



HAL
open science

Propriétés génériques des mesures invariantes en courbure négative

Kamel Belarif

► **To cite this version:**

Kamel Belarif. Propriétés génériques des mesures invariantes en courbure négative. Systèmes dynamiques [math.DS]. Université de Bretagne occidentale - Brest, 2017. Français. NNT: 2017BRES0059 . tel-01668505

HAL Id: tel-01668505

<https://theses.hal.science/tel-01668505>

Submitted on 20 Dec 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



université de bretagne
occidentale

UNIVERSITE
BRETAGNE
LOIRE

THÈSE / UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE

sous le sceau de l'Université Bretagne Loire

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE

Mention : mathématiques
École Doctorale SICMA

présentée par

Kamel Belarif

Préparée au Laboratoire de

Mathématiques de Bretagne Atlantique

Propriétés Génériques des Mesures Invariantes en Courbure Négative

Thèse soutenue le 29 Août 2017

devant le jury composé de :

Yves Coudène

Professeur à l'Université de Bretagne Occidentale -
Directeur de Thèse

Françoise Dal'bo

Professeure à l'Université de Rennes 1 - Examinatrice

François Ledrappier

Directeur de Recherches à l'Université Pierre et Marie Curie -
Examineur

Benoît Saussol

Professeur à l'Université de Bretagne Occidentale -
Examineur

Barbara Schapira

Maîtresse de Conférence, à l'Université de Rennes 1 -
Examinatrice

Rapporteurs :

Jérôme Buzzi

Directeur de Recherches à l'Université Paris-Sud

Mark Pollicott

Professeur à l'Université de Warwick

Table des matières

Introduction	iii
1 Variétés hyperboliques	1
1.1 Rappels de géométrie hyperbolique	1
1.1.1 Représentation de l'espace hyperbolique	1
1.1.2 Isométries de l'espace hyperbolique	3
1.1.3 Dynamique dans l'espace hyperbolique	5
1.2 Géodésiques et représentation symbolique	6
1.2.1 Représentation symbolique des géodésiques en dimension 2	7
1.2.2 Codage des flots hyperboliques en dimension supérieure	8
1.3 Sous-décalages de type fini et formalisme thermodynamique	13
1.4 Un premier résultat de généricité	17
1.4.1 Variétés convexes cocompactes	18
1.4.2 Cas général	23
2 Géométrie ergodique en courbure variable	27
2.1 Géométrie des variétés à courbure négative	27
2.2 Séries de Poincaré et exposants critiques	31
2.2.1 Propriétés des exposants critiques	32
2.2.2 Cocycles de Gibbs	33
2.2.3 Cocycle de Busemann pondéré	34
2.3 Théorie de Patterson-Sullivan	34
2.3.1 Familles de densités de Patterson au bord	35
2.3.2 Constructions de mesures de Gibbs	36
2.4 Mélange du flot géodésique	39
2.5 Critère de finitude pour les variétés géométriquement finies	40
3 Généricité du mélange faible	43
3.1 Formalisme thermodynamique en courbure négative	44
3.1.1 Entropie topologique et exposants critiques	44
3.1.2 Pression topologique et mesures de Gibbs	50
3.2 Finitude et mélange des mesures de Gibbs	52

3.3	Généricité des mesures faiblement mélangeantes	52
3.3.1	Plan de la preuve	52
3.3.2	Construction de mesures finies sur T^1M	54
3.3.3	Preuve du théorème principal	58
3.3.4	Extension à certaines variétés non géométriquement finies	61
4	Travaux en cours et ouverture	65
4.1	Finitude des mesures de Gibbs sur certaines variétés géométriquement infinies	65
4.2	Variétés de courbure négative ou nulle	70
4.2.1	Transitivité du flot géodésique	70
4.2.2	Variétés de rang un	71
4.2.3	Formalisme thermodynamique en rang 1	72
A	Convergence des mesures de probabilité	77

Introduction

Dans ce manuscrit, nous reviendrons sur le déroulement de la thèse que j'ai eu la chance de réaliser entre 2013 et 2017 sous la direction d'Yves Couderc. L'objet principal de ce travail est l'ensemble $\mathcal{M}^1(T^1M)$ des mesures de probabilité sur une variété non compacte de courbure négative, invariantes par l'action du flot géodésique. Plus précisément, nous nous intéresserons aux propriétés satisfaites par un ensemble générique de $\mathcal{M}^1(T^1M)$. Le but premier de cette partie introductive est de motiver l'étude des propriétés de ces mesures et l'intérêt du point de vue générique que nous adoptons. Enfin, nous exposerons les principaux résultats que nous démontrerons dans le reste de ce texte.

Motivations et historique

Considérons un nuage de particules se déplaçant librement sur une variété riemannienne (M, g) de courbure négative. Chacune des trajectoires suivies par ces particules satisfait le principe de moindre action. En d'autres termes, une trajectoire $c : [0, 1] \rightarrow M$ telle que $c(0) = x, c(1) = y$ peut être suivie par une particule si et seulement si l'énergie le long de c est minimisée. Plus formellement, considérons la fonctionnelle d'énergie

$$c \mapsto \frac{1}{2} \int_0^1 \|\dot{c}(t)\|^2 dt$$

où $\|\cdot\|$ est la norme sur T^1M induite par la métrique g . Une courbe c est une géodésique si et seulement si elle minimise la quantité ci-dessus. Les extréma de cette fonctionnelle satisfont l'équation d'Euler-Lagrange donnée par

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right) = \frac{\partial L}{\partial x}$$

où L est le Lagrangien défini par

$$L : \begin{cases} T^1M & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, v) & \mapsto \frac{1}{2} \langle v, v \rangle_x \end{cases}$$

avec $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ désignant le produit scalaire en x induit par la métrique riemannienne g .

Considérons l'isomorphisme canonique \mathcal{L} entre le fibré unitaire tangent T^1M de (M, g) et son fibré cotangent défini par

$$\mathcal{L} : \begin{cases} TM & \rightarrow T^*M \\ (x, v) & \mapsto (x, \frac{\partial L}{\partial v}) \end{cases}$$

et posons $p = \frac{\partial L}{\partial v}$, alors le hamiltonien

$$H(x, p) = (p \cdot v - L(x, v)) \circ \mathcal{L}^{-1}(x, p)$$

engendre le système d'équations canoniques

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

Ainsi, nous ramenons le problème de la recherche de géodésiques à un système équations différentielles d'ordre un sur l'espace des phases (soit, indifféremment T^1M ou T^*M). Le flot géodésique $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est alors défini comme le flot hamiltonien induit par le système d'équations canoniques ci-dessus. Ce nouveau point de vue, bien que paraissant simple pose un certain nombre de problèmes lorsque nous tentons d'étudier un problème de physique concret. En effet, si nous considérons un grand nombre, n de particules se déplaçant dans M alors le système précédent doit comporter $2n$ équations à résoudre. De plus, afin de connaître précisément l'évolution d'un système donné de particules, nous devons déterminer avec exactitude ses conditions initiales. Cependant, il est techniquement compliqué voir impossible de déterminer avec une précision aussi grande que nous le souhaitons la position ainsi que la vitesse d'un grand nombre de particules simultanément. Par ailleurs, le flot géodésique d'une variété à courbure négative est très fortement sensible aux conditions initiales. Ainsi, une légère modification de celles-ci entraîne de fort changements dans l'allure des trajectoires que nous cherchons à déterminer. Ainsi les expériences réalisées deviennent quasiment impossible à reproduire.

Ces difficultés ont poussé les physiciens du 19^{ème} siècle à considérer le problème de l'évolution d'un système à très grand nombre de particules du point de vue statistique. Il ne s'agit plus cette fois de déterminer avec certitude l'état d'un système donné de particules à un temps t mais plutôt d'exprimer la probabilité qu'un état donné soit atteint à un instant donné. Ainsi, nous disposons de distributions de probabilité μ modélisant la répartition des différents états du système que nous tentons d'étudier.

Soit A un sous-ensemble mesurable de l'espace des phases. Tout au long de ce manuscrit, nous ferons l'hypothèse que les mesures nous intéressant sont invariantes par l'action du flot géodésique. Nous entendons par là que pour tout ensemble mesurable A ,

$$\mu(\phi_{-t}(A)) = \mu(A).$$

Soit $f : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, bornée représentant une quantité physique dont nous tentons de connaître l'évolution (position, vitesse, énergie, spin,...). Nous noterons

$$\mathbb{E}(f) = \int_{T^1M} f d\mu$$

son espérance qui représente la valeur de cet observable la plus susceptible d'être atteinte par l'ensemble des éléments du système étudié. Nous sommes donc amené à étudier l'évolution de la quantité

$$\mathbb{E}_t(f) = \int_{T^1M} f \circ \phi_t d\mu$$

au cours du temps et nous nous demandons si elle converge en moyenne vers un état stationnaire (ou d'équilibre). Dans un premier temps, nous cherchons à savoir si la limite

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_{T^1M} (f \circ \phi_t(x) d\mu(x)) dt$$

existe. Ce problème nous pousse alors à étudier la quantité

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f \circ \phi_t(x) dt.$$

L'une des hypothèses fondamentales liée à ce point de vue fut formulée par Ludwig Boltzmann en 1871. Son affirmation, connue sous le nom d'hypothèse ergodique stipule que la moyenne temporelle ci-dessus converge vers la moyenne de l'observable. Cette affirmation est cependant très intuitive et ne repose sur aucun formalisme mathématique. Ainsi, lorsque D.Hilbert proposa sa célèbre liste de vingt-trois problèmes à la communauté mathématique en 1902 [Hil02], il donna une place importante à l'axiomatisation de la physique à l'aide d'outils mathématiques et il y propose entre autres de développer les travaux entamés par Boltzmann. Le développement de la théorie des probabilités entamée par A.Kolmogorov fut une occasion de choix permettant de mettre à jour le cadre dans lequel l'hypothèse ergodique est vérifiée.

Ainsi, J.Von Neumann [Neu32] et G.D.Birkhoff [Bir32] formulèrent séparément en 1931 des résultats portant sur la convergence des moyennes temporelles pour des transformations discrètes. Le premier auteur de ce travail démontra une convergence de type L^2 des moyennes temporelles et le second une convergence presque partout de cette même quantité. Ce dernier résultat peut être résumé dans le théorème suivant.

Théorème 0.1. *Soit (X, T, μ) un système dynamique mesuré tel que μ est de masse finie et T -invariante et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ un observable. Pour tout*

$f \in L^1(X, \mu)$, posons $S_n(f)(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x))$ alors il existe $\bar{f} \in L^1(X, \mu)$ T -invariante telle que

$$S_n(f)(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{f}(x), \quad \mu - pp \ x \in X.$$

De plus, si les seuls sous-ensembles T -invariants de X sont triviaux (i.e $\phi_{-t}(A) = A \Rightarrow \mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$) alors \bar{f} est constante presque partout et

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{\mu(X)} \left(\int_X f d\mu \right) \quad \mu - pp \ x \in X.$$

Dans ce dernier cas, nous dirons que le système dynamique (X, T, μ) est ergodique. Pour une telle mesure, nous pouvons associer une quantité $h_\mu(T)$ appelée entropie de μ mesurant la complexité du système dynamique (X, \mathcal{B}, μ, T) . Le second principe de la thermodynamique stipule que si la quantité

$$h_{top}(T) = \sup \{ h_\mu(T) : \mu \ T - \text{invariante ergodique} \}$$

est atteinte par une mesure de probabilité m alors cette mesure est une mesure d'équilibre.

Problématique

Nous nous intéresserons ici à deux conditions plus fortes que l'ergodicité du flot géodésique. Nous dirons qu'une mesure finie μ sur T^1M est faiblement mélangeante si pour tout $f, g \in L^2(\mu)$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left| \int_{T^1M} g \circ \phi_t(x) f(x) d\mu(x) - \left(\int_{T^1M} g d\mu \right) \left(\int_{T^1M} f d\mu \right) \right| dt = 0.$$

De même, nous dirons qu'elle est mélangeante si pour tout $f, g \in L^2(\mu)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{T^1M} f(\phi_t(x)) g(x) d\mu(x) = \left(\int_{T^1M} f d\mu \right) \left(\int_{T^1M} g d\mu \right).$$

Cette dernière notion fut introduite par B.O.Koopman et J.V.Neumann dans [KN32]. Il est à noter que le mélange implique le mélange faible qui implique lui même l'ergodicité de la mesure.

L'un des enjeux mathématiques de la théorie ergodique est de déterminer les propriétés des mesures invariantes par certaines transformations. Dans le cas particulier de l'étude du flot géodésique, certaines mesures possédant des propriétés intéressantes ont été exhibées. Ainsi, nous pouvons citer la mesure de Bowen-Margulis et sa construction suivant la méthode de Patterson-Sullivan sur des variétés compactes. En plus d'être ergodique, une telle mesure maximise l'entropie et constitue donc un modèle intéressant

pour l'étude de systèmes à l'équilibre. Malgré le foisonnement des travaux visant à comprendre les propriétés des mesures invariantes par le flot géodésique, une difficulté majeure se pose à nous. De manière générale l'ensemble $\mathcal{M}^1(T^1M)$ est un ensemble infini, non dénombrable. Ainsi, il est impossible de déterminer pour chaque mesure $\mu \in \mathcal{M}^1(T^1M)$ si celle-ci est intéressante du point de vu de la théorie ergodique. Afin de palier à ce problème, un point de vue nouveau à vu le jour sous l'impulsion de K.R.Parthasarathy. Tout d'abord, observons que pour tout ensemble métrique séparable X , l'ensemble $\mathcal{M}^1(X)$ peut être muni d'une structure en faisant un espace topologique. Ainsi, au lieu d'étudier les propriétés de l'ensemble des mesures contenues dans $\mathcal{M}^1(X)$, nous nous intéresserons à celles satisfaites par un grand nombre de mesures. Plus formellement, nous dirons qu'un sous-ensemble $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}^1(X)$ est résiduel (nous dirons encore qu'il est générique ou G_δ -dense) s'il existe une collection dénombrable d'ouverts $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, denses dans $\mathcal{M}^1(X)$ tels que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \mathcal{O}.$$

Nous dirons qu'une propriété \mathcal{P} est générique si elle est satisfaite par un ensemble résiduel de $\mathcal{M}^1(X)$. Ce point de vue introduit par J.C.Oxtoby et S.M.Ulam dans [OU41] qui démontrèrent la généralité des homéomorphismes ergodiques dans l'ensemble des homéomorphismes conservatifs. Plus tard, P.Halmos [Hal44] étendit ce résultat au cas des automorphismes faiblement mélangeants et V.Rokhlin [Rok48] démontra que génériquement, un automorphisme n'est pas mélangeant. Ces résultats furent par la suite poursuivis par K.R.Parthasarathy [Par61] qui démontra que pour tout espace métrique séparable muni d'un homéomorphisme T , l'ensemble des mesures ergodiques invariantes par T est G_δ -dense dans $\mathcal{M}^1(X)$.

C'est en 1972 que K.Sigmund formula un résultat similaire pour des flots Anosov définis sur des variétés compacte X . Il établit alors le résultat suivant.

Théorème 0.2. ([Sig72]) *Soit $\phi_t : X \rightarrow X$ un flot Anosov topologiquement mélangeant. Alors l'ensemble des mesures de probabilité ϕ_t -invariantes, ergodiques est G_δ -dense dans $\mathcal{M}^1(X)$.*

En particulier, ce résultat implique que pour une variété compacte M de courbure négative, l'ensemble des mesures de probabilité invariantes pas le flot géodésique est G_δ -dense dans $\mathcal{M}^1(T^1M)$.

Dans [CS10] Y.Coudène et B.Schapiira étendirent ce résultat aux cas des variétés non compactes de courbure négative.

Théorème 0.3. ([CS10]) *Soit M une variété non élémentaire complète, connexe, orientable de courbure négative pincée et $\phi_t : T^1M \rightarrow T^1M$ son flot géodésique. Alors l'ensemble des mesures de probabilité invariantes par le flot géodésique, ergodiques, de support total et d'entropie nulle est G_δ -dense dans $\mathcal{M}^1(T^1M)$.*

Une question légitime se pose à présent à nous. Étant donné que l'ergodicité des mesures invariantes par le flot géodésique est une propriété générique, que peut-on dire des propriétés plus fortes telles que le mélange ainsi que le mélange faible ?

Une première réponse à cette question est apportée dans [CS14]

Théorème 0.4. ([CS14]) *Soit M une variété non élémentaire complète, connexe, orientable de courbure négative pincée et $\phi_t : T^1M \rightarrow T^1M$ son flot géodésique. Alors l'ensemble des mesures de probabilité invariantes par le flot géodésique, mélangeantes est contenu dans le complémentaire d'un ensemble G_δ -dense dans $\mathcal{M}^1(T^1M)$.*

Ainsi, le mélange des mesures de probabilité invariantes par l'action du flot géodésique n'est pas une propriété générique. Cependant, nous avons l'espoir que le mélange faible constitue un bon candidat. Nous montrerons dans le reste de ce manuscrit que cette propriété est bien générique dans un grand nombre de cas. Cependant, certaines difficultés liées au mélange topologique du flot géodésique sur des variétés convexes cocompactes nous empêchent encore de généraliser cette propriété à toute variété non compacte de courbure négative.

Résultats

Dans un premier temps, nous nous intéresserons aux variétés hyperboliques (*i.e* aux variétés de courbure constante, négative) et démontrerons le résultat suivant.

Théorème A. *Soit M une variété hyperbolique complète, orientable possédant au moins deux géodésiques fermées distinctes. Alors l'ensemble des mesures de probabilité invariantes par le flot géodésique, faiblement mélangeantes est G_δ -dense dans $\mathcal{M}^1(T^1M)$.*

La démonstration de ce théorème repose sur l'utilisation d'un modèle symbolique associés au flot géodésique en courbure constante négative et sur la construction d'une suspension au dessus de celui-ci nous permettant l'étude de ce flot. Une fois ce premier résultat démontré, nous tenterons de le généraliser aux variétés à courbure négative variable. Pour cela, nous construirons des suites de potentiels hölderien $F_n : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ à qui nous associerons des suites de mesures finies, mélangeantes m_{F_n} approchant des mesures de Dirac supportées sur des orbites périodiques dans T^1M . Le point de départ de notre travail est le constat dans [CS10] de la densité dans $\mathcal{M}^1(T^1M)$ des mesures de Dirac normalisées supportées sur des orbites périodiques. De ce fait, et en prenant en compte le théorème 0.4 il nous suffit alors de réussir à approcher des mesures de Dirac normalisées par des mesures de probabilité ϕ_t -invariantes, mélangeantes. L'essentiel de notre travail consistera à démontrer le résultat suivant.

Théorème B. *Soit M une variété géométriquement finie non élémentaire complète, connexe, orientable de courbure négative pincée et $\phi_t : T^1M \rightarrow T^1M$ son flot géodésique. Supposons de plus que la restriction de ϕ_t à son ensemble non-errant est topologiquement mélangeante. Alors l'ensemble des mesures de probabilité invariantes par le flot géodésique, mélangeantes est dense dans $\mathcal{M}^1(T^1M)$.*

Nous en déduisons en particulier le corollaire suivant.

Corollaire A. *Soit M une variété géométriquement finie non élémentaire complète, connexe, orientable de courbure négative pincée et $\phi_t : T^1M \rightarrow T^1M$ son flot géodésique. Supposons de plus que la restriction de ϕ_t à son ensemble non-errant est topologiquement mélangeant. Alors l'ensemble des mesures de probabilité invariantes par le flot géodésique, faiblement mélangeantes de support total est G_δ -dense dans $\mathcal{M}^1(T^1M)$.*

Ce résultat est restrictif du point de vue géométrique. En effet, nous travaillons sur des variétés possédant un nombre fini de bouts qui sont soit des pointes de volume fini soit des morceaux cylindres hyperboliques de volume infini. Cette restriction tient au fait qu'il est compliqué d'exhiber de bonnes mesures (mélangeantes, finies) ϕ_t -invariantes sur des variétés non compactes de courbure négative. Seul le cas des variétés géométriquement finies nous permet d'en construire pour l'instant. La démonstration du théorème B repose sur deux autres résultats.

Le premier est une extension d'un critère de finitude de la mesure de Bowen-Margulis dû à F.Dal'bo, J.P.Otal et M.Peigné [DOP00]. Ce résultat peut-être vu comme un cas particulier (où le potentiel F est constant, nul) des mesures que nous étudierons. Nous l'étendrons à des mesures associées à un potentiel hölderien borné.

Théorème C. *Soit \widetilde{M} une variété de Hadamard de courbure négative pincée et Γ un groupe discret, géométriquement fini, agissant librement, proprement discontinûment sur \widetilde{M} . Supposons qu'il existe un potentiel hölderien borné $\widetilde{F} : T^1\widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que pour tout sous-groupe parabolique Γ_{ξ_p} fixant $\xi_p \in \partial_\infty\widetilde{M}$ le couple (Γ_{ξ_p}, F) est de type divergent alors (Γ, F) satisfait la propriété de trou spectral. De plus, la mesure de Gibbs m^F associée au couple (Γ, F) est finie.*

Afin de démontrer la généralité des mesures faiblement mélangeantes, nous aurons recours à des théorèmes de convergence de mesures de probabilité. Rappelons qu'une suite de mesures de probabilité $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sur X converge étroitement vers une mesure μ si pour toute fonction continue, bornée de X ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f d\mu_n = \int_X f d\mu.$$

Afin d'établir un résultat de convergence dans l'ensemble des mesures de probabilité, nous devons estimer la perte de masse de la suite de mesures μ_n .

Pour cela, nous introduirons un principe variationnel étudié dans [PPS15] prenant en compte la contribution du potentiel hölderien. Une mesure de probabilité μ , ϕ_t -invariante sera dite d'équilibre si elle maximise la quantité

$$P_\mu(\phi_t) = h_\mu(\phi_1) + \int_{T^1M} F d\mu.$$

Nous nous proposons de démontrer le résultat suivant.

Théorème D. *Soit X un espace métrique séparable muni d'un flot $\phi_t : X \rightarrow X$ et $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ un potentiel positif, borné tel qu'il existe un compact $K \subset X$, un voisinage V de K et un réel $c > 0$ tel que pour tout $x \in X$, $F(x) \leq c$. De plus supposons que pour tout $x \in K$, $F(x) = c$ et qu'il existe $c' < c$ tel que*

$$\sup_{x \in X \setminus V} F(x) = c'.$$

S'il existe une mesure d'équilibre μ associée à F alors

$$\mu(X \setminus V) \leq \frac{h_\mu(\phi_t)}{c - c'}.$$

La principale difficulté à généraliser le théorème B à des variétés non géométriquement finies repose sur le fait qu'il n'existe pas toujours d'exemples de mesures d'équilibre de masse finie sur T^1M . Afin de palier à ce manque, nous nous proposons de démontrer un critère de finitude de ces mesures reposant sur la croissance d'une fonction de comptage orbitale prenant en considération la contribution d'un potentiel hölderien. Nous montrerons alors le résultat suivant qui s'inspire des travaux de D.Sullivan [Sul] et C.Yue [Yue96]

Théorème E. *Soit Γ un groupe d'isométries agissant librement, proprement discontinûment sur une variété de Hadamard \tilde{M} de courbure négative, posons $M = \tilde{M}/\Gamma$, $F : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ un potentiel hölderien et m_F une mesure de Gibbs associée au couple (Γ, F) . S'il existe une constante $C_0 > 0$ telle que*

$$\sum_{n-1 \leq d(x, \gamma x) < n} e^{\int_x^{\gamma x} \tilde{F}} \geq C_0 e^{\delta_\Gamma^F n}$$

alors $m_F(T^1M) < \infty$.

Notons par ailleurs que V.Pit et B.Schapira ont démontré récemment un critère de finitude pour les mesures de Gibbs sur des variétés de courbure négative pincée ([PS17], théorème 3). Ce résultat généralise le théorème E.

Plan de la thèse

Dans le premier chapitre de ce manuscrit, nous reviendrons d'abord sur les notions élémentaires de géométrie hyperbolique puis nous introduirons

deux manières distinctes de représenter le flot géodésique sur T^1M par des modèles symboliques en suivant les méthodes de C.Series [Ser86a, Ser86b] et R.Bowen [Bow73]. Ces méthodes facilitent notre étude et nous permettront d'utiliser les outils issus du formalisme thermodynamique développés dans [Bow08]. Ces outils nous permettront alors de démontrer le théorème A. Nous donnerons d'abord une preuve de ce résultat lorsque M est une variété hyperbolique convexe cocompacte puis nous l'étendrons à toute variété hyperbolique.

Dans le second chapitre, nous introduirons des outils de géométrie ergodique développés dans [PPS15]. Nous rappellerons la construction de mesures de Gibbs selon la méthode de Patterson-Sullivan [Pat76] [Sul] puis nous démontrerons le critère de finitude (théorème C) de ces mesures sur des variétés géométriquement finies

Dans le troisième chapitre, nous reviendrons sur deux versions du principe variationnel. Le premier concerne les mesures d'entropie maximale sur des variétés non compactes M est démontré dans [OP04] et repose en partie sur une étude de la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite du groupe de revêtement Γ de M . Le second concerne les mesures d'équilibre maximisant la pression afin de prendre en compte la contribution d'un potentiel hölderien borné. Ce second résultat est démontré dans [PPS15]. Une fois ces résultats énoncés, nous serons en mesure de prouver les théorèmes D et B.

Le quatrième et dernier chapitre sera consacré aux travaux en cours de réalisation et aux différentes questions qui restent ouvertes au terme de cette thèse. Nous y démontrerons entre autres le théorème E.

Chapitre 1

Variétés hyperboliques

Dans ce chapitre, nous exposerons les travaux effectués lors des premiers mois de cette thèse. Avant de s'attaquer au problème général exposé en introduction, nous nous sommes intéressé à un modèle simplifié sur lequel nous disposons d'outils nous permettant d'étudier les mesures invariantes par le flot géodésique.

Nous rappellerons dans la première section les outils de base de géométrie hyperbolique puis nous nous intéresserons dans la seconde section aux représentations symboliques du flot géodésique sur des variétés hyperboliques. Dans la troisième section, nous introduirons les outils nous permettant d'exploiter le codage précédemment introduit afin de construire des mesures aux fortes propriétés thermodynamiques. Enfin, nous démontrerons au quatrième paragraphe notre premier résultat de genericité des mesures faiblement mélangeantes sur des variétés de courbure constante négative.

1.1 Rappels de géométrie hyperbolique

1.1.1 Représentation de l'espace hyperbolique

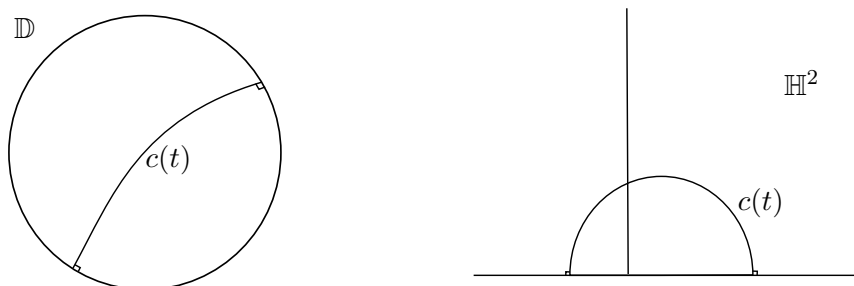
Une variété hyperbolique M est une variété complète, connexe dont la courbure sectionnelle est constante négative. Une telle variété sera tantôt modélisée par le disque de Poincaré

$$\mathbb{D}^n = \{ z \in \mathbb{R}^n : |z| < 1 \}$$

et à d'autres occasions par le demi-plan supérieur

$$\mathbb{H}^n = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0 \}.$$

Nous travaillerons successivement sur l'un ou l'autre de ces modèles en fonction de l'aisance qu'il nous fournira pour l'étude de la géométrie des variétés hyperboliques. Notons enfin que ces deux modèles sont conformément équivalents. Il existe donc un difféomorphisme $\Psi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ tel que l'angle formé

FIGURE 1.1 – géodésiques dans \mathbb{D} et \mathbb{H}

entre deux vecteurs v, w basés en $x \in \mathbb{H}$ est préservé par $T_x\Psi$. Les résultats que nous énoncerons dans l'un de ces deux modèles resteront donc vrai dans le second.

Soit v un vecteur tangent à \mathbb{D}^n en un point z . Nous définissons la norme hyperbolique de v par

$$\|v\|_{hyp} = \frac{2}{1 - |z|^2} \|v\|_{eucl}$$

où $\|v\|_{eucl}$ est la norme euclidienne de v . Afin de munir \mathbb{D}^n d'une structure d'espace métrique (dont la courbure sectionnelle est négative), considérons une courbe $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}^n$. Il est possible de déterminer la longueur hyperbolique de c par

$$long_{hyp}(c) = \int_0^1 \left\| \frac{dc}{dt} \right\|_{hyp} dt.$$

Ainsi, étant donné deux points $z, w \in \mathbb{D}^n$, il est possible de définir une distance hyperbolique entre z et w par

$$d_{hyp}(z, w) = \inf_{c:c(0)=z, c(1)=w} long_{hyp}(c).$$

Définition 1.1. Soient $z, w \in \mathbb{D}^n$. On dira qu'une courbe $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}$ telle que $c(0) = z, c(1) = w$ est une géodésique si pour tout $t \in [0, 1]$ $\dot{c}(t) = 1$ et c minimise la distance entre z et w .

Il est assez simple de caractériser les géodésiques c de \mathbb{D}^n . En effet, deux cas de figure s'offrent à nous :

1. si c passe par l'origine de \mathbb{D}^n alors c est une droite
2. sinon, c est un arc de cercle orthogonal à la sphère \mathbb{S}^n définie par

$$\mathbb{S}^n = \{z \in \mathbb{R}^n : |z|^2 = 1\}.$$

Définition 1.2. Deux géodésiques c et c_1 dans \mathbb{D}^n sont dites asymptotes s'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall t \in [0, +\infty[, d_{hyp}(c(t), c_1(t)) < C.$$

Remarquons que cette relation entre deux géodésiques est une relation d'équivalence. Nous pouvons alors considérer l'ensemble des classes d'équivalence des géodésiques asymptotes que nous noterons $\partial_\infty \mathbb{D}^n$ et que nous appellerons le bord à l'infini de \mathbb{D}^n . Notons enfin que la même méthode nous permet de construire une compactification $\overline{\mathbb{H}^n} = \mathbb{H}^n \cup \partial_\infty \mathbb{H}^n$ du demi-plan de Poincaré.

