



HAL
open science

**Tessellations à base de champs aléatoires gaussiens.
Application à la modélisation spatiale et temporelle de
l'endothélium cornéen humain.**

Klervi Rannou

► **To cite this version:**

Klervi Rannou. Tessellations à base de champs aléatoires gaussiens. Application à la modélisation spatiale et temporelle de l'endothélium cornéen humain.. Autre. Université de Lyon, 2016. Français. NNT : 2016LYSEM032 . tel-01665180

HAL Id: tel-01665180

<https://theses.hal.science/tel-01665180>

Submitted on 15 Dec 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N°d'ordre NNT : 2016LYSEM032

THESE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON
opérée au sein de
l'Ecole des Mines de Saint-Etienne

Ecole Doctorale N° 488
Sciences, Ingénierie, Santé

Spécialité de doctorat : Sciences des Images et des Formes
Discipline : Mathématiques et leurs Interactions

Soutenue publiquement le 12/12/2016, par :
Klervi Rannou

**TESSELLATIONS À BASE DE CHAMPS
ALÉATOIRES GAUSSIENS - Application à
la modélisation spatiale et temporelle
de l'endothélium cornéen humain**

Devant le jury composé de :

| | | |
|----------------------|---------------------------------------|-----------------------|
| Germain, Christian | Professeur, Bordeaux Sciences Agro | Président |
| Bloch, Isabelle | Professeur, Télécom ParisTech | Rapporteuse |
| Tougne, Laure | Professeur, Université Lyon 2 | Rapporteuse |
| Trucco, Emanuele | Professeur, University of Dundee | Examineur |
| Thuret, Gilles | Professeur, Université Jean Monnet | Examineur |
| Gavet, Yann | Maître-Assistant, Mines Saint-Étienne | Directeur de thèse |
| Pinoli, Jean-Charles | Professeur, Mines Saint-Étienne | Co-directeur de thèse |

| Spécialités doctorales | Responsables : | Spécialités doctorales | Responsables |
|--|--|--|--|
| SCIENCES ET GENIE DES MATERIAUX MECANIQUE ET INGENIERIE GENIE DES PROCEDES SCIENCES DE LA TERRE SCIENCES ET GENIE DE L'ENVIRONNEMENT | K. Wolski Directeur de recherche S. Drapier, professeur F. Gruy, Maître de recherche B. Guy, Directeur de recherche D. Grailliot, Directeur de recherche | MATHEMATIQUES APPLIQUEES INFORMATIQUE IMAGE, VISION, SIGNAL GENIE INDUSTRIEL MICROELECTRONIQUE | O. Roustant, Maître-assistant O. Boissier, Professeur J.C. Pinoli, Professeur X. Delorme, Maître assistant Ph. Lalevée, Professeur |

EMSE : Enseignants-chercheurs et chercheurs autorisés à diriger des thèses de doctorat (titulaires d'un doctorat d'Etat ou d'une HDR)

| | | | | |
|---------------|---------------|-------------------------|--------------------------------------|-------|
| ABSI | Nabil | CR | Génie industriel | CMP |
| AUGUSTO | Vincent | CR | Image, Vision, Signal | CIS |
| AVRIL | Stéphane | PR2 | Mécanique et ingénierie | CIS |
| BADEL | Pierre | MA(MDC) | Mécanique et ingénierie | CIS |
| BALBO | Flavien | PR2 | Informatique | FAYOL |
| BASSEREAU | Jean-François | PR | Sciences et génie des matériaux | SMS |
| BATTON-HUBERT | Mireille | PR2 | Sciences et génie de l'environnement | FAYOL |
| BEIGBEDER | Michel | MA(MDC) | Informatique | FAYOL |
| BLAYAC | Sylvain | MA(MDC) | Microélectronique | CMP |
| BOISSIER | Olivier | PR1 | Informatique | FAYOL |
| BONNEFOY | Olivier | MA(MDC) | Génie des Procédés | SPIN |
| BORBELY | Andras | MR(DR2) | Sciences et génie des matériaux | SMS |
| BOUCHER | Xavier | PR2 | Génie Industriel | FAYOL |
| BRODHAG | Christian | DR | Sciences et génie de l'environnement | FAYOL |
| BRUCHON | Julien | MA(MDC) | Mécanique et ingénierie | SMS |
| BURLAT | Patrick | PR1 | Génie Industriel | FAYOL |
| CHRISTIEN | Frédéric | PR | Science et génie des matériaux | SMS |
| DAUZERE-PERES | Stéphane | PR1 | Génie Industriel | CMP |
| DEBAYLE | Johan | CR | Image Vision Signal | CIS |
| DELAFOSSE | David | PR0 | Sciences et génie des matériaux | SMS |
| DELORME | Xavier | MA(MDC) | Génie industriel | FAYOL |
| DESRAYAUD | Christophe | PR1 | Mécanique et ingénierie | SMS |
| DJENIZIAN | Thierry | PR | Science et génie des matériaux | CMP |
| DOUCE | Sandrine | PR2 | Sciences de gestion | FAYOL |
| DRAPIER | Sylvain | PR1 | Mécanique et ingénierie | SMS |
| FAVERGEON | Loïc | CR | Génie des Procédés | SPIN |
| FEILLET | Dominique | PR1 | Génie Industriel | CMP |
| FOREST | Valérie | MA(MDC) | Génie des Procédés | CIS |
| FOURNIER | Jacques | Ingénieur chercheur CEA | Microélectronique | CMP |
| FRACZKIEWICZ | Anna | DR | Sciences et génie des matériaux | SMS |
| GARCIA | Daniel | MR(DR2) | Génie des Procédés | SPIN |
| GAVET | Yann | MA(MDC) | Image Vision Signal | CIS |
| GERINGER | Jean | MA(MDC) | Sciences et génie des matériaux | CIS |
| GOEURIOT | Dominique | DR | Sciences et génie des matériaux | SMS |
| GONDRAN | Natacha | MA(MDC) | Sciences et génie de l'environnement | FAYOL |
| GRAILLOT | Didier | DR | Sciences et génie de l'environnement | SPIN |
| GROSSEAU | Philippe | DR | Génie des Procédés | SPIN |
| GRUY | Frédéric | PR1 | Génie des Procédés | SPIN |
| GUY | Bernard | DR | Sciences de la Terre | SPIN |
| HAN | Woo-Suck | MR | Mécanique et ingénierie | SMS |
| HERRI | Jean Michel | PR1 | Génie des Procédés | SPIN |
| KERMOUCHE | Guillaume | PR2 | Mécanique et Ingénierie | SMS |
| KLOCKER | Helmut | DR | Sciences et génie des matériaux | SMS |
| LAFOREST | Valérie | MR(DR2) | Sciences et génie de l'environnement | FAYOL |
| LERICHE | Rodolphe | CR | Mécanique et ingénierie | FAYOL |
| MALLIARAS | Georges | PR1 | Microélectronique | CMP |
| MOLIMARD | Jérôme | PR2 | Mécanique et ingénierie | CIS |
| MOUTTE | Jacques | CR | Génie des Procédés | SPIN |
| NIKOLOVSKI | Jean-Pierre | Ingénieur de recherche | Mécanique et ingénierie | CMP |
| NORTIER | Patrice | PR1 | | SPIN |
| OWENS | Rosin | MA(MDC) | Microélectronique | CMP |
| PERES | Véronique | MR | Génie des Procédés | SPIN |
| PICARD | Gauthier | MA(MDC) | Informatique | FAYOL |
| PIJOLAT | Christophe | PR0 | Génie des Procédés | SPIN |
| PIJOLAT | Michèle | PR1 | Génie des Procédés | SPIN |
| PINOLI | Jean Charles | PR0 | Image Vision Signal | CIS |
| POURCHEZ | Jérémy | MR | Génie des Procédés | CIS |
| ROBISSON | Bruno | Ingénieur de recherche | Microélectronique | CMP |
| ROUSSY | Agnès | MA(MDC) | Génie industriel | CMP |
| ROUSTANT | Olivier | MA(MDC) | Mathématiques appliquées | FAYOL |
| STOLARZ | Jacques | CR | Sciences et génie des matériaux | SMS |
| TRIA | Assia | Ingénieur de recherche | Microélectronique | CMP |
| VALDIVIESO | François | PR2 | Sciences et génie des matériaux | SMS |
| VIRICELLE | Jean Paul | DR | Génie des Procédés | SPIN |
| WOLSKI | Krzysztof | DR | Sciences et génie des matériaux | SMS |
| XIE | Xiaolan | PR1 | Génie industriel | CIS |
| YUGMA | Gallian | CR | Génie industriel | CMP |

Da va zud,

Remerciements

Écrire les remerciements n'est finalement, peut-être pas la partie la plus facile du manuscrit à rédiger. Ce manuscrit est l'aboutissement de trois années de thèse enrichissantes tant d'un point de vue professionnel que personnel. Je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont aidée d'une manière ou d'une autre durant cette thèse. Et je m'excuse par avance des oublis éventuels dans ces remerciements.

Je tiens tout d'abord à remercier tous les membres de mon jury. Je remercie particulièrement les rapporteuses, Laure Tougne et Isabelle Bloch, pour leur lecture attentive et les remarques constructives qui m'ont été utiles pour préparer ma soutenance et prendre du recul sur mon travail. Je remercie également, Christian Germain, pour avoir présidé le jury. Merci à eux trois ainsi qu'à Emanuele Trucco et Gilles Thuret de bien avoir voulu juger mes travaux et pour leurs questions qui ont alimenté la discussion scientifique.

Je remercie mes directeurs de thèse Yann Gavet et Jean-Charles Pinoli d'avoir encadré mon travail, de la confiance et de la liberté qu'ils m'ont accordés.

Je remercie également les membres du laboratoire BiigC pour l'apport de connaissance sur la cornée, et pour l'acquisition et la segmentation d'images de l'endothélium cornéen : Philippe Gain, Gilles Thuret, Emmanuel Crouzet, Caroline Ronin, Zhiguo He, Aurélien Bernard, Guillaume Hor, Clothilde Jumelle, Giacomo Pataia, etc.

Merci aussi à toutes les personnes de l'équipe image et morphologie avec qui j'ai pu travailler, apprendre et discuter : Johan Debayle, Said Rahmani, Victor González Castro, Samuel Aberra Guebrou, Patricio Guerrero, Daouda Ndiaye, Solmaz Boroomandi-Barati, Victor Rabiet, et aussi Frédéric Gruy et Séverine Rivollier.

Je tiens aussi à remercier tout le personnel qui a gravité autour de ma thèse : maman Amélie Chatagnon, Carole Bigouraux, Géraldine Fournier-Moulin et Jérôme Mancuso.

Merci aussi à toutes les personnes des centres CIS et SPIN avec qui j'ai, entre autres, partagé des bons moments de détente et de gourmandise, et pour les longues discussions que nous avons pu avoir lors des pauses du J2, du C3 et des repas du midi : Jérôme, Pierre B., Claire, Valérie, Marie-Claude, Laetitia, ..., et les nombreux doctorants et post-doctorants que je vais remercier par la suite.

Merci enfin à tous les doctorants (post-doctorants ou autres) avec qui j'ai partagé ces trois années sur Saint-Étienne, à l'école mais aussi en dehors. Certains comptent aujourd'hui parmi mes amis les plus proches :

- Fanette, pour avoir été une superbe co-burette, pour m'avoir fait reprendre la course à pied, pour ton dynamisme, ton organisation, ton féminisme,..., et pour être devenue une superbe amie ;
- les anciens qui finissaient leur thèse quand je suis arrivée, et qui ont su si bien nous intégrer : Baptiste P., Aaron, Pierre-Yves, Benjamin, et leurs copines : Manu et Laura ;
- les un peu moins anciens : Rébecca pour les longues discussions, la presque bretonne mamie Fanny pour ton féminisme, Omar pour nous avoir fait découvrir le Liban ;
- ceux qui ont commencé en même temps que moi : mon suppléant Boris pour tes longs mails, Pierre pour tes déguisements, tes blagues et le sport, copine Armelle pour avoir été là quand j'en avais besoin, Sareh pour ta gentillesse, Sabri pour avoir été un co-bureau discret ;
- ceux qui étaient à l'autre bout du bâtiment, mais qui nous ont très vite intégré pour les soirées stéphanoises : la bretonne dame Agathe, Andréa, Estelle, Antoine, coach Jules, Baptiste ;
- merci au groupe "3 ou 4 ans plus tard" puis "aBillig" pour vos concerts endiablés ;
- merci à Olivier et Maxym, malgré vos blagues et réflexions un peu lourdes, de m'avoir si bien accueillie en SPIN ;
- merci également à Sylvain pour être venu courir avec moi et pour les longues discussions ;
- merci aux petits jeunes pour avoir animé les pauses du C3 : la chinoise Jie (et les découvertes culinaires), la petite Jessie (et son cheval), le blagueur Xavier (et le capitaine), le sportif Brieur, la bretonne Mathilde, le discret João, les gourmands Juan-Carlos et Laryssa ;
- et aux moins jeunes : Mariana, Didier, Romaric (chaud ma gueule) ;
- merci Afafe pour avoir été une collègue dynamique à l'ED ;
- merci Thierry pour ta disponibilité et pour nous faire bien rire ;
- merci à tous ceux avec qui j'ai pu courir et participer à des courses plus ou moins folles : Anastasia, Benjamin, Jonathan, Clémentine et Alexandre.

Deuet bremañ ar poent din trugarekaat va familh. Trugarez da va zud evit va deskadurezh hag evit bezañ roet din an doug evit ar matematikoù hag ar skiantoù. Trugarez da va c'hoar ha va breudeur evit bezañ deuet ken pell da welet ac'hanon (pe evit mont da redek), ha trugarez da Vrendan evit bezañ deuet da welet va dezenn. Trugarez da va zadig evit bezañ difaziet meur a destennoù bet skrivet ganin e-pad va studioù, ha dreist-holl evit bezañ adlennet va dezenn.

Hag evit echuiñ, et pour finir, merci à David, co-bureau, amis, puis compagnon, trugarez, merci, pour ton soutien, ton aide, pour m'avoir supporté, et tant d'autres !!

Pik echu. Klervi

Table des matières

| | |
|---|-------------|
| Remerciements | iii |
| Table des matières | vii |
| Table des figures | xiii |
| Liste des tableaux | xv |
| Introduction générale | xvii |
| 1 Généralités | 1 |
| 1.1 Projet CorImMo 3D | 1 |
| 1.2 Mosaïque endothéliale cornéenne | 1 |
| 1.3 Thèses précédentes | 4 |
| 1.4 Objectifs de la thèse | 5 |
| 2 Champs aléatoires | 7 |
| 2.1 Définitions - Théorie des champs aléatoires | 8 |
| 2.2 Fonctions de covariances | 10 |
| 2.2.1 Propriétés des fonctions de covariance | 10 |
| 2.2.2 Exemples de champs aléatoires gaussiens | 11 |
| 2.3 Simulation de champs aléatoires gaussiens | 17 |
| 2.4 Propriétés des champs aléatoires gaussiens | 18 |
| 2.4.1 Géométrie des champs aléatoires | 18 |
| 2.4.2 Extrema des champs aléatoires gaussiens | 21 |
| 2.4.3 Conclusion | 25 |
| 2.5 Conclusion | 25 |
| 3 Processus ponctuels et tessellations | 27 |
| 3.1 Généralités sur les tessellations | 28 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3.2 | Processus ponctuels | 29 |
| 3.2.1 | Processus ponctuel de Poisson | 29 |
| 3.2.2 | Processus ponctuels agrégatifs | 30 |
| 3.2.3 | Processus ponctuels répulsifs | 31 |
| 3.2.4 | Caractérisation des processus ponctuels | 32 |
| 3.3 | Différents types de tessellations | 40 |
| 3.3.1 | Diagramme de Voronoï | 40 |
| 3.3.2 | Généralisations du diagramme de Voronoï | 41 |
| 3.3.3 | Polygones de Poisson | 45 |
| 3.4 | Conclusion | 46 |
| 4 | Simulation de tessellations aléatoires | 49 |
| 4.1 | Maxima locaux et diagramme de Voronoï | 50 |
| 4.2 | h -maxima et SKIZ | 50 |
| 4.2.1 | h -maxima | 50 |
| 4.2.2 | Squelette par zones d'influences (SKIZ) | 53 |
| 4.2.3 | Tessellation | 54 |
| 4.3 | h -maxima et watershed contraint | 54 |
| 4.4 | Conclusion | 56 |
| 5 | Caractérisation de tessellations aléatoires | 59 |
| 5.1 | Étude et caractérisation des germes | 60 |
| 5.1.1 | Maxima locaux | 60 |
| 5.1.2 | h -maxima | 67 |
| 5.2 | Caractérisation des cellules des tessellations simulées | 77 |
| 5.2.1 | Nombre de cellules voisines | 77 |
| 5.2.2 | Aires et périmètres des cellules | 79 |
| 5.2.3 | Fonctionnelles morphométriques des cellules | 81 |
| 5.2.4 | Conclusion | 85 |
| 5.3 | Conclusion | 85 |
| 6 | Caractérisation et évolution de la mosaïque endothéliale cornéenne humaine | 87 |
| 6.1 | Base de données | 88 |
| 6.2 | Caractérisation et évolution de la mosaïque endothéliale | 88 |
| 6.2.1 | Densité cellulaire | 89 |
| 6.2.2 | Approche ponctuelle | 90 |
| 6.2.3 | Approche régionale | 99 |
| 6.2.4 | Conclusion | 103 |
| 6.3 | Age de l'endothélium cornéen | 107 |
| 6.3.1 | Tranche d'âge estimée par critère | 107 |
| 6.3.2 | Tranche d'âge estimée | 111 |

| | |
|--|------------|
| 6.3.3 Conclusion | 116 |
| 6.4 Conclusion | 116 |
| 7 Conclusion et perspectives | 119 |
| 7.1 Synthèse générale | 119 |
| 7.2 Lien modèle endothélium | 120 |
| 7.3 Perspectives | 121 |
| 7.4 Publications et communications | 122 |
| Bibliographie | 123 |
| Annexe A | 131 |
| A.1 Tranche 1 - 0-10 ans | 131 |
| A.2 Tranche 2 - 11-20 ans | 134 |
| A.3 Tranche 3 - 21-30 ans | 137 |
| A.4 Tranche 4 - 31-40 ans | 140 |
| A.5 Tranche 5 - 41-50 ans | 143 |
| A.6 Tranche 6 - 51-60 ans | 146 |
| A.7 Tranche 7 - 61-70 ans | 149 |
| A.8 Tranche 8 - 71-80 ans | 152 |
| A.9 Tranche 9 - 81-90 ans | 155 |
| A.10 Tranche 10 - 91-100 ans | 158 |

Table des figures

| | | |
|------|--|----|
| 1.1 | Schéma en coupe de l'œil ©Rhcasilhos, Wikipedia, DP | 2 |
| 1.2 | Coupe de la cornée. | 2 |
| 1.3 | Endothélium cornéen humain observé par microscopie spéculaire | 3 |
| 1.4 | Œil ayant subi une greffe de cornée. | 3 |
| 1.5 | Reconstruction 3D d'un greffon cornéen coloré au rouge alizarine. | 4 |
| 2.1 | Fonctions de covariance gaussienne. | 12 |
| 2.2 | Fonctions de covariance γ -exponentielle. | 13 |
| 2.3 | Fonctions de covariance quadratique rationnelle | 13 |
| 2.4 | Fonctions de covariance de Bessel. | 14 |
| 2.5 | Fonctions de covariance de Matérn. | 15 |
| 2.6 | Fonctions de covariance cosinus amorti. | 16 |
| 2.7 | Fonctions de covariance aux oscillations amorties. | 16 |
| 2.8 | Exemple d'ensemble d'excursion d'un champ aléatoire en 3D. | 18 |
| 2.9 | Ensembles d'excursion de champs aléatoires. | 19 |
| 2.10 | Fonctionnelles de Minkowski d'ensembles d'excursion d'un champs aléatoire. . . | 21 |
| 2.11 | Illustration de la notion d'upcrossing. | 24 |
| 3.1 | Pavage régulier et périodique. | 28 |
| 3.2 | Illustration du théorème 6. | 29 |
| 3.3 | Processus ponctuels de Poisson. | 30 |
| 3.4 | Processus ponctuels agrégatifs. | 30 |
| 3.5 | Processus ponctuels de Strauss. | 31 |
| 3.6 | Processus ponctuels de Matérn. | 32 |
| 3.7 | Principe de la fonction de Ripley. | 33 |
| 3.8 | Illustration de la fonction L de Ripley. | 35 |
| 3.9 | Illustrations des fonctions F et G | 36 |
| 3.10 | Principe de la fonction de corrélation. | 36 |
| 3.11 | Illustrations de la fonction g | 37 |

| | | |
|------|---|----|
| 3.12 | Dilatation d'un ensemble de points Φ | 38 |
| 3.13 | Illustration des fonctionnelles de Minkowski réduites. | 39 |
| 3.14 | Illustration de points Φ distribué régulièrement. | 39 |
| 3.15 | Diagrammes de Poisson-Voronoi. | 40 |
| 3.16 | Diagrammes de Voronoï avec germes agrégés. | 41 |
| 3.17 | Diagrammes de Voronoï avec germes hardcore. | 41 |
| 3.18 | Diagrammes de Voronoï avec norme 1, 2, 3 et infinie. | 42 |
| 3.19 | Diagrammes de Voronoï avec poids. | 43 |
| 3.20 | Tessellations obtenues avec la méthode de Lloyd | 44 |
| 3.21 | Tessellation de Johnson-Mehl. | 45 |
| 3.22 | Droites poissonniennes. | 46 |
| 4.1 | Diagrammes de Voronoï des maxima locaux de X_G et X_B | 51 |
| 4.2 | Illustration des la recherche des h -maxima. | 52 |
| 4.3 | Illustration de la reconstruction $\rho_X(X - h)$ d'un champ aléatoire. | 53 |
| 4.4 | Illustration du SKIZ. | 54 |
| 4.5 | SKIZ des h -maxima de X_G et X_B | 55 |
| 4.6 | Illustration du watershed. | 56 |
| 4.7 | Illustration de la méthode 3. | 57 |
| 4.8 | Watershed contraint des h -maxima de X_G et X_B | 57 |
| 5.1 | Densité moyenne de maxima locaux. | 61 |
| 5.2 | Probabilité \hat{P} d'avoir n maxima locaux. | 61 |
| 5.3 | Probabilité \hat{P} centré d'avoir n maxima locaux. | 62 |
| 5.4 | Fonctions L , F , G et g des maxima locaux pour la covariance de gaussienne. | 63 |
| 5.5 | Fonctions L , F , G et g des maxima locaux pour la covariance de Bessel. | 64 |
| 5.6 | Fonctionnelles de Minkowski réduites des maxima locaux pour la covariance gaussienne. | 65 |
| 5.7 | Fonctionnelles de Minkowski réduites des maxima locaux pour la covariance de Bessel. | 66 |
| 5.8 | Densité moyenne de h -maxima. | 67 |
| 5.9 | Capacité de Choquet de h -maxima. | 69 |
| 5.10 | Modèle Booléen. | 69 |
| 5.11 | Comparaison de la capacité de Choquet des h -maxima et du modèle Booléen. | 70 |
| 5.12 | Aires des h -maxima. | 71 |
| 5.13 | Périmètres des h -maxima. | 72 |
| 5.14 | Illustration des diagrammes de formes \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 | 73 |
| 5.15 | Exemple de \mathcal{D}_1 des h -maxima | 74 |
| 5.16 | \mathcal{D}_1 des h -maxima pour la covariance gaussienne | 75 |
| 5.17 | \mathcal{D}_1 des h -maxima pour la covariance de Bessel | 75 |
| 5.18 | \mathcal{D}_2 des h -maxima pour la covariance gaussienne | 76 |

| | | |
|------|--|-----|
| 5.19 | \mathcal{D}_2 des h -maxima pour la covariance de Bessel | 76 |
| 5.20 | Nombre de voisins des cellules simulées. | 77 |
| 5.21 | Pourcentage de cellules avec 5, 6 ou 7 voisins. | 78 |
| 5.22 | Nombre de voisins de plusieurs types de tessellations. | 79 |
| 5.23 | Aires des cellules. | 79 |
| 5.24 | Périmètres des cellules. | 80 |
| 5.25 | Aires et périmètres des cellules de plusieurs tessellations. | 80 |
| 5.26 | \mathcal{D}_1 des cellules pour la covariance gaussienne | 82 |
| 5.27 | \mathcal{D}_1 des cellules pour la covariance de Bessel | 82 |
| 5.28 | \mathcal{D}_2 des cellules pour la covariance gaussienne | 83 |
| 5.29 | \mathcal{D}_2 des cellules pour la covariance de Bessel | 83 |
| 5.30 | \mathcal{D}_1 des cellules de différentes tessellations | 84 |
| 5.31 | \mathcal{D}_2 des cellules de différentes tessellations | 84 |
| | | |
| 6.1 | Images de l'endothélium. | 88 |
| 6.2 | Densité cellulaire | 90 |
| 6.3 | Fonction de distribution de contact sphérique F par tranches d'âge. | 91 |
| 6.4 | Illustration des réels $r_{L,1,i}$, $r_{G,1,i}$ et $r_{G,2,i}$ | 92 |
| 6.5 | Fonctions L , G et g par tranches d'âges. | 92 |
| 6.6 | Fonctions L , G et g comparées à d'autres processus de points. | 94 |
| 6.7 | Fonction H de Ripley par tranches d'âges. | 94 |
| 6.8 | Évolution des critères $c_{L,1}$ et $c_{L,2}$ de la fonction de Ripley par tranche d'âge. | 95 |
| 6.9 | Évolution des critères $c_{G,1}$ et $c_{G,2}$ de la fonction G | 95 |
| 6.10 | Critère de la fonction g | 96 |
| 6.11 | Fonctionnelles réduites de Minkowski | 97 |
| 6.12 | Fonctionnelles réduites de Minkowski comparées à d'autres tessellations. | 98 |
| 6.13 | Évolution des critères c_a , c_u et c_e en fonction des tranches d'âge. | 99 |
| 6.14 | Nombre de voisins. | 100 |
| 6.15 | Distribution du nombre de voisins comparée à d'autres tessellations. | 101 |
| 6.16 | Critères pour le nombre de voisins. | 101 |
| 6.17 | Aire et périmètre des cellules. | 102 |
| 6.18 | Comparaison de l'aire et périmètre des cellules. | 103 |
| 6.19 | Critères pour l'aire et le périmètre. | 104 |
| 6.20 | \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 par tranche d'âge | 105 |
| 6.21 | Densité de \mathcal{D}_1 par tranche d'âge | 105 |
| 6.22 | Densité de \mathcal{D}_2 par tranche d'âge | 106 |
| 6.23 | Exemple de l'estimation de la tranche d'âge a et de l'intervalle I pour un endothélium de la tranche 4, avec $a = 5$ et $I = [3, 6]$ | 108 |
| 6.24 | Age estimé pour la tranche 1. | 108 |
| 6.25 | Age estimé pour la tranche 3. | 109 |

| | | |
|------|--|-----|
| 6.26 | Age estimé pour la tranche 5. | 109 |
| 6.27 | Age estimé pour la tranche 7. | 110 |
| 6.28 | Age estimé pour la tranche 10. | 110 |
| 7.1 | Comparaison des fonctions L et G de modèles et d'endothéliums. | 121 |
| 2 | Tranche 1 - Sujet 1 (6 ans) | 131 |
| 3 | Tranche 1 - Sujet 2 (5 ans) | 132 |
| 4 | Tranche 1 - Sujet 3 (4 ans) | 132 |
| 5 | Tranche 1 - Sujet 4 (4 ans) | 133 |
| 6 | Tranche 1 - Sujet 5 (10 ans) | 133 |
| 7 | Tranche 2 - Sujet 1 (17 ans) | 134 |
| 8 | Tranche 2 - Sujet 2 (17 ans) | 135 |
| 9 | Tranche 2 - Sujet 3 (15 ans) | 135 |
| 10 | Tranche 2 - Sujet 4 (12 ans) | 136 |
| 11 | Tranche 2 - Sujet 5 (12 ans) | 136 |
| 12 | Tranche 3 - Sujet 1 (25 ans) | 137 |
| 13 | Tranche 3 - Sujet 2 (27 ans) | 138 |
| 14 | Tranche 3 - Sujet 3 (27 ans) | 138 |
| 15 | Tranche 3 - Sujet 4 (26 ans) | 139 |
| 16 | Tranche 3 - Sujet 5 (27 ans) | 139 |
| 17 | Tranche 4 - Sujet 1 (37 ans) | 140 |
| 18 | Tranche 4 - Sujet 2 (37 ans) | 141 |
| 19 | Tranche 4 - Sujet 3 (33 ans) | 141 |
| 20 | Tranche 4 - Sujet 4 (39 ans) | 142 |
| 21 | Tranche 4 - Sujet 5 (34 ans) | 142 |
| 22 | Tranche 5 - Sujet 1 (41 ans) | 143 |
| 23 | Tranche 5 - Sujet 2 (49 ans) | 144 |
| 24 | Tranche 5 - Sujet 3 (42 ans) | 144 |
| 25 | Tranche 5 - Sujet 4 (42 ans) | 145 |
| 26 | Tranche 5 - Sujet 5 (43 ans) | 145 |
| 27 | Tranche 6 - Sujet 1 (52 ans) | 146 |
| 28 | Tranche 6 - Sujet 2 (54 ans) | 147 |
| 29 | Tranche 6 - Sujet 3 (56 ans) | 147 |
| 30 | Tranche 6 - Sujet 4 (57 ans) | 148 |
| 31 | Tranche 6 - Sujet 5 (56 ans) | 148 |
| 32 | Tranche 7 - Sujet 1 (63 ans) | 149 |
| 33 | Tranche 7 - Sujet 2 (64 ans) | 150 |
| 34 | Tranche 7 - Sujet 3 (62 ans) | 150 |
| 35 | Tranche 7 - Sujet 4 (61 ans) | 151 |
| 36 | Tranche 7 - Sujet 5 (62 ans) | 151 |

| | | |
|----|---|-----|
| 37 | Tranche 8 - Sujet 1 (73 ans) | 152 |
| 38 | Tranche 8 - Sujet 2 (80 ans) | 153 |
| 39 | Tranche 8 - Sujet 3 (75 ans) | 153 |
| 40 | Tranche 8 - Sujet 4 (71 ans) | 154 |
| 41 | Tranche 8 - Sujet 5 (71 ans) | 154 |
| 42 | Tranche 9 - Sujet 1 (84 ans) | 155 |
| 43 | Tranche 9 - Sujet 2 (85 ans) | 156 |
| 44 | Tranche 9 - Sujet 3 (90 ans) | 156 |
| 45 | Tranche 9 - Sujet 4 (83 ans) | 157 |
| 46 | Tranche 9 - Sujet 5 (81 ans) | 157 |
| 47 | Tranche 10 - Sujet 1 (92 ans) | 158 |
| 48 | Tranche 10 - Sujet 2 (95 ans) | 159 |
| 49 | Tranche 10 - Sujet 3 (93 ans) | 159 |
| 50 | Tranche 10 - Sujet 4 (93 ans) | 160 |
| 51 | Tranche 10 - Sujet 5 (92 ans) | 160 |

Liste des tableaux

| | | |
|------|---|-----|
| 5.1 | Caractérisation des tessellations | 60 |
| 5.2 | Fonctionnelles d'ensembles compacts | 73 |
| 5.3 | Part de cellules avec 5, 6 ou 7 voisins pour différents types de tessellations. | 78 |
| 6.1 | Pourcentage de cellules avec 5, 6 ou 7 voisins pour différents types de tessellations. | 100 |
| 6.2 | Critères d'évolution permettant une discrimination de l'âge. | 107 |
| 6.3 | Code couleur de la probabilité d'appartenance \mathbb{P}_i | 112 |
| 6.4 | Probabilité d'appartenance de la tranche 1. | 113 |
| 6.5 | Probabilité d'appartenance de la tranche 2. | 113 |
| 6.6 | Probabilité d'appartenance de la tranche 3. | 113 |
| 6.7 | Probabilité d'appartenance de la tranche 4. | 114 |
| 6.8 | Probabilité d'appartenance de la tranche 5. | 114 |
| 6.9 | Probabilité d'appartenance de la tranche 6. | 114 |
| 6.10 | Probabilité d'appartenance de la tranche 7. | 115 |
| 6.11 | Probabilité d'appartenance de la tranche 8. | 115 |
| 6.12 | Probabilité d'appartenance de la tranche 9. | 115 |
| 6.13 | Probabilité d'appartenance de la tranche 10. | 116 |

Introduction générale

Avant-propos

Cette thèse a été réalisée au sein du laboratoire LGF (Laboratoire Georges Fridel, UMR CNRS 5307) de l'École des Mines de Saint-Étienne. Cette thèse est financée par l'ANR TecSan CorImMo 3D, qui est une collaboration avec le laboratoire BiigC de l'Université Jean Monnet et l'entreprise Tribvn.



Problématique médicale

La greffe de cornée nécessite un contrôle bactériologique du greffon, mais également un contrôle histologique de la cornée et en particulier de l'endothélium, qui est la couche cellulaire qui assure la déturgescence optimale¹ de toute la cornée et ainsi sa transparence.

L'endothélium cornéen humain est une mono-couche de cellules qui forment une mosaïque. À la naissance, les cellules sont tous presque des hexagones réguliers. La mosaïque devient au cours de la vie de moins en moins régulière avec la croissance de la cornée, la mort des cellules qui ne sont pas ou peu remplacées par de nouvelles, et certaines pathologies touchant la cornée.

Lors du contrôle de la qualité du greffon cornéen, l'analyse de la morphologie des cellules de la mosaïque endothéliale est importante. Jusqu'à présent un endothélium est considéré comme de bonne qualité au niveau morphologique si le pléomorphisme et le polymégatisme est faible. C'est-à-dire lorsque la variation des tailles et des formes des cellules n'est pas trop importante.

Dans cette thèse, l'objectif est donc de proposer un modèle mathématique de la morphologie de la cornée afin d'évaluer un écart d'évolution des cornées des patients avec le modèle et d'estimer l'âge d'une cornée à partir de mesures sur l'endothélium.

1. La déturgescence optimale de la cornée est un état de déshydratation qui est maintenu pour conserver le bon fonctionnement et la transparence de la cornée.

Objectif scientifique

Cette thèse a, en plus de la problématique médicale, l'objectif de proposer un nouveau modèle de tessellations aléatoires, également appelées mosaïques, à partir de champs aléatoires gaussiens. L'idée en simulant des tessellations à partir de champs aléatoires est d'avoir une plus grande variété de tessellations. La plupart des tessellations aléatoires sont simulées à partir de germes et du diagramme de Voronoï qui permet de partitionner le plan. Notre idée est d'utiliser les champs aléatoires gaussiens pour générer les germes qui seront des extrema des champs aléatoires : les maxima locaux (points) ou les h -maxima (ensembles). Le partitionnement du plan va également pouvoir être effectué en utilisant une distance non euclidienne provenant du champ aléatoire.

Ensuite se pose la question de la caractérisation des diverses tessellations. Pour cela nous utilisons deux approches. La première en étudiant les germes des tessellations et en particulier leur répartition spatiale car cela joue un rôle déterminant sur la forme et la taille des cellules. La deuxième en étudiant les cellules par leur morphologie et morphométrie. Pour chacune de ces approches, plusieurs mesures sont effectuées afin de déterminer la pertinence de la mesure et s'il évolue en modifiant un paramètre.

Une comparaison entre les tessellations aléatoires simulées à partir de champs aléatoires gaussiens et d'autres tessellations issues de la littérature est aussi faite, afin de savoir ce qu'apporte ces tessellations.

Aboutissement (médical)

Afin de caractériser l'évolution de la mosaïque endothéliale cornéenne, 500 images spéculaires de 50 sujets de 4 à 95 ans ont été acquises. Les mesures effectuées sur les tessellations simulées vont permettre de caractériser ces endothéliums avec l'âge. Des critères évoluant avec l'âge de manière monotone vont ensuite être mises en place sur chacune des mesures afin d'estimer l'âge de toute cornée. Cette estimation va permettre de mettre en évidence de fortes disparités de vitesse d'évolution de la mosaïque cornéenne avec l'âge.

Guide de la thèse

Dans le chapitre 1, la problématique médicale est développée en introduisant le projet ANR dans lequel se situe la thèse, en donnant plus d'informations sur la cornée et en particulier l'endothélium cornéen, puis en parlant des travaux effectués auparavant sur l'endothélium cornéen au sein de l'École des Mines de Saint-Étienne.

Une recherche bibliographique sur les champs aléatoires et leurs extrema est effectuée dans le chapitre 2. Dans le chapitre 3 sont introduits les processus ponctuels, leurs caractérisation, ainsi qu'un certains nombres de tessellations.

Dans le chapitre 4 est détaillée la simulation des tessellations aléatoires à partir de champs aléatoires gaussiens. Puis ces tessellations sont caractérisées dans le chapitre 5.

Enfin, dans le chapitre 6, l'évolution de la mosaïque cornéenne avec l'âge est caractérisée. Puis une estimation de l'âge des cornées est proposée.

Chapitre 1

Généralités

Sommaire

| | | |
|-----|---|---|
| 1.1 | Projet CorImMo 3D | 1 |
| 1.2 | Mosaïque endothéliale cornéenne | 1 |
| 1.3 | Thèses précédentes | 4 |
| 1.4 | Objectifs de la thèse | 5 |

1.1 Projet CorImMo 3D

Cette thèse a une problématique médicale et fait partie d'un projet plus vaste : l'ANR TecSan CorImMo 3D. Ce projet est une collaboration entre l'École des Mines de Saint-Étienne, le laboratoire BiigC de l'Université Jean Monnet et l'entreprise Tribvn. Le projet porte sur l'imagerie et l'étude morphologique de l'endothélium cornéen humain, et se divise en trois parties :

- le développement d'une nouvelle imagerie grand champs in vivo de l'endothélium cornéen ;
- la mise en place de la chaîne de traitement automatisée des greffons ;
- et la modélisation mathématique de la morphologie de la mosaïque cornéenne qui est portée par cette thèse.

1.2 Mosaïque endothéliale cornéenne

La cornée (Fig. 1.1) est la partie transparente de l'œil qui permet avec le cristallin l'obtention d'une image rétinienne. Pour cela la cornée doit être transparente et avoir un pouvoir dioptrique approprié. La cornée est composée, de l'extérieur vers l'intérieur de l'œil (Fig. 1.2), de :

- l'épithélium (environ $50 \mu m$ d'épaisseur), formé de 4 à 7 couches de cellules ;
- la membrane de Bowman ;
- le stroma cornéen ($500 \mu m$) qui représente à lui seul environ 90% de la cornée ;
- la membrane de Descemet ($3 \mu m$ à la naissance, entre 6 et $9 \mu m$ entre 60 et 90 ans) ;
- l'endothélium (3 à $5 \mu m$).

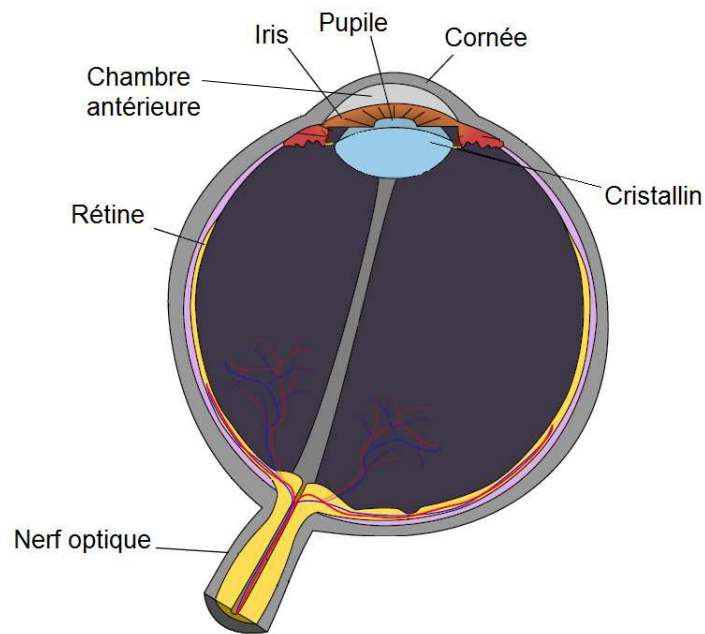


FIGURE 1.1 – Schéma en coupe de l'œil ©Rhcastilhos, Wikipedia, DP



FIGURE 1.2 – Coupe de la cornée. De gauche à droite : l'épithélium, la membrane de Bowman, le stroma cornéen, la membrane de Descemet, l'endothélium.

L'endothélium a un rôle essentiel dans la fonction visuelle, en faisant office de pompe pour assurer la déturgescence optimale du stroma cornéen et assurer ainsi la transparence de la cornée. L'endothélium est constitué d'une mono-couche de cellules plus ou moins hexagonales (Fig. 1.3). Ces cellules ne se divisent pas après la naissance [Sto53] et doivent donc survivre tout au long de la vie.

À la naissance les cellules endothéliales sont presque parfaitement hexagonales, et la densité cellulaire est d'environ 6000 cellules/mm². La densité cellulaire diminue au cours de la vie, en moyenne elle est de 2500 – 3000 cellules/mm² chez un adulte. Lorsque la densité de l'endothélium cornéen d'une personne est inférieure à 300 – 500 cellules/mm², elle devient aveugle.

Lors de l'augmentation de la surface cornéenne, de la mort de cellules, de pathologies et de blessures, les cellules migrent et grandissent pour remplir les trous. Cela entraîne un pléomor-

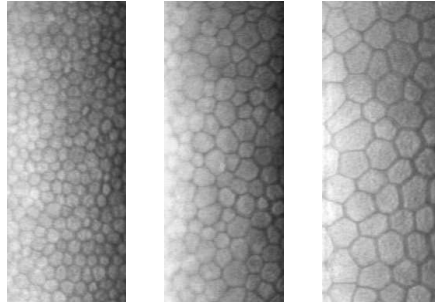


FIGURE 1.3 – Endothélium cornéen humain observé par microscopie spéculaire

phisme (modification géométrique des cellules endothéliales comme la perte de l'hexagonalité) et un polymégatisme (augmentation de la taille) des cellules endothéliales (voir la Fig. 1.3 et les figures de l'Annexe A).

Des études cliniques ont étudiées l'évolution avec l'âge de l'endothélium cornéen humain. Dans [GNK⁺13], l'influence de l'âge sur quelques mesures est étudiée et une corrélation entre l'âge et la densité cellulaire, l'épaisseur de la cornée et la taille moyenne des cellules est montrée. Dans [SGLPA⁺05], l'absence de lien entre la diminution de la densité cellulaire et la myopie, l'hypermétropie et l'émétropie (aucun défaut visuel) est démontrée. Et enfin, dans [RCDF04], la différence d'évolution de la densité cellulaire centrale et périphérique est étudiée, et une différence d'évolution est mise en avant pour les sujets les plus vieux (plus de 70 ans), avec une décroissance plus forte en périphérie.

Une greffe de cornée est nécessaire suite à certaines pathologies touchant la cornée ou à une trop faible densité cellulaire qui entraîne un œdème. Deux types de greffes sont pratiqués :

- la kératoplastie transfixiante qui est la technique la plus fréquente et qui consiste à remplacer toute la partie centrale de la cornée (Fig. 1.4) ;
- la kératoplastie lamellaire postérieure qui consiste à remplacer seulement l'endothélium, cette méthode nécessite la préparation d'une lamelle, ce qui peut être nocif pour les cellules endothéliales.

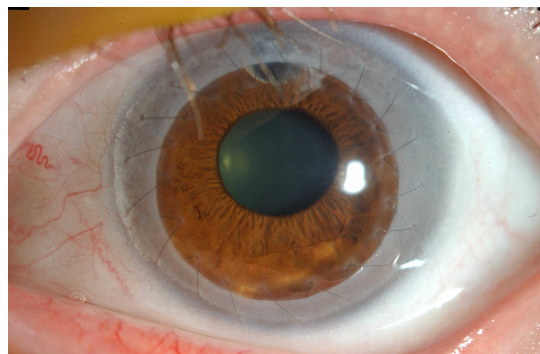


FIGURE 1.4 – Œil ayant subi une greffe de cornée.

Afin de greffer une cornée ou un endothélium cornéen, en plus de l'étude bactériologique, il est vérifié sur le greffon que :

- la densité cellulaire est supérieure à 2000 cellules/mm² en cas de kératoplastie transfixiante et à 2400 cellules/mm² en cas de kératoplastie lamellaire postérieure ;
- la cornée est transparente ;
- la taille des cellules est homogène ;
- la forme des cellules est proche de l'hexagonalité.

Seule la densité cellulaire est une mesure quantitative. Après une greffe de cornée, la densité cellulaire diminue plus rapidement, il peut donc être nécessaire de greffer une cornée plusieurs fois au cours d'une vie.

Les images de l'endothélium peuvent être prises ex vivo ou in vivo : ex vivo pendant le stockage des cornées par microscopie spéculaire ou par microscopie à lumière transmise, et in vivo par microscopie spéculaire, grâce à la transparence de la cornée, en utilisant la lumière qui se réfléchit à l'interface entre les cellules endothéliales et le liquide remplissant la chambre antérieure de l'œil. Les images in vivo de la cornée sont prises par des microscopes spéculaires sans contact à petits champs. Un nouveau microscope spéculaire digital à grand champ [HGB⁺16], devrait permettre d'avoir des images de plus grandes surfaces.

1.3 Thèses précédentes

Cette thèse fait suite à deux autres thèses sur l'endothélium cornéen humain au sein de l'École de Mines de Saint-Étienne. La première thèse [Gav08] concernait la segmentation d'images de la mosaïque endothéliale cornéenne, notamment à partir des propriétés de la perception et de la reconnaissance visuelles humaines. La deuxième thèse [Fer11] portait sur la reconstruction 3D du greffon cornéen humain, voir la Fig. 1.5.

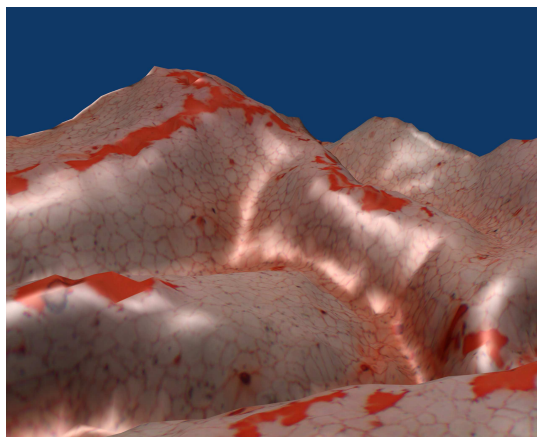


FIGURE 1.5 – Reconstruction 3D d'un greffon cornéen coloré au rouge alizarine.

Suite à ces deux thèses sont apparus le besoin de proposer un modèle mathématique de cette mosaïque endothéliale et de caractériser numériquement la morphologie et la morphométrie des cellules.

1.4 Objectifs de la thèse

Dans cette thèse nous allons dans un premier temps proposer une nouvelle manière de simuler des tessellations aléatoires. Ceci afin d'obtenir des tessellations avec une grande diversité des tailles et des formes des cellules, avec une taille minimale des cellules, et avec des contours courbes. Pour cela nous allons utiliser des champs aléatoires gaussiens qui vont être définis dans le chapitre 2. Les tessellations sont obtenues à partir de germes et d'une distance, et permet de partitionner le plan, voir le Chap. 3. Les germes et la distance utilisés pour simuler ces nouvelles tessellations aléatoires seront issus des champs aléatoires gaussiens, et sont présentés dans le chapitre 4. Une des originalités est que les germes ne sont pas forcément ponctuels.

Ensuite, ces nouvelles tessellations aléatoires vont être analysées pour connaître leurs propriétés dans le chapitre 5. Pour cela, nous allons tout d'abord les caractériser par une approche ponctuelle, c'est-à-dire en étudiant les germes et en particulier la distribution spatiale de ces germes. Puis nous étudierons la morphologie et la morphométrie des cellules des tessellations.

Dans la dernière partie, Chap. 6, une base de 500 images de la mosaïque endothéliale cornéenne humaine (voir l'Annexe A) va être utilisée afin de caractériser l'évolution avec l'âge de la mosaïque. Les mêmes outils que pour caractériser les tessellations aléatoires vont être appliqués. Cette analyse va ensuite permettre de mettre en place une méthode d'estimation de l'âge d'un endothélium cornéen. Cette estimation permettra de savoir si une cornée a une évolution normale.

Chapitre 2

Champs aléatoires

Un champ aléatoire correspond empiriquement à une surface ou à un paysage, dont l'altitude en une position est donnée par une variable aléatoire. Dans ce chapitre, nous allons définir ce qu'est un champ aléatoire, en particulier les champs aléatoires gaussiens (section 2.1), voir comment les champs aléatoires gaussiens qui seront utilisés pour modéliser des tessellations aléatoires sont simulés (section 2.3), puis nous allons découvrir certaines propriétés des ensembles d'excursion et des extrema des champs aléatoires gaussiens (section 2.4).

Sommaire

| | | |
|------------|---|-----------|
| 2.1 | Définitions - Théorie des champs aléatoires | 8 |
| 2.2 | Fonctions de covariances | 10 |
| 2.2.1 | Propriétés des fonctions de covariance | 10 |
| 2.2.1.1 | Comportement en zéro de la fonction de covariance | 11 |
| 2.2.2 | Exemples de champs aléatoires gaussiens | 11 |
| 2.2.2.1 | Fonction de covariance Gaussienne | 12 |
| 2.2.2.2 | Fonction de covariance γ -exponentielle | 12 |
| 2.2.2.3 | Fonction de covariance quadratique rationnelle | 12 |
| 2.2.2.4 | Fonction de covariance de Bessel | 13 |
| 2.2.2.5 | Fonction de covariance de Matérn | 14 |
| 2.2.2.6 | Fonction de covariance cosinus amorti | 15 |
| 2.2.2.7 | Fonction de covariance aux oscillations amorties | 15 |
| 2.3 | Simulation de champs aléatoires gaussiens | 17 |
| 2.4 | Propriétés des champs aléatoires gaussiens | 18 |
| 2.4.1 | Géométrie des champs aléatoires | 18 |
| 2.4.1.1 | Ensembles d'excursion | 18 |
| 2.4.1.2 | La caractéristique d'Euler-Poincaré | 19 |
| 2.4.1.3 | Volumes intrinsèques et fonctionnelles de Minkowski | 20 |
| 2.4.2 | Extrema des champs aléatoires gaussiens | 21 |
| 2.4.2.1 | Points critiques | 22 |
| 2.4.2.2 | Formules de Rice et de Kac-Rice | 23 |
| 2.4.2.3 | Densité de points critiques | 24 |
| 2.4.3 | Conclusion | 25 |
| 2.5 | Conclusion | 25 |

2.1 Définitions - Théorie des champs aléatoires

Un champ aléatoire est la généralisation d'un processus aléatoire à des dimensions supérieures. Nous allons nous restreindre dans la suite au cas \mathbb{R}^2 .

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé¹ et $T \subseteq \mathbb{R}^2$. La définition formelle d'un champ aléatoire est :

Définition 1. *L'application :*

$$\begin{aligned} X : T \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, \omega) &\longmapsto X(t, \omega) \end{aligned} \quad (2.1)$$

est un **champ aléatoire réel** si $\forall t \in T$ l'application

$$\begin{aligned} X(t, \cdot) : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto X(t, \omega) \end{aligned} \quad (2.2)$$

est mesurable.

En général, la dépendance de l'espace probabilisé Ω est sous-entendue, c'est à dire que $\forall t \in T$, $X(t, \omega)$ est noté X_t . La définition peut alors s'écrire :

Un champ aléatoire X_t sur T est une application dont les valeurs sont des variables aléatoires pour tout $t \in T$.

La fonction de covariance est utile dans la majorité des propriétés et des résultats sur les champs aléatoires. Elle est définie comme suit :

Définition 2. *La fonction de covariance C du champ aléatoire X_t est :*

$$\forall t, s \in T, \quad C(X_t, X_s) := C(t, s) := \mathbb{E}[X_t X_s] - \mathbb{E}[X_t] \mathbb{E}[X_s]. \quad (2.3)$$

Les définitions suivantes de séparabilité, stationnarité au sens large, et isotropie sont des propriétés qu'auront tout les champs aléatoires dans la suite. Soit d une distance sur T .

Définition 3. *Un champ aléatoire X_t est **séparable** s'il existe un sous-ensemble dense et dénombrable D de T et un événement N de mesure de probabilité \mathbb{P} nulle, tel que pour tout Borélien $B \subset \mathbb{R}$ et pour $I \subset T$ ouvert on ait*

$$\{\omega \mid X_t(\omega) \in B, \forall t \in I\} \Delta \{\omega \mid X_t(\omega) \in B, \forall t \in I \cap D\} \subset N, \quad (2.4)$$

où Δ est l'opération différence symétrique :

$$\begin{aligned} \Delta(A, B) &= (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B). \end{aligned} \quad (2.5)$$

1. Un espace probabilisé est un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où Ω est un ensemble (appelé univers), \mathcal{F} une σ -algèbre sur Ω (l'ensemble des événements), et \mathbb{P} la mesure sur \mathcal{F} tel que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (appelée mesure de probabilité).

Définition 4. Un champ aléatoire X_t est **stationnaire** (ou homogène) au sens large si l'espérance est constante :

$$\forall t \in T, \quad \exists m \in \mathbb{R}, \quad m(t) := \mathbb{E}[X_t] = m, \quad (2.6)$$

et si la fonction de covariance dépend uniquement de la différence entre deux éléments de T :

$$\forall t, s \in T, \quad \exists C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad C(t, s) = C(t - s). \quad (2.7)$$

Définition 5. Un champ aléatoire X_t stationnaire au sens large est **isotrope** si la fonction de covariance dépend uniquement de la distance euclidienne :

$$\forall t, s \in T, \quad C(t, s) := C(|t - s|). \quad (2.8)$$

Pour d'autres propriétés, telles que la stationnarité au sens strict et l'anisotropie, le lecteur pourra se référer aux ouvrages traitant des champs aléatoires : [AT05, Abr97, Yag87, Sch99],...

Les notions de continuité et de différentiabilité des champs aléatoires seront nécessaires par la suite. Il existe de nombreuses formes de continuité et de différentiabilité : en probabilité, en moyenne d'ordre p , en moyenne quadratique, presque sûre et enfin presque sûrement à trajectoires continues ou différentiables. Seuls les définitions utiles par la suite sont présentées :

Définition 6. Soit X un champ aléatoire sur T .

1. X est **continu en moyenne d'ordre p** si :

$$\forall t \in T, \quad X_t \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \quad (2.9)$$

et si l'application $t \mapsto X_t$ est continue de T dans l'espace normé L^p .

Lorsque $p = 2$, on dit que X est **continu en moyenne quadratique**, i.e. si $\forall (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T$ tel que $d(t_n, t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, $\mathbb{E}[|X_{t_n} - X_t|^2]$ existe et tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$, alors X est continu en moyenne quadratique.

2. X est **presque sûrement² à trajectoires continues** (ou a des chemins presque sûrement continus) si pour presque tout ω l'application $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue sur T .

Définition 7. Soit X un champ aléatoire sur T . $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, soit

$$\dot{X}_i(t) := \frac{\partial X(t)}{\partial t_i} := \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{X(t + \delta e_i, \omega) - X(t, \omega)}{\delta} \quad (2.10)$$

la i -ème composante du gradient de X en $t \in T$, où $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ est une base orthonormée de \mathbb{R}^2 .

1. X est **différentiable en moyenne d'ordre p** si :

$$\forall t \in T, \quad \dot{X}_i(t) \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad (2.11)$$

et si l'application $t \mapsto \dot{X}_i(t)$ est continue de T dans l'espace normé L^p .

Lorsque $p = 2$, on dit que X est **différentiable en moyenne quadratique**.

2. Dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, un événement $\omega \in \Omega$ se réalise presque sûrement si $\mathbb{P}(\omega) = 1$. Si $\mathbb{P}(\omega) = 0$, alors A est négligeable. De même une propriété P est dite vraie pour presque tout $\omega \in \Omega$ (pour la mesure \mathbb{P}) si il existe un ensemble $A \in \mathcal{F}$ contenant $P(\omega)$ et tel que $\mathbb{P}(A) = 1$.

2. X est **presque sûrement à trajectoires différentiables** (ou a des chemins presque sûrement différentiables) si pour presque tout ω l'application :

$$t \longmapsto \dot{X}_i(t, \omega) \quad (2.12)$$

est continue sur T , $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Dans la suite tous les champs aléatoires seront supposés séparables.

2.2 Fonctions de covariances

Soit X un champ aléatoire sur $T \subset \mathbb{R}^2$. La fonction de covariance de X définie dans la déf. 2, est comme cela va être vu par la suite, essentielle pour simuler des champs aléatoires et pour connaître leurs propriétés.

2.2.1 Propriétés des fonctions de covariance

Le théorème ci-dessous permet de savoir si une fonction de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de covariance.

Théorème 1. [Abr97]

C est une fonction de covariance $\Leftrightarrow C$ est définie positive.

Une fonction $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est définie positive si pour tout entier positif k ,

$$\forall (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^{n \times k}, \forall (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k, \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_i a_j F(x_i, x_j) \geq 0. \quad (2.13)$$

Les théorèmes suivants permettent d'avoir une autre écriture de la fonction C qui sera utile lors de la simulation de champs aléatoires.

Théorème 2 (de Bochner). *Une fonction $C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction de covariance d'un champ aléatoire à valeur complexe, continue en moyenne quadratique (c'est-à-dire d'ordre 2), et stationnaire au sens large si et seulement si la fonction de covariance C peut s'écrire, $\forall t, s \in \mathbb{R}^2$, sous la forme :*

$$C(t - s) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\langle x, t-s \rangle} d\mu(x), \quad (2.14)$$

où μ est une mesure finie positive et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire dans \mathbb{R}^2 .

Si la mesure μ a une densité S , alors S est appelée **densité spectrale** de C , et le lien entre C et S est donné dans le théorème suivant.

Théorème 3 (de Wiener-Khintchine). *Si la densité spectrale S existe, alors C et S sont duales, c'est-à-dire que $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$:*

$$C(y) = \int_{\mathbb{R}^2} S(x) e^{i\langle x, y \rangle} dx \quad (2.15)$$

et

$$S(x) = \int_{\mathbb{R}^2} C(y) e^{-i\langle x, y \rangle} dy. \quad (2.16)$$

Corollaire 1 (du théorème de Bochner). [Zas00]

La fonction C continue et intégrable sur \mathbb{R}^2 est définie-positive si et seulement si, $\forall x \in \mathbb{R}^2$,

$$S(x) = \int_{\mathbb{R}^2} C(y)e^{-i\langle x,y \rangle} dy \geq 0. \quad (2.17)$$

2.2.1.1 Comportement en zéro de la fonction de covariance

Dans certains cas, voir les résultats ci-dessous, pour savoir si un champ aléatoire est continu ou différentiable sur tout son domaine de définition, il suffit que la fonction de covariance le soit en certains points.

Théorème 4. [Abr97] Soit X un champ aléatoire sur $T \subset \mathbb{R}^2$ tel que $\mathbb{E}[X(t)]$ est continue. Le champ aléatoire X est continu en moyenne quadratique en $t \in T$ si et seulement si la fonction de covariance $C(s, s')$ est continue en $s = s' = t$. De plus, si $C(s, s)$ est continue $\forall s \in T$ alors C est continue partout.

Corollaire 2. Un champ aléatoire X sur $T \subset \mathbb{R}^2$ stationnaire au sens large, est continu en moyenne quadratique sur tout T , si et seulement si sa fonction de covariance C est continue en zéro.

Théorème 5. [Adl81] Soit X un champ aléatoire sur $T \subset \mathbb{R}^2$. Si $\frac{\partial^2 C(s,t)}{\partial s_i \partial t_j}$ existe et est finie en tout point $(s, t) \in \mathbb{R}^4$, alors la limite

$$X_i(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(t + he_i) - X(t)}{h}$$

existe et $X_i(t)$ est appelée dérivée en moyenne quadratique de X en t . Si $X_i(t)$ existe $\forall t \in T$, alors X est dérivable en moyenne quadratique sur tout T .

Si X est stationnaire, alors il suffit que $\frac{\partial^{2k} C(t)}{\partial^2 t_{i_1} \dots \partial^2 t_{i_1}}$ existe et soit finie en $t = 0$ pour avoir l'existence de la dérivée partielle d'ordre k : $X_{i_1 \dots i_1}(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}^2$.

Le comportement en zéro d'une fonction de covariance stationnaire au sens large décrit donc la continuité et la différentiabilité en moyenne quadratique du champ aléatoire, voir la Fig. 2.5.

2.2.2 Exemples de champs aléatoires gaussiens

Définition 8. Un champ aléatoire gaussien à valeurs réelles est un champ aléatoire X sur T tel que pour tout $1 \leq d < \infty$ et tout $(t_1, \dots, t_d) \in T^d$, les distributions de probabilité de $(X_{t_1}, \dots, X_{t_d})$ sont des gaussiennes multivariées.

Notons que pour un champ aléatoire gaussien, la stationnarité au sens strict coïncide avec la stationnarité au sens large.

Une liste d'exemple de fonctions de covariances C , et quand elles existent, les densités spectrales S associées, vont être données dans la suite [Abr97, Yag87, RW06]. Les fonctions de covariances suivantes seront toutes stationnaires et isotropes, pour cela, notons $\forall s, t \in T$, $\tau = \|t - s\|_2$.

2.2.2.1 Fonction de covariance Gaussienne

La fonction de covariance gaussienne (ou de carrée exponentielle) (voir la Fig. 2.1), est donnée par :

$$C(\tau) = \exp\left(-\frac{\tau^2}{2l^2}\right), \quad (2.18)$$

où $l > 0$ est le paramètre de longueur.

Cette fonction de covariance est infiniment dérivable, stationnaire et non-dégénérée. De plus sa densité spectrale est :

$$S(s) = 2\pi l^2 \exp(-2(\pi l s)^2), \quad (2.19)$$

et est infiniment divisible.

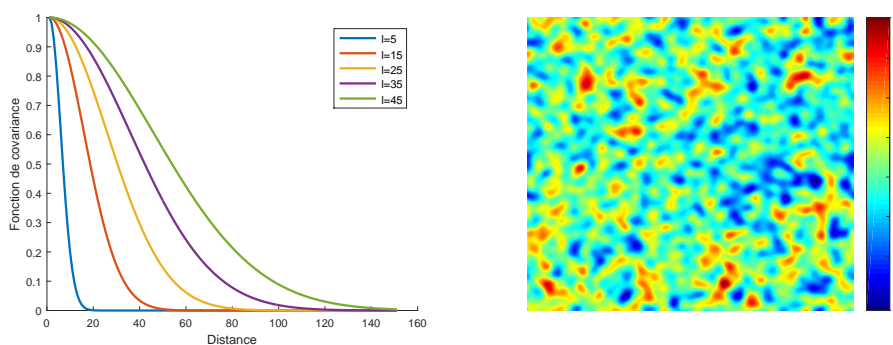


FIGURE 2.1 – Fonctions de covariance gaussienne pour différents l . Et simulation d'un champ aléatoire Gaussien de fonction de covariance Gaussienne de paramètre $l = 10$.

2.2.2.2 Fonction de covariance γ -exponentielle

La fonction de covariance γ -exponentielle (Fig. 2.2), est définie par :

$$C(\tau) = \exp\left(-\left(\frac{\tau}{l}\right)^\gamma\right), \quad \forall 0 < \gamma \leq 2, \quad (2.20)$$

où $l > 0$ est le paramètre de longueur. Le champ aléatoire correspondant n'est pas différentiable à l'ordre 2 (à part pour $\gamma = 2$ où il l'est infiniment), et est stationnaire et non-dégénéré.

2.2.2.3 Fonction de covariance quadratique rationnelle

La fonction de covariance quadratique rationnelle (Fig. 2.3), également appelée fonction de covariance de Cauchy, est :

$$C(\tau) = \left(1 + \frac{\tau^2}{2\alpha l^2}\right)^{-\alpha} \quad (2.21)$$

où $\alpha, l > 0$. Cette fonction de covariance est stationnaire et non-dégénérée.

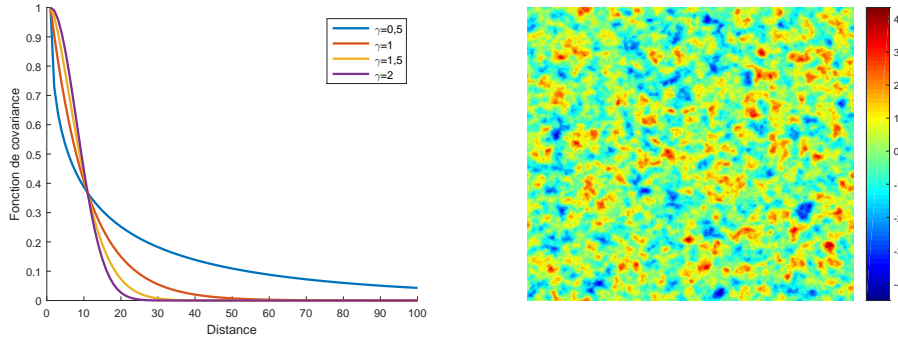


FIGURE 2.2 – Fonctions de covariance γ -exponentielle pour différents γ . Et simulation d'un champ aléatoire Gaussien de fonction de covariance γ -exponentielle de paramètre $\gamma = 1, 5$.

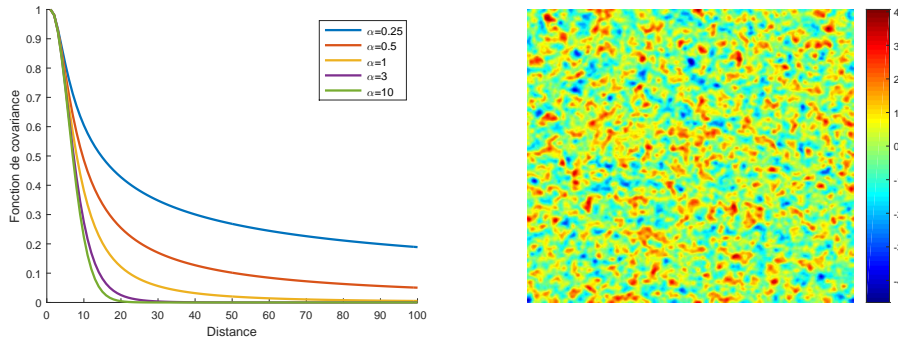


FIGURE 2.3 – Fonctions de covariance quadratique rationnelle pour différents α . Et simulation d'un champ aléatoire Gaussien de fonction de covariance quadratique rationnelle de paramètre $\alpha = 5$.

2.2.2.4 Fonction de covariance de Bessel

La fonction de covariance de Bessel [Yag87, Sch99] (voir la Fig. 2.4), est pour tout $\tau > 0$, donnée par :

$$C(\tau) = 2^\nu \Gamma(\nu + 1) \tau^{-\nu} J_\nu(\tau) \quad (2.22)$$

où $\nu \geq 0$ et J_ν est la fonction de Bessel :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \quad (2.23)$$

De plus, $C(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 1$ car :

$$\begin{aligned} \frac{J_\nu(\tau)}{\tau^\nu} &= \frac{1}{2^\nu} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{2k} \\ &\xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \end{aligned} \quad (2.24)$$

La fonction densité spectrale S de la fonction de covariance de Bessel est :

$$S(k) = \frac{\Gamma(\nu+1)(1-k^2)^{\nu-\frac{n}{2}}}{\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(\nu+\frac{n}{2})} \mathbf{1}_{\{\|k\| \leq 1\}}, \quad k \in T. \quad (2.25)$$

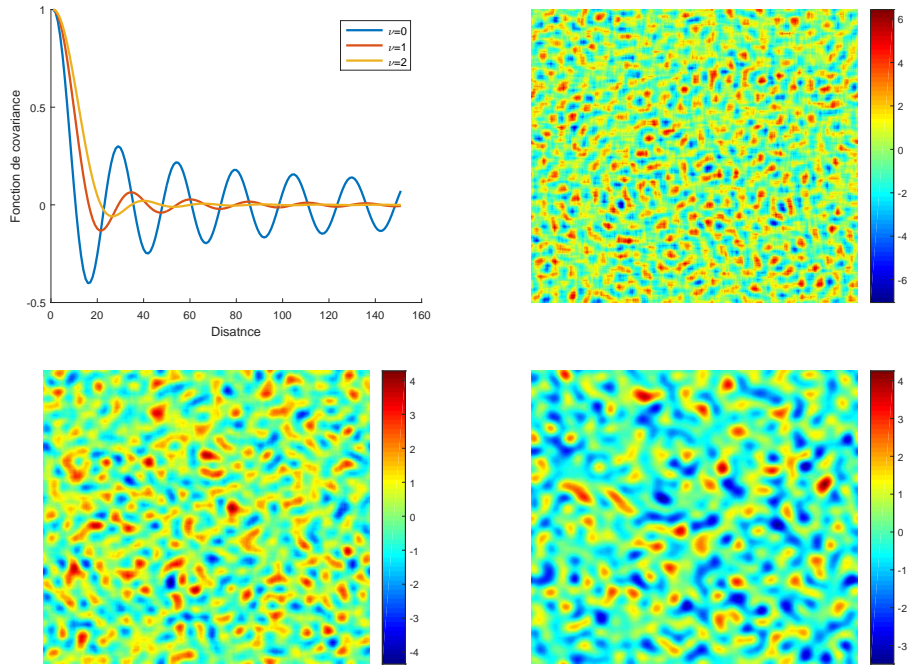


FIGURE 2.4 – Fonctions de covariance de Bessel pour différents ν . Et simulation de champs aléatoires Gaussien de fonctions de covariance de Bessel de paramètre ν égal à 0 en haut à droite, 1 en bas à gauche et 2 en bas à droite.

2.2.2.5 Fonction de covariance de Matérn

La fonction de covariance de Matérn (Fig. 2.5), est :

$$C(\tau) = \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{\sqrt{2\nu\tau}}{l} \right)^\nu K_\nu \left(\frac{\sqrt{2\nu\tau}}{l} \right) \quad (2.26)$$

où ν et l sont des paramètres positifs, et K_ν est la fonction de Bessel modifiée [AS64].

Sa densité spectrale est :

$$S(s) = \frac{4\pi\Gamma(\nu+1)(2\nu)^\nu}{\Gamma(\nu)l^{2\nu}} \left(\frac{2\nu}{l^2} + 4\pi^2s^2 \right)^{-(\nu+1)}. \quad (2.27)$$

Lorsque $\nu \rightarrow +\infty$ la fonction de covariance de Matérn tends vers la fonction de covariance Gaussienne. Pour $\nu = \frac{1}{2}$, la fonction de covariance de Matérn est égale à la fonction de covariance exponentielle :

$$C(\tau) = \exp\left(-\frac{\tau^2}{2l^2}\right). \quad (2.28)$$

De plus, lorsque $n = 1$ c'est la fonction de covariance du processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

Le champ aléatoire de fonction de covariance de Matérn est continu d'ordre 2 mais pas différentiable d'ordre 2.

