



HAL
open science

Contrôle d'erreur pour et par les modèles réduits PGD

Pierre-Eric Allier

► **To cite this version:**

Pierre-Eric Allier. Contrôle d'erreur pour et par les modèles réduits PGD. Mécanique des solides [physics.class-ph]. Université Paris Saclay (COMUE), 2017. Français. NNT: 2017SACLN063 . tel-01668575

HAL Id: tel-01668575

<https://theses.hal.science/tel-01668575>

Submitted on 20 Dec 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Contrôle d'erreur pour et par les modèles réduits PGD

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay
préparée à l'École Normale Supérieure Paris-Saclay

École doctorale n°579 Sciences mécaniques et énergétiques, matériaux et
géosciences (SMEMAG)
Spécialité de doctorat : solides, structures, matériaux

Thèse présentée et soutenue à Cachan, le 21 novembre 2017, par

Pierre-Éric ALLIER

Composition du Jury :

YVON MADAY Professeur, UPMC Paris (LJLL)	Président
FRANCISCO CHINESTA Professeur, ENSAM ParisTech (PIMM)	Rapporteur
PEDRO DÍEZ Professeur, UPC-BarcelonaTech (LaCàN)	Rapporteur
RÉGIS COTTEREAU Chargé de Recherche CNRS, CentraleSupélec (MSSMAT)	Examineur
VIRGINIE EHRLACHER Chercheuse, École des Ponts (CERMICS)	Examineur
LUDOVIC CHAMOIN Professeur, ENS Paris-Saclay (LMT)	Directeur de thèse
PIERRE LADEVÈZE Professeur, ENS Paris-Saclay (LMT)	Co-directeur de thèse

"All models are wrong, but some are useful!"

– George E. P. Box

Il est l'heure de faire un bilan humain de ces trois années de thèses, riches d'interactions et autres joyeusetés.

Je tiens tout d'abord à remercier les membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont su porter à mes travaux, en particulier Yvon Maday pour avoir accepté de présider ce jury et aux rapporteurs de ce manuscrit pour avoir su trouver le temps de le lire. L'enthousiasme et leurs remarques pertinentes m'ont également permis de préparer la soutenance avec plus de sérénité.

Un grand Merci à mes encadrants de thèse, Ludovic Chamoin et Pierre Ladevèze qui m'ont guidé et encouragé pendant ces trois années. Leurs idées et rigueurs mathématiques sont à l'origine de la qualité de ces travaux. Une mention spéciale à Ludovic pour sa disponibilité, son enthousiasme tout au long de cette thèse et sa relecture patiente de ce manuscrit.

Je ne peux également pas penser à ces années sans remercier les personnes que j'ai côtoyées au quotidien au sein du laboratoire. À mes premiers collègues de la salle 211, Hadrien, Pierre, Elena, Maxime J., Thibault, Marie-France. De même, je remercie Guillaume de m'avoir supporté une année entière en tant que voisin de bureau. Également un grand merci à tous les doctorants et membres du LMT ouverts à toutes discussions scientifiques (ou autres) et qui participent à cette ambiance joyeuse qui rend le LMT si unique.

Merci également à mes deux collègues du Lycée Richelieu, Pierre et Christophe, qui m'ont permis de finir la rédaction de ce mémoire malgré un nouveau travail prenant.

Je n'oublie pas mes amis d'ailleurs, qui ont joué un rôle important en me donnant cette bouffée d'air bien nécessaire parfois : Patrick, François, Francis, Benjamin, Frédéric, Marc.

À ma famille qui a toujours su prendre le temps de s'intéresser à mes travaux scientifiques, et particulièrement à mes parents pour leur soutien sans faille.

Sommaire

Liste des exemples	vi
Abréviations	vii
Notations	viii
Introduction	1
1 La réduction de modèle	5
1 Problème multiparamétrique de référence	5
1.1 Modélisation du problème de référence	6
1.2 Formulation faible et résolution	7
2 La réduction de modèle (ROM)	8
2.1 Problème aux valeurs propres généralisées – méthode spectrale	9
2.2 Réduction de modèle selon une norme indépendante du modèle	9
2.3 Concept de l’approche Offline / Online	13
2.4 Existence d’un bon espace d’approximation	14
3 La Proper Generalized Decomposition (PGD)	15
3.1 Problème de référence pour la PGD	15
3.2 Galerkin-PGD (G-PGD)	17
3.3 Petrov-Galerkin-PGD (PG-PGD)	18
3.4 Minimisation du résidu (RM-PGD)	19
3.5 Amélioration de la qualité des modes	21
4 Limites de la réduction de modèle PGD	23
4.1 Erreur de réduction	25
4.2 Séparabilité du problème	27
2 Vérification de modèles réduits PGD	31
1 Propriétés de la solution PGD	32
2 Définition des erreurs et de leurs origines	33
2.1 Origines des erreurs	33
2.2 Définitions des erreurs	34
2.3 Importance de ces erreurs	35
3 Vérification de solutions PGD	36
3.1 Notion d’estimateur d’erreur en éléments finis	36

3.2	Estimation d'erreur de réduction sur une quantité locale	37
3.3	Estimation d'erreur générique pour une solution PGD	37
4	Construction d'une solution équilibrée au sens des EF par post-traitement	37
5	Estimation d'erreur globale	40
5.1	Base de l'Erreur en Relation de Comportement (ERC)	40
5.2	Estimation d'erreur globale pour des approximations PGD	42
5.3	Séparation des sources d'erreur	44
5.4	Stratégie adaptative globale	46
6	Estimation d'erreur en quantité d'intérêt	48
6.1	Problème adjoint et approximation PGD associée	48
6.2	Estimateur d'erreur local sur une quantité d'intérêt	49
6.3	Stratégie adaptative locale	51
7	Application aux problèmes d'élasticité	53
8	Conclusion	54
3	Extension de l'estimateur d'erreur à la séparation spatiale	59
1	Formulation du problème PGD séparé spatialement	60
1.1	Problème de référence et notations	60
1.2	Réduction de modèle PGD	61
1.3	Résultats numériques	62
2	Premiers travaux sur la vérification de telles solutions PGD	64
2.1	Par lissage du champ de contrainte	64
2.2	Par reconstruction de champs équilibrés	66
3	Reconstruction d'un champ statiquement équilibré en thermique	66
3.1	Principe de la méthode pour des problèmes 2D	66
3.2	Estimation des différentes erreurs	68
3.3	Extension aux cas 3D	69
4	Extension à l'élasticité	73
4.1	Formulation PGD en élasticité	73
4.2	Construction d'un champ équilibré en 2D	74
5	Conclusion	76
4	Une nouvelle stratégie PGD basée sur l'Erreur en Relation de Comportement	79
1	Minimisation de l'Erreur en Relation de Comportement	79
1.1	Idée de base	80
1.2	Minimisation	82
1.3	Minimisation partielle	83
2	Performances de la stratégie CRE-PGD	84
2.1	Amélioration de la solution PGD	84
2.2	Vérification de la solution PGD	85
3	Conclusion	89

5	Utilisation de la PGD pour accélérer l'estimation d'erreur	91
1	Technique d'équilibrage par éléments EET	92
1.1	Construction des densités de flux équilibrées	93
1.2	Construction d'un champ dual admissible à l'échelle de l'élément	93
2	EET-PGD - Particularisation de problèmes locaux grâce à une solution PGD	95
2.1	Paramétrisation d'un problème local générique	95
2.2	Résolution PGD associée	97
2.3	Accélération de l'étape locale	98
3	HFT-PGD - Construction des densités équilibrées par une solution PGD	102
3.1	Problème d'optimisation	102
3.2	Problème discret associé grâce à la solution élémentaire PGD	103
3.3	Amélioration des densités de flux	103
4	Extension aux cas 3D	106
4.1	Problème PGD	106
4.2	Application de l'HFT-PGD à un problème 3D de thermique	107
5	Conclusion	109
	Conclusion	113
	A Pseudo-problème aux valeurs propres	115
	B SVD selon la norme énergétique	121
	C Modèles PGD géométriquement paramétrés	123
1	Domaine de référence par transformations géométriques	124
2	Matériau équivalent associé	125
3	Évaluation des erreurs en relation de comportement	127
4	Conclusion	128
	Bibliographie	129

Liste des exemples

De nombreux exemples sont présentés et utilisés tout au long du mémoire. Se référer aux pages référencées ci-dessous pour retrouver les descriptions détaillées de ces derniers.

Exemple 1 : Exemple d'application de la réduction de modèle par la SVD	11
Exemple 2 : Benchmark	23
Exemple 3 : Structure 2D de refroidissement	43
Exemple 4 : Cube élastique 3D	53
Exemple 5 : Séparation spatiale 2D en thermique	62
Exemple 6 : Séparation spatiale 3D en thermique	71
Exemple 7 : Plaque trouée	92
Exemple 8 : Cube troué	107
Exemple 9 : Radiateur de refroidissement	124

Abréviations

AR Approximation Radiale

CA Cinématiquement Admissible

CHP Calcul Haute Performance

CRE-PGD Minimal CRE PGD

DDLs Degrés de liberté

EDO Équation aux dérivées ordinaires

EDP Équation aux dérivées partielles

EET Element Equilibration Technique

EF Éléments Finis

EIM Empirical Interpolation Method

ERC Erreur en Relation de Comportement

FF Flux-Free

G-PGD Galerkin-PGD

HFT Hybrid-Flux Technique

HOSVD Décomposition en valeurs singulières d'ordre supérieur

KLD Décomposition de Karhunen-Loève

LaTin Large Time Increment Method

MEF Méthode des Éléments Finis

PCA Analyse en Composantes Principales

PG-PGD Petrov-Galerkin-PGD

PGD Proper Generalized Decomposition

POD Proper Orthogonal Decomposition

RB Reduced Basis

RM-PGD Minimal Residual PGD

ROM Réduction de Modèle

SA Statiquement Admissible

SVD Décomposition en valeurs singulières

Notations

Calcul tensoriel et différentiel

u	:	tenseur d'ordre 0, champ scalaire (température)
$\underline{x}, \underline{u}$:	tenseur d'ordre 1, champ vectoriel (position, déplacement)
\wedge	:	produit vectoriel
\otimes	:	produit tensoriel extérieur
\cdot	:	produit simplement contracté
:	:	produit doublement contracté (<i>s'il n'y a pas d'ambiguïté, ils sont omis</i>)
$\underline{\nabla}$ ou $\frac{\partial}{\partial \underline{x}}$:	gradient d'un champ scalaire
∇	:	gradient d'un champ vectoriel
div ou $\underline{\text{div}}$:	divergence d'un champ vectoriel ou matriciel
$\dot{\underline{u}}$ ou $\frac{\partial \underline{u}}{\partial t}$:	dérivée temporelle de \underline{u}

Calcul matriciel et notations algébriques

\mathbf{x}	:	vecteurs
\mathbb{A}	:	matrices
$\mathbb{R}^{n \times m}$:	espace des matrices à coefficients réels de dimension $n \times m$
\mathbf{x}^T	:	transposée de \mathbf{x}
\mathbb{A}^T	:	transposée de \mathbb{A}
\mathbb{A}^{-1}	:	inverse de \mathbb{A}
$\mathbb{1}$:	matrice identité
$\text{Ker}(\mathbb{A})$:	noyau de \mathbb{A}
$\text{Im}(\mathbb{A})$:	image de \mathbb{A}
$\text{Tr}(\mathbb{A})$:	trace de \mathbb{A}
$ \mathbb{A} $:	Déterminant de \mathbb{A}

Notations topologiques

\bar{A}	:	complémentaire de A
$\overset{\circ}{A}$:	intérieur de A
∂A	:	frontière de A
$\text{mes}(A)$:	mesure d'un domaine A de \mathbb{R}^n

Espaces vectoriels et normes

\mathcal{L}^2	:	espace de Hilbert
\mathcal{H}^1	:	espace de Sobolev
B, b	:	forme bilinéaire
L, l	:	forme linéaire
\mathcal{R}, R	:	résidu
$\langle \circ, \bullet \rangle_{\square}, \llbracket \circ, \bullet \rrbracket_{\square}$:	produits scalaires associés à l'espace \square (\square est omis si pas d'ambiguïté)
$\ \bullet \ _{\square}, \ \bullet\ _{\square}$:	normes associées à l'espace \square (\square est omis si pas d'ambiguïté)

Espaces PGD

Ω	:	domaine spatial associé à la variable spatiale \underline{x}
\mathcal{I}	:	domaine temporel associé à la variable temporelle t
Θ	:	domaine des paramètres associé à la variable des paramètres \underline{p}
\mathcal{U}^{ad}	:	espace fonctionnel des champs cinématiquement admissible sur le domaine Ω
\mathcal{S}^{ad}	:	espace fonctionnel des champs statiquement admissible sur le domaine Ω
\mathcal{T}	:	espace fonctionnel sur le domaine \mathcal{I}
\mathcal{P}	:	espace fonctionnel sur le domaine Θ

Thermique

u	:	champs de température
\underline{q}	:	flux thermique

Élasticité

\underline{u}	:	champs de déplacement
\mathbb{e}	:	champs de déformation
$\mathbb{\sigma}$:	champs de contrainte

Erreur

$E_{\square}(\overline{E}_{\square})$:	erreur globale absolue (relative) définie sur \square
e_{\square}	:	erreur locale absolue définie sur \square
Δ_{\square}	:	estimation d'erreur globale définie sur \square
Q	:	quantité d'intérêt
ρ_{\square}	:	estimation d'erreur en quantité d'intérêt définie sur \square
η	:	indice d'efficacité

Éléments finis

h	:	dimension caractéristique du maillage spatial
Δt	:	pas de temps
N_i	:	fonction de forme associée au nœud i
\underline{n}	:	normale sortante des éléments du maillage spatial

Introduction

Les progrès continus en modélisation et puissance de calcul, en particulier avec le développement du Calcul Haute Performance (CHP) permettent de simuler numériquement le comportement de structures de plus en plus complexes. La simulation numérique est désormais un outil de base en ingénierie pour toute démarche de conception et d'analyse, et même un outil d'aide à la prise de décision.

Toutefois, la simulation numérique reste délicate voire incompatible pour un certain nombre de situations rencontrées par l'ingénieur, en particulier lorsque le modèle de description du réel est construit à partir de multiples paramètres dont il faut étudier l'influence. Cette dernière situation se rencontre assez couramment, notamment dans la conception aéronautique où beaucoup de scénarios (liés à des comportements non linéaires, modifications de chargement, de conditions limites, de matériaux, de géométrie, mais aussi aux aspects aléatoires) doivent être considérés et analysés en vue d'optimiser la structure. Dès lors, le calcul par les méthodes de discrétisation classiques (éléments finis, différences finies) devient très coûteux, voire inabordable. Cette croissance exponentielle du coût de calcul, qui peut rapidement être prohibitive pour des valeurs modérées, est connue sous le nom de « *malédiction de la dimensionnalité* ».

Aussi en conception mécanique, on se limite donc généralement à une analyse superficielle de l'ensemble des scénarios possibles en introduisant des coefficients de sécurité. Le surdimensionnement d'une structure mobile (avion, bateau, voiture ...) est problématique dans le contexte actuel, puisque c'est avant tout l'augmentation de son poids et par conséquent, de sa consommation en énergie (fossile, électrique ...). Il paraît fondamental de pouvoir considérer pleinement tous les scénarios possibles des modèles multiparamétrés complexes impliquant un grand nombre de paramètres pour dimensionner au plus juste les structures.

La Réduction de Modèle (ROM) est une technique permettant de répondre à cette problématique tout en gardant la physique du modèle, contrairement aux métamodèles (Surrogate Model) [Barton et Meckesheimer, 2006]. La ROM cherche à capturer les principales caractéristiques du comportement physique, sans le dégrader, grâce à la redondance d'informations présente dans le modèle. Bien que par abus de langage on parle de réduction, cette réduction porte sur la complexité mathématique du modèle, et s'apparente plus à une compression du modèle. Grâce à une connaissance partielle du modèle issue de quelques résolutions préalables du problème initial pour certains jeux de paramètres donnés, appelées *snapshots* [Chatterjee, 2000], une base réduite est construite. Le problème multiparamétré est alors projeté sur cette base, réduisant de fait la dimension du problème à résoudre. Cette approche attractive a été fortement développée par la communauté scientifique et a abouti à différentes stratégies qui diffèrent sur le choix des *snapshots* et la méthode de construction de la base. Elle fait l'objet actuellement d'un développement soutenu en France à travers un groupement de recherche CNRS AMORE qui fédère plusieurs acteurs, dont le LMT-Cachan.

Parmi ces stratégies, la Proper Generalized Decomposition (PGD), introduite en 1985 par P. Ladevèze pour traiter les problèmes nonlinéaires de la Mécanique du Solide, fait l'objet d'un regain d'intérêt [Chinesta *et al.*, 2011]. Elle ne nécessite aucune connaissance a priori de la solution réelle : aucun *snapshot* n'est requis. La base réduite est alors construite différemment de

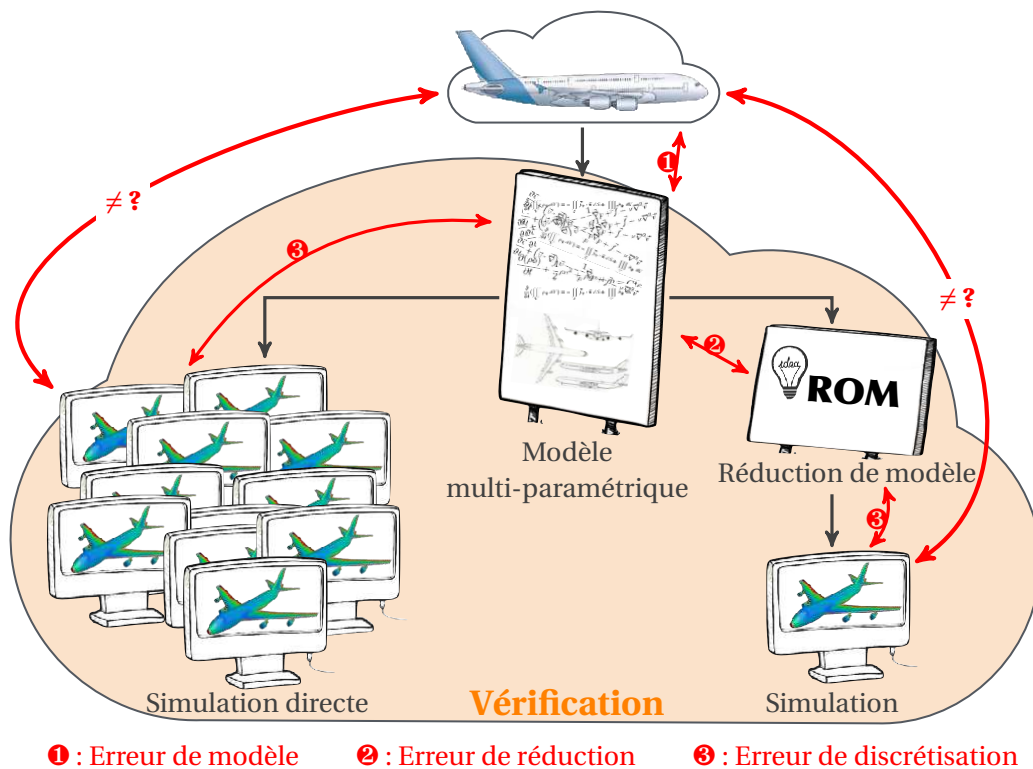


FIGURE 1 – Domaine de la vérification.

manière itérative en même temps que l’approximation. Ses domaines d’application vont de la mécanique quantique à l’échelle moléculaire jusqu’aux simulations temps réel en passant par les modèles multidimensionnels, paraboliques, thermiques, élastiques, acoustiques, stochastiques, (visco-)plastiques, mécanique de la rupture, de la mécanique des fluides, voire multi-physiques : [Chinesta *et al.*, 2013].

Dans une démarche de conception robuste avec prise de décisions à partir d’une solution multiparamétrique, estimer voire contrôler la qualité de cette solution réduite est un enjeu primordial pour le transfert de ces méthodes de réduction dans le monde industriel. Cette maîtrise des calculs numériques, appelée vérification, consiste en plusieurs activités : (i) quantifier l’écart de la solution approchée du modèle réduit discrétisé à la solution exacte du problème continu (erreur globale) ; (ii) quantifier l’écart d’une quantité d’intérêt locale approchée du modèle réduit discrétisé à sa valeur exacte dans le problème continu (erreur locale) ; (iii) mise en place de stratégies d’adaptation, pour contrôler la solution approchée.

L’estimation d’erreur pour des modèles réduits s’est principalement orientée vers l’estimation de l’erreur de réduction pour optimiser le choix des *snapshots* [Machiels *et al.*, 2001]. L’absence de *snapshots* dans la stratégie PGD, explique peut-être le peu de travaux sur l’estimation d’erreur appliquée à des modèles réduits PGD, à l’exclusion de ceux d’Ammar : [Ammar *et al.*, 2010a].

L’objectif de cette thèse est de contribuer au développement de nouveaux estimateurs d’erreur pour la maîtrise des modèles réduits PGD. Appliqué à des problèmes de thermique instationnaire, ce travail s’appuie sur le concept d’erreur en relation de comportement, le seul outil à l’heure actuelle offrant des bornes d’erreur garanties et de qualité pour un large panel de modèles de mécanique des structures.

Les contributions originales apportées par ce travail de thèse portent sur la mise en place d'estimateurs d'erreur performants, rapides et pertinents pour accélérer le transfert de la méthode de réduction de modèle PGD dans le monde industriel. Ces contributions se focalisent sur trois points majeurs :

- la mise au point d'une méthode permettant de vérifier des modèles réduits PGD a posteriori par l'erreur en relation de comportement [Allier *et al.*, 2017b]. Cette méthode consiste à post-traiter la solution PGD pour retrouver les propriétés mathématiques et physiques nécessaires permettant de réutiliser des techniques de construction de champs équilibrés et d'estimation d'erreur en relation de comportement développées dans le cadre de la Méthode des Éléments Finis (MEF) ;
- une nouvelle stratégie PGD permettant de construire une base (et une solution) ayant les bonnes propriétés mathématiques et physiques permettant de s'affranchir de l'étape de post-traitement décrite au point précédent [Allier *et al.*, 2015]. Cette technique permet durant le processus d'enrichissement d'estimer immédiatement l'erreur de réduction ;
- l'accélération des techniques de construction de champs équilibrés par un modèle réduit PGD [Chamoin *et al.*, 2016]. Cette méthode vise à appliquer l'idée de *virtual vademecum* pour construire les champs équilibrés en remplaçant le calcul de nombreux problèmes locaux par le post-traitement d'une solution d'un problème élémentaire multiparamétrique résolu par la PGD.

Ce document est organisé de la manière suivante :

- Dans un [premier chapitre](#), on présente les principales techniques de réduction de modèle. On s'attardera particulièrement sur la méthode PGD, technique retenue par la suite. On terminera ce chapitre en soulignant la principale motivation scientifique de cette thèse : le besoin de vérifier les modèles réduits.
- Le [second chapitre](#) se consacre à la vérification d'une solution PGD. Après un aperçu des méthodes existantes, on introduira une méthode de construction d'un champ dual équilibré globalement par post-traitement de la solution PGD permettant de réutiliser les méthodes de vérification habituelles. Les performances de la méthode seront illustrées à partir d'exemples numériques variés.
- Dans un [troisième chapitre](#), on étend la méthode de vérification précédemment introduite à la séparation des variables spatiales. Elle se limitera à la séparation des problèmes N-D en N sous-problèmes 1D.
- Le [quatrième chapitre](#) présente une nouvelle stratégie PGD qui permet de s'affranchir de l'étape de post-traitement introduite au second chapitre.
- Le [dernier chapitre](#) présente une méthode permettant d'accélérer les techniques de construction de champs équilibrés par un modèle réduit PGD.

Chapitre 1

La réduction de modèle

Ce premier chapitre brosse l'état de l'art sur les méthodes de réduction de modèle, principalement les méthodes de réduction basées sur la PGD. Après avoir défini le problème de référence, la notion de réduction de modèle est présentée. Les différentes stratégies PGD sont explicitées et comparées sur un cas test concret pour illustrer leurs limites et le besoin d'estimateurs d'erreur efficaces, freins à l'emploi de ces méthodes.

Sommaire

1	Problème multiparamétrique de référence	5
1.1	Modélisation du problème de référence	6
1.2	Formulation faible et résolution	7
2	La réduction de modèle (ROM)	8
2.1	Problème aux valeurs propres généralisées – méthode spectrale	9
2.2	Réduction de modèle selon une norme indépendante du modèle	9
2.3	Concept de l'approche Offline / Online	13
2.4	Existence d'un bon espace d'approximation	14
3	La Proper Generalized Decomposition (PGD)	15
3.1	Problème de référence pour la PGD	15
3.2	Galerkin-PGD (G-PGD)	17
3.3	Petrov-Galerkin-PGD (PG-PGD)	18
3.4	Minimisation du résidu (RM-PGD)	19
3.5	Amélioration de la qualité des modes	21
4	Limites de la réduction de modèle PGD	23
4.1	Erreur de réduction	25
4.2	Séparabilité du problème	27

1 Problème multiparamétrique de référence

La complexité des études numériques actuelles conduit à la résolution de problèmes dits de grande taille mêlant plusieurs domaines de la Physique : (i) grande dimension en espace; (ii) grande dimension en temps (problèmes stochastiques); (iii) multitude de paramètres physiques et numériques et/ou complexité de leur variabilité (études paramétriques), voire les trois

en même temps. Malgré les progrès en informatique, la résolution de ces modèles de grande taille reste inaccessible telle une *malédiction de la dimension*. La réduction de modèle est une réponse à cette difficulté en garantissant un bon compromis entre temps de calcul et précision du résultat produit par le modèle réduit associé.

La réduction de modèle ayant été appliquée dans de nombreux domaines, la littérature sur le sujet est vaste et riche. Par conséquent, les différentes méthodes de réduction de modèle présentées dans la suite de ce chapitre seront illustrées sur un problème de référence, problème parabolique classique de thermique instationnaire.

1.1 Modélisation du problème de référence

Soit une structure occupant un domaine ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2, 3$), supposé borné et régulier, de frontière $\partial\Omega$, et un domaine temporel $\mathcal{I} = [0, T]$. On suppose le matériau isotrope, mais hétérogène et partiellement inconnu. Ainsi, le coefficient de diffusion k et la capacité thermique volumique c dépendent de la variable d'espace \underline{x} , mais aussi d'un ensemble de paramètres¹ $\underline{p} = [p_1, p_2, \dots, p_N]$ appartenant au domaine borné $\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2 \times \dots \times \Theta_N$.

Illustrée dans la [Figure 1.1](#), cette structure est soumise à :

- un terme source $f_d(\underline{x}, t, \underline{p})$ donné dans Ω ;
- un chargement thermique surfacique $r_d(\underline{x}, t, \underline{p})$ imposé (condition limite de type Neumann) sur une partie $\partial_r\Omega$ de $\partial\Omega$;
- une température $u_d(\underline{x}, t)$ imposée (condition limite de type Dirichlet) sur la partie $\partial_u\Omega$ complémentaire de $\partial_r\Omega$;
- une température initiale $u_0(\underline{x})$ donnée dans Ω .

Le problème mathématique associé consiste à trouver le couple température-flux $(u(\underline{x}, t, \underline{p}), \underline{q}(\underline{x}, t, \underline{p}))$, où $(\underline{x}, t, \underline{p}) \in \Omega \times \mathcal{I} \times \Theta$, vérifiant :

- les contraintes thermiques :

$$u = u_d \quad \text{sur} \quad \partial_u\Omega \times \mathcal{I} \times \Theta \quad (1.1a)$$

- les équations d'équilibre :

$$\begin{cases} c \frac{\partial u}{\partial t} = -\underline{\nabla} \cdot \underline{q} + f_d & \text{dans} \quad \Omega \times \mathcal{I} \times \Theta \\ \underline{q} \cdot \underline{n} = r_d & \text{sur} \quad \partial_r\Omega \times \mathcal{I} \times \Theta \end{cases} \quad (1.1b)$$

- la relation de comportement :

$$\underline{q} = -k \underline{\nabla} u \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathcal{I} \times \Theta \quad (1.1c)$$

- la condition initiale :

$$u|_{t=0^+} = u_0 \quad \forall (\underline{x}, \underline{p}) \in \Omega \times \Theta \quad (1.1d)$$

avec \underline{n} la normale sortante de Ω .

Dans la suite, on fait le changement de variable $\underline{q} \rightarrow -\underline{q}$ afin d'avoir une relation de comportement « classique », $\underline{q} = k \underline{\nabla} u$.

1. Pour simplifier les notations, l'ensemble des opérateurs dépend du même ensemble de paramètres, de façon constante pour certains.

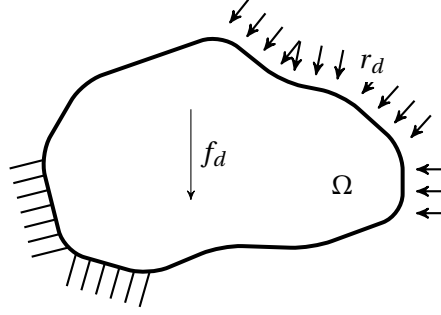


FIGURE 1.1 – Problème de référence - représentation du solide et de son environnement

Tout d'abord on définit les espaces $\mathcal{L}^2(\Omega)$ et $\mathcal{H}^1(\Omega)$ représentant respectivement l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrables sur Ω et l'espace de Sobolev des fonctions et de ses dérivées premières de carré intégrables sur Ω :

$$\mathcal{L}^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} u^2 \, d\Omega < +\infty \right\} \quad , \quad \mathcal{H}^1(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{L}^2(\Omega) \mid \underline{\nabla} u \in [\mathcal{L}^2(\Omega)]^d \right\}$$

À ces espaces sont associés les produits scalaires et normes suivants :

$$\langle \bullet, \circ \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \bullet \circ \, d\Omega \quad ; \quad \|\bullet\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \sqrt{\langle \bullet, \bullet \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)}}$$

$$\langle \bullet, \circ \rangle_{\mathcal{H}^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \bullet \circ + \underline{\nabla} \bullet \cdot \underline{\nabla} \circ \, d\Omega \quad ; \quad \|\bullet\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} = \sqrt{\langle \bullet, \bullet \rangle_{\mathcal{H}^1(\Omega)}}$$

1.2 Formulation faible et résolution

1.2.1 Formulation faible

La plupart des méthodes de résolution du problème de référence (1.1) s'appuient sur une formulation faible en espace des équations d'équilibre (1.1b). On introduit les espaces fonctionnels suivants :

- l'espace \mathcal{U}^{ad} (resp. \mathcal{U}_0^{ad}) des champs de température Cinématiquement Admissibles (CAs) (resp. à 0) à t fixé :

$$\mathcal{U}^{ad} = \{ u \in \mathcal{H}^1(\Omega) \mid u = u_d \text{ sur } \partial_u \Omega \}$$

$$\mathcal{U}_0^{ad} = \{ u \in \mathcal{H}^1(\Omega) \mid u = 0 \text{ sur } \partial_u \Omega \}$$

- l'espace \mathcal{S}^{ad} (resp. \mathcal{S}_0^{ad}) des flux Statiquement Admissibles (SAs) (resp. à 0) à t fixé :

$$\mathcal{S}^{ad}(u) = \{ \underline{q} \in [\mathcal{L}^2(\Omega)]^d \mid b(u, \underline{q}; v) = l(v) \quad \forall v \in \mathcal{U}_0^{ad} \}$$

$$\mathcal{S}_0^{ad}(u) = \{ \underline{q} \in [\mathcal{L}^2(\Omega)]^d \mid b(u, \underline{q}; v) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_0^{ad} \}$$

avec $b(\bullet, \bullet; \bullet)$ et $l(\bullet)$ des formes bilinéaire et linéaire définies par :

$$b(u, \underline{q}; v) = \int_{\Omega} c \frac{\partial u}{\partial t} v + \underline{q} \cdot \underline{\nabla} v \, d\Omega \quad ; \quad l(v) = \int_{\Omega} f_d v \, d\Omega - \int_{\partial_r \Omega} r_d v \, dS$$

Le problème de référence peut ainsi être reformulé :

$$\forall (t, \underline{p}) \in \mathcal{I} \times \Theta, \text{ trouver } (u, \underline{q}) \in \mathcal{U}^{ad} \times \mathcal{S}^{ad}(u) \text{ vérifiant } \underline{q} = k \underline{\nabla} u \text{ et } u|_{t=0^+} = u_0 \text{ dans } \Omega \quad (1.2)$$

1.2.2 Résolution éléments finis

La solution exacte de (1.2), généralement hors de portée, est notée u_{ex} (et par extension, $\underline{q}_{ex} = k \underline{\nabla} u_{ex}$). Elle est classiquement approximée par la MEF [Bonnet *et al.*, 2014] sur le champ de température u (formulation faible primale (1.3)), associée à un schéma d'intégration en temps.

$$\forall (t, \underline{p}) \in \mathcal{I} \times \Theta, \quad b(u, k \underline{\nabla} u; v) = l(v) \quad \forall v \in \mathcal{U}_0^{ad} \quad (1.3)$$

Dans la suite et sauf indication contraire, on simplifiera l'expression $b(u, k \underline{\nabla} u; v) = b(u, v)$.

En discrétisant l'espace Ω par un ensemble d'éléments formant un maillage Ω_h , la MEF consiste à se ramener à un problème de dimension finie où la seule inconnue est le vecteur de température \mathbf{u}_h , le flux étant son image par la relation de comportement du matériau. En introduisant l'espace d'approximation $\mathcal{U}_h^{ad} \subset \mathcal{U}^{ad}$, le problème (1.3) consiste à résoudre le système matriciel suivant :

$$\forall \underline{p} \in \Theta, \forall t \in \mathcal{I}, \text{ trouver } \mathbf{u}_h \in \mathcal{U}_h^{ad} \quad \mathbb{M}(\underline{p}) \dot{\mathbf{u}}_h(t, \underline{p}) + \mathbb{K}(\underline{p}) \mathbf{u}_h(t, \underline{p}) = \mathbf{F}(t, \underline{p}) \quad (1.4)$$

Cette approche engendre rapidement un coût prohibitif lorsque l'espace des paramètres Θ est important, car le système linéaire (1.4) doit être résolu pour chaque ensemble de valeurs des paramètres : une discrétisation par M points dans chacun des N paramètres du problème aboutit à un nombre de problèmes MEF à calculer égal à M^N . Par exemple sur le problème de thermique instationnaire, en prenant 10 paramètres et en discrétisant chaque direction (d en espace, 1 en temps et 10 en paramètres) avec 10 points, la complexité du problème atteint 10^{d+11} inconnues, pour une description très grossière de la plupart des phénomènes :

$$u(\underline{x}, t, \underline{p}) = \sum_{i,j,k,l,m,\dots} u_{ijklm\dots} N_i(\underline{x}) N_j(t) N_k(p_1) N_l(p_2) N_m(p_3) \dots$$

avec N_{\square} les fonctions de forme associées aux espaces Ω_h , \mathcal{I}_h et Θ_h . Ce nombre augmente de façon exponentielle lorsqu'on ajoute de nouveaux paramètres.

Il est donc nécessaire de trouver de nouvelles méthodes permettant de s'affranchir de cette limite. C'est l'objectif de la réduction de modèle.

2 La réduction de modèle (ROM)

La ROM est basée sur la propriété que la réponse de n'importe quel modèle complexe peut souvent être approximée de façon assez précise par la réponse d'un problème secondaire, vu comme la projection du modèle initial sur une base réduite [Krysl *et al.*, 2001, Schilders *et al.*, 2008]. Contrairement aux méthodes de réduction de complexité du modèle, tel que les éléments poutres ou plaques, ce type d'approche ne modifie pas la description de la géométrie, des lois de comportement, des conditions initiales et des conditions aux limites : les grandes hypothèses physiques sont conservées. Seule la complexité de la résolution est réduite.

2.1 Problème aux valeurs propres généralisées – méthode spectrale

La solution homogène, notée \mathbf{u}_{h0} , du système différentiel (1.4) revient à résoudre un problème aux valeurs propres généralisées. Aussi, les valeurs propres λ et vecteurs propres Φ sont directement associés à la solution homogène. \mathbf{u}_{h0} vérifie alors une forme générique, combinaison de N_x modes propres, avec N_x le nombre de degrés de liberté (DDLs) spatiaux :

$$\mathbf{u}_{h0}(t, \underline{p}) = \sum_{i=1}^{N_x} \alpha_i(t, \underline{p}) \Phi_i$$

Problème aux valeurs propres généralisées. Cherchons \mathbf{u}_{h0} sous la forme² $\mathbf{u}_{h0}(t) = \exp^{-\lambda t} \Phi$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\Phi \in \mathbb{R}^{N_x}$ solution de (1.4). Il faut alors vérifier :

$$\forall \underline{p} \in \Theta, \quad [-\lambda \mathbb{M}(\underline{p}) \Phi + \mathbb{K}(\underline{p}) \Phi] \exp^{-\lambda t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{K}(\underline{p}) \Phi = \lambda \mathbb{M}(\underline{p}) \Phi$$

Ainsi, de manière générale, on écrit :

$$\mathbf{u}_{h0}(t) = \sum_{i=1}^{N_x} \alpha_i(\underline{p}) \exp^{-\lambda_i t} \Phi_i$$

□

En pratique, la solution \mathbf{u}_{h0} du système différentiel (1.4) évolue de façon régulière, l'amplitude des valeurs propres décroît ainsi très rapidement et l'évolution de la solution peut être approximée avec précision par un nombre réduit de modes (vecteurs propres). Soit $m \ll N_x$ le nombre de modes conservés, tel que $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_m$. En posant la matrice $\Phi = [\Phi_1, \dots, \Phi_m]$, on approxime la solution \mathbf{u}_{h0} sous une forme à variables séparées :

$$\mathbf{u}_{h0}(t, \underline{p}) \simeq \Phi \cdot \alpha(t, \underline{p}) \tag{1.5}$$

Un problème réduit est alors obtenu en projetant cette approximation (1.5) sur le sous-espace formé par les m plus importants vecteurs propres Φ_i , d'inconnue $\alpha(t, \underline{p})$:

$$\forall \underline{p} \in \Theta, \quad [\Phi^T \mathbb{M}(\underline{p}) \Phi] \dot{\alpha}(t, \underline{p}) + [\Phi^T \mathbb{K}(\underline{p}) \Phi] \alpha(t, \underline{p}) = \Phi^T \mathbf{F}(t, \underline{p}) \tag{1.6}$$

Le problème réduit est de taille m au lieu de N_x . Lorsque $m \ll N_x$, le problème (1.6) se ramène à un système matriciel de taille très réduite par rapport au système matriciel initial (1.4) qui s'inverse alors très rapidement.

2.2 Réduction de modèle selon une norme indépendante du modèle

La principale difficulté des méthodes de réduction de modèle est d'identifier le meilleur sous-espace $\{\Phi_i\}_{i \in [1, m]}$ sur lequel restreindre le modèle (1.3), tel que l'on ait la relation (1.7) :

$$u(\underline{x}, t, \underline{p}) \simeq u_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i(t, \underline{p}) \Phi_i(\underline{x}) \tag{1.7}$$

Les techniques de réduction de modèle se distinguent [Schilders *et al.*, 2008] par la manière de définir et de construire cette base réduite. Se fixer a priori la forme des fonctions d'espace Φ_i ,

2. Cette forme n'en est qu'une parmi tant d'autres utilisée dans la méthode spectrale.

comme une décomposition de type Fourier, Lagrange ..., n'est optimal que pour des problèmes précis. Une façon plus générique consiste à s'imposer un critère d'orthogonalité. Une première famille de méthodes cherche à extraire l'information la plus pertinente d'une solution partiellement connue : c'est la Proper Orthogonal Decomposition (POD) [Chatterjee, 2000, Liang et al., 2002, Cordier et Bergmann, 2008]. Une seconde cherche à déterminer le meilleur calcul à effectuer pour venir enrichir la base réduite, grâce à un estimateur d'erreur : c'est la méthode des bases réduites, en anglais Reduced Basis (RB) [Maday et Rønquist, 2002, Rozza et al., 2008].

2.2.1 La Proper Orthogonal Decomposition (POD)

On regroupe sous l'appellation POD différentes techniques proposées simultanément et connues sous les noms de décomposition de Karhunen-Loève (KLD) [Karhunen, 1946, Loève, 1946], Analyse en Composantes Principales (PCA) [Pearson, 1901, Hotelling, 1933] ou décomposition en valeurs singulières (SVD) [Eckart et Young, 1936], dont l'équivalence entre chacune d'elles a été démontrée dans [Wu et al., 2003]. L'objectif consiste à projeter un ensemble de données sur un sous-espace réduit au sens des moindres carrés, obtenu par une approche théorique, expérimentale ou par simulation. D'où son utilisation massive pour l'analyse stochastique de résultats expérimentaux ou numériques, l'acoustique, le traitement d'images et bien d'autres applications [Kerschen et al., 2005].

Pour cela, on cherche la meilleure base $\{\Phi_i\}_{i \in [1, m]}$ de u_m (1.7), minimisant la distance entre u_{ex} et u_m au sens de la norme $\|\bullet\| = \|\bullet\|_{\mathcal{L}^2(\Omega \otimes \mathcal{I} \otimes \Theta)}$:

$$\|u_{ex} - u_m\|^2 = \min_{\{\Phi_i\}_{i \in [1, m]}} \left\| u_{ex} - \sum_{i=1}^m \alpha_i \Phi_i \right\|^2$$

On peut montrer que ce problème est équivalent à un problème aux valeurs propres (voir Annexe A) dont l'erreur de troncature vérifie :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| u_{ex} - \sum_{i=1}^m \alpha_i \Phi_i \right\|^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=m+1}^{\infty} \sigma_i = 0$$

où σ_i représente les valeurs propres associées aux vecteurs propres Φ_i .

Dans le cas où la solution u est connue (partiellement) sous une forme discrète \mathbb{U} , le problème aux valeurs propres se ramène à une SVD [Eckart et Young, 1936, Stewart, 1993]. Cette méthode consiste à décorréler un ensemble de données corrélées, en identifiant et ordonnant les dimensions selon lesquelles les données manifestent de grandes variations. Mathématiquement, cette méthode revient à diagonaliser une matrice \mathbb{U} de taille $M \times N$ sous la forme canonique :

$$\mathbb{U} = \Phi \Sigma \mathbb{V}^\dagger$$

où Φ (resp. \mathbb{V}) est une matrice de norme unité $M \times M$ (resp. $N \times N$) composée des r premières valeurs propres à droite (resp. gauche), où r est le rang de \mathbb{U} et Σ une matrice diagonale formée des valeurs propres σ_i de \mathbb{U} telles que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq 0$.

Puisque les valeurs propres sont rangées dans l'ordre décroissant, il est facile de déterminer la meilleure approximation \mathbb{U}_k de rang k de \mathbb{U} en ignorant simplement les valeurs propres inférieures à un certain seuil $k \ll r$ pour réduire les données tout en préservant les caractéristiques principales de \mathbb{U} . Des algorithmes spécifiques [Holmes et al., 2009] permettent de calculer cette

3. ici, \mathbb{V}^\dagger représente la matrice adjointe de \mathbb{V} .

SVD tronquée au rang k sans calculer explicitement l'ensemble des opérateurs Φ , Σ et \mathbb{V} . La matrice résultante \mathbb{U}_k vérifie le théorème d'Eckart-Young [Eckart et Young, 1936] selon la norme Euclidienne $\|\bullet\|_2$:

$$\min_{\text{rank}(X) \leq k} \|\mathbb{U} - X\|_2 = \|\mathbb{U} - \mathbb{U}_k\|_2 = \sigma_{k+1}$$

► **Exemple 1** (*Exemple d'application de la réduction de modèle par la SVD*)

On cherche à construire le modèle réduit de l'image de la Figure 1.2, représentant la convection thermique avec l'air ambiant d'une bougie ordinaire issue d'une photographie⁴ obtenue par strioscopie. Initialement laminaire, le panache devient turbulent dans la zone supérieure de l'image. De cette image est extraite la matrice \mathbb{U} où à chaque valeur discrète correspond le niveau de gris d'un pixel de l'image.

En appliquant la SVD à ces données, une base réduite est extraite de la matrice \mathbb{U} , composée de couples (α_i, Φ_i) et tronquée aux 50 premiers, représentés sur la Figure 1.2. Alors que les premiers modes captent une tendance globale, les modes suivants captent les tendances locales, d'amplitude de plus en plus réduite (voir Figure 1.3e). Bien que ces tendances locales soient majoritairement localisées dans la zone où l'écoulement est turbulent, elles influent également le reste de l'image. La reconstruction à 3, 10, 15 et 20 modes, représentée sur la Figure 1.3, illustre ce phénomène. L'absence de physique dans la SVD rend difficile la séparation du régime laminaire du régime turbulent.

En pratique, les données \mathbb{U} ne représentent qu'une vision partielle de la solution u , contrairement au modèle. De ces données, communément appelées *snapshots* [Sirovich, 1987], on détermine dans une étape *offline* la base réduite Φ par une SVD en sélectionnant les m premiers modes orthogonaux. Par une projection Galerkin (1.6), le problème (1.3) se transforme en un problème réduit, résolu dans une phase *online* (voir Figure 1.4). La POD fournit ainsi un outil puissant pour construire un modèle de substitution de systèmes à grande dimension, voire infinie, sur un sous-espace héritant des caractéristiques intrinsèques de la solution globale, à la différence des éléments finis.

Remarque 1.1. Pour des décompositions d'ordre supérieur, la SVD se généralise à la décomposition en valeurs singulières d'ordre supérieur (HOSVD) [Baranyi et al., 2006].

2.2.2 La méthode des bases réduites (RB)

Le choix des données à prendre en compte est un enjeu crucial pour la POD, souvent guidé par des conjectures, de l'intuition voire des simulations. La Reduced Basis (RB) cherche à palier à ce défaut, en proposant une procédure de sélection automatique des *snapshots* les plus pertinents (Figure 1.5). Elle approxime la solution $u(\underline{x}, t, \underline{p})$ du problème paramétrique (1.3) comme une combinaison linéaire de solutions déjà calculées $u(\underline{x}, t, \underline{p}_i)$ pour des couples de paramètres bien choisis $\underline{p}_i, i = 1..N$.

Le choix des paramètres est guidé par un algorithme d'échantillonnage glouton [Maday, 2006, p.5] qui cherche à maximiser un estimateur d'erreur global sur l'espace des paramètres Θ :

$$\forall i, \underline{p}_{i+1} = \arg \max_{\underline{p} \in \Theta} \|u(\underline{p}) - \Pi_i u(\underline{p})\|_{\mathcal{L}^2(\Omega \otimes \mathcal{I})} \quad (1.8)$$

4. Strioscopie d'une bougie par Gary Settles [CC BY-SA 3.0], via Wikimedia Commons.

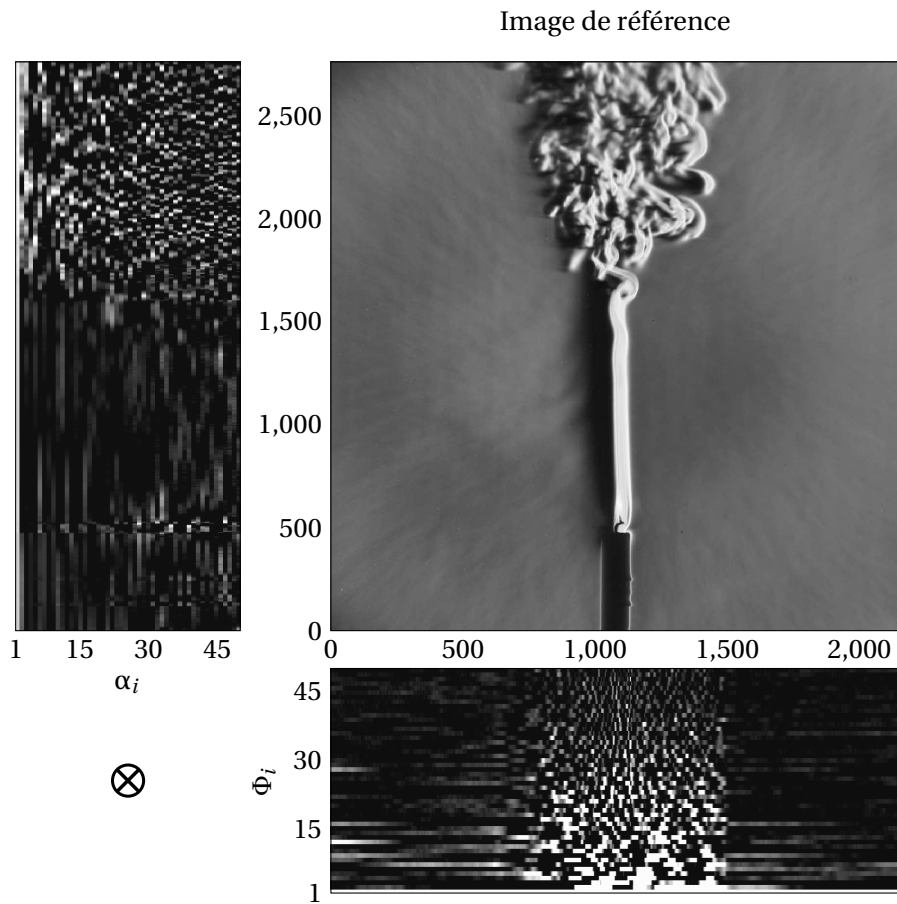


FIGURE 1.2 – Décomposition SVD d’une image : l’image de référence (haut droite) avec ses modes propres spatiaux sur x (bas) et sur y (gauche).

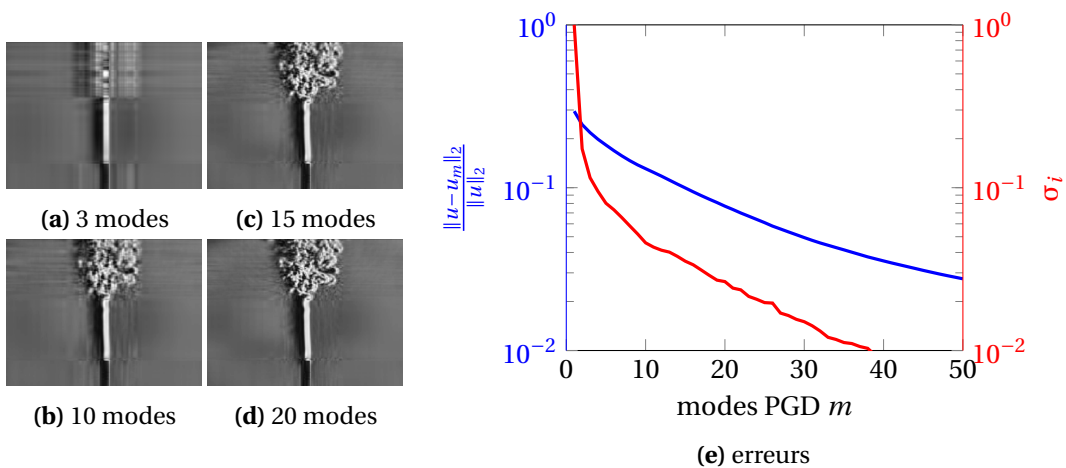


FIGURE 1.3 – Reconstruction de l’image à partir de la décomposition SVD pour 3, 10, 15 et 20 modes (gauche) et erreur sur la décomposition de l’image présentée sur la Figure 1.2, à comparer aux valeurs propres (e).

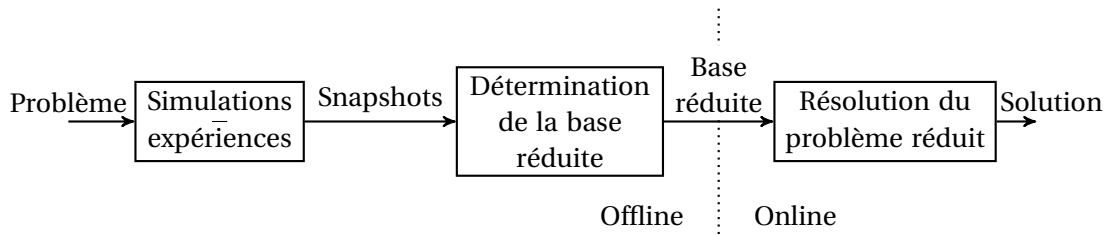


FIGURE 1.4 – Principe de la Proper Orthogonal Decomposition (POD)

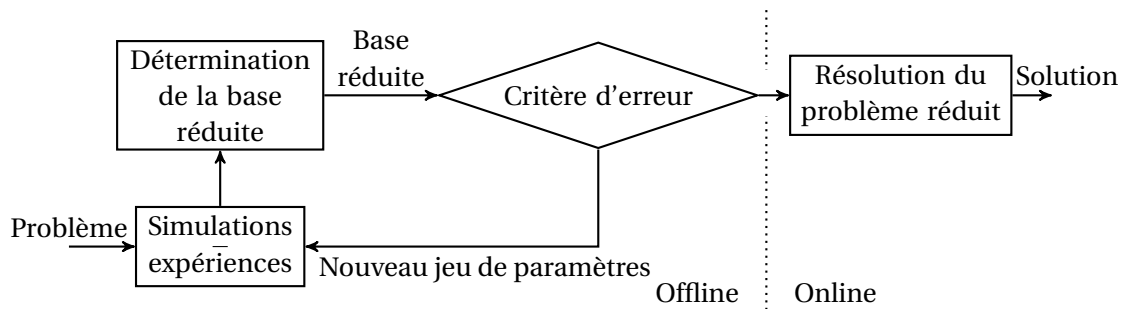


FIGURE 1.5 – Principe de la méthode Reduced Basis (RB)

où Π_i est la projection orthogonale sur l'espace $\mathcal{V}_i = \text{span}\{u(\underline{x}, t, \underline{p}_j)\}_{j \in [1, i]}$. Un tel problème revient à résoudre le modèle réduit sur l'espace paramétrique Θ complet, étape coûteuse en pratique pour des problèmes à grand nombre de paramètres.

Remarque 1.2. Dans le cadre non linéaire, il est nécessaire de rajouter une étape entre les blocs *simulations/expériences* et *détermination de la base réduite* des Figures 1.4 et 1.5. Lorsque l'opérateur bilinéaire b n'est pas linéaire, les modes de la base réduite sont couplés et la phase *online* de résolution du problème réduit conserve une complexité équivalente au problème non réduit. La solution [Grepl et al., 2007] consiste à rajouter une phase de post-traitement des *snapshot* par la Empirical Interpolation Method (EIM) qui permet de reconstruire une décomposition efficace lors de son utilisation dans la phase *online*. À partir de la connaissance des snapshots en certains points du domaine, la EIM reconstruit une nouvelle base comme une combinaison linéaire de ces précédents snapshots (connu sur l'ensemble du domaine) associée à quelques instances bien choisies des paramètres.

2.3 Concept de l'approche Offline / Online

Toutes les méthodes de réduction de modèle peuvent se décomposer en deux phases :

Phase Offline Durant cette étape, une base réduite du problème initial $\{\Phi_i\}_{i \in [1, m]}$ est construite.

Bien entendu, cette phase est la plus coûteuse en terme de temps de calcul, mais comme elle n'est faite qu'une seule fois, le temps perdu sera compensé lors de l'utilisation de cette base réduite dans la phase suivante.

Phase Online Cette phase est la phase d'utilisation de la base réduite. Pour tout nouveau problème associé à un paramètre, \underline{p} les coefficients α_i sont déterminés à la volée en se basant sur une projection de type Galerkin.

Cette façon de voir la réduction de modèle permet d'envisager la « simulation » temps réel, comme présenté dans [González et al., 2015]. L'utilisation d'une base réduite (phase online),

calculée en temps masqué (phase offline), est alors quasi immédiate. Ce n'est cependant pas à proprement parler une simulation temps réel, mais plutôt l'exploitation en temps réel d'une base réduite.

2.4 Existence d'un bon espace d'approximation

Les méthodes de réduction de modèle reposent sur le fait que l'ensemble des solutions (selon les paramètres) est une variété topologique ayant une structure simple, liée à la régularité de l'ensemble $\mathcal{M} = \{u(\underline{p}), \underline{p} \in \Theta\}$.

La base réduite est construite à partir de snapshots, solutions évaluées pour l valeurs des paramètres \underline{p} , choisis dans un espace $\Theta_{snap} \subset \Theta$. Comme la solution réduite doit fournir une approximation précise de la solution exacte pour toutes valeurs des paramètres $\underline{p} \in \Theta$, l'objectif ultime de la réduction de modèle consiste à trouver un espace de réduction $\mathcal{U}_{red}^{ad} \subset \mathcal{U}_h^{ad}$ de faible dimension $l \ll N^5$ qui minimise la distance de cette solution réduite à l'ensemble \mathcal{M} . Pour cela, on souhaite que l'erreur maximale de projection

$$d(\mathcal{U}_{red}^{ad}, \mathcal{M}) = \max_{u \in \mathcal{M}} \inf_{v \in \mathcal{U}_{red}^{ad}} \|u - v\|$$

soit proche de l'optimum théorique

$$d_N(\mathcal{M}) = \inf_{\substack{\tilde{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}^{ad} \\ \dim(\tilde{\mathcal{U}}) = N}} d(\tilde{\mathcal{U}}, \mathcal{M})$$

définie comme la distance de Kolmogorov de dimension N sur \mathcal{M} . L'espace optimal \mathcal{U}_{red}^{ad} tel que $d(\mathcal{U}_{red}^{ad}, \mathcal{M}) = d_N(\mathcal{M})$ existe dans tous les cas, comme démontré par [Pinkus, 1985, théorème II.2.3]. Cette distance quantifie ainsi la façon selon laquelle l'ensemble \mathcal{M} peut être approché par un sous-espace de \mathcal{U}^{ad} de dimension N .

Bien que la distance de Kolmogorov est une mesure théorique et n'est connue que pour quelques variétés simples, il est possible de construire une base réduite avec un algorithme glouton qui tend à se rapprocher de cette valeur optimale. La base réduite est successivement enrichie par des sous-espaces $\mathcal{U}_1^{ad} \subset \mathcal{U}_2^{ad} \subset \dots \subset \mathcal{U}_l^{ad} = \mathcal{U}_{red}^{ad}$ à partir d'un premier sous-espace \mathcal{U}_1^{ad} défini de façon arbitraire comme

$$\mathcal{U}_1^{ad} = \text{span} \{u(\underline{p}_1)\}$$

où les paramètres $\underline{p}_1 \in \Theta$ ont été aléatoirement choisis. Les sous-espaces d'ordre supérieur sont alors choisis itérativement, selon (i) un critère d'orthogonalité pour la POD ou (ii) en déterminant les paramètres qui maximisent un estimateur global (1.8) dans le cas de la RB, auquel a été ajoutée cette solution.

$$\mathcal{U}_{i+1}^{ad} = \mathcal{U}_i^{ad} \cup \text{span} \{u(\underline{p}_{i+1})\}$$

Dans la pratique, cet algorithme fonctionne bien et a été vérifié par des résultats de convergence théorique, à la fois pour la POD comme pour la RB : [Binev *et al.*, 2011, Buffa *et al.*, 2012, Haasdonk, 2013] ont prouvé que les distances de ces espaces réduits construits de manière euristique convergent avec taux similaire à celui de la distance de Kolmogorov de dimension N si cette dimension N converge linéairement ou exponentiellement.

Ces propriétés valident les méthodes de réductions de modèle POD et RB du moment que la distance de Kolmogorov converge rapidement vers zéro, c'est-à-dire lorsque la solution peut se décomposer sous une forme à variable séparée.

5. N étant ici le nombre de paramètres p_i dans l'étude.

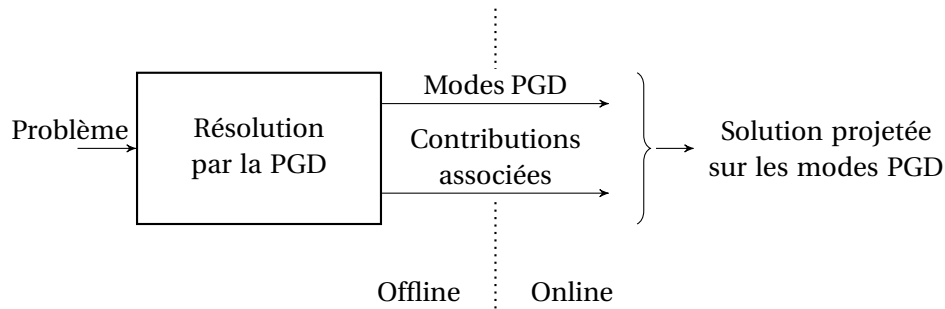


FIGURE 1.6 – Principe de la Proper Generalized Decomposition (PGD)

3 La Proper Generalized Decomposition (PGD)

Les méthodes de réduction vues dans la [Section 2](#) nécessitent une connaissance au moins partielle de la solution du problème multiparamétrique, a priori ou déterminée selon un processus automatique basé sur la résolution de problèmes coûteux.

Une autre famille de méthodes de réduction de modèle ne nécessite pas de solution du problème multiparamétrique pour construire sa base réduite. Au contraire, elle construit progressivement une base réduite pertinente durant la résolution du problème multiparamétrique ([Figure 1.6](#)) : c'est l'idée de la PGD.

Initialement introduite sous le nom d'Approximation Radiale (AR) [[Ladevèze, 1989](#), [Ladevèze, 1999](#)], la PGD [[Ammar et al., 2006](#)] peut être vue comme une généralisation de la POD aux cas où l'on ne connaît pas la solution a priori. La PGD a été développée durant des années au sein du LMT pour la résolution de problèmes de structures mécaniques non linéaires [[Ladevèze, 1975](#), [Ladevèze et Nouy, 2002](#), [Ladevèze, 2016](#)] couplée à la méthode Large Time Increment Method (LaTin)⁶. Par la suite, elle a été étendue à une variété de problèmes, tels que les problèmes multiparamétriques [[Chinesta et al., 2010](#), [Heyberger et al., 2012](#), [Zlotnik et al., 2015b](#), [Courard et al., 2016](#)], multi-physiques [[Néron et Ladevèze, 2010](#)], stochastiques [[Nouy, 2009](#)], inverses [[González et al., 2012](#)]. Elle a aussi été utilisée pour des simulations temps réel [[Niroomandi et al., 2012](#), [Bouclier et al., 2013](#)], voire comme un outil d'aide à la prise de décision [[Leygue et Verron, 2010](#)]. Le lecteur pourra se référer à [[Chinesta et al., 2011](#)] pour voir l'étendue des problèmes auxquels la PGD peut s'appliquer.

La PGD étant une méthode de réduction de modèle, la séparation en phase offline et online s'applique également. De par la nature de la PGD, la phase online associée consiste en l'évaluation d'une seule combinaison linéaire de la représentation à variable séparée, au contraire des méthodes POD et RB où une projection de type Galerkin est requise. Ainsi, la phase online ne nécessite pas de nouvelle résolution et l'approximation PGD peut être déterminée en temps réel pour n'importe quelle valeur des paramètres.

3.1 Problème de référence pour la PGD

La méthode PGD se base sur une formulation faible du problème multiparamétrique primal (1.10), globalisée sur l'espace des paramètres et du temps. En introduisant l'espace fonctionnel $\mathcal{T} = \mathcal{L}^2(\mathcal{I})$, la formulation faible espace/temps du problème de référence primal (1.3) conduit à

6. Le lecteur pourra se référer à [[Néron et Ladevèze, 2010](#), [Ladevèze, 2014b](#)] pour un état de l'art sur cette approche.

chercher pour tout $\underline{p} \in \Theta$ le champ $u \in \mathcal{L}^2(\mathcal{I}, \mathcal{U}^{ad})$ tel que :

$$\int_{\mathcal{I}} b(u, v) dt + \int_{\Omega} c \{u|_{t=0^+} - u_0\} v|_{t=0^+} d\Omega = \int_{\mathcal{I}} l(v) dt \quad \forall v \in \mathcal{L}^2(\mathcal{I}, \mathcal{U}_0^{ad}) \quad (1.9)$$

La prise en compte de la variabilité des paramètres conduit à affaiblir le précédent problème (1.9) en globalisant sur l'espace des paramètres. Soient les espaces fonctionnels $\mathcal{P}_i = \mathcal{L}^2(\Theta_i)$ et $\mathcal{P} = \otimes_{i=1}^N \mathcal{P}_i$, la formulation faible du problème multiparamétrique consiste à :

trouver $u \in \mathcal{L}^2(\mathcal{I}, \mathcal{U}^{ad}) \otimes \mathcal{P}$ tel que :

$$B(u, v) = L(v) \quad \forall v \in \mathcal{L}^2(\mathcal{I}, \mathcal{U}_0^{ad}) \otimes \mathcal{P} \quad (1.10)$$

avec

$$B(u, v) = \int_{\Theta} \left[\int_{\mathcal{I}} b(u, v) dt + \int_{\Omega} c u|_{t=0^+} v|_{t=0^+} d\Omega \right] d\underline{p}$$

$$L(v) = \int_{\Theta} \left[\int_{\mathcal{I}} l(v) dt + \int_{\Omega} c u_0 v|_{t=0^+} d\Omega \right] d\underline{p}$$

La réduction de modèle PGD consiste à réduire l'espace de recherche de la solution u comme une combinaison de fonctions (ou modes), de la forme :

$$u(\underline{x}, t, \underline{p}) \approx u_m(\underline{x}, t, \underline{p}) = \sum_{i=1}^m \psi_i(\underline{x}) \lambda_i(t) \Gamma_i(\underline{p}) \quad \text{avec } \Gamma_i(\underline{p}) = \prod_{n=1}^N \gamma_{i,n}(p_n) \quad (1.11)$$

où le produit des fonctions d'espace $\psi_i \in \mathcal{U}_0^{ad}$ (avec $\psi_1 \in \mathcal{U}^{ad}$), des fonctions du temps $\lambda_i \in \mathcal{T}$ et des fonctions dépendant des paramètres $\gamma_{i,n} \in \mathcal{P}_n$, forment une approximation de la solution sous la forme de modes.

Remarque 1.3. Connue sous le nom de décomposition tensorielle canonique, la décomposition présentée en (1.11) est une solution parmi d'autres [Falcó et Nouy, 2012]. La forme générale s'écrit :

$$u \approx \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_D=1}^n a_{i_1 \dots i_D} \bigotimes_{\ell=1}^D \varphi_{i_\ell}^\ell,$$

Plutôt que de calculer les m modes en même temps, ce qui serait extrêmement coûteux, ces différents modes sont calculés via un algorithme progressif d'enrichissement [Ammar *et al.*, 2006]. On suppose connue une décomposition à variables séparées d'ordre $(m-1)$ (précédemment calculée). L'approximation PGD d'ordre m est alors définie comme suit :

$$u_m(\underline{x}, t, \underline{p}) = u_{m-1}(\underline{x}, t, \underline{p}) + \psi(\underline{x}) \lambda(t) \Gamma(\underline{p}) \quad \text{avec } \Gamma(\underline{p}) = \prod_{n=1}^N \gamma_n(p_n)$$

ψ , λ et $\{\gamma_n\}_{n=1, \dots, N}$ sont a priori des fonctions inconnues appartenant respectivement aux espaces fonctionnels \mathcal{U}_0^{ad} (sauf pour le 1^{er} mode⁷), \mathcal{T} et \mathcal{P}_n . Différentes stratégies existent pour déterminer ces fonctions [Nouy, 2010], et sont explicitées dans les sections suivantes.

