



**HAL**  
open science

# Classification et géométrie des équations aux $q$ -différences : étude globale de $q$ -Painlevé, classification non isoformelle et Stokes à pentes arbitraires

Anton Eloy

► **To cite this version:**

Anton Eloy. Classification et géométrie des équations aux  $q$ -différences : étude globale de  $q$ -Painlevé, classification non isoformelle et Stokes à pentes arbitraires. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2016. Français. NNT : 2016TOU30223 . tel-01665164

**HAL Id: tel-01665164**

**<https://theses.hal.science/tel-01665164v1>**

Submitted on 15 Dec 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# THÈSE

En vue de l'obtention du

**DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE**

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

---

---

Présentée et soutenue le *23/09/2016* par :

**ANTON ELOY**

**Classification et géométrie des équations aux  $q$ -différences :  
Étude globale de  $q$ -Painlevé, classification non isoformelle et Stokes à  
pentes arbitraires**

---

---

## JURY

LUCIA DI VIZIO	Université de Versailles	Rapporteuse
CHARLOTTE HARDOUIN	Université de Toulouse	Membre du jury
YOUSUKE OHYAMA	Tokushima University	Rapporteur
JEAN-PIERRE RAMIS	Université de Toulouse	Membre du jury
JULIEN ROQUES	Université de Grenoble	Membre du jury
JACQUES SAULOY	Université de Toulouse	Directeur de thèse
CHANGGUI ZHANG	Université de Lille	Membre du jury

---

**École doctorale et spécialité :**

*MITT : Domaine Mathématiques : Mathématiques fondamentales*

**Unité de Recherche :**

*Institut de Mathématiques de Toulouse (UMR 5219)*

**Directeur de Thèse :**

*Jacques SAULOY*

**Rapporteurs :**

*Lucia DI VIZIO et Yousuke OHYAMA*



*“But, said Alice, if the world has absolutely no sense, who’s stopping us from inventing one?”*

– Lewis Carrol, *Alice in Wonderland*



# Remerciements

---

Voici venu le moment des remerciements, peut-être en un sens le moment le plus important - tout du moins symboliquement - puisque ces quelques mots à la fois terminent trois ans de travail et débutent ce manuscrit...

Je tiens tout d'abord à remercier Jacques, mon directeur préféré, pour m'avoir guidé pendant ces trois années, amené dans un monde inconnu, laissé dériver un sujet qui ne me plaisait pas tant que ça et travailler dans mon coin sur un problème qui ne l'intéressait pas tant que ça, autorisé à me rebeller dans les cercles faits pour, fait découvrir d'étranges mots qui se déclinaient en d'étranges livres (cette thèse pourrait presque être ma propre *excession*) et montré des chatons aux moments opportuns.

Ensuite mes remerciements vont à mes rapporteur·e-s, Lucia et Yousuke, pour avoir accepté de lire cette thèse et pour leurs nombreuses remarques constructives qui ont amené à la version que vous pouvez lire aujourd'hui. Notamment merci à Lucia pour m'avoir forcé à préciser tous ces petits points trop vagues que j'avais laissé, et Yousuke pour avoir subi un jour de ma part un exposé dont on devrait ne jamais se rappeler.

Enfin terminons cette première vague en remerciant également les membres de mon jury pour avoir accepté de venir et de juger. Merci à Jean-Pierre Ramis pour son regard lointain mais déterminant, à Charlotte pour son aide et son écoute quand j'avais besoin de parler maths et pour un cours de M2 dont je me souviendrai à jamais, à Julien pour ses nombreuses invitations à Grenoble, à Changui pour ma première conférence et pour une baguette de pain très nourrissante.

Une thèse, ce n'est pas seulement un·e doctorant·e face à un jury ; c'est aussi des collègues, ami·e, une famille qui vous aident, vous soutiennent, vous accompagnent. Permettez-moi donc de vous retenir un peu pour les remercier elleux aussi.

Tout d'abord merci à Thomas Dreyfus sans qui tout un chapitre de cette thèse n'existerait pas, et qui est la vivante image de ce qui m'attend après soutenance. Merci aussi à ma "grande sœur", Virginie Bugeaud, que je n'ai jamais rencontré

mais sur le travail de laquelle je me suis beaucoup appuyé.

Je souhaiterais remercier aussi Guy Casale, David Blazquez et Primitivo Acosta-Humánez pour m'avoir respectivement permis d'aller et accueilli en Colombie.

L'Institut de Mathématiques de Toulouse regorge de chercheur·e·s bien installé·e·s que j'ai eu l'occasion de rencontrer - voire même d'avoir en cours! - et je tiens à les remercier ici. Un merci tout particulier à Marcello Bernardara qui m'a amené sur la voie des quotients toriques, à Stéphane Lamy pour la même raison mais aussi pour un certain coup nécessaire donné en M2, à Claire Dartyge pour les premiers conseils d'enseignements que j'ai reçus, à Pierre Bousquet (et aussi Clément Pellegrini) pour une superbe équipe d'enseignants PCP et à Claude Roche pour m'avoir si gentiment laissé sa place aux divers séminaires que nous suivions.

Des chercheur·e·s moins bien installé·e·s, ici pour peu, ne connaissant pas forcément les us de la recherche et bientôt prêt·e·s à gambader ailleurs, cela existe, et on les appelle des doctorant·e·s. Les "quelques" lignes suivantes leur sont adressées.

Premièrement je voudrais remercier les membres du meilleur bureau du monde, le bureau 106 (à ne pas confondre avec la salle!) dans lequel j'ai eu l'honneur d'attendre la fin des journées. Merci à Matthieu et Eleonora qui m'ont accueilli et présenté les coutumes du lieu. Merci à Damien, le plus beau des cobureaux du monde, pour toutes les formations que nous n'avons pas suivies. Merci au cobureau fantôme, qui un jour terminera sa thèse ; et enfin merci aux petits nouveaux, Sergio et Jian.

Il est un autre bureau qui m'a accueilli, un bureau dans lequel j'ai peut-être passé plus de temps aux débuts de ma thèse que dans le mien ; c'est le bureau 103 - et ses extensions. Merci à Guillaume, Cyrille, Ibrahim, Silvere, Mathias, Paul, Binh, Daniel. Un merci tout particulier à Éric, qui m'a introduit à ce bureau et pour avoir été là aux bons moments. Ce bureau aura vu la naissance de beaux projets, tous à peu près avortés, que ce soit le séminaire "Catégorie et Surgelés (séminaire des doctorant·e·s Picard)" qui aura tenu une bonne année, le projet Kiwi<sup>op</sup>, wiki le plus vide de tous les temps, ou encore notre groupe de lecture qui avait réussi à réunir des matheux, de la bière et Aristote en une synergie bien particulière.

J'aimerais encore remercier Claire, pour son soutien aux sombres moments, un constant échange de livres et avoir été une bonne cobaye ; Nil<sup>1</sup>, qui a su me mettre au thé et dont ses chroniques me font toucher du doigt un monde que je ne sais connaître ; Claire<sup>2</sup> qui m'a très souvent généreusement accueilli pour un long thé et dont le "portrait raté" continuera à orner mon mur ; Benoît qui m'a beaucoup

---

1. Dit Vil Néné

2. Non je ne me répète pas

ouvert à la critique ; Laure qui se fait briser les os tous les week-ends et qui choisit de venir quand même nous voir en semaine ; Antoine qui aura aussi participé à ma mise au thé ; Malika sans qui le temps d'attente d'une bouilloire qui chauffe aurait été insupportable ; Pierre sans qui je vivrais au bureau.

Il y a aussi tous ces gens qui, entre midi et deux à la salle de pause, m'auront fait profiter de "discussions mathématiques", souvent à quatre. Notamment Ioana, Guillaume, Aurore, Clément, Kévin, Velantin, Maylis, Pierre<sup>3</sup> et d'autres.

Merci aux autres, Anne, Laura, Julie, Fabrizio, Danny, Jules, Antoine<sup>4</sup>, Stéphane, Fanny, Kevin<sup>5</sup>, Sofiane, Hugo, aux ancien-ne-s Claire<sup>6</sup>, Adil, Mélanie, Laurent, Guillem, et tou-te-s ceux que je ne nomme pas mais que je n'oublie pas.

Quelques mots encore pour le bureau de l'École Doctorale (Jean-Michel, Chantal, Jean-François, Arnaud, Victor et j'en passe...), avec qui j'ai beaucoup apprécié travailler. Merci particulier à Agnès, Martine et Isabelle, pour le temps passé à discuter, pour l'aide administrative et (pour la dernière) pour les superbes pots de séminaire. Un autre merci à Marie-Laure pour ces nouvelles et ce Champagne et Jocelyne pour sa grande aide. Une pensée aussi pour les membres de la CCDC et les camarades CGT et SUD : Claire, Benoît<sup>7</sup>, Romain, Corentin, Guillaume, Étienne, Jérôme, ...

Merci aussi aux ami-e-s hors labo qui m'ont aidé et soutenu<sup>8</sup>, notamment à Toulouse Boris, best coloc ever, Judith, Camille, ... et hors Toulouse Maï, Dov' (revenez!!!!), pour le soutien, l'accueil et tant d'autres choses, Xavier et tout ces thés pris à ses retours, ...

Un merci à Charlotte B., pour avoir fait son travail, tout simplement.

Enfin un merci à ma famille, Hélène, Vincent, Sandrine, Jade, pour beaucoup plus que je ne saurais dire.

Et maintenant...

*Look on my works, Ye Mighty, and despair.*

---

3. Non toujours pas

4. ... Vraiment ?

5. Mais lâchez moi !

6. J'abandonne.

7. Cette fois OK, je me rends, je me répète. Content-e-s ?

8. Oui, j'avoue, les mathématiques ne sont pas toute ma vie.





## Résumé

Cette thèse s'intéresse à la classification géométrique, locale et globale, des équations aux  $q$ -différences. Dans un premier temps nous réalisons une étude globale de certains systèmes dérivés des équations de  $q$ -Painlevé et introduits par Murata, en proposant une correspondance de Riemann-Hilbert-Birkhoff entre de tels systèmes et leurs matrices de connexion.

Dans un second temps nous nous intéressons à la classification locale, en construisant un fibré vectoriel équivariant sur l'espace des classes formelles à deux pentes dont la fibre au dessus d'une classe formelle est l'espace de ses classes analytiques isoformelles. Ceci fait, voyant que l'action du groupe des automorphismes du gradué s'impose naturellement dans l'étude de ce fibré, nous nous intéressons à l'espace des classes analytiques, soit des classes analytiques isoformelles modulo cette action, dont nous proposons dans un cas restreint une première approche de classification *via* l'utilisation de variétés toriques.

Dans un troisième temps nous construisons, *via* des transformations de  $q$ -Borel et de  $q$ -Laplace, des  $q$ -Stokes, soit des solutions méromorphes de systèmes, dans le cadre des systèmes à deux pentes dont une non entière et une nulle.

**Mots-clefs :** Équations aux  $q$ -différences, classification analytique, phénomène de Stokes, géométrie des  $q$ -différences,  $q$ -Borel-Laplace, équivalence de Riemann-Hilbert-Birkhoff,  $q$ -Painlevé, variétés toriques.

**Abstract**

This thesis falls within the context of global and local geometric classification of  $q$ -difference equations. In a first part we study the global behaviour of some systems derived from  $q$ -Painlevé equations and introduced by Murata. We do so by constructing a Riemann-Hilbert-Birkhoff correspondence between such systems and their connexion matrices.

In a second part we work on local classification by providing a construction of an equivariant vector bundle over the space of all formal classes with two slopes, the fibre over a formal class being the space of its isoformal analytic classes. As the action of the group of automorphisms of the graded module arises naturally when we study this bundle, we take an interest in the study of the space of analytic classes, which is the space of isoformal analytic classes modulo this action. We propose a first approach of such a classification by using toric varieties.

In a third part we construct  $q$ -Stokes, *i.e.* meromorphic solutions of systems, in the context of systems with one non-integral slope and one equal to zero, this by using  $q$ -Borel and  $q$ -Laplace transforms.

**Key words:**  $q$ -difference equations, analytic classification, Stokes phenomenon, geometry of  $q$ -difference,  $q$ -Borel-Laplace, Riemann-Hilbert-Birkhoff equivalence,  $q$ -Painlevé, toric varieties.

# Table des matières

---

Remerciements	i
Résumé	v
Table des matières	ix
Notations	xi
<b>I Introduction générale</b>	<b>1</b>
Introduction	3
<b>1 Généralités sur les modules aux <math>q</math>-différences</b>	<b>7</b>
1.1 Le monde des équations aux $q$ -différences . . . . .	7
1.1.1 Définition et résolution en rang 1 . . . . .	8
1.1.2 Transformations de $q$ -Borel . . . . .	10
1.1.3 Modules aux $q$ -différences . . . . .	11
1.2 Filtration par les pentes . . . . .	14
1.2.1 Polygone de Newton . . . . .	14
1.2.2 Filtration et graduation . . . . .	17
1.3 Classification . . . . .	17
1.4 Phénomène de $(q)$ -Stokes . . . . .	22
<b>II Corps de la thèse</b>	<b>25</b>
<b>2 Espace des données de monodromie pour les équations aux <math>q</math>-différences de la liste de Murata</b>	<b>27</b>
2.1 Matrice de connexion . . . . .	29
2.1.1 Réduction en 0 . . . . .	30
2.1.2 Réduction en $\infty$ . . . . .	33

2.1.3	Matrice de connexion . . . . .	37
2.2	Équivalence de Riemann-Hilbert-Birkhoff . . . . .	38
2.2.1	Injectivité . . . . .	39
2.2.2	Surjectivité . . . . .	39
2.3	Variations des données locales . . . . .	40
2.3.1	"Fonctorialité" de $RHB$ . . . . .	41
2.3.2	Fibration au dessus des données locales . . . . .	44
2.3.3	Action sur la fibration . . . . .	47
2.4	Autres systèmes de la liste de Murata . . . . .	48
2.4.1	$q$ -P( $A_5$ ) . . . . .	49
2.4.2	$q$ -P( $A_6$ ) . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Fibré des classes isoformelles</b>	<b>57</b>
3.1	Cas de deux modules de rang 1 :	
	Fibration des $\mathcal{F}(c_1 z^{\mu_1}, c_2 z^{\mu_2})$ . . . . .	58
3.1.1	Contexte général et écriture explicite des Stokes . . . . .	58
3.1.2	Construction du fibré . . . . .	60
3.1.3	Action(s) et fibré(s) quotient(s) . . . . .	63
3.2	Cas de deux modules de rangs arbitraires fixés . . . . .	68
3.2.1	Généralisation du contexte et des Stokes . . . . .	68
3.2.2	Construction du fibré . . . . .	70
3.2.3	Actions et quotient . . . . .	72
3.3	Cas de deux modules à pentes arbitraires . . . . .	78
3.3.1	Mise en place du contexte . . . . .	78
3.3.2	Construction du fibré . . . . .	81
3.4	Résumé global des constructions . . . . .	83
<b>4</b>	<b>Quotient de l'espace des classes isoformelles par l'action du groupe des automorphismes des classes formelles</b>	<b>85</b>
4.1	Définition générale et cadre d'étude . . . . .	86
4.2	Description du quotient en termes de variétés toriques . . . . .	91
4.2.1	2 pentes entières . . . . .	92
4.2.2	$k$ pentes de rang 1 . . . . .	96
4.2.3	Et maintenant ? . . . . .	100
<b>5</b>	<b>Construction de solutions méromorphes par transformations de <math>q</math>-Borel-Laplace pour des équations à deux pentes</b>	<b>101</b>
5.1	Étude analytique locale des équations à pentes arbitraires . . . . .	102
5.2	Transformées de $q$ -Borel et de $q$ -Laplace . . . . .	105
5.3	Calcul explicite des sommations . . . . .	110

---

<b>III Annexes</b>	<b>I</b>
<b>A Forme normale d'une matrice <math>A \in GL_2(\mathbb{C}(\{z\}))</math></b>	<b>III</b>
A.1 Cas $\rho_1, \rho_2 \neq 0$ .	IV
A.2 Cas $\rho_1 \neq 0, \rho_2 = 0$ .	VI
A.3 Résultat général en 0 et passage en $\infty$ et en $ q  < 1$	VIII
<b>B Construction de quotients toriques</b>	<b>IX</b>
B.1 Cônes et variétés toriques affines	IX
B.2 Éventails et variétés toriques	XIII
B.3 Action de $\mathbb{G}_m^r$ sur $\mathbb{A}^n$ ; variété torique quotient associée	XVI
<b>C Algorithme Maple de création des éventails</b>	<b>XXIII</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>XXVII</b>



## Notations

---

$q$	Nombre complexe non nul ; il est tel que $ q  > 1$ partout sauf au chapitre 2 où $ q  < 1$
$\sigma_q$	Opérateur aux $q$ -différences ; $\sigma_q(f)(z) = f(qz)$
$[f]_n$	Complexe tel que $f = \sum_n [f]_n z^n$
$v_0$	Valuation sur les séries ; $v_0(\sum_n a_n z^n) := \min\{n   a_n \neq 0\}$
$\gcd(a, b)$	PGCD de $a$ et $b$
$E_{n,d,a}$	Matrice compagnon de l'équation $\sigma_q^d f = az^n f$
$U_r$	Bloc de Jordan unipotent de taille $r \times r$
$\underline{k}$	$n$ -uplet (ou ensemble à $n$ éléments dans le chapitre 2)
$X/G$	Quotient de $X$ par $G$
$\text{Orb}(x)$	Orbite du point $x$

### Espaces généraux

$\mathbb{C}, \mathbb{C}^*$	Corps des nombres complexes, sous-espace des complexes non nuls
$\mathbb{Z}$	Groupe des entiers relatifs
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels (positifs ou nuls)
$\mathbb{R}$	Corps des nombres réels
$k^n$	Espace vectoriel des $n$ -uplets à coefficients dans $k$
$\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}^n$	Espace projectif (sur $k$ ) de dimension $n$
$M_{m,n}(k)$	Ensemble des matrices à $m$ lignes et $n$ colonnes à coefficients dans $k$
$M_n(k)$	Ensemble des matrices carrées ; $M_{n,n}(k)$
$GL_n(k)$	Sous-ensemble de $M_n(k)$ des matrices inversibles
$\mathcal{S}_r$	Groupe des permutations de $\{1, \dots, r\}$
$\text{Spec}(M)$	Spectre d'une matrice $M$
$C_n X$	Espace des configurations de $n$ points de $X$
$\mathbb{D}_n$	Matrices diagonales de $GL_n(\mathbb{C})$ telles que $\lambda_i \neq q^l \lambda_j$ pour $i \neq j, l \in \mathbb{Z}$
$C(0, a, b)$	Couronne de $\mathbb{C}$ centrée en 0 ; $\{z \in \mathbb{C}^*   a \leq  z  < b\}$



Anneaux et corps de définition de  $\sigma_q$ 

<b>Corps</b>	
$K := \mathbb{C}(\{z\})$	Germes en 0 des fonctions méromorphes en 0
$\hat{K} := \mathbb{C}((z))$	Séries de Laurent formelles
$\mathcal{M}(U)$	Fonctions méromorphes sur un ouvert connexe $U \subset \mathbb{C}$
$\mathcal{M}(\mathbb{C}^*, 0)$	Germes en 0 des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}^*$
<b>Anneaux</b>	
$\mathbb{C}[[z]]$	Séries formelles
$\mathbb{C}\{z\}$	Germes en 0 des fonctions holomorphes en 0
$\mathcal{O}(U)$	Fonctions holomorphes sur un ouvert connexe $U \subset \mathbb{C}$
$\mathcal{O}(\mathbb{C}^*, 0)$	Germes en 0 des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}^*$
$K_{\mu_1}^{\mu_2}$	Polynômes de Laurent $\sum_{\ell=\mu_1}^{\mu_2-1} a_\ell z^\ell$ , $\mu_1 < \mu_2 \in \mathbb{Z}$

Courbe elliptique et  $q$ -spirales

$E_q := \mathbb{C}^*/q\mathbb{Z}$	$q$ -courbe elliptique
$\pi : \mathbb{C}^* \rightarrow E_q$	Projection canonique
$\bar{a} := \pi(a)$	Classe de $a \in \mathbb{C}^*$ dans $E_q$
$[a; q] := aq^{\mathbb{Z}} = \pi^{-1}(\bar{a})$	$q$ -spirale passant par $a$
$\text{div}_{E_q} f$	Diviseur sur $E_q$ des pôles et des zéros de $f$
$C_q := C(0, 1,  q )$	Couronne fondamentale de $\mathbb{C}^*$

## Fonctions de base

$\theta_q := \sum_{\mathbb{Z}} q^{\frac{-n(n+1)}{2}} z^n$	Fonction thêta de Jacobi ; brique de base des solution d'équations aux $q$ -différences
$\theta_{q,c} := \theta_q(c^{-1}\cdot)$	Variation de la précédente
$\theta, \theta_c$	Allègement des notations précédentes dans le chapitre 3
$\begin{cases} \Theta_q := \theta_{q^{-1}}(q\cdot) \\ \Theta_{q,c} := \Theta_q(c^{-1}\cdot) \end{cases}$	Fonctions thêta dans le cadre $ q  < 1$ (chapitre 2)
$e_{q,c} := \frac{\theta_q}{\theta_{q,c}}$	$q$ -caractère
$(a; p)_n, (a, p)_\infty$	p-symboles de Pochhammer



### Transformations de $q$ -Borel et $q$ -Laplace

$\mathcal{B}_{q,1}$	Transformation de $q$ -Borel de degré 1	Def. 1.1.5
$\mathcal{B}_{q,d}$	Transformation de $q$ -Borel de degré $d$	Def. 1.1.7
$\mathcal{B}_\mu$	Transformation de $q$ -Borel d'ordre $\mu$	Def. 5.2.1
$\mathbb{H}_\mu^{\bar{c}}$	Ensemble de définition de $\mathcal{L}_\mu^{\bar{c}}$	Def. 5.2.3
$\mathcal{L}_\mu^{\bar{c}}$	Transformation de $q$ -Laplace d'ordre $\mu$ dans la direction $\bar{c}$	Def. 5.2.5
$\hat{\mathcal{L}}_\mu$	Transformation de $q$ -Laplace d'ordre $\mu$ formelle	Def. 5.2.9
$\sim_\mu^{\bar{c}}$	Développement asymptotique $q$ -Gevrey d'ordre $\mu$ dans la direction $\bar{c}$	Def. 5.2.9

### Géométrie torique

Toutes ces notations proviennent de l'annexe B.

$\mathbb{A}^n = \mathbb{C}^n$	Espace affine de dimension $n$
$\mathbb{G}_m^r = (\mathbb{C}^*)^r$	Tore de dimension $r$
$X//G$	Quotient catégorique de $X$ par $G$
$N$	Réseau
$M := N^\vee = \text{Hom}(N, \mathbb{Z})$	Réseau dual de $N$
$N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}, M_{\mathbb{R}} := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$	Espaces vectoriels engendrés par $N$ et $M$
$\sigma$	Cône
$\text{Cone}(u_1, \dots, u_k)$	Cône engendré par les vecteurs $u_1, \dots, u_k$
$\sigma^\vee$	Cône dual de $\sigma$
$S_\sigma$	Semi-groupe affine associé à $\sigma$
$\mathbb{C}[S]$	Algèbre engendrée par un semi-groupe $S$
$\text{Spec}(A)$	Spectre de l'anneau $A$ (variété affine d'anneau de coordonnées $A$ )
$U_\sigma := \text{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma])$	Variété affine torique associée à $\sigma$
$\Sigma$	Éventail
$ \Sigma $	Support de $\Sigma$
$\Sigma(r)$	Cônes de dimension $r$ de $\Sigma$
$X_\Sigma$	Variété torique associée à $\Sigma$
$\text{Bl}_p(X)$	Éclatement (blow-up) de $X$ au point $p$
$L_{\underline{a}}$	Fibré en droites sur $\mathbb{A}^n$ associé à $\underline{a} \in \mathbb{Z}^r$
$X^{\text{ss}}(L)$	Points semi-stables de $X$ par rapport à $L$

**Première partie**  
**Introduction générale**



# Introduction

---

## Contexte de cette thèse

De tous temps les élèves et jeunes étudiants ont commencé leurs écrits par "de tous temps les ...". Il aurait été malséant que je déroge à cette tradition millénaire pour mes derniers instants dans ce monde, donc voici. Les équations aux  $q$ -différences, quant à elles, ne proviennent pas de la nuit des temps mais plutôt du XVIII<sup>e</sup> siècle. C'est en effet à Euler que remonte leur étude, reprise plus tard par Heine qui définira les fonctions  $q$ -hypergéométrique, puis par Ramanujan.

Les équations aux  $q$ -différences sont des équations fonctionnelles qui pourraient passer pour des versions discrètes des équations différentielles. Elles proviennent de l'étude de l'opérateur  $\sigma_q : f(z) \mapsto f(qz)$  ou encore de l'opérateur  $\delta_q := \frac{\sigma_q - id}{q-1}$  qui tend vers  $z \frac{d}{dz}$  quand  $q \rightarrow 1$ ; l'étude des telles limites est la confluence des équations aux  $q$ -différences. Si Euler en est le fondateur, c'est sous l'impulsion de Birkhoff, Guenther et Adams qu'à eu lieu dans la première moitié du XX<sup>e</sup> siècle le renouveau de leur étude, étude qui de nos jours porte principalement (en France) sur leur classification ainsi que sur une théorie de Galois aux  $q$ -différences.

Tout automorphisme de la sphère de Riemann  $\mathbb{S}$  (homographie) ayant exactement deux points fixes est conjugué à une dilatation  $h_q : z \mapsto qz$ ;  $\sigma_q$  est justement l'opérateur  $f \mapsto f \circ h_q$ . L'étude locale des équations aux  $q$ -différences se fait aux points fixes de  $h_q$  que sont 0 et  $\infty$ . On se ramène alors à l'étude d'un système aux  $q$ -différences  $Y(qz) = A(z)Y(z)$ , où  $A$  est une matrice inversible à coefficients analytiques, et on définit - comme dans le cadre des équations différentielles, qui a beaucoup inspiré l'étude actuelle de nos équations - un polygone de Newton muni de *pentés* et de *rangs* qui forment des invariants analytiques (et même formels) de systèmes. Ceci permet d'associer à une équation à pentés entières un système dont la matrice  $A$  a des coefficients polynomiaux (de Laurent); c'est la forme normale de Birkhoff-Guenther qui a été décrite de manière complète par Ramis, Sauloy et Zhang dans [RSZ13], référence actuelle de la classification des équations aux  $q$ -différences. Cette forme normale est unique *sous certaines conditions*; enlever

ces conditions promet de nombreuses pistes de travail mathématique. Cette étude s'est ensuite poursuivie par les travaux de van der Put et Reversat ([vdPR07]) qui ont donné une forme normale *formelle* pour les modules à pentes non entières, puis par Bugeaud dans [Bug12] qui a donné une forme normale *analytique* pour ceux à deux pentes rationnelles.

L'étude globale n'a pas été en reste puisque déjà Birkhoff associait aux données locales en 0 et  $\infty$  une matrice dite *de connexion*, le tout permettant la description complète du système global. Birkhoff a aussi proposé dans le cadre des  $q$ -différences un analogue de la correspondance de Riemann-Hilbert.

À toutes ces considérations s'est ajouté le problème des  $q$ -Stokes,  $q$ -analogues des opérateurs de Stokes des équations différentielles, qui à la fois permettent de compléter la classification ([RSZ13]) mais aussi engendrent d'une certaine manière le groupe de Galois aux  $q$ -différences ([RS09]).

Le but de cette thèse - outre nourrir l'ego d'un jeune étudiant - est, plus que de compléter une classification *analytique isoformelle* des modules aux  $q$ -différences, de proposer quelques pistes de recherche de nouvelles classifications (locales), plus larges ou plus restreintes, tout en donnant quelques résultats explicites sur les classifications actuelles.

### Argument de la thèse

Le fil d'Ariane de cette thèse est donc la classification (entre autres géométrique) des équations aux  $q$ -différences. Vaste labyrinthe que cette classification que nous avons parcouru, tentant d'ouvrir quelques voies, d'en défricher d'autres sans jamais vraiment affronter le monstre qui le garde.

Le premier chapitre du présent ouvrage est une mise en place du contexte des équations aux  $q$ -différences, de leur classification et de l'apparition des Stokes. Loin d'être exhaustif, il se limite à présenter le domaine ainsi que les outils nécessaires à la compréhension du reste de la thèse. Si rien de nouveau n'y est démontré, quelques résultats connus sont munis de leur preuve, parfois pour l'utilité des calculs réalisés, parfois uniquement pour la beauté des mathématiques.

Le second chapitre présente une étude globale de systèmes d'équations particuliers, provenant de la liste de Murata ([Mur09]). Il s'inspire de l'étude par Ohya, Ramis et Sauloy dans [ORS15] du système aux  $q$ -différence associé à l'équation de  $q$ -Painlevé VI par Jimbo et Sakai dans [JS96]. Nous y construisons pour tout système vérifiant des "conditions de  $q$ -Painlevé" particulières une matrice

de connexion à la Birkhoff reliant les données locales en 0 et  $\infty$ . Ceci décrit une correspondance entre les systèmes étudiés (à données locales fixées) et certaines matrices fonctionnelles vérifiant des propriétés explicites. Cette correspondance, modulo relations d'équivalence naturelles, est bijective. Dans un des trois cas étudiés nous construisons aussi une fibration de nos espaces de matrices au dessus de l'espace de toutes les données locales.

Les troisième et quatrième chapitres ont pour vocation de proposer de nouveaux outils de classification locale, au delà de l'espace des classes analytiques isoformelles.

Si la classification pourrait être vue comme synonyme de la *praxis* mathématique, il n'en reste pas moins que vivent sous le nom de classification deux pratiques différentes. La première consiste à agréger ensemble des objets épars ayant des propriétés similaires pour les réunir en un immense ensemble que l'on peut ensuite étudier, voyant les relations entre objets : elle trouve des *similitudes* entre des objets différents. La seconde consiste à morceler un de ces ensembles en séparant les objets n'ayant pas certaines propriétés en commun, et en identifiant les objets se ressemblant : elle trouve des *différences* entre des objets similaires. Un exemple mathématique de la première serait une fibration d'objets au dessus d'une base ; la seconde serait un quotient par une relation d'équivalence. Ces deux méthodes ont leurs avantages, leurs inconvénients et permettent une compréhension plus fine de nos objets de départ.

Le troisième chapitre suit la première voie en construisant, à fonction de Newton  $r_0$  fixée avec conditions (deux pentes entières de rang 1, puis de rangs arbitraires, puis une pente arbitraire et une pente nulle), un fibré vectoriel au dessus de l'ensemble des classes formelles de fonction de Newton  $r_0$  dont les fibres sont les ensembles de classes analytiques isoformelles et dont un jeu de coordonnées locales est donné par les  $q$ -Stokes. Dans les deux premiers cas différentes actions de groupes représentant le rôle des isomorphismes entre classes formelles sont introduites sur une restriction du fibré construit. Si une partie de ces actions agit sur la base et identifie les fibres entre elles, munissant notre fibré d'une structure de fibré équivariant, l'autre partie agit directement fibre-à-fibre ; c'est celle associée aux transformations de jauge non tangentés à l'identité, écartées lors de la création de l'espace des classes analytiques isoformelles.

Le quatrième chapitre quant à lui choisit la deuxième option et, revenant sur la dernière action présentée ci-dessus, tente de créer un quotient de l'espace des classes par l'action des automorphismes du gradué : c'est un retour à l'étude des classes analytiques plutôt qu'aux classes analytiques *isoformelles*. Voyant la complexité



d'étude d'un quotient brut, nous avons préféré nous restreindre à un sous-espace et tenter de construire un quotient par l'utilisation de la géométrie algébrique torique. Nous le définissons de la manière suivante (définitions 4.2.1 et 4.2.6, utilisant le théorème B.3.3) :

**Définition 0.0.1.** Soit  $M_0$  un module pur satisfaisant certaines condition. Il existe un ouvert  $U \subset \mathcal{F}(M_0)$  et un éventail  $\Sigma$  tel que

$$U//\text{Aut}(M_0) \simeq X_\Sigma$$

où  $U//\text{Aut}(M_0)$  est le quotient catégorique de  $U$  par l'action du groupe des automorphismes du gradué, et  $X_\Sigma$  est la variété torique associée à  $\Sigma$ . On appelle sous-espace torique des classes analytiques isoformelles lâches cette variété  $X_\Sigma$ , noté  $\mathcal{F}_l^a(M_0)$ .

Enfin le cinquième chapitre s'attaque aux pentes non entières en construisant de manière explicite des Stokes de modules à deux pentes, une arbitraire et une nulle, et ce à l'aide de  $q$ -analogues des transformations de Borel et Laplace. Si ces Stokes sont inspirés de ceux créés par Bugeaud dans [Bug12], ils en diffèrent légèrement par la présence de pôles sur d'autres spirales discrètes que celles de Bugeaud. Pour cela nous prouvons dans ce chapitre leur existence et unicité avant de donner les moyens pour les construire explicitement.

Trois annexes seront présentées dans ce rapport : une reprend certaines constructions du chapitre 1 et propose une mise en forme normale de Birkhoff-Guenther pour des matrices  $2 \times 2$  à pentes entières ; la seconde fait un survol des définitions et énoncés utiles pour la constructions de quotients toriques, ce qui permet d'introduire le chapitre 4 ; enfin la dernière présente quelques programmes Maple permettant de créer les squelettes de nos quotients toriques du chapitre 4.

# 1

## Généralités sur les modules aux $q$ -différences

---

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Le monde des équations aux <math>q</math>-différences . . . . .</b>	<b>7</b>
1.1.1	Définition et résolution en rang 1 . . . . .	8
1.1.2	Transformations de $q$ -Borel . . . . .	10
1.1.3	Modules aux $q$ -différences . . . . .	11
<b>1.2</b>	<b>Filtration par les pentes . . . . .</b>	<b>14</b>
1.2.1	Polygone de Newton . . . . .	14
1.2.2	Filtration et graduation . . . . .	17
<b>1.3</b>	<b>Classification . . . . .</b>	<b>17</b>
<b>1.4</b>	<b>Phénomène de (<math>q</math>-)Stokes . . . . .</b>	<b>22</b>

---

### 1.1 Le monde des équations aux $q$ -différences

On notera  $K$  le corps  $\mathbb{C}(\{z\})$  des germes en 0 de fonctions méromorphes en 0, soit l'ensemble des séries convergentes  $\sum_{n \geq N} a_n z^n$  avec  $a_n \in \mathbb{C}, N \in \mathbb{Z}$ . On notera de plus  $\hat{K} := \mathbb{C}((z))$  le corps des séries de Laurent formelles,  $\mathbb{C}[[z]]$ , resp.  $\mathbb{C}\{z\}$ , l'anneau des séries formelles, resp. le corps des séries convergentes (*i.e.* des germes en 0 de fonctions holomorphes en 0) et  $\mathcal{O}(U)$ , resp.  $\mathcal{M}(U)$ , l'anneau des fonctions holomorphes, resp. le corps des fonctions méromorphes, sur un ouvert connexe  $U \subset \mathbb{C}$ . Enfin on notera  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^*, 0)$ , resp.  $\mathcal{M}(\mathbb{C}^*, 0)$ , l'anneau des germes en 0 de fonctions holomorphes sur  $\mathbb{C}^*$ , resp. le corps des germes en 0 de fonctions méromorphes sur  $\mathbb{C}^*$ .

On rappelle qu'une fonction  $f$  holomorphe sur une couronne centrée en zéro peut s'écrire  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n z^n$  pour des  $f_n \in \mathbb{C}$ . On notera  $[f]_n := f_n$ .

### 1.1.1 Définition et résolution en rang 1

On se donne un nombre complexe  $q$  tel que  $|q| > 1$  et on définit sur chacun des anneaux introduits ci-dessus l'opérateur aux  $q$ -différences  $\sigma_q : f(z) \mapsto f(qz)$ .

On appelle équation aux  $q$ -différences une équation fonctionnelle de la forme

$$\sigma_q^n f + a_1 \sigma_q^{n-1} f + \cdots + a_n f = 0$$

avec  $a_i \in K$  et  $a_n \neq 0$ .

*Exemple 1.1.1.* 1. L'équation  $\sigma_q(y) = y \Leftrightarrow y(qz) = y(z)$  n'a comme solutions dans  $K$  et  $\hat{K}$  que les fonctions constantes.

2. La fonction

$$\theta_q(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{\frac{-n(n+1)}{2}} z^n,$$

variation de la fonction Thêta de Jacobi, est solution de l'équation  $\sigma_q y = zy$ . Elle est holomorphe sur  $\mathbb{C}^*$  et s'annule à l'ordre 1 sur la spirale logarithmique  $-q^{\mathbb{Z}}$  (voir par exemple [Ram92]). Elle vérifie la formule du triple produit de Jacobi

$$\theta_q(z) = (q^{-1}; q^{-1})_{\infty} (-zq^{-1}; q^{-1})_{\infty} \left(-\frac{1}{z}; q^{-1}\right)_{\infty}$$

où  $(a; p)_n := (1-a) \cdots (1-ap^{n-1})$  et  $(a; p)_{\infty} := \lim_{n \rightarrow \infty} (a; p)_n = \prod_{n \in \mathbb{N}} (1-ap^n)$  pour  $0 < |p| < 1$  sont les  $p$ -symboles de Pochhammer. Elle vérifie de plus

$$\theta_q(qz) = z\theta_q(z) = \theta_q\left(\frac{1}{z}\right).$$

On notera désormais pour tout complexe  $c$  non nul  $\theta_{q,c}(z) := \theta_q(c^{-1}z)$  qui est solution de  $\sigma_q y = c^{-1}zy$ . Elle est holomorphe sur  $\mathbb{C}^*$  et s'annule sur la  $q$ -spirale  $-cq^{\mathbb{Z}}$ .

**Définition 1.1.2.** Soit  $c \in \mathbb{C}^*$ . On appelle  $q$ -caractères les fonctions de la forme

$$e_{q,c} := \frac{\theta_q}{\theta_{q,c}}.$$

$e_{q,c}$  est solution méromorphe de l'équation  $\sigma_q y = cy$  :

$$e_{q,c}(qz) = \frac{\theta_q(qz)}{\theta_q(qc^{-1}z)} = \frac{z\theta_q(z)}{c^{-1}z\theta_q(c^{-1}z)} = c \frac{\theta_q(z)}{\theta_q(c^{-1}z)} = ce_{q,c}(z).$$

On pourra noter que si  $c \in q^{\mathbb{Z}}$ , par exemple  $c = q^n$ , on a alors  $e_{q,q^n}(z) = \frac{\theta_q(z)}{\theta_q(q^{-n}z)} = \frac{\theta_q(z)}{z^{-n}q^{n(n+1)/2}\theta_q(z)} = q^{\frac{-n(n+1)}{2}}z^n$ . Dans ce cas le caractère est holomorphe défini sur tout  $\mathbb{C}^*$  et ne s'annule jamais. Dans le cas contraire  $e_{q,c}$  s'annule à l'ordre 1 sur la  $q$ -spirale  $-q^{\mathbb{Z}}$  et possède des pôles (d'ordre 1) sur la  $q$ -spirale  $-cq^{\mathbb{Z}}$ .

Si  $u = 1 + u_1z + \dots \in 1 + z\mathbb{C}\{z\}$  alors le produit  $v = \prod_{n \geq 1} u(q^{-n}z)$  est convergent et est solution de  $\sigma_q y = uy$ . En particulier la solution de  $\sigma_q y = (1 - az)y$  telle que  $y(0) = 1$  est donnée par  $\frac{(az; q^{-1})_{\infty}}{1 - az} = (q^{-1}az; q^{-1})_{\infty} = \prod_{n \geq 1} (1 - azq^{-n})$ .

**Lemme 1.1.3.** *L'équation aux  $q$ -différences  $\sigma_q(f) = \alpha f$  où  $\alpha = az^k(1 + u_1z + \dots)$ ,  $a \in \mathbb{C}^*$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , admet une solution méromorphe  $f = e_{q,a} \cdot \theta_q^k \cdot (1 + v_1z + \dots)$ .*

*Démonstration.* C'est une simple déduction de ce qui précède. On écrit  $\alpha = az^k(1 + u_1z + \dots)$ , et on choisit les  $v_i$  tels que  $v = 1 + v_1z + \dots$  soit solution de  $v(qz) = (1 + u_1z + \dots)v(z)$ . En posant alors  $f = e_{q,a} \cdot \theta_q^k \cdot (1 + v_1z + \dots)$  on obtient  $f(qz) = e_{q,a}(qz)\theta_q^k(qz)(1 + v_1qz + \dots) = ae_{q,a}(z)z^k\theta_q^k(z)(1 + u_1z + \dots)(1 + v_1z + \dots) = \alpha(z)f(z)$ .  $\square$

Il est possible de préciser ce lemme dans un cas particulier : nous avons l'existence d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de solutions sur  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^*)$ .

**Lemme 1.1.4.** *Soit l'équation*

$$\sigma_q(f) = az^n f, \quad a \in \mathbb{C}^*, n > 0. \quad (1.1)$$

*Alors l'ensemble des solutions holomorphes sur  $\mathbb{C}^*$  de cette équation,*

$$\{f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^*) \mid f \text{ vérifie (1.1)}\}$$

*est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ .*

*Démonstration.* Soit  $f$  une solution méromorphe de (1.1), écrivons  $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k z^k$ . Que  $f$  soit solution de notre équation impose  $q^k f_k = a f_{k-n}$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , ce qui impose notamment pour  $k > 0$ , notant  $(p, r)$  les quotient et reste de la division euclidienne de  $k$  par  $n$ ,

$$f_k = q^{-\frac{p}{2}(n(p+1)+2r)} f_r.$$

Un calcul similaire se fait pour  $k < 0$ ; on obtient alors une solution  $f$  uniquement déterminée par les complexes  $f_0, \dots, f_{n-1}$  et on vérifie facilement que cette solution converge.  $\square$

### 1.1.2 Transformations de $q$ -Borel

**Définition 1.1.5** (cf [RSZ13]; première occurrence dans [Ram92]). On définit la transformation de  $q$ -Borel de niveau 1 par :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{q,1} : \mathbb{C}((z)) &\longrightarrow \mathbb{C}((\xi)) \\ f &\longmapsto \sum_{n \gg -\infty} [f]_n q^{\frac{-n(n-1)}{2}} \xi^n. \end{aligned}$$

*Remarque 1.1.6.* Si  $f \in \mathbb{C}(\{z\})$  alors  $\mathcal{B}_{q,1}(f)$  a un rayon de convergence infini, *i.e.*  $\mathcal{B}_{q,1}(f) \in \mathcal{M}(\mathbb{C}) \cap \mathcal{O}(\mathbb{C}^*)$  : elle est définie et holomorphe pour tout  $\xi \in \mathbb{C}^*$ .

Cette transformation a son utilité dans la résolution des équations de la forme

$$az\sigma_q y - y = \alpha \tag{1.2}$$

où  $a \in \mathbb{C}^*, \alpha \in K$ .

En effet cherchons  $f = \sum_{n \gg -\infty} f_n z^n \in K$  solution de (1.2). Alors

$$\begin{aligned} az\sigma_q y - y = \alpha &\Leftrightarrow aq^{n-1}f_{n-1} - f_n = [\alpha]_n && \forall n \gg -\infty \\ &\Leftrightarrow aq^{\frac{-(n-1)(n-2)}{2}}f_{n-1} - q^{\frac{-n(n-1)}{2}}f_n = q^{\frac{-n(n-1)}{2}}[\alpha]_n && \forall n \gg -\infty \\ &\Leftrightarrow (a\xi - 1)\mathcal{B}_{q,1}(f) = \mathcal{B}_{q,1}(\alpha) && \forall n \gg -\infty. \end{aligned}$$

Donc l'équation (1.2) n'a de solution que si  $\mathcal{B}_{q,1}(\alpha)(\frac{1}{a}) = 0$  (comme  $\alpha \in K$   $\mathcal{B}_{q,1}(\alpha)(\frac{1}{a})$  est bien définie). De plus dans ce cas on peut définir  $f$  par

$$\begin{aligned} f_n &:= -q^{\frac{n(n-1)}{2}} \left( \sum_{k \gg -\infty}^n q^{\frac{-k(k-1)}{2}} [\alpha]_k a^{n-k} \right) \\ &= q^{\frac{n(n-1)}{2}} a^n \left( \sum_{k=n+1}^{\infty} q^{\frac{-k(k-1)}{2}} [\alpha]_k a^{-k} \right). \end{aligned}$$

$f$  est alors convergente. En effet comme  $\alpha$  est convergente il existe  $A, B > 0$  tels que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on ait  $|[\alpha]_n| \leq AB^n$ . Alors

$$\begin{aligned} |f_n| &\leq q^{\frac{n(n-1)}{2}} |a|^n \left( \sum_{k=n+1}^{\infty} |q|^{\frac{-k(k-1)}{2}} |[\alpha]_k| |a|^{-k} \right) \\ &\leq Aq^{\frac{n(n-1)}{2}} |a|^n \left( \sum_{k=n+1}^{\infty} |q|^{\frac{-k(k-1)}{2}} \left( \frac{B}{|a|} \right)^k \right) \\ &\leq A|a|^n \sum_{k=n+1}^{\infty} |q|^{\frac{-(n+k-1)(k-n)}{2}} \left( \frac{B}{|a|} \right)^k \\ &\leq A|a|^n \sum_{k=0}^{\infty} |q|^{\frac{-(2n+k)(k+1)}{2}} \left( \frac{B}{|a|} \right)^{k+n+1} \\ &\leq \left( \frac{AB}{|a|} \sum_{k=0}^{\infty} |q|^{\frac{-k(k-1)}{2}} \left( \frac{B}{|a|} \right)^k \right) B^n. \end{aligned}$$

On a la définition plus générale suivante :

**Définition 1.1.7** (introduite dans [RS07]). On définit la transformée de  $q$ -Borel de niveau  $d$  par :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{q,d} : \mathbb{C}((z)) &\longrightarrow \mathbb{C}((\xi)) \\ f &\longmapsto \sum_{n \gg -\infty} [f]_n [\theta_q^d]_{-n} \xi^n. \end{aligned}$$

De manière similaire l'équation

$$az^d \sigma_q f - f = \alpha \tag{1.3}$$

admet une solution  $f \in K$  si et seulement si pour tout  $\zeta_a$  tel que  $\zeta_a^d = a$  on a  $\mathcal{B}_{q,d}(\alpha)(\zeta_a^{-1}) = 0$ .

### 1.1.3 Modules aux $q$ -différences

Nous allons maintenant donner un cadre théorique plus général à l'étude des équations aux  $q$ -différences.

Tout comme dans le cas des équations différentielles une équation aux  $q$ -différences homogène peut, grâce à une matrice compagnon, se vectorialiser sous la forme d'un système  $\sigma_q(X) = AX$  avec  $A \in GL_n(K)$  noté  $(\mathcal{S}_A)$ . Un ( $q$ -)lemme du vecteur cyclique (proposition 1.1.9 plus bas) permet de voir que l'étude des équations aux  $q$ -différences est équivalente à l'étude de tels systèmes.

Soient  $A \in GL_n(K)$ ,  $B \in GL_p(K)$ . Soit  $F = (f_{ij})_{ij} \in M_{p,n}(K)$ . Prenons  $X$  une solution de  $(\mathcal{S}_A)$ . On notera  $\sigma_q(F) := (\sigma_q(f_{ij}))_{ij}$ . On remarque que :

$$\begin{aligned} Y = FX \text{ solution de } (\mathcal{S}_B) &\Leftrightarrow \sigma_q(FX) = BFX \\ &\Leftrightarrow \sigma_q(F)\sigma_q(X) = BFX \\ &\Leftrightarrow \sigma_q(F)AX = BFX. \end{aligned}$$

Donc si  $\sigma_q(F)A = BF$  alors si  $X$  est solution de  $(\mathcal{S}_A)$  on a  $FX$  solution de  $(\mathcal{S}_B)$ . On dira qu'un tel  $F$  est un morphisme de  $(\mathcal{S}_A)$  dans  $(\mathcal{S}_B)$ , ou de  $A$  dans  $B$ .

**Proposition 1.1.8.** *Les systèmes  $(\mathcal{S}_A)$  munis des matrices ainsi définies forment une catégorie où la composition des morphismes est la multiplication matricielle.*

Deux systèmes  $(\mathcal{S}_A)$  et  $(\mathcal{S}_B)$  sont donc équivalents (isomorphes au sens de cette catégorie) s'il existe une *transformation de jauge analytique*, i.e. un morphisme inversible  $F \in GL_n(K)$  entre ces systèmes. On notera  $F[A] := B = \sigma_q(F)AF^{-1}$  et on parlera d'*équivalence analytique locale*. On étendra la notation  $F[A] := \sigma_q(F)AF^{-1}$

pour tout  $F \in GL_n(\mathfrak{A})$  où  $\mathfrak{A}$  est un des anneaux sur lesquels  $\sigma_q$  est défini ; on parlera par exemple de *transformation de jauge formelle* si  $\mathfrak{A} = \hat{K}$ .

On peut alors donner le lemme de vectorialisation :

**Proposition 1.1.9** (Lemme du vecteur cyclique). *Tout système aux  $q$ -différences  $\sigma_q(X) = AX$  est équivalent à un système aux  $q$ -différences  $\sigma_q(X) = BX$  obtenu par vectorialisation d'une équation aux  $q$ -différences.*

*Démonstration.* On cherche  $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} \in GL_n(K)$  et  $b_1, \dots, b_n \in K, b_n \neq 0$  tels que

$$\sigma_q(F)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -b_n & -b_{n-1} & -b_{n-2} & \dots & -b_2 & -b_1 \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_{n-1} \\ F_n \\ -\sum_{i=1}^n b_{n-i} F_i \end{pmatrix}.$$

On en déduit déjà  $\forall 1 \leq i \leq n-1$   $F_{i+1} = \sigma_q(F_i)A$ .

Prenons maintenant un nombre complexe non nul  $z_0$  appartenant à un ouvert de définition de  $A$  tel que  $z_0$  ne soit pas une singularité de  $A$  (i.e. un pôle de  $A$  ou  $A^{-1}$ ) modulo  $q^{\mathbb{Z}}$ .

Soient  $f_1, \dots, f_n \in K$  tel que

$$\begin{cases} (f_1(z_0), \dots, f_n(z_0)) = e_1 \\ (f_1(qz_0), \dots, f_n(qz_0)) = e_2 A(z_0)^{-1} \\ \vdots \\ (f_1(q^n z_0), \dots, f_n(q^n z_0)) = e_n A(z_0)^{-1} \dots A(q^{n-1} z_0)^{-1} \end{cases}$$

où  $(e_1, \dots, e_n)$  est la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ .

Posons maintenant  $F_1 = (f_1, \dots, f_n)$  et  $F_{i+1} = \sigma_q(F_i)A$ . Alors  $F(z_0) = I_n$  d'où  $\det(F(z_0)) = 1$  ce qui implique  $F \in GL_n(K)$ . Les lignes de  $F$  sont indépendantes sur  $K$  donc il existe  $b_1, \dots, b_n \in K$  avec  $b_n \neq 0$  tels que

$$\sigma_q(F)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -b_n & -b_{n-1} & -b_{n-2} & \dots & -b_2 & -b_1 \end{pmatrix} F.$$

(Il suffit donc de regarder  $\sigma_q(F)AF^{-1} = F[A]$ .)  $\square$

**Définition 1.1.10.** Un module aux  $q$ -différences sur  $K$  est un couple  $(V, \varphi)$  où  $V$  est un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie et  $\varphi : V \rightarrow V$  un automorphisme de groupe  $\sigma_q$ -linéaire, *i.e.* tel que  $\varphi(\lambda x) = \sigma_q(\lambda)\varphi(x)$  pour  $\lambda \in K$ . On appelle rang de  $(V, \varphi)$  la dimension de  $V$ .

*Remarque 1.1.11.* Dans ce chapitre les modules aux  $q$ -différences seront systématiquement pris sur  $K$ , sauf mention explicite du contraire dans certains cas où il sera utile de considérer les modules dans le cas formel, c'est-à-dire sur  $\hat{K}$ .

**Définition 1.1.12.** Un morphisme de modules aux  $q$ -différences  $f : (V, \varphi) \rightarrow (W, \psi)$  est un morphisme  $K$ -linéaire  $f : V \rightarrow W$  tel que  $\psi \circ f = f \circ \varphi$ .

**Proposition 1.1.13.** Les modules aux  $q$ -différences sur  $K$  munis de leurs morphismes forment une catégorie  $\mathbf{Diff}(K, \sigma_q)$  équivalente à celle des systèmes aux  $q$ -différences.

*Démonstration.* L'équivalence de catégories est donnée par le foncteur qui à un système  $\sigma_q(X) = AX$ ,  $A \in GL_n(K)$  associe le couple  $(K^n, \varphi_A)$  où  $\varphi_A(X) = A^{-1}\sigma_q(X)$  et qui à un morphisme de systèmes  $F$  associe l'application linéaire induite  $F$ . L'essentielle surjectivité est donnée par le choix d'une base.  $\square$

**Produit tensoriel de deux modules.** Le produit tensoriel de deux modules aux  $q$ -différences  $M = (V, \varphi_M)$  et  $N = (W, \varphi_N)$  est le module aux  $q$ -différences  $M \otimes N := (V \otimes_K W, \varphi_M \otimes \varphi_N)$  où  $\varphi_M \otimes \varphi_N$  est l'automorphisme  $\sigma_q$ -linéaire défini par  $\varphi_M \otimes \varphi_N(x \otimes y) := \varphi_M(x) \otimes \varphi_N(y)$ . De plus si  $M \simeq (K^m, \varphi_A)$ ,  $A \in GL_m(K)$  et  $N \simeq (K^n, \varphi_B)$ ,  $B \in GL_n(K)$ , alors, modulo le choix d'un produit tensoriel matriciel  $\otimes$ ,  $M \otimes N \simeq (K^{mn}, \varphi_{A \otimes B})$ .

On note  $\mathbf{1} := (K, \varphi = \sigma_q)$ . On a alors, pour tout module  $M$ ,  $M \otimes \mathbf{1} \simeq M : \mathbf{1}$  est un élément neutre pour le produit tensoriel. On a de plus  $\text{End}(\mathbf{1}) = \mathbb{C}$ ; en effet soit  $\phi \in \text{End}(\mathbf{1})$ ; comme  $\phi$  est  $K$ -linéaire, pour tout  $f \in K$  on a  $\phi(f) = f\phi(1)$  et donc  $\phi$  est entièrement déterminée par  $\phi(1)$ . De plus comme  $\phi \circ \sigma_q = \sigma_q \circ \phi$  on en déduit  $\sigma_q(\phi(1)) = \phi(1)$  avec  $\phi(1) \in K$  et donc  $\phi(1) \in \mathbb{C}$ .

$\mathbf{Diff}(K, \sigma_q)$  admet des Hom internes (adjoints au produit tensoriel) pour tous objets  $M = (V, \varphi_M)$  et  $N = (W, \varphi_N) : \underline{\text{Hom}}(M, N) = (\text{Hom}_K(V, W), \varphi_{(M, N)})$  où, pour  $f : M \rightarrow N$   $K$ -linéaire,  $\varphi_{(M, N)}(f) := \varphi_N \circ f \circ \varphi_M^{-1}$ . On a pour des modules  $M, N, T$  la formule d'adjonction (fonctorielle; théorème A.2.9 de [RSZ13])

$$\text{Hom}(M, \underline{\text{Hom}}(N, T)) \simeq \text{Hom}(M \otimes N, T).$$

On définit de plus le dual de  $M$  comme étant  $M^\vee := \underline{\text{Hom}}(M, \mathbf{1})$ . On a notamment

$$\underline{\text{Hom}}(M, N) \simeq M^\vee \otimes N.$$

Au niveau matriciel si  $M = (K^n, \varphi_A)$  alors  $M^\vee = (K^n, \varphi_{A^\vee})$  avec  $A^\vee := {}^t A^{-1}$ .



