



**HAL**  
open science

# Etude de quelques modèles en imagerie photoacoustique

Margaux Vauthrin

► **To cite this version:**

Margaux Vauthrin. Etude de quelques modèles en imagerie photoacoustique. Physique mathématique [math-ph]. Université Grenoble Alpes, 2017. Français. NNT : 2017GREAM030 . tel-01673528v2

**HAL Id: tel-01673528**

**<https://theses.hal.science/tel-01673528v2>**

Submitted on 12 Jan 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE LA COMMUNAUTE UNIVERSITE  
GRENOBLE ALPES**

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

**Margaux VAUTHRIN**

Thèse dirigée par **Faouzi TRIKI**  
codirigée par **Laurent DESBAT** et **Jérôme BOUTET**,

préparée au sein du **Laboratoire Jean Kuntzmann**  
dans **l'École Doctorale Mathématiques, Sciences et  
Technologies de l'Information, Informatique.**

## Étude de quelques modèles en imagerie photoacoustique

Thèse soutenue publiquement le **3 juillet 2017**,  
devant le jury composé de :

**M. Eric BONNETIER**

Professeur, Université Grenoble Alpes, Président

**M. Abdellatif EL BADIA**

Professeur, Université de Compiègne, Rapporteur

**M. Kaïs AMMARI**

Professeur, Université de Monastir, Rapporteur

**M. Eric SOCCORSI**

Maître de conférence, Université Aix Marseille, Examineur

**M. Faouzi TRIKI**

Maître de conférence, Université Grenoble Alpes, Directeur de thèse

**M. Laurent DESBAT**

Professeur, Université Grenoble Alpes, Codirecteur de thèse

**M. Jérôme BOUTET**

Ingénieur de recherche, CEA-Leti, Invité



# Etude de quelques modèles en imagerie photoacoustique

Margaux Vauthrin  
Laboratoire Jean Kuntzmann

# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier le labex Persyval pour le financement de ces travaux. Merci également aux rapporteurs pour avoir lu mon manuscrit et aux membres du jury pour avoir évalué cette thèse.

Merci à Faouzi pour avoir accepté de démarrer cette thèse, pour l'avoir encadrée et pour m'avoir permis de mener ce travail jusqu'au bout. Merci à Jérôme pour la partie physique, et merci également à Laurent pour avoir pris part même de loin à ces travaux.

Je remercie également de nombreuses personnes au sein du LJK, Charles et Stéphane pour leur soutien, l'équipe administrative et en particulier Laurence, Cathy et Gaëlle, ainsi que le service informatique.

Merci également aux copains doctorants, Charles, Alex, Nelson, JB, Lionel, Adrien, et bien sûr Meriem, ces années ont été vraiment cool avec vous, merci pour les soirées, les pauses café, merci aussi pour votre soutien et votre amitié. J'en profite pour remercier également Max et Josiane qui ont également été très présents pour nous tous.

Merci à mes amis en dehors du labo, Rémie, Rémi, Vincent, Elvire et Noémie pour votre amitié qui dure malgré l'éloignement.

Un très gros merci à ma famille, pour leur amour et leur soutien indéfectibles.

Et enfin merci à Rémi, pour tout, et pour être toujours à mes côtés.

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>vii</b>
<b>Introduction</b>	<b>ix</b>
<b>1 L'imagerie photoacoustique</b>	<b>1</b>
1.1 Les méthodes d'imagerie médicale . . . . .	1
1.1.1 Méthodes existantes . . . . .	1
1.1.2 L'imagerie photoacoustique . . . . .	2
1.1.3 Prototypes existants . . . . .	3
1.2 Modélisation de l'imagerie photoacoustique . . . . .	3
1.2.1 Profil du signal acoustique . . . . .	4
1.2.2 Absorption dans les tissus biologiques . . . . .	5
1.2.3 Energie du laser et profondeur d'image . . . . .	7
1.2.4 Génération de l'onde acoustique . . . . .	8
1.2.5 Régime de confinement thermique . . . . .	9
1.2.6 Modélisation de l'onde optique . . . . .	10
1.3 Modèle photoacoustique et problème inverse . . . . .	12
1.4 Objectifs de la thèse et résultats . . . . .	13
<b>2 Méthodes d'inversion</b>	<b>15</b>
2.1 Inversion acoustique . . . . .	16
2.1.1 Méthode d'inversion pour un milieu homogène (vitesse constante) . . . . .	16
2.1.2 Méthodes d'inversion dans un milieu hétérogène (vitesse non constante) . . . . .	21
2.1.3 Reconstruction simultanée de la vitesse et de la pression initiale . . . . .	28
2.2 Inversion optique . . . . .	29
2.2.1 Première méthode . . . . .	29
2.2.2 Inversion optique pour des paramètres constants par mor- ceaux . . . . .	31
2.3 Inversion photoacoustique en une seule étape . . . . .	32

<b>3</b>	<b>Correction de la vitesse</b>	<b>35</b>
3.1	Construction du modèle . . . . .	36
3.1.1	Vitesse acoustique dans un mélange . . . . .	36
3.1.2	Absorption dans le mélange . . . . .	37
3.1.3	Approximation de la vitesse acoustique . . . . .	38
3.1.4	Expression de la vitesse dans un milieu constant par morceaux . . . . .	40
3.1.5	Utilisation de la correction de vitesse dans la reconstruction d'un milieu constant par morceaux . . . . .	42
3.2	Correction de la pression acoustique générée . . . . .	42
3.2.1	Amélioration de l'erreur $L^2$ . . . . .	43
3.3	Reconstruction numérique : première méthode . . . . .	43
3.3.1	Inversion acoustique avec correction de vitesse . . . . .	44
3.3.2	Inversion optique . . . . .	47
3.4	Reconstruction numérique : deuxième méthode . . . . .	48
3.5	Résultats numériques . . . . .	48
3.5.1	Simulation du problème direct . . . . .	48
3.5.2	Première méthode . . . . .	50
3.5.3	Deuxième méthode . . . . .	55
3.6	Reconstruction à partir de données réelles . . . . .	56
3.6.1	Dispositif expérimental . . . . .	56
3.6.2	Reconstruction . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Estimation de stabilité</b>	<b>61</b>
4.1	Inversion photoacoustique . . . . .	62
4.1.1	Estimations de stabilité . . . . .	62
4.1.2	Inversion acoustique . . . . .	65
4.1.3	Inversion optique . . . . .	69
4.2	Preuves . . . . .	80
4.2.1	Preuve du Théorème 4.1.1 . . . . .	80
4.2.2	Preuve de la Proposition 4.1.2 . . . . .	81
4.2.3	Preuve de la Proposition 4.1.3 . . . . .	82
<b>5</b>	<b>Nanoparticules métalliques</b>	<b>85</b>
5.1	Le modèle photoacoustique . . . . .	86
5.1.1	Excitation électromagnétique . . . . .	88
5.1.2	Résonances plasmoniques . . . . .	90
5.1.3	Cas radial . . . . .	99
5.2	Effet photoacoustique . . . . .	100
5.2.1	Sources acoustiques . . . . .	101
5.2.2	Sources électromagnétiques . . . . .	101
5.3	Le problème inverse photoacoustique . . . . .	103
5.3.1	Inversion acoustique . . . . .	103
5.3.2	Inversion optique . . . . .	104
5.3.3	Preuve du théorème principal (5.1.1) . . . . .	109
5.4	Annexe . . . . .	110

# Table des figures

1.1	Vevo LAZR Imaging System développé par Fujifilm Visualsonics [40] . . . . .	3
1.2	Schéma de fonctionnement de l'imagerie photoacoustique . . . . .	4
1.3	Profil du signal photoacoustique pour un absorbeur sphérique . . . . .	5
1.4	Milieu observé comportant deux absorbeurs sphériques . . . . .	5
1.5	Signal photoacoustique généré pour deux absorbeurs sphériques (kwave) . . . . .	6
1.6	Spectre d'absorption de l'hémoglobine oxydée et de l'hémoglobine désoxydée en fonction de la longueur d'onde [64]. . . . .	6
1.7	Spectres d'absorption de l'eau, du sang et de la mélanine en fonction de la longueur d'onde [41]. . . . .	7
1.8	Schéma des étapes du problème inverse photoacoustique . . . . .	13
2.1	Schéma des projections de l'objet par la transformée de Radon. . . . .	16
2.2	Représentation du domaine convexe et des différentes grandeurs. . . . .	19
2.3	Schéma de la sphère de rayon 1. . . . .	20
2.4	Exemple de vitesse induisant des rayons piégés avec quelques géodésiques tracées. . . . .	23
2.5	Fonction de cut-off $\varphi_\varepsilon$ [38]. . . . .	24
2.6	(a) Pression initiale (b) Reconstruction pour $T = T_1$ (c) Reconstruction pour $T = T_1/2$ . . . . .	26
2.7	Exemple de reconstruction par retournement temporel. . . . .	27
3.1	Valeurs de la vitesse acoustique dans un mélange de sang et d'eau. . . . .	38
3.2	Schéma du milieu constant par morceaux avec une inclusion I. . . . .	41
3.3	Erreur $L^2$ entre les données et la pression générée par le modèle. . . . .	44
3.4	Pression initiale dans le domaine $\Omega$ . . . . .	49
3.5	Pression initiale dans le domaine $\Omega$ . . . . .	50
3.6	Erreurs $L^2$ de reconstruction de la pression initiale . . . . .	51
3.7	Fluence calculée pour l'illumination $g_1$ . . . . .	52
3.8	Pression initiale calculée pour l'illumination $g_1$ . . . . .	52
3.9	Erreur de reconstruction de $\mu_1$ pour différents pourcentages de bruit. . . . .	54

3.10	Erreur de reconstruction de $D_1$ pour différents pourcentages de bruit. . . . .	55
3.11	Erreur de reconstruction des coefficients optiques sur tout le domaine $\Omega$ . . . . .	55
3.12	Coefficient d'absorption reconstruit. . . . .	56
3.13	Schéma du dispositif expérimental (rapport CEA/INSA/CREATIS Déc. 2010). . . . .	57
3.14	Profils de pression mesurés (corrigés et complétés) . . . . .	58
3.15	Reconstruction des données par retournement temporel. . . . .	59
4.1	Schéma du milieu stratifié. . . . .	63
5.1	La coupe de Lycurgue. . . . .	89
5.2	Modèle de Drude pour la permittivité électrique de l'argent (données expérimentales en rouge). . . . .	94

# Résumé

Cette thèse porte sur l'étude de la méthode d'imagerie photoacoustique, une nouvelle modalité hybride permettant de combiner la haute résolution de l'imagerie par ultrasons et le contraste de l'imagerie optique. Nous y étudions en particulier le problème inverse associé et sa résolution : il se décompose en l'inversion de l'équation d'ondes et en celle de l'équation de diffusion optique, dont le but est de retrouver les paramètres optiques du milieu. Dans la première partie de cette étude nous développons un modèle permettant de prendre en compte les variations de la vitesse acoustique dans le milieu biologique. En effet, la plupart des méthodes d'inversion supposent une vitesse acoustique constante, ce qui est à l'origine d'erreurs dans les reconstructions. La deuxième partie de la thèse porte sur une étude mathématique du phénomène de limitation de la profondeur de l'imagerie photoacoustique. Nous calculons une estimation de stabilité du problème inverse dans le cas d'un milieu stratifié et nous montrons que la reconstruction se dégrade avec la profondeur. Nous étudions dans la dernière partie le phénomène photoacoustique en présence de nanoparticules métalliques : ces marqueurs permettent d'amplifier par des résonances le signal photoacoustique généré autour d'elles. Elles permettent ainsi une meilleure visibilité des tissus en profondeur. Nous explicitons ici le modèle mathématique de génération du signal photoacoustique, ainsi que la résolution théorique du problème inverse photoacoustique dans ce contexte.

# Abstract

This thesis work is related to photoacoustic imaging techniques which are new multiwave modalities in medical imaging that combine both high resolution of ultrasounds and contrast of optical methods. We precisely studied the inverse problem that consists of determining the optical coefficients of biological tissues from measurement of acoustic waves generated by the photoacoustic effect. The photoacoustic inverse problem proceeds in two steps. We first retrieve the initial pressure from the measurement of the pressure wave on a part of the boundary of the sample. The first inversion takes then the form of a linear inverse source problem and provides internal data for the optical waves that are more sensitive to the contrast of the absorption and diffusion coefficients. In a second step we recover the optical coefficients from the acquired internal data. The aim of this work is to study the two inversions in different contexts. In the first part, we develop a model that takes into account the variations of the acoustic speed in the medium. Indeed, most of the inversion methods suppose that the acoustic speed is constant, and this assumption can lead to errors in the reconstruction of the optical coefficients. The second part of this work is the derivation of stability estimates for the photoacoustic inverse problem in a layered medium. We prove that the reconstruction is getting worse with depth. This is one of the main drawbacks of the photoacoustic method, the imaging depth is limited to a few centimeters. The last part is about photoacoustic generation with plasmonic nanoparticles. They enhance the photoacoustic signal around them, so that we can investigate the tissue more deeply. We derive the mathematical model of the photoacoustic generation by heating nanoparticles, and we solve the photoacoustic inverse problem in this context.

# Introduction

L'imagerie médicale a pour but d'obtenir des informations variées sur l'intérieur du corps humain. Les images que l'on cherche à obtenir représentent différentes grandeurs physiques qui caractérisent les tissus biologiques et permettent d'en connaître la structure, la nature ou l'évolution. Toutes les méthodes existantes d'imagerie mettent en oeuvre des ondes, qu'elles soient électromagnétiques ou mécaniques, qui permettent de sonder les tissus. Les premières méthodes mises en oeuvre remontent au début du *XX<sup>e</sup>* siècle, et utilisaient uniquement le rayonnement X pour sonder le corps humain. Depuis, de nombreuses autres techniques ont vu le jour (échographe, imagerie par résonance magnétique, imagerie optique), et d'autres encore sont toujours des sujets de recherche. Les enjeux des recherches de nouvelles méthodes d'imagerie médicale sont d'obtenir une bonne résolution, un bon contraste, et on privilégie les méthodes peu invasives, non dangereuses et faciles à exécuter. Les techniques existantes sont chacune limitées sur certains critères. Les techniques d'imagerie par ultrason ont par exemple un mauvais contraste alors que les méthodes d'imagerie optique sont moins performantes en termes de résolution. L'imagerie par rayons X est quant à elle dangereuse pour le patient. C'est pourquoi il est intéressant de développer de nouvelles méthodes d'imagerie permettant d'optimiser tous ces critères, en particulier en combinant plusieurs types d'ondes : ce sont les méthodes d'imagerie hybride. C'est dans ce contexte que l'imagerie photoacoustique se développe de manière très importante depuis les années 90. Cette méthode présente l'intérêt de combiner les avantages des deux types d'ondes utilisées (optique et acoustique), et elle permet des applications médicales variées. A l'heure actuelle, des appareils d'imagerie photoacoustique existent pour des expérimentations sur le petit animal. Du point de vue mathématique, la principale difficulté de la photoacoustique réside dans la résolution du problème inverse, c'est-à-dire dans la reconstruction des paramètres physiques propres aux tissus à partir des mesures. L'objectif de ce travail est retrouver à partir des mesures les propriétés optiques du milieu, qui présentent un grand intérêt du point de vue médical pour distinguer par exemple un tissu sain d'un tissu cancéreux.

Le premier chapitre donne une description du phénomène photoacoustique, du fonctionnement de la méthode d'imagerie médicale qui lui est associée, de son intérêt et de ses limites. Nous y décrivons également le modèle mathéma-

tique modélisant à la fois l'onde optique, la propagation de l'onde acoustique et le couplage de ces deux ondes à l'origine de la génération du phénomène photoacoustique. Enfin, nous introduisons le problème inverse photoacoustique, à savoir l'inversion de l'onde acoustique et celle de l'onde optique, et les objectifs liés à la résolution de ce problème inverse dans le cadre de ce travail. Dans le second chapitre nous décrivons l'état de l'art concernant les différentes méthodes de résolution du problème inverse photoacoustique. Le problème inverse se divise en deux étapes, l'inversion acoustique et l'inversion optique, résolues soit successivement soit simultanément. Les méthodes d'inversion de chacune des équations sont détaillées, certaines supposant une vitesse acoustique constante et d'autres permettant de choisir une vitesse variable dans le milieu. Le troisième chapitre concerne le développement d'un modèle de correction de la vitesse acoustique pour un milieu constant par morceaux. En effet, prendre en compte les variations de vitesse des milieux biologiques est indispensable à l'amélioration de la qualité des reconstructions. Pour développer ce modèle de correction de la vitesse, nous avons cherché à établir un lien entre l'absorption optique et la vitesse acoustique dans le milieu. Pour finir, nous utilisons ce modèle dans des reconstructions numériques afin de diminuer l'erreur de reconstruction. Le chapitre quatre porte sur l'étude de stabilité du problème inverse photoacoustique dans un milieu stratifié avec une vitesse connue. Nous y démontrons que la reconstruction se dégrade lorsqu'on s'éloigne de la source optique, c'est-à-dire plus la profondeur d'image est grande. Le dernier chapitre concerne l'étude du phénomène photoacoustique en présence de nanoparticules métalliques. Les nanoparticules permettent d'amplifier le phénomène photoacoustique dans un milieu biologique. Nous décrivons le modèle de génération du signal acoustique en présence d'une nanoparticule métallique puis la résolution du problème inverse photoacoustique permettant de reconstruire les propriétés d'absorption du milieu étudié.

# Chapitre 1

## L'imagerie photoacoustique

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Les méthodes d'imagerie médicale . . . . .</b>	<b>1</b>
1.1.1	Méthodes existantes . . . . .	1
1.1.2	L'imagerie photoacoustique . . . . .	2
1.1.3	Prototypes existants . . . . .	3
<b>1.2</b>	<b>Modélisation de l'imagerie photoacoustique . . .</b>	<b>3</b>
1.2.1	Profil du signal acoustique . . . . .	4
1.2.2	Absorption dans les tissus biologiques . . . . .	5
1.2.3	Energie du laser et profondeur d'image . . . . .	7
1.2.4	Génération de l'onde acoustique . . . . .	8
1.2.5	Régime de confinement thermique . . . . .	9
1.2.6	Modélisation de l'onde optique . . . . .	10
<b>1.3</b>	<b>Modèle photoacoustique et problème inverse . . .</b>	<b>12</b>
<b>1.4</b>	<b>Objectifs de la thèse et résultats . . . . .</b>	<b>13</b>

---

Cette partie présente la méthode de l'imagerie photoacoustique et le contexte dans lequel elle se développe actuellement, les méthodes d'imagerie existantes ainsi que leurs avantages et leurs défauts. Dans ce contexte, nous exposerons les particularités de l'imagerie photoacoustique : le principe de fonctionnement, les applications, ainsi que le modèle mathématique que nous avons considéré.

### 1.1 Les méthodes d'imagerie médicale

#### 1.1.1 Méthodes existantes

Il existe de nombreuses techniques d'imagerie médicale utilisées actuellement pour des applications cliniques. On distingue les méthodes d'imagerie structurales (observation d'organes) des méthodes d'imagerie fonctionnelles (observation du fonctionnement des structures). Chacune de ces méthodes est adaptée à

certaines applications médicales précises. On trouve parmi ces méthodes des méthodes acoustiques comme l'échographie, des méthodes basées sur les rayonnements X, comme la radiographie, et d'autres méthodes telles que l'imagerie par résonance magnétique. Par exemple, la radiographie permet de faire de l'imagerie des os, alors que l'échographie est plus adaptée pour imager certains organes ou en obstétrique. On trouve également des techniques uniquement optiques, le scanner, la tomographie par émission de positons, etc. Il existe des améliorations de ces méthodes, des variantes et des hybridations. L'enjeu est d'améliorer ces méthodes d'imagerie dans la résolution, le contraste, la maniabilité, la dangerosité pour le patient, et les applications possibles d'un point de vue médical. On cherche de plus à avoir des techniques d'imagerie plus efficaces et nécessitant peu d'hypothèses dans la mise en oeuvre, afin de pouvoir les utiliser de manière plus universelle. De ces points de vue, les méthodes multi-ondes (imagerie électroacoustique, imagerie photoacoustique) sont de très bonnes candidates. Elles permettent de combiner les atouts de chaque type d'onde utilisé. Nous étudions ici la technique de l'imagerie photoacoustique, combinant onde optique et onde acoustique, dont les caractéristiques sont détaillées dans les parties suivantes.

### 1.1.2 L'imagerie photoacoustique

Le principe de l'imagerie photoacoustique se base sur l'effet photoacoustique découvert en 1880 par Alexander Graham Bell. Il s'agit de la conversion d'énergie électromagnétique en une onde acoustique, c'est à dire de la production de son à partir de lumière. Ce n'est qu'à la fin du XXème siècle que la recherche concernant une application médicale de cet effet commence à voir le jour avec la fabrication des premiers prototypes expérimentaux. L'utilisation de cette méthode d'imagerie multi-ondes présente l'intérêt de combiner la qualité du contraste par la présence de l'onde optique, et la haute résolution de l'imagerie par ultrasons. L'objectif final est de reconstruire une carte de l'absorption dans le milieu biologique de manière à identifier les tissus, et en particulier si ils sont sains ou non. Les applications sont multiples, et vont de l'imagerie structurelle à l'imagerie fonctionnelle. En particulier, l'imagerie photoacoustique s'avère être intéressante dans le cas de la détection de tumeurs grâce au haut contraste d'absorption entre les tissus sains et les tissus cancéreux. Le cas du diagnostic du cancer du sein en est l'exemple le plus étudié. On retrouve également d'autres applications comme l'imagerie des réseaux de vaisseaux sanguins et de l'hémodynamique (imagerie fonctionnelle), la mesure de l'oxygénation du sang, l'imagerie du cerveau ou encore l'étude de la plaque d'athérome dans les artères.

Dans le cas de la détection du cancer du sein, les techniques existantes d'imagerie médicale sont la mammographie par rayons X et l'échographie. L'enjeu d'une nouvelle méthode d'imagerie pour cette application est d'obtenir un meilleur contraste et une meilleure résolution. Les rayons X étant par ailleurs nocifs pour le patient, il est d'autant plus motivant de développer d'autres techniques d'imagerie moins dangereuses. Le sein est constitué de tissus mous pouvant être considérés comme homogènes du point de vue acoustique et ne néces-

site pas une technique d'imagerie avec une importante pénétration, la photoacoustique se prête donc bien à cette application

### 1.1.3 Prototypes existants

Il existe des appareils d'imagerie photoacoustique, dédiés pour le moment au petit animal. Le prototype développé par Fujifilm Visualsonics est appelé Vevo LAZR Imaging System (Figure 1.1).



FIGURE 1.1 – Vevo LAZR Imaging System développé par Fujifilm Visualsonics [40]

Un laser est envoyé au milieu de la sonde d'échographie à travers une fente et permet d'acquérir les mesures acoustiques sur le côté éclairé de l'objet, contrairement à un système où le laser est indépendant des détecteurs acoustiques. L'appareil est actuellement utilisé pour des tests d'imagerie sur le petit animal : détection de tumeurs, mesure de saturation en oxygène, utilisation de marqueurs photoacoustiques (nanoparticules).

Un second prototype d'imagerie photoacoustique est développé par l'entreprise iThera medical.

## 1.2 Modélisation de l'imagerie photoacoustique

Le principe de l'imagerie photoacoustique est décrit dans les articles suivants [78, 77, 48]. Il s'agit de la formation d'une onde acoustique générée par l'absorption d'une onde optique impulsionnelle ou modulée. L'énergie optique est absorbée à l'intérieur du milieu, les absorbeurs s'échauffent alors et s'en suit une dilatation thermique. C'est cette dilatation qui est à l'origine de l'onde acoustique. L'onde acoustique se propage ensuite dans le milieu et on la mesure sur le bord de l'objet grâce à des transducteurs acoustiques. Les différentes étapes du processus sont donc les suivantes (voir Figure 1.2) :

- envoi de l'onde optique dans le milieu à observer,
- échauffement des absorbeurs suite à l'absorption de l'énergie électromagnétique,
- dilatation thermique des absorbeurs,
- génération de l'onde acoustique,
- propagation de l'onde acoustique dans le milieu,
- détection de l'onde acoustique sur le bord de l'objet.

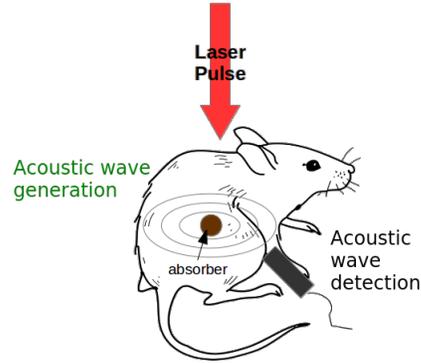


FIGURE 1.2 – Schéma de fonctionnement de l'imagerie photoacoustique

L'impulsion laser doit être synchronisée avec le début de la mesure acoustique. La première valeur de pression mesurée doit en effet correspondre à l'instant où l'onde acoustique est générée afin de pouvoir retrouver précisément la localisation de la source acoustique. On considère que l'impulsion et la génération acoustiques sont simultanées, car le laser se propage en un temps très court par rapport aux échelles de temps de propagation de l'onde acoustique.

### 1.2.1 Profil du signal acoustique

On mesure l'onde acoustique sur le bord pendant un temps donné  $T$  assez grand pour que l'onde acoustique ait pu traverser tout le domaine, de manière à pouvoir récupérer tout le signal acoustique sur le bord du domaine. On récupère alors un profil de pression en chaque point du bord en fonction du temps de mesure. Par exemple, le profil de l'onde mesurée pour un absorbeur sphérique prend alors la forme d'un signal en "N" (voir Figure 1.3).

#### Exemple numérique

Considérons un milieu comportant deux absorbeurs sphériques et une impulsion laser envoyée de manière homogène sur ces absorbeurs (Figure 1.4).

Le signal photoacoustique est mesuré sur tout le cercle de rayon 3 cm. Le signal photoacoustique est généré par le logiciel k-Wave (développé par B. Treeby et B. Cox [74]), la Figure 1.5 représente le signal mesuré pour chacun des détecteurs disposés sur le cercle en fonction du temps.

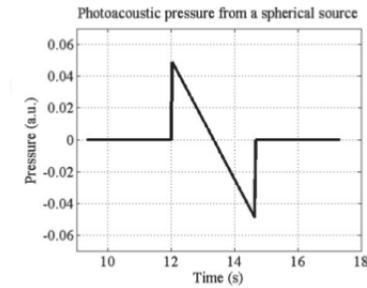


FIGURE 1.3 – Profil du signal photoacoustique pour un absorbeur sphérique

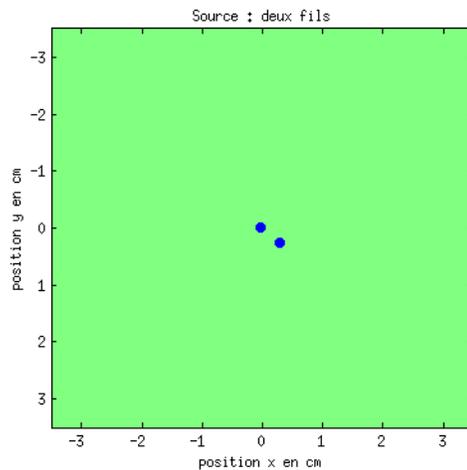


FIGURE 1.4 – Milieu observé comportant deux absorbeurs sphériques

On remarque que le signal reçu au même moment pour chacun des détecteurs correspond au fil centré, alors que le signal décalé correspond au second fil qui n'est pas centré par rapport au cercle de détecteurs. On peut deviner visuellement par ces profils de pression la composition d'un milieu très simple comme celui étudié ici, composé d'un ou plusieurs absorbeurs ponctuels.

### 1.2.2 Absorption dans les tissus biologiques

Dans les tissus biologiques, plusieurs molécules vont être responsables de l'absorption de l'énergie optique, les principales étant l'hémoglobine et la mélanine [78]. D'un point de vue médical, les tumeurs correspondent à des zones très vascularisées, c'est-à-dire très concentrées en hémoglobine. La fréquence du laser est donc choisie en général dans le proche infrarouge de manière à correspondre à une absorption de l'hémoglobine assez faible pour que le faisceau laser

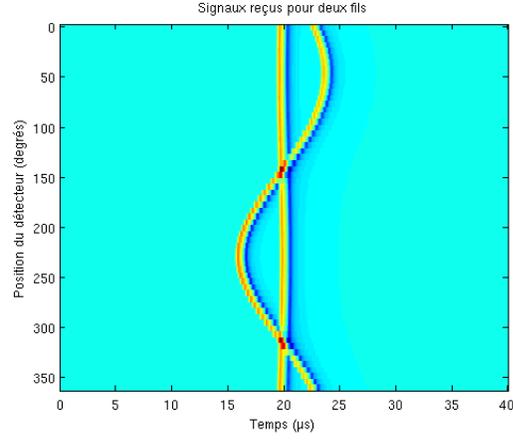


FIGURE 1.5 – Signal photoacoustique généré pour deux absorbeurs sphériques (kwave)

puisse suffisamment pénétrer le tissu biologique. L'hémoglobine se présente sous deux formes, la forme oxydée  $HbO_2$  et la forme désoxydée  $Hb$ . Leurs spectres d'absorption sont différents et sont représentés sur la figure 1.6.

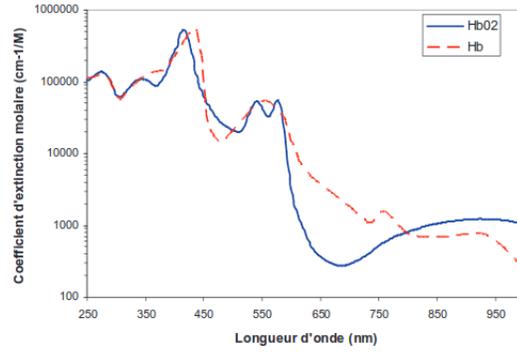


FIGURE 1.6 – Spectre d'absorption de l'hémoglobine oxydée et de l'hémoglobine désoxydée en fonction de la longueur d'onde [64].

L'absorption du sang s'écrit alors de la manière suivante, en fonction des concentrations respectives  $[Hb]$  et  $[HbO_2]$  au point  $x$  et à la longueur d'onde  $\lambda$ .

$$\mu_a(\lambda, x) = 2.303 \times (\alpha_{Hb}(\lambda)[Hb](x) + \alpha_{HbO_2}(\lambda)[HbO_2](x)) \quad (1.1)$$

avec  $\alpha_{Hb}(\lambda)$  et  $\alpha_{HbO_2}(\lambda)$  les coefficients d'extinction molaire de  $Hb$  et  $HbO_2$ . L'eau est également un absorbeur important car elle constitue 80% des tissus

biologiques. La figure 1.7 représente les spectres d'absorption des trois absorbeurs principaux d'un tissu biologique : l'eau, le sang et la mélanine.

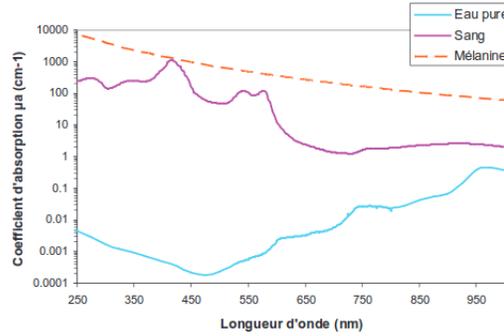


FIGURE 1.7 – Spectres d'absorption de l'eau, du sang et de la mélanine en fonction de la longueur d'onde [41].

L'absorption dans les tissus peut être amplifiée par l'ajout de marqueurs de contraste comme des nanoparticules ou des fluorophores. Une plus grande absorption permet d'avoir un signal acoustique plus important, ce qui est intéressant dans le cas d'un absorbeur situé en profondeur afin de compenser une énergie du laser plus faible du fait de la diffusion dans les tissus biologiques.

### 1.2.3 Énergie du laser et profondeur d'image

Pour créer un signal photoacoustique, il faut donc éclairer la peau ou le tissu biologique en question avec un laser qui sera soumis pour des questions de sécurité à une limite d'énergie. Il est tout de même nécessaire d'avoir une énergie importante pour que le signal soit suffisamment fort et permette d'imager le tissu à une profondeur acceptable. De plus, le faisceau du laser doit respecter l'EMP cutanée (Exposition Maximale Permise) qui limite à la fois l'énergie déposée mais aussi la puissance moyenne de l'impulsion.

La principale limitation de l'imagerie photoacoustique est la faible pénétration du laser dans les tissus biologiques, ce qui est responsable d'une faible profondeur d'image. En effet, les phénomènes d'absorption et de diffusion sont très importants dans les tissus, ce qui atténue très fortement et très rapidement l'onde optique. De plus, le respect de l'EMP cutanée empêche d'utiliser des énergies laser plus importantes. L'imagerie photoacoustique permet a priori de n'imager les tissus qu'à quelques centimètres de profondeur. C'est pourquoi l'ajout d'agents de contraste est particulièrement intéressant. En particulier, le Chapitre 5 de cette thèse présente une étude du phénomène photoacoustique en présence de nanoparticules métalliques.

### 1.2.4 Génération de l'onde acoustique

L'effet photoacoustique peut se produire dans tout milieu absorbant, mais nous ne considérons ici que le cas des liquides vus comme première approximation des tissus mous qui constituent les milieux biologiques. On considère que leurs propriétés acoustiques et thermiques sont homogènes, alors que leurs propriétés optiques varient spatialement dans le milieu.

Pour décrire l'onde acoustique, nous commençons d'abord par établir les équations fondamentales de l'acoustique [66], à savoir la loi de continuité, l'équation d'Euler, et l'équation de continuité du flux de chaleur.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \operatorname{div}(v), \quad (1.2)$$

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla p, \quad (1.3)$$

$$\rho_0 T \frac{\partial s}{\partial t} = \operatorname{div}(\kappa \nabla T) + P_V, \quad (1.4)$$

où  $\rho$  est la masse volumique,  $p(r, t)$  la pression acoustique,  $v(r, t)$  la vitesse de déplacement acoustique,  $s(r, t)$  l'entropie spécifique,  $T(r, t)$  le champ de température et  $\kappa(T)$  le coefficient de conduction thermique.  $P_V$  est la source de chaleur. Nous considérons que la variation de densité dans le milieu est petite ( $\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \ll 1$ ). Nous pouvons alors écrire les deux équations d'état exprimant les variations de densité  $\delta \rho$  et d'entropie  $\delta s$  en fonction de  $\delta p$  et  $\delta T$  [56].

$$\delta \rho = \frac{\gamma}{c_s^2} \delta p - \rho_0 \beta \delta T, \quad (1.5)$$

$$\delta s = \frac{c_p}{T} (\delta T - \frac{\gamma - 1}{\rho_0 \beta c_s^2} \delta p), \quad (1.6)$$

où  $c_p = T \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_p$  est la capacité thermique à pression constante,  $c_v = T \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_\rho$  est la capacité thermique à volume constant,  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ ,  $\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$  est le coefficient d'expansion thermique, et  $c_s$  est la vitesse du son.

On en déduit alors les deux équation suivantes :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\gamma}{c_s^2} \frac{\partial p}{\partial t} - \rho_0 \beta \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{c_p}{T} \left( \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\gamma - 1}{\rho_0 \beta c_s^2} \frac{\partial p}{\partial t} \right). \quad (1.8)$$

Nous considérons que  $\gamma = 1$  pour les liquides, ce qui permet d'obtenir en combinant les équations (5.37) et (1.8) l'équation suivante pour le champ de température  $T$  :

$$\rho_0 c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\kappa \nabla T) + P_V. \quad (1.9)$$

Les équations (1.2) et (1.3) permettent quant à elles d'obtenir  $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = 0$ . Alors, en transformant l'équation (1.5) on obtient :

$$\frac{\gamma}{c_s^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \beta \frac{\partial T}{\partial t} \right). \quad (1.10)$$

Avec les hypothèses  $\gamma = 1$  et  $\beta = \beta_0$ , on écrit finalement le système d'équations couplées décrivant la génération d'une onde acoustique dans un liquide :

$$\rho_0 c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\kappa \nabla T) + P_V, \quad (1.11)$$

$$\frac{1}{c_s^2(x)} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = \rho_0 \beta_0 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}. \quad (1.12)$$

Le terme  $P_V(r, t)$  correspond aux sources de chaleur. Dans le cas du phénomène photoacoustique, la chaleur est créée par l'absorption de l'onde optique dans le milieu.

### 1.2.5 Régime de confinement thermique

Le phénomène photoacoustique ne peut cependant s'opérer que sous certaines conditions. La durée de l'impulsion laser doit respecter des conditions de confinement pour que la méthode soit efficace. Elle doit être inférieure à la durée de diffusion thermique dans le milieu de manière à ce que celle-ci puisse être négligée. Le temps de diffusion thermique est  $\tau_{th} \sim L_p^2/\chi$ , où  $L_p$  est la taille de la structure absorbante, et  $\chi = \frac{\kappa}{\rho_0 c_p}$  la diffusivité thermique ( $\sim 1.4 \times 10^{-7} m^2.s^{-1}$  dans les tissus biologiques). Pour une impulsion de durée  $\tau_p$ , la longueur de diffusion pendant l'impulsion est estimée par  $\delta_T = 2\sqrt{\chi\tau_p}$ . La condition de confinement thermique est alors :

$$\tau_p \ll \tau_{th}.$$

Le régime de confinement thermique correspond au régime dans lequel la durée de diffusion de la température dans le milieu est très grande devant la durée de l'absorption de l'impulsion lumineuse. On peut alors écrire

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{P_V(r, t)}{\rho_0 c_p},$$

ce qui permet finalement de réécrire l'équation de propagation de l'onde en fonction de la puissance absorbée

$$\Delta p(r, t) - \frac{1}{c_s^2(x)} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(r, t) = -\frac{\Gamma(x)}{c_s^2} \frac{\partial P_V}{\partial t}(r, t) \quad (1.13)$$

avec  $\Gamma$  le coefficient de Grüneisen sans dimension défini par  $\Gamma = \frac{\beta_0 c_s^2}{c_p}$ . C'est un coefficient thermodynamique qui décrit la relation entre l'énergie absorbée par le milieu et sa variation de volume. La valeur de ce coefficient est donc très importante pour décrire le phénomène photoacoustique et la génération de l'onde acoustique. Dans les tissus biologiques, ce coefficient vaut environ 0.25.

## 1.2.6 Modélisation de l'onde optique

### Equation de transfert radiatif

De manière générale, l'interaction de la lumière avec un tissu biologique est décrite par l'équation de transfert radiatif. On introduit la quantité  $L(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$  qui est appelée luminance,  $\vec{\Omega}$  étant la direction de diffusion. Le flux d'énergie diffusé est alors :

$$\phi(\vec{r}, t) = \int L(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) d\Omega \quad (1.14)$$

On définit également le vecteur densité de flux diffus

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \int L(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) \vec{\Omega} \cdot d\Omega \quad (1.15)$$

L'équation de transfert radiatif s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_l} \frac{dL(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)}{dt} + \vec{\Omega} \cdot \nabla L(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) + (\mu_a + \mu_s) L(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) \\ = \mu_s \int \phi(\theta) L(\vec{r}, \vec{\Omega}', t) d\vec{\Omega}' + q(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) \end{aligned} \quad (1.16)$$

où  $c_l$  est la vitesse de l'onde,  $q$  est une source électromagnétique,  $\mu_a$  et  $\mu_s$  sont les coefficients d'absorption et de diffusion du milieu.

Le terme  $\mu_s \int \phi(\theta) L(\vec{r}, \vec{\Omega}', t) d\vec{\Omega}'$  est l'intégrale de la puissance lumineuse.

