



HAL
open science

Etude de la régulation de température d'un milieu fini homogène diffusif et incertain à l'aide des trois générations de la commande CRONE

Fady Christophy

► **To cite this version:**

Fady Christophy. Etude de la régulation de température d'un milieu fini homogène diffusif et incertain à l'aide des trois générations de la commande CRONE. Autre. Université de Bordeaux, 2016. Français. NNT : 2016BORD0271 . tel-01665498

HAL Id: tel-01665498

<https://theses.hal.science/tel-01665498>

Submitted on 16 Dec 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ de BORDEAUX

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

par

Fady CHRISTOPHY

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : AUTOMATIQUE

**Etude de la régulation de température
d'un milieu fini homogène diffusif et incertain
à l'aide des trois générations de la commande CRONE**

Soutenance prévue le 15 Décembre 2016

Après avis de :

Clovis FRANCIS,
Valérie BUDINGER,

Professeur à l'Université Libanaise
Professeur assistant à l'Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace, ISAE

Devant la Commission d'examen formée de :

Clovis FRANCIS,
Valérie BUDINGER,
Michel BASSET,
Alain OUSTALOUP,
Xavier MOREAU,
Roy ABI ZEID DAOU,

Professeur à l'Université Libanaise
Professeur assistant à l'ISAE
Professeur à l'Université de Haute-Alsace
Professeur à Bordeaux INP
Professeur à l'Université de Bordeaux
Professeur associé à la Lebanese German University

Rapporteurs

Examineurs

Directeur de thèse
Co-encadrant

Titre :

Etude de la régulation de température d'un milieu fini homogène diffusif et incertain à l'aide des trois générations de la commande CRONE

Résumé :

Le contrôle de la température d'un milieu thermique reste d'une grande importance en raison du coût économique qu'il peut engendrer. Ainsi, un moyen efficace de réduire les coûts de chauffage/refroidissement est de fournir un bon système de contrôle qui limite l'énergie nécessaire pour exécuter ces tâches. À cette fin, nous étudierons le contrôle d'une interface diffusie homogène finie utilisant le contrôleur CRONE de trois générations et contrôlons leurs comportements. La nouveauté de ce travail existe dans l'utilisation d'un contrôleur de commande fractionnaire (le contrôleur CRONE) appliqué à une unité d'ordre fractionnaire et l'utilisation d'un contrôleur complexe (la troisième génération) qui n'est pas si familier dans le domaine des contrôleurs. Les résultats montrent le comportement et la robustesse des contrôleurs CRONE de trois générations.

Mots clés :

Contrôleur CRONE; interface thermique diffusie homogène; contrôle robuste; analyse du domaine fréquentiel; analyse du domaine temporel

Title:

Study of temperature regulation of a diffusive and uncertain homogeneous medium using the three generations of the CRONE command

Abstract:

Controlling thermal medium's temperature remains of a great importance, because of the economic cost that it may engender. Thus, one effective way to reduce heating/cooling cost is by providing a good control system that limits power needed to run these tasks. For this purpose, we will study the control of a finite homogeneous diffusive interface using the three generations CRONE controller and control their behaviors. The novelty of this work exists in the use of a fractional order controller (the CRONE controller) applied to a fractional order plant and the use of a complex controller (the third generation) which is not so familiar in the controllers domain. The results show the behavior and the robustness of the three generations CRONE controllers.

Keywords:

CRONE controller; homogeneous thermal diffusive interface; robust control; frequency domain analysis; time domain analysis

Unité de recherche

[Intitulé, n° de l'unité, et adresse de l'unité de recherche]

Laboratoire IMS, UMR 5218 CNRS, Bâtiment A31-B, 2ème étage, Université de Bordeaux 351, cours de la Libération 33405 Talence

Remerciements

Ce travail a été effectué au sein de l'équipe CRONE du Groupe Automatique du Pôle du Système au Système de Systèmes (P3S) du laboratoire IMS, UMR 5218 du CNRS.

A l'issue de la rédaction de cette recherche, je suis convaincu que la thèse est loin d'être un travail solitaire. En effet, je n'aurais jamais pu réaliser ce travail doctoral sans le soutien d'un grand nombre de personnes dont la générosité, la bonne humeur et l'intérêt manifestés à l'égard de ma recherche m'ont permis de progresser dans cette phase délicate de *l'apprentichercheur*.

En premier lieu, je tiens à remercier mon directeur de thèse, monsieur Xavier Moreau, pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail doctoral, pour ses multiples conseils et pour toutes les heures qu'il a consacrées à diriger cette recherche. J'aimerais également lui dire à quel point j'ai apprécié sa grande disponibilité et son respect sans faille des délais serrés de relecture des documents que je lui ai adressés. Enfin, j'ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de ce travail doctoral.

Un grand merci également à monsieur Roy Abi Zeid Daou pour son engagement dans le co-encadrement de ma thèse. Sa participation aux discussions de fond, ses suggestions éclairées et critiques honnêtes, son enthousiasme et ses encouragements auront été pour moi essentiels.

J'adresse tous mes remerciements à Monsieur Clovis Francis, Professeur à l'Université Libanaise, ainsi qu'à Madame Valérie Budinger, Professeur assistant à l'ISAE, de l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être rapporteurs de cette thèse.

J'exprime ma gratitude à Monsieur Michel Basset, Professeur à l'Université de Haute-Alsace et à Monsieur Alain Oustaloup, Professeur à Bordeaux INP, qui ont bien voulu être examinateurs.

Ma reconnaissance va à ceux qui ont plus particulièrement assuré le soutien affectif de ce travail doctoral : ma famille.

Introduction générale

Les travaux de thèse présentés dans ce mémoire s'inscrivent dans le cadre de la Synthèse Fréquentielle de Commandes Robustes (SFCR) telle que celle développée pour les trois générations de la commande CRONE dont le principe est fondé sur l'opérateur intégrodifférentiel d'ordre non entier réel ou complexe.

D'une manière générale, une démarche de SFCR comporte plusieurs étapes. La première est consacrée à la collecte des données de synthèses composées des spécifications du cahier des charges ainsi que des modèles, non seulement du système dynamique (appelé encore procédé), mais aussi des signaux d'entrée. A noter que les spécifications du cahier des charges sont souvent précisées dans le domaine temporel, nécessitant alors une traduction dans le domaine fréquentiel à l'aide de la dualité temps-fréquence. En ce qui concerne la modélisation du procédé, là aussi plusieurs phases successives sont souvent nécessaires, en particulier dans le cadre d'une approche basée sur la connaissance (modèle boîte blanche). Ainsi, la première est une phase visant à acquérir une bonne compréhension des phénomènes dynamiques du procédé à travers l'élaboration dans le domaine temporel d'un *modèle de validation*. Cette première phase est commune à toutes les méthodes de synthèse à base de modèles, quelles soient temporelles ou fréquentielles. Dans de nombreuses applications (automobiles, aéronautiques, ...), le modèle ainsi défini est souvent très complexe (non linéaire, non stationnaire, avec de nombreux états,...). C'est la raison pour laquelle la phase suivante consiste à définir un domaine d'étude permettant d'introduire d'éventuelles hypothèses simplificatrices (exploitant les symétries, les découplages,...) conduisant, toujours dans le domaine temporel, à un *modèle d'analyse* (qui peut être non linéaire) dont le degré de complexité est bien entendu plus faible que celui du *modèle de validation*. Dans le cadre d'une méthode de synthèse temporelle, qu'elle soit linéaire (comme par exemple avec une commande par retour d'état dans un contexte déterministe ou stochastique) ou non linéaire (comme c'est le cas avec une commande par modes glissants), ce *modèle d'analyse* est aussi utilisé pour la synthèse, d'où son nom de *modèle de synthèse*. Par contre, dans le cas d'une synthèse fréquentielle, une phase supplémentaire est nécessaire si le *modèle d'analyse* est non linéaire. Ainsi, la définition de points de fonctionnement permet :

- la linéarisation (étude aux petites variations) ;
- la définition de fonctions de transfert, ainsi que leurs incertitudes paramétriques et structurelles associées ;
- l'obtention des réponses fréquentielles nominales du *modèle de synthèse* et ses domaines d'incertitude associés.

La deuxième étape est la synthèse fréquentielle à proprement parler de la commande robuste qui ensuite, dans une troisième étape, est appliquée au *modèle de validation* pour vérifier dans un *contexte de simulation numérique temporelle* que ses performances sont bien conformes aux spécifications du cahier des charges, non seulement aux petites variations, mais

aussi dans les conditions de fonctionnement imposées par l'application. Enfin, la commande robuste est appliquée au procédé pour vérifier dans un *contexte d'expérimentation* que ses performances sont toujours conformes au cahier des charges.

Depuis les premiers travaux d'Alain OUSTALOUP en 1975, la commande CRONE a principalement été appliquée à des Systèmes à Dérivées Entières (SDE), c'est-à-dire des systèmes dont le comportement dynamique est décrit par des équations différentielles d'ordres entiers. Il faut attendre la fin des années 2000 pour que la commande CRONE soit appliquée à des Systèmes à Dérivées Non Entières (SDNE) résultant de phénomènes de diffusion, les modèles utilisés pour la synthèse fréquentielle étant issus principalement d'une démarche d'identification (modèle boîte noire).

C'est donc dans ce contexte que s'inscrivent ces travaux de thèse. Plus précisément, ils concernent l'étude de la régulation de température d'un milieu fini, homogène et incertain, siège de phénomènes de diffusion thermique, et ce à l'aide des trois générations de la commande CRONE, les modèles utilisés pour la synthèse fréquentielle étant tous issus d'une démarche de connaissance (modèle boîte blanche).

Organisation et contenu de la thèse

Cette thèse s'inscrit dans le cadre d'une collaboration internationale entre la Lebanese German University et l'Université de Bordeaux, au sein de l'équipe CRONE du Groupe Automatique du laboratoire IMS, UMR 5218 du CNRS. Cette thèse s'est déroulée sous la direction de Xavier MOREAU, Professeur à l'Université de Bordeaux, et co-encadrée par Roy ABI ZEID DAOU, Docteur de l'Université de Bordeaux et Professeur associé à la Lebanese German University.

Le sujet concerne la Synthèse Fréquentielle de Commandes Robustes (SFCR) appliquée à la régulation de température d'un milieu fini, homogène et incertain, siège de phénomènes de diffusion thermique, le mémoire étant structuré en trois parties.

Ainsi, la **Partie 1** (31 pages), intitulée "*Un tour d'horizon en matière de Systèmes à Dérivées Non Entières (SDNE)*", est composée d'un seul chapitre visant à donner aux lecteurs peu familiarisés avec les SDNE les principales notions théoriques nécessaires à la bonne compréhension de ce mémoire. Plus précisément, après un bref historique en introduction, le **Chapitre 1**, intitulé : "*De la dérivation non entière à la commande CRONE*", se focalise dans une première partie sur les définitions et les interprétations de l'opérateur intégro-différentiel non entier. Des exemples d'intégrateurs non entiers sont présentés en ce qui concerne les systèmes à paramètres distribués et les systèmes à paramètres localisés. Ensuite, la problématique de la simulation dans le domaine temporel des SDNE est précisée. Face à cette problématique, les principales méthodes de synthèse d'un intégrateur non entier sont présentées dans un contexte général. La deuxième partie est consacrée à la Synthèse Fréquentielle de Commandes Robustes (SFCR), en particulier la commande CRONE. Après avoir rappelé le schéma de commande et les données nécessaires à la synthèse (les spécifications du cahier des charges, les modèles des signaux et du procédé, ainsi que les domaines d'incertitudes), une attention toute particulière est faite concernant la traduction des spécifications temporelles du cahier des charges en spécifications fréquentielles. Enfin, les principes des trois générations de la commande CRONE sont rappelés de manière synthétique et les principales étapes nécessaires à l'utilisation de la **CRONE Control System Design Toolbox** sont présentées.

La **Partie 2** (37 pages), intitulée " *Modélisation des phénomènes de diffusion thermique dans un milieu fini homogène en vue de l'analyse, de la synthèse et de la validation de commandes robustes*", regroupe deux chapitres dont l'objectif est de faire une analyse fine des comportements d'ordre non entier à l'aide de modèles de connaissance, d'abord dans le cadre d'une étude comparative des milieux semi-infini et fini (Chapitre 2), puis avec l'objectif de définir des modèles de synthèse et leurs domaines d'incertitudes paramétriques (Chapitre 3) utilisés ensuite dans la troisième partie. Les développements analytiques sont largement privilégiés et illustrés par des simulations numériques des réponses fréquentielles.

Ainsi, le **Chapitre 2**, intitulé : " *Etude comparative des milieux fini et semi-infini* ", commence par la schématisation, le paramétrage, la mise en équation et la résolution de tels milieux monodimensionnels dont l'axe principal est noté \vec{x} . Une vision système permet alors de décomposer le transfert thermique global en une mise en cascade de transferts locaux dont les paramètres et toutes les variables d'entrée et de sortie ont un sens physique. Ensuite, une analyse en surface (en $x = 0$ où la densité de flux est appliquée) est faite dans les domaines symbolique et fréquentiel, zone où le phénomène d'*effusivité thermique* est dominant. Dans le cas du milieu *semi-infini*, ce phénomène est caractérisé par un comportement intégrateur d'ordre 0.5 (appelé semi-intégrateur) sur tout l'espace des fréquences, alors que dans le cas du milieu *fini*, il est caractérisé par un comportement intégrateur d'ordre 1 aux basses fréquences et d'ordre 0.5 aux moyennes et hautes fréquences, la fréquence de transition entre ces deux comportements étant fonction de la nature du matériau et de la longueur L du milieu. Cette analyse est ensuite reconduite dans la profondeur des deux milieux (pour $x > 0$), zone où le phénomène de *diffusivité thermique* est fondamental. Il est alors mis en évidence que pour $0 < x < L$, les deux milieux semi-infini et fini ont le même comportement aux hautes fréquences caractérisé par une exponentielle complexe. Ce résultat est exploité au chapitre suivant dans le cadre de la définition des modèles pour la synthèse fréquentielle de commandes robustes.

Le **Chapitre 3**, intitulé " *Modèles d'analyse et de synthèse* " s'inscrit dans la continuité du précédent et se compose de deux parties. Ainsi, à l'aide du modèle du milieu fini développé au chapitre précédent, la première partie est consacrée à l'analyse des incertitudes paramétriques, à savoir :

- la nature du matériau caractérisé par son effusivité η_d et sa diffusivité α_d thermiques ;
- la longueur L du milieu ;
- la position x qui est considérée par la suite comme étant la position du capteur de température.

Plus précisément, l'incertitude sur la nature du matériau est prise en compte à travers trois matériaux, à savoir l'aluminium, le cuivre et le fer. En ce qui concerne l'incertitude sur la longueur L , trois valeurs sont considérées : $L = 1$ m, $L = 0.5$ m et $L = 0.25$ m. Enfin, l'incertitude concernant la position du capteur est analysée à travers trois valeurs : $x = 0$, $x = 0.5$ cm et $x = 1$ cm. Compte tenu des résultats de l'analyse de cette première partie, la seconde est dédiée à la définition de trois domaines d'études caractérisés au voisinage de la fréquence au gain unité en boucle ouverte (notée ω_u et dont le choix de la valeur est justifié au chapitre 4) par :

- *des variations de gain* avec *phase constante* ;
- *des variations de gain* avec *phase non constante* ;
- *des variations de gain* et de *phase*.

Ces trois domaines sont définis pour être parfaitement adaptés à la synthèse de chacune des trois générations de la commande CRONE utilisées dans la troisième partie de ce mémoire, et ce afin d'assurer une progression didactique dont le degré de complexité va *crescendo*.

La **Partie 3** (44 pages), intitulée " *Synthèse Fréquentielle de Commandes Robustes : de la 1^{ère} à la 3^{ème} génération de la commande CRONE* ", regroupe deux chapitres et est consacrée à la régulation de température d'un milieu fini dont l'état paramétrique nominal est défini par l'aluminium, par une longueur L de 1 m et par une position x du capteur égale à 0. L'objectif est de faire une étude comparative de la robustesse du degré de stabilité des trois générations de la commande CRONE à iso-rapidité et à iso-degré de stabilité en ce qui concerne l'état paramétrique nominal. En effet, pour que la comparaison soit significative, la rapidité nominale est spécifiée à partir d'une unique valeur de la fréquence au gain unité en boucle ouverte, en l'occurrence $\omega_u = 1$ rad/s, identique pour tous les cas d'études. Il en va de même pour le degré de stabilité nominal spécifié par la marge de phase $M_{\phi 0}$ pour les 1^{ère} et 2^{ème} générations, et par le facteur de résonance Q_{T0} de la fonction de sensibilité complémentaire pour la 3^{ème} génération. Plus précisément, le degré de stabilité nominal est spécifié à partir d'un intervalle ($M_{\phi 0} \in [45^\circ ; 90^\circ]$ ou $Q_{T0} \in [0 \text{ dB} ; 3 \text{ dB}]$) donnant lieu, pour chaque domaine étudié, à trois exemples d'illustration associés aux valeurs extrémales et moyenne de $M_{\phi 0}$ ou Q_{T0} . Pour privilégier au maximum les développements analytiques, l'utilisation de la **CRONE Control System Design Toolbox** est limitée volontairement à la 3^{ème} génération pour laquelle il est difficile de faire autrement.

Dans ce contexte ainsi défini, le **chapitre 4**, intitulé " *Synthèse en présence de variations de gain : de la 1^{ère} à la 2^{ème} génération de la commande CRONE* ", est consacré au premier domaine d'études défini au chapitre 3. Plus précisément, ce premier domaine (*variations de gain* avec *phase constante*) est parfaitement adapté à la commande CRONE, non seulement de 1^{ère} génération, mais aussi de 2^{ème} génération. Après avoir détaillé la méthode permettant de calculer les paramètres du régulateur CRONE de 1^{ère} génération, trois exemples sont présentés pour illustrer l'influence de l'ordre m du régulateur au voisinage de ω_u à partir des valeurs extrêmes (45° et 90°) et moyenne ($(45^\circ + 90^\circ)/2 = 67.5^\circ$) de la marge de phase M_ϕ . En ce qui concerne les paramètres du régulateur CRONE de 2^{ème} génération obtenus toujours dans le cadre de ce premier domaine d'étude, ils sont très proches (voire identiques) de ceux du régulateur de 1^{ère} génération, et ce dans la mesure où les données de synthèse sont les mêmes.

Enfin, le **chapitre 5**, intitulé " *Synthèse en présence de variations de gain et de phase : de la 2^{ème} à la 3^{ème} génération de la commande CRONE* ", est composé de deux parties consacrées aux deux derniers domaines d'études définis au chapitre 3 (*variations de gain* avec *phase non constante*, et *variations de gain* et de *phase*). Ainsi, comparativement à la 1^{ère} génération, seule la commande CRONE de 2^{ème} génération garantit dans le cadre du deuxième domaine d'étude la

robustesse du degré de stabilité vis-à-vis des incertitudes paramétriques associées. Tous les développements conduisant aux expressions fractionnaires et rationnelles des régulateurs CRONE de 2^{ème} génération sont présentés. Ensuite, il est montré pourquoi les régulateurs de 1^{ère} génération ne peuvent plus assurer la robustesse du degré de stabilité dans le cas de ce deuxième domaine d'étude. Enfin, trois exemples d'illustration associés aux mêmes valeurs (extrêmes et moyenne) de la marge de phase M_ϕ sont développés. Les performances ainsi obtenues avec la commande CRONE de 2^{ème} génération sont présentées comparativement à celles obtenues avec les régulateurs CRONE de 1^{ère} génération synthétisés dans le cadre du premier domaine d'étude (*variations de gain* avec *phase constante*) mais appliqués au deuxième.

La seconde partie de ce chapitre 5 est dédiée à la commande CRONE de 3^{ème} génération qui dans le cadre du troisième domaine d'études (*variations de gain et de phase*) est la seule à garantir, non pas la robustesse du degré de stabilité, mais la minimisation de la sensibilité du degré de stabilité aux incertitudes paramétriques associées. Après le rappel du principe et du choix des paramètres de la mise en forme de la boucle ouverte, trois régulateurs CRONE de 3^{ème} génération associés aux valeurs extrémales et moyenne de Q_{T0} sont synthétisés à l'aide de la **CRONE Control System Design Toolbox**. Enfin, les performances sont présentées avec des résultats qui vont au-delà des attentes. En effet, la minimisation de la sensibilité du degré de stabilité aux incertitudes paramétriques associées à ce troisième domaine d'étude conduit à une (quasi-)robustesse du degré de stabilité, illustrant ainsi le fait que la commande CRONE de 3^{ème} génération est parfaitement bien adaptée à ce dernier cas d'étude.

Finalement, la conclusion générale résume l'apport de cette thèse, récapitule les réalisations effectuées et présente les perspectives envisagées.

Avant-propos

L'apport de la thèse de Fady CHRISTOPHY peut être défini chronologiquement par les contributions présentes dans chacun des chapitres.

Dans le *chapitre 1*, les apports se situent d'abord de manière classique au niveau de la synthèse bibliographique en ce qui concerne les Systèmes à Dérivées Non Entières (SDNE) et les trois générations de la commande CRONE. Ce chapitre constitue un point de départ incontournable et nécessaire pour la suite du mémoire de thèse dans la mesure où il précise les principales notions théoriques nécessaires à la bonne compréhension.

Dans le *chapitre 2*, les apports concernent d'abord la démarche de modélisation basée, non seulement sur les connaissances des phénomènes de diffusion thermique, mais aussi sur une vision système dans la mesure où le transfert thermique global est décomposé en une mise en cascade de transfert locaux ayant toujours un sens physique. Ensuite, ils concernent une analyse fine tant en surface (phénomène d'effusivité), qu'en profondeur (phénomène de diffusivité), permettant ainsi de bien « s'imprégner » des phénomènes dynamiques des milieux semi-infini et fini, et donc de bien mettre en évidence les domaines où ils présentent des similitudes (moyennes et hautes fréquences) de ceux où ils présentent des différences (en particulier aux basses fréquences). Ce travail important de modélisation et d'analyse est à l'origine des choix pertinents et judicieux faits au chapitre 3 lors de la définition des modèles de synthèse utilisés ensuite dans la troisième partie consacrée à la *Synthèse Fréquentielle de Commandes Robustes*.

Dans le *chapitre 3*, les apports se situent d'abord au niveau de la finesse de l'analyse des incertitudes paramétriques du milieu fini (la nature du matériau, la longueur L du milieu et la position x du capteur de température) et ensuite au niveau de la définition de trois domaines d'études parfaitement bien adaptés, non seulement à la synthèse de chacune des trois générations de la commande CRONE, mais aussi à la progression didactique du mémoire.

Enfin, dans les *chapitres 4 et 5*, les apports se situent principalement dans la démarche mise en œuvre pour comparer de manière progressive et pertinente les trois générations de la commande CRONE appliquées à un procédé lui-même non entier. En effet, de part les résultats remarquables obtenus, la progression adoptée permet, notamment aux non spécialistes des synthèses fréquentielles de commandes robustes, de mesurer tout l'intérêt de la commande CRONE.

Xavier MOREAU
Directeur de thèse

Table des matières

Remerciements	3
Introduction générale	5
Organisation et contenu de la thèse	7
Avant-propos	11

1^{ère} Partie - Systèmes à Dérivées Non Entières : Un tour d’horizon

Chapitre 1 - De la dérivation non entière à la commande CRONE

1.1 - Introduction	21
1.2 - Opérateur intégrro-différentiel non entier	22
1.2.1 - Définition de l’intégration non entière	22
1.2.2 - Interprétation géométrique	24
1.2.3 - Interprétation système	24
1.2.4 - Définition de la dérivation non entière	26
1.3 - Exemples d’intégrateurs non entiers	27
1.3.1 - Systèmes à paramètres distribués	27
1.3.2 - Systèmes à paramètres localisés	29
1.4 – Synthèse d’un intégrateur non entier pour la simulation temporelle ..	33
1.4.1 - Approche fréquentielle	33
1.4.1.1 - <i>Intégrateur non entier borné en fréquence</i>	33
1.4.1.2 - <i>Intégrateur rationnel borné en fréquence</i>	34
1.4.2 - Approche temporelle	35
1.4.2.1 - <i>Représentation diffusive discrète</i>	35
1.5 – Commande CRONE	36
1.5.1 – Schéma de commande et données pour la synthèse	36
1.5.2 - Commande CRONE de première génération	40
1.5.3 - Commande CRONE de deuxième génération	42
1.5.4 - Commande CRONE de troisième génération	46
1.5.5 - CRONE Control System Design Toolbox	48
1.5.5.1 - <i>Prise en compte des incertitudes du procédé</i>	49
1.5.5.2 - <i>Saisie des spécifications</i>	49
1.5.5.3 – <i>Choix de la commande CRONE</i>	50
1.5.5.4 – <i>Synthèse de la forme rationnelle du régulateur</i>	51
1.6 - Conclusion	52

2^{ème} Partie - Modélisation des phénomènes de diffusion thermique dans un milieu fini homogène en vue de l'analyse, de la synthèse et de la validation de commandes robustes

Chapitre 2 - Etude comparative des milieux fini et semi-infini

2.1 – Introduction	57
2.2 – Modélisation	57
2.2.1 – Schématisation, paramétrage et mise en équation	57
2.2.2 – Résolution.....	58
2.3 – Analyse en $x = 0$	62
2.3.1 – Domaine symbolique.....	62
2.3.2 – Domaine fréquentiel.....	63
2.3.3 – Conclusion pour $x = 0$	66
2.4 – Analyse pour $0 \leq x \leq L$	66
2.4.1 – Domaine symbolique.....	66
2.4.2 – Domaine fréquentiel.....	67
2.4.3 – Domaine temporel	71
2.4.4 – Conclusion pour $0 \leq x \leq L$	73
2.5 – Conclusion	73

Chapitre 3 - Modèles d'analyse et de synthèse

3.1 – Introduction	77
3.2 – Modèles d'analyse	77
3.2.1 - Définition des incertitudes et de l'état paramétrique nominal du procédé	77
3.2.2 - Analyse de l'influence du matériau	81
3.2.3 - Analyse de l'influence du matériau et de la longueur L du milieu.....	83
3.2.4 - Analyse de l'influence du matériau, de la longueur L du milieu et de la position x du capteur	85
3.3 – Modèles de synthèse	89
3.3.1 - Modèle pour la synthèse de la commande CRONE de 1 ^{ère} génération.....	89
3.3.2 - Modèle pour la synthèse de la commande CRONE de 2 ^{ème} génération	91
3.3.2.1 - Cas en présence de variations de gain avec phase constante en $x = 0$	91
3.3.2.2 - Cas en présence de variations de gain avec phase non constante en $x > 0$	92
3.3.3 - Modèle pour la synthèse de la commande CRONE de 3 ^{ème} génération	95
3.4 – Conclusion	97

3^{ème} Partie - Synthèse Fréquentielle de Commandes Robustes de la 1^{ère} à la 3^{ème} génération de la commande CRONE

Chapitre 4 - Synthèse en présence de variations de gain : de la 1^{ère} à la 2^{ème} génération de la commande CRONE

4.1 – Introduction	103
4.2. – Commande CRONE de 1 ^{ère} génération.....	103
4.2.1 – Méthode de détermination des paramètres du régulateur	103
4.2.2 – Exemples d’illustration	106
4.2.2.1 – Exemple 1 : marge de phase $M_\phi = 45^\circ$	106
4.2.2.2 – Exemple 2 : marge de phase $M_\phi = (45^\circ + 90^\circ)/2 = 67.5^\circ$	106
4.2.2.3 – Exemple 3 : marge de phase $M_\phi = 90^\circ$	107
4.2.3 – Performances	108
4.3 – Commande CRONE de 2 ^{ème} génération.....	115
4.3.1 – Méthode de détermination des paramètres du régulateur	115
4.3.2 – Exemples d’illustration	116
4.3.2.1 – Exemple 4 : marge de phase $M_\phi = 45^\circ$	116
4.3.2.2 – Exemple 5 : marge de phase $M_\phi = (45^\circ + 90^\circ)/2 = 67.5^\circ$	116
4.3.2.3 – Exemple 6 : marge de phase $M_\phi = 90^\circ$	117
4.3.3 – Performances	117
4.3.3.1 – En $x = 0$	117
4.3.3.2 – En $x > 0$	118
4.4 – Conclusion	122

Chapitre 5 - Synthèse en présence de variations de gain et de phase : de la 2^{ème} à la 3^{ème} génération de la commande CRONE

5.1 – Introduction	125
5.2 – Synthèse en présence de variations de gain avec phase non constante	
5.2.1 - Détermination des paramètres de la commande CRONE de 2 ^{ème} génération ..	125
5.2.2 – Exemples d’illustration	127
5.2.2.1 – Exemple 7 : marge de phase $M_\phi = 45^\circ$	127
5.2.2.2 – Exemple 8 : marge de phase $M_\phi = 67.5^\circ$	131
5.2.2.3 – Exemple 9 : marge de phase $M_\phi = 90^\circ$	134
5.3 – Synthèse en présence de variations de gain et de phase.....	137
5.3.1 - Performances de la commande CRONE de 2 ^{ème} génération.....	137
5.3.2 - Commande CRONE de 3 ^{ème} génération	141
5.3.2.1 – Méthode de détermination des paramètres du régulateur	141
5.3.2.2 – Exemples d’illustration	142
5.3.2.2.1 – Exemple 10 : facteur de résonance $Q_{T0} = 3$ dB	142

5.3.2.2.2 – Exemple 11 : facteur de résonance $Q_{T0} = 0.65 \text{ dB}$	144
5.3.2.2.3 – Exemple 12 : facteur de résonance $Q_{T0} = 0 \text{ dB}$	146
5.4 – Conclusion	148
Conclusion générale et perspectives	149
Références bibliographiques	153

1^{ERE} PARTIE

SYSTEMES A DERIVEES NON ENTIERES : UN TOUR D'HORIZON

Chapitre 1

De la dérivation non entière à la commande CRONE

SOMMAIRE

1.1 - Introduction	21
1.2 - Opérateur intégrro-différentiel non entier	22
1.2.1 - Définition de l'intégration non entière.....	22
1.2.2 - Interprétation géométrique.....	24
1.2.3 - Interprétation système.....	24
1.2.4 - Définition de la dérivation non entière	26
1.3 - Exemples d'intégrateurs non entiers	27
1.3.1 - Systèmes à paramètres distribués	27
1.3.2 - Systèmes à paramètres localisés	29
1.4 – Synthèse d'un intégrateur non entier pour la simulation temporelle	33
1.4.1 - Approche fréquentielle	33
1.4.1.1 - Intégrateur non entier borné en fréquence	33
1.4.1.2 - Intégrateur rationnel borné en fréquence.....	34
1.4.2 - Approche temporelle.....	35
1.4.2.1 - Représentation diffusives discrète	35
1.5 – Commande CRONE	36
1.5.1 – Schéma de commande et données pour la synthèse.....	36
1.5.2 - Commande CRONE de première génération.....	40
1.5.3 - Commande CRONE de deuxième génération	42
1.5.4 - Commande CRONE de troisième génération.....	46
1.5.5 - CRONE Control System Design Toolbox	48
1.5.5.1 - Prise en compte des incertitudes du procédé.....	49
1.5.5.2 - Saisie des spécifications.....	49
1.5.5.3 – Choix de la commande CRONE.....	50
1.5.5.4 – Synthèse de la forme rationnelle du régulateur	51
1.6 - Conclusion	52

1.1 - Introduction

Il faut remonter à la fin du 17^{ème} siècle pour trouver les premières traces du concept de dérivation non entière (appelée aussi dérivation fractionnaire dans la littérature internationale). En effet, c'est en 1695 que L'Hospital et Leibniz ont fait état pour la première fois dans leurs correspondances de leur interrogation quant à la signification d'une dérivée d'ordre 0.5 (Dugowson, 1994). Ensuite au cours du 18^{ème} siècle, il n'y eu que quelques contributions sur ce sujet, notamment de la part d'Euler qui souleva de nouveau le problème de la définition d'une dérivée d'ordre fractionnaire. Il faut attendre le 19^{ème} siècle avec Liouville et Riemann pour voir apparaître une définition cohérente de la dérivée fractionnaire. Mais, c'est surtout au cours de la deuxième moitié du 20^{ème} siècle que des avancées majeures concernant la théorie de la dérivation et de l'intégration fractionnaires ont été réalisées (Oldham & Spanier, 1974) (Miller & Ross, 1993) (Samko, et al., 1993) (Oustaloup, 1995). Aujourd'hui, au 21^{ème} siècle, dans le domaine des sciences pour l'ingénieur, les Systèmes à Dérivées Non Entières (SDNE) sont étudiés par un nombre d'auteurs de plus en plus important (Abi Zeid Daou & Moreau, 2015), (Abi Zeid Daou & Moreau, 2013). En effet, il y a un grand nombre de systèmes physiques dont le comportement dynamique peut être décrit avec parcimonie grâce à des modèles d'ordres non entiers : les processus électrochimiques (Sabatier, et al., 2006), (Sabatier, et al., 2014), la diffusion thermique dans un milieu homogène semi-infini (Lin, 2001) (Cois, 2002), la polarisation diélectrique (Bohannon, 2000), les matériaux viscoélastiques (Moreau, et al., 2002) (Ramus-Serment, et al., 2002), ...

Après cette introduction générale pour situer le contexte historique, la suite de ce chapitre est d'abord consacrée aux définitions et aux interprétations de l'opérateur intégral-différentiel d'ordre non entier. Ensuite, à titre d'illustration, des exemples d'intégrateurs fractionnaires, tant à paramètres distribués faisant l'objet de phénomènes de diffusion, qu'à paramètres localisés, sont proposés. Ces exemples montrent, si nécessaire, que l'intégration et la dérivation d'ordre non entier ne sont pas seulement des concepts mathématiques résultant d'une volonté de généralisation, mais qu'ils sont bien présents notamment en physique et dans la nature d'une manière plus générale.

Par ailleurs, aussi bien dans le cadre de l'analyse que dans celui de la synthèse (numérique et analogique) des SDNE (Abi Zeid Daou, et al., 2012), les comportements d'ordres non entiers se situent souvent sur un intervalle tempo-fréquentiel borné. De plus, et par rapport aux systèmes entiers, s'ajoute une contrainte supplémentaire, à savoir l'augmentation du degré de complexité en matière de simulation temporelle liée à la notion de mémoire longue. C'est la raison pour laquelle de nombreuses méthodes de synthèse ont été développées au cours de ces trente dernières années. Dans (Aoun, et al., 2004) et (Poldubny, et al., 2002), un tour d'horizon de plusieurs méthodes de synthèse d'un intégrateur d'ordre non entier est proposé.

La seconde partie de ce chapitre est consacrée à la méthode de synthèse fréquentielle de la commande CRONE dont le principe est fondé sur l'opérateur intégral-différentiel d'ordre non

entier réel ou complexe. Après avoir rappelé le schéma de commande et les données nécessaires à la synthèse (les spécifications du cahier des charges, les modèles du procédé et des signaux d'entrée, ainsi que les domaines d'incertitudes), une attention toute particulière est faite concernant la traduction des spécifications temporelles du cahier des charges en spécifications fréquentielles. Enfin, les principes des trois générations de la commande CRONE sont rappelés de manière synthétique et les principales étapes nécessaires à l'utilisation de la **CRONE Control System Design Toolbox** sont présentées.

1.2 - Opérateur intégral-différentiel non entier

1.2.1 - Définition de l'intégration non entière

Inspirée de la formule de Cauchy (Miller & Ross, 1993) (Oldham & Spanier, 1974) (Samko, et al., 1993), la définition de Riemann-Liouville de l'intégrale d'ordre m d'une fonction $v(t)$, notée ${}_0I_t^m v(t)$ avec $m > 0$, a été établie au XIX^{ème} siècle sous la forme :

$${}_0I_t^m v(t) \stackrel{\Delta}{=} \int_0^t \frac{1}{\Gamma(m) (t-\tau)^{1-m}} v(\tau) d\tau \quad , \quad (1.1)$$

avec $t > 0$, $m \in \mathbb{R}^+$ et où $\Gamma(m)$ est la fonction Gamma définie par :

$$\Gamma(m) \stackrel{\Delta}{=} \int_0^\infty e^{-x} \xi^{m-1} d\xi \quad , \quad (1.2)$$

où ξ est une variable muette d'intégration.

Dans le cadre d'une approche système où $v(t)$ désigne l'entrée et $x(t)$ la sortie, l'intégrale d'ordre m de $v(t)$, notée $x(t) = {}_0I_t^m v(t)$, soit :

$$x(t) \stackrel{\Delta}{=} \int_0^t \frac{1}{\Gamma(m) (t-\tau)^{1-m}} v(\tau) d\tau \quad , \quad (1.3)$$

peut être interprétée comme le produit de convolution entre la réponse impulsionnelle $h_m(t)$ du système, soit :

$$h_m(t) = \frac{1}{\Gamma(m) t^{(1-m)}} \quad , \quad (1.4)$$

et son entrée $v(t)$, soit :

$$x(t) \stackrel{\Delta}{=} \int_0^t h_m(t-\tau) v(\tau) d\tau = h_m(t) * v(t) \quad . \quad (1.5)$$

La transformée de Laplace de $h_m(t)$, notée $I^m(s)$, qui n'est autre que la fonction de transfert d'un intégrateur d'ordre $m > 0$, est donnée par (Oldham & Spanier, 1974) :

$$I^m(s) = TL\{h_m(t)\} = TL\left\{\frac{1}{\Gamma(m) t^{(1-m)}}\right\} = \frac{1}{s^m} \quad . \quad (1.6)$$

La figure 1.1 présente les réponses fréquentielles et impulsionnelles d'un intégrateur généralisé pour des ordres m compris entre 0 et 2.

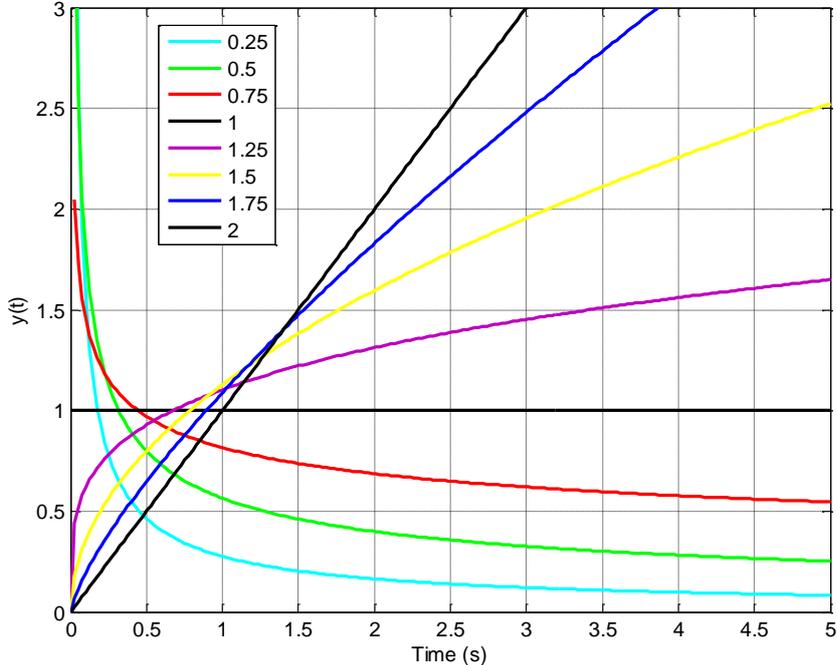
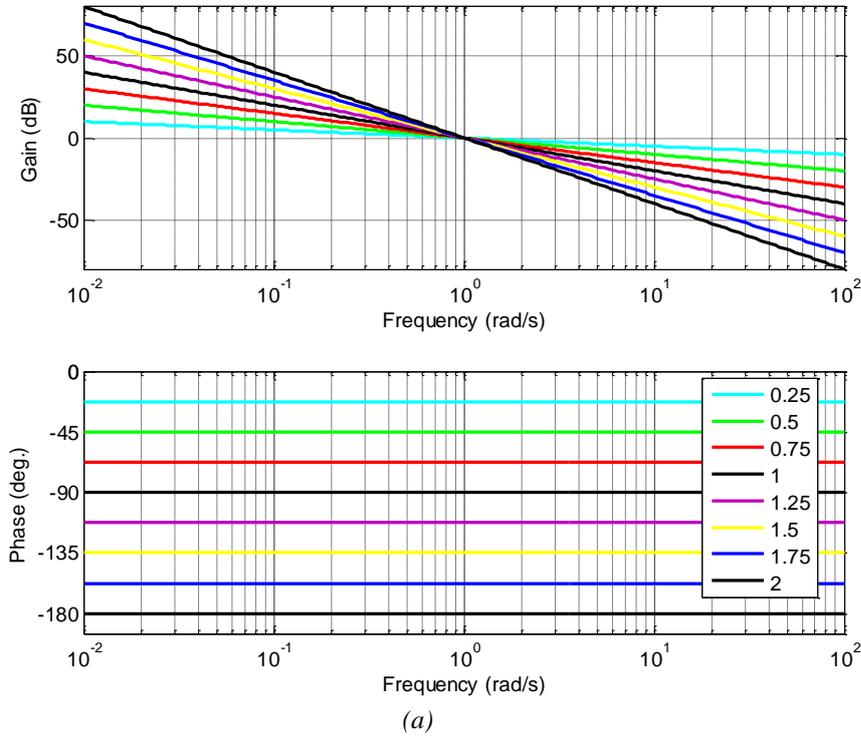


Figure 1.1 – Réponses fréquentielles (a) et impulsionnelles (b) d'un intégrateur généralisé pour des ordres compris entre 0 et 2

1.2.2 - Interprétation géométrique

La difficulté d'attribuer à cet opérateur un sens géométrique (Adda, 1997) (Moreau, et al., 2005) (Nigmatullin, 1992) (Podlubny, 2005), comparable à celui que l'on accorde à l'intégration d'ordre entier, n'est certes pas étrangère au peu d'intérêt que les physiciens lui ont porté.

Néanmoins, dans le cas où l'ordre m est réel, la définition (1.1) peut être interprétée comme l'aire de la surface que définit la fonction $v(t)$ pondérée par un facteur d'oubli représenté par la fonction $h_m(t-\tau)$ définie par :

$$h_m(t-\tau) = \frac{1}{\Gamma(m) (t-\tau)^{(1-m)}} \quad (1.7)$$

Ainsi, si m est égal à 1, ${}_0I_t^m v(t)$ est une intégrale classique, toutes les valeurs de $v(t)$ ayant le même « poids ». Si m est un réel compris entre 0 et 1, les valeurs les plus récentes ont plus de « poids » que les plus anciennes. La figure 1.2 représente les variations du facteur d'oubli $h_m(t-\tau)$ pour des valeurs de m comprises entre 0.1 et 1. A travers cette interprétation, les différentes pondérations obtenues en faisant varier l'ordre d'intégration m mettent en évidence l'aptitude de cet opérateur à décrire des phénomènes physiques à mémoire longue tels que les phénomènes de diffusion (Serrier, 2008).

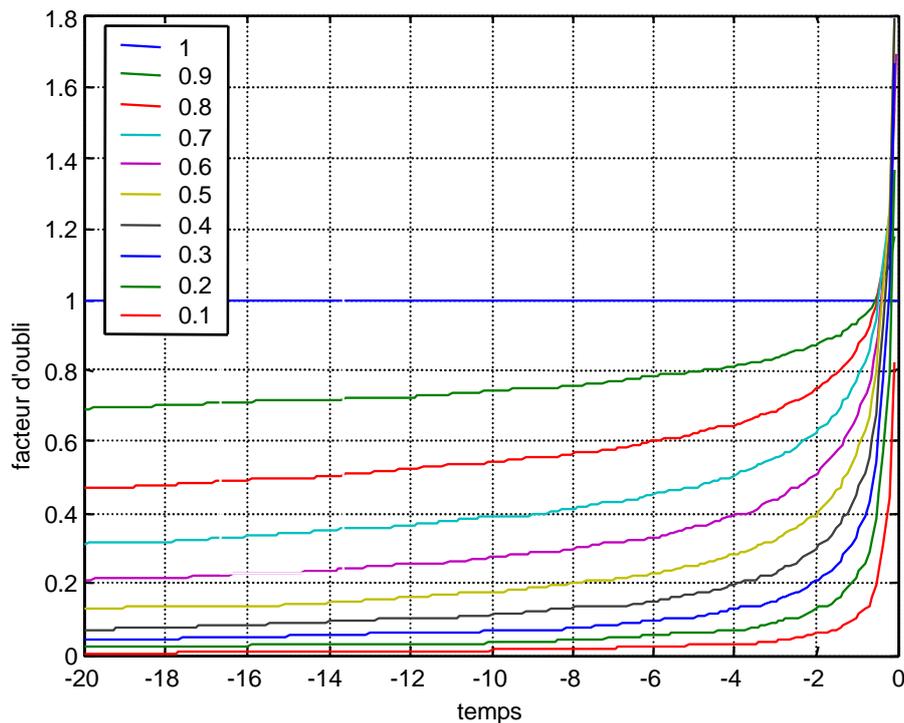


Figure 1.2 – Courbes représentatives des variations du facteur d'oubli $h_m(t-\tau)$ dans le cas d'une intégrale d'ordre réel m tel que $0.1 < m < 1$

1.2.3 - Interprétation système

Dans le domaine de la modélisation, l'approche bond-graph (Dauphin-Tanguy, 2000) a démontré tous les avantages de l'utilisation de la causalité intégrale pour la simulation

numérique lors de l'étude de la dynamique des systèmes. Par exemple, avec un élément C de stockage d'énergie (en bond-graph l'élément C , appelé *capacitor* par les anglo-saxons, est utilisé pour représenter les phénomènes capacitifs des ressorts, des barres de torsion, des accumulateurs électriques et hydropneumatiques,...), la relation causale entre ses variables de puissance est donnée par :

$$e_C(t) = \frac{1}{c} \int_0^t f_C(\tau) d\tau + e_C(0) \quad , \quad (1.8)$$

où $f_C(t)$ (la cause) et $e_C(t)$ (la conséquence) représentent le flux et l'effort généralisés, $e_C(0)$ une condition initiale (CI) sur l'effort et $c \in \mathbb{R}^+$ un paramètre caractéristique de l'élément C . Avec un élément I de stockage d'énergie (en bond-graph l'élément I est utilisé pour représenter les phénomènes inertiels des masses en translation, des inerties en rotation, des inductances électriques et hydrauliques,...), la relation causale entre ses variables de puissance est donnée par :

$$f_I(t) = \frac{1}{l} \int_0^t e_I(\tau) d\tau + f_I(0) \quad , \quad (1.9)$$

où $e_I(t)$ (la cause) et $f_I(t)$ (la conséquence) représentent l'effort et le flux généralisés, $f_I(0)$ une condition initiale (CI) sur le flux et $l \in \mathbb{R}^+$ un paramètre caractéristique de l'élément I .

La figure 1.3 représente deux schémas fonctionnels illustrant les relations de causalité des éléments C et I .

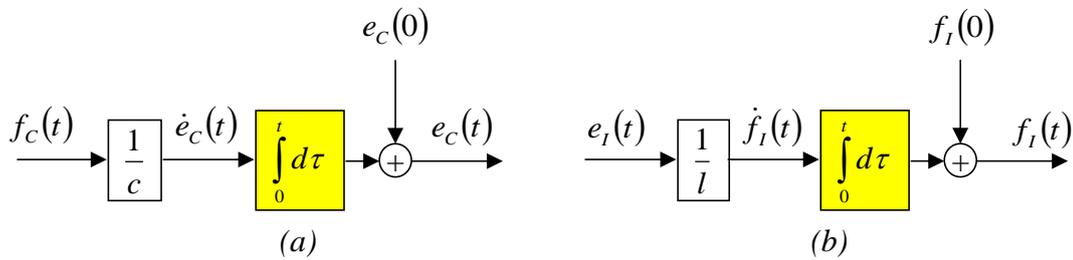


Figure 1.3 – Schémas illustrant les relations de causalité des éléments C (a) et I (b)

Pour les systèmes non entiers, la causalité intégrale conduit à utiliser un intégrateur non entier, appelé *fractor* par les anglo-saxons (contraction de *fractional integrator*) (Bohannan, 2000). L'intérêt d'utiliser la causalité intégrale est le même que pour les systèmes rationnels (Trigeassou, et al., 1999) (Trigeassou & Maamri, 2011).

L'introduction de la forme diffusive (Trigeassou, et al., 2012) (Trigeassou, et al., 2013) facilite l'interprétation système de l'intégrateur non entier. En effet, cet intégrateur est un système linéaire qui possède une infinité de variables d'état $z(\omega, t)$ distribuées fréquemment et vérifiant l'équation différentielle du premier ordre en t , soit :

$$\frac{\partial z(\omega, t)}{\partial t} = -\omega z(\omega, t) + v(t) \quad . \quad (1.10)$$

La sortie $x(t)$ de l'intégrateur est alors la somme de toutes les contributions pondérées des états $z(\omega, t)$, soit :

$$x(t) = \int_0^{\infty} \mu_m(\omega) z(\omega, t) d\omega \quad , \quad (1.11)$$

où $\mu_m(\omega)$ est le facteur de pondération défini par :

$$\mu_m(\omega) = \frac{\sin m \pi}{\pi} \omega^{-m} \quad 0 < m < 1 \quad . \quad (1.12)$$

La figure 1.4 présente les variations de $\mu_m(\omega)$ pour $0 < m < 1$ et $10^{-1} \text{ rad/s} < \omega < 10 \text{ rad/s}$.

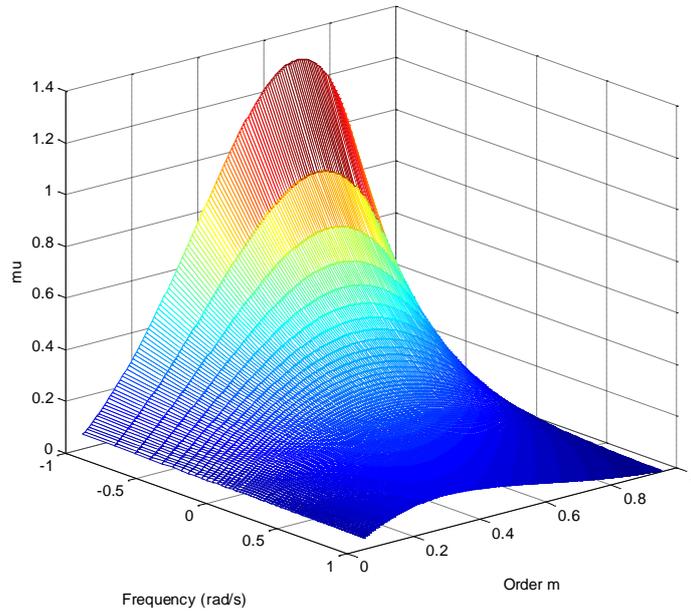


Figure 1.4 – Variations de $\mu_m(\omega)$ pour $0 < m < 1$ et $10^{-1} \text{ rad/s} < \omega < 10 \text{ rad/s}$

Remarque

Il est important de noter, contrairement à un élément I ou C dont les sorties des intégrateurs d'ordre 1 sont des variables d'état (variables de puissance : flux ou effort généralisés utilisées notamment pour calculer l'énergie stockée), que la sortie $x(t)$ d'un intégrateur non entier n'est pas une variable d'état. C'est la raison pour laquelle $x(t)$ est appelée « pseudo-état » dans la littérature récente (Trigeassou, et al., 2014) (Tari, et al., 2016) (Sabatier, et al., 2010) (Sabatier, et al., 2012) (Trigeassou & Maamri, 2009) (Trigeassou & Maamri, 2010).

1.2.4 - Définition de la dérivation non entière

La définition de Riemann-Liouville de l'intégrale d'ordre m d'une fonction $v(t)$, notée ${}_0I_t^m v(t)$ avec $m > 0$, étendue à des ordres négatifs, soit :

$${}_0I_t^{-m} v(t) = {}_0D_t^m v(t) \quad , \quad (1.13)$$

est généralement divergente (Samko, et al., 1993).

La manière la plus simple pour définir une dérivée non entière d'ordre $m > 0$ (intégrale d'ordre négatif) consiste à dériver à l'ordre entier n , avec $n = \text{Ent}[m] + 1$, l'intégrale d'ordre non entier $(n-m) > 0$, soit :

$${}_0D_t^m v(t) = {}_0D_t^{m-n+n} v(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{(n)} {}_0D_t^{-(n-m)} v(t) , \quad (1.14)$$

ou encore, sachant que ${}_0D_t^{-(n-m)} v(t) = {}_0I_t^{(n-m)} v(t)$,

$${}_0D_t^m v(t) \stackrel{\Delta}{=} \left(\frac{d}{dt}\right)^{(n)} \int_0^t \frac{1}{\Gamma(n-m) (t-\tau)^{1-(n-m)}} v(\tau) d\tau . \quad (1.15)$$

A titre d'exemple :

$${}_0D_t^{0.75} v(t) \stackrel{\Delta}{=} \left(\frac{d}{dt}\right)^1 {}_0I_t^{0.25} v(t) . \quad (1.16)$$

Remarque

Par ailleurs, la dérivation non entière est l'opération duale de l'intégration non entière (Trigeassou, et al., 2012) (Trigeassou & Oustaloup, 2011). En effet, si

$$x(t) = {}_0I_t^m v(t) \quad \text{ou} \quad X(s) = \frac{1}{s^m} V(s) , \quad (1.17)$$

alors

$$v(t) = D^m(x(t)) \quad \text{ou} \quad V(s) = s^m X(s) . \quad (1.18)$$

Cette définition de la dérivée non entière basée sur l'opérateur $I^m(s)$, sans formulation analytique de $D^m(x(t))$, est la définition implicite de la dérivation d'ordre non entier. Toutefois, cette définition implicite existe seulement à l'intérieur d'un système bouclé, comme c'est le cas lors de la simulation des équations différentielles d'ordres non entiers.

1.3 - Exemples d'intégrateurs non entiers

1.3.1 - Systèmes à paramètres distribués

D'une manière générale, la mise en équation des phénomènes de diffusion associés aux systèmes à paramètres distribués conduit naturellement aux SDNE (Podlubny, 2005). Les exemples sont nombreux dans les domaines de la physique tels que l'électrochimie (Kuhn, et al., 2005), l'électromagnétisme (Benchellal, et al., 2005) (Canat & Faucher, 2005), ou encore la thermique (Agrawal, 2004) (Battaglia, et al., 2001) (Kusiak, et al., 2005) (Abi Zeid Daou, et al., 2012), (Assaf, et al., 2012), (Battaglia, et al., 2013) (Victor, et al., 2009) (Victor, et al., 2010) (Victor, et al., 2011) (Victor, et al., 2015).

A titre d'illustration, considérons un milieu semi-infini monodimensionnel homogène, de conductivité λ , de diffusivité α_d et de température initiale nulle en tout point (figure 1.5). Il est soumis à une densité de flux $\phi(t)$ sur la surface normale sortante \vec{n} . Il en résulte une variation de température, notée $T(x,t)$, fonction du temps t et de l'abscisse x du point de mesure de température à l'intérieur du milieu.

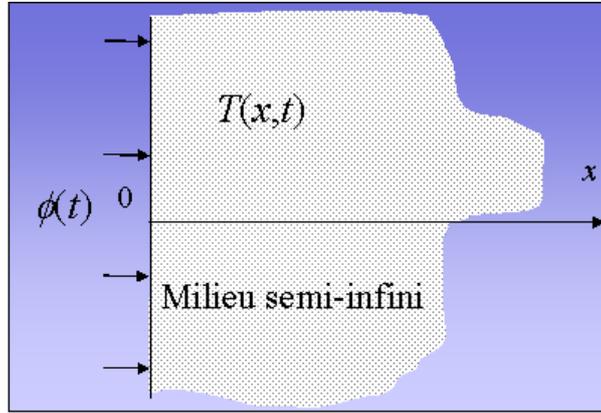


Figure 1.5 – Exemple d'illustration en thermique d'un phénomène de diffusion dans un milieu semi-infini

Le transfert de chaleur est régi par le système d'équations aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha_d \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, & 0 < x < \infty, t > 0 \\ -\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = \phi(t), & x = 0, t > 0 \\ T(x,t) = 0, & x \rightarrow \infty, t > 0 \\ T(x,t) = 0, & 0 \leq x < \infty, t = 0 \end{cases} \quad (1.19)$$

La résolution d'un tel système, rappelée de manière détaillée au chapitre 2, permet d'établir un transfert de la forme :

$$H(x,s) = \frac{\bar{T}(x,s)}{\bar{\phi}(s)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda \rho C_p}} \frac{1}{s^{0.5}} e^{-x\sqrt{s/\alpha_d}}, \quad (1.20)$$

où λ , ρ et C_p sont des constantes qui dépendent du matériau utilisé.

