

Synthèse en Français de la thèse de doctorat

Yandong BAI

Directeur: Hao LI

GALAC, LRI, Université Paris-Sud

Coloration d'Arc et Cycles dans les Graphes Orientés

La théorie de graphe étudie les propriétés de divers graphes et est une branche des mathématiques discrètes. Le document le plus tôt connue sur la théorie de graphe a été donnée par Euler en 1736, qui a examiné les sept ponts de Königsberg. Le premier livre sur la théorie de graphe est "*Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*", qui a été écrit par König et publié en 1936. Après l'apparition de ce livre, le sujet a eu un développement remarquable. En particulier, au cours de ces dernières décennies, la théorie de graphe a connu concurrente de croissance explosive avec la croissance de la science informatique. Par ailleurs, depuis les graphes peuvent être utilisés pour modéliser de nombreux types de relations et de processus, les résultats de la théorie de graphe ont de larges applications dans la domaine de chimie, physique, biologie et informatique.

Cette thèse se concentre sur les thèmes suivants: la coloration propre d'arcs avec des sommet-distingué dans les graphes orientés, les cycles courts dans les graphes orientés avec des sous-graphes interdits, les cycles sommet-disjoints dans les tournois bipartis, les cycle-facteurs dans les tournois bipartis régulier et les arcs universels dans les tournois. Les résultats obtenus sur ces sujets sont contenues dans cinq distinctes articles originaux, chacun d'eux a été publié ou soumis pour la publication dans une revue internationale. Nous les résumons dans les cinq sections suivantes respectivement.

1 Coloration propre d'arcs avec des sommet-distingué

L'arête (arc) problème de coloration est l'un des problèmes fondamentaux de la théorie de graphe et a été étudié en détail par de nombreux chercheurs. Une coloration des arêtes propre dans un graphe non orienté est *sommet-distingué* si deux sommets sont pas incident avec le même ensemble de couleurs. La *coloration propre d'arcs avec des sommet-distingué* (abrégé *VDPE coloring*) des graphes non orientés ont été introduits et étudiés indépendamment par Aigner et al. [2], par Burris et Schelp [8] et par Horňák et Soták [15]. Notez que un graphe non orienté a une VDPE coloring si et seulement si elle contient aucune arête isolée et au plus un sommet isolé. Un tel graphe non orienté est appelé un *le graphe arête-colorable avec des sommet-distingué* (abrégé *vdec-graph*). Notons que $\chi'_{vd}(G)$ est le nombre minimal de couleurs nécessaire pour une VDPE coloring d'un vdec-graph G .

Pour un vdec-graph G avec un degré minimum $\delta(G)$ et avec un degré maximum $\Delta(G)$, soit $n_d(G)$ le nombre de sommets avec degré d dans G et soit $\chi'_{vd}(G)$ le nombre minimum de de couleurs nécessaire à une VDPE coloring de G . Soit

$$\pi(G) = \min\{k \in \mathbf{Z} : \binom{k}{d} \geq n_d(G) \text{ for } \delta(G) \leq d \leq \Delta(G)\}. \quad (1)$$

En 1997, Burris et Schelp [8] ont proposé la conjecture suivante.

Conjecture 1.1. Soit G un vdec-graph. Alors $\chi'_{vd}(G) \in \{\pi(G), \pi(G) + 1\}$.

Quant à cette conjecture nous ne savons même pas si la borne de $\chi'_{vd}(G) \leq \pi(G) + c$ détient pour une constante fixe c . Cependant, il a été vérifié pour certaines classes spéciales de graphe, y compris les graphes complètes, les graphiques bipartites complets, les chemins, les cycles, la union des chemins et la union de cycles, etc. Motivé par la conjecture et les résultats sur VDPE colorings pour les graphes non orientés mentionnés ci-dessus, nous introduisons et étudions le problème analogue pour les graphes orientés, i.e., la *coloration propre d'arcs avec des sommets* (abrégé *VDPA coloring*) des graphes orientés.