**Proposition 1.1.14.**  $\mathbf{Diff}(K, \sigma_q)$  est une catégorie abélienne équivalente à la catégorie des  $\mathcal{D}_{K,q}$ -modules à gauche de longueur finie, où  $\mathcal{D}_{K,q} := K \langle \sigma, \sigma^{-1} \rangle$  est l'anneau de polynômes (de Laurent) non commutatifs tel que  $\forall \lambda \in K, \sigma \cdot \lambda = \sigma_q(\lambda) \sigma$ . De plus tout module aux  $q$ -différences est isomorphe à un  $\mathcal{D}_{K,q}/\mathcal{D}_{K,q}P$  où  $P \in \mathcal{D}_{K,q}$  est de la forme  $P = \sum_{i=0}^n a_i \sigma^i$  avec  $a_0 \neq 0$  et  $a_n = 1$  (on dit que  $P$  est standard unitaire).

Le fait que  $\mathbf{Diff}(K, \sigma_q)$  soit abélienne (et même soit une catégorie tensorielle  $\mathbb{C}$ -linéaire, rigide, abélienne) est montré dans [vdPS97], on peut même déduire de [RS07] que  $\mathbf{Diff}(K, \sigma_q)$  est une catégorie tannakienne neutre sur  $\text{End}(\mathbf{1}) = \mathbb{C}$ . L'équivalence de catégorie est explicitée dans [RSZ13]. La seconde partie est un simple corollaire du  $q$ -lemme du vecteur cyclique (proposition 1.1.9).

*Remarque 1.1.15.* Soit  $Q \in \mathcal{D}_{K,q}$ , on peut ramener l'équation  $Q \cdot f = 0$  par multiplication par un inversible de  $\mathcal{D}_{K,q}$  à une équation de la forme  $P \cdot f = 0$  avec  $P = \sum_{i=0}^n a_i \sigma^i$  standard unitaire. On peut associer à cette équation le système  $\sigma_q(X) = AX$  où  $A$  est la matrice compagnon associée à  $P$ , i.e.

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas les modules  $\mathcal{D}_{K,q}/\mathcal{D}_{K,q}P$  et  $(K^n, \varphi_A)$  ne sont pas isomorphes mais duaux.

## 1.2 Filtration par les pentes

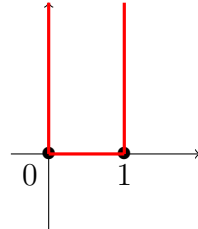
### 1.2.1 Polygone de Newton

On notera  $v_0$  la valuation  $z$ -adique de  $K$  (ou  $\hat{K}$ ) définie par  $v_0(\sum a_n z^n) := \min\{n \mid a_n \neq 0\}$  (et  $v_0(0) := +\infty$ ). C'est l'ordre du zéro ou moins celui du pôle du germe de fonction méromorphe en 0.

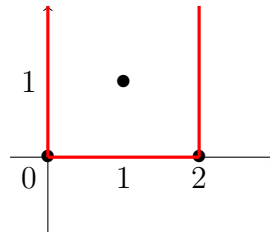
**Définition 1.2.1.** Soit  $P = \sum a_i \sigma^i \in \mathcal{D}_{K,q}$ . Le polygone de Newton  $N(P)$  associé à  $P$  est l'enveloppe convexe dans  $\mathbb{R}^2$  de  $\{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \mid j \geq v_0(a_i)\}$ . Sa frontière est formée de deux demi-droites verticales et de  $k$  vecteurs  $(r_i, d_i) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$ . On

appelle pentes de  $P$  les rationnels  $\mu_i = \frac{d_i}{r_i}$  ordonnées de gauche à droite. On a alors  $\mu_1 < \dots < \mu_k$ . On appelle fonction de Newton associée à  $P$  la fonction définie par  $r_P(\mu_i) = r_i$  et  $r_P(\mu) = 0$  pour  $\mu \neq \mu_i$  (i.e.  $r_P = \sum r_i \delta_{\mu_i}$ ).

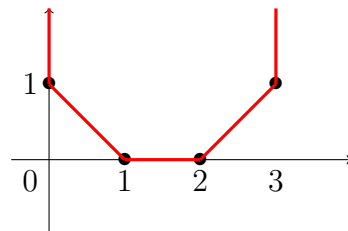
*Exemple 1.2.2.* 1. Soit  $P = \sigma + z + 1$ . On a  $a_1 = 1, v_0(a_1) = 0$  et  $a_0 = z + 1, v_0(a_0) = 0$ . On a donc une unique pente 0.



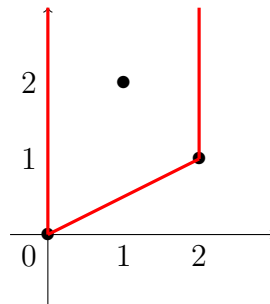
2. Soit  $P = \sigma^2 + z\sigma + 1$ . On a  $a_0 = a_2 = 1, v_0(a_0) = v_0(a_2) = 0$  et  $a_1 = z, v_0(a_1) = 1$  ce qui nous donne encore une unique pente 0.



3. Soit  $P = z\sigma^3 + \sigma^2 + \sigma + z$ . On a  $a_0 = a_3 = z, v_0(z) = 1$  et  $a_1 = a_2 = 1, v_0(1) = 0$ . On a donc trois pentes  $-1 < 0 < 1$ .



4. Soit  $P = z\sigma^2 + z^2\sigma + 1$ . On a  $a_0 = 1, a_1 = z^2$  et  $a_2 = z$  ce qui nous donne une pente rationnelle  $\frac{1}{2}$ .



**Théorème 1.2.3.** *Si  $P$  et  $Q$  sont tels que  $\mathcal{D}_{K,q}/\mathcal{D}_{K,q}P \simeq \mathcal{D}_{K,q}/\mathcal{D}_{K,q}Q$  alors  $r_P = r_Q$ .*

Ce théorème est une conséquence des descriptions du polygone de Newton présentées dans [Sau04b], notamment du théorème 2.2.6.

**Définition 1.2.4.** On appelle pentes du module aux  $q$ -différences  $M$  les pentes de n'importe quel opérateur  $P$  tel que  $M \simeq \mathcal{D}_{K,q}/\mathcal{D}_{K,q}P$ . On note  $S(M)$  l'ensemble des pentes de  $M$  et  $r_M$  la fonction de Newton associée.

**Définition 1.2.5.** Un module n'ayant qu'une seule pente est dit pur isocline et on appelle module pur une somme directe de tels modules. De plus on dit d'un module pur isocline de pente nulle qu'il est fuchsien.

On a les propriétés suivantes (théorème 2.3.1, corollaire 2.3.4 et proposition 2.3.5 de [Sau04b]) :

- Proposition 1.2.6.**
1. *Soit  $M$  un module aux  $q$ -différences, soit  $N$  un sous-module de  $M$  (respectivement un quotient de  $M$ ). Alors  $S(N) \subset S(M)$  et  $r_N \leq r_M$ . En particulier si  $M$  est pur isocline de pente  $\mu$  alors  $N$  est pur isocline de pente  $\mu$ .*
  2. *Soient  $M$  et  $N$  deux modules aux  $q$ -différences tels que  $S(M) \cap S(N) = \emptyset$ . Alors tout morphisme de  $M$  dans  $N$  est nul.*
  3. *Soit  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  une suite exacte de modules aux  $q$ -différences, alors  $S(M) = S(M') \cup S(M'')$  et  $r_M = r_{M'} + r_{M''}$ .*
  4. *Soient  $M$  et  $N$  deux modules aux  $q$ -différences. Alors  $S(M \otimes N) = S(M) + S(N)$  et  $r_{M \otimes N}(\mu) = \sum_{\mu_1 + \mu_2 = \mu} r_M(\mu_1)r_N(\mu_2)$ .*
  5. *Soit  $M$  un module aux  $q$ -différences, alors  $S(M^\vee) = -S(M)$  et  $r_{M^\vee}(\mu) = r_M(-\mu)$ .*

**Théorème 1.2.7** (Lemme d'Adams ; th. 3.1.1 de [Sau04b]). *Soit  $M$  un module de pentes  $\mu_1 < \dots < \mu_k$ . Alors  $M$  admet un sous-module pur isocline de pente  $\mu_1$  de rang  $r_M(\mu_1)$ .*

On pourra aussi consulter [Ada29, Ada31] pour les premières formulations de ce lemme.

*Remarque 1.2.8.* Du point de vue des équations, cela veut dire que tout polynôme  $P \in \mathcal{D}_{K,q}$  se factorise sous la forme  $P = QR$  où  $Q$  est pur isocline de pente la plus petite de  $P$ . Par exemple l'équation  $\sigma_q^2 f - (2 + 2z)\sigma_q f - 4f = 0$  de pentes  $-1 < 0$  se factorise sous la forme  $(\sigma_q - 2z)(\sigma_q - 2)f = 0$  et  $\sigma_q - 2z$  est de pente  $-1$ .

## 1.2.2 Filtration et graduation

Les résultats de cette section proviennent de [Sau04b].

Dans le cas formel (*i.e.* sur  $\hat{K}$ ) tout module aux  $q$ -différences  $M$  de pentes  $\mu_1 < \dots < \mu_k$  admet une décomposition en somme directe de modules purs isoclines  $P_i$  de pentes  $\mu_i$  et de rangs  $r_M(\mu_i)$  (*i.e.* tout module sur  $\hat{K}$  est pur).

Dans le cas convergent (*i.e.* sur  $K$ ) pour tout module  $M$  il existe une unique tour de sous-modules  $\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_k = M$  telle que pour tout  $i$   $P_i := M_i/M_{i-1}$  soit pur de pente  $\mu_i$ ; les rangs de ces quotients sont alors  $r_M(\mu_i)$ .

A tout module  $M$  on peut donc associer le module  $gr(M) := P_1 \oplus \dots \oplus P_k$  appelé gradué de  $M$ . D'un autre point de vue notons  $F^{\leq \mu}(M)$  le plus grand sous-module de  $M$  dont les pentes sont inférieures ou égales à  $\mu$ ; ces modules forment une filtration ascendante par les pentes et on a  $F^{\leq \mu_i}(M) = M_i$  dans la tour ci-dessus. On a de plus la proposition :

**Proposition 1.2.9.** *Si  $f : M \rightarrow N$  est un morphisme de modules aux  $q$ -différences sur  $K$  alors  $\forall \mu \in \mathbb{Q} f(F^{\leq \mu}(M)) = f(M) \cap F^{\leq \mu}(N)$ ; ceci induit un morphisme  $gr(f) : gr(M) \rightarrow gr(N)$ .*

En notant maintenant  $F^{< \mu}(M)$  le plus grand sous-module de  $M$  dont les pentes sont strictement inférieures à  $\mu$  et  $M^{(\mu)} := F^{\leq \mu}(M)/F^{< \mu}(M)$  on a

$$gr(M) = \bigoplus_{\mu \in S(M)} M^{(\mu)}.$$

Plus particulièrement on a  $M^{(\mu_i)} = P_i$ . Alors  $gr$  est un foncteur de la catégorie des modules aux  $q$ -différences dans la sous-catégorie des modules aux  $q$ -différences purs. Il est exact, fidèle, tenseur-compatible, envoie un module pur sur lui-même et est isomorphe à l'identité dans le cas formel.

## 1.3 Classification

Nous allons dans cette partie regarder une classification de certains modules aux  $q$ -différences, tout d'abord celle des modules purs à pentes entières, ensuite celle, introduite dans [RSZ13], des modules arbitraires à gradué fixé. Nous en profiterons alors pour donner une forme dite "normale" à ces modules en prenant le point de vue matriciel.

### Modules purs isoclines.

Nous nous restreindrons au cas des pentes entières. Soit  $M$  un module aux  $q$ -différences pur isocline de pente  $\mu \in \mathbb{Z}$ . D'après [RSZ13] il est alors isomorphe à un module de la forme  $(K^n, \phi_{z^\mu A})$  où  $A \in GL_n(\mathbb{C})$  est telle que ses valeurs propres soient dans la couronne fondamentale

$$C_q := C(0, 1, |q|) = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| < |q|\}.$$

Cette matrice  $A$  est unique à conjugaison près dans  $GL_n(\mathbb{C})$ . C'est la forme normale du module  $M$ . On a de plus la proposition :

**Proposition 1.3.1.** *Soient  $(K^n, \phi_{z^\mu A})$  et  $(K^n, \phi_{z^\mu B})$  deux modules en forme normale. Si  $F \in GL_n(\mathbb{C}((z)))$  est une transformation de jauge telle que  $F[z^\mu A] = z^\mu B$  alors  $F \in GL_n(\mathbb{C})$ .*

*Démonstration.* Tout d'abord on peut remarquer que  $F[A] = B \Rightarrow F[z^\mu A] = z^\mu B$  : il suffit donc de le prouver pour  $F[A] = B$  avec  $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$  à valeurs propres dans la couronne fondamentale  $C_q$ .

Écrivons tout d'abord  $F = \sum_{k \gg -\infty} F_k z^k$ . La relation  $F[A] = B \Leftrightarrow \sigma_q(F)A = BF$  nous donne les relations pour tous  $k \gg -\infty$

$$q^k F_k A = B F_k.$$

Comme  $\text{Spec}(A), \text{Spec}(B) \subset C_q$ , on a, pour tout  $k \neq 0$ ,  $\text{Spec}(q^k A) \cap \text{Spec}(B) = \emptyset$ . On utilise alors le lemme suivant :

**Lemme 1.3.2** (Preuve en annexe A.1.1). *Soient  $P \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $Q \in M_p(\mathbb{C})$  telles que  $\text{Spec}(P) \cap \text{Spec}(Q) = \emptyset$ . Alors l'endomorphisme*

$$\phi_{P,Q} : \begin{array}{ccc} M_{n,p}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M_{n,p}(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & MP - QM \end{array}$$

*est inversible.*

qui nous assure que  $F_k = 0$  pour  $k \neq 0$ . □

*Remarque 1.3.3.* Il existe aussi une forme normale pour les modules purs isoclines à pentes arbitraires : ce cas est traité dans [vdPR07] puis matriciellement dans [Bug12] ; nous en reparlerons en 5.1.

### Espace des classes.

Donnons-nous un module pur  $M_0 = P_1 \oplus \cdots \oplus P_k$  où les  $P_i$  sont purs isoclines de pentes  $\mu_i$  (non forcément entières) de rangs  $r_i$  avec  $\mu_1 < \cdots < \mu_k$  et  $r_1, \dots, r_k \geq 1$ . Tous les modules  $M$  tels que  $gr(M) \simeq M_0$  ont la même fonction de Newton et constituent ce qui est appelé une classe formelle. Ramis, Sauloy et Zhang dans [RSZ13] en ont donné une classification analytique isoformelle en s'inspirant de [BV89] pour donner la définition suivante :

**Définition 1.3.4.** On définit l'espace  $\mathcal{F}(M_0) = \mathcal{F}(P_1, \dots, P_k)$  des classes analytiques isoformelles comme l'ensemble des classes d'équivalences de paires  $(M, u)$ , où  $M$  est un module aux  $q$ -différences et où  $u : gr(M) \rightarrow M_0$  est un isomorphisme, pour la relation :  $(M, u) \sim (M', u')$  s'il existe  $f : M \rightarrow M'$  tel que  $u = u' \circ gr f$  (on dira que  $f$  est compatible avec la graduation).

Cet espace est particulièrement agréable à utiliser puisque c'est un espace affine, de dimension  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}(P_1, \dots, P_k) = \sum_{1 \leq i < j \leq k} r_i r_j (\mu_j - \mu_i) =: N$  (théorème 3.1.4 de [RSZ13]). En particulier  $\mathcal{F}(P_1, P_2)$  est un espace *vectoriel* de dimension  $r_1 r_2 (\mu_2 - \mu_1)$ .

Donnons-en maintenant une description matricielle. Donnons-nous pour tout  $1 \leq i \leq k$  des matrices  $B_i \in GL_{r_i}(K)$  telles que  $P_i \simeq (K^{r_i}, \varphi_{B_i})$ . Alors  $M_0 \simeq (K^n, \varphi_{A_0})$  où

$$A_0 := \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & B_k \end{pmatrix}.$$

On déduit de la partie 1.2.2 que chaque module  $M$  tel que  $gr M \simeq M_0$  peut s'écrire sous la forme  $(K^n, \varphi_{A_U})$  avec

$$A_U := \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & U_{i,j} & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & B_k \end{pmatrix}$$

où  $U = (U_{i,j})_{i < j} \in \prod_{i < j} M_{r_i, r_j}(K)$ . On notera  $M_U$  un module muni de cette description matricielle.

Un morphisme entre deux  $M_U$  et  $M_V$  compatible avec la graduation est une matrice de la forme

$$F := \begin{pmatrix} I_{r_1} & & & \\ & I_{r_2} & F_{i,j} & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & I_{r_k} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

où les  $F_{i,j} \in M_{r_i, r_j}(K)$  et est telle que  $\sigma_q(F)A_U = A_V F$ . L'ensemble des  $F$  de la forme (1.4) est un sous-groupe algébrique unipotent  $\mathfrak{G}$  de  $GL_n$  entièrement déterminé par la fonction de Newton de  $M_0$ .

### Cas particulier des modules à deux pentes.

Commençons par définir les extensions de modules purs isoclines. Soient  $P_1 = (V_1, \varphi_1)$  et  $P_2 = (V_2, \varphi_2)$  deux modules aux  $q$ -différences de pentes respectives  $\mu_1$  et  $\mu_2$  avec  $\mu_1 < \mu_2$ . Une extension de  $P_2$  par  $P_1$  est une suite exacte de modules aux  $q$ -différences

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow M \longrightarrow P_2 \longrightarrow 0$$

*i.e.* notant  $M = (V, \varphi)$  une suite exacte de  $K$ -espaces vectoriels

$$0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V \longrightarrow V_2 \longrightarrow 0$$

telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & V_1 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V_2 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi_2 \\ 0 & \longrightarrow & V_1 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V_2 \longrightarrow 0. \end{array}$$

Un morphisme d'extensions est un morphisme de modules aux  $q$ -différences  $f : M \rightarrow N$  entre deux extensions  $M, N$  tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & M & & \\ & & & & \downarrow f & & \\ 0 & \longrightarrow & P_1 & \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} & & \begin{array}{l} \searrow \\ \nearrow \end{array} & P_2 \longrightarrow 0 \\ & & & & N & & \end{array}$$

*i.e.* notant  $M = (V, \varphi)$  et  $N = (W, \psi)$  un morphisme  $f : V \rightarrow W$  faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & V & & \\ & & & & \downarrow f & & \\ 0 & \longrightarrow & V_1 & \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} & & \begin{array}{l} \searrow \\ \nearrow \end{array} & V_2 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi_2 \\ & & & & W & & \\ & & & & \downarrow f & & \\ 0 & \longrightarrow & V_1 & \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} & & \begin{array}{l} \searrow \\ \nearrow \end{array} & V_2 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \psi & & \downarrow \varphi_2 \\ & & & & W & & \end{array}$$

On peut noter que tout morphisme d'extensions est automatiquement un isomorphisme.

Notons  $\text{Ext}(P_2, P_1)$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des classes d'isomorphisme des telles extensions (pour des précisions sur sa structure de  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel on peut voir [RSZ13, Appendix A]). On a la proposition suivante (2.3.9 de [RSZ13]) :

**Proposition 1.3.5.** *Soient  $P_1, P_2$  purs isoclines de pentes respectives  $\mu_1 < \mu_2$ . Alors on a un isomorphisme d'espaces vectoriels*

$$\mathcal{F}(P_1, P_2) \simeq \text{Ext}(P_2, P_1).$$

D'un point de vue matriciel supposons que  $P_i \simeq (K^{r_i}, \varphi_{B_i})$ ,  $B_i \in GL_{r_i}(K)$ . Une classe d'extensions de  $P_2$  par  $P_1$  est donc la classe d'équivalence d'un module de la forme  $M_U = (K^{r_1+r_2}, \varphi_{A_U})$  où

$$A_U := \begin{pmatrix} B_1 & U \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}, \quad U \in M_{r_1, r_2}(K)$$

modulo une transformation de jauge de la forme

$$\begin{pmatrix} I_{r_1} & F \\ 0 & I_{r_2} \end{pmatrix} \in \mathfrak{G}(K).$$

### Pentes entières.

Dans le cas où les pentes sont entières un représentant canonique est connu pour chaque classe analytique isoformelle : on a un bon système de coordonnées sur notre  $\mathcal{F}(M_0) \simeq \mathbb{C}^N$  que nous allons présenter.

Les formes normales de modules purs nous permettent de mettre les  $B_i$  sous la forme  $z^{\mu_i} A_i$  avec  $A_i \in GL_{r_i}(\mathbb{C})$ ,  $r_i := r_M(\mu_i)$ . Tout module  $M$  de pentes  $\mu_1 < \dots < \mu_k$  est alors isomorphe au module associé à une matrice de type

$$A_U := \begin{pmatrix} A_1 z^{\mu_1} & & & \\ & A_2 z^{\mu_2} & U_{i,j} & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & A_k z^{\mu_k} \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

On peut de plus choisir les  $U_{i,j} \in M_{r_i, r_j}(K)$  de manière unique à coefficients dans  $\sum_{\ell=\mu_i}^{\mu_j-1} \mathbb{C}z^\ell$  : nous avons alors ce que l'on appelle la forme normale de Birkhoff-Guenther.

*Exemple 1.3.6.* Soit  $M \in \mathcal{F}(a, bz)$  pour  $a, b \in \mathbb{C}^*$ .  $M$  peut être représenté par une matrice  $\begin{pmatrix} a & u \\ 0 & bz \end{pmatrix}$  où  $u \in K$ . Sa forme normale de Birkhoff-Guenther est alors la



matrice  $\begin{pmatrix} a & \mathcal{B}_{q,1}(u)\left(\frac{a}{b}\right) \\ 0 & bz \end{pmatrix}$  où  $\mathcal{B}_{q,1}$  est la transformée de  $q$ -Borel de niveau 1 définie en 1.1.5.

## 1.4 Phénomène de ( $q$ -)Stokes

Cette section vise à construire des solutions méromorphes sur  $\mathbb{C}^*$  de l'équation  $F[M_0] = M$  pour  $M_0$  un module gradué fixé et  $M \in \mathcal{F}(M_0)$ . De telles solutions permettent de créer les " $q$ -Stokes", dont les familles donnent un ensemble de co-cycles en bijection avec  $\mathcal{F}(M_0)$ .

Définissons tout d'abord la  $q$ -courbe elliptique  $E_q := \mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$ . C'est une surface de Riemann et un groupe. La surjection canonique  $\pi : \mathbb{C}^* \rightarrow E_q$  définit un revêtement. Un recouvrement utile de  $E_q$  est donné par les ouverts  $U_1 = \pi(V_1)$  et  $U_2 = \pi(V_2)$  où  $V_1 = C(0, 1, |q|)$  et  $V_2 = C(0, |q|^{-\frac{1}{2}}, |q|^{\frac{1}{2}})$ . Notons, pour  $a \in \mathbb{C}^*$ ,  $\bar{a} := \pi(a)$  la classe de  $a$  dans  $E_q$  et  $[a; q]$  la  $q$ -spirale  $aq^{\mathbb{Z}} = \pi^{-1}(\bar{a})$ .

À  $f$  une fonction méromorphe sur  $\mathbb{C}^*$  solution d'une équation aux  $q$ -différences ayant ses pôles et zéros sur des  $q$ -spirales complètes on peut associer le diviseur sur  $E_q$  de  $f$ ,  $\text{div}_{E_q} f := \sum_{\alpha \in E_q} n_\alpha [\alpha]$ , où les  $n_\alpha$  sont presque tous nuls et sont tels que  $f$  a des zéros de multiplicité  $n_\alpha$  sur la  $q$ -spirale  $\pi^{-1}(\alpha)$  si  $n_\alpha$  est positif et des pôles d'ordre  $-n_\alpha$  sur la même  $q$ -spirale dans le cas contraire. Par exemple  $\text{div}_{E_q} \theta_q = [-1]$  et  $\text{div}_{E_q} e_{q,c} = [-1] - [-c]$ .

**Théorème 1.4.1.** *Soit  $M_0 := P_1 \oplus \dots \oplus P_k$  où les  $P_i$  sont des modules purs isoclines de pentes  $\mu_i \in \mathbb{Z}$  avec  $\mu_1 < \dots < \mu_k$  et de rangs  $r_i$ . On lui associe la matrice en forme normale  $A_0 = z^{\mu_1} A_1 \oplus \dots \oplus z^{\mu_k} A_k$  où les  $A_i \in GL_{r_i}(\mathbb{C})$ . Soit  $M \in \mathcal{F}(M_0)$*

associé à la matrice  $A_U := \begin{pmatrix} A_1 z^{\mu_1} & & & \\ & A_2 z^{\mu_2} & U_{i,j} & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & A_k z^{\mu_k} \end{pmatrix}$  où les  $U_{i,j} \in \sum_{\ell=\mu_i}^{\mu_j-1} \mathbb{C} z^\ell$  et

où l'on a noté  $U = (U_{i,j})_{i < j}$ .

Alors il existe un unique morphisme formel  $\hat{F}_{A_U} := \begin{pmatrix} I_{r_1} & & & \\ & I_{r_2} & \hat{F}_{i,j} & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & I_{r_k} \end{pmatrix} \in \mathfrak{G}(\mathbb{C}[[z]])$

tel que  $\hat{F}_{A_U}[A_0] = A_U$ .

Sauloy explique alors dans [Sau04a] comment construire des "sommations" de

ces  $\hat{F}_{A_U}$  méromorphes sur  $\mathbb{C}^*$  à pôles imposés. Notons

$$\Sigma(A_0) := \{\bar{\lambda} \in E_q \mid \forall i < j \lambda^{\mu_i} \text{Spec}(A_i)q^{\mathbb{Z}} \cap \lambda^{\mu_j} \text{Spec}(A_j)q^{\mathbb{Z}} \neq \emptyset\}$$

l'ensemble des "directions interdites de sommation".

**Théorème 1.4.2.** *Soit  $\bar{\lambda} \in E_q \setminus \Sigma(A_0)$ , reprenons les notation du théorème 1.4.1. Il existe un unique  $F$  inversible, noté  $S_{\bar{\lambda}}\hat{F}_{A_U}$  et appelé "sommation de  $\hat{F}_{A_U}$  dans la*

*direction  $\bar{\lambda}$ ", de la forme* 
$$\begin{pmatrix} I_{r_1} & & & \\ & I_{r_2} & S_{\bar{\lambda}}\hat{F}_{i,j} & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & I_{r_k} \end{pmatrix}$$
 *à coefficients méromorphes sur*

$\mathbb{C}^*$  *tel que*  $S_{\bar{\lambda}}\hat{F}_{A_U}[A_0] = A_U$  *et tel que les*  $S_{\bar{\lambda}}\hat{F}_{i,j}$  *aient pour pôles la  $q$ -spirale  $[-\lambda, q]$  d'ordre au plus  $\mu_j - \mu_i$  (i.e.  $\text{div}_{E_q} S_{\bar{\lambda}}\hat{F}_{i,j} \geq -(\mu_j - \mu_i)[- \bar{\lambda}]$ ).*

*Exemple 1.4.3.* On regarde l'équation de  $q$ -Euler

$$z\sigma_q y + y = z. \quad (1.6)$$

Regarder "la" solution formelle de cette équation revient à regarder l'unique isomorphisme formel  $\hat{F}$  tel que  $\hat{F}[A_0] = A_z$  où

$$A_u := \begin{pmatrix} -1 & u \\ 0 & z \end{pmatrix}, \hat{F} = \begin{pmatrix} 1 & \hat{f} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette solution formelle se calcule simplement :

$$\hat{f} := \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} z^{n+1}.$$

Alors pour tout  $\bar{\lambda} \in E_q \setminus \{-1\}$  il existe une unique matrice  $S_{\bar{\lambda}}\hat{F} = \begin{pmatrix} 1 & S_{\bar{\lambda}}\hat{f} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  telle que  $S_{\bar{\lambda}}\hat{f}$  soit méromorphe sur  $\mathbb{C}^*$  à pôles simples sur  $[c; q]$  et vérifie (1.6). Elle est d'ailleurs donnée par

$$S_{\bar{\lambda}}\hat{f} := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{cq^n}{1 + cq^n} \cdot \frac{1}{\theta_q\left(\frac{cq^{1+n}}{z}\right)}.$$

On peut alors définir les " $q$ -Stokes" en posant, pour  $\bar{\lambda}, \bar{\gamma} \in E_q \setminus \Sigma(A_0)$  :

$$S_{\bar{\lambda}, \bar{\gamma}}\hat{F}_{A_U} := (S_{\bar{\gamma}}\hat{F}_{A_U})^{-1} S_{\bar{\lambda}}\hat{F}_{A_U}.$$

Ils vérifient  $S_{\bar{\lambda}, \bar{\gamma}}\hat{F}_{A_U}[A_0] = A_0$ .

Notons alors  $\Lambda(M_0)$  le faisceau en groupes défini pour tout ouvert  $U$  de  $E_q$  par

$$\Lambda(M_0)(U) = \{F \in \mathfrak{G}(\mathcal{O}(\pi^{-1}(U))) \mid F[A_0] = A_0\}$$

ainsi que  $U_{\bar{\lambda}} := E_q \setminus \{-\bar{\lambda}\}$  et  $U_{\bar{\lambda}, \bar{\gamma}} := U_{\bar{\lambda}} \cap U_{\bar{\gamma}} = E_q \setminus \{-\bar{\lambda}, -\bar{\gamma}\}$  pour  $\bar{\lambda}, \bar{\gamma} \in E_q \setminus \Sigma(A_0)$ . Tout d'abord nous avons que les  $S_{\bar{\lambda}, \bar{\gamma}} \hat{F}_{A_U}$  sont des éléments de  $\Lambda(M_0)(U_{\bar{\lambda}, \bar{\gamma}})$ . De plus en notant  $\mathcal{U}_{M_0}$  le recouvrement de  $E_q$  par les  $U_{\bar{\lambda}}$  les  $S_{\bar{\lambda}, \bar{\gamma}} \hat{F}_{A_U}$  définissent des éléments de  $Z^1(\mathcal{U}_{M_0}, \Lambda(M_0))$  appelés cocycles privilégiés. Tout ceci entraîne des bijections ([Sau04a, prop. 3.17, th. 3.18])

$$\mathcal{F}(M_0) \longrightarrow Z_{pr}^1(\mathcal{U}_{M_0}, \Lambda(M_0)) \longrightarrow H^1(E_q, \Lambda(M_0))$$

où  $Z_{pr}^1(\mathcal{U}_{M_0}, \Lambda(M_0))$  dénote l'ensemble des cocycles privilégiés et où la première flèche est induite par

$$A_U \longmapsto (S_{\bar{\lambda}, \bar{\gamma}} \hat{F}_{A_U})_{\bar{\lambda}, \bar{\gamma}}.$$

Deuxième partie  
Corps de la thèse



# 2

## Espace des données de monodromie pour les équations aux $q$ -différences de la liste de Murata

---

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Matrice de connexion</b>	<b>29</b>
2.1.1	Réduction en 0	30
2.1.2	Réduction en $\infty$	33
2.1.3	Matrice de connexion	37
<b>2.2</b>	<b>Équivalence de Riemann-Hilbert-Birkhoff</b>	<b>38</b>
2.2.1	Injectivité	39
2.2.2	Surjectivité	39
<b>2.3</b>	<b>Variations des données locales</b>	<b>40</b>
2.3.1	"Fonctorialité" de $RHB$	41
2.3.2	Fibration au dessus des données locales	44
2.3.3	Action sur la fibration	47
<b>2.4</b>	<b>Autres systèmes de la liste de Murata</b>	<b>48</b>
2.4.1	$q$ -P( $A_5$ )	49
2.4.2	$q$ -P( $A_6$ )	52

---

Dans leur article [JS96], Jimbo et Sakai ont défini une famille paramétrée d'équations<sup>1</sup> qui permet d'obtenir l'équation de  $q$ -Painlevé VI ( $q$ -P<sub>VI</sub> ou  $q$ -P( $A_3$ )) par l'introduction de conditions d'"isomonodromie". Ohyama, Ramis et Sauloy dans [ORS15] ont proposé une correspondance de Riemann-Hilbert géométrique s'appliquant à cette famille notamment en définissant une matrice de connexion semblable à celle proposée par Sauloy dans [Sau03], elle-même inspirée de Birkhoff dans [Bir13]. Le travail de Jimbo et Sakai a été étendu par Murata qui dans [Mur09] propose de la même manière des familles paramétrées d'équations et des conditions

---

1. Rappelée plus bas

d'isomonodromie permettant de retrouver les autres équations de  $q$ -Painlevé. Le présent chapitre a pour but de faire un travail similaire à celui de Ohyama, Ramis et Sauloy mais dans le cadre de "la première dégénérescence" de la liste de Murata, le système dérivé de  $q$ -Painlevé V (soit  $q$ -P(A<sub>4</sub>) dans les notations de [Mur09]), puis d'adapter ce travail aux autres systèmes de la liste.

Pour se faire on se fixe  $q \in \mathbb{C}^*$  tel que  $|q| < 1$ . Rappelons que dans ce cadre les fonctions Thêta utilisées ne sont plus les mêmes : on définit

$$\Theta_q(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{\frac{n(n-1)}{2}} x^n = \theta_{q^{-1}}(q^{-1}x) = (q; q)_\infty (-x; q)_\infty \left(-\frac{q}{x}; q\right)_\infty$$

qui a pour diviseur  $\text{div}_{E_q} \Theta_q = [-1]$  et vérifie

$$\sigma_q \Theta_q = \frac{1}{x} \Theta_q$$

ainsi que, pour  $c \in \mathbb{C}^*$ ,

$$\Theta_{q,c}(x) := \Theta_q(c^{-1}x)$$

qui a pour diviseur  $\text{div}_{E_q} \Theta_{q,c} = [-c]$  et vérifie

$$\sigma_q \Theta_{q,c} = \frac{c}{x} \Theta_{q,c}.$$

Jimbo et Sakai ont dans leur article considéré un système matriciel  $2 \times 2$  (forme de Lax de  $q$ -P<sub>VI</sub>) de la forme

$$Y(qx; t) = A(x; t)Y(x; t)$$

où

$$\begin{aligned} A(x; t) &= A_0(t) + xA_1(t) + x^2A_2, \\ A_0 &\sim \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix}, \quad \rho_1, \rho_2 \neq 0, \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} \notin q^{\mathbb{Z}}, \\ A_2 &\sim \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1, \sigma_2 \neq 0, \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \notin q^{\mathbb{Z}}, \end{aligned}$$

$$\det A(x; t) = \sigma_1 \sigma_2 (x - a_1 t)(x - a_2 t)(x - a_3)(x - a_4).$$

Ils le munissent d'une équation de déformation

$$Y(x; qt) = B(x; t)Y(x; t)$$

et d'une condition de compatibilité

$$A(x; qt)B(x; t) = B(qx; t)A(x; t)$$

qui ensemble donnent l'équation de  $q$ -Painlevé VI.

Murata a donc repris ce travail en donnant une forme de Lax de l'équation de  $q$ -Painlevé V, qui est une forme dégénérée de  $q$ -P<sub>VI</sub> : elle s'écrit  $Y(qx; t) = A(x, t)Y(x; t)$  avec

$$A(x; t) = A_0 + A_1x + A_2x^2 \quad (2.1)$$

où

$$A_0 \sim \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix} =: R, \quad \rho_1, \rho_2 \neq 0, \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} \notin q^{\mathbb{Z}},$$

$$A_2 \sim \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: S, \quad \sigma_1 \neq 0,$$

et où

$$\det A(x; t) = \sigma_1\sigma_2(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3), \quad (2.2)$$

$$\sigma_2, x_1, x_2, x_3 \neq 0, \quad \frac{x_i}{x_j} \notin q^{\mathbb{Z}} \quad i \neq j, \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \notin q^{\mathbb{Z}}.$$

On a alors la *relation de Fuchs*

$$\frac{\rho_1\rho_2}{\sigma_1\sigma_2} = -x_1x_2x_3.$$

Nous dirons qu'une matrice  $A$  comme ci-dessus "vérifie les conditions de  $q$ -P<sub>V</sub>". Nous oublierons dans ce travail la référence au paramètre  $t$ .

*Remarque 2.0.4.* Nous avons ici plusieurs hypothèses de non-résonance entre les différents paramètres. Pour  $\rho_1, \rho_2$  et  $\sigma_1, \sigma_2$  ces choix ont été faits dans le système associé à  $q$ -P<sub>VI</sub> afin que les matrices  $\begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$  aient des commutants simples (plus exactement que toute transformation de jauge laissant ces matrices invariantes soient diagonales constantes). Nous avons gardé ici ces hypothèses pour les mêmes raisons, même s'il semble que la non-résonance de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  soit superflue dans le cadre de  $q$ -P<sub>V</sub> - cela dû à la perte du caractère fuchsien de l'équation en  $\infty$ . Pour  $x_1, x_2, x_3$  ces choix ont été faits afin d'avoir trois  $q$ -spirales de pôles *distinctes* pour la matrice de connexion  $M$  que nous allons construire. Nous gardons tout de même avec ces hypothèses une certaine généralité.

## 2.1 Matrice de connexion

On va associer à tout  $A \in GL_2(\mathbb{C})$  vérifiant les conditions de  $q$ -P<sub>V</sub> une matrice, appelée matrice de connexion pour sa capacité à "connecter" le comportement de



$A$  en 0 et en  $\infty$  ; c'est une variante de la matrice de connexion de Sauloy introduite dans [Sau03].

Le travail de réduction en 0 et en  $\infty$  est une variante dans ce cadre précis de la mise en forme normale de Birkhoff-Guenther d'un système  $2 \times 2$  à pentes entières telle qu'elle est présentée en annexe A.

On se donne pour toute la suite de cette section une matrice  $A$  vérifiant les condition de  $q$ -P<sub>V</sub> pour les paramètres  $R := \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix}$ ,  $S := \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_2, x_1, x_2, x_3$ .

### 2.1.1 Réduction en 0

Le but de cette partie est de donner les conditions locales en 0 associées à  $A$  ainsi qu'une transformation de jauge canonique (et unique sous certaines conditions)  $M^{(0)}$  qui réalise l'isomorphisme (local) entre la matrice des conditions locales en forme normale et  $A$ , ainsi que les liens entre  $M^{(0)}$  et les autres transformations de jauge réalisant cet isomorphisme.

**Résumé :**  $\exists ! M^{(0)} \in GL_2(\mathbb{C}\{x\})$  telle que  $M^{(0)}(0) = C$  et  $M^{(0)}[R] = A$  où  $A_0 = CRC^{-1}$ . De plus pour  $M \in GL_2(\mathbb{C}\{x\})$ ,  $M[R] = A \Leftrightarrow \exists \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$  tel que  $M = M^{(0)}\Gamma$ .

**Lemme 2.1.1.** Soient  $P \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $Q \in M_p(\mathbb{C})$  telles que  $\text{Spec}(P) \cap \text{Spec}(Q) = \emptyset$ . Alors l'endomorphisme

$$\phi_{P,Q} : \begin{array}{ccc} M_{n,p}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M_{n,p}(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & MP - QM \end{array}$$

est inversible.

*Démonstration.* Comme  $\phi_{P,Q}$  est un endomorphisme il suffit de prouver qu'il est injectif. Montrons pour cela que  $MP - QM = 0 \Rightarrow M = 0$ .

Si  $MP = QM$  alors pour tout polynôme  $\Psi \in \mathbb{C}[T]$  on a  $M\Psi(P) = \Psi(Q)M$ . En particulier en prenant  $\chi_P$  le polynôme caractéristique de  $P$  on a  $\chi_P(Q)M = 0$ . Comme  $\text{Spec}(P) \cap \text{Spec}(Q) = \emptyset$  on sait que  $\chi_P(Q)$  est inversible et donc  $M = 0$ .  $\square$

**Proposition 2.1.2.** Il existe une unique transformation de jauge  $\widetilde{M}^{(0)} \in GL_2(\mathbb{C}\{x\})$  telle que  $\widetilde{M}^{(0)}[A_0] = A$ , i.e.  $\sigma_q(\widetilde{M}^{(0)})A_0 = A\widetilde{M}^{(0)}$ , et telle que  $\widetilde{M}^{(0)}(0) = I_2$ .

*Démonstration.* On cherche à résoudre  $\widetilde{M}^{(0)}(qx)A_0 = A(x)\widetilde{M}^{(0)}(x)$ , soit en écrivant les relations :

$$\begin{cases} \widetilde{M}_0^{(0)} = I_n \\ q^k \widetilde{M}_k^{(0)} A_0 = \sum_{i=0}^2 A_i \widetilde{M}_{k-i}^{(0)} \quad \forall k \geq 1. \end{cases}$$

On écrit la deuxième relation sous la forme  $q^k \widetilde{M}_k^{(0)} A_0 - A_0 \widetilde{M}_k^{(0)} = A_1 \widetilde{M}_{k-1}^{(0)} + A_2 \widetilde{M}_{k-2}^{(0)}$ . On en déduit que  $A_1 \widetilde{M}_{k-1}^{(0)} + A_2 \widetilde{M}_{k-2}^{(0)}$  est l'image par  $\phi_{q^k A_0, A_0}$  de  $\widetilde{M}_k^{(0)}$  qui est inversible par hypothèse de non résonance du système, d'où

$$\widetilde{M}_k^{(0)} = \phi_{q^k A_0, A_0}^{-1} (A_1 \widetilde{M}_{k-1}^{(0)} + A_2 \widetilde{M}_{k-2}^{(0)}).$$

Montrons maintenant que  $\widetilde{M}^{(0)}$  converge. Choisissons une norme matricielle sur  $M_n(\mathbb{C})$  telle que  $\|I_n\| = 1$  (par exemple une norme subordonnée à une norme de  $\mathbb{C}^n$ ) ainsi qu'une norme sur  $\text{End}(M_n(\mathbb{C}))$  subordonnée à la précédente. Comme  $A$  est analytique il existe  $L, T > 0$  tels que pour tout  $i$   $\|A_i\| \leq LT^i$ . De plus comme  $|q| < 1$  l'endomorphisme  $\phi_{q^k A_0, A_0}$  est équivalent pour  $k \rightarrow \infty$  à la multiplication matricielle à gauche par  $A_0$ , ce qui nous assure que  $\left\| \left( \phi_{q^k A_0, A_0} \right)^{-1} \right\|$  est bornée et donc l'existence de  $L' > 0$  tel que pour tout  $k$

$$\left\| \left( \phi_{q^k A_0, A_0} \right)^{-1} \right\| \leq L'.$$

On déduit alors de la relation de récurrence définissant  $\widetilde{M}_k^{(0)}$  que

$$\|\widetilde{M}_k^{(0)}\| \leq L'L \sum_{i=0}^{k-1} T^{k-i} \|\widetilde{M}_i^{(0)}\|.$$

Posons  $a_0 := 1, a_k := LL' \sum_{i=0}^{k-1} a_i$ . Alors on voit par récurrence que  $T^{-k} \|\widetilde{M}_k^{(0)}\| \leq a_k$  car  $\|\widetilde{M}_0^{(0)}\| = \|I_n\| = 1$  et  $T^{-k} \|\widetilde{M}_k^{(0)}\| \leq LL' \sum T^{-i} T^i a_i = a_k$ . De plus  $a_k \leq (1 + LL')^k$ ; en effet on voit par récurrence que

$$a_k \leq LL' \sum_{i=0}^{k-1} (1 + LL')^i = LL' \frac{(1 + LL')^k - 1}{1 + LL' - 1} = (1 + LL')^k - 1 \leq (1 + LL')^k.$$

On en déduit donc que  $\|\widetilde{M}_k^{(0)}\| \leq (T(1 + LL'))^k$  et donc que  $\widetilde{M}^{(0)}$  converge.  $\square$

**Proposition 2.1.3.** *Soit  $C \in GL_2(\mathbb{C})$  telle que  $A_0 = CRC^{-1}$ . Il existe alors une unique  $M^{(0)} \in GL_2(\mathbb{C}\{x\})$  telle que  $M^{(0)}[R] = A$  et  $M^{(0)}(0) = C$ .*

*Démonstration.* Notons  $A = \widetilde{M}^{(0)}[A_0]$ , i.e. :

$$\begin{aligned} \sigma_q(\widetilde{M}^{(0)})A_0 &= A\widetilde{M}^{(0)} \\ \Leftrightarrow \sigma_q(\widetilde{M}^{(0)})CRC^{-1} &= A\widetilde{M}^{(0)} \\ \Leftrightarrow \sigma_q(\widetilde{M}^{(0)}C)R &= A\widetilde{M}^{(0)}C \\ \Leftrightarrow A &= (\widetilde{M}^{(0)}C)[R]. \end{aligned}$$

On pose alors  $M^{(0)} := \widetilde{M}^{(0)}C$  ce qui nous donne bien  $M^{(0)}(0) = C$ , l'unicité vient de celle de  $\widetilde{M}^{(0)}$ .  $\square$

**Proposition 2.1.4.**  $M^{(0)}$  est méromorphe sur  $\mathbb{C}^*$  et  $\det M^{(0)}$  ne s'annule pas et a ses pôles sur  $\{x_1, x_2, x_3\}q^{-\mathbb{N}}$ .

*Démonstration.* Notons  $V := \det M^{(0)}$ . La relation  $A = M^{(0)}[R]$  nous donne  $\rho_1\rho_2\sigma_q V = \sigma_1\sigma_2(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)V$  soit :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_q V}{V} &= \frac{\sigma_1\sigma_2}{\rho_1\rho_2}(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \\ &= -(x_1x_2x_3)^{-1}(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \\ &= \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\left(1 - \frac{x}{x_2}\right)\left(1 - \frac{x}{x_3}\right) =: u. \end{aligned}$$

On peut alors écrire

$$V = u^{-1}\sigma_q(V) = u^{-1}\sigma_q(u^{-1})\sigma_q^2(V) = \cdots = V(0) \prod_{n \geq 0} \sigma_q^n(u^{-1})$$

avec  $V(0) = \det M^{(0)}(0) = \det C$ , soit

$$V = (\det C) \prod_{n \geq 0} \left(1 - q^n \frac{x}{x_1}\right)^{-1} \left(1 - q^n \frac{x}{x_2}\right)^{-1} \left(1 - q^n \frac{x}{x_3}\right)^{-1}$$

qui converge bien sur tout  $\mathbb{C}^*$  et dont les pôles sont bien sur les  $q$ -spirales  $x_i q^{-\mathbb{N}}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . De plus on voit bien que  $V$  ne s'annule jamais.  $\square$

**Proposition 2.1.5.** Soit  $M \in GL_2(\mathbb{C}(\{x\}))$ . Alors  $M[R] = A$  si et seulement s'il existe une matrice diagonale  $\Gamma \in GL_2(\mathbb{C})$  telle que  $M = M^{(0)}\Gamma$ .

*Démonstration.* Montrons tout d'abord que  $(M^{(0)}\Gamma)[R] = A$ . On a  $\sigma_q(M^{(0)}\Gamma)R = \sigma_q(M^{(0)})\Gamma R = \sigma_q(M^{(0)})R\Gamma = AM^{(0)}\Gamma$ .

Passons à la réciproque. On va montrer que  $P := (M^{(0)})^{-1}M$  est de la bonne forme. Par construction  $P$  est telle que  $P[R] = R$ . Notons  $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$ . La relation  $P[R] = R$  nous donne alors le système

$$\begin{cases} \sigma_q(p_1) = p_1 \\ \sigma_q(p_2) = \frac{\rho_1}{\rho_2}p_2 \\ \sigma_q(p_3) = \frac{\rho_2}{\rho_1}p_3 \\ \sigma_q(p_4) = p_4. \end{cases}$$

Comme  $P \in GL_2(\mathbb{C}(\{x\}))$  et par hypothèse de non résonance on obtient immédiatement  $p_2, p_3 = 0$  et  $p_1, p_4 \in \mathbb{C}^*$ .  $\square$

*Remarque 2.1.6.* En particulier si  $A_0 = CRC^{-1} = DRD^{-1}$ , on peut créer en utilisant la proposition 2.1.3 deux matrices  $M_C^{(0)}$  et  $M_D^{(0)}$  qui seront égales à multiplication à droite par une matrice diagonale constante près. Plus précisément  $M_D^{(0)} = M_C^{(0)}C^{-1}D$ .

### 2.1.2 Réduction en $\infty$

Nous allons faire ici la même chose que dans la partie précédente, mais cette fois en  $\infty$ ; une différence se verra puisque si  $A$  était fuchsienne en 0 elle ne l'est pas en  $\infty$ , nous aurons donc besoin d'autres arguments que précédemment.

**Résumé :**  $\exists! M^{(\infty)} \in K + \frac{1}{x} M_2(\mathbb{C}\{\frac{1}{x}\})$  et  $!u \in \mathbb{C}$  telle que  $M^{(\infty)} \left[ \begin{pmatrix} \sigma_1 x^2 & ux^2 \\ 0 & \sigma_2 x \end{pmatrix} \right] = A$  où  $A_2 = KSK^{-1}$ . De plus pour  $M \in GL_2(\mathbb{C}\{\frac{1}{x}\})$  et  $u' \in \mathbb{C}$ ,  $M \left[ \begin{pmatrix} \sigma_1 x^2 & u'x^2 \\ 0 & \sigma_2 x \end{pmatrix} \right] = A \Leftrightarrow \exists \Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}) | M = M^{(\infty)} \Delta$ .

#### Triangularisation

On note  $S_v := \begin{pmatrix} \sigma_1 x^2 & v \\ 0 & \sigma_2 x \end{pmatrix}$  où  $v$  est méromorphe en l'infini (*i.e.* appartient à  $\mathbb{C}(\{\frac{1}{x}\})$ ).

Soit  $K \in GL_2(\mathbb{C})$  telle que  $A_2 = KSK^{-1}$ . Posons  $A' := K^{-1}AK = A'_0 + A'_1 x + Sx^2$ . On a  $A = K[A']$  et  $\det A = \det A'$ , de plus  $A'$  vérifie les conditions de  $q$ -P.V.

**Proposition 2.1.7.** *Il existe une matrice  $F \in GL_2(\mathbb{C}\{\frac{1}{x}\})$ , analytique sur  $\mathbb{C}^*$ , de terme constant  $F_0 = I_2$  et vérifiant  $\sigma_q(\det F) = (1 - \frac{x_1}{x})(1 - \frac{x_2}{x})(1 - \frac{x_3}{x}) \det F$ , et  $v \in \mathbb{C}(\{\frac{1}{x}\})$  tels que  $A' = F[S_v]$ .*

*Démonstration.* Nous allons construire de tels  $F$  et  $v$  à partir de l'équation  $A' = F[S_v]$ . Soient  $X$  et  $Y$  les colonnes de  $F$ .

La relation  $F[S_v] = A'$  impose à  $X$  de satisfaire l'équation  $\sigma_1 x^2 \sigma_q X = A'X$ . En écrivant  $X = \sum_{n \geq 0} X_n (\frac{1}{x})^n$ ,  $X_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  on obtient :

$$\begin{cases} \sigma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{q} \sigma_1 X_1 = SX_1 + A'_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\sigma_1}{q^{n+2}} X_{n+2} = SX_{n+2} + A'_1 X_{n+1} + A'_0 X_n. \end{cases}$$

Soit  $X_{n+2} = (\frac{\sigma_1}{q^{n+2}} I_2 - S)^{-1} (A'_1 X_{n+1} + A'_0 X_n)$ . On montre la convergence de la série des  $X_i \frac{1}{x^i}$  avec un argument similaire à celui de la preuve de la proposition 2.1.2.

Si on choisit maintenant un  $Y$  non colinéaire à  $X$ , il existe des uniques  $\lambda$  et  $v$  tels que  $\lambda \sigma_q(Y) = A'Y - v \sigma_q(X)$ , *i.e.* tels que l'on ait

$$F \left[ \begin{pmatrix} \sigma_1 x^2 & v \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] = A'$$

(pour cela on réécrit l'équation  $\lambda\sigma_q(Y) = A'Y - v\sigma_q(X)$  sous la forme  $\sigma_q(F) \begin{pmatrix} v \\ \lambda \end{pmatrix} = A'Y$  et, comme  $X$  et  $Y$  sont non colinéaires, on peut inverser  $\sigma_q(F)$ ).

On va chercher un  $Y$  canonique tel que  $\lambda = \sigma_2 x$ .  
On veut pour cela que  $W := \det(F)$  vérifie

$$\frac{\sigma_q W}{W} = \frac{\det A'}{\det S_v} = \frac{\det A}{\det S_v} = \left(1 - \frac{x_1}{x}\right)\left(1 - \frac{x_2}{x}\right)\left(1 - \frac{x_3}{x}\right) =: u.$$

Pour tenter d'imposer  $Y \in \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{x}M_{2,1}(\mathbb{C}\{\frac{1}{x}\})$  on va imposer à  $W$  d'être l'unique solution dans  $1 + \frac{1}{x}\mathbb{C}\{\frac{1}{x}\}$ . Cela se fait de deux manières différentes :  
- soit en écrivant  $W = \sum W_n \frac{1}{x^n}$  avec  $W_0 = 1$  et  $W_n = 0$  pour  $n < 0$ , ce qui nous donne la relation

$$W_n = \frac{1}{q^{-n} - 1} \left( -(x_1 + x_2 + x_3)W_{n-1} + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)W_{n-2} - x_1x_2x_3W_{n-3} \right)$$

(et en particulier  $W_1 = -\frac{q(x_1+x_2+x_3)}{1-q}$ ).  
- soit en itérant

$$W = \sigma_q^{-1}(u)\sigma_q^{-1}(W) = \sigma_q^{-1}(u)\sigma_q^{-2}(u)\sigma_q^{-2}W = \dots = W(0) \prod_{n \geq 1} \sigma_q^{-n}(u)$$

ce qui donne, comme  $W(0) = W_0 = 1$ ,

$$W = \prod_{n \geq 1} \left(1 - q^n \frac{x_1}{x}\right) \left(1 - q^n \frac{x_2}{x}\right) \left(1 - q^n \frac{x_3}{x}\right).$$

Ce sont des  $q$ -symboles de Pochhammer qui convergent bien.  $W$  est alors analytique sur  $\mathbb{C}^*$  et s'annule sur les  $q$ -spirales  $x_i q^{\mathbb{N}^*}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Si on l'écrit sous la forme  $W = \sum W_n \frac{1}{x^n}$  on retrouve bien  $W_0 = 1$  et

$$W_1 = - \sum_{n \geq 1} q^n (x_1 + x_2 + x_3) = -q \frac{x_1 + x_2 + x_3}{1 - q}.$$

Notons  $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ . On pose alors  $g := \frac{W}{X_1}$  et  $Y := \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$ . On a bien  $[g]_0 = 1$  car  $W_0 = 1$  et  $[X_1]_0 = 1$ .  $Y$  n'est pas colinéaire à  $X$  donc on a bien  $\lambda$  et  $v$  tels qu'au dessus, la donnée de  $g$  (par  $W$ ) nous impose bien que  $\lambda = \sigma_2 x$ .