Dans le cas où $x = 0$, le transfert (1.20) n'est autre que l'impédance d'entrée $Z_e(s)$ qui se réduit alors à :

$$Z_e(s) = \frac{\bar{T}(0,s)}{\bar{\phi}(s)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda \rho C_p}} \frac{1}{s^{0.5}}, \quad (1.21)$$

relation qui exprime un résultat bien connu à travers lequel l'impédance thermique d'entrée d'un milieu semi-infini plan est définie par un intégrateur d'ordre 0.5.

Dans le domaine temporel (les conditions initiales étant nulles), l'expression analytique de la température $T(0,t)$ en surface est alors donnée par :

$$T(0,t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda \rho C_p}} {}_0I_t^{0.5} \varphi(t) . \quad (1.22)$$

Dans le cas des milieux finis tridimensionnels, la géométrie introduit des effets de bord qui conduisent, aussi bien dans le cas d'une approche théorique (Cois, 2002) avec un modèle de connaissance, que dans le cas d'une approche expérimentale avec un modèle de comportement (Cois, 2002), (Maachou, et al., 2010), (Maachou, et al., 2012) à une impédance d'entrée $Z_e(s)$ de la forme :

$$Z_e(s) = \frac{\bar{T}(0,s)}{\bar{\varphi}(s)} = \frac{b_0 + b_1 s^{0.5} + \dots + b_N s^{0.5N}}{1 + a_1 s^{0.5} + \dots + a_M s^{0.5M}} , \quad (1.23)$$

qui, dans le domaine temporel (les conditions initiales étant nulles), se traduit par une équation différentielle dans laquelle apparaissent des dérivées dont les ordres sont multiples de 0.5, soit :

$$T(0,t) + a_1 D^{0.5}T(0,t) + \dots + a_M D^{0.5M}T(0,t) = b_0 \varphi(t) + b_1 D^{0.5} \varphi(t) + \dots + b_N D^{0.5N} \varphi(t) , \quad (1.24)$$

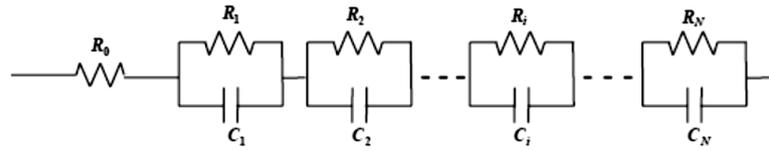
où D représente l'opérateur de différentiation, N et M étant des entiers positifs.

1.3.2 - Systèmes à paramètres localisés

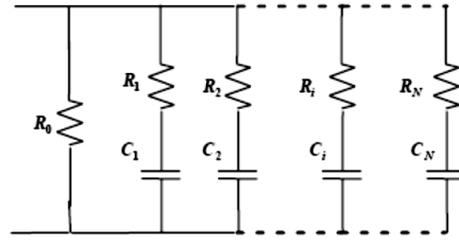
Que le caractère localisé des paramètres d'un système résulte d'une discrétisation spatiale (méthode des éléments finis), ou d'une réelle localisation des éléments d'un circuit ou d'un réseau (électrique : figure 1.6 ; mécanique : figure 1.7 ; hydraulique : figure 1.8 ; ...), le lien avec les SDNE a fait l'objet de nombreux travaux (Oustaloup, 1995).

Les éléments capacitifs (condensateur en technologique électrique, ressorts en mécanique et accumulateurs en hydraulique) sont désignés par la lettre C dans les figures 1.6, 1.7 et 1.8 et dans l'ensemble de cette thèse. Les éléments résistifs (résistance électrique, amortisseur et résistance hydraulique) sont désignés par la lettre R .

Arrangement série de cellules RC en parallèle



Arrangement parallèle de cellules RC en série



Arrangement en cascade de cellules RC en gamma

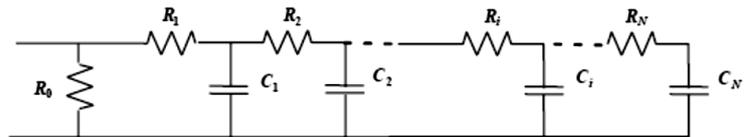
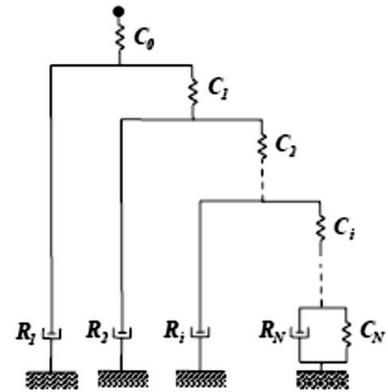
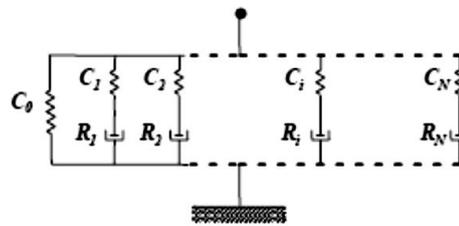
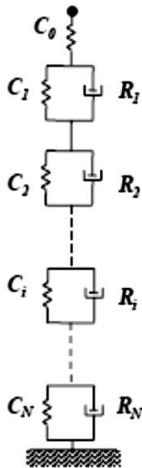


Figure 1.6 - Exemples d'arrangements de réseaux RC électriques



Arrangement parallèle de cellules RC en série

Arrangement série de cellules RC en parallèle

Arrangement en cascade de cellules RC en gamma

Figure 1.7 - Exemples d'arrangements de réseaux RC mécaniques

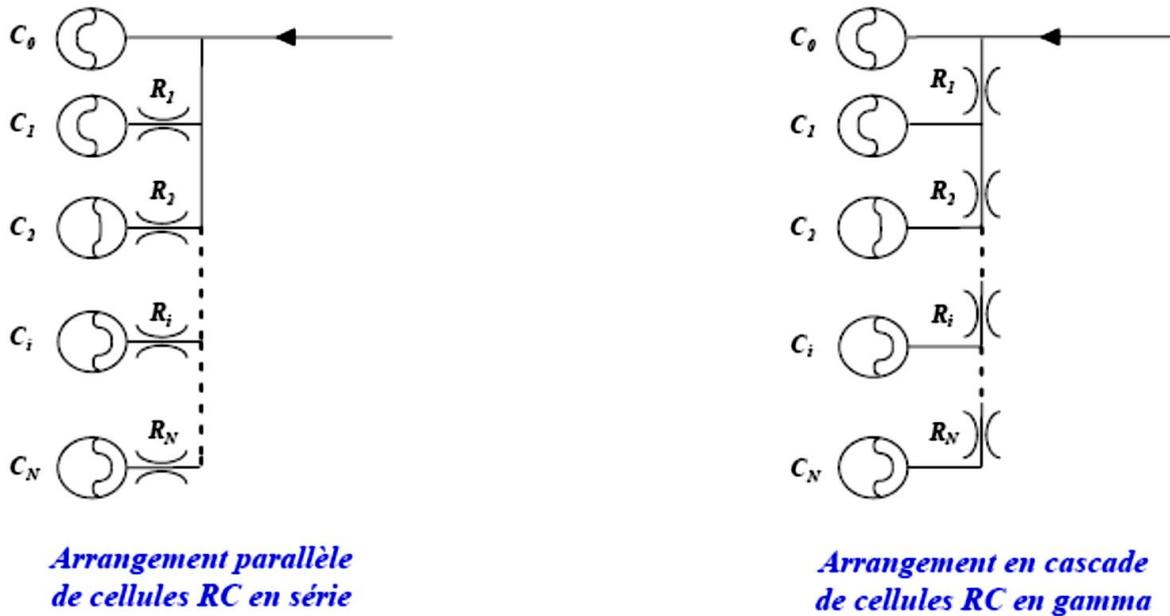


Figure 1.8 - Exemples d'arrangements de réseaux RC hydropneumatiques

A titre d'illustration, considérons de nouveau l'exemple thermique d'un milieu cette fois-ci fini monodimensionnel homogène de longueur L , de conductivité λ , de diffusivité α_d et de température initiale nulle en tout point (figure 1.9). Il est soumis à une densité de flux $\phi(t)$ sur la surface normale sortante \vec{n} . Il en résulte une variation de température, notée $T(x,t)$, fonction du temps t et de l'abscisse x du point de mesure de température à l'intérieur du milieu.

Ce milieu fini fait l'objet d'une discrétisation spatiale à pas constant Δx conduisant à N tranches identiques, où $N = L/\Delta x$. Chacune de ces tranches étant le siège de phénomènes capacitifs et dissipatifs, une cellule RC en gamma lui est associée, d'où le réseau thermique de la figure 1.10 constitué d'un arrangement cascade de N cellules RC identiques en gamma (Poinot & Trigeassou, 2004).

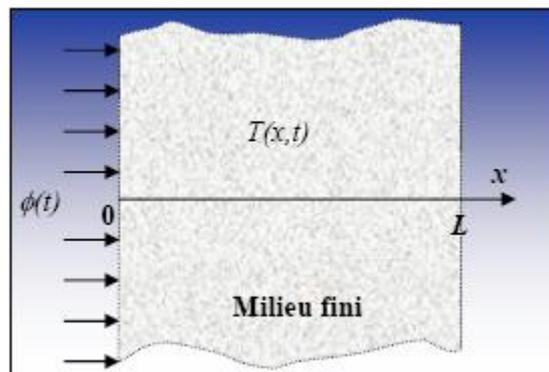


Figure 1.9 - Exemple d'illustration d'un milieu fini faisant l'objet d'une discrétisation spatiale à pas constant Δx

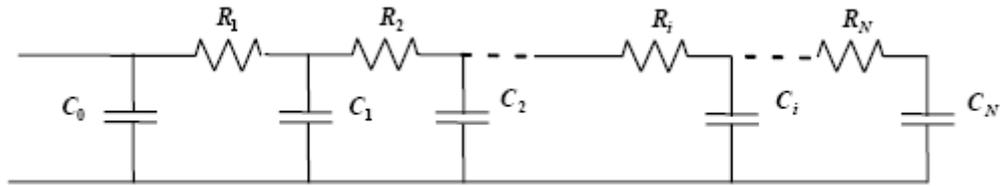


Figure 1.10 - Réseau thermique constitué d'un arrangement cascade de N cellules RC identiques en gamma et associé à la discrétisation du milieu fini de la figure 1.6

La mise en équation de ce réseau thermique conduit à une impédance d'entrée $Z_e(s)$ de la forme :

$$Z_e(s) = \frac{1}{C_0 s + \frac{1}{R_1 + \frac{1}{C_1 s + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{C_{N-1} s + \frac{1}{R_N + \frac{1}{C_N s}}}}}}} \quad (1.25)$$

La figure 1.11 présente la réponse fréquentielle $Z_e(j\omega)$ de l'impédance d'entrée du réseau thermique. Deux comportements apparaissent clairement : un comportement intégrateur d'ordre 1 (effet capacitif) aux basses et hautes fréquences, et un comportement intégrateur d'ordre 0.5 aux moyennes fréquences.

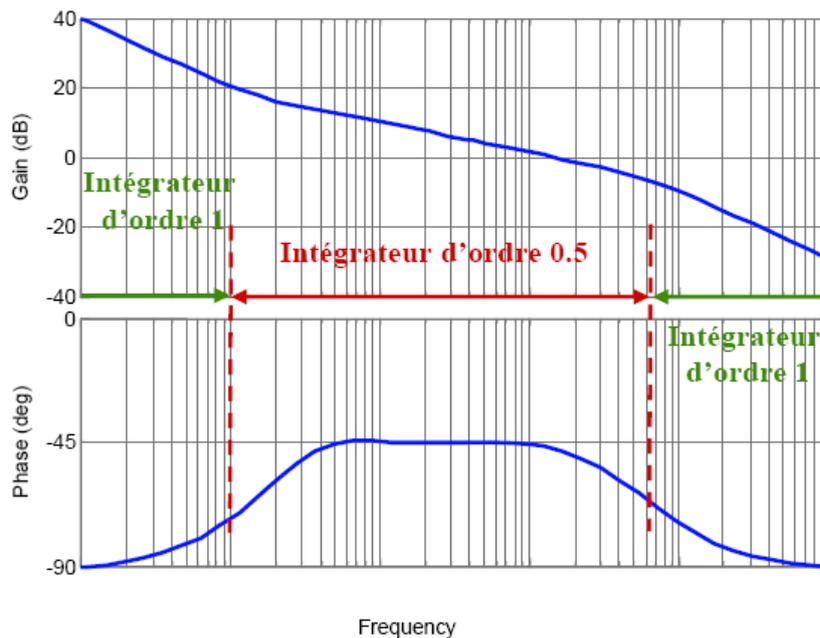


Figure 1.11 - Réponse fréquentielle $Z_e(j\omega)$ de l'impédance d'entrée du réseau thermique

L'impédance d'entrée peut être caractérisée par un modèle de comportement de la forme (Oustaloup, 1995) (Cois, 2002) (Pointot & Trigeassou, 2004) :

$$I_e(s) = \frac{D_0}{s} \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^m, \quad (1.26)$$

où ω_b et ω_h sont des fréquences transitionnelles basse et haute, D_0 une constante et $m = 0.5$.

Ainsi, l'expression (1.26) permet avec quatre paramètres (m , D_0 , ω_b et ω_h) de caractériser le comportement du réseau thermique composé de $N+1$ capacités C et N résistances R , soit un total de $2N+1$ paramètres, N étant d'autant plus important que L est grand et que Δx est petit. Ce résultat met bien en avant la propriété de compacité ou de parcimonie paramétrique que présente l'opérateur de dérivation non entière. Il est vrai que l'impédance résultant d'une discrétisation spatiale se présente sous la forme d'un modèle entier de très grande dimension.

1.4 – Synthèse d'un intégrateur non entier pour la simulation temporelle

1.4.1 - Approche fréquentielle

1.4.1.1 - Intégrateur non entier borné en fréquence

Dans de nombreux domaines de la physique, ainsi que dans de nombreuses applications, les comportements non entiers sont observés ou synthétisés sur des intervalles bornés en fréquence (Trigeassou, et al., 1999) (Lin, 2001) (Cois, 2002) (Pointot & Trigeassou, 2004) (Serrier, et al., 2007) (Sabatier, et al., 2015). C'est la raison pour laquelle la fonction de transfert

$$I^m(s) = \frac{1}{s^m} \quad (1.27)$$

est remplacée par une fonction de transfert bornée en fréquence ${}_{\omega_b} I_{\omega_h}^m(s)$ de la forme :

$${}_{\omega_b} I_{\omega_h}^m(s) = \frac{K_0}{s} \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^v, \quad (1.28)$$

où

$$\begin{cases} v \in \mathfrak{R}^+, \omega_b \in \mathfrak{R}^{*+}, \omega_h \in \mathfrak{R}^{*+}, \omega_b \ll \omega_h \text{ et } K_0 \in \mathfrak{R}^{*+} \\ K_0 = \omega_m^{1-m} \left(\frac{1 + \left(\frac{\omega_m}{\omega_h} \right)^2}{1 + \left(\frac{\omega_m}{\omega_b} \right)^2} \right)^{v/2} = \omega_b^v \\ \omega_m = \sqrt{\omega_b \omega_h} \end{cases}, \quad (1.29)$$

expression qui traduit (figure 1.12) un comportement intégrateur d'ordre

- 1 aux basses et hautes fréquences,
- $m = (1 - \nu)$ aux moyennes fréquences, de part et d'autre de la fréquence médiane ω_m .

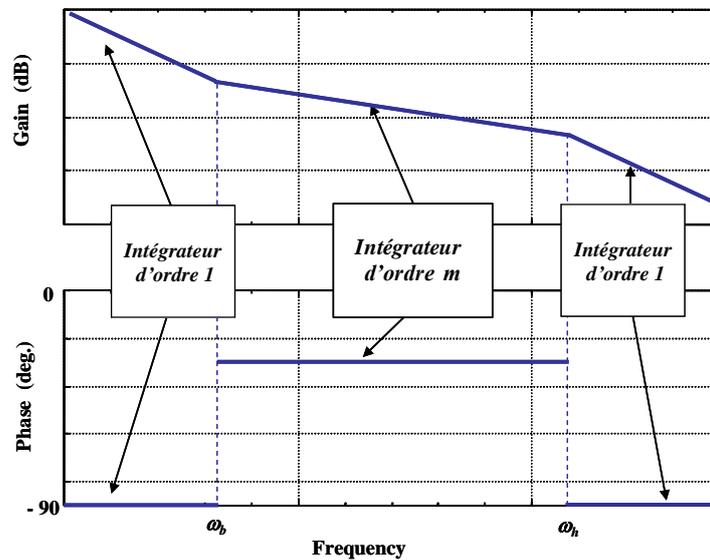


Figure 1.12 – Diagrammes asymptotiques de Bode d'un intégrateur non entier borné en fréquence

Remarque

Une variante peut être introduite aux basses et hautes fréquences selon la valeur m .

Ainsi :

- si $0.5 < m < 1$, alors un comportement intégrateur d'ordre 1 est imposé aux basses et hautes fréquences (comme précédemment) ;
- mais si $0 < m < 0.5$, alors un comportement d'ordre 0 (comportement proportionnel) peut être imposé aux basses et hautes fréquences.

1.4.1.2 - Intégrateur rationnel borné en fréquence

La synthèse repose alors sur une distribution récursive de N zéros et N pôles réels, soit :

$$\omega_b I_{\omega_h}^m(s) \approx I_N(s) , \tag{1.30}$$

avec
$$I_N(s) = \frac{K_0}{s} \prod_{i=1}^N \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_{zi}}}{1 + \frac{s}{\omega_{pi}}} \right) , \tag{1.31}$$

où les relations de passage entre les paramètres de la forme non entière $\omega_b I_{\omega_h}^m(s)$ (1.28) et ceux de la forme rationnelle $I_N(s)$ (1.31) sont données par (Oustaloup, 1995) :

$$\alpha \eta = \left(\frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{1/N}, \quad \eta = (\alpha \eta)^{1-\nu}, \quad \alpha = (\alpha \eta)^\nu,$$

$$\omega_{z1} = \sqrt{\eta} \omega_b, \quad \omega_{pN} = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \omega_h, \quad \frac{\omega_{pi}}{\omega_{zi}} = \alpha > 1,$$

$$\frac{\omega_{zi+1}}{\omega_{pi}} = \eta > 1 \quad \text{et} \quad \frac{\omega_{zi+1}}{\omega_{zi}} = \frac{\omega_{pi+1}}{\omega_{pi}} = \alpha \eta > 1.$$

α et η sont appelés facteurs récurrents.

Une décomposition de l'expression (1.31) de $I_N(s)$ en éléments simples facilite le passage dans le domaine temporel, soit :

$$I_N(s) = \frac{K_0}{s} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{K_i}{s + \omega_{pi}} \right), \quad (1.33)$$

avec

$$K_i = \frac{K_0 (\omega_{pi} - \omega_{zi})}{\omega_{zi}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \left(\frac{1 - \frac{\omega_{pi}}{\omega_{zj}}}{1 - \frac{\omega_{pi}}{\omega_{pj}}} \right), \quad (1.34)$$

décomposition à laquelle est associée une représentation d'état de la forme (Trigeassou, et al., 2014) :

$$\begin{cases} \dot{\underline{w}} = A_F \underline{w} + B_F v \\ \underline{x} = C_F \underline{w} \end{cases}, \quad (1.35)$$

où

$$\underline{w}_{((N+1) \times 1)} = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \dots \\ w_i \\ \dots \\ w_N \end{pmatrix}, \quad A_{F_{((N+1) \times (N+1))}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\omega_{p1} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\omega_{pi} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & -\omega_{pN} \end{bmatrix}.$$

$$B_{F_{((N+1) \times 1)}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_{F_{(1 \times (N+1))}} = [K_0 \quad K_1 \quad \dots \quad K_i \quad \dots \quad K_N]$$

1.4.2 - Approche temporelle

1.4.2.1 - Représentation diffusive discrète

L'approche temporelle réside dans une discrétisation modale de la représentation diffusive (Trigeassou, et al., 2014). Ainsi, les relations (1.10), (1.11) et (1.12) deviennent :

$$\dot{z}(\omega_k, t) = \dot{z}_k(t) = -\omega_k z_k(t) + v(t), \quad \text{pour } k = 1 \text{ à } K, \quad (1.37)$$

$$x(t) = \sum_{k=1}^K \mu_m(\omega_k) z_k(t) \Delta\omega_k \quad (1.38)$$

et

$$\mu_m(\omega_k) = \frac{\sin m\pi}{\pi} \omega_k^{-m} \quad 0 < m < 1 \quad (1.39)$$

Afin d'obtenir un comportement intégrateur d'ordre 1 au-delà des bornes, c'est-à-dire aux basses et hautes fréquences conformément à l'approche fréquentielle, un mode intégrateur pour $k = 0$ est rajouté, d'où la représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{\underline{z}} = A_T \underline{z} + B_T v \\ x = C_T \underline{z} \end{cases}, \quad (1.40)$$

où

$$\begin{aligned} \underset{((K+1) \times 1)}{\underline{z}} &= \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \dots \\ z_k \\ \dots \\ z_K \end{pmatrix}, \quad \underset{((K+1) \times (K+1))}{A_T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\omega_1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\omega_k & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & -\omega_K \end{bmatrix}, \\ \underset{((K+1) \times 1)}{B_T} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underset{(1 \times (K+1))}{C_T} = [c_0 \quad c_1 \quad \dots \quad c_k \quad \dots \quad c_K] \end{aligned} \quad (1.41)$$

avec

$$c_k = \mu_m(\omega_k) \Delta\omega_k, \quad (1.42)$$

$\Delta\omega_k$ étant le pas de rang k de la discrétisation modale, pas pouvant être constant ou variable.

1.5 – Commande CRONE

La commande CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) (Oustaloup, 1991) est une méthodologie de Synthèse Fréquentielle de Commande Robuste (SFCE) fondée sur le concept de dérivation non entière. Depuis les années 1980, trois générations de commandes (CRONE Group, 2005) ont été développées.

L'avantage par rapport à la synthèse H_∞ est que les incertitudes du processus sont prises en compte sans distinction de nature, qu'elles soient endogènes (incertitudes du modèle) ou exogènes (perturbations).

1.5.1 – Schéma de commande et données pour la synthèse

La figure 1.13 présente le schéma utilisé pour la synthèse de la commande.

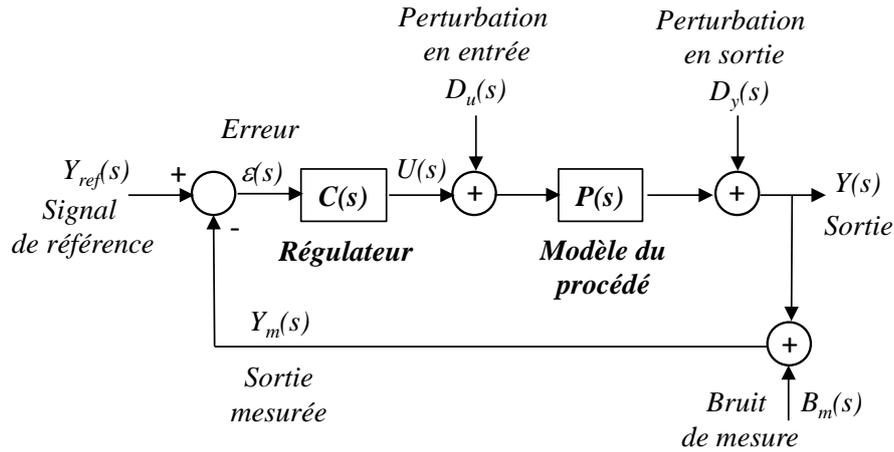


Figure 1.13 – Schéma de commande pour la synthèse

Les équations fonctionnelles associées au schéma de la figure 1.13 sont :

- pour la sortie $Y(s)$:

$$Y(s) = S(s) D_y(s) + SP(s) D_u(s) + T(s) Y_{ref}(s) - T(s) B_m(s) ; \quad (1.43)$$

- pour l'erreur $\varepsilon(s)$:

$$\varepsilon(s) = -S(s) D_y(s) - SP(s) D_u(s) + S(s) Y_{ref}(s) - S(s) B_m(s) ; \quad (1.44)$$

- pour la commande $U(s)$:

$$U(s) = -SC(s) D_y(s) - T(s) D_u(s) + SC(s) Y_{ref}(s) - SC(s) B_m(s) , \quad (1.45)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{ll} \beta(s) = C(s) P(s) : & \text{la fonction de transfert en boucle ouverte} \\ S(s) = \frac{1}{1 + \beta(s)} : & \text{la fonction de sensibilité} \\ T(s) = 1 - S(s) : & \text{la fonction de sensibilité complémentaire} \\ SP(s) = S(s) P(s) : & \text{la fonction de sensibilité à la perturbation en entrée} \\ SC(s) = S(s) C(s) : & \text{la fonction de sensibilité de l'entrée} \end{array} \right. . \quad (1.46)$$

Les données nécessaires à la Synthèse Fréquentielle de la Commande Robuste (SFQR) se répartissent en deux groupes :

- les modèles des signaux (souvent difficiles à obtenir, notamment en ce qui concerne le bruit de mesure) et surtout le modèle linéaire incertain du procédé qui dans le cas d'une approche fréquentielle se présente sous la forme d'une fonction de transfert $P(s)$ (figure 1.13) dont les domaines d'incertitude des paramètres θ_i sont précisés, par exemple, sous la forme d'intervalles bornés, soit $\theta_i \in [\underline{\theta}_i ; \bar{\theta}_i]$;
- les spécifications du cahier des charges en matière de :

- **degré de stabilité**, à travers le facteur d'amortissement ζ du mode associé à la commande tel que $\zeta \geq \zeta_{\min}$, où ζ_{\min} désigne la valeur minimale acceptable du facteur d'amortissement ;
- **rapidité**, à travers la constante de temps τ du mode associé à la commande qui doit être la plus petite possible ;
- **précision en régime permanent**, à travers l'erreur relative, $\varepsilon(\%)$;
- **saturation**, à travers la valeur maximale de la commande, U_{\max} .
- **sensibilité de la commande au bruit de mesure**, à travers une valeur égale à $x\%$ de U_{\max} .

Dans le cadre d'une SFCR, il est essentiel de traduire les deux premières spécifications temporelles du cahier des charges en spécifications fréquentielles, soit :

- pour le **degré de stabilité**, à travers le facteur de résonance Q_T de la réponse fréquentielle de la fonction de sensibilité complémentaire $T(s)$, ou à travers les marges de stabilité (marge de module, marge de phase, marge de gain, marge de retard,...) ;
- pour la **rapidité**, à travers la bande passante de la réponse fréquentielle de la fonction de sensibilité complémentaire $T(s)$ ou à travers la fréquence au gain unité en boucle ouverte, notée ω_u .

En l'absence d'information supplémentaire, notamment en ce qui concerne le bruit de mesure, il est difficile (voire impossible) de déterminer la fréquence au gain unité nominale, ω_{unom} , de manière précise.

Cependant, une approche simplifiée consiste à fixer la contribution c_m acceptable du bruit de mesure par rapport à la valeur maximale U_{\max} de la commande (par exemple $c_m = 10\%$). En l'absence de modèle précis du bruit de mesure, tout en sachant que son spectre fréquentiel est plutôt concentré vers les hautes fréquences, on se place en régime harmonique stationnaire. L'amplitude B_m du bruit de mesure est estimée par rapport à l'Etendue de Mesure EM du capteur (par exemple $B_m = 1\% EM$). Ainsi, à partir de la relation (1.45), on impose :

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |U(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} |SC(j\omega)| B_m \leq c_m U_{\max} , \quad (1.47)$$

ou encore, sachant que $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |SC(j\omega)| \rightarrow \lim_{\omega \rightarrow \infty} |C(j\omega)|$, (1.48)

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |U(j\omega)| \approx \lim_{\omega \rightarrow \infty} |C(j\omega)| B_m \leq c_m U_{\max} . \quad (1.49)$$

Ainsi, une contrainte concernant le gain C_∞ du régulateur pour les hautes fréquences est établie, soit :

$$C_\infty = \lim_{\omega \rightarrow \infty} |C(j\omega)| \leq \frac{c_m U_{\max}}{B_m} . \quad (1.50)$$

Si la structure du régulateur utilisé est fixée *a priori*, comme c'est le cas avec un régulateur PID ou un régulateur CRONE 1^{ère} génération par exemple, alors il existe une relation analytique entre le gain $|C(j\omega_u)|$ du régulateur à ω_u et le gain C_∞ du régulateur aux hautes fréquences. Il est ainsi possible à l'aide de cette relation et de la contrainte (1.50) de déterminer ω_{umax} et d'imposer la condition $\omega_u \leq \omega_{umax}$.

Si la structure du régulateur n'est pas fixée *a priori*, comme c'est le cas avec une approche loop-shaping, alors une première approche permettant d'avoir un ordre de grandeur de ω_{umax} consiste à considérer dans un premier temps un régulateur avec une simple action proportionnelle C_0 . Dans ce cas, la contrainte sur C_∞ est la même pour C_0 . Ainsi, en se plaçant à l'égalité stricte, soit :

$$C_0 = C_\infty = \frac{c_m U_{max}}{B_m}, \quad (1.51)$$

et compte tenu de la définition de ω_{umax} , soit

$$|\beta(j\omega_{umax})| = C_0 |P(j\omega_{umax})| = 1, \quad (1.52)$$

ω_{umax} est déterminée en résolvant l'égalité

$$|P(j\omega_{umax})| = \frac{1}{C_0} \Leftrightarrow |P(j\omega_{umax})| = \frac{B_m}{c_m U_{max}}, \quad (1.53)$$

conduisant ainsi à la contrainte $\omega_u < \omega_{umax}$.

Concernant la spécification en matière de *degré de stabilité*, sa traduction du domaine temporel au domaine fréquentiel peut se faire en supposant que le mode dominant de la commande est assimilable à celui d'un deuxième ordre. En effet, dans le cas particulier d'un deuxième ordre, il existe une relation entre le facteur d'amortissement ζ et le facteur de résonance Q , soit :

$$Q = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}. \quad (1.54)$$

Ainsi, imposer une contrainte sur le degré de stabilité de la commande dans le domaine temporel à l'aide d'un facteur d'amortissement minimal ζ_{min} revient à imposer dans le domaine fréquentiel une contrainte sur le facteur de résonance Q_T de la réponse fréquentielle de la fonction de sensibilité complémentaire $T(s)$ à l'aide d'un facteur de résonance maximal Q_{Tmax} , soit :

$$\zeta \geq \zeta_{min} \Leftrightarrow Q_T \leq Q_{Tmax} = \frac{1}{2\zeta_{min}\sqrt{1-\zeta_{min}^2}}. \quad (1.55)$$

Pour le lecteur peu familiarisé avec l'approche fréquentielle, il est rappelé que la valeur du contour d'amplitude (si celle-ci est supérieure à 0 dB) de l'abaque de Black-Nichols tangenté par la réponse fréquentielle $\beta(j\omega)$ de la boucle ouverte donne la valeur du facteur de résonance Q_T (figure 1.14).

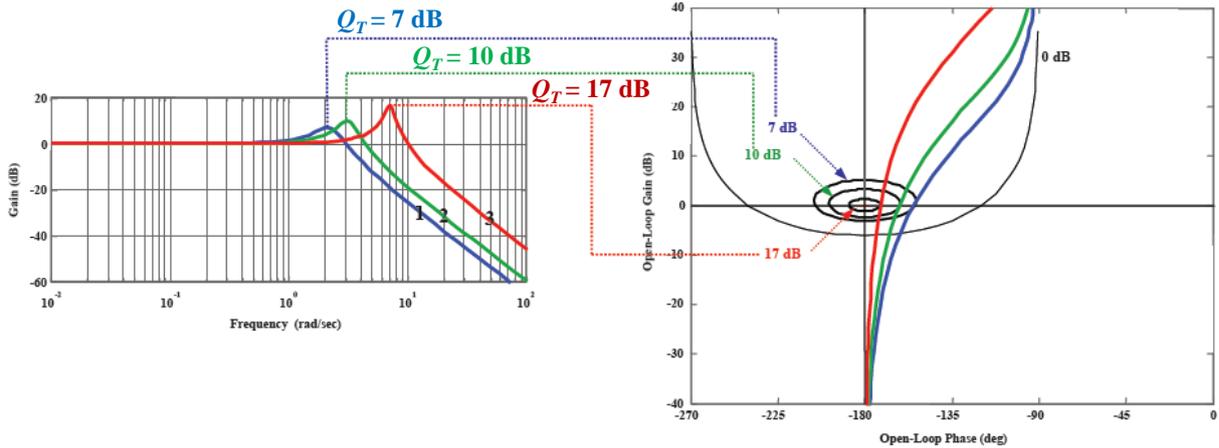


Figure 1.14 – Illustration du lien entre contour tangenté par la réponse fréquentielle $\beta(j\omega)$ de la boucle ouverte dans le plan de Black-Nichols et facteur de résonance Q_T de la réponse fréquentielle $T(j\omega)$ de la fonction de sensibilité complémentaire

De plus, dans le cas particulier d'un comportement intégrateur d'ordre n (avec $1 < n < 2$) au voisinage de la fréquence au gain unité en boucle ouverte, ω_u , il est facile en matière de degré de stabilité de traduire la spécification fréquentielle de boucle fermée, Q_T , en spécification fréquentielle de boucle ouverte à l'aide de la marge de phase M_ϕ , et ce dans la mesure où ces deux grandeurs ne dépendent que de l'ordre n (cf paragraphe 1.5.3 – **Commande CRONE de deuxième génération**).

Ainsi, la spécification sur le degré de stabilité peut s'écrire sous la forme :

$$\zeta \geq \zeta_{\min} \Leftrightarrow Q_T \leq Q_{T_{\max}} \Leftrightarrow M_\phi \geq M_{\phi_{\min}}, \quad (1.56)$$

avec $M_{\phi_{\min}}$ la valeur minimale spécifiée de la marge de phase.

1.5.2 - Commande CRONE de première génération

La première génération de la commande CRONE est basée sur un régulateur $C(s)$ à phase constante (au voisinage de la fréquence au gain unité en boucle ouverte ω_u) obtenu pour une plage de fréquences limitées $[\omega_A, \omega_B]$, soit :

$$C(s) = C_0 \left(\frac{1 + s/\omega_l}{1 + s/\omega_h} \right)^m, \quad (1.57)$$

avec C_0 , ω_l , ω_h et $m \in \mathbb{R}$.

Lorsque la phase du processus est constante autour de la fréquence ω_u et que les perturbations n'engendrent que des variations de gain (autour de ω_u), le régulateur à phase constante assure la robustesse de la marge de phase M_ϕ . Afin que le régulateur CRONE respecte les spécifications en matière de niveau du signal de commande et en matière de précision en régime stationnaire, il faut ajouter un intégrateur d'ordre m_I sur une plage de fréquences limitée et un filtre passe-bas d'ordre m_F . Ainsi, le régulateur CRONE de première génération est défini par :

$$C_F(s) = C_0 \left(\frac{1+s/\omega_l}{s/\omega_l} \right)^{m_l} \left(\frac{1+s/\omega_l}{1+s/\omega_h} \right)^m \frac{1}{(1+s/\omega_F)^{m_F}}, \quad (1.58)$$

avec $m_l, m_F \in \mathbf{N}$ et $\omega_l, \omega_F \in \mathbf{R}$.

Cette forme peut être considérée comme un régulateur $PI^{m_l} D^m F^{m_F}$ avec $C_R(s)$ sa forme rationnelle définie à l'aide d'une approximation pour la partie non entière obtenue par une distribution récursive de pôles et de zéros à valeur réelle, soit :

$$C_R(s) = C_0 \left(\frac{1+s/\omega_l}{s/\omega_l} \right)^{m_l} \frac{1}{(1+s/\omega_F)^{m_F}} \prod_{i=1}^N \frac{1+s/\omega'_i}{1+s/\omega_i}, \quad (1.59)$$

avec $N \in \mathbf{N}$ et $\omega_i, \omega'_i \in \mathbf{R}$.

La figure 1.15 présente les diagrammes asymptotiques de Bode pour la partie non entière où :

$$\frac{\omega'_{i+1}}{\omega'_i} = \frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} = \alpha\eta > 1, \quad (1.60)$$

$$\frac{\omega_i}{\omega'_i} = \alpha \quad \text{et} \quad \frac{\omega'_{i+1}}{\omega_i} = \eta, \quad (1.61)$$

$$\alpha\eta = \left(\frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{1/N}, \quad (1.62)$$

$$\alpha = (\alpha\eta)^m \quad \text{et} \quad \eta = (\alpha\eta)^{1-m}, \quad (1.63)$$

$$\omega'_1 = \omega_l \eta^{1/2} \quad \text{et} \quad \omega_N = \omega_h \eta^{-1/2}. \quad (1.64)$$

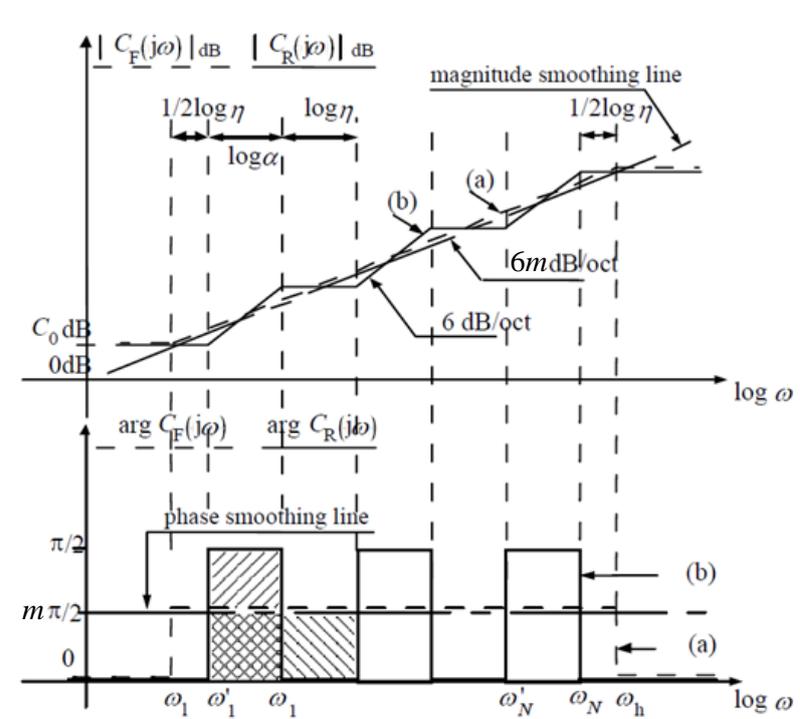


Figure 1.15 - Diagrammes asymptotiques de Bode du régulateur CRONE fractionnaire (a) et rationnel (b) pour $m \in [0,1]$

Généralement, les paramètres ω_i et ω_i' peuvent être calculés en fixant une valeur pour N qui assure $\alpha\eta \approx 5$.

La robustesse de la marge de phase M_ϕ est assurée seulement si ω_u se situe dans la plage de fréquence où la phase du système est constante. Lorsque cette condition n'est pas respectée, il faut utiliser la commande CRONE de deuxième génération.

1.5.3 - Commande CRONE de deuxième génération

Le respect des spécifications en matière de niveau du signal de commande ne permet pas toujours de choisir une fréquence au gain unité en boucle ouverte, ω_u , dans une plage de fréquence où le processus a un comportement asymptotique. Ainsi, lorsque la fréquence ω_u désirée n'est pas comprise dans le comportement asymptotique, le régulateur CRONE précédent défini par (1.57) ne peut pas assurer la robustesse du degré de stabilité du système en boucle fermée. Cependant, comme Bode l'a établi (Bode, 1945) pour la conception d'un amplificateur de simple boucle parfaitement stable avec des gains de tube qui varient, seul un régulateur robuste permet d'obtenir une fonction de transfert à phase constante pour une certaine plage fréquentielle. Ainsi, pour une fréquence ω_u comprise dans une plage de fréquence où les incertitudes du système ne donnent que des variations de gain, l'approche CRONE définit la fonction de transfert de boucle ouverte (sur la plage fréquentielle $[\omega_a, \omega_b]$) par un intégrateur fractionnaire, soit :

$$\beta(s) = \left(\frac{\omega_u}{s} \right)^n, \quad (1.65)$$

avec $n \in \mathbb{R}$ et $n \in [1, 2]$.

La fonction de sensibilité complémentaire $T(s)$ et la fonction de sensibilité $S(s)$ s'expriment alors sous la forme :

$$T(s) = \frac{\beta(s)}{1 + \beta(s)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{\omega_u} \right)^n} \quad \text{et} \quad S(s) = \frac{1}{1 + \beta(s)} = \frac{\left(\frac{s}{\omega_u} \right)^n}{1 + \left(\frac{s}{\omega_u} \right)^n}. \quad (1.66)$$

Autour de la fréquence ω_u , le lieu de Black-Nichols de $\beta(s)$ est une droite verticale dont la phase est déterminée seulement par l'ordre n (figure 1.16). Cette droite est la réponse fréquentielle désirée pour la boucle ouverte dans le plan de Black-Nichols.

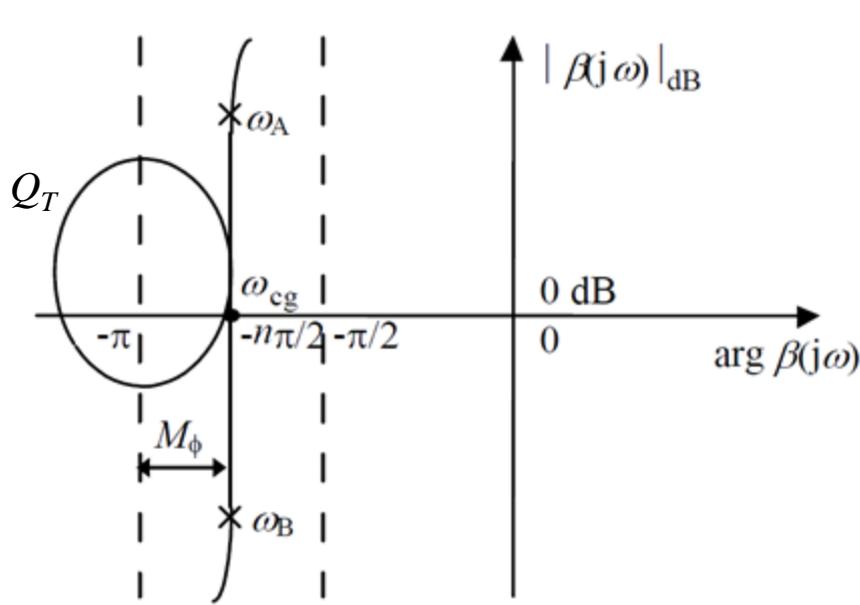


Figure 1.16 – Forme et droite verticale du gabarit fréquentiel assurant la robustesse de la marge de phase M_ϕ et du facteur de résonance Q_T

Le gabarit vertical ainsi défini peut glisser le long de son propre axe selon la variation des paramètres. Le déplacement vertical assure (Oustaloup, 1983) :

- une marge de phase M_ϕ robuste égale à $(2-n) \pi/2$;
- un facteur de résonance robuste Q_T exprimé par :

$$Q_T = \frac{\sup_{\omega} |T(j\omega)|}{|T(j0)|} = \frac{1}{\sin(n\pi/2)} ; \quad (1.67)$$

- une marge de module M_m robuste exprimé par :

$$M_m = \inf_{\omega} |\beta(j\omega) + 1| = \left(\sup_{\omega} |S(j\omega)| \right)^{-1} = \sin(n\pi/2) ; \quad (1.68)$$

- un amortissement ζ robuste directement déduit de l'angle θ formé par les deux pôles complexes de la boucle fermée :

$$\zeta = \cos \theta = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{n} \right) = -\cos(\pi/n) . \quad (1.69)$$

Afin que le régulateur gère le niveau du signal de commande et l'erreur en régime stationnaire, l'équation (1.65) est limitée en fréquence et un filtre passe-bas ainsi qu'un intégrateur sont ajoutés. L'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte $\beta(s)$ devient :

$$\beta(s) = \beta_0 \left(\frac{1+s/\omega_l}{s/\omega_l} \right)^{n_l} \left(\frac{1+s/\omega_h}{1+s/\omega_l} \right)^n (1+s/\omega_h)^{-n_h} , \quad (1.70)$$

où ω_l et ω_h représentent les fréquences transitionnelles basse et haute, n l'ordre non entier compris entre 1 et 2 au voisinage de la fréquence ω_u , n_l et n_h sont les ordres des comportements

asymptotiques aux basses et hautes fréquences (figure 1.17) et β_0 une constante qui assure un gain unité à la fréquence ω_u dont l'expression est donnée par :

$$\beta_0 = (\omega_u / \omega_l)^{n_l} \left(1 + (\omega_u / \omega_l)^2\right)^{(n-n_l)/2} \left(1 + (\omega_u / \omega_h)^2\right)^{(n_h-n)/2} . \quad (1.71)$$

Le comportement asymptotique fractionnaire (figure 1.17) est défini sur un intervalle fréquentiel $[\omega_A, \omega_B]$ autour de la fréquence nominale ω_{umom} . Pour respecter la robustesse du degré de stabilité, il est nécessaire d'imposer :

$$\forall \omega_u \in [\omega_{u \min} ; \omega_{u \max}], \omega_A \leq \omega_u \leq \omega_B \Rightarrow \begin{cases} \omega_A \leq \omega_{u \min} \\ \omega_B \geq \omega_{u \max} \end{cases} . \quad (1.72)$$

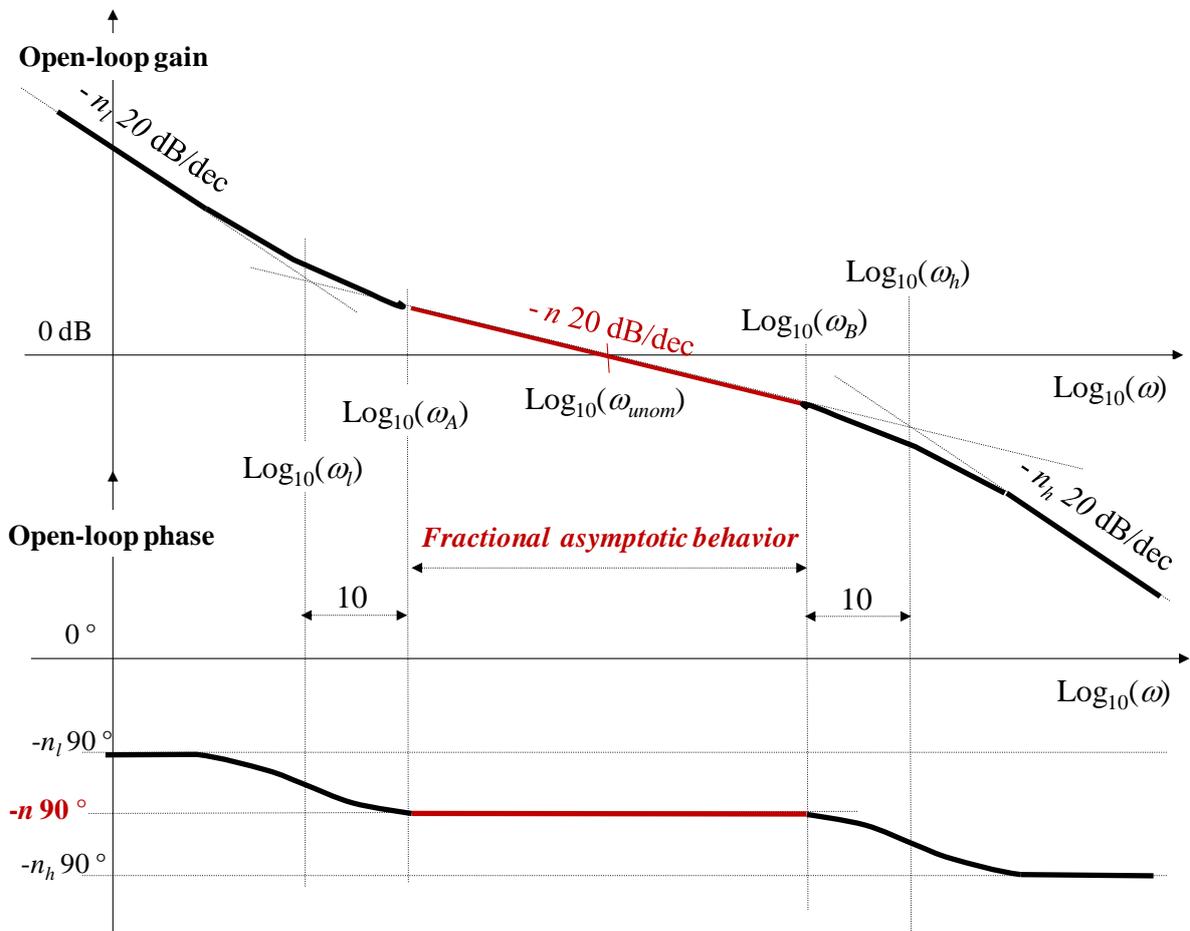


Figure 1.17 – Diagrammes asymptotiques de Bode de $\beta(j\omega)$

De plus, pour obtenir un comportement asymptotique fractionnaire sur l'intervalle $[\omega_A, \omega_B]$ (figure 1.17), une règle pratique conduit à choisir (Oustaloup, 1995)

$$\begin{cases} \omega_l = \omega_A / 10 \\ \omega_h = 10 \omega_B \end{cases} . \quad (1.73)$$

En prenant ω_l et ω_h distribuées géométriquement autour de ω_{unom} et en introduisant $r = \omega_B/\omega_A$, soit :

$$\begin{cases} \sqrt{\omega_l \omega_h} = \omega_{unom} \\ r = \frac{\omega_B}{\omega_A} \end{cases}, \quad (1.74)$$

ω_l et ω_h sont données par :

$$\begin{cases} \sqrt{\omega_l \omega_h} = \omega_{unom} \\ \frac{\omega_h}{\omega_l} = 100 r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_l = \omega_{unom} / (10 \sqrt{r}) \\ \omega_h = \omega_{unom} 10 \sqrt{r} \end{cases}. \quad (1.75)$$

Quant au calcul du rapport r , il est déduit de la pente de $-n20\text{dB/dec}$ au voisinage de ω_{unom} et de la variation $\Delta\beta$ de gain en boucle ouverte due aux incertitudes paramétriques (figure 1.18). Ainsi, on trouve :

$$r = \Delta\beta^{1/n}. \quad (1.76)$$

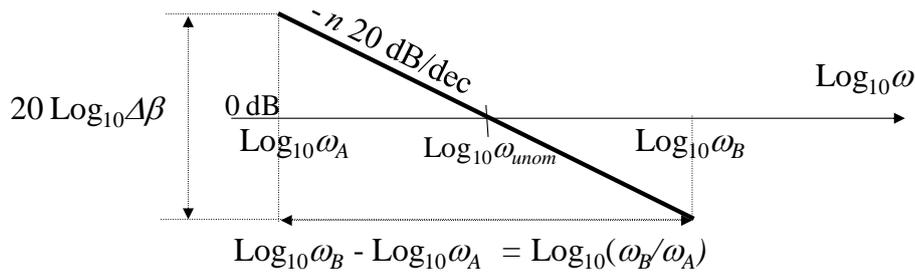


Figure 1.18 – Illustration du calcul de r

Enfin, sachant que

$$\beta(j\omega) = C_F(j\omega) P(j\omega), \quad (1.77)$$

la forme fractionnaire $C_F(j\omega)$ de la réponse fréquentielle du régulateur CRONE est alors déduite à partir de la réponse fréquentielle $P_0(j\omega)$ du procédé nominal, soit :

$$C_F(j\omega) = \beta(j\omega) / P_0(j\omega). \quad (1.78)$$

Finalement, une dernière étape est nécessaire pour déterminer la forme rationnelle $C_R(j\omega)$ de la fonction de transfert fractionnaire $C_F(j\omega)$ qui, selon le cas, est obtenue soit analytiquement à l'aide d'une distribution récursive de pôles et de zéros (voir (Oustaloup, 1995)), soit numériquement à partir de la réponse fréquentielle de $C_F(j\omega)$ et d'un module spécifique de la Toolbox CRONE (voir (CRONE Group, 2005)).

1.5.4 - Commande CRONE de troisième génération

Pour des cas plus généraux que des variations de gain du système, le gabarit vertical du lieu de Black-Nichols ne suffit pas. Cependant, il est toujours plus pratique de définir un gabarit en ligne droite (autour de la fréquence ω_u) pour l'état paramétrique nominal du processus, mais peu importe la direction. La fonction de transfert de la boucle ouverte est maintenant définie comme la partie réelle d'un intégrateur d'ordre fractionnaire complexe, soit :

$$\beta(s) = \operatorname{Re}_{/i} \left(\frac{\omega_u}{s} \right)^n, \quad (1.79)$$

avec $n = a + ib \in C_i$ and $s = \sigma + j\omega \in C_j$. L'ordre réel a détermine le placement en phase du lieu de Black-Nichols et la partie imaginaire b détermine son angle par rapport à la verticale comme l'illustre la figure 1.19

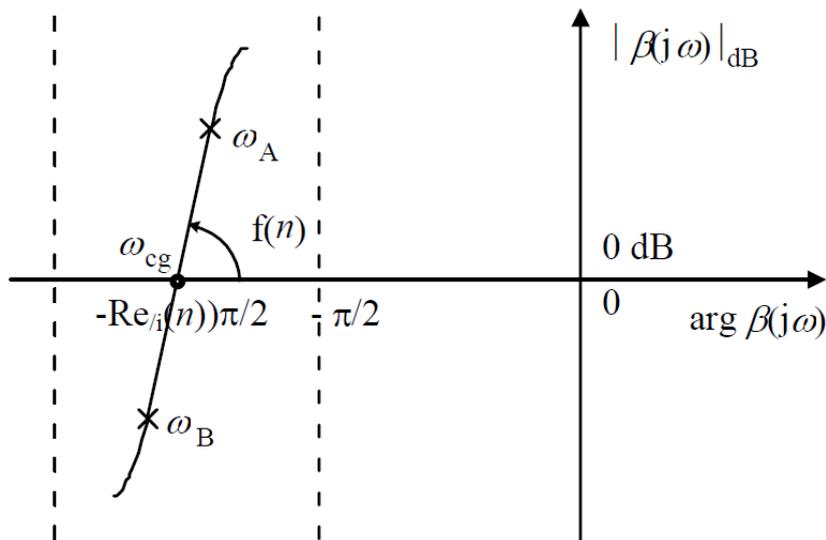


Figure 1.19 – Gabarit généralisé dans le plan de Black-Nichols

Parmi le nombre infini de gabarits possibles, quel est celui qui tangente le contour en relation avec la valeur requise du facteur de résonance Q_{T0} pour l'état paramétrique nominal du procédé ? Le gabarit optimal peut être défini comme celui permettant de minimiser les variations de Q_T provenant du domaine fréquentiel incertain lui-même découlant des diverses réponses fréquentielles obtenues pour le système perturbé. Le principe de la commande CRONE de troisième génération consiste à optimiser les paramètres de la fonction de transfert en boucle ouverte nominale $\beta_0(s)$ de façon à inclure une intégration d'ordre fractionnaire complexe sur une plage de fréquences, soit :

$$\beta_0(s) = \beta_l(s) \beta_m(s) \beta_h(s), \quad (1.80)$$

où $\beta_m(s)$ est un ensemble de modèles généralisés sur une plage de fréquence :

$$\beta_m(s) = \prod_{k=-N^-}^{N^+} C_k^{\text{sign}(b_k)} \left(\alpha_k \frac{1+s/\omega_{k+1}}{1+s/\omega_k} \right)^{a_k} \left(\text{Re}/i \left\{ \left(\alpha_k \frac{1+s/\omega_{k+1}}{1+s/\omega_k} \right)^{ib_k} \right\} \right)^{-q_k \text{sign}(b_k)}, \quad (1.81)$$

avec

$$\alpha_k = \left(\frac{\omega_{k+1}}{\omega_k} \right)^{1/2} \quad \text{pour } k \neq 0 \quad \text{et} \quad \alpha_0 = \left(\frac{1+(\omega_r/\omega_0)^2}{1+(\omega_r/\omega_1)^2} \right)^{1/2}, \quad (1.82)$$

et où

$$\beta_l(s) = C_l \left(\frac{1+s/\omega_{N^-}}{s/\omega_{N^-}} \right)^{n_l} \quad \text{et} \quad \beta_h(s) = C_h \left(\frac{s}{\omega_{N^+}} + 1 \right)^{-n_h}, \quad (1.82)$$

avec N^+ , N^- et $q_k \in \mathbf{N}^+$; ω_r , ω_k , ω_{k+1} , a_k , C_k , C_l , C_h , a_k et $b_k \in \mathbf{R}$.

Les gains C_x sont choisis de telle sorte que ω_r soit la fréquence nominale de résonance en boucle fermée. Quand c'est nécessaire, N^+ et N^- sont différents de 0 pour augmenter le nombre paramètres réglables.

