HAL
open science

Méthodes numériques pour la résolution d'EDP sur des surfaces. Application dans l'embryogenèse

Mahamar Dicko

To cite this version:

Mahamar Dicko. Méthodes numériques pour la résolution d'EDP sur des surfaces. Application dans l'embryogenèse. Mathématiques générales [math.GM]. Université Grenoble Alpes, 2016. Français. NNT : 2016GREAM024 . tel-01679260

HAL Id: tel-01679260

https://theses.hal.science/tel-01679260

Submitted on 9 Jan 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

MAHAMAR DICKO

Thèse dirigée par PIERRE SARAMITO
et coencadrée par JOCELYN ETIENNE

préparée au sein de **Laboratoire Jean Kuntzmann, Laboratoire Interdisciplinaire de Physique**
et de **l'Ecole Doctorale Mathématiques, Sciences et Technologies de l'Information, Informatique**

MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR LA RÉSOLUTION D'EDP SUR DES SURFACES. APPLICATION DANS L'EMBRYOGENÈSE

Thèse soutenue publiquement le **14 mars 2016**,
devant le jury composé de :

M. Stéphane Labbé
Professeur de l'Université Joseph Fourier, Grenoble, Président
M. Franck Pigeonneau
Ingénieur de recherche, HDR, Saint-Gobain Recherche, Aubervilliers, Rapporteur
M. Sébastien Martin
Professeur des universités, Paris-Descartes, Rapporteur
M. François Graner
Directeur de recherche CNRS, Paris-Diderot, Examinateur
M. Pierre Saramito
Directeur de recherche CNRS, Grenoble, Directeur de thèse
M. Jocelyn Etienne
Chargé de recherche CNRS, Grenoble, Co-Encadrant de thèse

Remerciements

Il me sera très difficile de remercier tout le monde car c'est grâce à l'aide de nombreuses personnes que j'ai pu mener cette thèse à son terme.

Je voudrais tout d'abord remercier mes deux directeurs de thèse, Pierre Saramito et Jocelyn Etienne, pour la confiance qu'ils m'ont accordée en acceptant d'encadrer ce travail, pour leurs multiples conseils et pour toutes les heures qu'ils ont consacrées à diriger cette recherche. J'aimerais également leur dire à quel point j'ai apprécié leur grande disponibilité et leur soutien dans les moments difficiles durant cette thèse. J'ai été extrêmement sensible à leurs qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de ce travail. Pierre et Jocelyn ont été des directeurs de thèse patients, plein d'attention et toujours de bonne humeur. J'ai conscience d'avoir beaucoup progresser depuis mes débuts, tant au niveau scientifique qu'au niveau personnel. Ils ont joué un rôle clé dans cette progression et je tiens à les remercier chaleureusement pour cela et pour m'avoir laissé une grande liberté dans mes travaux. J'ai pris beaucoup de plaisir à travailler avec eux et j'espère avoir la chance de voir cette collaboration continuer.

Franck Pigeonneau et Sébastien Martin m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de ma thèse. Je leurs adresse mes sincères remerciements pour le grand interêt qu'ils ont porté à mon travail. Ils ont pris le temps de m'écouter et de discuter avec moi. Leurs remarques m'ont permis d'envisager mon travail sous un autre angle. Pour tout cela, je les remercie énormément.

Je suis également très honoré par la présence François Graner dans mon jury de thèse. Je le remercie chaleureusement pour son attention, ses commentaires et ses encouragements.

Un grand merci à Stéphane Labbé pour sa contribution au bon déroulement de la thèse et pour avoir accepté de participer à mon jury de thèse. J'ai beaucoup apprécié ses conseils, son soutien et ses encouragements durant cette thèse.

Tout au long de ma thèse, je faisais partie des équipes EDP et DYFCOM. J'adresse mes remerciements à l'ensemble de leurs membres particulièrement à mes collègues doctorants.

Je tiens à remercier tous mes amis qui m'ont toujours soutenu, et plus particulièrement Kole et Binta Keita, Alimata Diarra, Amadou Diarra et Mohamed dit Mady Traoré.

Enfin, j'adresse mon affection à ma famille, et en particulier à ma maman qui m'a toujours aidée et soutenue dans mes études. Malgré mon éloignement depuis de (trop) nombreuses années, leur soutien, leur confiance, leur tendresse, leur amour me portent et me guident tous les jours. Merci pour avoir fait de moi ce que je suis aujourd'hui. Je vous aime.

J'en oublie certainement encore et je m'en excuse. Encore un grand merci à tous pour m'avoir conduit à ce jour mémorable.

Une pensée pour terminer ces remerciements pour mon papa, ma sœur aînée et ma tante qui n'ont pas vu l'aboutissement de mon travail mais je sais que vous en auriez été très fier.

Résumé

Nous développons une nouvelle approche éléments finis pour des équations aux dérivées partielles elliptiques de type élasticité linéaire ou Stokes sur une surface fermée de $\mathbb{R}^3$. La surface considérée est décrite par le zéro d'une fonction de niveau assez régulière. Le problème se ramène à la minimisation sous contraintes d'une fonctionnelle énergie pour le champ de vitesse. Les contraintes sont de deux types : (i) la vitesse est tangentielle à la surface, (ii) la surface est inextensible. Cette deuxième contrainte équivaut à l'incompressibilité surfacique du champ de vitesse. Nous abordons ce problème de deux façons : la pénalisation et l'introduction de deux multiplicateurs de Lagrange. Cette dernière méthode a l'avantage de traiter le cas de la limite incompressible d'un écoulement en surface dont nous présentons pour la première fois l'analyse théorique et numérique. Nous montrons des estimations d'erreurs sur la solution discrète et les tests numériques confirment l'optimalité des ces estimations. Pour cela, nous proposons plusieurs approches pour le calcul numérique de la normale et la courbure de la surface. L'implémentation utilise la librairie libre d'éléments finis Rheolef. Nous présentons aussi des résultats de simulations numériques pour une application en biologie : la morphogenèse de l'embryon de la drosophile, durant laquelle des déformations tangentielles d'une monocouche de cellules avec une faible variation d'aire. Ce phénomène est connu sous le nom de l'extension de la bande germinale.

Mots-clés. Équations aux dérivées partielles sur des surfaces ; éléments finis mixtes ; calcul de courbure ; embryogenèse.

Abstract

We develop a novel finite element approach for linear elasticity or Stokes-type PDEs set on a closed surface of $\mathbb{R}^3$. The surface we consider is described as the zero of a sufficiently smooth level-set function. The problem can be written as the minimisation of an energy function over a constrained velocity field. Constraints are of two different types : (i) the velocity field is tangential to the surface, (ii) the surface is inextensible. This second constraint is equivalent to surface incompressibility of the velocity field. We address this problem in two different ways : a penalty method and a mixed method involving two Lagrange multipliers. This latter method allows us to solve the limiting case of incompressible surface flow, for which we present a novel theoretical and numerical analysis. Error estimates for the discrete solution are given and numerical tests show the optimality of the estimates. For this purpose, several approaches for the numerical computation of the normal and curvature of the surface are proposed. The implementation relies on the Rheolef open-source finite element library. We present numerical simulations for a biological application : the morphogenesis of Drosophila embryos, during which tangential flows of a cell monolayer take place with a low surface-area variation. This phenomenon is known as germ-band extension.

Keywords. Surface partial derivative equations ; mixed finite elements ; curvature computation ; embryogenesis.

Tables des notations

$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels,
$\boldsymbol{x}$	point dans $\mathbb{R}^d$,
Γ	surface contenue dans $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$,
$\boldsymbol{n}$	normale sortante à Γ,
$\boldsymbol{p}$	projection sur Γ,
$\boldsymbol{I}$	tenseur identité,
$\mathbf{P}$	tenseur de projection sur Γ,
$\boldsymbol{H}$	tenseur de courbure,
κ	courbure moyenne,
κ_i	courbures principales,
$\boldsymbol{t}_i$	directions principales,
$\boldsymbol{y}$	vecteur courbure,
ϕ	fonction de niveau,
U_δ	bande de largeur δ autour de Γ,
$\lvert\cdot\rvert$	norme euclidienne,
$\mathrm{tr}\,(\cdot)$	trace d'un tenseur,
$\mathbf{Sym}(\cdot)$	partie symétrique d'un tenseur,
c_f	coefficient de friction,
η	viscosité de cisaillement,
λ	viscosité de compression,
γ	paramètre de pénalisation,
$\boldsymbol{u}$	vitesse de l'écoulement,
$\boldsymbol{u}_\gamma$	champ de vitesse pénalisé,
$\boldsymbol{v}$	fonction test associé à $\boldsymbol{u}_\gamma$,
p	multiplicateur de Lagrange associé à l'incompressibilité surfacique,
q	fonction test associé à p,
$\boldsymbol{\theta}$	multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte "écoulement tangentiel",
$\boldsymbol{\xi}$	fonction test associé à $\boldsymbol{\theta}$,
$\mathbf{D}_\Gamma(\boldsymbol{u})$	tenseur des taux de déformations surfaciques,
$\boldsymbol{\sigma}$	tenseur des contraintes totales,
$\boldsymbol{\sigma}_a$	tenseur de contractilité de l'actomyosine,
σ_a	distribution de la myosine,

Δ_{Γ}	opérateur de Laplace-Beltrami,
div_{Γ}	divergence surfacique d'un vecteur,
$\mathbf{div}^*_{\Gamma}$	adjoint de la divergence surfacique d'un vecteur,
$\mathbf{div}_{\Gamma}$	divergence surfacique d'un tenseur,
$\mathbf{grad}_{\Gamma}$	gradient surfacique,
Γ_h	approximation polynomiale par morceaux de Γ,
$\boldsymbol{n}_{\Gamma_h}$	normale sortante à Γ_h,
$\boldsymbol{p}_{\vert\Gamma_h}$	restriction de $\boldsymbol{p}$ à Γ_h,
$\mathbf{P}_h$	tenseur de projection sur Γ_h,
$\boldsymbol{n}_h$	approximation continue de $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{n}_{\Gamma_h}$ sur Γ_h,
$\boldsymbol{H}_h$	approximation du tenseur de courbure sur Γ_h,
$\boldsymbol{H}^c_{n,h}$	approximation du tenseur de courbure sur Γ_h après n lissages,
κ_h	approximation de la courbure moyenne sur Γ_h,
$\boldsymbol{y}_h$	approximation du vecteur courbure sur Γ_h,
$\boldsymbol{u}_{\gamma,h}$	approximation polynomiale par morceaux de $\boldsymbol{u}_{\gamma}$,
p_h	approximation polynomiale par morceaux de p,
$\boldsymbol{\theta}_h$	approximation polynomiale par morceaux de $\boldsymbol{\theta}$,
div_{Γ_h}	divergence surfacique d'un vecteur sur Γ_h,
$\mathbf{D}_{\Gamma_h}$	approximation de $\mathbf{D}_{\Gamma}$ sur Γ_h.

Table des matières

Remerciements **i**

Résumé **iii**

Tables des notations **v**

Table des matières **vii**

Introduction **1**
0.1 Contexte et problématique de la thèse 2
0.1.1 Quelques résultats récents en analyse numérique sur les surfaces 2
0.1.2 Approches de simulation des tissus biologiques 3
0.2 Objectifs et contributions de la thèse 4
0.3 Plan de la thèse 5

1 Notions fondamentales sur les surfaces **7**
1.1 Produits scalaires et normes 8
1.2 Un peu de géométrie différentielle 9
1.2.1 Notion de projection orthogonale 9
1.2.2 Tenseurs surfaciques 10
1.2.3 Opérateurs différentiels surfaciques 11
1.3 Espaces fonctionnels 16
1.3.1 Espaces de Lebesgue 16
1.3.2 Espaces de Sobolev 16
1.4 Formules de Green pour les opérateurs surfaciques 17
1.5 L'adjoint de la divergence surfacique d'un vecteur 20

2 Approximations éléments finis de la normale et de courbures d'une surface **21**
2.1 Introduction 22
2.2 Notations et définitions fondamentales 22
2.2.1 Courbures d'une surface régulière 22
2.2.2 Surface définie par une fonction de niveau 23
2.2.3 Surfaces discrètes et éléments finis isoparamétriques 25

2.2.4 Projection et extension de fonctions . . . 29
2.3 Approximations de la normale et des courbures . . . 34
2.4 Analyses de convergence . . . 36
2.4.1 Estimation de l'erreur sur la normale approchée . . . 37
2.4.2 Estimation de l'erreur sur le tenseur de courbure discret . . . 44
2.4.3 Estimation de l'erreur sur le vecteur courbure discret . . . 49
2.4.4 Tests numériques . . . 51
2.5 Méthode de lissage . . . 57
2.5.1 Description de l'algorithme de lissage . . . 57
2.5.2 Nombre d'itérations de l'algorithme de lissage . . . 57
2.5.3 Tests numériques pour approximations isoparamétriques . . . 63
2.6 Comparaison avec d'autres méthodes . . . 67
2.6.1 Méthode de Heine . . . 67
2.6.2 Méthode de Cazals et Pouget . . . 68

3 Éléments finis pour des écoulements tangentiels à des surfaces courbes 69
3.1 Position du problème . . . 70
3.2 Méthode de pénalisation . . . 71
3.3 Problème continu . . . 72
3.3.1 Formulation variationnelle . . . 73
3.3.2 Existence et unicité de la solution du problème continu . . . 74
3.4 Problème discret . . . 81
3.4.1 Discrétisation par la méthode des éléments finis . . . 81
3.4.2 Relations entre les opérateurs discrets et continus . . . 82
3.4.3 Existence et unicité de la solution du problème discret . . . 90
3.4.4 Problème discret équivalent sur la surface exacte . . . 92
3.5 Estimations d'erreur . . . 94
3.5.1 Estimation des erreurs géométriques . . . 94
3.5.2 Estimation en norme de l'énergie . . . 95
3.6 Tests et validations numériques . . . 100
3.6.1 Convergence en norme H^1 . . . 101
3.6.2 Convergence en norme L^2 et L^∞ . . . 101
3.7 Conclusion . . . 102

4 Éléments finis mixtes pour des écoulements tangentiels à des surfaces courbes 107
4.1 Position du problème . . . 108
4.2 Méthode des multiplicateurs de Lagrange . . . 109
4.2.1 Formulation duale . . . 109
4.2.2 Caractérisation du point selle . . . 110
4.2.3 Problème du point selle : cas limites incompressible et tangentiel . . . 111
4.3 Analyse mathématique du problème du point selle . . . 112
4.3.1 Continuité des formes bilinéaires . . . 112
4.3.2 Conditions de Brezzi-Babuska continues . . . 114

4.3.3 Existence et unicité de la solution du problème du point selle 121
4.4 Mise en œuvre numérique 123
4.4.1 Méthode des éléments finis mixtes 123
4.4.2 Tests numériques et choix des éléments finis mixtes 124
4.5 Conclusion 130

5 Embryogenèse : extension de la bande germinale de la *Drosophile* 131
5.1 Introduction 132
5.2 Modélisation mécanique 132
5.3 Modélisation mathématique 135
5.4 Simulations numériques 136
5.4.1 Calcul du tenseur de contractilité de l'actomyosine 136
5.4.2 Résolution par éléments finis mixtes 136
5.4.3 Résultats numériques et intérêt biologique 137
5.5 Article en préparation 139

6 Conclusion générale et perspectives 149
6.1 Conclusion 150
6.2 Perspectives 152

Annexe 153

A Quelques résultats sur les noyaux d'opérateurs surfaciques 153

B Géométrie de l'embryon de la *Drosophile* 157
B.1 Projection sur le zéro d'une fonction régulière 157
B.1.1 Description de la méthode 157
B.1.2 Application dans construction d'un maillage 158
B.2 Construction du maillage de l'embryon de la *Drosophile* 159

C Quelques propriétés des normes L^2 et H^1 163

D Rappel sur les tenseurs euclidiens 169
D.1 Tenseurs d'ordre 0 169
D.2 Tenseurs d'ordre 1 169
D.3 Tenseurs d'ordre 2 169

E Opérateurs surfaciques en coordonnées cartésiennes et sphériques 173
E.1 Coordonnées sphériques 173
E.1.1 Changement de coordonnées 173
E.1.2 Vecteurs unités dans le système de coordonnées sphériques 174
E.1.3 Propriétés sur les dérivées partielles 174
E.2 Opérateurs différentiels classiques 175
E.2.1 Gradient d'un champ scalaire 175

E.2.2 Gradient d'un champ vectoriel 175
E.2.3 Divergence d'un champ vectoriel 177
E.3 Opérateurs différentiels surfaciques 178
E.3.1 Tenseur de projection 178
E.3.2 Gradient surfacique d'un champ scalaire 178
E.3.3 Gradient surfacique d'un champ vectoriel 178
E.3.4 Divergence surfacique d'un champ vectoriel 179
E.3.5 Divergence surfacique d'un tenseur 180

Bibliographie **187**

Liste des figures **195**

Introduction

Sommaire

0.1 Contexte et problématique de la thèse **2**
0.1.1 Quelques résultats récents en analyse numérique sur les surfaces 2
0.1.2 Approches de simulation des tissus biologiques 3
0.2 Objectifs et contributions de la thèse **4**
0.3 Plan de la thèse **5**

0.1 Contexte et problématique de la thèse

Les équations aux dérivées partielles posées sur des surfaces se présentent dans une large variété d'applications dans les domaines comme la mécanique des fluides et la biologie cellulaire. Les surfaces considérées peuvent être l'interface entre deux phases (liquide et gaz par exemple), des films (film liquide des bulles de savon) ou des membranes fluides (par exemple les tissus biologiques). Nous pouvons citer comme exemples d'applications, le calcul de la forme de gouttes en rotation dans [Heine, 2003], [Heine, 2006], la dynamique des surfactants (tensioactifs ou agents de surface) à l'interface entre deux fluides comme dans [James and Lowengrub, 2004, Garcke et al., 2014], la séparation de phase sur les membranes biologiques [Elliott and Stinner, 2010] et la modélisation de la motilité cellulaire [Elliott et al., 2012]. Comme telles, les équations aux dérivées partielles posées sur des surfaces constituent un défi en restant dans le thème général de l'analyse numérique. L'étude des modèles faisant intervenir ces types d'équations est devenue un domaine de recherche actif au cours des dernières années grâce leurs nombreuses applications.

Dans le cadre cette thèse, les équations aux dérivées partielles envisagées décrivent des mécanismes intervenant en biologie cellulaire : problème l'élasticité linéaire compressible, incompressible en surface ou problème de type Stokes surfacique. Les solutions sont vectorielles et elles peuvent être tangentielles ou non. L'idée ici est de concevoir et d'utiliser des méthodes d'approximation numérique efficaces pour des telles équations aux dérivées partielles. Les méthodes numériques qui seront développées dans cette thèse nous servirons à simuler l'écoulement tangentiel observé expérimentalement (fig. 5.1, page 132) lors de l'extension de la bande germinale de la *Drosophile*. Ces méthodes constituent une base pour s'orienter vers des problèmes non linéaires plus complexes comme les équations viscoélastiques ou éventuellement élastoviscoplastiques sur surface. Les types de modèles permettant d'envisager de modéliser et simuler des phénomènes plus complexes en biologie cellulaire en 3D : le phénomène de gastrulation dans l'embryogenèse de la *Drosophile* (cf. [Conte et al., 2008] ou [Allena et al., 2010] par exemple) ou d'autres dynamiques des tissus biologiques comme par exemple dans [Tlili et al., 2015].

0.1.1 Quelques résultats récents en analyse numérique sur les surfaces

Les premiers résultats de référence sur l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles posées sur des surfaces ont été introduit dans [Dziuk, 1988] et [Destuynder and Salaün, 1990]. Dziuk a été l'un des pionniers dans le domaine. Il a développé une approche intrinsèque par la méthode des éléments finis pour l'équation de Laplace-Beltrami sur des surfaces arbitraires. Il a réalisé sur cette approche les premières techniques d'estimations d'erreur a priori dans le cas des approximations affines par morceaux. À partir des années 2000, son approche a été fréquemment utilisée notamment dans [Heine, 2006] sur des équations aux dérivées partielles plus complexes que l'équation de Laplace-Beltrami faisant intervenir des termes de courbure et dans [Demlow and Dziuk, 2007]. Cette approche a été généralisée sur des approximations isoparamétriques de degré polynomial supérieur (cf. [Demlow, 2009], [Dziuk and Elliott, 2013] par exemple). Une première variante de cette approche basée sur une formulation de fonction de courant a été proposée dans [Nitschke et al., 2012a] puis utilisée dans [Reuther and Voigt, 2014] pour des

écoulements de fluides incompressibles à deux phases. Puis une deuxième variante basée sur une méthode de Galerkin discontinu a été proposée dans [Madhavan, 2014] pour les équations aux dérivées partielles de type convection-diffusion sur des surfaces.

À côté de ces approches, il y a l'approche mixte proposée dans [Destuynder and Salaün, 1990] sur le modèle de Koiter (cf. [Koiter, 1970] [Koiter, 1980], [Destuynder, 1985]) pour les coques minces. On peut consulter [Destuynder and Salaün, 1995a], [Destuynder and Salaün, 1995b] et [Destuynder and Salaün, 1996] pour plus details sur l'analyse théorique et numérique de cette approche mixte. La solution du modèle étant vectorielle, cette approche mixte est basée sur une méthode de multiplicateurs de Lagrange dont la formulation variationnelle mixte sépare les composantes tangentielle et normale de la solution. L'avantage d'une telle approche par rapport à celles proposées ci-dessus, est le fait qu'elle permet d'utiliser des espaces éléments finis directement tangents à la surface exacte considérée, puisque cette dernière est supposée connue explicitement et on peut donc calculer exactement toutes les grandeurs géométriques comme la normale et les courbures. Par contre, elle n'est pas pratique si la surface n'est pas connue explicitement (par exemple une surface qui évolue dans le temps) contrairement à celles proposées ci-dessus. Dans la littérature, il existe des résultats dans ce sens par exemple dans [Dziuk and Elliott, 2007] pour l'opérateur de Laplace-Beltrami. Donc l'approche de Dziuk combinée à des méthodes d'approximation des grandeurs géométriques comme la normale et les courbures de surfaces discrètes (cf. [Cazals and Pouget, 2003] ou [Heine, 2004] par exemple) permet d'envisager d'étendre la technique utilisée dans [Dziuk and Elliott, 2007] à des équations aux dérivées partielles plus complexes.

0.1.2 Approches de simulation des tissus biologiques

De nombreuses approches très différentes ont été utilisées pour simuler les tissus biologiques. Une approche très fréquente est de baser la modélisation sur les éléments discrets que forment les cellules plutôt que sur un modèle de mécanique des milieux continus. François Graner a été un pionnier dans ces approches [Glazier and Graner, 1993]. Ces méthodes ont des avantages de prendre en compte directement la présence de différentes structures mécaniques au sein des cellules (par exemple, de faire une différence entre actomyosine dite "jonctionnelle", c'est-à-dire présente aux interfaces entre cellules, et "médiale", présente sur la surface extérieure, dite apicale, des cellules), et l'inconvénient d'être moins faciles à analyser mécaniquement et d'un point de vue de l'analyse numérique. Des méthodes de ce type qui ont été utilisées jusqu'à présent pour simuler l'extension de la bande germinale par [Rauzi et al., 2008b, Collinet et al., 2015], dans ces modélisations la bande germinale est considérée isolément (le reste des tissus qui forment l'embryon n'est pas simulé mais des conditions aux limites sont appliquées pour reproduire son influence), et la courbure de l'embryon n'est pas prise en compte.

À côté de ces méthodes, quelques méthodes basées sur la mécanique des milieux continus ont été utilisées par exemple pour la gastrulation, un mouvement qui déforme la surface de l'embryon et a lieu juste avant l'extension de la bande germinale. Différentes approches pour ce problème sont discutées dans l'article de revue [Rauzi and Leptin, 2013]. La plupart sont bidimensionnelles ou

axisymétriques, sauf [Conte et al., 2008] et [Allena et al., 2010]. Dans ces dernières méthodes, la structure mécanique considérée est la monocouche de cellules toute entière, qui ne constitue pas une structure mince (à la différence des structures d'actomyosine, qui sont situées dans une couche mince à la surface de l'embryon), à laquelle une rhéologie de matériau linéaire élastique homogène et isotrope est attribuée. Cette rhéologie amène les auteurs à remplacer les contraintes générées par la myosine par un changement dans la configuration de référence du matériau. Cette méthodologie permet de reproduire des déformations similaires à la formation du sillon ventral lors de la gastrulation. En 2010, Allena et al. entreprennent avec cette méthode de simuler l'extension de la bande germinale en imposant le déplacement des cellules de celle-ci. Cependant, ils mentionnent que ce choix de rhéologie les limite à de faibles déplacements.

0.2 Objectifs et contributions de la thèse

Cette thèse s'inscrit de la problématique des équations aux dérivées partielles posées sur des surfaces. Bien que nous nous limitons à des équations linéaires, plusieurs contributions ont été apportées à ce domaine de recherche et elles représentent le premier noyau vers des équations aux dérivées partielles plus complexes posées sur des surfaces notamment non linéaires.

La première contribution de cette thèse est l'élaboration d'une approche éléments finis pour approcher les courbures d'une surface à partir d'une approximation polynomiale par morceaux. Des estimations d'erreurs a priori ont été réalisées sur cette approche numérique pour mieux comprendre les difficultés liées aux calculs de courbures discrètes notamment dans le cas d'une approximation affine par morceaux. Et ces estimations ont été validées sur quelques exemples de surfaces définies par des fonctions de niveau. Nous proposons également un algorithme itératif plus général (que nous appellerons algorithme de lissage) qui nous permet d'améliorer l'ordre de convergence de notre approche numérique. Cet algorithme permet donc de traiter même le cas d'une approximation affine par morceaux qui est le cas le plus difficile numériquement. Avec un choix particulier du nombre d'itérations, nous montrons que cet algorithme a un coût de résolution optimal (coût d'une résolution de systèmes linéaires en dimension 2). Cette approche optimale et robuste offre une nouvelle alternative aux méthodes décrites dans [Cazals and Pouget, 2003] et [Heine, 2004].

La deuxième contribution est l'élaboration d'une méthode numérique pour résoudre des équations aux dérivées partielles de type Stokes tangentiel sur une surface. Ces équations aux dérivées partielles modélisent l'écoulement d'un fluide newtonien compressible ou incompressible sur une surface. Du point de vue numérique, la méthode proposée permet d'obtenir des solutions discrètes tangentes sans passer par des espaces éléments finis directement tangents. Le problème est résolu dans $\mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3 en contrôlant la composante normale et ses dérivées par la combinaison d'une méthode de pénalisation et d'une méthode de multiplicateurs de Lagrange. Ainsi, la méthode numérique proposée est analogue aux méthodes numériques classiques pour des équations aux dérivées partielles de type élasticité linéaire ou Stokes sur un domaine $\mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3. Nous proposons des analyses théoriques et numériques de notre problème modèle à travers

lesquelles nous montrons que la précision globale de la méthode ne depend que de la précision de l'approximation de la courbure.

La troisième contribution concerne notre approche de modélisation et la simulation numérique du phénomène de l'extension de la bande germinale de la *Drosophile*. La méthode proposée dans cette thèse pour cette modélisation n'est pas basée sur des éléments correspondants aux cellules, mais sur une approche de mécanique des milieux continus. Les avantages et inconvénients de cette approche de milieux continus sont discutés d'un point de vue biophysique dans le chapitre 5. Du point de vue des mathématiques appliquées, cette approche permet de séparer les aspects de modélisation, qui ne sont abordés dans cette thèse que dans l'article en préparation du chapitre 5, des aspects de simulation numérique du modèle. C'est ainsi que nous pouvons montrer que les simulations numériques fournissent une bonne approximation de la solution du modèle mécanique continu. Par rapport aux méthodes évoquées ci-dessus, cette modélisation permet de prendre en compte simultanément la courbure de l'embryon, une activité anisotrope de la myosine, la faible épaisseur de la couche d'acto-myosine et les très grandes déformations inélastiques qui caractérisent l'écoulement de la bande germinale.

0.3 Plan de la thèse

Cette thèse est décomposée en cinq chapitres. Nous commençons par un premier chapitre dont le but est d'introduire quelques notions fondamentales sur les surfaces. Il s'agit des outils mathématiques de base qui vont être utilisés tout au long de la thèse. Il y aura notamment quelques rappels sur les produits scalaires euclidiens et les espaces fonctionnels comme les espaces de Lebesgue et les espaces de Sobolev sur une surface. Nous ferons aussi un tour d'horizon sur quelques notions de la géométrie différentielle en restant dans le système de coordonnées cartésien, notamment la projection sur une surface et la définition de quelques opérateurs différentiels surfaciques.

Le deuxième chapitre porte sur le développement d'une méthode d'éléments finis pour approcher la normale et des courbures d'une surface. De telles approximations sont souvent nécessaires pour aborder des équations aux dérivées partielles posées sur des surfaces. En particulier, elles vont nous servir par la suite pour la modélisation et la simulation numérique de notre application biologique. Nous présentons des analyses de convergence théorique sur les approximations de la normale et des courbures et des tests numériques pour la validation. Nous terminons ce chapitre par l'algorithme de lissage qui sera comparé aux méthodes proposées dans [Cazals and Pouget, 2003] et [Heine, 2004].

Nous abordons dans le troisième chapitre un problème de minimisation d'une fonctionnelle d'énergie sous une contrainte. Ce problème permet de modéliser un écoulement sur une surface sous la contrainte que celui-ci soit tangentiel. Nous introduisons une méthode de pénalisation permettant de contrôler la contrainte et ainsi reformuler le problème initial comme un problème de minimisation d'une fonctionnelle d'énergie sans contrainte. Nous présentons une analyse théorique de l'existence et l'unicité de la solution du problème pénalisé ainsi obtenu. Nous propo-

sons une discrétisation par la méthode des éléments finis du problème pénalisé. Nous présentons une analyse numérique abstraite du problème discret ainsi obtenu qui sera validée par des tests numériques.

Le quatrième chapitre porte sur une amélioration de la méthode numérique proposée dans le troisième chapitre en terme de précision sur la contrainte et de coût de calcul en pratique. Nous introduisons deux multiplicateurs de Lagrange permettant de traiter efficacement (du point de vue numérique) le problème pénalisé dans le cadre général et d'atteindre en perspective les limites d'incompressibilité surfacique et tangentiel de l'écoulement modélisé.