On peut sinon le vérifier. Posons  $A' = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ . Avec  $\lambda = \sigma_2 x$  on a alors les équations :

$$\begin{cases} v = \frac{a_2 g}{\sigma_q x_1} \\ v = \frac{a_4 g}{\sigma_q x_2} - \frac{uW\sigma_2 x}{\sigma_q x_1 \cdot \sigma_q x_2}. \end{cases}$$

Vérifions l'égalité :

$$\begin{aligned} a_2 g \sigma_q x_2 - a_4 g \sigma_q x_1 + uW\sigma_2 x &= \frac{a_2 g(a_3 x_1 + a_4 x_2) - a_4 g(a_1 x_1 + a_2 x_2)}{\sigma_1 x^2} + uW\sigma_2 x \\ &= -\frac{\det(A)g x_1}{\sigma_1 x^2} + u g x_1 \sigma_2 x \\ &= 0. \end{aligned}$$

Comme  $W$  est convergente et  $g = \frac{W}{x_1}$  on a bien  $Y$  et donc  $v$  convergentes.  $\square$

**Corollaire 2.1.8.** *Il existe une matrice  $\bar{F} \in GL_2(\mathbb{C}\{\frac{1}{x}\})$ , analytique sur  $\mathbb{C}^*$ , de terme constant  $\bar{F}_0 = K$  et vérifiant  $\sigma_q(\det \bar{F}) = (1 - \frac{x_1}{x})(1 - \frac{x_2}{x})(1 - \frac{x_3}{x}) \det \bar{F}$ , et  $v \in \mathbb{C}\{\frac{1}{x}\}$  tels que  $A = \bar{F}[S_v]$ .*

*Démonstration.* Il suffit juste de prendre  $\bar{F} = KF$ , où  $F$  est la matrice donnée par 2.1.7, comme dans la proposition 2.1.3.  $\square$

### Forme normale de Birkhoff-Guenther

Il existe des uniques  $f \in \mathbb{C}\{\frac{1}{x}\}$  et  $u \in \mathbb{C}$  tels que  $\begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [S_{ux^2}] = S_v$ .

Cela revient à résoudre l'équation :

$$\sigma_q(f) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} x f + \frac{v - ux^2}{\sigma_2 x}. \quad (2.3)$$

En notant  $f = \sum_{n \gg -\infty} f_n \frac{1}{x^n}$  et  $c := \frac{v - ux^2}{\sigma_2 x} = \sum_{n \gg \infty} c_n \frac{1}{x^n}$  on a :

$$\begin{aligned} \sigma_q(f) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} x f + c &\Leftrightarrow \forall n \quad q^{-n} f_n = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} f_{n+1} + c_n \\ &\Leftrightarrow \forall n \quad q^{n(n-1)/2} f_n = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} q^{n(n+1)/2} f_{n+1} + q^{n(n+1)/2} c_n \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\xi} - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) \mathcal{B}_{q,1}(f) = \mathcal{B}_{q,1}(c) \end{aligned}$$

où  $\mathcal{B}_{q,1}(f) = \sum_{n \gg -\infty} q^{n(n-1)/2} f_n \frac{1}{\xi^n}$ .

L'équation (2.3) a alors une solution si et seulement si  $\mathcal{B}_{q,1}(c)\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) = 0$ ; c'est le pendant en l'infini de ce qui a été prouvé en 1.1.2. En effet rappelons que nous avons ici  $|q| < 1$ , ce qui donne la compatibilité de cette définition de  $\mathcal{B}_{q,1}$  avec celle de 1.1.5. On en déduit alors  $u$  de manière unique (et on peut ainsi construire  $f$

également de manière unique).

Notons  $M^{(\infty)} := \bar{F} \cdot \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Alors  $M^{(\infty)}[S_{ux^2}] = A$ . De plus par construction de  $F$  on sait que  $\det M^{(\infty)}$  est analytique sur  $\mathbb{C}^*$  et s'annule sur  $\{x_1, x_2, x_3\}q^{\mathbb{N}^*}$ .

**Proposition 2.1.9.** *Soit  $M \in GL_2(\mathbb{C}(\{\frac{1}{x}\}))$ . Alors  $M[S_{ux^2}] = A$  si et seulement s'il existe une matrice  $\Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{pmatrix}$  où*

1. soit  $u = 0$  et dans ce cas  $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{C}^*$
2. soit  $u \neq 0$  et dans ce cas  $\delta_1 = \delta_2 \in \mathbb{C}^*$ .

telle que  $M = M^{(\infty)}\Delta$ .

*Démonstration.* Montrons tout d'abord que  $(M^{(\infty)}\Delta)[S_{ux^2}] = A$ . On a

$$\sigma_q(M^{(\infty)}\Delta)S_{ux^2} = \sigma_q(M^{(\infty)})\Delta S_{ux^2} = \sigma_q(M^{(\infty)})S_{ux^2}\Delta = AM^{(\infty)}\Delta$$

Passons à la réciproque. On va montrer que  $P := (M^{(\infty)})^{-1}M$  est de la bonne forme. Par construction  $P$  est telle que  $P[S_{ux^2}] = S_{ux^2}$ . Notons  $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$ . La relation  $P[S_{ux^2}] = S_{ux^2}$  nous donne alors le système

$$\begin{cases} \sigma_q(p_1) = p_1 + \frac{u}{\sigma_1}p_3 \\ ux\sigma_q(p_1) + \sigma_2\sigma_q(p_2) = \sigma_1xp_2 + uxp_4 \\ \sigma_q(p_3) = \frac{1}{x}\frac{\sigma_2}{\sigma_1}p_3 \\ \sigma_q(p_4) = p_4 - \frac{u}{\sigma_2}x\sigma_q(p_3) \end{cases}$$

Comme  $P \in GL_2(\mathbb{C}(\{\frac{1}{x}\}))$  on obtient immédiatement  $p_3 = 0$  et donc, par non résonance,  $p_1, p_4 \in \mathbb{C}^*$ . La deuxième équation donne alors

$$\sigma_q(p_2) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}xp_2 + \frac{u}{\sigma_2}x(p_4 - p_1)$$

qui a une unique solution convergente si et seulement si  $\mathcal{B}_{q,1}(\frac{u}{\sigma_2}x(p_4 - p_1))(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}) = 0$ , i.e. si  $u = 0$  ou  $p_4 = p_1$ . Cela implique alors  $p_2 = 0$ .  $\square$

Un autre choix de construction de  $M^{(\infty)}$  aurait pu nous donner une autre forme normale de Birkhoff-Guenther : le  $u \in \mathbb{C}$  trouvé dépend de cette construction. Nous pouvons préciser la proposition précédente en prenant ce fait en compte.

**Proposition 2.1.10.** *Supposons  $u \neq 0$ . Soient  $M \in GL_2(\mathbb{C}(\{\frac{1}{x}\}))$  et  $u' \in \mathbb{C}^*$ . Alors  $M[S_{u'x^2}] = A$  si et seulement s'il existe une matrice  $\Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{pmatrix}$  avec  $\frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{u'}{u}$  telle que  $M = M^{(\infty)}\Delta$ . De plus pour tout  $u' \in \mathbb{C}^*$  il existe un tel  $M$ .*

*Démonstration.* Si  $M = M^{(\infty)}\Delta$  il est trivial de voir que  $M[S_{u'x^2}] = A$  (car  $\Delta[S_{u'x^2}] = S_{ux^2}$ ). Pour la réciproque il suffit juste de montrer que tout  $P \in GL_2(\mathbb{C}(\{\frac{1}{x}\}))$  tel que  $P[S_{u'x^2}] = S_{ux^2}$  est de la forme  $\Delta$  donnée.

Soit un tel  $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$ .  $P[S_{u'x^2}] = S_{ux^2}$  implique

$$\begin{cases} \sigma_q(p_1) = p_1 + \frac{u}{\sigma_1}p_3 \\ u'x\sigma_q(p_1) + \sigma_2\sigma_q(p_2) = \sigma_1xp_2 + uxp_4 \\ \sigma_q(p_3) = \frac{1}{x}\frac{\sigma_2}{\sigma_1}p_3 \\ \sigma_q(p_4) = p_4 - \frac{u'}{\sigma_2}x\sigma_q(p_3). \end{cases}$$

De même qu'à la preuve précédente on a  $p_3 = 0$  et  $p_1, p_4 \in \mathbb{C}^*$ . La deuxième équation donne alors

$$\sigma_q(p_2) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}xp_2 + x\frac{1}{\sigma_2}(up_4 - u'p_1)$$

qui a une solution convergente si et seulement si  $\mathcal{B}_{q,1}(\frac{1}{\sigma_2}x(up_4 - u'p_1))(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}) = 0$ , *i.e.* si  $up_4 - u'p_1 = 0 \Leftrightarrow \frac{u'}{u} = \frac{p_4}{p_1}$ .  $\square$

*Remarque 2.1.11.* 1. En particulier, comme dans le cas de la réduction en 0, si  $A_2 = KSK^{-1} = LSL^{-1}$  on peut créer deux matrices  $M_K^{(\infty)}$  et  $M_L^{(\infty)}$  et obtenir deux éléments  $u_K, u_L \in \mathbb{C}$  tels que  $M_K^{(\infty)}[S_{u_Kx^2}] = M_L^{(\infty)}[S_{u_Lx^2}] = A$ ; ces deux matrices seront alors égales à multiplication à droite par une matrice diagonale constante près. Plus précisément  $M_L^{(\infty)} = M_K^{(\infty)}K^{-1}L$  et, notant  $\delta_1, \delta_2$  les éléments diagonaux de  $K^{-1}L$ ,  $u_L = \frac{\delta_2}{\delta_1}u_K$ .

2. Supposons maintenant que l'on ait une matrice  $M \in K + \frac{1}{x}M_2(\mathbb{C}\{\frac{1}{x}\})$  et  $u' \in \mathbb{C}$  tels que  $M[S_{u'x^2}] = A$ . Alors il existe  $\Delta = \text{Diag}(\delta_1, \delta_2)$  diagonale constante telle que  $M = M^{(\infty)}\Delta$  et  $u' = \frac{\delta_2}{\delta_1}u$ . En particulier on a  $K = K\Delta$  d'où  $\Delta = I_2$ , donc  $M = M^{(\infty)}$  et  $u' = u$  : on a donc unicité de  $M^{(\infty)}$  et de  $u$  pour un  $K$  donné.

### 2.1.3 Matrice de connexion

Notons  $M := (M^{(0)})^{-1}M^{(\infty)}$ . On a  $M[S_{ux^2}] = R$ , *i.e.*  $\sigma_q(M)S_{ux^2} = RM$ .

Les constructions de  $M^{(0)}$  et  $M^{(\infty)}$  nous assurent que  $M$  est analytique sur  $\mathbb{C}^*$ , que son déterminant est non identiquement nul mais qu'il s'annule à l'ordre 1 sur les  $q$ -spirales  $x_iq^{\mathbb{Z}}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , et uniquement sur elles.

De plus supposons que pour un  $A$  vérifiant  $q$ -P<sub>V</sub> on ait construit deux matrices de connexion différentes  $M$  et  $N$  (avec des choix de différents  $C, K, u$ ). Alors les



propositions 2.1.5 et 2.1.10 nous assurent qu'il existe  $\Gamma, \Delta \in GL_2(\mathbb{C})$  diagonales telles que  $N = \Gamma M \Delta^{-1}$ .

## 2.2 Équivalence de Riemann-Hilbert-Birkhoff

Nous venons donc à tout  $A \in GL_2(\mathbb{C}(z))$  vérifiant les conditions de  $q$ -P<sub>V</sub> d'associer une matrice de connexion  $M$  (uniquement définie à multiplication à droite et à gauche par des matrices inversibles diagonales constantes près). Nous allons montrer maintenant que, modulo des relations d'équivalence naturelles, cette flèche, que nous appellerons correspondance de Riemann-Hilbert-Birkhoff, est une bijection.

Soient  $R = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}), S_0 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}), \underline{x} = \{x_1, x_2, x_3\} \subset \mathbb{C}^*$  tels que

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} \notin q^{\mathbb{Z}}, \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \notin q^{\mathbb{Z}}, \frac{x_i}{x_j} \notin q^{\mathbb{Z}} \quad i \neq j, -x_1 x_2 x_3 = \frac{\rho_1 \rho_2}{\sigma_1 \sigma_2}.$$

Définissons

$$E_{R, S_0, \underline{x}} := \{A \text{ vérifiant } q\text{-P}_V \text{ pour } \rho_1, \rho_2, \sigma_1, \sigma_2, x_1, x_2, x_3\}$$

que l'on munit de la relation d'équivalence  $A \sim B \Leftrightarrow \exists F \in GL_2(\mathbb{C}(x)) \mid F[A] = B$ .

Définissons aussi

$$F_{R, S_0, \underline{x}} = \{M \in GL_2(\mathcal{M}(\mathbb{C}^*)) \mid M \text{ holomorphe sur } \mathbb{C}^*, \det M = 0 \text{ sur les } x_i q^{\mathbb{Z}}, \\ \exists u \in \mathbb{C} \mid M[S_{ux^2}] = R\}$$

muni de la relation  $M \sim N \Leftrightarrow \exists \Gamma, \Delta \in \begin{pmatrix} \mathbb{C}^* & 0 \\ 0 & \mathbb{C}^* \end{pmatrix} \mid N = \Gamma M \Delta^{-1}$ .

On a donc défini une flèche

$$\begin{array}{ccc} E_{R, S_0, \underline{x}} & \longrightarrow & F_{R, S_0, \underline{x}} \\ A & \longmapsto & M := (M^{(0)})^{-1} M^{(\infty)}. \end{array}$$

La partie de droite passe naturellement au quotient ; il faut donc montrer qu'une fois cela fait on peut passer au quotient à gauche.

Soient  $A, A' \in E_{R, S_0, \underline{x}}$  et soient  $M = (M^{(0)})^{-1} M^{(\infty)}$  et  $M' = (M'^{(0)})^{-1} M'^{(\infty)}$  leurs matrices de connexion. Soit  $u \in \mathbb{C}$  tel que  $M^{(\infty)}[S_{ux^2}] = R$ . On suppose de plus qu'il existe  $F \in GL_2(\mathbb{C}(x))$  telle que  $F[A] = A'$ .

Alors comme  $FM^{(0)}[R] = A'$  il existe une unique  $\Gamma$  diagonale constante telle que  $FM^{(0)} = M'^{(0)}\Gamma$ . De plus comme  $FM^{(\infty)}[S_{ux^2}] = A'$  il existe une unique  $\Delta$  diagonale constante telle que  $FM^{(\infty)} = M'^{(\infty)}\Delta$ .

On en déduit :

$$\begin{aligned}
M' &= (M^{(0)'})^{-1} M^{(\infty)'} \\
&= (FM^{(0)}\Gamma^{-1})^{-1} FM^{(\infty)}\Delta^{-1} \\
&= \Gamma(M^{(0)})^{-1} M^{(\infty)}\Delta^{-1} \\
&= \Gamma M\Delta^{-1}.
\end{aligned}$$

Nous venons donc de créer une flèche

$$RHB_{R,S_0,\underline{x}} : E_{R,S_0,\underline{x}}/\sim \longrightarrow F_{R,S_0,\underline{x}}/\sim.$$

Nous allons maintenant en prouver la bijectivité.

### 2.2.1 Injectivité

Soient  $A, B \in E_{R,S_0,\underline{x}}$  de matrices de connexion respectives  $M = (M^{(0)})^{-1}M^{(\infty)}$  et  $N = (N^{(0)})^{-1}N^{(\infty)}$ . On suppose de plus que  $N = \Gamma M\Delta^{-1}$  où  $\Gamma, \Delta$  sont des matrices diagonales constantes inversibles. On veut montrer qu'il existe  $F \in GL_2(\mathbb{C}(z))$  telle que  $F[A] = B$ .

On a alors  $N^{(0)}\Gamma(M^{(0)})^{-1} = N^{(\infty)}\Delta(M^{(\infty)})^{-1}$ . Notons  $F$  cette matrice, elle vérifie  $F[A] = B$ . Comme  $N^{(0)}\Gamma(M^{(0)})^{-1}$  est méromorphe sur  $\mathbb{C}$  et  $N^{(\infty)}\Delta(M^{(\infty)})^{-1}$  l'est sur  $\mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$   $F$  est méromorphe sur la sphère de Riemann et donc  $F \in GL_2(\mathbb{C}(z))$ , *i.e.*  $A$  et  $B$  sont rationnellement équivalentes.

### 2.2.2 Surjectivité

Soient  $M \in F_{R,S_0,\underline{x}}$  et  $u \in \mathbb{C}$  tel que  $M[S_{ux^2}] = R$ .

On rappelle le théorème de factorisation de Birkhoff (provenant de [Bir13]; la version utilisée ici en est un corollaire explicité dans [ORS15]) :

**Théorème 2.2.1.** *Soit  $M \in GL_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}^*)) \cap M_n(\mathcal{O}(\mathbb{C}^*))$  de lieu singulier  $\Sigma = \det^{-1}(0)$ . Supposons de plus que  $\det M$  n'ait que des zéros d'ordre 1. Soit  $\mathcal{C}$  une courbe analytique fermée simple sur la sphère de Riemann  $\mathbb{S}$  séparant 0 de  $\infty$  de composantes connexes  $D_0 \ni 0, D_\infty \ni \infty$  et ne rencontrant pas  $\Sigma$ . Posons  $\Sigma_0 := \Sigma \cap D_0, \Sigma_\infty := \Sigma \cap D_\infty$ . Alors il existe une factorisation  $M = M_0^{-1}M_\infty$  sur  $\mathbb{C}^*$  telle que :*

1.  $M_0$  soit régulière (holomorphe d'inverse holomorphe) sur  $\mathbb{C} \setminus \Sigma_\infty$ ,  $M_0^{-1}$  soit holomorphe sur  $\mathbb{C}$  et  $\det M_0^{-1}$  ait des zéros simples sur  $\Sigma_\infty$ .
2.  $M_\infty$  soit régulière sur  $\mathbb{C}^* \setminus \Sigma_0$ , holomorphe sur  $\mathbb{S} \setminus \{0\}$  et  $\det M_\infty$  ait des zéros simples sur  $\Sigma_0$ .

On prend alors une courbe  $\mathcal{C}$  séparant  $\underline{x}$  de  $q\underline{x}$  donc telle que  $\Sigma_0 = q^{\mathbb{N}^*}\underline{x}$ ,  $\Sigma_\infty = q^{-\mathbb{N}}\underline{x}$ .

On applique alors le théorème de factorisation et on obtient  $M = M_0^{-1}M_\infty$  avec :

1.  $M_0$  régulière sur  $\mathbb{C} \setminus q^{-\mathbb{N}}\underline{x}$ ,  $M_0^{-1}$  holomorphe sur  $\mathbb{C}$  et  $\det M_0^{-1}$  a des zéros simples sur  $q^{-\mathbb{N}}\underline{x}$ .
2.  $M_\infty$  régulière sur  $\mathbb{C}^* \setminus q^{\mathbb{N}^*}\underline{x}$  et  $\det M_\infty$  a des zéros simples sur  $q^{\mathbb{N}^*}\underline{x}$ .
3.  $M_\infty$  est méromorphe en  $\infty$ .

Comme  $M[S_{ux^2}] = R$  on a  $\sigma_q(M_\infty)S_{ux^2}M_\infty^{-1} = \sigma_q(M_0)RM_0^{-1}$  soit  $M_\infty[S_{ux^2}] = M_0[R]$ , appelons  $A$  la matrice  $\sigma_q(M_0)RM_0^{-1}$ .

L'équation  $A = \sigma_q(M_0)RM_0^{-1}$  nous permet de dire que  $A$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}$  tandis que l'équation  $A = \sigma_q(M_\infty)S_{ux^2}M_\infty^{-1}$  nous donne la méromorphie de  $A$  en  $\infty$ .  $A$  est donc un polynôme  $A = A_0 + \dots + A_d x^d$  où, en posant  $C := M_0(0) \in GL_2(\mathbb{C})$ ,  $A_0 = CRC^{-1}$ .

De plus la définition de  $A$  nous dit que  $\det A$  a des zéros simples en  $\underline{x}$  et ici uniquement, ce qui nous assure que  $2d \geq 3$  *i.e.*  $d \geq 2$ .

Notons maintenant  $a := \det(A)$ ; comme  $\det A$  ne s'annule qu'en les  $x_i$  on a  $a(x) = \Delta \cdot (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ . Comme  $a(0) = \det R = \rho_1 \rho_2$  et par la relation de Fuchs on a  $\Delta = \sigma_1 \sigma_2$ .

Notons de plus  $f := \det M_\infty$ . La définition de  $A$  nous donne  $\frac{\sigma_q(\det f)}{\det f} = (1 - \frac{x_1}{x})(1 - \frac{x_2}{x})(1 - \frac{x_3}{x})$ . On a alors

$$f = g \cdot \prod_{n \geq 1} (1 - q^n \frac{x_1}{x})(1 - q^n \frac{x_2}{x})(1 - q^n \frac{x_3}{x})$$

où  $g$  est un facteur elliptique ( $g(qx) = g(x)$ ). Comme  $f$  est méromorphe en  $\infty$   $g$  est constante, soit  $f(\infty) = k \in \mathbb{C}^*$  ce qui implique que  $M_\infty$  est régulière en  $\infty$ , *i.e.*  $M_\infty(\infty) = D \in GL_2(\mathbb{C})$ .

Alors en l'infini  $A = \sigma_q(M_\infty)S_{ux^2}M_\infty^{-1} \underset{\infty}{\sim} DS_{ux^2}D^{-1}$  qui est un polynôme de degré 2, et donc  $d = 2$  et  $A_d = A_2 = D \begin{pmatrix} \sigma_1 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix} D^{-1}$  est bien conjuguée à  $\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ; notre application est surjective.

## 2.3 Variations des données locales

Nous allons maintenant nous intéresser aux relations entre les matrices  $A$  vérifiant les conditions de  $q$ - $P_V$  et les matrices de connexion  $M$  quand les données locales  $R, S_0, \underline{x}$  ne sont pas fixées. Plus précisément nous avons des espaces  $F_{R, S_0, \underline{x}}$ , en bijection avec des espaces  $E_{R, S_0, \underline{x}}$ , qui dépendent de paramètres  $R, S_0, \underline{x}$  qui sont nos données locales. Nous allons tout d'abord voir comment les liens entre les  $E_{R, S_0, \underline{x}}$  induisent des liens entre les  $F_{R, S_0, \underline{x}}$  (et réciproquement), avant de fibrer l'union (disjointe) des  $F_{R, S_0, \underline{x}}$  sur l'espace des données locales. Enfin les liens entre

espaces que nous auront mis en lumière vont permettre de construire une action sur notre fibration.

### 2.3.1 "Fonctorialité" de $RHB$

Soient  $A$  vérifiant les conditions de  $q\text{-P}_V$  pour des données  $R = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix}$ ,  $S_0 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$ ,  $\underline{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $M = (M^{(0)})^{-1}M^{(\infty)}$  sa matrice de connexion et  $u \in \mathbb{C}$  tel que  $M^{(\infty)}[S_{ux^2}] = A$ , et  $B$  vérifiant les conditions de  $q\text{-P}_V$  pour des données  $R' = \begin{pmatrix} \rho'_1 & 0 \\ 0 & \rho'_2 \end{pmatrix}$ ,  $S'_0 = \begin{pmatrix} \sigma'_1 & 0 \\ 0 & \sigma'_2 \end{pmatrix}$ ,  $\underline{x}' = \{x'_1, x'_2, x'_3\}$ ,  $N = (N^{(0)})^{-1}N^{(\infty)}$  sa matrice de connexion et  $u' \in \mathbb{C}$  tel que  $N^{(\infty)}[S'_{u'x^2}] = B$ , où

$$S_{ux^2} := \begin{pmatrix} \sigma_1 x^2 & ux^2 \\ 0 & \sigma_2 x \end{pmatrix}, S'_{u'x^2} := \begin{pmatrix} \sigma'_1 x^2 & u'x^2 \\ 0 & \sigma'_2 x \end{pmatrix}.$$

Nous allons regarder dans cette partie à quelle(s) condition(s) le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & M & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ R & \xrightarrow{M^{(0)}} & A & \xleftarrow{M^{(\infty)}} & S_{ux^2} \\ \Gamma \downarrow & & F \downarrow & & \Delta \downarrow \\ R' & \xrightarrow{N^{(0)}} & B & \xleftarrow{N^{(\infty)}} & S'_{u'x^2} \\ & \swarrow & N & \searrow & \end{array}$$

est rempli et commutatif, c'est-à-dire quelles conditions sur les données locales de  $A$  et  $B$  nous permettent de construire  $\Gamma$  et  $\Delta$  (et quelles sont leurs formes) à partir d'un  $F \in GL_2(\mathbb{C}(z))$  tel que  $F[A] = B$ , et réciproquement quelles conditions nous permettent de construire un tel  $F$  à partir de tels  $\Gamma, \Delta$ .

#### À $F$ donné

Supposons tout d'abord qu'il existe  $F \in GL_2(\mathbb{C}(z))$  tel que  $F[A] = B$ . Posons  $\Gamma := M^{(0)}F(N^{(0)})^{-1}$  et  $\Delta := M^{(\infty)}F(N^{(\infty)})^{-1}$ . On a alors  $\Gamma[R] = R'$  qui implique que

– soit  $\rho'_1 = q^{i_0} \rho_1$ ,  $\rho'_2 = q^{j_0} \rho_2$  et

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_0 x^{i_0} & 0 \\ 0 & b_0 x^{j_0} \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

– soit  $\rho'_1 = q^{i_0} \rho_2$ ,  $\rho'_2 = q^{j_0} \rho_1$  et

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & a_0 x^{i_0} \\ b_0 x^{j_0} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

De plus on a  $\Delta[S_{ux^2}] = S'_{u'x^2}$  qui implique que  $\sigma'_1 = q^{i_\infty} \sigma_1$  et  $\sigma'_2 = q^{j_\infty} \sigma_2$ ; on a alors

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_\infty x^{i_\infty} & f \\ 0 & b_\infty x^{j_\infty} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

où  $f \in \mathbb{C}(\{\frac{1}{x}\})$  est uniquement déterminée par  $u, u'$ , les données locales et  $a_\infty, i_\infty, b_\infty, j_\infty$ . Dans ce cas on a

$$u' = q^{\frac{i_\infty^2 + 5i_\infty - j_\infty^2 - 3j_\infty}{2}} \frac{a_\infty}{b_\infty} \left( \frac{\sigma'_1}{\sigma_2} \right)^{i_\infty - j_\infty} u.$$

Enfin regardons  $F = N^{(0)} \Gamma (M^{(0)})^{-1} = N^{(\infty)} \Delta (M^{(\infty)})^{-1}$ . Rappelons que sur  $\mathbb{C}^*$ ,  $\det(M^{(0)})^{-1} = 0$  sur les demi- $q$ -spirales  $x_j q^{-\mathbb{N}}$ ,  $\Gamma$  n'a ni pôles ni zéros et  $\det N^{(0)}$  a des pôles simples sur les  $x'_j q^{-\mathbb{N}}$ , donc

$$\operatorname{div}_{\mathbb{C}^*}(\det F) = \sum_{j=1}^3 \sum_{i \in \mathbb{N}} \left( [x_j q^{-i}] - [x'_j q^{-i}] \right).$$

De plus, sur  $\mathbb{C}^*$ ,  $\det N^{(\infty)} = 0$  sur les demi- $q$ -spirales  $x'_j q^{\mathbb{N}^*}$ ,  $\Delta$  n'a ni pôles ni zéros et  $\det(M^{(\infty)})^{-1}$  a des pôles simples sur les  $x_j q^{\mathbb{N}^*}$ , donc

$$\operatorname{div}_{\mathbb{C}^*}(\det F) = \sum_{j=1}^3 \sum_{i \in \mathbb{N}^*} \left( [x'_j q^i] - [x_j q^i] \right).$$

Comme  $\det F \in \mathbb{C}(z)^*$ ,  $\det F$  n'a qu'un nombre fini de pôles et de zéros et donc, quitte à réorganiser les  $x'_j$ , il existe des  $n_j \in \mathbb{Z}$  tels que  $x'_j = q^{n_j} x_j$ .

Nous obtenons donc deux jeux de conditions sur  $R', S'_0, \underline{x}'$  impliqués par l'existence d'un  $F \in GL_2(\mathbb{C}(z))$  tel que  $F[A] = B$ ; les voici résumés.

Soit nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} R' = \begin{pmatrix} q^{i_0} \rho_1 & 0 \\ 0 & q^{j_0} \rho_2 \end{pmatrix}, \\ S'_0 = \begin{pmatrix} q^{i_\infty} \sigma_1 & 0 \\ 0 & q^{j_\infty} \sigma_2 \end{pmatrix}, \\ \{x'_1, x'_2, x'_3\} = \{q^{n_1} x_1, q^{n_2} x_2, q^{n_3} x_3\}, \end{array} \right. \quad (2.7)$$

et dans ce cas nous avons notre diagramme avec les conditions (2.4) et (2.6) sur  $\Gamma$  et  $\Delta$ , et donc sur nos matrices de connexions  $N = \Gamma M \Delta^{-1}$ ; soit nous avons

$$\begin{cases} R' = \begin{pmatrix} q^{i_0} \rho_2 & 0 \\ 0 & q^{j_0} \rho_1 \end{pmatrix}, \\ S'_0 = \begin{pmatrix} q^{i_\infty} \sigma_1 & 0 \\ 0 & q^{j_\infty} \sigma_2 \end{pmatrix}, \\ \{x'_1, x'_2, x'_3\} = \{q^{n_1} x_1, q^{n_2} x_2, q^{n_3} x_3\}, \end{cases} \quad (2.8)$$

et dans ce cas nous avons notre diagramme avec les conditions (2.5) et (2.6) sur  $\Gamma$  et  $\Delta$ , et donc sur nos matrices de connexions  $N = \Gamma M \Delta^{-1}$ .

### À $\Gamma, \Delta$ données

Supposons maintenant qu'il existe  $\Gamma, \Delta$  sous les formes précédentes ((2.4) et (2.6) ou (2.5) et (2.6)) telles que  $\Gamma[R] = R', \Delta[S_{ux^2}] = S'_{u'x^2}$  et  $N = \Gamma M \Delta^{-1}$ . On veut remplir le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & M & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ R & \xrightarrow{M^{(0)}} & A & \xleftarrow{M^{(\infty)}} & S_{ux^2} \\ & \downarrow \Gamma & \vdots F & \downarrow \Delta & \\ R' & \xrightarrow{N^{(0)}} & B & \xleftarrow{N^{(\infty)}} & S'_{u'x^2} \\ & \swarrow & & \searrow & \\ & & N & & \end{array}$$

de manière à ce qu'il soit commutatif. On a  $N = \Gamma M \Delta^{-1}$ , ce qui nous permet de dire que

$$\begin{aligned} N^{(0)} \Gamma (M^{(0)})^{-1} &= N^{(0)} N \Delta M^{-1} (M^{(0)})^{-1} \\ &= N^{(0)} (N^{(0)})^{-1} N^{(\infty)} \Delta (M^{(\infty)})^{-1} M^{(0)} (M^{(0)})^{-1} \\ &= N^{(\infty)} \Delta (M^{(\infty)})^{-1}. \end{aligned}$$

On peut donc poser  $F = N^{(0)} \Gamma (M^{(0)})^{-1} = N^{(\infty)} \Delta (M^{(\infty)})^{-1}$ ; il reste à voir si  $F \in GL_2(\mathbb{C}(z))$ .  $N^{(0)} \Gamma (M^{(0)})^{-1}$  est méromorphe en 0,  $N^{(\infty)} \Delta (M^{(\infty)})^{-1}$  l'est en  $\infty$ , il faut donc voir si  $F$  est définie et méromorphe sur tout  $\mathbb{C}^*$ . La condition du paragraphe précédent

$$\operatorname{div}_{\mathbb{C}^*}(\det F) = \sum_{j=1}^3 \sum_{i \in \mathbb{N}} ([x_j q^{-i}] - [x'_j q^{-i}]) = \sum_{j=1}^3 \sum_{i \in \mathbb{N}^*} ([x'_j q^i] - [x_j q^i])$$

nous force à imposer l'existence de  $n_j \in \mathbb{Z}$  tels que  $x'_j = q^{n_j} x_j$ .

On a donc sous les conditions (2.7) ou (2.8) sur les  $R, R', S_0, S'_0, \underline{x}, \underline{x}'$  un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 A & & E_{R,S_0,\underline{x}} & \xrightarrow{\sim} & F_{R,S_0,\underline{x}} & & M \\
 \downarrow & & \downarrow F & & \downarrow (\Gamma,\Delta) & & \downarrow \\
 F[A] & & E_{R',S'_0,\underline{x}'} & \xrightarrow{\sim} & F_{R',S'_0,\underline{x}'} & & \Gamma M \Delta^{-1}.
 \end{array}$$

### 2.3.2 Fibration au dessus des données locales

Nous allons dans cette partie arriver à une fibration des espaces  $F_{R,S_0,\underline{x}}$  au dessus de l'espace des données locales. Pour cela nous allons tout d'abord fibrer les espaces

$$V_{R,S_0} := \{M \in M_2(\mathcal{O}(\mathbb{C}^*)) \mid \exists u \in \mathbb{C}, \sigma_q M = R M S_{u x^2}^{-1}\}.$$

Une matrice  $M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix} \in V_{R,S_0}$  a ses coefficients qui vérifient les équations

$$\begin{cases}
 \sigma_q m_1 = \frac{\rho_1}{\sigma_1} x^{-2} m_1 \\
 \sigma_q m_2 = \frac{\rho_1}{\sigma_2} x^{-1} m_2 - \frac{u}{\sigma_2} x \sigma_q m_1 \\
 \sigma_q m_3 = \frac{\rho_2}{\sigma_1} x^{-2} m_3 \\
 \sigma_q m_4 = \frac{\rho_2}{\sigma_2} x^{-1} m_4 - \frac{u}{\sigma_2} x \sigma_q m_3.
 \end{cases}$$

Elle est donc uniquement déterminée par les complexes

$$(u, [m_1]_0, [m_1]_1, [m_2]_0, [m_3]_0, [m_3]_1, [m_4]_0)$$

où  $m_i = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [m_i]_n x^n$ .  $V_{R,S_0}$  est donc un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 7.

Les données  $R, S_0$  quant à elles sont uniquement déterminées par deux couples de complexes non nuls  $(\rho_1, \rho_2)$  et  $(\sigma_1, \sigma_2)$  tels que  $\bar{\rho}_1 \neq \bar{\rho}_2$  et  $\bar{\sigma}_1 \neq \bar{\sigma}_2$ ; on peut donc les voir comme des éléments de  $((\mathbb{C}^*)^2 \setminus \pi^{-1}(\Delta_{E_q})) \times ((\mathbb{C}^*)^2 \setminus \pi^{-1}(\Delta_{E_q}))$  où  $\pi : \mathbb{C}^* \rightarrow E_q$  est la projection usuelle et  $\Delta_{E_q} := \{(\alpha, \beta) \in E_q \times E_q \mid \alpha = \beta\}$  est la diagonale de  $E_q \times E_q$ .

On peut donc fibrer (de manière triviale) l'union des  $V_{R,S_0}$  sur l'ensemble des données  $R, S_0$ ; nous obtenons alors un fibré vectoriel trivial de rang 7.

$$\begin{array}{ccc}
 V := \prod_{(R,S_0)} V_{R,S_0} & \xrightarrow{\sim} & \left( ((\mathbb{C}^*)^2 \setminus \pi^{-1}(\Delta_{E_q})) \times ((\mathbb{C}^*)^2 \setminus \pi^{-1}(\Delta_{E_q})) \right) \times \mathbb{C}^7 \\
 \downarrow & & \downarrow pr_1 \\
 B := \{R, S_0 \mid \dots\} = \mathbb{D}_2 \times \mathbb{D}_2 & \xrightarrow{\sim} & \left( (\mathbb{C}^*)^2 \setminus \pi^{-1}(\Delta_{E_q}) \right) \times \left( (\mathbb{C}^*)^2 \setminus \pi^{-1}(\Delta_{E_q}) \right)
 \end{array}$$

où  $\mathbb{D}_2 = \{M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}) \mid \overline{\lambda_1} \neq \overline{\lambda_2}\}$ .

Regardons maintenant ce que cela donne si l'on enlève de ce fibré les matrices  $M$  non inversibles. Tout d'abord regardons l'espace

$$W_c := \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^*) \mid \sigma_q(f) = cx^{-3}f\}.$$

C'est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 3 (c'est le lemme 1.1.4 dans le cas  $|q| < 1$ ), et, comme ci-dessus, on peut mettre une structure de fibré vectoriel trivialisable sur  $\coprod_c W_c$  au dessus de  $\mathbb{C}^*$  :

$$\begin{array}{ccc} W := \coprod_c W_c & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^3 \\ & \searrow & \swarrow \text{pr}_1 \\ & \mathbb{C}^* & \end{array}$$

On peut alors regarder les applications

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ (R, S_0) & \longmapsto & \frac{\det R}{\det S_0} = \frac{\rho_1 \rho_2}{\sigma_1 \sigma_2} \end{array}$$

et

$$p : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & W \\ (R, S_0, M) & \longmapsto & \left( \frac{\det R}{\det S_0}, \det M \right). \end{array}$$

On a alors un diagramme commutatif (qui représente un morphisme de fibrés vectoriels)

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{p} & W \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ B & \longrightarrow & \mathbb{C}^*. \end{array}$$

Définissons maintenant  $W^* := W \setminus \{(c, 0) \in W\} = \coprod_c (W_c \setminus \{0\})$ , qui se fibre toujours sur  $\mathbb{C}^*$  (mais n'est plus vectoriel). On peut alors définir  $V^* := p^{-1}(W^*)$  qui nous donne une *fibration*  $V^* \rightarrow B$  et on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} V^* & \xrightarrow{p|} & W^* \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ B & \longrightarrow & \mathbb{C}^*. \end{array}$$

Une fibre  $V_{R,S_0}^*$  au dessus de  $(R, S_0) \in B$  est donc l'ensemble des matrices  $M \in V_{R,S_0}$  inversibles.



*Remarque 2.3.1.* On différencie *fibration* et *fibré* puisque à partir de maintenant nos fibrations ne seront plus forcément localement trivialisable (ce qui est requis dans la définition de fibré).

Il nous reste à regarder les sous-espaces des  $V_{R,S_0}^*$  des matrices  $M$  dont les zéros de  $\det M$  sont sur trois  $q$ -spirales  $x_i q^{\mathbb{Z}}$  fixées. Regardons les conditions impliquées par ceci. Tout d'abord  $\det M$  vérifie l'équation

$$\sigma_q(\det M) = \frac{\det R}{\det S_0} x^{-3} \det M =: c x^{-3} \det M$$

(c'est pour cela que l'on a ainsi défini  $W$ ; plus exactement c'est ce qui fait de  $p$  un morphisme de fibrés). Supposons que  $\operatorname{div}_{E_q} \det M = [\bar{x}_1] + [\bar{x}_2] + [\bar{x}_3]$ ,  $x_i \in \mathbb{C}^*$ . Posons  $g := \frac{\det M}{\Theta_{q,-x_1} \Theta_{q,-x_2} \Theta_{q,-x_3}}$ . Alors  $g$  vérifie l'équation

$$\sigma_q g = \frac{c}{-x_1 x_2 x_3} g.$$

De plus

$$\operatorname{div}_{E_q} g = \operatorname{div}_{E_q} \det M - \sum_{j=1}^3 \operatorname{div}_{E_q} \Theta_{q,-x_j} = 0$$

donc  $g$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}^*$  et ne s'annule jamais, ce qui implique nécessairement que  $\frac{c}{-x_1 x_2 x_3} \in q^{\mathbb{Z}}$ , *i.e.* il existe  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $-x_1 x_2 x_3 = q^n \frac{\rho_1 \rho_2}{\sigma_1 \sigma_2}$ , qui est la condition de Fuchs pour un bon choix des  $x_i$ .

Maintenant définissons les espaces

$$\operatorname{Div}_3(E_q) := \{\text{Diviseurs } [\bar{x}_1] + [\bar{x}_2] + [\bar{x}_3] \mid x_i \in \mathbb{C}^*\}$$

et

$$\operatorname{Div}_3^*(E_q) := \{\text{Diviseurs } [\bar{x}_1] + [\bar{x}_2] + [\bar{x}_3] \mid x_i \in \mathbb{C}^*, \bar{x}_i \neq \bar{x}_j, i \neq j\}.$$

On a une application

$$\begin{aligned} p' : \quad W^* &\longrightarrow \operatorname{Div}_3(E_q) \\ (c, f) &\longmapsto \operatorname{div}_{E_q} f \end{aligned}$$

surjective (en prenant  $c = -x_1 x_2 x_3$  et  $f = \prod_{i=1}^3 \Theta_{q,-x_i}$  pour un choix de représentants) et une application

$$\begin{aligned} \operatorname{Div}_3(E_q) &\longrightarrow E_q \\ [\bar{x}_1] + [\bar{x}_2] + [\bar{x}_3] &\longmapsto -\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \end{aligned}$$

qui rendent commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} V^* & \xrightarrow{p_1} & W^* & \xrightarrow{p'} & \operatorname{Div}_3(E_q) \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ B & \longrightarrow & \mathbb{C}^* & \xrightarrow{\pi} & E_q. \end{array}$$

On regarde alors  $\bar{W}^* = (p')^{-1}(\text{Div}_3^*(E_q))$  et  $\bar{V}^* = p_1^{-1}(\bar{W}^*)$ , on a alors le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \bar{V}^* & \xrightarrow{\bar{p}_1} & \bar{W}^* & \xrightarrow{p'} & \text{Div}_3^*(E_q) \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ B & \longrightarrow & \mathbb{C}^* & \xrightarrow{\pi} & E_q. \end{array}$$

On peut contracter ce diagramme en

$$\begin{array}{ccc} \bar{V}^* & \xrightarrow{p' \circ \bar{p}_1} & \text{Div}_3^*(E_q) \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ B & \longrightarrow & E_q \end{array}$$

ce qui nous donne une flèche

$$\begin{array}{c} \bar{V}^* \\ \downarrow \bar{p} \\ B \times_{E_q} \text{Div}_3^*(E_q) \end{array}$$

qui est notre fibration, *i.e.*

$$\begin{aligned} \bar{p}^{-1}(R, S_0, [\bar{x}_1] + [\bar{x}_2] + [\bar{x}_3]) &= \{M \in V_{R, S_0}^* \mid \text{div}_{E_q} \det M = [\bar{x}_1] + [\bar{x}_2] + [\bar{x}_3]\} \\ &= F_{R, S_0, x}. \end{aligned}$$

### 2.3.3 Action sur la fibration

Nous allons maintenant représenter sur notre fibration l'action des matrices  $\Gamma, \Delta$  définies en 2.3.1. Pour cela rappelons qu'il suffit pour définir une matrice  $\Gamma$  de 5 éléments :  $(a_0, i_0, b_0, j_0, s) \in (\mathbb{C}^* \times q^{\mathbb{Z}})^2 \times \mathcal{S}_2$ , et de 4 éléments pour définir  $\Delta$  :  $(a_\infty, i_\infty, b_\infty, j_\infty) \in (\mathbb{C}^* \times q^{\mathbb{Z}})^2$ . Définissons le groupe

$$G_1 := (\mathbb{C}^* \times q^{\mathbb{Z}})^2 \rtimes \mathcal{S}_2$$

muni du produit

$$(a_0, i_0, b_0, j_0, s) \cdot (a'_0, i'_0, b'_0, j'_0, s') := \begin{cases} (a_0 a'_0, i_0 + i'_0, b_0 b'_0, j_0 + j'_0, s') & \text{si } s = id \\ (a_0 b'_0, i_0 + j'_0, b_0 a'_0, j_0 + i'_0, (12)s') & \text{si } s = (12) \end{cases}$$

(c'est le produit  $(t, s) \cdot (t', s') = (t \cdot s(t'), ss')$  pour  $t \in (\mathbb{C}^* \times q^{\mathbb{Z}})^2$ ). Nous avons alors une action du groupe  $G := G_1 \times (\mathbb{C}^* \times q^{\mathbb{Z}})^2 =: G_1 \times G_2$  sur  $B$  définie par

$$(a_0, i_0, b_0, j_0, s, a_\infty, i_\infty, b_\infty, j_\infty) \cdot (\rho_1, \rho_2, \sigma_1, \sigma_2) := (q^{i_0} \rho_{s(1)}, q^{j_0} \rho_{s(2)}, q^{i_\infty} \sigma_1, q^{j_\infty} \sigma_2).$$

Nous pouvons aussi définir l'action triviale de  $G$  sur  $\text{Div}_3^*(E_q)$  (puisque l'action des  $\Gamma, \Delta$  sur une matrice  $M$  ne change pas le diviseur de  $\det M$ ). Comme notre action sur  $B$  est telle que, pour  $g = (g_1, g_2) \in G = G_1 \times G_2$  et  $(R, S_0) \in B$ ,  $\left(\frac{\det(g_1.R)}{\det(g_2.S_0)}\right) = \left(\frac{\det R}{\det S_0}\right)$ , nous obtenons une action de  $G$  sur  $B \times_{E_q} \text{Div}_3^*(E_q)$  définie par

$$(g_1, g_2).(R, S_0, [\bar{x}_1] + [\bar{x}_2] + [\bar{x}_3]) = (g_1.R, g_2.S_0, [\bar{x}_1] + [\bar{x}_2] + [\bar{x}_3]).$$

Nous pouvons alors relever l'action sur  $\bar{V}^*$  de la manière suivante : soit

$$(a_0, i_0, b_0, j_0, s, a_\infty, i_\infty, b_\infty, j_\infty) \in G$$

et soit  $M \in \bar{V}^*$ . On définit les matrices

$$\Gamma_M := \begin{pmatrix} a_0 x^{i_0} & 0 \\ 0 & b_0 x^{j_0} \end{pmatrix} P_s, \Delta_M := \begin{pmatrix} a_\infty x^{i_\infty} & f_M \\ 0 & b_\infty x^{j_\infty} \end{pmatrix}$$

où  $P_s$  est la matrice de permutation associée à  $s$  et  $f_M \in \mathbb{C}(\{\frac{1}{x}\})$  est telle que, si  $\sigma_q M = R M S_{ux^2}^{-1}$ , alors  $\Delta_M[S_{ux^2}] = S'_{u'x^2}$  avec

$$u' = q^{\frac{i_\infty^2 + 5i_\infty - j_\infty^2 - 3j_\infty}{2}} \frac{a_\infty}{b_\infty} \begin{pmatrix} q^{i_\infty} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}^{i_\infty - j_\infty} u.$$

On remarquera que  $\Gamma_M$  ne dépend en fait pas de  $M$ . Alors l'action de  $G$  sur  $\bar{V}^*$  est définie comme suit :

$$(a_0, i_0, b_0, j_0, s, a_\infty, i_\infty, b_\infty, j_\infty).M := \Gamma_M M \Delta_M^{-1}.$$

C'est une action définie sur  $V$  tout entier, mais les efforts faits en 2.3.1 nous assurent qu'elle peut être restreinte à  $\bar{V}^*$ . On notera que la restriction de l'action au groupe  $(\{1\} \times q^{\mathbb{Z}})^2 \rtimes \mathcal{S}_2 \times (\{1\} \times q^{\mathbb{Z}})^2$  agit sur la base et envoie des éléments d'une fibre sur une autre, tandis que l'action de  $((\mathbb{C}^* \times \{\bar{1}\})^2 \rtimes \{id\}) \times (\mathbb{C}^* \times q^{\mathbb{Z}})^2$  agit directement sur les fibres sans avoir d'effet sur la base. Nous retrouverons (et expliciterons plus en détail) ce genre d'actions dans le chapitre 3, mais dans le cadre des fibrés vectoriels.

## 2.4 Autres systèmes de la liste de Murata

Nous allons maintenant construire de manière rapide et similaire des matrices de connexion et des équivalences de Riemann-Hilbert-Birkhoff pour deux autres systèmes de la liste de Murata [Mur09].

### 2.4.1 $q$ -P( $A_5$ )

Les conditions de  $q$ -P( $A_5$ ) sont les suivantes :

Soit

$$A(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 \quad (2.9)$$

où

$$A_0 \sim \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: R, \quad \rho_1 \neq 0,$$

$$A_2 \sim \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: S, \quad \sigma_1 \neq 0,$$

et où

$$\det A(x) = \sigma_1\sigma_2x(x-x_1)(x-x_2), \quad (2.10)$$

$$\sigma_2, x_1, x_2 \neq 0, \quad \frac{x_1}{x_2} \notin q^{\mathbb{Z}} \quad i \neq j, \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \notin q^{\mathbb{Z}}.$$

Posons alors

$$\rho_2 := \frac{\sigma_1\sigma_2}{\rho_1}x_1x_2$$

et supposons que  $\frac{\rho_1}{\rho_2} \notin q^{\mathbb{Z}}$ . On appellera *relation de Fuchs* la relation  $\frac{\rho_1\rho_2}{\sigma_1\sigma_2} = x_1x_2$ .

*Remarque 2.4.1.* Tout comme pour le cas précédent la perte du caractère fuchsien en  $\infty$  rend peut-être la non-résonance de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  obsolète; de plus le fait que  $q$ -P( $A_5$ ) ne soit pas non plus fuchsien en zéro pose la même question sur l'hypothèse de non-résonance de  $\rho_1$  et  $\rho_2$ .

#### Matrice de connexion

Par les mêmes arguments que dans la partie 2.1.2 nous pouvons créer deux matrices  $M^{(0)}, M^{(\infty)}$  telle que  $M^{(0)}[R_{u_0}] = A = M^{(\infty)}[S_{u_\infty x^2}]$ , où  $u_0, u_\infty \in \mathbb{C}$ ,

$$R_{u_0} := \begin{pmatrix} \rho_1 & u_0 \\ 0 & \rho_2 x \end{pmatrix}, \quad S_{u_\infty x^2} := \begin{pmatrix} \sigma_1 x^2 & u_\infty x^2 \\ 0 & \sigma_2 x \end{pmatrix}.$$

Plus exactement posons  $C, K \in GL_2(\mathbb{C})$  telles que  $A_0 = CRC^{-1}, A_2 = KSK^{-1}$ . Alors on a la proposition suivante :

**Proposition 2.4.2.** 1. Il existe une matrice  $F_0 \in GL_2(\mathbb{C}\{x\})$  analytique sur  $\mathbb{C}^*$ , vérifiant  $F_0(0) = C$  et  $\sigma_q(\det F) = (1 - \frac{x}{x_1})(1 - \frac{x}{x_2}) \det F$ , et  $v_0 \in \mathbb{C}(\{x\})$  tels que  $A = F_0[R_{v_0}]$ .

2. Il existe  $u_0 \in \mathbb{C}$  et  $f_0 \in \mathbb{C}(\{x\})$  tels que, notant  $M^{(0)} := F_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & f_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , on ait  $A = M^{(0)}[R_{u_0}]$ . De plus  $M^{(0)}$  est méromorphe sur  $\mathbb{C}^*$ ,  $\det M^{(0)}$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{C}^*$  et a ses pôles (simples) sur  $x_1q^{-\mathbb{N}}$  et  $x_2q^{-\mathbb{N}}$ .

3. Il existe une matrice  $F_\infty \in GL_2(\mathbb{C}\{\frac{1}{x}\})$ , de terme constant  $K$ , analytique sur  $\mathbb{C}^*$  et vérifiant  $\sigma_q(\det F) = (1 - \frac{x_1}{x})(1 - \frac{x_2}{x}) \det F$ , et  $v_\infty \in \mathbb{C}(\{\frac{1}{x}\})$  tels que  $A = F_\infty[S_{v_\infty}]$ .
4. Il existe  $u_\infty \in \mathbb{C}$  et  $f_\infty \in \mathbb{C}(\{\frac{1}{x}\})$  tels que, notant  $M^{(\infty)} := F_\infty \cdot \begin{pmatrix} 1 & f_\infty \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , on ait  $A = M^{(\infty)}[S_{u_\infty x^2}]$ . De plus  $\det M^{(\infty)}$  est analytique sur  $\mathbb{C}^*$  et a ses zéros (simples) sur  $x_1 q^{\mathbb{N}^*}$  et  $x_2 q^{\mathbb{N}^*}$ .

*Démonstration.* La preuve est entièrement similaire à celles de la partie 2.1.2 (ou à leurs homologues de A.2); on obtient juste

$$\frac{\sigma_q \det F_0}{\det F_0} = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\rho_1 \rho_2} (x - x_1)(x - x_2) = (1 - \frac{x}{x_1})(1 - \frac{x}{x_2})$$

et

$$\frac{\sigma_q \det F_\infty}{\det F_\infty} = (1 - \frac{x_1}{x})(1 - \frac{x_2}{x})$$

ce qui permet de conclure comme il faut.  $\square$

On a aussi les correspondances

- Proposition 2.4.3.** 1. Supposons  $u_0 \neq 0$ . Soient  $M \in GL_2(\mathbb{C}(\{x\}))$  et  $u'_0 \in \mathbb{C}^*$ . Alors  $M[R_{u'_0}] = A$  si et seulement s'il existe une matrice  $\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}$  avec  $\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{u'_0}{u_0}$  telle que  $M = M^{(0)}\Gamma$ . De plus pour tout  $u'_0 \in \mathbb{C}^*$  il existe un tel  $M$ .
2. Si par contre  $u_0 = 0$  alors  $M[R_{u'_0}] = A$  si et seulement si  $u'_0 = 0$  et  $M = M^{(0)}\Gamma$  avec  $\Gamma$  diagonale constante.
3. Supposons  $u_\infty \neq 0$ . Soient  $M \in GL_2(\mathbb{C}(\{\frac{1}{x}\}))$  et  $u'_\infty \in \mathbb{C}^*$ . Alors  $M[S_{u'_\infty x^2}] = A$  si et seulement s'il existe une matrice  $\Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{pmatrix}$  avec  $\frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{u'_\infty}{u_\infty}$  telle que  $M = M^{(\infty)}\Delta$ . De plus pour tout  $u'_\infty \in \mathbb{C}^*$  il existe un tel  $M$ .
4. Si par contre  $u_\infty = 0$  alors  $M[S_{u'_\infty x^2}] = A$  si et seulement si  $u'_\infty = 0$  et  $M = M^{(\infty)}\Delta$  avec  $\Delta$  diagonale constante.

*Démonstration.* Mêmes preuves que pour les propositions 2.1.9 et 2.1.10.  $\square$

On peut donc construire  $M := (M^{(0)})^{-1}M^{(\infty)}$  telle que  $M[S_{u_\infty x^2}] = R_{u_0}$ , que  $\det M$  soit analytique sur  $\mathbb{C}^*$ , de déterminant non identiquement nul et qui s'annule sur les  $q$ -spirales  $x_1 q^{\mathbb{Z}}$  et  $x_2 q^{\mathbb{Z}}$ ; cette matrice  $M$  sera notre matrice de connexion. De plus si l'on a construit deux telles matrices  $M$  et  $N$ , il existe  $\Gamma, \Delta \in GL_2(\mathbb{C})$  diagonales telles que  $N = \Gamma M \Delta^{-1}$ .

### Équivalence de Riemann-Hilbert-Birkhoff

Nous allons maintenant construire l'équivalent de la bijection proposée en 2.2.

Soient  $R_0 = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ ,  $S_0 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ ,  $\underline{x} = \{x_1, x_2\} \subset \mathbb{C}^*$  tels que

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} \notin q^{\mathbb{Z}}, \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \notin q^{\mathbb{Z}}, \frac{x_1}{x_2} \notin q^{\mathbb{Z}}, x_1 x_2 = \frac{\rho_1 \rho_2}{\sigma_1 \sigma_2}.$$

Définissons

$$E_{R_0, S_0, \underline{x}} := \{A \text{ vérifiant } q\text{-P}(A_5) \text{ pour } \rho_1, \rho_2, \sigma_1, \sigma_2, x_1, x_2\}$$

que l'on munit de la relation d'équivalence  $A \sim B \Leftrightarrow \exists F \in GL_2(\mathbb{C}(x)) | F[A] = B$ .

Définissons aussi

$$F_{R_0, S_0, \underline{x}} = \{M \in GL_2(\mathcal{M}(\mathbb{C}^*)) \mid M \text{ holomorphe sur } \mathbb{C}^*, \det M = 0 \text{ sur les } x_i q^{\mathbb{Z}}, \\ \exists u_0, u_\infty \in \mathbb{C} \mid M[S_{u_\infty x^2}] = R_{u_0}\}$$

muni de la relation  $M \sim N \Leftrightarrow \exists \Gamma, \Delta \in \begin{pmatrix} \mathbb{C}^* & 0 \\ 0 & \mathbb{C}^* \end{pmatrix} \mid N = \Gamma M \Delta^{-1}$ .