Pour la suite, on introduit le produit scalaire $\langle\langle \bullet, \circ \rangle\rangle$ associé à la norme $\|\bullet\|$ définie sur l'espace $\mathcal{L}^2(\Omega \otimes \mathcal{I} \otimes \Theta)$:

$$\langle\langle \bullet, \circ \rangle\rangle = \int_{\Theta} \int_{\mathcal{I}} \int_{\Omega} \bullet \circ d\Omega dt d\underline{p}, \quad \|\bullet\| = \sqrt{\langle\langle \bullet, \bullet \rangle\rangle}$$

7. Dans la suite on omettra ce cas.

3.2 Galerkin-PGD (G-PGD)

Pour calculer les modes, la première stratégie s'appuie sur un critère d'orthogonalité de type Galerkin [Ladevèze, 1999], appelé G-PGD, dont la convergence a été démontrée dans [Le Bris *et al.*, 2009] pour les problèmes symétriques, notamment les problèmes de diffusion.

3.2.1 Construction du problème G-PGD

En injectant la décomposition PGD (1.11) dans la formulation faible complète du problème multiparamétrique (1.10), on cherche le nouveau couple $(\psi, \lambda, \Gamma) \in \mathcal{U}_0^{ad} \times \mathcal{T} \times \mathcal{P}$ optimal au sens de l'orthogonalité de Galerkin suivant la direction tangente $B(\bullet, \circ)$:

$$B(u_{m-1} + \psi\lambda\Gamma, \psi^*\lambda\Gamma + \psi\lambda^*\Gamma + \psi\lambda\Gamma^*) = L(\psi^*\lambda\Gamma + \psi\lambda^*\Gamma + \psi\lambda\Gamma^*) \quad \forall (\psi^*, \lambda^*, \Gamma^*) \in \mathcal{U}_0^{ad} \times \mathcal{T} \times \mathcal{P} \quad (1.12)$$

où l'on introduit $\Gamma^* = \sum_{i=1}^N \gamma_i^* \Gamma_i^-$ et $\Gamma_i^- = \prod_{j \neq i} \gamma_j$.

Cette équation (1.12) conduit naturellement au couplage de plusieurs problèmes simples :

- la formulation faible sur l'espace, une équation aux dérivées partielles (EDP) spatiale, usuellement approximée par éléments finis :

$$B(u_{m-1} + \psi\lambda\Gamma, \psi^*\lambda\Gamma) = L(\psi^*\lambda\Gamma) \quad \forall \psi^* \in \mathcal{U}_0^{ad} \quad (1.13a)$$

- la formulation faible en temps, une équation aux dérivées ordinaires (EDO) en temps, usuellement approximée par différences finies :

$$B(u_{m-1} + \psi\lambda\Gamma, \psi\lambda^*\Gamma) = L(\psi\lambda^*\Gamma) \quad \forall \lambda^* \in \mathcal{T} \quad (1.13b)$$

- une équation sur chaque variable du paramètre p_i , dont la solution est analytique. Par facilité, on l'approxime par une méthode discrète :

$$\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket \quad B(u_{m-1} + \psi\lambda\Gamma; \psi\lambda\gamma_i^*\Gamma_i^-) = L(\psi\lambda\gamma_i^*\Gamma_i^-) \quad \forall \lambda^* \in \mathcal{P}_i \quad (1.13c)$$

Un couple (ψ, λ, Γ) vérifie (1.12) si et seulement si les équations (1.13) sont vérifiées, ce qui est un problème non-linéaire. Cette version de la PGD peut être interprétée comme un problème aux valeurs propres [Nouy, 2010, p.1609]. Cette interprétation est utile car elle permet de proposer des algorithmes dédiés, inspirés de ceux utilisés dans les problèmes aux valeurs propres, pour la construction de la décomposition. Un algorithme possible, noté *algorithme des puissances itérées* ou *point fixe* est généralement adopté afin de calculer cet ensemble de fonctions en recherchant alternativement un point de stationnarité. Un critère d'arrêt permet de stopper l'algorithme, détaillé dans la Section 4.1. Les problèmes paramétriques, spatial et temporel sont résolus alternativement après initialisation des fonctions (ψ, λ, Γ) à des valeurs quelconques, mais vérifiant les conditions limites et initiales.

Remarque 1.4. A convergence, l'erreur $u_{ex} - u_m$ issue de la stratégie Galerkin-PGD (G-PGD) est orthogonale aux espaces d'approximation $\mathcal{U}_{0,h}^{ad} \otimes \mathcal{T}_h \otimes \mathcal{P}_h$ selon le produit scalaire $B(\bullet, \circ)$.

3.2.2 Aspects numériques de la stratégie G-PGD

Dans la pratique, on fait l'hypothèse que les données du problème, tels que les paramètres matériaux et les chargements vérifient une écriture à variables séparées identique à celle adoptée pour l'inconnue u . La détermination de cette décomposition peut-être (i) connue a priori; (ii) déterminée par une SVD sur les fonctions $f_d(\underline{x}, t, \underline{p})$ et $r_d(\underline{x}, t, \underline{p})$ en ne gardant que les termes prépondérants. Par exemple, on définit :

$$k(\underline{x}, t, \underline{p}) = \sum_{i=1}^{m_k} k_i^x(\underline{x}) k_i^t(t) k_i^p(\underline{p}) \quad ; \quad r_d(\underline{x}, t, \underline{p}) = \sum_{i=1}^{m_r} r_i^x(\underline{x}) r_i^t(t) r_i^p(\underline{p})$$

Avec une telle hypothèse, les opérateurs bilinéaire et linéaire $B(\bullet, \circ)$ et $L(\bullet)$ vérifient également une écriture à variables séparées, par la linéarité des intégrales :

$$B(\psi_1 \lambda_1 \Gamma_1, \psi_2 \lambda_2 \Gamma_2) = \sum_{l=1}^{m_B} B_l^x(\psi_1, \psi_2) B_l^t(\lambda_1, \lambda_2) B_l^p(\Gamma_1, \Gamma_2) \quad (1.14a)$$

$$L(\psi \lambda \Gamma) = \sum_{l=1}^{m_L} L_l^x(\psi) L_l^t(\lambda) L_l^p(\Gamma) \quad (1.14b)$$

où $B_l^p(\Gamma_1, \Gamma_2) = \prod_{j=1}^N B_l^{p_j}(\gamma_{1,j}, \gamma_{2,j})$ et $L_l^p(\Gamma) = \prod_{j=1}^N L_l^{p_j}(\gamma_j)$.

L'introduction des espaces d'approximation $\mathcal{U}_h^{ad} \subset \mathcal{U}^{ad}$, $\mathcal{T}_h \subset \mathcal{T}$ et $\mathcal{P}_h \subset \mathcal{P}$ conduit à approximer les fonctions ψ , λ , γ_i par des vecteurs de valeurs discrètes, interpolées sur leurs domaines continus respectifs par des fonctions de forme N_i . Par exemple, la fonction spatiale $\psi \in \mathcal{U}_h^{ad}$ est identifiée par le vecteur $\boldsymbol{\psi} = [\psi_1, \dots, \psi_P]^T \in \mathbb{R}^{N_x}$ tel que $\psi(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{N_x} N_i(\underline{x}) \psi_i$ où $\mathcal{U}_h^{ad} = \text{span} \{N_i(\underline{x})\}_{i \in [1, N_x]}$.

Avec ces hypothèses, les opérateurs différentiels et intégraux peuvent s'interpréter sous une forme discrète permettant d'approximer les différents opérateurs bilinéaires et linéaires respectivement par des matrices et des vecteurs, tels que $B_l^x(\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2) = \boldsymbol{\psi}_2^T \mathbb{B}_l^x \boldsymbol{\psi}_1$ et $L_l^x(\boldsymbol{\psi}) = \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{L}_l^x$.

Le problème (1.12) complètement discrétisé s'écrit alors :

$$\text{Trouver } \mathbf{U}_h \in \mathcal{U}_h^{ad} \otimes \mathcal{T}_h \otimes \mathcal{P}_h \text{ tel que } \mathbf{V}_h \cdot \left(\sum_{l=1}^{m_B} \mathbb{B}_l^x \otimes \mathbb{B}_l^t \otimes \mathbb{B}_l^p \right) \cdot \mathbf{U}_h = \mathbf{V}_h \cdot \left(\sum_{l=1}^{m_L} \mathbf{L}_l^x \otimes \mathbf{L}_l^t \otimes \mathbf{L}_l^p \right) \forall \mathbf{V}_h \quad (1.15)$$

Les différents problèmes simples (1.13) particularisent le problème discret précédent (1.15). Par exemple, le problème spatial (1.13a) discrétisé consiste à chercher les valeurs discrètes $\boldsymbol{\psi} \in \mathbb{R}^{N_x}$ solution du système linéaire, connaissant les valeurs discrètes $\boldsymbol{\lambda}$ et $\boldsymbol{\gamma}_j$:

$$\left(\sum_{l=1}^{m_B} \left[(\boldsymbol{\lambda}^T \mathbb{B}_l^t \boldsymbol{\lambda}) \prod_{j=1}^N (\boldsymbol{\gamma}_j^T \mathbb{B}_l^{p_j} \boldsymbol{\gamma}_j) \right] \mathbb{B}_l^x \right) \boldsymbol{\psi} = \sum_{l=1}^{m_L} \left[(\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{L}_l^t) \prod_{j=1}^N (\boldsymbol{\gamma}_j^T \mathbf{L}_l^{p_j}) \right] \mathbf{L}_l^x - \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^{m_B} \left[(\boldsymbol{\lambda}^T \mathbb{B}_l^t \boldsymbol{\lambda}_i) \prod_{j=1}^N (\boldsymbol{\gamma}_j^T \mathbb{B}_l^{p_j} \boldsymbol{\gamma}_{i,j}) \right] (\mathbb{B}_l^x \boldsymbol{\psi}_i)$$

3.3 Petrov-Galerkin-PGD (PG-PGD)

La précédente stratégie s'étend naturellement au critère d'orthogonalité de Petrov-Galerkin [Brooks et Hughes, 1982, p.207] donnant naissance à une nouvelle stratégie notée PG-PGD. Cette stratégie, également connue sous le nom de MinMax [Nouy, 2010, p.1610], est adaptée aux EDPs

composées de termes d'ordre impair qui impliquent une perte de symétrie dans la formulation faible, comme c'est le cas pour les problèmes instationnaires ou d'advection. La formulation Petrov-Galerkin repose sur la formulation variationnelle (1.10) où l'inconnue u et la fonction test v appartiennent à des espaces fonctionnels différents.

Sous l'hypothèse de variables séparées (1.11), la fonction test v est prise sous la forme d'un produit de fonctions différentes $(\tilde{\psi}, \tilde{\lambda}, \tilde{\Gamma}) \in \mathcal{U}_0^{ad} \times \mathcal{T} \times \mathcal{P}$ tel que le nouveau couple PGD $(\psi, \lambda, \Gamma) \in \mathcal{U}_0^{ad} \times \mathcal{T} \times \mathcal{P}$ soit optimal au sens de l'orthogonalité de Petrov-Galerkin :

$$\begin{aligned} B(u_{m-1} + \psi\lambda\Gamma, \tilde{\psi}^* \tilde{\lambda} \tilde{\Gamma} + \tilde{\psi} \tilde{\lambda}^* \tilde{\Gamma} + \tilde{\psi} \tilde{\lambda} \tilde{\Gamma}^*) &= L(\tilde{\psi}^* \tilde{\lambda} \tilde{\Gamma} + \tilde{\psi} \tilde{\lambda}^* \tilde{\Gamma} + \tilde{\psi} \tilde{\lambda} \tilde{\Gamma}^*) \\ &\forall (\tilde{\psi}^*, \tilde{\lambda}^*, \tilde{\Gamma}^*) \in \mathcal{U}_0^{ad} \times \mathcal{T} \times \mathcal{P} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Comme précédemment, cette équation conduit naturellement au couplage de plusieurs problèmes simples :

$$B(u_m + \psi\lambda\Gamma, \tilde{\psi}^* \tilde{\lambda} \tilde{\Gamma}) = L(\tilde{\psi}^* \tilde{\lambda} \tilde{\Gamma}) \quad \forall \tilde{\psi}^* \in \mathcal{U}_0^{ad} \quad (1.17a)$$

$$B(u_m + \psi\lambda\Gamma, \tilde{\psi} \tilde{\lambda}^* \tilde{\Gamma}) = L(\tilde{\psi} \tilde{\lambda}^* \tilde{\Gamma}) \quad \forall \tilde{\lambda}^* \in \mathcal{T} \quad (1.17b)$$

$$\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad B(u_m + \psi\lambda\Gamma, \tilde{\psi} \tilde{\lambda} \tilde{\gamma}_i^* \tilde{\Gamma}_i) = L(\tilde{\psi} \tilde{\lambda} \tilde{\gamma}_i^* \tilde{\Gamma}_i) \quad \forall \tilde{\gamma}_i^* \in \mathcal{P}_i \quad (1.17c)$$

Cependant, des équations supplémentaires sont nécessaires pour pouvoir déterminer intégralement les fonctions $\tilde{\psi}$, $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\Gamma}$. Elles sont bâties sur un principe d'orthogonalité pour chaque espace d'approximation, selon le produit scalaire $\langle\langle \bullet, \circ \rangle\rangle$:

$$B(\psi^* \lambda \Gamma, \tilde{\psi} \tilde{\lambda} \tilde{\Gamma}) = \langle\langle \psi^* \lambda \Gamma, \psi \lambda \Gamma \rangle\rangle \quad \forall \psi^* \in \mathcal{U}_0^{ad} \quad (1.18a)$$

$$B(\psi \lambda^* \Gamma, \tilde{\psi} \tilde{\lambda} \tilde{\Gamma}) = \langle\langle \psi \lambda^* \Gamma, \psi \lambda \Gamma \rangle\rangle \quad \forall \lambda^* \in \mathcal{T} \quad (1.18b)$$

$$\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad B(\psi \lambda \gamma_i^* \Gamma_i, \tilde{\psi} \tilde{\lambda} \tilde{\Gamma}) = \langle\langle \psi \lambda \gamma_i^* \Gamma_i, \psi \lambda \Gamma \rangle\rangle \quad \forall \gamma_i^* \in \mathcal{P}_i \quad (1.18c)$$

Le nouveau mode PGD est alors recherché comme le produit des fonctions ψ, λ et Γ vérifiant simultanément les équations (1.17) et (1.18). Un algorithme de type *point fixe* est alors adopté afin de calculer ce couple. La stratégie est semblable à la stratégie G-PGD, en doublant le nombre de problèmes à résoudre successivement.

Remarque 1.5. Comme pour la stratégie G-PGD, l'erreur $u_{ex} - u_m$ est orthogonale à l'espace d'approximation $\{\tilde{\psi}_i \otimes \tilde{\lambda}_i \otimes \tilde{\Gamma}_i\}_{i=\llbracket 1, m \rrbracket}$ selon le produit scalaire défini par l'opérateur $B(\bullet, \circ)$.

3.4 Minimisation du résidu (RM-PGD)

Lorsque l'opérateur $B(\bullet, \circ)$ est non-symétrique, la convergence G-PGD n'est plus assurée. Plusieurs travaux [Nouy et Ladevèze, 2004, Ammar *et al.*, 2010b] ont proposé une stratégie en minimisant le résidu selon une certaine norme, appelée Minimal Residual PGD (RM-PGD). Cette définition est plus robuste, la convergence étant monotone selon la norme choisie [Billaud-Friess *et al.*, 2014], mais plus lente en pratique. Classiquement, la norme $\|\bullet\|$ définie sur l'espace \mathcal{L}^2 est choisie.

3.4.1 Reformulation du problème

On peut reformuler le problème (1.10) comme un problème de minimisation. On définit le résidu $\mathcal{R}(u) \in \mathcal{U}_0^{ad} \otimes \mathcal{T} \otimes \mathcal{P}$ du problème de référence (1.10), défini par :

$$\langle\langle v, \mathcal{R}(u) \rangle\rangle = L(v) - B(u, v) = \langle\langle v, \ell - \mathcal{B}(u) \rangle\rangle \quad (1.19)$$

En injectant l'écriture à variables séparées (1.11), l'ensemble optimal $(\psi, \lambda, \Gamma) \in \mathcal{U}_0^{ad} \times \mathcal{T} \times \mathcal{P}$ est celui qui minimise la norme du résidu :

$$(\psi, \lambda, \Gamma) = \arg \min_{\psi, \lambda, \Gamma} \|\mathcal{R}(u_m + \psi \lambda \Gamma)\|^2 \quad (1.20a)$$

$$(\psi, \lambda, \Gamma) = \arg \min_{\psi, \lambda, \Gamma} \frac{1}{2} \left(\langle\langle \mathcal{B}(\psi \lambda \Gamma), \mathcal{B}(\psi \lambda \Gamma) \rangle\rangle - \langle\langle \mathcal{R}(u_{m-1}), \mathcal{B}(\psi \lambda \Gamma) \rangle\rangle \right) \quad (1.20b)$$

La stationnarité de (1.20) par rapport à chaque fonction du mode PGD inconnu conduit naturellement au couplage de plusieurs problèmes simples, identiques à ceux des stratégies précédentes :

$$\langle\langle \mathcal{B}(\psi \lambda \Gamma), \mathcal{B}(\psi^* \lambda \Gamma) \rangle\rangle = \langle\langle \mathcal{R}(u_{m-1}), \mathcal{B}(\psi^* \lambda \Gamma) \rangle\rangle \quad \forall \psi^* \in \mathcal{U}_0^{ad} \quad (1.21a)$$

$$\langle\langle \mathcal{B}(\psi \lambda \Gamma), \mathcal{B}(\psi \lambda^* \Gamma) \rangle\rangle = \langle\langle \mathcal{R}(u_{m-1}), \mathcal{B}(\psi \lambda^* \Gamma) \rangle\rangle \quad \forall \lambda^* \in \mathcal{T} \quad (1.21b)$$

$$\forall i, \quad \langle\langle \mathcal{B}(\psi \lambda \Gamma), \mathcal{B}(\psi \lambda \gamma_i^* \Gamma_i) \rangle\rangle = \langle\langle \mathcal{R}(u_{m-1}), \mathcal{B}(\psi \lambda \gamma_i^* \Gamma_i) \rangle\rangle \quad \forall \gamma_i^* \in \mathcal{P}_i \quad (1.21c)$$

Le nouveau mode PGD est alors recherché comme le produit des fonctions ψ, λ et Γ vérifiant simultanément les équations (1.21). Le calcul de ces fonctions est réalisé par la même stratégie de *point fixe*.

3.4.2 Aspects numériques

L'évaluation numérique des opérateurs $\langle\langle \mathcal{B}(\bullet), \mathcal{B}(\circ) \rangle\rangle$ et $\langle\langle \ell, \mathcal{B}(\bullet) \rangle\rangle$ n'est pas aisée, car elle nécessite l'introduction d'espaces adaptés pour garantir l'existence et l'unicité de la solution. Dans le cas d'un problème de thermique instationnaire, il faudrait définir $\mathcal{U}^{ad} = \{u \in \mathcal{H}^2(\Omega) \mid u = u_d \text{ dans } \partial_u \Omega\}$ et $\mathcal{T} = \mathcal{H}^1(\mathcal{I})$. En pratique, la minimisation du résidu s'effectue sur le problème de référence discrétisé après introduction des espaces d'approximation $\mathcal{U}_h^{ad}, \mathcal{T}_h$ et \mathcal{P}_h .

En réutilisant les développements décrits dans la Section 3.2.2, le problème (1.20) complètement discrétisé s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_h \in \mathcal{U}_h^{ad} \otimes \mathcal{T}_h \otimes \mathcal{P}_h \quad | \quad \mathbf{V}_h \left(\sum_{l=1}^{m_B} \sum_{l'=1}^{m_B} \left(\mathbb{B}_l^{x^T} \mathbb{B}_{l'}^x \right) \otimes \left(\mathbb{B}_l^{t^T} \mathbb{B}_{l'}^t \right) \otimes \left(\mathbb{B}_l^{p^T} \mathbb{B}_{l'}^p \right) \right) \cdot \mathbf{U}_h \\ = \mathbf{V}_h \left(\sum_{l=1}^{m_B} \sum_{l'=1}^{m_L} \left(\mathbb{B}_l^{x^T} \mathbf{L}_{l'}^x \right) \otimes \left(\mathbb{B}_l^{t^T} \mathbf{L}_{l'}^t \right) \otimes \left(\mathbb{B}_l^{p^T} \mathbf{L}_{l'}^p \right) \right) \quad \forall \mathbf{V}_h \quad (1.22) \end{aligned}$$

En développant les sommes, on peut se ramener à l'écriture G-PGD générique du problème discrétisé (1.15), équivalente à celle de la stratégie G-PGD appliquée à une formulation aux moindres carrés du problème. Seulement, les formes bilinéaire et linéaire possèdent désormais respectivement m_B^2 et $m_B \times m_L$ modes, nécessitant alors un effort numérique plus important que les autres stratégies (P)G-PGD.

Remarque 1.6. Lorsque le problème est symétrique, le problème élémentaire (1.22) est équivalent à celui obtenu par la G-PGD sur une formulation au moindre carré défini par les opérateurs bilinéaires $\mathbb{B}\mathbb{B}^*$ et l'opérateur linéaire $\mathbb{B}^*\mathbf{L}$ où \mathbb{B}^* est l'opérateur adjoint. Par conséquent, le coût de résolution d'un tel problème est plus élevé qu'avec la stratégie G-PGD.

Remarque 1.7. En introduisant le résidu discrétisé, $\underline{\mathbf{R}}(u) = \mathbb{B}\mathbf{u} - \mathbf{L}$, l'erreur $u_{ex} - u_m$ est orthogonale à l'espace d'approximation $\mathbb{B}^T \mathbb{B} \left(\mathcal{U}_h^{ad} \otimes \mathcal{T}_h \otimes \mathcal{P}_h \right)$ selon le produit scalaire euclidien, et

dépend fortement du conditionnement de l'opérateur discret $\mathbb{B}^T \mathbb{B}$.

3.5 Amélioration de la qualité des modes – phase d'orthogonalisation et de mise à jour

Les différentes stratégies ont en commun une même structure algorithmique, résumée sur la Figure 1.7, composée d'une boucle d'enrichissement ② et d'une boucle de *point fixe* ①. Ces stratégies diffèrent sur la définition des problèmes simples permettant de calculer les fonctions ψ , λ et $\{\gamma_n\}_{n=\llbracket 1, N \rrbracket}$.

Remarque 1.8. Pour des raisons de stabilité de l'algorithme *point fixe*, il est préférable de normaliser les fonctions ψ , λ et $\{\gamma_n\}_{n=\llbracket 1, N \rrbracket}$ après chaque calcul. Sur la Figure 1.7, on choisit arbitrairement de normaliser toutes les fonctions sauf la dernière γ_N , selon la norme \mathcal{L}^2 .

3.5.1 Phase de mise à jour

À chaque enrichissement, les $m-1$ modes précédemment calculés sont inchangés et ne peuvent bénéficier de la connaissance nouvellement acquise à travers le nouveau mode m . Une telle décomposition n'est pas optimale, car le résidu n'est pas orthogonal simultanément aux sous-espaces $\text{span}\{\psi_i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket} \subset \mathcal{U}^{ad}$, $\text{span}\{\lambda_i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket} \subset \mathcal{T}$ et $\text{span}\{\gamma_{i,j}\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket} \subset \mathcal{P}_j$.

Une solution consisterait à résoudre alternativement un ensemble de problèmes spatiaux couplés sur $\text{span}\{\psi_i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$, un ensemble de problèmes temporels couplés sur $\text{span}\{\lambda_i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ et N ensembles de problèmes en paramètres couplés sur $\text{span}\{\gamma_{i,j}\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$. Autant ces nouveaux problèmes temporels et en paramètres sont bon marché, autant le problème spatial est coûteux pour des problèmes à grand nombre de DDLs, rendant cette approche inapplicable en pratique.

Une autre alternative consiste à introduire une phase de mise à jour des modes, dite d'*update* ③ [Cognard et Ladevèze, 1993, Allier *et al.*, 2015] avant le calcul d'un nouveau mode PGD. Cette phase consiste à conserver le précédent mode spatial calculé et à mettre à jour l'ensemble des fonctions temporelles $\{\lambda_i\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ et en paramètres $\{\gamma_{i,j}\}_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ en résolvant ces ensembles de problèmes couplés, en bloc, évitant ainsi la résolution de l'ensemble des problèmes spatiaux couplés. Bien que cette stratégie ne conduise pas à une décomposition optimale, elle permet d'améliorer grandement le mode PGD suivant et donc la décomposition complète.

3.5.2 Phase d'orthogonalisation

Lorsque la phase d'*update* est activée, il est souvent utile d'orthogonaliser la base spatiale avant de recalculer l'ensemble des fonctions temporelles et en paramètres. Cette étape permet de « nettoyer » la base, améliorant encore la qualité de la solution PGD obtenue après la phase d'*update*.

3.5.3 Relèvement

Le traitement des conditions aux limites et/ou initiales non-homogènes nécessite un travail particulier. Tout problème non-homogène se réécrit sous la forme de deux problèmes équivalents, un problème non-homogène simple et un problème homogène : c'est le concept de relèvement. En introduisant $u_s \in \mathcal{L}^2(\mathcal{I}, \mathcal{U}^{ad})$ et $w_m \in \mathcal{U}_0^{ad} \otimes \mathcal{T}_0 \otimes \mathcal{P}$ avec $\mathcal{T}_0 = \{v \in \mathcal{T} \mid v|_{t=0^+} = 0\}$, on

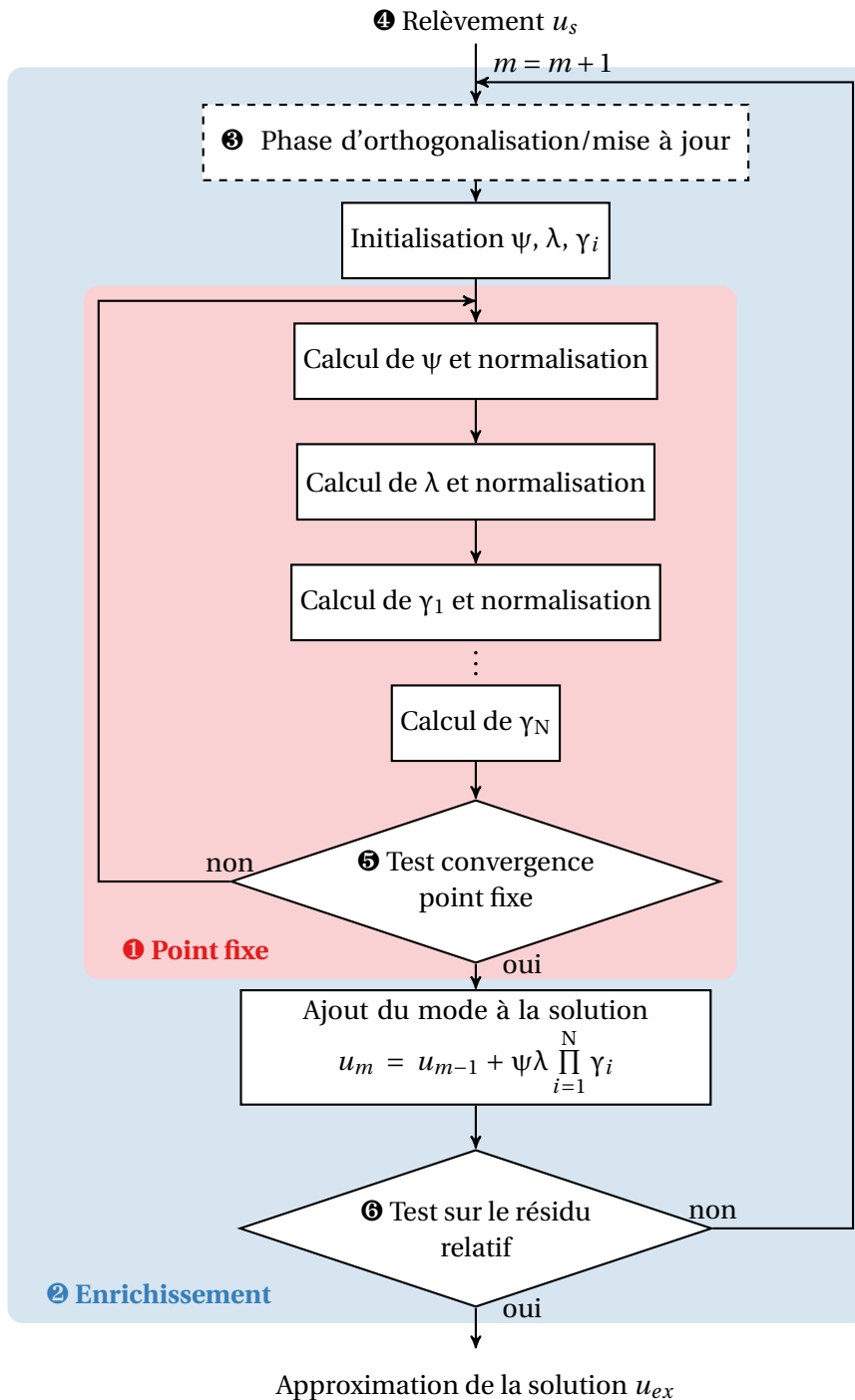


FIGURE 1.7 – Algorithme PGD de résolution d'un problème multiparamétrique

peut se ramener à l'écriture suivante :

$$u_m(\underline{x}, t, \underline{p}) = u_s(\underline{x}, t) + w_m(\underline{x}, t, \underline{p})$$

Bien que la forme du champ u_s est quelconque, un relèvement facile à obtenir consiste à résoudre le problème spatio-temporel par la méthode des éléments finis. On applique alors la PGD à la fonction w_m en imposant à zéros les conditions non-homogènes, en initialisant l'algorithme PGD par la solution u_s ④. La fonction w_m vérifie alors :

$$B(w_m, v) = L(v) - B(u_s, v) \quad \forall v \in \mathcal{U}_0^{ad} \otimes \mathcal{T}_0 \otimes \mathcal{P}$$

Il est également possible dans cette étape d'imposer un champ u_s plus riche au lieu de vérifier uniquement les conditions aux limites et initiales. Par exemple, u_s peut être issu de résultats expérimentaux.

4 Limites de la réduction de modèle PGD

Plus le nombre de modes PGD m requis est petit, plus la réduction de modèle PGD est efficace en terme de coût de calcul. Il est donc important d'avoir (i) une stratégie PGD **optimale** pour capturer la solution en peu de modes; (ii) un indicateur d'erreur de réduction **précis** et **efficace** pour stopper le processus d'enrichissement au bon moment.

On se propose dans cette partie de comparer les différentes stratégies PGD sur l'**Exemple 2** tiré de [Allier *et al.*, 2015] et défini ci-dessous.

► Exemple 2 (Benchmark)

Proposé par S. Idelshon, ce problème non-symétrique (1.1) consiste à chercher la température $u(\underline{x}, t)$ sur les domaines $\Omega = [0, L]$, $\mathcal{I} = [0, T]$, sans paramètre d'étude ($\Theta = \emptyset$). Une flamme en mouvement chauffe le barreau, modélisée par un terme source $f_d(x, t) = \delta(x - vt)$ de type Dirac, où v est la vitesse de déplacement de ce chargement. Une température nulle $u_d = 0^\circ\text{C}$ est imposée sur le bord du domaine $\partial_u \Omega = \partial \Omega = \{0; L\}$ (donc $\partial_r \Omega = \emptyset$). À l'état initial, la température du barreau est fixée à zéro, $u_0 = 0^\circ\text{C}$. On pose $L = 3,14$ m, $T = 1$ s, $c = 0,1$ JmK⁻¹, $k = 1$ Wm⁻¹K⁻¹, $v = \frac{L}{2T}$.

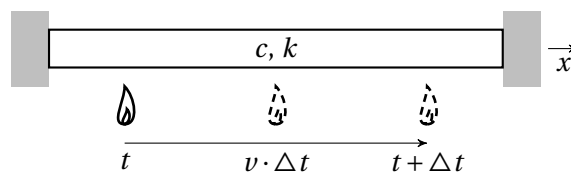


FIGURE 1.8 – Problème de l'**Exemple 2** pour comparer les performances des différentes stratégies PGD

L'**Exemple 2** est un problème espace-temps qui peut être résolu facilement par les méthodes classiques de type éléments finis. On a donc accès à une solution approximée u_h que l'on considèrera comme étant la solution de référence $u_{ref} = u_{ex}$ car calculée sur un maillage extrêmement raffiné en espace et en temps de façon à s'affranchir dans cette partie de l'erreur de discrétisation. De cette solution, on en déduit la décomposition optimale en effectuant une SVD selon la norme énergétique, comme décrit dans l'**Annexe B**. Cette décomposition servira de référence pour comparer les différentes stratégies PGD.

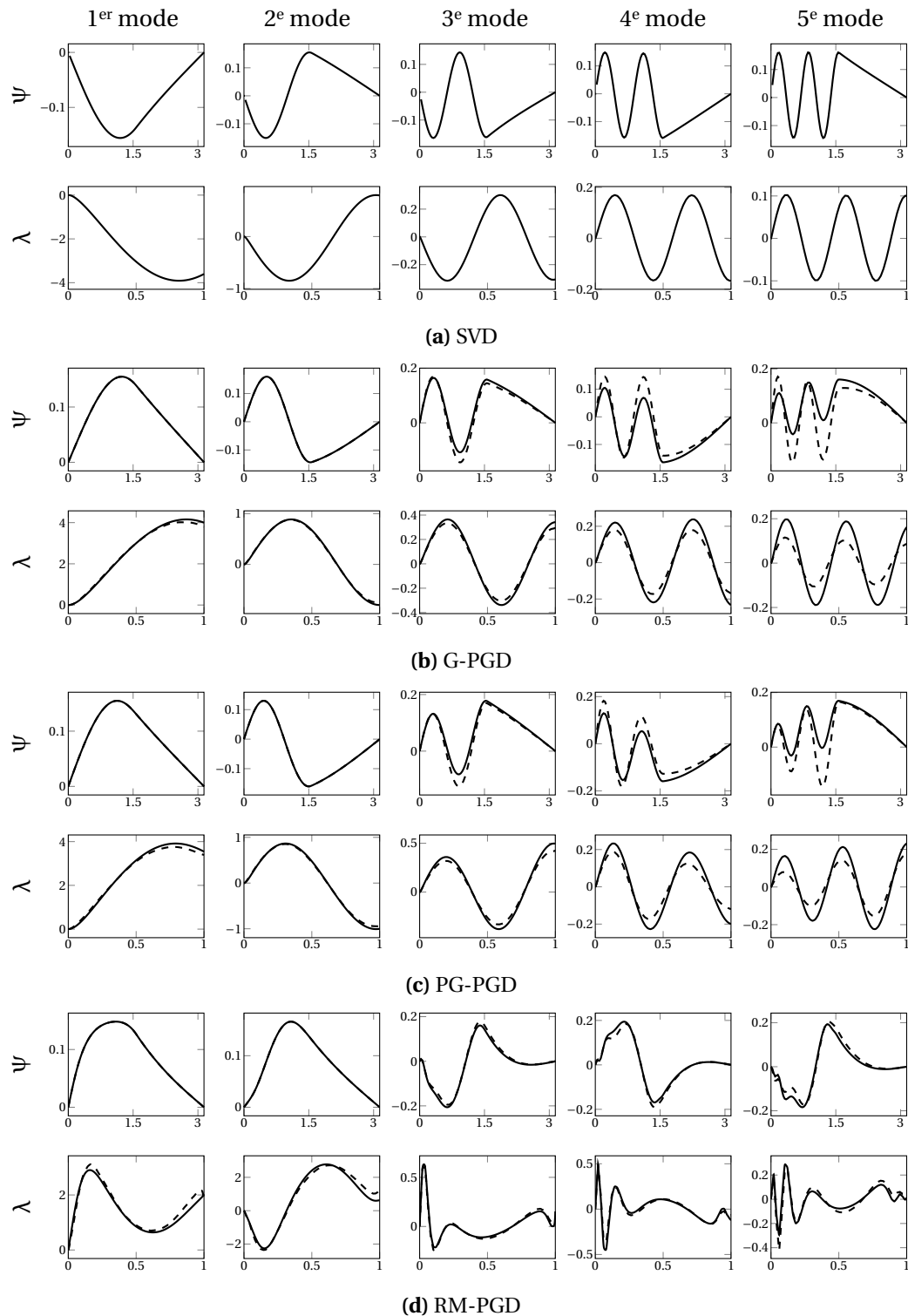


FIGURE 1.9 – Comparaison des 5 premiers modes de u_m obtenus par les différentes stratégies PGD : en trait discontinu les stratégies avec la phase d'*update* activée, en trait plein les stratégies sans phase d'*update*.

Sur la [Figure 1.9](#), on compare les cinq premiers modes déterminés par les différentes stratégies PGD aux modes de la décomposition optimale SVD. Comme espéré, l'amplitude des modes décroît à mesure qu'ils sont sélectionnés. On peut observer que les trois premiers modes de la stratégie G-PGD sont semblables à ceux de la SVD, au contraire des modes suivants qui tendent à s'en écarter. La phase d'*update* améliore ces modes tout en corrigeant également les modes spatiaux indirectement, les rapprochant des modes de la SVD. La stratégie Petrov-Galerkin-PGD (PG-PGD) génère des modes semblables. Finalement, la stratégie de minimisation du résidu capte des modes bien différents vérifiant une orthogonalité différente : par exemple, la somme des modes 2 et 3 est semblable à celle issue de la SVD, mais la décomposition est différente.

Il est difficile de comparer ces stratégies en n'étudiant que les modes, surtout en l'absence de modes référents, d'où l'intérêt des estimateurs d'erreur de réduction.

4.1 Erreur de réduction – richesse de la solution PGD

Au final deux boucles itératives imbriquées sont mises en place, nécessitant chacune un critère d'arrêt différent (voir [Figure 1.7](#)) :

- ⑤ **point fixe** cette boucle consiste à faire converger l'ensemble (ψ, λ, Γ) vers le mode optimal. La convergence est estimée en comparant le nouveau mode PGD calculé à sa valeur à l'itération précédente. Autrement dit, si on pose $(\psi^{(i)}, \lambda^{(i)}, \Gamma^{(i)})$ les fonctions calculées à la i -ème itération du *point fixe* pour le m -ème mode PGD, le *point fixe* est arrêté dès que l'on atteint une précision ϵ_{pf} généralement voisine de la précision machine :

$$\sqrt{\int_{\Theta} \int_{\mathcal{I}} \int_{\Omega} (\psi^{(i)} \otimes \lambda^{(i)} \otimes \Gamma^{(i)} - \psi^{(i-1)} \otimes \lambda^{(i-1)} \otimes \Gamma^{(i-1)})^2 d\Omega dt d\mathbf{p}} < \epsilon_{pf}$$

Une autre stratégie [[Nouy, 2010](#), p.1614] consiste à fixer a priori le nombre d'itérations ($k_{max} = 4$), comptant sur les modes PGD suivants pour corriger l'erreur de convergence si besoin.

- ⑥ **enrichissement PGD** La procédure d'enrichissement continue jusqu'à arriver à convergence du problème complet (1.10). Un indicateur possible et immédiat est de mesurer la norme du résidu introduit en (1.19), permettant de qualifier le défaut d'équilibre de la solution approximée PGD u_m . L'étape d'enrichissement est arrêtée dès que l'on atteint une erreur en résidu relatif E_{res} inférieure à une certaine précision $\epsilon_{res} \in [10^{-8}, 10^{-2}]$:

$$E_{res} = \|\mathcal{R}(u_m)\| \quad ; \quad \overline{E_{res}} = \frac{E_{res}}{\|\ell\|} < \epsilon_{res} \quad (1.23)$$

Connaissant dans ce cas la solution de référence, on peut introduire l'erreur exacte de réduction E_{ref} comme la distance entre la solution de référence u_h et la solution PGD u_m selon la norme énergétique, grandeur physique conservatrice adaptée pour quantifier et comparer des phénomènes physiques :

$$E_{ref} = \|u_h - u_m\|_{\mathcal{U}} \quad ; \quad \overline{E_{ref}} = \frac{E_{ref}}{\|u_h\|_{\mathcal{U}}} \quad (1.24)$$

La norme énergétique est définie par la relation :

$$\langle\langle \bullet, \circ \rangle\rangle_{\mathcal{U}} = \int_{\Theta} \int_{\mathcal{I}} \int_{\Omega} k \underline{\nabla} \bullet \cdot \underline{\nabla} \circ d\Omega dt d\mathbf{p}, \quad \|\bullet\|_{\mathcal{U}} = \sqrt{\langle\langle \bullet, \bullet \rangle\rangle_{\mathcal{U}}}$$

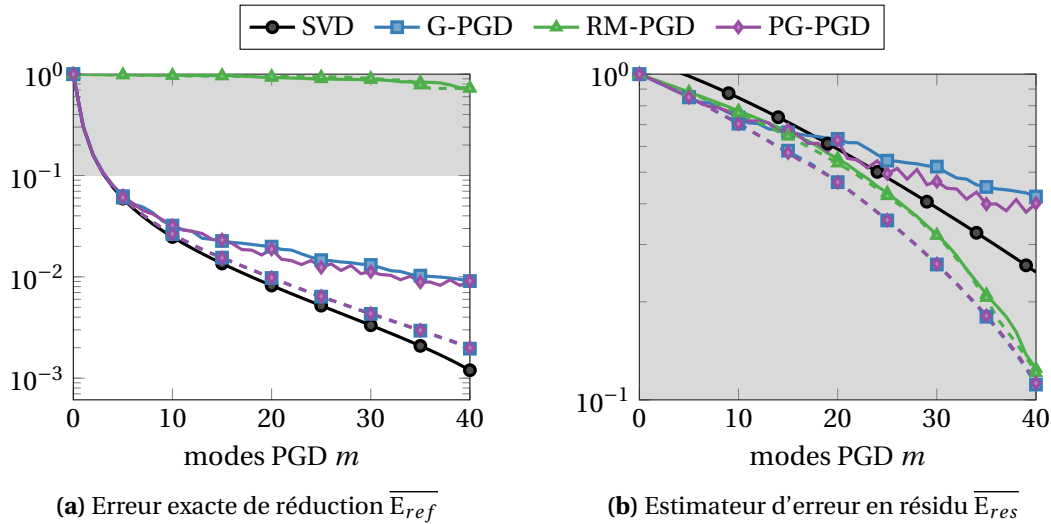


FIGURE 1.10 – Convergence des stratégies PGD : erreur exacte (a) et estimateur d’erreur en résidu (b). La zone grisée représente la même aire sur chaque courbe. Les courbes en trait discontinu représentent les versions des stratégies PGD avec la phase d’*update* activée, tandis que les courbes pleines sont associées aux stratégies PGD sans phase d’*update*.

La Figure 1.10 permet de comparer l’estimateur d’erreur en résidu \overline{E}_{res} à l’erreur exacte \overline{E}_{ref} de réduction sur le cas test (Figure 1.8) pour une vitesse de chargement fixée à $v = 1/2T$, selon les différentes stratégies PGD décrites dans ce chapitre, avec ou sans la phase d’*update*.

Aussi la Figure 1.10a représente l’erreur exacte de réduction des différentes stratégies à mesure que l’on ajoute des modes PGD. On observe que les méthodes (P)G-PGD donnent des résultats semblables. Les dix premiers modes sont même proches de la décomposition à variables séparées optimale déterminée par la SVD, mais au-delà, les vitesses de convergence diminuent. La phase d’*update* améliore significativement la qualité de l’approximation PGD, rendant même les deux méthodes équivalentes. En fixant un niveau d’erreur de 1%, ces stratégies nécessitent 20 modes tandis que la décomposition optimale SVD n’en nécessite que 18. Notons que la stratégie de RM-PGD présente une vitesse de convergence médiocre, même avec la phase d’*update* activée.

Dans le cas général, la solution de référence est inconnue et/ou on ne veut pas la calculer. Il est alors utile d’avoir accès à un estimateur d’erreur de réduction comme l’erreur en résidu \overline{E}_{res} , tracée sur la Figure 1.10b en fonction des modes PGD. Cet estimateur surestime grandement l’erreur de réduction par un facteur de l’ordre de 40 quelle que soit la stratégie employée. Selon cet estimateur, la meilleure décomposition est celle issue de la RM-PGD, selon une convergence uniforme, en désaccord avec la vraie erreur \overline{E}_{ref} . La raison tient dans le fait que la même norme \mathcal{L}^2 est employée à la fois dans le problème de minimisation (1.20) et la mesure de l’erreur en résidu (1.23). Ceci explique également que selon cet estimateur, la décomposition SVD n’est pas optimale, car elle a été calculée selon la norme énergétique et non \mathcal{L}^2 . La phase d’*update* n’améliore pas cette stratégie, contrairement aux stratégies (P)G-PGD.

Le but de la réduction de modèle étant de réduire le temps de calculs vis-à-vis d’une approche Éléments Finis (EF) brutale, on trace sur la Figure 1.11 le coût de calcul de chaque stratégie PGD, vis-à-vis du temps nécessaire t_{SVD} pour calculer la solution complète et sa décomposition par la SVD. On observe un gain appréciable de 5 pour ce problème simple si l’on se fixe un niveau d’erreur de 1%. Remarquons que le surcoût de la phase d’*update* n’est pas compensé par

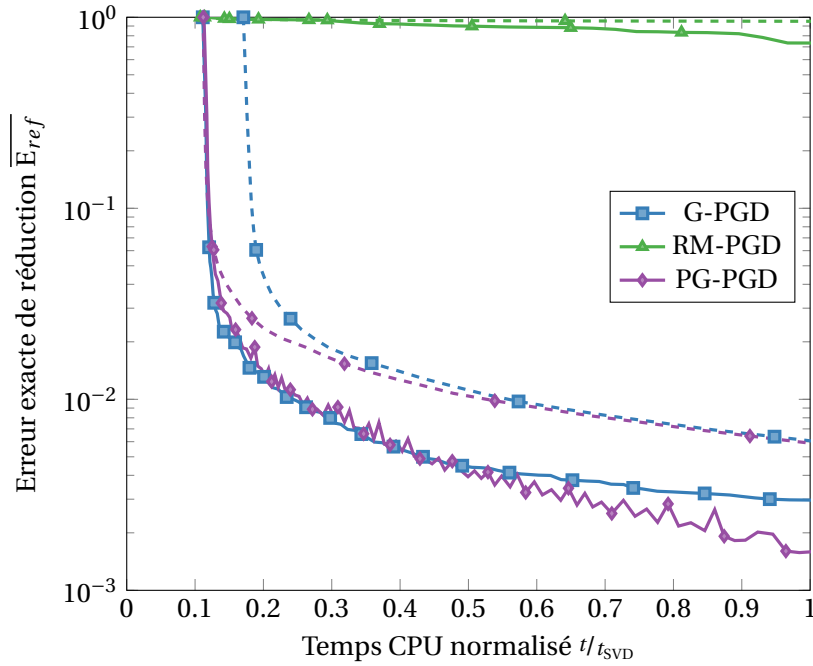


FIGURE 1.11 – Temps de calcul normalisé des différentes stratégies PGD selon l’erreur exacte de réduction \overline{E}_{ref} . En trait discontinu, les versions avec la phase d’*update* activée, et en trait plein les versions non mises à jour.

l’amélioration de la solution, bien qu’elle requiert moins de modes. Cependant, ce surcoût peut se compenser par le gain en termes de stockage et de post-traitement de la solution.

De ces courbes, on en conclut que :

- la stratégie de minimisation du résidu est à proscrire dans le cas de problèmes thermiques, tandis que les stratégies (P)G-PGD sont équivalentes : on privilégiera alors dans la suite de ces travaux la stratégie G-PGD ;
- la phase d’*update* améliore grandement la décomposition PGD la rendant quasi optimale ;
- l’estimateur d’erreur en résidu \overline{E}_{res} n’est ni précis ni efficace : ce constat est la raison de ces travaux qui cherchent à proposer un nouvel estimateur d’erreur plus précis et fiable, proposé au [Chapitre 2](#).

4.2 Séparabilité du problème – comparaison avec un relèvement intelligent

Comme présenté dans la [Section 3.5.3](#), on peut initialiser l’algorithme PGD par une solution précalculée u_s . Si cette contribution est bien choisie, l’algorithme PGD est accéléré car la solution u_m requiert moins de modes. La solution de l’[Exemple 2](#), utilisée dans cette partie peut s’écrire comme la somme de deux contributions [[Allier et al., 2015](#)] :

- un relèvement, solution du même problème où $\Omega =]-\infty, +\infty[$ est un domaine infini, ne vérifiant pas l’écriture à variables séparées ;
- une correction, dont l’objectif est d’imposer les conditions aux limites, calculée par la méthode PGD.

Le problème défini sur le domaine $\Omega =]-\infty, +\infty[$ s’écrit après le changement de variable $X = x - vt$ et $U(X) = u(x - vt)$:

$$\begin{cases} cv \frac{dU}{dX} + k \frac{d^2U}{d^2X} = -\delta(X) \\ U(x) = 0 \end{cases}$$

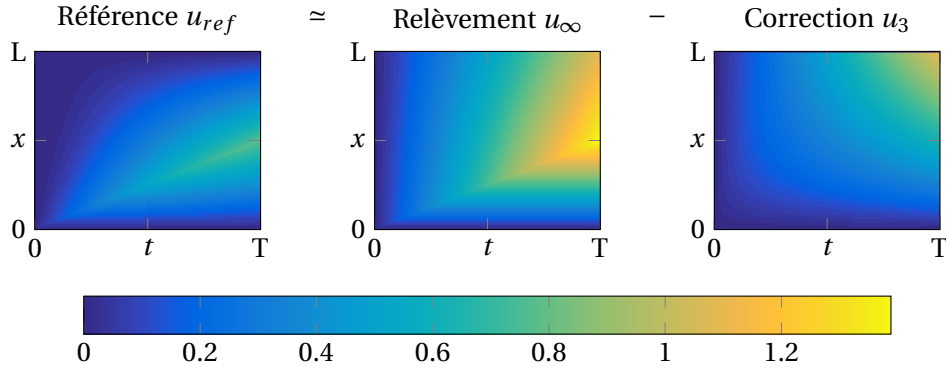


FIGURE 1.12 – Solution de référence u_{ref} (gauche), relèvement u_{∞} (milieu) et correction u_3 par la stratégie G-PGD avec 3 modes (droite), tel que $u_{ref} \approx u_{\infty} - u_3$ pour une erreur exacte de réduction de $\overline{E}_{ref} = 10^{-3}$ à $v = L/2T$.

En introduisant θ la fonction de Heaviside et K une constante réelle, la solution d'une telle équation différentielle ordinaire est immédiate et s'écrit :

$$u_{\infty}(x, t, K) = \frac{\theta(x) + K}{cv} \left(1 - \exp^{-\frac{cv}{k}x}\right) - \frac{\theta(x - vt) + K}{cv} \left(1 - \exp^{-\frac{cv}{k}(x - vt)}\right)$$

On initialise alors l'algorithme PGD par cette solution u_{∞} en ignorant la solution homogène, i.e. $K = 0 \text{ Wm}^2$. Pour respecter les conditions aux limites spatiales, on multiplie cette solution par des fonctions ad-hoc. La solution du problème initial u est alors cherchée sous une forme spécifique pour corriger ce relèvement, notamment à proximité des conditions aux limites :

$$u(x, t) \approx u_{\infty}(x, t, 0) \times (1 - \delta(x)) \times (1 - \delta(L - x)) - u_m(x, t) \quad (1.25)$$

Les fonctions PGD spatiales ψ_i et temporelles λ_i sont alors calculées par l'une des stratégies précédemment décrites. La [Figure 1.12](#) montre les différents termes de (1.25), où la correction u_m à 3 modes est suffisante pour représenter la solution du problème (erreur exacte de réduction de 0.1%) pour $v = L/2T$. Le relèvement montre de fortes discontinuités, difficiles en pratique à capturer par des modes PGD.

On propose sur la [Figure 1.13a](#) d'étudier l'influence de la vitesse de chargement sur le nombre de modes PGD requis en fixant l'erreur exacte de réduction à 1%. On peut remarquer que l'ensemble de méthodes de réduction de modèle, incluant la SVD, nécessite plus de modes PGD pour capturer la non-séparabilité du problème, à mesure que la vitesse de chargement croît. Au contraire, le relèvement proposé contient toute l'influence de la vitesse, 35 valeurs propres étant nécessaires pour représenter u_{∞} à une précision de 1%, et la correction PGD ne nécessite alors que quelques modes pour corriger la solution du problème.

La [Figure 1.13b](#) permet d'étudier l'influence du terme instationnaire de l'équation d'équilibre (1.1b), en comparant le nombre de modes PGD requis pour atteindre une erreur de réduction de 1% en fonction du coefficient c/k . Alors que les méthodes de réduction de modèle captent difficilement la solution, la correction du relèvement en nécessite beaucoup moins, sans influence de la valeur du rapport des coefficients matériaux c/k .

On en conclut que le terme transitoire de la solution du cas test ne vérifie pas l'hypothèse de séparation des variables. Quand le terme de diffusion est négligeable, le temps n'influe pas sur la solution et l'hypothèse est respectée. Dans le cas contraire, le temps n'est plus négligeable et la solution nécessite des modes supplémentaires pour capturer ce phénomène.

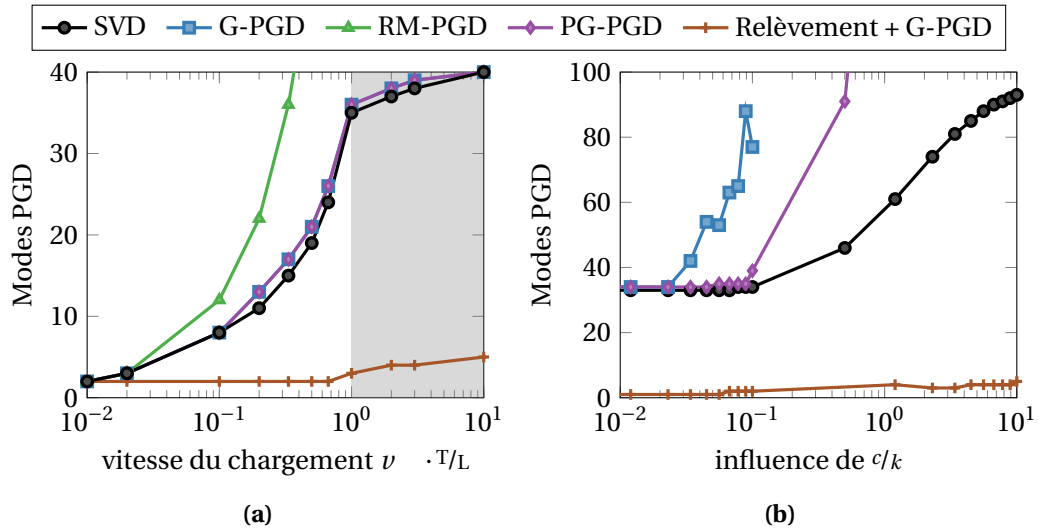


FIGURE 1.13 – Nombre de modes PGD requis pour cibler une erreur exacte de réduction $\overline{E_{ref}}$ de 10^{-2} : (a) en fonction de la vitesse de chargement v , où la zone grisée correspond aux vitesses où la flamme quitte le domaine; (b) en fonction du coefficient c/k avec $v = L/T$.

La PGD atteint ses limites dans le cadre de la dynamique transitoire [Boucinha, 2013, p.145], où la vitesse de convergence des stratégies PGD décroît à mesure que l’hypothèse de séparation des variables ne peut plus être respectée. Une solution pour contourner ce problème consisterait à :

- employer un relèvement connu adéquat, par exemple en faisant un calcul éléments finis espace-temps pour un jeu des paramètres fixé à la moyenne de leurs variations [Ladevèze, 2014a];
- faire un changement de base, où la flamme devient fixe et le domaine Ω mobile [Cagniard *et al.*, 2016].

Chapitre 2

Vérification de modèles réduits PGD

Ce second chapitre traite du sujet de la vérification d'approximation PGD. En particulier, une méthode attractive sera détaillée, bâtie sur le post-traitement de l'approximation PGD pour réutiliser les méthodes de vérification de solution EF, et illustrée sur divers exemples numériques.

Sommaire

1	Propriétés de la solution PGD	32
2	Définition des erreurs et de leurs origines	33
2.1	Origines des erreurs	33
2.2	Définitions des erreurs	34
2.3	Importance de ces erreurs	35
3	Vérification de solutions PGD	36
3.1	Notion d'estimateur d'erreur en éléments finis	36
3.2	Estimation d'erreur de réduction sur une quantité locale	37
3.3	Estimation d'erreur générique pour une solution PGD	37
4	Construction d'une solution équilibrée au sens des EF par post-traitement	37
5	Estimation d'erreur globale	40
5.1	Base de l'Erreur en Relation de Comportement (ERC)	40
5.2	Estimation d'erreur globale pour des approximations PGD	42
5.3	Séparation des sources d'erreur	44
5.4	Stratégie adaptative globale	46
6	Estimation d'erreur en quantité d'intérêt	48
6.1	Problème adjoint et approximation PGD associée	48
6.2	Estimateur d'erreur local sur une quantité d'intérêt	49
6.3	Stratégie adaptative locale	51
7	Application aux problèmes d'élasticité	53
8	Conclusion	54

Comme développé dans le [Chapitre 1](#), l'estimation d'erreur naturelle découlant de l'écriture de la PGD n'est pas suffisante pour piloter les algorithmes d'enrichissement PGD.

Après avoir rappelé les propriétés inhérentes aux approximations PGD ainsi que les sources d'écart vis-à-vis de la solution exacte, ce chapitre présentera l'état de l'art sur la vérification de solutions PGD. En particulier, une méthode bâtie sur le post-traitement de l'approximation PGD sera détaillée, permettant de réutiliser les outils de vérification employés dans le cadre Éléments

Finis (EF) tout en préservant les propriétés mathématiques de ces derniers. Cela permet ainsi de proposer une estimation garantie de l'erreur grâce à l'Erreur en Relation de Comportement (ERC), globale comme locale.

1 Propriétés de la solution PGD

Partant de l'écriture continue à variables séparées (1.11), la version discrétisée $u_m^{h,\Delta t}$ obtenue par les stratégies PGD s'écrit :

$$u_m^{h,\Delta t}(\underline{x}, t, \underline{p}) = \sum_{i=1}^m \psi_i^h(\underline{x}) \lambda_i^{\Delta t}(t) \prod_{j=1}^N \gamma_{i,j}(\underline{p}) \quad (2.1)$$

avec h (resp. Δt) la dimension caractéristique du maillage (resp. pas de temps) et ψ_i^h (resp. $\lambda_i^{\Delta t}$) les versions discrétisées des fonctions continues ψ_i (resp. λ_i) appartenant au sous-espace $\mathcal{U}_h^{ad} \subset \mathcal{U}^{ad}$ (resp. $\mathcal{T}_{\Delta t} \subset \mathcal{T}$).

Remarque 2.1. Bien que des discrétisations sur les paramètres p_j soient adoptées pour le calcul de la solution approchée, elles ne sont pas considérées dans la suite, car elles ne sont pas associées à une méthode d'approximation numérique (absence de dérivées sur les paramètres) que l'on cherche à adapter.

De cette solution discrète $u_m^{h,\Delta t}$, un flux lui est associé par la relation de comportement : $\underline{q}_m^{h,\Delta t} = k \nabla u_m^{h,\Delta t}$. Le couple $(u_m^{h,\Delta t}, \underline{q}_m^{h,\Delta t})$ forme ainsi la solution approchée du problème discrétisé obtenue par la PGD.

En supposant que les maillages Ω_h et $\mathcal{I}_{\Delta t}$ coïncident avec leur domaines respectifs Ω et \mathcal{I} , le choix des espaces d'approximation éléments finis \mathcal{U}_h^{ad} et $\mathcal{T}_{\Delta t}$ implique que $\mathcal{U}_h^{ad} \subset \mathcal{U}^{ad}$ et $\mathcal{T}_{\Delta t} \subset \mathcal{T}$. De plus, en imposant les conditions limites et initiales en température par élimination ou par des multiplicateurs de Lagrange, la solution discrète $u_m^{h,\Delta t}$ les satisfait exactement sur les domaines discrets associés. En supposant que les espaces d'approximation éléments finis sont suffisamment riches pour représenter ces conditions, la solution approchée primale $u_m^{h,\Delta t}$ issue de la PGD est CA :

$$u_m^{h,\Delta t} \in \mathcal{U}_h^{ad} \otimes \mathcal{T}_{\Delta t} \otimes \mathcal{P} \subset \mathcal{U}^{ad} \otimes \mathcal{T} \otimes \mathcal{P}$$

En revanche, le flux associé $\underline{q}_m^{h,\Delta t}$ présente plusieurs défauts :

1. le non-respect des équations d'équilibre au sens faible en espace et/ou en temps $\underline{q}_m^{h,\Delta t} \notin \mathcal{S}_h^{ad} \otimes \mathcal{T}_{\Delta t} \otimes \mathcal{P}$:

$$\int_{\Omega} \underline{q}_m^{h,\Delta t} \cdot \nabla v \, d\Omega \neq l(v) - \int_{\Omega} c \frac{\partial u_m^{h,\Delta t}}{\partial t} \, d\Omega \quad \forall v \in \mathcal{U}_0^{ad}, \forall t \in \mathcal{I}, \forall \underline{p} \in \mathcal{P}$$

même au sens des éléments finis :

$$\int_{\Omega} \underline{q}_m^{h,\Delta t} \cdot \nabla v \, d\Omega \neq l(v) - \int_{\Omega} c \frac{\partial u_m^{h,\Delta t}}{\partial t} \, d\Omega \quad \forall v \in \mathcal{U}_{0,h}^{ad}, \forall t \in \mathcal{I}, \forall \underline{p} \in \mathcal{P}$$

2. le non-respect des conditions d'admissibilité statique du problème de référence $\underline{q}_m^{h,\Delta t} \notin \mathcal{S}^{ad} \otimes \mathcal{T} \otimes \mathcal{P}$, notamment :

- le non-respect des conditions aux limites en flux :

$$\underline{q}_m^{h,\Delta t} \cdot \underline{n} \neq r_d \quad \text{sur } \partial_r \Omega \times \mathcal{I} \times \Theta$$

- le non-respect de l'équilibre intérieur :

$$c \frac{\partial u_m^{h,\Delta t}}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \underline{q}_m^{h,\Delta t} \neq f_d \quad \text{dans } \Omega \times \mathcal{I} \times \Theta$$

- le non-respect de l'équilibre interne entre éléments du maillage dû à la discontinuité du flux normal à l'interface de deux éléments K et K' du maillage Ω_h :

$$\llbracket \underline{q}^{h,\Delta t} \cdot \underline{n} \rrbracket = \underline{q}_K^{h,\Delta t} \cdot \underline{n}_K + \underline{q}_{K'}^{h,\Delta t} \cdot \underline{n}_{K'} \neq 0 \quad \text{sur } (\partial K \cap \partial K') \times \mathcal{I} \times \Theta$$

\underline{n}_K et $\underline{n}_{K'}$ étant les normales unitaires sortantes des éléments K et K' adjacents.

L'espace vectoriel \mathcal{S}_h^{ad} du flux SA au sens des éléments finis se définit par :

$$\mathcal{S}_h^{ad}(u) = \left\{ \underline{q} \in [\mathcal{L}^2(\Omega)]^d \mid \int_{\Omega} c \frac{\partial u}{\partial t} v + \underline{q} \cdot \underline{\nabla} v \, d\Omega = l(v) \quad \forall v \in \mathcal{U}_{0,h}^{ad} \right\}$$

Le premier point est la conséquence directe de l'application de l'algorithme PGD au problème de référence. Le champs u_m appartient au sous-espace $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}^{ad} \otimes \mathcal{T} \otimes \mathcal{P}$ formé des fonctions s'écrivant comme une somme de produit de fonctions appartenant aux espaces \mathcal{U}^{ad} , \mathcal{T} et \mathcal{P} . Par conséquent, u_m (et donc \underline{q}_m grâce à la relation de comportement) n'est admissible que sur le sous-espace \mathcal{V} et malheureusement pas sur l'espace $\mathcal{U}^{ad} \otimes \mathcal{T} \otimes \mathcal{P}$.

Le second point est la conséquence de l'adoption d'une résolution par la MEF en déplacement, défaut également présent dans toute solution EF $u^{h,\Delta t}$.

2 Définition des erreurs et de leurs origines

2.1 Origines des erreurs

En pratique, la solution discrétisée $u_m^{h,\Delta t}$ n'est qu'une approximation de la solution exacte u_{ex} . L'erreur ainsi commise a plusieurs origines :

- **erreur de réduction** : issue de la représentation à variable séparées (2.1) où la somme est tronquée à l'ordre m , vue dans le [Chapitre 1](#);
- **erreur de discrétisation** : issue de la projection des fonctions recherchées ψ , λ , γ_i ... sur un maillage;
- **erreurs numériques additionnelles** : prenant leurs origines dans : (i) le non-respect de la géométrie initiale complexe Ω par le maillage Ω_h ; (ii) une représentation approximative des conditions aux limites par la base d'approximation choisie; (iii) le traitement numérique du problème discrétisé (approximation commise par les méthodes d'intégration numérique, erreurs d'arrondis à la précision machine ...).

Dans la plupart des cas, les erreurs numériques additionnelles peuvent être négligées vis-à-vis des deux autres sources d'erreurs, sous réserve d'un choix judicieux des paramètres de discrétisation, de la base d'approximation éléments finis et des solveurs numériques utilisés.

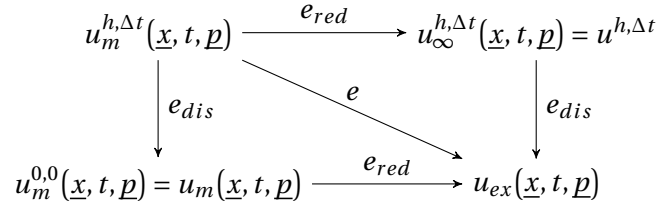


FIGURE 2.1 – Les différentes sources d’erreurs, avec $u_m^{h,\Delta t}$ l’approximation PGD, $u^{h,\Delta t}$ l’approximation EF et u_{ex} la solution exacte.