Le cinquième chapitre concerne le volet application de la thèse : l'extension de la bande germinale de la *Drosophile*. Dans un premier temps, nous décrivons brièvement le modèle mécanique utilisé pour simuler ce phénomène, ensuite nous mettons en évidence le lien entre l'équilibre mécanique du phénomène et notre modèle mathématique étudié dans les chapitres 3 et 4. Nous présentons enfin des résultats de simulations numériques de l'extension de la bande germinale de la *Drosophile*. Finalement, un article en préparation plus détaillé du point de vue bio-mécanique sera joint à ce chapitre.

Nous finissons ce manuscrit par des annexes portant respectivement sur les noyaux de quelques opérateurs surfaciques, la géométrie de la *Drosophile*, quelques propriétés des normes sur les espaces de Lebesgue et de Sobolev utilisées dans les estimations d'erreurs des chapitres 2 et 3, quelques formulaires sur les tenseurs euclidiens et les opérateurs différentiels surfaciques dans le système de coordonnées sphériques.

Chapitre 1

Notions fondamentales sur les surfaces

Sommaire

1.1 Produits scalaires et normes **8**
1.2 Un peu de géométrie différentielle **9**
1.2.1 Notion de projection orthogonale 9
1.2.2 Tenseurs surfaciques 10
1.2.3 Opérateurs différentiels surfaciques 11
1.3 Espaces fonctionnels **16**
1.3.1 Espaces de Lebesgue 16
1.3.2 Espaces de Sobolev 16
1.4 Formules de Green pour les opérateurs surfaciques **17**
1.5 L'adjoint de la divergence surfacique d'un vecteur **20**

Dans ce chapitre introductif sur les surfaces, nous allons définir quelques notions de base qui vont être utilisées tout au long de la thèse. Outre quelques rappels, nous définissons des opérateurs de dérivation sur les surfaces et nous caractérisons certaines de leurs propriétés. Tout au long de ce chapitre, Γ désignera une surface bornée et orientable contenue dans $\mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3. On désigne par $\boldsymbol{n}$ la normale unitaire (locale) sortante à Γ.

1.1 Produits scalaires et normes

Nous rappelons les définitions suivantes sur les produits scalaires :

Définition 1.1 (Produit scalaire entre deux vecteurs)**.** *Soient $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^d$ deux vecteurs. Nous définissons le produit scalaire entre $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$, noté $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ par*

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^{d-1} v_i w_i,$$

où v_i et w_i sont respectivement les composantes de $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

Il s'agit du produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^d$. La norme associée à ce produit scalaire est notée simplement $|\cdot|$:

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}} = \sqrt{\sum_{i=0}^{d-1} v_i^2}. \tag{1.1.1}$$

Définition 1.2 (Produit scalaire entre deux tenseurs d'ordre 2)**.** *Soient $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ deux tenseurs d'ordre 2. Nous définissons le produit scalaire entre $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ comme le produit doublement contracté entre $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$. Ce produit noté $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B}$ est défini par*

$$\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{B}\right) = \sum_{i=0}^{d-1} \sum_{j=0}^{d-1} a_{i,j} b_{i,j},$$

où $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$ sont respectivement les composantes de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^{d \times d}$.

Nous noterons aussi la norme associée à ce produit scalaire par $|\cdot|$:

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{\boldsymbol{A} : \boldsymbol{A}} = \sqrt{\sum_{i=0}^{d-1} \sum_{j=0}^{d-1} a_{i,j}^2}. \tag{1.1.2}$$

C'est la norme euclidienne standard appelée norme de Frobenius.

Remarque 1.1. *La définition de la notation $|\cdot|$ est déterminée par l'ordre du tenseur considéré. Il s'agit de la valeur absolue pour les scalaires (tenseurs d'ordre 0), la définition 1.1.1 pour les vecteurs (tenseurs d'ordre 1) et la définition 1.1.2 pour les tenseurs d'ordre 2).*

1.2 Un peu de géométrie différentielle

Le but de cette section est de rappeler quelques définitions fondamentales sur les champs définis sur une surface (dans la généralité). Nous allons aussi définir certains opérateurs différentiels sur ces champs. On retrouvera la plupart des définitions qui vont suivre par exemple dans [Edward et al., 1991], [Gurtin et al., 1998], [Heine, 2003] ou [Henrot and Pierre, 2005].

1.2.1 Notion de projection orthogonale

Soit $\boldsymbol{x} \in \Gamma$. Notons par $T_{\boldsymbol{x}}\Gamma$ l'espace tangent à Γ au point $\boldsymbol{x}$. Alors pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^d$, il existe deux applications linéaires continues $\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{x}} : \mathbb{R}^d \longrightarrow T_{\boldsymbol{x}}\Gamma$ et $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v}) + g(\boldsymbol{v})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}). \tag{1.2.1}$$

Définition 1.3 (Projection orthogonale en un point sur Γ)**.** *On appelle projection orthogonale en un point $\boldsymbol{x}$ de la surface Γ l'application continue :*

$$\begin{array}{rll} \boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{x}} : & \mathbb{R}^d & \longrightarrow T_{\boldsymbol{x}}\Gamma \\ & \boldsymbol{v} & \longmapsto \boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} - g(\boldsymbol{v})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}). \end{array}$$

Par définition, la projection $\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{x}}$ vérifie $\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = 0$ pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^d$. Ce qui nous ramène à la définition suivante :

Définition 1.4 (Vecteur tangent - Vecteur normal)**.** *Soit $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^d$. On dit que $\boldsymbol{v}$ est*
(i) tangent à la surface Γ en $\boldsymbol{x}$ si $\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$,
(ii) normal (orthogonal) à la surface Γ en $\boldsymbol{x}$ si $\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v}) = 0$.

Par exemple, le vecteur normal $\boldsymbol{n}$ vérifie naturellement $\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})) = 0$ en tout $\boldsymbol{x} \in \Gamma$. Désormais, nous identifions l'espace tangent en un point $\boldsymbol{x}$ de Γ (l'espace de tous les vecteurs tangents à Γ au point $\boldsymbol{x}$) avec l'hyperplan affine de $\mathbb{R}^d$ qui est tangent à Γ au point $\boldsymbol{x}$. On peut consulter par exemple [Heine, 2003] pour plus details).

Définition 1.5 (Opérateur de projection sur Γ)**.** *On appelle opérateur de projection ou tenseur de projection sur Γ l'opérateur linéaire noté $\mathbf{P}$ associé à la projection orthogonale $\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{x}}$ au point $\boldsymbol{x}$. Autrement dit, l'opérateur linéaire qui vérifie :*

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v}) \qquad \forall\, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^d. \tag{1.2.2}$$

On peut expliciter cet opérateur connaissant la normale $\boldsymbol{n}$ en un point $\boldsymbol{x}$ (cf. [Gurtin et al., 1998]) comme suit :

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) \tag{1.2.3}$$

où $\boldsymbol{I}$ désigne le tenseur identité (cf. Annexe D). Cet opérateur vérifie :

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}^T. \tag{1.2.4}$$

À partir de cette définition, nous pouvons caractériser les vecteurs tangents et orthogonaux à la surface Γ comme suit : un vecteur $\boldsymbol{v}$ appartenant à $\mathbb{R}^d$ est

- tangent à la surface Γ si et seulement si $\mathbf{P}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ en tout point de Γ,
- orthogonal à la surface Γ si et seulement si $\mathbf{P}\boldsymbol{v} = 0$ en tout point de Γ.

Introduisons la notation $\boldsymbol{v}_{_\Gamma} = \mathbf{P}\boldsymbol{v}$. Grâce à la caractérisation précédente, on peut décomposer de manière unique tout champ de vecteur $\boldsymbol{v}$ défini sur Γ comme suit :

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{_\Gamma} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n}, \tag{1.2.5}$$

où $\boldsymbol{v}_{_\Gamma}$ et $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}$ sont appelée respectivement la composante tangentielle et normale de $\boldsymbol{v}$.

Dans la suite de ce document, nous utiliserons cette décomposition qui a l'avantage d'être plus simple à utiliser puisqu'on n'a pas besoin de connaître explicitement les vecteur(s) directeur(s) de l'espace tangent local.

1.2.2 Tenseurs surfaciques

Dans cette partie, tous les tenseurs auxquels nous ferons référence sont d'ordre 2. On peut consulter [Gurtin et al., 1998] pour plus de details sur cette partie.

Définition 1.6 (Tenseur surfacique)**.** *Soit $\boldsymbol{\tau} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^{d\times d}$ un tenseur d'ordre 2. On dit que $\boldsymbol{\tau}$ est surfacique si $\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{n} = 0$ en tout point de Γ.*

L'exemple le plus simple de tenseur surfacique est le tenseur de projection $\mathbf{P}$. En effet, par définition (cf. définition 1.5) nous avons :

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})) = 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in \Gamma.$$

Par conséquent, pour tout tenseur $\boldsymbol{\tau} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^{d\times d}$, le tenseur $\boldsymbol{\tau}\mathbf{P}$ est surfacique. Comme un vecteur, un tenseur surfacique peut être tangent ou normal à la surface Γ.

Définition 1.7 (Tenseur tangent - Tenseur normal)**.** *Soit $\boldsymbol{\tau}$ un tenseur surfacique. On dit que $\boldsymbol{\tau}$ est tangent (respectivement normal) à la surface Γ si pour tout vecteur $\boldsymbol{v}$, le vecteur $\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{v}$ est tangent (respectivement normal) à la surface Γ. Autrement dit, $\boldsymbol{\tau}^T\boldsymbol{n} = 0$ (respectivement $\mathbf{P}\boldsymbol{\tau} = 0$) en tout point de Γ.*

Par exemple, le tenseur de projection $\mathbf{P}$ est tangent à la surface Γ. Etant donné un champ de vecteur $\boldsymbol{v}$ tangent à Γ, le tenseur $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{v}$ est un tenseur normal à Γ. En effet, en utilisant les propriétés du produit tensoriel nous avons pour vecteur $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{v})\,\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v})\,\boldsymbol{n}$$

qui est bien un vecteur normal à Γ. Plus généralement, tout tenseur surfacique $\boldsymbol{\tau}$ admet une unique décomposition de la forme :

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_\Gamma + \boldsymbol{\tau}_n \tag{1.2.6}$$

où $\boldsymbol{\tau}_\Gamma$ et $\boldsymbol{\tau}_n$ sont respectivement les tenseurs surfaciques tangentiel et normal :

$$\boldsymbol{\tau}_\Gamma = \mathbf{P}\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}_n = \boldsymbol{n} \otimes \left(\boldsymbol{\tau}^T \boldsymbol{n}\right). \tag{1.2.7}$$

On trouvera la preuve de cette décomposition dans [Gurtin et al., 1998].

1.2.3 Opérateurs différentiels surfaciques

Notre objectif dans cette partie est de définir les opérateurs différentiels tels que le gradient et la divergence surfacique sur des fonctions scalaires, vectorielles ou tensorielles de classe C^1.

Définition 1.8 (Gradient surfacique d'une fonction scalaire)**.** *Soit φ une fonction de classe C^1 sur Γ. On définit son gradient surfacique ou tangentiel noté $\mathbf{grad}_\Gamma(\varphi)$ par*

$$\mathbf{grad}_\Gamma(\varphi) = \mathbf{P}\mathbf{grad}(\bar{\varphi}) = \mathbf{grad}(\bar{\varphi}) - \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \boldsymbol{n}} \boldsymbol{n} \quad \textit{sur } \Gamma$$

où $\bar{\varphi}$ est un prolongement de φ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d$ et

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \boldsymbol{n}} = \mathbf{grad}(\bar{\varphi}) \cdot \boldsymbol{n}.$$

Cette définition est indépendante du prolongement choisi (cf. [Henrot and Pierre, 2005]). On peut remarquer que par définition, le gradient surfacique d'une fonction scalaire est un champ de vecteurs tangentiels. De manière analogue, nous pouvons définir le gradient surfacique d'une fonction vectorielle définie sur Γ (cf. [Gurtin et al., 1998]).

Définition 1.9 (Gradient surfacique d'une fonction vectorielle)**.** *Soit $\boldsymbol{v}$ une fonction de classe C^1 sur Γ. On définit son gradient surfacique noté $\mathbf{grad}_\Gamma(\boldsymbol{v})$ par*

$$\mathbf{grad}_\Gamma(\boldsymbol{v}) = \mathbf{grad}(\bar{\boldsymbol{v}})\,\mathbf{P} = \mathbf{grad}(\bar{\boldsymbol{v}}) - \frac{\partial \bar{\boldsymbol{v}}}{\partial \boldsymbol{n}} \otimes \boldsymbol{n} \quad \textit{sur } \Gamma$$

où $\bar{\boldsymbol{v}}$ est un prolongement de $\boldsymbol{v}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d$ et

$$\frac{\partial \bar{\boldsymbol{v}}}{\partial \boldsymbol{n}} = (\mathbf{grad}(\bar{\boldsymbol{v}}))\,\boldsymbol{n}.$$

Contrairement au cas scalaire, le gradient surfacique d'une fonction vectorielle est un tenseur surfacique qui n'est pas tangentiel en général. Il est important aussi de préciser que cette définition est valable uniquement pour la convention :

$$\mathbf{grad}\,(\boldsymbol{v}) = \sum_{i,j=0}^{d-1} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} (\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \tag{1.2.8}$$

pour définir le gradient d'un vecteur. Il s'agit de la même convention utilisée dans l'Annexe E pour $d = 3$ (cf. relation (E.2.3)). Pour la convention inverse (utilisée généralement en mécanique), la définition 1.9 correspond à la transposée du gradient surfacique.

Remarque 1.2. *Dans la définition 1.8 et 1.9, si φ est de classe C^1 au voisinage de Γ, alors :*

$$\mathbf{grad}_\Gamma\,(\varphi) \;= \mathbf{P}\mathbf{grad}\,(\varphi) = \mathbf{grad}\,(\varphi) - \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{n}} \boldsymbol{n}.$$

Il en est de même pour $\boldsymbol{v}$ de classe C^1 au voisinage de Γ en utilisant la définition 1.8 :

$$\mathbf{grad}_\Gamma\,(\boldsymbol{v}) \;= \mathbf{grad}\,(\boldsymbol{v})\,\mathbf{P} = \mathbf{grad}\,(\boldsymbol{v}) - \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{n}} \otimes \boldsymbol{n}.$$

Par conséquent, nous obtenons un lien entre le gradient classique et le gradient surfacique :

$$\mathbf{grad}\,(\varphi) \;= \mathbf{grad}_\Gamma\,(\varphi) + \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{n}} \boldsymbol{n} \tag{1.2.9a}$$

$$\mathbf{grad}\,(\boldsymbol{v}) \;= \mathbf{grad}_\Gamma\,(\boldsymbol{v}) + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{n}} \otimes \boldsymbol{n}. \tag{1.2.9b}$$

Définition 1.10 (Opérateur $\mathbf{D}_\Gamma$)**.** *Soit $\boldsymbol{v}$ une fonction de classe C^1 sur Γ. On définit l'opérateur $\mathbf{D}_\Gamma$ par :*

$$\mathbf{D}_\Gamma\,(\boldsymbol{v}) = \mathbf{P}\mathbf{D}\,(\boldsymbol{v})\,\mathbf{P} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{P}\mathbf{grad}_\Gamma\,(\boldsymbol{v}) + \mathbf{grad}_\Gamma^T\,(\boldsymbol{v})\,\mathbf{P}\right).$$

On rappelle que $\mathbf{D}$ est la partie symétrique du gradient qui s'applique sur un champ de vecteurs (cf. relation (E.2.5)). L'opérateur $\mathbf{D}_\Gamma$ est tangentiel, et plus précisément, pour tout $\boldsymbol{v}$ de classe C^1 sur Γ, $\mathbf{D}_\Gamma\,(\boldsymbol{v})$ est la partie symétrique du tenseur tangentiel $\mathbf{P}\mathbf{grad}_\Gamma\,(\boldsymbol{v})$.

Définition 1.11 (Divergence surfacique d'une fonction vectorielle)**.** *Soit $\boldsymbol{v}$ une fonction de classe C^1 sur Γ. On définit sa divergence surfacique notée $\mathrm{div}_\Gamma\,(\boldsymbol{v})$ par*

$$\mathrm{div}_\Gamma\,(\boldsymbol{v}) = \mathbf{P} : \mathbf{grad}\,(\bar{\boldsymbol{v}}) = \mathrm{div}\,(\bar{\boldsymbol{v}}) - \frac{\partial \bar{\boldsymbol{v}}}{\partial \boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{n} \quad \textit{sur } \Gamma$$

où $\bar{\boldsymbol{v}}$ est un prolongement de $\boldsymbol{v}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d$.

Comme pour le cas du gradient surfacique, la définition 1.11 est indépendante du prolongement choisi. Nous avons le résultat suivant sur la divergence surfacique d'une fonction vectorielle :

Proposition 1.1. *Soit $\boldsymbol{v}$ une fonction de classe C^1 sur Γ. Alors*

$$\mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{v}) = \mathrm{tr}\left(\mathbf{grad}_\Gamma(\boldsymbol{v})\right).$$

Démonstration. Soit $\boldsymbol{v}$ une fonction de classe C^1 sur Γ. En utilisant la définition 1.9, nous avons pour tout $\bar{\boldsymbol{v}}$ prolongement de $\boldsymbol{v}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d$:

$$\mathrm{tr}\left(\mathbf{grad}_\Gamma(\boldsymbol{v})\right) = \mathrm{tr}\left(\mathbf{grad}(\bar{\boldsymbol{v}}) - \frac{\partial \bar{\boldsymbol{v}}}{\partial \boldsymbol{n}} \otimes \boldsymbol{n}\right) = \mathrm{tr}\left(\mathbf{grad}(\bar{\boldsymbol{v}})\right) - \mathrm{tr}\left(\frac{\partial \bar{\boldsymbol{v}}}{\partial \boldsymbol{n}}. \otimes \boldsymbol{n}\right)$$

Or, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\left(\mathbf{grad}(\bar{\boldsymbol{v}})\right) &= \mathrm{div}(\bar{\boldsymbol{v}}) \quad \text{(cf. relation E.2.7, page 177)} \\ \mathrm{tr}\left(\frac{\partial \bar{\boldsymbol{v}}}{\partial \boldsymbol{n}} \otimes \boldsymbol{n}\right) &= \frac{\partial \bar{\boldsymbol{v}}}{\partial \boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{n} \quad \text{(cf. relation D.3.7, page 171).} \end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\mathrm{tr}\left(\mathbf{grad}_\Gamma(\boldsymbol{v})\right) = \mathrm{div}(\bar{\boldsymbol{v}}) - \frac{\partial \bar{\boldsymbol{v}}}{\partial \boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{n} = \mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{v}).$$

Ce qui prouve la proposition 1.1. □

Remarque 1.3. *Par définition de la trace (cf. relation D.3.6, page 171), la définition 1.11 ne dépend pas de la convention choisie pour définir le gradient (cas vectoriel).*

Définition 1.12 (Divergence surfacique d'une fonction tensorielle)**.** *Soit $\boldsymbol{\tau}$ une fonction tensorielle de classe C^1 sur Γ. On définit sa divergence surfacique notée $\mathbf{div}_\Gamma(\boldsymbol{\tau})$ par*

$$\mathbf{div}_\Gamma(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{grad}(\bar{\boldsymbol{\tau}}) : \mathbf{P} \quad \textit{sur } \Gamma$$

où $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ est un prolongement de $\boldsymbol{\tau}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{d\times d}$.

On rappelle que le gradient d'un tenseur $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ est le tenseur d'ordre 3 défini par :

$$\mathbf{grad}(\bar{\boldsymbol{\tau}}) = \sum_{i,j,k=0}^{d-1} \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_k} (\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k). \tag{1.2.10}$$

Comme les opérateurs surfaciques précédents, la divergence surfacique d'un tenseur d'ordre 2 ne dépend pas du prolongement choisi.

Remarque 1.4. *Tous les opérateurs différentiels surfaciques définis précédemment sont linéaires. C'est une conséquence de la linéarité des opérateurs différentiels classiques qui permettent de les définir.*

À présent, nous allons donner quelques propriétés utiles des opérateurs surfaciques.

Proposition 1.2 (Quelques propriétés des opérateurs surfaciques)**.** *Soient φ une fonction scalaire, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ deux fonctions vectorielles et $\boldsymbol{\tau}$ une fonction tensorielle. On suppose que $\varphi, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ et $\boldsymbol{\tau}$ sont de classe C^1 sur Γ. Alors nous avons les propriétés suivantes :*

$$\mathbf{grad}_\Gamma(\varphi\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \otimes \mathbf{grad}_\Gamma(\varphi) + \varphi\mathbf{grad}_\Gamma(\boldsymbol{v}) \tag{1.2.11}$$

$$\mathbf{grad}_\Gamma(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}) = \mathbf{grad}_\Gamma^T(\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{w} + \mathbf{grad}_\Gamma^T(\boldsymbol{w})\,\boldsymbol{v} \tag{1.2.12}$$

$$\mathrm{div}_\Gamma(\varphi\boldsymbol{v}) = \mathbf{grad}_\Gamma(\varphi)\cdot\boldsymbol{v} + \varphi\mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{v}) \tag{1.2.13}$$

$$\mathrm{div}_\Gamma\left(\boldsymbol{\tau}^T\boldsymbol{v}\right) = \mathbf{div}_\Gamma(\boldsymbol{\tau})\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\tau} : \mathbf{grad}_\Gamma(\boldsymbol{v}). \tag{1.2.14}$$

Démonstration. Pour la relation (1.2.14), on peut consulter [Gurtin et al., 1998]. Soient $\bar{\varphi}$, $\bar{\boldsymbol{v}}$ et $\bar{\boldsymbol{w}}$ des prolongements respectives de φ, $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$. Nous avons :

$$\mathbf{grad}_\Gamma(\varphi\boldsymbol{v}) = \mathbf{grad}\left(\bar{\varphi}\bar{\boldsymbol{v}}\right)\mathbf{P}.$$

En utilisant la convention (1.2.8), nous obtenons :

$$\mathbf{grad}_\Gamma(\varphi\boldsymbol{v}) = \sum_{i,j,k=0}^{d-1} \frac{\partial\left(\bar{\varphi}\bar{v}_i\right)}{\partial x_k} p_{kj}\left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j\right)$$

où les p_{ij} et v_i sont respectivement les composantes de $\mathbf{P}$ et $\boldsymbol{v}$. Donc, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{grad}_\Gamma(\varphi\boldsymbol{v}) &= \sum_{i,j,k=0}^{d-1}\left(\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x_k}v_i + \varphi\frac{\partial\bar{v}_i}{\partial x_k}\right)p_{kj}\left(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\right)\\
&= \sum_{i,j,k=0}^{d-1}\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x_k}v_i p_{kj}\left(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\right) + \sum_{i,j,k=0}^{d-1}\varphi\frac{\partial\bar{v}_i}{\partial x_k}p_{kj}\left(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\right)\\
&= \sum_{i,j=0}^{d-1}v_i\left(\sum_{k=0}^{d-1}p_{jk}\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x_k}\right)\left(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\right) + \varphi\sum_{i,j,k=0}^{d-1}\frac{\partial\bar{v}_i}{\partial x_k}p_{kj}\left(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\right)
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\mathbf{grad}_\Gamma(\varphi\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}\otimes\left(\mathbf{grad}\left(\bar{\varphi}\right)\mathbf{P}\right) + \varphi\mathbf{grad}\left(\bar{\boldsymbol{v}}\right)\mathbf{P}.$$

En utilisant les définitions 1.8 et 1.9, nous déduisons que :

$$\mathbf{grad}_{\Gamma}\left(\varphi \boldsymbol{v}\right) = \boldsymbol{v} \otimes \mathbf{grad}_{\Gamma}\left(\varphi\right) + \varphi \mathbf{grad}_{\Gamma}\left(\boldsymbol{v}\right).$$

Ce qui prouve la relation (1.2.11). On procède de la même manière pour la relation (1.2.12). Nous avons :

$$\mathbf{grad}_{\Gamma}\left(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}\right) = \mathbf{P}\mathbf{grad}\left(\bar{\boldsymbol{v}} \cdot \bar{\boldsymbol{w}}\right).$$

En utilisant la définition 1.8, nous obtenons :

$$\mathbf{grad}_{\Gamma}\left(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}\right) = \sum_{i,k=0}^{d-1} p_{ik} \frac{\partial\left(\bar{\boldsymbol{v}} \cdot \bar{\boldsymbol{w}}\right)}{\partial x_k} \boldsymbol{e}_i = \sum_{i,j,k=0}^{d-1} p_{ik} \frac{\partial\left(\bar{v}_j \bar{w}_j\right)}{\partial x_k} \boldsymbol{e}_i.$$

Par suite, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{grad}_{\Gamma}\left(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}\right) &= \sum_{i,j,k=0}^{d-1} p_{ik} \left(\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} w_j + v_j \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial x_k}\right) \boldsymbol{e}_i \\
&= \sum_{i,j,k=0}^{d-1} p_{ik} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} w_j \boldsymbol{e}_i + \sum_{i,j,k=0}^{d-1} p_{ik} v_j \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial x_k} \boldsymbol{e}_i.
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{grad}_{\Gamma}\left(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}\right) &= \mathbf{P}\mathbf{grad}^T\left(\bar{\boldsymbol{v}}\right) \boldsymbol{w} + \mathbf{P}\mathbf{grad}^T\left(\bar{\boldsymbol{w}}\right) \boldsymbol{v} \\
&= \left(\mathbf{grad}\left(\bar{\boldsymbol{v}}\right) \mathbf{P}\right)^T \boldsymbol{w} + \left(\mathbf{grad}\left(\bar{\boldsymbol{w}}\right) \mathbf{P}\right)^T \boldsymbol{v}.
\end{aligned}$$

En utilisant la définition 1.9, nous déduisons que :

$$\mathbf{grad}_{\Gamma}\left(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}\right) = \mathbf{grad}_{\Gamma}^T\left(\boldsymbol{v}\right) \boldsymbol{w} + \mathbf{grad}_{\Gamma}^T\left(\boldsymbol{w}\right) \boldsymbol{v}.$$

Ce qui prouve la relation (1.2.12). La relation (1.2.13) une conséquence de la relation (1.2.11). En effet, d'après la proposition 1.1 et la relation (1.2.11) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}_{\Gamma}\left(\varphi \boldsymbol{v}\right) &= \mathrm{tr}\left(\mathbf{grad}_{\Gamma}\left(\varphi \boldsymbol{v}\right)\right) \\
&= \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{v} \otimes \mathbf{grad}_{\Gamma}\left(\varphi\right) + \varphi \mathbf{grad}_{\Gamma}\left(\boldsymbol{v}\right)\right) \\
&= \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{v} \otimes \mathbf{grad}_{\Gamma}\left(\varphi\right)\right) + \varphi \mathrm{tr}\left(\mathbf{grad}_{\Gamma}\left(\boldsymbol{v}\right)\right).
\end{aligned}$$

En utilisant la propriété (D.3.7), page 171, nous obtenons :

$$\mathrm{div}_{\Gamma}\left(\varphi \boldsymbol{v}\right) = \mathbf{grad}_{\Gamma}\left(\varphi\right) \cdot \boldsymbol{v} + \varphi \mathrm{div}_{\Gamma}\left(\boldsymbol{v}\right).$$

□

1.3 Espaces fonctionnels

Comme pour un ouvert de $\mathbb{R}^d$, on peut définir les espaces fonctionnels usuels sur une surface de $\mathbb{R}^d$ en utilisant les cartes locales qui la définissent. Ici, les espaces fonctionnels qui nous intéressent sont les espaces de Lebesgue L^p, et les espaces de Sobolev $W^{m,p}$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et $m \geq 1$. On peut consulter par exemple sur [Heine, 2003] et [Dziuk and Elliott, 2013] pour les définitions qui vont suivre.

1.3.1 Espaces de Lebesgue

Soit $\varphi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$. Pour $1 \leq p < \infty$, on définit :

$$\|\varphi\|_{0,p,\Gamma} = \left(\int_\Gamma |\varphi|^p \, \mathrm{ds}\right)^{\frac{1}{p}} \text{ et } \|\varphi\|_{0,\infty,\Gamma} = \sup_{\boldsymbol{x}\in\Gamma} |\varphi(\boldsymbol{x})| \,. \tag{1.3.1}$$

Alors pour $1 \leq p \leq \infty$, nous désignons par $L^p(\Gamma)$ l'espace de Lebesgue défini par :

$$L^p(\Gamma) = \left\{\varphi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R} \mid \|\varphi\|_{0,p,\Gamma} < +\infty\right\}.$$

L'espace $L^p(\Gamma)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{0,p,\Gamma}$ est un espace de Banach. En particulier, $L^2(\Gamma)$ est un espace de Hilbert. De plus, les espaces $C^0(\Gamma)$ et $C^1(\Gamma)$ sont denses dans $L^p(\Gamma)$. Nous définissons de manière analogue les espaces de Lebesgue pour les fonctions vectorielles et tensorielles pour $1 \leq p \leq \infty$ en utilisant les normes :

$$\|\boldsymbol{v}\|_{0,p,\Gamma} = \left(\int_\Gamma |\boldsymbol{v}|^p \, \mathrm{ds}\right)^{\frac{1}{p}} \text{ et } \|\boldsymbol{v}\|_{0,\infty,\Gamma} = \max_{0\leq i\leq d-1} \|v_i\|_{0,\infty,\Gamma} \tag{1.3.2}$$

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_{0,p,\Gamma} = \left(\int_\Gamma |\boldsymbol{\tau}|^p \, \mathrm{ds}\right)^{\frac{1}{p}} \text{ et } \|\boldsymbol{\tau}\|_{0,\infty,\Gamma} = \max_{0\leq i,j\leq d-1} \|\tau_{ij}\|_{0,\infty,\Gamma} \tag{1.3.3}$$

où les v_i et τ_{ij} sont respectivement les composantes de $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{\tau}$.

1.3.2 Espaces de Sobolev

Soit φ une fonction de classe C^1. Nous introduisons la notation $D_i\varphi$ la ième composante du gradient surfacique de φ :

$$\mathbf{grad}_\Gamma(\varphi) = (D_1\varphi, ..., D_{d-1}\varphi) \,.$$

Définition 1.13 (Dérivée au sens faible)**.** *Soit φ une fonction appartenant à $L^1(\Gamma)$. On dit que φ admet une dérivée au sens faible $v_i \in L^1(\Gamma)$ si pour toute fonction test $\psi \in C^1(\Gamma)$, on a la relation :*

$$\int_\Gamma \varphi D_i\psi \, \mathrm{ds} = \int_\Gamma \varphi\psi \mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{n}) \, n_i \, \mathrm{ds} - \int_\Gamma \psi v_i \, \mathrm{ds}$$

où n_i est la ième composante de $\boldsymbol{n}$.