Les paramètres de boucle ouverte étant optimisés pour réduire les variations du facteur de résonance Q_T de la fonction de sensibilité complémentaire $T(s)$, la fonction coût J de la robustesse à minimiser peut être de la forme :

$$J = \left(Q_{T0} - \min_P |Q_T| \right)^2 + \left(\max_P |Q_T| - Q_{T0} \right)^2, \quad (1.83)$$

où Q_{T0} est la valeur nominale désirée du facteur de résonance en boucle fermée (pour le procédé nominal P_0), et ce tant que l'ensemble des inégalités suivantes sont respectées pour tout procédé P et pour tout $\omega \in \mathbf{R}^+$:

$$\left. \begin{array}{l} \min_P |T(j\omega)| \geq T_l(\omega), \quad \max_P |T(j\omega)| \leq T_u(\omega), \quad \max_P |S(j\omega)| \leq S_u(\omega) \\ \max_P |CS(j\omega)| \leq CS_u(\omega) \quad \text{et} \quad \max_P |PS(j\omega)| \leq PS_u(\omega) \end{array} \right\}, \quad (1.85)$$

avec

$$\left. \begin{array}{l} T(s) = \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)}, \quad S(s) = \frac{1}{1+P(s)C(s)}, \\ SC(s) = \frac{C(s)}{1+P(s)C(s)}, \quad SP(s) = \frac{P(s)}{1+P(s)C(s)} \end{array} \right\}. \quad (1.86)$$

Il est facile de mettre en évidence que l'incertitude multiplicative $\Delta_m \beta(s)$ de la réponse fréquentielle en boucle ouverte, qui définit l'incertitude du domaine fréquentiel dans le plan de Black-Nichols, est invariante et égale à celle du procédé, soit :

$$\beta(s) = P(s)C(s) = P_0(s) \Delta_m P(s)C(s) = \beta_0(s) \Delta_m P(s), \quad (1.87)$$

avec $P_0(s)$ le processus nominal et $\beta_0(s)$ la fonction de transfert en boucle ouverte et où $\Delta_m P(s)$ (ou $\Delta_m \beta(s)$) est l'incertitude multiplicative du modèle. Ainsi, les incertitudes sur le domaine fréquentiel liées au lieu de Black-Nichols de $\beta_0(s)$ sont définies par l'ensemble des valeurs possibles des paires ordonnées $(\arg \Delta_m P(j\omega), |\Delta_m P(j\omega)|_{dB})$. En minimisant J (relation (1.83)), les paramètres optimaux pour la boucle ouverte positionnent les incertitudes du domaine fréquentiel de manière à ce qu'elles chevauchent le moins possible la zone de faible stabilité du plan de Black-Nichols. Etant donné que les incertitudes sont prises en compte par la méthode la moins conservative, seule une méthode d'optimisation non linéaire peut être utilisée. Pour $N=N^+=0$, seuls quatre paramètres indépendants de boucle ouverte doivent être optimisés. Le paramétrage de la fonction de transfert en boucle ouverte par des ordres fractionnaires complexes simplifie considérablement l'optimisation. Lors de l'optimisation, un ordre complexe joue le rôle d'un grand ensemble de paramètres utilisés pour un régulateur rationnel. Finalement, le régulateur fractionnaire $C_F(s)$ est défini par sa réponse fréquentielle $C_F(j\omega)$ sous la forme :

$$C_F(j\omega) = \frac{\beta_0(j\omega)}{P_0(j\omega)} . \quad (1.88)$$

Les paramètres de la fonction de transfert rationnelle $C_R(s)$ avec une structure prédéfinie d'ordre faible sont déterminés pour s'adapter à la réponse fréquentielle idéale $C_F(j\omega)$ en utilisant une technique d'identification de système dans le domaine fréquentiel. L'avantage de cette méthodologie de conception est que, quelle que soit la complexité du problème de commande, une valeur réduite de l'ordre du régulateur (généralement autour de 6) peut être utilisée.

1.5.5 - CRONE Control System Design Toolbox

La boîte à outils "*The CRONE Toolbox*" a été développé depuis le début des années 90. Elle a fait l'objet de plusieurs publications, thèses et articles, et d'un enregistrement auprès de l'Agence pour la Protection des Programmes (APP) en 1993 et 1994 (Malti, et al., 2011) (Lanusse, et al., 2013) (Lanusse, et al., 2016) (Lanusse, 2010). Chaque module concerne un des thèmes d'application de la dérivation non entière. Certains de ces modules ont initialement été programmés en Turbo Pascal. Ces modules ont été totalement réécrits sous la forme d'une boîte à outils Matlab V5.3 sous Windows (Oustaloup, et al., 2000).

Le choix de Matlab a été motivé par les nombreux avantages de ce logiciel : algorithmes de calculs numériques sur des matrices complexes, langage de programmation de haut niveau, fonctions d'affichage graphique, création aisée d'IHM (menus, champs de saisie, etc...). La portabilité sur d'autres systèmes est aussi un avantage important, notamment pour faciliter la diffusion de cette boîte à outils.

De plus, la plupart des laboratoires universitaires et des services R&D industriels utilisent ce logiciel. Il est de fait un standard mondial des logiciels de calcul pluridisciplinaire et particulièrement dans le domaine de l'automatique.

Actuellement, la toolbox CRONE comporte trois modules :

- "*Fractional calculus*" : ce module mathématique comprend les unités "*Fractional Derivative*",

- "*Explicit Form System (Differential Equations)*", "*Implicit Form System*", "*Fractional Differentiator*", "*Fractional Polynomial Roots*", "*Laplace Transform*" ;
- "*System Identification by Fractional Model*" : le module identification par modèles non entier ;
 - "*CRONE Control System Design (CCSD)*" : ce module commande comprend "*First Crone CSD method*", "*Second Crone CSD method*", et "*Third Crone CSD method*".

Le lecteur intéressé trouvera dans (CRONE Group, 2005) plus de détails concernant ces différentes unités. La suite de ce paragraphe se focalise uniquement sur le module "*CRONE Control System Design (CCSD)*".

1.5.5.1 - Prise en compte des incertitudes du procédé

Un des atouts de la commande CRONE est sa prise en compte non pessimiste des incertitudes portant sur le procédé, qu'elles soient paramétriques ou non structurées. Ainsi, à partir des réponses fréquentielles possibles du procédé et de celle qui est choisie comme réponse fréquentielle nominale, le logiciel permet de générer les domaines d'incertitudes fréquents structurés de type polygonal. Il est ainsi possible de condenser les données quand un grand nombre de réponses fréquentielles est considéré.

1.5.5.2 - Saisie des spécifications

L'étape suivante est la saisie des spécifications issues du cahier des charges. Elles peuvent être relatives à la rapidité (par exemple la fréquence au gain unité en boucle ouverte, ω_u , que l'on sait proche de la fréquence de coupure en boucle fermée) et au degré de stabilité de la commande (valeurs nominale et maximale du facteur d'amortissement ζ ou du facteur de résonance Q_T correspondant), à la précision en régime établi, ainsi qu'aux quatre fonctions de sensibilité que sont les fonctions : sensibilité S , sensibilité complémentaire T , sensibilité de l'entrée SC , sensibilité à la perturbation d'entrée du procédé SP .

La figure 1.20 présente un exemple de fenêtres de dialogue pour la saisie des spécifications dans les domaines temporel ou fréquentiel.

La figure 1.21 présente un exemple de contraintes fréquentielles portant sur la fonction sensibilité complémentaire T .

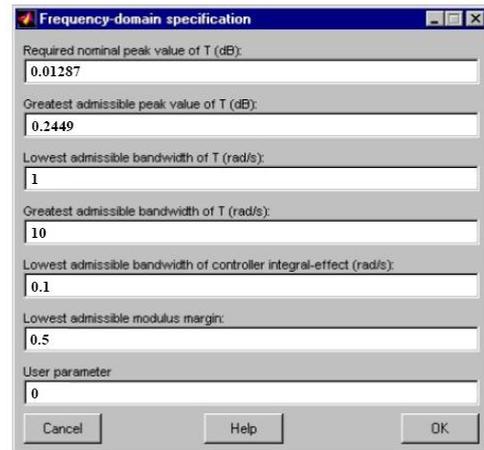
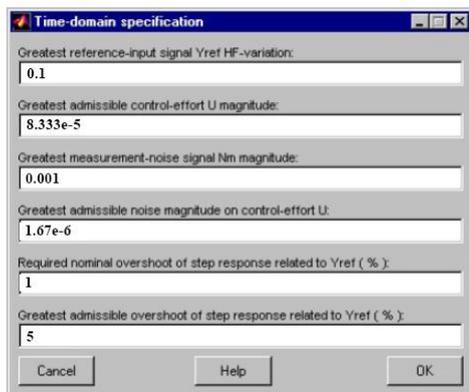


Figure 1.20 – Exemple de fenêtres de dialogue pour la saisie des spécifications dans les domaines temporel ou fréquentiel

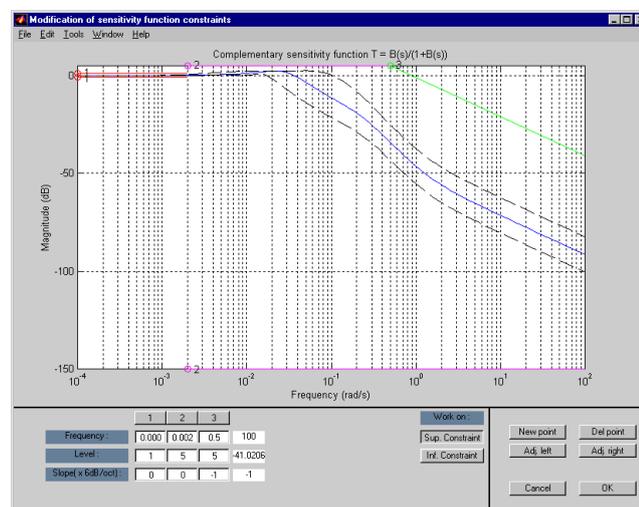


Figure 1.21 – Exemple de contraintes fréquentielles portant sur la fonction sensibilité complémentaire

1.5.5.3 – Choix de la commande CRONE

Suivant la nature du procédé, de ses incertitudes fréquentielles et des spécifications, il est alors possible de choisir la génération de commande CRONE à utiliser, sachant qu'une aide au choix est proposée à l'utilisateur.

La figure 1.22 présente un exemple de fenêtre de dialogue dans le cas de la commande CRONE de troisième génération.

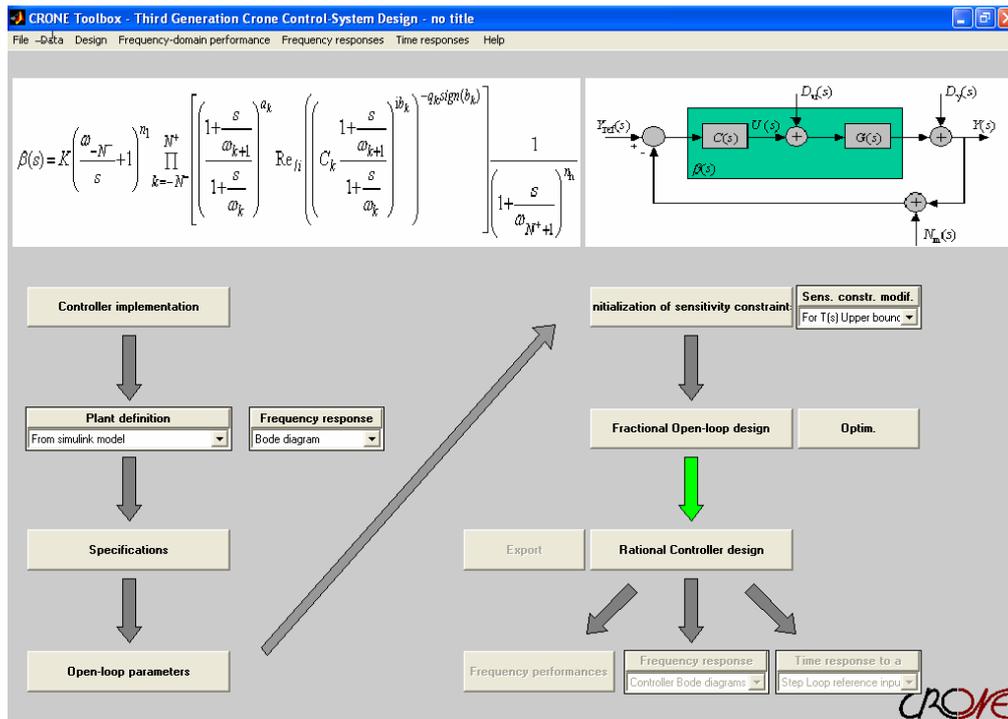


Figure 1.22 – Exemple de fenêtre de dialogue dans le cas de la commande CRONE de troisième génération

1.5.5.4 – Synthèse de la forme rationnelle du régulateur

Le régulateur est ensuite défini par le rapport entre la réponse fréquentielle en boucle ouverte et la réponse fréquentielle nominale du procédé : $C(j\omega) = \beta(j\omega)/P_0(j\omega)$. Une synthèse assistée, ainsi que différents algorithmes d'identification fréquentielle sont proposés.

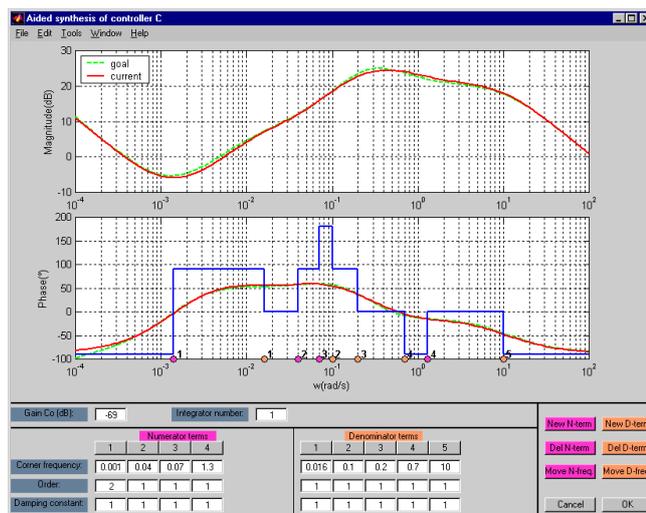


Figure 1.23 – Synthèse assistée du régulateur à partir de sa réponse fréquentielle idéale

L'utilisation de la fonction *Constr* de l'*Optimization Toolbox* de Matlab permet ensuite d'affiner ce résultat.

1.6 - Conclusion

Ce chapitre vise à donner aux lecteurs peu familiarisés avec les SDNE les principales notions théoriques nécessaires à la bonne compréhension de ce mémoire. C'est la raison pour laquelle, les définitions et les interprétations de l'opérateur intégro-différentiel non entier sont rappelées dans un premier temps. Puis, des exemples concrets d'intégrateurs non entiers dans le cadre des systèmes à paramètres distribués et des systèmes à paramètres localisés sont présentés. Ensuite, la problématique de la simulation dans le domaine temporel des SDNE est précisée. Face à cette problématique, les principales méthodes de synthèse d'un intégrateur non entier sont présentées dans un contexte général. Enfin, la dernière partie consacrée à la synthèse fréquentielle de commandes robustes est l'occasion de rappeler les principes des trois générations de la commande CRONE utilisés dans la suite de ce mémoire.

2^{EME} PARTIE

***MODELISATION DES PHENOMENES DE DIFFUSION
THERMIQUE DANS UN MILIEU FINI HOMOGENE EN VUE DE
L'ANALYSE, DE LA SYNTHESE ET DE LA VALIDATION DE
COMMANDES ROBUSTES***

Chapitre 2

Etude comparative des milieux fini et semi-infini

SOMMAIRE

2.1 – Introduction	57
2.2 – Modélisation	57
2.2.1 – Schématisation, paramétrage et mise en équation.....	57
2.2.2 – Résolution	58
2.3 – Analyse en $x = 0$	62
2.3.1 – Domaine symbolique	62
2.3.2 – Domaine fréquentiel.....	63
2.3.3 – Conclusion pour $x = 0$	66
2.4 – Analyse pour $0 \leq x \leq L$	66
2.4.1 – Domaine symbolique	66
2.4.2 – Domaine fréquentiel.....	67
2.4.3 – Domaine temporel.....	71
2.4.4 – Conclusion pour $0 \leq x \leq L$	73
2.5 – Conclusion	73

2.1 – Introduction

La synthèse fréquentielle de la commande CRONE étant à base de modèles, d'une part, et la démarche de modélisation retenue dans ce mémoire étant à base de modèles de connaissance, d'autre part, l'objectif de ce chapitre est d'abord d'établir un *modèle de validation* avec une vision système propre à l'automaticien qui le différencie de celle du thermicien. Ainsi, le transfert thermique global est décomposé en une mise en cascade de transferts locaux dont tous les paramètres, ainsi que toutes les variables d'entrée et de sortie ont un sens physique. Cette décomposition facilite ensuite l'analyse des différences et des similitudes de comportement des milieux *semi-infini* et *fini* de dimension L . Après avoir rappelé la mise en équation et la résolution d'un tel problème, deux études complémentaires sont proposées, et ce afin de bien « s'imprégner » de la dynamique du procédé. La première est faite en surface (pour $x = 0$) où d'un point de vue thermique le phénomène d'*effusivité* est dominant, puis la seconde en profondeur (pour $x > 0$) où le phénomène de *diffusivité* thermique est fondamental.

2.2 – Modélisation

2.2.1 – Schématisation, paramétrage et mise en équation

Considérons le transfert de chaleur monodimensionnel dans des milieux homogènes semi-infini (figure 2.1.a) et fini (figure 2.1.b) de longueur L ($x \in [0; L]$), de diffusivité α_d et de conductivité λ , soumis à un flux $\phi(t)$ en $x = 0$ (figure 2.1). On considère par ailleurs qu'il n'y a pas de perte en $x = 0$.

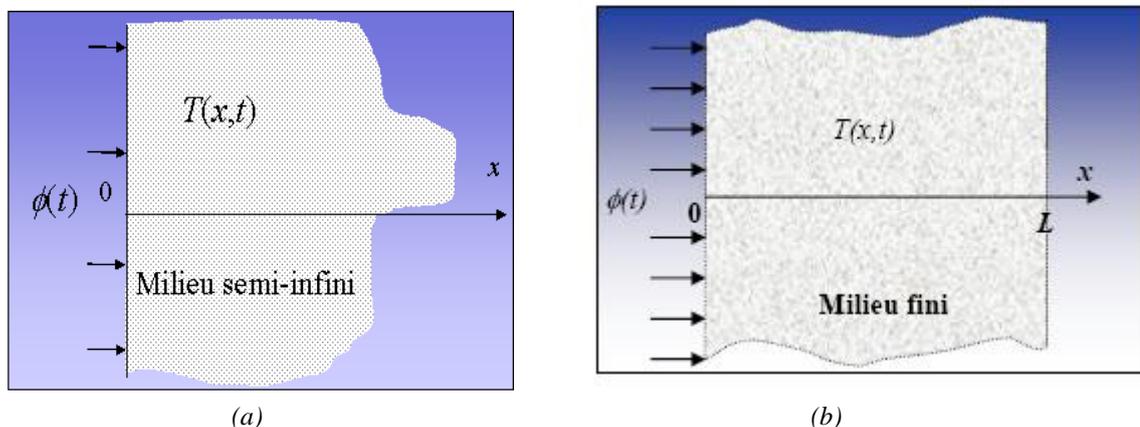


Figure 2.1 – Transfert de chaleur monodimensionnel dans des milieux homogènes semi-infini (a) et fini (b)

Que le milieu soit semi-infini ou fini, le transfert de chaleur est régi par le même système d'équations aux dérivées partielles, soit :

$$\begin{cases} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha_d \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, & x > 0, t > 0 \\ -\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = \varphi(t), & x = 0, t > 0 \end{cases}, \quad (2.1)$$

où $\varphi(t)$ représente la densité de flux égale au rapport du flux $\phi(t)$ et de la section transversale S du milieu, soit $\varphi(t) = \phi(t)/S$.

Les deux milieux se différencient à l'aide des conditions initiale et aux frontières, soit :

- pour le milieu *semi-infini*

$$\begin{cases} T(x,t) = 0, & x \rightarrow \infty, t > 0 \\ T(x,t) = 0, & 0 \leq x < \infty, t = 0 \end{cases}; \quad (2.2)$$

- pour le milieu *fini*

$$\begin{cases} -\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = 0, & x = L, t > 0 \\ T(x,t) = 0, & 0 \leq x < L, t = 0 \end{cases}. \quad (2.3)$$

2.2.2 – Résolution

La condition initiale sur la température étant nulle, la transformation de Laplace de la première équation du système (2.1) conduit à une équation différentielle d'ordre 2 par rapport à la variable x , soit :

$$\frac{\partial^2 \bar{T}(x,s)}{\partial x^2} - \frac{s}{\alpha_d} \bar{T}(x,s) = 0, \quad \text{où } \bar{T}(x,s) = \mathbf{L}\{T(x,t)\}, \quad (2.4)$$

dont la solution est toujours de la forme (Assaf, 2015) :

$$\bar{T}(x,s) = K_1(s) e^{x\sqrt{s/\alpha_d}} + K_2(s) e^{-x\sqrt{s/\alpha_d}}. \quad (2.5)$$

La prise en compte des conditions aux frontières (en $x = 0$, en $x \rightarrow \infty$ et en $x = L$) permet pour chaque milieu d'établir un système de deux équations à deux inconnues, $K_1(s)$ et $K_2(s)$, soit :

- pour le milieu *semi-infini*

$$\begin{cases} K_1(s) = 0 \\ K_2(s) = \frac{1}{\lambda \sqrt{\frac{s}{\alpha_d}}} \bar{\varphi}(s) \end{cases}, \quad (2.6)$$

- pour le milieu *fini*

$$\begin{cases} K_1(s) - K_2(s) = -\frac{1}{\lambda \sqrt{\frac{s}{\alpha_d}}} \bar{\varphi}(s) \\ K_1(s) e^{L\sqrt{\frac{s}{\alpha_d}}} - K_2(s) e^{-L\sqrt{\frac{s}{\alpha_d}}} = 0 \end{cases}, \quad (2.7)$$

dont la résolution, en introduisant $\lambda = \alpha_d \rho C_p$, conduit aux expressions de $K_1(s)$ et $K_2(s)$, soit :

- pour le milieu *semi-infini*

$$\begin{cases} K_1(s) = 0 \\ K_2(s) = \frac{1}{\sqrt{\lambda \rho C_p s}} \bar{\varphi}(s) \end{cases}; \quad (2.8)$$

- pour le milieu *fini*

$$\begin{cases} K_1(s) = \frac{1}{\sqrt{\lambda \rho C_p s}} \frac{e^{-L\sqrt{\frac{s}{\alpha_d}}}}{e^{L\sqrt{\frac{s}{\alpha_d}}} - e^{-L\sqrt{\frac{s}{\alpha_d}}}} \bar{\varphi}(s) \\ K_2(s) = \frac{1}{\sqrt{\lambda \rho C_p s}} \frac{e^{L\sqrt{\frac{s}{\alpha_d}}}}{e^{L\sqrt{\frac{s}{\alpha_d}}} - e^{-L\sqrt{\frac{s}{\alpha_d}}}} \bar{\varphi}(s) \end{cases}. \quad (2.9)$$

En introduisant les expressions (2.6) de $K_1(s)$ et de $K_2(s)$ dans la solution (2.4), et ce après avoir remplacer la densité de flux $\bar{\varphi}(s)$ par le flux $\bar{\phi}(s)$ ($\bar{\varphi}(s) = \bar{\phi}(s)/S$), on obtient alors les fonctions de transfert :

- $H(x, s, \infty)$ du milieu *semi-infini* entre la température $\bar{T}(x, s)$ et le flux $\bar{\phi}(s)$, soit :

$$H(x, s, \infty) = \frac{\bar{T}(x, s)}{\bar{\phi}(s)} = \frac{1}{S\sqrt{\lambda \rho C_p s}} e^{-x\sqrt{\frac{s}{\alpha_d}}}, \quad (2.10)$$

- $H(x, s, L)$ du milieu *fini* entre la température $\bar{T}(x, s, L)$ et le flux $\bar{\phi}(s)$, soit :

$$H(x, s, L) = \frac{\bar{T}(x, s, L)}{\bar{\phi}(s)} = \frac{1}{S\sqrt{\lambda \rho C_p s}} \frac{e^{-(L-x)\sqrt{\frac{s}{\alpha_d}}} + e^{(L-x)\sqrt{\frac{s}{\alpha_d}}}}{e^{L\sqrt{\frac{s}{\alpha_d}}} - e^{-L\sqrt{\frac{s}{\alpha_d}}}}, \quad (2.11)$$

ou encore, en introduisant les fonctions hyperboliques cosh et tanh,

$$H(x, s, L) = \frac{\bar{T}(x, s, L)}{\bar{\phi}(s)} = \frac{1}{S\sqrt{\lambda \rho C_p s}} \frac{1}{\tanh\left(L\sqrt{\frac{s}{\alpha_d}}\right)} \frac{\cosh\left((L-x)\sqrt{\frac{s}{\alpha_d}}\right)}{\cosh\left(L\sqrt{\frac{s}{\alpha_d}}\right)}. \quad (2.12)$$

En résumé, les fonctions de transfert sont de la forme :

- pour le milieu *semi-infini*

$$H(x, s, \infty) = H_0 I^{0.5}(s) E(x, s) , \quad (2.13)$$

en posant

$$\begin{cases} H_0 = \frac{s^{0.5} \bar{T}(0, s)}{\bar{\phi}(s)} = \frac{1}{S \eta_d} \\ I^{0.5}(s) = \frac{\bar{T}(0, s)}{s^{0.5} \bar{T}(0, s)} = \frac{1}{s^{0.5}} = \left(\frac{1}{s}\right)^{0.5} , \\ E(x, s) = \frac{\bar{T}(x, s)}{\bar{T}(0, s)} = e^{-\left(\frac{s}{\omega_x}\right)^{0.5}} \end{cases} , \quad (2.14)$$

avec

$$\omega_x = \frac{\alpha_d}{x^2} ; \quad (2.15)$$

- pour le milieu *fini*

$$H(x, s, L) = H_0 I^{0.5}(s) F(0, s, L) G(x, s, L) , \quad (2.16)$$

en posant

$$\begin{cases} H_0 = \frac{s^{0.5} \bar{T}(0, s, \infty)}{\bar{\phi}(s)} = \frac{1}{S \eta_d} \\ I^{0.5}(s) = \frac{\bar{T}(0, s, \infty)}{s^{0.5} \bar{T}(0, s, \infty)} = \frac{1}{s^{0.5}} \\ F(0, s, L) = \frac{\bar{T}(0, s, L)}{\bar{T}(0, s, \infty)} = \frac{1}{\tanh\left(\sqrt{\frac{s}{\omega_L}}\right)} , \\ G(x, s, L) = \frac{\bar{T}(x, s, L)}{\bar{T}(0, s, L)} = \frac{\cosh\left(\sqrt{\frac{s}{\omega_{Lx}}}\right)}{\cosh\left(\sqrt{\frac{s}{\omega_L}}\right)} \end{cases} , \quad (2.17)$$

avec

$$\begin{cases} \eta_d = \sqrt{\lambda \rho C_p} \\ \omega_L = \frac{\alpha_d}{L^2} , \\ \omega_{Lx} = \frac{\alpha_d}{(L-x)^2} \end{cases} , \quad (2.18)$$

où η_d représente l'effusivité thermique.

A noter, pour la suite de l'analyse, que ω_L et ω_{Lx} sont liées par une relation de la forme :

$$\omega_L = \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \omega_{Lx} . \quad (2.19)$$

En outre, si $x = 0$ alors $\omega_L = \omega_{Lx}$. De même, si $x \ll L$ alors $\omega_L \approx \omega_{Lx}$.

De plus, l'inverse de la fréquence transitionnelle ω_L définit la constante de temps de diffusion, τ_L , du milieu fini de longueur L , soit :

$$\tau_L = \frac{1}{\omega_L} = \frac{L^2}{\alpha_d} . \quad (2.20)$$

Ainsi, les différentes températures qui apparaissent dans les relations (2.17) représentent :

- $\bar{T}(0, s, \infty)$: la température en $x = 0$ si le milieu était **semi-infini** ;
- $\bar{T}(0, s, L)$: la température en $x = 0$ du milieu **fini** de longueur L ;
- $\bar{T}(x, s, L)$: température en x , $\forall x \in [0 ; L]$.

D'un point de vue système, les transferts $H(x, s, \infty)$ et $H(x, s, L)$ peuvent donc être interprétés comme résultant de la mise en cascade (figure 2.2) :

- pour le milieu **semi-infini**
 - d'un gain H_0 entre le flux $\bar{\phi}(s)$ et la dérivée d'ordre 0.5 de la température en $x = 0$, $s^{0.5}\bar{T}(0, s)$;
 - d'un intégrateur fractionnaire d'ordre 0.5, noté $I^{0.5}(s)$, entre $s^{0.5}\bar{T}(0, s)$ et la température $\bar{T}(0, s)$;
 - d'un transfert $E(x, s)$ entre $\bar{T}(0, s)$ et $\bar{T}(x, s)$;
- pour le milieu **fini**
 - d'un gain H_0 entre le flux $\bar{\phi}(s)$ et la dérivée d'ordre 0.5 de la température en $x = 0$ si le milieu était semi-infini, $s^{0.5}\bar{T}(0, s, \infty)$, gain identique à celui défini dans le cadre d'un milieu **semi-infini** ;
 - d'un intégrateur fractionnaire d'ordre 0.5, $I^{0.5}(s)$, entre $s^{0.5}\bar{T}(0, s, \infty)$ et la température $\bar{T}(0, s, \infty)$;
 - d'un transfert $F(0, s, L)$ entre $\bar{T}(0, s, \infty)$ et $\bar{T}(0, s, L)$ dont l'analyse en $x = 0$ permet de bien comprendre l'influence du caractère **fini** du milieu par rapport au comportement observé pour un milieu **semi-infini** siège en surface du phénomène d'effusivité thermique ;
 - d'un transfert $G(x, s, L)$ entre $\bar{T}(0, s, L)$ et $\bar{T}(x, s, L)$ dont l'analyse $\forall x \in [0 ; L]$ permet d'étudier le phénomène de diffusion thermique dans le milieu **fini**.

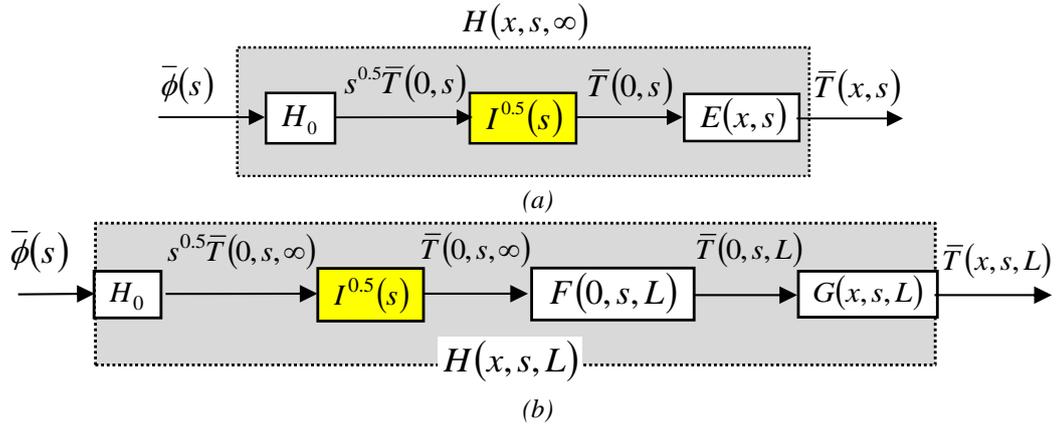


Figure 2.2 – Schémas illustrant les transferts $H(x, s, \infty)$ du milieu semi-infini (a) et $H(x, s, L)$ du milieu fini (b)

Deux cas d'études font l'objet d'une distinction, à savoir en surface ($x = 0$) où le phénomène d'effusivité est présent et en profondeur ($0 < x \leq L$) où le phénomène de diffusivité est dominant.

2.3 – Analyse en $x = 0$

L'objectif de cette analyse en surface, siège du phénomène d'effusivité thermique, est de comprendre l'influence du caractère *fini* du milieu de longueur L sur le comportement dynamique du milieu *semi-infini* caractérisé en $x = 0$ par un intégrateur fractionnaire d'ordre 0.5.

2.3.1 – Domaine symbolique

Dans la mesure où $G(0, s, L) = 1$, la température en $x = 0$ du milieu *fini* de longueur L , $\bar{T}(0, s, L)$, est donnée par :

$$\bar{T}(0, s, L) = H_0 I^{0.5}(s) F(0, s, L) \bar{\phi}(s) , \quad (2.21)$$

le transfert $F(0, s, L)$ permettant d'analyser l'influence du caractère *fini* du milieu sur la température en $x = 0$. A ce titre, posons $z = \sqrt{s/\omega_L}$. Compte tenu de l'expression (2.18) de ω_L , on vérifie en premier lieu que :

$$\text{si } L \rightarrow \infty \text{ alors } z \rightarrow \infty, \text{ or } \lim_{z \rightarrow \infty} \tanh(z) = 1 \text{ d'où } \lim_{L \rightarrow \infty} F(0, s, L) = 1 , \quad (2.22)$$

soit finalement

$$\lim_{L \rightarrow \infty} H(0, s, L) = H_0 I^{0.5}(s) , \quad (2.23)$$

résultat conforme à celui d'un milieu *semi-infini* en $x = 0$.

Ensuite, si $s \rightarrow 0$ alors $z \rightarrow 0$, or $\lim_{z \rightarrow 0} \tanh(z) \rightarrow z$ d'où $\lim_{s \rightarrow 0} F(0, s, L) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{s}{\omega_L}}}$, (2.24)

soit
$$\lim_{s \rightarrow 0} H(0, s, L) \rightarrow H_0 I^{0.5}(s) \frac{1}{\sqrt{\frac{s}{\omega_L}}}, \quad (2.25)$$

ou encore, compte tenu des expressions (2.18) de ω_L , H_0 et $\lambda = \alpha_d \rho C_p$,

$$\lim_{s \rightarrow 0} H(0, s, L) \rightarrow \frac{1}{C_{th} s}, \quad (2.26)$$

avec $C_{th} = \rho C_p L$, la capacité thermique du milieu **fini** (exprimée en $J m^{-2} K^{-1}$).

La relation (2.26) met en évidence l'existence d'un comportement asymptotique, quand $s \rightarrow 0$, de type capacitif caractérisé par un intégrateur d'ordre 1, comportement différent de celui d'un milieu **semi-infini** en $x = 0$ caractérisé par un intégrateur d'ordre 0.5.

Enfin, si $s \rightarrow \infty$ alors $z \rightarrow \infty$, or $\lim_{z \rightarrow \infty} \tanh(z) = 1$ d'où $\lim_{s \rightarrow \infty} F(0, s, L) = 1$, (2.27)

soit
$$\lim_{s \rightarrow \infty} H(0, s, L) \rightarrow H_0 I^{0.5}(s). \quad (2.28)$$

La relation (2.28) met en évidence l'existence d'un comportement asymptotique, quand $s \rightarrow \infty$, de type fractionnaire caractérisé par un intégrateur d'ordre 0.5, comportement identique à celui d'un milieu **semi-infini** en $x = 0$.

2.3.2 – Domaine fréquentiel

La réponse fréquentielle $H(x, j\omega, L)$ est donnée par :

$$H(x, j\omega, L) = H_0 I^{0.5}(j\omega) F(0, j\omega, L) G(x, j\omega, L). \quad (2.29)$$

En $x = 0$, dans la mesure où $G(0, j\omega, L) = 1$, $H(x, j\omega, L)$ se réduit à

$$H(0, j\omega, L) = H_0 I^{0.5}(j\omega) F(0, j\omega, L). \quad (2.30)$$

Dans un premier temps, l'analyse de la réponse fréquentielle $F(0, j\omega, L)$ seule permet de mettre en évidence en $x = 0$ l'influence du caractère **fini** du milieu par rapport au cas **semi-infini**. Ainsi, deux comportements asymptotiques existent, soit :

- **aux basses fréquences**, un comportement intégrateur fractionnaire d'ordre 0.5. En effet,

$$\forall \omega \ll \omega_L = \frac{\alpha_d}{L}, \quad F(0, j\omega, L) \approx \left(\frac{\omega_L}{j\omega} \right)^{0.5} \Rightarrow \begin{cases} |F(0, j\omega, L)| = \left(\frac{\omega_L}{\omega} \right)^{0.5} \\ \arg F(0, j\omega, L) = -\frac{\pi}{4} \end{cases}; \quad (2.31)$$

- **aux hautes fréquences**, un comportement proportionnel unitaire. En effet,

$$\forall \omega \gg \omega_L = \frac{\alpha_d}{L^2}, \quad F(0, j\omega, L) = 1 \Rightarrow \begin{cases} |F(0, j\omega, L)| = 1 \\ \arg F(0, j\omega, L) = 0 \end{cases}, \quad (2.32)$$

la zone de transition entre ces deux comportements asymptotiques étant fixée par la fréquence transitionnelle ω_L .

A titre d'illustration, la figure 2.3 présente les diagrammes de Bode de $F(0, j\omega, L)$ dans le cas de l'aluminium pour une longueur L égale à 1 m, 0.5 m et 0.1 m.

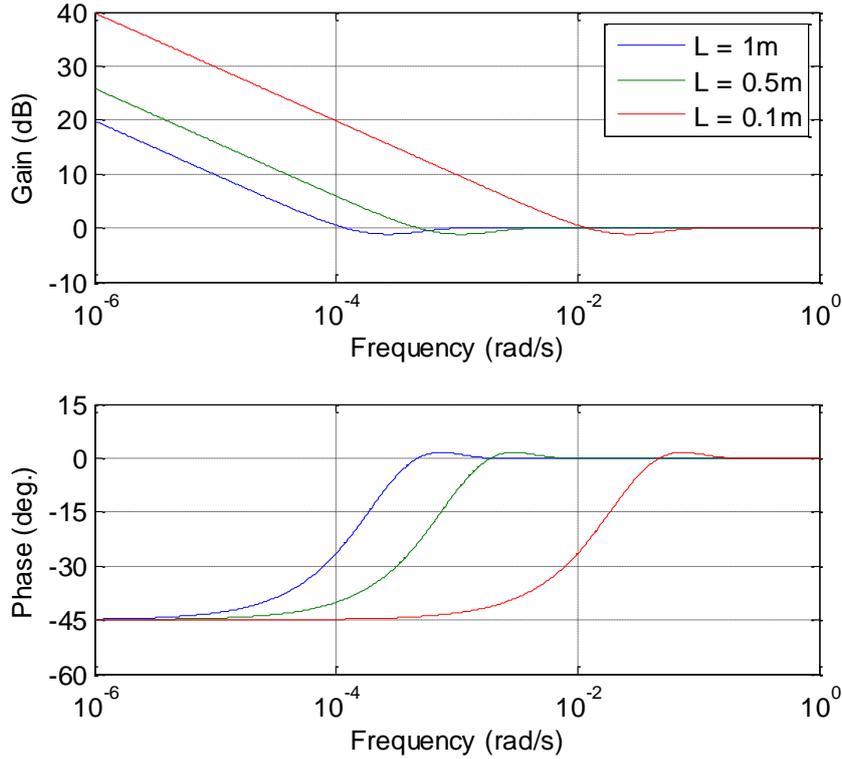


Figure 2.3 – Diagrammes de Bode de $F(0, j\omega, L)$ obtenus dans le cas de l'aluminium avec $L = 1m$ (—), $L = 0.5m$ (—) et $L = 0.1m$ (—)

Dans un deuxième temps, l'analyse de la réponse fréquentielle globale $H(0, j\omega, L)$ permet de mettre en évidence, toujours en $x = 0$, les différences entre les milieux *fini* et *semi-infi*, soit :

- **aux basses fréquences**, un comportement intégrateur d'ordre 1. En effet,

$$\forall \omega \ll \omega_L = \frac{\alpha_d}{L^2}, \quad H(0, j\omega, L) \approx \frac{1}{C_{th} j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |H(0, j\omega, L)| = \frac{1}{C_{th} \omega} \\ \arg H(0, j\omega, L) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}; \quad (2.33)$$

- **aux hautes fréquences**, un comportement intégrateur fractionnaire d'ordre 0.5. En effet,

$$\forall \omega \gg \omega_L = \frac{\alpha_d}{L^2}, \quad H(0, j\omega, L) \approx H_0 \frac{1}{(j\omega)^{0.5}} \Rightarrow \begin{cases} |H(0, j\omega, L)| = \frac{H_0}{\omega^{0.5}} \\ \arg H(0, j\omega, L) = -\frac{\pi}{4} \end{cases}, \quad (2.34)$$

la zone de transition entre ces deux comportements asymptotiques étant fixée par ω_L . Compte tenu de l'expression de ω_L , cette zone de transition est d'autant plus basse en fréquence que la longueur L est grande.

A titre d'illustration, la figure 2.4 présente les diagrammes de Bode de $H(0, j\omega, L)$ toujours dans le cas de l'aluminium pour $L = 1$ m et $L = \infty$.

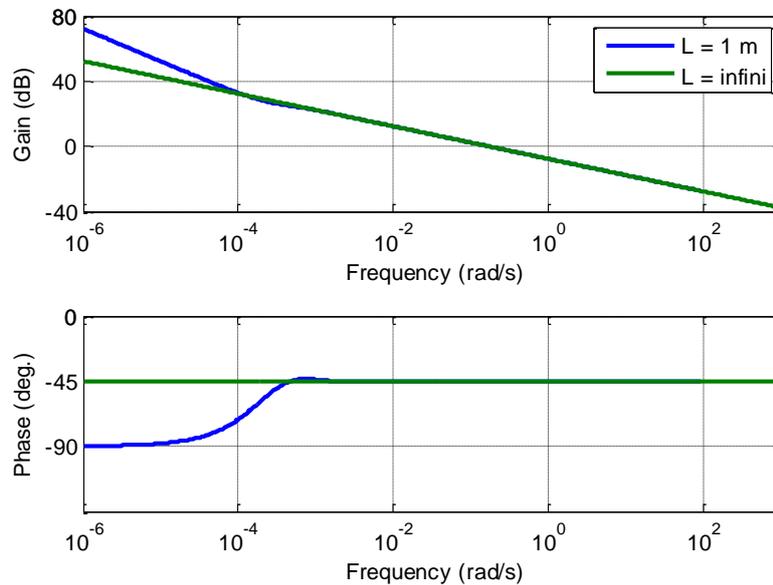


Figure 2.4 – Diagrammes de Bode de $H(0, j\omega, L)$ obtenus dans le cas de l'aluminium avec $L = 1$ m (—) et $L = \infty$. (—)

En complément des diagrammes de Bode, la figure 2.5 présente les tracés de $H(0, j\omega, L)$ dans le plan de Black-Nichols toujours dans le cas de l'aluminium pour $L = 1$ m et $L = \infty$.

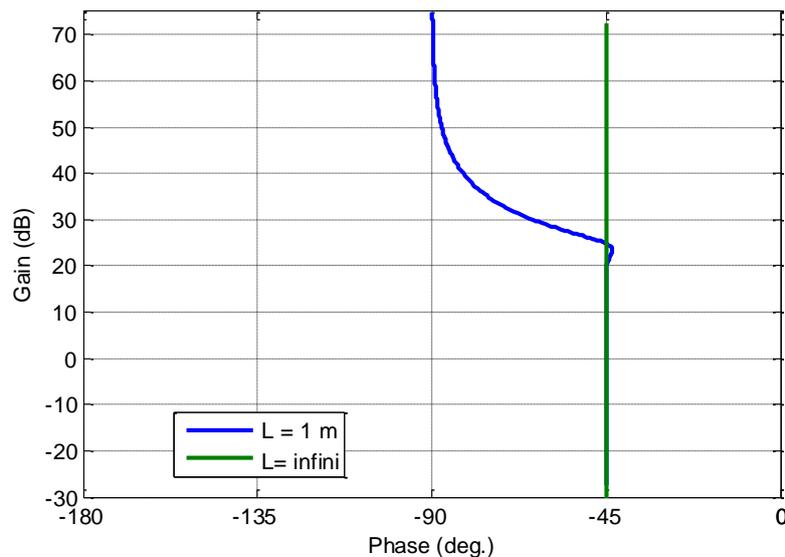


Figure 2.5 – Réponses fréquentielles $H(0, j\omega, L)$ dans le plan de Black-Nichols dans le cas de l'aluminium avec $L = 1$ m (—) et $L = \infty$. (—)

2.3.3 – Conclusion pour $x = 0$

L'étude comparative en $x = 0$ entre le milieu *semi-infini* et le milieu *fini* montre que la différence se situe aux basses fréquences. En effet, aux hautes fréquences, les deux milieux présentent le même comportement intégrateur fractionnaire d'ordre 0.5.

Le comportement fractionnaire du milieu *fini* aux hautes fréquences « dégénère » en un comportement intégrateur d'ordre 1 vers les basses fréquences, c'est-à-dire pour $\omega \ll \omega_L = \alpha_d/L^2$. Ainsi, pour un matériau donné, cette zone fréquentielle de transition est d'autant plus basse que L est grand.

Par ailleurs, l'exploitation de la dualité temps-fréquence à l'aide des théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale permet d'affirmer que :

- dans les premiers instants, les réponses temporelles (impulsionnelles, indicielles, ...) sont celles obtenues avec un intégrateur fractionnaire d'ordre 0.5 ;

- dans les grands instants, les réponses temporelles sont celles obtenues avec un intégrateur d'ordre 1.

Ainsi, le comportement fractionnaire du milieu *fini* dans les premiers instants « dégénère » en un comportement intégrateur d'ordre 1 pour des temps $t \gg \tau_L = L^2/\alpha_d$, c'est-à-dire lorsque la chaleur a complètement diffusé dans le milieu *fini*.

Ceci étant, si la durée T_{sim} de la simulation temporelle est bien inférieure à la constante de temps τ_L de diffusion, alors seul le comportement fractionnaire est observé, le milieu *fini* pouvant alors être assimilé à un milieu *semi-infini*. A titre d'exemple, pour fixer l'ordre de grandeur de τ_L , un barreau d'aluminium avec $L = 1$ m et $\alpha_d = 97 \cdot 10^{-6}$ m²/s présente une constante de temps de diffusion de 10 309 s, valeur divisée par 4 avec une longueur deux fois plus faible.

2.4 – Analyse pour $0 \leq x \leq L$

2.4.1 – Domaine symbolique

Afin de faciliter l'analyse de l'influence de $G(x, s, L)$ sur le transfert global $H(x, s, L)$, un retour à la définition de la fonction *cosh* est effectué, soit :

$$G(x, s, L) = \frac{e^{\sqrt{\frac{s}{\omega_L x}} + e^{-\sqrt{\frac{s}{\omega_L x}}}}{e^{\sqrt{\frac{s}{\omega_L}} + e^{-\sqrt{\frac{s}{\omega_L}}}} . \quad (2.35)$$

Ainsi,

$$\text{quand } s \rightarrow 0, \quad \lim_{s \rightarrow 0} G(x, s, L) = 1 , \quad (2.36)$$

alors

$$\lim_{s \rightarrow 0} H(x, s, L) \rightarrow \frac{1}{C_{th} s} . \quad (2.37)$$

Comme en $x = 0$, la relation (2.35) met en évidence l'existence d'un comportement asymptotique, quand $s \rightarrow 0$, de type capacitif caractérisé par un intégrateur d'ordre 1.

$$\text{De plus, si } s \rightarrow \infty \text{ alors } z \rightarrow \infty, \text{ or } \lim_{z \rightarrow \infty} e^{-z} = 0 \text{ d'où } \lim_{s \rightarrow \infty} G(x, s, L) \rightarrow \frac{e^{\sqrt{\frac{s}{\omega_{Lx}}}}}{e^{\sqrt{\frac{s}{\omega_L}}}}, \quad (2.38)$$

ou encore, après introduction de la relation (2.11) entre ω_L et ω_{Lx} , puis simplification,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(x, s, L) \rightarrow e^{-\sqrt{\frac{s}{\alpha_d/x^2}}} = e^{-\sqrt{\frac{s}{\omega_x}}} = E(x, s), \quad (2.39)$$

$$\text{d'où } \lim_{s \rightarrow \infty} H(x, s, L) = \lim_{s \rightarrow \infty} H_0 I^{0.5}(s) e^{-\sqrt{\frac{s}{\omega_x}}} = \lim_{s \rightarrow \infty} H_0 I^{0.5}(s) E(x, s) \rightarrow 0. \quad (2.40)$$

Ainsi, pour un milieu *fini*, la relation (2.40) met en évidence l'existence d'un comportement asymptotique, quand $s \rightarrow \infty$, identique à celui déjà observé dans le cas d'un milieu *semi-infini*.

En fait, cette similitude entre $G(x, s, L)$ et $E(x, L)$ n'existe pas seulement lorsque $s \rightarrow \infty$. En effet, l'expression (2.41) de $G(x, s, L)$ peut se réécrire sous la forme :

$$G(x, s, L) = e^{-x\sqrt{\frac{s}{\alpha_d}}} \frac{e^{L\sqrt{\frac{s}{\alpha_d}}} + e^{-L\sqrt{\frac{s}{\alpha_d}}} e^{2x\sqrt{\frac{s}{\alpha_d}}}}{e^{\sqrt{\frac{s}{\omega_L}}} + e^{-\sqrt{\frac{s}{\omega_L}}}}, \quad (2.41)$$

ou encore, compte tenu des définitions de ω_x et ω_L ,

$$G(x, s, L) = e^{-\sqrt{\frac{s}{\omega_x}}} \frac{e^{\sqrt{\frac{s}{\omega_L}}} + e^{-\sqrt{\frac{s}{\omega_L}}} e^{2x\sqrt{\frac{s}{\alpha_d}}}}{e^{\sqrt{\frac{s}{\omega_L}}} + e^{-\sqrt{\frac{s}{\omega_L}}}}, \quad (2.42)$$

soit finalement, en introduisant la notation $E(x, s)$,

$$G(x, s, L) = E(x, s) \frac{e^{\sqrt{\frac{s}{\omega_L}}} + e^{-(L-2x)\sqrt{\frac{s}{\alpha_d}}}}{e^{\sqrt{\frac{s}{\omega_L}}} + e^{-\sqrt{\frac{s}{\omega_L}}}}. \quad (2.43)$$

$$\text{Ainsi, si } x \ll L \text{ alors } G(x, s, L) \approx E(x, s). \quad (2.44)$$

2.4.2 – Domaine fréquentiel

Pour $0 < x \leq L$, $G(x, s, L)$ n'étant plus unitaire, il convient dans un premier temps d'analyser sa réponse fréquentielle seule pour comprendre son influence sur la réponse globale $H(x, j\omega, L)$, soit :

$$G(x, j\omega, L) = \frac{e^{\sqrt{j\frac{\omega}{\omega_{Lx}}} + e^{-\sqrt{j\frac{\omega}{\omega_{Lx}}}}}{e^{\sqrt{j\frac{\omega}{\omega_L}} + e^{-\sqrt{j\frac{\omega}{\omega_L}}}}}. \quad (2.45)$$

Deux comportements apparaissent clairement :

- aux basses fréquences,

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(x, j\omega, L) = 1 \Rightarrow \begin{cases} |G(x, j\omega, L)| = 1 \\ \arg G(x, j\omega, L) = 0 \end{cases}; \quad (2.46)$$

- aux hautes fréquences,

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(x, j\omega, L) \rightarrow E(x, j\omega) = e^{-\sqrt{j\frac{\omega}{\omega_x}}} \Rightarrow \begin{cases} |G(x, j\omega, L)| \approx e^{-\left(\frac{\omega}{2\omega_x}\right)^{0.5}} \rightarrow 0 \\ \arg G(x, j\omega, L) \approx -\left(\frac{\omega}{2\omega_x}\right)^{0.5} \rightarrow -\infty \end{cases}. \quad (2.47)$$

La figure 2.6 présente les diagrammes de Bode de $G(x, s, L)$ (en vert) et de $E(x, s)$ (en bleu) obtenus avec l'aluminium pour $L = 1$ m et $x = 0.5$ cm.

Comme on peut l'observer sur cette figure, non seulement $G(x, j\omega, L)$ et de $E(x, j\omega)$ ont le même comportement aux hautes fréquences, mais aussi aux moyennes et aux basses fréquences. Cet exemple illustre bien le cas où $x \ll L$ conduit à $G(x, j\omega, L) = E(x, j\omega)$.

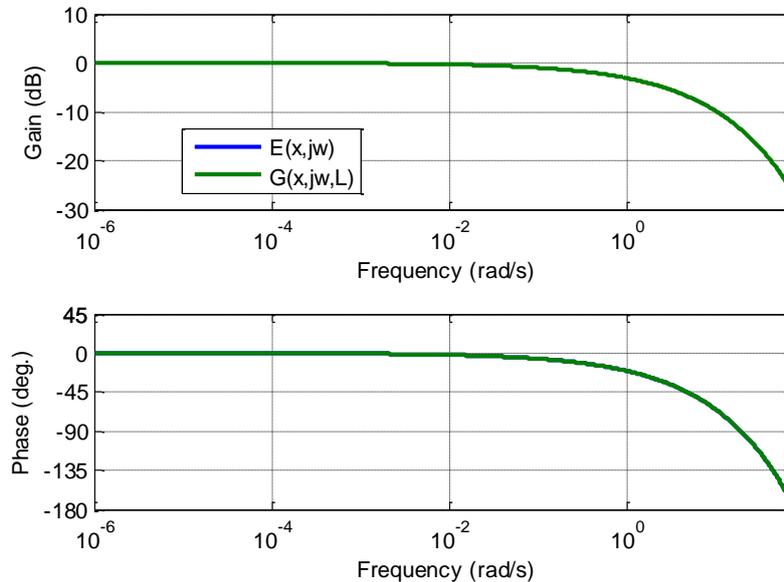


Figure 2.6 – Diagrammes de Bode de $G(x, j\omega, L)$ (en vert) et de $E(x, j\omega)$ (en bleu) obtenus avec l'aluminium pour $L = 1$ m et $x = 0.5$ cm

Pour faciliter la suite de l'analyse, introduisons la fréquence particulière ω_c telle que $|G(x, j\omega_c, L)| = 1/\sqrt{2}$, soit -3 dB. Cette fréquence ω_c diminue quand x augmente. C'est la raison pour laquelle, pour une fréquence ω donnée, le gain et la phase sont d'autant plus faibles que x est important.

A titre d'illustration, la figure 2.7 présente les diagrammes de Bode de $G(x, j\omega, L)$ toujours dans le cas de l'aluminium pour $L = 1$ m et pour trois valeurs de x , à savoir 0.5 cm, 1 cm et 10 cm.