1.1.2 Isométries de l'espace hyperbolique

Intéressons nous à présent aux isométries de \mathbb{H}^n préservant l'orientation, c'est à dire les applications de \mathbb{H}^n qui préservent la métrique hyperbolique et les angles entre deux vecteurs ayant le même point de base. De manière générale, les groupes d'isométries Γ de \mathbb{H}^n préservant l'orientation sont les sous-groupes discrets de $SO^+(1, n)$ et, pour toute variété hyperbolique M il existe un groupe d'isométries de \mathbb{H}^n tel que $M \simeq \mathbb{H}^n/\Gamma$.

Par soucis de clarté et de concision, nous nous restreindrons dans cette partie au cadre des surfaces hyperboliques.

Définition 1.3. Une homographie est une transformation $h : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ telle que $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $ad - bc = 1$.

Il est clair que l'ensemble des homographies forme un groupe isomorphe à $SL(2, \mathbb{R})$.

Théorème 1.4. Tout groupe d'isométries préservant l'orientation dans \mathbb{H} est un sous-groupe discret de $PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})/\{\pm id\}$.

Un tel groupe Γ agit proprement discontinûment sur \mathbb{H} . On dit alors que Γ est Fuchsien. Les différents éléments de Γ peuvent être classés en fonction de leurs points fixes dans $\overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \partial_\infty \mathbb{H}$.

1. Si $\gamma \in \Gamma$ ne fixe aucun point dans $\partial_\infty \mathbb{H}$ alors γ est elliptique,
2. si $\gamma \in \Gamma$ fixe un unique point dans $\partial_\infty \mathbb{H}$ alors γ est parabolique,
3. si $\gamma \in \Gamma$ fixe exactement deux point dans $\partial_\infty \mathbb{H}$ alors γ est hyperbolique.

Nous pouvons caractériser la nature des isométries $\gamma \in \Gamma$ en fonction de la valeur de leur trace $tr(\gamma)$. Ce fait est résumé dans le théorème ci-dessous.

Théorème 1.5. Soit Γ un groupe Fuchsien agissant sur \mathbb{H} . Toute isométrie $\gamma \in \Gamma$ satisfait à une et une seule des conditions suivantes

1. Si $|tr(\gamma)| < 2$ alors γ est elliptique et fixe un unique point dans \mathbb{H} ,

2. si $|tr(\gamma)| = 2$ alors γ est parabolique et fixe un unique point dans $\partial_\infty \mathbb{H}$,
3. si $|tr(\gamma)| > 2$ alors γ est hyperbolique et agit par translation sur une géodésique dont les extrémités dans $\partial_\infty \mathbb{H}$ sont fixées par γ .

Nous avons vu précédemment que pour toute surface hyperbolique M , il existe un sous groupe discret Γ de $PSL(2, \mathbb{R})$ tel que $M \simeq \mathbb{H}/\Gamma$. Il semble alors intéressant de se demander si Γ nous permet d'obtenir des informations concernant la topologie de S .

L'une des propriétés des groupes Fuchsien est qu'ils permettent de paver l'espace hyperbolique. Autrement dit, il existe un sous-ensemble D de \mathbb{H} tel que

1. D est fermé, connexe, d'intérieur non vide,
2. $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma D = \mathbb{H}$,
3. pour tout $\gamma \in \Gamma \setminus \{Id\}$, $int(D) \cap \gamma(int(D)) = \emptyset$.

On dit alors que D est un domaine fondamental pour l'action de Γ . Une façon de construire un tel domaine repose sur la construction d'un domaine de Dirichlet défini comme suit.

Soit $z_0 \in \mathbb{H}$ et $\gamma \in \Gamma$. Nous définissons le demi-espace $\mathbb{H}(\gamma)$ associé à γ par

$$\mathbb{H}(\gamma) = \{z \in \mathbb{H} : d_{hyp}(z, z_0) \leq d(z, \gamma z_0)\}.$$

Le domaine de Dirichlet \mathcal{D}_Γ associé à Γ est alors défini par

$$\mathcal{D}_\Gamma = \bigcap_{\gamma \in \Gamma \setminus \{Id\}} \mathbb{H}(\gamma).$$

Définition 1.6. L'ensemble limite $\Lambda(\Gamma)$ de Γ est le sous-ensemble de $\partial_\infty \mathbb{H}$ défini par

$$\Lambda(\Gamma) = \overline{\Gamma x} \cap \partial_\infty \mathbb{H}.$$

Cet ensemble ne dépend pas du choix de $x \in \mathbb{H}$.

Nous noterons $\Lambda_h(\Gamma)$ (resp. $\Lambda_p(\Gamma)$) l'ensemble des points de $\Lambda(\Gamma)$ fixés par une isométrie hyperbolique (resp. parabolique).

Soit $\mathcal{C}(\Gamma)$ le plus petit convexe dans $\overline{\mathbb{H}}$ contenant l'ensemble limite $\Lambda(\Gamma)$.

Définition 1.7. Nous dirons qu'une surface hyperbolique $M \simeq \mathbb{H}/\Gamma$ est géométriquement finie si et seulement si $\mathcal{D}_\Gamma \cap \mathcal{C}(\Gamma)$ est de volume fini.

Théorème 1.8. ([Bow95]) Soit M une surface hyperbolique isomorphe à \mathbb{H}/Γ . Les assertions suivantes sont équivalentes

1. M est géométriquement finie,
2. $\Lambda(\Gamma) = \Lambda_h(\Gamma) \cup \Lambda_p(\Gamma)$.

1.1.3 Dynamique dans l'espace hyperbolique

Soit c une géodésique dans \mathbb{H} paramétrée par $t \mapsto c(t)$ telle que $c(0) = z$ et $c'(0) = v \in T^1\mathbb{H}$. Nous définissons alors le flot géodésique $\tilde{\phi}_t$ sur $T^1\mathbb{H}$ par

$$\tilde{\phi}_t((z, v)) = (c(t), \frac{dc(t)}{dt}).$$

Nous pouvons vérifier que pour tout groupe Fuchsien Γ , le flot ci-dessus reste invariant par l'action de Γ . Ainsi, si $M \simeq \mathbb{D}/\Gamma$ est une surface hyperbolique, $\tilde{\phi}_t$ passe au quotient en un flot ϕ_t sur T^1M .

Définissons le sous-ensemble du fibré unitaire tangent où la dynamique du flot géodésique est intéressante, c'est à dire un ensemble où le flot géodésique possède certaines propriétés de récurrence.

Soit M une surface hyperbolique complète connexe. Nous noterons T^1M le fibré unitaire tangent de M c'est à dire l'ensemble des vecteurs v tangents à un points $z \in M$ tels que $\|v\|_{hyp} = 1$.

Définition 1.9. *Soit M une surface hyperbolique complète connexe. Nous dirons que $v \in T^1M$ est errant s'il existe un voisinage V de v et un réel $T > 0$ tels que pour tout $|t| > T$,*

$$\phi_t(V) \cap V = \emptyset.$$

Pour tout vecteur $v \in T^1\mathbb{H}$, nous noterons v_+ , v_- les extrémités de la géodésique $l_v : \mathbb{R} \rightarrow \tilde{M}$ telle que $\dot{l}_v(0) = v$. Soit alors

$$\tilde{\Omega} = \{v \in T^1\mathbb{H} : (v_-, v_+) \in \Lambda(\Gamma) \times \Lambda(\Gamma) \setminus \Delta\}$$

où

$$\Delta = \{(\xi, \eta) \in \Lambda(\Gamma) \times \Lambda(\Gamma) : \xi = \eta\}.$$

Proposition 1.10. *([Ebe72]) Soit M une surface hyperbolique complète connexe, alors l'ensemble des vecteurs non-errants dans T^1M est le projeté de $\tilde{\Omega}$ dans T^1M .*

Nous noterons cet ensemble Ω dans la suite de ce manuscrit.

Définition 1.11. *Nous dirons que le flot géodésique est topologiquement mélangeant si pour tout ouverts non vides U et V de Ω il existe $T > 0$ tel que pour tout $|t| > T$,*

$$\phi_{-t}(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Débutons à présent une présentation de la dynamique des groupes Fuchsien. Si $\gamma \in \Gamma$ alors la longueur de γ est définie par

$$\ell(\gamma) = d_{hyp}(x, \gamma x).$$

Le groupe $L(\Gamma) = \{\ell(\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$ des longueurs de Γ joue un rôle important dans l'étude de la dynamique topologique du flot géodésique.

Définition 1.12. *Un groupe Fuchsien Γ est arithmétique si et seulement si $L(\Gamma)$ est un sous-groupe discret de \mathbb{R} .*

Théorème 1.13. *([Dal00]) Soit S une surface hyperbolique isomorphe à \mathbb{D}/Γ . Les affirmations suivantes sont équivalentes*

1. $L(\Gamma)$ est non-arithmétique,
2. Le flot géodésique défini sur T^1S est topologiquement mélangeant.

Théorème 1.14. *([GR86]) Soit M une variété hyperbolique non-élémentaire isomorphe à \mathbb{H}^n/Γ , alors Γ est non-arithmétique.*

Pour finir, nous introduisons les notions de feuilles stables et instables qui joueront un rôle important dans la construction de modèles symboliques associés au flot géodésique.

Soit $v \in T^1M$, la feuille stable associée à v est définie par

$$W_\epsilon^{ss}(v) = \{w \in T^1M : \forall t \geq 0 \ d(\phi_t(v), \phi_t(w)) \leq \epsilon \text{ et } d(\phi_t(v), \phi_t(w)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0\}.$$

De la même manière, nous pouvons définir la feuille instable $W_\epsilon^{su}(v)$ associée à v comme la feuille stable associée à ϕ_{-t} .

1.2 Géodésiques et représentation symbolique

Dans ce paragraphe, nous nous intéresserons à la construction de modèles symboliques associés au flot géodésique. Ces représentations nous permettent d'introduire des outils qui simplifient l'étude de la dynamique du flot géodésique sur des variétés hyperboliques.

La première utilisation connue de cette méthode remonte à J. Hadamard qui étudiait dans [Had98] la dynamique du flot géodésique sur des surfaces de courbure négative ou nulle plongées dans \mathbb{R}^3 , géométriquement finies sans pointes. Dans les deux paragraphes suivants, nous nous intéresserons à deux codages différents du flot géodésique.

Dans la section 1.2.1, nous présenterons un codage géométrique du flot géodésique sur certaines surfaces géométriquement finies de courbure constante négative. Les résultats présentés dans cette section sont dus à C.Series et R.Bowen. Ils sont démontrés dans [Bow79, Ser86a]. Nous recommandons également la lecture de [Dal07] dont nous reprenons les notations. Notons que de manière générale, le codage de Bowen-Series nécessite la construction d'une bonne partition, dénombrable de \mathbb{S}^1 . Cependant, il est possible de s'assurer que cette partition est finie (voir [Pit10]) lorsque la surface est de volume fini.

Dans la section 1.2.2, nous nous intéresserons à un résultat de codage de R.Bowen [Bow73] pour des variétés hyperboliques géométriquement finies sans pointes de dimension n .

1.2.1 Représentation symbolique des géodésiques en dimension 2

Commençons par décrire ce codage pour des surfaces convexes cocompactes S . Par là nous voulons signifier que l'ensemble non-errant du flot géodésique est compact. De manière équivalente, cela revient à dire qu'il existe un nombre fini d'isométries hyperboliques h_1, \dots, h_n telles que $\Gamma = \langle h_1, \dots, h_n \rangle$ et $S \simeq \mathbb{D}/\Gamma$. Pour simplifier les notations de cette partie, nous considérerons que Γ est engendré par deux isométries hyperboliques.

Pour tout $i \in \{1, 2\}$, $\epsilon = \pm 1$, nous définissons un sous-ensemble $A(h_i^\epsilon)$ de $\partial_\infty \mathbb{D}$ par

$$A(h_i^\epsilon) = \overline{\mathbb{D}(h_i^\epsilon)} \cap \partial_\infty \mathbb{D}.$$

Ainsi, nous poserons

$$A = \bigcup_{i \in \{1, 2\}, \epsilon = \pm 1} A(h_i^\epsilon).$$

Définissons à présent une application $f : A \rightarrow \partial_\infty \mathbb{D}$ par

$$f : \begin{cases} A & \rightarrow \partial_\infty \mathbb{D} \\ x & \mapsto f|_{A(\gamma)}(x) = \gamma^{-1}x \end{cases}$$

où $\gamma \in \{h_i^\epsilon\}_{i \in \{1, 2\}, \epsilon = \pm 1}$.

Pour tout $\xi \in A$, nous associons une suite $\underline{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots)$ où $\xi_i \in \{h_i^\epsilon\}_{i \in \{1, 2\}, \epsilon = \pm 1}$ est tel que $f^n(\xi) \in A(\xi_i)$.

Notons Σ^+ l'ensemble des suites réduites dans $\{h_1^\epsilon, h_2^\epsilon\}_{\epsilon = \pm 1}^{\mathbb{N}}$ c'est à dire,

$$\Sigma^+ = \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} : x_i \in \{h_i^\epsilon\}_{i \in \{1, 2\}, \epsilon = \pm 1}, x_i \neq x_{i+1}^{-1}\}.$$

Proposition 1.15. ([Ser86a]) *Soit $M \simeq \mathbb{D}/\Gamma$ une surface hyperbolique convexe cocompacte. Il existe une bijection*

$$\rho : \Sigma^+ \rightarrow \Lambda(\Gamma).$$

Ainsi, il est possible de représenter de façon unique chaque point de l'ensemble limite par une suite infinie de symboles. Remarquons qu'une géodésique γ ne quittant jamais l'ensemble non-errant de $M \simeq \mathbb{D}/\Gamma$ admet un relevé dans \mathbb{D} dont les extrémités appartiennent à $\Lambda(\Gamma)$. Réciproquement, étant donnés deux points $\xi, \eta \in \Lambda(\Gamma)$, il existe une unique géodésique $(\xi\eta)$ dans \mathbb{D} reliant ces deux points. De plus, le projeté dans $T^1\mathbb{D}$ de $(\xi\eta)$ est inclus dans l'ensemble non-errant Ω de T^1S .

Soit $(\xi\eta)$ une géodésique telle que $\xi, \eta \in \Lambda(\Gamma)$ et $(\xi_0 \dots \xi_n \dots), (\eta_0 \dots \eta_n \dots)$ les suites réduites qui leur sont associées dans Σ^+ . Si $\xi_0^{-1} \neq \eta_0$, nous noterons

$$\xi \star \eta = \dots \xi_n^{-1} \dots \xi_0^{-1} \eta_0 \dots \eta_n \dots$$

Soit Σ l'ensemble des mots réduits dans $\{h_i\}_{i \in \{1, 2\}, \epsilon = \pm 1}^{\mathbb{Z}}$. Posons alors

$$\mathcal{A} = \{(\xi\eta) : \xi, \eta \in \Lambda(\Gamma), \xi \star \eta \in \Sigma\} \subset (\Lambda\Gamma \times \Lambda\Gamma \setminus \Delta) \times \mathbb{R}.$$

Proposition 1.16. ([Ser86a]) Soit $S \simeq \mathbb{D}/\Gamma$ une surface hyperbolique convexe cocompacte. Il existe une bijection

$$\pi : \begin{cases} \Sigma & \rightarrow \mathcal{A} \\ \xi \star \eta & \mapsto (\xi\eta) \end{cases}$$

Ainsi, il existe une unique manière de représenter toute géodésique ne quittant pas l'ensemble non errant Ω de $S \simeq \mathbb{D}/\Gamma$ par une suite de symboles appartenant aux générateurs de Γ . Ce résultat est généralisé par C. Series aux surfaces hyperboliques géométriquement finies. On a alors le théorème suivant.

Théorème 1.17. ([Bow79, Ser86a]) Soit Γ un groupe Fuchsien finiment engendré agissant sur \mathbb{D} . En gardant les notations précédentes, il existe une surjection

$$p : \begin{cases} \Sigma & \rightarrow \mathcal{A} \\ \xi \star \eta & \mapsto (\xi\eta) \end{cases}$$

1.2.2 Codage des flots hyperboliques en dimension supérieure

Soit f_t un flot différentiable défini sur une variété compacte. Nous dirons qu'un sous-ensemble compact Ω ne contenant aucun point fixe est hyperbolique si pour tout $x \in \Omega$, la décomposition suivante existe

$$T_x M = E^u \oplus E \oplus E^s$$

où E est la direction tangente au flot et il existe $c, \lambda > 0$ tels que

1. $\|Df_t(v)\| \leq ce^{-\lambda t} \|v\|$ pour tout $v \in E^s, t \geq 0$,
2. $\|Df_{-t}(v)\| \leq ce^{-\lambda t} \|v\|$ pour tout $v \in E^u, t \geq 0$.

De plus, nous dirons qu'un ensemble hyperbolique Ω est basique si

1. l'ensemble des orbites f_t -périodiques est dense dans Ω ,
2. $(f_t)|_\Omega$ est topologiquement transitif (i.e il existe une orbite dense dans Ω),
3. il existe un ouvert $U \supset \Omega$ tel que $\Omega = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} f_t(U)$.

Le reste de cette section sera consacré à la présentation d'un modèle symbolique sur Ω . Nous omettrons les démonstrations des résultats présentés mais nous renvoyons les lecteurs vers [Bow73] et [Rat73].

Soit $c(t)$ une f_t -orbite évoluant dans Ω et \mathcal{R} une famille de sections transverses au flot f_t . Indexons chaque élément de \mathcal{R} par un entier $i \in \{1, \dots, n\}$ et construisons une trajectoire symbolique $\underline{x} = ..x_{-1}x_0x_1..$ associée à c où $x_j \in \{1, \dots, n\}$. Cette trajectoire est en quelque sorte une liste des éléments de \mathcal{R} successivement traversés par c .

La question est à présent de savoir sous quelles conditions une telle représentation est unique et nous permet d'étudier les différentes propriétés du système dynamique (Ω, f_t) . Le choix de la partition joue bien entendu un rôle extrêmement important. Si $\underline{x} = ..x_{-1}x_0x_1..$ représente la f_t -orbite d'un élément $z \in \Omega$, alors nous voudrions qu'il existe des temps t_i tels que $f_{t_i}(z) \in R_{x_i}$. Soit

$$R(\underline{x}) = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f_{t_i}(R_{x_i}).$$

Une bonne famille de section satisfait alors la propriété suivante : pour tout $\underline{x} \in \{1, \dots, n\}^{\mathbb{Z}}$, $R(\underline{x})$ contient au plus un point. Cette propriété est satisfaite par des familles de sections de Markov que nous définirons dans la suite.

Définition 1.18. *Soit D un disque de dimension $n - 1$, transverse au flot f_t et $x \in D$. Nous dirons que D est une section locale du flot s'il existe une constante $\epsilon > 0$ et un voisinage U_ϵ de x dans D tel que l'application*

$$\begin{cases} D \times [-\epsilon, \epsilon] & \rightarrow U_\epsilon \\ (z, t) & \mapsto f_t(z) \end{cases}$$

soit un difféomorphisme.

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in \Omega$ satisfaisant $d(x, y) \leq \delta$, il existe un unique $t \in \mathbb{R}$ satisfaisant $|t| < \epsilon$ et un unique $z \in \Omega$ tel que

$$W_\epsilon^{ss}(f_t(x)) \cap W_\epsilon^{su}(y) = \{z\}.$$

Nous noterons alors $z = \langle x, y \rangle$ et $\langle x, y \rangle_D = pr_D(\langle x, y \rangle)$ où pr_D est la projection de U_ϵ sur D .

Définition 1.19. *Un sous-ensemble $R \subset \Omega \cap D$, disjoint de ∂D est un rectangle si pour tout $x, y \in R$, $\langle x, y \rangle_D \in T$.*

Dans ce cas, pour tout $x \in R$, nous poserons $W^{ss}(x, R) = \{\langle x, y \rangle_D \mid y \in R\}$ et $W^{su}(x, R) = \{\langle z, x \rangle_D \mid z \in R\}$

Le modèle symbolique associé au flot géodésique sera construit en considérant l'application de premier retour de Poincaré associée à une famille \mathcal{R} de rectangles transverses au flot. Rappelons la définition de cette application. Pour tout $v \in \mathcal{R}$, nous définissons le temps de premier retour de v dans \mathcal{R} par

$$\tilde{r}(v) = \inf\{t > 0 : f_t(v) \in \mathcal{R}\}.$$

Alors l'application de premier retour $P : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ est définie par

$$P(v) = f_{\tilde{r}(v)}(v).$$

Afin de définir une partition de Markov, posons

$$\mathcal{R}^* = \bigcup_{i=1}^m \text{int}(R_i)$$

et

$$\mathcal{S} = \{v \in \mathcal{R} \mid \forall k \in \mathbb{Z}, P^k(v) \in \mathcal{R}^*\}.$$

Définition 1.20. Soit $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_n\}$ une famille de rectangles inclus dans des disques disjoints transverses au flot géodésique telle qu'il existe un réel $\epsilon > 0$ satisfaisant

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^n f_{[0, \epsilon]} R_i.$$

Nous dirons que \mathcal{R} est une partition de Markov si

1. pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\text{diam}(R_i) < \epsilon$,
2. $\forall j \neq i, \text{int}(R_i) \cap \text{int}(R_j) = \emptyset$,
3. pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $R_i = \overline{\text{int}(R_i)}$,
4. pour tout $i \neq j$, $D_i \cap f_{[0, \epsilon]}(D_j) = \emptyset$ ou $D_j \cap f_{[0, \epsilon]}(D_i) = \emptyset$,
5. si $v \in \mathcal{S} \cap R_i \cap f_{-\tilde{r}(v)}(R_j)$ alors $W^{ss}(v, R_i) \subset \overline{\mathcal{S} \cap R_i \cap f_{-\tilde{r}(v)}(R_j)}$,
6. si $v \in \mathcal{S} \cap f_{\tilde{r}(v)}(R_i) \cap (R_j)$ alors $W^{su}(v, R_j) \subset \overline{\mathcal{S} \cap f_{\tilde{r}(v)}(R_i) \cap (R_j)}$.

Venons-en à présent à l'un des principaux résultats de dynamique symbolique pour les flots hyperboliques.

Théorème 1.21. Soit Ω un ensemble basique pour le flot hyperbolique f_t . Alors le système (Ω, f_t) admet une partition de Markov $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_n\}$.

Soit à présent \mathcal{R} une partition de Markov de Ω . Nous dirons que la matrice A est une matrice de transition si

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists t < \epsilon : \text{int}(R_i) \cap \phi^{-t}(\text{int}(R_j)) \neq \emptyset \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous dirons alors que le système (Σ_A, σ) où

$$\Sigma_A = \{\underline{x} \in \{1, \dots, n\}^{\mathbb{Z}} : A_{x_i, x_{i+1}} = 1\}$$

et

$$\sigma(\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}) = \{x_{i+1}\}_{i=-\infty}^{\infty}$$

est un sous-décalage de type fini. Il existe alors une surjection $\pi : \Sigma_A \rightarrow \mathcal{R}$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_A & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_A \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathcal{R} & \xrightarrow{P} & \mathcal{R} \end{array}$$

commute.

Pour tout $\underline{x}, \underline{y} \in \Sigma_A$, on note $N(\underline{x}, \underline{y})$ le premier entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \neq y_n$ ou $x_{-n} \neq y_{-n}$. Si $\underline{x} = \underline{y}$, nous poserons $N(\underline{x}, \underline{y}) = +\infty$.

Pour tout $\underline{x}, \underline{y} \in \Sigma_A$, on posera

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \begin{cases} \frac{1}{2^{N(\underline{x}, \underline{y})}} & \text{si } \underline{x} \neq \underline{y}, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, d définit une distance sur Σ_A . Nous faisons ainsi de (Σ_A, d) un espace métrique.

Définition 1.22. Soit A une matrice de transition associée à une partition de Markov \mathcal{R} . Pour tout $w_1..w_k \in \{1, \dots, n\}^k$, on définit le cylindre $[w_1..w_k]$ par

$$[w_1..w_k] = \{\underline{x} \in \Sigma_A \text{ tel que } x_i = w_i \forall i \in \{0, \dots, k\}\}.$$

Proposition 1.23. Les ouverts de (Σ_A, d) sont les unions de cylindres.

Regardons à présent quelques propriétés fondamentales de ces décalages.

Définition 1.24. Une matrice de transition A est dite irréductible apériodique s'il existe $m > 0$ tel que pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $A^m(i, j) > 0$.

Définition 1.25. Soit A une matrice de transition. Le sous-décalage de type fini (Σ_A, σ) associé à la matrice de transition A est topologiquement mélangeant si pour tout ouverts non vides $U, V \subset \Sigma_A$, il existe un entier $N > 0$ tel que pour tout $m \geq N$, $\sigma^m(U) \cap V \neq \emptyset$.

Théorème 1.26. Soit A une matrice de transition et (Σ_A, σ) le sous-décalage de type fini associé. Alors (Σ_A, σ) est topologiquement mélangeant si et seulement si A est irréductible apériodique.

Nous avons vu dans ce qui précède comment représenter de manière symbolique une géodésique de Ω . Nous allons à présent voir comment construire une suspension du flot géodésique au dessus de Σ_A c'est à dire un flot Ψ_t construit dans un espace $\Lambda(A, r)$ -que nous définirons plus bas- pour lequel il existe une surjection $\rho : \Lambda(A, f) \rightarrow \Omega$ tel que pour un représentant $(\underline{x}, s) \in \Lambda(A, f)$ de $v \in \Omega$,

$$\rho \circ \Psi_t(\underline{x}, s) = \phi_t \circ \rho(v).$$

Soit $r : \Sigma_A \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $r(\underline{x}) = \tilde{r} \circ \pi(\underline{x})$ et considérons l'espace

$$Y(A, r) = \{(\underline{x}, t) \in \Sigma_A \times \mathbb{R} : t \in [0, r(\underline{x})]\}$$

muni du flot vertical α_t défini par

$$\psi_t(\underline{x}, s) = (\underline{x}, s + t) \text{ pour } s + t \in [0, r(\underline{x})].$$

Considérons à présent la relation $(\underline{x}, r(\underline{x})) \sim (\sigma(\underline{x}), 0)$ dans $Y(A, r)$. Nous pouvons alors définir un nouvel espace $\Lambda(A, r) = Y(A, r) / \sim$ muni du flot Ψ_t induit par ψ_t .

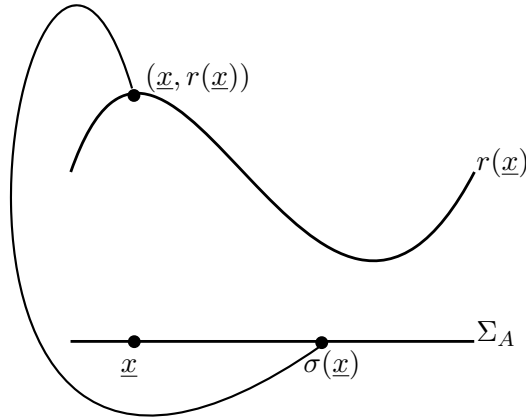


FIGURE 1.2 – Suspension au dessus d'un sous-décalage de type fini

Théorème 1.27. *Il existe une suspension $\Psi_t : \Lambda(A, r) \rightarrow \Lambda(A, r)$ de $\{f_t\}_{|\Omega}$ au dessus d'un sous-décalage (Σ_A, σ) associé à une matrice de transition A irréductible, apériodique et une surjection $\rho : \Lambda(A, r) \rightarrow \Omega$ telle que pour un représentant $(\underline{x}, s) \in \Lambda(A, r)$ de $v \in \Omega$,*

$$\rho \circ \Psi_t(\underline{x}, s) = \phi_t \circ \rho(\underline{x}, s).$$

Afin de conclure cette section, nous décrivons certaines propriétés dynamiques de ces flots.

Définition 1.28. *Soit (X, f_t) un système dynamique. Nous dirons qu'une application continue G est une fonction propre associée à la valeur propre $\lambda = e^{2i\pi\theta}$ si pour tout $t \in \mathbb{R}$*

$$G \circ f_t = \lambda^t G.$$

Définition 1.29. *Un flot est topologiquement faiblement mélangeant si ses seules fonctions propres continues sont les constantes.*

Soit à présent (Ω, f_t) un flot hyperbolique défini sur une variété compacte et possédant une partition de Markov \mathcal{R} . Notons $(\Lambda(A, r), \Psi_t)$ la suspension du flot f_t au dessus du sous-décalage (Σ_A, σ) associé à \mathcal{R} et à la fonction continue, positive $r : \Sigma_A \rightarrow \mathbb{R}$ représentant l'application de premier retour de Poincaré.

Théorème 1.30. *[Bow72] Sous les notations précédentes, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Le flot ϕ_t est topologiquement mélangeant,*
2. *Ψ_t est topologiquement faiblement mélangeant,*
3. *$\{t \in \mathbb{R} \mid \exists p \in \Lambda(A, r) : \Psi_t(p) = p\}$ engendre un sous-groupe dense dans \mathbb{R} ,*

4. $\{r^n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} r(\sigma^k(x)) \mid \exists n \in \mathbb{N}, x \in X : \sigma^n(x) = x\}$ engendre un sous-groupe dense dans \mathbb{R} ,
5. il n'existe pas de fonction continue $f : \Sigma_A \rightarrow \mathbb{S}^1$ ni de constante C telles que pour tout $x \in \Sigma_A$,

$$e^{2i\pi r(x)} = \frac{f(x)}{f \circ \sigma(x)}.$$

Remarque 1.31. Soit $v : \Sigma_A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux prenant un nombre fini de valeurs $\{v_1, \dots, v_n\}$ telles que pour tout $i \neq j$, $v_i/v_j \in \mathbb{Q}$. S'il existe une fonction continue $f : \Sigma_A \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $r = f - f \circ \sigma + v$ alors, les propriétés ci-dessus ne sont pas satisfaites.

Remarque 1.32. Le théorème 1.30 admet une généralisation dans le cas où la variété M est non compacte. Il suffit pour cela qu'elle admette une structure de produit local, que son flot géodésique soit transitif et qu'il satisfasse les conditions du lemme de fermeture d'Anosov. Nous renvoyons les lecteurs à [Cou04] pour un tel énoncé.

1.3 Sous-décalages de type fini et formalisme thermodynamique

Dans cette section, nous traiterons certains résultats issus du formalisme thermodynamique sur un modèle symbolique. L'essentiel des résultats sont dus à R.Bowen et D.Ruelle. Nous renvoyons les lecteurs à [Bow08, BR75] pour plus de détails et pour des démonstrations des résultats énoncés.

Pour commencer, donnons nous un alphabet fini $\mathcal{A} = \{1, \dots, n\}$. Nous noterons Σ l'ensemble des mots infinis définis sur l'alphabet \mathcal{A} . Autrement dit, $\Sigma = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$.