Soit $n_S^+ = n_S^+(D)$ (resp. $n_S^- = n_S^-(D)$) le nombre de sommets dont son ensemble de sortie-arcs (resp. l'ensemble d'entrée-arc) attribué S . Une coloration d'arc propre de D est appelée *sommet-distingué* (resp. *semi-sommet-distingué*) si $n_S^+ \leq 1$ et $n_S^- \leq 1$ (resp. $n_S^+ \leq 2$ et $n_S^- \leq 2$) pour ne importe quel ensemble de couleurs S . Pour plus de commodité, nous appelons une coloration propre d'arcs avec des

sommet-distingué, une *VDPA coloration*. Un graphe orienté est un *vdac-digraph*, sommet-distingué et arc-colorable, se il a une VDPA coloration. De même, nous pouvons définir une *semi-VDPA coloring* et un *svdac-digraph*. Notez qu'un sommet isolé peut être considéré à la fois comme source et destination. Nous avons ce qui suit: Un graphe orienté D est un *vdac-digraph* (resp. *svdac-digraph*) si et seulement si D contient au plus une source (resp. deux sources) et au plus une destination (resp. deux destinations).

Soit $n_{d^+}(D)$ and $n_{d^-}(D)$ le nombre de sommets avec degré sortant d^+ et degré entrant d^- in D , respectivement. Le nombre minimal de couleurs nécessaire pour une 2-type VDPA coloration d'un *vdac-digraph* D , le *nombre arc-chromatique sommet-distingué*, est désigné par $\chi'_{vd}(D)$. Soit

$$\pi(D) = \min \left\{ k \in \mathbf{Z} : \begin{array}{l} \binom{k}{d^+} \geq n_{d^+}(D) \text{ for } \delta^+(D) \leq d^+ \leq \Delta^+(D) \\ \binom{k}{d^-} \geq n_{d^-}(D) \text{ for } \delta^-(D) \leq d^- \leq \Delta^-(D) \end{array} \right\}. \quad (2)$$

Il est clair que $\chi'_{vd}(D) \geq \max\{\chi^2(D), \pi(D)\}$. Noter que $\chi^2(D) = \Delta(D)$ et $\pi(D) \geq \Delta(D)$. Ainsi $\chi'_{vd}(D) \geq \pi(D)$. Sauf indication contraire, la coloration de l'arc propre mentionné ci-dessous est la 2-type coloration d'arc propre. Analogue à Conjecture 1.1 pour les graphes non orientés, nous proposons la conjecture suivante pour les graphes orientés.

Conjecture 1.2. Soit D un *vdac-digraph*. Alors $\chi'_{vd}(D) = \pi(D)$.

Malgré Conjecture 1.2 reste insolvable, quelques bons progrès relative à ont été obtenus. En particulier, nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 1. Soit D un *vdac-digraph* avec n sommets et $t \geq 1$ un nombre entier. Si $\delta(D) \geq \frac{n-1}{t}$, alors $\chi'_{vd}(D) \leq \min\{n, \Delta(D) + t\}$.

Corollaire 1.1. Soit D un *vdac-digraph* avec n sommets. Alors $\chi'_{vd}(D) \leq n$.

Considrant un graphe orienté complèt symétrique sur n sommets, nous avons Theorem 1 et Corollary 1 ne peut pas être améliorée en général. Pour tout *vdac-digraph* D , jusqu'à présent, nous ne pouvons pas montrer que $\pi(D)$ couleurs peuvent garantir une VDPA coloration mais nous pouvons montrer que $\pi(D)$ couleurs peut garantir une semi-VDPA coloration.

Théorème 2. Soit D un *vdac-digraph*. Alors $\chi'_{svd}(D) \leq \pi(D) \leq \chi'_{vd}(D)$.

