6664, 2006.
- [101] T.K. Jacobsen B.F. Sorensen. Determination of cohesive laws by the j integral approach. *Engineering Fracture Mechanics*, 70 :1841–1858, 2003.
- [102] Stergios Goutianos and Bent F. Sørensen. The application of j integral to measure cohesive laws under large-scale yielding. *Engineering Fracture Mechanics*, 155 :145 – 165, 2016.
- [103] Christian Lundsgaard-Larsen, Bent F. Sørensen, Christian Berggreen, and Rasmus C. Åstergaard. A modified {DCB} sandwich specimen for measuring mixed-mode cohesive laws. *Engineering Fracture Mechanics*, 75(8) :2514 – 2530, 2008.
- [104] B.Villmann V.Slowik and N.Bretscheider. Computational aspects of inverse analyses for determining softening curves of concretes. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 195(52) :7223–7236, 2006.
- [105] J.L.A.de Oliveira e Sousa and R.Gettu. Determining the tensile stress-crack opening curve of concrete by inverse analysis. *ASCE J. Eng. Mech*, 132(2) :141–148, 2006.
- [106] Z.Zhao S.H.Kwon and S.P.Shah. Effect of specimen size on fracture energy and softening curve of concrete : Part ii. inverse analysis and softening curve. *Cem. Concr. Res*, 38(8-9) :1061–1069, 2008.
- [107] J. Wang, Q.H. Qin, Y.L. Kang, X.Q. Li, and Q.Q. Rong. Viscoelastic adhesive interfacial model and experimental characterization for interfacial parameters. *Mechanics of Materials*, 42(5) :537–547, 2010.
- [108] Nunziante Valoroso, Salvatore Sessa, Marcello Lepore, and Gabriele Cricri. Identification of mode i cohesive parameters for bonded interfaces based on {DCB} test. *Engineering Fracture Mechanics*, 104 :56–79, 2013.

- [109] Yangjian Xu, Xiangyu Li, Xiaogui Wang, and Lihua Liang. Inverse parameter identification of cohesive zone model for simulating mixed-mode crack propagation. *International Journal of Solids and Structures*, 51(13) :2400–2410, 2014.
- [110] Xin Chen, Xiaomin Deng, Michael A. Sutton, and Pablo Zavattieri. An inverse analysis of cohesive zone model parameter values for ductile crack growth simulations. *International Journal of Mechanical Sciences*, 79 :206 – 215, 2014.
- [111] H.B.Chew S.Hong and K.S.Kim. Cohesive zone laws for void growth i experimental field projection of crack-tip crazing in glassy polymers. *J. Mech. Phys. Solids*, 57(8) :1357–1373, 2009.
- [112] J.Abanto-Bueno and J.Lambros. Experimental determination of cohesive failure properties of a photodegradable copolymer. *Exp. mech.*, 45(2) :144–152, 2005.
- [113] C. Liu H.Tan and P.H.Geubelle. The cohesive law for the particle/matrix interfaces in high explosives. *J. Mech. Phys. Solids*, 53(8) :1892–1917, 2005.
- [114] B.Shen and G.H.Paulino. Direct extraction of cohesive fracture properties from digital image correlation : A hybrid inverse technique. *Exp.Mech*, 51(2) :143–163, 2011.
- [115] Julien Rethore and Rafael Estevez. Identification of a cohesive zone model from digital images at the micron-scale. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 61(6) :1407 – 1420, 2013.
- [116] Jae-Chul Oh and Hyun-Gyu Kim. Inverse estimation of cohesive zone laws from experimentally measured displacements for the quasi-static mode i fracture of {PMMA}. *Engineering Fracture Mechanics*, 99 :118 – 131, 2013.
- [117] B. Blaysat, J.P.M. Hoefnagels, G. Lubineau, M. Alfano, and M.G.D. Geers. Interface debonding characterization by image correlation integrated with double cantilever beam kinematics. *International Journal of Solids and Structures*, 55 :79 – 91, 2015. Special Issue Computational and Experimental Mechanics of Advanced Materials A workshop held at King Abdullah University of Science and Technology Jeddah, Kingdom of Saudi Arabia July 1-3, 2013 Organized by : Gilles Lubineau, King Abdullah University of Science and Technology, Saudi Arabia Marco Alfano, University of Calabria, Italy Glaucio H. Paulino, Georgia Institute of Technology (GATech), {USA}.
- [118] Marco Alfano, Gilles Lubineau, and Glaucio H. Paulino. Global sensitivity analysis in the identification of cohesive models using full-field kinematic data. *International Journal of Solids and Structures*, 55 :66 – 78, 2015. Special Issue Computational and Experimental Mechanics of Advanced Materials A workshop held at King Abdullah