Soit à présent $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ le décalage défini par

$$\sigma(\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}) = \{x_{i+1}\}_{i=-\infty}^{\infty}.$$

Étant donné une matrice de transition A , nous poserons

$$\Sigma_A = \{\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty} \in \Sigma : A(x_i, x_{i+1}) = 1 \ \forall i \in \mathbb{Z}\}.$$

et, nous considérerons le sous-décalage de type fini (Σ_A, σ) associé à la matrice de transition A .

Nous allons à présent construire des mesures de probabilité sur Σ_A associées à un potentiel Φ , invariantes par le décalage $\sigma : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ et reflétant le comportement des σ -orbites dans Σ_A .

Notons \mathcal{M}_σ^1 l'ensemble des mesures de probabilité σ -invariantes définies sur Σ_A et, pour toute fonction continue $\Phi : \Sigma_A \rightarrow \mathbb{R}$ posons

$$\text{var}_k(\Phi) = \sup\{|\Phi(\underline{x}) - \Phi(\underline{y})| : x_i = y_i \ \forall |i| < k\}.$$

Nous noterons dans la suite de ce chapitre

$$\mathcal{F}_A = \{\Phi : \Sigma_A \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue} : \exists b, a \in]0, 1[, \forall k \geq 0, \text{var}_k(\Phi) \leq ba^k\}$$

l'ensemble des fonctions hölderiennes pour la métrique sur Σ_A définie à la section précédente.

Théorème 1.33 (Existence de mesures de Gibbs, ([Sin72])). *Supposons que (Σ_A, σ) soit topologiquement mélangeant et $\Phi \in \mathcal{F}_A$, alors il existe une unique mesure mélangeante $\mu \in \mathcal{M}_\sigma^1(\Sigma_A)$ telle qu'il existe $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $P > 0$ tels que :*

$$c_1 \leq \frac{\mu(\{\underline{y} : y_i = x_i \forall i \in \{0, \dots, m\}\})}{\exp(-Pm + \sum_{k=0}^{m-1} \Phi(\sigma^k(x)))} \leq c_2$$

pour tout $\underline{x} \in \Sigma_A$ et $m > 0$.

Nous dirons qu'une mesure satisfaisant la propriété ci-dessus est une mesure de Gibbs. Afin de démontrer ce théorème, nous pouvons nous restreindre au cas des décalages unilatéraux. Pour cela, nous introduisons à présent la notion d'homologie pour des potentiels continus sur $\mathcal{C}(\Sigma_A)$.

Définition 1.34. *Deux fonctions $\Phi, \Psi \in \mathcal{C}(\Sigma_A)$ sont homologues relativement à σ s'il existe $u \in \mathcal{C}(\Sigma_A)$ tel que*

$$\Psi(\underline{x}) = \Phi(\underline{x}) - u(\underline{x}) + u(\sigma(\underline{x})).$$

L'intérêt de cette notion repose sur le fait que deux potentiels homologues engendrent les mêmes mesures de Gibbs.

Lemme 1.35. *Supposons que Φ et Ψ soient deux potentiels homologues relativement à σ et que le théorème 1.33 soit vérifié pour Φ . Alors il est également vérifié pour Ψ et les mesures associées à ces deux potentiels sont équivalentes.*

Lemme 1.36. *Soient $\Phi \in \mathcal{F}_A$, alors il existe $\Psi \in \mathcal{F}_A$ homologue à Φ relativement à σ tel que $\Psi(\underline{x}) = \Psi(\underline{y})$ dès que $x_i = y_i$ pour tout $i \geq 0$.*

Ainsi, il suffit de démontrer le théorème 1.33 pour des décalages unilatéraux. Soit

$$\Sigma_A^+ = \{\{x_i\}_{i=0}^\infty \in \Sigma : A(x_i, x_{i+1}) = 1 \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

La construction des mesures de Gibbs repose sur le théorème de Ruelle-Perron-Frobenius. Définissons l'opérateur de transfert agissant sur l'ensemble $\mathcal{C}(\Sigma_A^+)$ des fonctions continues sur Σ_A^+ par

$$(\mathcal{L}_\Phi f)(x) = \sum_{y \in \sigma^{-1}(x)} \exp(\Phi(y)) f(y).$$

où $\Phi : \Sigma_A^+ \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}(\Sigma_A) \cap \mathcal{F}_A$.

Théorème 1.37. ([Rue76]) *Supposons que (Σ_A^+, σ) soit topologiquement mélangeant et $\Phi \in \mathcal{F}_A \cap \mathcal{C}(\Sigma_A^+)$. Alors il existe $\lambda > 0$, $h \in \mathcal{C}(\Sigma_A^+)$ et $\nu \in \mathcal{M}(\Sigma_A^+)$ tels que*

- $\mathcal{L}_\Phi \cdot h = \lambda h$
- $\mathcal{L}_\Phi^* \cdot \nu = \lambda \nu$
- $\int h d\nu = 1$

De plus,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\lambda^{-n} \mathcal{L}_\Phi^n g - \nu(g)h\| = 0 \quad \forall g \in \mathcal{C}(\Sigma_A)$$

Proposition 1.38. *Sous les hypothèses ci-dessus, $\mu = h \cdot \nu$ est une mesure de probabilité sur Σ_A^+ satisfaisant*

$$\mu(f) = \nu(h(f)) = \int f(x)h(x)d\nu(x).$$

De plus, c'est l'unique mesure de Gibbs associée à Φ .

Définition 1.39. *On dira que $\mu \in \mathcal{M}_\sigma^1$ est mélangeante pour le décalage $\sigma : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ si pour tout ensembles mesurables U, V de Σ_A ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(U \cap \sigma^{-n}(V)) = \mu(U)\mu(V).$$

Proposition 1.40. *Soit $\Phi \in \mathcal{C}(\Sigma_A) \cap \mathcal{F}_A$ et μ_Φ l'unique mesure de Gibbs associée à Φ alors μ_Φ est mélangeante pour $\sigma : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$.*

Pour terminer cette section, nous nous intéresserons à une propriété supplémentaire des mesures de Gibbs que nous venons de construire. Ce sont les seules mesures dans $\mathcal{M}_\sigma^1(\Sigma_A)$ nous permettant d'atteindre un invariant dynamique : la pression topologique.

Avant d'énoncer ce résultat, rappelons la définition de l'entropie métrique $h_\mu(\sigma)$ associée à un décalage pour une mesure $\mu \in \mathcal{M}_\sigma^1(\Sigma_A)$.

Pour tout $\mu \in \mathcal{M}_\sigma^1(\Sigma_A)$, donnons à (Σ_A, σ, μ) une structure d'espace mesuré et considérons une partition mesurable $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_n\}$ de cet espace. Pour toute autre partition $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ de (Σ_A, σ, μ) , nous noterons

$$\mathcal{C} \vee \mathcal{D} = \{C_i \cap D_j : C_i \in \mathcal{C}, D_j \in \mathcal{D}\}$$

et

$$H_\mu(\mathcal{D}) = - \sum_{i=1}^n \mu(D_i) \log(\mu(D_i)).$$

Proposition 1.41. *Soit \mathcal{D} une partition mesurable finie de (Σ_A, σ, μ) alors la quantité*

$$h_\mu(\sigma, \mathcal{D}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{D} \vee \sigma^{-1} \mathcal{D} \vee \dots \vee \sigma^{-n+1} \mathcal{D})$$

existe.

Nous dirons alors que $h_\mu(\sigma, \mathcal{D})$ est l'entropie métrique de σ associée à la partition \mathcal{D} . Si nous choisissons \mathcal{D} de manière à ce que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $D_i = \{\underline{x} \in \Sigma_A : x_0 = i\}$, alors nous dirons que

$$h_\mu(\sigma) = h_\mu(\sigma, \mathcal{D})$$

est l'entropie topologique de (Σ_A, σ) .

Afin d'introduire la notion de pression, notons

$$\mathcal{A}^{(m)} = \{z = z_0 \dots z_{m-1} \in \{1, \dots, n\}^m \mid \forall i \in \{0, \dots, m-2\}, A_{z_i, z_{i+1}} = 1\}$$

et posons pour tout $\phi \in \mathcal{C}(\Sigma_A)$

$$Z_m(\phi) = \sum_{z \in \mathcal{A}^{(m)}} \exp(\sup\{\sum_{k=0}^{m-1} \phi(\sigma^k(\underline{y})) \mid \underline{y} \in \Sigma_A, y_i = z_i \forall 0 \leq i \leq m-1\}).$$

Nous définissons alors la pression topologique associée au potentiel ϕ par

$$P(\phi) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log(Z_m(\phi)).$$

L'un des résultats les plus importants en théorie ergodique est alors résumé dans la proposition suivante

Proposition 1.42. (*Principe variationnel*) ([Bow75]) *Soit (Σ_A, σ) un sous-décalage associé à une matrice de transition A irréductible apériodique. Pour tout $\mu \in \mathcal{M}_\sigma^1(\Sigma_A)$, la pression topologique vérifie l'inégalité*

$$h_\mu(\sigma) + \int \phi d\mu \leq P(\phi)$$

De plus,

$$h_\mu(\sigma) + \int \phi d\mu = P(\phi)$$

si et seulement si μ est l'unique mesure de Gibbs associée à ϕ .

Les mesures construites précédemment sur Σ_A nous permettent alors d'obtenir naturellement des mesures Ψ_t -invariantes sur $\Lambda(A, r)$.

Soit A une matrice de transition irréductible apériodique, μ une mesure de Gibbs sur (Σ_A, σ) et $r : \Sigma_A \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue positive. Notons

$$d\tilde{\mu} = \frac{d\mu \otimes dt}{\int_{\Sigma_A} r d\mu}.$$

Il est aisé de montrer que cette mesure est Ψ_t -invariante. De plus, elle possède de nombreuses propriétés ergodiques qui nous seront d'une grande utilité. En particulier, Y.Sinai démontre dans [Sin72] que le système dynamique $(\Lambda(A, r), \Psi_t, \tilde{\mu})$ est un K-système. En particulier, Ψ_t est mélangeant relativement à $\tilde{\mu}$. Ce fait provient d'un résultat démontré par B.M.Gurevich.

Théorème 1.43. ([Gur67]) *Soit $(\Lambda(A, r), \Psi_t, \tilde{\mu})$ une suspension du flot (Ω, f_t) au dessus du sous-décalage (Σ_A, σ) . Si le flot Ψ_t est topologiquement faiblement mélangeant alors $(\Lambda(A, r), \Psi_t, \tilde{\mu})$ est un K -système.*

Nous donnerons dans la prochaine section un argument élémentaire se basant sur ce théorème afin de prouver le mélange du système dynamique $(\Lambda(A, r), \Psi_t, \tilde{\mu})$.

1.4 Un premier résultat de genericité

Revenons à présent au flot géodésique défini sur le fibré unitaire tangent d'une variété hyperbolique M . Nous considérerons l'ensemble $\mathcal{M}^1(T^1M)$ des mesures de probabilité ϕ_t -invariantes définies sur T^1M . De la même manière que pour un décalage, nous dirons qu'une mesure $\mu \in \mathcal{M}^1(T^1M)$ est mélangeante par rapport au flot géodésique si pour tout ensemble mesurable $U, V \subset \Omega$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(U \cap \phi_{-t}V) - \mu(U)\mu(V) = 0.$$

Nous dirons qu'une suite μ_n de mesures de probabilité ϕ_t -invariantes converge étroitement vers une mesure de probabilité ϕ_t -invariante si pour toute fonction f continue, bornée

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{T^1M} f d\mu_n = \int_{T^1M} f d\mu.$$

Le reste de ce chapitre sera consacré à la démonstration du résultat suivant.

Théorème 1.44. *Soit M une variété hyperbolique complète, orientable possédant au moins deux géodésiques fermées distinctes. Alors l'ensemble des mesures de probabilité invariantes par le flot géodésique, mélangeantes est dense dans $\mathcal{M}^1(T^1M)$.*

Corollaire 1.45. *Soit M une variété hyperbolique, orientable possédant au moins deux géodésiques fermées distinctes. Alors l'ensemble des mesures de probabilité invariantes par le flot géodésique faiblement mélangeantes est G_δ -dense dans $\mathcal{M}^1(T^1M)$.*

La mesure de Dirac $D_{\mathcal{O}_p}$ supportée sur une orbite périodique \mathcal{O}_p de longueur ℓ est l'unique mesure de probabilité telle que pour toute fonction continue f sur T^1M ,

$$\int_{T^1M} f dD_{\mathcal{O}_p} = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell f(\phi_t(p)) dt$$

où p est un vecteur unitaire tangent à l'orbite périodique \mathcal{O}_p .

Afin de démontrer ces affirmations, nous nous reposerons sur les théorèmes suivants dus à Y. Coudène et B. Schapira.

Théorème 1.46. ([CS10]) *Soit M une variété riemannienne complète, connexe de courbure négative et ϕ_t le flot géodésique défini sur T^1M . Alors l'ensemble des mesures de Dirac normalisées supportées sur des orbites périodiques est dense dans $\mathcal{M}^1(T^1M)$.*

Théorème 1.47. ([CS14, Par62]) *Soit ϕ_t un flot continu défini sur un espace polonais X . Alors l'ensemble des mesures faiblement mélangeantes supportées sur X est un sous-ensemble G_δ dans $\mathcal{M}^1(X)$.*

Ainsi, la démonstration du théorème 1.44 revient à celle du lemme suivant.

Lemme 1.48. *Soit M une variété hyperbolique complète, connexe et $\phi_t : T^1M \rightarrow T^1M$ le flot géodésique défini sur son fibré unitaire tangent. Pour toute orbite ϕ_t -périodique \mathcal{O}_p , il existe une suite $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de mesures de probabilité mélangeantes telle que*

$$m_k \rightharpoonup D_{\mathcal{O}_p}.$$

1.4.1 Variétés convexes cocompactes

Pour commencer, nous prouverons le résultat précédent dans le cas où M est une variété convexe cocompacte. Par là nous entendons que l'ensemble non errant Ω du flot géodésique sur T^1M est compact. Ce cas particulier nous permet d'effectuer une simplification majeure dans notre raisonnement. En effet comme le fait remarquer D.V. Anosov [Ano95], le caractère compact de la variété M ne joue aucun rôle afin d'établir des propriétés des flots hyperboliques en restriction à un ensemble basique. Ainsi, la construction d'une partition de Markov associée à la restriction du flot géodésique sur l'ensemble non-errant d'une variété convexe cocompacte suit exactement celle donnée par R. Bowen sur des variétés compactes.

Soit \mathcal{R} une telle partition de Markov, A la matrice de transition associée et (Σ_A, σ) le sous-décalage de type fini induit par A . Nous démontrerons dans un premier temps le résultat suivant.

Lemme 1.49. *Soit $\underline{p} \in \Sigma_A$ dont la σ -orbite est périodique et longueur ℓ . Il existe une suite $(\mu_n)_n$ de mesures mélangeantes telles que*

$$\mu_n \rightharpoonup D_{\mathcal{O}_{\underline{p}}}$$

où $D_{\mathcal{O}_{\underline{p}}}$ est la mesure de Dirac supportée sur l'orbite périodique engendrée par \underline{p} .

Afin de démontrer ce résultat, nous construirons une suite de potentiels tels que les mesures de Gibbs associées convergent vers la mesure de Dirac supportée sur l'orbite périodique $\mathcal{O}_{\underline{p}}$. Heuristiquement, une suite de potentiels ayant cette propriété doit se concentrer autour de l'orbite $\mathcal{O}_{\underline{p}}$. Ainsi,

si nous posons pour tout $n \in \mathbb{N}$ $c_n = 2^n$, nous pouvons définir une suite $F_n : \Sigma_A \rightarrow \mathbb{R}$ de fonctions hölderiennes de la manière suivante

$$F_n(x) := \begin{cases} c_n & \text{sur } \mathcal{O}_{\underline{p}} \\ 0 & \text{si } d(x, \mathcal{O}_{\underline{p}}) > \frac{1}{2^n} \end{cases}$$

De plus, F_n décroît linéairement dans les boules $B(\sigma^k(\underline{p}), \frac{1}{2^n})$ pour tout $k \in \{0, \dots, \ell - 1\}$.

Rappelons enfin que si σ est topologiquement mélangeant sur Σ_A alors la mesure de Gibbs associée au potentiel $F \in \mathcal{F}_A$ est mélangeante.

Démonstration. Soient (X, \mathcal{B}) un espace mesurable et $\{P_n\}_n$ une suite de mesures de probabilité sur X . La suite $\{P_n\}$ converge étroitement vers une mesure de probabilité P si et seulement si pour tout $B \in \mathcal{B}$ tel que $P(\partial B) = 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(B) = P(B).$$

Ainsi étant donné que la mesure de Dirac supportée sur l'orbite de \underline{p} est l'unique mesure de probabilité σ -invariante supportée sur $\mathcal{O}_{\underline{p}}$, la démonstration du lemme 1.49 revient à montrer que pour tout voisinage V de $\mathcal{O}_{\underline{p}}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(V) = 1$.

Soit $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de mesures de Gibbs associée aux potentiels F_n définis précédemment. Fixons un entier m et rappelons que pour tout $\underline{y} \in \Sigma_A$, le cylindre $[y_1 \dots y_m]$ est défini par

$$[y_1 \dots y_m] = \{z \in \Sigma_A \mid z_i = y_i \ \forall 0 \leq i \leq m - 1\}.$$

Supposons à présent que $d(\mathcal{O}_{\underline{p}}, \underline{y}) > \frac{1}{2^m}$. En appliquant le théorème 1.33, nous obtenons

$$C^{-1} e^{S_m F_n(\underline{p}) - S_m F_n(\underline{y})} \leq \frac{\mu_n([p_1, \dots, p_m])}{\mu_n([y_1, \dots, y_m])} \leq C e^{S_m F_n(\underline{p}) - S_m F_n(\underline{y})}.$$

Ainsi, pour tout $n > m \geq \ell$, puisque les fonctions F_n sont supportées sur les boules $B(\sigma^k(\underline{p}), \frac{1}{2^n})$, $k \in \{0, \dots, \ell - 1\}$ et que $d(\underline{p}, \underline{y}) > \frac{1}{2^m}$, nous obtenons $F_n(\underline{y}) = 0$ et $F_n(\underline{p}) = c_n$. De plus, pour tout $k \in \{1, \dots, m - 1\}$, $q \in \mathbb{N}$, $\sigma^k(\underline{y}) \neq \sigma^q(\underline{p})$ donc, $F_n(\sigma^k(\underline{y})) \leq F_n(\sigma^k(\underline{p}))$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} S_m F_n(\underline{p}) - S_m F_n(\underline{y}) &= c_n + \sum_{k=1}^{m-1} F_n(\sigma^k(\underline{p})) - F_n(\sigma^k(\underline{y})) \\ &\geq c_n. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $n > m$ et pour tout $\underline{y} \notin \{\underline{p}, \sigma(\underline{p}), \dots, \sigma^{\ell-1}(\underline{p})\}$,

$$\mu_n([p_1, \dots, p_m]) \geq C^{-1} e^{c_n} \mu_n([y_1, \dots, y_m]).$$

Supposons à présent $m > \ell$ et notons pour tout $y \in \Sigma_A$ et pour tout $k \in \{0, \dots, \ell - 1\}$

$$[y_1 \dots y_m]_k = \{z \in \Sigma_A \mid z_i = y_{i+k} \forall 0 \leq i \leq m - 1\}.$$

Posons

$$D = \{\omega \in \mathcal{A}^m \mid \omega \notin \{(p_1 \dots p_m), (p_2 \dots p_{m+1}), \dots, (p_\ell \dots p_{m+\ell-1})\}\}.$$

Nous pouvons remarquer que D est de cardinal inférieur à $(\#\mathcal{A})^m$ et que pour tout $\omega_i, \omega_j \in D$ tels que $\omega_i \neq \omega_j$, les cylindres $[\omega_i]$ et $[\omega_j]$ sont disjoints.

De plus si nous notons $V_m = \bigcup_{k=0}^{\ell-1} [p_1 \dots p_m]_k$ alors $V_m^c = \bigcup_{\omega \in D} [\omega]$.

Ainsi,

$$\sum_{\omega \in D} \mu_n([p_1 \dots p_m]) \geq C^{-1} e^{c_n} \sum_{\omega \in D} \mu_n([\omega])$$

et

$$(\#\mathcal{A})^m \mu_n([p_1 \dots p_m]) \geq C^{-1} e^{c_n} \mu_n(V_m^c).$$

Le raisonnement ci-dessus reste vrai pour tout itéré $\sigma^k(p)$, $k \in \{0, \dots, \ell - 1\}$ ainsi

$$(\#\mathcal{A})^m \sum_{k=0}^{\ell-1} \mu_n([p_1 \dots p_m]_k) \geq \ell C^{-1} e^{c_n} \mu_n(V_m^c)$$

et

$$(\#\mathcal{A})^m \mu_n(V_m) \geq \ell C^{-1} e^{c_n} \mu_n(V_m^c).$$

Comme c_n tend vers $+\infty$, nous avons pour tout $m \geq \ell$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n(V_m)}{\mu_n(V_m^c)} = +\infty.$$

Ainsi, comme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(V_m) = \frac{\mu_n(V_m)}{\mu_n(V_m) + \mu_n(V_m^c)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{\mu_n(V_m^c)}{\mu_n(V_m)}}$$

nous obtenons pour tout $m > \ell$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(V_m) = 1.$$

Ainsi, la limite faible lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite de mesures $\{\mu_n\}_n$ est une mesure dont le support est contenu dans tout voisinage V_m de \mathcal{O}_p . En particulier, elle est supportée sur leur intersection, soit sur l'orbite périodique \mathcal{O}_p . \square

Nous sommes à présent en mesure de prouver la première partie du lemme 1.48 dans le cadre convexe cocompact. Ainsi, nous énoncerons et démontrerons deux lemmes, le premier portant sur la périodicité des orbites de la suspension et le second sur la convergence des mesures vers des masses de Dirac, qui nous permettront de conclure la preuve du lemme 1.48.

Soit $r : \Sigma_A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction hölderienne, positive.

Lemme 1.50. *Soit $\underline{x} \in \Sigma_A$ dont la σ -orbite est périodique alors pour tout $s \in [0, r(\underline{x})]$, (\underline{x}, s) est Ψ_t -périodique.*

Démonstration. Soit ℓ la longueur de l'orbite périodique \underline{x} . Posons $T = \sum_{k=0}^{\ell-1} r(\sigma^k(\underline{y}))$.

Nous nous proposons de vérifier que pour tout $s \in [0, r(\underline{x})]$, la ψ_t -orbite de (\underline{x}, s) est périodique de période T .

Nous avons

$$\begin{aligned} \psi_T(\underline{x}, s) &= (\underline{x}, s + \sum_{k=0}^{\ell-1} r(\sigma^k(\underline{y}))) \\ &= (\underline{x}, s + r(\underline{x}) + \dots + r(\sigma^{\ell-1}\underline{x})) \\ &= \psi_{r(\sigma^{\ell-1}(\underline{x}))} \circ \dots \circ \psi_{r(\underline{x})}(\underline{x}, s). \end{aligned}$$

Or, $\psi_{r(\underline{x})}(\underline{x}, s) = (\underline{x}, s + r(\underline{x})) \sim (\sigma(\underline{x}), s)$ et,

$$\psi_T(\underline{x}, s) = \psi_{r(\sigma^{\ell-1}(\underline{x}))} \circ \dots \circ \psi_{r(\sigma(\underline{x}))}(\sigma(\underline{x}), s).$$

Ainsi, en itérant ce procédé, on obtient

$$\psi_T(\underline{x}, s) = (\sigma^\ell(\underline{x}), s) \sim (\underline{x}, s)$$

où la dernière égalité découle de la périodicité de \underline{x} . □

Pour démontrer le résultat de convergence, commençons par rappeler le mélange du flot géodésique en courbure négative constante.

Théorème 1.51. *[GR86, Dal07] Soit M une variété hyperbolique non élémentaire, complète connexe. Pour tout ouverts non vides U et V inclus dans $\Omega \subset T^1M$, il existe $T > 0$ tel que $\forall |t| \geq T, \phi_t(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Soit Γ un groupe d'isométries agissant proprement, librement, discontinûment sur \mathbb{D} . Notons $\mathcal{L}(\Gamma)$ le groupe des longueurs des orbites ϕ_t -périodiques de \mathbb{D}/Γ .

Théorème 1.52. *Sous les hypothèses ci-dessus, $\mathcal{L}(\Gamma)$ est un sous-groupe dense dans \mathbb{R} .*

Nous sommes alors en mesure de démontrer le premier résultat de densité des mesures ϕ_t -invariantes, mélangeantes dans $\mathcal{M}^1(T^1M)$.

Lemme 1.53. *Pour toute orbite périodique $\gamma \subset \Lambda(A, r)$, il existe une suite $(\tilde{\mu}_n)_n$ de mesures de probabilité Ψ_t -invariantes, mélangeantes telle que*

$$\tilde{\mu}_n \rightharpoonup D_\gamma.$$

Démonstration. Puisque la restriction du flot géodésique à Ω est hyperbolique, le mélange de Ψ_t relativement à $\tilde{\mu}$ où

$$d\tilde{\mu} = \frac{d\mu \otimes dt}{\int_{\Sigma_A} r d\mu}$$

pour une mesure de Gibbs μ sur (Σ_A, σ) découle des théorèmes 1.43 et 1.30. En effet, soient $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_n\}$ la partition de Markov de (Ω, ϕ_t) , $\gamma \subset \Omega$ une orbite périodique de f_t de longueur $\ell(\gamma)$ et p un point d'intersection de γ avec un rectangle $R_i \subset \mathcal{R}$. Par définition de la fonction $r : \Sigma_A \rightarrow \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \Sigma_A$ tel que

$$\ell(\gamma) = \sum_{k=0}^{n-1} r(\sigma^k(x)).$$

Or,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Gamma) &= \{ \ell(\gamma) \mid \exists p \in \Omega : \phi_{\ell(\gamma)}(p) = p \} \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} r(\sigma^k(x)) \mid \exists x \in \Sigma_A : \sigma^n(x) = x \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi, par le théorème 1.30 et la seconde égalité ci-dessus, il devient clair que le flot Ψ_t est topologiquement (faiblement) mélangeant. Donc, par le théorème 1.43 il est mélangeant relativement à $\tilde{\mu}$.

Soit $(\mu_n)_n$ la suite de mesures de probabilité mélangeantes sur $\mathcal{M}^1(\Sigma_A)$ définie dans le lemme 1.49 et p l'orbite σ -périodique telle que $\mu_n \rightharpoonup \delta_p$. Soit γ le relevé de p dans $\Lambda(A, r)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, μ_n remonte en une mesure $\tilde{\mu}_n$ sur $\Lambda(A, r)$ que nous définirons de la manière suivante. En identifiant chaque point $z \in \Lambda(A, r)$ à un couple $(x, t) \in \Sigma_A \times [0, r(x)]$, nous obtenons pour toute fonction $g : \Lambda(A, r) \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée,

$$\int_{\Lambda(A, r)} g(z) d\tilde{\mu}_n(z) = \frac{\int_{\Sigma_A} \int_0^{r(x)} g(x, t) dt d\mu_n}{\int_{\Sigma_A} r(x) d\mu_n(x)}.$$

Par les résultats précédents, nous avons alors

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Lambda(A,r)} g(z) d\tilde{\mu}_n(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{\Sigma_A} \int_0^{r(x)} g(x,t) dt d\mu_n}{\int_{\Sigma_A} r(x) d\mu_n(x)} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{\ell-1} \int_0^{r(\sigma^k(p))} g(\sigma^k(p), t) dt}{\sum_{k=0}^{\ell-1} r(\sigma^k(p))} \\
&= \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_0^{\ell(\gamma)} g \circ \Psi_t(v) dt
\end{aligned}$$

où v est l'unique vecteur unitaire tangent à γ au temps $t = 0$. Ainsi, pour tout orbite Ψ_t périodique γ , nous avons construit une suite de mesures de probabilité mélangées convergeant étroitement vers la mesure de Dirac supportée sur γ . □

1.4.2 Cas général

Le cas général est à présent une conséquence du théorème que nous venons de démontrer pour une variété convexe cocompacte. Soit $M \simeq \mathbb{D}^n / \Gamma$ une variété hyperbolique. Rappelons qu'une géodésique est périodique si et seulement si son relevé dans $T^1 \mathbb{D}^n$ est fixé par une isométrie hyperbolique $h_1 \in \Gamma$.

Proposition 1.54. *Soit M une variété hyperbolique et $\mathcal{O}_p \subset T^1 M$ une orbite périodique pour le flot géodésique $\phi_t : T^1 M \rightarrow T^1 M$. Il existe alors une variété convexe cocompacte M_p et une surjection continue $\rho : T^1 M_p \rightarrow T^1 M$ telle que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc}
T^1 M_p & \xrightarrow{\hat{\phi}_t} & T^1 M_p \\
\rho \downarrow & & \downarrow \rho \\
T^1 M & \xrightarrow{\phi_t} & T^1 M
\end{array}$$

commute. De plus, tout relevé de \mathcal{O}_p par ρ est une orbite $\hat{\phi}_t$ -périodique.

Démonstration. Supposons que le relevé de $\mathcal{O}_p \subset T^1 M$ dans $T^1 \mathbb{D}^n$ soit fixé par une isométrie hyperbolique h_1 . Considérons à présent une seconde isométrie hyperbolique $h_2 \in \Gamma$ dont les points fixes dans $\partial_\infty \mathbb{D}^n$ sont distincts de ceux de h_1 . Par le lemme de ping-pong, il existe alors $m, n \in \mathbb{N}$ tels que le sous-groupe $\Gamma_0 = \langle h_1^m, h_2^n \rangle$ engendré par les isométries h_1^m et h_2^n soit discret et agisse librement, proprement discontinûment sur \mathbb{D}^n . Il est alors clair que $M_p = \mathbb{D}^n / \Gamma_0$ satisfait les propriétés ci-dessus. De plus, le groupe Γ_0 étant engendré par deux isométries hyperboliques, il est convexe-cocompact. Ainsi, M_p l'est également. □

Nous sommes ainsi en mesure de démontrer le lemme suivant qui nous assure la densité des mesures de probabilité mélangeantes dans l'ensemble $\mathcal{M}^1(T^1M)$ lorsque M est une variété hyperbolique non-élémentaire.