Hypothèse : Nous écrivons la luminance  $L$  comme la somme de deux composantes, une composante isotrope et une composante dépendant de la direction  $\vec{\Omega}$ . La luminance s'écrit alors comme suit :

$$L(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = \frac{1}{4\pi} \phi(\vec{r}, t) + \frac{3}{4\pi} \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\Omega} \quad (1.17)$$

En ajoutant l'hypothèse que  $\frac{d\vec{J}(\vec{r}, t)}{dt} = 0$  (variation lente), et en ne considérant que les termes isotropes, nous pouvons simplifier l'équation de transfert radiatif et ainsi obtenir l'équation de diffusion

$$\frac{1}{c_l} \frac{d\phi(\vec{r}, t)}{dt} - \nabla \cdot (D(\vec{r}) \nabla \phi(\vec{r}, t) + \mu_a(\vec{r}) \phi(\vec{r}, t)) = q(\vec{r}, t) \quad (1.18)$$

avec

$$D = \frac{1}{3(\mu_a + (1-g)\mu_s)} = \frac{1}{3(\mu_a + \mu'_s)} \quad (1.19)$$

où  $g \in [0, 1[$  est le facteur d'anisotropie et correspond au cosinus de l'angle de diffusion moyen du milieu. Dans un milieu biologique,  $g \sim 0.9$ , ce qui signifie que la diffusion est fortement orientée vers l'avant.  $\mu'_s$  est le coefficient de diffusion réduit, dans les tissus biologiques ce coefficient est de l'ordre de  $10\text{cm}^{-1}$ .

### Equation de diffusion

Nous allons réécrire l'équation de diffusion pour notre problème, la fluence du laser est désormais notée  $u(x)$ . La fluence représente une énergie par unité d'aire. Dans  $\Omega$  le milieu étudié, le bord du domaine  $\partial\Omega$  est éclairé par une impulsion laser d'énergie  $f(x, t)$ . La source est donc située uniquement sur  $\partial\Omega$ , on l'écrit en tant que condition aux bords. La fluence du laser dans le milieu est décrite par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \frac{1}{c_l} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \nabla \cdot D(x) \nabla u(x, t) + \mu_a(x) u(x, t) = 0, & x \in \Omega, \quad t \geq 0 \\ u(x, t) = f(x, t) & x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (1.20)$$

où  $u(x, t)$  est la fluence du laser,  $c_l$  est la vitesse de l'onde optique,  $D(x)$  et  $\mu_a(x)$  sont les coefficients de diffusion et d'absorption du milieu. L'illumination  $g(x, t)$  est une impulsion très courte.

L'énergie déposée dans le milieu est alors égale à la quantité suivante :

$$P_V(x, t) = \mu_a(x) u(x, t).$$

En considérant la différence d'échelle de temps entre la vitesse de la lumière et la vitesse du son, c'est-à-dire comme l'onde optique se propage beaucoup plus vite que l'onde acoustique, on peut alors réécrire le terme  $P_V(x, t)$  de la manière suivante, avec  $\delta_0$  la masse de Dirac en  $t = 0$  correspondant à l'impulsion laser :

$$P_V(x, t) = H(x, t) = H_0(x) \delta_0(t),$$

$$H_0(x) = \mu_a(x) \int_{\mathbb{R}^+} u(x, t) dt.$$

On note  $f(x) = \int_{\mathbb{R}^+} f(x, t) dt$  et  $u(x) = \int_{\mathbb{R}^+} u(x, t) dt$ , et nous pouvons alors considérer l'équation de diffusion statique

$$\begin{cases} -\nabla \cdot D(x) \nabla u(x) + \mu_a(x) u(x) = 0, & x \in \Omega \\ u(x) = f(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.21)$$

Le terme décrivant l'énergie déposée dans le milieu devient uniquement une fonction spatiale

$$H(x) = \int_{\mathbb{R}^+} P_V(x, t) dt = \mu_a(x) u(x).$$

En remplaçant le terme source dans l'équation des ondes on a

$$\Delta p(x, t) - \frac{1}{c_s^2(x)} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(x, t) = -\frac{\Gamma(x)}{c_s^2} H_0(x) \frac{\partial \delta_0}{\partial t}(x, t) \quad (1.22)$$

qui est alors équivalent au problème de propagation sans terme source mais avec des conditions initiales

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta p(x, t) - \frac{1}{c_s^2(x)} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(x, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^3, t \geq 0 \\ p(x, t = 0) = p_0(x) = \Gamma H_0(x) = \Gamma(x) \mu_a(x) u(x), \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial p}{\partial t}(x, t = 0) = 0, \quad x \in \Omega \end{array} \right. \quad (1.23)$$

C'est donc dans le terme  $\Gamma \mu_a u$  que s'exprime le couplage entre l'onde optique et l'onde acoustique à l'origine du phénomène photoacoustique.

### 1.3 Modèle photoacoustique et problème inverse

Le phénomène photoacoustique et le couplage entre l'onde électromagnétique et l'onde acoustique sont décrits par le système d'équations suivant pour différentes illuminations laser  $f_i$  avec  $i \in \{1, 2, \dots, I\}$  et  $I \in \mathbb{N}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla \cdot D(x) \nabla u_i(x) + \mu_a(x) u_i(x) = 0, \quad x \in \Omega \\ u_i(x) = f_i(x), \quad x \in \partial\Omega \\ \Delta p_i(x, t) - \frac{1}{c_s^2(x)} \frac{\partial^2 p_i}{\partial t^2}(x, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^3, t \geq 0 \\ p_i(x, t = 0) = \Gamma(x) \mu_a(x) u_i(x), \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial p_i}{\partial t}(x, t = 0) = 0, \quad x \in \Omega \end{array} \right. \quad (1.24)$$

Le problème inverse lié à ce modèle comporte donc deux parties distinctes (voir Figure 1.8) : il faut en effet inverser les deux équations décrivant le phénomène photoacoustique. Les données disponibles au départ pour résoudre le problème inverse sont les mesures de pression  $p(x, t)$  sur le bord du domaine pendant un temps  $T$ . A partir de ces données, l'objectif final est de remonter aux propriétés optiques du milieu.

#### Inversion acoustique

La première étape consiste donc à inverser l'équation de propagation des ondes à partir des mesures de pression sur le bord afin de reconstruire la pression initiale dans le domaine  $\Omega$ , c'est-à-dire  $p(x, 0) = F(x) = \Gamma(x) \mu_a(x) u(x)$ . La

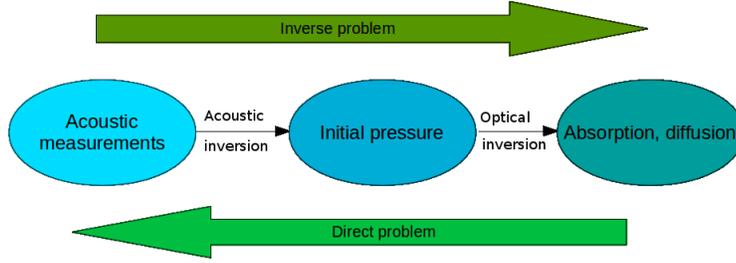


FIGURE 1.8 – Schéma des étapes du problème inverse photoacoustique

difficulté provient du fait que la vitesse de propagation de l'onde acoustique n'est pas connue. Elle est de ce fait souvent considérée comme une constante égale à la vitesse du son dans l'eau. Or, dans les tissus biologiques, la vitesse acoustique est certes proche de celle de l'eau mais elle peut présenter des variations de l'ordre de 10%. Il est donc nécessaire de prendre en compte ces variations de vitesse dans l'inversion car elles peuvent générer des erreurs importantes. C'est dans ce but que nous développons un modèle de correction de la vitesse dans le Chapitre 3. On peut résumer le problème inverse acoustique de la manière suivante :

$$p(x, t) \text{ sur } \partial\Omega \times [0, T] \quad \Rightarrow \quad c(x), F(x) \text{ dans } \Omega.$$

### Inversion optique

La deuxième étape du problème inverse photoacoustique est d'inverser l'équation de diffusion. On dispose de la donnée de la pression initiale  $F(x)$  dans  $\Omega$  par la reconstruction acoustique, c'est-à-dire du produit  $\Gamma(x)\mu_a(x)u(x)$ . On cherche alors à reconstruire les coefficients optiques du milieu,  $\mu_a$  et  $D$ . Le coefficient de Grüneisen  $\Gamma$  est également inconnu, mais il sera en pratique très souvent considéré constant et égal à 1. D'un point de vue biologique, c'est le coefficient d'absorption  $\mu_a$  qui est le plus intéressant. Le problème inverse optique est donc le suivant :

$$F(x) = \Gamma(x)\mu_a(x)u(x) \text{ dans } \Omega \quad \Rightarrow \quad \mu_a(x), D(x), \Gamma(x) \text{ dans } \Omega.$$

## 1.4 Objectifs de la thèse et résultats

Le premier objectif de cette thèse a été d'établir un modèle de correction de la vitesse acoustique. La prise en compte des variations de vitesse acoustique dans les tissus biologiques est en effet un enjeu intéressant dans l'amélioration des reconstructions en photoacoustique. La plupart des méthodes existantes considèrent une vitesse acoustique constante, ce qui est à l'origine d'erreurs dans l'inversion. Pour pouvoir prendre en compte ces variations de vitesse nous

avons établi un modèle permettant de faire le lien entre vitesse acoustique et propriétés optiques d'un milieu dont les paramètres sont constants par morceaux. Ce modèle permet alors d'effectuer une correction de la vitesse acoustique et donc une amélioration de la reconstruction photoacoustique. La méthode de reconstruction utilisée est le retournement temporel, car elle permet de prendre en compte une vitesse acoustique non constante spatialement. A partir de cette reconstruction, le but est de résoudre l'inversion optique afin de retrouver les paramètres optiques du milieu. Le problème inverse photoacoustique est alors résolu dans son intégralité.

Le deuxième objectif de la thèse a été d'étudier le problème inverse photoacoustique dans un milieu stratifié, la vitesse étant supposée constante. Nous avons établi une estimation de stabilité de ce problème montrant que la reconstruction des coefficients optiques se dégrade avec la profondeur.

La dernière partie porte sur l'étude du phénomène photoacoustique en présence de nanoparticules métalliques. Nous présentons le modèle de génération photoacoustique en présence de nanoparticules soumises à une fréquence de résonance plasmonique. Nous étudions également le problème inverse photoacoustique dans ce contexte.

## Chapitre 2

# Méthodes d'inversion

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Inversion acoustique</b> . . . . .	<b>16</b>
2.1.1	Méthode d'inversion pour un milieu homogène (vitesse constante) . . . . .	16
2.1.2	Méthodes d'inversion dans un milieu hétérogène (vitesse non constante) . . . . .	21
2.1.3	Reconstruction simultanée de la vitesse et de la pression initiale . . . . .	28
<b>2.2</b>	<b>Inversion optique</b> . . . . .	<b>29</b>
2.2.1	Première méthode . . . . .	29
2.2.2	Inversion optique pour des paramètres constants par morceaux . . . . .	31
<b>2.3</b>	<b>Inversion photoacoustique en une seule étape</b> . .	<b>32</b>

---

L'inversion du problème photoacoustique consiste à retrouver à partir des données de pression mesurées sur le bord les paramètres optiques à l'intérieur de l'objet observé. La plupart des travaux considèrent cette inversion en deux étapes distinctes : l'inversion acoustique qui donne la pression initiale dans le milieu, puis l'inversion optique qui à partir de la pression initiale donne les coefficients optiques [5, 28, 30, 35, 38, 44, 45, 46, 62, 67]. Ce chapitre résume les méthodes existantes pour chacune de ces inversions. Dans le cas de l'inversion acoustique, la vitesse acoustique est supposée connue. Nous présentons dans un premier temps les méthodes valables quand la vitesse acoustique est considérée constante, puis dans un second temps les méthodes pour une vitesse qui varie dans le milieu. Nous parlerons ensuite du problème inverse acoustique dans le cas où la vitesse n'est pas connue, et donc de la reconstruction simultanée de la pression initiale et de la vitesse acoustique. La seconde partie traite des méthodes existantes d'inversion optique, d'abord dans un milieu quelconque puis quand les coefficients sont supposés constants par morceaux.

Il existe également des méthodes de reconstruction en photoacoustique qui considèrent le problème inverse dans son intégralité. Il s'agit donc à partir des données de pression de retrouver par une inversion en une seule étape les coefficients optiques dans le milieu.

## 2.1 Inversion acoustique

### 2.1.1 Méthode d'inversion pour un milieu homogène (vitesse constante)

Dans le cas d'une vitesse de propagation acoustique constante dans le milieu, il existe des formules exactes d'inversion de l'équation d'onde [15]. Nous allons expliquer ici les méthodes utilisant la transformée de Radon, la résolution du problème inverse consistant alors à l'inverser. On reconstruit l'objet grâce à des projections de dimensions inférieures du signal émis (voir Figure 2.1). Les mesures acoustiques sont considérées complètes, c'est à dire qu'elles sont effectuées sur toute la sphère unité  $\mathbb{S} = S(0, 1)$ , et l'objet à reconstruire est compris dans  $B = \overline{B(0, 1)}$ . On se place dans  $\mathbb{R}^n$ .

#### Transformée de Radon et inversion

##### Définition 2.1.1

La transformée de Radon est l'opérateur  $R$  défini sur  $L^1(\mathbb{R}^n)$  à valeurs dans  $L^1(\mathbb{S} \times \mathbb{R})$  tel que

$$Rf(\theta, r) = \int_{\langle \theta, x \rangle} f(x) d\sigma,$$

pour tout  $(\theta, r) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}$ .

En d'autres termes, la transformée de Radon associe à  $f$  son intégrale sur les hyperplans de  $\mathbb{R}^n$ .

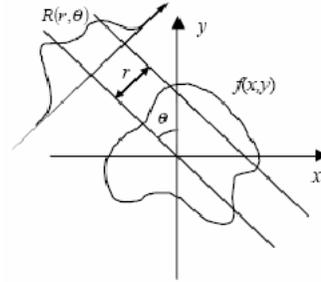


FIGURE 2.1 – Schéma des projections de l'objet par la transformée de Radon.

La transformée de Radon s'inverse le plus souvent par la méthode de rétro-projection.

**Théoreme 2.1.1**

Pour tout  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$f(x) = \frac{(-\Delta)^{(n-1)/2}}{c_n} R * Rf(x),$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , avec  $R^*$  l'adjoint de  $R$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  et  $c_n = (4\pi)^{(n-1)/2} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}$ .

Cette méthode est cependant très sensible au bruit dans les données de pression sur le bord. Une amélioration de cette méthode consiste à utiliser la transformée de Radon sphérique et à l'inverser par la méthode de rétroprojection filtrée. On parle de rétroprojection filtrée car elle fait intervenir des termes de dérivation qui jouent le rôle de filtres.

**Définition 2.1.2**

La transformée de Radon sphérique est l'opérateur  $R_s$  défini sur  $L^1(\mathbb{R}^n)$  à valeurs dans  $L^1(\mathbb{S} \times \mathbb{R})$  tel que

$$R_s f(t, r) = \int_{\mathbb{S}} f(x + ty) t^{n-1} d\sigma(y),$$

pour tout  $(\theta, r) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}$ .

La méthode de rétroprojection filtrée donne alors des formules exactes de reconstruction pour des géométries spéciales comme la sphère ou l'ellipsoïde.

**Théoreme 2.1.2**

Soit un domaine  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^3$ , on considère l'intégrale suivante

$$I(x) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{div} \int_{\partial\Omega} \nu_y \frac{p(y, |x-y|)}{|x-y|} d\sigma_y$$

On a alors  $I(x) = p_0(x)$  pour des surfaces de mesures spéciales telles que la sphère, le cylindre ou le plan.

Cette formule de reconstruction a été étendue par F. Natterer pour un domaine convexe quelconque [58].

**Inversion dans un domaine convexe quelconque**

Les formules traitant des géométries simples comme la sphère, le plan et le cylindre proviennent de l'inversion par rétroprojection filtrée présentée précédemment et sont très connues dans la littérature. Ces formules sont étendues au cas d'un domaine convexe quelconque  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^3$  [58].

**Théoreme 2.1.3**

Soit  $\Omega$  un domaine convexe borné et régulier de  $\mathbb{R}^3$ . Alors l'intégrale  $I(x)$

introduite dans la partie précédente s'écrit

$$I(x) = p_0(x) + \frac{1}{16\pi^2} \int_{\Omega} p_0(x) \frac{(R_{\chi})'''(\theta(z, x), s(z, x))}{|z - y|^2} d\sigma_y.$$

On peut réécrire le théorème en introduisant un opérateur compact  $K$ , qui va alors s'annuler dans les cas simples (sphère, ellipse...). On obtient ainsi, pour un domaine  $\Omega$  convexe,  $x \in \Omega$  et  $y \in \partial\Omega$  :

$$(Id + K)p_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \nu(y) \frac{p(y, |x - y|)}{|x - y|} d\sigma_y. \quad (2.1)$$

avec  $\nu(y)$  le vecteur normal à  $\partial\Omega$  compacité de l'opérateur  $K$  rend cette expression facilement inversible d'un point de vue mathématique. L'opérateur  $K$  fait intervenir la transformée de Radon de la fonction caractéristique du domaine  $\chi(x)$  (valant 1 à l'intérieur du domaine et 0 à l'extérieur), et s'écrit sous la forme suivante,  $x, z \in \Omega$  :

$$Kp_0(x) = \frac{1}{16\pi^2} \int_{\Omega} p_0(x) \frac{(R_{\chi})'''(\theta(z, x), s(z, x))}{|z - y|^2} d\sigma_y. \quad (2.2)$$

La transformée de Radon s'écrit également sous la forme suivante :

$$R_{\chi}(\theta, s) = \int_{x \cdot \theta = s} \chi(x) dx. \quad (2.3)$$

avec  $\theta(z, x) = (z - x)/|z - x|$  et  $s(z, x) = \frac{1}{2}(|z|^2 - |x|^2)/|z - x|$ . La transformée de Radon est alors l'intégrale de la fonction caractéristique sur le plan formé des points qui sont à égale distance de  $x$  et  $z$ . Le vecteur unitaire  $\theta$  est orthogonal au plan, et  $s$  est la distance orientée de ce plan à l'origine. La Figure 2.2 représente ces différentes grandeurs.

### Proposition 2.1.1

L'opérateur  $K$  défini par l'équation 2.2 est compact dans  $H_0^1(\Omega)$ .

*Preuve.*  $\Omega$  est un domaine convexe régulier, donc le plan d'intégration traverse toujours le domaine  $\Omega$  sans être tangentiel, pour deux points  $x$  et  $z$  distincts. De plus, la convexité du domaine fait que la transformée de Radon  $R_{\chi}$  est  $C^\infty$  dans  $\Omega \times \Omega$ . Le numérateur de l'opérateur  $K$  est donc également  $C^\infty$  dans  $\Omega \times \Omega$ , et le dénominateur étant faiblement singulier,  $K$  est bien un opérateur compact.

### Exemple : calcul de $K$ dans le cas d'une sphère

L'opérateur  $K$  permet de reconstruire la pression initiale à l'intérieur d'un domaine de géométrie quelconque, mais convexe. Dans le cas de géométries particulières, cet opérateur s'annule, et la reconstruction est alors plus simple et très connue. Le calcul de l'opérateur  $K$  est effectué ici dans le cas d'un domaine

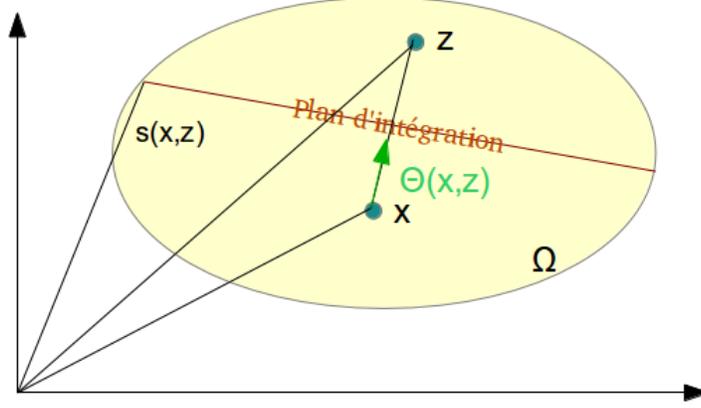


FIGURE 2.2 – Représentation du domaine convexe et des différentes grandeurs.

de forme sphérique et de rayon 1, afin de démontrer que l'opérateur s'annule bien.

La première étape est le calcul de la transformée de Radon  $R_\chi(\theta, s) = \int_{x \cdot \theta = s} \chi(x) dx$  de la fonction caractéristique de la sphère. On effectue le changement de variable  $x = s\theta + \xi\theta^\perp$ , où  $\theta$  est le vecteur défini précédemment et  $\theta^\perp$  le plan orthogonal à ce vecteur.

Le calcul de l'intégrale revient donc au calcul de l'aire du disque représenté sur le schéma, c'est à dire  $\pi(1 - s^2)$ . L'opérateur  $K$  faisant intervenir la dérivée troisième de cette grandeur par rapport à  $s$ , on trouve alors bien  $K = 0$ . Le calcul est similaire pour un domaine elliptique.

### Cas d'un domaine quelconque en dimension 2

Dans le cas d'un domaine convexe régulier en dimension 2, il existe une expression équivalente à celle démontrée par Natterer faisant également apparaître un opérateur  $K$  qui s'écrit alors de la manière suivante :

$$Kp_0(x) = \frac{1}{8\pi} \int_{\Omega} p_0(y) \frac{(\partial_s^2 H R_\chi)(\theta(z, x), s(z, x))}{|z - y|} dy. \quad (2.4)$$

où  $H$  représente la transformée de Hilbert :

$$H(u(t)) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{u(t + \tau) - u(t - \tau)}{\tau} d\tau. \quad (2.5)$$

Tout comme dans le cas en trois dimensions, cet opérateur disparaît pour les géométries particulières. L'opérateur  $K$  s'annule donc et seule la formule pour les géométries simples reste. En effet, le calcul de l'opérateur est semblable à

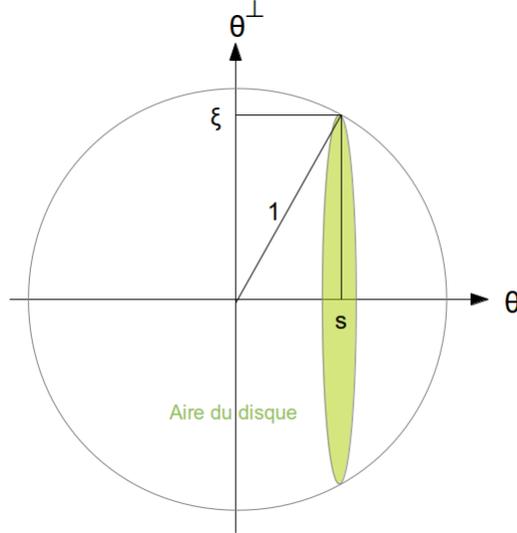


FIGURE 2.3 – Schéma de la sphère de rayon 1.

celui effectué pour la sphère : l'intégrale revient non plus au calcul de l'aire du disque, mais de son diamètre car le problème est en deux dimensions. Cette grandeur vaut alors  $2\sqrt{1-s^2}$ . Ainsi, sa transformée de Hilbert est donnée par :

$$H(R_\chi) = 2 \begin{cases} -s - \sqrt{s^2 - 1} & \text{pour } s < -1 \\ -s & \text{pour } -1 < s < 1 \\ -s + \sqrt{s^2 - 1} & \text{pour } s > 1 \end{cases} \quad (2.6)$$

Ainsi, en dérivant deux fois par rapport à  $s$ , on obtient bien un opérateur  $K$  qui s'annule. L'inversion se fait donc par les formules habituelles des géométries particulières. L'équation de l'inversion acoustique dans le cas particulier du disque est la suivante :

$$p_0(y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_S n(z) \left[ \int_0^{2R} p(z, t') \frac{1}{t'^2 - |y-z|^2} dt' \right] dl(z). \quad (2.7)$$

La grandeur  $|y-z|$  correspond au temps  $t$  en prenant une vitesse de propagation égale à 1. De manière numérique, la singularité en  $t'^2 = |y-z|^2$  pose problème. Pour s'en affranchir, il suffit de considérer l'égalité suivante :

$$\frac{2}{t'^2 - t^2} = \frac{-1/t}{t' + t} + \frac{1/t}{t' - t} \quad (2.8)$$

On remarque ainsi que l'intégrale intérieure se réduit à la somme de deux transformées de Hilbert, dont les algorithmes sont connus et faciles à mettre en

oeuvre. On note d'autre part que pour obtenir la pression initiale en un point, il est nécessaire de connaître les données sur tout le bord : la méthode n'est pas locale, et cette expression montre bien l'importance d'avoir des données complètes pour pouvoir l'utiliser.

### 2.1.2 Méthodes d'inversion dans un milieu hétérogène (vitesse non constante)

Lorsque la vitesse  $c(x)$  n'est plus supposée constante, on ne dispose plus de solutions intégrales d'inversion directe, il faut alors considérer d'autres méthodes présentées dans cette partie.

#### Développement en séries

Cette méthode a été développée par Agranovsky et Kuchment [14] et présente l'avantage de ne pas passer par une transformée de Radon. Considérons un domaine  $\Omega$  et qu'on observe les données sur  $\partial\Omega$ . La vitesse acoustique n'est pas supposée constante mais elle est supposée dans  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$  et strictement positive. L'opérateur  $-c(x)\Delta$  est défini sur  $L^2(\Omega)$  avec des conditions de Dirichlet. On considère une base de Hilbert  $B$  constituée de ses fonctions propres notées  $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , et on note  $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  l'ensemble de ses valeurs propres correspondantes. On peut alors reconstruire de manière unique les objets  $f$  suivant la formule de reconstruction présentée dans [14].

#### Théoreme 2.1.4

Soit  $p^{obs}$  les mesures de pression sur  $\partial\Omega \times (0, T)$ . La pression initiale  $F(x)$  peut être reconstruite à partir de la formule suivante en utilisant sa décomposition dans la base hilbertienne  $B$  :

$$f_k = \lambda_k^{-2} p_k^{obs}(0) + \lambda_k^{-1} \int_0^\infty \sin(\lambda_k t) p_k^{obs}(t) dt,$$

avec

$$p_k^{obs}(t) = \int_{\partial\Omega} p^{obs}(y, t) \overline{\partial_\nu e_k(y)} d\sigma(y),$$

pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

#### Méthode du retournement temporel

La méthode du retournement temporel est beaucoup utilisée pour effectuer la première inversion du problème photoacoustique [39, 38, 70]. Le principe du retournement temporel est de faire propager l'onde en sens inverse à partir d'un temps fini  $T$ . Ce temps correspond à la fin de l'acquisition des mesures acoustiques, et il doit être choisi de telle sorte que toute l'onde soit sortie du domaine de mesure c'est à dire que tout le signal acoustique ait pu être mesuré par les détecteurs. Dans le cas d'une vitesse de propagation acoustique supposée

constante et normalisée  $c = 1$ , le principe de Huygens en dimension 3 stipule qu'à partir d'un certain temps  $T = \text{diam}(\Omega)$  l'onde propagée à partir d'une condition initial  $F$  à support compact dans  $\Omega$  devient nulle dans le domaine, c'est à dire que toute l'onde a dépassé les détecteurs et est sortie du domaine. Dans ce cas, la méthode du retournement temporel s'applique sans problème. Cependant, pour une vitesse acoustique non constante, certains cas peuvent être problématiques, à savoir les cas de vitesse présentant des rayons piégés.

**Vitesse acoustique et rayons piégés** Nous cherchons donc à résoudre le problème inverse acoustique afin de retrouver la valeur initiale de la pression dans le domaine observé  $\Omega$ . Cette pression initiale est notée  $F(x)$  est à support compact dans  $\Omega$  tout comme la vitesse acoustique  $c(x)$ . La vitesse acoustique peut être *non-trapping* ou peut induire des rayons piégés. Ces rayons piégés décrivent une courbe bornée dans  $\mathbb{R}^n$  et peuvent ne jamais atteindre le bord du domaine  $\Omega$  et donc ne jamais être mesuré par les détecteurs. On considère le système Hamiltonien à  $2n$  variables réelles  $(x, \xi)$  avec le Hamiltonien  $H = \frac{c^2(x)}{2}|\xi|^2$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_t = \frac{\partial H}{\partial \xi} = c^2(x)\xi \\ \xi'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{1}{2}\nabla(c^2(x))|\xi|^2 \\ x|_{t=0} = x_0 \\ \xi|_{t=0} = \xi_0 \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Les solutions de ce système sont appelées bicaractéristiques et leurs projections sur l'espace  $\mathbb{R}_x^n$  sont appelées *rayons* (ou géodésiques).

### Définition 2.1.3

La vitesse acoustique est dite *non-trapping* si tous les rayons qui lui sont associés tendent vers l'infini quand  $t \rightarrow \infty$ . Elle n'induit alors aucun rayon piégé.

La Figure 2.5 présente trois exemples de vitesses acoustiques qui induisent des rayons piégés. Pour illustrer ce phénomène, quelques géodésiques sont tracées. Ces lignes correspondent au trajet de l'onde acoustique : on remarque bien que certains de ces trajets restent confinés à l'intérieur du domaine. L'onde acoustique n'est alors pas entièrement mesurée par les détecteurs.

La vitesse acoustique sera considérée comme *non-trapping* dans la suite afin de pouvoir utiliser la méthode du retournement temporel.

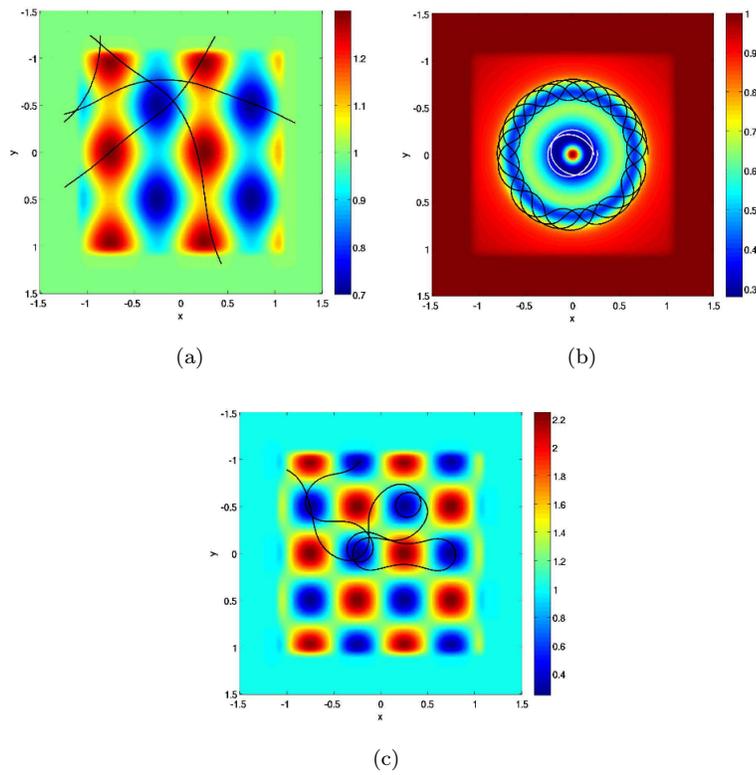


FIGURE 2.4 – Exemple de vitesse induisant des rayons piégés avec quelques géodésiques tracées.

**Méthode numérique** Le retournement temporel est basé sur le constat que l'équation de propagation de l'onde acoustique est invariante par retournement temporel c'est-à-dire sous le changement de variable  $t \rightarrow -t$ . D'un point de vue numérique, il s'agit de faire propager l'onde en sens inverse à partir des données récupérées sur le bord, et d'une condition initiale sur tout le domaine. Grâce à une méthode de différences finies, on remonte à la pression initiale en imposant à chaque temps  $t$  la donnée de pression retournée correspondante sur le bord. En pratique, la valeur de la pression mesurée sur le bord n'est pas exactement nulle au temps  $T$ , il existe alors deux approches pour y remédier. La première approximation est de considérer un temps final de mesure supérieur à la longueur de la plus longue géodésique du domaine, et de calculer la condition initiale  $\tilde{p}(x, T) = \Phi(x)$  selon les équations suivantes où  $\tilde{p}(x, t) = p(x, T - t)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} - \Delta \tilde{p} = 0 \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T) \\ \tilde{p}(x, T) = \Phi(x) \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t}(x, T) = 0 \\ \tilde{p}(x, t) = p(x, t) \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \end{array} \right. \quad (2.10)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \Phi(x) = 0 \quad x \in \Omega \\ \Phi(x) = p(x, T) \quad x \in \partial\Omega \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Ainsi, pour obtenir la condition initiale dans tout le domaine  $\Omega$ , il faut résoudre l'équation précédente. On peut ensuite faire propager l'onde en sens inverse pendant le temps  $T$ , et la pression obtenue à l'issue de ce calcul coïncidera alors avec la pression initiale  $p(x, 0)$  générée par le phénomène photoacoustique.

La deuxième approche consiste à considérer que dans le cas d'une vitesse de propagation supposée *non-trapping*, la condition initiale peut être considérée comme étant nulle en tout point du domaine. En effet, au temps  $T$ , les valeurs de la pression sur le bord sont très proches de zéro car l'onde s'est déjà propagée à l'extérieur de  $\Omega$ . On utilise alors une fonction régulière de *cut-off*  $\varphi_\varepsilon$  qui permet aux données de pression de réellement s'annuler au temps  $T$  [38].

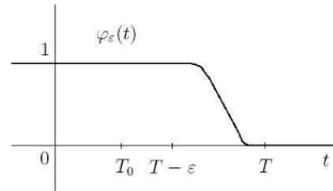


FIGURE 2.5 – Fonction de cut-off  $\varphi_\varepsilon$  [38].

Le retournement temporel est alors décrit par le système d'équation suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} - \Delta \tilde{p} = 0 \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T) \\ \tilde{p}(x, T) = 0 \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t}(x, T) = 0 \\ \tilde{p}(x, t) = p(x, t) \phi_\varepsilon(t) \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \end{array} \right. \quad (2.12)$$

### Dépendance de la reconstruction par rapport au temps final $T$

Tout comme dans le cas de la méthode directe, l'opérateur transformant les données en la carte des pressions initiales dans le cas du retournement temporel fait apparaître un opérateur correspondant à  $K$ , et appelé ici opérateur  $B$  [70]. Soit  $\Lambda p_0$  les données de pression dans  $[0, T] \times \partial\Omega$  et  $p_0$  les données de pression initiale dans  $\Omega$ , on a alors :

$$A\Lambda p_0 = (Id - B)p_0 \quad (2.13)$$

où  $A\Lambda$  correspond à l'opérateur du retournement temporel. Ainsi,

$$p_0 = A\Lambda p_0 + Bp_0. \quad (2.14)$$

L'opérateur  $B$  correspond alors à l'erreur sur la reconstruction de la pression initiale. Les propriétés de l'opérateur  $B$  dépendent du temps  $T$  choisi comme temps initial du retournement temporel. On définit une grandeur  $T_1$  correspondant au trajet selon la plus longue géodésique du domaine  $\Omega$ ,  $T_1 = diam(\Omega)$  [70].

#### Proposition 2.1.2

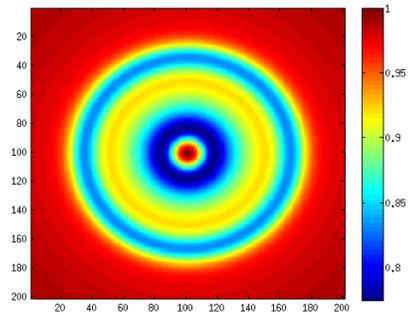
Pour  $T$  tel que  $T > T_1/2$ , l'opérateur  $B$  est de norme inférieure à 1 et compact dans  $H_0^1(\Omega)$ . L'opérateur  $Id - B$  est alors inversible, et le problème inverse photoacoustique s'exprime de manière explicite :

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} B^m A\Lambda.$$

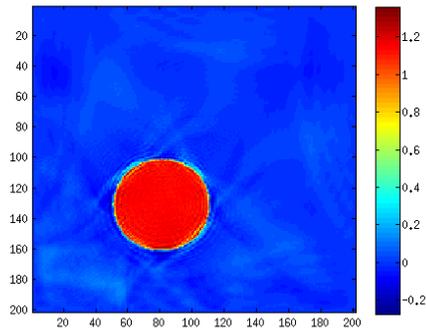
Ces propriétés fournissent ainsi une estimation de l'erreur de la reconstruction dans le cas du retournement temporel. Dans le cas d'un temps  $T$  suffisamment grand, l'opérateur  $B$  sera donc proche de 0, c'est-à-dire que la reconstruction sera de bonne qualité.

**Illustrations numériques** Premièrement, pour illustrer l'importance de la durée de la mesure acoustique, deux reconstructions sont effectuées à partir d'une distribution de pression initiale. La figure 2.6 montre deux reconstructions de cette pression pour deux temps de mesures différents : la première au

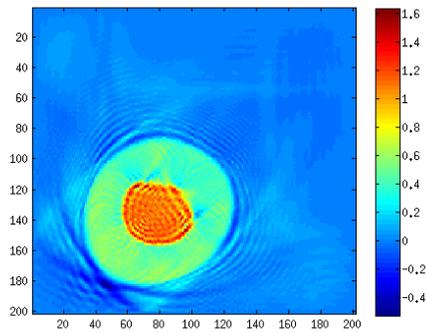




(a) Vitesse avec rayons piégés



(b) Reconstruction avec la vraie vitesse



(c) Reconstruction avec une vitesse constante

FIGURE 2.7 – Exemple de reconstruction par retournement temporel.

### Méthodes itératives

On peut également considérer l'inversion photoacoustique par une méthode de minimisation. M. Bergounioux, X. Bonnefond, T. Haberkorn, et Y. Privat [21] présentent une méthode de contrôle optimal pour résoudre le problème inverse photoacoustique. Le calcul porte sur l'ensemble du phénomène photoacoustique, c'est à dire à la fois sur la partie optique et sur la partie acoustique. On considère un domaine  $B$  correspondant au domaine de propagation de l'onde acoustique, et choisi de sorte que l'onde est entièrement sortie du domaine au temps final d'acquisition  $T$ .

On considère l'équation de propagation acoustique avec la source de pression générée par l'absorption de l'énergie optique  $p(0, x) = u(x)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \operatorname{div}(c^2 \nabla p)) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times B, \\ p(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial B, \\ p(0, x) = u(x) \quad x \in B, \\ \frac{\partial p}{\partial t}(0, x) = 0, \quad x \in B. \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Les mesures de pression sont notées  $p_{obs}$ . Le problème de minimisation est alors le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \frac{1}{2} \|p(u) - p_{obs}\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha}{2} \|Bu\|_{L^2}^2 \\ u \in L^2([0, T] \times B) \end{array} \right. \quad (2.16)$$

On reconstruit alors la pression initiale par une méthode itérative de minimisation, comme la méthode du gradient conjugué. Pour calculer le gradient de la fonction, on utilise la méthode de l'adjoint.