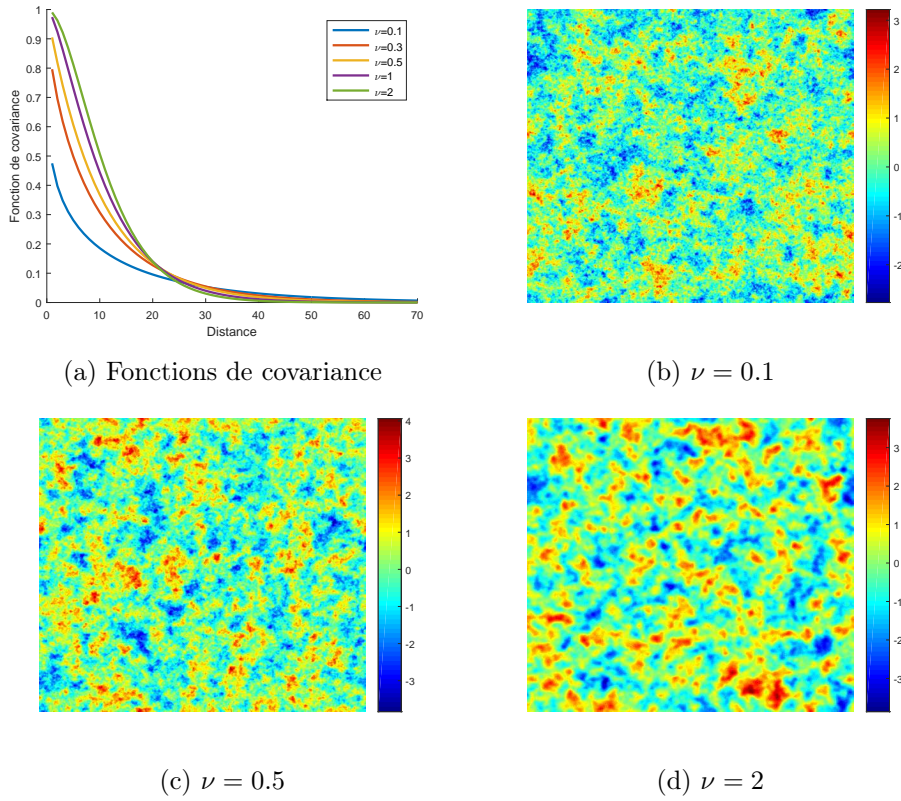


FIGURE 2.5 – Fonctions de covariance de Matérn pour différentes valeurs de ν . Et simulation de champs aléatoires Gaussien de fonctions de covariance de Matérn de paramètre $\nu = 0.1, 0.5$ et 2 . Pour $\nu = 2$, la fonction de covariance est différentiable en zéro, et le champ aléatoire est différentiable. Pour $\nu = 0.1$ et $\nu = 0.5$, la fonction de covariance n'est pas différentiable en zéro, et le champ aléatoire n'est pas différentiable.

2.2.2.6 Fonction de covariance cosinus amorti

La fonction de covariance cosinus amorti [Yag87] (voir la Fig. 2.6), est pour tout $\tau > 0$:

$$C(\tau) = \exp(-\alpha\tau) \cos(\omega\tau) \quad (2.29)$$

où $\alpha \geq \omega > 0$.

Cette fonction de covariance n'est pas continue en 0.

La fonction densité spectrale S de cette fonction de covariance est :

$$S(k) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{k^2 + \alpha^2 + \omega^2}{k^4 + 2(\alpha^2 - \omega^2)k^2 + (\alpha^2 + \omega^2)^2}, \quad k \in T. \quad (2.30)$$

2.2.2.7 Fonction de covariance aux oscillations amorties

La fonction de covariance aux oscillations amorties [Yag87] (voir la Fig. 2.7), est pour tout $\tau > 0$:

$$C(\tau) = \frac{1}{\cos(-\psi)} \exp(-\alpha\tau) \cos(\omega\tau - \psi) \quad (2.31)$$

où $\alpha > 0$, $\omega > 0$ et $|\psi| \leq \tan^{-1}(\frac{\alpha}{\omega})$.

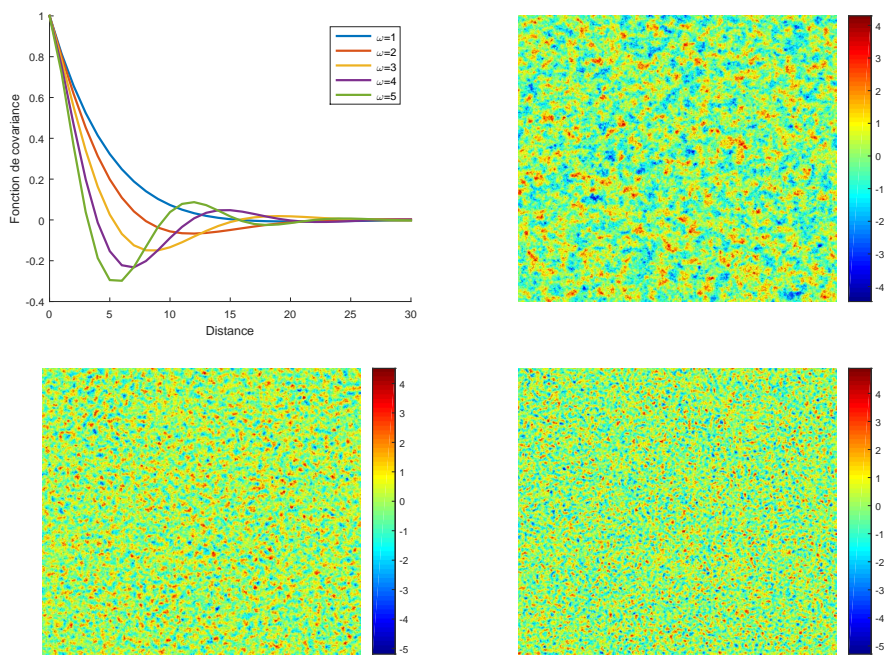


FIGURE 2.6 – Fonctions de covariance cosinus amorti pour différents ω , où $\alpha = 2$. Et simulation de champs aléatoires Gaussien de fonctions de covariance cosinus amorti de paramètre ω égal à 1 en haut à droite, 3 en bas à gauche et 5 en bas à droite.

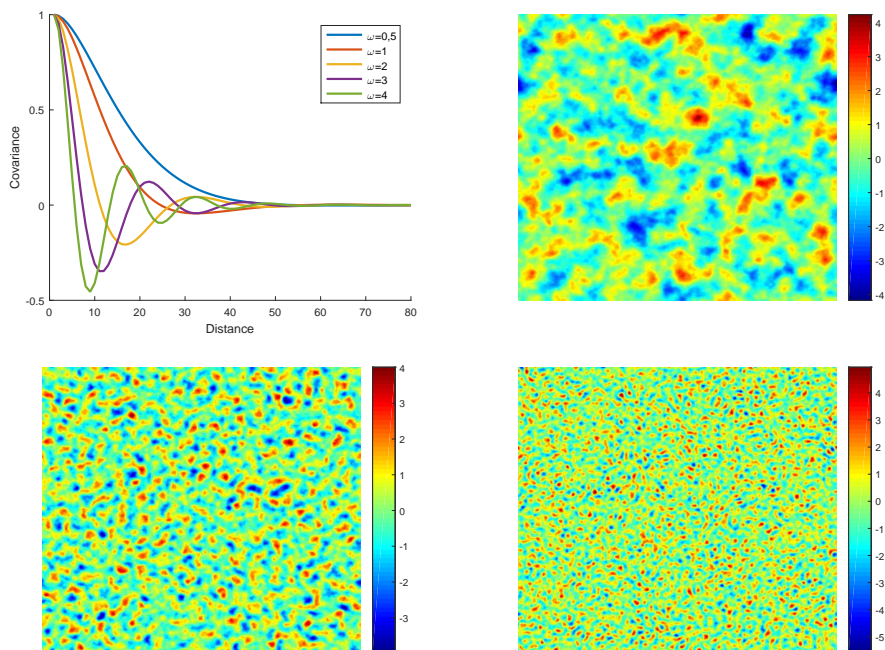


FIGURE 2.7 – Fonctions de covariance aux oscillations amorties pour $\alpha = 1$, différents ω et $|\psi| = \tan^{-1}(\frac{\alpha}{\omega})$, où $\alpha = 2$. Et simulation de champs aléatoires Gaussien de fonctions de covariance aux oscillations amorties de paramètre ω égal à 0,5 en haut à droite, 2 en bas à gauche et 4 en bas à droite.

La fonction densité spectrale S de la fonction de covariance aux oscillations amorties est :

$$S(k) = \frac{ck^2 + d}{k^2 + \alpha^2 - \omega^2 + 4\alpha^2\omega^2}, \quad k \in T \quad (2.32)$$

où

$$c = \frac{1}{\pi \cos(-\psi)} (\alpha \cos(\psi) - \omega \sin(\psi)) \quad (2.33)$$

et

$$d = \frac{\alpha^2 + \omega^2}{\pi \cos(-\psi)} (\alpha \cos(\psi) + \omega \sin(\psi)). \quad (2.34)$$

2.3 Simulation de champs aléatoires gaussiens

L'expansion de Karhunen-Loève, qui va nous donner une expression permettant de simuler des champs aléatoires gaussiens stationnaires et continus, va être présentée dans cette section.

Soit X un champ aléatoire gaussien centré de fonction de covariance C continue indexée par un compact T de \mathbb{R}^2 .

L'expansion de Karhunen-Loève de X , [AT05], est donnée par :

$$X_t = \sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{\lambda_k} \xi_k \psi_k(t) \quad (2.35)$$

où les ξ_k sont i.i.d.³ de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, et les valeurs propres λ_k de C vérifient $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0$. Et $\forall i, j$ et $\forall t \in T$ les fonctions propres ψ_k de C :

$$\int_T C(s, t) \psi_i(s) ds = \lambda_i \psi_i(t) \quad (2.36)$$

et

$$\int_T \psi_i(t) \psi_j(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.37)$$

L'expansion de Karhunen-Loève donne une expression de X , mais trouver les fonctions propres ψ_i et les valeurs propres λ_i n'est pas facile. Dans le cas où le champ aléatoire X est stationnaire, alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}^2$, nous avons l'expression suivante :

$$\int_T C(s, t) e^{i\alpha s} ds = e^{i\alpha t} \int_T C(t-s) e^{-i\alpha(t-s)} ds \quad (2.38)$$

$$= e^{i\alpha t} \int_T C(u) e^{-i\alpha u} du \quad (2.39)$$

Les fonctions propres de C sont

$$\psi_k(t) = e^{i\alpha_k t}, \quad (2.40)$$

où $\alpha_k \in \mathbb{R}^2$, et les valeurs propres sont :

$$\lambda_k = \int_T C(u) e^{-i\alpha_k u} du \quad (2.41)$$

3. indépendants et identiquement distribués

L'expansion de Karhunen-Loève de X est alors :

$$X_t = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_T C(u) e^{-i\alpha_k u} du \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\alpha_k t} \xi_k \quad (2.42)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{\hat{C}(\alpha_k)} e^{i\alpha_k t} \xi_k \quad (2.43)$$

où les ξ_n sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et où \hat{C} est la transformée de Fourier de C . Notons également que $\hat{C}(\alpha_k)$ est égal à la densité spectrale S , quand elle existe, évaluée en α_k (voir l'eq.2.16). De plus l'expression 2.43 est la transformée inverse discrète de $\sqrt{\hat{C}(\alpha_k)} \xi_k$ en α_k .

Cette dernière équation nous permet donc de simuler des champs aléatoires gaussiens stationnaires de fonctions de covariance continues.

2.4 Propriétés des champs aléatoires gaussiens

Intéressons nous maintenant aux propriétés géométriques des champs aléatoires gaussiens par l'étude de leurs ensembles d'excursions (section 2.4.1), puis aux extrema des champs aléatoires gaussiens dans la section 2.4.2, car les extrema vont servir, par la suite, à simuler des tessellations.

2.4.1 Géométrie des champs aléatoires

Ce n'est pas la géométrie des champs aléatoires qui est directement étudiée et utilisée mais leurs ensembles d'excursion (section 2.4.1.1). Ils sont surtout caractérisés par leurs volumes intrinsèques (section 2.4.1.3) dont fait partie la caractéristique d'Euler-Poincaré (section 2.4.1.2).

2.4.1.1 Ensembles d'excursion

Un ensemble d'excursion est un seuillage d'une surface qui est coupé par un plan et dont seuls les points au-dessus d'un certain niveau sont considérés comme un ensemble, appelé ensemble d'excursion, voir la Fig. 2.8.

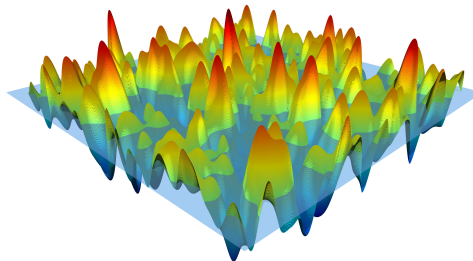


FIGURE 2.8 – Exemple d'un champ aléatoire coupé par un plan de hauteur u . Les points au-dessus du plan font partie de l'ensemble d'excursion de niveau u .

Définition 9. Soient f une fonction mesurable sur \mathbb{R}^2 et T un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 , alors $\forall u \in \mathbb{R}$,

$$E_u := E_u(f, T) := \{t \in T, f(t) \geq u\} \quad (2.44)$$

est l'ensemble d'excursion de f dans T de niveau u .

La figure 2.9 montre les ensembles d'excursion d'une réalisation d'un champ aléatoire gaussien avec une fonction de covariance gaussienne.

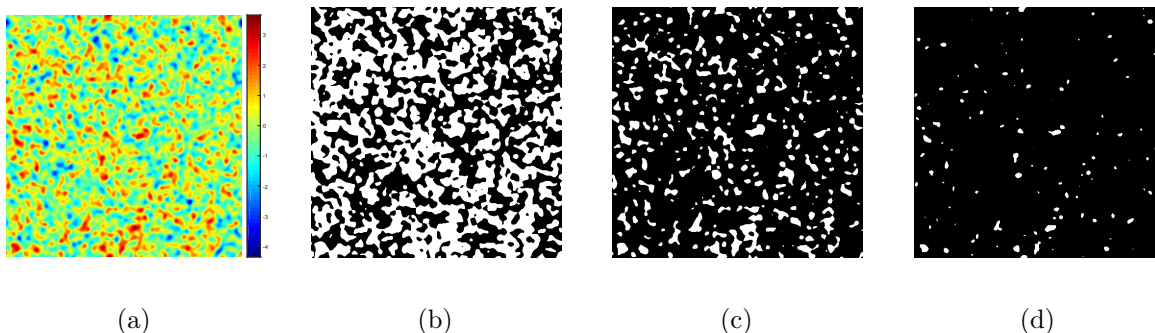


FIGURE 2.9 – Exemple (a) d'une réalisation d'un champ aléatoire gaussien de fonction de covariance gaussienne de paramètre de longueur $l = 4$, et ses ensembles d'excursion pour (b) $u = 0$, (c) $u = 1$ et (d) $u = 2$.

Les ensembles d'excursions sont utilisés pour de nombreuses simulations. Par exemple, David Nott [NR99] utilise les ensembles d'excursions de champs aléatoires gaussiens pour simuler des textures, proches notamment des modèles Booléens, et cela permet de simuler différentes phases dans des matériaux. Notons également l'utilisation des ensembles d'excursion pour modéliser les micro-structures d'aliments [BJ04], les mousses métalliques en 3D [MAW⁺15],...

Les propriétés géométriques d'un ensemble d'excursion sont décrites par les volumes intrinsèques qui sont liés aux fonctionnelles de Minkowski dont fait partie la caractéristique d'Euler-Poincaré.

2.4.1.2 La caractéristique d'Euler-Poincaré

Tout d'abord, définissons ce qu'est la caractéristique d'Euler-Poincaré, aussi appelée caractéristique d'Euler. Il existe de nombreuses manières de définir la caractéristique d'Euler-Poincaré. Historiquement, la première définition est [Wor96] :

Définition 10. Soit S un solide décomposable en P polyèdres, alors sa caractéristique d'Euler est :

$$\chi(S) = V - A + F - P \quad (2.45)$$

où V est le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes, et F le nombre de faces.

Par exemple, pour un cube plein : $V = 8$, $A = 12$ et $F = 6$, ainsi la caractéristique d'Euler-Poincaré d'un cube plein est : $\chi(S) = 8 - 12 + 6 - 1 = 1$.

Dans la suite, T est un sous-ensemble compact de \mathbb{R}^2 . La définition suivante est donnée par [AT05] :





Définition 11. La caractéristique d'Euler-Poincaré est l'unique fonctionnelle φ à valeurs dans \mathbb{Z} satisfaisant $\forall A, B \subset T$ connexes, l'équation :

$$\varphi(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \emptyset \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.46)$$

et

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B) - \varphi(A \cap B) \quad (2.47)$$

Dans la suite, la caractéristique d'Euler-Poincaré sera notée χ . Voici quelques exemples de la caractéristique d'Euler-Poincaré d'ensembles dans \mathbb{R}^2 :

- $\chi = 1$ pour un disque , ou un point .;
- $\chi = 0$ pour un cercle , ou pour un ensemble connexe avec un trou  ;
- $\chi = -1$ pour un ensemble connexe avec deux trous  ;
- $\chi = -n, \forall n \in \mathbb{N}$, pour un ensemble connexe avec $n + 1$ trous ;

En topologie algébrique, la caractéristique d'Euler-Poincaré est définie via les notions d'homologies et de cohomologies, pour plus d'informations sur ces notions le lecteur est invité à consulter [Hat02].

2.4.1.3 Volumes intrinsèques et fonctionnelles de Minkowski

Les volumes intrinsèques (ou bi-univoquement fonctionnelles de Minkowski) permettent de caractériser les ensembles compacts et convexes de \mathbb{R}^2 , et permet dans le cas des ensembles d'excursion de regarder leurs évolutions en fonction du niveau u .

Définition 12. Soit $\{\mathcal{L}_j\}_{j=0,1,2}$ une classe de fonctionnelles positives et invariantes par translations telles que pour tout sous-ensembles compacts et convexes A et B de \mathbb{R}^2

$$\forall j = 0, 1, 2, \quad \mathcal{L}_j(A \cap B) = \mathcal{L}_j(A) + \mathcal{L}_j(B) - \mathcal{L}_j(A \cup B) \quad (2.48)$$

et

$$\forall \lambda > 0, \quad \mathcal{L}_j(\lambda A) = \lambda^j \mathcal{L}_j(A) \quad (2.49)$$

où

$$\lambda A := \{t \in T : t = \lambda s, s \in A\}. \quad (2.50)$$

Les \mathcal{L}_j sont les volumes intrinsèques, et \mathcal{L}_0 est la caractéristique d'Euler-Poincaré χ .

Remarque 1. - Dans \mathbb{R}^2 , les trois volumes intrinsèques sont :

- . $\mathcal{L}_0 = \chi$ la caractéristique d'Euler-Poincaré,
- . \mathcal{L}_1 la longueur des contours,
- . \mathcal{L}_2 l'aire.
- dans la littérature les volumes intrinsèques sont aussi appelés courbures de Lipschitz-Killing ;
- la caractéristique d'Euler-Poincaré est le seul volume intrinsèque invariant par homotopie.

Définition 13. La fonctionnelle de Minkowski d'un sous-ensemble compact et convexe A de \mathbb{R}^2 est donnée, $\forall j = 0, 1, 2$, par :

$$\mathcal{M}_j(A) = (j! \omega_j) \mathcal{L}_{2-j}(A) \quad (2.51)$$

où ω_j est le volume de la boule unité de \mathbb{R}^j .

Ces fonctionnelles des ensembles d'excursion E_u d'une réalisation d'un champ aléatoire gaussien, sont représentées en fonction du paramètre u dans la figure 2.10. Ces fonctionnelles sont connues analytiquement pour certains champs aléatoires [Adl81, Sch06, Wor96].

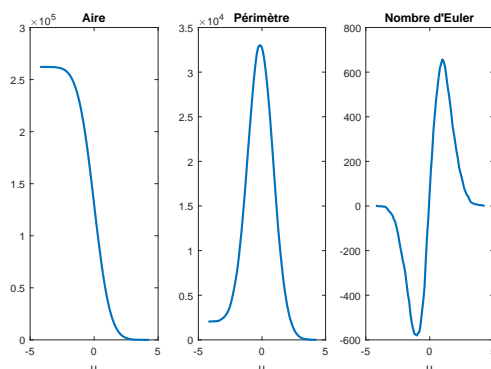


FIGURE 2.10 – Exemple des fonctionnelles de Minkowski des ensembles d'excursion en fonction de u , pour une réalisation d'un champs aléatoire gaussien de fonction de covariance gaussienne.

Une autre définition des volumes intrinsèques est donnée par la formule d'Hadwiger :

Définition 14. Soit $G_2 = \mathbb{R}^2 \times O(2)$ le groupe des isométries directes de mesure de Haar μ_2 . Le j -ème volume intrinsèque d'un ensemble compact et convexe A de \mathbb{R}^2 est donné par :

$$\mathcal{L}_j(A) = \begin{bmatrix} 2 \\ j \end{bmatrix} \int_{G_2} \chi(A \cap gE_j) \mu_2(dg) \quad (2.52)$$

où

$$\begin{bmatrix} 2 \\ j \end{bmatrix} = \binom{2}{j} \frac{\omega_2}{\omega_{2-j}\omega_j} \quad (2.53)$$

est le coefficient flag.

Les volumes intrinsèques des ensembles d'excursion permettent des applications en astrophysique [Wor95a], dans l'étude des micro-structures [Sch06], en imagerie médicale [Wor95b], ou la modélisation de l'usure des prothèses de hanches [Ahm13], etc.

2.4.2 Extrema des champs aléatoires gaussiens

Lors des simulations de tessellations avec les maxima locaux de champs aléatoires gaussiens (voir la section 4), nous avons remarqué que la répartition spatiale est différente suivant la fonction de covariance choisie, et joue un rôle important dans la taille et la forme des cellules.

Pour cela, les extrema et points critiques vont être tout d'abord définis, et un point de ce qui existe dans la littérature sur les extrema des champs aléatoires va être effectué.

2.4.2.1 Points critiques

Définition 15. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe \mathcal{C}^2 . Un point $t^* \in \mathbb{R}^2$ est un **point critique** de f si

$$\frac{\partial f(t^*)}{\partial t_1} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f(t^*)}{\partial t_2} = 0. \quad (2.54)$$

De plus, un point critique t^* est dit **non-dégénéré** si la matrice hessienne de f en t^* est inversible, c'est-à-dire si :

$$\det \left[\left\{ \frac{\partial^2 f(t^*)}{\partial t_i \partial t_j} \right\}_{i,j=1,2} \right] \neq 0. \quad (2.55)$$

Les valeurs critiques de f sont les images par f des points critiques.

Pour plus de détails concernant les points critiques, consulter [Mil63]. Les deux résultats suivants montrent l'absence d'agrégation des valeurs critiques dans certains cas :

Lemme 1. de Sard [S⁺42]

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe \mathcal{C}^q , où $q \geq 2$. Alors, l'ensemble des valeurs critiques de f est de mesure de Lebesgue nulle.

Soit X_t un champ aléatoire sur $T \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs dans \mathbb{R} . Alors, si pour presque tout ω , l'application $t \mapsto X_t(\omega)$ est de classe \mathcal{C}^2 (c'est-à-dire presque sûrement à trajectoires \mathcal{C}^2), l'ensemble des valeurs critiques du champ aléatoire X_t est de mesure de Lebesgue nulle, c'est-à-dire que la probabilité d'avoir des plateaux est nulle.

Dans la suite de ces travaux, les champs aléatoires que nous allons utiliser auront un certains nombre de propriétés. Et dans ce cas, le corollaire suivant permet de vérifier la condition de trajectoires presque sûrement continues des champs aléatoires.

Corollaire 3. [Abr97] Soit X_t un champs aléatoire gaussien stationnaire de fonction de covariance C continue. Alors si, pour un $c > 0$ et un $\epsilon > 0$:

$$1 - C(\tau) \leq \frac{c}{|\log \tau|^{1+\epsilon}}, \quad (2.56)$$

$\forall \tau$ avec $\tau < 1$, alors X_t est presque sûrement à trajectoires continues.

Lemme 2. Généralisation du lemme de Bulinskaya [AW09]

Soit X_t un champ aléatoire réel sur $T \subset \mathbb{R}^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $B \subset T$. Supposons que X satisfait les conditions suivantes :

- l'application $t \mapsto X_t$ est presque sûrement de classe \mathcal{C}^1 ;
- $\forall t \in B$, X_t a une densité de probabilité p_{X_t} et il existe une constante C tel que $\forall t \in T$ et pour tout x dans un voisinage de λ ,

$$p_{X_t}(x) \leq C; \quad (2.57)$$

– la dimension de Hausdorff⁴ de T est inférieure ou égale à 1 ;
alors, presque sûrement, il n'existe pas de point $t \in T$ tel que $X_t = \lambda$.

Être dans un de ces cas de non agrégation des valeurs critiques sera nécessaire dans l'utilisation des valeurs critiques pour simuler des tessellations.

2.4.2.2 Formules de Rice et de Kac-Rice

Les formules de Rice et de Kac-Rice (voir [K⁺43, Ric45, AT05, ATW10]) permettent d'obtenir de nombreux résultats sur les points critiques de champs aléatoires.

En dimension 1, la notion de upcrossing d'une fonction est utilisée pour l'étude des points critiques. Soit f est un processus aléatoire continu et différentiable sur un intervalle $[0, t_1]$. Il existe un upcrossing de f en t_0 au niveau u si

$$f(t_0) = u \text{ et } f'(t_0) > 0. \quad (2.58)$$

Soit $N_u(t_1)$ le nombre de upcrossings sur l'intervalle $[0, t_1]$ au niveau u :

$$N_u(t_1) = \#\{t \in [0, t_1] : \dot{f}(t) > 0, f(t) = u\}. \quad (2.59)$$

Si la fonction f est stationnaire, gaussienne, de moyenne nulle et de variance 1, d'après la formule de Rice [ATW10] :

$$\mathbb{E}[N_u^+(0, t_1)] = \frac{t_1 \lambda_2^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \exp -\frac{u^2}{2}, \quad (2.60)$$

où $\lambda_2 = \mathbb{E}[(\ddot{f}(t))^2]$.

La notion d'upcrossing permet d'avoir de nombreux résultats en dimension 1, comme une correspondance, pour u suffisamment grand, entre le nombre d'upcrossings de niveau u et de maxima locaux de niveau supérieur à u , voir Fig. 2.11.

Pour $T \subset \mathbb{R}^2$, soit X_t un champ aléatoire sur T ayant un certain nombre de propriétés (continuité, différentiabilité, etc). Soit

$$U_u = \#\{t \in T : X_t = u, \dot{X}_t > 0\}, \quad (2.61)$$

l'équivalent de la notion d'upcrossing pour la dimension 2. La formule de Kac-Rice est :

$$\mathbb{E}[U_u] = \int_T \int_0^{+\infty} y p_t(u, y) dy dt \quad (2.62)$$

4. Dimension de Hausdorff : Soient $A \subset \mathbb{R}^2$, $\alpha > 0$. $\forall \epsilon > 0$ et pour toute famille B_i de boules ouvertes de diamètres inférieurs ou égaux à ϵ , soit

$$S_{\alpha, \epsilon}(A) = \inf \left(\sum_i (\text{diam} B_i)^\alpha \right)$$

et

$$S_\alpha(A) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} S_{\alpha, \epsilon}(A).$$

Il existe un unique α^* , appelé dimension de Hausdorff de A tel que

$$S_\alpha(A) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < \alpha^* \\ 0 & \text{si } \alpha > \alpha^* \end{cases}$$

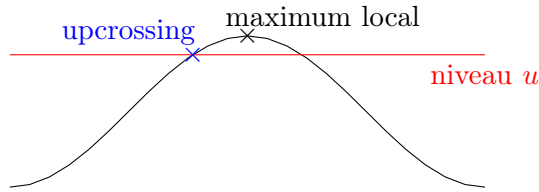


FIGURE 2.11 – Illustration de la notion d’upcrossing : un upcrossing au niveau u (en bleu), et un maximum local de niveau supérieur à u .

$$= \int_T p_t(u) \mathbb{E} \left[\left| \dot{X}_t \right| \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(\dot{X}_t) \mid X_t = u \right] dt, \quad (2.63)$$

où $p_t(u, y)$ est la densité de probabilité jointe de (X_t, \dot{X}_t) , et $p_t(u)$ la densité de probabilité de X_t .

Dans [AW09], Azaïs et Wschebor s’intéressent, entre autres, à l’étude de la fonction de distribution de probabilité de la variable aléatoire

$$M_T = \sup_{t \in T} X_t, \quad (2.64)$$

c’est-à-dire à la fonction

$$F_{M_T} = \mathbb{P} [M_T \leq u], \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad (2.65)$$

qui est approximée par la formule de Rice.

Tout ces résultats concernent les valeurs critiques (leurs distribution de probabilité, le nombre de valeurs critiques au-dessus d’un certain niveau), ou la géométrie des ensembles de niveau, mais pas la distribution spatiale des points critiques (c’est-à-dire dans $T \subset \mathbb{R}^2$).

2.4.2.3 Densité de points critiques

Soit X_t un champ aléatoire sur $T \subset \mathbb{R}^2$, les zéros de ∇X_t sont étudiés dans [LH57, Den03, Fol03] afin d’étudier les points critiques de X_t .

Le but de ces articles est de trouver le nombre total de points critiques non-dégénérés d’un domaine $D \subseteq T$:

$$N_t = \int_D \rho(x) d^2x. \quad (2.66)$$

La densité ρ est donnée par la formule de Kac-Rice :

$$\rho(t) = |\det H(t)| \delta(\partial_1 X_t) \delta(\partial_2 X_t) \quad (2.67)$$

où $H(t)$ est la matrice Hessienne de X en t et δ la fonction de Dirac.

Il est possible de modifier l’expression de ρ . La densité suivante par exemple est la densité de minima locaux de X_t :

$$\rho_{min}(t) = \theta(H(t)) |\det H(t)| \delta(\partial_1 X_t) \delta(\partial_2 X_t) \quad (2.68)$$

où θ vaut 1 si la matrice est définie positive et zéro sinon.

2.4.3 Conclusion

Les connaissances sur la géométrie des champs aléatoires gaussiens concerne surtout la géométrie des ensembles d'excursion et en particulier leurs caractéristiques d'Euler-Poincaré. Quant aux extrema (ou points critiques) des champs aléatoires gaussiens, les connaissances principales concernent la distribution du maximum, le nombre de maxima au-dessus d'un certain niveau, et l'étude des points critiques a aussi permis de connaître les caractéristiques d'Euler-Poincaré des ensembles d'excursion (par la théorie de Morse d'ensembles stratifiées dans [Adl81]).

Mais, à notre connaissance, rien n'existe sur la distribution spatiale de ces extrema. Nous allons dans le chapitre 5, caractériser numériquement la distribution spatiale de maxima locaux de champs aléatoires gaussiens de fonction de covariance gaussienne et de Bessel.

2.5 Conclusion

Un champ aléatoire est l'équivalent d'un processus aléatoire en dimension supérieure. Ici, nous nous restreignons à la dimension 2. Un champ aléatoire peut être vu comme une surface dont les altitudes suivent des lois aléatoires. Les champs aléatoires que nous allons utiliser par la suite seront gaussiens, réels, stationnaires, isotropes, séparables, continus et différentiables en moyenne quadratique. Nous avons vu que la fonction de covariance permet de générer un grand nombre de champs aléatoires différents et permet de savoir si un champ aléatoire est continu ou différentiable en moyenne quadratique.

La géométrie des champs aléatoires est surtout étudiée par ses ensembles d'excursions. De plus, la distribution du maximum ou des extrema des champs aléatoires au-dessus d'un certain niveau est étudiée, mais pas la distribution spatiale des extrema. Par absence de piste pour explorer théoriquement la distribution spatiale des maxima locaux des champs aléatoires gaussiens, ils vont être analysés numériquement dans le chapitre suivant avec des fonctions spatiales qui permettent de caractériser des processus ponctuels de points (voir la section 3.2.4).

Chapitre 3

Processus ponctuels et tessellations

L'endothélium cornéen qui est constitué d'une seule couche de cellules, est appelé mosaïque cornéenne. En géométrie, les mosaïques sont aussi appelées tessellations, ou pavages.

Dans ce chapitre, la notion de tessellation dans \mathbb{R}^2 va être dans un premier temps définie (Sect.3.1). Nous nous plaçons dans \mathbb{R}^2 , mais la plupart des notions qui vont être abordées existent en dimension supérieure. Les tessellations sont construites à partir de germes. Lorsque les tessellations sont aléatoires, les germes sont issus de processus ponctuels, tel que le processus ponctuel de Poisson, et sont donc introduits (Sect.3.2). Différents types de tessellations provenant de la littérature sont ensuite présentés (Sect.3.3), tel que le diagramme de Voronoï, des généralisations du diagramme de Voronoï et les polygones de Poisson.

Sommaire

| | | |
|------------|--|-----------|
| 3.1 | Généralités sur les tessellations | 28 |
| 3.2 | Processus ponctuels | 29 |
| 3.2.1 | Processus ponctuel de Poisson | 29 |
| 3.2.2 | Processus ponctuels agrégatifs | 30 |
| 3.2.3 | Processus ponctuels répulsifs | 31 |
| 3.2.3.1 | Processus répulsif de Strauss | 31 |
| 3.2.3.2 | Processus hardcore de Matérn de type I et II | 32 |
| 3.2.4 | Caractérisation des processus ponctuels | 32 |
| 3.2.4.1 | Fonction de Ripley | 33 |
| 3.2.4.2 | Fonctions F et G | 34 |
| 3.2.4.3 | Fonction de corrélation | 35 |
| 3.2.4.4 | Fonctionnelles de Minkowski réduites | 37 |
| 3.3 | Différents types de tessellations | 40 |
| 3.3.1 | Diagramme de Voronoï | 40 |
| 3.3.2 | Généralisations du diagramme de Voronoï | 41 |
| 3.3.2.1 | Diagramme de Voronoï avec poids | 41 |
| 3.3.2.2 | Diagramme de Voronoï centré | 44 |
| 3.3.2.3 | Tessellation de Johnson-Mehl | 45 |
| 3.3.3 | Polygones de Poisson | 45 |
| 3.4 | Conclusion | 46 |

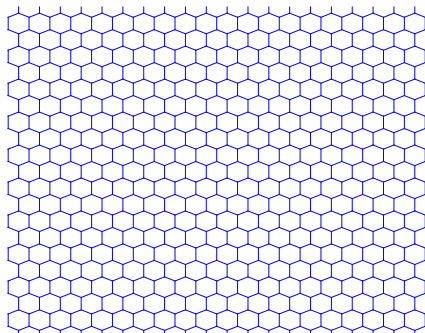
3.1 Généralités sur les tessellations

Définition 16. Une tessellation (aussi appelée pavage ou mosaïque) de $S \subset \mathbb{R}^2$ est une partition de S :

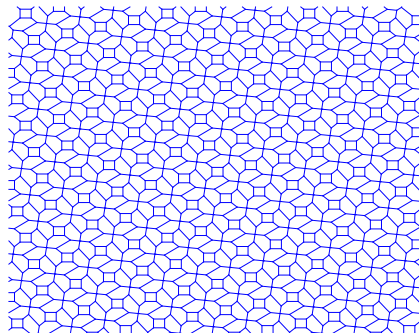
$$S = \bigcup_{i \in I} C_i, \quad (3.1)$$

où I est dénombrable, les C_i sont des ouverts non-vides de S , et $C_i \cap C_j = \emptyset$, $\forall i, j \in I$, $i \neq j$. Les C_i sont appelés cellules, motifs, tuiles ou encore tesselles, et on dit que les $\{C_i\}$ tessellent S .

Un des pavages les plus connus est le pavage hexagonal régulier (Fig. 3.1a), qui a la propriété d'être la partition du plan en surfaces égales ayant le plus petit périmètre. Cette propriété est connue sous le terme de conjecture du nid d'abeille qui a été démontré en 1999 par Thomas Hales [Hal01].



(a) Pavage hexagonal



(b) Pavage périodique

FIGURE 3.1 – (a) Pavage par des hexagones réguliers et (b) pavage périodique.

Les tessellations sont très présentes en art (ornementations, poterie, textile) dans toutes les sociétés humaines. Ceci a amené les mathématiciens à se poser de nombreuses questions, par exemple [GS] : quels motifs admettent une tessellation, quels motifs peuvent tesseller une région, quels motifs admettent une tessellation périodique, comme la Fig. 3.1b, ou aperiodique, comme le pavage de Penrose, etc.

Les propriétés géométriques des tessellations sont également étudiées, comme dans [M'C33], où nous avons le théorème suivant :

Théorème 6. Soit T une tessellation de L hexagones. Si un ensemble E quelconque d'hexagones inclus dans T est supprimé, et est remplacé par un ensemble quelconque E' de P polygones tels qu'en chaque sommet il y ait exactement trois arêtes qui s'intersectent. Alors, $A = 6P$ où A est le nombre d'arêtes de E' comptés avec multiplicité (Fig. 3.2).

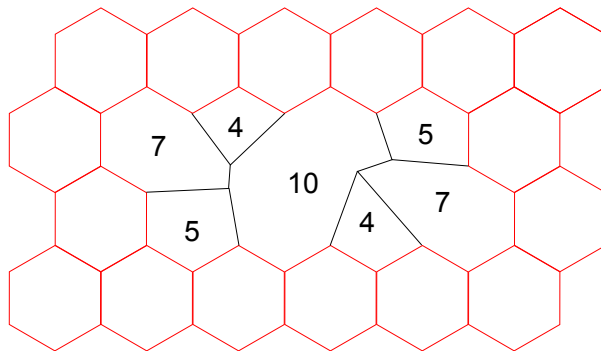


FIGURE 3.2 – Illustration du théorème 6. En noir la partie modifiée et le nombre d’arêtes des 7 nouveaux polygones : $A = 7 + 4 + 5 + 10 + 4 + 7 + 5 = 42 = 6 \times 7 = 6P$.

3.2 Processus ponctuels

Ce ne sont pas les tessellations avec des motifs se répétant comme la Fig. 3.1a qui nous intéressent, mais les tessellations aléatoires, aux cellules de formes diverses.

Pour simuler de telles tessellations, des processus ponctuels sont en général utilisés, et ils donnent les germes des tessellations.

Avant tout, définissons ce qu’est un processus ponctuel (pour plus d’informations, voir [MS07, SKM95, BBS07, DVJ, MW03]) :

Définition 17. *Un processus ponctuel X est un sous-ensemble aléatoire fini d’un sous-ensemble borné non-vide $S \subset \mathbb{R}^2$.*

La réalisation d’un tel processus est un ensemble $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ de $n \geq 0$ points de S .

La distribution de probabilité de X est donnée, $\forall B \subseteq S$, par l’application $N(B)$ qui associe à toute réalisation x le nombre de points de X appartenant à B .

Un processus ponctuel est dit stationnaire, resp. isotrope, si pour tout sous-ensemble borné non-vide $B \subset \mathbb{R}^2$, $N(T)$ et $N(T(B))$, resp. $N(R(B))$ ont la même distribution, quelle que soit la translation T , resp. la rotation R autour de l’origine.

Dans la suite seront définis quelques processus ponctuels : le processus ponctuel de Poisson 3.2.1, des processus ponctuels agrégatifs 3.2.2 et des processus ponctuels répulsifs 3.2.3.

3.2.1 Processus ponctuel de Poisson

Le processus ponctuel le plus utilisé est le processus ponctuel de Poisson, Fig. 3.3. Il sert de modèle pour une distribution spatiale complètement aléatoire et une absence d’interaction entre les points.

Définition 18. *Un processus ponctuel de Poisson X d’intensité $\lambda > 0$, défini sur \mathbb{R}^2 , vérifie les conditions suivantes :*

- (i) *pour tout sous-ensemble mesurable borné B de \mathbb{R}^2 , la variable aléatoire $N(B)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda\mu(B)$, où μ est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 ;*

(ii) si B_1, \dots, B_n sont des sous-ensembles bornés disjoints de \mathbb{R}^2 , les variables aléatoires $N(B_1), \dots, N(B_n)$ sont indépendantes et identiquement distribuées. $\lambda\mu(B)$ est appelé intensité du processus ponctuel.

La simulation d'une réalisation d'un processus ponctuel de Poisson sur un sous-ensemble mesurable borné B de \mathbb{R}^2 s'effectue comme suit :

1. le nombre d'événements $n = N(B)$ est simulé selon la loi de Poisson d'intensité $\lambda\mu(B)$;
2. la position des n événements est générée selon la loi uniforme sur B .



FIGURE 3.3 – Deux réalisations d'un processus ponctuel de Poisson de même intensité.

3.2.2 Processus ponctuels agrégatifs

Les processus ponctuels agrégatifs sont des processus formant des agrégats de points, Fig. 3.4. Ils sont utilisés pour modéliser, par exemple, les galaxies dans l'univers, ou les jeunes arbres dans une forêt ([Mat71, Mat86, PSH92, SP00],...). De nombreux processus existent : Neyman-Scott, Cox agrégatif, Thomas, etc.



FIGURE 3.4 – Exemple de réalisations de processus ponctuel agrégatifs de Neyman-Scott.

Les réalisations de processus ponctuels agrégatifs de la figure 3.4 sont des réalisations de processus ponctuels de Neyman-Scott simulés comme suit sur un sous-ensemble B borné de \mathbb{R}^2 :

1. les points parents sont simulés par un processus ponctuel de Poisson d'intensité $\lambda_1\mu(B)$;
2. le nombre de points enfants pour chaque parent est simulé par une loi de Poisson d'intensité $\lambda_1\mu(B)$;
3. pour chaque parent, la position de ses enfants est générée selon la loi uniforme autour du point parent ;
4. le processus final est constitué seulement des points enfants.

3.2.3 Processus ponctuels répulsifs

Les processus ponctuels répulsifs sont des processus qui ont une répartition spatiale des points plus régulière, ce qui se caractérise par peu ou pas de points proches les uns des autres. Ces processus permettent de modéliser par exemple les vieux arbres dans une forêt qui sont en compétition pour la lumière du soleil et les nutriments [SP00], etc. Nous allons présenter deux types de processus ponctuels répulsifs : le processus de Strauss et les processus hardcore de Matérn de type I et II.

3.2.3.1 Processus répulsif de Strauss

Le processus ponctuel répulsif de Strauss X [Str75], Fig. 3.5, est défini par sa fonction de densité, qui est de la forme :

$$f(X) \propto \beta^{N(X)} \gamma^{s(X)}, \quad (3.2)$$

où $\beta \geq 0$, $0 \leq \gamma \leq 1$, $N(X)$ est le nombre de points et $s(X)$ est le nombre de paires de points de X ayant une distance entre eux inférieure à un r donné :

$$s(X) = \sum_{x,y \in X} \mathbf{1}(\|x - y\| \leq r). \quad (3.3)$$

Quand $\gamma = 1$, le processus ponctuel de Strauss est le processus ponctuel de Poisson.



FIGURE 3.5 – Deux réalisations de processus de Strauss avec $\beta = 100$, $r = 0.05$ et (a) $\gamma = 0.2$ et (b) $\gamma = 0.5$.

Pour simuler une réalisation d'un processus ponctuel de Strauss il faut utiliser un algorithme de Metropolis Hastings, l'algorithme utilisé pour simuler les réalisations de la figure 3.5, provient de [KB15].

3.2.3.2 Processus hardcore de Matérn de type I et II

Les processus hardcore de Matérn de type I et II sont des processus ponctuels avec une distance minimale entre les points qui correspond au rayon hardcore, Fig. 3.6.

Le processus hardcore de Matérn de type I est un processus ponctuel de Poisson X , tel que si la distance entre deux points de X est inférieure au rayon hardcore, alors les deux points sont supprimés, Fig. 3.6a.

Le processus hardcore de Matérn de type II est construit à partir d'un processus de Poisson X défini sur $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$. Ce processus X est interprété comme un processus ponctuel $x \in \mathbb{R}^2$ de temps d'arrivée $t \in [0, 1]$. Si la distance entre deux points est inférieure au rayon hardcore, alors le point arrivé le plus tard est supprimé, Fig. 3.6b.

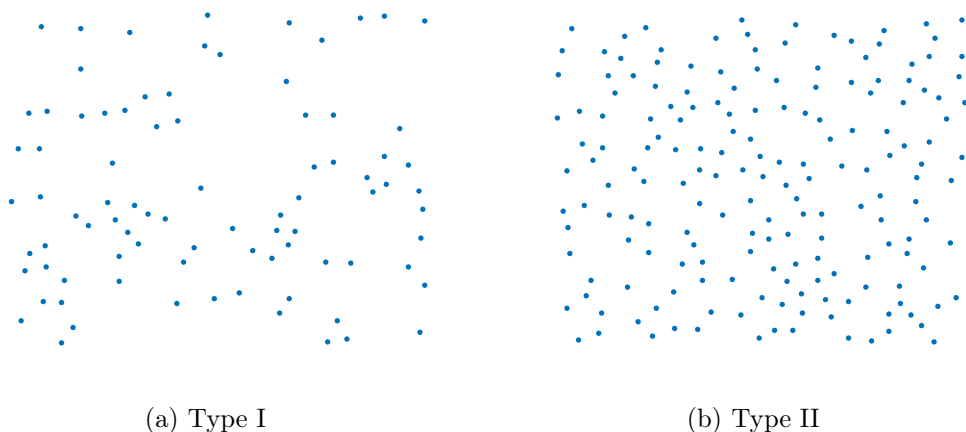


FIGURE 3.6 – Deux réalisations de processus de hardcore de Matérn de type (a) I et (b) II.

Par construction, si les deux types de processus de Matérn sont simulés à partir de la même réalisation d'un processus de Poisson, l'intensité, c'est-à-dire le nombre de points par unité d'aire, du processus hardcore de Matérn de type I sera plus faible que celle du processus de type II. D'autre part, la répartition spatiale sera également différente. En effet la fonction de corrélation g , définie Sect.3.2.4.3, est différente pour toute distance t supérieure au rayon hardcore R . La fonction g du processus de Matérn de type II converge plus rapidement vers la fonction g du processus ponctuel de Poisson.

3.2.4 Caractérisation des processus ponctuels

Afin de savoir si un ensemble de points est agrégé ou a une répartition spatiale régulière, des fonctions permettent de comparer un ensemble de points au processus ponctuel de Poisson, qui a une répartition spatiale aléatoire, et dont la localisation d'un point est indépendante de celle des autres.

Soit X une réalisation d'un processus ponctuel stationnaire sur un sous-ensemble borné $S \subset \mathbb{R}^2$.

3.2.4.1 Fonction de Ripley

Pour l'étude de processus ponctuels, les moments de ces processus ponctuels sont utiles. L'intensité est le premier moment d'un processus ponctuel et est l'analogue de l'espérance pour une variable aléatoire. Et la variance d'une variable aléatoire est liée au second moment d'un processus ponctuel qui est mesuré par la fonction K de Ripley définie ci-dessous, et la fonction de corrélation g définie Sect. 3.2.4.3. Pour d'autres méthodes d'étude du second moment de processus ponctuels, se référer à [Dig83, SKM95, SS94].

La fonction de Ripley [Rip77, vB96] consiste à compter le nombre de points du processus ponctuel X dans un cercle de rayon $t \in \mathbb{R}^2$ centré en un point du processus (voir la Fig. 3.7), de renouveler cela pour tous les points de X et de normaliser.

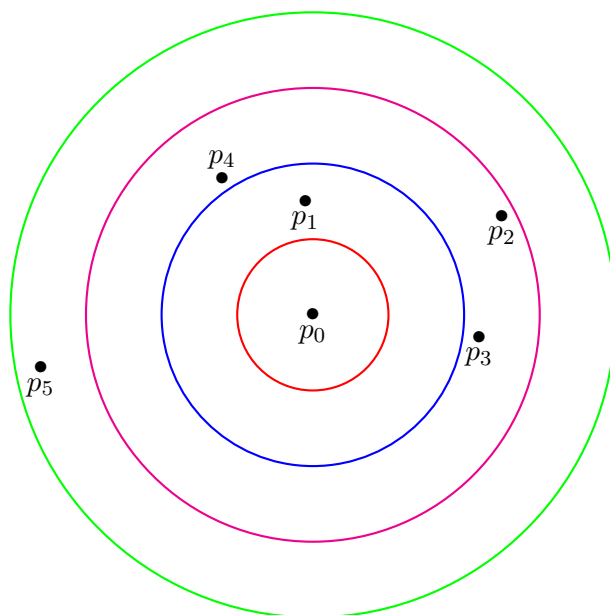


FIGURE 3.7 – Principe de la fonction de Ripley qui compte le nombre de points à une distance inférieure à t du point p_0 : 0 points pour $t = 1$ (cercle rouge), 1 points pour $t = 2$ (cercle bleu), 4 points pour $t = 3$ (cercle magenta) et 5 points pour $t = 5$ (cercle vert).

Définition 19. La fonction K de Ripley de X est donnée, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, par :

$$K(t) := \frac{1}{\beta} k(B_o(t)), \quad (3.4)$$

où $B_o(t)$ est une boule ouverte de rayon t centrée à l'origine $o \in S$, et $\forall A \subset S$,

$$k(A) = \frac{\mathbb{E} [\sum_{x \in S \cap A} N((A+x) \setminus x)]}{\mathbb{E} [N(S)]}, \quad (3.5)$$

où $N(A)$ est le nombre de points de X appartenant à A , et β est l'intensité de X qui est donnée par : $N(S) = \beta \times \text{Area}(S)$.

$\beta K(t)$ est le nombre moyen de points de X situés à une distance inférieure à t d'un autre point de X .

Pour un processus ponctuel de Poisson, la fonction K de Ripley est :

$$K(t) = \pi t^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \quad (3.6)$$

Soit $x_i, i \in \{1, \dots, n\}$, les éléments de X , et n le nombre d'éléments de X . Un estimateur de K est

$$\hat{K}(t) = \frac{1}{\hat{\beta}n} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathbb{1} \{ \|x_i - x_j\| \leq t \} \quad (3.7)$$

où

$$\hat{\beta} = \frac{n}{\lambda(A)} \quad (3.8)$$

et $\lambda(A)$ est la mesure de Lebesgue de A .

Pour une meilleure visualisation, la fonction utilisée sera la fonction L de Ripley suivante :

Définition 20. La fonction L du processus ponctuel stationnaire X est donnée, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, par :

$$L(t) = \sqrt{\frac{K(t)}{\pi}}. \quad (3.9)$$

Si X est une réalisation d'un processus ponctuel de Poisson, alors $\forall t \in \mathbb{R}^+, L(t) = t$. De plus, pour de petites distances, $L(t) > t$ indique une agrégation entre les points de X , et $L(t) < t$ une régularité de la distribution spatiale des points de X , voir la Fig. 3.8.

3.2.4.2 Fonctions F et G

Les deux autres fonctions statistiques qui sont définies ici donnent une description spatiale des processus ponctuels, mais comme la fonction de Ripley, ces fonctions ne sont connues analytiquement que pour un faible nombre de processus ponctuels.

Définition 21. La fonction de distribution de contact sphérique F du processus ponctuel X est donnée, pour un $u \in S \subset \mathbb{R}^2$ fixé et pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, par :

$$F(t) := \mathbb{P}[d(u, P) \leq t], \quad (3.10)$$

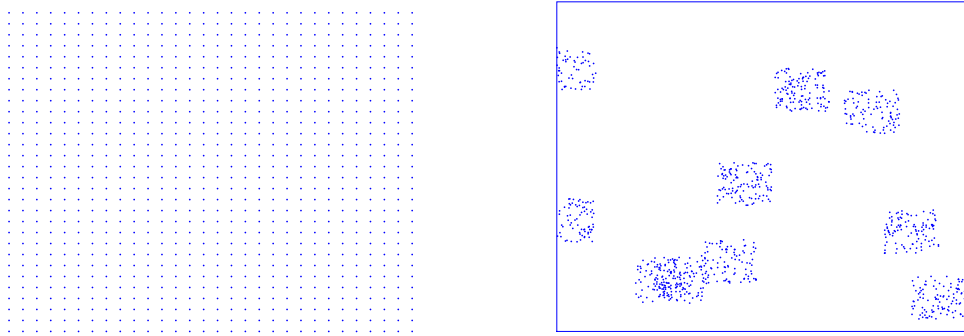
où

$$\forall A \subset \mathbb{R}^2, \quad d(u, A) = \min_{b \in A} \|u - b\|_2. \quad (3.11)$$

Définition 22. La fonction du plus proche voisin G du processus ponctuel X est donnée, pour $u \in A$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, par :

$$G(t) := \mathbb{P}_{!u}[d(u, P) \leq t], \quad (3.12)$$

où $\mathbb{P}_{!u}$ est la distribution réduite de Palm de $P \setminus \{u\}$ en u , qui est la probabilité conditionnelle qu'il y ait un point de X en u (voir [Cre92]). Par stationnarité de X , G ne dépend pas de u .



(a) Points à la distribution spatiale régulière

(b) Points agrégés

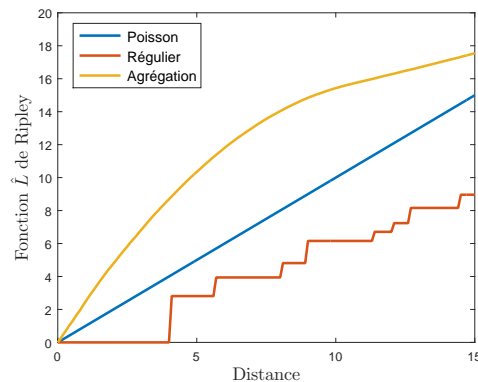
(c) Fonction L de Ripley

FIGURE 3.8 – Illustration de la caractérisation de la distribution spatiale des points par la fonction L de Ripley. (a) Points distribués régulièrement sur une région de taille 76×76 , (b) processus ponctuel agrégatif de Neyman-Scott dans la même région, et (c) la fonction L de Ripley de ces deux ensembles de points comparée à celle du processus ponctuel de Poisson.

Pour le processus ponctuel de Poisson, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $G_P(t) = 1 - \exp(-\lambda t^2)$ et $F_P(t) = G_P(t)$, où λ est l'intensité du processus ponctuel de Poisson.

Comme pour la fonction L de Ripley, le processus ponctuel de Poisson sert de processus ponctuel de référence pour caractériser la distribution spatiale : pour de petites distances, $G(t) > G_P(t)$ et $F(t) < F_P(t)$ indiquent une agrégation entre les points de X , et $G(t) < G_P(t)$ et $F(t) > F_P(t)$ une régularité de la distribution spatiale des points de X , voir la Fig. 3.9.

3.2.4.3 Fonction de corrélation

La fonction de corrélation g permet également de caractériser la répartition spatiale d'un ensemble de points [SS94, BBS07], etc. Le principe de cette fonction est pour tout point de X et pour tout $t > 0$, de compter le nombre de points dans l'anneau $B_x(t + dt) \setminus B_x(t)$, pour tout $x \in X$ (voir la Fig. 3.10).

Soient x_i les éléments de X définis sur $A \subset S \subset \mathbb{R}^2$, et n le nombre d'éléments de X . Un

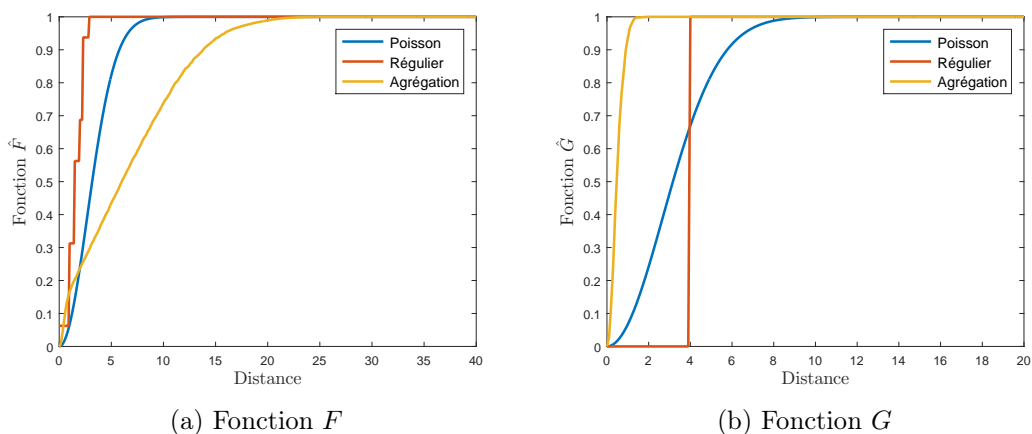


FIGURE 3.9 – Les fonctions F et G des ensembles de points des figures 3.8b et 3.8a, comparées à celles du processus ponctuel de Poisson.

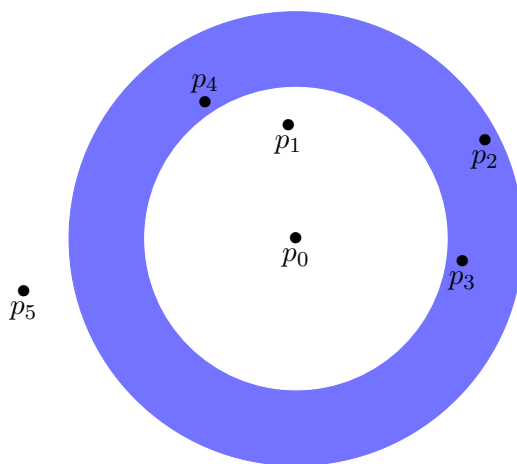


FIGURE 3.10 – Principe de la fonction de corrélation qui compte le nombre de points à une distance supérieure à t et inférieure à $t + dt$ du point p_0 (qui correspond ici à l’anneau bleu).

estimateur de la fonction g est :

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{\pi((t+dt)^2 - t^2)} \frac{\lambda(A)}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathbb{1}\{t \leq \|x_i - x_j\| < t + dt\} \quad (3.13)$$

où $\lambda(A)$ est la mesure de Lebesgue de A .

La fonction g a un lien avec la fonction K de Ripley (Déf. 19) :

$$g(t) = \frac{1}{2\pi t} \frac{dK(t)}{dt} \quad (3.14)$$

Notons que $\forall t > 0$,

$$g(t) \geq 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 1.$$

Et pour les processus ponctuels de Poisson, $\forall t > 0$, $g(t) = 1$.

La figure 3.11 montre la fonction de corrélation g d’un ensemble de points régulier, un ensemble agrégé et un processus ponctuel de Poisson. La fonction g des points agrégés est à son maximum

pour $t = 1$, c'est-à-dire qu'il y a beaucoup de points à cette distance d'un autre point, et décroît ensuite. Tandis que pour les points réguliers, la fonction oscille entre des valeurs ≤ 1 : peu de points à cette distance d'un autre point, et des valeurs ≥ 1 : beaucoup de points.

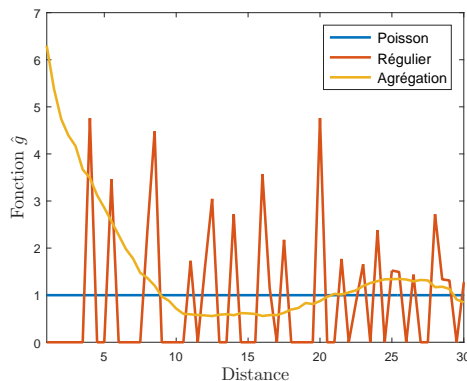


FIGURE 3.11 – La fonction g des ensembles de points des figures 3.8b et 3.8a, comparées à celles du processus ponctuel de Poisson.

3.2.4.4 Fonctionnelles de Minkowski réduites

Soit Φ un ensemble fini de points de $S \subset \mathbb{R}^2$, et notons Φ_r le dilaté de Φ par une boule b_r de rayon $r > 0$ (voir la Fig. 3.12).

Soit $A(r)$, $U(r)$, et $\chi(r)$ les fonctionnelles de Minkowski de Φ_r , c'est à dire l'aire, la longueur des contours et le nombre d'Euler (le nombre d'Euler, aussi appelé caractéristique d'Euler-Poincaré, est défini dans la section 2.4.1.2).

Dans [MS05], des processus ponctuels de points ou des ensembles finis de points sont caractérisés par leurs fonctionnelles de Minkowski réduites a , u et e , qui sont données, pour tout $r \geq 0$, par :

$$a(r) = \frac{A(r)}{\pi N r^2} \quad (3.15)$$

$$u(r) = \frac{U(r)}{2\pi N r} \quad (3.16)$$

$$e(r) = \frac{\chi(r)}{N} \quad (3.17)$$

où N est le nombre d'éléments de Φ . Ces fonctionnelles correspondent aux fonctionnelles de Minkowski de Φ_r divisé par le résultat qui serait obtenu si les disques ne se recouvraient pas.

Les estimateurs de ces fonctionnelles sont, pour tout $r \geq 0$:

$$\hat{a}(r) = \frac{A(\Phi_r \cap S \ominus b_r)}{\pi r^2 \Phi(S \ominus b_r)} \quad (3.18)$$

$$\hat{u}(r) = \frac{U(\partial\Phi_r \cap S \ominus b_r)}{2\pi r \Phi(S \ominus b_r)} \quad (3.19)$$

$$\hat{e}(r) = \frac{\chi(\Phi_r \cap S \ominus b_r)}{\Phi(S \ominus b_r)} \quad (3.20)$$

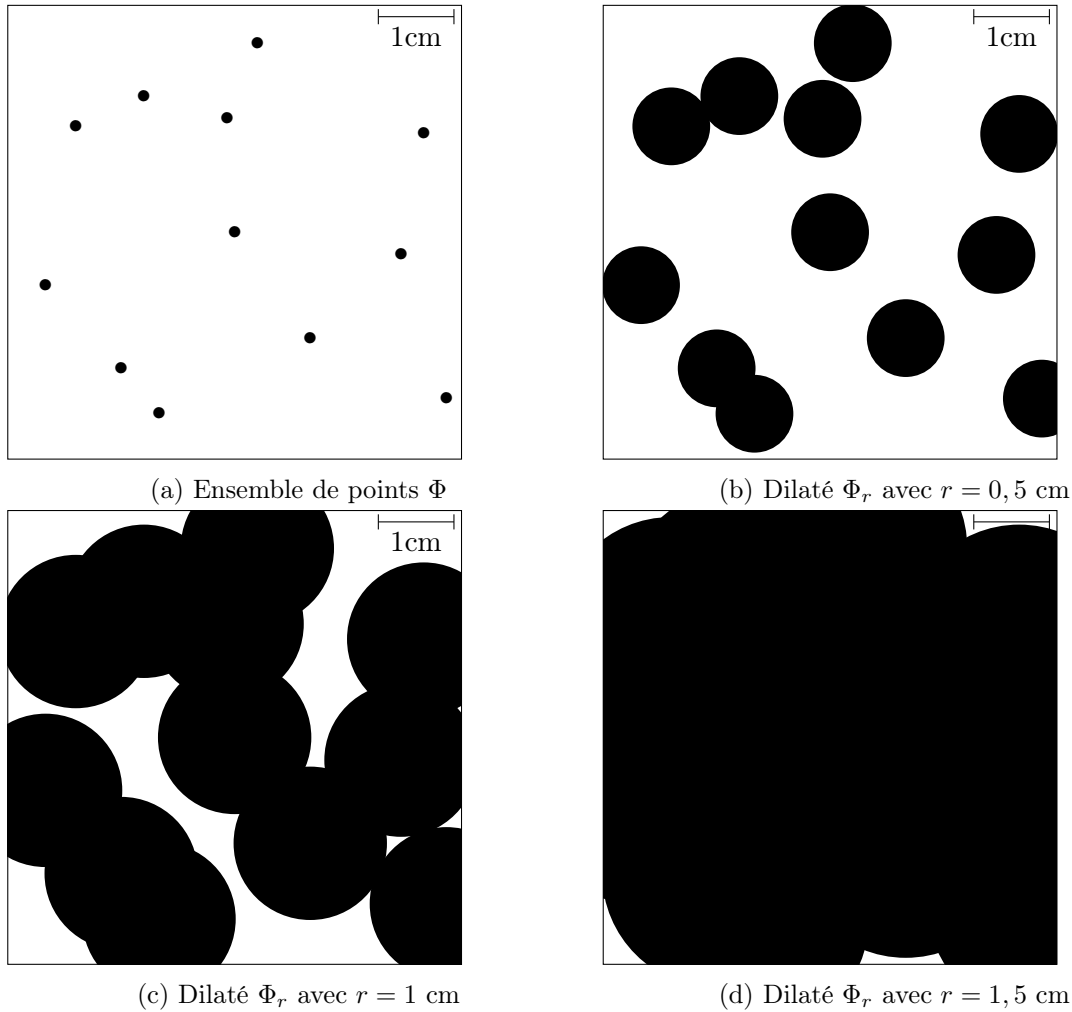


FIGURE 3.12 – (a) Illustration d’un ensemble de points Φ dans une fenêtre de taille $6\text{cm} \times 6\text{cm}$. Et illustration de la dilatation de Φ par des boules de rayons (b) $r = 0,5$ cm, (c) $r = 1$ cm et (d) $r = 1,5$ cm.

où $\forall B \subset \mathbb{R}^2$, $\Phi(B)$ est le nombre de points de Φ dans B , et $S \ominus b_r$ est l’ensemble S érodée par la boule de rayon r .

Ces fonctionnelles de Minkowski réduites sont connues analytiquement pour le processus ponctuel de Poisson (voir [MS05, CSKM13]), pour tout $r \geq 0$:

$$a(r) = \frac{1 - \exp(-\lambda\pi r^2)}{\lambda\pi r^2} \quad (3.21)$$

$$u(r) = \exp(-\lambda\pi r^2) \quad (3.22)$$

$$e(r) = (1 - \lambda\pi r^2) \exp(-\lambda\pi r^2) \quad (3.23)$$

où λ est l’intensité du processus ponctuel de Poisson.

Fig. 3.13 montre les fonctionnelles de Minkowski réduites des ensembles de points des figures 3.8b et 3.8a. Tant que les boules ne se recouvrent pas, les fonctionnelles sont égales à 1, et quand la fenêtre est entièrement recouverte les fonctionnelles valent 0. Entre les deux, plus la

courbe décroît tard, plus la distance moyenne entre les points est grande. De plus, $e(r)$ négatif signifie que le dilaté Φ_r a plus de trous que de composantes connexes (voir la Fig. 3.14).

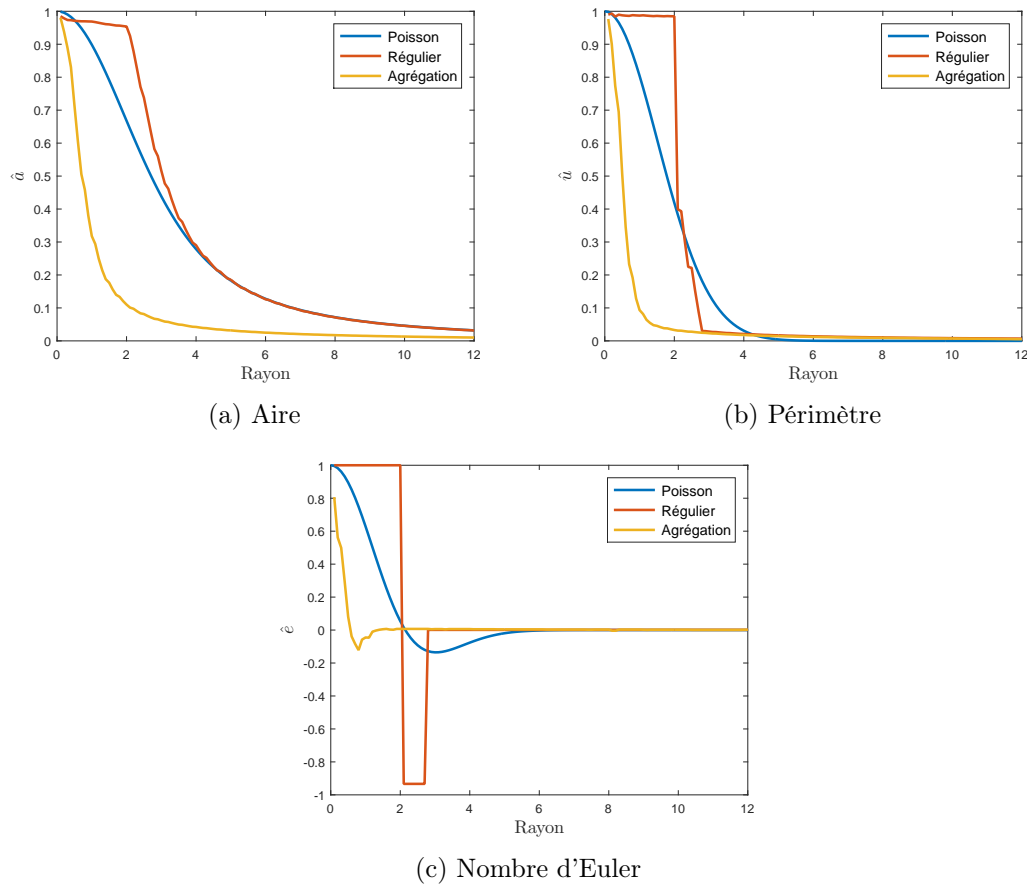


FIGURE 3.13 – Les fonctionnelles de Minkowski réduites des ensembles de points des figures 3.8a et 3.8b, comparées à celles du processus ponctuel de Poisson.

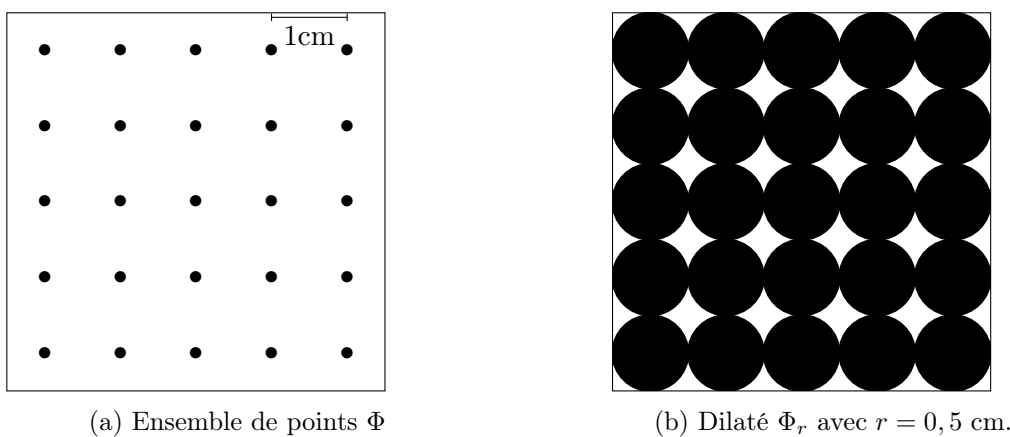


FIGURE 3.14 – (a) Ensemble de points Φ distribué régulièrement dont la distance minimale entre deux points est de $r_0 = 1$ cm, et (b) le dilaté Φ_r avec $r = 0,5$ cm : il n'y a qu'une seule composante connexe, et 36 trous, $e(0,5)$ est donc négatif ($e(0,5) = \frac{1-36}{25} = -1,4$). La fenêtre est entièrement recouverte à partir de $r = \frac{\sqrt{2}r_0}{2}$.

3.3 Différents types de tessellations

Nous allons tout d'abord introduire le diagramme de Voronoï (Sect. 3.3.1), sur lequel sont basées de nombreuses tessellations aléatoires (Sect. 3.3.2).

3.3.1 Diagramme de Voronoï

La tessellation la plus utilisée est le diagramme de Voronoï, parfois également appelé tessellation de Dirichlet. Il a été introduit, dans le cas de \mathbb{R}^2 et de \mathbb{R}^3 , par Dirichlet en 1850 [Dir50], et a été généralisé par Voronoï en 1908 [Vor08].

La référence [AK00] donne un aperçu général et complet sur les diagrammes de Voronoï.

Soit $S \subset \mathbb{R}^2$ muni de la distance d , et $P = \{p_1, \dots, p_m\}$ un ensemble fini de m points de S .

Définition 23. *Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, la région de Voronoï de p_i (ou cellule de Voronoï) est l'ensemble des éléments de S qui sont plus proche du point p_i pour la distance d que de tout autre élément de P :*

$$\text{Vor}(p_i) = \{x \in S : d(x, p_i) < d(x, p_k), \forall p_k \in P, k \neq i\}. \quad (3.24)$$

Le point p_i associé à la région $\text{Vor}(p_i)$ est appelé le germe de la cellule $\text{Vor}(p_i)$. Le diagramme de Voronoï de l'ensemble P est l'union des régions de Voronoï des points p_i :

$$\text{Vor}(P) = \bigcup_{i=1}^m \text{Vor}(p_i). \quad (3.25)$$

Le bord en commun de deux régions de Voronoï $\text{Vor}(p_i)$ et $\text{Vor}(p_j)$ est appelé arête de Voronoï et les extrémités d'une arête de Voronoï sont appelés sommets de Voronoï.