Lemme 1.55. *Soit M un variété hyperbolique non-élémentaire et $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ son flot géodésique. Pour toute orbite périodique $\mathcal{O}(p)$, il existe une suite $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de mesures de probabilité ϕ_t -invariantes, mélangeantes telles que*

$$m_k \rightharpoonup D_{\mathcal{O}(p)}.$$

Démonstration. Soit $\hat{\mathcal{O}}_p \subset T^1M$ une orbite ϕ_t -périodique et M_p une variété convexe-cocompacte construite de la même manière qu'à la proposition 1.54. Notons $\hat{\mathcal{O}}_p$ le relevé de \mathcal{O}_p dans M_p . Il est alors possible, par le lemme 1.53 de construire une suite \tilde{m}_k de mesure de probabilités ϕ_t -invariantes, mélangeantes et convergeant étroitement vers la mesure de Dirac $D_{\hat{\mathcal{O}}_p}$ supportée sur l'orbite périodique $\hat{\mathcal{O}}_p$. Considérons à présent la suite $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de mesures de probabilité mélangeantes, supportées sur l'ensemble non-errant $\Omega \subset T^1M$ et définie par

$$m_k = \rho_* \tilde{m}_k.$$

Pour toute fonction $f : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ continue, bornée, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{T^1M} f dm_k &= \int_{T^1M} f d\rho_* \tilde{m}_k \\ &= \int_{T^1M_p} f \circ \rho d\tilde{m}_k. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{T^1M} f dm_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{T^1M_p} f \circ \rho d\tilde{m}_k = \int_{T^1M_p} f \circ \rho dD_{\hat{\mathcal{O}}_p}.$$

Ainsi

$$\int_{T^1M_p} f \circ \rho dD_{\hat{\mathcal{O}}_p} = \frac{1}{\ell_{\hat{\mathcal{O}}_p}} \int_0^{\ell_{\hat{\mathcal{O}}_p}} f \circ \rho(\hat{\phi}_t(\tilde{p})) dt$$

où \tilde{p} est un vecteur unitaire tangent engendrant $\hat{\mathcal{O}}_p$. Il est donc clair que

$$\frac{1}{\ell_{\hat{\mathcal{O}}_p}} \int_0^{\ell_{\hat{\mathcal{O}}_p}} f \circ \rho(\hat{\phi}_t(\tilde{p})) dt = \frac{1}{\ell_{\mathcal{O}_p}} \int_0^{\ell_{\mathcal{O}_p}} f \circ \phi_t(p) dt$$

où $p = \rho(\tilde{p})$ est un vecteur unitaire engendrant \mathcal{O}_p dans T^1M . Ainsi, pour toute fonction $f : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ continue, bornée,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{T^1M} f dm_k = \int_{T^1M} f dD_{\mathcal{O}_p}.$$

□

Ce dernier lemme suffit à conclure la preuve du théorème 1.44. En effet, en combinant les conclusions du théorème 1.46 et du lemme 1.55, il devient clair que l'ensemble des mesures de probabilité, ϕ_t -invariantes, mélangeantes est dense dans $\mathcal{M}^1(T^1M)$. En particulier, l'ensemble des mesures de probabilité ϕ_t -invariantes, faiblement mélangeantes est également dense dans $\mathcal{M}^1(T^1M)$. De plus, nous savons par le théorème 1.47 que ce même ensemble est résiduel dans $\mathcal{M}^1(T^1M)$. Ainsi il forme un ensemble G_δ -dense dans $\mathcal{M}^1(T^1M)$ ce qui conclut notre démonstration.

Chapitre 2

Géométrie ergodique en courbure variable

Dans ce second chapitre nous débuterons l'étude de la dynamique du flot géodésique sur des variétés M de courbure négative pincée.

Le but principal de cette partie est de rappeler la construction de mesures ϕ_t -invariantes munies de fortes propriétés thermodynamiques. Pour cela, nous rappellerons au premier paragraphe certains outils basiques de géométrie en courbure négative et, nous étudierons les propriétés des séries de Poincaré associées à un potentiel hölderien $F : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ au second paragraphe. Nous rappellerons dans le troisième paragraphe la construction de mesures sur T^1M , associées à un potentiel F selon la méthode de Patterson-Sullivan. Ces mesures seront ϕ_t -invariantes, supportées sur l'ensemble non-errant Ω du flot géodésique et satisfont une propriété de Gibbs analogue aux mesures vues précédemment sur des modèles symboliques.

Nous parlerons brièvement au quatrième paragraphe du mélange de ces mesures dans le cas où $F = 0$ et M est géométriquement finie. Enfin, nous dédierons la dernière partie de ce chapitre à la démonstration du théorème nous donnant un critère de finitude des mesures précédemment construites.

2.1 Géométrie des variétés à courbure négative

Soit M une variété riemannienne de courbure négative pincée, c'est à dire qu'il existe $a > b \geq 1$ tel que $-a < \kappa_M < -b$. Nous noterons \widetilde{M} son revêtement universel qui est une variété de Hadamard c'est à dire une variété riemannienne de courbure négative, simplement connexe, complète, telle qu'il existe une surjection

$$\rho : \widetilde{M} \rightarrow M$$

Remarquons également qu'il existe un groupe Γ d'isométries agissant sur \widetilde{M} tel que $M \simeq \widetilde{M}/\Gamma$.

De la même manière qu'en courbure constante, nous pouvons définir le bord $\partial_\infty \widetilde{M}$ de \widetilde{M} comme classe d'équivalence des rayons géodésiques dans \widetilde{M} .

Nous pouvons munir $\partial_\infty \widetilde{M}$ d'une structure métrique de la façon suivante. Tout d'abord, pour tout $\xi \in \partial_\infty \widetilde{M}$, $x, y \in \widetilde{M}$, définissons le cocycle de Busemann $B_\xi(x, y)$ par

$$B_\xi(x, y) = \lim_{t \rightarrow \infty} d(x, \xi_t) - d(y, \xi_t)$$

où ξ_t est un rayon géodésique tel que $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_t = \xi$. Les horosphères centrées en $\xi \in \partial_\infty \widetilde{M}$ sont les courbes de niveau des fonctions

$$y \mapsto B_\xi(x, y).$$

Nous noterons $\mathcal{H}_\xi(y)$ l'unique horosphère centrée en ξ et passant par x . Ainsi, nous définissons l'horoboule

$$Hor_x(\xi) = \bigcup_{t \geq 0} \mathcal{H}_\xi((x\xi_t)).$$

Nous noterons pour tout $\xi, \eta \in \partial_\infty \widetilde{M}$, $x \in \widetilde{M}$, $\langle \xi, \eta \rangle_x$ le produit de Gromov vu de x défini par

$$\langle \xi, \eta \rangle_x = \frac{1}{2}(B_\xi(x, z) + B_\eta(x, z)).$$

Cette définition ne dépend pas du choix du point z appartenant à la géodésique $(\xi\eta)$.

Géométriquement, cette quantité correspond à la longueur du morceau de la géodésique $(\xi\eta)$ appartenant simultanément aux horoboules $Hor_x(\xi)$ et $Hor_x(\eta)$.

Comme la courbure de \widetilde{M} est strictement négative, il est alors classique de remarquer que pour tout $x \in \widetilde{M}$, la fonction $d_x : \partial_\infty \widetilde{M} \times \partial_\infty \widetilde{M} \rightarrow [0, +\infty[$ définie par

$$\forall \xi, \eta \in \partial_\infty \widetilde{M}, d_x(\xi, \eta) = e^{-\langle \xi, \eta \rangle_x}$$

est une distance sur $\partial_\infty \widetilde{M}$ et que la topologie induite par d_x sur $\partial_\infty \widetilde{M}$ est compatible avec celle induite par la distance riemannienne sur le compactifié de \widetilde{M} .

Comme dans le chapitre précédent, nous définissons l'ensemble limite $\Lambda\Gamma \subset \partial_\infty \widetilde{M}$ par

$$\Lambda\Gamma = \overline{\Gamma}x \cap \partial_\infty \widetilde{M}.$$

Encore une fois, cet ensemble ne dépend pas du choix du point $x \in \widetilde{M}$. Donnons également une autre caractérisation de cet ensemble.

Proposition 2.1. *L'ensemble limite $\Lambda\Gamma$ est le plus petit fermé non vide Γ -invariant de $\widetilde{M} \cup \partial_\infty \widetilde{M}$.*

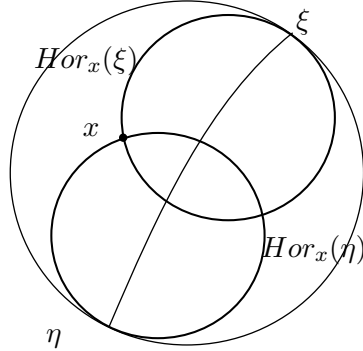


FIGURE 2.1 – Cocycle de Busemann

Dans la suite de ce mémoire, nous noterons $\mathcal{C}(\Gamma)$ le cœur convexe de l'ensemble limite dans \widetilde{M} .

Rappelons qu'une isométrie $\gamma \in \Gamma$ est hyperbolique si elle fixe exactement deux points dans $\partial_\infty \widetilde{M}$ et qu'elle est parabolique si elle fixe un unique point dans $\partial_\infty \widetilde{M}$. On notera Λ_h l'ensemble des points fixés par des isométries hyperboliques dans $\partial_\infty \widetilde{M}$ et Λ_p l'ensemble des points fixés par des isométries paraboliques dans $\partial_\infty \widetilde{M}$.

Nous pouvons caractériser d'autres points remarquables de l'ensemble limite. Pour une caractérisation plus complète mais non exhaustive de l'ensemble limite associé à une surface hyperbolique nous renvoyons les lecteurs à [DS00].

Définition 2.2. — Un élément $\xi \in \Lambda\Gamma$ est conique (ou radial) s'il existe $x \in \widetilde{M}$ et une suite $(\gamma_n)_n \in \Gamma^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n x = \xi$$

et il existe $C \geq 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, d(\gamma_n x, [x\xi]) \leq C.$$

— Un élément $\xi \in \Lambda_p$ est dit borné s'il existe un sous-groupe Γ_ξ de Γ fixant ξ , agissant proprement sur $\Lambda\Gamma \setminus \{\xi\}$ et tel que

$$(\Lambda\Gamma \setminus \{\xi\})/\Gamma_\xi$$

soit compact.

Nous noterons alors Λ_c l'ensemble des points coniques de $\Lambda\Gamma$ et Λ_{pb} l'ensemble des points paraboliques bornés de $\Lambda\Gamma$. Remarquons également que $\Lambda_h \subset \Lambda_c$.

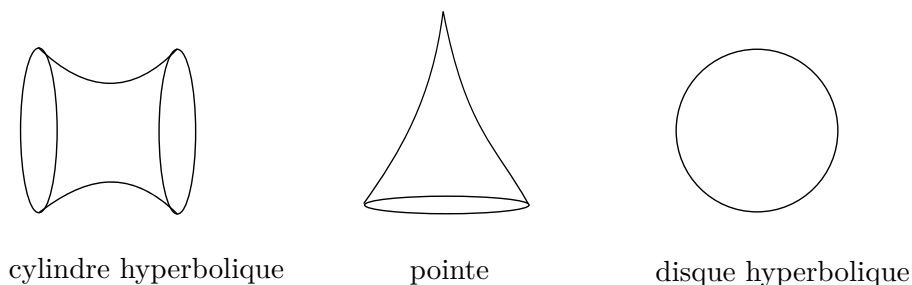


FIGURE 2.2 – exemples de surfaces hyperboliques élémentaires

Soit $\xi \in \partial_\infty \widetilde{M}$ un point parabolique borné fixé par un sous-groupe parabolique Γ_ξ et $Hor_x(\xi)$ une horoboule centrée en ξ . Alors nous dirons que

$$\mathcal{C}_\xi = Hor_x(\xi)/\Gamma_\xi$$

est une pointe associée à $\xi \in \partial_\infty \widetilde{M}$.

Étant donné un groupe d'isométries Γ , agissant sur \widetilde{M} , nous pouvons décrire de manière sûre l'aspect de son ensemble limite. En effet, nous disposons de la trichotomie suivante.

Théorème 2.3. ([EO73]) *Soit Γ un groupe non élémentaire d'isométries directes agissant sur une variété de Hadamard \widetilde{M} alors une et une seule de ces affirmations est réalisée :*

- $\Lambda\Gamma$ consiste en un singleton,
- $\Lambda\Gamma$ est composé de deux points,
- $\Lambda\Gamma$ est infini

Lorsque $\Lambda\Gamma$ est de cardinal fini, nous dirons que la variété $M \simeq \widetilde{M}/\Gamma$ est élémentaire. Il est assez simple de caractériser les surfaces hyperboliques M élémentaires. En effet, trois cas de figure s'offrent à nous

- Soit $\Gamma = \{Id\}$ alors $M = \mathbb{D}$ et ne possède aucune orbite périodique,
- soit Γ est engendré par une unique isométrie hyperbolique, alors M est une pointe de volume fini ne possédant aucune orbite périodique,
- enfin, si Γ est engendré par une unique isométrie hyperbolique, alors M est un cylindre hyperbolique possédant deux orbites périodiques (en prenant en compte son orientation).

Définition 2.4. *Nous dirons qu'une variété non-élémentaire M , complète, connexe, de courbure négative pincée est géométriquement finie si elle possède un nombre fini de bouts qui sont soit des pointes de volumes fini soit des bouts de volume infini isomorphes à un demi-cylindre de courbure négative.*

De la même manière qu'en courbure constante, nous pouvons caractériser les variétés géométriquement finies à l'aide de l'allure de l'ensemble limite qui leur est associées.

Théorème 2.5. ([Bow95]) Soit $M \simeq \widetilde{M}/\Gamma$ une variété riemannienne de courbure négative pincée. Les trois caractérisations suivantes sont équivalentes.

- M est géométriquement finie,
- $\Lambda\Gamma = \Lambda_c \cup \Lambda_{pb}$,
- Il existe $\epsilon > 0$ tel que l' ϵ -voisinage de $\mathcal{C}(\Gamma)/\Gamma$ est de volume fini.

Nous noterons dans le reste de ce manuscrit $\widetilde{\Omega}$ le sous-ensemble de \widetilde{M} défini par

$$\widetilde{\Omega} = \{v \in T^1\widetilde{M} : (v_-, v_+) \in \Lambda(\Gamma) \times \Lambda(\Gamma) \setminus \Delta\}$$

Son projeté dans T^1M , noté Ω sera appelé l'ensemble non-errant du flot géodésique $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$.

Par ailleurs, nous noterons dans la suite de ce texte

$$\iota \begin{cases} T^1M & \rightarrow & T^1M \\ v & \mapsto & -v \end{cases}$$

l'application antipodale.

2.2 Séries de Poincaré et exposants critiques

Soit $M \simeq \widetilde{M}/\Gamma$ une variété riemannienne de courbure négative pincée et $\widetilde{F} : T^1\widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ une application Γ -invariante.

Nous dirons que \widetilde{F} est hölderienne s'il existe $C > 0, \alpha \in]0, 1[$ tels que pour tout $x, y \in T^1\widetilde{M}$ satisfaisant $d_{T^1\widetilde{M}}(x, y) \leq 1$,

$$d(\widetilde{F}(x), \widetilde{F}(y)) \leq C d_{T^1\widetilde{M}}(x, y)^\alpha.$$

Nous dirons alors que l'application $F : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ induite par \widetilde{F} sur $M \simeq \widetilde{M}/\Gamma$ est un potentiel.

Tout au long de ce texte, nous noterons pour tout $x, y \in \widetilde{M}$ tels que $x \neq y$

$$\int_x^y \widetilde{F} = \int_0^{d(x,y)} \widetilde{F}(\phi_t(v)) dt$$

où v est l'unique vecteur unitaire tangent basé en x et engendrant le segment géodésique $[xy]$.

Définition 2.6. Soient $F, F^* : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications hölderiennes Γ -invariantes. Nous dirons que \widetilde{F} est cohomologue à \widetilde{F}^* s'il existe une application $\widetilde{G} : T^1\widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ hölderienne, Γ -invariante telle que

$$\forall v \in T^1\widetilde{M}, \widetilde{F}^*(v) - \widetilde{F}(v) = \frac{d}{dt}_{t=0} \widetilde{G}(\phi_t(v)).$$

Pour toute isométrie hyperbolique $\gamma \in \Gamma$, nous noterons

$$Per_F(\gamma) = \int_x^{\gamma x} \tilde{F}.$$

Proposition 2.7 ([Liv71, PPS15]). *Soit Γ un groupe cocompact, non élémentaire d'isométries positives agissant proprement, librement, discontinûment sur une variété de Hadamard \tilde{M} et $\tilde{F}, \tilde{F}^* : T^1\tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications hölderiennes Γ -invariantes telles que pour toute isométrie hyperbolique $\gamma \in \Gamma$, $Per_F(\gamma) = Per_{F^*}(\gamma)$. Alors la restriction à $\tilde{\Omega}$ de \tilde{F} et \tilde{F}^* sont cohomologues.*

2.2.1 Propriétés des exposants critiques

Soient $x, y \in \tilde{M}$. Nous définissons la série de Poincaré $P_{\Gamma, F} : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ associée au couple (Γ, F) où $\tilde{F} : T^1\tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ est un potentiel Hölderien par

$$P_{\Gamma, F}(s) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{\int_x^{\gamma x} (\tilde{F} - s)}$$

et, cette somme est indépendante du choix de $x \in \tilde{M}$.

Définition 2.8. *L'exposant critique δ_{Γ}^F associé à la série de Poincaré $P_{\Gamma, F}$ est défini par*

$$\delta_{\Gamma}^F = \inf\{s \in \mathbb{R} : P_{\Gamma, F}(s) < \infty\}.$$

Si $F = 0$, nous noterons simplement δ_{Γ} l'exposant critique associé à Γ . Nous dirons que le couple (Γ, F) est de type convergent si la série $P_{\Gamma, F}(\delta_{\Gamma}^F)$ converge et qu'il est de type divergent sinon.

Voyons à présent une manière de calculer explicitement un exposant critique.

Proposition 2.9. ([PPS15]) *Soit $\tilde{F} : T^1\tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ un potentiel Hölderien Γ -invariant. Nous avons alors l'égalité suivante*

$$\delta_{\Gamma}^F = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\gamma \in \Gamma, n-1 < d(x, \gamma x) \leq n} e^{\int_x^{\gamma x} \tilde{F}}.$$

Soit $\pi : T^1\tilde{M} \rightarrow T^1M$ la projection naturelle de $T^1\tilde{M}$ sur T^1M . L'exposant critique associé au couple (Γ, F) satisfait les propriétés suivantes.

Proposition 2.10. ([PPS15]) *Soit Γ un groupe d'isométries positives agissant sur \tilde{M} et $\tilde{F} : T^1\tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ un potentiel hölderien Γ -invariant. On a alors*

1. *La série de Poincaré $P_{\Gamma, F}(s)$ converge si $s > \delta_{\Gamma}^F$ et diverge si $s < \delta_{\Gamma}^F$,*
2. *pour tout $c \in \mathbb{R}$, $\delta_{\Gamma}^{F+c} = \delta_{\Gamma}^F + c$. De plus, la série de Poincaré associée à (Γ, F) diverge si et seulement si $(\Gamma, F + c)$ diverge,*

3. nous avons l'encadrement suivant

$$\delta_\Gamma + \inf_{\pi^{-1}(\mathcal{C}(\Gamma))} \tilde{F} \leq \delta_\Gamma^F \leq \delta_\Gamma + \sup_{\pi^{-1}(\mathcal{C}(\Gamma))} \tilde{F}.$$

Si deux potentiels sont cohomologues, alors les exposants critiques qui leur sont associés sont égaux et de même type. Nous avons en effet la proposition suivante.

Proposition 2.11. ([PPS15]) *Soient $F, F^* : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications hölderiennes Γ -invariantes cohomologues alors*

$$\delta_\Gamma^F = \delta_\Gamma^{F^*}.$$

De plus, (Γ, F) est de type divergent si et seulement si (Γ, F^*) l'est.

2.2.2 Cocycles de Gibbs

Soit $F : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ un potentiel hölderien, alors l'application

$$C_F : \begin{cases} \partial_\infty \tilde{M} \times \tilde{M} \times \tilde{M} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (\xi, x, y) & \mapsto C_{F,\xi}(x, y) \end{cases}$$

où

$$C_{F,\xi}(x, y) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_y^{\xi_t} \tilde{F} - \int_x^{\xi_t} \tilde{F}$$

et $t \mapsto \xi_t$ est une géodésique quelconque telle que $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_t = \xi$ est bien définie.

Nous dirons que $C_{F,\xi}(x, y)$ est le cocycle de Gibbs associé au potentiel F . Cette appellation est justifiée par le fait que C_F satisfait les propriétés de cocycle suivantes. Pour tout $\xi \in \partial_\infty \tilde{M}$, $x, y, z \in \tilde{M}$,

- $C_{F,\xi}(x, z) = C_{F,\xi}(x, y) + C_{F,\xi}(y, z)$,
- $C_{F,\xi}(x, y) = -C_{F,\xi}(y, x)$.

De plus C_F est Γ -invariante dans le sens suivant. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\xi \in \partial_\infty \tilde{M}$ et $x, y \in \tilde{M}$

$$C_{F,\gamma\xi}(\gamma x, \gamma y) = C_{F,\xi}(x, y).$$

Remarquons que dans le cas particulier où $F = -1$, le cocycle de Gibbs correspond au cocycle de Busemann que nous avons vu précédemment.

Lemme 2.12. [PPS15, Cou03] *Pour tout $r_0 > 0$, $\exists c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$ avec $c_2, c_4 \leq 1$ tels que*

1. $\forall x, y \in \tilde{M}, \xi \in \partial_\infty \tilde{M}$,

$$|C_{F,\xi}(x, y)| \leq c_1 e^{d(x,y)} + d(x, y) \max_{\pi^{-1}(B(x, d(x,y)))} |\tilde{F}|$$

de plus, si $d(x, y) \leq r_0$ alors

$$|C_{F,\xi}(x, y)| \leq c_1 d(x, y)^{c_2} + d(x, y) \max_{\pi^{-1}(B(x, d(x,y)))} |\tilde{F}|.$$

2. $\forall r \in [0, r], \forall x, y \in \widetilde{M}, \forall \xi \in \mathcal{O}_x B(y, r),$

$$|C_{F,\xi}(x, y) + \int_x^y \widetilde{F}| \leq c_3 r^{c_4} + 2r \max_{\pi^{-1}(B(x, d(x, y)))} |\widetilde{F}|.$$

Il est à noter que les constantes c_2 et c_4 ci-dessus dépendent des constantes de Hölder du potentiel \widetilde{F} et de la borne inférieure de la courbure.

Pour terminer cette étude, regardons comment nous pouvons comparer les cocycles associés à deux potentiels cohomologues.

Proposition 2.13. *Soient $F, F^* : T^1 M \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications hölderiennes Γ -invariantes cohomologues via $\widetilde{G} : T^1 M \rightarrow \mathbb{R}$. Alors*

$$\forall \xi \in \partial_\infty \widetilde{M}, x, y \in \widetilde{M}, C_{F^*, \xi}(x, y) - C_{F, \xi}(x, y) = \widetilde{G}(v_{x\xi}) - \widetilde{G}(v_{y\xi})$$

où $v_{x\xi}$ (resp. $v_{y\xi}$) est l'unique vecteur unitaire tangent basé en x (resp. en y) engendrant le rayon géodésique $[x\xi]$ (resp. $[y\xi]$).

2.2.3 Cocycle de Busemann pondéré

Pour tout $x \in \widetilde{M}, \xi, \eta \in \partial_\infty \widetilde{M}$ nous définissons l'application

$$D_F : \begin{cases} \widetilde{M} \times \partial_\infty \widetilde{M} \times \partial_\infty \widetilde{M} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, \xi, \eta) & \mapsto D_{F,x}(\xi, \eta) \end{cases}$$

où

$$D_{F,x}(\xi, \eta) = \exp\left(\frac{1}{2} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \int_x^{\eta t} \widetilde{F} - \int_{\xi t}^{\eta t} \widetilde{F} + \int_{\xi t}^x \widetilde{F} \right\}\right)$$

Proposition 2.14. *L'écart de potentiel satisfait les propriétés suivantes*

- Pour tout $u \in (\xi\eta)$, $D_{F,x}(\xi, \eta) = e^{-\frac{1}{2}(C_{F,\eta}(x,u) + C_{F,\xi}(x,u))}$,
- Pour tout $\gamma \in \Gamma$, $D_{F,\gamma x}(\gamma\xi, \gamma\eta) = D_{F,x}(\xi, \eta)$
- Si $\widetilde{F}^* : T^1 \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ est cohomologue à F via une application $\widetilde{G} : T^1 \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ alors

$$D_{F^*,x}(\xi, \eta) = D_{F,x}(\xi, \eta) e^{\frac{1}{2}(\widetilde{G}(v_{x\xi}) - \widetilde{G}(v_{x\eta}))}$$

où $v_{x\xi}$ (resp. $v_{x\eta}$) est l'unique vecteur unitaire tangent au segment géodésique $[x\xi]$ (resp. $[x\eta]$) basé en x .

2.3 Théorie de Patterson-Sullivan

Dans cette partie, nous nous intéressons à la construction de mesures de Gibbs sur $T^1 M$ associées à un potentiel hölderien F . L'approche que nous présentons dans cette partie provient des travaux d'O.Mohsen, F.Paulin, M.Pollicott et B.Schapira. Cependant, une autre approche faisant intervenir la convention multiplicative des séries de Poincaré a été développée par Y.Coudène, U.Hamenstädt et F.Ledrappier.

2.3.1 Familles de densités de Patterson au bord

Soit $\{\mu_x\}_{x \in \widetilde{M}}$ une famille de mesures positives sur $\partial_\infty \widetilde{M}$. Nous dirons que $\{\mu_x\}_{x \in \widetilde{M}}$ est une famille de densités de Patterson de dimension $\sigma \in \mathbb{R}$ si elle satisfait les propriétés suivantes

1. $\forall x \in \widetilde{M}, \gamma \in \Gamma, \mu_{\gamma x} = \gamma_* \mu_x,$
2. $\forall x, y \in \widetilde{M}, \xi \in \partial_\infty \widetilde{M}, \frac{d\mu_x}{d\mu_y}(\xi) = e^{-C_{F-\sigma, \xi}(x, y)}.$

Le support d'une telle famille de mesures est indépendant du choix de $x \in \widetilde{M}$. De plus, c'est un ensemble fermé, Γ -invariant inclus dans $\partial_\infty \widetilde{M}$. Il contient donc l'ensemble limite $\Lambda\Gamma$.

Nous verrons dans la suite de cette section qu'il est possible, sous certaines conditions de construire de telles familles de mesures et même d'assurer son unicité à un scalaire près.

Nous nous restreindrons dans ce texte à l'étude du cas des familles de densités de Patterson de dimension δ_Γ^F .

Proposition 2.15. (*[PPS15]*) *Soit Γ un groupe d'isométries positives agissant sur \widetilde{M} et $F : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ un potentiel h\"olderien. Supposons que $\delta_\Gamma^F < \infty$. Alors il existe au moins une famille $\{\mu_x\}_{x \in \widetilde{M}}$ de densités de Patterson de dimension δ_Γ^F . De plus, le support des μ_x est exactement égal à l'ensemble limite $\Lambda\Gamma$.*

Donnons à présent quelques éléments de la démonstration de ce théorème.

Lemme 2.16. (*[Pat76, PPS15]*) *Soit Γ un groupe d'isométries positives agissant proprement discontinûment sur une variété de Hadamard \widetilde{M} et $F : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ un potentiel h\"olderien. Il existe alors une fonction $h : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ croissante telle que*

- $\forall \epsilon > 0, \exists r_\epsilon > 0 : \forall t \geq 0, \forall r \geq r_\epsilon, h(t+r) \leq e^{t\epsilon} h(r),$
- la série $Q_\Gamma^F(s) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{\int_x^{\gamma x} (F-s)} h(d(x, \gamma x))$ diverge pour tout $s \leq \delta_\Gamma^F$.

Notons que si le couple (Γ, F) est de type divergent alors la fonction constante $h = 1$ satisfait trivialement les propriétés du lemme précédent.

On définit à présent une suite de mesure $\{\mu_{x,s}\}_{x \in \widetilde{M}}$ supportée sur $\widetilde{M} \cup \partial_\infty \widetilde{M}$ par

$$\mu_{x,s} = \frac{1}{Q_\Gamma^F(s)} \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{\int_x^{\gamma x} (F-s)} h(d(x, \gamma x)) \mathcal{D}_{\gamma x}$$

où \mathcal{D}_x est la mesure de Dirac supportée sur $x \in \widetilde{M} \cup \partial_\infty \widetilde{M}$.

Lemme 2.17. (*[Pat76, PPS15]*) *Il existe une suite décroissante $(s_k)_k \in]\delta_\Gamma^F, +\infty[^\mathbb{N}$ telle que pour tout $x \in \widetilde{M}$, la suite $\{\mu_{x,s_k}\}_k$ converge faiblement vers une mesure μ_x telle que $\{\mu_x\}_{x \in \widetilde{M}}$ est une famille de densité de Patterson de dimension δ_Γ^F .*

Observons à présent que les mesures $\mu_{x,s}$ construites précédemment sont supportées sur $\Gamma x \cup \Lambda\Gamma$. De plus, comme

$$\lim_{s \rightarrow \delta_\Gamma^F} Q_\Gamma^F(s) = +\infty$$

alors pour tout $x \in \widetilde{M}$, le support de la mesure μ_x est contenu dans l'ensemble limite $\Lambda\Gamma$. Or $\text{supp}(\mu_x)$ est un ensemble Γ -invariant donc, par la propriété de minimalité de $\Lambda\Gamma$,

$$\text{supp}(\mu_x) = \Lambda\Gamma$$

et la proposition est démontrée.

Posons

$$\mathcal{O}_x B(x, R) = \{\xi \in \partial_\infty \widetilde{M} : [x\xi] \cap B(x, R) \neq \emptyset\}$$

et énonçons à présent le principal résultat qui nous permettra d'estimer la masse de sous-ensembles de $\partial_\infty \widetilde{M}$.

Lemme 2.18. (*[Sul, Moh07, PPS15]*) *Soit $\sigma \in \mathbb{R}$ et $\{\mu_x\}_{x \in \widetilde{M}}$ une famille de densités de Patterson de dimension σ associée au couple (Γ, F) . Soit $K \subset \widetilde{M}$ un ensemble compact alors il existe $R_0 > 0$ tel que pour tout $R > R_0$, il existe $C > 0$ satisfaisant la propriété suivante*

$$\forall \gamma \in \Gamma, x, y \in K, C^{-1} e^{\int_x^{\gamma y} (\widetilde{F} - \sigma)} \leq \mu_x(\mathcal{O}_x B(\gamma y, R)) \leq C e^{\int_x^{\gamma y} (\widetilde{F} - \sigma)}$$

Nous ne détaillerons pas la preuve de ce théorème classique. Cependant, nous revoyons les lecteurs intéressés aux références citées ci-dessus. Venons-en à une conséquence directe du lemme de l'ombre. Le résultat suivant nous assure que la dimension d'une famille de densités de Patterson associée à un couple (Γ, F) est forcément supérieure à l'exposant critique δ_Γ^F . En particulier, si $\delta_\Gamma^F = +\infty$ alors il n'existe aucune famille de densités de Patterson.