Définition 1.14 (Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Gamma)$)**.** *Pour les entiers naturels $m \geq 1$ et $1 \leq p \leq \infty$, on définit les espaces de Sobolev notés par :*

$$W^{m,p}(\Gamma) = \left\{\varphi \in W^{m-1,p}(\Gamma) \mid D_i\varphi^{(m-1)} \in L^p(\Gamma)\right\}$$

où $W^{0,p}(\Gamma) = L^p(\Gamma)$.

Pour $p = 2$, nous utilisons la notation $H^m(\Gamma) = W^{m,2}(\Gamma)$. En particulier, l'espace $H^1(\Gamma)$ muni de la norme :

$$\|\varphi\|_{1,2,\Gamma} = \sqrt{\|\varphi\|_{0,2,\Gamma}^2 + \left\|\mathbf{grad}_\Gamma(\varphi)\right\|_{0,2,\Gamma}^2} \tag{1.3.4}$$

est un espace de Hilbert. Les définitions ci-dessus s'étendent naturellement aux fonctions vectorielles et tensorielles.

1.4 Formules de Green pour les opérateurs surfaciques

Dans cette section, nous allons donner deux formules d'intégration par parties pour des intégrales sur la surface Γ. Ici nous supposons que Γ est fermée et sans bord ($\partial\Gamma = \emptyset$). Dans les cas de surfaces avec un bord, il faudrait aussi faire intervenir la normale au bord. On peut consulter par exemple [Henrot and Pierre, 2005] pour d'autres formules d'intégration sur les surfaces.

Proposition 1.3 (Théorème de la divergence surfacique)**.** *Soit $\boldsymbol{v} \in (H^1(\Gamma))^d$ un champ de vecteur tangent à Γ, c'est à dire $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ sur Γ. Alors*

$$\int_\Gamma \mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{v})\,\mathrm{ds} = 0.$$

Cette proposition a été démontrée dans [Henrot and Pierre, 2005]. Ce résultat permet de démontrer les deux formules d'intégrations sur la surface Γ qui vont suivre.

Proposition 1.4. *Soient $\varphi \in L^2(\Gamma)$ et $\boldsymbol{v} \in (H^1(\Gamma))^d$. Alors*

$$\int_\Gamma \mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{v})\,\mathrm{ds} = \int_\Gamma \mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{ds} \tag{1.4.1}$$

$$\int_\Gamma \mathbf{grad}_\Gamma(\varphi)\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{ds} + \int_\Gamma \varphi\mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{v})\,\mathrm{ds} = \int_\Gamma \varphi\mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{ds} \tag{1.4.2}$$

Démonstration. Soient $\varphi \in L^2(\Gamma)$ et $\boldsymbol{v} \in (H^1(\Gamma))^d$. En utilisant la décomposition (1.2.5) de $\boldsymbol{v}$ et la propriété (1.2.13), nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{v}) &= \mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{v}_\Gamma) + \mathrm{div}_\Gamma((\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}) \\
&= \mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{v}_\Gamma) + \underbrace{\mathbf{grad}_\Gamma(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{n}}_{=0} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{n}) \\
&= \mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{v}_\Gamma) + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{n}).
\end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant la proposition 1.3 sur $\boldsymbol{v}_\Gamma$, nous avons :

$$\int_\Gamma \mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{v})\,\mathrm{ds} = \int_\Gamma \mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{v}_\Gamma)\,\mathrm{ds} + \int_\Gamma \mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{ds} = \int_\Gamma \mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{ds}.$$

D'ou la formule (1.4.1). La formule (1.4.2) est une conséquence directe de (1.4.1). En effet, en appliquant la formule (1.4.1) sur le champ $\varphi\boldsymbol{v}$, nous obtenons :

$$\int_\Gamma \mathrm{div}_\Gamma(\varphi\boldsymbol{v})\,\mathrm{ds} = \int_\Gamma \varphi\mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{ds}.$$

En utilisant la propriété (1.2.13), la relation précédente devient :

$$\int_\Gamma \left(\mathbf{grad}_\Gamma(\varphi)\cdot\boldsymbol{v} + \varphi\mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{v})\right)\,\mathrm{ds} = \int_\Gamma \varphi\mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{ds}.$$

D'où la formule (1.4.2). Ce qui prouve la proposition 1.4. □

Proposition 1.5. *Soient $\boldsymbol{v} \in (H^1(\Gamma))^d$ et $\boldsymbol{\tau} \in (L^2(\Gamma))^{d\times d}$. Alors*

$$\int_\Gamma \mathbf{div}_\Gamma(\boldsymbol{\tau}\mathbf{P})\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{ds} + \int_\Gamma \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D}_\Gamma(\boldsymbol{v})\,\mathrm{ds} = 0.$$

Démonstration. Soient $\boldsymbol{v} \in (H^1(\Gamma))^d$ et $\boldsymbol{\tau} \in (L^2(\Gamma))^{d\times d}$. En utilisant la proposition 1.3 sur $\mathbf{P}\boldsymbol{\tau}^T\boldsymbol{v}$, nous avons :

$$\int_\Gamma \mathrm{div}_\Gamma\left(\mathbf{P}\boldsymbol{\tau}^T\boldsymbol{v}\right)\,\mathrm{ds} = 0.$$

Or, d'après la propriété (1.2.14), nous avons :

$$\mathrm{div}_\Gamma\left(\mathbf{P}\boldsymbol{\tau}^T\boldsymbol{v}\right) = \mathrm{div}_\Gamma\left((\boldsymbol{\tau}\mathbf{P})^T\boldsymbol{v}\right) = \mathbf{div}_\Gamma(\boldsymbol{\tau}\mathbf{P})\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\tau}\mathbf{P} : \mathbf{grad}_\Gamma(\boldsymbol{v}).$$

Par conséquent, nous avons :

$$\int_\Gamma \mathbf{div}_\Gamma(\boldsymbol{\tau}\mathbf{P})\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{ds} + \int_\Gamma \boldsymbol{\tau}\mathbf{P} : \mathbf{grad}_\Gamma(\boldsymbol{v})\,\mathrm{ds} = 0.$$

Il nous reste à montrer que $\boldsymbol{\tau}\mathbf{P} : \mathbf{grad}_{\Gamma}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D}_{\Gamma}(\boldsymbol{v})$. Par définition (cf. annexe D, formule (D.3.9), page 171), nous avons :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} : \mathbf{D}_{\Gamma}(\boldsymbol{v}) &= \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l=1}^{d-1} p_{ik}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k}\right) p_{lj}\tau_{ij} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j,k,l=1}^{d-1} p_{ik}\frac{\partial v_k}{\partial x_l} p_{lj}\tau_{ij} + \sum_{i,j,k,l=1}^{d-1} p_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_k} p_{lj}\tau_{ij}\right).\end{aligned}$$

En échangeant les indices k et l, nous obtenons :

$$\boldsymbol{\tau} : \mathbf{D}_{\Gamma}(\boldsymbol{v}) = \sum_{i,j,k,l=1}^{d-1} p_{ik}\frac{\partial v_k}{\partial x_l} p_{lj}\tau_{ij} = \boldsymbol{\tau}\mathbf{P} : \mathbf{grad}_{\Gamma}(\boldsymbol{v}).$$

D'où

$$\int_{\Gamma} \mathbf{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{\tau}\mathbf{P}) \cdot \boldsymbol{v}\,\mathrm{ds} + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D}_{\Gamma}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{ds} = 0.$$

Ce qui prouve la proposition 1.5. □

Proposition 1.6. *Soient $\varphi \in L^2(\Gamma)$ et $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in (H^1(\Gamma))^d$. Alors*

$$\int_{\Gamma} \mathbf{div}_{\Gamma}(\varphi\mathbf{P}) \cdot \boldsymbol{w}\,\mathrm{ds} = -\int_{\Gamma} \varphi \mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{w})\,\mathrm{ds} \tag{1.4.3}$$

$$\int_{\Gamma} \mathbf{div}_{\Gamma}(2\mathbf{D}_{\Gamma}(\boldsymbol{v})) \cdot \boldsymbol{w}\,\mathrm{ds} = -\int_{\Gamma} 2\mathbf{D}_{\Gamma}(\boldsymbol{v}) : \mathbf{D}_{\Gamma}(\boldsymbol{w})\,\mathrm{ds}. \tag{1.4.4}$$

Démonstration. Soient $\varphi \in L^2(\Gamma)$ et $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in (H^1(\Gamma))^d$. Posons $\boldsymbol{\tau}_1 = \varphi\mathbf{P} \in (L^2(\Gamma))^{d\times d}$ et $\boldsymbol{\tau}_2 = 2\mathbf{D}_{\Gamma}(\boldsymbol{v}) \in (L^2(\Gamma))^{d\times d}$. En appliquant la proposition 1.5 sur $\boldsymbol{\tau}_1$ et $\boldsymbol{\tau}_2$, nous avons :

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \mathbf{div}_{\Gamma}(\varphi\mathbf{P}) \cdot \boldsymbol{w}\,\mathrm{ds} &= -\int_{\Gamma} \varphi\mathbf{P} : \mathbf{D}_{\Gamma}(\boldsymbol{w})\,\mathrm{ds} \\ \int_{\Gamma} \mathbf{div}_{\Gamma}(2\mathbf{D}_{\Gamma}(\boldsymbol{v})) \cdot \boldsymbol{w}\,\mathrm{ds} &= -\int_{\Gamma} 2\mathbf{D}_{\Gamma}(\boldsymbol{v}) : \mathbf{D}_{\Gamma}(\boldsymbol{w})\,\mathrm{ds}.\end{aligned}$$

Or, nous avons :

$$\mathbf{P} : \mathbf{D}_{\Gamma}(\boldsymbol{w}) = \mathbf{P} : \mathbf{grad}_{\Gamma}(\boldsymbol{w}) = \mathrm{tr}\left(\mathbf{grad}_{\Gamma}(\boldsymbol{w})\right) = \mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{w}).$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \mathbf{div}_\Gamma\left(\varphi\mathbf{P}\right)\cdot\boldsymbol{w}\,\mathrm{ds} &= -\int_\Gamma \varphi\mathrm{div}_\Gamma\left(\boldsymbol{w}\right)\,\mathrm{ds}\\ \int_\Gamma \mathbf{div}_\Gamma\left(2\mathbf{D}_\Gamma\left(\boldsymbol{v}\right)\right)\cdot\boldsymbol{w}\,\mathrm{ds} &= -\int_\Gamma 2\mathbf{D}_\Gamma\left(\boldsymbol{v}\right):\mathbf{D}_\Gamma\left(\boldsymbol{w}\right)\,\mathrm{ds}.\end{aligned}$$

Ce qui prouve la proposition 1.6. □

En particulier, pour tout $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\left(H^1\left(\Gamma\right)\right)^d$, nous avons :

$$\int_\Gamma \mathbf{div}_\Gamma\left(\mathrm{div}_\Gamma\left(\boldsymbol{v}\right)\mathbf{P}\right)\cdot\boldsymbol{w}\,\mathrm{ds} = -\int_\Gamma \mathrm{div}_\Gamma\left(\boldsymbol{v}\right)\mathrm{div}_\Gamma\left(\boldsymbol{w}\right)\,\mathrm{ds}. \tag{1.4.5}$$

1.5 L'adjoint de la divergence surfacique d'un vecteur

Rappelons la formule (1.4.2) de la proposition 1.4 pour $\varphi\in L^2\left(\Gamma\right)$ et $\boldsymbol{v}\in\left(H^1\left(\Gamma\right)\right)^d$:

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \varphi\mathrm{div}_\Gamma\left(\boldsymbol{v}\right)\,\mathrm{ds} &= \int_\Gamma \varphi\mathrm{div}_\Gamma\left(\boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{ds} - \int_\Gamma \mathbf{grad}_\Gamma\left(\varphi\right)\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{ds}\\ &= \int_\Gamma \left(\varphi\mathrm{div}_\Gamma\left(\boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{n} - \mathbf{grad}_\Gamma\left(\varphi\right)\right)\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{ds}.\end{aligned}$$

Cette dernière écriture nous permet d'identifier l'adjoint de l'opérateur div_Γ.

Définition 1.15 (L'opérateur adjoint de div_Γ)**.** *On définit l'opérateur adjoint de la divergence surfacique noté* $\mathbf{div}^*_\Gamma$ *par :*

$$\begin{array}{rccl}\mathbf{div}^*_\Gamma: & L^2\left(\Gamma\right) & \longrightarrow & \left(H^{-1}(\Gamma)\right)^d\\ & \varphi & \longmapsto & \mathbf{div}^*_\Gamma\left(\varphi\right) = \varphi\mathrm{div}_\Gamma\left(\boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{n} - \mathbf{grad}_\Gamma\left(\varphi\right).\end{array}$$

C'est l'unique opérateur qui vérifie :

$$\int_\Gamma \varphi\mathrm{div}_\Gamma\left(\boldsymbol{v}\right)\,\mathrm{ds} = \int_\Gamma \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{div}^*_\Gamma\left(\varphi\right)\,\mathrm{ds} \qquad \forall\,\boldsymbol{v}\in\left(H^1\left(\Gamma\right)\right)^d, \varphi\in L^2\left(\Gamma\right).$$

Notons par $\ker\left(\mathbf{div}^*_\Gamma\right)$ le noyau de l'opérateur $\mathbf{div}^*_\Gamma$:

$$\ker\left(\mathbf{div}^*_\Gamma\right) = \left\{\varphi\in L^2\left(\Gamma\right)\mid \mathbf{div}^*_\Gamma\left(\varphi\right)=0\right\}.$$

Alors nous avons :

$$\ker\left(\mathbf{div}^*_\Gamma\right)\cap H^1\left(\Gamma\right) = \left\{0\right\}. \tag{1.5.1}$$

La preuve est donnée dans l'annexe A.

Chapitre 2

Approximations éléments finis de la normale et de courbures d'une surface

Sommaire

2.1 Introduction **22**
2.2 Notations et définitions fondamentales **22**
2.2.1 Courbures d'une surface régulière 22
2.2.2 Surface définie par une fonction de niveau 23
2.2.3 Surfaces discrètes et éléments finis isoparamétriques 25
2.2.4 Projection et extension de fonctions 29
2.3 Approximations de la normale et des courbures **34**
2.4 Analyses de convergence **36**
2.4.1 Estimation de l'erreur sur la normale approchée 37
2.4.2 Estimation de l'erreur sur le tenseur de courbure discret 44
2.4.3 Estimation de l'erreur sur le vecteur courbure discret 49
2.4.4 Tests numériques 51
2.5 Méthode de lissage **57**
2.5.1 Description de l'algorithme de lissage 57
2.5.2 Nombre d'itérations de l'algorithme de lissage 57
2.5.3 Tests numériques pour approximations isoparamétriques 63
2.6 Comparaison avec d'autres méthodes **67**
2.6.1 Méthode de Heine 67
2.6.2 Méthode de Cazals et Pouget 68

2.1 Introduction

Dans nombreux problèmes mathématiques, physiques ou bio-mécaniques, des écoulements se produisent sur des courbes ou des surfaces courbes dans l'espace. Souvent dans ces types d'écoulements, la courbure de ces surfaces joue un rôle important. La résolution numérique de ces problèmes est très souvent difficile si la courbure ou ses dérivées interviennent explicitement dans les équations aux dérivées partielles qui modélisent l'écoulement considéré. En effet, dans les méthodes numériques comme les éléments finis, la surface exacte est approchée par une surface discrète dont la normale extérieure n'est pas continue en général. Donc, pour définir la courbure de la surface discrète, on ne peut pas utiliser globalement sa normale. Par conséquent, il faut une définition discrète de la courbure. Dans la littérature notamment en géométrie discrète, il y a beaucoup de propositions d'algorithmes pour calculer des courbures discrètes. Mais peu d'auteurs ont réalisé une analyse numérique (étude de convergence) de leurs algorithmes. Les travaux de référence dans ce cadre sont ceux de [Cazals and Pouget, 2003] basés sur la méthode des moindres carrés et de [Heine, 2004] basés sur la méthode des éléments finis. Dans ce chapitre, nous proposons une alternative aux méthodes citées ci-dessus pour approcher la courbure d'une surface discrète contenue dans $\mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3. Cette méthode d'approximation est basée aussi sur la méthode des éléments finis. L'idée est de calculer la courbure discrète à partir d'une approximation continue de la normale que l'on définira. Nous réalisons une étude théorique et numérique de ces approximations (normale et courbure) en terme de convergence vers la normale et la courbure exacte. Pour finir ce chapitre, nous comparons nos résultats à ceux de [Cazals and Pouget, 2003] et de [Heine, 2004].

2.2 Notations et définitions fondamentales

L'analyse sur les surfaces (en général sur les variétés) est traitée en détail par exemple dans [Aubin, 1982], [Do Carmo, 1976] , [Do Carmo, 1994]. On peut trouver également des aspects pertinents par exemple dans [Edward et al., 1991], [Ciarlet, 2000] ou [Gilbarg and Trudinger, 2001]. Cependant, nous n'avons pas besoin des notions de différentiabilité et de courbures dans le cadre général, mais seulement pour le cas des surfaces fermées en dimension 2 ou 3. Par conséquent, nous nous limiterons à des définitions élémentaires mais fondamentales sur ces types de surfaces et leurs courbures.

2.2.1 Courbures d'une surface régulière

On considère $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3, une surface bornée orientable fermée (c'est à dire $\partial\Gamma = \emptyset$) et assez régulière (au moins de classe C^2). Nous identifions l'espace tangent en un point $\boldsymbol{x}$ de Γ avec l'hyperplan affine de $\mathbb{R}^d$ qui est tangent à Γ au point $\boldsymbol{x}$. On désigne par $\boldsymbol{n} : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^d$, la normale unitaire (locale) sortante à Γ. On définit le tenseur de courbure (appelé aussi endomorphisme de

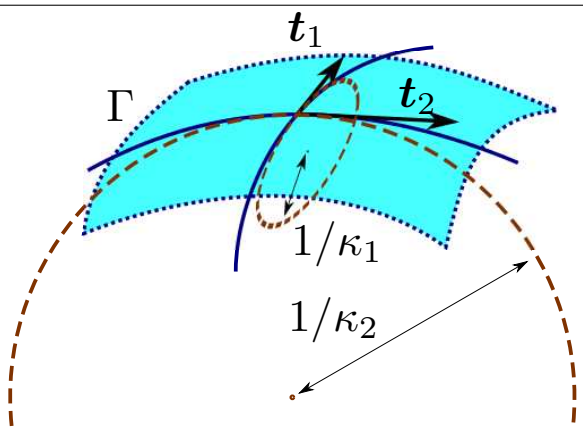
Weingarten), noté $\boldsymbol{H}$ par

$$\begin{array}{rccl} \boldsymbol{H}: & \Gamma & \longrightarrow & \mathbb{R}^{d\times d} \\ & \boldsymbol{x} & \longmapsto & \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{grad}_{\Gamma}\left(\boldsymbol{n}\right)(\boldsymbol{x}) \end{array} \tag{2.2.1}$$

où $\mathbf{grad}_{\Gamma} : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^{d\times d}$ désigne l'opérateur gradient surfacique qui s'applique sur un champ de vecteurs (cf. la définition 1.9, page 11). Ce tenseur est par définition symétrique (cf. [Edward et al., 1991]).

Remarque 2.1. *Le tenseur $\boldsymbol{H}$ est la seconde forme fondamentale usuelle écrite dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$, avec une extension nulle dans la direction normale. Pour $\boldsymbol{x} \in \Gamma$, $\boldsymbol{H}$ admet au plus $d-1$ valeurs propres non nulles notées κ_i, pour $1 \leq i \leq d-1$, qui sont appelées les courbures principales de Γ au point $\boldsymbol{x}$. Les vecteurs propres associés aux κ_i, notés $\boldsymbol{t}_i$ pour $1 \leq i \leq d-1$ sont appelés directions principales (cf. la fig. 2.1). Le vecteur normal unitaire $\boldsymbol{n}$ est un vecteur propre associé à une valeur propre nulle.*

FIGURE 2.1 Un exemple de configuration dans $\mathbb{R}^3$. Les directions principales $\boldsymbol{t}_1$ et $\boldsymbol{t}_2$ sont respectivement les vecteurs propres associés aux courbures principales κ_1 et κ_2.



Nous définissons également la courbure moyenne et le vecteur courbure dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$ par :

$$\kappa = \sum_{i=1}^{d-1} \kappa_i = \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{H}\right) \tag{2.2.2a}$$

$$\boldsymbol{y} = \kappa \boldsymbol{n} = \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{H}\right)\boldsymbol{n}. \tag{2.2.2b}$$

2.2.2 Surface définie par une fonction de niveau

Pour simplifier la présentation dans la suite, nous considérons que notre surface Γ est représentée par le zéro d'une fonction de niveau ϕ définie sur $\mathbb{R}^d$ et de même régularité que Γ :

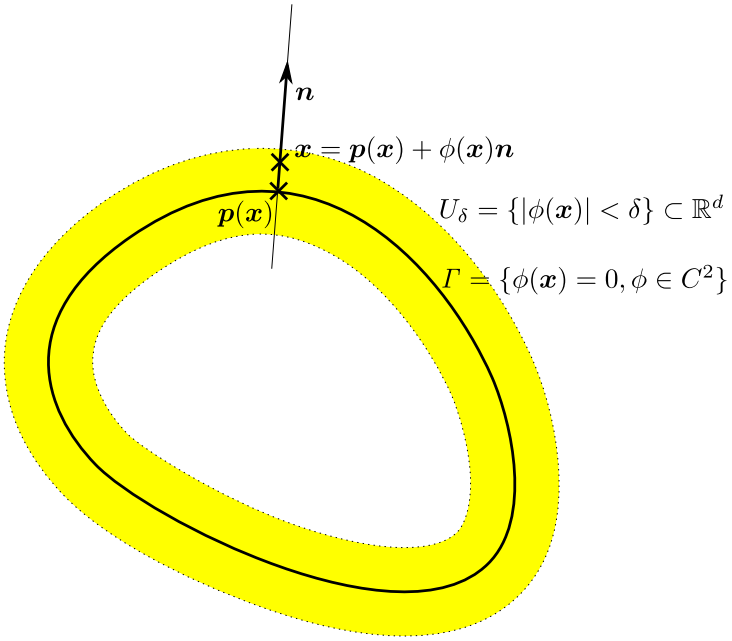
$$\Gamma = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d\ ,\ \phi(\boldsymbol{x}) = 0\right\}. \tag{2.2.3}$$

Sans perdre en généralité, on peut supposer que le gradient de ϕ est un vecteur unitaire au voisinage de Γ. Dans ces conditions le gradient de ϕ coïncide avec $\boldsymbol{n}$ sur Γ. Ce prolongement

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{grad}\,(\phi)\,(\boldsymbol{x}), \tag{2.2.4}$$

peut être étendu à tout $\mathbb{R}^d$ selon [Henrot and Pierre, 2005]. De plus, le tenseur de courbure $\boldsymbol{H}$ coïncide aussi avec le Hessien de ϕ sur Γ.

FIGURE 2.2 Exemple de surface Γ définie comme le niveau zéro d'une fonction régulière ϕ dans le plan $d = 2$. La fonction ϕ est définie sur $\mathbb{R}^2$. La bande U_δ de largeur δ est représentée en jaune. Chaque point contenu dans U_δ s'écrit de façon unique par la décomposition (2.2.6).



Nous introduisons une bande de largeur de δ qu'on note U_δ, autour de Γ (fig. 2.2)

$$U_\delta = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d\ ,\ |\phi(\boldsymbol{x})|\ < \delta\right\}, \tag{2.2.5}$$

ainsi que la décomposition

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) + \phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})), \qquad \boldsymbol{x} \in U_\delta \tag{2.2.6}$$

où $\boldsymbol{p} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \Gamma$ est la projection sur Γ. Nous supposons dans la suite que

$$\max_{1\le i\le d-1} \|\kappa_i\|_{0,\infty,\Gamma} < \frac{1}{\delta}. \tag{2.2.7}$$

Proposition 2.1 (Unicité globale de la décomposition)**.** *Si la condition* (2.2.7) *est satisfaite, alors la décomposition* (2.2.6) *est globalement unique.*

Démonstration. La condition (2.2.7) est suffisante pour assurer que la décomposition (2.2.6) soit

unique localement (cf. [Gilbarg and Trudinger, 2001]). Cette unicité est globale puisque Γ est supposée être bornée (d'après [Demlow and Dziuk, 2007]). □

L'unicité de cette décomposition nous permet d'étendre sur U_δ de manière unique n'importe quelle fonction φ (scalaire) quelconque définie sur Γ par la relation :

$$\check{\varphi}(\boldsymbol{x}) = \varphi \circ \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \varphi\left(\boldsymbol{x} - \phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))\right), \quad \boldsymbol{x} \in U_\delta. \tag{2.2.8}$$

On peut étendre naturellement la relation (2.2.8) aux fonctions vectorielles et tensorielles en raisonnant composante par composante.

2.2.3 Surfaces discrètes et éléments finis isoparamétriques

Pour utiliser la méthode des éléments finis, une surface régulière Γ est approchée par une surface discrète qu'on notera Γ_h. La surface Γ_h est polynomiale par morceaux et globalement continue. Dans le cas le plus simple, Γ_h est polygonale (approximation affine par morceaux). Cela introduit une erreur géométrique entre Γ et Γ_h notamment sur les quantités géométriques comme la normale et les courbures, ce que nous traiterons dans la section 2.4. L'objectif ici, est de décrire précisément la construction d'une famille d'approximations polynomiales de degré $k \geq 1$. On trouvera une brève description de cette famille dans [Heine, 2004] ou dans [Demlow and Dziuk, 2007] et une description plus détaillée dans [Heine, 2003], [Dziuk and Elliott, 2013] ou [Demlow, 2009].

Approximation affine par morceaux $(k = 1)$

La surface Γ est approchée par une surface Γ_h, globalement continue, contenue dans la bande U_δ définie en 2.2.5. En particulier, pour $d = 2$, Γ_h est une surface polygonale constituée de segments (cf. la fig. 2.3), et pour $d = 3$, elle est constituée de triangles. Nous supposons que la surface discrète Γ_h possède les propriétés suivantes :

- Γ_h est l'union d'un nombre fini de $(d-1)$-simplexes dans $\mathbb{R}^d$. Nous notons par $\mathcal{T}_h$ l'ensemble de ces$(d-1)$-simplexes, alors

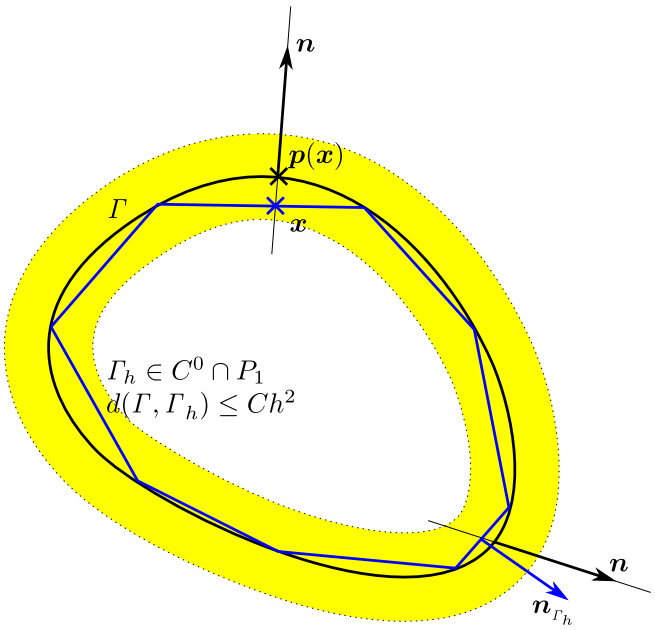
$$\Gamma_h = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K.$$

  De plus, les sommets des $(d-1)$-simplexes sont exactement sur Γ .
- La famille $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ est conforme, c'est à dire pour deux $(d-1)$-simplexes quelconques distincts $K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h$, soit $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, soit $K_1 \cap K_2$ est un sommet (pour $d = 2, 3$) ou une arête (pour $d = 3$) commun aux deux $(d-1)$-simplexes K_1 et K_2.
- La famille $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ est quasi-uniforme. Cette dernière condition en dimension 3 se traduit par :

$$h(K) \leq C\rho(K), \qquad \forall\, K \in \mathcal{T}_h,$$

où C est une constante strictement positif indépendante de h, $h(K)$ est le diamètre de K et $\rho(K)$ est le rayon du cercle inscrit de K. On trouvera plus de precisions par exemple dans [Ciarlet, 2002] ou [Brenner and Scott, 2008].

FIGURE 2.3 Approximation d'une surface régulière par une surface polygonale pour $d = 2$. La taille caractéristique des éléments de Γ_h doit être choisie suffisamment petite pour assurer l'inclusion $\Gamma_h \subset U_\delta$.

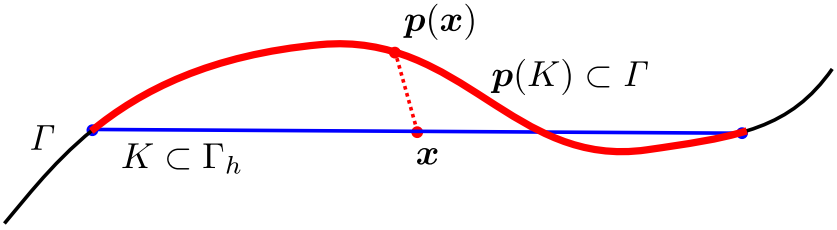


A noter que, par la proposition 2.1, pour chaque simplexe $K \in \mathcal{T}_h$, son image par $\boldsymbol{p}$ qu'on notera $\tilde{K}$ est un simplexe courbe contenu dans Γ c'est à dire

$$K \subset \Gamma_h \implies \tilde{K} = \boldsymbol{p}(K) \subset \Gamma. \tag{2.2.9}$$

Mais l'inverse n'est pas nécessairement vrai. Afin d'éviter les cas pathologiques, nous suivons [Demlow and Dziuk, 2007] et supposons que la restriction de $\boldsymbol{p}$ sur Γ_h est bijective. Ceci assure l'implication inverse de (2.2.9). Ainsi, $\tilde{K}$ représente la projection orthogonale de K sur la surface Γ. La fig. 2.4 illustre un exemple de configuration en dimension 2.