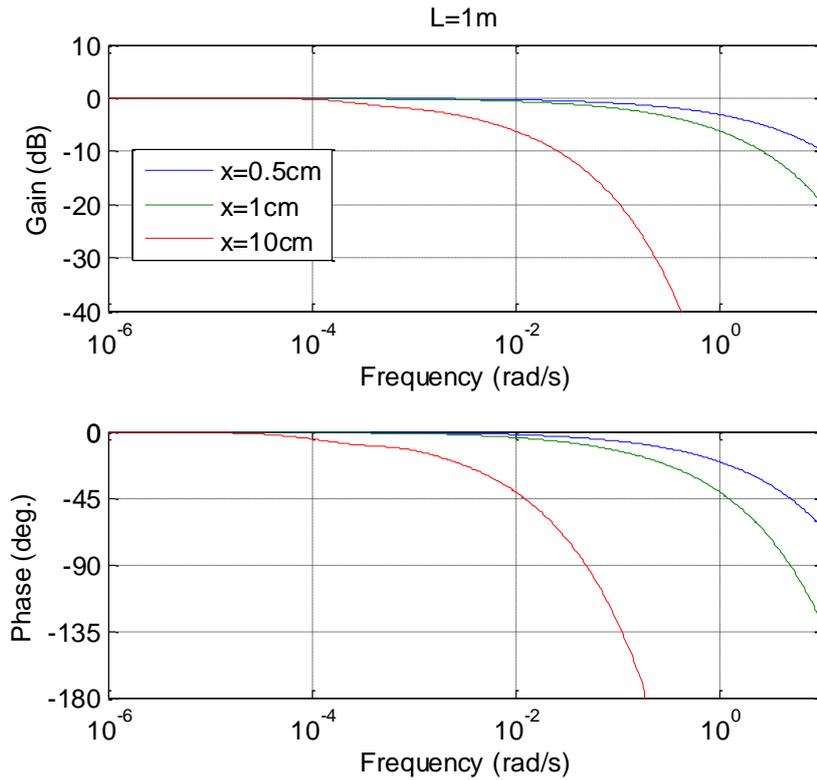


Figure 2.7 – Diagrammes de Bode de $G(x, j\omega, L)$ obtenus avec l'aluminium pour $L = 1$ m avec $x = 0.5$ cm (—), $x = 1$ cm (—) et $x = 10$ cm (—)

Dans un deuxième temps, l'analyse de la réponse globale $H(x, j\omega, L)$ met clairement en évidence trois comportements :

- **aux basses fréquences**, un comportement intégrateur d'ordre 1 identique à celui obtenu en $x = 0$. En effet,

$$\forall \omega \ll \omega_L = \frac{\alpha_d}{L^2}, \quad H(x, j\omega, L) \approx \frac{1}{C_{th} j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |H(x, j\omega, L)| = \frac{1}{C_{th} \omega} \\ \arg H(x, j\omega, L) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}; \quad (2.48)$$

- **aux moyennes fréquences**, un comportement intégrateur fractionnaire d'ordre 0.5. En effet,

$$\text{pour } \omega_L \ll \omega \ll \omega_c, \quad H(x, j\omega, L) \approx H_0 I^{0.5}(j\omega) \Rightarrow \begin{cases} |H(x, j\omega, L)| = H_0 \frac{1}{\omega^{0.5}} \\ \arg H(x, j\omega, L) = -\frac{\pi}{4} \end{cases}; \quad (2.49)$$

- *aux hautes fréquences*, un comportement identique à celui d'un milieu *semi-infini*. En effet,

$$\forall \omega \gg \omega_c, \quad H(x, j\omega, L) \approx H_0 I^{0.5}(j\omega) e^{-\sqrt{j\frac{\omega}{\omega_x}}} \Rightarrow \begin{cases} |H(x, j\omega, L)| \approx H_0 \frac{1}{\omega^{0.5}} e^{-\left(\frac{\omega}{2\omega_x}\right)^{0.5}} \\ \arg H(x, j\omega, L) \approx -\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\omega}{2\omega_x}\right)^{0.5} \end{cases}. \quad (2.50)$$

La figure 2.8 présente les diagrammes de Bode de $H(x, j\omega, L)$ obtenus avec l'aluminium pour $L = 1\text{m}$ et pour différentes positions $x = 0\text{ cm}$ (—), $x = 0.5\text{ cm}$ (—) et $x = 1\text{ cm}$ (—).

En complément des diagrammes de Bode, la figure 2.9 présente les réponses fréquentielles $H(x, j\omega, L)$ dans le plan de Black-Nichols obtenues toujours avec l'aluminium pour $L = 1\text{m}$ et pour les mêmes positions $x = 0\text{ cm}$ (—), $x = 0.5\text{ cm}$ (—) et $x = 1\text{ cm}$ (—).

Le comportement intégrateur d'ordre 0.5 observé pour $x = 0$ aux hautes fréquences disparaît progressivement lorsque x s'éloigne de l'origine, phénomène d'autant plus prononcé que la longueur L du milieu fini diminue.

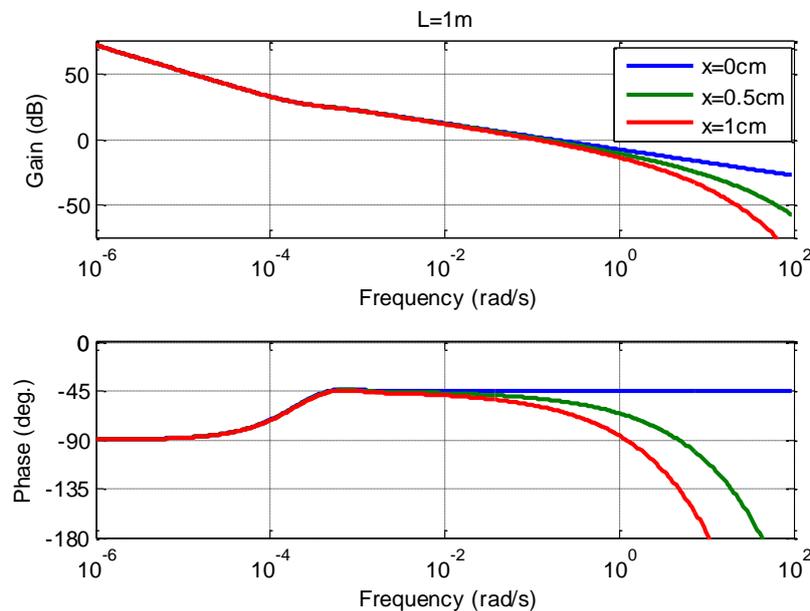


Figure 2.8 – Diagrammes de Bode de $H(x, j\omega, L)$ obtenus avec l'aluminium pour $L = 1\text{m}$ avec $x = 0\text{ cm}$ (—), $x = 0.5\text{ cm}$ (—) et $x = 1\text{ cm}$ (—)

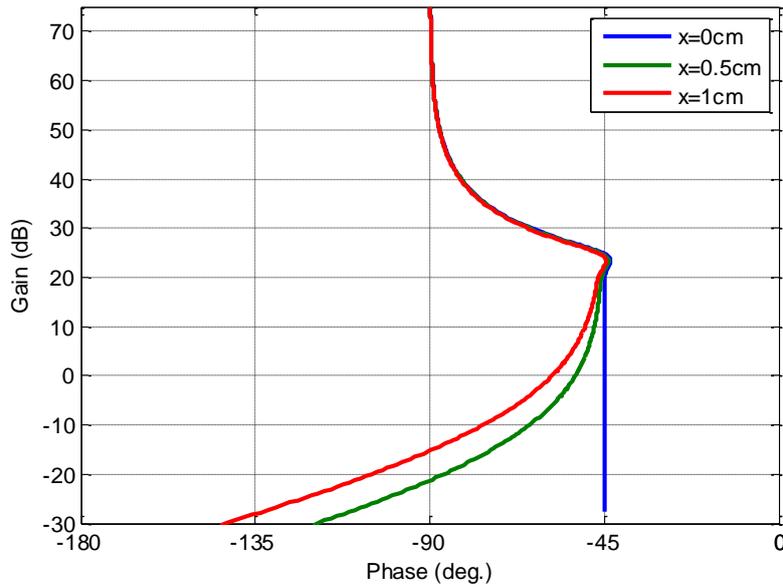


Figure 2.9 – Réponses fréquentielles $H(x, j\omega, L)$ dans le plan de Black-Nichols obtenues avec l'aluminium pour $L = 1m$ avec $x = 0$ cm (—), $x = 0.5$ cm (—) et $x = 1$ cm (—)

2.4.3 – Domaine temporel

On considère que l'entrée $H_0 \phi(t)$ appliquée en $x = 0$ (condition de Neumann modifiée) est de la forme :

$$H_0 \phi(t) = A_0 \cos(\omega t) . \quad (2.51)$$

Le système étant linéaire, l'expression de la température $T(x, t, \omega, L)$ est donnée par :

$$T(x, t, \omega, L) = T_0 \cos(\omega t + \theta) , \quad (2.52)$$

avec

$$\begin{cases} T_0 = |I^{0.5}(j\omega)| |F(0, j\omega, L)| |G(x, j\omega, L)| A_0 \\ \theta = -\frac{\pi}{4} + \arg(F(0, j\omega, L)) + \arg(G(x, j\omega, L)) \end{cases} . \quad (2.53)$$

Les figures 2.10, 2.11 et 2.12 présentent les réponses harmoniques stationnaires $T(x, t, \omega, L) / A_0$ en trois dimensions pour $\omega = \omega_c = 1 \text{ rad/s}$ (figure 2.10), $\omega = \omega_c / 100 = 10^{-2} \text{ rad/s}$ (figure 2.11) et $\omega = \omega_c / 10000 = 10^{-4} \text{ rad/s}$ (figure 2.12) obtenues pour $L = 1m$. Pour faciliter l'analyse, la profondeur maximale considérée pour l'affichage est $x_{max} = 0.1m$ pour les trois milieux finis en aluminium.

A $\omega = 1 \text{ rad/s}$ (figure 2.10), la fréquence de variation en surface est trop importante pour que la chaleur ait le temps de diffuser le milieu en profondeur, seul le phénomène d'effusivité en surface est présent.

A $\omega = 10^{-2} \text{ rad/s}$ (figure 2.11), la chaleur a le temps de se diffuser en profondeur avec une atténuation par rapport à la surface.

Enfin, à $\omega = 10^{-4} \text{ rad/s}$ (figure 2.12), la chaleur a le temps de se diffuser en profondeur sans atténuation et déphasage par rapport à la surface.

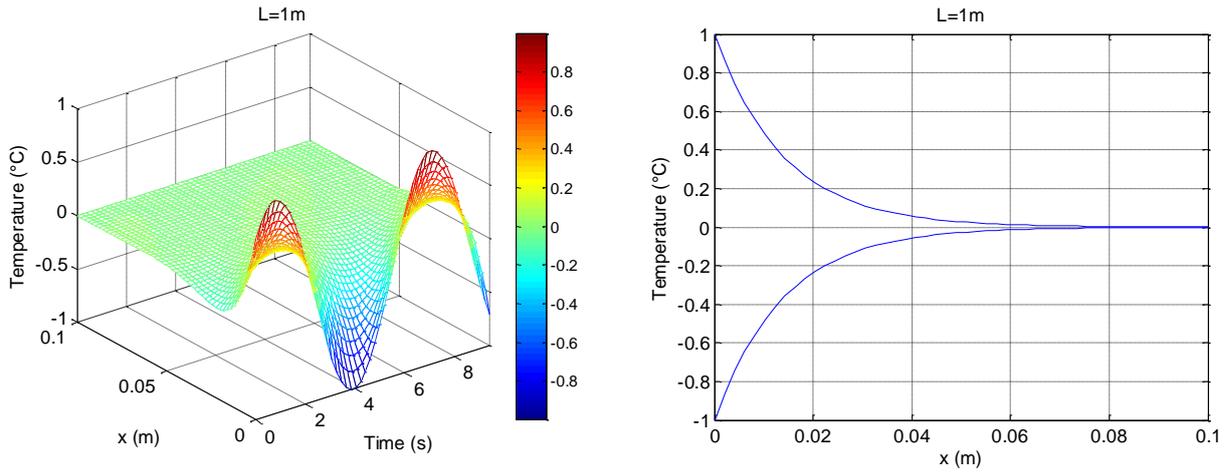


Figure 2.10 – Réponses en régime harmonique stationnaire $T(x,t,\omega,L)/A_0$ pour l'aluminium avec $\omega = \omega_c = 1 \text{ rad/s}$ et $L = 1 \text{ m}$

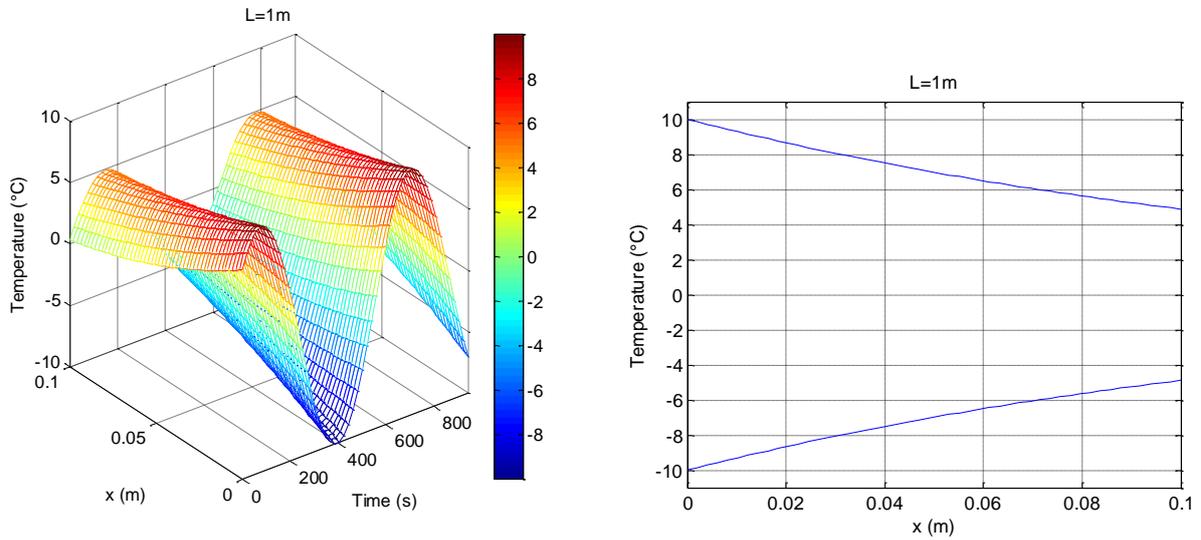


Figure 2.11 – Réponses en régime harmonique stationnaire $T(x,t,\omega,L)/A_0$ pour l'aluminium avec $\omega = \omega_c/100 = 10^{-2} \text{ rad/s}$ et $L = 1 \text{ m}$

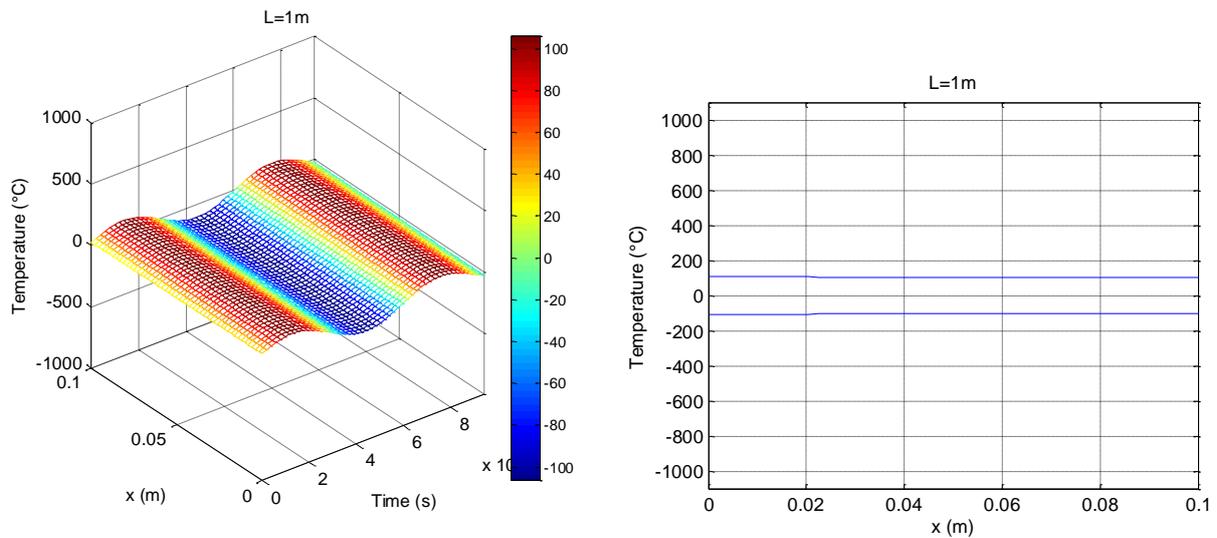


Figure 2.12 – Réponses en régime harmonique stationnaire $T(x,t,\omega,L)/A_0$ pour l'aluminium avec $\omega = \omega_c/10000 = 10^{-4} \text{ rad/s}$ et $L = 1 \text{ m}$

2.4.4 – Conclusion pour $0 \leq x \leq L$

Le comportement asymptotique aux hautes fréquences d'un milieu *fini* de dimension L à la profondeur x est identique à celui d'un milieu *semi-infini*, comme le montre la relation (2.50). L'exploitation de la dualité temps-fréquence à l'aide du théorème de la valeur initiale permet donc d'affirmer que le comportement asymptotique dans les premiers instants d'un milieu *fini* de dimension L à la profondeur x est identique à celui d'un milieu *semi-infini*.

Ensuite, de la même manière que dans le cas du milieu *semi-infini* pour $x > 0$, le comportement fractionnaire d'ordre 0.5 observé aux moyennes fréquences dans le cas du milieu *fini* (relation (2.49)) se réduit lorsque $\omega_x = \alpha_d/x^2$ diminue, c'est-à-dire lorsque x s'éloigne de l'origine.

Enfin, dans la mesure où le comportement fractionnaire d'ordre 0.5 est limité aussi aux basses fréquences par la présence du comportement intégrateur d'ordre 1 (relation (2.48)), il peut complètement disparaître si ω_x et ω_L sont suffisamment proches.

2.5 – Conclusion

La structuration et la progression de ce chapitre sont organisées de manière didactique afin que le lecteur peu familiarisé avec les phénomènes de diffusion thermique puisse « s'imprégner » de la dynamique du procédé. Ainsi, la vision système, classique en automatique, facilite l'étude des différences et des similitudes de comportement entre le milieu semi-infini et le milieu fini de dimension L . L'analyse en surface (en $x = 0$) met en évidence que l'*effusivité thermique*, dans le cas du milieu *semi-infini*, est caractérisée par un comportement intégrateur d'ordre 0.5 sur tout l'espace des fréquences, alors que dans le cas du milieu *fini*, elle est caractérisée par un comportement intégrateur d'ordre 1 aux basses fréquences, et d'ordre 0.5 aux moyennes et hautes fréquences. Par contre, l'analyse dans la profondeur des deux milieux (pour $x > 0$) met en évidence que la *diffusivité thermique* conduit aux hautes fréquences au même comportement caractérisé par une exponentielle complexe. Ce résultat est exploité au chapitre suivant dans le cadre de la définition des modèles pour la synthèse fréquentielle des commandes robustes.

Chapitre 3

Modèles d'analyse et de synthèse

SOMMAIRE

3.1 – Introduction	77
3.2 – Modèles d'analyse	77
3.2.1 - Définition des incertitudes et de l'état paramétrique nominal du procédé	77
3.2.2 - Analyse de l'influence du matériau	81
3.2.3 - Analyse de l'influence du matériau et de la longueur L du milieu	83
3.2.4 - Analyse de l'influence du matériau, de la longueur L du milieu et de la position x du capteur	85
3.3 – Modèles de synthèse	89
3.3.1 - Modèle pour la synthèse de la commande CRONE de 1 ^{ère} génération.....	89
3.3.2 - Modèle pour la synthèse de la commande CRONE de 2 ^{ème} génération	91
3.3.2.1 - Cas en présence de variations de gain avec phase constante en $x = 0$	91
3.3.2.2 - Cas en présence de variations de gain avec phase non constante en $x > 0$	92
3.3.3 - Modèle pour la synthèse de la commande CRONE de 3 ^{ème} génération	95
3.4 – Conclusion	97

3.1 – Introduction

Ce chapitre s'inscrit parfaitement dans la continuité du précédent et se compose de deux parties.

La première est consacrée à l'analyse des incertitudes paramétriques à l'aide du modèle du milieu fini développé au chapitre précédent. Plus précisément, les incertitudes concernent :

- la nature du matériau caractérisée par son *effusivité* η_d et sa *diffusivité* α_d thermiques ;
- la longueur L du milieu ;
- la position x qui est considérée par la suite comme étant la position du capteur de température.

Toujours dans un souci didactique, l'étude se fait de manière progressive :

- d'abord l'analyse de l'influence de la nature du matériau ;
- puis, l'analyse de l'influence du matériau et de la longueur L du milieu ;
- enfin, l'analyse de l'influence du matériau, de la longueur L du milieu et de la position x du capteur.

Compte tenu des résultats de la première partie de ce chapitre, la seconde est dédiée à la définition de trois domaines d'études adaptés à la synthèse de chacune des trois générations de la commande CRONE. Ainsi, au voisinage d'une fréquence au gain unité en boucle ouverte $\omega_u = 1$ rad/s (valeur dont le choix est justifié au paragraphe 3.2.1), chaque domaine est défini par des incertitudes paramétriques conduisant :

- pour le premier, uniquement à des variations de gain dans une zone fréquentielle où la phase est constante. Il correspond au cas de l'étude de l'influence de la nature du matériau et de la longueur L en $x = 0$;
- pour le deuxième, uniquement à des variations de gain mais dans une zone fréquentielle où la phase n'est pas constante. Pour obtenir ce comportement, trois états paramétriques particuliers sont déterminés conduisant aux mêmes fréquences transitionnelles ω_L et ω_x , et donc à une seule courbe de phase (mais bien trois courbes de gain) ;
- pour le troisième, à des variations de gain et de phase. Il correspond au cas de l'étude de l'influence du matériau, de la longueur L et de la position x du capteur.

3.2 – Modèles d'analyse

3.2.1 - Définition des incertitudes et de l'état paramétrique nominal du procédé

Pour rappel, la fonction de transfert $H(x, s, L)$ entre la commande en flux $\bar{\phi}(s)$ et la température $\bar{T}(x, s, L)$ est donnée par :

$$H(x, s, L) = \frac{\bar{T}(x, s, L)}{\bar{\phi}(s)} = H_0 \frac{1}{s^{0.5}} \frac{1}{\tanh\left(\sqrt{\frac{s}{\omega_L}}\right)} \frac{\cosh\left(\sqrt{\frac{s}{\omega_{Lx}}}\right)}{\cosh\left(\sqrt{\frac{s}{\omega_L}}\right)}, \quad (3.1)$$

où

$$\begin{cases} H_0 = \frac{1}{S \eta_d} \\ \omega_L = \frac{\alpha_d}{L^2} \\ \omega_{Lx} = \frac{\alpha_d}{(L-x)^2} \end{cases} \quad (3.2)$$

Dans ce travail de thèse, les incertitudes paramétriques du procédé prises en compte sont :

- le matériau caractérisé par son effusivité η_d et sa diffusivité α_d thermiques ;
- la longueur L du milieu ;
- la position x qui est considérée par la suite comme étant la position x_c du capteur de température.

Compte tenu des relations (3.2), on constate donc que :

- le gain H_0 n'est affecté que par la nature du matériau à travers son *effusivité* thermique η_d ;
- la fréquence transitionnelle ω_L est affectée par la longueur L du milieu et par la nature du matériau à travers sa *diffusivité* thermique α_d ;
- la fréquence transitionnelle ω_{Lx} est affectée par la longueur L du milieu, par la position x et par la nature du matériau à travers sa diffusivité thermique α_d .

Dans la suite de ce chapitre, l'incertitude sur la nature du matériau est prise en compte à travers trois matériaux, à savoir l'aluminium, le cuivre et le fer. En ce qui concerne l'incertitude sur la longueur L , trois valeurs sont considérées : $L = 1$ m, $L = 0.5$ m et $L = 0.25$ m. Enfin, l'incertitude concernant la position du capteur est analysée à travers trois valeurs : $x = 0$, $x = 0.5$ cm et $x = 1$ cm.

Les tableaux 3.1 et 3.2 présentent les différentes valeurs paramétriques utilisées dans la suite du mémoire.

Matériau	α_d	η_d	H_0	ω_L (rad/s)		
	m ² /s	W.K ⁻¹ .m ⁻² .s ^{0.5}	K.s ^{0.5} .W ⁻¹	$L = 0,25$ m	$L = 0,5$ m	$L = 1$ m
Cu.	117.10 ⁻⁶	3,72.10 ⁴	0,269	19.10 ⁻⁴	4,68.10 ⁻⁴	1,17.10 ⁻⁴
Alu.	97.10 ⁻⁶	2,41.10 ⁴	0,416	16.10 ⁻⁴	3,88.10 ⁻⁴	0,97.10 ⁻⁴
Fer	23.10 ⁻⁶	1,67.10 ⁴	0,596	3,68.10 ⁻⁴	0,92.10 ⁻⁴	0,23.10 ⁻⁴

Tableau 3.1 – Valeurs numériques des paramètres H_0 et ω_L de la forme canonique de $H(x, s, L)$ en fonction de la nature du matériau et de la longueur L du milieu

	ω_{Lx} (rad/s)								
	$L = 0,25\text{m}$			$L = 0,5\text{m}$			$L = 1\text{m}$		
	$x = 0$	$x = 0,5\text{cm}$	$x = 1\text{cm}$	$x = 0$	$x = 0,5\text{cm}$	$x = 1\text{cm}$	$x = 0$	$x = 0,5\text{cm}$	$x = 1\text{cm}$
Cu.	19.10^{-4}	19.10^{-4}	20.10^{-4}	$4,68.10^{-4}$	$4,76.10^{-4}$	$4,87.10^{-4}$	$1,17.10^{-4}$	$1,18.10^{-4}$	$1,19.10^{-4}$
Alu.	16.10^{-4}	16.10^{-4}	17.10^{-4}	$3,88.10^{-4}$	$3,96.10^{-4}$	$4,04.10^{-4}$	$0,97.10^{-4}$	$0,98.10^{-4}$	$0,99.10^{-4}$
Fer	$3,68.10^{-4}$	$3,83.10^{-4}$	$3,99.10^{-4}$	$0,92.10^{-4}$	$0,92.10^{-4}$	$0,96.10^{-4}$	$0,23.10^{-4}$	$0,232.10^{-4}$	$0,235.10^{-4}$

Tableau 3.2 – Valeurs numériques du troisième paramètre ω_{Lx} de la forme canonique de $H(x, s, L)$ en fonction de la nature du matériau, de la longueur L du milieu et de la position x du capteur

L'observation de ces tableaux conduit à deux remarques : La première concerne l'ordre des valeurs numériques des paramètres en fonction de la nature du matériau. En effet, le classement est toujours [cuivre, aluminium, fer] ou [fer, aluminium, cuivre] selon le paramètre considéré. C'est la raison pour laquelle l'aluminium est considéré dans la suite de ce mémoire comme étant le matériau « nominal », le cuivre et le fer étant considérés comme étant les matériaux « extrêmes ».

La seconde remarque concerne la réduction de l'expression du transfert $H(x,s,L)$ en vue de la synthèse de la commande. En effet, conformément à la conclusion du chapitre 2 concernant l'étude comparative des milieux semi-infini et fini, $x \ll L$ conduit bien à $\omega_{Lx} \approx \omega_L$, d'où l'expression réduite de $H(x, s, L)$:

$$H(x, s, L) = \frac{\bar{T}(x, s, L)}{\bar{\phi}(s)} = H_0 \frac{1}{s^{0.5}} \frac{1}{\tanh\left(\sqrt{\frac{s}{\omega_L}}\right)} e^{-\sqrt{\frac{s}{\omega_x}}}, \quad (3.3)$$

avec, pour rappel, $\omega_x = \alpha_d/x^2$.

Le tableau 3.3 présente les valeurs numériques des paramètres H_0 , ω_L et ω_x de la forme canonique réduite de $H(x, s, L)$ (relation (3.3)) en fonction de la nature du matériau, de la longueur L du milieu et de la position x du capteur.

Matériau	α_d	η_d	H_0	ω_L (rad/s)			ω_x (rad/s)		
	m^2/s	$\text{W.K}^{-1}.\text{m}^{-2}.\text{s}^{0.5}$	$\text{K.s}^{0.5}.\text{W}^{-1}$	$L=0,25\text{m}$	$L=0,5\text{m}$	$L=1\text{m}$	$x=0$	$x=0,5\text{cm}$	$x=1\text{cm}$
Cu.	117.10^{-6}	$3,72.10^4$	0,269	19.10^{-4}	$4,68.10^{-4}$	$1,17.10^{-4}$	inf.	4,68	1,17
Alu.	97.10^{-6}	$2,41.10^4$	0,416	16.10^{-4}	$3,88.10^{-4}$	$0,97.10^{-4}$	inf.	3,88	0,97
Fer	23.10^{-6}	$1,67.10^4$	0,596	$3,68.10^{-4}$	$0,92.10^{-4}$	$0,23.10^{-4}$	inf.	0,92	0,23

Tableau 3.3 – Valeurs numériques des paramètres H_0 , ω_L et ω_x de la forme canonique réduite de $H(x, s, L)$ en fonction de la nature du matériau, de la longueur L du milieu et de la position x du capteur

Ainsi, l'état paramétrique nominal du procédé est défini par :

- le matériau nominal : **aluminium** ;
- la longueur nominale du milieu fini : **$L = 1$ m**.

Enfin, en ce qui concerne la commande, la fréquence au gain unité nominale, ω_{u0} , en boucle ouverte est choisie égale à 1 rad/s, et ce quelle que soit la génération de la commande CRONE utilisée (voir 3^{ème} partie). Ce choix est fait pour que :

- cette valeur soit réaliste et atteignable pour un banc expérimental tel que celui décrit dans (Malti, et al., 2009) ;
- la fréquence ω_{u0} se situe dans une plage fréquentielle où le comportement semi-intégrateur est présent dans le cas de l'état paramétrique nominal en $x = 0$;
- l'étude comparative des différentes commandes robustes présentée dans la troisième partie de ce mémoire soit significative (comparaison à iso-rapidité).

La figure 3.1 présente les diagrammes de Bode de $H(0, j\omega, L)$ obtenus pour l'état paramétrique nominal du procédé (aluminium et $L = 1$ m) en $x = 0$.

L'observation de cette figure permet de vérifier que $\omega_{u0} = 1$ rad/s se situe bien dans une plage fréquentielle où le comportement semi-intégrateur est présent.

En complément, la figure 3.2 présente la réponse fréquentielle nominale de $H(0, j\omega, L)$ dans le plan de Black-Nichols.

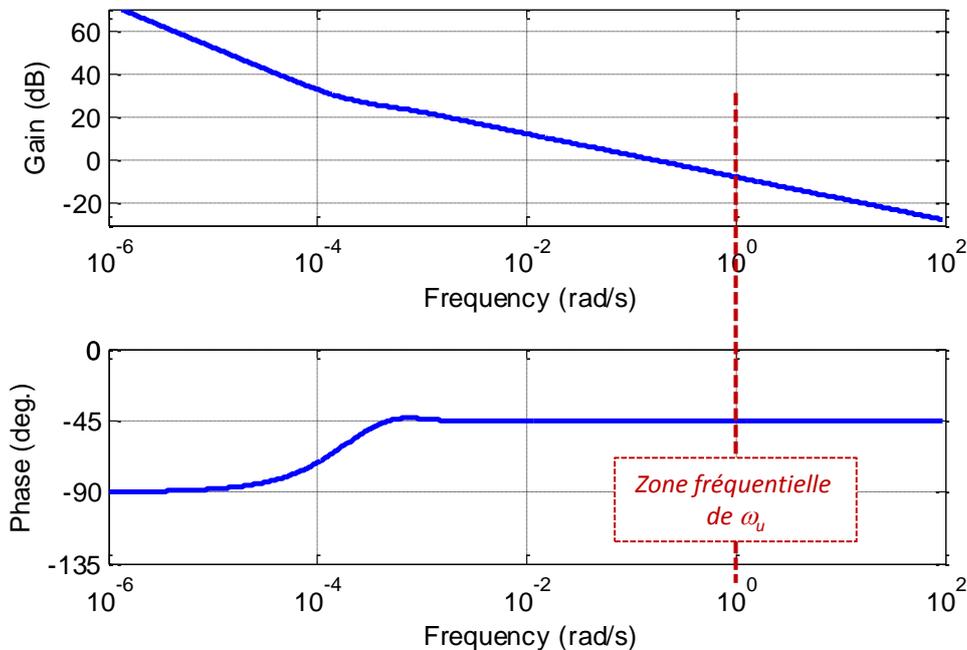


Figure 3.1 – Diagrammes de Bode de $H(0, j\omega, L)$ obtenus pour l'état paramétrique nominal du procédé (aluminium et $L = 1$ m) en $x = 0$

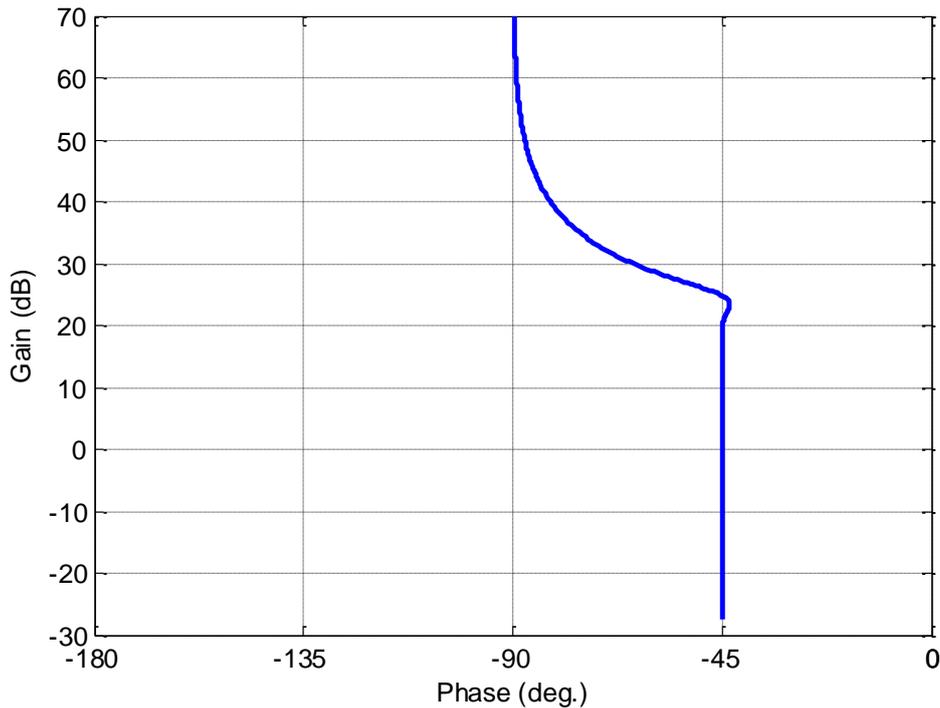


Figure 3.2 – Réponse fréquentielle nominale de $H(0, j\omega, L)$ dans le plan de Black-Nichols

Les trois paragraphes suivants présentent l'analyse de l'influence des incertitudes concernant la nature du matériau, la longueur L du milieu et la position x du capteur de température, et ce conformément aux valeurs numériques présentées dans le tableau 3.3.

3.2.2 - Analyse de l'influence du matériau

Par rapport à l'état paramétrique nominal, l'incertitude sur la nature du matériau conduit donc à des incertitudes bornées pour (cf. tableau 3.1) :

- $H_0 \in \left[\underline{H_0} = H_0(\text{Cu}) = 0.269 \quad ; \quad \overline{H_0} = H_0(\text{Fer}) = 0.596 \right] \text{K s}^{0.5} \text{W}^{-1} ;$
- $\omega_L \in \left[\underline{\omega_L} = \omega_L(\text{Fer}, L = 1\text{m}) = 0.23 \cdot 10^{-4} \text{rad/s} \quad ; \quad \overline{\omega_L} = \omega_L(\text{Cu}, L = 1\text{m}) = 1.17 \cdot 10^{-4} \text{rad/s} \right].$

Les figures 3.3 et 3.4 présentent les réponses fréquentielles $H(0, j\omega, L)$ dans les plans de Bode (figure 3.3) et de Black-Nichols (figure 3.4) obtenues avec l'aluminium (Alu), le cuivre (Cu) et le fer (Fer) pour $L = 1\text{m}$ et $x = 0$.

Dans la zone fréquentielle caractérisée par un comportement intégrateur d'ordre 0.5 (figure 3.3, aux hautes fréquences), c'est le fer qui présente le gain le plus élevé, puis l'aluminium et enfin le cuivre.

Par contre, dans la zone fréquentielle caractérisée par un comportement intégrateur d'ordre 1 (figure 3.3, aux basses fréquences), la hiérarchie est différente dans la mesure où c'est l'aluminium qui présente le gain le plus élevé, le cuivre et le fer ayant pratiquement la même valeur du gain. Ce résultat s'explique dans cette zone par les variations de H_0 et ω_L .

Enfin, au voisinage de $\omega_u = 1$ rad/s, l'influence de la nature du matériau se traduit uniquement par des variations de gain.

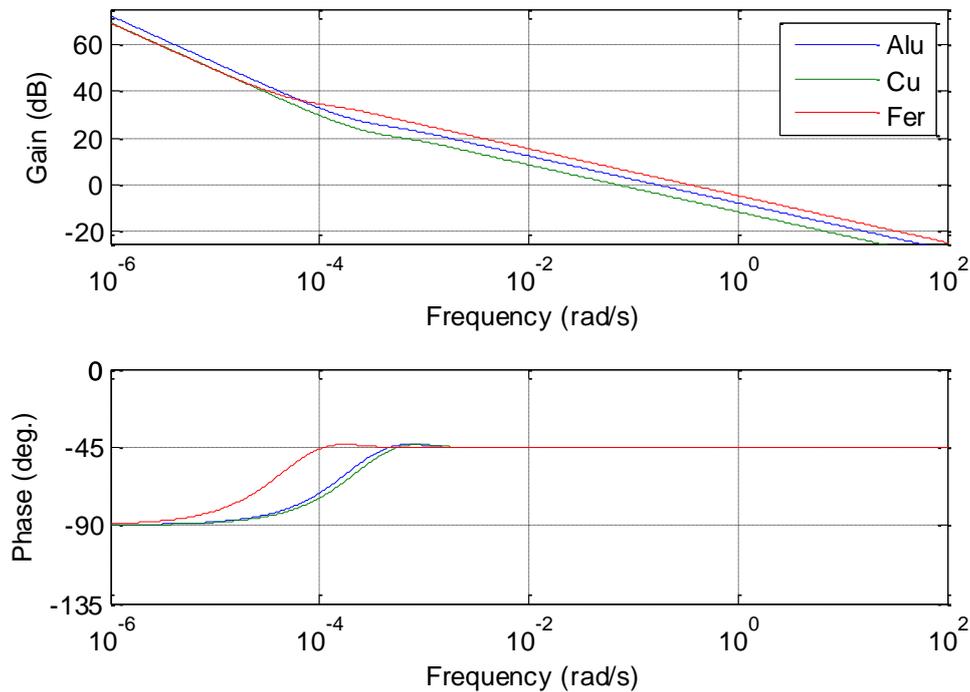


Figure 3.3 – Diagrammes de Bode de $H(0, j\omega, L)$ obtenus avec l'aluminium (Alu), le cuivre (Cu) et le fer (Fer) pour $L = 1$ m et $x = 0$

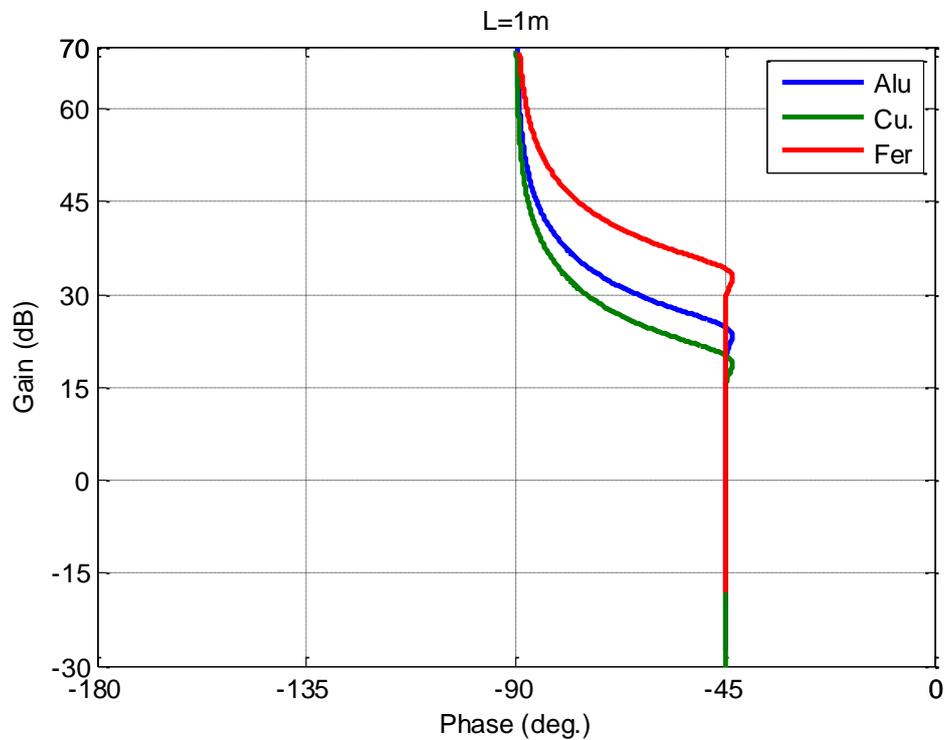


Figure 3.4 – Réponses fréquentielles $H(0, j\omega, L)$ dans le plan de Black-Nichols obtenues avec l'aluminium (Alu), le cuivre (Cu) et le fer (Fer) pour $L = 1$ m et $x = 0$

3.2.3 - Analyse de l'influence du matériau et de la longueur L du milieu

Par rapport à l'état paramétrique nominal du procédé, les variations

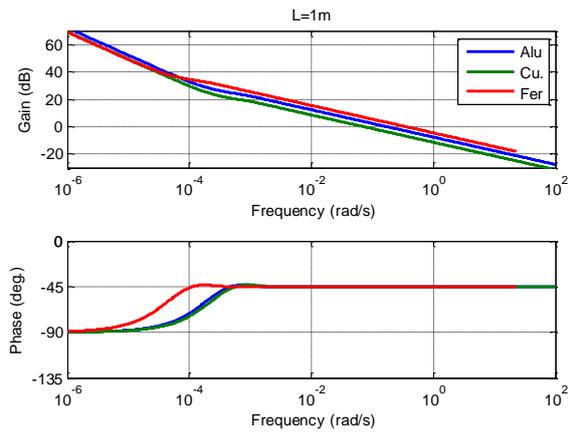
- de la nature du matériau
- et de la longueur $L \in [\underline{L} = 0.25 \text{ m} ; \bar{L} = 1 \text{ m}]$

induisent des incertitudes bornées sur (cf. Tableau 3.1) :

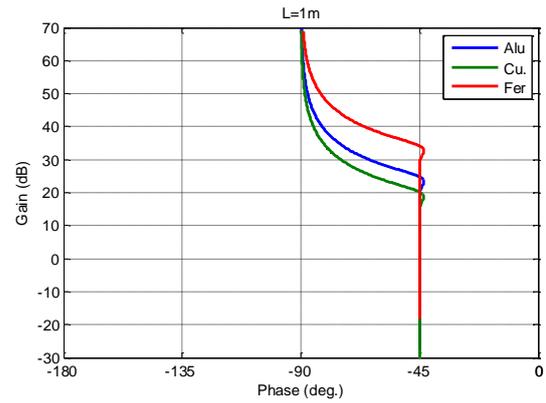
- $H_0 \in [\underline{H}_0 = H_0(\text{Cu}) = 0.269 \quad ; \quad \bar{H}_0 = H_0(\text{Fer}) = 0.596] \text{ K s}^{0.5} \text{ W}^{-1} ;$
- $\omega_L \in [\underline{\omega}_L = \omega_L(\text{Fer}, L = 1\text{m}) = 0.23 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s} \quad ; \quad \bar{\omega}_L = \omega_L(\text{Cu}, L = 0.25\text{m}) = 19 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}]$.

Ainsi, les figures 3.5 présentent les réponses fréquentielles $H(0, j\omega, L)$ dans les plans de Bode (figure 3.5 a, c et e) et de Black-Nichols (figure 3.5 b, d et f) obtenues avec l'aluminium, le cuivre et le fer en $x = 0$, pour $L = 1 \text{ m}$, 0.5 m et 0.25 m .

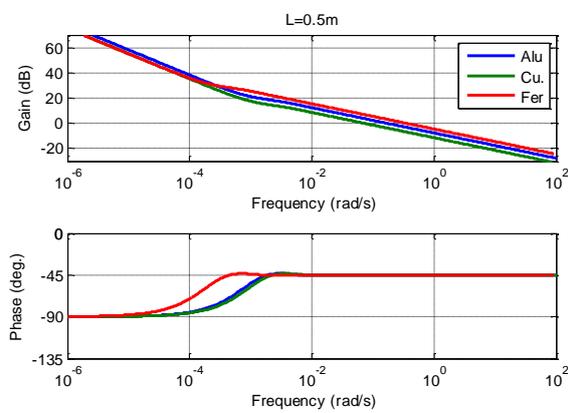
Les incertitudes sur le matériau et sur la longueur $L \in [0.25 \text{ m} ; 1 \text{ m}]$ se traduisent, là encore, par des variations de gain au voisinage de $\omega_u = 1 \text{ rad/s}$ qui appartient toujours à un comportement asymptotique d'ordre 0.5.



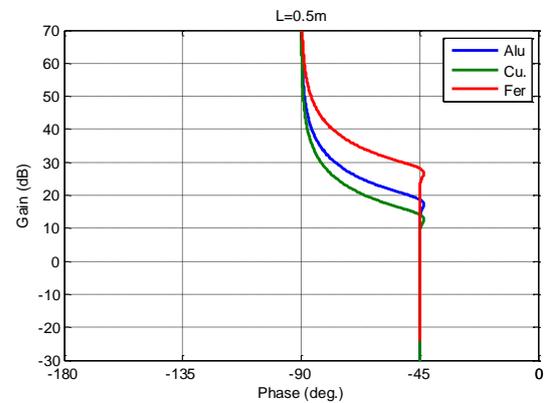
(a)



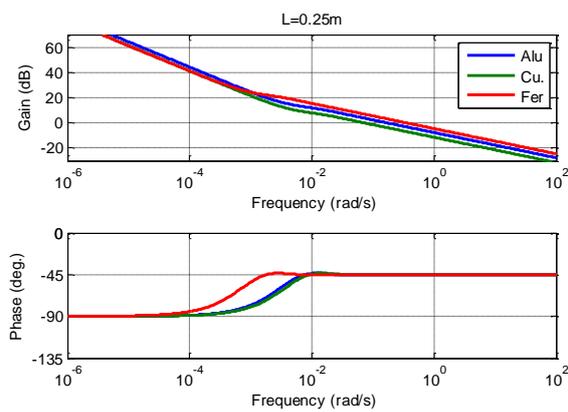
(b)



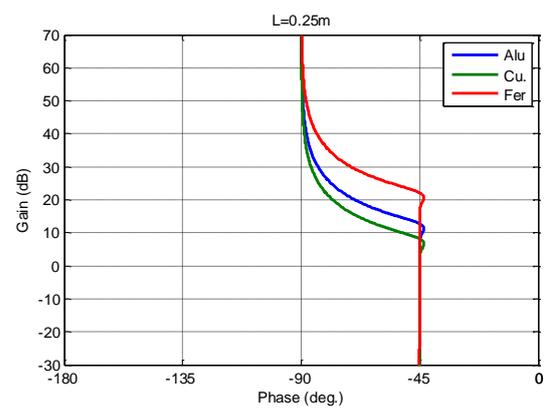
(c)



(d)



(e)



(f)

Figure 3.5 – Réponses fréquentielles de $H(0, j\omega, L)$ dans les plans de Bode (a, c et e) et de Black-Nichols (b, d et f) obtenus en $x = 0$ avec l'aluminium, le cuivre et le fer pour $L = 1\text{ m}$ (a et b), $L = 0.5\text{ m}$ (c et d) et $L = 0.25\text{ m}$ (e et f)

3.2.4 - Analyse de l'influence du matériau, de la longueur L du milieu et de la position x du capteur

Toujours par rapport à l'état paramétrique nominal du procédé, les variations

- de la nature du matériau,
- de la longueur $L \in [\underline{L} = 0.25 \text{ m} ; \bar{L} = 1 \text{ m}]$,
- et de la position $x \in [\underline{x} = 0 ; \bar{x} = 1 \text{ cm}]$ du capteur,

induisent des incertitudes sur (cf. Tableau 3. 3) :

- $H_0 \in [\underline{H}_0 = H_0(\text{Cu}) = 0.269 ; \bar{H}_0 = H_0(\text{Fer}) = 0.596] \text{ K s}^{0.5} \text{ W}^{-1}$;
- $\omega_L \in [\underline{\omega}_L = \omega_L(\text{Fer}, L = 1\text{m}) = 0.23 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s} ; \bar{\omega}_L = \omega_L(\text{Cu}, L = 1\text{m}) = 1.17 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}]$;
- $\omega_x \in [\underline{\omega}_x = \omega_x(\text{Fer}, x = 1\text{cm}) = 0.23 \text{ rad/s} ; \bar{\omega}_x = \omega_x(\forall \text{matériau}, x = 0) = \infty]$.

Ainsi, les figures 3.6 à 3.8 présentent les réponses fréquentielles $H(0, j\omega, L)$ dans les plans de Bode (colonne de gauche) et de Black-Nichols (colonne de droite) obtenues avec l'aluminium, le cuivre et le fer en $x = 0, x = 0.5 \text{ cm}$ et $x = 1 \text{ cm}$, pour $L = 1 \text{ m}, 0.5 \text{ m}$ et 0.25 m .

Les incertitudes sur la nature du matériau, sur la longueur $L \in [0.25 \text{ m} ; 1 \text{ m}]$ et sur la position $x \in [0 ; 1 \text{ cm}]$ se traduisent par des variations de gain et de phase au voisinage de $\omega_u = 1 \text{ rad/s}$.

La tendance déjà observée avec l'aluminium se confirme avec le cuivre et le fer, à savoir que le comportement intégrateur d'ordre 0.5 présent aux hautes fréquences pour $x = 0$ disparaît progressivement lorsque la longueur L diminue (ω_L augmente) et que la position x s'éloigne de l'origine (ω_x diminue). Ainsi, ce comportement fractionnaire qui s'étend sur une plage fréquentielle limitée par ω_L aux basses fréquences et ω_x aux hautes fréquences disparaît lorsque ces deux fréquences transitionnelles se rapprochent. Cette tendance est la plus marquée avec le fer dont la diffusivité est la plus faible des trois matériaux.