2.2 Définitions des erreurs

Tronquée à un ordre fini m , la solution PGD discrétisée $(u_m^{h,\Delta t}, \underline{q}_m^{h,\Delta t})$ n’est qu’une approximation de la solution EF en déplacement $(u^{h,\Delta t}, \underline{q}^{h,\Delta t})$ définie sur les mêmes maillages Ω_h et $\mathcal{I}_{\Delta t}$. La solution EF n’est quant à elle qu’une approximation de la solution exacte $(u_{ex}, \underline{q}_{ex})$ du problème de référence. Pour quantifier la qualité de ces approximations, représentées sur la [Figure 2.1](#), on définit :

- l’erreur totale : $e = u_{ex} - u_m^{h,\Delta t}$
- l’erreur de réduction : $e_{red} = u^{h,\Delta t} - u_m^{h,\Delta t}$
- l’erreur de discrétisation : $e_{dis} = u_{ex} - u^{h,\Delta t} = e - e_{red}$

En injectant l’expression des erreurs dans la formulation faible PGD (1.10), elles sont solutions des problèmes :

- Trouver $e \in \mathcal{U}_0^{ad} \otimes \mathcal{T} \otimes \mathcal{P}$ vérifiant :

$$\int_{\Theta} \int_{\mathcal{I}} \int_{\Omega} c \frac{\partial e}{\partial t} v + k \underline{\nabla} e \cdot \underline{\nabla} v \, d\Omega \, dt \, d\underline{p} = \underbrace{L(v) - B(u_m^{h,\Delta t}, v)}_{\langle\langle\langle v, \mathcal{R}(u_m^{h,\Delta t}) \rangle\rangle\rangle} \quad \forall v \in \mathcal{U}_0^{ad} \otimes \mathcal{T} \otimes \mathcal{P} \quad (2.2)$$

- Trouver $e_{red} \in \mathcal{U}_{0,h}^{ad} \otimes \mathcal{T}_{\Delta t} \otimes \mathcal{P}$ vérifiant :

$$\int_{\Theta} \int_{\mathcal{I}} \int_{\Omega} c \frac{\partial e_{red}}{\partial t} v + k \underline{\nabla} e_{red} \cdot \underline{\nabla} v \, d\Omega \, dt \, d\underline{p} = \underbrace{L(v) - B(u_m^{h,\Delta t}, v)}_{\langle\langle\langle v, \mathcal{R}(u_m^{h,\Delta t}) \rangle\rangle\rangle} \quad \forall v \in \mathcal{U}_{0,h}^{ad} \otimes \mathcal{T}_{\Delta t} \otimes \mathcal{P} \quad (2.3)$$

Remarque 2.2. En prenant $v = \mathcal{R}(u_m^{h,\Delta t}) \in \mathcal{U}_{0,h}^{ad} \otimes \mathcal{T}_{\Delta t} \otimes \mathcal{P}$ dans le problème (2.3), le second membre est l’erreur en résidu E_{res}^a et est donc une image de l’erreur de réduction e_{red} .

$$\int_{\Theta} \int_{\mathcal{I}} \int_{\Omega} \left[c \frac{\partial e_{red}}{\partial t} \mathcal{R}(u_m^{h,\Delta t}) + k \underline{\nabla} e_{red} \cdot \underline{\nabla} \mathcal{R}(u_m^{h,\Delta t}) \right] d\Omega \, dt \, d\underline{p} = E_{res}$$

a. Défini au [Chapitre 1 Section 4.1](#).

La résolution des problèmes (2.2) et (2.3) est aussi complexe et coûteuse que le problème de référence, et leurs solutions sont généralement inaccessibles. Ainsi, les méthodes d’estimation d’erreur ne cherchent pas à déterminer la valeur de ces erreurs en tout point du domaine $\Omega \times \mathcal{I} \times \Theta$, mais plutôt des mesures pertinentes, globales ou locales.

2.2.1 Mesure globale

On définit une mesure globale sur l'ensemble du domaine $\Omega \times \mathcal{I}$ selon la norme énergétique $\| \bullet \|_{\mathcal{U}^{ad} \otimes \mathcal{L}^2(\mathcal{I})}$ au contenu physique fort car elle dépend du comportement du matériau :

$$E(\underline{p}) = \| e \|_{\mathcal{U}^{ad} \otimes \mathcal{L}^2(\mathcal{I})} = \left\| u_{ex} - u_m^{h, \Delta t} \right\|_{\mathcal{U}^{ad} \otimes \mathcal{L}^2(\mathcal{I})}$$

Équivalente aux normes usuelles sur les espaces \mathcal{L}^2 et \mathcal{H}^1 , cette norme permet également de définir une contribution élémentaire E_K , sur chaque élément K , à l'erreur globale E :

$$E_K(\underline{p}) = \| e \|_{\mathcal{U}^{ad} \otimes \mathcal{L}^2(\mathcal{I}), K} \text{ vérifiant } \sum_{K \in \Omega_h \otimes \mathcal{I}_{\Delta t}} E_K^2(\underline{p}) = \| e \|_{\mathcal{U}^{ad} \otimes \mathcal{L}^2(\mathcal{I})}^2 = E^2(\underline{p})$$

2.2.2 Mesure locale sur des quantités d'intérêt

On définit une mesure locale ΔQ de l'erreur sur une quantité d'intérêt $Q(u)$, vue comme un extracteur de la grandeur physique scalaire à partir de la connaissance de la solution u , par :

$$\Delta Q = Q(u_{ex}) - Q(u_h) = Q_{ex} - Q_h$$

Qualifiée d'erreur en quantité d'intérêt, elle mesure l'écart entre les valeurs exacte Q_{ex} et approchée Q_h prises par la quantité d'intérêt sur les solutions exacte u_{ex} et approchée u_h . Par exemple, les quantités d'intérêt peuvent être :

- la valeur ponctuelle de la température ou du flux selon une direction donnée, en un point donné de la structure $\underline{M} \in \Omega$;
- la moyenne de la température ou du flux, sur une zone prédéfinie $w \subset \Omega$;
- ...

2.3 Importance de ces erreurs

Dans le [Chapitre 1](#), une discrétisation très fine (h et Δt tendant vers 0) avait été adoptée dans l'illustration numérique de l'[Exemple 2](#) pour s'affranchir de l'erreur de discrétisation, dont une solution dite de référence $u_{ref} = u_{ex}$ est connue. En pratique, seule une discrétisation plus grossière à la fois en temps et en espace est numériquement accessible : de cette discrétisation, une approximation PGD est calculée $u_m^{h, \Delta t}$ et une solution EF $u^{h, \Delta t}$ est calculée. Grâce à l'erreur E_{ref} et ces différentes solutions, les différentes sources d'erreur sont déterminées et représentées sur la [Figure 2.2](#). Pour ce problème grossier ($N_x = 10$ et $N_t = 10$), il est inutile d'aller au-delà de quatre modes sans adaptation du maillage, l'erreur majoritaire provenant de l'erreur issue de la discrétisation des domaines spatial et temporel.

L'erreur de discrétisation en espace et en temps ne peut pas être négligée. Si la taille caractéristique des éléments finis h (resp. pas de temps Δt) n'est pas adaptée, l'erreur totale commise dans la simulation, composées de la somme des erreurs de réduction et de discrétisation, ne pourra jamais être inférieure à un critère d'erreur, quel que soit le nombre de modes ajoutés à l'approximation PGD. Par conséquent, il convient de veiller non seulement au nombre de modes m dans l'approximation PGD, mais également à la taille caractéristique des éléments finis h et au pas de temps Δt .

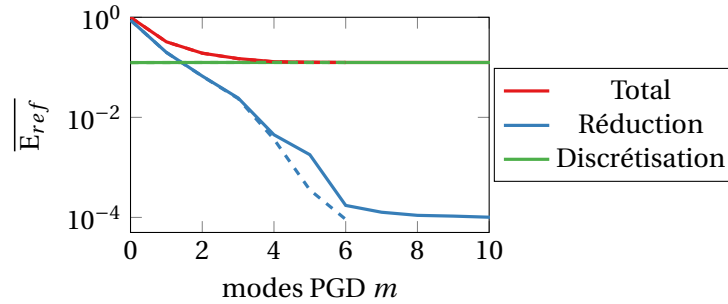


FIGURE 2.2 – Erreur exacte des différentes sources d’erreurs pour l’Exemple 2 : en trait discontinu, l’approximation G-PGD avec mise à jour des fonctions du temps, en trait plein l’approximation G-PGD sans.

3 Vérification de solutions PGD

Le Chapitre 1 a montré l’importance d’évaluer (ou d’estimer correctement) l’erreur de réduction de modèle. Cependant, peu de travaux abordent la problématique de la vérification de solutions PGD, en opposition à la vaste littérature consacrée au contrôle des solutions RB : basée sur des estimateurs *a priori* [Machiels *et al.*, 2001], des estimateurs *a posteriori* en résidu d’équilibre explicites [Grepel et Patera, 2005, Rovas *et al.*, 2005, Boyaval *et al.*, 2009, Quarteroni *et al.*, 2011] ou sur la non-vérification de l’Erreur en Relation de Comportement (ERC) [Gallimard et Ryckelynck, 2016], en s’inspirant grandement des méthodes d’estimation d’erreur développées dans le cadre des EF.

3.1 Notion d’estimateur d’erreur en éléments finis

Les méthodes d’estimation d’erreur cherchent à évaluer une mesure approchée de l’erreur globale ou locale, mesure qualifiée d’*erreur estimée*. Depuis les années 1970, de nombreux outils et méthodes ont été mis en place pour obtenir des estimateurs d’erreur dans le cadre des éléments finis. Citons :

- Estimations *a priori* [Aziz, 1972] qui n’utilisent pas la solution approchée $u^{h,\Delta t}$, mais les données d’entrée du problème.
- Estimations *a posteriori* exploitant les défauts de la solution approchée ($u^{h,\Delta t}, q^{h,\Delta t}$), parmi lesquelles :
 - Les défauts d’équilibre de la solution approchée, en exploitant les résidus d’équilibre [Babuška et Rheinboldt, 1978, Verfürth, 1994, Díez *et al.*, 1998, Strouboulis *et al.*, 2000]
 - Les défauts de régularité de la solution présentant des discontinuités à la traversée des interfaces entre éléments, reconstruits par des techniques de lissage [Zienkiewicz et Zhu, 1987, Zienkiewicz et Zhu, 1992];
 - la non-vérification de la relation de comportement, en exploitant le concept d’erreur en relation de comportement et des techniques de construction de champs équilibrés [Ladevèze, 1975, Ladevèze et Leguillon, 1983, Ladevèze et Pelle, 2005, Ladevèze *et al.*, 2010, Ladevèze et Chamoin, 2016].

Pour une étude détaillée des ces différents estimateurs d’erreurs dans le cadre EF, le lecteur pourra se référer à [Ladevèze et Pelle, 2005, Babuška et Strouboulis, 2001, Chamoin et Díez, 2016].

3.2 Estimation d'erreur de réduction sur une quantité locale

En remarquant qu'un intérêt majeur des simulations pour la conception est la prédiction de grandeurs mécaniques précises (quantités d'intérêt) dans des zones précises (région d'intérêt), les premiers travaux appliqués aux solutions PGD [Ammar *et al.*, 2010a, Alfaro *et al.*, 2015] ont cherché à estimer l'erreur de réduction en étendant l'erreur en résidu (1.23) à ces quantités d'intérêt. Ils se sont fortement inspirés des travaux développés dans le cadre éléments finis [Becker et Rannacher, 2001, Prudhomme et Oden, 1999].

L'erreur sur une quantité d'intérêt est obtenue grâce à un problème auxiliaire, connu sous le nom de problème adjoint (voir la Section 6.1) utilisé comme critère d'arrêt du problème direct. En introduisant φ_{ex} et φ_h les solutions exacte et approchée du problème adjoint, l'erreur sur la quantité d'intérêt peut se définir comme :

$$\Delta Q = b(u_{ex} - u_m^h, \varphi_{ex} - \varphi_h) \leq \|u_{ex} - u_m^h\| \cdot \|\varphi_{ex} - \varphi_h\|$$

Cette erreur est ensuite estimée en substituant φ_h par une solution approchée PGD obtenue avec N modes, où N est bien plus grand que le nombre de modes m utilisés pour la solution du problème direct. Une étude empirique menée dans [Alfaro *et al.*, 2015] a montré qu'il suffit de prendre $N = 5 + m$ pour déterminer une solution suffisamment précise du problème dual. Ainsi, à l'aide de l'erreur en résidu permettant d'estimer les erreurs $\|u_{ex} - u_m^h\|$ et $\|\varphi_{ex} - \varphi_h\|$, l'algorithme d'enrichissement peut être piloté.

L'inconvénient de cette méthode réside dans le fait que : (i) l'erreur de discrétisation n'est pas prise en compte ; (ii) l'erreur en résidu est employée malgré ses défauts ; (iii) aucune borne garantie de l'erreur commise n'existe.

3.3 Estimation d'erreur générique pour une solution PGD

Les premiers travaux sur le contrôle d'erreur de solution PGD sont le fruit de [Pelle et Ryckelynck, 2000]. Appliqué au cadre non-linéaire, leur proposition ne permet pas de construire des bornes d'erreurs garanties.

Dans [Ladevèze et Chamoin, 2011, Chamoin et Ladevèze, 2012], les auteurs ont développé une méthode bâtie sur l'ERC qui permet d'avoir des bornes garanties et précises de l'erreur commise par une approximation PGD. L'estimation d'erreur qui en résulte permet de prendre en compte toutes les sources d'erreurs décrites précédemment. C'est cette méthode que l'on va détailler et appliquer dans la suite de ce mémoire, sur la base d'avancées également décrites dans [Allier *et al.*, 2017b].

Une approche alternative à cette dernière a été proposée dans [Moitinho de Almeida, 2013]. Elle repose sur une approche PGD supplémentaire basée sur une formulation duale non classique sur l'inconnue q_m du problème de référence (1.1). Bien que permettant de construire un flux q_m admissible au sens des éléments finis, cette approche complexifie l'implémentation de la méthode par l'utilisation d'éléments finis [Kempeneers *et al.*, 2009] absents des codes éléments finis standard.

4 Construction d'une solution équilibrée au sens des EF par post-traitement

Bâties sur la formulation faible (1.10), les différentes stratégies PGD présentées au Chapitre 1 construisent une solution approximée $u_m^{h,\Delta t}$ (et un flux associé $q_m^{h,\Delta t} = k \nabla u_m^{h,\Delta t}$) vérifiant les

conditions d'admissibilité cinématique, mais échouant à vérifier les équations d'équilibre au sens faible en espace ou en temps.

Afin de remédier à cet inconvénient et d'être en mesure d'utiliser des outils d'estimation d'erreur définis dans la [Section 5](#) (inspirés de ceux utilisés dans le contexte de la MEF), on propose une méthode pour reconstruire des champs PGD vérifiant les équations d'équilibre au sens faible en espace, autrement dit équilibrés au sens des éléments finis. Un flux $\hat{\underline{q}}_m^h$ équilibré au sens des EF est construit uniquement à partir de la solution $u_m^{h,\Delta t}$ et des données du problème, tel que pour tout $(t, \underline{p}) \in \mathcal{I} \times \Theta$:

$$\int_{\Omega} c \frac{\partial u_m^{h,\Delta t}}{\partial t} v^h + \hat{\underline{q}}_m^h \cdot \underline{\nabla} v^h \, d\Omega = l(v^h) \quad \forall v^h \in \mathcal{U}_{0,h}^{ad} \quad (2.4)$$

Propriété 2.1. Un tel flux $\hat{\underline{q}}_m^h$ vérifie alors une écriture de la forme :

$$\hat{\underline{q}}_m^h(x, t, \underline{p}) = \hat{\underline{r}}^h(x, t, \underline{p}) + \sum_{i=1}^m \hat{\Phi}_i^h(x) c \frac{d\lambda_i^{\Delta t}(t)}{dt} \prod_j \gamma_{i,j}(p_j) \quad (2.5)$$

où le flux $\hat{\underline{r}}^h \in \mathcal{U}_h^{ad} \otimes \mathcal{T} \otimes \mathcal{P}$ vérifie le problème spatial ci-dessous, résolu par une méthode EF primale :

$$\forall t, \underline{p}, \text{ trouver } \hat{\underline{r}}^h \in \mathcal{U}_h^{ad} \text{ tel que } \int_{\Omega} \hat{\underline{r}}^h \cdot \underline{\nabla} v \, d\Omega = L(v) \quad \forall v \in \mathcal{U}_{0,h}^{ad} \quad (2.6)$$

Démonstration. Cette méthode exploite les propriétés vérifiées par toute approximation PGD $u_{m_0}^{h,\Delta t}$ calculée à l'ordre m_0 ($1 \leq m_0 \leq m$) par une méthode de point fixe pour résoudre le problème non linéaire (1.12) et stoppée après la résolution du sous-problème spatial (1.13a) sur l'espace d'approximation \mathcal{U}_h^{ad} :

$$\mathbb{B} \left(u_{m_0}^{h,\Delta t}, \Psi^* \lambda_{m_0}^{h,\Delta t} \prod_j \gamma_{m_0,j} \right) = L \left(\Psi^* \lambda_{m_0}^{\Delta t} \prod_j \gamma_{m_0,j} \right) \quad \forall \Psi^* \in \mathcal{U}_{0,h}^{ad} \quad (2.7)$$

En injectant la propriété (2.6) vérifiée par le flux $\hat{\underline{r}}^h$, le problème précédent (2.7) se réécrit :

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{m_0} a_{m_0 i} \psi_i^h \Psi^* + \hat{\underline{b}}_{m_0}^h \cdot \underline{\nabla} \Psi^* \right) d\Omega = 0 \quad \forall \Psi^* \in \mathcal{U}_{0,h}^{ad} \quad (2.8)$$

où l'on a posé :

$$a_{m_0 i} = \int_{\Theta} \int_{\mathcal{I}} \lambda_{m_0}^{\Delta t} \prod_j \gamma_{m_0,j} c \frac{d\lambda_i^{\Delta t}}{dt} \prod_j \gamma_{i,j} \, dt \, d\underline{p} \quad ; \quad \hat{\underline{b}}_{m_0}^h = \int_{\Theta} \int_{\mathcal{I}} \lambda_{m_0}^{\Delta t} \prod_j \gamma_{m_0,j} \left(k \underline{\nabla} u_{m_0}^{h,\Delta t} - \hat{\underline{r}}^h \right) \, dt \, d\underline{p}$$

En posant alors la matrice $(\mathbb{A}_m)_{ij} = a_{ij}$ et les vecteurs $\Psi_m^h = [\psi_1^h, \dots, \psi_m^h]^T$ et $\hat{\mathbf{B}}_m^h = [\hat{b}_1^h, \dots, \hat{b}_m^h]^T$, la propriété (2.8), écrite pour tout $m_0 \in \llbracket 1, m \rrbracket$, se transforme en un système triangulaire de la forme :

$$\int_{\Omega} \left(\mathbb{A}_m \Psi_m^h \Psi^* + \hat{\mathbf{B}}_m^h \cdot \underline{\nabla} \Psi^* \right) d\Omega = 0 \quad \forall \Psi^* \in \mathcal{U}_{0,h}^{ad} \quad (2.9)$$

Sous l'hypothèse que le matériau est homogène sur le domaine Ω (uniforme spatialement), la matrice \mathbb{A}_m est constante. Le système (2.9) peut alors s'inverser, en posant le vecteur $\hat{\Phi}_m^h = [\hat{\Phi}_1^h, \dots, \hat{\Phi}_m^h]^T = \mathbb{A}_m^{-1} \hat{\mathbf{B}}_m^h$. S'ensuit alors l'égalité suivante :

$$\forall (t, \underline{p}) \in \mathcal{I} \times \Theta, \quad \int_{\Omega} \left(\Psi_m^h \Psi^* + \hat{\Phi}_m^h \cdot \underline{\nabla} \Psi^* \right) d\Omega = 0 \quad \forall \Psi^* \in \mathcal{U}_{0,h}^{ad}$$

Remarquons qu'en injectant le flux $\underline{\hat{r}}^h$ dans l'équilibre élément finis (2.7), le flux équilibré au sens des éléments finis $\underline{\hat{q}}_m^h$ doit vérifier pour tout $(t, \mathbf{p}) \in \mathcal{I} \times \Theta$:

$$\int_{\Omega} (\underline{\hat{q}}_m^h - \underline{\hat{r}}^h) \cdot \underline{\nabla} v^h \, d\Omega = - \int_{\Omega} c \frac{\partial u_m^{h, \Delta t}}{\partial t} v^h \, d\Omega = - \sum_{i=1}^m c \frac{d\lambda_i^{\Delta t}}{dt} \prod_j \gamma_{i,j} \underbrace{\int_{\Omega} \psi_i^h v^h \, d\Omega}_{\int_{\Omega} -\hat{\Phi}_i^h \cdot \underline{\nabla} v^h \, d\Omega} \quad \forall v^h \in \mathcal{U}_{0,h}^{ad} \quad (2.10)$$

Par conséquent, le flux $\underline{\hat{q}}_m^h$, qui vérifie (2.7) (et (2.10)), admet l'écriture souhaitée (2.5) et il est entièrement déterminé numériquement. \square

Remarque 2.3. Le flux $\underline{\hat{r}}^h$ dépend a priori de l'espace, mais également du temps et des paramètres. Il est construit à partir d'une écriture à variable séparée du second membre L de la forme :

$$L(v) = \int_{\Theta} \int_{\mathcal{I}} \left(\sum_{s=1}^S \alpha_s(t, \mathbf{p}) L_s(v) \right) dt d\mathbf{p}$$

Une telle écriture peut découler naturellement de la forme analytique des chargements externes (f_d, r_d) et, si ce n'est pas le cas, être obtenue numériquement par l'application des méthodes POD aux chargements numériques (f_d^h, r_d^h) aux points de Gauss [Zlotnik *et al.*, 2015a, p.12].

Le problème (2.6) se ramène alors à plusieurs problèmes thermiques en régime permanent (indépendants du temps), tous résolus par une méthode éléments finis standard :

$$\text{trouver } \underline{\hat{r}}_s^h \in \mathcal{U}_h^{ad} \text{ tel que } \int_{\Omega} \underline{\hat{r}}_s^h \cdot \underline{\nabla} v^h \, d\Omega = L_s(v^h) \quad \forall v^h \in \mathcal{U}^{ad}, s \in \llbracket 1, S \rrbracket$$

Le flux $\underline{\hat{r}}^h$ vérifie alors la forme $\underline{\hat{r}}^h(\underline{x}, t, \mathbf{p}) = \sum_{s=1}^S \alpha_s(t, \mathbf{p}) \underline{\hat{r}}_s^h(\underline{x})$.

Remarque 2.4. La méthode proposée s'étend naturellement aux cas où les matériaux sont hétérogènes, en exprimant par exemple $c(\underline{x}, \mathbf{p})$ sous une forme à variables séparées $\sum_j \chi_j(\underline{x}) \delta_j(\mathbf{p})$. Dans ce cas, les fonctions spatiales χ_j doivent être associées aux modes spatiaux ψ_i^h dans l'expression (2.8) avant d'inverser le système.

Remarque 2.5. Pour les problèmes stationnaires, le système (2.9) se réécrit :

$$\int_{\Omega} \hat{\mathbf{B}}_m^h \cdot \underline{\nabla} \psi^* \, d\Omega = 0 \quad \forall \psi^* \in \mathcal{U}_{0,h}^{ad}$$

Il traduit le fait que les flux \hat{b}_i^h sont auto-équilibrés au sens des EF. Par conséquent, le flux $\underline{\hat{q}}_m^h$ qui vérifie l'équilibre EF (2.7) s'écrit :

$$\underline{\hat{q}}_m^h(\underline{x}, \mathbf{p}) = \underline{\hat{r}}^h(\underline{x}, \mathbf{p}) + \sum_{i=1}^m \hat{b}_i^h(\underline{x}) \prod_j \zeta_{i,j}(\mathbf{p}_j)$$

où les fonctions $\zeta_{i,j}$ sont a priori définies arbitrairement. Cependant, elles peuvent être choisies de manière adéquate et optimisées en minimisant une fonctionnelle quadratique appropriée. Celle-ci est liée à l'erreur en relation de comportement, qui fera l'objet de la partie suivante.

5 Estimation d'erreur globale

On propose dans cette partie d'étudier les outils permettant d'estimer l'erreur entre la solution exacte u_{ex} et la solution approximée $u_m^{h,\Delta t}$ déterminée grâce à une stratégie PGD. D'un côté, des estimateurs d'erreur a priori définis dans [Ladevèze, 1999, Ehrlicher, 2014] peuvent être utilisés pour juger les propriétés de convergence des approximations PGD mais elles ne fournissent pas d'information réellement quantitative ou utile. D'un autre côté, les méthodes d'estimation d'erreur classiques a posteriori ne sont pas suffisamment précises. Basées sur des normes du résidu, elles permettent d'estimer uniquement l'erreur de réduction PGD, en ignorant l'erreur de discrétisation. On propose ici une méthode d'estimation d'erreur robuste basée sur le concept d'ERC.

5.1 Base de l'Erreur en Relation de Comportement (ERC)

Introduit en 1975 par P. Ladevèze, le concept de l'Erreur en Relation de Comportement (ERC) est employé par diverses méthodes dans la littérature (par exemple les méthodes basées sur les résidus d'équilibre [Bank *et al.*, 1985, Ainsworth et Oden, 1993] ou méthodes *flux-free* [Parés *et al.*, 2006, Parés *et al.*, 2009, Moitinho de Almeida et Maunder, 2009, Cottreau *et al.*, 2009]). Expliqué en détails dans [Ladevèze et Pelle, 2005], cette méthode est actuellement le seul moyen pour avoir des bornes d'erreur sur la solution u_{ex} garanties et calculables.

5.1.1 Principe

Le principe de base de cet estimateur est de partitionner le problème de référence en deux groupes d'équations :

- des équations dites fiables : les conditions d'admissibilité cinématiques et statiques;
- des équations dites non fiables : la relation de comportement.

Ce découpage fait porter le doute sur la relation de comportement, l'équation la moins fiable du problème de référence, car elle est issue de données expérimentales incertaines voire mal maîtrisées. Par ailleurs, la mise en défaut de la relation de comportement procure à cette estimateur un fort caractère mécanique.

La difficulté de cette méthode réside dans la détermination d'une solution admissible, notée (\hat{u}_m, \hat{q}_m) appartenant aux espaces d'admissibilité cinématique \mathcal{U}^{ad} et statique \mathcal{S}^{ad} , à partir des données et de la solution EF calculée $(u_m^{h,\Delta t}, \hat{q}_m^h)$. Mais une fois cette solution connue, l'erreur est immédiate, comme résumé dans la Figure 2.3.

5.1.2 Définition et propriétés de l'erreur en relation de comportement

Pour le problème de référence de thermique instationnaire, l'erreur en relation de comportement s'applique à un couple admissible (\hat{u}, \hat{q}) solution de la formulation faible en espace du problème de référence (1.1), c'est-à-dire solution des équations suivantes :

$$\hat{u}|_{t=0^+} = u_0 \quad \forall (x, p) \in \Omega \times \Theta \quad (2.11a)$$

$$\hat{u} = u_d \quad \text{sur} \quad \partial_u \Omega \times \mathcal{I} \times \Theta \quad (2.11b)$$

$$\int_{\Omega} \left(c \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} v + \hat{q} \cdot \underline{\nabla} v \right) d\Omega = \int_{\Omega} f_d v d\Omega + \int_{\partial_r, \Omega} r_d v dS \quad \forall v \in \mathcal{U}_0^{ad} \quad \text{sur} \quad \mathcal{I} \times \Theta \quad (2.11c)$$

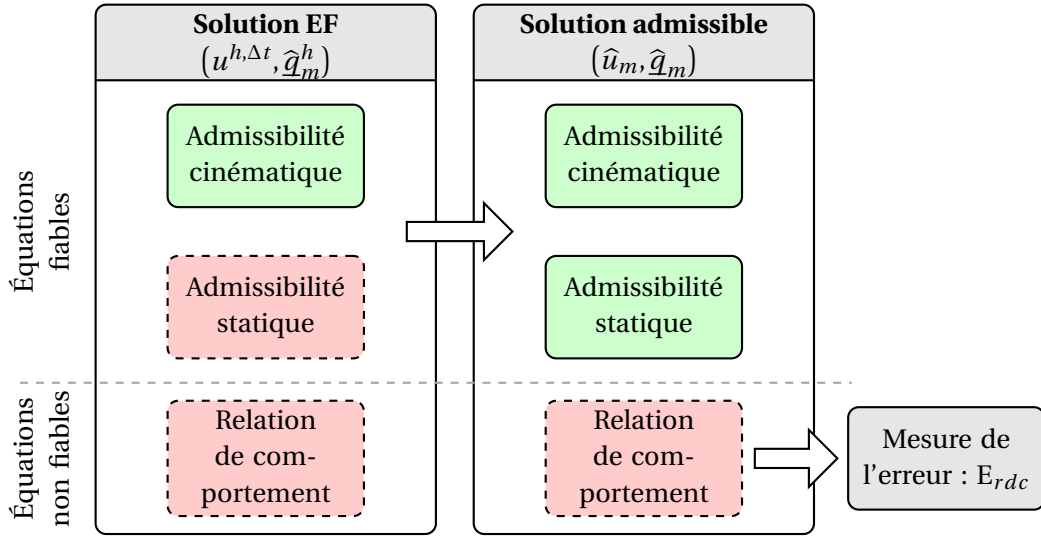


FIGURE 2.3 – Principe de la mesure de l'Erreur en Relation de Comportement (ERC)

La mesure de l'erreur en relation de comportement associée, dépendante des paramètres \underline{p} et calculée pour n'importe quelle solution admissible (\hat{u}, \hat{q}) se définit par :

$$E_{rdc}^2(\hat{u}, \hat{q}) = \int_{\mathcal{I}} \int_{\Omega} \frac{1}{k} (\hat{q} - k \nabla \hat{u})^2 d\Omega dt = \int_{\mathcal{I}} \|\hat{q} - k \nabla \hat{u}\|_{k^{-1}}^2 dt \quad (2.12)$$

avec $\|\circ\|_{k^{-1}}$ la norme énergétique sur le domaine Ω .

Par équivalence, on définit également les normes $\|\circ\|_k$ et $\|\circ\|_c$ de la forme :

$$\|u\|_k = \int_{\Omega} k (\nabla u)^2 d\Omega \quad ; \quad \|u\|_c = \int_{\Omega} c \frac{\partial u^2}{\partial t} d\Omega$$

Une première propriété immédiate découlant de la définition de l'erreur en relation de comportement (2.12) est :

$$E_{rdc}(\hat{u}, \hat{q}) = 0 \iff (\hat{u}, \hat{q}) = (u_{ex}, q_{ex})$$

Par conséquent, si le couple (\hat{u}, \hat{q}) ne vérifie pas la relation de comportement, alors c'est une approximation de (u_{ex}, q_{ex}) et la façon dont le couple (\hat{u}, \hat{q}) vérifie la relation de comportement permet d'en apprécier la qualité.

Une seconde propriété, connue sous le nom de théorème de l'hypercercle ou Prager-Synge [Prager et Synge, 1947], stipule une relation entre l'erreur vraie $\|e\|_{\mathcal{U}^{ad} \otimes \mathcal{T}}$ et la mesure $E_{rdc}(\hat{u}, \hat{q})$ de l'erreur en relation de comportement.

Propriété 2.2. On donne ici l'extension de cette propriété aux problèmes de thermique instationnaire :

$$E^2 = \|u_{ex} - \hat{u}\|_{\mathcal{U}^{ad} \otimes \mathcal{L}^2(\mathcal{I})}^2 \leq E_{rdc}^2(\hat{u}, \hat{q}) \quad (2.13)$$

Par conséquent, l'estimation d'erreur en relation de comportement définit une borne supérieure (estimateur garanti) de l'erreur globale (mesurée selon la norme énergétique) entre la solution exacte u_{ex} et son approximation \hat{u} .

Démonstration. Établissons la relation (2.13). En remarquant que :

$$\begin{aligned}\|\hat{q} - k\nabla\hat{u}\|_{k^{-1}}^2 &= \|\underline{q}_{ex} - \hat{q}\|_{k^{-1}}^2 + \|\underline{u}_{ex} - \hat{u}\|_k^2 - 2 \int_{\mathcal{I}} \int_{\Omega} (\underline{q}_{ex} - \hat{q}) \cdot \nabla(\underline{u}_{ex} - \hat{u}) \, d\Omega \, dt \\ \|\hat{u}_{ex} - \hat{u}\|_c^2 &= 2 \int_{\mathcal{I}} \int_{\Omega} c \frac{\partial(\underline{u}_{ex} - \hat{u})}{\partial t} (\underline{u}_{ex} - \hat{u}) \, d\Omega \, dt = -2 \int_{\mathcal{I}} \int_{\Omega} (\underline{q}_{ex} - \hat{q}) \cdot \nabla(\underline{u}_{ex} - \hat{u}) \, d\Omega \, dt\end{aligned}$$

l'erreur en relation de comportement vérifie à chaque instant $t \in \mathcal{I}$:

$$\begin{aligned}E_{rdc}^2(\hat{u}, \hat{q}) &= \|\underline{q}_{ex} - \hat{q}\|_{k^{-1}}^2 + \|\underline{u}_{ex} - \hat{u}\|_k^2 + \|\underline{u}_{ex} - \hat{u}\|_c^2 \\ &\geq \|\underline{u}_{ex} - \hat{u}\|_k^2 + \|\underline{u}_{ex} - \hat{u}\|_c^2 \\ &\geq \|\underline{u}_{ex} - \hat{u}\|_{\mathcal{U}^{ad} \otimes \mathcal{L}^2(\mathcal{I})} = E^2\end{aligned}$$

où $\|\cdot\|_{\square}^2 = \int_{\mathcal{I}} \|\cdot\|_{\square}^2 \, dt$ sont des normes énergétiques définies sur le domaine espace-temps $\Omega \times \mathcal{I}$. \square

5.2 Estimation d'erreur globale pour des approximations PGD

Le fondement et le point technique de l'erreur en relation de comportement résident dans la construction d'un couple admissible noté (\hat{u}_m, \hat{q}_m) . Une telle solution admissible peut se définir à partir des données du problème et de la solution approximée $(u_m^{h,\Delta t}, \hat{q}_m^h)$ déterminée par une stratégie PGD.

D'une part, $u_m^{h,\Delta t}$ satisfait les conditions initiales et aux limites de Dirichlet, par conséquent $\hat{u}_m = u_m^{h,\Delta t}$ convient. En revanche, aucun champ déterminé jusqu'à présent ne convient pour le flux admissible \hat{q}_m .

Comme le flux \hat{q}_m^h construit par post-traitement de la solution PGD est en équilibre avec $u_m^{h,\Delta t}$ au sens des éléments finis, il est possible de construire un flux admissible \hat{q}_m grâce aux techniques dites d'équilibrage utilisées dans le cadre des éléments finis [Ladevèze, 1975, Ladevèze et Pelle, 2005, Ladevèze et al., 2010, Pled et al., 2011]. Ainsi, il est possible de construire un flux \hat{q}_m vérifiant l'équilibre complet avec $u_m^{h,\Delta t}$ pour tout $(t, \underline{p}) \in \mathcal{I} \times \Theta$, tel que :

$$\int_{\Omega} \left(c \frac{\partial u_m^{h,\Delta t}}{\partial t} v + \hat{q}_m \cdot \nabla v \right) d\Omega = \int_{\Omega} f_d v \, d\Omega + \int_{\partial_r, \Omega} r_d v \, dS \quad \forall v \in \mathcal{U}_0^{ad} \quad (2.14)$$

Aussi, le flux admissible \hat{q}_m vérifie ainsi la forme à variables séparées :

$$\hat{q}_m(\underline{x}, t, \underline{p}) = \hat{r}(\underline{x}, t, \underline{p}) + \sum_{i=1}^m \hat{\Phi}_i(\underline{x}) c \frac{d\lambda_i^{\Delta t}(t)}{dt} \prod_j \gamma_{i,j}(p_j), \quad \text{avec } \hat{r}(\underline{x}, t, \underline{p}) = \sum_{s=1}^S \alpha_s(t, \underline{p}) \hat{r}_s(\underline{x})$$

où les flux \hat{r}_s (resp. $\hat{\Phi}_i$) sont obtenus par post traitement des flux \hat{r}_s^h (resp. $\hat{\Phi}_i^h$). Dans la suite, ces champs sont obtenus grâce à la technique d'équilibrage par éléments (connue sous l'appellation anglaise d'Element Equilibration Technique (EET)). Une description détaillée de son fonctionnement est donnée au Chapitre 5, on présente ici juste l'idée de cette technique. Elle repose sur une relation énergétique, dite de prolongement, de la forme [Ladevèze et Pelle, 2005] :

$$\int_K (\hat{b} - \hat{b}^h) \cdot \nabla N_i \, d\Omega = 0 \quad \forall K \in \Omega_h, \forall i \in K \quad (2.15)$$

où K est un élément du maillage spatial Ω_h , N_i la fonction de forme EF associée au nœud i connecté à l'élément K et \hat{b} un flux (égal à \underline{r}_s ou $\underline{\phi}_j$). \hat{b}^h (resp. \hat{b}) se réfère à une approximation

donnée (resp. recherchée) de \underline{b} en équilibre avec $u_m^{h,\Delta t}$ au sens du problème (2.4) (resp. (2.15)). En plus des propriétés EF de \widehat{b}^h , cette condition permet de déterminer des flux équilibrés sur les bords des éléments en résolvant des systèmes algébriques locaux compatibles et associés à chaque nœud du maillage spatial Ω_h . Finalement, les flux équilibrés \widehat{b} sont calculés à l'échelle de l'élément par la résolution de problèmes de Neumann qui impliquent les flux précédemment calculés aux bords des éléments.

Propriété 2.3. Selon l'équation (2.13), l'estimation d'erreur en relation de comportement déterminée à partir du couple admissible $(u_m^{h,\Delta t}, \widehat{q}_m)$ vérifie pour tout $\underline{p} \in \Theta$:

$$\Delta := E_{rdc}^2(u_m^{h,\Delta t}, \widehat{q}_m) = \left\| \widehat{q}_m - k \nabla u_m^{h,\Delta t} \right\|_{k^{-1}}^2 \quad (2.16)$$

$$\geq \left\| u_{ex} - u_m^{h,\Delta t} \right\|_k^2 + \left\| u_{ex} - u_m^{h,\Delta t} \right\|_c^2 = E^2 \quad (2.17)$$

et par conséquent elle définit une estimation garantie (borne supérieure) de l'erreur globale (mesurée selon la norme énergétique) entre la solution exacte u_{ex} et l'approximation PGD $u_m^{h,\Delta t}$ du problème, pour tous paramètres $\underline{p} \in \Theta$.

► **Exemple 3** (*Structure 2D de refroidissement*)

Soit le problème de thermique instationnaire défini sur la structure de la Figure 2.4, composée de deux trous rectangulaires symétriques dans lesquels un fluide circule. Les symétries permettent de limiter l'étude à un quart, noté Ω , du domaine complet 2D. Ce domaine est sujet à :

- une température nulle sur sa frontière extérieure;
- un flux unitaire donné $r_d = -1 \text{ Wm}^{-1}$ sur la frontière du trou;
- une condition homogène de type Neumann $r_d = 0 \text{ Wm}^{-1}$ sur les plans de symétrie
- une source de chaleur stationnaire $f_d(x, y) = 200xy$ sur l'ensemble du domaine Ω pendant l'intégralité de l'intervalle de temps $\mathcal{I} = [0; 10 \text{ s}]$.

Des paramètres supplémentaires sont pris en compte dans la décomposition PGD, liés aux coefficients de diffusion $k \in \Theta_k = [1; 10]$ et de capacité thermique $c \in \Theta_c = [1; 10]$, supposés tous deux uniformes dans le domaine Ω . Ainsi, la représentation PGD de la solution se lit $u_m(\underline{x}, t, k, c)$.

Le maillage spatial Ω_h de départ est composé de $N_h = 85$ éléments quadrangles à quatre nœuds de taille uniforme $h = 0,1 \text{ m}$, représenté sur la Figure 2.4. Un schéma temporel explicite d'Euler est employé avec $N_{\Delta t} = 1\,000$ pas de temps uniformes de taille $\Delta t = T/N_{\Delta t} = 0,01 \text{ s}$.

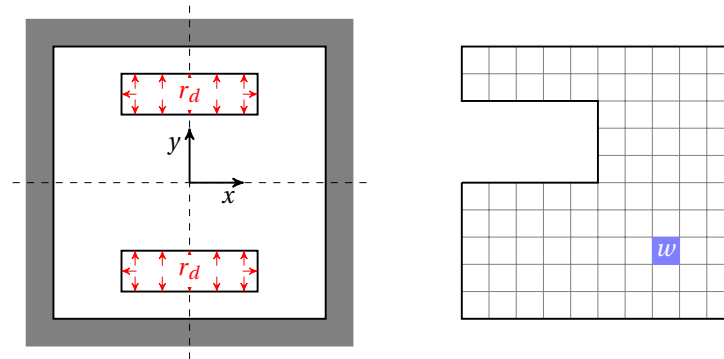


FIGURE 2.4 – Structure 2D de refroidissement : domaine spatial (gauche) et maillage initial associé (droite).

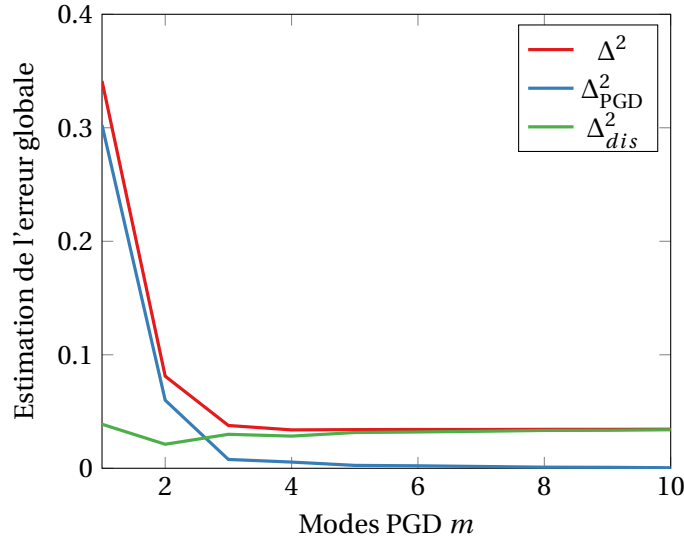


FIGURE 2.5 – Convergence de l’erreur en relation de comportement Δ^2 et des indicateurs Δ^2_{PGD} et Δ^2_{dis} pour l’Exemple 3

En appliquant la stratégie de construction de champs admissibles de la Section 4 à l’Exemple 3, il est possible d’estimer l’erreur globale en relation de comportement commise par l’approximation PGD, obtenue ici par la méthode G-PGD. La Figure 2.5 représente la convergence de l’estimateur d’erreur $\Delta = E^2_{rdc}(u_m^{h,\Delta t}, \hat{q}_m)$ en fonction du nombre m de modes PGD, $m \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$, tracé pour les valeurs $(k, c) \in \Theta_k \times \Theta_c$ où l’erreur $E^2_{rdc}(u_m^{h,\Delta t}, \hat{q}_m)$ est maximale.

5.3 Séparation des sources d’erreur

Déterminée par la relation (2.16), l’estimation $E^2_{rdc}(u_m^{h,\Delta t}, \hat{q}_m)$ prend en compte les différentes sources d’erreurs inhérentes à l’approche PGD, notamment :

- l’erreur de troncature PGD (représentée par l’indice m) issue de la restriction de la représentation PGD à un nombre fini m de modes ;
- l’erreur de discrétisation (représentée par l’exposant h et Δt) en raison de l’utilisation de méthodes numériques (MEF ici) pour calculer les modes PGD. Cette erreur peut elle-même se scinder en une erreur de discrétisation spatiale et temporelle.

Les autres sources d’erreurs possibles (erreur algébrique due à l’utilisation de solveurs itératifs, erreur d’intégration numérique, erreur due à la précision machine, ...) sont supposées négligeables comparées aux erreurs de discrétisation et de troncature PGD.

L’objectif de cette partie est d’estimer la contribution de chaque source d’erreur à l’estimation précédemment déterminée $E^2_{rdc}(u_m^{h,\Delta t}, \hat{q}_m)$, afin de piloter la résolution PGD. Pour cela, nous proposons une procédure naturelle, précédemment employée dans des travaux antérieurs portant sur l’estimation des erreurs dans le cadre de l’erreur en relation de comportement [Galimard *et al.*, 1996, Ladevèze et Moës, 1998, Pelle et Ryckelynck, 2000].

L’idée consiste à introduire des indicateurs d’erreurs spécifiques basés sur le concept de l’erreur en relation de comportement appliqué à des champs admissibles au sens de problèmes intermédiaires affaiblis du problème de référence (1.1). En pratique, le nouveau problème intermédiaire se définit comme la formulation faible espace-temps du problème de référence initial (1.1), bâtie sur la même discrétisation $\mathcal{U}_h^{ad} \otimes \mathcal{T}_{\Delta t}$ que celle employée pour la solution PGD pour

tout $p \in \Theta$:

$$\text{trouver } u^{h,\Delta t} \in \mathcal{U}_h^{ad} \otimes \mathcal{T}_{\Delta t} \text{ tel que } b(u^{h,\Delta t}, v) = l(v) \quad \forall v \in \mathcal{U}_h^{ad} \otimes \mathcal{T}_{\Delta t} \quad (2.18)$$

où $u|_{t=0}^{h,\Delta t} = 0$.

Propriété 2.4. L'erreur globale $E^2 = \left\| \| u_{ex} - u_m^{h,\Delta t} \right\|_{\mathcal{U}^{ad} \otimes \mathcal{L}^2(\mathcal{I})}^2$ peut se décomposer sous la forme :

$$E^2 = E_{\text{PGD}}^2 + E_{dis}^2, \quad \text{avec } E_{\text{PGD}}^2 = \left\| \| u^{h,\Delta t} - u_m^{h,\Delta t} \right\|_{\mathcal{U}^{ad} \otimes \mathcal{L}^2(\mathcal{I})}^2$$

où E_{PGD} représente l'erreur de troncature PGD seule et $E_{dis} = \sqrt{E^2 - E_{\text{PGD}}^2}$ représente l'erreur issue seulement de la discrétisation espace-temps (E_{dis} tends vers 0 lorsque h et Δt tendent vers 0). Remarquons que ces deux erreurs vérifient les propriétés suivantes :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} E_{\text{PGD}} = 0 \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} E_{dis} = 0$$

Démonstration. En utilisant la condition suivante d'orthogonalité de Galerkin définie pour tous $p \in \Theta$, issue du problème intermédiaire (2.18) :

$$b(u_{ex} - u^{h,\Delta t}) = \int_{\mathcal{I}} \int_{\Omega} \left(c \frac{\partial (u_{ex} - u^{h,\Delta t})}{\partial t} v + k \nabla (u_{ex} - u^{h,\Delta t}) \right) d\Omega dt = 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_h^{ad} \otimes \mathcal{T}_{\Delta t}$$

avec $v = u^{h,\Delta t} - u_m^{h,\Delta t}$, on peut écrire :

$$\underbrace{\left\| \| u_{ex} - u_m^{h,\Delta t} \right\|_{\mathcal{U}^{ad} \otimes \mathcal{L}^2(\mathcal{I})}^2}_{E^2} = \underbrace{\left\| \| u^{h,\Delta t} - u_m^{h,\Delta t} \right\|_{\mathcal{U}^{ad} \otimes \mathcal{L}^2(\mathcal{I})}^2}_{E_{\text{PGD}}^2} + \underbrace{\left\| \| u_{ex} - u^{h,\Delta t} \right\|_{\mathcal{U}^{ad} \otimes \mathcal{L}^2(\mathcal{I})}^2 + \int_{\mathcal{I}} \int_{\Omega} c (u_{ex} - u^{h,\Delta t}) \frac{\partial (u^{h,\Delta t} - u_m^{h,\Delta t})}{\partial t} d\Omega dt}_{E_{dis}^2}$$

avec $\|\bullet\| = \|\bullet\|_{\mathcal{U}^{ad} \otimes \mathcal{L}^2(\mathcal{I})}$. □

Les deux contributions E_{PGD} et E_{dis} peuvent être évaluées à partir des propriétés de l'erreur en relation de comportement (2.16) et par post-traitement immédiat des champs approximatés disponibles $u_m^{h,\Delta t}$, \hat{q}_m^h et \hat{q}_m :

- une première mesure de l'erreur E_{rdc} est déterminée, en utilisant le couple $(u_m^{h,\Delta t}, \hat{q}_m^{h,\Delta t})$ admissible au sens du problème intermédiaire (2.18), vérifiant ainsi pour tout $p \in \Theta$:

$$\int_{\mathcal{I}} \left[\int_{\Omega} \left(c \frac{\partial u_m^{h,\Delta t}}{\partial t} v + \hat{q}_m^{h,\Delta t} \cdot \nabla v \right) d\Omega - \int_{\Omega} f_d v d\Omega - \int_{\partial_r \Omega} r_d v dS \right] dt = 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_h^{ad} \otimes \mathcal{T}_{\Delta t}$$

Cela permet de déterminer un indicateur Δ_{PGD} de l'erreur de troncature PGD E_{PGD} tel que :

$$E_{\text{PGD}}^2 \simeq \Delta_{\text{PGD}}^2 = E_{rdc}^2(u_m^{h,\Delta t}, \hat{q}_m^{h,\Delta t}) = \left\| \hat{q}_m^{h,\Delta t} - k \nabla u_m^{h,\Delta t} \right\|_{k^{-1}}^2$$

- un indicateur Δ_{dis} de l'erreur de discrétisation E_{dis} peut également se déduire à partir de :

$$E_{dis}^2 \simeq \Delta_{dis}^2 = \Delta^2 - \Delta_{\text{PGD}}^2 = \left\| \hat{q}_m - k \nabla u_m^{h,\Delta t} \right\|_{k^{-1}}^2 - \left\| \hat{q}_m^{h,\Delta t} - k \nabla u_m^{h,\Delta t} \right\|_{k^{-1}}^2$$

En outre, des indicateurs Δ_h et $\Delta_{\Delta t}$ spécifiques aux erreurs de discrétisation spatiale et temporelle peuvent être définis :

$$\Delta_h^2 = \left\| \hat{q}_m - \hat{q}_m^h \right\|_{k^{-1}}^2 \quad \text{et} \quad \Delta_{\Delta t}^2 = \Delta_{dis}^2 - \Delta_{\text{PGD}}^2$$

Remarque 2.6. En remarquant que le flux \hat{q}_m^h a été construit de telle manière qu'il vérifie l'équilibre au sens des EF (2.4) à chaque instant $t \in \mathcal{I}$, le flux $\hat{q}_m^{h,\Delta t}$ se détermine à partir d'un simple post-traitement (interpolation linéaire) de \hat{q}_m^h sur le domaine $\mathcal{I} = [0, T]$ par la relation :

$$\hat{q}_m^{h,\Delta t} = \left(\int_{\mathcal{I}} \mathbf{N}^T \mathbf{T} dt \right)^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{G}$$

$\mathbf{N} = [N_0(t), N_1(t), \dots, N_{N_t}(t)]^T$ représente le vecteur des fonctions de forme éléments finis utilisées sur le domaine temporel \mathcal{I} , $N_t = T/\Delta t$ le nombre de pas de temps, et $\mathbf{G} = [\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_{N_t}]^T$ tel que $\mathbf{G}_j = \int_{\mathcal{I}} \hat{q}_m^h N_j(t) dt$.

En appliquant ce qui précède à l'Exemple 3, il est possible d'extraire les différentes contributions à l'erreur globale, comme représentées sur la Figure 2.5. Remarquons que l'indicateur d'erreur Δ_{dis} fournit une estimation pertinente de l'erreur de discrétisation E_{dis} , même pour de petites valeurs de m . De plus, cet indicateur devient plus grand que l'indicateur de troncature PGD Δ_{PGD} pour $m \geq 3$. Au-delà et sans adaptation de maillage, il est futile d'espérer améliorer l'approximation PGD seulement en augmentant le nombre de modes. Il est nécessaire de proposer une stratégie adaptative permettant de faire le bon choix; c'est l'objet de la partie suivante.

5.4 Stratégie adaptative globale

Les indicateurs d'erreurs précédemment définis peuvent alors être utilisés comme critères d'arrêt ou comme indicateurs d'adaptation pour un algorithme itératif d'enrichissement de modes PGD. Cela permet de construire de manière adaptative une approximation PGD optimale $u_m^{h,\Delta t}$ et de contrôler le processus de calcul en recherchant les contributions à l'erreur les plus élevées (entre troncature PGD et discrétisation des modes) en les minimisant. En pratique, après avoir calculé chaque mode $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, la stratégie d'adaptation, représentée en Figure 2.6, est mise en œuvre de la manière suivante :

1. l'ensemble des paramètres $\underline{p}_{max} = \arg \max_{\underline{p} \in \Theta} \Delta(\underline{p})$ correspondant au pire des cas est estimé, ainsi que les indicateurs d'erreurs associées à cet ensemble de paramètres;
2. les contributions relatives des indicateurs $\Delta_{PGD}(\underline{p}_{max})$ et $\Delta_{dis}(\underline{p}_{max})$ sont comparées à l'estimation $\Delta(\underline{p}_{max})$:
 - Si $\Delta_{PGD}(\underline{p}_{max}) \geq \Delta_{dis}(\underline{p}_{max})$, le $(i + 1)$ -ième mode est alors calculé sur la même discrétisation espace-temps que celle utilisée pour le mode i ;
 - Si $(\Delta_{PGD}(\underline{p}_{max}) < \Delta_{dis}(\underline{p}_{max}))$, les paramètres de discrétisation h et Δt sont modifiés de façon à déterminer le mode i et les suivants avec une meilleure précision. Pour cela, des techniques d'adaptation de maillages sont employées pour atteindre un certain seuil d'erreur de discrétisation donnée à partir des contributions locales de Δ_h et $\Delta_{\Delta t}$ ainsi que sur les taux de convergence asymptotique prédits par des estimations d'erreur a priori [Ladevèze et Pelle, 2005].

Cette procédure d'adaptation est effectuée tant que l'erreur commise dans le pire des cas est supérieure à une certaine tolérance d'erreur prédéfinie γ_{tol} pour un certain mode m :

$$\max_{\underline{p} \in \Theta} \Delta(\underline{p}) > \gamma_{tol}$$

Remarque 2.7. Lorsque le maillage est adapté, seule l'erreur de discrétisation du mode en cours doit être prise en compte dans l'indicateur Δ_{dis} . En effet, les modes précédents ayant été déterminés sur un maillage différent, ils ne contribuent plus à cette erreur. Pour être cohérent, l'erreur de discrétisation des modes précédents est alors ajoutée à l'erreur de réduction. Ainsi, l'indicateur d'erreur de discrétisation converge :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Delta_{dis} = 0$$

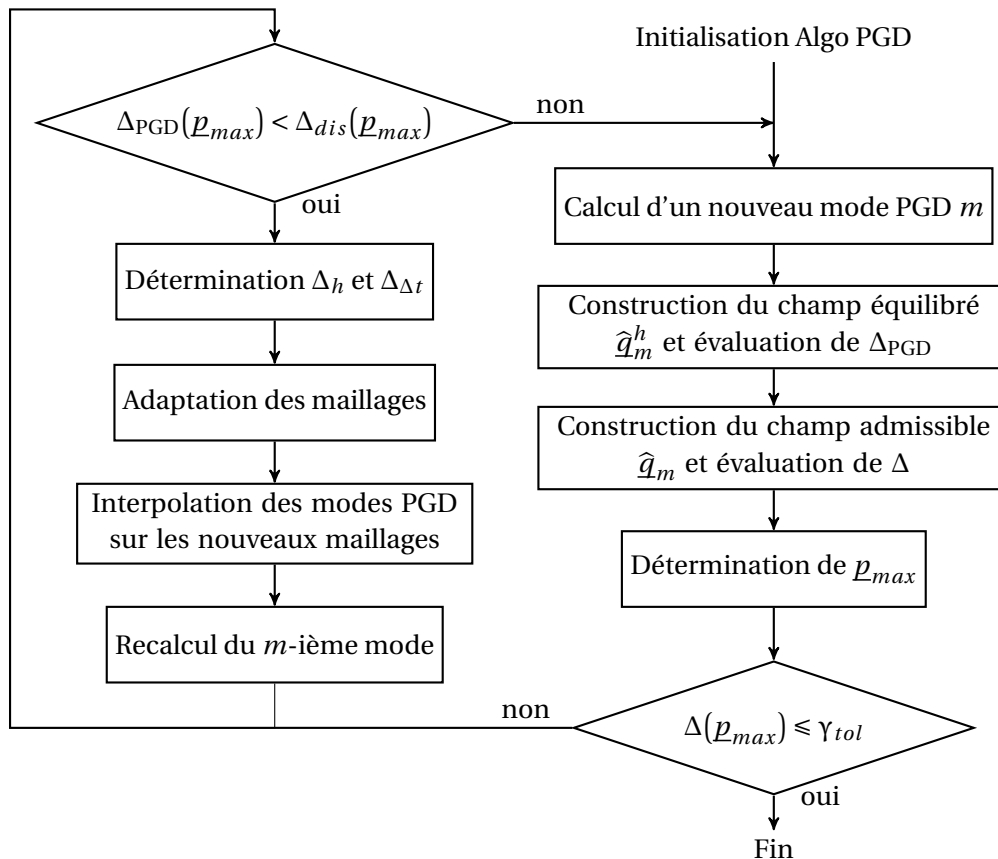


FIGURE 2.6 – Algorithme PGD adaptatif piloté par les indicateurs d'erreur en relation de comportement

Remarque 2.8. Ce processus adaptatif peut être optimisé en comparant les indicateurs $\Delta_{PGD}(\underline{p})$ et $\Delta_{dis}(\underline{p})$ pour chaque valeur des paramètres $\underline{p} \in \Theta$, conduisant ainsi à un raffinement paramétré des maillages. Toutefois, cette stratégie semble complexe à mettre en œuvre et à utiliser en pratique.

Le processus adaptatif proposé ici a été appliqué à l'Exemple 3, dont on donne les convergences des estimations d'erreur sur la Figure 2.7a. L'enrichissement de la solution PGD est effectué jusqu'au mode $m = 3$, avant de raffiner les discrétisations temporelle et spatiale afin d'améliorer la qualité de l'approximation PGD. Les maillages ainsi raffinés et obtenus pour $m = 3$ puis $m = 5$ sont représentés sur la Figure 2.7b. Pour des raisons pratiques, seuls des maillages EF imbriqués de type quad-tree ont été employés.

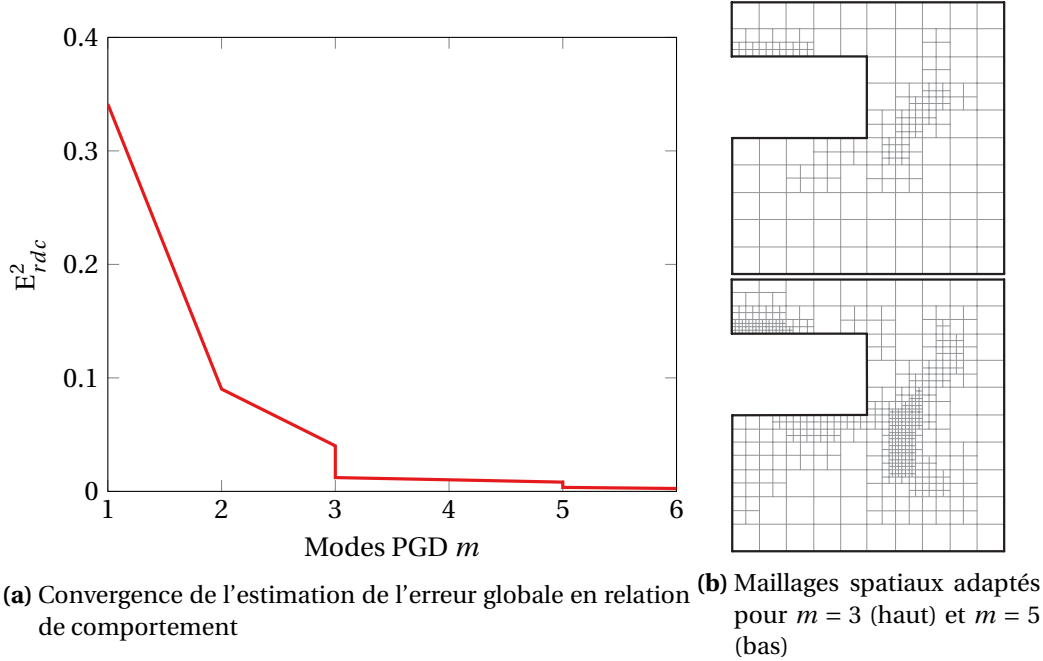


FIGURE 2.7 – Stratégie adaptative appliquée à l'Exemple 3

6 Estimation d'erreur en quantité d'intérêt

Mesurer l'erreur selon une norme énergétique globale n'est évidemment pas le meilleur critère pour piloter et adapter les modèles, en particulier lorsque l'intérêt du problème se limite à certaines quantités d'intérêt. Dans cette partie, une méthode d'estimation d'erreur en quantité d'intérêt est proposée, bâtie sur une technique d'extraction (basée sur le problème adjoint) [Becker et Rannacher, 1996, Paraschivoiu *et al.*, 1997, Peraire et Patera, 1998, Prudhomme et Oden, 1999, Ladevèze *et al.*, 1999, Becker et Rannacher, 2001]. Couplée au concept d'erreur en relation de comportement, elle permet de calculer de façon précise et robuste des quantités d'intérêt issues d'une approximation PGD.

6.1 Problème adjoint et approximation PGD associée

L'approche classique d'estimation d'erreur locale consiste à introduire un problème dual, également appelé problème adjoint basé sur des outils d'extraction. La fonctionnelle associée à la quantité d'intérêt Q , dépendante des paramètres \underline{p} et linéaire vis-à-vis du champ u , est définie globalement (sur le domaine espace-temps $\Omega \times \mathcal{I}$) au moyen d'un couple d'opérateurs d'extraction $(\tilde{q}_\Sigma, \tilde{f}_\Sigma)$:

$$Q(u) = \int_{\mathcal{I}} \int_{\Omega} (\tilde{q}_\Sigma \cdot \nabla u + \tilde{f}_\Sigma u) \, d\Omega \, dt$$

où \tilde{q}_Σ et \tilde{f}_Σ sont des fonctions espace-temps qui peuvent être définies explicitement ou implicitement (en fonction de la quantité d'intérêt Q) en utilisant éventuellement des distributions de Dirac dans le cas de valeurs ponctuelles.

Aussi, en suivant l'approche proposée dans [Becker et Rannacher, 2001] bâtie sur la dualité, la formulation faible espace-temps du problème adjoint associé à la quantité d'intérêt Q , consiste à chercher un champ de température $\tilde{u} \in \mathcal{U}^{ad} \otimes \mathcal{T}$ vérifiant pour tout $\underline{p} \in \Theta$:

$$b(v, \tilde{u}) = b^*(\tilde{u}, v) = Q(u) \quad \forall v \in \mathcal{U}_0^{ad} \otimes \mathcal{T}$$

avec $\tilde{u}|_{t=T} = 0$ et l'opérateur bilinéaire b^* l'opérateur adjoint défini sur $\mathcal{U}^{ad} \otimes \mathcal{T}$ par :

$$b^*(\tilde{u}, v) = \int_{\mathcal{I}} \int_{\Omega} -c \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} v + k \underline{\nabla} \tilde{u} \cdot \underline{\nabla} v \, d\Omega \, dt$$

Ainsi défini, le problème adjoint est très semblable au problème direct (1.3), mais sollicité par un chargement différent composé des extracteurs $(\tilde{q}_{\Sigma}, \tilde{f}_{\Sigma})$ définissant la quantité d'intérêt Q . En pratique, les problèmes direct et adjoint peuvent être résolus en parallèle dans un souci d'efficacité.

Une solution approchée $\tilde{u}_{m'}^{h', \Delta t'}$ peut être déterminée par l'approche PGD, potentiellement avec un ordre PGD m' et des discrétisations spatiale h' et temporelle $\Delta t'$ différents de ceux utilisés pour calculer l'approximation PGD de la solution $u_m^{h, \Delta t}$ du problème direct (1.3). Un couple admissible $(\tilde{u}, \tilde{q}) = (\tilde{u}_{m'}^{h', \Delta t'}, \tilde{q}_{m'})$ peut ensuite être déterminé grâce à la méthode de construction de champs admissibles présentée à la Section 4. En particulier, une telle solution vérifie alors l'équilibre pour tout $(t, p) \in \mathcal{I} \times \Theta$:

$$\int_{\Omega} \left(-c \frac{\partial \tilde{u}_{m'}^{h', \Delta t'}}{\partial t} v + \tilde{q}_{m'} \cdot \underline{\nabla} v \right) d\Omega = \int_{\Omega} (\tilde{q}_{\Sigma} \cdot \underline{\nabla} v + \tilde{f}_{\Sigma} v) \, d\Omega \quad \forall v \in \mathcal{U}_0^{ad}$$

Par conséquent, l'estimation de l'erreur en relation de comportement \tilde{E}_{rdc} , dépendant de $p \in \Theta$, définit une borne garantie majorant l'erreur globale selon la norme énergétique entre la solution exacte \tilde{u}_{ex} et l'approximation PGD $\tilde{u}_{m'}^{h', \Delta t'}$ du problème adjoint, où :

$$\tilde{E}_{rdc} = \left\| \tilde{q}_{m'} - k \underline{\nabla} \tilde{u}_{m'}^{h', \Delta t'} \right\|_{k^{-1}}$$

6.2 Estimateur d'erreur local sur une quantité d'intérêt

En supposant que la fonction Q est linéaire, la mesure locale de l'erreur $\Delta Q = Q(u_{ex}) - Q(u_m^{h, \Delta t})$ entre la valeur exacte $Q(u_{ex})$ et la valeur approximée par la PGD $Q(u_m^{h, \Delta t})$ de la quantité d'intérêt Q se définit comme un résidu pondéré de la solution du problème adjoint \tilde{u}_{ex} [Prudhomme et Oden, 1999] : pour tout $p \in \Theta$:

$$\Delta Q = Q(u_{ex} - u_m^{h, \Delta t}) = b^*(\tilde{u}_{ex}, u_{ex} - u_m^{h, \Delta t}) = b(u_{ex} - u_m^{h, \Delta t}, \tilde{u}_{ex}) = l(\tilde{u}_{ex}) - b(u_m^{h, \Delta t}, \tilde{u}_{ex}) = \mathcal{R}(\tilde{u}_{ex}) \quad (2.19)$$

avec \mathcal{R} le résidu associé à la formulation faible du problème direct (1.3).

Propriété 2.5. En remplaçant la solution exacte du problème adjoint par une solution approchée, déterminée par une approximation PGD précise d'ordre $m' \leq m$ et potentiellement définie sur une discrétisation espace-temps plus fine $(h', \Delta t') \leq (h, \Delta t)$, on peut construire des bornes d'erreur garanties telles que :

$$\left| \Delta Q - \mathcal{R}(\tilde{u}_{m'}^{h', \Delta t'}) \right| \leq \left\| \tilde{q}_{m'} - k \underline{\nabla} \tilde{u}_{m'}^{h', \Delta t'} \right\|_{k^{-1}} \times \left\| u_{ex} - u_m^{h, \Delta t} \right\|_k \quad (2.20)$$

$$\leq \tilde{E}_{rdc}(\tilde{u}_{m'}^{h', \Delta t'}, \tilde{q}_{m'}) \times E_{rdc}(u_m^{h, \Delta t}, \tilde{q}_m) \quad (2.21)$$

Remarque 2.9. L'équation (2.20) montre le côté non intrusif de l'approche par problème adjoint. Comme les bornes d'erreur découplent solution directe et adjointe, la résolution du problème adjoint n'entraîne pas un coût de calcul supplémentaire puisqu'il est envisageable de résoudre le problème direct et adjoint en parallèle.