Le diagramme de Voronoï permet d'obtenir de nombreuses tessellations, comme Fig. 3.1. Mais permet également de générer des tessellations aléatoires un utilisant des processus ponctuels pour germes (Fig. 3.15, 3.16 et 3.17). Lorsque les germes sont obtenus par un processus ponctuel de Poisson, on parle de diagramme de Poisson-Voronoï (Fig. 3.15).

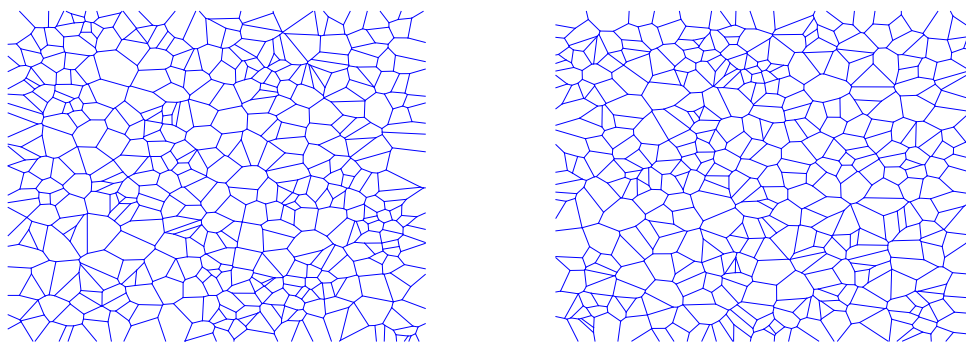


FIGURE 3.15 – Deux diagrammes de Poisson-Voronoï avec la distance euclidienne et dont les germes sont les points de la Fig. 3.3.

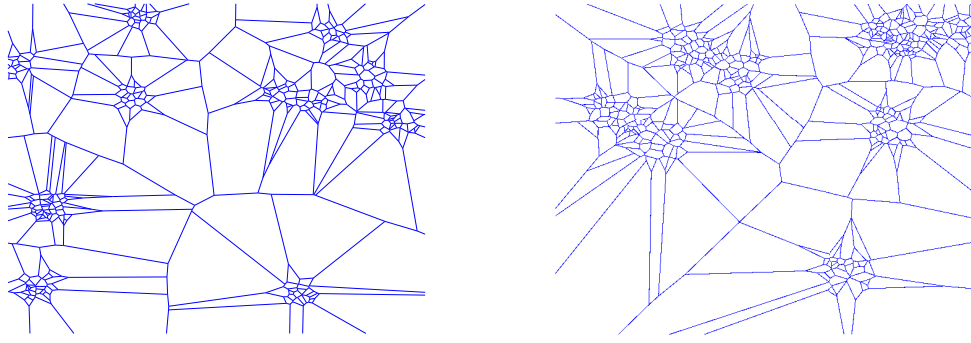


FIGURE 3.16 – Deux diagrammes de Voronoï avec la distance euclidienne et dont les germes sont les points de la Fig. 3.4.

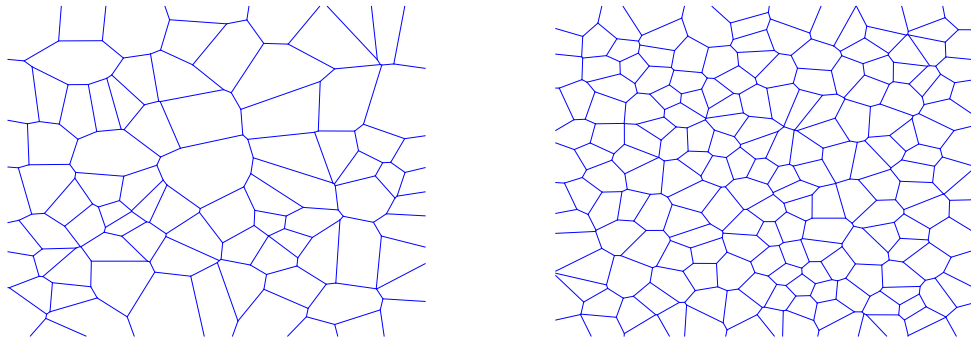


FIGURE 3.17 – Deux diagrammes de Voronoï avec dont les germes sont issus de processus hardcore de Matérn de type I et II, et sont les points de la figure 3.6, avec la distance euclidienne.

Avec la distance euclidienne, les arêtes des cellules de Voronoï sont des segments de droites. Utiliser d'autres distances permet d'avoir des arêtes qui ne sont pas des segments de droites, et des cellules de formes plus variées (Fig. 3.18).

3.3.2 Généralisations du diagramme de Voronoï

Outre la possibilité d'utiliser différentes distances d , les diagrammes de Voronoï ont été généralisés de plusieurs manières : en rajoutant des poids aux germes (sect. 3.3.2.1), en recentrant par itérations les germes sur les centres de masses des cellules (sect. 3.3.2.2), ou encore en ajoutant une dimension temporelle (sect. 3.3.2.3).

3.3.2.1 Diagramme de Voronoï avec poids

Une manière de généraliser les diagrammes de Voronoï [Aur91] est de donner une influence différente à chaque point de l'ensemble des germes P , en associant à chaque $p_i \in P$ un poids w_i , et d'utiliser les distances D suivantes définies entre un point $x \in S$ et un germe p_i , soit par :

$$D(x, p_i) = d(x, p_i) - w_i, \quad (3.26)$$

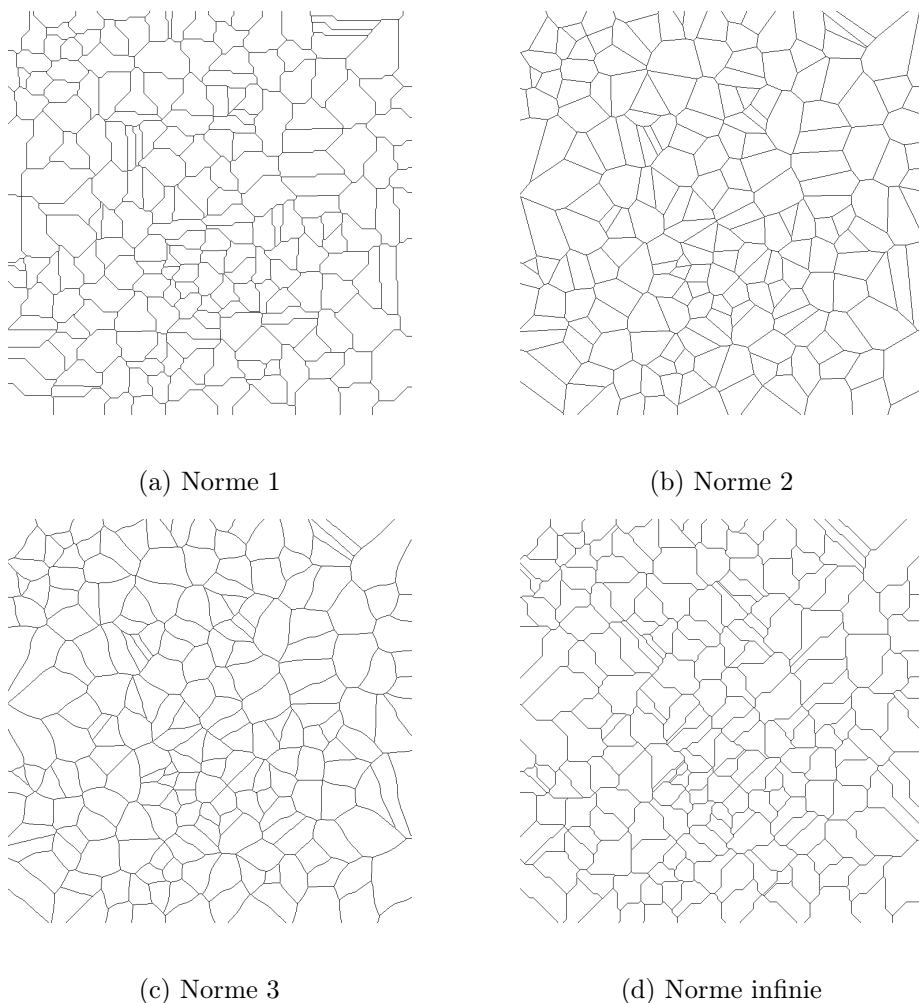


FIGURE 3.18 – Diagramme de Voronoï avec la norme 1, 2, 3 et infinie pour le même processus ponctuel de poisson.

soit par :

$$D(x, p_i) = \frac{d(x, p_i)}{w_i}. \quad (3.27)$$

Les diagrammes correspondant s'appellent respectivement diagramme de Voronoï à poids additifs (Fig. 3.19b) et diagramme de Voronoï à poids multiplicatifs (Fig. 3.19c).

Il existe d'autres extensions du diagramme de Voronoï avec des poids. Celui qui est le plus souvent utilisé est le diagramme de Laguerre (aussi appelé diagramme de puissance) (Fig. 3.19d) avec la distance entre $x \in S$ et $p_i \in P$ définie par :

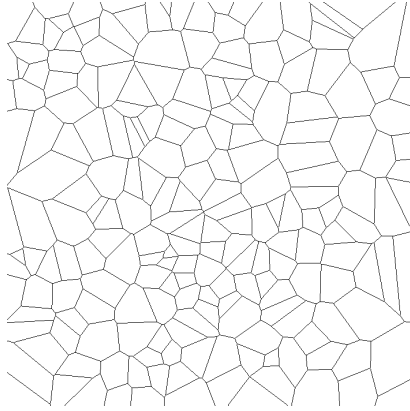
$$D(x, p_i) = d(x, p_i)^2 - w_i^2. \quad (3.28)$$

Une autre version de diagramme de Voronoï [BWY06], consiste à utiliser deux poids w_i et w'_i associés à chaque germe p_i . Ceci permet de définir le diagramme de Voronoï à poids composés (Fig. 3.19e) avec la distance :

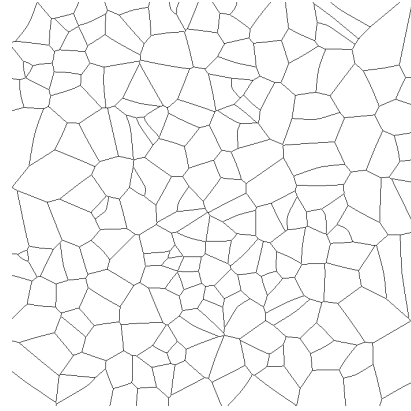
$$D(x, p_i) = w'_i d(x, p_i) - w_i, \quad (3.29)$$

et le diagramme de Möbius (Fig. 3.19f) avec :

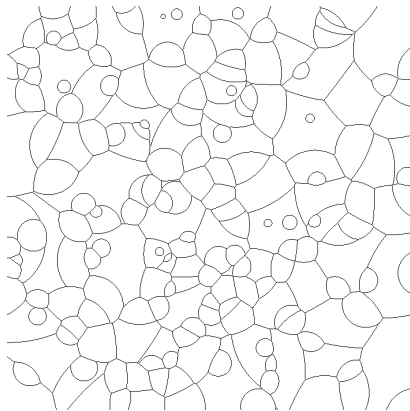
$$D(x, p_i) = w_i d(x, p_i)^2 - w_i^2. \quad (3.30)$$



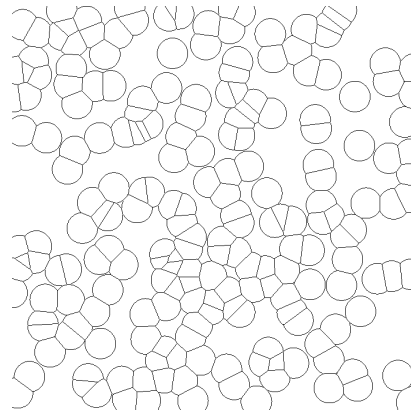
(a) Sans poids



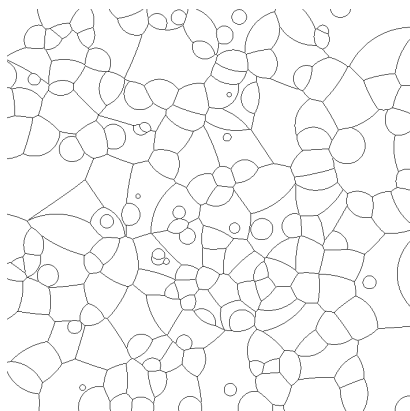
(b) Poids additifs



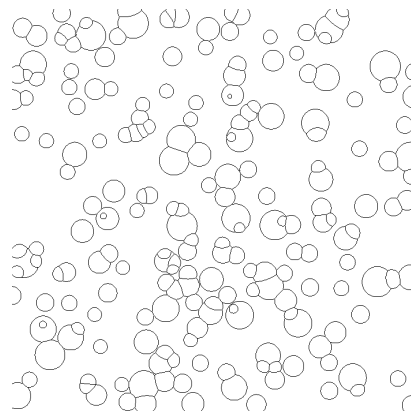
(c) Poids multiplicatifs



(d) Laguerre



(e) Poids composés



(f) Möbius

FIGURE 3.19 – Différents diagrammes de Voronoï avec poids, avec d la distance euclidienne, et pour le même ensemble de points P .

3.3.2.2 Diagramme de Voronoï centré

Un autre diagramme intéressant [DFG99, DW05, LWL⁺09, Hon78, Hon83] est le diagramme de Voronoï centré (barycentrique).

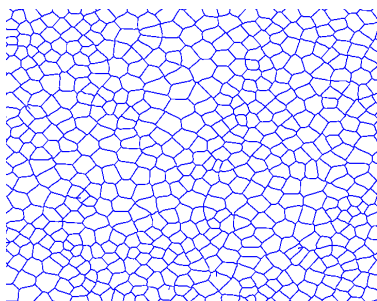
Soit ρ une densité. Pour toute région de Voronoï $Vor(p_i)$, soit p_i^* l'unique point de $Vor(p_i)$ tel que

$$\int_{Vor(p_i)} \rho(x) d(x, p_i^*) dx = \inf_{p \in V^*} \int_{Vor(p_i)} \rho(x) d(x, p) dx, \quad (3.31)$$

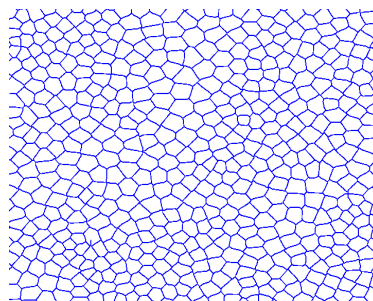
où $V \subseteq V^* \subseteq S$. Un diagramme de Voronoï est un diagramme de Voronoï centré si pour chaque région $Vor(p_i)$ son germe p_i est égal à p_i^* .

Un algorithme permettant de construire un diagramme de Voronoï centré est la méthode de Lloyd's, Fig. 3.20 :

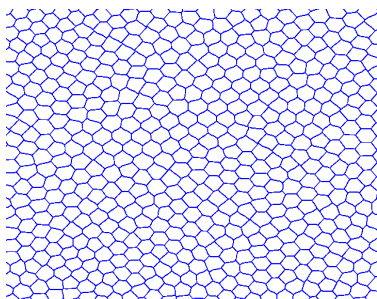
1. soit $(p_i)_{i=1, \dots, N}$ un ensemble fini de germes, obtenu par exemple à partir d'un processus ponctuel de Poisson ;
2. le diagramme de Voronoï des germes $(p_i)_{i=1, \dots, N}$ est calculé ;
3. les centres de gravité m_i de chaque cellule de Voronoï $Vor(p_i)$ est calculé ;
4. pour chaque cellule $Vor(p_i)$ qui n'est pas infinie et qui ne touche pas le bord de S , $p_i = m_i$, et sinon le germe p_i reste inchangé ;
5. on retourne à l'étape 2 jusqu'à ce qu'une condition de convergence soit vérifiée.



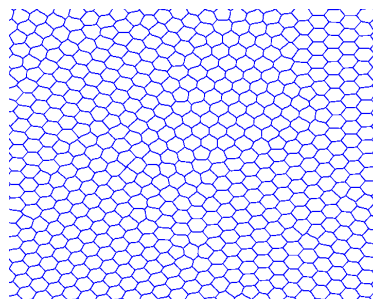
(a) 2 itérations



(b) 5 itérations



(c) 50 itérations



(d) 500 itérations

FIGURE 3.20 – Tessellations pour différentes itérations de la méthode de Lloyd.

3.3.2.3 Tessellation de Johnson-Mehl

La tessellation de Johnson-Mehl a été introduite dans [JM39] pour modéliser les cristaux de métaux.

Soient $a_i = (x_i, t_i) \in S \times [0, +\infty[$ obtenus par un processus aléatoire. Pour tout i , le point x_i naît à l'instant t_i et croît à vitesse constante v dans toutes les directions. Tout point $s \in S$ est atteint par a_i au temps :

$$T_i(s) = t_i + \frac{d(x_i, s)}{v}. \quad (3.32)$$

Soit C_i l'ensemble des points atteints en premier par a_i :

$$C_i = \{s \in S : \forall j \neq i, T_i(s) \leq T_j(s)\}. \quad (3.33)$$

Les x_i sont appelés noyaux et les C_i cristaux de la tessellation, voir la Fig. 3.21.

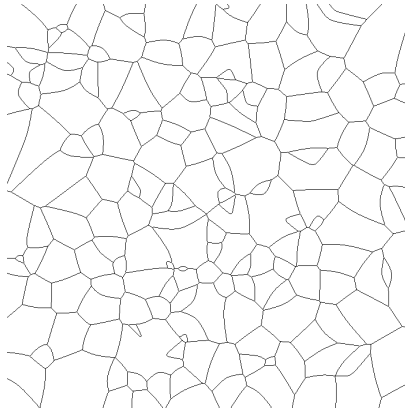


FIGURE 3.21 – Une réalisation d'une tessellation de Johnson-Mehl.

3.3.3 Polygones de Poisson

Pour les tessellations suivantes [vL12], ce ne sont plus des processus de points qui sont utilisés mais des processus de droites. Comme pour les points, c'est le processus de droites poissonniennes qui est le plus utilisé.

Définition 24. *Un processus de droites poissonniennes L (Fig. 3.22) sur \mathbb{R}^2 d'intensité λ , est un processus de Poisson d'intensité λ sur $[0, \pi) \times \mathbb{R}$.*

En pratique chaque droite $l_{\theta,p}$ du processus L , est paramétrée par :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cos \theta + y \sin \theta = p\}. \quad (3.34)$$

Les processus de droites permettent de simuler plusieurs types de tessellations. Par exemple :
 – les polygones de Poisson, voir la Fig. 3.22, dont les cellules sont délimités par un processus ponctuel de Poisson ;

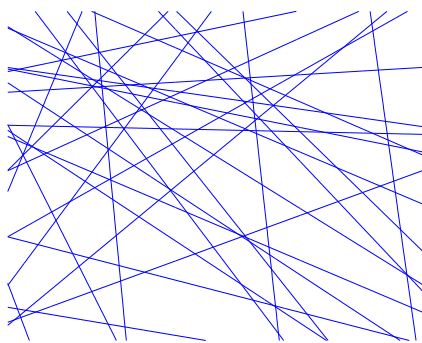


FIGURE 3.22 – Une réalisation de droites poissonniennes, les domaines délimités par ces droites sont les polygones de Poisson.

- les champs polygonaux markovien d’Arak-Clifford-Surgailis [AS89, ACS93], qui sont notamment utilisés en segmentation d’images [KVLS07] ;
- le modèle STIT (STable by Iteration) [NW⁺05], qui permet de simuler des fractures dans des structures, par exemple les craquelées sur les surfaces de poteries ou céramiques [NMOW08], mais aussi de modéliser la division cellulaire [MNW08].

3.4 Conclusion

Nous avons vu qu’une grande variété de tessellations existe déjà dans la littérature, et qu’il est possible de varier les tessellations : en modifiant le processus qui génère les germes (que ce soient des points ou des droites comme pour les polygones de Poisson), en ne sélectionnant qu’une partie des germes (processus hardcore de Matérn), en utilisant des distances différentes (en ajoutant des poids par exemple), etc.

Les tessellations et en particulier les diagrammes de Voronoï sont utilisées dans de nombreux domaines, entre autre :

- dans [Mou05] pour simuler des fractures dans des matériaux avec des distances non euclidiennes et l’ajout d’un bruit,
- dans [AC03] pour segmenter des images couleurs avec des pseudo-métriques et des ultramétriques,
- dans [AHA98, Mér11] en transport optimal avec le diagramme de Laguerre,
- dans [KP11] pour simuler la croissance des cristaux avec le diagramme de Voronoï anisotrope,
- dans [WO90, BTKA10] pour modéliser des cellules épithéliales, et dans [MPL01] pour des cellules intestinales,
- dans [Hon78, Hon83], le diagramme de Voronoï centré a été utilisé pour modéliser le réarrangement des cellules lors de la division cellulaire, de la mort des cellules ou de leurs mouvements,
- etc.

Afin de simuler la mosaïque endothéliale cornéenne humaine, nous souhaitons avoir une méthode permettant d'avoir des tessellations aléatoires plus régulières que les diagrammes de Poisson-Voronoi et hardcore-Voronoi, mais moins régulières que Voronoi centré. Nous voulons également limiter les cellules petites par rapport aux autres, comme permet de le faire les germes issus d'un processus ponctuel hardcore. D'autre part, les tessellations doivent être homogènes en forme et taille des cellules afin de simuler des mosaïques endothéliales jeunes. Et comme la mosaïque endothéliale perd en homogénéité avec l'âge, nous devons avoir la possibilité de générer des tessellations moins homogènes, par exemple en variant des paramètres lors de la simulation.

Pour cela, des méthodes pour générer des tessellations aléatoires à partir de champs aléatoires gaussiens vont être présentées dans le Chapitre 4, et étudiées dans le Chapitre 5.

Chapitre 4

Simulation de tessellations aléatoires

Les tessellations qui ont été présentées dans le chapitre 3 sont visuellement éloignées des tessellations que nous cherchons à étudier : l'endothélium cornéen humain.

L'idée originale de cette thèse est, à partir de champs aléatoires, de générer des tessellations différentes de celles que l'on trouve dans la littérature. Nous voulons par exemple :

- supprimer la présence de petites cellules, comme en utilisant un processus ponctuel hardcore pour germes ;
- avoir une plus grande diversité de tailles et de formes des cellules ;
- et avoir des contours de cellules plus irréguliers.

Dans ce chapitre, trois façons de générer des tessellations aléatoires à partir de champs aléatoires gaussiens vont être présentées. Ces trois méthodes vont être obtenues en utilisant différents germes issus des réalisations de champs aléatoires et différentes distances permettant de partitionner le plan.

Sommaire

| | | |
|------------|---|-----------|
| 4.1 | Maxima locaux et diagramme de Voronoï | 50 |
| 4.2 | <i>h</i>-maxima et SKIZ | 50 |
| 4.2.1 | <i>h</i> -maxima | 50 |
| 4.2.2 | Squelette par zones d'influences (SKIZ) | 53 |
| 4.2.3 | Tessellation | 54 |
| 4.3 | <i>h</i>-maxima et watershed contraint | 54 |
| 4.4 | Conclusion | 56 |

Soient T un sous-ensemble borné de \mathbb{R}^2 et d une distance sur T . Tous les champs aléatoires utilisés seront définis sur T , gaussiens, réels, stationnaires, isotropes, séparables, continus et différentiables en moyenne quadratique, et presque sûrement à trajectoires continues. Ces propriétés sont importantes pour pouvoir définir correctement les différentes méthodes de génération de tessellations aléatoires à partir de champs aléatoires.

En pratique ce sont des réalisations de champs aléatoires qui sont utilisées, ces champs aléatoires sont simulés avec matlab en utilisant l'expansion de Karhunen-Loève (voir la section 2.3).

4.1 Maxima locaux et diagramme de Voronoï

La première méthode de simulation de tessellation consiste à utiliser pour germes de la tessellation les maxima locaux d'une réalisation d'un champ aléatoire gaussien, et d'effectuer le diagramme de Voronoï de ces germes.

La figure 4.1 montre deux réalisations de cette méthode à partir de champs aléatoires gaussien : X_G avec une covariance gaussienne ($l = 4$) et X_B avec une covariance de Bessel ($l = 2$ et $\nu = 1$). Visuellement, les maxima locaux de X_B semblent s'agréger par endroits (Fig. 4.1d), ce qui implique des zones avec de petites cellules dans la Fig. 4.1f. Afin de simuler l'endothélium cornéen humain ces petites cellules doivent être supprimées, ce qui va être fait par la méthode suivante.

4.2 h -maxima et SKIZ

Afin de limiter le nombre de petites cellules, la deuxième méthode ne va pas utiliser les maxima locaux d'une réalisation d'un champ aléatoire comme germes, mais les h -maxima étendus.

Les h -maxima vont tout d'abord être définis, puis le SKIZ (squelette par zones d'influence) qui est une généralisation du diagramme de Voronoï et qui permet de partitionner le plan.

4.2.1 h -maxima

Si l'on voit la réalisation d'un champ aléatoire comme une carte topographique, utiliser les h -maxima va permettre de considérer seulement les grandes variations de niveau. Ainsi, seuls les maxima locaux qui sont à un niveau suffisamment haut par rapport aux autres maxima locaux dans son voisinage sont gardés. Ce type de maximum vient de la morphologie mathématique (voir [Soi03]).

Quelques définitions d'opérateurs de la morphologie mathématique vont dans un premier temps être données, car ils sont nécessaires pour définir les h -maxima (voir [LM84, Vin93]).

Pour tout $k \in \mathbb{R}$, l'ensemble d'excursion de niveau k de X , voir la Fig. 4.2b, est donné par :

$$T_k(X) := \{t \in T : X(t) \geq k\}. \quad (4.1)$$

Notons que $\forall k_1 \leq k_2, T_{k_1}(X) \supseteq T_{k_2}(X)$.

Pour tout sous-ensemble $B \subseteq A \subseteq T$, la reconstruction morphologique de A par B est :

$$\rho_A(B) := \bigcup_{n \geq 1} \delta_A^{(n)}(B), \quad (4.2)$$

où

$$\delta_A^{(n)}(B) := \{a \in A : d_A(a, B) \leq n\} \quad (4.3)$$

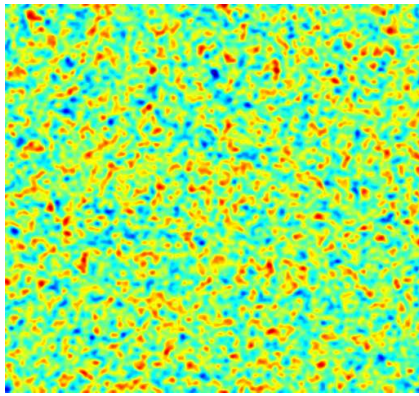
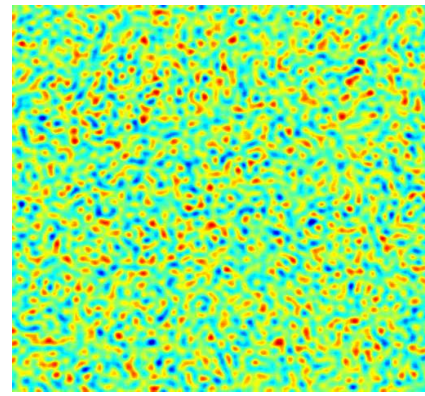
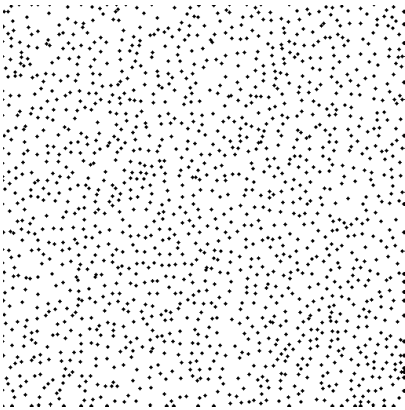
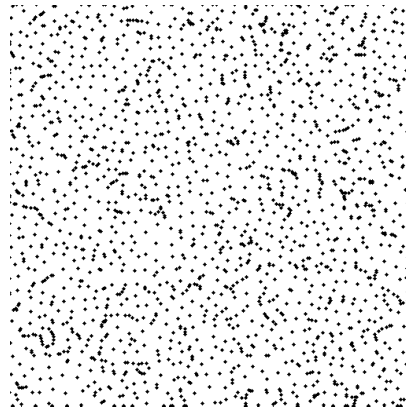
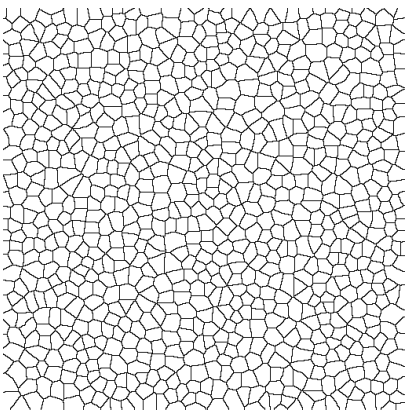
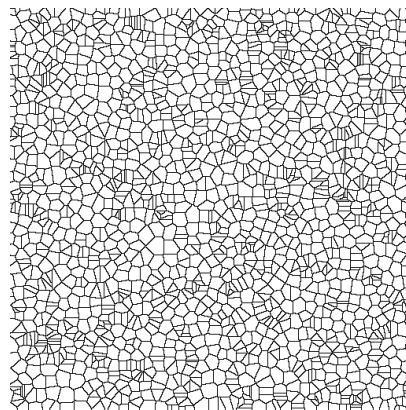
(a) X_G (b) X_B (c) Maxima locaux de X_G (d) Maxima locaux de X_B (e) Voronoï des maxima locaux de X_G (f) Voronoï des maxima locaux de X_B

FIGURE 4.1 – Réalisations X_G et X_B de champs aléatoires gaussiens sur T de taille $2^8 \times 2^8$ avec (a) une covariance gaussienne et (b) une covariance de Bessel. (c-d) les maxima locaux de X_G et X_B . (e-f) les diagrammes de Voronoï des maxima locaux de X_G et X_B .

est la dilatation géodésique de taille $n \geq 0$ de B par A , et d_A est la distance géodésique sur A [LB81] :

$$d_A(a, B) = \inf_{b \in B} d_A(a, b), \quad (4.4)$$

où

$$d_A(a, b) = \begin{cases} +\infty & \text{if } \Gamma_A(a, b) = \emptyset, \\ \inf_{\gamma \in \Gamma_A(a, b)} l(\gamma) & \text{if } \Gamma_A(a, b) \neq \emptyset. \end{cases} \quad (4.5)$$

Et $\Gamma_A(a, b)$ est l'ensemble des chemins¹ de A joignant deux éléments $a, b \in A$, et $l(\gamma)$ est la longueur du chemin γ .

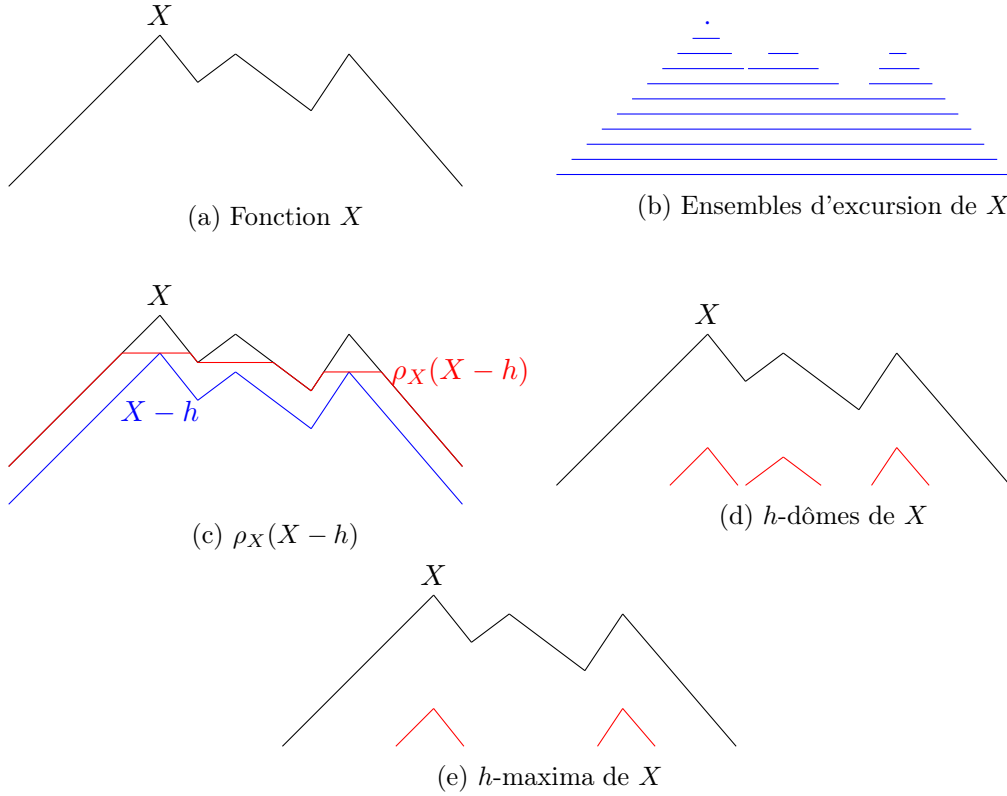


FIGURE 4.2 – Illustration de la méthode pour trouver les h -maxima pour (a) une fonction X de $[0, 3]$ dans $[0, 1]$. (b) Ensembles d'excursions $T_k(X)$ pour $k = 0, 0.1, \dots, 1$. (c) Reconstruction de X par $X - h$ avec $h = 0, 25$. (d) h -dômes et (e) h -maxima de X en rouge.

Pour tout $t \in T$, la reconstruction morphologique $\rho_X(X - h)$ de X par $X - h$, voir les Fig. 4.2c et 4.3, est donnée par :

$$\rho_X(X - h)(t) := \max \{k \in \mathbb{R} : t \in \rho_{T_k(X)}(T_k(X - h))\}. \quad (4.6)$$

Les h -dômes de X , voir la Fig. 4.2d, sont les composantes connexes de $D_h(X)$ qui est donné par :

$$D_h(X) = X - \rho_X(X - h). \quad (4.7)$$

1. Un chemin de A joignant deux éléments $a, b \in A$ est une application continue γ de l'intervalle $[0, 1]$ dans A tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

Les h -maxima de X , voir la Fig. 4.2e, sont les h -dômes de X qui ont une hauteur supérieure ou égale à h . Les germes de la tessellation seront les projections orthogonales des h -maxima sur T qui sont appelés h -maxima étendus.

Lorsque $h = 0$, les h -maxima de X correspondent aux maxima locaux de X .

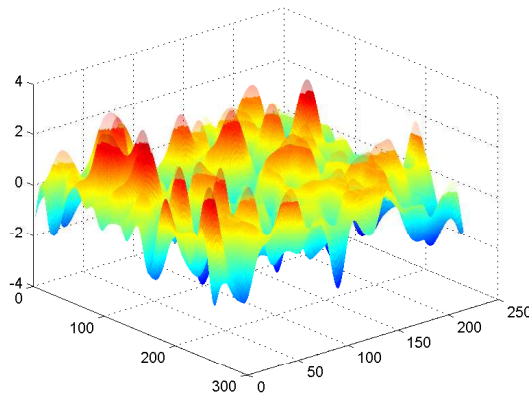


FIGURE 4.3 – Une réalisation X d'un champ aléatoire gaussien en transparence et sa reconstruction morphologique $\rho_X(X - h)$.

4.2.2 Squelette par zones d'influences (SKIZ)

Le diagramme de Voronoï permet de partitionner tout sous-ensemble de \mathbb{R}^2 à partir de germes qui sont des points. Comme les germes de cette méthode sont des h -maxima étendus, qui sont des connexes compacts, le squelette par zone d'influence (SKIZ, voir [BL79]) va permettre de partitionner T .

Définition 25. Soit $M = \{M_1, \dots, M_k\} \subset T$ un ensemble de connexes compacts de T qui seront appelés marqueurs, voir Fig. 4.4a. La zone d'influence du marqueur M_i est donné par :

$$IZ(M_i) := \{t \in T : d_{M_i}(t) < d_{M_j}(t), \forall M_j \in M, j \neq i\}, \quad (4.8)$$

où pour tout ensemble $A \subset T$:

$$\begin{aligned} d_A : T &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ t &\longmapsto \inf_{a \in A} d(a, t), \end{aligned} \quad (4.9)$$

est la carte de distance de l'ensemble A , voir la Fig. 4.4b.

Le squelette par zone d'influence (SKIZ) de l'ensemble des marqueurs M , voir la Fig. 4.4c, est :

$$SKIZ(M) := T \cap \left(\bigcup_{i=1}^k IZ(M_i) \right)^c. \quad (4.10)$$

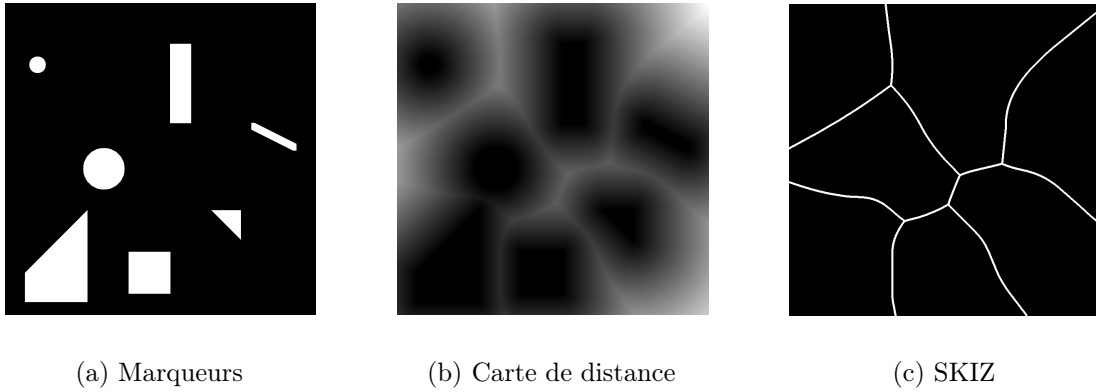


FIGURE 4.4 – (a) Marqueurs, (b) carte de distance des marqueurs et (c) SKIZ des marqueurs : les bords des cellules ne sont plus des segments de droites.

4.2.3 Tessellation

La deuxième méthode pour simuler des tessellations consiste à utiliser les h -maxima étendus comme germes et le SKIZ pour partitionner l'espace. Cette méthode permet de limiter le nombre de petites cellules dues à une agrégation de germes, et d'avoir des contours de cellules qui ne sont plus des segments de droites, voir la Fig. 4.5.

4.3 h -maxima et watershed constraint

Le diagramme de Voronoï et le SKIZ utilisent la distance euclidienne sur $T \subset \mathbb{R}^2$ qui est une distance déterministe. Afin d'avoir une distance aléatoire et ainsi une plus grande variation dans la forme des cellules et des bords, la réalisation du champ aléatoire qui permet d'avoir les germes, va être utilisée pour obtenir une distance aléatoire. Pour cela, la définition de distance sur une surface est nécessaire.

Définition 26. Soit S une surface donnée par f une fonction \mathcal{C}^2 . La distance topographique (voir [Mey94, NS94]) entre deux points p et q de S , est donnée par :

$$TD_S(p, q) := \inf_{\gamma \in \Gamma_S(p, q)} \int_{\gamma} \|\nabla f(\gamma(s))\| ds, \quad (4.11)$$

où $\Gamma_S(p, q)$ est l'ensemble des chemins de S joignant p et q , et ∇ désigne l'opérateur gradient. La distance topographique entre un point $p \in S$ et un ensemble $A \subset S$ est donnée par :

$$TD_f(p, A) := \min_{a \in A} TD_f(p, a). \quad (4.12)$$

Cette distance va permettre de définir le watershed ou ligne de partage des eaux, qui permet de partitionner une surface de la même façon qu'en géographie un territoire est divisé en bassins versants, voir la Fig.4.6.

Définition 27. Soit $\{m_i\}_{i=1, \dots, k}$ un ensemble de germes. Le bassin versant du germe m_i est donné par :

$$CB(m_i) := \{t \in T : \forall j \neq i, g(m_i, t) < g(m_j, t)\}, \quad (4.13)$$

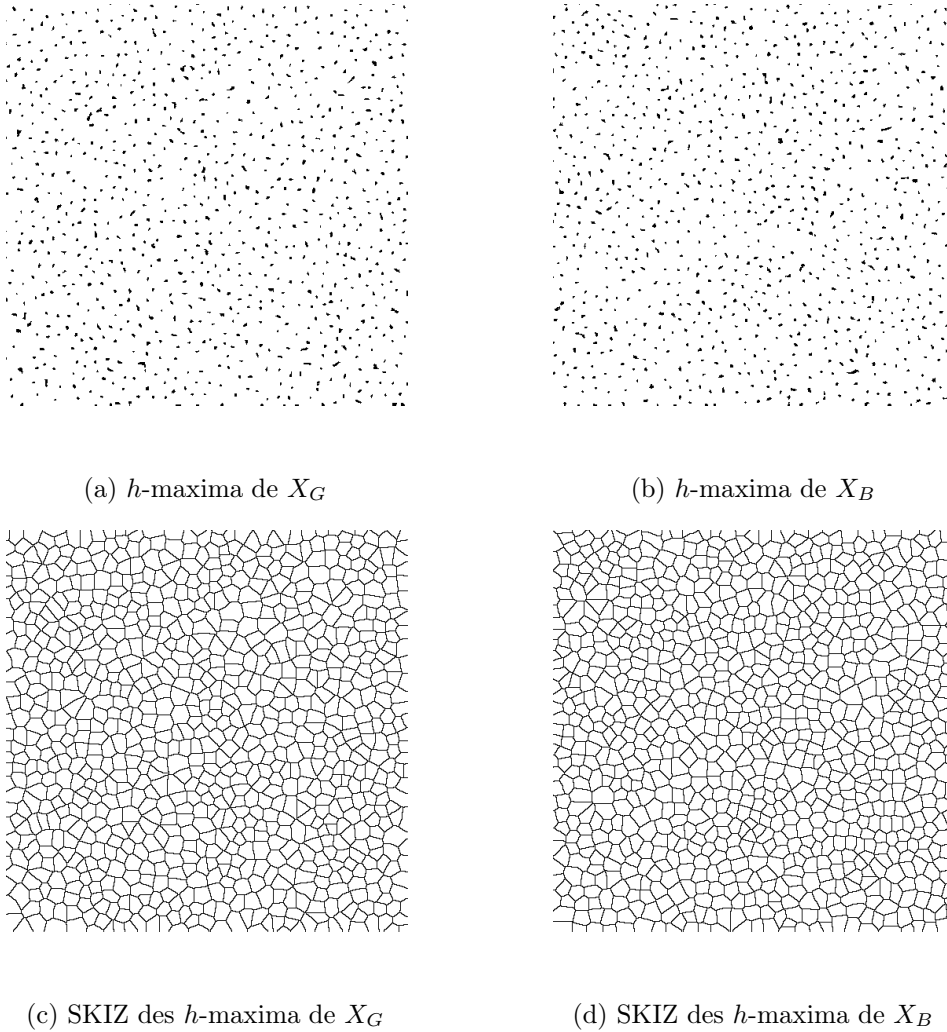


FIGURE 4.5 – (a-b) h -maxima, avec $h = 0.2$, de X_G et X_B (Fig.4.1a et 4.1b), et (c-d) le SKIZ de ces h -maxima.

où pour tout germe m_i et tout $t \in T$: $g(m_i, t) := f(m_i) + TD_f(m_i, t)$.

Le watershed est l'ensemble des points n'appartenant à aucun bassin versant :

$$Wshed(f) := T \cap \left(\bigcup_{i=1}^k CB(m_i) \right)^c. \quad (4.14)$$

L'utilisation de la distance topographique et du watershed d'une réalisation X d'un champ aléatoire va permettre d'obtenir des tessellations aléatoires, avec des contours plus perturbés et des cellules de formes plus variées que dans les deux méthodes précédentes.

Le watershed d'une surface est obtenu à partir de ses minima locaux. Pour ne pas avoir des petites cellules comme avec le diagramme de Voronoï des maxima locaux, le but est d'utiliser les h -maxima étendus. Pour cela, la méthode utilisée est :

- génération d'une réalisation X d'un champ aléatoire (voir la Fig. 4.7a) ;
- calcul de la reconstruction morphologique $\rho_X(X - h)$ (voir la Fig. 4.7b), les maxima de

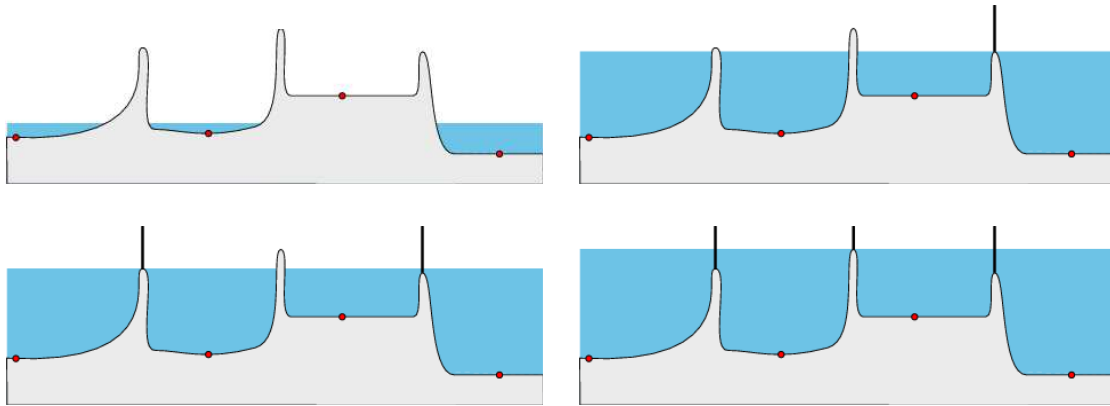


FIGURE 4.6 – Le watershed est construit en remplissant une surface d’eau à partir des minima locaux (en rouge). Lorsque l’eau de deux bassins versants s’apprête à se mélanger, un mur est construit entre les deux bassins versants. L’ensemble de ces murs est appelé watershed ou ligne de partage des eaux.

- $\rho_X(X - h)$ sont les h -maxima de X ;
- calcul de $-\rho_X(X - h)$ (voir la Fig. 4.7c), afin que les h -maxima de X servent de germes lors du watershed ;
- calcul du watershed de $-\rho_X(X - h)$ (voir la Fig. 4.7d).

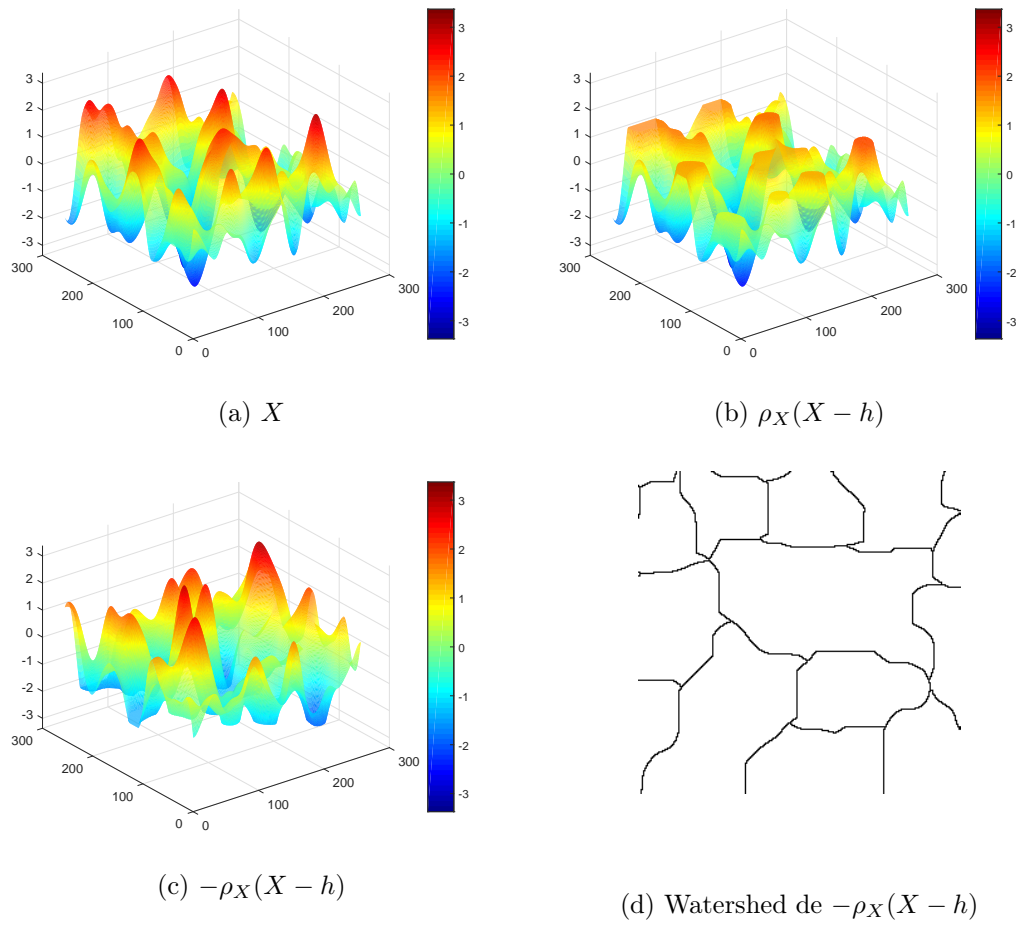
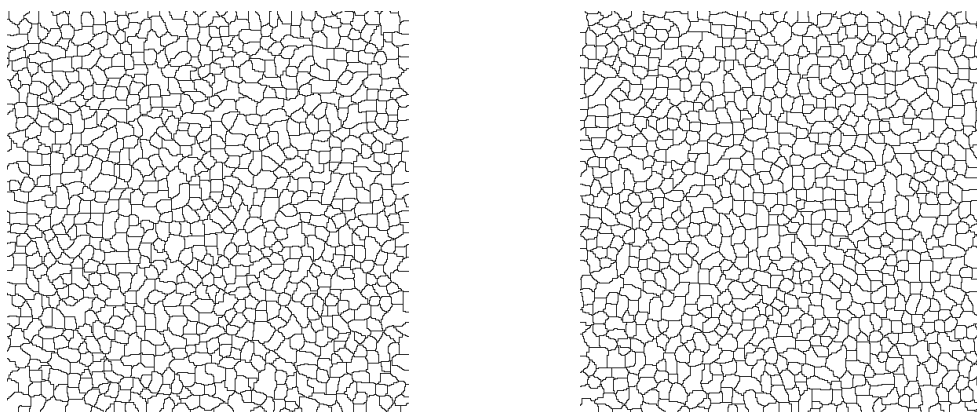
Cette méthode est appliquée, dans la Fig. 4.8, à deux réalisations de champs aléatoires gaussiens X_G et X_B .

4.4 Conclusion

Trois méthodes pour générer des tessellations aléatoires à partir de champs aléatoires gaussiens ont été présentées :

- la première méthode utilise les maxima locaux d’une réalisation d’un champ aléatoire gaussien pour germes, et le diagramme de Voronoï pour partitionner le plan ;
- la deuxième méthode utilise les h -maxima d’une réalisation d’un champ aléatoire gaussien pour germes, et le squelette par zones d’influences (SKIZ) pour partitionner le plan ;
- et la troisième méthode consiste à effectuer le watershed de la reconstruction morphologique de la réalisation X d’un champ aléatoire gaussien par $X - h$, où $h \geq 0$.

Visuellement, la troisième méthode est très éloignée du type de tessellations que nous recherchons pour simuler la mosaïque endothéliale cornéenne, car les contours des cellules sont trop irréguliers. Ces tessellations peuvent être intéressantes pour simuler d’autres types de mosaïques, et ne seront pas étudiées dans la suite de ce travail. Les mesures présentées dans le chapitre suivant pourront être effectuées sur ces tessellations afin de les caractériser. Seules, les deux premières méthodes seront utilisées dans la suite de la thèse.

FIGURE 4.7 – Illustration de la méthode 3 : h -maxima et watershed contraint.FIGURE 4.8 – Watershed contraint des h -maxima des champs aléatoires gaussiens X_G et X_B (Fig.4.5a et 4.5b).

Caractérisation de tessellations aléatoires

Sommaire

| | | |
|------------|--|-----------|
| 5.1 | Étude et caractérisation des germes | 60 |
| 5.1.1 | Maxima locaux | 60 |
| 5.1.1.1 | Densité | 60 |
| 5.1.1.2 | Fonctions L , F , G et g | 62 |
| 5.1.1.3 | Fonctionnelles de Minkowski réduites | 64 |
| 5.1.1.4 | Conclusion | 67 |
| 5.1.2 | h -maxima | 67 |
| 5.1.2.1 | Densité des h -maxima | 67 |
| 5.1.2.2 | Capacité de Choquet des h -maxima | 68 |
| 5.1.2.3 | Fonctionnelles géométriques et morphométriques des h -maxima | 70 |
| 5.2 | Caractérisation des cellules des tessellations simulées | 77 |
| 5.2.1 | Nombre de cellules voisines | 77 |
| 5.2.2 | Aires et périmètres des cellules | 79 |
| 5.2.3 | Fonctionnelles morphométriques des cellules | 81 |
| 5.2.4 | Conclusion | 85 |
| 5.3 | Conclusion | 85 |

Dans le chapitre précédent, trois méthodes de simulation de tessellations aléatoires à partir de champs aléatoires gaussiens ont été présentées. Dans ce nouveau chapitre, les tessellations simulées par les deux premières méthodes et pour des fonctions de covariances gaussienne et de Bessel vont être caractérisées. Rappelons que la première méthode de simulation, voir sect. 4.1, utilise les maxima locaux locaux d'une réalisation d'un champ aléatoire gaussien comme germes, et le diagramme de Voronoï pour partitionner le plan. Et pour la deuxième méthode, voir sect. 4.2, les germes sont les h -maxima d'une réalisation d'un champ aléatoire gaussien, et le squelette par zones d'influences (SKIZ) est utilisé pour partitionner le plan.

Ces différentes tessellations vont être caractérisées afin de quantifier et mesurer les différences observées visuellement, et afin de connaître les différences avec les autres tessellations. Pour cela, les germes des tessellations vont tout d'abord être caractérisés, sect. 5.1, puis les cellules, sect. 5.2. Les différentes mesures effectuées sont répertoriées dans les tableau 5.1.

TABLE 5.1 – Caractérisation des tessellations

| Étude des germes | | Étude des cellules |
|--|---|--|
| Ensemble de points (maxima locaux) | Ensemble de compacts (h -maxima) | |
| <ul style="list-style-type: none"> – la densité – les fonctions L, F, G et g – les fonctionnelles réduites de Minkowski | <ul style="list-style-type: none"> – la densité – la capacité de Choquet – les fonctionnelles géométriques – les fonctionnelles morphométriques | <ul style="list-style-type: none"> – la densité cellulaire, qui est la même que la densité des germes – le nombre de côtés des cellules qui équivaut au nombre de cellules voisines – les fonctionnelles géométriques – les fonctionnelles morphométriques |

Le but est, outre l'étude des tessellations simulées par des champs aléatoires gaussiens, de pouvoir caractériser tout type de tessellation, à partir d'un certain nombre de mesures.

5.1 Étude et caractérisation des germes

Les germes utilisés pour simuler les tessellations aléatoires, que ce soient les maxima locaux ou les h -maxima, vont jouer un rôle dans la forme et la taille des cellules. En effet, des maxima locaux qui s'agrègent par endroits comme la figure 4.1d, vont engendrer de toutes petites cellules, voir Fig. 4.1f. Et à l'inverse, des germes plus régulièrement distribués avec pas ou peu de germes proches les uns des autres, voir Fig. 4.5a, permettent une plus grande homogénéité dans la taille des cellules, voir Fig. 4.5c.

La répartition spatiale des maxima locaux et des h -maxima de champs aléatoires gaussiens de fonction de covariances gaussienne et de Bessel va donc être étudiée.

5.1.1 Maxima locaux

Les maxima locaux de champs aléatoires gaussiens de fonction de covariance gaussienne et de Bessel vont dans un premier temps être étudiés en fonction du paramètre de longueur l . En premier lieu par la densité (section 5.1.1.1), puis la répartition spatiale avec les fonctions L , F , G et g (section 5.1.1.2), et les fonctionnelles de Minkowski réduites (section 5.1.1.3).

5.1.1.1 Densité

La densité de maxima locaux de $N = 10^6$ réalisations de champs aléatoires gaussiens de taille $2^{10} \times 2^{10}$ a été calculée, avec une fonction de covariance gaussienne et une de Bessel, pour différentes valeurs du paramètre de longueur l , voir Fig. 5.1. Pour la covariance gaussienne, une

diminution du nombre moyen de maxima locaux est observée. Pour la covariance de Bessel, la densité des maxima locaux augmente pour $l \geq 2$.

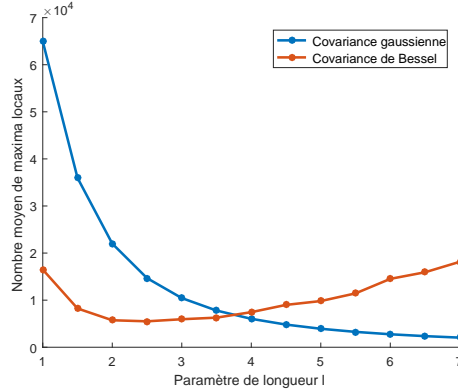


FIGURE 5.1 – Densité moyenne de maxima locaux pour la covariance gaussienne et de Bessel et pour plusieurs valeurs du paramètre de longueur l . La densité est calculée sur $N = 10^6$ réalisations de champs aléatoires gaussiens de taille $2^{10} \times 2^{10}$.

Soit N_i le nombre de maxima locaux de la i -ème réalisation d'un champ aléatoire. La probabilité P d'avoir n maxima locaux est estimée, voir les Fig. 5.2 et 5.3 :

$$\hat{P}(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}\{N_i = n\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5.1)$$

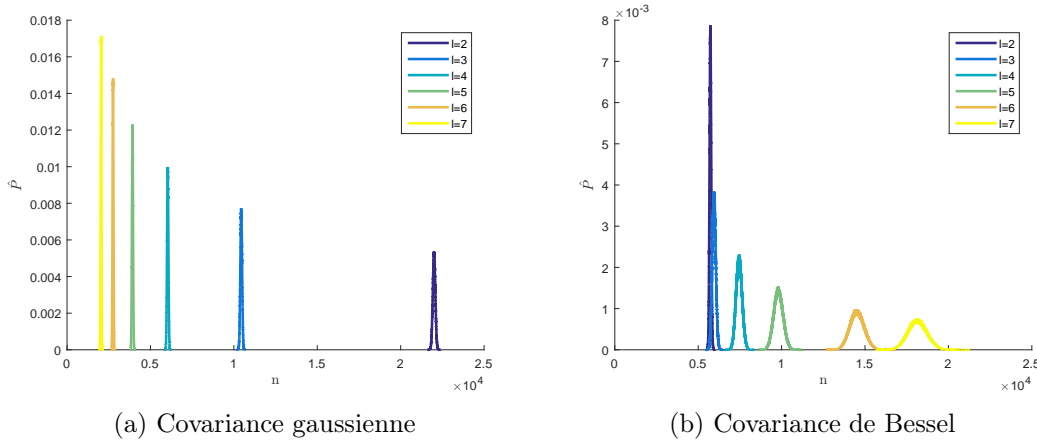


FIGURE 5.2 – Probabilité \hat{P} d'avoir n maxima locaux pour $N = 10^6$ réalisations de champs aléatoires gaussiens de fonctions de covariance gaussienne et de Bessel pour différentes valeurs du paramètre de longueur l .

Pour la covariance gaussienne (Fig. 5.2a et 5.3a), le nombre de maxima locaux diminue quand l augmente, et l'écart-type diminue. Quant à la covariance de Bessel (Fig. 5.2b et 5.3b), c'est le contraire : le nombre de maxima locaux augmente quand l augmente, et l'écart-type augmente. Nous pouvons également observer que toutes les densités de probabilités sont symétriques.

Le calcul numérique de la probabilité P d'avoir n maxima locaux nous permet donc d'avoir une idée plus précise de la loi de probabilité du nombre de maxima locaux.

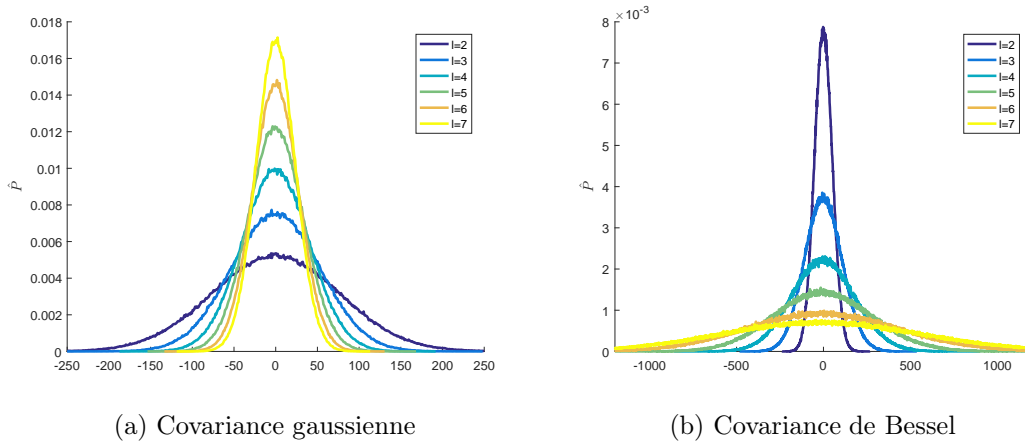


FIGURE 5.3 – Probabilité \hat{P} centré autour du nombre moyen de maxima locaux, pour $N = 10^6$ réalisations de champs aléatoires gaussiens de fonctions de covariance gaussienne et de Bessel pour différentes valeurs du paramètre de longueur l .

5.1.1.2 Fonctions L , F , G et g

Afin de caractériser la répartition spatiale des maxima locaux de réalisations de champs aléatoires, les fonctions L de Ripley, F , G et g introduites dans la section 3.2.4 vont être étudiées. Ces fonctions ont été calculées pour 10^3 réalisations de champs aléatoires gaussiens de taille $2^{10} \times 2^{10}$ et de fonction de covariance gaussienne et de Bessel, et pour différentes valeurs du paramètre de longueur l (voir la Fig. 5.4 pour la covariance gaussienne et la Fig. 5.5 pour Bessel).

i) Covariance gaussienne La fonction L de Ripley (Fig. 5.4a) est inférieure à la fonction L du processus ponctuel de Poisson, ce qui signifie que les maxima locaux ont une répartition spatiale plus régulière. De plus, quand l augmente, les fonctions L augmentent plus lentement, ce qui signifie que les distances entre points sont plus hétérogènes.

Les fonctions F des maxima locaux (Fig. 5.4b), sont comparées à deux fonctions F de processus de Poisson de densité équivalente à la covariance gaussienne avec $l = 2$ (courbe orange) et $l = 7$ (courbe jaune). La fonction F des maxima locaux se décale vers la droite quand l augmente et est supérieure à celles des processus de Poisson leur correspondant (courbe $l = 2$ toujours supérieur à Poisson 1, et $l = 7$ à Poisson 2). Cela indique une régularité de la répartition spatiale des maxima locaux.

Les fonctions G (Fig. 5.4c) sont comparées aux mêmes processus ponctuels de Poisson que les fonctions F . Pour les petites distances, les fonctions G des maxima locaux sont inférieures aux fonctions des processus ponctuels leurs correspondant, ce qui indique une régularité de leurs distribution. De plus, pour de plus grandes distances, les courbes des maxima locaux sont supérieures à celles de Poisson, ce qui indique que les distances entre points sont plus homogènes que pour celles de Poisson.

Quant à la fonction g (Fig. 5.4d), elle se décale vers la droite quand l augmente, signifiant une

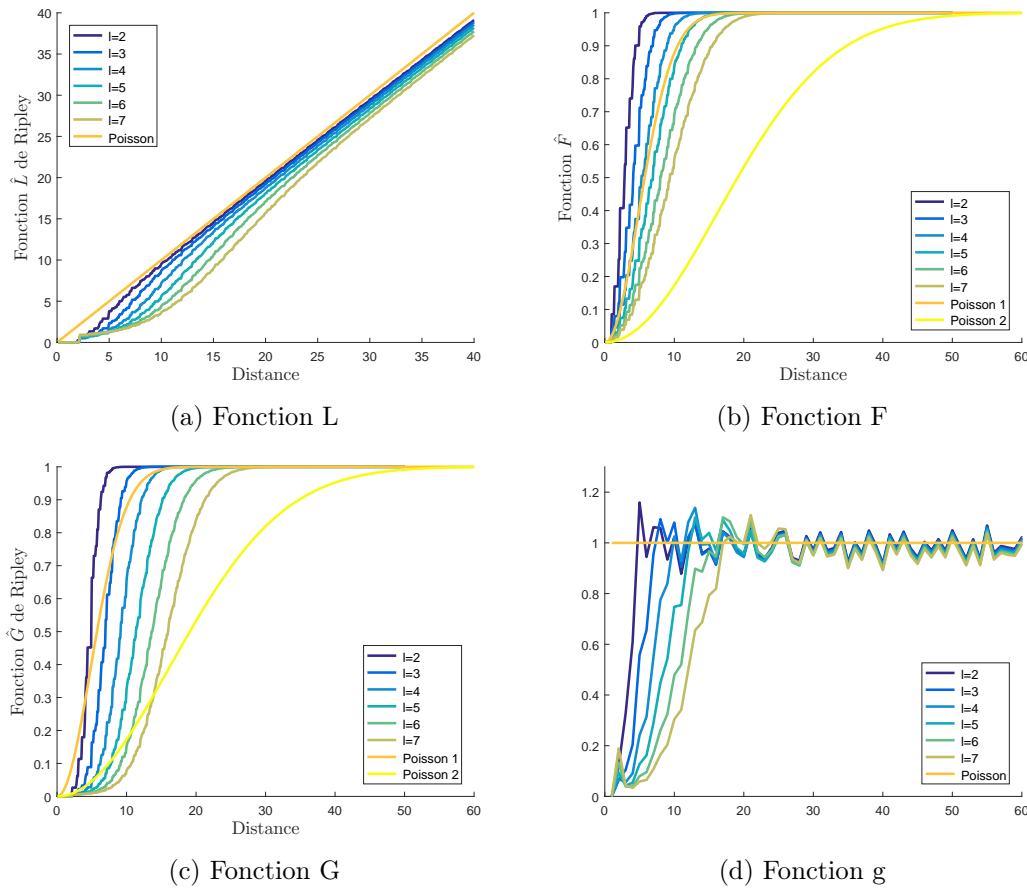


FIGURE 5.4 – Fonctions L , F , G et g des maxima locaux de $N = 10^4$ réalisations de champs aléatoires gaussiens de taille $2^{10} \times 2^{10}$, de **fonction de covariance gaussienne** pour différentes valeurs du paramètre de longueur l . Ces fonctions sont comparées au processus ponctuel de Poisson. Les fonctions F et G du processus ponctuel de Poisson dépendent de la densité, d'où la comparaison à Poisson 1 qui a pour densité la densité moyenne de champs aléatoires gaussiens de covariance gaussienne avec $l = 2$, et Poisson 2 qui correspond à $l = 7$.

distance entre points qui augmente.

ii) Covariance de Bessel La fonction L de Ripley (Fig. 5.5a) est, pour $l \geq 3$, supérieure à la fonction L du processus ponctuel de Poisson, ce qui signifie une agrégation des maxima locaux. Pour $l = 2$, les maxima locaux ont une répartition spatiale plus régulière, et les oscillations de la fonction L indiquent une homogénéité de la distance entre maxima locaux.

Les fonctions F (Fig. 5.5b) sont, pour $l \geq 3$, très proches les unes des autres, et proches de Poisson 2 (processus ponctuel de Poisson de densité égale à la densité de maxima locaux pour $l = 7$). Quant à la fonction F des maxima locaux pour $l = 2$, elle est largement supérieure à Poisson 1, ce qui indique une régularité de la répartition des maxima locaux.

Les fonctions G (Fig. 5.5c) des maxima locaux sont, pour $l \geq 3$, supérieures à Poisson 1 et 2, ce qui est synonyme d'agrégation des points. Et pour $l = 2$, la fonction G est supérieure à Poisson 1 et oscille.

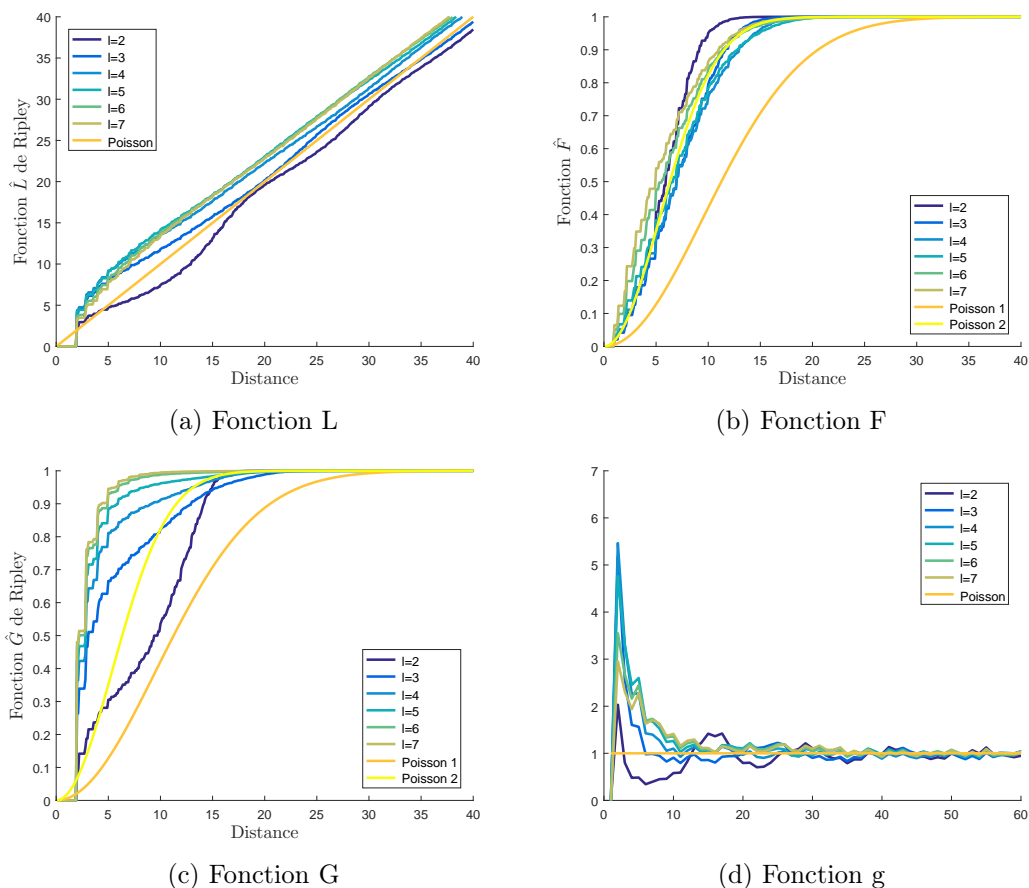


FIGURE 5.5 – Fonctions L , F , G et g des maxima locaux de $N = 10^4$ réalisations de champs aléatoires gaussiens de taille $2^{10} \times 2^{10}$, de **fonction de covariance de Bessel** pour différentes valeurs du paramètre de longueur l . Ces fonctions sont comparées au processus ponctuel de Poisson. Les fonctions F et G du processus ponctuel de Poisson dépend de la densité, d'où la comparaison à Poisson 1 qui a pour densité la densité moyenne de champs aléatoires gaussiens de covariance gaussienne avec $l = 2$, et Poisson 2 qui correspond à $l = 7$.

Pour $l \geq 3$, les fonctions g (Fig. 5.5d) indiquent une agrégation des maxima locaux pour de petites distances (pic très élevé et décroissance rapide vers 0). Et pour $l = 2$, les oscillations de la fonction g , indiquent une homogénéité de la distance entre maxima locaux.