Nous considérons aussi Conjecture 1.2 pour digraphes réguliers. Soit D_d^n un d -régulier graphe orienté sur n sommets et soit

$$k_{d,n} = \min\left\{k : \binom{k}{d} \geq n\right\}. \quad (3)$$

Noter que $\pi(D_d^n) = k_{d,n}$. Par Conjecture 1.2 nous avons la conjecture suivante.

Conjecture 1.3. $\chi_{vd}^{\prime 2}(D_d^n) = \pi(D_d^n) = k_{d,n}$.

De nombreux cas ont été vérifiées pour cette conjecture.

Théorème 3. *Soit D_d^n un d -régulier graphe orienté sur n sommets. Alors Conjecture 1.3 tient à la fois pour $n \leq 7$ et pour $d \in \{1, 2\} \cup [k_{2,2n} + 4, n]$; en outre, il détient près pour $d \in [k_{2,n} - 2, k_{2,2n} + 3]$, où $k_{2,n} = \left\lceil \frac{1+\sqrt{1+8n}}{2} \right\rceil$ et $k_{2,2n} = \left\lceil \frac{1+\sqrt{1+16n}}{2} \right\rceil$. Pour être plus précis, nous avons*

- (1) $\chi_{vd}^{\prime 2}(D_d^n) = k_{d,n}$ si $n \leq 7$;
- (2) $\chi_{vd}^{\prime 2}(D_1^n) = k_{1,n} = n$;
- (3) $\chi_{vd}^{\prime 2}(D_2^n) = k_{2,n} = \left\lceil \frac{1+\sqrt{1+8n}}{2} \right\rceil$;
- (4) $\chi_{vd}^{\prime 2}(D_d^n) \leq d + k_{2,n} - 2 \leq 2k_{2,n} - 5 = \lceil \sqrt{1+8n} \rceil - 4$ si $3 \leq d \leq k_{2,n} - 3$;
- (5) $\chi_{vd}^{\prime 2}(D_d^n) \in \{k_{d,n}, k_{d,n} + 1\}$ et $k_{d,n} = d + 2$ si $k_{2,n} - 2 \leq d \leq k_{2,2n} + 3$;
- (6) $\chi_{vd}^{\prime 2}(D_d^n) = k_{d,n} = d + 2$ si $k_{2,2n} + 4 \leq d \leq n - 2$;
- (7) $\chi_{vd}^{\prime 2}(D_d^n) = k_{d,n} = d + 1$ si $n - 1 \leq d \leq n$.

D'ailleurs, nous montrons que $\chi_{vd}^{\prime 2}(D)$ et $\chi_{svd}^{\prime 2}(D)$ ne seront pas modifiées si la coloration devrait, en outre, être *equitable*, i.e., le nombre d'arcs colorés par deux couleurs diffère d'au plus un.

2 Cycles courts dans les graphes orientés avec des sous-graphes interdits

L'existence de cycles courts dans les graphes et les graphes orientés est un sujet important dans la théorie de graphe. Par rapport à aux nombreux résultats pour les graphes, il y a moins de résultats connus pour les graphes orientés. Il est à noter que le conjectures célèbre Caccetta-Häggkvist qui concerne la longueur des cycles courts a inspiré des années de recherche dans des conditions suffisantes pour des cycles courts en digraphes. Voici deux déclarations équivalentes de la conjecture.

Conjecture 2.1 (Caccetta and Häggkvist [9]). Chaque graphe orienté sur n sommets sans cycles de longueurs au plus l contient un sommet avec degré sortant au plus $\frac{n-1}{l}$.

Conjecture 2.2 (Caccetta and Häggkvist [9]). Chaque graphe orienté sur n sommets avec degré sortant minimum r contient un cycle de longueur au plus $\lceil \frac{n}{r} \rceil$.