- University of Science and Technology Jeddah, Kingdom of Saudi Arabia July 1-3, 2013 Organized by : Gilles Lubineau, King Abdullah University of Science and Technology, Saudi Arabia Marco Alfano, University of Calabria, Italy Glaucio H. Paulino, Georgia Institute of Technology (GATech), {USA}.
- [119] Venkateswaran Shanmugam, Ravi Penmetsa, Eric Tuegel, and Stephen Clay. Stochastic modeling of delamination growth in unidirectional composite {DCB} specimens using cohesive zone models. *Composite Structures*, 102 :38 – 60, 2013.
 - [120] M.A. Hariri-Ardebili and V.E. Saouma. Sensitivity and uncertainty quantification of the cohesive crack model. *Engineering Fracture Mechanics*, 155 :18 – 35, 2016.
 - [121] M. Alfano and al. Mode i fracture of adhesive joints using tailored cohesive zone model. *International Journal of Fracture*, 157 :193–204, 2009.
 - [122] A.M. Waas P.A. Gustafson. The influence of adhesive constitutive parameters in cohesive zone finite element models of adhesively bonded joints. *International Journal of Solids and Structures*, 46 :2201–2215, 2009.
 - [123] P. Kirkegaard B.F. Sorensen. Determination of mixed mode cohesive laws. *Engineering Fracture Mechanics*, 73 :2642–2661, 2006.
 - [124] R.J. Ward V.C. Li. A novel testing technique for post-peak tensile behavior of cementitious materials. *Fracture Toughness and Fracture Energy*, pages 183–195, 2000.
 - [125] N. Valoroso and al. Identification of mode-i cohesive parameters for bonded interfaces based on dcb test. *Engineering Fracture Mechanics*, 104 :56–79, 2013.
 - [126] K. Ravi-Chandar Y.Zhu, K.M.Lietchi. Direct extraction of rate-dependent traction separation laws for polyurea / steel interfaces. *Int.J.Solids Struct.*, 46(1) :31–51, 2009.
 - [127] S.Mostovoy E.J.Ripling and R.L.Patrick. Measuring fracture toughness of adhesive joints. *Materials Research and Standards*, 4 :129–134, 1964.
 - [128] Y.Meziere. Etude de delaminage dans les materiaux composites a matrice organique, these : Genie mecanique. universite paul sabatier, n3608, 2000.
 - [129] D.S.Schnur and N.Zabaras. An inverse method for determining elastic material properties and a material interface. *Int. J. Numer Methods and Eng.*, 33 :2039–2057, 1992.
 - [130] X.Deng X.Chen and M.A.Sutton. An inverse analysis of cohesive zone model parameter for ductile crack growth simulations. *Int. J. Numer Mechs. Sciences*, 79 :206–215, 1992.