5.1.1.3 Fonctionnelles de Minkowski réduites

Les fonctionnelles de Minkowski réduites (définies dans la section 3.2.4.4) des maxima locaux de $N = 10^3$ réalisations de champs aléatoires gaussiens de taille $2^{10} \times 2^{10}$ ont été calculées (Fig. 5.6 pour la covariance gaussienne et 5.7 pour Bessel). Ces fonctionnelles sont comparées à celles des processus ponctuels de Poisson de densités égales à la densité de maxima locaux pour des champs aléatoires gaussiens de paramètres de longueur $l = 2$ et $l = 7$.

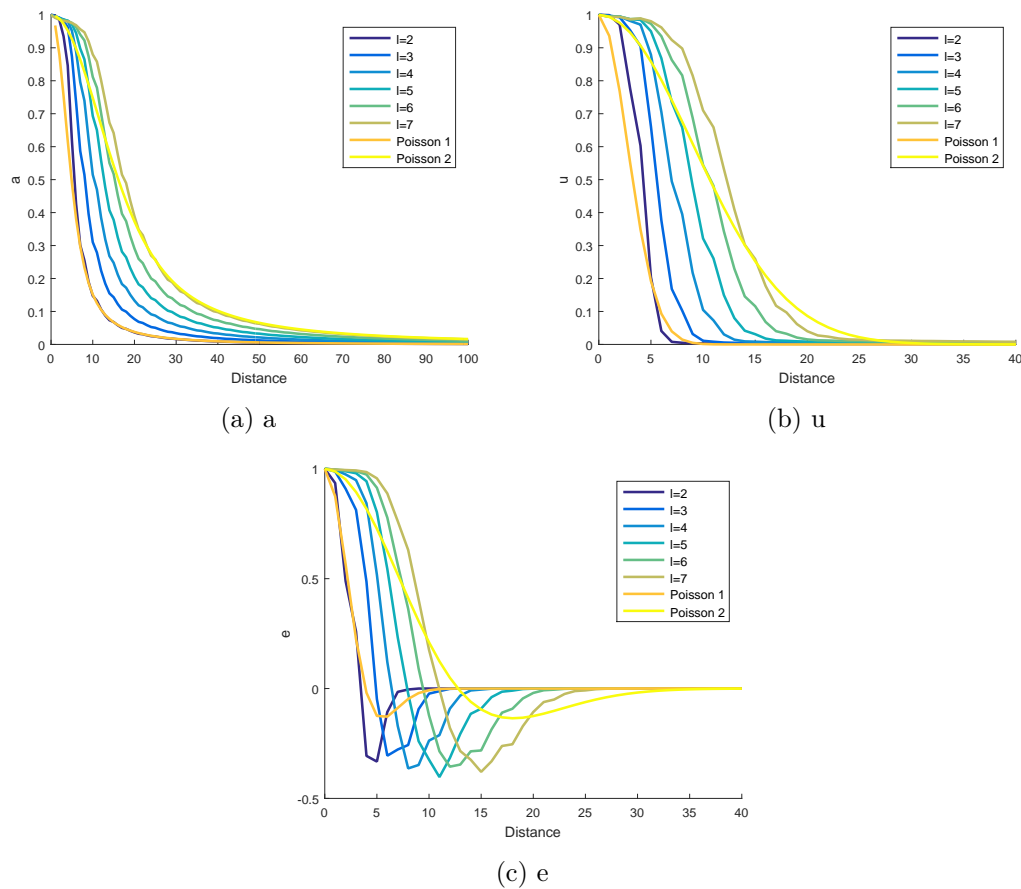


FIGURE 5.6 – Fonctionnelles de Minkowski réduites a , u et e des maxima locaux de $N = 10^3$ réalisations de champs aléatoires gaussiens de taille $2^{10} \times 2^{10}$ et de **fonction de covariance gaussienne** pour différentes valeurs du paramètre de longueur l . Ces fonctionnelles sont comparées au processus ponctuel de Poisson 1 qui a pour densité la densité moyenne de champs aléatoires gaussiens de covariance de Bessel avec $l = 2$, et à Poisson 2 qui correspond à $l = 7$.

i) Covariance gaussienne Fig. 5.6

- les courbes des fonctionnelles réduites de Minkowski se décalent vers la droite quand le paramètre de longueur l augmente, ce qui indique une augmentation de la distance entre maxima locaux ;
- les fonctionnelles réduites de Minkowski sont égales à 1 plus longtemps pour les maxima locaux que pour les processus ponctuels de Poisson. Cela signifie qu'il n'y a pas de recouvrement des disques avant un certain rayon, c'est-à-dire que la distance minimale entre les maxima locaux est plus élevée qu'entre points des processus ponctuels de Poisson ;
- les fonctionnelles réduites du périmètre u et du nombre d'Euler e des maxima locaux atteignent la valeur 0 pour de plus petits disques que pour les processus ponctuels de Poisson, c'est-à-dire que les disques recouvrent entièrement l'espace pour de plus petits disques, et que la distance maximale entre maxima locaux est plus petite qu'entre éléments des processus ponctuels de Poisson.
- le minimum des fonctionnelles réduites du nombre d'Euler e est inférieur à ceux des processus

ponctuels de Poisson, ce qui signifie qu'il y a plus de trous entre les composantes connexes formés par les disques, et donc une plus grande régularité de répartition spatiale des maxima locaux.

ii) **Covariance de Bessel** Fig. 5.7

- les fonctionnelles de Minkowski réduites pour $l \geq 3$ sont très différentes des fonctionnelles pour $l = 2$;
- pour $l = 2$, les fonctionnelles indiquent une plus grande régularité que Poisson : le minimum du nombre d'Euler est plus petit, les fonctionnelles sont au-dessus de la courbe du processus ponctuel de Poisson pour les petites distances, et atteignent la valeur 0 pour de plus distances que pour les autres valeurs de l ;
- pour $l \geq 3$, c'est le contraire : décroissance rapide des fonctionnelles pour les petites distances, c'est-à-dire agrégation des maxima locaux.

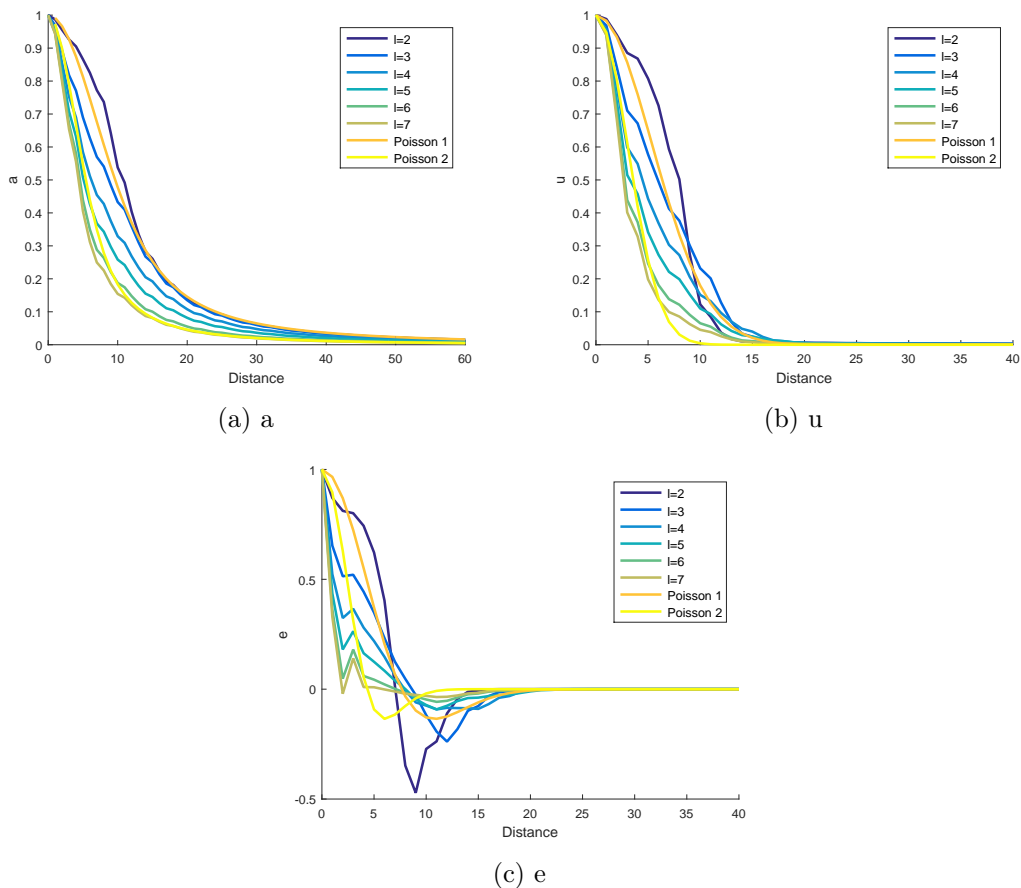


FIGURE 5.7 – Fonctionnelles de Minkowski réduites a , u et e des maxima locaux de $N = 10^3$ réalisations de champs aléatoires gaussiens de taille $2^{10} \times 2^{10}$ et de **fonction de covariance de Bessel** pour différentes valeurs du paramètre de longueur l . Ces fonctionnelles sont comparées au processus ponctuel de Poisson 1 qui a pour densité la densité moyenne de champs aléatoires gaussiens de covariance de Bessel avec $l = 2$, et à Poisson 2 qui correspond à $l = 7$.

5.1.1.4 Conclusion

Ces différentes fonctions montrent que les maxima locaux sont plus régulièrement distribués que les processus ponctuels de Poisson, et que lorsque le paramètre de longueur l augmente, la régularité augmente également. De plus, la distance minimale entre maxima locaux est plus élevée qu'entre points du processus ponctuel de Poisson, et la distance maximale est plus petite.

Pour la covariance de Bessel, il y a une différence entre $l = 2$ et $l \geq 3$. Pour $l = 2$, la répartition est plus régulière que Poisson, tandis que pour $l \geq 3$ il y a agrégation des maxima locaux. Cette agrégation pour $l \geq 3$, semble être en partie au moins, un problème de discrétisation dû à la simulation des champs aléatoires.

Dans l'optique de la simulation d'endothéliums cornéens, ce sont les maxima locaux qui ont une répartition spatiale régulière qui est intéressante. Dans le cas de la covariance de Bessel, le paramètre de longueur $l = 2$ va être privilégié.

5.1.2 h -maxima

Ce sont maintenant les h -maxima locaux de champs aléatoires gaussiens qui vont être caractérisés. Tout comme pour les maxima locaux, c'est d'abord la densité des h -maxima qui va être étudiée (Sect. 5.1.2.1), puis leur répartition spatiale avec la capacité de Choquet (Sect. 5.1.2.2), et enfin leurs formes par les fonctionnelles géométriques et morphométriques (Sect. 5.1.2.3).

5.1.2.1 Densité des h -maxima

La densité de h -maxima, c'est-à-dire le nombre de h -maxima par unité d'aire, est calculée par rapport à h et au paramètre de longueur l , pour 10^4 réalisations de champs aléatoires gaussiens de taille $2^{10} \times 2^{10}$ et de fonction de covariance gaussienne et de Bessel (Fig. 5.8). Ces figures montrent que le nombre moyen de h -maxima diminue quand h et l augmentent.

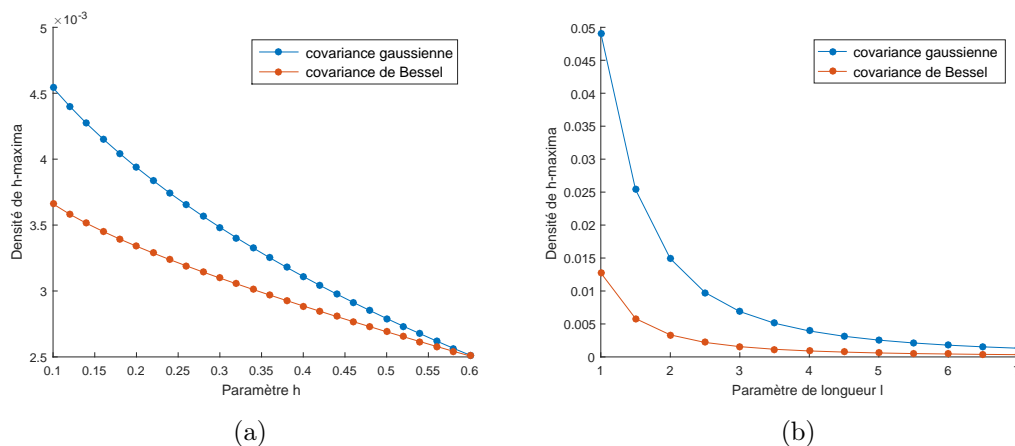


FIGURE 5.8 – Densité moyenne de h -maxima pour la covariance gaussienne et de Bessel (a) en fonction du paramètre h avec $l = 4$ pour gauss et $l = 2$ et $\nu = 1$ pour Bessel, et (b) en fonction du paramètre de longueur l avec $h = 0, 2$.

5.1.2.2 Capacité de Choquet des h -maxima

Afin de caractériser la répartition spatiale des h -maxima, les fonctions L , G , F , g et les fonctionnelles de Minkowski ne sont pas adaptées, car les h -maxima sont des ensembles compacts de formes variés et non des points. La capacité de Choquet va donc être utilisée et est l'équivalent pour les compacts de la fonction de répartition.

Définition La capacité de Choquet permet de caractériser entièrement un ensemble fermé aléatoire [Mat74]. Soit \mathcal{K} l'ensemble des sous-ensembles compacts de \mathbb{R}^2 , \mathcal{F} l'ensemble des fermés de \mathbb{R}^2 muni de la tribu $\sigma(\mathcal{F})$ engendrée par les ensembles de la forme :

$$\{F \in \mathcal{F} \mid F \cap K \neq \emptyset\}, \quad \forall K \in \mathcal{K}. \quad (5.2)$$

Un ensemble fermé aléatoire de \mathbb{R}^2 est une application mesurable d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dans $(\mathcal{F}, \sigma(\mathcal{F}))$.

Soit Ξ un ensemble fermé aléatoire de $W \subseteq \mathbb{R}^2$. La capacité de Choquet de Ξ est la fonctionnelle :

$$\begin{aligned} T_{\Xi} : \mathcal{K} &\longrightarrow [0, 1] \\ K &\longmapsto \mathbb{P}[\Xi \cap K \neq \emptyset] \end{aligned} \quad (5.3)$$

Un estimateur non biaisé de la capacité de Choquet T_{Ξ} [GS11] est donné par :

$$\hat{T}_{\Xi}(K) = \frac{A[(\Xi \oplus \check{K}) \cap (W \ominus K)]}{A[W \ominus K]}, \quad (5.4)$$

où

- $\Xi \oplus \check{K}$ est la dilatation de Ξ par K ;
- $W \ominus K$ est l'érosion de W par K ;
- $\forall B \subset \mathbb{R}^2$, $A(B)$ est l'aire de B .

Capacité de Choquet des h -maxima La capacité de Choquet des h -maxima de 10^3 réalisations de champs aléatoires gaussiens de taille $2^{10} \times 2^{10}$ et de fonction de covariance gaussienne et de Bessel a été calculée pour différentes valeurs du paramètre h , voir Fig. 5.9.

Notons $T_h(r)$ la capacité de Choquet des h -maxima Ξ pour une dilatation par des boules de rayon r . Alors, la figure 5.9 montre que pour les deux fonctions de covariance :

- plus h est petit, plus $T_h(0)$ est petit, c'est-à-dire plus l'aire totale des h -maxima est petit : soit $h_1 < h_2$, alors $T_{h_1}(0) < T_{h_2}(0) \Leftrightarrow A[\Xi_{h_1}] < A[\Xi_{h_2}]$;
- plus h est petit, plus $T_h(r)$ vaut 1 pour r petit, c'est-à-dire plus les grains dilatés Ξ_h recouvrent entièrement la fenêtre érodée à partir d'un rayon de dilatation plus petit, car : $T_h(r) = 1 \Leftrightarrow A[(\Xi \oplus \check{K}) \cap (W \ominus K)] = A[W \ominus K_r]$. Ainsi, plus h est petit, plus la distance maximale entre h -maxima est petite.

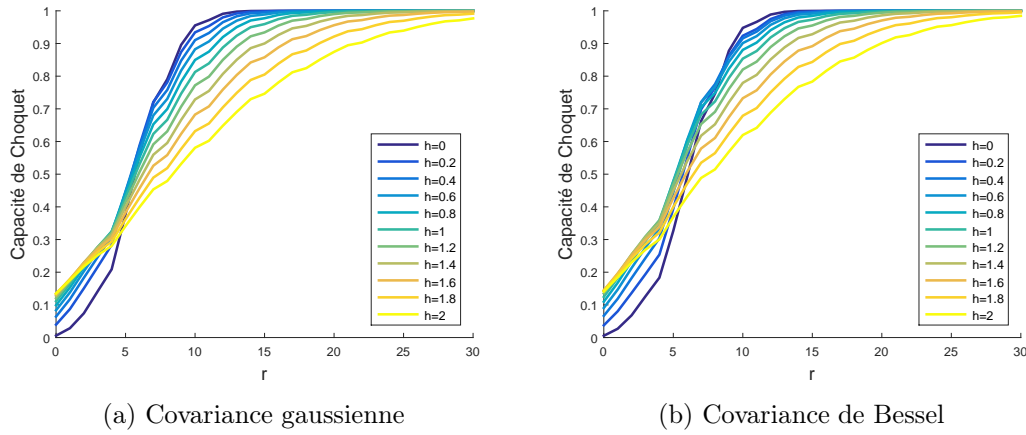


FIGURE 5.9 – Capacité de Choquet des h -maxima de $N = 10^3$ réalisations de champs aléatoires gaussiens de fonctions de covariance gaussienne ($l = 4$) et de Bessel ($l = 2, \nu = 1$), pour différentes valeurs de h .

Le modèle Booléen Comme les h -maxima ne sont pas des points, nous n'allons pas les comparer au processus ponctuel de Poisson, mais à son équivalent pour des compacts : le modèle Booléen.

Soient :

- $\Phi_\lambda = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ un processus ponctuel de points stationnaire d'intensité λ , les x_i sont appelés germes ;
- $\Xi_1, \dots, \Xi_n, \dots$ des ensembles compacts aléatoires i.i.d. de \mathbb{R}^2 , appelés grains, indépendants de Φ_λ et tels que $\mathbb{E}A(\Xi_0 \oplus \check{K}) < +\infty$ pour tout compact K de \mathbb{R}^2 ;
- Ξ_0 un ensemble compact aléatoire de même loi que Ξ_n , appelé grain typique.

Le modèle Booléen est alors :

$$\Xi = \cup_i (x_i + \Xi_i). \quad (5.5)$$

La figure 5.10 montre deux réalisations du modèle Booléen avec pour grains typiques des disques.

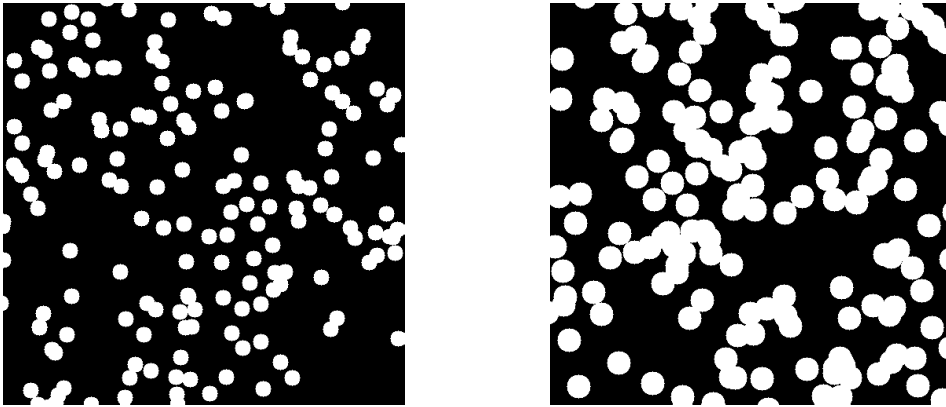


FIGURE 5.10 – Deux réalisations d'un modèle Booléen avec des disques pour grains typiques.

La capacité de Choquet d'un modèle Booléen est :

$$T_{\Xi}(K) = 1 - \exp(\mathbb{E}A(\Xi_0 \oplus \check{K})). \quad (5.6)$$

Si Ξ_0 et K sont convexes, alors :

$$T_{\Xi}(K) = 1 - \exp\left(-\lambda\left(\bar{A} + \frac{1}{2\pi}U(K)\bar{U} + A(K)\right)\right) \quad (5.7)$$

où \bar{U} et \bar{A} sont le périmètre et l'aire du grain typique Ξ_0 .

Pour plus d'informations sur le modèle Booléen, se référer à : [SKM95, Cre92, Mol97, Ser82].

Comparaison au modèle Booléen La figure 5.11 montre la comparaison de la capacité de Choquet du modèle Booléen à la capacité de Choquet des h -maxima (avec $h = 0, 1$ et $0, 2$), calculée dans le paragraphe 5.1.2.2. Les capacités de Choquet représentées ont été calculées à partir de l'aire et du périmètre moyen des h -maxima auxquels on les comparent.

La figure 5.11 permet d'observer que la plus grande différence entre la capacité de Choquet des h -maxima et du modèle Booléen, est la distance à laquelle la capacité de Choquet est égale à 1, qui est inférieure pour les h -maxima :

$$\min\{r > 0 \mid T_h(r) = 1\} < \min\{r > 0 \mid T_{\Xi}(r) = 1\}.$$

Cela signifie que la distance maximale entre h -maxima est plus petite que pour le modèle Booléen.

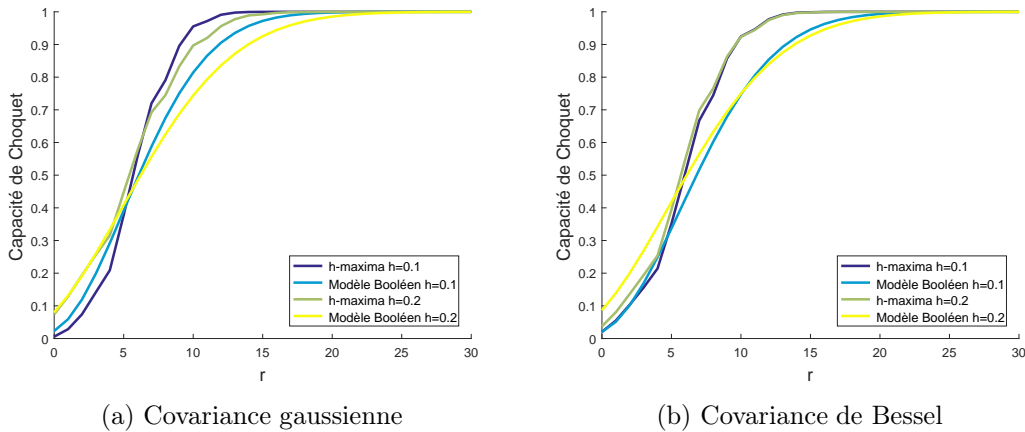


FIGURE 5.11 – Capacité de Choquet des h -maxima, avec $h = 0, 1$ et $0, 2$, de 10^3 réalisations de champs aléatoires gaussiens de fonctions de covariance gaussienne et de Bessel, comparées à la capacité de Choquet du modèle Booléen pour des disques de rayons correspondant à $h = 0, 1$ et $0, 2$.

5.1.2.3 Fonctionnelles géométriques et morphométriques des h -maxima

I - Aire et périmètre des h -maxima L'aire et le périmètre sont deux fonctionnelles géométriques. La densité des aires et des périmètres des h -maxima de champs aléatoires gaussiens de fonctions de covariance gaussienne et de Bessel est estimée par un estimateur à noyau, pour différentes valeurs de h , et pour 10^7 h -maxima à chaque fois.

i) Définition Soit (a_1, \dots, a_k) un échantillon (par exemple, l'aire ou le périmètre des h -maxima pour un h donné). La densité f de cet échantillon est estimée par un estimateur à noyau [R⁺56, Par62], donné, $\forall x \in \mathbb{R}^2$, par :

$$\hat{f}(x) := \frac{1}{bk} \sum_{i=1}^k K\left(\frac{x - a_i}{b}\right), \quad (5.8)$$

où $K(\cdot)$ est un noyau d'Epanechnikov, et $b > 0$ un paramètre de lissage, appelé bandwidth. Le choix du paramètre b est essentiel, et est effectué par la méthode dite du plug-in [BGK⁺10]. L'estimateur de la densité est calculé en n points sur l'intervalle $[m, M]$, où $n = 2^{\lfloor \log(\max(a_i)) \rfloor + 1}$, $m = \frac{1}{2} \max(a_i) - n$, $M = \max(a_i) - m$ et $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x .

Afin de comparer les estimateurs \hat{f} des densités des aires et périmètres des h -maxima de champs aléatoires gaussiens, qui n'ont pas la même densité de h -maxima d_h (calculées dans la section 5.1.2.1), les estimateurs \hat{f} sont normalisés, $\forall x \in \mathbb{R}^2$: $\hat{f}_n(x) = \hat{f}(x \times d_h)$.

ii) Densité des aires La figure 5.12 montre l'estimation normalisée de la densité des aires des h -maxima pour la covariance gaussienne et de Bessel. Ces figures nous montrent que quand h augmente, la moyenne des aires augmente, et l'écart-type augmente vers plus de h -maxima d'aires grands.

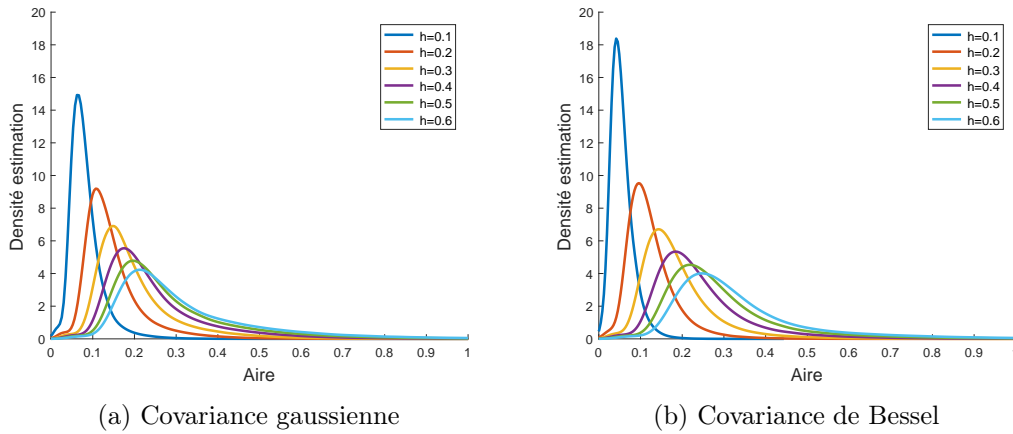


FIGURE 5.12 – Estimation normalisée de la densité des aires de 10^6 h -maxima pour (a) la covariance gaussienne et (b) de Bessel.

iii) Densité des périmètres La figure 5.13 montre l'estimation normalisée de la densité des périmètres des h -maxima pour les deux fonctions de covariances. Comme pour l'aire, le périmètre moyen augmente quand h augmente, et l'écart-type augmente vers plus de h -maxima en queue de distribution.

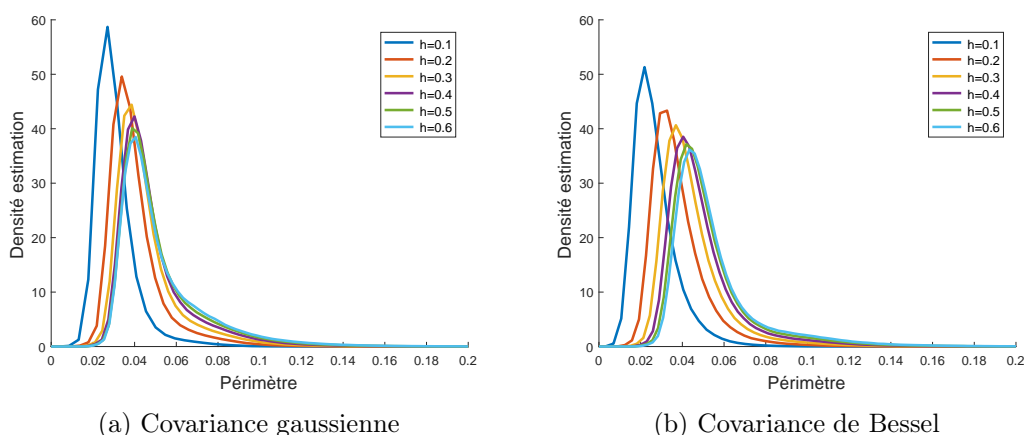


FIGURE 5.13 – Estimation normalisée de la densité des périmètres de 10^6 h -maxima pour (a) la covariance gaussienne et (b) de Bessel.

II - Fonctionnelles géométriques et morphométriques La plupart des définitions suivantes proviennent de [RDP10d].

Fonctionnelles géométriques Les fonctionnelles géométriques des ensembles compacts qui sont utilisées pour définir les fonctionnelles morphométriques sont :

- l'aire A ,
- le périmètre P ,
- le rayon du cercle inscrit r ,
- le rayon du cercle circonscrit R ,
- le diamètre de Féret minimum w ,
- et le diamètre de Féret maximum d .

Le diamètre de Féret minimum et maximum d'un ensemble compact sont respectivement la distance minimale et maximale entre deux droites parallèles tangentes à l'ensemble compact.

Ces fonctionnelles géométriques vérifient, pour des ensembles compacts, des inégalités géométriques [RDP10d]. Les inégalités qui seront utilisés par la suite sont répertoriés dans la deuxième colonne du tableau 5.2.

Fonctionnelles morphométriques Les fonctionnelles morphométriques (troisième colonne du tableau 5.2), sont définies de telle sorte qu'elles valent 1 quand l'inégalité qui leurs est associée est une égalité pour l'ensemble qu'on appelle ensemble extrême (quatrième colonne du tableau 5.2). Chacune de ces fonctionnelles a une signification particulière :

- w/d correspond à la variation du diamètre,
- $4A/\pi d^2$ à la sphéricité,
- $2\pi r/P$ à la circularité,
- et $4R/P$ à l'élongation.

TABLE 5.2 – Fonctionnelles d’ensembles compacts

| Fonctionnelles géométriques | Inégalités géométriques | Fonctionnelles morphométriques | Ensemble extrême |
|-----------------------------|-------------------------|--------------------------------|--|
| w, d | $w \leq d$ | w/d | ensembles convexes d’épaisseur constante |
| A, d | $4A \leq \pi d^2$ | $4A/\pi d^2$ | disque |
| r, P | $2\pi r \leq P$ | $2\pi r/P$ | disque |
| R, P | $4R \leq P$ | $4R/P$ | segment |

Diagrammes de formes Les diagrammes de formes ont été introduits dans [Bla15, San61] et développés dans [RDP10a, RDP10d]. Ils permettent de représenter les ensembles compacts selon leurs formes. Chaque ensemble est représenté par un point du domaine $[0, 1]^2$. Ainsi cela permet d’avoir une vision globale de la variabilité et de la distribution des formes. Les coordonnées de ces points sont des fonctionnelles morphométriques.

Les diagrammes de formes sont donc une représentation d’ensembles compacts par un nuage de points, et sont définis par trois fonctionnelles géométriques (g_1, g_2, g_3) , ou, de manière équivalente par deux fonctionnelles morphométriques (m_1, m_2) . m_1 est un rapport défini par l’inégalité géométrique entre g_1 et g_2 , et m_2 entre g_2 et g_3 . De plus, m_1 et m_2 ont la même fonctionnelle géométrique en dénominateur. Un diagramme de forme représente donc un ensemble compact dans $[0, 1]^2$ par un point d’abscisse m_1 et d’ordonnée m_2 .

Deux diagrammes de formes vont être étudiés ici, \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 , choisis d’après les résultats de [RDP10a, RDP10b, RDP10c]. Le diagramme \mathcal{D}_1 a la fonctionnelle morphométrique w/d en abscisse et $4A/\pi d^2$ en ordonnée, et le diagramme \mathcal{D}_2 est constitué de $2\pi r/P$ en abscisse et de $4R/P$ en ordonnée. Une liste des autres diagrammes de formes est présentée dans [RDP10d]. La figure 5.14 montre les deux diagrammes de formes \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 de cinq compacts : le segment de droite, le triangle équilatéral, le carré, l’hexagone régulier et le disque.

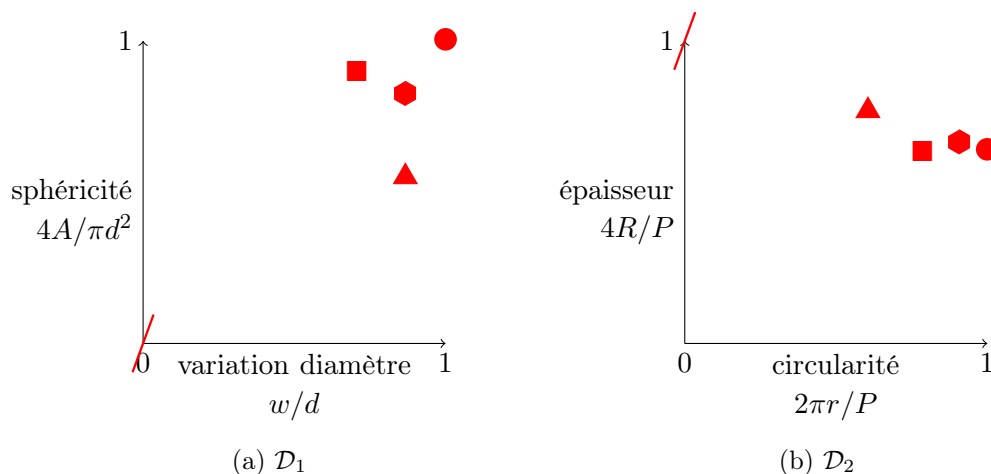


FIGURE 5.14 – Les diagrammes de formes (a) \mathcal{D}_1 et (b) \mathcal{D}_2 d’un segment, un triangle équilatéral, un carré, un hexagone régulier et un disque.

III - Diagrammes de formes des h -maxima La figure 5.15 montre deux exemples de diagrammes de forme pour 10^4 h -maxima de réalisations de champs aléatoires gaussiens de fonction de covariance gaussienne, ainsi que l’histogramme de chaque fonctionnelle morphométrique. Sur ces diagrammes, il est aisée de distinguer les cellules en dehors du nuage de point, mais au sein du nuage en lui-même, nous ne pouvons pas connaître la distribution des cellules.

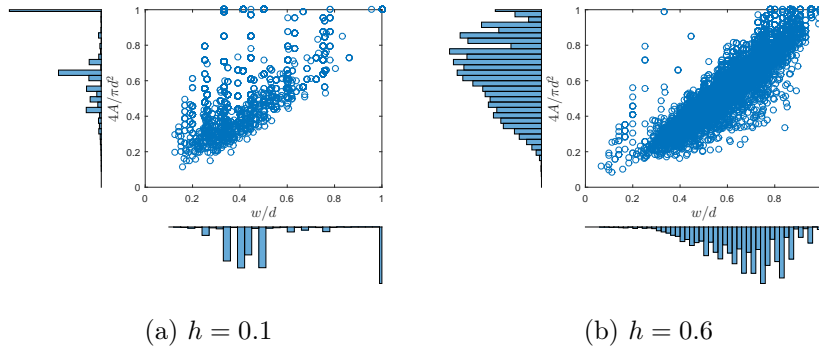


FIGURE 5.15 – Diagramme de forme \mathcal{D}_1 de 10^4 h -maxima de réalisations de champs aléatoires gaussiens de fonction de covariance gaussienne pour deux de h . Et histogrammes des fonctionnelles morphométriques associés au diagramme \mathcal{D}_1 : w/d et $4A/\pi d^2$.

Pour cela, dans les figures suivantes, les diagrammes \mathcal{D}_1 (Fig. 5.16 et 5.17) et \mathcal{D}_2 (Fig. 5.18 et 5.19) sont représentés par leurs distribution bi-dimensionnelle calculée pour 10^4 h -maxima, avec $h = 0.1, 0.2, \dots, 0.6$, de réalisations de champs aléatoires gaussiens de fonctions de covariances gaussienne (Fig. 5.16 et 5.18) et de Bessel (Fig. 5.17 et 5.19)

Pour les diagrammes de formes \mathcal{D}_1 (Fig. 5.16 et 5.17), quand h augmente, que ce soit pour la covariance gaussienne ou de Bessel, la distribution se resserre autour de la droite $\frac{\omega}{d} = \frac{4A}{\pi d^2}$. D’autre part, pour $h = 0, 1$, nous pouvons observer que la valeur de ω/d est plus faible, ce qui indique que les formes sont plus allongées.

Quant aux diagrammes de formes \mathcal{D}_2 (Fig. 5.18 et 5.19), il y a une présence élevée, pour les petites valeurs de h des deux fonctions de covariance, de h -maxima dont les fonctionnelles morphométriques $4R/P$ et/ou $2\pi r/P$ sont nulles, ce qui signifie que $R = 0$, ou $r = 0$, et que donc ces h -maxima sont soit des points, soit des segments de droite (si $R \neq 0$ et $r = 0$). De plus, les distributions sont de moins en moins dispersées quand h augmente.

IV - Conclusion Les mesures effectuées sur les h -maxima de champs aléatoires gaussiens de fonction de covariance gaussienne et de Bessel montrent que quand h augmente :

- la densité des h -maxima diminue ;
- la taille des h -maxima augmente ;
- la distance maximale entre les h -maxima augmente ;
- la variabilité des tailles (aires et périmètres) augmente ;
- la variabilité des formes diminue ;
- et les formes sont moins allongées ;

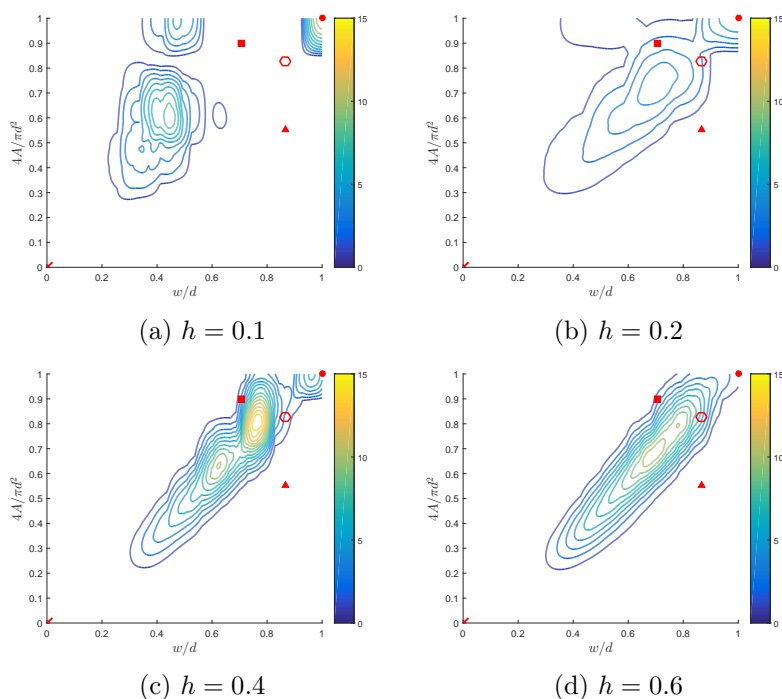


FIGURE 5.16 – Distribution du diagramme de forme \mathcal{D}_1 de h -maxima pour la **covariance gaussienne** et pour différentes valeurs de h . Toutes les unités sont marquées par une courbe de niveau. Le disque, l’hexagone, le carré, le triangle équilatéral et le segment sont représentés.

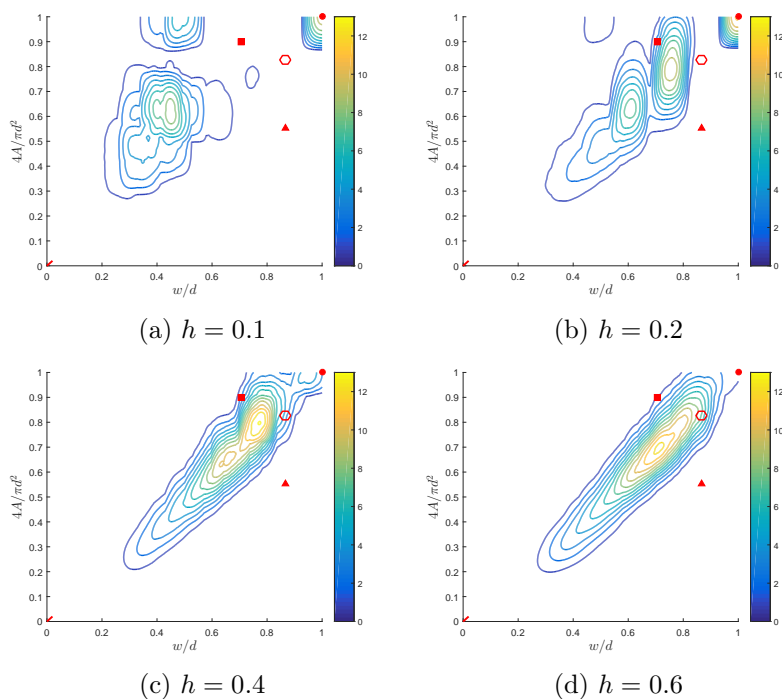


FIGURE 5.17 – Distribution du diagramme \mathcal{D}_1 de h -maxima pour la **covariance de Bessel** et pour différentes valeurs de h . Toutes les unités sont marquées par une courbe de niveau. Le disque, l’hexagone, le carré, le triangle équilatéral et le segment sont représentés.

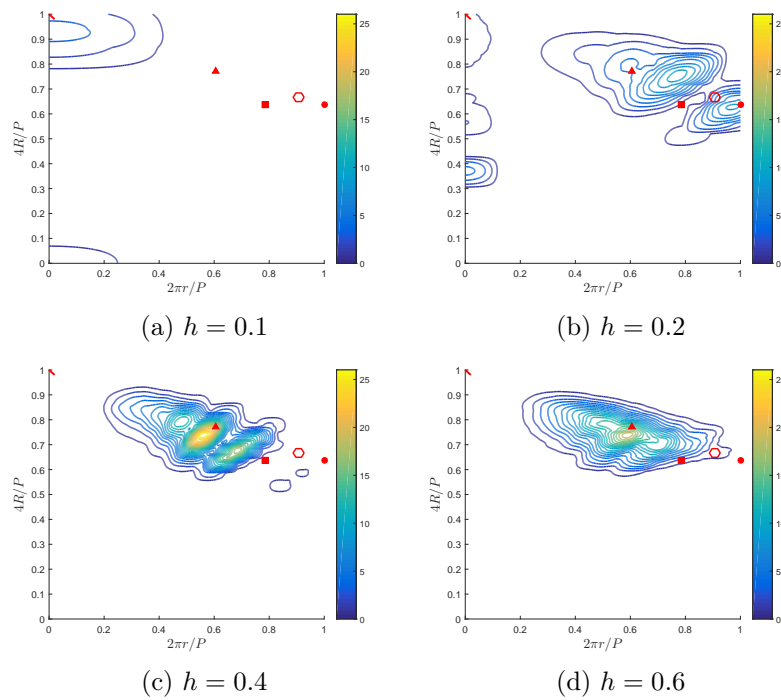


FIGURE 5.18 – Distribution du diagramme \mathcal{D}_2 de h -maxima pour la **covariance gaussienne** et pour différentes valeurs de h . Toutes les unités sont marquées par une courbe de niveau. Le disque, l’hexagone, le carré, le triangle équilatéral et le segment sont représentés.

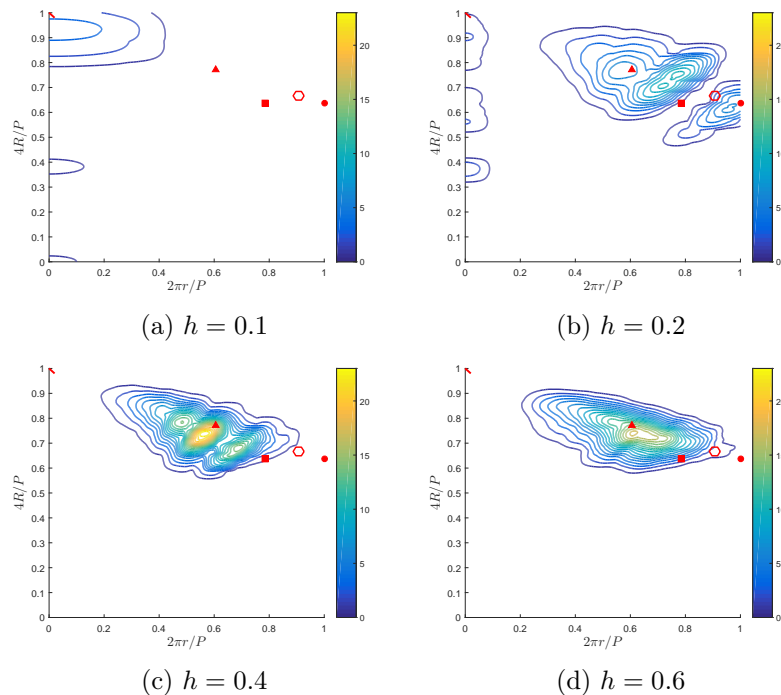


FIGURE 5.19 – Distribution du diagramme \mathcal{D}_2 de h -maxima pour la **covariance de Bessel** et pour différentes valeurs de h . Toutes les unités sont marquées par une courbe de niveau. Le disque, l’hexagone, le carré, le triangle équilatéral et le segment sont représentés.

Les tessellations obtenues par SKIZ de ces h -maxima devraient donc avoir des cellules plus grandes quand h augmente, mais aussi une plus grande variabilité dans la taille des cellules. Cela va être vérifiée dans la section suivante.

5.2 Caractérisation des cellules des tessellations simulées

Tout comme les germes des tessellations ont été caractérisées, les cellules des tessellations simulées par SKIZ des h -maxima de réalisations de champs aléatoires gaussiens vont être caractérisées.

Tout d’abord, dans la section 5.2.1, nous allons nous intéresser au nombre de voisins des cellules de ces tessellations et à la distribution de ce nombre. Ensuite, nous étudierons la distribution des aires et des périmètres des cellules dans la section 5.2.2, puis les fonctionnelles morphométriques des cellules dans la section 5.2.3.

Pour chacune de ces mesures, nous nous intéresserons à l’étude des tessellations aléatoires simulées par SKIZ des h -maxima pour différentes valeurs de h , puis nous comparerons ces tessellations au diagramme de Poisson-Voronoi, à la tessellation hardcore-Voronoi de type II, et à la tessellation de Voronoï centré.

5.2.1 Nombre de cellules voisines

Un des principaux critères utilisé par les ophtalmologistes pour évaluer la qualité d’une cornée est le nombre moyen de côtés des cellules endothéliales (c’est-à-dire leur nombre de cellules voisines).

I - Comparaison selon h Le nombre de voisins des cellules des tessellations simulées par SKIZ des h -maxima a donc été calculé pour 10^6 cellules pour différentes valeurs de h et pour la covariance gaussienne et de Bessel, et a été représenté par des histogrammes dans la figure 5.20.

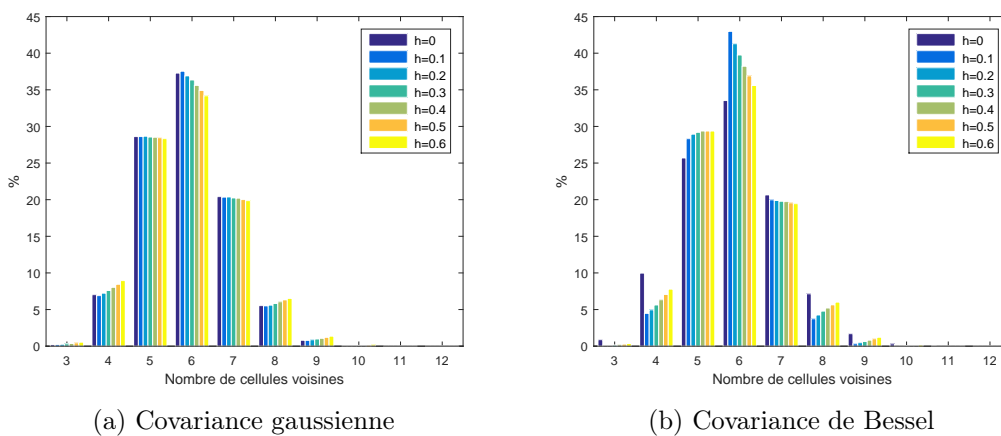


FIGURE 5.20 – Histogramme du nombre de voisins de 10^6 cellules simulées par SKIZ des h -maxima de réalisations de champs aléatoires gaussiens de fonctions de covariance (a) gaussienne et (b) de Bessel, et pour plusieurs valeurs de h .

- Pour les deux fonctions de covariance, les histogrammes du nombre de voisins montrent que :
- la répartition du nombre de voisins est non symétrique autour de 6 : il y a plus souvent 5 voisins que 7, et 4 que 8 ;
 - le pourcentage de cellules ayant 6 voisins décroît quand h croît (à part pour la covariance de Bessel et $h = 0$) ;
 - plus de 80% des cellules ont 5, 6 ou 7 voisins (à part pour la covariance de Bessel et $h = 0$), voir Fig. 5.21, et cette quantité diminue légèrement quand h augmente. Cela signifie que lorsque h augmente, les tessellations deviennent moins régulières, et ont plus de cellules avec peu et beaucoup de côtés.

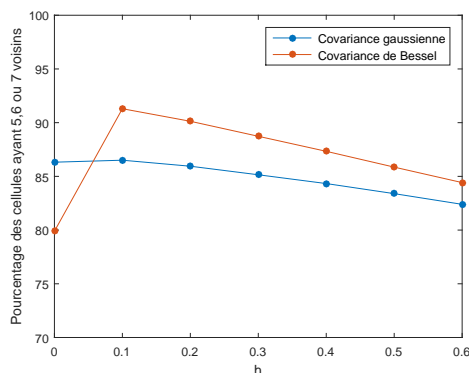


FIGURE 5.21 – Pourcentage des 10^6 cellules ayant 5, 6 ou 7 voisins en fonction de h , pour la fonction de covariance gaussienne et de Bessel.

II - Comparaison avec d'autres tessellations Les cellules des tessellations simulées à partir des h -maxima, avec $h = 0, 3$, sont comparées dans la figure 5.22 aux cellules d'autres tessellations : le diagramme de Poisson-Voronoi (voir Fig. 3.15), le diagramme de Voronoi de processus hardcore de type II (voir Fig. 3.17) et le diagramme de Voronoi centré.

L'histogramme de la figure 5.22 et la table 5.3, montrent que :

- la répartition du nombre de voisins des cellules du diagramme de Poisson-Voronoi est, parmi les tessellations étudiées, celle avec l'écart-type le plus élevé, c'est-à-dire une plus grande dispersion du nombre de voisins ;
- au contraire, le diagramme de Voronoi centré, est la tessellation la plus proche d'une tessellation hexagonale (85.49% de cellules ayant 6 voisins, et 99,89% ayant 5, 6 ou 7 voisins) ;
- et enfin, le diagramme de hardcore Voronoi de type II a une distribution proche des tessellations simulées par SKIZ des h -maxima de réalisations de champs aléatoires gaussiens, et surtout pour la covariance de Bessel.

TABLE 5.3 – Part de cellules avec 5, 6 ou 7 voisins pour différents types de tessellations.

| Tessellation | Poisson Voronoi | Hardcore Voronoi | Voronoi centré | Gauss $h = 0.3$ | Bessel $h = 0.3$ |
|-------------------|-----------------|------------------|----------------|-----------------|------------------|
| % 5, 6, 7 voisins | 74.28 | 88.46 | 99.89 | 85.15 | 88.73 |

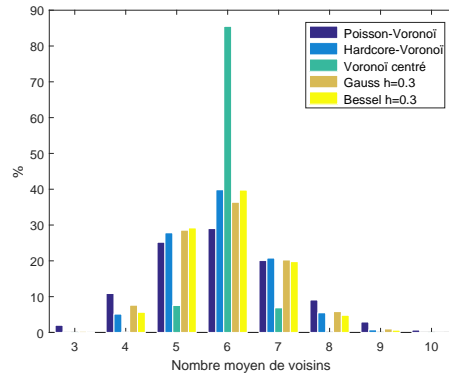


FIGURE 5.22 – Histogramme du nombre de cellules voisines pour différentes tessellations : Poisson-Voronoi, hardcore Voronoï de type II, Voronoï centré et 10^6 cellules simulées par SKIZ des h -maxima, pour $h = 0.3$, et pour la covariance gaussienne et de Bessel.

5.2.2 Aires et périmètres des cellules

I - Comparaison selon h L'aire et le périmètre des 10^6 cellules obtenues par SKIZ des h -maxima de réalisations de champs aléatoires gaussiens de fonctions de covariance gaussienne et de Bessel et pour différentes valeurs de h , sont calculés et la densité estimée de la même façon que dans le paragraphe 5.1.2.3.

La figure 5.23 montre l'estimation normalisée de la densité des aires des cellules. Pour les deux fonctions de covariance (sauf pour Bessel avec $h = 0$), nous pouvons observer une diminution de la hauteur du pic de la distribution et une plus longue queue de distribution quand h augmente. Cela signifie qu'il y a un peu plus de cellules avec une aire plus grande que la moyenne quand h augmente. En ce qui concerne la moyenne, il y a peu d'écarts pour la covariance gaussienne, et elle diminue quand h augmente pour la covariance de Bessel avec $h \neq 0$. Pour la covariance de Bessel avec $h = 0$, la courbe montre la présence de cellules de petites aires, et un écart-type plus élevé que pour les autres valeurs de h , c'est-à-dire une plus grande disparité des aires des cellules.

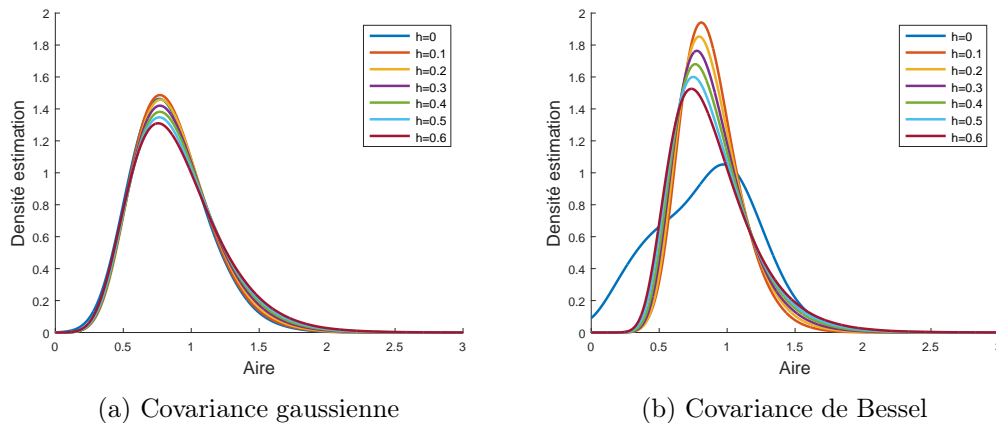


FIGURE 5.23 – Estimation normalisée de la densité des aires de 10^6 cellules obtenues par SKIZ des h -maxima pour (a) la covariance gaussienne et (b) de Bessel.

De la même façon, la figure 5.24 montre l'estimation normalisée de la densité des périmètres. Pour la covariance gaussienne, le périmètre des cellules a tendance à diminuer quand h augmente et la hauteur du pic à augmenter. Pour la covariance de Bessel avec $h \neq 0$, comme pour la covariance gaussienne, le périmètre des cellules a tendance à diminuer quand h augmente, mais par contre la hauteur du pic a tendance à diminuer. Et enfin pour la covariance de Bessel avec $h = 0$, comme pour l'aire, l'estimation de la densité du périmètre montre une plus grande disparité de la taille des cellules que pour les autres valeurs de h , mais également une plus grande quantité de cellules avec un grand périmètre qu'avec un petit périmètre.

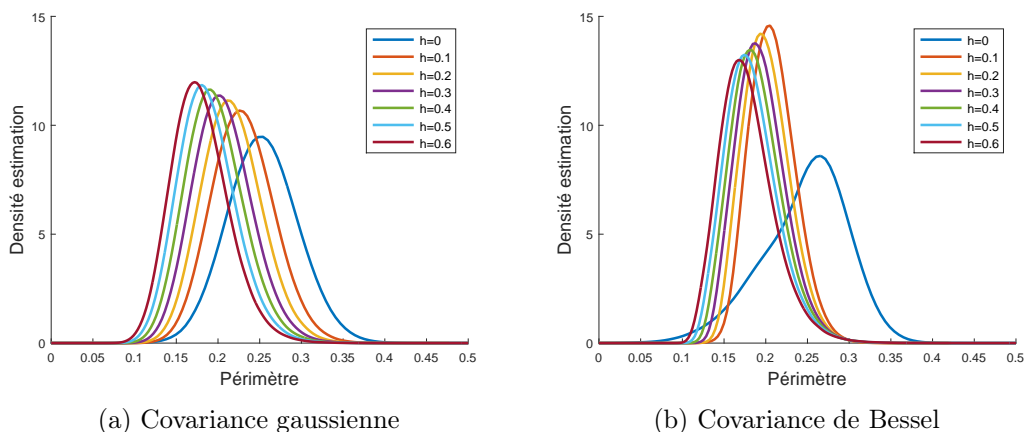


FIGURE 5.24 – Estimation normalisée de la densité des périmètres de 10^6 cellules obtenues par SKIZ des h -maxima pour (a) la covariance gaussienne et (b) de Bessel.

II - Comparaison avec d'autres tessellations La figure 5.25 montre la comparaison des densités estimées des aires et des périmètres de cellules de différentes tessellations : les cellules obtenues à partir des h -maxima des champs aléatoires pour $h = 0.3$, les cellules du diagramme de Poisson-Voronoi, de hardcore Voronoï de type II et de Voronoï centré.

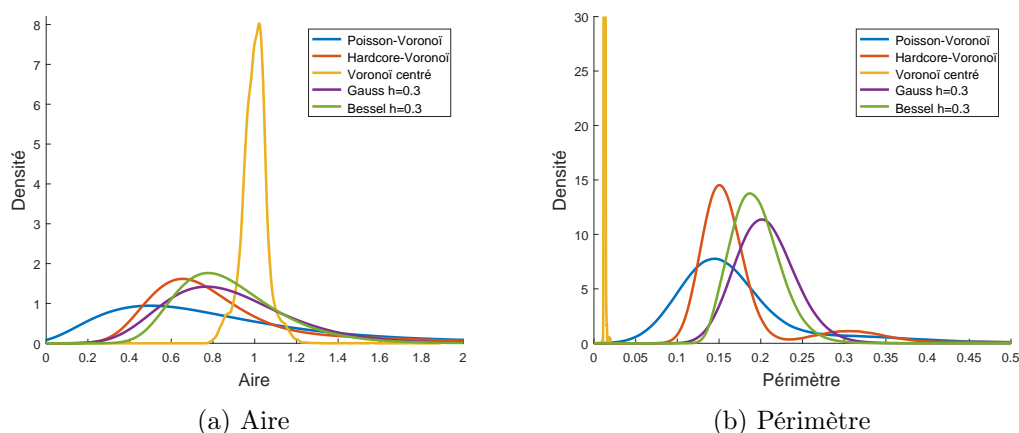


FIGURE 5.25 – Estimation de la densité de l'aire et du périmètre des cellules de différentes tessellations : Poisson-Voronoi, hardcore Voronoï de type II, Voronoï centré et 10^6 cellules simulées par SKIZ des h -maxima, pour $h = 0.3$, et pour la covariance gaussienne et de Bessel.

Les courbes permettent de voir que :

- les aires pour la covariance gaussienne sont plus dispersées que pour Bessel, les moyennes des aires sont similaires, et les périmètres de la covariance gaussienne ont tendance à être plus grands ;
- pour les diagrammes de Poisson-Voronoi, les aires et périmètres des cellules sont bien plus dispersées que pour les autres tessellations étudiées ici, ce qui indique que c'est la tessellation la plus irrégulière ;
- pour hardcore Voronoi, c'est la tessellation dont la densité des aires et périmètres est la plus proche de celles obtenues à partir des champs aléatoires. Notons tout de même que la moyenne pour l'aire et le périmètre est plus petit, et que les distributions sont un peu plus dispersées ;
- la densité des aires et périmètres des cellules de la tessellation de Voronoi centrée est très différente des autres, car on voit que la taille des cellules est beaucoup moins dispersée, et le périmètre des cellules est beaucoup plus petit. Rappelons que d'après le théorème du nid d'abeille (voir la section 3.1, [Hal01]), la partition du plan en surfaces égales ayant le plus petit périmètre, est le pavage hexagonal. Comme cela se voit à l'œil nu sur les images des tessellations (Fig. 3.20), cette tessellation est beaucoup plus régulière que les autres et est très proche du pavage hexagonal.

5.2.3 Fonctionnelles morphométriques des cellules

Les distributions bi-dimensionnelles des diagrammes de formes \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 de 10^6 cellules obtenues par SKIZ des h -maxima, avec $h = 0, 0.2, \dots, 0.6$, de réalisations de champs aléatoires gaussiens de fonctions de covariances gaussienne et de Bessel sont représentés dans les figures ci-dessous (Fig. 5.26, 5.27, 5.28 et 5.29).

Pour la covariance gaussienne (Fig. 5.26 et 5.28), aucune différence n'est visible sur les diagrammes de formes quand h augmente.

De même, pour la covariance de Bessel (Fig. 5.27 et 5.29), aucune différence n'est visible quand h augmente, à part pour $h = 0$. Pour $h = 0$, il y a plus de cellules étalées (écart entre diamètre de Feret minimum w et maximum d élevé, rayon du cercle inscrit r nul, ...).

La forme des cellules n'a donc pas de lien avec la valeur du paramètre h .

II - Comparaison avec d'autres tessellations Les distributions bi-dimensionnelles des diagrammes \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 de cellules pour $h = 0, 3$ et pour les deux fonctions de covariances, sont comparées à ceux de cellules de tessellations de Poisson-Voronoi, hardcore Voronoi de type II et Voronoi centrée, voir les Fig. 5.30 et 5.31.

Ces figures montrent que :

- entre les deux fonctions de covariances : pour les deux diagrammes, les distributions sont un peu moins dispersées pour la covariance de Bessel, ce qui est le signe d'une plus grande homogénéité de la forme des cellules ;

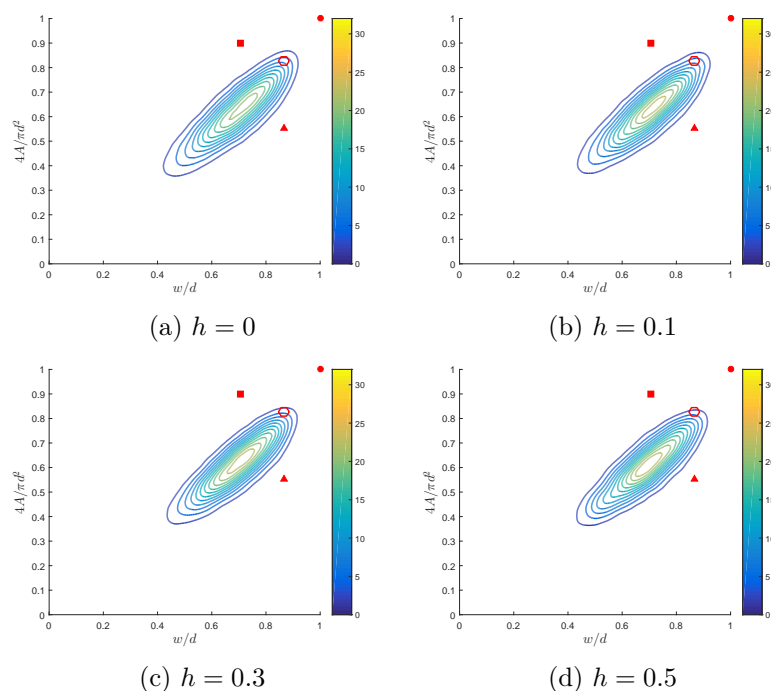


FIGURE 5.26 – Distribution du diagramme \mathcal{D}_1 de cellules obtenues par SKIZ des h -maxima pour la **covariance gaussienne** et pour différentes valeurs de h . Toutes les 2 unités sont marquées par une courbe de niveau. Le disque, l’hexagone, le carré et le triangle équilatéral sont représentés.

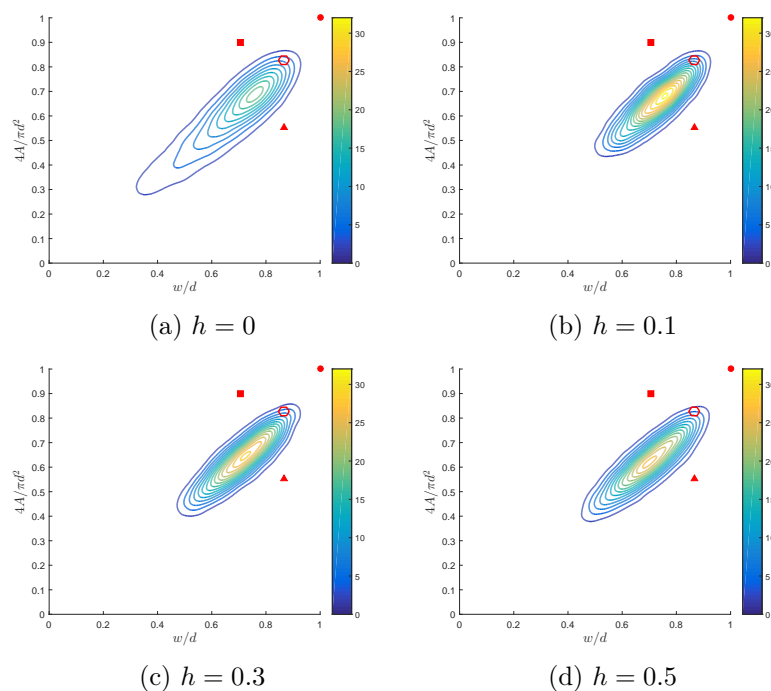


FIGURE 5.27 – Distribution du diagramme \mathcal{D}_1 de cellules obtenues par SKIZ des h -maxima pour la **covariance de Bessel** et pour différentes valeurs de h . Toutes les 5 unités sont marquées par une courbe de niveau. Le disque, l’hexagone, le carré et le triangle équilatéral sont représentés.

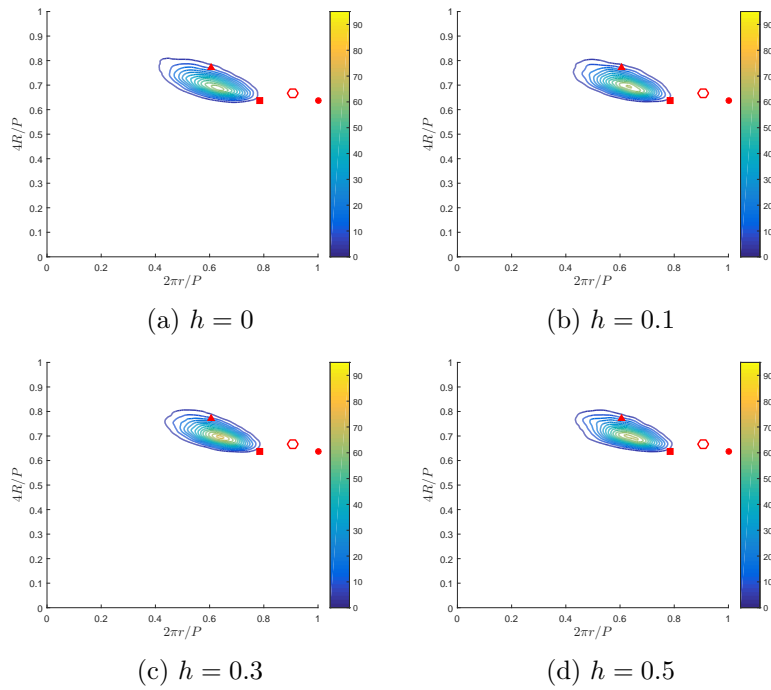


FIGURE 5.28 – Distribution du diagramme \mathcal{D}_2 de cellules obtenues par SKIZ des h -maxima pour la **covariance gaussienne** et pour différentes valeurs de h . Toutes les 2 unités sont marquées par une courbe de niveau. Le disque, l’hexagone, le carré et le triangle équilatéral sont représentés.

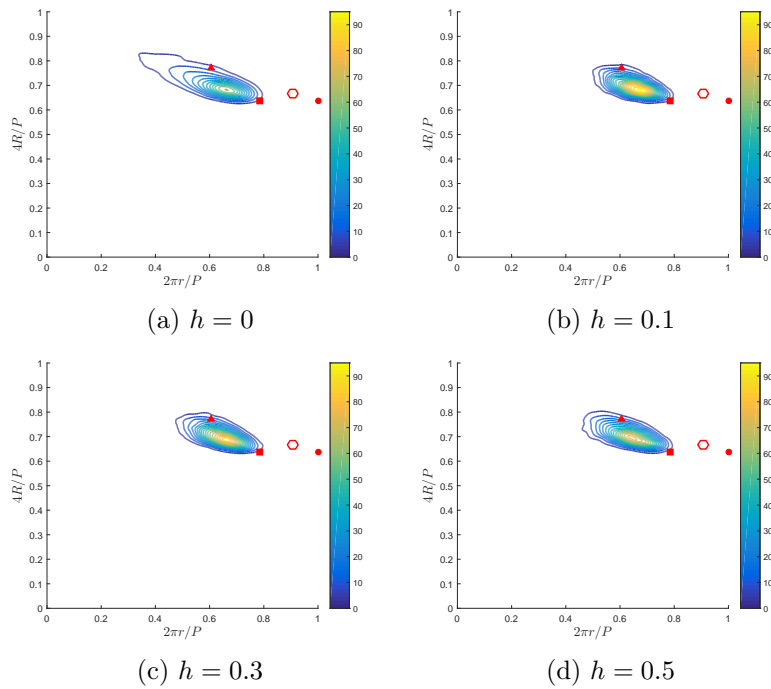


FIGURE 5.29 – Distribution du diagramme \mathcal{D}_2 de cellules obtenues par SKIZ des h -maxima pour la **covariance de Bessel** et pour différentes valeurs de h . Toutes les 5 unités sont marquées par une courbe de niveau. Le disque, l’hexagone, le carré et le triangle équilatéral sont représentés.

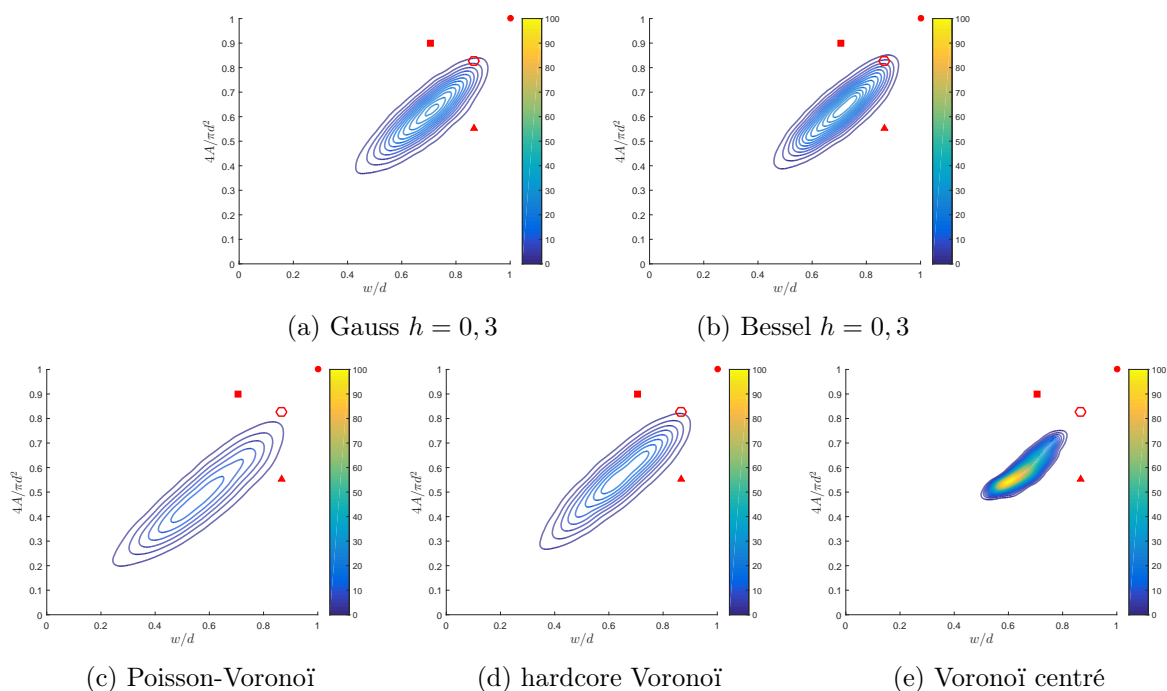


FIGURE 5.30 – Distribution du diagramme \mathcal{D}_1 de cellules de différentes tessellations : Poisson-Voronoi, hardcore Voronoi de type II, Voronoi centré et cellules simulées par SKIZ des h -maxima, pour $h = 0, 3$. Toutes les 2 unités sont marquées par une courbe de niveau. Le disque, l'hexagone, le carré et le triangle équilatéral sont représentés.