On a donc défini une flèche

$$\begin{array}{ccc} E_{R_0, S_0, \underline{x}} & \longrightarrow & F_{R_0, S_0, \underline{x}} \\ A & \longmapsto & M := (M^{(0)})^{-1} M^{(\infty)}. \end{array}$$

Les mêmes arguments que précédemment nous informent que cette flèche passe aux quotients et que nous avons donc défini

$$RHB_{R_0, S_0, \underline{x}} : E_{R_0, S_0, \underline{x}} / \sim \longrightarrow F_{R_0, S_0, \underline{x}} / \sim.$$

Il reste à en prouver la bijectivité.

L'injectivité se montre exactement de la même manière, le seul argument qui doit être modifié concerne la surjectivité. Soient  $M \in F_{R_0, S_0, \underline{x}}$  et  $u_0, u_\infty \in \mathbb{C}$  tels que  $M[S_{u_\infty x^2}] = R_{u_0}$ . On peut appliquer de la même manière le théorème de factorisation de Birkhoff (théorème 2.2.1) pour avoir  $M = M_0^{-1} M_\infty$  avec

1.  $M_0$  régulière sur  $\mathbb{C} \setminus q^{-\mathbb{N}} \underline{x}$ ,  $M_0^{-1}$  holomorphe sur  $\mathbb{C}$  et  $\det M_0^{-1}$  a des zéros simples sur  $q^{-\mathbb{N}} \underline{x}$ .
2.  $M_\infty$  régulière sur  $\mathbb{C}^* \setminus q^{\mathbb{N}^*} \underline{x}$  et  $\det M_\infty$  a des zéros simples sur  $q^{\mathbb{N}^*} \underline{x}$ .
3.  $M_\infty$  est méromorphe en  $\infty$ .

On définit alors  $A = \sigma_q(M_\infty) S_{u_\infty x^2} M_\infty^{-1} = \sigma_q(M_0) R_{u_0} M_0^{-1}$  qui est holomorphe sur  $\mathbb{C}$  et méromorphe en  $\infty$ , donc  $A$  est un polynôme  $A = A_0 + \dots + A_d x^d$  avec

$A_0 = C \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C^{-1}$  en définissant  $C := M_0(0) \in GL_2(\mathbb{C})$ . Comme  $\det A$  a des zéros simples en 0 et  $\underline{x}$  on a  $2d \geq 3$  donc  $d \geq 2$ . On peut de même écrire  $\det A = \Delta \cdot x(x - x_1)(x - x_2)$ . Comme  $\left(\frac{\sigma_q(\det M_0)}{\det M_0}\right)(0) = 1$ ,  $\det R_{u_0} = \rho_1 \rho_2 x$ , l'équation  $A = \sigma_q(M_0) R_{u_0} M_0^{-1}$  nous dit que  $\det A = \rho_1 \rho_2 \cdot x + \dots$ , *i.e.* par la relation de Fuchs  $\Delta = \sigma_1 \sigma_2$ . La fin de la preuve se fait de manière identique et conclue  $d = 2$  et  $A_2 = D \begin{pmatrix} \sigma_1 & u_\infty \\ 0 & 0 \end{pmatrix} D^{-1}$ , où  $D := M_\infty(\infty)$ , est bien conjuguée à  $\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

### 2.4.2 $q$ -P( $A_6$ )

Les conditions de  $q$ -P( $A_6$ ) sont les suivantes :

Soit

$$A(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 \quad (2.11)$$

où

$$A_0 \sim \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: R, \quad \rho_1 \neq 0,$$

$$A_2 \sim \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: S, \quad \sigma_1 \neq 0,$$

et où

$$\det A(x) = \sigma_1 \sigma_2 x^2 (x - x_1), \quad (2.12)$$

$$\sigma_2, x_1, \neq 0, \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \notin q^{\mathbb{Z}}.$$

Posons alors

$$\rho_2 := -\frac{\sigma_1 \sigma_2}{\rho_1} x_1$$

et supposons que  $\frac{\rho_1}{\rho_2} \notin q^{\mathbb{Z}}$ . On appellera *relation de Fuchs* la relation  $\frac{\rho_1 \rho_2}{\sigma_1 \sigma_2} = -x_1$ .

*Remarque 2.4.4.* Les questions sur les hypothèses de non-résonance des couples  $\rho_1, \rho_2$  et  $\sigma_1, \sigma_2$  sont toujours les mêmes dans ce cadre.

### Matrice de connexion

Encore une fois nous pouvons construire deux matrices  $M^{(0)}, M^{(\infty)}$  telle que

$$M^{(0)}[R_{u_0+u_1x}] = A = M^{(\infty)}[S_{u_\infty x^2}]$$

où  $u_0, u_1, u_\infty \in \mathbb{C}$ ,

$$R_{u_0+u_1x} := \begin{pmatrix} \rho_1 & u_0 + u_1 x \\ 0 & \rho_2 x^2 \end{pmatrix}, \quad S_{u_\infty x^2} := \begin{pmatrix} \sigma_1 x^2 & u_\infty x^2 \\ 0 & \sigma_2 x \end{pmatrix}.$$

Plus exactement posons  $C, K \in GL_2(\mathbb{C})$  telles que  $A_0 = CRC^{-1}$ ,  $A_2 = KSK^{-1}$ . Alors on a la proposition suivante :

- Proposition 2.4.5.** 1. Il existe une matrice  $F_0 \in GL_2(\mathbb{C}\{x\})$  analytique sur  $\mathbb{C}^*$ , vérifiant  $F_0(0) = C$  et  $\sigma_q(\det F) = (1 - \frac{x}{x_1}) \det F$ , et  $v_0 \in \mathbb{C}(\{x\})$  tels que  $A = F_0[R_{v_0}]$ .
2. Il existe  $u_0, u_1 \in \mathbb{C}$  et  $f_0 \in \mathbb{C}(\{x\})$  tels que, notant  $M^{(0)} := F_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & f_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , on ait  $A = M^{(0)}[R_{u_0+u_1x}]$ . De plus  $M^{(0)}$  est méromorphe sur  $\mathbb{C}^*$ ,  $\det M^{(0)}$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{C}^*$  et a ses pôles (simples) sur  $x_1q^{-\mathbb{N}}$ .
3. Il existe une matrice  $F_\infty \in GL_2(\mathbb{C}\{\frac{1}{x}\})$ , de terme constant  $K$ , analytique sur  $\mathbb{C}^*$  et vérifiant  $\sigma_q(\det F) = (1 - \frac{x_1}{x}) \det F$ , et  $v_\infty \in \mathbb{C}(\{\frac{1}{x}\})$  tels que  $A = F_\infty[S_{v_\infty}]$ .
4. Il existe  $u_\infty \in \mathbb{C}$  et  $f_\infty \in \mathbb{C}(\{\frac{1}{x}\})$  tels que, notant  $M^{(\infty)} := F_\infty \cdot \begin{pmatrix} 1 & f_\infty \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , on ait  $A = M^{(\infty)}[S_{u_\infty x^2}]$ . De plus  $\det M^{(\infty)}$  est analytique sur  $\mathbb{C}^*$  et a ses zéros (simples) sur  $x_1q^{\mathbb{N}^*}$  et  $x_2q^{\mathbb{N}^*}$ .

Les correspondances entre les différentes possibilités de construire  $M^{(0)}$  et  $M^{(\infty)}$  sont plus complexes dans ce cadre-là ; plus précisément en  $\infty$  on a le même résultat que précédemment :

- Proposition 2.4.6.** 1. Supposons  $u_\infty \neq 0$ . Soient  $M \in GL_2(\mathbb{C}(\{\frac{1}{x}\}))$  et  $u'_\infty \in \mathbb{C}^*$ . Alors  $M[S_{u'_\infty x^2}] = A$  si et seulement s'il existe une matrice  $\Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{pmatrix}$  avec  $\frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{u'_\infty}{u_\infty}$  telle que  $M = M^{(\infty)}\Delta$ . De plus pour tout  $u'_\infty \in \mathbb{C}^*$  il existe un tel  $M$ .
2. Si par contre  $u_\infty = 0$  alors  $M[S_{u'_\infty x^2}] = A$  si et seulement si  $u'_\infty = 0$  et  $M = M^{(\infty)}\Delta$  avec  $\Delta$  diagonale constante.

Par contre en 0 on a un résultat un peu plus complexe :

- Proposition 2.4.7.** 1. Supposons  $(u_0, u_1) \neq (0, 0)$ . Soient  $M \in GL_2(\mathbb{C}(\{x\}))$  et  $u'_0, u'_1 \in \mathbb{C}^*$ . Alors  $M[R_{u'_0+u'_1x}] = A$  si et seulement s'il existe une matrice  $\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}$  avec  $\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{u'_0}{u_0} = \frac{u'_1}{u_1}$  (si  $u_0, u_1 \neq 0$ , sinon  $u_i = 0 \Leftrightarrow u'_i = 0$ ) telle que  $M = M^{(0)}\Gamma$ . De plus pour un couple  $(u'_0, u'_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  il existe un tel  $M$  si et seulement si  $(u_0, u_1)$  et  $(u'_0, u'_1)$  sont sur la même droite vectorielle.
2. Si par contre  $u_0 + u_1x = 0$  alors  $M[R_{u'_0+u'_1x}] = A$  si et seulement si  $u'_0 = u'_1 = 0$  et  $M = M^{(0)}\Gamma$  avec  $\Gamma$  diagonale constante.



*Démonstration.* Notons  $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}(\{x\}))$  telle que  $P[R_{u'_0+u'_1x}] = R_{u_0+u_1x}$ , montrons que  $P$  est de la bonne forme. Tout d'abord on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} \rho_1 \sigma_q p_1 = \rho_1 p_1 + (u_0 + u_1 x) p_3 \\ \rho_2 x^2 \sigma_q p_2 = \rho_1 p_2 + (u_0 + u_1 x) p_4 - (u'_0 + u'_1 x) \sigma_q p_1 \\ \rho_1 \sigma_q p_3 = \rho_2 x^2 p_3 \\ \rho_2 x^2 \sigma_q p_4 = \rho_2 x^2 p_4 - (u'_0 + u'_1 x) \sigma_q p_3. \end{cases}$$

On en déduit  $p_3 = 0$  et  $p_1 := \gamma_1 \in \mathbb{C}^*$ ,  $p_4 := \gamma_2 \in \mathbb{C}^*$ . On réécrit alors  $P$  sous la forme :

$$P =: \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =: \Gamma.F$$

où  $F \in \mathfrak{G}(\mathbb{C}(\{x\}))$ . On réécrit alors notre équation de systèmes sous la forme

$$\sigma_q(F) R_{u'_0+u'_1x} F^{-1} = R_{\gamma_2/\gamma_1(u_0+u_1x)}.$$

L'unicité de la forme normale de Birkhoff-Guenther nous assure que cette équation n'a de solution que si  $u'_0 + u'_1 x = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}(u_0 + u_1 x)$  et  $f = 0$ , ce qui nous donne le résultat.  $\square$

*Remarque 2.4.8.* Ce genre de résultat revient à regarder l'ensemble des matrices sous forme normale de Birkhoff-Guenther équivalentes pour les transformations de jauge laissant invariante la matrice graduée associée; ce sont dans ce cas les matrices diagonales constantes. On parlera plus en profondeur de cette relation d'équivalence dans le chapitre 4.

On peut donc construire  $M := (M^{(0)})^{-1} M^{(\infty)}$  telle que  $M[S_{u_\infty x^2}] = R_{u_0+u_1x}$ , que  $\det M$  soit analytique sur  $\mathbb{C}^*$ , de déterminant non identiquement nul et qui s'annule sur la  $q$ -spirale  $x_1 q^{\mathbb{Z}}$ ; cette matrice  $M$  sera notre matrice de connexion. De plus si l'on a construit deux telles matrices  $M$  et  $N$ , il existe  $\Gamma, \Delta \in GL_2(\mathbb{C})$  diagonales telles que  $N = \Gamma M \Delta^{-1}$ .

### Équivalence de Riemann-Hilbert-Birkhoff

Comme auparavant nous allons construire une équivalence entre matrices vérifiant les conditions de  $q$ -P(A<sub>6</sub>) et matrices de connexion.

Soient  $R_0 = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ ,  $S_0 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ ,  $x_1 \in \mathbb{C}^*$  tels que

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} \notin q^{\mathbb{Z}}, \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \notin q^{\mathbb{Z}}, x_1 = -\frac{\rho_1 \rho_2}{\sigma_1 \sigma_2}.$$

Définissons

$$E_{R_0, S_0, x_1} := \{A \text{ vérifiant } q\text{-P}(A_6) \text{ pour } \rho_1, \rho_2, \sigma_1, \sigma_2, x_1\}$$

que l'on munit de la relation d'équivalence  $A \sim B \Leftrightarrow \exists F \in GL_2(\mathbb{C}(x)) | F[A] = B$ .

Définissons aussi

$$F_{R_0, S_0, x_1} = \{M \in GL_2(\mathcal{M}(\mathbb{C}^*)) \mid \begin{array}{l} M \text{ holomorphe sur } \mathbb{C}^*, \det M = 0 \text{ sur } x_1 q^{\mathbb{Z}}, \\ \exists u_0, u_1, u_\infty \in \mathbb{C} \mid M[S_{u_\infty x^2}] = R_{u_0 + u_1 x} \end{array}\}$$

muni de la relation  $M \sim N \Leftrightarrow \exists \Gamma, \Delta \in \begin{pmatrix} \mathbb{C}^* & 0 \\ 0 & \mathbb{C}^* \end{pmatrix} \mid N = \Gamma M \Delta^{-1}$ .

On a donc bâti une flèche

$$\begin{array}{ccc} E_{R_0, S_0, x_1} & \longrightarrow & F_{R_0, S_0, x_1} \\ A & \longmapsto & M := (M^{(0)})^{-1} M^{(\infty)}. \end{array}$$

Les mêmes arguments que précédemment nous informent que cette flèche passe aux quotients et définit une bijection

$$RHB_{R_0, S_0, x_1} : E_{R_0, S_0, x_1} / \sim \xrightarrow{\sim} F_{R_0, S_0, x_1} / \sim.$$

*Remarque 2.4.9.* Comme  $x_1$  est uniquement défini par  $R$  et  $S_0$  nous n'avons pas besoin dans ce cas de le mettre dans les notations.



# 3

## Fibré des classes isoformelles

---

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Cas de deux modules de rang 1 :</b>	
	<b>Fibration des <math>\mathcal{F}(c_1 z^{\mu_1}, c_2 z^{\mu_2})</math></b>	<b>58</b>
3.1.1	Contexte général et écriture explicite des Stokes	58
3.1.2	Construction du fibré	60
3.1.3	Action(s) et fibré(s) quotient(s)	63
<b>3.2</b>	<b>Cas de deux modules de rangs arbitraires fixés</b>	<b>68</b>
3.2.1	Généralisation du contexte et des Stokes	68
3.2.2	Construction du fibré	70
3.2.3	Actions et quotient	72
<b>3.3</b>	<b>Cas de deux modules à pentes arbitraires</b>	<b>78</b>
3.3.1	Mise en place du contexte	78
3.3.2	Construction du fibré	81
<b>3.4</b>	<b>Résumé global des constructions</b>	<b>83</b>

---

Étant donné un nombre complexe  $q$  tel que  $|q| > 1$ , nous pouvons étudier grâce à [RSZ13] pour tout module formel  $M_0 = P_1 \oplus \cdots \oplus P_k$  à pentes entières l'espace  $\mathcal{F}(M_0)$  des classes analytiques de gradué  $M_0$  (c'est l'objet de la section 1.3). Grâce à Bugeaud ([Bug12]) nous pouvons aussi étudier l'espace  $\mathcal{F}(P, \mathbf{1})$  pour  $P$  de pente  $\mu \in \mathbb{Q}_{<0}$ . Nous allons ici construire un fibré (vectoriel holomorphe dans le meilleur des cas) sur l'ensemble des modules formels en forme normale à fonction de Newton fixée. Une telle forme normale étant invariante sous une certaine action d'un  $q^{\mathbb{Z}}$  nous allons faire de ce fibré un fibré équivariant et étudier son fibré quotient. Tout cela devrait ensuite permettre l'étude de familles analytiques de systèmes aux  $q$ -différences à travers le prisme de notre géométrie.

Plus exactement le but de cette partie est de créer un fibré équivariant (pour une certaine action de  $q^{\mathbb{Z}}$ )  $p : E \rightarrow X$  (où  $X$  décrit un certain ensemble de modules purs à fonction de Newton fixée) tel que la fibre d'un  $M_0 \in X$  soit l'espace  $\mathcal{F}(M_0)$ . La première idée serait d'utiliser la version matricielle avec les  $U = (U_{i,j})_{i,j}, U_{i,j} \in M_{r_i, r_j} \left( \sum_{\ell=\mu_i}^{\mu_j-1} \mathbb{C}z^\ell \right)$ . Nous allons cependant construire notre fibré différemment, de manière plus analytique et géométrique, en utilisant comme coordonnées les  $(q)$ -Stokes sous la forme des cocycles privilégiés (ce qui prend tout son sens dans le cadre des pentes non entières). Un résumé des trois fibrés qui vont être construits de cette manière (et des actions définies dessus) se trouve à la fin du chapitre, en section 3.4.

Pour alléger les notations on écrira  $\theta$  pour la fonction  $\theta_q$  et  $\theta_a$  pour les fonctions  $\theta_{q,a}$  ( $a \in \mathbb{C}^*$ ) dans ce chapitre, où l'on rappelle que  $\theta_q(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{\frac{-n(n+1)}{2}} z^n$ , de diviseur  $\text{div}_{E_q} \theta_q = [-1]$ , vérifie  $\theta_q(qz) = z\theta_q(z)$  et  $\theta_{q,a}(z) := \theta_q(a^{-1}z)$ , de diviseur  $\text{div}_{E_q} \theta_{q,a} = [-a]$ , vérifie  $\theta_{q,a}(qz) = a^{-1}z\theta_{q,a}(z)$ . On rappelle de plus que l'on note  $\pi : \mathbb{C}^* \rightarrow E_q$  la projection canonique sur  $E_q := \mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$  et  $\bar{a}$  la classe de  $a \in \mathbb{C}^*$  dans  $E_q$ .

## 3.1 Cas de deux modules de rang 1 : Fibration des $\mathcal{F}(c_1 z^{\mu_1}, c_2 z^{\mu_2})$

### 3.1.1 Contexte général et écriture explicite des Stokes

Soient  $\mu_1 < \mu_2 \in \mathbb{Z}$ . Nous allons nous intéresser à l'espace vectoriel des classes isoformelles  $\mathcal{F}(c_1 z^{\mu_1}, c_2 z^{\mu_2})$  pour  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$  dont les éléments peuvent être représentés par les matrices de la forme

$$A_{c_1, c_2; u} := \begin{pmatrix} c_1 z^{\mu_1} & u \\ 0 & c_2 z^{\mu_2} \end{pmatrix}$$

avec  $u \in \sum_{\ell=\mu_1}^{\mu_2-1} \mathbb{C}z^\ell =: K_{\mu_1}^{\mu_2}$  (c'est la forme normale de Birkhoff-Guenther). C'est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n := \mu_2 - \mu_1$  (voir 1.3).

Regardons les descriptions cohomologiques de ces espaces. Notons  $\Lambda_{c;n}$  le faisceau sur  $E_q$  des solutions (méromorphes sur  $\mathbb{C}^*$ ) de l'équation  $cz^n \sigma_q(f) = f$ . Notons de plus  $\Sigma_{\bar{c};n} := \{\alpha \in E_q \mid \alpha^n = \bar{c}^{-1}\}$  et  $\mathcal{U}_{\bar{c};n}$  le recouvrement par les  $U_\alpha = E_q \setminus \{-\alpha\}$  pour  $\alpha \in E_q \setminus \Sigma_{\bar{c};n}$ . Si  $M_0$  est le module pur associé à  $A_{c_1, c_2; 0}$  alors  $\Lambda_{c_1^{-1} c_2; n} \simeq \Lambda(M_0)$ ,

$\Sigma_{c_1^{-1}c_2;n}^- = \Sigma(M_0)$  et  $\mathcal{U}_{c_1^{-1}c_2;n}^- = \mathcal{U}_{M_0}$  pour les notations de 1.4. Ceci nous donne toujours nos espaces  $H^1(\mathcal{U}_{c_1^{-1}c_2;n}^-, \Lambda_{c_1^{-1}c_2;n})$  et  $H^1(E_q, \Lambda_{c_1^{-1}c_2;n}) \simeq \mathcal{F}(c_1 z^{\mu_1}, c_2 z^{\mu_2})$ .

Pour ce qui est des cocycles privilégiés, pour tout  $u \in K_{\mu_1}^{\mu_2}$  et tout  $\alpha \in E_q \setminus \Sigma_{c_1^{-1}c_2;n}^-$  il existe une unique fonction  $f_\alpha^u$  méromorphe sur  $\mathbb{C}^*$  solution de  $\frac{c_2}{c_1} z^n \sigma_q(f) - f = \frac{u}{c_1 z^{\mu_1}}$  telle que  $\text{div}_{E_q}(f_\alpha^u) \geq -n[-\alpha]$  (théorème 1.4.2). On définit alors pour  $\alpha, \beta \in E_q \setminus \Sigma_{c_1^{-1}c_2;n}^-$

$$f_{\alpha\beta}^u := f_\alpha^u - f_\beta^u \in \Lambda_{c_1^{-1}c_2;n}(U_\alpha \cap U_\beta)$$

telle que  $\text{div}_{E_q}(f_{\alpha\beta}^u) \geq -n[-\alpha] - n[-\beta]$ . On note alors  $Z_{pr}^1(\mathcal{U}_{c_1^{-1}c_2;n}^-, \Lambda_{c_1^{-1}c_2;n})$  l'ensemble des cocycles dits privilégiés  $(f_{\alpha\beta}^u)_{\alpha,\beta}$  pour  $u$  parcourant  $K_{\mu_1}^{\mu_2}$ ; cet ensemble est en bijection avec  $\mathcal{F}(c_1 z^{\mu_1}, c_2 z^{\mu_2})$  et la structure de  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel induite est la structure naturelle déduite de celle sur  $\mathcal{M}(\mathbb{C}^*)$ .

De plus, en notant

$$E'_{\alpha,\beta;c;n} := \{f \text{ méromorphe sur } \mathbb{C}^* \mid cz^n \sigma_q(f) = f, \text{div}_{E_q}(f) \geq -n[-\alpha] - n[-\beta]\}$$

la projection sur une composante (pour  $\alpha, \beta$  fixés)

$$Z_{pr}^1(\mathcal{U}_{c_1^{-1}c_2;n}^-, \Lambda_{c_1^{-1}c_2;n}) \longrightarrow E'_{\alpha,\beta;c;n}$$

est un isomorphisme quand elle est définie, c'est-à-dire pour  $\alpha, \beta \in E_q \setminus \Sigma_{c_1^{-1}c_2;n}^-$ , *i.e.* on peut retrouver un cocycle à partir de n'importe lequel de ses composants; c'est une construction explicite que nous utilisons et détaillons dans la suite en 3.1.2.

Prenons maintenant  $a, b \in \mathbb{C}^*$  tels que  $\bar{a} = \alpha, \bar{b} = \beta$ . Un  $f \in E'_{\alpha,\beta;c;n}$  peut s'écrire sous la forme  $f = \frac{g}{\theta_a^n \theta_b^n}$  où  $g$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}^*$ . On a alors un isomorphisme entre  $E'_{\alpha,\beta;c;n}$  et  $E_{a,b;c;n} := \{g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^*) \mid \sigma_q(g) = \frac{1}{a^n b^n c} z^n g\} \simeq \mathbb{C}^n$ .

Prenons un  $g = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k z^k \in E_{a,b;c;n}$ . L'équation fonctionnelle vérifiée par  $g$  nous donne alors

$$q^k g_k = \frac{1}{a^n b^n c} g_{k-n}.$$

Choisir un tel  $g$  revient donc à choisir  $g_0, \dots, g_{n-1} \in \mathbb{C}$  ce qui nous donne bien un espace de dimension  $n$ .

On a donc un isomorphisme

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \mathbb{C}^n &\longrightarrow E_{a,b;c;n} \\ \underline{g} = (g_0, \dots, g_{n-1}) &\longmapsto g. \end{aligned}$$

*Remarque 3.1.1.* Il existe une autre base naturelle pour les tels  $g$  : un  $g \in E_{a,b;c;n}$  peut en effet s'écrire sous la forme

$$g = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \theta_{ab\xi_{c,i}}^n, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}$$

où les  $\xi_{c,i}$  sont les racines  $n^e$  de  $c$ . Nous n'utiliserons pas cette base pour deux raisons : premièrement elle implique dans la création du fibré un raffinement du recouvrement choisi pour pouvoir y définir une fonction racine  $n^e$  (multivaluée sur  $\mathbb{C}^*$ ), ce qui est possible mais complique inutilement la construction ; deuxièmement parce que sa généralisation pour des modules de rangs supérieurs est plus complexe à mettre en place que la construction présentée ici.

### 3.1.2 Construction du fibré

Nous allons donc construire un fibré vectoriel  $p : E \rightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$  de rang  $n$  localement égal (ensemblément) à l'union disjointe  $\coprod_{c_1, c_2} E_{a,b;c_1^{-1}c_2;n}$  des  $E_{a,b;c_1^{-1}c_2;n}$  pour un choix de  $a, b$ . Comme respectivement  $a, b$  et  $a^n, b^n, c_1^{-1}c_2$  doivent être d'images distinctes dans  $E_q$  ceci ne peut se faire globalement.

Définissons pour  $\alpha, \beta \in E_q, \alpha \neq \beta$  :

$$U_{\alpha,\beta;n} := \{(\gamma, \delta) \in E_q \times E_q \mid \frac{\gamma}{\delta} \neq \alpha^n, \beta^n\} \subset E_q \times E_q$$

et pour  $a, b \in \mathbb{C}^*, \bar{a} \neq \bar{b}$  :

$$W_{a,b;n} := (\pi \times \pi)^{-1}(U_{\bar{a},\bar{b};n}) \subset \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$$

qui forment un recouvrement ouvert de  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ .

Nous allons donc maintenant donner des coordonnées pour notre fibré sur ces ouverts, *i.e.* des isomorphismes  $h_{a,b} : p^{-1}(W_{a,b;n}) \rightarrow W_{a,b;n} \times \mathbb{C}^n$ . Le principal travail qui restera sera alors de définir, pour  $a, b, d, e \in \mathbb{C}^*$  tels que  $\bar{a} \neq \bar{b}$  et  $\bar{d} \neq \bar{e}$ , le changement de cartes  $h_{d,e} \circ h_{a,b}^{-1}$ .

Pour un  $(c_1, c_2, \underline{g}) \in W_{a,b;n} \cap W_{d,e;n} \times \mathbb{C}^n$  on va associer à  $\underline{g}$  l'élément de  $E_{a,b;c_1^{-1}c_2;n}$   $\Phi(\underline{g}) =: g$  lui-même associé à la fonction  $f_{\bar{a},\bar{b}} := \frac{g}{\theta_a^n \theta_b^n}$  de  $E'_{a,b;c_1^{-1}c_2;n}$ . On peut alors prendre le cocycle privilégié associé  $(f_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta}$ . Son projeté  $f_{\bar{d},\bar{e}}$  peut s'écrire  $\frac{g'}{\theta_d^n \theta_e^n}$  où  $g' \in E_{d,e;c_1^{-1}c_2;n}$ , ce qui nous donne bien un élément  $(c_1, c_2, \Phi^{-1}(g'))$  dans la seconde carte.

Il reste maintenant à expliciter ces calculs, notamment pour vérifier que c'est bien un changement de cartes linéaire.

$f_{\bar{a}\bar{b}}$  s'écrit sous la forme  $f_{\bar{a}} - f_{\bar{b}} = \frac{\varphi}{\theta_a^n} - \frac{\psi}{\theta_b^n}$ . Il existe un unique  $u = \sum_{i=0}^{n-1} u_i z^{\mu_1+i} \in K_{\mu_1}^{\mu_2}$  tel que  $f_{\bar{a}}$  et  $f_{\bar{b}}$  vérifient  $\frac{c_2}{c_1} z^n \sigma_q(f) - f = z^{-\mu_1} \frac{u}{c_1}$ . Notons  $\varphi =: \sum_{\mathbb{Z}} \varphi_k z^k$ ,  $\psi =: \sum_{\mathbb{Z}} \psi_k z^k$  et  $\theta_a^n =: \sum_{\mathbb{Z}} t_{a,n;k} z^k$ . On a alors  $\varphi$  qui vérifie :

$$\frac{c_2}{c_1} a^n \varphi(qz) = \varphi(z) + z^{-\mu_1} \frac{u}{c_1} \theta_a(z)^n.$$

On a de plus

$$(z^{-\mu_1} u) \theta_a^n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{i=0}^{n-1} t_{a,n;k-i} u_i \right) z^k$$

d'où

$$\varphi_k = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t_{a,n;k-i} u_i}{a^n c_2 q^k - c_1}$$

et donc de manière similaire

$$\psi_k = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t_{b,n;k-i} u_i}{b^n c_2 q^k - c_1}.$$

De plus

$$\begin{aligned} [\varphi \theta_b^n]_k &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \varphi_l t_{b,n;k-l} \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{i=0}^{n-1} \left( \frac{t_{a,n;l-i} \cdot t_{b,n;k-l}}{a^n c_2 q^l - c_1} \right) u_i \end{aligned}$$

et donc

$$[\varphi \theta_b^n - \psi \theta_a^n]_k = \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left( \frac{t_{a,n;l-i} \cdot t_{b,n;k-l}}{a^n c_2 q^l - c_1} - \frac{t_{b,n;l-i} \cdot t_{a,n;k-l}}{b^n c_2 q^l - c_1} \right) \right] u_i.$$

Notons

$$K_{a,b;c_1,c_2;n}^{k,i} := \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left( \frac{t_{a,n;l-i} \cdot t_{b,n;k-l}}{a^n c_2 q^l - c_1} - \frac{t_{b,n;l-i} \cdot t_{a,n;k-l}}{b^n c_2 q^l - c_1} \right)$$

On a aussi  $[\varphi \theta_b^n - \psi \theta_a^n]_k = g_k$ , d'où pour  $k = 0, \dots, n-1$

$$g_k = \sum_{i=0}^{n-1} K_{a,b;c_1,c_2;n}^{k,i} u_i.$$

et on note alors

$$L_{a,b;c_1,c_2;n}(u_0, \dots, u_{n-1}) := (g_k)_k = \underline{g}.$$



Comme  $g$  n'est nulle que si  $u$  est nul ( $L$  réalise l'isomorphisme entre  $\mathcal{F}(c_1 z^{\mu_1}, c_2 z^{\mu_2})$  et  $Z_{pr}^1(\mathcal{W}_{c_1^{-1}c_2;n}, \Lambda_{c_1^{-1}c_2;n})$ ),  $L_{a,b;c_1,c_2;n} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  est linéaire inversible et on en déduit que

$$\Phi^{-1}(g') = L_{d,e;c_1,c_2;n} \circ L_{a,b;c_1,c_2;n}^{-1}(g).$$

**En résumé.** On a construit un fibré vectoriel  $p : E \rightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$  muni des trivialisations locales suivantes : pour tous  $a, b \in \mathbb{C}^*$  tels que  $\bar{a} \neq \bar{b}$  on définit la carte  $(W_{a,b;n}, h_{a,b})$  par

$$W_{a,b;n} := (\pi \times \pi)^{-1} \left( \{(\gamma, \delta) \in E_q \times E_q \mid \frac{\gamma}{\delta} \neq \bar{a}^n, \bar{b}^n\} \right)$$

où  $h_{a,b} : p^{-1}(W_{a,b;n}) \rightarrow W_{a,b;n} \times \mathbb{C}^n$  est telle que pour  $d, e \in \mathbb{C}^*$  tels que  $\bar{d} \neq \bar{e}$ ,  $h_{d,e} \circ h_{a,b}^{-1}$  envoie  $(c_1, c_2, \underline{g}) \in W_{a,b;n} \cap W_{d,e;n} \times \mathbb{C}^n$  (où  $\underline{g}$  est vu comme la section  $\frac{\Phi(g)}{\theta_a^n \theta_b^n}$  du faisceau  $\Lambda_{c_1^{-1}c_2;n}$  sur  $E_q \setminus \{\bar{a}, \bar{b}\}$ ) sur  $(c_1, c_2, L_{d,e;c_1,c_2;n} \circ L_{a,b;c_1,c_2;n}^{-1}(\underline{g}) := \underline{g}')$  (où  $\underline{g}'$  est vu comme la section  $\frac{\Phi(g')}{\theta_d^n \theta_e^n}$  du faisceau  $\Lambda_{c_1^{-1}c_2;n}$  sur  $E_q \setminus \{\bar{d}, \bar{e}\}$ ) avec  $L_{d,e;c_1,c_2;n} \circ L_{a,b;c_1,c_2;n}^{-1} \in GL_n(\mathbb{C})$ , soit :

$$\begin{array}{ccc} W_{a,b;n} \times \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\sim} & p^{-1}(W_{a,b;n}) \\ & \searrow pr_1 & \downarrow p \\ & & W_{a,b;n} \end{array}$$

et :

$$\begin{array}{ccccc} W_{a,b;n} \cap W_{d,e;n} \times \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\sim} & p^{-1}(W_{a,b;n} \cap W_{d,e;n}) & \xleftarrow{\sim} & W_{a,b;n} \cap W_{d,e;n} \times \mathbb{C}^n \\ & \searrow pr_1 & \downarrow p & \swarrow pr_1 & \\ & & W_{a,b;n} \cap W_{d,e;n} & & \end{array}$$

*Exemple 3.1.2.* Dans le cas particulier où  $\mu_1 = 0, \mu_2 = 1$  (et donc  $n = 1$ ) les  $u$  appartiennent à  $\mathbb{C}$  et les fonctions  $g \in E_{a,b;c;1}$  peuvent s'écrire sous la forme  $\lambda \cdot \theta_{abc}$ , avec  $\lambda \in \mathbb{C}$  (on a alors  $\lambda = g_0$  dans le calcul précédent). On retrouve d'ailleurs la base présentée dans la remarque 3.1.1. On obtient alors simplement

$$\lambda = u \cdot \sum_{i \in \mathbb{Z}} q^{-i^2} \left[ \frac{b^i}{a^i(ac_2q^i - c_1)} - \frac{a^i}{b^i(bc_2q^i - c_1)} \right]$$

où  $\sum_{i \in \mathbb{Z}} q^{-i^2} \left[ \frac{b^i}{a^i(ac_2q^i - c_1)} - \frac{a^i}{b^i(bc_2q^i - c_1)} \right] = K_{a,b;c_1^{-1}c_2;1}^{0,0}$  et en écrivant  $g' = \gamma \cdot \theta_{abc}$

on a  $\gamma = \frac{K_{a,b;c_1^{-1}c_2;1}^{0,0}}{K_{a,b;c_1^{-1}c_2;1}^{0,0}} \cdot \lambda$ .

### 3.1.3 Action(s) et fibré(s) quotient(s)

"Dilatation des coefficients" : action de  $q^{\mathbb{Z}} \times q^{\mathbb{Z}}$

Nous avons donc construit un fibré dont l'espace total est l'union disjointe des  $\mathcal{F}(c_1 z^{\mu_1}, c_2 z^{\mu_2})$  avec  $c_1, c_2$  parcourant  $\mathbb{C}^*$ . Mais cette construction ne tient pas compte des isomorphismes de modules purs : en effet deux modules purs  $c_1 z^{\mu_1} \oplus c_2 z^{\mu_2}$  et  $c'_1 z^{\mu_1} \oplus c'_2 z^{\mu_2}$  sont isomorphes sur  $K$  si (et seulement si) il existe  $i, j \in \mathbb{Z}$  tels que  $c'_1 = q^i c_1, c'_2 = q^j c_2$ . Ces isomorphismes sur les modules purs, réalisés par exemple par les transformations de jauge  $z^i \oplus z^j$ , induisent une action de  $q^{\mathbb{Z}} \times q^{\mathbb{Z}}$  sur notre fibré que nous allons détailler ici.

Regardons ce que cela donne du point de vue des matrices. Soient  $u \in K_{\mu_1}^{\mu_2}$  et  $i, j \in \mathbb{Z}$ . Alors l'action de  $(q^i, q^j)$  par la transformation de jauge  $z^i \oplus z^j$  sur  $\begin{pmatrix} c_1 z^{\mu_1} & u \\ 0 & c_2 z^{\mu_2} \end{pmatrix}$  nous donne  $\begin{pmatrix} q^i c_1 z^{\mu_1} & q^i z^{i-j} u \\ 0 & q^j c_2 z^{\mu_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c'_1 z^{\mu_1} & u' \\ 0 & c'_2 z^{\mu_2} \end{pmatrix}$  (qui n'est pas de la bonne forme - sous forme normale de Birkhoff-Guenther).

La matrice obtenue est dans la même classe que  $A_{c'_1, c'_2; v}$  pour  $v \in K_{\mu_1}^{\mu_2}$  si et seulement si l'équation

$$\frac{c'_2}{c'_1} z^n \sigma_q(f) - f = \frac{v - u'}{c'_1 z^{\mu_1}}$$

a une solution dans  $K$ . Or cette équation a une solution si et seulement si pour tout  $\zeta_{q^{j-i} c_1^{-1} c_2}$  racine  $n^e$  de  $q^{j-i} c_1^{-1} c_2$  on ait

$$\mathcal{B}_{q,n}(u' z^{-\mu_1})(\zeta_{q^{j-i} c_1^{-1} c_2}^{-1}) = \mathcal{B}_{q,n}(v z^{-\mu_1})(\zeta_{q^{j-i} c_1^{-1} c_2}^{-1})$$

où  $\mathcal{B}_{q,n}$  est la transformée de  $q$ -Borel de degré  $n$  définie en 1.1.7. Un tel  $v \in K_{\mu_1}^{\mu_2}$  est alors uniquement déterminé.

Notons maintenant  $\rho_{i,j}(u)$  l'action de  $(q^i, q^j)$  sur  $u$  donnée par les isomorphismes ci-dessus. On passe alors à notre action sur le fibré dans une carte  $W_{a,b;n}$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} (q^i, q^j) \cdot (c_1, c_2, \underline{g}) &= (q^i c_1, q^j c_2, L_{a,b;q^i c_1, q^j c_2; n} \circ \rho_{i,j}(u)) \\ &= (q^i c_1, q^j c_2, L_{a,b;q^i c_1, q^j c_2; n} \circ \rho_{i,j} \circ L_{a,b;c_1, c_2; n}^{-1}(\underline{g})). \end{aligned}$$

Vérifions que cette action commute aux cartes, *i.e.* que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} W_{a,b;n} \cap W_{d,e;n} \times \mathbb{C}^n & \xrightarrow{h_{d,e} \circ h_{a,b}^{-1}} & W_{a,b;n} \cap W_{d,e;n} \times \mathbb{C}^n \\ \downarrow (q^i, q^j) \cdot & & \downarrow (q^i, q^j) \cdot \\ W_{a,b;n} \cap W_{d,e;n} \times \mathbb{C}^n & \xrightarrow{h_{d,e} \circ h_{a,b}^{-1}} & W_{a,b;n} \cap W_{d,e;n} \times \mathbb{C}^n. \end{array}$$

On pourra remarquer qu'au vu de la construction de nos cartes chacune est invariante pour notre action : si  $(c_1, c_2, \underline{g}) \in W_{a,b;n} \times \mathbb{C}^n$  alors  $(q^i, q^j).(c_1, c_2, \underline{g}) \in W_{a,b;n} \times \mathbb{C}^n$ .

La commutation se vérifie facilement, en effet

$$\begin{aligned} (q^i, q^j). (h_{d,e} \circ h_{a,b}^{-1}(c_1, c_2, \underline{g})) &= (q^i, q^j).(c_1, c_2, L_{d,e;c_1,c_2;n} \circ L_{a,b;c_1,c_2;n}^{-1}(\underline{g})) \\ &= (q^i c_1, q^j c_2, L_{d,e;q^i c_1, q^j c_2;n} \circ \rho_{i,j} \circ L_{d,e;c_1,c_2;n}^{-1} \circ L_{d,e;c_1,c_2;n} \circ L_{a,b;c_1,c_2;n}^{-1}(\underline{g})) \\ &= (q^i c_1, q^j c_2, L_{d,e;q^i c_1, q^j c_2;n} \circ \rho_{i,j} \circ L_{a,b;c_1,c_2;n}^{-1}(\underline{g})) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} h_{d,e} \circ h_{a,b}^{-1}((q^i, q^j).(c_1, c_2, \underline{g})) &= h_{d,e} \circ h_{a,b}^{-1}(q^i c_1, q^j c_2, L_{a,b;q^i c_1, q^j c_2;n} \circ \rho_{i,j} \circ L_{a,b;c_1,c_2;n}^{-1}(\underline{g})) \\ &= (q^i c_1, q^j c_2, L_{d,e;q^i c_1, q^j c_2;n} \circ L_{a,b;q^i c_1, q^j c_2;n}^{-1} \circ L_{a,b;q^i c_1, q^j c_2;n} \circ \rho_{i,j} \circ L_{a,b;c_1,c_2;n}^{-1}(\underline{g})) \\ &= (q^i c_1, q^j c_2, L_{d,e;q^i c_1, q^j c_2;n} \circ \rho_{i,j} \circ L_{a,b;c_1,c_2;n}^{-1}(\underline{g})). \end{aligned}$$

Comme la transformation de jauge  $z^i \oplus z^j$  nous donne bien un isomorphisme (linéaire) entre les  $\mathcal{F}(c_1 z^{\mu_1}, c_2 z^{\mu_2})$  et les  $\mathcal{F}(q^i c_1 z^{\mu_1}, q^j c_2 z^{\mu_2})$  le fibré  $p : E \rightarrow \mathbb{C}^*$  muni de l'action de  $q^{\mathbb{Z}} \times q^{\mathbb{Z}}$  constitue bien un fibré équivariant.

**Fibré quotient** Nous pouvons créer un fibré quotient du fibré  $p$  par l'action de  $q^{\mathbb{Z}} \times q^{\mathbb{Z}}$ , *i.e.* un fibré  $\bar{p} : \bar{E} \rightarrow E_q \times E_q$  tel que le diagramme suivant soit cartésien :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\pi \times \pi} & \bar{E} \\ p \downarrow & \lrcorner & \downarrow \bar{p} \\ \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* & \xrightarrow{\pi \times \pi} & E_q \times E_q \end{array}$$

*i.e.* tel que  $E$  soit le tiré en arrière (pullback) de  $\bar{E}$  par  $\pi \times \pi$  (soit  $E = (\pi \times \pi)^* \bar{E}$ ).

Plaçons-nous sur un  $W_{a,b;n}$ . On peut définir le quotient

$$p^{-1}(W_{a,b;n})/e \sim (q^i, q^j).e \simeq (W_{a,b;n} \times \mathbb{C}^n)/(c_1, c_2, \underline{g}) \sim (q^i, q^j).(c_1, c_2, \underline{g}).$$

C'est un fibré au dessus de  $W_{a,b;n}/q^{\mathbb{Z}} \times q^{\mathbb{Z}}$  puisque en se plaçant au dessus d'un des  $U_i \times U_j$  trivialisant  $E_q \times E_q$  (voir 1.4) on a une bijection entre les classes  $[c_1, c_2, \underline{g}]$  en prenant  $c_1 \in V_i$  et  $c_2 \in V_j$  et les  $(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \underline{g}) \in U_i \times U_j \times \mathbb{C}^n$ . Comme l'action de  $q^{\mathbb{Z}} \times q^{\mathbb{Z}}$  sur  $E$  est bien définie (passe aux cartes) on peut recoller ces fibrés en un fibré  $\bar{p} : \bar{E} \rightarrow E_q \times E_q$  avec  $\bar{E} = E/q^{\mathbb{Z}} \times q^{\mathbb{Z}}$  où dans une carte  $\pi(W_{a,b;n}) \cap U_i \times U_j$  on a  $p([c_1, c_2, \underline{g}]) = (\bar{c}_1, \bar{c}_2)$ .

On a donc bien le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\pi \times \pi} & \bar{E} \\ p \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \bar{p} \\ \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* & \xrightarrow{\pi \times \pi} & E_q \times E_q \end{array}$$

reste à prouver qu'il est cartésien, *i.e.* que  $E \simeq (\pi \times \pi)^* \bar{E}$ . Or  $(\pi \times \pi)^* \bar{E}$  est isomorphe dans une carte  $W_{a,b;n}$  à

$$\begin{aligned} \bar{E}_{a,b;n} &:= \{(c'_1, c'_2, [c_1, c_2, \underline{g}]) \in W_{a,b;n} \times \bar{p}^{-1}(\pi \times \pi(W_{a,b;n})) \mid \bar{c}'_s = \bar{c}_s\} \\ &= \{(q^i c_1, q^j c_2, [c_1, c_2, \underline{g}]) \in W_{a,b;n} \times \bar{p}^{-1}((\pi \times \pi)(W_{a,b;n}))\} \end{aligned}$$

On définit alors les applications

$$\begin{aligned} p^{-1}(W_{a,b;n}) &\longrightarrow \bar{E}_{a,b;n} \\ (c_1, c_2, \underline{g}) &\longmapsto (c_1, c_2, [c_1, c_2, \underline{g}]) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \bar{E}_{a,b;n} &\longrightarrow p^{-1}(W_{a,b;n}) \\ (q^i c_1, q^j c_2, [c_1, c_2, \underline{g}]) &\longmapsto (q^i c_1, q^j c_2, (q^i, q^j) \cdot \underline{g}) \end{aligned}$$

qui sont bien réciproques l'une de l'autre.

*Exemple 3.1.3.* Revenons au cas  $\mu_1 = 0, \mu_2 = 1$ . Soient  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*, u \in \mathbb{C}, i, j \in \mathbb{Z}$ . Alors l'action de  $(q^i, q^j)$  sur  $\begin{pmatrix} c_1 & u \\ 0 & c_2 z \end{pmatrix}$  par l'isomorphisme  $z^i \oplus z^j$  nous donne  $\begin{pmatrix} q^i c_1 & q^{((i-j)^2+3i-j)/2} \cdot \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{i-j} \cdot u \\ 0 & q^j c_2 z \end{pmatrix}$ ; en effet on a :

$$\begin{pmatrix} q^i z^i & 0 \\ 0 & q^j z^j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & u \\ 0 & c_2 z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{z^i} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z^j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^i c_1 & q^i z^{i-j} u \\ 0 & c_2 q^j z \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} c'_1 & u' \\ 0 & c'_2 z \end{pmatrix}.$$

La matrice ci-dessus est dans la même classe que  $A_{c'_1, c'_2; v}$  si et seulement si l'équation

$$\frac{c'_2}{c'_1} z \sigma_q(f) - f = \frac{v - u'}{c'_1 z^{\mu_1}}$$

a une solution dans  $K$ , *i.e.* si et seulement si on a

$$\mathcal{B}_{q,1}\left(\frac{v}{c'_1}\right)\left(\frac{c'_1}{c'_2}\right) = \mathcal{B}_{q,1}\left(\frac{u'}{c'_1}\right)\left(\frac{c'_1}{c'_2}\right)$$

ce qui nous donne

$$v = q^{((i-j)^2+3i-j)/2} \cdot \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{i-j} \cdot u.$$

De tout cela on en déduit l'action dans une carte  $(W_{a,b;1}, h_{a,b})$  :

$$(q^i, q^j) \cdot (c_1, c_2, \lambda) = \left( q^i c_1, q^j c_2, q^{((i-j)^2+3i-j)/2} \cdot \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{i-j} \frac{K_{a,b;q^i c_1, q^j c_2; 1}}{K_{a,b;c_1, c_2; 1}} \lambda \right).$$

### Action des automorphismes du gradué

Un problème survient cependant dans la construction de ce fibré quotient : elle est totalement dépendante du choix de la transformation de jauge réalisant l'isomorphisme entre modules gradués. En effet choisir pour  $k, l \in \mathbb{C}^*$  la transformation  $(kz)^i \oplus (lz)^j$  donne une action différente qui donnera donc un fibré quotient différent, et surtout non isomorphe au premier (apparition de pôles dans les isomorphismes).

*Exemple 3.1.4.* Dans le cadre habituel  $\mu_1 = 0, \mu_2 = 1$  nous allons de plus restreindre la base à  $\{1\} \times \mathbb{C}^*$ , *i.e.* ne regarder que les espaces  $\mathcal{F}(1, cz)$ . Les familles de transformations de jauge réalisant nos isomorphismes sont les itérées de  $1 \oplus kz$  qui nous donnent bien pour chaque famille un fibré équivariant noté  $p_k : E_k \rightarrow \mathbb{C}^*$  qui se quotiente tout aussi bien. Un isomorphisme de fibrés quotients se trouve en construisant un isomorphisme de fibré équivariant  $\bar{\chi}_{k,l} : E_k \xrightarrow{\sim} E_l$  pour  $k, l \in \mathbb{C}^*$ , *i.e.* tel que  $\bar{\chi}_{k,l}(\rho_k^i(e)) = \rho_l^i(\bar{\chi}_{k,l}(e))$  où  $\rho_k(e)$  est l'action de  $q$  sur  $e$  dans  $E_k$ .

Demander qu'un tel  $\bar{\chi}_{k,l}$  soit un isomorphisme de fibrés c'est demander à ce qu'il laisse les fibres invariantes, *i.e.* on veut dans une carte  $W_{a,b;1}$  avoir  $\bar{\chi}_{k,l}(c, \lambda) = (c, \hat{\chi}_{k,l}(c, \lambda))$ , et comme ce doit être un isomorphisme de fibrés vectoriels,  $\hat{\chi}_{k,l}$  doit être linéaire, *i.e.*  $\bar{\chi}_{k,l}(c, \lambda) = (c, \chi_{k,l}(c) \cdot \lambda)$ .

Or dans une carte  $W_{a,b;1}$  :

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_{k,l}(\rho_k^i(c, \lambda)) &= \bar{\chi}_{k,l}(q^i c, q^{i(i-1)/2} \left(\frac{c}{k}\right)^i \frac{K_{a,b;q^i c;1}}{K_{a,b;c;1}} \lambda) \\ &= (q^i c, \chi_{k,l}(q^i c) \cdot q^{i(i-1)/2} \left(\frac{c}{k}\right)^i \frac{K_{a,b;q^i c;1}}{K_{a,b;c;1}} \lambda) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \rho_l^i(\bar{\chi}_{k,l}(c, \lambda)) &= \rho_l^i(c, \chi_{k,l}(c) \cdot \lambda) \\ &= (q^i c, \chi_{k,l}(c) \cdot q^{i(i-1)/2} \left(\frac{c}{l}\right)^i \frac{K_{a,b;q^i c;1}}{K_{a,b;c;1}} \lambda). \end{aligned}$$

$\chi_{k,l}$  doit donc vérifier

$$\chi_{k,l}(q^i c) = \left(\frac{k}{l}\right)^i \chi_{k,l}(c).$$

Or les fonctions méromorphes sur  $\mathbb{C}^*$  vérifiant cette équation proviennent des  $q$ -caractères  $e_{q,k/l} = \frac{\theta}{\theta_{k/l}}$  qui ont pour pôles la  $q$ -spirale  $[-\frac{k}{l}; q]$  et pour zéros la  $q$ -spirale  $[-1; q]$  : ils ne forment donc pas des isomorphismes pour nos fibrés équivariants (sauf dans le cas exceptionnel où  $\frac{k}{l} \in q^{\mathbb{Z}}$ ).

Ce qui apparaît ici est une autre action que la précédente, réalisée par les transformations associées aux automorphismes du gradué. En effet les transformations de jauge  $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix} \in Gl_2(\mathbb{C})$  laissent invariantes les matrices scindées  $\begin{pmatrix} c_1 z^{\mu_1} & 0 \\ 0 & c_2 z^{\mu_2} \end{pmatrix}$ .

Un élément  $A_{c_1, c_2; u}$  est envoyé par une telle transformation sur  $A_{c_1, c_2, \frac{k}{l}u}$ . Ceci permet donc de définir une action de  $\text{Aut}(c_1 z^{\mu_1}) \times \text{Aut}(c_2 z^{\mu_2}) \simeq \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$  sur  $E$  comme suit (dans une carte  $W_{a, b; n}$ ) :

$$(k, l) \cdot (c_1, c_2, \underline{g}) := (c_1, c_2, \frac{k}{l} \underline{g}).$$

Il est assez évident de voir que

$$(k, l) \cdot (h_{d, e} \circ h_{a, b}^{-1}(c_1, c_2, \underline{g})) = h_{d, e} \circ h_{a, b}^{-1}((k, l) \cdot (c_1, c_2, \underline{g}))$$

*i.e.* que l'action passe au changement de cartes.

Cette action, contrairement à la précédente, n'agit pas sur la base du fibré (en en faisant un fibré équivariant) mais directement sur les fibres. De plus le fait que les matrices  $z^i \oplus z^j$  et  $k \oplus l$  commutent nous assurent que les actions restent compatibles entre elles, *i.e.* que

$$(q^i, q^j) \cdot ((k, l) \cdot (c_1, c_2, \underline{g})) = (k, l) \cdot ((q^i, q^j) \cdot (c_1, c_2, \underline{g})).$$

Elle est donc toujours définie sur le quotient  $\bar{E}$  et est donnée par, dans une carte  $\pi(W_{a, b; n}) \cap U_i \times U_j$  :

$$(k, l) \cdot [c_1, c_2, \underline{g}] = [c_1, c_2, \frac{k}{l} \underline{g}].$$

**Fibré quotient.** On peut se demander à quoi ressemblerait le fibré quotient de notre fibré par cette action - et par les deux actions - s'il existe. Tout d'abord regardons à quoi ressemble le quotient d'une fibre. C'est le but du chapitre 4, et ce que nous allons écrire ici n'est qu'une reprise de l'exemple 4.1.7.

L'action d'un  $(k, l) \in (\mathbb{C}^*)^2$  revient à l'action d'un  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  par  $(k, l) \mapsto \frac{k}{l} := \lambda$ .

On regarde donc l'action de  $\mathbb{C}^*$  sur  $\sum_{\ell=\mu_1}^{\mu_2-1} \mathbb{C}z^\ell \simeq \mathbb{A}^n(\mathbb{C})$  par multiplication à gauche.

C'est, mis à part le 0 toujours présent, l'action classique consistant à identifier les droites vectorielles en des points. On obtient donc un espace qui ressemble à un  $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$  à qui l'on a rajouté un 0 présent dans l'adhérence de chaque orbite. Ceci n'est clairement pas une variété (comme dit en 4.1.7).

Comme cette action passe aux cartes on obtient bien un fibré quotient dont les fibres sont isomorphes à ce  $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) \sqcup \{0\}$  (ce n'est donc plus un fibré vectoriel!), et en quotientant aussi par l'action de dilatation des coefficients on obtient un fibré  $p' : \mathcal{E} \rightarrow E_q \times E_q$  localement isomorphe sur un ouvert  $\pi(W_{a, b; n}) \cap U_i \times U_j$  à  $(\pi(W_{a, b; n}) \cap U_i \times U_j) \times (\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) \sqcup \{0\})$ .

*Exemple 3.1.5.* Le cas  $\mu_1 = 0, \mu_2 = 1$  est un cas complètement trivial : le quotient de  $\mathcal{F}(c_1, c_2 z)$  par  $(\mathbb{C}^*)^2$  donne un espace composé de deux points, la classe de 0 et celle de l'ensemble des éléments non nuls. Passer au quotient dans ce cas précis fait perdre toute l'information.

Ce que cette action nous rappelle c'est que, bien que nous ayons étudié l'espace des classes isoformelles, *i.e.* à gradué fixé et avec des transformations qui laissent invariant ce gradué, il en existe qui peuvent le changer et donc, dans une étude globale de toutes les transformations possibles pour un système, plusieurs Stokes peuvent être associés à un même système.