FIGURE 2.4 Projection orthogonale de K sur la surface régulière Γ.



Approximation polynomiale de degré supérieur $(k \geq 2)$

Dans le paragraphe précédent, nous avons décrit le cas d'une approximation polynomiale de degré 1. Les approximations d'ordres supérieurs de la surface Γ sont basées sur l'approximation affine par morceaux et sont liées aux approximations isoparamétriques aux frontières dans les méthodes d'éléments finis habituels. Pour plus de details, on peut consulter par exemple les références [Zlámal, 1974], [Nedelec, 1976] ou [Lenoir, 1986]. Soit

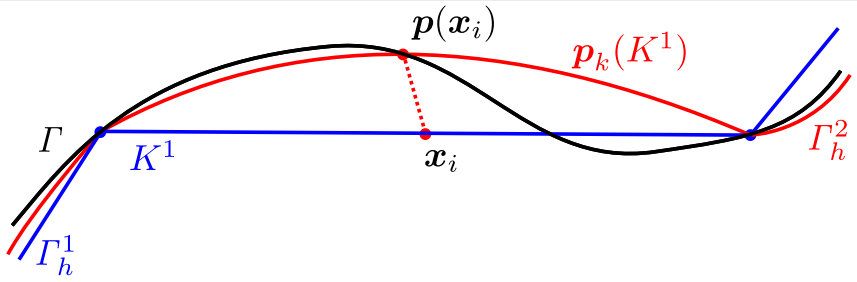
$$\Gamma_h^1 = \bigcup_{K^1 \in \mathcal{T}_h^1} K^1,$$

l'approximation affine par morceaux de Γ du paragraphe précédent. Nous supposons toujours que $\boldsymbol{p} : \Gamma_h^1 \longrightarrow \Gamma$ est bijective. Nous désignons par $\boldsymbol{p}_k$ l'interpolation de Lagrange de degré k de $\boldsymbol{p}$ sur l'élément K^1. Nous définissons alors l'approximation polynomiale de degré k par

$$\Gamma_h^k = \bigcup_{K^1 \in \mathcal{T}_h^1} \boldsymbol{p}_k\left(K^1\right).$$

La fig. 2.5 illustre cette définition sur un exemple en dimension 2. L'approximation isoparamétrique ainsi définie possède globalement les mêmes propriétés que l'approximation affine par morceaux Γ_h^1.

FIGURE 2.5 Exemple de construction d'un élément courbe de degré 2 de Γ_h^2 à partir d'un segment contenu dans Γ_h^1. On construit ainsi segment par segment une approximation polynomiale par morceaux de degré 2 de la surface Γ.



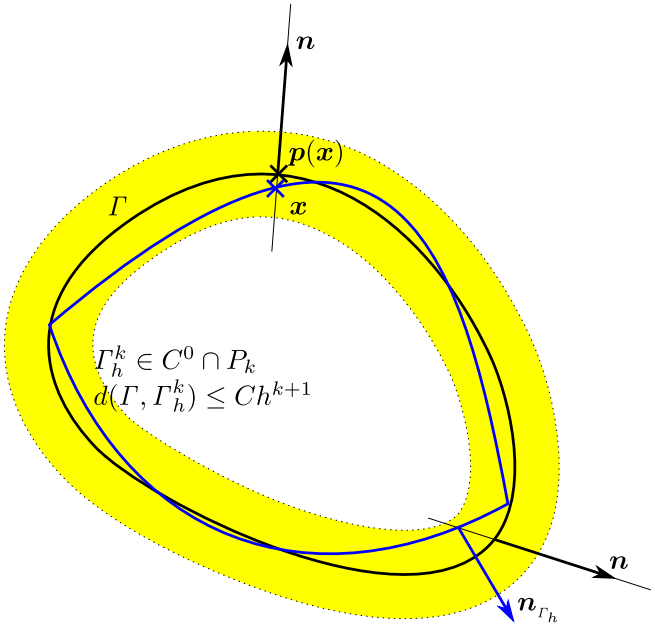
Ainsi, dans la suite de ce document, sauf indication contraire, nous désignons toujours par Γ_h l'approximation polynomiale par morceaux de degré $k \geq 1$ (cf. fig. 2.6), globalement continue décrite dans les paragraphes précédents. Nous faisons l'hypothèse suivante sur Γ_h :

Hypothèse 2.1. *Sous la condition* (2.2.7)*, il existe une constante strictement positive* $h_0 > 0$ *telle que pour tout* $h < h_0$ *:*

- Γ_h *est contenu dans* U_δ*,*
- $\boldsymbol{p}_{|\Gamma_h} : \Gamma_h \longrightarrow \Gamma$ *est bijective.*

Notons par $\boldsymbol{n}_{\Gamma_h}$ la normale unitaire discrète sortante à Γ_h, bien définie par exemple dans [Demlow, 2009]. Cette normale discrète est par construction P_{k-1}-discontinue c'est à dire polynomiale par

FIGURE 2.6 Approximation polynomiale de degré supérieur d'une surface régulière Γ.



morceaux de degré au plus $k-1$ mais pas nécessairement continue en passant d'un élément à un autre. Soit X_h le sous espace vectoriel de dimension finie de $H^1(\Gamma_h)$ défini par

$$X_h = \left\{ \varphi_h \in C^0(\Gamma_h) \cap H^1(\Gamma_h), \varphi_{h|_{K_h}} \in P_k, \forall K_h \in \Gamma_h \right\}, \tag{2.2.10}$$

et N_h le sous espace vectoriel de dimension finie de $L^2(\Gamma_h)$ défini par

$$N_h = \left\{ \varphi_h \in L^2(\Gamma_h), \varphi_{h|_{K_h}} \in P_{k-1}, \forall K_h \in \Gamma_h \right\}. \tag{2.2.11}$$

A noter que, $\boldsymbol{n}_{\Gamma_h} \in N_h^d$. nous avons le résultat suivant (classique) sur l'opérateur d'interpolation sur l'espace élément fini X_h :

Proposition 2.2 (Opérateur d'interpolation sur X_h)**.** *Soit π_h l'opérateur d'interpolation de $H^{k+1}(\Gamma) \subset C^0(\Gamma)$ dans X_h défini par :*

$$\pi_h \varphi = \sum_{i=1}^{\dim(X_h)} \varphi(\boldsymbol{x}_i)\psi_i, \qquad \varphi \in H^{k+1}(\Gamma)$$

où ψ_i est la fonction de base associée au nœud $\boldsymbol{x}_i$. Alors nous avons : pour tout $\varphi \in H^{k+1}(\Gamma)$, il existe une constante strictement positive C telle que :

$$\|\check{\varphi} - \pi_h \varphi\|_{l,2,\Gamma_h} \leq Ch^{k+1-l} \|\check{\varphi}\|_{k+1,2,\Gamma_h}, \quad l = 0, 1$$

où $\check{\varphi}$ représente une projection de φ sur Γ_h.

Nous avons aussi des résultats analogues pour les espaces éléments finis X_h^d et $X_h^{d\times d}$ en raisonnant composante par composante.

Démonstration. On pourra consulter par exemple [Ciarlet and Raviart, 1972], [Ciarlet, 2002] ou [Brenner and Scott, 2008] pour la preuve de la proposition 2.2. □

Ce résultat sera très utile pour nos estimations d'erreurs abstraites dans ce chapitre et le chapitre suivant. Nous énonçons des résultats concernant l'approximation de Γ par Γ_h.

Proposition 2.3. *Sous l'hypothèse 2.1, nous avons*

$$d\left(\Gamma,\Gamma_h\right) = \|\phi\|_{0,\infty,\Gamma_h} \leq Ch^{k+1}, \tag{2.2.12a}$$

$$\left\|\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}_{\Gamma_h}\right\|_{0,\infty,\Gamma_h} \leq Ch^{k}, \tag{2.2.12b}$$

où C est une constante strictement positive qui ne depend que de ϕ et ses dérivées.

Démonstration. cf. [Demlow, 2009]. □

Proposition 2.4. *Sous l'hypothèse 2.1, nous avons*

$$\left\|\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}_{\Gamma_h}\right\|_{0,2,\Gamma_h} \leq Ch^{k},$$

où C est une constante strictement positive qui ne depend que de Γ, ϕ et ses dérivées.

Démonstration. En utilisant l'inégalité de Jensen (cf. lemme C.1, page 163), nous avons

$$\left\|\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}_{\Gamma_h}\right\|_{0,2,\Gamma_h} \leq |\Gamma_h|^{\frac{1}{2}} \left\|\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}_{\Gamma_h}\right\|_{0,\infty,\Gamma_h}.$$

En utilisant le fait que Γ_h est bornée et le résultat de la proposition 2.3, nous déduisons qu'il existe une constante C strictement positive et indépendante de h telle que :

$$\left\|\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}_{\Gamma_h}\right\|_{0,2,\Gamma_h} \leq Ch^{k}.$$

Ce qui prouve la proposition 2.4. □

2.2.4 Projection et extension de fonctions

Afin de comparer les champs définis sur Γ_h avec les champs définis sur Γ, nous allons ramener sur Γ les fonctions définies sur Γ_h, ainsi que les dérivées de ces fonctions. Cela nécessite de définir d'une part une notion de changement variable entre Γ_h et Γ et d'autre part une extension à U_δ des fonctions définies sur Γ_h. Dans cette optique, nous allons reprendre une technique assez classique, déjà utilisée par exemple dans les articles comme [Dziuk, 1988], [Demlow and Dziuk, 2007] ou [Olshanskii et al., 2009].

Lemme 2.1 (Projection et extension de fonctions)**.** *Étant donné une fonction φ_h définie sur Γ_h, on peut définir de manière unique une fonction $\tilde{\varphi}_h$ sur Γ telle que :*

$$\varphi_h(\boldsymbol{x}) = \tilde{\varphi}_h \circ \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \tilde{\varphi}_h(\boldsymbol{x} - \phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})), \qquad \boldsymbol{x} \in \Gamma_h. \tag{2.2.13}$$

De plus, on peut définir une extension de φ_h à U_δ, notée $\check{\varphi}_h$ par

$$\check{\varphi}_h(\boldsymbol{x}) = \tilde{\varphi}_h \circ \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \tilde{\varphi}_h(\boldsymbol{x} - \phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})), \qquad \boldsymbol{x} \in U_\delta. \tag{2.2.14}$$

Démonstration. Soient φ_h une fonction définie sur Γ_h et $\boldsymbol{x} \in \Gamma_h$. En utilisant la bijectivité de $\boldsymbol{p}_{|\Gamma_h}$ sur Γ_h (cf. hypothèse 2.1), nous pouvons écrire $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}_{|\Gamma_h}^{-1}\left(\boldsymbol{p}_{|\Gamma_h}(\boldsymbol{x})\right)$. Par conséquent,

$$\varphi_h(\boldsymbol{x}) = \varphi_h\left(\boldsymbol{p}_{|\Gamma_h}^{-1}\left(\boldsymbol{p}_{|\Gamma_h}(\boldsymbol{x})\right)\right) = \varphi_h \circ \boldsymbol{p}_{|\Gamma_h}^{-1}\left(\boldsymbol{p}_{|\Gamma_h}(\boldsymbol{x})\right) = \varphi_h \circ \boldsymbol{p}_{|\Gamma_h}^{-1}\left(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\right).$$

Posons $\tilde{\varphi}_h \equiv \varphi_h \circ \boldsymbol{p}_{|\Gamma_h}^{-1}$, $\tilde{\varphi}_h$ est bien l'unique fonction définie sur Γ (par construction) telle que :

$$\varphi_h(\boldsymbol{x}) = \tilde{\varphi}_h \circ \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \Gamma_h.$$

D'où la relation (2.2.13). La relation (2.2.14) est une application directe de (2.2.8) sur $\tilde{\varphi}_h$. □

Dans la suite, toutes les extensions de fonctions sur U_δ auxquelles nous ferons référence seront supposées constantes selon la direction normale. Ainsi, les prolongements des fonctions définies sur Γ et de fonctions définies sur Γ_h ont essentiellement les mêmes propriétés en terme de régularité.

Remarque 2.2. *Soient $\varphi_h \in L^2(\Gamma_h)$ et $\tilde{\varphi}_h \in L^2(\Gamma)$ telle que : $\tilde{\varphi}_h = \varphi_h \circ \boldsymbol{p}_{|\Gamma_h}$. Alors*

$$\int_{\Gamma_h} \varphi_h(\boldsymbol{x})\mathrm{d}s_h = \int_{\Gamma} \tilde{\varphi}_h \circ \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\mu_h(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}s.$$

où μ_h désigne le jacobien de la projection $\boldsymbol{p}$. De plus, comme [Dziuk, 1988], nous supposons que la surface Γ est suffisamment régulière pour qu'on puisse trouver une constante C strictement positive qui ne dépend que de δ, h_0 et Γ telle que :

$$\frac{1}{C} \leq \mu_h \leq C.$$

Remarque 2.3. *Le résultat du lemme 2.1 s'étend naturellement aux fonctions vectorielles et tensorielles en raisonnant composante par composante. Par conséquent, si $\boldsymbol{v}_h \in \left(H^1(\Gamma_h)\right)^d$ et $\boldsymbol{\tau}_h \in \left(L^2(\Gamma_h)\right)^{d\times d}$, alors on peut définir de manière unique deux fonctions $\tilde{\boldsymbol{v}}_h \in \left(H^1(\Gamma)\right)^d$ et*

$\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \in (L^2(\Gamma))^{d\times d}$ *telles que pour tout* $\boldsymbol{x} \in \Gamma_h$ *:*

$$\boldsymbol{v}_h(\boldsymbol{x}) = \tilde{\boldsymbol{v}}_h \circ \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \tilde{\boldsymbol{v}}_h(\boldsymbol{x} - \phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})), \tag{2.2.15a}$$

$$\boldsymbol{\tau}_h(\boldsymbol{x}) = \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \circ \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h(\boldsymbol{x} - \phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})). \tag{2.2.15b}$$

Concernant la correspondance des dérivées en approchant Γ par Γ_h, nous nous limiterons au cas des gradients surfaciques. La correspondance des gradients des fonctions scalaires est traitée dans [Dziuk, 1988] dans le cas des approximations affines et [Heine, 2004] dans le cas des approximations de degré supérieur. Nous allons donc étendre ces résultats aux fonctions vectorielles. Rappelons que $\boldsymbol{n}_{\Gamma_h}$ est la normale unitaire sortante à Γ_h. Nous définissons pour $\boldsymbol{x} \in \Gamma_h$

$$\mathbf{P}_h(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{n}_{\Gamma_h}(\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{n}_{\Gamma_h}(\boldsymbol{x}), \tag{2.2.16}$$

le projecteur sur la surface Γ_h. Soit $\tilde{\mathbf{P}}_h$ le tenseur défini par la relation $\tilde{\mathbf{P}}_h = \mathbf{P}_h \circ \boldsymbol{p}^{-1}_{|\Gamma_h}$. Nous avons le résultat suivant :

Lemme 2.2. *Soit* $\boldsymbol{v}_h \in (H^1(\Gamma_h))^d$*. Alors pour tout* $\boldsymbol{x} \in \Gamma_h$ *:*

$$\mathbf{grad}_{\Gamma_h}(\boldsymbol{v}_h)(\boldsymbol{x}) = \mathbf{grad}_{\Gamma}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})) - \mathbf{grad}_{\Gamma}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))\mathbf{P}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_h)(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})),$$

où $\boldsymbol{A}_h$ *est défini par*

$$\boldsymbol{A}_h(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})) = \left(\mathbf{P}(\boldsymbol{I} - \phi\boldsymbol{H})\tilde{\mathbf{P}}_h\right)(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})).$$

Une estimation en norme L^∞ de $\mathbf{P}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_h)$ sera donnée au lemme 2.5. Pour démontrer ce lemme, nous avons besoin du résultat qui va suivre.

Proposition 2.5 (Gradient de $\boldsymbol{p}$)**.** *Pour tout* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$*, on a*

$$\mathbf{grad}(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{I} - \phi\boldsymbol{H})(\boldsymbol{x}).$$

Démonstration. Soit $\boldsymbol{x} = (x_0, \ldots.., x_{d-1}) \in \mathbb{R}^d$, nous avons : pour tout $i, j \in \{0, \ldots.., d-1\}$:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial p_i}{\partial x_j}\right)_{ij} &= \left(\frac{\partial}{\partial x_j}(x_i - \phi n_i)\right)_{ij} \\
&= \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right)_{ij} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j} n_i\right)_{ij} - \phi\left(\frac{\partial n_i}{\partial x_j}\right)_{ij} \\
&= (\delta_{ij})_{ij} - (n_i n_j)_{ij} - \phi\left(\frac{\partial n_i}{\partial x_j}\right)_{ij}.
\end{aligned}$$

Par suite $\mathbf{grad}\,(\boldsymbol{p})\,(\boldsymbol{x}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{x}) - \phi(\boldsymbol{x})\mathbf{grad}\,(\boldsymbol{n})\,(\boldsymbol{x})$. En utilisant le fait que :

$$\boldsymbol{H}\mathbf{P} = \mathbf{P}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H} = \mathbf{grad}\,(\boldsymbol{n})\,,$$

on déduit le résultat de la proposition 2.5. □

Démonstration du lemme 2.2. En utilisant la formule de la dérivée composée, nous avons pour tout $\boldsymbol{x} \in \Gamma_h$:

$$\mathbf{grad}\,(\boldsymbol{v}_h)\,(\boldsymbol{x}) = \mathbf{grad}\,(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\,(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))\mathbf{grad}\,(\boldsymbol{p})\,(\boldsymbol{x}).$$

En utilisant le résultat de la Proposition 2.5, nous avons pour tout $\boldsymbol{x} \in \Gamma_h$:

$$\mathbf{grad}\,(\boldsymbol{v}_h)\,(\boldsymbol{x}) = \mathbf{grad}_{\Gamma}\,(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\,(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))\,(\boldsymbol{I} - \phi\boldsymbol{H})\,(\boldsymbol{x}).$$

Donc pour tout $\boldsymbol{x} \in \Gamma_h$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{grad}_{\Gamma_h}\,(\boldsymbol{v}_h)\,(\boldsymbol{x}) &= \mathbf{grad}_{\Gamma}\,(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\,(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))\,(\boldsymbol{I} - \phi\boldsymbol{H})\,(\boldsymbol{x})\mathbf{P}_h(\boldsymbol{x}) \\
&= \mathbf{grad}_{\Gamma}\,(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\,(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})) - \mathbf{grad}_{\Gamma}\,(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\,(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))\,[\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{I} - \phi\boldsymbol{H})\,(\boldsymbol{x})\mathbf{P}_h(\boldsymbol{x})] \\
&= \mathbf{grad}_{\Gamma}\,(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\,(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})) - \mathbf{grad}_{\Gamma}\,(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\,(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))\left[\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{I} - \phi\boldsymbol{H})\,(\boldsymbol{x})\tilde{\mathbf{P}}_h(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))\right].
\end{aligned}$$

En utilisant l'invariance $\mathbf{grad}_{\Gamma}\,(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\,\mathbf{P} = \mathbf{grad}_{\Gamma}\,(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)$ et l'expression de $\boldsymbol{A}_h$, nous obtenons finalement :

$$\mathbf{grad}_{\Gamma_h}\,(\boldsymbol{v}_h)\,(\boldsymbol{x}) = \mathbf{grad}_{\Gamma}\,(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\,(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})) - \mathbf{grad}_{\Gamma}\,(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\,(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))\mathbf{P}\,(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_h)\,(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})), \qquad \boldsymbol{x} \in \Gamma_h.$$

D'où le résultat du lemme 2.2. □

Lemme 2.3 (Équivalence des normes entre Γ_h et Γ). *Soient $\boldsymbol{v}_h \in (H^1(\Gamma_h))^d$ et $\boldsymbol{\tau}_h \in (L^2(\Gamma_h))^{d\times d}$. Alors il existe une constante strictement positive C indépendante de h telle que :*

$$\frac{1}{C}\,\|\tilde{\boldsymbol{v}}_h\|_{0,2,\Gamma} \;\leq\; \|\boldsymbol{v}_h\|_{0,2,\Gamma_h} \;\leq\; C\,\|\tilde{\boldsymbol{v}}_h\|_{0,2,\Gamma} \tag{2.2.17a}$$

$$\frac{1}{C}\,|\tilde{\boldsymbol{v}}_h|_{1,2,\Gamma} \;\leq\; |\boldsymbol{v}_h|_{1,2,\Gamma_h} \;\leq\; C\,|\tilde{\boldsymbol{v}}_h|_{1,2,\Gamma} \tag{2.2.17b}$$

$$\frac{1}{C}\,\|\tilde{\boldsymbol{v}}_h\|_{1,2,\Gamma} \;\leq\; \|\boldsymbol{v}_h\|_{1,2,\Gamma_h} \;\leq\; C\,\|\tilde{\boldsymbol{v}}_h\|_{1,2,\Gamma} \tag{2.2.17c}$$

$$\frac{1}{C}\,\|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\|_{0,2,\Gamma} \;\leq\; \|\boldsymbol{\tau}_h\|_{0,2,\Gamma_h} \;\leq\; C\,\|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\|_{0,2,\Gamma} \tag{2.2.17d}$$

Démonstration. Des résultats analogues ont été démontrés dans [Dziuk, 1988] pour des champs scalaires. Nous utilisons le même principe pour les champs vectoriels et tensoriels. Soit $\boldsymbol{v}_h \in (H^1(\Gamma_h))^d$, d'après la remarque 2.2, on peut trouver une constante $C > 0$ dépendante uniquement

de Γ, telle que : $\dfrac{1}{C} \leq \ \mu_h \ \leq \ C$. Par conséquent,

$$\|\boldsymbol{v}_h\|_{0,2,\Gamma_h} = \int_{\Gamma_h} \boldsymbol{v}_h \cdot \boldsymbol{v}_h \, \mathrm{d}s_h = \int_{\Gamma} \tilde{\boldsymbol{v}}_h \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_h \, \mu_h \mathrm{d}s$$

Par suite

$$\frac{1}{C} \int_{\Gamma} \tilde{\boldsymbol{v}}_h \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_h \, \mathrm{d}s \leq \ \|\boldsymbol{v}_h\|_{0,2,\Gamma_h} \ \leq \ C \int_{\Gamma} \tilde{\boldsymbol{v}}_h \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_h \, \mathrm{d}s.$$

Ce qui prouve l'encadrement (2.2.17a). De la même manière, nous montrons l'encadrement (2.2.17d). Pour monter l'encadrement (2.2.17b), nous pouvons écrire

$$\mathbf{grad}_{\Gamma_h}(\boldsymbol{v}_h) = \left(\mathbf{grad}_{\Gamma_h}\left(\boldsymbol{v}_h^0\right), \ldots\ldots, \mathbf{grad}_{\Gamma_h}\left(\boldsymbol{v}_h^{d-1}\right)\right),$$

où les $\boldsymbol{v}_h^i$ sont les coordonnées de $\boldsymbol{v}_h$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Par conséquent,

$$|\boldsymbol{v}_h|^2_{1,2,\Gamma_h} = \left\|\mathbf{grad}_{\Gamma_h}(\boldsymbol{v}_h)\right\|^2_{0,2,\Gamma_h} = \sum_{i=0}^{d-1} |\boldsymbol{v}_h^i|^2_{1,2,\Gamma_h}.$$

D'après [Dziuk, 1988], nous avons

$$\frac{1}{C} \left|\tilde{\boldsymbol{v}}_h^i\right|_{1,2,\Gamma} \ \leq \ \left|\boldsymbol{v}_h^i\right|_{1,2,\Gamma_h} \ \leq \ C \left|\tilde{\boldsymbol{v}}_h^i\right|_{1,2,\Gamma}.$$

Par suite, en faisant la somme membre à membre, nous obtenons

$$\frac{1}{C} \left|\tilde{\boldsymbol{v}}_h\right|_{1,2,\Gamma} \ \leq \ \left|\boldsymbol{v}_h\right|_{1,2,\Gamma_h} \ \leq \ C \left|\tilde{\boldsymbol{v}}_h\right|_{1,2,\Gamma}.$$

Enfin, l'encadrement (2.2.17c) est une conséquence directe des deux premiers encadrements (notamment (2.2.17a) et (2.2.17b)). □

Dans le but de réécrire les définitions de nos approximations de la normale et les courbures sur Γ, nous introduisons les espaces $\tilde{X}_h$ et $\tilde{N}_h$ définis par

$$\tilde{X}_h = \left\{\tilde{\varphi}_h \in C^0(\Gamma) \cap H^1(\Gamma), \tilde{\varphi}_h = \varphi_h \circ \boldsymbol{p}^{-1}_{|\Gamma_h}, \varphi_h \in X_h\right\} \subset H^1(\Gamma), \tag{2.2.18a}$$

$$\tilde{N}_h = \left\{\tilde{\varphi}_h \in L^2(\Gamma), \tilde{\varphi}_h = \varphi_h \circ \boldsymbol{p}^{-1}_{|\Gamma_h}, \varphi_h \in N_h\right\} \subset L^2(\Gamma). \tag{2.2.18b}$$

Nous pouvons définir un opérateur d'interpolation sur $\tilde{X}_h$ à partir de celui de X_h comme l'énonce la proposition suivante.

Proposition 2.6 (Opérateur d'interpolation sur $\tilde{X}_h$)**.** *Soient X_h l'espace élément fini défini par (2.2.10), $\tilde{X}_h$ l'espace défini par (2.2.18a) et π_h l'opérateur d'interpolation de $H^{k+1}(\Gamma)$ dans X_h.*

Alors il existe un unique opérateur $\tilde{\pi}_h$ de $H^{k+1}(\Gamma)$ dans $\tilde{X}_h$ tel que pour tout $\varphi \in H^{k+1}(\Gamma)$

$$\tilde{\pi}_h \varphi = \pi_h \varphi \circ \boldsymbol{p}^{-1}_{|\Gamma_h}.$$

De plus, il existe une constante strictement positive C telle que :

$$\|\varphi - \tilde{\pi}_h \varphi\|_{l,2,\Gamma} \leq C h^{k+1-l} \|\varphi\|_{k+1,2,\Gamma}, \quad l = 0, 1.$$

Démonstration. Soit $\varphi \in H^{k+1}(\Gamma) \subset C^0(\Gamma)$, donc l'unique opérateur d'interpolation π_h de $H^{k+1}(\Gamma)$ dans X_h tel que : $\pi_h \varphi(\boldsymbol{x}_i) = \varphi(\boldsymbol{x}_i)$ est bien défini comme dans la proposition 2.2, où $(\boldsymbol{x}_i)_{1 \leq i \leq \dim(X_h)}$ sont les nœuds de Γ_h. Nous avons

$$\pi_h \varphi = \sum_{i=1}^{\dim(X_h)} \varphi(\boldsymbol{x}_i) \psi_i = \left(\sum_{i=1}^{\dim(X_h)} \varphi(\boldsymbol{x}_i) \tilde{\psi}_i \right) \circ \boldsymbol{p}$$

où ψ_i est la fonction de base associée au nœud $\boldsymbol{x}_i$ et $\tilde{\psi}_i$ est l'unique fonction définie sur Γ telle que : $\tilde{\psi}_i = \psi_i \circ \boldsymbol{p}^{-1}_{|\Gamma_h}$. Soit l'opérateur $\tilde{\pi}_h$ de $H^{k+1}(\Gamma)$ dans $\tilde{X}_h$ défini par :

$$\tilde{\pi}_h \varphi = \sum_{i=1}^{\dim(X_h)} \varphi(\boldsymbol{x}_i) \tilde{\psi}_i.$$

L'opérateur $\tilde{\pi}_h$ est par construction l'unique opérateur vérifiant :

$$\tilde{\pi}_h \varphi = \pi_h \varphi \circ \boldsymbol{p}^{-1}_{|\Gamma_h}.$$

L'unicité de $\tilde{\pi}_h$ découle de celle de π_h et la bijectivité de $\boldsymbol{p}_{|\Gamma_h}$. En utilisant l'équivalence des normes entre Γ et Γ_h (cf. lemme 3 dans [Dziuk, 1988]) et la proposition 2.2, nous déduisons l'existence d'une constante C strictement positive telle que :

$$\|\varphi - \tilde{\pi}_h \varphi\|_{l,2,\Gamma} \leq C h^{k+1-l} \|\varphi\|_{k+1,2,\Gamma}, \quad l = 0, 1.$$

Ce qui prouve la proposition 2.6. □

2.3 Approximations de la normale et des courbures

Soient Γ_h l'approximation de la surface exacte Γ comme dans la section 2.2.3 et $\boldsymbol{n}_{\Gamma_h}$ la normale unitaire sortante à Γ_h. L'idée ici est de construire une meilleure approximation $\boldsymbol{n}_h$ de $\boldsymbol{n}$, qui soit continue et dérivable sur Γ_h en utilisant $\boldsymbol{n}_{\Gamma_h}$, qui elle n'est pas continue. Ensuite, nous nous servirons des dérivées de cette approximation de $\boldsymbol{n}$ pour définir les courbures discrètes de Γ_h. Dans cette optique, nous utilisons une méthode de projection appelée communément projection-L^2,

qui est une technique assez classique pour augmenter la régularité d'un champs élément fini. En particulier, si le champ en question est globalement discontinu, cette méthode va nous permettre de gagner en terme de continuité et de dérivabilité. Soit S la sphère unité de $\mathbb{R}^d$:

$$S = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, |\boldsymbol{x}| = 1 \right\},$$

et $\boldsymbol{p}_S$ la projection orthogonale sur S, définie par :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_S : \quad \mathbb{R}^d &\longrightarrow S \\ \boldsymbol{x} &\longmapsto \boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}. \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Définition 2.1 (Normale approchée continue)**.** *On définit la normale approchée continue notée $\boldsymbol{n}_h$ comme l'interpolée de Lagrange aux nœuds de Γ_h du vecteur unitaire associé à la projection-L^2 de $\boldsymbol{n}_{\Gamma_h}$ sur l'espace élément fini X_h^d. Autrement dit, $\boldsymbol{n}_h$ est défini par*

$$\boldsymbol{n}_h(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\pi}_h \circ \boldsymbol{p}_S \left(\boldsymbol{n}_{\Gamma_h}^{L^2} \right)(\boldsymbol{x}), \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in \Gamma_h, \tag{2.3.2}$$

où $\boldsymbol{\pi}_h$ est l'opérateur d'interpolation sur Γ_h et $\boldsymbol{n}_{\Gamma_h}^{L^2}$ représente la projection-L^2 de $\boldsymbol{n}_{\Gamma_h}$ sur l'espace élément fini X_h^d, caractérisé par

$$\int_{\Gamma_h} \boldsymbol{n}_{\Gamma_h}^{L^2} \cdot \boldsymbol{v}_h \, \mathrm{d}s_h = \int_{\Gamma_h} \boldsymbol{n}_{\Gamma_h} \cdot \boldsymbol{v}_h \, \mathrm{d}s_h, \qquad \forall\, \boldsymbol{v}_h \in X_h^d. \tag{2.3.3}$$

Le champ $\boldsymbol{n}_h$ ainsi défini est unitaire aux nœuds de Γ_h et définit une approximation continue et dérivable de $\boldsymbol{n}$ et de $\boldsymbol{n}_{\Gamma_h}$ dans X_h^d. Nous pouvons désormais définir des courbures discrètes de Γ_h en utilisant des dérivées de $\boldsymbol{n}_h$.