- [131] S.Sessa N.Valoroso and M.Lepore. Identification of mode-i cohesive parameters for bonded interfaces based on dcb test. *Eng. Fract. Mechs*, 104 :56–79, 2013.
- [132] X.Li Y.Xu and L.Liang. Inverse parameter identification of cohesive zone model for simulating mixed-mode crack propagation. *Int. J. Solids and Struct.*, 51 :2400–2410, 2014.
- [133] R.J.Waard and V.C.Li. A novel testing technique for post-peak tensile behavior of cementitious materials. *Fract. Toughness and Fract. Energy, Mihashi et al. (eds)*, pages 183–195, 1989.
- [134] R.L.Fernandes and R.D.S.G.Campilho. Numerical evaluation of dissimilar cohesive models to predict the behavior of double-cantilever beam specimens. *Procedia Struct. Integrity*, 1 :42–49, 2016.
- [135] J.Jumel M.K.Budzik and M.E.R.Shanahan. An in situ technique for the assessment of adhesive properties of a joint under load. *Int. J. Fract.*, 78 :3253–3269, 2011.
- [136] J.Jumel M.K.Budzik and M.E.R.Shanahan. Process zone in the single cantilever beam under transverse loading part ii : Experimental. *Theoretical and Applied Fract. Mechanics*, 56 :13–21, 2011.
- [137] J.J.Orteu M.A.Sutton and H.W.Schreier. *Image correlation for shape, motion and deformation measurements : Basic concepts, theory and application*. 2009.
- [138] Mahalanobis and P.Chandra. On the generalized distance in statistics. *Proceedings of the National Institute of Sciences of India*, 2(1) :49–55, 1936.
- [139] J. Lamaitre and J.L. Jaboche. *Mecanique des Materiaux Solides*. 1985.
- [140] S. Roy and al. A multi-scale viscoelastic cohesive layer model for predicting delamination in htpmc. *Advances in Aerospace Technology*, 1 :V001T01A015, 2014.
- [141] G.A. Alfano M. Musto. A fractional rate-dependent cohesive-zone model. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 103 :313–341, 2015.
- [142] G.Spada F.Mainardi. Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology. *The European Physical Journal*, 193 :133–160, 2011.
- [143] Fabien Cazes, Michel Coret, Alain Combescure, and Anthony Gravouil. A thermodynamic method for the construction of a cohesive law from a nonlocal damage model. *International Journal of Solids and Structures*, 46(6) :1476–1490, 2009.
- [144] L. Benabou, Z. Sun, and P.R. Dahoo. A thermo-mechanical cohesive zone model for solder joint lifetime prediction. *International Journal of Fatigue*, 49 :18–30, 2013.
- [145] Ammar A. Alsheghri and Rashid K. Abu Al-Rub. Thermodynamic-based cohesive zone healing model for self-healing materials. *Mechanics Research Communications*, 70 :102–113, 2015.

- [146] R. Serpieri, E. Sacco, and G. Alfano. A thermodynamically consistent derivation of a frictional-damage cohesive-zone model with different mode I and mode II fracture energies. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 49 :13–25, 2015.
- [147] Daniel W. Spring, Oliver Giraldo-Londono, and Glaucio H. Paulino. A study on the thermodynamic consistency of the park&Paulino&Roesler (ppr) cohesive fracture model. *Mechanics Research Communications*, 2016.
- [148] Francesco Parrinello, Giuseppe Marannano, and Guido Borino. A thermodynamically consistent cohesive-frictional interface model for mixed mode delamination. *Engineering Fracture Mechanics*, 153 :61–79, 2016.
- [149] J. Lamaitre and J.L. Jaboché. Phenomenological approach of damage rupture. *Journal of applied mechanics*, 2(3) :317–367, 1978.