Démonstration. En injectant l'approximation PGD du problème adjoint $\tilde{u}_{m'}^{h',\Delta t'}$ dans la formulation (2.19), cette dernière se réécrit :

$$\Delta Q - \mathcal{R}(\tilde{u}_{m'}^{h',\Delta t'}) = \mathcal{R}(\tilde{u}_{ex} - \tilde{u}_{m'}^{h',\Delta t'}) = b\left(u_{ex} - u_m^{h,\Delta t}, \tilde{u}_{ex} - \tilde{u}_{m'}^{h',\Delta t'}\right) = b^*\left(\tilde{u}_{ex} - \tilde{u}_{m'}^{h',\Delta t'}, u_{ex} - u_m^{h,\Delta t}\right)$$

En remarquant alors que les solutions admissible $(\tilde{u}_{m'}^{h',\Delta t'}, \hat{\underline{q}}_{m'})$ et exacte $(\tilde{u}_{ex}, \tilde{\underline{q}}_{ex} = k\underline{\nabla}\tilde{u}_{ex})$ vérifient l'équilibre (1.3), et que $\Delta u_m^{h,\Delta t} = u_{ex} - u_m^{h,\Delta t} \in \mathcal{U}_0^{ad}$ pour tout $(t, \underline{p}) \in \mathcal{I} \times \Theta$, l'opérateur adjoint se réécrit :

$$\begin{aligned} b^*\left(\tilde{u}_{ex} - \tilde{u}_{m'}^{h',\Delta t'}, \Delta u_m^{h,\Delta t}\right) &= \int_{\mathcal{I}} \int_{\Omega} \left(-c \frac{\partial(\tilde{u}_{ex} - \tilde{u}_{m'}^{h',\Delta t'})}{\partial t} \Delta u_m^{h,\Delta t} + k\underline{\nabla}(\tilde{u}_{ex} - \tilde{u}_{m'}^{h',\Delta t'}) \cdot \underline{\nabla}(\Delta u_m^{h,\Delta t}) \right) d\Omega dt \\ &= \int_{\mathcal{I}} \int_{\Omega} \left(\hat{\underline{q}}_{m'} - k\underline{\nabla}\tilde{u}_{m'}^{h',\Delta t'} \right) \cdot \Delta u_m^{h,\Delta t} d\Omega dt \\ &= \int_{\mathcal{I}} \int_{\Omega} \frac{1}{k} \left(\hat{\underline{q}}_{m'} - k\underline{\nabla}\tilde{u}_{m'}^{h',\Delta t'} \right) \cdot \left(\underline{q}_{ex} - \underline{\nabla}u_m^{h,\Delta t} \right) d\Omega dt \end{aligned}$$

Par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz vérifiée par le produit scalaire associé à la norme $\|\cdot\|_{k^{-1}}$, il vient :

$$\left| b^*\left(\tilde{u}_{ex} - \tilde{u}_{m'}^{h',\Delta t'}, u_{ex} - u_m^{h,\Delta t}\right) \right| \leq \underbrace{\left\| \hat{\underline{q}}_{m'} - k\underline{\nabla}\tilde{u}_{m'}^{h',\Delta t'} \right\|_{k^{-1}}}_{= \tilde{E}_{rdc}(\tilde{u}_{m'}^{h',\Delta t'}, \hat{\underline{q}}_{m'})} \times \underbrace{\left\| \underline{q}_{ex} - \underline{\nabla}u_m^{h,\Delta t} \right\|_{k^{-1}}}_{\leq E_{rdc}(u_m^{h,\Delta t}, \underline{q}_m)}$$

□

Propriété 2.6. En introduisant un terme de correction $Q_{corr} = \mathcal{R}(\tilde{u}_{m'}^{h',\Delta t'})$, la quantité d'intérêt vérifie l'encadrement (2.22), traduisant l'existence de bornes garanties de l'erreur locale ΔQ (ou directement de la quantité d'intérêt Q_{ex}) pour n'importe quelle valeur des paramètres $\underline{p} \in \Theta$:

$$|\Delta Q| \leq |Q_{corr}(\underline{p}) \pm \tilde{E}_{rdc}(\underline{p}) \times E_{rdc}(\underline{p})| := \rho \quad (2.22)$$

Démonstration. Le terme $\mathcal{R}(\tilde{u}_{m'}^{h',\Delta t'})$ ne dépend que des solutions PGD $u_m^{h,\Delta t}$ et $\tilde{u}_{m'}^{h',\Delta t'}$, respectivement des problèmes direct et adjoint. En remarquant que la solution admissible $(u_m^{h,\Delta t}, \hat{\underline{q}}_m)$ et exacte $(u_{ex}, \underline{q}_{ex})$ vérifient l'équilibre complet (2.14), et que $\tilde{u}_{m'}^{h',\Delta t'} \in \mathcal{U}_0^{ad}$ pour tout $(t, \underline{p}) \in \mathcal{I} \times \Theta$, le terme correctif $\mathcal{R}(\tilde{u}_{m'}^{h',\Delta t'})$ peut se réécrire uniquement en fonction des solutions PGD approchées $u_m^{h,\Delta t}$ et $\tilde{u}_{m'}^{h',\Delta t'}$ ainsi que du flux admissible $\hat{\underline{q}}_m$:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\tilde{u}_{m'}^{h',\Delta t'}) &= b(u_{ex} - u_m^{h,\Delta t}, \tilde{u}_{m'}^{h',\Delta t'}) \\ &= \int_{\mathcal{I}} \int_{\Omega} \left(c \frac{\partial(u_{ex} - u_m^{h,\Delta t})}{\partial t} \tilde{u}_{m'}^{h',\Delta t'} + k\underline{\nabla}(u_{ex} - u_m^{h,\Delta t}) \cdot \underline{\nabla}\tilde{u}_{m'}^{h',\Delta t'} \right) d\Omega dt \\ &= \int_{\mathcal{I}} \left[\int_{\Omega} f_d \tilde{u}_{m'}^{h',\Delta t'} d\Omega + \int_{\partial_r \Omega} r_d \tilde{u}_{m'}^{h',\Delta t'} dS - \int_{\Omega} c \frac{\partial u_m^{h,\Delta t}}{\partial t} \tilde{u}_{m'}^{h',\Delta t'} + k\underline{\nabla}u_m^{h,\Delta t} \cdot \underline{\nabla}\tilde{u}_{m'}^{h',\Delta t'} d\Omega \right] dt \\ &= \int_{\mathcal{I}} \int_{\Omega} \left(\hat{\underline{q}}_m - k\underline{\nabla}u_m^{h,\Delta t} \right) \cdot \underline{\nabla}\tilde{u}_{m'}^{h',\Delta t'} d\Omega dt \end{aligned}$$

□

Il est utile ici d'insister sur les effets du terme de correction Q_{corr} : la capacité à déterminer une solution précise $(\tilde{u}_{m'}^{h',\Delta t'}, \hat{\underline{q}}_{m'})$ du problème adjoint permet de déterminer précisément des bornes garanties de l'erreur locale, pour n'importe quel paramètre $p \in \Theta$. En effet, l'estimation d'erreur \tilde{E}_{rdc} tend vers zéro lorsque $(\tilde{u}_{m'}^{h',\Delta t'}, \hat{\underline{q}}_{m'})$ converge vers la solution exacte du problème adjoint $(\tilde{u}_{ex}, \tilde{\underline{q}}_{ex})$ et Q_{corr} tend vers la valeur asymptotique $\mathcal{R}(\tilde{u}_{ex})$ égale à l'erreur locale ΔQ . De plus $Q_{corr} = \mathcal{R}(\tilde{u}_{ex}) = \Delta Q$ lorsque le problème adjoint est résolu de façon exacte. Remarquons également que $Q_{corr} = 0 = \Delta Q$ lorsque le problème direct est résolu de façon exacte.

Remarque 2.10. Il est possible de définir une borne *deux fois* plus précise de (2.22) en introduisant le flux moyenné du problème direct $\hat{\underline{q}}_m^* = \frac{1}{2} (\hat{\underline{q}}_m + k \nabla u_m^{h,\Delta t})$ ainsi que du problème adjoint $\hat{\underline{q}}_{m'}^* = \frac{1}{2} (\hat{\underline{q}}_{m'} + k \nabla \tilde{u}_{m'}^{h',\Delta t'})$ couplé à l'inégalité de Prager-Synge. L'encadrement de la quantité d'intérêt vérifie alors :

$$|\Delta Q - Q_{corr}^*| \leq \tilde{E}_{rdc}(\tilde{u}_{m'}^{h',\Delta t'}, \hat{\underline{q}}_{m'}) \times \|\underline{q}_{ex} - \hat{\underline{q}}_m^*\|_{k^{-1}} = \tilde{E}_{rdc}(\tilde{u}_{m'}^{h',\Delta t'}, \hat{\underline{q}}_{m'}) \times \frac{1}{2} E_{rdc}(u_m^{h,\Delta t}, \hat{\underline{q}}_m)$$

où le terme de correction vérifie :

$$Q_{corr}^* = \int_{\mathcal{I}} \int_{\Omega} \frac{1}{k} (\hat{\underline{q}}_m - k \nabla u_m^{h,\Delta t}) \cdot \hat{\underline{q}}_{m'}^* \, dx \, dt$$

et l'inégalité de Prager-Synge :

$$E_{rdc}^2(u_m^{h,\Delta t}, \hat{\underline{q}}_m) = \|\underline{q}_{ex} - \hat{\underline{q}}_m\|_{k^{-1}}^2 + \|\underline{u}_{ex} - u_m^{h,\Delta t}\|_k^2 = 4 \|\underline{q}_{ex} - \hat{\underline{q}}_m^*\|_{k^{-1}}^2$$

Remarque 2.11. D'autres bornes d'erreur plus précises, basées sur des stratégies alternatives à l'inégalité classique de l'espace-temps de Cauchy-Schwarz (2.22), peuvent être obtenues à l'aide d'outils introduits dans des travaux antérieurs : dans [Ladevèze *et al.*, 2013a], une amélioration des bornes d'erreurs sur le domaine spatial Ω a été proposée grâce au principe de Saint-Venant appliqué aux domaines homothétiques; les auteurs de [Chamoïn et Ladevèze, 2007] présentent quant à eux l'utilisation de fonctionnelles d'erreurs en relation de comportement pondérées associée à l'inégalité de Legendre-Fenchel et améliorant de fait les bornes d'erreurs sur le domaine temporel \mathcal{I} . Ces bornes améliorées ne seront pas prises en compte dans la suite de ce mémoire.

6.3 Stratégie adaptative locale

Ici aussi, il est toujours possible d'évaluer les différentes contributions à l'erreur locale totale ΔQ sur une certaine quantité d'intérêt Q , c'est-à-dire l'erreur de troncature PGD et de discrétisation. En effet, en supposant que la quantité d'intérêt Q est une fonctionnelle linéaire et en introduisant son approximation EF $Q(u^{h,\Delta t})$ obtenue à partir de la formulation faible espace-temps, l'erreur locale totale ΔQ peut se décomposer sous la forme :

$$\Delta Q = \Delta Q_{PGD} + \Delta Q_{dis}$$

avec $\Delta Q_{PGD} = Q(u^{h,\Delta t}) - Q(u_m^{h,\Delta t})$ l'erreur locale provenant seulement de la troncature PGD et $\Delta Q_{dis} = \Delta Q - \Delta Q_{PGD} = Q(u_{ex}) - Q(u^{h,\Delta t})$, celle issue seulement de la discrétisation en espace et en temps, car elles vérifient :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \Delta Q_{PGD} = 0 \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \Delta Q_{dis} = 0$$

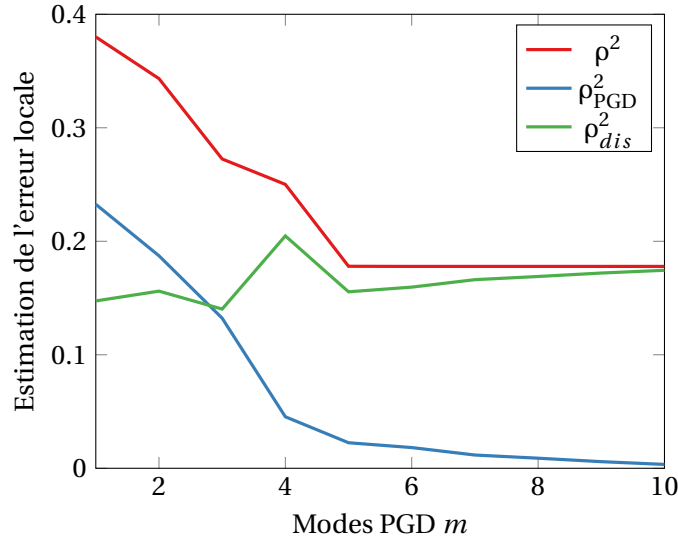


FIGURE 2.8 – Évolution des estimations d’erreur et bornes locales pour l’Exemple 3

Ces deux contributions à l’erreur locale totale peuvent être facilement déterminées grâce aux techniques précédemment introduites :

- de la méthode introduite dans la Section 5.4, deux couples $(u_m^{h,\Delta t}, \hat{q}_m^{h,\Delta t})$ et $(\tilde{u}_m^{h',\Delta t'}, \hat{q}_m^{h',\Delta t'})$, admissibles au sens des éléments finis sont tout d’abord construits et permettent de déterminer les termes $E_{rdc}^{h,\Delta t}$ et $\tilde{E}_{rdc}^{h',\Delta t'}$, respectivement des problèmes direct et adjoint. Ainsi un indicateur d’erreur de troncature ρ_{PGD} se définit par la relation :

$$|\Delta Q_{\text{PGD}}| \leq \left| Q_{\text{corr}} \pm \tilde{E}_{rdc}^{h',\Delta t'} E_{rdc}^{h,\Delta t} \right| := \rho_{\text{PGD}}$$

- un indicateur ρ_{dis} d’erreur de discrétisation ΔQ_{dis} se déduit alors aisément selon :

$$|\Delta Q_{\text{dis}}| \leq \left| Q_{\text{corr}} \pm \tilde{E}_{rdc} E_{rdc} \right| - \left| Q_{\text{corr}} \pm \tilde{E}_{rdc}^{h',\Delta t'} E_{rdc}^{h,\Delta t} \right| = \rho - \rho_{\text{PGD}} := \rho_{\text{dis}}$$

Ces indicateurs d’erreur peuvent ensuite être utilisés pour piloter un algorithme adaptatif permettant de contrôler l’erreur totale de l’approximation PGD vis-à-vis d’une quantité d’intérêt. La stratégie d’adaptation est semblable à celle présentée dans la Section 5.4 pour le pilotage par l’erreur globale. La différence réside dans l’utilisation des indicateurs ρ_{PGD} et ρ_{dis} après le calcul de chaque mode $i \in [1, m]$, ainsi que dans l’utilisation des contributions locales de l’indicateur d’erreur de discrétisation Δ_{dis} pour piloter les adaptations des maillages spatial et temporel.

Appliquons alors ces outils à l’Exemple 3, sur la quantité d’intérêt Q définie comme la valeur maximale sur $(k, c) \in \Theta_k \times \Theta_c$ de la valeur moyenne de la température u sur un sous domaine $\omega \subset \Omega$, représenté sur la Figure 2.4 et de mesure $|\omega|$, à l’instant final $t = T$:

$$Q(u) = \max_{(k,c) \in \Theta_k \times \Theta_c} \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} u|_T d\omega$$

Les évolutions de la borne d’erreur locale $\Delta Q - Q_{\text{corr}}$ et des indicateurs spécifiques $\Delta Q_{\text{PGD}} - Q_{\text{corr}}$ et $\Delta Q_{\text{dis}} - Q_{\text{corr}}$, les trois normalisées, sont données sur la Figure 2.8.

Ces bornes permettent de piloter l’algorithme adaptatif, dont la convergence de sa borne d’erreur locale $\Delta Q - Q_{\text{corr}}$ est représentée sur la Figure 2.9, ainsi que le maillage spatial raffiné utilisé lors du calcul du 6^e mode.

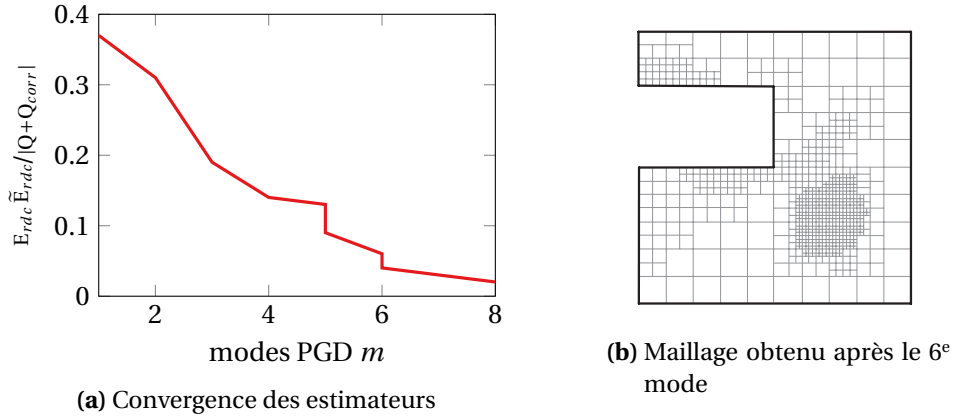


FIGURE 2.9 – Application de la stratégie adaptative pour une quantité d’intérêt Q définie sur le sous-domaine ω de l’Exemple 3

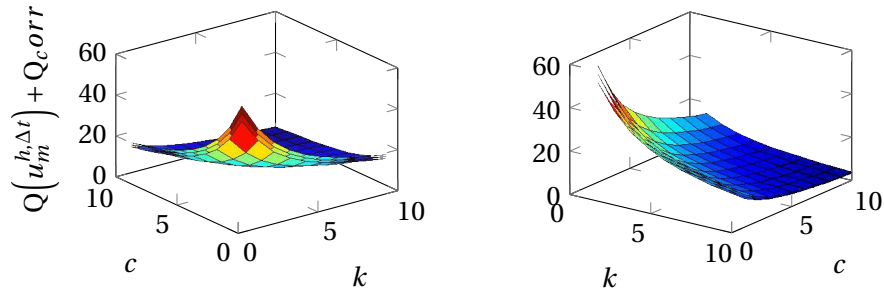


FIGURE 2.10 – Évolution de la valeur prédite $Q(u_m^{h,\Delta t}) + Q_{corr}$ et des bornes associées en fonction des paramètres de l’étude k et c sur l’Exemple 3

Ces outils permettent ainsi de construire des abaques garantis sur la quantité d’intérêt $Q(u)$ vue comme une fonction des paramètres k et c , à partir de $Q(u_m^{h,\Delta t}) + Q_{corr}$ et des bornes d’erreur déterminées. La Figure 2.10 illustre un tel abaque, tracé pour $m = 5$.

7 Application aux problèmes d’élasticité

Les méthodes précédemment décrites, de construction de champ admissible ou d’évaluation de l’erreur en relation de comportement associée s’étendent naturellement à l’élasticité. On présente ci-dessous l’application de ces méthodes au problème d’élasticité de l’Exemple 4, réalisée en collaboration avec F. Pled [Allier et al., 2017b]. Notons que dans ce cas, le champ de contrainte $\sigma_m = \mathcal{K} \left[\frac{1}{2} (\nabla u_m + \nabla u_m^T) \right]$ est auto-équilibré au sens des éléments finis. Par conséquent, $\hat{\sigma}_m$ est construit en suivant l’approche décrite à la Remarque 2.5.

► Exemple 4 (Cube élastique 3D)

Soit le problème élastique stationnaire d’un cube de côté $L = 1$ m, contenant trois inclusions dont les modules d’Young $E_i \in \Theta_E = [1, 10]$ ($1 \leq i \leq 3$) sont des paramètres de l’étude. Ces trois inclusions sont des sphères de rayon identique $r = 0.1$ m dont leurs centres respectifs sont situés aux points de coordonnées $c_1 = (0, 2; 0, 2; 0, 2)$, $c_2 = (0, 6; 0, 3; 0, 5)$ et $c_3 = (0, 4; 0, 7; 0, 8)$. Quant au cube, il est encastré sur une de ses faces située selon le plan $x = 0$ et subit un effort surfacique unitaire $\underline{F}_d = +\underline{x}$ selon le plan $x = 1$.

Le maillage initial est composé de 10 076 éléments tétraèdres à trois nœuds pour 2 020 nœuds (6 060 degrés de liberté), comme représenté sur la [Figure 2.11](#).

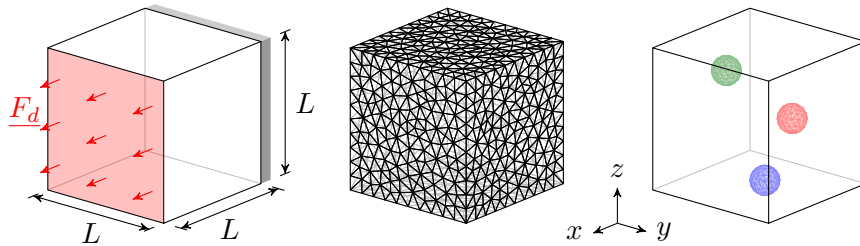


FIGURE 2.11 – Problème élastique 3D (gauche) et maillages associés (centre et droite) des différents domaines

Les cinq premiers modes PGD de la solution en déplacement $\underline{u}_m(x, E_1, E_2, E_3)$ sont représentés sur la [Figure 2.12](#). De la [Figure 2.13](#), il est intéressant de remarquer que les premier et cinquième modes sont des modes globaux, tandis que les second, troisième et quatrième modes sont des modes locaux, respectivement localisés au niveau des première, seconde et troisième inclusions.

Appliquée à la solution PGD obtenue, la méthode décrite dans ce chapitre fournit une estimation de l'erreur Δ et des indicateurs associés Δ_{PGD} et Δ_{dis} . La [Figure 2.14](#) représente l'évolution de ces grandeurs en fonction du nombre de modes PGD m . Ces grandeurs étant dépendantes des paramètres, les courbes de la [Figure 2.14](#) représentent les valeurs maximales des différentes grandeurs sur l'espace des paramètres Θ_E . L'estimation d'erreur Δ converge assez rapidement vers l'indicateur associé à l'erreur de discrétisation Δ_{dis} , tandis que celle liée à l'erreur de troncature PGD Δ_{PGD} tend vers zéro.

La répartition spatiale des contributions locales à l'estimation d'erreur est donnée sur la [Figure 2.15](#) pour différentes décompositions de la solution PGD allant de l'ordre 1 à 5. Il convient de noter que les contributions les plus élevées à l'erreur sont concentrées à proximité de la face encastrée et autour de la première (resp. seconde et troisième) inclusion pour la décomposition PGD de l'ordre 2 (resp. 3 et 4).

Le coût de calcul associé à la résolution du problème PGD a été de 3 minutes (resp. 4, 6, 8, 10 et 13) pour le mode 1 (resp. 2, 3, 4, 5 et 6), tandis que le coût de calcul inhérent à la méthode d'estimation d'erreur est d'environ 1 minute par modes. Vis-à-vis de la résolution PGD, l'estimation d'erreur présente un coût de calcul faible tout en fournissant des informations cruciales. En effet, sur la discrétisation adoptée pour l'[Exemple 4](#), il semble illusoire d'améliorer fortement la solution au-delà de 4 modes sans adaptation de maillages, comme le montre la [Figure 2.14](#).

8 Conclusion

Les solutions PGD introduisent une source d'erreur supplémentaire aux solutions éléments finis. Différentes méthodes existent, mais se concentrent malheureusement sur l'erreur dite de réduction en ignorant l'erreur de discrétisation.

La méthode, présentée en détail dans ce chapitre, cherche à prendre en compte toutes les sources d'erreur. En proposant une étape de reconstruction de champ équilibré, il est possible de réemployer les outils d'estimation d'erreur développés dans le cadre EF, bâtis sur l'erreur en relation de comportement.

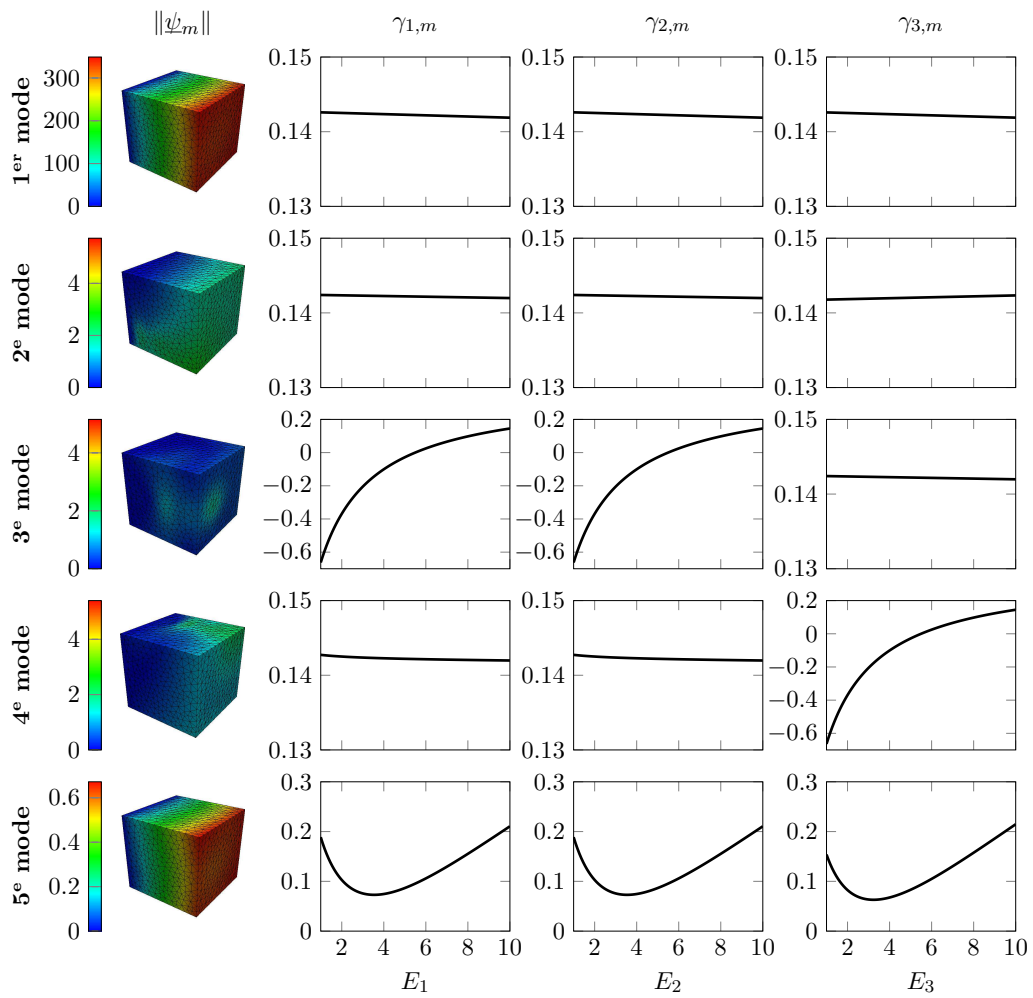


FIGURE 2.12 – Modes PGD de la solution de l'Exemple 4 pour $m = 1, \dots, 5$ (de haut en bas), composé des fonctions spatiales $\underline{\psi}_m$, $\gamma_{1,m}$, $\gamma_{2,m}$ et $\gamma_{3,m}$ (de gauche à droite).

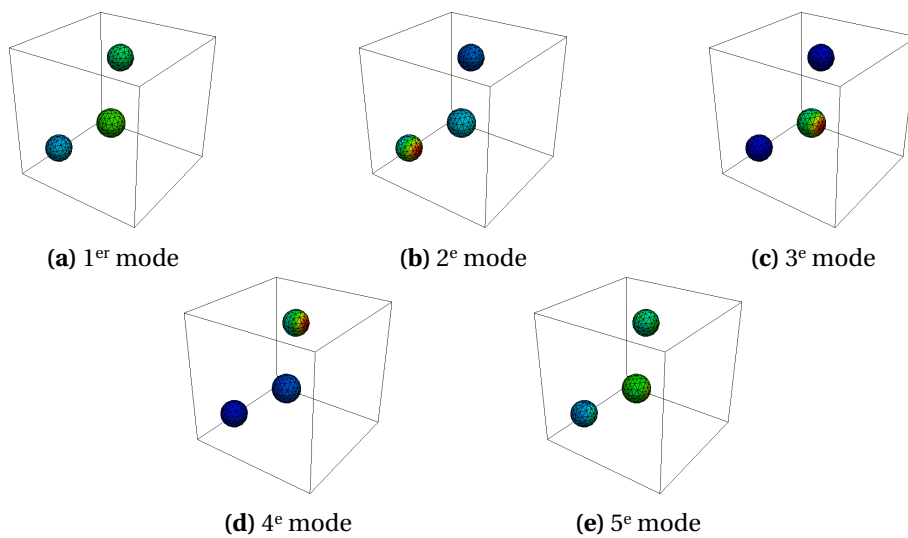


FIGURE 2.13 – Amplitude des fonctions spatiales $\underline{\psi}_m$ obtenue aux ordres $m = 1, \dots, 5$ représentées uniquement au niveau des inclusions.

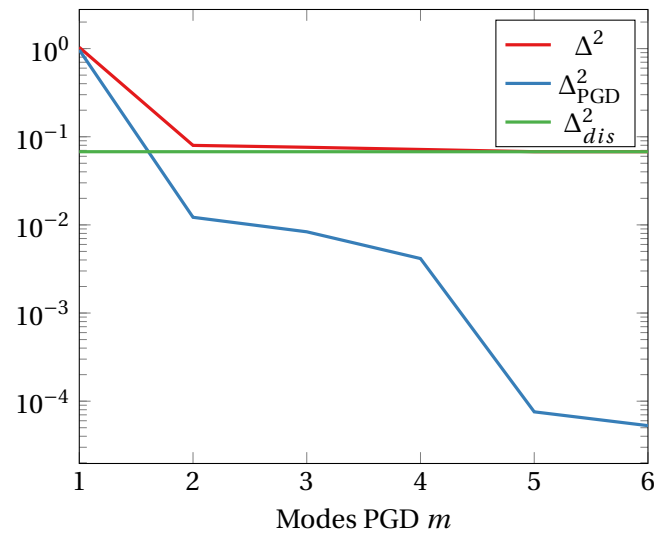


FIGURE 2.14 – Évolution de l’estimation d’erreur en relation de comportement et des indicateurs associés pour l’Exemple 4

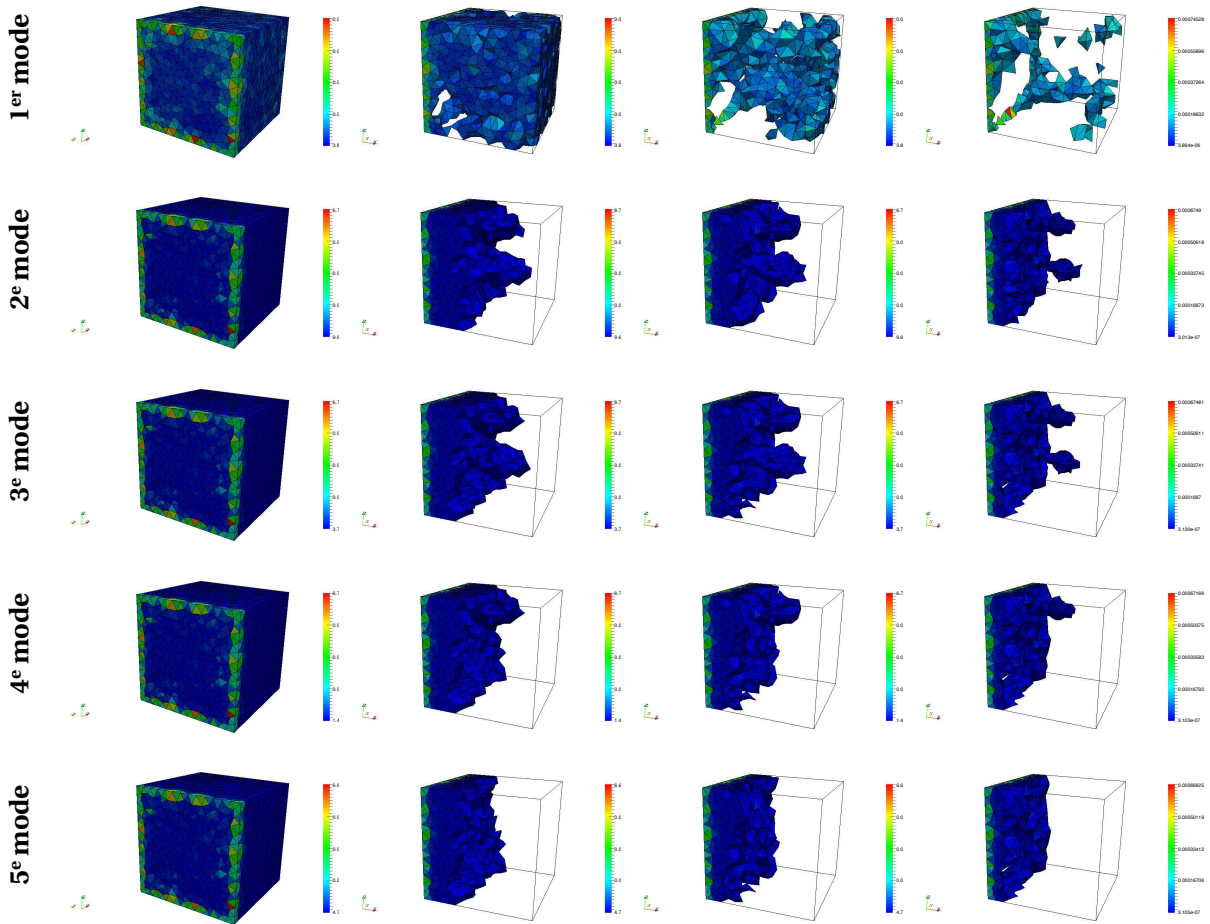


FIGURE 2.15 – Répartition spatiale des contributions locales à l’estimation d’erreur pour l’Exemple 4 pour différentes décompositions de la solution PGD allant de l’ordre 1 à 5 (haut en bas).

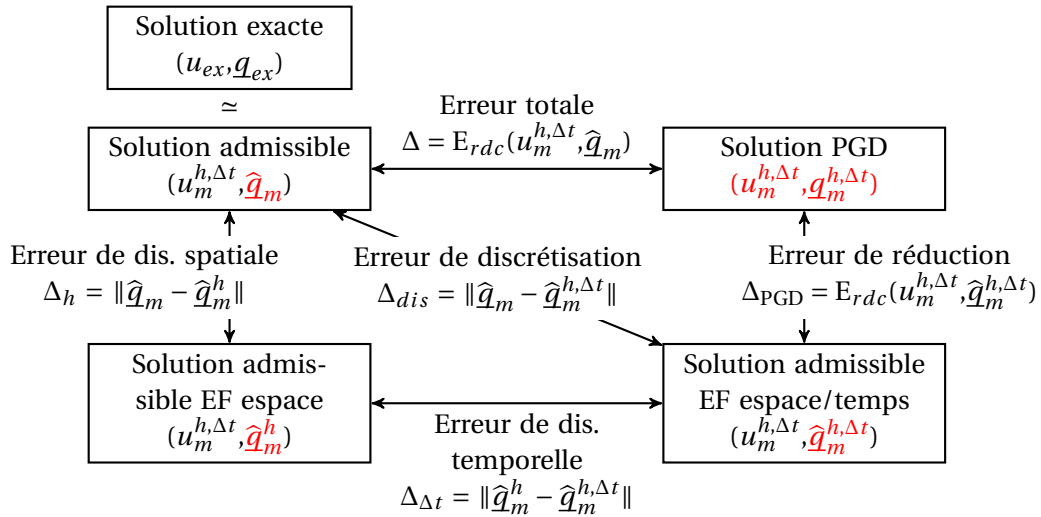


FIGURE 2.16 – Les différents champs (en rouge les champs calculés à l'étape associée) et leurs écarts

Ainsi cette méthode permet d'obtenir des estimations d'erreur strictes et précises et de proposer des stratégies adaptatives pilotant l'algorithme d'enrichissement PGD. En dissociant les sources d'erreur de discrétisation et de troncature PGD, il est désormais possible de contrôler l'erreur globale ou l'erreur locale en quantités d'intérêt de toute solution PGD.

Remarquons que cette méthode n'est pas limitée aux solutions PGD de par sa construction. Elle s'applique également à tout type de méthode de réduction de modèle qui fournit une solution équilibrée au sens des EF.

Par conséquent, il est désormais envisageable de construire des abaques virtuels associés à des quantités d'intérêt déterminées à partir d'une solution approximative PGD bénéficiant pleinement d'outils de vérification robustes permettant de satisfaire une précision imposée.

Comme la méthode de vérification se base sur la décomposition à variables séparées, l'ensemble des algorithmes présenté dans ce chapitre rentrent dans la phase offline de la PGD. Ainsi elle permet :

- durant la phase offline de construire un estimateur des différentes sources d'erreurs dépendant des paramètres de l'étude;
- durant la phase online de proposer un estimateur immédiat des différentes sources d'erreurs par interpolation de l'estimateur déterminée durant la phase offline pour un jeu de paramètres;
- de construire des abaques virtuels avec un niveau d'erreur associé.

Cet outil permet ainsi d'envisager la certification de modèles réduits PGD à moindre coût ainsi que les abaques extraits. Un tel outil n'est que bénéfique pour le *Virtual Testing*, démarche qui consiste à remplacer une partie des essais réels par des simulations numériques et enjeu actuel du monde industriel.

La [Figure 2.16](#) résume l'approche permettant d'estimer les différentes sources d'erreurs commises par une approximation PGD du problème direct comme adjoint, décrite dans ce chapitre.

Chapitre 3

Extension de l'estimateur d'erreur à la séparation spatiale

Dans ce chapitre, les outils de vérification de modèles réduits PGD présentés au [Chapitre 2](#) sont étendus aux décompositions PGD où la variable spatiale est séparée. Un travail plus poussé est requis pour en tirer des champs équilibrés.

Sommaire

1	Formulation du problème PGD séparé spatialement	60
1.1	Problème de référence et notations	60
1.2	Réduction de modèle PGD	61
1.3	Résultats numériques	62
2	Premiers travaux sur la vérification de telles solutions PGD	64
2.1	Par lissage du champ de contrainte	64
2.2	Par reconstruction de champs équilibrés	66
3	Reconstruction d'un champ statiquement équilibré en thermique	66
3.1	Principe de la méthode pour des problèmes 2D	66
3.2	Estimation des différentes erreurs	68
3.3	Extension aux cas 3D	69
4	Extension à l'élasticité	73
4.1	Formulation PGD en élasticité	73
4.2	Construction d'un champ équilibré en 2D	74
5	Conclusion	76

Des géométries de type poutres, plaques et coques sont fréquemment employées dans les structures mécaniques. Présentant un domaine dégénéré, où au moins l'une des dimensions est très petite devant les autres, le maillage associé nécessite un nombre de DDLs moins élevé pour représenter le modèle sous-jacent. Le gain numérique qui en découle justifie l'utilisation intense dans les bureaux d'étude de ce type de domaines dégénérés.

Cependant, les théories classiques des poutres, plaques (Love-Kirchoff, Reissner-Mindlin) et coques ne sont que des modélisations simplifiées, où le modèle 3D est remplacé par des modèles de dimensions inférieures (1D dans la théorie des poutres et 2D dans les théories des plaques et des coques). Le passage d'un modèle à l'autre implique généralement des hypothèses cinématiques et/ou mécaniques régissant le comportement de la solution selon la où les dimensions

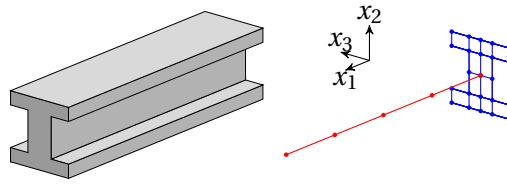


FIGURE 3.1 – Pièce volumique (gauche) et maillages 1D et 2D associés (droite)

ignorées. Cependant, ces hypothèses se limitent généralement à des comportements simples et ne sont plus pertinentes pour (i) des zones ne vérifiant pas le principe de Saint Venant ¹; (ii) des physiques compliquées présentant des comportements non-linéaires...

Introduite dans [Bognet *et al.*, 2012], la séparation de variable espace/espace dans la décomposition PGD a montré des bénéfices dans certaines applications [Ghnatios *et al.*, 2015, Giner *et al.*, 2013, Vidal *et al.*, 2013, Bognet *et al.*, 2014, Polit *et al.*, 2015, Vidal *et al.*, 2016]. Elle permet de transformer des modèles numériques définis sur un domaine spatial n -dimensionnel à un ensemble de modèles numériques plus simples écrits sur un ensemble de domaines spatiaux unidimensionnels (voir bidimensionnels), comme représenté sur la Figure 3.1.

Comparée aux théories classiques des poutres, plaques ou coques, cette approche ne nécessite aucune hypothèse physique et, pour ainsi dire, ne dégrade pas le modèle, sous réserve que les conditions aux limites, le matériau et la géométrie vérifient une telle séparabilité.

Comme vu précédemment, la PGD introduit cependant une source d'erreur supplémentaire, nécessitant de fait des outils de vérification adaptés. Une première approche a été proposée dans [Nadal *et al.*, 2015]; elle consiste en un indicateur d'erreur rapide, basé sur des techniques de reconstruction de champs, mais qui ne prend en compte que l'erreur de discrétisation pour piloter l'adaptation des maillages. Proposée au Chapitre 2, une seconde approche permet d'obtenir des estimateurs d'erreur garantis prenant en compte toutes les sources d'erreurs. Cependant, cette dernière méthode ne peut s'appliquer telle quelle sur ce type de décomposition car elle nécessite la résolution d'un problème complet spatialement.

Tout d'abord, on rappelle les bases de la PGD écrite dans le cadre de la séparation des variables spatiales. Après avoir présenté en détail l'approche de [Nadal *et al.*, 2015] pour vérifier de telles approximations, on étendra la méthode présentée au Chapitre 2 aux séparations spatiales par l'utilisation de techniques plus poussées pour construire des champs équilibrés au sens des éléments finis. Cette méthode sera illustrée sur des problèmes 2D/3D de thermique avant d'être étendue à l'élasticité.

1 Formulation du problème PGD séparé spatialement

1.1 Problème de référence et notations

On considère le problème de référence du Chapitre 1, simplifié en un problème de thermique stationnaire ($c = 0 \text{ JmK}^{-1}$ et $\mathcal{I} = \emptyset$) sans paramètre d'étude ($\Theta = \emptyset$). La solution u ne dépend alors plus que des coordonnées spatiales \underline{x} .

Dans le cadre général 3D ², les coordonnées spatiales sont notées x_1 , x_2 et x_3 , définies sur un domaine rectangulaire $\Omega = I_1 \times I_2 \times I_3 \equiv \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \in I_1, x_2 \in I_2, x_3 \in I_3\} \subset \mathbb{R}^3$, de frontière

1. la différence entre les effets de deux charges différentes, mais statiquement équivalentes devient très faible à une distance suffisante de ces charges.

2. Cadre le plus usuel en mécanique, bien que l'ensemble s'étend naturellement à toutes dimensions $N \in [2; +\infty[$.

$\partial_r \Omega = \Gamma_1^r \times \Gamma_2^r \times \Gamma_3^r$ et $\partial_u \Omega = \Gamma_1^u \times \Gamma_2^u \times \Gamma_3^u$. Cette dernière écriture est l'hypothèse fondamentale pour pouvoir appliquer l'algorithme PGD.

Les grandeurs du modèle, conditions aux limites et coefficients matériau, sont supposées être compatibles avec l'hypothèse de séparation des variables spatiales, avec $u_d = 0$, quitte sinon, à effectuer un relèvement. En supposant que les données sont suffisantes pour obtenir une solution unique et régulière sur $\mathcal{H}^1(\Omega)$, on introduit les espaces fonctionnels suivants :

$$\mathcal{U}^{ad} = \mathcal{U}_1^{ad} \otimes \mathcal{U}_2^{ad} \otimes \mathcal{U}_3^{ad} \quad \text{avec} \quad \mathcal{U}_i^{ad} = \left\{ a^* \in \mathcal{H}^1(I_i) \mid a_{|\Gamma_i^u}^* = 0 \right\} \quad 1 \leq i \leq 3$$

La formulation variationnelle du problème s'écrit :

$$\text{trouver } u(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{U}^{ad} \text{ tel que } \int_{\Omega} [k \underline{\nabla} u - \underline{Q}_d] \cdot \underline{\nabla} v \, d\Omega = 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}^{ad}$$

où \underline{Q}_d est un flux qui équilibre le chargement externe (f_d, r_d) .

Ce flux \underline{Q}_d peut être connu analytiquement à partir des chargements externes (f_d, r_d) , ou construit numériquement (par une résolution EF ou PGD) tel que :

$$\int_{\Omega} \underline{Q}_d \cdot \underline{\nabla} u^* \, d\Omega = \int_{\Omega} f_d u^* \, d\Omega + \int_{\partial_r \Omega} r_d u^* \, dS \quad \forall u^* \in \mathcal{U}^{ad}$$

Une approximation éléments finis classique u_h de u peut être obtenue grâce à une approche Galerkin sur le domaine éléments finis $\mathcal{U}_h^{ad} = \mathcal{U}_{1,h}^{ad} \otimes \mathcal{U}_{2,h}^{ad} \otimes \mathcal{U}_{3,h}^{ad} \subset \mathcal{U}^{ad}$ où chaque espace $\mathcal{U}_{i,h}^{ad} \subset \mathcal{U}_i^{ad}$ est formé d'éléments finis unidimensionnels. L'approximation $u_h \in \mathcal{U}_h^{ad}$ vérifie alors :

$$\int_{\Omega} [k \underline{\nabla} u_h - \underline{Q}_d] \cdot \underline{\nabla} u^* \, d\Omega = 0 \quad \forall u^* \in \mathcal{U}_h^{ad}$$

On pose l'erreur de discrétisation globale $E_{dis} = \|u - u_h\|$, avec $\|\cdot\|$ la norme énergétique.

1.2 Réduction de modèle PGD

Au lieu de calculer une solution éléments finis potentiellement coûteuse, une solution approchée alternative et bon marché peut être déterminée grâce à la PGD.

Elle consiste à chercher une approximation de rang inférieur $u_m \in \mathcal{U}_h^{ad}$ définie sur les domaines éléments finis $\mathcal{U}_{1,h}^{ad}, \mathcal{U}_{2,h}^{ad}$ et $\mathcal{U}_{3,h}^{ad}$, de la forme :

$$u_m(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^m a_i(x_1) \cdot b_i(x_2) \cdot c_i(x_3) \quad \text{avec} \quad a_i \in \mathcal{U}_1^{ad}, b_i \in \mathcal{U}_2^{ad}, c_i \in \mathcal{U}_3^{ad} \quad (3.1)$$

Remarque 3.1. Il est possible d'envisager une autre forme de séparations spatiales, comme somme du produit de deux fonctions, l'une sur un domaine 2D, l'autre sur un domaine 1D [Bognet *et al.*, 2012]. Ce cas n'est pas traité ici car elle nécessite une attention supplémentaire notamment au niveau des conditions aux limites.

Partant de l'hypothèse de séparation de variables (3.1), le cheminement G-PGD, décrit dans la Section 3.2 du Chapitre 1, consiste en un algorithme d'enrichissement tel que la solution PGD

$u_m = u_{m-1} + a.b.c$ à l'ordre m vérifie :

$$\int_{\Omega} [k\underline{\nabla}(a.b.c) - \underline{R}^{m-1}] \cdot \underline{\nabla}(a^*.b.c) d\Omega = 0 \quad \forall a^* \in \mathcal{U}_1^{ad} \quad (3.2a)$$

$$\int_{\Omega} [k\underline{\nabla}(a.b.c) - \underline{R}^{m-1}] \cdot \underline{\nabla}(a.b^*.c) d\Omega = 0 \quad \forall b^* \in \mathcal{U}_2^{ad} \quad (3.2b)$$

$$\int_{\Omega} [k\underline{\nabla}(a.b.c) - \underline{R}^{m-1}] \cdot \underline{\nabla}(a.b.c^*) d\Omega = 0 \quad \forall c^* \in \mathcal{U}_3^{ad} \quad (3.2c)$$

où $\underline{R}^{m-1} = \underline{Q}_d - k\underline{\nabla}u_{m-1}$ est le résidu à l'ordre $m - 1$.

Le problème (3.2) est le couplage de trois problèmes 1D :

- le problème (3.2a) défini sur I_1 qui génère la fonction a à partir de la connaissance de b, c et des données du problème;
- le problème (3.2b) défini sur I_2 qui construit la fonction b à partir de la connaissance de a, c et des données du problème;
- le problème (3.2c) défini sur I_3 qui retourne la fonction c à partir de la connaissance de a, b et des données du problème.

Un tel problème non-linéaire est en pratique résolu par une méthode de type point fixe, en résolvant alternativement trois problèmes EF définis sur les domaines discrets EF 1D $I_{1,h}, I_{2,h}$ et $I_{3,h}$.

1.3 Résultats numériques

► Exemple 5 (Séparation spatiale 2D en thermique)

Soit le problème de thermique stationnaire 2D présenté sur la Figure 3.2, défini sur le domaine carré $\Omega = I_1 \times I_2 = [0, L] \times [0, L]$ avec $L = 1$ m. Une température nulle $u_d = 0$ °C est imposée sur le bord $\partial_u \Omega = [0, L] \times \{0\} \cup \{0, L\} \times [0, L]$. Un flux $r_d = -1$ Wm⁻¹ s'exerce sur le bord complémentaire $\partial_r \Omega = [0, L] \times \{L\}$. Le matériau est supposé homogène, isotrope, de conductivité $k = 1$ Wm⁻¹K⁻¹. Les maillages associés à chaque sous-domaine I_1 et I_2 sont représentés sur la Figure 3.2.

La solution analytique est connue et vérifie une écriture à variables séparées de la forme :

$$u_{ex}(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2r_d}{k} \frac{1 - (-1)^n}{\cosh(n\pi) \frac{(n\pi)^2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x_1}{L}\right) \sinh\left(\frac{n\pi x_2}{L}\right)$$

Une telle écriture justifie la séparation retenue pour la solution PGD et permet de vérifier à la fois la solution PGD et les estimateurs d'erreur.

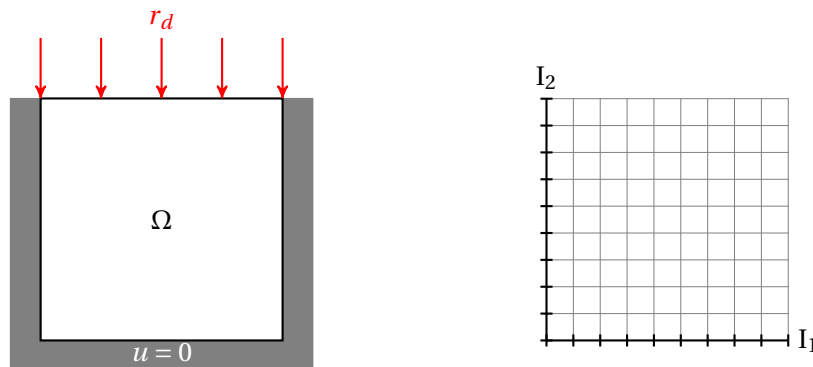


FIGURE 3.2 – Conditions aux limites (gauche) et maillage associé (droite)

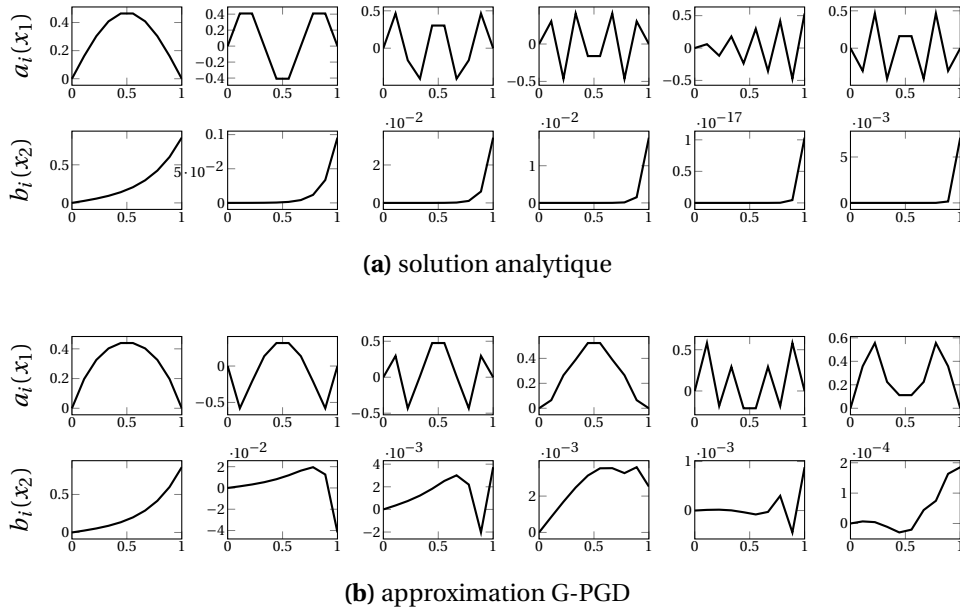


FIGURE 3.3 – Fonctions $a_i(x_1)$ et $b_i(x_2)$ pour $i = 1, \dots, 6$ (de gauche à droite)

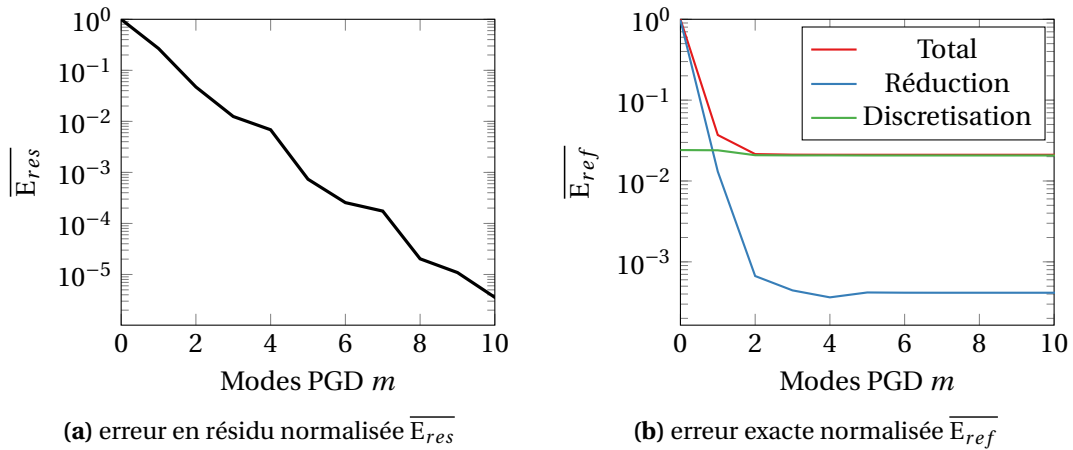


FIGURE 3.4 – Convergence de l’algorithme G-PGD, selon des erreurs définies au Chapitre 1, [Section 4.1](#)

La [Figure 3.3](#) représente les 6 premiers modes PGD déterminés grâce à la méthode G-PGD et comparés aux modes de la solution analytique. Bien que les deux premiers modes semblent être similaires, on remarque que la discrétisation grossière détériore la convergence de la méthode PGD.

Tracée sur la [Figure 3.4a](#), l’erreur en résidu ne permet pas de capter ce phénomène et n’est donc pas suffisante. C’est tout le contraire de l’erreur de référence, représentée sur la [Figure 3.4b](#) et déterminée à partir de la solution exacte et d’une solution éléments finis, qui capte cette erreur.

Ces modes PGD permettent de reconstruire la solution complète sur le domaine Ω , comme représenté sur la [Figure 3.5](#) où les approximations PGD obtenues après $m = 1, 2, 3$ modes sont comparées à la solution exacte. Peu de modes sont requis pour représenter visuellement la solution exacte.

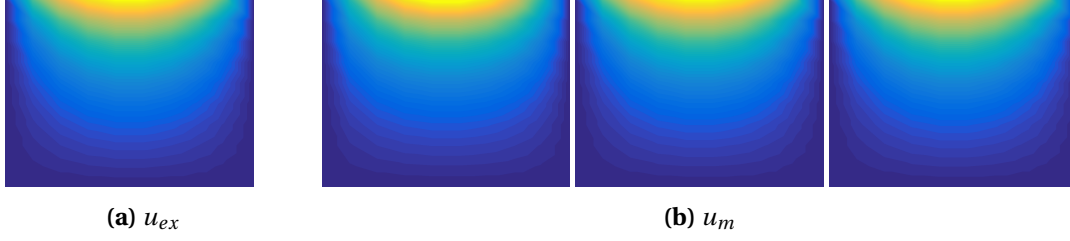


FIGURE 3.5 – Solution de référence u_{ex} à comparer à l’approximation G-PGD pour 1, 2 et 3 modes

2 Premiers travaux sur la vérification de telles solutions PGD

L’objectif de cette partie consiste à estimer les différentes erreurs, représentées sur la [Figure 3.4b](#), sans connaissance de la solution exacte ni d’une solution EF.

2.1 Par lissage du champ de contrainte

Les auteurs de [[Nadal et al., 2015](#)] proposent d’estimer l’erreur de discrétisation en évaluant l’erreur comme la différence entre le flux exact et le flux approché par la PGD, selon la norme \mathcal{L}^2 :

$$E_{ZZ} = \|\underline{q}_{ex} - \underline{q}_m^h\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}$$

En général le flux exact n’est pas connu. Aussi, il est remplacé par un flux intermédiaire obtenu par une stratégie de lissage du flux numérique \underline{q}_m^h , similaire à celle employée par [[Zienkiewicz et Zhu, 1987](#)], communément appelée *méthodes ZZ*.

L’écriture à variables séparées de la solution PGD permet de définir trois indicateurs d’erreur correspondant à l’erreur issue de chaque espace discrétisé :

$$\forall i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket \quad (E_{ZZ}^{x_i})^2 = \int_{\Omega} (\underline{q} \cdot \underline{n}_i - \underline{q}_m^h \cdot \underline{n}_i) \, d\Omega$$

où \underline{n}_i est la normale de direction x_i .

Comme la solution PGD vérifie une écriture à variables spatiales séparées, les composantes du flux vérifient alors une écriture identique, de la forme :

$$\begin{aligned} \underline{q}_m^h(x_1, x_2, x_3) \cdot \underline{n}_1 &= \frac{\partial u_m}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^m \frac{da_i^h(x_1)}{dx_1} b_i^h(x_2) c_i^h(x_3) \\ \underline{q}_m^h(x_1, x_2, x_3) \cdot \underline{n}_2 &= \frac{\partial u_m}{\partial x_2} = \sum_{i=1}^m a_i^h(x_1) \frac{db_i^h(x_2)}{dx_2} c_i^h(x_3) \\ \underline{q}_m^h(x_1, x_2, x_3) \cdot \underline{n}_3 &= \frac{\partial u_m}{\partial x_3} = \sum_{i=1}^m a_i^h(x_1) b_i^h(x_2) \frac{dc_i^h(x_3)}{dx_3} \end{aligned}$$

Le flux lissé \underline{q}^* est obtenu par une méthode ZZ. Il est construit à partir de la solution \underline{q}_m^h et

adopte une écriture à variables séparées de la forme :

$$\begin{aligned}\underline{q}^*(x_1, x_2, x_3) \cdot \underline{n}_1 &= \sum_{i=1}^m \tilde{a}_i^h(x_1) b_i^h(x_2) c_i^h(x_3) \\ \underline{q}^*(x_1, x_2, x_3) \cdot \underline{n}_2 &= \sum_{i=1}^m a_i^h(x_1) \tilde{b}_i^h(x_2) c_i^h(x_3) \\ \underline{q}^*(x_1, x_2, x_3) \cdot \underline{n}_3 &= \sum_{i=1}^m a_i^h(x_1) b_i^h(x_2) \tilde{c}_i^h(x_3)\end{aligned}$$

où \tilde{a}_i^h (res. \tilde{b}_i^h et \tilde{c}_i^h) représente le lissage de la dérivée de la fonction discrète a_i^h (resp. b_i^h et c_i^h). Il est en effet inutile d'améliorer le flux selon les autres dimensions pour avoir une estimation de l'erreur de discrétisation selon la dimension associée.

Aussi, les différences des deux flux précédemment décrits vérifient également une forme à variables séparées identique à celle adoptée pour le calcul PGD de la solution u_m . De même pour les indicateurs d'erreur $e_{ZZ}^{x_i} \simeq E_{ZZ}^{x_i}$.

Le point technique de cette méthode réside donc dans la construction d'un flux lissé, en particulier sur la construction des fonctions \tilde{a}_i , \tilde{b}_i et \tilde{c}_i . Parmi les différentes méthodes ZZ proposées dans la littérature, les auteurs ont utilisé la technique de lissage globale proposée par [Zienkiewicz et Zhu, 1987]. Habituellement, cette technique de lissage est évitée, car le processus de récupération implique un coût de calcul élevé en raison d'un système d'équations de la taille du problème à résoudre. Couplé avec la PGD, cet inconvénient est évité puisque les dimensions du problème sont séparées (le problème initial 3D ayant été converti en 3 problèmes 1D), sans augmenter considérablement le coût de calcul du processus.

Dans ce cas, la technique consiste à minimiser des fonctionnelles aux moindres carrés sur chaque dimension de la forme :

$$\begin{aligned}\int_{I_1} \left(\frac{\partial a_i^h(x_1)}{\partial x_1} - \tilde{a}_i^h(x_1) \right)^2 dx_1 & \text{ avec } \tilde{a}_i^h(x_1) = \sum_{i=1}^{N_{x_1}} N_i(x_1) \chi_{a_i} \\ \int_{I_2} \left(\frac{\partial b_i^h(x_2)}{\partial x_2} - \tilde{b}_i^h(x_2) \right)^2 dx_2 & \text{ avec } \tilde{b}_i^h(x_2) = \sum_{i=1}^{N_{x_2}} N_i(x_2) \chi_{b_i} \\ \int_{I_3} \left(\frac{\partial c_i^h(x_3)}{\partial x_3} - \tilde{c}_i^h(x_3) \right)^2 dx_3 & \text{ avec } \tilde{c}_i^h(x_3) = \sum_{i=1}^{N_{x_3}} N_i(x_3) \chi_{c_i}\end{aligned}$$

Les flux lissés sont définis à partir de leurs valeurs nodales interpolées sur le domaine global par les fonctions éléments finis N_i .

Une fois ces flux construits, il est possible d'estimer les différentes erreurs de discrétisation suivant chaque dimension. Par exemple dans [Nadal et al., 2015], les auteurs adaptent ainsi les maillages de différentes solutions PGD.

Bien que facile à implémenter, cette méthode ne permet en aucune manière d'estimer l'erreur de troncature PGD. Seule l'erreur en résidu, peu fiable en pratique, est disponible. Bâtie sur les méthodes ZZ, cette technique ne présente aucun encadrement de l'estimation de l'erreur effectuée. De plus, l'absence de sens mécanique dans la procédure de lissage rend difficile son extension aux problèmes EF plus complexes comme les problèmes non-linéaires ou de vibrations.

Malgré sa complexité d'implémentation, ces défauts justifient l'utilisation de l'estimation de l'erreur en relation de comportement par reconstruction de champs équilibrés.

2.2 Par reconstruction de champs équilibrés

On a présenté au [Chapitre 2](#) une méthode permettant d'estimer toutes les sources d'erreur d'une solution PGD où la variable d'espace \underline{x} n'est pas séparée. Cette méthode consiste à construire un champ équilibré $\hat{\underline{q}}_m^h$ au sens des éléments finis tel que :

$$\int_{\Omega} \hat{\underline{q}}_m^h \cdot \underline{\nabla} v^h \, d\Omega = l(v^h) \quad \forall v^h \in \mathcal{U}^{ad} \quad (3.3)$$

En exploitant les propriétés de la solution PGD u_m , on a montré qu'il suffisait d'inverser un système linéaire pour déterminer ce flux équilibré. Cependant, dans le cadre de ce chapitre où les variables d'espace sont séparées, cette méthode n'est plus immédiate. En effet, la démonstration donnée dans la [propriété 2.1](#) n'est plus valide en raison de l'absence d'un petit problème PGD défini sur le domaine complet Ω .

Aussi, dans ce qui suit, on propose une méthodologie différente pour construire de tels champs équilibrés au sens des éléments finis. Une fois ces champs équilibrés déterminés, les outils d'estimation d'erreur en relation de comportement du [Chapitre 2](#) peuvent être utilisés tout en conservant les propriétés mathématiques qui ont été montrées.

3 Reconstruction d'un champ statiquement équilibré en thermique

3.1 Principe de la méthode pour des problèmes 2D

Dans la méthode de construction de champs équilibrés présentée au [Chapitre 2](#), l'algorithme du point fixe est stoppé après un certain nombre d'itérations. Il fournit alors un couple (\bar{a}, \bar{b}) qui définit le m -ième mode PGD. En supposant que l'algorithme s'arrête sur le problème défini sur le domaine I_2 , le couple (\bar{a}, \bar{b}) vérifie :

$$\int_{\Omega} (k \underline{\nabla}(\bar{a}.b) - \underline{\mathbf{R}}^{m-1}) \cdot \underline{\nabla}(a^*.b) \, d\Omega = 0 \quad \forall a^* \in \mathcal{U}_{1,h}^{ad} \quad (3.4a)$$

$$\int_{\Omega} (k \underline{\nabla}(\bar{a}.\bar{b}) - \underline{\mathbf{R}}^{m-1}) \cdot \underline{\nabla}(\bar{a}.b^*) \, d\Omega = 0 \quad \forall b^* \in \mathcal{U}_{2,h}^{ad} \quad (3.4b)$$

où b a été calculé à l'itération précédente du point fixe (la fonction c de l'écriture (3.1) n'est pas présente ici, car on se limite au cas 2D).

Pour faciliter l'écriture, on introduit les notations suivantes :

— les résidus :

$$\tilde{\underline{\mathbf{R}}}^m := \underline{\mathbf{R}}^{m-1} - k \underline{\nabla}(\bar{a}.b) \quad ; \quad \underline{\mathbf{R}}^m := \underline{\mathbf{R}}^{m-1} - k \underline{\nabla}(\bar{a}.\bar{b})$$

ainsi que leurs différentes composantes :

$$\tilde{\underline{\mathbf{R}}}^m = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_1^m \\ \tilde{\mathbf{R}}_2^m \end{pmatrix} \quad ; \quad \underline{\mathbf{R}}^m = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1^m \\ \mathbf{R}_2^m \end{pmatrix}$$

— les produits scalaires :

$$\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket \quad \langle \bullet \rangle_{\bar{i}} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^d \int_{I_j} \bullet \, dx_j$$

— les dérivées partielles :

$$\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket \quad \bullet_{,i} = \frac{\partial \bullet}{\partial x_i}$$

Propriété 3.1. Il existe un flux $\delta\hat{q}_m^h$ appartenant à l'espace $\mathcal{S}_{0,h}^{ad} = \{q \in [\mathcal{L}^2(\Omega)]^d \mid \int_{\Omega} q \cdot \nabla u^* d\Omega = 0 \forall u^* \in \mathcal{U}_{0,h}^{ad}\}$ des champs équilibrés au sens des éléments finis, vérifiant une écriture à variables séparées de la forme :

$$\delta\hat{q}_m^h = \begin{pmatrix} \langle \tilde{R}_1^m b \rangle_{\bar{1}} \cdot \langle R_1^m \bar{a} \rangle_{\bar{2}} \\ -\langle \tilde{R}_2^m b, 2 \rangle_{\bar{1}} \cdot \langle R_2^m \bar{a} \rangle_{\bar{2}} \end{pmatrix}$$

Démonstration. Avec les notations adoptées, les résidus d'équilibre (3.4) se réécrivent pour tout $(a^*, b^*) \in \mathcal{U}_{1,h}^{ad} \times \mathcal{U}_{2,h}^{ad}$:

$$\int_{\Omega} [\tilde{R}_1^m a_{,1}^* \cdot b + \tilde{R}_2^m a^* \cdot b_{,2}] d\Omega = 0 \rightarrow \int_{I_1} \langle \tilde{R}_1^m b \rangle_{\bar{1}} a_{,1}^* dx_1 = - \int_{I_1} \langle \tilde{R}_2^m b, 2 \rangle_{\bar{1}} a^* dx_1 \quad (3.5a)$$

$$\int_{\Omega} [R_1^m \bar{a}_{,1} \cdot b^* + R_2^m \bar{a} \cdot b_{,2}^*] d\Omega = 0 \rightarrow \int_{I_2} \langle R_2^m \bar{a} \rangle_{\bar{2}} b_{,2}^* dx_2 = - \int_{I_2} \langle R_1^m \bar{a}_{,1} \rangle_{\bar{2}} b^* dx_2 \quad (3.5b)$$

Ces équations traduisent le fait que $\langle \tilde{R}_1^m b \rangle_{\bar{1}}$ et $\langle R_2^m b \rangle_{\bar{2}}$ vérifient les conditions aux limites de type Neumann au sens des éléments finis.