## 3.2 Cas de deux modules de rangs arbitraires fixés

Nous allons dans cette partie généraliser les résultats précédents aux cas où les modules purs ne sont plus forcément de rang 1. Si pour la création du fibré cela ne change que certains calculs et rien à la philosophie du tout, l'ajout d'une action est elle différente dans la *praxis* par l'ajout d'un nouveau type de transformations de jauge réalisant des isomorphismes de gradué et surtout va nous renseigner sur le sens profond que revêtent ces actions.

### 3.2.1 Généralisation du contexte et des Stokes

Soient  $\mu_1 < \mu_2 \in \mathbb{Z}$  et  $r_1, r_2 \in \mathbb{N}^*$ . Nous allons cette fois nous intéresser à l'espace vectoriel des classes analytiques isoformelles  $\mathcal{F}(C_1 z^{\mu_1}, C_2 z^{\mu_2})$  pour  $C_1 \in GL_{r_1}(\mathbb{C}), C_2 \in GL_{r_2}(\mathbb{C})$  dont les éléments peuvent être représentés par des matrices de la forme

$$A_{C_1, C_2; U} := \begin{pmatrix} C_1 z^{\mu_1} & U \\ 0 & C_2 z^{\mu_2} \end{pmatrix}$$

avec  $U \in M_{r_1, r_2}(K_{\mu_1}^{\mu_2})$ . C'est un espace vectoriel de dimension  $r_1 r_2 n$  avec  $n := \mu_2 - \mu_1$ .

Côté descriptions cohomologiques : notons  $\Lambda_{C_1, C_2; n}$  le faisceau sur  $E_q$  des solutions (méromorphes sur  $\mathbb{C}^*$ ) de l'équation  $z^n C_1^{-1} \sigma_q(F) C_2 = F$ . Notons de plus  $\Sigma_{C_1, C_2; n} := \{\alpha \in E_q \mid \alpha^n = \overline{\lambda_1 \lambda_2^{-1}}, \lambda_i \in \text{Spec } C_i\}$  et  $\mathcal{U}_{C_1, C_2; n}$  le recouvrement par les  $U_\alpha = E_q \setminus \{-\alpha\}$  pour  $\alpha \in E_q \setminus \Sigma_{C_1, C_2; n}$ . Si  $M_0$  est le module pur associé à  $A_{C_1, C_2; 0}$  alors  $\Lambda_{C_1, C_2; n} \simeq \Lambda(M_0)$ ,  $\Sigma_{C_1, C_2; n} = \Sigma(M_0)$  et  $\mathcal{U}_{C_1, C_2; n} = \mathcal{U}_{M_0}$  pour les notations de 1.4. On a alors nos espaces  $H^1(\mathcal{U}_{C_1, C_2; n}, \Lambda_{C_1, C_2; n})$  et  $H^1(E_q, \Lambda_{C_1, C_2; n}) \simeq \mathcal{F}(C_1 z^{\mu_1}, C_2 z^{\mu_2})$ .

Passons aux cocycles privilégiés. Pour tout  $U \in M_{r_1, r_2}(K_{\mu_1}^{\mu_2})$  et tout  $\alpha \in E_q \setminus \Sigma_{C_1, C_2; n}$  il existe une unique matrice  $F_\alpha^U$  de fonctions méromorphes sur  $\mathbb{C}^*$  solution

de  $z^n C_1^{-1} \sigma_q(F) C_2 - F = z^{-\mu_1} C_1^{-1} U$  telle que  $\text{div}_{E_q}(F_\alpha^U) \geq -n[-\alpha]$ . On définit alors pour  $\alpha, \beta \in E_q \setminus \Sigma_{C_1, C_2; n}$

$$F_{\alpha\beta}^U := F_\alpha^U - F_\beta^U \in \Lambda_{C_1, C_2; n}(U_\alpha \cap U_\beta)$$

telle que  $\text{div}_{E_q}(F_{\alpha\beta}^U) \geq -n[-\alpha] - n[-\beta]$ . On note alors  $Z_{pr}^1(\mathcal{U}_{C_1, C_2; n}, \Lambda_{C_1, C_2; n})$  l'ensemble des cocycles privilégiés  $(F_{\alpha\beta}^U)_{\alpha, \beta}$  pour  $U$  parcourant  $M_{r_1, r_2}(K_{\mu_1}^{\mu_2})$ . Il est en bijection avec  $\mathcal{F}(C_1 z^{\mu_1}, C_2 z^{\mu_2})$ . La structure d'espace vectoriel induite par cette bijection est la structure naturelle déduite de celle de  $M_{r_1, r_2}(\mathcal{M}(\mathbb{C}^*))$ .

Encore une fois la projection

$$Z_{pr}^1(\mathcal{U}_{C_1, C_2; n}, \Lambda_{C_1, C_2; n}) \longrightarrow E'_{\alpha, \beta; C_1, C_2; n}$$

est un isomorphisme pour  $\alpha, \beta \in E_q \setminus \Sigma_{C_1, C_2; n}$  où

$$E'_{\alpha, \beta; C_1, C_2; n} := \left\{ F \text{ méromorphe sur } \mathbb{C}^* \mid \begin{array}{l} z^n C_1^{-1} \sigma_q(F) C_2 = F, \\ \text{div}_{E_q}(F) \geq -n[-\alpha] - n[-\beta] \end{array} \right\}.$$

Nous cherchons donc à déterminer les  $F \in M_{r_1, r_2}(\mathcal{M}(\mathbb{C}^*))$  vérifiant  $\sigma_q(F) = z^{-n} C_1 F C_2^{-1}$  telles que  $\text{div}_{E_q} F \geq -n[-\alpha] - n[-\beta]$  sous une forme explicite en prenant  $a, b$  tels que  $\bar{a} = \alpha, \bar{b} = \beta$ . Cherchons  $F$  sous la forme

$$F := \frac{1}{\theta_a^n \theta_b^n} G$$

avec  $G$  holomorphe sur  $\mathbb{C}^*$ .  $G$  vérifie alors

$$\sigma_q(G) = \frac{z^n}{a^n b^n} C_1 G C_2^{-1}$$

ce qui nous donne un isomorphisme entre  $E'_{\alpha, \beta; C_1, C_2; n}$  et l'espace

$$E_{a, b; C_1, C_2; n} := \left\{ G \in M_{r_1, r_2}(\mathcal{O}(\mathbb{C}^*)) \mid \sigma_q(G) = \frac{1}{a^n b^n} z^n C_1 G C_2^{-1} \right\}.$$

Prenons alors  $G = \sum_{k \in \mathbb{Z}} G_k z^k \in E_{a, b; C_1, C_2; n}$ ; l'équation fonctionnelle nous donne alors

$$q^k G_k = \frac{1}{a^n b^n} C_1 G_{k-n} C_2^{-1}$$

Choisir un tel  $G$  revient donc à choisir  $G_0, \dots, G_{n-1} \in M_{r_1, r_2}(\mathbb{C})$  et on a donc bien un espace de dimension  $r_1 r_2 n$  et un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \Phi : & (M_{r_1, r_2}(\mathbb{C}))^n & \longrightarrow E_{a, b; C_1, C_2; n} \\ & \underline{G} = (G_0, \dots, G_{n-1}) & \longmapsto G. \end{array}$$



### 3.2.2 Construction du fibré

Posant  $\mu_1, \mu_2, r_1, r_2$ , nous allons maintenant construire le fibré  $p : E \rightarrow GL_{r_1}(\mathbb{C}) \times GL_{r_2}(\mathbb{C})$  de fibre  $E_{a,b;C_1,C_2;n} \simeq \mathcal{F}(C_1 z^{\mu_1}, C_2 z^{\mu_2})$  en  $(C_1, C_2)$ , et ceci de manière très similaire à ce qui a été fait précédemment.

Définissons tout d'abord pour  $a, b \in \mathbb{C}^*$ ,  $\bar{a} \neq \bar{b}$

$$W_{a,b;n}^{r_1,r_2} := \{(C_1, C_2) \in GL_{r_1}(\mathbb{C}) \times GL_{r_2}(\mathbb{C}) \mid \bar{a}, \bar{b} \notin \Sigma_{C_1, C_2; n}\}.$$

Ces ouverts forment un recouvrement de  $GL_{r_1}(\mathbb{C}) \times GL_{r_2}(\mathbb{C})$ . Nous voulons regarder un élément de  $p^{-1}(W_{a,b;n}^{r_1,r_2})$  comme un  $n+2$ -uplet  $(C_1, C_2, \underline{G}) \in W_{a,b;n}^{r_1,r_2} \times M_{r_1,r_2}(\mathbb{C})^n$  associé au Stokes  $\frac{1}{\theta_a^n \theta_b^n} \Phi(\underline{G})$ . Nous avons donc notre isomorphisme de trivialisations

$$h_{a,b} : p^{-1}(W_{a,b;n}^{r_1,r_2}) \xrightarrow{\sim} W_{a,b;n}^{r_1,r_2} \times M_{r_1,r_2}(\mathbb{C})^n.$$

Définissons maintenant les changements de cartes  $h_{d,e} \circ h_{a,b}^{-1}$ . Soit  $(C_1, C_2, \underline{G}) \in W_{a,b;n}^{r_1,r_2} \cap W_{d,e;n}^{r_1,r_2} \times M_{r_1,r_2}(\mathbb{C})^n$ , on lui associe la fonction  $F_{\bar{a}\bar{b}} := \frac{1}{\theta_a^n \theta_b^n} \Phi(\underline{G})$  qui est associée à un cocycle privilégié  $(F_{\alpha\beta})_{\alpha\beta}$ ; on prend ensuite le projeté  $F_{\bar{d}\bar{e}} = \frac{1}{\theta_d^n \theta_e^n} G'$  ce qui nous donne un élément  $(C_1, C_2, \Phi^{-1}(G'))$  dans la seconde carte. Reste à vérifier que c'est bien un changement de cartes.

$F_{\bar{a}\bar{b}}$  s'écrit sous la forme  $F_{\bar{a}} - F_{\bar{b}} = \frac{1}{\theta_a^n} \varphi - \frac{1}{\theta_b^n} \psi$ . Il existe un unique  $U = \sum_{i=0}^{n-1} U_i z^{\mu_1+i} \in M_{r_1,r_2}(K_{\mu_1}^{\mu_2})$  tel que  $F_{\bar{a}}$  et  $F_{\bar{b}}$  vérifient  $z^n C_1^{-1} \sigma_q(F) C_2 - F = z^{-\mu_1} C_1^{-1} U$ .  $\varphi$  vérifie alors

$$a^n \mathfrak{L}_{C_1^{-1}, C_2^{-1}}(\varphi(qz)) = \varphi + z^{-\mu_1} C_1^{-1} U \theta_a^n$$

où  $\mathfrak{L}_{U,V}(X) = UXV^{-1}$ , ce qui se traduit par

$$\left( a^n q^k \mathfrak{L}_{C_1^{-1}, C_2^{-1}} - Id \right) \varphi_k = C_1^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} t_{a,n;k-i} U_i.$$

Or  $\left( a^n q^k \mathfrak{L}_{C_1^{-1}, C_2^{-1}} - Id \right) \varphi_k = \left( a^n q^k C_1^{-1} \varphi_k - \varphi_k C_2^{-1} \right) C_2$  donc  $a^n q^k \mathfrak{L}_{C_1^{-1}, C_2^{-1}} - Id$  est inversible si et seulement si  $X \mapsto a^n q^k C_1^{-1} X - X C_2^{-1}$  est inversible, *i.e.* si et seulement si (lemme A.1.1)  $a^n \neq \lambda_1 \lambda_2^{-1}$  pour  $\lambda_s \in \text{Spec } C_s$ , ce qui est assuré par la définition de  $\Sigma_{C_1, C_2; n}$ . Donc

$$\varphi_k = \left( a^n q^k \mathfrak{L}_{C_1^{-1}, C_2^{-1}} - Id \right)^{-1} \left( C_1^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} t_{a,n;k-i} U_i \right).$$

On en déduit alors

$$[\varphi \theta_b^n]_k = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{l \in \mathbb{Z}} t_{a,n;l-i} t_{b,n;k-l} \left( a^n q^l \mathfrak{L}_{C_1^{-1}, C_2^{-1}} - Id \right)^{-1} (C_1^{-1} U_i)$$

et donc, notant

$$K_{a,b;C_1,C_2;n}^{k,i} := \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left[ (t_{a,n;l-i} t_{b,n;k-l}) (a^n q^l \mathfrak{L}_{C_1^{-1}, C_2^{-1}} - Id)^{-1} - (t_{b,n;l-i} t_{a,n;k-l}) (b^n q^l \mathfrak{L}_{C_1^{-1}, C_2^{-1}} - Id)^{-1} \right] C_1^{-1},$$

on obtient pour  $k = 0, \dots, n-1$

$$[\varphi \theta_b^n - \psi \theta_a^n]_k = \sum_{i=0}^{n-1} K_{a,b;C_1,C_2;n}^{k,i} U_i$$

d'où

$$G_k = \sum_{i=0}^{n-1} K_{a,b;C_1,C_2;n}^{k,i} U_i$$

et on note alors

$$L_{a,b;C_1,C_2;n}(U_0, \dots, U_{n-1}) := (G_k)_k = \underline{G}.$$

Comme encore une fois  $G$  n'est nulle que si  $U$  est nul on en déduit que  $L_{a,b;C_1,C_2;n} : M_{r_1,r_2}(\mathbb{C})^n \rightarrow M_{r_1,r_2}(\mathbb{C})^n$  est inversible et

$$\Phi^{-1}(G') = L_{d,e;C_1,C_2;n} \circ L_{a,b;C_1,C_2;n}^{-1}(\underline{G}).$$

**En résumé.** On a créé un fibré vectoriel  $p : E \rightarrow GL_{r_1}(\mathbb{C}) \times GL_{r_2}(\mathbb{C})$  muni des trivialisations locales suivantes : pour tous  $a, b \in \mathbb{C}^*$  tels que  $\bar{a} \neq \bar{b}$  on définit la carte  $(W_{a,b;n}^{r_1,r_2}, h_{a,b})$  par

$$W_{a,b;n}^{r_1,r_2} := \{(C_1, C_2) \in GL_{r_1}(\mathbb{C}) \times GL_{r_2}(\mathbb{C}) \mid \bar{a}, \bar{b} \notin \Sigma_{C_1, C_2; n}\}$$

où  $h_{a,b} : p^{-1}(W_{a,b;n}^{r_1,r_2}) \rightarrow W_{a,b;n}^{r_1,r_2} \times M_{r_1,r_2}(\mathbb{C})^n$  est telle que, pour  $d, e \in \mathbb{C}^*$  tels que  $\bar{d} \neq \bar{e}$ ,  $h_{d,e} \circ h_{a,b}^{-1}$  envoie  $(C_1, C_2, \underline{G}) \in W_{a,b;n}^{r_1,r_2} \cap W_{d,e;n}^{r_1,r_2} \times M_{r_1,r_2}(\mathbb{C})^n$  (où  $\underline{G}$  est vu comme la section  $\frac{1}{\theta_a^n \theta_b^n} \Phi(\underline{G})$  du faisceau  $\Lambda_{C_1, C_2, n}$  sur  $E_q \setminus \{-\bar{a}, -\bar{b}\}$ ) sur  $(C_1, C_2, L_{d,e;C_1,C_2;n} \circ L_{a,b;C_1,C_2;n}^{-1}(\underline{G}) =: \underline{G}')$  (où  $\underline{G}'$  est vu comme la section  $\frac{1}{\theta_a^n \theta_b^n} \Phi(\underline{G}')$  du faisceau  $\Lambda_{C_1, C_2, n}$  sur  $E_q \setminus \{-\bar{d}, -\bar{e}\}$ ) avec  $L_{d,e;C_1,C_2;n} \circ L_{a,b;C_1,C_2;n}^{-1} \in GL_n(M_{r_1,r_2}(\mathbb{C}))$ , soit

$$\begin{array}{ccc} W_{a,b;n}^{r_1,r_2} \times M_{r_1,r_2}(\mathbb{C})^n & \xleftarrow[\sim]{h_{a,b}} & p^{-1}(W_{a,b;n}^{r_1,r_2}) \\ & \searrow pr_1 & \downarrow p \\ & & W_{a,b;n}^{r_1,r_2} \end{array}$$

et en notant  $U_{a,b,d,e;n}^{r_1,r_2} := W_{a,b;n}^{r_1,r_2} \cap W_{d,e;n}^{r_1,r_2}$  :

$$\begin{array}{ccccc} U_{a,b,d,e;n}^{r_1,r_2} \times M_{r_1,r_2}(\mathbb{C})^n & \xleftarrow[\sim]{h_{a,b}} & p^{-1}(U_{a,b,d,e;n}^{r_1,r_2}) & \xrightarrow[\sim]{h_{d,e}} & U_{a,b,d,e;n}^{r_1,r_2} \times M_{r_1,r_2}(\mathbb{C})^n \\ & \searrow pr_1 & \downarrow p & \swarrow pr_1 & \\ & & U_{a,b,d,e;n}^{r_1,r_2} & & \end{array}$$

### 3.2.3 Actions et quotient

Nous allons à nouveau tenter de poser une action sur notre fibré qui découlera des isomorphismes de gradués ; c'est-à-dire que pour chaque couple d'isomorphismes de modules purs (à pentes entières)  $(f_i : C_i z^{\mu_i} \rightarrow C'_i z^{\mu_i})_{i=1,2}$  nous en déduirons un morphisme  $(f_1 \oplus f_2)_* : \mathcal{F}(C_1 z^{\mu_1}, C_2 z^{\mu_2}) \rightarrow \mathcal{F}(C'_1 z^{\mu_1}, C'_2 z^{\mu_2})$  que nous tenterons de généraliser à  $E$  tout entier.

Soit  $P$  un module pur de pente  $\mu \in \mathbb{Z}$  de rang  $r$  ; on peut lui associer la matrice  $Cz^\mu$  pour un  $C \in GL_r(\mathbb{C})$ . De plus une telle matrice peut être choisie de manière à ce que toutes les valeurs propres de  $C$  soient dans la couronne fondamentale  $C_q := \{z \in \mathbb{C} | 1 \leq |z| < |q|\}$  et elle est alors unique à conjugaison (dans  $GL_r(\mathbb{C})$ ) près (voir 1.3). Ceci nous montre qu'il y a trois "types" d'isomorphismes que nous pouvons utiliser :

1. Tout d'abord ce qui était appelé précédemment les "dilatations de coefficients" : les isomorphismes qui dilatent les valeurs propres  $\lambda$  de  $\mathbb{C}$  dans les  $q$ -spirales  $\lambda q^{\mathbb{Z}}$ .
2. Ensuite les conjugaisons des matrices  $C$  ; ceci n'a pas d'équivalent dans le cas précédent puisque les classes de conjugaison de  $\mathbb{C}^*$  sont réduites à un élément.
3. Enfin les automorphismes de modules purs (*i.e* les conjugaisons laissant la matrice invariante, soit les commutants).

Les deux premiers types d'isomorphismes induisent une bijection entre les espaces de classe associés ; ce seront nos actions "agissant sur la base" qui nous donneront un fibré équivariant. Le troisième "agit sur la fibre" puisqu'il identifie entre elles des classes différentes d'un même  $\mathcal{F}(P_1, P_2)$ .

Un problème qui apparaît alors est que le calcul des transformations de jauge associées à de tels isomorphismes dépend fortement du module pur choisi ; il devient donc difficile dans le cas où un  $r_i > 1$  de choisir une transformation de jauge qui réalisera un isomorphisme pour toutes les matrices  $C_1 z^{\mu_1} \oplus C_2 z^{\mu_2}$ . Nous devons donc trouver un sous-ensemble "générique" de  $GL_{r_1}(\mathbb{C}) \times GL_{r_2}(\mathbb{C})$  tel que tous les isomorphismes dilatant les valeurs propres, toutes les conjugaisons et tous les automorphismes aient respectivement la même forme. Un bon candidat est  $\mathbb{D}_{r_1} \times \mathbb{D}_{r_2}$  où pour  $r \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{D}_r := \{D \in GL_r(\mathbb{C}) | D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r), \overline{\lambda_i} \neq \overline{\lambda_j} \forall i \neq j\}$$

En effet prenons une matrice  $D \in \mathbb{D}_r$ . Dilater une valeur propre revient ici juste à multiplier par un  $q^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  un des éléments de la diagonale. Pour réaliser ceci il

suffit d'utiliser comme transformations les matrices de cisaillement de la forme

$$S_i := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & z & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

pour  $1 \leq i \leq r$ , où le  $z$  est sur la  $i$ ème ligne : c'est la matrice qui va envoyer la  $i$ ème valeur propre  $\lambda_i$  de  $D$  sur  $q\lambda_i$ . L'ensemble des telles transformations seront donc données par les produits

$$S_{\underline{j}} := S_1^{j_1} \dots S_r^{j_r} = \begin{pmatrix} z^{j_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & z^{j_i} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & z^{j_r} \end{pmatrix}$$

où  $\underline{j} = (j_1, \dots, j_r) \in \mathbb{Z}^r$ .

L'ensemble de ces matrices forme un sous-groupe commutatif de  $Gl_r(K)$  isomorphe à  $(q^{\mathbb{Z}})^r$  (que l'on peut donc voir comme une représentation matricielle sur  $K$  de  $(q^{\mathbb{Z}})^r$ ).

Les conjugaisons (ne laissant pas la matrice invariante - identité mise à part) sont quant à elles réduites aux permutations de valeurs propres sur les matrices diagonales. Le seul problème qui aurait pu se poser est s'il y avait deux valeurs propres identiques, mais ceci est réglé même après action du  $(q^{\mathbb{Z}})^r$  grâce à l'hypothèse de non résonance forte ( $\overline{\lambda_i} \neq \overline{\lambda_j}$ ). Les transformations associées seront les matrices de permutations engendrées par les  $P_{ij} = (p_{k,l})_{k,l}$  où

$$p_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \neq i, j \text{ ou } k = j, l = i \text{ ou } k = i, l = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ces matrices forment un sous-groupe non commutatif isomorphe au groupe symétrique  $\mathcal{S}_r$  (c'est donc encore une fois une représentation matricielle de  $\mathcal{S}_r$ ). On notera  $P_\sigma$  la matrice associée à une permutation  $\sigma$ .

Enfin les automorphismes de modules purs sont donnés par les commutants de  $\mathbb{D}_r$ , soit les matrices diagonales à coefficients dans  $\mathbb{C}^*$  (encore une fois la non résonance des valeurs propres intervient ici, à la fois pour avoir des commutants simples et identiques pour chaque matrice de la base). C'est donc une représentation matricielle de  $(\mathbb{C}^*)^r$ , et on notera  $K_{k_1, \dots, k_r}$  ou  $K_{\underline{k}}$  la matrice diagonale dont les valeurs propres sont les  $k_i$ , avec  $\underline{k} = (k_1, \dots, k_r)$ .

On peut noter une certaine commutation entre les différentes matrices précitées :

1.  $K_{\underline{k}}S_{\underline{i}} = S_{\underline{i}}K_{\underline{k}}$
2.  $S_{\underline{i}}P_{\sigma} = P_{\sigma}S_{\sigma(\underline{i})}$
3.  $K_{\underline{k}}P_{\sigma} = P_{\sigma}K_{\sigma(\underline{k})}$ .

Notons alors  $(q^{\mathbb{Z}})^r \rtimes \mathcal{S}_r \rtimes (\mathbb{C}^*)^r$  le groupe (multiplicatif) dont l'ensemble sous-jacent est  $(q^{\mathbb{Z}})^r \times \mathcal{S}_r \times (\mathbb{C}^*)^r$  et dont la loi est donnée par

$$(q^{\underline{i}}, \sigma, \underline{k}).(q^{\underline{j}}, \sigma', \underline{l}) = (q^{\sigma'(\underline{i})+\underline{j}}, \sigma \circ \sigma', \underline{k}.\sigma^{-1}(\underline{l}))$$

où l'addition et la multiplication des multi-indices sont l'addition et la multiplication terme à terme.

On a donc une représentation de groupe

$$\begin{aligned} (q^{\mathbb{Z}})^r \rtimes \mathcal{S}_r \rtimes (\mathbb{C}^*)^r &\longrightarrow GL_r(K) \\ (q^{\underline{i}}, \sigma, \underline{k}) &\longmapsto K_{\underline{k}}.P_{\sigma}.S_{\underline{i}} \end{aligned}$$

qui de plus est fidèle.

Notons alors  $G_r$  l'image de cette représentation,  $G_r^b$  le sous-groupe de  $G_r$  image de  $(q^{\mathbb{Z}})^r \rtimes \mathcal{S}_r \rtimes \{1\}^r$  (groupe "agissant sur la base") et  $G_r^f$  le sous-groupe de  $G_r$  image de  $\{q^0\}^r \rtimes \{id\} \rtimes (\mathbb{C}^*)^r$  (groupe "agissant sur la fibre"). On a  $G_r = G_r^b.G_r^f = G_r^f.G_r^b$ . Comme chacune des représentations associées est fidèle, nous confondrons souvent le groupe de base et son image, tout comme chacune des actions engendrées.

### Action sur la base

Nous étudierons donc désormais le fibré  $p_1 : E_1 \longrightarrow \mathbb{D}_{r_1} \times \mathbb{D}_{r_2}$  qui est notre fibré restreint à  $\mathbb{D}_{r_1} \times \mathbb{D}_{r_2}$ .

**Quotient de la base.** La base de notre fibré vectoriel restreint est donc  $\mathbb{D}_{r_1} \times \mathbb{D}_{r_2}$  et nous avons donc dessus une action de  $G_{r_1} \times G_{r_2}$ . Regardons l'effet de l'action sur notre base et le quotient qui en découle.

Le groupe  $(\mathbb{C}^*)^{r_i}$ , symbolisant les automorphismes des fibrés, *i.e.* les commutants des matrices de  $\mathbb{D}_{r_i}$ , n'a aucun effet sur la base (les actions sont triviales) ; il n'agira que sur les fibres (en les réduisant) : nous n'avons donc à étudier que l'action de  $G_{r_1}^b \times G_{r_2}^b$ .

L'action de  $(q^{\mathbb{Z}})^{r_i}$  est l'équivalent des actions de  $q^{\mathbb{Z}}$  précédentes : elle dilate les valeurs propres par multiplication par des  $q^i$ . Le quotient des  $\mathbb{D}_{r_i}$  par cette action donne les

$$\mathbb{D}_{r_i}(E_q) := \{D \in GL_{r_i}(E_q) \mid D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_r), \alpha_i \neq \alpha_j \forall i \neq j\}$$

groupe des matrices diagonales de taille  $r_i$  de  $E_q$  à valeurs propres de multiplicité 1 et isomorphe à  $E_q^{r_i} \setminus \Delta$  où  $\Delta$  est l'ensemble des  $r_i$ -uplets ayant deux éléments identiques (on obtient l'espace des configurations de  $r_i$  points ordonnés).

Enfin l'action de  $\mathcal{S}_{r_i}$  impose une commutativité entre les différentes valeurs propres : peut importe l'ordre dans lequel on les prend. Notre quotient est donc l'espace des configurations de  $r_i$  points (non ordonnés) de  $E_q$ , soit  $C_{r_i}E_q$ , que l'on peut voir comme l'ensemble des sous-ensembles de  $E_q$  à exactement  $r_i$  éléments.

Le quotient total de la base est donc  $C_{r_1}E_q \times C_{r_2}E_q$ . Notons  $\pi' : \mathbb{D}_{r_1} \times \mathbb{D}_{r_2} \longrightarrow C_{r_1}E_q \times C_{r_2}E_q$  la projection canonique.

**Action au dessus : partie "agissant sur la base".** Regardons maintenant l'action sur le fibré : tout d'abord l'action des groupes  $(q^{\mathbb{Z}})^{r_1} \times (q^{\mathbb{Z}})^{r_2}$  et  $\mathcal{S}_{r_1} \times \mathcal{S}_{r_2}$ , soit les groupes agissant sur la base et identifiant les fibres entre elles (et nous permettant de garder des fibres isomorphes à  $M_{r_1, r_2}(\mathbb{C})^n$ ).

L'action de  $(q^i, q^j) \in (q^{\mathbb{Z}})^{r_1} \times (q^{\mathbb{Z}})^{r_2}$  sur  $\begin{pmatrix} D_1 z^{\mu_1} & U \\ 0 & D_2 z^{\mu_2} \end{pmatrix}$  avec  $D_i \in \mathbb{D}_{r_i}$  est donc donnée par transformation de jauge par la matrice  $S_{\underline{i}} \oplus S_{\underline{j}}$ , ce qui nous donne

$$\begin{pmatrix} D'_1 z^{\mu_1} & \sigma_q(S_{\underline{i}}) U S_{-\underline{j}} =: U' \\ 0 & D'_2 z^{\mu_2} \end{pmatrix}$$

où si  $D_1 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{r_1})$  alors  $D'_1 = \text{diag}(q^{i_1} \lambda_1, \dots, q^{i_{r_1}} \lambda_{r_1})$  (et de même pour  $D'_2$ ). Un élément  $u_{k,l}$  de  $U$  devient alors  $q^{i_k} z^{i_k - j_l} u_{k,l}$ . Il existe alors un unique  $V \in M_{r_1, r_2}(K_{\mu_1}^{\mu_2})$  tel que la matrice ci-dessus soit équivalente à  $A_{D'_1, D'_2; V}$ . Notons  $V =: \rho_{\underline{i}, \underline{j}}^q(U)$ .

Dans une carte  $W_{a,b;n}^{r_1, r_2}$  notre action se traduit alors par

$$\begin{aligned} (q^i, q^j). (D_1, D_2, \underline{G}) &= (D'_1, D'_2, L_{a,b; D'_1, D'_2; n} \circ \rho_{\underline{i}, \underline{j}}^q(U)) \\ &= (D'_1, D'_2, L_{a,b; D'_1, D'_2; n} \circ \rho_{\underline{i}, \underline{j}}^q \circ L_{a,b; D_1, D_2; n}^{-1}(\underline{G})). \end{aligned}$$

La commutation aux cartes se vérifie de la manière habituelle.

L'action de  $(P, Q) \in \mathcal{S}_{r_1} \times \mathcal{S}_{r_2}$  (dans le sens où  $P$  et  $Q$  sont deux matrices de permutations quelconques) sur  $A_{D_1, D_2; U}$  est donc donnée par conjugaison de la matrice  $P \oplus Q$ , ce qui nous donne

$$\begin{pmatrix} \tilde{D}_1 z^{\mu_1} & P U Q^{-1} \\ 0 & \tilde{D}_2 z^{\mu_2} \end{pmatrix}$$

où, en notant  $\sigma_P$  la permutation associée à  $P$  et  $\sigma_Q$  celle associée à  $Q$ , on note  $\tilde{D}_1$  la matrice dont la diagonale est donnée par  $(\lambda_{\sigma_P(1)}, \dots, \lambda_{\sigma_P(r_1)})$  et de même pour  $\tilde{D}_2$ .

Alors  $U = (u_{k,l})_{k,l}$  devient par cet isomorphisme  $U' := PUQ^{-1} = (u_{\sigma_P(k), \sigma_Q(l)})_{k,l} \in M_{r_1, r_2}(K_{\mu_1}^{\mu_2})$  (comme c'est une conjugaison constante on ne sort pas de  $K_{\mu_1}^{\mu_2}$ ). Notons  $U' =: \rho_{\sigma_P, \sigma_Q}^S(U)$ .

Dans une carte  $W_{a,b;n}^{r_1, r_2}$  notre action se traduit alors par

$$\begin{aligned} (\sigma_P, \sigma_Q).(D_1, D_2, \underline{G}) &= (\tilde{D}_1, \tilde{D}_2, L_{a,b;\tilde{D}_1, \tilde{D}_2;n} \circ \rho_{\sigma_P, \sigma_Q}^S(U)) \\ &= (\tilde{D}_1, \tilde{D}_2, L_{a,b;\tilde{D}_1, \tilde{D}_2;n} \circ \rho_{\sigma_P, \sigma_Q}^S \circ L_{a,b;D_1, D_2;n}^{-1}(\underline{G})). \end{aligned}$$

Rappelons que

$$L_{a,b;D_1, D_2;n}(U) = \left( \sum_{i=0}^{n-1} K_{a,b;D_1, D_2;n}^{k,i} U_i \right)_{k=0, \dots, n-1}$$

avec

$$\begin{aligned} K_{a,b;D_1, D_2;n}^{k,i} &:= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left[ (t_{a,n;l-i} t_{b,n;k-l}) (a^n q^l L_{D_1^{-1}, D_2^{-1}} - Id)^{-1} \right. \\ &\quad \left. - (t_{b,n;l-i} t_{a,n;k-l}) (b^n q^l L_{D_1^{-1}, D_2^{-1}} - Id)^{-1} \right] D_1^{-1}. \end{aligned}$$

Comme  $\tilde{D}_1 P = P D_1$  et  $\tilde{D}_2 Q = Q D_2$  et  $(AB = BA) \Rightarrow (AB^{-1} = B^{-1}A)$  on en déduit que :

$$L_{a,b;\tilde{D}_1, \tilde{D}_2;n}(PUQ^{-1}) = P.L_{a,b;D_1, D_2;n}(U)Q^{-1}$$

et donc

$$(\sigma_P, \sigma_Q).(D_1, D_2, \underline{G}) = (\tilde{D}_1, \tilde{D}_2, P\underline{G}Q^{-1}).$$

L'action totale du groupe *agissant sur la base*  $((q^{\mathbb{Z}})^{r_1} \times \mathcal{S}_{r_1}) \times ((q^{\mathbb{Z}})^{r_2} \times \mathcal{S}_{r_2}) \simeq G_{r_1}^b \times G_{r_2}^b$  est alors donnée par

$$((q^i, \sigma_P), (q^j, \sigma_Q)).(D_1, D_2, \underline{G}) = (\tilde{D}'_1, \tilde{D}'_2, L_{a,b;\tilde{D}'_1, \tilde{D}'_2;n} \circ \rho_{\sigma_P, \sigma_Q}^S \circ \rho_{i,j}^q \circ L_{a,b;D_1, D_2;n}^{-1}(\underline{G})).$$

Comme les transformations de jauge associées forment des isomorphismes entre les espaces de classes associés cette action identifie linéairement les fibres entre elles : notre fibré  $p|$  muni de l'action de  $G_{r_1}^b \times G_{r_2}^b$  est bien un fibré équivariant.

**Quotient du fibré par l'action partielle.** Construisons désormais un fibré quotient *partiel*  $\tilde{p}| : \tilde{E}| \rightarrow C_{r_1} E_q \times C_{r_2} E_q$  qui sera le fibré quotient de  $p| : E| \rightarrow \mathbb{D}_{r_1} \times \mathbb{D}_{r_2}$  par  $G_{r_1}^b \times G_{r_2}^b$  et tel que le diagramme suivant soit cartésien :

$$\begin{array}{ccc} E| & \xrightarrow{\tilde{\pi}'} & \tilde{E}| \\ p| \downarrow & \lrcorner & \downarrow \tilde{p}| \\ \mathbb{D}_{r_1} \times \mathbb{D}_{r_2} & \xrightarrow{\pi'} & C_{r_1} E_q \times C_{r_2} E_q \end{array}$$

*i.e.* tel que  $E|_1 = (\pi')^* \tilde{E}|_1$  soit le tiré en arrière de  $\tilde{E}|_1$  par  $\pi'$ .

Plaçons-nous sur un  $W_{a,b;n}^{r_1,r_2}$ . On peut définir le quotient

$$\begin{aligned} p_1^{-1}(W_{a,b;n}^{r_1,r_2})/e &\sim (q^i, q^j).e \\ &\simeq (W_{a,b;n}^{r_1,r_2} \times M_{r_1,r_2}(\mathbb{C})^n)/(D_1, D_2, \underline{G}) \sim (q^i, \sigma_P, q^j, \sigma_Q).(D_1, D_2, \underline{G}). \end{aligned}$$

C'est un fibré au dessus de  $(W_{a,b;n}^{r_1,r_2})/G_{r_1}^b \times G_{r_2}^b$ .

En effet une trivialisaton de  $C_r E_q$  peut être donnée par les  $U_{\varepsilon_1} \times \cdots \times U_{\varepsilon_r}/\mathcal{S}_r$  pour  $\varepsilon_i \in \{1; 2\}$  qui sont des ouverts pour la topologie quotient de  $C_r E_q \simeq (E_q^r \setminus \Delta)/\mathcal{S}_r$ . Au dessus d'un de ces ouverts chaque classe du quotient possède un unique représentant  $(D_1, D_2, \underline{G})$  où  $D_1 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_2}, \dots, \lambda_{r_1})$  est telle que les  $\lambda_1, \dots, \lambda_{i_1}$  soient des éléments de  $V_1 \setminus V_2$  rangés dans un ordre total donné de  $\mathbb{C}^*$ , les  $\lambda_{i_1+1}, \dots, \lambda_{i_2}$  soient des éléments de  $V_2 \setminus V_1$  rangés dans le même ordre et qu'enfin les  $\lambda_{i_2+1}, \dots, \lambda_{r_1}$  soient des éléments de  $V_1 \cap V_2$  rangés dans l'ordre donné; on fait de même pour  $D_2$ .

Comme l'action de  $G_{r_1}^b \times G_{r_2}^b$  sur  $E|_1$  est bien définie (passe aux cartes) on peut recoller ces fibrés en un fibré  $\tilde{p}_1 : \tilde{E}|_1 \rightarrow C_{r_1} E_q \times C_{r_2} E_q$  avec  $\tilde{E}|_1 = E|_1/G_{r_1}^b \times G_{r_2}^b$  où dans une carte  $\pi(W_{a,b;n}^{r_1,r_2}) \cap U_{\varepsilon_1} \times \cdots \times U_{\varepsilon_{r_1+r_2}}/\mathcal{S}_{r_1} \times \mathcal{S}_{r_2}$  on a  $\tilde{p}_1([D_1, D_2, \underline{G}]) = \pi'(D_1, D_2)$ .

On a donc bien le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E|_1 & \xrightarrow{\pi'} & \tilde{E}|_1 \\ p_1 \downarrow & \circ & \downarrow \tilde{p}_1 \\ \mathbb{D}_{r_1} \times \mathbb{D}_{r_2} & \xrightarrow{\pi'} & C_{r_1} E_q \times C_{r_2} E_q, \end{array}$$

reste à prouver qu'il est cartésien, *i.e.* que  $E|_1 \simeq (\pi')^* \tilde{E}|_1$ . Or  $(\pi')^* \tilde{E}|_1$  est isomorphe dans une carte  $W_{a,b;n}^{r_1,r_2}$  à

$$\begin{aligned} \tilde{E}|_{a,b;n} &:= \{(D_1^*, D_2^*, [D_1, D_2, (G_i)_i]) \in W_{a,b;n}^{r_1,r_2} \times \tilde{p}_1^{-1}(\pi'(W_{a,b;n}^{r_1,r_2})) \\ &\quad | p_{r_s} \circ \pi'(D_1^*, D_2^*) = p_{r_s} \circ \pi'(D_1, D_2)\} \\ &= \{((q^i, \sigma_P).D_1, (q^j, \sigma_Q).D_2, [D_1, D_2, \underline{G}]) \in W_{a,b;n}^{r_1,r_2} \times \tilde{p}_1^{-1}(\pi'(W_{a,b;n}^{r_1,r_2}))\}. \end{aligned}$$

On définit alors les applications

$$\begin{aligned} p_1^{-1}(W_{a,b;n}^{r_1,r_2}) &\longrightarrow \tilde{E}|_{a,b;n} \\ (D_1, D_2, \underline{G}) &\longmapsto (D_1, D_2, [D_1, D_2, (G_i)_i]) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{E}|_{a,b;n} &\longrightarrow p_1^{-1}(W_{a,b;n}^{r_1,r_2}) \\ ((q^i, \sigma_P).D_1, (q^j, \sigma_Q).D_2, [D_1, D_2, \underline{G}]) &\longmapsto ((q^i, \sigma_P).D_1, (q^j, \sigma_Q).D_2, (q^i, \sigma_P, q^j, \sigma_Q).\underline{G}) \end{aligned}$$

qui sont bien réciproques l'une de l'autre.



### Action sur les fibres

Le groupe des automorphismes de l'espace  $\mathbb{D}_1 z^{\mu_1} \oplus \mathbb{D}_2 z^{\mu_2}$  des classes formelles  $D_1 z^{\mu_1} \oplus D_2 z^{\mu_2}$  est isomorphe à  $(\mathbb{C}^*)^{r_1+r_2}$  : c'est un groupe de matrices diagonales de tailles  $r_1 + r_2$  à coefficients dans  $\mathbb{C}^*$ . Il agit donc sur les fibres  $\mathcal{F}(D_1 z^{\mu_1}, D_2 z^{\mu_2})$  de la manière suivante : un élément  $K_{\bar{k}} \oplus K_{\bar{l}}$  agit sur  $A_{D_1, D_2; U}$  en l'envoyant sur  $A_{D_1, D_2; K_{\bar{k}} U K_{\bar{l}}^{-1}}$ . La matrice  $U = (u_{ij})_{i,j} \in M_{r_1, r_2}(K_{\mu_1}^{\mu_2})$  sera donc envoyée sur  $(\frac{k_i}{l_j} u_{ij})_{i,j}$ .

Regardons ce que donne cette action sur les Stokes : soient  $D_1 \in \mathbb{D}_{r_1}$  et  $D_2 \in \mathbb{D}_{r_2}$  et soient  $a, b \in \mathbb{C}^*$  tels que  $\bar{a}, \bar{b} \notin \Sigma_{D_1, D_2; n}$ . Prenons un élément  $U = \sum U_i z^{\mu_1+i-1} \in M_{r_1, r_2}(K_{\mu_1}^{\mu_2})$  et associons-lui les Stokes engendré par  $\underline{G} = L_{a,b; D_1, D_2; n}(U)$ . On peut alors définir l'action sur les Stokes :

$$(\underline{k}, \underline{l}).(D_1, D_2, \underline{G}) = (D_1, D_2, L_{a,b; D_1, D_2; n}(K_{\underline{k}}.L_{a,b; D_1, D_2; n}^{-1}(\underline{G}).K_{\underline{l}}^{-1})).$$

Comme  $D_i K_{\underline{k}} = K_{\underline{k}} D_i$ ,  $L_{D_1^{-1}, D_2^{-1}}.K_{\underline{k}} U_i = K_{\underline{k}}.L_{D_1^{-1}, D_2^{-1}}.U_i$  et  $(AB = BA) \Rightarrow (AB^{-1} = B^{-1}A)$  on en déduit que

$$(\underline{k}, \underline{l}).(D_1, D_2, \underline{G}) = (D_1, D_2, K_{\underline{k}}.\underline{G}.K_{\underline{l}}^{-1}).$$

Les relations de commutation entre les  $K_{\underline{k}}$ ,  $P_\sigma$  et  $S_{\underline{i}}$  nous assurent que cette action passe au quotient, *i.e.* est toujours définie sur  $\tilde{E}$  et est donc donnée dans une carte  $\pi(W_{a,b;n}^{r_1, r_2}) \cap U_{\varepsilon_1} \times \cdots \times U_{\varepsilon_{r_1+r_2}} / \mathcal{S}_{r_1} \times \mathcal{S}_{r_2}$  par

$$(\underline{k}, \underline{l}).[D_1, D_2, \underline{G}] = [D_1, D_2, K_{\underline{k}}.\underline{G}.K_{\underline{l}}^{-1}].$$

## 3.3 Cas de deux modules à pentes arbitraires

Nous allons tenter d'adapter ce qui vient d'être fait dans le cadre de pentes non entières - plus particulièrement dans le cas de deux pentes arbitraires. Nous utiliserons pour cela le travail de Bugeaud dans [Bug12] dont nous reparlerons en 5.1.

### 3.3.1 Mise en place du contexte

Bugeaud a montré en utilisant les isomorphismes  $\mathcal{F}(P_1, P_2) \simeq \text{Ext}(P_2, P_1)$  pour  $P_1, P_2$  modules purs isoclines et  $\text{Ext}(P_2, P_1 \oplus P_1') \simeq \text{Ext}(P_2, P_1) \oplus \text{Ext}(P_2, P_1')$ ,  $\text{Ext}(P_2, P_1) \simeq \text{Ext}(\mathbf{1}, P_2^\vee \otimes P_1)$  que l'on pouvait pour étudier les espaces  $\mathcal{F}(P_1, P_2)$  se ramener à l'étude des  $\mathcal{F}(P, \mathbf{1})$  où  $P$  est un module pur isocline indécomposable.

Pour  $\sigma \in \mathbb{C}^*$ ,  $n \in \mathbb{Z}^*$ ,  $d \in \mathbb{N}^*$  on définit la matrice compagnon de taille  $d \times d$  comme suit :

$$E_{n,d,\sigma} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ \sigma z^n & & & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons de plus

$$U_r := \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \in GL_r(\mathbb{C})$$

le bloc de Jordan unipotent de taille  $r$ .

Les résultats de van der Put et Reversat dans [vdPR07] interprétés (et redémontrés) matriciellement par Bugeaud nous permettent de dire que tout module pur isocline indécomposable admet une représentation matricielle de la forme  $C_\sigma := E_{-n,d,\sigma} \otimes U_r$  où  $n, d$  sont premiers entre eux,  $dr$  est le rang du module,  $\mu := \frac{n}{d}$  est la pente du module et

$$E_{n,d,\sigma} \otimes U_r := \begin{pmatrix} E_{n,d,\sigma} & E_{n,d,\sigma} & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & E_{n,d,\sigma} \\ & & & & E_{n,d,\sigma} \end{pmatrix}.$$

Un élément de  $\mathcal{F}(C_\sigma, 1)$  peut être représenté matriciellement (de manière non unique contrairement au cas des pentes entières!) sous la forme

$$A_{\sigma;W} := \begin{pmatrix} C_\sigma & W \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec  $W \in \left( \sum_{\ell=0}^{n-1} \mathbb{C}z^\ell \right)^{dr}$ . L'ensemble des telles matrices forme un espace vectoriel de dimension  $drn$  tandis que  $\mathcal{F}(C_\sigma, 1)$  est de dimension  $dr(0 - \frac{-n}{d}) = rn$ . On rappelle (voir 1.3 et 5.1) que  $\mathcal{F}(C_\sigma, 1)$  peut être vu comme l'espace des telles matrices  $A_{\sigma,W}$  quotienté par les transformations de jauge tangentes à l'identité  $F \in \mathfrak{G}(K)$ .

Côté descriptions cohomologiques : notons  $\Lambda_\sigma$  le faisceau sur  $E_q$  des solutions méromorphes sur  $\mathbb{C}^*$  de  $\sigma_q F = C_\sigma F$ . Notons de plus  $\Sigma_\sigma := \{\alpha \in E_{q^d} \mid \alpha^n = \bar{\sigma}\}$  où  $\bar{\sigma}$  est la classe de  $\sigma$  dans  $E_{q^d}$ . Définissons  $pr : E_{q^d} \rightarrow E_q$  la surjection qui envoie  $\bar{\alpha}$  sur  $\bar{\alpha}$  et  $\mathcal{U}_\sigma$  le recouvrement de  $E_q$  par les  $U'_\alpha = E_q \setminus pr(\{-\alpha\})$  avec  $\alpha \in E_{q^d} \setminus \Sigma_\sigma$ .

On a alors un isomorphisme  $\mathcal{F}(C_\sigma, 1) \simeq H^1(E_q, \Lambda_\sigma)$  donné par le théorème 3.6 de [Bug12] et réalisé à partir de  $\mathcal{F}(C_\sigma, 1) \rightarrow H^1(\mathcal{W}_\sigma, \Lambda_\sigma)$ .

Passons aux cocycles privilégiés. Pour tout  $W \in (K_0^n)^{dr}$  et tout  $\bar{\alpha} \in E_{q^d} \setminus \Sigma_\sigma$  il existe un unique vecteur de fonctions méromorphes  $F_\alpha^W = (f_i)_{i=1, \dots, dr}$  solution de  $C_\sigma^{-1} \sigma_q(F) - F = C_\sigma^{-1} W$  tel que le vecteur  $F_{\alpha, i}^W = (f_{i+kd})_{k=0, \dots, r-1}$  soit à coefficients méromorphes sur  $\mathbb{C}^*$  avec  $\text{div}_{E_{q^d}} F_{\alpha, i}^W \geq -n[-\alpha q^{-i+1}]$  ([Bug12, prop 3.8], reprise au théorème 5.1.3 avec changement sur la position des pôles). On définit alors pour  $\alpha, \beta \in E_{q^d} \setminus \Sigma_\sigma$

$$F_{\alpha\beta}^W := F_\alpha^W - F_\beta^W \in \Lambda_\sigma(U'_\alpha \cap U'_\beta)$$

et  $F_{\alpha\beta, i}^W$  de la même manière qu'au dessus tels que  $\text{div}_{E_{q^d}} (F_{\alpha\beta, i}^W) \geq -n[-\alpha q^{-i+1}] - n[-\beta q^{-i+1}]$ . On note alors  $Z_{pr}^1(\mathcal{W}_\sigma, \Lambda_\sigma)$  l'ensemble des cocycles privilégiés  $(F_{\alpha\beta}^W)_{\alpha, \beta}$  pour  $W$  parcourant  $(K_0^n)^{dr}$ . Cet ensemble est en bijection avec  $\mathcal{F}(C_\sigma, 1)$ , *i.e.* si on note  $[A_{\sigma, W}]$  la classe de  $A_{\sigma, W}$  dans  $\mathcal{F}(C_\sigma, 1)$  alors si  $[A_{\sigma, W}] = [A_{\sigma, W'}]$  on a  $(F_{\alpha\beta}^W)_{\alpha, \beta} = (F_{\alpha\beta}^{W'})_{\alpha, \beta}$  (cela est décrit dans la preuve du théorème 3.6 de [Bug12]). Ainsi quand les pentes ne sont pas entières l'avantage de l'utilisation des Stokes comme coordonnées plutôt que les matrices en forme normale se voit immédiatement, puisque nous n'avons alors de correspondance bijective qu'avec les premiers.

Nous cherchons donc à donner les  $F = (f_i)_i \in (\mathcal{M}(\mathbb{C}^*))^{dr}$  vérifiant  $\sigma_q(F) = C_\sigma F$  tels que  $\text{div}_{E_{q^d}} F_i \geq -n[-\alpha q^{-i+1}] - n[-\beta q^{-i+1}]$ , où  $F_i = (f_{i+kd})_k$ , sous une forme explicite en prenant  $a, b$  tels que  $\bar{a} = \alpha, \bar{b} = \beta$ . Pour cela on peut voir en utilisant le travail de Bugeaud ou en reprenant la preuve donnée du théorème 5.1.3 qu'il suffit de trouver explicitement  $F_1$  pour en déduire  $F$ . Or  $F_1$  vérifie  $z^n \sigma_q^d F_1 = \sigma U_r^d F_1$  (voir pour cela la preuve du théorème 5.1.3) et  $\text{div}_{E_{q^d}} F_1 \geq -n[-\alpha] - n[-\beta]$ . On cherche  $F_1$  sous la forme

$$F_1 = \frac{1}{\theta_{q^d, a} \theta_{q^d, b}} G$$

avec  $G$  holomorphe sur  $\mathbb{C}^*$ .  $G$  vérifie alors

$$\sigma_q^d(G) = \frac{\sigma z^n}{a^n b^n} U_r^d G.$$

Notons  $E_{a, b; \sigma}$  l'ensemble des  $G$  holomorphes sur  $\mathbb{C}^*$  vérifiant cette équation.

Prenons alors  $G = \sum_{k \in \mathbb{Z}} G_k z^k \in E_{a, b; \sigma}$ ; l'équation fonctionnelle nous donne alors

$$q^{dk} G_k = \frac{\sigma}{a^n b^n} U_r^d G_{k-n}.$$

Choisir un tel  $G$  revient donc à choisir  $G_0, \dots, G_{n-1} \in \mathbb{C}^r$  et on a bien un espace de dimension  $nr$  et un isomorphisme

$$\begin{aligned} \Phi : \quad & (\mathbb{C}^r)^n \longrightarrow E_{a, b; \sigma} \\ & \underline{G} = (G_0, \dots, G_{n-1}) \longmapsto G. \end{aligned}$$

### 3.3.2 Construction du fibré

Posant  $\mu = \frac{-n}{d} \in \mathbb{Q}_{<0}$  et  $r \in \mathbb{N}^*$  nous allons maintenant construire le fibré  $p : E \rightarrow \mathbb{C}^*$  de fibre  $E_{a,b;\sigma} \simeq \mathcal{F}(C_\sigma, \mathbf{1})$  au dessus de  $\sigma$  de manière sempiternellement similaire à ce qui a été fait avant.

Définissons tout d'abord pour  $a, b \in \mathbb{C}^*$ ,  $\bar{a} \neq \bar{b}$

$$W_{a,b} := \{\sigma \in \mathbb{C}^* \mid \bar{a}, \bar{b} \notin \Sigma_\sigma\}.$$

Ces ouverts forment un recouvrement de  $\mathbb{C}^*$ . Nous voulons regarder un élément de  $p^{-1}(W_{a,b})$  comme un  $n + 1$ -uplet  $(\sigma, \underline{G}) \in W_{a,b} \times (\mathbb{C}^r)^n$  associé au Stokes  $\frac{\sigma}{\theta_{q^d,a}\theta_{q^d,b}}\Phi(\underline{G})$  ce qui nous donne notre isomorphisme de trivialisaton

$$h : p^{-1}(W_{a,b}) \xrightarrow{\sim} W_{a,b} \times (\mathbb{C}^r)^n.$$

Définissons maintenant les changements de cartes  $h_{a',b'} \circ h_{a,b}^{-1}$ . Soit  $(\sigma, \underline{G}) \in W_{a,b} \cap W_{a',b'} \times (\mathbb{C}^r)^n$ , on lui associe le vecteur de fonctions  $F_{\bar{a}\bar{b},1}^- := \frac{1}{\theta_{q^d,a}\theta_{q^d,b}}\Phi(\underline{G})$  lui-même associé à un  $F_{\bar{a}\bar{b}}^-$  élément d'un cocycle privilégié  $(F_{\alpha\beta})_{\alpha\beta}$ ; on prend ensuite le projeté  $F_{\bar{a}'\bar{b}'}^-$  puis  $F_{\bar{a}'\bar{b}',1}^- = \frac{1}{\theta_{q^d,a'}\theta_{q^d,b'}}G'$  ce qui donne un élément  $(\sigma, \Phi^{-1}(G'))$  dans la seconde carte. Reste à vérifier que c'est bien un changement de cartes (et à expliciter le tout).