Annexes

Annexe A

Algorithme de Levenberg-Marquardt

La recherche des extrema d'une fonction vis-à-vis d'une variable, s'effectue en annulant sa dérivée première par rapport à la variable. La nature de cet extremum est par la suite définie par le signe de la dérivée seconde de la fonction : si elle est négative, il s'agit d'un maximum, si elle est positive, il s'agit d'un minimum et enfin si elle est nulle, il peut s'agir d'un point d'inflexion. Ce principe de base est à l'origine de la plupart des méthodes de minimisation itératives ou directes. Les seules différences qui subsistent sont dues aux hypothèses faites sur la forme de la fonction coût au voisinage du minimum recherché. Ici, la fonction coût considérée et celle au sens des moindres carrées χ^2 telle que :

$$\chi^2(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^N \left[\frac{\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{p})}{\sigma} \right]^2 \quad (4.56)$$

Dans la suite, nous exposons dans un premier temps les principes de base de la méthode de descente de gradient. Dans un second temps, nous présentons la méthode de Gauss-Newton afin d'introduire en troisième lieu, la méthode de Levenberg-Marquardt.

Méthode de descente de gradient

La méthode de descente de gradient est une méthode de minimisation générale qui met à jour les paramètres dans la direction de plus forte pente : c'est à dire dans la direction opposée du gradient de la fonction coût. C'est la méthode la plus connue parmi les techniques de minimisation par descente et converge bien pour des fonctions coûts simples et est en outre la seule méthode viable pour des problèmes avec un nombre de paramètres conséquents. En utilisant la formulation 4.56, le gradient de la fonction coût en fonction des paramètres s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \chi^2(\mathbf{p}) = 2 \left(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{p}) \right)^T \mathbb{W} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{p}) \right) \quad (4.57)$$

$$= -2 \left(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{p}) \right)^T \mathbb{W} \left[\frac{\partial \hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \right] \quad (4.58)$$

$$= -2 \left(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{p}) \right)^T \mathbb{W} \mathbf{J}_{cob} \quad (4.59)$$

L'expression de la matrice jacobienne \mathbf{J}_{cob} représente la sensibilité locale de la sortie du modèle $\hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{p})$ en fonction des paramètres \mathbf{p} . La perturbation appliquée aux paramètres dans le processus itératif de minimisation du χ^2 est celle qui les fait varier dans la direction de plus forte descente et vaut :

$$\mathbf{h}_{dg} = \alpha \mathbf{J}_{cob}^T \mathbb{W} (\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}) \quad (4.60)$$

Ainsi, α étant un scalaire positif qui représente le pas de descente dans la direction de plus forte pente, la relation de récurrence des paramètres s'écrit :

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k - \mathbf{h}_{dg} \quad (4.61)$$

Comme évoqué au début du paragraphe, la technique de la descente de gradient est efficace lorsque la fonction objectif est simple : c'est à dire lorsqu'il n'y a qu'un seul minimum. En effet pour une fonction $\chi^2(\mathbf{p})$ présentant plusieurs minima locaux, les paramètres optimaux trouvés dépendent fortement des valeurs d'entrée du calcul initial.

Méthode de Gauss-Newton

La méthode de Gauss-Newton est une technique de minimisation de la fonction $\chi^2(\mathbf{p})$. Elle suppose que la fonction coût est quadratique au voisinage du minimum c'est à dire dans l'espace des paramètres optimaux trouvés. Dans la plupart des cas, la méthode de Gauss-Newton converge plus vite que celle par descente de gradient. Une perturbation \mathbf{h} est appliquée aux paramètres du modèle \mathbf{p} . La réponse du modèle est approximée par un développement de Taylor au premier ordre de sorte que :

$$\hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{p} + \mathbf{h}) \approx \hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{p}) + \left[\frac{\partial \hat{\mathbf{Y}}}{\partial \mathbf{p}} \right] \mathbf{h} \quad (4.62)$$

$$\approx \hat{\mathbf{Y}} + \mathbf{J}_{cob} \mathbf{h} \quad (4.63)$$

En substituant l'équation 4.63 dans 4.56 nous obtenons l'expression de la fonction coût perturbée ci-dessous :

$$\begin{aligned} \chi^2(\mathbf{p} + \mathbf{h}) \approx & \mathbf{Y}^T \mathbb{W} \mathbf{Y} + \hat{\mathbf{Y}}^T \mathbb{W} \hat{\mathbf{Y}} - 2 \mathbf{Y}^T \mathbb{W} \hat{\mathbf{Y}} \\ & - 2(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}})^T \mathbb{W} \mathbf{J}_{cob} \mathbf{h} + \mathbf{h}^T \mathbf{J}_{cob}^T \mathbb{W} \mathbf{J}_{cob} \mathbf{h} \end{aligned} \quad (4.64)$$