Corollaire 2.19. (*[PPS15]*) *Soit $\sigma \in \mathbb{R}$ et $\{\mu_x\}_{x \in \widetilde{M}}$ une famille de densités de Patterson de dimension σ associée au couple (Γ, F) alors $\sigma \geq \delta_\Gamma^F$.*

2.3.2 Constructions de mesures de Gibbs

Soient $\sigma \in \mathbb{R}$ et $\{\mu_x^l\}_{x \in \widetilde{M}}, \{\mu_x^r\}_{x \in \widetilde{M}}$ deux familles de densités de Patterson de dimension σ respectivement associées au couple (Γ, F) et $(\Gamma, F \circ \iota)$.

Soit $\Delta = \{(x, y) \in \partial_\infty \widetilde{M} \times \partial_\infty \widetilde{M} : x = y\}$ la diagonale dans le produit du bord. Tout vecteur $v \in T^1 \widetilde{M}$ engendre une unique géodésique dont les extrémités en temps négatif et positif sont respectivement notées v_-, v_+ . Choisissons à présent une origine $x_0 \in \widetilde{M}$ alors l'application

$$\begin{cases} T^1 \widetilde{\Omega} & \rightarrow (\partial_\infty \widetilde{M} \times \partial_\infty \widetilde{M} \setminus \Delta) \times \mathbb{R} \\ v & \mapsto (v_-, v_+, B_{v_+}(x_0, \pi(v))) \end{cases}$$

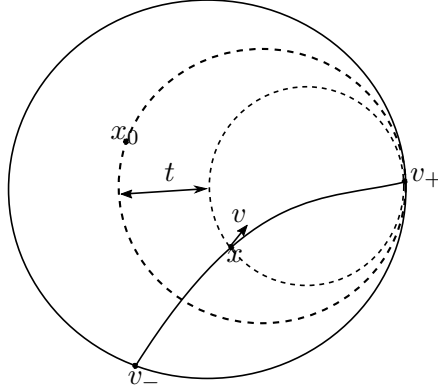


FIGURE 2.3 – coordonnées de Hopf

où $\pi : T^1\widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$ est la projection canonique du fibré unitaire tangent de \widetilde{M} dans \widetilde{M} est une bijection. Nous pouvons alors paramétrer chaque vecteur $v \in T^1\widetilde{M}$ par un unique triplet dans $(\partial_\infty\widetilde{M} \times \partial_\infty\widetilde{M} \setminus \Delta) \times \mathbb{R}$.

Ainsi, en utilisant cette décomposition, nous définissons une mesure \tilde{m} sur $T^1\widetilde{M}$ par

$$d\tilde{m}(v) = \frac{d\mu_{x_0}^\iota(v_-) \otimes d\mu_{x_0}(v_+) \otimes dt}{D_{F-\sigma, x_0}(v_-, v_+)^2}.$$

Cette mesure ne dépend pas du choix du point de base $x_0 \in \widetilde{M}$. De plus le produit des deux cocycles présents au dénominateur nous assure la Γ -invariance de \widetilde{M} ainsi que son invariance par l'action du flot géodésique sur $T^1\widetilde{M}$. Ainsi, \tilde{m} passe au quotient en une mesure m sur T^1M qui est ϕ_t -invariante.

Nous verrons dans la suite que si $\sigma = \delta_\Gamma^F < +\infty$ alors les densités de Patterson $\{\mu_x\}_{x \in \widetilde{M}}$ et $\{\mu_x^\iota\}_{x \in \widetilde{M}}$ de dimension δ_Γ^F sont supportées sur l'ensemble limite $\Lambda\Gamma$. Dans ce cas, nous noterons \tilde{m}_F la mesure Gibbs dans $T^1\widetilde{M}$ et m_F la mesure induite sur T^1M . Il est clair que le support de cette mesure est inclus ou égal à l'ensemble non-errant Ω . Dans la suite de ce paragraphe, nous verrons à quelle condition ce support est exactement égal à Ω .

Définition 2.20. Soit (X, ϕ_t, μ) un système dynamique mesuré où μ est une mesure ϕ_t -invariante. Nous dirons que la mesure μ est ergodique si pour tout ensemble mesurable $A \subset X$ ϕ_t -invariant, $\mu(A) = 0$ ou $\mu(X \setminus A) = 0$.

Définition 2.21. Nous dirons que (X, ϕ_t, μ) est conservatif si pour tout ensemble A de mesure positive, il existe $T_i \rightarrow \infty$ tel que

$$\mu(A \cap \phi_{-T_i}(A)) > 0.$$

Énonçons à présent un critère d'ergodicité des mesures construites par la méthode de Patterson-Sullivan.

Théorème 2.22 (Hopf-Tsuji-Sullivan [PPS15]). *Soient $\{\mu_x\}_{x \in \widetilde{M}}, \{\mu_x^t\}_{x \in \widetilde{M}}$ deux familles de densités de Patterson de dimension $\sigma \in \mathbb{R}$ associées respectivement aux couples (Γ, F) et $(\Gamma, F \circ \iota)$. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. *La série de Poincaré $P_\Gamma^F(s)$ associée à (Γ, F) est divergente en σ ,*
2. *Pour tout $x \in \widetilde{M}$, $\mu_x(\Lambda\Gamma \setminus \Lambda_c) = 0$,*
3. *Le système dynamique $(\partial_\infty \widetilde{M} \times \partial_\infty \widetilde{M}, \Gamma, (\mu_x^t \otimes \mu_x)|_{\partial_\infty \widetilde{M} \times \partial_\infty \widetilde{M}})$ est ergodique et conservatif,*
4. *Le système dynamique (T^1M, ϕ_t, m) est ergodique et conservatif*

Corollaire 2.23. *Si $\delta_\Gamma^F < \infty$ et (Γ, F) est de type divergent alors*

- *il existe une unique famille de densités de Patterson de dimension δ_Γ^F . Son support est exactement égal à $\Lambda\Gamma$.*
- *pour tout $x \in \widetilde{M}$, μ_x est non atomique,*
- *la mesure m_F associée au couple (Γ, F) est unique et a pour support l'ensemble non-errant $\Omega \subset T^1M$.*

Venons-en à présent à l'une des propriétés essentielles des mesures que nous avons construit sur T^1M . Le théorème suivant justifie l'utilisation du terme de mesure de Gibbs pour les désigner. De façon analogue aux mesures d'équilibre que nous avons introduit pour les modèles symboliques, nous pouvons estimer la mesure de certains ouverts de T^1M . Nous remplacerons la notion de cylindre par celle de boule dynamique (ou boule de Bowen) $B(v, T, T', r)$ centrée en un vecteur $v \in T^1M$ et de rayon r définie par

$$\forall T, T' > 0, B(v, T, T', r) = \{w \in T^1M : \sup_{t \in [-T', T]} d(\pi(\phi_t(v)), \pi(\phi_t(w))) < r\}.$$

Théorème 2.24. ([PPS15]) *Supposons que $\delta_\Gamma^F < +\infty$ et m_F la mesure de Gibbs associée au couple de densités de Patterson $\{\mu_x\}_{x \in \widetilde{M}}$ et $\{\mu_x^t\}_{x \in \widetilde{M}}$ de dimension δ_Γ^F alors pour tout compact $K \subset T^1M$, il existe $r > 0$ et $C_{K,r} > 0$ tel que pour tout $T, T' > 0$ assez grands et pour tout $v \in T^1M$ tel que $\phi_T(v), \phi_{-T'} \in K$ nous avons*

$$C_{K,r}^{-1} \leq \frac{m_F(B(v, T, T', r))}{e^{\int_{-T}^T F(\phi_t(v)) - \delta_\Gamma^F}} \leq C_{K,r}.$$

Dans le chapitre suivant, nous nous intéresserons plus en détail aux propriétés thermodynamiques de ces mesures et essentiellement au fait que sous certaines conditions une mesure de Gibbs m_F est l'unique mesure maximisant la pression.

2.4 Mélange du flot géodésique

Nous nous intéresserons dans cette partie au mélange du flot géodésique relativement aux mesures de Gibbs précédemment construites. Le résultat principal qui est décrit dans cette partie a été énoncé dans [DP98] et traite du cas particulier où le potentiel F est nul. Cependant, cette restriction n'est pas très handicapante dans la mesure où sous certaines conditions, il est équivalent au mélange du flot géodésique relativement à une mesure de Gibbs associée à un potentiel hölderien non constant. Ce dernier point fera l'objet d'explications plus précises dans le prochain chapitre.

Pour l'instant, intéressons nous au cadre dans lequel le théorème [DP98] est énoncé. Soient N_1, N_2 deux entiers tels que $N_1 \geq 1, N_1 + N_2 \geq 2$. Considérons une variété de Hadamard \widetilde{M} de courbure négative pincée, $\alpha_1, \dots, \alpha_{N_1}$ une famille d'isométries hyperboliques et $\alpha_{N_1+1}, \dots, \alpha_{N_1+N_2}$ une famille d'isométries paraboliques telles que

1. Pour tout $i \in \{1, \dots, N_1\}$ il existe un voisinage compact $C_{\alpha_i} \subset \partial_\infty \widetilde{M}$ du point attractif α_i^+ de α_i et un voisinage compact $C_{\alpha_i^{-1}} \subset \partial_\infty \widetilde{M}$ du point répulsif α_i^- de α_i tels que

$$\alpha_i(\partial_\infty \widetilde{M} \setminus C_{\alpha_i^{-1}}) \subset C_{\alpha_i},$$

2. Pour tout $i \in \{N_1 + 1, \dots, N_1 + N_2\}$ il existe un voisinage compact $C_{\alpha_i} \subset \partial_\infty \widetilde{M}$ de l'unique point fixe α_i^+ de α_i tel que

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \alpha_i^n(\partial_\infty \widetilde{M} \setminus C_{\alpha_i}) \subset C_{\alpha_i},$$

3. les $2N_1 + N_2$ voisinages introduits ci-dessus sont deux à deux disjoints,
4. pour tout $i \in \{N_1 + 1, \dots, N_1 + N_2\}$, les sous-groupes $\langle \alpha_i \rangle$ engendrés par les isométries paraboliques sont de type divergent.

Par le lemme du ping-pong, une famille d'isométries $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ satisfaisant ces propriétés engendre un groupe Γ non-élémentaire agissant librement, proprement discontinûment sur \widetilde{M} . Nous dirons qu'un tel groupe est un groupe de Schottky étendu.

Théorème 2.25. ([DP98]) *Soit Γ un groupe de Schottky étendu agissant sur une variété de Hadamard \widetilde{M} de courbure négative, pincée. Alors la restriction du flot géodésique $\phi_t : T^1M \rightarrow T^1M$ à l'ensemble non-errant Ω est mélangeant relativement à la mesure de Bowen-Margulis.*

La démonstration de ce théorème repose sur une représentation symbolique de l'ensemble limite $\Lambda\Gamma$ d'un groupe de Schottky étendu. Il est démontré qu'il existe un sous-décalage dénombrable (Σ_A, σ) et une suspension $Y(A, f)$ telle que le flot géodésique $\phi_t : T^1M \rightarrow T^1M$ est topologiquement conjugué au flot de suspension au dessus de (Σ_A, σ) . La preuve du mélange

du flot géodésique relativement à la mesure de Bowen-Margulis revient donc à l'étude du spectre de l'opérateur de transfert P associé au décalage ainsi qu'à celui de sa transformée de Fourier P_λ . Plus précisément, il est démontré que si $\lambda \neq 0$ alors le rayon spectral de P_λ est strictement inférieur à 1. Cette propriété essentielle n'est pas démontrée lorsque le groupe Γ est uniquement de type Schottky (c'est à dire lorsque $N_2 = 0$). En particulier, le mélange du flot géodésique relativement à la mesure de Bowen-Margulis (et le mélange topologique) n'est pas démontré sur des variétés convexes cocompacte à courbure négative pincée. Ce fait nous obligera alors dans le chapitre suivant à restreindre notre étude dans un premier temps à des variétés de type Schottky étendu.

2.5 Critère de finitude pour les variétés géométriquement finies

Donnons à présent un critère de finitude pour les mesures de Gibbs définies sur des variétés géométriquement finies. Ce résultat est issu de [DOP00] où le résultat est démontré pour un potentiel constant $F = 0$. Le cas général est traité dans [PPS15] pour un potentiel hölderien.

Théorème 2.26. ([DOP00, PPS15]) *Supposons que Γ soit un groupe géométriquement fini, que le couple (Γ, F) soit de type divergent avec $\delta_\Gamma^F < \infty$. Alors la mesure de Gibbs m_F est finie si et seulement si pour tout sous-groupe parabolique Γ_{ξ_p} fixant $\xi_p \in \partial_\infty \tilde{M}$*

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_{\xi_p}} d(x, \gamma x) e^{\int_x^{\gamma x} (\tilde{F} - \delta_\Gamma^F)}$$

converge.

Nous allons à présent donner un critère portant sur les exposants associés aux couples (Γ, F) et (Γ_{ξ_p}, F) nous permettant de réaliser la condition donnée par le théorème ci-dessus. Définissons d'abord la notion de trou spectral qui fut introduite par F.Dal'bo et M.Peigné dans [DP98].

Définition 2.27. *Le couple (Γ, F) satisfait la propriété de trou spectral si pour tout sous-groupe parabolique Γ_{ξ_p} fixant $\xi_p \in \partial_\infty \tilde{M}$,*

$$\delta_{\Gamma_{\xi_p}}^F < \delta_\Gamma^F.$$

La proposition 2 de [DOP00] nous donne un critère nous assurant que cette propriété est satisfaite pour le potentiel constant $F = 0$. Nous allons étendre ce critère à un potentiel hölderien F borné. La démonstration repose sur le lemme 2.12 qui nous permet de comparer un cocycle de Gibbs à l'intégrale du potentiel sur un chemin.

Proposition 2.28. *Soit \widetilde{M} une variété de Hadamard de courbure négative pincée et Γ un groupe discret, géométriquement fini, agissant librement, proprement discontinûment sur \widetilde{M} . Supposons qu'il existe un potentiel hölderien borné $\widetilde{F} : T^1\widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$.*

Si pour tout sous-groupe parabolique Γ_{ξ_p} fixant $\xi_p \in \partial_\infty\widetilde{M}$ le couple (Γ_{ξ_p}, F) est de type divergent, alors (Γ, F) satisfait la propriété de trou spectral.

De plus, la mesure de Gibbs m^F associée au couple (Γ, F) est finie.

Démonstration. Afin de démontrer la première affirmation, nous suivrons les lignes principales de la preuve de [DOP00] où ce résultat est démontré dans le cas où le potentiel est nul. Remarquons pour commencer qu'étant donné que Γ_{ξ_p} est un sous-groupe de Γ alors $\delta_\Gamma^F \geq \delta_{\Gamma_{\xi_p}}^F$. Il reste donc à montrer que $\delta_\Gamma^F \neq \delta_{\Gamma_{\xi_p}}^F$.

Rappelons d'abord que pour tout ξ_p , le groupe Γ_{ξ_p} agit proprement discontinûment sur $\partial_\infty\widetilde{M} \setminus \{\xi_p\}$. Soit alors $\mathcal{G} \subset \partial_\infty\widetilde{M}$ un domaine fondamental pour l'action de Γ_{ξ_p} et $\{\mu_x^F\}_x$ une famille de densités de Patterson associée au couple (Γ, F) . Il est clair que pour tout $x \in \widetilde{M}$

$$\mu_x^F(\partial_\infty\widetilde{M}) = \sum_{g \in \Gamma_{\xi_p}} \mu_x^F(g\mathcal{G})$$

et, pour tout $g \in \Gamma_{\xi_p}$,

$$\mu_x^F(g\mathcal{G}) = \int_{\mathcal{G}} e^{-C_{F, \delta_\Gamma^F, \xi}^F(x, gx)} d\mu_{gx}(\xi)$$

De plus, par le lemme 2.12 il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que

$$|C_{F, \xi}^F(x, gx) + \int_x^{gx} \widetilde{F}| \leq K.$$

On a alors pour tout $g \in \Gamma_{\xi_p}$

$$\mu_x^F(g\mathcal{G}) \geq (e^{\int_x^{gx} \widetilde{F} - \delta_\Gamma^F})(e^{-K} \mu_x^F(\mathcal{G})).$$

Puisque pour tout $x \in \widetilde{M}$ la mesure μ_x^F est finie, nous obtenons

$$\infty > \mu_x^F(\partial_\infty\widetilde{M}) \geq \sum_{g \in \Gamma_{\xi_p}} \mu_x^F(g\mathcal{G}) \geq C_0 \cdot P_{\Gamma_{\xi_p}, F}(\delta_\Gamma^F).$$

Ainsi puisque (Γ, F) est de type divergent, nous obtenons $\delta_\Gamma^F \neq \delta_{\Gamma_{\xi_p}}^F$ et

$$\delta_\Gamma^F > \delta_{\Gamma_{\xi_p}}^F.$$

Démontrons à présent la seconde affirmation faite dans le théorème. Remarquons d'abord que

$$\forall \epsilon > 0, \exists C_\epsilon > 0, d(x, gx) \geq C_\epsilon \Rightarrow e^{\epsilon d(x, gx)} > d(x, gx).$$

Nous avons alors

$$\sum_{g \in \Gamma_{\xi_p}} d(x, gx) e^{\int_x^{gx} \tilde{F} - \delta_{\Gamma}^F} < \sum_{g \in \Gamma_{\xi_p}} e^{\int_x^{gx} \tilde{F} - (\delta_{\Gamma}^F - \epsilon)}$$

Vu que (Γ, F) satisfait la condition de trou spectral, nous pouvons alors choisir un $\epsilon > 0$ tel que $\frac{\delta_{\Gamma}^F - \delta_{\Gamma, F}^{\xi_p}}{2} > \epsilon$. De cette manière, le terme de droite dans l'inégalité ci-dessus converge et la mesure de Gibbs associée au (Γ, F) est finie. \square

Chapitre 3

Généricité du mélange faible

Dans ce troisième chapitre, nous nous intéresserons aux propriétés satisfaites par les mesures de probabilité invariantes par l'action du flot géodésique sur des variétés non compactes M de courbure négative variable.

Nous reviendrons dans un premier temps sur les notions d'entropie et de pression du flot géodésique. Nous rappellerons le principe variationnel de J.P.Otal et M.Peigné nous permettant d'établir un lien entre l'entropie topologique du flot géodésique et l'exposant critique δ_Γ du groupe fondamental de M . Nous énoncerons également le principe variationnel de F.Paulin, M.Pollicott et B.Schapira.

Dans un second temps, nous reviendrons sur le lien entre le mélange topologique du flot géodésique restreint à son ensemble non-errant et le mélange des mesures de Gibbs associées à un potentiel hölderien F relativement à ϕ_t .

La dernière section de ce chapitre sera consacrée à la démonstration du théorème B ainsi que du corollaire A qui constitue le résultat principal de ce manuscrit. Nous donnerons pour terminer ce chapitre une méthode permettant de généraliser notre résultat à toute variété géométriquement infinie. Ce dernier fait repose très fortement sur le mélange topologique du flot géodésique sur les variétés convexes co-compactes et nous permet de conjecturer que pour toute variété riemannienne non compacte M de courbure négative pincée, l'ensemble des mesures de probabilité faiblement mélangeantes est G_δ -dense dans $\mathcal{M}^1(T^1M)$ dès que la restriction du flot géodésique à son ensemble non-errant est topologiquement mélangeante.

3.1 Formalisme thermodynamique en courbure négative

3.1.1 Entropie topologique et exposants critiques

Nous commençons par donner plusieurs définitions de la notion d'entropie. Soit (X, \mathcal{B}, μ) un espace probabilisé.

Définition 3.1. *Nous dirons qu'une collection finie ou dénombrable $\{\mathcal{P}_i\}_{i \in I}$ d'ensembles de X est une partition de X si pour tout $P_i, P_j \in \mathcal{P}$*

- $P_i \cap P_j = \emptyset$ si $i \neq j$
- $\bigcup_{i \in I} P_i = X$.

La partition \mathcal{P} est μ -mesurable s'il existe une famille dénombrable $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles μ -mesurables, chacun union d'éléments de \mathcal{P} , et telle que pour tout $i \neq j$, il existe $n \in \mathbb{N}$ satisfaisant

$$P_i \subset Q_n \text{ et } P_j \subset Q_n^c \text{ ou } P_i \subset Q_n^c \text{ et } P_j \subset Q_n.$$

Nous noterons $P(x)$ l'unique élément de \mathcal{P} contenant $x \in X$. Nous pouvons alors énoncer une première définition de l'entropie associée à une partition mesurable de \mathcal{P} de X .

Définition 3.2. *L'entropie associée à une partition \mathcal{P} , relativement à une mesure de probabilité μ est définie par*

$$H_\mu(\mathcal{P}) = - \sum_{P \in \mathcal{P}} \mu(P) \log(\mu(P)).$$

Étant donné une partition μ -mesurable \mathcal{P} , nous pouvons associer une famille $\{\mu_{P(x)}\}$ de mesures conditionnelles sur les atomes de \mathcal{P} telle que

- pour tout ensemble mesurable $A \subset T^1M$, la fonction $x \mapsto \mu_{P(x)}(A \cap P(x))$ est mesurable,
- $\mu(A) = \int_{T^1M} \mu_{P(x)}(A \cap P(x)) d\mu(x)$.

Soient \mathcal{P}, \mathcal{Q} deux partitions mesurables de l'espace probabilisé (X, \mathcal{B}, μ) . Nous dirons que \mathcal{P} est plus fine que \mathcal{Q} (ou \mathcal{P} raffine \mathcal{Q}) et nous noterons $\mathcal{Q} \preceq \mathcal{P}$ si pour μ -presque tout $x \in X$ $P(x) \subset Q(x)$.

Définition 3.3. *Soient \mathcal{P}, \mathcal{Q} deux partitions mesurables telles que $\mathcal{Q} \preceq \mathcal{P}$. L'entropie de \mathcal{P} relativement à \mathcal{Q} notée $H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q})$ est définie par*

$$H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) = - \int_{T^1M} \log \mu_{Q(x)}(P(x)) d\mu(x).$$

Notons

$$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} = \{P_i \cap Q_j; i \in I, j \in J\}.$$

3.1. FORMALISME THERMODYNAMIQUE EN COURBURE NÉGATIVE 45

Cette collection d'ensembles est encore une partition mesurable de X qui raffine \mathcal{P} et \mathcal{Q} . Si $\phi = \phi_1$ représente l'action du flot géodésique au temps $t = 1$ alors nous noterons

$$\mathcal{P}^n = \mathcal{P} \vee \phi^{-1} \mathcal{P} \vee \dots \vee \phi^{-n+1} \mathcal{P}$$

où pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $\phi^{-i}(\mathcal{P}) = \{\phi^{-i}P, P \in \mathcal{P}\}$.

Définition 3.4. Soit μ une mesure de probabilité ϕ_t -invariante sur T^1M et \mathcal{P} une partition mesurable de T^1M d'entropie finie relativement à μ . Nous définissons l'entropie du flot géodésique relativement à \mathcal{P} par

$$h_\mu(\phi, \mathcal{P}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{P}^n).$$

Nous sommes alors en mesure de définir l'entropie du flot géodésique relativement à une mesure de probabilité μ .

Définition 3.5. L'entropie du flot géodésique relativement à une mesure de probabilité μ est définie par

$$h_\mu(\phi) = \sup\{h_\mu(\phi, \mathcal{P}); \mathcal{P} \text{ partition finie de } T^1M\}$$

Si \mathcal{P} est une partition finie de l'ensemble non-errant Ω du flot géodésique alors \mathcal{P}^n est une partition mesurable décroissante (i.e $\mathcal{P}^n \preceq \phi^{-1} \mathcal{P}^n$) et,

$$h_\mu(\phi, \mathcal{P}) = H_\mu(\phi^{-1} \mathcal{P} | \mathcal{P}^n) = h_\mu(\phi, \mathcal{P}^n).$$

Définition 3.6. Soit (X, \mathcal{B}, μ) un espace probabilisé, ϕ une transformation mesurable qui préserve μ et \mathcal{P} une partition finie de X . Nous dirons que \mathcal{P} est génératrice si la tribu engendrée par les éléments $\phi^{-i} \mathcal{P}$ est égale à \mathcal{B} .

Le résultat suivant dû à A.N.Kolmogorov et Y.Sinai nous permet de caractériser les partitions mesurables permettant de calculer l'entropie métrique d'une transformation mesurable.

Théorème 3.7. (Kolmogorov-Sinai) Si \mathcal{P} est une partition mesurable finie, génératrice alors

$$h_\mu(\phi) = h_\mu(\phi, \mathcal{P}).$$

Considérons à présent le système dynamique topologique (T^1M, ϕ_t) . Nous définissons une distance dynamique sur T^1M de la manière suivante,

$$\forall T > 0, \forall u, v \in T^1M, d_T(u, v) := \sup_{0 \leq t \leq T} d(\phi_t(u), \phi_t(v))$$

où $d(\cdot, \cdot)$ est la distance riemannienne sur T^1M .

Définition 3.8. Soit $\epsilon > 0$ et $K \subset T^1M$ un compact. Nous dirons que

— $D \subset K$ est (K, T, ϵ) -dense si

$$\forall x \in K, \exists y \in D : d_T(x, y) \leq \epsilon,$$

— $S \subset K$ est (K, T, ϵ) -séparé si

$$\forall x \neq y \in S, d_T(x, y) \geq \epsilon.$$

Nous noterons $N(K, T, \epsilon)$ le cardinal minimal d'un ensemble (K, T, ϵ) -dense et $S(K, T, \epsilon)$ le cardinal maximal d'un ensemble (K, T, ϵ) -séparé. L'entropie de T relativement à la distance d est alors définie par

$$\begin{aligned} h_d(\phi) &= \sup_{K \subset T^1 M} \sup_{\epsilon > 0} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log N(K, T, \epsilon) \\ &= \sup_{K \subset T^1 M} \sup_{\epsilon > 0} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log S(K, T, \epsilon). \end{aligned}$$

Contrairement au cas où M est compact, cette définition dépend du choix de la distance riemannienne et ne suffit pas à définir un invariant dynamique.

Définition 3.9. ([HKR95]) *L'entropie topologique du flot géodésique est définie par*

$$h_{\text{top}}(\phi) = \inf_d h_d(\phi)$$

où l'infimum est pris parmi l'ensemble des distances compactibles avec la topologie de $T^1 M$.

Dans le reste de cette section, nous donnerons une idée de la preuve du principe variationnel suivant qui est démontré dans [OP04] et qui repose sur un résultat dû à C.J.Bishop et P.W.Jones ([BJ]) établissant un lien entre l'exposant critique δ_Γ du groupe d'isométries Γ et la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite conique $\Lambda_c \Gamma$. Nous renvoyons également les lecteurs au texte de F.Ledrappier [Led13] qui donne un aperçu de certains des résultats nécessaires à la preuve de ce théorème ainsi que leurs démonstrations.

Théorème 3.10. [OP04] *Soit \widetilde{M} une variété riemannienne complète, connexe de courbure négative pincée et Γ un groupe d'isométries non-élémentaire agissant librement, proprement, discontinûment sur \widetilde{M} , alors*

$$h_{\text{top}}(\phi_t) = \delta_\Gamma.$$

De plus, il existe une mesure de probabilité μ maximisant l'entropie métrique du flot géodésique si et seulement si la mesure de Bowen-Margulis μ_{BM} est finie. Nous avons alors

$$h_{\mu_{BM}}(\phi) = \sup_{m \in \mathcal{M}^1(T^1 M)} h_m(\phi) = h_{\text{top}}(\phi) = \delta_\Gamma.$$

3.1. FORMALISME THERMODYNAMIQUE EN COURBURE NÉGATIVE 47

D.Sullivan démontra dans [Sul] que sur une variété de courbure constante négative, si la mesure de Bowen-Margulis μ_{BM} (*i.e* la mesure de Gibbs associée au potentiel $F = 0$) est finie, alors

$$\delta_\Gamma = h_{\mu_{BM}}(\phi_t).$$

Éléments de preuve (du théorème 3.10) : La première étape de cette démonstration consiste à construire pour toute mesure de probabilité m ϕ_t -invariante et ergodique une partition \mathcal{P} m -mesurable permettant de calculer l'entropie du flot géodésique relativement à m . Un résultat similaire a été démontré par F.Ledrappier et J.Strelcyn [LS82] dans le cas des difféomorphismes ergodiques.

Définition 3.11. *Nous dirons qu'une partition m -mesurable \mathcal{P} de l'ensemble non-errant Ω du flot géodésique est subordonnée au feuilletage instable \mathcal{W}^{su} si pour m -presque tout $v \in \Omega$, $P(v) \subset W^{su}(v)$ et est un voisinage relativement compact de v dans cette feuille.*

Rappelons de plus que la mesure de Bowen-Margulis possède une structure de produit local par rapport au feuilletage stable/instable. Il existe en effet pour tout $v \in T^1M$ une mesure μ_v^{su} supportée sur $W^{su}(v)$, une mesure μ_v^{ss} supportée sur $W^{ss}(v)$ et, pour un $\epsilon > 0$, il existe un ouvert feuilleté \mathcal{U} tel que pour tout borélien $A \subset \mathcal{U}$,

$$\mu_{BM}(A) = \int_{\mathcal{U}} \left(\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \mu_{\phi_s(u)}^{su}(A \cap W^{su}(\phi_s(u))) e^{-\delta_\Gamma s} ds \right) d\mu_v^{ss}(u).$$

De plus, la famille $\{\mu_v^{su}\}_{v \in T^1M}$ possède la propriété d'expansivité suivante. Pour tout $t > 0$,

$$\frac{d\phi_t^* \mu_{\phi_t(v)}^{su}}{d\mu_v^{su}} = e^{\delta_\Gamma t}.$$

Le résultat suivant va nous permettre de calculer explicitement l'entropie du flot géodésique relativement à la mesure de Bowen-Margulis ce qui nous permettra de conclure la première étape de cette démonstration.