Pour Conjecture 2.1, il est évidemment vrai pour $l = 2$. Notez qu'un graphe orienté avec 2-cycle vérifie Conjecture 2.2 et donc il suffit de considérer les graphes orientés. Notez également que beaucoup de travail a été fait autour de la Caccetta-Häggkvist conjecture. Pour être précis, pour Conjecture 2.2, il a été prouvé pour $r = 2$ par Caccetta and Häggkvist [9], pour $r = 3$ par Hamidoune [11], pour $r = 4, 5$ par Hoáng et Reed [14], et pour $r < \sqrt{n/2}$ par Shen [21]. Récemment, Lichiardopol [16] a prouvé la conjecture pour les graphes orientés avec le nombre indépendant deux. Alors que la conjecture générale est toujours ouverte. Par ailleurs, certains états les plus faibles ont été obtenus. Chvátal and Szemerédi [10] ont prouvé que chaque graphe orienté de n sommets avec degré sortant minimum r contient un cycle de longueur au plus $\frac{2n}{r+1}$, et ils ont également prouvé que un tel graphe orienté contient un cycle de longueur au plus $\frac{n}{r} + 2500$. En 1988, Nishimura [18] réduit la constante 2500 au 304. En 1998, Shen [22] réduit la constante 304 au 73 et c'est la meilleure amélioration.

En particulier, caractérisant certains sous-graphes interdits est une autre façon significative à considérer cette conjecture. En 2012, Razborov [19] a vérifié le cas où $l = 3$ avec trois (induits) sous-graphes interdits bien définies.

Théorème 4 (Razborov [19]). *Soit Γ un graphe orienté sur n sommets sans triangles dirigés. Si*

(1) *Γ ne contient pas des graphes orientés dans Figure 1 comme un sous-graphe induit, ou*

(2) *Γ ne contient pas des graphes orientés dans Figure 2 comme un sous-graphe (pas nécessairement induite),*

alors Γ contient un sommet avec degré sortant au plus $\frac{n-1}{3}$.

Nous généralisons le résultat de Razborov en vérifiant la conjecture pour $l \geq 4$ avec $l + 1$ sous-graphes interdits bien définis (induits) .

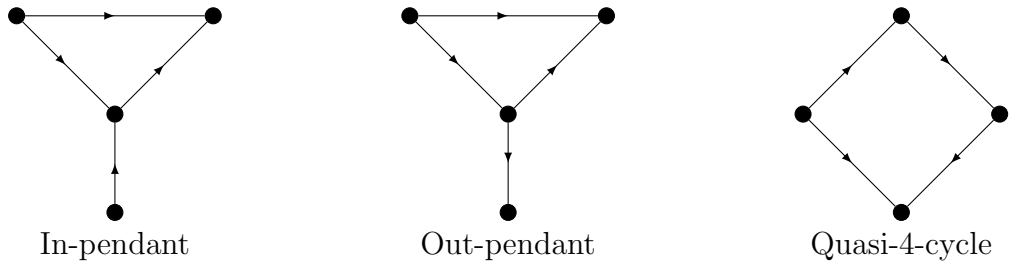


Figure 1: Graphes orientés interdit à Théorème 4 (1).

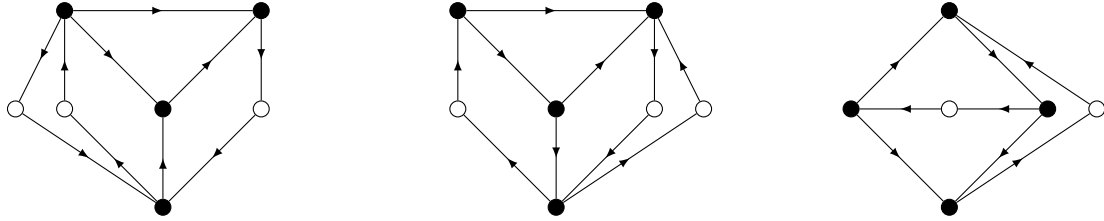


Figure 2: Graphes orientés interdit à Théorème 4 (2).

Théorème 5. Soit Γ un graph orienté de n sommets sans cycles de longueur au plus l . Si Γ ne contient pas des graphes orientés dans Figure 3 comme un sous-graphe induit, alors Γ contient un sommet avec degré sortant au plus $\frac{n-1}{l}$.