La formule 4.64 montre que la fonction $\chi^2(\mathbf{p})$ est approximativement quadratique sur la perturbation \mathbf{h} et que le hessien est approximativement égal à $\mathbf{J}_{cob}^T \mathbb{W} \mathbf{J}_{cob}$. La matrice hessienne est une matrice symétrique qui contient les dérivées secondes du modèle en fonction de ces paramètres. Comme évoqué plus haut dans le cas d'une fonction à une variable, l'extremum trouvé est un minimum lorsque la dérivée seconde de ladite fonction est positive. Son équivalent avec la méthode de Gauss-Newton est la matrice hessienne. Elle doit être définie positive pour s'assurer que les paramètres optimaux trouvés réalisent un minimum local du χ^2 . En posant $\mathbb{H} = \mathbf{J}_{cob}^T \mathbb{W} \mathbf{J}_{cob}$, une condition supplémentaire à l'équation 4.64 s'écrit :

$$\mathbf{p}^T \mathbb{H} \mathbf{p} > 0 \quad (4.65)$$

$$\forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{p} \neq 0 \quad (4.66)$$

La perturbation \mathbf{h} qui minimise χ^2 est obtenue en posant : $\partial \chi^2 / \partial \mathbf{h} = 0$, où :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{h}} \chi^2(\mathbf{p} + \mathbf{h}) \approx -2(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}})^T \mathbb{W} \mathbf{J}_{cob} + 2\mathbf{h}^T \mathbf{J}_{cob}^T \mathbb{W} \mathbf{J}_{cob} \quad (4.67)$$

La perturbation appliquée aux paramètres pour minimiser le χ^2 , ainsi que la relation de recurrence, sont données par :

$$[\mathbf{J}_{cob}^T \mathbb{W} \mathbf{J}_{cob}] \mathbf{h}_{gn} = \mathbf{J}_{cob}^T \mathbb{W}(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}) \quad (4.68)$$

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k + \mathbf{h}_{gn} \quad (4.69)$$

Méthode de Levenberg-Marquardt

La méthode de Levenberg-Marquardt est à cheval entre la méthode de descente de gradient et celle de Gauss-Newton. Elle se comporte comme la première lorsque les paramètres sont loin de leur valeur optimale, et comme la seconde, lorsque les paramètres sont proches de leur valeur optimale. Un paramètre algorithmique λ est défini pour faire varier les formulations de mise à jour des paramètres entre celle de la descente de gradient et celle de Gauss-Newton.

$$[\mathbf{J}_{cob}^T \mathbb{W} \mathbf{J}_{cob} + \lambda \mathbf{I}] \mathbf{h}_{lm} = \mathbf{J}_{cob}^T \mathbb{W}(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}) \quad (4.70)$$

Lorsque λ est grand alors la formule 4.71 est équivalente à celle de la descente de gradient et λ devient le pas de descente. À l'opposé, lorsque λ est faible, elle devient égale à celle de Gauss-Newton. Le paramètre λ est initialisée avec une valeur grande de sorte que les paramètres soient mises à jour avec la méthode de descente de gradient. Lorsqu'une approximation est supérieure que celle précédente i.e. $\chi^2(\mathbf{p} + \mathbf{h}_{lm}) > \chi^2(\mathbf{p})$ alors la valeur de λ est revue à la hausse jusqu'à ce que la tendance soit inversée. Dès lors, la valeur de λ diminue et les valeurs des paramètres sont mises à jour avec la méthode de Gauss-Newton. Ainsi la solution accélère sa convergence vers le minimum local.