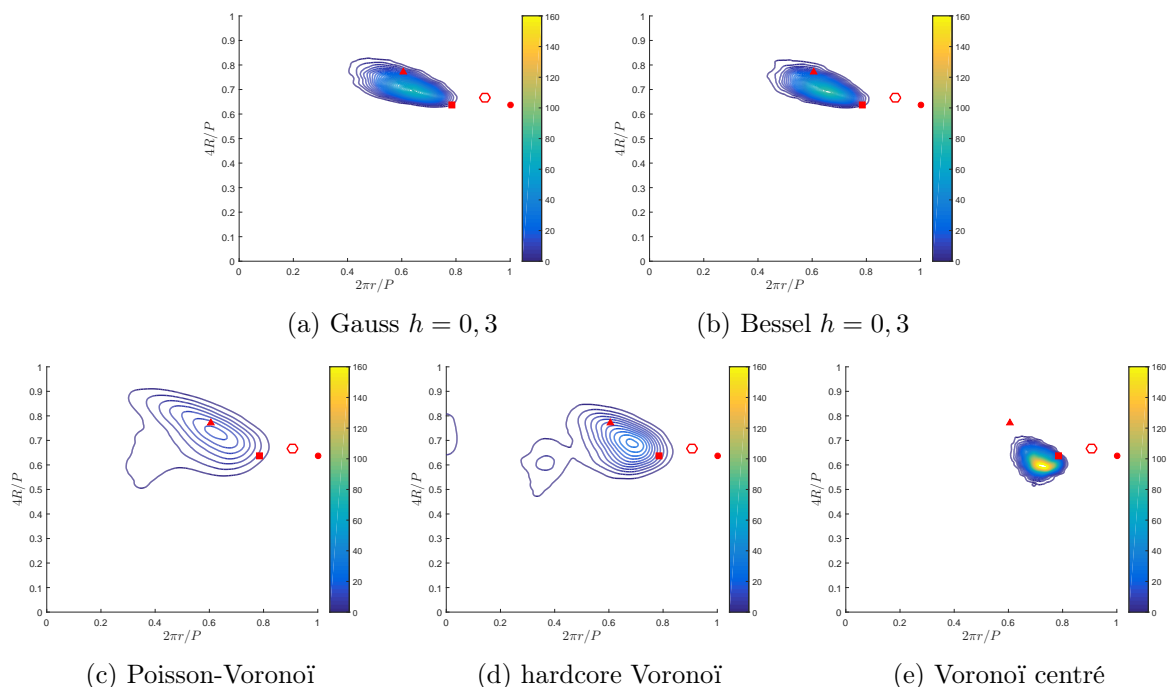


FIGURE 5.31 – Distribution du diagramme \mathcal{D}_2 de cellules de différentes tessellations : Poisson-Voronoi, hardcore Voronoi de type II, Voronoi centré et cellules simulées par SKIZ des h -maxima, pour $h = 0, 3$. Toutes les 2 unités sont marquées par une courbe de niveau. Le disque, l'hexagone, le carré et le triangle équilatéral sont représentés.

- pour Poisson-Voronoi et hardcore Voronoi de type II, les distributions sont clairement plus dispersées vers les petites valeurs pour le diagramme \mathcal{D}_1 et $2\pi r/P$, ce qui indique que les cellules ont des formes moins circulaires, et cela est d'autant plus vrai pour Poisson-Voronoi. Pour la quatrième fonctionnelle morphométrique, $4R/P$, les densités sont également plus dispersées, mais vers des plus grandes et plus petites valeurs. Globalement, hardcore Voronoi de type II a des formes plus variées que les tessellations obtenues à partir des h -maxima de champs aléatoires, et les cellules de Poisson-Voronoi ont des formes plus variées que hardcore Voronoi ;
- et enfin, pour la tessellation Voronoi centrée, les cellules sont moins dispersées, surtout pour le deuxième diagramme.

5.2.4 Conclusion

L'étude du nombre de voisins, des aires et périmètres, et des fonctionnelles morphométriques des cellules de tessellations obtenues par SKIZ des h -maxima de champs aléatoires gaussiens de fonction de covariance gaussienne et de Bessel ($h \neq 0$), a montré que quand h augmente :

- la proportion de cellules ayant 6 voisins, et 5, 6 ou 7 voisins décroît ;
- l'aire normalisée des cellules est stable en moyenne, et le périmètre décroît mais la quantité de grandes cellules augmente ;
- les fonctionnelles morphométriques sont plutôt stables, ce qui veut dire que les formes des cellules ne varient pas avec la variation de h .

En ce qui concerne les cellules obtenues à partir de la covariance de Bessel, il y a une grande différence entre les maxima locaux (c'est-à-dire les 0-maxima) et les h -maxima avec $h \geq 0$. En effet avec les maxima locaux il y a une plus grande dispersion de la taille et de la forme des cellules, et la présence de toutes petites cellules. Afin de simuler des tessellations proches de l'endothélium cornéen humain, il est donc clairement avantageux de privilégier les h -maxima avec $h \geq 0$ aux maxima locaux.

Les cellules de ces tessellations ont été comparées à trois autres tessellations : le diagramme de Poisson-Voronoi, la tessellation hardcore Voronoi de type II, et la tessellation de Voronoi centrée. Les mesures ont montré que Voronoi centré est plus régulier que hardcore Voronoi qui est plus régulier que Poisson-Voronoi. De plus, hardcore Voronoi est la tessellation la plus proche des tessellations obtenues à partir des h -maxima des champs aléatoires gaussiens étudiés, et avec la covariance de Bessel les tessellations sont plus régulières qu'avec la covariance gaussienne.

5.3 Conclusion

Les tessellations obtenues par les deux premières méthodes présentées dans le chapitre 4 et pour deux fonctions de covariance : la fonction de covariance gaussienne et celle de Bessel, ont été caractérisées ensuite.

Tout d'abord, les germes de ces tessellations, c'est-à-dire les maxima locaux et les h -maxima de réalisations de champs aléatoires gaussiens, qui ont été caractérisés. Les différentes mesures

effectuées ont montré que :

- la distribution spatiale des maxima locaux de réalisations de champs aléatoires gaussiens est plus régulière que celle des processus ponctuels de Poisson ;
- lorsque le paramètre de longueur l des fonctions de covariances augmente, la régularité de la distribution spatiale des maxima locaux augmente ;
- la taille des h -maxima de réalisations de champs aléatoires gaussiens augmente quand h augmente, et la variabilité des tailles et la diminution de formes allongées également ;
- la variabilité des formes de ces h -maxima diminue quand h augmente.

Ensuite, ce sont les cellules des tessellations qui sont caractérisées. Et nous observons que :

- la taille moyenne des cellules est stable quand h augmente, et la quantité de grandes cellules augmente ;
- les formes des cellules ne varient pas avec la variation de h ;
- les tessellations de Voronoï centré sont plus régulières que hardcore Voronoï, qui sont plus régulières que Poisson-Voronoï, et les tessellations simulés par SKIZ des h -maxima est plus proche de hardcore-Voronoï de type II.

Les tessellations simulées par la troisième méthode décrite dans la section 4.3 ne sont pas étudiées dans ce chapitre. Rappelons que cette méthode utilise pour germes les h -maxima et la technique du watershed pour partitionner le plan. Toute l'étude de caractérisation des germes, et en particulier les h -maxima, effectuée Sect. 5.1, permet donc de caractériser les germes de la troisième méthode de simulation de tessellation aléatoires. Quant à l'étude des cellules de ces tessellations, en plus du nombre de voisins, et des fonctionnelles géométriques et morphométriques utilisées Sect.5.2, une mesure de la régularité des contours pourrait être faite.

Par la suite, les mêmes outils utilisés pour caractériser les tessellations aléatoires vont permettre de caractériser la mosaïque endothéliale.

Chapitre 6

Caractérisation et évolution de la mosaïque endothéliale cornéenne humaine

Sommaire

| | | |
|------------|---|------------|
| 6.1 | Base de données | 88 |
| 6.2 | Caractérisation et évolution de la mosaïque endothéliale | 88 |
| 6.2.1 | Densité cellulaire | 89 |
| 6.2.2 | Approche ponctuelle | 90 |
| 6.2.2.1 | Fonctions L , G et g | 90 |
| 6.2.2.2 | Fonctionnelles réduites de Minkowski | 96 |
| 6.2.3 | Approche régionale | 99 |
| 6.2.3.1 | Nombre de côtés (ou de cellules voisines) | 99 |
| 6.2.3.2 | Fonctionnelles géométriques | 102 |
| 6.2.3.3 | Fonctionnelles morphométriques | 103 |
| 6.2.4 | Conclusion | 103 |
| 6.3 | Age de l'endothélium cornéen | 107 |
| 6.3.1 | Tranche d'âge estimée par critère | 107 |
| 6.3.2 | Tranche d'âge estimée | 111 |
| 6.3.3 | Conclusion | 116 |
| 6.4 | Conclusion | 116 |

La qualité de la mosaïque endothéliale cornéenne est importante pour assurer la déturgescence de la cornée et sa transparence. Cette mosaïque hexagonale et régulière à la naissance perd de sa régularité avec l'âge. Dans ce chapitre nous allons étudier l'endothélium cornéen à partir d'une base de 500 images (Sect. 6.1).

Dans la première partie de ce chapitre (Sect.6.2), nous allons quantifier mathématiquement cette évolution en utilisant les mêmes mesures que celles utilisées pour caractériser les tessellations aléatoires dans le chapitre précédent.

Cette caractérisation va ensuite être utilisée, section 6.3, pour estimer l'âge de chaque endothélium, et pour mettre en place une méthode pour savoir si une cornée évolue normalement.

6.1 Base de données

Des images d'endothéliums cornéens de sujets accompagnant des patients lors de consultations ophtalmologiques à l'hôpital ont été prises. Ces endothéliums ne présentent donc a priori aucune maladie ou anomalie cornéenne. Les images ont été acquises par un microscope spéculaire non-contact à faible champs (SP 3000, Topcon, Tokyo, Japan), voir Fig. 6.1a. En tout, 500 images d'endothéliums ont été acquises. Les sujets ont été repartis en 10 tranches d'âges (0-10 ans, 11-20 ans, 21-30 ans, . . . , 91-100 ans). Pour chaque tranche d'âge, la base de données contient 5 sujets, et pour chaque sujet, 5 images de chaque œil : une au centre, et les autres à 3-4 mm du centre, dans la partie inférieure, nasale, supérieure et temporale de l'œil. 10 images par patient ont donc été acquises.

Chaque image a ensuite été segmentée manuellement par la même personne en utilisant ImageJ, voir Fig. 6.1b. De plus l'épaisseur des contours a été uniformisée en utilisant un algorithme d'amincissement [LLS92], voir Fig. 6.1c.

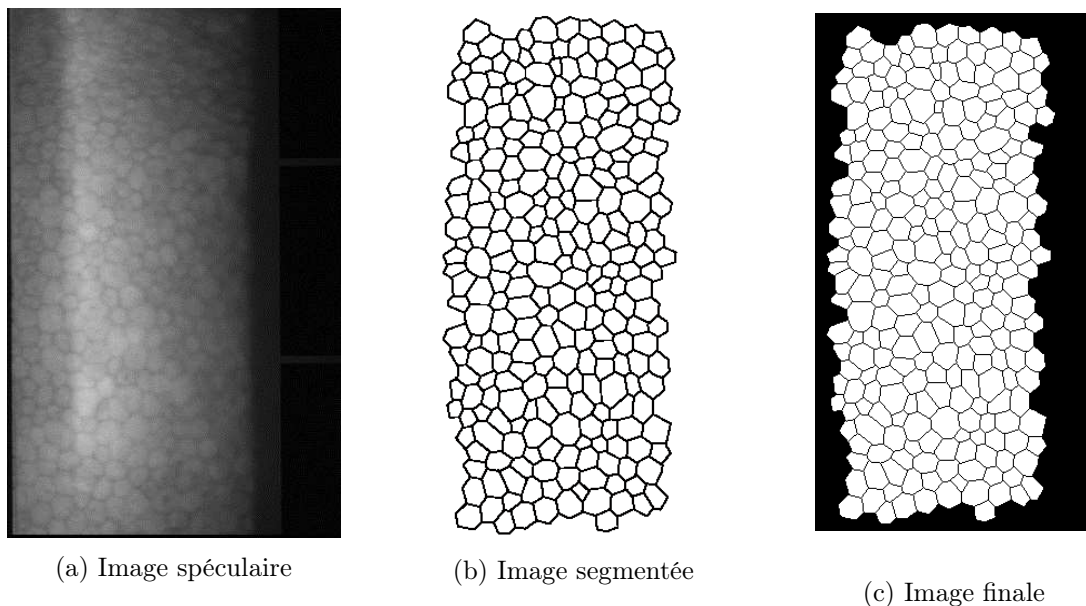


FIGURE 6.1 – Image centrale de l'œil droit d'un sujet de 42 ans. (a) l'image spéculaire, (b) l'image segmentée et (c) l'image finale aux contours uniformisés.

Toutes les images segmentées et aux contours uniformisés de la base de données sont visibles dans l'annexe A.

6.2 Caractérisation et évolution de la mosaïque endothéliale

La caractérisation de la mosaïque endothéliale et son évolution avec l'âge va être effectuée avec les outils utilisés pour caractériser les tessellations aléatoires (voir le Chap. 5).

Les différentes mesures qui vont être calculées sont :

- la densité cellulaire ;

- pour l’approche ponctuelle qui va être réalisée à partir des centres de masses des cellules endothéliales :
 - les fonctions L , G et g ;
 - les fonctionnelles réduites de Minkowski;
- et pour l’approche régionale ;
 - le nombre de côtés (qui est analogue au nombre de cellules voisines) ;
 - les fonctionnelles géométriques des cellules endothéliales que sont l’aire et le périmètre ;
 - les fonctionnelles morphométriques des cellules endothéliales.

Pour chacune de ces mesures, différentes études vont être faites :

- i) caractérisation de l’évolution par tranche d’âge ;
- ii) comparaison aux tessellations étudiées dans le Chap.5 ;
- iii) recherche d’un critère moyen d’évolution avec l’âge de la mosaïque endothéliale cornéenne, ce critère sera utilisé par la suite dans la Sect. 6.3. Notons que pour tout les critères, les sujets 1, 4 et 5 de la tranche 9 ont été supprimés, car les mesures qui ont été effectuées sur ces endothéliums étaient trop éloignées de ce qui était attendu pour des endothéliums de cette décennie.

Dans ce travail nous n’allons pas séparer les images prises au centre de l’endothélium de celles prises en proche périphérie à 3-4 mm du centre. Nous avons calculé les différentes mesures que nous utilisons pour caractériser les tessellations séparément sur les endothéliums centraux et sur ceux en proche périphérie, et aucune différence n’a été notée.

6.2.1 Densité cellulaire

Tout d’abord, la densité des cellules endothéliales est calculée. Rappelons que la densité cellulaire est le critère principal regardé pour connaître la qualité d’un greffon. À la naissance, la densité cellulaire est d’environ 6000 cellules/mm², puis elle diminue progressivement avec l’âge. La densité cellulaire d’un greffon doit être supérieure à 2000 cellules/mm², et une personne devient aveugle lorsque la densité cellulaire est inférieure à 300 – 500 cellules/mm².

i) Caractérisation de l’évolution par tranche d’âge La figure 6.2 montre la densité cellulaire par tranches d’âge (Fig. 6.2a), par sujet (Fig. 6.2b), et le coefficient de variation¹ par tranche d’âge (Fig. 6.2c). Ces figures confirment que la densité cellulaire diminue avec l’âge. De plus le coefficient de variation augmente avec l’âge.

iii) Critère d’évolution Le critère pour la densité cellulaire est tout simplement la densité cellulaire moyenne par tranche d’âge. Ce critère ainsi que son écart-type est visible sur la figure 6.2d, et décroît strictement.

1. Le coefficient de variation est la variance divisé par la moyenne.

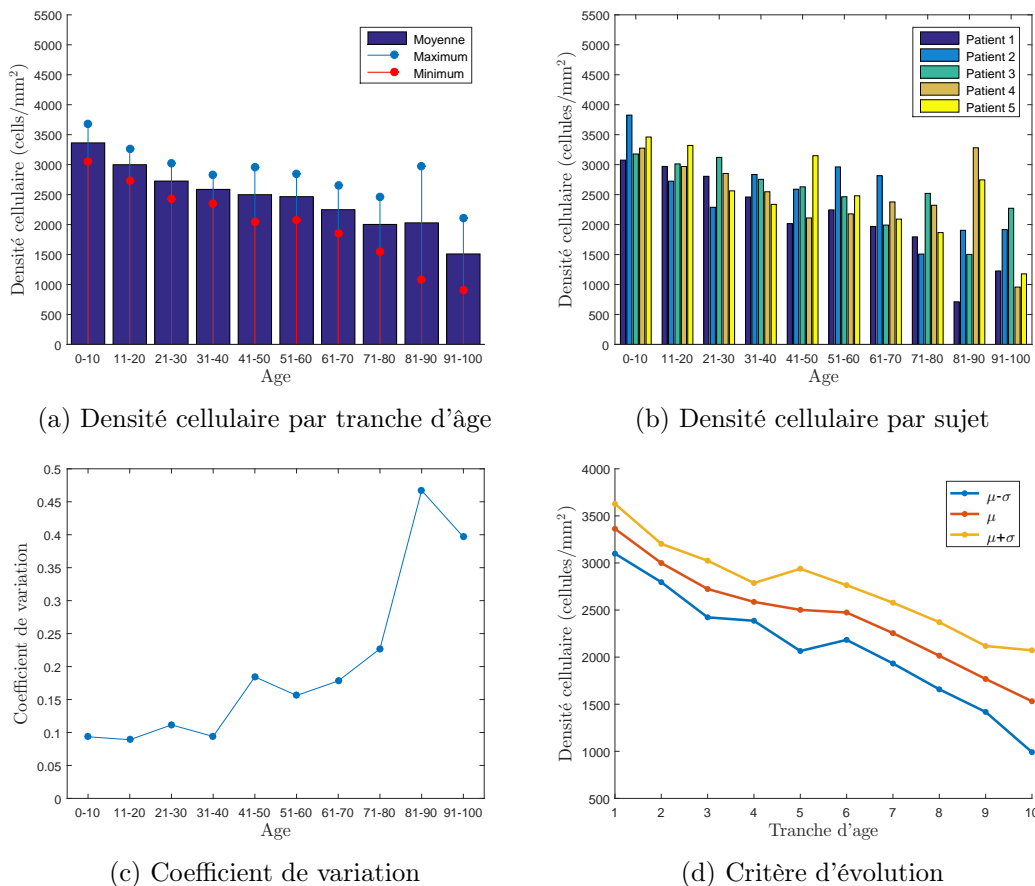


FIGURE 6.2 – La densité cellulaire moyenne des endothéliums cornéens humains (a) par tranche d'âge, (b) par sujet, et (c) l'évolution du coefficient de variation. (d) Le critère pour la densité cellulaire et son écart-type.

6.2.2 Approche ponctuelle

L'approche ponctuelle consiste à étudier une tessellation à partir des germes de la tessellation dans le cas de simulation (comme cela a été effectué sect. 5.1) ou des centres de masses des cellules, et à caractériser la distribution spatiale de ces germes ou centres de masses des cellules. Comme les centres de masses des cellules endothéliales cornéennes sont des points, leur distribution spatiale va être caractérisée comme les maxima locaux dans la section. 5.1.1.

6.2.2.1 Fonctions L , G et g

Rappelons que les fonctions L , G et g (définies respectivement dans les sections 3.2.4.1, 3.2.4.2 et 3.2.4.3), donnent des informations sur la répartition spatiale des centres de masses des cellules, et par conséquent sur la distance entre les centres des cellules, qui peut être reliée au diamètre des cellules.

Remarquons que pour les cellules endothéliales, nous ne nous intéressons pas à la fonction de distribution de contact sphérique F , définie sect. 3.2.4.2, car les images de l'endothélium cornéen sont trop petites et de ce fait l'estimation de la fonction n'est pas possible à partir

d'une certaine distance (voir Fig. 6.3).

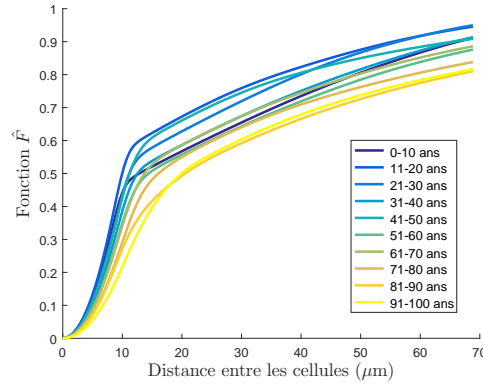


FIGURE 6.3 – Fonction de distribution de contact sphérique F par tranches d'âge.

i) Caractérisation de l'évolution par tranche d'âge Pour chaque tranche d'âge, la moyenne des fonctions L de Ripley, des fonctions G et des fonctions de corrélation g de chaque image a été calculée, et a été comparées au processus ponctuel de Poisson. Pour les fonctions G et g des processus ponctuels de Poisson, qui dépendent de l'intensité, le premier processus ponctuel de Poisson a pour intensité :

$$\lambda_{p1} = \min_{i=1, \dots, N_t} \bar{\lambda}_i, \quad (6.1)$$

où $\bar{\lambda}_i$ est l'intensité moyenne de la i -ème tranche d'âge et N_t est le nombre de tranches d'âges. Le deuxième processus a pour intensité :

$$\lambda_{p2} = \max_{i=1, \dots, N_t} \bar{\lambda}_i. \quad (6.2)$$

Les résultats sont représentés dans la figure 6.5.

Tout d'abord, notons que quelle que soit la tranche d'âge, la fonction L de Ripley des centres de masses des cellules endothéliales est inférieure à celle du processus ponctuel de Poisson, et la fonction G est inférieure pour les petites distances. Tout cela indique une régularité de la répartition spatiale des centres de masses des cellules endothéliales.

Pour toute tranche d'âge i , soient

$$r_{L,1,i} = \max \{r > 0 \mid L_i(r) = 0\}, \quad (6.3)$$

$$r_{G,1,i} = \max \{r > 0 \mid G_i(r) = 0\}, \quad (6.4)$$

$$r_{G,2,i} = \min \{r > 0 \mid G_i(r) = 1\}. \quad (6.5)$$

Ces trois réels sont illustrés dans la figure 6.4.

Pour chaque tranche d'âge, $\forall i > j$, $r_{L,1,i} > r_{L,1,j}$ et $r_{G,1,i} > r_{G,1,j}$, cela indique que la distance minimale entre les centres de masses augmente avec l'âge. Pour la fonction G , notons également qu'en général quand $i > j$, alors $r_{G,2,i} > r_{G,2,j}$, ce qui signifie que la distribution spatiale est

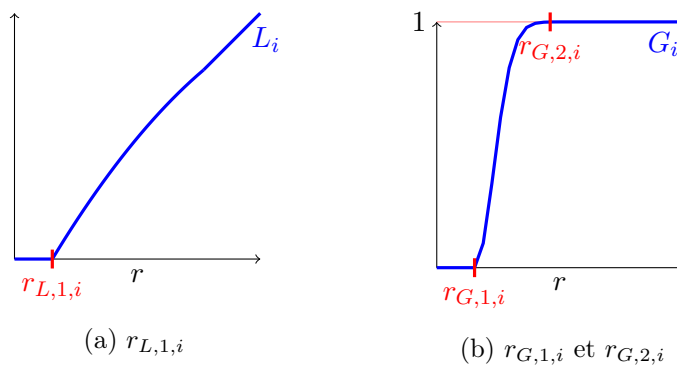


FIGURE 6.4 – Illustration des réels $r_{L,1,i}$, $r_{G,1,i}$ et $r_{G,2,i}$.

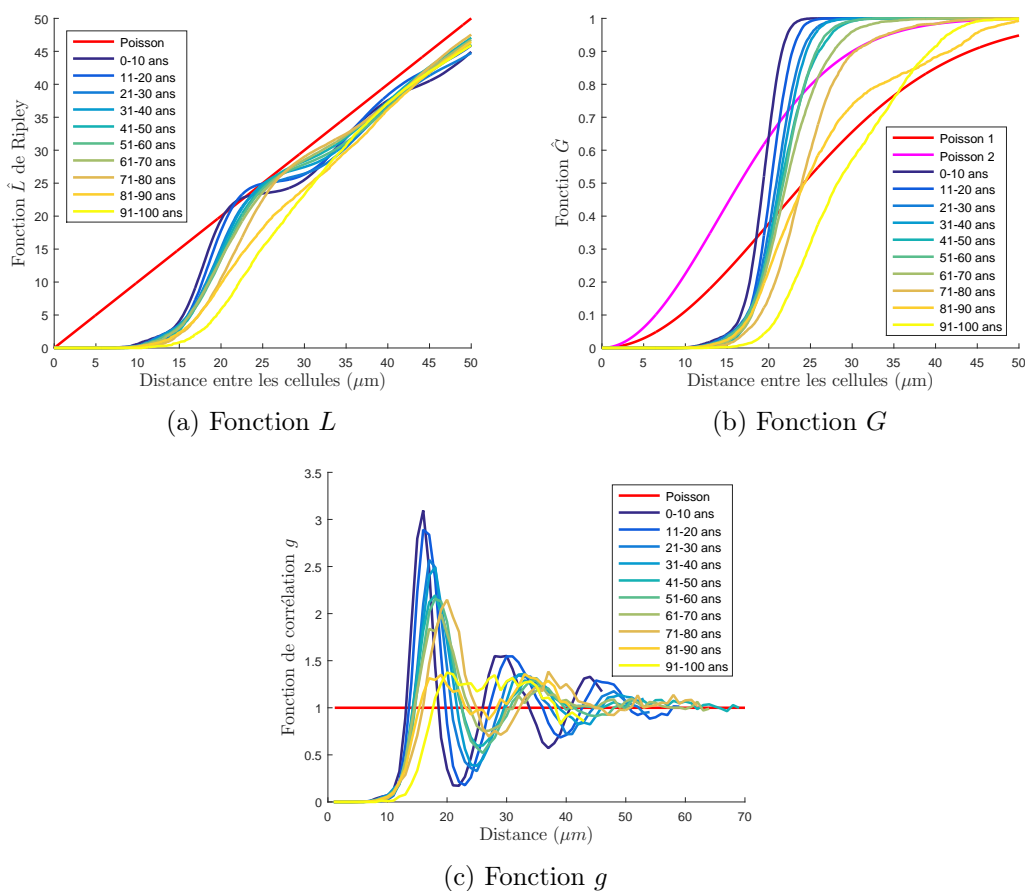


FIGURE 6.5 – Les fonctions L , G et g pour chaque tranche d'âge comparées au processus ponctuel de Poisson.

plus homogène pour les plus petites tranches d'âges. De plus les oscillations de la fonction L pour les plus petites tranches d'âges indiquent que l'homogénéité de la distance entre les centres de masses décroît avec l'âge, et le premier rebond (quand il existe) indique la distance maximale entre centres de masses de cellules voisines.

Pour la fonction de corrélation g , l'amplitude des oscillations diminue avec l'âge et la période augmente, et pour les dernières tranche d'âge, il n'y a plus d'oscillations. Cela signifie qu'il y a

plus de régularité et d'homogénéité de la distance entre les centres de masses des cellules pour les petites tranches d'âges.

ii) Comparaison à d'autres tessellations Les fonctions L , G et g des tranches d'âges 1 et 10 sont comparées dans la figure 6.6 à d'autres processus de points : hardcore de type II et les centres des cellules de tessellations de Voronoï centré. Pour le processus hardcore 1, l'intensité est égale à

$$\lambda_{h1} = \max_{i=1, \dots, N_t} \bar{\lambda}_i, \quad (6.6)$$

où $\bar{\lambda}_i$ est l'intensité moyenne de la i -ème tranche d'âge, N_t est le nombre de tranches d'âges, et le rayon hardcore à

$$R_1 = \min_{i=1, \dots, N_t} \bar{R}_i, \quad (6.7)$$

où \bar{R}_i est le rayon hardcore moyen de la i -ème tranche d'âge. Pour hardcore 2, l'intensité est

$$\lambda_{h2} = \min_{i=1, \dots, N_t} \bar{\lambda}_i \quad (6.8)$$

et le rayon hardcore

$$R_2 = \max_{i=1, \dots, N_t} \bar{R}_i. \quad (6.9)$$

De plus les diamètres moyen de centré 1 et 2 sont égaux respectivement à R_1 et R_2 .

Pour les tessellations hardcore Voronoï et Voronoï centré, la croissance de la fonction L est plus rapide à partir de R_1 (resp. R_2) que pour les mosaïques endothéliales. Cela signifie que la distance minimale entre points est plus souvent proche de R_1 (resp. R_2) pour ces tessellations. D'autre part, les centres des cellules endothéliales de la tranche 1 (les plus jeunes) ont une répartition spatiale proches de ceux des cellules de la tessellation de Voronoï centré. Pour ce qui est des centres des cellules de la tranche 10 (les plus vieux), elles ont une répartition spatiale plus proche des centres des cellules de hardcore-Voronoï.

iii) Critère d'évolution Le but de cette partie est de trouver un critère ou plusieurs critères, pour chaque fonction, évoluant de façon monotone avec l'âge, comme pour la densité cellulaire, voir la Fig. 6.2d, afin d'avoir une bijection entre le critère et la tranche d'âge.

Fonction L de Ripley Pour la fonction L de Ripley, le premier critère est $c_{L,1}$ qui est pour chaque tranche d'âge la distance moyenne à partir de laquelle la fonction L n'est plus nulle, par exemple pour la tranche i , le critère est :

$$c_{L,1,i} = \frac{1}{N_I} \sum_{j=1}^{N_I} r_{1,j}, \quad (6.10)$$

où N_I est le nombre d'images de la tranche i et

$$r_{1,j} = \max \{r > 0 \mid L_j(r) = 0\}. \quad (6.11)$$

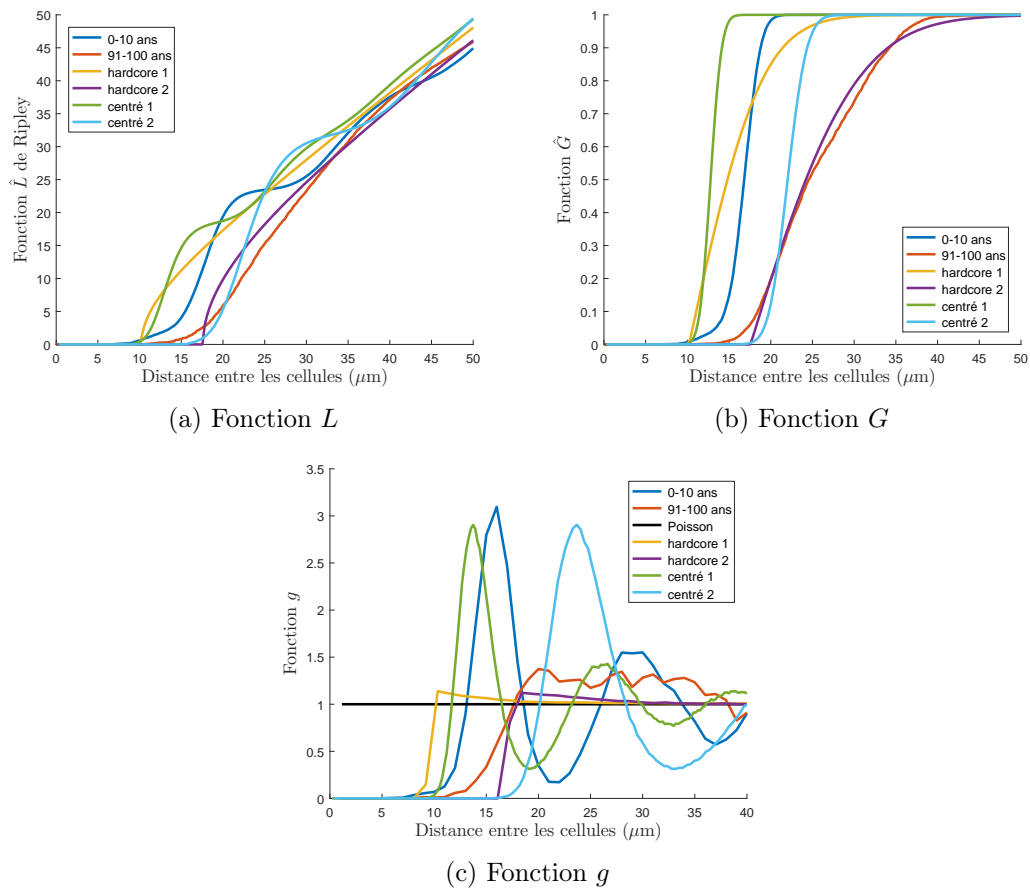


FIGURE 6.6 – Les fonctions L , G et g des tranches d'âges 1 et 10 comparées à d'autres processus de points : hardcore de type II et les centres des cellules de tessellations de Voronoï centré.

L'idée du deuxième critère $c_{L,2}$ est de calculer la distance à laquelle la première oscillation de la fonction apparaît. Pour calculer cette distance, c'est la fonction $H = L - r$ qui va être utilisée, voir la Fig.6.7. La première oscillation de la fonction L correspond au maximum de la fonction H sur l'intervalle $[r_{1,j}, +\infty[$.

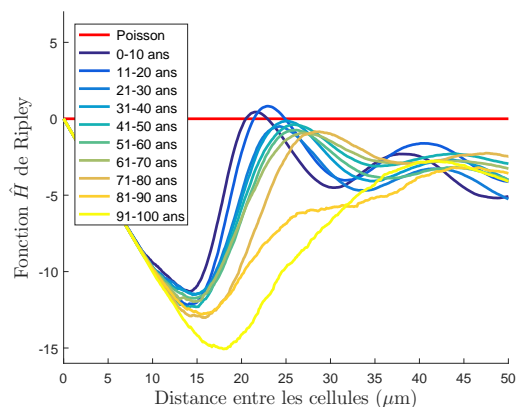


FIGURE 6.7 – Fonction H de Ripley par tranches d'âges.

La moyenne et l'écart-type par tranche d'âge de ces deux critères sont représentés dans la figure 6.8. Nous pouvons voir que le premier critère $c_{L,1}$ est stable jusqu'à la 7ème tranche d'âge et croît ensuite, de plus l'écart-type est grand, ce critère n'est donc pas bon pour discriminer les tranches d'âges. Quand au deuxième critère $c_{L,2}$, sa croissance est monotone et l'écart-type est faible, il semble être un bon critère et sera utilisé dans la section 6.3.

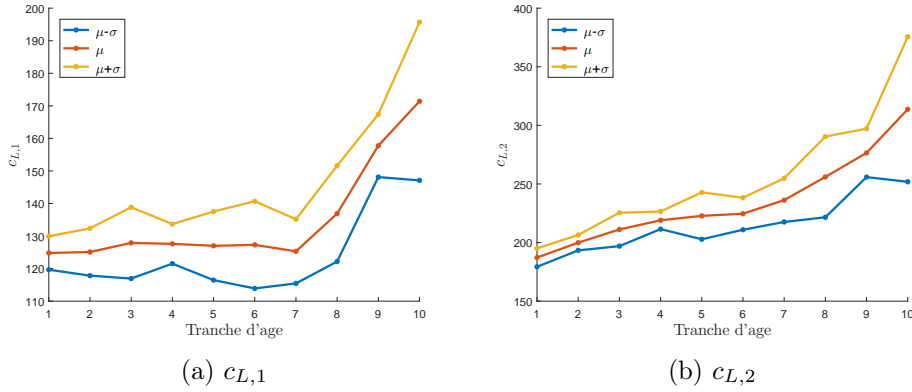


FIGURE 6.8 – Évolution des critères $c_{L,1}$ et $c_{L,2}$ de la fonction de Ripley par tranche d'âge.

Fonction G Comme pour la fonction L , de nombreux critères ont été testés pour mesurer l'évolution de l'endothélium cornéen. Deux critères ont été retenus : $c_{G,1}$ est le résultat de l'équation $G(r) = 0,5$, et $c_{G,2}$ est le résultat de l'équation $G(r) = 1$ (ce critère correspond à $r_{G,2,i}$, voir l'eq. 6.5).

La moyenne et l'écart-type de ces deux critères pour chaque tranche d'âge sont représentés dans la Fig. 6.9.

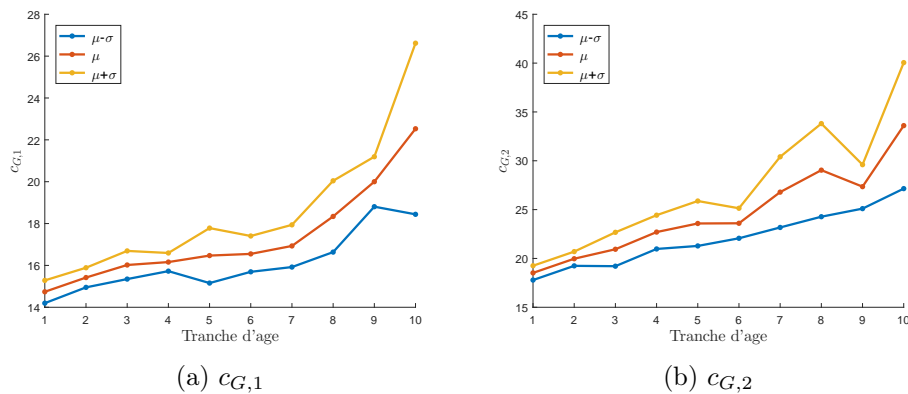


FIGURE 6.9 – Évolution des critères $c_{G,1}$ et $c_{G,2}$ de la fonction G .

Nous voyons que ces deux critères ont une croissance stricte (hormis un problème avec la tranche 9 pour le 2ème critère), cependant la croissance est très faible entre la 3ème et la 7ème tranche d'âge.

Fonction de corrélation g Pour la fonction de corrélation g , la grande dispersion des courbes par tranche d'âge, et les courbes très perturbées pour les dernières tranches d'âges font que la recherche d'un critère ayant une évolution monotone et un faible écart-type est difficile. Le critère choisi est la pente faisant suite au premier rebond, voir Fig. 6.10a.

Soit g une fonction de corrélation calculée sur $[1, r_{max}]$. Soient :

- $g_1 = \max g(r)$, pour $r \in [1, \min(3r_{g,0}, r_{max})]$, où $r_{g,0} = \max \{r > 0 \mid g(r) = 0\}$,
- r_1 vérifie $g_1 = g(r_1)$ et $r_1 \in [1, \min(3r_{g,0}, r_{max})]$,
- $g_2 = \min g(r)$, pour $r \in [r_1, \min(1, 5r_1, r_{max})]$,
- r_2 vérifie $g_2 = g(r_2)$ et $r_2 \in [r_1, \min(1.5r_1, r_{max})]$.

La pente est alors :

$$c_g = \frac{g_1 - g_2}{r_2 - r_1}.$$

De plus, si le deuxième rebond n'est pas suffisamment marqué, comme c'est le cas pour la courbe de la tranche 10 sur la figure 6.6c, le choix a été fait de donner la valeur 0 à la pente lorsque $g_2 \geq 0.8$.

La figure 6.10b montre la pente moyenne de chaque tranche d'âge, ainsi que l'écart-type.

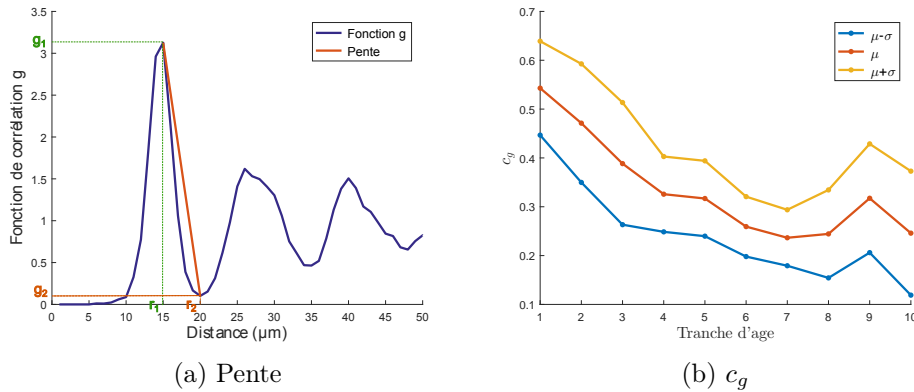


FIGURE 6.10 – (a) Exemple de la pente calculée et (b) évolution du critère c_g de la fonction de corrélation en fonction de la tranche d'âge.

Cette courbe est strictement décroissante jusqu'à la 7ème tranche d'âge; au-delà, il ne semble pas possible de faire une différence entre les tranches d'âges. Ce critère, contrairement au précédent permet cependant de faire une distinction entre la 3ème et la 7ème tranche d'âge.

6.2.2.2 Fonctionnelles réduites de Minkowski

i) Caractérisation de l'évolution par tranche d'âge Les moyennes des fonctionnelles réduites de Minkowski, définies sect. 3.2.4.4, sont calculées pour chaque tranche d'âge et sont comparées aux processus ponctuels de Poisson d'intensité λ_{p1} et λ_{p2} définies par les équations 6.1 et 6.2. Ces fonctionnelles sont représentées dans la figure 6.11.

Ces figures montrent que les courbes des fonctionnelles réduites de Minkowski se décalent vers la droite avec l'âge. Cela signifie que les disques, utilisés pour dilater les centres de masses, sont en contact et recouvrent entièrement la fenêtre pour de plus grandes distances. La distance

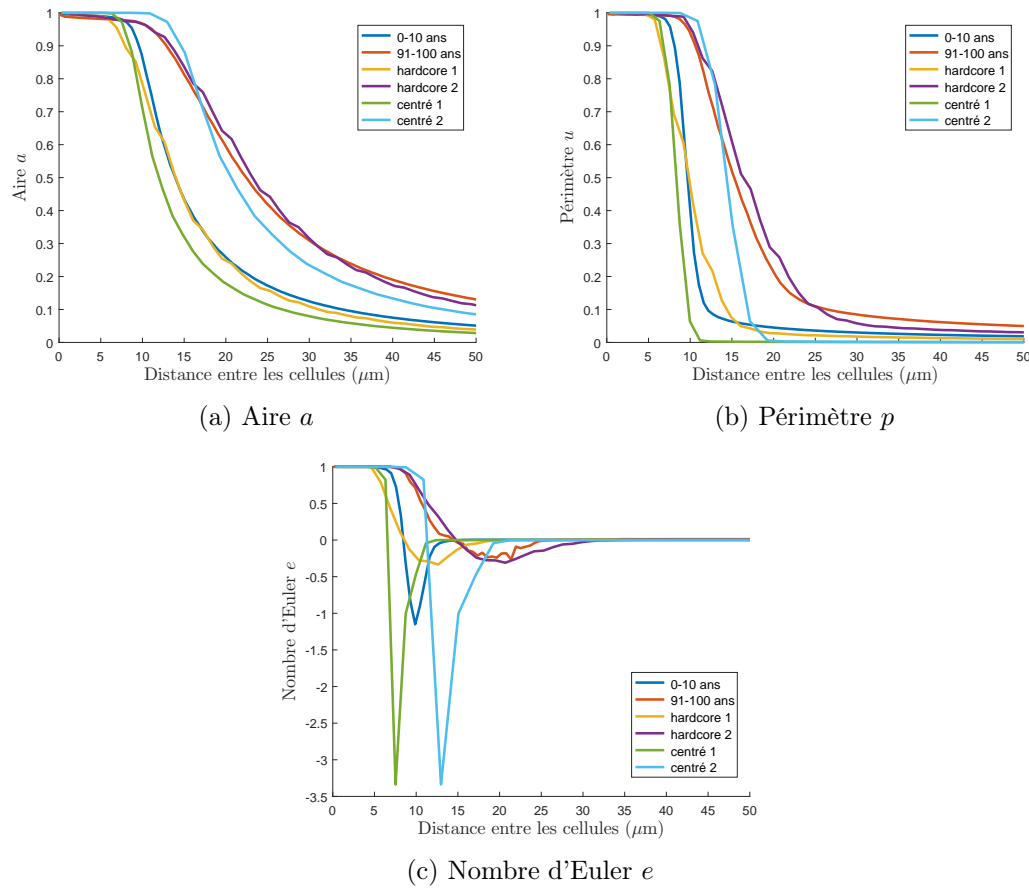


FIGURE 6.11 – Les fonctionnelles réduites de Minkowski par tranches d'âges comparées au processus ponctuel de Poisson.

entre centres de masses croit donc avec l'âge. De plus, comme pour la fonction G , distinguer les courbes des tranches d'âges entre 21 et 70 ans est difficile.

Quant au nombre d'Euler réduit e , plus la tranche d'âge est petite, plus la valeur minimum de e est faible, il y a donc une plus grande quantité de trous dans les composantes connexes, et la distance entre centres de masses des cellules est donc plus homogène pour les petites tranches d'âges.

D'autre part, la distance entre points des processus ponctuels de Poisson est moins régulière et la distance minimale est plus petite que pour les centres de masses des cellules endothéliales.

ii) Comparaison à d'autres tessellations La figure 6.12 montre la comparaison entre les fonctionnelles réduites de Minkowski de la tranche 1, 10, de tessellations hardcore-Voronoi et de Voronoi centré de mêmes paramètres que dans le paragraphe 6.2.2.1.

Ces figures montrent que la répartition spatiale des centres des cellules centrées est plus régulière que les autres, et que les tessellations hardcore Voronoi sont plus proches de la tranche 10 que de la 1.

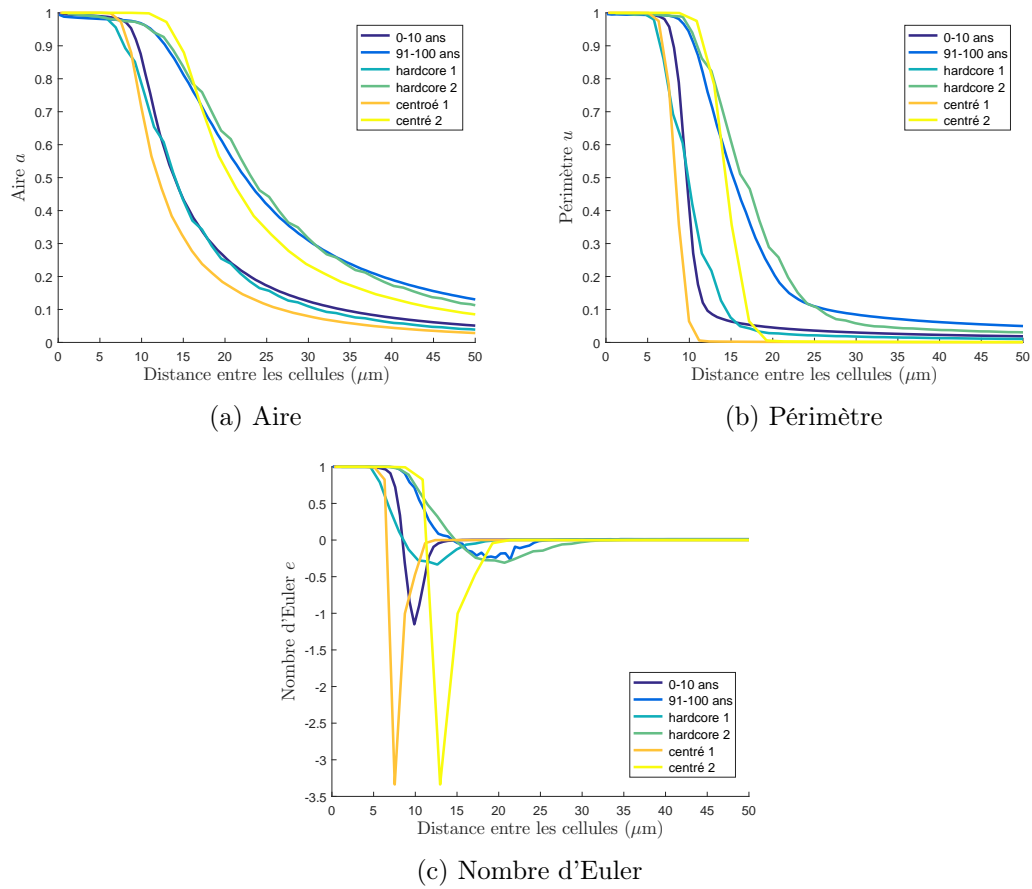


FIGURE 6.12 – Comparaison des fonctionnelles réduites de Minkowski à d'autres tessellations : les tessellations hardcore Voronoï de type II et les tessellations de Voronoï centré.

iii) Critère d'évolution Pour l'aire et le périmètre réduit des centres des cellules endothéliales, les critères sont les résultats des équations $a(r) = 0.3$ et $u(r) = 0.3$, et seront notés respectivement c_a et c_u . Pour le nombre d'Euler réduit, c_e est la distance à laquelle le nombre d'Euler est égal à zéro et l'est pour les distances supérieures :

$$c_e = \min \{ r > 0 \mid e(r) = 0 \text{ et } \forall r' > r, e(r') = 0 \}. \quad (6.12)$$

La figure 6.13 montre la moyenne et l'écart-type des critères c_a , c_u et c_e en fonction des tranches d'âge. Ces trois critères ont une croissance stricte avec l'âge.

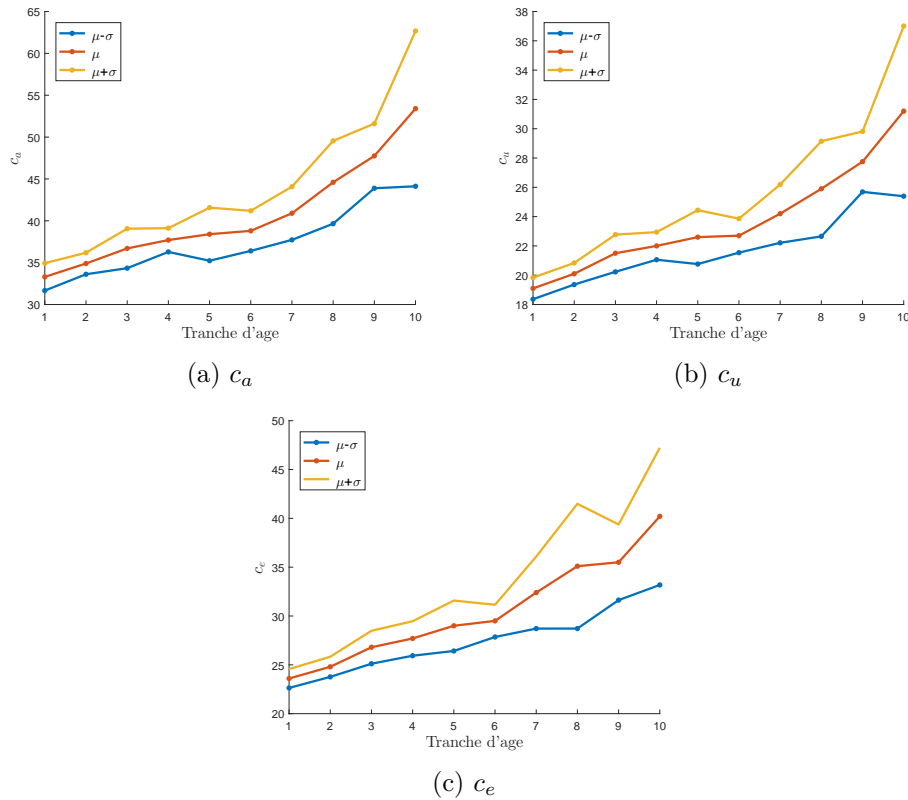


FIGURE 6.13 – Évolution des critères c_a , c_u et c_e en fonction des tranches d'âge.

6.2.3 Approche régionale

L'approche régionale consiste à étudier la géométrie et la morphométrie des cellules. Pour cela les mesures qui vont être étudiées en fonction de la tranche d'âge des endothéliums cornéens sont :

- le nombre de côtés des cellules endothéliales cornéennes ;
- les fonctionnelles géométriques des cellules que sont l'aire et le périmètre ;
- et les fonctionnelles morphométriques des cellules.

6.2.3.1 Nombre de côtés (ou de cellules voisines)

Pour caractériser la qualité d'un greffon, un des critères actuel est le nombre moyen de côtés des cellules, qui doit être proche de 6. Ce critère va donc être étudié.

i) Caractérisation de l'évolution par tranche d'âge Le nombre moyen de cellules voisines par tranche d'âge, la part de cellules hexagonales et la distribution du nombre de voisins sont représentés dans la Fig. 6.14.

Le nombre moyen de voisins varie peu (entre 5,9 et 6), et n'a pas d'évolution visible avec l'âge. Ce n'est donc pas une bonne mesure pour distinguer l'âge de mosaïques endothéliales saines. Par contre, la part de cellules hexagonales décroît avec l'âge. D'après la figure 6.14b, la décroissance de la part de cellules hexagonales va de paire avec une croissance des cellules

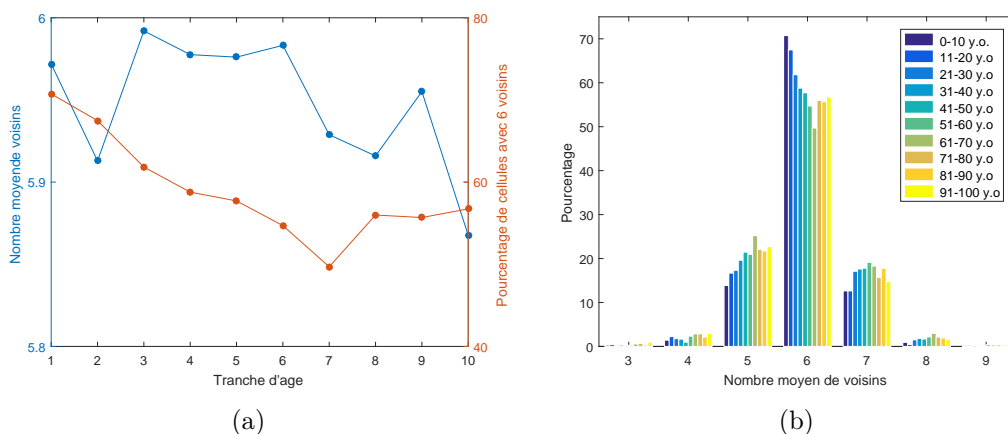


FIGURE 6.14 – (a) Nombre moyen de voisins (courbe bleue) et part des cellules hexagonales par décennie (courbe rouge), et (b) distribution du nombre de voisins.

pentagonales, et dans une moindre mesure, une augmentation des cellules heptagonales. Cela confirme ce qui est déjà connu des ophtalmologistes : avec l'âge la mosaïque endothéliale diverge du pavage hexagonal régulier.

ii) Comparaison à d'autres tessellations La distribution du nombre de côtés de la tranche 1 et 10 est comparée à celles des tessellations de Poisson-Voronoi d'intensités λ_{p1} et λ_{p2} (éq.6.1 et 6.2), de hardcore Voronoi d'intensités λ_{h1} et λ_{h2} (éq.6.6 et 6.8) et de rayon hardcore $R1$ et $R2$ (éq.6.7 et 6.9), et de Voronoi centré, voir Fig. 6.15.

Cette figure montre que les mosaïques endothéliales sont, quel que soit leur âge, moins homogènes en terme de nombre de côtés que la tessellation de Voronoi centré et plus homogènes que les tessellations de Poisson-Voronoi et hardcore Voronoi.

De plus, le tableau 6.1, montre que la part de cellules pentagonales, hexagonales ou heptagonales est entre celle des tessellations hardcore Voronoi et centrées.

Le nombre moyen de voisins a également été calculé pour ces différentes tessellations, et il est, comme pour les mosaïques endothéliales, toujours proche de 6. Cette mesure n'est clairement pas une bonne mesure pour caractériser et discriminer les tessellations.

TABLE 6.1 – Pourcentage de cellules avec 5, 6 ou 7 voisins pour différents types de tessellations.

| Tessellation | Tranche 1 | Tranche 10 | Poisson 1 | Poisson 2 | Hardcore 1 | Hardcore 2 | Centroidal |
|-------------------|-----------|------------|-----------|-----------|------------|------------|------------|
| % 5, 6, 7 voisins | 97,25 | 94,22 | 74,63 | 74,445 | 85,54 | 84,53 | 99,89 |

iii) Critère d'évolution La figure 6.16 illustre l'évolution de quatre critères :

1. la part de cellules pentagonales ;
2. la part de cellules hexagonales ;
3. la part de cellules heptagonales ;
4. la part de cellules pentagonales, hexagonales ou heptagonales.

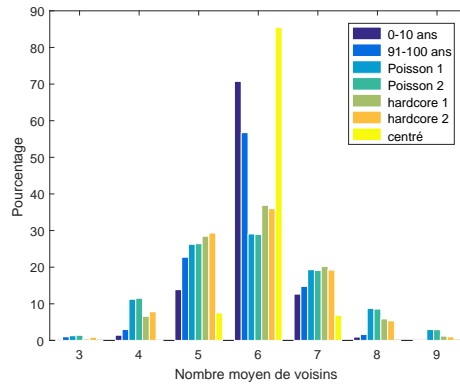


FIGURE 6.15 – Comparaison de la distribution du nombre de voisins des tranches 1 et 10 à la distribution d’autres tessellations : les tessellations hardcore Voronoï de type II et les tessellations de Voronoï centré.

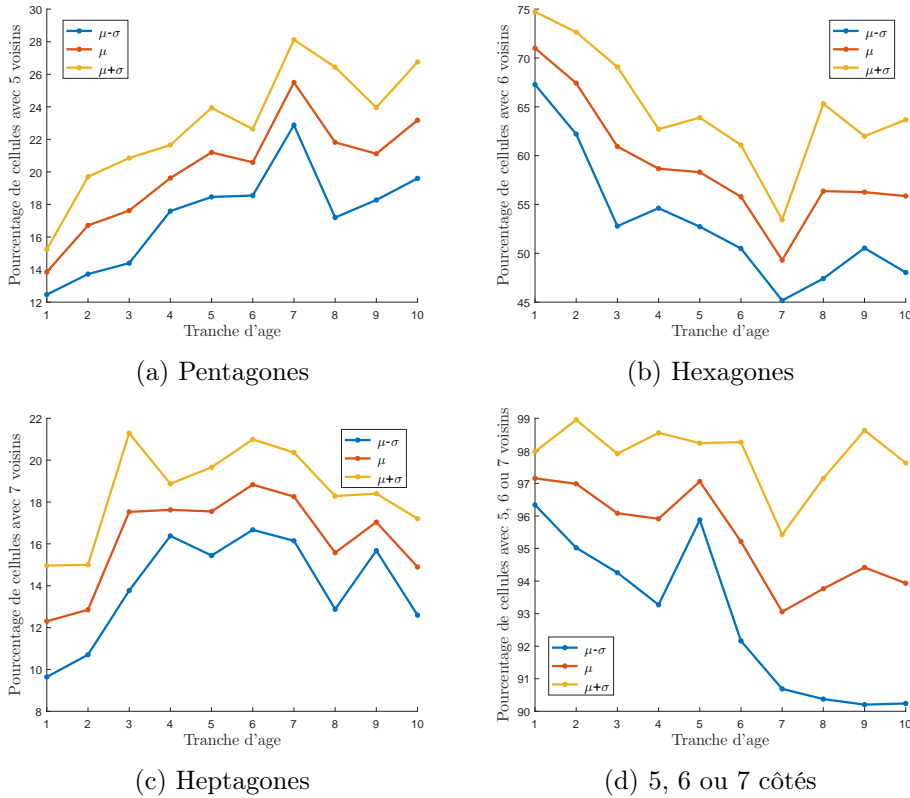


FIGURE 6.16 – Critères pour le nombre de voisins.

Ces courbes montrent que la mesure du nombre de côtés et les critères sélectionnés ne sont pas bons pour distinguer l’âge d’une mosaïque endothéliale cornéenne. Ceci car il n’y a pas d’évolution claire et monotone, et que l’écart-type est trop important pour chaque tranche d’âge.

6.2.3.2 Fonctionnelles géométriques

Les fonctionnelles géométriques auxquelles nous nous intéressons ici sont l'aire et le périmètre des cellules, via l'estimation de leurs densités par la méthode décrite dans la sect.5.1.2.3.

i) Caractérisation de l'évolution par tranche d'âge La figure 6.17 montre l'estimation de la densité des aires et périmètres des cellules endothéliales en fonction de la tranche d'âge.

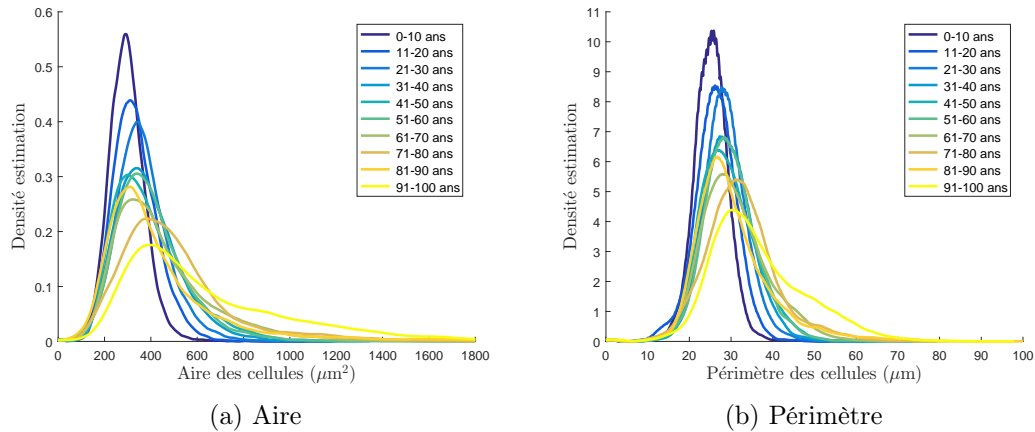


FIGURE 6.17 – Estimation de la distribution de l'aire et du périmètre des cellules par tranche d'âge.

L'écart-type de l'estimation de la densité des aires et périmètres des cellules croît avec l'âge (c'est-à-dire que la dispersion autour du pic augmente). Cela indique une croissance de l'hétérogénéité de la géométrie des cellules.

ii) Comparaison à d'autres tessellations La densité normalisée des aires et des périmètres des cellules des tranches 1 et 10 sont comparées à celles de diagrammes de Poisson-Voronoi, hardcore Voronoi de rayons hardcore R_1 et R_2 , et Voronoi centré, voir la Fig. 6.18.

Les courbes montrent que les cellules endothéliales pour la tranche 1 comme pour la tranche 10 sont, en terme d'aire et de périmètre, moins homogènes que les cellules de Voronoi centré, et plus homogènes que celles de Poisson et hardcore Voronoi. Notons que pour l'aire, la tranche 10 et hardcore Voronoi ont un écart-type proche, mais que juste la moyenne et l'asymétrie des distributions diffèrent.

iii) Critère d'évolution Les critères utilisés ici pour évaluer l'évolution des estimations de la densité des aires, notée \hat{f}_A , et des périmètres, notée \hat{f}_P , sont :

- $c_{A,1} = \max \hat{f}_A$ et $c_{P,1} = \max \hat{f}_P$;
- la moyenne $c_{A,2}$ et $c_{P,2}$ des distribution \hat{f}_A et \hat{f}_P ;
- et l'écart-type $c_{A,3}$ et $c_{P,3}$ des distribution \hat{f}_A et \hat{f}_P .

La figure 6.19 montre la moyenne et l'écart-type de chaque critère par tranche d'âge.

Les premiers critères $c_{A,1}$ et $c_{P,1}$ décroissent strictement jusqu'à la tranche 5, mais pas ensuite. Pour les critères $c_{A,2}$ et $c_{P,2}$, la croissance est stricte, ce qui donne une bijection entre la tranche

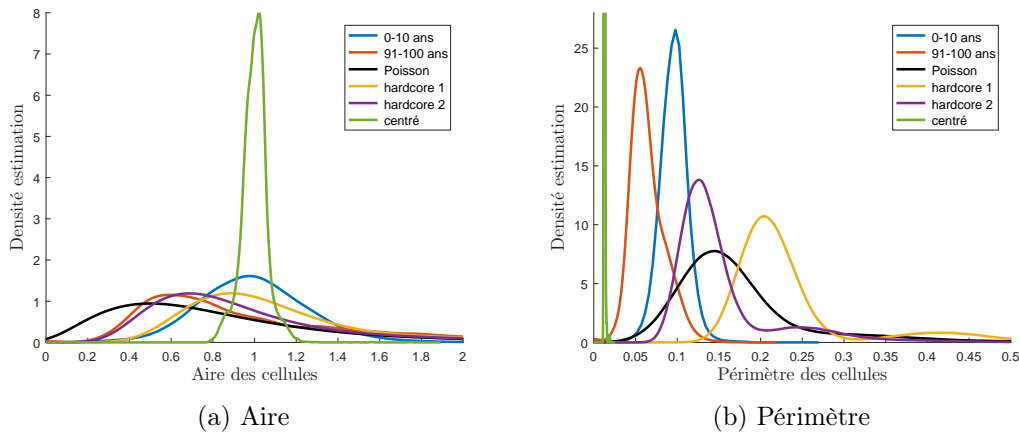


FIGURE 6.18 – Comparaison de l’estimation de la distribution de l’aire et du périmètres des cellules de la tranche 1 et 10, à celles d’autres tessellations : Poisson-Voronoi, hardcore Voronoi et Voronoi centré. Comparaison de la distribution du nombre de voisins des tranches 1 et 10 à la distribution d’autres tessellations : les tessellations hardcore Voronoi de type II et les tessellations de Voronoi centré. Une seule courbe est présentée pour Voronoi centré, car les distributions des aires et périmètres des cellules sont identiques quel que soit le rayon hardcore.

d’âge et le critère. Et les critères $c_{A,3}$ et $c_{P,3}$ croissent aussi, mais pas strictement car les courbes décroissent à la 9ème tranche d’âge.

6.2.3.3 Fonctionnelles morphométriques

i) Caractérisation de l’évolution par tranche d’âge Les fonctionnelles morphométriques, voir paragraphe 5.1.2.3, sont représentées par des diagrammes de formes. Les diagrammes de formes \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 des cellules endothéliales de trois tranches d’âges sont représentées dans la Fig. 6.20. Les différences sont petites, il n’est donc pas possible de déduire quelque chose de ces représentations.

Pour cela, les estimations de la densité bidimensionnelle des diagrammes sont montrées pour quelques tranches d’âges dans les figures 6.21 et 6.22. Mise à part une dispersion plus faible des valeurs pour le diagramme \mathcal{D}_1 des deux premières tranches, il n’y a aucune autre grande différence. Notons aussi que les valeurs des fonctionnelles morphométriques des cellules endothéliales sont quel que soit l’âge proche de celles d’un hexagone, à part pour la fonctionnelle $2\pi r/P$.

Comme il n’y a pas d’évolution avec l’âge de ces mesures, aucun critère d’évolution n’a été mis en place.

6.2.4 Conclusion

L’évolution de la mosaïque endothéliale cornéenne humaine a été caractérisée dans cette section en moyennant pour chaque tranche d’âge, les différentes mesures de chaque image de la base de donnée. Cela a permis de mettre en avant :

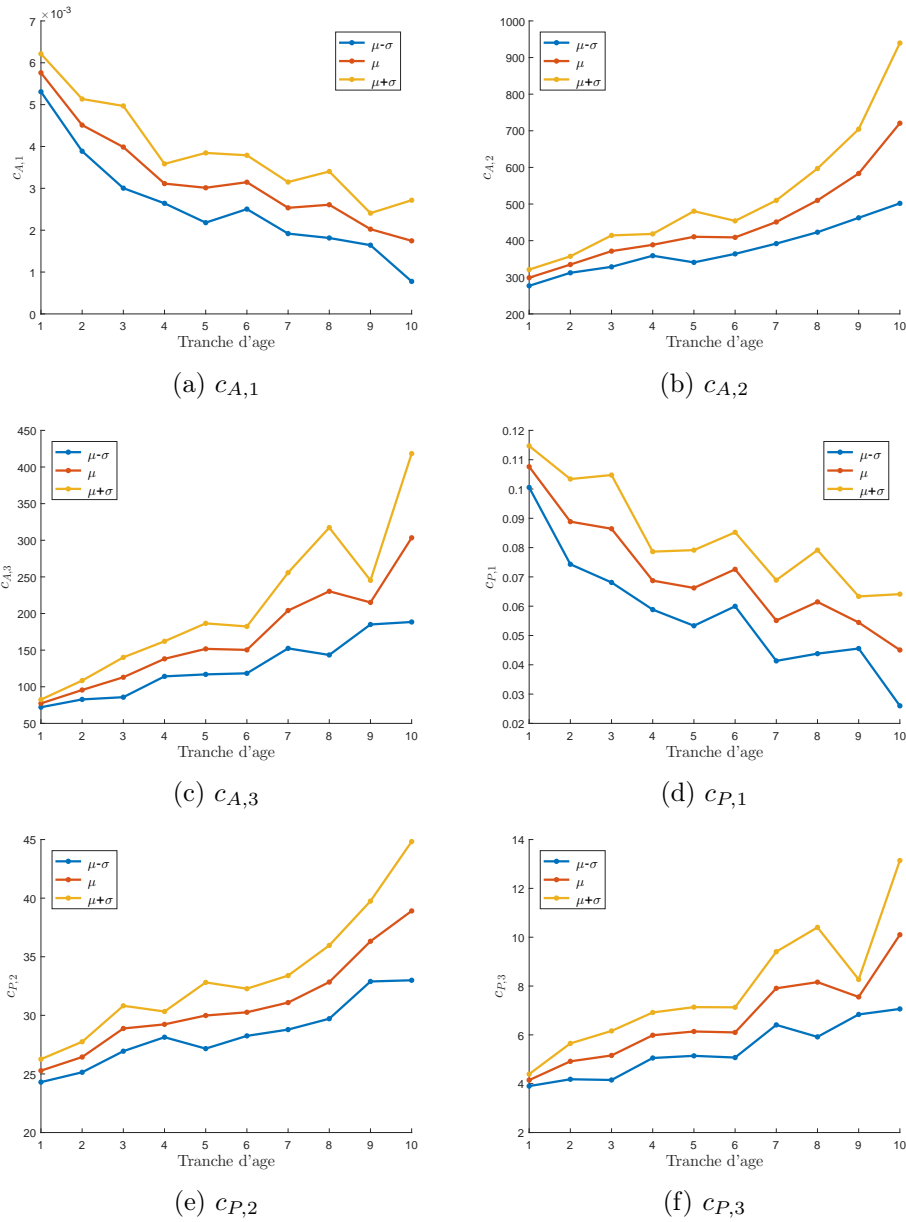


FIGURE 6.19 – Critères d'évolution de la densité des aires et périmètres des cellules endothéliales par tranche d'âge

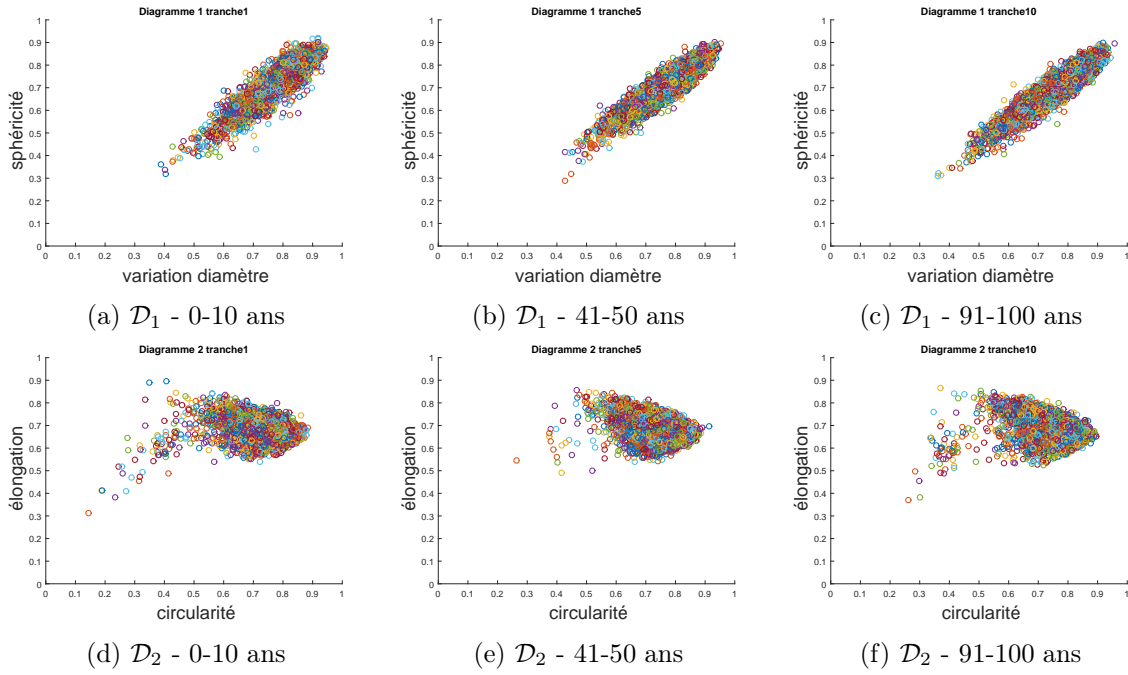


FIGURE 6.20 – Densité des diagrammes de forme \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 des cellules endothéliales pour trois tranches d'âges (0-10, 41-50 et 91-100 ans).