### 2.1.3 Reconstruction simultanée de la vitesse et de la pression initiale

Toutes les méthodes présentées précédemment supposent une vitesse acoustique connue, qu'elle soit constante ou non. Cependant, l'objet que l'on cherche à imager est à priori inconnue et sa vitesse également. Cela est problématique du point de vue de l'inversion : P. Stefanov et G. Uhlmann ont montré que la reconstruction simultanée de la vitesse acoustique et de la pression initiale est instable [71]. On considère l'équation de propagation acoustique suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \Delta p = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n, \\ p(0, x) = f(x), \\ \frac{\partial p}{\partial t}(0, x) = 0. \end{array} \right. \quad (2.17)$$

avec  $c = c(x) > 0$  et  $T > 0$ . Les mesures acoustiques sur le bord du domaine sont modélisées par l'opérateur

$$\Lambda_1 f = p|_{[0,T] \times \partial\Omega}. \quad (2.18)$$

On a alors le résultat suivant

**Théoreme 2.1.5**

*Il n'existe pas d'estimation de stabilité du type*

$$\|\delta f\|_{H^{s_1}(\Omega)} + \|\delta c^2\|_{H^{s_1}(\Omega)} \leq C \|\delta \Lambda_1\{\delta f, \delta c^2\}\|_{H^{s_2}},$$

*quelque soit  $s_1 \geq 0$ ,  $s_2 \geq 0$ .*

## 2.2 Inversion optique

L'inversion optique est la reconstruction des coefficients d'absorption et de diffusion  $\mu_a$  et  $D$  ainsi que du coefficient de Grüneisen  $\Gamma$  dans le domaine observé à partir de la connaissance de la pression initiale  $p_0 = \Gamma\mu_a u$  dans le même domaine pour un nombre  $I$  d'illuminations  $g$  sur le bord.

$$\begin{cases} -\nabla \cdot D(x)\nabla u_i(x) + \mu_a(x)u_i(x) = 0, & x \in \Omega \\ u_i(x) = g_i(x), & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.19)$$

### 2.2.1 Première méthode

La méthode proposée par G. Bal et K. Ren [19, 17] considère deux illuminations  $g_1$  et  $g_2$  sur  $\partial\Omega$  et leurs pressions initiales associées notées  $H_1$  et  $H_2$ . Bien choisies, elles permettent d'avoir deux relations indépendantes (notées  $\sigma$  et  $q$ ) entre les coefficients déterminés de manière unique. Ces deux fonctionnelles  $\sigma$  et  $q$  sont définies comme suit :

$$\sigma = \frac{\sqrt{D}}{\Gamma\mu_a} \quad (2.20)$$

$$q = -\left(\frac{\Delta\sqrt{D}}{\sqrt{D}} + \frac{\mu_a}{D}\right) \quad (2.21)$$

**Proposition 2.2.1**

*Quelque soit le nombre d'illuminations  $g$  sur  $\partial\Omega$ , la connaissance de la quantité  $H = \Gamma\mu_a u$  ne permet pas de reconstruire les trois coefficients  $(D, \mu_a, \Gamma)$ . Cependant, si un des coefficients est connu, les deux autres peuvent être déterminés de manière unique.*

**Corollaire 2.2.1**

*Soient les deux relations  $\sigma$  et  $q$  connues.*

1. Si  $\Gamma$  est connu, on peut déterminer de manière unique les coefficients  $(\mu_a, D)$
2. Si  $D$  est connu, on peut déterminer de manière unique les coefficients  $(\Gamma, \mu_a)$
3. Si  $\mu_a$  est connu, on peut déterminer de manière unique les coefficients  $(\Gamma, D)$

En pratique, on considère le plus souvent le cas 1 avec  $\Gamma$  connu, et on cherche alors à déterminer  $\mu_a$  et  $D$ . Leur connaissance présente un plus grand intérêt d'un point de vue médical [19].

### Cas de la reconstruction d'un seul coefficient

On considère ici que deux des coefficients sont connus et qu'on veut reconstruire le troisième.

- Pour reconstruire  $\Gamma$ , il suffit de trouver  $u$  par l'équation de diffusion puis de calculer  $\Gamma = \frac{H}{\mu_a u}$
- Pour reconstruire  $\mu_a$ , on résout

$$\begin{cases} -\nabla \cdot D(x)\nabla u(x) + \frac{H}{\Gamma} = 0, & x \in \Omega \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.22)$$

On a alors :

$$\mu_a = \frac{H}{\Gamma u} \quad (2.23)$$

- Pour reconstruire  $D$ , on calcule d'abord  $u = \frac{H}{\Gamma \mu_a}$  puis on résout l'équation (2.22) pour  $D$  en connaissant la valeur de  $D$  sur  $\partial\Omega$ .  $D$  est déterminé de manière unique si  $u$  est assez régulière et si elle ne s'annule pas.

### Méthode pour deux coefficients

On introduit le champ vectoriel  $\beta$  défini à partir des deux pressions initiales  $H_1$  et  $H_2$  par

$$\beta = H_1^2 \nabla \frac{H_2}{H_1}, \quad (2.24)$$

ainsi que le vecteur unitaire  $\hat{\beta} = \frac{\beta}{|\beta|}$ . Les deux quantités  $\sigma$  et  $q$  sont connues à partir de  $H_1$  et  $H_2$ . Il faut alors résoudre l'équation de transport suivante

$$\begin{cases} -\nabla(\sigma^2|\beta|)\hat{\beta} = 0, & \text{dans } \Omega \\ \sigma^2|\beta| = \frac{\sqrt{D|\partial\Omega}}{\Gamma|\partial\Omega\mu_a|_{\partial\Omega}}, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.25)$$

Résoudre cette équation permet de connaître  $\sigma^2 = Du_1^2$ .

### Inconvénients de la méthode

Cette méthode présente un inconvénient important : pour être valable il faut que la fluence du laser ne s'annule jamais dans le domaine  $\Omega$ . Cela est vrai si l'illumination est strictement positive sur tout le bord du domaine. En pratique cependant, le laser éclaire une petite partie du bord : le faisceau est très localisé sur une largeur de l'ordre du centimètre. Pour des applications sur des données expérimentales, cette méthode ne va donc pas fonctionner.

### 2.2.2 Inversion optique pour des paramètres constants par morceaux

Les travaux concernant la reconstruction d'un milieu constant par morceaux de W. Naetar et O. Scherzer [57] partent du constat que la reconstruction des paramètres optiques  $\Gamma$ ,  $\mu_a$  et  $D$  est impossible quel que soit le nombre d'illuminations  $g$  sur le bord du domaine  $\Omega$ . Il n'y a unicité de reconstruction que dans le cas de deux illuminations différentes et pour deux coefficients optiques uniquement. Pour dépasser ce problème de non-unicité, les coefficients optiques sont supposés constants par morceaux, soit pour un domaine  $\Omega$  découpé en sous-domaines  $(\Omega_m)_{m=1}^M$

$$\begin{aligned}\bar{\Omega} &= \bigcup_{m=1}^M \bar{\Omega}_m, \\ \mu_a &= \sum_{m=1}^M \mu_m 1_{\Omega_m}, \\ D &= \sum_{m=1}^M D_m 1_{\Omega_m}, \\ \Gamma &= \sum_{m=1}^M \Gamma_m 1_{\Omega_m}.\end{aligned}\tag{2.26}$$

Le premier objectif décrit dans ce papier est de montrer qu'on peut reconstruire les discontinuités du milieu  $\Omega$ , l'ensemble des sauts  $\bigcup_m \partial\Omega_m$  des paramètres optiques, à partir de la connaissance de la pression initiale photoacoustique  $H = \Gamma\mu_a u$ . On note pour  $k \geq 0$  l'ensemble des discontinuités d'une fonction  $f \in L^\infty(\Omega)$  et de ses dérivées jusqu'à l'ordre  $k$

$$J_k(f) = \Omega \setminus \bigcup \{B \subset \Omega \mid B \text{ ouvert et } f \in C^k(B)\}.$$

#### Proposition 2.2.2

Soient  $\mu_a$ ,  $D$ , et  $\Gamma$  de la forme (2.26), la fluence  $u = \sum_m u_m 1_{\Omega_m}$  et la pression initiale  $H = \sum_m H_m 1_{\Omega_m}$  tels que  $|\nabla u_m \cdot \nu| > 0$  presque partout. Alors

$$J_0(\mu_a) \cup J_0(D) \cup J_0(\Gamma) = \overline{J_2(H)}.$$

En d'autres termes, l'ensemble des discontinuités de la dérivée seconde de  $H$  est le même que celui des trois coefficients optiques. Une fois l'ensemble des discontinuités connu, on doit alors reconstruire les coefficients.

### Proposition 2.2.3

Soient  $\mu_a$ ,  $D$ , et  $\Gamma$  de la forme (2.26), avec  $\Omega_m$  la décomposition de  $\Omega$  connue. Soient la fluence  $u = \sum_m u_m 1_{\Omega_m}$  et la pression initiale  $H = \sum_m H_m 1_{\Omega_m}$  tels que  $|\nabla u_n \cdot \nu| > 0$  sur chaque interface  $I_{mn} = \partial\Omega_m \cap \partial\Omega_n$ . De plus, supposons  $(\mu_n, \Gamma_n, D_n)$  connus dans certains sous domaines  $\Omega_n$ . Alors les paramètres  $\mu_a$ ,  $D$ ,  $\Gamma$  peuvent être déterminés de manière unique à partir de la connaissance de la pression initiale  $H$ .

### Mise en oeuvre numérique

La reconstruction numérique des coefficients optiques constants par morceaux à partir de plusieurs  $(H^k)_{k=1}^K$  (pour différentes illuminations) se fait en deux étapes.

1. Détecter les sauts de  $(H^k)_{k=1}^K$ ,  $(\nabla H^k)_{k=1}^K$  et  $(\Delta H^k)_{k=1}^K$ , puis grâce à une technique de segmentation d'image estimer les sous domaines  $(\hat{\Omega}_m)_{m=1}^M$  où les paramètres optiques sont constants et donc où la fluence  $u$  est régulière.
2. Connaissant ensuite la décomposition du domaine  $(\hat{\Omega}_m)_{m=1}^M$  et des valeurs de référence  $(\Gamma_1, \mu_1, D_1)$ , utiliser les valeurs des sauts de  $(H^k)_{k=1}^K$  et  $(\nabla H^k \cdot \nu)_{k=1}^K$  sur les interfaces estimées, et les valeurs de  $(\frac{\Delta H^k}{H^k})_{k=1}^K$  pour retrouver les valeurs de  $\mu_a$ ,  $D$ , et  $\Gamma$  dans tout le domaine  $\Omega$ .

## 2.3 Inversion photoacoustique en une seule étape

Même si la plupart des travaux considèrent séparément les inversions acoustique et optique, on peut envisager d'inverser les équations de photoacoustique en une seule étape. T. Ding, K. Ren et S. Vallélian [29] présentent une méthode d'inversion qui permet à partir de plusieurs mesures acoustiques sur le bord de reconstruire le coefficient d'absorption et la vitesse acoustique dans le milieu, en supposant pour simplifier que les coefficients  $D$  et  $\Gamma$  sont connus.

On considère le problème photoacoustique modélisé par l'équation de diffusion et l'équation de propagation des ondes. Il faut alors inverser le problème non linéaire suivant

$$\frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{(0,T) \times \partial\Omega} = \Lambda(c, \mu_a; g), \quad (2.27)$$

où  $g$  est l'illumination du laser. Il n'existe pas de résultat d'unicité pour la reconstruction simultanée de la vitesse et de l'absorption. Cet article présente une méthode de reconstruction numérique en utilisant plusieurs illuminations. La méthode d'inversion utilisée met en oeuvre l'approximation de Born.

On note la vitesse et l'absorption comme la somme d'une valeur connue et d'une perturbation :

$$c(x) = c_0(x) + \tilde{c}(x), \quad \text{et} \quad \mu_a(x) = \mu_0(x) + \tilde{\mu}(x). \quad (2.28)$$

La fluence du laser et la pression se notent alors également de la manière suivante

$$u_j(x) = u_j^0(x) + \tilde{u}_j(x), \quad \text{et} \quad p(x, t) = p_j^0(x) + \tilde{p}_j(x). \quad (2.29)$$

où les  $1 \leq j \leq$  correspondent à l'illumination laser  $g_j$  correspondante. La perturbation dans les données de pression se note alors

$$\frac{\partial \tilde{p}_j}{\partial n} \Big|_{(0,T) \times \partial\Omega} = \Lambda_c^j(c_0, \mu_0) \tilde{c} + \Lambda_\mu^j(c_0, \mu_0) \tilde{\mu} \quad (2.30)$$

En prenant en compte toutes les données provenant des différentes illuminations, on écrit alors le système d'inconnues suivant

$$\Lambda_{c,\mu}(c_0, \mu_0) \begin{pmatrix} \tilde{c} \\ \tilde{\mu} \end{pmatrix} = \frac{\partial \tilde{p}_j}{\partial n}. \quad (2.31)$$

### Reconstruction

L'inversion du système linéaire (2.31) se fait grâce à la méthode des itérations de Landweber. A partir d'une valeur donnée d'initialisation, les itérations suivantes se calculent de la manière suivante pour  $k \geq 0$

$$\begin{pmatrix} \tilde{c}_{k+1} \\ \tilde{\mu}_{k+1} \end{pmatrix} = (I - \tau \Lambda_{c,\mu}^* (c_0, \mu_0) \Lambda_{c,\mu}(c_0, \mu_0)) \begin{pmatrix} \tilde{c} \\ \tilde{\mu} \end{pmatrix} + \tau \Lambda_{c,\mu}^* (c_0, \mu_0) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial n}. \quad (2.32)$$

avec le paramètre  $\tau$  tel que  $0 < \tau < 2/\Sigma^2$ ,  $\Sigma$  étant la plus grande valeur singulière de  $\Lambda_{c,\mu}(c_0, \mu_0)$ , et  $\Lambda_{c,\mu}^*(c_0, \mu_0)$  est l'opérateur adjoint de  $\Lambda_{c,\mu}(c_0, \mu_0)$ .

Ce chapitre présente les méthodes existantes de reconstruction en photoacoustique. Nous nous concentrons dans la suite sur les méthodes itératives ainsi que sur la méthode du retournement temporel car nous étudions des milieux présentant des vitesses acoustiques variables spatialement. Le chapitre suivant décrit ces travaux, à savoir la résolution du problème inverse photoacoustique dans un milieu constant par morceaux.



## Chapitre 3

# Modèle de correction de la vitesse acoustique

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Construction du modèle</b>	<b>36</b>
3.1.1	Vitesse acoustique dans un mélange	36
3.1.2	Absorption dans le mélange	37
3.1.3	Approximation de la vitesse acoustique	38
3.1.4	Expression de la vitesse dans un milieu constant par morceaux	40
3.1.5	Utilisation de la correction de vitesse dans la reconstruction d'un milieu constant par morceaux	41
<b>3.2</b>	<b>Correction de la pression acoustique générée</b>	<b>42</b>
3.2.1	Amélioration de l'erreur $L^2$	43
<b>3.3</b>	<b>Reconstruction numérique : première méthode</b>	<b>44</b>
3.3.1	Inversion acoustique avec correction de vitesse	44
3.3.2	Inversion optique	47
<b>3.4</b>	<b>Reconstruction numérique : deuxième méthode</b>	<b>48</b>
<b>3.5</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>48</b>
3.5.1	Simulation du problème direct	48
3.5.2	Première méthode	50
3.5.3	Deuxième méthode	55
<b>3.6</b>	<b>Reconstruction à partir de données réelles</b>	<b>56</b>
3.6.1	Dispositif expérimental	56
3.6.2	Reconstruction	58

---

La vitesse acoustique d'un milieu biologique est à priori inconnue, bien que proche de celle de l'eau. On considère que les variations de vitesse dans les tissus mous présente des variations qui peuvent aller jusqu'à 10% de la vitesse

acoustique dans l'eau [78]. Les méthodes de reconstruction en photoacoustique supposent en général une vitesse connue et égale à la vitesse acoustique dans l'eau. Cette hypothèse induit des erreurs dans l'inversion qui peuvent être importantes. Nous cherchons ici à établir un modèle de correction de la vitesse acoustique. L'idée est d'établir un lien entre les propriétés optiques du milieu et ses propriétés acoustiques.

### 3.1 Hypothèses et construction du modèle de correction de la vitesse

Pour établir ce lien entre propriétés acoustiques et propriétés optiques, nous allons simplifier le milieu et considérer un milieu composé d'un mélange de sang et d'eau. La vitesse acoustique dans l'eau étant différente de la vitesse acoustique dans le sang, la vitesse dans le milieu va dépendre de la quantité d'eau et de sang dans le mélange. Par ailleurs, l'absorption optique dans le mélange va être principalement causée par l'hémoglobine (comme dans un milieu biologique), et va donc également dépendre de la quantité de sang dans le mélange. Nous allons ainsi pouvoir établir un lien entre la vitesse acoustique dans ce mélange et son absorption optique.

#### 3.1.1 Vitesse acoustique dans un mélange

Nous simplifions le milieu et considérons qu'il n'est composé que d'eau et de sang. La vitesse acoustique dans le mélange d'eau et de sang dépend alors de la quantité d'eau et de sang respectives dans le mélange. La fraction volumique de sang dans le milieu est dénotée  $f_{sang}$ , la fraction volumique de l'eau est alors  $f_{eau} = 1 - f_{sang}$ . On calcule la densité de la solution :

$$\rho_{sol} = \rho_{eau}(1 - f_{sang}) + \rho_{sang}f_{sang}, \quad (3.1)$$

soit

$$\rho_{sol} = \rho_{eau} + f_{sang}(\rho_{sang} - \rho_{eau}). \quad (3.2)$$

La vitesse du son dans un mélange se calcule de la manière suivante en fonction des propriétés de chacun des deux composants du mélange [43] :

$$c_s = \sqrt{\frac{K_{eau}K_{sang}}{(f_{sang}K_{eau} + (1 - f_{sang})K_{sang})\rho_{sol}}} \quad (3.3)$$

avec  $K_{eau}$  et  $K_{sang}$  les modules de Bulk de l'eau et du sang. On réécrit finalement :

$$c_s = \sqrt{\frac{K_{eau}K_{sang}}{(f_{sang}K_{sang} + (1 - f_{sang})K_{sang})(\rho_{eau} + f_{sang}(\rho_{sang} - \rho_{eau}))}} \quad (3.4)$$

### 3.1.2 Absorption dans le mélange

Le coefficient d'absorption dans le mélange est la somme des coefficients d'absorption des composants du mélange. On considère que l'absorption du sang est uniquement causée par l'hémoglobine. L'absorption dans le milieu vérifie alors la relation suivante :

$$\mu_a(\lambda) = 2.303 \cdot [Hb]_{sol} \cdot \alpha_{Hb}(\lambda) + 2.303 \cdot [Eau]_{sol} \cdot \alpha_{eau}(\lambda) \quad (3.5)$$

où  $[.]_{sol}$  est la concentration totale du composant dans la solution, et les  $\alpha(\lambda)$  sont les coefficients d'extinction molaire de chaque composant. Nous allons considérer que la quantité d'eau dans le mélange est constante. En effet, comme nous considérons à la fois l'eau ajoutée dans le mélange et l'eau présente dans le sang, cette approximation est valable. Par ailleurs, l'absorption de l'eau est très faible par rapport à l'absorption de l'hémoglobine, la quantité d'eau totale considérée n'a donc pas d'incidence importante sur le coefficient d'absorption calculé. Le coefficient d'absorption total peut alors être réécrit :

$$\mu_a(\lambda) = 2.303 \cdot [Hb]_{sol} \cdot \alpha_{Hb}(\lambda) + \mu_a^{eau}(\lambda) \quad (3.6)$$

La valeur du terme  $\mu_a^{eau}(\lambda)$  est considéré comme étant celle du coefficient d'absorption de l'eau pure. On peut réécrire la concentration en hémoglobine comme une fonction de la fraction volumique de sang. La concentration en hémoglobine dans le sang est en effet considérée comme constante et valant  $[Hb]_{sang} = 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ mol/L}$ .

L'absorption devient alors :

$$\mu_a(\lambda) = 2.303 \cdot [Hb]_{sang} \cdot f_{sang} \cdot \alpha_{Hb}(\lambda) + \mu_a^{eau}(\lambda) \quad (3.7)$$

On choisit  $\lambda$  dans le proche infrarouge : on a alors  $\mu_a^{water}(\lambda) = 10^{-5} m^{-1}$ , ce qui permet de réécrire l'expression précédente avec des valeurs numériques.

$$\mu_a = 5.3 f_{sang} + \mu_a^{eau} \quad (3.8)$$

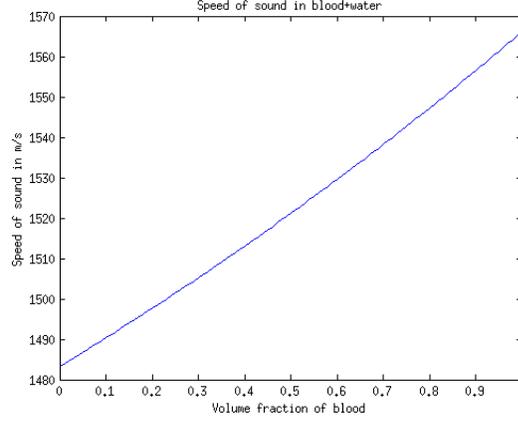
On veut maintenant remplacer le terme en  $f_{sang}$  en le réécrivant en fonction du coefficient d'absorption :

$$f_{sang} = \frac{\mu_a - \mu_a^{eau}}{5.3} = \frac{\mu_a - \mu_a^{eau}}{a} \quad (3.9)$$

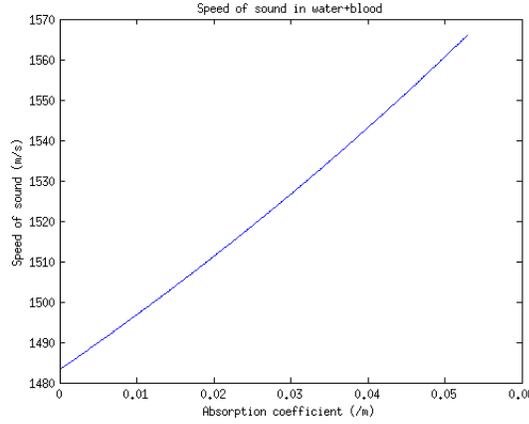
Ce qui donne finalement l'expression suivante pour la vitesse acoustique dans le mélange de sang et d'eau :

$$c_s = \sqrt{\frac{K_{eau} K_{sang}}{\left(\frac{\mu_a - \mu_a^{eau}}{a} K_{eau} + \left(1 - \frac{\mu_a - \mu_a^{eau}}{a}\right) K_{sang}\right) (\rho_{eau} + \frac{\mu_a - \mu_a^{eau}}{a} (\rho_{sang} - \rho_{eau}))}} \quad (3.10)$$

On peut alors à partir de cette expression tracer les valeurs de la vitesse acoustique tout d'abord en fonction de la fraction volumique de sang, puis directement en fonction du coefficient d'absorption (Figure 3.1).



(a) Vitesse acoustique en fonction de la fraction volumique de sang



(b) Vitesse acoustique en fonction de l'absorption

FIGURE 3.1 – Valeurs de la vitesse acoustique dans un mélange de sang et d'eau.

### 3.1.3 Approximation de la vitesse acoustique

Nous pouvons maintenant établir la relation entre l'absorption optique et la vitesse acoustique. Dans l'équation de propagation des ondes, la vitesse acoustique apparaît sous la forme  $\frac{1}{c_s^2}$ ,

$$\frac{1}{c_s^2} = \frac{(f_{sang}K_{eau} + (1 - f_{eau})K_{sang})(\rho_{eau} + f_{sang}(\rho_{sang} - \rho_{eau}))}{K_{eau}K_{sang}}. \quad (3.11)$$

On peut la réécrire sous cette forme :

$$\frac{1}{c_s^2} = A(\mu_a - \mu_a^{eau})^2 + B(\mu_a - \mu_a^{eau}) + C, \quad (3.12)$$

avec

$$A = \frac{(K_{eau} - K_{sang})(\rho_{sang} - \rho_{eau})}{K_{eau}K_{sang}a^2},$$

$$B = \frac{K_{eau}\rho_{eau} - K_{sang}\rho_{eau} + (\rho_{sang} - \rho_{eau})K_{sang}}{K_{eau}K_{sang}a},$$

$$C = \frac{\rho_{eau}}{K_{eau}}.$$

et en prenant les valeurs numériques de chacun des termes :

$$A = -1.49 \cdot 10^{-10} \text{ s}^2$$

$$B = -8.05 \cdot 10^{-9} \text{ m}^{-1}\text{s}^2.$$

Le terme  $C$  correspond à la valeur de la vitesse acoustique dans l'eau uniquement. En effet, on remarque qu'en prenant  $\mu_a = \mu_a^{eau}$  dans l'expression de la vitesse du son établie précédemment, on obtient :

$$\frac{1}{c_s^2} = C = \frac{\rho_{eau}}{K_{eau}}$$

$$c_s = \sqrt{\frac{K_{eau}}{\rho_{eau}}} = c_{eau} = 1500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

On veut maintenant calculer la vitesse acoustique avec un développement de Taylor.

$$c_s = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{c_{eau}^2}(1 + (\mu_a - \mu_a^{eau})^2 Ac_{eau}^2 + (\mu_a - \mu_a^{eau}) Bc_{eau}^2)}} \quad (3.13)$$

$$= c_{eau}(1 + (\mu_a - \mu_a^{eau})^2 Ac_{eau}^2 + (\mu_a - \mu_a^{eau}) Bc_{eau}^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Comme

$$(\mu_a - \mu_a^{eau})^2 Ac_{eau}^2 \sim 10^{-2} \ll 1$$

et

$$(\mu_a - \mu_a^{eau}) Bc_{eau}^2 \sim 10^{-1} \ll 1$$

on a

$$(1 + (\mu_a - \mu_a^{eau})^2 Ac_{eau}^2 + (\mu_a - \mu_a^{eau}) Bc_{eau}^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}(\mu_a - \mu_a^{eau})^2 Ac_{eau}^2 - \frac{1}{2}(\mu_a - \mu_a^{eau}) Bc_{eau}^2$$

On néglige le terme en  $(\mu_a - \mu_a^{water})^2$  et on obtient finalement

$$\begin{aligned} c_s &= c_{eau} \left(1 - \frac{1}{2}(\mu_a - \mu_a^{eau}) B c_{eau}^2\right) \\ &= c_{eau} - \frac{1}{2}(\mu_a - \mu_a^{eau}) B c_{eau}^3 \\ &= c_{eau} + \varepsilon (\mu_a - \mu_a^{eau}). \end{aligned} \tag{3.14}$$

avec  $\varepsilon = \text{abs}\left(\frac{B c_{water}^3}{2}\right)$ .

Ce modèle permet donc d'obtenir une expression de la vitesse acoustique qui fait intervenir une correction par rapport à la vitesse de l'eau. Cette correction est exprimée en fonction du coefficient d'absorption du mélange, nous avons donc bien une relation entre la vitesse acoustique et l'absorption optique du milieu. Nous allons ensuite l'appliquer dans le cas d'un milieu constant par morceaux.

### 3.1.4 Expression de la vitesse dans un milieu constant par morceaux

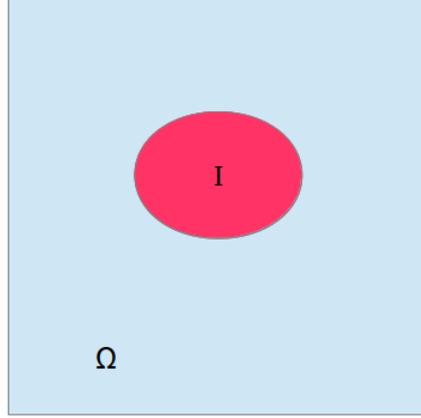
L'expression précédente a été obtenue par des considérations physiques, nous allons maintenant établir une relation du même type d'un point de vue mathématique pour un milieu constant par morceaux. D'un point de vue médical, cette approximation reste réaliste si on considère par exemple comme application la détection de tumeurs dans un tissu sain. Le tissu sain est le milieu connu et est considéré comme homogène d'un point de vue optique et acoustique. On suppose qu'à l'intérieur de ce tissu sain se trouve une tumeur cancéreuse dont on ignore la position, la taille, et les propriétés acoustiques et optiques. On sait cependant qu'un tissu cancéreux présente une vascularisation plus importante qu'un tissu sain, le coefficient d'absorption va donc être plus élevé du fait d'une quantité plus importante de sang [68]. Mathématiquement, on définit le milieu de la manière suivante : on considère un domaine  $\Omega$  et une inclusion  $I$  à l'intérieur de ce domaine telle que  $\bar{I} \subset \Omega$ . Ce milieu est représenté sur la Figure 3.2.

Tous les coefficients du problème, à savoir l'absorption  $\mu_a$ , la diffusion  $D$  et la vitesse acoustique  $c_s$  sont considérés constants par morceaux. Le coefficient de Grüneisen  $\Gamma$  est connu et égal à 1.

$$\mu_a(x) = \begin{cases} \mu_0 & \text{si } x \in \Omega \setminus I \\ \mu_1 & \text{si } x \in I \end{cases} \tag{3.15}$$

$$D(x) = \begin{cases} D_0 & \text{si } x \in \Omega \setminus I \\ D_1 & \text{si } x \in I \end{cases} \tag{3.16}$$

$$c_s(x) = \begin{cases} c_0 & \text{si } x \in \Omega \setminus I \\ c_1 & \text{si } x \in I \end{cases} \tag{3.17}$$

FIGURE 3.2 – Schéma du milieu constant par morceaux avec une inclusion  $I$ .

On introduit  $\chi_I$  la fonction caractéristique de l'inclusion  $I$  telle que :

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \Omega \setminus I \\ 1 & \text{si } x \in I \end{cases} \quad (3.18)$$

On cherche à établir une relation entre la vitesse acoustique et le coefficient d'absorption. On réécrit d'abord les coefficients  $\mu_a$  et  $c_s$  en fonction de  $\chi_I$

$$\mu_a(x) = \mu_0 + (\mu_1 - \mu_0)\chi_I(x), \quad (3.19)$$

$$c_s(x) = c_0 + (c_1 - c_0)\chi_I(x), \quad (3.20)$$

puis on exprime la vitesse en fonction du coefficient d'absorption

$$c_s(x) = c_0 + \frac{c_1 - c_0}{\mu_1 - \mu_0}(\mu_a(x) - \mu_0). \quad (3.21)$$

On pose

$$\varepsilon = \frac{c_1 - c_0}{\mu_1 - \mu_0}, \quad (3.22)$$

Dans les tissus biologiques, les variations de vitesse acoustique sont de l'ordre de 10%, alors que le coefficient d'absorption peut varier de manière beaucoup plus importante selon la quantité d'hémoglobine présente. On a donc  $\varepsilon \ll 1$ , ce qui correspond au modèle de vitesse déterminé dans la partie précédente. On considère alors que le milieu environnant est constitué uniquement d'eau et que le mélange d'eau et de sang est présent dans l'inclusion.

### 3.1.5 Utilisation de la correction de vitesse dans la reconstruction d'un milieu constant par morceaux

#### Résultat théorique

**Proposition** Considérons un milieu constant par morceaux présentant une inclusion  $I$  (Figure 3.2), un coefficient de Grüneisen  $\Gamma = 1$  et des coefficients  $\mu_a$ ,  $D$  et  $c_s$  tels que

$$\begin{aligned}\mu_a(x) &= \mu_0 + (\mu_1 - \mu_0)\chi_I(x), \\ D(x) &= D_0 + (D_1 - D_0)\chi_I(x), \\ c_s(x) &= c_0 + (c_1 - c_0)\chi_I(x).\end{aligned}$$

Les trois coefficients  $\mu_a$ ,  $D$  et  $c_s$  sont alors déterminés de manière unique à partir de la connaissance du produit  $\mu(x)u(x)$  pour  $x \in \Omega$ .

#### Approximation de la vitesse acoustique

Nous avons établi précédemment une relation entre la vitesse acoustique et le coefficient d'absorption

$$\begin{aligned}c_s &= c_{eau} + \varepsilon(\mu_a - \mu_a^{eau}) \\ &= c_0 + \varepsilon(\mu_a - \mu_0)\end{aligned}\tag{3.23}$$

En prenant le carré de la vitesse et en ne gardant que les termes au premier ordre en  $\varepsilon$  on obtient

$$c_s^2 = c_0^2 + 2\varepsilon c_0(\mu_a - \mu_0).\tag{3.24}$$

Dans le milieu  $\Omega$  constant par morceaux, la vitesse  $c_s$  présente les mêmes discontinuités que le coefficient d'absorption  $\mu_a$ . Or, la pression initiale générée dans le milieu  $\Omega$  se calcule de la manière suivante :

$$\begin{aligned}F(x) &= p(x, 0) \\ &= \Gamma(x)\mu_a(x)u(x) \\ &= \mu_a(x)u(x).\end{aligned}\tag{3.25}$$

La pression initiale  $F$  est donc continue par morceaux et présente les mêmes discontinuités que le coefficient d'absorption  $\mu_a$  et donc que la vitesse acoustique  $c_s$ . Nous souhaitons garder dans l'approximation les discontinuités de la vitesse acoustique et nous allons donc en première approche écrire la vitesse acoustique comme une fonction de la pression initiale  $F$  :

$$c_s^2(x) = c_0^2 + \varepsilon F(x).\tag{3.26}$$

## 3.2 Correction de la pression acoustique générée

A partir de cette approximation de la vitesse acoustique, on peut effectuer une correction de la pression générée  $p(x, t)$  par une linéarisation du problème.

La pression s'écrit alors comme la somme d'un terme  $p_0(x, t)$  correspondant à la pression générée avec une vitesse constante égale à celle de l'eau  $c_0$  et d'un terme  $\varepsilon p_1(x, t)$  correspondant à la correction de pression induite par la correction de vitesse.

$$p(x, t) = p_0(x, t) + \varepsilon p_1(x, t), \quad (3.27)$$

avec  $p_0$  et  $p_1$  qui vérifient les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 p_0(x, t)}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta p_0(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \cup \Omega^c \times [0, T] \\ p_0(x, 0) = F(x), \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial p_0(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \end{array} \right. \quad (3.28)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 p_1(x, t)}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta p_1(x, t) = F(x) \Delta p_0(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \cup \Omega^c \times [0, T] \\ p_1(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial p_1(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \end{array} \right. \quad (3.29)$$

### 3.2.1 Amélioration de l'erreur $L^2$

La reconstruction photoacoustique s'effectue à partir des données de pression sur le bord de  $\Omega$  mesurées pendant un temps  $T$ . Ces mesures sont appelées  $p_{obs}(x, t)$  pour  $x \in \partial\Omega$  et  $t \in [0, T]$ . Nous allons comparer ces mesures acoustiques avec celles générées par une vitesse acoustique constante ainsi qu'avec le modèle de pression corrigé précédemment. Nous allons ainsi déterminer l'amélioration qu'apporte notre modèle pour la génération de la pression pour différentes valeurs de  $\varepsilon$ . Les valeurs de  $p_{obs}$  sont générées numériquement avec la vraie vitesse  $c_s(x) = c_0 + (c_1 - c_0)\chi_I(x)$ , et nous calculons d'une part l'erreur  $L^2$  entre  $p_{obs}$  et  $p_0$  et d'autre part l'erreur entre  $p_{obs}$  et  $p_0 + \varepsilon p_1$ .

La figure 3.3 présente en rouge l'erreur  $L_2$  entre les données  $p_{obs}$  et la pression générée à vitesse constante  $p_0$  et en bleu l'erreur  $L_2$  entre les données  $p_{obs}$  et la pression corrigée par le modèle  $p_0 + \varepsilon p_1$ , en fonction des différentes valeurs de  $\varepsilon$ . Les valeurs choisies ici varient entre 0 et 0.4 ce qui correspond à une variation de vitesse acoustique de 0 à 10% par rapport à la vitesse de l'eau  $c_0$  dans l'inclusion. On remarque donc que le modèle corrigé de pression améliore la simulation des données sur le bord, pour  $\varepsilon = 0.4$  par exemple, l'erreur  $L^2$  passe de 0.16 à 0.12. L'approximation de la vitesse acoustique permet donc d'améliorer le modèle de la propagation acoustique.

## 3.3 Reconstruction numérique : première méthode

On cherche à résoudre le problème inverse photoacoustique en entier en faisant intervenir ce modèle de correction de la vitesse acoustique. Les deux inversions sont réalisées successivement.

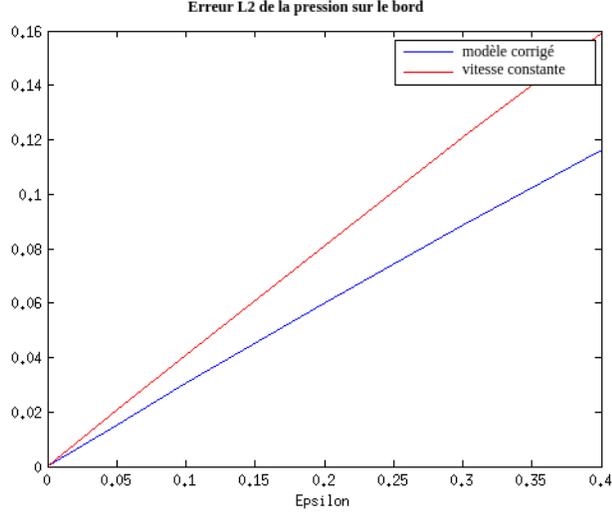


FIGURE 3.3 – Erreur  $L^2$  entre les données et la pression générée par le modèle.

### 3.3.1 Inversion acoustique avec correction de vitesse

Pour reconstruire la pression initiale  $F$  dans  $\Omega$  à partir des mesures  $p_{obs}$  de pression sur le bord, nous allons utiliser une méthode de minimisation par gradient conjugué. Nous cherchons donc à minimiser la fonctionnelle  $J(F)$  définie par :

$$J(F) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\partial\Omega} (p_0(x, t) + \varepsilon p_1(x, t) - p_{obs})^2 dt dx. \quad (3.30)$$

La dérivée de  $J$  par rapport à  $F$  est :

$$DJ(F) = \int_0^T \int_{\partial\Omega} (\hat{p}_0(x, t) + \varepsilon \hat{p}_1(x, t))(p_0(x, t) + \varepsilon p_1(x, t) - p_{obs}) dt dx. \quad (3.31)$$

$\hat{p}_0$  et  $\hat{p}_1$  sont les dérivées de  $p_0$  et  $p_1$  par rapport à  $F$ . Elles vérifient les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \hat{p}_0(x, t)}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \hat{p}_0(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \cup \Omega^c \times [0, T] \\ \hat{p}_0(x, T) = \delta F, \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial \hat{p}_0(x, T)}{\partial t} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \end{array} \right. \quad (3.32)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \hat{p}_1(x, t)}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \hat{p}_1(x, t) = \delta F \Delta p_0(x, t) + F \Delta \hat{p}_0(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \cup \Omega^c \times [0, T] \\ \hat{p}_1(x, T) = 0, \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial \hat{p}_1(x, T)}{\partial t} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \end{array} \right. \quad (3.33)$$

Pour calculer le gradient de la fonction  $J$  nous allons utiliser la méthode de l'adjoint. Le modèle adjoint de ces équations se détermine en effectuant une intégration par parties avec deux fonctions  $q_0$  pour  $\hat{p}_0$  et  $q_1$  pour  $\hat{p}_1$ . Ces fonctions sont les solutions respectives des systèmes d'équations suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 q_0(x, t)}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta q_0(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \cup \Omega^c \times [0, T] \\ q_0(x, T) = 0, \quad x \in \Omega \\ [q_0] = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T] \\ \left[ \frac{\partial q_0(x, t)}{\partial \nu} \right] = p_0(x, t) + \varepsilon p_1(x, t) - p_{obs}, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T] \\ \frac{\partial q_1(x, T)}{\partial t} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \end{array} \right. \quad (3.34)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 q_1(x, t)}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta q_1(x, t) = F \frac{\partial^2 q_0}{\partial t^2}(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \cup \Omega^c \times [0, T] \\ q_1(x, T) = 0, \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial q_1(x, T)}{\partial t} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \end{array} \right. \quad (3.35)$$

Le gradient de  $J$  par rapport à  $F$  peut désormais être calculé à partir des précédentes équations.

$$\begin{aligned} \langle DJ, \delta F \rangle &= \int_{\partial\Omega} \int_0^T DJ \cdot \delta F = \int_{\partial\Omega} \int_0^T (\hat{p}_0(x, t) + \varepsilon \hat{p}_1(x, t)) (p_0(x, t) + \varepsilon p_1(x, t) - p_{obs}) dx dt \\ &= \int_{\partial\Omega} \int_0^T (\hat{p}_0(x, t) + \varepsilon \hat{p}_1(x, t)) \left[ \frac{\partial q_0(x, t)}{\partial \nu} \right] dx dt \\ &= \int_{\Omega} \int_0^T (\Delta(\hat{p}_0 + \varepsilon \hat{p}_1) q_0 - (\hat{p}_0 + \varepsilon \hat{p}_1) \Delta q_0) dx dt \\ &= \frac{1}{c_0^2} \int_{\Omega} \int_0^T (\partial_{tt}(\hat{p}_0 + \varepsilon \hat{p}_1) q_0 - \partial_{tt} q_0 (\hat{p}_0 + \varepsilon \hat{p}_1)) dx dt - \frac{\varepsilon}{c_0^2} \int_{\Omega} \int_0^T (\delta F \Delta p_0 + F \Delta \hat{p}_0) q_0 dx dt \\ &= -\frac{1}{c_0^2} \int_{\Omega} [\partial_t q_0 (\hat{p}_0 + \varepsilon \hat{p}_1)]_0^T - \frac{\varepsilon}{c_0^2} \int_{\Omega} \int_0^T (\delta F \Delta p_0 + F \Delta \hat{p}_0) q_0 dx dt \\ &= \int_{\Omega} \delta F \left( -\frac{\varepsilon}{c_0^2} \int_0^T \Delta p_0 \cdot q_0 + \frac{1}{c_0^2} \partial_t q_0(x, 0) \right) dx - \frac{\varepsilon}{c_0^4} \int_0^T \int_{\Omega} F \partial_{tt} \hat{p}_0 \cdot q_0 dx dt. \end{aligned}$$

On calcule le dernier terme :

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{c_0^4} \int_0^T \int_{\Omega} F \partial_{tt} \hat{p}_0 \cdot q_0 dx dt &= \frac{\varepsilon}{c_0^4} \int_{\Omega} F [\partial_t \hat{p}_0 \cdot q_0 - \hat{p}_0 \partial_t q_0]_0^T - \frac{\varepsilon}{c_0^4} \int_0^T \int_{\Omega} F \hat{p}_0 \partial_{tt} q_0 dx dt \\
&= -\frac{\varepsilon}{c_0^4} \int_{\Omega} \delta F \cdot F \partial_t q_0(x, 0) dx dt - \frac{\varepsilon}{c_0^4} \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_{tt} q_1 - c_0^2 \Delta q_1) \hat{p}_0 dt dx \\
&= -\frac{\varepsilon}{c_0^4} \int_{\Omega} \delta F \cdot F \partial_t q_0(x, 0) dx dt - \frac{\varepsilon}{c_0^4} \int_{\Omega} [\partial_t q_1 \hat{p}_0 - q_1 \partial_t \hat{p}_0]_0^T dx \\
&= \frac{\varepsilon}{c_0^4} \int_{\Omega} \delta F (-F \partial_t q_0(x, 0) dx dt + \partial_t q_2(x, 0)) dx.
\end{aligned}$$

On obtient finalement l'expression du gradient de  $J$  par rapport à  $F$  :

$$\langle DJ, \delta F \rangle = \int_{\Omega} \delta F \left( \frac{1}{c_0^2} \partial_t q_0(x, 0) - \frac{\varepsilon}{c_0^2} \int_0^T \Delta p_0 \cdot q_0 dt + \frac{\varepsilon}{c_0^4} \partial_t q_2(x, 0) - \frac{\varepsilon}{c_0^4} F \partial_t q_0(x, 0) \right) dx.$$

L'expression du gradient de  $J$  permet donc d'utiliser la méthode du gradient conjugué et d'obtenir une reconstruction de  $F$ .