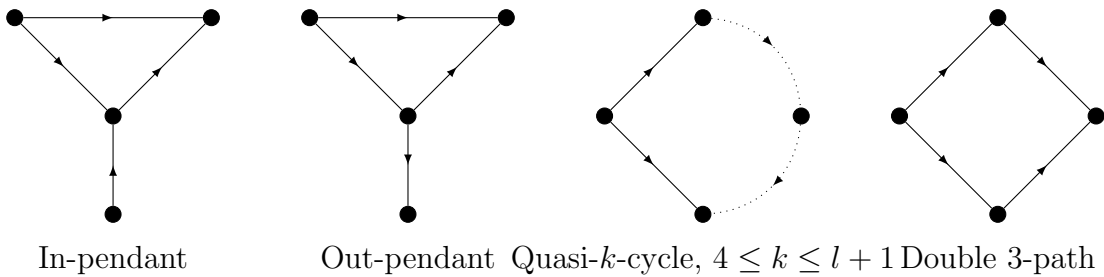


Figure 3: Graphes orientés interdit à Théorème 5.

Théorème 6. Soit Γ un graph orienté de n sommets sans cycles de longueur au plus l . Si Γ ne contient aucune graphes orientés dans Figure 3 comme un sous-graphe, alors Γ contient un sommet avec degré sortant au plus $\frac{n-1}{l}$.

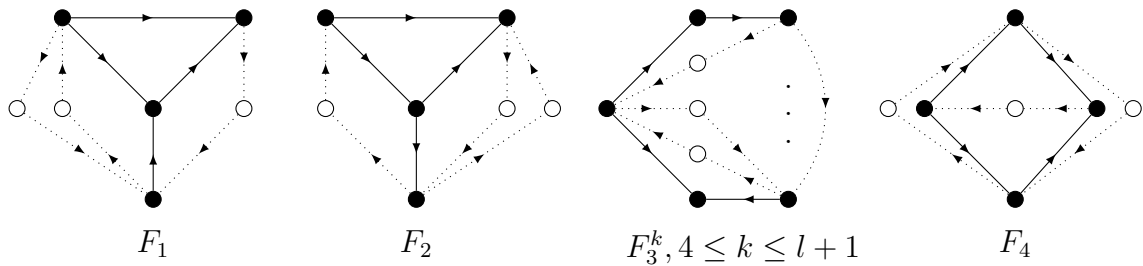


Figure 4: Graphes orientés interdit à Théorème 6.

3 Cycles sommet-disjoints dans dans les tournois bipartis

Il existe deux types de cycles disjoints dans les graphes non orientés (de digraphes), à savoir, les cycles de sommets-disjoints et cycles arête-disjoints (resp. cycles d'arc-disjoints). Ici, nous considérons cycles disjoints de toutes longueurs et de longueur étant donnée dans les tournois bipartites respectivement. En 1981, Bermond et Thomassen [5] ont proposé une conjecture sur les cycles de sommets-disjoints et cela est considéré comme l'un des plus célèbres conjectures en théorie de graphe orienté.

Conjecture 3.1 (Bermond et Thomassen [5]). Soit D un graphe orienté avec degré sortant minimum au moins $2r - 1$. Alors D contient au moins r cycles sommet-disjoints.

Le graphe orienté complet sur $2r - 1$ sommets implique que si la conjecture est vrai, alors il serait le meilleur possible. Notez que la conjecture est trivialement vrai pour $r = 1$. Thomassen [25] et Lichiardopol et al. [17] ont prouvé pour $r = 2$ et $r = 3$, respectivement. Bessy et al. [6] vérifié pour les tournois réguliers en 2010. En 2014, Bang-Jensen et al. [4] ont vérifiée pour les tournois. Il y a également d'autres résultats concernant Conjecture 3.1. Parmi eux, on a besoin de mentionner la suivante, qui, premièrement, montre que le degré sortant minimum peut être délimitée par une fonction linéaire de r .