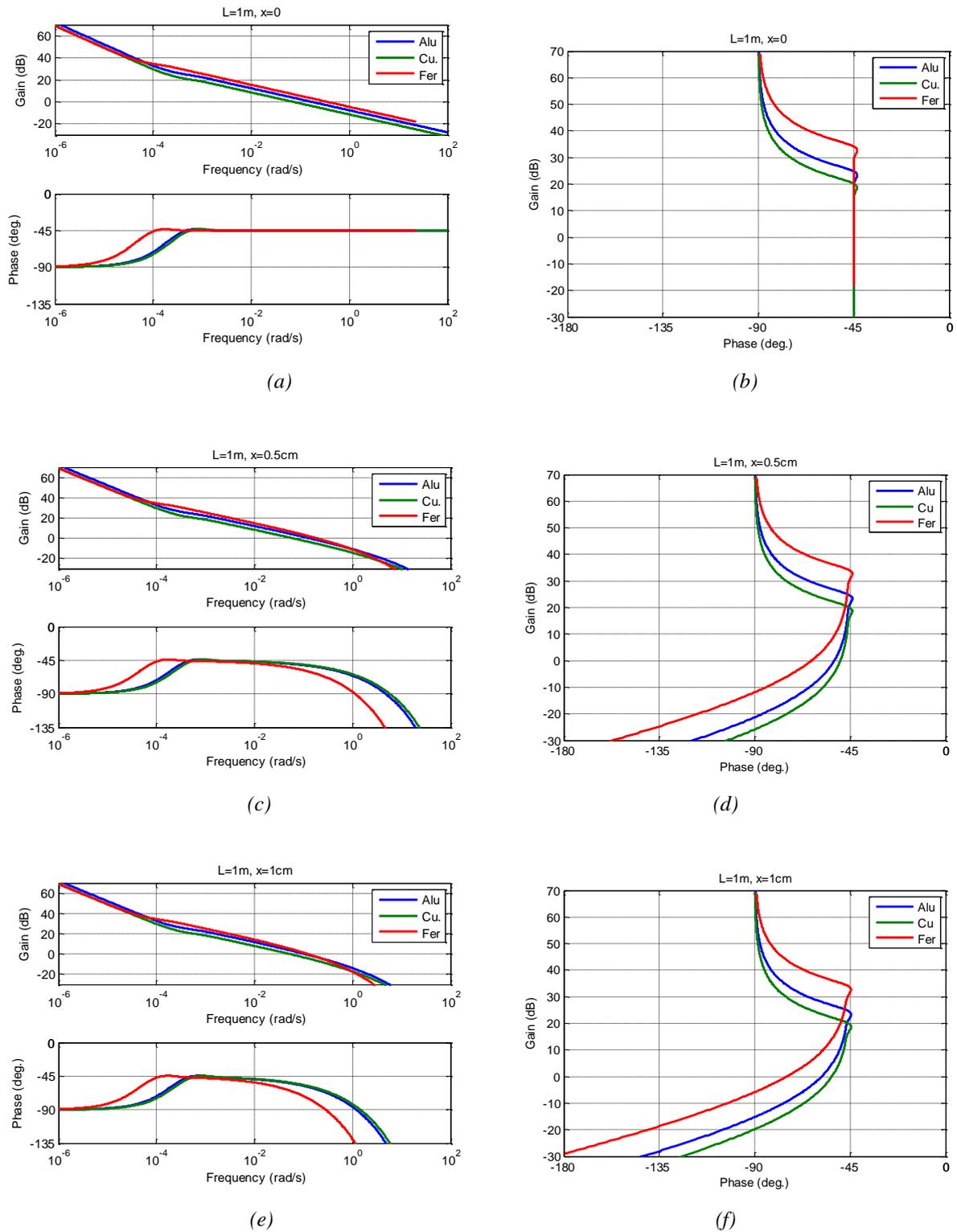
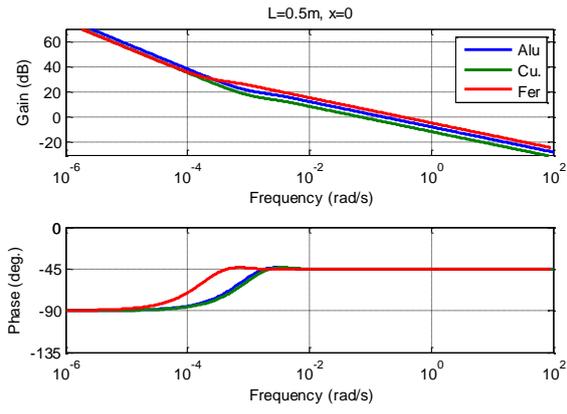
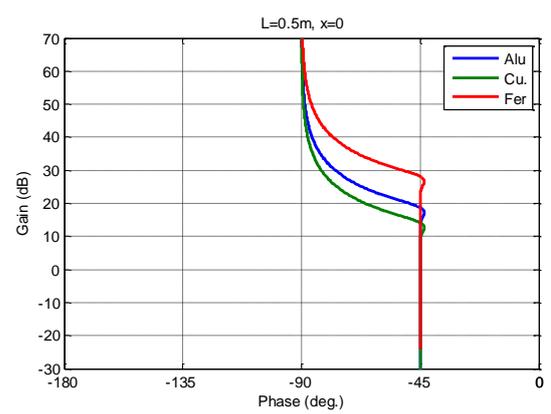


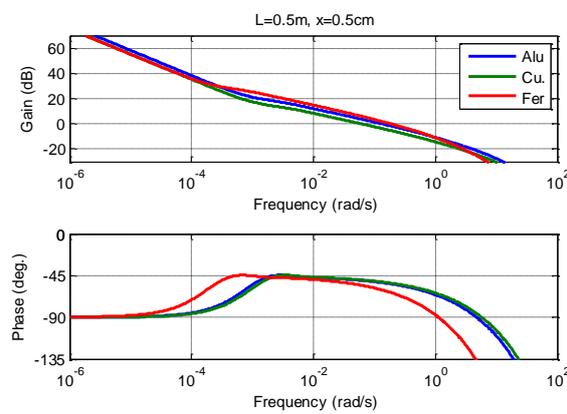
Figure 3.6 – Réponses fréquentielles de $H(x, j\omega, L)$ dans les plans de Bode (a, c et e) et de Black-Nichols (b, d et f) obtenus pour $L = 1\text{ m}$ avec l'aluminium, le cuivre et le fer en $x = 0$ (a et b), $x = 0.5\text{ cm}$ (c et d) et $x = 1\text{ cm}$ (e et f)



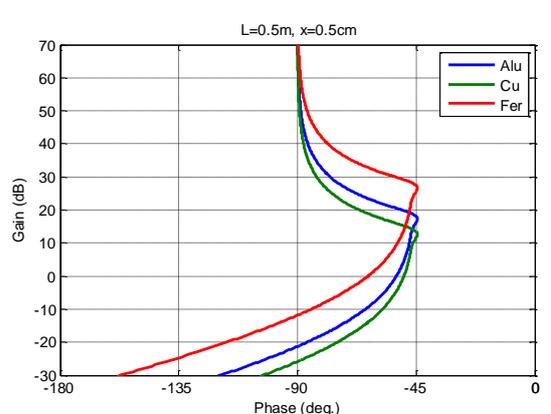
(a)



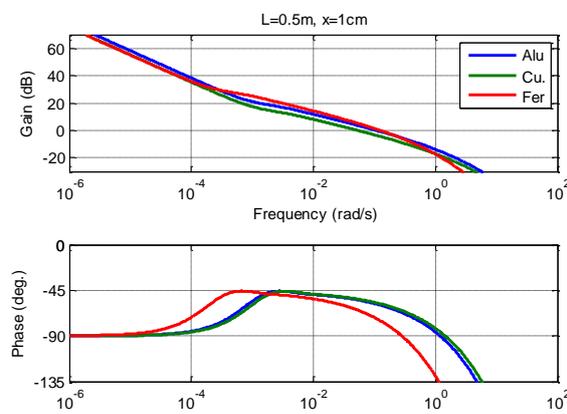
(b)



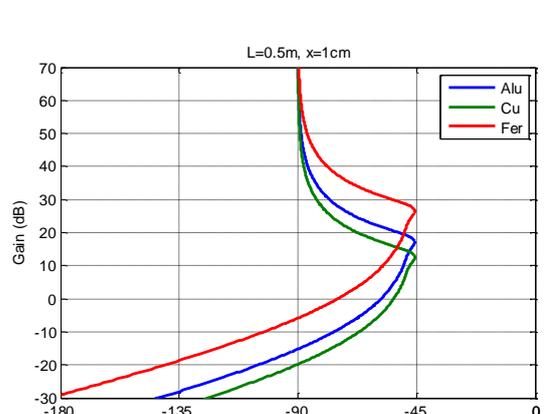
(c)



(d)



(e)



(f)

Figure 3.7 – Réponses fréquentielles de $H(x, j\omega, L)$ dans les plans de Bode (a, c et e) et de Black-Nichols (b, d et f) obtenus pour $L = 0.5$ m avec l'aluminium, le cuivre et le fer en $x = 0$ (a et b), $x = 0.5$ cm (c et d) et $x = 1$ cm (e et f)

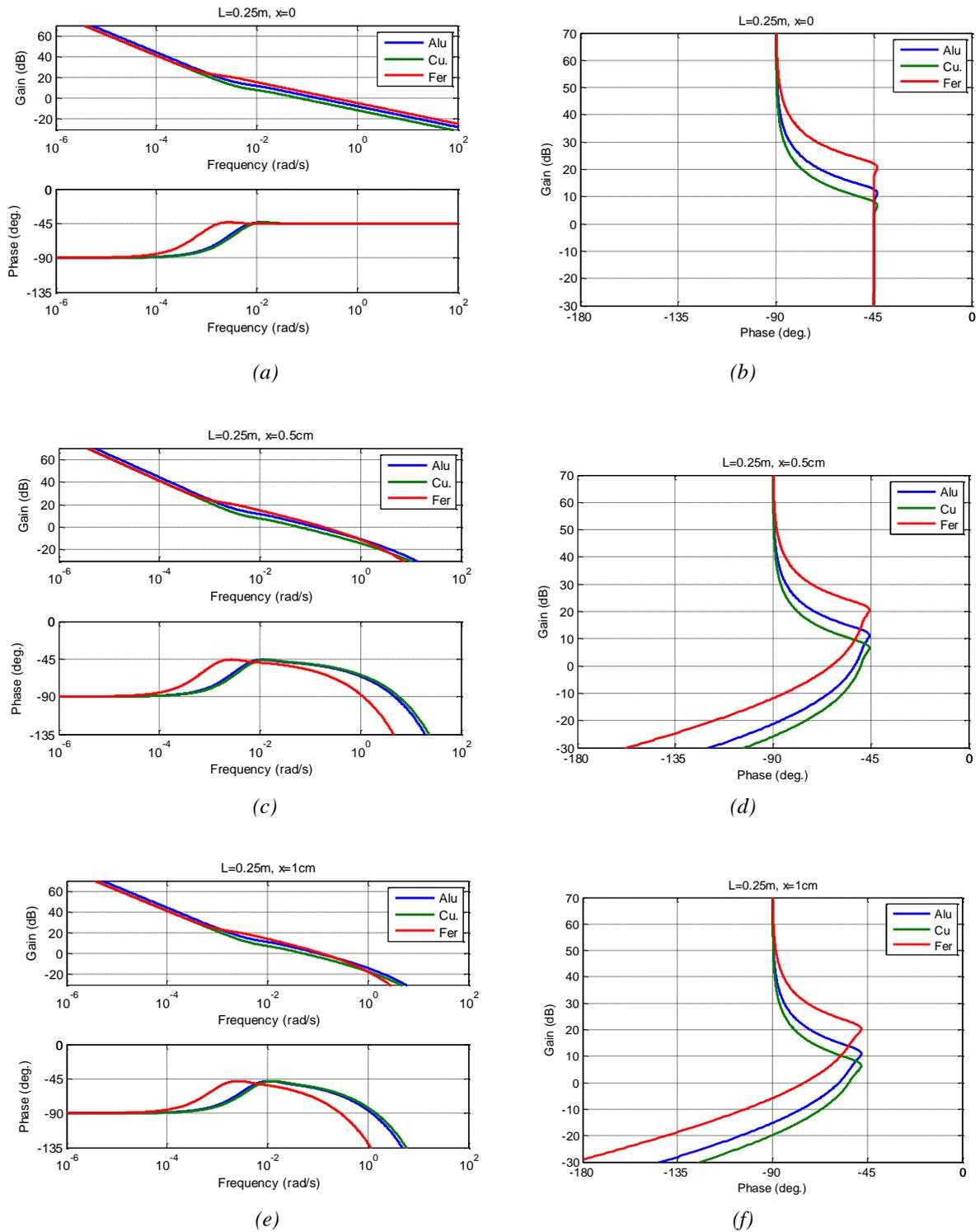


Figure 3.8 – Réponses fréquentielles de $H(x, j\omega, L)$ dans les plans de Bode (a, c et e) et de Black-Nichols (b, d et f) obtenus pour $L = 0.25\text{ m}$ avec l'aluminium, le cuivre et le fer en $x = 0$ (a et b), $x = 0.5\text{ cm}$ (c et d) et $x = 1\text{ cm}$ (e et f)

3.3 – Modèles de synthèse

3.3.1 - Modèle pour la synthèse de la commande CRONE de 1^{ère} génération

Par rapport à l'état paramétrique nominal (aluminium avec $L = 1\text{m}$), le cas d'étude, pour lequel la fréquence au gain unité $\omega_u = 1\text{ rad/s}$ appartient à un comportement asymptotique se traduisant, notamment, par une phase constante et dont les incertitudes paramétriques conduisent uniquement à des variations de gain, correspond au cas de l'étude de l'influence du matériau et de la longueur L (paragraphe 3.2.2). La fonction de transfert $P_I(s)$ du modèle retenu pour la synthèse de la commande CRONE de 1^{ère} génération en présence de variations de gain avec phase constante est donc défini par $H(0,s,L)$, soit :

$$P_1(s) = H(0, s, L) = H_0 \frac{1}{s^{0.5}} \frac{1}{\tanh\left(\sqrt{\frac{s}{\omega_L}}\right)}, \quad (3.4)$$

où les valeurs de l'état paramétrique nominal sont données par :

$$\begin{cases} H_0 = H_0(\text{Alu}) = 0.416 \text{ K s}^{0.5} \text{ W}^{-1} \\ \omega_L = \omega_L(\text{Alu}, L = 1\text{m}) = 0.97 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s} \end{cases}$$

et celles des intervalles bornées par :

$$H_0 \in \left[\underline{H_0} = H_0(\text{Cu}) = 0.269 \quad ; \quad \overline{H_0} = H_0(\text{Fer}) = 0.596 \right] \text{ K s}^{0.5} \text{ W}^{-1}$$

et

$$\omega_L \in \left[\underline{\omega_L} = \omega_L(\text{Fer}, L = 1\text{m}) = 0.23 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s} \quad ; \quad \overline{\omega_L} = \omega_L(\text{Cu}, L = 0.25\text{m}) = 19 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s} \right].$$

La figure 3.9 présente les réponses fréquentielles du modèle $P_I(s)$ utilisé pour la synthèse de la commande CRONE de 1^{ère} génération.

L'observation de ces réponses au voisinage de $\omega_u = 1\text{ rad/s}$, permet de vérifier que les incertitudes paramétriques concernant H_0 et ω_L se traduisent bien uniquement par une variation de gain.

La variation maximale de gain à ω_u , notée $|\Delta P_1(j\omega_u)|$, est définie par :

$$|\Delta P_1(j\omega_u)| = \frac{|P_1(j\omega_u, \text{Fer}, L = 1\text{m})|}{|P_1(j\omega_u, \text{Cu}, L = 0.25\text{m})|}, \quad (3.5)$$

ou encore, compte tenu de l'expression de $P_I(j\omega)$,

$$|\Delta P_1(j\omega_u)| = \frac{H_0(\text{Fer})}{\left| \tanh\left(\sqrt{j \frac{\omega_u}{\omega_L(\text{Fer}, L = 1\text{m})}}\right) \right|} \frac{\left| \tanh\left(\sqrt{j \frac{\omega_u}{\omega_L(\text{Cu}, L = 0.25\text{m})}}\right) \right|}{H_0(\text{Cu})}, \quad (3.6)$$

soit finalement

$$|\Delta P_1(j\omega_u)| = 2.214, \quad \text{soit } 6.91 \text{ dB} . \quad (3.7)$$

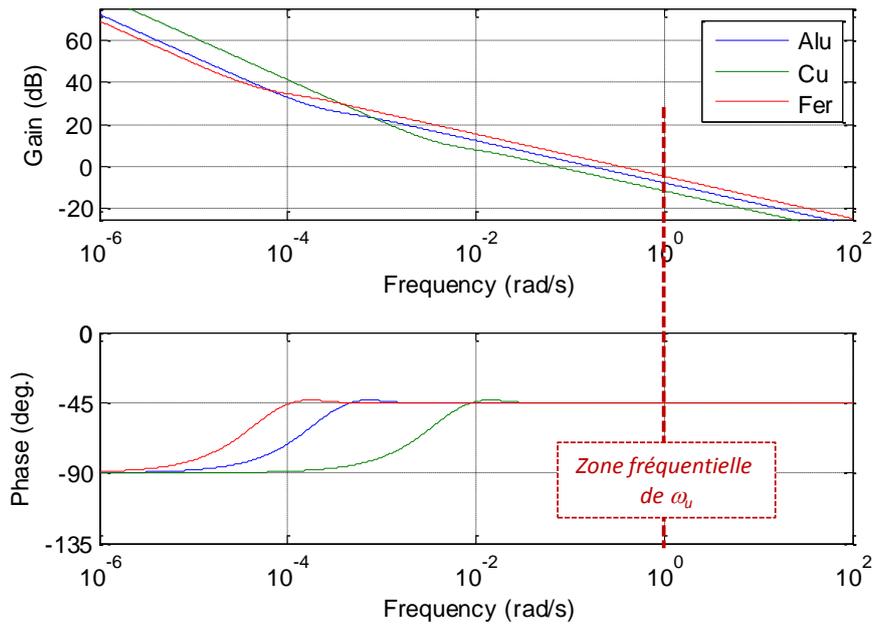


Figure 3.9 – Diagrammes de Bode du modèle $P_1(s)$ utilisé pour la synthèse de la commande CRONE de 1^{ère} génération

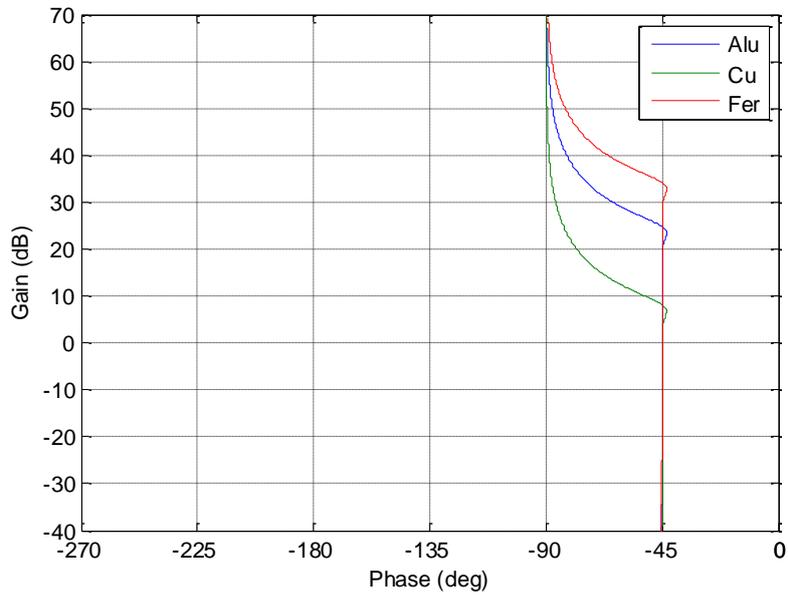


Figure 3.10 – Réponses fréquentielles du modèle $P_1(s)$ dans le plan de Black-Nichols utilisé pour la synthèse de la commande CRONE de 1^{ère} génération

3.3.2 - Modèle pour la synthèse de la commande CRONE de 2^{ème} génération

Par rapport à l'état paramétrique nominal (aluminium, $L = 1$ m), les deux cas d'étude pour lesquels les incertitudes paramétriques se traduisent uniquement par des variations de gain en boucle ouverte sont :

- en $x = 0$, avec la prise en compte des incertitudes du matériau et de la longueur L ;
- pour $x > 0$, avec trois états paramétriques qui conduisent aux mêmes fréquences transitionnelles ω_L et ω_x , et donc à une seule courbe de phase (mais bien trois courbes de gain). Ces trois états paramétriques sont :
 - Aluminium, $L = 1$ m et $x = 0.5$ cm $\Rightarrow \omega_L = 0.97 \cdot 10^{-4}$ rad/s et $\omega_x = 3.88$ rad/s ;
 - Cuivre, $L = 1.1$ m et $x = 0.55$ cm $\Rightarrow \omega_L = 0.97 \cdot 10^{-4}$ rad/s et $\omega_x = 3.87$ rad/s ;
 - Fer, $L = 0.49$ m et $x = 0.243$ cm $\Rightarrow \omega_L = 0.96 \cdot 10^{-4}$ rad/s et $\omega_x = 3.89$ rad/s.

3.3.2.1 - Cas en présence de variations de gain avec phase constante en $x = 0$

Les réponses fréquentielles du procédé correspondant à ce cas de figure sont bien entendu les mêmes que celles des figures 3.3 et 3.4.

Cependant, dans la perspective d'obtenir une forme rationnelle simple du régulateur CRONE de 2^{ème} génération (voir paragraphe 1.5.3 du chapitre 1), un modèle de synthèse plus simple est proposé. Ainsi, le transfert $F(0,s,L)$ défini par (voir chapitre 2) :

$$F(0,s,L) = \frac{\bar{T}(0,s,L)}{\bar{T}(0,s,\infty)} = \frac{1}{\tanh\left(\sqrt{\frac{s}{\omega_L}}\right)}, \quad (3.8)$$

et remplacé par :

$$\tilde{F}(0,s,L) = \left(\frac{1 + s/\omega_L}{s/\omega_L}\right)^{0.5}. \quad (3.9)$$

Le modèle $P_{2.1}(s)$ utilisé pour la synthèse de la commande CRONE de 2^{ème} génération pour ce premier cas d'étude est donc obtenu en remplaçant, dans $H(0,s,L)$ (relation (3.4)), $F(0,s,L)$ par $\tilde{F}(0,s,L)$, soit :

$$P_{2.1}(s) = H_0 \frac{1}{s^{0.5}} \left(\frac{1 + s/\omega_L}{s/\omega_L}\right)^{0.5}, \quad (3.10)$$

ou encore, après simplification,

$$P_{2.1}(s) = H_0^* \frac{(1 + s/\omega_L)^{0.5}}{s/\omega_L}, \quad (3.11)$$

en posant

$$H_0^* = \frac{H_0}{\omega_L^{0.5}}. \quad (3.12)$$

A titre d'illustration, la figure 3.11 présente les diagrammes de Bode de $P_{2.1}(j\omega)$ et de $H(0,j\omega,L)$ obtenu avec l'aluminium pour $L = 1$ m. L'observation de ces courbes permet d'apprécier la parfaite superposition des réponses fréquentielles à l'exception d'une zone

fréquentielle au voisinage de la fréquence de transition ω_L de l'ordre de 10^{-4} rad/s. Pour la synthèse de la commande, ce faible écart n'a pas d'influence sur le comportement au voisinage de $\omega_u = 1$ rad/s dans la mesure où elle se situe 4 décades au-dessus.

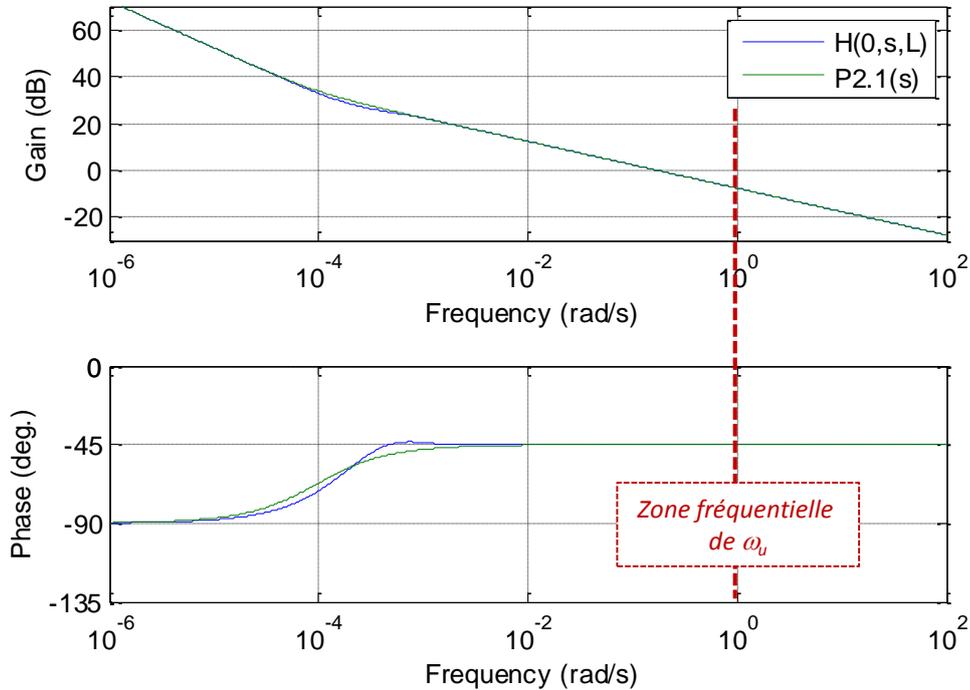


Figure 3.11 – Diagrammes de Bode de $P_{2.1}(j\omega)$ (en vert) et de $H(0,j\omega,L)$ (en bleu) obtenus avec l'aluminium pour $L = 1$ m

3.3.2.2 - Cas en présence de variations de gain avec phase non constante en $x > 0$

En $x > 0$, les trois états paramétriques qui conduisent aux mêmes fréquences transitionnelles ω_L et ω_x sont :

- Aluminium, $L = 1$ m et $x = 0.5$ cm $\Rightarrow \omega_L = 0.97 \cdot 10^{-4}$ rad/s et $\omega_x = 3.88$ rad/s ;
- Cuivre, $L = 1.1$ m et $x = 0.55$ cm $\Rightarrow \omega_L = 0.97 \cdot 10^{-4}$ rad/s et $\omega_x = 3.87$ rad/s ;
- Fer, $L = 0.49$ m et $x = 0.243$ cm $\Rightarrow \omega_L = 0.96 \cdot 10^{-4}$ rad/s et $\omega_x = 3.89$ rad/s.

Les figures 3.12 et 3.13 présentent les réponses fréquentielles de $H(x,s,L)$ correspondant au second cas d'étude utilisé dans le cadre de la synthèse de la commande CRONE de 2^{ème} génération.

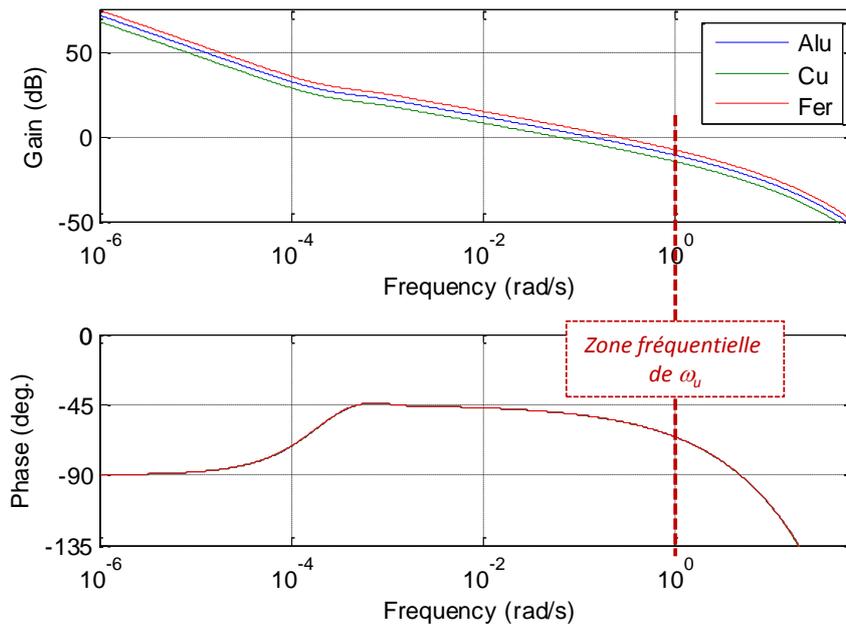


Figure 3.12 – Diagrammes de Bode de $H(x,s,L)$ correspondant au second cas d'étude utilisé dans le cadre de la synthèse de la commande CRONE de 2^{ème} génération

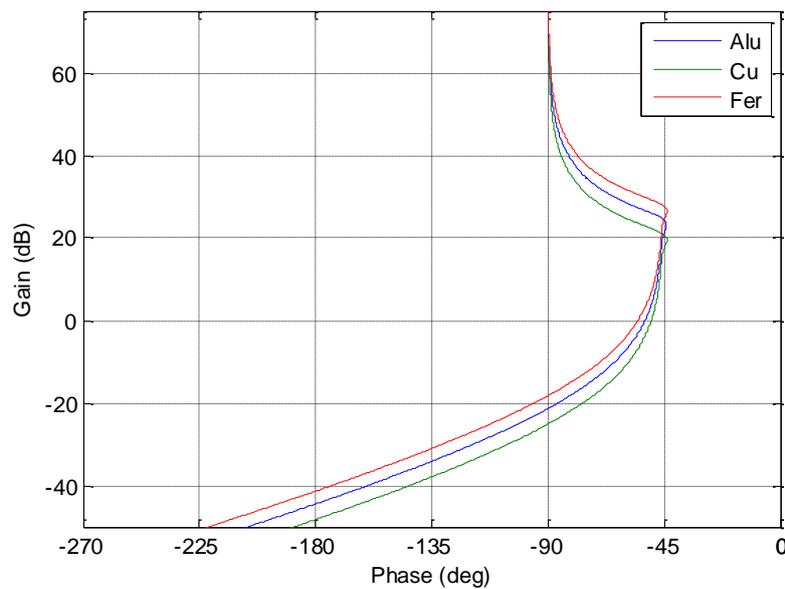


Figure 3.13 – Réponses fréquentielles de $H(x,s,L)$ dans le plan de Black-Nichols correspondant au second cas d'étude utilisé dans le cadre de la synthèse de la commande CRONE de 2^{ème} génération

Pour la suite, le modèle $P_{2.2}(s)$ utilisé pour la synthèse de la commande CRONE de 2^{ème} génération pour ce second cas d'étude est donc obtenu comme précédemment en remplaçant, dans $H(x,s,L)$ (relation (3.3)), $F(0,s,L)$ par $\tilde{F}(0,s,L)$, d'où :

$$P_{2.2}(s) = H_0 \frac{1}{s^{0.5}} \left(\frac{1+s/\omega_L}{s/\omega_L} \right)^{0.5} e^{-\sqrt{\frac{s}{\omega_x}}} \quad , \quad (3.13)$$

ou encore, après simplification,

$$P_{2.2}(s) = H_0^* \frac{(1 + s/\omega_L)^{0.5}}{s/\omega_L} e^{-\sqrt{\frac{s}{\omega_x}}} , \quad (3.14)$$

en posant toujours
$$H_0^* = \frac{H_0}{\omega_L^{0.5}} . \quad (3.15)$$

A titre d'illustration, la figure 3.14 présente les diagrammes de Bode de $P_{2.2}(j\omega)$ et de $H(x, j\omega, L)$ obtenu avec l'aluminium pour $L = 1$ m et $x = 0.5$ cm. L'observation de ces courbes permet d'apprécier, là encore, la parfaite superposition des réponses fréquentielles à l'exception de la zone transitionnelle au voisinage de ω_L .

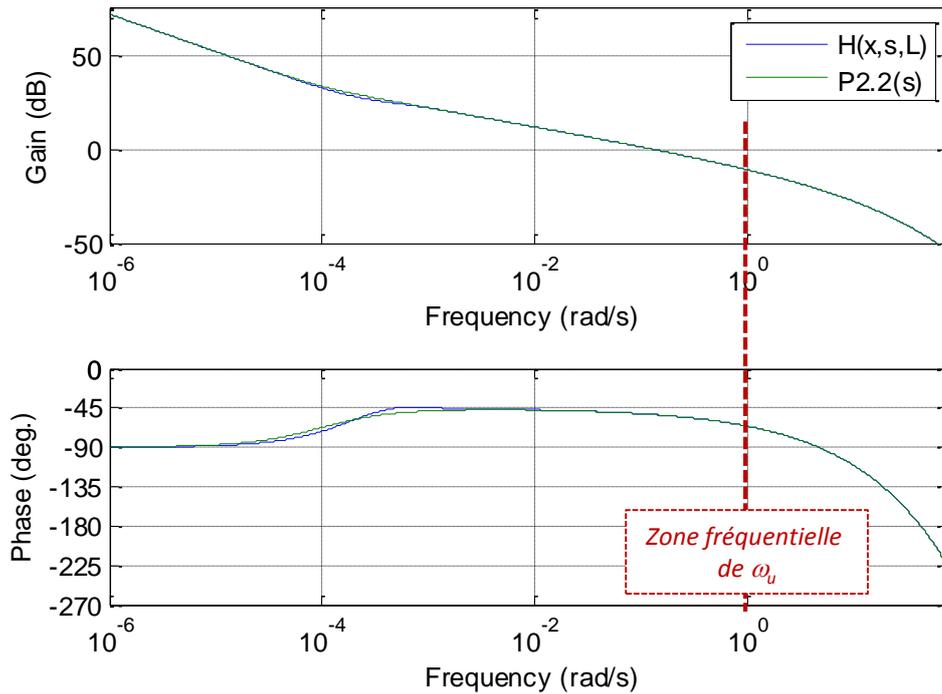


Figure 3.14 – Diagrammes de Bode de $P_{2.2}(j\omega)$ (en bleu) et de $H(x, j\omega, L)$ (en vert) obtenus avec l'aluminium pour $L = 1$ m et $x = 0.5$ cm

La variation maximale de gain à ω_u , notée $|\Delta P_{2.2}(j\omega_u)|$, est définie par :

$$|\Delta P_{2.2}(j\omega_u)| = \frac{|P_{2.2}(j\omega_u, \text{Fer}, L = 0.49\text{m}, x = 0.243\text{cm})|}{|P_{2.2}(j\omega_u, \text{Cu}, L = 1.1\text{m}, x = 0.55\text{cm})|} , \quad (3.16)$$

soit finalement

$$|\Delta P_{2.2}(j\omega_u)| = 2.217 , \quad \text{soit } 6.92 \text{ dB} . \quad (3.17)$$

3.3.3 - Modèle pour la synthèse de la commande CRONE de 3^{ème} génération

Par rapport à l'état paramétrique nominal, le cas d'étude pour lequel les incertitudes paramétriques se traduisent au voisinage de la fréquence au gain unité en boucle ouverte $\omega_u = 1$ rad/s par des variations de gain et de phase correspond au cas de l'étude de l'influence du matériau, de la longueur L et de la position x du capteur (paragraphe 3.5). La fonction de transfert $P_3(s)$ du modèle retenu pour la synthèse en présence de variations de gain et de phase est donc définie par :

$$P_3(s) = H_0 \frac{1}{s^{0.5}} \left(\frac{1 + s/\omega_L}{s/\omega_L} \right)^{0.5} e^{-\sqrt{\frac{s}{\omega_x}}}, \quad (3.18)$$

où les valeurs de l'état paramétrique nominal sont toujours données par :

$$\begin{cases} H_0 = H_0(\text{Alu}) = 0.416 \text{ K s}^{0.5} \text{ W}^{-1} \\ \omega_L = \omega_L(\text{Alu}, L = 1\text{m}) = 0.97 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s} \\ \omega_x = \omega_x(\text{Alu}, x = 0.5\text{cm}) = 3.88 \text{ rad/s} \end{cases}$$

et celles des intervalles bornées par :

$$H_0 \in \left[\underline{H}_0 = H_0(\text{Cu}) = 0.269 \quad ; \quad \overline{H}_0 = H_0(\text{Fer}) = 0.596 \right] \text{ K s}^{0.5} \text{ W}^{-1},$$

- Cuivre, $L = 1.1 \text{ m} \Rightarrow \omega_L = 0.97 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$;
- Fer, $L = 0.49 \text{ m} \Rightarrow \omega_L = 0.96 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$,

et

$$\omega_x \in \left[\underline{\omega}_x = \omega_x(\text{Cu}, x = 1\text{cm}) = 1.17 \text{ rad/s} \quad ; \quad \overline{\omega}_x = \omega_x(\text{Fer}, x = 0.1\text{cm}) = 23 \text{ rad/s} \right].$$

A noter que les longueurs L pour le cuivre ($L = 1.1 \text{ m}$) et le fer ($L = 0.49 \text{ m}$) sont volontairement identiques à celles du domaine d'étude précédent (et donc les mêmes valeurs de ω_L). Ainsi, les valeurs paramétriques du modèle de synthèse $P_3(s)$ se distinguent de celles de $P_{2.2}(s)$ uniquement par les valeurs de ω_x , et ce pour assurer une progression didactique.

Les figures 3.15 et 3.16 présentent les réponses fréquentielles du modèle $P_3(s)$ utilisé pour la synthèse de la commande CRONE de 3^{ème} génération.

L'observation de ces réponses au voisinage de $\omega_u = 1 \text{ rad/s}$ (figure 3.15) permet de vérifier que les incertitudes paramétriques se traduisent bien par des variations de gain et de phase.

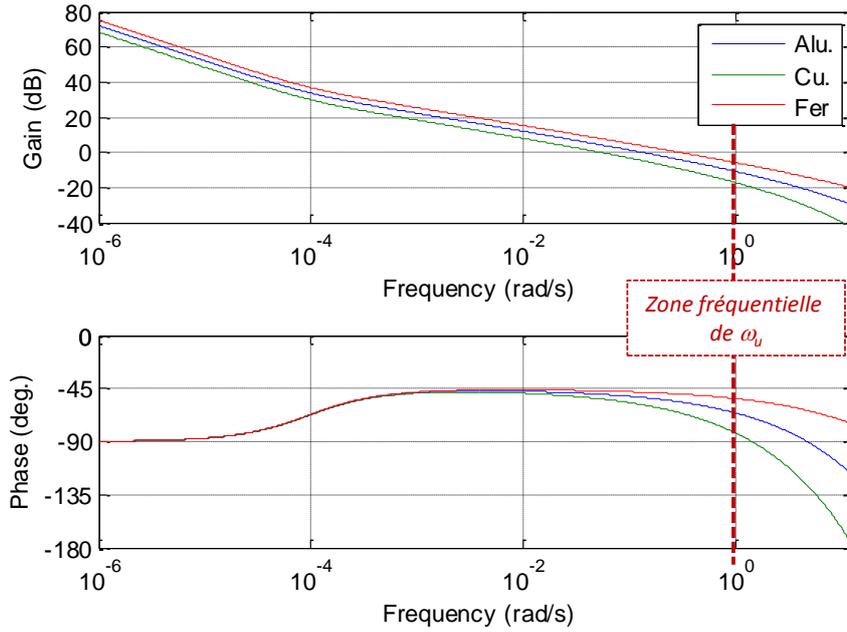


Figure 3.15 – Diagrammes de Bode du modèle $P_3(s)$ utilisé pour la synthèse de la commande CRONE de 3^{ème} génération

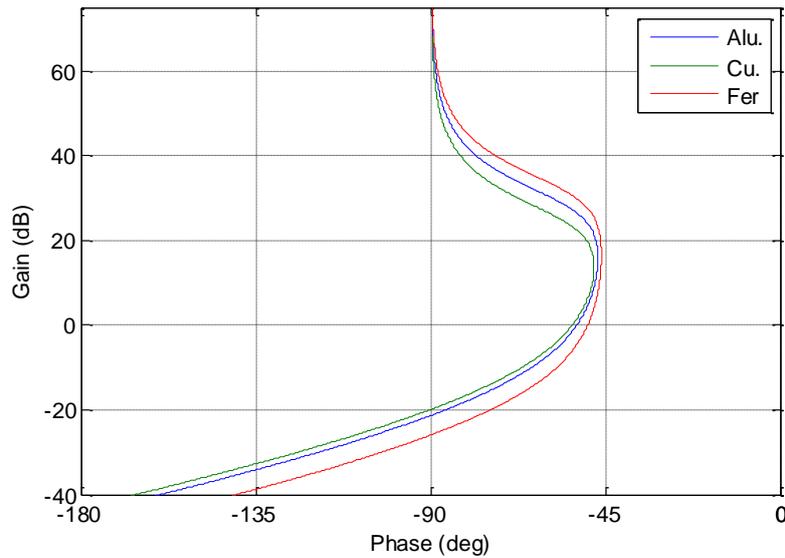


Figure 3.16 – Réponses fréquentielles du modèle $P_3(s)$ dans le plan de Black-Nichols

L'observation du diagramme de gain de la figure 3.15 permet de définir la variation maximale de gain à ω_u , notée $|\Delta P_3(j\omega_u)|$, soit :

$$|\Delta P_3(j\omega_u)| = \frac{|P_3(j\omega_u, \text{Fer}, L = 0.49\text{m}, x = 0.1\text{cm})|}{|P_3(j\omega_u, \text{Cu}, L = 1.1\text{m}, x = 1\text{cm})|}, \quad (3.19)$$

ou encore, compte tenu des valeurs paramétriques,

$$|\Delta P_3(j\omega_u)| = 3.55, \text{ soit } 11 \text{ dB} . \quad (3.21)$$

Quant à la variation maximale de phase à ω_u , notée $|\Delta \arg[P_3(j\omega_u)]|$, elle est donnée par :

$$|\Delta \arg[P_3(j\omega_u)]| = |\arg[P_3(j\omega_u, Fer, L = 0.49\text{m}, x = 0.1\text{cm})] - \arg[P_3(j\omega_u, Cu, L = 1.1\text{m}, x = 1\text{cm})]|, \quad (3.22)$$

ou encore, compte tenu des valeurs paramétriques,

$$|\Delta \arg[P_3(j\omega_u)]| = 29^\circ . \quad (3.24)$$

Remarque

La synthèse de la commande CRONE de 3^{ème} génération ne peut pratiquement pas se faire sans la toolbox CRONE Control. Dans ce cas, les différentes réponses fréquentielles du modèle associées aux états paramétriques définis pour l'étude sont générées par un fichier MatLab, puis téléchargées lors de l'utilisation de la toolbox.

3.4 – Conclusion

Ce chapitre 3 complète le précédent et assure une transition vers la troisième partie du mémoire. En effet, dans un premier temps, l'analyse de l'influence de la nature du matériau, de la longueur L du milieu et de la position x du capteur de température permet de continuer à « s'imprégner » de la dynamique du procédé. C'est notamment grâce à cette étude faite de manière progressive que, dans un deuxième temps, la définition de trois domaines d'études adaptés à la synthèse de chacune des trois générations de la commande CRONE est proposée.

Les chapitres suivants s'appuient sur ces résultats.

3^{EME} PARTIE

SYNTHESE FREQUENTIELLE DE COMMANDES ROBUSTES :

DE LA 1^{ERE} A LA 3^{EME} GENERATION

DE LA COMMANDE CRONE

Chapitre 4

Synthèse en présence de variations de gain : de la 1^{ère} à la 2^{ème} génération de la commande CRONE

SOMMAIRE

4.1 – Introduction	103
4.2. – Commande CRONE de 1^{ère} génération	103
4.2.1 – Méthode de détermination des paramètres du régulateur	103
4.2.2 – Exemples d’illustration	106
4.2.2.1 – Exemple 1 : marge de phase $M_\phi = 45^\circ$	106
4.2.2.2 – Exemple 2 : marge de phase $M_\phi = (45^\circ + 90^\circ)/2 = 67.5^\circ$	106
4.2.2.3 – Exemple 3 : marge de phase $M_\phi = 90^\circ$	107
4.2.3 – Performances	108
4.3 – Commande CRONE de 2^{ème} génération	115
4.3.1 – Méthode de détermination des paramètres du régulateur	115
4.3.2 – Exemples d’illustration	116
4.3.2.1 – Exemple 4 : marge de phase $M_\phi = 45^\circ$	116
4.3.2.2 – Exemple 5 : marge de phase $M_\phi = (45^\circ + 90^\circ)/2 = 67.5^\circ$	116
4.3.2.3 – Exemple 6 : marge de phase $M_\phi = 90^\circ$	117
4.3.3 – Performances	117
4.3.3.1 – En $x = 0$	117
4.3.3.2 – En $x > 0$	118
4.4 – Conclusion	122

4.1 – Introduction

Ce chapitre se focalise sur le premier domaine d'études défini au chapitre précédent, à savoir la synthèse fréquentielle en présence, au voisinage de ω_u , de *variations de gain* avec *phase constante*. Ce premier domaine est parfaitement adapté, non seulement à la commande CRONE de 1^{ère} génération dont la structure du régulateur est fixée *a priori*, mais aussi à la commande CRONE de 2^{ème} génération dont la structure du régulateur est obtenue *a posteriori* dans le cadre d'une démarche de mise en forme de la boucle ouverte (loop shaping).

Dans un premier temps, la méthode permettant de calculer les paramètres du régulateur CRONE de 1^{ère} génération est détaillée, puis le choix des ordres m_I et m_F qui caractérisent son comportement aux basses et hautes fréquences, respectivement, est justifié. Enfin, trois exemples sont présentés pour illustrer l'influence de l'ordre m du régulateur au voisinage de ω_u à partir des valeurs extrêmes (45° et 90°) et moyenne $((45^\circ+90^\circ)/2 = 67.5^\circ)$ de la marge de phase M_ϕ .

Dans un deuxième temps, les développements analytiques permettant de déterminer les paramètres du régulateur CRONE de 2^{ème} génération sont eux aussi détaillés (Christophy, et al., 2016). Les valeurs obtenues, toujours dans le cadre de ce premier domaine d'étude, sont très proches (voire identiques) à celles du régulateur de 1^{ère} génération, et ce dans la mesure où les données de synthèse sont les mêmes (spécifications fréquentielles du cahier des charges et modèle de synthèse avec ses incertitudes).

Pour ces deux générations de la commande CRONE, la traduction des spécifications du cahier des charges conduit à choisir :

- pour le *degré de stabilité*, une marge de phase nominale, $M_{\phi 0}$, comprise entre 45° et 90° ;
- pour la *rapidité*, une fréquence au gain unité en boucle ouverte nominale, ω_{u0} , égale à 1 rad/s ;
- pour la *précision en régime permanent*, une erreur de traînage nulle ;
- pour la *saturation*, une valeur maximale de la commande, $U_{max} = 12$ W.

4.2. – Commande CRONE de 1^{ère} génération

4.2.1 – Méthode de détermination des paramètres du régulateur

Pour rappel, la fonction de transfert $P_I(s)$ du modèle retenu pour la synthèse de la commande CRONE de 1^{ère} génération est défini par :

$$P_I(s) = H(0, s, L) = H_0 \frac{1}{s^{0.5}} \frac{1}{\tanh\left(\sqrt{\frac{s}{\omega_L}}\right)}, \quad (4.1)$$

où les valeurs de l'état paramétrique nominal sont données par :

$$\begin{cases} H_0 = H_0(\text{Alu}) = 0.416 \text{ K s}^{0.5} \text{ W}^{-1} \\ \omega_L = \omega_L(\text{Alu}, L = 1\text{m}) = 0.97 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s} \end{cases}$$

et celles des intervalles bornées par :

$$H_0 \in \left[\underline{H}_0 = H_0(\text{Cu}) = 0.269 \quad ; \quad \overline{H}_0 = H_0(\text{Fer}) = 0.596 \right] \text{K s}^{0.5} \text{W}^{-1}$$

$$\text{et } \omega_L \in \left[\underline{\omega}_L = \omega_L(\text{Fer}, L = 1\text{m}) = 0.23 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s} \quad ; \quad \overline{\omega}_L = \omega_L(\text{Cu}, L = 0.25\text{m}) = 19 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s} \right].$$

Toujours pour rappel, le régulateur CRONE de 1^{ère} génération (cf. paragraphe 1.5.2) est défini par :

$$C_F(s) = C_0 \left(\frac{1+s/\omega_l}{s/\omega_l} \right)^{m_l} \left(\frac{1+s/\omega_l}{1+s/\omega_h} \right)^m \frac{1}{(1+s/\omega_F)^{m_F}}, \quad (4.2)$$

avec $m_l, m_F \in \mathbf{N}$, $\omega_l < \omega_F \in \mathbf{R}$ et $\omega_l < \omega_h \in \mathbf{R}$.

Si on choisit $\omega_l = \omega_l$ et $\omega_h = \omega_F$ pour réduire la structure du régulateur tout en respectant les spécifications du cahier des charges, alors on obtient :

$$C_F(s) = C_0 \left(\frac{\omega_l}{s} \right)^{m_l} \frac{(1+s/\omega_l)^{m_l+m}}{(1+s/\omega_h)^{m_F+m}}. \quad (4.3)$$

Compte tenu des données de synthèse, on choisit :

- $m_l = 1$, pour assurer une erreur de trainage nulle, le procédé possédant une intégration d'ordre 1 aux basses fréquences ;
- $m = (M_\phi - 180^\circ - \arg P_1(j\omega_u)) / 90^\circ$, expression déduite directement de la définition de la marge de phase M_ϕ , sachant que $\arg P_1(j\omega_u) = -45^\circ$ et que $M_\phi \in [45^\circ; 90^\circ]$, soit $m \in [-1; -0.5]$;
- $m_F = 1$, pour limiter la sensibilité de l'entrée ;
- $\omega_{unom} = 1 \text{ rad/s}$, valeur imposée dans le cadre de cette étude comparative à iso-rapidité des différentes commandes CRONE.

Avec ces valeurs, l'expression (4.3) de $C_F(s)$ se réduit alors à :

$$C_F(s) = C_0 \left(\frac{\omega_l}{s} \right) \left(\frac{1+s/\omega_l}{1+s/\omega_h} \right)^{1+m}. \quad (4.4)$$

Ainsi, sachant que $m \in [-1; -0.5]$ et que $\omega_l < \omega_h$, la forme fractionnaire $C_F(s)$ du régulateur se résume à un intégrateur d'ordre 1 en cascade avec une cellule non entière à avance de phase d'ordre $1+m$. L'expressions de $C_F(s)$ est donc caractérisée par quatre paramètres (m , ω_l , ω_h et C_0) déterminés en trois étapes.

- **Etape 1** - m est déterminé à partir de la marge de phase M_ϕ (spécification relative au degré de stabilité) ;
- **Etape 2** - ω_l et ω_h sont déterminées pour que le comportement asymptotique fractionnaire du régulateur soit présent sur un intervalle fréquentiel $[\omega_A, \omega_B]$ autour de la fréquence nominale ω_{unom} . Pour respecter la robustesse du degré de stabilité, il est nécessaire d'imposer (à l'image de la commande CRONE de 2^{ème} génération, voir Chapitre 1) :

$$\forall \omega_u \in [\omega_{u \min} ; \omega_{u \max}], \quad \omega_A \leq \omega_u \leq \omega_B \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \omega_A \leq \omega_{u \min} \\ \omega_B \geq \omega_{u \max} \end{cases} \quad (4.5)$$

et

$$\begin{cases} \omega_l = \omega_A / b \\ \omega_h = b \omega_B \end{cases}, \text{ avec } b > 1. \quad (4.6)$$

En prenant ω_l et ω_h distribuées géométriquement autour de ω_{unom} et en introduisant $r = \omega_B/\omega_A$, soit :

$$\begin{cases} \sqrt{\omega_l \omega_h} = \omega_{unom} \\ r = \frac{\omega_B}{\omega_A} \end{cases}, \quad (4.7)$$

ω_l et ω_h sont données par :

$$\begin{cases} \sqrt{\omega_l \omega_h} = \omega_{unom} \\ \frac{\omega_h}{\omega_l} = b^2 r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_l = \omega_{unom} / (b \sqrt{r}) \\ \omega_h = \omega_{unom} b \sqrt{r} \end{cases}. \quad (4.8)$$

Le calcul du rapport r est déduit de la pente $-n20\text{dB/dec}$ (n étant l'ordre de la fonction de transfert en boucle ouverte au voisinage de ω_{unom}) et de la variation $\Delta\beta$ de gain toujours en boucle ouverte due aux incertitudes paramétriques, soit :

$$r = \Delta\beta^{1/n}. \quad (4.9)$$

- **Etape 3** – C_0 est calculé pour respecter la spécification concernant la rapidité, soit :

$$|\beta(j\omega_u)| = 1 \Leftrightarrow |C_F(j\omega_u)| |P_1(j\omega_u)| = 1, \quad (4.10)$$

ou encore, compte tenu de l'expression de $|C_F(j\omega_u)|$,

$$C_0 \left(\frac{\omega_l}{\omega_u} \right) \left(\frac{1 + (\omega_u/\omega_l)^2}{1 + (\omega_u/\omega_h)^2} \right)^{\left(\frac{1+m}{2}\right)} |P_1(j\omega_u)| = 1, \quad (4.11)$$

soit finalement

$$C_0 = \left[\left(\frac{\omega_l}{\omega_u} \right) \left(\frac{1 + (\omega_u/\omega_l)^2}{1 + (\omega_u/\omega_h)^2} \right)^{\left(\frac{1+m}{2}\right)} |P_1(j\omega_u)| \right]^{-1}. \quad (4.12)$$

Quant à la forme rationnelle $C_R(s)$ du régulateur, conformément aux développements du Chapitre 1, elle a pour expression :

$$C_R(s) = C_0 \left(\frac{\omega_l}{s} \right) \prod_{i=1}^N \left(\frac{1 + s/\omega'_i}{1 + s/\omega_i} \right), \quad (4.13)$$

avec

$$\begin{cases} \frac{\omega'_{i+1}}{\omega'_i} = \frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} = \alpha\eta > 1 \\ \frac{\omega_i}{\omega'_i} = \alpha \text{ et } \frac{\omega'_{i+1}}{\omega_i} = \eta \\ \alpha\eta = (\omega_h/\omega_l)^{1/N} \\ \alpha = (\alpha\eta)^{1+m} \text{ et } \eta = (\alpha\eta)^{-m} \\ \omega'_1 = \omega_l \eta^{1/2} \text{ et } \omega_N = \omega_h \eta^{-1/2} \end{cases}. \quad (4.14)$$

La suite de ce paragraphe est consacrée à trois exemples d'illustration correspondant aux valeurs extrêmes de la marge de phase M_ϕ (45° et 90°) et à sa valeur moyenne $(45^\circ+90^\circ)/2$, soit 67.5° .

4.2.2 – Exemples d'illustration

4.2.2.1 – Exemple 1 : marge de phase $M_\phi = 45^\circ$

Si $M_\phi = 45^\circ$, alors $m = (M_\phi - 180^\circ - \arg P_1(j\omega_u))/90^\circ = -1$. L'expression du transfert du régulateur se réduit alors à :

$$C_F(s) = C_0 \left(\frac{\omega_l}{s} \right). \quad (4.15)$$

Dans ce cas particulier, le régulateur se résume à un intégrateur d'ordre 1, noté $C_I(s)$, caractérisé par un seul paramètre $C_0^* = C_0 \omega_l$ calculé pour respecter la spécification concernant la rapidité, soit :

$$|\beta(j\omega_u)| = 1 \Leftrightarrow |C_F(j\omega_u)| |P_1(j\omega_u)| = 1, \quad (4.16)$$

ou encore, compte tenu de l'expression de $C_F(j\omega)$,

$$\frac{C_0^*}{\omega_u} |P_1(j\omega_u)| = 1, \quad (4.17)$$

soit finalement

$$C_0^* = \frac{\omega_u}{|P_1(j\omega_u)|} \Rightarrow C_0^* = 2.405 \text{ W s}^{-1} \text{ deg}^{-1}. \quad (4.18)$$

A noter, dans ce cas particulier, que les formes fractionnaire $C_F(s)$ et rationnelle $C_R(s)$ du régulateur sont identiques.

4.2.2.2 – Exemple 2 : marge de phase $M_\phi = (45^\circ+90^\circ)/2 = 67.5^\circ$

Si $M_\phi = 67.5^\circ$, alors $m = (M_\phi - 180^\circ - \arg P_1(j\omega_u))/90^\circ = -0.75$. L'expression fractionnaire $C_F(s)$ du transfert du régulateur se réduit alors à :

$$C_F(s) = C_0 \left(\frac{\omega_l}{s} \right) \left(\frac{1+s/\omega_l}{1+s/\omega_h} \right)^{0.25}. \quad (4.19)$$

Dans ce cas, le régulateur se résume à un intégrateur d'ordre 1 en cascade avec une cellule à avance de phase d'ordre 0.25, avec conformément aux développements précédents :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_A = \omega_{u \min} = 72.77 \cdot 10^{-2} \text{ rad/s} \\ \omega_B = \omega_{u \max} = 137.43 \cdot 10^{-2} \text{ rad/s} \end{array} \right\} \Rightarrow r = 1.89$$

$$b = 25 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_l = 2.91 \cdot 10^{-2} \text{ rad/s} \\ \omega_h = 34.36 \text{ rad/s} \end{array} \right. . \quad (4.20)$$

$$C_0 = 34.125 \text{ W/}^\circ$$

Quant aux paramètres de la forme rationnelle $C_R(s)$, ils ont pour valeurs :

$$\left\{ \begin{array}{ll} N = 6 \\ \omega_1 = 8.17 \cdot 10^{-2} \text{ rad/s} & \omega_1 = 3.37 \cdot 10^{-2} \text{ rad/s} \\ \omega_2 = 26.55 \cdot 10^{-2} \text{ rad/s} & \omega_2 = 10.96 \cdot 10^{-2} \text{ rad/s} \\ \omega_3 = 86.3 \cdot 10^{-2} \text{ rad/s} & \omega_3 = 35.64 \cdot 10^{-2} \text{ rad/s} \\ \omega_4 = 2.81 \text{ rad/s} & \omega_4 = 1.159 \text{ rad/s} \\ \omega_5 = 9.12 \text{ rad/s} & \omega_5 = 3.77 \text{ rad/s} \\ \omega_6 = 29.65 \text{ rad/s} & \omega_6 = 12.25 \text{ rad/s} \end{array} \right. . \quad (4.21)$$

4.2.2.3 – Exemple 3 : marge de phase $M_\phi = 90^\circ$

Si $M_\phi = 90^\circ$, alors $m = (M_\phi - 180^\circ - \arg P_1(j\omega_u))/90^\circ = -0.5$. L'expression fractionnaire $C_F(s)$ du transfert du régulateur se réduit alors à :

$$C_F(s) = C_0 \left(\frac{\omega_l}{s} \right) \left(\frac{1 + s/\omega_l}{1 + s/\omega_h} \right)^{0.5} . \quad (4.22)$$

Dans ce cas, le régulateur se résume à un intégrateur d'ordre 1 en cascade avec une cellule à avance de phase d'ordre 0.5, avec conformément aux développements précédents :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \omega_A = \omega_{u \min} = 67.21 \cdot 10^{-2} \text{ rad/s} \\ \omega_B = \omega_{u \max} = 148.8 \cdot 10^{-2} \text{ rad/s} \end{array} \right\} \Rightarrow r = 2.214 \\ b = 25 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_l = 2.69 \cdot 10^{-2} \text{ rad/s} \\ \omega_h = 37.2 \text{ rad/s} \end{array} \right. , \\ C_0 = 14.67 \text{ W/}^\circ \end{array} \right. , \quad (4.23)$$

Quant aux paramètres de la forme rationnelle $C_R(s)$, ils ont pour valeurs :

$$\left\{ \begin{array}{ll} N = 6 \\ \omega_1 = 6.64 \cdot 10^{-2} \text{ rad/s} & \omega_1 = 3.63 \cdot 10^{-2} \text{ rad/s} \\ \omega_2 = 22.16 \cdot 10^{-2} \text{ rad/s} & \omega_2 = 12.13 \cdot 10^{-2} \text{ rad/s} \\ \omega_3 = 73.98 \cdot 10^{-2} \text{ rad/s} & \omega_3 = 40.49 \cdot 10^{-2} \text{ rad/s} \\ \omega_4 = 2.47 \text{ rad/s} & \omega_4 = 1.352 \text{ rad/s} \\ \omega_5 = 8.24 \text{ rad/s} & \omega_5 = 4.51 \text{ rad/s} \\ \omega_6 = 27.52 \text{ rad/s} & \omega_6 = 15.06 \text{ rad/s} \end{array} \right. . \quad (4.24)$$

4.2.3 – Performances

Les figures 4.1 à 4.6 présentent les réponses fréquentielles et temporelles obtenues avec les trois régulateurs.

Plus précisément, les figures 4.1.a, b et c présentent les diagrammes de Bode des régulateurs CRONE $C_F(s)$ pour $M_\phi = 45^\circ$ (a), $M_\phi = 67.5^\circ$ (b) et $M_\phi = 90^\circ$ (c). Ces réponses fréquentielles permettent de visualiser, pour les trois régulateurs, la différence de comportement qui se situe au voisinage de $\omega_u = 1 \text{ rad/s}$.

Les figures 4.2 présentent les diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte tracés sur l'intervalle $[10^{-6} \text{ rad/s} ; 10 \text{ rad/s}]$ (a) (c) (e), avec un zoom autour de la fréquence au gain unité $\omega_u = 1 \text{ rad/s}$ (b) (d) (f), pour $M_\phi = 45^\circ$ (a) (b), $M_\phi = 67.5^\circ$ (c) (d) et $M_\phi = 90^\circ$ (e) (f). L'observation de ses réponses fréquentielles permet de vérifier que les comportements aux basses, moyennes et hautes fréquences sont bien conformes aux spécifications, et que la fréquence nominale au gain unité en boucle ouverte est bien de 1 rad/s dans le cas de l'aluminium

Les figures 4.3 présentent les lieux de Black-Nichols de la fonction de transfert en boucle ouverte tracés sur l'intervalle $[-40 \text{ dB} ; 180 \text{ dB}]$ (a) (c) (e) et avec un zoom autour de la fréquence au gain unité $\omega_u = 1 \text{ rad/s}$ (b) (d) (f), pour $M_\phi = 45^\circ$ (a) (b), $M_\phi = 67.5^\circ$ (c) (d) et $M_\phi = 90^\circ$ (e) (f). La constance de la marge de phase M_ϕ quel que soit l'état paramétrique illustre bien, dans le plan de Black-Nichols, la robustesse du degré de stabilité vis-à-vis des variations paramétriques.

Les figures 4.4 présentent les diagrammes de gain des fonctions de sensibilité $S(j\omega)$ (a) (c) (e) et $T(j\omega)$ (b) (d) (f), pour $M_\phi = 45^\circ$ (a) (b), $M_\phi = 67.5^\circ$ (c) (d) et $M_\phi = 90^\circ$ (e) (f). La constance des facteurs de résonance, en particulier ceux de la fonction de sensibilité complémentaire T , quel que soit l'état paramétrique illustre bien dans le domaine fréquentiel la robustesse du degré de stabilité vis-à-vis des variations paramétriques.

Les figures 4.5 présentent les diagrammes de gain des fonctions de sensibilité $SC(j\omega)$ (a) (c) (e) et $SP(j\omega)$ (b) (d) (f), pour $M_\phi = 45^\circ$ (a) (b), $M_\phi = 67.5^\circ$ (c) (d) et $M_\phi = 90^\circ$ (e) (f).

Enfin, les figures 4.6 présentent les réponses indicielles à un saut échelon de consigne d'amplitude 1°C de la température de sortie (a) (c) (e) et de la commande (b) (d) (f), pour $M_\phi = 45^\circ$ (a) (b), $M_\phi = 67.5^\circ$ (c) (d) et $M_\phi = 90^\circ$ (e) (f). La constance du premier dépassement réduit et du facteur d'amortissement quel que soit l'état paramétrique illustre bien dans le domaine temporel la robustesse du degré de stabilité vis-à-vis des variations paramétriques.

Dans tous les cas, ces performances sont bien obtenues sans risque de saturation de la commande. Bien entendu, un travail complémentaire non traité dans ce mémoire concerne la génération des consignes.