### Méthode de minimisation

La méthode de Newton est une méthode itérative qui permet de trouver les zéros d'une fonction donnée grâce à sa dérivée. Considérons une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . La valeur de  $f(x_k)$  est approchée par sa tangente :

$$y = f'(x_k)(x - x_k) + f(x_k). \quad (3.36)$$

En prenant  $y$  à zéro, la valeur correspondante de  $x$  est notée  $x_{k+1}$ . On a alors

$$0 = f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + f(x_k), x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (3.37)$$

En partant d'une valeur initiale  $x_0$ , les approximations successives sont calculées de manière itérative.

On peut généraliser cette méthode avec une fonction différentiable  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  :

$$x_{k+1} = x_k - \nabla f(x_k)^{-1} f(x_k).$$

En pratique, le gradient de  $f$  n'est pas toujours inversible. Dans ce cas on utilise plutôt la méthode du gradient conjugué. Cette méthode met en oeuvre le conjugué du gradient plutôt que son inverse. Les itérations successives sont calculées avec la formule de récurrence

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k. \quad (3.38)$$

$\alpha_k$  est un coefficient positif calculé à chaque itération par une recherche linéaire. Le calcul de  $\alpha_k$  permet de réduire le nombre d'itérations de la minimisation, mais il ne doit cependant pas prendre trop de temps. Le meilleur choix

est de prendre la valeur qui minimise la fonction  $\Phi(\alpha) = f(x_k + \alpha d_k)$ , mais il nécessite en pratique un trop grand nombre d'évaluations de la fonction. On utilise souvent la condition de Wolfe, avec  $c \in [0, 1]$  :

$$f(x_k + \alpha d_k) \leq f(x_k) + c\alpha \nabla f_k^T d_k. \quad (3.39)$$

Une des méthodes utilisées pour trouver un  $\alpha$  vérifiant cette dernière condition est de tester un ensemble de valeurs de  $\alpha$  et de stopper la recherche quand la condition est vérifiée.

$d_k$  est la direction de recherche de l'algorithme :

$$\begin{aligned} d_{k+1} &= -\nabla f(x_{k+1})^T + \beta_k d_k, \\ d_0 &= -\nabla f(x_0)^T. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Différents choix de  $\beta_k$  sont possibles, et correspondent à différentes méthodes de gradient conjugué.

### Initialisation

Le terme d'initialisation de la minimisation par gradients conjugués est obtenu en calculant une première reconstruction de  $F$  par la méthode du retournement temporel. On suppose alors la vitesse connue et égale à la constante  $c_0$  du milieu environnant. La minimisation permettra ensuite de corriger cette valeur grâce au modèle de correction de la vitesse et de la pression.

### 3.3.2 Inversion optique

La première inversion donne donc une reconstruction de la pression initiale  $F$ . Pour pouvoir effectuer l'inversion il faut disposer de deux pressions initiales correspondant à deux illuminations différentes du laser sur le bord du domaine. A partir de ces deux données reconstruites, nous allons chercher à identifier le contour de l'inclusion par segmentation d'image. En effet, la pression initiale  $F$  présente les mêmes discontinuités que le coefficient d'absorption  $\mu_a$ . Une fois le contour identifié, il ne reste qu'à retrouver les valeurs des coefficients d'absorption et de diffusion  $\mu_1$  et  $D_1$  à l'intérieur de l'inclusion. On utilise une méthode de minimisation sur les deux pressions initiales reconstruites.

### Inconvénients

L'inconvénient majeur de cette méthode est qu'elle va induire une erreur importante sur les coefficients optiques. En effet, la reconstruction acoustique va générer une erreur sur le contour de l'inclusion, et elle va être conservée dans la segmentation d'image. Une erreur même faible sur le contour de l'inclusion va générer une erreur plus importante sur les coefficients optiques. Cette méthode n'est donc pas très adaptée à la résolution du problème inverse photoacoustique dans son intégralité.

### 3.4 Reconstruction numérique : deuxième méthode

Nous présentons dans cette section une autre méthode de résolution du problème inverse optique, en supposant l'inversion acoustique effectuée et la pression initiale connue. Cette méthode ne fait donc pas intervenir le modèle de correction de la vitesse dans la reconstruction, il s'agit d'une méthode de reconstruction des coefficients optiques pour un milieu constant par morceaux.

On considère donc un milieu constant par morceaux, avec une inclusion et des coefficients optiques que l'on peut écrire de la manière suivante

$$\begin{aligned}\mu_a(x) &= \mu_0 + (\mu_1 - \mu_0)\chi_I \\ D(x) &= D_0 + (D_1 - D_0)\chi_I\end{aligned}\tag{3.41}$$

On cherche ensuite à écrire le coefficient de diffusion  $D$  en fonction du coefficient d'absorption  $\mu_a$  afin de le remplacer dans l'équation de diffusion. Cela est possible en exprimant la fonction caractéristique de l'inclusion  $\chi_I$  en fonction du coefficient d'absorption puis de la remplacer dans l'expression du coefficient de diffusion.

$$\chi_I(x) = \frac{\frac{1}{\mu(x)} - \frac{1}{\mu_0}}{\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_0}}\tag{3.42}$$

ce qui permet d'obtenir l'expression de  $D$  suivante en introduisant le coefficient  $\beta$

$$D(x) = D_0 + \beta\left(\frac{1}{\mu(x)} - \frac{1}{\mu_0}\right).\tag{3.43}$$

On suppose que la quantité  $F = \mu_a u$  correspondant à la pression initiale dans le domaine  $\Omega$  est connue par la première inversion. La reconstruction des coefficients optiques revient donc à résoudre l'équation suivante pour  $u(x) > 0$  dans  $\overline{\Omega}$  :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \left( (D_0 + \beta \left( \frac{u(x)}{F(x)} - \frac{1}{\mu_0} \right)) u(x) \right) = F(x) & x \in \Omega \\ u(x) = g(x) & x \in \partial\Omega. \end{cases}\tag{3.44}$$

## 3.5 Résultats numériques

### 3.5.1 Simulation du problème direct

Le domaine  $\Omega$  choisi dans les simulations numériques est le carré  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ , les solutions de l'équation de diffusion et l'équation d'onde sont calculées avec une méthode de différences finies.

On considère dans les simulations que l'illumination  $g$  est strictement positive sur  $\partial\Omega$ . De cette manière, la fluence  $u$  sera également strictement positive. On la calcule en résolvant l'équation par une méthode de différences finies avec

une condition de Dirichlet sur le bord. La pression initiale est alors le produit de la fluence  $u$  et du coefficient d'absorption  $\mu_a$  le coefficient de Grüneisen  $\Gamma$  étant considéré connu et égal à 1.

Pour la propagation de l'onde acoustique, on utilise également des différences finies avec un schéma centré. On a la discrétisation suivante au point  $(i, j)$  et au temps  $k$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 p(i, j, k)}{\partial x^2} = \frac{p(i-1, j, k) - 2p(i, j, k) + p(i+1, j, k)}{dx^2} \\ \frac{\partial^2 p(i, j, k)}{\partial y^2} = \frac{p(i, j-1, k) - 2p(i, j, k) + p(i, j+1, k)}{dy^2} \\ \frac{\partial^2 p(i, j, k)}{\partial t^2} = \frac{p(i, j, k-1) - 2p(i, j, k) + p(i, j, k+1)}{dt^2} \end{cases} \quad (3.45)$$

On choisit comme domaine de calcul un carré  $[-L, L] \times [-L, L]$  plus grand que le domaine  $\Omega$ , de manière à ce que l'onde acoustique au temps  $T$  correspondant à la fin de l'acquisition ne soit pas arrivée jusqu'au bord. On a ainsi une condition  $p = 0$  sur le bord du domaine de calcul. Ces domaines sont représentés sur la figure 3.4.

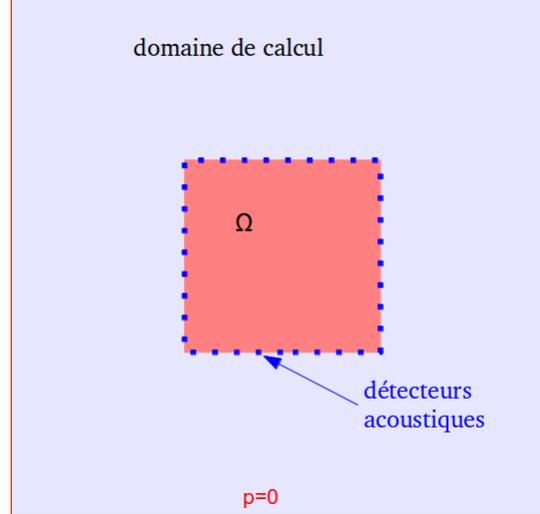


FIGURE 3.4 – Pression initiale dans le domaine  $\Omega$ .

On considère également qu'on a des données complètes, c'est à dire mesurées sur tout le bord du domaine  $\Omega$ . En pratique on récupère les mesures en chaque point du maillage.

### 3.5.2 Première méthode

#### Correction de la vitesse

La première méthode de reconstruction avec correction de la vitesse a été testée numériquement sur une donnée continue de pression initiale. On cherche à éviter les problèmes numériques de propagation des singularités mais on veut tout de même évaluer l'amélioration obtenue sur la reconstruction en ajoutant le modèle correction de la vitesse développé dans ce chapitre.

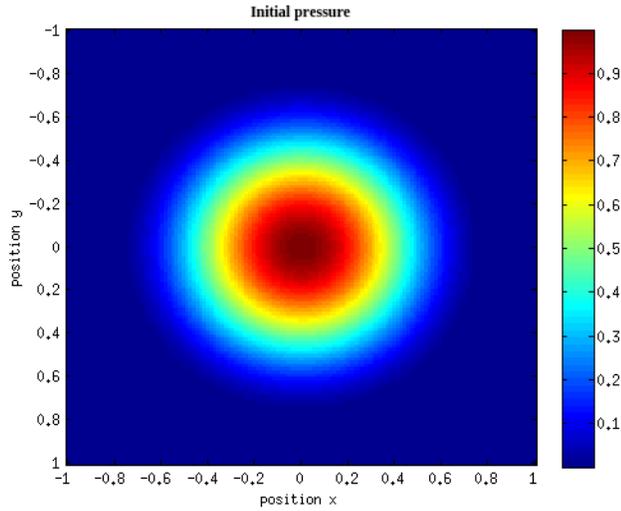


FIGURE 3.5 – Pression initiale dans le domaine  $\Omega$ .

La variation de vitesse acoustique par rapport à la vitesse de référence  $c_0$  varie dans le milieu entre 0 et 10%. Ce pourcentage correspond à une valeur de  $\varepsilon$  de 0.4. La vitesse choisie est une fonction régulière qui a la même forme que la pression initiale  $F$ .

La méthode de reconstruction se divise en différentes étapes :

1. Retournement temporel à vitesse constante  $c(x) = c_0$
2. Première estimation de la pression initiale  $F$
3. Minimisation avec correction de la vitesse
4. Amélioration de la reconstruction de la pression initiale

Le tableau 3.6 donne les différentes erreurs obtenues lors des étapes de reconstruction : l'erreur obtenue pour un retournement temporel avec la vitesse exacte non constante dans le domaine, puis l'erreur obtenue pour un retournement temporel à vitesse constante et enfin l'erreur obtenue après la dernière étape de minimisation. On remarque donc que par rapport au retournement

	Erreur $L^2$
RT vraie vitesse	0.0373
RT vitesse constante	0.0737
+ minimisation	0.0617

FIGURE 3.6 – Erreurs  $L^2$  de reconstruction de la pression initiale

temporel à vitesse constante, on passe d'une erreur de 0.0737 à une erreur de 0.0617. La reconstruction est sensiblement améliorée, mais le modèle développé pour la correction présente de nombreuses approximations ce qui ne permet pas d'obtenir une amélioration plus grande.

### Reconstruction des coefficients optiques

Nous cherchons ici à tester la méthode de reconstruction optique pour des coefficients constants par morceaux. Comme une petite erreur sur la reconstruction du contour de l'inclusion génère une erreur trop importante sur la reconstruction des coefficients optiques, nous partons ici de données de pression initiale exactes, c'est à dire du produit de la solution de l'équation de diffusion et du coefficient d'absorption. On considère toujours le coefficient de Grüneisen connu et égal à 1.

On dispose de deux données de pression initiales correspondant à deux illuminations laser pour effectuer la reconstruction. Les deux valeurs de  $g$  sur le bord de  $\Omega$ ,  $g_1$  et  $g_2$  sont choisies telles que

$$\begin{cases} g_1(x, y) = x + 4 \\ g_2(x, y) = y + 4 \end{cases} \quad (3.46)$$

et génèrent respectivement des fluences  $u_1$  et  $u_2$  dans le milieu. Les deux données de pression initiales sont alors  $F_1^{obs}$  et  $F_2^{obs}$ , avec

$$\begin{aligned} F_1^{obs} &= \mu_a u_1 \\ F_2^{obs} &= \mu_a u_2 \end{aligned} \quad (3.47)$$

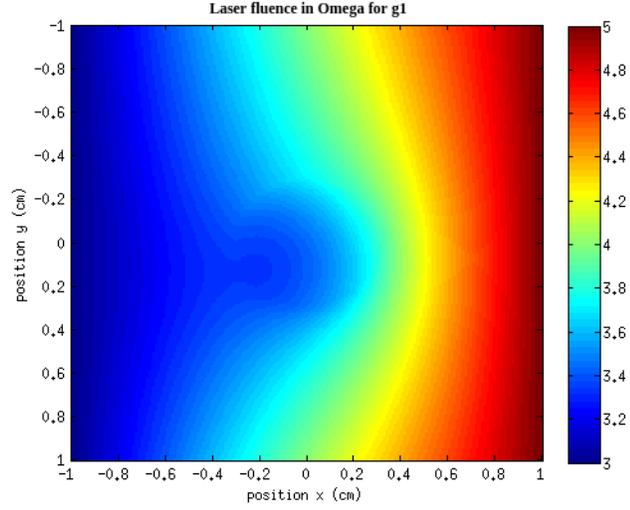
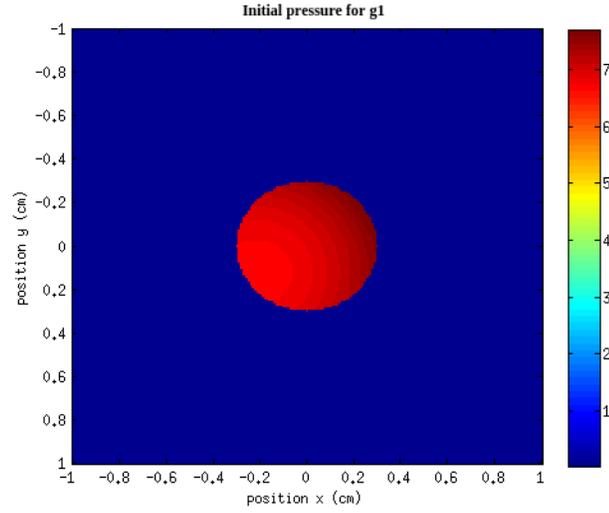
La fluence du laser  $u_1$  calculée pour  $g_1$  est représentée sur la figure 3.7, et la pression initiale  $F_1^{obs}$  est représentée sur la figure 5.24.

On souhaite minimiser la fonctionnelle  $J$  suivante par rapport à  $\mu_1$  et à  $D_1$  les valeurs d'absorption et de diffusion dans l'inclusion :

$$J(\mu_a, D) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (F_1(x) - F_1^{obs}(x))^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (F_2(x) - F_2^{obs}(x))^2 dx. \quad (3.48)$$

Calculons le gradient de la fonctionnelle  $J$  par rapport aux coefficients  $\mu_a$  et  $D$  par la méthode de l'adjoint. On le note  $DJ(\mu_a, D)$  et on peut écrire

$$DJ(\mu_a, D) = DJ^1(\mu_a, D) + DJ^2(\mu_a, D) \quad (3.49)$$

FIGURE 3.7 – Fluence calculée pour l'illumination  $g_1$ .FIGURE 3.8 – Pression initiale calculée pour l'illumination  $g_1$ .

les indices 1 et 2 correspondant à chacune des deux données de pression. Détaillons le calcul pour le cas général  $J(\mu_a, D) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (F(x) - F^{obs}(x))^2 dx$ .

$$DJ(\mu_a, D) = \int_{\Omega} \hat{F}(F - F^{obs}) dx. \quad (3.50)$$

avec  $\hat{F} = F(\mu_a + \delta\mu, D + \delta D) = \Gamma\mu_a\hat{u}(x) + \Gamma u(x)$ .

Pour une illumination  $g$  sur  $\partial\Omega$  la fluence du laser dans le milieu est la solution de l'équation de diffusion suivante :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot D(x)\nabla u(x) + \mu_a(x)u(x) = 0, & x \in \Omega \\ u(x) = g(x) & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.51)$$

La dérivée  $\hat{u}(x)$  de  $u(x)$  par rapport à  $\mu_a$  et  $D$  vérifie :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot D(x)\nabla \hat{u}(x) + \mu_a(x)\hat{u}(x) = -\delta\mu u + \nabla \cdot \delta D \nabla u, & x \in \Omega \\ \hat{u}(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.52)$$

L'adjoint  $q(x)$  de  $u(x)$  est alors la solution de :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot D(x)\nabla q(x) + \mu_a(x)q(x) = F - F^{obs}, & x \in \Omega \\ q(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.53)$$

On calcule maintenant le gradient de  $J$  par rapport à  $\mu_a$  et  $D$

$$\begin{aligned} \langle DJ, \delta\mu_a \rangle &= \int_{\Omega} \hat{F}_{\mu}(F - F^{obs}) dx \\ &= \int_{\Omega} (\Gamma\mu_a\hat{u}_{\mu}(x) + \Gamma u(x))(-\nabla \cdot D(x)\nabla q(x) + \mu_a(x)q(x)) dx \\ &= \int_{\Omega} \Gamma\mu_a q(x)(-\nabla \cdot D(x)\nabla \hat{u}(x) + \mu_a(x)\hat{u}(x)) dx \\ &= - \int_{\Omega} \delta\mu \Gamma\mu_a q(x) u(x) dx \\ &= -\mu_1 \int_{\chi_I} \delta\mu \Gamma q(x) u(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle DJ, \delta D \rangle &= \int_{\Omega} \hat{F}_D(F - F^{obs}) dx \\ &= \int_{\Omega} (\Gamma\mu_a\hat{u}_D(x))(-\nabla \cdot D(x)\nabla q(x) + \mu_a(x)q(x)) dx \\ &= \int_{\Omega} \Gamma\mu_a q(x)(-\nabla \cdot D(x)\nabla \hat{u}(x) + \mu_a(x)\hat{u}(x)) dx \\ &= \int_{\Omega} (\nabla \cdot \delta D \nabla u(x)) \Gamma\mu_a q(x) dx \\ &= \int_{\Omega} \delta D \Gamma\mu_a \nabla q(x) \cdot \nabla u(x) dx \\ &= \mu_1 \int_{\chi_I} \delta D \Gamma \nabla q(x) \cdot \nabla u(x) dx. \end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\begin{aligned} D_\mu J &= -\mu_1 \int_{\chi_I} \Gamma q(x) u(x) dx, \\ D_D J &= \mu_1 \int_{\chi_I} \Gamma \nabla q(x) \cdot \nabla u(x) dx. \end{aligned} \tag{3.54}$$

On peut alors effectuer la minimisation par gradients conjugués grâce à la connaissance de ces gradients.

En partant de données de pression initiale exactes, on parvient à identifier parfaitement le contour de l'inclusion. Les valeurs d'absorption et de diffusion du milieu environnant  $D_0$  et  $\mu_0$ . On cherche donc à retrouver les valeurs de  $D_1$  et  $\mu_1$  à l'intérieur de l'inclusion. La reconstruction est effectuée pour différents pourcentages de bruit (entre 0 et 10%).

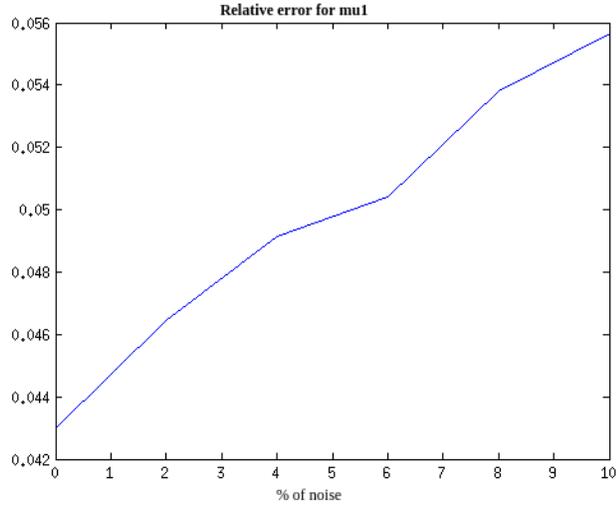


FIGURE 3.9 – Erreur de reconstruction de  $\mu_1$  pour différents pourcentages de bruit.

Les figures 3.9 et 3.10 représentent respectivement les erreurs obtenues sur les coefficients  $\mu_a$  et  $D$ . Les erreurs obtenues pour  $\mu_a$  sont autour de 0.05 alors que les erreurs obtenues pour  $D$  sont autour de 0.7.

On représente maintenant sur la figure 3.11 la courbe des erreurs  $L^2$  sur  $\mu_a(x)$  et  $D(x)$  dans tout le domaine  $\Omega$  avec les valeurs de  $D_1$  et  $\mu_1$  obtenues précédemment.

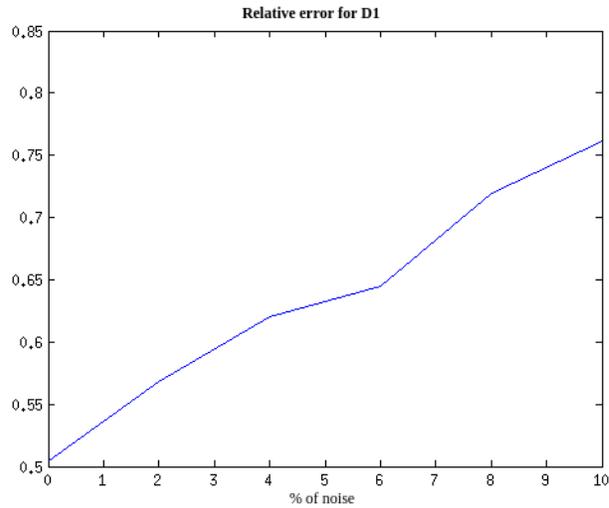


FIGURE 3.10 – Erreur de reconstruction de  $D_1$  pour différents pourcentages de bruit.

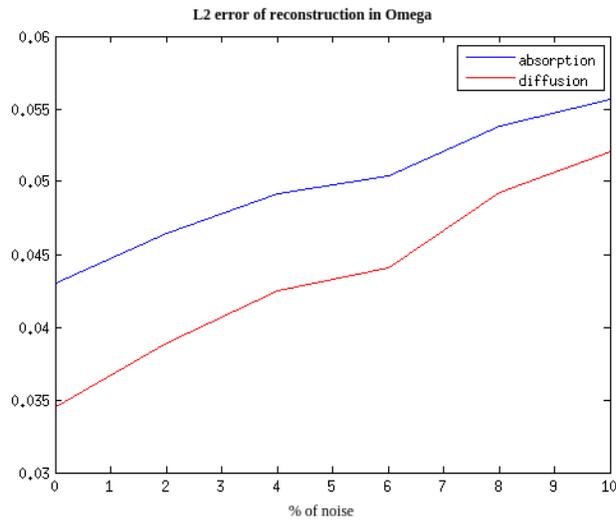


FIGURE 3.11 – Erreur de reconstruction des coefficients optiques sur tout le domaine  $\Omega$ .

### 3.5.3 Deuxième méthode

Pour tester numériquement la seconde méthode de reconstruction, nous avons considéré en première approche que le coefficient  $\beta$  est connu. Il s'agit

alors uniquement de calculer la fluence  $u$  dans le domaine, tous les autres coefficients étant connus. Une fois le coefficient  $u$  obtenu, on obtient  $\mu_a$  de la manière suivante

$$\mu_a = \frac{u}{F}. \quad (3.55)$$

On utilise pour résoudre l'équation la méthode de Newton pour les équations non linéaires avec Freefem++. Le résultat obtenu est représenté sur la figure 3.12 et l'erreur  $L^2$  sur le coefficient d'absorption est de 0.077.

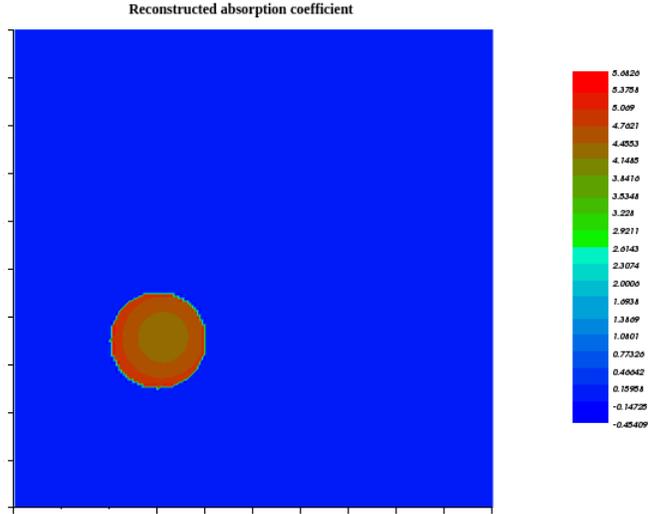


FIGURE 3.12 – Coefficient d'absorption reconstruit.

## 3.6 Reconstruction à partir de données réelles

### 3.6.1 Dispositif expérimental

Une expérience de photoacoustique a été mise en place au laboratoire CREATIS à Lyon, en collaboration avec le CEA-Leti. Le dispositif est constitué d'une cuve d'eau, dans laquelle se trouve l'absorbeur, un fil de plastique de diamètre 0,6mm. Le fil est excité par impulsions laser, et les données sont récupérées en cercle autour du fil, à une distance de 3cm.

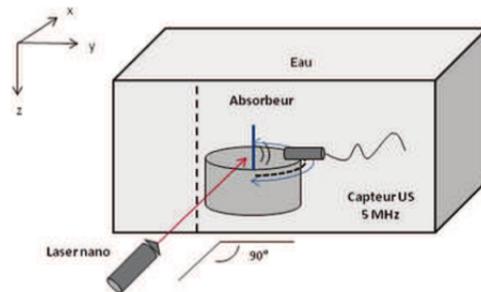


FIGURE 3.13 – Schéma du dispositif expérimental (rapport CEA/INSA/CREATIS Déc. 2010).

Le détecteur effectue une série de mesures tous les 6 degrés sur 180. Pour chaque profil mesuré, une impulsion laser est émise. Le fil chauffe alors et émet une onde acoustique circulaire se déplaçant jusqu'au détecteur. La durée d'acquisition correspond au temps que met l'onde acoustique pour traverser un diamètre du disque, soit 6cm : de cette manière, chaque profil de pression correspond à un scan d'un diamètre du disque, toute la zone est bien sondée. Le détecteur se déplace ensuite jusqu'à la position suivante et l'expérience est répétée. On récupère alors 31 profils de pression.

La première difficulté évidente est celle des données incomplètes : en effet, le détecteur ne fournit des profils que sur un demi-cercle. Comme le problème est connu à priori et que la configuration est symétrique radiale, la complétion des données a été réalisée de manière simple, par une symétrie axiale sur le second demi-cercle. D'autre part, une seconde difficulté est apparue : le début de l'acquisition du détecteur était décorrélé de l'impulsion laser. Les données ont donc été corrigées toujours par la connaissance préalable de la configuration du problème.

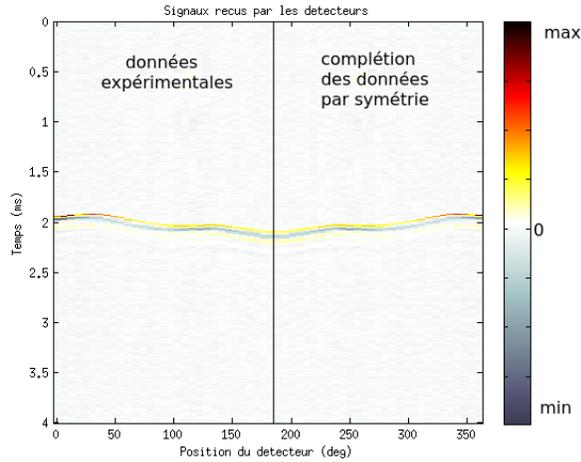


FIGURE 3.14 – Profils de pression mesurés (corrégés et complétés)

Sur la figure 3.14, on remarque bien le signal correspondant à l'onde de pression émise par le fil, et à quel moment le signal est reçu par les détecteurs. Dans le cas idéal d'un fil centré, le signal met un temps identique pour parvenir à chaque détecteur : les petits décalages ici sont dus à des imprécisions de mesures et à un léger décentrage du fil.

### 3.6.2 Reconstruction

La reconstruction a été effectuée par la méthode du retournement temporel à vitesse constante. On retrouve cette fois la position et la taille du fil de manière assez précise : le fil est reconstruit dans une zone d'environ 1mm de diamètre, ce qui est proche de la taille réelle. On parvient même à repérer le léger décalage du fil par rapport au centre.

Cette méthode de reconstruction ne prend cependant pas en compte les variations de vitesse dans le milieu, ce qui est responsable du manque de précision de la reconstruction.

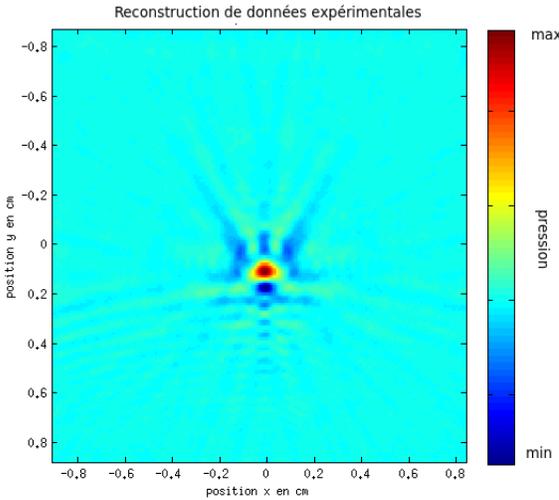


FIGURE 3.15 – Reconstruction des données par retournement temporel.



## Chapitre 4

# Estimation de stabilité pour un milieu stratifié

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Inversion photoacoustique . . . . .</b>	<b>62</b>
4.1.1	Estimations de stabilité . . . . .	62
4.1.2	Inversion acoustique . . . . .	65
4.1.3	Inversion optique . . . . .	69
<b>4.2</b>	<b>Preuves . . . . .</b>	<b>80</b>
4.2.1	Preuve du Théorème 4.1.1 . . . . .	80
4.2.2	Preuve de la Proposition 4.1.2 . . . . .	81
4.2.3	Preuve de la Proposition 4.1.3 . . . . .	82

---

Ce chapitre concerne l'étude de stabilité de la reconstruction des coefficients d'absorption et de diffusion dans un milieu stratifié. La principale limitation de l'imagerie photoacoustique est la dégradation de l'image en profondeur, ne permettant l'accès qu'à des profondeurs assez faibles. Cela est dû à la fois à l'absorption et à la diffusion optiques, qui diminuent de manière importante et rapide le signal optique dans le milieu. L'intensité du signal acoustique généré diminue alors beaucoup avec la profondeur. L'objectif de ce chapitre est d'analyser mathématiquement le problème de la faible profondeur en imagerie photoacoustique. Plus précisément, supposant que le milieu est composé de couches, nous établissons une estimation de stabilité qui montre que la reconstruction photoacoustique est stable dans la région proche de la source optique et qu'elle se détériore exponentiellement avec la profondeur. Ce calcul permet d'avoir une justification mathématique rigoureuse de ce phénomène.

## 4.1 Inversion photoacoustique dans un milieu stratifié

Nous choisissons de nous placer dans un milieu stratifié, c'est-à-dire composé de couches, dans le but d'avoir des coefficients optiques ne dépendant que d'une variable spatiale. Nous considérons dans ce chapitre que la vitesse acoustique est connue dans le milieu. La première étape du problème inverse photoacoustique est de reconstruire la pression initiale, qui est proportionnelle à l'énergie absorbée localement dans le milieu, à partir des données mesurées. Mathématiquement, il s'agit d'un problème inverse de source linéaire pour l'équation de propagation acoustique [15, 16, 5, 25, 28, 30, 34, 35, 38, 44, 45, 46, 60, 62, 67, 72, 73, 31]. Dans la deuxième étape, on reconstruit les coefficients d'absorption et de diffusion optiques à partir du résultat de la première inversion qui fournit la pression initiale générée dans tout le domaine.

En théorie, l'imagerie photoacoustique permet d'avoir à la fois un bon contraste et une bonne résolution. Le contraste est dû principalement à la sensibilité de l'absorption optique et des propriétés de diffusion du milieu dans le proche infrarouge. Les différents tissus biologiques absorbent en effet différemment les photons à cette longueur d'onde. La résolution en imagerie photoacoustique est liée au fait que les propriétés acoustiques du milieu sont indépendantes de ses propriétés optiques, la longueur d'onde de l'ultrason généré par le phénomène photoacoustique permet alors une bonne résolution.

En pratique, il a été observé dans différentes expériences que la profondeur d'imagerie, c'est-à-dire la profondeur maximale jusqu'à laquelle on peut distinguer les structures internes du milieu avec une résolution acceptable, est assez limitée en photoacoustique. Habituellement, elle est de l'ordre de quelques millimètres. Ceci est principalement dû à la faible capacité de pénétration des photons diffusés : le signal optique est atténué de manière significative par l'absorption et la diffusion dans le milieu biologique. C'est le même phénomène qui est à l'origine des faibles profondeurs en tomographie optique. La pression générée dans le milieu étant proportionnelle à l'énergie optique déposée, l'intensité du signal acoustique décroît très rapidement avec la profondeur.

### 4.1.1 Estimations de stabilité

Dans notre modèle, nous supposons que la source laser et les transducteurs acoustiques se situent sur le même côté  $\Gamma_m$  du domaine  $\Omega = (0, L) \times (0, H)$  (Figure 4.1). C'est une hypothèse réaliste car dans les applications seule une partie du bord du domaine  $\Gamma$  est accessible, le côté  $\Gamma_m$  représente donc la peau. Dans les prototypes d'imagerie photoacoustique existants, l'énergie du laser est envoyée à travers un petit trou situé au milieu de la barrette de transducteurs, les mesures acoustiques et l'éclairement laser se situent donc bien sur le même côté du domaine. Les côtés  $\Gamma \setminus \bar{\Gamma}_m$  sont supposés assez loin de l'impact du laser

sur  $\Gamma_m$  pour que la fluence du laser soit nulle : l'énergie du laser entrée par le côté  $\Gamma_m$  a été complètement diffusée et absorbée. Dans cette configuration, les paramètres optiques  $D$ ,  $\mu_a$  et la vitesse acoustique  $c$  dépendent uniquement de la variable  $y$  qui suit la direction normale à  $\Gamma_m$ .

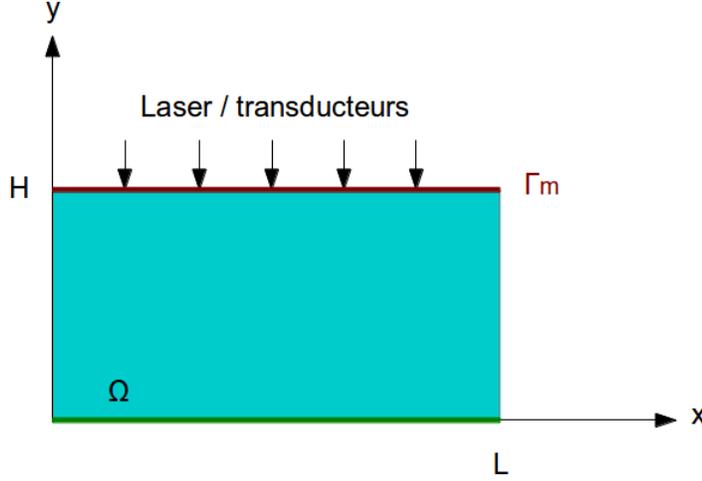


FIGURE 4.1 – Schéma du milieu stratifié.

L'onde optique dans le milieu est modélisée par l'équation de diffusion suivante

$$\begin{cases} -\nabla \cdot D(y)\nabla u(\mathbf{x}) + \mu_a(y)u(\mathbf{x}) = 0 & \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Gamma_m, \\ u(\mathbf{x}) = 0 & \mathbf{x} \in \Gamma \setminus \bar{\Gamma}_m. \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $D$  et  $\mu_a$  sont les coefficients de diffusion et d'absorption.

Nous suivons l'approche de plusieurs articles [17, 18, 19], et nous considérons deux illuminations laser  $g_j$ ,  $j = 1, 2$ . On note  $u_j$ ,  $j = 1, 2$ , les fluences correspondantes. Il y a donc deux mesures de pression différentes correspondant à chacun des éclairagements.

Soit  $\varphi_k(x)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , la base réelle de fonctions propres du Laplacien orthonormale dans l'espace  $L^2(0, L)$  satisfaisant le système

$$\begin{cases} -\varphi_k''(y) = \lambda_k^2 \varphi_k(y), \\ \varphi_k(0) = \varphi_k(L) = 0, \\ \int_0^L \varphi_k^2(y) dy = 1, \end{cases}$$

avec  $\lambda_k = \frac{2k\pi}{L}$ .