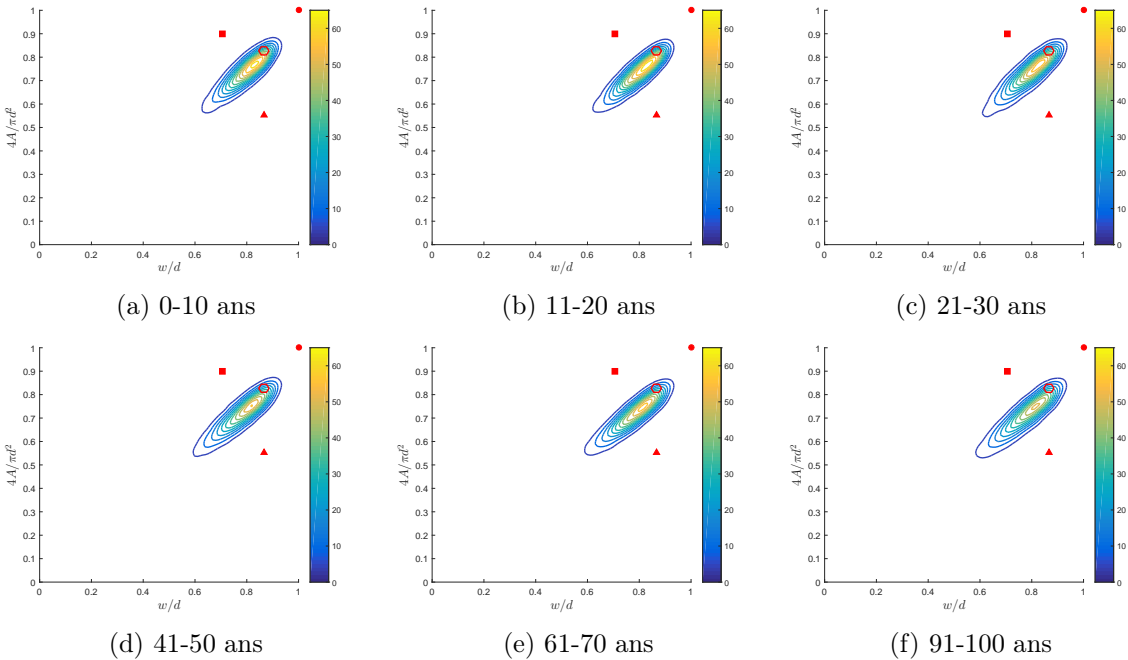


FIGURE 6.21 – Densité du diagramme de forme \mathcal{D}_1 des cellules endothéliales pour quelques tranches d'âges. Toutes les 5 unités sont marquées par une courbe de niveau. Le disque, l'hexagone, le carré et le triangle équilatéral sont représentés.

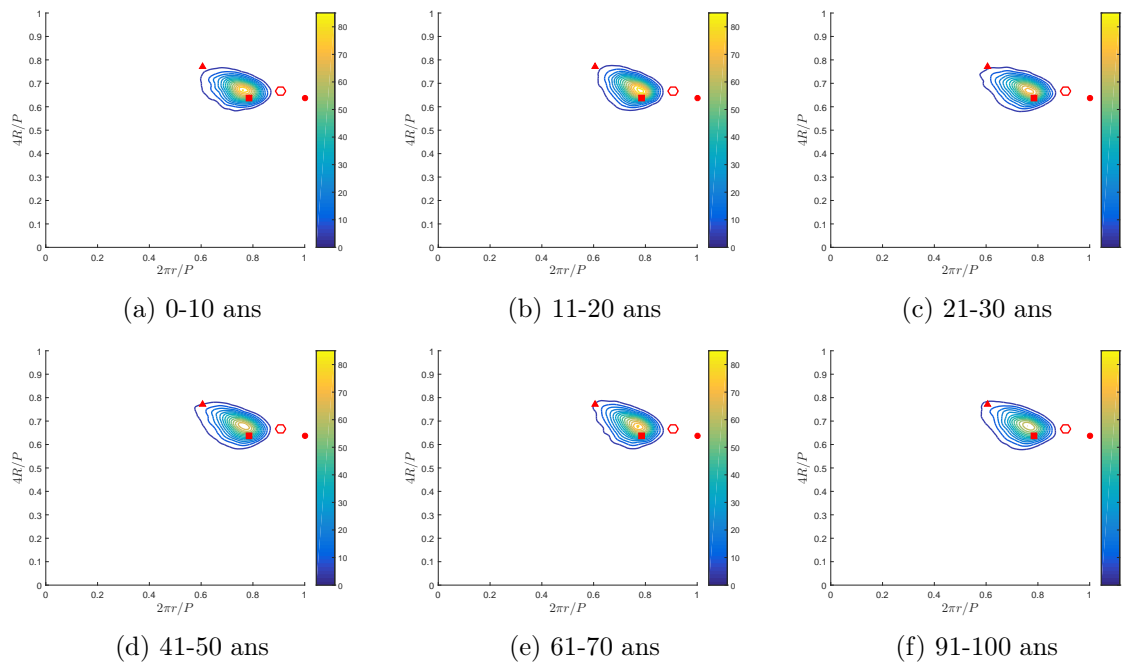


FIGURE 6.22 – Densité du diagramme de forme \mathcal{D}_2 des cellules endothéliales pour quelques tranches d'âges. Toutes les 5 unités sont marquées par une courbe de niveau. Le disque, l'hexagone, le carré et le triangle équilatéral sont représentés.

- que la densité cellulaire diminue avec l'âge et que la variation au sein d'une même tranche d'âge augmente ;
- par l'approche ponctuelle, qu'avec l'âge :
 - la distance minimale entre centre de masses des cellules augmente ;
 - l'homogénéité de la distance entre centres diminue ;
 - et qu'il est difficile pour de nombreuses mesures de différencier les tranches d'âges entre la 3ème et la 7ème tranche ;
- par l'approche régionale, que :
 - le nombre moyen de voisins n'est pas une bonne mesure pour distinguer l'âge d'un endothélium sain ;
 - la part de cellules hexagonales diminue avec l'âge, et la part de cellules pentagonales et heptagonales augmente ;
 - l'hétérogénéité de l'aire et du périmètre des cellules augmente avec l'âge ;
 - et que les fonctionnelles morphométriques évoluent pas ou trop peu pour distinguer une tendance.
- et que les cellules endothéliales sont moins homogènes que les cellules de la tessellation de Voronoï centrée et plus que celles de Poisson-Voronoi et hardcore-Voronoi. De plus, la tranche 1 est plus proche de Voronoï centré et la tranche 10 de hardcore-Voronoi.

Pour chacune des mesures présentant une évolution avec l'âge, un ou plusieurs critères moyen d'évolution ont été mesurés pour chaque tranche d'âge. Ces critères sont considérés comme bon, s'il croit ou décroît strictement avec l'âge. Ces critères sont répertoriés dans le tableau 6.2.

TABLE 6.2 – Critères d'évolution permettant une discrimination de l'âge.

| Critère | Signification | Évolution | Remarque |
|-----------|--|----------------------|---|
| c_d | densité cellulaire | décroissance stricte | |
| $c_{L,2}$ | distance de la 1ère oscillation de la fonction L | croissance stricte | |
| $c_{G,1}$ | résultat de $G(r) = 0,5$ | croissance stricte | croissance faible entre tranche 3 et 7 |
| $c_{G,2}$ | résultat de $G(r) = 1$ | croissance stricte | sauf tranche 9 |
| c_g | deuxième pente | décroissance | décroissance stricte jusqu'à la tranche 7 |
| c_a | résultat de $a(r) = 0,3$ | croissance stricte | |
| c_u | résultat de $u(r) = 0,3$ | croissance stricte | |
| c_e | résultat de $e(r) = 0$ | croissance stricte | |
| $c_{A,2}$ | moyenne de la densité des aires | croissance stricte | |
| $c_{A,3}$ | écart-type de la densité des aires | croissance stricte | sauf pour la tranche 9 |
| $c_{P,2}$ | moyenne de la densité des périmètres | croissance stricte | |
| $c_{P,3}$ | écart-type de la densité des périmètres | croissance stricte | sauf pour la tranche 9 |

6.3 Age de l'endothélium cornéen

Dans cette partie, le but est de donner une estimation de l'âge biologique d'un endothélium cornéen à partir de ces mesures afin de savoir si l'évolution de cet endothélium est normale ou pas.

Des critères d'évolution ont été établis dans la section précédente. Ils sont répertoriés dans le tableau 6.2. Lorsque la croissance ou décroissance d'un critère en fonction de la tranche d'âge est monotone, cela donne une bijection entre les tranches d'âges et les critères. Ces bijections vont permettre d'estimer la décennie d'un endothélium cornéen humain a priori sain par la méthode qui est décrite dans la section 6.3.1.

Ces estimations vont être utilisés dans la section 6.3.2, pour donner une probabilité d'appartenance de chaque endothélium à chaque tranche d'âge.

6.3.1 Tranche d'âge estimée par critère

Nous allons tout d'abord, pour chaque endothélium et pour chaque critère, estimer une tranche d'âge et un intervalle des tranches d'âges auxquels il pourrait appartenir selon tel ou tel critère.

Soient μ_i et σ_i la moyenne et l'écart-type d'un critère, par exemple la densité cellulaire, pour la tranche d'âge i . Soit μ le même critère pour un endothélium (calculé sur les 5 images de cet endothélium). La tranche d'âge estimée de cet endothélium cornéen pour ce critère est donnée par :

$$a = \operatorname{argmin}_{i=1,\dots,10} |\mu - \mu_i|. \quad (6.13)$$

De plus, un intervalle de la tranche d'âge à laquelle l'endothélium peut appartenir est donné par :

$$I = [\min(E), \max(E)], \quad (6.14)$$

où E est :

$$E = \{i = 1, \dots, 10 \mid \mu \in [\mu_i - \sigma_i, \mu_i + \sigma_i]\}. \quad (6.15)$$

Les tranches d'âges estimées a et les intervalles I vont être calculées pour chaque critère du tableau 6.2 et pour chaque œil de la base de donnée. Et pour chaque œil, les estimations a et I vont être représentées comme dans la figure 6.23.

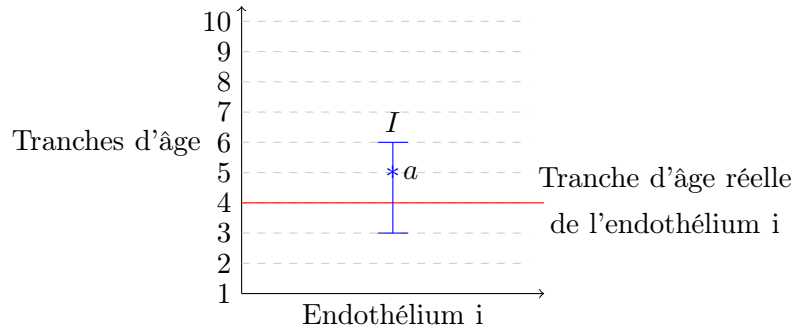


FIGURE 6.23 – Exemple de l'estimation de la tranche d'âge a et de l'intervalle I pour un endothélium de la tranche 4, avec $a = 5$ et $I = [3, 6]$.

L'estimation de la tranche d'âge a et de l'intervalle I par les douze critères du tableau 6.2 sont représentés pour quelques tranches d'âge dans les figures 6.24 à 6.28.

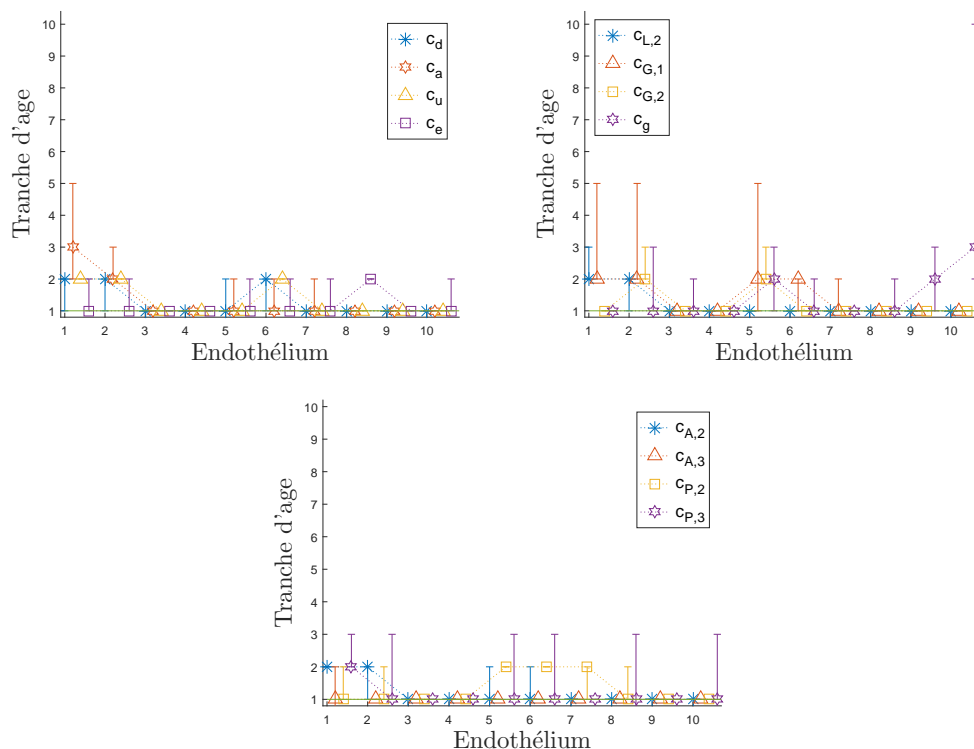


FIGURE 6.24 – Age estimé a et intervalle I pour chaque œil de la tranche 1.

Ces figures montrent que :

- l'intervalle I ne recoupe pas toujours la droite de la tranche d'âge réelle ;

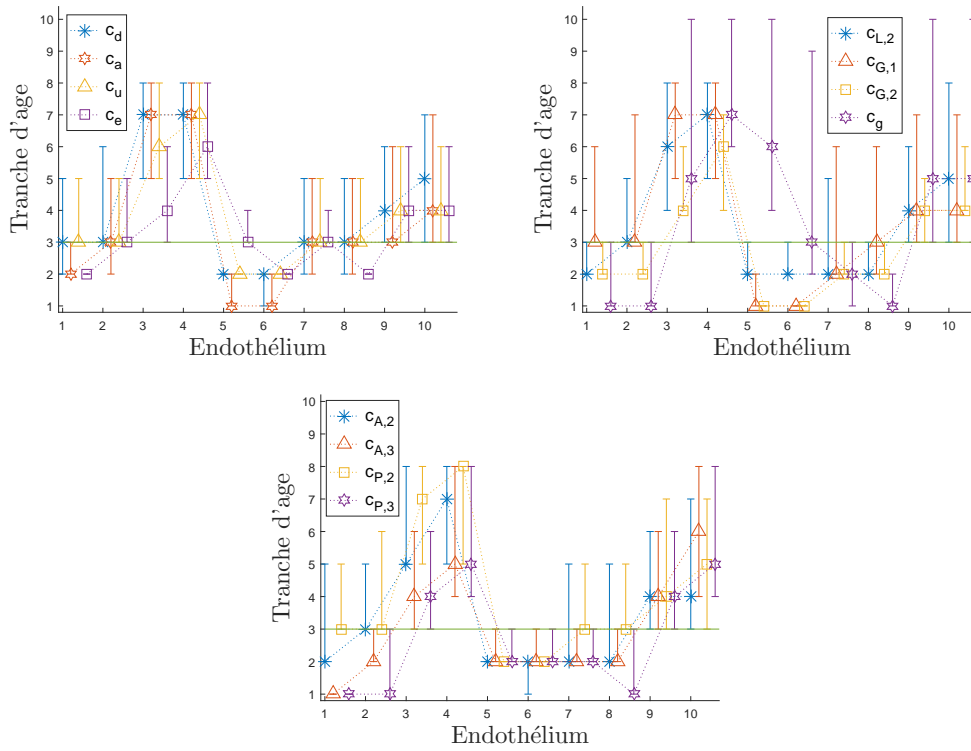


FIGURE 6.25 – Age estimé a et intervalle I pour chaque œil de la tranche 3.

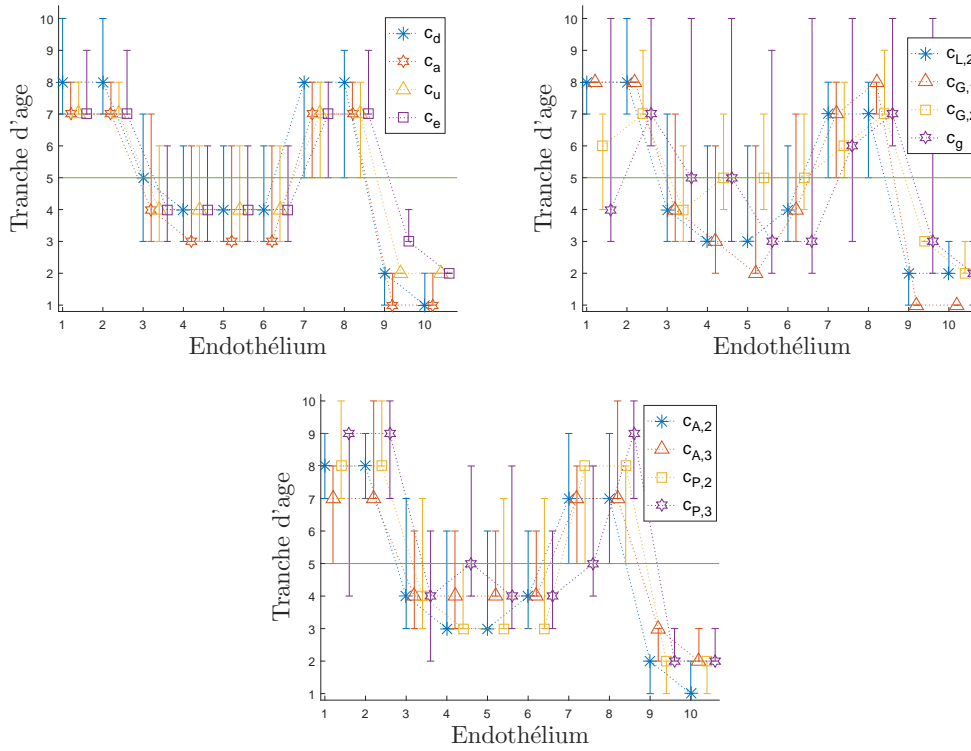


FIGURE 6.26 – Age estimé a et intervalle I pour chaque œil de la tranche 5.

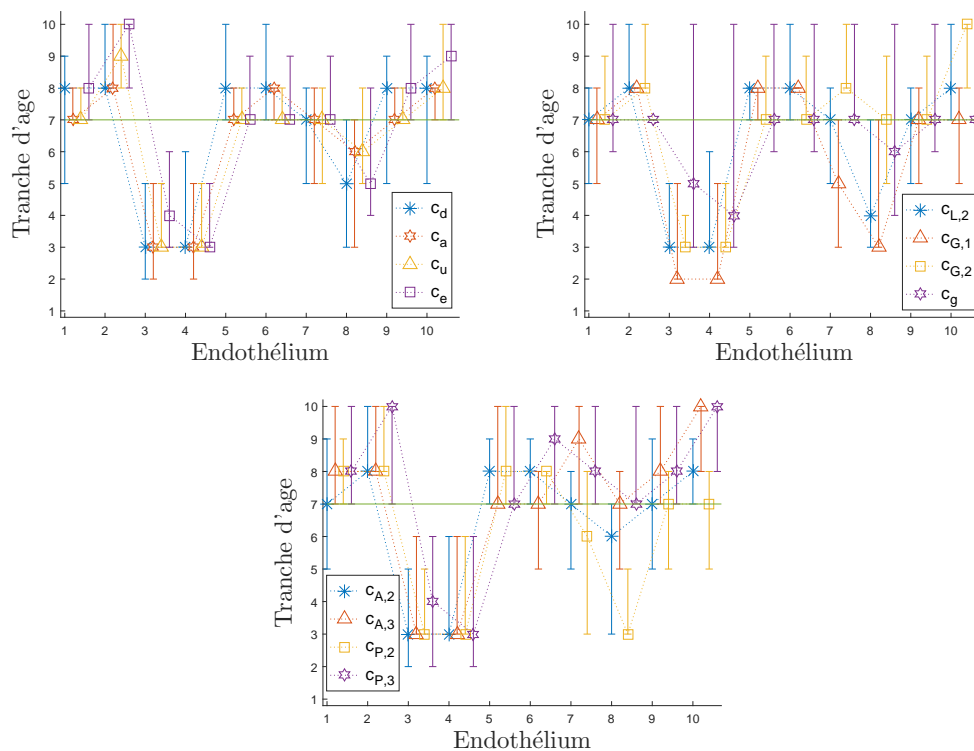


FIGURE 6.27 – Age estimé a et intervalle I pour chaque œil de la tranche 7.

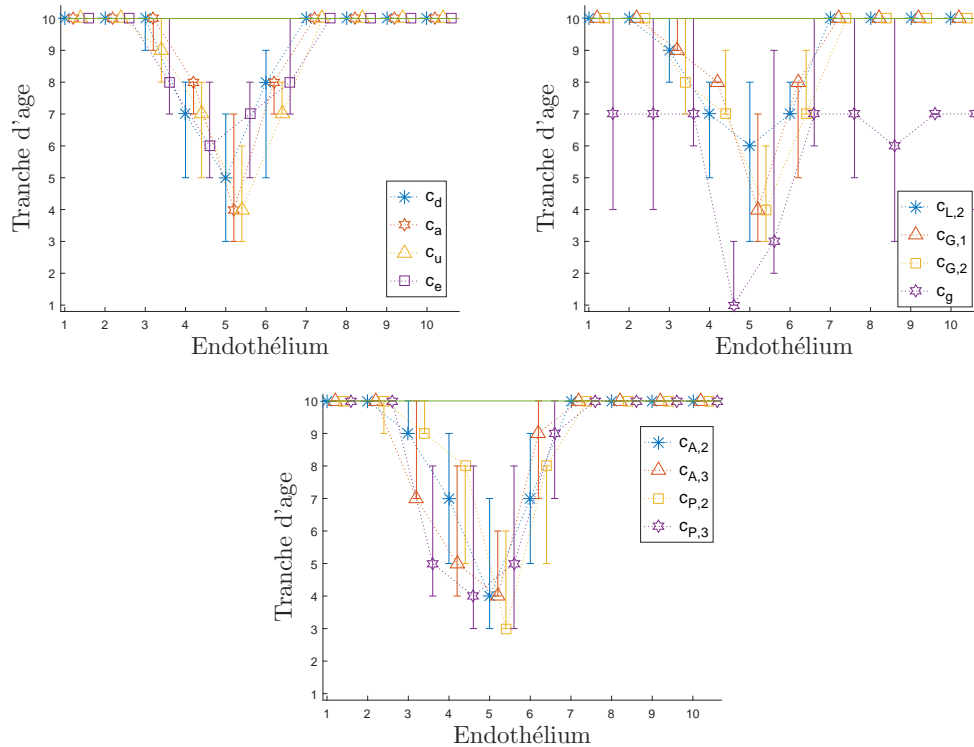


FIGURE 6.28 – Age estimé a et intervalle I pour chaque œil de la tranche 10.

- la sur-estimation ou la sous-estimation de a et I est vérifiée pour la plupart des critères calculés ;
- pour le critère c_g comme nous l'avons vu, il n'a pas d'évolution monotone après la tranche 7, ce qui se voit sur les figures car les intervalles I sont souvent très grand dès que a est proche des grandes tranches d'âge. Pour l'instant, avec les données qui sont les nôtres, c_g n'est pas un bon critère pour les dernières tranches d'âge, mais est tout de même efficace pour les premières tranches ;
- pour les premières tranches d'âges (1 et 2), l'estimation est souvent bonne ou alors proche de la tranche d'âge réelle ;
- pour les tranches d'âges entre 3 et 7, l'estimation est plus disparate, cela s'explique par ce qui a été vu précédemment : pour de nombreux critères, l'évolution est faible entre la tranche 3 et 7 ;
- pour les dernières tranches d'âge, la disparité des estimations est très grande d'un endothélium à l'autre. Certains endothéliums, comme les endothéliums 3 à 6 (c'est-à-dire des sujets 2 et 3) de la tranche 10, ont pour toutes les mesures une tranche d'âge estimée a bien plus petite que la tranche d'âge réelle. Cela suggère que leur évolution a été faible tout au long de la vie des sujets, et sont en très bon état, cela se voit sur les images segmentés des endothéliums. Il y aurait donc une grande différence d'évolution d'un endothélium à l'autre.

6.3.2 Tranche d'âge estimée

Dans cette partie, afin de rassembler tout les résultats de la sect. 6.3.1, une probabilité d'appartenir à chaque tranche d'âge va être donnée à chaque endothélium. Cette probabilité sera calculée à partir de l'estimation de la tranche d'âge a et de I .

Pour tout endothélium e , et pour toute tranche i , les nombres $n_{a,i}$ et $n_{I,i}$ sont définis comme suit :

$$n_{a,i} = \sum_{j=1}^{N_c} \mathbf{1}\{a_j = i\}, \quad (6.16)$$

et

$$n_{I,i} = \sum_{j=1}^{N_c} \mathbf{1}\{i \in I_j\}, \quad (6.17)$$

où N_c est le nombre de critères, et a_j et I_j sont la tranche d'âge et l'intervalle estimées par le j ème critère.

À partir des nombres $n_{a,i}$ et $n_{I,i}$, la probabilité qu'un endothélium appartienne à la i ème tranche d'âge T_i va être calculée avec la formule ci-dessous :

$$\mathbb{P}[e \in T_i] = \frac{1}{(c_a + c_I)} \left(c_a \times \frac{n_{a,i}}{N_c} + c_I \times \frac{n_{I,i}}{\sum_{j=1}^{N_t} n_{I,j}} \right), \quad (6.18)$$

où N_t est le nombre de tranches d'âges et c_a et c_I sont deux réels positifs, qui sont choisis selon le poids que l'on souhaite donner à la tranche d'âge estimée a par rapport à l'intervalle I . Le choix ici a été de prendre $c_a = 2$ et $c_I = 1$.

Les tableaux 6.4 à 6.13, montrent la probabilité, en %, pour chaque endothélium e d'appartenir à chaque tranche d'âge T_i . Afin d'aider à la lecture de ces tableaux, une couleur est associée à chaque probabilité suivant sa valeur, voir le tableau 6.3. De plus, une analyse est faite dans chaque légende de tableau.

TABLE 6.3 – Code couleur de la probabilité $\mathbb{P}_i := \mathbb{P}[e \in T_i]$ qu'un endothélium e appartienne à la i ème tranche d'âge T_i .

| | | | | | |
|--------------------|------------|------------|------------|------------|-------------|
| $\mathbb{P}_i \in$ | $[0, 10[$ | $[10, 20[$ | $[20, 30[$ | $[30, 40[$ | $[40, 50[$ |
| Couleur | | | | | |
| $\mathbb{P}_i \in$ | $[50, 60[$ | $[60, 70[$ | $[70, 80[$ | $[80, 90[$ | $[90, 100]$ |
| Couleur | | | | | |

TABLE 6.4 – Tranche 1 - Probabilité d'appartenance de chaque endothélium de la tranche 1 à chaque tranche d'âge en %.

La probabilité d'appartenance à cette tranche est très grande, et pour le premier sujet \mathbb{P} est plus grand pour la tranche 2.

| | 6 ans | 6 ans | 5 ans | 5 ans | 4 ans | 4 ans | 4 ans | 4 ans | 10 ans | 10 ans |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|
| 00-10 ans | 35.0 | 38.0 | 97.4 | 100 | 57.8 | 61.1 | 86.1 | 83.3 | 89.7 | 77.1 |
| 11-20 ans | 47.8 | 53.0 | 2.6 | | 34.2 | 37.2 | 13.9 | 14.4 | 7.9 | 4.3 |
| 21-30 ans | 11.4 | 6.4 | | | 5.3 | 1.7 | | 2.2 | 2.4 | 8.5 |
| 31-40 ans | 2.9 | 1.3 | | | 1.3 | | | | | 1.4 |
| 41-50 ans | 2.9 | 1.3 | | | 1.3 | | | | | 1.4 |
| 51-60 ans | | | | | | | | | | 1.4 |
| 61-70 ans | | | | | | | | | | 1.4 |
| 71-80 ans | | | | | | | | | | 1.4 |
| 81-90 ans | | | | | | | | | | 1.4 |
| 99-100 ans | | | | | | | | | | 1.4 |

TABLE 6.5 – Tranche 2 - Probabilité d'appartenance de chaque endothélium de la tranche 2 à chaque tranche d'âge en %.

Les probabilités d'appartenance les plus grande pour chaque endothélium sont pour les tranches 1 à 3, et lorsque c'est pour la tranche 3 que \mathbb{P}_i est maximale, les probabilités sont plus faible.

| | 17 ans | 17 ans | 17 ans | 17 ans | 15 ans | 15 ans | 12 ans | 12 ans | 12 ans | 12 ans |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 00-10 ans | 2.0 | | 12.1 | 6.5 | 8.2 | 14.2 | 13.1 | 8.0 | 85.6 | 97.4 |
| 11-20 ans | 48.0 | 34.3 | 20.5 | 22.1 | 77.1 | 56.9 | 49.0 | 69.1 | 12.2 | 2.6 |
| 21-30 ans | 25.8 | 48.6 | 42.9 | 48.8 | 12.0 | 17.4 | 19.2 | 11.1 | 2.2 | |
| 31-40 ans | 15.2 | 7.3 | 6.7 | 12.8 | 1.3 | 3.1 | 4.0 | 8.0 | | |
| 41-50 ans | 3.0 | 5.7 | 12.2 | 6.3 | 1.3 | 3.1 | 8.6 | 2.5 | | |
| 51-60 ans | 2.0 | 1.6 | 4.8 | 2.7 | | 2.1 | 2.0 | 1.2 | | |
| 61-70 ans | 1.0 | 0.8 | 1.0 | 0.9 | | 1.0 | 1.0 | | | |
| 71-80 ans | 1.0 | 0.8 | | | | 1.0 | 1.0 | | | |
| 81-90 ans | 1.0 | 0.8 | | | | 1.0 | 1.0 | | | |
| 99-100 ans | 1.0 | | | | | | 1.0 | | | |

TABLE 6.6 – Tranche 3 - Probabilité d'appartenance de chaque endothélium de la tranche 3 à chaque tranche d'âge en %.

Le deuxième sujet a une tranche d'âge probable très éloignée de la réelle, et sinon les tranches d'âges les plus probables sont entre 2 et 4.

| | 25 ans | 25 ans | 27 ans | 27 ans | 27 ans | 27 ans | 26 ans | 26 ans | 27 ans | 27 ans |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 00-10 ans | 20 | 12.0 | | | 20.8 | 23.3 | 0.9 | 13.0 | | |
| 11-20 ans | 35.6 | 15.5 | | | 51.4 | 57.8 | 46.8 | 37.3 | | |
| 21-30 ans | 32.2 | 55.0 | 2.6 | | 11.1 | 10.9 | 38.3 | 37.3 | 13.1 | 5.0 |
| 31-40 ans | 5.6 | 7.0 | 26.1 | 2.0 | 2.8 | 1.3 | 7.0 | 5.7 | 63.1 | 40.0 |
| 41-50 ans | 5.6 | 7.0 | 18.8 | 18.3 | 1.4 | 1.3 | 6.1 | 5.7 | 13.1 | 34.4 |
| 51-60 ans | 1.1 | 2.6 | 18.8 | 19.0 | 6.9 | 1.3 | 0.9 | 1.0 | 6.9 | 12.2 |
| 61-70 ans | | 0.9 | 27.4 | 46.7 | 1.4 | 1.3 | | | 1.9 | 5 |
| 71-80 ans | | | 5.13 | 12.7 | 1.4 | 1.3 | | | 0.6 | 2.2 |
| 81-90 ans | | | 0.6 | 0.6 | 1.4 | 1.3 | | | 0.6 | 0.6 |
| 99-100 ans | | | 0.6 | 0.6 | 1.4 | | | | 0.6 | 0.6 |

TABLE 6.7 – Tranche 4 - Probabilité d'appartenance de chaque endothélium de la tranche 4 à chaque tranche d'âge en %.

Les tranches d'âge d'appartenance les plus probables sont compris entre 2 et 7, et cela s'explique aisément par la faible évolution de l'endothélium cornéen entre les tranches d'âges 3 et 7.

| | 37 ans | 37 ans | 37 ans | 37 ans | 33 ans | 33 ans | 39 ans | 39 ans | 34 ans | 34 ans |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 00-10 ans | | | | 6.5 | | | | | | |
| 11-20 ans | | | 8.1 | 47.0 | 8.3 | 2.1 | | | | 0.6 |
| 21-30 ans | 3.1 | 3.4 | 71.1 | 32.1 | 63.7 | 64.1 | 5.6 | 11.9 | 2.3 | 6.7 |
| 31-40 ans | 3.1 | 16.2 | 7.5 | 7.2 | 13.0 | 18.9 | 45.7 | 62.5 | 4.6 | 2.4 |
| 41-50 ans | 22.8 | 34.0 | 6.7 | 7.2 | 7.5 | 7.1 | 17.9 | 12.5 | 40.2 | 17.7 |
| 51-60 ans | 45.1 | 23.4 | 3.3 | | 4.8 | 5.0 | 17.9 | 6.3 | 40.2 | 28.8 |
| 61-70 ans | 13.0 | 12.3 | 0.8 | | 0.7 | 0.7 | 4.5 | 4.6 | 6.9 | 34.9 |
| 71-80 ans | 4.9 | 3.4 | 0.8 | | 0.7 | 0.7 | 1.7 | 1.1 | 4.6 | 7.1 |
| 81-90 ans | 6.8 | 6.7 | 0.8 | | 0.7 | 0.7 | 6.1 | 0.6 | 0.6 | 1.2 |
| 99-100 ans | 1.2 | 0.6 | 0.8 | | 0.7 | 0.7 | 0.6 | 0.6 | 0.6 | 0.6 |

TABLE 6.8 – Tranche 5 - Probabilité d'appartenance de chaque endothélium de la tranche 5 à chaque tranche d'âge en %.

Le sujet 5 semble avoir une évolution plus lente que les autres car il a une forte probabilité d'appartenance à la deuxième tranche d'âge et des probabilités nulles ou presque d'avoir plus de 30 ans. D'autre part, les autres endothéliums ont une probable appartenance aux tranches 3 à 7, pour la même raison que pour le tableau précédent. Et enfin, certains endothéliums semblent avoir une évolution plus rapide que la moyenne avec les plus grandes valeurs de \mathbb{P} pour les tranches 7, 8, et 9.

| | 41 ans | 41 ans | 49 ans | 49 ans | 42 ans | 42 ans | 42 ans | 42 ans | 43 ans | 43 ans |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 00-10 ans | | | | | | | | | 18.3 | 31.3 |
| 11-20 ans | | | 0.6 | 0.6 | 6.8 | 0.6 | | | 44.0 | 61.1 |
| 21-30 ans | 0.8 | 0 | 6.8 | 34.1 | 33.8 | 22.8 | 0.6 | | 28.2 | 7.6 |
| 31-40 ans | 7.9 | | 62.3 | 29.8 | 35.1 | 51.9 | 1.2 | | 2.4 | |
| 41-50 ans | 3.1 | | 17.9 | 24.2 | 12.8 | 13.0 | | 3.7 | 1.2 | |
| 51-60 ans | 8.7 | 0.9 | 6.8 | 6.9 | 7.3 | 7.4 | 18.5 | 4.4 | 1.2 | |
| 61-70 ans | 30.7 | 42.1 | 4.0 | 1.9 | 2.4 | 2.5 | 46.3 | 53.3 | 1.2 | |
| 71-80 ans | 36.3 | 38.3 | 0.6 | 1.3 | 1.2 | 0.6 | 18.5 | 25.6 | 1.2 | |
| 81-90 ans | 10.2 | 13.5 | 0.6 | 0.6 | 0.6 | 0.6 | 1.23 | 10.7 | 1.2 | |
| 99-100 ans | 2.3 | 5.3 | 0.6 | 0.6 | | 0.6 | 0.6 | 2.2 | 1.2 | |

TABLE 6.9 – Tranche 6 - Probabilité d'appartenance de chaque endothélium de la tranche 6 à chaque tranche d'âge en %.

Les sujets ont une probable appartenance aux tranches 4 à 7, et le deuxième sujet a une évolution plus lente.

| | 52 ans | 52 ans | 54 ans | 54 ans | 56 ans | 56 ans | 57 ans | 57 ans | 56 ans | 56 ans |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 00-10 ans | | | 1.0 | 0.9 | | | | | | |
| 11-20 ans | | | 52.1 | 46.8 | | | | 6.2 | | |
| 21-30 ans | | 0.7 | 27.1 | 37.4 | 15.4 | 2.5 | 1.4 | 7.6 | 9.1 | 0.6 |
| 31-40 ans | 0.7 | 2.0 | 10.3 | 5.3 | 22.9 | 9.3 | 13.2 | 7.6 | 28.2 | 2.5 |
| 41-50 ans | 5.6 | 23.9 | 4.8 | 5.2 | 34.6 | 16.7 | 6.9 | 7.3 | 28.8 | 24.2 |
| 51-60 ans | 11.8 | 23.9 | 1.0 | 1.8 | 12.3 | 34.0 | 18.1 | 18.4 | 12.7 | 46.4 |
| 61-70 ans | 58.3 | 41.2 | 1.0 | 0.9 | 11.1 | 24.1 | 51.4 | 39.3 | 16.5 | 18.7 |
| 71-80 ans | 13.9 | 7.2 | 1.0 | 0.9 | 2.5 | 4.3 | 6.9 | 11.6 | 3.6 | 6.3 |
| 81-90 ans | 7.7 | 0.7 | 1.0 | 0.9 | 0.6 | 7.4 | 1.4 | 1.3 | 0.6 | 0.6 |
| 99-100 ans | 2.1 | 0.7 | 1.0 | | 0.6 | 1.9 | 0.7 | 0.7 | 0.6 | 0.6 |

TABLE 6.10 – Tranche 7 - Probabilité d'appartenance de chaque endothélium de la tranche 7 à chaque tranche d'âge en %.

Les sujets ont une probable appartenance aux tranches 6 à 8, et le deuxième sujet a une évolution plus lente.

| | 63 ans | 63 ans | 64 ans | 64 ans | 62 ans | 62 ans | 61 ans | 61 ans | 62 ans | 62 ans |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 00-10 ans | | | | | | | | | | |
| 11-20 ans | | | 9.0 | 7.6 | | | | | | |
| 21-30 ans | | | 52.8 | 63.6 | | | 1.4 | 14.6 | | |
| 31-40 ans | | | 19.4 | 13.6 | | | 1.4 | 10.2 | | |
| 41-50 ans | 3.1 | | 13.2 | 8.0 | | 0.9 | 10.3 | 17.5 | 3.6 | 2.5 |
| 51-60 ans | 3.1 | | 2.8 | 4.7 | 0.9 | 1.8 | 10.3 | 28.1 | 4.3 | 2.5 |
| 61-70 ans | 47.4 | 7.6 | 0.7 | 0.7 | 49.4 | 37.7 | 46.4 | 23.1 | 53.1 | 24.2 |
| 71-80 ans | 37.1 | 55.6 | 0.7 | 0.7 | 38.3 | 44.1 | 18.6 | 3.5 | 30.9 | 37.0 |
| 81-90 ans | 6.2 | 15.7 | 0.7 | 0.7 | 7.0 | 11.9 | 9.0 | 1.8 | 5.1 | 12.2 |
| 99-100 ans | 3.1 | 21.2 | 0.7 | 0.7 | 4.4 | 3.6 | 2.7 | 1.2 | 2.9 | 21.7 |

TABLE 6.11 – Tranche 8 - Probabilité d'appartenance de chaque endothélium de la tranche 8 à chaque tranche d'âge en %.

La dispersion des valeurs des probabilités est très grande, et pour beaucoup d'endothéliums le maximum des P_i est faible. D'autre part les appartenance vont de la tranche 6 à 10.

| | 73 ans | 73 ans | 80 ans | 80 ans | 75 ans | 75 ans | 71 ans | 71 ans | 71 ans | 71 ans |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 00-10 ans | | | | | | | | | | |
| 11-20 ans | | | | | 6.2 | 6.3 | 0.6 | 6.8 | | |
| 21-30 ans | | | | | 8.9 | 9.2 | 14.7 | 8.6 | 1.4 | 0.8 |
| 31-40 ans | | | | | 15.1 | 9.2 | 20.3 | 14.2 | 13.2 | 2.3 |
| 41-50 ans | | | | | 4.7 | 5.1 | 7.3 | 12.3 | 9.1 | 18.9 |
| 51-60 ans | 0.8 | | | 1.7 | 20.7 | 21.0 | 23.9 | 17.9 | 3.5 | 2.3 |
| 61-70 ans | 8.1 | 6.5 | 7.5 | 7.2 | 17.1 | 16.9 | 27.1 | 33.3 | 21.6 | 17.2 |
| 71-80 ans | 37.8 | 16.4 | | 1.7 | 15.8 | 21.0 | 4.8 | 5.6 | 30.0 | 31.3 |
| 81-90 ans | 32.2 | 49.7 | 32.0 | 19.4 | 8.9 | 2.9 | 0.6 | 0.6 | 16.8 | 22.7 |
| 99-100 ans | 21.1 | 27.5 | 60.5 | 70.0 | 2.7 | 8.5 | 0.6 | 0.6 | 4.3 | 4.5 |

TABLE 6.12 – Tranche 9 - Probabilité d'appartenance de chaque endothélium de la tranche 9 à chaque tranche d'âge en %.

Le premier sujet, qui a été supprimé de la caractérisation de l'évolution de l'endothélium, appartient à la tranche 10 avec une très grande probabilité. Les deux autres sujets supprimés précédemment, sont les deux derniers, et leur appartenance probable aux tranches 1 et 2, confirme leur évolution lente. Les deux autres sujets, appartiennent probablement aux tranches 8, 9 et 10.

| | 84 ans | 84 ans | 85 ans | 85 ans | 90 ans | 90 ans | 83 ans | 83 ans | 81 ans | 81 ans |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 00-10 ans | | | | | | | 49.0 | 29.1 | 6.5 | 1.2 |
| 11-20 ans | | | | | | | 18.4 | 22.4 | 47.2 | 1.9 |
| 21-30 ans | | | 0.6 | | 1.1 | | 16.9 | 28.0 | 26.9 | 23.5 |
| 31-40 ans | | | 6.2 | 0.7 | 1.1 | | 1.4 | 5.8 | 12.0 | 33.3 |
| 41-50 ans | | | 3.8 | 1.4 | 1.1 | | 7.0 | 7.9 | 6.5 | 17.3 |
| 51-60 ans | | 2.1 | 9.4 | 7.0 | 1.1 | | 1.4 | 2.3 | 0.9 | 5.6 |
| 61-70 ans | 8.3 | 7.6 | 16.9 | 16.9 | 4.4 | 8.5 | 1.4 | 1.1 | | 9.9 |
| 71-80 ans | | 2.1 | 46.6 | 53.1 | 22.2 | 18.0 | 1.4 | 1.1 | | 1.9 |
| 81-90 ans | | 2.1 | 12.0 | 14.3 | 11.1 | 50.7 | 1.4 | 1.1 | | 0.6 |
| 99-100 ans | 91.7 | 86.1 | 4.5 | 6.5 | 57.8 | 22.9 | 1.4 | 1.1 | | |

TABLE 6.13 – Tranche 10 - Probabilité d'appartenance de chaque endothélium de la tranche 10 à chaque tranche d'âge en %.

Trois sujets appartiennent avec une probabilité supérieure à 80% à la tranche 10, et les 2 autres semblent avoir eu une évolution plus lente.

| | | | | | | | | | | |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 92 ans | 92 ans | 95 ans | 95 ans | 93 ans | 93 ans | 93 ans | 93 ans | 92 ans | 92 ans |
| 00-10 ans | | | | 6.3 | | | | | | |
| 11-20 ans | | | | 0.7 | 0.6 | | | | | |
| 21-30 ans | | | | 1.5 | 16.8 | | | 1.8 | | |
| 31-40 ans | | | 0.9 | 7.0 | 39.5 | | | 1.8 | | |
| 41-50 ans | | | 6.4 | 11.5 | 17.9 | 3.2 | 2.0 | 1.8 | | |
| 51-60 ans | | | 1.8 | 11.5 | 12.3 | 3.2 | 2.0 | 7.3 | | |
| 61-70 ans | 5.6 | 5.6 | 15.5 | 35.2 | 10.0 | 36.5 | 7.5 | 1.8 | 8.3 | 5.6 |
| 71-80 ans | | | 17.3 | 24.8 | 2.3 | 37.3 | 2.0 | 1.8 | | |
| 81-90 ans | | 2.6 | 37.4 | 1.5 | 0.6 | 16.7 | 2.0 | 1.8 | | |
| 99-100 ans | 94.4 | 91.9 | 20.8 | | | 3.2 | 84.6 | 82.2 | 91.7 | 94.4 |

Au final, ces différents tableaux ont permis de distinguer les cas ayant eu une évolution lente ou rapide avec l'âge et ce même pour les tranches 3 à 7. En dehors de ces sujets, et en dehors des tranches d'âges centrales, la tranche d'âge d'appartenance probable est soit la réelle, soit la tranche d'âge inférieure ou supérieure. De plus, pour les sujets de notre base de donnée, aucune grande différence d'évolution n'a été détectée entre l'œil gauche et l'œil droit.

6.3.3 Conclusion

L'estimation par critère avec a et I Sect. 6.3.1 et l'estimation globale avec \mathbb{P}_i Sect. 6.3.2, permettent d'associer à chaque endothélium une tranche d'âge avec une probabilité d'appartenance. Cela permet surtout de distinguer les endothéliums qui ont eu une évolution plus lente ou plus rapide que la moyenne.

Malgré la base de données trop faible et la grande disparité des endothéliums au sein d'une même tranche d'âge, les résultats obtenus sont prometteurs.

6.4 Conclusion

Les différentes mesures effectuées sur la base de données d'images segmentées de la mosaïque endothéliale cornéenne ont permis de mettre en place des critères d'évolution pour chacune des mesures. Les bijections entre l'âge d'un endothélium et les critères ont ensuite été utilisées pour estimer l'âge d'un endothélium.

La densité cellulaire de la mosaïque endothéliale cornéenne diminue avec l'âge, et cela va de paire avec une perte de sa régularité. Nous avons vu que cette évolution est plus lente entre environ 20 et 70 ans. Une grande disparité de vitesse d'évolution a également été observée d'un endothélium à l'autre. En effet, lorsque l'on s'intéresse aux sujets de plus de 80 ans, nous voyons bien que certains ont évolué très lentement.

Une base d'images plus conséquente est en cours d'acquisition et devrait permettre d'améliorer les résultats obtenus. Le but, avec plus d'images, est de ne garder que les critères qui sont une bijection et donc qui ont une évolution stricte avec l'âge. Par exemple, voir le tableau 6.2,

plusieurs critères n'ont pas une évolution stricte pour la tranche 9, et nous pensons que plus de données devraient résoudre ce problème. De plus, la formule de la probabilité d'appartenance \mathbb{P}_i , éq. 6.18, peut être modifiée en changeant l'importance donnée à l'estimation de l'âge par rapport à l'estimation de l'intervalle, mais aussi en donnant différents poids aux différentes mesures.

Conclusion et perspectives

7.1 Synthèse générale

Les principaux développements théoriques sont la mise en place de méthodes de simulation de tessellations aléatoires puis la caractérisation de ces tessellations.

Trois méthodes de simulation de tessellations aléatoires, dont l'originalité est d'utiliser des champs aléatoires gaussiens stationnaires, ont été présentées dans le chapitre 4 :

- la première méthode utilise les maxima locaux pour germes et le diagramme de Voronoï pour partitionner le plan. Les tessellations simulées par cette méthode sont visuellement assez proches du diagramme de Poisson-Voronoï, mais ont moins de petites cellules ;
- la deuxième méthode utilise les h -maxima pour germes et le squelette par zones d'influences (SKIZ) pour partitionner le plan. L'avantage de l'utilisation des h -maxima est de supprimer les petites cellules ;
- et la troisième méthode consiste à effectuer le watershed de la reconstruction morphologique du champ aléatoire X par $X - h$. Ceci revient à utiliser les h -maxima pour germes et le SKIZ pour partitionner le plan, mais avec une distance aléatoire issue du champ aléatoire. Cette méthode permet d'avoir des tessellations aux contours moins réguliers.

Les tessellations aléatoires générées par les deux premières méthodes sont ensuite caractérisées et comparées à quelques tessellations dans le chapitre 5. Deux approches sont utilisées pour caractériser les tessellations :

- l'approche ponctuelle qui permet d'analyser la densité et la répartition spatiale des germes ;
- et l'approche régionale qui étudie les cellules des tessellations par leurs géométrie et morphométrie.

Ces différentes mesures ont montré, entre autres, que les tessellations simulées par les deux premières méthodes sont plus régulières que les tessellations hardcore Voronoï et de Poisson-Voronoï, et moins que Voronoï centré, et cela pour la distribution spatiale des germes mais aussi la taille des cellules.

Utiliser les champs aléatoires gaussiens stationnaires pour simuler des tessellations aléatoires offre une grande diversité de tessellations car de nombreux paramètres peuvent être modifiés tels la fonction de covariance, le paramètre de longueur, mais aussi le type de germes ou de distance

utilisé. Cette diversité permet d'envisager de nombreuses applications comme la modélisation d'assemblages cellulaires en biologie mais aussi en science des matériaux.

Dans cette thèse, nous nous sommes ensuite intéressés à l'endothélium cornéen humain. La géométrie de cette mosaïque de cellules est essentielle pour le bon fonctionnement de la cornée. Nous nous sommes donc concentrés sur l'analyse spatiale de cette mosaïque mais également temporelle, avec des outils mathématiques différents de ceux utilisés jusqu'à présent par les ophtalmologistes.

Pour cela, dans le chapitre 6, l'évolution de la mosaïque endothéliale avec l'âge a été caractérisée à partir des mêmes mesures que pour les tessellations aléatoires. Puis à partir de ces mesures nous avons mis en place des critères d'évolution afin de pouvoir ensuite estimer un âge et un intervalle d'âges d'appartenances pour chaque endothélium. Et enfin de donner à chaque endothélium une probabilité d'appartenance à une tranche d'âge afin d'avoir une idée précise de son âge biologique basé sur l'ensemble des mesures effectuées.

Cela nous a permis de montrer que la mosaïque endothéliale évolue vers plus d'hétérogénéité avec l'âge et qu'il y a une grande disparité de la vitesse d'évolution de l'endothélium d'un sujet à un autre. De plus, la méthode d'estimation de l'âge est prometteuse.

7.2 Lien modèle endothélium

Dans cette thèse, nous avons donc proposé :

- un modèle de tessellations aléatoires générées à partir de réalisations de champs aléatoires gaussiens ;
- une boîte à outils de mesures permettant de caractériser des tessellations ;
- et un ensemble de mesures effectuées sur des images de l'endothélium cornéen humain sain à différents âges de la vie.

Il reste à savoir si les modèles de tessellations aléatoires qui ont été proposés dans le chapitre 4 permettent de modéliser la mosaïque endothéliale cornéenne. Pour cela, les différentes tessellations sont comparées à l'aide de l'ensemble des mesures de la boîte à outils. Cette comparaison permet également de trouver les bons paramètres (fonction de covariance et valeur de h) permettant de simuler la mosaïque endothéliale cornéenne pour chaque décennie.

La figure 7.1 montre la comparaison entre les fonctions L et G des modèles de tessellations pour certains paramètres et de mosaïques endothéliales appartenant à trois décennies (0-10 ans, 41-50 ans et 91-100 ans). D'après ces deux mesures, nous observons que pour simuler les mosaïques endothéliales entre 0 et 10 ans, la covariance de Bessel avec $h = 0,1$ convient, entre 41 et 50 ans c'est la covariance gaussienne avec $h = 0,1$ qui convient, et enfin entre 91 et 100 ans les deux fonctions de covariance avec $h = 0,5$ conviennent. Nous voyons donc que les modèles parviennent à modéliser l'endothélium cornéen humain sain, et qu'il faut choisir les paramètres en fonction de l'âge de la mosaïque endothéliale à simuler.

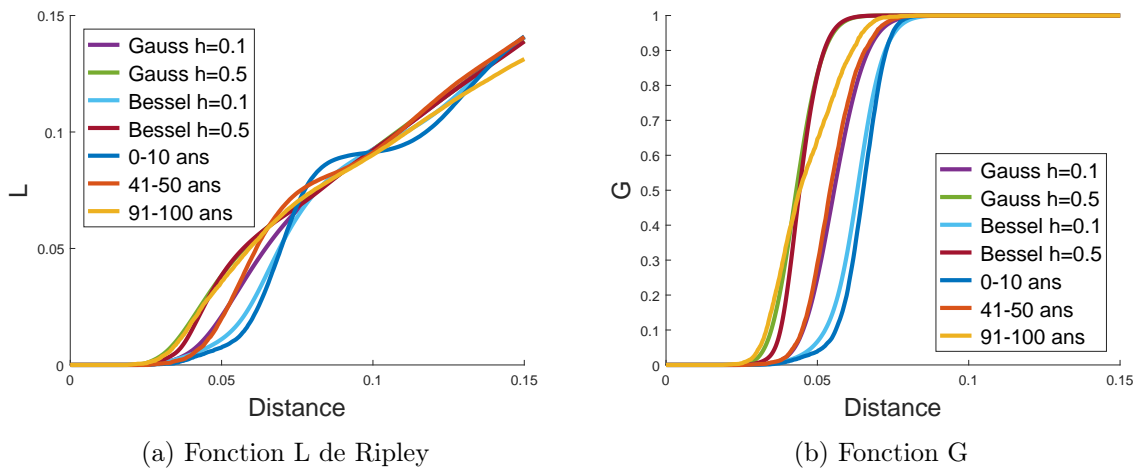


FIGURE 7.1 – Comparaison des fonctions L et G de centres de masses de cellules de mosaïques endothéliales appartenant à trois décennies et de tessellations aléatoires pour certains paramètres (covariance gaussienne et de Bessel et $h = 0, 1$ ou $h = 0, 5$).

7.3 Perspectives

Afin de poursuivre les travaux de cette thèse, plusieurs pistes théoriques ou applicatives sont envisageables.

Nous avons étudié numériquement la densité et la distribution spatiale de maxima locaux de champs aléatoires stationnaires. Il reste à le faire théoriquement.

Ensuite, la caractérisation des tessellations aléatoires générées par la troisième méthode (qui utilise les h -maxima et une distance issue du champ aléatoire) n'a pas été effectuée. Elle pourrait être effectuée dans l'optique d'utiliser ces tessellations pour simuler d'autres arrangements cellulaires. La caractérisation des germes est identique à celle de la deuxième méthode, et pour les cellules, les mêmes mesures pourraient être utilisées, et une mesure et une étude théorique de la régularité des contours ajoutée.

D'autre part, des champs aléatoires non stationnaires pourraient être utilisés pour simuler des tessellations non stationnaires avec des zones de petites cellules et des zones de grandes cellules. Ce type de tessellations pourrait permettre de simuler des pathologies touchant l'endothélium cornéen, comme la guttata aussi appelée dystrophie de Fuchs.

Du côté de l'application médicale, il reste à améliorer les résultats obtenus, et d'être plus précis sur l'estimation, en espérant prédire plutôt l'appartenance à un âge qu'à une décennie. Pour cela, plus d'images sont en cours d'acquisition. Ces images permettront de valider le choix des critères, et éventuellement de donner un poids différent à chaque critère dans le calcul de la probabilité d'appartenance à une tranche d'âge.

De plus, une étude longitudinale suivant des sujets sur une dizaine d'années devrait valider définitivement nos travaux sur l'estimation de l'âge biologique d'un endothélium cornéen, mais aussi faire le lien entre le vieillissement prématuré de certains endothéliums avec d'autres pathologies ou un vieillissement prématuré global du sujet. Le nombre de sujets sera dimensionné

par un calcul de la puissance statistique afin de garantir un résultat statistiquement significatif.

7.4 Publications et communications

Journaux à comité de lecture

K. Rannou, E. Crouzet, C. Ronin, P. Guerrero, G. Thuret, P. Gain, J.C. Pinoli, Y. Gavet, *Comparison of Corneal Endothelial Mosaic According to the Age : The CorImMo 3D Project*, IRBM, 2016

Conférences internationales à comité de lecture avec proceedings

K. Rannou, G. Thuret, P. Gain, J.C. Pinoli, Y. Gavet, *A novel quantitative methodology for age evaluation of the human corneal endothelium*, In The International Conference on Quality Control by Artificial Vision 2017, *soumis*

K. Rannou, Y. Gavet, J.C. Pinoli, *Characterization of the corneal endothelial mosaic and comparison with simulated tessellations modeled with Gaussian random fields*, In The International Conference on Quality Control by Artificial Vision 2015

Autres communications

K. Rannou, G. Thuret, P. Gain, J.C. Pinoli, Y. Gavet, *Age de l'endothélium cornéen humain*, Cytométrie 2016

K. Rannou, E. Crouzet, C. Ronin, P. Guerrero, G. Thuret, P. Gain, J.C. Pinoli, Y. Gavet, *Age de l'endothélium cornéen humain*, Journées stéphanoises de cytométrie et d'imagerie, Juin 2016

K. Rannou, Y. Gavet, J.C. Pinoli, *Simulation de tessellations par des champs aléatoires gaussien et application à la mosaïque endothéliale cornéenne*, TAIMA, Hammamet, Tunisie, Mai 2015

K. Rannou, Y. Gavet, J.C. Pinoli, *Simulation de tessellations par des champs aléatoires gaussiens*, Journée française de la Société Internationale de Stéréologie, Paris, Février 2015

K. Rannou, P. Guerrero, Y. Gavet, J.C. Pinoli, G. Thuret, P. Gain *Spatial statistical analysis of the human corneal endothelial mosaic*, In European Association for Vision and Eye Research, Nice, September 2014

Bibliographie

- [Abr97] P Abrahamsen. *A review of Gaussian random fields and correlation functions*. Norsk Regnesentral/Norwegian Computing Center, 1997.
- [AC03] PA Arbelaez and LD Cohen. Generalized voronoi tessellations for vector-valued image segmentation. In *Proc. 2nd IEEE Workshop on Variational, Geometric and Level Set Methods in Computer Vision (VLSM'03)*, pages 49–56, 2003.
- [ACS93] T Arak, P Clifford, and D Surgailis. Point-based polygonal models for random graphs. *Advances in Applied Probability*, pages 348–372, 1993.
- [Adl81] RJ Adler. *The geometry of random fields*. Siam, 1981.
- [AHA98] F Aurenhammer, F Hoffmann, and B Aronov. Minkowski-type theorems and least-squares clustering. *Algorithmica*, 20(1) :61–76, 1998.
- [Ahm13] O Ahmad. *Stochastic representation and analysis of rough surface topography by random fields and integral geometry-Application to the UHMWPE cup involved in total hip arthroplasty*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 2013.
- [AK00] F Aurenhammer and R Klein. Voronoi diagrams. *Handbook of computational geometry*, 5 :201–290, 2000.
- [AS64] M Abramowitz and IA Stegun. *Handbook of Mathematical Functions : With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, volume 55. DoverPublications. com, 1964.
- [AS89] T Arak and D Surgailis. Markov fields with polygonal realizations. *Probability Theory and Related Fields*, 80(4) :543–579, 1989.
- [AT05] RJ Adler and JE Taylor. *Random fields and their geometry*. Birkhäuser, Boston, 2005.
- [ATW10] RJ Adler, JE Taylor, and KJ Worsley. *Random fields and geometry*. 2010.
- [Aur91] F Aurenhammer. Voronoi diagrams - a survey of a fundamental geometric data structure. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, 23(3) :345–405, 1991.

- [AW09] JM Azaïs and M Wschebor. *Level sets and extrema of random processes and fields*. John Wiley & Sons, 2009.
- [BBS07] A Baddeley, I Bárány, and R Schneider. Spatial point processes and their applications. *Stochastic Geometry : Lectures given at the CIME Summer School held in Martina Franca, Italy, September 13–18, 2004*, pages 1–75, 2007.
- [BGK⁺10] ZI Botev, JF Grotowski, DP Kroese, et al. Kernel density estimation via diffusion. *The Annals of Statistics*, 38(5) :2916–2957, 2010.
- [BJ04] F Bron and D Jeulin. Modelling a food microstructure by random sets. *Image Analysis & Stereology*, 23 :33–44, 2004.
- [BL79] S Beucher and C Lantuejoul. Use of watersheds in contour detection. 1979.
- [Bla15] W Blaschke. Konvexe bereiche gegebener konstanter breite und kleinsten inhalts. *Math. Ann.*, 76(4) :504–513, 1915.
- [BTKA10] M Bock, AK Tyagi, JU Kreft, and W Alt. Generalized voronoi tessellation as a model of two-dimensional cell tissue dynamics. *Bulletin of mathematical biology*, 72(7) :1696–1731, 2010.
- [BWY06] JD Boissonnat, C Wormser, and M Yvinec. Curved voronoi diagrams. In *Effective Computational Geometry for Curves and Surfaces*, pages 67–116. Springer, 2006.
- [Cre92] N Cressie. Statistics for spatial data. *Terra Nova*, 4(5) :613–617, 1992.
- [CSKM13] S Nok Chiu, D Stoyan, WS Kendall, and J Mecke. *Stochastic geometry and its applications*. John Wiley & Sons, 2013.
- [Den03] MR Dennis. Correlations and screening of topological charges in gaussian random fields. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 36(24) :6611, 2003.
- [DFG99] Q Du, V Faber, and M Gunzburger. Centroidal voronoi tessellations : applications and algorithms. *SIAM review*, 41(4) :637–676, 1999.
- [Dig83] PJ Diggle. Statistical analysis of spatial point processes. *Academic, London*, 1983.
- [Dir50] GL Dirichlet. Über die reduction der positiven quadratischen formen mit drei unbestimmten ganzen zahlen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 40 :209–227, 1850.
- [DVJ] DJ Daley and D Vere-Jones. An introduction to the theory of point processes : Volume i : Elementary theory and methods.
- [DW05] Q Du and D Wang. Anisotropic centroidal voronoi tessellations and their applications. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(3) :737–761, 2005.
- [Fer11] M Fernandes. *3-D reconstruction of surfaces from sequences of 2-D images acquired by optical sectioning - Application to the human ex-vivo corneal endothelium observed by conventional optical microscopy*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 2011.

-
- [Fol03] G Foltin. The distribution of extremal points of gaussian scalar fields. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 36(16) :4561, 2003.
- [Gav08] Y Gavet. *Perception visuelle humaine, complétion des mosaïques et application à la reconstruction d'images de l'endothélium cornéen humain en microscopie optique spéculaire*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 2008.
- [GNK⁺13] S Galgauskas, D Norvydaitė, D Krasauskaitė, S Stech, and RS Ašoklis. Age-related changes in corneal thickness and endothelial characteristics. *Clinical interventions in aging*, 8 :1445, 2013.
- [GS] C Goodman-Strauss. Tessellations.
- [GS11] ÁM Gallego and A Simó. Random closed set models : estimating and simulating binary images. *Image Analysis & Stereology*, 22(3) :133–145, 2011.
- [Hal01] TC Hales. The honeycomb conjecture. *Discrete & Computational Geometry*, 25(1) :1–22, 2001.
- [Hat02] A Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [HGB⁺16] G Hor, Y Gavet, A Bernard, C Urrea, P Gain, and G Thuret. Digitalization of a wide field contact specular microscope. *IRBM*, 2016.
- [Hon78] H Honda. Description of cellular patterns by dirichlet domains : The two-dimensional case. *Journal of Theoretical Biology*, 72(3) :523–543, 1978.
- [Hon83] H Honda. Geometrical models for cells in tissues. *International Review of Cytology*, 81 :191–248, 1983.
- [JM39] WA Johnson and RF Mehl. Reaction kinetics in processes of nucleation and growth. *Trans. Aime*, 135(8) :396–415, 1939.
- [K⁺43] M Kac et al. On the average number of real roots of a random algebraic equation. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 49(4) :314–320, 1943.
- [KB15] DP Kroese and ZI Botev. Spatial process simulation. In *Stochastic Geometry, Spatial Statistics and Random Fields*, pages 369–404. Springer, 2015.
- [KP11] Ü Keskin and J Peiró. A level set method for the construction of anisotropic boundary-conforming voronoi regions and delaunay triangulations. In *Research Notes, 20th International Meshing Roundtable*. Springer-Verlag, October 2011.
- [KVLS07] R Kluszczyński, MNM Van Lieshout, and T Schreiber. Image segmentation by polygonal markov fields. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 59(3) :465–486, 2007.
- [LB81] C Lantuéjoul and S Beucher. On the use of the geodesic metric in image analysis. *Journal of Microscopy*, 121(1) :39–49, 1981.
- [LH57] MS Longuet-Higgins. Statistical properties of an isotropic random surface. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 250(975) :157–174, 1957.

- [LLS92] L Lam, SW Lee, and CY Suen. Thinning methodologies—a comprehensive survey. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 14(9) :869–885, 1992.
- [LM84] C Lantuéjoul and F Maisonneuve. Geodesic methods in quantitative image analysis. *Pattern recognition*, 17(2) :177–187, 1984.
- [LWL⁺09] Y Liu, W Wang, B Lévy, F Sun, DM Yan, L Lu, and C Yang. On centroidal voronoi tessellation - energy smoothness and fast computation. *ACM Transactions on Graphics (ToG)*, 28(4) :101, 2009.
- [Mat71] B Matérn. Doubly stochastic poisson processes in the plane. *Statistical ecology*, 1 :195–213, 1971.
- [Mat74] G Matheron. *Random sets and integral geometry*. John Wiley & Sons, 1974.
- [Mat86] B Matérn. *Spatial variation*, volume 36. Springer-Verlag New York, 1986.
- [MAW⁺15] D Masson, B Abdallah, F Willot, D Jeulin, E Mercadelli, A Sanson, A Chesnaud, and A Thorel. Morphological modelling of a metal foam supported soft configuration. *ECS Transactions*, 68(1) :2951–2960, 2015.
- [M’C33] WH M’Crea. On nets of polygons occurring in nature. *Mathematical Notes*, 28(1) :viii–xii, 1933.
- [Mér11] Q Mérigot. A multiscale approach to optimal transport. In *Computer Graphics Forum*, volume 30, pages 1583–1592. Wiley Online Library, 2011.
- [Mey94] F Meyer. Topographic distance and watershed lines. *Signal processing*, 38(1) :113–125, 1994.
- [Mil63] JW Milnor. *Morse theory*. Number 51. Princeton university press, 1963.
- [MNW08] J Mecke, W Nagel, and V Weiß. The iteration of random tessellations and a construction of a homogeneous process of cell divisions. *Advances in Applied Probability*, pages 49–59, 2008.
- [Mol97] I Molchanov. *Statistics of the Boolean Model for Practitioners and Mathematicians*. Wiley, 1997.
- [Mou05] D Mould. Image-guided fracture. In *Proceedings of Graphics Interface 2005*, pages 219–226. Canadian Human-Computer Communications Society, 2005.
- [MPL01] FA Meineke, CS Potten, and M Loeffler. Cell migration and organization in the intestinal crypt using a lattice-free model. *Cell proliferation*, 34(4) :253–266, 2001.
- [MS05] KR Mecke and D Stoyan. Morphological characterization of point patterns. *Biometrical Journal*, 47(4) :473–488, 2005.
- [MS07] J Møller and D Stoyan. Stochastic geometry and random tessellations. Technical report, Department of Mathematical Sciences, Aalborg University, 2007.

-
- [MW03] J Moller and RP Waagepetersen. *Statistical inference and simulation for spatial point processes*. CRC Press, 2003.
- [NMOW08] W Nagel, J Mecke, J Ohser, and V Weiss. A tessellation model for crack patterns on surfaces. *Image Anal Stereol*, 27 :73–78, 2008.
- [NR99] DJ Nott and T Rydén. Pairwise likelihood methods for inference in image models. *Biometrika*, 86(3) :661–676, 1999.
- [NS94] L Najman and M Schmitt. Watershed of a continuous function. *Signal Processing*, 38(1) :99–112, 1994.
- [NW⁺05] W Nagel, V Weiss, et al. Crack stit tessellations : characterization of stationary random tessellations stable with respect to iteration. *Advances in applied probability*, 37(4) :859–883, 2005.
- [Par62] E Parzen. On estimation of a probability density function and mode. *The annals of mathematical statistics*, pages 1065–76, 1962.
- [PSH92] A Penttinen, D Stoyan, and HM Henttonen. Marked point processes in forest statistics. *Forest science*, 38(4) :806–824, 1992.
- [R⁺56] M Rosenblatt et al. Remarks on some nonparametric estimates of a density function. *The Annals of Mathematical Statistics*, 27(3) :832–7, 1956.
- [RCDF04] AM Roszkowska, P Colosi, P D’Angelo, and G Ferreri. Age-related modifications of the corneal endothelium in adults. *International ophthalmology*, 25(3) :163–166, 2004.
- [RDP10a] S Rivollier, J Debayle, and JC Pinoli. Shape diagrams for 2d compact sets-part i : analytic convex sets. *Aust. J. Math. Anal. Appl.*, 7(2), 2010.
- [RDP10b] S Rivollier, J Debayle, and JC Pinoli. Shape diagrams for 2d compact sets-part ii : analytic simply connected sets. *Aust. J. Math. Anal. Appl.*, 7(2), 2010.
- [RDP10c] S Rivollier, J Debayle, and JC Pinoli. Shape diagrams for 2d compact sets-part iii : convexity discrimination for analytic and discretized simply connected sets. *Aust. J. Math. Anal. Appl.*, 7(2), 2010.
- [RDP10d] S Rivollier, J Debayle, and JC Pinoli. Shape representation and analysis of 2d compact sets by shape diagrams. In *Image Processing Theory Tools and Applications (IPTA), 2010 2nd International Conference on*, pages 411–416. IEEE, 2010.
- [Ric45] SO Rice. Mathematical analysis of random noise. *Bell System Technical Journal, The*, 24(1) :46–156, 1945.
- [Rip77] BD Ripley. Modelling spatial patterns. *J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol.*, pages 172–212, 1977.
- [RW06] CE Rasmussen and CKI Williams. Gaussian processes for machine learning. 2006. *The MIT Press, Cambridge, MA, USA*, 38 :715–719, 2006.