Notons  $F_{\bar{a}\bar{b}}^- := (f_i)_i$  et  $F_{\bar{a}\bar{b},1}^- := (f_{1+kd})_k$ ; alors il existe  $W = \sum_{i=0}^{2n-1} W_i z^i \in \mathbb{C}[z]$  tel que  $F_{\bar{a}\bar{b},1}^-$  s'écrive  $F_{\bar{a}}^- - F_{\bar{b}}^- = \frac{1}{\theta_{q^d,a}}\varphi - \frac{1}{\theta_{q^d,b}}\psi$  où  $F_{\bar{a}}^-$  et  $F_{\bar{b}}^-$  vérifient  $z^n \sigma_q^d(F) - \sigma U_r^d F = W$  (cela se déduit de la preuve du théorème 5.1.3).  $\varphi$  vérifie alors

$$a^n \sigma_q^d(\varphi) - \sigma U_r^d \varphi = W \theta_{q^d,a}$$

soit notant  $\varphi = \sum \varphi_k$

$$\left( q^{kd} a^n I_r - \sigma U_r^d \right) \varphi_k = \sum_{i=0}^{2n-1} [\theta_{q^d,a}]_{k-i} W_i.$$

Comme  $a^n \neq \sigma q^{-kd}$  par l'hypothèse  $a \notin \Sigma_\sigma$ ,  $q^{kd} a^n I_r - \sigma U_r^d$  est inversible et donc

$$\varphi_k = \left( q^{kd} a^n I_r - \sigma U_r^d \right)^{-1} \left( \sum_{i=0}^{2n-1} [\theta_{q^d,a}]_{k-i} W_i \right).$$

On en déduit alors

$$[\varphi \theta_{q^d,b}]_k = \sum_{i=0}^{2n-1} \sum_{l \in \mathbb{Z}} [\theta_{q^d,a}]_{l-i} [\theta_{q^d,b}]_{k-l} \left( q^{kd} a^n I_r - \sigma U_r^d \right)^{-1} W_i$$

et donc, notant

$$K_{a,b;\sigma}^{k,i} := \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left[ [\theta_{q^d,a}]_{l-i} [\theta_{q^d,b}]_{k-l} \left( q^{kd} a^n I_r - \sigma U_r^d \right)^{-1} - [\theta_{q^d,b}]_{l-i} [\theta_{q^d,a}]_{k-l} \left( q^{kd} b^n I_r - \sigma U_r^d \right)^{-1} \right],$$

on obtient pour  $k = 0, \dots, n-1$

$$G_k = [\varphi \theta_{q^d,b} - \psi \theta_{q^d,a}]_k = \sum_{i=0}^{2n-1} K_{a,b;\sigma}^{k,i} W_i$$

et on note alors

$$L_{a,b;\sigma}(W_0, \dots, W_{2n-1}) := (G_k)_k = \underline{G}.$$

Cette fonction linéaire  $L_{a,b;\sigma}$  n'est pas bijective contrairement aux cas précédents mais reste surjective puisque c'est une version explicite de la surjection linéaire

$$\{A_{\sigma,W}\} \longrightarrow Z_{pr}^1(\mathcal{U}_\sigma, \Lambda_\sigma).$$

De plus pour cette même raison elle passe au quotient à gauche et induit même une bijection, *i.e.*  $\bar{L}_{a,b;\sigma} : \mathcal{F}(C_\sigma, 1) \rightarrow Z_{pr}^1(\mathcal{U}_\sigma, \Lambda_\sigma)$  existe et est bijective. Soit alors  $R_{a,b;\sigma}$  une section de  $L_{a,b;\sigma}$ , *i.e.* une application linéaire telle que  $L_{a,b;\sigma} \circ R_{a,b;\sigma} = Id_{(\mathbb{C}^r)^d}$ .

Montrons alors que  $L_{a',b';\sigma} \circ R_{a,b;\sigma}$  est un changement de cartes, *i.e.* est linéaire et bijective.  $R_{a,b;\sigma}$  est injective et envoie 2 éléments différents dans  $(\mathbb{C}^r)^n$  sur deux éléments de  $(\mathbb{C}^r)^{2n-1}$  représentant deux classes différentes de  $\mathcal{F}(C_\sigma, 1)$  (c'est le fait que  $L_{a,b;\sigma}$  passe au quotient) et  $L_{a',b';\sigma}$  passe au quotient donc  $L_{a',b';\sigma} \circ R_{a,b;\sigma}$  est injective. De plus comme  $L_{a',b';\sigma}$  est surjective et a comme antécédents d'un élément de  $(\mathbb{C}^r)^n$  tous les éléments de  $(\mathbb{C}^r)^{2n-1}$  représentant une classe (unique) de  $\mathcal{F}(C_\sigma, 1)$  et comme un représentant de chaque classe est dans l'image de  $R_{a,b;\sigma}$  on sait que  $L_{a',b';\sigma} \circ R_{a,b;\sigma}$  est surjective. Nous avons donc bien un isomorphisme d'espaces vectoriels. On peut aussi remarquer que deux sections  $R_{a,b;\sigma}$  et  $R'_{a,b;\sigma}$  de  $L_{a,b;\sigma}$  vont envoyer un élément de  $(\mathbb{C}^r)^n$  sur des représentants de la même classe et donc que  $L_{a',b';\sigma} \circ R_{a,b;\sigma}$  ne dépend pas de la section  $R_{a,b;\sigma}$  choisie.

On a donc

$$\Phi^{-1}(G') = L_{a',b';\sigma} \circ R_{a,b;\sigma}(\underline{G})$$

**En résumé.** On a construit un fibré vectoriel  $p : E \rightarrow \mathbb{C}^*$  muni des trivialisations locales suivantes : pour tous  $a, b$  tels que  $\bar{a} \neq \bar{b}$  dans  $E_{q^d}$  on définit la carte  $(W_{a,b}, h_{a,b})$  par :

$$W_{a,b} := \{\sigma \in \mathbb{C}^* \mid \bar{a}, \bar{b} \notin \Sigma_\sigma\}$$

où  $h_{a,b} : p^{-1}(W_{a,b}) \rightarrow W_{a,b} \times (\mathbb{C}^r)^n$  est telle que, pour  $a', b' \in \mathbb{C}^*$  tels que  $\overline{a'} \neq \overline{b'}$ ,  $h_{a',b'} \circ h_{a,b}$  envoie  $(\sigma, \underline{G}) \in W_{a,b} \cap W_{a',b'} \times (\mathbb{C}^r)^n$  (où  $\underline{G}$  est vu comme l'élément  $\frac{1}{\theta_{q^d,a} \theta_{q^d,b}} \Phi(\underline{G})$  associé à une section du faisceau  $\Lambda_\sigma$  sur  $E_q \setminus \{\overline{-a}, \overline{-b}\}$ ) sur  $(\sigma, L_{a',b';\sigma} \circ R_{a,b;\sigma}(\underline{G}) =: \underline{G'})$  (où  $\underline{G'}$  est vu comme l'élément  $\frac{1}{\theta_{q^d,a} \theta_{q^d,b}} \Phi(\underline{G'})$  associé à une section du faisceau  $\Lambda_\sigma$  sur  $E_q \setminus \{\overline{-a'}, \overline{-b'}\}$ ) avec  $L_{a',b';\sigma} \circ R_{a,b;\sigma} \in GL_n(\mathbb{C}^r)$ , soit

$$\begin{array}{ccc} W_{a,b} \times (\mathbb{C}^r)^n & \xleftarrow[\sim]{h_{a,b}} & p^{-1}(W_{a,b}) \\ & \searrow pr_1 & \downarrow p \\ & & W_{a,b} \end{array}$$

et en notant  $U_{a,b,a',b'} := W_{a,b} \cap W_{a',b'}$  :

$$\begin{array}{ccccc} U_{a,b,a',b'} \times (\mathbb{C}^r)^n & \xleftarrow[\sim]{h_{a,b}} & p^{-1}(U_{a,b,a',b'}) & \xrightarrow[\sim]{h_{a',b'}} & U_{a,b,a',b'} \times (\mathbb{C}^r)^n \\ & \searrow pr_1 & \downarrow p & \swarrow pr_1 & \\ & & U_{a,b,a',b'} & & \end{array}$$

### 3.4 Résumé global des constructions

Nous avons construit dans ce chapitre trois fibrés, dont deux munis de différentes actions, que voici :

- Premièrement nous nous sommes donnés deux pentes  $\mu_1 < \mu_2 \in \mathbb{Z}$  et avons construit un fibré  $p : E \rightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$  localement égal ensemblistement à  $\coprod_{c_1, c_2} E_{a,b;c_1^{-1}c_2;n}$  où

$$E_{a,b;c;n} := \{g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^*) \mid \sigma_q(g) = \frac{1}{a^n b^n c} z^n g\} \simeq \mathcal{F}(c_1 z^{\mu_1}, c_2 z^{\mu_2}).$$

Ce fibré a été muni de deux actions. Tout d'abord une action de  $q^{\mathbb{Z}} \times q^{\mathbb{Z}}$  représentant l'action des isomorphismes de gradués dilatant les coefficients des modules purs le long de  $q$ -spirales ; cette action fait de notre fibré un fibré équivariant dont nous avons pu construire le fibré quotient. Ensuite une action de  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$  représentant l'action des automorphismes de gradué ; cette action agit sur les fibres plutôt que la base et ne fait donc pas de notre fibré un fibré équivariant ; elle passe cependant bien au quotient.

- Deuxièmement, en se donnant deux pentes  $\mu_1 < \mu_2 \in \mathbb{Z}$  et deux rangs  $r_1, r_2 \in \mathbb{N}^*$ , nous avons généralisé la construction précédente en construisant

un fibré  $p : E \longrightarrow GL_{r_1}(\mathbb{C}) \times GL_{r_2}(\mathbb{C})$  localement égal à  $\coprod_{C_1, C_2} E_{a,b;C_1,C_2;n}$  où

$$E_{a,b;C_1,C_2;n} := \left\{ G \in M_{r_1, r_2}(\mathcal{O}(\mathbb{C}^*)) \mid \sigma_q(G) = \frac{z^n}{a^n b^n} C_1 G C_2^{-1} \right\} \simeq \mathcal{F}(C_1 z^{\mu_1}, C_2 z^{\mu_2})$$

Nous avons ensuite muni le fibré restreint à  $\mathbb{D}_{r_1} \times \mathbb{D}_{r_2}$ , où  $\mathbb{D}_r$  est l'ensemble des matrices diagonales à valeurs propres distinctes non résonantes non nulles, de trois actions. Deux actions, une de  $(q^{\mathbb{Z}})^{r_1} \times (q^{\mathbb{Z}})^{r_2}$  entraînant la dilatation des valeurs propres le long de  $q$ -spirales et une de  $\mathcal{S}_{r_1} \times \mathcal{S}_{r_2}$  entraînant la permutation des valeurs propres, agissent sur la base et font de notre fibré un fibré équivariant ; l'on a pu ainsi construire le fibré quotient. La troisième, action de  $(\mathbb{C}^*)^{r_1} \times (\mathbb{C}^*)^{r_2}$ , représente l'action des automorphismes de gradué et agit directement sur chaque fibre ; comme dans le cas précédent elle passe bien au quotient.

- Dernièrement l'on s'est donné une pente rationnelle négative  $\mu = -\frac{n}{d} \in \mathbb{Q}_{<0}$  et un rang  $r \in \mathbb{N}^*$ . L'on a ensuite construit un fibré  $p : E \longrightarrow \mathbb{C}^*$  localement égal à  $\coprod_{\sigma} E_{a,b;\sigma}$  où

$$E_{a,b;\sigma} := \left\{ G \in M_{r,1}(\mathcal{O}(\mathbb{C}^*)) \mid \sigma_q^d(G) = \frac{\sigma z^n}{a^n b^n} U_r^d G \right\} \simeq \mathcal{F}(C_{\sigma}, 1).$$

Ce fibré n'a pas été muni d'une action.

# 4

## Quotient de l'espace des classes isoformelles par l'action du groupe des automorphismes des classes formelles

---

### Sommaire

---

4.1	Définition générale et cadre d'étude . . . . .	86
4.2	Description du quotient en termes de variétés toriques	91
4.2.1	2 pentes entières . . . . .	92
4.2.2	$k$ pentes de rang 1 . . . . .	96
4.2.3	Et maintenant? . . . . .	100

---

Dans la partie 1.3 nous avons présenté une classification des modules aux  $q$ -différences *analytique isoformelle*; plus exactement les espaces  $\mathcal{F}(P_1, \dots, P_k)$  définis en 1.3.4 regardent l'ensemble des modules à fonction de Newton fixée quotienté par les transformations de jauge *respectant une graduation donnée*. Une question plus naturelle, mais *a priori* plus complexe, serait de se demander à quoi ressemblerait un espace similaire où l'on autoriserait aussi des transformations ne "respectant pas le gradué", en particulier les automorphismes de ce gradué - c'est-à-dire regarder l'espace des classes analytiques dans une classe formelle donnée. Ce chapitre a pour but d'introduire une telle étude, de manière malheureusement incomplète et fragmentaire.

On se place dans ce chapitre dans le contexte  $|q| > 1$ .



## 4.1 Définition générale et cadre d'étude

Soit  $M$  un module aux  $q$ -différences. Via transformations de jauge analytiques  $M$  est équivalent à un module  $M_U = (K^n, \varphi_{A_U})$  où

$$A_U := \begin{pmatrix} B_1 & & & & \\ & B_2 & U_{i,j} & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & B_k \end{pmatrix}$$

avec  $B_i \in GL_{r_i}(K)$ ,  $U = (U_{i,j})_{i < j} \in \prod_{i < j} M_{r_i, r_j}(K)$ .

Notons  $M_0 = P_1 \oplus \cdots \oplus P_k = (K^n, \varphi_{A_0}) = gr(M)$  le module pur gradué de  $M$  avec les  $P_i = (K^{r_i}, \varphi_{B_i})$  et

$$A_0 := \begin{pmatrix} B_1 & & & & \\ & B_2 & 0 & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & B_k \end{pmatrix}.$$

Nous allons étudier maintenant l'ensemble des  $M_U$ ,  $U \in \prod_{i < j} M_{r_i, r_j}(K)$ , muni de la relation d'équivalence  $M_U \sim M_V \Leftrightarrow \exists F \in GL_n(K) \mid F[A_U] = A_V$ .

**Lemme 4.1.1.** *Soient  $U, V \in \prod_{i < j} M_{r_i, r_j}(K)$ . Alors un  $F \in GL_n(K)$  tel que  $F[A_U] = A_V$  est de la forme*

$$\begin{pmatrix} F_1 & & & & \\ & F_2 & \bar{F}_{i,j} & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 & & & & \\ & F_2 & 0 & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & F_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{r_1} & & & & \\ & I_{r_2} & \bar{F}'_{i,j} & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & I_{r_k} \end{pmatrix}$$

où les  $\bar{F}_{i,j}, \bar{F}'_{i,j} \in M_{r_i, r_j}(K)$  et  $F_i \in \text{Aut}(P_i)$ , i.e.  $\sigma_q(F_i)P_i = P_i F_i$  et  $F_i \in GL_{r_i}(K)$ .

*Remarque 4.1.2.* On identifie ici, pour un module pur isocline (muni d'une représentation matricielle)  $P = (K^r, \varphi_B)$ , le groupe des automorphismes de  $P$ ,  $\text{Aut}(P)$ , avec le sous-groupe de  $GL_r(K)$  des matrices  $F$  telles que  $\sigma_q(F)B = BF$ .

*Démonstration.* Notons  $F = (F_{i,j})_{i,j}$  où les  $F_{i,j} \in M_{r_i, r_j}(K)$  et  $U = (U_{i,j})_{i < j}$ ,  $V = (V_{i,j})_{i < j}$ . Alors

$$\sigma_q(F)A_U = A_V F \Leftrightarrow \left( \sum_{\ell=1}^{j-1} \sigma_q(F_{i,\ell})U_{\ell,j} + \sigma_q(F_{i,j})B_j \right)_{i,j} = \left( B_i F_{i,j} + \sum_{\ell=i+1}^k V_{i,\ell} F_{\ell,j} \right)_{i,j}.$$

Nous allons maintenant montrer que  $F_{i,j} = 0$  pour  $i > j$  (c'est en fait une conséquence de la théorie de la filtration par les pentes ; nous préférons tout de même en donner une preuve ici). Tout d'abord on peut voir que la relation ci-dessus donne pour  $i = k, j = 1$

$$\sigma_q(F_{k,1})B_1 = B_k F_{k,1}$$

ce qui implique  $F_{k,1} = 0$  comme  $B_1, B_k$  n'ont pas même pente (2<sup>e</sup> propriété de 1.2.6).

Supposons maintenant que pour un certain  $0 < t < k-1$  on ait, pour tous  $i-j > t$ ,  $F_{i,j} = 0$ . Montrons que  $F_{i,i-t} = 0$  pour tout  $1 \leq i \leq k-1$  tel que  $F_{i,i-t}$  existe.  $F_{i,i-t}$  vérifie :

$$\sum_{\ell=1}^{i-t-1} \sigma_q(F_{i,\ell})U_{\ell,i-t} + \sigma_q(F_{i,i-t})B_{i-t} = B_i F_{i,i-t} + \sum_{\ell=i+1}^k V_{i,\ell} F_{\ell,i-t}$$

Pour  $1 \leq \ell \leq i-t-1$  nous avons  $i-\ell \geq 1+t > t$  ce qui implique  $F_{i,\ell} = 0$ . De plus pour  $i+1 \leq \ell \leq k$  on a  $\ell-(i-t) \geq 1+t > t$  donc  $F_{\ell,i-t} = 0$ . Notre équation se ramène donc à

$$\sigma_q(F_{i,i-t})B_{i-t} = B_i F_{i,i-t}.$$

Comme  $i-t \neq i$ ,  $B_{i-t}$  et  $B_i$  n'ont pas de pente commune et donc  $F_{i,i-t} = 0$ . On a donc montré par une récurrence finie que  $F$  était triangulaire supérieure par blocs. En répétant le raisonnement une fois ( $t = 0$ ) on obtient la relation

$$\sigma_q(F_{i,i})B_i = B_i F_{i,i}$$

Noter  $F_i := F_{i,i}$  nous donne bien  $F_i \in \text{Aut}(P_i)$ . □

Munis de ce lemme, nous pouvons considérer que, plutôt que de regarder l'ensemble des  $M_U$  modulo transformations de jauge, il suffit de regarder l'espace des classes  $\mathcal{F}(P_1, \dots, P_k)$  modulo les automorphismes du gradué  $M_0$ . De manière formelle voici ce que cela donne. Le groupe  $\text{Aut}(M_0) = \bigoplus \text{Aut}(P_i)$  agit comme suit sur  $\mathcal{F}(M_0)$  : soient  $[(M, u)] \in \mathcal{F}(M_0)$  et  $\phi \in \text{Aut}(M_0)$ , on peut définir  $\phi.[(M, u)]$  comme  $[(M, \phi \circ u)]$ . Cette action est bien définie puisque, si l'on a  $[(M, u)] = [(M', u')]$ , il existe  $f : M \rightarrow M'$  telle que  $u = u' \circ grf$ . Dans ce cas  $\phi \circ u = \phi \circ u' \circ grf$  et donc  $[(M, \phi \circ u)] = [(M', \phi \circ u')]$ .

Matriciellement cela veut dire que deux modules  $M_U$  et  $M_V$  dont les matrices sont en forme normale sont dans la même orbite pour cette action s'il existe  $F = F_1 \oplus \dots \oplus F_k \in GL_n(K)$ , diagonale par blocs avec  $F_i \in GL_{r_i}(K)$ , telle que pour  $1 \leq i \leq k$  on ait  $\sigma_q(F_i)B_i = B_i F_i$  et vérifiant  $F[A_U] = A_V$ .

Comme nous parlons beaucoup de quotient dans ce chapitre, donnons les définitions que nous utiliserons :

**Définition 4.1.3** (voir aussi la définition B.3.1). Soit  $G$  un groupe algébrique et  $X$  une  $G$ -variété, *i.e.* une variété munie d'une action algébrique  $\Psi : G \times X \rightarrow X \times X$  de  $G$ .

1. Le quotient ensembliste de  $X$  par  $G$  est défini comme étant l'ensemble des orbites de  $X$  pour l'action de  $G$ .
2. Le quotient topologique de  $X$  par  $G$  est le quotient ensembliste de  $X$  par  $G$  muni de la topologie quotient.
3. Un quotient catégorique de  $X$  par  $G$  est un couple  $(Y, p)$  où  $Y$  est une variété et  $p$  un morphisme  $X \rightarrow Y$  vérifiant la propriété universelle suivante :

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{p} & Y \\
 & \searrow g & \downarrow \exists! \bar{g} \\
 & & Z.
 \end{array}$$

On notera  $Y = X//G$ .

4. Un quotient géométrique de  $X$  par  $G$  est un quotient catégorique  $(Y, p)$  tel que l'image de  $\Psi$  est  $X \times_Y X$ . On le notera  $Y = X/G$ .

On utilisera la proposition suivante :

**Proposition 4.1.4.** Soit  $G := \mathbb{G}_m^r$  un tore algébrique agissant sur une variété affine  $X = \text{Spec}(A)$ . Alors  $A^G := \{f \in A \mid g.f = f \forall g \in G\}$  est une  $\mathbb{C}$ -algèbre de type fini et  $\pi : X \rightarrow \text{Spec}(A^G)$  induit par l'inclusion  $A^G \subset A$  est un quotient catégorique. On a même  $X//G = \text{Spec}(A^G)$ .

*Démonstration.* Voir [Dol03, Prop. 3.1 et Thm. 6.1]. Cela reste vrai pour  $G$  un groupe réductif, c'est-à-dire de radical unipotent trivial.  $\square$

On en arrive alors à la définition suivante :

**Définition 4.1.5.** On définit l'ensemble  $\mathcal{F}_l(P_1, \dots, P_k)$  des classes analytiques isoformelles lâches comme le quotient ensembliste de l'espace affine  $\mathcal{F}(P_1, \dots, P_k)$  par l'action de  $\bigoplus_{i=1}^k \text{Aut}(P_i)$ .

On notera  $\sim_l$  la relation d'équivalence induite par cette action.

*Remarque 4.1.6.* Cet espace est tout simplement l'espace des classes analytiques dans une classe formelle donnée.

*Exemple 4.1.7.* Regardons ce qui se passe lorsque notre fonction de Newton est donnée par  $\delta_0 + \delta_n$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$  (cet exemple correspond à l'action présentée dans 3.1.3). Soient  $a, b \in \mathbb{C}^*$ , regardons  $P_1 = (K, \varphi_a)$  et  $P_2 = (K, \varphi_{bz^n})$ . Alors un élément de  $\mathcal{F}(P_1, P_2)$  peut être représenté de manière unique par une matrice  $A_u := \begin{pmatrix} a & u \\ 0 & bz^n \end{pmatrix}$  où  $u \in \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{C}z^i$ . Dans ce cas  $\text{Aut}(P_1) \simeq \text{Aut}(P_2) \simeq \mathbb{C}^*$  (c'est une conséquence de 1.3.1). On est donc ramené à regarder l'action de  $(\mathbb{C}^*)^2$  sur  $\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{C}z^i \simeq \mathbb{C}^n$  donnée par  $(k, l) \cdot (u_0, \dots, u_{n-1}) = (\frac{k}{l}u_0, \dots, \frac{k}{l}u_{n-1})$ . Dans ce cas on peut même se contenter de regarder l'action de  $\mathbb{C}^*$  sur  $\mathbb{C}^n$  donnée par  $\lambda \cdot (u_0, \dots, u_{n-1}) = (\lambda u_0, \dots, \lambda u_{n-1})$  qui se comporte identiquement.

Regardons tout d'abord les orbites de cette action : un élément  $u \neq 0$  a pour orbite la droite vectorielle privée de l'origine  $O(u) = \{\lambda.u, \lambda \neq 0\}$ . Cette orbite n'est clairement pas fermée (pour les topologies usuelles de  $\mathbb{C}^n$ , celle d'espace vectoriel normé et celle de Zariski), et on a  $\overline{O(u)} = \mathbb{C}.u = O(u) \cup \{0\}$ . Par contre  $O(0) = \{0\}$  : 0 est seul dans son orbite et forme la seule orbite fermée. Le quotient ensembliste  $\mathcal{F}_l(P_1, P_2) \simeq \mathbb{C}^n / \mathbb{C}^*$  n'est donc pas un quotient géométrique ou catégorique aux sens usuels de géométrie algébrique (voir définition 4.1.3 ci-dessus), le quotient catégorique de  $\mathbb{C}^n$  par  $\mathbb{C}^*$  serait ici  $\{0\}$  (puisque  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]^{\mathbb{C}^*} = \mathbb{C}$  et en utilisant la proposition 4.1.4).

Donnons un peu plus de renseignements sur ce quotient, si on le munit de la topologie quotient.  $\mathcal{F}_l(P_1, P_2)$  n'est ni une variété topologique (en utilisant sur  $\mathbb{C}^n$  la topologie classique d'espace vectoriel normé) ni une variété algébrique (en utilisant donc la topologie de Zariski). En effet cet espace est l'espace projectif  $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$  auquel on a rajouté un point 0 présent dans l'adhérence de chaque autre point, ce qui ne forme jamais une variété (aucun  $\mathbb{C}^k$  n'ayant de point non fermé pour les deux topologies). Cela se voit particulièrement bien avec la première topologie : tout ouvert de  $\mathbb{C}^n$  contenant 0 contient aussi une boule centrée en 0 et donc un représentant de toutes les orbites de l'action ; donc le seul ouvert de  $\mathcal{F}_l(P_1, P_2)$  contenant 0 est  $\mathcal{F}_l(P_1, P_2)$  tout entier.

On peut premièrement vérifier qu'un tel espace ne dépende pas des représentants matriciels choisis pour les  $P_i$ .

**Proposition 4.1.8.** *Soit  $1 \leq i \leq k$  et  $P'_i$  un module pur isocline tel que  $P_i \simeq P'_i$ . Alors on a une bijection explicite entre les ensembles  $\mathcal{F}_l(P_1, \dots, P_i, \dots, P_k)$  et  $\mathcal{F}_l(P_1, \dots, P'_i, \dots, P_k)$ .*

*Démonstration.* Soit  $T \in \text{Gl}_{r_i}(K)$  réalisant l'isomorphisme entre  $P_i$  et  $P'_i$ . On va montrer que l'isomorphisme  $T_* : \mathcal{F}(P_1, \dots, P_i, \dots, P_k) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(P_1, \dots, P'_i, \dots, P_k)$

qui à la classe d'un module  $M_U$  associe la classe du module  $M_{T_*U}$  avec

$$A_{T_*U} := \begin{pmatrix} I_{r_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & T & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & I_{r_k} \end{pmatrix} [A_U]$$

passe au quotient et donne une bijection entre les quotients.

Tout d'abord montrons que  $T_*$  passe au quotient, *i.e.* que si  $M_U \sim_l M_V$  alors

$M_{T_*U} \sim_l M_{T_*V}$ . On notera par analogie  $T_*$  la matrice  $\begin{pmatrix} I_{r_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & T & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & I_{r_k} \end{pmatrix}$ .

Notons  $F \in GL_n(K)$  une matrice telle que  $F[A_U] = A_V$ , on va montrer que  $G[A_{T_*U}] = A_{T_*V}$  où  $G = T_*F(T_*)^{-1} \in GL_n(K)$ .

$$\begin{aligned} \sigma_q(G)A_{T_*U} &= \sigma_q(T_*)\sigma_q(F)\sigma_q(T_*)^{-1}A_{T_*U} \\ &= \sigma_q(T_*)\sigma_q(F)A_U(T_*)^{-1} \\ &= \sigma_q(T_*)A_VF(T_*)^{-1} \\ &= A_{T_*V}T_*F(T_*)^{-1} = A_{T_*V}G. \end{aligned}$$

Comme toute transformation de jauge  $G$  entre deux systèmes dont les matrices sont de la forme  $A_U$  est produit d'une transformation isoformelle et d'un automorphisme du gradué (lemme 4.1.1) on peut en conclure le premier résultat.

Montrons maintenant que l'application induite sur les espaces  $\mathcal{F}_l$  est bijective. Tout d'abord montrons que c'est une injection. Soient deux matrices  $A_U, A_V$  telles qu'il existe  $F \in \text{Aut}(P_1) \oplus \cdots \oplus \text{Aut}(P'_i) \oplus \cdots \oplus \text{Aut}(P_k)$  un isomorphisme de gradué tel que  $F[A_{T_*U}] = A_{T_*V}$ . On veut alors remplir le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A_U & \xrightarrow{T_*} & A_{T_*U} \\ \downarrow & & \downarrow F \\ A_V & \xrightarrow{T_*} & A_{T_*V}. \end{array}$$

Comme  $T_*$  est inversible on peut le remplir en utilisant la flèche  $G = (T_*)^{-1}FT_*$ ; on peut alors vérifier par un calcul comme le précédent que  $G[A_U] = A_V$ .

Enfin le fait que  $T_*$  soit un isomorphisme entre les espaces de classes analytiques isoformelles nous assure que l'application passée au quotient est une surjection.  $\square$

Nous allons utiliser cette proposition pour nous ramener à un cadre d'étude plus agréable en choisissant de normaliser les  $B_i$  de manière à pouvoir calculer facilement les groupes  $\text{Aut}(P_i)$ .

Plaçons-nous dans le cadre des pentes entières. Alors  $(K^{r_i}, \varphi_{B_i})$  pur isocline de pente  $\mu_i \in \mathbb{Z}$  est équivalent à un module de la forme  $P_i = (K^{r_i}, \varphi_{z^{\mu_i} A_i})$  où  $A_i \in GL_{r_i}(\mathbb{C})$  a ses valeurs propres dans la couronne fondamentale  $C_q = \{z \in \mathbb{C}^* | 1 \leq |z| < |q|\}$ , et dans ce cas  $A_i$  est unique *modulo conjugaison*. On peut donc de plus choisir  $A_i$  sous forme de Jordan, *i.e.* de la forme  $\bigoplus J_{d_i}(\lambda_i)$  où  $J_d(\lambda)$  est la matrice de taille  $d \times d$  suivante :

$$J_d(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas  $\text{Aut}(P_i) \simeq \mathcal{C}(A_i)$  où  $\mathcal{C}(A_i)$  est le commutant de  $A_i$  (cela découle de 1.3.1).

Comme on l'a vu dans l'exemple 4.1.7 l'espace  $\mathcal{F}_l(P_1, \dots, P_k)$  n'est *a priori* pas une variété ou un espace bien connu. Une première approche pour l'étude de ce quotient (et/ou des orbites de notre action) serait de trouver un ouvert  $U$  dense de  $\mathcal{F}(P_1, \dots, P_k)$  tel que le quotient de  $U$  par notre action soit facilement utilisable. Un bon moyen pour cela est d'utiliser la géométrie algébrique (puisque tous les ouverts de Zariski de  $\mathbb{C}^n$  sont denses) ; nous allons dans la suite donner, dans deux cas particuliers, une description de ce quotient en termes de *variétés toriques*.

## 4.2 Description du quotient en termes de variétés toriques

Notre premier exemple 4.1.7 nous a donné un espace qui, à un point près, est tout simplement l'espace projectif  $\mathbb{P}^n$  ; *i.e.* si l'on se restreignait à étudier le quotient de  $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  par notre action l'on obtiendrait  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . Or  $\mathbb{P}^n$  est un exemple basique de variété torique ; de plus il est possible de traduire en ces termes la plupart des quotients d'un espace affine par une action de la forme  $\underline{t} \cdot (z_1, \dots, z_n) = (\underline{t}^{\underline{a}_1} z_1, \dots, \underline{t}^{\underline{a}_n} z_n)$  où  $\underline{t} = (t_1, \dots, t_r) \in (\mathbb{C}^*)^r$ ,  $\underline{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{ir}) \in \mathbb{Z}^r$  et  $\underline{t}^{\underline{a}_i} = t_1^{a_{i1}} \dots t_n^{a_{ir}}$  (c'est ce que nous présentons en annexe B en reprenant la méthode de [Dol03, chapitre 12]). Comme nous le verrons deux exemples particuliers mais tout de même un minimum généraux de nos actions sur les  $\mathcal{F}(P_1, \dots, P_k)$  sont de cette forme.

### 4.2.1 2 pentes entières

Regardons tout d'abord le cas où nous avons deux pentes entières  $\mu_1 < \mu_2$  de rangs respectifs  $r_1, r_2$ . On regarde donc l'ensemble des matrices  $\begin{pmatrix} z^{\mu_1} A_1 & U \\ 0 & z^{\mu_2} A_2 \end{pmatrix}$  où  $U \in M_{r_1, r_2} \left( \sum_{\ell=\mu_1}^{\mu_2-1} \mathbb{C} z^\ell \right)$ . On peut regarder cet espace vectoriel  $E_{r_1, r_2, \mu_1, \mu_2} := M_{r_1, r_2} \left( \sum_{\ell=\mu_1}^{\mu_2-1} \mathbb{C} z^\ell \right) \simeq \mathbb{C}^N$  avec  $N = r_1 r_2 (\mu_2 - \mu_1)$ . On notera  $n := \mu_2 - \mu_1$ .

Nous allons nous placer dans un cas plus particulier : celui où les matrices  $A_i$  sont diagonales à racines simples dans  $C_q$  (ce qui est équivalent, à transformations de cisaillement près, à les prendre dans tout  $\mathbb{C}^*$  non résonantes, *i.e.* telles que  $\bar{\lambda}_i \neq \bar{\lambda}_j$  dans  $E_q$  pour  $i \neq j$ ). Cela peut paraître restrictif<sup>1</sup> mais cela correspond au cas étudié en 3.2.3.

Dans ce cas les automorphismes de  $z^{\mu_i} A_i$  sont les matrices diagonales inversibles constantes de taille  $r_i \times r_i$ , c'est-à-dire  $\text{Aut}(z^{\mu_i} A_i) \simeq (\mathbb{C}^*)^{r_i}$ . Soit alors  $F_1 \oplus F_2 \in \text{Aut}(z^{\mu_1} A_1) \oplus \text{Aut}(z^{\mu_2} A_2)$ , voilà comment il agit sur un élément de notre espace :

$$\begin{pmatrix} z^{\mu_1} A_1 & U \\ 0 & z^{\mu_2} A_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} z^{\mu_1} A_1 & F_1 U F_2^{-1} \\ 0 & z^{\mu_2} A_2 \end{pmatrix}.$$

Cela revient donc à une action de  $(\mathbb{C}^*)^{r_1} \times (\mathbb{C}^*)^{r_2}$  sur  $E_{r_1, r_2, \mu_1, \mu_2}$  donnée par, notant  $F_1 = \text{Diag}(\lambda_i)$  et  $F_2 = \text{Diag}(\gamma_j)$  :

$$U = (u_{i,j})_{i,j} \rightsquigarrow \left( \frac{\lambda_i}{\gamma_j} u_{i,j} \right)_{i,j}.$$

Posons alors

$$\begin{cases} t_1 := \lambda_1 \gamma_1^{-1} \\ t_j := \lambda_1 \gamma_j^{-1} & \text{pour } 2 \leq j \leq r_2 \\ t_{i+r_2-1} := \lambda_i \gamma_1^{-1} & \text{pour } 2 \leq i \leq r_1. \end{cases}$$

Alors regarder notre action de  $(\mathbb{C}^*)^{r_1} \times (\mathbb{C}^*)^{r_2}$  sur  $E_{r_1, r_2, \mu_1, \mu_2}$  revient à regarder l'action de  $(\mathbb{C}^*)^{r_1+r_2-1}$  sur  $E_{r_1, r_2, \mu_1, \mu_2}$  donnée par

$$(u_{i,j})_{i,j} \rightsquigarrow (t_1^{-1} t_j t_{i+r_2-1} u_{i,j})_{i,j}.$$

Enfin en notant  $u_{i,j} = \sum_{l=1}^n u_{i,j}^l z^{l+\mu_1-1}$  et en réordonnant les  $u_{i,j}^l$  dans l'ordre lexicographique croissant pour  $i, j, l$  on obtient une action de  $(\mathbb{C}^*)^{r_1+r_2-1}$  sur  $\mathbb{C}^{nr_1 r_2} = \mathbb{C}^N$ .

1. Même si Birkhoff aussi se restreignait pareillement.

### Quelques remarques sur cette action

1. Tout d'abord on peut remarquer que 0 est toujours seul dans son orbite : c'est en effet un point stable et pour tous  $i, j, l$ ,  $t_1^{-1}t_j t_{i+r_2-1} u_{i,j}^l = 0 \Rightarrow u_{i,j}^l = 0$ . Cela veut tout simplement dire que le seul module non seulement formellement mais aussi analytiquement équivalent à  $M_0$  est  $M_0$  lui-même.
2. Si l'on met sur  $\mathbb{C}^N$  la topologie classique d'espace vectoriel normé ou la topologie de Zariski, alors pour tout  $x \in \mathbb{C}^N$  on a  $0 \in \overline{\text{Orb}(x)}$ . En effet on voit bien que, pour la topologie classique, notant  $\underline{t} \in (\mathbb{C}^*)^{r_1+r_2-1}$  et  $\underline{z} \in \mathbb{C}^N$ ,

$$\lim_{t_1 \rightarrow 0} \lim_{\substack{t_i \rightarrow 0 \\ i \neq 1}} \underline{t} \cdot \underline{z} = 0.$$

Une question intéressante à se poser est : pourquoi la classe de  $M_0$  est dans l'adhérence de chaque orbite ?

3. Le quotient topologique  $\mathcal{F}_l(z^{\mu_1} A_1, z^{\mu_2} A_2)$  pour une de ces topologies ne forme pas une variété (topologique ou algébrique) puisque, comme  $0 \in \overline{\text{Orb}(x)} \forall x \in \mathbb{C}^N \simeq \mathcal{F}(z^{\mu_1} A_1, z^{\mu_2} A_2)$ ,  $0 \in \overline{\{x\}} \forall x \in \mathcal{F}_l(z^{\mu_1} A_1, z^{\mu_2} A_2)$  (c'est ce que nous avons décrit dans l'exemple 4.1.7).

Ces quelques remarques nous assurent que notre espace  $\mathcal{F}_l(M_0)$  n'est pas forcément un "bon" quotient agréable à utiliser, puisque notamment le point 0 pose problème pour en faire une variété. L'on pourrait utiliser d'autres définitions de quotient, comme trouver une variété qui vérifierait une bonne propriété universelle (on retrouve alors la définition de quotient catégorique donnée en B.3.1); malheureusement ce problème avec 0 nous assure que ce quotient serait le point. Une première idée pour trouver un bon quotient serait d'enlever ce point problématique et de regarder ce que donne un quotient (au moins catégorique) de ce qu'il reste.

C'est ce que nous allons faire maintenant (enlevant peut-être aussi d'autres points problématiques) : nous allons utiliser l'algorithme de création de quotient torique présenté en annexe B.

**Définition 4.2.1.** Soit  $M_0 = P_1 \oplus P_2$  un module pur tel que les  $P_i = (K^{r_i}, \varphi_{z^{\mu_i} A_i})$  soient tels que les  $A_i$  soient diagonales à valeurs propres simples et dans la couronne fondamentale. Soit de plus  $a \in \mathbb{Z}^{r_1+r_2-1}$ . On définit le sous-espace torique des classes analytiques isoformelles lâches par rapport à  $a$ , noté  $\mathcal{F}_l^a(M_0)$ , comme étant le quotient catégorique

$$\mathcal{F}_l^a(M_0) := (\mathcal{F}(M_0))^{\text{ss}}(L_a) // (\mathbb{C}^*)^{r_1+r_2-1}.$$

*Remarque 4.2.2.* 1. Une fois donné notre isomorphisme entre  $\mathcal{F}(M_0)$  et  $\mathbb{C}^N$  on peut noter que notre quotient  $(\mathbb{C}^N)^{\text{ss}}(L_a) // (\mathbb{C}^*)^{r_1+r_2-1}$  ne dépend plus que du triplet  $n, r_1, r_2$ .



2. Il est de plus symétrique en  $r_1$  et  $r_2$  (échanger  $r_1$  et  $r_2$  revient à faire une permutation des coordonnées de notre  $\mathbb{C}^N$ ).

Notons  $A_{n,r_1,r_2}$  la matrice  $(r_1 + r_2 - 1) \times nr_1r_2$  associée à notre action ; voilà à quoi elle ressemble :

Notons  $V_i$  la matrice  $(r_1 + r_2 - 1) \times n$  qui n'a que des 1 à la  $i^e$  ligne et des 0 partout ailleurs. Notons  $W_{i,j} := -V_1 + V_{i+1} + V_{j+r_2}$ . Alors

$$A_{n,r_1,r_2} = \begin{pmatrix} V_1 & \dots & V_{r_1+r_2-1} & W_{1,1} & W_{1,2} & \dots & W_{1,r_1-1} & W_{2,1} & \dots & W_{r_2-1,r_1-1} \end{pmatrix}.$$

L'annexe C présente des programmes Maple permettant de calculer cette matrice  $A_{n,r_1,r_2}$  ainsi que les vecteurs générant l'éventail de  $\mathcal{F}_l^a(M_0)$  noté  $\Sigma_{n,r_1,r_2}^a$ . Ceci peut permettre de conjecturer la forme ou certaines propriétés des  $\mathcal{F}_l^a(M_0)$ . On a par exemple la proposition suivante :

**Proposition 4.2.3.** *Si  $r_2 = 1$ , resp.  $r_1 = 1$ , alors  $\mathcal{F}_l^a(M_0) \simeq (\mathbb{P}^{n-1})^k$  où  $0 \leq k \leq r_1$ , resp.  $0 \leq k \leq r_2$ , est le nombre de coordonnées strictement positives de  $a \in \mathbb{Z}^{r_1}$ , resp.  $a \in \mathbb{Z}^{r_2}$ .*

*Démonstration.* Nous allons montrer le résultat pour  $r_2 = 1$ , l'autre cas étant symétrique. Dans ce cas

$$A_{n,r_1,1} = \begin{pmatrix} V_1 & \dots & V_{r_1} \end{pmatrix}.$$

Notons  $a = (a_j)_{1 \leq j \leq r_1}$ . Nous allons d'abord montrer que  $\Sigma_{n,r_1,1}^a = \prod_j \Sigma_{n,1,1}^{a_j}$ , ce qui nous permet de dire en vertu de la proposition B.2.3 que  $\mathcal{F}_l^a(M_0) = X_{\Sigma_{n,r_1,1}^a} \simeq \prod_j X_{\Sigma_{n,1,1}^{a_j}}$ .

Tout d'abord occupons-nous des vecteurs générant notre éventail. Le noyau  $M = \ker(A)$  est donné par les équations

$$\sum_{i=sn+1}^{(s+1)n} m_i = 0, s = 0, \dots, r_1 - 1.$$

Une base de  $(n-1)r_1$  vecteurs de  $\ker(A) \subset \mathbb{Z}^{nr_1}$  est donnée par  $(-e_{1+sn} + e_{i+sn})_{\substack{0 \leq s \leq r_1-1 \\ 2 \leq i \leq n}}$ .  $\Sigma_{n,r_1,1}^a$  est un éventail de  $(\mathbb{R}^{n-1})^{r_1}$  ; donnons-nous  $(u_i^l)_{\substack{1 \leq l \leq r_1 \\ 1 \leq i \leq n-1}}$  la base canonique de  $(\mathbb{R}^{n-1})^{r_1}$  telle que  $(u_i^l)_{1 \leq i \leq n-1}$  soit celle de la  $l^e$  copie de  $\mathbb{R}^{n-1}$ , i.e  $u_i^l = (0 \dots 1 \dots 0)$  où le 1 est sur la  $(i + (l-1)(n-1))^e$  ligne. Alors les cônes de  $\Sigma_{n,r_1,1}^a$  sont engendré par les vecteurs  $((u_i^l)_{i,l}, (-\sum_i u_i^l)_l)$ . En particulier les cônes de  $\Sigma_{n,1,1}^a$  sont engendrés par les  $u_i$  et  $-\sum_i u_i$  où  $(u_i)_i$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

Regardons maintenant les cônes de dimension maximale. Les solutions de  $Am = da$  pour  $d > 0$  sont les solutions de

$$\sum_{i=sn+1}^{(s+1)n} m_i = a_{s+1}d, s = 0, \dots, r_1 - 1.$$

Les solutions entières sont données par les vecteurs de la forme

$$\begin{pmatrix} a_1d - \sum_{i=1}^{n-1} t_i^1 \\ t_1^1 \\ \vdots \\ t_{n-1}^1 \\ a_2d - \sum_{i=1}^{n-1} t_i^2 \\ t_1^2 \\ \vdots \\ t_{n-1}^2 \\ \vdots \\ a_{r_1}d - \sum_{i=1}^{n-1} t_i^{r_1} \\ t_1^{r_1} \\ \vdots \\ t_{n-1}^{r_1} \end{pmatrix}$$

où les  $0 \leq t_i^j \leq a_jd$  et  $\sum t_i^j \leq a_jd$ . En particulier si  $a_j \leq 0$  alors  $t_i^j = 0 \forall i$ .

Si  $d = 1$ , une solution entière  $m = (m_i^j)_{\substack{0 \leq i \leq n-1 \\ 1 \leq j \leq r_1}}$  est telle que pour  $1 \leq j \leq$

$r_1, \sum_i m_i^j = a_j$ .  $S_1$  est donc l'ensemble des monômes de la forme

$$\prod_{j|a_j \geq 0} \prod_{i=0}^{n-1} X_{i,j}^{m_{i,j}}.$$

Les cônes de dimension maximale (qui engendrent l'éventail) sont donnés par les monômes de la forme  $\prod_{j|a_j \geq 0} X_{i_j,j}^{a_j}$ . Notant  $\bar{e}_{i,j}^*$  les vecteurs générant l'éventail, un monôme  $\prod_{j|a_j \geq 0} X_{i_j,j}^{a_j}$  est associé au cône engendré par les  $\bar{e}_{i,j}^*$  tels que  $i \neq i_j$ . Ce cône est donc le produit des cônes engendré par les  $\bar{e}_{i,j}^*$  avec  $i \neq i_j$  et  $j$  fixé. On a donc  $\Sigma_{n,r_1,1}^a = (\Sigma_{n,1,1}^a)^k$  où  $k := \#\{j|a_j \geq 0\}$ .

Il reste à montrer que  $X_{\Sigma_{n,1,1}^a} = \mathbb{P}^{n-1}$  pour  $a_j \geq 0$ . Or nous avons vu que  $\Sigma_{n,1,1}^a$  est engendré par les  $e_i := u_i$  et  $e_0 := -\sum_u u_i$  où  $u_i$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^{n-1}$  et que ses cônes de dimension maximale étaient engendrés par tous les  $e_i$  sauf un. L'exemple 3 de B.2.4 nous assure que nous avons bien  $\mathbb{P}^{n-1}$ .

On peut remarquer que si  $a_j \leq 0$  alors, notant  $\mathbb{C}[S]$  l'algèbre graduée associée à  $\Sigma_{n,1,1}^{a_j}$ ,  $\mathbb{C}[S]_{>0} = \mathbb{C}[S] = \mathbb{C}$  et donc que

$$X_{\Sigma_{n,1,1}^{a_j}} = \{*\}.$$

□

*Remarque 4.2.4.* Regardons ce qui se passe dans le cadre de la proposition précédente. On a

$$(\mathbb{A}^N)^{\text{ss}}(L_a) = \mathbb{A}^N \setminus \left( \bigcup_{j|a_j \geq 0} \{X_{0,j} = \dots = X_{n-1,j} = 0\} \right) =: U$$

ce qui veut dire que l'on a enlevé à  $\mathbb{A}^N$  tous les points qui s'enverraient sur le 0 par projection sur un  $j^{\text{e}} \mathbb{P}^{n-1}$  pour  $j$  tel que  $a_j \geq 0$ . En particulier si tous les  $a_j \geq 0$  alors le quotient catégorique  $U//T$  est un "bon" quotient, au sens où c'est aussi le quotient ensembliste, toutes les orbites de  $T$  sont alors fermées dans  $U$ .

## 4.2.2 $k$ pentes de rang 1

Nous allons maintenant regarder le cas à  $k$  pentes entières  $\mu_1 < \dots < \mu_k$  toutes de rang 1. Nous regardons donc l'ensemble des matrices

$$\begin{pmatrix} a_1 z^{\mu_1} & u_{12} & \dots & \dots & u_{1k} \\ & a_2 z^{\mu_2} & u_{2,3} & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & a_{k-1} z^{\mu_{k-1}} & u_{k-1,k} \\ & & & & a_k z^{\mu_k} \end{pmatrix}$$

avec les  $u_{i,j} \in \sum_{\ell=\mu_i}^{\mu_j-1} \mathbb{C}z^\ell$ . Nous avons alors un produit d'espaces vectoriels  $\sum_{\ell=\mu_i}^{\mu_j-1} \mathbb{C}z^\ell \simeq \mathbb{C}^{n_{ij}}$  avec  $n_{ij} := \mu_j - \mu_i$ , et on regardera notre espace total comme un  $\mathbb{C}^N$  avec  $N := \sum_{i < j} n_{ij}$ . Bien sûr si  $k = 2$  on se retrouve dans un cas particulier de ce qui précède (c'est même l'exemple 4.1.7).

Les automorphismes des  $a_i z^{\mu_i}$  sont simplement les éléments inversibles de  $\mathbb{C}$ . Un élément  $\Lambda \in \bigoplus \text{Aut}(a_i z^{\mu_i}) \simeq (\mathbb{C}^*)^k$  est donc donné par une matrice diagonale inversible à coefficients constants. Notons  $\Lambda = \text{Diag}(\lambda_i)$ , il agit ainsi sur notre espace  $\mathcal{F}(M_0)$  :

$$\begin{pmatrix} a_1 z^{\mu_1} & & & & \\ & a_2 z^{\mu_2} & u_{i,j} & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a_k z^{\mu_k} & \\ & & & & \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_1 z^{\mu_1} & & & & \\ & a_2 z^{\mu_2} & \lambda_i \lambda_j^{-1} u_{i,j} & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a_k z^{\mu_k} & \\ & & & & \end{pmatrix}.$$

Notons  $u_{i,j} = \sum_{l=1}^{n_{i,j}} u_{i,j}^l z^{l+n_{i,j}-1}$  et posons  $t_i := \lambda_i \lambda_{i+1}^{-1}$ . Regarder notre action revient à regarder l'action de  $(\mathbb{C}^*)^{k-1}$  sur  $\mathbb{C}^N$  donnée par

$$(u_{i,j}^l)_{i,j,l} \rightsquigarrow (t_i t_{i+1} \cdots t_{j-1} u_{i,j}^l)_{i,j,l}.$$

On ordonnera ici les  $u_{i,j}^l$  en regardant dans l'ordre les sur-diagonales - en partant de la plus grande - en partant du haut ; par exemple pour  $k = 3$ ,  $\mu_1 = 0, \mu_2 = 1, \mu_3 = 2$  on ordonnera de la manière suivante :

$$(u_{1,2}^1, u_{2,3}^1, u_{1,3}^1, u_{1,3}^2).$$

*Remarque 4.2.5.* Les remarques faites dans le cas précédent sont toujours d'actualité : 0 est seul dans son orbite, est dans l'adhérence de toutes les orbites et le quotient topologique de  $\mathcal{F}(M_0)$  ne forme toujours pas une variété.

Au vu de tout cela nous pouvons donc reprendre une définition analogue avec la définition 4.2.1 (les deux définissant le même objet pour  $k = 2, r_1 = r_2 = 1$ ).

**Définition 4.2.6.** Soit  $M_0 = P_1 \oplus \cdots \oplus P_k$  un module pur avec  $P_i = (K, \varphi_{a_i z^{\mu_i}})$ , soit de plus  $a \in \mathbb{Z}^{k-1}$ . On définit le sous-espace torique des classes analytiques isoformelles lâches par rapport à  $a$ , noté  $\mathcal{F}_l^a(M_0)$ , comme étant le quotient catégorique

$$\mathcal{F}_l^a(M_0) := (\mathcal{F}(M_0))^{\text{ss}}(L_a) // (\mathbb{C}^*)^{k-1}.$$

*Remarque 4.2.7.* Une fois  $\mathcal{F}(M_0)$  identifié à  $\mathbb{C}^N$  notre quotient ne dépend plus que de  $k$  et des  $n_{ij} := \mu_j - \mu_i$  pour  $i < j$  (et même, comme  $n_{ij} = \sum_{l=i}^{j-1} n_{ll+1}$  que des  $n_{ii+1}$ ).

Notons maintenant  $A_{k,\underline{n}}$ , avec  $\underline{n} = (n_{ii+1})_i$ , la matrice  $(k-1) \times N$  associée à notre action ; regardons quelle est sa forme.

Notons  $V_{\ell, n_{ij}}$  la matrice  $(k-1) \times n_{ij}$  avec des 1 sur la  $\ell^{\text{e}}$  ligne et des 0 partout ailleurs. Notons maintenant  $W_{\ell, m} := \sum_{s=\ell}^{m-1} V_{s, n_{\ell m}}$ . Alors la matrice  $A_{k,\underline{n}}$  est la matrice

$$A_{k,\underline{n}} := \begin{pmatrix} W_{1,2} & W_{2,3} & \cdots & W_{k-1,k} & W_{1,3} & \cdots & W_{k-2,k} & \cdots & W_{1,k} \end{pmatrix}.$$

*Exemple 4.2.8.* Nous allons regarder le cas  $k = 3, \mu_1 = 0, \mu_2 = 1, \mu_3 = 2$  en regardant ce que donne l'espace  $\mathcal{F}_l^a(M_0)$  pour plusieurs  $a$  différents. Nous rappelons que l'annexe B (voire [Dol03, chapitre 12]) donne la méthode générale. Tout d'abord regardons les vecteurs générant l'éventail (qui ne dépendent pas de  $a$ ).

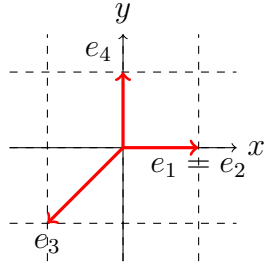
On a

$$A_{3,(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors  $M = \ker(A) \subset \mathbb{Z}^4$  est engendré par les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On trouve donc les vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  :



Regardons maintenant les cônes, le quotient *et* le quotient ensembliste dans plusieurs cas. Déjà de manière générale les solutions entières positives de  $\underline{Am} = da$  pour  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2$  sont de la forme

$$\begin{pmatrix} s \\ s + d(a_2 - a_1) \\ da_1 - s - t \\ t \end{pmatrix}, s, t \geq 0, s + t \leq da_1, s \geq d(a_1 - a_2).$$

1. Premièrement prenons  $a = (1, 1)$ . Les solutions sont alors de la forme

$$\begin{pmatrix} s \\ s \\ d - s - t \\ t \end{pmatrix}, s, t \geq 0, s + t \leq d.$$

Alors  $\mathbb{C}[S]_{>0}$  est engendré par les éléments de  $S_1$  qui sont

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors  $I_1 = \{3\}$ ,  $I_2 = \{4\}$ ,  $I_3 = \{1, 2\}$ , d'où

$$\begin{aligned} U := (\mathbb{C}^4)^{\text{ss}}(L_{(1,1)}) &= \mathbb{C}^4 \setminus (\{z_3 = 0\} \cap \{z_4 = 0\} \cap \{z_1 z_2 = 0\}) \\ &= \mathbb{C}^4 \setminus (\{z_1 = z_2 = z_4 = 0\} \cup \{z_2 = z_3 = z_4 = 0\}). \end{aligned}$$

Nous avons donc 3 cônes

$$\sigma_1 = \text{Cone}(e_1, e_2, e_4), \sigma_2 = \text{Cone}(e_1, e_2, e_3), \sigma_3 = \text{Cone}(e_3, e_4),$$

ce qui nous donne l'éventail de  $\mathbb{P}^2$  et nous permet de dire

$$\mathcal{F}_l^{(1,1)}(M_0) = U // (\mathbb{C}^*)^2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{C}).$$

Regardons maintenant l'ensemble des classes d'équivalence de  $U$ . Elles ont les formes suivantes :

$$\begin{cases} \text{Orb}(1, 1, a, b) & (a, b) \in \mathbb{C}^2 \\ \text{Orb}(1, 0, 1, b) & b \in \mathbb{C} \\ \text{Orb}(1, 0, 0, 1) \\ \text{Orb}(0, 1, 1, b) & b \in \mathbb{C} \\ \text{Orb}(0, 1, 0, 1). \end{cases}$$

On a donc "un peu plus" qu'un  $\mathbb{P}^2$  : le quotient catégorique ne suffit pas à regarder l'ensemble des classes, ce n'est pas un quotient géométrique.