Théorème 7 (Alon [3]). Soit D un graphe orienté avec degré sortant minimum au moins $64r$. Alors D contient au moins r cycles sommet-disjoints.

Motivé par la conjecture ci-dessus et des résultats partiels, nous considérons le

problème analogue pour les tournois bipartites, c'est à dire, les cycles de sommets-disjoints de longueurs données dans les tournois bipartites. Le résultat suivant a été prouvé.

Théorème 8. *Soit BT un tournoi bipartite avec $\delta^+(BT) \geq qr - 1$. Alors D contient au moins r cycles sommet-disjoints, chaque longueur est soit $2q$ pour q pair où soit un de $\{2q, 2q + 2\}$ pour q impair.*

En considérant la structure particulière de tournois bipartites, nous obtenons un résultat plus général, qui concerne l'existence de cycles de sommets-disjoints de toutes longueurs.

Théorème 9. *Soit BT un tournoi bipartite avec $\delta^+(BT) \geq qr - 1$ et soit $t_1, \dots, t_r \in [4, 2q]$ des r entiers pairs. Alors D contient r cycles sommet-disjoints des cycles-longueurs t'_1, \dots, t'_r tel que $t'_i = t_i$ pour $t_i = 0 \pmod{4}$ et $t'_i \in \{t_i, t_i + 2\}$ pour $t_i = 2 \pmod{4}$, où $1 \leq i \leq r$.*

Prenez $q = 2$ dans le théorème 8, alors Conjecture 3.1 sera vérifiée pour les tournois bipartites.

Corollaire 3.1. *Soit BT un tournoi bipartite avec $\delta^+(BT) \geq 2r - 1$. Alors D contient au moins r 4-cycles sommet-disjoints.*

4 Cycle-facteurs dans les tournois bipartis régulier

Le problème de la 2-cycle-facteurs de chaque cycle-longueurs données possibles dans les tournois 2-connectés a été complètement résolu par Reid [20] et Song [23]. Zhang et al. [27] ont considéré 2 temps-facteurs de tout cycle longueurs possibles donnés dans les tournois bipartites et conjecturé que chaque-regular k tournoi bipartite pas isomorphe à un tournoi spécial bipartite a un 2-cycle-facteur de tous les cycles longueurs possibles.

Conjecture 4.1 (Zhang et al. [27]). *Soit B un k -regular tournoi bipartite pas isomorphe à $F_{4,k}$. Alors B a un 2-cycle-facteur de cycle-longueurs t pair et $|V(B)| - t$ pour tout $4 \leq t \leq |V(B)| - 4$.*

Voici $F_{4,k}$ est un k -regular tournoi bipartite composé de quatre ensembles indépendants K, L, M, N chacun de cardinalité k , et tous les arcs possibles de K à L , de L à M , de M à N et de N à K (Voir Figure 5).

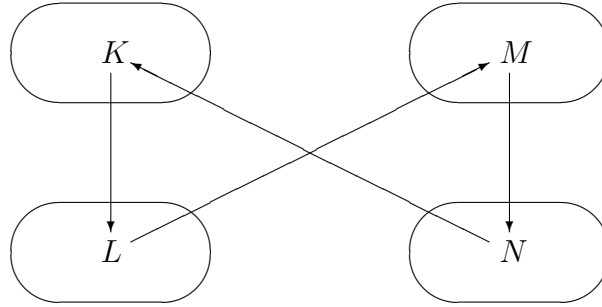


Figure 5: Bipartite tournoi régulier $F_{4,k}$.

Zhang et al. [27] ont prouvé que Conjecture 4.1 est vrai pour $t = 4$. Nous montrons que Conjecture 4.1 est vrai pour $t = 6$.