Définition 2.2 (Tenseur de courbure discret)**.** *On définit le tenseur de courbure discret noté $\boldsymbol{H}_h \in X_h^{d\times d}$ comme l'unique solution de*

$$\int_{\Gamma_h} \boldsymbol{H}_h : \boldsymbol{\tau}_h \, \mathrm{d}s_h = \int_{\Gamma_h} \mathbf{grad}_{\Gamma_h}(\boldsymbol{n}_h) : \boldsymbol{\tau}_h \, \mathrm{d}s_h, \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau}_h \in X_h^{d\times d}, \tag{2.3.4}$$

où $\boldsymbol{n}_h$ est la normale approchée de la définition 2.1.

Cette définition du tenseur peut être vue comme la formulation faible discrète sur Γ_h de l'égalité variationnelle

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{H} : \boldsymbol{\tau} \, \mathrm{d}s = \int_{\Gamma} \mathbf{grad}_{\Gamma}(\boldsymbol{n}) : \boldsymbol{\tau} \, \mathrm{d}s, \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in \left(L^2(\Gamma)\right)^{d\times d}. \tag{2.3.5}$$

Remarque 2.4. *Le tenseur de courbure discret de la définition 2.2 représente la projection-L^2 du champ $\mathbf{grad}_{\Gamma_h}(\boldsymbol{n}_h)$ sur l'espace élément fini $X_h^{d\times d}$.*

Lemme 2.4 (Estimation du tenseur de courbure)**.** *Soient $\boldsymbol{H}_h$ le tenseur de courbure discret de la définition 2.2 et $\boldsymbol{n}_h$ la normale approchée de la définition 2.1. Alors*

$$\|\boldsymbol{H}_h\|_{0,2,\Gamma_h} \leq \|\boldsymbol{n}_h\|_{1,2,\Gamma_h}.$$

Démonstration. En prenant $\boldsymbol{\tau}_h = \boldsymbol{H}_h$ dans la relation (2.3.4), nous avons :

$$\int_{\Gamma_h} \boldsymbol{H}_h : \boldsymbol{H}_h \, \mathrm{ds}_h = \int_{\Gamma_h} \mathbf{grad}_{\Gamma_h}(\boldsymbol{n}_h) : \boldsymbol{H}_h \, \mathrm{ds}_h.$$

Donc, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\|\boldsymbol{H}_h\|^2_{0,2,\Gamma_h} \leq \left\|\mathbf{grad}_{\Gamma_h}(\boldsymbol{n}_h)\right\|_{0,2,\Gamma_h} \|\boldsymbol{H}_h\|_{0,2,\Gamma_h} \leq \frac{1}{2}\left(\left\|\mathbf{grad}_{\Gamma_h}(\boldsymbol{n}_h)\right\|^2_{0,2,\Gamma_h} + \|\boldsymbol{H}_h\|^2_{0,2,\Gamma_h}\right)$$

Par suite

$$\frac{1}{2}\|\boldsymbol{H}_h\|^2_{0,2,\Gamma_h} \leq \frac{1}{2}\left\|\mathbf{grad}_{\Gamma_h}(\boldsymbol{n}_h)\right\|^2_{0,2,\Gamma_h} \leq \frac{1}{2}\|\boldsymbol{n}_h\|^2_{1,2,\Gamma_h}$$

D'où le résultat du lemme 2.4. □

Nous utilisons la définition du tenseur de courbure discret $\boldsymbol{H}_h$ et les formules (2.2.2a) et (2.2.2b) pour définir des approximations de la courbure moyenne le vecteur courbure sur Γ_h :

$$\kappa_h = \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{H}_h) \tag{2.3.6a}$$

$$\boldsymbol{y}_h = \kappa_h \boldsymbol{n}_h = \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{H}_h)\,\boldsymbol{n}_h. \tag{2.3.6b}$$

2.4 Analyses de convergence

Dans cette section, nous allons établir des estimations des erreurs commises avec la normale approchée continue de la définition 2.1 et sur des courbures, notamment sur le tenseur de courbure discret. Pour commencer, nous avons le résultat suivant :

Lemme 2.5. *Sous l'hypothèse 2.1, il existe une constante strictement positive C indépendante de h telle que*

$$\|1-\mu_h\|_{0,\infty,\Gamma} \leq Ch^{k+1},$$

$$\|\mathbf{P}\,(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_h)\|_{0,\infty,\Gamma} \leq Ch^{k}.$$

Démonstration. Ce lemme a été démontré dans [Heine, 2004]. □

2.4.1 Estimation de l'erreur sur la normale approchée

Rappelons que $\boldsymbol{n}_{\Gamma_h} \in N_h^d$ est la normale à Γ_h et $\boldsymbol{n}_{\Gamma_h}^{L^2} \in X_h^d$, sa projection-$L^2$. Le lemme 2.1 permet d'assurer l'existence et l'unicité des fonctions $\tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h} \in \tilde{N}_h^d$, $\tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} \in \tilde{X}_h^d$ et $\tilde{\boldsymbol{n}}_h \in \tilde{X}_h^d$ définies sur Γ telles que l'on ait, pour tout $\boldsymbol{x} \in \Gamma_h$:

$$\boldsymbol{n}_{\Gamma_h}(\boldsymbol{x}) = \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h} \circ \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}(\boldsymbol{x} - \phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))), \tag{2.4.1a}$$

$$\boldsymbol{n}_{\Gamma_h}^{L^2}(\boldsymbol{x}) = \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} \circ \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2}(\boldsymbol{x} - \phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))), \tag{2.4.1b}$$

$$\boldsymbol{n}_h(\boldsymbol{x}) = \tilde{\boldsymbol{n}}_h \circ \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \tilde{\boldsymbol{n}}_h(\boldsymbol{x} - \phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))). \tag{2.4.1c}$$

Théorème 2.1 (Estimation de l'erreur sur la normale). *Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3, une surface fermée comme dans la sous-section 2.2.2. Soit Γ_h l'approximation de Γ de degré polynomial k comme dans la sous-section 2.2.3. Alors, sous l'hypothèse 2.1, il existe une constante positive C indépendante de h, telle que :*

$$\left\| \boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} \right\|_{0,2,\Gamma} \leq \inf_{\tilde{\boldsymbol{v}}_h \in \tilde{X}_h^d} \|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{v}}_h\|_{0,2,\Gamma} + Ch^k. \tag{2.4.2}$$

Démonstration. Soit $\boldsymbol{v}_h \in X_h^d$, une fonction test arbitraire. En utilisant les relations (2.4.1a) et (2.4.1b) et la remarque 2.2, nous avons d'une part :

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_h} \boldsymbol{n}_{\Gamma_h}^{L^2} \cdot \boldsymbol{v}_h \, \mathrm{d}s_h &= \int_{\Gamma} \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_h \, \mu_h \, \mathrm{d}s \\ &= \int_{\Gamma} \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_h \, \mathrm{d}s - \int_{\Gamma} (1 - \mu_h) \, \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_h \, \mathrm{d}s\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_h} \boldsymbol{n}_{\Gamma_h} \cdot \boldsymbol{v}_h \, \mathrm{d}s_h &= \int_{\Gamma} \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h} \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_h \, \mu_h \mathrm{d}s \\ &= \int_{\Gamma} \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h} \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_h \, \mathrm{d}s - \int_{\Gamma} (1 - \mu_h) \, \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h} \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_h \, \mathrm{d}s,\end{aligned}$$

où $\tilde{\boldsymbol{v}}_h = \boldsymbol{v}_h \circ \boldsymbol{p}_{|\Gamma_h}^{-1} \in \tilde{X}_h^d$. Par conséquent, nous pouvons réécrire la relation 2.3.3 sous la forme :

$$\int_{\Gamma} \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_h \, \mathrm{d}s = \int_{\Gamma} \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h} \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_h \, \mathrm{d}s - \int_{\Gamma} (1 - \mu_h) \left(\tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} \right) \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_h \, \mathrm{d}s. \tag{2.4.3}$$

En utilisant la décomposition $\tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} = \boldsymbol{n} - \left(\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} \right)$, nous obtenons pour tout $\tilde{\boldsymbol{v}}_h \in \tilde{X}_h^d$

$$\int_{\Gamma} \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_h \, \mathrm{d}s = \int_{\Gamma} \boldsymbol{n} \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_h \, \mathrm{d}s - \int_{\Gamma} \left(\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} \right) \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_h \, \mathrm{d}s.$$

Donc, la relation (2.4.3) est équivalente à

$$\int_\Gamma \left(\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2}\right) \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_h \,\mathrm{ds} = \int_\Gamma \left(\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}\right) \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_h \,\mathrm{ds} + \int_\Gamma (1-\mu_h) \left(\tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2}\right) \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_h \,\mathrm{ds}. \quad (2.4.4)$$

En utilisant la décomposition $\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} = (\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{v}}_h) - \left(\tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} - \tilde{\boldsymbol{v}}_h\right)$ et la linéarité de l'intégrale, nous avons :

$$\begin{aligned}
\left\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2}\right\|_{0,2,\Gamma}^2 &= \int_\Gamma \left(\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2}\right) \cdot \left(\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2}\right) \,\mathrm{ds} \\
&= \int_\Gamma \left(\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2}\right) \cdot (\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{v}}_h) \,\mathrm{ds} - \int_\Gamma \left(\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2}\right) \cdot \left(\tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} - \tilde{\boldsymbol{v}}_h\right) \,\mathrm{ds}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, comme $\tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} - \tilde{\boldsymbol{v}}_h \in \tilde{X}_h^d$, la relation (2.4.4) permet d'obtenir la relation

$$\begin{aligned}
\left\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2}\right\|_{0,2,\Gamma}^2 = &\int_\Gamma \left(\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2}\right) \cdot (\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{v}}_h) \,\mathrm{ds} - \int_\Gamma \left(\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}\right) \cdot \left(\tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} - \tilde{\boldsymbol{v}}_h\right) \,\mathrm{ds} \\
&- \int_\Gamma (1-\mu_h) \left(\tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}\right) \cdot \left(\tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} - \tilde{\boldsymbol{v}}_h\right) \,\mathrm{ds}.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur les intégrales précédentes, nous avons :

$$\begin{aligned}
\left\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2}\right\|_{0,2,\Gamma}^2 \leq &\left\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2}\right\|_{0,2,\Gamma} \|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{v}}_h\|_{0,2,\Gamma} + \left\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}\right\|_{0,2,\Gamma} \left\|\tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} - \tilde{\boldsymbol{v}}_h\right\|_{0,2,\Gamma} \\
&+ \|1-\mu_h\|_{0,\infty,\Gamma} \left\|\tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2}\right\|_{0,2,\Gamma} \left\|\tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} - \tilde{\boldsymbol{v}}_h\right\|_{0,2,\Gamma}.
\end{aligned}$$

Posons $t_h = \left\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}\right\|_{0,2,\Gamma} + \|1-\mu_h\|_{0,\infty,\Gamma} \left\|\tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2}\right\|_{0,2,\Gamma}$. La relation précédente devient :

$$\left\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2}\right\|_{0,2,\Gamma}^2 \leq \left\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2}\right\|_{0,2,\Gamma} \|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{v}}_h\|_{0,2,\Gamma} + t_h \left\|\tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} - \tilde{\boldsymbol{v}}_h\right\|_{0,2,\Gamma}.$$

Cette dernière inégalité est valable pour tout $\tilde{\boldsymbol{v}}_h \in \tilde{X}_h^d$. Donc, en particulier, si nous choisissons $\tilde{\boldsymbol{v}}_h$ comme la projection orthogonale $\tilde{\boldsymbol{n}}_h^{L^2}$ de $\boldsymbol{n}$ sur $\tilde{X}_h^d$ au sens de la norme L^2, nous avons :

$$\left\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2}\right\|_{0,2,\Gamma}^2 \leq \left\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2}\right\|_{0,2,\Gamma} \left\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h^{L^2}\right\|_{0,2,\Gamma} + t_h \left\|\tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h^{L^2}\right\|_{0,2,\Gamma}. \quad (2.4.5)$$

Cette projection vérifie :

$$\left\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h^{L^2}\right\|_{0,2,\Gamma} = \inf_{\tilde{\boldsymbol{v}}_h \in \tilde{X}_h^d} \|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{v}}_h\|_{0,2,\Gamma}, \quad (2.4.6)$$

et elle est caractérisée par :

$$\int_{\Gamma} \left(\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h^{L^2} \right) \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_h \, \mathrm{ds} \; = 0, \qquad \forall \, \tilde{\boldsymbol{v}}_h \in \tilde{X}_h^d. \tag{2.4.7}$$

Donc, en utilisant la décomposition :

$$\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h^{L^2} = \left(\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} \right) - \left(\tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h^{L^2} \right),$$

dans la relation (2.4.7), nous obtenons : :

$$\int_{\Gamma} \left(\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} \right) \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_h \, \mathrm{ds} - \int_{\Gamma} \left(\tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h^{L^2} \right) \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_h \, \mathrm{ds} \; = 0, \qquad \forall \, \tilde{\boldsymbol{v}}_h \in \tilde{X}_h^d.$$

En particulier, pour $\tilde{\boldsymbol{v}}_h = \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h^{L^2}$ dans la relation précédente, nous obtenons :

$$\left\| \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h^{L^2} \right\|_{0,2,\Gamma}^2 \; = \int_{\Gamma} \left(\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} \right) \cdot \left(\tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h^{L^2} \right) \, \mathrm{ds}.$$

Par conséquent, nous avons par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left\| \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h^{L^2} \right\|_{0,2,\Gamma}^2 \; \leq \left\| \boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} \right\|_{0,2,\Gamma} \left\| \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h^{L^2} \right\|_{0,2,\Gamma}.$$

Par suite, nous avons

$$\left\| \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h^{L^2} \right\|_{0,2,\Gamma} \; \leq \left\| \boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} \right\|_{0,2,\Gamma}.$$

Par conséquent, de l'inégalité (2.4.5) et la relation (2.4.6), nous avons

$$\left\| \boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} \right\|_{0,2,\Gamma}^2 \; \leq \left(\inf_{\tilde{\boldsymbol{v}}_h \in \tilde{X}_h^d} \left\| \boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{v}}_h \right\|_{0,2,\Gamma} + t_h \right) \left\| \boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} \right\|_{0,2,\Gamma}.$$

Par suite, nous avons

$$\left\| \boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2} \right\|_{0,2,\Gamma} \; \leq \inf_{\tilde{\boldsymbol{v}}_h \in \tilde{X}_h^d} \left\| \boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{v}}_h \right\|_{0,2,\Gamma} + t_h.$$

Il ne reste plus qu'à estimer le terme t_h. La proposition 2.4 et le lemme 2.3 nous permettent de majorer le premier terme de t_h, le second terme est le produit de $\|1 - \mu_h\|_{0,\infty,\Gamma}$ majoré au lemme 2.5 et d'un terme qu'il nous suffit de borner. En utilisant, l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur la relation (2.3.3) et le lemme 2.3, nous pouvons trouver une constante strictement positive C_0

indépendante de h telle que :

$$\left\|\tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h}\right\|_{0,2,\Gamma} \leq C_0 \left\|\boldsymbol{n}^{L^2}_{\Gamma_h}\right\|_{0,2,\Gamma_h} \leq C_0 \left\|\boldsymbol{n}_{\Gamma_h}\right\|_{0,2,\Gamma_h} \leq C_0^2 \left\|\tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}\right\|_{0,2,\Gamma}.$$

Par conséquent, en utilisant l'inégalité triangulaire, nous avons : :

$$\left\|\tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h} - \tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h}\right\|_{0,2,\Gamma} \leq \left\|\tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}\right\|_{0,2,\Gamma} + \left\|\tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h}\right\|_{0,2,\Gamma} \leq (1+C_0^2)\left\|\tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}\right\|_{0,2,\Gamma}.$$

Or, comme Γ est bornée et $\tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}$ est un vecteur unitaire, nous avons :

$$\left\|\tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}\right\|_{0,2,\Gamma} = \left(\int_\Gamma \left|\tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}\right|^2 \mathrm{ds}\right)^{\frac{1}{2}} = |\Gamma|^{\frac{1}{2}}.$$

Par suite, nous avons :

$$\left\|\tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h} - \tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h}\right\|_{0,2,\Gamma} \leq (1+C_0^2)\,|\Gamma|^{\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent, nous pouvons trouver une constante strictement positive C_1, indépendante de h telle que :

$$t_h = \left\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}\right\|_{0,2,\Gamma} + \|1-\mu_h\|_{0,\infty,\Gamma}\left\|\tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h} - \tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h}\right\|_{0,2,\Gamma} \leq C_1 h^k + C_1(1+C_0^2)\,|\Gamma|^{\frac{1}{2}}\, h^{(k+1)}.$$

En utilisant l'hypothèse 2.1, nous obtenons :

$$t_h \leq C_1\left(1+(1+C_0^2)\,|\Gamma|^{\frac{1}{2}}\, h_0\right) h^k.$$

Donc, en considérant cette dernière inégalité dans l'inégalité (2.4.5), nous obtenons :

$$\left\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h}\right\|_{0,2,\Gamma} \leq \inf_{\tilde{\boldsymbol{v}}_h \in \tilde{X}^d_h} \|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{v}}_h\|_{0,2,\Gamma} + Ch^k. \tag{2.4.8}$$

avec $C = C_1\left(1+(1+C_0^2)\,|\Gamma|^{\frac{1}{2}}\, h_0\right)$. Ce qui prouve le théorème 2.1. □

Corollaire 2.1. *Sous les hypothèses du théorème 2.1, il existe une constante positive C indépendante de h, telle que :*

$$\left\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h}\right\|_{0,2,\Gamma} \leq Ch^k.$$

Démonstration. D'après la proposition 2.6, il existe un opérateur $\tilde{\boldsymbol{\pi}}_h$ tel que :

$$\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{\pi}}_h \boldsymbol{n}\|_{0,2,\Gamma} \leq C_0 h^{k+1}\|\boldsymbol{n}\|_{k+1,2,\Gamma}.$$

où C_0 est une constante positive indépendante de h. Par conséquent, nous avons :

$$\inf_{\tilde{\boldsymbol{v}}_h \in \tilde{X}_h^d} \|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{v}}_h\|_{0,2,\Gamma} \leq C_0 h^{k+1} \|\boldsymbol{n}\|_{k+1,2,\Gamma}.$$

En utilisant le résultat du théorème 2.1, nous pouvons trouver une deuxième constante positive C_1 indépendante de h, telle que :

$$\begin{aligned} \left\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2}\right\|_{0,2,\Gamma} &\leq C_0 h^{k+1} \|\boldsymbol{n}\|_{k+1,2,\Gamma} + C_1 h^k \\ &\leq \left(C_1 + C_0 h \|\boldsymbol{n}\|_{k+1,2,\Gamma}\right) h^k. \end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant la constante h_0 de l'hypothèse 2.1, nous avons :

$$\left\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2}\right\|_{0,2,\Gamma} \leq \left(C_1 + C_0 h_0 \|\boldsymbol{n}\|_{k+1,2,\Gamma}\right) h^k.$$

D'où

$$\left\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2}\right\|_{0,2,\Gamma} \leq C h^k,$$

avec $C = \left(C_1 + C_0 h_0 \|\boldsymbol{n}\|_{k+1,2,\Gamma}\right)$. Ce qui prouve le corollaire 2.1. □

Corollaire 2.2. *Sous les hypothèses du théorème 2.1, il existe une constante positive C indépendante de h, telle que :*

$$\left\|1 - \left|\tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2}\right|\right\|_{0,\infty,\Gamma} \leq C h^{k-\frac{d-1}{2}}.$$

Démonstration. En utilisant le lemme C.3, page 164, nous avons :

$$\left\|1 - \left|\tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2}\right|\right\|_{0,\infty,\Gamma} = \left\||\boldsymbol{n}| - \left|\tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2}\right|\right\|_{0,\infty,\Gamma} \leq \sqrt{d} \left\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2}\right\|_{0,\infty,\Gamma}.$$

Par conséquent, les résultats du lemme C.6, page 167 et du théorème 2.1, nous permettent de trouver deux constantes C_0 et C_1 strictement positives et indépendantes de h telles que :

$$\left\|1 - \left|\tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2}\right|\right\|_{0,\infty,\Gamma} \leq \sqrt{d} \left\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2}\right\|_{0,\infty,\Gamma} \leq C_0 \sqrt{d} h^{-\frac{d-1}{2}} \left\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2}\right\|_{0,2,\Gamma} \leq C_0 C_1 \sqrt{d} h^{k-\frac{d-1}{2}}.$$

D'où

$$\left\|1 - \left|\tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}^{L^2}\right|\right\|_{0,\infty,\Gamma} \leq C h^{k-\frac{d-1}{2}},$$

avec $C = C_0 C_1 \sqrt{d}$. Ce qui prouve le corollaire 2.2. □

Théorème 2.2. *Sous les hypothèses du théorème 2.1, il existe une constante positive C indépendante de h, telle que :*

$$\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h\|_{0,2,\Gamma} \leq Ch^k,$$

où $\tilde{\boldsymbol{n}}_h \in \tilde{X}_h^d$ est l'unique fonction définie sur Γ par $\tilde{\boldsymbol{n}}_h = \boldsymbol{n}_h \circ \boldsymbol{p}_{|\Gamma_h}$.

Démonstration. En utilisant l'inégalité triangulaire et le théorème 2.1, nous pouvons trouver une constante C_0 strictement positive et indépendante de h telle que :

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h\|_{0,2,\Gamma} &\leq \left\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h}\right\|_{0,2,\Gamma} + \left\|\tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h\right\|_{0,2,\Gamma} \\ &\leq C_0 h^k + \left\|\tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h\right\|_{0,2,\Gamma}.\end{aligned}$$

Il nous reste à estimer l'erreur en norme L^2 entre $\tilde{\boldsymbol{n}}_h$ et $\tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h}$. Pour cela, nous utilisons la relation (2.3.2) dans la définition 2.1 :

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h\right\|_{0,2,\Gamma} &= \left\|\tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h\right\|_{0,2,\Gamma} \\ &= \left\|\left|\tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h}\right| \boldsymbol{p}_S\left(\tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h}\right) - \tilde{\boldsymbol{\pi}}_h \circ \boldsymbol{p}_S\left(\tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h}\right)\right\|_{0,2,\Gamma}.\end{aligned}$$

En utilisant la décomposition $\left|\tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h}\right| = 1 - \left(1 - \left|\tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h}\right|\right)$ et l'inégalité triangulaire, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h\right\|_{0,2,\Gamma} &\leq \left\|(\boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{\pi}}_h) \circ \boldsymbol{p}_S\left(\tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h}\right)\right\|_{0,2,\Gamma} \\ &\quad + \left\|\left(1 - \left|\tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h}\right|\right)(\boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{\pi}}_h) \circ \boldsymbol{p}_S\left(\tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h}\right)\right\|_{0,2,\Gamma} \\ &\leq \left\|(\boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{\pi}}_h) \circ \boldsymbol{p}_S\left(\tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h}\right)\right\|_{0,2,\Gamma} \\ &\quad + \left\|1 - \left|\tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h}\right|\right\|_{0,\infty,\Gamma} \left\|(\boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{\pi}}_h) \circ \boldsymbol{p}_S\left(\tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h}\right)\right\|_{0,2,\Gamma}\end{aligned}$$

Par suite, nous avons :

$$\left\|\tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h\right\|_{0,2,\Gamma} \leq \left(1 + \left\|1 - \left|\tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h}\right|\right\|_{0,\infty,\Gamma}\right) \left\|(\boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{\pi}}_h) \circ \boldsymbol{p}_S\left(\tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h}\right)\right\|_{0,2,\Gamma}. \tag{2.4.9}$$

Remarquons que le terme en norme L^2 est une erreur d'interpolation. Mais nous ne pouvons pas utiliser le résultat de la proposition 2.6, car $\boldsymbol{p}_S\left(\tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h}\right)$ n'est pas nécessairement assez régulière sur Γ pour l'appliquer. Par contre, on peut utiliser les résultats sur les erreurs d'interpolations locales sur les éléments de Γ_h (cf. [Ciarlet and Raviart, 1972]). En utilisant le lemme 2.3, nous pouvons

trouver une constante C_1 strictement positive et indépendante de h telle que :

$$\left\|(\boldsymbol{I}-\tilde{\boldsymbol{\pi}}_h)\circ\boldsymbol{p}_S\left(\tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h}\right)\right\|_{0,2,\Gamma} \leq C_1\left\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\pi}_h)\circ\boldsymbol{p}_S\left(\tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h}\right)\right\|_{0,2,\Gamma_h}.$$

Or, par construction de Γ_h, nous avons :

$$\left\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\pi}_h)\circ\boldsymbol{p}_S\left(\tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h}\right)\right\|_{0,2,\Gamma_h} = \sum_{K\in\Gamma_h}\left\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\pi}_h)\circ\boldsymbol{p}_S\left(\tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h}\right)\right\|_{0,2,K}.$$

Sur chaque élément K, $\boldsymbol{p}_S\left(\tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h}\right)\in\left(C^\infty(K)\right)^d$, donc on peut trouver une C_2 strictement positive et indépendante de h telle que :

$$\left\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\pi}_h)\circ\boldsymbol{p}_S\left(\tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h}\right)\right\|_{0,2,K} \leq C_2h^{k+1}\left\|\boldsymbol{p}_S\left(\tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h}\right)\right\|_{k+1,2,K}.$$

Par conséquent, nous avons :

$$\left\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\pi}_h)\circ\boldsymbol{p}_S\left(\tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h}\right)\right\|_{0,2,\Gamma_h} \leq \sum_{K\in\Gamma_h}C_2h^{k+1}\left\|\boldsymbol{p}_S\left(\tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h}\right)\right\|_{k+1,2,K} \leq C_3h^{k+1} \leq C_3h_0h^k.$$

où $C_3 > C_2$ est une constante strictement positive et indépendante de h, et h_0 est la constante l'hypothèse 2.1. Il nous suffit maintenant de borner le premier terme du produit dans l'inégalité (2.4.9) pour obtenir une estimation en norme norme L^2 de $\tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h}-\tilde{\boldsymbol{n}}_h$. D'après le corollaire 2.2, il existe une constante C_4 strictement positive et indépendante de h telle que :

$$1+\left\|1-\left|\tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h}\right|\right\|_{0,\infty,\Gamma} \leq 1+C_4h^{k-\frac{d-1}{2}} \leq 1+C_4h_0^{k-\frac{d-1}{2}}.$$

Par conséquent, l'inégalité (2.4.9) devient :

$$\left\|\tilde{\boldsymbol{n}}^{L^2}_{\Gamma_h}-\tilde{\boldsymbol{n}}_h\right\|_{0,2,\Gamma} \leq C_3h_0\left(1+C_4h_0^{k-\frac{d-1}{2}}\right)h^k.$$

D'où

$$\|\boldsymbol{n}-\tilde{\boldsymbol{n}}_h\|_{0,2,\Gamma} \leq Ch^k,$$

avec

$$C = C_0+C_3h_0\left(1+C_4h_0^{k-\frac{d-1}{2}}\right).$$

Ce qui prouve le théorème 2.2. □

En résumé, nous avons trois approximations de la normale exacte $\boldsymbol{n}$ à Γ :

- $\boldsymbol{n}_{\Gamma_h}$ normale exacte à Γ_h, discontinue,

- $\boldsymbol{n}_{\Gamma_h}^{L^2}$ projection-L^2 de $\boldsymbol{n}_{\Gamma_h}$ dans X_h^d, continue mais non unitaire,
- et $\boldsymbol{n}_h$ le champ de vecteurs unitaire aux nœuds de Γ et continu associé à $\boldsymbol{n}_{\Gamma_h}^{L^2}$.

nous avons démontré que toutes ces approximations convergent vers la normale exacte $\boldsymbol{n}$ quand h tend vers 0 pour tout $k \geq 1$, et que l'ordre de convergence théorique vaut exactement k. Dans la suite, nous utiliserons l'approximation $\boldsymbol{n}_h$ de $\boldsymbol{n}$, qui a l'avantage d'être continue et unitaire.