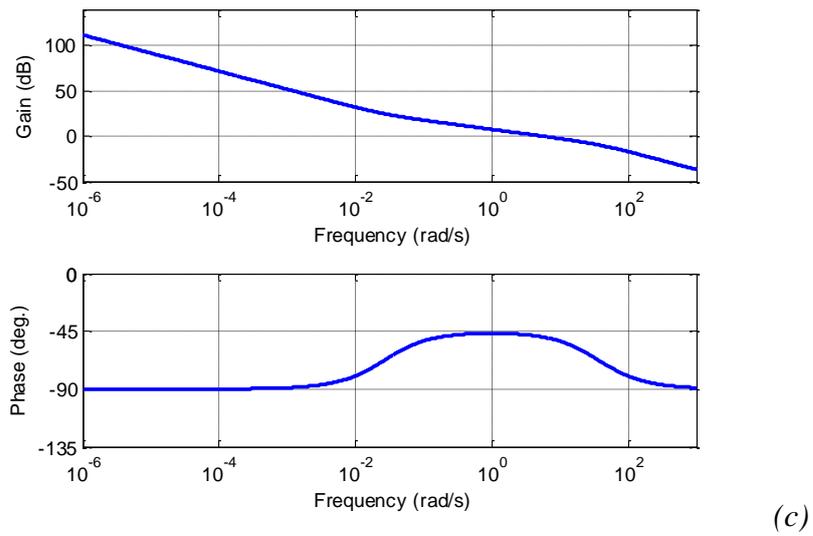
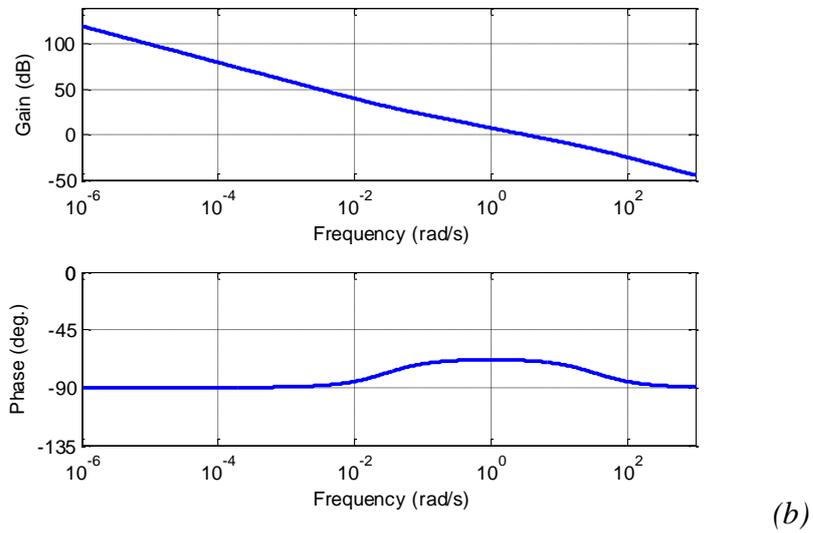
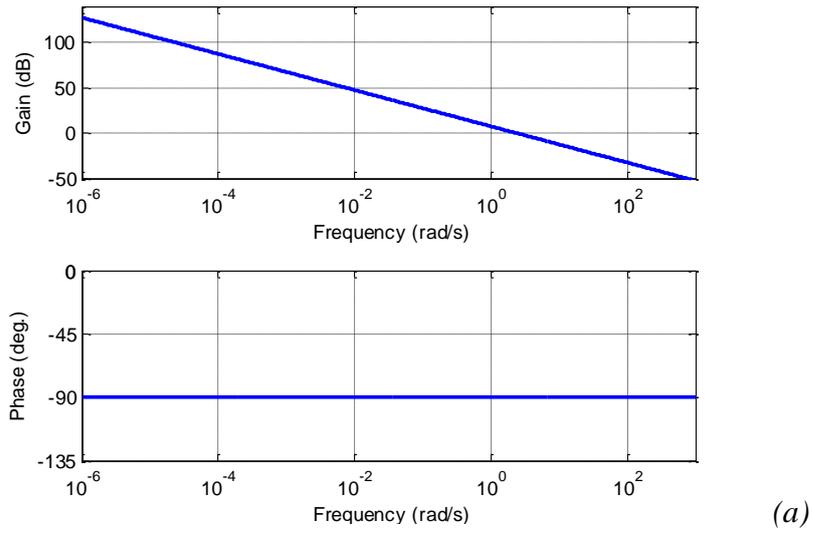


Figure 4.1 – Diagrammes de Bode du régulateur CRONE $C_F(s)$ pour $M_\phi = 45^\circ$ (a), $M_\phi = 67.5^\circ$ (b) et $M_\phi = 90^\circ$ (c)

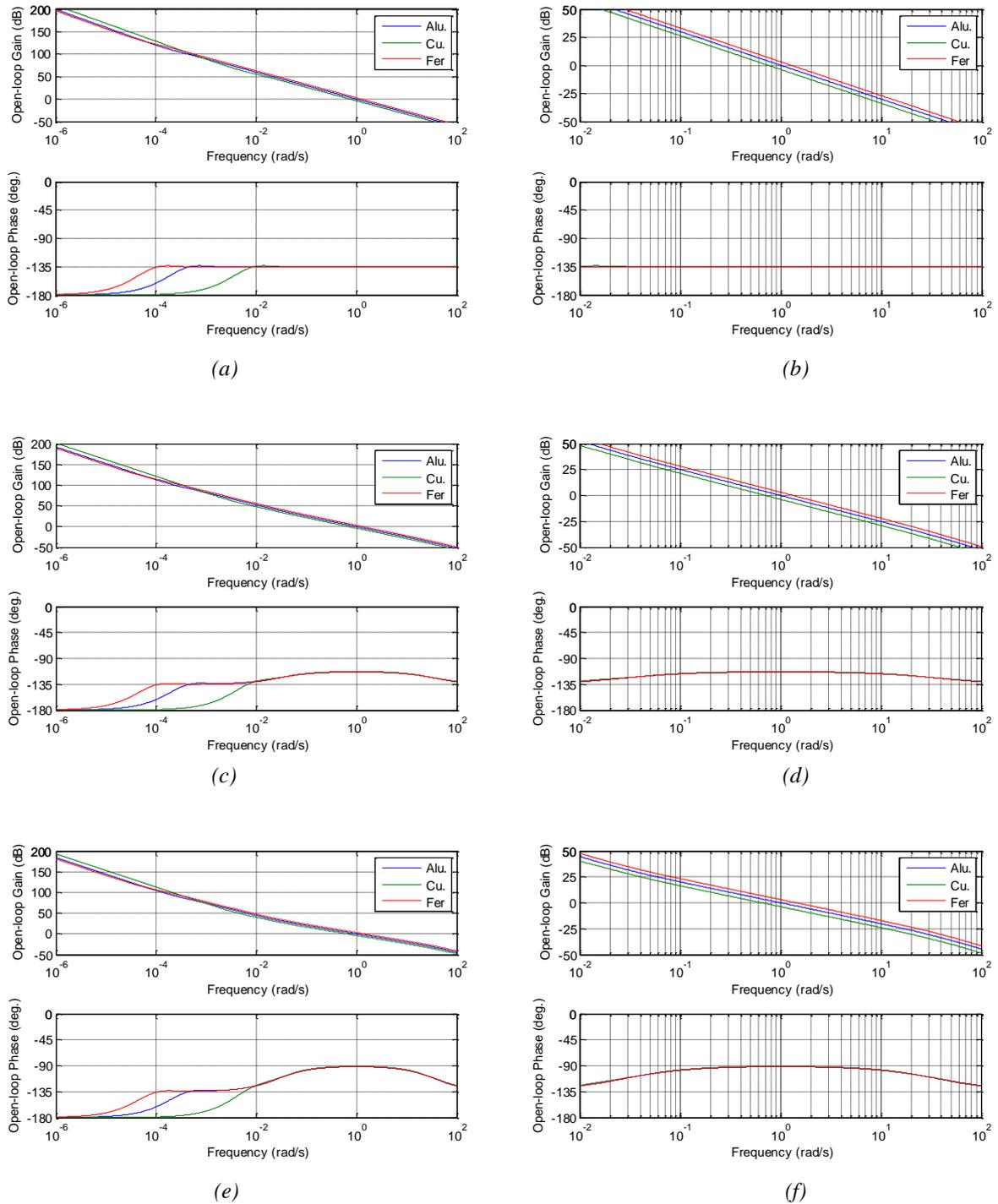


Figure 4.2 – Diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte tracés : sur l'intervalle $[10^{-6} \text{ rad/s} ; 10 \text{ rad/s}]$ (a) (c) (e), avec un zoom autour de la fréquence au gain unité $\omega_u = 1 \text{ rad/s}$ (b) (d) (f), pour $M_\phi = 45^\circ$ (a) (b), $M_\phi = 67.5^\circ$ (c) (d) et $M_\phi = 90^\circ$ (e) (f)

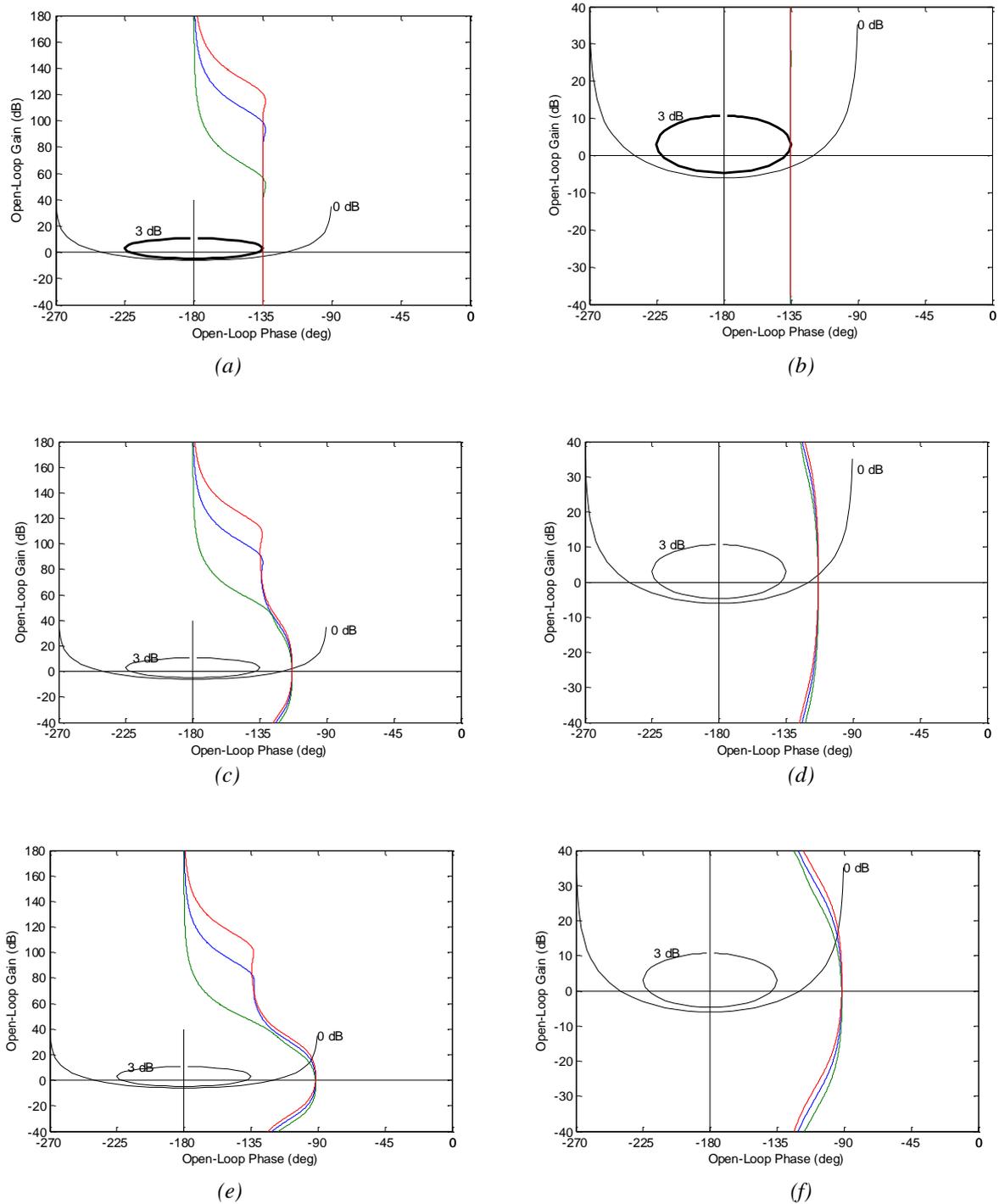
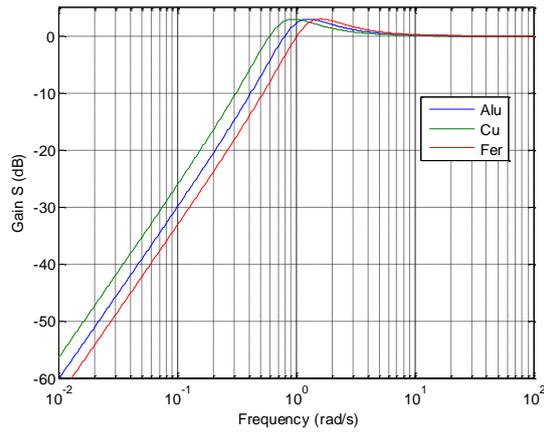
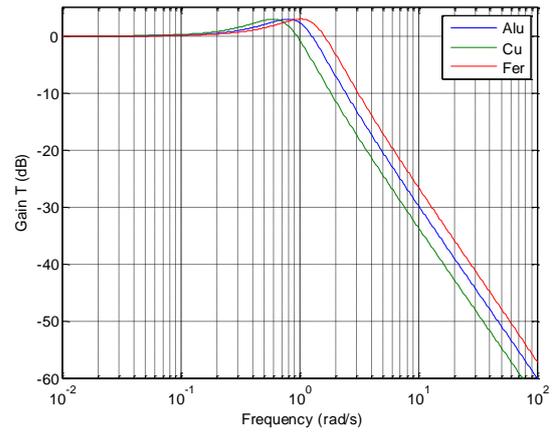


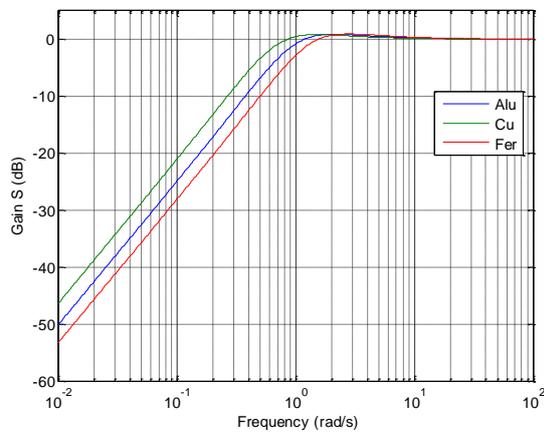
Figure 4.3 – Lieux de Black-Nichols de la fonction de transfert en boucle ouverte tracés : sur l'intervalle $[-40 \text{ dB} ; 180 \text{ dB}]$ (a) (c) (e) et avec un zoom autour de la fréquence au gain unité $\omega_u = 1 \text{ rad/s}$ (b) (d) (f), pour $M_\phi = 45^\circ$ (a) (b), $M_\phi = 67.5^\circ$ (c) (d) et $M_\phi = 90^\circ$ (e) (f)



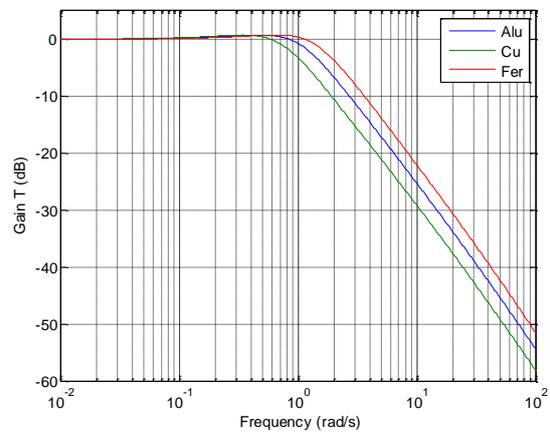
(a)



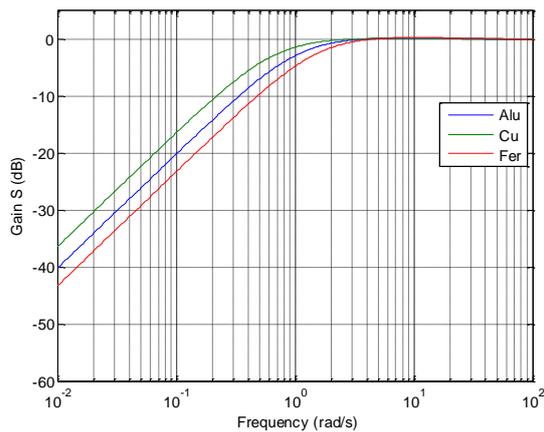
(b)



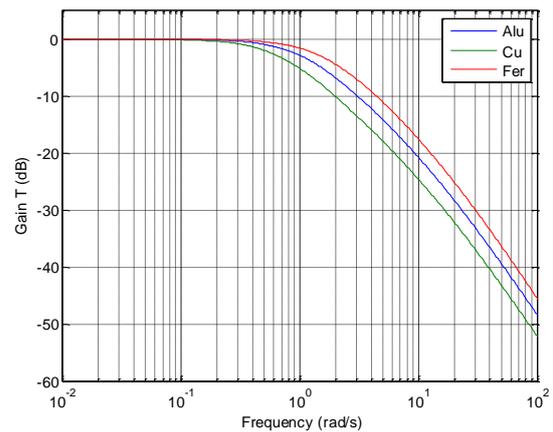
(c)



(d)

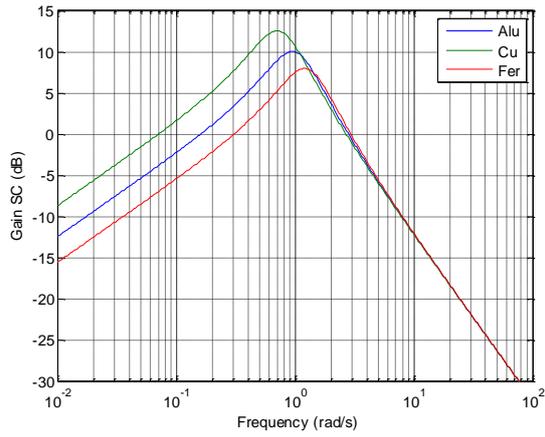


(e)

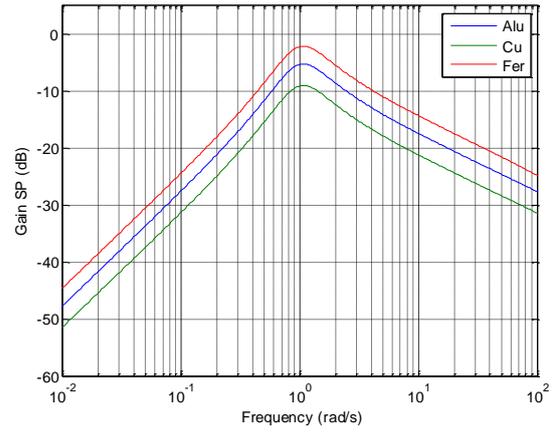


(f)

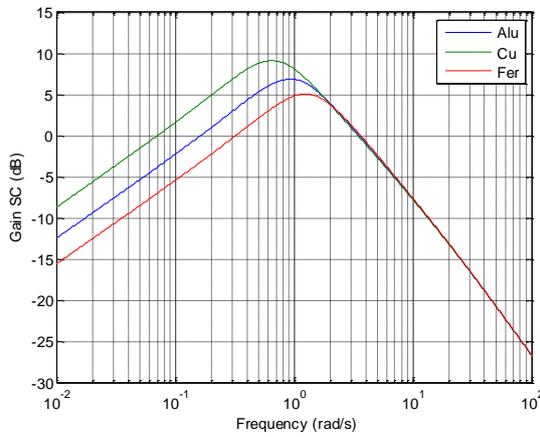
Figure 4.4 – Diagrammes de gain des fonctions de sensibilité :
 $S(j\omega)$ (a) (c) (e) et $T(j\omega)$ (b) (d) (f),
pour $M_\phi = 45^\circ$ (a) (b), $M_\phi = 67.5^\circ$ (c) (d) et $M_\phi = 90^\circ$ (e) (f)



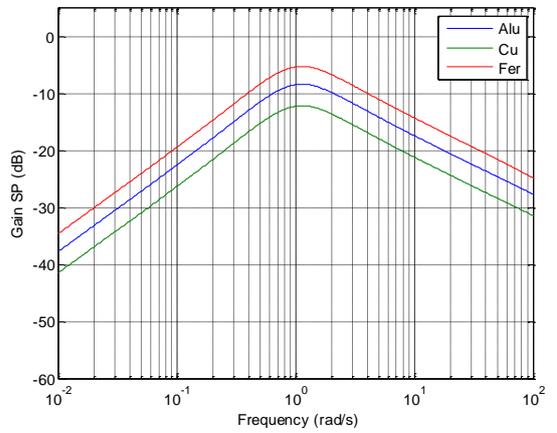
(a)



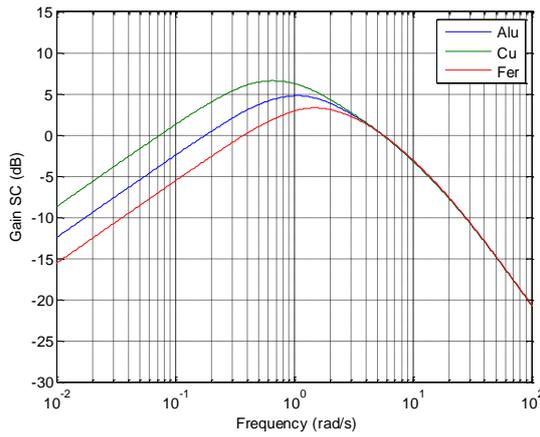
(b)



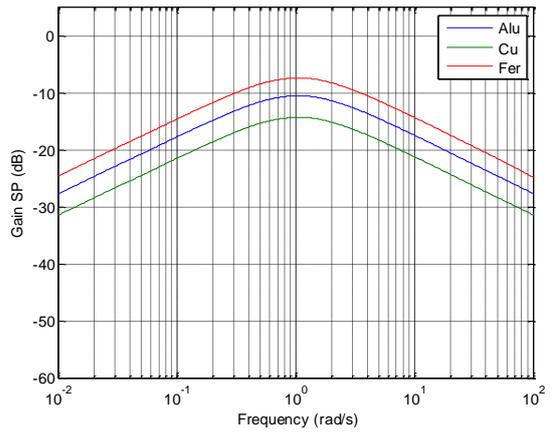
(c)



(d)

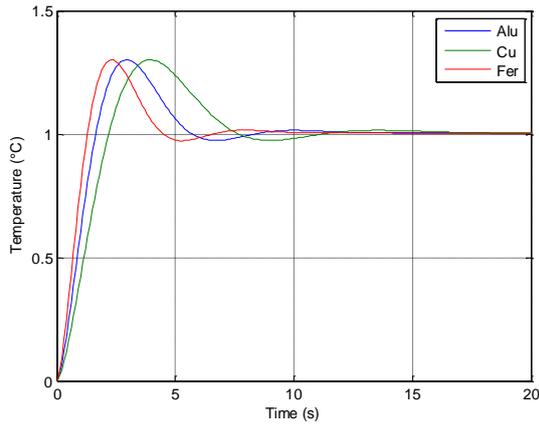


(e)

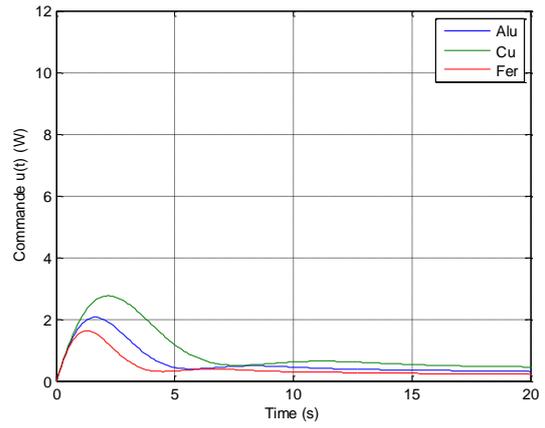


(f)

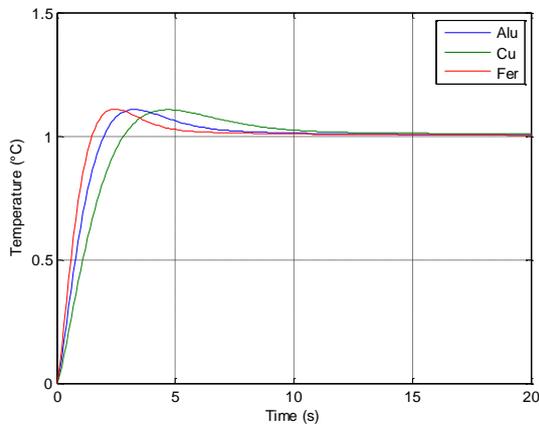
Figure 4.5 – Diagrammes de gain des fonctions de sensibilité :
 $SC(j\omega)$ (a) (c) (e) et $SP(j\omega)$ (b) (d) (f),
pour $M_\phi = 45^\circ$ (a) (b), $M_\phi = 67.5^\circ$ (c) (d) et $M_\phi = 90^\circ$ (e) (f)



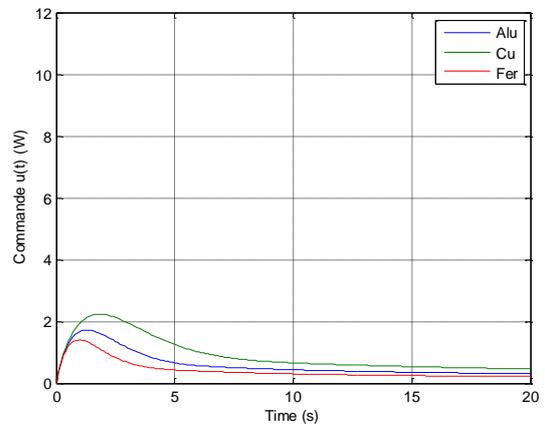
(a)



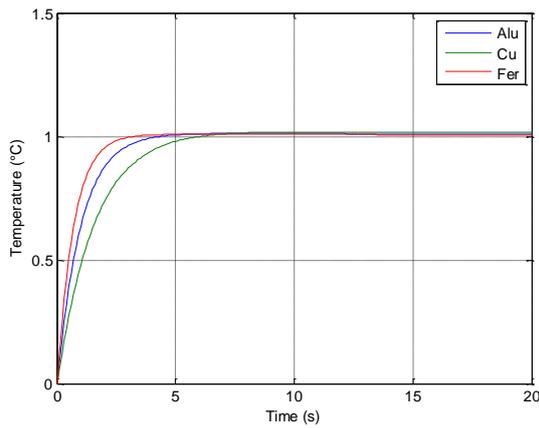
(b)



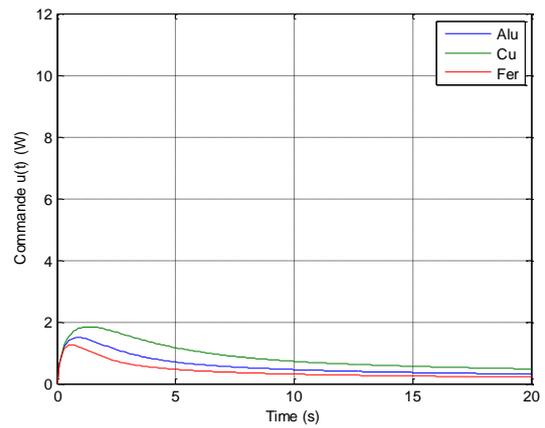
(c)



(d)



(e)



(f)

Figure 4.6 – Réponses indicielles à un saut échelon de consigne d'amplitude 1°C : température de sortie (a) (c) (e) et commande (b) (d) (f), pour $M_{\phi} = 45^{\circ}$ (a) (b), $M_{\phi} = 67.5^{\circ}$ (c) (d) et $M_{\phi} = 90^{\circ}$ (e) (f)

4.3 – Commande CRONE de 2^{ème} génération

4.3.1 – Méthode de détermination des paramètres du régulateur

Pour rappel, le modèle $P_{2,1}(s)$ utilisé pour la synthèse de la commande CRONE de 2^{ème} génération pour ce cas d'étude est donné par :

$$P_{2,1}(s) = H_0^* \frac{(1 + s/\omega_L)^{0.5}}{s/\omega_L} , \quad (4.25)$$

où
$$H_0^* = \frac{H_0}{\omega_L^{0.5}} . \quad (4.26)$$

Les valeurs de l'état paramétrique nominal sont toujours données par :

$$\begin{cases} H_0 = H_0(\text{Alu}) = 0.416 \text{ K s}^{0.5} \text{ W}^{-1} \\ \omega_L = \omega_L(\text{Alu}, L = 1\text{m}) = 0.97 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s} \end{cases} ,$$

celles des intervalles bornés étant identiques à celles de $P_1(s)$.

Toujours pour rappel, l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte $\beta(s)$ a pour expression (voir Chapitre 1) :

$$\beta(s) = \beta_0 \left(\frac{1 + s/\omega_l}{s/\omega_l} \right)^{n_l} \left(\frac{1 + s/\omega_h}{1 + s/\omega_l} \right)^n \frac{1}{(1 + s/\omega_h)^{n_h}} , \quad (4.27)$$

où ω_l et ω_h représentent les fréquences transitionnelles basse et haute ($\omega_l < \omega_h$), n l'ordre non entier compris entre 1 et 2 au voisinage de la fréquence ω_u , n_l et n_h sont les ordres des comportements asymptotiques aux basses et hautes fréquences et β_0 une constante qui assure un gain unité à la fréquence ω_u .

Par ailleurs, sachant que $\beta(s) = C_F(s) P_{2,1}(s)$, la forme fractionnaire $C_F(s)$ du régulateur CRONE est donnée par :

$$C_F(s) = \beta(s) P_{2,1}^{-1}(s) , \quad (4.28)$$

ou encore, compte tenu des expressions de $\beta(s)$ et $P_{2,1}(s)$,

$$C_F(s) = \beta_0 \left(\frac{1 + s/\omega_l}{s/\omega_l} \right)^{n_l} \left(\frac{1 + s/\omega_h}{1 + s/\omega_l} \right)^n \frac{1}{(1 + s/\omega_h)^{n_h}} \frac{s/\omega_L}{H_0^* (1 + s/\omega_L)^{0.5}} . \quad (4.29)$$

Compte tenu des données de synthèse, on choisit :

- $n_l = 2$, pour assurer une erreur de trainage nulle ;
- $n = (180^\circ - M_\phi)/90^\circ$, pour assurer une marge de phase $M_\phi \in [45^\circ ; 90^\circ]$, soit $n \in [1 ; 1.5]$;
- $n_h = 1.5$, pour limiter la sensibilité de l'entrée ;
- $\omega_{umom} = 1 \text{ rad/s}$, valeur imposée toujours dans le cadre de cette étude comparative à iso-rapidité des différentes commandes CRONE.

Dans ce cas, l'expressions (4.29) de $C_F(s)$ peut alors se réécrire de manière plus condensée sous la forme :

$$C_F(s) = C_0 \left(\frac{\omega_l}{s} \right) \left(\frac{1+s/\omega_l}{1+s/\omega_h} \right)^{2-n} \left(\frac{1+s/\omega_h}{1+s/\omega_L} \right)^{0.5}, \quad (4.30)$$

où

$$C_0 = \frac{\beta_0 \omega_l}{H_0^* \omega_L}. \quad (4.31)$$

La suite de ce paragraphe est consacrée aux trois cas d'étude déjà traités avec la commande CRONE de 1^{ère} génération, cas correspondant aux valeurs extrêmes de la marge de phase M_ϕ (45° et 90°) et à sa valeur moyenne $(45^\circ+90^\circ)/2$, soit 67.5° .

4.3.2 – Exemples d'illustration

4.3.2.1 – Exemple 4 : marge de phase $M_\phi = 45^\circ$

Si $M_\phi = 45^\circ$, alors $n = (180^\circ - M_\phi)/90^\circ = 1.5$. L'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte se réduit alors à :

$$\beta(s) = \beta_0 \frac{(1+s/\omega_l)^{0.5}}{(s/\omega_l)^2}, \quad (4.32)$$

et celle du régulateur à :

$$C_F(s) = C_0 \left(\frac{\omega_l}{s} \right) \left(\frac{1+s/\omega_l}{1+s/\omega_L} \right)^{0.5}. \quad (4.33)$$

Si de plus on choisit $\omega_l = \omega_L$, alors $C_F(s)$ se réduit à :

$$C_F(s) = C_0 \left(\frac{\omega_l}{s} \right), \quad (4.34)$$

expression identique à celle du régulateur CRONE de 1^{ère} génération obtenue au paragraphe précédent pour le même cas d'étude (voir Exemple 1).

4.3.2.2 – Exemple 5 : marge de phase $M_\phi = (45^\circ+90^\circ)/2 = 67.5^\circ$

Si $M_\phi = 67.5^\circ$, alors $n = (180^\circ - M_\phi)/90^\circ = 1.25$. L'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte se réduit alors à :

$$\beta(s) = \beta_0 \left(\frac{\omega_l}{s} \right)^2 \frac{(1+s/\omega_l)^{0.75}}{(1+s/\omega_h)^{0.25}}, \quad (4.35)$$

et celle du régulateur à :

$$C_F(s) = C_0 \left(\frac{\omega_l}{s} \right) \frac{(1+s/\omega_l)^{0.75}}{(1+s/\omega_L)^{0.5}} \frac{1}{(1+s/\omega_h)^{0.25}}. \quad (4.36)$$

Si de plus on choisit $\omega_l = \omega_L$, alors $C_F(s)$ se réduit à :

$$C_F(s) = C_0 \left(\frac{\omega_l}{s} \right) \left(\frac{1+s/\omega_l}{1+s/\omega_h} \right)^{0.25}, \quad (4.37)$$

expression identique à celle du régulateur CRONE de 1^{ère} génération obtenue au paragraphe précédent pour le même cas d'étude (voir Exemple 2).

4.3.2.3 – Exemple 6 : marge de phase $M_\phi = 90^\circ$

Si $M_\phi = 90^\circ$, alors $n = (180^\circ - M_\phi)/90^\circ = 1$. L'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte se réduit alors à :

$$\beta(s) = \beta_0 \left(\frac{\omega_l}{s} \right)^2 \frac{(1 + s/\omega_l)}{(1 + s/\omega_h)^{0.5}}, \quad (4.38)$$

et celle du régulateur à :

$$C_F(s) = C_0 \left(\frac{\omega_l}{s} \right) \frac{(1 + s/\omega_l)}{(1 + s/\omega_L)^{0.5}} \frac{1}{(1 + s/\omega_h)^{0.5}}. \quad (4.39)$$

Si de plus on choisit $\omega_l = \omega_L$, alors $C_F(s)$ se réduit à :

$$C_F(s) = C_0 \left(\frac{\omega_l}{s} \right) \left(\frac{1 + s/\omega_l}{1 + s/\omega_h} \right)^{0.5}, \quad (4.40)$$

expression identique à celle du régulateur CRONE de 1^{ère} génération obtenue au paragraphe précédent pour le même cas d'étude (voir Exemple 3).

4.3.3 – Performances

4.3.3.1 – En $x = 0$

Au final, pour les trois cas d'étude correspondant aux trois valeurs de la marge de phase $M_\phi = 45^\circ$, 67.5° et 90° , les structures des régulateurs synthétisés avec les démarches commande CRONE de 1^{ère} et 2^{ème} générations sont identiques. C'est la raison pour laquelle les performances obtenues, notamment dans les exemples 1 et 4, sont les mêmes.

Toutefois, il existe une petite différence au niveau des exemples 5 et 6 par rapport aux exemples 2 et 3 en raison du choix de $\omega_l = \omega_L$ qui conduit à $\omega_l = 0.97 \cdot 10^{-4}$ rad/s (valeur fixée par l'état paramétrique nominal : aluminium et $L = 1$ m ; voir tableau 3.1). En effet, en boucle ouverte, cette différence se traduit sur l'intervalle fréquentiel [10^{-4} rad/s ; 10^{-2} rad/s] par l'absence (exemples 5 et 6) d'un comportement asymptotique caractérisé par une phase bloquée à -135° (exemples 2 et 3).

Par contre aux très basses fréquences ($\omega < 10^{-4}$ rad/s), au voisinage de $\omega_u = 1$ rad/s et aux hautes fréquences, les comportements en boucle ouverte sont identiques pour chaque cas d'étude (exemples 2 et 5, exemples 3 et 6). C'est la raison pour laquelle les performances (en boucle fermée) obtenues avec les commandes CRONE 1^{ère} et 2^{ème} générations sont les mêmes.

4.3.3.2 – En $x > 0$

Il est intéressant d'analyser *a posteriori* la sensibilité du degré de stabilité à la position x à travers la marge de phase $M_\phi(x)$, l'objectif étant toujours de réguler la température $T(0,t)$ en $x = 0$, mais en analysant l'influence de la position x du capteur lorsque celui-ci n'est pas positionné exactement à $x = 0$.

Ainsi, en $x > 0$, l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte $\beta(s,x)$ est donnée par

$$\beta(s,x) = C(s) P_{2,1}(s) e^{-\left(\frac{s}{\omega_x}\right)^{0.5}}, \quad (4.41)$$

ou encore, en introduisant le transfert nominal de la boucle ouverte $\beta_{nom}(s)$,

$$\beta(s,x) = \beta_{nom}(s) e^{-\left(\frac{s}{\omega_x}\right)^{0.5}}, \quad (4.42)$$

dont la réponse fréquentielle $\beta(j\omega,x)$ a pour expression

$$\beta(j\omega,x) = \beta_{nom}(j\omega) e^{-\left(j\frac{\omega}{\omega_x}\right)^{0.5}}. \quad (4.43)$$

Sachant que

$$e^{-\left(j\frac{\omega}{\omega_x}\right)^{0.5}} = m(x,\omega) e^{-j\theta(x,\omega)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m(x,\omega) = e^{-\left(\frac{\omega}{2\omega_x}\right)^{0.5}} = e^{-x\left(\frac{\omega}{2\alpha_d}\right)^{0.5}} \\ \theta(x,\omega) = -\left(\frac{\omega}{2\omega_x}\right)^{0.5} = -x\left(\frac{\omega}{2\alpha_d}\right)^{0.5} \end{cases}, \quad (4.44)$$

le gain et l'argument de la boucle ouverte sont donnés par

$$\begin{cases} |\beta(j\omega,x)| = |\beta_{nom}(j\omega)| m(x,\omega) \\ \arg \beta(j\omega,x) = \arg \beta_{nom}(j\omega) + \theta(x,\omega) \end{cases}. \quad (4.45)$$

Par définition, l'expression de la marge de phase $M_\phi(x)$ à la fréquence au gain unité, ω_u , est de la forme :

$$\begin{aligned} M_\phi(x) &= \pi + \arg \beta(x, j\omega_u) \\ &= \pi + \arg \beta_{nom}(j\omega_u) + \theta(x, \omega_u), \\ &= \left(\pi - n \frac{\pi}{2}\right) - \sqrt{\frac{\omega_u}{2\alpha_d}} x \end{aligned} \quad (4.46)$$

expression qui montre que :

- pour n , ω_u et α_d donnés, $M_\phi(x)$ est une fonction linéaire décroissante de la variable x ;
- la pente négative de la droite ainsi obtenue est d'autant plus importante que ω_u est grande et que la diffusivité thermique α_d du matériau est faible ;
- l'ordre n résultant du choix de la marge de phase $M_\phi(0)$ en $x = 0$ n'a pas d'influence sur la pente de la droite et donc sur la sensibilité du degré de stabilité de la commande à la position x .

Il existe une position critique x_{crit} qui conduit à une marge de phase nulle (système juste oscillant en boucle fermée) au-delà de laquelle le système est instable, soit :

$$M_{\phi}(x)=0 \Rightarrow x_{crit} = \left(\pi - n \frac{\pi}{2} \right) \sqrt{\frac{2\alpha_d}{\omega_u}} . \quad (4.47)$$

Entre les positions $x = 0$ et $x = x_{crit}$, il existe une position limite, x_{lim} , correspondant à une marge de phase minimale $M_{\phi_{min}}$ qui peut être spécifiée par le cahier des charges, soit :

$$x_{lim} = \sqrt{\frac{2\alpha_d}{\omega_u}} \left(\pi - n \frac{\pi}{2} - M_{\phi_{min}} \right) \in [0; x_{crit}] . \quad (4.48)$$

A titre d'illustration, la figure 4.7 présente pour $n = 1.5$ (soit $M_{\phi}(0) = 45^\circ$) la variation de la marge de phase $M_{\phi}(x)$ en fonction de la position x (en cm) et des trois matériaux. Pour cet exemple d'illustration, les valeurs critiques de x sont 0.65 cm pour le fer, 1.52 cm pour l'aluminium et 1.91 cm pour le cuivre. Ainsi, par exemple, pour $x = 0.5$ cm, la marge de phase n'est plus que de 10.5° pour le fer, 30.2° pour l'aluminium et 33.2° pour le cuivre.

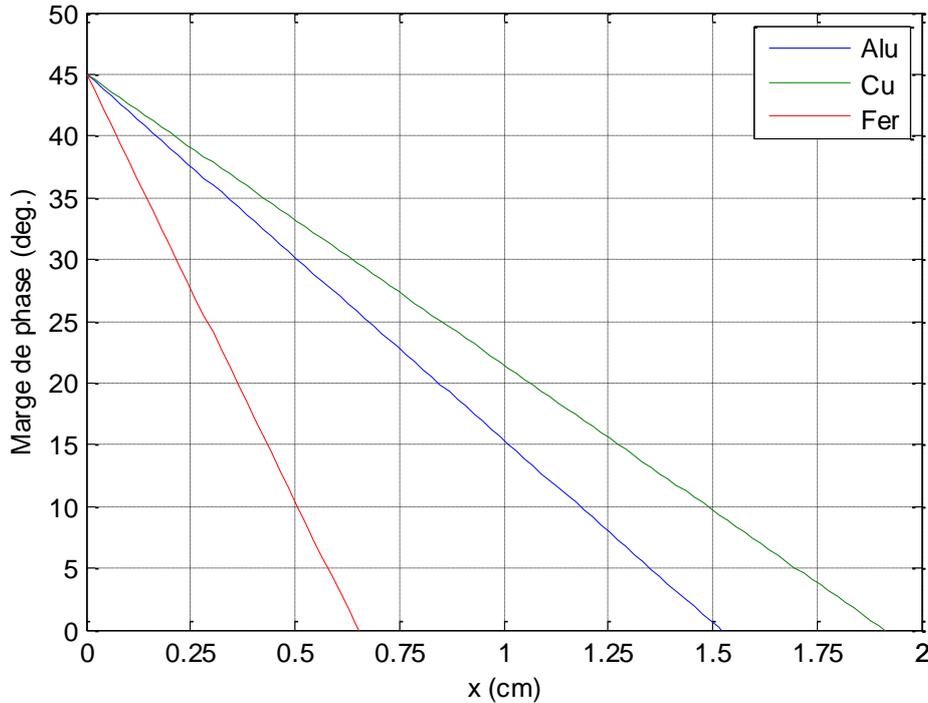


Figure 4.7 – Variation de la marge de phase $M_{\phi}(x)$ pour $n = 1.5$ en fonction de la position x (en cm) et du matériau

A titre d'illustration, deux simulations sont effectuées en utilisant le régulateur synthétisé dans le cadre de l'exemple 4 ($M_{\phi}(0) = 45^\circ$). Dans la première simulation (Figure 4.8.a), le bouclage est fait à partir d'une température $T(t,0)$ mesurée en $x = 0$ et les tracés de l'évolution des températures $T(t,0)$ en $x = 0$ et $T(t,x)$ en $x = 5$ mm sont présentés (Figure 4.9.a, c et e). Dans la seconde simulation (Figure 4.8.b), le bouclage est fait à partir d'une température $T(t,x)$ mesurée en $x = 5$ mm et les tracés de l'évolution des températures $T(t,0)$ en $x = 0$ et $T(t,x)$ en $x = 5$ mm sont de nouveau présentés (Figure 4.9.b, d et f). Ce dernier cas permet d'illustrer

l'influence d'une incertitude de positionnement du capteur d'une valeur de 5 mm sur le comportement dynamique de la régulation.

A noter que la valeur de $x = 5$ mm est similaire à celle choisie dans [Sabatier, 2008].

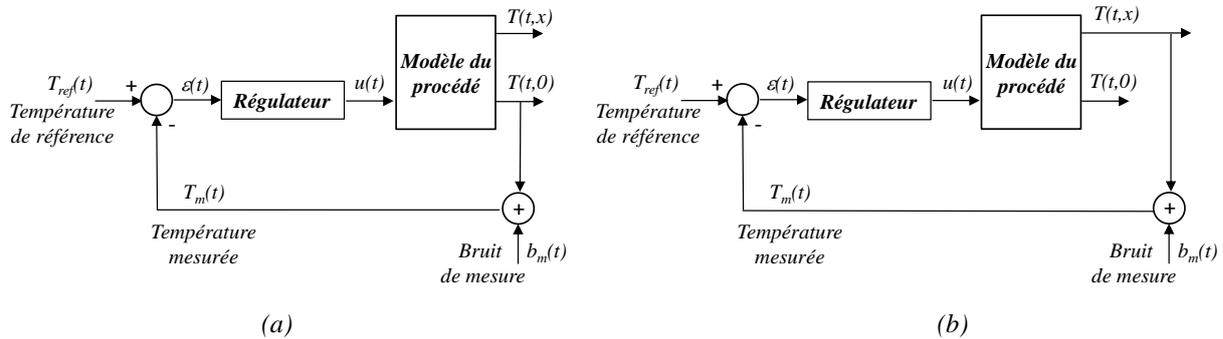


Figure 4.8 – Schémas de commande illustrant les deux cas d'étude simulés avec le régulateur synthétisé à l'exemple 4 ($M_{\phi}(0) = 45^\circ$) : (a) bouclage fait à partir d'une température $T(t,0)$ mesurée en $x = 0$; (b) bouclage fait à partir d'une température $T(t,x)$ mesurée en $x = 5$ mm

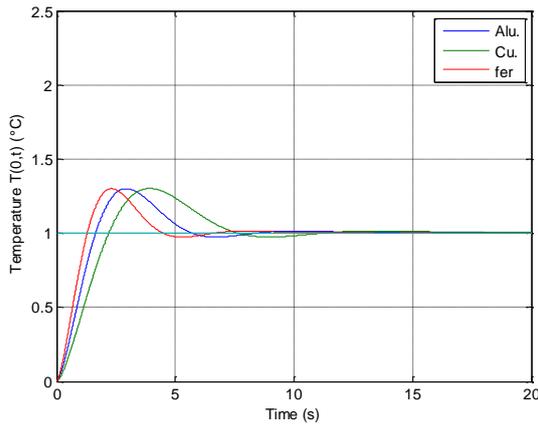
Dans ce contexte de simulation ainsi défini, la figure 4.9 présente les réponses indicielles des températures $T(t,0)$ en $x = 0$ (1^{ère} ligne : a et b), $T(t,x)$ en $x = 5$ mm (2^{ème} ligne : c et d) et des commandes $u(t)$ correspondantes (3^{ème} ligne : e et f) à un saut échelon de consigne de 1°C pour l'aluminium, le cuivre et le fer, dans le cas d'un bouclage fait à partir d'une température $T(t,0)$ mesurée en $x = 0$ (1^{ère} colonne : a, c et e) et d'un bouclage fait à partir d'une température $T(t,x)$ mesurée en $x = 5$ mm (2^{ème} colonne : b, d et f).

L'observation de ces réponses conduit à plusieurs remarques.

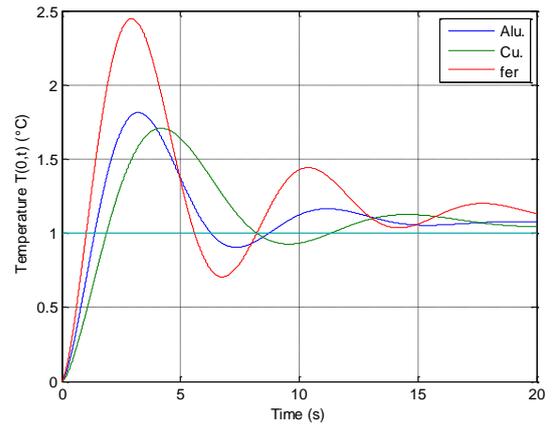
D'abord, **en l'absence** d'incertitude de positionnement du capteur en $x = 0$, la robustesse du degré de stabilité vis-à-vis des incertitudes prises en compte lors de la synthèse est bien vérifiée (figure 4.9.a). Ainsi, les trois réponses indicielles sont identiques à un facteur d'échelle de temps près. En effet, par rapport à la réponse nominale obtenue avec l'aluminium, les deux autres réponses peuvent se déduire par une dilatation (pour le cuivre) ou une contraction (pour le fer) de l'échelle des temps. Par contre, pour toute valeur de $x > 0$, cette propriété n'est pas conservée, notamment à la position $x = 5$ mm comme l'illustre la figure 4.9.c.

Ensuite, **en présence** d'une incertitude de positionnement du capteur d'une valeur de 5 mm, non seulement les spécifications du cahier des charges en matière de degré de stabilité ne sont pas respectées quel que soit le matériau, mais en plus la robustesse du degré de stabilité obtenue en $x = 0$ mm disparaît (Figure 4.9.b). Ce résultat est prévisible compte tenu de la dépendance de la marge de phase $M_{\phi}(x)$ à x présentée figure 4.7.

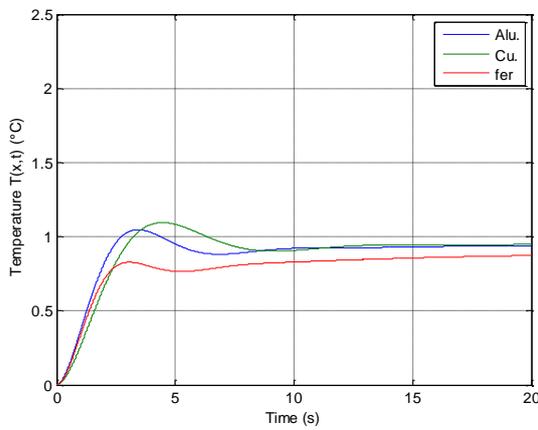
Enfin, quel que soit le cas, il est à noter que le signal de commande $u(t)$ reste bien inférieur à sa valeur de saturation ($U_{max} = 12$ W).



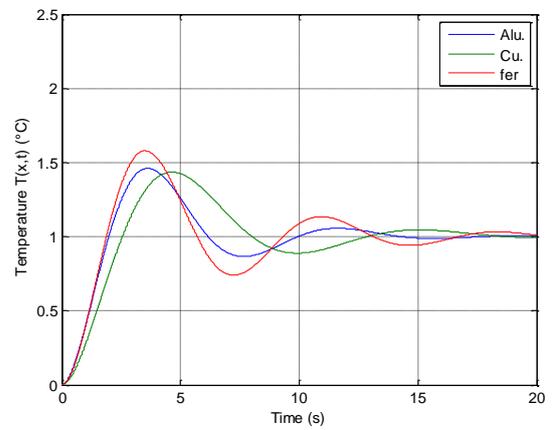
(a)



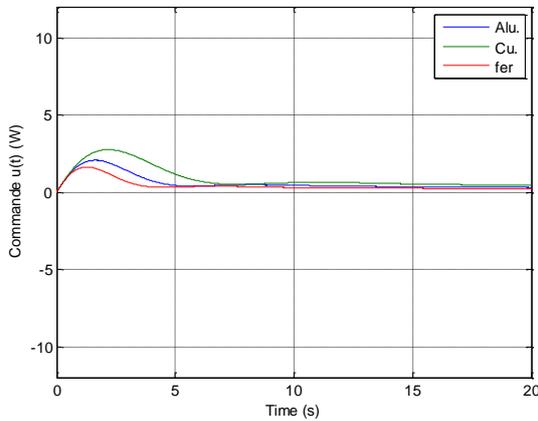
(b)



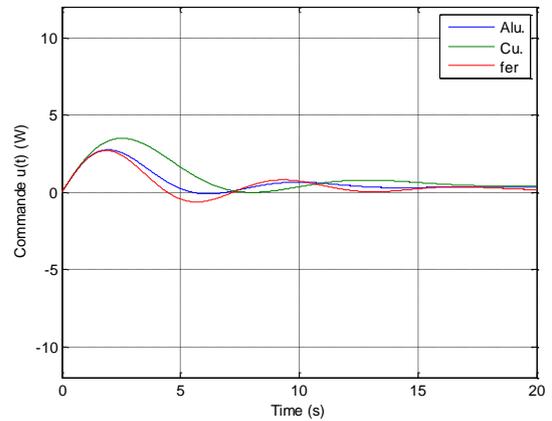
(c)



(d)



(e)



(f)

Figure 4.9 – Réponses indicielles des températures $T(t,0)$ en $x = 0$ (1^{ère} ligne : a et b), $T(t,x)$ en $x = 5 \text{ mm}$ (2^{ème} ligne : c et d) et des commandes $u(t)$ correspondantes (3^{ème} ligne : e et f) à un saut échelon de consigne de 1°C pour l'aluminium, le cuivre et le fer, dans le cas d'un bouclage fait à partir d'une température $T(t,0)$ mesurée en $x = 0$ (1^{ère} colonne : a, c et e) et d'un bouclage fait à partir d'une température $T(t,x)$ mesurée en $x = 5 \text{ mm}$ (2^{ème} colonne : b, d et f)

4.4 – Conclusion

Ce chapitre 4, consacré à la première étude comparative des deux premières générations de la commande CRONE, met bien en évidence le fait que l'on obtient au final les mêmes performances. Ce résultat n'est pas surprenant dans la mesure où :

- le domaine d'études défini par des *variations de gain* avec *phase constante* au voisinage de ω_u est parfaitement adapté à ces deux générations ;
- les données de synthèse sont les mêmes dans les deux cas (spécifications fréquentielles du cahier des charges et modèle de synthèse avec ses incertitudes).

Ainsi, bien que les structures des régulateurs de chacune de ces générations soient obtenues par deux approches différentes (structure fixée *a priori* pour la première et *a posteriori* pour la deuxième), au final leurs expressions analytiques et les valeurs de leurs paramètres sont très proches (voire identiques).

Le chapitre suivant poursuit l'étude comparative en se focalisant sur la synthèse des commandes CRONE de 2^{ème} et 3^{ème} générations dans le cadre des deux autres domaines d'études définis au chapitre 3.

Chapitre 5

Synthèse en présence de variations de gain et de phase : de la 2^{ème} à la 3^{ème} génération de la commande CRONE

SOMMAIRE

5.1 – Introduction	125
5.2 – Synthèse en présence de variations de gain avec phase non constante	125
5.2.1 - Détermination des paramètres de la commande CRONE de 2 ^{ème} génération.....	125
5.2.2 – Exemples d’illustration	127
5.2.2.1 – Exemple 7 : marge de phase $M_\phi = 45^\circ$	127
5.2.2.2 – Exemple 8 : marge de phase $M_\phi = 67.5^\circ$	131
5.2.2.3 – Exemple 9 : marge de phase $M_\phi = 90^\circ$	134
5.3 – Synthèse en présence de variations de gain et de phase	137
5.3.1 - Performances de la commande CRONE de 2 ^{ème} génération.....	137
5.3.2 - Commande CRONE de 3 ^{ème} génération	141
5.3.2.1 – Méthode de détermination des paramètres du régulateur	141
5.3.2.2 – Exemples d’illustration	142
5.3.2.2.1 – Exemple 10 : facteur de résonance $Q_{T0} = 3 \text{ dB}$	142
5.3.2.2.2 – Exemple 11 : facteur de résonance $Q_{T0} = 0.65 \text{ dB}$	144
5.3.2.2.3 – Exemple 12 : facteur de résonance $Q_{T0} = 0 \text{ dB}$	146
5.4 – Conclusion	148

5.1 – Introduction

Ce chapitre est composé de deux parties consacrées aux domaines d'études définis :

- par des *variations de gain* avec *phase non constante* à l'aide du modèle de synthèse $P_{2.2}(s)$, d'une part,
- et par des *variations de gain* et de *phase* à l'aide du modèle de synthèse $P_3(s)$, d'autre part.