2. Deuxièmement testons  $a = (2, 1)$ . Les solutions sont de la forme

$$\begin{pmatrix} s \\ s-d \\ 2d-s-t \\ t \end{pmatrix}, s \geq d, t \geq 0, s+t \leq 2d.$$

Alors  $\mathbb{C}[S]_{>0}$  est engendré par les éléments de  $S_1$  qui sont

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors  $I_1 = \{1, 3\}$ ,  $I_2 = \{1, 4\}$ ,  $I_3 = \{1, 2\}$ , d'où

$$\begin{aligned} U := (\mathbb{C}^4)^{\text{ss}}(L_{(2,1)}) &= \mathbb{C}^4 \setminus (\{z_1 z_3 = 0\} \cap \{z_1 z_4 = 0\} \cap \{z_1 z_2 = 0\}) \\ &= \mathbb{C}^4 \setminus (\{z_1 = 0\} \cup \{z_2 = z_3 = z_4 = 0\}). \end{aligned}$$

Nous avons donc 3 cônes

$$\sigma_1 = \text{Cone}(e_2, e_4), \sigma_2 = \text{Cone}(e_2, e_3), \sigma_3 = \text{Cone}(e_3, e_4),$$

ce qui nous donne l'éventail de  $\mathbb{P}^2$  et nous permet de dire

$$\mathcal{F}_l^{(2,1)}(M_0) = U // (\mathbb{C}^*)^2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{C}).$$

Regardons maintenant l'ensemble des classes d'équivalence de  $U$ . Elles ont les formes suivantes :

$$\begin{cases} \text{Orb}(1, 1, a, b) & (a, b) \in \mathbb{C}^2 \\ \text{Orb}(1, 0, 1, b) & b \in \mathbb{C} \\ \text{Orb}(1, 0, 0, 1). \end{cases}$$

Nous avons bien exactement un  $\mathbb{P}^2$  et *a priori* notre quotient est bien géométrique.

3. Enfin regardons  $a = 0$ . Alors la seule solution de  $A\bar{m} = d0$  entière positive pour tout  $d \geq 0$  est 0. Nous regardons donc l'ouvert

$$U := (\mathbb{C}^4)^{\text{ss}}(L_{(2,1)}) = \mathbb{C}^4.$$

Nous n'avons qu'un cône qui est  $\mathbb{R}^2$  tout entier, ce qui donne

$$\mathcal{F}_l^0(M_0) = \mathbb{C}^4 / / (\mathbb{C}^*)^2 = \{*\}.$$

### 4.2.3 Et maintenant ?

Ce cadre mis en place devrait pouvoir permettre d'appliquer les résultats connus sur les variétés toriques à l'étude des équations aux  $q$ -différences. C'est un cadre encore très parcellaire; il devrait pouvoir être généralisé aux espaces  $\mathcal{F}(M_0)$  tels que le module pur  $M_0$  ait des sous-modules purs isoclines représentés par des matrices diagonales à coefficients tous différents. Cependant même ainsi tous les  $\mathcal{F}(M_0)$  ne pourront pas être étudiés.

Comme les quotients définis dépendent d'un choix de "linéarisation de l'action", ici un  $a \in \mathbb{Z}^r$ , on pourrait regarder l'ensemble des quotients pour chaque  $a$  pour avoir le maximum d'informations; on pourra par exemple regarder [BP90] et [Hu92] pour la théorie générale de la variation des quotients toriques par rapport à la linéarisation.

Enfin d'autres possibilités d'études sont envisageables, plutôt que les variétés toriques : une stratification de l'espace quotient  $\mathcal{F}_l(M_0)$  ou encore l'utilisation de champs algébriques auraient parfaitement leur place dans cette étude.

# 5

## Construction de solutions méromorphes par transformations de $q$ -Borel-Laplace pour des équations à deux pentes

---

### Sommaire

---

5.1	Étude analytique locale des équations à pentes arbitraires . . . . .	102
5.2	Transformées de $q$ -Borel et de $q$ -Laplace . . . . .	105
5.3	Calcul explicite des sommations . . . . .	110

---

Dans la section 1.4 nous avons vu que pour toute matrice  $A_U$  de la forme (1.5) il existe une unique matrice tangente à l'identité  $\hat{F} \in \mathfrak{G}(\hat{K})$  telle que  $\hat{F}[A_0] = A_U$  (où  $A_0$  est la matrice  $A_U$  avec  $U = (0)_{i < j}$ ; théorème 1.4.1). De plus pour tout  $\bar{c} \in E_q \setminus \Sigma(A_0)$  où  $\Sigma(A_0)$  est un ensemble fini explicite il existe une unique matrice  $S_{\bar{c}}\hat{F} \in \mathfrak{G}(\mathcal{M}(\mathbb{C}^*))$  telle que  $\text{div}_{E_q} S_{\bar{c}}\hat{F} \geq -(\mu_j - \mu_i)[- \bar{c}]$  (théorème 1.4.2). Virginie Bugeaud dans sa thèse [Bug12] a adapté ce résultat au cas à deux pentes *rationnelles* en plaçant les pôles sur des  $q^d$ -spirales  $[-c; q^d]$ , où  $d \in \mathbb{N}^*$  est le pgcd des dénominateurs des deux pentes.

Divers travaux (voir par exemple [Zha02, RZ02, Dre15]) ont permis de calculer dans le cas des pentes entières les sommations  $S_{\bar{c}}\hat{F}$  par des itérées de transformations de  $q$ -Borel et  $q$ -Laplace (analogue dans le cadre des  $q$ -différences des transformations de Borel et Laplace utilisées dans le cadre différentiel), mais rien n'avait été fait dans le cas des pentes non entières. Ce chapitre, qui reprend les résultats de [DE16] coécrit avec T. Dreyfus vise à calculer des sommations proches de celles de Bugeaud mais avec des pôles sur des  $q^{\frac{d}{n}}$ -spirales  $[-c; q^{\frac{d}{n}}]$  en baissant les ordres desdits pôles.

Tout d'abord nous nous donnons pour tout le chapitre un  $q$  tel que  $|q| > 1$  et un  $\tau \in \mathbb{C}$  tel que  $q = e^{2i\pi\tau}$ ; on écrira  $q^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$  pour  $e^{2i\pi\alpha\tau}$ .



## 5.1 Étude analytique locale des équations à pentes arbitraires

La première partie du travail de Bugeaud a été de construire un équivalent à la forme normale de Birkhoff-Guenther pour des modules à pentes rationnelles. Elle a tout d'abord réutilisé les résultats de Van Der Put et Reversat dans [vdPR07] pour construire matriciellement (à la différence des deux auteurs) un équivalent du module gradué  $\bigoplus z^i A_i$  des modules à pentes entières.

Pour  $a \in \mathbb{C}^*$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $d \in \mathbb{N}^*$  on définit la matrice compagnon de taille  $d \times d$  comme suit :

$$E_{n,d,a} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ az^n & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons de plus

$$U_r := \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \in GL_r(\mathbb{C})$$

le bloc de Jordan unipotent de taille  $r$ . Définissons aussi leur produit tensoriel

$$E_{n,d,a} \otimes U_r := \begin{pmatrix} E_{n,d,a} & E_{n,d,a} & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & E_{n,d,a} \\ 0 & & & E_{n,d,a} \end{pmatrix} \in GL_{rd}(K).$$

Nous avons alors le théorème suivant (théorème 1.18 de [Bug12], réécriture matricielle du corollaire 1.6 de [vdPR07]) :

**Théorème 5.1.1.** *Soit  $A \in GL_m(K)$ . Il existe des entiers  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$ ,  $d_1, \dots, d_k$ ,  $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{N}^*$  avec  $\frac{n_1}{d_1} < \dots < \frac{n_k}{d_k}$ ,  $\gcd(n_i, d_i) = 1$ ,  $\sum r_i d_i = m$  et*

–  $\hat{F} \in GL_m(\hat{K})$

–  $a_i \in \mathbb{C}^*$

tels que  $A = \hat{F} \left[ \text{Diag} \left( E_{n_i, d_i, a_i} \otimes U_{r_i} \right) \right]$  où

$$\text{Diag} \left( E_{n_i, d_i, a_i} \otimes U_{r_i} \right) := \begin{pmatrix} E_{n_1, d_1, a_1} \otimes U_{r_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_{n_k, d_k, a_k} \otimes U_{r_k} \end{pmatrix}.$$

Nous allons maintenant nous placer dans le cas à deux pentes. Dans sa thèse Bugeaud explique que par différents isomorphismes explicites sur les espaces  $\mathcal{F}(P_1, P_2)$  on peut se ramener à l'étude de l'espace  $\mathcal{F}(P, \mathbf{1})$  où  $P$  est un module pur isocline de pente  $\mu = \frac{-n}{d} < 0$  (avec  $n, d$  premiers entre eux) indécomposable, *i.e.* qui peut être associé à une matrice  $E_{-n, d, a} \otimes U_r$ .

Plus précisément on rappelle que  $\mathcal{F}(P_1, P_2) \simeq \text{Ext}(P_2, P_1)$ ; or on a sur les espaces Ext les isomorphismes

$$\text{Ext}(P_2, P_1 \oplus P'_1) \simeq \text{Ext}(P_2, P_1) \oplus \text{Ext}(P_2, P'_1)$$

et

$$\text{Ext}(P_2, P_1) \simeq \text{Ext}(\mathbf{1}, P_2^\vee \otimes P_1).$$

En résumé nous avons pour une matrice  $A \in GL_m(K)$  associée à une classe de  $\mathcal{F}(P, \mathbf{1})$  l'existence d'un  $a \in \mathbb{C}^*$  et d'une matrice  $\hat{F} \in GL_m(\hat{K})$  telle que

$$A = \hat{F} \left[ \begin{pmatrix} E_{-n, d, a} \otimes U_r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

avec  $dr = m - 1$ .

Le plus proche que nous ayons actuellement d'une forme normale dans ce cadre est le théorème suivant (lemme 2.5 de [Bug12]) :

**Théorème 5.1.2.** *Il existe*

– un vecteur colonne  $W$  de taille  $dr$  à coefficients dans  $\sum_{\ell=0}^{n-1} \mathbb{C}z^\ell$

–  $F \in GL_m(K)$

tels que  $A = F[B]$  où

$$B := \begin{pmatrix} E_{-n, d, a} \otimes U_r & W \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il suit du théorème 5.1.1 l'existence et l'unicité de

$$\begin{pmatrix} I_{dr} & \hat{F} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_m(\mathbb{C}[[z]])$$

transformation de jauge formelle telle que

$$B = \begin{pmatrix} I_{dr} & \hat{F} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [\text{Diag}(E_{-n, d, a} \otimes U_r, 1)].$$

Définissons alors, de manière similaire à ce qui a été fait en 1.4, l'ensemble fini  $\Sigma \subset E_{q^{\frac{d}{n}}} = \mathbb{C}^*/(q^{\frac{d}{n}})^{\mathbb{Z}} = \mathbb{C}^*/q^{\frac{d}{n}}\mathbb{Z}$  comme suit :

$$\Sigma := \left\{ \bar{c} \in E_{q^{\frac{d}{n}}} \mid c^n \in aq^{\frac{d(n-1)}{2}} q^{d\mathbb{Z}} \right\}.$$

On a alors le théorème suivant, adaptant le théorème 1.4.2 dans ce cadre :

**Théorème 5.1.3.** Soit  $\bar{c} \in E_{q^{\frac{d}{n}}} \setminus \Sigma$ . Il existe une unique matrice

$$\begin{pmatrix} I_{dr} & S_{\bar{c}}\hat{F} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_m(\mathcal{M}(\mathbb{C}^*))$$

telle que  $B = \begin{pmatrix} I_{dr} & S_{\bar{c}}\hat{F} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [\text{Diag}(E_{-n,d,a} \otimes U_r, 1)]$  et pour tout  $1 \leq i \leq dr$  le coefficient de la  $i^{\text{e}}$  ligne de  $S_{\bar{c}}\hat{F}$  soit une fonction méromorphe dont les pôles sont au plus d'ordre 1 et contenus sur la  $q^{\frac{d}{n}}$ -spirale  $[-cq^{-i+1}; q^{\frac{d}{n}}]$ .

*Remarque 5.1.4.* Bugeaud dans la proposition 3.8 de sa thèse montre un résultat similaire mais où les pôles du coefficients de la  $i^{\text{e}}$  ligne sont d'ordre au plus  $n$  et sur la  $q^d$ -spirale  $[-cq^{-i+1}; q^d]$ . La solution présentée ici a le même nombre de pôle comptés avec multiplicités.

*Démonstration.* La relation  $B = \begin{pmatrix} I_{dr} & \hat{F} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [\text{Diag}(E_{-n,d,a} \otimes U_r, 1)]$  nous donne

$$\sigma_q(\hat{F}) = (E_{-n,d,a} \otimes U_r)\hat{F} + W. \quad (5.1)$$

En notant  $(\hat{f}_i)_{i=1,\dots,dr} := \hat{F}$  et  $(w_i)_{i=1,\dots,dr} := W$  et en prenant la convention  $\hat{f}_i = 0$  pour  $i < dr$  on trouve que pour tous  $1 \leq i < d, 0 \leq k < r$

$$\sigma_q \hat{f}_{i+kd} = \hat{f}_{i+1+kd} + \hat{f}_{i+1+(k+1)d} + w_{i+kd} \quad (5.2)$$

et pour  $0 < k \leq r$

$$z^n \sigma_q \hat{f}_{kd} = a \hat{f}_{(k-1)d+1} + a \hat{f}_{kd+1} + w_{kd}. \quad (5.3)$$

Notons encore, pour  $1 \leq i \leq d$ ,  $\hat{F}_i := (\hat{f}_{i+kd})_{k=0,\dots,r-1}$  et  $W_i := (w_{i+kd})_{k=0,\dots,r-1}$ . Les équations (5.2) et (5.3) sont alors équivalentes à

$$\sigma_q \hat{F}_{i-1} = U_r \hat{F}_i + W_{i-1} \quad (5.4)$$

pour  $1 < i \leq d$  et à

$$z^n \sigma_q(\hat{F}_d) = a U_r \hat{F}_1 + W_d. \quad (5.5)$$

Utiliser (5.4) et (5.5) sur  $z^n \sigma_q^d \hat{F}_1$  nous permet de trouver  $W' \in (\mathbb{C}[z])^r$  tels que (5.1) soit équivalente à (5.4) et à

$$z^n \sigma_q^d \hat{F}_1 = a U_r^d \hat{F}_1 + W'. \quad (5.6)$$

(On peut noter que  $W' = U_r^{d-1} W_d + z^n (U_r^{d-2} W_{d-1} + \dots + W_1)$  est donc de degré au plus  $2n - 1$ ).

Il suffit donc de montrer l'existence et l'unicité d'un vecteur  $S_{\bar{c}}\hat{F}_1 \in (\mathcal{M}(\mathbb{C}^*))^r$  dont les coefficients ont des pôles d'ordre au plus 1 sur la  $q^{\frac{d}{n}}$ -spirale  $-cq^{\frac{d}{n}\mathbb{Z}}$  satisfaisant

$$z^n \sigma_q^d (S_{\bar{c}}\hat{F}_1) = aU_r^d S_{\bar{c}}\hat{F}_1 + W'.$$

En posant  $q' := q^d$  et  $z' := z^n$  on voit que le cas  $W' \in \mathbb{C}[z^n]$  est une application directe des proposition 3.3.1 et théorème 6.1.2 de [RSZ13]. Dans le cas général écrivons  $W' = \sum_{\ell=0}^{d-1} W'_\ell z^\ell$  avec  $W'_\ell \in \mathbb{C}[z^n]$ . On peut alors regarder l'unique solution  $S_{\bar{c}}\hat{F}_{1,\ell}$  de  $z^n \sigma_q^d (S_{\bar{c}}\hat{F}_{1,\ell}) = aU_r^d S_{\bar{c}}\hat{F}_{1,\ell} + W'_\ell$  avec les bons pôles. Alors  $S_{\bar{c}}\hat{F}_1 := \sum_{\ell=0}^{d-1} S_{\bar{c}}\hat{F}_{1,\ell} z^\ell$  est une solution méromorphe avec les pôles que nous recherchons. Montrons maintenant l'unicité en supposant qu'il existe une autre solution méromorphe avec les pôles aux bons endroits. Alors l'équation  $z^n \sigma_q^d Y = aU_r^d Y$  a une solution méromorphe non nulle avec des pôles d'ordre 1 sur la  $q^{\frac{d}{n}}$ -spirale  $-cq^{\frac{d}{n}\mathbb{Z}}$  ce qui contredit l'unicité dans le cas  $W' \in \mathbb{C}[z^n]$ .  $\square$

## 5.2 Transformées de $q$ -Borel et de $q$ -Laplace

Nous allons maintenant introduire les  $q$ -analogues des transformations de Borel et Laplace qui vont nous permettre de calculer les transformations méromorphes du théorème 5.1.3.

**Définition 5.2.1.** Soit  $\mu \in \mathbb{Q}_{>0}$ . La transformée de  $q$ -Borel d'ordre  $\mu$  est définie comme étant la fonction

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\mu : \quad \mathbb{C}[[z]] &\longrightarrow \mathbb{C}[[\xi]] \\ \sum_{\ell \in \mathbb{N}} a_\ell z^\ell &\longmapsto \sum_{\ell \in \mathbb{N}} a_\ell q^{-\frac{\ell(\ell-1)}{2\mu}} \xi^\ell. \end{aligned}$$

*Remarque 5.2.2.* Cette définition est la même que dans [Dre15]; elle est de plus égale à la transformée  $\mathcal{B}_{q^\mu, 1}$  définie en 1.1.5.

La transformation de  $q$ -Laplace que nous allons maintenant introduire est elle légèrement différente de celle introduite dans [Dre15] (c'est plus exactement la transformation de  $q'$ -Laplace d'ordre  $(1, 1)$  de [Dre15] pour  $q' := q^{\frac{1}{\mu}}$ ). Quand  $q > 1$  est réel on retrouve la  $q$ -transformation de Laplace (et l'espace associé) introduite dans [Zha02], théorème 1.2.1. D'autres formes de  $q$ -Laplace existent dans la littérature voire lui sont antérieures, comme celles de [Abd60] et [Abd64], qui cependant se comportent différemment de la nôtre puisqu'elles mettent en jeu des  $q$ -déformations de l'exponentielle au lieu de la fonction Thêta, ou encore celle de [Béz92].

**Définition 5.2.3** (écoule du théorème 1.2.1 de [Zha02]). Soit  $\mu = \frac{n}{d} \in \mathbb{Q}_{>0}$  où  $n, d$  sont des entiers positifs premiers entre eux. Soit  $\bar{c} \in E_{q^{\frac{d}{n}}}$ . On dit qu'un élément  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^*, 0)$  appartient à  $\mathbb{H}_{\mu}^{\bar{c}}$  s'il existe  $\varepsilon > 0$  et un ouvert connexe  $\Omega \subset \mathbb{C}$  tel que

- $\bigcup_{\ell \in \frac{d}{n}\mathbb{Z}} \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z - cq^{\ell}| < \varepsilon |cq^{\ell}|\} \subset \Omega$ .
- La fonction  $f$  peut être prolongée en une fonction analytique sur  $\Omega$  avec croissance  $q^{\frac{d}{n}}$ -exponentielle à l'infinie, ce qui veut dire qu'il existe des constantes  $L, M > 0$  telles que pour tout  $z \in \Omega$  :

$$|f(z)| < L\theta_{|q|^{d/n}}(M|z|).$$

Ces conditions ne dépendent pas du choix d'un représentant  $c$  de  $\bar{c}$ . De plus on dit qu'un élément  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^*, 0)$  appartient à  $\mathbb{H}_{\mu}$  s'il existe un ensemble fini  $\Sigma \subset E_{q^{\frac{d}{n}}}$  tel que pour tout  $\bar{c} \in E_{q^{\frac{d}{n}}} \setminus \Sigma$  on ait  $f \in \mathbb{H}_{\mu}^{\bar{c}}$ .

*Remarque 5.2.4.* Les  $\mathbb{H}_{\mu}^{\bar{c}}$  et  $\mathbb{H}_{\mu}$  sont des espaces vectoriels  $\sigma_{q^{d/n}}$ -stables, mais pas forcément  $\sigma_q$ -stables.

**Définition 5.2.5.** Soit  $\mu = \frac{n}{d} \in \mathbb{Q}_{>0}$  où  $n, d$  sont des entiers positifs premiers entre eux. Soit  $\bar{c} \in E_{q^{\frac{d}{n}}}$ . On appelle transformation de  $q$ -Laplace d'ordre  $\mu$  la fonction suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mu}^{\bar{c}} : \mathbb{H}_{\mu}^{\bar{c}} &\longrightarrow \mathcal{M}(\mathbb{C}^*, 0) \\ f &\longmapsto \sum_{\ell \in \frac{d}{n}\mathbb{Z}} \frac{f(cq^{\ell})}{\theta_{q^{d/n}}\left(\frac{cq^{\frac{d}{n}+\ell}}{z}\right)}. \end{aligned}$$

Le lemme 1.3 de [Dre15] permet de voir que cette transformation est bien définie ; de plus elle ne dépend pas du représentant  $c$  choisi. De plus, pour  $|z|$  proche de 0,  $\mathcal{L}_{\mu}^{\bar{c}}$  a des pôles d'ordre au plus 1 et ce uniquement sur la  $q^{\frac{d}{n}}$ -spirale  $-cq^{\frac{d}{n}\mathbb{Z}}$ .

A partir de ces définitions on peut déduire quelques propriétés basiques (où l'on note  $\sigma_q^{d/n} := \sigma_{q^{d/n}}$ ) :

**Lemme 5.2.6.** Soit  $\mu = \frac{n}{d} \in \mathbb{Q}_{>0}$  où  $n, d$  sont des entiers positifs premiers entre eux. Soit  $\bar{c} \in E_{q^{\frac{d}{n}}}$ .

1. Si on se donne  $\hat{f} \in \mathbb{C}[[z]]$ , alors on a  $\mathcal{B}_{\mu}\left(z\sigma_q^{d/n}(\hat{f})\right) = \xi\mathcal{B}(\hat{f})$ .
2. Si on se donne  $f \in \mathbb{H}_{\mu}^{\bar{c}}$ , alors on a  $z\sigma_q^{d/n}\mathcal{L}_{\mu}^{\bar{c}}(f) = \mathcal{L}_{\mu}^{\bar{c}}(\xi f)$ .

*Démonstration.* 1. Écrivons  $\hat{f} = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} a_\ell z^\ell$ . Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\mu \left( z \sigma_q^{d/n}(\hat{f}) \right) &= \mathcal{B}_\mu \left( \sum_{\ell \in \mathbb{N}} a_\ell q^{\frac{d\ell}{n}} z^{\ell+1} \right) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} a_\ell q^{\frac{d\ell}{n}} q^{-\frac{d\ell(\ell+1)}{2n}} \xi^{\ell+1} \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{N}} a_\ell q^{-\frac{d\ell(\ell-1)}{2n}} \xi^{\ell+1} = \xi \mathcal{B}_\mu(\hat{f}). \end{aligned}$$

2. L'équation vérifiée par les  $\theta_q$  nous dit que

$$\theta_{q^{\frac{d}{n}}} \left( \frac{cq^{\frac{d}{n} + \ell}}{z} \right) = \frac{cq^\ell}{z} \theta_{q^{\frac{d}{n}}} \left( \frac{cq^\ell}{z} \right),$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\mu^{\bar{c}}(\xi f) &= \sum_{\ell \in \frac{d}{n}\mathbb{Z}} \frac{cq^\ell f(cq^\ell)}{\theta_{q^{d/n}} \left( \frac{cq^{\frac{d}{n} + \ell}}{z} \right)} = \sum_{\ell \in \frac{d}{n}\mathbb{Z}} \frac{cq^\ell f(cq^\ell)}{\frac{cq^\ell}{z} \theta_{q^{d/n}} \left( \frac{cq^\ell}{z} \right)} \\ &= z \sum_{\ell \in \frac{d}{n}\mathbb{Z}} \frac{f(cq^\ell)}{\theta_{q^{d/n}} \left( \frac{cq^{\frac{d}{n} + \ell}}{q^{\frac{d}{n}} z} \right)} = z \sigma_q^{d/n} \mathcal{L}_\mu^{\bar{c}}(f). \end{aligned}$$

□

*Remarque 5.2.7.* Si l'on itère  $n$  fois ce lemme pour  $\hat{f} \in \mathbb{C}[[z]]$  et  $f \in \mathbb{H}_\mu^{\bar{c}}$  on obtient

$$\mathcal{B}_\mu(z^n \sigma_q^d(\hat{f})) = q^{-\frac{d(n-1)}{2}} \xi^n \mathcal{B}_\mu(\hat{f}) \quad (5.7)$$

et

$$z^n \sigma_q^d \mathcal{L}_\mu^{\bar{c}}(f) = q^{\frac{d(n-1)}{2}} \mathcal{L}_\mu^{\bar{c}}(\xi^n f). \quad (5.8)$$

**Lemme 5.2.8.** Soit  $\mu = \frac{n}{d} \in \mathbb{Q}_{>0}$  où  $n, d$  sont des entiers positifs premiers entre eux. Soit  $\bar{c} \in E_{q^{\frac{d}{n}}}$ . Soit  $f \in \mathbb{C}\{z\}$ . Alors

1.  $\mathcal{B}_\mu(f) \in \mathbb{H}_\mu^{\bar{c}}$ .
2. Si de plus  $f$  est un polynôme alors  $\mathcal{L}_\mu^{\bar{c}} \circ \mathcal{B}_\mu(f) = f$ .

*Démonstration.* Montrons d'abord le premier point. Soit  $f = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} a_\ell z^\ell \in \mathbb{C}\{z\}$ . On voit facilement que sa transformée de  $q$ -Borel est définie et analytique sur  $\mathbb{C}$  tout entier (voir la remarque 1.1.6); nous n'avons donc à prouver que la croissance

$q^{\frac{d}{n}}$ -exponentielle à l'infini. Comme  $f \in \mathbb{C}\{z\}$  il existe  $L, M > 0$  tels que pour tout  $\ell \in \mathbb{N}$  on ait  $|a_\ell| < LM^\ell$ . Alors pour tout  $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_\mu(f)(z)| &\leq \sum_{\ell \in \mathbb{N}} |a_\ell| |q|^{\frac{-\ell(\ell-1)d}{2n}} |z^\ell| \\ &\leq L \sum_{\ell \in \mathbb{N}} M^\ell |q|^{\frac{-\ell(\ell-1)d}{2n}} |z^\ell| \\ &\leq L \theta_{|q|^{d/n}}(M|z|). \end{aligned}$$

Montrons maintenant le second point. La relation vérifiée par les  $\theta_q$  nous dit que

$$\theta_{q^{d/n}}(q^{k\frac{d}{n}}z) = q^{\frac{k(k-1)d}{2n}} z^k \theta_{q^{d/n}}(z).$$

On rappelle aussi que  $\sigma_q \theta_q(z) = z \theta_q(z) = \theta_q(\frac{1}{z})$ . On en déduit donc

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\mu^{\bar{c}}(1) &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\theta_{q^{d/n}}\left(\frac{cq^{\frac{d}{n}(1+\ell)}}{z}\right)} \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{1}{q^{\frac{\ell(\ell+1)d}{2n}} \left(\frac{c}{z}\right)^{\ell+1} \theta_{q^{d/n}}\left(\frac{c}{z}\right)} \\ &= \frac{1}{\frac{c}{z} \theta_{q^{d/n}}\left(\frac{c}{z}\right)} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} q^{\frac{-\ell(\ell+1)d}{2n}} \left(\frac{z}{c}\right)^\ell \\ &= \frac{1}{\theta_{q^{d/n}}\left(\frac{z}{c}\right)} \cdot \theta_{q^{d/n}}\left(\frac{z}{c}\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Montrons maintenant que pour tous  $a \in \mathbb{C}, \ell \in \mathbb{N}$  on a  $\mathcal{L}_\mu^{\bar{c}} \circ \mathcal{B}_\mu(az^\ell) = az^\ell$  et ceci par récurrence sur  $\ell$ . Le cas  $\ell = 0$  est une conséquence directe de  $\mathcal{B}_\mu(1) = 1$  et  $\mathcal{L}_\mu^{\bar{c}}(1) = 1$  et de la  $\mathbb{C}$ -linéarité des deux applications.

Soit  $\ell \in \mathbb{N}$ , supposons que pour tout  $a \in \mathbb{C}$  on ait  $\mathcal{L}_\mu^{\bar{c}} \circ \mathcal{B}_\mu(az^\ell) = az^\ell$ . Prenons  $a \in \mathbb{C}$ , montrons que  $\mathcal{L}_\mu^{\bar{c}} \circ \mathcal{B}_\mu(az^{\ell+1}) = az^{\ell+1}$ . Le lemme 5.2.6 et l'hypothèse de récurrence nous permettent de dire que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\mu^{\bar{c}} \circ \mathcal{B}_\mu(az^{\ell+1}) &= \mathcal{L}_\mu^{\bar{c}}\left(\xi \mathcal{B}_\mu(aq^{\frac{-\ell d}{n}}z^\ell)\right) \\ &= z \sigma_q^{d/n} \mathcal{L}_\mu^{\bar{c}} \circ \mathcal{B}_\mu(aq^{\frac{-\ell d}{n}}z^\ell) \\ &= z \sigma_q^{d/n}(aq^{\frac{-\ell d}{n}}z^\ell) \\ &= az^{\ell+1}. \end{aligned}$$

Il nous suffit maintenant de remarquer que  $\mathcal{B}_\mu$  (respectivement  $\mathcal{L}_\mu^{\bar{c}}$ ) est un morphisme additif entre  $\mathbb{C}[z]$  et  $\mathbb{H}_\mu^{\bar{c}}$  (resp.  $\mathbb{H}_\mu^{\bar{c}}$  et  $\mathcal{M}(\mathbb{C}^*, 0)$ ).  $\square$

Nous allons maintenant donner quelques propriétés asymptotiques de cette sommation de  $q$ -Borel-Laplace. La définition suivante est une définition d'asymptote  $q$ -Gevrey adaptée de [Dre15], définition 1.8. Les asymptotiques  $q$ -Gevrey sont

des  $q$ -analogues des asymptotiques Gevrey (introduites par G. Watson et développées par Ramis, Sibuya, *etc*) que l'on retrouve notamment dans [Zha99, Zha00, Zha06, RZ02].

**Définition 5.2.9.** Soit  $\mu = \frac{n}{d} \in \mathbb{Q}_{>0}$  où  $n, d$  sont des entiers positifs premiers entre eux. Soit  $\bar{c} \in E_{q^{\frac{d}{n}}}$ . Soient  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^*, 0)$  et  $\hat{f} := \sum_{i \in \mathbb{N}} \hat{f}_i z^i \in \mathbb{C}[[z]]$ . On dira que  $f$  admet  $\hat{f}$  pour développement asymptotique  $q$ -Gevrey d'ordre  $\mu$  le long de  $\bar{c}$  et on écrira

$$f \sim_{\mu}^{\bar{c}} \hat{f}$$

si pour tous  $\varepsilon, R > 0$  suffisamment petits il existe  $L, M > 0$  tels que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et pour tout  $z$  dans

$$\left\{ z \in \mathbb{C}^* \mid |z| < R \right\} \setminus \bigcup_{\ell \in \frac{d}{n}\mathbb{Z}} \left\{ z \in \mathbb{C}^* \mid |z + cq^\ell| < \varepsilon |cq^\ell| \right\}$$

on ait

$$\left| f(z) - \sum_{i=0}^{k-1} \hat{f}_i z^i \right| < LM^k |q|^{\frac{k(k-1)}{2\mu}} |z|^k.$$

Pour un  $\mu \in \mathbb{Q}_{>0}$  on définit la transformation de  $q$ -Laplace d'ordre  $\mu$  *formelle* comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}_{\mu} : \quad \mathbb{C}[[\xi]] &\longrightarrow \mathbb{C}[[z]] \\ \sum_{\ell \in \mathbb{N}} a_{\ell} \xi^{\ell} &\longmapsto \sum_{\ell \in \mathbb{N}} a_{\ell} q^{\frac{\ell(\ell-1)}{2\mu}} z^{\ell}. \end{aligned}$$

C'est l'inverse formel de  $\mathcal{B}_{\mu}$ .

On a alors, en utilisant le lemme 5.2.6, que pour tous  $\ell \in \mathbb{N}$  et  $\bar{c} \in E_{q^{\frac{d}{n}}}$

$$\hat{\mathcal{L}}_{\mu}^{\bar{c}}(\xi^{\ell}) = \mathcal{L}_{\mu}(\xi^{\ell}).$$

**Proposition 5.2.10.** Soit  $\mu = \frac{n}{d} \in \mathbb{Q}_{>0}$  où  $n, d$  sont des entiers positifs premiers entre eux. Soit  $\bar{c} \in E_{q^{\frac{d}{n}}}$ . Soit  $f \in \mathbb{H}_{\mu}^{\bar{c}}$ . On a

$$\mathcal{L}_{\mu}^{\bar{c}}(f) \sim_{\mu}^{\bar{c}} \hat{\mathcal{L}}_{\mu}(f).$$

*Démonstration.* Conséquence directe de [Dre15, prop. 1.9 et remarque 1.4].  $\square$

**Corollaire 5.2.11.** Soit  $\mu = \frac{n}{d} \in \mathbb{Q}_{>0}$  où  $n, d$  sont des entiers positifs premiers entre eux. Soit  $\bar{c} \in E_{q^{\frac{d}{n}}}$ . Soit  $f \in \mathbb{C}[[z]]$  tel que  $\mathcal{B}_{\mu}(f) \in \mathbb{H}_{\mu}^{\bar{c}}$ . Alors  $\mathcal{L}_{\mu}^{\bar{c}} \circ \mathcal{B}_{\mu}(f) \sim_{\mu}^{\bar{c}} f$ .



### 5.3 Calcul explicite des sommations

Nous allons maintenant calculer à l'aide des  $q$ -transformations de Borel et Laplace les  $S_{\bar{c}}\hat{F}$  du théorème 5.1.3. Soit  $\bar{c} \in E_{q^{\frac{d}{n}}} \setminus \Sigma$ . Rappelons que, grâce à la preuve dudit théorème, nous savons que pour calculer  $S_{\bar{c}}\hat{F} =: (\hat{f}_i^{\bar{c}})_{i=1, \dots, dr}$  il suffit de calculer  $S_{\bar{c}}\hat{F}_1 := (\hat{f}_{1+kd}^{\bar{c}})_{k=1, \dots, r-1}$ . Écrivons de manière similaire  $\hat{F} := (\hat{f}_i)_{i=1, \dots, dr}$  et  $\hat{F}_1 := (\hat{f}_{1+kd})_{k=0, \dots, r-1}$ .

**Théorème 5.3.1.** *Soit  $\bar{c} \in E_{q^{\frac{d}{n}}}$ . Alors  $\mathcal{B}_{\mu}(\hat{F}_1) \in \mathbb{H}_{\mu}^{\bar{c}}$  et*

$$S_{\bar{c}}\hat{F}_1 = \mathcal{L}_{\mu}^{\bar{c}} \circ \mathcal{B}_{\mu}(\hat{F}_1).$$

*Démonstration.* On rappelle l'équation (5.6) vérifiée par  $S_{\bar{c}}\hat{F}_1$  :

$$z^n \sigma_q^d S_{\bar{c}}\hat{F}_1 = a U_r^d S_{\bar{c}}\hat{F}_1 + W'.$$

Montrons tout d'abord que  $\mathcal{B}_{\mu}(S_{\bar{c}}\hat{F}_1) \in (\mathbb{H}_{\mu}^{\bar{c}})^r$ . L'équation (5.7) nous permet de montrer que

$$q^{\frac{-d(n-1)}{2}} \xi^n \mathcal{B}_{\mu}(S_{\bar{c}}\hat{F}_1) = a U_r^d \mathcal{B}_{\mu}(S_{\bar{c}}\hat{F}_1) + \mathcal{B}_{\mu}(W') \quad (5.9)$$

ce qui nous donne

$$\left( q^{\frac{-d(n-1)}{2}} \xi^n I_r - a U_r^d \right) \mathcal{B}_{\mu}(S_{\bar{c}}\hat{F}_1) = \mathcal{B}_{\mu}(W').$$

Or  $q^{\frac{-d(n-1)}{2}} \xi^n I_r - a U_r^d$  est inversible si  $q^{\frac{-d(n-1)}{2}} \xi^n - a \neq 0$  ce qui est vrai pour  $\bar{\xi} \notin \Sigma$  (et on a  $\bar{c} \notin \Sigma$ ); le fait que  $\mathcal{B}_{\mu}(W') \in (\mathbb{H}_{\mu}^{\bar{c}})^r$  (lemme 5.2.8) permet alors de conclure.

Maintenant rappelons que le lemme 5.2.8 nous donne que  $\mathcal{L}_{\mu}^{\bar{c}} \circ \mathcal{B}_{\mu}(W') = W'$ . L'équation (5.9) et l'équation (5.8) nous permettent de dire que

$$z^n \sigma_q^d \left( \mathcal{L}_{\mu}^{\bar{c}} \circ \mathcal{B}_{\mu}(\hat{F}_1) \right) = a U_r^d \mathcal{L}_{\mu}^{\bar{c}} \circ \mathcal{B}_{\mu}(\hat{F}_1) + W'.$$

Comme de plus les coefficients de  $\mathcal{L}_{\mu}^{\bar{c}} \circ \mathcal{B}_{\mu}(\hat{F}_1)$  ont des pôles d'ordre au plus 1 et uniquement sur la  $q^{\frac{d}{n}}$ -spirale  $-cq^{\frac{d}{n}}$ , par unicité donnée par le théorème 5.1.3, on a bien

$$S_{\bar{c}}\hat{F}_1 = \mathcal{L}_{\mu}^{\bar{c}} \circ \mathcal{B}_{\mu}(\hat{F}_1).$$

□

*Exemple 5.3.2.* Prenons  $n = 1, d = 2, r = 1, a = 1$  et  $W = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Alors on a la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{z} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et, notant  $\hat{F} = \begin{pmatrix} \hat{f} \\ \hat{f}' \end{pmatrix}$ , on a les relations

$$\sigma_q \hat{f} = \hat{f}',$$

$$\sigma_q \hat{f}' = \frac{1}{z} \hat{f} + 1$$

ce qui nous donne

$$z\sigma_q^2 \hat{f} = \hat{f} + z.$$

En passant à la transformée de  $q$ -Borel on obtient

$$\xi \mathcal{B}_{1/2}(\hat{f}) = \mathcal{B}_{1/2}(\hat{f}) + \xi$$

soit

$$\mathcal{B}_{1/2}(\hat{f}) = \frac{\xi}{\xi - 1}.$$

On en conclut donc que, pour tout  $\bar{c} \in E_{\frac{d}{n}} \setminus \{\bar{1}\}$ , notant  $S_{\bar{c}} \hat{F} = \begin{pmatrix} S_{\bar{c}} \hat{f} \\ \sigma_q S_{\bar{c}} \hat{f} \end{pmatrix}$ , on a

$$S_{\bar{c}} \hat{f} = \sum_{\ell \in 2\mathbb{Z}} \frac{cq^\ell}{cq^\ell - 1} \cdot \frac{1}{\theta_q \left( \frac{cq^{2+\ell}}{z} \right)}.$$



# Troisième partie

## Annexes



# A

## Forme normale d'une matrice $A \in GL_2(\mathbb{C}(\{z\}))$

---

### Sommaire

---

<b>A.1</b>	<b>Cas <math>\rho_1, \rho_2 \neq 0</math>.</b>	<b>IV</b>
<b>A.2</b>	<b>Cas <math>\rho_1 \neq 0, \rho_2 = 0</math>.</b>	<b>VI</b>
<b>A.3</b>	<b>Résultat général en 0 et passage en <math>\infty</math> et en <math> q  &lt; 1</math></b>	<b>VIII</b>

---

Dans cette annexe nous allons produire un algorithme capable de mettre sous forme normale de Birkhoff-Guenther une classe de matrices de taille  $2 \times 2$ . C'est une généralisation des réductions en 0 et en  $\infty$  du chapitre 2, mais dans le cadre  $|q| > 1$  et localement en 0.

Soit donc  $q \in \mathbb{C}^*$  tel que  $|q| > 1$ .

Soit  $A = z^N \sum_{n \geq 0} A_n z^n = A_0 z^N + A_1 z^{N+1} + \dots \in GL_2(K)$ . Nous allons la mettre sous forme triangulaire  $S_v = \begin{pmatrix} \sigma_1 z^{\mu_1} & v \\ 0 & \sigma_2 z^{\mu_2} \end{pmatrix}$ , où  $\mu_1 \leq \mu_2 \in \mathbb{Q}$ ,  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{C}^*$  et  $v \in \sum_{\ell=\mu_1}^{\mu_2-1} \mathbb{C} z^\ell$  si  $\mu_2 > \mu_1$  et  $v \in \mathbb{C} z^{\mu_1}$  si  $\mu_1 = \mu_2$  (soit la forme normale de Birkhoff-Guenther présentée en 1.3); en rajoutant une hypothèse sur le spectre de  $A_0$  on restera de plus dans le cas  $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{Z}$ . Pour ce faire nous allons d'abord chercher un  $v \in K$ .

Écrivons le déterminant de  $A$  sous la forme :

$$\det A = \bar{\rho} z^k w$$

avec  $\bar{\rho} \in \mathbb{C}^*$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $w \in 1 + z\mathbb{C}\{z\}$ .

Soient alors  $\rho_1, \rho_2$  les valeurs propres de  $A_0$ , plusieurs cas vont se présenter en fonction de la nullité ou non de  $\rho_1$  et  $\rho_2$  (sachant que l'on ne traitera pas ici le cas  $\rho_1 = \rho_2 = 0$ , ce qui nous permet de rester dans le cadre des pentes entières).

### A.1 Cas $\rho_1, \rho_2 \neq 0$ .

Dans ce cas  $\bar{\rho} = \rho_1 \rho_2$  et  $A$  est pur de pente  $N$  (en effet  $\hat{A} := Az^{-N}$  est définie en 0 et telle que  $\hat{A}(0) \in GL_2(\mathbb{C})$  donc est fuchsienne). On va tout d'abord supposer que le système est non résonant (on dit que la matrice est résonante s'il existe  $n \in \mathbb{Z}^*$  tel que  $\rho_2 = q^n \rho_1$ ).

On utilise alors :

**Lemme A.1.1.** *Soient  $P \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $Q \in M_p(\mathbb{C})$  telles que  $\text{Spec}(P) \cap \text{Spec}(Q) = \emptyset$ . Alors l'endomorphisme*

$$\phi_{P,Q} : \begin{array}{ccc} M_{n,p}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M_{n,p}(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & MP - QM \end{array}$$

est inversible.

*Démonstration.* Comme  $\phi_{P,Q}$  est un endomorphisme il suffit de prouver qu'il est injectif. Montrons pour cela que  $MP - QM = 0 \Rightarrow M = 0$ .

Si  $MP = QM$  alors pour tout polynôme  $\Psi \in \mathbb{C}[T]$  on a  $M\Psi(P) = \Psi(Q)M$ . En particulier en prenant  $\chi_P$  le polynôme caractéristique de  $P$  on a  $\chi_P(Q)M = 0$ . Comme  $\text{Spec}(P) \cap \text{Spec}(Q) = \emptyset$  on sait que  $\chi_P(Q)$  est inversible et donc  $M = 0$ .  $\square$

**Proposition A.1.2.** *Soit un système fuchsien strict (i.e. tel que sa matrice  $\hat{A}$  soit définie en 0 et telle que  $\hat{A}(0) \in GL_2(\mathbb{C})$ ) de matrice  $\hat{A}$  non résonante. Il existe alors une (unique) transformation de jauge  $F = I_n + zF_1 + \dots \in GL_2(\mathbb{C}\{z\})$  telle que  $F[\hat{A}(0)] = \hat{A}$ .*

*Démonstration.* Écrivons  $\hat{A} = A_0 + zA_1 + \dots$ . On cherche à résoudre  $F(qz)A_0 = \hat{A}(z)F(z)$ , soit en écrivant les relations :

$$\begin{cases} F_0 = I_n \\ q^k F_k A_0 = \sum_{i=0}^k A_{k-i} F_i \quad \forall k \geq 1. \end{cases}$$

On écrit la deuxième relation sous la forme  $q^k F_k A_0 - A_0 F_k = \sum_{i=0}^{k-1} A_{k-i} F_i$ . On en déduit que  $\sum_{i=0}^{k-1} A_{k-i} F_i$  est l'image par  $\phi_{q^k A_0, A_0}$  de  $F_k$  qui est inversible par hypothèse de non résonance du système, d'où  $F_k = \phi_{q^k A_0, A_0}^{-1}(\sum_{i=0}^{k-1} A_{k-i} F_i)$ .

Montrons maintenant que  $F$  converge. Choisissons une norme matricielle sur  $M_n(\mathbb{C})$  telle que  $\|I_n\| = 1$  (par exemple une norme subordonnée à une norme de  $\mathbb{C}^n$ ) ainsi qu'une norme sur  $\text{End}(M_n(\mathbb{C}))$  subordonnée à la précédente. Comme  $\hat{A}$  est analytique il existe  $L, M > 0$  tels que pour tout  $i$   $\|A_i\| \leq LM^i$ . De plus comme  $|q| > 1$  l'endomorphisme  $\phi_{q^k A_0, A_0}$  est équivalent pour  $k \rightarrow \infty$  à la multiplication matricielle à droite par  $q^k A_0$ , i.e.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \left( \phi_{q^k A_0, A_0} \right)^{-1} \right\| = 0$ , et donc nous assure l'existence

de  $L' > 0$  tel que pour tout  $k$

$$\left\| \left( \phi_{q^k A_0, A_0} \right)^{-1} \right\| \leq L'.$$

On déduit alors de la relation de récurrence définissant  $F_k$  que

$$\|F_k\| \leq LL' \sum_{i=0}^{k-1} M^{k-i} \|F_i\|.$$

Posons  $a_0 := 1, a_k := LL' \sum_{i=0}^{k-1} a_i$ . Alors on voit par récurrence que  $M^{-k} \|F_k\| \leq a_k$  car  $\|F_0\| = \|I_n\| = 1$  et  $M^{-k} \|F_k\| \leq LL' \sum M^{-i} M^i a_i = a_k$ . De plus  $a_k \leq (1 + LL')^k$ ; en effet on voit par récurrence que

$$a_k \leq LL' \sum_{i=0}^{k-1} (1 + LL')^i = LL' \frac{(1 + LL')^k - 1}{1 + LL' - 1} = (1 + LL')^k - 1 \leq (1 + LL')^k.$$

On en déduit donc que  $\|F_k\| \leq (M(1 + LL'))^k$  et donc que  $F$  converge.  $\square$

**Proposition A.1.3.** *Soit  $K \in GL_2(\mathbb{C})$  telle que  $R := K^{-1}A_0K$  soit sous forme triangulaire. Il existe une unique matrice  $F \in GL_2(\mathbb{C}\{z\})$  telle que  $F[Rz^N] = A$  et  $F(0) = K$ .*

*Démonstration.* Posons  $A' := K^{-1}AK$ , on a alors  $A' \in z^N R + z^{N+1}M_2(\mathbb{C}\{z\})$ . Selon la proposition A.1.3 il existe une unique  $F_1 \in GL_2(\mathbb{C}\{z\})$  telle que  $F_1(0) = I_n$  et  $F_1[R] = z^{-N}A'$ . En posant  $F := KF_1$  on a alors que  $F[z^N R] = A$  et  $F(0) = K$ . Montrons maintenant l'unicité de  $F$ , supposons qu'il existe  $F'$  satisfaisant les hypothèses. Alors  $K^{-1}F'[z^N R] = A'$  et  $K^{-1}F'(0) = I_n$  ce qui nous assure par l'unicité de  $F_1$  que  $K^{-1}F' = F_1$ , i.e.  $F' = KF_1 = F$ .  $\square$

$Rz^N$  est alors une matrice triangulaire supérieure comme désiré. On a alors  $\mu_1 = \mu_2 = N, \sigma_1 = \rho_1, \sigma_2 = \rho_2$  et  $v \in \mathbb{C}$  ( $v = 0$  si  $\rho_1 \neq \rho_2$ ).

S'il y a des résonances intempestives il faut savoir s'en débarrasser, ce qui est faisable mais fait de 0 un pôle de notre transformation de jauge :

**Proposition A.1.4.** *Tout système fuchsien strict est équivalent à transformation de jauge analytique près à un système fuchsien strict non résonnant.*

*Démonstration.* On va montrer qu'en alternant des transformations constantes et des transformations dites de cisaillement (ou "shearing"), c'est-à-dire de la forme

$$G := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix}$$

on peut éliminer les résonances du système.

Supposons  $\rho_2 = q^n \rho_1$  pour  $n \in \mathbb{Z}^*$ . On peut de plus supposer, quitte à permuter



$\rho_1$  et  $\rho_2$ , que  $n > 0$ . Soit  $K \in GL_2(\mathbb{C})$  telle que  $K^{-1}A_0K = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & q^n \rho_1 \end{pmatrix}$ . Posons  $A' := K^{-1}AK = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Alors  $G[A'] = \begin{pmatrix} a & bz \\ q^{-1}z^{-1}c & q^{-1}d \end{pmatrix}$ . Comme  $c \in \mathbb{C}\{z\}$  et  $c(0) = 0$  on sait que  $q^{-1}z^{-1}c$  est défini en 0; le terme constant de  $G[A']$  est donc de la forme  $\begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ * & q^{n-1}\rho_1 \end{pmatrix}$ : la résonance a diminué de 1. En répétant l'algorithme  $n - 1$  fois on obtient un système fuchsien strict non résonant.  $\square$

On peut alors voir que  $A$  est alors équivalent à  $\rho_1 z^N I_2$  par la transformation  $F := KF_1 G_n$  où  $G_n$  est la transformation de jauge de la proposition A.1.4,  $F_1$  la transformation de la proposition A.1.2 et  $K$  une matrice qui trigonalise le terme constant de  $G_n[Az^{-N}]$ . Le problème étant que l'on a bien  $F \in GL_2(K)$  mais plus  $F \in GL_2(\mathbb{C}\{z\})$ .

## A.2 Cas $\rho_1 \neq 0, \rho_2 = 0$ .

Soit  $K \in GL_2(\mathbb{C})$  telle que  $A_0 = K \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} K^{-1}$ . Posons  $A' := K^{-1}AK = z^N \sum_{n \geq 0} A'_n z^n$ . On a alors  $\det A' = \det A$ .

**Proposition A.2.1.** *Il existe une matrice  $F \in GL_2(\mathbb{C}\{z\})$  analytique sur  $\mathbb{C}^*$  telle que  $F \in I_2 + zM_2(\mathbb{C}\{z\})$  et vérifiant  $\sigma_q(\det F) = w \det F$  et  $v \in \mathbb{C}(\{z\})$  tels que  $A' = F[S_v]$  où*

$$S_v = \begin{pmatrix} \rho_1 z^N & v \\ 0 & \frac{\bar{\rho}_1}{\rho_1} z^{k-N} \end{pmatrix}.$$

*Démonstration.* Nous allons tenter de construire de tels  $F$  et  $v$  à partir de l'équation

$$A' = F \left[ \begin{pmatrix} \sigma_1 z^{\mu_1} & v \\ 0 & \sigma_2 z^{\mu_2} \end{pmatrix} \right]$$

et montrer que cet  $S_v$  est bien de la forme voulue. Soient  $X$  et  $Y$  les colonnes de  $F$ .

La relation  $F[S_v] = A'$  impose à  $X$  de satisfaire l'équation  $\sigma_1 z^{\mu_1} \sigma_q(X) = AX$ . On écrit alors  $X$  sous la forme  $X = \sum_{n \geq 0} X_n z^n$  et on pose  $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . On a alors

$$\sigma_1 z^{\mu_1} \sum_{n \geq 0} q^n X_n z^n = z^N \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{i=0}^n A'_{n-i} X_i \right) z^n.$$

Il suffit alors de poser  $\mu_1 := N$  et on a alors le système :

$$\begin{cases} \sigma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ q^n \sigma_1 X_n = A'_0 X_n + \cdots + A'_n X_0, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

La première équation nous donne  $\sigma_1 = \rho_1$  et la deuxième

$$X_n = (q^n \sigma_1 I_2 - A'_0)^{-1} (A'_1 X_{n-1} + \cdots + A'_n X_0), \quad n \geq 1.$$

La même méthode que dans la preuve A.1.2 permet de montrer la convergence de  $X$ .

Si on choisit maintenant un  $Y$  non colinéaire à  $X$ , il existe des uniques  $\lambda$  et  $v$  tels que  $\lambda \sigma_q(Y) = A'Y - v \sigma_q(X)$ , *i.e.* tels que l'on ait

$$F \left[ \begin{pmatrix} \rho_1 z^{\mu_1} & v \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] = A'$$

(pour cela on réécrit l'équation  $\lambda \sigma_q(Y) = A'Y - v \sigma_q(X)$  sous la forme  $\sigma_q(F) \begin{pmatrix} v \\ \lambda \end{pmatrix} = A'Y$ ; comme  $X$  et  $Y$  sont non colinéaires on peut inverser  $\sigma_q(F)$ ).

On va chercher un  $Y$  canonique tel que  $\lambda$  soit de la forme  $\sigma_2 z^{\mu_2}$ .  
Posons  $W := \det F$ , il vérifie

$$\frac{\sigma_q W}{W} = \frac{\det A}{\det S_v} = \frac{\bar{\rho} z^k w}{\sigma_1 \sigma_2 z^{\mu_1 + \mu_2}}.$$

Comme  $\sigma_1 = \rho_1$  et  $\mu_1 = N$ , pour que  $\sigma_q W = wW$  on doit poser  $\sigma_2 = \frac{\bar{\rho}}{\rho_1}$  et  $\mu_2 = k - \mu_1$ .

Il existe alors une unique solution  $W = \prod_{n \geq 1} \sigma_q^{-n}(w)$  telle que  $W(0) = 1$ . (Dans ce cas  $W$  s'annule sur les  $z_i q^{\mathbb{N}^*}$  où les  $z_i$  sont les zéros non nuls de  $\det A$ ).

On écrit alors  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ , et on pose  $Y := \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$  avec  $g := \frac{W}{x_1}$  ce qui nous assure  $F \in I_2 + M_2(\mathbb{C}\{z\})$  et on en déduit  $v$  tel que  $F \left[ \begin{pmatrix} \rho_1 z^N & v \\ 0 & \frac{\bar{\rho}}{\rho_1} z^{k-N} \end{pmatrix} \right] = A'$ .  $\square$

**Corollaire A.2.2.** *Il existe une matrice  $\bar{F} \in GL_2(\mathbb{C}\{z\})$  analytique sur  $\mathbb{C}^*$  telle que  $\bar{F} \in K + zM_2(\mathbb{C}\{z\})$  et vérifiant  $\sigma_q(\det \bar{F}) = w \det \bar{F}$  et  $\mu_1 < \mu_2 \in \mathbb{Z}$ ,  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{C}^*$ ,  $v \in \mathbb{C}(\{z\})$  tels que  $A = \bar{F}[S_v]$ .*

*Démonstration.* Il suffit juste de prendre  $\bar{F} = KF$  où  $F$  est la transformation de la proposition A.2.1.  $\square$

Il nous reste à trouver  $u \in \sum_{l=\mu_1}^{\mu_2-1} \mathbb{C}z^l$  tel que  $S_v$  soit équivalente à  $S_u$ .