En posant $u^* = a^* \cdot b^*$, le flux $\delta\hat{q}_m^h = [\delta\hat{q}_{m,1}^h, \hat{q}_{m,2}^h]^T \in \mathcal{S}_{0,h}^{ad}$ vérifie pour $\forall (a^*, b^*) \in \mathcal{U}_{1,h}^{ad} \times \mathcal{U}_{2,h}^{ad}$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta\hat{q}_m^h \cdot \nabla (a^* \cdot b^*) d\Omega &= \int_{\Omega} \delta\hat{q}_{m,1}^h a_{,1}^* \cdot b^* + \delta\hat{q}_{m,2}^h a^* \cdot b_{,2}^* d\Omega \\ &= \int_{I_1} \langle \tilde{R}_1^m b \rangle_{\bar{1}} a_{,1}^* dx_1 \int_{I_2} \langle R_1^m \bar{a}_{,1} \rangle_{\bar{2}} b^* dx_2 - \int_{I_1} \langle \tilde{R}_2^m b, 2 \rangle_{\bar{1}} a^* dx_1 \int_{I_2} \langle R_2^m \bar{a} \rangle_{\bar{2}} b_{,2}^* dx_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, le flux $\delta\hat{q}_m^h$ défini à la [propriété 3.1](#) est équilibré au sens des éléments finis. \square

Aussi, après avoir déterminé le m -ième mode PGD, le flux $\hat{q}_m^h \in \mathcal{S}_h$ peut être reconstruit à partir des différents flux $\delta\hat{q}_m^h$ calculés à chaque enrichissement PGD et vérifiant une écriture de la forme :

$$\hat{q}_m^h = Q_d + \sum_{i=1}^m \lambda_i \delta\hat{q}_i^h \quad (3.6)$$

où les λ_i sont des coefficients réels scalaires. Ces coefficients sont déterminés en minimisant une fonctionnelle, par exemple l'énergie complémentaire du problème ou l'erreur en relation de comportement $E_{radc}^2(u_m, \hat{q}_m^h)$. À chaque enrichissement, l'ensemble des coefficients λ_i est calculé. Cela permet de déterminer le meilleur flux à chaque ajout d'un mode PGD.

Remarque 3.2. Le problème de minimisation de l'ERC s'écrit :

$$\frac{\partial E_{radc}^2(u_m, \hat{q}_m^h)}{\partial \lambda_i} = 0 = \int_{\Omega} \frac{1}{k} (\hat{q}_m^h - k \nabla u_m) \frac{\partial \hat{q}_m^h}{\partial \lambda_i} d\Omega \quad \forall i$$

Ce problème est équivalent au système linéaire $\mathbb{B}\Lambda = \mathbf{F}$ sur les inconnues $\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m]^T$ où :

$$(\mathbb{B})_{ij} = \frac{1}{k} \int_{\Omega} \delta\hat{q}_i^h \cdot \delta\hat{q}_j^h d\Omega \quad ; \quad (\mathbf{F})_j = \int_{\Omega} \delta\hat{q}_j^h \cdot (\nabla u_m - Q_d) d\Omega$$

En appliquant ce qui précède, on détermine à chaque étape d'enrichissement : (i) les flux $\delta\hat{q}_m^h$ représentés sur la [Figure 3.6](#); (ii) le flux équilibré au sens des éléments finis \hat{q}_m^h représenté sur la [Figure 3.6](#). Comparé à la solution exacte, le flux équilibré \hat{q}_m^h présente des défauts que viennent corriger les modes suivants.

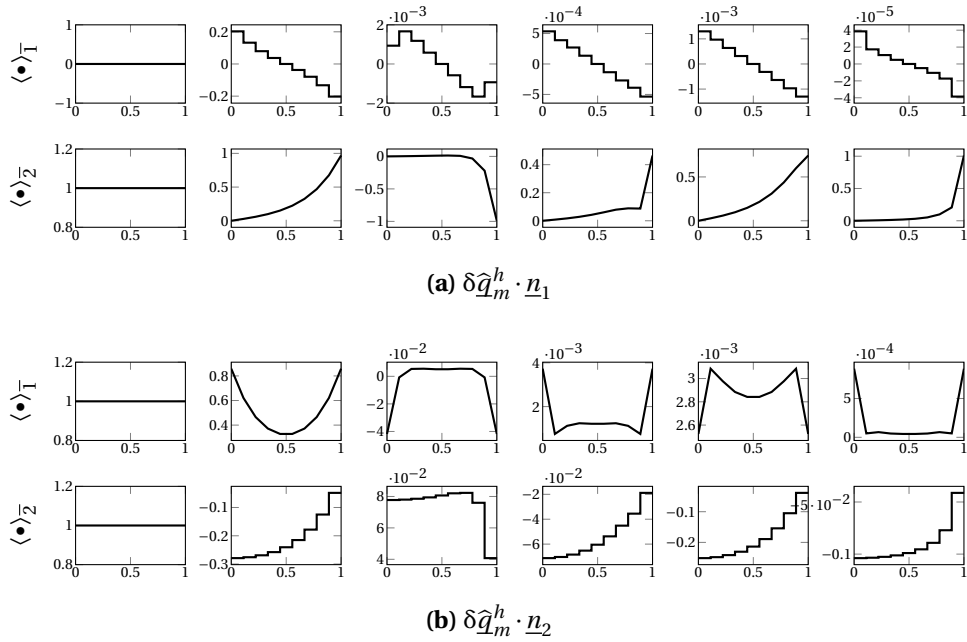


FIGURE 3.6 – Six premiers modes PGD de chaque composante du flux $\delta \hat{q}_m^h$ pour l'Exemple 5

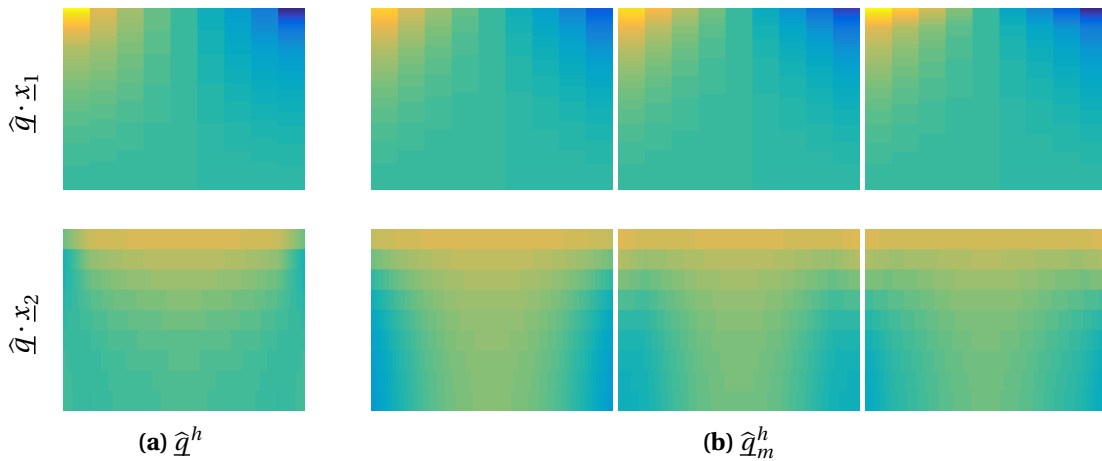


FIGURE 3.7 – Flux de référence éléments finis \hat{q}^h (a) à comparer au flux équilibré (pour $m = 1,2,3$) \hat{q}_m^h (b), pour chaque composante de l'Exemple 5 (de haut en bas).

Remarque 3.3. Le flux $\delta \hat{q}_m^h$ vérifie la forme donnée à la propriété 3.1 à un facteur multiplicatif près λ . Ce facteur peut être choisi judicieusement pour accélérer la minimisation de la fonctionnelle utilisée pour déterminer \hat{q}_m^h .

3.2 Estimation des différentes erreurs

À partir du flux $\delta \hat{q}_m^h$ équilibré au sens des éléments finis, les différents estimateurs d'erreur en relation de comportement présentés à la Section 5 du Chapitre 2 peuvent être déterminés. Les propriétés mathématiques sont conservées, notamment le côté garanti des estimateurs.

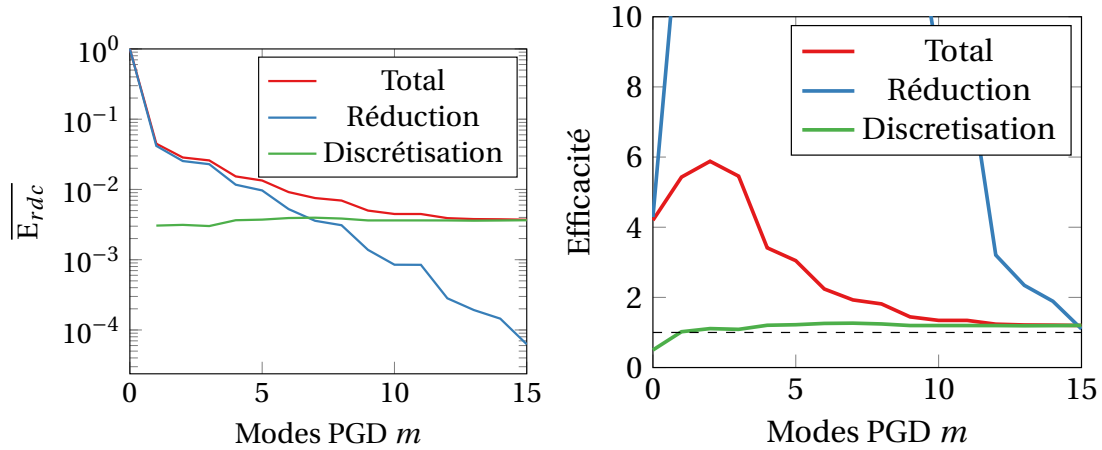


FIGURE 3.8 – Estimation par l'ERC (gauche), et efficacités associées (droite) pour l'Exemple 5.

Remarque 3.4. Il est possible d'estimer les erreurs de discrétisation de chaque discrétisation des espaces I_1 et I_2 . Pour cela, il suffit d'introduire un problème de référence intermédiaire constitué du problème initial discrétisé selon toutes les directions spatiales sauf celle qui nous intéresse, puis de construire un flux équilibré au sens de ce nouveau problème. Bien que non testé durant nos travaux, cette méthodologie permet d'adapter les différents maillages spatiaux.

En appliquant cette méthode à l'Exemple 5, les différents indicateurs d'erreur globale (i) totale : $\Delta = E_{rdc}(u_m, \hat{q}_m)$; (ii) de troncature PGD : $\Delta_{PGD} = E_{rdc}(u_m, \hat{q}_m^h)$; (iii) de discrétisation : $\Delta_{dis} = \Delta - \Delta_{PGD}$ sont évalués et leurs convergences sont données sur la Figure 3.8. Comme les erreurs de référence sont également connues, l'efficacité de ces estimateurs $\eta = \Delta/E_{ref}$ peut être évaluée afin de quantifier la qualité de ces derniers. En effet, un estimateur d'erreur est qualifié de **pertinent** et **précis** à mesure que la valeur de son indice d'efficacité η associé est proche de 1.

On peut observer qu'il faut une dizaine de modes pour que l'erreur de discrétisation soit prépondérante. Au-delà, il n'est plus utile d'enrichir la solution PGD sans faire d'adaptation de maillage pour espérer améliorer la solution. Bien que peu efficace au début, l'efficacité des estimateurs d'erreur s'améliore à mesure que des modes PGD sont ajoutés à la solution.

La Figure 3.9 représente les contributions locales aux différents estimateurs d'erreur. Dans le cas de notre exemple, l'erreur est prépondérante à la frontière entre $\partial_r\Omega$ et $\partial_u\Omega$. C'est cette zone qui devra être raffinée pour espérer améliorer l'approximation PGD.

3.3 Extension aux cas 3D

La méthodologie présentée en Section 3.1 peut être étendue aux problèmes n -dimensionnels. On présente ici le cas $n = 3$.

3.3.1 Méthodologie

Un algorithme G-PGD fournit le triplet $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ représentant le m -ième mode d'une solution PGD u_m . En supposant que le point fixe a été stoppé après la résolution du problème défini sur

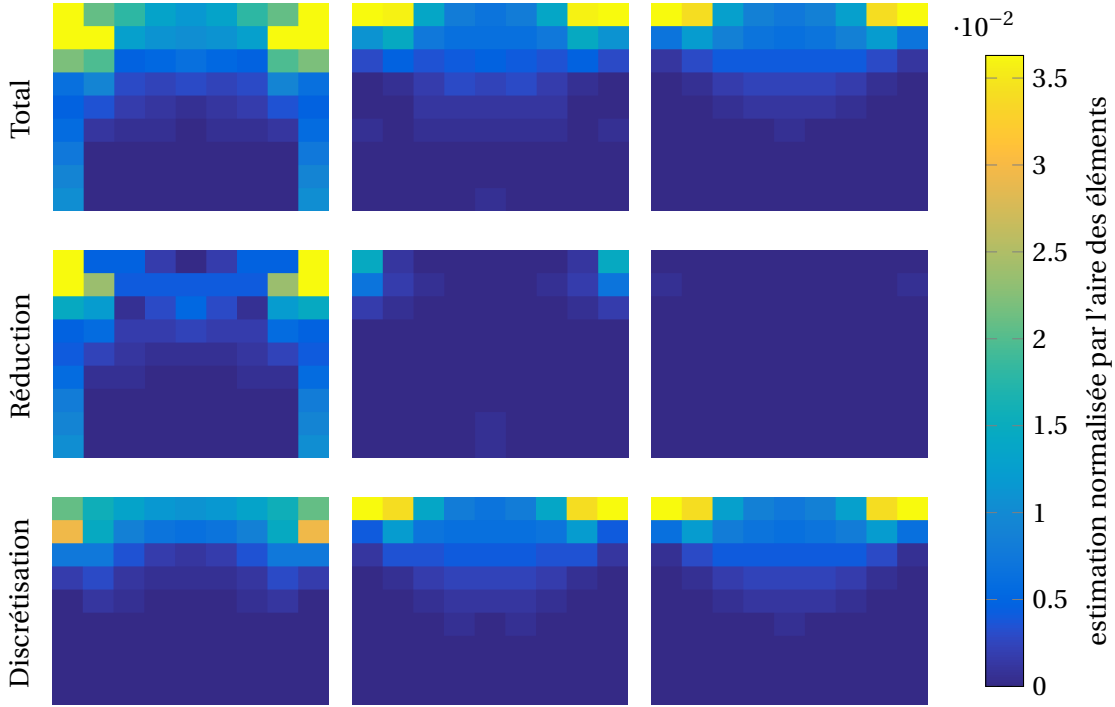


FIGURE 3.9 – Cartes d'estimation en ERC pour 5, 10 et 15 modes associées à l'Exemple 5

le domaine I_3 , fournissant donc la fonction c , le triplet $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ vérifie :

$$\int_{\Omega} (k \underline{\nabla}(\bar{a}.b.c) - \underline{R}^{m-1}) \cdot \underline{\nabla}(a^*.b.c) \, d\Omega = 0 \quad \forall a^* \in \mathcal{U}_{1,h}^{ad} \quad (3.7a)$$

$$\int_{\Omega} (k \underline{\nabla}(\bar{a}.\bar{b}.c) - \underline{R}^{m-1}) \cdot \underline{\nabla}(a.b^*.c) \, d\Omega = 0 \quad \forall b^* \in \mathcal{U}_{2,h}^{ad} \quad (3.7b)$$

$$\int_{\Omega} (k \underline{\nabla}(\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}) - \underline{R}^{m-1}) \cdot \underline{\nabla}(a.b.c^*) \, d\Omega = 0 \quad \forall c^* \in \mathcal{U}_{3,h}^{ad} \quad (3.7c)$$

où les fonctions b et c ont été calculées à l'itération précédente du point fixe.

Les problèmes (3.7) fournissent les relations suivantes pour tout $(a^*, b^*, c^*) \in \mathcal{U}_{1,h}^{ad} \times \mathcal{U}_{2,h}^{ad} \times \mathcal{U}_{3,h}^{ad}$:

$$\int_{I_1} \langle \tilde{R}_1^m b.c \rangle_{\bar{1}} a_{,1}^* \, dx_1 = - \int_{I_1} \left(\langle \tilde{R}_2^m b_{,2}.c \rangle_{\bar{1}} + \langle \tilde{R}_3^m b.c_{,3} \rangle_{\bar{1}} \right) a^* \, dx_1 = \int_{I_1} (\tilde{A}_1 + \tilde{B}_1) a^* \, dx_1 \quad (3.8a)$$

$$\int_{I_2} \langle \tilde{R}_2^m \bar{a}.c \rangle_{\bar{2}} b_{,2}^* \, dx_2 = - \int_{I_2} \left(\langle \tilde{R}_1^m \bar{a}_{,1}.c \rangle_{\bar{2}} + \langle \tilde{R}_3^m \bar{a}.c_{,3} \rangle_{\bar{2}} \right) b^* \, dx_2 = \int_{I_2} (\tilde{A}_2 + \tilde{B}_2) b^* \, dx_2 \quad (3.8b)$$

$$\int_{I_3} \langle \tilde{R}_3^m \bar{a}.\bar{b} \rangle_{\bar{3}} c_{,3}^* \, dx_3 = - \int_{I_3} \left(\langle \tilde{R}_1^m \bar{a}_{,1}.\bar{b} \rangle_{\bar{3}} + \langle \tilde{R}_2^m \bar{a}.\bar{b}_{,2} \rangle_{\bar{3}} \right) c^* \, dx_3 = \int_{I_3} (A_3 + B_3) c^* \, dx_3 \quad (3.8c)$$

où l'on a défini les résidus intermédiaires :

$$\tilde{\underline{R}}^m = \underline{R}^{m-1} - k \underline{\nabla}(\bar{a}.b.c) \quad ; \quad \tilde{\underline{R}}^m = \underline{R}^{m-1} - k \underline{\nabla}(\bar{a}.\bar{b}.c) \quad ; \quad \underline{R}^m = \underline{R}^{m-1} - k \underline{\nabla}(\bar{a}.\bar{b}.\bar{c})$$

Le couple $(\tilde{A}_1, \tilde{B}_1)$ (resp. $(\tilde{A}_2, \tilde{B}_2)$ et (A_1, B_1)) sont des fonctions dépendantes de x_1 (resp. x_2 et x_3). Par conséquent, les champs $\langle \tilde{R}_1^m b.c \rangle_{\bar{1}}$, $\langle \tilde{R}_2^m \bar{a}.c \rangle_{\bar{2}}$ et $\langle \tilde{R}_3^m \bar{a}.\bar{b} \rangle_{\bar{3}}$ vérifient les conditions homogènes de type Neumann au sens des éléments finis.

Propriété 3.2. Le flux $\delta \hat{q}_m^h$ auto équilibré au sens des éléments finis vérifie une écriture à variables séparées de la forme :

$$\delta \hat{q}_m^h = \begin{pmatrix} \langle \tilde{R}_1^m b.c \rangle_{\bar{1}} \left[\xi_1 (\tilde{A}_2 + \tilde{B}_2) (A_3 + B_3) + \alpha (\tilde{A}_2 + \tilde{B}_2) (A_3 - B_3) + \beta (\tilde{A}_2 - \tilde{B}_2) (A_3 + B_3) \right] \\ \langle \tilde{R}_2^m \bar{a}.c \rangle_{\bar{2}} \left[\xi_1 (\tilde{A}_1 + \tilde{B}_1) (A_3 + B_3) - \alpha (\tilde{A}_1 + \tilde{B}_1) (A_3 - B_3) + \gamma (\tilde{A}_1 - \tilde{B}_1) (A_3 + B_3) \right] \\ \langle \tilde{R}_3^m \bar{a}.\bar{b} \rangle_{\bar{3}} \left[\xi_3 (\tilde{A}_1 + \tilde{B}_1) (\tilde{A}_2 + \tilde{B}_2) - \beta (\tilde{A}_1 + \tilde{B}_1) (\tilde{A}_2 - \tilde{B}_2) - \gamma (\tilde{A}_1 - \tilde{B}_1) (\tilde{A}_2 + \tilde{B}_2) \right] \end{pmatrix}$$

où (ξ_1, ξ_2, ξ_3) sont des réels vérifiant la condition $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$ et (α, β, γ) des réels choisis de façon à vérifier $\delta \hat{q}_m^h \in \mathcal{S}_{0,h}^{ad}$.

Les constantes $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \alpha, \beta, \gamma)$ sont déterminées de façon à minimiser l'énergie complémentaire au sens des éléments finis.

Une fois ce flux calculé, le flux équilibré \hat{q}_m^h est déterminé par la même relation (3.6) qu'en 2D. Ce flux donne alors accès aux différents estimateurs d'erreur.

3.3.2 Résultats

► **Exemple 6** (Séparation spatiale 3D en thermique)

On étend l'Exemple 5 à la 3D. Pour cela, on ajoute une dimension supplémentaire I_3 de façon à ce que le domaine $\Omega = [0, L]^3$ soit un cube. Les frontières deviennent $\partial_r \Omega = [0, L] \times [0, L] \times \{L\}$ et $\partial_u \Omega = \{0, L\} \times [0, L] \times [0, L] \cup [0, L] \times \{0, L\} \times [0, L] \cup [0, L] \times [0, L] \times \{0\}$. Les conditions aux limites, de chargement et les coefficients matériau ne changent pas.

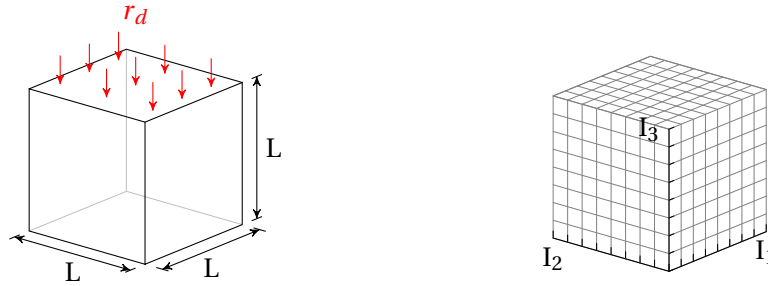


FIGURE 3.10 – Problème 3D (gauche) et maillages associés (droite)

Tout d'abord, la Figure 3.11 représente les modes PGD de la solution en température déterminée par une stratégie G-PGD et vérifie de fait les conditions aux limites de type Dirichlet. Associée à cette stratégie PGD, l'erreur en résidu ainsi que la solution PGD reconstruite sur le domaine complet Ω sont tracées sur la Figure 3.12. Là encore, peu de modes sont nécessaires pour donner une bonne représentation de la solution, mais l'erreur générée par la discrétisation adoptée n'est pas connue.

La reconstruction de champs équilibrés couplés à l'estimateur d'erreur en relation de comportement permet d'estimer les différentes erreurs, notamment l'erreur de discrétisation. On donne sur la Figure 3.13 les différents estimateurs d'erreur en relation de comportement. Au-delà d'une dizaine de modes, l'origine principale de l'erreur est causée par une discrétisation trop grossière. Des cartes locales d'estimation d'erreur permettent de localiser les zones à raffiner, tracées sur la Figure 3.14. Ces zones se localisent principalement à la frontière entre $\partial_r \Omega$ et $\partial_u \Omega$.

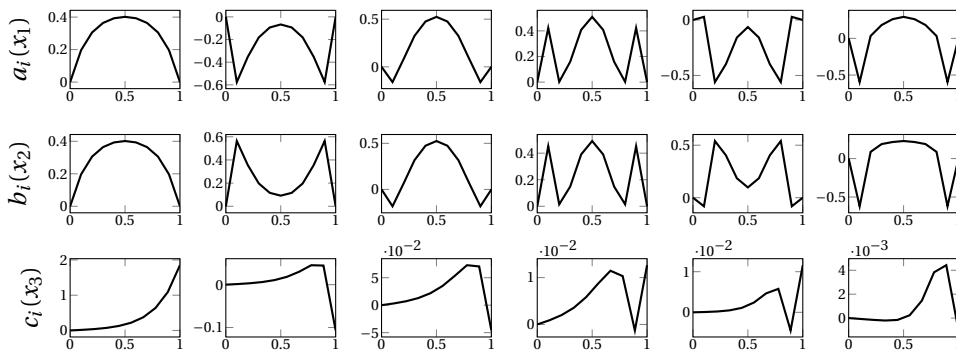


FIGURE 3.11 – Fonctions G-PGD $a_i(x_1)$, $b_i(x_2)$ et $c_i(x_3)$ pour $i = 1, \dots, 6$ (de gauche à droite) pour l'Exemple 6

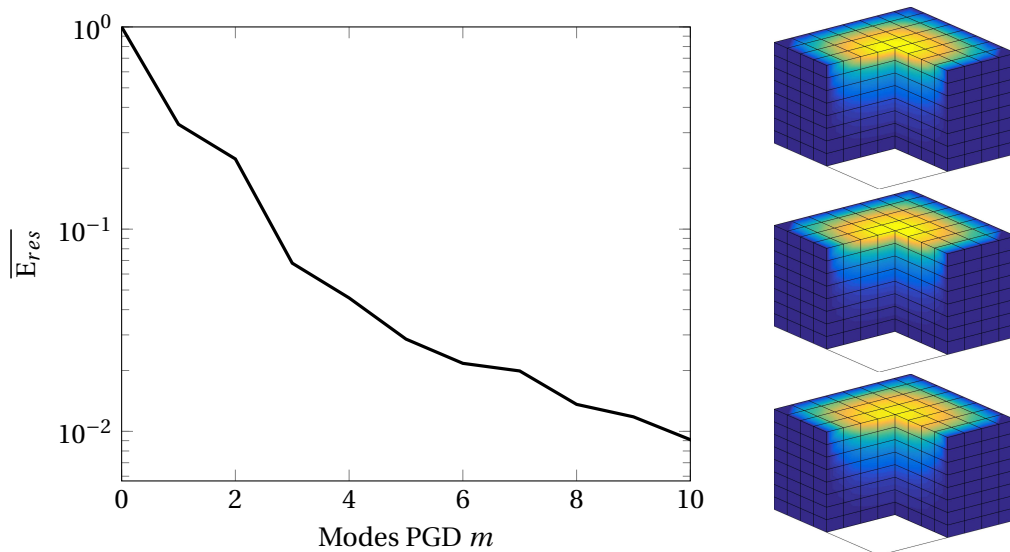


FIGURE 3.12 – Courbe de convergence de l'indicateur d'erreur en résidu (gauche) et approximation G-PGD (droite) pour $m = 1, \dots, 3$ (de haut en bas) sur l'Exemple 6.

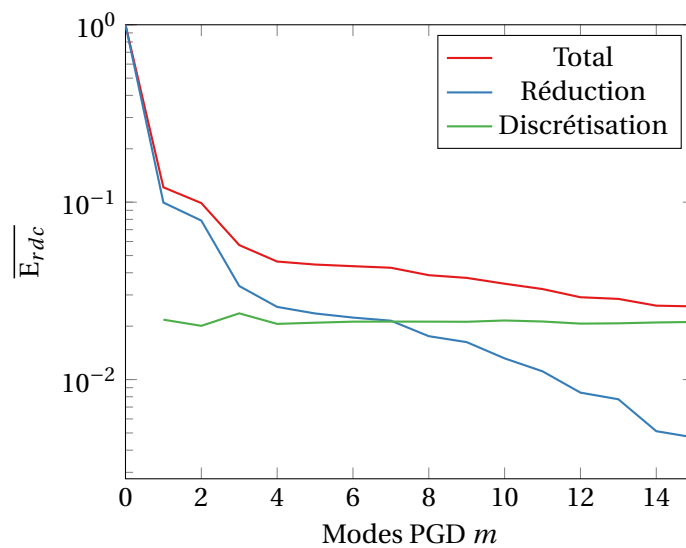


FIGURE 3.13 – Estimation en ERC pour l'Exemple 6

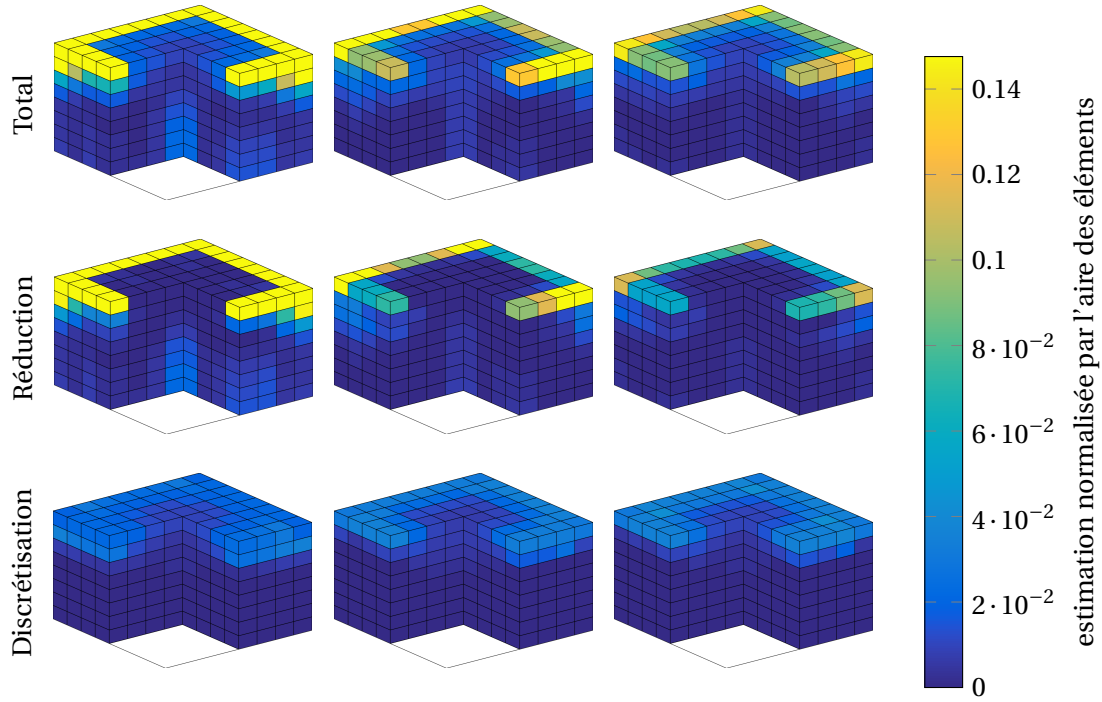


FIGURE 3.14 – Cartes d'estimation en ERC pour 5, 10 et 15 modes pour l'Exemple 6.

Les résultats des Exemples 5 et 6 montrent que lorsqu'un couple (u_m, \hat{q}_m^h) équilibré au sens des éléments finis a été déterminé, il est possible d'estimer de façon efficace l'erreur commise par une telle approximation, grâce à l'erreur en relation de comportement. La propriété de séparation des différentes sources d'erreurs permet ainsi d'utiliser des stratégies adaptatives de calcul de solutions PGD séparées spatialement.

4 Extension à l'élasticité

On présente ici l'extension des résultats précédents aux problèmes d'élasticité 2D séparés spatialement. Comme dans le cas thermique, ces résultats s'étendent naturellement aux cas 3D. La seule difficulté réside dans le besoin d'assurer la symétrie du champ de contrainte.

4.1 Formulation PGD en élasticité

Au problème d'élasticité 2D défini sur le domaine $\Omega = I_1 \times I_2$ est associée des conditions aux limites de Dirichlet (resp. Neumann) sur les frontières $\partial_r \Omega_j = \Gamma_{j_1}^r \times \Gamma_{j_2}^r$ (resp. $\partial_u \Omega_j = \Gamma_{j_1}^u \times \Gamma_{j_2}^u$) selon chaque dimension de l'espace. Le problème s'écrit alors :

$$-\nabla \cdot (\mathcal{K} \underline{\underline{c}}(\underline{u})) = \underline{f}_d \quad \text{dans } \Omega \quad (3.9a)$$

$$\underline{u} \cdot \underline{n}_j = 0 \quad \text{sur } \partial_u \Omega_j \quad (3.9b)$$

$$(\mathcal{K} \underline{\underline{c}}(\underline{u}) \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n}_j = \underline{r}_d \cdot \underline{n}_j \quad \text{sur } \partial_r \Omega_j \quad (3.9c)$$

où \underline{f}_d est un effort volumique et \underline{r}_d un effort surfacique. L'opérateur \mathcal{K} représente le tenseur de Hooke du matériau défini symétrique et positif. Au champ de déplacement \underline{u} est associé un champ de contrainte $\underline{\sigma} = \mathcal{K} \underline{\underline{c}}(\underline{u})$.

La formulation faible du problème d'élasticité consiste à chercher $\underline{u} \in \mathcal{U}^{ad}$ tel que :

$$\int_{\Omega} (\mathcal{K}\mathfrak{E}(\underline{u}) - \underline{\Sigma}_d) : \mathfrak{E}(\underline{u}^*) \, d\Omega = 0 \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}^{ad}$$

où $\underline{\Sigma}_d$ est une contrainte équilibrant le chargement \underline{r}_d et \underline{f}_d .

L'approximation PGD associée consiste à chercher le déplacement $\underline{u}_m \in \mathcal{U}^{ad}$ sous une forme à variables séparées :

$$\underline{u}_m(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^m \begin{pmatrix} a_i(x_1).b_i(x_2) \\ c_i(x_1).d_i(x_2) \end{pmatrix} \quad ; \quad (a_i, b_i) \in \mathcal{U}_{1,h}^{ad} \times \mathcal{U}_{2,h}^{ad}, (c_i, d_i) \in \mathcal{V}_{1,h}^{ad} \times \mathcal{V}_{2,h}^{ad}$$

où les différents espaces d'approximation vérifient :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^{ad} &= \left(\mathcal{U}_{1,h}^{ad} \otimes \mathcal{U}_{2,h}^{ad} \right) \times \left(\mathcal{V}_{1,h}^{ad} \otimes \mathcal{V}_{2,h}^{ad} \right) \\ \mathcal{U}_{j,h}^{ad} &= \left\{ a \in \mathcal{H}^1(I_j) \mid a|_{\Gamma_j^u} = 0 \right\} \quad \mathcal{V}_{j,h}^{ad} = \left\{ a \in \mathcal{H}^1(I_j) \mid a|_{\Gamma_j^u} = 0 \right\} \end{aligned}$$

L'approche G-PGD consiste à enrichir itérativement l'approximation PGD \underline{u}_m de la façon suivante :

$$\underline{u}_m = \underline{u}_{m-1} + \begin{pmatrix} a.b \\ c.d \end{pmatrix}$$

qui vérifie les problèmes couplés :

$$\int_{\Omega} \left(\mathcal{K}\mathfrak{E} \begin{pmatrix} a.b \\ c.d \end{pmatrix} - \mathbb{Z}^{m-1} \right) : \mathfrak{E} \begin{pmatrix} a^*.b \\ c^*.d \end{pmatrix} \, d\Omega = 0 \quad \forall (a^*, c^*) \in \mathcal{U}_{1,h}^{ad} \times \mathcal{V}_{1,h}^{ad} \quad (3.10a)$$

$$\int_{\Omega} \left(\mathcal{K}\mathfrak{E} \begin{pmatrix} a.b \\ c.d \end{pmatrix} - \mathbb{Z}^{m-1} \right) : \mathfrak{E} \begin{pmatrix} a.b^* \\ c.d^* \end{pmatrix} \, d\Omega = 0 \quad \forall (b^*, d^*) \in \mathcal{U}_{2,h}^{ad} \times \mathcal{V}_{2,h}^{ad} \quad (3.10b)$$

où l'on a défini le résidu $\mathbb{Z}^{m-1} = \underline{\Sigma}_d - \mathcal{K}\mathfrak{E}(\underline{u}_{m-1})$.

4.2 Construction d'un champ équilibré en 2D

Pour pouvoir utiliser l'erreur en relation de comportement, il faut pouvoir déterminer un champ admissible $\hat{\sigma}_m \in \mathcal{S}^{ad}$ et équilibré au sens des éléments finis $\hat{\sigma}_m^h \in \mathcal{S}_h^{ad}$, où :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{ad} &= \left\{ \sigma \in [\mathcal{L}^2(\Omega)]^{\frac{d(d+1)}{2}} \mid \int_{\Omega} (\sigma - \underline{\Sigma}_d) : \mathfrak{E}(\underline{u}^*) \, d\Omega = 0 \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}^{ad} \right\} \\ \mathcal{S}_h^{ad} &= \left\{ \sigma \in [\mathcal{L}^2(\Omega)]^{\frac{d(d+1)}{2}} \mid \int_{\Omega} (\sigma - \underline{\Sigma}_d) : \mathfrak{E}(\underline{u}^*) \, d\Omega = 0 \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_h^{ad} \right\} \end{aligned}$$

Le problème non-linéaire (3.10) est résolu par un algorithme de type point fixe. En le stoppant pour le problème défini sur I_2 , il fournit une approximation $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d})$ du m-ième mode de la solution, vérifiant :

$$\int_{\Omega} \left(\mathcal{K}\mathfrak{E} \begin{pmatrix} \bar{a}.b \\ \bar{c}.d \end{pmatrix} - \mathbb{Z}^{m-1} \right) : \mathfrak{E} \begin{pmatrix} a^*.b \\ c^*.d \end{pmatrix} \, d\Omega = 0 \quad \forall (a^*, c^*) \in \mathcal{U}_{1,h}^{ad} \times \mathcal{V}_{1,h}^{ad} \quad (3.11a)$$

$$\int_{\Omega} \left(\mathcal{K}\mathfrak{E} \begin{pmatrix} \bar{a}.\bar{b} \\ \bar{c}.\bar{d} \end{pmatrix} - \mathbb{Z}^{m-1} \right) : \mathfrak{E} \begin{pmatrix} a.b^* \\ c.d^* \end{pmatrix} \, d\Omega = 0 \quad \forall (b^*, d^*) \in \mathcal{U}_{2,h}^{ad} \times \mathcal{V}_{2,h}^{ad} \quad (3.11b)$$

où le couple (b, d) correspond au couple déterminé à l'itération précédente du point fixe.

La difficulté majeure en élasticité pour construire un champ équilibré $\delta\hat{\sigma}^h \in \mathcal{S}_{0,h}^{ad}$ réside dans le fait que ce champ doit vérifier deux équations couplant ses différentes composantes :

$$\int_{\Omega} \left[\delta\hat{\sigma}_{11}^h a_{,1}^* \cdot b^* + \delta\hat{\sigma}_{12}^h a^* \cdot b_{,2}^* \right] d\Omega = 0 \quad \forall (a^*, b^*) \in \mathcal{U}_{1,h}^{ad} \times \mathcal{U}_{2,h}^{ad} \quad (3.12a)$$

$$\int_{\Omega} \left[\delta\hat{\sigma}_{12}^h c_{,1}^* \cdot d^* + \delta\hat{\sigma}_{22}^h c^* \cdot d_{,2}^* \right] d\Omega = 0 \quad \forall (c^*, d^*) \in \mathcal{V}_{1,h}^{ad} \times \mathcal{V}_{2,h}^{ad} \quad (3.12b)$$

Propriété 3.3. Il existe un champ $\delta\hat{\sigma}_m^h \in \mathcal{S}_{0,h}$ tel que :

$$\delta\hat{\sigma}_m^h = \begin{pmatrix} \left[\lambda \langle L_a(\tilde{Z}_{12}^m) d \rangle_{\bar{1}} + \beta \langle L_a(\tilde{Z}_{11}^m) b \rangle_{\bar{1}} \right] \langle Z_{11}^m \bar{a}, 1 \rangle_{\bar{2}} - \left[\alpha \langle L_a(\tilde{Z}_{12}^m) d \rangle_{\bar{1}} + \gamma \langle L_a(\tilde{Z}_{11}^m) b \rangle_{\bar{1}} \right] L_b^{-1}(\langle Z_{22}^m \bar{c} \rangle_{\bar{2}}) \\ \langle \tilde{Z}_{22}^m d, 2 \rangle_{\bar{1}} \left[\lambda \langle L_d(Z_{12}^m) \bar{a} \rangle_{\bar{2}} + \alpha \langle L_d(Z_{22}^m) \bar{c} \rangle_{\bar{2}} \right] - L_c^{-1}(\langle \tilde{Z}_{11}^m b \rangle_{\bar{1}}) \left[\beta \langle L_d(Z_{12}^m) \bar{a} \rangle_{\bar{2}} + \gamma \langle L_d(Z_{22}^m) \bar{c} \rangle_{\bar{2}} \right] \\ \lambda \langle \tilde{Z}_{12}^m d \rangle_{\bar{1}} \langle Z_{12}^m \bar{a} \rangle_{\bar{2}} + \alpha \langle \tilde{Z}_{12}^m d \rangle_{\bar{1}} \langle Z_{22}^m \bar{c} \rangle_{\bar{2}} + \beta \langle \tilde{Z}_{11}^m b \rangle_{\bar{1}} \langle Z_{12}^m \bar{a} \rangle_{\bar{2}} + \gamma \langle \tilde{Z}_{12}^m b \rangle_{\bar{1}} \langle Z_{22}^m \bar{c} \rangle_{\bar{2}} \end{pmatrix}$$

où α, β, γ et λ sont des réels et L_{\square} un opérateur tel que :

$$\begin{aligned} \int_{I_1} L_a(p) a_{,1}^* dx_1 &= \int_{I_1} p a^* dx_1 \quad \forall a^* \in \mathcal{U}_{1,h}^{ad} ; \quad L_a(p) = \tilde{u}_{,1} \text{ avec } \tilde{u} \in \mathcal{U}_{1,h}^{ad} \\ \int_{I_2} L_b(p) b_{,2}^* dx_2 &= \int_{I_2} p b^* dx_2 \quad \forall b^* \in \mathcal{U}_{2,h}^{ad} ; \quad L_b(p) = \tilde{u}_{,2} \text{ avec } \tilde{u} \in \mathcal{U}_{2,h}^{ad} \\ \int_{I_1} L_c(p) c_{,1}^* dx_1 &= \int_{I_1} p c^* dx_1 \quad \forall c^* \in \mathcal{V}_{1,h}^{ad} ; \quad L_c(p) = \tilde{u}_{,1} \text{ avec } \tilde{u} \in \mathcal{V}_{1,h}^{ad} \\ \int_{I_2} L_d(p) d_{,2}^* dx_2 &= \int_{I_2} p d^* dx_2 \quad \forall d^* \in \mathcal{V}_{2,h}^{ad} ; \quad L_d(p) = \tilde{u}_{,2} \text{ avec } \tilde{u} \in \mathcal{V}_{2,h}^{ad} \end{aligned}$$

Démonstration. Après avoir défini les résidus :

$$\tilde{Z}^m = Z^{m-1} - \mathcal{K} \mathfrak{E} \begin{pmatrix} \bar{a}, b \\ \bar{c}, d \end{pmatrix} ; \quad Z^m = Z^{m-1} - \mathcal{K} \mathfrak{E} \begin{pmatrix} \bar{a}, \bar{b} \\ \bar{c}, \bar{d} \end{pmatrix}$$

les problèmes (3.11), dont est solution le m -ième mode de la solution PGD, conduisent à vérifier les égalités :

$$\begin{aligned} \int_{I_1} \langle \tilde{Z}_{11}^m b \rangle_{\bar{1}} a_{,1}^* dx_1 &= - \int_{I_1} \langle \tilde{Z}_{12}^m b, 2 \rangle_{\bar{1}} a^* dx_1 \quad \forall a^* \in \mathcal{U}_{1,h}^{ad} \\ \int_{I_1} \langle \tilde{Z}_{12}^m d \rangle_{\bar{1}} c_{,1}^* dx_1 &= - \int_{I_1} \langle \tilde{Z}_{22}^m d, 2 \rangle_{\bar{1}} c^* dx_1 \quad \forall c^* \in \mathcal{V}_{1,h}^{ad} \\ \int_{I_2} \langle Z_{12}^m \bar{a} \rangle_{\bar{2}} b_{,2}^* dx_2 &= - \int_{I_2} \langle Z_{11}^m \bar{a}, 1 \rangle_{\bar{2}} b^* dx_2 \quad \forall b^* \in \mathcal{U}_{2,h}^{ad} \\ \int_{I_2} \langle Z_{22}^m \bar{c} \rangle_{\bar{2}} d_{,2}^* dx_2 &= - \int_{I_2} \langle Z_{12}^m \bar{c}, 1 \rangle_{\bar{2}} d^* dx_2 \quad \forall d^* \in \mathcal{V}_{2,h}^{ad} \end{aligned}$$

$(\delta\hat{\sigma}_m^h)_{12}$ est construit comme une combinaison de ces différents termes. Aussi pour tout couple $(a^*, b^*) \in \mathcal{U}_{1,h}^{ad} \times \mathcal{U}_{2,h}^{ad}$ et $(c^*, d^*) \in \mathcal{V}_{1,h}^{ad} \times \mathcal{V}_{2,h}^{ad}$, on a :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} (\delta\hat{\sigma}_m^h)_{12} a^* b_{,2}^* d\Omega &= \int_{\Omega} \left[\lambda \langle \tilde{Z}_{12}^m d \rangle_{\bar{1}} \langle Z_{11}^m \bar{a}, 1 \rangle_{\bar{2}} - \alpha \langle \tilde{Z}_{12}^m d \rangle_{\bar{1}} L_b^{-1}(\langle Z_{22}^m \bar{c} \rangle_{\bar{2}}) \right. \\ &\quad \left. + \beta \langle \tilde{Z}_{11}^m b \rangle_{\bar{1}} \langle Z_{11}^m \bar{a}, 1 \rangle_{\bar{2}} - \gamma \langle \tilde{Z}_{11}^m b \rangle_{\bar{1}} L_b^{-1}(\langle Z_{22}^m \bar{c} \rangle_{\bar{2}}) \right] a^* b^* d\Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\int_{\Omega} (\delta\sigma_m^h)_{12} c_{,1}^* d^* d\Omega = \int_{\Omega} & \left[\lambda \langle \tilde{Z}_{22}^m d, 2 \rangle_{\bar{1}} \langle Z_{12}^m \bar{a} \rangle_{\bar{2}} + \alpha \langle \tilde{Z}_{22}^m d, 2 \rangle_{\bar{1}} \langle Z_{22}^m \bar{c} \rangle_{\bar{2}} \right. \\
& \left. - \beta L_c^{-1} (\langle \tilde{Z}_{11}^m b \rangle_{\bar{1}}) \langle Z_{12}^m \bar{a} \rangle_{\bar{2}} - \gamma L_c^{-1} (\langle \tilde{Z}_{11}^m b \rangle_{\bar{1}}) \langle Z_{22}^m \bar{c} \rangle_{\bar{2}} \right] c^* d^* d\Omega
\end{aligned}$$

En utilisant les opérateurs linéaires L_a et L_c , les expressions des deux premières composantes de $\delta\sigma_m^h$ sont construites de façon à vérifier les équations de compatibilité (3.12). \square

Comme dans le cas de la Section 3.3, les coefficients α , β , γ et λ sont déterminés en minimisant l'énergie complémentaire ou ERC.

Une fois le champ $\delta\hat{\sigma}_m^h$ connu, un champ de contrainte $\hat{\sigma}_m^h \in \mathcal{S}_h^{ad}$ équilibré au sens des éléments finis peut être défini :

$$\hat{\sigma}_m^h = \Sigma_d + \sum_{i=1}^m \lambda_i \delta\hat{\sigma}_m^h$$

De nouveau, les coefficients λ_i sont déterminés par minimisation de l'énergie complémentaire, ou de l'erreur en relation de comportement. À partir de là, une estimation de l'erreur de réduction $E_{rdc}(\underline{u}_m^h, \hat{\sigma}_m^h)$ peut être déterminée comme :

$$E_{rdc}(\underline{u}, \hat{\sigma}) = \sqrt{\int_{\Omega} \mathcal{K}^{-1}(\hat{\sigma} - \mathcal{K}\epsilon(\underline{u})) : (\hat{\sigma} - \mathcal{K}\epsilon(\underline{u})) d\Omega}$$

Finalement, une estimation de l'erreur totale puis de l'erreur de discrétisation peut être effectuée après avoir construit un champ admissible $\hat{\sigma}_m$ selon les méthodes présentées au Chapitre 2.

5 Conclusion

La vérification de solutions PGD à travers la construction de champs équilibrés au sens des éléments finis a été étendue avec succès aux problèmes séparés spatialement. Ceci valide l'universalité de cette stratégie à tout type de décomposition à variables séparées du moment qu'un champ équilibré peut être construit.

Dans le cas de solutions PGD séparées spatialement, une technique générale a été proposée permettant d'associer, de façon explicite, un flux ou champ de contrainte équilibré aux données du problème et aux modes PGD de la solution.

Cette démarche n'a malheureusement pas été testée en élasticité, il serait utile de l'appliquer sur un cas numérique concret. Pour aller plus loin, il serait intéressant d'étendre l'approche présentée dans ce chapitre aux cas où la solution PGD est représentée sous la forme d'une somme de produits de deux fonctions, l'une définie sur un domaine 2D, l'autre sur un domaine 1D.

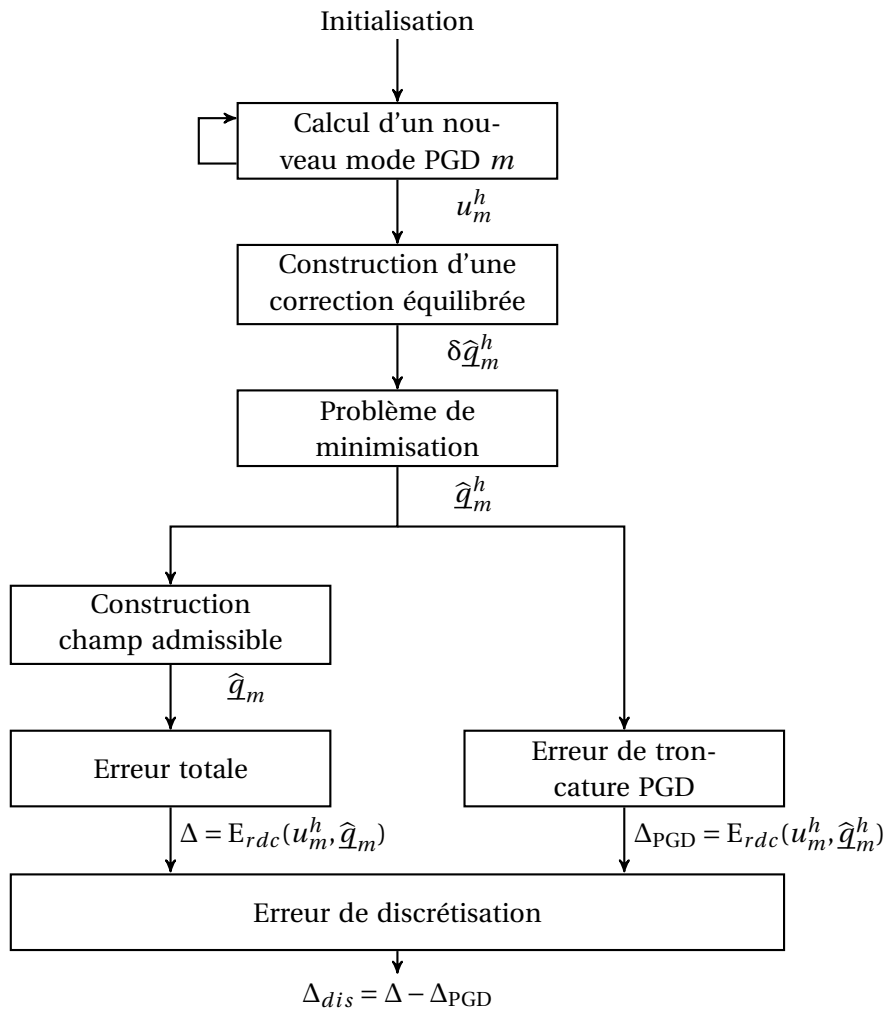


FIGURE 3.15 – Synthèse de la méthode pour estimer l’ERC dans le cas de solutions PGD séparées spatialement

Chapitre 4

Une nouvelle stratégie PGD basée sur l'Erreur en Relation de Comportement

Dans ce chapitre, on introduit une nouvelle stratégie PGD permettant d'estimer l'ERC tout en s'affranchissant de l'étape de post-traitement de la solution PGD décrite dans le [Chapitre 2](#). Cette méthode permet de définir une stratégie PGD robuste avec la minimisation d'une fonctionnelle qui a du sens. On comparera cette stratégie aux précédentes stratégies PGD introduites au [Chapitres 1 et 2](#), sur l'[Exemple 2](#).

Sommaire

1	Minimisation de l'Erreur en Relation de Comportement	79
1.1	Idée de base	80
1.2	Minimisation	82
1.3	Minimisation partielle	83
2	Performances de la stratégie CRE-PGD	84
2.1	Amélioration de la solution PGD	84
2.2	Vérification de la solution PGD	85
3	Conclusion	89

1 Minimisation de l'Erreur en Relation de Comportement

Cette stratégie, introduite dans [\[Allier et al., 2015\]](#) sous le nom de CRE-PGD, consiste à calculer et contrôler la solution PGD à la volée grâce à l'ERC, définie au [Chapitre 2](#). Sachant que la solution exacte réalise le minimum de l'ERC [\(4.1\)](#), il est tout à fait légitime de chercher le couple solution (u_h, \underline{q}) approché du problème par une minimisation de cette fonctionnelle.

$$E_{rdc}(u_h, \underline{q}) = 0 \Leftrightarrow (u_h, \underline{q}) = (u_{ex}, \underline{q}_{ex}) \quad (4.1)$$

Pour cela, on cherche à la fois le champ primal $u_m \in \mathcal{U}^{ad}$ sous la forme PGD, et un champ dual $\underline{q} \in \mathcal{S}^{ad}(u_m)$ durant la phase d'enrichissement de la base. Cette méthode hybride primale-duale

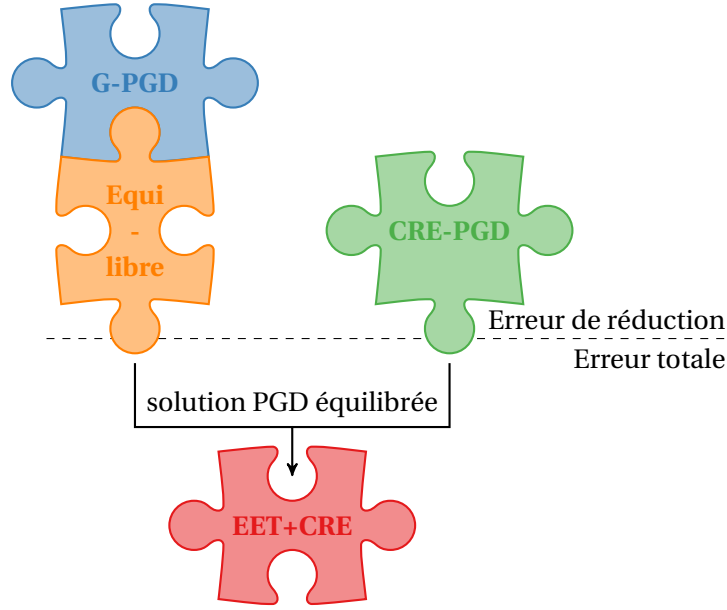


FIGURE 4.1 – Idée de base de la stratégie CRE-PGD

permet de prendre en compte l'influence du champ dual sur la base réduite et sur la solution, mais également sur la vérification de cette solution, améliorant de fait l'estimation des erreurs commises.

1.1 Idée de base

Avant toute chose, on reformule l'équilibre global (1.10) en introduisant les flux (i) $\underline{Q} \in \mathcal{S}^{ad}$ équilibrant les chargements¹ et (ii) $\underline{\tau} \in \mathcal{S}_0^{ad}$, une correction, tels que :

$$\int_{\Theta} \int_{\mathcal{I}} \int_{\Omega} c \frac{\partial u}{\partial t} v + \underbrace{(\underline{q} - \underline{Q})}_{\underline{\tau}} \cdot \underline{\nabla} v \, d\Omega \, dt \, d\mathbf{p} = 0 \quad \forall v \in \mathcal{L}^2(\mathcal{I}, \mathcal{U}_0^{ad}) \otimes \mathcal{P} \quad (4.2)$$

Le problème consiste à minimiser l'ERC (2.12), sous la contrainte que le flux $\underline{\tau}$ vérifie l'équilibre (4.2), avec u_m un champ CA sous une décomposition à variables séparées (1.11), tel que :

$$(u_m(\underline{x}, t, \mathbf{p}), \underline{\tau}(\underline{x}, t, \mathbf{p})) = \operatorname{argmin}_{u_m, \underline{\tau} \in \mathcal{S}_0^{ad}} \int_{\Theta} \int_{\mathcal{I}} \int_{\Omega} \frac{1}{k} [\underline{\tau} + \underline{Q} - k \underline{\nabla} u]^2 \, d\Omega \, dt \, d\mathbf{p} \quad (4.3)$$

Comme $\underline{\tau}$ vérifie l'équilibre global (4.2), il vérifie également une décomposition à variables séparées proche de celle de la température u_m :

$$\underline{\tau}(\underline{x}, t, \mathbf{p}) \simeq \underline{\tau}_m(\underline{x}, t, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^m \underline{Z}_i(\underline{x}) \frac{d\lambda_i(t)}{dt} \Gamma_i(\mathbf{p}) \quad (4.4)$$

Démonstration. En injectant l'hypothèse de séparation des variables PGD (1.11) dans l'équilibre (4.2), $\underline{\tau}$ doit alors vérifier, à chaque enrichissement PGD k , la relation suivante :

$$\forall k, \forall t \in \mathcal{I}, \forall \mathbf{p} \in \Theta, \quad \int_{\Omega} \sum_{i=1}^k \left[c \frac{d\lambda_i}{dt} \psi_i \Gamma_i \right] v + \underline{\tau} \cdot \underline{\nabla} v \, d\Omega = 0, \quad \forall v \in \mathcal{U}_0^{ad} \quad (4.5)$$

1. $\forall t \in \mathcal{I}, \mathbf{p} \in \Theta, \quad \int_{\Omega} \underline{Q} \cdot \underline{\nabla} v \, d\Omega = l(v) \quad \forall v \in \mathcal{U}_0^{ad}$

La forme adoptée (4.4) vérifie bien (4.5) à chaque enrichissement PGD sous la condition que \underline{Z}_i et ψ_i vérifient la relation :

$$\forall i, \forall t \in \mathcal{I}, \forall \underline{p} \in \Theta, \int_{\Omega} \underline{Z}_i(\underline{x}) \cdot \underline{\nabla} v + c \psi_i(\underline{x}) v \, d\underline{x} = 0, \quad \forall v \in \mathcal{U}_0^{ad} \quad (4.6)$$

Aussi, la contrainte de vérifier l'équilibre pour $\underline{\tau}$ se reformule comme la contrainte de vérifier une décomposition à variables séparées (4.4) et une relation liant $\underline{\tau}$ à son champ primal u (4.6). \square

Remarque 4.1. La forme (4.4) dépend fortement du problème initial (1.1) que l'on cherche à résoudre. Pour le cas de problèmes stationnaires, où aucune relation autre que la relation de comportement lie le champ primal u et dual $\underline{\tau}$, on cherche le flux $\underline{\tau} \in \mathcal{S}_0^{ad}$ sous la forme (4.7), où chaque \tilde{Z}_i est découpé de ψ_i puisque les énergies potentielle et complémentaire le sont.

$$\underline{\tau} \simeq \sum_{i=1}^m \tilde{Z}_i(\underline{x}, t, \underline{p}) \quad (4.7)$$

Les fonctions \tilde{Z}_i sont alors cherchées sous une forme à variables séparées :

$$\tilde{Z}_i(\underline{x}, t, \underline{p}) = \alpha_i(\underline{x}, t) \prod_{j=1}^N \beta_{i,j}(p_j)$$

où les fonctions $\beta_{i,j}$ sont déterminées en cherchant le champ $\underline{\tau}$ qui minimise l'énergie complémentaire ou bien l'ERC et les fonctions α_i vérifient l'équilibre :

$$\int_{\mathcal{I}} \int_{\Omega} \alpha_i \cdot \underline{\nabla} w \, d\underline{x} \, dt = 0 \quad \forall w \in \mathcal{L}^2(\mathcal{I}, \mathcal{U}_0^{ad}), \quad \forall i \in \llbracket 1; m \rrbracket \quad (4.8)$$

Démonstration. De la définition du flux $\underline{\tau}$, en régime stationnaire, il vient :

$$\int_{\Theta} \int_{\mathcal{I}} \int_{\Omega} \underline{\tau} \cdot \underline{\nabla} v \, d\underline{\Omega} \, dt \, d\underline{p} = 0 \quad \forall v \in \mathcal{L}^2(\mathcal{I}, \mathcal{U}_0^{ad}) \otimes \mathcal{P}$$

De la forme à variable séparée retenue pour le flux τ avec comme fonction test la fonction $v = w \prod_{j=1}^m \beta_{m,j}$, il vient :

$$\int_{\Omega} \int_{\mathcal{I}} \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \underline{\nabla} w \int_{\Theta} \prod_{j=1}^N \beta_{i,j} \beta_{m,j} \, d\underline{p} \, dt \, d\underline{x} = 0 \quad \forall w \in \mathcal{L}^2(\mathcal{I}, \mathcal{U}_0^{ad}), \quad \forall m \in \mathbb{N}_+^*$$

Comme la relation précédente est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}_+^*$, elle l'est pour $m = 1$:

$$\left(\int_{\Theta} \prod_{j=1}^N \beta_{1,j} \beta_{1,j} \, d\underline{p} \right) \times \left(\int_{\Omega} \int_{\mathcal{I}} \alpha_1 \cdot \underline{\nabla} w \, dt \, d\underline{x} \right) = 0 \Rightarrow \int_{\Omega} \int_{\mathcal{I}} \alpha_1 \cdot \underline{\nabla} w \, dt \, d\underline{x} = 0 \quad \forall w \in \mathcal{L}^2(\mathcal{I}, \mathcal{U}_0^{ad})$$

Supposons que l'équation (4.8) est vérifiée pour $m \in \llbracket 1; m_0 \rrbracket$. On a donc pour $m = m_0 + 1$:

$$\left(\int_{\Theta} \prod_{j=1}^N \beta_{m_0+1,j} \beta_{m_0+1,j} \, d\underline{p} \right) \times \left(\int_{\Omega} \int_{\mathcal{I}} \alpha_{m_0+1} \cdot \underline{\nabla} w \, dt \, d\underline{x} \right) = - \sum_{i=1}^{m_0} \left(\int_{\Theta} \prod_{j=1}^N \beta_{i,j} \beta_{m_0+1,j} \, d\underline{p} \right) \times \underbrace{\left(\int_{\Omega} \int_{\mathcal{I}} \alpha_i \cdot \underline{\nabla} w \, dt \, d\underline{x} \right)}_{=0}$$

Et par conséquent, l'équation (4.8) est vérifiée à l'ordre $m_0 + 1$. Par récurrence, l'équation (4.8) est vérifiée pour tout ordre $m \in \mathbb{N}_+^*$. \square

Par conséquent, l'algorithme d'enrichissement adopté dans toutes les stratégies PGD peut également s'appliquer ici pour calculer la base réduite du flux $\underline{\tau}$. En supposant les décompositions u_m et $\underline{\tau}_m$ connues (précédemment calculées), on cherche le nouvel ensemble $(\psi, \lambda, \Gamma, \underline{Z}) \in \mathcal{U}_0^{ad} \times \mathcal{T} \times \mathcal{P} \times \mathcal{S}_0^{ad}$ solution du problème (4.3) vérifiant :

$$u_{m+1}(\underline{x}, t, \underline{p}) = u_m(\underline{x}, t, \underline{p}) + \psi(\underline{x}) \lambda(t) \Gamma(\underline{p}) \quad (4.9a)$$

$$\underline{\tau}_{m+1}(\underline{x}, t, \underline{p}) = \underline{\tau}_m(\underline{x}, t, \underline{p}) + \underline{Z}(\underline{x}) \frac{d\lambda(t)}{dt} \Gamma(\underline{p}) \quad (4.9b)$$

1.2 Minimisation

Différentes stratégies peuvent être mises en œuvre pour imposer la contrainte durant le processus de minimisation. Dans cette première version, appelée full-CRE-PGD, la contrainte sur \underline{Z} est imposée par un champ de multiplicateurs de Lagrange, noté v :

$$\begin{aligned} (\psi, \lambda, \Gamma, \underline{Z}, v) = \arg \min_{\psi, \lambda, \Gamma, \underline{Z}} \max_v \int_{\Theta} \int_{\mathcal{I}} \int_{\Omega} \frac{1}{k} \left(\underline{Q}_m + \underline{Z} \frac{d\lambda}{dt} \Gamma - k \underline{\nabla} \psi \lambda \Gamma \right)^2 d\Omega dt d\underline{p} \\ + \int_{\Omega} \underline{Z} \cdot \underline{\nabla} v + c \psi v dx \end{aligned} \quad (4.10)$$

avec $\underline{Q}_m = \underline{Q} + \underline{\tau}_m - k \underline{\nabla} u_m$.