Proposition 3.12. *([OP04]) Soit m une mesure de probabilité sur T^1M ϕ_t -invariante et $\tau > 0$ tel que m est ϕ_τ -ergodique, alors il existe une partition \mathcal{P} m -mesurable subordonnée à \mathcal{W}^{su} et génératrice pour ϕ_τ telle que pour m -presque tout $v \in T^1M$, $P(v) \supset \phi_\tau^{-1}P(v)$, et*

$$h_m(\phi_\tau) = h_m(\phi_\tau, \mathcal{P}).$$

Soit \mathcal{P} une partition satisfaisant les hypothèses de la proposition 3.12. Supposons que la mesure de Bowen-Margulis μ_{BM} soit finie alors la mesure conditionnelle subordonnée à \mathcal{P} est définie par

$$\mu_{P(v)} = \frac{\mu_v^{su}}{\mu_v^{su}(P(v))}.$$

Ainsi, en posant $G(v) = \log(\mu_v^{su}(P(v)))$ et en remarquant que cette fonction est μ_{BM} -mesurable, nous obtenons par la propriété d'expansivité de μ_v^{su}

$$\begin{aligned} \log \frac{1}{\mu_{P(v)}(\phi_\tau^{-1}P(v))} &= \log \mu_v^{su}(\phi_\tau^{-1}P(v)) - \log \mu_v^{su}(P(v)) \\ &= G(v) + G(\phi(v)) + \delta_\Gamma \tau. \end{aligned}$$

Fait : Si $G : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ est μ_{BM} -mesurable et que la partie négative de $g = G \circ \phi - G$ est intégrable alors g est intégrable et $\int_{T^1M} g d\mu_{BM} = 0$.

Ainsi

$$\tau h_{\mu_{BM}}(\phi) = h_{\mu_{BM}}(\phi_\tau) = - \int_{T^1M} \log \mu_{P(v)}(\phi_\tau^{-1}P(v)) d\mu_{BM} = \delta_\Gamma \tau.$$

Le but est de démontrer à présent que si m est une mesure de probabilité sur T^1M , ϕ_t -invariante et distincte de μ_{BM} alors

$$h_m(\phi) \leq h_{\mu_{BM}}(\phi) = \delta_\Gamma.$$

Soit \mathcal{P} une partition m -mesurable satisfaisant les hypothèses de la proposition 3.12 et $\{m_{P(v)}\}_v, \{\mu_{P(v)}\}_v$ les familles de mesures conditionnelles subordonnées à \mathcal{P} associées respectivement à m et μ_{BM} . Posons

$$\Psi(v) = \frac{\mu_{P(v)}(\phi_\tau^{-1}P(v))}{m_{P(v)}(\phi_\tau^{-1}P(v))}.$$

Fait : Ψ est une fonction m -mesurable. De plus, Ψ et $\log \Psi$ sont des fonctions m -intégrables.

Comme $\int_{T^1M} \Psi(v) dm(v) \leq 1$ et que

$$\int_{T^1M} \log(\Psi(v)) dm(v) = -\delta_\Gamma \tau + H_m(\phi_\tau^{-1}\mathcal{P}|\mathcal{P}),$$

nous obtenons par l'inégalité de Jensen que

$$-\delta_\Gamma \tau + H_m(\phi_\tau^{-1}\mathcal{P}|\mathcal{P}) \leq \log \left(\int_{T^1M} \Psi(v) dm(v) \right) \leq 0.$$

Ainsi pour tout $m \in \mathcal{M}^1(T^1M)$,

$$h_m(\phi) \leq h_{\mu_{BM}}(\phi) = \delta_\Gamma.$$

De plus, si $h_m(\phi_\tau) = \delta_\Gamma$ alors $H_m(\phi_\tau^{-1}\mathcal{P}|\mathcal{P}) = H_{\mu_{BM}}(\phi_\tau^{-1}\mathcal{P}|\mathcal{P})$ et le cas d'égalité dans l'inégalité de Jensen entraîne que $\Psi = 1$ pour m -presque tout $v \in T^1M$. Donc, pour m -presque tout $v \in T^1M$, $m_{P(v)} = \mu_{P(v)}$. Supposons dans un premier temps que μ_{BM} est finie et ergodique. Afin de démontrer l'égalité de ces mesures, considérons pour toute fonction f continue à support compact l'ensemble A constitué des vecteurs v tels que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f \circ \phi_s(v) ds = \int_{T^1M} f d\mu_{BM}.$$

3.1. FORMALISME THERMODYNAMIQUE EN COURBURE NÉGATIVE 49

Si nous supposons que $\mu_{BM}(T^1M) < \infty$ alors par le théorème ergodique de Birkhoff, A est de mesure totale. Or, nous savons que pour m —presque tout v

$$\mu_{P(v)}^{su}(A \cap W^{su}(v)) = m_{P(v)}(A \cap W^{su}(v)).$$

Ainsi, A est de mesure totale relativement à m et le théorème ergodique de Birkhoff appliqué à m entraîne que pour toute fonction f continue à support compact,

$$\int_{T^1M} f d\mu_{BM} = \int_{T^1M} f dm.$$

Ainsi, μ_{BM} est l'unique mesure pour laquelle l'entropie du flot géodésique vaut δ_Γ .

Si μ_{BM} n'est plus supposée finie, une application du théorème de Hopf-Tsuji-Sullivan ainsi que du théorème ergodique quotient de Hopf nous permettent de vérifier qu'il n'existe aucune mesure d'entropie δ_Γ .

Il reste donc à montrer que $h_{top}(\phi) = \delta_\Gamma$. Pour cela, il suffit de prouver que pour toute distance d' définie sur T^1M ,

$$h_{d'}(\phi) \geq \delta_\Gamma.$$

En effet, si nous avons une inégalité stricte le principe variationnel suivant dû M.Handel et B.Kitchens [HKR95] entraînerait qu'il existe des mesures finies m telles que l'entropie du flot géodésique relativement à m est strictement supérieur à δ_Γ ce qui contredirait l'argument développé précédemment.

Théorème 3.13. *Soit M une variété riemannienne et $\phi_t : T^1M \rightarrow T^1M$ son flot géodésique. Nous avons alors*

$$\sup\{h_\mu(\phi) \mid \mu \in \mathcal{M}^1(T^1M)\} = h_{top}(\phi).$$

Notons que le théorème précédent est démontré dans le cas plus général où M est un espace localement compact muni d'un homéomorphisme. Ainsi, il suffit de construire pour tout $\delta' < \delta_\Gamma$ un compact $K \subset \Omega$ et une suite S_i d'ensembles (K, T_i, ϵ) —séparés tels que

$$S(K, T_i, \epsilon) \geq Ce^{\delta' T_i}.$$

La construction d'un tel ensemble réside dans un résultat dû à C.Bishop et P.Jones [BJ].

Théorème 3.14. *Pour tout $\delta' < \delta$, il existe un sous-ensemble $\mathcal{G} \subset \Gamma$ tel que pour $C > 0$, $0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}$, $R > 0$ bien choisis, et pour tout $x \in \widetilde{M}$*

- $|d_{\widetilde{M}}(x, \gamma x) - R| \leq \frac{1}{2}$, $\forall \gamma \in \mathcal{G}$,
- $|d_{\widetilde{M}}(\gamma' x, \gamma x) - R| \geq 4C + 1$, $\gamma \neq \gamma'$,
- *il existe $v \in T^1\widetilde{M}$ tel que pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$, le segment géodésique $[x, \gamma x]$ se projette sur M en un lacet dont les vecteurs tangents en ses extrémités font un angle inférieur à $\frac{\theta}{2}$ avec v ,*

$$- \#\mathcal{G} \geq e^{\delta'(R+\frac{1}{2})}.$$

Soit $g = g_{i_1} \dots g_{i_k} \in \mathcal{G}^k$, alors pour un point de base $x \in T^1\widetilde{M}$ fixé, le segment géodésique $[x, gx]$ se projette en un lacet ℓ_g homotope à une géodésique c_g . Soit v_g le vecteur unitaire tangent à c_g en $\pi(x)$. Alors pour un $\eta(\theta) > 0$ bien choisi et en définissant K comme l' $\eta(\theta)$ -voisinage des vecteurs unitaires tangents aux géodésiques ℓ_g , $g \in \mathcal{G}$, l'ensemble

$$S_k = \{v_g \mid g \in \mathcal{G}^k\}$$

est $(K, k(R + \frac{1}{2}), \epsilon)$ -séparé et,

$$S(K, k(R + \frac{1}{2}), \epsilon) \geq e^{\delta'k(R+\frac{1}{2})}$$

ce qui conclut la démonstration du principe variationnel.

3.1.2 Pression topologique et mesures de Gibbs

Nous allons à présent nous intéresser à un second principe variationnel mettant en relation la pression topologique d'un potentiel hõlderien $F : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ et l'exposant critique associé au couple (Γ, F) .

Nous débutons cette section par un rappel de certaines définitions. Pour toute mesure $m \in \mathcal{M}^1(T^1M)$, la pression métrique associée à un potentiel hõlderien $F : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ et à la mesure m est définie par

$$P_{\Gamma, F}(m) = h_m(\phi) + \int_{T^1M} F dm$$

où $h_m(\phi)$ est l'entropie métrique du flot géodésique associée à la mesure $m \in \mathcal{M}^1(T^1M)$.

Définition 3.15. *La pression topologique $P(\Gamma, F)$ associée au couple (Γ, F) est la borne supérieure des pressions métriques. Autrement dit,*

$$P(\Gamma, F) = \sup_{m \in \mathcal{M}^1(T^1M)} P_{\Gamma, F}(m).$$

Une mesure de probabilité réalisant ce supremum sera dite d'équilibre. De la même manière que pour l'entropie (soit, lorsque $F = 0$), nous avons le principe variationnel suivant qui est démontré dans [PPS15].

Théorème 3.16. ([PPS15]) *Soit \widetilde{M} une variété riemannienne complète, simplement connexe de courbure négative pincée et Γ un groupe d'isométries discret agissant sur \widetilde{M} . Soit $F : T^1\widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ un potentiel hõlderien Γ -invariant tel que $\delta_\Gamma^F < \infty$. Alors*

$$- P(\Gamma, F) = \delta_\Gamma^F,$$

- *s'il existe une mesure de Gibbs finie m_F associée au couple (Γ, F) telle que la partie négative de F est m_F -intégrable, alors la mesure normalisée $m^F = \frac{m_F}{\|m_F\|}$ est l'unique mesure d'équilibre associée au couple (Γ, F) . Dans le cas contraire, il n'existe aucune mesure d'équilibre pour (Γ, F) .*

La démonstration de ce théorème est très similaire à celle du principe variationnel de J.P.Otal et M.Peigné que nous avons traité dans la section précédente. Le point crucial de cette preuve repose sur l'expression de la famille de mesures conditionnelles $\{m_{P(v)}^F\}_v$ sur le feuilletage instable \mathcal{W}^{su} associées à la mesure de Gibbs normalisée m^F . Soit $m \in \mathcal{M}^1(T^1M)$ et \mathcal{P} est une partition m -mesurable satisfaisant les conditions de la proposition 3.12. Posons alors

$$\Psi(v) = \frac{m_{P(v)}^F(\phi_\tau^{-1}P(v))}{m_{P(v)}(\phi_\tau^{-1}P(v))}.$$

Alors en adaptant le résultat de la section précédente, nous obtenons que

1. pour tout $m \in \mathcal{M}^1(T^1M)$, $P_{\Gamma, F}(m) \leq \delta_\Gamma^F$,
2. si $\int_{T^1M} F_- < \infty$ et m_F est finie alors $P_{\Gamma, F}(m^F) = \delta_\Gamma^F$.

Ainsi, $P(\Gamma, F) \leq \delta_\Gamma^F$. Il reste alors à montrer l'inégalité inverse. Pour cela, il est nécessaire d'introduire une nouvelle définition de la pression topologique. Soit $K \subset T^1M$ un ensemble compact. Pour tout $T \geq 0, \epsilon > 0$, posons

$$P_{\epsilon, T, F, K} = \sup_{E \subset K} \sum_{x \in E} e^{\int_0^T F(\phi_t(x)) dt}$$

où le supremum est pris parmi tous les ensembles E (ϵ, T) -séparés dans K . Définissons alors

$$P_K(F, \phi) = \sup_{\epsilon > 0} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log P_{\epsilon, T, F, K}.$$

Fait : Nous avons

$$P_K(F, \phi) = \sup_{m \in \mathcal{M}^1(K)} (h_m(\phi) + \int_K F dm).$$

Quitte à supposer que $\delta_\Gamma^F > 0$, l'objectif est alors de construire pour tout $\delta' \in [0, \delta_\Gamma^F]$ un compact K dans T^1M contenant des ensembles E_k (ϵ, k) -séparés tel que

$$\sum_{x \in E} e^{\int_0^T F(\phi_t(x)) dt} \geq C e^{\delta' k}.$$

Ainsi, la restriction $P_K(F|_K, \phi|_K)$ de la pression topologique à ce compact K est supérieure à δ' et l'inclusion $\mathcal{M}^1(K) \subset \mathcal{M}^1(T^1M)$ implique alors que

$$P(\Gamma, F) \geq \delta_\Gamma^F.$$

3.2 Finitude et mélange des mesures de Gibbs

L'une de raisons nous ayant poussé à nous intéresser aux mesures de Gibbs m^F réside dans le lien qui existe entre le mélange topologique du flot géodésique restreint à son ensemble non-errant et le mélange de m^F relativement à ϕ_t . Afin de décrire cette relation, commençons par définir le spectre des longueurs d'un groupe d'isométries Γ .

Définition 3.17. *Soit Γ un groupe d'isométries agissant sur une variété \widetilde{M} complète, simplement connexe de courbure négative pincée. La longueur d'un élément $\gamma \in \Gamma$ est définie par*

$$\ell(\gamma) = \inf_{x \in \widetilde{M}} d(x, \gamma x).$$

Le spectre des longueurs $L(\Gamma)$ d'un groupe Γ est le sous-groupe de \mathbb{R} défini par

$$L(\Gamma) = \{\ell(\gamma); \gamma \in \Gamma\}$$

Énonçons à présent le résultat mettant en lien le mélange topologique du flot géodésique et le mélange des mesures de Gibbs.

Théorème 3.18. *([Bab02]) Supposons que $\delta_\Gamma^F < \infty$ et que m_F est finie, alors les propositions suivantes sont équivalentes*

1. *Le flot géodésique est topologiquement mélangeant en restriction à Ω ,*
2. *le flot géodésique est mélangeant relativement à m^F ,*
3. *$L(\Gamma)$ n'est pas contenu dans un sous-groupe discret de \mathbb{R} .*

Ce résultat nous sera d'une grande utilité dans la section suivante où nous démontrerons le théorème B.

3.3 Généricité des mesures faiblement mélangeantes

3.3.1 Plan de la preuve

Nous nous intéressons à présent à la démonstration du théorème B et du corollaire A. Rappelons qu'une variété M complète, connexe de courbure négative pincée est géométriquement finie si elle est de genre fini, possède un nombre fini de bouts qui sont tous des pointes de volume fini ou des "trompettes", isomorphes à un morceau de cylindre hyperbolique de volume infini.

Rappelons qu'une suite μ_n de mesures de probabilité ϕ_t -invariantes converge faiblement vers une mesure de probabilité ϕ_t -invariante si pour toute fonction f continue, bornée

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{T^1 M} f d\mu_n = \int_{T^1 M} f d\mu.$$

Rappelons l'énoncé du théorème B.

Théorème 3.19. *Soit M une variété géométriquement finie non élémentaire complète, connexe, orientable de courbure négative pincée et $\phi_t : T^1M \rightarrow T^1M$ son flot géodésique. Supposons que la restriction de ϕ_t à son ensemble non-errant est topologiquement mélangeant. Alors l'ensemble des mesures de probabilité invariantes par le flot géodésique, mélangeantes est dense dans $\mathcal{M}^1(T^1M)$.*

Nous donnerons dans cette section un plan de la preuve de ce résultat et nous verrons comment en déduire le corollaire A. Par soucis de clarté, rappelons son énoncé.

Corollaire 3.20. *Soit M une variété géométriquement finie non élémentaire complète, connexe, orientable de courbure négative pincée et $\phi_t : T^1M \rightarrow T^1M$ son flot géodésique. Supposons que la restriction de ϕ_t à son ensemble non-errant est topologiquement mélangeante. Alors l'ensemble des mesures de probabilité faiblement mélangeantes, invariantes par le flot géodésique, et de support total est G_δ -dense dans $\mathcal{M}^1(T^1M)$.*

La démonstration du théorème 3.19 repose sur un résultat de Y.Coudène et B.Schapira stipulant que l'ensemble des mesures de Dirac normalisées supportées sur une orbite périodique est dense dans $\mathcal{M}^1(T^1M)$.

Proposition 3.21. *(Coudène-Schapira [CS10]) Soit M une variété riemannienne complète, connexe de courbure négative pincée et $\phi_t : T^1M \rightarrow T^1M$ son flot géodésique. Alors l'ensemble des mesures de Dirac normalisées supportées sur une orbite périodique est dense dans $\mathcal{M}^1(T^1M)$.*

Ce résultat reste valable pour tout système dynamique (X, f_t) transitif possédant une structure de produit local et satisfaisant le lemme de fermeture.

Ainsi, la démonstration du théorème 3.19 repose sur l'approximation de mesures de Dirac supportées sur des orbites périodique $\mathcal{O}(p)$ pour le flot géodésique par des suites de mesures de probabilité mélangeantes. Les "bonnes" suites de mesures que nous utiliserons seront des mesures de Gibbs associées à une suite de potentiels hölderiens $F_n : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$. Plus précisément, nous démontrerons la proposition suivante qui implique trivialement le théorème 3.19.

Proposition 3.22. *Soit M une variété riemannienne géométriquement finie et $\phi_t : T^1M \rightarrow T^1M$ son flot géodésique. Supposons que la restriction de ϕ_t à son ensemble non-errant soit topologiquement mélangeante. Alors, pour tout vecteur $p \in T^1M$ ϕ_t -périodique, il existe une suite $\{m_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de mesures satisfaisant les propriétés ci-dessous*

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, m_n est une mesure de probabilité mélangeante relativement au flot géodésique,

2. $m_n \rightharpoonup D_{\mathcal{O}(p)}$ où $\mathcal{O}(p) = \phi_{\mathbb{R}}(p)$ est l'orbite ϕ_t -périodique engendrée par p

La démonstration du théorème B est alors une conséquence des deux résultats suivants. Le premier stipule que l'ensemble des mesures de probabilité ϕ_t -invariantes, faiblement mélangeantes forme un G_δ dans $\mathcal{M}^1(T^1M)$. Le second stipule quant à lui que l'ensemble des mesures de probabilité ϕ_t -invariantes de support total forme également un G_δ dans $\mathcal{M}^1(T^1M)$. Bien entendu, leur intersection possède encore cette propriété.

Théorème 3.23. ([CS14, Par62]) *Soit $(\varphi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ un flot continu défini sur un espace polonais X . Alors l'ensemble des mesures faiblement mélangeantes sur X forme un sous-ensemble G_δ dans l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes invariantes définies sur X .*

Théorème 3.24. ([CS10]) *Soit X un espace polonais et $(\varphi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ un flot continu défini sur X . Supposons que l'ensemble des orbites φ^t -périodiques forme un ensemble dense dans X . Alors l'ensemble des mesures boréliennes de support total forme un sous-ensemble G_δ dans l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes invariantes définies sur X .*

3.3.2 Construction de mesures finies sur T^1M

La première étape de la démonstration du théorème B repose donc sur la construction de mesures de Gibbs finies, mélangeantes supportées sur l'ensemble non errant Ω . Pour cela, nous construirons dans cette section un potentiel Γ -invariant $\tilde{H} : T^1\tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant les propriétés de la proposition 2.28. Ainsi, pour tout sous-groupe parabolique maximal Γ_{ξ_p} , le couple (Γ_{ξ_p}, H) devra être de type divergent et, l'exposant critique δ_Γ^H devra être fini. Cette dernière propriété est assurée dès lors que le potentiel reste borné.

Supposons que M soit géométriquement finie, alors l'ensemble Par_Γ des points paraboliques $\xi_p \in \partial_\infty \tilde{M}$ intersectant le bord du domaine de Dirichlet dans $\tilde{M} \cup \partial_\infty \tilde{M}$ est fini.

Pour de tels éléments, nous définissons une famille d'horoboules $Hor_{x_0}(\xi_p)$ dans \tilde{M} , centrées en ξ_p et passant par un point \tilde{x}_0 fixé inclus dans le relevé de la pointe associée à ξ_p .

Pour tout $\tilde{x} \in Hor_{x_0}(\xi_p)$, nous définissons une fonction hauteur $\rho : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\rho(\tilde{x}) = \beta_{\xi_p}(\tilde{x}, \tilde{x}_0)$$

où $\beta_\xi(x, y)$ est le cocycle de Busemann défini au chapitre précédent. Ce cocycle coïncide avec le cocycle de Gibbs associé au potentiel constant $F = -1$.

Notons par ailleurs que les courbes de niveau de la fonction hauteur définie ci-dessus correspondent exactement aux horocycles basés en ξ_p et passant par \tilde{x} .

Pour une isométrie parabolique $p \in \Gamma_{\xi_p}$, nous définirons la hauteur $\rho(p)$ de p par

$$\rho(p) = \sup_{x \in [\tilde{x}_0, p\tilde{x}_0]} \rho(\tilde{x}).$$

Nous construisons alors un potentiel \tilde{H} Γ -invariant tel que $\delta_\Gamma^H < \infty$ et (Γ_{ξ_p}, H) est de type divergent en suivant les idées de [Cou03].

Soit $\{t_n\}_n$ une suite décroissante de réels positifs telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$. Nous pouvons construire une suite $\{Y_n\}_n$ de réels positifs telle que

$$\begin{cases} Y_{n+1} \geq Y_n + t_n - t_{n+1}, \\ \sum_{p \in \rho^{-1}([Y_n, Y_{n+1}])} e^{-d(x_0, px_0)(\delta_{\Gamma_{\xi_p}} - t_n)} \geq 1. \end{cases}$$

À présent, pour tout élément $\xi_p \in \text{Par}_\Gamma$ nous pouvons définir une application de $\mathcal{D} \cap \mathcal{H}_{\xi_p}(u_0, \xi_p)$ dans \mathbb{R} où \mathcal{D} est un domaine fondamental pour l'action de Γ sur \tilde{M} de la manière suivante. Pour tout \tilde{u} in $\text{Hor}_{x_0}(\xi_p)$, nous posons

$$\tilde{H}_1(\tilde{u}) = \begin{cases} t_n + Y_n - \rho(\tilde{u}) \text{ sur } \rho^{-1}([Y_n, Y_n + t_n - t_{n+1}]), \\ t_{n+1} \text{ sur } \rho^{-1}([Y_n + t_n - t_{n+1}, Y_{n+1}]). \end{cases}$$

Nous prolongeons alors \tilde{H}_1 à \tilde{M} de la manière suivante. Premièrement, nous la prolongeons continûment à \mathcal{D} par une application constante. Ainsi,

$$\tilde{H}_1 : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

est une application hölderienne. La seconde étape consiste à l'étendre à \tilde{M} comme suit. Pour tout $\gamma \in \Gamma$ et $\tilde{x} \in \gamma\mathcal{D}$, nous poserons

$$\tilde{H}_1(\tilde{x}) = \tilde{H}_1(\gamma^{-1}\tilde{x}).$$

Soit \tilde{H} le potentiel Γ -invariant obtenu en tirant en arrière H_1 vers $T^1\tilde{M}$ et $F : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $F(x) = -H(x)$. Nous noterons $F : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ l'application induite par \tilde{H} sur T^1M .

Lemme 3.25. *\tilde{F} est un potentiel hölderien, Γ -invariant. De plus, pour tout point fixe parabolique ξ_p , le couple (Γ_{ξ_p}, F) est de type divergent.*

Démonstration. Il est clair, par définition du potentiel que pour tout $\xi_p \in \text{Par}_\Gamma$ la série

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_{\xi_p}} e^{\int_x^{\gamma x} \tilde{H} - \delta_{\Gamma_{\xi_p}}}$$

est divergente. Il reste alors à démontrer que $\delta_{\Gamma_{\xi_p}} = \delta_{\Gamma_{\xi_p}}^H$.

Étant donné que $H \geq 0$, nous avons $\delta_{\Gamma_{\xi_p}}^H \geq \delta_{\Gamma_{\xi_p}}$. Afin de démontrer l'inégalité inverse, notons que nous pouvons démontrer de la même manière que dans [Cou03] que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $p \in \Gamma_{\xi_p}$,

$$\int_x^{\gamma x} \tilde{H} - t_n d(x, \gamma x) \leq C$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \delta_{\Gamma_{\xi_p}}^H &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \left(\sum_{\gamma \in \Gamma_{\xi_p}: t-1 < d(x, \gamma x) \leq t} e^{\int_{x_0}^{\gamma x_0} \tilde{H}} \right) \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \left(e^C \sum_{\gamma \in \Gamma_{\xi_p}: t-1 < d(x, \gamma x) \leq t} e^{\epsilon_n t} \right) \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \left(e^{\epsilon_n t} \#\{\gamma \in \Gamma_{\xi_p} \mid t-1 < d(x, \gamma x) \leq t\} \right) \\ &= \epsilon_n + \delta_{\Gamma_{\xi_p}}. \end{aligned}$$

En particulier, $\delta_{\Gamma_{\xi_p}}^H \leq \delta_{\Gamma_{\xi_p}}$ et notre affirmation est démontrée. \square

Notons par ailleurs que la construction donnée dans [Cou03] qui repose sur la convention multiplicative des séries de Poincaré nous permet également de retrouver une mesure d'équilibre mélangeante relativement au flot géodésique. En effet, l'unicité de la mesure d'équilibre entraîne que ces deux constructions coïncident ici.

Nous avons ainsi construit un potentiel hölderien Γ -invariant sur $T^1 \widetilde{M}$ tel que la mesure de Gibbs associée à au couple (Γ, H) est finie et supportée sur $T^1 \Omega$.

Remarquons que la divergence des sous-groupes paraboliques maximaux ne dépend que de la valeur du potentiel à l'intérieur des pointes. Dans la construction précédente nous avons supposé que ce potentiel était constant sur

$$T^1 M_0 = T^1 (\mathcal{C} \Lambda \Gamma \bigcup_{\xi_p \in \text{Par}_\Gamma} \text{Hor}_x(\xi_p)) / \Gamma.$$

Cependant, en choisissant un potentiel hölderien non constant, borné sur $T^1 M_0$, la mesure de Gibbs associée restera finie.

Soit $p \in T^1 M = T^1 \widetilde{M} / \Gamma$ un vecteur ϕ_t -périodique et $\mathcal{O}(p) = \phi_{\mathbb{R}}(p)$ son orbite. Quitte à redéfinir les pointes de M , nous supposons que $\mathcal{O}(p) \subset T^1 M_0$.

Soit $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de réels positifs telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = +\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous définissons un potentiel hölderien par

$$F_n(x) = \max\{c_n - c_n d(\mathcal{O}(p), x); H(x)\}.$$

Proposition 3.26. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'exposant critique δ_{Γ, F_n} est fini. De plus, nous avons*

$$c_n \leq \delta_{\Gamma}^{F_n} \leq \delta_{\Gamma} + c_n.$$

Démonstration. Puisque $c_k = \sup_{x \in T^1 M} F_k(x)$, alors la majoration $\delta_{\Gamma, F_k} \leq \delta_{\Gamma} + c_k$ est évidente par la proposition 2.10.

Soit p le vecteur périodique engendrant l'orbite $\mathcal{O}(p)$ dessus de laquelle F_k atteint son maximum et $h \in \Gamma$ l'isométrie hyperbolique de longueur ℓ dont l'axe correspond au relevé de $\mathcal{O}(p)$ dans \tilde{M} . Posons $\Gamma_h = \langle h \rangle$ le groupe cyclique engendré par h . Par définition de l'exposant critique, nous avons

$$\delta_{\Gamma, F_k} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\gamma \in \Gamma, n-\ell < d(x, \gamma x) \leq n} e^{\int_x^{\gamma x} \tilde{F}_k} \quad (3.1)$$

$$\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\gamma \in \Gamma_h, n-\ell < d(x, \gamma x) \leq n} e^{\int_x^{\gamma x} \tilde{F}_k}. \quad (3.2)$$

Puisque la valeur de l'exposant critique ne dépend pas du choix du point de base, nous pouvons choisir $x = \pi(\tilde{p})$ où \tilde{p} est un relevé de p dans $T^1 \tilde{M}$. Ainsi, le fait que le potentiel F_k soit constant égal à c_k sur $\mathcal{O}(p)$ implique que pour tout $\gamma \in \Gamma_h$,

$$\int_{\tilde{p}}^{\gamma \tilde{p}} \tilde{F}_k = d(x, \gamma x) c_k \geq (n - \ell) c_k$$

ce qui nous permet alors d'écrire

$$\delta_{\Gamma, F_k} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\gamma \in \Gamma_h, n-\ell < d(x, \gamma x) \leq n} e^{(n-\ell)c_k} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(A_x e^{(n-\ell)c_k} \right), \quad (3.3)$$

où $A_x = \#\{\gamma \in \Gamma_h : n - \ell < d(x, \gamma x) \leq n\}$.

Puisque Γ_h est le groupe engendré par l'isométrie hyperbolique h alors pour tout $\gamma \in \Gamma_h$, il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que $\gamma = h^i$. Dans ce cas, $\ell(\gamma) = \ell(h^i) = i\ell(h)$. Ainsi, la quantité A_x est indépendante de n et

$$\delta_{\Gamma, F_k} \geq c_k.$$

ce qui conclut la démonstration. \square

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ la mesure de Gibbs m_{F_n} associée au couple (Γ, F_n) et de dimension δ_{Γ, F_n} existe et est finie.

3.3.3 Preuve du théorème principal

Débutons à présent la démonstration du théorème 3.19. Pour commencer, nous démontrerons le théorème D sur un espace métrique X muni d'un flot continu ϕ_t et d'une mesure de probabilité μ satisfaisant un principe variationnel pour la pression.

Soit X un espace métrique séparable muni d'un flot $\phi_t : X \rightarrow X$ et $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ un potentiel positif, borné tel qu'il existe un compact $K \subset X$, un voisinage V de K et un réel $c > 0$ tel que pour tout $x \in X$, $F(x) \leq c$. De plus supposons que pour tout $x \in K$, $F(x) = c$ et qu'il existe $c' < c$ tel que

$$\sup_{x \in X \setminus V} F(x) = c'.$$

Nous dirons qu'une mesure de probabilité μ d'entropie finie est une mesure d'équilibre pour un potentiel $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ si elle réalise le supremum de

$$m \mapsto h_m(\phi_t) + \int_X F dm$$

parmi l'ensemble des mesures de probabilité ϕ_t -invariantes d'entropie finie.