Théorème 10. *Soit B un k -régulier tournoi bipartite pas isomorphe à $F_{4,k}$. Then B a un 2-cycle-facteur de cycle-longueurs 6 et $|V(B)| - 6$.*

5 Arcs universels dans les tournois

Un arc uv d'un graphe orienté D est appelé *universel* si uv et w sont dans un cycle commun pour tout sommet w de D . En 1999, Ádám [1] a introduit ce problème.

Problème 1. *Est-ce que tous les graphes orientés du cycle connecté contient un arc universel?*

Hetyei [12] a conjecturé en 2001 que la réponse serait oui. Hubenko [13], et Volkmann et Winzen [26] ont vérifié ça pour les tournois bipartites en 2008 et tournois multipartites en 2009, respectivement.

Théorème 11 (Hubenko [13]). *Soit B un tournoi bipartite cycle-connecté. Alors chaque cycle maximale de B a un arc universel.*

Théorème 12 (Volkmann et Winzen [26]). *Soit D un tournoi multipartite. Si D est cycle-connecté, alors D contient un arc universel. Si D est 1-connecté avec $\delta(D) \geq 2$, alors chaque cycle le plus long de D contient un arc universel.*

Ici, nous caractérisons les tournois avec tous les arcs sont universels. Notons $N^+(v)$ et $N^-(v)$ l'outneighborhood et inneighborhood d'un sommet v , respectivement. Soit \mathbf{T}_s^* comme l'ensemble des tournois 1-connectés avec une coupe vertex v tels que les sous-tournois induites par $N^+(v)$ et $N^-(v)$ sont 1-connectés.

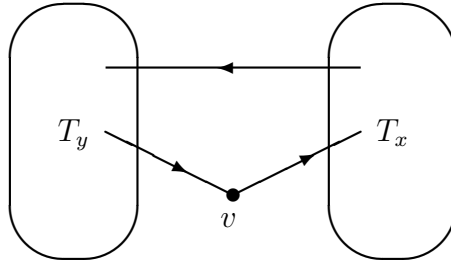


Figure 6: Un tournoi en \mathbf{T}_s^* .

Le résultat suivant a été obtenu.

Théorème 13. *Soit T un tournoi avec au moins trois sommets. Alors*

- (1) *T a un arc universel si et seulement si T est 1-connecté;*
- (2) *chaque arc de T est universel si et seulement si T est 2-connecté où $T \in \mathbf{T}_s^*$;*
- (3) *chaque arc de C est universel si C est un cycle plus long contenant un arc universel dans T et T est 1-connecté.*

Remarque 1. (1) Le graphe orienté 1-connecté à la Figure 7 montre que le résultat dans le Théorème 13 (1) ne tient pas pour les graphes orientés générales.

(2) Thomassen [24] ont montré en 1980 que chaque arc d'un tournoi 3-connecté est contenue dans un cycle Hamilton, ce qui implique que chaque arc d'un tournoi 3-connecté est universel. Théorème 13 (2) montre qu'une condition plus faible garantit cette propriété.

(3) Notez que le cycle le plus long contenant un arc universel taint donnée pourrait être non-Hamiltonien. Donc le résultat dans le Théorème 13 (3) n'est pas trivial.

References

- [1] A. Ádám, On some cyclic connectivity properties of digraphs, Acta Cybernet. 14 (1) (1999) 1-12.

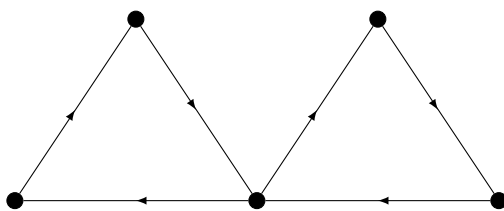


Figure 7: Un graphe orienté 1-connect sans arc universel.