Le problème (4.10) est un problème de type point-selle. Appliqué à chaque inconnue, on aboutit au couplage de plusieurs problèmes :

— une formulation variationnelle d'une EDO sur la fonction λ :

$$0 = \int_{\Theta} \int_{\mathcal{I}} \int_{\Omega} \frac{1}{k} \left(\underline{Q}_m + \underline{Z} \frac{d\lambda}{dt} \Gamma - k \underline{\nabla} \psi \lambda \Gamma \right) \left(\underline{Z} \frac{d\lambda^*}{dt} \Gamma - k \underline{\nabla} \psi \lambda^* \Gamma \right) d\Omega dt d\underline{p} \quad \forall \lambda^* \in \mathcal{T} \quad (4.11a)$$

— plusieurs équations sur les fonctions γ_i :

$$0 = \int_{\Theta} \int_{\mathcal{I}} \int_{\Omega} \frac{1}{k} \left(\underline{Q}_m + \underline{Z} \frac{d\lambda}{dt} \Gamma - k \underline{\nabla} \psi \lambda \Gamma \right) \left(\underline{Z} \frac{d\lambda}{dt} - k \underline{\nabla} \psi \lambda \right) \gamma_i^* \Gamma_i d\Omega dt d\underline{p} \quad \forall \gamma_i^* \in \mathcal{P}_i \quad (4.11b)$$

— une formulation variationnelle primale d'une EDP sur la fonction ψ :

$$0 = 2 \int_{\Theta} \int_{\mathcal{I}} \int_{\Omega} \frac{1}{k} \left(k \underline{\nabla} \psi \lambda \Gamma - \underline{Q}_m - \underline{Z} \frac{d\lambda}{dt} \Gamma \right) \underline{\nabla} \psi^* \lambda \Gamma d\Omega dt d\underline{p} + \int_{\Omega} c \psi^* v d\Omega \quad \forall \psi^* \in \mathcal{U}_0^{ad} \quad (4.11c)$$

— une formulation variationnelle duale d'une EDP sur la fonction \underline{Z} :

$$0 = 2 \int_{\Theta} \int_{\mathcal{I}} \int_{\Omega} \frac{1}{k} \left(\underline{Q}_m + \underline{Z} \frac{d\lambda}{dt} \Gamma - k \underline{\nabla} \psi \lambda \Gamma \right) \underline{Z}^* \frac{d\lambda}{dt} \Gamma d\Omega dt d\underline{p} + \int_{\Omega} \underline{Z}^* \underline{\nabla} v d\Omega \quad \forall \underline{Z}^* \in \mathcal{S}_0^{ad} \quad (4.11d)$$

— une formulation variationnelle sur la fonction v :

$$0 = \int_{\Omega} \underline{Z} \cdot \underline{\nabla} v^* + c \psi v^* d\Omega \quad \forall v^* \in \mathcal{U}_0^{ad} \quad (4.11e)$$

Les inconnues des problèmes (4.11c)–(4.11e) sont linéairement liées. Leurs solutions discrètes $(\boldsymbol{\Psi}_h, \mathbf{Z}_h, \mathbf{v}_h)$ peuvent alors être déterminées en un coup en inversant un système matriciel, avec \mathbb{B} une matrice définie positive symétrique, de taille trois fois le nombre de DDLs spatiaux :

$$\mathbb{B} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Psi}_h \\ \mathbf{Z}_h \\ \mathbf{v}_h \end{pmatrix} = \mathbf{L}, \quad \text{avec } \mathbb{B} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

En effet, les problèmes (4.11c)–(4.11e) donnent le système suivant :

$$\begin{cases} a \int_{\Omega} \underline{\nabla} \psi^* \cdot \underline{\nabla} \psi \, d\Omega + b \int_{\Omega} \underline{\nabla} \psi^* \cdot \underline{Z} \, d\Omega + c \int_{\Omega} \psi^* v \, d\Omega = l_1 \int_{\Omega} \underline{\nabla} \psi \cdot \underline{Q}_m \, d\Omega \\ b \int_{\Omega} \underline{\nabla} \psi \cdot \underline{Z}^* \, d\Omega + d \int_{\Omega} \underline{Z}^* \cdot \underline{Z} \, d\Omega + \int_{\Omega} \underline{Z}^* \cdot \underline{\nabla} v \, d\Omega = l_2 \int_{\Omega} \underline{Z} \cdot \underline{Q}_m \, d\Omega \\ c \int_{\Omega} \psi v^* \, d\Omega + \int_{\Omega} \underline{Z} \cdot \underline{\nabla} v^* \, d\Omega + 0 = 0 \end{cases}$$

où les constantes a, b, d, l_1 et l_2 vérifient :

$$a = 2 \int_{\Theta} \int_{\mathcal{I}} (\lambda \Gamma)^2 \, dt \, d\mathbf{p} \quad b = -\frac{2}{k} \int_{\Theta} \int_{\mathcal{I}} \frac{d\lambda}{dt} \lambda \Gamma^2 \, dt \, d\mathbf{p} \quad d = \frac{2}{k} \int_{\Theta} \int_{\mathcal{I}} \left(\frac{d\lambda}{dt} \Gamma \right)^2 \, dt \, d\mathbf{p} \\ l_1 = \frac{2}{k} \int_{\Theta} \int_{\mathcal{I}} \lambda \Gamma \, dt \, d\mathbf{p} \quad l_2 = \frac{2}{k} \int_{\Theta} \int_{\mathcal{I}} \frac{d\lambda}{dt} \Gamma \, dt \, d\mathbf{p}$$

Pour déterminer le couple $(\psi, \lambda, \Gamma, \underline{Z})$ vérifiant (4.11), on applique un algorithme de type *point fixe* comme dans les stratégies PGD précédentes (dont l'algorithme générique est représenté sur la Figure 1.7). Pour des raisons pratiques, on préfère normaliser toutes les fonctions λ et $[\gamma_n]_{n \in [1, N]}$ sauf la fonction spatiale ψ (et donc aussi \underline{Z}). Pour cela, la boucle dite de *point fixe* doit finir sur le problème spatial (4.12).

Remarque 4.2. L'indicateur d'ERC $q_m - k \underline{\nabla} u_m = \underline{Q} + \underline{\tau}_m - k \underline{\nabla} u_m$ est orthogonal aux espaces d'approximation $\mathcal{U}_{0,h}^{ad} \otimes \mathcal{T} \otimes \mathcal{P}$ et $\mathcal{S}_h^{ad} \otimes \mathcal{T} \otimes \mathcal{P}$ selon le produit scalaire énergétique.

1.3 Minimisation partielle

En pratique, le problème (4.12) peut être coûteux à inverser pour des problèmes à grand nombre de DDLs. On propose ainsi une seconde version, appelée partial-CRE-PGD. Grâce à la présence d'une boucle *point fixe*, on peut imposer la condition (4.6) après le processus de minimisation et non pendant.

Le problème (4.3) avec les hypothèses (4.9) se réécrit :

$$(\psi, \lambda, \Gamma, \underline{Z}) = \arg \min_{\psi, \lambda, \Gamma, \underline{Z}} \int_{\Theta} \int_{\mathcal{I}} \int_{\Omega} \frac{1}{k} \left(\underline{Q}_m + \underline{Z} \frac{d\lambda}{dt} \Gamma - k \underline{\nabla} \psi \lambda \Gamma \right)^2 \, d\Omega \, dt \, d\mathbf{p}$$

Ce problème conduit au couplage de plusieurs problèmes :

— une formulation variationnelle primale d'une EDP sur la fonction ψ :

$$0 = \int_{\Theta} \int_{\mathcal{I}} \int_{\Omega} \frac{1}{k} \left(k \underline{\nabla} \psi \lambda \Gamma - \underline{Q}_m - \underline{Z} \frac{d\lambda}{dt} \Gamma \right) \underline{\nabla} \psi^* \lambda \Gamma \, d\Omega \, dt \, d\mathbf{p} \quad \forall \psi^* \in \mathcal{U}_0^{ad} \quad (4.13a)$$

— une formulation variationnelle d'une EDO sur la fonction λ :

$$0 = \int_{\Theta} \int_{\mathcal{I}} \int_{\Omega} \frac{1}{k} \left(\underline{Q}_m + \underline{Z} \frac{d\lambda}{dt} \Gamma - k \underline{\nabla} \psi \lambda \Gamma \right) \left(\underline{Z} \frac{d\lambda^*}{dt} \Gamma - k \underline{\nabla} \psi \lambda^* \Gamma \right) \, d\Omega \, dt \, d\mathbf{p} \quad \forall \lambda^* \in \mathcal{T} \quad (4.13b)$$

— plusieurs équations sur les fonctions γ_i :

$$0 = \int_{\Theta} \int_{\mathcal{I}} \int_{\Omega} \frac{1}{k} \left(\underline{Q}_m + \underline{Z} \frac{d\lambda}{dt} \Gamma - k \underline{\nabla} \psi \lambda \Gamma \right) \left(\underline{Z} \frac{d\lambda^*}{dt} \Gamma - k \underline{\nabla} \psi \lambda^* \Gamma \right) \gamma_i^* \Gamma_i \, d\Omega \, dt \, d\mathbf{p} \quad \forall \gamma_i^* \in \mathcal{P}_i \quad (4.13c)$$

— une équation sur \underline{Z} par la relation (4.6).

Dans cette version, on retrouve l'algorithme générique PGD de la Figure 1.7 auquel on ajoute un problème supplémentaire à résoudre, celui permettant de déterminer \underline{Z} . Dans cette version, il n'est alors plus nécessaire de terminer sur le problème spatial puisque l'équation (4.6) reste valable lorsque la fonction ψ est normalisée.

2 Performances de la stratégie CRE-PGD

On se propose dans cette partie d'étudier les performances et les applications des outils de vérification, présentés au [Chapitre 2](#), sur la solution PGD obtenue par cette nouvelle stratégie vis-à-vis des stratégies PGD détaillées au [Chapitres 1 et 2](#) sur l'[Exemple 2](#).

2.1 Amélioration de la solution PGD

Dans cette partie, on considère des discrétisations spatiale et temporelle extrêmement raffinées pour s'affranchir de toute source d'erreur issue de la discrétisation des domaines : $N_x = 100$ et $N_t = 1000$.

La stratégie CRE-PGD dans ses deux versions, partial-CRE-PGD et full-CRE-PGD, permet d'estimer **immédiatement** l'erreur de réduction par l'intermédiaire de l'ERC. Cet estimateur a posteriori, ne nécessitant aucune connaissance de la solution exacte, se définit comme :

$$E_{rdc}^{red} = \|\|Q + \underline{\tau}_m - k\underline{\nabla}u_m\|\|_{\mathcal{U}} \quad ; \quad \overline{E_{rdc}^{red}} = \frac{E_{rdc}^{red}}{\|\|Q + \underline{\tau}_m + k\underline{\nabla}u_m\|\|_{\mathcal{U}}}$$

Dans l'[Exemple 2](#), la solution EF dite de référence est connue. On définit alors l'indice d'efficacité $\eta_{rdc} = E_{rdc}^{red}/E_{ref}$ afin de quantifier la qualité de cet estimateur d'erreur².

Sur la [Figure 4.2](#), on compare les cinq premiers modes déterminés par les différentes versions de la stratégie CRE-PGD aux modes optimaux obtenus par la SVD pour une vitesse de chargement fixée à $v = 1/2T$. Au signe près, on observe une très grande ressemblance entre les modes obtenus par CRE-PGD vis-à-vis des modes SVD, principalement les trois premiers. Cette optimalité est confirmée par la courbe de convergence $\overline{E_{ref}}$ tracée sur la [Figure 4.3a](#), où les dix premiers modes génèrent la même optimalité que la SVD tronquée à ces dix modes. Au delà, l'optimalité se dégrade, la version full-CRE-PGD étant meilleure que la version partial-CRE-PGD. Lorsque la phase d'*update* est activée, les versions *full* ou *partial* sont équivalentes, bien que leurs fonctions modales diffèrent (voir le cinquième mode représenté sur la [Figure 4.2](#)). Bien que non tracées, les autres stratégies PGD décrites au [Chapitre 1](#) ont une convergence moins bonne dans leur version non mise à jour et une convergence identique dans leurs version mise à jour.

En général, la solution dite de référence est inconnue ainsi que la courbe de convergence ([Figure 4.3a](#)). Grâce à l'estimateur d'ERC de réduction $\overline{E_{rdc}^{red}}$ accessible par cette nouvelle stratégie PGD, une nouvelle estimation de la convergence de l'algorithme est immédiatement disponible, représentée sur la [Figure 4.3b](#). Les mêmes propriétés que celles observées sur la [Figure 4.3a](#) sont retrouvées mais sans nécessiter de connaître la solution de référence.

L'efficacité de l'estimateur d'erreur en résidu $\overline{E_{res}}$ est très mauvaise en pratique (voir la [Figure 1.10](#)), au contraire de celle de l'estimateur d'ERC très efficace sur l'[Exemple 2](#), représentée sur la [Figure 4.4a](#). Bien que cet estimateur d'ERC en réduction est garanti ici et pour d'autres types de chargement (voir [Figure 4.4](#)), aucune démonstration mathématique ne le conforte au contraire de l'estimateur d'ERC dit total (voir [Chapitre 2](#)).

Grâce à la stratégie CRE-PGD et son estimateur associé, un gain en temps de calcul est possible. Pour une erreur cible de 1%, huit modes CRE-PGD sont nécessaires (voir [Figure 4.3b](#)) conduisant à un gain en temps de calcul de 7 quelle que soit la version (avec la phase d'*update* ou non) vis-à-vis de la solution MEF. À comparer à la meilleure stratégie PGD existante qui ne

2. Un tel indice ne peut être défini pour l'erreur en résidu, en raison de l'utilisation d'une norme \mathcal{L}^2 pour l'évaluer.

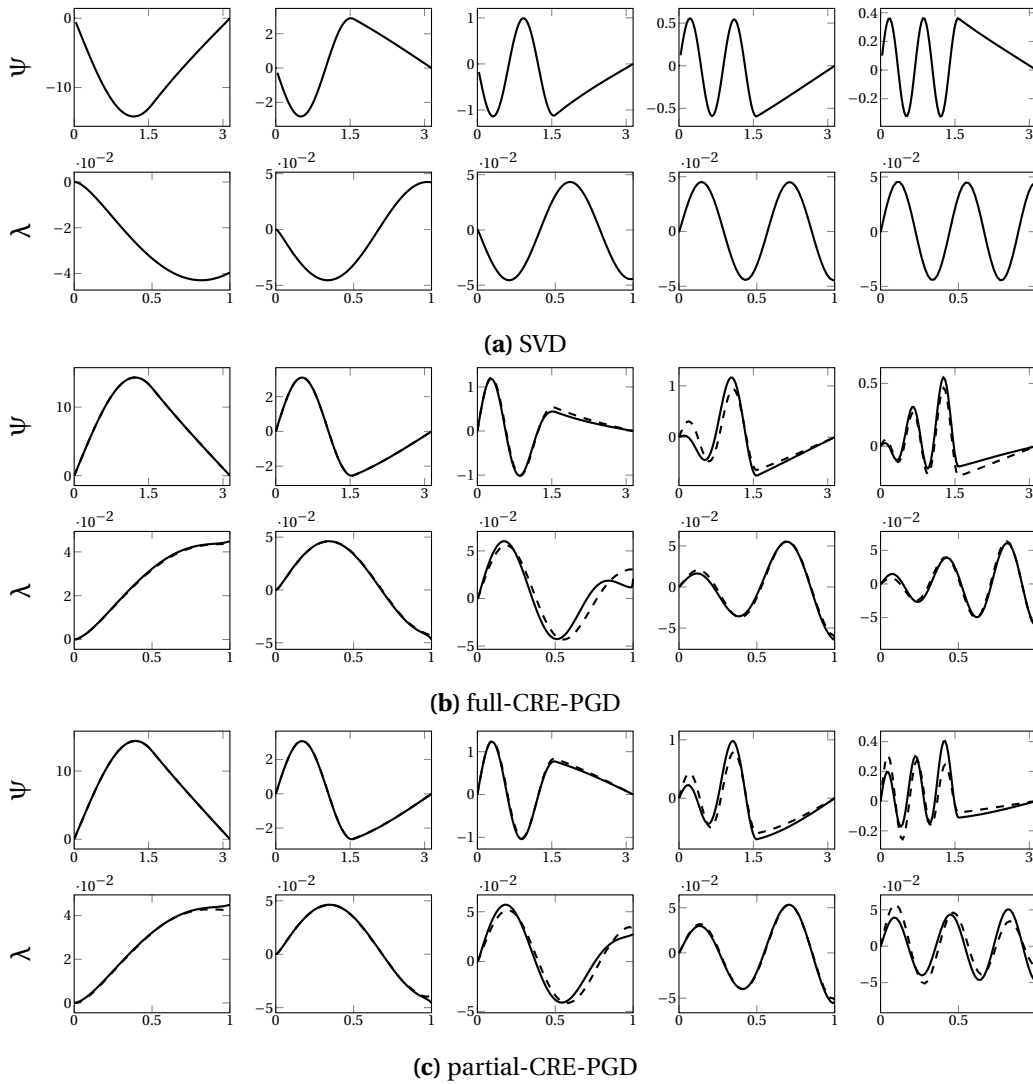


FIGURE 4.2 – Comparaison des cinq premiers modes de u_m obtenus par les différentes versions CRE-PGD. En trait discontinu les stratégies avec la phase d'*update* activée, en trait plein les stratégies sans phase d'*update*. Pour comparaison, on redonne les modes générés par la méthode SVD.

procure qu'un gain de 5 (voir [Figure 1.11](#)) si l'erreur de référence $\overline{E_{ref}}$ est connue (rarement le cas).

De toutes ces propriétés, ce nouvel estimateur de réduction permet de stopper plus efficacement le processus d'enrichissement de la base PGD d'où un gain en temps de calcul et d'espace de stockage plus important que pour les solutions calculées par les autres stratégies PGD, nécessitant plus de modes pour viser une même erreur de réduction, à cause de l'inefficacité de l'estimateur d'erreur en résidu $\overline{E_{res}}$.

2.2 Vérification de la solution PGD

On considère toujours le problème de l'[Exemple 2](#), mais pour une discrétisation grossière à la fois en temps et en espace ($N_x = 10$ et $N_t = 10$). Aussi, l'erreur de discrétisation ne peut plus être négligée.

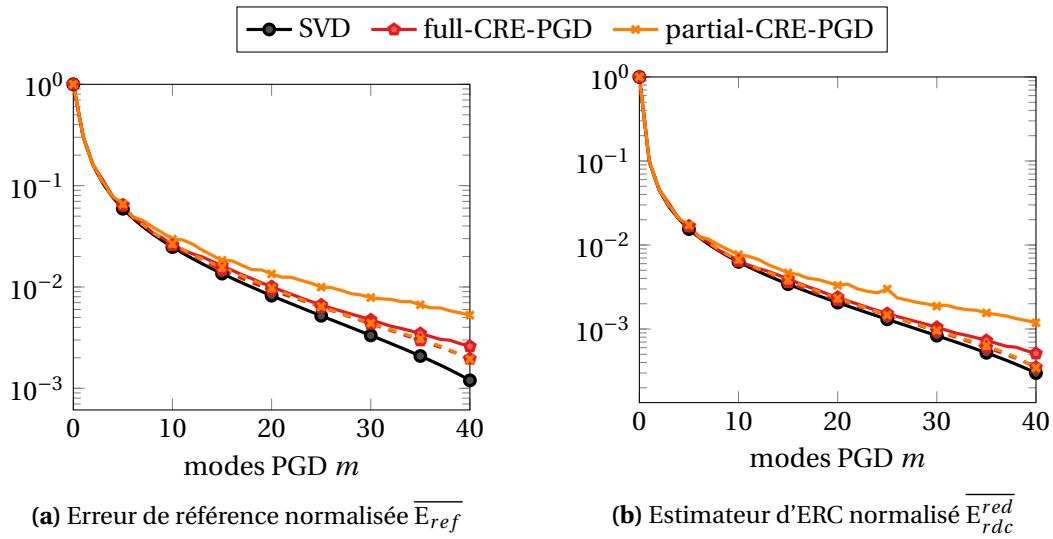


FIGURE 4.3 – Convergence des différentes versions de CRE-PGD : erreur exacte (a) et estimateur d'ERC (b). Ont été représentées en trait discontinu les stratégies avec la phase d'*update* et en trait plein les stratégies sans phase d'*update*. Pour comparaison, on redonne les convergences de la méthode SVD.

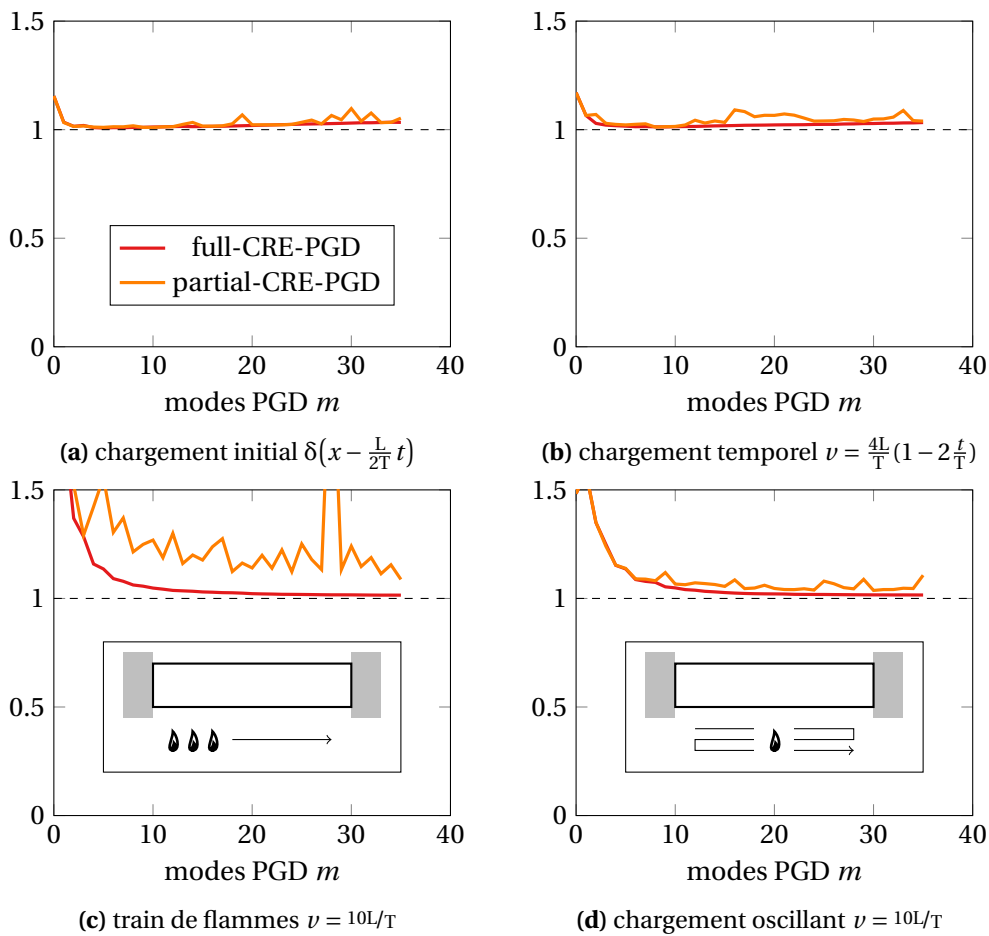


FIGURE 4.4 – Efficacité η de l'estimateur ERC de réduction E_{rdc}^{red} pour des solutions obtenues pour différents chargements f_d . Sont tracées les différentes versions de CRE-PGD sans la phase d'*update*.

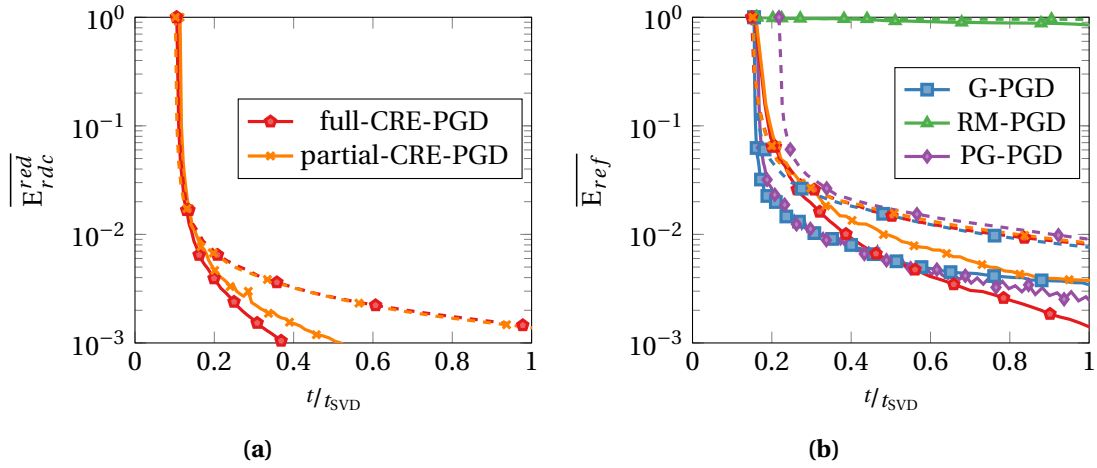


FIGURE 4.5 – Temps de calcul normalisé des différentes versions CRE-PGD selon l’estimateur ERC de réduction \overline{E}_{rdc}^{red} (a) à comparer à l’erreur exacte \overline{E}_{ref} (b). En trait discontinu, les versions mises à jour, et en trait plein les versions non mises à jour.

On cherche alors à déterminer les erreurs de réduction et de discrétisation des solutions issues de cette nouvelle stratégie. On comparera les résultats à ceux obtenus en post-traitant une solution G-PGD par la méthode décrite au [Chapitre 2](#).

Les deux méthodes (full/partial)-CRE-PGD construisent des champs $u_m \in \mathcal{U}_h^{ad}$ et $\underline{\tau}_m \in \mathcal{S}_h^{ad}$ permettant d’estimer un **erreur de réduction** E_{rdc}^{red} . Grâce aux techniques classiques d’équilibrage, un flux $\hat{\underline{\tau}}_m \in \mathcal{S}^{ad}$ SA est construit à partir de $\underline{\tau}_m$. Ce flux donne accès à une estimation de l’**erreur totale** E_{rdc}^{tot} contenant à la fois l’estimation de l’erreur de réduction et de discrétisation spatiale et temporelle :

$$E_{rdc}^{tot} = \|\hat{\mathbf{Q}} + \hat{\underline{\tau}}_m - k \nabla u_m\|_{\mathcal{U}}$$

La différence de ces deux erreurs permet d’estimer facilement l’**erreur de discrétisation** $E_{rdc}^{dis} = \sqrt{E_{rdc}^{tot\ 2} - E_{rdc}^{red\ 2}}$. À droite de la [Figure 4.6](#), ces différents estimateurs ont été représentés pour chaque stratégie compatible : G-PGD, full-CRE-PGD et partial-CRE-PGD.

Dans cet exemple, la solution dite de référence est connue, calculée sur un maillage fin. L’erreur exacte E_{ref} estime ainsi fidèlement l’erreur exacte totale. L’erreur de réduction s’estime en comparant l’approximation PGD vis-à-vis d’une solution EF sur le même maillage. Par différence, l’erreur de discrétisation en est déduite. Ces erreurs sont tracées dans la partie gauche de la [Figure 4.6](#).

Par rapport à la stratégie G-PGD, la nouvelle stratégie CRE-PGD ne dégrade pas l’estimation de l’ERC avec des tendances équivalentes aux erreurs exactes associées. L’amélioration des modes, visible sur l’erreur exacte de réduction, est bien captée par l’estimateur d’ERC. Pour ce problème fortement grossier, la phase d’*update* améliore la solution à partir du cinquième mode, mais est insuffisante pour influencer l’erreur totale. Sans adaptation, il est inutile d’aller au delà de quatre modes, l’erreur majoritaire étant l’erreur de discrétisation.

Sur la [Figure 4.7](#), on trace l’efficacité $\eta = E_{rdc}^{tot}/E_{ref}$ pour les différentes stratégies PGD étudiées dans cette partie. On observe que les différentes stratégies proposent des estimateurs équivalents avec une phase d’*update* qui améliore légèrement la solution. À faible nombre de modes PGD m , on remarque que les estimateurs en ERC sous-estiment l’erreur totale exacte en raison d’une certaine absence d’informations. En effet, à mesure que l’on enrichit la solution PGD, cette efficacité s’améliore pour converger vers une valeur asymptotique d’environ 1,43. Sachant

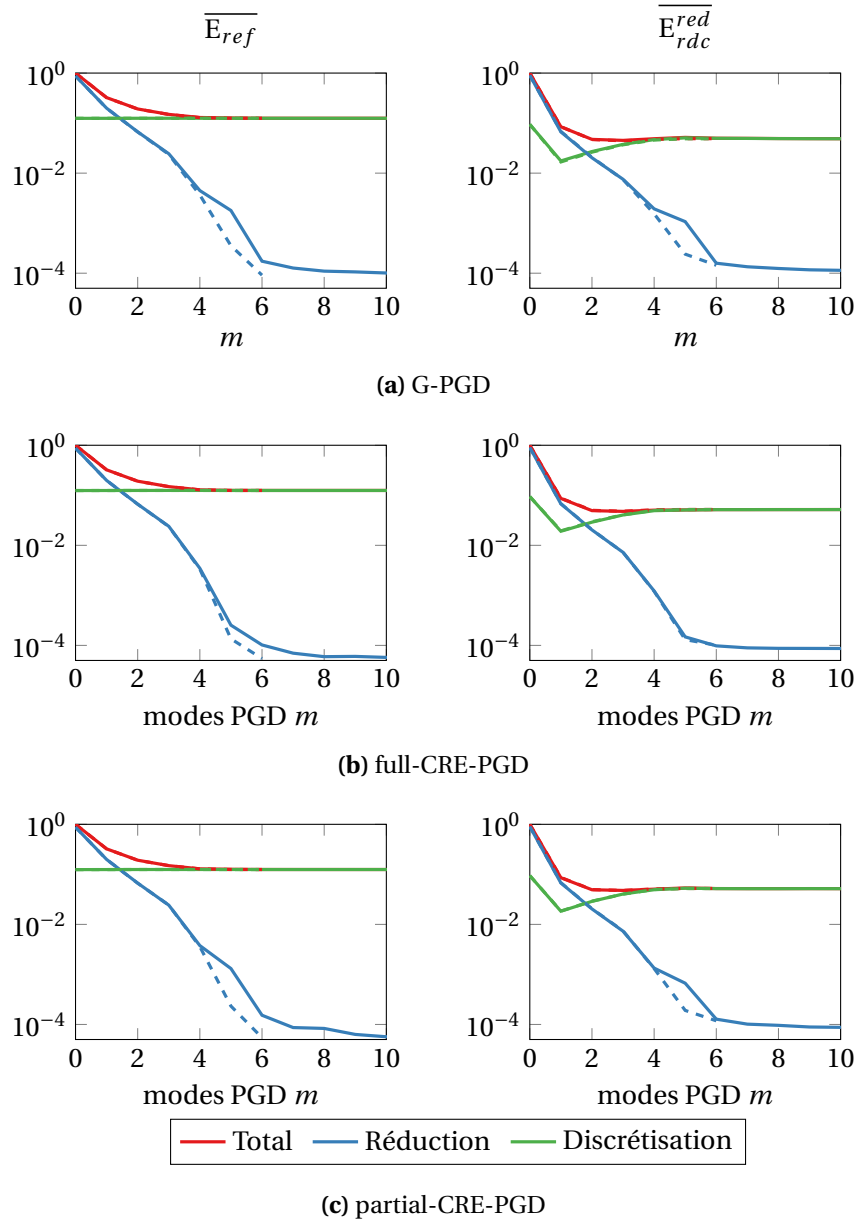


FIGURE 4.6 – Courbes de convergences exacte (gauche) et estimée par l’indicateur d’ERC (droite) des différentes stratégies PGD. En trait plein les versions non mises à jour, et en trait discontinu les versions mises à jour.

que l’efficacité de la stratégie Minimal CRE PGD (CRE-PGD) est proche de 1 pour un problème fortement raffiné (voir [Figure 4.4a](#)), l’origine de cet écart semble être causé par le caractère fortement non-linéaire du chargement, difficile à représenter avec des maillages grossiers.

Couplée aux techniques de reconstruction de champs admissibles, cette nouvelle stratégie permet d’estimer et de séparer efficacement les différentes sources d’erreur introduites dans la résolution numérique du problème continu, telles que les erreurs de réduction et de discrétisation.

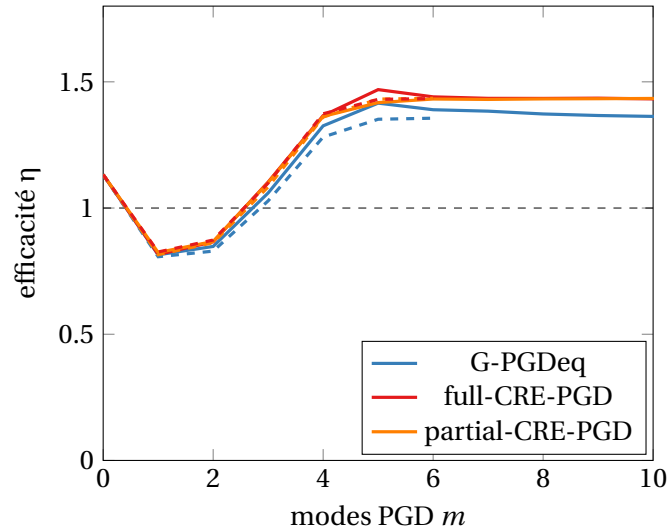


FIGURE 4.7 – Efficacité de l’estimateur d’ERC totale pour différentes stratégies PGD. Ont été représentées en trait plein les versions non mises à jour et en trait discontinu les versions mises à jour.

3 Conclusion

Appliquée à un problème instationnaire de thermique, cette nouvelle stratégie CRE-PGD procure :

- une décomposition PGD en pratique meilleure où équivalente à celle des autres stratégies PGD;
- un algorithme plus robuste pour la minimisation;
- un estimateur d’erreur de réduction immédiat, amélioré et efficace;
- l’accès à un estimateur d’erreur de discrétisation en réutilisant des techniques de construction de champs admissibles déjà existantes;
- des gains en temps de calcul et d’espace de stockage important lorsqu’elle est couplée avec des stratégies adaptatives;
- une solution garantie à une certaine précision fixée par l’utilisateur.

En perspective de ces travaux, deux pistes semblent être envisageables : l’extension de cette méthode aux problèmes non-linéaires où l’erreur en relation de comportement dite modifiée est définie; adapter cette stratégie aux quantités d’intérêt où la minimisation serait faite sur la fonctionnelle $\tilde{E}_{rdc} \times E_{rdc}$.

Remarque 4.3. Malgré de meilleures performances, cette nouvelle stratégie PGD présente les mêmes limites liées à l’écriture de la solution sous une forme à variables séparées : l’influence du terme transitoire impacte le nombre de modes requis pour atteindre un critère d’erreur, comme représenté en [Figure 4.8](#). Cependant, la qualité de la solution est meilleure par minimisation de l’ERC voir même proche de la décomposition SVD comparée aux autres méthodes PGD présentées au [Chapitre 1](#) en [Section 4.2](#).

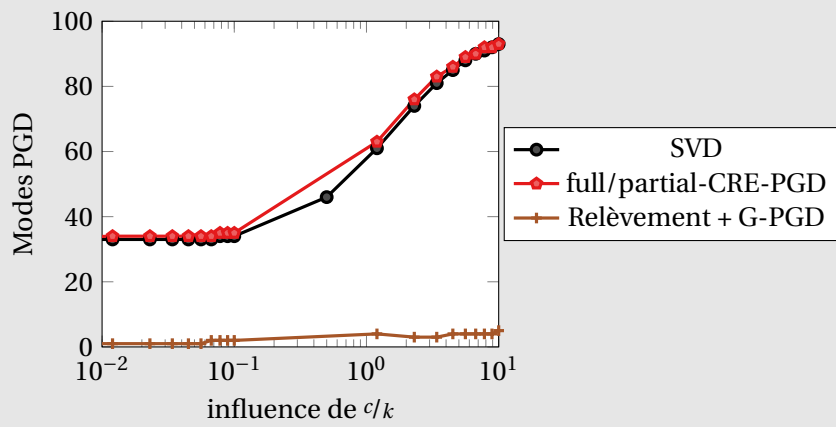


FIGURE 4.8 – Nombre de modes PGD requis pour cibler une erreur exacte de réduction $\overline{E_{ref}}$ de 10^{-2} , en fonction du coefficient c/k .

Chapitre 5

Utilisation de la PGD pour accélérer l'estimation d'erreur

Ce chapitre présente les avantages procurés par l'utilisation de la réduction de modèle PGD dans le concept d'ERC. En effet, la réduction de modèle PGD permet d'accélérer la construction de flux admissibles. Les performances qui en découlent sont présentées sur des exemples numériques EF.

Sommaire

1	Technique d'équilibrage par éléments EET	92
1.1	Construction des densités de flux équilibrées	93
1.2	Construction d'un champ dual admissible à l'échelle de l'élément	93
2	EET-PGD - Particularisation de problèmes locaux grâce à une solution PGD	95
2.1	Paramétrisation d'un problème local générique	95
2.2	Résolution PGD associée	97
2.3	Accélération de l'étape locale	98
3	HFT-PGD - Construction des densités équilibrées par une solution PGD	102
3.1	Problème d'optimisation	102
3.2	Problème discret associé grâce à la solution élémentaire PGD	103
3.3	Amélioration des densités de flux	103
4	Extension aux cas 3D	106
4.1	Problème PGD	106
4.2	Application de l'HFT-PGD à un problème 3D de thermique	107
5	Conclusion	109

La vérification de modèle par l'ERC, présentée au [Chapitre 2](#) dans le cadre PGD, nécessite le calcul de champs duaux équilibrés au sens strict. Point central des estimateurs d'ERC, cette exigence reste en pratique coûteuse en terme de temps de calcul et reste difficile à implémenter dans les codes numériques, d'où sa faible adoption en industrie. Diverses techniques de post-traitement de solutions EF ont été proposées [[Carstensen et Funken, 2000](#), [Cottureau et al., 2009](#), [Ern et Vohralík, 2010](#), [Gallimard, 2009](#), [Ladevèze et Leguillon, 1983](#), [Ladevèze et Maunder, 1996](#), [Ladevèze et al., 2010](#), [Moitinho de Almeida et Maunder, 2009](#), [Pled et al., 2011](#), [Rey et al., 2014](#)] pour reconstruire efficacement un champ admissible : de la qualité de ce champ dépend la qualité de l'estimateur associé.

Construire un champ dual SA est difficile en pratique. Une première approche consiste à discrétiser par la MEF le problème complémentaire de l'équation (1.3), connue sous le nom d'approche duale [De Veubeke et Hugge, 1972, Oden et Reddy, 1974, Kempeneers *et al.*, 2003]. Bien qu'étant l'approche la plus efficace, elle est irréalisable en pratique. En effet, elle nécessite le calcul d'un problème global additionnel sur des espaces EF non-conventionnels, d'où un effort calculatoire plus important. Une autre approche, Hybrid-Flux Technique (HFT), consiste à post-traiter le flux EF \underline{q}_h en résolvant **plusieurs problèmes locaux semblables**. Différentes stratégies existent, en particulier les stratégies Element Equilibration Technique (EET) [Ladevèze et Leguillon, 1983, Ladevèze et Maunder, 1996], Flux-Free (FF) [Parés *et al.*, 2006, Parés *et al.*, 2009, Moitinho de Almeida et Maunder, 2009, Cottureau *et al.*, 2009] et d'autres [Pled *et al.*, 2012, Ladevèze *et al.*, 2013b]. Le lecteur pourra se référer à [Pled, 2012] pour une comparaison de ces différentes stratégies dans le cadre EF.

Dans ce chapitre, on souhaite utiliser la réduction de modèle PGD pour accélérer la reconstruction du champ admissible. La solution d'un problème multi-paramétrique générique est pré-calculée pour éviter la résolution de ces nombreux problèmes locaux, qui seront remplacés par la particularisation d'une solution réduite et classiquement calculée par la méthode PGD. Cette solution permet également d'optimiser la construction des densités nécessaires aux différents problèmes locaux.

Les développements se limiteront dans ce chapitre à la stratégie EET présentée en Section 1 et appliquée à l'Exemple 7, mais peuvent en pratique s'étendre à d'autres stratégies de la famille Hybrid-Flux Technique (HFT).

► **Exemple 7 (Plaque trouée)**

Soit un problème thermique stationnaire ($c = 0 \text{ JmK}^{-1}$, $\mathcal{I} = \emptyset$ et $\Theta = \emptyset$) défini sur $\Omega = [-H, H] \times [0, H]$ ($H = 10 \text{ m}$), une plaque 2D trouée de rayon $r = 1 \text{ m}$ représenté sur la Figure 5.1. Ce domaine est soumis à une température nulle sur le bord extérieur $\partial_u \Omega$ tandis qu'un flux $r_d = 1 \text{ Wm}^{-1}$ est imposé sur le bord intérieur $\partial_r \Omega$. Aucune source de chaleur n'est présente ($f_d = 0 \text{ Wm}^{-2}$) et le matériau est supposé isotrope homogène, de coefficient de diffusion $k = 1 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$.

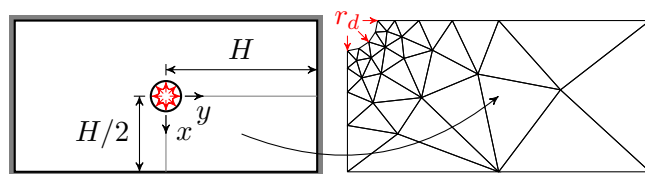


FIGURE 5.1 – Conditions aux limites (gauche), et maillage associé (droite)

Grâce aux symétries du problème, seul un quart de la plaque est étudié et discrétisé par des éléments finis triangulaires à 3 nœuds, support de la solution EF.

1 Technique d'équilibrage par éléments EET

La technique d'équilibrage par éléments, en anglais Element Equilibration Technique (EET), permet de calculer un champ admissible $\hat{\underline{q}}_h \in \mathcal{S}^{ad}$ à partir du flux EF \underline{q}_h par la résolution de problèmes locaux [Ladevèze et Leguillon, 1983, Ladevèze et Maunder, 1996]. Le point clé de cette méthode est l'utilisation d'une *condition de prolongement forte* en flux :

$$\forall E \subset \Omega_h, \forall i \in \mathcal{N}_E, \int_E (\hat{\underline{q}}_h - \underline{q}_h) \cdot \underline{\nabla} N_i \, d\Omega = 0 \quad (5.1)$$

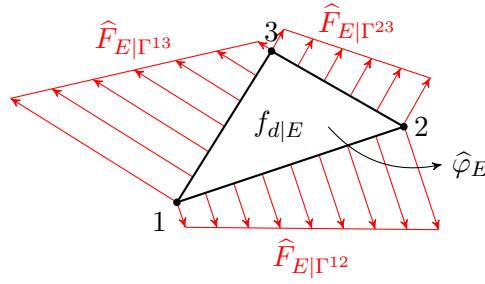


FIGURE 5.2 – Problème local de Neumann pour un élément triangulaire à 3 nœuds

où E représente les éléments du maillage Ω_h , \mathcal{N}_E l'ensemble des nœuds connectés à l'élément E et N_i la fonction de forme EF associée au nœud i .

La reconstruction d'un champ admissible vérifiant la condition de prolongement (5.1) s'effectue au moyen de deux étapes : (i) construction des densités de flux équilibrées ; (ii) construction d'un champ dual admissible à l'échelle de l'élément.

1.1 Construction des densités de flux équilibrées

En premier lieu, des densités de flux $\hat{F}_{E|\Gamma}$ sont construites de façon à être en équilibre avec le chargement imposé (r_d, f_d) aux frontières Γ de chaque élément E du domaine discret Ω_h :

$$\eta_E \hat{F}_{E|\Gamma} = r_d \text{ sur } \Gamma \subset \partial_r \Omega \quad (5.2a)$$

$$\int_{\partial E} \hat{F}_E u_s \, dS + \int_E f_d u_s \, d\Omega = 0 \quad \forall u_s \in \mathcal{U}^s(E) \quad (5.2b)$$

où $\mathcal{U}^s(E)$ désigne l'ensemble¹ des mouvements de corps rigide définis sur l'élément E .

Sachant que \hat{q} doit vérifier l'équilibre fort (1.1b), la condition de prolongement (5.1) revient à vérifier :

$$\forall E \subset \Omega_h, \forall i \in E, \quad \int_{\partial E} \hat{F}_E N_i \, d\Omega = \int_E (\hat{q}_h \cdot \underline{\nabla} N_i - f_d N_i) \, d\Omega$$

avec $\hat{q}_{h|E} \cdot \underline{n}_E = \hat{F}_E$. Cette relation traduit un système linéaire de petits problèmes bien posés, quasi-explicites et définis sur chaque patch d'éléments connectés au nœud d'indice i .

En pratique, les densités de flux sont définies par la relation $\hat{F}_{E|\Gamma} = \eta_E^\Gamma \hat{F}_E$, où $\eta_E^\Gamma = \pm 1$ permet d'assurer la continuité du flux normal à travers l'interface Γ entre deux éléments E adjacents, et sont construites comme une combinaison linéaire des fonctions de formes EF. Pour plus de détails techniques sur la construction de ces densités de flux, le lecteur pourra se référer à [Pled, 2012, 78].

1.2 Construction d'un champ dual admissible à l'échelle de l'élément

Les densités de flux équilibrées \hat{F}_E ayant été déterminées à l'étape précédente, le flux admissible \hat{q}_h se construit localement par la résolution d'un problème de Neumann défini sur chaque élément (voir Figure 5.2) :

$$\int_E \hat{q}_h \cdot \underline{\nabla} v \, d\Omega = \int_E f_d v \, d\Omega + \int_{\partial E} \hat{F}_E v \, dS \quad \forall v \in \mathcal{H}^1(E) \quad (5.3)$$

1. $\mathcal{U}^s(E) = \{u \in \mathcal{U}(E) \mid \underline{\nabla} u = \underline{0} \text{ dans } E\}$

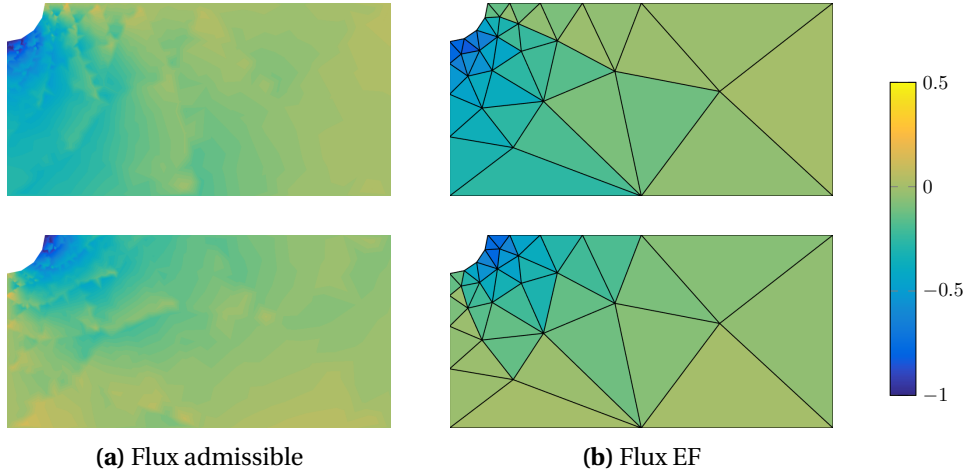


FIGURE 5.3 – Flux admissible reconstruit par la EET (a), pour $l = 3$, à partir du flux EF (b) pour l'Exemple 7.

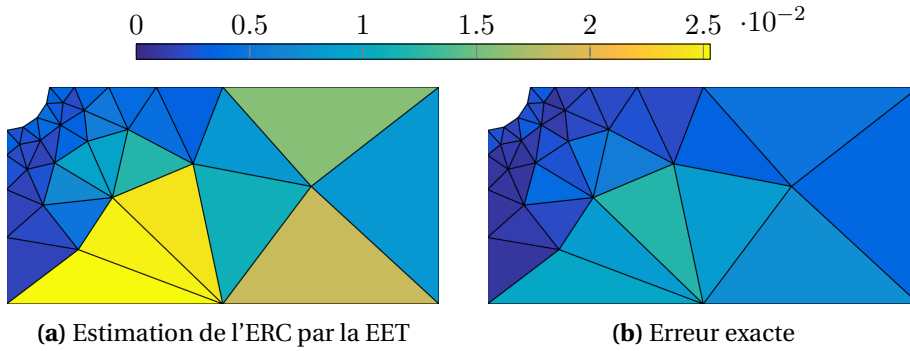


FIGURE 5.4 – Estimation de l'ERC comparée à l'erreur exacte de discrétisation pour l'Exemple 7

La solution de ce problème (5.3) peut s'écrire analytiquement sous une forme polynomiale d'ordre élevé, à condition que le chargement f_d soit également polynomiale [Ladevèze et Rougeot, 1997]. En pratique, une approche numérique lui est préférée, définie sur un élément d'ordre supérieur. En effet, le flux optimal vérifiant (5.3) est également celui qui minimise l'erreur locale $\|\hat{q}_h - q\|_{S^{ad}}$. Par dualité, ce problème est équivalent à poser $\hat{q}_h = k \underline{\nabla} w$, avec $w \in \mathcal{H}^1(E)$ vérifiant :

$$\int_E k \underline{\nabla} w \cdot \underline{\nabla} v \, d\Omega = \int_E f_d v \, d\Omega + \int_{\partial E} \hat{F}_E v \, dS \quad \forall v \in \mathcal{H}^1(E) \quad (5.4)$$

Aux mouvements de corps rigide près, une solution numérique de (5.4) est obtenue par la MEF sur un unique élément fini d'ordre supérieur $p + l$, où p est l'ordre d'interpolation utilisé pour déterminer la solution u_h et l un degré additionnel. Pour $l \geq 3$, des études numériques [Babuška et al., 1994] ont montré que l'estimation en ERC converge pour cette valeur vers l'erreur exacte, bien que les flux numériques ne soient pas rigoureusement équilibrés dans chaque élément E . Pour la suite, seule l'approche numérique sera considérée.

Une fois le flux admissible connu pour l'Exemple 7 (comparé à la solution élément finis sur la Figure 5.3), l'erreur locale de discrétisation par l'ERC peut être estimée (voir Figure 5.4). Comparé à l'erreur exacte de discrétisation $\|u_{ex} - u_h\|_{\mathcal{U}^{ad}}$ calculée à partir d'une solution *overkill*, cet estimateur prédit bien les zones nécessitant une discrétisation plus poussée tout en quantifiant l'erreur qui y est commise.

2 EET-PGD - Particularisation de problèmes locaux grâce à une solution PGD

La résolution du problème (5.4) est l'étape la plus coûteuse dans la méthode EET, car elle nécessite des éléments EF d'ordre supérieur et des résolutions sur chaque élément E du domaine discret Ω_h .

Dans cette partie, on propose d'utiliser la puissance de la réduction de modèle PGD pour déterminer le flux admissible \hat{q}_h . Dans une phase *offline*, une solution paramétrée du problème (5.4) est calculée, valide pour n'importe quelle configuration de géométrie et de chargement. À partir des densités de flux déterminées à l'étape 1, cette solution PGD s'utilise immédiatement, dans une phase *online*, pour construire ce flux admissible sur chaque élément E du domaine discret Ω_h .

2.1 Paramétrisation d'un problème local générique

Dans la suite, le matériau est considéré comme isotrope et homogène sur chaque élément E (le paramètre k n'influençant donc pas le flux admissible $\hat{q}_{h|E}$). Dans le cas contraire des paramètres matériaux additionnels peuvent être introduits dans le modèle réduit PGD, en paramétrisant les coefficients matériaux.

Les densités de flux, s'appliquant sur chaque bord Γ des éléments E, vérifient une écriture linéaire EF, représentée sur la Figure 5.2 :

$$\hat{F}_{E|\Gamma}(\underline{x}) = \sum_{j \in \mathcal{N}_\Gamma} \hat{F}_{E|\Gamma}^j N_j(\underline{x}) \quad ; \quad \hat{F}_{E|\Gamma}^j = \eta_E^\Gamma \hat{F}_\Gamma^j \in \mathbb{R}$$

Par le principe de superposition, la solution ρ du problème (5.4) vérifie ainsi une combinaison linéaire de solutions élémentaires ρ_Γ^j :

$$\rho(\underline{x}) = \sum_{\Gamma \subset \partial E} \sum_{j \in \mathcal{N}_\Gamma} \hat{F}_{E|\Gamma}^j \rho_\Gamma^j(\underline{x}) \quad (5.5)$$

où ρ_Γ^j est la solution, à une constante près, du problème élémentaire :

$$\int_E \nabla \rho_\Gamma^j \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_\Gamma N_j v \, dS - \int_E \left(\frac{1}{|E|} \int_\Gamma N_j \, dS \right) v \, d\Omega \quad \forall v \in \mathcal{H}^1(E) \quad (5.6)$$

La solution ρ_Γ^j de chaque problème (5.6) se définit pour n'importe quel élément E, en introduisant un ensemble de paramètres géométriques $\underline{p}_{geo} \in \mathcal{P}$. Par l'approche présentée dans l'Annexe C, les problèmes locaux (5.6) sont projetés sur un élément de référence fixe E_{ref} selon une relation paramétrée liant cette géométrie de référence à l'élément réel E(\underline{p}_{geo}).

Dans le cas présent, cette relation se définit à partir de deux transformations élémentaires :

- une homothétie qui transforme l'élément \bar{E} de diamètre 1 en l'élément actuel E de diamètre α ;
- une transformation affine qui transforme l'élément de référence E_{ref} en l'élément \bar{E} par une formulation isoparamétrique.

La transformation globale résultante est la combinaison de ces deux transformations élémentaires, représentée par sa matrice Jacobienne \mathbb{J} .

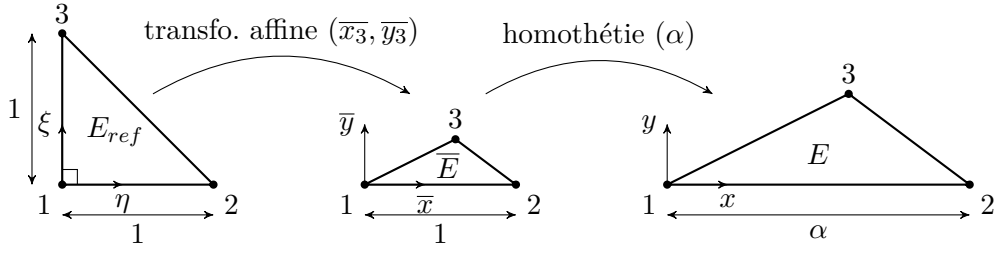


FIGURE 5.5 – Relation entre l'élément réel E et de référence E_{ref} pour un élément triangulaire à 3 nœuds

Dans le cadre de l'Exemple 7, le domaine Ω est discrétisé par des éléments triangulaires à 3 nœuds linéaires. De la figure Figure 5.5, la relation entre l'élément réel et de référence vérifie :

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \alpha \mathbb{I}_2 \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^3 \bar{x}_i N_i(\eta, \xi) \\ \sum_{i=1}^3 \bar{y}_i N_i(\eta, \xi) \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbb{J} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_3 \\ 0 & \bar{y}_3 \end{bmatrix}$$

où (\bar{x}_3, \bar{y}_3) sont les coordonnées locales du nœud 3 dans le système de coordonnées lié à l'élément \bar{E} et $\underline{x}_{ref} = (\eta, \xi)$ les coordonnées locales dans l'élément de référence E_{ref} . Aussi, la relation globale entre l'élément de référence E_{ref} et l'élément réel E est paramétrée par 3 paramètres, i.e. $\underline{p}_{geo} = (\alpha, \bar{x}_3, \bar{y}_3)$.

Par conséquent, le problème (5.6) défini sur l'élément de référence E_{ref} paramétré vérifie :

trouver, pour tout $j \in \{1; 2\}$ et $\Gamma \subset \partial E$, $\rho_\Gamma^j(\underline{x}_{ref}, \underline{p}_{geo})$ tel que :

$$\int_{E_{ref}} \mathbb{K} \underline{\nabla}_{ref} \rho_\Gamma^j \cdot \underline{\nabla}_{ref} v \, d\Omega_{ref} = \int_{\Gamma_{ref}} f_\Gamma \frac{N_j}{|\Gamma_{ref}|} v \, dS_{ref} - \int_{E_{ref}} f_\Gamma v \, d\Omega_{ref} \quad \forall v \in \mathcal{H}^1(E_{ref}) \quad (5.7)$$

avec N_j les fonctions de formes associées aux bords Γ_{ref} et :

$$\mathbb{K} = \frac{1}{\bar{y}_3} \begin{bmatrix} \bar{x}_3^2 + \bar{y}_3^2 & -\bar{x}_3 \\ -\bar{x}_3 & 1 \end{bmatrix} \quad f_\Gamma = \alpha \begin{cases} 1 & \text{sur } \Gamma_{ref}^{12} \\ \sqrt{(1 - \bar{x}_3)^2 + \bar{y}_3^2} & \text{sur } \Gamma_{ref}^{23} \\ \sqrt{\bar{x}_3^2 + \bar{y}_3^2} & \text{sur } \Gamma_{ref}^{13} \end{cases} \quad (5.8)$$

Démonstration. En introduisant la matrice jacobienne \mathbb{J} de la transformation volumique et son déterminant $|\mathbb{J}|$, un changement de variable sur l'intégrale à gauche de l'égalité (5.7) permet d'écrire :

$$\int_E \underline{\nabla} \rho_\Gamma^j \cdot \underline{\nabla} v \, d\Omega = \int_{E_{ref}} \left(\mathbb{J}^{-T} \underline{\nabla}_{ref} \rho_\Gamma^j \right) \cdot \left(\mathbb{J}^{-T} \underline{\nabla}_{ref} v \right) |\mathbb{J}| \, d\Omega_{ref}$$

Grâce aux propriétés du produit scalaire, on peut introduire l'opérateur $\mathbb{K} = |\mathbb{J}| [\mathbb{J}^{-T}]^T \mathbb{J}^{-T}$, dont la forme développée est donnée en (5.8).

Dans le cas d'un élément triangulaire, les bords Γ sont des segments, donc $\int_\Gamma N_j \, dS = \frac{|\Gamma|}{2}$. De plus, sachant que $|E| = |\mathbb{J}| \cdot |E_{ref}|$ avec $|E_{ref}| = \frac{1}{2}$, il vient :

$$\int_E \left(\frac{1}{|E|} \int_\Gamma N_j \, dS \right) v \, d\Omega = \int_{E_{ref}} \frac{|\mathbb{J}| |\Gamma|}{|E|} \frac{1}{2} v \, d\Omega_{ref} = \int_{E_{ref}} |\Gamma| v \, d\Omega_{ref}$$

En introduisant \mathbb{J}_Γ la matrice jacobienne de la transformation liée au bord Γ , tel que $|\Gamma| = |\mathbb{J}_\Gamma| \cdot |\Gamma_{ref}|$, il vient :

$$\int_\Gamma N_j \nu \, dS = \int_{\Gamma_{ref}} |\mathbb{J}_\Gamma| N_j \nu \, dS_{ref} = \int_{\Gamma_{ref}} |\Gamma| \frac{N_j}{|\Gamma_{ref}|} \nu \, dS_{ref}$$

Par conséquent, on introduit le chargement $f_\Gamma = |\Gamma|$. Dans le cas d'un élément triangulaire à trois nœuds, les différentes longueurs des bords vérifient l'égalité (5.8). \square

Remarque 5.1. Le nombre de problèmes élémentaires (5.7) et le nombre de paramètres géométriques dépendent du type d'élément choisi. Dans le cas des éléments triangulaires à trois nœuds, 6 problèmes élémentaires (2 pour chacun des trois bords de l'élément) à trois paramètres géométriques doivent être résolus. Le cas d'un élément tétraèdre à 4 nœuds est décrit dans la Section 4.

2.2 Résolution PGD associée

De l'écriture du problème (5.7), α agit comme un coefficient multiplicatif sur la solution ρ_Γ^j et disparaît après calcul de $\hat{q}_{h|E} = \nabla \rho$. Aussi, la solution du problème multi-paramétrique est recherchée sous une forme à variables séparées PGD suivante :

$$\rho_{\Gamma,m}^j(\underline{x}_{ref}, \underline{p}_{geo}) = \alpha \sum_{i=1}^m \psi_i(\underline{x}_{ref}) \lambda_i(\bar{x}_3) \gamma_i(\bar{y}_3) \quad (5.9)$$

Cette solution est calculée une fois pour toutes, dans une phase *offline*, grâce à l'une des stratégies PGD décrites au Chapitre 1. Pour cela, une décomposition à variables séparées de f_Γ est approximée en effectuant une SVD aux points de Gauss [Zlotnik *et al.*, 2015a, 8]. Les fonctions spatiales ψ_i sont déterminées par une résolution EF sur un seul élément de degré $p + l$, tandis que les fonctions sur les paramètres \bar{x}_3 (resp. \bar{y}_3) sont évaluées par une discrétisation fine de son espace de recherche $\Theta_{\bar{x}_3} = [0,1]$ (resp. $\Theta_{\bar{y}_3} =]0,1[$).

La Figure 5.6 représente les trois premiers modes PGD de $\rho_{\Gamma^{12},20}^1$ calculés par la stratégie G-PGD sur un élément triangulaire d'ordre 4 pour des domaines $\Theta_{\bar{x}_3} = [0,1]$ et $\Theta_{\bar{y}_3} = [0.1,1]$ discrétisés avec 100 points. De cette représentation, il suffit de particulariser la solution pour une grande variété d'éléments réels, dont certains sont représentés sur la Figure 5.8.

Remarque 5.2. L'application en premier lieu d'une homothétie permet de fixer un domaine de variation fini aux paramètres $\bar{x}_3 \in [0,1]$ et $\bar{y}_3 \in]0, \sqrt{3}/2]$, et transfère l'infinité d'échelle des éléments au paramètre α dont la solution ρ en dépend linéairement et analytiquement.

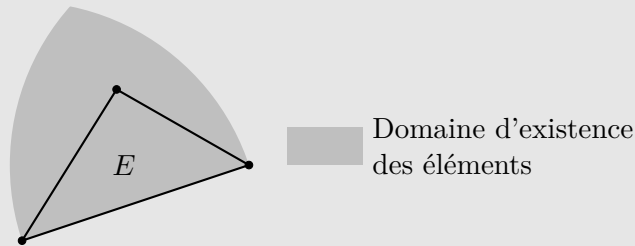


FIGURE 5.7 – Domaine d'existence des éléments réels

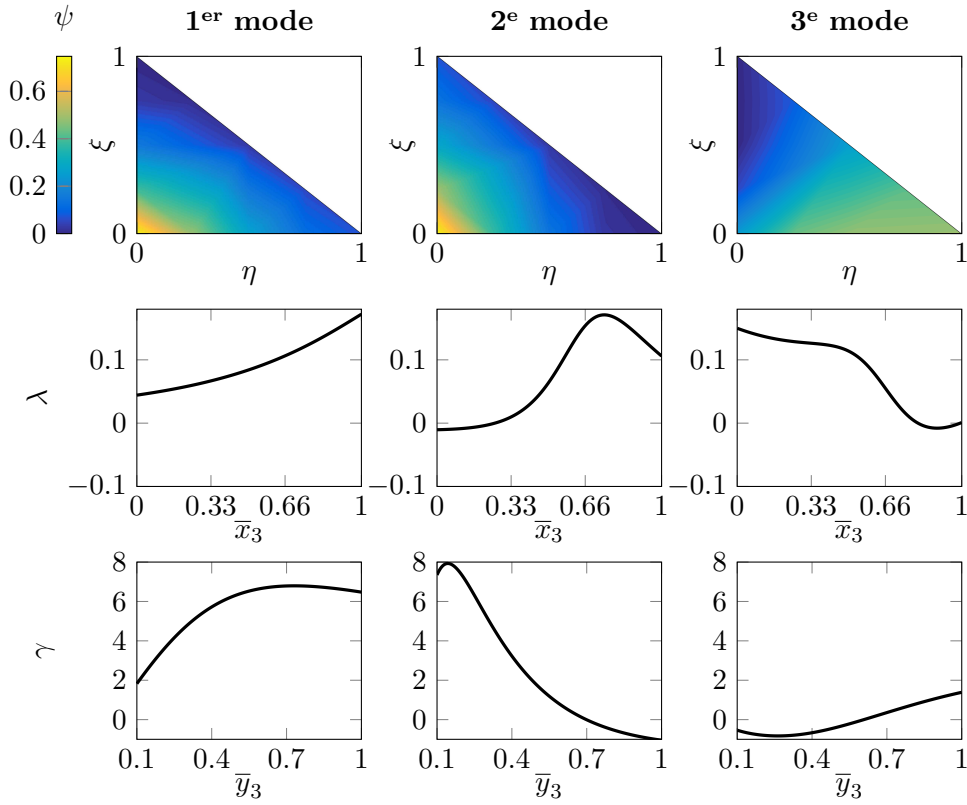


FIGURE 5.6 – Fonctions spatiales ψ_i (haut), en paramètres λ_i (centre) et γ_i (bas) des modes PGD $i = 1, 2, 3$ (de gauche à droite), de la solution $\rho_{\Gamma^{12}, 20}^1$ associées à un élément Tri3.

En combinant les relations (5.5) et (5.9), la solution $\rho(\underline{x})$ du problème local complet (5.4) vérifie une écriture paramétrée à variables séparées :

$$\rho_m(\underline{x}_{ref}, \underline{p}_{geo}, \{\hat{F}_{E|\Gamma}^j\}) = \sum_{\Gamma \subset \partial E} \sum_{i \in \mathcal{N}_\Gamma} \hat{F}_{E|\Gamma}^j \rho_{\Gamma, m}^j(\underline{x}_{ref}, \underline{p}_{geo}) \quad (5.10)$$

Cette solution procure ainsi une écriture paramétrée du flux admissible $\hat{q}_{h, m|E}$ au niveau de l'élément, stockée puis utilisée dans la phase d'estimation *a posteriori* de l'erreur :

$$\hat{q}_{h, m|E}(\underline{x}_{ref}, \underline{p}_{geo}, \{\hat{F}_{E|\Gamma}^j\}) = \mathbb{J}^{-T}(\underline{p}_{geo}) \nabla \left(\sum_{\Gamma \subset \partial E} \sum_{i \in \mathcal{N}_\Gamma} \hat{F}_{E|\Gamma}^j \rho_{\Gamma, m}^j(\underline{x}_{ref}, \underline{p}_{geo}) \right) \quad (5.11)$$

2.3 Accélération de l'étape locale

Dans cette partie, on suppose connues : (i) les densités de flux calculées dans la première étape de la stratégie EET à partir d'une solution EF de l'Exemple 7 ; (ii) une solution PGD sur un élément paramétré triangulaire à 3 nœuds (5.10).

À partir de ces données, on propose une méthode, appelée EET-PGD, qui reconstruit le flux admissible grâce à cette solution PGD élémentaire et générique.

2.3.1 Construction du flux admissible

Après avoir identifié les paramètres α , \bar{x}_3 et \bar{y}_3 sur chaque élément E du domaine discret Ω_h , représentées sur la Figure 5.9, la solution PGD est particularisée pour déterminer le flux ad-

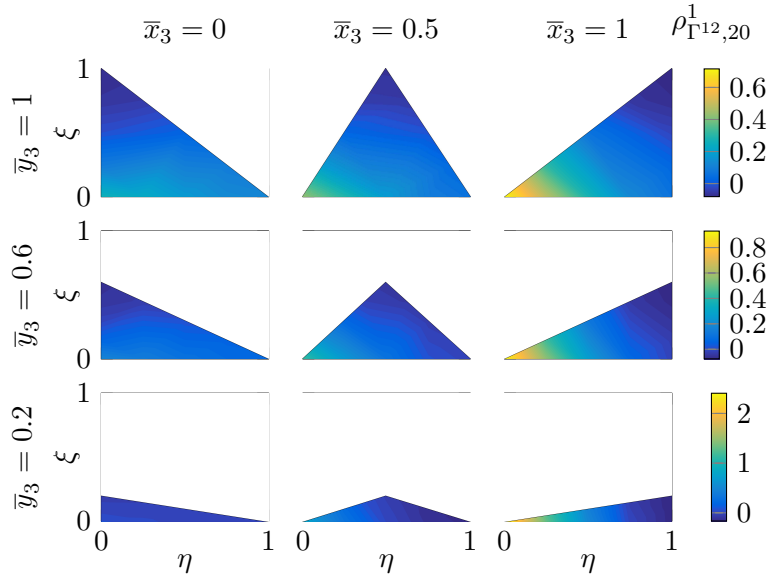


FIGURE 5.8 – Solution $\rho_{\Gamma^{12},20}^1$, sur l'élément E_{ref} pour différentes configurations des paramètres.

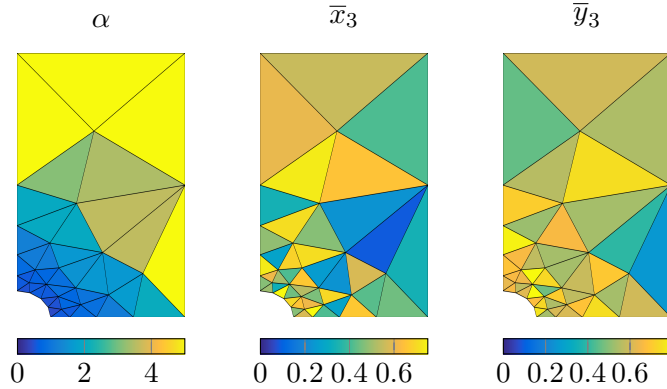


FIGURE 5.9 – Identification des paramètres α , \bar{x}_3 et \bar{y}_3 pour chaque élément E du domaine discret Ω_h de l'Exemple 7.

missible. La Figure 5.10 représente l'évolution de l'erreur relative $\frac{\|\hat{q}_{h,m} - \hat{q}_h\|_{Sad}}{\|\hat{q}_h\|_{Sad}}$ en fonction du nombre de modes m PGD, où \hat{q}_h est le flux admissible déterminé dans la stratégie EET. Sept modes sont suffisants pour reconstruire un flux admissible équivalent à celui de la stratégie EET. À partir de ce champ, l'ERC estimée identifie bien les zones nécessitant un remaillage, comme représenté sur la Figure 5.11.