Dans un premier temps, tous les développements conduisant aux expressions fractionnaires et rationnelles des régulateurs CRONE de 2^{ème} génération sont présentés dans le cadre des *variations de gain* avec *phase non constante*. Ensuite, pour poursuivre l'étude comparative, il est montré pourquoi les régulateurs de 1^{ère} génération ne peuvent plus assurer la robustesse du degré de stabilité dans le cas de ce deuxième domaine d'étude. Enfin, trois exemples d'illustration associés aux mêmes valeurs (extrêmes et moyenne) de la marge de phase M_ϕ sont développés. Les performances ainsi obtenues avec la commande CRONE de 2^{ème} génération sont présentées comparativement à celles obtenues avec les régulateurs CRONE de 1^{ère} génération synthétisés dans le cadre du premier domaine d'étude défini à l'aide du modèle de synthèse $P_1(s)$ (*variations de gain* avec *phase constante*) mais appliqués au deuxième.

La seconde partie de ce chapitre est dédiée au dernier domaine d'études (*variations de gain et de phase*) défini à l'aide du modèle $P_3(s)$ et de ses domaines d'incertitude. Dans un premier temps, les régulateurs de 2^{ème} génération synthétisés avec le modèle $P_{2.2}(s)$ pour les trois valeurs de la marge de phase M_ϕ (exemples 7, 8 et 9) sont appliqués au modèle $P_3(s)$, et ce afin de bien mesurer l'influence de la variation de phase en plus de la variation de gain sur les performances de la commande, en particulier la sensibilité du degré de stabilité aux incertitudes paramétriques. Dans un deuxième temps, après avoir rappelé le principe et le choix des paramètres de la mise en forme de la boucle ouverte, trois régulateurs CRONE de 3^{ème} génération associés aux valeurs extrémales et moyenne de Q_{T0} sont synthétisés à l'aide de la *CRONE Control System Design Toolbox*. Enfin, les performances sont présentées avec des résultats qui vont au-delà des attentes.

5.2 – Synthèse en présence de variations de gain avec phase non constante

5.2.1 - Détermination des paramètres de la commande CRONE de 2^{ème} génération

Pour rappel (cf. paragraphe 3.3.2), le modèle $P_{2.2}(s)$ utilisé pour la synthèse de la commande CRONE de deuxième génération pour ce cas d'étude est de la forme :

$$P_{2.2}(s) = H_0^* \frac{(1 + s/\omega_L)^{0.5}}{s/\omega_L} e^{-\sqrt{\frac{s}{\omega_x}}} , \quad (5.1)$$

avec
$$H_0^* = \frac{H_0}{\omega_L^{0.5}} . \quad (5.2)$$

Toujours pour rappel (cf. paragraphe 3.3.2), les trois états paramétriques qui conduisent aux mêmes fréquences transitionnelles ω_L et ω_x , et donc à une seule courbe de phase (mais bien trois courbes de gain, justifiant ainsi l'utilisation de la commande CRONE 2^{ème} génération) sont :

- Aluminium, $L = 1$ m et $x = 0.5$ cm $\Rightarrow \omega_L = 0.97 \cdot 10^{-4}$ rad/s et $\omega_x = 3.88$ rad/s ;
- Cuivre, $L = 1.1$ m et $x = 0.55$ cm $\Rightarrow \omega_L = 0.97 \cdot 10^{-4}$ rad/s et $\omega_x = 3.87$ rad/s ;
- Fer, $L = 0.49$ m et $x = 0.243$ cm $\Rightarrow \omega_L = 0.96 \cdot 10^{-4}$ rad/s et $\omega_x = 3.89$ rad/s.

Quant à l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte $\beta(s)$, celle-ci est toujours la même dans le cadre de la commande CRONE de 2^{ème} génération, soit :

$$\beta(s) = \beta_0 \left(\frac{1+s/\omega_l}{s/\omega_l} \right)^{n_l} \left(\frac{1+s/\omega_h}{1+s/\omega_l} \right)^n \frac{1}{(1+s/\omega_h)^{n_h}} . \quad (5.3)$$

Sachant que $\beta(s) = C_F(s) P_{2.2}(s)$, la forme fractionnaire $C_F(s)$ du régulateur CRONE est alors donnée par :

$$C_F(s) = \beta(s) P_{2.2}^{-1}(s) , \quad (5.4)$$

ou encore, compte tenu des expressions de $\beta(s)$ et $P_{2.2}(s)$,

$$C_F(s) = \beta_0 \left(\frac{1+s/\omega_l}{s/\omega_l} \right)^{n_l} \left(\frac{1+s/\omega_h}{1+s/\omega_l} \right)^n \frac{1}{(1+s/\omega_h)^{n_h}} \frac{s/\omega_L}{H_0^* (1+s/\omega_L)^{0.5}} e^{\sqrt{\frac{s}{\omega_x}}} . \quad (5.5)$$

Compte tenu des données de synthèse, mais aussi pour assurer une progression didactique, on continue à choisir :

- $n_l = 2$, pour assurer une erreur de trainage nulle ;
- $n = (180^\circ - M_\phi)/90^\circ$, pour assurer une marge de phase $M_\phi \in [45^\circ ; 90^\circ]$, soit $n \in [1 ; 1.5]$;
- $n_h = 1.5$, pour limiter la sensibilité de l'entrée ;
- $\omega_{nom} = 1$ rad/s, valeur imposée toujours dans le cadre de cette étude comparative à iso-rapidité des différentes commandes CRONE.

Dans ce cas, l'expression (5.5) de $C_F(s)$ peut alors se réécrire de manière plus condensée sous la forme :

$$C_F(s) = C_0 \left(\frac{\omega_l}{s} \right) \frac{(1+s/\omega_l)^{2-n}}{(1+s/\omega_h)^{1.5-n} (1+s/\omega_L)^{0.5}} e^{\sqrt{\frac{s}{\omega_x}}} , \quad (5.6)$$

où

$$C_0 = \frac{\beta_0 \omega_l}{H_0^* \omega_L} . \quad (5.7)$$

Indépendamment de la valeur de l'ordre n au voisinage de ω_u , l'expression (5.6) de $C_F(s)$ reste théorique dans la mesure où son gain tend vers l'infini lorsque ω tend vers les hautes fréquences et ce en raison de la présence de l'exponentielle croissante. Bien entendu, un tel comportement n'est pas acceptable aux hautes fréquences. C'est la raison pour laquelle une étape intermédiaire consiste à utiliser le développement limite de Taylor de e^z lorsque z tend vers zéro, soit :

$$\lim_{z \rightarrow 0} e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^k}{k!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} , \quad (5.8)$$

tronqué à l'ordre 2 et en posant $z = (s/\omega_x)^{0.5}$, soit :

$$e^{\sqrt{\frac{s}{\omega_x}}} \approx 1 + \left(\frac{s}{\omega_x} \right)^{0.5} + \frac{s}{2 \omega_x} . \quad (5.9)$$

La forme fractionnaire approximée $\tilde{C}_F(s)$ est alors donnée par :

$$\tilde{C}_F(s) = C_0 \left(\frac{\omega_l}{s} \right) \frac{(1 + s/\omega_l)^{2-n}}{(1 + s/\omega_h)^{1.5-n} (1 + s/\omega_L)^{0.5}} \left(1 + \left(\frac{s}{\omega_x} \right)^{0.5} + \frac{s}{2\omega_x} \right). \quad (5.10)$$

Si, de plus, on choisit $\omega_l = \omega_L$ (comme dans les études précédentes), alors $\tilde{C}_F(s)$ se réduit à :

$$\tilde{C}_F(s) = C_0 \left(\frac{\omega_l}{s} \right) \left(\frac{1 + s/\omega_l}{1 + s/\omega_h} \right)^{1.5-n} \left(1 + \left(\frac{s}{\omega_x} \right)^{0.5} + \frac{s}{2\omega_x} \right). \quad (5.11)$$

Ainsi, le régulateur $\tilde{C}_F(s)$ de 2^{ème} génération est composé d'une première partie identique à celle du régulateur de 1^{ère} génération synthétisé pour $x = 0$ en cascade avec le polynome permettant de compenser les effets parasites de l'exponentielle associée à l'état paramétrique nominal (aluminium, $x = 5$ mm, $L = 1$ m) sur une plage de fréquences au voisinage de ω_l . Quant à la forme rationnelle $C_R(s)$, elle résulte de l'association de la forme rationnelle du régulateur de 1^{ère} génération (relation (4.13)) en cascade avec la forme rationnelle du polynome d'approximation de l'exponentielle obtenue à l'aide de la toolbox CRONE par identification fréquentielle, soit :

$$C_R(s) = C_0 \left(\frac{\omega_l}{s} \right) \prod_{i=1}^N \left(\frac{1 + s/\omega'_i}{1 + s/\omega_i} \right) \frac{\prod_{j=1}^M \left(1 + \frac{s}{\omega_{zj}} \right)}{\prod_{j=1}^{M-1} \left(1 + \frac{s}{\omega_{pj}} \right)}. \quad (5.12)$$

La suite de ce paragraphe est consacrée aux trois cas d'étude déjà traités correspondant aux valeurs extrêmes de la marge de phase M_ϕ (45° et 90°) et à sa valeur moyenne (67.5°).

5.2.2 – Exemples d'illustration

5.2.1 – Exemple 7 : marge de phase $M_\phi = 45^\circ$

Si $M_\phi = 45^\circ$, alors $n = (180^\circ - M_\phi)/90^\circ = 1.5$. L'expression de la fonction de transfert fractionnaire $\tilde{C}_F(s)$ du régulateur se réduit alors à :

$$\tilde{C}_F(s) = \frac{C_0^*}{s} \left(1 + \left(\frac{s}{\omega_x} \right)^{0.5} + \frac{s}{2\omega_x} \right), \quad (5.13)$$

avec $C_0^* = C_0 \omega_l = 2.405 \text{ W s}^{-1} \text{ deg}^{-1}$ et $\omega_x = 3.88 \text{ rad/s}$.

Le régulateur $\tilde{C}_F(s)$ est donc composé d'un intégrateur d'ordre 1 comme dans les précédentes études en $x = 0$ en cascade avec un polynome permettant de compenser les effets parasites de l'exponentielle seulement sur une plage de fréquences au voisinage de ω_l . Aux basses fréquences, le régulateur a un comportement intégrateur d'ordre 1, tandisqu'aux hautes fréquences il présente un comportement proportionnel. C'est la zone de transition entre ces deux comportements asymptotiques qui le différencie d'un traditionnel régulateur PI, noté $C_{PI}(s)$, en raison du terme d'ordre 0.5 (figure 5.1.b).

Quant à la forme rationnelle $C_R(s)$, elle est obtenue à l'aide de la toolbox CRONE par identification à partir de la réponse fréquentielle de $\tilde{C}_F(s)$ (figure 5.1.c), soit :

$$C_R(s) = \frac{C_0^*}{s} \frac{\prod_{j=1}^3 \left(1 + \frac{s}{\omega_{zj}}\right)}{\prod_{j=1}^2 \left(1 + \frac{s}{\omega_{pj}}\right)}, \quad (5.14)$$

avec

$$\begin{cases} \omega_{z1} = 0.8 \text{ rad/s} & \omega_{p1} = 1.25 \text{ rad/s} \\ \omega_{z2} = 6.5 \text{ rad/s} & \omega_{p2} = 29 \text{ rad/s} \\ \omega_{z3} = 55 \text{ rad/s} & \end{cases} . \quad (5.15)$$

La figure 5.1 présente, pour $M_\phi = 45^\circ$, les diagrammes de Bode des différents régulateurs, à savoir : (a) $\tilde{C}_F(s)$ (en bleu) et $C_I(s)$ (en vert) ; (b) $\tilde{C}_F(s)$ (en bleu) et $C_{PI}(s)$ (en vert) ; (c) $\tilde{C}_F(s)$ (en bleu) et $C_R(s)$ (en vert).

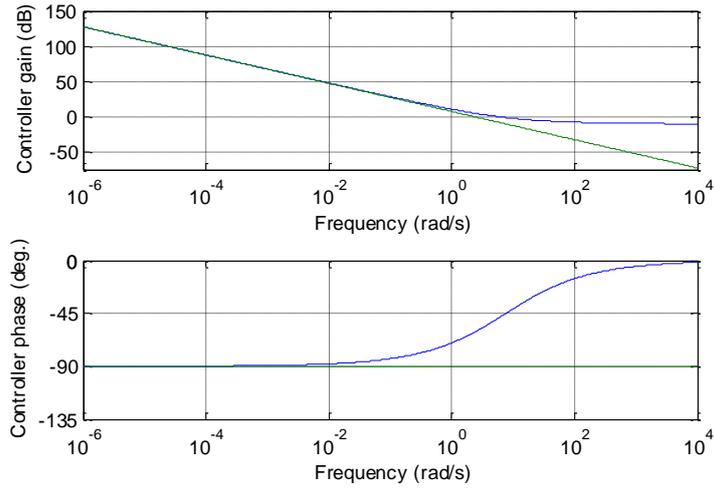
Ainsi, la figure 5.1.a permet d'observer aux basses fréquences le comportement intégrateur de $\tilde{C}_F(s)$ identique à celui de $C_I(s)$ synthétisé pour $x = 0$, la différence étant au voisinage de $\omega_u = 1 \text{ rad/s}$ (avance de phase de l'ordre de 20°) et aux hautes fréquences avec un comportement proportionnel de $\tilde{C}_F(s)$ résultant de la prise en compte de l'effet parasite de l'exponentielle.

La figure 5.1.b permet d'apprécier la différence de comportement entre $\tilde{C}_F(s)$ et $C_{PI}(s)$ au voisinage de $\omega_u = 1 \text{ rad/s}$. En effet, si aux basses et hautes fréquences les comportements sont identiques, l'avance de phase apportée par $C_{PI}(s)$ au voisinage de ω_u n'est que de quelques degrés, ne permettant pas de compenser l'effet parasite de l'exponentielle.

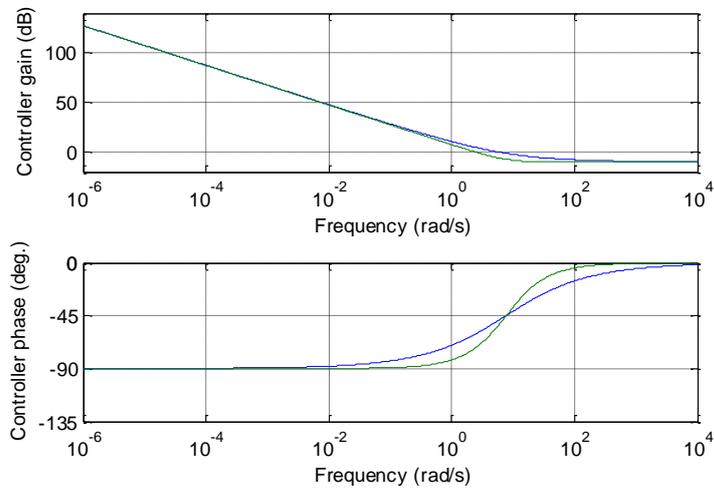
Enfin, la figure 5.1.c présente les réponses fréquentielles superposées des formes fractionnaire $\tilde{C}_F(s)$ et rationnelle $C_R(s)$ du régulateur, cette dernière étant utilisée pour la simulation temporelle des performances de la régulation de température.

La figure 5.2 présente les lieux de Black-Nichols en boucle ouverte (1^{ère} ligne : a et b), ainsi que les réponses indicielles en boucle fermée de $T(t,x)$ (2^{ème} ligne : c et d) et les commandes $u(t)$ correspondantes (3^{ème} ligne : e et f) à un saut échelon de consigne de 1°C pour l'aluminium (en bleu), le cuivre (en vert) et le fer (en rouge), avec le régulateur $C_I(s)$ (1^{ère} colonne : a, c et e) et le régulateur $C_R(s)$ (2^{ème} colonne : b, d et f).

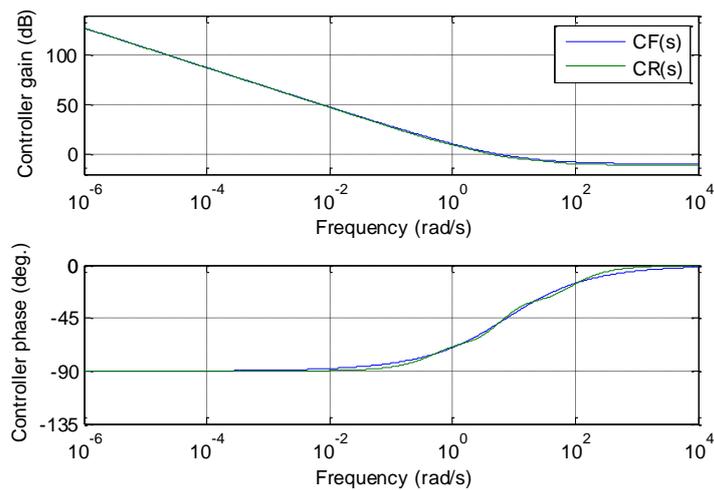
Plus précisément, l'observation de ces différentes réponses permet de faire plusieurs remarques. D'abord l'application du régulateur synthétisé pour $x = 0$ dans le cadre de la 1^{ère} génération (colonne de gauche) ne permet pas, non seulement de respecter la spécification concernant le degré de stabilité ($M_\phi = 45^\circ$ et $Q_T = 3 \text{ dB}$), mais aussi sa robustesse vis-à-vis des incertitudes paramétriques telles que définies dans le cadre de cette étude. Les réponses de la colonne de droite permettent de mesurer l'apport de la 2^{ème} génération. Enfin, la robustesse du degré de stabilité des réponses temporelles (figure 5.2.d) simulées avec la forme rationnelle $C_R(s)$ permet d'apprécier la qualité de l'identification fréquentielle déjà présentée figure 5.1.c.



(a)



(b)



(c)

Figure 5.1 – Diagrammes de Bode des différents régulateurs pour $M_\phi = 45^\circ$:

(a) $\tilde{C}_F(s)$ (en bleu) et $C_I(s)$ (en vert) ;

(b) $\tilde{C}_F(s)$ (en bleu) et $C_{PI}(s)$ (en vert) ;

(c) $\tilde{C}_F(s)$ (en bleu) et $C_R(s)$ (en vert) ;

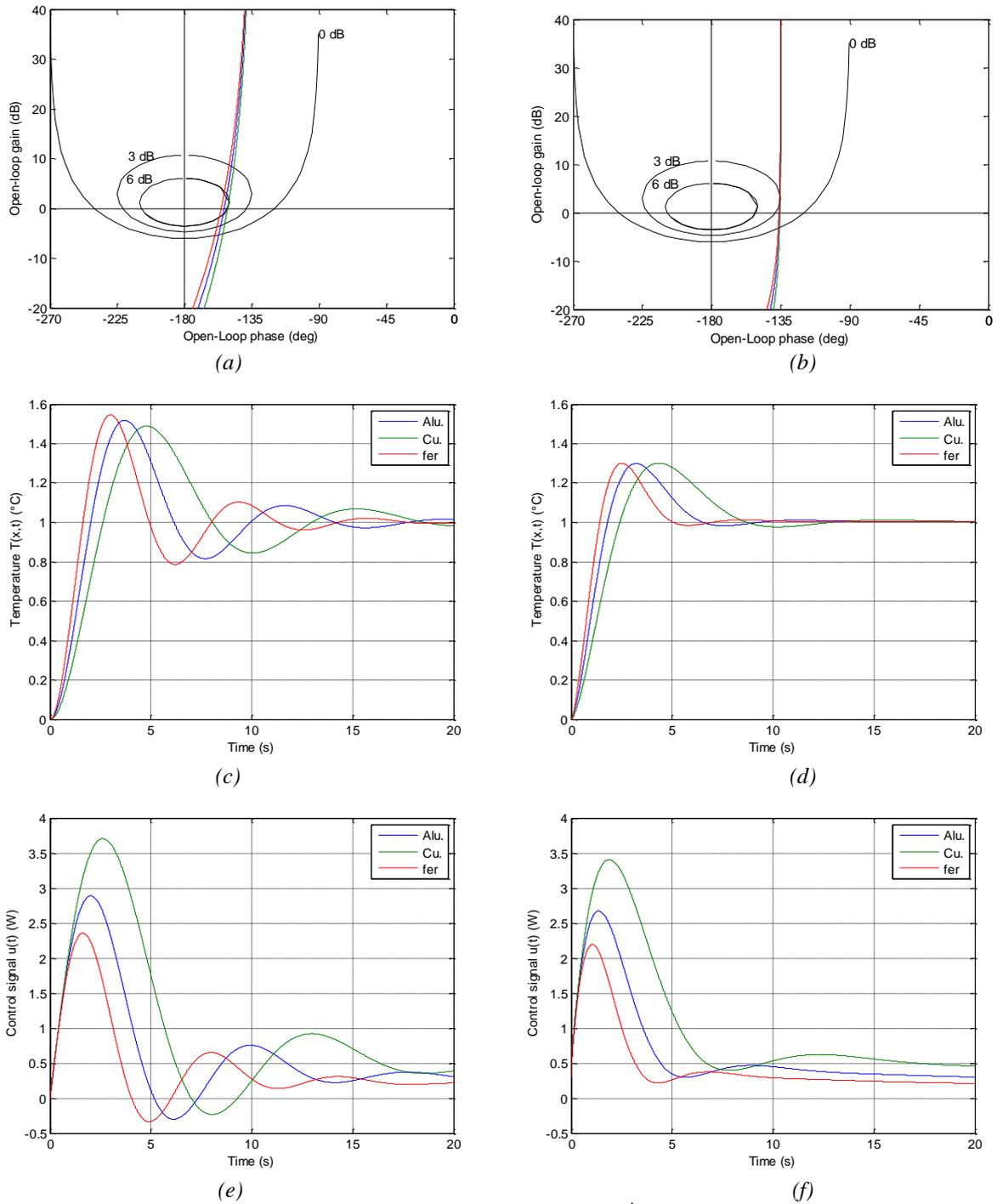


Figure 5.2 – Lieux de Black-Nichols en boucle ouverte (1^{ère} ligne : a et b), réponses indicielles en boucle fermée de $T(t,x)$ (2^{ème} ligne : c et d) et des commandes $u(t)$ correspondantes (3^{ème} ligne : e et f) à un saut échelon de consigne de 1°C pour l'aluminium, le cuivre et le fer, avec le régulateur $C_I(s)$ (1^{ère} colonne : a, c et e) et le régulateur $C_R(s)$ (2^{ème} colonne : b, d et f)

5.2.2.2 – Exemple 8 : marge de phase $M_\phi = 67.5^\circ$

Si $M_\phi = 67.5^\circ$, alors $n = (180^\circ - M_\phi)/90^\circ = 1.25$. L'expression de la fonction de transfert fractionnaire $\tilde{C}_F(s)$ du régulateur se réduit alors à :

$$\tilde{C}_F(s) = C_0 \left(\frac{\omega_l}{s} \right) \left(\frac{1 + s/\omega_l}{1 + s/\omega_h} \right)^{0.25} \left(1 + \left(\frac{s}{\omega_x} \right)^{0.5} + \frac{s}{2\omega_x} \right). \quad (5.16)$$

Ainsi, le régulateur $\tilde{C}_F(s)$ de 2^{ème} génération est composé d'une première partie identique à celle du régulateur de 1^{ère} génération synthétisé pour $x = 0$ et $M_\phi = 67.5^\circ$ en cascade avec le même polynôme permettant de compenser les effets parasites de l'exponentielle associée à l'état paramétrique nominal (aluminium, $x = 5$ mm, $L = 1$ m) sur une plage de fréquences au voisinage de ω_u .

Quant à la forme rationnelle $C_R(s)$, elle résulte de l'association de la forme rationnelle du régulateur de 1^{ère} génération en cascade avec la forme rationnelle du polynôme d'approximation de l'exponentielle, soit :

$$C_R(s) = C_0 \left(\frac{\omega_l}{s} \right) \prod_{i=1}^N \left(\frac{1 + s/\omega'_i}{1 + s/\omega_i} \right) \frac{\prod_{j=1}^3 \left(1 + \frac{s}{\omega_{zj}} \right)}{\prod_{j=1}^2 \left(1 + \frac{s}{\omega_{pj}} \right)}, \quad (5.17)$$

où les valeurs des ω'_i et ω_i sont celles de l'exemple 3, et les valeurs de ω_{zj} et ω_{pj} celles de l'exemple 7.

La figure 5.3 présente les diagrammes de Bode des régulateurs $C_F(s)$ 1^{ère} génération (en vert) et $\tilde{C}_F(s)$ 2^{ème} génération (en bleu) synthétisés pour $M_\phi = 67.5^\circ$, permettant ainsi d'apprécier leur différence de comportement au voisinage de $\omega_u = 1$ rad/s et aux hautes fréquences. A noter que les deux régulateurs présentent, au contraire, le même comportement intégrateur d'ordre 1 aux basses fréquences.

La figure 5.4 présente les lieux de Black-Nichols en boucle ouverte (1^{ère} ligne : a et b), ainsi que les réponses indicielles en boucle fermée de $T(t,x)$ (2^{ème} ligne : c et d) et les commandes $u(t)$ correspondantes (3^{ème} ligne : e et f) à un saut échelon de consigne de 1°C pour l'aluminium (en bleu), le cuivre (en vert) et le fer (en rouge), avec le régulateur 1^{ère} génération (1^{ère} colonne : a, c et e) et le régulateur 2^{ème} génération (2^{ème} colonne : b, d et f).

L'observation de ces différentes réponses permet, là encore, de mesurer l'apport de la 2^{ème} génération comparativement à la 1^{ère}, et ce en matière de robustesse du degré de stabilité.

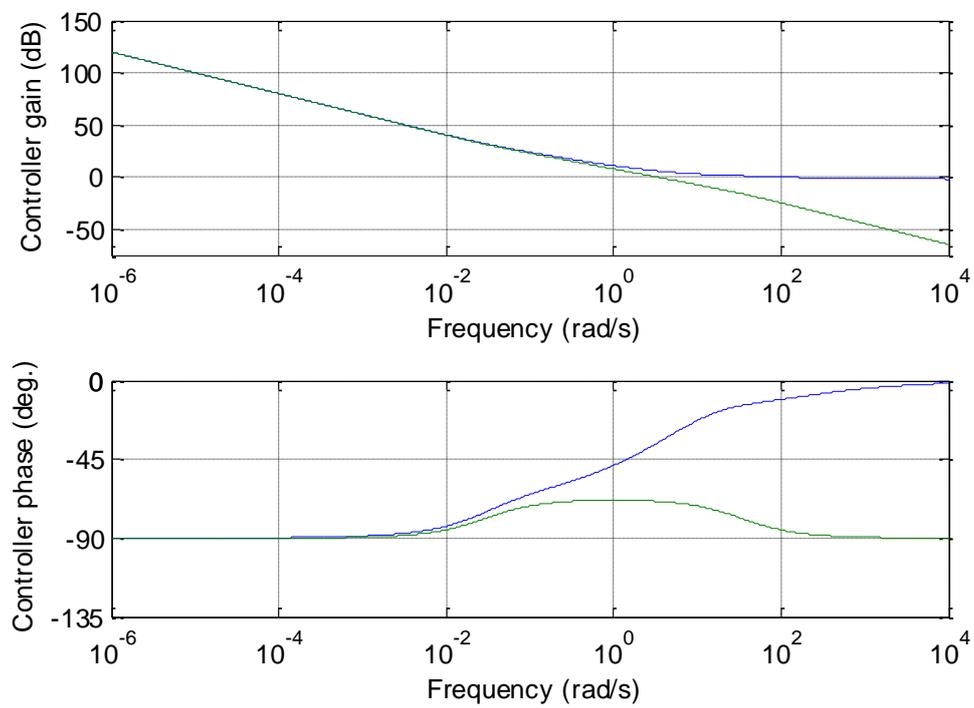


Figure 5.3 – Diagrammes de Bode des régulateurs $C_F(s)$ 1^{ère} génération (en vert) et $\tilde{C}_F(s)$ 2^{ième} génération (en bleu) synthétisés pour $M_\phi = 67.5^\circ$

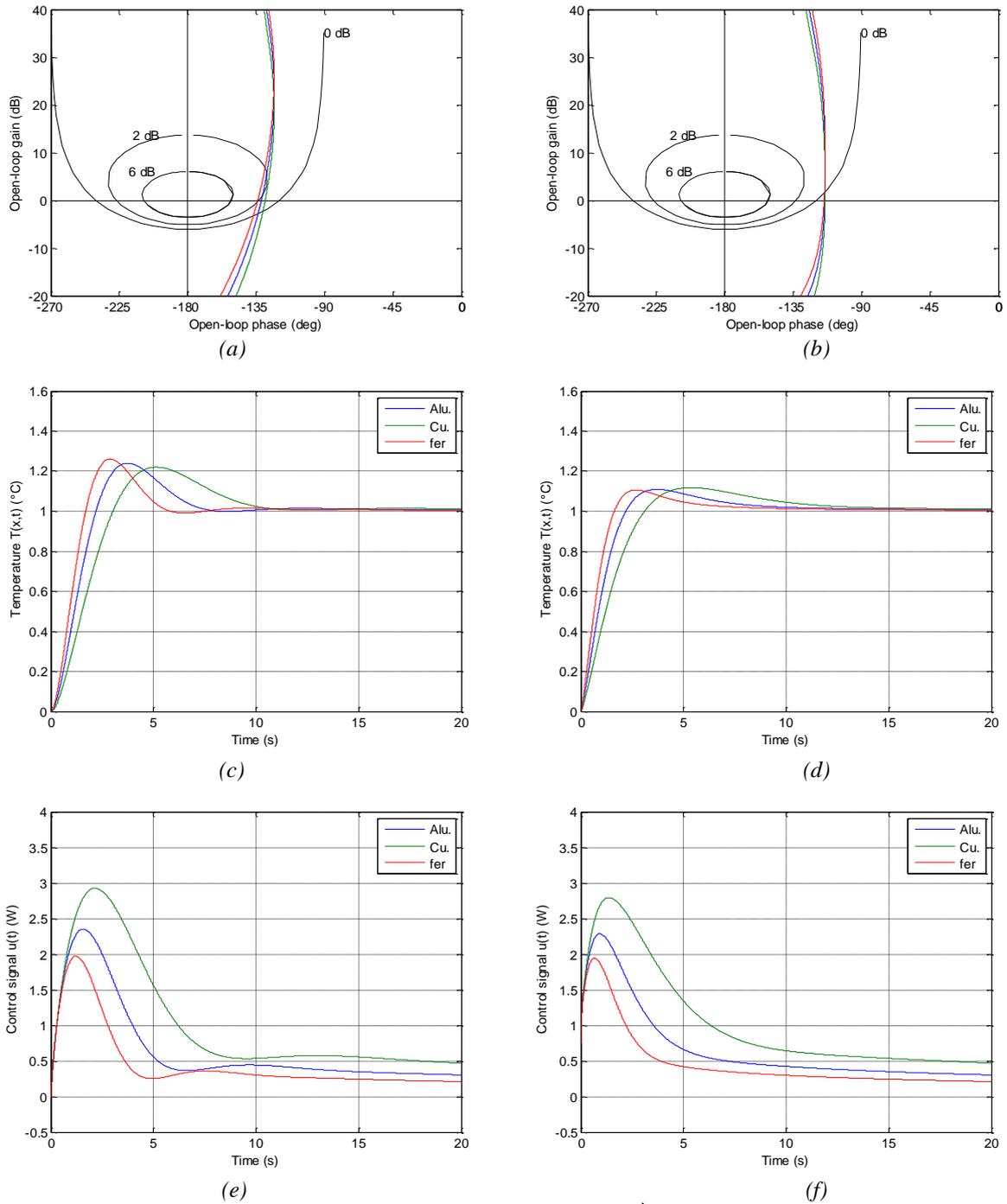


Figure 5.4 – Lieux de Black-Nichols en boucle ouverte (1^{ère} ligne : a et b), réponses indicielles en boucle fermée de $T(t,x)$ (2^{ème} ligne : c et d) et des commandes $u(t)$ correspondantes (3^{ème} ligne : e et f) à un saut échelon de consigne de 1°C pour l'aluminium, le cuivre et le fer, avec le régulateur 1^{ère} génération (1^{ère} colonne : a, c et e) et le régulateur 2^{ème} génération (2^{ème} colonne : b, d et f)

5.2.2.3 – Exemple 9 : marge de phase $M_\phi = 90^\circ$

Si $M_\phi = 90^\circ$, alors $n = (180^\circ - M_\phi)/90^\circ = 1$. L'expression de la fonction de transfert fractionnaire $\tilde{C}_F(s)$ du régulateur se réduit alors à :

$$\tilde{C}_F(s) = C_0 \left(\frac{\omega_l}{s} \right) \left(\frac{1+s/\omega_l}{1+s/\omega_h} \right)^{0.5} \left(1 + \left(\frac{s}{\omega_x} \right)^{0.5} + \frac{s}{2\omega_x} \right). \quad (5.18)$$

Comme pour l'exemple 8, le régulateur $\tilde{C}_F(s)$ de 2^{ème} génération est composé d'une première partie identique à celle du régulateur de 1^{ère} génération synthétisé pour $x = 0$ et $M_\phi = 90^\circ$ en cascade avec le même polynôme permettant de compenser les effets parasites de l'exponentielle.

Quant à la forme rationnelle $C_R(s)$, elle résulte de l'association de la forme rationnelle du régulateur de 1^{ère} génération en cascade avec la forme rationnelle du polynôme d'approximation de l'exponentielle, soit :

$$C_R(s) = C_0 \left(\frac{\omega_l}{s} \right) \prod_{i=1}^N \left(\frac{1+s/\omega'_i}{1+s/\omega_i} \right) \frac{\prod_{j=1}^3 \left(1 + \frac{s}{\omega_{zj}} \right)}{\prod_{j=1}^2 \left(1 + \frac{s}{\omega_{pj}} \right)}, \quad (5.19)$$

où les valeurs des ω'_i et ω_i sont celles de l'exemple 3, et les valeurs de ω_{zj} et ω_{pj} celles de l'exemple 7.

La figure 5.5 présente les diagrammes de Bode des régulateurs $C_F(s)$ 1^{ère} génération (en vert) et $\tilde{C}_F(s)$ 2^{ième} génération (en bleu) synthétisés pour $M_\phi = 90^\circ$.

La figure 5.6 présente les lieux de Black-Nichols en boucle ouverte (1^{ère} ligne : a et b), ainsi que les réponses indicielles en boucle fermée de $T(t,x)$ (2^{ème} ligne : c et d) et les commandes $u(t)$ correspondantes (3^{ème} ligne : e et f) à un saut échelon de consigne de 1°C pour l'aluminium (en bleu), le cuivre (en vert) et le fer (en rouge), avec le régulateur 1^{ère} génération (1^{ère} colonne : a, c et e) et le régulateur 2^{ième} génération (2^{ème} colonne : b, d et f).

L'observation de ces différentes réponses ne fait que confirmer la tendance, conduisant ainsi aux mêmes remarques que celles déjà faites pour les exemples 7 et 8.

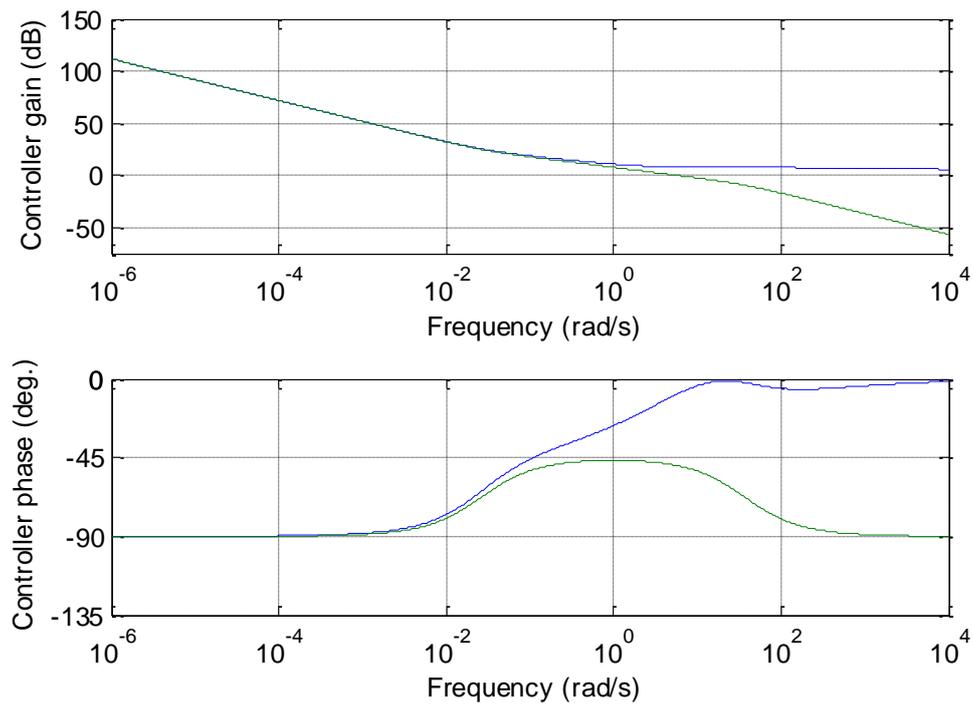


Figure 5.5 – Diagrammes de Bode des régulateurs
 $C_F(s)$ 1^{ère} génération (en vert) et $\tilde{C}_F(s)$ 2^{ième} génération (en bleu)
synthétisés pour $M_\phi = 90^\circ$

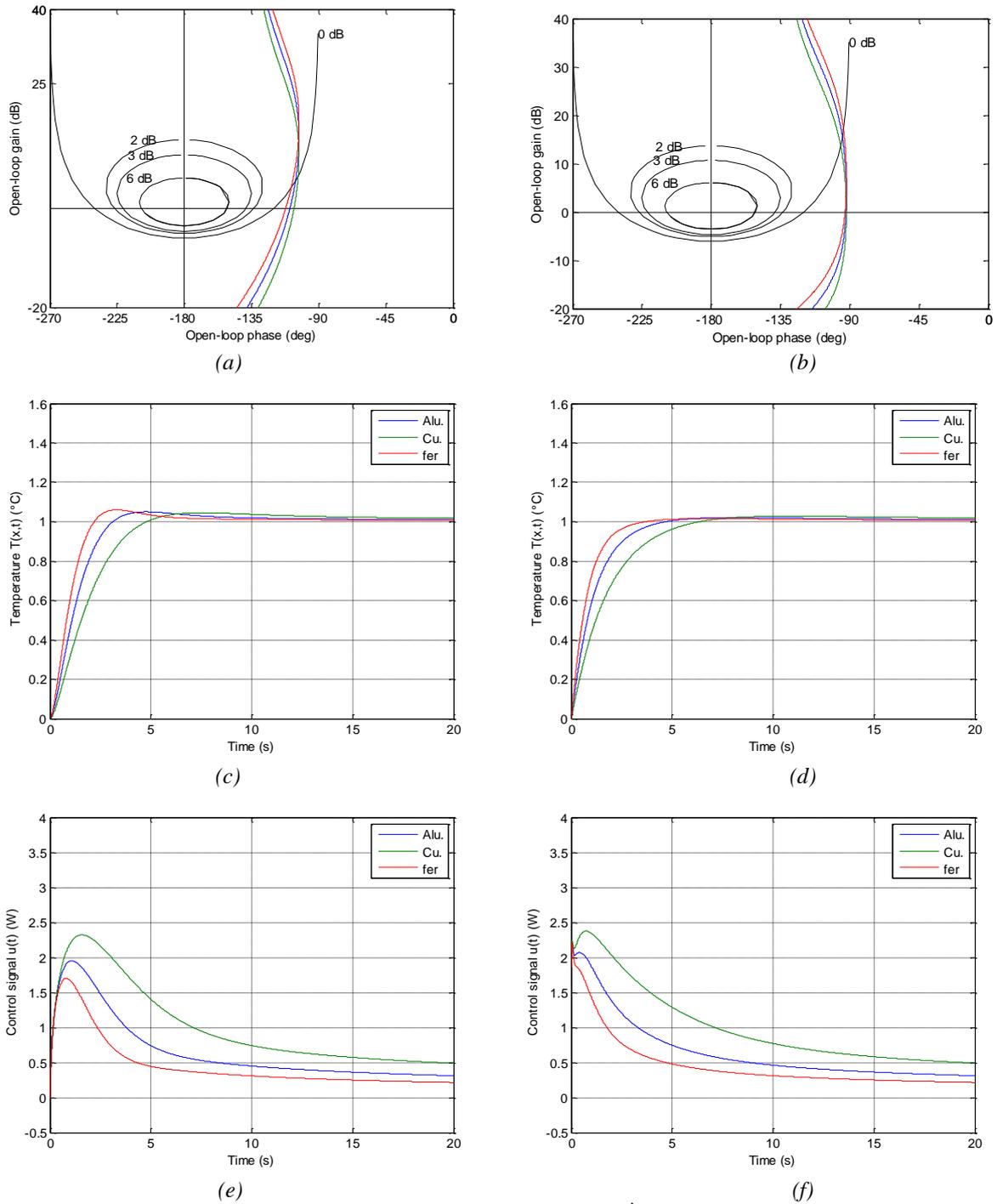


Figure 5.6 – Lieux de Black-Nichols en boucle ouverte (1^{ère} ligne : a et b), réponses indicielles en boucle fermée de $T(t,x)$ (2^{ème} ligne : c et d) et des commandes $u(t)$ correspondantes (3^{ème} ligne : e et f) à un saut échelon de consigne de 1°C pour l'aluminium, le cuivre et le fer, avec le régulateur 1^{ère} génération (1^{ère} colonne : a, c et e) et le régulateur 2^{ème} génération (2^{ème} colonne : b, d et f)

5.3 – Synthèse en présence de variations de gain et de phase

Pour rappel, la fonction de transfert $P_3(s)$ du modèle retenu pour la synthèse de la commande CRONE de 3^{ème} génération en présence de variations de gain et de phase est définie par :

$$P_3(s) = H_0 \frac{1}{s^{0.5}} \left(\frac{1+s/\omega_L}{s/\omega_L} \right)^{0.5} e^{-\sqrt{\frac{s}{\omega_x}}}, \quad (5.20)$$

où les valeurs de l'état paramétrique nominal défini dans le cas de l'aluminium sont données par :

$$\begin{cases} H_0 = H_0(\text{Alu}) = 0.416 \text{ K s}^{0.5} \text{ W}^{-1} \\ \omega_L = \omega_L(\text{Alu}, L = 1\text{m}) = 0.97 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s} \\ \omega_x = \omega_x(\text{Alu}, x = 0.5\text{cm}) = 3.88 \text{ rad/s} \end{cases}, \quad (5.21)$$

pour le cuivre par :

$$\begin{cases} H_0 = H_0(\text{Cu}) = 0.269 \text{ K s}^{0.5} \text{ W}^{-1} \\ \omega_L = \omega_L(\text{Cu}, L = 1.1\text{m}) = 0.97 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s} \\ \omega_x = \omega_x(\text{Cu}, x = 1\text{cm}) = 1.17 \text{ rad/s} \end{cases} \quad (5.22)$$

et pour le fer par :

$$\begin{cases} H_0 = H_0(\text{Fer}) = 0.596 \text{ K s}^{0.5} \text{ W}^{-1} \\ \omega_L = \omega_L(\text{Fer}, L = 0.49\text{m}) = 0.96 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s} \\ \omega_x = \omega_x(\text{Fer}, x = 0.1\text{cm}) = 23 \text{ rad/s} \end{cases}, \quad (5.23)$$

5.3.1 - Performances de la commande CRONE de 2^{ème} génération

Dans le but de poursuivre l'étude comparative, les régulateurs des exemples 7, 8 et 9 synthétisés avec le modèle $P_{2.2}(s)$ sont appliqués au modèle $P_3(s)$, et ce afin de bien mesurer l'influence de la variation de phase en plus de la variation de gain sur les performances de la commande, en particulier la sensibilité du degré de stabilité aux incertitudes paramétriques.

Ainsi, la Figure 5.7 présente les diagrammes de Bode (1^{ère} colonne) et les lieux de Black-Nichols (2^{ème} colonne) en boucle ouverte obtenus avec $P_3(s)$ et les régulateurs $\tilde{C}_F(s)$ de 2^{ème} génération synthétisés :

- à l'exemple 7 avec une marge de phase nominale de 45° (1^{ère} ligne : a et b) ;
- à l'exemple 8 avec une marge de phase nominale de 67.5° (2^{ème} ligne : c et d) ;
- à l'exemple 9 avec une marge de phase nominale de 90° (3^{ème} ligne : e et f).

Pour l'état paramétrique nominal (aluminium en bleu), la spécification du degré de stabilité est bien respectée dans chacun des trois exemples. Par contre, pour les deux autres états

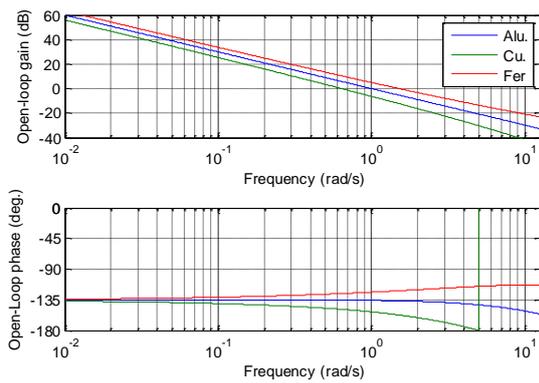
paramétriques, la constance de la marge de phase n'est plus vérifiée, traduisant ainsi l'absence de robustesse du degré de stabilité vis-à-vis des variations paramétriques.

La figure 5.8 présente les réponses indicielles en boucle fermée de $T(t,x)$ (1^{ère} colonne) et des commandes $u(t)$ correspondantes (2^{ème} colonne) à un saut échelon de consigne de 1°C, pour l'aluminium (en bleu), le cuivre (en vert) et le fer (en rouge), obtenues toujours avec les régulateurs $\tilde{C}_F(s)$ de 2^{ème} génération synthétisés :

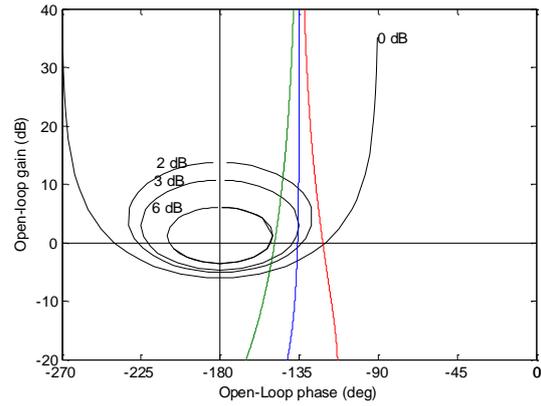
- à l'exemple 7 avec une marge de phase nominale de 45° (1^{ère} ligne : a et b) ;
- à l'exemple 8 avec une marge de phase nominale de 67.5° (2^{ème} ligne : c et d) ;
- à l'exemple 9 avec une marge de phase nominale de 90° (3^{ème} ligne : e et f).

Dans le domaine temporel, l'absence de robustesse du degré de stabilité vis-à-vis des variations paramétriques se traduit par la disparition de la constance du premier dépassement réduit et du facteur d'amortissement des réponses indicielles de la température.

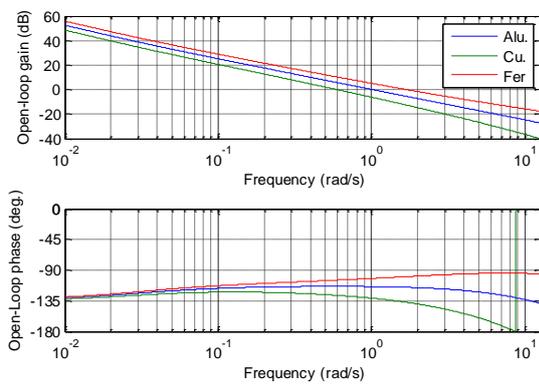
Les réponses indicielles de la commande permettent de vérifier l'absence de saturation lors de l'application du *signal d'analyse* qu'est le saut échelon de consigne de 1°C.



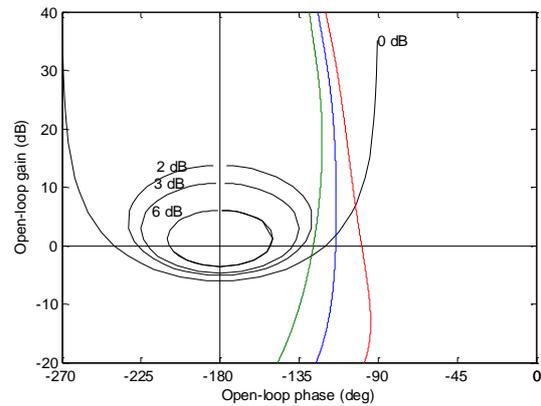
(a)



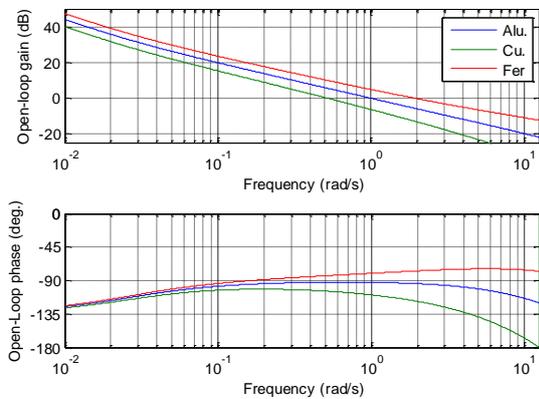
(b)



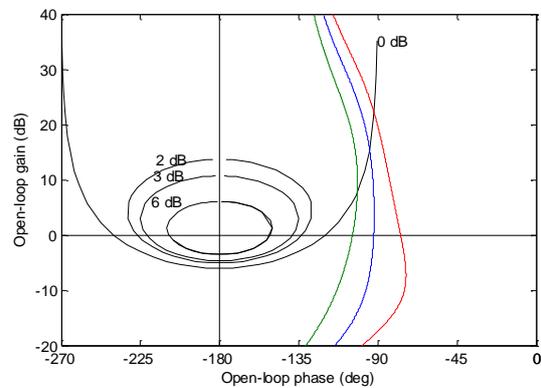
(c)



(d)



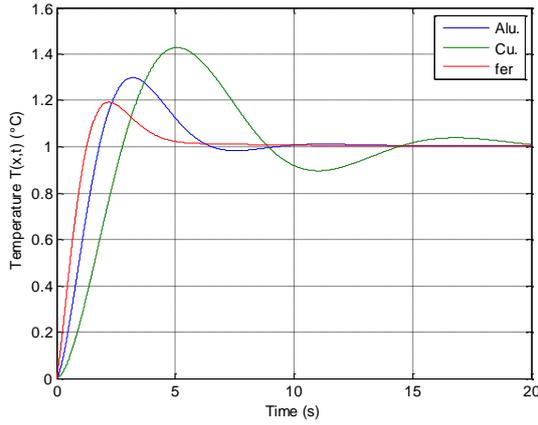
(e)



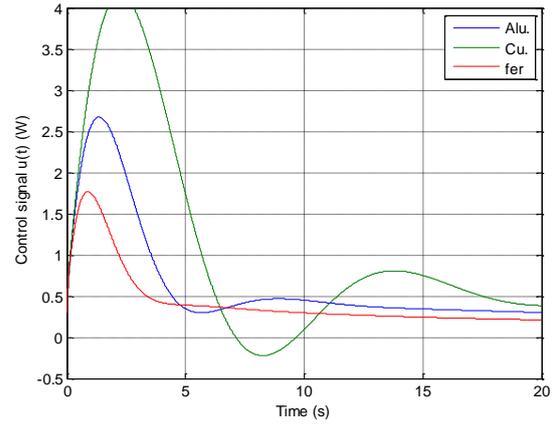
(f)

Figure 5.7 – Diagrammes de Bode (1^{ère} colonne) et lieux de Black-Nichols (2^{ème} colonne) en boucle ouverte obtenus avec $P_3(s)$ et les régulateurs $\tilde{C}_F(s)$ de 2^{ème} génération synthétisés :

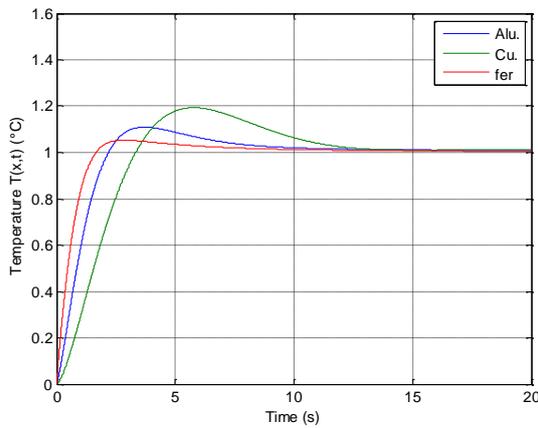
- à l'exemple 7 avec une marge de phase nominale de 45° (1^{ère} ligne : a et b) ;
- à l'exemple 8 avec une marge de phase nominale de 67.5° (2^{ème} ligne : c et d) ;
- à l'exemple 9 avec une marge de phase nominale de 90° (3^{ème} ligne : e et f).



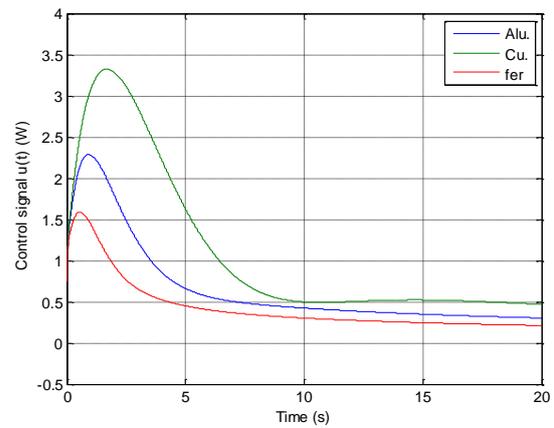
(a)



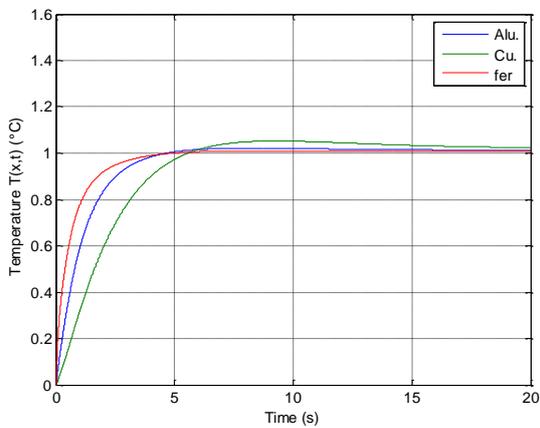
(b)



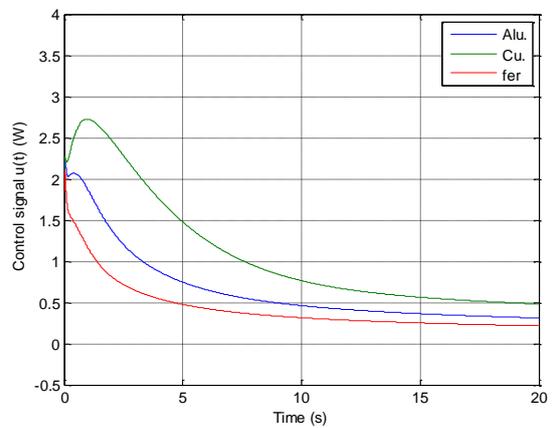
(c)



(d)



(e)



(f)

Figure 5.8 – Réponses indicielles en boucle fermée de $T(t,x)$ (1^{ère} colonne) et des commandes $u(t)$ correspondantes (2^{ème} colonne) à un saut échelon de consigne de 1°C pour l'aluminium (en bleu), le cuivre (en vert) et le fer (en rouge) obtenues avec les régulateurs $\tilde{C}_F(s)$ de 2^{ème} génération synthétisés :

- à l'exemple 7 avec une marge de phase nominale de 45° (1^{ère} ligne : a et b) ;
- à l'exemple 8 avec une marge de phase nominale de 67.5° (2^{ème} ligne : c et d) ;
- à l'exemple 9 avec une marge de phase nominale de 90° (3^{ème} ligne : e et f).