Toutefois, Marquardt propose de pondérer la valeur de λ par les valeurs propres de la matrice hessienne dans un soucis d'éviter des problèmes de conditionnement de matrice. Ainsi la relation 4.70 devient :

$$[\mathbf{J}_{cob}^T \mathbb{W} \mathbf{J}_{cob} + \lambda \text{diag}(\mathbf{J}_{cob}^T \mathbb{W} \mathbf{J}_{cob})] \mathbf{h}_{lm} = \mathbf{J}_{cob}^T \mathbb{W}(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}) \quad (4.71)$$

Annexe B

Schéma d'intégration temporelle du modèle SLS

La fonction de relaxation 4.12 peut être ré-écrite en fonction des temps de relaxation et de fluage. C'est à dire :

$$E_r(t) = \mathbb{E} \left[\frac{\tau_R}{\tau_F} + \left(1 - \frac{\tau_R}{\tau_F} \right) \exp \left(-\frac{t}{\tau_R} \right) \right] \quad (4.72)$$

Nous effectuons une intégration discrète de l'équation 4.44 à un instant t_{i+1} afin d'obtenir la relation incrémentale de la contrainte sous la forme $\sigma_{i+1} = \mathcal{F}(\sigma_i, v_{i+1}, v_i)$. Nous faisons l'approximation que la vitesse de déformation de l'interface est constante dans chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$.

$$\sigma_{i+1} = \int_{-\infty}^{t_{i+1}} E_r(t_{i+1} - t') \frac{dv(t')}{dt'} dt'$$

En utilisant la propriété de sommation des intégrales, nous écrivons :

$$\sigma_{i+1} = \int_{-\infty}^{t_i} E_r(t_{i+1} - t') \frac{dv(t')}{dt'} dt' + \int_{t_i}^{t_{i+1}} E_r(t_{i+1} - t') \frac{dv(t')}{dt'} dt'$$

Nous approximations la vitesse de déformation dans l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, par un schéma aux différences finies décentré à gauche c'est à dire :

$$\frac{dv(t')}{dt'} \approx \frac{v_{t_{i+1}} - v_{t_i}}{\Delta t}$$

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i$$

Donc, il vient que :

$$\sigma_{i+1} = \int_{-\infty}^{t_i} E_r(t_{i+1} - t') \frac{dv(t')}{dt'} dt' + \int_{t_i}^{t_{i+1}} E_r(t_{i+1} - t') \frac{v_{t_{i+1}} - v_{t_i}}{\Delta t} dt'$$

$$\sigma_{i+1} = \mathbb{A} + \mathbb{B}$$

Nous calculons \mathbb{A} dans un premier temps.

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \int_{-\infty}^{t_i} \mathbb{E} \left[\frac{\tau_R}{\tau_F} + \left(1 - \frac{\tau_R}{\tau_F} \right) \exp \left(-\frac{t_{i+1} - t'}{\tau_R} \right) \right] \frac{dv(t')}{dt'} dt' \\ &= \int_{-\infty}^{t_i} \mathbb{E} \left[\frac{\tau_R}{\tau_F} + \left(1 - \frac{\tau_R}{\tau_F} \right) \exp \left(-\frac{t_i - t'}{\tau_R} \right) \exp \left(-\frac{t_{i+1} - t_i}{\tau_R} \right) \right] \frac{dv(t')}{dt'} dt' \\ &= \int_{-\infty}^{t_i} \mathbb{E} \left[\frac{\tau_R}{\tau_F} + \left(1 - \frac{\tau_R}{\tau_F} \right) \exp \left(-\frac{t_{i+1} - t'}{\tau_R} \right) \right] \exp \left(-\frac{t_{i+1} - t_i}{\tau_R} \right) \frac{dv(t')}{dt'} dt' \\ &\quad - \int_{-\infty}^{t_i} \mathbb{E} \frac{\tau_R}{\tau_F} \left[\exp \left(-\frac{t_{i+1} - t_i}{\tau_R} \right) - 1 \right] \frac{dv(t')}{dt'} dt' \end{aligned}$$