S'imposer 20 modes peut être excessif. Pour cela, l'indice d'efficacité $\eta = \frac{\|\hat{q}_{h,m} - k\nabla u_h\|_{Sad}}{\|u_{ex} - u_h\|_{Sad}}$ a été tracé sur la Figure 5.12 pour chaque mode m PGD : trois modes sont suffisants pour capturer la complexité des problèmes locaux, tandis que 11 modes sont nécessaires pour reconstruire un flux admissible aussi fidèle que celui obtenu par la stratégie EET. Remarquons qu'à faible nombre de modes PGD, l'estimateur ERC reste garanti numériquement.

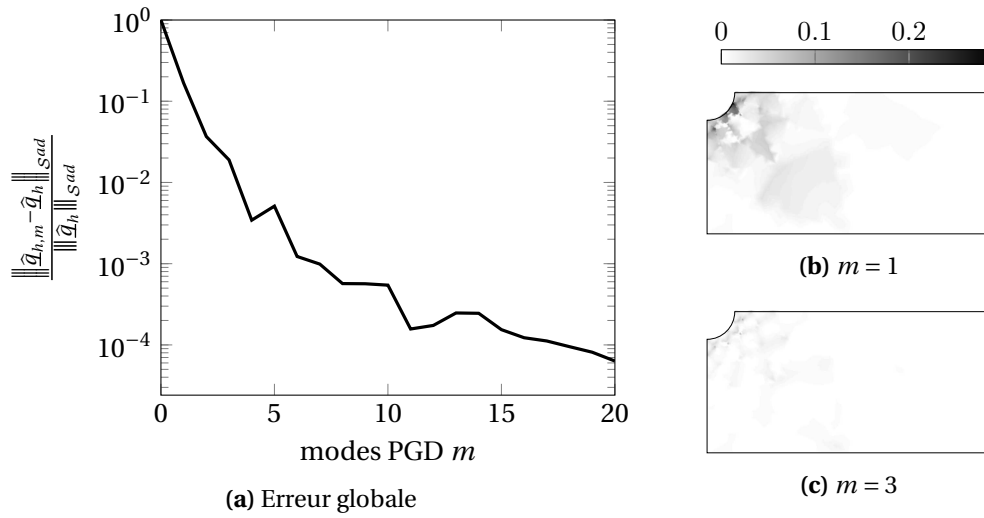


FIGURE 5.10 – Erreur de reconstruction PGD sur le champ admissible : évolution de l’erreur relative $\frac{\|\hat{q}_{h,m} - \hat{q}_h\|_{Sad}}{\|\hat{q}_h\|_{Sad}}$ en fonction du nombre de modes m utilisés pour reconstruire $\hat{q}_{h,m}$ (gauche) et cartes d’erreurs locales associées (droite).

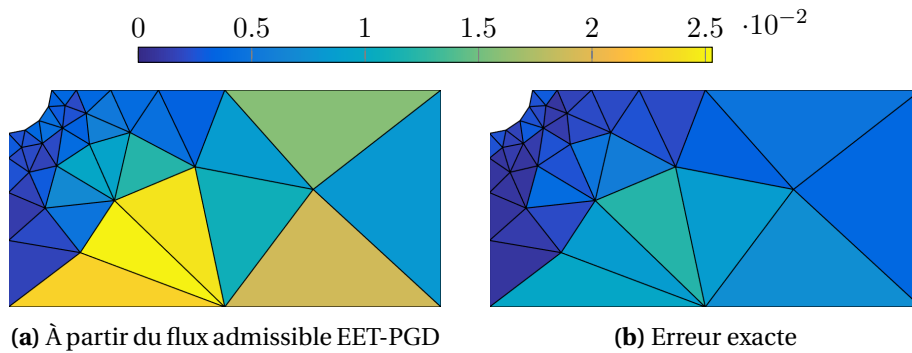


FIGURE 5.11 – Carte d’erreur locale issue de la EET-PGD pour l’Exemple 7

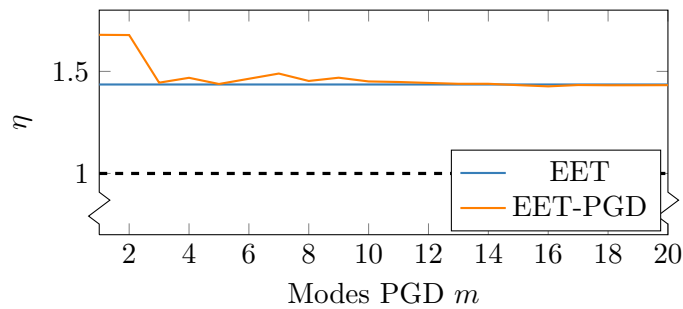


FIGURE 5.12 – Indice d’efficacité de la méthode EET-PGD

2.3.2 Accélération de la méthode EET

En introduisant la PGD dans la méthode EET, on cherche à accélérer la reconstruction du flux admissible. La Figure 5.13 représente le temps CPU² requis dans les deux méthodes, normalisé par le temps CPU de la MEF fournissant u_h . Pour que la comparaison soit cohérente, les deux méthodes EET et EET-PGD partagent autant de code que possible, seule l'étape de construction et de résolution des problèmes locaux est remplacée par un post-traitement de la solution PGD dans la méthode EET-PGD. Cette dernière présente ainsi un gain de 10 sur l'étape locale, pour l'Exemple 7 composé de 42 éléments EF, mais seulement un gain global de 2 sur l'ensemble de la méthode.

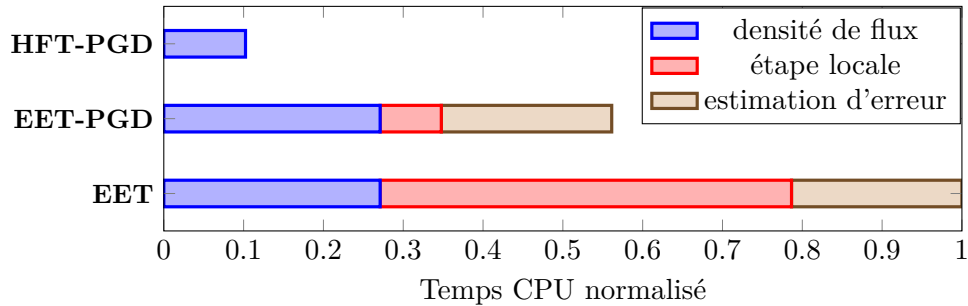


FIGURE 5.13 – Temps CPU requis pour déterminer le flux équilibré dans les méthodes EET et EET-PGD, normalisé par le temps CPU de la MEF fournissant u_h .

La Figure 5.14 représente ces mêmes gains pour différents niveaux de raffinement global du maillage initial. À mesure que le maillage devient fin, le gain sur l'étape locale augmente jusqu'à la valeur de 125 pour un gain global de 5 sur un maillage de 2688 éléments.

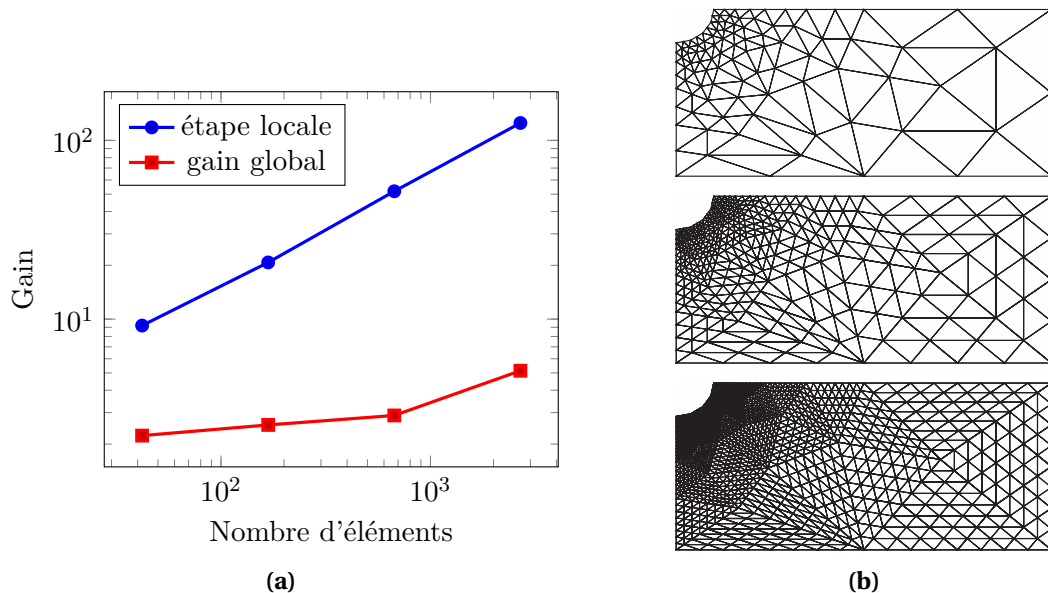


FIGURE 5.14 – Gain CPU (a) de la méthode EET-PGD en fonction du nombre d'éléments dans les maillages (b).

De tels résultats sont prometteurs. L'étape suivante, objet de la partie suivante, consiste à réduire le temps de calcul des densités de flux en utilisant cette même solution PGD.

2. Temps CPU d'un code Matlab sans parallélisation sur un Mac Intel Core i5 2.4GHz avec 8Go de RAM.

Remarque 5.3. Contrairement à ce que l'on pourrait penser, particulariser la solution PGD pour l'ensemble des éléments ne requiert numériquement aucune boucle sur les éléments. En supposant que l'on ait stocké les modes spatiaux dans la matrice $\Psi = [\Psi_1, \dots, \Psi_m]$, on reconstruit le champ de température par le produit matriciel :

$$\mathbb{U}_h = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{h|E_1} & \cdots & \mathbf{u}_{h|E_N} \end{pmatrix} = \Psi \begin{pmatrix} \lambda_1(\bar{x}_{3|E_1})\gamma_1(\bar{y}_{3|E_1}) & \cdots & \lambda_m(\bar{x}_{3|E_1})\gamma_m(\bar{y}_{3|E_1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1(\bar{x}_{3|E_N})\gamma_1(\bar{y}_{3|E_N}) & \cdots & \lambda_m(\bar{x}_{3|E_N})\gamma_m(\bar{y}_{3|E_N}) \end{pmatrix}$$

Un tel produit matriciel, optimisé dans les codes de calculs, est bien souvent meilleur qu'une boucle sur les éléments, entraînant un gain en temps de calcul non négligeable.

3 HFT-PGD - Construction des densités équilibrées par une solution PGD

La qualité de l'estimateur d'ERC dépend fortement de celle des densités de flux $\hat{F}_{E|\Gamma}$ construites dans la stratégie EET en respectant une *condition de prolongement forte restrictive*. Pour contourner cette limite, [Ladevèze et Rougeot, 1997, Florentin *et al.*, 2002] proposent d'optimiser la construction de ces densités de flux par une minimisation partielle de l'énergie complémentaire à l'échelle globale. En imposant la *condition de prolongement forte* aux nœuds autre que les nœuds sommets des éléments, une plus grande liberté est donnée aux densités de flux. Pour des raisons de coût de calcul, le problème de minimisation est limité à des zones présentant des éléments à fort rapport de forme ou à fort gradient, pour lesquels la qualité du flux admissible est généralement dégradée.

Dans cette partie, on souhaite profiter de la représentation PGD (5.11) pour construire une optimisation complète des densités de flux $\hat{F}_{E|\Gamma}$, en minimisant l'indicateur d'ERC. Hors de portée dans les approches classiques, cette démarche devient possible grâce à la dépendance explicite du flux admissible $\hat{q}_{h,m}$ vis-à-vis des densités de flux $\{\hat{F}_{E|\Gamma}^j\}$ introduites par la solution PGD à l'échelle de l'élément E. Dans la suite, on se référera à cette technique sous le nom HFT-PGD.

3.1 Problème d'optimisation

On introduit l'espace \mathcal{F} des densités de flux, de dimension infinie, et son sous-espace $\mathcal{F}_\ell \subset \mathcal{F}$ des densités de flux linéaires sur les bords Γ , de dimension finie liée au nombre de bords Γ connectés à l'élément E :

$$\mathcal{F} = \left\{ \{\hat{F}_\Gamma(\underline{x})\} \mid \int_E f_d \, d\Omega + \sum_{\Gamma \subset \partial E} \int_\Gamma \hat{F}_\Gamma \, dS = 0, \forall E; \mathbf{n}_E^\Gamma \hat{F}_\Gamma = r_d \text{ si } \Gamma \subset \partial_r \Omega \right\}$$

$$\mathcal{F}_\ell = \left\{ \{\hat{F}_\Gamma(\underline{x})\} \in \mathcal{F} \mid \hat{F}_\Gamma(\underline{x}) = \sum_{j \in \mathcal{N}_\Gamma} \hat{F}_\Gamma^j N_j(\underline{x}) \right\}$$

Le problème de minimisation consiste à déterminer les inconnues $\{\hat{F}_\Gamma^j\} \in \mathbb{R}^{N_F}$ aux interfaces, regroupées dans un vecteur global $\hat{\mathbf{F}}$, vérifiant :

$$\{\hat{\mathbf{F}}_\Gamma(\underline{x})\}_{opt} = \operatorname{argmin}_{\{\hat{\mathbf{F}}_\Gamma\} \in \mathcal{F}_\ell} E_{rdc}^2(u_h, \hat{\mathbf{q}}_h(\{\hat{\mathbf{F}}_\Gamma\}))$$

3.2 Problème discret associé grâce à la solution élémentaire PGD

À partir de la représentation PGD du flux admissible à l'échelle de l'élément (5.11) déterminée dans une phase *offline*, le flux admissible global $\hat{\mathbf{q}}_{h,m}$ se réécrit :

$$\hat{\mathbf{q}}_{h,m} = \mathbb{N}(\underline{x}_{ref}, \underline{\mathcal{P}}_{geo}) \hat{\mathbf{F}} \quad (5.12)$$

où $\mathbb{N}(\underline{x}_{ref}, \underline{\mathcal{P}}_{geo})$ est une matrice paramétrée de taille $d \times \mathbf{N}_F$.

À partir de cette représentation PGD (5.12), l'ERC $E_{rdc}^2(u_h, \hat{\mathbf{q}}_{h,m}(\{\hat{\mathbf{F}}_\Gamma^j\}))$ vérifie un relation explicite linéaire vis-à-vis de l'inconnue $\hat{\mathbf{F}}$:

$$\begin{aligned} E_{rdc}^2(u_h, \hat{\mathbf{q}}_{h,m}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\hat{\mathbf{q}}_{h,m} - k \nabla u_h) \frac{1}{k} (\hat{\mathbf{q}}_{h,m} - k \nabla u_h) \, d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \|\hat{\mathbf{q}}_{h,m}\|_{\mathcal{S}^{ad}}^2 - \int_{\Omega} \hat{\mathbf{q}}_{h,m} \nabla u_h \, d\Omega + \frac{1}{2} \|u_h\|_{\mathcal{U}^{ad}}^2 \\ &= \frac{1}{2} \hat{\mathbf{F}}^T \mathbb{M} \hat{\mathbf{F}} - \hat{\mathbf{F}}^T \mathbb{L} \mathbf{U}_h + \frac{1}{2} \|u_h\|_{\mathcal{U}^{ad}}^2 \end{aligned}$$

avec les matrices $\mathbb{M} = 1/k \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, d\Omega$, $\mathbb{L} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{B} \, d\Omega$ et $\mathbf{B} \mathbf{U}_h = \nabla u_h$.

En définissant \mathbb{C} la matrice traduisant les conditions aux limites vérifiées par les densités de flux $\hat{\mathbf{F}}_\Gamma$ sur le bord $\partial_r \Omega$ ($\mathbb{C} \hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{R}}_d$), le problème de minimisation discret s'écrit :

$$\hat{\mathbf{F}}_{opt} = \operatorname{argmin}_{\hat{\mathbf{F}}, \mathbb{C} \hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{R}}_d} \left(\frac{1}{2} \hat{\mathbf{F}}^T \mathbb{M} \hat{\mathbf{F}} - \hat{\mathbf{F}}^T \mathbb{L} \mathbf{U}_h \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbb{M} & \mathbb{C}^T \\ \mathbb{C} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{F}}_{opt} \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{L} \mathbf{U}_h \\ \hat{\mathbf{R}}_d \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

Remarque 5.4. Les matrices \mathbb{M} et \mathbb{L} sont un assemblage de matrices élémentaires dont les coefficients vérifient une décomposition à variables séparées PGD et sont pré-calculées dans la phase *offline*. L'assemblage, nécessitant la connaissance du domaine discret Ω_h , est quant à lui effectué dans la phase *online*, tout comme la matrice \mathbb{C} ne comportant que des 1 et des 0.

Cette nouvelle stratégie peut être vue comme une approche duale, non pas sur le flux admissible $\hat{\mathbf{q}}_h$, mais sur la densité de flux $\hat{\mathbf{F}}_\Gamma$. Une fois cette densité de flux connue, l'estimation d'ERC est immédiate et vérifie la relation linéaire :

$$E_{rdc}^2 = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{F}}_{opt}^T \mathbb{M} \hat{\mathbf{F}}_{opt} - \hat{\mathbf{F}}_{opt}^T \mathbb{L} \mathbf{U}_h + \frac{1}{2} \|u_h\|_{\mathcal{U}^{ad}}^2$$

La Figure 5.15 représente les organigrammes des stratégies EET et HFT-PGD. L'étape 2 n'est plus requise dans l'estimation de l'ERC issue de la stratégie HFT-PGD, avec à la clé un possible gain en terme de temps de calcul.

3.3 Amélioration des densités de flux

La Figure 5.16 représente les indices d'efficacité des différentes stratégies de construction de champs admissibles vis-à-vis de l'erreur exacte de discrétisation, obtenue en évaluant une solution EF sur un maillage très fin. De cette courbe, on observe une amélioration de l'estimation

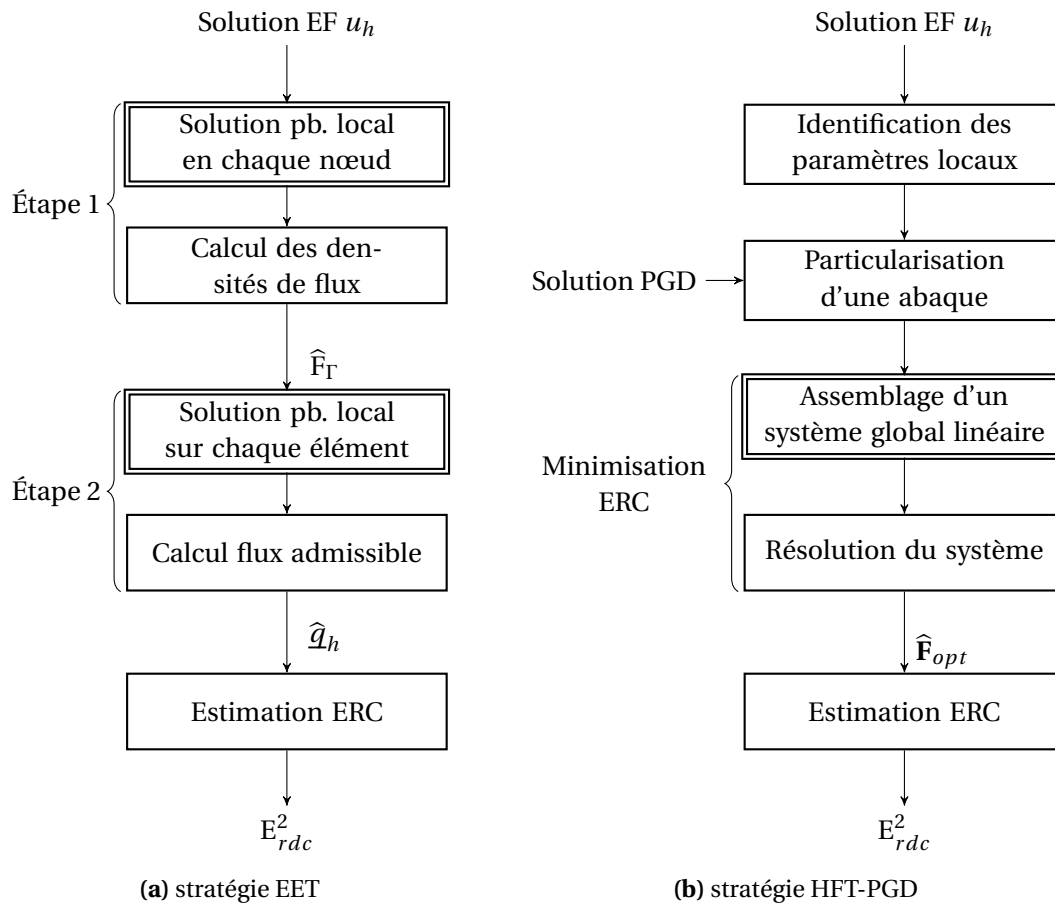


FIGURE 5.15 – Comparaison des algorithmes EET et HFT-PGD. En double encadré, les étapes nécessitant une ou des boucles.

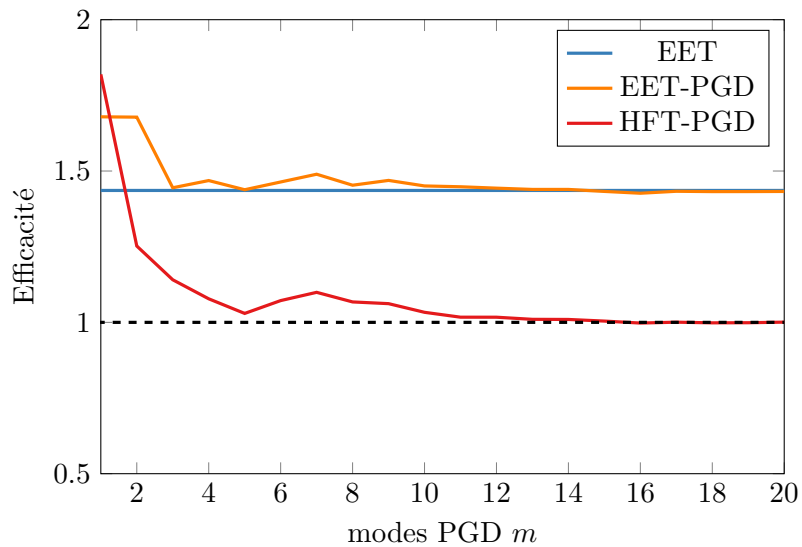


FIGURE 5.16 – Efficacités des estimateurs en ERC obtenus par les différentes stratégies de construction de champs admissibles étudiées

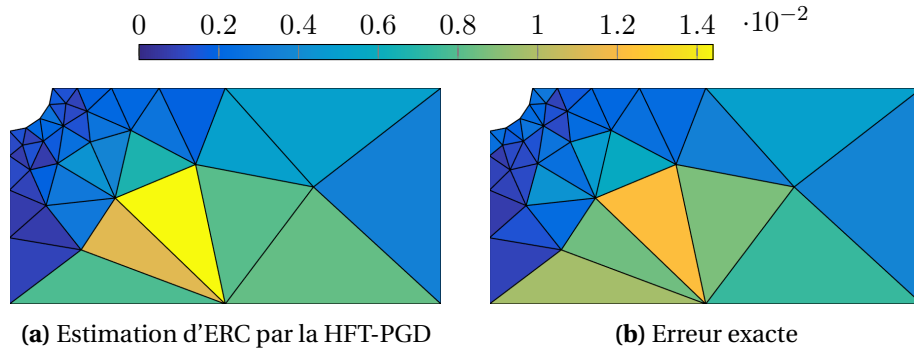


FIGURE 5.17 – Carte d’erreur locale estimée par la HFT-PGD sur l’Exemple 7

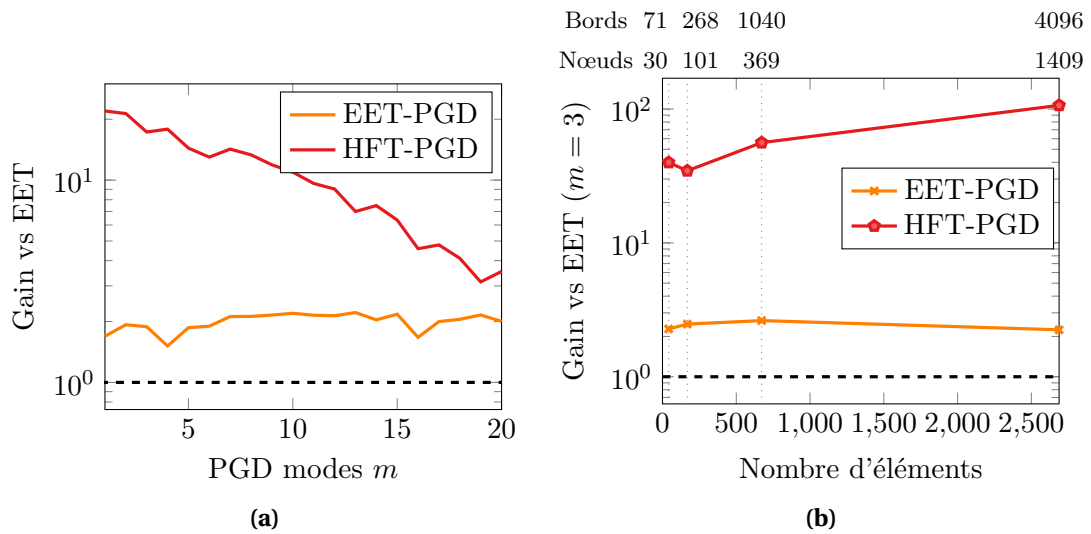


FIGURE 5.18 – Gains des méthodes HFT proposées en fonction du nombre de modes PGD utilisés pour particulariser la solution (gauche) et en fonction du nombre d’éléments dans le maillage discret Ω_h en fixant le nombre de modes PGD utilisés à 3.

d’erreur par la minimisation globale des densités de flux en préservant son côté garanti. À partir du 18-ième modes, cette estimation converge vers l’erreur exacte, en identifiant avec précision les zones à raffiner, comme représenté sur les cartes d’erreur locale de la Figure 5.17.

Le gain qui en résulte est tracé sur la Figure 5.18. Tout d’abord la Figure 5.18a représente le gain de calcul sur l’estimation d’erreur vis-à-vis de la stratégie EET en fonction du nombre de modes PGD. Autant le gain de la stratégie EET-PGD dépend peu du nombre de modes PGD employés, autant le gain de la stratégie HFT-PGD en dépend fortement. Cela est dû à l’étape d’assemblage du système global qui nécessite de particulariser les 54 coefficients matriciels stockés sous forme PGD.

De la Figure 5.16, on voit que 3 modes PGD suffisent dans la stratégie HFT-PGD pour construire des densités de flux, procurant un estimateur d’erreur plus efficace que l’estimateur issu de la EET. Aussi, le gain des stratégies HFT pour 3 modes PGD est tracé en Figure 5.18b. Alors que le gain de la stratégie EET-PGD reste constant aux alentours de 2, la stratégie HFT-PGD présente un gain supérieur, entre 40 (moins de 750 éléments) et 100 (pour 2500 éléments).

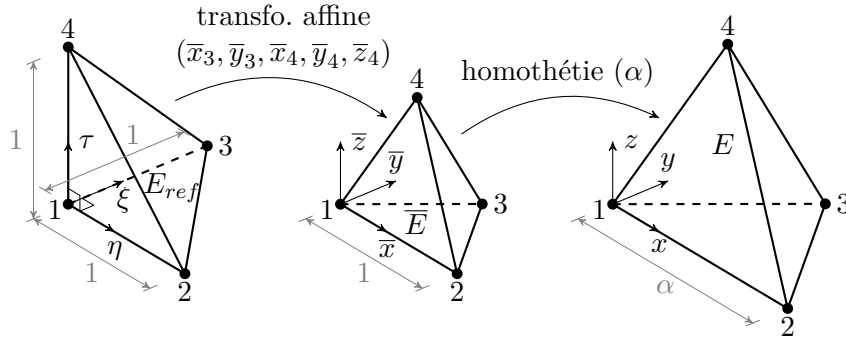


FIGURE 5.19 – Relations entre élément de référence et élément tétraèdre à 4 nœuds réel

4 Extension aux cas 3D

Introduits pour des maillages composés d'éléments triangulaires à 3 nœuds, les outils présentés dans les Sections 2 et 3 s'étendent tout naturellement à tout type d'élément [Allier *et al.*, 2017a]. Dans cette partie, on présente le traitement de maillages composés d'éléments tétraèdres à 4 nœuds.

4.1 Problème PGD

En utilisant les mêmes transformations géométriques que celles présentées dans la Section 2.1 sur l'élément triangulaire, une relation liant l'élément tétraèdre à 4 nœuds réels et son élément de référence, représenté sur la Figure 5.19, vérifie :

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \alpha \mathbb{1}_2 \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^3 \bar{x}_i N_i(\eta, \xi, \tau) \\ \sum_{i=1}^3 \bar{y}_i N_i(\eta, \xi, \tau) \\ \sum_{i=1}^3 \bar{z}_i N_i(\eta, \xi, \tau) \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbb{J} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_3 & \bar{x}_4 \\ 0 & \bar{y}_3 & \bar{y}_4 \\ 0 & 0 & \bar{z}_3 \end{bmatrix}$$

où $(\bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{x}_4, \bar{y}_4, \bar{z}_4)$ sont les coordonnées des nœuds 3 et 4 dans le repère associé à l'élément \bar{E} et (η, ξ, τ) les coordonnées locales dans le repère associé à l'élément E_{ref} .

Ainsi, l'élément réel se paramètre par l'intermédiaire de 6 coefficients, $\underline{p}_{geo} = (\bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{x}_4, \bar{y}_4, \bar{z}_4)$, tel que le problème élémentaire PGD s'écrit :

trouver pour tout $j \in \{1; 3\}$ et $\Gamma \subset \partial E$, $\rho_\Gamma^j(\underline{x}_{ref}, \underline{p}_{geo})$ tel que :

$$\int_{E_{ref}} \mathbb{K} \underline{\nabla}_{ref} \rho_\Gamma^j \underline{\nabla}_{ref} v \, d\Omega_{ref} = \int_{\Gamma_{ref}} f_\Gamma \frac{N_j}{|\Gamma_{ref}|} v \, dS_{ref} - \int_{E_{ref}} f_\Gamma v \, d\Omega_{ref} \quad \forall v \in \mathcal{H}^1(E_{ref})$$

avec N_j les fonctions de formes associées aux bords Γ_{ref} et :

$$\mathbb{K} = \frac{\alpha k}{\bar{y}_3 \bar{z}_4} \begin{bmatrix} (\bar{x}_3^2 + \bar{y}_3^2) \bar{z}_4^2 + (\bar{x}_3 \bar{y}_4 - \bar{x}_4 \bar{y}_3)^2 & \bar{y}_3 \bar{x}_4 \bar{y}_4 - \bar{x}_3 (\bar{z}_4^2 + \bar{y}_4^2) & \bar{y}_3 (\bar{x}_3 \bar{y}_4 - \bar{x}_4 \bar{y}_3) \\ \bar{y}_3 \bar{x}_4 \bar{y}_4 - \bar{x}_3 (\bar{z}_4^2 + \bar{y}_4^2) & \bar{z}_4^2 + \bar{y}_4^2 & -\bar{y}_4 \bar{y}_3 \\ \bar{y}_3 (\bar{x}_3 \bar{y}_4 - \bar{x}_4 \bar{y}_3) & -\bar{y}_4 \bar{y}_3 & \bar{y}_3^2 \end{bmatrix}$$

$$f_\Gamma = \frac{\alpha^2}{2} \begin{cases} \bar{y}_3 & \text{sur } \Gamma^{123} \\ \sqrt{\bar{y}_4^2 + \bar{z}_4^2} & \text{sur } \Gamma^{124} \\ \sqrt{\bar{z}_4^2 (\bar{x}_3^2 + \bar{y}_3^2) + (\bar{x}_3 \bar{y}_4 - \bar{x}_4 \bar{y}_3)^2} & \text{sur } \Gamma^{134} \\ \sqrt{\bar{z}_4^2 ((\bar{x}_3 - 1)^2 + \bar{y}_3^2) + ((\bar{x}_3 - 1) \bar{y}_4 - (\bar{x}_4 - 1) \bar{y}_3)^2} & \text{sur } \Gamma^{234} \end{cases}$$

Neuf problèmes élémentaires multi-paramétriques doivent être résolus en vérifiant une forme à variables séparées identique à celle de l'élément triangulaire (5.9). La difficulté de ce type d'élément est l'approximation de f_Γ et plus particulièrement de la racine carrée à 5 variables, effectuée par une HOSVD. Comme pour l'élément triangulaire à 3 nœuds, les paramètres prennent leurs valeurs dans les espaces $\bar{x}_3 \in [0,1]$, $\bar{y}_3 \in]0, \sqrt{3}/2]$, $\bar{x}_4 \in [0,1]$, $\bar{y}_4 \in]-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2]$ et $\bar{z}_4 \in]0, \sqrt{3}/2]$. La solution PGD $\rho_{\Gamma^{124}}^1$ associée au nœud 1 du bord Γ^{124} est représentée sur la Figure 5.20 et a été déterminée sur un élément d'ordre 4.

► **Exemple 8** (*Cube troué*)

Soit un problème thermique stationnaire ($c = 0 \text{ JmK}^{-1}$, $\mathcal{I} = \emptyset$ et $\Theta = \emptyset$) défini sur Ω , un cube de côté $L = 1 \text{ m}$ soumis à un flux de chaleur intérieur, représenté sur la Figure 5.21. Une température nulle est imposée sur le bord extérieur $\partial_\mu \Omega$ tandis qu'un flux $r_d = 1 \text{ Wm}^{-2}$ s'exerce sur le bord intérieur $\partial_r \Omega$. Aucune source de chaleur n'est présente, $f_d = 0 \text{ Wm}^{-3}$, et le matériau est supposé isotrope homogène : $k = 1 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$. Des symétries vérifiées par le problème, seul un $1/8^{\text{e}}$ du cube est discrétisé par des éléments tétraédriques à 4 nœuds.

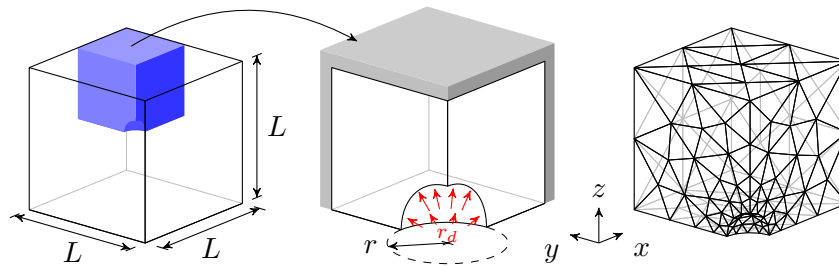


FIGURE 5.21 – Conditions aux limites du problème (gauche et centre) et maillage associé (droite)

4.2 Application de l'HFT-PGD à un problème 3D de thermique

Dans cette partie, les performances de la stratégie HFT-PGD sont étendues au cadre 3D grâce au problème décrit dans l'Exemple 8.

La première étape consiste à déterminer les valeurs de chacun des paramètres α , \bar{x}_3 , \bar{y}_3 , \bar{x}_4 , \bar{y}_4 et \bar{z}_4 . Dans le cas du maillage de l'Exemple 8, ces valeurs sont données sur la Figure 5.22.

Une fois ces valeurs connues, il est alors possible de post-traiter les 6 solutions PGD ρ_Γ^j des problèmes locaux pour déterminer les différents termes des matrices \mathbb{M} et \mathbb{L} du problème (5.12). Une fois le flux $\hat{\mathbf{F}}_{opt}$ connu, l'erreur en relation de comportement peut-être estimée.

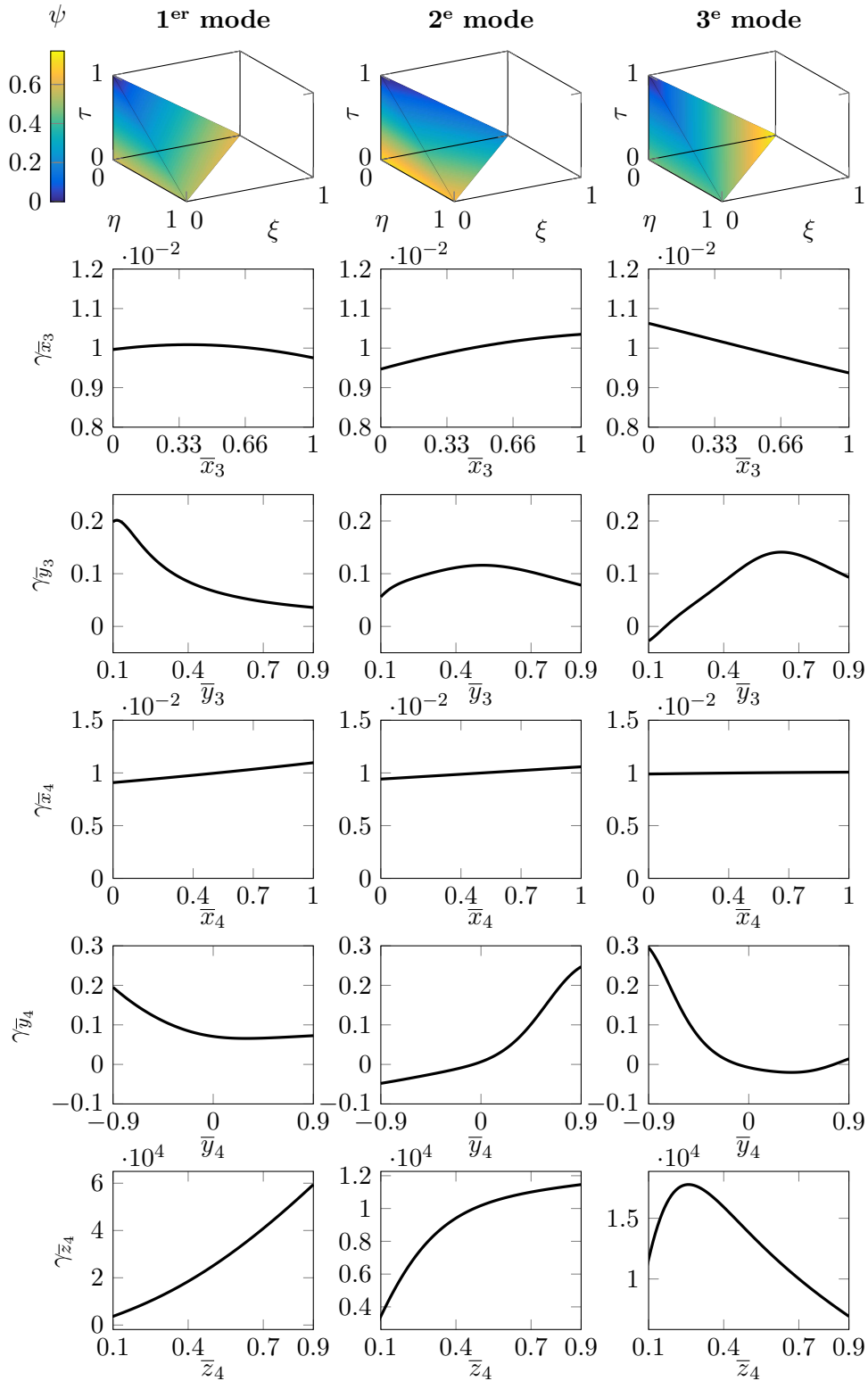


FIGURE 5.20 – Fonctions spatiales ψ_i (haut), en paramètres λ_i (centre) et γ_i (bas) des modes PGD $i = 1, 2, 3$ (de gauche à droite), de la solution $\rho_{\Gamma^{12,20}}^1$ associés à un élément Tet4.

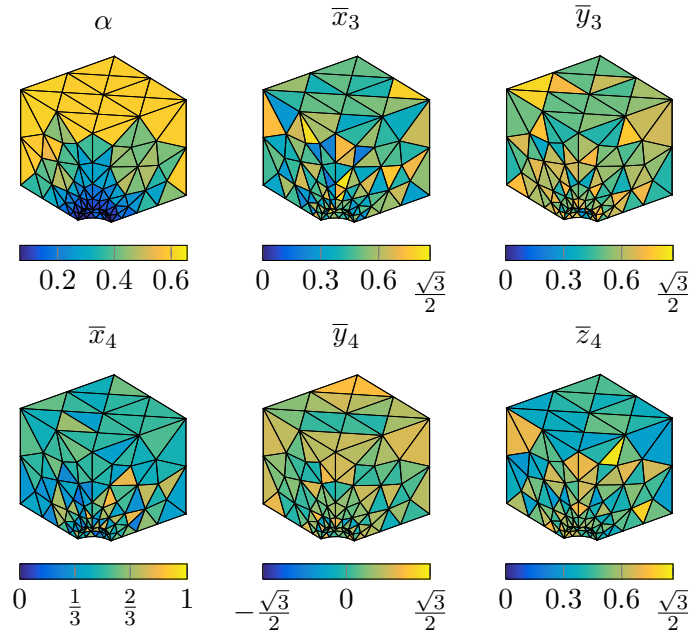


FIGURE 5.22 – Identification des paramètres α , \bar{x}_3 , \bar{y}_3 , \bar{x}_4 , \bar{y}_4 et \bar{z}_4 pour chaque élément E du domaine discret Ω_h de l'Exemple 8.

La Figure 5.23 compare cette estimation à celle obtenue par la méthode EET. Globalement, l'ERC est estimée à $E_{rdc}^{EET} = 2,869$ J par la méthode EET et $E_{rdc}^{HFT-PGD} = 2,667$ J par la HFT-PGD. Cependant, là où la méthode EET a mis 624,27 s³, la méthode HFT-PGD a nécessité 219,04 s de temps de calcul sur la même machine, un gain de temps de 2,85.

Les résultats de la Figure 5.23 ont été obtenus en utilisant une solution locale PGD composée de 20 modes. L'influence du nombre de modes sur l'estimation de l'erreur a été représentée sur la Figure 5.24. Par rapport à l'élément Tri3, plus de modes PGD sont nécessaires pour dans un premier temps atteindre une erreur estimée équivalente à celle déterminée par la méthode EET, avant d'améliorer cette estimation. La raison de cette augmentation réside dans la complexité accrue du modèle associée à l'élément Tet4.

5 Conclusion

L'approche proposée dans ces méthodes de reconstruction de champ admissible EET-PGD ou d'estimation d'erreur HFT-PGD, repose sur l'utilisation d'une solution PGD élémentaire, stockée sous forme d'abaques virtuels [Ladevèze, 2013]. Calculées une fois pour toutes en temps masqué, ces solutions PGD permettent d'accélérer la construction de champ admissible et/ou l'estimation de l'erreur. Sur nos exemples, la méthode HFT-PGD présente un gain vis-à-vis du temps requis pour calculer la solution EF u_h (voir la Figure 5.25) pouvant atteindre un facteur 20 sur le cas 2D Exemple 7.

Bien que les problèmes élémentaires PGD présentent une certaine difficulté d'implémentation, cette étape n'est à faire qu'une seule fois. Une telle solution peut être vue comme un fichier de données distribué. Rajouter de nouveaux éléments reviendrait à récupérer un fichier, par exemple sous la forme d'un plugin.

3. Temps CPU d'un code Matlab sans parallélisation sur un Mac Intel Core i5 2.4GHz avec 8Go de RAM.

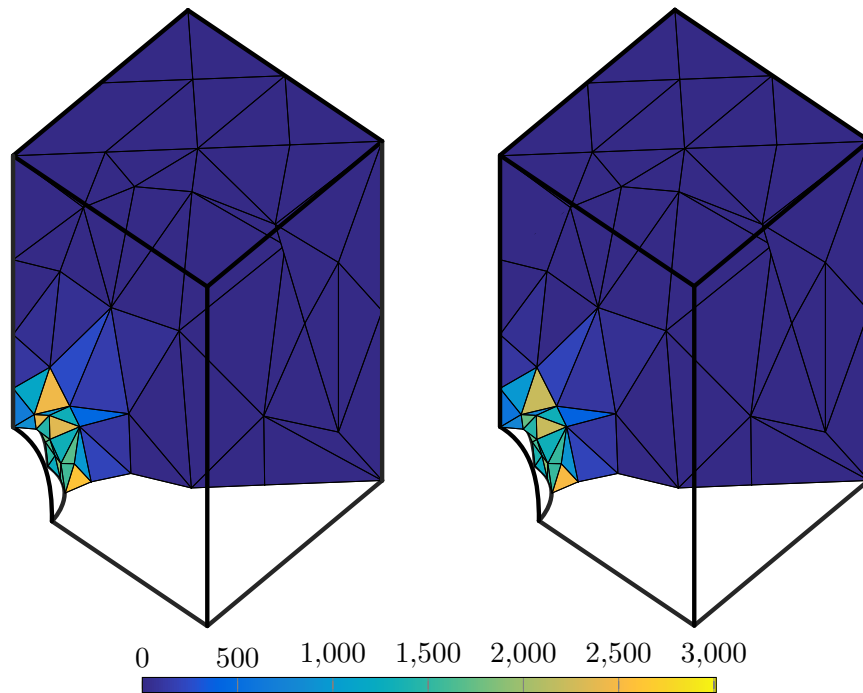


FIGURE 5.23 – Erreur locale estimée par la EET (gauche) à comparer à celle estimée par la HFT-PGD (droite) sur l’[Exemple 8](#). Les erreurs locales ont été normées par la surface de chaque élément. Seule la moitié des éléments ont été représentés.

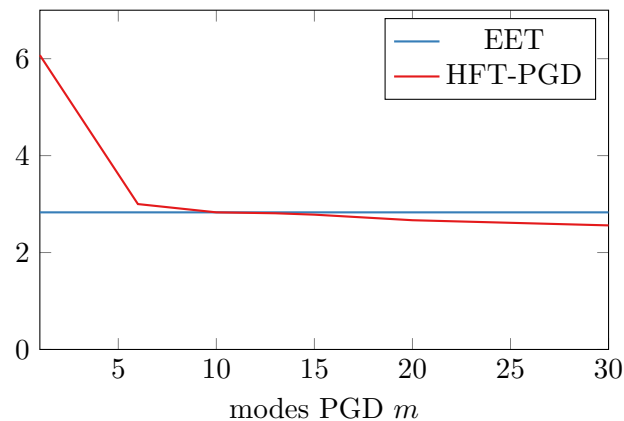


FIGURE 5.24 – Erreur en relation de comportement globale estimée par les différentes techniques sur l’[exemple 8](#) en fonction du nombre de modes PGD utilisés dans les problèmes locaux ρ_{Γ}^j .

Une telle approche permettrait une démocratisation de la vérification par l’ERC de solutions EF dans l’industrie, où le calcul fortement parallèle est absent voire financièrement inaccessible. Il ne reste plus qu’à construire une approximation PGD pour chaque type d’éléments finis linéaire, ainsi que de degré supérieur. La seule limite réside dans le nombre de paramètres géométriques à prendre en compte qui influe fortement le temps de calcul nécessaire pour obtenir une solution PGD de qualité.

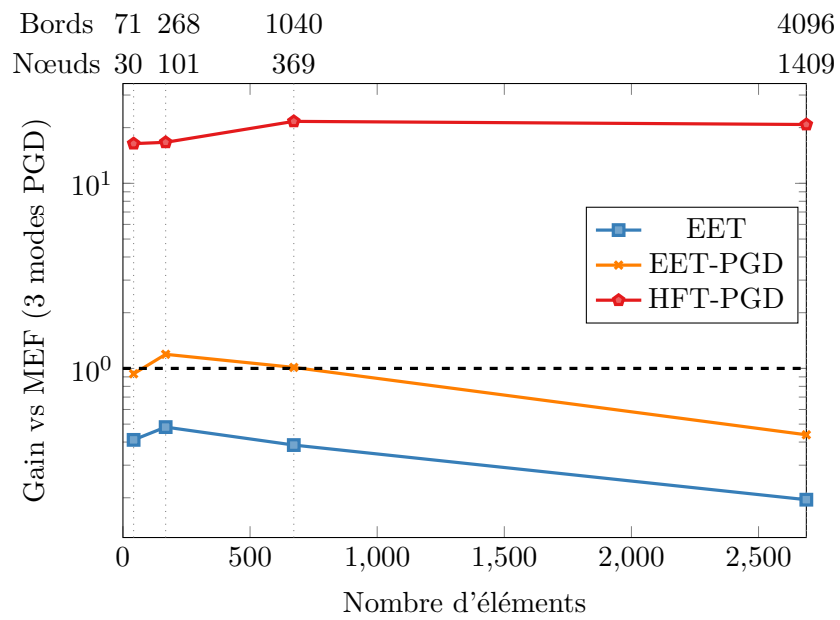


FIGURE 5.25 – Gain obtenu par les différentes stratégies HFT pour estimer l'ERC vis-à-vis d'une résolution MEF sur les mêmes maillages, pour l'Exemple 7.

Conclusion

Les travaux effectués durant cette thèse ont porté sur la vérification de solutions Proper Generalized Decomposition (PGD), une technique de réduction de modèle. Malgré la variété des domaines auxquels cette famille de méthodes s'applique, elle dépend d'un algorithme d'enrichissement itératif piloté par un indicateur d'erreur de réduction. L'indicateur en résidu fréquemment employé est peu efficace à ce sujet et est un frein à l'emploi de ces méthodes.

Dans un premier temps, un outil de vérification de solutions PGD a été proposé. Bâti sur le post-traitement de cette solution, il permet de prendre en compte toutes les sources d'erreurs, à l'exclusion seule des erreurs dites additionnelles⁴. L'avantage principal de cette méthode réside dans la réutilisation des outils d'estimation d'erreur employés dans le cadre éléments finis. Aussi, les propriétés mathématiques proposées par ces estimateurs sont conservées, notamment l'aspect garanti et précis de l'estimation d'erreur en relation de comportement, à la fois globalement ainsi que localement à travers des quantités d'intérêt. La capacité à séparer les différentes sources d'erreurs a permis de proposer des stratégies adaptatives pour piloter l'algorithme PGD. L'extension de cet outil au cadre de la séparation des variables spatiales montre également la robustesse de cette méthode à d'autres formes de séparation de variables, base de la PGD.

Dans un second temps, plutôt que de post-traiter la solution PGD pour piloter le calcul du mode suivant, on a proposé une nouvelle stratégie PGD pilotée en son sein par l'indicateur d'erreur en relation de comportement. Appliquée à un problème de thermique instationnaire, cette stratégie a montré des performances intéressantes en comparaison avec d'autres stratégies PGD : minimiser une fonctionnelle qui a du sens physique pour le calcul des modes PGD est plus robuste que de minimiser une fonctionnelle quelconque, notamment pour des problèmes complexes. Le champ dual étant équilibré au sens des éléments finis, l'étape de post-traitement décrite au paragraphe précédent n'est alors plus nécessaire. Les outils d'estimation d'erreur peuvent alors être immédiatement employés.

Finalement, ces travaux ont abouti à une application concrète de la PGD pour accélérer un des outils de construction de champs admissibles, employé pour vérifier des solutions éléments finis. En effet, ce type de méthode s'appuie sur la résolution de nombreux petits problèmes locaux à l'échelle de l'élément fini. Ces petits problèmes ont été remplacés par le post-traitement d'un abaque virtuel PGD. Cette idée a permis de proposer une autre méthode de construction de champs admissibles, nécessaires à l'estimation d'erreur en relation de comportement, en s'affranchissant de l'étape locale précédente. Ceci illustre le potentiel offert par la réduction de modèle, notamment la PGD.

Pour finir, ces travaux ouvrent une voie à la certification des solutions PGD grâce à d'autres solutions PGD vues comme des abaques virtuels dans les méthodes d'estimation d'erreur employées.

Dans le prolongement de ce travail, plusieurs perspectives sont envisageables :

4. définie à la page 33, elle comporte les erreurs de représentation du maillage et des conditions aux limites, et du traitement numérique du problème discrétisé

- Étendre la vérification de solutions PGD séparées spatialement du [Chapitre 3](#) à une séparation du domaine spatial sous la forme d'un produit d'un domaine 2D avec un domaine 1D.
- Adapter la stratégie Minimal CRE PGD (CRE-PGD), introduite au [Chapitre 4](#), aux quantités d'intérêt où la minimisation serait faite sur la fonctionnelle $\tilde{E}_{rdc} \times E_{rdc}$.
- Étendre la vérification aux problèmes non-linéaires à travers l'erreur en relation de comportement modifiée appliquée à une solution PGD découlant par exemple de la méthode Large Time Increment Method (LaTin).
- Adapter l'estimation d'erreur aux autres formes de décomposition à variables séparées, jusqu'à envisager la possibilité de trouver la forme la plus adaptée [[Ehrlacher et Lombardi, 2016](#)] au problème traité :

$$u \approx \sum_{i_1=1}^m \dots \sum_{i_D=1}^m a_{i_1 \dots i_D} \bigotimes_{\ell=1}^D \varphi_{i_\ell}^\ell,$$

avec $\varphi_{i_\ell}^\ell$ les fonctions de la base canonique associées à la dimension ℓ et $a \in \mathbb{R}^{m^D}$ un tenseur contenant les composantes $a_{i_1 \dots i_D}$ de l'approximation du produit tensoriel complet sur la base canonique.

- À plus court terme, valider l'ensemble des résultats présentés dans ce mémoire en appliquant les méthodes décrites à d'autres cas plus réalistes, voire industriels, notamment dans le domaine de l'élasticité.

Annexe A

Pseudo-problème aux valeurs propres

On introduit tout d'abord les produits scalaires et normes associées dont on aura besoin dans cette partie (ces choix ne sont qu'indicatifs, d'autres produits scalaires et normes sont bien sûr envisageables) pour les fonctions u et v dans $\mathcal{U}^{ad} \otimes \mathcal{T} \otimes \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_{\Omega} &= \int_{\Omega} uv \, d\Omega \quad ; \quad \|v\|_{\Omega} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{\Omega}} \\ \langle u, v \rangle_{\mathcal{I}} &= \int_{\mathcal{I}} uv \, dt \quad ; \quad \|v\|_{\mathcal{I}} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{\mathcal{I}}} \\ \forall i \in [1; N] \quad \langle u, v \rangle_{\Theta_i} &= \int_{\Theta_i} uv \, dp_i \quad ; \quad \|v\|_{\Theta_i} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{\Theta_i}} \\ \langle\langle u, v \rangle\rangle &= \int_{\Theta} \int_{\mathcal{I}} \int_{\Omega} uv \, d\Omega \, dt \, d\underline{p} \quad ; \quad \|v\| = \sqrt{\langle\langle v, v \rangle\rangle} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Une propriété importante de ce produit scalaire (A.1) choisi sur $\mathcal{U}^{ad} \otimes \mathcal{T} \otimes \mathcal{P}$, appelée propriété de séparation, est que pour tout $(\psi_1, \psi_2, \lambda_1, \lambda_2, \Gamma_1, \Gamma_2) \in \mathcal{U}^{ad^2} \times \mathcal{T}^2 \times \mathcal{P}^2$, avec $\Gamma_j = \prod_{n=1}^N \gamma_{j,n}$, on ait :

$$\langle\langle \psi_1 \lambda_1 \Gamma_1, \psi_2 \lambda_2 \Gamma_2 \rangle\rangle = \langle \psi_1, \psi_2 \rangle_{\Omega} \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle_{\mathcal{I}} \prod_{n=1}^N \langle \gamma_{1,n}, \gamma_{2,n} \rangle_{\Theta_n} \quad (\text{A.2})$$

Lorsque la solution exacte u est connue, la représentation séparée optimale de u est définie comme la représentation séparée minimisant la distance à u (au sens d'une certaine norme). La représentation optimale Proper Orthogonal Decomposition (POD) u_m d'ordre m vérifie :

$$(\psi, \lambda, \Gamma) = \arg \min_{\psi^*, \lambda^*, \Gamma^*} \left\| \left\| u - \sum_{i=1}^{m-1} \psi_i \lambda_i \Gamma_i - \psi^* \lambda^* \Gamma^* \right\| \right\|^2$$

Lorsque le produit scalaire $\langle\langle \bullet, \bullet \rangle\rangle$ associé à $\|\bullet\|$ satisfait la propriété de séparation (A.2), ce problème de minimisation mène classiquement au pseudo-problème aux valeurs propres (A.3) qui définit la fonction d'espace ψ [Berkooz, 1992].

$$G(\psi) = \sigma \psi \quad (\text{A.3})$$

De même on obtient des pseudo-problèmes aux valeurs propres qui définissent les fonctions du temps λ et des paramètres γ_n pour $n \in [1; N]$.

Démonstration. Soit le problème de minimisation suivant (pour les bienfaits de la démonstration, on se limite à une fonction v dépendant de deux paramètres $v(x, t) : \Theta = \emptyset$) :

$$\min_{\psi, \lambda} \left\| v - \psi \lambda \right\|^2$$

L'identité remarquable suivante couplée à la propriété de séparation donne la relation (A.5) :

$$\left\| v - \psi \lambda \right\|^2 = \left\| v \right\|^2 + \left\| \psi \lambda \right\|^2 - 2 \langle \langle v, \psi \lambda \rangle \rangle \quad (\text{A.4})$$

$$= \langle \langle v, v \rangle \rangle + \langle \psi, \psi \rangle_{\Omega} \langle \lambda, \lambda \rangle_{\mathcal{I}} - 2 \langle \langle v, \psi \lambda \rangle \rangle \quad (\text{A.5})$$

On écrit alors la stationnarité de (A.5) par rapport à ψ :

$$2 \langle \psi, \psi^* \rangle_{\Omega} \langle \lambda, \lambda \rangle_{\mathcal{I}} - 2 \langle \langle v, \psi^* \lambda \rangle \rangle = 0 \quad \forall \psi^* \in \mathcal{U}^{ad}$$

En remarquant que $\langle \langle v, \psi^* \lambda \rangle \rangle = \langle \langle v, \psi^* \lambda \rangle_{\mathcal{I}}, 1 \rangle_{\Omega} = \langle \langle v, \lambda \rangle_{\mathcal{I}}, \psi^* \rangle_{\Omega}$, on a donc :

$$\langle \|\lambda\|_{\mathcal{I}}^2 \psi - \langle v, \lambda \rangle_{\mathcal{I}}, \psi^* \rangle_{\Omega} = 0 \quad \forall \psi^* \in \mathcal{U}^{ad}$$

On obtient alors finalement :

$$\psi(x) = \frac{\langle v, \lambda \rangle_{\mathcal{I}}}{\|\lambda\|_{\mathcal{I}}^2} \quad (\text{A.6})$$

De même pour λ :

$$\lambda(t) = \frac{\langle v, \psi \rangle_{\Omega}}{\|\psi\|_{\Omega}^2} \quad (\text{A.7})$$

Ainsi, en substituant l'expression de λ donnée par (A.7) dans l'expression de ψ donnée par (A.6), on trouve :

$$\psi = \frac{\left\langle v, \frac{\langle v, \psi \rangle_{\Omega}}{\|\psi\|_{\Omega}^2} \right\rangle_{\mathcal{I}}}{\left\| \frac{\langle v, \psi \rangle_{\Omega}}{\|\psi\|_{\Omega}^2} \right\|_{\mathcal{I}}^2}$$

que l'on peut faire apparaître comme un pseudo-problème aux valeurs propres :

$$\underbrace{\frac{1}{\|\psi\|_{\Omega}^2} \left\| \langle v, \psi \rangle_{\Omega} \right\|_{\mathcal{I}}^2}_{\sigma} \psi = \underbrace{\langle v, \langle v, \psi \rangle_{\Omega} \rangle_{\mathcal{I}}}_{G(\psi)} \quad (\text{A.8})$$

En posant alors $v = u - \sum_{i=1}^{m-1} \psi_i \lambda_i$ pour tout entier positif m , les relations précédentes sont valides pour tout couple (ψ_i, λ_i) :

$$\psi_i(x) = \frac{\left\langle u - \sum_{j=1}^{i-1} \psi_j \lambda_j, \lambda_i \right\rangle_{\mathcal{I}}}{\|\lambda_i\|_{\mathcal{I}}^2} \quad \forall i \in \mathbb{N}_+^* \quad (\text{A.9a})$$

$$\lambda_i(t) = \frac{\left\langle u - \sum_{j=1}^{i-1} \psi_j \lambda_j, \psi_i \right\rangle_{\Omega}}{\|\psi_i\|_{\Omega}^2} \quad \forall i \in \mathbb{N}_+^* \quad (\text{A.9b})$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\|\psi_i\|_{\Omega}^2} \left\| \left\langle u - \sum_{j=1}^{i-1} \psi_j \lambda_j, \psi_i \right\rangle_{\Omega} \right\|_{\mathcal{I}}^2 \quad \forall i \in \mathbb{N}_+^* \quad (\text{A.9c})$$

□

Remarque A.1. Les fonctions $\psi_i \in \mathcal{U}^{ad}$ et $\lambda_i \in \mathcal{T}$ définies plus haut sont orthogonales vis-à-vis des produits scalaires utilisés.

Démonstration. Montrons par récurrence que les fonctions spatiales ψ_i sont orthogonales deux à deux, ie $\langle \psi_p, \psi_k \rangle_\Omega = 0$ pour tous les couples $(p, k) \in \mathbb{N}_+^*$, avec $p \neq k$.

— Soit $p = 2$:

$$\begin{aligned} \langle \psi_2, \psi_1 \rangle_\Omega &= \frac{\langle \langle u - \psi_1 \lambda_1, \lambda_2 \rangle_{\mathcal{I}}, \psi_1 \rangle_\Omega}{\|\lambda_2\|_{\mathcal{I}}^2} && \text{(expression de } \psi_2) \\ &= \frac{1}{\|\lambda_2\|_{\mathcal{I}}^2} (\langle \langle u, \psi_1 \rangle_\Omega, \lambda_2 \rangle_{\mathcal{I}} - \langle \psi_1, \psi_1 \rangle_\Omega \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle_{\mathcal{I}}) && \text{(linéarité du ps } ^1) \\ &= \frac{1}{\|\lambda_2\|_{\mathcal{I}}^2} (\langle \lambda_1 \|\psi_1\|_\Omega^2, \lambda_2 \rangle_{\mathcal{I}} - \|\psi_1\|_\Omega^2 \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle_{\mathcal{I}}) && \text{(expression de } \lambda_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

— Soit $p > 2$. On suppose que $\langle \psi_i, \psi_j \rangle_\Omega = 0$ pour tous couples $(i, j) \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket^2$ avec $i \neq j$. Soit $k < p$. Montrons que $\langle \psi_p, \psi_k \rangle_\Omega = 0$:

$$\begin{aligned} \langle \psi_p, \psi_k \rangle_\Omega &= \frac{1}{\|\lambda_p\|_{\mathcal{I}}^2} \left\langle \left\langle u - \sum_{j=1}^{p-1} \psi_j \lambda_j, \lambda_p \right\rangle_{\mathcal{I}}, \psi_k \right\rangle_\Omega \\ &= \frac{1}{\|\lambda_p\|_{\mathcal{I}}^2} \left(\left\langle \left\langle u - \sum_{j=1}^{k-1} \psi_j \lambda_j, \psi_k \right\rangle_{\mathcal{I}}, \lambda_p \right\rangle_{\mathcal{I}} - \langle \psi_k \lambda_k, \lambda_p \rangle_{\mathcal{I}} \langle \psi_k \rangle_\Omega - \left\langle \left\langle \sum_{j=k+1}^{p-1} \psi_j \lambda_j, \lambda_p \right\rangle_{\mathcal{I}}, \psi_k \right\rangle_\Omega \right) \\ &= \frac{1}{\|\lambda_p\|_{\mathcal{I}}^2} \left(\langle \lambda_k \|\psi_k\|_\Omega^2, \lambda_p \rangle_{\mathcal{I}} - \|\psi_k\|_\Omega^2 \langle \lambda_k, \lambda_p \rangle_{\mathcal{I}} - \sum_{j=k+1}^{p-1} \langle \lambda_j, \lambda_p \rangle_{\mathcal{I}} \underbrace{\langle \psi_j, \psi_k \rangle_\Omega}_{=0} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, les fonctions spatiales ψ_i sont orthogonales deux à deux. Par un raisonnement identique, on peut montrer que les fonctions temporelles λ_i sont orthogonales deux à deux. Ainsi les couples (ψ_i, λ_i) vérifient :

$$\psi_i = \frac{\langle u, \lambda_i \rangle_{\mathcal{I}}}{\|\lambda_i\|_{\mathcal{I}}^2} \quad \lambda_i = \frac{\langle u, \psi_i \rangle_\Omega}{\|\psi_i\|_\Omega^2} \quad \sigma_i = \frac{1}{\|\psi_i\|_\Omega^2} \|\langle u, \psi_i \rangle_\Omega\|_{\mathcal{I}}^2 \quad \forall i \in \mathbb{N}_+^*$$

□

On a alors $\|\psi_i \lambda_i\| = \|\psi_i\|_\Omega \|\lambda_i\|_{\mathcal{I}} = \sqrt{\sigma_i}$ et l'erreur de troncature vérifie :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| u - \sum_{i=1}^m \psi_i \lambda_i \right\|^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\|u\|^2 - \sum_{i=1}^m \sigma_i \right] = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=m+1}^{\infty} \sigma_i = 0$$

Démonstration. Soit $u_s = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i \lambda_i$. Montrons tout d'abord que $\|u - u_s\|^2 = 0$. De par la nature même de la norme $\|\bullet\|$, il vient :

$$\|u - u_s\|^2 = \|u\|^2 + \|u_s\|^2 - 2 \langle u, u_s \rangle \tag{A.10}$$

1. ps : produit scalaire

Explicitons les différents termes :

$$\|u\|^2 = \langle \langle u(\underline{x}, t), u(\underline{x}, t) \rangle_{\mathcal{I}}, 1 \rangle_{\Omega} = \langle K(\underline{x}, \underline{x}), 1 \rangle_{\Omega}$$

où l'on a introduit la fonction *noyau* K continue² symétrique³ de type positif⁴ associée à l'opérateur intégral $G(\psi) = \langle K(\underline{x}, \underline{x}'), \psi(\underline{x}') \rangle$. D'après le **Théorème 1** dit de Mercer, la fonction *noyau* K admet alors la représentation suivante :

$$K(\underline{x}, \underline{x}') = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \psi_i(\underline{x}) \psi_i(\underline{x}')$$

où μ_i et ψ_i sont respectivement les valeurs propres et les vecteurs propres de $G(\psi)$.