5.3.2 - Commande CRONE de 3^{ème} génération

5.3.2.1 – Méthode de détermination des paramètres du régulateur

Pour rappel (cf. chapitre 1), le principe de la commande CRONE de troisième génération consiste à optimiser les paramètres de la fonction de transfert en boucle ouverte nominale $\beta_0(s)$ de façon à inclure une intégration d'ordre fractionnaire complexe sur une plage de fréquences, soit :

$$\beta_0(s) = \beta_l(s)\beta_m(s)\beta_h(s) , \quad (5.24)$$

où $\beta_m(s)$ est un ensemble de modèles généralisés sur une plage de fréquence :

$$\beta_m(s) = \prod_{k=-N^-}^{N^+} C_k^{\text{sign}(b_k)} \left(\alpha_k \frac{1+s/\omega_{k+1}}{1+s/\omega_k} \right)^{a_k} \left(\text{Re}/i \left\{ \left(\alpha_k \frac{1+s/\omega_{k+1}}{1+s/\omega_k} \right)^{ib_k} \right\} \right)^{-q_k \text{sign}(b_k)} , \quad (5.25)$$

$$\text{avec} \quad \alpha_k = \left(\frac{\omega_{k+1}}{\omega_k} \right)^{1/2} \text{ pour } k \neq 0 \quad \text{et} \quad \alpha_0 = \left(\frac{1+(\omega_r/\omega_0)^2}{1+(\omega_r/\omega_1)^2} \right)^{1/2} , \quad (5.26)$$

$$\text{et où} \quad \beta_l(s) = C_l \left(\frac{1+s/\omega_{N^-}}{s/\omega_{N^-}} \right)^{n_l} \quad \text{et} \quad \beta_h(s) = C_h \left(\frac{s}{\omega_{N^+}} + 1 \right)^{-n_h} , \quad (5.27)$$

avec N^+ , N^- et $q_k \in \mathbf{N}^+$; ω_r , ω_k , ω_{k+1} , a_k , C_k , C_b , C_h , a_k et $b_k \in \mathbf{R}$.

La synthèse de la commande CRONE de 3^{ème} génération nécessite l'utilisation de la **CRONE Control System Design Toolbox** (cf. chapitre 1). Afin de pouvoir remplir les champs dans les fenêtres de dialogue de la toolbox, les spécifications fréquentielles en matière de degré de stabilité et de rapidité doivent être adaptées. Ainsi, le degré de stabilité doit être spécifié à l'aide du facteur de résonance nominal Q_{T0} de la fonction de sensibilité complémentaire $T(s)$ et la rapidité à l'aide de sa fréquence de résonance nominale ω_{r0} .

Compte tenu de ces remarques, mais aussi pour assurer une progression didactique, on choisit :

- $n_l = 2$, pour assurer une erreur de trainage nulle ;
- $n_h = 4$, pour limiter la sensibilité de l'entrée ;
- $Q_{T0} \in [0 \text{ dB} ; 3 \text{ dB}]$;
- $\omega_{r0} = 1 \text{ rad/s}$, valeur imposée toujours dans le cadre de cette étude comparative à iso-rapidité des différentes commandes CRONE ;
- $N^+ = N^- = 0$.

La suite de ce paragraphe est consacrée à trois cas d'étude dont les degrés de stabilité nominaux sont au plus proches de ceux déjà traités avec les commandes CRONE de 1^{ère} et 2^{ème} générations, et ce afin de pouvoir continuer l'étude comparative. Ainsi, les performances obtenues à l'exemple 10 où $Q_{T0} = 3 \text{ dB}$ sont à comparer avec celles des exemples 1, 4 et 7 ($M_\phi = 45^\circ$), puis les performances obtenues à l'exemple 11 où $Q_{T0} = 0.65 \text{ dB}$ sont à comparer avec

celles des exemples 2, 5 et 8 ($M_\phi = 67.5^\circ$), et enfin les performances obtenues à l'exemple 12 où $Q_{T0} = 0$ dB sont à comparer avec celles des exemples 3, 6 et 9 ($M_\phi = 90^\circ$).

Il est à noter qu'à l'issue de l'optimisation, la toolbox génère automatiquement l'expression rationnelle du régulateur sous une forme parallèle mieux adaptée pour une implantation que sa forme cascade, soit :

$$C_R(s) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{A_i}{s + \omega_{pi}} \right), \quad (5.28)$$

où N représente toujours le nombre de cellules, $\omega_{pi} \in \mathbf{R}^+$ et $A_i \in \mathbf{R}$.

5.3.2.2 – Exemples d'illustration

5.3.2.2.1 – Exemple 10 : facteur de résonance $Q_{T0} = 3$ dB

Pour cet exemple, les paramètres optimaux de la fonction de transfert en boucle ouverte sous sa forme fractionnaire sont :

$$\begin{cases} \omega_0 = 0.03896 \text{ rad/s} & q_0 = 6 \\ a_0 = 1.4927 & C_0 = 13.217 \\ b_0 = -0.6496 & K = 34.11 \\ b'_0 = -0.2379 & \omega_1 = 74.092 \text{ rad/s} \end{cases} \quad (5.29)$$

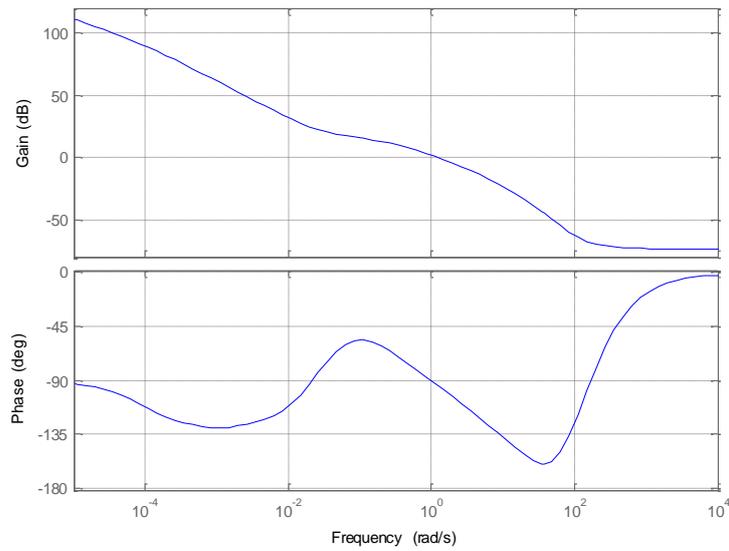
La figure 5.9 présente les diagrammes de Bode du régulateur rationnel $C_R(s)$ (a), les diagrammes de Bode (b) et les lieux de Black-Nichols (c) en boucle ouverte, les diagrammes de gain des fonctions de sensibilité $S(s)$ (d) et $T(s)$ (e), et ce pour l'aluminium (en bleu), le cuivre (en vert) et le fer (en rouge).

L'inclinaison optimisée du gabarit de la commande CRONE de 3^{ème} génération (figure 5.9.c) conduit pour les trois états paramétriques à tangenter quasiment le même contour d'amplitude spécifié, en l'occurrence 3 dB.

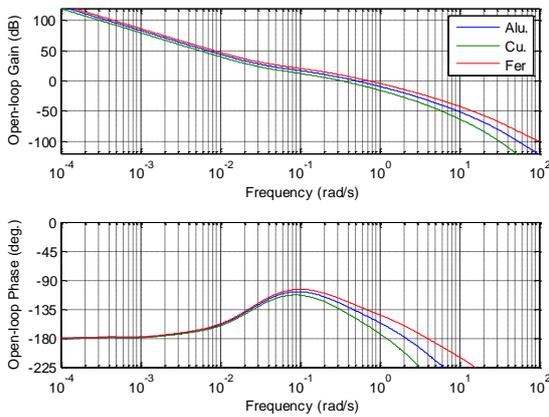
Ce résultat se traduit au niveau de la fonction de sensibilité complémentaire par la quasi-constance du facteur de résonance (figure 5.9.e).

La figure 5.10 présente les réponses indicielles en boucle fermée de $T(t,x)$ (a) et des commandes $u(t)$ correspondantes (b) à un saut échelon de consigne de 1°C , toujours pour l'aluminium (en bleu), le cuivre (en vert) et le fer (en rouge).

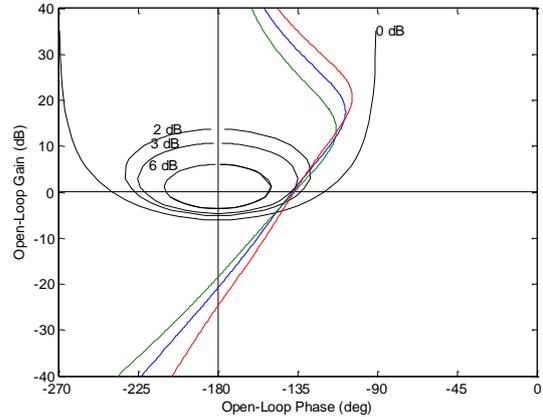
La quasi-constance du premier dépassement réduit et du facteur d'amortissement illustre la quasi-robustesse du degré de stabilité vis-à-vis des variations paramétriques. Ce résultat va au-delà des espérances initiales. En effet, pour rappel, l'objectif de la commande CRONE de 3^{ème} génération en présence de variations de gain et de phase (en boucle ouverte) est de minimiser la sensibilité du degré de stabilité aux variations paramétriques. Dans de nombreuses applications, cette minimisation ne conduit pas à cette quasi-robustesse du degré de stabilité observée dans cet exemple.



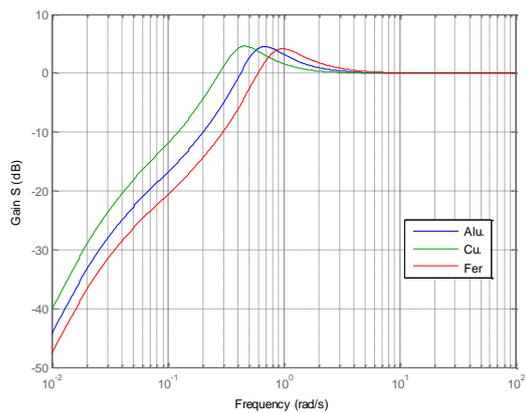
(a)



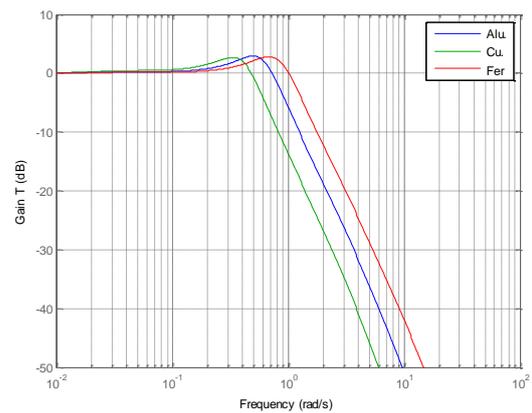
(b)



(c)



(d)



(e)

Figure 5.9 – Réponses fréquentielles :

- diagrammes de Bode du régulateur rationnel $C_R(s)$ (a) ;
 - diagrammes de Bode (b) et lieux de Black-Nichols (b) en boucle ouverte ;
 - diagrammes de gain des fonctions de sensibilité $S(s)$ (d) et $T(s)$ (e) ;
- pour l'aluminium (en bleu), le cuivre (en vert) et le fer (en rouge)

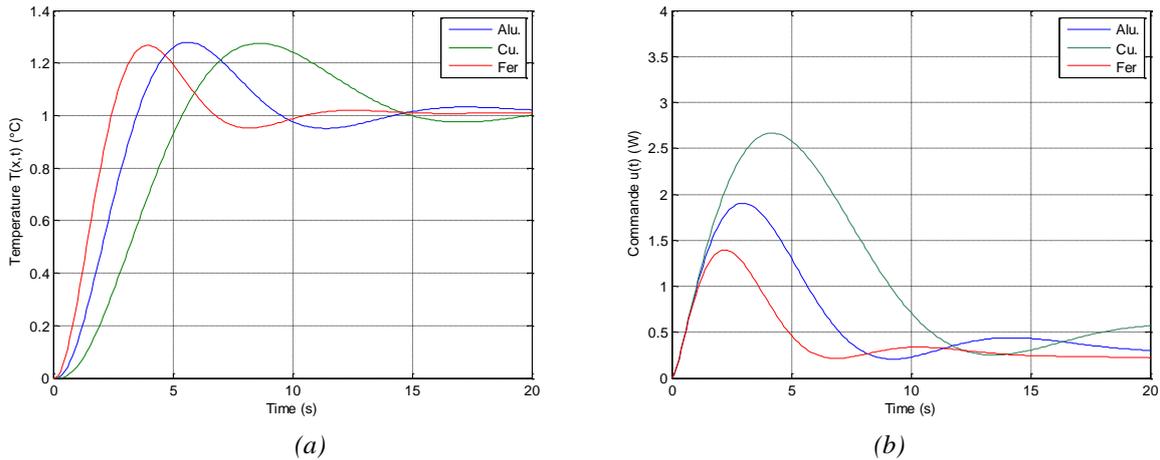


Figure 5.10 – Réponses indicielles en boucle fermée de $T(t,x)$ (a) et des commandes $u(t)$ correspondantes (b) à un saut échelon de consigne de 1°C pour l'aluminium (en bleu), le cuivre (en vert) et le fer (en rouge)

5.3.2.2.2 – Exemple 11 : facteur de résonance $Q_{T0} = 0.65 \text{ dB}$

Pour cet exemple, les paramètres optimaux de la fonction de transfert en boucle ouverte sont :

$$\begin{cases} \omega_0 = 0.08426 \text{ rad/s} & q_0 = 2 \\ a_0 = 1.1463 & C_0 = 10.353 \\ b_0 = -0.5018 & K = 14.623 \\ b'_0 = -0.3416 & \omega_1 = 12.688 \text{ rad/s} \end{cases} \quad (5.30)$$

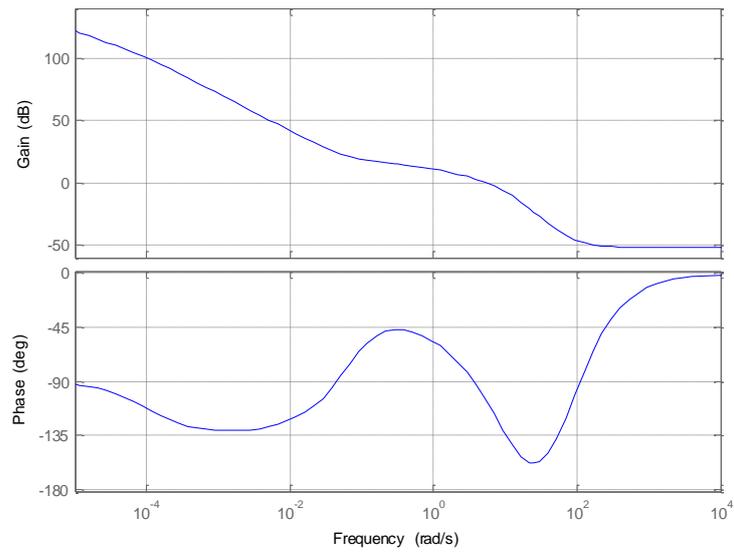
La figure 5.11 présente les diagrammes de Bode du régulateur rationnel $C_R(s)$ (a), les diagrammes de Bode (b) et les lieux de Black-Nichols (c) en boucle ouverte, les diagrammes de gain des fonctions de sensibilité $S(s)$ (d) et $T(s)$ (e), et ce pour l'aluminium (en bleu), le cuivre (en vert) et le fer (en rouge).

Là encore, l'inclinaison optimisée du gabarit généralisé (figure 5.11.c) conduit pour les trois états paramétriques à tangenter quasiment le même contour d'amplitude spécifié, à savoir 0.65 dB .

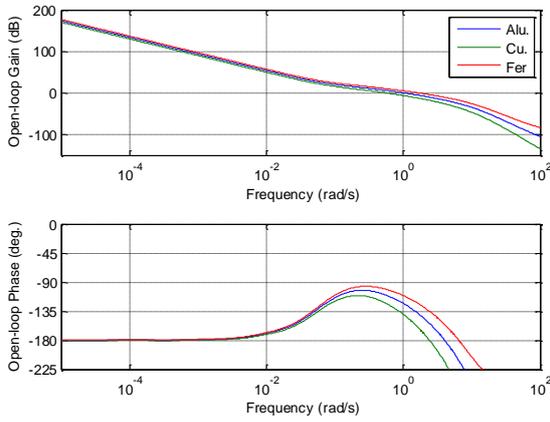
Ce résultat se traduit au niveau de la fonction de sensibilité complémentaire par la quasi-constance du facteur de résonance (figure 5.11.e).

La figure 5.12 présente les réponses indicielles en boucle fermée de $T(t,x)$ (a) et des commandes $u(t)$ correspondantes (b) à un saut échelon de consigne de 1°C , toujours pour l'aluminium (en bleu), le cuivre (en vert) et le fer (en rouge).

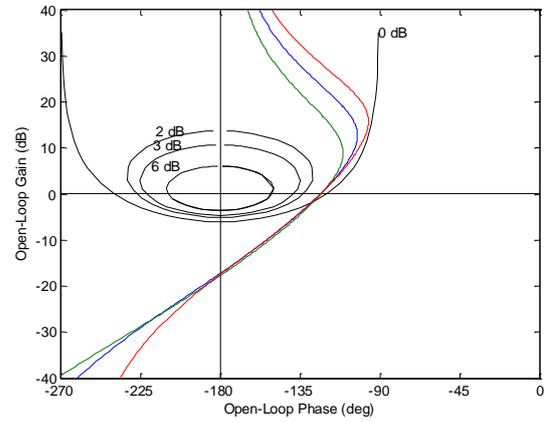
La très faible sensibilité du premier dépassement réduit et du facteur d'amortissement illustre, encore une fois, la quasi-robustesse du degré de stabilité vis-à-vis des variations paramétriques. Dans le cadre de l'étude comparative, les réponses indicielles de la figure 5.12 sont à mettre en vis-à-vis de celles de la figure 5.8. A noter que la minimisation du degré de stabilité ne s'accompagne pas d'une augmentation importante de la sensibilité du signal de commande.



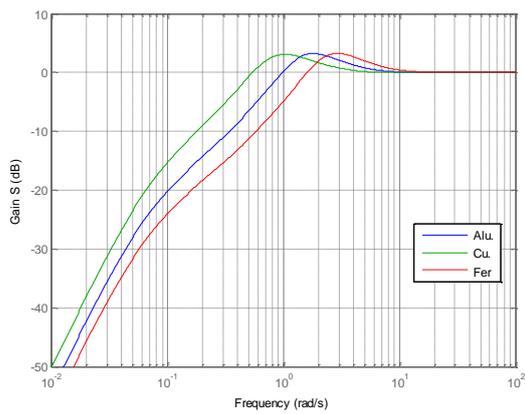
(a)



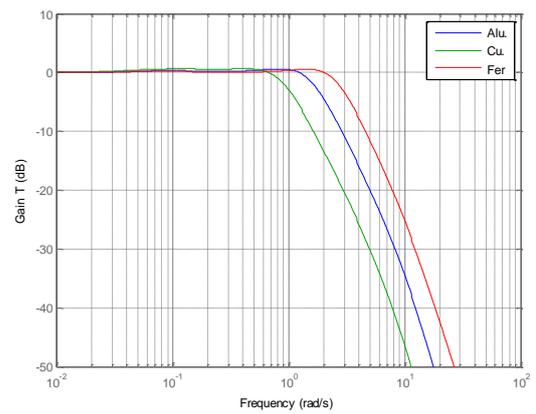
(b)



(c)



(d)



(e)

Figure 5.11 – Réponses fréquentielles :
diagrammes de Bode du régulateur rationnel $C_R(s)$ (a) ;
diagrammes de Bode (b) et lieux de Black-Nichols (b) en boucle ouverte ;
diagrammes de gain des fonctions de sensibilité $S(s)$ (d) et $T(s)$ (e) ;
pour l'aluminium (en bleu), le cuivre (en vert) et le fer (en rouge)

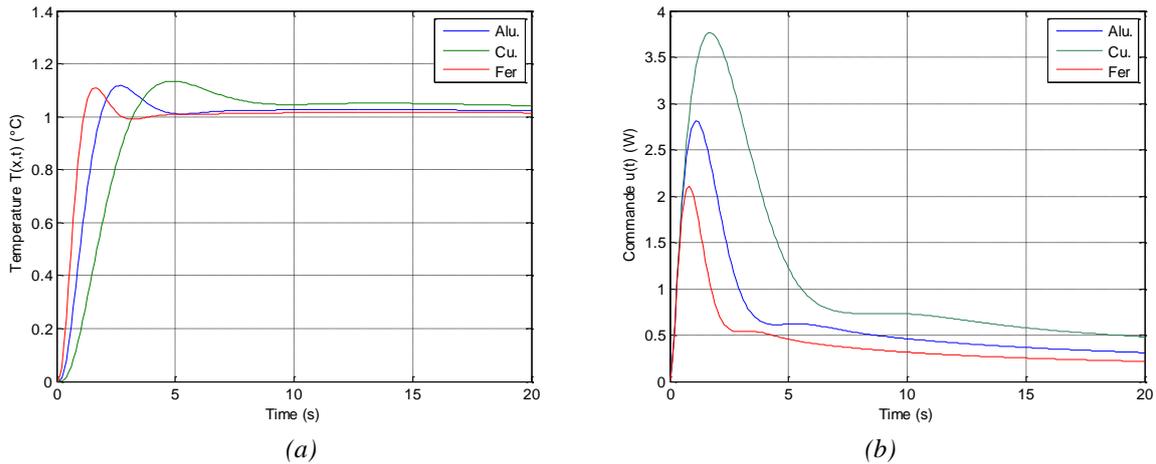


Figure 5.12 – Réponses indicielles en boucle fermée de $T(t,x)$ (a) et des commandes $u(t)$ correspondantes (b) à un saut échelon de consigne de 1°C pour l'aluminium (en bleu), le cuivre (en vert) et le fer (en rouge)

5.3.2.2.3 – Exemple 12 : facteur de résonance $Q_{T0} = 0 \text{ dB}$

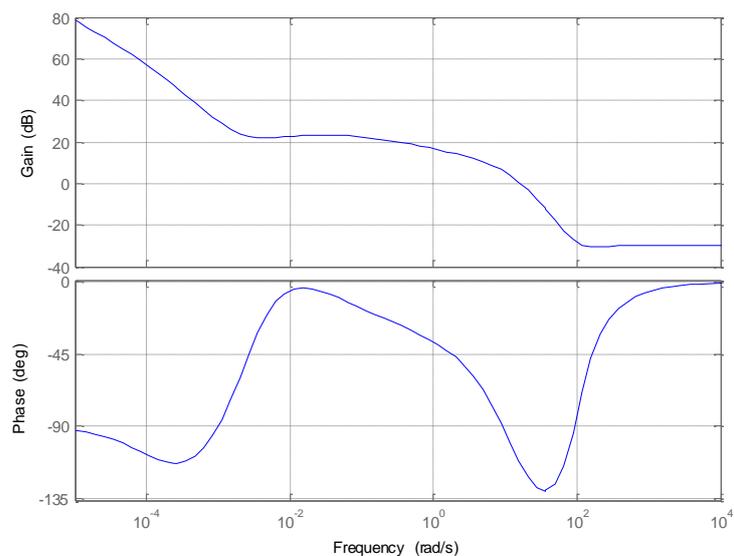
Pour cet exemple, les paramètres optimaux de la fonction de transfert en boucle ouverte sont :

$$\begin{cases} \omega_0 = 29.874 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s} & q_0 = 4 \\ a_0 = 1.0676 & C_0 = 499.8 \\ b_0 = -0.3647 & K = 897 \\ b'_0 = -0.17625 & \omega_1 = 15.69 \text{ rad/s} \end{cases} \quad (5.31)$$

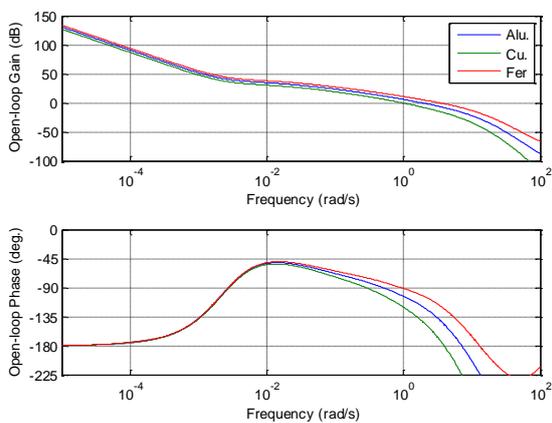
La figure 5.13 présente les diagrammes de Bode du régulateur rationnel $C_R(s)$ (a), les diagrammes de Bode (b) et les lieux de Black-Nichols (c) en boucle ouverte, les diagrammes de gain des fonctions de sensibilité $S(s)$ (d) et $T(s)$ (e), et ce pour l'aluminium (en bleu), le cuivre (en vert) et le fer (en rouge).

La figure 5.14 présente les réponses indicielles en boucle fermée de $T(t,x)$ (a) et des commandes $u(t)$ correspondantes (b) à un saut échelon de consigne de 1°C , toujours pour l'aluminium (en bleu), le cuivre (en vert) et le fer (en rouge).

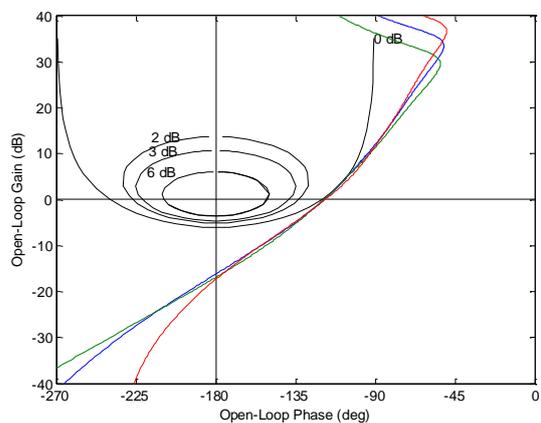
Ce dernier exemple d'illustration ne fait que confirmer la tendance des deux précédents, à savoir que l'optimisation de l'orientation du gabarit généralisé de la commande CRONE conduit dans le cadre de ce troisième domaine d'étude à une quasi-robustesse du degré de stabilité vis-à-vis des variations paramétriques. Ce résultat remarquable est obtenu sans une augmentation importante de la sensibilité du signal de commande.



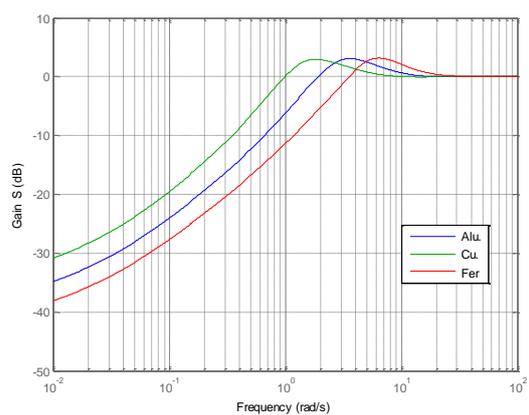
(a)



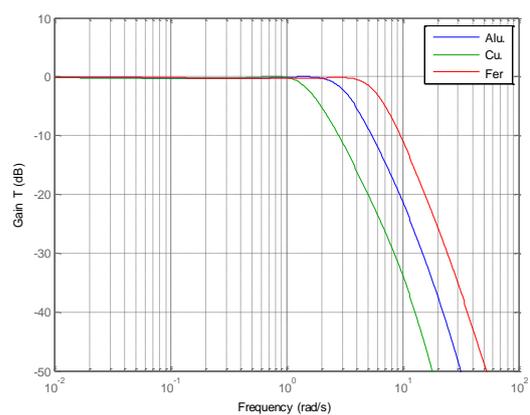
(b)



(c)



(d)



(e)

Figure 5.13 – Réponses fréquentielles :

- diagrammes de Bode du régulateur rationnel $C_R(s)$ (a) ;
 - diagrammes de Bode (b) et lieux de Black-Nichols (b) en boucle ouverte ;
 - diagrammes de gain des fonctions de sensibilité $S(s)$ (d) et $T(s)$ (e) ;
- pour l'aluminium (en bleu), le cuivre (en vert) et le fer (en rouge)

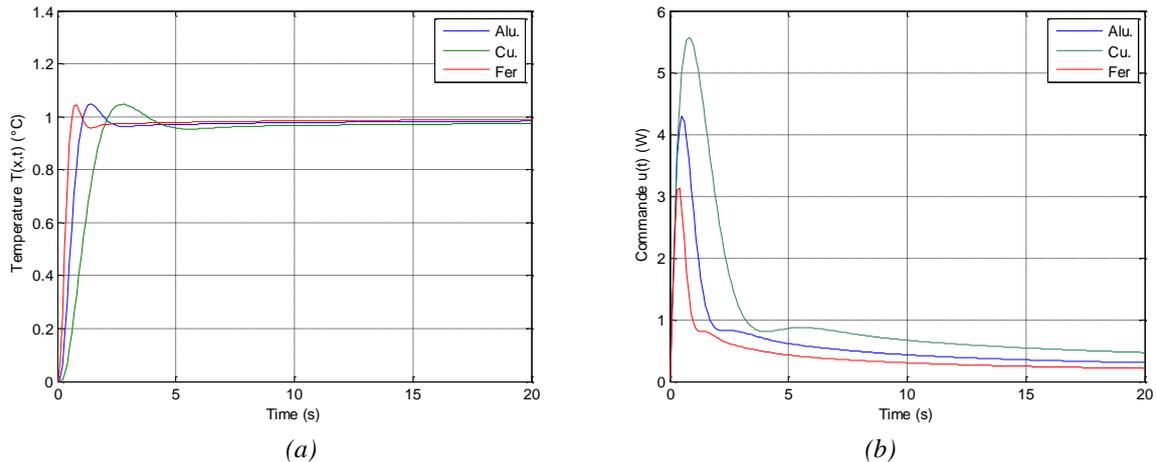


Figure 5.14 – Réponses indicielles en boucle fermée de $T(t,x)$ (a) et des commandes $u(t)$ correspondantes (b) à un saut échelon de consigne de 1°C pour l'aluminium (en bleu), le cuivre (en vert) et le fer (en rouge)

5.4 – Conclusion

Ce chapitre conclut la troisième partie de ce mémoire consacrée à l'étude comparative des trois générations de la commande CRONE.

La démarche proposée pour cette comparaison est progressive en raison du choix pertinent des domaines d'étude définis à l'aide des modèles de synthèse et leurs domaines d'incertitude établis dans la deuxième partie du mémoire. Cette démarche n'est possible que grâce à une analyse fine des modèles de connaissance des milieux semi-infini et fini permettant de bien « s'imprégner » de la dynamique du système physique.

Il est à noter que le choix de la progression proposée se justifie dans le contexte académique d'un mémoire de thèse permettant, notamment aux non spécialistes des synthèses fréquentielles de commandes robustes, de mesurer tout l'intérêt de la commande CRONE. Par contre, dans un contexte industriel d'ingénierie, la **CRONE Control System Design Toolbox** propose une assistance à l'utilisateur dans le choix de la génération de la commande dès l'instant où il a renseigné les données de synthèse (réponses fréquentielles du procédé et spécifications du cahier des charges). L'utilisateur dans un contexte industriel n'est donc pas obligé de mener une analyse aussi fine du comportement dynamique du procédé que celle proposée dans ce mémoire.

Conclusion générale et perspectives

L'interprétation et la discussion des principaux résultats présentés dans ce mémoire de thèse font l'objet de la conclusion.

Le *Chapitre 1* constitue un tutorial en matière de Systèmes à Dérivées Non Entières (SDNE) dans la mesure où il est consacré aux définitions et aux interprétations de l'opérateur intégro-différentiel non entier. Les exemples d'intégrateurs non entiers présentés, aussi bien dans le cadre des systèmes à paramètres distribués, que dans celui des systèmes à paramètres localisés, permettent de mettre en évidence le fait que les SDNE ne sont pas issus seulement d'une volonté de généralisation mathématique des Systèmes à Dérivées Entières. Enfin, ce chapitre se termine avec une présentation des principes des trois générations de la commande CRONE qui d'un point de vue historique sont les premières applications des SDNE dans le cadre de la Synthèse Fréquentielle de Commande Robuste (SFCR).

Le *Chapitre 2* propose, dans le cadre d'une étude comparative des milieux semi-infini et fini homogène en régime forcé avec conditions initiales nulles, une analyse fine d'abord en surface où le phénomène d'*effusivité thermique* est dominant, puis en profondeur où le phénomène de *diffusivité thermique* est fondamental. Sur la forme, cette analyse se démarque de celles traditionnellement faites par les thermiciens en raison de la vision système propre aux automaticiens adoptée dans ce travail de thèse. En effet, le transfert thermique global entre le flux en entrée appliqué en $x = 0$ et la température en sortie mesurée à une position x est décomposé en une mise en cascade de transferts locaux dont les paramètres, mais aussi les entrées et les sorties ont un sens physique. Il est à noter que cette décomposition n'a pas d'intérêt dans le cas de modèles de comportement (boîtes noires) en raison de l'absence de sens physique des paramètres de tels modèles. L'analyse globale proposée résulte de l'analyse de chaque transfert local, permettant ainsi de bien mettre en évidence les différences (aux basses fréquences) et les similitudes (aux moyennes et hautes fréquences) des comportements des milieux semi-infini et fini. Au final, en matière de *modèle de validation*, seul le *milieu fini* est à retenir dans la mesure où il est le plus proche de la réalité, le *milieu semi-infini* étant partiellement utilisé dans l'établissement des *modèles de synthèse*.

Le **Chapitre 3** s'inscrit dans la continuité du précédent en analysant, dans un premier temps, l'influence des incertitudes paramétriques sur le comportement dynamique du *milieu fini* retenu en tant que *modèle de validation*. Afin de bien « s'imprégner » de la dynamique du procédé, l'analyse de sensibilité de la nature du matériau, de la longueur du milieu L et de la position x du capteur est faite progressivement. Ensuite, à partir de ces résultats, trois domaines d'études adaptés à la synthèse de chacune des trois générations de la commande CRONE sont définis. A ces trois cas d'études sont associés les modèles de synthèse $P_1(s)$ et $P_{2,1}(s)$ pour le premier domaine, $P_{2,2}(s)$ pour le deuxième et $P_3(s)$ pour le troisième. A noter que les modèles de synthèse $P_{2,1}(s)$, $P_{2,2}(s)$ et $P_3(s)$ sont établis en s'appuyant sur la vision système développée au chapitre 2 et en utilisant les résultats de l'étude comparative entre les milieux semi-infini et fini. L'un des objectifs, dans l'établissement de ces modèles de synthèse, est de faciliter par la suite les développements analytiques qui conduisent aux expressions fractionnaires des régulateurs CRONE, et ce sans dénaturer le comportement fréquentiel du procédé.

Le **chapitre 4** présente l'étude comparative des deux premières générations de la commande CRONE, étude associée au premier domaine (*variations de gain* avec *phase constante*). Au final, bien que les structures des régulateurs de chacune de ces générations soient obtenues par deux approches différentes (structure fixée *a priori* pour la première et *a posteriori* pour la deuxième), leurs expressions analytiques et les valeurs de leurs paramètres sont très proches (voire identiques). C'est la raison pour laquelle les performances obtenues avec les deux générations sont similaires. Ce résultat n'est pas surprenant dans la mesure où le domaine d'études est parfaitement adapté à ces deux générations et dans la mesure où les données de synthèse sont les mêmes dans les deux cas, et ce pour que la comparaison soit significative.

Enfin, le **chapitre 5** présente les développements et les résultats obtenus dans le cadre du deuxième domaine d'études (*variations de gain* avec *phase non constante*), puis du troisième (*variations de gain* et de *phase*). Si au chapitre 4 les 1^{ère} et 2^{ème} générations conduisent aux mêmes performances dans le cadre du premier domaine d'études, il n'en est pas de même pour le deuxième domaine. C'est la raison pour laquelle il est montré pourquoi les régulateurs de la 1^{ère} génération ne peuvent plus assurer la robustesse du degré de stabilité contrairement à ceux de la 2^{ème} génération. Ensuite, l'étude comparative se poursuit avec le dernier domaine d'étude pour lequel la 2^{ème} génération, à son tour, n'est plus adaptée. L'influence de la variation de phase en plus de la variation de gain sur les performances de la commande CRONE de 2^{ème} génération, en particulier la sensibilité du degré de stabilité aux incertitudes paramétriques, est illustrée. Pour finir, les performances obtenues avec la 3^{ème} génération sont remarquables dans la mesure où elles vont au-delà des attentes. En effet, la minimisation de la sensibilité du degré de stabilité aux incertitudes paramétriques associées à ce troisième domaine d'étude conduit à une quasi-robustesse du degré de stabilité, illustrant ainsi le fait que la commande CRONE de 3^{ème} génération est parfaitement bien adaptée à ce dernier cas d'étude.

Les perspectives s'inscrivent directement dans la continuité des travaux en cours.

Une première perspective à court terme est la réalisation d'un banc d'essai au Liban, initialement prévu au démarrage des travaux de thèse, mais qui malheureusement n'a pu se faire dans les délais.

Ce banc d'essai permettra, dans un premier temps, de confronter les simulations et les mesures afin d'établir les domaines de validité des hypothèses faites pour l'obtention des modèles de connaissance. Cette confrontation simulation/expérimentation doit permettre, non seulement un recalage des modèles, mais aussi d'affiner la définition des incertitudes nécessaire dans le cadre de la SFCR.

Dans un deuxième temps, l'implantation des régulateurs CRONE des différentes générations permettra, dans le cadre des domaines d'études associés, de valider expérimentalement les performances obtenues en simulation.

En ce qui concerne les limites des performances remarquables obtenues avec la commande CRONE de 3^{ème} génération, celles-ci sont directement liées à la distance entre l'actionneur et le capteur. En effet, à iso-rapidité, plus la distance entre l'actionneur et le capteur augmente plus le retard complexe augmente, se traduisant dans le domaine fréquentiel par une décroissance du gain et par un déphasage d'autant plus élevés. Cela nécessite alors de la part de la commande une compensation importante qui entraîne une augmentation de la sensibilité du signal de commande. Une étude complémentaire est donc nécessaire pour définir les limites concernant la co-localisation actionneur-capteur, c'est-à-dire établir quelle est la distance maximale à laquelle le capteur peut être placé par rapport à l'actionneur. Se pose ensuite très rapidement la question concernant le nombre d'actionneurs et de capteurs à utiliser dès l'instant où les dimensions du milieu sont importantes, passant ainsi d'un système SISO (Simple Input – Simple Output) étudié dans ce mémoire à un système MIMO (Multi Input – Multi Output).

Par ailleurs, dans de nombreuses applications, il n'est pas toujours possible de mesurer la température à l'endroit où l'on souhaite la réguler. D'une manière générale, la solution consiste à utiliser des estimateurs à base de modèle. Dans le cas particulier des phénomènes de diffusion, la principale difficulté est le caractère longue mémoire qui nécessite une gestion du dilemme complexité/efficacité temps réel.

Enfin, une extension de ce travail est l'étude des phénomènes de diffusion thermique dans un milieu poreux. Dans un premier temps, afin de limiter le degré de complexité, le milieu poreux sera constitué de billes d'un même matériau et de même diamètre, enfermées dans un tube soumis à un flux thermique à l'une de ses extrémités.

Références bibliographiques

- [Abi Zeid Daou *et al.*, 2013] : Abi Zeid Daou, R. & Moreau, X., 2013. A comparison between integer order and fractional order controllers applied to a hydro-electromechanical system. *Transaction on Control and Mechanical Systems*, 2(3), pp. 131-143.
- [Abi Zeid Daou *et al.*, 2015] : Abi Zeid Daou, R. & Moreau, X., 2015. *Fractional Calculus: Applications*. New York: Nova.
- [Abi Zeid Daou *et al.*, 2012a] : Abi Zeid Daou, R., Moreau, X., Assaf, R. & Christohpy, F., 2012. *Analysis of hte Fractional Order System in the thermal diffusive interface - Part 1: Application to a semi-infinite plane medium*. Lebanon, s.n.
- [Abi Zeid Daou *et al.*, 2012b] : Abi Zeid Daou, R., Moreau, X. & Francis, C., 2012. *Fractional order systems applied to electrical domain, Part 1: background and introduction*. Zouk Mosbeh, Lebanon, IEEE.
- [Abi Zeid Daou *et al.*, 2016] : Abi Zeid Daou, R., Moreau, X. & Christophy, F., 2016. *Temperature Control of a finite Diffusive Interface Medium Applying CRONE Second Generation*. Lebanon, IEEE.
- [Adda, 1997] : Adda, F., 1997. Geometric interpretation of the fractional derivative. *Journal of Fractional Calculus and Applied Analysis*, Volume 11, pp. 21-52.
- [Agrawal, 2004] : Agrawal, O.-P., 2004. Application of Fractional Derivatives in Thermal Analysis of Disk Brakes. *Nonlinear Dynamics*, 38(1-4), pp. 191-206.
- [Aoun *et al.*, 2004] : Aoun, M., Malti, R., Levron, F. & Oustaloup, A., 2004. Numerical simulations of fractional systems: An overview of existing methods and improvements. *Nonlinear Dynamics*, Volume 38, pp. 117-131.
- [Assaf, 2015] : Assaf, R., 2015. *Modélisation des phénomènes de diffusion thermique dans un milieu fini homogène en vue de l'analyse, de la synthèse et de la validation de commandes robustes*, Bordeaux: Université de Bordeaux.
- [Assaf *et al.*, 2012] : Assaf, R., Moreau, X., Abi Zeid Daou, R. & Christohpy, F., 2012. *Analysis of hte Fractional Order System in hte thermal diffusive interface - Part 2: application to a finite medium*. Lebanon, s.n.
- [Battaglia *et al.*, 2001] : Battaglia, J., Cois, O., Puigsegur, L. & Oustaloup, A., 2001. Solving an inverse heat conduction problem using a non-integer identified model. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 44(14), pp. 2671-2680.
- [Battaglia *et al.*, 2013] : Battaglia, J.-L. et al., 2013. Nonlinear heat diffusion simulation using Volterra series expansion. *International Journal of Thermal Sciences*, Volume 71, pp. 80-87.
- [Benchellal *et al.*, 2005] : Benchellal, A., Bachir, S., Poinot, T. & Trigeassou, J.-C., 2005. Identification of non-integer model of induction machines. In: U-Books, ed. *Fractional differentiation and its applications*. s.l.:s.n., pp. 471-482.

- [Bode, 1945] : Bode, H. W., 1945. *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. D. Van Nostrand ed. New Jersey: Princeton.
- [Bohannan, 2000] : Bohannan, G., 2000. *Application of Fractional Calculus to Polarization Dynamics in Solid electric Materials*, Montana: Montana State University.
- [Canat *et al.*, 2005] : Canat, S. & Faucher, J., 2005. Modeling, identification and simulation of induction machine with fractional derivative. In: U-Books, ed. *Fractional Differentiation and its Applications*. s.l.:s.n., pp. 459-470.
- [Christophy *et al.*, 2016] : Christophy, F., Moreau, X., Assaf, R. & Abi Zeid Daou, R., 2016. *Temperature Control of a Semi Infinite Diffusive Interface Medium Using the CRONE Controller*. Malta, IEEE.
- [Cois, 2002] : Cois, O., 2002. *Systèmes linéaires non entiers et identification par modèle non entier : application en thermique*, Bordeaux: Université Bordeaux I.
- [Crone, 2005] : CRONE Group, 2005. *CRONE Control Design Module*, Bordeaux: Bordeaux University.
- [Dauphin-Tanguy, 2000] : Dauphin-Tanguy, G., 2000. *Les bond-graphs*. Hermès ed. Paris: s.n.
- [Dugowson, 1994] : Dugowson, S., 1994. *Les différentielles métaphysiques : histoire et philosophie de la généralisation de l'ordre de dérivation*, Paris: Université Paris Nord.
- [Kuhn *et al.*, 2005] : Kuhn, E., Forgez, G. & Friedrich, G., 2005. Fractional and diffusive representation of a 42 V Ni-mH battery. In: U-Books, ed. *Fractional differentiation and its applications*. s.l.:s.n., pp. 423-434.
- [Kusiak *et al.*, 2005] : Kusiak, A., Battaglia, J. & Marchal, R., 2005. Heat flux estimation in CrN coated tool during MDF machining using non integer system identification technique. In: U-books, ed. *Fractional differentiation and its applications*. s.l.:s.n., pp. 377-388.
- [Lanusse *et al.*, 2013a] : Lanusse, P., Malti, R. & Melchior, P., 2013. Crone control system design toolbox for the control engineering community: tutorial and a case study. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*.
- [Lanusse *et al.*, 2013b] : Lanusse, P., Malti, R. & Melchior, P., 2013. CRONE control system design toolbox for the control engineering community: tutorial and case study. *Philosophical transaction of the royal society*, Volume 391, pp. 1-14.
- [Lanusse *et al.*, 2016] : Lanusse, P., Nelson-Gruel, D. & Lamara, A., 2016. *Toward a CRONE toolbox for the design of full MIMO controllers*. Novi Sad, IEEE.
- [Lanusse, 2010] : Lanusse, P., 2010. *CRONE Control System Design, a CRONE toolbox for Matlab*, Bordeaux: s.n.
- [Lin, 2001] : Lin, J., 2001. *Modélisation et identification de systèmes d'ordre non entier*, Poitiers: Université de Poitiers.
- [Maachou *et al.*, 2010a] : Maachou, A. et al., 2010. *Identification par modèles non entiers linéaires d'un système thermique à haute température*. Nancy, IEEE.
- [Maachou *et al.*, 2010b] : Maachou, A. et al., 2010. *Thermal identification using fractional linear models at high temperatures*. Badajoz, IFAC.
- [Maachou *et al.*, 2010c] : Maachou, A. et al., 2010. *Thermal system identification for large temperature variations using fractional Volterra series*. Badajoz, IFAC.

- [Maachou *et al.*, 2011] : Maachou, A. et al., 2011. *Application of fractional Volterra series for the identification of thermal diffusion in an ARMCO iron sample subject to large temperature variations*. Milano, IFAC, pp. 5621-5626.
- [Maachou *et al.*, 2012] : Maachou, A. et al., 2012. Thermal system identification using fractional models for high temperature levels around different operating points. *Nonlinear Dynamics*, 70(2), pp. 941-950.
- [Malti *et al.*, 2009] : Malti, R., Sabatier, J. & Akçay, H., 2009. *Thermal modeling and identification of an aluminum rod using fractional calculus*. Saint-Malo, France, 15th IFAC Symposium on System Identification.
- [Malti *et al.*, 2011] : Malti, R., Melchior, P., Lanusse, P. & Oustaloup, A., 2011. *Towards an object oriented CRONE toolbox for fractional differential systems*. Milano, Italy, 18th IFAC World Congress.
- [Millet *et al.*, 1993] : Miller, K. & Ross, B., 1993. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. New York: Wiley.
- [Moreau *et al.*, 2002] : Moreau, X., Ramus-Serment, C. & Oustaloup, A., 2002. Fractional Differentiation in Passive Vibration Control. *Journal of Nonlinear Dynamics*, Volume 29, pp. 343-362.
- [Moreau *et al.*, 2005] : Moreau, X., Altet, O. & Oustaloup, A., 2005. Fractional differentiation: an example of phenomenological interpretation. In: U-Books, ed. *Fractional differentiation and its applications*. s.l.:s.n., pp. 275-287.
- [Nigmatullin, 1992] : Nigmatullin, R., 1992. A fractional integral and its physical interpretation – Theoret. and Math. Phys.. *Theoretical and Mathematical Physics*, 90(3), pp. 242-251.
- [Oldam *et al.*, 1974] : Oldham, K. & Spanier, J., 1974. *The Fractional Calculus*. New York: Academic Press.
- [Oustaloup, 1983] : Oustaloup, A., 1983. *Systèmes asservis linéaires d'ordre fractionnaire*. Paris: Masson.
- [Oustaloup, 1991] : Oustaloup, A., 1991. *La commande CRONE*. Paris: Hermes.
- [Oustaloup, 1995] : Oustaloup, A., 1995. *La dérivation non entière : Théorie, synthèse et applications*. Paris: Hermes.
- [Oustaloup *et al.*, 2000] : Oustaloup, A. et al., 2000. *The CRONE toolbox for Matlab*. New York, 11th IEEE Int. Symp. on Computer-Aided Control System Design, CACSD.
- [Podlubny, 2002] : Podlubny, I. et al., 2002. Analogue Realizations of Fractional-Order Controllers. *Journal of Nonlinear Dynamics*, Volume 29, pp. 281-296.
- [Podlubny, 2005] : Podlubny, I., 2005. Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. In: U-books, ed. *Fractional differentiation and its applications*. s.l.:s.n., pp. 3-18.
- [Pointot *et al.*, 2004] : Pointot, T. & Trigeassou, J., 2004. Identification of Fractional Systems Using an Output-Error Technique. *Nonlinear Dynamics*, 38(1), pp. 133-154.
- [Ramus-Serment *et al.*, 2002] : Ramus-Serment, C. et al., 2002. Generalised approach on fractional response of fractal networks. *Journal of Chaos, Solitons and Fractals*, Volume 14, pp. 479-488.

- [Sabatier *et al.*, 2006] : Sabatier, J. et al., 2006. Fractional system identification for lead acid battery state charge estimation. *Signal Processing*, 86(10), pp. 2645 - 2657.
- [Sabatier *et al.*, 2010] : Sabatier, J., Merveillaut, M., Malti, R. & Oustaloup, R., 2010. How to impose physically coherent initial conditions to a fractional system?. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15(5), pp. 1318 - 1326.
- [Sabatier *et al.*, 2012] : Sabatier, J., Farges, C., Merveillaut, M. & Feneteau, L., 2012. On observability and pseudo state estimation of fractional order systems. *European Journal of Control*, 18(3), pp. 260 - 271.
- [Sabatier *et al.*, 2014] : Sabatier, J. et al., 2014. Lithium-ion batteries modeling involving fractional differentiation. *Journal of Power Sources*, Volume 262, pp. 36-43.
- [Sabatier *et al.*, 2015] : Sabatier, J., Farges, C. & Fadiga, L., 2015. Approximation of a fractional order model by an integer order model: a new approach taking into account approximation error as an uncertainty. *Journal of Vibration and Control*.
- [Samko *et al.*, 1993] : Samko, S., Kilbas, A. & Marichev, O., 1993. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*. Amsterdam: Gordon and Breach.
- [Serrier *et al.*, 2007] : Serrier, P., Moreau, X. & Oustaloup, A., 2007. Limited-Bandwidth Fractional Differentiator: Synthesis and Application in Vibration Isolation. In: *Advances in Fractional Calculus*. s.l.:Springer, pp. 287-302.
- [Serrier, 2008] : Serrier, P., 2008. *Analyse de l'influence des non-linéarités dans l'approche CRONE : Application en isolation vibratoire*, Bordeaux: Université Bordeaux I.
- [Tati *et al.*, 2016] : Tari, M., Maamri, N. & Trigeassou, J.-C., 2016. Initial conditions and initialization of fractional systems. *J. Comput. Nonlinear Dynam*, Volume 11.
- [Trigeassou *et al.*, 1999] : Trigeassou, J.-C. et al., 1999. *Modeling and identification of a non integer order system*. Karlsruhe, IFAC.
- [Trigeassou *et al.*, 2009a] : Trigeassou, J.-C. & Maamri, N., 2009. *State space modelling of fractional differential equations and the initial condition problem*. Djerba, IEEE.
- [Trigeassou *et al.*, 2009b] : Trigeassou, J.-C. et al., 2009. *Modeling and identification of a non integer order system*. Karlsruhe, IEEE.
- [Trigeassou *et al.*, 2010a] : Trigeassou, J.-C. & Maamri, N., 2010. *The initial conditions of riemann-liouville and caputo derivatives : an integrator interpretation*. Badajoz, IFAC.
- [Trigeassou *et al.*, 2010b] : Trigeassou, J.-C., Maamri, N. & Tenoutit, M., 2010. *Conditions initiales et initialisation des systèmes différentiels fractionnaires linéaires*. Nancy, IEEE.
- [Trigeassou *et al.*, 2011a] : Trigeassou, J.-C. & Maamri, N., 2011. Initial conditions and initialization of linear fractional differential equations. *Signal processing*, 91(3).
- [Trigeassou *et al.*, 2011b] : Trigeassou, J.-C. & Maamri, N., 2011. Initial conditions and initialization of linear fractional differential equations. *Signal Processing*, Volume 91, pp. 427-436.
- [Trigeassou *et al.*, 2011c] : Trigeassou, J.-C. & Maamri, N., 2011. Initial conditions and initialization of linear fractional differential equations. *Signal Processing*, 91(3), pp. 427 - 436.

- [Trigeassou *et al.*, 2011d] : Trigeassou, J.-C., Maamri, N. & Oustaloup, A., 2011. *Automatic initialization of the Caputo fractional derivative*. s.l., s.n.
- [Trigeassou *et al.*, 2011e] : Trigeassou, J.-C. & Oustaloup, A., 2011. *Fractional integration : A comparative analysis of fractional integrators*. Sousse, IEEE, pp. 1-6.
- [Trigeassou *et al.*, 2012a] : Trigeassou, J.-C., Maamri, N., Sabatier, J. & Oustaloup, A., 2012. State variables and transients of fractional order differential systems. *Computers & Mathematics with Applications*, 64(10), pp. 3117 - 3140.
- [Trigeassou *et al.*, 2012b] : Trigeassou, J., Maamri, N., Sabatier, J. & Oustaloup, A., 2012. Transients of fractional-order integrator and derivatives. *Signal, Image and Video Processing*, 6(3), pp. 359-372.
- [Trigeassou *et al.*, 2012c] : Trigeassou, J.-C., Maamri, N. & Oustaloup, A., 2012. *State variables, initial conditions and transients of fractional order derivatives and systems*. s.l., IFAC.
- [Trigeassou *et al.*, 2013a] : Trigeassou, J.-C., Maamri, N. & Oustaloup, A., 2013. *The Caputo derivative and the infinite state approach*. s.l., IFAC.
- [Trigeassou *et al.*, 2013b] : Trigeassou, J.-C., Maamri, N. & Oustaloup, A., 2013. The infinite state approach : Origin and necessity. *Computers & Mathematics with Applications*, 66(5), pp. 892 - 907.
- [Trigeassou *et al.*, 2014a] : Trigeassou, J., Maamri, N. & Oustaloup, A., 2014. Analysis of the Caputo Derivative and Pseudo State Representation with the Infinite State Approach. In: R. Abi Zeid Daou & X. Moreau, eds. *Fractional Calculus: Theory*. New York: Nova Publishers, pp. 1-26.
- [Trigeassou *et al.*, 2014b] : Trigeassou, J.-C., Maamri, N. & Oustaloup, A., 2014. *Lyapunov stability of fractional order systems : The two derivatives case..* s.l., s.n., pp. 1-6.
- [Trigeassou *et al.*, 2015] : Trigeassou, J.-C., Maamri, N. & Oustaloup, A., 2015. Lyapunov stability of noncommensurate fractional order systems : An energy balance approach. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 11(4).
- [Victor *et al.*, 2008a] : Victor, S., Melchior, P., Nelson-Gruel, D. & Oustaloup, A., 2008. *Flatness control for linear fractional MIMO systems: thermal application*. Ankara, IFAC.
- [Victor *et al.*, 2008b] : Victor, S., Melchior, P. & Oustaloup, A., 2008. *Flatness principle extension to linear fractional MIMO systems: thermal application*. Ajaccio, IEEE.
- [Victor *et al.*, 2008c] : Victor, S., Melchior, P., Sabatier, J. & Oustaloup, A., 2008. *Extension de la platitude aux systèmes fractionnaires MIMO : application à un système thermique*. Bucarest, IEEE.
- [Victor *et al.*, 2009a] : Victor, S., Malti, R., Melchior, P. & Oustaloup, A., 2009. *From system identification to path planning using fractional approach: a thermal application example*. San Diego, s.n.
- [Victor *et al.*, 2009b] : Victor, S., Melchior, P. & Oustaloup, A., 2009. *Flatness necessary and sufficient conditions for non linear fractional systems using fractional differential forms*. Budapest, s.n.
- [Victor *et al.*, 2010] : Victor, S., Melchior, P. & Oustaloup, A., 2010. Robust path tracking using flatness for fractional linear MIMO systems: A thermal application. *Computers And Mathematics With Applications*, 59(5), pp. 1667-1678.

- [Victor *et al.*, 2011a] : Victor, S., Malti, R., Melchior, P. & Oustaloup, A., 2011. *Instrumental variable identification of hybrid fractional Box-Jenkins models*. Milano, IFAC.
- [Victor *et al.*, 2011b] : Victor, S., Melchior, P., Malti, R. & Oustaloup, A., 2011. *Path tracking with flatness and CRONE control for fractional systems: thermal application*. Milano, IFAC, pp. 10818-10823.
- [Victor *et al.*, 2013] : Victor, S., Melchior, P. & Oustaloup, A., 2013. *Computation of flat outputs for fractional systems: a thermal application*. Grenoble, IFAC.
- [Victor *et al.*, 2014] : Victor, S., Melchior, P., Levine, J. & Oustaloup, A., 2014. *Flat output computation for fractional linear systems: application to a thermal system*. Cape Town, IFAC.
- [Victor *et al.*, 2015a] : Victor, S., Melchior, P., Levine, J. & Oustaloup, A., 2015. Flatness for linear fractional systems with application to a thermal system. *Automatica*.
- [Victor *et al.*, 2015b] : Victor, S. & Melchior, P., 2015. Improvements on flat output characterization for fractional systems. *Fractional Calculus and Applied Analysis Journal (FCAA)*.