2.4.2 Estimation de l'erreur sur le tenseur de courbure discret

Comme dans le cas de la normale, nous allons réécrire sur Γ la relation (2.3.4) de la définition 2.2. Le lemme 2.1 assure l'existence d'une fonction $\tilde{\boldsymbol{H}}_h \in \tilde{X}_h^{d\times d}$ telle que :

$$\boldsymbol{H}_h(\boldsymbol{x}) = \tilde{\boldsymbol{H}}_h \circ \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \tilde{\boldsymbol{H}}_h(\boldsymbol{x} - \phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})). \tag{2.4.10}$$

Théorème 2.3 (**Estimation d'erreurs sur le tenseur de courbure**). *Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3, une surface fermée comme dans la sous-section 2.2.2. Soit Γ_h l'approximation de Γ de degré polynomial k comme dans la sous-section 2.2.3. Alors, sous l'hypothèse 2.1, il existe une constante positive C indépendante de h, telle que :*

$$\left\|\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h\right\|_{0,2,\Gamma} \leq \inf_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \in \tilde{X}_h^{d\times d}} \|\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\|_{0,2,\Gamma} + C\left(\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h\|_{1,2,\Gamma} + h^k \|\boldsymbol{n}\|_{1,2,\Gamma}\right).$$

Démonstration. Soit $\boldsymbol{\tau}_h \in X_h^{d\times d}$ une fonction test arbitraire. En utilisant la relation (2.4.10), nous avons d'une part

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_h} \boldsymbol{H}_h : \boldsymbol{\tau}_h \,\mathrm{d}s_h &= \int_\Gamma \tilde{\boldsymbol{H}}_h : \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \,\mu_h \,\mathrm{d}s \\ &= \int_\Gamma \tilde{\boldsymbol{H}}_h : \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \,\mathrm{d}s - \int_\Gamma (1-\mu_h)\,\tilde{\boldsymbol{H}}_h : \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

et d'autre part, en utilisant le lemme 2.2, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_h} \boldsymbol{H}_h : \boldsymbol{\tau}_h \,\mathrm{d}s_h &= \int_{\Gamma_h} \mathbf{grad}_{\Gamma_h}(\boldsymbol{n}_h) : \boldsymbol{\tau}_h \,\mathrm{d}s_h \\ &= \int_\Gamma \left[\mathbf{grad}_\Gamma(\tilde{\boldsymbol{n}}_h) - \mathbf{grad}_\Gamma(\tilde{\boldsymbol{n}}_h)\,\mathbf{P}\,(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_h)\right] : \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \,\mu_h \mathrm{d}s \\ &= \int_\Gamma \mathbf{grad}_\Gamma(\tilde{\boldsymbol{n}}_h) : \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \,\mu_h \mathrm{d}s - \int_\Gamma \left[\mathbf{grad}_\Gamma(\tilde{\boldsymbol{n}}_h)\,\mathbf{P}\,(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_h)\right] : \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \,\mu_h \mathrm{d}s \\ &= \int_\Gamma \mathbf{grad}_\Gamma(\tilde{\boldsymbol{n}}_h) : \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \,\mathrm{d}s - \int_\Gamma (1-\mu_h)\,\mathbf{grad}_\Gamma(\tilde{\boldsymbol{n}}_h) : \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \,\mathrm{d}s \\ &\quad - \int_\Gamma \left[\mathbf{grad}_\Gamma(\tilde{\boldsymbol{n}}_h)\,\mathbf{P}\,(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_h)\right] : \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \,\mu_h \mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Par conséquent, la relation (2.3.4) peut s'écrire sous la forme

$$\int_\Gamma \tilde{\boldsymbol{H}}_h : \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \, \mathrm{ds} = \int_\Gamma \mathbf{grad}_\Gamma \left(\tilde{\boldsymbol{n}}_h\right) : \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \, \mathrm{ds} + \int_\Gamma \left(1 - \mu_h\right) \left(\tilde{\boldsymbol{H}}_h - \mathbf{grad}_\Gamma \left(\tilde{\boldsymbol{n}}_h\right)\right) : \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \, \mathrm{ds}$$
$$+ \int_\Gamma \left[\mathbf{grad}_\Gamma \left(\tilde{\boldsymbol{n}}_h\right) \mathbf{P} \left(\boldsymbol{A}_h - \boldsymbol{I}\right)\right] : \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \, \mu_h \mathrm{ds}.$$

En retranchant la relation précédente à (2.3.5) en prenant $\boldsymbol{\tau} = \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h$, nous obtenons

$$\int_\Gamma \left(\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h\right) : \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \, \mathrm{ds} = \int_\Gamma \mathbf{grad}_\Gamma \left(\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h\right) : \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \, \mathrm{ds}$$
$$+ \int_\Gamma \left(1 - \mu_h\right) \left(\tilde{\boldsymbol{H}}_h - \mathbf{grad}_\Gamma \left(\tilde{\boldsymbol{n}}_h\right)\right) : \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \, \mathrm{ds}$$
$$+ \int_\Gamma \mu_h \left[\mathbf{grad}_\Gamma \left(\tilde{\boldsymbol{n}}_h\right) \mathbf{P} \left(\boldsymbol{A}_h - \boldsymbol{I}\right)\right] : \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \, \mathrm{ds}.$$

En utilisant la décomposition $\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h = \left(\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\right) - \left(\tilde{\boldsymbol{H}}_h - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\right)$ et la linéarité de l'intégrale, nous avons

$$\left\|\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h\right\|_{0,2,\Gamma}^2 = \int_\Gamma \left(\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h\right) : \left(\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h\right) \, \mathrm{ds}$$
$$\int_\Gamma \left(\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h\right) : \left(\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\right) \, \mathrm{ds} - \int_\Gamma \left(\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h\right) : \left(\tilde{\boldsymbol{H}}_h - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\right) \, \mathrm{ds}.$$

Par conséquent, comme $\tilde{\boldsymbol{H}}_h - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \in \tilde{X}_h^{d\times d}$, nous obtenons la relation

$$\left\|\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h\right\|_{0,2,\Gamma}^2 = \int_\Gamma \left(\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h\right) : \left(\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\right) \, \mathrm{ds} - \int_\Gamma \mathbf{grad}_\Gamma \left(\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h\right) : \left(\tilde{\boldsymbol{H}}_h - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\right) \, \mathrm{ds}$$
$$- \int_\Gamma \left(1 - \mu_h\right) \left(\tilde{\boldsymbol{H}}_h - \mathbf{grad}_\Gamma \left(\tilde{\boldsymbol{n}}_h\right)\right) : \left(\tilde{\boldsymbol{H}}_h - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\right) \, \mathrm{ds}$$
$$- \int_\Gamma \mu_h \left[\mathbf{grad}_\Gamma \left(\tilde{\boldsymbol{n}}_h\right) \mathbf{P} \left(\boldsymbol{A}_h - \boldsymbol{I}\right)\right] : \left(\tilde{\boldsymbol{H}}_h - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\right) \, \mathrm{ds}.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur les intégrales précédentes, nous avons :

$$\left\|\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h\right\|_{0,2,\Gamma}^2 \leq \left\|\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h\right\|_{0,2,\Gamma} \left\|\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\right\|_{0,2,\Gamma} + \left\|\mathbf{grad}_\Gamma \left(\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h\right)\right\|_{0,2,\Gamma} \left\|\tilde{\boldsymbol{H}}_h - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\right\|_{0,2,\Gamma}$$
$$+ \left\|1 - \mu_h\right\|_{0,\infty,\Gamma} \left\|\tilde{\boldsymbol{H}}_h - \mathbf{grad}_\Gamma \left(\tilde{\boldsymbol{n}}_h\right)\right\|_{0,2,\Gamma} \left\|\tilde{\boldsymbol{H}}_h - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\right\|_{0,2,\Gamma}$$
$$+ \left\|\boldsymbol{B}_h\right\|_{0,\infty,\Gamma} \left\|\mathbf{grad}_\Gamma \left(\tilde{\boldsymbol{n}}_h\right)\right\|_{0,2,\Gamma} \left\|\tilde{\boldsymbol{H}}_h - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\right\|_{0,2,\Gamma}.$$

où $\boldsymbol{B}_h = \mu_h \mathbf{P}\left(\boldsymbol{A}_h - \boldsymbol{I}\right)$. En utilisant quelques majorations élémentaires, nous obtenons

$$\begin{aligned}\left\|\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h\right\|_{0,2,\Gamma}^2 \leq & \left\|\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h\right\|_{0,2,\Gamma} \left\|\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\right\|_{0,2,\Gamma} + \left\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h\right\|_{1,2,\Gamma} \left\|\tilde{\boldsymbol{H}}_h - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\right\|_{0,2,\Gamma} \\ & + \left\|1 - \mu_h\right\|_{0,\infty,\Gamma} \left(\left\|\tilde{\boldsymbol{H}}_h\right\|_{0,2,\Gamma} + \left\|\tilde{\boldsymbol{n}}_h\right\|_{1,2,\Gamma}\right) \left\|\tilde{\boldsymbol{H}}_h - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\right\|_{0,2,\Gamma} \\ & + \left\|\boldsymbol{B}_h\right\|_{0,\infty,\Gamma} \left\|\tilde{\boldsymbol{n}}_h\right\|_{1,2,\Gamma} \left\|\tilde{\boldsymbol{H}}_h - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\right\|_{0,2,\Gamma}.\end{aligned}$$

D'après les lemmes 2.3 et 2.4, nous pouvons trouver une constante strictement positive C_0 telle que

$$\left\|\tilde{\boldsymbol{H}}_h\right\|_{0,2,\Gamma} \leq C_0 \left\|\tilde{\boldsymbol{n}}_h\right\|_{1,2,\Gamma}.$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\left\|\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h\right\|_{0,2,\Gamma}^2 \leq \left\|\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h\right\|_{0,2,\Gamma} \left\|\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\right\|_{0,2,\Gamma} + t_h \left\|\tilde{\boldsymbol{H}}_h - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\right\|_{0,2,\Gamma},$$

où

$$t_h = \left\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h\right\|_{1,2,\Gamma} + \left((1 + C_0)\left\|1 - \mu_h\right\|_{0,\infty,\Gamma} + \left\|\boldsymbol{B}_h\right\|_{0,\infty,\Gamma}\right) \left\|\tilde{\boldsymbol{n}}_h\right\|_{1,2,\Gamma}.$$

Cette dernière inégalité est valable pour tout $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \in \tilde{X}_h^{d\times d}$. Donc, en particulier, si nous choisissons $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h$ comme la projection orthogonale $\tilde{\boldsymbol{H}}_h^{L^2}$ de $\boldsymbol{H}$ sur $\tilde{X}_h^{d\times d}$ au sens de la norme L^2, nous avons :

$$\left\|\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h\right\|_{0,2,\Gamma}^2 \leq \left\|\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h\right\|_{0,2,\Gamma} \left\|\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h^{L^2}\right\|_{0,2,\Gamma} + t_h \left\|\tilde{\boldsymbol{H}}_h - \tilde{\boldsymbol{H}}_h^{L^2}\right\|_{0,2,\Gamma}. \tag{2.4.11}$$

Cette projection vérifie

$$\left\|\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h^{L^2}\right\|_{0,2,\Gamma} = \inf_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \in \tilde{X}_h^{d\times d}} \left\|\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\right\|_{0,2,\Gamma}, \tag{2.4.12}$$

et elle est caractérisée par

$$\int_\Gamma \left(\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h^{L^2}\right) \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \,\mathrm{ds} = 0, \qquad \forall\, \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \in \tilde{X}_h^{d\times d}. \tag{2.4.13}$$

Donc, en utilisant la décomposition :

$$\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h^{L^2} = \left(\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h\right) - \left(\tilde{\boldsymbol{H}}_h - \tilde{\boldsymbol{H}}_h^{L^2}\right),$$

dans la relation (2.4.13), nous obtenons :

$$\int_\Gamma \left(\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h\right) \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \,\mathrm{ds} - \int_\Gamma \left(\tilde{\boldsymbol{H}}_h - \tilde{\boldsymbol{H}}_h^{L^2}\right) \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \,\mathrm{ds} = 0, \qquad \forall\, \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \in \tilde{X}_h^{d}.$$

En particulier, pour $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h = \tilde{\boldsymbol{H}}_h - \tilde{\boldsymbol{H}}_h^{L^2}$ dans la relation précédente, nous obtenons :

$$\left\|\tilde{\boldsymbol{H}}_h - \tilde{\boldsymbol{H}}_h^{L^2}\right\|_{0,2,\Gamma}^2 = \int_\Gamma \left(\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h\right) \cdot \left(\tilde{\boldsymbol{H}}_h - \tilde{\boldsymbol{H}}_h^{L^2}\right) \mathrm{ds}.$$

Par conséquent, nous avons par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left\|\tilde{\boldsymbol{H}}_h - \tilde{\boldsymbol{H}}_h^{L^2}\right\|_{0,2,\Gamma}^2 \leq \left\|\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h\right\|_{0,2,\Gamma} \left\|\tilde{\boldsymbol{H}}_h - \tilde{\boldsymbol{H}}_h^{L^2}\right\|_{0,2,\Gamma}.$$

Par suite, nous avons

$$\left\|\tilde{\boldsymbol{H}}_h - \tilde{\boldsymbol{H}}_h^{L^2}\right\|_{0,2,\Gamma} \leq \left\|\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h\right\|_{0,2,\Gamma}.$$

Par conséquent, de l'inégalité (2.4.11) et (2.4.12), nous avons

$$\left\|\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h\right\|_{0,2,\Gamma}^2 \leq \left(\inf_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \in \tilde{X}_h^{d\times d}} \|\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\|_{0,2,\Gamma} + t_h\right) \left\|\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h\right\|_{0,2,\Gamma}.$$

Par suite, nous avons

$$\left\|\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h\right\|_{0,2,\Gamma} \leq \inf_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h \in \tilde{X}_h^{d\times d}} \|\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\|_{0,2,\Gamma} + t_h. \tag{2.4.14}$$

Il nous reste à estimer t_h. En utilisant le lemme 2.5, nous avons : $1 - \mu_h = o(h^{k+1})$ et

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}_h &= \mu_h \mathbf{P}\left(\boldsymbol{A}_h - \boldsymbol{I}\right)\\ &= \mathbf{P}\left(\boldsymbol{A}_h - \boldsymbol{I}\right) + o(h^{k+1}).\end{aligned}$$

Par suite, $\boldsymbol{B}_h = o(h^k)$. Donc, nous pouvons trouver une constante réelle C_1 strictement positive indépendante de h telle que

$$t_h \leq C_1 \left(\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h\|_{1,2,\Gamma} + h^k \|\tilde{\boldsymbol{n}}_h\|_{1,2,\Gamma}\right).$$

En utilisant en plus l'inégalité triangulaire sur $\tilde{\boldsymbol{n}}_h = \boldsymbol{n} - (\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h\|_{1,2,\Gamma} + h^k \|\tilde{\boldsymbol{n}}_h\|_{1,2,\Gamma} &\leq \left(1 + h^k\right) \|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h\|_{1,2,\Gamma} + h^k \|\boldsymbol{n}\|_{1,2,\Gamma}\\ &\leq \left(1 + h_0^k\right) \|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h\|_{1,2,\Gamma} + h^k \|\boldsymbol{n}\|_{1,2,\Gamma}\\ &\leq \left(1 + h_0^k\right) \left(\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h\|_{1,2,\Gamma} + h^k \|\boldsymbol{n}\|_{1,2,\Gamma}\right),\end{aligned}$$

où h_0 est la constante de l'hypothèse 2.1. Par conséquent, l'inégalité (2.4.14) devient :

$$\left\|\boldsymbol{H}-\tilde{\boldsymbol{H}}_h\right\|_{0,2,\Gamma} \leq \inf_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\in\tilde{X}_h^{d\times d}} \|\boldsymbol{H}-\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\|_{0,2,\Gamma} + C_1\left(1+h_0^k\right)\left(\|\boldsymbol{n}-\tilde{\boldsymbol{n}}_h\|_{1,2,\Gamma} + h^k\|\boldsymbol{n}\|_{1,2,\Gamma}\right).$$

D'où

$$\left\|\boldsymbol{H}-\tilde{\boldsymbol{H}}_h\right\|_{0,2,\Gamma} \leq \inf_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\in\tilde{X}_h^{d\times d}} \|\boldsymbol{H}-\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\|_{0,2,\Gamma} + C\left(\|\boldsymbol{n}-\tilde{\boldsymbol{n}}_h\|_{1,2,\Gamma} + h^k\|\boldsymbol{n}\|_{1,2,\Gamma}\right),$$

avec $C = C_1\left(1+h_0^k\right)$. Ce qui prouve le théorème 2.3. □

Corollaire 2.3. *Sous les hypothèses du théorème 2.3, il existe une constante positive C indépendante de h, telle que :*

$$\left\|\boldsymbol{H}-\tilde{\boldsymbol{H}}_h\right\|_{0,2,\Gamma} \leq C\left(\|\boldsymbol{n}-\tilde{\boldsymbol{n}}_h\|_{1,2,\Gamma} + h^k\right).$$

Remarque 2.5. *Ce corollaire ne permet pas de démontrer que $\tilde{\boldsymbol{H}}_h$ converge $\boldsymbol{H}$ quand h tend vers 0 en norme L^2. Il exprime seulement que la convergence de $\tilde{\boldsymbol{n}}_h$ vers $\boldsymbol{n}$ en norme H^1 entraine la convergence de $\tilde{\boldsymbol{H}}_h$ vers $\boldsymbol{H}$ en norme L^2. Nous verrons à travers des tests numériques dans la sous-section 2.4.4 qu'en général, $\tilde{\boldsymbol{n}}_h$ ne converge pas vers $\boldsymbol{n}$ en norme H^1 pour $k=1$.*

Démonstration. La preuve de ce corollaire est très similaire à celle du corollaire 2.1. En utilisant la proposition 2.6, nous déduisons que le terme

$$\inf_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\in\tilde{X}_h^{d\times d}} \|\boldsymbol{H}-\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\|_{0,2,\Gamma}$$

est majoré par l'erreur d'interpolation. Cela signifie qu'il existe une constante C_0 strictement positive indépendante de h telle que :

$$\inf_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\in\tilde{X}_h^{d\times d}} \|\boldsymbol{H}-\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\|_{0,2,\Gamma} \leq C_0 h^{k+1}\|\boldsymbol{H}\|_{k+1,2,\Gamma}.$$

Par conséquent, en utilisant la constante h_0 de l'hypothèse 2.1, nous avons

$$\inf_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\in\tilde{X}_h^{d\times d}} \|\boldsymbol{H}-\tilde{\boldsymbol{\tau}}_h\|_{0,2,\Gamma} \leq C_0 h_0 h^{k}\|\boldsymbol{H}\|_{k+1,2,\Gamma}.$$

En utilisant le résultat du théorème 2.3, nous pouvons trouver une constante C_1 strictement positive indépendante de h telle que :

$$\left\|\boldsymbol{H}-\tilde{\boldsymbol{H}}_h\right\|_{0,2,\Gamma} \leq C_0 h_0 h^k\|\boldsymbol{H}\|_{k+1,2,\Gamma} + C_1\|\boldsymbol{n}-\tilde{\boldsymbol{n}}_h\|_{1,2,\Gamma} + C_1 h^k\|\boldsymbol{n}\|_{1,2,\Gamma}.$$

Par suite, nous avons :

$$\begin{aligned}\left\|\boldsymbol{H}-\tilde{\boldsymbol{H}}_h\right\|_{0,2,\Gamma} &\leq C_1\left\|\boldsymbol{n}-\tilde{\boldsymbol{n}}_h\right\|_{1,2,\Gamma}+\left(C_1+C_0h_0\right)h^k\left(\|\boldsymbol{n}\|_{1,2,\Gamma}+\|\boldsymbol{H}\|_{k+1,2,\Gamma}\right)\\ &\leq \left(2C_1+C_0h_0\right)\left(\|\boldsymbol{n}\|_{1,2,\Gamma}+\|\boldsymbol{H}\|_{k+1,2,\Gamma}\right)\left(\left\|\boldsymbol{n}-\tilde{\boldsymbol{n}}_h\right\|_{1,2,\Gamma}+h^k\right).\end{aligned}$$

D'où

$$\left\|\boldsymbol{H}-\tilde{\boldsymbol{H}}_h\right\|_{0,2,\Gamma} \leq C\left(\left\|\boldsymbol{n}-\tilde{\boldsymbol{n}}_h\right\|_{1,2,\Gamma}+h^k\right),$$

avec $C=\left(2C_1+C_0h_0\right)\left(\|\boldsymbol{n}\|_{1,2,\Gamma}+\|\boldsymbol{H}\|_{k+1,2,\Gamma}\right)$. Ce qui prouve le corollaire 2.3. □

Corollaire 2.4. *Sous les hypothèses du théorème 2.3, il existe une constante positive C indépendante de h, telle que :*

$$\left\|\kappa-\tilde{\kappa}_h\right\|_{0,2,\Gamma} \leq C\left(\left\|\boldsymbol{n}-\tilde{\boldsymbol{n}}_h\right\|_{1,2,\Gamma}+h^k\right),$$

où $\tilde{\kappa}_h \in \tilde{X}_h$ est l'unique champ défini sur Γ vérifiant :

$$\kappa_h(\boldsymbol{x})=\tilde{\kappa}_h\circ\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})=\tilde{\kappa}_h(\boldsymbol{x}-\phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})). \tag{2.4.15}$$

Démonstration. Ce résultat est immédiat en utilisant les relations (2.2.2a), (2.3.6a) et (2.4.10). En effet, par unité de $\tilde{\kappa}_h$, nous avons :

$$\kappa_h(\boldsymbol{x})=\operatorname{tr}\left(\tilde{\boldsymbol{H}}_h(\boldsymbol{x}-\phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}))\right).$$

Par conséquent, nous avons :

$$\left\|\kappa-\tilde{\kappa}_h\right\|_{0,2,\Gamma} = \left\|\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{H}-\tilde{\boldsymbol{H}}_h\right)\right\|_{0,2,\Gamma} \leq \left\|\boldsymbol{H}-\tilde{\boldsymbol{H}}_h\right\|_{0,2,\Gamma}.$$

Il suffit d'utiliser le résultat du corollaire 2.3 pour conclure. □

2.4.3 Estimation de l'erreur sur le vecteur courbure discret

Soit $\tilde{\boldsymbol{y}}_h \in \tilde{X}_h^d$ telle que :

$$\boldsymbol{y}_h(\boldsymbol{x})=\tilde{\boldsymbol{y}}_h\circ\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})=\tilde{\boldsymbol{y}}_h(\boldsymbol{x}-\phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})). \tag{2.4.16}$$

Nous avons le théorème suivant :

Théorème 2.4 (Estimation d'erreurs sur le vecteur courbure). *Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$, $d=2$ ou 3, une surface fermée comme dans la sous-section 2.2.2. Soit Γ_h l'approximation de Γ de degré*

polynomial k comme dans la sous-section 2.2.3. Alors, sous l'hypothèse 2.1, il existe une constante positive C indépendante de h, telle que :

$$\|\boldsymbol{y} - \tilde{\boldsymbol{y}}_h\|_{0,2,\Gamma} \leq \left\|\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h\right\|_{0,2,\Gamma} + Ch^k.$$

Le théorème permet de déduire que $\boldsymbol{y}_h$ converge vers le vecteur courbure $\boldsymbol{y}$ dès que $\boldsymbol{H}_h$ convergent vers $\boldsymbol{H}$.

Démonstration. En utilisant les relations (2.2.2b), (2.3.6b) et (2.4.16), nous avons

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y} - \tilde{\boldsymbol{y}}_h &= \operatorname{tr}(\boldsymbol{H})\,\boldsymbol{n} - \operatorname{tr}\left(\tilde{\boldsymbol{H}}_h\right)\tilde{\boldsymbol{n}}_h \\ &= \operatorname{tr}(\boldsymbol{H})\,(\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h) + \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h\right)\tilde{\boldsymbol{n}}_h.\end{aligned}$$

Donc, nous avons :

$$\|\boldsymbol{y} - \tilde{\boldsymbol{y}}_h\|_{0,2,\Gamma} = \left\|\operatorname{tr}(\boldsymbol{H})\,(\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h) + \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h\right)\tilde{\boldsymbol{n}}_h\right\|_{0,2,\Gamma}.$$

En utilisant l'égalité triangulaire sur la relation précédente, nous obtenons

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{y} - \tilde{\boldsymbol{y}}_h\|_{0,2,\Gamma} &\leq \|\operatorname{tr}(\boldsymbol{H})\,(\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h)\|_{0,2,\Gamma} + \left\|\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h\right)\tilde{\boldsymbol{n}}_h\right\|_{0,2,\Gamma} \\ &\leq \|\operatorname{tr}(\boldsymbol{H})\|_{0,\infty,\Gamma}\,\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h\|_{0,2,\Gamma} + \underbrace{\|\tilde{\boldsymbol{n}}_h\|_{0,\infty,\Gamma}}_{=1}\left\|\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h\right)\right\|_{0,2,\Gamma}.\end{aligned}$$

Comme $\|\tilde{\boldsymbol{n}}_h\|_{0,\infty,\Gamma} = 1$ par construction, alors nous obtenons

$$\|\boldsymbol{y} - \tilde{\boldsymbol{y}}_h\|_{0,2,\Gamma} \leq \|\boldsymbol{H}\|_{0,\infty,\Gamma}\,\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h\|_{0,2,\Gamma} + \left\|\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h\right\|_{0,2,\Gamma}.$$

En utilisant le résultat du théorème 2.2, nous pouvons trouver une constante C_0 strictement positive et indépendante de h telle que :

$$\|\boldsymbol{y} - \tilde{\boldsymbol{y}}_h\|_{0,2,\Gamma} \leq C_0\,\|\boldsymbol{H}\|_{0,\infty,\Gamma}\,h^k + \left\|\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h\right\|_{0,2,\Gamma}.$$

D'où

$$\|\boldsymbol{y} - \tilde{\boldsymbol{y}}_h\|_{0,2,\Gamma} \leq \left\|\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h\right\|_{0,2,\Gamma} + Ch^k,$$

avec $C = C_0\,\|\boldsymbol{H}\|_{0,\infty,\Gamma}$. Ce qui prouve le théorème 2.4. □

2.4.4 Tests numériques

Nous présentons dans cette section les résultats de tests numériques de nos définitions respectives de la normale approchée et des courbures, en utilisant la librairie d'éléments finis *Rheolef* (cf. [Saramito, 2012] pour plus de détails). Les tests sont effectués sur les surfaces exactes définies implicitement par le zéro des fonctions de niveaux :

$$\phi_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \tag{2.4.17a}$$

$$\phi_2(x,y,z) = x^2 + (2y)^2 + \left(\frac{2}{3}z\right)^2 - 1, \tag{2.4.17b}$$

$$\phi_3(x,y,z) = \left(x - z^2\right)^2 + y^2 + z^2 - 1, \tag{2.4.17c}$$

$$\phi_4(x,y,z) = x^2 + y^4 + z^6 - 1. \tag{2.4.17d}$$

Nous utilisons des maillages de degré polynomial $k = 1, 2, 3, 4$ de ces surfaces. Ces maillages respectent les conditions décrites dans la section 2.2.3. Soit N le nombre d'éléments du maillage considéré. Pour ces tests, nous utilisons comme taille caractéristique

$$h = \frac{1}{\sqrt{N}}. \tag{2.4.18}$$

Les figures 2.7 à 2.10 représentent respectivement d'une part les erreurs en norme H^1, L^2 et L^∞ entre la normale exacte $\boldsymbol{n}$ et son approximation continue $\boldsymbol{n}_h$ et d'autre part les erreurs en norme L^2 et L^∞ entre le tenseur de courbure exact $\boldsymbol{H}$ et son approximation $\boldsymbol{H}_h$ pour les quatre surfaces (2.4.17a)-(2.4.17d).

Résultats numériques sur la normale

On observe que

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}_h\|_{0,2,\Gamma_h} &= O(h^\alpha) \\
\|\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}_h\|_{0,\infty,\Gamma_h} &= O(h^\alpha) \\
\|\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}_h\|_{1,2,\Gamma_h} &= O(h^\beta),
\end{aligned}$$

où α et β sont respectivement les ordres de convergences numériques pour les approximations polynomiales de degré $k = 1, 2, 3, 4$. Pour les surfaces (2.4.17a) et (2.4.17b), α dépend de la parité de k :

$$\alpha \simeq \begin{cases} k & \text{si } k \text{ est impair} \\ k+1 & \text{si non,} \end{cases}$$

et pour les surfaces (2.4.17c) et (2.4.17d), $\alpha \simeq k$. Sans surprise du point de vue de la méthode des éléments finis, nous trouvons que β est égale à $\alpha - 1$, c'est à dire pour les surfaces (2.4.17a)

FIGURE 2.7 Approximation affine $(k = 1)$ quasi-uniforme de la surface de niveau zéro définie par (2.4.17a) en 3D avec les lunettes rouge-cyan et les erreurs en échelle logarithmique sur nos définitions de normale approchée 2.1 et du tenseur de courbure 2.2, respectivement en norme H^1, L^2 et L^∞ sur des approximations de degré polynomial k de la surfaces (2.4.17a).

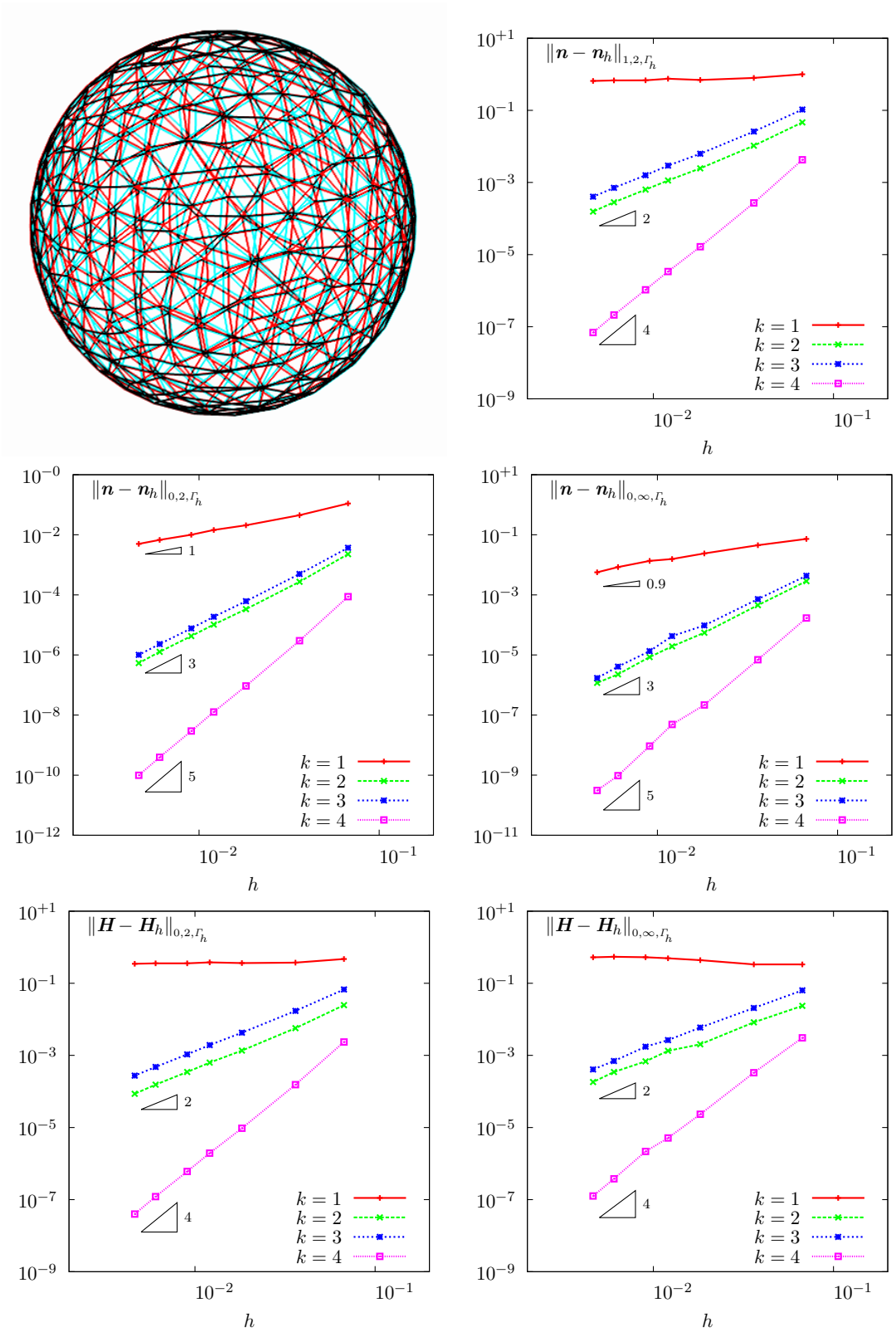


FIGURE 2.8 Approximation affine $(k = 1)$ quasi-uniforme de la surface de niveau zéro définie par (2.4.17b) en 3D avec les lunettes rouge-cyan et les erreurs sur nos définitions de normale approchée 2.1 et du tenseur de courbure 2.2, respectivement en norme H^1, L^2 et L^∞ sur des approximations de degré polynomial k de la surfaces (2.4.17b).