**Théorème A.2.3.** *Il existe des uniques  $f \in \mathbb{C}(\{x\})$  et  $u \in \sum_{l=\mu_1}^{\mu_2-1} \mathbb{C}z^l$  tels que*

$$\begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [S_u] = S_v$$

*Démonstration.* La relation  $\begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [S_u] = S_v$  implique que  $f$  vérifie

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} x^{\mu_2-\mu_1} \sigma_q(f) - f = x^{-\mu_1} \frac{v-u}{\sigma_1}.$$

Comme  $\mu_2 - \mu_1 > 0$  il existe un unique  $f$  convergent pour cette équation si et seulement si pour tout  $\zeta \in \mathbb{C}^*$  tel que  $\zeta^{\mu_2-\mu_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$  on ait  $\mathcal{B}_{q, \mu_2-\mu_1}(x^{-\mu_1} \frac{v-u}{\sigma_1})(\zeta^{-1}) = 0$  où  $\mathcal{B}_{q, \mu_2-\mu_1}$  est la transformée de  $q$ -Borel de degré  $\mu_2 - \mu_1$  définie en 1.1.7. Ceci implique l'existence d'un unique  $u$  de la forme souhaitée (voir 1.1.7).  $\square$

### A.3 Résultat général en 0 et passage en $\infty$ et en $|q| < 1$

On a alors le résultat général :

**Théorème A.3.1.** *Soit  $A = \sum_{n \geq N} A_{n-N} z^n \in GL_2(\mathbb{C}(\{z\}))$ , avec  $\det A = \bar{\rho} z^k w$ ,  $\bar{\rho} \in \mathbb{C}^*$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $w \in 1 + z\mathbb{C}\{z\}$ . Notons  $\rho_1, \rho_2$  les valeurs propres de  $A_0$  et supposons que  $\rho_1 \neq 0$ . Alors il existe un  $v \in \sum_{\ell=N}^{k-N-1} \mathbb{C}z^\ell$  tel que  $A$  soit équivalente via transformation de jauge à la matrice  $\begin{pmatrix} \rho_1 z^N & v \\ 0 & \frac{\bar{\rho}}{\rho_1} z^{k-N} \end{pmatrix}$ . En particulier si  $\rho_2 \neq 0$  on a  $\frac{\bar{\rho}}{\rho_1} = \rho_2$ ,  $z^{k-N} = z^N$ .*

Pour la mise en forme normale à l'infini d'une matrice  $A \in GL_2(\mathbb{C}(\{\frac{1}{z}\}))$  il suffit de faire la même chose en posant  $\xi = \frac{1}{z}$ . Pour regarder quand  $|q| < 1$  il y a un peu plus de travail :

Soit le système  $X(qz) = A(z)X(z)$  avec  $A \in GL_2(\mathbb{C}(\{z\}))$  et  $|q| < 1$ . On a alors  $X(z) = A^{-1}(z)X(qz)$ . Posons  $\bar{q} = q^{-1}$ . On a alors notre système qui est équivalent à  $X(\bar{q}z) = A^{-1}(\bar{q}z)X(z)$ . Il suffit alors de mettre en forme normale  $A^{-1}(q^{-1}z)$  et d'en déduire  $A(z)$ .

# B

## Construction de quotients toriques

---

### Sommaire

---

<b>B.1</b>	<b>Cônes et variétés toriques affines . . . . .</b>	<b>IX</b>
<b>B.2</b>	<b>Éventails et variétés toriques . . . . .</b>	<b>XIII</b>
<b>B.3</b>	<b>Action de <math>\mathbb{G}_m^r</math> sur <math>\mathbb{A}^n</math> ; variété torique quotient associée</b>	<b>XVI</b>

---

Nous allons dans cette annexe présenter la construction de quotients toriques utilisée au chapitre 4, tout d’abord en présentant quelques généralités sur les variétés toriques (provenant principalement de [CLS11]) puis en présentant un algorithme de construction de quotients toriques (à partir de [Dol03, chapitre 12]).

Commençons tout d’abord par la définition de variété torique :

**Définition B.0.2.** Une variété torique (sur  $\mathbb{C}$ ) est une variété (algébrique) irréductible  $X$  contenant un tore  $T \simeq (\mathbb{C}^*)^n$  comme ouvert de Zariski dense tel que l’action du tore  $T$  sur lui-même s’étende en une action algébrique de  $T$  sur  $X$ .

Nous allons maintenant procéder en deux étapes pour leur construction : tout d’abord regarder comment construire une variété torique affine à partir d’un cône, puis ensuite une variété torique générale à partir d’un éventail.

### B.1 Cônes et variétés toriques affines

On se fixe un réseau  $N \subset \mathbb{R}^n$  et on note  $M := N^\vee = \text{Hom}(N, \mathbb{Z})$  son réseau dual. De plus pour tous  $u \in M, v \in N$  on note  $\langle u, v \rangle := u(v)$ . On regardera aussi les espaces vectoriels  $N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  et  $M_{\mathbb{R}} := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ . Tous les résultats de cette section proviennent de [CLS11, chapitre 1].

*Remarque B.1.1.* Dans les exemples on regardera généralement  $N = \mathbb{Z}^n$  et on identifiera  $M$  à  $\mathbb{Z}^n$ . Dans ce cas on a  $N_{\mathbb{R}} = M_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n$  et  $\langle u, v \rangle$  représentera le produit scalaire usuel de  $u$  et  $v$ .

Tout d'abord rappelons la définition suivante :

**Définition B.1.2.** Un semi-groupe affine  $S$  est un semi-groupe commutatif  $S$  (*i.e.* un monoïde commutatif  $S$ ) engendré par un nombre fini d'éléments (il existe  $u_1, \dots, u_n$  tels que  $S = \bigoplus \mathbb{N}u_i$ ) et pouvant se plonger dans un réseau  $M$ . On définit son algèbre associée  $\mathbb{C}[S]$  comme le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de base  $S$  muni de la multiplication induite par la structure de semi-groupe de  $S$ .

Si  $S \subset \mathbb{Z}^n$  est un semi-groupe affine,  $\mathbb{C}[S]$  peut être vue comme la  $\mathbb{C}$ -algèbre engendrée par

$$\{X_1^{a_1} \dots X_n^{a_n} \mid (a_1, \dots, a_n) \in S\}$$

et on a

$$\mathbb{C}[S] \subset \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}].$$

On a le théorème suivant :

**Théorème B.1.3.** *Soit  $V$  une variété affine.  $V$  est torique si et seulement si  $V = \text{Spec}(\mathbb{C}[S])$  pour un semi-groupe affine  $S$ .*

Nous allons maintenant présenter un bon moyen de construire un semi-groupe affine, en utilisant pour cela des cônes.

**Définition B.1.4.** Un cône polyédral convexe de  $N_{\mathbb{R}}$  est un ensemble de la forme

$$\sigma = \text{Cone}(S) := \left\{ \sum_{u \in S} \lambda_u u \mid \lambda_u \geq 0 \right\} \subset N_{\mathbb{R}}$$

où  $S \subset N_{\mathbb{R}}$  est un ensemble fini. On dit que  $\sigma$  est engendré par  $S$ . On utilise de plus la convention  $\text{Cone}(\emptyset) = \{0\}$ .

Un cône polyédral convexe est dit rationnel si  $\sigma = \text{Cone}(S)$  pour  $S \subset N$ .

**Définition B.1.5.** La dimension d'un cône  $\sigma$ ,  $\dim \sigma$ , est la dimension du plus petit sous espace  $\text{Vect}(\sigma) \subset N_{\mathbb{R}}$  contenant  $\sigma$ .

**Définition B.1.6.** Soit  $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$  un cône polyédral convexe. Son cône dual est défini comme

$$\sigma^{\vee} := \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u \rangle \geq 0 \forall u \in \sigma\}.$$

*Remarque B.1.7.*  $\sigma^{\vee}$  est un cône polyédral convexe, rationnel si  $\sigma$  est rationnel, et on a  $(\sigma^{\vee})^{\vee} = \sigma$ .

Soit  $m \in M_{\mathbb{R}}$ , on définit

$$H_m := \{u \in N_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u \rangle = 0\} \subset N_{\mathbb{R}}.$$

**Définition B.1.8.** On appelle face d'un cône polyédral convexe un  $\tau = H_m \cap \sigma$  pour un  $m \in \sigma^\vee$ . Une face propre est une face  $\tau$  telle que  $\tau \neq \sigma$ .

**Lemme B.1.9.** Soit  $\sigma$  un cône polyédral convexe. Alors

1. Toute face de  $\sigma$  est un cône polyédral convexe (et rationnel si  $\sigma$  est rationnel).
2. Une intersection de deux faces de  $\sigma$  est une face de  $\sigma$ .
3. Une face d'une face de  $\sigma$  est une face de  $\sigma$ .

**Proposition B.1.10.** Soit  $\sigma \subset N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$  un cône polyédral convexe. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $\{0\}$  est une face de  $\sigma$ .
2.  $\sigma$  ne contient pas de sous-espace vectoriel non nul de  $N_{\mathbb{R}}$ .
3.  $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$ .
4.  $\dim \sigma^\vee = n$ .

Si  $\sigma$  vérifie une de ces hypothèses on dira qu'il est fortement convexe.

*Remarque B.1.11.* Si  $\sigma$  est fortement convexe cela n'implique pas forcément que  $\sigma^\vee$  l'est aussi. Par exemple de cône dual de  $\sigma = \text{Cone}((1, 0)) \subset \mathbb{R}^2$  est le demi-plan  $x \geq 0$  de  $\mathbb{R}^2$  qui n'est pas fortement convexe.

**Proposition B.1.12** (Lemme de Gordan). Soit  $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$  un cône polyédral rationnel convexe. Alors l'ensemble

$$S_\sigma := \sigma^\vee \cap M \subset M$$

est un semi-groupe affine.

On en arrive donc au théorème suivant (1.2.18 de [CLS11]) :

**Théorème B.1.13.** Soit  $\sigma \subset N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$  un cône polyédral rationnel convexe de semi-groupe  $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ . Alors

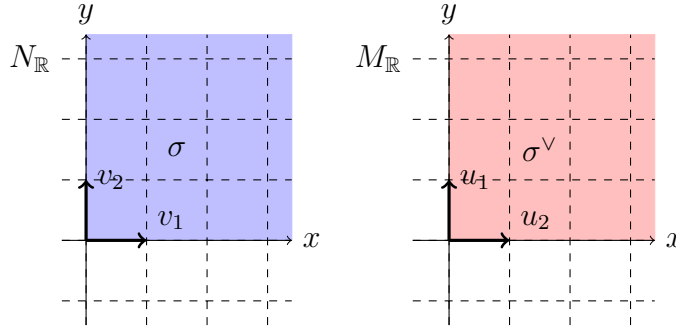
$$U_\sigma := \text{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma])$$

est une variété torique affine. De plus on a équivalence entre

1.  $\dim U_\sigma = n$ .
2. Le tore de  $U_\sigma$  est  $T_N = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$ .

3.  $\sigma$  est fortement convexe.

*Exemple B.1.14.* 1. Soit  $\sigma$  le cône engendré par la base canonique  $(v_i)_i$  de  $N_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n$ . Alors  $\sigma^\vee$  est le cône engendré par la base canonique  $(u_i)_i$  de  $M_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n$ ; on peut voir que  $\sigma$  est auto-dual. Dans le cas  $n = 2$  cela donne :



On a alors  $S_\sigma = \text{Span}_{\mathbb{N}}((u_i)_i) = \mathbb{N}^n$  et  $\mathbb{C}[S_\sigma] \simeq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ ; on peut donc voir  $U_\sigma$  comme étant tout simplement  $\mathbb{C}^n$ .

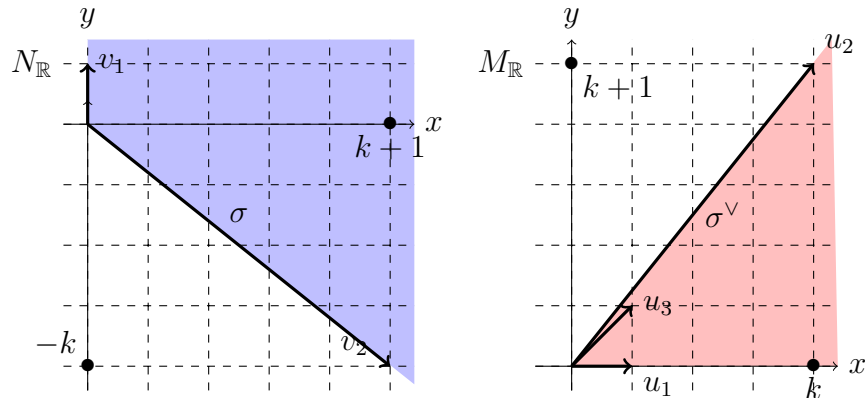
2. Si  $\sigma = \{0\} \subset \mathbb{R}^n$  est le cône trivial alors  $\sigma^\vee = \mathbb{R}^n$ ,  $S_\sigma = \mathbb{Z}^n$ ,  $\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$  et  $U_\sigma = (\mathbb{C}^*)^n$  est le tore de dimension  $n$ .
3. Plus généralement si  $(e_i)_i$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et si, pour  $0 \leq r \leq n$ ,  $\sigma = \text{Cone}(e_1, \dots, e_r) \subset \mathbb{R}^n$  alors

$$\sigma^\vee = \text{Cone}(e_1, \dots, e_r, \pm e_{r+1}, \dots, \pm e_n)$$

et

$$U_\sigma = \text{Spec}(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_r, x_{r+1}^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]) = \mathbb{C}^r \times (\mathbb{C}^*)^{n-r}.$$

4. Soit  $\sigma = \text{Cone}(v_1, v_2)$  où  $v_1 = (0, 1)$ ,  $v_2 = (k + 1, -k)$ ,  $k \geq 1$ . Alors  $\sigma^\vee$  est engendré par les vecteurs  $u_1 = (1, 0)$  et  $u_2 = (k, k + 1)$ .



$u_1$  et  $u_2$  ne suffisent pas à engendrer  $S_\sigma$ , il faut rajouter le vecteur  $u_3 = (1, 1)$ . On a donc  $S_\sigma = \text{Span}_{\mathbb{N}}(u_1, u_2, u_3)$  d'où

$$\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[x, x^k y^{k+1}, xy] \simeq \mathbb{C}[X, Y, Z]/Z^{k+1} - XY$$

et donc

$$U_\sigma \simeq \mathbb{V}(Z^{k+1} - XY) \subset \mathbb{C}^3.$$

Nous avons donc construit une variété torique affine à partir d'un cône ; il nous reste maintenant à construire une variété torique générale en recollant de telles variétés entre elles à partir de la donnée de plusieurs cônes.

## B.2 Éventails et variétés toriques

**Définition B.2.1.** Un éventail  $\Sigma$  dans  $N_{\mathbb{R}}$  est une collection finie de cônes  $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$  telle que

1. Tous les  $\sigma \in \Sigma$  sont des cônes polyédraux rationnels fortement convexes.
2. Pour tout  $\sigma \in \Sigma$  toutes les faces de  $\sigma$  sont dans  $\Sigma$ .
3. Pour tous  $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ , l'intersection  $\sigma_1 \cap \sigma_2$  est une face de chacun des cônes  $\sigma_1, \sigma_2$ .

De plus on définit

- Le support de  $\Sigma$  comme étant  $|\Sigma| := \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ .
- $\Sigma(r)$  comme étant l'ensemble composé des cônes de dimension  $r$  de  $\Sigma$ .

Nous allons maintenant expliquer rapidement comment construire une variété torique à partir d'un éventail en suivant la méthode de [CLS11, pages 106 et 107].

Soit  $\Sigma$  un éventail de  $\mathbb{R}^n$  et  $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ . Si  $\tau$  est une face de  $\sigma_1$  telle que  $\tau = \sigma_1 \cap H_m$  pour un  $m \in \sigma_1^\vee$ , alors

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}(-m).$$

Écrivant  $\chi^m$  l'élément de  $\mathbb{C}[S_{\sigma_1}]$  correspondant à  $m \in S_{\sigma_1} = \sigma_1^\vee \cap M$ ,  $\mathbb{C}[S_\tau]$  est le localisé  $\mathbb{C}[S_{\sigma_1}]_{\chi^m}$  et donc  $U_\tau = (U_{\sigma_1})_{\chi^m}$ . En particulier si  $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$  il existe  $m \in \sigma_1^\vee \cap (-\sigma_2)^\vee \cap M$  tel que

$$\sigma_1 \cap H_m = \tau = \sigma_2 \cap H_{-m}$$

et donc

$$U_{\sigma_1} \supset (U_{\sigma_1})_{\chi^m} = U_\tau = (U_{\sigma_2})_{\chi^{-m}} \subset U_{\sigma_2}$$

et  $S_\tau = S_{\sigma_1} + S_{\sigma_2}$ .



Regardons maintenant l'ensemble des  $U_\sigma = \text{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma])$  pour  $\sigma \in \Sigma$ . Soient  $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$  et  $\tau := \sigma_1 \cap \sigma_2$ . On a donc par ce qui précède un isomorphisme

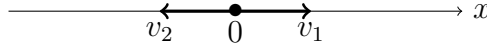
$$g_{\sigma_2, \sigma_1} : (U_{\sigma_1})_{\mathcal{X}^m} \simeq (U_{\sigma_2})_{\mathcal{X}^{-m}}$$

donné par l'identité sur  $U_\tau$ . Ceci permet de recoller entre elles les variétés  $U_\sigma$  le long des sous-variétés  $U_\tau$  et de créer ainsi une variété  $X_\Sigma$  associée à  $\Sigma$ .

**Théorème B.2.2** (3.1.5 de [CLS11]). *Soit  $\Sigma$  un éventail de  $N_{\mathbb{R}}$ . La variété  $X_\Sigma$  est une variété torique.*

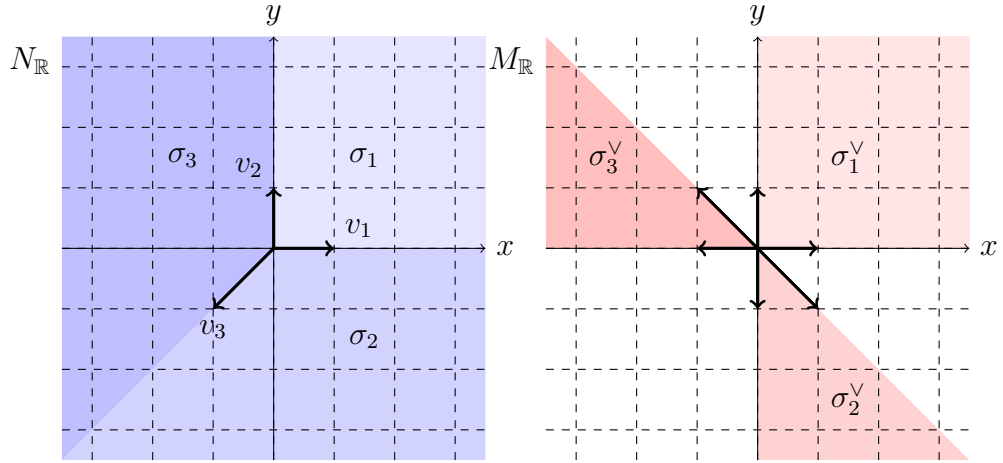
**Théorème B.2.3** (Proposition 3.1.14 de [CLS11]). *Si  $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$  alors  $X_\Sigma \simeq X_{\Sigma_1} \times X_{\Sigma_2}$ .*

*Exemple B.2.4.* 1. Considérons dans  $\mathbb{R}$  l'éventail  $\Sigma_1$  dont les cônes de dimension 1 sont  $\sigma_1 = \text{Cone}(v_1 = 1)$  et  $\sigma_2 = \text{Cone}(v_2 = -1)$ ; ce sont des cônes auto-duaux.



On a  $\mathbb{C}[S_{\sigma_1}] = \mathbb{C}[x]$  et  $\mathbb{C}[S_{\sigma_2}] = \mathbb{C}[x^{-1}]$ ; les deux se recollent le long de  $\mathbb{C}[S_0] = \mathbb{C}[x, x^{-1}]$  de manière classique et on obtient  $X_{\Sigma_1} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ .

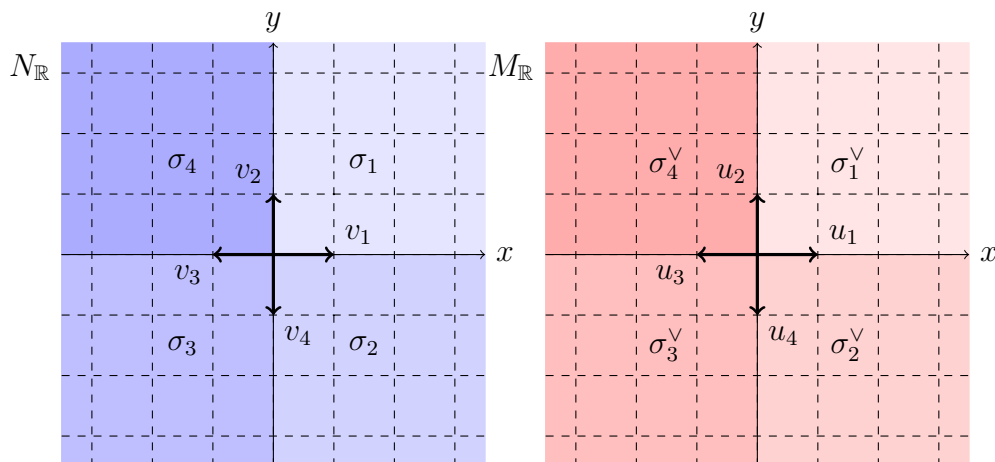
2. Considérons maintenant l'éventail  $\Sigma_2$  ci-dessous, de générateurs  $v_1 = (1, 0)$ ,  $v_2 = (0, 1)$  et  $v_3 = (-1, -1)$ .



Cela nous donne alors  $\mathbb{C}[S_{\sigma_1}] = \mathbb{C}[x, y]$ ,  $\mathbb{C}[S_{\sigma_2}] = \mathbb{C}[xy^{-1}, y^{-1}]$  et  $\mathbb{C}[S_{\sigma_3}] = \mathbb{C}[x^{-1}, x^{-1}y]$ . On peut donc identifier  $X_{\Sigma_2}$  à  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  en identifiant  $U_{\sigma_1}$  à la carte  $U_z = \{[x : y : z] | z \neq 0\} = \{[x : y : 1]\}$  de  $\mathbb{P}^2$ ,  $U_{\sigma_2}$  à  $U_y$  et  $U_{\sigma_3}$  à  $U_x$ .

3. De manière générale si  $(e_i)_i$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et si l'on pose  $e_{n+1} := -\sum e_i$ , l'éventail  $\Sigma_3$  composé des cônes, de dimension  $n$ ,  $\sigma_i := \text{Cone}(e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n)$  pour  $1 \leq i \leq n + 1$  et de leurs faces engendre la variété  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  (i.e.  $X_{\Sigma_3} = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ).

4. Considérons maintenant l'éventail  $\Sigma_4$  ci-dessous, de générateurs  $v_1 = (1, 0)$ ,  $v_2 = (0, 1)$ ,  $v_3 = (-1, 0)$  et  $v_4 = (0, -1)$ .



Notons alors  $A_i := \mathbb{C}[S_{\sigma_i}]$  et  $U_i := U_{\sigma_i}$ , on a alors

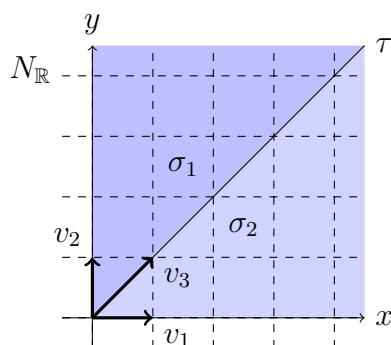
$$\begin{aligned} A_1 &= \mathbb{C}[x, y] & A_2 &= \mathbb{C}[x, y^{-1}] \\ A_3 &= \mathbb{C}[x^{-1}, y^{-1}] & A_4 &= \mathbb{C}[x^{-1}, y]. \end{aligned}$$

On peut alors identifier  $X_{\Sigma_4}$  à  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  en identifiant les ouverts  $U_i$  à

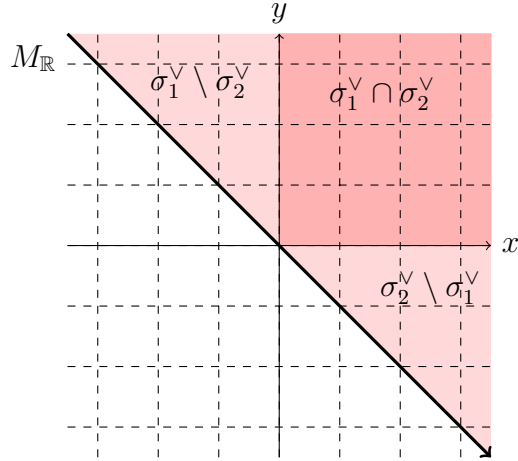
$$\begin{aligned} U_1 &= \{([x : 1], [y : 1]) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1\} & U_2 &= \{([1 : x'], [y : 1]) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1\} \\ U_3 &= \{([1 : x'], [1 : y']) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1\} & U_4 &= \{([x : 1], [1 : y']) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1\}. \end{aligned}$$

Il est aussi possible de voir que  $\Sigma_4 = \Sigma_1 \times \Sigma_1$  et donc, en vertu du théorème B.2.3,  $X_{\Sigma_4} = X_{\Sigma_1} \times X_{\Sigma_1} = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ .

5. Considérons enfin l'éventail  $\Sigma_5$  ci-dessous, de générateurs  $v_1 = (1, 0)$ ,  $v_2 = (0, 1)$  et  $v_3 = (1, 1)$ .



Alors notant  $(u_1, u_2)$  la base canonique de  $M_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$  on obtient que  $\sigma_1^\vee = \text{Cone}(u_1, u_1 + u_2)$ ,  $\sigma_2^\vee = \text{Cone}(u_1, u_2, u_2)$  et  $\tau^\vee = \sigma_1^\vee \cup \sigma_2^\vee$ .



La variété  $X_{\Sigma_5}$  obtenue n'est autre que l'éclatement de  $\mathbb{C}^2$  à l'origine,  $\text{Bl}_0(\mathbb{C}^2)$ , soit la sous-variété  $\mathbb{V}(x_0y - x_1x) \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2$  (c'est l'objet de l'exemple 3.1.15 de [CLS11]).

### B.3 Action de $\mathbb{G}_m^r$ sur $\mathbb{A}^n$ ; variété torique quotient associée

Dans cette partie nous allons présenter la méthode décrite dans [Dol03, chapitre 12] pour construire un quotient (en un certain sens) d'un espace affine  $\mathbb{A}^n$  (ou tout du moins d'un ouvert dense de  $\mathbb{A}^n$ ) par l'action d'un tore  $\mathbb{G}_m^r =: T$  agissant de la manière suivante :

$$\underline{t} \cdot \underline{z} = (t_1, \dots, t_r) \cdot (z_1, \dots, z_n) := (\underline{t}^{a_1} z_1, \dots, \underline{t}^{a_n} z_n)$$

où les  $\underline{a}_j = (a_{1j}, \dots, a_{rj}) \in \mathbb{Z}^r$  et  $\underline{t}^{a_j} = t_1^{a_{1j}} \dots t_r^{a_{rj}}$ .

Nous allons construire à partir de cette action un éventail  $\Sigma$  et nous définirons notre quotient comme étant la variété torique associée à cet éventail ; un résultat statuant que cette variété est bien isomorphe à un quotient catégorique d'un ouvert dense de  $\mathbb{A}^n$  (explicite) par notre tore confortera ce choix de définition.

Commençons tout d'abord par la définition de quotient catégorique (et géométrique) :

**Définition B.3.1.** Soit  $G$  un groupe algébrique et  $X$  une  $G$ -variété, *i.e.* une variété munie d'une action algébrique  $\Psi : G \times X \rightarrow X \times X$  de  $G$ . Un quotient catégorique de  $X$  est un couple  $(Y, p)$  où  $Y$  est une variété et  $p$  un morphisme  $X \rightarrow Y$  vérifiant

la propriété universelle suivante :

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{p} & Y \\
 & \searrow g & \downarrow \exists! \bar{g} \\
 & & Z
 \end{array}$$

On dira de plus que le quotient est géométrique si l'image de  $\Psi$  est  $X \times_Y X$ . On écrira  $Y = X//G$  pour un quotient catégorique et  $Y = X/G$  pour un quotient géométrique.

Nous allons maintenant construire l'ouvert  $U$  que nous quotienterons. Donnons-nous un  $\underline{a} \in \mathbb{Z}^r$  et écrivons  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n}$  la matrice dont les colonnes sont les vecteurs  $\underline{a}_j$ . Pour un  $d \geq 0$  posons  $S_d$  comme étant l'ensemble des monômes  $\underline{X}^{\underline{m}} = X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n}$  où les  $\underline{m} \in \mathbb{N}^n$  sont tels que  $A \cdot \underline{m} = d\underline{a}$ . Nous pouvons alors regarder les  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels  $\mathbb{C}[S]_d := \text{Vect}_{\mathbb{C}}(S_d)$  et l'algèbre graduée

$$\mathbb{C}[S] := \bigoplus_{d \geq 0} \mathbb{C}[S]_d.$$

$\mathbb{C}[S]$  est de type fini (voir toujours [Dol03]), regardons l'idéal

$$\mathbb{C}[S]_{>0} := \bigoplus_{d > 0} \mathbb{C}[S]_d.$$

Il est possible de choisir un ensemble minimal de générateurs monomiaux de cet idéal, soient  $\underline{X}^{\underline{m}_1}, \dots, \underline{X}^{\underline{m}_s}$ . Posons alors, pour  $\underline{m}_j = (m_{1j}, \dots, m_{nj})$ ,  $I_j := \{i | m_{ij} \neq 0\}$  et  $D(\underline{X}^{\underline{m}_j}) := \mathbb{A}^n \setminus \{\underline{X}^{\underline{m}_j} = 0\}$ . Nous pouvons alors définir

$$U = (\mathbb{A}^n)^{\text{ss}}(L_{\underline{a}}) := \bigcup_{j=1}^s D(\underline{X}^{\underline{m}_j}).$$

*Remarque B.3.2.* La notation  $(\mathbb{A}^n)^{\text{ss}}(L_{\underline{a}})$  vient du fait que cet ouvert  $U$  est l'ensemble des points semi-stables de  $\mathbb{A}^n$  par rapport au fibré en droites  $L_{\underline{a}}$ , où  $L_{\underline{a}}$  est donné par l'isomorphisme

$$\mathbb{Z}^r \simeq \text{Pic}^T(\mathbb{A}^n)$$

où  $\text{Pic}^T(\mathbb{A}^n)$  est l'ensemble des classes d'isomorphismes de  $T$ -fibrés en droites et où un point  $x$  est semi-stable (par rapport à  $L_{\underline{a}}$ ) s'il existe  $m > 0$  et  $s \in \Gamma(\mathbb{A}^n, L_{\underline{a}}^m)^T$  tels que  $\mathbb{A}_s^n := \{y \in \mathbb{A}^n | s(y) \neq 0\}$  soit affine et contienne  $x$ .

Plus précisément le fibré en droite  $L_{\underline{a}}$  est le fibré trivial  $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1$  muni de l'action

$$\underline{t} \cdot (z, w) = (\underline{t} \cdot z, \underline{t}^{\underline{a}} \cdot w).$$

Il est désormais temps de construire l'éventail associé. Posons  $M$  comme étant le noyau de l'application  $\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^r$  donnée par la matrice  $A$ ; c'est un groupe abélien libre de rang  $l := n - \text{rk}(A)$ . Prenons  $(e_1, \dots, e_n)$  comme étant la base de  $\mathbb{Z}^n$ ,  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  la base duale dans  $(\mathbb{Z}^n)^\vee$  et  $(\bar{e}_1^*, \dots, \bar{e}_n^*)$  sa restriction à  $N := M^\vee$ . Pour chacun des  $I_j$  définissons  $\sigma_j$  comme étant le cône de  $N_{\mathbb{R}}$  engendré par les  $\bar{e}_i^*$  pour  $i \notin I_j$ . Alors l'ensemble  $\Sigma$  de ces cônes et de leurs faces respectives forme un éventail (lemme 12.3 de [Dol03]).

Une description plus pratique des cônes  $\sigma_j$  peut se faire ainsi : soit  $(v_1, \dots, v_l)$  une base de  $M$  et soit  $(v_1^*, \dots, v_l^*)$  la base duale dans  $N$ . Alors on peut écrire les  $\bar{e}_i^*$  de la manière suivante :

$$\bar{e}_i^* = \sum_{j=1}^l b_{ji} v_j^*.$$

Dans ce cas  $\sigma_j$  est engendré par les colonnes  $B_i$  de  $B = (b_{ij})_{i,j}$  pour  $i \notin I_j$ .

Enfin on en arrive au théorème :

**Théorème B.3.3** (Théorème 12.1 de [Dol03]).

$$(\mathbb{A}^n)^{\text{ss}}(L_{\underline{a}}) // T \simeq X_{\Sigma}.$$

*Exemple B.3.4.* 1. Regardons ce que donne l'action de  $\mathbb{G}_m = \mathbb{C}^*$  sur  $\mathbb{A}^3 = \mathbb{C}^3$  donnée par

$$t \cdot (z_1, z_2, z_3) = (tz_1, t^{-1}z_2, tz_3).$$

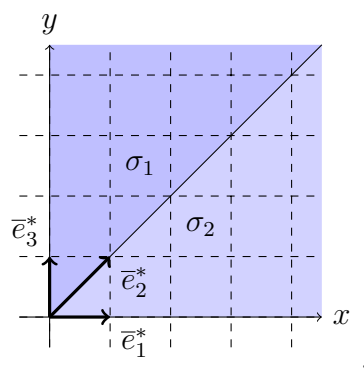
On a notre matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Prenons  $\underline{a} = 1$ , les éléments de  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^3$  vérifiant  $A\underline{m} = d$  sont les  $(t, t + s - d, s)$  avec  $t, s \geq 0$  et  $t + s \geq d$ . On voit facilement que  $\mathbb{C}[S]_0 = \text{Vect}(1, XY, YZ)$  et l'idéal  $\mathbb{C}[S]_{>0}$  est engendré sur  $\mathbb{C}[S]_0$  par les monômes  $X$  et  $Z$  (donnés par les triplets  $(t, s, d) = (1, 0, 1)$  et  $(t, s, d) = (0, 1, 1)$ ). Alors on a  $I_1 = \{1\}$ ,  $I_2 = \{3\}$  et

$$(\mathbb{A}^3)^{\text{ss}}(L_1) = (\mathbb{A}^3 \setminus \{z_1 = 0\}) \cup (\mathbb{A}^3 \setminus \{z_3 = 0\}) = \mathbb{A}^3 \setminus \{z_1 = z_3 = 0\}.$$

Une base de  $M = \ker(A)$  est donnée par  $(v_1, v_2) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  ce qui nous donne

$$\bar{e}_1^* = v_1^*, \quad \bar{e}_2^* = v_1^* + v_2^*, \quad \bar{e}_3^* = v_2^*,$$

soit  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\sigma_1 = \text{Cone}(\bar{e}_2^*, \bar{e}_3^*)$ ,  $\sigma_2 = \text{Cone}(\bar{e}_1^*, \bar{e}_2^*)$  ce qui nous donne l'éventail



donc

$$(\mathbb{A}^3)^{\text{ss}}(L_1) // \mathbb{C}^* \simeq X_\Sigma = \text{Bl}_0(\mathbb{C}^2)$$

où  $\text{Bl}_0(\mathbb{C}^2)$  est l'éclatement de  $\mathbb{C}^2$  à l'origine.

2. Regardons maintenant l'action de  $\mathbb{G}_m^4 = (\mathbb{C}^*)^4$  sur  $\mathbb{A}^6 = \mathbb{C}^6$  donnée par

$$\underline{t} \cdot \underline{z} = (t_1 t_3^{-1} t_4 z_1, t_2 t_3 t_4^{-1} z_2, t_4 z_3, t_3 z_4, t_2 z_5, t_1 z_6).$$

La matrice A est donnée par

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

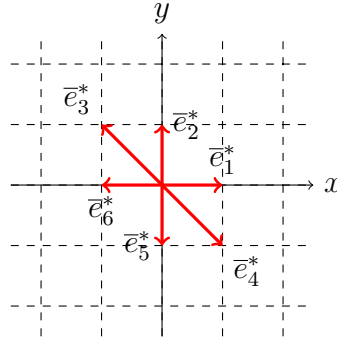
Nous allons maintenant regarder le quotient  $(\mathbb{A}^6)^{\text{ss}}(L_{\underline{a}}) // \mathbb{G}_m^4$  pour deux éléments  $\underline{a} \in \mathbb{Z}^4$  différents afin de voir l'influence de ce  $\underline{a}$  sur notre résultat. Cependant nous allons tout d'abord regarder le squelette de l'éventail (les vecteurs qui l'engendrent), celui-ci ne dépendant pas de  $\underline{a}$ .

Une base de  $M = \ker(A)$  est donnée par les vecteurs  $(v_1, v_2) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ .

Prenons  $(e_i^*)_i$  la base duale de la base canonique  $(e_i)_i$  de  $\mathbb{Z}^6$ ,  $(\bar{e}_i^*)_i$  sa restriction à  $M^\vee$  et  $(v_1^*, v_2^*)$  la base duale de  $(v_1, v_2)$ . On a alors

$$\bar{e}_1^* = v_1^*, \bar{e}_2^* = v_2^*, \bar{e}_3^* = -v_1^* + v_2^*, \bar{e}_4^* = v_1^* - v_2^*, \bar{e}_5^* = -v_2^*, \bar{e}_6^* = -v_1^*$$

ce qui nous donne le squelette



Attaquons-nous maintenant aux cônes.

- (a) Premièrement prenons  $\underline{a} = (1 \ 1 \ 1 \ 1)$ . Les solutions de  $A\underline{m} = d\underline{a}$  sont de la forme

$$\begin{pmatrix} s \\ t \\ d - s + t \\ d + s - t \\ d - t \\ d - s \end{pmatrix}, 0 \leq s, t \leq d.$$

Pour  $d = 0$  il n'y a pas d'autres solutions que  $\mathbf{0}$  tandis que pour  $d = 1$  nous avons 4 solutions associées aux monômes

$$X_3X_4X_5X_6, X_1X_4^2X_5, X_2X_3^2X_6, X_1X_2X_3X_4$$

qui engendrent  $\bigoplus_{d>0} \mathbb{C}[S]_d$ . En effet montrons par récurrence sur  $d$  que tout élément d'un  $S_d$  est une somme finie des éléments de  $S_1$  :

$$\underline{m}_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{m}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{m}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{m}_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soit  $\underline{m}$  une solution pour  $d > 0$  associée aux paramètres  $(s, t)$ . Si  $0 \leq s, t < d$  alors  $\underline{m}$  peut être écrit sous la forme

$$\underline{m} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ d - 1 - s + t \\ d - 1 + s - t \\ d - 1 - t \\ d - 1 - s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

qui est la somme d'une solution positive de  $A\underline{m} = (d-1)\underline{a}$  et de  $\underline{m}_1$ .

Si  $s = t = d$  alors  $\underline{m} = d\underline{m}_4$ .

Si  $t = d, s < d$  alors nous avons

$$\underline{m} = \begin{pmatrix} s \\ d \\ 2d-s \\ s \\ 0 \\ d-s \end{pmatrix} = s.\underline{m}_4 + (d-s).\underline{m}_3.$$

Pour  $s = d, t < d$  nous avons de manière similaire  $\underline{m} = t.\underline{m}_4 + (d-t).\underline{m}_2$ .

Donc  $\bigoplus_{d>0} \mathbb{C}[S]_d$  est uniquement engendré par  $S_1$ . Nous avons donc

$$I_1 = \{3, 4, 5, 6\}, I_2 = \{1, 4, 5\}, I_3 = \{2, 3, 6\}, I_4 = \{1, 2, 3, 4\}$$

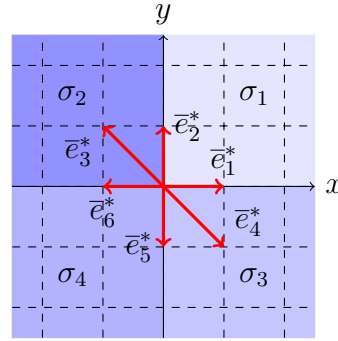
d'où

$$(\mathbb{A}^6)^{\text{ss}}(L_{\underline{a}}) = \mathbb{A}^6 \setminus (\{z_3 z_4 z_5 z_6 = 0\} \cap \{z_1 z_4 z_5 = 0\} \cap \{z_2 z_3 z_6 = 0\} \cap \{z_1 z_2 z_3 z_4 = 0\})$$

et nous avons les cônes

$$\sigma_1 = \text{Cone}(\bar{e}_1^*, \bar{e}_2^*), \sigma_2 = \text{Cone}(\bar{e}_2^*, \bar{e}_3^*), \sigma_3 = \text{Cone}(\bar{e}_1^*, \bar{e}_4^*), \sigma_4 = \text{Cone}(\bar{e}_5^*, \bar{e}_6^*)$$

qui nous donnent l'éventail



qui est celui de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ . Nous avons donc

$$(\mathbb{A}^6)^{\text{ss}}(L_{\underline{a}}) // \mathbb{G}_m^4 \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1.$$

- (b) Prenons maintenant  $\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Les solutions de  $A\underline{m} = d\underline{a}$  sont de la forme

$$\begin{pmatrix} s \\ t \\ d-s+t \\ d+s-t \\ 2d-t \\ 2d-s \end{pmatrix}, 0 \leq s, t \leq 2d, s \leq t+d, t \leq s+d.$$



Pour  $d = 0$  la seule solution est  $\mathbf{0}$  tandis que pour  $d = 1$  il y a 7 solutions associées aux monômes

$$X_3X_4X_5^2X_6^2, X_1X_4^2X_5^2X_6, X_2X_3^2X_5X_6^2, X_1X_2X_3X_4X_5X_6,$$

$$X_1^2X_2X_4^2X_5, X_1X_2^2X_3^2X_6, X_1^2X_2^2X_3X_4$$

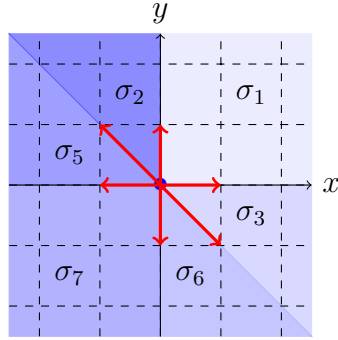
qui engendrent  $\bigoplus_{d>0} \mathbb{C}[S]_d$  (on le vérifie par une récurrence similaire). On a alors les cônes

$$\sigma_1 = \text{Cone}(\bar{e}_1^*, \bar{e}_2^*), \sigma_2 = \text{Cone}(\bar{e}_2^*, \bar{e}_3^*), \sigma_3 = \text{Cone}(\bar{e}_1^*, \bar{e}_4^*),$$

$$\sigma_4 = \text{Cone}(\emptyset) = \{0\}, \sigma_5 = \text{Cone}(\bar{e}_3^*, \bar{e}_6^*),$$

$$\sigma_6 = \text{Cone}(\bar{e}_4^*, \bar{e}_5^*), \sigma_7 = \text{Cone}(\bar{e}_5^*, \bar{e}_6^*),$$

ce qui donne l'éventail



Dans ce cas  $(\mathbb{A}^6)^{\text{ss}}(L_{\underline{a}}) // \mathbb{G}_m^4$  est isomorphe à  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  éclaté en deux points, soit l'éclatement de  $\mathbb{P}^2$  en trois points.

# C

## Algorithme Maple de création des éventails

---

Nous allons dans cette annexe proposer quelques petits programmes Maple<sup>TM</sup> permettant de calculer les matrices et les bases des éventails associées aux sous-espaces toriques des classes analytiques isoformelles lâches définies en sous-section 4.2.1, ce qui peut donner une idée de leur comportement.

Les pages qui suivent présentent tout d'abord un programme permettant de construire la matrice  $A_{n,r_1,r_2}$  munie d'une base de son noyau, avec donnés les exemples de  $A_{1,2,2}$ ,  $A_{1,3,2}$ ,  $A_{2,3,1}$ , puis un autre programme appelant le premier permettant de donner les vecteurs générant l'éventail  $\Sigma_{n,r_1,r_2}^a$  (qui ne dépendent eux pas de  $a$ ). On y voit aussi que la taille des éventails "explose" : ainsi  $\Sigma_{2,3,3}^a$  est engendré par 18 vecteurs de  $\mathbb{R}^{13}$ .

[> restart: with(linalg) :

## ▼ Cas 2 pentes : Matrice A et base de Am=0

```
> MatTor := proc(n :: posint, r1 :: posint, r2 :: posint)
  local A, k, l, C;
  A := matrix(r1 + r2 - 1, n, (i, j) → if i = 1 then 1 else 0 end if) :
  for k from 2 to r1 + r2 - 1 do
    C := matrix(r1 + r2 - 1, n, (i, j) → if i = k then 1 else 0 end if) :
    A := augment(A, C) :
  end do;
  for k from 1 to r2 - 1 do
    for l from 1 to r1 - 1 do
      C := matrix(r1 + r2 - 1, n, (i, j) → if i = 1 then -1 elif i = k + 1 or i = l + r2
      then 1 else 0 end if);
      A := augment(A, C);
    end do;
  end do;
  return [eval(A), kernel(A)];
end proc;
```

> MatTor(1, 2, 2);

$$\left[ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \left\{ \left[ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \right] \right\} \right] \quad (1.1)$$

> MatTor(1, 3, 2);

$$\left[ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \left\{ \left[ 1 \ -1 \ -1 \ 0 \ 1 \ 0 \right], \left[ 1 \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1 \right] \right\} \right] \quad (1.2)$$

> MatTor(2, 3, 1);

$$\left[ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \left\{ \left[ -1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right], \left[ 0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0 \right], \right. \right. \\ \left. \left. \left[ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1 \right] \right\} \right] \quad (1.3)$$



## Cas 2 pentes : Base de l'éventail

```

> EveTor := proc(n :: posint, r1 :: posint, r2 :: posint)
  local A, B, E, V, rg, k, l;
  A := MatTor(n, r1, r2) :
  rg := nops(A[2]) :
  B := convert(A[2], list) :
  E := [ ] : V := [ ] :
  for k from 1 to r1·r2·n do
    for l from 1 to rg do
      V := [op(V), B[l][k]] :
    end do;
  E := [op(E), V] :
  V := [ ] :
  end do;
  return(eval(E));
end proc;

```

```

> EveTor(1, 2, 2);
[[1], [-1], [-1], [1]] (1.1)

```

```

> EveTor(1, 3, 2);
[[1, 1], [-1, -1], [-1, 0], [0, -1], [1, 0], [0, 1]] (1.2)

```

```

> EveTor(2, 3, 1);
[[-1, 0, 0], [1, 0, 0], [0, -1, 0], [0, 1, 0], [0, 0, -1], [0, 0, 1]] (1.3)

```

```

> EveTor(2, 3, 3);
[[1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0], [0, 0,
0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, -1], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1], [-1,
-1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, 0, 0], [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0,
0, 0, -1, 0, -1, -1, 0, 0, -1, -1, 0, 0], [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [
-1, -1, 0, 0, -1, 0, 0, -1, -1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
[0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0], [1, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]] (1.4)

```

```

> nops(EveTor(2, 3, 3));
18 (1.5)

```

```

> nops(EveTor(2, 3, 3)[1]);
13 (1.6)

```



## Bibliographie

---

- [Abd60] Wazir Hasan Abdi. On  $q$ -Laplace transforms. *Proc. Nat. Acad. Sci. India Sect. A*, 29 :389–408, 1960.
- [Abd64] Wazir Hasan Abdi. Certain inversion and representation formulae for  $q$ -Laplace transforms. *Math. Z.*, 83 :238–249, 1964.
- [Ada31] C. R. Adams. Linear  $q$ -difference equations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 37(6) :361–400, 1931.
- [Ada29] C. Raymond Adams. On the linear ordinary  $q$ -difference equation. *Ann. of Math. (2)*, 30(1-4) :195–205, 1928/29.
- [Béz92] Jean-Paul Bézivin. Sur les équations fonctionnelles aux  $q$ -différences. *Aequationes Math.*, 43(2-3) :159–176, 1992.
- [BG41] George D. Birkhoff and Paul E. Guenther. Note on a canonical form for the linear  $q$ -difference system. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 27 :218–222, 1941.
- [Bir13] George D Birkhoff. The generalized Riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and  $q$ -difference equations. *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, 49 :521–568, 1913.
- [BP90] Michel Brion and Claudio Procesi. Action d’un tore dans une variété projective. In *Operator algebras, unitary representations, enveloping algebras, and invariant theory (Paris, 1989)*, volume 92 of *Progr. Math.*, pages 509–539. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [Bug12] Virginie Bugeaud. *Groupe de Galois local des équations aux  $q$ -différences irrégulières*. PhD thesis, Université Toulouse III - Paul Sabatier, 2012.
- [BV89] D. G. Babbitt and V. S. Varadarajan. Local moduli for meromorphic differential equations. *Astérisque*, (169-170) :217, 1989.
- [CLS11] David A. Cox, John B. Little, and Henry K. Schenck. *Toric varieties*, volume 124 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

- [DE16] Thomas Dreyfus and Anton Eloy.  $q$ -Borel-Laplace summation for  $q$ -difference equations with two slopes. À paraître dans *Journal of Difference equations and applications*, 2016.
- [Dol03] Igor Dolgachev. *Lectures on invariant theory*, volume 296 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [Dre15] Thomas Dreyfus. Building meromorphic solutions of  $q$ -difference equations using a Borel-Laplace summation. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (15) :6562–6587, 2015.
- [DV02] Lucia Di Vizio. Arithmetic theory of  $q$ -difference equations : the  $q$ -analogue of Grothendieck-Katz’s conjecture on  $p$ -curvatures. *Invent. Math.*, 150(3) :517–578, 2002.
- [DVS11] Lucia Di Vizio and Jacques Sauloy. Outils pour la classification locale des équations aux  $q$ -différences linéaires complexes. In *Arithmetic and Galois theories of differential equations*, volume 23 of *Sémin. Congr.*, pages 169–222. Soc. Math. France, Paris, 2011.
- [Hu92] Yi Hu. The geometry and topology of quotient varieties of torus actions. *Duke Math. J.*, 68(1) :151–184, 1992.
- [JS96] Michio Jimbo and Hidetaka Sakai. A  $q$ -analog of the sixth Painlevé equation. *Lett. Math. Phys.*, 38(2) :145–154, 1996.
- [Mur09] Mikio Murata. Lax forms of the  $q$ -Painlevé equations. *J. Phys. A*, 42(11) :115201, 17, 2009.
- [ORS15] Yosuke Ohyama, Jean-Pierre Ramis, and Jacques Sauloy. The space of monodromy data for the Jimbo-Sakai family of  $q$ -difference equations. 2015.
- [Ram92] Jean-Pierre Ramis. About the growth of entire functions solutions of linear algebraic  $q$ -difference equations. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 1(1) :53–94, 1992.
- [RS07] J.-P. Ramis and J. Sauloy. The  $q$ -analogue of the wild fundamental group. I. In *Algebraic, analytic and geometric aspects of complex differential equations and their deformations. Painlevé hierarchies*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B2, pages 167–193. Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2007.
- [RS09] Jean-Pierre Ramis and Jacques Sauloy. The  $q$ -analogue of the wild fundamental group. II. *Astérisque*, (323) :301–324, 2009.
- [RSZ13] Jean-Pierre Ramis, Jacques Sauloy, and Changgui Zhang. Local analytic classification of  $q$ -difference equations. *Astérisque*, (355) :vi+151, 2013.

- [RZ02] Jean-Pierre Ramis and Changgui Zhang. Développement asymptotique  $q$ -Gevrey et fonction thêta de Jacobi. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 335(11) :899–902, 2002.
- [Sau03] Jacques Sauloy. Galois theory of Fuchsian  $q$ -difference equations. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 36(6) :925–968 (2004), 2003.
- [Sau04a] Jacques Sauloy. Algebraic construction of the Stokes sheaf for irregular linear  $q$ -difference equations. *Astérisque*, (296) :227–251, 2004. Analyse complexe, systèmes dynamiques, sommabilité des séries divergentes et théories galoisiennes. I.
- [Sau04b] Jacques Sauloy. La filtration canonique par les pentes d’un module aux  $q$ -différences et le gradué associé. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 54(1) :181–210, 2004.
- [vdPR07] Marius van der Put and Marc Reversat. Galois theory of  $q$ -difference equations. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 16(3) :665–718, 2007.
- [vdPS97] Marius van der Put and Michael F. Singer. *Galois theory of difference equations*, volume 1666 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [Zha99] Changgui Zhang. Développements asymptotiques  $q$ -Gevrey et séries  $Gq$ -sommables. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 49(1) :vi–vii, x, 227–261, 1999.
- [Zha00] Changgui Zhang. Transformations de  $q$ -Borel-Laplace au moyen de la fonction thêta de Jacobi. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 331(1) :31–34, 2000.
- [Zha02] Changgui Zhang. Une sommation discrète pour des équations aux  $q$ -différences linéaires et à coefficients analytiques : théorie générale et exemples. In *Differential equations and the Stokes phenomenon*, pages 309–329. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002.
- [Zha06] Changgui Zhang. Solutions asymptotiques et méromorphes d’équations aux  $q$ -différences. In *Théories asymptotiques et équations de Painlevé*, volume 14 of *Sémin. Congr.*, pages 341–356. Soc. Math. France, Paris, 2006.





**Classification et géométrie des équations aux  $q$ -différences :  
Étude globale de  $q$ -Painlevé, classification non isoformelle et Stokes à pentes  
arbitraires**

**Auteur :** Anton Eloy.

**Directeur de thèse :** Jacques Sauloy.

**Date et lieu de soutenance :** 23 septembre 2016 à l'Institut de Mathématiques de Toulouse.

**Discipline :** Mathématiques fondamentales.

**Résumé :** Cette thèse s'intéresse à la classification géométrique, locale et globale, des équations aux  $q$ -différences. Dans un premier temps nous réalisons une étude globale de certains systèmes dérivés des équations de  $q$ -Painlevé et introduits par Murata, en proposant une correspondance de Riemann-Hilbert-Birkhoff entre de tels systèmes et leurs matrices de connexion.

Dans un second temps nous nous intéressons à la classification locale, en construisant un fibré vectoriel équivariant sur l'espace des classes formelles à deux pentes dont la fibre au dessus d'une classe formelle est l'espace de ses classes analytiques isoformelles. Ceci fait, voyant que l'action du groupe des automorphismes du gradué s'impose naturellement dans l'étude de ce fibré, nous nous intéressons à l'espace des classes analytiques, soit des classes analytiques isoformelles modulo cette action, dont nous proposons dans un cas restreint une première approche de classification *via* l'utilisation de variétés toriques.

Dans un troisième temps nous construisons, *via* des transformations de  $q$ -Borel et de  $q$ -Laplace, des  $q$ -Stokes, soit des solutions méromorphes de systèmes, dans le cadre des systèmes à deux pentes dont une non entière et une nulle.

**Mots-clefs :** Équations aux  $q$ -différences, classification analytique, phénomène de Stokes, géométrie des  $q$ -différences,  $q$ -Borel-Laplace, équivalence de Riemann-Hilbert-Birkhoff,  $q$ -Painlevé, variétés toriques.

---

**Classification and geometry of  $q$ -difference equations:  
Global study of  $q$ -Painlevé, non-isoformal classification and Stokes with arbitrary  
slopes**

**Abstract** This thesis falls within the context of global and local geometric classification of  $q$ -difference equations. In a first part we study the global behaviour of some systems derived from  $q$ -Painlevé equations and introduced by Murata. We do so by constructing a Riemann-Hilbert-Birkhoff correspondence between such systems and their connexion matrices.

In a second part we work on local classification by providing a construction of an equivariant vector bundle over the space of all formal classes with two slopes, the fibre over a formal class being the space of its isoformal analytic classes. As the action of the group of automorphisms of the graded module arises naturally when we study this bundle, we take an interest in the study of the space of analytic classes, which is the space of isoformal analytic classes modulo this action. We propose a first approach of such a classification by using toric varieties.

In a third part we construct  $q$ -Stokes, *i.e.* meromorphic solutions of systems, in the context of systems with one non-integral slope and one equal to zero, this by using  $q$ -Borel and  $q$ -Laplace transforms.

**Key words:**  $q$ -difference equations, analytic classification, Stokes phenomenon, geometry of  $q$ -difference,  $q$ -Borel-Laplace, Riemann-Hilbert-Birkhoff equivalence,  $q$ -Painlevé, toric varieties.