Rappelons l'énoncé du théorème D.

Théorème 3.27. *Soit X un espace métrique, ϕ_t un flot continu défini sur X et $F : X \rightarrow \mathbb{R}$, K, V définis comme ci-dessus. Supposons qu'il existe une mesure d'équilibre μ associée à F alors*

$$\mu(X \setminus V) \leq \frac{h_\mu(\phi_t)}{c - c'}.$$

Démonstration. Soit m_K une mesure de probabilité supportée sur K . Puisque μ réalise le supremum de

$$m \in \mathcal{M}^1(X) \mapsto h_m(\phi_t) + \int_X F dm,$$

nous avons

$$h_\mu(\phi_t) + \int_X F d\mu \geq h_{m_K}(\phi_t) + \int_X F dm_K$$

ce qui implique

$$h_\mu(\phi_t) + \int_X F d\mu \geq \int_X F dm_K \quad (3.4)$$

puisque $h_{m_K}(\phi_t) \geq 0$. De plus, puisque le potentiel F est constant sur K , nous avons

$$\int_X F dm_K = c$$

que nous pouvons réécrire

$$\int_X F dm_K = c(\mu(V) + \mu(X \setminus V)). \quad (3.5)$$

En combinant les équations 3.4 et 3.5, nous obtenons

$$\begin{aligned} h_\mu(\phi_t) &\geq \int_X F dm_K - \int_X F d\mu \\ &\geq c(\mu(V) + \mu(X \setminus V)) - c\mu(V) - c'\mu(X \setminus V) \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\frac{h_\mu(\phi_t)}{c - c'} \geq \mu(X \setminus V).$$

Ainsi, le théorème est démontré. \square

Rappelons qu'une suite de mesures de probabilité $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur un espace polonais X est tendue si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un compact $K \subset X$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mu_n(X \setminus K) < \epsilon.$$

Donnons un critère pour qu'une suite de mesures de probabilité converge vers la mesure de Dirac supportée sur une orbite périodique $\mathcal{O}(p)$. Nous noterons V_ϵ le sous-ensemble de T^1M défini par

$$V_\epsilon = \{x \in T^1M : d(x, \mathcal{O}(p)) \leq \epsilon\}.$$

Lemme 3.28. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. la suite de mesures de probabilité $\{m^{F^n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la mesure de Dirac supportée sur l'orbite périodique $\mathcal{O}(p)$,
2. Pour tout $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m^{F^n}(T^1M \setminus V_\epsilon) = 0.$$

Démonstration. Il est clair que (1) \Rightarrow (2). Nous montrerons alors l'implication réciproque (2) \Rightarrow (1). Remarquons pour commencer que $\{m^{F^n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ est tendue. En effet, soit V un compact de T^1M contenant l'orbite périodique $\mathcal{O}(p)$. Puisque la condition (2) est satisfaite, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier $N_0 > 0$ tel que pour tout $n \geq N_0$,

$$m^{F^n}(T^1M \setminus V) < \epsilon.$$

Pour tout $n \in \{1, \dots, N_0 - 1\}$, nous pouvons également trouver un compact K_n tel que

$$m^{F^n}(T^1M \setminus K_n) < \epsilon.$$

Nous définissons alors le compact $K = \left(\bigcup_{n=1}^{N_0-1} K_n \right) \cup V$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, K satisfait

$$m^{F^n}(T^1M \setminus K) \leq \epsilon.$$

Ainsi, la suite $\{m^{F^n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ est tendue.

Notons que $D_{\mathcal{O}(p)}$ est l'unique mesure de probabilité ϕ_t -invariante supportée sur $\mathcal{O}(p)$. Ainsi, puisque la condition (2) est satisfaite, il est clair que toute sous-suite convergente de $\{m^{F_n}\}$ converge vers $D_{\mathcal{O}(p)}$. Ainsi, par le théorème de Prokhorov ([Pro56]), toute sous-suite de $\{m^{F_n}\}$ possède elle-même une sous-suite convergeant vers $D_{\mathcal{O}(p)}$. On peut donc en conclure que m^{F_n} converge étroitement vers $D_{\mathcal{O}(p)}$ ce qui conclut notre démonstration. \square

Nous sommes à présent en mesure de démontrer notre résultat de convergence.

Théorème 3.29. *La suite de mesures de probabilité $\{m^{F_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge étroitement vers la mesure de Dirac $D_{\mathcal{O}(p)}$ supportée sur l'orbite périodique $\mathcal{O}(p)$.*

Démonstration. Soit $D_{\mathcal{O}(p)}$ la mesure de Dirac supportée sur l'orbite périodique $\mathcal{O}(p)$. Rappelons que $c_n = \sup_{x \in T^1 M} F_n(x)$.

Par le lemme 3.28, nous sommes amené à montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m^{F_n}(T^1 M \setminus V_\epsilon) = 0.$$

Par le principe variationnel énoncé dans le théorème 3.16, nous avons alors

$$\delta_\Gamma^{F_n} = \sup_{\mu \in \mathcal{M}^1(T^1 M)} P_{\Gamma, F_n}(\mu) = P_{\Gamma, F_n}(m^{F_n})$$

et

$$\delta_\Gamma^{F_n} \geq P_{\Gamma, F_n}(D_{\mathcal{O}(p)}) = h_{D_{\mathcal{O}(p)}}(\phi_t) + \int_{T^1 M} F_n dD_{\mathcal{O}(p)}.$$

Puisque l'orbite $\mathcal{O}(p)$ est invariante par l'action du flot géodésique, nous avons par le théorème 3.10

$$h_{m_{F_n}}(\phi_t) \leq \delta_\Gamma < \infty.$$

Nous pouvons alors utiliser l'affirmation du théorème D afin d'obtenir l'inégalité suivante

$$m^{F_n}(T^1 M \setminus V_\epsilon) \leq \frac{\delta_\Gamma}{c_n - c'_n}$$

où

$$c'_n = \sup_{x \in T^1 M \setminus V_\epsilon} F_n(x).$$

Par définition du potentiel F_n , nous savons que

$$c'_n \leq \max\{c_0, c_n(1 - \epsilon)\}.$$

Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ assez grand,

$$m^{F_n}(T^1 M \setminus V_\epsilon) \leq \frac{\delta_\Gamma}{c_n \epsilon}$$

ce qui implique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m^{F^n}(T^1M \setminus V_\epsilon) = 0.$$

Ce qui nous permet de conclure notre démonstration. \square

Finalement, nous sommes en mesure de démontrer le corollaire A qui stipule que l'ensemble des mesures de probabilité ϕ_t -invariantes, faiblement mélangeantes et de support total est G_δ -dense dans $\mathcal{M}^1(T^1M)$.

Démonstration. (du corollaire A)

Puisque le mélange d'une mesure de probabilité ϕ_t -invariante implique qu'elle est également faiblement mélangeante, le théorème 3.19 implique que l'ensemble des mesures de probabilité ϕ_t -invariantes, faiblement mélangeantes est dense dans l'ensemble des mesures de probabilité supportées sur Ω . Ainsi, par le théorème 3.23, il devient clair que les mesures faiblement mélangeantes, ϕ_t -invariantes sont G_δ -denses dans $\mathcal{M}^1(T^1M)$.

De plus, puisque toute variété riemannienne de courbure négative pincée satisfait le lemme de fermeture, le théorème 3.24 s'applique et l'ensemble des mesures de probabilité ϕ_t -invariantes de support total sur Ω est G_δ -dense dans $\mathcal{M}^1(T^1M)$.

Finalement, rappelons que par le théorème de Baire l'intersection de deux ensembles G_δ -denses est également G_δ -dense ce qui nous permet de conclure la démonstration de ce théorème. \square

3.3.4 Extension à certaines variétés non géométriquement finies

Dans l'énoncé du théorème B, nous nous restreignons au cas des variétés géométriquement finies sur lesquelles le flot géodésique est topologiquement mélangeant cependant, nous faisons la conjecture suivante : si M n'est pas géométriquement finie alors la conclusion du théorème B reste vraie si le flot géodésique est topologiquement mélangeant sur Ω . Notre conjecture est supportée par les deux résultats suivants

Théorème 3.30. *Soit M une variété riemannienne complète, connexe de courbure négative pincée telle que son flot géodésique $\phi_t : T^1M \rightarrow T^1M$ est topologiquement mélangeant en restriction à son ensemble non-errant Ω . Supposons que pour tout vecteur périodique $p \in T^1M$, il existe une variété géométriquement finie \hat{M}_p , de courbure négative sur laquelle le flot géodésique $\hat{\phi}_t$ est topologiquement mélangeant en restriction à son ensemble non errant et une application continue, surjective $\rho : \hat{M}_p \rightarrow M$ telle que tout relevé \hat{p} de p est périodique sur $T^1\hat{M}$. Alors l'ensemble des mesures de probabilité ϕ_t -invariantes, faiblement mélangeantes et de support total est G_δ -dense dans $\mathcal{M}^1(T^1M)$.*

Comme application, nous nous proposons de démontrer les deux résultats suivants qui sont des applications directes du théorème précédent.

Corollaire 3.31. *Soit M une variété complète, connexe de courbure négative pincée possédant une pointe et $\phi_t : T^1M \rightarrow T^1M$ son flot géodésique alors l'ensemble des mesures de probabilité ϕ_t -invariantes, faiblement mélangeantes totalement supportées sur Ω est G_δ -dense dans $\mathcal{M}^1(T^1M)$.*

Corollaire 3.32. *Soit S une surface complète connexe de courbure négative pincée ou une variété de courbure constante négative alors l'ensemble des mesures de probabilité ϕ_t -invariantes, faiblement mélangeantes totalement supportées sur Ω est G_δ -dense dans $\mathcal{M}^1(T^1M)$.*

Dans ce qui suit, nous commencerons par la démonstration du théorème 3.30. Par la suite, nous verrons que le critère donné dans ce théorème nous permet de retrouver un résultat de genericité des mesures de probabilité ϕ_t -invariantes, faiblement mélangeantes et nous donnerons une démonstration du corollaire 3.31. Cependant, nous ne détaillerons pas la démonstration du corollaire 3.32. Cette dernière est très similaire à la seconde démonstration que nous verrons. Nous donnerons des indications quant aux modifications que nous devons y apporter afin d'obtenir le corollaire 3.32.

Démonstration. (du théorème 3.30) Soit $p \in T^1M$ un vecteur périodique. Supposons qu'il existe une variété \hat{M}_p géométriquement finie associée à l'orbite périodique $\mathcal{O}(p)$ et une surjection $\rho : \hat{M}_p \rightarrow M$ satisfaisant les conditions énoncées au théorème 3.30. En appliquant le théorème 1.44 sur \hat{M}_p , nous pouvons construire une suite $\{\hat{m}_k\}_k$ de mesures de probabilité invariantes par le flot géodésique $\hat{\phi}_t$, mélangeantes, telle que $\hat{m}_k \rightarrow D_{\mathcal{O}(p)}$.

Étant donné que le flot géodésique $\phi_t : T^1M \rightarrow T^1M$ est semi-conjugué au flot $\hat{\phi}_t : T^1\hat{M}_p \rightarrow T^1\hat{M}_p$, nous pouvons construire une suite $\{\nu_k\}_k$ de mesures de probabilité ϕ_t -invariantes, mélangeantes sur T^1M . Ces mesures sont définies en poussant en avant les mesures \hat{m}_k par ρ . Ainsi, pour toute fonction continue bornée g sur T^1M , nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{T^1M} g d\nu_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{T^1\hat{M}_p} g \circ \rho d\hat{m}_k \\ &= \int_{T^1\hat{M}_p} g \circ \rho dD_{\mathcal{O}(p)} \\ &= \int_{T^1M} g d(\rho_* D_{\mathcal{O}(p)}). \end{aligned}$$

Puisque cette construction reste vraie pour tout vecteur périodique $p \in T^1M$, il est alors clair que l'ensemble des mesures de probabilité invariantes par le flot géodésique, mélangeantes sur T^1M est dense dans $\mathcal{M}^1(T^1M)$. Le reste de la démonstration est alors similaire à celle du théorème B. \square

Comme nous l'avons vu précédemment, le mélange topologique du flot géodésique sur une variété de courbure négative joue un rôle important dans la démonstration du théorème B. Afin d'étendre notre démonstration à

certaines variétés géométriquement infinies, nous commençons par rappeler certains cas où la propriété de mélange topologique du flot géodésique est connue.

Lemme 3.33. (*[DP98, Dal99, Dal00]*) *Soit Γ un groupe non élémentaire d'isométries agissant librement, proprement discontinûment sur une variété de Hadamard \widetilde{M} de courbure négative pincée. Si $M = \widetilde{M}/\Gamma$ satisfait l'une des propriétés suivantes, alors la restriction du flot géodésique à son ensemble non-errant est topologiquement mélangeant.*

1. *La courbure sectionnelle de M est constante,*
2. *$\dim M = 2$,*
3. *il existe une isométrie parabolique $\gamma_p \in \Gamma$,*
4. *$\Omega = T^1M$.*

Nous sommes à présent en mesure de démontrer le corollaire 3.31. Avant tout remarquons que comme M possède une pointe alors par le lemme 3.33, le flot géodésique est topologiquement mélangeant sur son ensemble non-errant $T^1\Omega$.

Avant de débiter notre démonstration, définissons certains objet sur \widetilde{M} . Soit $x_0 \in \widetilde{M}$ un point de base fixé, $\gamma \in \Gamma$ et $D(\gamma)$ le sous-ensemble de \widetilde{M} délimité par

$$\{\tilde{x} \in \widetilde{M} : d(\tilde{x}, \tilde{x}_0) = d(\tilde{x}, \gamma\tilde{x}_0)\}$$

et contenant l'image $\gamma\tilde{x}_0$ du point de base x_0 par l'isométrie γ . Nous définissons alors le sous-espace C_γ de $\partial_\infty\widetilde{M}$ par

$$C_\gamma = \partial_\infty\widetilde{M} \cap \overline{D(\gamma)}.$$

La démonstration du corollaire 3.31 est une conséquence du théorème 3.30 ainsi que de l'énoncé suivant.

Lemme 3.34. *Soit M une variété riemannienne complète, connexe de courbure négative possédant une pointe et $\phi_t : T^1M \rightarrow T^1M$ son flot géodésique. Alors pour tout vecteur $p \in T^1M$ dont l'orbite par le flot géodésique est périodique, il existe une variété géométriquement finie \hat{M}_p telle que le flot géodésique $\hat{\phi}_t : T^1\hat{M}_p \rightarrow T^1\hat{M}_p$ est topologiquement mélangeant. De plus il existe une surjection $\rho : T^1\hat{M}_p \rightarrow T^1M$ telle que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} T^1\hat{M}_p & \xrightarrow{\hat{\phi}_t} & T^1\hat{M}_p \\ \rho \downarrow & & \downarrow \rho \\ T^1M & \xrightarrow{\phi_t} & T^1M \end{array}$$

commute et tout relevé \hat{p} de p par ρ est périodique.

Démonstration. Soit $\xi_p \in \partial_\infty \widetilde{M}$ un point parabolique borné fixé par une isométrie hyperbolique $\gamma_p \in \Gamma$ et $h \in \Gamma$ une isométrie hyperbolique laissant invariant le relevé de $\phi_{\mathbb{R}}(p)$ dans $T^1 \widetilde{M}$.

Soit $N > 0$ un entier positif assez grand tel que les ensembles $C_{\gamma_p^N}, C_{h^N}, C_{\gamma_p^{-N}}, C_{h^{-N}}$ soient d'intérieur disjoint. Nous définissons alors un sous-groupe Γ_0 de Γ par $\Gamma_0 = \langle \gamma_p^N, h^N \rangle$. Le lemme du ping-pong nous assure alors que $\widetilde{\Gamma_0}$ est un groupe discret agissant librement, proprement discontinûment sur \widetilde{M} . Il est alors clair que la variété

$$\widehat{M}_p = \widetilde{M}/\Gamma_0$$

est géométriquement finie et possède les propriétés énoncées dans le lemme 3.34. \square

Nous terminons à présent ce chapitre en donnant des éléments de preuve du corollaire 3.32. Le principe est exactement le même que pour le corollaire 3.31 et repose également sur le théorème 3.30. Notons d'abord qu'avec les suppositions que nous faisons, le flot géodésique est topologiquement mélangeant en restriction à son ensemble non-errant Ω .

Pour une surface $S \simeq \widetilde{S}/\Gamma$ de courbure négative pincée et $h_1, h_2 \in \Gamma$ deux isométries hyperboliques bien choisies telles que le sous-groupe $\Gamma_0 = \langle h_1, h_2 \rangle$ soit convexe-cocompact.

En reprenant le même principe que dans la preuve du lemme 3.34 il est clair que le flot géodésique ϕ_t défini sur $T^1 S$ est facteur du flot géodésique $\widehat{\phi}_t$ défini sur la surface convexe-cocompacte $T^1 S_0 = T^1 \widetilde{S}/\Gamma_0$. Il est alors aisé de démontrer la densité de l'ensemble des mesures de probabilité ϕ_t -invariantes, mélangeantes dans $\mathcal{M}^1(T^1 S)$ en suivant les principes introduits au lemme 3.34.

Chapitre 4

Travaux en cours et ouverture

Dans ce dernier chapitre, nous nous intéresserons à certaines questions que nous nous sommes posé durant cette thèse et restées sans réponse. Nous serons tout de même capables de donner des éléments de preuve nous permettant d'étendre le théorème principal de ce manuscrit à certaines variétés géométriquement infinies et d'énoncer certaines conjectures.

Dans un premier temps, nous reviendrons sur un critère de finitude des mesures de Gibbs sur des variétés riemanniennes de courbure négative pincées qui ne sont pas nécessairement géométriquement finies. Ce résultat est une adaptation d'un théorème dû à D.Sullivan pour des variétés de courbure constante et C.Yue pour des variétés à courbure négative variable auxquelles nous associons un potentiel nul.

Enfin, nous reviendrons dans la dernière section de ce chapitre sur le cas des variétés de rang un. Très peu d'outils thermodynamiques ont été développés dans ce cadre. Nous verrons qu'un principe variationnel pour la pression topologique existe dans certains cas cependant, les mesures d'équilibre pour le flot géodésique ne sont pas explicites. Nous profiterons de ce dernier paragraphe pour énoncer les lignes directrices de nos futurs travaux de recherche sur le sujet.

4.1 Finitude des mesures de Gibbs sur certaines variétés géométriquement infinies

Soit M une variété riemannienne de courbure négative pincée, connexe, complète. Nous noterons \tilde{M} son revêtement universel et Γ le groupe de revêtement agissant librement, proprement discontinûment sur \tilde{M} , vérifiant

$$M \simeq \tilde{M}/\Gamma.$$

Le but de cette section est d'adapter un critère de finitude des mesures de Gibbs dû à C.Yue dans le cas où le potentiel fixé est constant.

Lemme 4.1. *Soit Γ un groupe fuchsien et B un sous-ensemble compact de T^1M , $F : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ un potentiel hölderien et m_F la mesure de Gibbs qui lui est associée. Alors pour m_F -presque tout $v \in T^1M$,*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_B(\phi_t v) dt = \frac{m_F(B)}{m_F(T^1M)}.$$

Démonstration. Deux cas de figure s'offrent à nous :

- Dans le premier cas, le flot géodésique $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ est totalement dissipatif. Ainsi toute trajectoire passe un temps fini dans B . Il est alors clair que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_B(\phi_t v) dt = 0.$$

- Dans le second, le flot géodésique $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ est conservatif. Par le théorème de Hopf-Tsuji-Sullivan, il est alors ergodique. Par le théorème ergodique, nous avons alors

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_B(\phi_t v) dt = \frac{m_F(B)}{m_F(T^1M)}.$$

□

Nous utiliserons ce résultat afin de démontrer le théorème suivant.

Théorème 4.2. *Soit $F : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ un potentiel Hölderien intégrable, μ_x^F une densité Γ -conforme de dimension s et m_F la mesure de Gibbs associée. Si $m_F(T^1M) = \infty$ alors*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{d(x, \gamma x) \leq T} e^{\int_x^{\gamma x} \tilde{F} - s} = 0.$$

Démonstration. Soit $\xi \in \partial_\infty \tilde{M}$ et

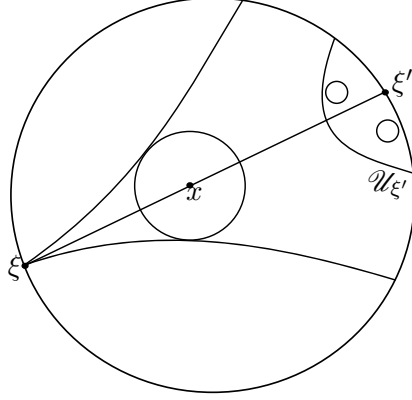
$$W^u(\xi) = \{v \in T^1M \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(v) = \xi\}.$$

On notera $B_\xi(R) = T^1B(x, R) \cap W^u(\xi)$ sa restriction à $T^1B(x, R)$ et μ_ξ une mesure ϕ^t -invariante, définie par

$$d\mu_\xi((\eta, t)) = \frac{d\mu_x(\eta) dt}{D_{F,x}^2(\xi, \eta)}.$$

Soit $F(T, \xi)$ la proportion de vecteurs dans $\pi(B_\xi)$ dont la trajectoire retourne dans $\pi(B(x, R))$ après un temps $T > 0$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} F(T, \xi) &= \frac{1}{T} \sum_{\gamma \in \Gamma, d(x, \gamma x) \leq T+2R} \frac{\mu_\xi(\phi^{-T}(\gamma B(x, R)) \cap B_\xi)}{\mu_\xi(B_\xi)} \\ &= \frac{1}{T \mu_\xi(B_\xi(R))} \sum_{\gamma \in \Gamma, d(x, \gamma x) \leq T+2R} \int_{B_\xi} \chi_{\phi^{-T}(\gamma B(x, R))}(v) d\mu_\xi(v). \end{aligned}$$

FIGURE 4.1 – Voisinage de ξ' dans \widetilde{M}

Rappelons que tout vecteur $v \in B_\xi$ admet une unique représentation dans $\partial_\infty \widetilde{M}^2 \times \mathbb{R}$. Notons alors (ξ, η, t) les coordonnées de Hopf d'un tel vecteur où $\eta \in \mathcal{O}_\xi B(x, R)$ et $t \in]-R, R[$. Nous obtenons alors

$$F(T, \xi) \geq \frac{1}{T\mu_\xi(B_\xi)} \sum_{\gamma \in \Gamma, d(x, \gamma x) \leq T+2R} \int_{\mathcal{O}_\xi B(\gamma x, R) \times]-R, R[} \frac{d\mu_x(\eta) dt}{D_{F,x}^2(\xi, \eta)}.$$

Pour un R assez grand, la boule $B(x, R)$ est susceptible de contenir plusieurs représentants de la Γ -orbite d'un vecteur $v \in B_\xi$. Pour cette raison, nous allons restreindre la somme précédente aux seules isométries γ telles que $B(x, R) \cap B(\gamma x, R) = \emptyset$. Soit $\xi' \in \partial_\infty \widetilde{M} \setminus \{\xi\}$ l'unique point d'intersection de la géodésique reliant ξ à x avec $\partial_\infty \widetilde{M} \setminus \{\xi\}$ et $\mathcal{U}_{\xi'}$ un voisinage de ξ' tel que pour tout $\gamma \in \Gamma$ vérifiant $\gamma x \in \mathcal{U}$, $B(x, R) \cap B(\gamma x, R) = \emptyset$. Soit $\Gamma_{\mathcal{U}_{\xi'}}$ l'ensemble des isométries satisfaisant cette condition.

Nous avons alors

$$F(T, \xi) \geq \frac{1}{T\mu_\xi(B_\xi)} \sum_{\gamma \in \Gamma_{\mathcal{U}_{\xi'}}, d(x, \gamma x) \leq T+2R} \int_{\mathcal{O}_\xi B(\gamma x, R) \times]-R, R[} \frac{d\mu_x(\eta) dt}{D_{F,x}^2(\xi, \eta)}.$$

De plus, il existe $C > 0$ tel que, pour tout $\eta \in \mathcal{O}_\xi B(x, R)$,

$$C^{-1} \leq D_{F,x}^{-2}(\xi, \eta) \leq C$$

alors

$$F(T, \xi) \geq \frac{C^{-1}R}{T\mu_\xi(B_\xi)} \sum_{\gamma \in \Gamma_{\mathcal{U}_{\xi'}}, d(x, \gamma x) \leq T} \mu_x(\mathcal{O}_\xi B(\gamma x, R))$$

Choisissons à présent $R_1 > 0$ tel que $\mathcal{O}_x B(\gamma x, R_1) \subset \mathcal{O}_\xi B(\gamma x, R)$. Alors

$$F(T, \xi) \geq \frac{C^{-1}R}{T\mu_\xi(B_\xi)} \sum_{\gamma \in \Gamma_{\mathcal{U}_{\xi'}}, d(x, \gamma x) \leq T} \mu_x(\mathcal{O}_x B(\gamma x, R))$$

Ainsi par le lemme de l'ombre, appliqué à $\mathcal{O}_x B(\gamma x, R)$, il existe une constante C_2 dépendant de R telle que

$$F(T, \xi) \geq \frac{C_2}{T \mu_\xi(B_\xi)} \sum_{\gamma \in \Gamma_{\mathcal{U}_\xi}, d(x, \gamma x) \leq T} e^{\int_x^{\gamma x} \tilde{F}^{-s}}.$$

Par ailleurs,

$$F(T, \xi) \leq \frac{1}{T} \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{\mu_\xi(\phi^{-T}(\gamma B(x, R)) \cap B_\xi)}{\mu_\xi(B_\xi)}$$

or,

$$\begin{aligned} \mu_\xi(\phi^{-T}(\gamma B(x, R)) \cap B_\xi) &= \int_{B_\xi} \chi_{B(\gamma x, R)}(\phi^T(v)) d\mu_\xi \\ &= \int_{\mathcal{O}_\xi B(\gamma x, R)} \int_{-R}^R \chi_{B(\gamma x, R)}(\phi^T(\eta, t)) \frac{dt d\mu_x(\eta)}{D_{F,x}^2(\xi, \eta)} \\ &= \int_{\mathcal{O}_\xi B(\gamma x, R)} \int_0^{T+2R} \chi_{B(\gamma x, R)}((\eta, t)) \frac{dt d\mu_x(\eta)}{D_{F,x}^2(\xi, \eta)} \end{aligned}$$

où la dernière égalité est obtenue par changement de variable.

Ainsi, par le lemme précédent, il est clair que pour tout $\gamma \in \Gamma$, la quantité

$$\frac{1}{T} \int_0^{T+2R} \chi_{\gamma B(x, R)}(\phi^t v) dt$$

converge vers 0 lorsque T tend vers $+\infty$. Ainsi, par un argument de convergence dominée,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} F(T, \xi) = 0.$$

et,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{C_2}{T \mu_\xi(B_\xi)} \sum_{\gamma \in \Gamma_{\mathcal{U}_\xi}, d(x, \gamma x) \leq T} e^{\int_x^{\gamma x} \tilde{F}^{-s}} = 0.$$

Ainsi, en appliquant le raisonnement précédent à un recouvrement fini de $\Lambda\Gamma$ par des boules $\mathcal{O}_\xi B(x, R)$, $\xi \in \partial_\infty \tilde{M}$, nous obtenons le résultat annoncé. \square

Nous noterons à présent $N_F(x, k) = \sum_{\gamma, k-1 \leq d(x, \gamma x) \leq k} e^{\int_x^{\gamma x} \tilde{F}}$ la fonction de comptage orbitale avec un poids donné par le potentiel $F : T^1 M \rightarrow \mathbb{R}$

Théorème 4.3. *S'il existe une constante C telle que la série de Poincaré satisfasse*

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{\int_x^{\gamma x} \tilde{F}^{-s}} \geq \frac{C}{s - \delta},$$

pour tout $s > \delta$, alors $m_F(T^1 M) < \infty$.

Démonstration. Pour tout $T > 0$, nous avons l'inégalité suivante

$$\frac{1}{T} \sum_{d(x, \gamma x) \leq T} e^{\int_x^{\gamma x} \tilde{F} - s} \geq \frac{1}{T} \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{\int_x^{\gamma x} \tilde{F} - s} - \sum_{k=T+1}^{\infty} N_F(x, k) e^{-ks}.$$

Par le lemme de l'ombre, il existe une constante C_2 positive telle que $N_F(x, k) \leq C_2 e^{k\delta_\Gamma^F}$; ainsi,

$$\sum_{k=T+1}^{\infty} N_F(x, k) e^{-ks} \leq \frac{C_3 e^{T\delta_\Gamma^F - s}}{s - \delta_\Gamma^F}$$

En choisissant un T_0 assez grand tel que $\frac{C_3 e^{T\delta_\Gamma^F - s}}{T} < \frac{C}{2}$ soit satisfait alors

$$\frac{1}{T} \sum_{d(x, \gamma x) \leq T} e^{\int_x^{\gamma x} \tilde{F} - s} \geq \frac{C}{T(s - \delta_\Gamma^F)} - \frac{C_3 e^{T\delta_\Gamma^F - s}}{T(s - \delta_\Gamma^F)} \geq \frac{C}{2T(s - \delta_\Gamma^F)}.$$

Soit à présent δ_n une suite décroissante de réels telle que $\delta_n \rightarrow \delta_\Gamma^F$ et notons $T_n = \frac{1}{\delta_n - \delta_\Gamma^F}$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand

$$\frac{1}{T_n} \sum_{d(x, \gamma x) \leq T_n} e^{\int_x^{\gamma x} \tilde{F} - \delta_n} \geq \frac{C}{2}$$

De plus, $\delta_n \geq \delta_\Gamma^F$ implique

$$\frac{1}{T_n} \sum_{d(x, \gamma x) \leq T_n} e^{\int_x^{\gamma x} \tilde{F} - \delta_\Gamma^F} \geq \frac{C}{2}$$

ce qui, combiné au théorème précédent nous permet de conclure notre démonstration. \square

Corollaire 4.4. *Sous les mêmes conditions que précédemment, s'il existe une constante C_0 telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*

$$\sum_{n-1 \leq d(x, \gamma x) < n} e^{\int_x^{\gamma x} \tilde{F}} \geq C_0 e^{\delta_\Gamma^F n}$$

alors $m_F(T^1 M) < \infty$.