De cette propriété vérifiée par la fonction *noyau* K , les termes $\langle\langle u, u_s \rangle\rangle$ et $\|u_s\|^2$ se réécrivent :

$$\begin{aligned} \langle\langle u, u_s \rangle\rangle &= \left\langle \left\langle u(\underline{x}, t), \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle u(\underline{x}', t), \psi_i(\underline{x}') \rangle_{\Omega}}{\|\psi_i\|_{\Omega}^2} \psi_i(\underline{x}) \right\rangle_{\Omega}, 1 \right\rangle_{\mathcal{I}} && \text{(expression des } \lambda_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\|\psi_i\|_{\Omega}^2} \langle \langle \langle u(\underline{x}, t), u(\underline{x}', t) \rangle_{\mathcal{I}}, \psi_i(\underline{x}') \rangle_{\Omega}, \psi_i(\underline{x}) \rangle_{\Omega} && \text{(permutation des ps)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\|\psi_i\|_{\Omega}^2} \langle \langle K(\underline{x}, \underline{x}'), \psi_i(\underline{x}') \rangle_{\Omega}, \psi_i(\underline{x}) \rangle_{\Omega} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\|\psi_i\|_{\Omega}^2} \left\langle \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \psi_j(\underline{x}) \psi_j(\underline{x}'), \psi_i(\underline{x}') \right\rangle_{\Omega}, \psi_i(\underline{x}) \right\rangle_{\Omega} && \text{(théorème de Mercer)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\|\psi_i\|_{\Omega}^2} \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \psi_j(\underline{x}) \langle \psi_j(\underline{x}'), \psi_i(\underline{x}') \rangle_{\Omega}, \psi_i(\underline{x}) \right\rangle_{\Omega} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\|\psi_i\|_{\Omega}^2} \mu_i \langle \psi_i(\underline{x}'), \psi_i(\underline{x}') \rangle_{\Omega} \langle \psi_i(\underline{x}), \psi_i(\underline{x}) \rangle_{\Omega} && \text{(orthogonalité)} \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \psi_i(\underline{x}), \psi_i(\underline{x}) \right\rangle_{\Omega} = \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \psi_i(\underline{x}) \psi_i(\underline{x}), 1 \right\rangle_{\Omega} \\ &= \langle K(\underline{x}, \underline{x}), 1 \rangle_{\Omega} && \text{(théorème de Mercer)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|u_s\|^2 &= \left\langle \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle u(\underline{x}, t), \psi_i(\underline{x}) \rangle_{\Omega}}{\|\psi_i\|_{\Omega}^2} \psi_i, \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\langle u(\underline{x}', t), \psi_j(\underline{x}') \rangle_{\Omega}}{\|\psi_j\|_{\Omega}^2} \psi_j \right\rangle_{\Omega}, 1 \right\rangle_{\mathcal{I}} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\|\psi_i\|_{\Omega}^2 \|\psi_j\|_{\Omega}^2} \langle \psi_i, \psi_j \rangle_{\Omega} \langle \langle u(\underline{x}, t), \psi_i(\underline{x}) \rangle_{\Omega} \langle u(\underline{x}', t), \psi_j(\underline{x}') \rangle_{\Omega}, 1 \rangle_{\mathcal{I}} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\|\psi_i\|_{\Omega}^2} \langle \langle \langle u(\underline{x}, t), u(\underline{x}', t) \rangle_{\mathcal{I}}, \psi_i(\underline{x}) \rangle_{\Omega}, \psi_i(\underline{x}') \rangle_{\Omega} && \text{(orthogonalité)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\|\psi_i\|_{\Omega}^2} \langle \langle K(\underline{x}, \underline{x}'), \psi_i(\underline{x}) \rangle_{\Omega}, \psi_i(\underline{x}') \rangle_{\Omega} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\|\psi_i\|_{\Omega}^2} \left\langle \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \psi_j(\underline{x}) \psi_j(\underline{x}'), \psi_i(\underline{x}') \right\rangle_{\Omega}, \psi_i(\underline{x}) \right\rangle_{\Omega} && \text{(théorème de Mercer)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_i}{\|\psi_i\|_{\Omega}^2} \langle \langle \psi_i(\underline{x}) \psi_i(\underline{x}'), \psi_i(\underline{x}') \rangle_{\Omega}, \psi_i(\underline{x}) \rangle_{\Omega} = \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \psi_i(\underline{x}), \psi_i(\underline{x}) \right\rangle_{\Omega} && \text{(orthogonalité)} \end{aligned}$$

2. puisque $u \in \mathcal{U}^{ad} \otimes \mathcal{T}$

3. par la symétrie du produit dans l'intégrale sur Ω

4. car pour $\psi \in \mathcal{U}^{ad} \subset \mathcal{L}^2(\Omega)$, $\langle G(\psi), \psi \rangle_{\Omega} = \sigma \|\psi\|_{\Omega}^2 \geq 0$ car $\sigma \geq 0$ (voir (A.8) et [Chatterji, 1998, page 411])

$$= \langle K(\underline{x}, \underline{x}), 1 \rangle_{\Omega} \quad (\text{théorème de Mercer})$$

Par conséquent, en combinant les différentes relations précédemment obtenues avec la relation (A.10), il vient :

$$\|u - u_s\|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad u - u_s = 0 \quad \Rightarrow \quad u = u_s \quad \forall (\underline{x}, t) \in \Omega \times \mathcal{I}$$

L'erreur de troncature vérifie ainsi :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| u - \sum_{i=1}^m \psi_i \lambda_i \right\|^2 = \|u - u_s\|^2 = 0$$

En remarquant que $\langle\langle u, \psi_i \lambda_i \rangle\rangle = \langle \lambda_i \| \psi_i \|_{\Omega}^2, \lambda_i \rangle_{\mathcal{I}} = \| \psi_i \|_{\Omega}^2 \| \lambda_i \|_{\mathcal{I}}^2 = \| \psi_i \lambda_i \|^2$ grâce aux formes de ψ_i et λ_i , l'orthogonalité des fonctions spatiales ψ_i et temporelles λ_i conduit à la relation :

$$\|u - u_s\|^2 = \|u\|^2 + \sum_{i=1}^m \left(\| \psi_i \lambda_i \|^2 - 2 \langle\langle u, \psi_i \lambda_i \rangle\rangle \right) = \|u\|^2 - \sum_{i=1}^m \| \psi_i \lambda_i \|^2$$

Et comme $\langle\langle u, \psi_i \lambda_i \rangle\rangle = \| \psi_i \|_{\Omega}^2 \langle u, \psi_i \rangle_{\Omega} \| \lambda_i \|_{\mathcal{I}}^{-4} = \sigma_i$, l'erreur de troncature vérifie bien la relation :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| u - \sum_{i=1}^m \psi_i \lambda_i \right\|^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\|u\|^2 - \sum_{i=1}^m \sigma_i \right] = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=m+1}^{\infty} \sigma_i = 0 \quad (\text{car } u = u_s)$$

□

Théorème 1 (Mercer). *Soit K un noyau continu symétrique de type positif sur un espace compact X . Alors les valeurs propres de T_K sont des réels positifs ou nuls et il existe une base hilbertienne $(e_i)_i$ de $\mathcal{L}^2(X)$ constituée de fonctions propres pour T_K . Les fonctions propres correspondant aux valeurs propres non nulles sont continues sur X et K s'écrit :*

$$K(s, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j e_j(s) e_j(t)$$

où la convergence est absolue et uniforme sur X et l'opérateur T_K est défini par :

$$[T_K \varphi](x) = \int_X K(x, s) \varphi(s) ds$$

Pour la démonstration de ce théorème, le lecteur pourra se référer à [Chatterji, 1998, page 406].

Annexe B

SVD selon la norme énergétique

Soit une solution discrète $u_h(\underline{x}, t)$ obtenue par Méthode des Éléments Finis (MEF) en introduisant les espaces d'approximation $\mathcal{U}_h^{ad} \in \mathcal{U}^{ad}$ et $\mathcal{T}_{\Delta t} \in \mathcal{T}$ respectivement de dimension N_x et N_t . Une telle solution peut être représentée sous une forme matricielle formée par $N_x \times N_t$ valeurs discrètes réelles :

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} u_h(x_1, t_1) & u_h(x_1, t_2) & \cdots & u_h(x_1, t_{N_t}) \\ u_h(x_2, t_1) & u_h(x_2, t_2) & \cdots & u_h(x_2, t_{N_t}) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ u_h(x_{N_x}, t_1) & \cdots & \cdots & u_h(x_{N_x}, t_{N_t}) \end{pmatrix}$$

En physique, la norme énergétique $\|\cdot\|_{\mathcal{U}^{ad}}$ est la norme naturelle pour mesurer l'erreur entre deux champs de déplacements, l'un inconnu u_{ex} , et l'autre approximé u_h . On introduit alors le produit scalaire énergétique $\langle\langle \bullet, \circ \rangle\rangle_{\mathcal{U}^{ad}}$ qui vérifie la propriété de séparation de variables :

$$\langle\langle u, w \rangle\rangle_{\mathcal{U}^{ad}} = \left\langle \sqrt{\langle u(t), w(t) \rangle_{\mathcal{U}^{ad}}}, \sqrt{\langle u(t), w(t) \rangle_{\mathcal{U}^{ad}}} \right\rangle_{\mathcal{T}} \quad (\text{B.1a})$$

$$\langle u(\underline{x}, t), w(\underline{x}, t) \rangle_{\mathcal{T}} = \int_{\mathcal{I}} u(\underline{x}, t) w(\underline{x}, t) dt \quad (\text{B.1b})$$

$$\langle u(\underline{x}, t), w(\underline{x}, t) \rangle_{\mathcal{U}^{ad}} = \int_{\Omega} \underline{\nabla} u(\underline{x}, t) \frac{1}{k} \underline{\nabla} w(\underline{x}, t) d\Omega \quad (\text{B.1c})$$

Les produits scalaires discrétisés $\langle \bullet, \circ \rangle_{\mathcal{U}_h^{ad}}$ et $\langle \bullet, \circ \rangle_{\mathcal{T}_h}$ s'écrivent

$$\langle u, w \rangle_{\mathcal{U}_h^{ad}} = \mathbf{u}^\dagger \mathbb{K} \mathbf{w}, \quad \langle u, w \rangle_{\mathcal{T}_h} = \mathbf{u}^\dagger \mathbb{M} \mathbf{w}$$

où $\mathbb{K} \in \mathbb{R}^{N_x^2}$ (resp. $\mathbb{M} \in \mathbb{R}^{N_t^2}$) est la matrice de rigidité éléments finis spatiale (resp. la matrice de masse éléments finis en temps) et $(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \in \mathbb{R}^{N_x \times N_t}$ les solutions éléments finis. Par une factorisation de Cholesky, le produit scalaire $\langle\langle \bullet, \circ \rangle\rangle_{\mathcal{U}^{ad}}$ se ramène au produit scalaire euclidien :

$$\|u\|_{\mathcal{U}_h^{ad}} = \|\sqrt{\mathbb{K}} \mathbf{u}\|_2, \quad \|u\|_{\mathcal{T}_h} = \|\mathbf{u} \sqrt{\mathbb{M}}\|_2 \quad (\text{B.2})$$

Grâce à la transformation (B.2), une décomposition en valeurs singulières (SVD) selon la norme énergétique de la matrice \mathbb{U} se ramène à déterminer la décomposition SVD classique de la matrice $\bar{\mathbb{U}} = \sqrt{\mathbb{K}} \mathbb{U} \sqrt{\mathbb{M}}$. En posant $\bar{\mathbb{U}} = \mathbb{W} \Sigma \mathbb{V}^\dagger$, on construit alors la décomposition $\mathbb{U} = \Psi \Lambda^\dagger$ où Ψ contient les fonctions spatiales ψ_i , et Λ contient les fonctions temporelles λ_i vérifiant :

$$\Psi = \sqrt{\mathbb{K}}^{-1} \mathbb{W} \quad \Lambda = \Sigma \left(\sqrt{\mathbb{M}_t^{-1}} \right)^\dagger \mathbb{V} \quad (\text{B.3})$$

1. ici, \mathbb{V}^\dagger représente la matrice adjointe de \mathbb{V} .

Démonstration. La SVD de toute matrice $U = W\Sigma V^\dagger$ vérifie les propriétés suivantes :

$$UU^\dagger = W\Sigma^2W^\dagger \quad U^\dagger U = V\Sigma^2V^\dagger$$

On applique la SVD à la matrice $\bar{U} = \Psi\Lambda^\dagger$, en remarquant que les matrices Ψ et Λ forment une base orthogonale ($\Psi\Psi^\dagger = \mathbb{1}$ et $\Lambda\Lambda^\dagger = \mathbb{1}$) :

$$\begin{aligned} \sqrt{K}U\sqrt{M} \left(\sqrt{K}U\sqrt{M} \right)^\dagger &= \sqrt{K}UU^\dagger\sqrt{K}^\dagger = \sqrt{K}\Psi\Psi^\dagger\sqrt{K}^\dagger = W\Sigma^2W^\dagger \\ \left(\sqrt{K}U\sqrt{M} \right)^\dagger \sqrt{K}U\sqrt{M} &= \sqrt{M}^\dagger U^\dagger U\sqrt{M} = \sqrt{M}^\dagger \Lambda^\dagger \Lambda \sqrt{M} = V\Sigma^2V^\dagger \end{aligned}$$

On identifie alors les matrices Ψ et Λ vérifiant les relations (B.3). □

Remarque B.1. Les fonctions de la décomposition à variables séparées $\psi_i \in \mathcal{U}_h^{ad}$ (resp. $\lambda_i \in \mathcal{T}_h$) sont alors orthogonales selon le produit scalaire $\langle \bullet, \circ \rangle_{\mathcal{U}_h^{ad}}$ (resp. $\langle \bullet, \circ \rangle_{\mathcal{T}_h}$).

Remarque B.2. Par le même principe, ceci se généralise aisément à la décomposition en valeurs singulières d'ordre supérieur (HOSVD).

Annexe C

Modèles PGD géométriquement paramétrés

L'optimisation de forme consiste simplement à introduire des paramètres de variation de géométrie dans le modèle. Récemment [Ammar *et al.*, 2014, Zlotnik *et al.*, 2015b], la réduction de modèle PGD a été étendue aux variations de géométrie pour des problèmes thermiques, puis des problèmes élastiques [Courard *et al.*, 2016].

Trois méthodes existent pour prendre en compte les variations de géométrie dans le cadre de la PGD :

- La première (Figure C.1a) consiste à paramétrer la rigidité d'une structure de référence englobant toutes les configurations géométriques possibles [Courard, 2016]. À cette structure, deux domaines sont identifiés : (i) une partie *dure* correspondant à la structure associée à un jeu des paramètres géométriques de l'étude; (ii) une partie *molle* pour ignorer le reste de la géométrie de référence;
- La seconde (Figure C.1b) est basée sur des domaines fictifs, où le système d'équations initial donné dans un domaine à géométrie complexe est transformé en un système d'équations *semblable*, écrit dans un domaine à géométrie plus simple et discrétisé par un maillage structuré [Canuto et Kozubek, 2007, Nouy *et al.*, 2011];
- La troisième (Figure C.1c) redéfinit chaque problème associé à un jeu de paramètres géométriques à une structure de référence unique, par des transformations géométriques [Ammar *et al.*, 2014].

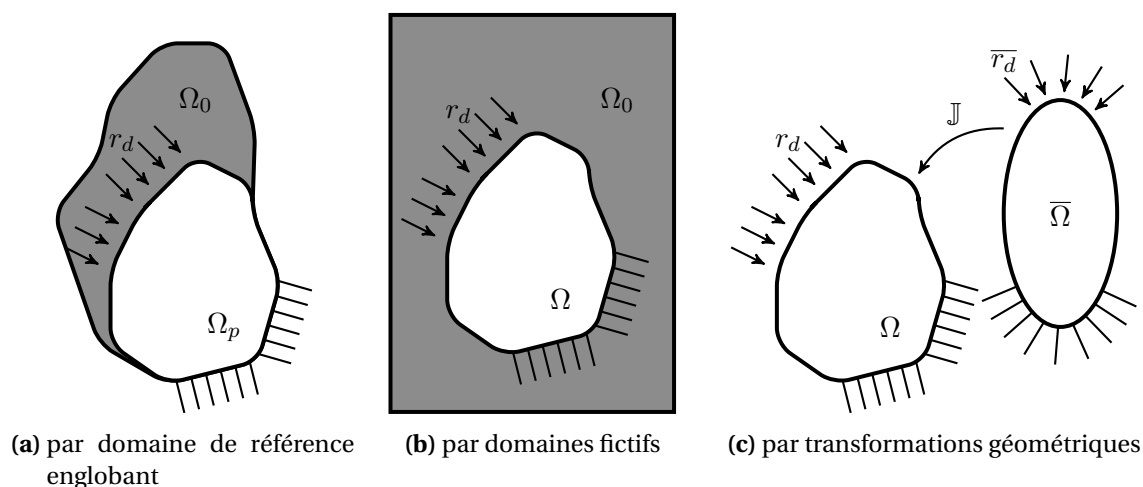


FIGURE C.1 – Imposition des paramètres géométriques dans la méthode PGD

C'est cette dernière méthode qui sera développée dans la suite sur l'**Exemple 9**, où l'on cherche à optimiser la forme des ailettes par un post-traitement d'une solution réduite PGD.

► **Exemple 9 (Radiateur de refroidissement)**

Soit le problème de diffusion thermique stationnaire d'un radiateur de refroidissement composé de $N = 5$ ailettes dont l'encombrement global est donné ($L \times H$), représenté sur la **Figure C.2**. Un apport de chaleur r_b est fourni à l'extrémité basse du domaine $\partial_b \Omega$ avec un échange de chaleur par convection r_t sur la partie haute $\partial_t \Omega$ tel que $r_t = h.u$, où u est le champ de température inconnu.

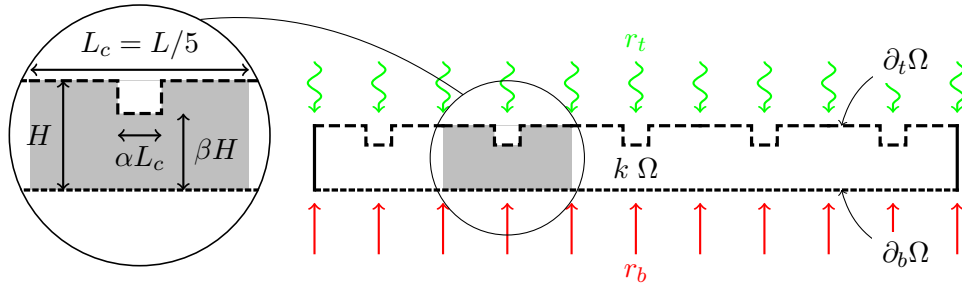


FIGURE C.2 – Domaine d'étude (droite) composé de 5 cellules (gauche) représentées avec $\alpha = 0,2$ et $\beta = 0,7$

Pour les valeurs numériques, on prendra $L = 10$ m, $H = \frac{1}{2}$ m, $k = 100$ Wm⁻¹K⁻¹, $h = 10$ Wm⁻²K⁻¹ et $r_b = 4,5 \cdot 10^6$ Wm⁻¹.

1 Domaine de référence par transformations géométriques

On introduit deux paramètres α et β définissant l'ouverture des ailettes. Le domaine d'étude (**Figure C.2**) est une succession de cellules paramétrées dont on cherche la meilleure configuration vis-à-vis d'un critère de conception.

La formulation variationnelle associée à ce problème consiste à trouver $u(x, \alpha, \beta) \in \mathcal{U}^{ad}$ tel que :

$$\int_{\Omega} k \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v \, d\Omega + \int_{\partial_t \Omega} h u v \, dS = \int_{\partial_b \Omega} r_b v \, dS \quad \forall v \in \mathcal{U}_0^{ad} \quad (C.1)$$

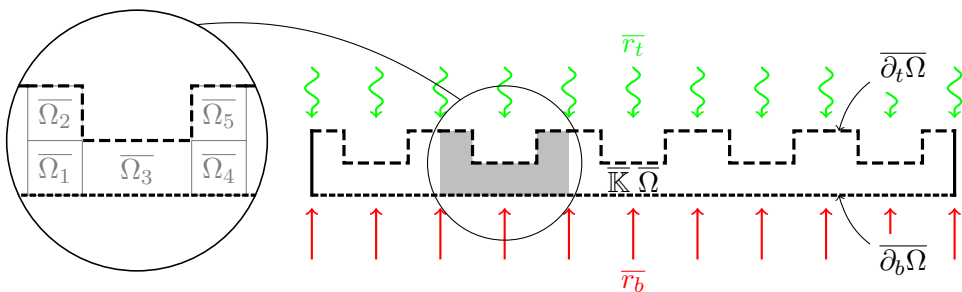


FIGURE C.3 – Domaine de référence (droite) et cellule de référence associée (gauche)

La prise en compte des paramètres géométriques consiste à se ramener à un domaine de référence $\bar{\Omega}$ sur lequel on va faire les calculs. Par un changement de variable, on ramène le calcul

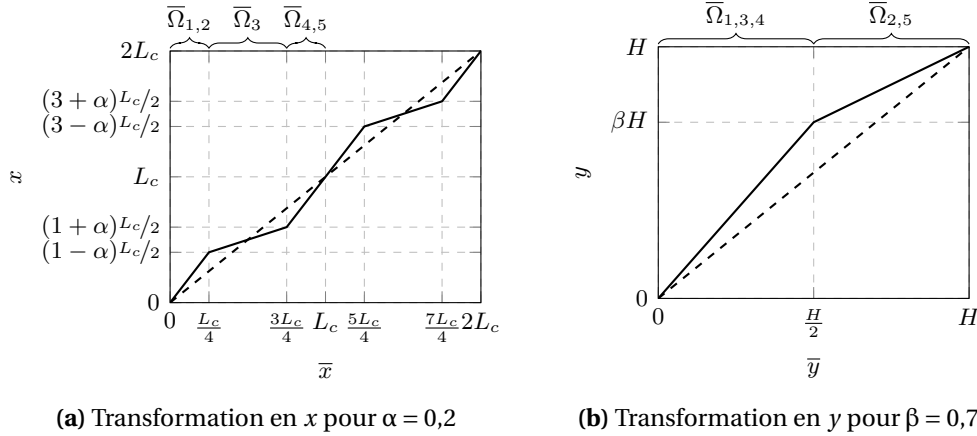


FIGURE C.4 – Relations entre Ω et $\bar{\Omega}$ représenté pour $\alpha = 0.2$ et $\beta = 0.7$

des intégrales du domaine Ω au domaine $\bar{\Omega}$. La formulation variationnelle (C.1) se réécrit alors sur le domaine $\bar{\Omega}$ en introduisant le Jacobien de la transformation \mathbb{J} tel que :

$$\underbrace{\int_{\bar{\Omega}} k \mathbb{J}_{\bar{\Omega}}^{-T} \nabla_{\bar{\Omega}} u \cdot \mathbb{J}_{\bar{\Omega}}^{-T} \nabla_{\bar{\Omega}} v | \mathbb{J}_{\bar{\Omega}} | d\bar{\Omega}}_{b(u,v)} + \underbrace{\int_{\partial_i \bar{\Omega}} h u v | \mathbb{J}_{\partial_i \bar{\Omega}} | d\bar{S}}_{c(u,v)} = \underbrace{\int_{\partial_b \bar{\Omega}} r_b v | \mathbb{J}_{\partial_b \bar{\Omega}} | d\bar{S}}_{l(v)} \quad \forall v \in \mathcal{U}_0^{ad}$$

Représenté sur la Figure C.3, ce domaine de référence est l'image du domaine réel pour un jeu de paramètres fixés. Des combinaisons de transformations géométriques simples, telles que des homothéties, des dilatations, des transvections voire des déformations triangulaires permettent d'identifier des relations entre les domaines Ω et $\bar{\Omega}$ à travers des super-éléments, notés $\bar{\Omega}_i$. De ces relations, on détermine des expressions analytiques des matrices jacobiniennes.

2 Matériau équivalent associé

Le problème variationnel défini sur la structure de référence vérifie ainsi une écriture identique à l'écriture initiale (C.1) où (i) le domaine Ω est remplacé par le domaine de référence $\bar{\Omega}$; (ii) l'opérateur k par la matrice de diffusion équivalente \mathbb{K}_0 ; (iii) l'opérateur h par le coefficient de convection équivalent H_0 ; (iv) et le chargement r_b par un chargement équivalent R_b :

$$\int_{\bar{\Omega}} \mathbb{K}_0 \nabla_{\bar{\Omega}} u \cdot \nabla_{\bar{\Omega}} v d\bar{\Omega} + \int_{\partial_i \bar{\Omega}} H_0 u v d\bar{\Omega} = \int_{\partial_b \bar{\Omega}} R_b v d\bar{\Omega} \quad \forall v \in \mathcal{U}_0^{ad} \quad (C.2)$$

Le coefficient de convection H_0 et la matrice de diffusion \mathbb{K}_0 vérifient ¹ :

$$\mathbb{K}_0 = k | \mathbb{J}_{\bar{\Omega}} | [\mathbb{J}_{\bar{\Omega}}^{-T}]^T \mathbb{J}_{\bar{\Omega}}^{-T} \quad H_0 = h | \mathbb{J}_{\partial_i \bar{\Omega}} | \quad R_b = r_b | \mathbb{J}_{\partial_b \bar{\Omega}} | \quad (C.3)$$

Dans le cas de l'Exemple 9, en introduisant l'opérateur d'indication ², le coefficient de convection H_0 et la matrice de diffusion \mathbb{K}_0 vérifient une écriture à variables séparées de la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{K}_0}{k} = & \frac{\beta}{1-\alpha} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \delta_{\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_4} + \frac{1-\alpha}{\beta} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \delta_{\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_4} + \frac{1-\beta}{1-\alpha} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \delta_{\bar{\Omega}_2 \cup \bar{\Omega}_5} \\ & + \frac{1-\alpha}{1-\beta} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \delta_{\bar{\Omega}_2 \cup \bar{\Omega}_5} + \frac{\beta}{\alpha} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \delta_{\bar{\Omega}_3} + \frac{\alpha}{\beta} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \delta_{\bar{\Omega}_3} \end{aligned}$$

1. en utilisant la relation entre produit scalaire et vectoriel : $u \cdot v = u^T v$

2. l'opérateur d'indication : $\delta_{\Omega_i}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

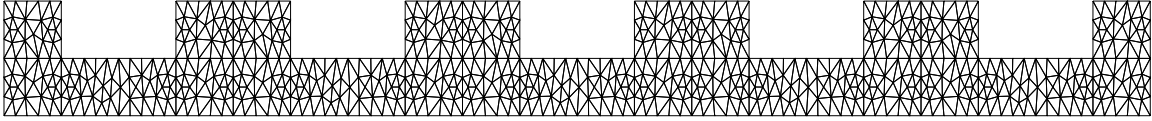


FIGURE C.5 – Maillage du domaine de référence $\bar{\Omega}$

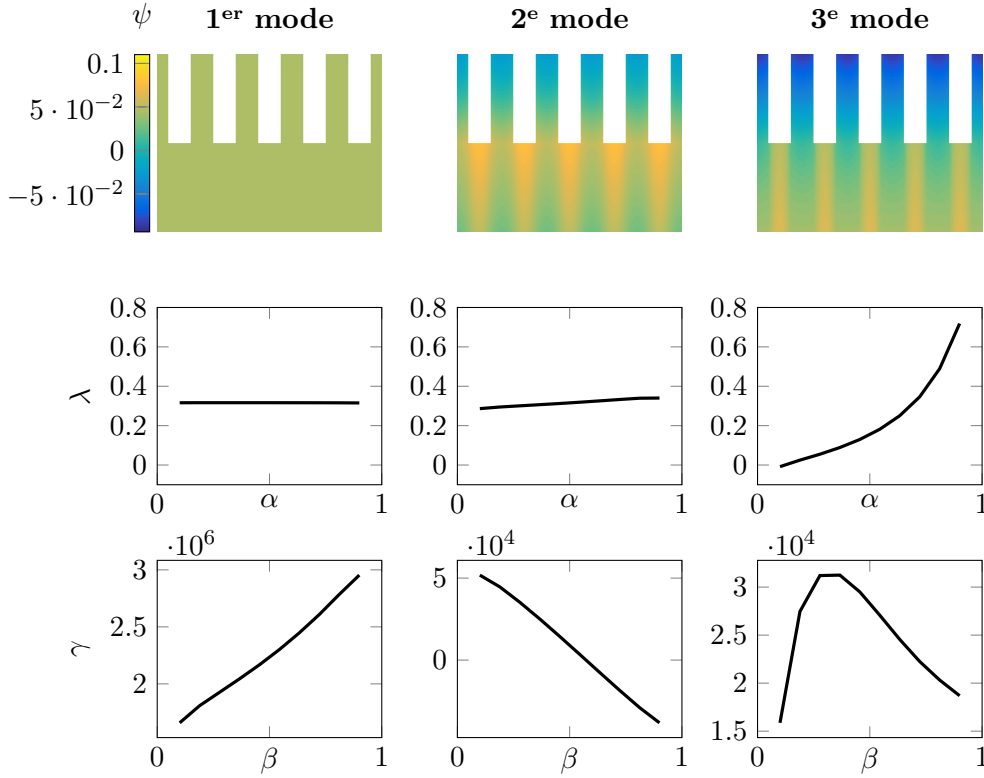


FIGURE C.6 – Les 3^{es} modes PGD de l'Exemple 9 : fonctions spatiales ψ_i (haut), en paramètres λ_i (centre) et γ_i (bas) pour $i = 1, 2, 3$ (de gauche à droite).

$$\frac{H_0}{h} = 2(1 - \beta) \delta_{\partial_t \Omega_1 \cup \partial_t \Omega_5, y} + 2(1 - \alpha) \delta_{\partial_t \Omega_2 \cup \partial_t \Omega_5, x} + 2\alpha \delta_{\partial_t \Omega_3}$$

Le problème ainsi formulé (C.2) revient à un problème où la dépendance sur les paramètres géométriques est transférée aux coefficients matériaux et de chargement *équivalents* vérifiant l'hypothèse de séparation des variables. La construction du modèle réduit PGD qui en découle est alors peu différente du cas général à paramètres matériaux présenté au Chapitre 1.

La Figure C.6 représente les trois premiers modes PGD obtenus sur une discrétisation du domaine de référence (voir Figure C.5), dont des évaluations pour certains jeux de paramètres sont données sur la Figure C.7.

Remarque C.1. Dans le cadre élastique, la relation (C.3) n'est pas immédiate. L'opérateur de déformation $\epsilon(\underline{u})$ ne vérifie pas une relation simple comme en thermique sur l'opérateur $\nabla \underline{u}$ vis-à-vis de la matrice Jacobienne \mathbb{J} , mais la relation :

$$\epsilon(\underline{u}) = \frac{1}{2} (\nabla_{\Omega} \underline{u} + \nabla_{\Omega} \underline{u}^T) = \frac{1}{2} (\mathbb{J}_{\bar{\Omega}}^{-T} \nabla_{\bar{\Omega}} \underline{u} + \nabla_{\bar{\Omega}} \underline{u}^T \mathbb{J}_{\bar{\Omega}}^{-1}) \neq \mathbb{A} \nabla_{\bar{\Omega}} \underline{u}$$

La solution, consiste à se ramener une formulation variationnelle élastique sur $\nabla_{\bar{\Omega}} \underline{u}$ en cassant la symétrie de l'opérateur $\epsilon(u)$, symétrie garantie par le tenseur de Hooke équivalent \mathcal{K}_0

grâce à l'utilisation de la notation de Voigt, de la forme :

$$\int_{\Omega} \nabla_{\overline{\Omega}} \underline{v} : \mathcal{K}_0 : \nabla_{\overline{\Omega}} \underline{u} \, d\Omega = l(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{U}_0^{ad}$$

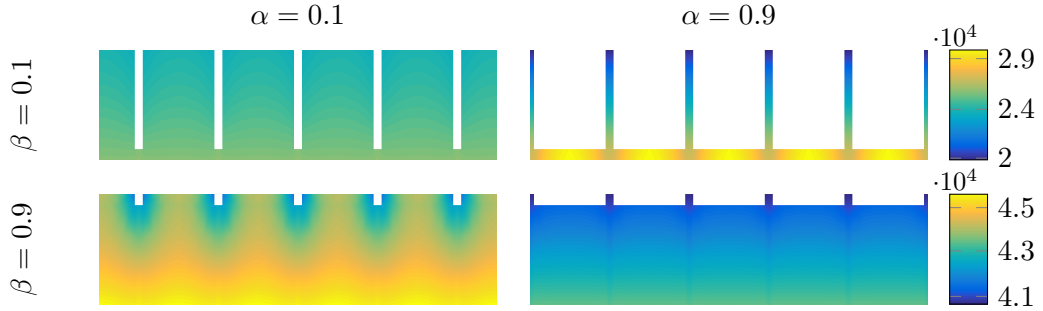


FIGURE C.7 – Évaluation de la solution PGD pour différentes configurations des ailettes

3 Évaluation des erreurs en relation de comportement

Suivant le même raisonnement, on réécrit l'Erreur en Relation de Comportement (ERC) sur le domaine de référence $\overline{\Omega}$ grâce aux transformations géométriques, conduisant à définir deux nouveaux coefficients matériaux S_0 et C_0 tel que :

$$\begin{aligned} E_{rdc}^2(\underline{q}, u) &= \int_{\Omega} \frac{1}{k} (\underline{q} - k \nabla u) \cdot (\underline{q} - k \nabla u) \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} S_0 \underline{q} \cdot \underline{q} \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \mathbb{K}_0 \nabla u \, d\Omega - 2 \int_{\Omega} \underline{q} \cdot C_0 \nabla u \, d\Omega \end{aligned}$$

où $S_0 = k^{-1} |\mathbb{J}_{\Omega}|$ et $C_0 = |\mathbb{J}_{\Omega}| \mathbb{J}_{\Omega}^{-T}$.

Dans le cas de l'Exemple 9, ces coefficients vérifient également une écriture à variables séparées de la forme :

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{4}{k} \left[(1-\alpha)(1-\beta) \delta_{\overline{\Omega}_2 \cup \overline{\Omega}_5} + (1-\alpha)\beta \delta_{\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_4} + \alpha\beta \delta_{\overline{\Omega}_3} \right] \\ \frac{C_0}{2} &= \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \delta_{\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_3 \cup \overline{\Omega}_4} + (1-\alpha) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \delta_{\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 \cup \overline{\Omega}_4 \cup \overline{\Omega}_5} + (1-\beta) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \delta_{\overline{\Omega}_2 \cup \overline{\Omega}_5} + \alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \delta_{\overline{\Omega}_3} \end{aligned}$$

À partir de cette écriture, l'estimation de l'ERC s'effectue de la même manière que pour des solutions PGD à paramètres matériaux. Les différentes erreurs totale, de réduction et de discrétisation qui en découlent dépendent alors des paramètres géométriques α et β .

Remarque C.2. La démarche de post-traitement d'une solution PGD décrite au Chapitre 2, pour reconstruire un champ dual équilibré au sens des éléments finis, ne change pas. Basé sur une réécriture du problème spatial PGD issu du problème (C.2), l'ensemble des opérateurs est déjà défini sur le domaine de référence $\overline{\Omega}$.

Remarque C.3. L'adaptation de la stratégie PGD introduite au Chapitre 4 aux paramètres géométriques n'est pas immédiate, car elle nécessite l'introduction de coefficients matériaux équivalents supplémentaires.

4 Conclusion

En résumé, la prise en compte de paramètres géométriques dans la formulation variationnelle se traduit par l'introduction de **coefficients matériaux équivalents** sur une géométrie fixe dite **géométrie référence**. Bien que ces coefficients n'aient pas de sens physique, **la démarche de calcul d'une solution PGD et d'estimation d'erreur ne change pas** par rapport au cas classique de paramètres uniquement matériaux.

Bibliographie

- [Ainsworth et Oden, 1993] AINSWORTH M. et ODEN J. T. (1993). A unified approach to a posteriori error estimation using element residual methods. *Numerische Mathematik*, **65(1)**:23–50.
- [Alfaro et al., 2015] ALFARO I., GONZÁLEZ D., ZLOTNIK S., DÍEZ P., CUETO E. et CHINESTA F. (2015). An error estimator for real-time simulators based on model order reduction. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, **2(1)**:30.
- [Allier et al., 2015] ALLIER P.-E., CHAMOIN L. et LADEVÈZE P. (2015). Proper Generalized Decomposition computational methods on a benchmark problem : introducing a new strategy based on Constitutive Relation Error minimization. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, **2(1)**:17.
- [Allier et al., 2017a] ALLIER P.-E., CHAMOIN L. et LADEVÈZE P. (2017). Towards simplified and optimized a posteriori error estimation using PGD reduced models.
- [Allier et al., 2017b] ALLIER P.-E., CHAMOIN L., PLED F. et LADEVÈZE P. (2017). A posteriori error estimation and adaptive strategy for PGD model reduction applied to parametrized linear elliptic and parabolic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.
- [Ammar et al., 2006] AMMAR A., MOKDAD B., CHINESTA F. et KEUNINGS R. (2006). A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **139(3)**:153–176.
- [Ammar et al., 2010a] AMMAR A., CHINESTA F., DIEZ P. et HUERTA A. (2010). An error estimator for separated representations of highly multidimensional models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **199(25-28)**:1872–1880.
- [Ammar et al., 2010b] AMMAR A., CHINESTA F. et FALCÓ A. (2010). On the Convergence of a Greedy Rank-One Update Algorithm for a Class of Linear Systems. *Archives of Computational Methods in Engineering*, **17(4)**:473–486.
- [Ammar et al., 2014] AMMAR A., HUERTA A., CHINESTA F., CUETO E. et LEYGUE A. (2014). Parametric solutions involving geometry : A step towards efficient shape optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **268**:178–193.
- [Aziz, 1972] AZIZ A. K. (1972). The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations. [Academic Press](#).
- [Babuška et Rheinboldt, 1978] BABUŠKA I. et RHEINBOLDT W. C. (1978). A-posteriori error estimates for the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **12(10)**:1597–1615.
- [Babuška et al., 1994] BABUŠKA I., STROUBOULIS T., UPADHYAY C. S., GANGARAJ S. K. et COPPS K. (1994). Validation of a posteriori error estimators by numerical approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **37(7)**:1073–1123.
- [Babuška et Strouboulis, 2001] BABUŠKA I. et STROUBOULIS T. (2001). The finite element method and its reliability. [Oxford University Press](#).

- [**Bank et al., 1985**] BANK R. E., WEISER A., AGMON S., BABUŠKA I., RHEINBOLDT W. C., PERCELL P., WHEELER M. F., STRANG G. et FIX G. J. (1985). Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations. *Mathematics of Computation*, **44(170):283–283**.
- [**Baranyi et al., 2006**] BARANYI P., VARLAKI P., SZEIDL L. et YAM Y. (2006). Definition of the HOSVD based canonical form of polytopic dynamic models. *In 2006 IEEE International Conference on Mechatronics*, pages 660–665. [IEEE](#).
- [**Barton et Meckesheimer, 2006**] BARTON R. R. et MECKESHEIMER M. (2006). Metamodel-Based Simulation Optimization. *In Handbooks in Operations Research and Management Science*, **13:535–574**. Elsevier.
- [**Becker et Rannacher, 1996**] BECKER R. et RANNACHER R. (1996). A feed-back approach to error control in finite element methods : Basic analysis and examples. *Journal of Numerical Mathematics*, **4:237–264**.
- [**Becker et Rannacher, 2001**] BECKER R. et RANNACHER R. (2001). An optimal control approach to a posteriori error estimation in finite element methods. *Acta Numerica*, **10:1–102**.
- [**Berkooz, 1992**] BERKOOZ G. (1992). Observations on the Proper Orthogonal Decomposition. *In Studies in Turbulence*, [pages 229–247](#). Springer New York, New York.
- [**Billaud-Friess et al., 2014**] BILLAUD-FRIESS M., NOUY A. et ZAHM O. (2014). A tensor approximation method based on ideal minimal residual formulations for the solution of high-dimensional problems. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, **48(6):1777–1806**.
- [**Binev et al., 2011**] BINEV P., COHEN A., DAHMEN W., DEVORE R., PETROVA G. et WOJTASZCZYK P. (2011). Convergence Rates for Greedy Algorithms in Reduced Basis Methods. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **43(3):1457–1472**.
- [**Bognet et al., 2012**] BOGNET B., BORDEU E., CHINESTA F., LEYGUE A. et POITOU A. (2012). Advanced simulation of models defined in plate geometries : 3D solutions with 2D computational complexity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **201:1–12**.
- [**Bognet et al., 2014**] BOGNET B., LEYGUE A. et CHINESTA F. (2014). Separated representations of 3D elastic solutions in shell geometries. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, **1(1):4**.
- [**Bonnet et al., 2014**] BONNET M., FRANGI A. et REY C. (2014). The finite element method in solid mechanics. [McGraw Hill Education](#).
- [**Boucinha, 2013**] BOUCINHA L. (2013). Réduction de modèle a priori par séparation de variables espace-temps : Application en dynamique transitoire. [Thèse de doctorat](#), INSA de Lyon.
- [**Bouclier et al., 2013**] BOUCLIER R., LOUF E. et CHAMOIN L. (2013). Real-time validation of mechanical models coupling PGD and constitutive relation error. *Computational Mechanics*, **52(4):861–883**.
- [**Boyaval et al., 2009**] BOYAVAL S., LE BRIS C., MADAY Y., NGUYEN N. C. et PATERA A. T. (2009). A reduced basis approach for variational problems with stochastic parameters : Application to heat conduction with variable Robin coefficient. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **198(41):3187–3206**.
- [**Brooks et Hughes, 1982**] BROOKS A. N. et HUGHES T. J. (1982). Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **32(1-3):199–259**.

- [**Buffa et al., 2012**] BUFFA A., MADAY Y., PATERA A. T., PRUD'HOMME C. et TURINICI G. (2012). A priori convergence of the Greedy algorithm for the parametrized reduced basis method. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, **46(3):595–603**.
- [**Cagniard et al., 2016**] CAGNIART N., MADAY Y. et STAMM B. (2016). Model Order Reduction for Problems with large Convection Effects. [page HAL](#).
- [**Canuto et Kozubek, 2007**] CANUTO C. et KOZUBEK T. (2007). A fictitious domain approach to the numerical solution of PDEs in stochastic domains. *Numerische Mathematik*, **107(2):257–293**.
- [**Carstensen et Funken, 2000**] CARSTENSEN C. et FUNKEN S. A. (2000). Fully Reliable Localized Error Control in the FEM. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **21(4):1465–1484**.
- [**Chamoïn et Ladevèze, 2007**] CHAMOIN L. et LADEVÈZE P. (2007). Bounds on history-dependent or independent local quantities in viscoelasticity problems solved by approximate methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **71(12):1387–1411**.
- [**Chamoïn et Ladevèze, 2012**] CHAMOIN L. et LADEVÈZE P. (2012). Robust control of PGD-based numerical simulations : European Journal of Computational Mechanics : Vol 21, No 3-6. *European Journal of Computational Mechanics*, **21(3-6):195–207**.
- [**Chamoïn et al., 2016**] CHAMOIN L., ALLIER P.-E. et MARCHAND B. (2016). Synergies between the constitutive relation error concept and PGD model reduction for simplified V&V procedures. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, **3(1):18**.
- [**Chamoïn et Díez, 2016**] CHAMOIN L. et DÍEZ P. (2016). Verifying Calculations - Forty Years On. SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology. [Springer International Publishing](#).
- [**Chatterjee, 2000**] CHATTERJEE A. (2000). An introduction to the proper orthogonal decomposition. *Current Science*, **78(7):808–817**.
- [**Chatterji, 1998**] CHATTERJI S. D. (1998). Cours d'analyse. 3, Équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles. [Presses polytechniques et universitaires romandes](#).
- [**Chinesta et al., 2010**] CHINESTA F., AMMAR A. et CUETO E. (2010). Recent Advances and New Challenges in the Use of the Proper Generalized Decomposition for Solving Multidimensional Models. *Archives of Computational Methods in Engineering*, **17(4):327–350**.
- [**Chinesta et al., 2011**] CHINESTA F., LADEVÈZE P. et CUETO E. (2011). A Short Review on Model Order Reduction Based on Proper Generalized Decomposition. *Archives of Computational Methods in Engineering*, **18(4):395–404**.
- [**Chinesta et al., 2013**] CHINESTA F., LEYGUE A., BORDEU F., AGUADO J. V., CUETO E., GONZALEZ D., ALFARO I., AMMAR A. et HUERTA A. (2013). PGD-Based Computational Vademecum for Efficient Design, Optimization and Control. *Archives of Computational Methods in Engineering*, **20(1):31–59**.
- [**Cognard et Ladevèze, 1993**] COGNARD J.-Y. et LADEVÈZE P. (1993). A large time increment approach for cyclic viscoplasticity. *International Journal of Plasticity*, **9(2):141–157**.
- [**Cordier et Bergmann, 2008**] CORDIER L. et BERGMANN M. (2008). Proper orthogonal decomposition : an overview. [Von Karman Institute for Fluid Dynamics](#).
- [**Cottreanu et al., 2009**] COTTREAU R., DÍEZ P. et HUERTA A. (2009). Strict error bounds for linear solid mechanics problems using a subdomain-based flux-free method. *Computational Mechanics*, **44(4):533–547**.
- [**Courard, 2016**] COURARD A. (2016). PGD-Abaques virtuels pour l'optimisation géométrique des structures. [Thèse de doctorat](#), ENS-Cachan, Université Paris-Saclay.

- [Courard *et al.*, 2016] COURARD A., NÉRON D., LADEVÈZE P. et BALLERE L. (2016). Integration of PGD-virtual charts into an engineering design process. *Computational Mechanics*, 57(4):637–651.
- [De Veubeke et Hugge, 1972] DE VEUBEKE B. M. F. et HUGGE M. A. (1972). Dual analysis for heat conduction problems by finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 5(1):65–82.
- [Díez *et al.*, 1998] DÍEZ P., EGOZCUE J. J. et HUERTA A. (1998). A posteriori error estimation for standard finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 163(1-4):141–157.
- [Eckart et Young, 1936] ECKART C. et YOUNG G. (1936). The approximation of one matrix by another of lower rank. *Psychometrika*, 1(3):211–218.
- [Ehrlacher, 2014] EHRLACHER V. (2014). Convergence results on greedy algorithms for high-dimensional eigenvalue problems. *ESAIM : Proceedings and Surveys*, 45:148–157.
- [Ehrlacher et Lombardi, 2016] EHRLACHER V. et LOMBARDI D. (2016). A dynamical adaptive tensor method for the Vlasov-Poisson system. [page HAL](#).
- [Ern et Vohralík, 2010] ERN A. et VOHRALÍK M. (2010). A Posteriori Error Estimation Based on Potential and Flux Reconstruction for the Heat Equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 48(1):198–223.
- [Falcó et Nouy, 2012] FALCÓ A. et NOUY A. (2012). Proper generalized decomposition for non-linear convex problems in tensor Banach spaces. *Numerische Mathematik*, 121(3):503–530.
- [Florentin *et al.*, 2002] FLORENTIN É., GALLIMARD L. et PELLE J.-P. (2002). Evaluation of the local quality of stresses in 3D finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(39):4441–4457.
- [Gallimard *et al.*, 1996] GALLIMARD L., LADEVÈZE P. et PELLE J. P. (1996). Error estimation and adaptivity in elastoplasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(2):189–217.
- [Gallimard, 2009] GALLIMARD L. (2009). A constitutive relation error estimator based on traction-free recovery of the equilibrated stress. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 78(4):460–482.
- [Gallimard et Ryckelynck, 2016] GALLIMARD L. et RYCKELYNCK D. (2016). A posteriori global error estimator based on the error in the constitutive relation for reduced basis approximation of parametrized linear elastic problems. *Applied Mathematical Modelling*, 40(7):4271–4284.
- [Ghnatios *et al.*, 2015] GHNATIOS C., CHINESTA F. et BINETRUY C. (2015). 3D Modeling of squeeze flows occurring in composite laminates. *International Journal of Material Forming*, 8(1):73–83.
- [Giner *et al.*, 2013] GINER E., BOGNET B., R?DENAS J. J., LEYGUE A., FUENMAYOR F. J. et CHINESTA F. (2013). The Proper Generalized Decomposition (PGD) as a numerical procedure to solve 3D cracked plates in linear elastic fracture mechanics. *International Journal of Solids and Structures*, 50(10):1710–1720.
- [González *et al.*, 2012] GONZÁLEZ D., MASSON F., POULHAON F., LEYGUE A., CUETO E. et CHINESTA F. (2012). Proper Generalized Decomposition based dynamic data driven inverse identification. *Mathematics and Computers in Simulation*, 82(9):1677–1695.
- [González *et al.*, 2015] GONZÁLEZ D., ALFARO I., QUESADA C., CUETO E. et CHINESTA F. (2015). Computational vademecums for the real-time simulation of haptic collision between nonlinear solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 283:210–223.

- [**Grepl et Patera, 2005**] GREPL M. A. et PATERA A. T. (2005). A posteriori error bounds for reduced-basis approximations of parametrized parabolic partial differential equations. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, **39(1)**:157–181.
- [**Grepl et al., 2007**] GREPL M. A., MADAY Y., NGUYEN N. C. et PATERA A. T. (2007). Efficient reduced-basis treatment of nonaffine and nonlinear partial differential equations. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, **41(3)**:575–605.
- [**Haasdonk, 2013**] HAASDONK B. (2013). Convergence Rates of the POD–Greedy Method. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, **47(3)**:859–873.
- [**Heyberger et al., 2012**] HEYBERGER C., BOUCARD P.-A. et NÉRON D. (2012). Multiparametric analysis within the proper generalized decomposition framework. *Computational Mechanics*, **49(3)**:277–289.
- [**Holmes et al., 2009**] HOLMES M., GRAY A. et LEE ISBELL C. (2009). QUIC-SVD : Fast SVD using cosine trees. *Advances in Neural Information Processing Systems*, pages 673–680.
- [**Hotelling, 1933**] HOTELLING H. (1933). Analysis of a complex of statistical variables into principal components. *Journal of Educational Psychology*, **24(6)**:417–441.
- [**Karhunen, 1946**] KARHUNEN K. (1946). Zur Spektraltheorie stochastischer Prozesse. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae*, 37.
- [**Kempeneers et al., 2003**] KEMPENEERS M., BECKERS P., MOITINHO DE ALMEIDA J. P. et ALMEIDA PEREIRA O. J. B. (2003). Modèles équilibre pour l’analyse duale. *Revue Européenne des éléments Finis*, **12(6)**:737–760.
- [**Kempeneers et al., 2009**] KEMPENEERS M., DEBONGNIE J.-F. et BECKERS P. (2009). Pure equilibrium tetrahedral finite elements for global error estimation by dual analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **81(4)**.
- [**Kerschen et al., 2005**] KERSCHEN G., GOLINVAL J.-c., VAKAKIS A. et BERGMAN L. (2005). The Method of Proper Orthogonal Decomposition for Dynamical Characterization and Order Reduction of Mechanical Systems : An Overview. *Nonlinear Dynamics*, **41(1-3)**:147–169.
- [**Krysl et al., 2001**] KRYSL P., LALL S. et MARSDEN J. E. (2001). Dimensional model reduction in non-linear finite element dynamics of solids and structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **51(4)**:479–504.
- [**Ladevèze, 1975**] LADEVÈZE P. (1975). Comparaison de modes de milieux continus. Thèse de doctorat, Université Paris VI.
- [**Ladevèze et Leguillon, 1983**] LADEVÈZE P. et LEGUILLON D. (1983). Error Estimate Procedure in the Finite Element Method and Applications. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **20(3)**:485–509.
- [**Ladevèze, 1989**] LADEVÈZE P. (1989). La méthode à grand incrément de temps pour l’analyse de structures à comportement non linéaire décrit par variables internes. *Comptes Rendus Académie des Sciences - Paris*, **309(11)**:1095–1099.
- [**Ladevèze et Maunder, 1996**] LADEVÈZE P. et MAUNDER E. (1996). A general method for recovering equilibrating element tractions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **137(2)**:111–151.
- [**Ladevèze et Rougeot, 1997**] LADEVÈZE P. et ROUGEOT P. (1997). New advances on a posteriori error on constitutive relation in f.e. analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **150(1-4)**:239–249.
- [**Ladevèze et Moës, 1998**] LADEVÈZE P. et MOËS N. (1998). A posteriori constitutive relation error estimators for nonlinear finite element analysis and adaptive control. *Studies in applied mechanics*, **47**:231–256.

- [Ladevèze, 1999] LADEVÈZE P. (1999). Nonlinear Computational Structural Mechanics : New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation, volume 1 de *Mechanical Engineering Series*. Springer New York, [New York, NY](#).
- [Ladevèze et al., 1999] LADEVÈZE P., ROUGEOT P., BLANCHARD P. et MOREAU J. (1999). Local error estimators for finite element linear analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, [176\(1-4\):231–246](#).
- [Ladevèze et Nouy, 2002] LADEVÈZE P. et NOUY A. (2002). Une stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation en espace et en temps. *Comptes Rendus Mécanique*, [330\(10\):683–689](#).
- [Ladevèze et Pelle, 2005] LADEVÈZE P. et PELLE J.-P. (2005). Mastering Calculations in Linear and Nonlinear Mechanics. Mechanical Engineering Series. Springer-Verlag, [New York](#).
- [Ladevèze et al., 2010] LADEVÈZE P., CHAMOIN L. et FLORENTIN É. (2010). A new non-intrusive technique for the construction of admissible stress fields in model verification. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, [199\(9\):766–777](#).
- [Ladevèze et Chamoïn, 2011] LADEVÈZE P. et CHAMOIN L. (2011). On the verification of model reduction methods based on the proper generalized decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, [200\(23\):2032–2047](#).
- [Ladevèze, 2013] LADEVÈZE P. (2013). The Virtual Chart concept in Computational Structural Mechanics. Barcelone, Spain. [Int Conf on Computational Plasticity, \(COMPLAS 2013\)](#).
- [Ladevèze et al., 2013a] LADEVÈZE P., PLED F. et CHAMOIN L. (2013). New bounding techniques for goal-oriented error estimation applied to linear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, [93\(13\):1345–1380](#).
- [Ladevèze et al., 2013b] LADEVÈZE P., PLED F. et CHAMOIN L. (2013). New bounding techniques for goal-oriented error estimation applied to linear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, [93\(13\):1345–1380](#).
- [Ladevèze, 2014a] LADEVÈZE P. (2014). De nouvelles méthodes avec Conditionneur pour le calcul de PGD-Modèles Réduits. Rapport technique, LMT-Cachan.
- [Ladevèze, 2014b] LADEVÈZE P. (2014). PGD in linear and nonlinear Computational Solid Mechanics. In *Separated Representations and PGD-Based Model Reduction*, [pages 91–152](#). Springer Vienna, cism 554 édition.
- [Ladevèze, 2016] LADEVÈZE P. (2016). On reduced models in nonlinear solid mechanics. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, [60:227–237](#).
- [Ladevèze et Chamoïn, 2016] LADEVÈZE P. et CHAMOIN L. (2016). The Constitutive Relation Error Method : A General Verification Tool. In *Verifying Calculations - Forty Years On*, [pages 59–94](#). Springer International Publishing.
- [Le Bris et al., 2009] LE BRIS C., LELIÈVRE T. et MADAY Y. (2009). Results and Questions on a Nonlinear Approximation Approach for Solving High-dimensional Partial Differential Equations. *Constructive Approximation*, [30\(3\):621–651](#).
- [Leygue et Verron, 2010] LEYGUE A. et VERRON E. (2010). A First Step Towards the Use of Proper General Decomposition Method for Structural Optimization. *Archives of Computational Methods in Engineering*, [17\(4\):465–472](#).
- [Liang et al., 2002] LIANG Y., LEE H., LIM S., LIN W., LEE K. et WU C. (2002). Proper Orthogonal Decomposition and its Applications—Part I : Theory. *Journal of Sound and Vibration*, [252\(3\):527–544](#).
- [Loève, 1946] LOÈVE M. (1946). Fonctions aléatoires du second ordre. *La Revue Scientifique*, [84:195–206](#).

- [**Machiels et al., 2001**] MACHIELS L., MADAY Y. et PATERA A. (2001). Output bounds for reduced-order approximations of elliptic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, [190\(26\):3413–3426](#).
- [**Maday et Rønquist, 2002**] MADAY Y. et RØNQUIST E. M. (2002). A Reduced-Basis Element Method. *Journal of Scientific Computing*, [17\(1/4\):447–459](#).
- [**Maday, 2006**] MADAY Y. (2006). Reduced basis method for the rapid and reliable solution of partial differential equations. In *ICM 2006*, volume 3, pages 1255–1270. [International Congress of Mathematicians \(ICM2006\)](#).
- [**Moitinho de Almeida et Maunder, 2009**] MOITINHO DE ALMEIDA J. P. et MAUNDER E. A. W. (2009). Recovery of equilibrium on star patches using a partition of unity technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, [79\(12\):1493–1516](#).
- [**Moitinho de Almeida, 2013**] MOITINHO DE ALMEIDA J. P. (2013). A basis for bounding the errors of proper generalised decomposition solutions in solid mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, [94\(10\):961–984](#).
- [**Nadal et al., 2015**] NADAL E., LEYGUE A., CHINESTA F., BERINGHIER M., RÓDENAS J. J. et FUENMAYOR F. J. (2015). A separated representation of an error indicator for the mesh refinement process under the proper generalized decomposition framework. *Computational Mechanics*, [55\(2\):251–266](#).
- [**Niroomandi et al., 2012**] NIROOMANDI S., ALFARO I., CUETO E. et CHINESTA F. (2012). Accounting for large deformations in real-time simulations of soft tissues based on reduced-order models. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, [105\(1\):1–12](#).
- [**Nouy et Ladevèze, 2004**] NOUY A. et LADEVÈZE P. (2004). Multiscale Computational Strategy With Time and Space Homogenization : A Radial-Type Approximation Technique for Solving Microproblems. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, [2\(4\):557–574](#).
- [**Nouy, 2009**] NOUY A. (2009). Recent Developments in Spectral Stochastic Methods for the Numerical Solution of Stochastic Partial Differential Equations. *Archives of Computational Methods in Engineering*, [16\(3\):251–285](#).
- [**Nouy, 2010**] NOUY A. (2010). A priori model reduction through Proper Generalized Decomposition for solving time-dependent partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, [199\(23-24\):1603–1626](#).
- [**Nouy et al., 2011**] NOUY A., CHEVREUIL M. et SAFATLY E. (2011). Fictitious domain method and separated representations for the solution of boundary value problems on uncertain parameterized domains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, [200\(45\):3066–3082](#).
- [**Néron et Ladevèze, 2010**] NÉRON D. et LADEVÈZE P. (2010). Proper Generalized Decomposition for Multiscale and Multiphysics Problems. *Archives of Computational Methods in Engineering*, [17\(4\):351–372](#).
- [**Oden et Reddy, 1974**] ODEN J. et REDDY J. (1974). On dual-complementary variational principles in mathematical physics. *International Journal of Engineering Science*, [12\(1\):1–29](#).
- [**Paraschivoiu et al., 1997**] PARASCHIVOIU M., PERAIRE J. et PATERA A. T. (1997). A posteriori finite element bounds for linear-functional outputs of elliptic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, [150\(1\):289–312](#).
- [**Parés et al., 2006**] PARÉS N., DÍEZ P. et HUERTA A. (2006). Subdomain-based flux-free a posteriori error estimators. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, [195\(4\):297–323](#).

- [Parés *et al.*, 2009] PARÉS N., SANTOS H. et DÍEZ P. (2009). Guaranteed energy error bounds for the Poisson equation using a flux-free approach : Solving the local problems in subdomains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **79**(10):1203–1244.
- [Pearson, 1901] PEARSON K. (1901). On lines and planes of closest fit to systems of points in space. *Philosophical Magazine Serie 6*, **2**(11):559–572.
- [Pelle et Ryckelynck, 2000] PELLE J.-P. et RYCKELYNCK D. (2000). An efficient adaptive strategy to master the global quality of viscoplastic analysis. *Computers & Structures*, **78**(1-3):169–183.
- [Peraire et Patera, 1998] PERAIRE J. et PATERA A. (1998). Bounds for linear-functional outputs of coercive partial differential equations : local indicators and adaptive refinement. *Studies in Applied Mechanics*, **47**:199–216.
- [Pinkus, 1985] PINKUS A. (1985). Basic Properties of n -Widths. In *n -Widths in Approximation Theory*, pages 9–38. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- [Pled *et al.*, 2011] PLED E, CHAMOIN L. et LADEVÈZE P. (2011). On the techniques for constructing admissible stress fields in model verification : Performances on engineering examples. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **88**(5):409–441.
- [Pled, 2012] PLED E (2012). Vers une stratégie robuste et efficace pour le contrôle des calculs par éléments finis en ingénierie mécanique. *Thèse de doctorat*, ENS-Cachan.
- [Pled *et al.*, 2012] PLED E, CHAMOIN L. et LADEVÈZE P. (2012). An enhanced method with local energy minimization for the robust a posteriori construction of equilibrated stress fields in finite element analyses. *Computational Mechanics*, **49**(3):357–378.
- [Polit *et al.*, 2015] POLIT O., GALLIMARD L., VIDAL P., D’OTTAVIO M., GIUNTA G. et BELOUETTAR S. (2015). An analysis of composite beams by means of hierarchical finite elements and a variables separation method. *Computers & Structures*, **158**:15–29.
- [Prager et Synge, 1947] PRAGER W. et SYNGE J. (1947). Approximations in elasticity based on the concept of function space. *Quarterly of Applied Mathematics*, **5**(3):261–269.
- [Prudhomme et Oden, 1999] PRUDHOMME S. et ODEN J. (1999). On goal-oriented error estimation for elliptic problems : application to the control of pointwise errors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **176**(1):313–331.
- [Quarteroni *et al.*, 2011] QUARTERONI A., ROZZA G. et MANZONI A. (2011). Certified reduced basis approximation for parametrized partial differential equations and applications. *Journal of Mathematics in Industry*, **1**(1):3.
- [Rey *et al.*, 2014] REY V., GOSSELET P. et REY C. (2014). Study of the strong prolongation equation for the construction of statically admissible stress fields : Implementation and optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **268**:82–104.
- [Rovas *et al.*, 2005] ROVAS D. V., MACHIELS L. et MADAY Y. (2005). Reduced-basis output bound methods for parabolic problems. *IMA Journal of Numerical Analysis*, **26**(3):423–445.
- [Rozza *et al.*, 2008] ROZZA G., HUYNH D. B. P. et PATERA A. T. (2008). Reduced Basis Approximation and a Posteriori Error Estimation for Affinely Parametrized Elliptic Coercive Partial Differential Equations. *Archives of Computational Methods in Engineering*, **15**(3):229–275.
- [Schilders *et al.*, 2008] SCHILDERS W., VORST H. et ROMMES J. (2008). Model Order Reduction : Theory, Research Aspects and Applications, volume 13 de *Mathematics in Industry*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- [Sirovich, 1987] SIROVICH L. (1987). Turbulence and the Dynamics of Coherent Structures : I. *Quarterly of Applied Mathematics*, **45**(3):561–571.
- [Stewart, 1993] STEWART G. W. (1993). On the Early History of the Singular Value Decomposition. *SIAM Review*, **35**(4):551–566.

- [**Strouboulis et al., 2000**] STROUBOULIS T., BABUŠKA I. et GANGARAJ S. K. (2000). Guaranteed computable bounds for the exact error in the finite element solution - Part II : bounds for the energy norm of the error in two dimensions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, [47\(1-3\):427–475](#).
- [**Verfürth, 1994**] VERFÜRTH R. (1994). A posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, [50\(1-3\):67–83](#).
- [**Vidal et al., 2013**] VIDAL P., GALLIMARD L. et POLIT O. (2013). Proper Generalized Decomposition and layer-wise approach for the modeling of composite plate structures. *International Journal of Solids and Structures*, [50\(14\):2239–2250](#).
- [**Vidal et al., 2016**] VIDAL P., GALLIMARD L. et POLIT O. (2016). Thermo-mechanical analysis of laminated composite and sandwich beams based on a variables separation. *Composite Structures*, [152:755–766](#).
- [**Wu et al., 2003**] WU C., LIANG Y., LIN W., LEE H. et LIM S. (2003). A note on equivalence of proper orthogonal decomposition methods. *Journal of Sound and Vibration*, [265\(5\):1103–1110](#).
- [**Zienkiewicz et Zhu, 1987**] ZIENKIEWICZ O. C. et ZHU J. Z. (1987). A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, [24\(2\):337–357](#).
- [**Zienkiewicz et Zhu, 1992**] ZIENKIEWICZ O. C. et ZHU J. Z. (1992). The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1 : The recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, [33\(7\):1331–1364](#).
- [**Zlotnik et al., 2015a**] ZLOTNIK S., DÍEZ P., GONZALEZ D., CUETO E. et HUERTA A. (2015). Effect of the separated approximation of input data in the accuracy of the resulting PGD solution. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, [2\(1\):28](#).
- [**Zlotnik et al., 2015b**] ZLOTNIK S., DÍEZ P., MODESTO D. et HUERTA A. (2015). Proper generalized decomposition of a geometrically parametrized heat problem with geophysical applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, [103\(10\):737–758](#).

Titre : Contrôle d'erreur pour et par les modèles réduits PGD

Mots clés : Réduction de modèle, PGD, Vérification, Estimation d'erreur a posteriori, Erreur en relation de comportement, Champs admissibles, Estimation d'erreur en quantité d'intérêt, Bornes d'erreur garanties, Techniques non-intrusives

Résumé : De nombreux problèmes de mécanique des structures nécessitent la résolution de plusieurs problèmes numériques semblables. Une approche itérative de type réduction de modèle, la Proper Generalized Decomposition (PGD), permet de déterminer l'ensemble des solutions en une fois, par l'introduction de paramètres supplémentaires. Cependant, un frein majeur à son utilisation dans le monde industriel est l'absence d'estimateur d'erreur robuste permettant de mesurer la qualité des solutions obtenues.

L'approche retenue s'appuie sur le concept d'erreur en relation de comportement. Cette méthode consiste à construire des champs admissibles, assurant ainsi l'aspect conservatif et garanti de l'estimation de l'erreur en réutilisant le maximum d'outils employés dans le cadre éléments finis. La possibilité de quantifier l'importance des différentes

sources d'erreur (réduction et discrétisation) permet de plus de piloter les principales stratégies de résolution PGD.

Deux stratégies ont été proposées dans ces travaux. La première s'est principalement limitée à post-traiter une solution PGD pour construire une estimation de l'erreur commise, de façon non intrusive pour les codes PGD existants. La seconde consiste en une nouvelle stratégie PGD fournissant une approximation améliorée couplée à une estimation de l'erreur commise. Les diverses études comparatives sont menées dans le cadre des problèmes linéaires thermiques et en élasticité.

Ces travaux ont également permis d'optimiser les méthodes de construction de champs admissibles en substituant la résolution de nombreux problèmes semblables par une solution PGD, exploitée comme un abaque.

Title: Error control for and with PGD reduced models

Keywords: Model reduction, PGD, Verification, A posteriori error estimation, Constitutive relation error, Admissible fields, Goal-oriented error estimation, Guaranteed error bounds, Non-intrusive techniques

Abstract: Many structural mechanics problems require the resolution of several similar numerical problems. An iterative model reduction approach, the Proper Generalized Decomposition (PGD), enables the control of the main solutions at once, by the introduction of additional parameters. However, a major drawback to its use in the industrial world is the absence of a robust error estimator to measure the quality of the solutions obtained. The approach used is based on the concept of constitutive relation error. This method consists in constructing admissible fields, thus ensuring the conservative and guaranteed aspect of the estimation of the error by reusing the maximum number of tools used in the finite elements framework. The ability to quantify the importance of the different sources of

error (reduction and discretization) allows to control the main strategies of PGD resolution. Two strategies have been proposed in this work. The first was limited to post-processing a PGD solution to construct an estimate of the error committed, in a non-intrusively way for existing PGD codes. The second consists of a new PGD strategy providing an improved approximation associated with an estimate of the error committed. The various comparative studies are carried out in the context of linear thermal and elasticity problems.

This work also allowed us to optimize the admissible fields construction methods by substituting the resolution of many similar problems by a PGD solution, exploited as a virtual chart.