Par simplicité, nous allons considérer dans la suite  $g_j \in V_N$ ,  $j = 1, 2$ , avec  $V_N$  un espace vectoriel de dimension  $N$ , défini par

$$V_N = \left\{ \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k(x); c_k \in \mathbb{R} \right\}. \quad (4.2)$$

Cette hypothèse implique que les solutions  $u_j(\mathbf{x})$  sont à variables séparables. En effet  $u_j(\mathbf{x})$  s'écrivent

$$u_j(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N u_{jk}(y) \varphi_k(x),$$

où  $u_{jk}(y)$  sont les solutions uniques du système

$$\begin{cases} -(D(y)u'(y))' + (\mu_a(y) + \lambda_k^2 D(y))u(y) = 0 & y \in (0, H), \\ u(H) = c_k, \quad u(0) = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

On considère que les détecteurs acoustiques sont ponctuels et situés sur la surface d'observation  $\Gamma_m$ . Ils enregistrent les valeurs de la pression  $p(x, t)$ , où  $x \in \Gamma_m$  est la position d'un détecteur et  $t \geq 0$  est le temps d'observation. On considère également que la vitesse du son dans le domaine  $\Omega = (0, L) \times (0, H)$  est une fonction régulière et qu'elle dépend uniquement de la variable verticale  $y$ , soit  $c = c(y) > 0$ . La propagation de la pression acoustique générée par l'effet photoacoustique est correctement décrite par le modèle suivant :

$$\begin{cases} \partial_{tt} p(\mathbf{x}, t) = c^2(y) \Delta p(\mathbf{x}, t) & \mathbf{x} \in \Omega, t \geq 0, \\ \partial_\nu p(\mathbf{x}, t) + \beta \partial_t p(\mathbf{x}, t) = 0 & \mathbf{x} \in \Gamma_m, t \geq 0, \\ p(\mathbf{x}, t) = 0 & \mathbf{x} \in \Gamma \setminus \bar{\Gamma}_m, t \geq 0, \\ p(\mathbf{x}, 0) = f_0(\mathbf{x}), \quad \partial_t p(\mathbf{x}, 0) = f_1(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \end{cases} \quad (4.4)$$

$\beta > 0$  est le coefficient d'atténuation et  $f_j(\mathbf{x})$ ,  $j = 0, 1$  sont les valeurs initiales de la pression acoustique à reconstruire afin de pouvoir déterminer les paramètres optiques du milieu. La partie visible du bord  $\Gamma_m$  est donnée par

$$\Gamma_m = (0, L) \times \{y = H\},$$

et  $\partial_\nu$  est la dérivée selon  $\nu$ , le vecteur unité normal sortant de  $\Omega$ . Notons que  $\nu$  est défini partout sauf aux sommets de  $\Omega$  et nous avons en particulier  $\partial_\nu = \partial_y$  sur  $\Gamma_m$ .

En imagerie photoacoustique, la fonction  $f_0(\mathbf{x})$  est donnée par le produit  $\mu_a(\mathbf{x})u(\mathbf{x})$  dans  $\Omega$ . La fonction  $f_1(\mathbf{x})$  est considérée comme une correction de l'effet photoacoustique à l'interface  $\Gamma_m$ .

Les estimations de stabilité qui suivent ont été obtenues en combinant les estimations de stabilité des inversions acoustique et optique. Dans la suite, nous considérons les coefficients optiques  $(D(y), \mu_a(y))$  dans l'ensemble

$$\mathcal{O}_M = \{(D, \mu) \in C^3([0, H])^2; D > D_0, \mu > \mu_0; \|D\|_{C^3}, \|\mu\|_{C^3} \leq M\},$$

où  $D_0 > 0, \mu_0 > 0$  et  $M > \max(D_0, \mu_0)$  sont des constantes réelles fixées.

### **Théoreme 4.1.1**

Soient  $(D, \mu_a), (\tilde{D}, \tilde{\mu}_a)$  dans  $\mathcal{O}_M$ , et  $k_i, i = 1, 2$  deux entiers distincts. Soit  $c(y) \in W^{1,\infty}(0, H)$  avec  $0 < c_m \leq c^{-2}(y)$  et  $\theta = \sqrt{\|c^{-2}\|_{L^\infty}}$ . On appelle  $u_{k_i}, i = 1, 2$  and  $\tilde{u}_{k_i}, i = 1, 2$  les solutions du système (4.3) pour  $g_i = \varphi_{k_i}, i = 1, 2$ , avec les coefficients  $(D, \mu_a)$  et  $(\tilde{D}, \tilde{\mu}_a)$  respectivement. On suppose que  $D(H) = \tilde{D}(H), D'(H) = \tilde{D}'(H), \mu_a(H) = \tilde{\mu}_a(H), \mu'_a(H) = \tilde{\mu}'_a(H)$ , que  $k_1 < k_2$ , et que  $k_1$  est suffisamment grand.

Alors pour  $T > 2\theta H, \delta_a \in (0, \frac{1}{8})$  et  $\delta_d \in (0, \frac{1}{12})$ , il existe deux constantes  $C_a > 0$  et  $C_d > 0$  dépendant uniquement de  $(\mu_0, D_0, k_1, k_2, M, L, H), \delta_a$  et  $\delta_d$  respectivement telles que l'estimation de stabilité suivante soit vérifiée.

$$C_a \left( \sum_{i=1}^2 \int_0^T \left( \frac{C_M}{T - 2\theta H} + \beta \right) \|\partial_t p_i - \partial_t \tilde{p}_i\|_{L^2(\Gamma_m)}^2 + \|\partial_x p_i - \partial_x \tilde{p}_i\|_{L^2(\Gamma_m)}^2 dt \right)^{\delta_a} \leq \int_0^H |\mu_a - \tilde{\mu}_a|(y) dy$$

et

$$C_d \left( \sum_{i=1}^2 \int_0^T \left( \frac{C_M}{T - 2\theta H} + \beta \right) \|\partial_t p_i - \partial_t \tilde{p}_i\|_{L^2(\Gamma_m)}^2 + \|\partial_x p_i - \partial_x \tilde{p}_i\|_{L^2(\Gamma_m)}^2 dt \right)^{\delta_d} \leq \int_0^H |D - \tilde{D}|(y) dy$$

où

$$C_M = H e^{\int_0^H c^2(s) |\partial_y(c^{-2}(s))| ds} (c^{-2}(H) + \beta^2).$$

### **4.1.2 Inversion acoustique**

Les données mesurées par les détecteurs acoustiques localisés sur la surface  $\Gamma_m$  sont représentées par la fonction

$$p(\mathbf{x}, t) = d(x, t) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_m, t \geq 0.$$

La première inversion en imagerie photoacoustique est de déterminer, à partir des données  $d(x, t)$  mesurées par les transducteurs, la valeur initiale  $f_0(x)$  au temps  $t = 0$  de la solution  $p(x, t)$  de (4.4).

On étudie tout d'abord le problème direct afin de prouver l'existence et l'unicité du problème acoustique (4.4). On note  $L_c^2(\Omega)$  l'espace de Sobolev des fonctions de carré intégrable avec un poids  $\frac{1}{c^2(y)}$ . Comme la vitesse  $c^2$  est bornée, la norme correspondant à ce poids est équivalente à la norme  $L^2(\Omega)$  habituelle. Soit

$$V = \{p \in H^1(\Omega); p(0, y) = p(L, y) = 0, y \in (0, H); p = 0 \text{ on } \Gamma_0\},$$

et considérons dans  $V \times L_c^2(\Omega)$  l'opérateur linéaire non borné  $A$  défini par

$$A(p, q) = (q, c^2 \Delta p), D(A) = \{(p, q) \in V \times V; \Delta p \in L^2(\Omega); \partial_\nu p + \beta q = 0 \text{ on } \Gamma_m\}.$$

On a alors le résultat d'existence et d'unicité suivant.

**Proposition 4.1.1**

Pour  $(f_0, f_1) \in D(A)$ , le problème (4.4) possède une unique solution  $p(x, t)$  satisfaisant

$$(p, \partial_t p) \in C((0, +\infty), D(A)) \cap C^1((0, +\infty), V \times L_c^2(\Omega)).$$

*Preuve* Il existe différentes méthodes pour prouver qu'un problème d'évolution est bien posé : les méthodes variationnelles, la méthode de la transformée de Laplace et la méthode des semi-groupes. Ici, nous allons utiliser la méthode des semi-groupes [75], et prouver que l'opérateur  $A$  est m-dissipatif dans l'espace de Hilbert  $V \times L_c^2(\Omega)$ .

Notons  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire dans  $V \times L_c^2(\Omega)$ , c'est-à-dire pour  $(p_i, q_i) \in V \times L_c^2(\Omega)$  avec  $i = 1, 2$ ,

$$\langle (p_1, q_1), (p_2, q_2) \rangle = \int_{\Omega} \nabla p_1 \nabla \bar{p}_2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} q_1 \bar{q}_2 \frac{d\mathbf{x}}{c^2}.$$

Soient  $(p, q) \in D(A)$ . On a

$$\langle A(p, q), (p, q) \rangle = \int_{\Omega} \nabla q \nabla \bar{p} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \Delta p \bar{q} d\mathbf{x}.$$

Comme  $\Delta p \in L^2(\Omega)$  et  $\partial_\nu p + \beta q = 0$  on  $\Gamma_m$ , l'application de la formule de Green donne

$$\langle A(p, q), (p, q) \rangle = \int_{\Omega} \nabla q \nabla \bar{p} d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nabla \bar{q} \nabla p d\mathbf{x} - \beta \int_{\Gamma_m} |q|^2 d\sigma(\mathbf{x}).$$

Par conséquent

$$\Re(\langle A(p, q), (p, q) \rangle) = -\beta \int_{\Gamma_m} |q|^2 d\sigma(\mathbf{x}).$$

L'opérateur  $A$  est donc dissipatif et 0 fait partie de son résolvant.  $A$  est alors  $m$ -dissipatif et c'est donc le générateur d'un semi-groupe fortement continu de contractions [75]. Par conséquence, il existe une unique solution au problème (4.4).

Retournons maintenant au problème inverse de reconstruction de la donnée initiale  $(f_0, f_1)$ . Comme il est remarqué dans plusieurs travaux, ce problème inverse linéaire est fortement lié à l'observabilité de la source depuis  $\Gamma_m$  (voir par exemple [20, 13, 75, 70]). Nous allons ici utiliser une approche différente en prenant en compte le fait que la vitesse ne dépend que de la variable verticale  $y$ , et que la donnée initiale  $(f_0, f_1)$  est à variables séparables.

Comme  $g_k \in V_N$ , et comme  $p(x)$  satisfait des conditions de Dirichlet homogènes  $p(0, y) = p(L, y) = 0$ , nous avons

$$p(x, y) = \sum_{k=1}^N p_k(y, t) \varphi_k(x) \quad (x, y) \in \Omega,$$

où les  $\varphi_k(x)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , forment une base orthonormale réelle de  $L^2(0, L)$ . Comme la fonction  $f$  est définie dans  $V$ , nous avons également la décomposition de Fourier suivante pour la donnée initiale

$$f_j(x, y) = \sum_{k=1}^N f_{jk}(y) \varphi_k(x) \quad (x, y) \in \Omega \quad j = 0, 1.$$

On peut vérifier que  $p_k(y, t) \varphi_k(x)$  est exactement la solution du problème (4.4) avec comme donnée initiale  $(f_{0k}(y) \varphi_k(x), f_{1k}(y) \varphi_k(x))$ . Précisément, si  $\lambda_k = \frac{2k\pi}{L}$ , les fonctions  $p_k(y, t)$  satisfont l'équation d'onde à une dimension suivante

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2(y)} \partial_{tt} p(y, t) = \partial_{yy} p(y, t) - \lambda_k^2 p(y, t), & y \in (0, H), t \geq 0, \\ \partial_y p(H, t) + \beta \partial_t p(H, t) = 0 & t \geq 0, \\ p(0, t) = 0 & t \geq 0, \\ p(y, 0) = f_{0k}(y), \partial_t p(y, 0) = f_{1k}(y), & y \in (0, H), \end{cases} \quad (4.5)$$

Nous allons ensuite étudier le problème d'observabilité de la donnée initiale  $f_k$  à l'extrémité  $y = H$ . Soit  $E(t)$  l'énergie totale du système (4.5) telle que

$$E(t) = \int_0^H (c^{-2}(y) |\partial_t p(y, t)|^2 + |\partial_y p(y, t)|^2 + \lambda_k^2 |p(y, t)|^2) dy. \quad (4.6)$$

En multipliant la première équation du système (4.5) par  $\partial_t p(y, t)$  en intégrant sur  $(0, H)$ , on a

$$E'(t) = -\beta |\partial_t p(H, t)|^2 \quad \text{for } t \geq 0. \quad (4.7)$$

Par conséquence,  $E(t)$  est une fonction non croissante, et sa décroissance est liée à l'intensité de la dissipation sur le bord  $\Gamma_m$ .

On sait que le système (4.5) possède une unique solution. Nous établissons ici une estimation de la constante de continuité.

**Proposition 4.1.2**

Supposons que  $c(y) \in W^{1,\infty}(0, H)$  avec  $0 < c_m \leq c^{-2}(y)$ . Ainsi, pour  $T > 0$  on a

$$\beta^2 \int_0^T |\partial_t p_k(H, t)|^2 dt \leq ((C_m^1 + C_m^2 \lambda_k)T + C_m^3) E_k(0),$$

pour  $k \in \mathbb{N}$ , où

$$E_k(0) = \int_0^H (c^{-2}(y) |f_{1k}(y)|^2 + |f'_{0k}(y)|^2 + \lambda_k^2 |f_{0k}(y)|^2) dy,$$

$$C_m^1 = (1 + Hc^{-2}(H))^{-1} \left( 1 + \left(1 + \frac{H}{c_m}\right) \|c^{-2}\|_{W^{1,\infty}} \right),$$

$$C_m^3 = (1 + Hc^{-2}(H))^{-1} \left( 1 + 2H \|c^{-2}\|_{L^\infty}^{1/2} \right),$$

$$C_m^2 = H(1 + Hc^{-2}(H))^{-1}.$$

**Proposition 4.1.3**

Supposons que  $c(y) \in W^{1,\infty}(0, H)$  avec  $0 < c_m \leq c^{-2}(y)$ . Soient  $\theta = \sqrt{\|c^{-2}\|_{L^\infty}}$  et  $T > 2\theta H$ . Les inégalités suivantes sont alors vérifiées

$$\begin{aligned} \lambda_k^2 \int_0^H |f_{0k}(y)|^2 dy &\leq \left( \frac{C_M}{T - 2\theta H} + \beta \right) \int_0^T |\partial_t p_k(H, t)|^2 dt \\ &\quad + \lambda_k^2 \int_0^T |p_k(H, t)|^2 dt, \end{aligned}$$

pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^H c^{-2}(y) |f_{1k}(y)|^2 + |f'_{0k}(y)|^2 dy &\leq \left( \frac{C_M}{T - 2\theta H} + \beta \right) \int_0^T |\partial_t p_k(H, t)|^2 dt \\ &\quad + \lambda_k^2 \int_0^T |p_k(H, t)|^2 dt, \end{aligned}$$

pour  $k \in \mathbb{N}$ , avec

$$C_M = H e^{\int_0^H c^2(s) |\partial_y(c^{-2}(s))| ds} (c^{-2}(H) + \beta^2).$$

Les preuves de ces résultats sont données à la fin du chapitre. Nous présentons maintenant le résultat principal de cette section.

**Théoreme 4.1.2**

Supposons que  $c(y) \in W^{1,\infty}(0, 1)$  avec  $0 < c_m \leq c^{-2}(y)$ . Soient  $\theta =$



et  $\delta_d \in (0, \frac{1}{6})$ , il existe deux constantes  $C_a > 0$  et  $C_d > 0$  qui dépendent uniquement de  $(\mu_0, D_0, k_1, k_2, M, L, H)$ ,  $\delta_a$  et  $\delta_d$  respectivement telle que l'estimation de stabilité suivante soit vérifiée.

$$\int_0^H |\mu_a - \tilde{\mu}_a|(y) dy \leq C_a \left( \|h_1 - \tilde{h}_1\|_{C^1} + \|h_2 - \tilde{h}_2\|_{C^1} \right)^{\delta_a},$$

et

$$\int_0^H |D - \tilde{D}|(y) dy \leq C_d \left( \|h_1 - \tilde{h}_1\|_{C^1} + \|h_2 - \tilde{h}_2\|_{C^1} \right)^{\delta_d}.$$

La théorie des opérateurs elliptiques classique implique le résultat suivant pour le problème direct [54].

**Proposition 4.1.4**

Supposons  $(D, \mu_a)$  dans  $\mathcal{O}_M$  et  $g \in V_N$ . Alors il existe une unique solution  $u \in V$  au système (4.1). Elle vérifie

$$\int_{\Omega} |\nabla u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \leq C_0 \|g\|_{W^{1/2,2}(\Gamma_m)}^2,$$

où  $C_0 = C_0(\mu_0, D_0, M, L, H) > 0$ .

Comme  $u(x)$  est  $L$ -périodique par rapport à la variable  $y$ , sa décomposition de Fourier discrète est la suivante

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^N u_k(y) \varphi_k(x) \quad (x, y) \in \Omega,$$

où  $\varphi_k(x), k \in \mathbb{N}$ , est la base réelle orthonormale de  $L^2(0, L)$  introduite dans la partie précédente. La fonction réelle  $u_k(y)$  satisfait l'équation elliptique à une dimension suivante

$$\begin{cases} -(D(y)u'(y))' + (\mu_a(y) + \lambda_k^2 D(y))u(y) = 0 & y \in (0, H), \\ u(H) = c_k, \quad u(0) = 0, \end{cases}$$

où  $g_k$  est le coefficient de Fourier de  $g$  dans la même base, soit

$$g(x) = \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k(x) \quad x \in (0, L).$$

Nous prendrons dans la suite  $N = 1, c_k = 1$  et nous établirons des propriétés utiles de la solution au système (4.3).

**Lemme 4.1.1**

Soit  $u(y)$  la solution unique du système (4.3) avec  $g_k = 1$ . Alors  $u(y) \in$

$C^2([0, H])$  et il existe une constante  $b = b(\mu_0, D_0, M, L, H) > 0$  telle que  $\|u\|_{C^2} \leq b$  pour tous  $(D, \mu_a) \in \mathcal{O}_M$ . De plus, les inégalités suivantes sont vérifiées pour  $k$  suffisamment grand.

$$\underline{u}_m(y) \leq u(y) \leq \bar{u}_M(y),$$

pour  $0 \leq y \leq H$ , où

$$\underline{u}_m(y) = \frac{D^{\frac{1}{2}}(H) \sinh(\kappa_m^{\frac{1}{2}} y)}{D^{\frac{1}{2}}(y) \sinh(\kappa_m^{\frac{1}{2}} H)}, \quad \bar{u}_M(y) = \frac{D^{\frac{1}{2}}(H) \sinh(\kappa_M^{\frac{1}{2}} y)}{D^{\frac{1}{2}}(y) \sinh(\kappa_M^{\frac{1}{2}} H)},$$

$$\kappa_m = \min_{0 \leq y \leq H} \left( \frac{(D^{\frac{1}{2}})''}{D^{\frac{1}{2}}} + \frac{\mu_a}{D} + \lambda_k^2 \right), \quad \kappa_M = \max_{0 \leq y \leq H} \left( \frac{(D^{\frac{1}{2}})''}{D^{\frac{1}{2}}} + \frac{\mu_a}{D} + \lambda_k^2 \right).$$

*Preuve.* On fait tout d'abord un changement de variable de Liouville et on introduit la fonction

$$v(y) = \sqrt{\frac{D(y)}{D(H)}} u(y).$$

Les calculs montrent que  $v(y)$  est l'unique solution du système suivant

$$\begin{cases} -v''(y) + \kappa(y)v(y) = 0 & y \in (0, H), \\ v(H) = 1, \quad v(0) = 0, \end{cases} \quad (4.8)$$

où

$$\kappa(y) = \frac{(\sqrt{D})''}{\sqrt{D}} + \frac{\mu_a}{D} + \lambda_k^2.$$

Supposons maintenant que  $k$  est assez grand pour que  $\kappa_m > 0$ , et soient  $\underline{v}_m(y)$  et  $\bar{v}_M(y)$  les solutions du système (4.8) quand on remplace  $\kappa(y)$  respectivement par les constantes  $\kappa_m$  et  $\kappa_M$ . Elles sont données explicitement par

$$\begin{aligned} \underline{v}_m(y) &= \frac{\sinh(\sqrt{\kappa_m} y)}{\sinh(\sqrt{\kappa_m} H)}, \\ \bar{v}_M(y) &= \frac{\sinh(\sqrt{\kappa_M} y)}{\sinh(\sqrt{\kappa_M} H)}. \end{aligned}$$

Le principe du maximum implique que  $0 < v(y), \underline{v}_m(y), \bar{v}_M(y) < 1$  pour  $0 < y < H$ .

En appliquant de nouveau le principe du maximum sur les différences  $v - \underline{v}_m$  et  $v - \bar{v}_M$  on déduit que  $\underline{v}_m(y) < v(y) < \bar{v}_M(y)$ , ce qui conduit aux bornes inférieures et supérieures voulues.

On déduit de la régularité des coefficients  $D$  et  $\mu_a$  et de la régularité elliptique classique que  $u \in W^{3,2}(0, H)$ . De plus, il existe une constante  $b > 0$  dépendant uniquement de  $(\mu_0, D_0, M, L, H)$  telle que

$$\|u\|_{W^{3,2}} \leq b. \quad (4.9)$$

**Remarque 4.1.1**

Pour  $k$  grand il existe une constante  $C_k > 0$  dépendant uniquement de  $\mathcal{O}_M$  et  $k$  telle que

$$\frac{1}{C_k} \leq \kappa_m < \kappa_M \leq C_k. \quad (4.10)$$

**Lemme 4.1.2**

Soient  $(D, \mu_a) \in \mathcal{O}_M$ , et  $u(y)$  l'unique solution du système (4.3) avec  $g_k = 1$ . Alors pour  $k$  suffisamment grand il existe une constante  $\varrho = \varrho(D_0, \mu_0, M, k) > 0$  telle que

$$u'(y) \geq \varrho,$$

pour  $0 \leq y \leq H$ .

*Preuve.* Comme 0 est le minimum local de  $u(y)$ , on a  $u'(0) > 0$ . De plus, pour  $k$  assez grand, le Lemme 4.1.1 implique que

$$u(y) \geq \underline{u}_m,$$

pour tout  $y \in [0, H]$ . On a donc

$$u'(0) \geq \underline{u}'_m(0) = \frac{\sqrt{D(H)}}{\sqrt{\|D\|_{L^\infty}}} \frac{\sqrt{\kappa_m}}{\sinh(\sqrt{\kappa_m}H)}$$

En intégrant maintenant l'équation (4.3) sur  $(0, y)$ , on obtient

$$D(y)u'(y) = D(0)u'(0) + \int_0^y (\mu_a(s) + \lambda_k^2 D(s))u(s)ds$$

$$\begin{aligned} D(y)u'(y) &\geq D(0)u'(0) + \int_0^y (\mu_a(s) + \lambda_k^2 D(s)) \frac{\sqrt{D(H)}}{\sqrt{D(s)}} \frac{\sinh(\sqrt{\kappa_m}s)}{\sinh(\sqrt{\kappa_m}H)} ds \\ &\geq \frac{\sqrt{D(H)}}{\sqrt{\|D\|_{L^\infty}}} \frac{\sqrt{\kappa_m}D_0}{\sinh(\sqrt{\kappa_m}H)} + (\mu_0 + \lambda_k^2 D_0) \frac{\sqrt{D(H)}}{\sqrt{\|D\|_{L^\infty}} \sqrt{\kappa_m}} \frac{\cosh(\sqrt{\kappa_m}y) - 1}{\sinh(\sqrt{\kappa_m}H)}. \end{aligned}$$

Les inégalités (4.10) permettent de terminer la preuve.

Nous pouvons désormais établir les estimations de stabilité pour l'inversion optique.

Comme les illuminations sont choisies pour coïncider avec les fonctions de la base de Fourier  $\varphi_{k_j}$ ,  $j = 1, 2$ , les données  $\mathbf{h}_j(\mathbf{x})$ ,  $j = 1, 2$ , peuvent être réécrites en  $\mathbf{h}_j(\mathbf{x}) = h_j(y)\varphi_{k_j}(x)$ ,  $j = 1, 2$ , où  $h_j(y) = \mu_a(y)u_{k_j}(y)$ .

L'inversion optique est donc réduite au problème d'identification du couple  $(D, \mu_a)$  à partir du couple  $(h_1(y), h_2(y))$  sur  $(0, H)$ .

Soient  $(D, \mu_a)$ ,  $(\tilde{D}, \tilde{\mu}_a)$  deux couples différents dans  $\mathcal{O}_M$ , notons  $u_k$  et  $\tilde{u}_k$  les solutions du système (4.3) pour  $g_k = 1$ , avec les coefficients  $(D, \mu_a)$  et  $(\tilde{D}, \tilde{\mu}_a)$  respectivement.

On déduit du Lemme 4.1.1 que  $\frac{1}{u_k}$  et  $\frac{1}{\tilde{u}_k}$  sont dans  $L^p(0, H)$  pour  $0 < p < 1$ . Malheureusement, pour  $0 < p < 1$  la norme usuelle  $\|\cdot\|_{L^p}$  n'est plus une norme sur l'espace vectoriel  $L^p(0, H)$  car elle ne satisfait pas l'inégalité triangulaire (voir par exemple [2]). Contrairement à l'inégalité triangulaire, l'inégalité de Hölder est vérifiée pour  $0 < p < 1$ , et on a

$$\left\| \frac{v}{u_k} \right\|_{L^r} \leq \left\| \frac{1}{u_k} \right\|_{L^p} \|v\|_{L^q}, \quad (4.11)$$

pour tout  $v \in L^q(0, H)$  avec  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ .

$h = \frac{h_2}{h_1} = \frac{u_{k_2}}{u_{k_1}}$  peut par conséquent être considéré comme une distribution qui coïncide avec une fonction  $C^2$  sur  $(0, H)$ . Un calcul direct montre que  $h$  satisfait l'équation

$$-(Du_{k_1}^2 h')' + Du_{k_1}^2 h(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) = 0, \quad (4.12)$$

sur  $(0, H)$ .

Comme  $u_{k_j}$ ,  $j = 1, 2$  sont dans  $C^2([0, H])$ , une analyse asymptotique de  $D(y)u_{k_1}^2(y)h'(y)$  en 0 et les résultats du Lemme 4.1.1, 4.1.2 donnent

$$\lim_{y \rightarrow 0} Du_{k_1}^2 h' = 0.$$

En intégrant l'équation (4.12) sur  $(0, y)$ , on obtient

$$D(y)u_{k_1}^2(y)h'(y) = (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \int_y^H D(s)u_{k_1}^2(s)h(s)ds.$$

Comme  $u_{k_j}$ ,  $j = 1, 2$  sont dans  $C^2([0, H])$ , une analyse asymptotique du terme de droite en 0 donne

$$\begin{aligned} D(y)u_{k_1}^2(y)h'(y) &= (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \int_0^y D(s)u_{k_1}^2(s)h(s)ds \\ &= (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \int_0^y D(s)u_{k_1}(s)u_{k_2}(s)ds. \end{aligned}$$

Les résultats des Lemmes 4.1.1 et 4.1.2 impliquent qu'il existe des constantes  $\varrho_1 > 0$  et  $\varrho_2 > 0$  telles que

$$\varrho_i s \leq u_{k_i}(s) \leq bs, \quad (4.13)$$

pour tout  $s \in (0, H)$ . Alors

$$\begin{aligned} 3D(y)u_{k_1}^2(y)h'(y) &= (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \int_0^y D(s)u_{k_1}(s)u_{k_2}(s)ds \\ &\geq (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)D_0\varrho_1\varrho_2y^2, \end{aligned}$$

ce qui conduit à

$$h'(y) \geq (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \frac{\varrho_1\varrho_2D_0}{3Mb} > 0.$$

Nous résumons ces résultats dans le lemme suivant.

**Lemme 4.1.3**

Soient  $(D, \mu_a) \in \mathcal{O}_M$ , et  $u_{k_j}(y)$ ,  $j = 1, 2$  les solutions du système (4.3) avec  $g_{k_j} = 1$ ,  $j = 1, 2$ . Posons  $h = \frac{u_{k_2}}{u_{k_1}}$ , avec  $k_2 > k_1$ . Alors  $h \in C^1([0, H])$ , et pour  $k_1$  suffisamment grand il existe une constante  $h_0 = \varrho(D_0, \mu_0, M, k_1, k_2) > 0$  telle que

$$h'(y) \geq h_0,$$

pour  $0 \leq y \leq H$ .

Retournons maintenant à l'inversion optique. L'équation (4.12) peut s'écrire comme

$$-(Du_{k_1}^2)'h' + (h(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) - h'') Du_{k_1}^2 = 0,$$

sur  $(0, H)$ . En divisant les deux côtés par  $Du_{k_1}^2 h'$ , et en intégrant sur  $(0, y)$ , on obtient

$$D(y)u_{k_1}^2(y) = h(0) - h(y) + e^{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \int_0^y \frac{h}{h'} ds}. \quad (4.14)$$

Ceci nous permet de démontrer le résultat suivant.

**Lemme 4.1.4**

Soient  $(D, \mu_a)$ ,  $(\tilde{D}, \tilde{\mu}_a)$  dans  $\mathcal{O}_M$ , et  $k_i$ ,  $i = 1, 2$  deux entiers distincts. On note  $u_{k_i}$ ,  $i = 1, 2$  et  $\tilde{u}_{k_i}$ ,  $i = 1, 2$  les solutions du système (4.3) pour  $g_{k_i} = 1$ ,  $i = 1, 2$ , avec les coefficients  $(D, \mu_a)$  et  $(\tilde{D}, \tilde{\mu}_a)$  respectivement. Supposons que  $k_1 < k_2$ , et que  $k_1$  est suffisamment grand. Alors il existe une constante  $C = C(\mu_0, D_0, k_1, k_2, M, L, H) > 0$  telle que l'inégalité suivante soit vérifiée.

$$\|Du_{k_1}^2 - \tilde{D}\tilde{u}_{k_1}^2\|_{C^0} \leq C \left( \|h_1 - \tilde{h}_1\|_{C^1} + \|h_2 - \tilde{h}_2\|_{C^1} \right).$$

*Preuve.* Rappelons que la relation (4.14) est également valable pour le couple  $(\tilde{D}, \tilde{\mu}_a)$ , à savoir

$$\tilde{D}(y)\tilde{u}_{k_1}^2(y) = \tilde{h}(0) - \tilde{h}(y) + e^{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \int_0^y \frac{\tilde{h}}{\tilde{h}'} ds},$$

où  $\tilde{h} = \frac{\tilde{u}_{k_2}}{\tilde{u}_{k_1}}$ . En prenant la différence entre la dernière équation et l'équation (4.14), on trouve

$$\|Du_{k_1}^2 - \tilde{D}\tilde{u}_{k_1}^2\|_{C^0} \leq \|h - \tilde{h}\|_{C^0} + (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)H \left\| \frac{h}{h'} - \frac{\tilde{h}}{\tilde{h}'} \right\|_{C^0} e^{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)H} \left( \left\| \frac{h}{h'} \right\|_{C^0} + \left\| \frac{\tilde{h}}{\tilde{h}'} \right\|_{C^0} \right).$$

On en déduit alors le résultat à partir des Lemmes 4.1.1 et 4.1.3.

Nous pouvons maintenant prouver le principal résultat de stabilité de cette partie. On remarque ainsi comme dans [19], que  $\frac{1}{u_{k_1}}$  est une solution de l'équation suivante

$$-\left(Du_{k_1}^2 \frac{1}{u_{k_1}}\right)' + \lambda_{k_1}^2 Du_{k_1}^2 \frac{1}{u_{k_1}} = h_1, \quad y \in (0, H).$$

Comme  $\frac{1}{\tilde{u}_{k_1}}$  est solution du même type d'équations, on obtient que  $\frac{1}{u_{k_1}} - \frac{1}{\tilde{u}_{k_1}}$  est la solution du système suivant

$$\begin{cases} -(Du_{k_1}^2 w)' + \lambda_{k_1}^2 Du_{k_1}^2 w = e, & y \in (0, H), \\ w(H) = 0, \quad w'(H) = h_1(H) - \tilde{h}_1(H), & yw(y) \in L^2(0, H), \end{cases} \quad (4.15)$$

où

$$e = -\left((Du_{k_1}^2 - \tilde{D}\tilde{u}_{k_1}^2) \frac{1}{\tilde{u}_{k_1}}\right)' + \lambda_{k_1}^2 (Du_{k_1}^2 - \tilde{D}\tilde{u}_{k_1}^2) \frac{1}{\tilde{u}_{k_1}} + h_1 - \tilde{h}_1.$$

On remarque qu'il y a deux principales difficultés pour résoudre ce système, la première vient du fait que l'opérateur est elliptique dégénéré et la seconde du fait que la solution  $w$  est non bornée en  $y = 0$ .

En intégrant sur  $(s, H)$ , la première équation du système conduit à

$$D(s)u_{k_1}^2(s)w'(s) = D(H)(h_1(H) - \tilde{h}_1(H)) + \int_s^H e(y)dy - \lambda_{k_1}^2 \int_s^H D(y)u_{k_1}^2(y)w(y)dy.$$

En divisant l'équation ci-dessus par  $t^{-2}D(s)u_{k_1}^2(s)$  et en intégrant les deux côtés sur  $(t, H)$  on obtient

$$\begin{aligned} t^2 w(t) &= D(H)(h_1(H) - \tilde{h}_1(H))(H - t) \\ &+ \int_t^H \frac{\lambda_{k_1}^2 t^2}{D(s)u_{k_1}^2(s)} \int_s^H D(y)u_{k_1}^2(y)w(y)dyds - \int_t^H \frac{t^2}{D(s)u_{k_1}^2(s)} \int_s^H e(y)dyds. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} t^2 |w(t)| &\leq D(H)(h_1(H) - \tilde{h}_1(H))H \\ &+ \int_t^H \frac{\lambda_{k_1}^2 s^2}{D(s)u_{k_1}^2(s)} \int_s^H D(y)u_{k_1}^2(y)|w(y)|dyds + \left| \int_t^H \frac{t^2}{D(s)u_{k_1}^2(s)} \int_s^H e(y)dyds \right|. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Les inégalités (4.13) impliquent

$$\int_t^H \frac{\lambda_{k_1}^2 s^2}{D(s)u_{k_1}^2(s)} \int_s^H D(y)u_{k_1}^2(y)|w|(y)dyds \leq \frac{Mb^2}{D_0\varrho_1^2} \lambda_{k_1}^2 H \int_t^H y^2|w|(y)dy, (4.17)$$

$$\leq \widehat{C} \int_t^H y^2|w|(y)dy (4.18)$$

où  $\widehat{C} = \frac{Mb^2}{D_0\varrho_1^2} \lambda_{k_1}^2 H$ .

On a d'autre part

$$\begin{aligned} & \int_s^H e(y)dy = \\ & -(D(s)u_{k_1}^2(s) - \widetilde{D}(s)\widetilde{u}_{k_1}^2(s)) \frac{\widetilde{u}'_{k_1}(s)}{\widetilde{u}_{k_1}^2(s)} + \lambda_{k_1}^2 \int_s^H \left( (Du_{k_1}^2 - \widetilde{D}\widetilde{u}_{k_1}^2) \frac{1}{\widetilde{u}_{k_1}} + h_1 - \widetilde{h}_1 \right) dy. \end{aligned}$$

Donc

$$\left| \int_t^H \frac{t^2}{D(s)u_{k_1}^2(s)} \int_s^H e(y)dyds \right| \leq \Upsilon_1 + \Upsilon_2 + \Upsilon_3,$$

où

$$\begin{aligned} \Upsilon_1 &= H\lambda_{k_1}^2 \int_0^H \frac{s^2}{D(s)u_{k_1}^2(s)} ds \|h_1 - \widetilde{h}_1\|_{C^0}, \\ \Upsilon_2 &= \int_t^H \frac{s^2 |\widetilde{u}'_{k_1}(s)|}{D(s)u_{k_1}^2(s) \widetilde{u}_{k_1}^2(s)} \left| D(s)u_{k_1}^2(s) - \widetilde{D}(s)\widetilde{u}_{k_1}^2(s) \right| ds, \\ \Upsilon_3 &= \lambda_{k_1}^2 \int_t^H \frac{s^2}{D(s)u_{k_1}^2(s)} \int_s^H \left| D(s)u_{k_1}^2(y) - \widetilde{D}(s)\widetilde{u}_{k_1}^2(y) \right| \frac{1}{\widetilde{u}_{k_1}(y)} dy. \end{aligned}$$

En utilisant de nouveau les inégalités (4.13), on obtient

$$\Upsilon_1 \leq \frac{H^2 \lambda_{k_1}^2}{D_0 \varrho_1^2} \|h_1 - \widetilde{h}_1\|_{C^0},$$

$$\Upsilon_2 \leq \frac{bM^{1-\theta}}{D_0 \varrho_1^2 \widetilde{\varrho}_1^2} \int_0^H \frac{1}{s^{2\theta}} ds \|Du_{k_1}^2 - \widetilde{D}\widetilde{u}_{k_1}^2\|_{C^0}^\theta,$$

$$\Upsilon_3 \leq \frac{\lambda_{k_1}^2}{D_0 \varrho_1^2 \widetilde{\varrho}_1} \left( \int_0^H \frac{1}{s^{\frac{1}{2}}} ds \right)^2 \|Du_{k_1}^2 - \widetilde{D}\widetilde{u}_{k_1}^2\|_{C^0},$$

où  $0 < \theta < \frac{1}{2}$ .

On déduit du Lemme 4.1.4 et des trois dernières inégalités que pour tout  $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ , il existe une constante  $C_\theta = C_\theta(\theta, \mu_0, D_0, k_1, k_2, M, L, H) > 0$  telle que

$$\left| \int_t^H \frac{t^2}{D(s)u_{k_1}^2(s)} \int_s^H e(y)dyds \right| \leq C_\theta \left( \|h_1 - \tilde{h}_1\|_{C^1} + \|h_2 - \tilde{h}_2\|_{C^1} \right)^\theta. \quad (4.19)$$

Notons que la constante  $C_\theta$  explose quand  $\theta$  tend vers  $\frac{1}{2}$ .

En combinant les inégalités (4.16), (4.17) et (4.19) on trouve

$$t^2|w|(t) \leq C_\theta \left( \|h_1 - \tilde{h}_1\|_{C^1} + \|h_2 - \tilde{h}_2\|_{C^1} \right)^\theta + \widehat{C} \int_t^H y^2|w|(y)dy, \quad (4.20)$$

pour  $0 \leq t \leq H$ .

Avec l'inégalité de Gronwall, on obtient

$$t^2|w|(t) \leq C_\theta e^{\widehat{C} \int_0^H y^2 dy} \left( \|h_1 - \tilde{h}_1\|_{C^1} + \|h_2 - \tilde{h}_2\|_{C^1} \right)^\theta, \quad (4.21)$$

pour  $0 \leq t \leq H$ .

Le lemme suivant est une conséquence directe de l'inégalité ci-dessus.