Démonstration. Il nous suffit de montrer que sous les conditions du corollaire, la série de Poincaré associée au couple (Γ, F) satisfait l'inégalité du théorème 4.3. Pour tout $s > \delta_\Gamma^F$, nous avons

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{\int_x^{\gamma x} \tilde{F} - s} \geq \sum_{k \geq 1} N_F(x, k) e^{-sk}.$$

Ainsi, si l'hypothèse faite dans l'énoncé du corollaire 4.4 est vérifiée, nous obtenons

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{\int_x^{\gamma x} \tilde{F} - s} \geq C_0 \sum_{k \geq 1} e^{k(\delta_\Gamma^F - s)}.$$

Or, si $s > \delta_\Gamma^F$,

$$\sum_{k \geq 1} e^{k(\delta_\Gamma^F - s)} \geq \frac{C_0}{1 - e^{\delta_\Gamma^F - s}}.$$

Ainsi, pour tout $s > \delta_\Gamma^F$

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{\int_x^{\gamma x} \tilde{F} - s} \geq \frac{C}{s - \delta_\Gamma^F}.$$

Par le théorème 4.3 la mesure de Gibbs associée au couple (Γ, F) est de masse totale finie. \square

4.2 Variétés de courbure négative ou nulle

Nous nous intéressons dans cette dernière section à une extension du théorème B sur des variétés de courbure négative ou nulle.

Comme nous l'avons vu précédemment, le fait majeur nous permettant d'obtenir la généricité des mesures faiblement mélangeantes dans $\mathcal{M}^1(T^1M)$ repose sur la densité des mesures de Dirac supportées sur des orbites périodiques.

Les points clés de la démonstration de ce résultat sont la transitivité du flot géodésique ainsi que la densité des orbites périodiques dans l'ensemble non errant Ω . Il est donc naturel de se demander si de tels résultats s'étendent au cas des variétés de courbure négative ou nulle.

4.2.1 Transitivité du flot géodésique

Définition 4.5. *Soit X un espace métrique séparable muni d'un flot continu $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$. Nous dirons que ϕ_t est transitif sur X s'il admet une orbite dense dans X .*

Sur une variété de courbure négative ou nulle, le flot géodésique n'est pas nécessairement transitif en restriction à Ω . En effet, supposons que M soit une surface difféomorphe à un tore privé d'un point possédant une partie isométrique à un demi-cylindre euclidien (de courbure constante, nulle) et dont la courbure est strictement négative en dehors de cette partie. Soit γ la géodésique fermée bordant le demi-cylindre.

Les vecteurs non-errants contenus dans le cylindre euclidien sont ceux dont l'orbite par le flot géodésique est périodique. Il est évident qu'une

trajectoire approchant une telle orbite périodique sans être elle-même périodique doit être errante. Ainsi, il n'existe pas d'orbite dense pour le flot géodésique sur T^1M et ϕ_t n'est pas transitif.

Il existe certains exemples de variétés de courbure négative ou nulle où la transitivité du flot géodésique est connue. Le résultat suivant dû à P.Eberlein [Ebe96] traite du cas des surfaces.

Théorème 4.6. *Soit M une surface de courbure négative ou nulle possédant au moins un point de courbure strictement négative et $\{\phi_t\}_t$ son flot géodésique. Supposons que $\Omega = T^1M$, alors le flot géodésique est transitif sur T^1M .*

Si $\Omega \subset T^1M$ alors nous devons restreindre l'ensemble sur lequel le flot géodésique doit être transitif. Pour cela, nous introduisons la notion d'orbite périodique hyperbolique.

Définition 4.7. *Soit M une variété riemannienne, $\{\phi_t\}$ son flot géodésique et $v \in T^1M$ un vecteur périodique. Nous dirons que l'orbite de v est hyperbolique si les seuls vecteurs propres de norme 1 associés à l'application $d_v\phi_t : T_v(T^1M) \rightarrow T_v(T^1M)$ sont proportionnels à la direction du flot.*

Si la courbure de M est strictement négative, alors toutes les orbites périodiques du flot géodésique sont hyperboliques. Le résultat suivant nous assure que de manière générale, le flot géodésique est transitif en restriction à l'adhérence des vecteurs périodiques hyperboliques.

Théorème 4.8. *(Y.Coudène, B.Schapira) Soit M une variété à courbure négative ou nulle et $\{\phi_t\}_t$ son flot géodésique. Supposons que l'ensemble non-errant Ω de ϕ_t contienne au moins trois géodésiques périodiques, alors le flot géodésique est transitif en restriction à l'adhérence de l'ensemble des orbites périodiques hyperboliques.*

4.2.2 Variétés de rang un

Afin de généraliser notre résultat de généricité, il sera donc nécessaire de restreindre notre étude à un sous-ensemble de l'ensemble non-errant Ω .

Soit $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ une géodésique définie sur une variété riemannienne de courbure négative ou nulle et $J : \mathbb{R} \rightarrow TM$ un champ de vecteurs défini le long de c . Nous dirons que $J(t)$ est un champ de Jacobi si

$$J''(t) + K(J(t), c'(t))c'(t) = 0$$

où $K(\cdot, \cdot)$ désigne le tenseur de courbure. De même, nous dirons que $J(t)$ est parallèle si sa dérivée covariante $\nabla_{c'(t)}J(t)$ s'annule le long de c .

Définition 4.9. *Le rang d'une géodésique c est défini comme la dimension de l'ensemble des champs de Jacobi parallèles le long de c .*

Ainsi, si c est une géodésique engendrée par un vecteur unitaire tangent v , son rang est égal à 1 si le seul champ de Jacobi parallèle le long de c est proportionnel au générateur du flot géodésique. Notons qu'en dimension 2, une géodésique c est de rang 1 si et seulement si il existe un point sur c sur lequel la courbure est strictement négative. Nous noterons alors \mathcal{R} l'ensemble des vecteurs de rang 1 dans T^1M et \mathcal{H} son complémentaire.

Définition 4.10. *Le rang d'une variété M est défini comme la borne inférieure des rangs des géodésiques de M .*

Si M est une surface de courbure négative ou nulle, alors elle est de rang 1 si et seulement si elle possède un point sur lequel la courbure est strictement négative. De plus, lorsque M est compacte, le théorème de Gauss-Bonnet nous assure que cette condition est satisfaite lorsque M est de genre supérieur à 1.

Nous nous intéresserons à un sous-ensemble de Ω constitué de vecteurs de rang 1 sur lequel il existe une structure de produit local et pour lequel le lemme de fermeture est satisfait.

Définition 4.11. *Soit $v \in T^1M$ un vecteur de rang 1 contenu dans l'ensemble non-errant Ω et \tilde{v} un relevé de ce vecteur dans $T^1\tilde{M}$. Nous dirons que $v \in \Omega_1^+$ si pour tout vecteur $\tilde{w} \in T^1\tilde{M}$ tel que pour tout $t > 0$, $d(\phi_t(\tilde{v}), \phi_t(\tilde{w}))$ reste borné, il existe $t_0 > 0$ tel que*

$$\phi_{t_0}(\tilde{w}) \in W^{ss}(\tilde{v})$$

De la même manière, nous pouvons définir un ensemble Ω_1^- pour les temps négatifs du flot géodésique. Nous noterons alors

$$\Omega_1 = \Omega_1^+ \cap \Omega_1^-.$$

Théorème 4.12. *Soit M une variété de rang 1, alors la restriction du flot géodésique à Ω_1 est transitif, admet une structure de produit local et satisfait le lemme de fermeture.*

Ainsi, nous pouvons en déduire que si M est une variété de rang 1 alors l'ensemble des mesures de Dirac normalisées supportées sur des orbites ϕ_t -périodiques contenues dans Ω_1 est dense dans $\mathcal{M}^1(\Omega_1)$.

4.2.3 Formalisme thermodynamique en rang 1

L'étude et la description des mesures d'équilibre sur des variétés de rang 1 n'a pas connu -à notre connaissance- de nombreux développements. Les résultats que nous allons décrire ci-dessous sont relativement récents et nécessitent une étude plus approfondie sur laquelle nous reviendrons à la fin de cette section.

Pour commencer, décrivons un résultat de G.Knieper décrivant la mesure d'entropie maximale pour le flot géodésique sur une variété compacte de rang 1. La construction de cette mesure repose sur la méthode de Patterson-Sullivan. Plus précisément, pour toute orbite périodique p il est possible de définir une mesure μ_p supportée sur le bord géométrique du revêtement universel de $M \simeq \widetilde{M}/\Gamma$ comme limite faible lorsque s tend vers h_{top} de la suite de mesures $\mu_{p,s}$ définie par

$$\mu_{p,s} = \frac{\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(p,\gamma p)} D_{\gamma p}}{\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(p,\gamma p)}}.$$

considérons la projection $P : T^1M \rightarrow \partial_\infty \widetilde{M} \times \partial_\infty \widetilde{M}$ du fibré unitaire tangent sur le bord du revêtement universel de M et la projection naturelle $\pi : T^1M \rightarrow M$. Alors pour tout A mesurable, si la mesure définie par

$$m_{eq}(A) = \int_{P(T^1M)} vol(\pi(P^{-1}(\xi, \eta) \cap A)) e^{\beta_p(\xi, \eta) h_{top}} d\mu_p(\xi) d\mu_p(\eta)$$

est finie, alors c'est l'unique mesure d'entropie maximale pour le flot géodésique sur une variété de rang 1. A notre connaissance, aucun résultat similaire concernant la pression n'a été établi sur des variétés de rang 1. Cependant, nous disposons d'un principe variationnel dans le cas où la dimension de la variété est égale à 2. Ce résultat dû à K.Burns et K.Gelfert ([BG14]) met en relation la pression topologique du flot géodésique et le supremum des pressions métriques associées à des mesures de probabilité invariantes par le flot géodésique.

Rappelons que pour tout compact $K \subset T^1M$ et pour tout ensemble $E \subset K$ (ϵ, T) séparé, nous pouvons définir la quantité

$$P_{\epsilon, T, F}(K) = \sup_{E \subset T^1M} \sum_{x \in E} e^{\int_0^T F(\phi_t(x)) dt}.$$

Alors

$$P_K(F, \phi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log P_{\epsilon, T, F}(K)$$

est la pression topologique associée au potentiel F sur le compact K . Nous noterons $P(F) = P_{T^1M}(F, \phi)$.

Théorème 4.13 ([BG14]). *Soit M une surface compacte de rang 1, $\phi_t : T^1M \rightarrow T^1M$ son flot géodésique et $F : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ un potentiel continu tel que $F|_{\mathcal{A}}$ est constant. Il existe alors une suite croissante d'ensembles basiques $(\Lambda_l)_{l \in \mathbb{N}}$ d'union dense dans T^1M , contenant toutes les orbites périodiques régulière du flot géodésique et telle que*

$$\sup_{l \geq 1} P_{\Lambda_l}(F, \phi) = P(F) = \sup \{h_\mu(\phi) + \int_{T^1M} F d\mu \mid \mu \in \mathcal{M}^1(T^1M)\}.$$

Ce résultat repose fortement sur la construction d'un fer à cheval à la manière de A.Katok [KH97]. D'autres notions de pression sont également étudiées dans [BG14] et mises en relation avec la pression topologique du flot géodésique.

Afin d'étendre le théorème B au cas des surfaces compactes de rang 1, nous proposons d'étudier les points suivants :

1. **Identification des mesures d'équilibre** : il serait intéressant d'étudier et d'identifier les mesures d'équilibres pour la pression métrique. Nous suggérons pour cela une approche du problème similaire à celle de G.Knieper. Pour cela, nous devons construire des mesures de probabilité associées à un potentiel constant sur \mathcal{H} en se basant sur la méthode de Patterson-Sullivan. De plus, il serait intéressant de savoir sous quelles conditions une telle mesure est unique.
2. **Mélange du flot géodésique relativement aux mesures d'équilibre** : dans [Bab02], M.Babillot démontre le mélange des mesures finies quasi-produit. En particulier, le mélange de la mesure d'entropie maximale construite par G.Knieper sur des variétés compactes de rang 1 y est démontré. Il serait donc intéressant d'obtenir un critère de finitude des mesures maximisant la pression du flot géodésique afin de mener à bien notre étude sur la genericité des mesures faiblement mélangeantes.

En dimension supérieure, nous ne disposons pas de toutes les égalités ci-dessus. Cependant, il existe un résultat prouvé par K.Gelfert et B.Schapiro [GS14] mettant en relation plusieurs notions de pression.

Nous noterons $\Pi(T-1, T)$ le nombre de géodésiques primitives γ de longueur comprise entre $T-1$ et T . De même, nous noterons $\Pi_{\mathcal{R}}(T-1, T)$ le nombre de géodésiques primitives de rang 1 de longueur comprise entre $T-1$ et T . Ainsi, nous définissons les pressions de Gurevich $P_{Gur, \mathcal{R}}(F)$ et $P_{Gur}(F)$ par

$$P_{Gur, \mathcal{R}}(F) = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \left(\sum_{\gamma \in \Pi_{\mathcal{R}}(T-1, T)} e^{\int F d\nu_{\gamma}} \right),$$

$$P_{Gur}(F) = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \left(\sum_{\gamma \in \Pi(T-1, T)} e^{\int F d\nu_{\gamma}} \right),$$

où ν_{γ} est la mesure de Lebesgue le long de l'orbite périodique γ . Remarquons enfin que si $M \simeq \widetilde{M}/\Gamma$ est une variété compacte de rang 1, il est toujours possible de définir un exposant critique pour la série de Poincaré associée à un couple (Γ, F) cependant, contrairement au cas de la courbure négative stricte, cet exposant dépend du choix d'un point de base. Ainsi étant donné un triplet (Γ, F, x) , $x \in \widetilde{M}$ nous noterons $\delta_{\Gamma, x}^F$ l'exposant critique de la série de Poincaré associée au couple (Γ, F) ayant pour point de

base x . Nous poserons alors

$$\delta_{\Gamma}^F = \sup_{x \in \tilde{M}} \delta_{\Gamma, x}^F.$$

Nous avons le résultat suivant

Théorème 4.14 ([GS14]). *Soit $M \simeq \tilde{M}/\Gamma$ une variété compacte de rang 1, $\phi_t : T^1M \rightarrow T^1M$ son flot géodésique et $F : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ un potentiel continu. Alors nous disposons des inégalités suivantes*

$$P_{Gur, \mathcal{R}}(F) \leq P_{Gur}(F) \leq \delta_{\Gamma}^F \leq P(F) = \sup\{h_{\mu}(\phi) + \int_{T^1M} F d\mu \mid \mu \in \mathcal{M}^1(T^1M)\}.$$

Annexe A

Convergence des mesures de probabilité

Dans cette annexe, nous introduirons brièvement les différentes notions qui sont associées à la convergence de suites de mesures de probabilité. Nous ne donnerons pas de preuves des résultats énoncés cependant, nous renvoyons les personnes intéressées par celles-ci à l'ouvrage de P. Billingsley [Bil99].

Soit (X, \mathcal{B}) un espace mesurable et $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de mesures de probabilité sur X .

Définition A.1. *Nous dirons qu'une suite $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de mesures de probabilité converge étroitement vers une mesure de probabilité μ et $\mu_n \rightarrow \mu$ si pour toute fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continue, bornée,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f d\mu_n = \int_X f d\mu.$$

Rappelons que nous pouvons définir pour toute partie mesurable $B \in \mathcal{B}$ le bord ∂B comme la différence entre son adhérence \overline{B} et son intérieur $\text{int}(B)$. Le théorème suivant nous permet d'établir des conditions équivalentes à la convergence étroite d'une suite de mesures de probabilité.

Théorème A.2. *Soit (X, \mathcal{B}) un espace mesurable, $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de mesures de probabilité sur X et μ une mesure de probabilité sur X . Les quatre conditions suivantes sont équivalentes.*

- $\mu_n \rightarrow \mu$,
- pour tout fermé F , $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(F) \leq \mu(F)$,
- pour tout ouvert U , $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(U) \leq \mu(U)$,
- pour tout borélien B tel que $\mu(\partial B) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(B) = \mu(B)$.

Intéressons nous à présent à un critère de convergence de certains types de suites de mesures de probabilité.

Définition A.3. Nous dirons qu'une suite $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de mesures de probabilité est relativement compacte si pour toute sous-suite $\{\mu_{n_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ il existe une nouvelle sous-suite $\{\mu_{n_{i(k)}}\}_{k \in \mathbb{N}}$ et une mesure de probabilité μ telle que

$$\mu_{n_{i(k)}} \rightharpoonup_k \mu.$$

Notons que la mesure de probabilité μ introduite dans la définition précédente dépend du choix de la sous-suite $\mu_{i(k)}$. Il n'existe aucune obstruction au fait que la suite $\{\mu_n\}$ soit tendue et que pour deux sous-suites $\{\mu_{i(k)}\}$, $\{\mu_{j(k)}\}$ telles que $\mu_{i(k)} \rightharpoonup_k \mu_i$ et $\mu_{j(k)} \rightharpoonup_k \mu_j$ on ait $\mu_i \neq \mu_j$. Dans le cas contraire, nous avons le résultat suivant qui nous assure alors que la suite $\{\mu_n\}$ converge étroitement.

Théorème A.4. Soit $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite relativement compacte de mesure de probabilité sur X et μ une mesure de probabilité sur X . La suite μ_n converge faiblement vers μ si et seulement si pour toute sous-suite $\{\mu_{n_i}\}$ il existe une sous-suite $\{\mu_{n_{i(k)}}\}_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\mu_{n_{i(k)}} \rightharpoonup_k \mu.$$

La propriété de compacité relative d'une suite de mesures de probabilité reste cependant difficile à vérifier en général. Il est alors utile de s'intéresser à d'autres propriétés pouvant être vérifiées par des suites de mesures de probabilité.

Définition A.5. Nous dirons qu'une suite de mesure de probabilité $\{\mu_n\}$ sur X est tendue si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un compact $K \subset X$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu_n(K) > 1 - \epsilon.$$

Cette condition nous permet d'éviter toute perte de masse au sein de la suite de mesures de probabilité. De plus, elle nous permet de vérifier de manière efficace que la suite $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est relativement compacte.

Théorème A.6 (Prokhorov [Pro56]). Soit (X, d) un espace métrique séparable, complet et $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de mesure de probabilité sur X alors $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est tendue si et seulement si elle est relativement compacte.

Table des figures

1.1	géodésiques dans \mathbb{D} et \mathbb{H}	2
1.2	Suspension au dessus d'un sous-décalage de type fini	12
2.1	Cocycle de Busemann	29
2.2	exemples de surfaces hyperboliques élémentaires	30
2.3	coordonnées de Hopf	37
4.1	Voisinage de ξ' dans \widetilde{M}	67

Bibliographie

- [Ano95] D.V. Anosov. *Dynamical Systems with Hyperbolic Behavior*. Dynamicheskies sistemy. Springer-Verlag, 1995.
- [Bab02] Martine Babillot. On the mixing property for hyperbolic systems. *Israel Journal of Mathematics*, 129(1) :61–76, 2002.
- [BG14] Keith Burns and Katrin Gelfert. Lyapunov spectrum for geodesic flows of rank 1 surfaces. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 34(5) :1841–1872, 2014.
- [Bil99] Patrick Billingsley. *Convergence of probability measures*. Wiley Series in Probability and Statistics : Probability and Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, second edition, 1999. A Wiley-Interscience Publication.
- [Bir32] George D. Birkhoff. Proof of the ergodic theorem. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 17(1) :656–660, 1932.
- [BJ] Christopher J. Bishop and Peter W. Jones. Hausdorff dimension and Kleinian groups. *Acta Mathematica*, 179(1) :1–39.
- [Bow72] Rufus Bowen. Periodic orbits for hyperbolic flows. *American Journal of Mathematics*, 94(1) :1–30, 1972.
- [Bow73] Rufus Bowen. Symbolic dynamics for hyperbolic flows. *American Journal of Mathematics*, 95(2) :429–460, 1973.
- [Bow75] R Bowen. Some systems with unique equilibrium states. *Math. Systems Theory*, 3 :193–202, 1975.
- [Bow79] Series Caroline Bowen, Rufus. Markov maps associated with fuchsian groups. *Publications Mathématiques de l’IHÉS*, 50 :153–170, 1979.
- [Bow95] B. H. Bowditch. Geometrical finiteness with variable negative curvature. *Duke Math. J.*, 77(1) :229–274, 01 1995.
- [Bow08] Rufus Bowen. *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, volume 470 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Berlin Heidelberg, 2008.

- [BR75] Rufus Bowen and David Ruelle. The ergodic theory of axiom a flows. *Inventiones mathematicae*, 29 :181–202, 1975.
- [Cou03] Yves Coudene. Gibbs Measures on Negatively Curved Manifolds. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 9(1) :89–101, 2003.
- [Cou04] Yves Coudene. Topological dynamics and local product structure. *Journal of the London Mathematical Society*, 69(2) :441–456, 2004.
- [CS10] Yves Coudene and Barbara Schapira. Generic measures for hyperbolic flows on non-compact spaces. *Israel J. Math.*, 179 :157–172, 2010.
- [CS14] Yves Coudène and Barbara Schapira. Generic measures for geodesic flows on nonpositively curved manifolds. *J. Éc. polytech. Math.*, 1 :387–408, 2014.
- [Dal99] Françoise Dal’bo. Remarques sur le spectre des longueurs d’une surface et comptages. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 30(2) :199–221, 1999.
- [Dal00] Françoise Dal’bo. Topologie du feuilletage fortement stable. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 50(3) :981–993, 2000.
- [Dal07] F. Dal’Bo. *Trajectoires géodésiques et horocycliques*. Savoirs actuels. Série Mathématiques. EDP Sciences, 2007.
- [DOP00] Françoise Dal’bo, Jean-Pierre Otal, and Marc Peigné. Séries de Poincaré des groupes géométriquement finis. *Israel J. Math.*, 118 :109–124, 2000.
- [DP98] Françoise Dal’bo and Marc Peigné. Some negatively curved manifolds with cusps, mixing and counting. *J. Reine Angew. Math.*, 497 :141–169, 1998.
- [DS00] F. Dal’bo and A. N. Starkov. On a classification of limit points of infinitely generated schottky groups. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 6(4) :561–578, 2000.
- [Ebe72] Patrick Eberlein. Geodesic flows on negatively curved manifolds i. *Annals of Mathematics*, 95(3) :492–510, 1972.
- [Ebe96] P. Eberlein. *Geometry of non positively curved manifolds*. University of Chicago Press, 1996.
- [EO73] P. Eberlein and B. O’Neill. Visibility manifolds. *Pacific J. Math.*, 46(1) :45–109, 1973.
- [GR86] Y. Guivarc’h and A. Raugi. Product of random matrices :convergence theorems. In *Random matrices and application*, volume 50 of *Contemporary Math.*, pages 32–54. American Math. Soc., 1986.
- [GS14] Katrin Gelfert and Barbara Schapira. Pressures for geodesic flows of rank one manifolds. *Nonlinearity*, 27(7) :1575, 2014.

- [Gur67] B.M. Gurevich. Some existence conditions for k -decompositions for special flows. *Tr. Mosk. Mat. O.-va*, 17 :89–116, 1967.
- [Had98] Hadamard. Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 4 :27–74, 1898.
- [Hal44] Paul R. Halmos. In general a measure preserving transformation is mixing. *Annals of Mathematics*, 45(4) :786–792, 1944.
- [Hil02] David Hilbert. Mathematical problems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 8(10) :437–479, 07 1902.
- [HKR95] Michael Handel, Bruce Kitchens, and Daniel J. Rudolph. Metrics and entropy for non-compact spaces. *Israel Journal of Mathematics*, 91(1) :253–271, 1995.
- [KH97] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1997.
- [KN32] B. O. Koopman and J. V. Neumann. Dynamical systems of continuous spectra. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 18(3) :255–263, 1932.
- [Led13] François Ledrappier. Entropie et principe variationnel pour le flot géodésique en courbure négative pincée. In *Géométrie ergodique*, volume 43 of *Monogr. Enseign. Math.*, pages 117–144. Enseignement Math., Geneva, 2013.
- [Liv71] A. N. Livshits. Homology properties of y -systems. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 10(5) :758–763, 1971.
- [LS82] François Ledrappier and Jean-Marie Strelcyn. A proof of the estimation from below in pesin’s entropy formula. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 2(2) :203–219, 1982.
- [Moh07] Olivier Mohsen. *Families of measures on the boundary and bottom of the spectrum*. Theses, Ecole Polytechnique X, June 2007.
- [Neu32] Jon Von Neumann. Proof of the quasi-ergodic hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 18(1) :70–82, 1932.
- [OP04] Jean-Pierre Otal and Marc Peigné. Principe variationnel et groupes kleinien. *Duke Math. J.*, 125(1) :15–44, 10 2004.
- [OU41] J. C. Oxtoby and S. M. Ulam. Measure-preserving homeomorphisms and metrical transitivity. *Annals of Mathematics*, 42(4) :874–920, 1941.
- [Par61] K.R Parthasarathy. On the category of mixing measures. *Illinois Journal of Math.*, 5, 1961.

- [Par62] K.R Parthasarathy. A note on Mixing Processes. *Sankhya, The Indian Journal of statistics*, 24, 1962.
- [Pat76] S. J. Patterson. The limit set of a Fuchsian group. *Acta Mathematica*, 136(1) :241–273, 1976.
- [Pit10] Vincent Pit. *Codage du flot géodésique sur les surfaces hyperboliques de volume fini*. PhD thesis, 2010. Thèse de doctorat dirigée par Thieullen, Philippe Mathématiques pures Bordeaux 1 2010.
- [PPS15] F. Paulin, M. Pollicott, and B. Schapira. *Equilibrium states in negative curvature*. Soc. Math. France, astérisque 373 edition, 2015.
- [Pro56] Yu. V. Prokhorov. Convergence of Random Processes and Limit Theorems in Probability Theory. *Theory of Probability & Its Applications*, 1(2) :157–214, 1956.
- [PS17] Vincent Pit and Barbara Schapira. Finiteness of gibbs measures on noncompact manifolds with pinched negative curvature. *Á paraître dans Annales de l’Institut Fourier*, 2017.
- [Rat73] M. Ratner. Markov partitions for anosov flows on n-dimensional manifolds. *Israel Journal of Mathematics*, 15(1) :92–114, 1973.
- [Rok48] V. Rokhlin. Dokl. akad. nauk. *Annals of Mathematics*, 60 :349–351, 1948.
- [Rue76] D Ruelle. A measure associated with axiom-A attractors. *American J. of Math.*, 3 :619–654, 1976.
- [Ser86a] C Series. Geometrical Markov Coding on surfaces of constant negative curvature. *Ergod. Th. and Dynam. Sys.*, 6, 1986.
- [Ser86b] C Series. Symbolic dynamics for geodesic flows. *Proc. Int. Cong. Berkley*, pages 1210–1215, 1986.
- [Sig72] Karl Sigmund. On the space of invariant measures for hyperbolic flows. *American Journal of Mathematics*, 94(1) :31–37, 1972.
- [Sin72] Yakov G Sinai. Gibbs measures in ergodic theory. *Russian Mathematical Surveys*, 27(4) :21, 1972.
- [Sul] Dennis Sullivan. The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions. *Publications Mathématiques de l’Institut des Hautes Études Scientifiques*, 50(1) :171–202.
- [Yue96] Chengbo Yue. The ergodic theory of discrete isometry groups on manifolds of variable negative curvature. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348(12) :4965–5005, 1996.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRIQUES DES MESURES INVARIANTES EN COURBURE NÉGATIVE

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions les propriétés génériques satisfaites par des mesures invariantes par l'action du flot géodésique $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ sur des variétés M non compactes de courbure sectionnelle négative pincée. Nous nous intéressons dans un premier temps au cas des variétés hyperboliques. L'existence d'une représentation symbolique du flot géodésique pour les variétés hyperboliques convexes cocompactes ainsi que la propriété de mélange topologique du flot géodésique nous permet de démontrer que l'ensemble des mesures de probabilité ϕ_t -invariantes, faiblement mélangeantes est résiduel dans l'ensemble \mathcal{M}^1 des mesures de probabilité invariantes par l'action du flot géodésique. Si nous supposons que la courbure de M est variable, nous ignorons si le flot géodésique est topologiquement mélangeant. Ainsi les méthodes utilisées précédemment ne peuvent plus s'adapter à notre situation. Afin de généraliser le résultat précédent, nous faisons appel à des outils issus du formalisme thermodynamique développés récemment par F.Paulin, M.Pollicott et B.Schapira. Plus précisément, la démonstration de notre résultat repose sur la possibilité de construire, pour toute orbite périodique \mathcal{O}_p une suite de mesures de Gibbs mélangeantes, finies, convergeant faiblement vers la mesure de Dirac supportée sur \mathcal{O}_p . Nous montrons que ce fait est possible lorsque M est géométriquement finie. Dans le cas contraire, il n'existe pas d'exemple de variétés géométriquement infinies possédant une mesure de Gibbs finie. Cependant, nous conjecturons que ce fait est possible pour toute variété M . Afin de supporter cette affirmation, nous démontrons dans la dernière partie de ce manuscrit un critère de finitude pour les mesures de Gibbs.

Mots-clés : *Systèmes Dynamiques, Flot géodésique, Variétés de courbure négative, Théorie Ergodique, Formalisme Thermodynamique.*

GENERIC PROPERTIES OF INVARIANT MEASURES IN NEGATIVE CURVATURE

Abstract

In this work, we study the properties satisfied by the probability measures invariant by the geodesic flow $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ on non compact manifolds M with pinched negative sectional curvature. First, we restrict our study to hyperbolic manifolds. In this case, ϕ_t is topologically mixing in restriction to its non-wandering set. Moreover, if M is convex cocompact, there exists a symbolic representation of the geodesic flow which allows us to prove that the set of ϕ_t -invariant, weakly-mixing probability measures is a dense G_δ -set in the set \mathcal{M}^1 of probability measures invariant by the geodesic flow. The question of the topological mixing of the geodesic flow is still open when the curvature of M is non constant. So the methods used on hyperbolic manifolds do not apply on manifolds with variable curvature. To generalize the previous result, we use thermodynamics tools developed recently by F.Paulin, M.Pollicott et B.Schapira. More precisely, the proof of our result relies on our capacity of constructing, for all periodic orbits \mathcal{O}_p a sequence of mixing and finite Gibbs measures converging to the Dirac measure supported on \mathcal{O}_p . We will show that such a construction is possible when M is geometrically finite. If it is not, there are no examples of geometrically infinite manifolds with a finite Gibbs measure. We conjecture that it is always possible to construct a finite Gibbs measure on a pinched negatively curved manifold. To support this conjecture, we prove a finiteness criterion for Gibbs measures.

Key words : *Dynamical Systems, Geodesic Flow, Negatively Curved Manifolds, Ergodic Theory, Thermodynamic Formalism.*