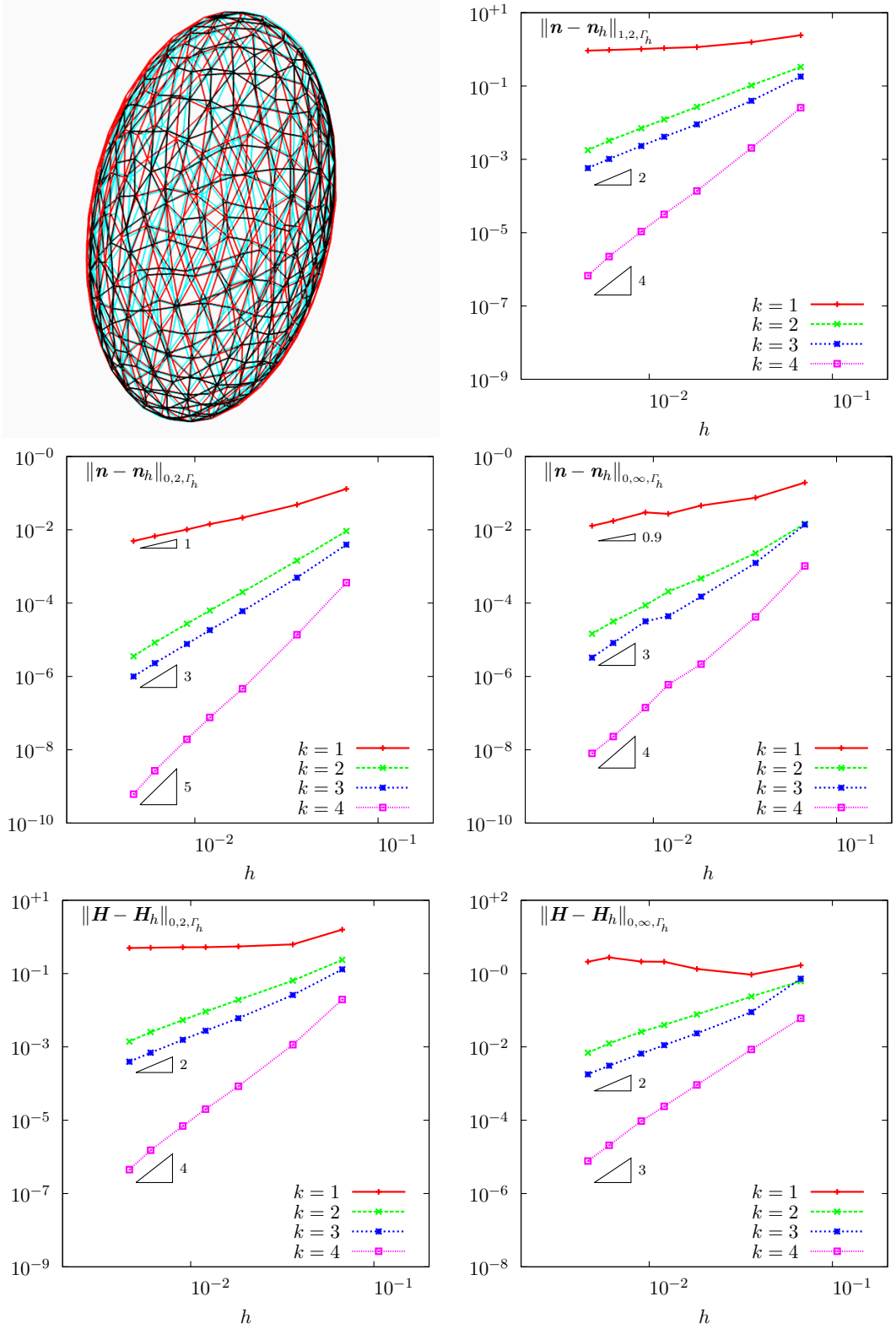


FIGURE 2.9 Approximation affine $(k = 1)$ quasi-uniforme de la surface de niveau zéro définie par (2.4.17c) en 3D avec les lunettes rouge-cyan et les erreurs sur nos définitions de normale approchée 2.1 et du tenseur de courbure 2.2, respectivement en norme H^1, L^2 et L^∞ sur des approximations de degré polynomial k de la surfaces (2.4.17c).

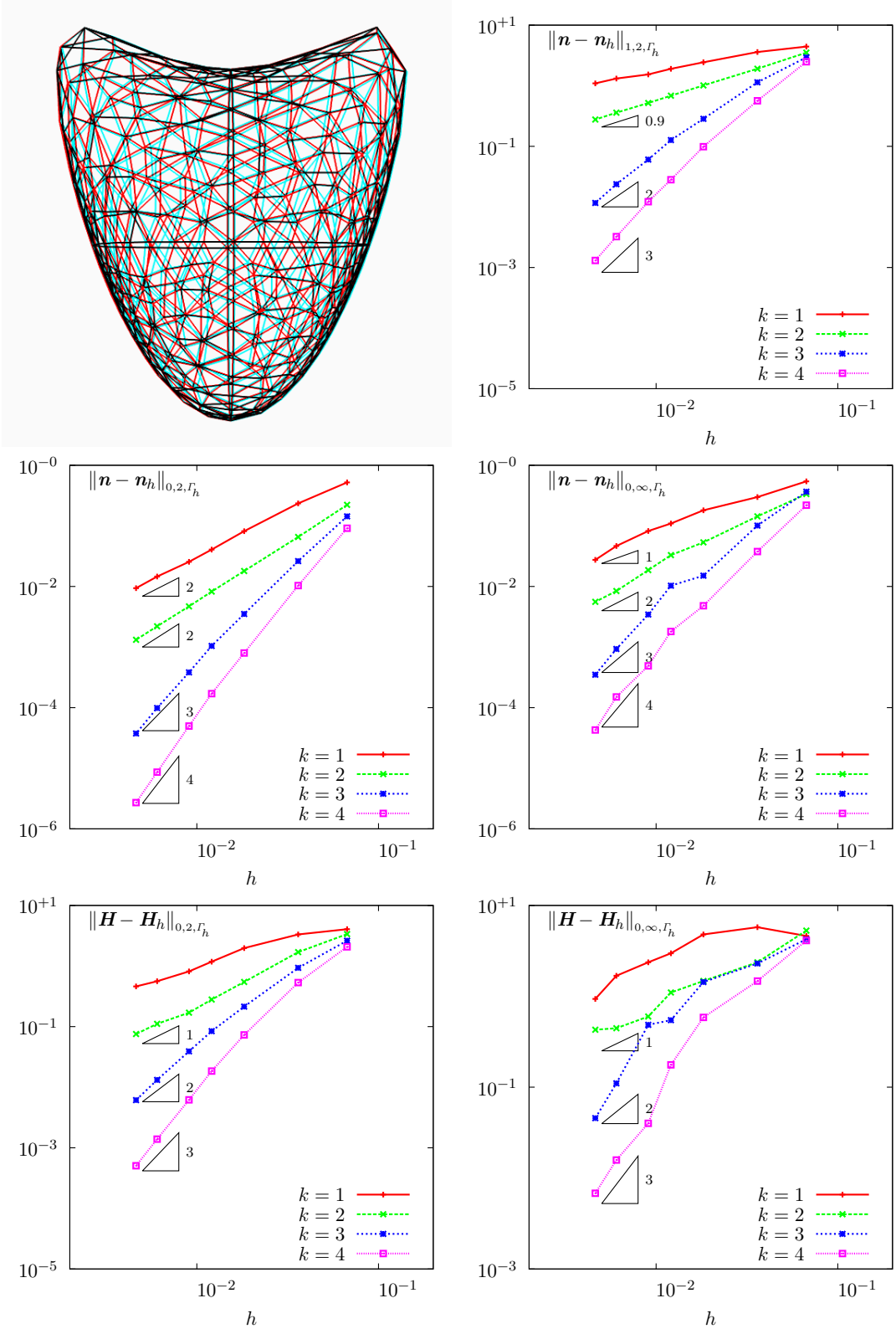
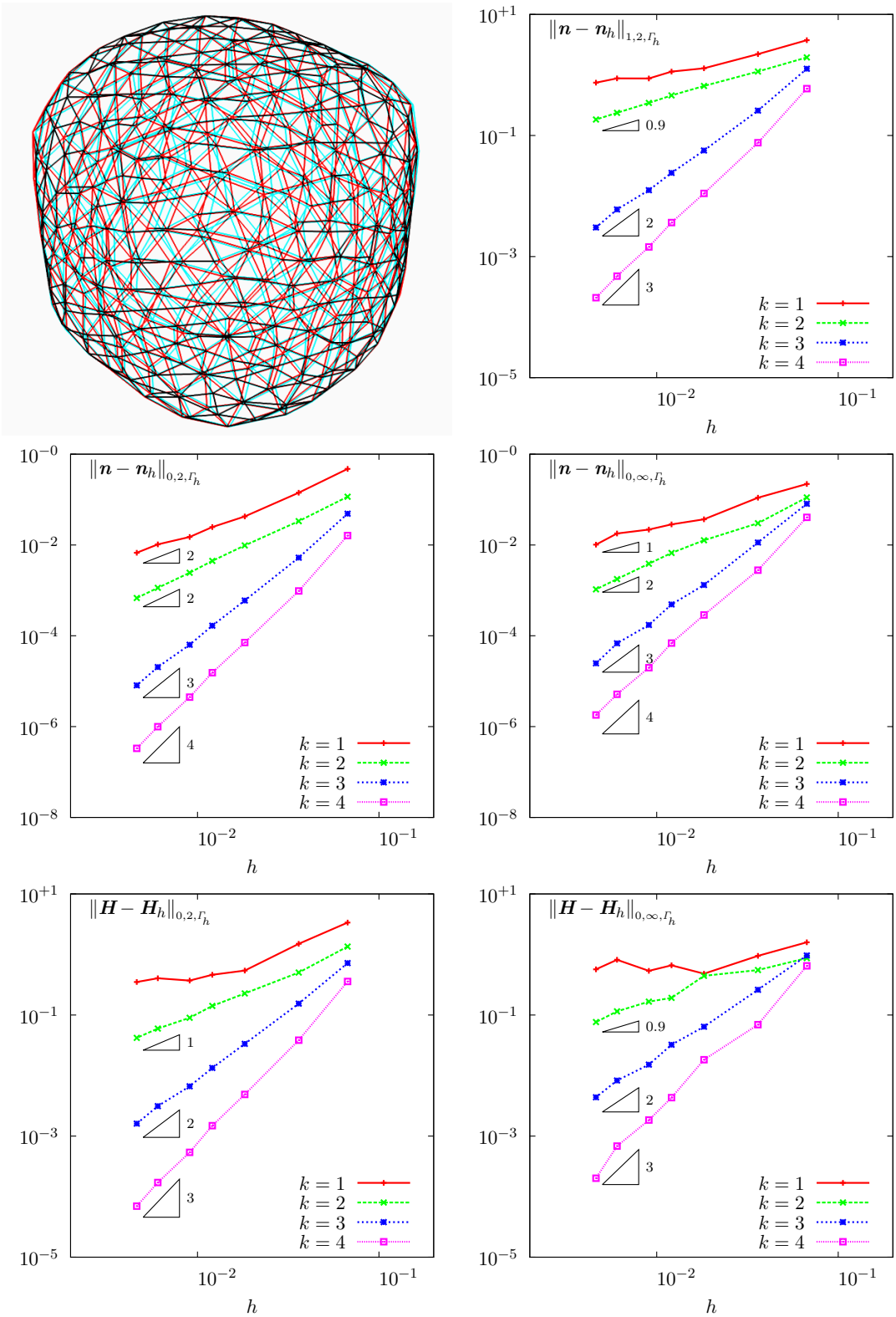


FIGURE 2.10 Approximation affine $(k = 1)$ quasi-uniforme de la surface de niveau zéro définie par (2.4.17d) en 3D avec les lunettes rouge-cyan et les erreurs sur nos définitions de normale approchée 2.1 et du tenseur de courbure 2.2, respectivement en norme H^1, L^2 et L^∞ sur des approximations de degré polynomial k de la surfaces (2.4.17d).



et (2.4.17b), on a

$$\beta \simeq \begin{cases} k-1 & \text{si } k \text{ est impair} \\ k & \text{si non,} \end{cases}$$

et pour les surfaces (2.4.17c) et (2.4.17d), $\beta \simeq k-1$. Cela confirme que la normale approchée de la définition 2.1 converge vers la normale exacte pour $k \geq 1$ en norme L^2 et L^∞ comme le montre l'analyse de convergence théorique dans la section 2.4. Nous retrouvons aussi l'ordre de convergence théorique du théorème 2.2 pour les surfaces (2.4.17c) et (2.4.17d). Cependant, le résultat du théorème 2.2 reste cohérent avec les résultats numériques obtenus pour les surfaces (2.4.17a) et (2.4.17b), néanmoins pour les k impairs. Le cas des k pairs est plutôt surprenant, on observe une super-convergence sans doute liée à la structure géométrique particulière des surfaces (2.4.17a) et (2.4.17b), c'est à dire des surfaces qui ont une courbure globalement très homogène, contrairement des surfaces (2.4.17c) et (2.4.17d) qui ont une importante variation de courbure par région. En ce qui concerne la convergence en norme H^1, nous arrivons à une conclusion analogue qu'en norme L^2, sauf dans le cas $k=1$, où l'erreur en norme H^1 n'exhibe pas de convergence.

Résultats numériques sur le tenseur de courbure

Nous obtenons des résultats très similaires à ceux obtenus dans le cas de la normale en norme H^1 surtout dans le cas des approximations de degrés supérieurs $(k>1)$. En effet, on observe sur les figures 2.7 à 2.10 que

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}_h\|_{0,2,\Gamma_h} &= O(h^\beta) \\ \|\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}_h\|_{0,\infty,\Gamma_h} &= O(h^\beta). \end{aligned}$$

Cela signifie que le tenseur de courbure de la définition 2.2 converge vers le tenseur de courbure exacte pour $k>1$ en norme L^2 et L^∞. Dans le cas $k=1$, l'erreur en norme L^2 est quasi-constante. L'erreur en norme L^∞ diverge (lentement). Donc, globalement ces tests numériques sur le tenseur de courbure sont cohérents avec le résultat théorique énoncé dans le théorème 2.3 dans le sens où la convergence de la normale approchée vers la normale exacte entraine la convergence du tenseur de courbure discrète vers tenseur de courbure exacte. Ces tests permettent aussi de prouver qu'en général, le tenseur de courbure discret de la définition 2.2 ne converge vers le tenseur de courbure exacte pour une approximation affine par morceaux.

En résumé :

Nos résultats numériques obtenus sur les figures 2.7-2.10 sont conformes à nos analyses théoriques de convergence sur la normale et le tenseur de courbure. Donc ces résultats (théoriques et numériques) en soi sont satisfaisants. Mais, on peut encore les améliorer en terme de vitesse de convergence numérique, notamment le cas $k=1$. Ce qui sera l'objet de la section suivante.

2.5 Méthode de lissage

Dans cette section, nous proposons un nouvel algorithme pour approcher le tenseur de courbure d'une surface fermée et bornée Γ contenue dans $\mathbb{R}^d$. Cet algorithme est basé sur la méthode de projection-L^2 comme pour la définition 2.2 mais on effectue de plus des itérations dites de lissage. Le but de cet algorithme est d'améliorer l'approximation du tenseur de courbure de la définition 2.2 en terme de vitesse de convergence numérique, notamment dans le cas d'une approximation affine par morceaux de Γ, où nous n'avons pas la convergence (cf. la remarque 2.5).

2.5.1 Description de l'algorithme de lissage

L'idée est assez simple, nous construisons une suite finie d'approximations continues $\left(\boldsymbol{H}^c_{i,h}\right)_{1\leq i\leq n}$ qui converge vers le tenseur de courbure exacte $\boldsymbol{H}$ de Γ. L'entier n désigne le nombre d'itérations de l'algorithme. Nous verrons dans la sous-section 2.5.2 comment choisir le nombre d'itérations de l'algorithme. Posons

$$\boldsymbol{H}^d_{0,h} = \mathbf{grad}_{\Gamma}\left(\boldsymbol{n}_h\right) \in N_h^{d\times d},$$

où $\boldsymbol{n}_h$ est la normale approchée de la définition 2.1 et N_h est l'espace d'éléments finis discontinus défini par la relation (2.2.11). Pour $i \in 1, ..., n$, nous déterminons la projection orthogonale $\boldsymbol{H}^c_{i,h}$ de $\boldsymbol{H}^d_{i-1,h}$ au sens de la norme L^2 dans $X_h^{d\times d}$ caractérisée par la relation

$$\int_{\Gamma_h} \boldsymbol{H}^c_{i,h} : \boldsymbol{\tau}^c_h \,\mathrm{ds}_h = \int_{\Gamma_h} \boldsymbol{H}^d_{i-1,h} : \boldsymbol{\tau}^c_h \,\mathrm{ds}_h, \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau}^c_h \in X_h^{d\times d}, \tag{2.5.1}$$

où X_h est l'espace d'éléments finis défini par la relation (2.2.10). Puis, nous calculons la projection orthogonale $\boldsymbol{H}^d_{i,h}$ de $\boldsymbol{H}^c_{i,h}$ au sens de la norme L^2 dans $N_h^{d\times d}$ par la relation

$$\int_{\Gamma_h} \boldsymbol{H}^d_{i,h} : \boldsymbol{\tau}^d_h \,\mathrm{ds}_h = \int_{\Gamma_h} \boldsymbol{H}^c_{i,h} : \boldsymbol{\tau}^d_h \,\mathrm{ds}_h, \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau}^d_h \in N_h^{d\times d}. \tag{2.5.2}$$

Et on recommence, ainsi de suite. L'algorithme 1 résume cette description. A noter que l'approximation $\boldsymbol{H}^c_{1,h}$ correspond au tenseur de courbure discret de la définition 2.2.

2.5.2 Nombre d'itérations de l'algorithme de lissage

Pour le choix du nombre d'itérations de l'algorithme de lissage, nous ne disposons pas pour l'instant de théorie mathématique pour garantir la convergence. Nous proposons ici une étude numérique pour choisir le nombre d'itérations n sous deux critères importants :

- convergence pour les approximations affines par morceaux de la surface exacte Γ,
- coût de calcul raisonnable.

Les tests sont effectués sur les surfaces exactes définies implicitement par le zéro des fonctions de niveaux (2.4.17a)-(2.4.17d). L'idéal en terme de coût de calcul est de choisir un nombre d'itérations n constant (indépendant de Γ et Γ_h). Mais en général, nous n'avons la convergence

Entrées: Γ_h : maillage de Γ, $\boldsymbol{n}_h$: approximation continue de $\boldsymbol{n}$, X_h et N_h les espaces éléments finis définis respectivement par (2.2.10) et (2.2.11).
Sorties: n : nombre d'itérations en fonction de Γ_h, $\boldsymbol{H}^c_{n,h}$.
début
$\boldsymbol{H}^d_{0,h} := \mathbf{grad}_{\Gamma}(\boldsymbol{n}_h) \in N_h^{d\times d}$
$n := n(h)$ (cf. sous-section 2.5.2)
pour *i allant de 1 à $n-1$* **faire**
Calculer $\boldsymbol{H}^c_{i,h}$ en fonction de $\boldsymbol{H}^d_{i-1,h}$ par la relation

$$\int_{\Gamma_h} \boldsymbol{H}^c_{i,h} : \boldsymbol{\tau}^c_h \,\mathrm{d}s_h = \int_{\Gamma_h} \boldsymbol{H}^d_{i-1,h} : \boldsymbol{\tau}^c_h \,\mathrm{d}s_h, \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau}^c_h \in X_h^{d\times d}.$$

Puis, calculer $\boldsymbol{H}^d_{i,h}$ en fonction de $\boldsymbol{H}^c_{i,h}$ par la relation

$$\int_{\Gamma_h} \boldsymbol{H}^d_{i,h} : \boldsymbol{\tau}^d_h \,\mathrm{d}s_h = \int_{\Gamma_h} \boldsymbol{H}^c_{i,h} : \boldsymbol{\tau}^d_h \,\mathrm{d}s_h, \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau}^d_h \in N_h^{d\times d}.$$

fin
Calculer $\boldsymbol{H}^c_{n,h}$ en fonction de $\boldsymbol{H}^d_{n-1,h}$ par la relation

$$\int_{\Gamma_h} \boldsymbol{H}^c_{n,h} : \boldsymbol{\tau}^c_h \,\mathrm{d}s_h = \int_{\Gamma_h} \boldsymbol{H}^d_{n-1,h} : \boldsymbol{\tau}^c_h \,\mathrm{d}s_h, \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau}^c_h \in X_h^{d\times d}.$$

fin

Algorithm 1: Calcul de la suite d'approximations continues $\left(\boldsymbol{H}^c_{i,h}\right)_{1\leq i\leq n}$ du tenseur de courbure exacte $\boldsymbol{H}$ de Γ par une méthode de lissage.

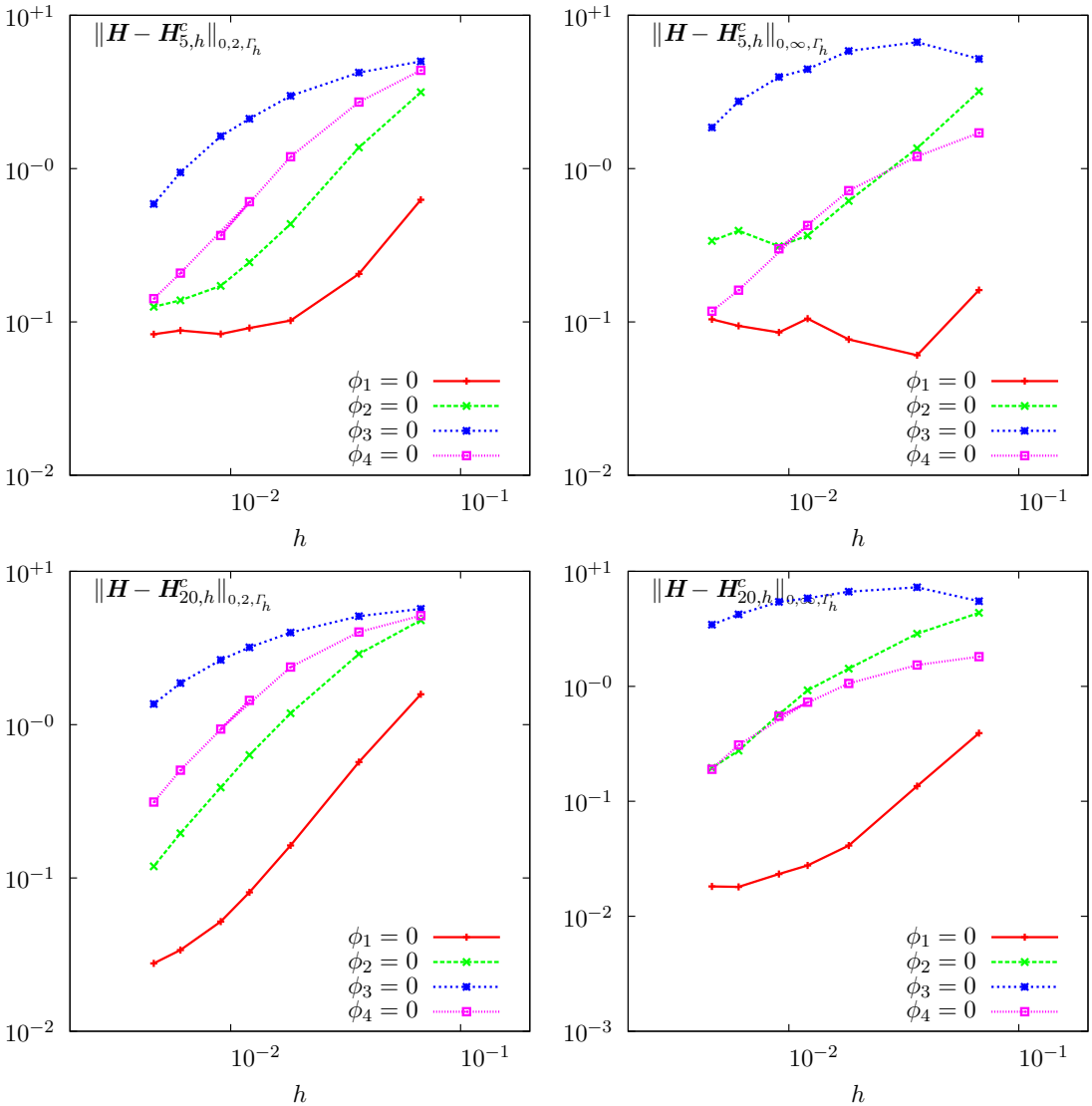
dans ce cas de l'erreur ni en norme L^2, ni en norme L^∞. La fig. 2.11 illustre un contre-exemple pour $n = 5$ dans le cas de la surface (2.4.17a). Donc le nombre d'itérations n doit nécessairement dépendre de la taille caractéristique h de l'approximation Γ_h de Γ. Pour confirmer cette hypothèse, nous avons représenté l'évolution de l'erreur commise sur le tenseur de courbure exacte $\boldsymbol{H}$ en fonction du nombre d'itérations n en norme L^2 et en norme L^∞. Nous présentons les résultats obtenus respectivement sur les figs. 2.12 et 2.13, l'entier s spécifie la subdivision dans chaque direction (cf. le manuel de *rheolef* [Saramito, 2012]). L'inverse de s est une taille caractéristique du maillage considéré. Les résultats obtenus montrent qu'on peut trouver une taille constante h_1 (qui ne dépend a priori que de la surface exacte) à partir de laquelle le profil de l'erreur en fonction du nombre d'itérations n est plutôt parabolique et présentant donc un optimum. Nous observons cela surtout dans les cas des surfaces (2.4.17a), (2.4.17b) et (2.4.17d). Dans le cas de la surface (2.4.17c), les maillages ne sont pas suffisamment fins pour observer le profil parabolique. Compte tenu de ces résultats, le choix optimal serait l'entier naturel qui minimise la suite d'erreurs $\left(\boldsymbol{H}^c_{i,h} - \boldsymbol{H}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ en norme L^2 ou L^∞. Notons par n_2^* et n_∞^* les plus petits entiers naturels non nuls qui minimisent la suite d'erreurs $\left(\boldsymbol{H}^c_{i,h} - \boldsymbol{H}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ respectivement en norme L^2 et en norme L^∞.