- [S⁺42] A Sard et al. The measure of the critical values of differentiable maps. *Bull. Amer. Math. Soc*, 48(12) :883–890, 1942.
- [San61] L Santaló. Sobre los sistemas completos de desigualdades entre tres elementos de una figura convexa plana. *Math. Notae*, 17 :82–104, 1961.
- [Sch99] M Schlather. An introduction to positive definite functions and to unconditional simulation of random fields. Technical report, Technical report st 99-10, Dept. of Mathematics and Statistics, Lancaster University, 1999.
- [Sch06] J Schmähling. Statistical characterization of technical surface microstructure. 2006.
- [Ser82] J Serra. *Image analysis and mathematical morphology, v. 1*. Academic press, 1982.
- [SGLPA⁺05] JA Sanchis-Gimeno, A Lleo-Perez, LM Alonso, MS Rahhal, and F Martinez Soriano. Corneal endothelial cell density decreases with age in emmetropic eyes. 2005.
- [SKM95] D Stoyan, WS Kendall, and J Mecke. Stochastic geometry and its applications. *Akademie-Verlag, Berlin*, 1995.
- [Soi03] P Soille. *Morphological image analysis : principles and applications*. Springer, 2003.
- [SP00] D Stoyan and A Penttinen. Recent applications of point process methods in forestry statistics. *Statistical Science*, pages 61–78, 2000.
- [SS94] D Stoyan and H Stoyan. *Fractals, random shapes and point fields : methods of geometrical statistics*. 1994.
- [Sto53] FW Stocker. The endothelium of the cornea and its clinical implications. *Transactions of the American Ophthalmological Society*, 51 :669, 1953.
- [Str75] DJ Strauss. A model for clustering. *Biometrika*, 62(2) :467–475, 1975.
- [vB96] MNM vanLieshout and AJ Baddeley. A nonparametric measure of spatial interaction in point patterns. *Stat. Neerl.*, 50(3) :344–61, 1996.
- [Vin93] L Vincent. Morphological grayscale reconstruction in image analysis : Applications and efficient algorithms. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 2(2) :176–201, 1993.
- [vL12] MNM van Lieshout. An introduction to planar random tessellation models. *Spatial Statistics*, 1 :40–49, 2012.
- [Vor08] G Voronoi. Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 133-134, 1908.
- [WO90] M Weliky and G Oster. The mechanical basis of cell rearrangement. *Development*, 109(2) :373–386, 1990.

- [Wor95a] KJ Worsley. Boundary corrections for the expected euler characteristic of excursion sets of random fields, with an application to astrophysics. *Advances in Applied Probability*, pages 943–959, 1995.
- [Wor95b] KJ Worsley. Estimating the number of peaks in a random field using the hadwiger characteristic of excursion sets, with applications to medical images. *The Annals of Statistics*, pages 640–669, 1995.
- [Wor96] KJ Worsley. The geometry of random images. *Chance*, 9(1) :27–40, 1996.
- [Yag87] AM Yaglom. *Correlation theory of stationary and related random functions*. Springer, 1987.
- [Zas00] VP Zastavnyi. On positive definiteness of some functions. *Journal of multivariate analysis*, 73(1) :55–81, 2000.

Annexe A

A.1 Tranche 1 - 0-10 ans

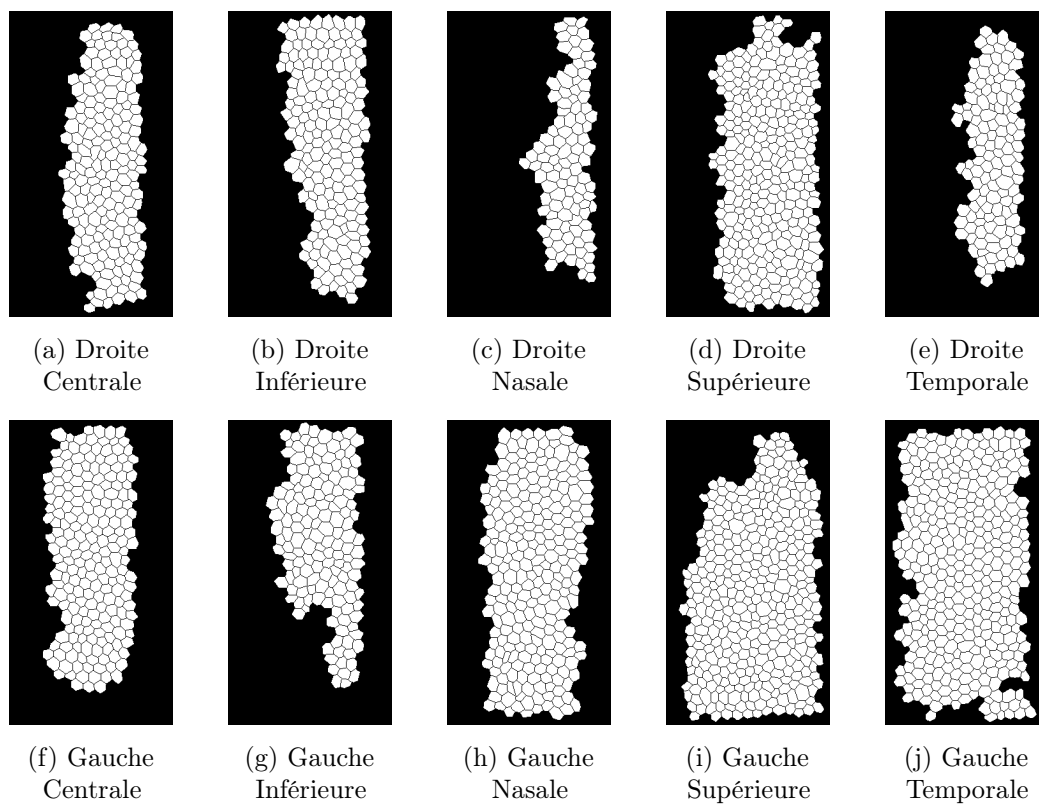


FIGURE 2 – Tranche 1 - Sujet 1 (6 ans)

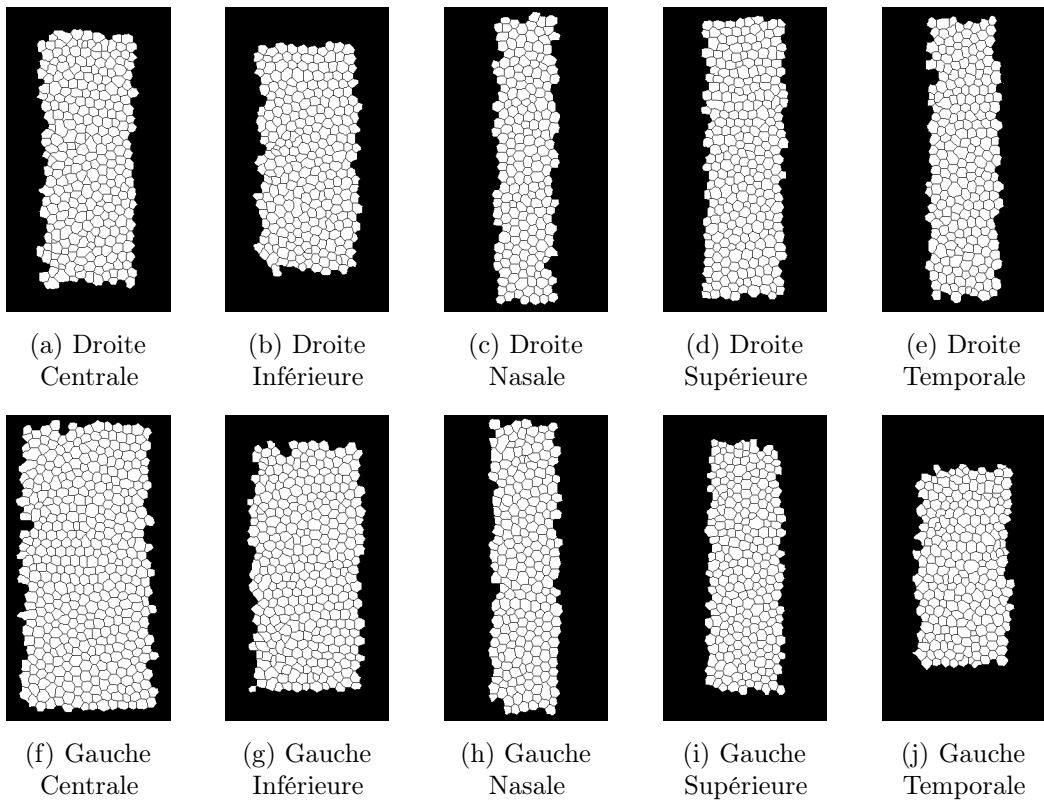


FIGURE 3 – Tranche 1 - Sujet 2 (5 ans)

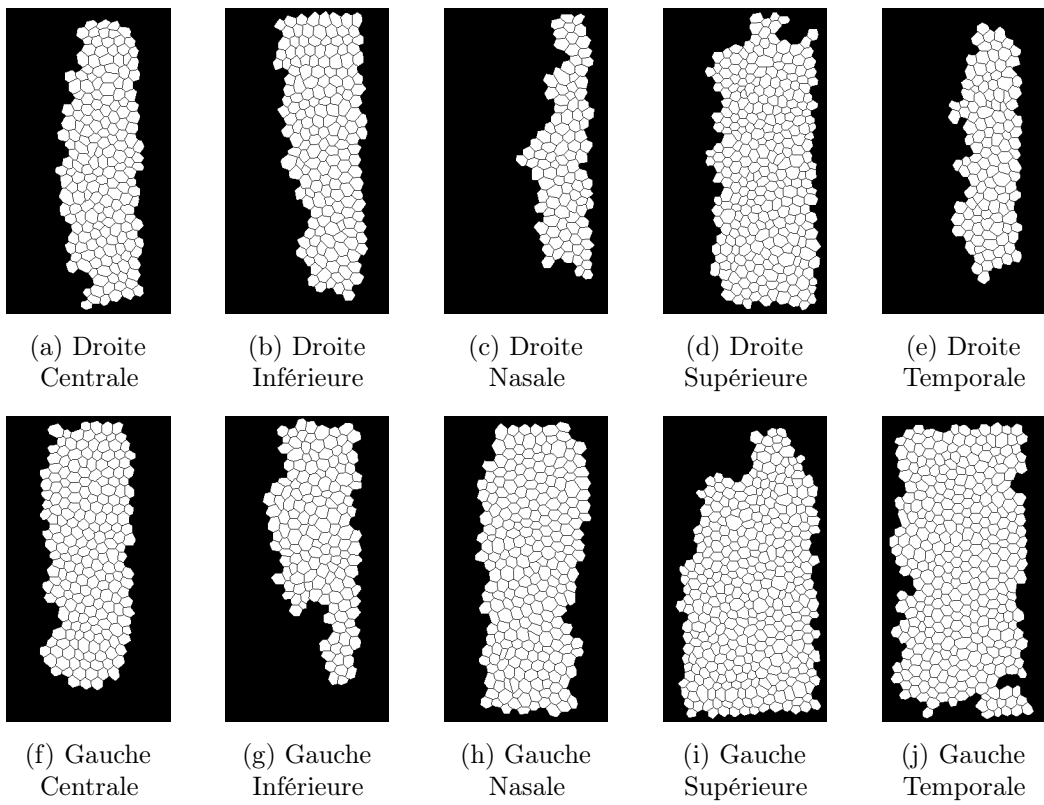


FIGURE 4 – Tranche 1 - Sujet 3 (4 ans)

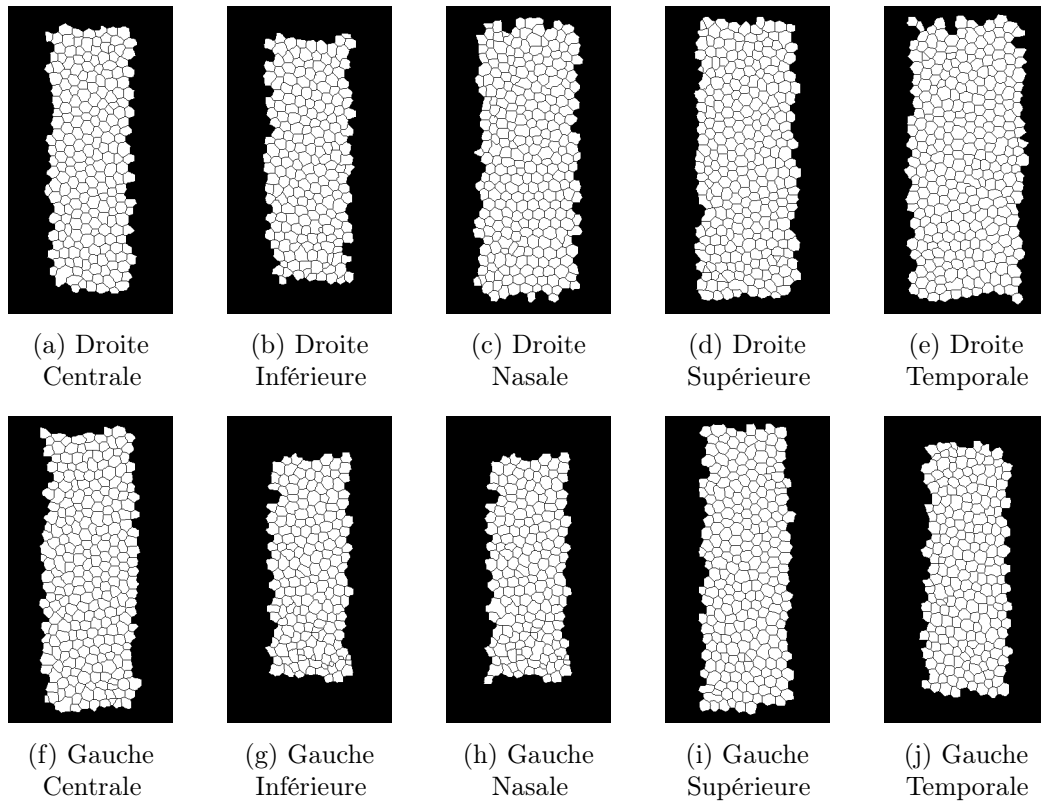


FIGURE 5 – Tranche 1 - Sujet 4 (4 ans)

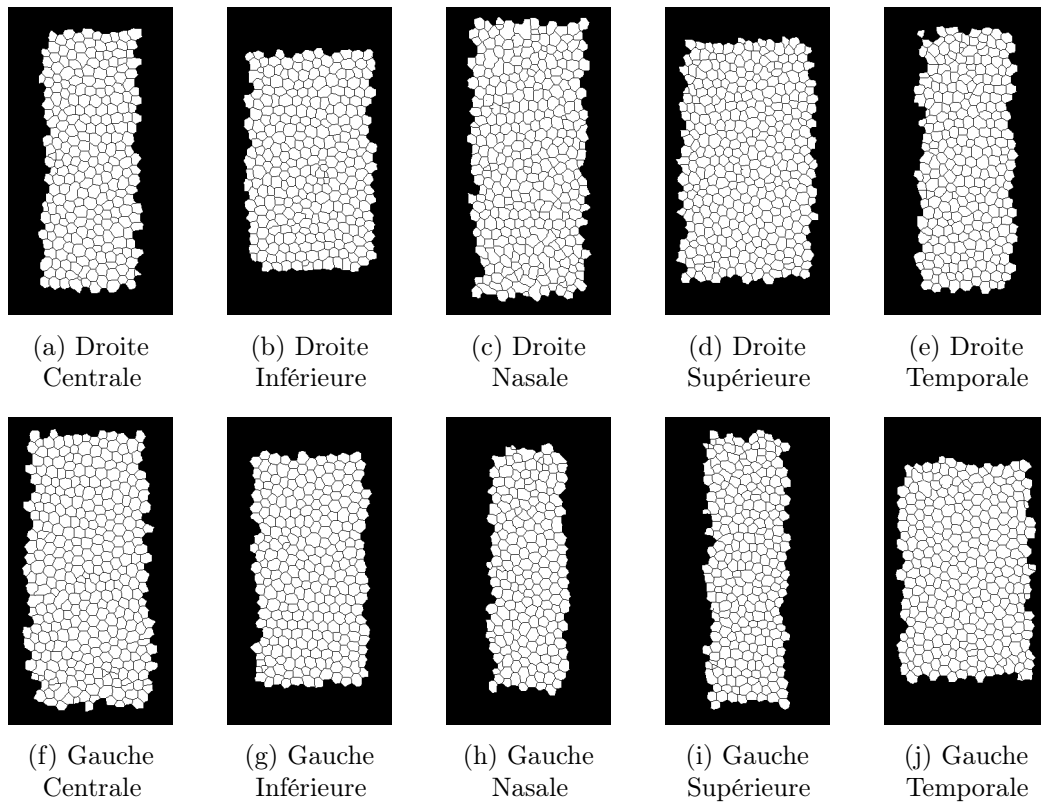


FIGURE 6 – Tranche 1 - Sujet 5 (10 ans)

A.2 Tranche 2 - 11-20 ans

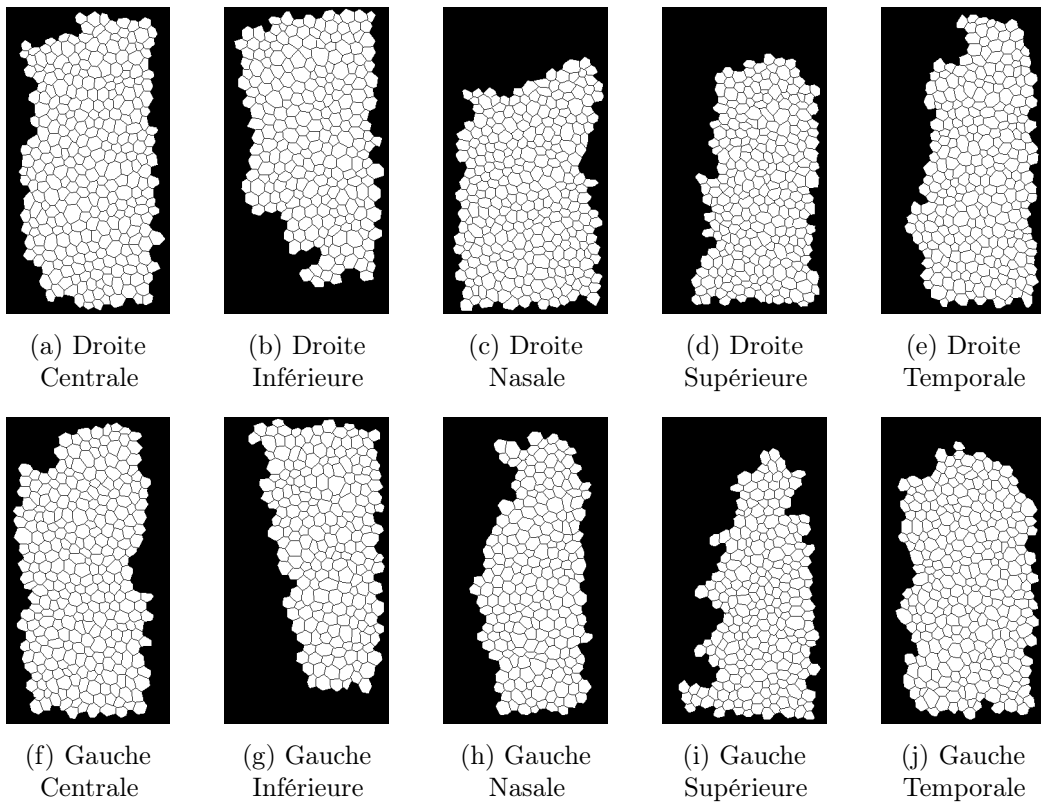


FIGURE 7 – Tranche 2 - Sujet 1 (17 ans)

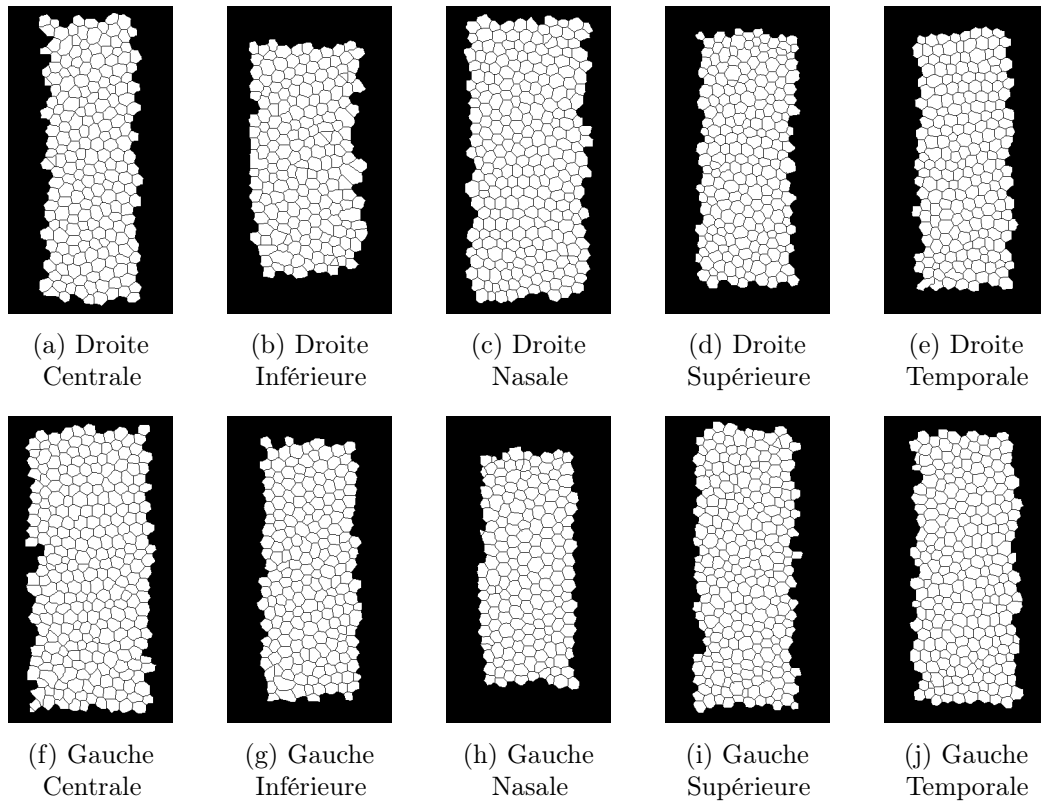


FIGURE 8 – Tranche 2 - Sujet 2 (17 ans)

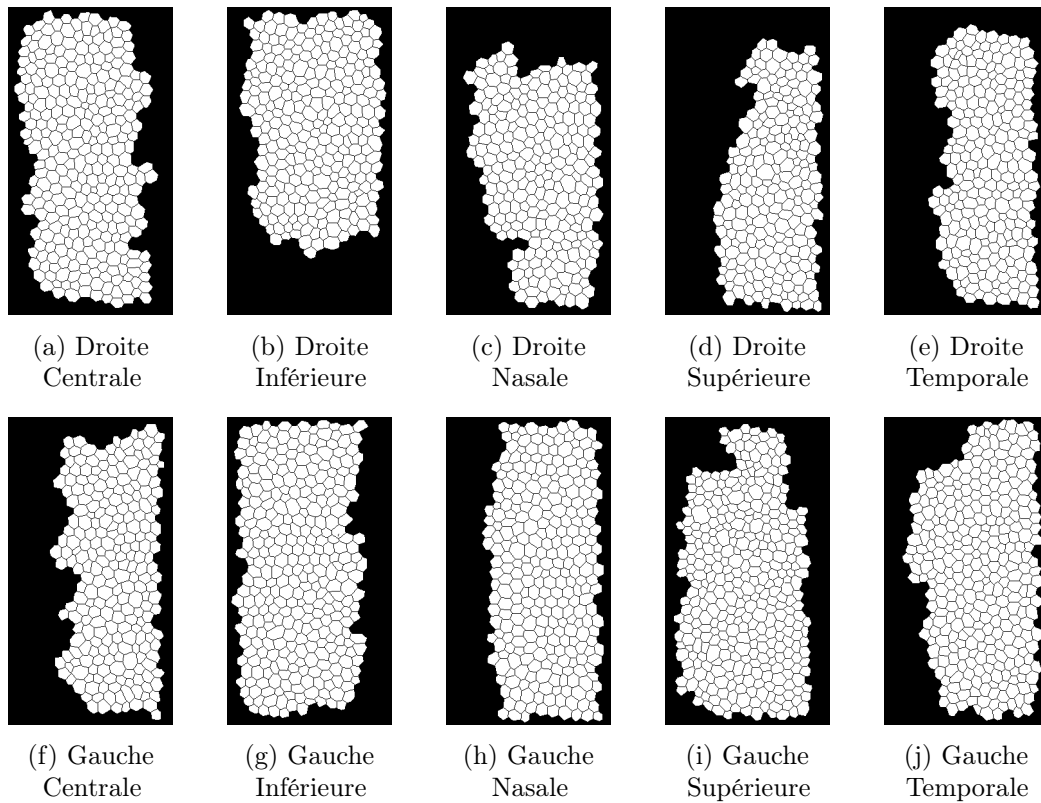


FIGURE 9 – Tranche 2 - Sujet 3 (15 ans)

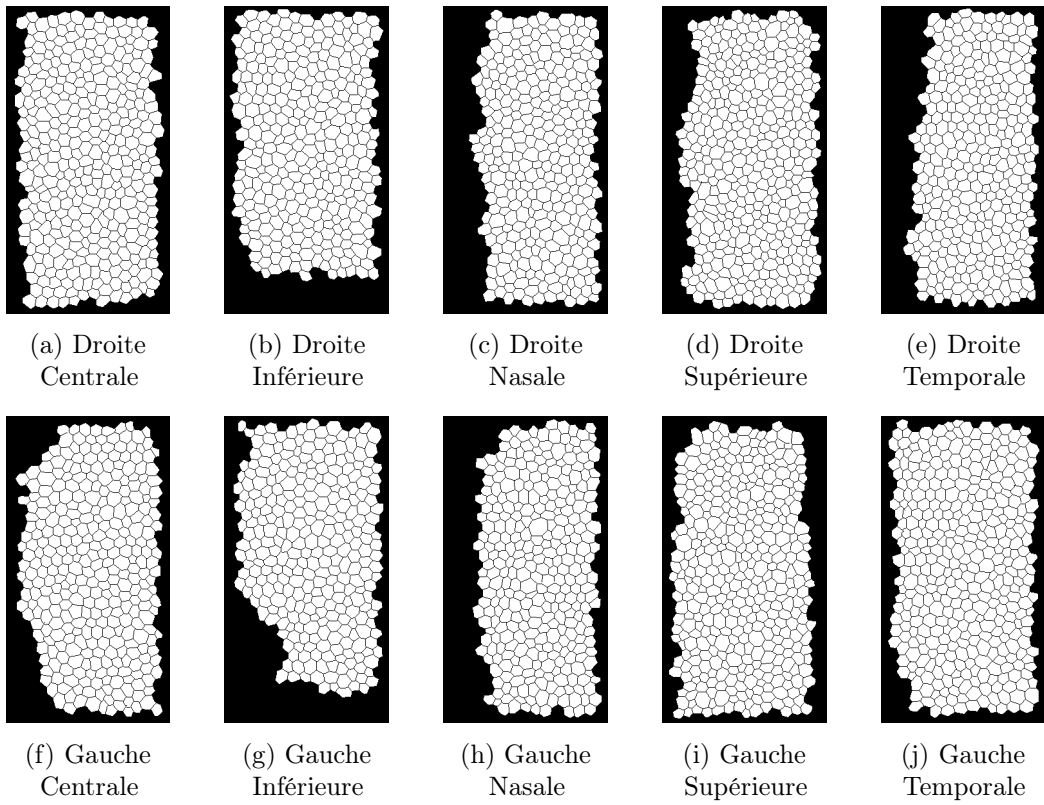


FIGURE 10 – Tranche 2 - Sujet 4 (12 ans)

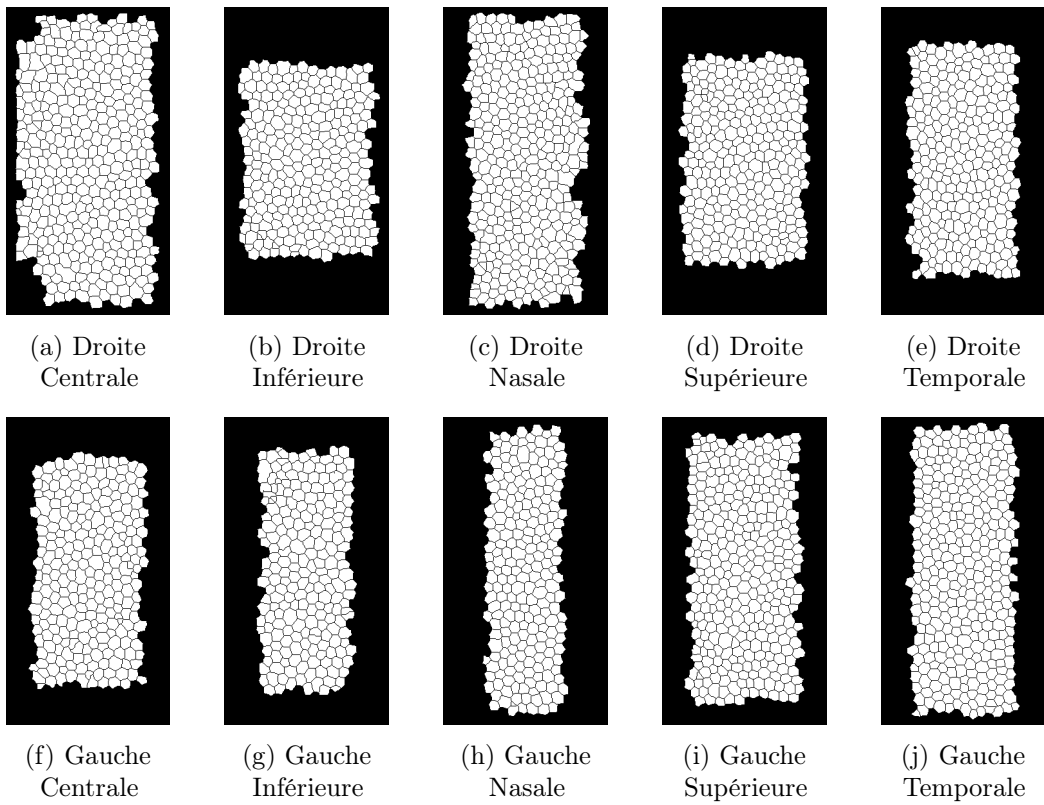


FIGURE 11 – Tranche 2 - Sujet 5 (12 ans)

A.3 Tranche 3 - 21-30 ans

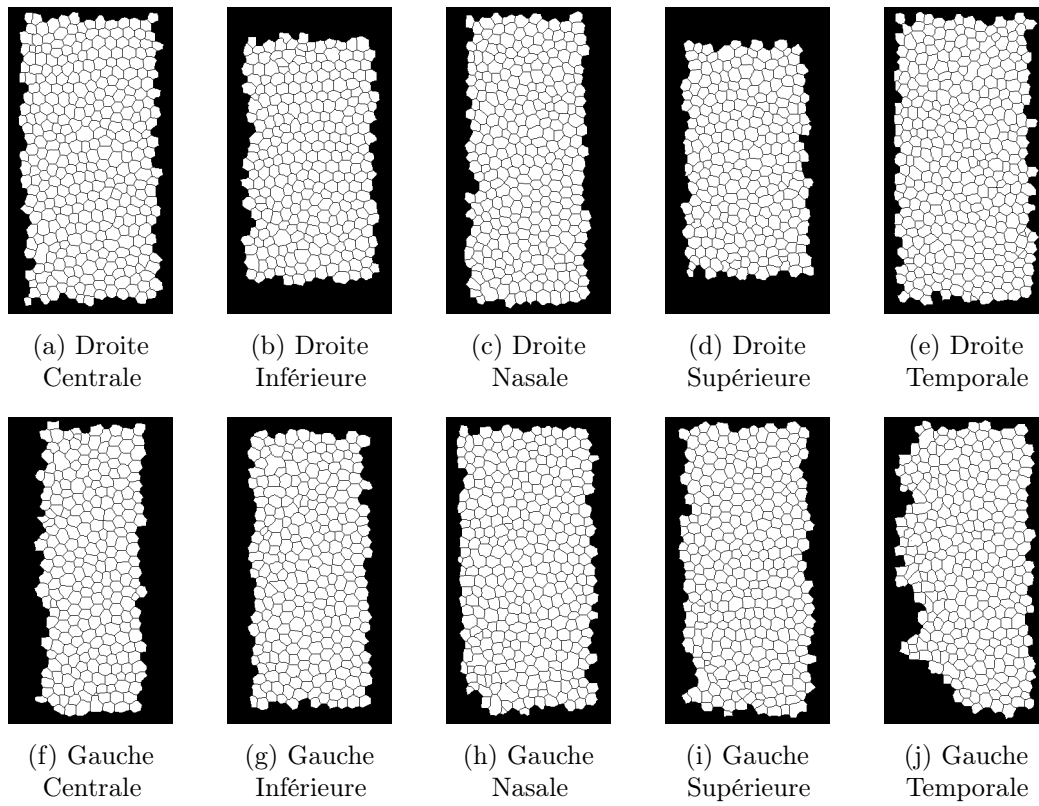


FIGURE 12 – Tranche 3 - Sujet 1 (25 ans)

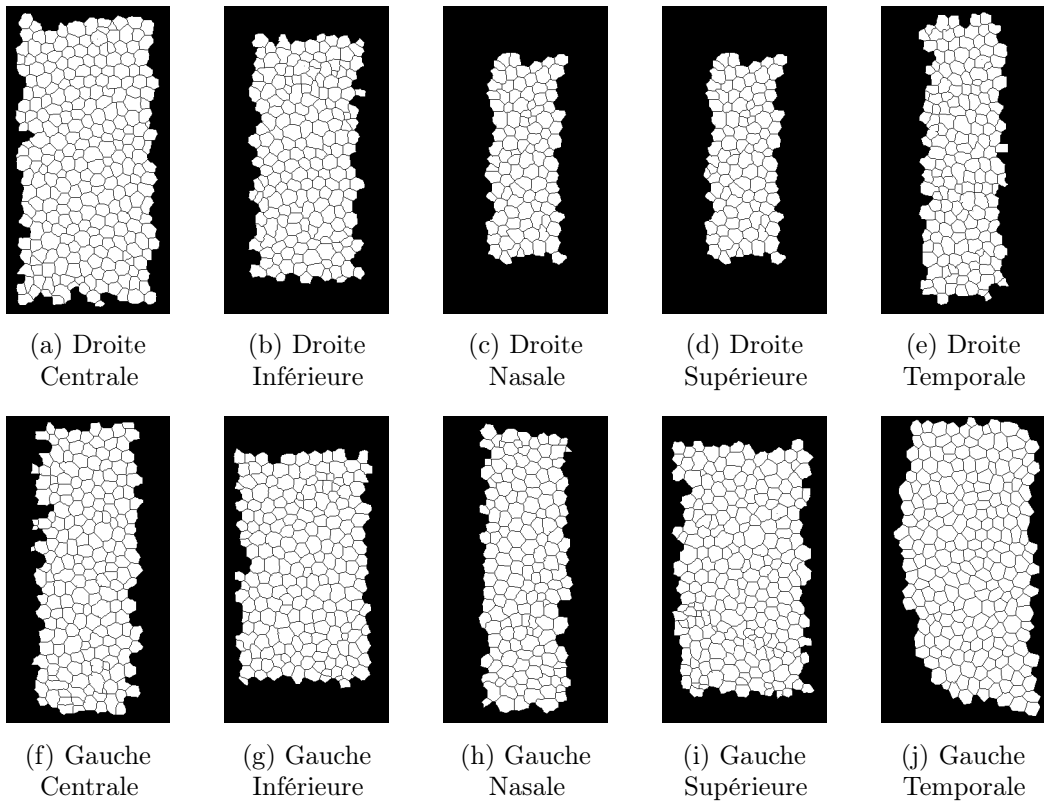


FIGURE 13 – Tranche 3 - Sujet 2 (27 ans)

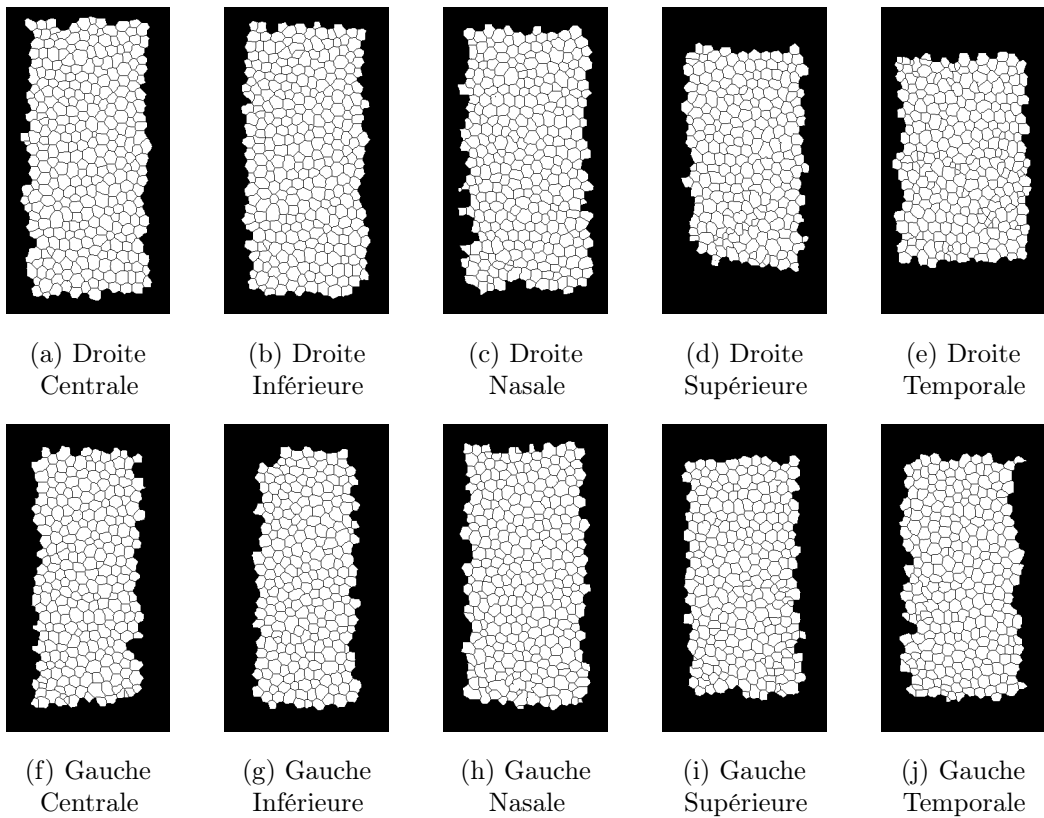


FIGURE 14 – Tranche 3 - Sujet 3 (27 ans)

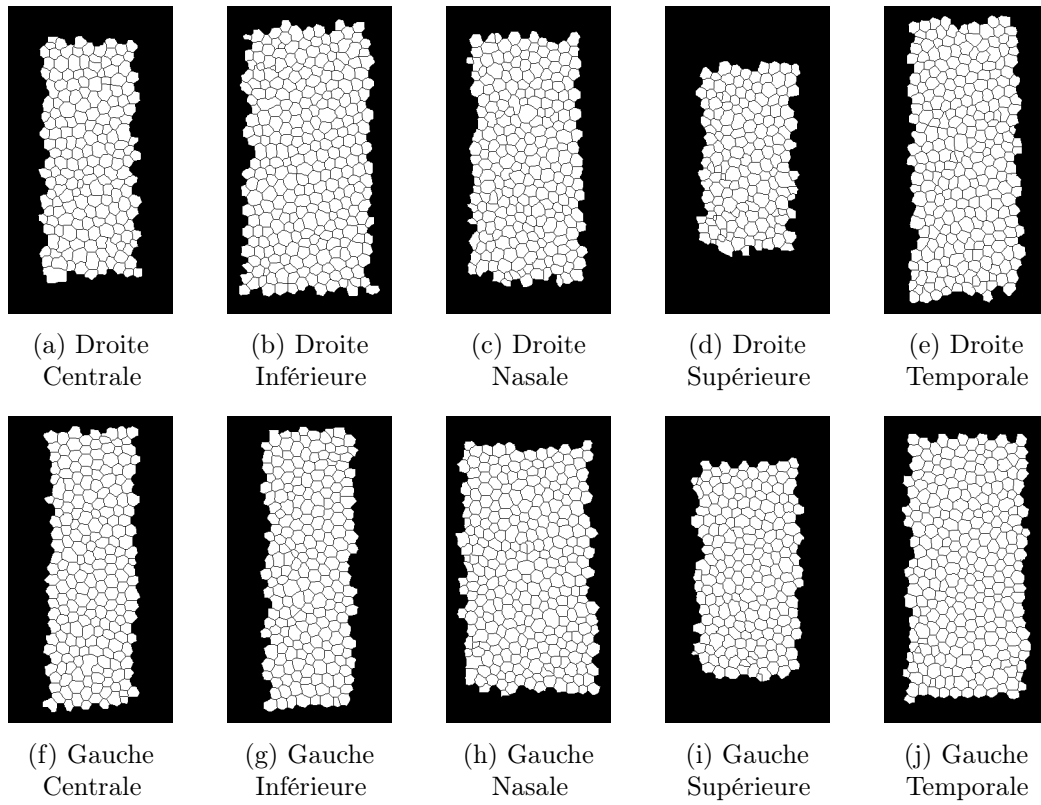


FIGURE 15 – Tranche 3 - Sujet 4 (26 ans)

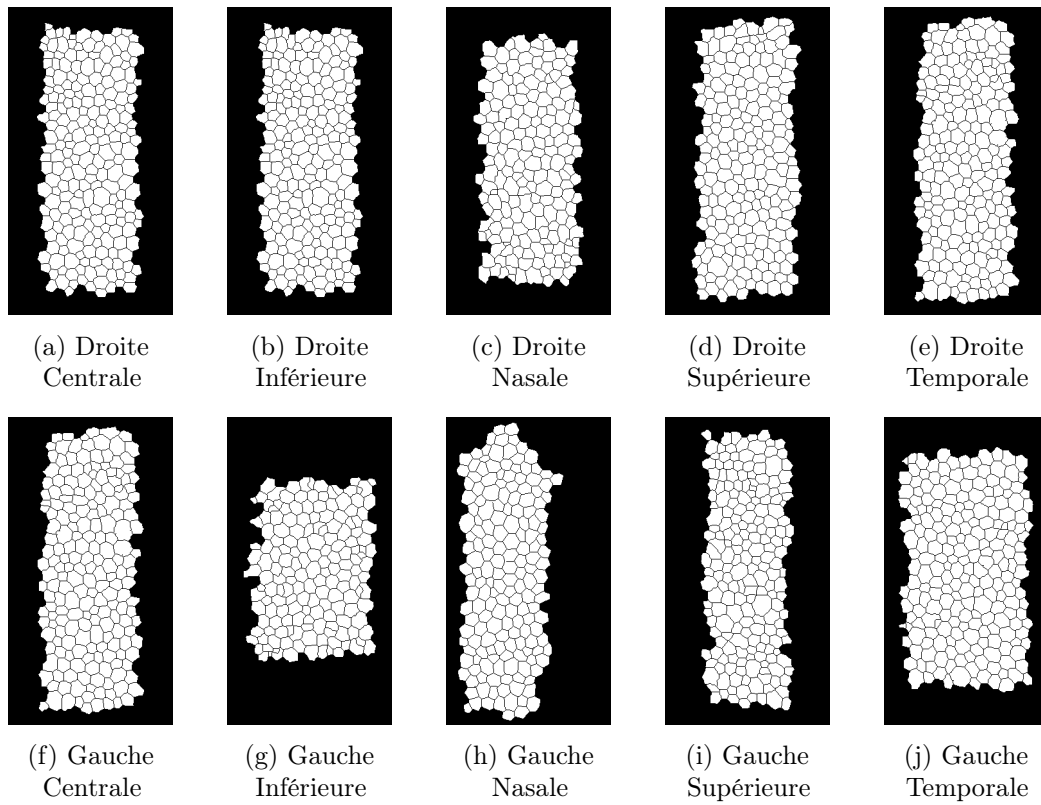


FIGURE 16 – Tranche 3 - Sujet 5 (27 ans)

A.4 Tranche 4 - 31-40 ans

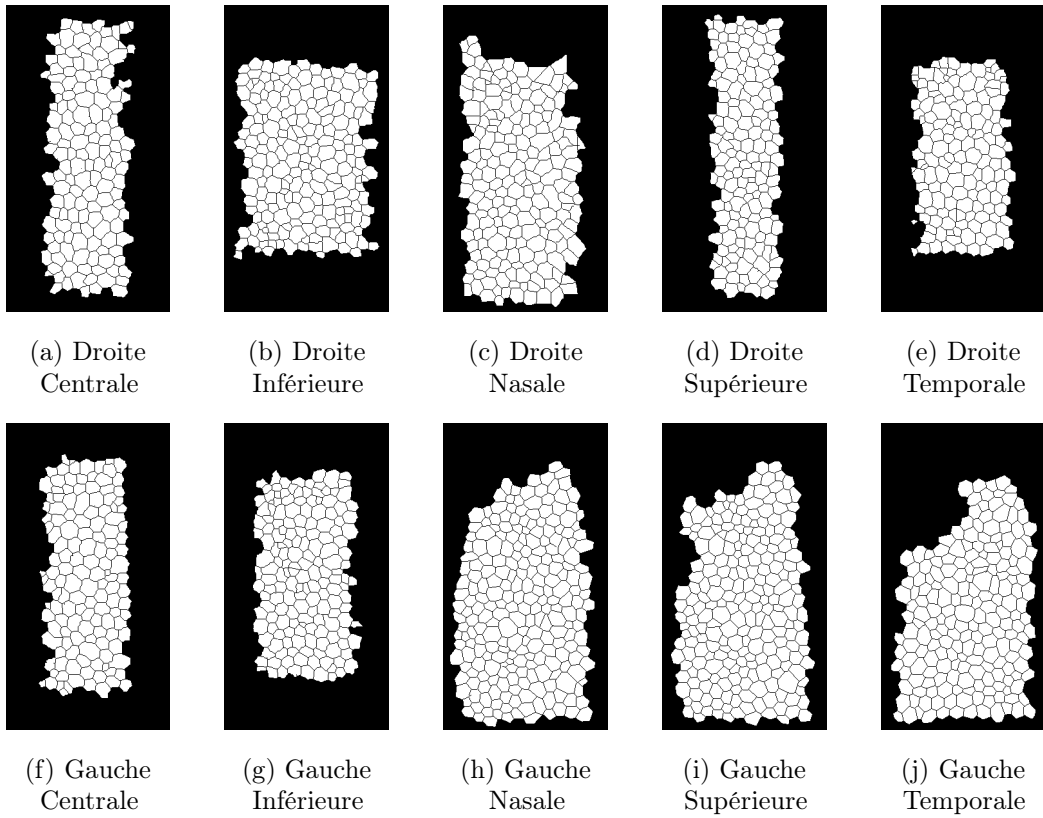


FIGURE 17 – Tranche 4 - Sujet 1 (37 ans)

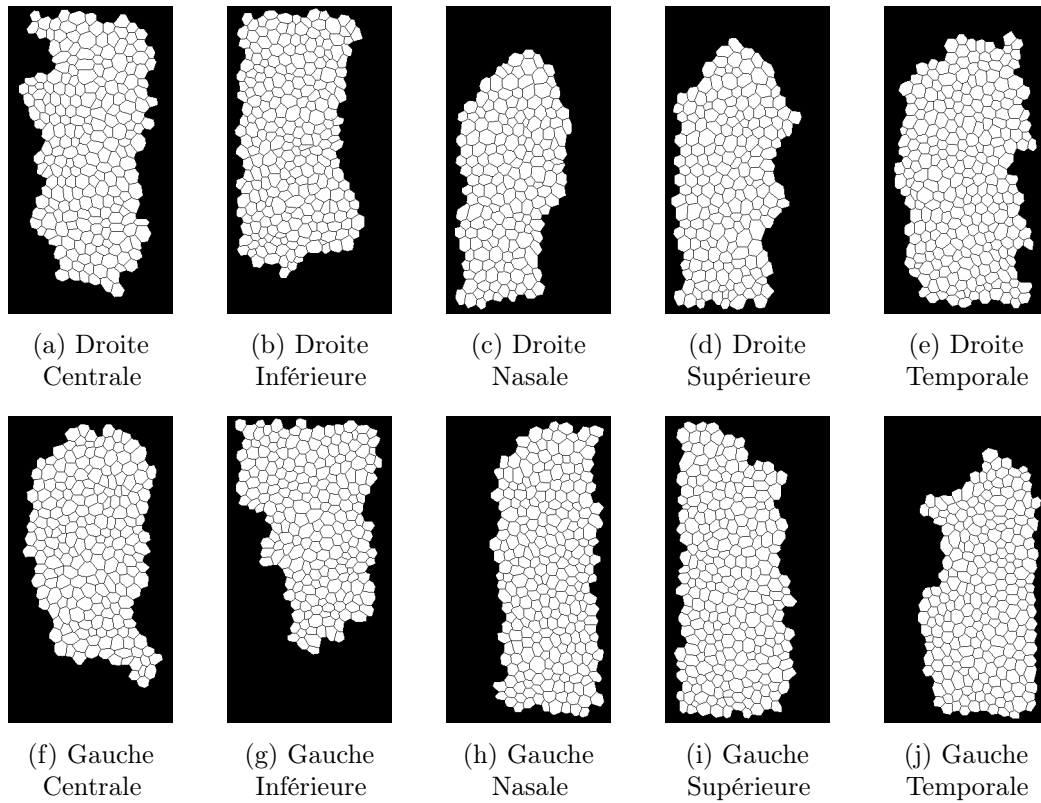


FIGURE 18 – Tranche 4 - Sujet 2 (37 ans)

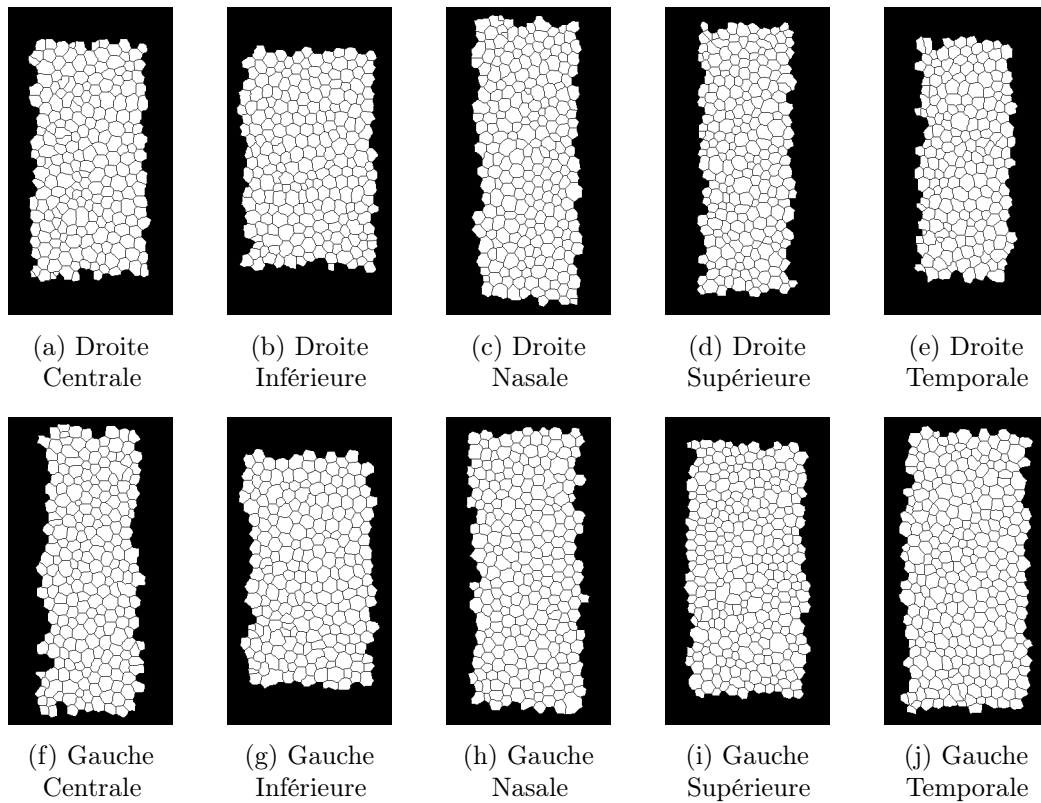


FIGURE 19 – Tranche 4 - Sujet 3 (33 ans)

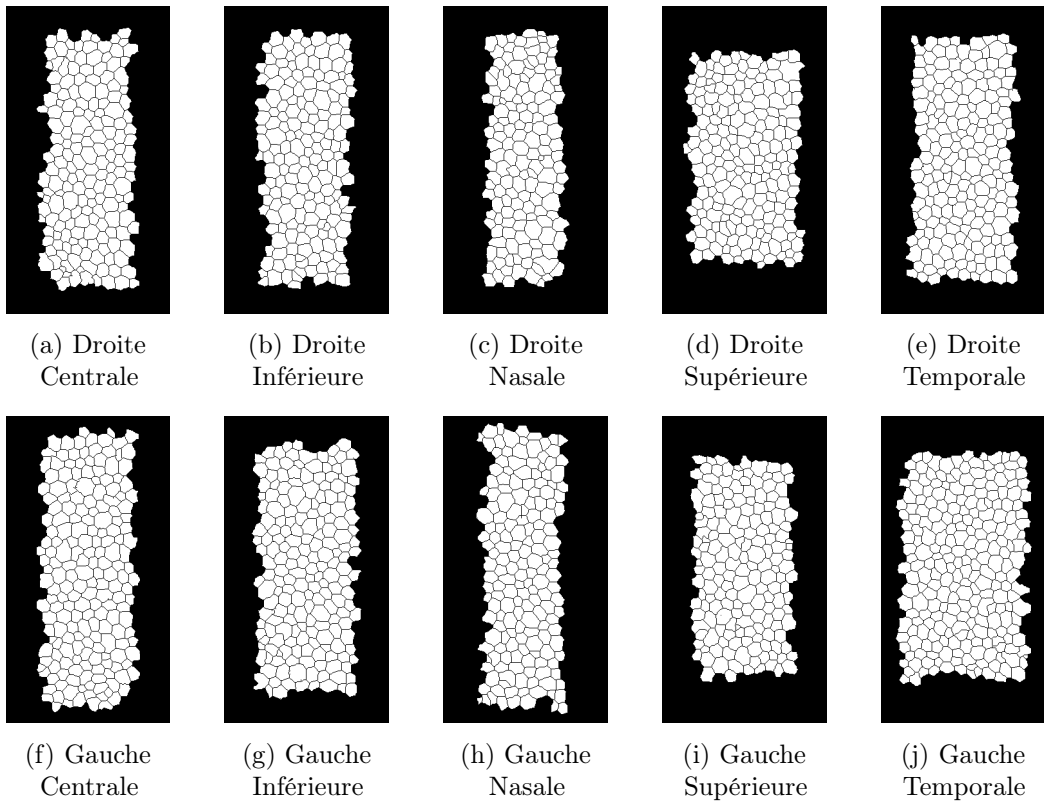


FIGURE 20 – Tranche 4 - Sujet 4 (39 ans)

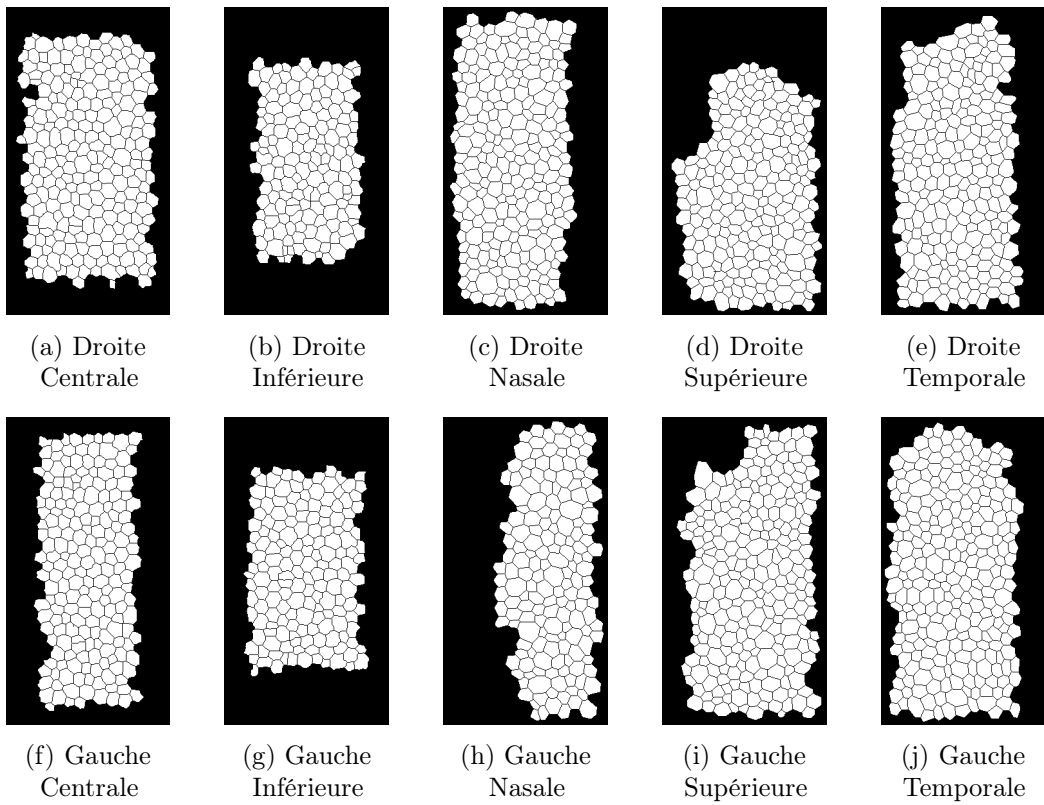


FIGURE 21 – Tranche 4 - Sujet 5 (34 ans)

A.5 Tranche 5 - 41-50 ans

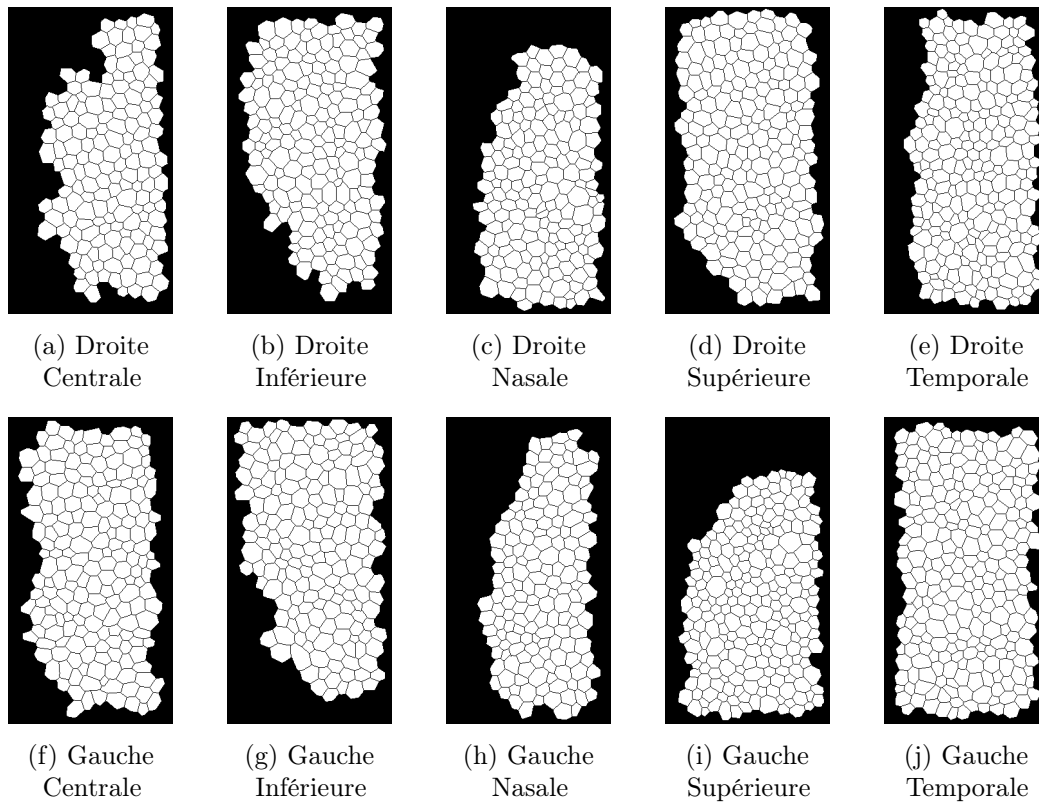


FIGURE 22 – Tranche 5 - Sujet 1 (41 ans)

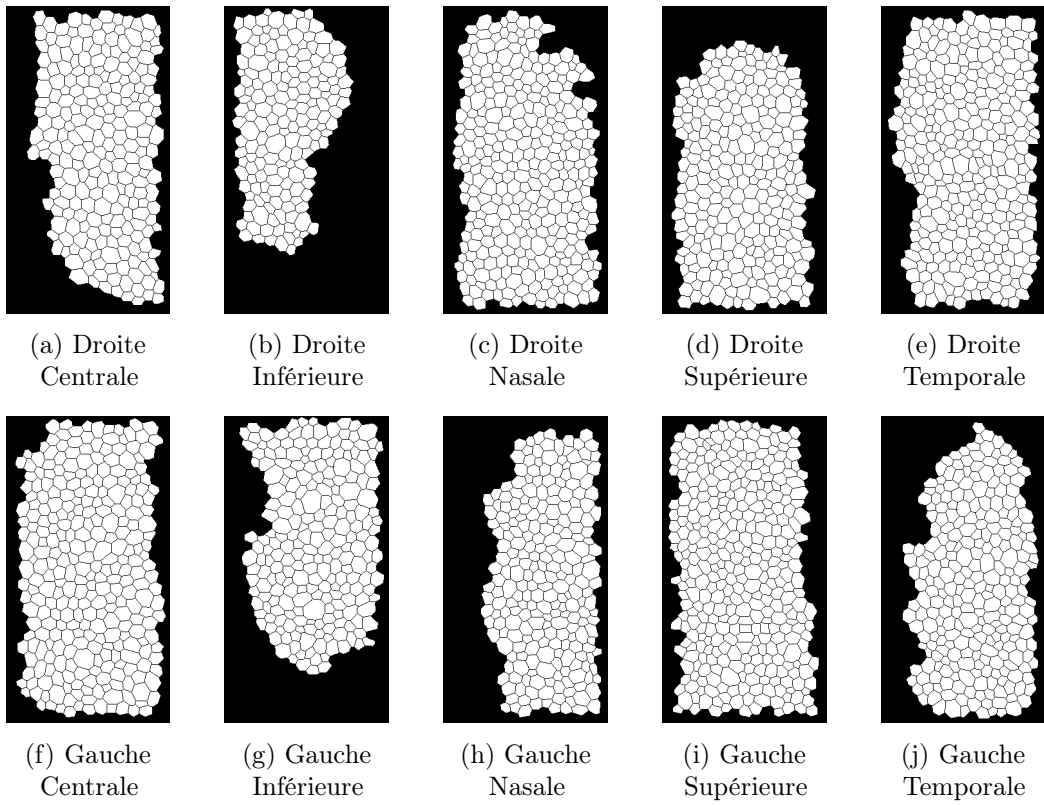


FIGURE 23 – Tranche 5 - Sujet 2 (49 ans)

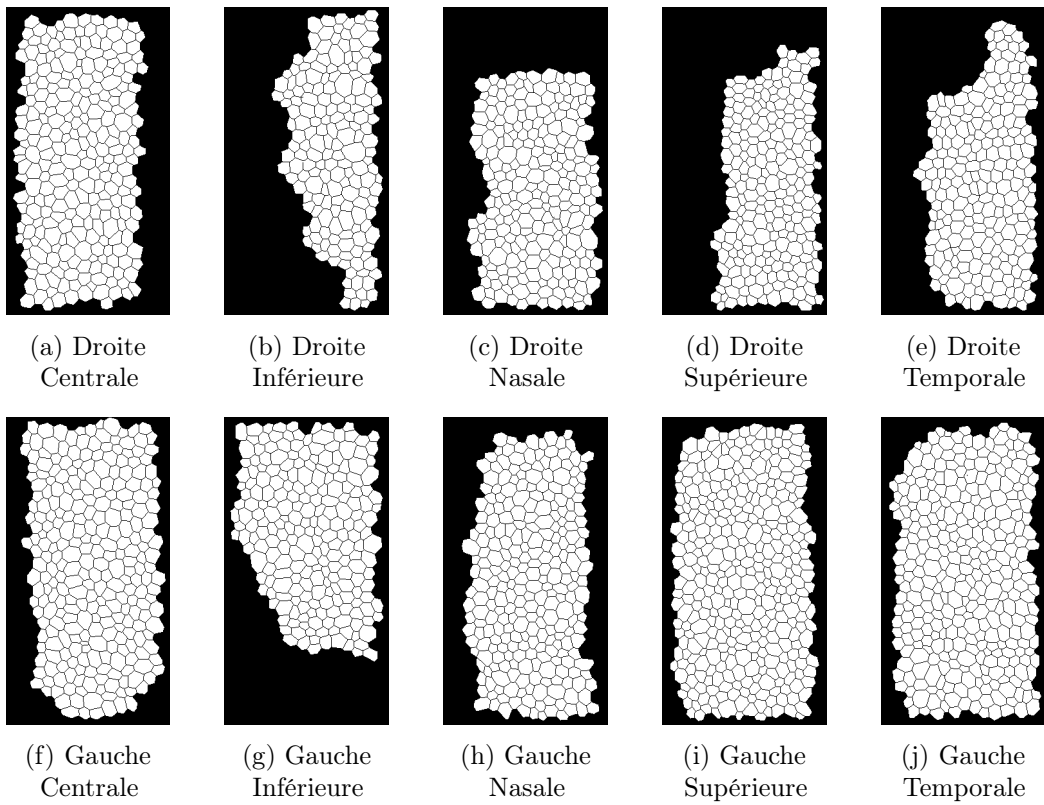


FIGURE 24 – Tranche 5 - Sujet 3 (42 ans)

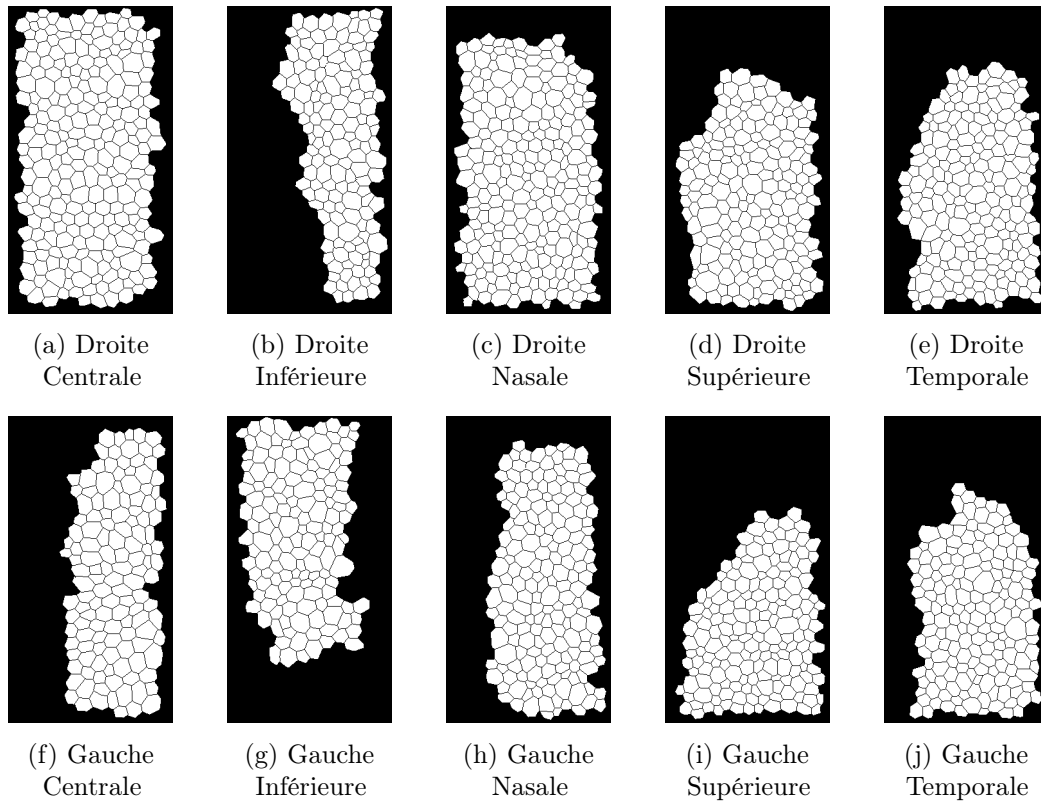


FIGURE 25 – Tranche 5 - Sujet 4 (42 ans)

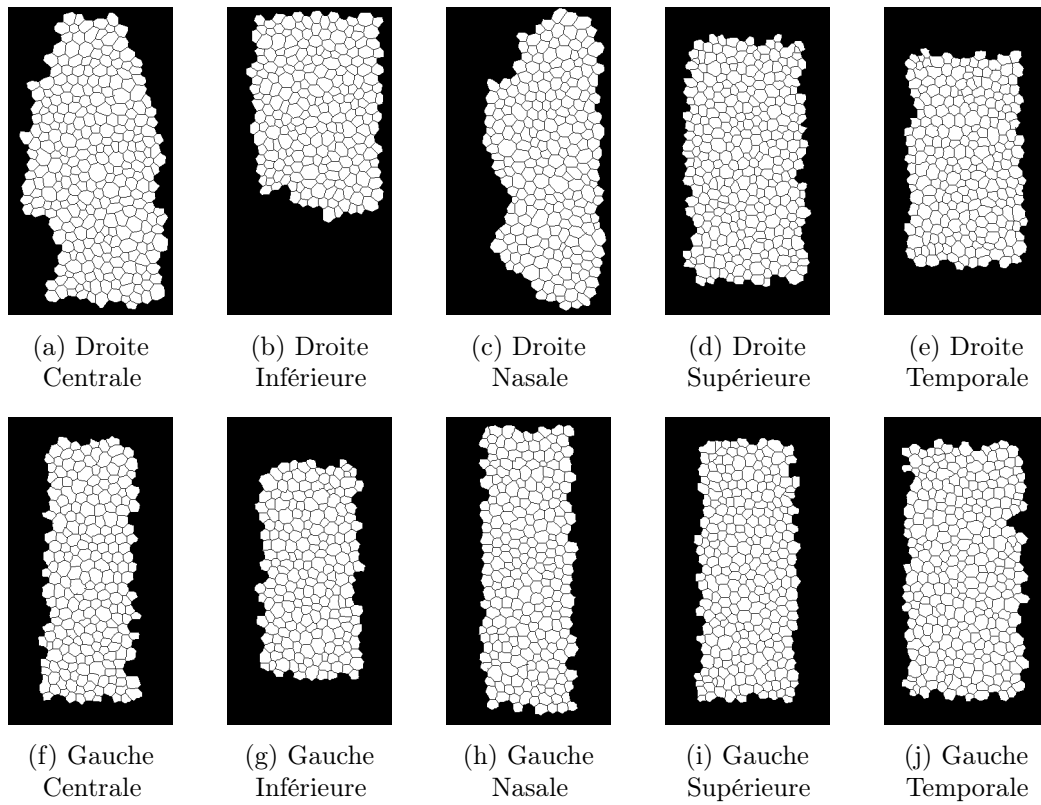


FIGURE 26 – Tranche 5 - Sujet 5 (43 ans)