**Lemme 4.1.5**

Soient  $(D, \mu_a)$ ,  $(\tilde{D}, \tilde{\mu}_a)$  dans  $\mathcal{O}_M$ , et  $k_i$ ,  $i = 1, 2$  deux entiers distincts. On note  $u_{k_i}$ ,  $i = 1, 2$  et  $\tilde{u}_{k_i}$ ,  $i = 1, 2$  les solutions du système (4.3) pour  $g_{k_i} = 1$ ,  $i = 1, 2$ , avec les coefficients  $(D, \mu_a)$  et  $(\tilde{D}, \tilde{\mu}_a)$  respectivement. Supposons que  $D(H) = \tilde{D}(H)$ ,  $D'(H) = \tilde{D}'(H)$ ,  $\mu_a(H) = \tilde{\mu}_a(H)$ ,  $\mu'_a(H) = \tilde{\mu}'_a(H)$ , que  $k_1 < k_2$ , et que  $k_1$  est suffisamment grand. Alors pour  $\theta \in (0, \frac{1}{2})$  et  $p > 3$ , il existe deux constantes  $C_1 = C_1(\theta, \mu_0, D_0, k_1, k_2, M, L, H) > 0$  et  $C_2 = C_2(\theta, p, \mu_0, D_0, k_1, k_2, M, L, H) > 0$  telles que les inégalités suivantes soient vérifiées.

$$\begin{aligned} \|u_{k_1} - \tilde{u}_{k_1}\|_{C^0} &\leq C_1 \left( \|h_1 - \tilde{h}_1\|_{C^1} + \|h_2 - \tilde{h}_2\|_{C^1} \right)^\theta, \\ \left\| \frac{1}{u_{k_1}} - \frac{1}{\tilde{u}_{k_1}} \right\|_{L^{\frac{1}{p}}} &\leq C_2 \left( \|h_1 - \tilde{h}_1\|_{C^1} + \|h_2 - \tilde{h}_2\|_{C^1} \right)^\theta. \end{aligned}$$

*Preuve.* On déduit des inégalités (4.13) que

$$\frac{1}{\varrho_1 \tilde{\varrho}_1} |(t)\tilde{u}_{k_1} - u_{k_1}| \leq t^2 \frac{|\tilde{u}_{k_1} - u_{k_1}|}{u_{k_1} \tilde{u}_{k_1}} = t^2 |w|(t),$$

pour tout  $t \in (0, H)$ , ce qui, combiné avec les inégalités (4.21), donne la première inégalité du lemme.

Appliquons maintenant l'inégalité de Hölder pour  $p > 3$

$$\int_0^H |w|^{\frac{1}{p}}(y) dy \leq \left( \int_0^H y^2 |w|(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^H \frac{1}{y^{\frac{2}{p-1}}} dy \right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

En combinant cette dernière inégalité avec l'estimation (4.21) on obtient

$$\int_0^H |w|^{\frac{1}{p}}(y) dy \leq \tilde{C} \left( \|h_1 - \tilde{h}_1\|_{C^1} + \|h_2 - \tilde{h}_2\|_{C^1} \right)^{\frac{\theta}{p}},$$

où

$$\tilde{C} = \left( \int_0^H \frac{1}{y^{\frac{2}{p-1}}} dy \right)^{\frac{p-1}{p}} C_{\theta}^{\frac{1}{p}} e^{\frac{\hat{c}}{p} \int_0^H y^2 dy}.$$

On termine la preuve en prenant  $C = \tilde{C}^p$ .

Nous pouvons maintenant démontrer le Théorème 4.1.3.

*Preuve.* (Théorème 4.1.3) Rappelons que  $h_1 = \mu_a u_{k_1}$  et  $\tilde{h}_1 = \tilde{\mu}_a \tilde{u}_{k_1}$  sur  $(0, H)$ .

On a donc

$$u_{k_1} |\mu_a - \tilde{\mu}_a| \leq |h_1 - \tilde{h}_1| + \frac{\tilde{\mu}_a}{u_{k_1}} |u_{k_1} - \tilde{u}_{k_1}|.$$

En intégrant des deux côtés  $(0, H)$  on obtient

$$\int_0^H u_{k_1} |\mu_a - \tilde{\mu}_a| dy \leq H \|h_1 - \tilde{h}_1\|_{C^1} + MH \|u_{k_1} - \tilde{u}_{k_1}\|_{C^0}.$$

Le Lemme 4.1.5 et les inégalités (4.13) impliquent

$$\varrho_1 \int_0^H y |\mu_a - \tilde{\mu}_a| dy \leq H \|h_1 - \tilde{h}_1\|_{C^1} + MHC_1 \left( \|h_1 - \tilde{h}_1\|_{C^1} + \|h_2 - \tilde{h}_2\|_{C^1} \right)^{\theta},$$

pour  $0 < \theta < \frac{1}{2}$ .

Comme  $\varepsilon = \|h_1 - \tilde{h}_1\|_{C^1} + \|h_2 - \tilde{h}_2\|_{C^1} < 1$ , il existe une constante  $C > 0$  qui dépend uniquement de  $(\theta, \mu_0, D_0, k_1, k_2, M, L, H)$  telle que

$$\int_0^H y |\mu_a - \tilde{\mu}_a|(y) dy \leq C \left( \|h_1 - \tilde{h}_1\|_{C^1} + \|h_2 - \tilde{h}_2\|_{C^1} \right)^{\theta}. \quad (4.22)$$

En appliquant de nouveau l'inégalité de Hölder pour  $q > 2$ , on obtient

$$\int_0^H |\mu_a - \tilde{\mu}_a|^{\frac{1}{q}}(y) dy \leq \left( \int_0^H y |\mu_a - \tilde{\mu}_a|(y) dy \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_0^H \frac{1}{y^{\frac{1}{q-1}}} dy \right)^{\frac{q-1}{q}},$$

ce qui combiné à l'estimation (4.22) donne

$$\int_0^H |\mu_a - \tilde{\mu}_a|^{\frac{1}{q}}(y) dy \leq \tilde{C} \left( \|h_1 - \tilde{h}_1\|_{C^1} + \|h_2 - \tilde{h}_2\|_{C^1} \right)^{\frac{\theta}{q}}.$$

Par conséquent

$$\int_0^H |\mu_a - \tilde{\mu}_a|(y) dy \leq \tilde{C} M^{1-\frac{1}{q}} \left( \|h_1 - \tilde{h}_1\|_{C^1} + \|h_2 - \tilde{h}_2\|_{C^1} \right)^{\frac{\theta}{q}},$$

pour  $0 < \theta < \frac{1}{2}$ , et  $q > 2$ . Notons que l'exposant  $\frac{\theta}{pq}$  appartient à  $(0, \frac{1}{4})$ . L'estimation de stabilité pour  $\mu_a$  est alors prouvée.

Nous étudions maintenant la reconstruction du coefficient  $D$ .

On obtient par un calcul simple

$$u_{k_1}^2 |D - \tilde{D}| \leq \tilde{D} |u_{k_1}^2 - \tilde{u}_{k_1}^2| + |Du_{k_1}^2 - \tilde{D}\tilde{u}_{k_1}^2|,$$

sur  $(0, H)$ .

Les inégalités (4.13), les Lemmes 4.1.4 et 4.1.5 impliquent

$$y^2 |D - \tilde{D}|(y) \leq C \left( \|h_1 - \tilde{h}_1\|_{C^1} + \|h_2 - \tilde{h}_2\|_{C^1} \right)^{\theta}, \quad (4.23)$$

pour tout  $y \in (0, H)$ .

En appliquant de nouveau l'inégalité de Hölder pour  $q > 3$ , on obtient

$$\int_0^H |D - \tilde{D}|^{\frac{1}{q}}(y) dy \leq \left( \int_0^H y^2 |D - \tilde{D}|(y) dy \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_0^H \frac{1}{y^{\frac{2}{q-1}}} dy \right)^{\frac{q-1}{q}},$$

ce qui combiné avec l'équation (4.23) donne

$$\int_0^H |D - \tilde{D}|^{\frac{1}{q}}(y) dy \leq \tilde{C} \left( \|h_1 - \tilde{h}_1\|_{C^1} + \|h_2 - \tilde{h}_2\|_{C^1} \right)^{\frac{\theta}{q}}.$$

Par conséquent

$$\int_0^H |D - \tilde{D}|(y) dy \leq \tilde{C} M^{1-\frac{1}{q}} \left( \|h_1 - \tilde{h}_1\|_{C^1} + \|h_2 - \tilde{h}_2\|_{C^1} \right)^{\frac{\theta}{q}},$$

pour  $0 < \theta < \frac{1}{2}$ , et  $q > 3$ . L'exposant  $\frac{\theta}{pq}$  appartient à  $(0, \frac{1}{6})$ . La preuve de l'estimation de stabilité pour les coefficients optiques est ainsi terminée.

## 4.2 Preuves

### 4.2.1 Preuve du Théorème 4.1.1

L'idée principale est ici de combiner les résultats de stabilité des inversions acoustique et optique en un résultat montrant que la reconstruction des coefficients optiques est sensible au bruit dans les mesures de l'onde acoustique.

La principale difficulté vient du fait que les espaces vectoriels des deux estimations de stabilité ne sont pas identiques car deux techniques différentes ont été utilisées pour les déterminer. Nous allons utiliser l'inégalité d'interpolation entre les espaces de Sobolev pour pallier cette difficulté.

On déduit de la borne uniforme des solutions  $u_i$ ,  $i = 1, 2$  (voir par exemple (4.9) dans la preuve du Lemme 4.1.1) que

$$\|h_i\|_{W^{3,2}}, \|\tilde{h}_i\|_{W^{3,2}} \leq Mb, \quad i = 1, 2, \quad (4.24)$$

pour tous les couples  $(D, \mu_a)$  and  $(\tilde{D}, \mu_a)$  dans  $\mathcal{O}_M$ .

Les inégalités d'interpolation de Sobolev et les théorèmes de plongement impliquent

$$\|h_i - \tilde{h}_i\|_{C^1} \leq C \|h_i - \tilde{h}_i\|_{W^{2,2}} \leq \tilde{C} \|h_i - \tilde{h}_i\|_{W^{1,2}}^{\frac{1}{2}} \|h_i - \tilde{h}_i\|_{W^{3,2}}^{\frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2,$$

en combinant avec (4.24) on obtient

$$\|h_i - \tilde{h}_i\|_{C^1} \leq \tilde{\tilde{C}} \|h_i - \tilde{h}_i\|_{W^{1,2}}^{\frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2. \quad (4.25)$$

Comme l'inversion acoustique est linéaire, le Théorème 4.1.2 (ou la Proposition 4.1.3) donne

$$\begin{aligned} \lambda_{k_i}^2 \int_0^H |h_i - \tilde{h}_i|^2 dy &\leq \left( \frac{C_M}{T - 2\theta H} + \beta \right) \int_0^T |\partial_t p_i(H, t) - \partial_t \tilde{p}_i(H, t)|^2 dt \\ &\quad + \lambda_{k_i}^2 \int_0^T |p_i(H, t) - \tilde{p}_i(H, t)|^2 dt, \end{aligned}$$

pour  $i = 1, 2$ , et

$$\begin{aligned} \int_0^H c^{-2}(y) |h'_i - \tilde{h}'_i|^2 dy &\leq \left( \frac{C_M}{T - 2\theta H} + \beta \right) \int_0^T |\partial_t p_i(H, t) - \partial_t \tilde{p}_i(H, t)|^2 dt \\ &\quad + \lambda_{k_i}^2 \int_0^T |p_i(H, t) - \tilde{p}_i(H, t)|^2 dt, \end{aligned}$$

pour  $i = 1, 2$ .

Par conséquent,

$$\|h_i - \tilde{h}_i\|_{C^1} \leq \tilde{C} \left( \int_0^T \left( \frac{C_M}{T - 2\theta H} + \beta \right) |\partial_t p_i(H, t) - \partial_t \tilde{p}_i(H, t)|^2 + \lambda_{k_i}^2 |p_i(H, t) - \tilde{p}_i(H, t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

pour  $i = 1, 2$ .

En utilisant les estimations de stabilité optique du Théorème 4.1.3 (avec  $\tilde{\delta}_a = 2\delta_a$  et  $\tilde{\delta}_d = 2\delta_d$ ), on obtient

$$C_a \left( \sum_{i=1}^2 \int_0^T \left( \frac{C_M}{T - 2\theta H} + \beta \right) |\partial_t p_i(H, t) - \partial_t \tilde{p}_i(H, t)|^2 + \lambda_{k_i}^2 |p_i(H, t) - \tilde{p}_i(H, t)|^2 dt \right)^{\delta_a} \leq \int_0^H |\mu_a - \tilde{\mu}_a|(y) dy$$

et

$$C_d \left( \sum_{i=1}^2 \int_0^T \left( \frac{C_M}{T - 2\theta H} + \beta \right) |\partial_t p_i(H, t) - \partial_t \tilde{p}_i(H, t)|^2 + \lambda_{k_i}^2 |p_i(H, t) - \tilde{p}_i(H, t)|^2 dt \right)^{\delta_d} \leq \int_0^H |D - \tilde{D}|(y) dy$$

ce qui termine la preuve.

### 4.2.2 Preuve de la Proposition 4.1.2

En multipliant la première équation du système (4.5) par  $y\partial_y p(y, t)$  et en intégrant par parties sur  $(0, T)$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T |\partial_y p(H, t)|^2 dt &= \int_0^T \int_0^H |\partial_y p(y, t)|^2 dy dt - 2 \int_0^T \int_0^H c^{-2} \partial_{tt} p(y, t) y \partial_y p(y, t) dy dt \\ &\quad - 2\lambda_k^2 \int_0^T \int_0^H p(y, t) y \partial_y p(y, t) dy dt = A_1 + A_2 + A_3. \end{aligned}$$

Dans le reste de la preuve nous allons calculer les bornes des constantes  $A_i, i = 1, 2, 3$ , en terme d'énergie  $E(0)$ . A cause de la diminution de l'énergie, on a

$$|A_1| \leq TE(0).$$

En intégrant par parties sur  $(0, T)$  dans l'intégrale  $A_2$ , on obtient

$$\begin{aligned} A_2 &= - \int_0^T \int_0^H y c^{-2} \partial_y |\partial_t p(y, t)|^2 dy dt \\ &\quad + 2 \int_0^H y c^{-2} \partial_t p(y, T) \partial_y p(y, T) dy - 2 \int_0^H y c^{-2} \partial_t p(y, 0) \partial_y p(y, 0) dy. \end{aligned}$$

En intégrant maintenant par parties sur  $(0, H)$ , on trouve

$$\begin{aligned} A_2 + Hc^{-2}(H) \int_0^T |\partial_t p(H, t)|^2 dt &= \int_0^T \int_0^H \partial_y (yc^{-2}) |\partial_t p(y, t)|^2 dy dt \\ &+ 2 \int_0^H yc^{-2} \partial_t p(y, T) \partial_y p(y, T) dy - 2 \int_0^H yc^{-2} \partial_t p(y, 0) \partial_y p(y, 0) dy, \end{aligned}$$

ce qui conduit à l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} &\left| A_2 + Hc^{-2}(H) \int_0^T |\partial_t p(H, t)|^2 dt \right| \leq \\ &\|c^2 \partial_y (yc^{-2}(y))\|_{L^\infty} TE(0) + H\|c^{-1}(y)\|(E(T) + E(0)). \end{aligned}$$

En utilisant la décroissance en énergie (4.7), on obtient finalement

$$\begin{aligned} &\left| A_2 + Hc^{-2}(H) \int_0^T |\partial_t p(H, t)|^2 dt \right| \leq \\ &\left( (1 + (1 + \frac{H}{c_m})\|c^{-2}\|_{W^{1,\infty}})T + 2H\|c^{-2}\|_{L^\infty}^{1/2} \right) E(0). \end{aligned}$$

Des arguments similaires concernant l'intégrale  $A_3$  montrent que

$$|A_3| \leq H\lambda_k TE(0).$$

On termine la preuve en combinant toutes les précédentes estimations sur les constantes  $A_i, i = 1, 2, 3,$ .

### 4.2.3 Preuve de la Proposition 4.1.3

Soient  $\theta = \sqrt{\|c^{-2}\|_{L^\infty}}$  et  $T > 2\theta H$ , on introduit la fonction suivante

$$\begin{aligned} \Phi(y) &= \int_{\theta y}^{T-\theta y} (c^{-2}(H-y) |\partial_t p(H-y, t)|^2 + |\partial_y p(H-y, t)|^2 + \lambda_k^2 |p(H-y, t)|^2) dt, \\ &= \int_{\theta y}^{T-\theta y} \varphi(y, t) dt, \end{aligned}$$

pour  $0 \leq y \leq H$ . On remarque que

$$\Phi(0) = (c^{-2}(H) + \beta^2) \int_0^T |\partial_t p(H, t)|^2 dt + \lambda_k^2 \int_0^T |p(H, t)|^2 dt. \quad (4.26)$$

D'autre part, un calcul direct de la dérivée de  $\Phi(y)$  donne

$$\Phi'(y) = \int_{\theta y}^{T-\theta y} \partial_y \varphi(y, t) dt - \theta \varphi(y, T - \theta y) - \theta \varphi(y, \theta y).$$

En intégrant par parties on déduit que

$$\Phi'(y) = B_\theta(y) + \partial_y(c^{-2}(H-y)) \int_{\theta y}^{T-\theta y} |\partial_t p(H-y, t)|^2 dt,$$

où

$$B_\theta(y) = \left( -2c^{-2}(H-y)\partial_t p(H-y, t)\partial_y p(H-y, t) \right) \Big|_{t=\theta y}^{t=T-\theta y} \\ - \theta \left( c^{-2}(H-y)|\partial_t p(H-y, t)|^2 + |\partial_y p(H-y, t)|^2 + \lambda_k^2 |p(H-y, t)|^2 \right) \Big|_{t=\theta y}^{t=T-\theta y}.$$

Le choix de  $\theta$  implique que  $B_\theta(y) < 0$  pour  $0 \leq y \leq H$ . Ainsi, on obtient

$$\Phi'(y) \leq c^2(H-y)|\partial_y(c^{-2}(H-y))| \int_{\theta y}^{T-\theta y} c^{-2}(H-y)|\partial_t p(H-y, t)|^2 dt \\ \leq c^2(H-y)|\partial_y(c^{-2}(H-y))|\Phi(y).$$

Avec l'inégalité de Gronwall, on a

$$\Phi(y) \leq e^{\int_0^H c^2(s)|\partial_y(c^{-2}(s))| ds} \Phi(0), \quad (4.27)$$

pour  $0 \leq y \leq H$ .

On déduit de la décroissance en énergie (4.7) que

$$(T - 2\theta H)E(T) \leq (T - 2\theta H)E(T - \theta H) \leq \int_{\theta H}^{T-\theta H} E(t) dt. \quad (4.28)$$

En réécrivant le terme de droite en fonction de  $\varphi$  on trouve

$$\int_{\theta H}^{T-\theta H} E(t) dt = \int_0^H \int_{\theta H}^{T-\theta H} \varphi(y, t) dt dy.$$

Comme  $(\theta H, T - \theta H) \subset (\theta y, T - \theta y)$  pour tout  $0 \leq y \leq H$ , on a

$$\int_{\theta H}^{T-\theta H} E(t) dt \leq \int_0^H \Phi(y) dy. \quad (4.29)$$

En combinant les inégalités (4.27)-(4.28)-(4.29), on trouve que

$$(T - 2\theta H)E(T) \leq H e^{\int_0^H c^2(s)|\partial_y(c^{-2}(s))| ds} \Phi(0). \quad (4.30)$$

En reprenant la dérivée de l'énergie (4.7), et en intégrant l'égalité sur  $(0, T)$  on obtient

$$E(0) = E(T) + \beta \int_0^T |\partial_t p(H, t)|^2 dt.$$

La dernière égalité et l'estimation d'énergie (4.30) donnent

$$E(0) \leq (T - 2\theta H)^{-1} H e^{\int_0^H c^2(s) |\partial_y(c^{-2}(s))| ds} \Phi(0) + \beta \int_0^T |\partial_t p(H, t)|^2 dt.$$

En remplaçant  $\Phi(0)$  par son expression dans (4.26) on trouve finalement

$$\begin{aligned} E(0) \leq & \left( (T - 2\theta H)^{-1} H e^{\int_0^H c^2(s) |\partial_y(c^{-2}(s))| ds} (c^{-2}(H) + \beta^2) + \beta \right) \int_0^T |\partial_t p(H, t)|^2 dt \\ & + \lambda_k^2 \int_0^T |p(H, t)|^2 dt. \end{aligned}$$

En combinant cette expression au fait que

$$E(0) = \int_0^H (c^{-2}(y) |f_1(y)|^2 + |f_0'(y)|^2 + \lambda_k^2 |f_0(y)|^2) dy,$$

on termine alors la preuve.

Ce chapitre a ainsi permis de démontrer de manière mathématique que la reconstruction de l'image photoacoustique se dégrade avec la profondeur. L'estimation de stabilité obtenue décrit le phénomène qui limite la reconstruction en profondeur, principal inconvénient de cette technique d'imagerie. Pour tenter de contrer ce phénomène, on peut ajouter des marqueurs dans le milieu qui ont pour objectif d'amplifier le signal photoacoustique en profondeur. Les nanoparticules métalliques sont un type de marqueurs utilisables dans ce but. Le chapitre suivant porte sur l'étude du phénomène photoacoustique en présence de nanoparticules et du problème inverse associé.

## Chapitre 5

# Imagerie photoacoustique avec des nanoparticules métalliques

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Le modèle photoacoustique</b>	<b>86</b>
5.1.1	Excitation électromagnétique	88
5.1.2	Résonances plasmoniques	90
5.1.3	Cas radial	99
<b>5.2</b>	<b>Effet photoacoustique</b>	<b>100</b>
5.2.1	Sources acoustiques	101
5.2.2	Sources électromagnétiques	101
<b>5.3</b>	<b>Le problème inverse photoacoustique</b>	<b>103</b>
5.3.1	Inversion acoustique	103
5.3.2	Inversion optique	104
5.3.3	Preuve du théorème principal (5.1.1)	109
<b>5.4</b>	<b>Annexe</b>	<b>110</b>

---

Dans ce chapitre, nous étudions le phénomène photoacoustique en présence de nanoparticules métalliques. L'objectif est d'établir un modèle réaliste de la génération d'un signal photoacoustique par une nanoparticule se trouvant à l'intérieur d'un tissu biologique. Dans la première sous-partie, nous décrirons le mécanisme d'amplification de la lumière à travers les propriétés des nanoparticules métalliques. La deuxième sous-partie concerne la modélisation thermique de la portion d'énergie électromagnétique qui est convertie en chaleur. La troisième partie concerne la modélisation thermique et le modèle mathématique de la génération d'une onde acoustique due à l'expansion thermique du tissu autour de la nanoparticule. Le problème inverse photoacoustique est résolu asymptoti-

quement dans la quatrième partie.

## 5.1 Le modèle photoacoustique

Nous commençons par décrire la modélisation du phénomène photoacoustique avec une nanoparticule métallique. Soit  $\Omega$  un domaine  $C^2$  borné dans  $\mathbb{R}^2$ . Le vecteur normal sortant de  $\partial\Omega$  au point  $x$  est noté  $\nu_\Omega(x)$ . Le domaine  $\Omega$  correspond au milieu biologique que nous souhaitons imager grâce à la technique de l'imagerie photoacoustique. Supposons que  $\Omega$  contienne une unique nanoparticule, de la forme  $B_\alpha := z^* + \alpha B$ , où  $B$  est un domaine  $C^2$  borné contenant l'origine,  $\alpha$  est une petite constante positive représentant la taille de la nanoparticule et  $z^*$  est la position de la nanoparticule. La première étape de l'imagerie photoacoustique est d'illuminer l'objet par une onde électromagnétique provenant d'un laser. Les équations de Maxwell linéaires sont de la forme

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E},\end{aligned}$$

où  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  sont les champs électrique et magnétique totaux respectivement.  $\mathbf{J}$  est le courant lié au champ électrique  $\mathbf{E}$  par  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ , où  $\sigma$  est la conductivité électrique. Les coefficients  $\varepsilon$  et  $\mu$  sont la permittivité électrique et magnétique de l'objet. La perméabilité magnétique est supposée constante égale à  $\mu_0$  la perméabilité du vide, et la permittivité électrique est donnée par

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon_s(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_\alpha}, \\ \varepsilon_m & \text{pour } x \in B_\alpha, \end{cases}$$

où  $\varepsilon_m$  est la permittivité du métal que nous préciserons plus tard, et  $\varepsilon_s(x)$  est la permittivité de l'échantillon, supposée de classe  $C^2$  et constante égale à  $\varepsilon_0 > 0$  la permittivité du vide à l'extérieur de  $\Omega$ . Nous supposons de plus que  $0 < c_0 < \Re(\varepsilon_s(x)) < \Re(\varepsilon_m)$  pour tout  $x \in \Omega$ , et  $\Im(\varepsilon_s(x))$  appartient à  $C_0^2(\Omega)$  et vérifie  $c_0 < \Im(\varepsilon_s(z^*))$ . La partie imaginaire de la permittivité électrique  $\Im(\varepsilon_s(x))$ , est liée à l'absorption de l'énergie électromagnétique et donne une bonne description de l'état du tissu biologique. Notre objectif est de reconstruire ce paramètre autour des nanoparticules.

Lors de l'illumination de l'objet, une partie de l'énergie électromagnétique est dissipée par absorption à l'intérieur du tissu biologique et dans la nanoparticule. L'absorption de l'énergie électromagnétique par le tissu biologique la transforme en chaleur, qui conduit alors à l'expansion thermo-élastique à l'origine du phénomène photoacoustique. Cette expansion génère alors une onde acoustique qui se propage jusqu'aux détecteurs sur le bord du domaine  $\partial\Omega$ . Les mesures  $p_0(x, t)$  permettent la reconstruction des coefficients d'absorption

et de diffusion du milieu. En pratique, plusieurs expériences ont permis d'observer que la profondeur d'image est relativement faible, à savoir de l'ordre de quelques millimètres. Cette limitation est due à la faible pénétration des ondes électromagnétiques dans le milieu biologique : les signaux optiques sont atténués de manière significative par l'absorption et la diffusion. Dans l'article [27], les auteurs montrent que la résolution est proportionnelle à la magnitude de la fluence du laser dans le milieu. Les nanoparticules métalliques sont très intéressantes en tant qu'agents de contraste en photoacoustique du fait de leur grande capacité à absorber la lumière et à la transformer en chaleur, ainsi que de leur sélectivité spectrale. Lorsqu'elles sont éclairées à leurs résonances plasmoniques, leur absorption est amplifiée et leur température augmente significativement, ce qui donne lieu à différents phénomènes dont l'augmentation de température du milieu environnant. La thérapie par hyperthermie pour le traitement du cancer est un exemple d'application des propriétés des nanoparticules : on détruit la tumeur grâce à l'échauffement des nanoparticules métalliques. Dans le cadre de l'imagerie photoacoustique, l'échauffement du tissu biologique environnant va générer une importante onde acoustique  $p_N(x, t)$  qui va pouvoir être détectée sur  $\partial\Omega$ . L'intérêt de l'utilisation des nanoparticules métalliques en imagerie photoacoustique est qu'on peut les introduire à la position souhaitée dans l'objet à imager, et ainsi obtenir des sources acoustiques d'intensité importante dans le milieu. C'est donc une solution au problème de la faible profondeur de l'imagerie photoacoustique, car la présence des nanoparticules métalliques permet d'amplifier le signal à l'intérieur des tissus. On trouve plusieurs travaux sur le sujet, voir par exemple les articles [26, 66].

L'objectif de ce chapitre est donc d'étudier le problème inverse photoacoustique dans le but de reconstruire la partie imaginaire de la permittivité du tissu  $\Im(\varepsilon_s(x))$  au point  $z^*$ , liée à l'absorption de l'énergie électromagnétique, à partir des mesures de pression  $p(x, t)$  sur le bord  $\partial\Omega$ .

Supposons que  $|\nabla\mathbf{H}(z^*)| \neq 0$ , que  $B$  est une boule et que  $z^*$  est connu. Nous établissons l'estimation de stabilité globale suivante. Elle montre comment les erreurs de mesures affectent la reconstruction de la permittivité en  $z^*$ .

### **Théoreme 5.1.1**

Soit  $\tau_p > \tau_\Omega$  avec  $\tau_p = \sup_{x, y \in \Omega} |x - y|$ . Soit  $p_a(x, t)$  (resp.  $p_b(x, t)$ ) la pression acoustique générée par une source électromagnétique externe dans un milieu de permittivité électrique  $\varepsilon_{s,a}(x)$  (resp.  $\varepsilon_{s,b}(x)$ ).

Alors, il existe une constante  $C > 0$  ne dépendant pas de  $\alpha$  et les mesures sur le bord vérifient

$$|\Im(\varepsilon_{s,a}(z^*)) - \Im(\varepsilon_{s,b}(z^*))| \leq C \left( \left\| \frac{\partial p_a}{\partial t} - \frac{\partial p_b}{\partial t} \right\|_{L^2(\partial\Omega \times (0, \tau_p))} + \|\nabla p_a - \nabla p_b\|_{L^2(\partial\Omega \times (0, \tau_p))} \right)^{\frac{1}{4}} + O(\alpha).$$

Le preuve du théorème est donnée dans la quatrième partie de ce chapitre. Elle est basée sur un développement asymptotique des champs électromagnétiques lorsque  $\alpha$  tend vers zéro. Le couplage entre les ondes acoustique et électromagnétique nous permet de retrouver le développement asymptotique intérieur des champs électromagnétiques dans un petit voisinage de  $z^*$  (Théorème 5.3.1, et sous-section 5.3.2). Comme  $\alpha$  la taille de la nanoparticule est petit, l'estimation de stabilité de Hölder montre que la reconstruction de  $\Im(\varepsilon_s(z^*))$  à partir des mesures de pression  $p(x, t)$  sur le bord  $\partial\Omega$  est un problème inverse bien posé. Dans la sous-section 5.1.2, nous calculons le développement asymptotique des résonances plasmoniques du système nanoparticule et tissu biologique. Puis dans la sous-section 5.3.2 nous montrons que le fait de choisir la fréquence de l'onde incidente proche de la partie réelle d'une résonance plasmonique amplifie le signal photoacoustique mesuré sur le bord. Pour finir, le résultat de stabilité peut être aisément étendu au cas de plusieurs nanoparticules séparées introduites dans l'échantillon.

### 5.1.1 Excitation électromagnétique

Les premières synthèses de petites particules métalliques datent du 4ème ou 5ème siècle avant JC, où des objets en or ont été découverts en Chine et en Egypte. Leurs propriétés optiques étaient utilisées pour colorer le verre, la céramique, la porcelaine et la poterie (voir [55] et références). Un des exemples les plus fascinants de l'utilisation de cette technologie est la célèbre coupe de Lycurge exposée au British Museum à Londres (voir Figure 5.1). Cette coupe change de couleur selon le mode d'illumination. Le verre apparaît vert quand il est éclairé de l'extérieur, sous la lumière du jour par exemple. Le verre apparaît rouge quand il est au contraire éclairé de l'intérieur et que la lumière le traverse. Ces propriétés étonnantes proviennent des propriétés optiques des nanoparticules dans le verre.

On sait maintenant que les propriétés diffractives de ces particules sont liées à des phénomènes de résonance. Les résonances plasmoniques peuvent se produire dans les particules métalliques si la permittivité diélectrique à l'intérieur de celle-ci est négative et si la longueur d'onde de l'excitation incidente est beaucoup plus grande que la dimension de la particule. Pour des particules métalliques à l'échelle nanométrique, ces résonances se produisent pour les fréquences optiques et se traduisent en une importante amplification du champ électromagnétique près du bord des particules. Ce phénomène est utilisé pour différentes applications comme la nanophotonique, la nanolithographie, la microscopie en champ proche et les biosenseurs. Les fréquences de résonance désirées ainsi que les amplifications locales du champ dépendent de la géométrie de la nanoparticule. Alors que les nanoparticules métalliques produites avec les techniques standards peuvent avoir un grand nombre de formes différentes, une description exacte et complète des modes électromagnétiques associés à ces particules n'est pas encore disponible. En fait, les résonances des nanoparticules sont souvent déterminées expérimentalement en excitant les nanoparticules de formes



FIGURE 5.1 – La coupe de Lycurgue.

diverses avec différentes fréquences incidentes.

Du point de vue mathématique, ces valeurs sont les valeurs propres complexes des équations de Maxwell qui n'existent que pour une permittivité diélectrique négative des nanoparticules et lorsque la dimension des nanoparticules est inférieure à la longueur d'onde incidente. Un développement asymptotique formel dans [53, 52] démontre que si le rapport entre la longueur d'onde incidente et la taille de la nanoparticule tend vers zéro, les résonances plasmoniques s'approchent des valeurs propres de l'opérateur de Neumann-Poincaré ou de l'opérateur variationnel de Poincaré [53, 52]. Dans l'article [24], les auteurs ont établi une justification rigoureuse de l'approximation quasi-statique en régime harmonique [53, 52]. Il est également connu que les phénomènes de résonance ne se produisent uniquement dans le cas d'une polarisation transverse magnétique (TM). Nous considérons ici le régime temporel harmonique en polarisation TM, soit  $\mathbf{E} = \Re(\mathbb{E}e^{i\omega t})$  et  $\mathbf{H} = \Im(\mathbb{H}e^{i\omega t})$ , où  $\mathbb{E} = (E_x(x, y), E_y(x, y), 0)$  et  $\mathbb{H} = (0, 0, H(x, y))$ .

Le champ magnétique total peut se décomposer en deux parties  $H = H_i + H_s$ , où  $H_i$  et  $H_s$  sont respectivement les ondes incidente et diffusée.

Les équations de Maxwell linéaires homogènes en domaine de fréquence, en polarisation transverse magnétique et en l'absence de sources internes sont de la forme

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon} \nabla H \right) + \omega^2 \mu_0 H = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2. \quad (5.1)$$

avec la condition de radiation de Sommerfeld  $|x| \rightarrow +\infty$  [59] :

$$\frac{\partial H_s}{\partial |x|} - i\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}H_s = O\left(\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right). \quad (5.2)$$

La permittivité électrique est donnée ici par

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon_0 & \text{pour } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}, \\ \varepsilon_s(x) & \text{pour } x \in \Omega \setminus \bar{B}_\alpha, \\ \varepsilon_m(\omega) & \text{pour } x \in B_\alpha, \end{cases}$$

où  $\varepsilon_0$  est la permittivité du vide. Le champ incident  $H_i$  satisfait

$$\Delta H_i + \omega^2\mu_0\varepsilon_0 H_i = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2.$$

Le métal qui compose la nanoparticule est supposé réel, sa constante diélectrique est décrite par le modèle de Drude :

$$\varepsilon_m(\omega) = \varepsilon_0 \left( \varepsilon_\infty - \frac{\omega_P^2}{\omega^2 + i\omega\Gamma} \right), \quad (5.3)$$

où  $\varepsilon_\infty > 0$ ,  $\omega_P > 0$  et  $\Gamma > 0$  sont les paramètres du métal qui sont habituellement déterminés grâce à des données expérimentales [55]. La constante diélectrique  $\varepsilon_m$  dépend de la fréquence  $\omega$  ce qui implique que les ondes incidentes peuvent causer un changement de comportement du métal. Les milieux possédant de telles propriétés sont appelés milieux dispersifs.

Le modèle de Drude considéré ici décrit bien les propriétés optiques de nombreux métaux pour une gamme de fréquence assez large. Par exemple, la fonction  $\varepsilon_m(\omega)$  avec comme paramètres effectifs  $\varepsilon_\infty = 9.84 \text{ eV}$ ,  $\omega_P = 9.096 \text{ eV}$ ,  $\Gamma = 0.072 \text{ eV}$  pour l'or et  $\varepsilon_\infty = 3.7 \text{ eV}$ ,  $\omega_P = 8.9 \text{ eV}$ ,  $\Gamma = 0.021 \text{ eV}$  pour l'argent reproduit plutôt bien les valeurs expérimentales de la constante diélectrique pour une fréquence entre  $0.8 \text{ eV}$  et  $4 \text{ eV}$  (voir par exemple [42]).

### 5.1.2 Résonances plasmoniques

Quand la fréquence appartient à la moitié supérieure de l'espace complexe, c'est-à-dire  $\Im(\omega) \geq 0$ , le système (5.1) possède une unique solution. La résolvante de l'opérateur différentiel 5.1 avec les conditions 5.2 possède une continuation méromorphe dans le plan complexe inférieur.

Le nombre complexe  $\omega$  est dit fréquence résonante plasmonique de la nanoparticule  $B_\alpha$  s'il existe une solution non triviale  $H$  au système (5.1)-(5.2) sans onde incidente.

On sait que l'ensemble des résonances de diffusion  $\{\omega_j\}$  de l'équation de Helmholtz ci-dessus en l'absence de dispersion ( $\varepsilon_m$  ne dépend pas de la fréquence  $\omega$ ) est discret et symétrique selon l'axe imaginaire dans le plan complexe. De plus, on voit facilement que toutes les fréquences de résonance  $\{\omega_j\}$  se situent dans le demi espace inférieur  $\Im(\omega) < 0$ . Elles peuvent être déterminées facilement pour une particule de forme circulaire ou ellipsoïde et sont liées dans ce cas aux zéros de certaines fonctions de Bessel. Des résultats plus élaborés établissent que pour des formes strictement convexes en dimension 3, les fréquences résonantes s'accumulent rapidement sur l'axe réel  $|\Re\omega| \rightarrow \infty$  [65]. Il a été démontré qu'en dimension 1, les résonances de diffusion d'un milieu non dispersif satisfont [36, 61]

$$\Im(\omega) \geq C_1 e^{-C_2 |\Re(\omega)|^2},$$

où les constantes  $C_i$ ,  $i = 1, 2$  dépendent uniquement de  $\varepsilon$  et de la taille du domaine.

La partie imaginaire d'une résonance donne le taux de décroissance des états résonants associés. De plus, les résonances proches de l'axe réel donnent des informations sur le comportement à long terme des ondes. En particulier, depuis les travaux de Lax-Phillips [47] et Vainberg [76], les régions proches de l'axe réel ne comportant pas de résonances ont été utilisées pour comprendre la décroissance des ondes. Plusieurs travaux en nano-optique ont fait le lien entre l'amplification de la lumière et la partie imaginaire des résonances proches de l'axe réel [12, 23, 22].

De la même manière que pour la cas non dispersif, les résonances plasmoniques forment un ensemble discret et isolé de valeurs complexes  $(\omega_j(\alpha))_j$ . Dans l'article [24], les auteurs ont établi un développement asymptotique des fréquences de résonances plasmoniques quand  $\alpha$  tend vers zéro et quand la nanoparticule est entourée d'un milieu homogène avec une permittivité électrique constante. Dans le prochain paragraphe, nous adaptons leurs techniques à notre problème et nous calculons le premier terme du développement asymptotique des résonances plasmoniques.

En faisant le changement de variables  $x = z^* + \alpha\xi$  dans le problème spectral (5.1), nous obtenons

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_\alpha} \nabla \tilde{H} \right) + \alpha^2 \omega^2 \mu_0 \tilde{H} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2, \quad (5.4)$$

avec la condition de radiation

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial |\xi|} - i\alpha\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\tilde{H} = O\left(\frac{1}{\sqrt{|\xi|}}\right) \quad \text{quand } |\xi| \rightarrow +\infty, \quad (5.5)$$

où  $\tilde{H}(\xi) = H(z^* + \alpha\xi)$ , et  $\tilde{\varepsilon}_\alpha(\xi) = \varepsilon(z^* + \alpha\xi)$  est donné par

$$\tilde{\varepsilon}_\alpha(\xi) = \begin{cases} \varepsilon_0 & \text{pour } \xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_\alpha}, \\ \varepsilon_s(z^* + \alpha\xi) & \text{pour } \xi \in \Omega_\alpha \setminus \overline{B}, \\ \varepsilon_m(\omega) & \text{pour } \xi \in B. \end{cases}$$

Ici,  $\Omega_\alpha$  correspond à  $\left\{ \frac{x-z^*}{\alpha}; x \in \Omega \right\}$ . Il contient le vecteur zéro et tend vers l'espace entier quand  $\alpha$  approche de zéro. De la même manière, la fonction régulière par morceaux  $\tilde{\varepsilon}_\alpha(\xi)$  converge en  $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^2)$  vers la fonction constante par morceaux

$$\tilde{\varepsilon}_0(\xi) = \begin{cases} \varepsilon_s(z^*) & \text{pour } \xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}, \\ \varepsilon_m(\omega) & \text{pour } \xi \in B. \end{cases}$$

Le problème spectral ci-dessus converge formellement quand  $\alpha$  tend vers zéro vers le problème spectral quasi-statique

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_0} \nabla \tilde{H}_0 \right) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2, \quad (5.6)$$

où le champ  $\tilde{H}_0(x)$  appartient à  $W_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$ , où

$$W_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2) := \left\{ u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^2) : u/(1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}} \ln(1 + |\xi|^2) \in L^2(\mathbb{R}^2); \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^2); \lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} u = 0 \right\}. \quad (5.7)$$

Nous définissons ensuite l'opérateur intégral  $\mathcal{T}_0 : W_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2) \rightarrow W_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$  par

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla \mathcal{T}_0 w \nabla v d\xi = \int_B \nabla w \nabla v d\xi.$$

On introduit l'espace vectoriel simple couche

$$\mathfrak{H} := \{ u \in W_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2) : \Delta u = 0 \text{ dans } B \cup \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}; u|_+ = u|_- \text{ sur } \partial B \}.$$

On déduit de l'article [24] que la restriction de  $\mathcal{T}_0$  à  $\mathfrak{H}$  est un opérateur auto-adjoint de type Fredholm d'indice zéro. En fait,  $\frac{1}{2}I - \mathcal{T}_0$  est un opérateur compact.