Ainsi, il vient :

$$\int_{-\infty}^{t_i} E_r(t_{i+1} - t') \frac{dv(t')}{dt'} dt' = \sigma_i \exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_R} \right) + \mathbb{E} \frac{\tau_R}{\tau_F} \left[1 - \exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_R} \right) \right] v_i$$

Ensuite nous calculons \mathbb{B} .

$$\begin{aligned}
\mathbb{B} &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E} \left[\frac{\tau_R}{\tau_F} + \left(1 - \frac{\tau_R}{\tau_F} \right) \exp \left(-\frac{t_{i+1} - t'}{\tau_R} \right) \right] \frac{dv(t')}{dt'} dt' \\
&= \mathbb{E} \frac{\tau_R}{\tau_F} \Delta t + \tau_R \left(1 - \frac{\tau_R}{\tau_F} \right) \left[\exp \left(\frac{t' - t_{i+1}}{\tau_R} \right) \right]_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{v_{t_{i+1}} - v_{t_i}}{\Delta t} \\
&= \mathbb{E} \frac{\tau_R}{\tau_F} \Delta t + \tau_R \left(1 - \frac{\tau_R}{\tau_F} \right) \left[\exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_R} \right) \right]_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{v_{t_{i+1}} - v_{t_i}}{\Delta t}
\end{aligned}$$

Ainsi la contrainte σ_{i+1} s'écrit :

$$\begin{aligned}
\sigma_{i+1} &= \sigma_i \exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_R} \right) + \mathbb{E} \frac{\tau_R}{\tau_F} \left[1 - \exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_R} \right) \right] v_i \\
&\quad + \mathbb{E} \frac{\tau_R}{\tau_F} + \frac{\tau_R}{\Delta t} \left(1 - \frac{\tau_R}{\tau_F} \right) \left[\exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_R} \right) \right] (v_{i+1} - v_i)
\end{aligned}$$

En regroupant par terme, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\sigma_{i+1} &= \sigma_i \exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_R} \right) \\
&\quad - \mathbb{E} \left[\frac{\tau_R}{\tau_F} \exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_R} \right) + \frac{\tau_R}{\Delta t} \left(1 - \frac{\tau_R}{\tau_F} \right) \left[1 - \exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_R} \right) \right] \right] v_i \\
&\quad + \mathbb{E} \left[\frac{\tau_R}{\tau_F} + \frac{\tau_R}{\Delta t} \left(1 - \frac{\tau_R}{\tau_F} \right) \left[1 - \exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_R} \right) \right] \right] v_{i+1}
\end{aligned} \tag{4.73}$$

En considérant des intervalles de temps Δt petits, alors nous pouvons faire l'approximation que :

$$\exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_R} \right) \approx 1 - \frac{\Delta t}{\tau_R}$$

Donc la relation 4.73 devient :

$$\begin{aligned}
\sigma_{i+1} &= \sigma_i \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau_R} \right) \\
&- \mathbb{E} \left[\frac{\tau_R}{\tau_F} \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau_R} \right) + \frac{\tau_R}{\Delta t} \left(1 - \frac{\tau_R}{\tau_F} \right) \left[\frac{\Delta t}{\tau_R} \right] \right] v_i \\
&+ \mathbb{E} \left[\frac{\tau_R}{\tau_F} + \frac{\tau_R}{\Delta t} \left(1 - \frac{\tau_R}{\tau_F} \right) \left[\frac{\Delta t}{\tau_R} \right] \right] v_{i+1}
\end{aligned}$$

Ou de manière équivalente :

$$\frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{\Delta t} + \frac{\sigma_i}{\tau_R} = \mathbb{E} \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta t} + \frac{v_i}{\tau_F} \right)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\tau_R} \sigma = \mathbb{E} \left(\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau_F} v \right)$$