- [2] M. Aigner, E. Triesch, Z. Tuza, Irregular assignment and vertex-distinguishing edge-colorings of graphs, in: A. Barlotti et al. (Eds.), *Combinatorics 90*, Elsevier Science Publications, New York, 1999, 1-9.
- [3] N. Alon, Disjoint directed cycles, *J. Combin. Theory Ser. B* 68 (1996) 167-178.
- [4] J. Bang-Jensen, S. Bessy and S. Thomassé, Disjoint 3-cycles in tournaments: A proof of the BermondThomassen conjecture for tournaments, *J. Graph Theory* 75 (3) (2014) 284-302.
- [5] J.C. Bermond, C. Thomassen, Cycles in digraphs-a survey, *J. Graph Theory* 5 (1) (1981) 1-43.
- [6] S. Bessy, N. Lichiardopol, J.S. Sereni, Two proofs of the Bermond-Thomassen conjecture for tournaments with bounded minimum in-degree, *Discrete Math.* 310 (3) (2010) 557-560.
- [7] J.A. Bondy, Counting subgraphs: A new approach to the Caccetta-Häggkvist conjecture, *Discrete Math.* 165/166 (1997) 71-80.
- [8] A.C. Burriss and R.H. Schelp, Vertex-distinguishing proper edge-colorings, *J. Graph Theory* 26 (2) (1997) 73-82.
- [9] L. Caccetta and R. Häggkvist, On minimal digraphs with given girth, *Congressus Numerantium* 21 (1978) 181-187.
- [10] V. Chvátal and E. Szemerédi, Short cycles in directed graphs, *J. Comb. Theory Ser. B* 35 (1983) 323-327.
- [11] Y.O. Hamidoune, A note on minimal directed graphs with given girth, *J. Comb. Theory Ser. B* 43 (1987) 343-348.
- [12] G. Heteyi, Cyclic connectivity classes of directed graphs, *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi.* 17 (2) (2001) 47-59.

- [13] A. Hubenko, On a cyclic connectivity property of directed graphs, *Discrete Math.* 308 (2008) 1018-1024.
- [14] C.T. Hoáng and B. Reed, A note on short cycles in digraphs, *Discrete Math.* 66 (1987) 103-107.
- [15] M. Hornák and R. Soták, Observability of complete multipartite graphs with equipotent parts, *Ars Combin.* 41 (1995) 289-301.
- [16] N. Lichiardopol, Proof of the Caccetta-Häggkvist conjecture for oriented graphs with positive minimum outdegree and of independent number two, *Discrete Math.* 313 (2013) 1540-1542.
- [17] N. Lichiardopol, A. Por, J.S. Sereni, A step toward the Bermond-Thomassen conjecture about disjoint cycles in digraphs, *SIAM J. Discrete Math.* 23 (2) (2009) 979-992.
- [18] T. Nishimura, Short cycles in digraphs, *Discrete Math.* 72 (1988) 295-298.
- [19] A. Razborov, On the Caccetta-Häggkvist conjecture with forbidden subgraphs, *J. Graph Theory* 74 (2) (2012) 1-13.
- [20] K.B. Reid, Two complementary circuits in two-connected tournaments, *Ann. Discrete Math.* 27 (1985) 321-334.
- [21] J. Shen, On the girth of digraphs, *Discrete Math.* 211 (2000) 167-181.
- [22] J. Shen, On the Caccetta-Häggkvist conjecture, *Graphs Comb.* 18 (2002) 645-654.
- [23] Z.M. Song, Complementary cycles of all lengths in tournaments, *J. Combin. Theory Ser. B* 57 (1993) 18-25.
- [24] C. Thomassen, Hamiltonian-connected tournaments, *J. Combin. Theory Ser. B* 28 (1980) 142-163.
- [25] C. Thomassen, Disjoint cycles in digraphs, *Combinatorica* 3 (3-4) (1983) 393-396.
- [26] L. Volkmann and S. Winzen, Every cycle-connected multipartite tournament has a universal arc, *Discrete Math.* 309 (2009) 1013-1017.
- [27] K.M. Zhang, Y. Manoussakis and Z.M. Song, Complementary cycles containing a fixed arc in d-regular bipartite tournaments, *Discrete Math.* 133 (1994) 325-328.