A.6 Tranche 6 - 51-60 ans

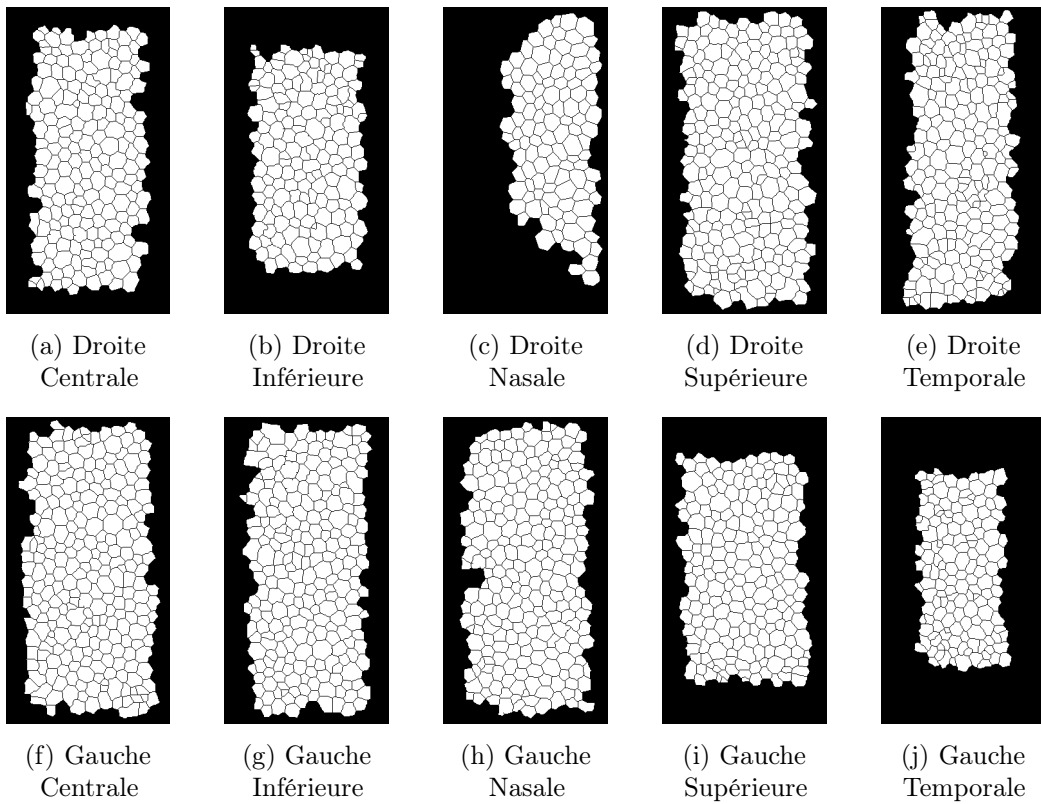


FIGURE 27 – Tranche 6 - Sujet 1 (52 ans)

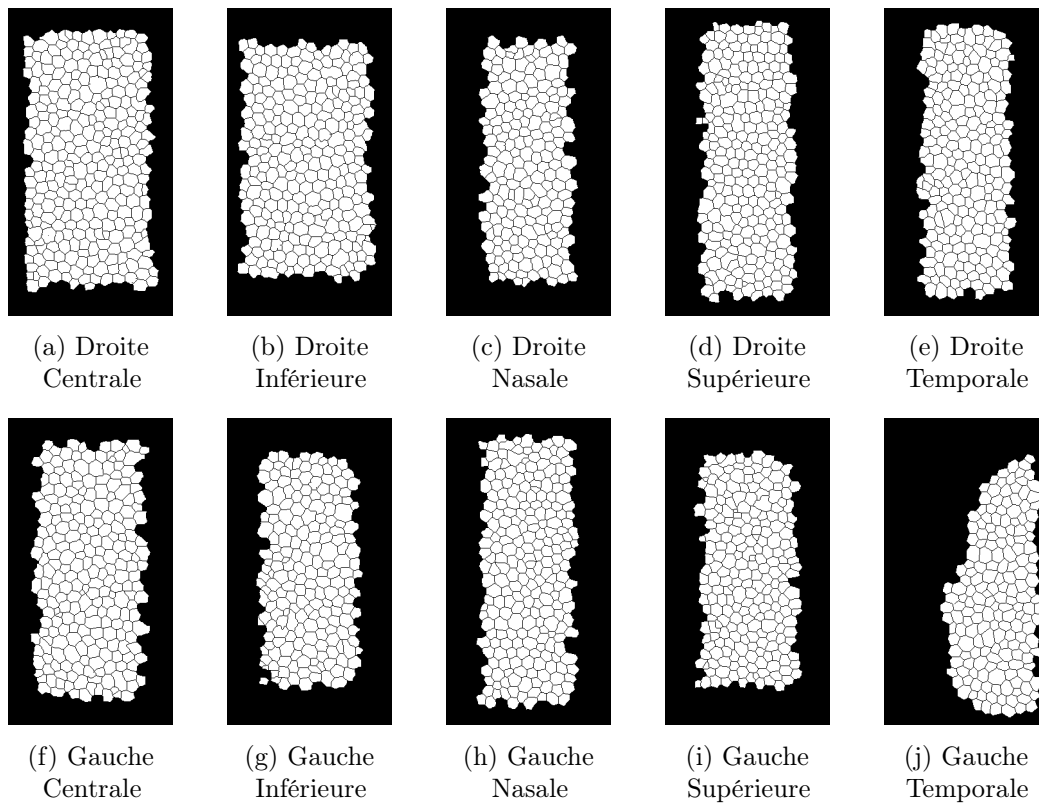


FIGURE 28 – Tranche 6 - Sujet 2 (54 ans)

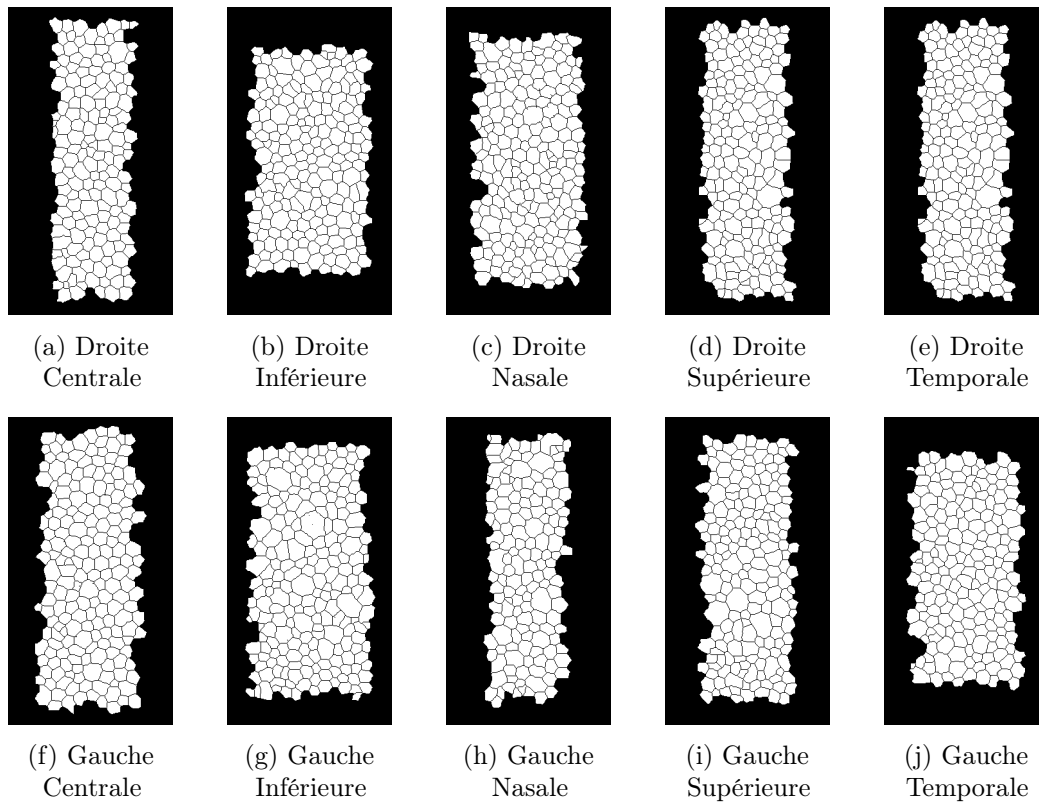


FIGURE 29 – Tranche 6 - Sujet 3 (56 ans)

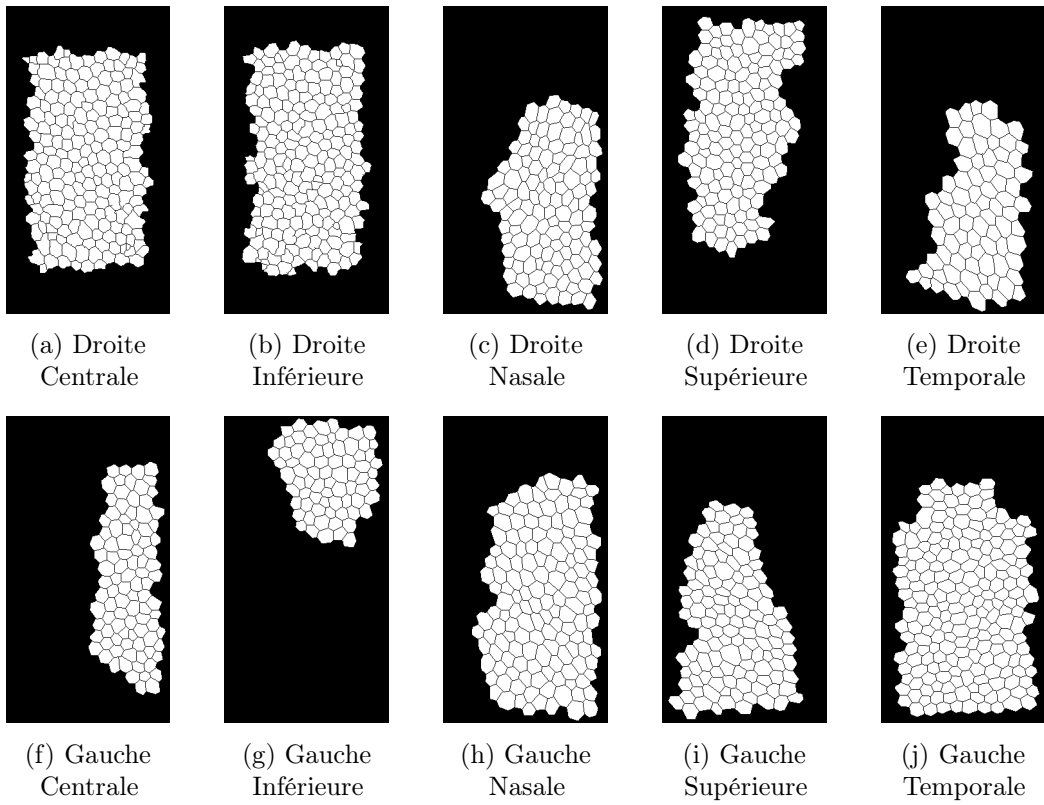


FIGURE 30 – Tranche 6 - Sujet 4 (57 ans)

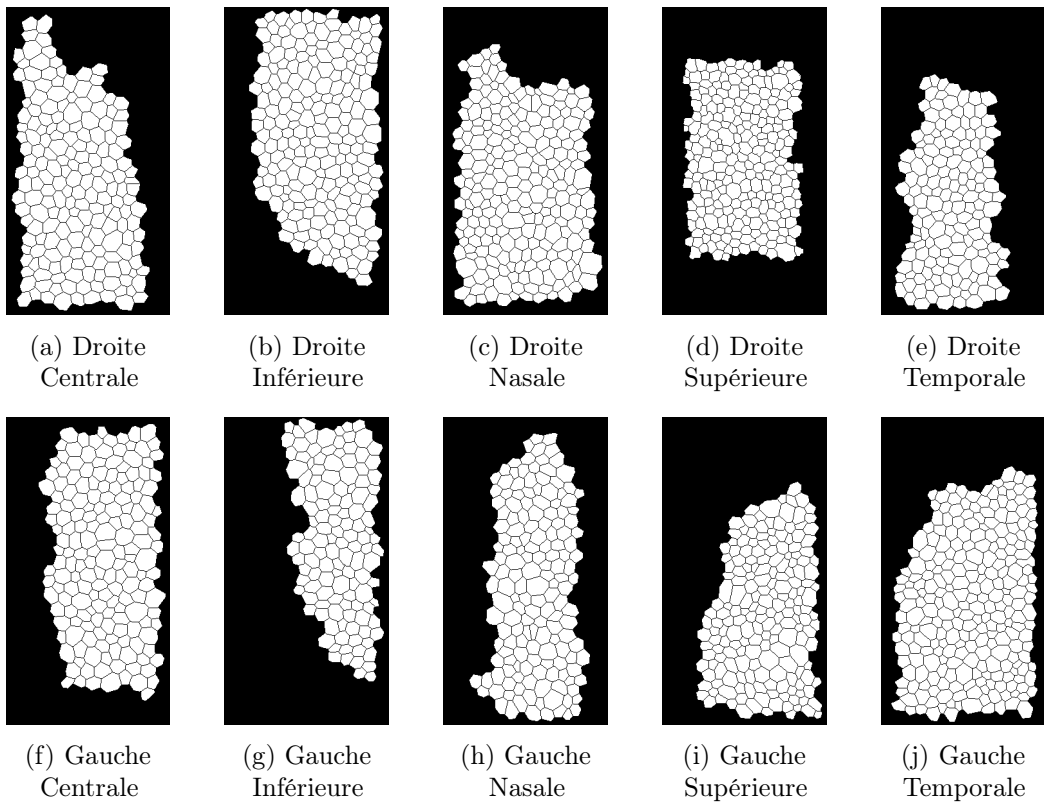


FIGURE 31 – Tranche 6 - Sujet 5 (56 ans)

A.7 Tranche 7 - 61-70 ans

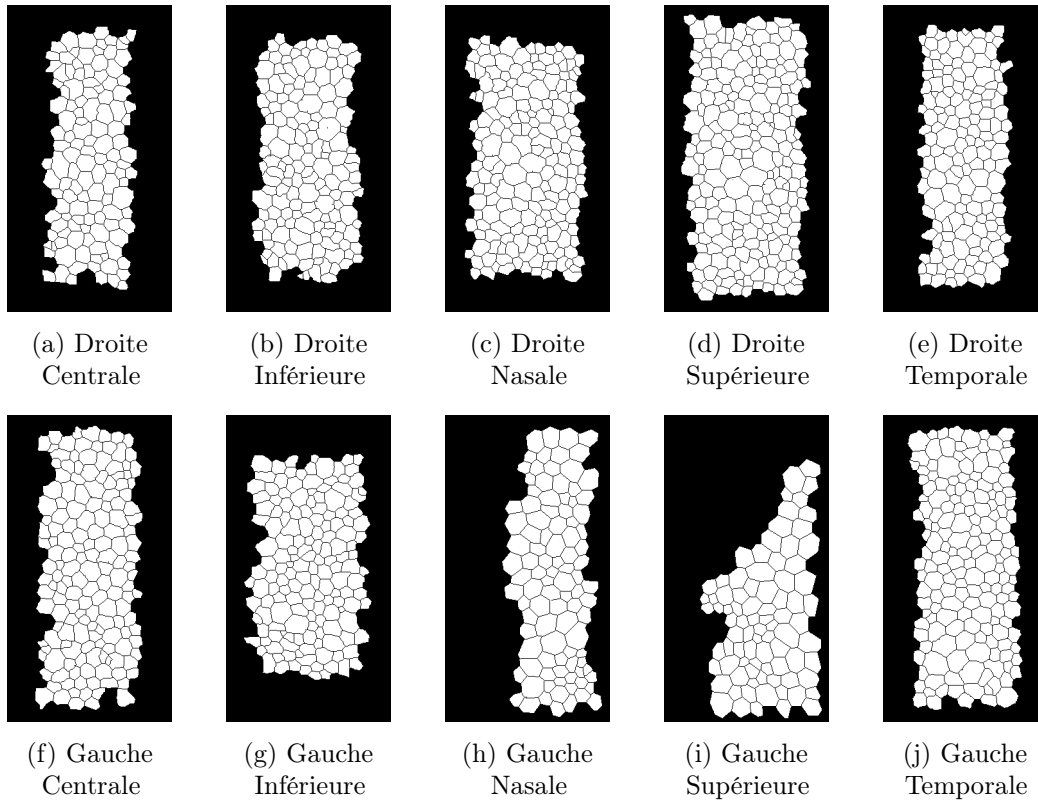


FIGURE 32 – Tranche 7 - Sujet 1 (63 ans)

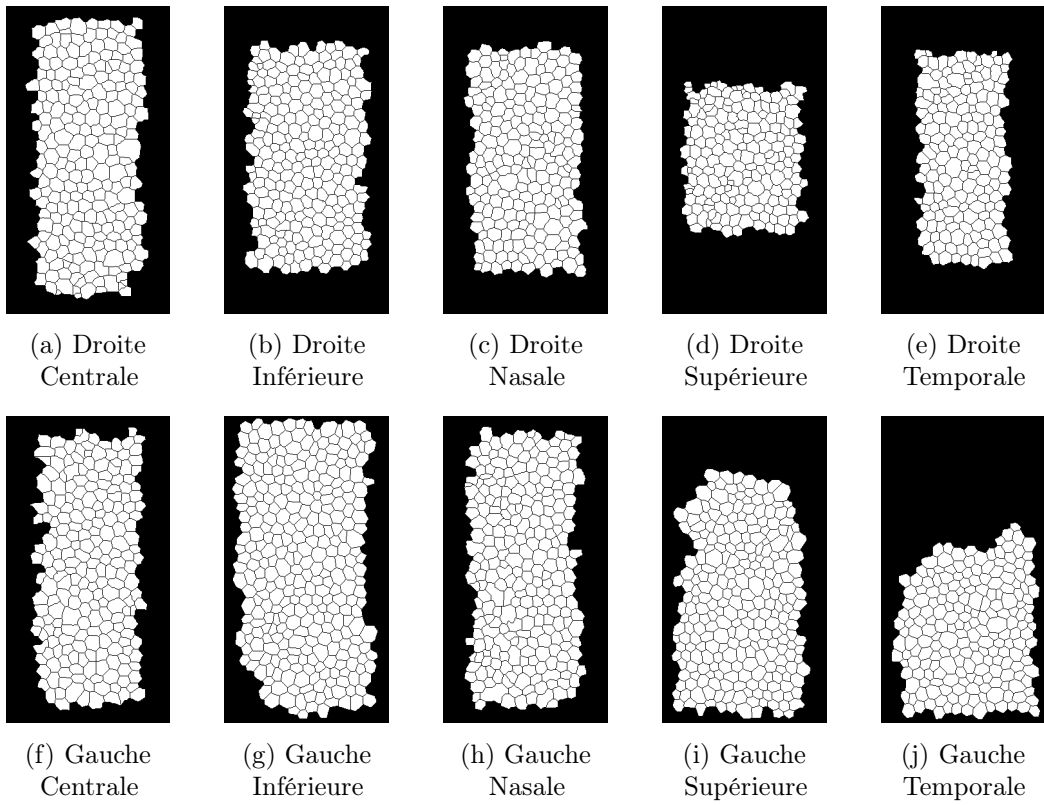


FIGURE 33 – Tranche 7 - Sujet 2 (64 ans)

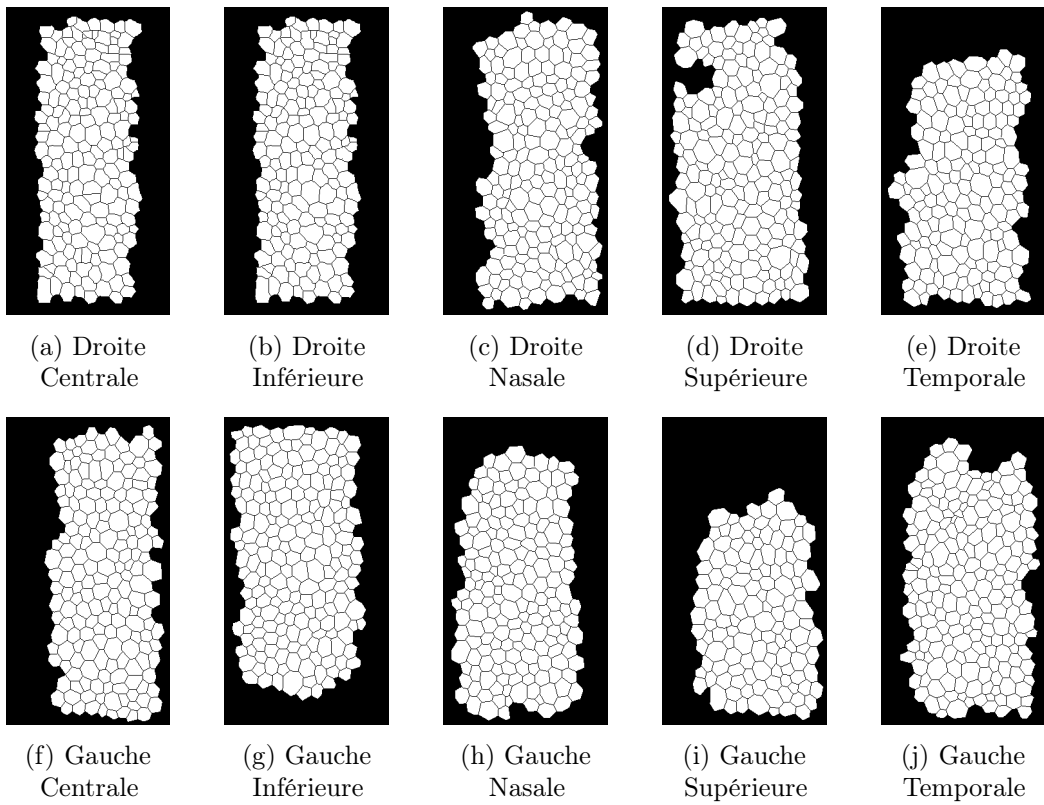


FIGURE 34 – Tranche 7 - Sujet 3 (62 ans)

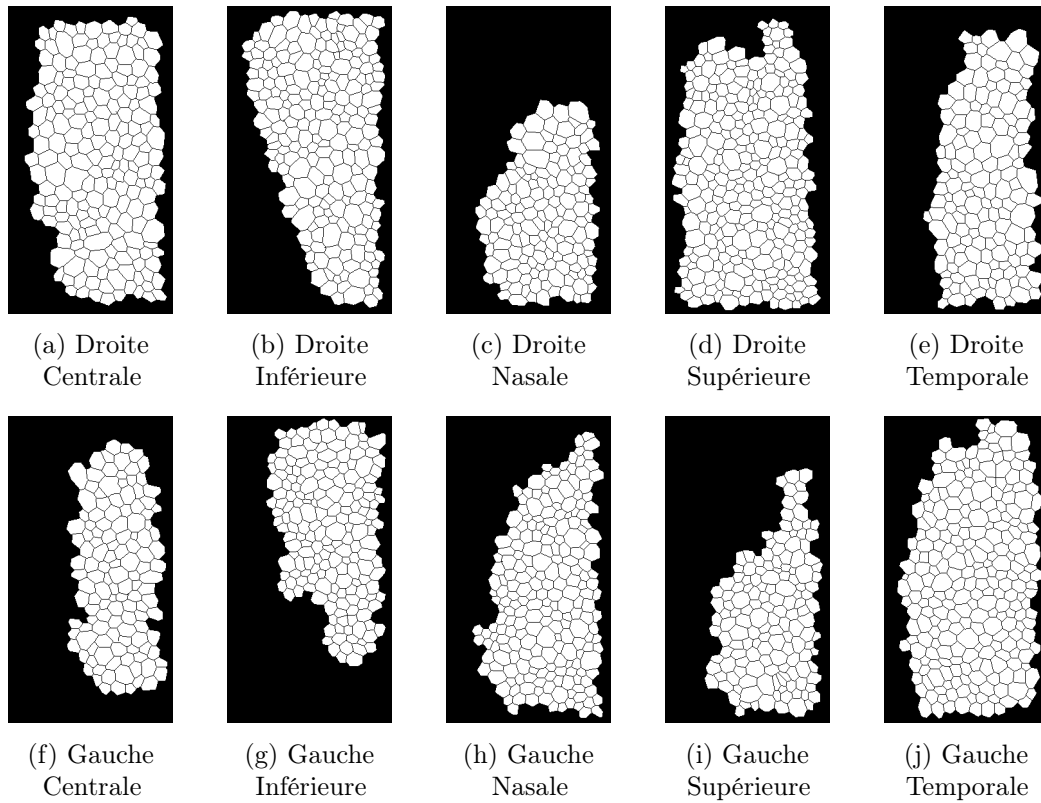


FIGURE 35 – Tranche 7 - Sujet 4 (61 ans)

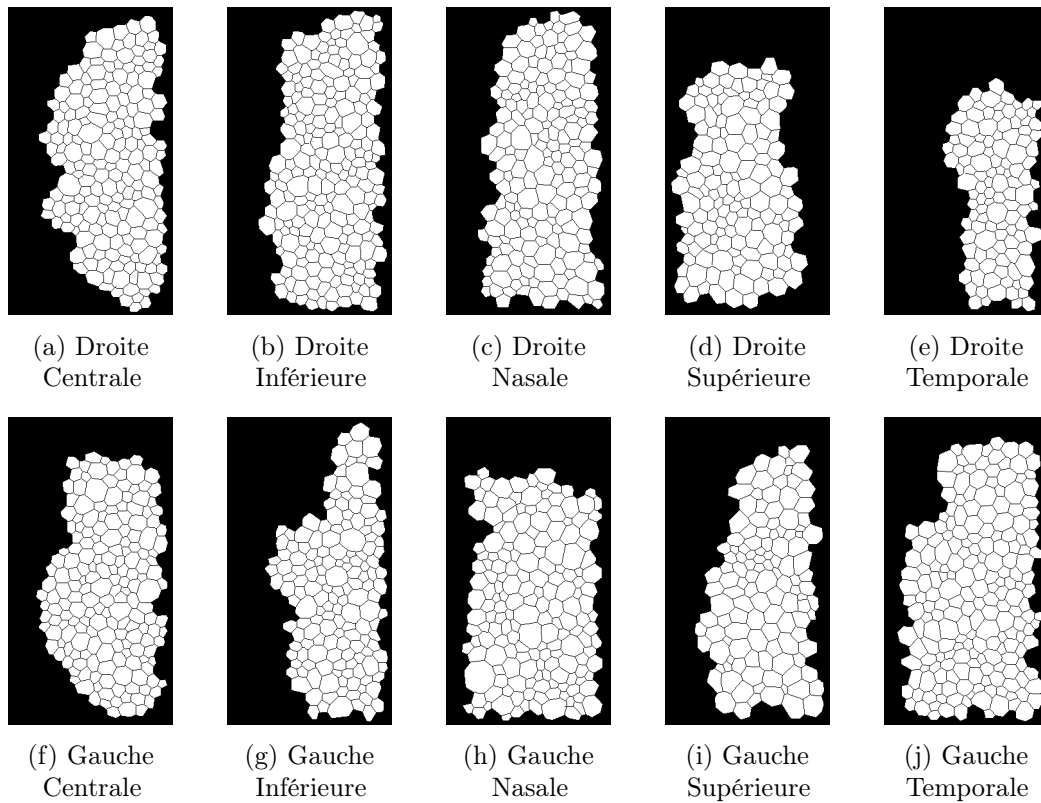


FIGURE 36 – Tranche 7 - Sujet 5 (62 ans)

A.8 Tranche 8 - 71-80 ans

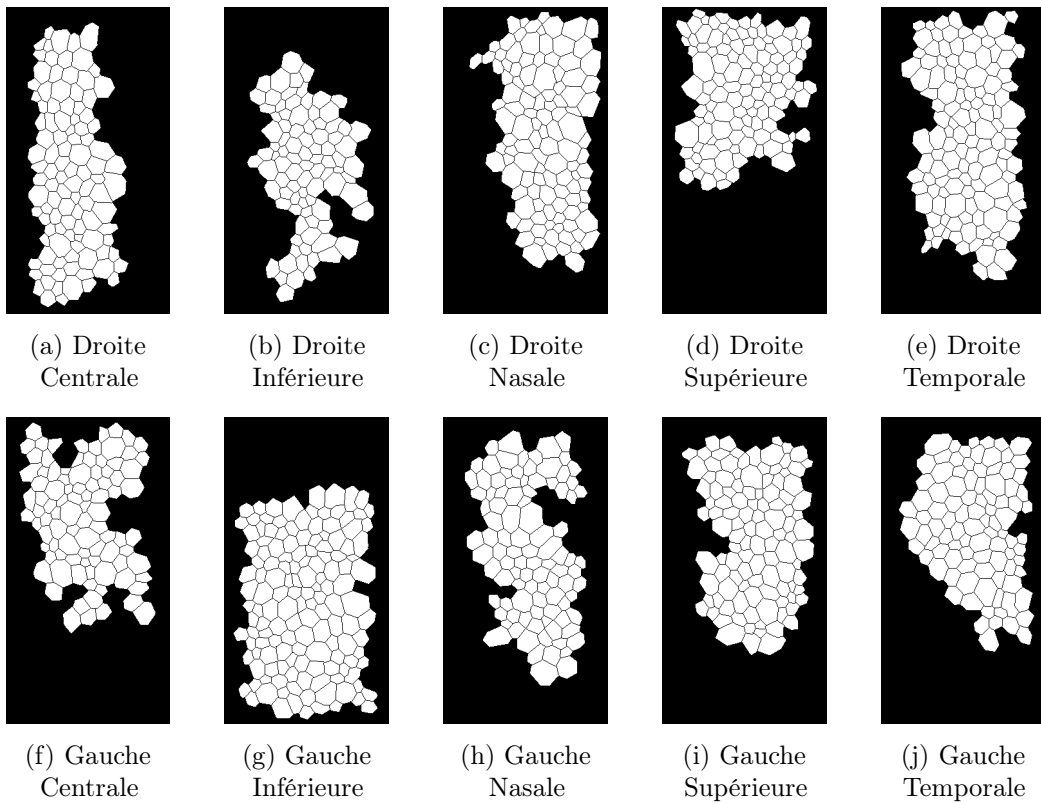


FIGURE 37 – Tranche 8 - Sujet 1 (73 ans)

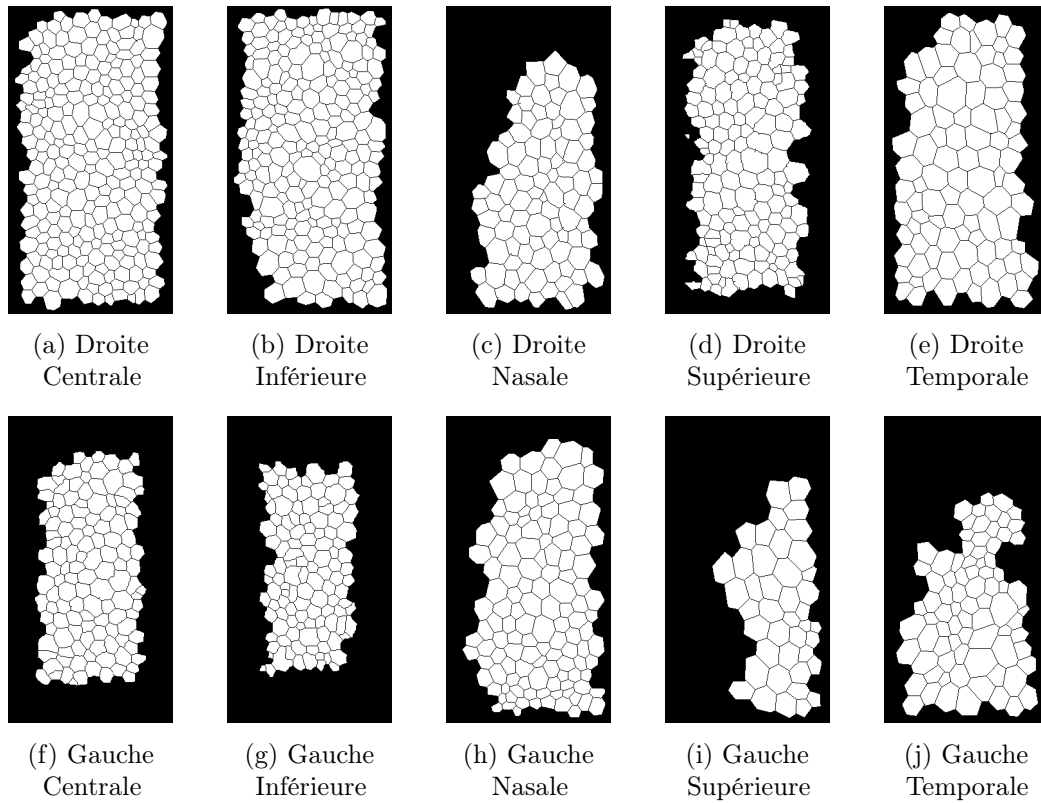


FIGURE 38 – Tranche 8 - Sujet 2 (80 ans)

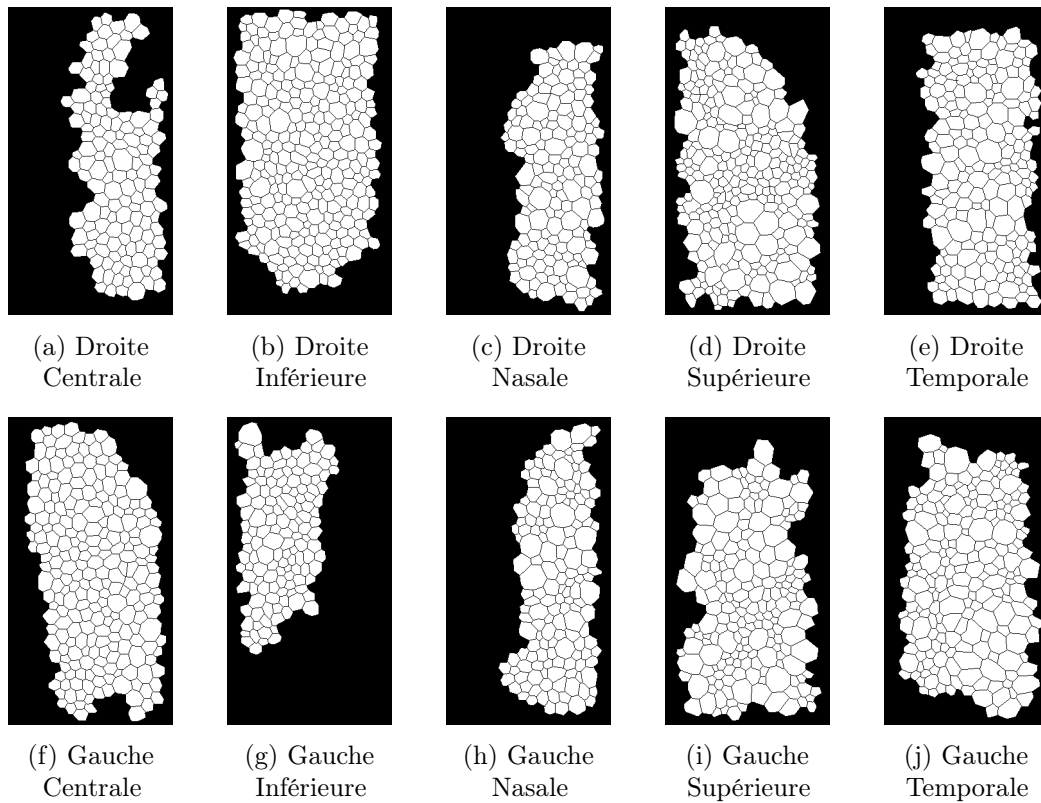


FIGURE 39 – Tranche 8 - Sujet 3 (75 ans)

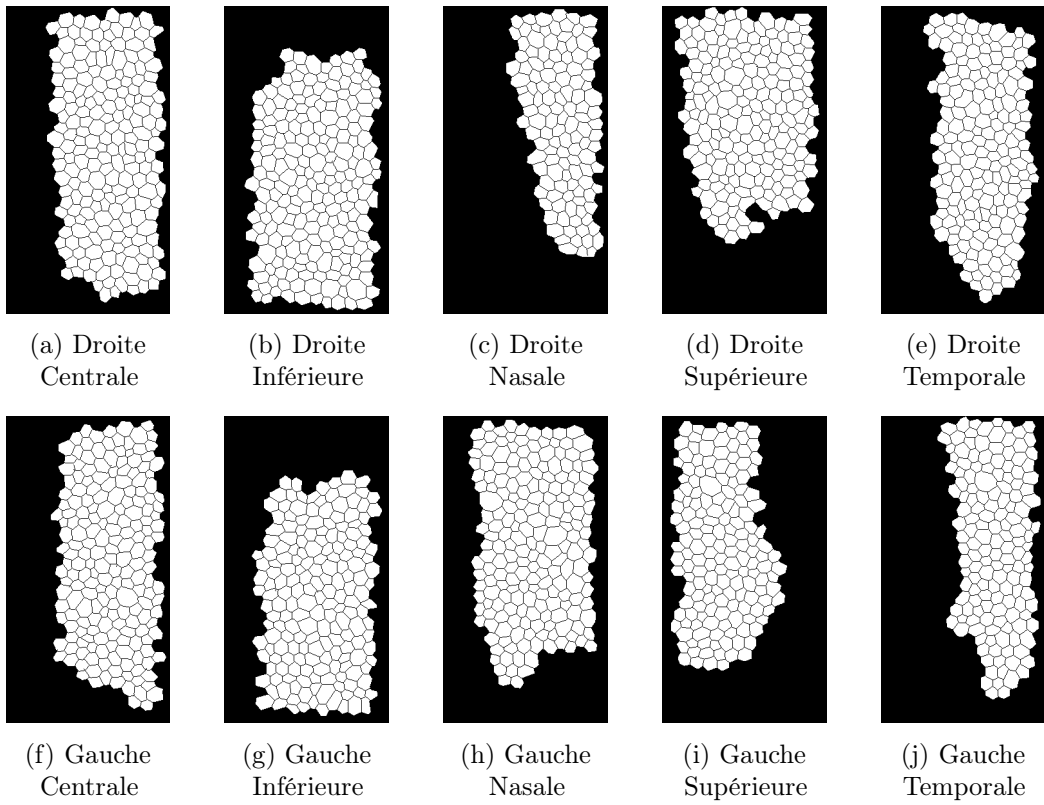


FIGURE 40 – Tranche 8 - Sujet 4 (71 ans)

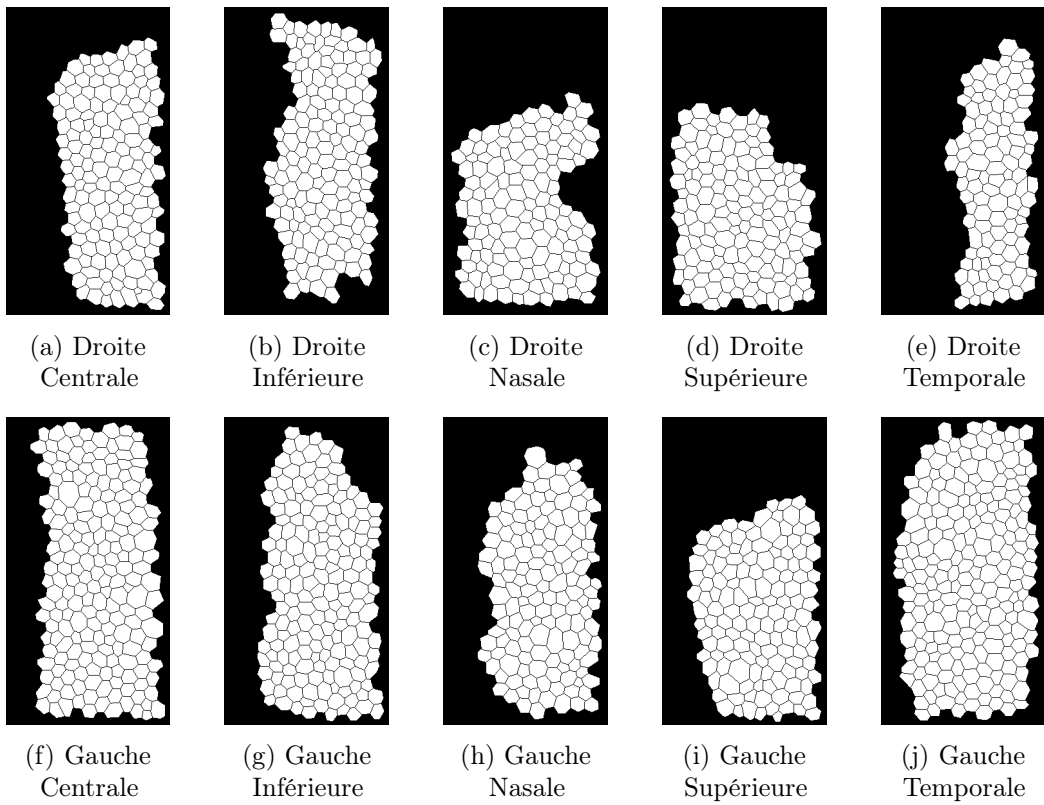
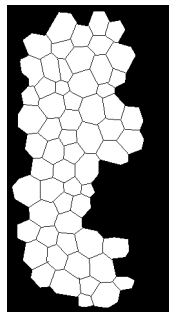
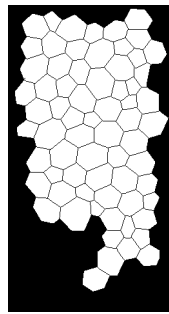


FIGURE 41 – Tranche 8 - Sujet 5 (71 ans)

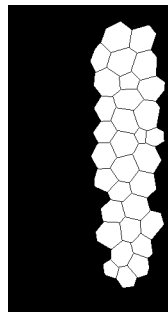
A.9 Tranche 9 - 81-90 ans



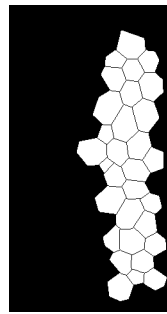
(a) Droite Centrale



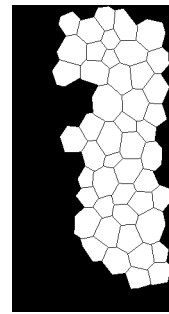
(b) Droite Inférieure



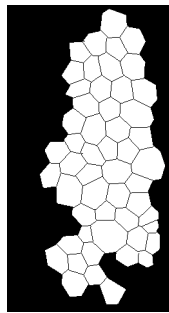
(c) Droite Nasale



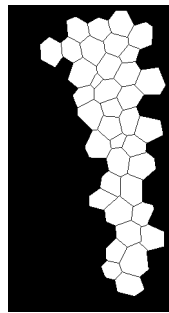
(d) Droite Supérieure



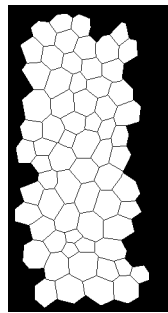
(e) Droite Temporale



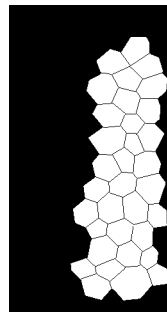
(f) Gauche Centrale



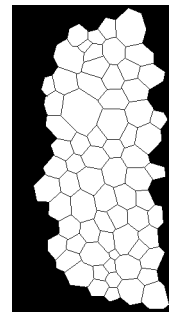
(g) Gauche Inférieure



(h) Gauche Nasale



(i) Gauche Supérieure



(j) Gauche Temporale

FIGURE 42 – Tranche 9 - Sujet 1 (84 ans)

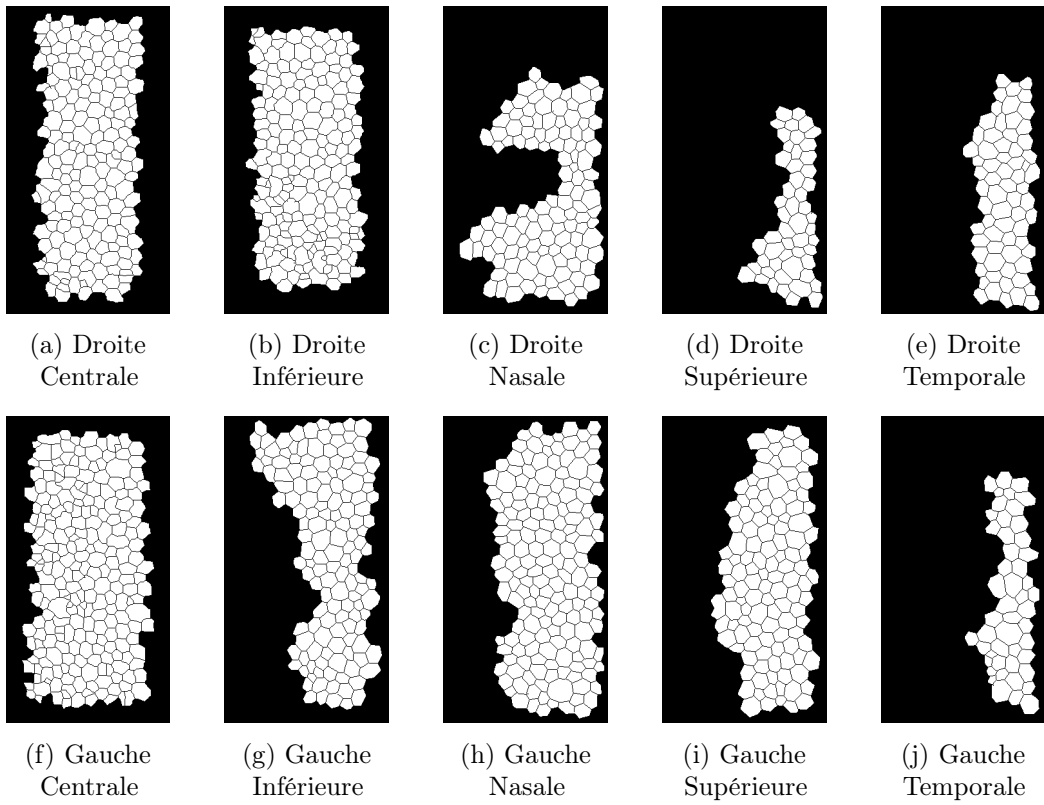


FIGURE 43 – Tranche 9 - Sujet 2 (85 ans)

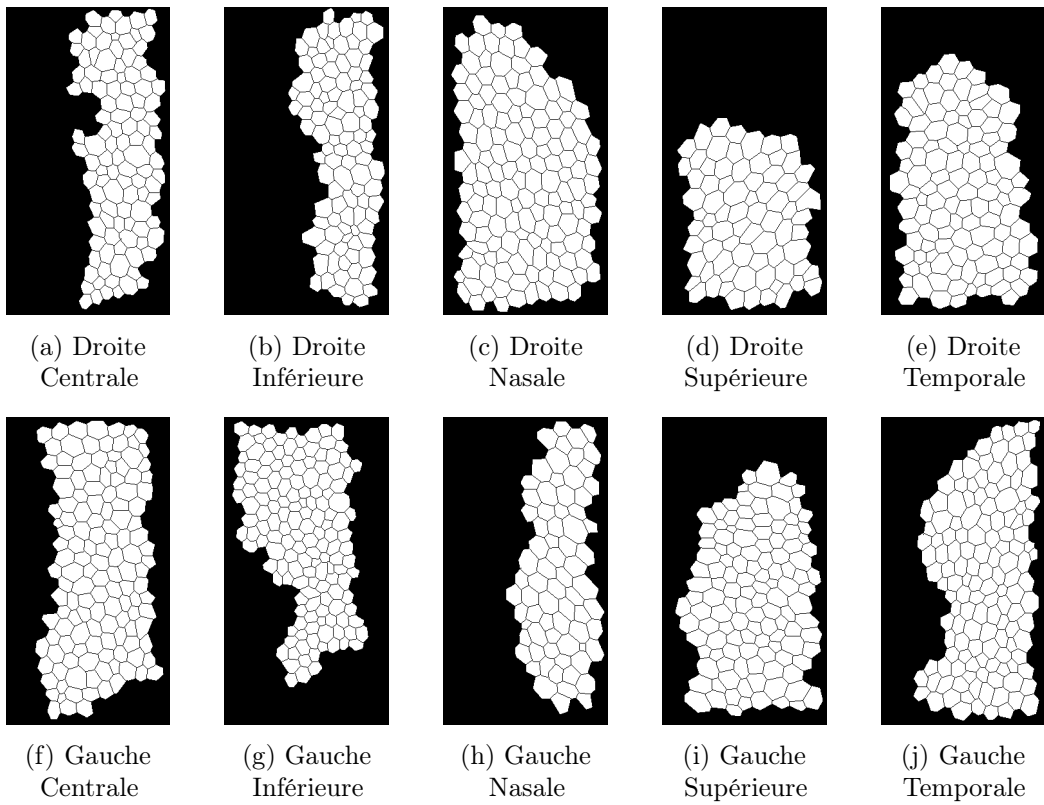


FIGURE 44 – Tranche 9 - Sujet 3 (90 ans)

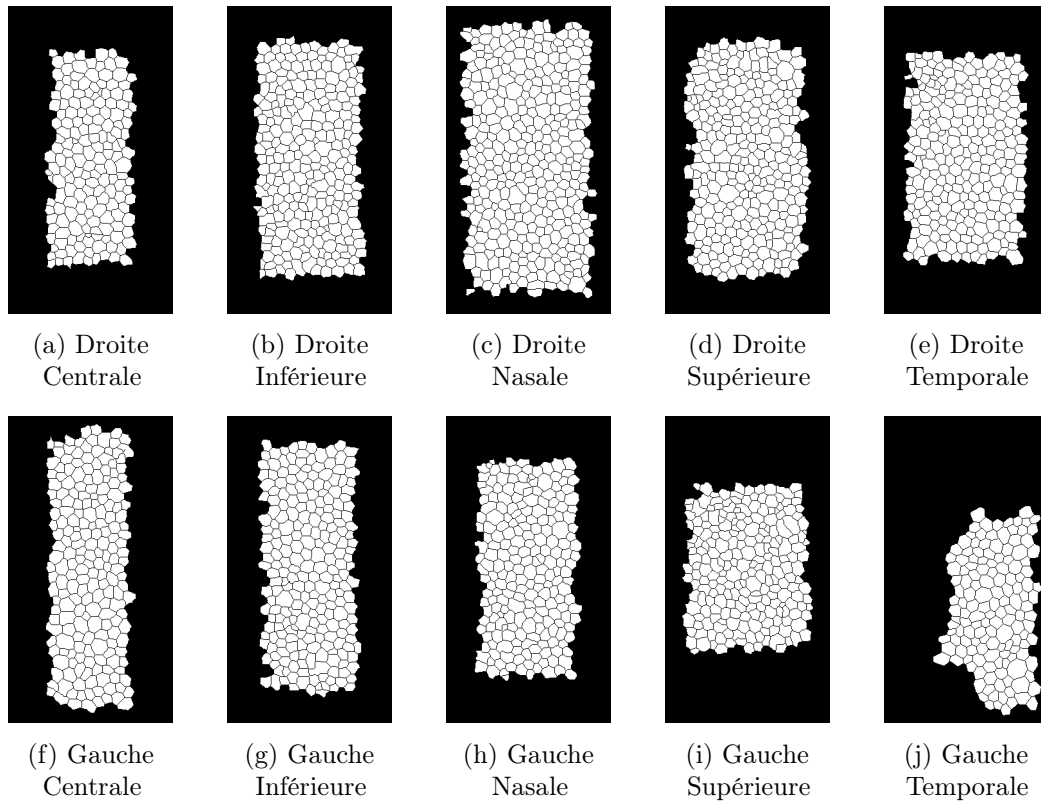


FIGURE 45 – Tranche 9 - Sujet 4 (83 ans)

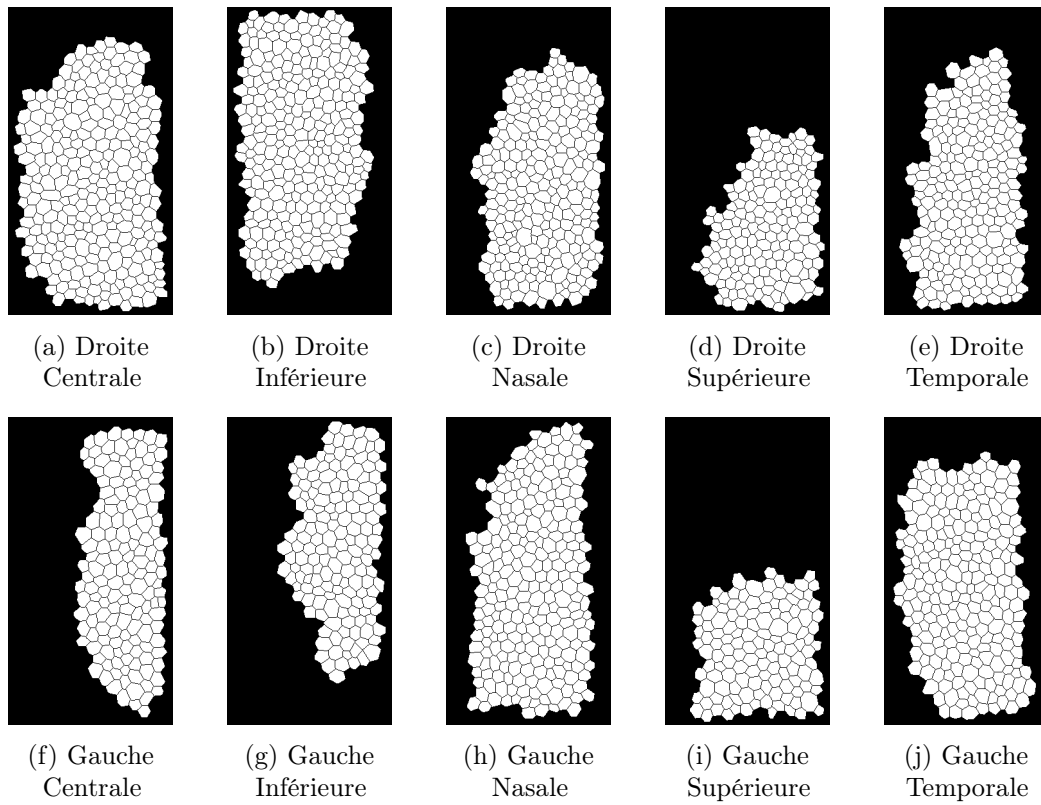


FIGURE 46 – Tranche 9 - Sujet 5 (81 ans)

A.10 Tranche 10 - 91-100 ans

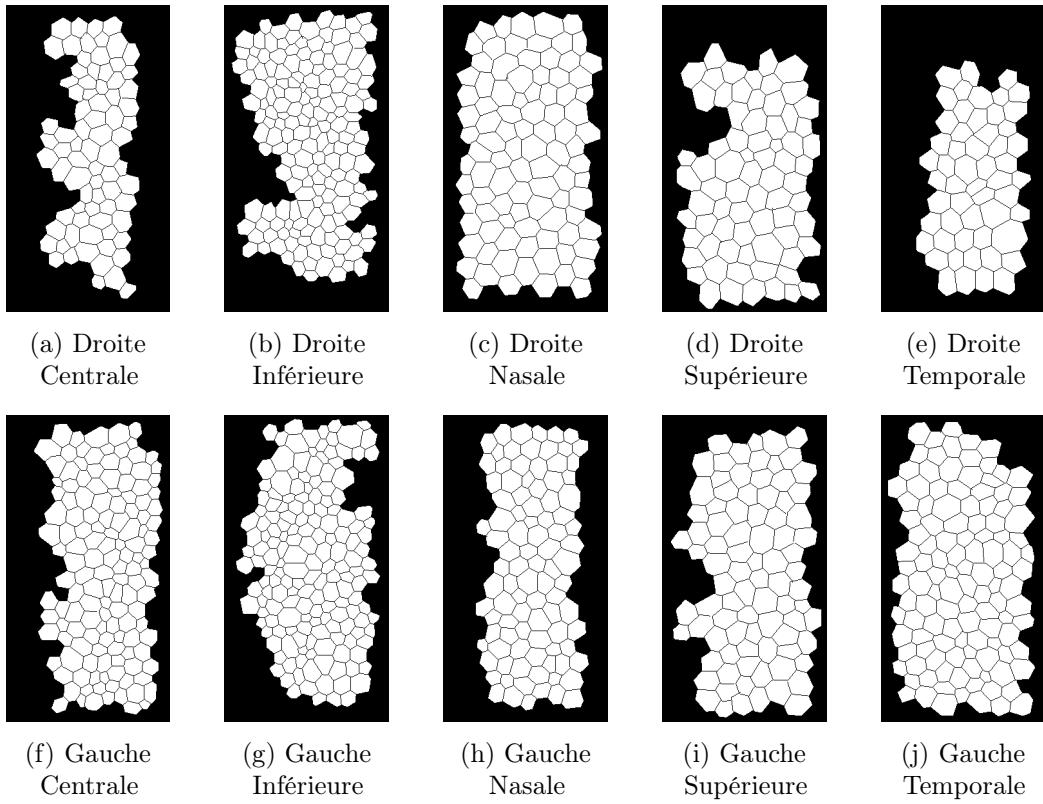


FIGURE 47 – Tranche 10 - Sujet 1 (92 ans)

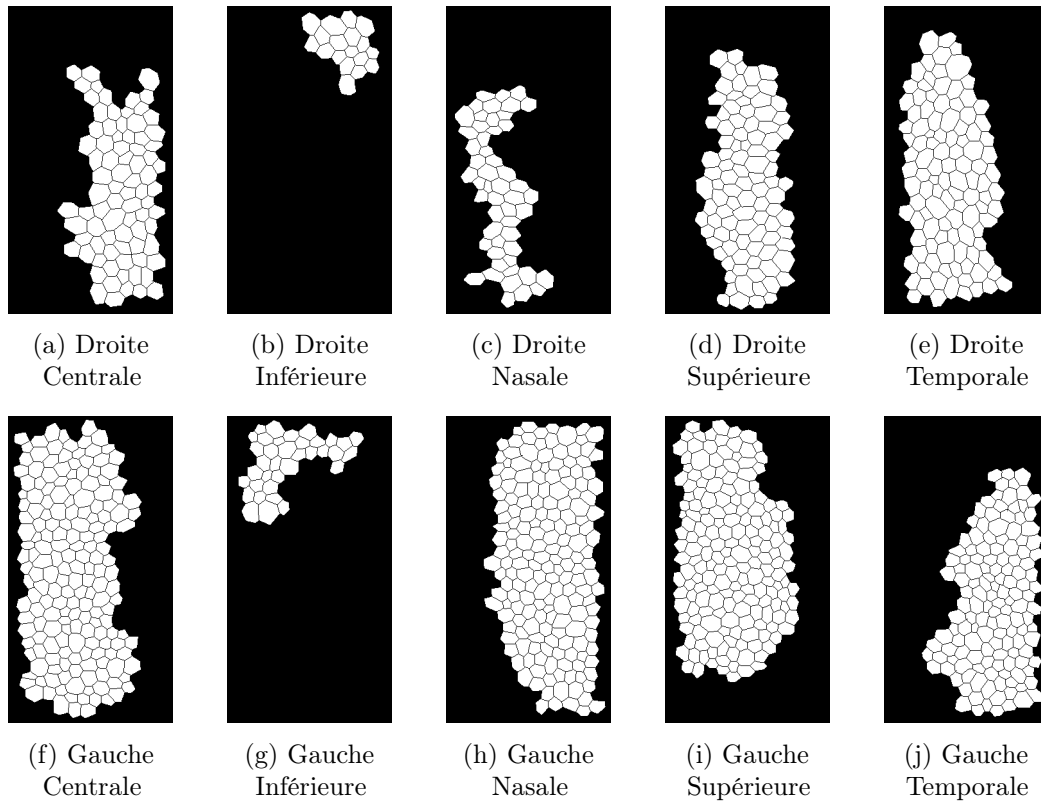


FIGURE 48 – Tranche 10 - Sujet 2 (95 ans)

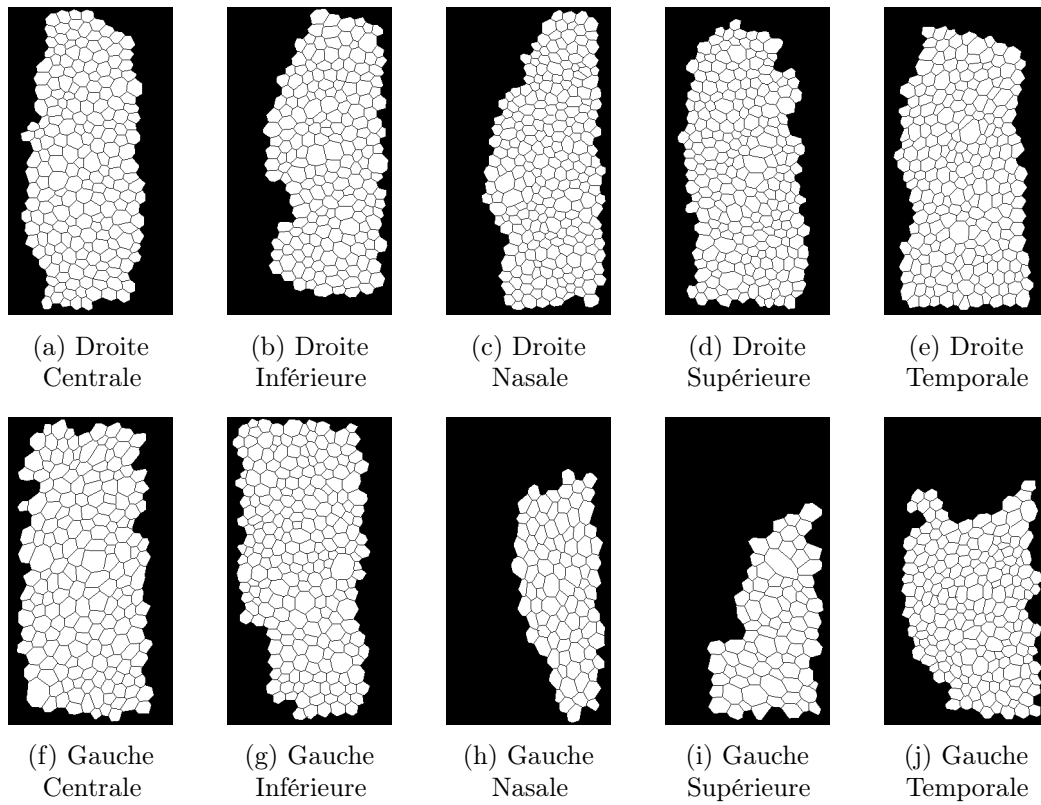


FIGURE 49 – Tranche 10 - Sujet 3 (93 ans)

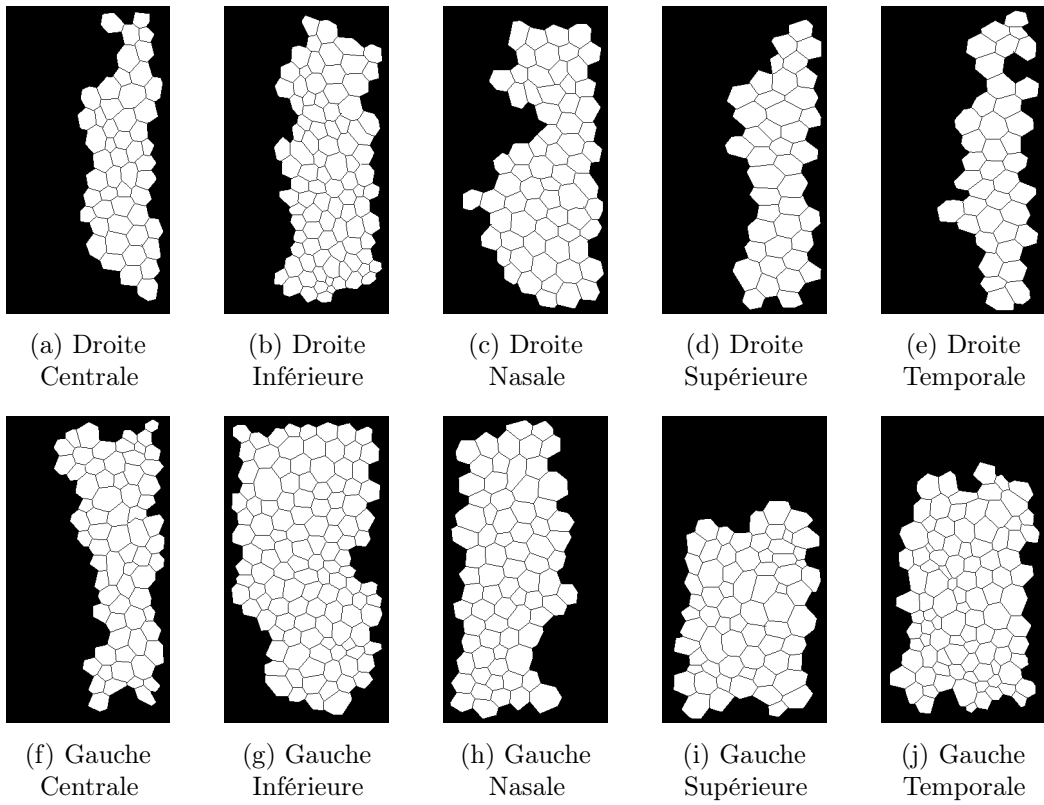


FIGURE 50 – Tranche 10 - Sujet 4 (93 ans)

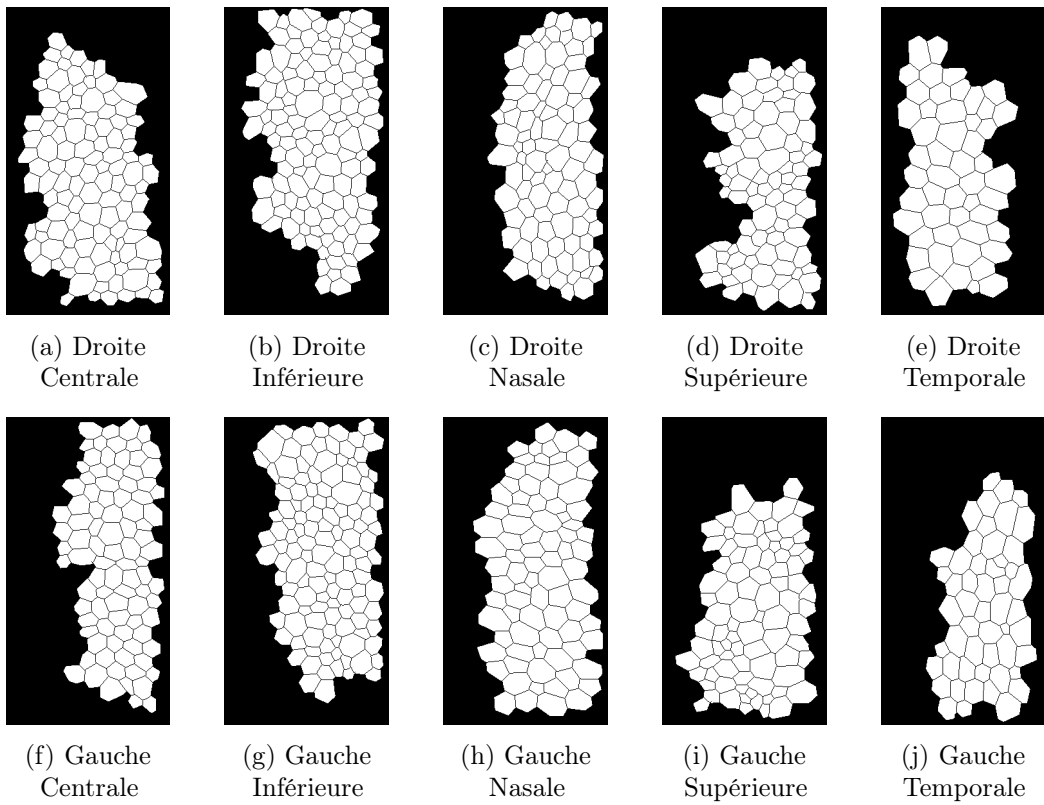


FIGURE 51 – Tranche 10 - Sujet 5 (92 ans)

École Nationale Supérieure des Mines
de Saint-Étienne

NNT : 2016LYSEM032

Klervi RANNOU

TESSELLATIONS BASED ON GAUSSIAN RANDOM FIELDS

Application to the spatial and temporal modelling of the human corneal endothelium

Speciality : Science of Images and Forms

Keywords : Tessellations, Model of cellular arrangement, Gaussian random fields, Point processes, Voronoï diagram, Mathematical morphology, Spatial statistics, Ripley's function, Reduced Minkowski functionals, Human corneal endothelium, Shape diagrams.

Abstract :

Tessellations, also called mosaics, are used to model many structures, for example cellular arrangements in biology or grains in material science. The most known tessellation is the Voronoï diagram which partitions the space from a set of points, called germs. The innovative approach of this thesis is to use Gaussian random fields to generate germs and random distances. The use of random fields allows to simulate a great variety of tessellations in terms of cells forms and sizes.

To study the properties of each type of tessellation, they are characterized: first, by studying the germs, including their spatial distribution, and then by analyzing the cells geometry and morphometry. These tessellations are also compared to other known tessellations.

The human corneal endothelium is a mono-layer of cells forming a regular hexagonal mosaic at birth, and losing his regularity later. The corneal graft quality is given by some observations made on the endothelial mosaic (cells density, the homogeneity of cells sizes and shapes).

A database of endothelium images allows to characterize the evolution with age of the corneal mosaic. The originality is to estimate the age of an endothelium based on the measures computed to characterize the tessellations, and finally to set up a promising method to evaluate if a corneal evolution is normal.

NNT : 2016LYSEM032

Klervi RANNOU

TESSELLATIONS À BASE DE CHAMPS ALÉATOIRES GAUSSIENS

Application à la modélisation spatiale et temporelle de l'endothélium cornéen humain

Spécialité: Sciences des Images et des Formes

Mots clefs : Tessellations, Modèle d'arrangement cellulaire, Champs aléatoires gaussien, Processus ponctuel, Diagramme de Voronoï, Morphologie mathématique, Statistiques spatiales, Fonction de Ripley, Fonctionnelles réduites de Minkowski, Endothélium cornéen humain, Diagrammes de formes.

Résumé :

Les tessellations, aussi appelées mosaïques, permettent de modéliser de nombreuses structures, comme des assemblages de cellules en biologie ou de grains en science des matériaux. La tessellation aléatoire la plus connue est le diagramme de Voronoï qui à partir d'un ensemble de points, appelés germes, partitionne le plan. L'approche innovante de cette thèse est d'utiliser des champs aléatoires gaussiens pour générer des germes et des distances aléatoires, qui vont permettre de simuler une grande variété de tessellations en termes de formes et de tailles des cellules.

Pour connaître les propriétés des tessellations simulées à partir de champs aléatoires gaussiens, celles-ci vont être caractérisées et comparées à d'autres tessellations. Tout d'abord par une approche ponctuelle en étudiant les germes, dont leur distribution spatiale. Puis par une approche par région, en étudiant la géométrie et la morphométrie des cellules.

L'endothélium cornéen humain est une monocouche de cellules formant un pavage hexagonal régulier à la naissance, et perdant de sa régularité ensuite. La qualité du greffon cornéen est donnée par certaines observations, comme la densité, l'homogénéité de la forme et des tailles des cellules endothéliales.

L'évolution avec l'âge de cette mosaïque cornéenne va être caractérisée à partir d'une base d'images de l'endothélium. L'originalité est ensuite d'effectuer une estimation de l'âge d'un endothélium à partir des différentes mesures permettant de caractériser les tessellations, et enfin de mettre en place une méthode prometteuse afin de savoir si une cornée a une évolution normale.