Notons  $\{\beta_j^\pm\}_{j \geq 1}$  les valeurs propres de  $\mathcal{T}_0 : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$ , ordonnées de la manière suivante :

$$0 = \beta_1^- \leq \beta_2^- \leq \dots \leq \frac{1}{2},$$

et

$$\frac{1}{2} \leq \dots \leq \beta_2^+ \leq \beta_1^+ < 1,$$

et satisfaisant  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \beta_j^\pm = \frac{1}{2}$ .

On déduit immédiatement du principe min-max pour les opérateurs compacts auto-adjoints  $\frac{1}{2}I - \mathcal{T}_0$  la caractérisation suivante du spectre de  $\mathcal{T}_0$  (voir [24]).

**Proposition 5.1.1**

Soit  $\{w_j^\pm\}_{j \geq 1}$  l'ensemble des fonctions propres correspondantes de l'opérateur  $\mathcal{T}_0$ , associées aux valeurs propres  $\{\beta_j^\pm\}_{j \geq 1}$ . Les inégalités suivantes sont vérifiées

$$\beta_j^- = \min_{\substack{u \in \mathfrak{H} \\ u \perp w_1^-, \dots, w_{j-1}^-}} \frac{\int_D |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx} = \max_{\substack{F_j \subset \mathfrak{H} \\ \dim(F_j) = j-1}} \min_{u \in F_j^\perp} \frac{\int_D |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx},$$

et

$$\beta_j^+ = \max_{\substack{u \in \mathfrak{H} \\ u \perp w_1^+, \dots, w_{j-1}^+}} \frac{\int_D |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx} = \min_{\substack{F_j \subset \mathfrak{H} \\ \dim(F_j) = j-1}} \max_{u \in F_j^\perp} \frac{\int_D |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx},$$

pour tout  $j \geq 1$ .

On définit les résonances quasi-statiques  $(\omega_j^\pm(0))_{j \geq 1}$  du problème spectral (5.6) comme les racines complexes des équations de dispersion suivantes

$$\varepsilon_m(\omega) = k_j^\pm := \varepsilon_0 \frac{\beta_j^\pm}{\beta_j^\pm - 1}, \quad j \geq 1. \quad (5.8)$$

On remarque tout d'abord que comme  $\beta_j^\pm$  est dans l'intervalle  $(0, 1)$ , les valeurs à droite de l'égalité  $k_j^\pm$  sont des réels négatifs. La permittivité électrique  $\varepsilon_m(\omega)$  aux résonances plasmoniques  $(\omega_j^\pm(0))_{j \geq 1}$  est alors réelle et négative. C'est exactement ce à quoi on s'attend dans cette situation, et les résonances plasmoniques ne peuvent pas exister si le matériau à l'intérieur de la nanoparticule possède une simple permittivité électrique qui a toujours une partie réelle strictement positive (voir Figure 5.2).

**Lemme 5.1.1**

Les racines complexes des relations de dispersion  $\varepsilon_m(\omega) = k_j^\pm$ , for  $j \geq 1$  sont données explicitement par

$$-i \frac{\Gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\varepsilon_\infty - k_j^\pm} - \frac{\Gamma^2}{4}} \quad \text{si } k_j^\pm \geq \varepsilon_\infty - 4 \frac{\omega_p^2}{\Gamma^2}, \quad (5.9)$$

$$i \left( -\frac{\Gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\Gamma^2}{4} - \frac{\omega_p^2}{\varepsilon_\infty - k_j^\pm}} \right) \quad \text{si } k_j^\pm < \varepsilon_\infty - 4 \frac{\omega_p^2}{\Gamma^2}. \quad (5.10)$$

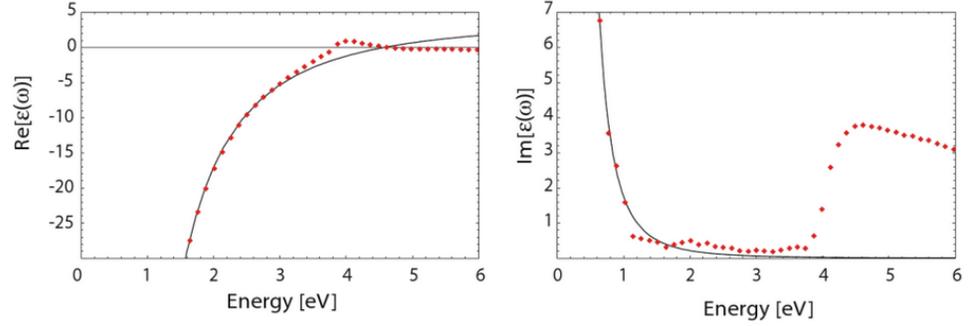


FIGURE 5.2 – Modèle de Drude pour la permittivité électrique de l'argent (données expérimentales en rouge).

Notons que les quantités  $k_j$  et  $\varepsilon_\infty - 4\frac{\omega_p^2}{\Gamma^2}$  dépendent uniquement de la forme de la particule et de la nature du métal qui la compose respectivement. D'après ce calcul, nous pouvons remarquer que la forme circulaire n'a que deux résonances quasi-statiques données par  $-i\frac{\Gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\varepsilon_\infty} - \frac{\Gamma^2}{4}}$ , et  $-i\frac{\Gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\varepsilon_\infty + \varepsilon_s(z^*)} - \frac{\Gamma^2}{4}}$ . Elles satisfont respectivement l'équation de dispersion avec  $k_1^- = 0$ , et  $k_\infty^\pm = -1$ . On remarque que seules les résonances liées à  $k_\infty^\pm = -1$  dépendent de la permittivité électrique du milieu environnant  $\varepsilon_s(z^*)$ , et pourront fournir des informations sur ce milieu. Pour finir, les fonctions propres associées à  $k_1^- = 0$ , sont constantes sur le bord  $\partial B$ .

Nous suivons ensuite les même étapes que dans la preuve du théorème 2.1 de l'article [24] pour prouver les résultats asymptotiques suivants.

### Proposition 5.1.2

Soit  $\omega(0)$  une résonance quasi-statique de multiplicité  $m$ . Alors il existe une constante  $\alpha_0 > 0$  telle que pour  $0 < \alpha < \alpha_0$  il existe  $m$  résonances plasmoniques  $(\omega_j(\alpha))_{1 \leq j \leq m}$  satisfaisant le développement asymptotique lorsque  $\alpha \rightarrow 0$  :

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \omega_j(\alpha) = \omega(0) + o(-\ln(\alpha)^{-1}). \quad (5.11)$$

Ensuite, nous calculons le développement asymptotique des champs électromagnétiques quand la taille de la particule tend vers zéro.

### Développement en petits volumes des champs électromagnétiques

Notre stratégie est d'utiliser ici les outils développés dans les articles [7, 9] et ses références pour calculer les termes principaux du développement asymptotique des champs électromagnétiques quand le volume de la nanoparticule tend vers zéro. Comme la fréquence de l'onde incidente est réelle et par conséquent très éloignée des résonances plasmoniques complexes, nous nous attendons à ce que les termes restant dans le développement asymptotique soient uniformément bornés.

Soit  $H_0 = H_i + H_{0s}$ , le champ magnétique total en l'absence de nanoparticule. Il satisfait le système suivant

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon_s} \nabla H_0 \right) + \omega^2 \mu_0 H_0 = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2. \quad (5.12)$$

avec la condition de radiation de Sommerfeld suivante lorsque  $|x| \rightarrow +\infty$  :

$$\frac{\partial H_{0s}}{\partial |x|} - i\omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} H_{0s} = O\left(\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right). \quad (5.13)$$

Rappelons qu'en régime quasi-statique, les résonances de diffusion sont très éloignées de l'axe réel. Le système (5.12)-(5.13) ci-dessus possède alors une unique solution  $H$  pour toute fréquence  $\omega$  réelle donnée. La fonction de Green  $G(x, y)$  est alors bien définie.

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon_s} \nabla G \right) + \omega^2 \mu_0 G = \delta_y(x) \quad \text{dans } \mathbb{R}^2. \quad (5.14)$$

avec la condition de radiation de Sommerfeld suivante lorsque  $|x| \rightarrow +\infty$  :

$$\frac{\partial G}{\partial |x|} - i\omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} G = O\left(\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right), \quad (5.15)$$

Une simple intégration par parties dans le système (5.12)-(5.13) nous donne

$$H(x) = H_0(x) + \int_{B_\alpha} \left( \frac{1}{\varepsilon_m} - \frac{1}{\varepsilon_s(x)} \right) \nabla H(y) \nabla_y G(x, y) dy, \quad (5.16)$$

ce qui conduit au résultat suivant.

#### **Proposition 5.1.3**

Il existe une constante  $C > 0$ , indépendante de  $\alpha$  et  $H_i$  telle que

$$\|H(x) - H_0(x)\|_{H^1(\Omega)} \leq C\alpha \|H_i\|_{H^1(\Omega)}.$$

Cette proposition montre que si  $\omega$  est réel, le champ  $H_0(x)$  est le premier terme du développement asymptotique de  $H(x)$  lorsque  $\alpha$  tend vers zéro. Cependant, la constante  $C$  de la proposition dépend de  $\varepsilon(x)$  et  $\omega$  peut être grand. En fait, en considérant les résultats de la proposition (5.1.2) et du lemme (5.1.1) si l'atténuation  $\Gamma$  tend vers zéro, les résonances plasmoniques vont approcher l'axe réel et la constante  $C$  peut alors exploser. Dans une telle situation, il faut prendre en compte plus de termes dans le développement asymptotique de  $H(x)$  quand  $\alpha$  tend vers zéro. Nous allons maintenant calculer le premier et le second terme du développement asymptotique. Dans [9], un développement asymptotique uniforme du champ magnétique est calculé en utilisant la méthode des développements asymptotiques raccordés pour  $\alpha$  suffisamment petit. Ici nous appliquons la même approche pour obtenir un développement asymptotique formel des champs électromagnétiques. Nous allons représenter le champ  $H(x)$  par deux développements différents, un développement intérieur pour  $x$  proche de  $z^*$ , et un développement extérieur pour  $x$  éloigné de  $z^*$ .

Le développement extérieur prend la forme suivante

$$H(x) = H_0(x) + \alpha H_1(x) + \alpha^2 H_2(x) + \dots, \quad \text{pour } |x - z^*| \gg O(\alpha), \quad (5.17)$$

où  $H_1, H_2$  satisfont l'équation de Helmholtz suivante

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon_s} \nabla H_i \right) + \omega^2 \mu_0 H_i = 0 \quad \text{dans } |x - z^*| \gg O(\alpha),$$

avec la condition de radiation de Sommerfeld suivante quand  $|x| \rightarrow +\infty$  :

$$\frac{\partial H_i}{\partial |x|} - i\omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} H_i = O\left(\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right).$$

En introduisant la variable micro échelle  $\xi = (x - z^*)/\alpha$ , le développement intérieur peut alors s'écrire

$$H(z^* + \alpha\xi) = h_0(\xi) + \alpha h_1(\xi) + \alpha^2 h_2(\xi) + \dots, \quad \text{for } |\xi| = O(1), \quad (5.18)$$

où les fonctions  $h_0, h_1, h_2$  satisfont les équations de divergence suivantes :

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \nabla h_0 \right) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2, \quad (5.19)$$

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \nabla h_1 \right) + \nabla \cdot (\eta_1(\xi) \nabla h_0) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2, \quad (5.20)$$

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \nabla h_2 \right) + \nabla \cdot (\eta_1(\xi) \nabla h_1) + \nabla \cdot (\eta_2(\xi) \nabla h_0) \quad (5.21)$$

$$= -\omega^2 \mu_0 h_0(\xi) \quad \text{dans } \mathbb{R}^2, \quad (5.22)$$

où  $\tilde{\eta}_1(\xi)$  et  $\eta_2(\xi)$  sont les coefficients du développement intérieur de  $\frac{1}{\varepsilon(z^* + \alpha\xi)}$  donnés par

$$\frac{1}{\varepsilon(z^* + \alpha\xi)} = \frac{1}{\tilde{\varepsilon}(\xi)} + \eta_1(\xi)\alpha + \eta_2(\xi)\alpha^2 + \dots, \quad (5.23)$$

avec

$$\eta_1(\xi) = \begin{cases} \nabla(\frac{1}{\varepsilon_s})(z^*)\xi & \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}, \\ 0 & \text{in } B, \end{cases}$$

et

$$\eta_2(\xi) = \begin{cases} \nabla^2(\frac{1}{\varepsilon_s})(z^*)\frac{\xi^2}{2} & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}, \\ 0 & \text{dans } B, \end{cases}$$

De manière évidente, les développements intérieurs et extérieurs ne sont pas valables partout, et le système d'équations qui définit les fonctions  $H_i$  et  $h_i$  ne sont pas complets. Pour déterminer ces fonctions de manière unique, nous devons faire correspondre les développements intérieurs et extérieurs dans un domaine de chevauchement dans lequel la variable micro échelle  $\xi$  est grande et  $x - z^*$  est petit. Dans ce domaine, les conditions de correspondance sont :

$$H_0(y) + \alpha H_1(y) + \alpha^2 H_2(y) + \dots \sim h_0(\xi) + \alpha h_1(\xi) + \alpha^2 h_2(\xi) + \dots$$

Un changement de variables dans l'intégrale de Lippman-Schwinger donne

$$\begin{aligned} H(z^* + \alpha\xi) &= H_0(z^* + \alpha\xi) \\ + \alpha \int_B \left( \frac{1}{\varepsilon_m} - \frac{1}{\varepsilon_s(z^* + \alpha\xi')} \right) \partial_{\xi_k} (H(z^* + \alpha\xi')) \partial_{x_k} G(z^* + \alpha\xi, z^* + \alpha\xi') d\xi'. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Un développement asymptotique des quantités ci-dessus donne

$$H_0(z^* + \alpha\xi) = H_0(z^*) + \partial_{x_i} H_0(z^*) \xi_i \alpha + \partial_{x_i x_j}^2 H_0(z^*) \xi_i \xi_j \frac{\alpha^2}{2} + o(\alpha^2),$$

et

$$\partial_{\xi_k} G(z^* + \alpha\xi, z^* + \alpha\xi') = \varepsilon_m \partial_{\xi_k} \Phi_0(\xi, \xi') + \alpha \Phi_1(\xi, \xi') + o(\alpha),$$

où  $\Phi_0(\xi, \xi') = \frac{1}{2\pi} \ln(|\xi - \xi'|)$  est la fonction de Green du Laplacien dans l'espace entier et  $\Phi_1(\xi, \xi')$  est une fonction faiblement singulière (voir Théorème 5.4.1 dans l'Annexe).

En injectant le développement intérieur de  $H$  et le développement asymptotique ci-dessus dans (5.24), nous obtenons

$$\begin{aligned} h_0(\xi) &= H_0(z^*), \\ h_1(\xi) &= \partial_{x_i} H_0(z^*) \xi_i + \left( \frac{\varepsilon_s(z^*)}{\varepsilon_m} - 1 \right) \int_B \partial_{\xi_k} \Phi_0(\xi, \xi') \partial_{\xi_k} h_1(\xi') d\xi', \end{aligned}$$

et

$$h_2(\xi) = \left( \frac{\varepsilon_s(z^*)}{\varepsilon_m} - 1 \right) \int_B \partial_{\xi_k} \Phi_0(\xi, \xi') \partial_{\xi_k} h_2(\xi') d\xi' + \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{\varepsilon_m} - \frac{1}{\varepsilon_s(z^*)} \right) \partial_{x_k} \varepsilon_s(z^*) \int_B \partial_{\xi_k} h_1(\xi') d\xi'.$$

Nous supposons maintenant que les fonctions  $h_0, h_1$  et  $h_2$  ne sont pas définies uniquement dans le domaine  $B$ , mais partout dans  $\mathbb{R}^2$ . En considérant les développements asymptotiques obtenus à partir de l'équation de Lipmann-Schwinger, nous obtenons

$$h_0(\xi) = H_0(z^*), \quad (5.25)$$

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon} \nabla h_1(\xi) \right) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2, \quad (5.26)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} (h_1(\xi) - \partial_{x_i} H_0(z^*) \xi_i) = 0 \quad (5.27)$$

et

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon} \nabla h_2(\xi) \right) = -\nabla \cdot (\eta_1(\xi) \nabla h_1) \quad \text{in } \mathbb{R}^2, \quad (5.28)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left( h_2(\xi) - \frac{1}{2} \partial_{x_i x_j}^2 H_0(z^*) \xi_i \xi_j \right) = 0. \quad (5.29)$$

En utilisant une approche variationnelle dans l'espace de Hilbert  $W_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$ , nous pouvons prouver que les systèmes (5.26)- (5.27) et (5.28)- (5.29) ont des solutions uniques. En particulier, nous obtenons que

$$h_2(\xi) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{\varepsilon_m} - \frac{1}{\varepsilon_s(z^*)} \right) \partial_{x_k} \varepsilon_s(z^*) \int_B \partial_{\xi_k} h_1(\xi') d\xi', \quad (5.30)$$

est une fonction constante.

Nous allons maintenant déterminer le développement extérieur des fonctions  $H_1$  et  $H_2$ . Pour ce faire, nous considérons de nouveau l'équation de Lipmann-Schwinger

$$H(x) = H_0(x) + \alpha \int_B \left( \frac{1}{\varepsilon_m} - \frac{1}{\varepsilon_s(z^* + \alpha \xi')} \right) \partial_{\xi_k} (H(z^* + \alpha \xi')) \partial_{x_k} (G(x, z^* + \alpha \xi')) d\xi'. \quad (5.31)$$

En utilisant le développement intérieur de  $H$  et la régularité de la fonction de Green  $G$  nous obtenons

$$H_1(x) = 0, \quad (5.32)$$

$$H_2(x) = \left( \frac{1}{\varepsilon_m} - \frac{1}{\varepsilon_s(z^*)} \right) \int_B \partial_{\xi_k} h_1(\xi') d\xi' \partial_{x_k} G(x, z^*). \quad (5.33)$$

Nous savons que les développements intérieur et extérieur ne sont pas valables uniformément en  $x$  [9]. Pour obtenir un développement asymptotique des champs lorsque  $\alpha$  tend vers zéro valable uniformément sur la variable d'espace,

nous raccordons les deux développements. Ainsi, en ajoutant les développements intérieurs et extérieurs et en enlevant leur partie commune, nous obtenons de manière formelle les développements uniformes suivants, pour tout  $x \in \Omega$  :

$$H(x) = H_0(x) + \alpha \mathcal{H}_1\left(\frac{x - z^*}{\alpha}\right) + \alpha^2 \ln(\alpha) \mathcal{H}_2\left(\frac{x - z^*}{\alpha}\right) + \alpha^2 H_2(x) + O(\alpha^2 \ln(\alpha)), \quad (5.34)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1(\xi) &= h_1(\xi) - \xi_i \partial_{x_i} H_0(z^*) + \left( \frac{\varepsilon_s(z^*)}{\varepsilon_m} - 1 \right) \frac{1}{\pi} \int_B \partial_{\xi_i} h_1(\xi') d\xi' \frac{\xi_i}{|\xi|^2}, \\ \mathcal{H}_2(\xi) &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{\varepsilon_m} - \frac{1}{\varepsilon_s(z^*)} \right) \partial_{x_k} \varepsilon_s(z^*) \int_B \partial_{\xi_k} h_1(\xi') d\xi'. \end{aligned}$$

En suivant la preuve du Théorème 2.1 de l'article [9], nous obtenons les estimations suivantes.

**Théorème 5.1.2**

Pour  $\delta \in (0, 1)$ , il existe une constante  $C > 0$ , indépendante de  $\alpha$  et  $H_i$  telle que

$$\|H(x) - H_0(x) - \alpha \mathcal{H}_1\left(\frac{x - z^*}{\alpha}\right) - \alpha^2 \ln(\alpha) \mathcal{H}_2\left(\frac{x - z^*}{\alpha}\right) - \alpha^2 H_2(x)\|_{H^1(\Omega)} \leq C \alpha^2 \|H_i\|_{H^1(\Omega)}.$$

Cette approximation peut être améliorée en considérant le terme d'ordre  $\alpha^2$  du développement intérieur et en calculant la limite de  $\Phi_1(\xi, \xi')$  lorsque  $\xi$  tend vers  $+\infty$ . Contrairement à la première impression, le terme  $\alpha^2 H_2(x)$  du côté droit doit nécessairement annuler la singularité de  $\mathcal{H}_1(\xi)$  lorsque  $\xi$  tend vers zéro.

### 5.1.3 Cas radial

Nous supposons ici que  $\Omega$  et  $B$  sont le disque unité, et que  $z^* = 0$ . Nous supposons également que la permittivité électrique  $\varepsilon$  est constante par morceaux.

Soient  $(r, \theta)$  les coordonnées polaires dans  $\mathbb{R}^2$ , soit  $m$  un entier supérieur à 1 fixé, et considérons

$$H_i(r, \theta) = J_m\left(\frac{\omega}{c_0} r\right) e^{im\theta},$$

le champ magnétique incident, où  $J_m(\xi)$  est la fonction de Bessel de premier type d'ordre  $m$ , et  $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$  est la vitesse de la lumière dans le vide.

Le champ magnétique total prend alors la forme  $H(r, \theta) = h_\alpha(r) e^{im\theta}$ , avec

$$h(r) = \begin{cases} \kappa_1 H_m\left(\frac{\omega}{c_0} r\right) + J_m\left(\frac{\omega}{c_0} r\right) & \text{pour } r \geq 1, \\ \kappa_2 H_m\left(\frac{\omega}{c_s} r\right) + \kappa_3 J_m\left(\frac{\omega}{c_s} r\right) & \text{pour } \alpha \leq r \leq 1, \\ \kappa_4 J_m\left(\frac{\omega}{c_m} r\right) & \text{pour } r \leq \alpha, \end{cases}$$

où  $c_s = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_s \mu_0}}$ , et  $c_m = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_m \mu_0}}$  sont la vitesse de la lumière dans le revêtement diélectrique et dans la nanoparticule métallique respectivement.  $H_m(\xi)$  est la fonction de Hankel de premier type d'ordre  $m$ .

Les conditions de transmission pour  $r = 1$  et  $r = \alpha$  donnent le système suivant

$$\begin{pmatrix} H_m\left(\frac{\omega}{c_0}\right) & -H_m\left(\frac{\omega}{c_s}\right) & -J_m\left(\frac{\omega}{c_s}\right) & 0 \\ \frac{c_0}{c_s} H'_m\left(\frac{\omega}{c_0}\right) & -H'_m\left(\frac{\omega}{c_s}\right) & -J'_m\left(\frac{\omega}{c_s}\right) & 0 \\ 0 & H_m\left(\frac{\omega}{c_s}\alpha\right) & J_m\left(\frac{\omega}{c_s}\alpha\right) & -J_m\left(\frac{\omega}{c_m}\alpha\right) \\ 0 & \frac{c_s}{c_m} H'_m\left(\frac{\omega}{c_s}\alpha\right) & \frac{c_s}{c_m} J'_m\left(\frac{\omega}{c_s}\alpha\right) & -J'_m\left(\frac{\omega}{c_m}\alpha\right) \end{pmatrix} \vec{k} = \begin{pmatrix} -J_m\left(\frac{\omega}{c_0}\right) \\ -J'_m\left(\frac{\omega}{c_0}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les résonances plasmoniques, dans ce cas, sont exactement les zéros du déterminant  $d_\alpha(\omega)$  de la matrice de diffusion. Un développement asymptotique de cette dernière lorsque  $\alpha$  tend vers zéro donne

$$d_\alpha(\omega) = \frac{d_0(\omega)}{\alpha} + o\left(\frac{1}{\alpha}\right),$$

où

$$d_0(\omega) := \left( -H_m\left(\frac{\omega}{c_0}\right) J'_m\left(\frac{\omega}{c_s}\right) + \frac{c_s \varepsilon_s}{c_0 \varepsilon_0} H'_m\left(\frac{\omega}{c_0}\right) J_m\left(\frac{\omega}{c_s}\right) \right) \frac{c_s^m}{\pi \omega} (c_m^2 - c_s^2) \frac{1}{c_m^{m+1}}.$$

La valeur limite  $\omega(0)$  d'une séquence de résonances plasmoniques doit être finie et doit satisfaire l'équation de dispersion  $d_0(\omega(0)) = 0$ . On remarque que les racines complexes de la fonction

$$-H_m\left(\frac{\omega}{c_0}\right) J'_m\left(\frac{\omega}{c_s}\right) + \frac{c_0}{c_s} H'_m\left(\frac{\omega}{c_0}\right) J_m\left(\frac{\omega}{c_s}\right),$$

sont les résonances de diffusion du domaine  $\Omega$  en l'absence de nanoparticule. Si nous ne considérons plus  $\omega$  petit, et si le matériau composant la nanoparticule est non dispersif, nous obtenons que les résonances de diffusion convergent vers les résonances non perturbées (voir par exemple [7, 9]).

Une analyse des zéros de  $d_0(\omega)$  en régime quasi-statique conduit à  $\varepsilon_m(\omega(0)) = 0$ , ce qui correspond exactement aux valeurs plasmoniques d'une nanoparticule de forme circulaire  $\beta_\infty^\pm = \frac{1}{2}$  d  $\beta_1^- = 0$  (voir par exemple (5.8)).

Dans le cas où  $m$  est égal à 1, le déterminant  $d_\alpha(\omega)$  a le développement asymptotique suivant  $d_\alpha(\omega) = d_0(\omega) \ln(\alpha) + o(\ln(\alpha))$  lorsque  $\alpha$  tend vers zéro. En utilisant le théorème de Rouché, on peut déterminer complètement le développement asymptotique des résonances plasmoniques dans le cas d'une nanoparticule circulaire.

## 5.2 Effet photoacoustique

Nous considérons ici une nanoparticule métallique dans un liquide et nous allons décrire la génération photoacoustique engendrée par l'échauffement électromagnétique de la nanoparticule. Nous rappelons les équations qui décrivent

le couplage entre l'élévation de température dans le milieu et la génération de l'onde acoustique

### 5.2.1 Sources acoustiques

Nous écrivons les équations fondamentales de l'acoustique [66], à savoir l'équation de continuité, l'équation d'Euler et l'équation de continuité du flux de chaleur comme dans le Chapitre 1.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \operatorname{div}(v), \quad (5.35)$$

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla p, \quad (5.36)$$

$$\rho_0 T \frac{\partial s}{\partial t} = \operatorname{div}(\kappa \nabla T) + P_v, \quad (5.37)$$

où  $\rho$  est la densité,  $p(r, t)$  la pression acoustique,  $v(r, t)$  la vitesse de déplacement acoustique,  $s(r, t)$  l'entropie spécifique,  $T(r, t)$  la température et  $P_v$  la source de chaleur. La variation de densité est supposée petite ( $\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \ll 1$ ). La conduction thermique  $\kappa$  est donnée par

$$\kappa(x) = \begin{cases} \kappa_s(x) & \text{pour } x \in \Omega \setminus \overline{B_\alpha}, \\ \kappa_0 & \text{pour } x \in B_\alpha, \end{cases}$$

où  $\kappa_s(x) > 0$  est la conduction thermique du liquide et  $\kappa_0 > 0$  est la conduction thermique du métal qui remplit la nanoparticule. Elle vérifie  $\kappa_0 \gg \kappa_s$ .

Le même développement que celui présenté dans le Chapitre 1 mène aux équations couplées suivantes pour la génération d'ondes acoustiques dans un milieu liquide :

$$\rho_0 c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\kappa \nabla T) + P_v, \quad (5.38)$$

$$\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = \rho_0 \beta_0 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}. \quad (5.39)$$

### 5.2.2 Sources électromagnétiques

Le terme source  $P_v$  est l'énergie produite par échauffement électromagnétique. Il peut s'écrire de la manière suivante [63] :

$$P_v = Q_{gen} + Q_{met}, \quad (5.40)$$

où  $Q_{gen}$  est la densité de puissance volumique de la source électromagnétique, et  $Q_{met}$  est la chaleur métabolique générée par le tissu biologique. Nous considérons ici que cette grandeur est nulle, c'est à dire que le tissu ne génère pas de chaleur.

Les coefficients électromagnétiques du milieu sont la permittivité électrique complexe  $\varepsilon_s$  et la perméabilité magnétique  $\mu_0$ . Comme l'onde électromagnétique est une impulsion et du fait de la différence d'échelles temporelles entre les ondes acoustiques et électromagnétiques, la densité de puissance volumique est décrite par la moyenne temporelle de la partie réelle de la divergence du vecteur de Poynting  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \overline{\mathbf{H}}$  multiplié par la fonction de Dirac en zéro. Par ailleurs, la divergence de  $\mathbf{S}$  est donnée par

$$-\nabla \cdot \mathbf{S} = i\omega\overline{\varepsilon}|\mathbf{E}|^2 + i\omega\overline{\mu}_0|\mathbf{H}|^2. \quad (5.41)$$

En prenant la partie réelle et la moyenne temporelle de cette divergence, nous obtenons finalement

$$Q_{gen} = \omega\Im(\varepsilon)\langle|\mathbf{E}|^2\rangle\delta_0(t) = \omega\Im(\varepsilon)|E|^2\delta_0(t), \quad (5.42)$$

où la moyenne temporelle est définie par  $\langle f \rangle := \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t)dt$ , et  $\delta_0$  est la fonction de Dirac en 0.

Nous pouvons finalement écrire le système d'équations couplées décrivant la génération photoacoustique due à l'échauffement électromagnétique d'une nanoparticule métallique

$$\rho_0 c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\kappa \nabla T) + \omega\Im(\varepsilon)|E|^2\delta_0(t), \quad (5.43)$$

$$\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = \rho_0 \beta_0 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}. \quad (5.44)$$

avec les conditions initiales en  $t = 0$  :

$$T = p = \frac{\partial p}{\partial t} = 0. \quad (5.45)$$

En suivant la même analyse que dans [10], nous pouvons démontrer que la température  $T$  approche  $T_0$  lorsque  $\alpha$  tend vers zéro, avec  $T_0$  la solution de

$$\rho_0 c_p \frac{\partial T_0}{\partial t} = \text{div}(\kappa_s \nabla T_0) + \omega\Im(\varepsilon)|E|^2\delta_0(t),$$

avec la condition initiale  $T_0 = 0$  en  $t = 0$ , et  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} T_0(x) = 0$ . Ici nous ne considérons pas les premier et second termes du développement asymptotique. Les problèmes aux limites sont bien posés comparés à ceux du développement asymptotique des champs électromagnétiques.

Comme la conductivité  $\kappa_s$  du tissu biologique est petite comparée aux autres quantités, nous la négligeons et trouvons alors l'équation suivante pour la température

$$\rho_0 c_p \frac{\partial T_0}{\partial t} = \omega\Im(\varepsilon)|E|^2\delta_0(t),$$

qui combinée à l'onde acoustique (5.44), nous permet d'obtenir le modèle suivant pour la génération photoacoustique par une particule métallique :

$$\begin{cases} \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(x, t) - \Delta p(x, t) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \\ p(x, 0) = \frac{\omega \beta_0}{c_p} \Im(\varepsilon)(x) |E(x)|^2 & \text{dans } \mathbb{R}^2, \\ \frac{\partial p}{\partial t}(x, 0) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (5.46)$$

Le système ci-dessus (5.46) couplé avec l'équation de Helmholtz (5.1)-(5.2) représente le problème direct de l'effet photoacoustique généré par l'échauffement électromagnétique d'une nanoparticule métallique dans un tissu biologique. L'étape suivante est alors d'étudier le problème inverse photoacoustique.

### 5.3 Le problème inverse photoacoustique

Nous étudions dans cette partie le problème inverse de reconstruction de la permittivité électrique  $\varepsilon$  à partir des mesures acoustiques  $p(x, t)$ ,  $(x, t) \in \partial\Omega \times (0, \tau_p)$ , générées par l'effet photoacoustique dû à l'échauffement de la nanoparticule métallique présentée dans la partie précédente. La nanoparticule  $B_\alpha$  est échauffée par des champs électromagnétiques à une fréquence proche d'une fréquence de résonance plasmonique.

On note  $\tau_p > 0$  la période de temps pendant laquelle on effectue les mesures acoustique, cette période sera explicitée dans la suite. Le problème inverse présente deux inversions. La première est l'inversion acoustique, pour laquelle nous supposons que la vitesse acoustique  $c_s$  est connue et constante. Le but est de reconstruire la pression initiale  $\Im(\varepsilon(x))|E(x)|^2$ ,  $x \in \Omega$  à partir de  $p(x, t)$ ,  $(x, t) \in \partial\Omega \times (0, \tau_p)$ . La deuxième inversion est la reconstruction de la permittivité électrique  $\varepsilon$  à partir de la donnée interne  $\Im(\varepsilon(x))|E(x)|^2$ ,  $x \in \Omega$ .

#### 5.3.1 Inversion acoustique

Rappelons que  $\Im(\varepsilon(x))$  est une fonction à support compact dans  $\Omega$ , et que nous supposons la vitesse acoustique dans les tissus biologiques comme connue et constante égale à  $c_p$  qui correspond à la vitesse acoustique isentropique dans l'eau, à savoir 1500 m/s. Ces deux hypothèses nous permettent d'utiliser les résultats de théorie de contrôle pour l'équation d'onde afin d'établir une estimation de stabilité pour l'inversion acoustique. Le résultat suivant est basé sur la méthode des multiplicateurs décrite dans les articles [37, 50].

##### **Théoreme 5.3.1**

Soit  $\tau_p > \tau_\Omega$  où  $\tau_p = \sup_{x, y \in \Omega} |x - y|$ . Alors il existe une constante  $C = C(\Omega) > 0$  telle que

$$\frac{\omega \beta_0}{c_p} \|\Im(\varepsilon(x))|E(x)|^2\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left\| \frac{\partial p}{\partial t} \right\|_{L^2(\partial\Omega \times (0, \tau_p))} + \|\nabla p\|_{L^2(\partial\Omega \times (0, \tau_p))}$$

L'étude [45] décrit les différentes méthodes de reconstruction et les différentes approches basées sur les équations intégrales pour une vitesse acoustique constante. Le résultat de stabilité montre que la reconstruction de l'énergie électromagnétique responsable de la génération du signal acoustique par échauffement de la nanoparticule à partir des mesures acoustiques est stable si le temps d'observation  $\tau_p$  est suffisamment grand. Ce résultat peut être généralisé pour une vitesse acoustique non constante ainsi que pour des données acoustiques mesurées uniquement sur une petite partie du bord du domaine [4, 39]. Nous nous restreignons ici par simplicité au cas de la vitesse constante et des données complètes.

Nous supposons dans la suite que les constantes  $\beta_0$  et  $c_p$  sont données. Soit  $\mathcal{O}_M$  la boule de rayon  $M > 0$  centrée en 0 dans  $H^2(B_R(z^*))$ , où  $R > 0$  est assez grand pour que  $\bar{\Omega} \subset B_R(z^*)$ .

### Corollaire 5.3.1

Supposons que  $\varepsilon \in B_M(0)$ , et soit  $\tau_p > \tau_\Omega$ . Alors il existe une constante  $C = C(\omega, M, \beta_0, c_p) > 0$  telle que l'estimation suivante

$$\|\Im(\varepsilon)|\nabla H|^2\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leq C \left( \left\| \frac{\partial p}{\partial t} \right\|_{L^2(\partial\Omega \times (0, \tau_p))} + \|\nabla p\|_{L^2(\partial\Omega \times (0, \tau_p))} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (5.47)$$

soit vérifiée.

*Preuve.* Un calcul simple permet de déterminer que  $|E(x)|^2 = |\nabla H(x)|^2$  sur  $\Omega$ . En utilisant l'interpolation entre les espaces de Sobolev [51], nous estimons  $\Im(\varepsilon)|\nabla H|^2$  in  $H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$  en terme de norme dans  $L^2(\Omega)$  et  $H^2(\Omega)$  respectivement. Nous en déduisons donc (5.47) à partir de la régularité elliptique du système (5.1) et du résultat d'estimation du théorème (5.3.1).

### 5.3.2 Inversion optique

Dans cette partie nous supposons que l'énergie électromagnétique interne  $\Im(\varepsilon(x))|\nabla H(x)|^2$  pour  $x \in \Omega$  est reconstruite, et nous étudions le problème inverse qui consiste à déterminer  $\varepsilon(x)$  dans  $\Omega$  en utilisant le développement asymptotique des champs électromagnétiques de la partie précédente. Dans les applications médicales, il n'est en pratique nécessaire de reconstruire que la partie imaginaire de la permittivité électrique. Elle correspond à l'absorption du champ électromagnétique et donc à la génération de l'onde photoacoustique.

L'absorption de l'énergie électromagnétique par le tissu biologique uniquement est négligeable dans  $\Omega$ . En pratique le signal photoacoustique généré par cette absorption est faible dans  $\Omega$  et ne peut pas être utilisé pour imager le tissu.

Nous déduisons de la deuxième partie les développements asymptotiques intérieurs et extérieurs du champ magnétique  $|\nabla H(x)|^2$ . Nous allons tout d'abord

analyser l'information sur le milieu et la nanoparticule à partir du développement asymptotique extérieur. Ce problème inverse classique possède des limites connues. Nous complétons ensuite la reconstruction des propriétés optiques du milieu en utilisant l'information du développement intérieur du champ magnétique et des connaissances à priori sur la forme de la nanoparticule.

### Inversion avec le développement extérieur

Rappelons le développement asymptotique extérieur (5.17)- (5.32) du champ magnétique :

$$H(x) = H_0(x) + \alpha^2 H_2(x) + o(\alpha^2) \quad \text{pour } x \in \partial\Omega,$$

où  $H_0(x)$  est la solution du système (5.12)- (5.13), et  $H_2(x)$  est donnée par

$$H_2(x) = \left( \frac{1}{\varepsilon_m(\omega)} - \frac{1}{\varepsilon_s(z^*)} \right) \int_B \partial_{\xi_k} h_1(\xi') d\xi' \partial_{x_k} G(x, z^*),$$

avec  $h_1(\xi)$  l'unique solution du système (5.26)-(5.27).

Le développement asymptotique ci-dessus est en fait valable dans une région voisine du bord  $\partial\Omega$ , mais comme la donnée interne est de la forme  $\Im(\varepsilon(x))|\nabla H(x)|^2$ , où  $\Im(\varepsilon)$  est à support compact dans  $\Omega$ , nous pouvons uniquement reconstruire l'information concernant le champ magnétique sur le bord  $\partial\Omega$ . Notons que comme  $\varepsilon_0$  est donné, nous pouvons reconstruire la donnée de Cauchy du champ magnétique sur  $\partial\Omega$  à partir de la connaissance de sa trace sur le même domaine.

La fonction  $H_2(x)$  peut être réécrite en termes de tenseur de polarisation au premier ordre  $M(\frac{\varepsilon_s(z^*)}{\varepsilon_m(\omega)}) = (M_{kl})_{1 \leq k, l \leq 2}$ , de la manière suivante (voir par exemple l'article [8] et ses références)

$$H_2(x) = \left( \frac{1}{\varepsilon_m(\omega)} - \frac{1}{\varepsilon_s(z^*)} \right) \nabla G(x, z^*) \cdot M \nabla H_0(z^*),$$

où

$$M_{kl} = \int_B \partial_{\xi_k} \phi_l(\xi') d\xi', \quad (5.48)$$

et  $\phi_l(\xi), l = 1, 2$  sont les uniques solutions du système

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon} \nabla \phi_l(\xi) \right) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2, \quad (5.49)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} (\phi_l(\xi) - \xi_l) = 0. \quad (5.50)$$

D'autre part,  $\phi_l(\xi), l = 1, 2$  peut se réécrire comme suit

$$\phi_l(\xi) = \xi_l + \left( \frac{\varepsilon_m(\omega)}{\varepsilon_s(z^*) - \varepsilon_m(\omega)} I + \mathcal{T}_0 \right)^{-1} \widehat{\xi}_l(\xi), \quad (5.51)$$

où  $\widehat{\xi}_l(\xi) \in W_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$  est la projection orthogonale de  $\xi_l \chi_B(\xi)$  sur  $W_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2)$ , qui peut être définie comme l'unique solution du système

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla \widehat{\xi}_l \nabla v d\xi = \int_B \nabla \xi \nabla v d\xi \quad \text{pour tout } v \in W_0^{1,-1}(\mathbb{R}^2).$$

Concernant l'équation intégrale (5.51), nous observons que lorsque  $\omega$  tend vers une résonance plasmonique  $\omega_j(\alpha)$ , les fonctions  $\phi_l(\xi)$ , et par conséquent le tenseur de polarisation  $M$  vont vraisemblablement exploser. Comme  $\omega$  est réel dans les applications, et comme la nanoparticule immergée dans le milieu approche les résonances quasi-statiques  $\omega_j(0)$  quand  $\alpha$  tend vers zéro (proposition (5.1.2)) nous nous attendons à ce que le coefficient  $M$  devienne grand lorsque  $\omega$  coïncide avec  $\Re(\omega_j(0))$ , et  $\Gamma \ll 1$ .

Plusieurs travaux ont considéré la localisation d'une petite inhomogénéité dans un milieu environnant connu, et la plupart des méthodes proposées sont basées sur un moyennage approprié du développement asymptotique en utilisant les solutions particulières du milieu environnant comme des poids [8, 11]. En d'autres termes, la position  $z^*$  de la nanoparticule peut être déterminée de manière unique à partir du développement extérieur de  $H(x)$ , c'est-à-dire  $H_0(x) + \alpha^2 H_2(x)$ ,  $x \in \partial\Omega$  si la permittivité électrique du milieu environnant  $\varepsilon_s(x)$  est connue partout. Ce n'est cependant pas le cas dans le problème que nous étudions ici, car notre objectif est de déterminer  $\varepsilon_s(x)$ , lorsque  $\varepsilon_m(\omega)$  est connu. C'est la configuration inverse de l'étude des inhomogénéités mentionnée ci-dessus. Pour passer outre ces difficultés, nous proposons d'utiliser des mesures multifréquentielles  $H_2(x)$ ,  $\omega \in (\underline{\omega}, \overline{\omega})$  pour localiser  $z^*$  [6, 32], où  $\underline{\omega}, \overline{\omega}$  sont deux constantes strictement positives satisfaisant  $\underline{\omega} \ll \overline{\omega}$ . Nous supposons ici que la position  $z^*$  de la nanoparticule est connue.

En général, même si  $\varepsilon_s(x)$  est connu, il n'est pas possible de reconstruire simultanément la forme de la nanoparticule  $\partial B$  et le contraste  $\frac{\varepsilon_s(z^*)}{\varepsilon_m(\omega)}$  à partir des seules mesures du développement extérieur  $H_0(x) + \alpha^2 H_2(x)$ ,  $x \in \partial\Omega$ . Dans le problème que nous étudions ici, la forme de la nanoparticule est supposée connue. Par exemple, si nous considérons une forme circulaire, c'est-à-dire si  $B$  est le disque unité, les fonctions  $\phi_l(\xi)$ ,  $l = 1, 2$ , peuvent être déterminées explicitement

$$\widehat{\xi}_l(\xi) = \begin{cases} \frac{\xi_l}{2} & \text{for } \xi \in B, \\ \frac{\xi_l}{2|\xi|^2} & \text{for } \xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}, \end{cases} \quad (5.52)$$

$$\phi_l(\xi) = \begin{cases} \frac{2\varepsilon_m(\omega)}{\varepsilon_s(z^*) + \varepsilon_m(\omega)} \xi_l & \text{for } \xi \in B, \\ \xi_l - \frac{\varepsilon_s(z^*) - \varepsilon_m(\omega)}{\varepsilon_s(z^*) + \varepsilon_m(\omega)} \frac{\xi_l}{|\xi|^2} & \text{for } \xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}, \end{cases} \quad (5.53)$$

pour  $\xi \in B$ , ce qui implique que le tenseur de polarisation peut être simplifié en

$$M_{kl} = \frac{2\varepsilon_m(\omega)}{\varepsilon_s(z^*) + \varepsilon_m(\omega)} |B| \delta_{kl},$$

où  $\delta_{kl}$  est le symbole de Kronecker. En supposant que  $H_0(x)$ ,  $x \in \partial\Omega$  est donné, nous déduisons du développement extérieur l'approximation suivante [8, 11] :

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\partial\Omega} \left( H \frac{\partial H_0}{\partial \nu_\Omega} - \frac{\partial H}{\partial \nu_\Omega} H_0 \right) ds(x) \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned} &= \alpha^2 \left( \frac{1}{\varepsilon_m(\omega)} - \frac{1}{\varepsilon_s(z^*)} \right) \nabla H_0(z^*) \cdot M \nabla H_0(z^*) + o(\alpha^2) \\ &= 2|B| \frac{\varepsilon_s(z^*) - \varepsilon_m(\omega)}{\varepsilon_m(\omega) + \varepsilon_s(z^*)} \frac{1}{\varepsilon_s(z^*)} |\nabla H_0(z^*)|^2 \alpha^2 + o(\alpha^2), \end{aligned} \quad (5.55)$$

Pour s'assurer que le premier terme du développement asymptotique ne s'annule pas, et pour s'assurer de la réussite de la procédure d'identification, il devient nécessaire de supposer la condition de non dégénérescence suivante

$$|\nabla H_0(z^*)|^2 \neq 0.$$

Pour une nanoparticule de forme circulaire, nous pouvons voir immédiatement à partir de l'expression explicite du premier terme du développement asymptotique que lorsque  $\omega$  est proche d'une résonance plasmonique, à savoir  $\varepsilon_m(\omega) = \varepsilon_d \beta_\infty$ , le tenseur de polarisation va exploser. Dans la sous-partie suivante, nous allons étudier le développement intérieur du champ magnétique qui représente les données photoacoustiques, dans le but de calculer le contraste  $\frac{\varepsilon_s(z^*)}{\varepsilon_m(\omega)}$ .

### Inversion en utilisant le développement intérieur

Nous supposons dans la suite que la position  $z^*$ , la taille  $\alpha$  et la forme  $\partial B$  de la nanoparticule sont connues. Rappelons le développement intérieur (5.18) :

$$H(z^* + \alpha\xi) = H_0(z^*) + \alpha h_1(\xi) + O(\alpha^2) \quad \text{pour } |\xi| = O(1).$$

où  $h_1(\xi)$  est l'unique solution du système (5.26)-(5.26), à savoir

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon} \nabla h_1(\xi) \right) &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2, \\ \lim_{\xi \rightarrow +\infty} (h_1(\xi) - \partial_{x_i} H_0(z^*) \xi_i) &= 0, \end{aligned}$$

et  $h_2(\xi)$  est une fonction constante donnée par

$$h_2(\xi) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{\varepsilon_m} - \frac{1}{\varepsilon_s(z^*)} \right) \partial_{x_k} \varepsilon_s(z^*) \int_B \partial_{\xi_k} h_1(\xi') d\xi'.$$

En utilisant les fonctions  $\phi_l$ ,  $l = 1, 2$  solutions du système (5.49)-(5.50), nous pouvons réécrire  $h_1(\xi)$  de la manière suivante

$$h_1(\xi) = \phi_k(\xi) \partial_{x_k} H_0(z^*). \quad (5.56)$$

Rappelons que l'inversion acoustique permet de reconstruire la fonction interne  $\Psi(x) = \Im(\varepsilon(x))|\nabla H(x)|^2$ ,  $x \in \Omega$ . En combinant (5.18) et (5.23), nous obtenons le développement intérieur suivant

$$\begin{aligned}\Psi(z^* + \alpha\xi) &= \Im(\varepsilon(z^* + \alpha\xi))|\nabla H(z^* + \alpha\xi)|^2 \\ &= \Im(\tilde{\varepsilon}_0(\xi))|\nabla_\xi h_1(\xi)|^2 + O(\alpha^2), \quad \text{pour } |\xi| = O(1)\end{aligned}\quad (5.57)$$

Nous supposons dans la suite que  $B$  est le disque unité. Notre objectif est de reconstruire  $\varepsilon_s(z^*)$  à partir de  $\Im(\tilde{\varepsilon}_0(\xi))|\nabla_\xi h_1(\xi)|^2$  pour  $\xi \in 2B$ , où  $2B$  est le disque de centre zéro et de rayon 2.

En combinant (5.56) et (5.53), nous trouvons

$$h_1(\xi) = \begin{cases} (1 - \kappa) \xi \cdot \nabla H_0(z^*) & \text{pour } \xi \in B, \\ \left(1 - \frac{\kappa}{|\xi|^2}\right) \xi \cdot \nabla H_0(z^*) & \text{pour } \xi \in 2B \setminus \overline{B}, \end{cases}$$

où

$$\kappa := \frac{\varepsilon_s(z^*) - \varepsilon_m(\omega)}{\varepsilon_s(z^*) + \varepsilon_m(\omega)}.$$

Alors

$$\Psi(z^* + \alpha\xi) + o(\alpha) = \begin{cases} \Im(\varepsilon_m(\omega))|1 - \kappa|^2 |\nabla H_0(z^*)|^2 & \text{pour } \xi \in B, \\ \Im(\varepsilon_s(z^*)) \left| \nabla_\xi \left( \left(1 - \frac{\kappa}{|\xi|^2}\right) \frac{\xi}{|\xi|^2} \cdot \nabla H_0(z^*) \right) \right|^2 & \text{pour } \xi \in 2B \setminus \overline{B}. \end{cases}$$

Un calcul direct donne

$$\Psi(z^* + \alpha\xi) = \Im(\varepsilon_s(z^*)) \left| \left(1 - \frac{\kappa}{|\xi|^2}\right) \nabla H_0(z^*) + 2\kappa \frac{\xi}{|\xi|^2} \cdot \nabla H_0(z^*) \frac{\xi}{|\xi|^2} \right|^2 + O(\alpha),$$

pour  $\xi \in 2B \setminus \overline{B}$ .

En prenant maintenant le rapport entre  $\Psi|_{\partial B_\alpha}^+$  et  $\Psi(z^*) = \int_{B_\alpha} \Psi(x) dx$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{\Psi(z^* + \alpha\xi)|_+}{\Psi(z^*)} &= \frac{\Im(\varepsilon_s(z^*))}{\Im(\varepsilon_m(\omega))} \left( \left| \frac{1 + \kappa}{1 - \kappa} \right|^2 \left| \frac{\nabla H_0(z^*)}{|\nabla H_0(z^*)|} \cdot \xi \right|^2 + \left| \frac{\nabla H_0(z^*)}{|\nabla H_0(z^*)|} \cdot \xi^\perp \right|^2 \right) + O(\alpha), \\ &= \Psi_0(\xi) + O(\alpha),\end{aligned}\quad (5.58)$$

pour  $\xi \in \partial B = \{\xi' \in \mathbb{R}^2; |\xi'| = 1\}$ , où  $\xi^\perp$  est une rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$  dans le sens trigonométrique de  $\xi$ .

En supposant maintenant que  $|\Re(\varepsilon_m(\omega))| > |\Re(\varepsilon_s(z^*))|$ , nous avons

$$\left| \frac{1 + \kappa}{1 - \kappa} \right| > 1,$$

et la fonction  $\Psi_0(\xi)$  prend ses valeurs maximum et minimum sur  $\partial B$  en  $\xi = \pm \frac{\nabla H_0(z^*)}{|\nabla H_0(z^*)|}$  et  $\xi = \pm \frac{\nabla H_0(z^*)^\perp}{|\nabla H_0(z^*)|}$  respectivement.

Par conséquent,

$$\frac{\mathfrak{S}(\varepsilon_s(z^*))}{\mathfrak{S}(\varepsilon_m(\omega))} = \frac{\Psi(z^* + \alpha \frac{\nabla H_0(z^*)^\perp}{|\nabla H_0(z^*)|})|_+}{\Psi(z^*)} + O(\alpha), \quad (5.59)$$

$$= \min_{\xi \in \partial B} \frac{\Psi(z^* + \alpha \xi)|_+}{\Psi(z^*)} + O(\alpha), \quad (5.60)$$

et

$$\frac{\mathfrak{S}(\varepsilon_s(z^*))}{\mathfrak{S}(\varepsilon_m(\omega))} \left| \frac{1 + \kappa}{1 - \kappa} \right|^2 = \frac{\Psi(z^* + \alpha \frac{\nabla H_0(z^*)}{|\nabla H_0(z^*)|})|_+}{\Psi(z^*)} + O(\alpha), \quad (5.61)$$

$$= \max_{\xi \in \partial B} \frac{\Psi(z^* + \alpha \xi)|_+}{\Psi(z^*)} + O(\alpha), \quad (5.62)$$

Comme  $\varepsilon_m(\omega)$  est donné, nous pouvons reconstruire  $\mathfrak{S}(\varepsilon_s(z^*))$  à partir de l'égalité (5.59), et  $\Re(\varepsilon_s(z^*))$  à partir de l'égalité (5.60). Nous pouvons désormais démontrer le principal théorème d'estimation de stabilité.

### 5.3.3 Preuve du théorème principal (5.1.1)

Nous déduisons des égalités (5.59)-(5.60) les estimations suivantes.

#### **Théorème 5.3.2**

Avec les mêmes hypothèses que pour le théorème (5.1.1), il existe une constante  $C > 0$  qui ne dépend pas de  $\alpha$ , telle que

$$|\mathfrak{S}(\varepsilon_{s,a}(z^*)) - \mathfrak{S}(\varepsilon_{s,b}(z^*))| \leq C \|\Psi_a - \Psi_b\|_{L^\infty(2B_\alpha)} + O(\alpha).$$

*Preuve.* Les égalités (5.59)-(5.60) impliquent

$$\begin{aligned} \Psi_{0,a}\left(\frac{\nabla H_{0,a}(z^*)^\perp}{|\nabla H_{0,a}(z^*)|}\right) &= \min_{\xi \in \partial B} \Psi_{0,a}(\xi) \\ &= \min_{\xi \in \partial B} (\Psi_{0,b}(\xi) + \Psi_{0,a}(\xi) - \Psi_{0,b}(\xi)). \end{aligned}$$

D'autre part

$$\min_{\xi \in \partial B} (\Psi_{0,b}(\xi) - |\Psi_{0,a}(\xi) - \Psi_{0,b}(\xi)|) \leq \Psi_{0,a}\left(\frac{\nabla H_{0,a}(z^*)^\perp}{|\nabla H_{0,a}(z^*)|}\right) \leq \min_{\xi \in \partial B} (\Psi_{0,b}(\xi) + |\Psi_{0,a}(\xi) - \Psi_{0,b}(\xi)|),$$

ce qui implique

$$|\Psi_{0,a}\left(\frac{\nabla H_{0,a}(z^*)^\perp}{|\nabla H_{0,a}(z^*)|}\right) - \Psi_{0,b}\left(\frac{\nabla H_{0,b}(z^*)^\perp}{|\nabla H_{0,b}(z^*)|}\right)| \leq \max_{\xi \in \partial B} |\Psi_{0,a} - \Psi_{0,b}|, \quad (5.63)$$

et par conséquent

$$|\Psi_{0,a}(\frac{\nabla H_{0,a}(z^*)^\perp}{|\nabla H_{0,a}(z^*)|}) - \Psi_{0,a}(\frac{\nabla H_{0,b}(z^*)^\perp}{|\nabla H_{0,b}(z^*)|})| \leq 2 \max_{\xi \in \partial B} |\Psi_{0,a} - \Psi_{0,b}|,$$

En utilisant l'expression explicite de  $\Psi_{0,a}(\xi)$  donnée dans (5.58), nous trouvons

$$\left| \frac{\nabla H_{0,a}(z^*)^\perp}{|\nabla H_{0,a}(z^*)|} - \frac{\nabla H_{0,b}(z^*)^\perp}{|\nabla H_{0,b}(z^*)|} \right| \leq C \max_{\xi \in \partial B} |\Psi_{0,a} - \Psi_{0,b}|.$$

Comme  $\varepsilon_{s,a}(z^*)$  est minoré, en combinant les estimations ci-dessus et (5.63), nous obtenons le résultat voulu.

En combinant maintenant les résultats des théorèmes (5.3.1) (corollaire (5.3.1)), et (5.3.2), nous avons le résultat principal de stabilité du théorème (5.1.1).

## 5.4 Annexe

Nous développons dans cette annexe le calcul du développement asymptotique du gradient de la fonction de Green  $\nabla_x G(z^* + \alpha\xi, z^* + \alpha\xi')$  lorsque  $\alpha$  tend vers zéro.

### **Théorème 5.4.1**

Soit  $G(x, y)$  le fonction de Green solution du système (5.14)- (5.15). Le développement asymptotique suivant est alors vérifié

$$\alpha \partial_{x_k} G(z^* + \alpha\xi, z^* + \alpha\xi') = \varepsilon_s(z^*) \partial_{\xi_k} \Phi_0(\xi, \xi') + \frac{1}{4\pi} \partial_{x_k} \varepsilon_s(z^*) \alpha \ln(\alpha) + \alpha \Phi_1(\xi, \xi') + o(\alpha),$$

pour tout  $\xi, \xi' \in B$  satisfaisant  $\xi \neq \xi'$ , et  $o(\alpha)$  est uniforme en  $\xi, \xi' \in B$ .

$\Phi_0(\xi, \xi') = \frac{1}{2\pi} \ln(|\xi - \xi'|)$  est la fonction de Green du Laplacien dans l'espace entier, et  $\Phi_1(\xi, \xi')$  possède une singularité logarithmique sur la diagonale  $\xi = \xi'$ , à savoir  $|\Phi_1(\xi, \xi')| \leq C |\Phi_0(\xi, \xi')|$ , pour tout  $\xi, \xi' \in B$ , avec  $C > 0$  une constante dépendant uniquement de  $\varepsilon_s(x)$ .

*Preuve.* Nous utilisons tout d'abord la transformation de Liouville et nous remplaçons la fonction de Green  $G(x, y)$  par

$$\underline{G}(x, y) = \frac{1}{\varepsilon_s^{\frac{1}{2}}(x) \varepsilon_s^{\frac{1}{2}}(y)} G(x, y),$$

dans le système (5.14)- (5.15), pour obtenir

$$\Delta \underline{G}(x, y) + V(y) \underline{G}(x, y) = \delta_y(x) \quad \text{in } \mathbb{R}^2. \quad (5.64)$$

avec la condition de radiation de Sommerfeld quand  $|x| \rightarrow +\infty$  :

$$\frac{\partial \underline{G}}{\partial |x|} - i\omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \underline{G} = O\left(\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right), \quad (5.65)$$

et où

$$V(x) := \omega^2 \mu_0 \varepsilon_s(x) - \frac{\Delta \varepsilon_s^{\frac{1}{2}}(x)}{\varepsilon_s^{\frac{1}{2}}(x)}. \quad (5.66)$$

Par simplicité, nous supposons que  $V(z^*) \neq 0$ . Si ce n'est pas le cas, cette preuve doit être légèrement modifiée.

Soit  $\underline{G}_0(x, y)$  la fonction de Green de l'équation de Helmholtz dans le vide, solution du système

$$\Delta \underline{G}_0(x, y) + V(y) \underline{G}_0(x, y) = \delta_y(x) \quad \text{in } \mathbb{R}^2. \quad (5.67)$$

avec la condition de radiation de Sommerfeld quand  $|x| \rightarrow +\infty$  :

$$\frac{\partial \underline{G}_0}{\partial |x|} - i\sqrt{V(y)} \underline{G}_0 = O\left(\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right). \quad (5.68)$$

La fonction  $\underline{G}_0(x, y)$  est donnée par

$$\underline{G}_0(x, y) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(\sqrt{V(y)}|x - y|), \quad \text{pour } x \neq y,$$

où  $H_0^{(1)}(t)$  est la fonction de Hankel de premier type d'ordre zéro.

Nous allons maintenant calculer le développement asymptotique de  $\partial_{x_k} \underline{G}(x, y)$  quand  $x$  tend vers  $y$ .

Soit

$$\mathcal{G}(\xi, \xi') := \underline{G}(x, y) - \underline{G}_0(x, y).$$

Elle satisfait l'équation de Helmholtz

$$\Delta \mathcal{G}(x, y) + V(y) \mathcal{G}(x, y) = -(V(x) - V(y)) \underline{G}_0(x, y) \quad \text{in } B_R(z^*) \quad (5.69)$$

avec les conditions de bord

$$\mathcal{G}(x, y) = \underline{G}(x, y) - \underline{G}_0(x, y) \quad \text{sur } \partial B_R(z^*). \quad (5.70)$$

Nous posons ensuite  $R > 1$  de telle sorte que le système (5.69)-(5.70) ait une unique solution. Comme  $H_0^{(1)}(t)$  a une singularité logarithmique lorsque  $t$  tend vers zéro, le membre de droite appartient à  $C^{0,\iota}(\overline{B_R(z^*)})$  pour tout  $\iota \in [0, 1]$ , uniformément dans  $y \in B_1(z^*)$  (voir par exemple la Proposition 4.1 dans [23]).

En considérant le fait que  $\underline{G}(x, y) - \underline{G}_0(x, y) \in C^\infty(\partial B_R(z^*) \times B_1(z^*))$ , nous déduisons de la régularité elliptique que  $\mathcal{G}(x, y) \in C^{2,\iota}(\overline{B_R(z^*)})$  uniformément dans  $y \in B_1(z^*)$  [54]. De plus, grâce à l'expression explicite dans le membre de droite de l'équation (5.69), nous pouvons aisément prouver que

$\partial_{x_k} \mathcal{G}(z^* + \alpha\xi, z^* + \alpha\xi')$  a une limite continue finie quand  $\alpha$  tend vers zéro, appelée  $\Phi_{11}(\xi, \xi')$ .

A partir des développements asymptotiques connus des fonctions de Hankel, nous avons [1]

$$\partial_{x_k} \underline{G}_0(z^* + \alpha\xi, z^* + \alpha\xi') = \frac{1}{\alpha} \partial_{x_k} \Phi_0(\xi, \xi') + \alpha \ln(\alpha) |\xi - \xi'| + O(\alpha),$$

où  $O(\alpha)$  est uniforme en  $\xi, \xi' \in B$ .

Par conséquent

$$\alpha \partial_{x_k} \underline{G}(z^* + \alpha\xi, z^* + \alpha\xi') = \partial_{x_k} \Phi_0(\xi, \xi') + \alpha \Phi_{11}(\xi, \xi') + o(\alpha),$$

ce qui combiné à la régularité de  $\varepsilon_s(x)$  conclut la preuve du théorème.

# Conclusion

Ce travail a porté sur l'étude du problème inverse de l'imagerie photoacoustique dans le but de pouvoir obtenir de meilleures reconstructions des paramètres optiques du milieu biologique étudié. Les enjeux sont importants pour développer cette nouvelle modalité d'imagerie médicale qui pourrait par exemple permettre la détection de tumeurs à des stades très précoces. La première partie de cette thèse a porté sur le développement d'un modèle de correction de la vitesse acoustique en prenant en compte les variations présentes dans les milieux biologiques. La plupart des méthodes de reconstruction existantes suppose une vitesse acoustique constante, ce qui est à l'origine d'erreurs de reconstruction. Le modèle que nous avons développé donne une relation entre les propriétés optiques du milieu et la vitesse acoustique. A partir de cette relation, nous avons établi un algorithme de reconstruction pour un milieu constant par morceaux et montré que notre modèle permet une petite diminution de l'erreur dans les reconstructions numériques. Ce modèle est cependant limité par les hypothèses que nous avons faites. Le lien entre le coefficient d'absorption et la vitesse acoustique n'a été établi que pour un milieu constitué de sang et d'eau, alors qu'un milieu biologique possède de nombreuses autres substances absorbantes (lipides, mélanine). Du point de vue physique, ce modèle n'est donc pas généralisable à un tissu quelconque. Une seconde limitation vient du fait que l'algorithme de reconstruction numérique n'utilise qu'une approximation du modèle. Une perspective intéressante serait de prendre en compte le modèle exact dans la reconstruction, afin de voir l'amélioration maximale qu'il peut apporter dans les images. Ce modèle et cet algorithme de reconstruction pourraient également adaptés pour un milieu qui ne serait pas constant par morceaux. La suite de la thèse est une étude théorique du problème inverse photoacoustique. Nous avons développé un calcul d'estimation de stabilité pour un milieu stratifié. Nous y démontrons mathématiquement que la reconstruction se dégrade avec la profondeur : le manque de visibilité en profondeur est en effet la principale limitation de cette technique d'imagerie. Pour contrer ce problème, il est par exemple possible d'ajouter dans le milieu des nanoparticules métalliques qui vont avoir pour effet d'amplifier le signal photoacoustique dans leur voisinage. C'est l'objet du dernier chapitre de ce travail où nous avons étudié le phénomène photoacoustique en présence de nanoparticules métalliques. Nous y avons explicité le modèle de génération de l'onde acoustique dans ce contexte et étudié d'un point de vue mathématique la résolution du problème inverse acoustique et du

problème inverse optique. La suite de ce travail serait d'étudier numériquement ce problème, en établissant un algorithme de reconstruction des propriétés électromagnétiques du milieu. En conclusion, nous avons donc étudié trois aspects du problème inverse photoacoustique : la prise en compte des variations de la vitesse acoustique, l'estimation de stabilité dans le cas d'un milieu stratifié et le cas de la présence de nanoparticules métalliques dans le milieu.

# Bibliographie

- [1] M. ABRAMOWITZ, I. STEGUN, *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications, (1968).
- [2] R. A. ADAMS, J. F. FOURNIER, *Sobolev Spaces* (Second ed.), Academic Press (2003).
- [3] COX, B. T., ARRIDGE, S. R. AND BEARD, P. C. *Photoacoustic tomography with a limited- aperture planar sensor and a reverberant cavity*. *Inverse Problems* 23 : S95-S112, (2007).
- [4] H. AMMARI, E. BOSSY, V. JUGNON, AND H. KANG, *H. Quantitative photo-acoustic imaging of small absorbers*. *SIAM J. Appl. Math.*, 71, 676-93 (2011).
- [5] H. AMMARI, E. BRETIN, V. JUGNON, AND A. WAHAB, *Photo-acoustic imaging for attenuating acoustic media*, in *Mathematical Modeling in Biomedical Imaging II*, H. Ammari, ed., vol. 2035 of *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, 2012, pp. 53–80.
- [6] H. AMMARI, Y. T. CHOW, AND J. ZOU. *The concept of heterogeneous scattering coefficients and its application in inverse medium scattering*. *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 46.4 (2014) : 2905-2935.
- [7] H. AMMARI, H. KANG AND H. LEE, *Layer Potential Techniques in Spectral Analysis*, *Mathematical Surveys and Monographs*, Volume 153, American Mathematical Society, Providence, (2009).
- [8] H. AMMARI, AND H. KANG. *Reconstruction of small inhomogeneities from boundary measurements*. No. 1846. Springer Science and Business Media, (2004).
- [9] H. AMMARI, A. KHELIFI *Electromagnetic scattering by small dielectric inhomogeneities*, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, (2003).
- [10] H. AMMARI, A. KOZHEMYAK, AND D. VOLKOV, *Asymptotic formulas for thermography based recovery of anomalies*, *Numer. Math. : TMA*, 2 (2009), 18-42. 23.
- [11] H. AMMARI, S. MOSKOW, AND M. S. VOGELIUS. *Boundary integral formulae for the reconstruction of electric and electromagnetic inhomogeneities of small volume*. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations* 9 (2003) : 49-66.

- [12] H. AMMARI AND F. TRIKI, *Resonances for microstrip transmission lines*, SIAM J. Appl. Math. 64, no. 2, 601-636, 2004.
- [13] K. AMMARI, AND M. CHOULLI. Logarithmic stability in determining a boundary coefficient in an IBVP for the wave equation. arXiv preprint arXiv :1505.07248, (2015).
- [14] M. AGRANOVSKY, P. KUCHMENT, *Uniqueness of reconstruction and an inversion procedure for thermoacoustic and photoacoustic tomography*, Inverse Problems, IOP Publishing, 23 :2089, 2007.
- [15] M. AGRANOVSKY, P. KUCHMENT, AND L. KUNYANSKY, *On reconstruction formulas and algorithms for the thermoacoustic tomography*, in Photoacoustic Imaging and Spectroscopy, L. V. Wang, ed., CRC Press, 2009, pp. 89–101.
- [16] M. AGRANOVSKY AND E. T. QUINTO, *Injectivity sets for the Radon transform over circles and complete systems of radial functions*, J. Funct. Anal., 139 (1996), pp. 383–414.
- [17] G. BAL AND K. REN, *Multi-source quantitative photoacoustic tomography in a diffusive regime*. Inverse Problems, 27(7), 075003 (2011).
- [18] G. BAL AND K. REN, *Non-uniqueness result for a hybrid inverse problem*, Contemporary Mathematics, 559 (2011), 29-38.
- [19] G. BAL AND G. UHLMANN, *Inverse diffusion theory of photoacoustics*, Inverse Problems, 26 (2010).
- [20] C. BARDOS, G. LEBEAU, AND RAUCH J.. Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary. SIAM J. Control Optim., 30 : 1024-1065, 1992.
- [21] M. BERGOUNIOUX, X. BONNEFOND, T. HABERKORN, Y. PRIVAT, *An optimal control problem in photoacoustic tomography* Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, World Scientific Publishing, 2014, 24 (12), pp.2525-2548.
- [22] E. BONNETIER, J.F. BABADJIAN, F. TRIKI, *Enhancement of electromagnetic fields caused by interacting subwavelength cavities*, SIAM Multiscale Model. Simul., 8 (4), 1383-1418, (2010).
- [23] E. BONNETIER AND F. TRIKI, *Asymptotic of the Green function for the diffraction by a perfectly conducting plane perturbed by a sub-wavelength rectangular cavity* Math. Meth. Appl. Sci., 33 (6), 772-798, (2010).
- [24] E. BONNETIER AND F. TRIKI, *Asymptotic of plasmonic resonances*, preprint (2015).
- [25] P. BURGHOLZER, G. J. MATT, M. HALTMEIER, AND G. PALTAUF, *Exact and approximative imaging methods for photoacoustic tomography using an arbitrary detection surface*, Phys. Rev. E, 75 (2007). 046706.
- [26] Y.S. CHEN, W. FREY, S. AGLYAMOV, S. EMELIANOV, S. ENVIRONNEMENT, *Dependent Generation of Photoacoustic Waves from Plasmonic Nanoparticles*. Small, 8(1), 47-52 (2012).

- [27] M. CHOULLI, F. TRIKI, *Qualitative stability estimate for the second inversion in photoacoustic inverse problem*, preprint (2016).
- [28] B. T. COX, S. R. ARRIDGE, AND P. C. BEARD, *Photoacoustic tomography with a limited-aperture planar sensor and a reverberant cavity*, *Inverse Problems*, 23 (2007), pp. S95–S112.
- [29] T. DING, K. REN, S. VALLELIAN *A one-step reconstruction algorithm for quantitative photoacoustic imaging* *Inverse Problems* 31, 095005, 2015.
- [30] D. FINCH, M. HALTMEIER, AND RAKESH, *Inversion of spherical means and the wave equation in even dimensions*, *SIAM J. Appl. Math.*, 68 (2007), pp. 392–412.
- [31] A. FISHER, J. SCHISSLER, AND J. SCHOTLAND, *Photoacoustic Effect with Multiply-Scattered Light*. *Phys. Rev. E* 76, 036604 (2007).
- [32] J. GARNIER, *Passive synthetic aperture imaging with limited noise sources*, *Inverse Problems*, Vol. 32, 095008 (2016).
- [33] I.T.S. GOHBERG AND E.I. SIGAL, *Operator extension of the logarithmic residue theorem and Rouché’s theorem*, *Math. USSR Sbornic*, 84, No. 4, 607-642, (1971).
- [34] M. HALTMEIER, *A mollification approach for inverting the spherical mean Radon transform*, *SIAM J. Appl. Math.*, 71 (2011), pp. 1637–1652.
- [35] M. HALTMEIER, T. SCHUSTER, AND O. SCHERZER, *Filtered backprojection for thermoacoustic computed tomography in spherical geometry*, *Math. Methods Appl. Sci.*, 28 (2005), pp. 1919–1937.
- [36] E. M. HARRELL, *General lower bounds for resonances in one dimension*, *Commun. Math. Phys* 86, 221-225 (1982).
- [37] L.F. HO, *Observabilité frontière de l’équation des ondes*. *Comptes rendus de l’Académie des sciences. Série 1, Mathématique*, 302(12), 443-446, (1986).
- [38] Y. HRISTOVA, *Time reversal in thermoacoustic tomography - an error estimate*. *Inverse Problems*, 25 : 055008, 2009.
- [39] Y. HRISTOVA, P. KUCHMENT, AND NGUYEN. *Reconstruction and time reversal in thermoacoustic tomography in acoustically homogeneous and inhomogeneous media*. *Inverse Problems*, 24(5), 055006, (2008).
- [40] <http://www.visualsonics.com/products/vevo-lazr-photoacoustic-imaging>
- [41] S. JACQUES, *Optical absorption of melanin*, <http://omlc.ogi.edu/spectra/melanin>, Oregon Medical Laser Center, 1998.
- [42] P.B. JOHNSON, R. W. CHRISTY, *Optical constants of the noble metals*, *Phys. Rev. B*, 6, 4370-4379 (1972).
- [43] B. JOHNSON, M. HOLLAND, J. MILLER, J. KATZ *Ultrasonic attenuation and speed of sound of cornstarch suspensions* *The Journal of the Acoustical Society of America*, 133(3) :1399-403, 2013.

- [44] A. KIRSCH AND O. SCHERZER, *Simultaneous reconstructions of absorption density and wave speed with photoacoustic measurements*, SIAM J. Appl. Math., 72 (2013), pp. 1508–1523.
- [45] P. KUCHMENT, L. KUNYANSKY, *Mathematics of thermoacoustic tomography*. European Journal of Applied Mathematics, 19(02), 191-224 (2008).
- [46] L. KUNYANSKY, *Thermoacoustic tomography with detectors on an open curve : an efficient reconstruction algorithm*, Inverse Problems, 24 (2008). 055021.
- [47] P. D. LAX AND R. S. PHILLIPS, *Scattering theory*. Second edition. Pure and Applied Mathematics, 26. Academic Press, Inc., Boston, MA, (1989).
- [48] C. LI AND L. WANG, *Photoacoustic tomography and sensing in biomedicine*, Phys. Med. Biol., 54 (2009), pp. R59–R97.
- [49] B. LIEDBERG, C. NYLANDER, AND I. LUNDSTROM, *Surface plasmons resonance for gas detection and biosensing*, Sensors Actuators 4, 299, 1983.
- [50] J.-L. LIONS, *Exact Controllability, Stabilizability, and Perturbations for Distributed Systems*. Siam Rev., (1988), vol. 30, pp. 168.
- [51] J.L. LIONS AND E. MAGENES, *Non-homogeneous Boundary values Problems and Applications I*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.
- [52] I.D. MAYERGOYZ, D.R. FREDKIN, AND Z. ZHANG, *Electrostatic (plasmon) resonances in nanoparticles*, Phys. Rev. B, 72 (2005), 155412.
- [53] I.D. MAYERGOYZ AND Z. ZHANG, *Numerical analysis of plasmon resonances in nanoparticules*, IEEE Trans. Mag., 42 (2006), 759-762.
- [54] W. MCLEAN, *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*, Cambridge University Press, (2000).
- [55] A. MOORES AND F. GOETTMANN, *The plasmon band in noble nanoparticles : an introduction to theory and applications*, New J. Chem., 2006, 30, 1121-1132.
- [56] P. MORSE, K. INGARD, *Theoretical acoustics* Princeton University Press, Princeton, 1986.
- [57] W. NAETAR AND O. SCHERZER, *Quantitative photoacoustic tomography with piecewise constant material parameters*, SIAM J. Imag. Sci., 7 (2014), pp. 1755–1774.
- [58] F. NATTERER, *Photoacoustic inversion in convex domains*, Inverse Problems and Imaging 2(2), 2012
- [59] J.C. NÉDÉLEC, *Electromagnetic and Acoustic Waves*, Springer-Verlag, 2000.
- [60] L. V. NGUYEN, *A family of inversion formulas in thermoacoustic tomography*, Inverse Probl. Imaging, 3 (2009), pp. 649–675.

- [61] B. OSTING, M. I. WEINSTEIN, Long-lived Scattering Resonances and Bragg Structures, *SIAM J. Appl. Math.* , no. 2, 601-636, 2013.
- [62] S. K. PATCH AND O. SCHERZER, *Photo- and thermo- acoustic imaging*, *Inverse Problems*, 23 (2007), pp. S1–S10.
- [63] J. PEARCE, A. GIUSTINI, R. STIGLIANO, J. HOOPES, MAGNETIC HEATING OF NANOPARTICLES : THE IMPORTANCE OF PARTICLE CLUSTERING TO ACHIEVE THERAPEUTIC TEMPERATURES, *Journal of Nanotechnology in Engineering and Medicine*, 4(1), 110071-1100714, (2013).
- [64] S. PRAHL, *Optical absorption of hemoglobin*, [http ://omlc.ogi.edu/spectra/hemoglobin](http://omlc.ogi.edu/spectra/hemoglobin), Oregon Medical Laser Center, 1999.
- [65] G. POPOV AND G. VODEV, *Distribution of resonances and local energy decay in the transmission problem*, *Asympt. Anal.* 19 (1999), 253-266.
- [66] A. PROST, F. POISSON, E. BOSSY, *Photoacoustic generation by a gold nanosphere : from linear to nonlinear thermoelastics in the long-pulse illumination regime*, *Physical Review B*, 92, 115450, 2015.
- [67] J. QIAN, P. STEFANOV, G. UHLMANN, AND H. ZHAO, *An efficient Neumann-series based algorithm for thermoacoustic and photoacoustic tomography with variable sound speed*, *SIAM J. Imaging Sci.*, 4 (2011), pp. 850–883.
- [68] G. QUARTO, L. SPINELLI, A. PIFFERI, A. TORRICELLI, R. CUBEDDU, F. ABBATE, N. BALESTRERI, S. MENNA, E. CASSANO, P. TARONI *Estimate of tissue composition in malignant and benign breast lesions by time-domain optical mammography* *Biomed. Opt. Express* 5, 3684-3698 (2014)
- [69] O. SCHERZER, *Handbook of Mathematical Methods in Imaging*, Springer-Verlag, 2010.
- [70] P. STEFANOV, G. UHLMANN, *Multi-wave method via ultrasound* *Inside Out*, vol. 60, MSRI Publications, 2012, pp. 271-324.
- [71] P. STEFANOV, G. UHLMANN, *Instability of the linearized problem in multiwave tomography of recovery both the source and the speed* *Inverse Problems and Imaging*, 7(4) :1367-1377, 2013.
- [72] P. STEFANOV AND G. UHLMANN, *Thermoacoustic tomography with variable sound speed*, *Inverse Problems*, 25 (2009). 075011.
- [73] J. TITTELFITZ, *Thermoacoustic tomography in elastic media*, *Inverse Problems*, 28 (2012). 055004.
- [74] B. TREEBY, B. COX, *k-Wave : MATLAB toolbox for the simulation and reconstruction of photoacoustic wave fields* *Journal of Biomedical Optics* 15(2), 021314, 2010.
- [75] M. TUCSNAK AND G. WEISS, *Observation and Control for Operator Semigroups*. Birkhauser Advanced Texts, Birkhauser Verlag, Basel, (2009).

- [76] B. VAINBERG, *Asymptotic methods in equations of mathematical physics*, Gordon and Breach, (1989).
- [77] L. V. WANG, *Photoacoustic Imaging and Spectroscopy*, Taylor & Francis, 2009.
- [78] M. XU, L.V. WANG *Photoacoustic imaging in biomedicine* Review of scientific instruments 77 (4), 041101-041101-22