Alors :

$$\left\| \boldsymbol{H}^c_{n_p^*,h} - \boldsymbol{H} \right\|_{0,p,\Gamma_h} = \min_{i\geq 1} \left\| \boldsymbol{H}^c_{i,h} - \boldsymbol{H} \right\|_{0,p,\Gamma_h}, \qquad p = 2, \infty. \tag{2.5.3}$$

Les entiers n_2^* et n_∞^* dépendent évidemment de Γ et son approximation Γ_h. Nous présentons sur la fig. 2.14 les erreurs commises sur le tenseur de courbure en norme L^2 et L^∞ en utilisant l'algorithme 1 respectivement pour $n = n_2^*$ et $n = n_\infty^*$. Nous observons une convergence des approximations du tenseur de courbure exact obtenues pour des approximations affines par

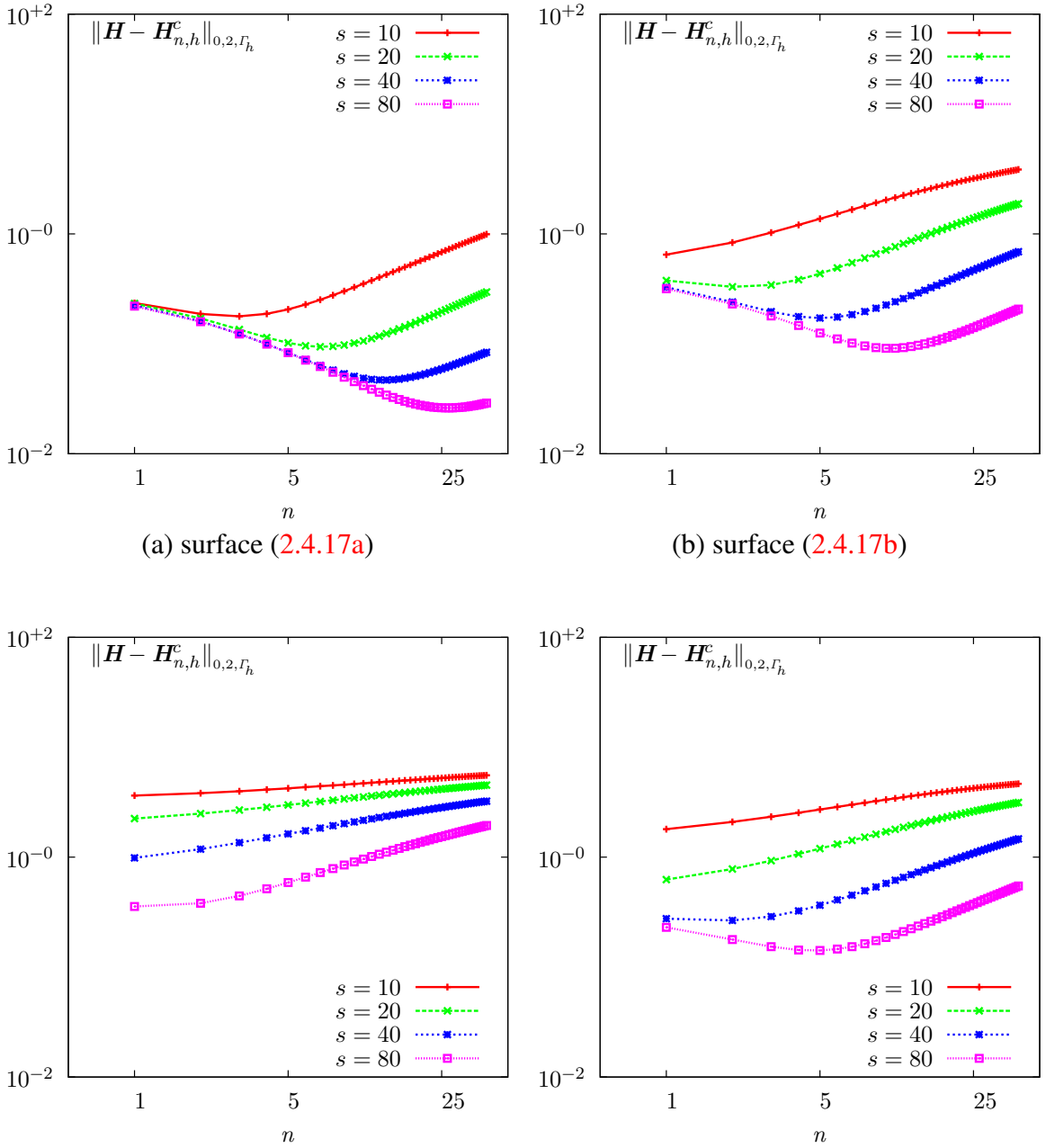
FIGURE 2.11 Erreurs commises en échelle logarithmique sur tenseur de courbure en utilisant l'algorithme 1 pour $n = 5, 20$ en norme L^2 et L^∞ sur des approximations affines par morceaux des surfaces (2.4.17a)-(2.4.17d).



morceaux des surfaces exactes (2.4.17a)-(2.4.17d). Nous obtenons :

$$\begin{aligned}\left\|\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}^c_{n_2^*,h}\right\|_{0,2,\Gamma_h} &\simeq \left\|\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}^c_{n_2^*,h}\right\|_{0,\infty,\Gamma_h} \simeq O(h^\beta)\\ \left\|\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}^c_{n_\infty^*,h}\right\|_{0,2,\Gamma_h} &\simeq \left\|\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}^c_{n_\infty^*,h}\right\|_{0,\infty,\Gamma_h} \simeq O(h^\beta).\end{aligned}$$

FIGURE 2.12 L'évolution de l'erreur commise en échelle logarithmique sur le tenseur de courbure exacte $\boldsymbol{H}$ en fonction du nombre d'itérations n en norme L^2 sur des approximations affines par morceaux des surfaces de niveau zéro (2.4.17a)-(2.4.17d).



(a) surface (2.4.17a)

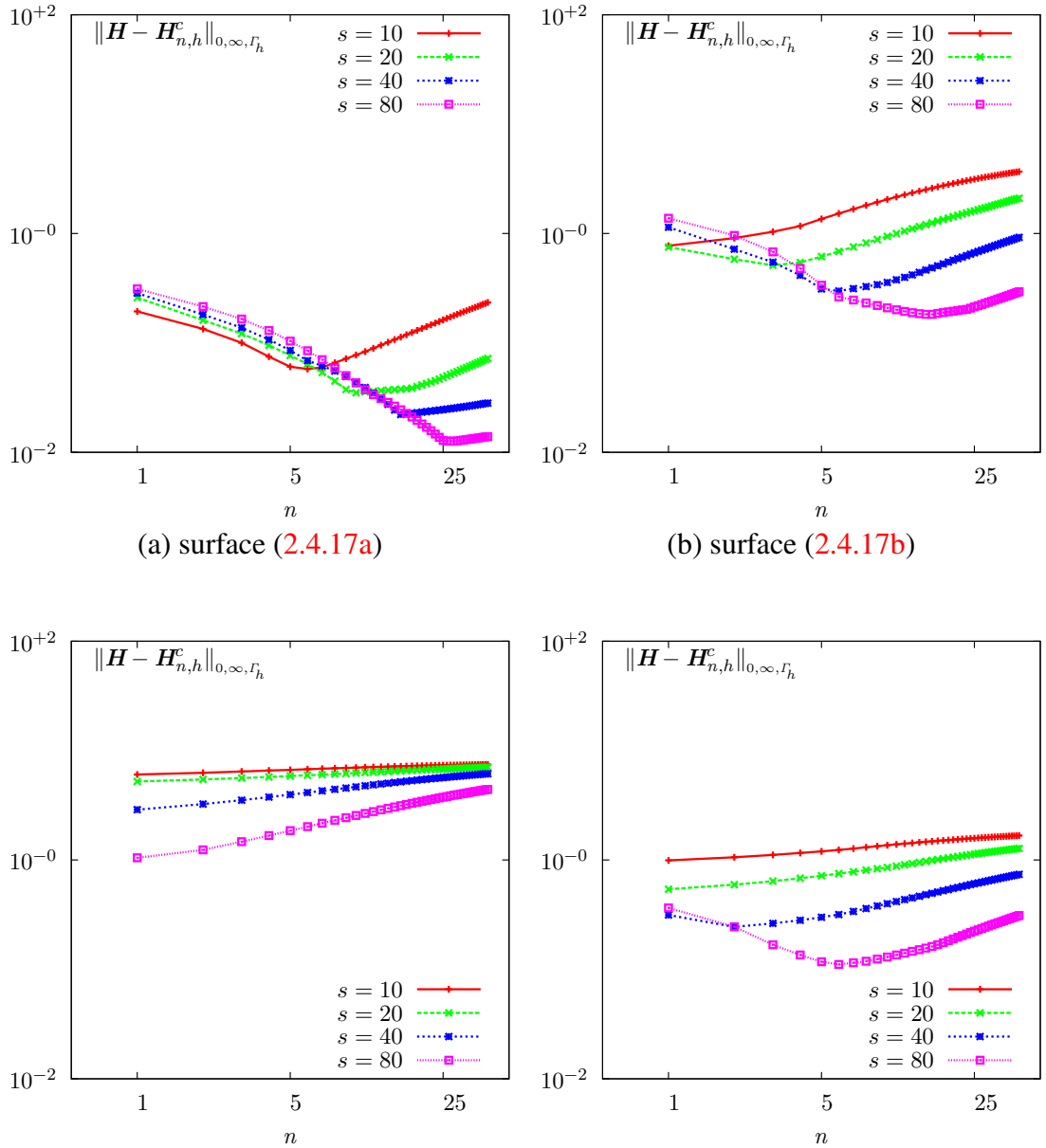
(b) surface (2.4.17b)

(c) surface (2.4.17c)

(d) surface (2.4.17d)

où β est l'ordre de convergence numérique très proche de 1. Donc, ces résultats satisfont notre premier critère pour le choix du nombre d'itérations. Concernant notre deuxième critère (sur le coût de calcul), ces résultats sont moins satisfaisants. En effet, nous pouvons caractériser

FIGURE 2.13 L'évolution de l'erreur commise en échelle logarithmique sur le tenseur de courbure exacte $\boldsymbol{H}$ en fonction du nombre d'itérations n en norme L^∞ sur des approximations affines par morceaux des surfaces de niveau zéro (2.4.17a)-(2.4.17d).



(a) surface (2.4.17a)

(b) surface (2.4.17b)

(c) surface (2.4.17c)

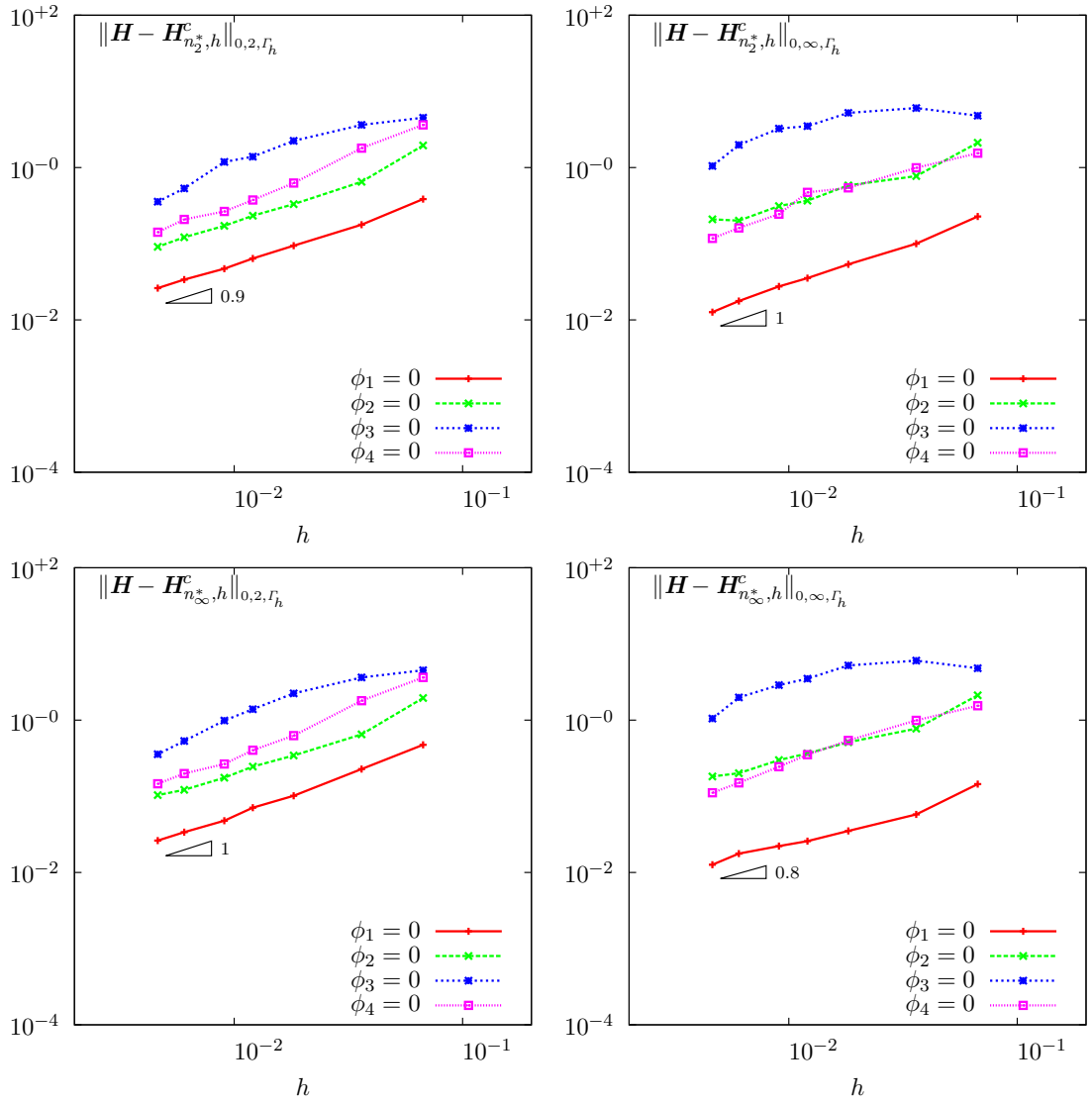
(d) surface (2.4.17d)

numériquement les fonctions $n_2^*(h)$ et $n_\infty^*(h)$ en utilisant la relation (2.4.18) sous la forme :

$$n_p^*(h) = \frac{C_p}{h^m} = C_p N^{\frac{m}{2}}, \qquad p = 2, \infty, \tag{2.5.4}$$

où C_2 et C_∞ sont des constantes qui ne dépendent que la surface exacte et m est un entier naturel. Rappelons que N est le nombre d'éléments de Γ_h. Par exemple, $m \simeq 1$ dans les cas des surfaces (2.4.17a) et (2.4.17b) (illustration sur les figs. 2.15). Donc pour les surfaces (2.4.17a) et (2.4.17b), le coût typique de l'algorithme 1 est d'ordre $N \times N^{\frac{1}{2}}$ donc, plus élevé que le coût typique de

FIGURE 2.14 Erreurs commises en échelle logarithmique sur tenseur de courbure en utilisant l'algorithme 1 pour $n = n_2^*, n_\infty^*$ en norme L^2 et L^∞ sur des approximations affines par morceaux des surfaces (2.4.17a)-(2.4.17d).



la résolution d'un système linéaire à N inconnus ($N \times \log(N)$). Par conséquent, l'avantage de faire le choix de n_2^* ou n_∞^* comme nombre d'itérations est d'obtenir des approximations très précises du tenseur de courbure $\boldsymbol{H}$ mais cela demande un coût de calcul très élevé. L'alternative logique pour avoir un coût typique d'ordre $N \times \log(N)$ est de choisir comme nombre d'itérations la fonction entière $n_{\log}$ définie par :

$$n_{\log}(h) \;=\lfloor -\frac{1}{2}\log(h)\rfloor \;=\; \lfloor \log(N)\rfloor. \tag{2.5.5}$$

Les résultats obtenus en utilisant l'algorithme 1 pour $n = n_{\log}$ sont présentés sur la fig. 2.16. Nous observons une convergence de l'approximation $\boldsymbol{H}^c_{n_{\log},h}$ du tenseur de courbure exact obtenue pour des approximations affines par morceaux des surfaces exactes (2.4.17a)-(2.4.17d). Ces résultats sont analogues à ceux obtenus dans les cas de n_2^* et n_∞^* (ordre de convergence numérique proche de 1) avec un coût de calcul réduit. Le choix de $n_{\log}$ comme nombre d'itérations de l'algorithme 1 a l'avantage d'être le moins coûteux avec un coût typique qui est d'ordre de $N\log(N)$ (coût de résolution d'un système linéaire à N inconnus). Ce choix est donc celui qui respecte nos critères définis ci-dessus c'est à dire convergence de l'algorithme 1 dans le cas des approximations affines par morceaux avec un coût de calcul raisonnable.

2.5.3 Tests numériques pour approximations isoparamétriques

Nous présentons ici les résultats de tests numériques obtenus en utilisant l'algorithme de lissage 1 sur des approximations de degré polynomial $k = 1, 2, 3, 4$ des surfaces (2.4.17a)-(2.4.17d). Les figs. 2.17-2.20 représentent respectivement les erreurs en norme L^2 et L^∞ entre $\boldsymbol{H}$ et $\boldsymbol{H}^c_{n_{\log},h}$ pour les quatre surfaces (2.4.17a)-(2.4.17d). On observe une convergence de l'erreur en norme L^2

FIGURE 2.15 Les courbes des fonctions $n_2^*(h)$ et $n_\infty^*(h)$ en échelle logarithmique sur des approximations affines par morceaux des surfaces de niveau zéro (2.4.17a)-(2.4.17b).

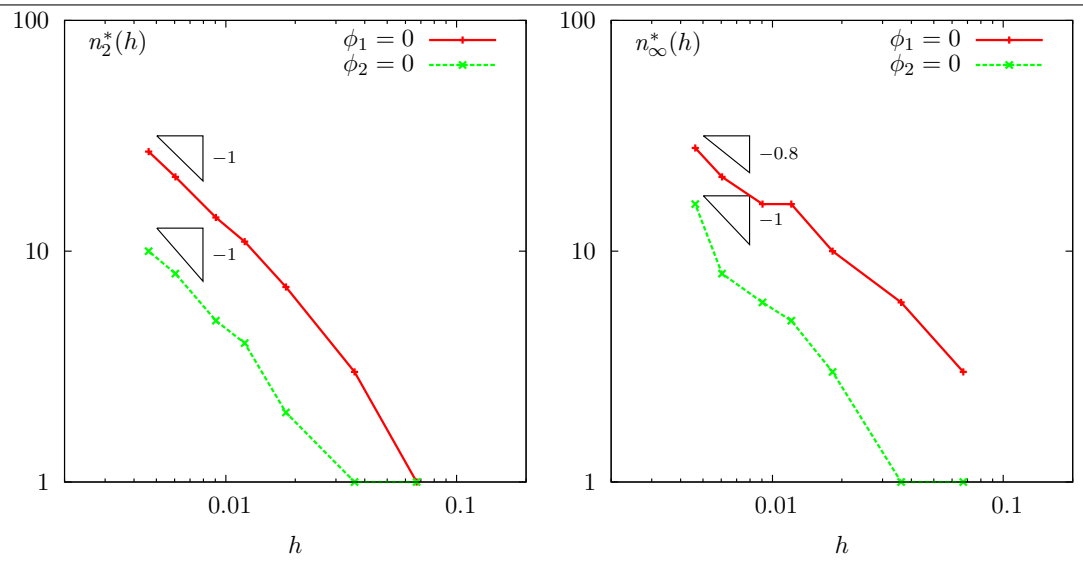


FIGURE 2.16 Erreurs commises en échelle logarithmique sur le tenseur de courbure en utilisant l'algorithme 1 pour $n = n_{\log}$ en norme L^2 et L^∞ sur des approximations affines par morceaux des surfaces (2.4.17a)-(2.4.17d).

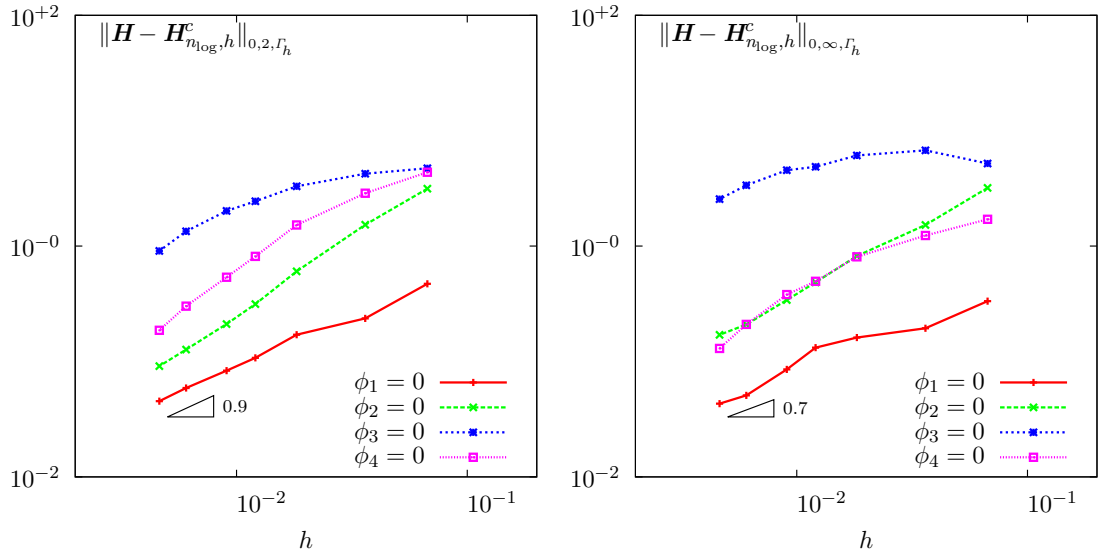
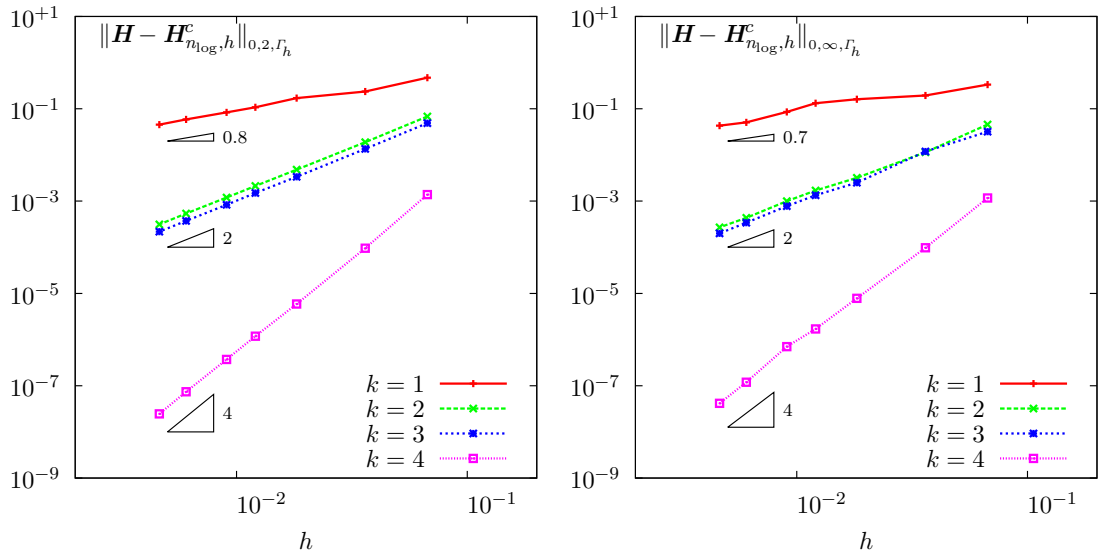


FIGURE 2.17 Erreurs commises en échelle logarithmique sur le tenseur de courbure en utilisant l'algorithme 1 pour $n = n_{\log}$ en norme L^2 et L^∞ sur des approximations de degré polynomial k de la surface (2.4.17a).



et L^∞ pour $k \geq 1$. Plus précisément, nous observons que l'ordre de convergence numérique β est proche de k pour les surfaces (2.4.17a) et (2.4.17b) sauf pour $k = 3$ où $\beta \simeq k - 1 = 2$. pour la surface (2.4.17c), nous retrouvons $\beta \simeq k$ sauf pour $k = 4$ où on observe $\beta \simeq k - 1 = 3$. Pour la

FIGURE 2.18 Erreurs commises en échelle logarithmique sur le tenseur de courbure en utilisant l'algorithme 1 pour $n = n_{\log}$ en norme L^2 et L^∞ sur des approximations de degré polynomial k de la surface (2.4.17b).

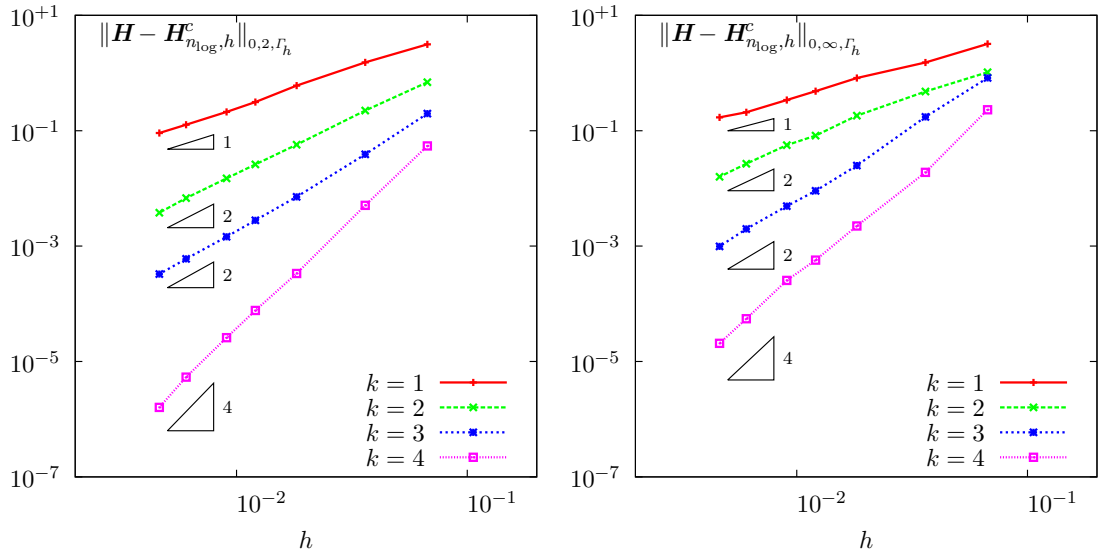
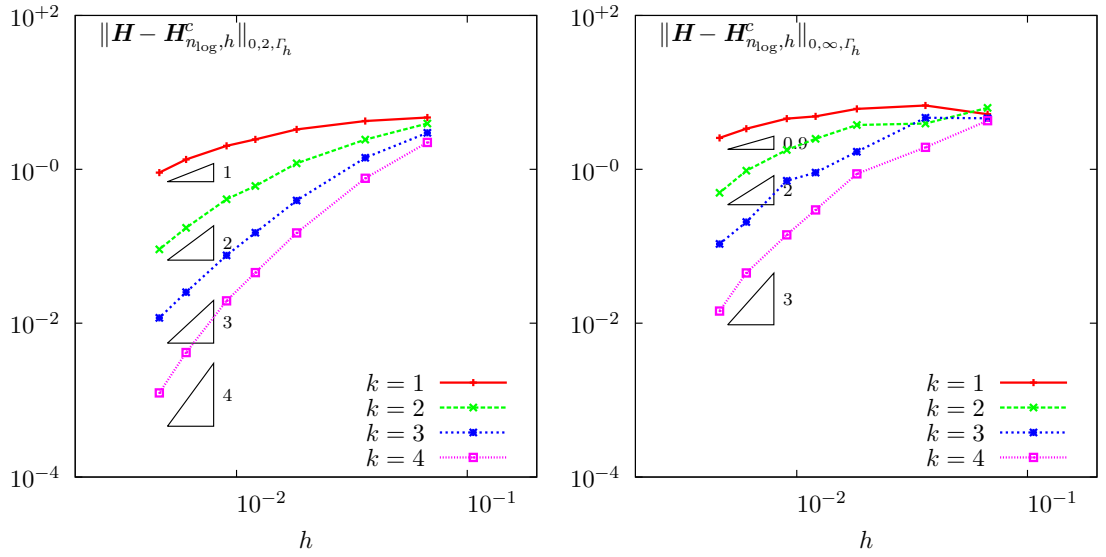


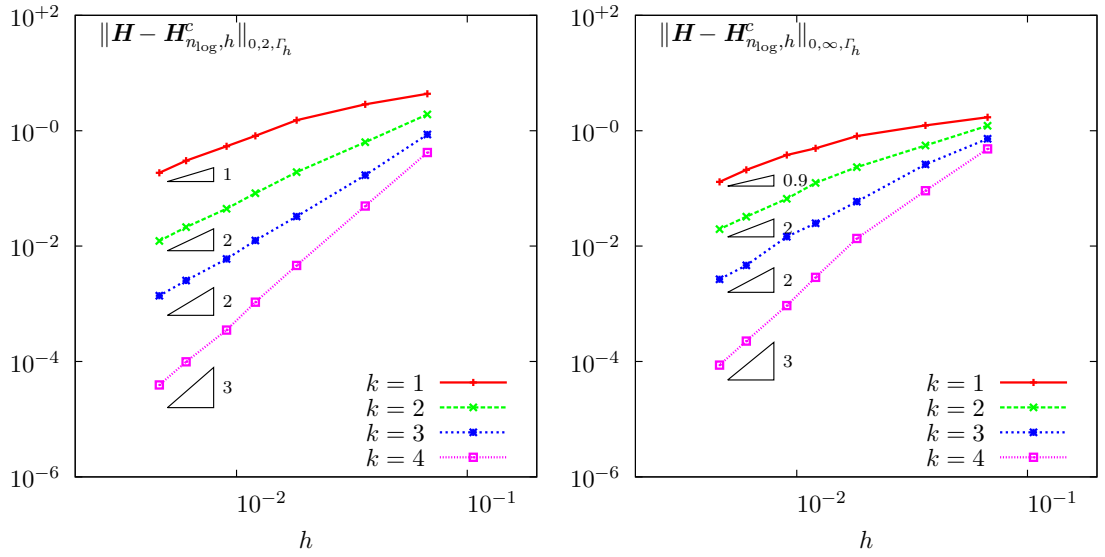
FIGURE 2.19 Erreurs commises en échelle logarithmique sur le tenseur de courbure en utilisant l'algorithme 1 pour $n = n_{\log}$ en norme L^2 et L^∞ sur des approximations de degré polynomial k de la surface (2.4.17c).



surface (2.4.17d), nous obtenons :

$$\beta \simeq \begin{cases} k & \text{si } k \leq 2 \\ k-1 & \text{si } k > 2. \end{cases}$$

FIGURE 2.20 Erreurs commises en échelle logarithmique sur le tenseur de courbure en utilisant l'algorithme 1 pour $n = n_{\log}$ en norme L^2 et L^∞ sur des approximations de degré polynomial k de la surface (2.4.17d).



Ce dernier résultat sur la surface (2.4.17d) permet de mieux comprendre ceux obtenus sur les autres surfaces. En effet, ce qu'on observe pour $k = 4$ sur les surfaces (2.4.17a) et (2.4.17b) et pour $k = 3$ sur la surface (2.4.17c) est une superconvergence. Globalement, en utilisant l'algorithme de lissage pour $n = n_{\log}$, nous obtenons :

$$\left\|\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}^c_{n_{\log},h}\right\|_{0,2,\Gamma_h} = O(h^m)$$
$$\left\|\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}^c_{n_{\log},h}\right\|_{0,\infty,\Gamma_h} = O(h^m)$$

où

$$m \simeq \begin{cases} k & \text{si } k \leq 2 \\ k-1 & \text{si } k > 2. \end{cases}$$

Cela signifie que par rapport à l'analyse de convergence théorique présentée dans la section 2.4, l'algorithme 1, permet de gagner un ordre de convergence pour les approximations polynomiales par morceaux de degré 1 et 2. En revanche, pour les approximations polynomiales par morceaux de degré supérieur ($k > 2$), nous retrouvons des résultats analogues avec la méthode de lissage que ceux obtenus numériquement par l'approximation de la définition 2.2.

En résumé :

Nos résultats numériques obtenus par la méthode de lissage sur les figures 2.17-2.20 montrent des améliorations en terme de vitesse de convergence pour $k \leq 2$ par rapport à nos analyses de convergence théorique et numérique de la section 2.4. Pour les degrés supérieurs ($k > 2$), il n'y a pas d'interêt d'utiliser l'algorithme 1 pour approcher le tenseur de courbure. Mieux vaut utiliser la définition 2.2.

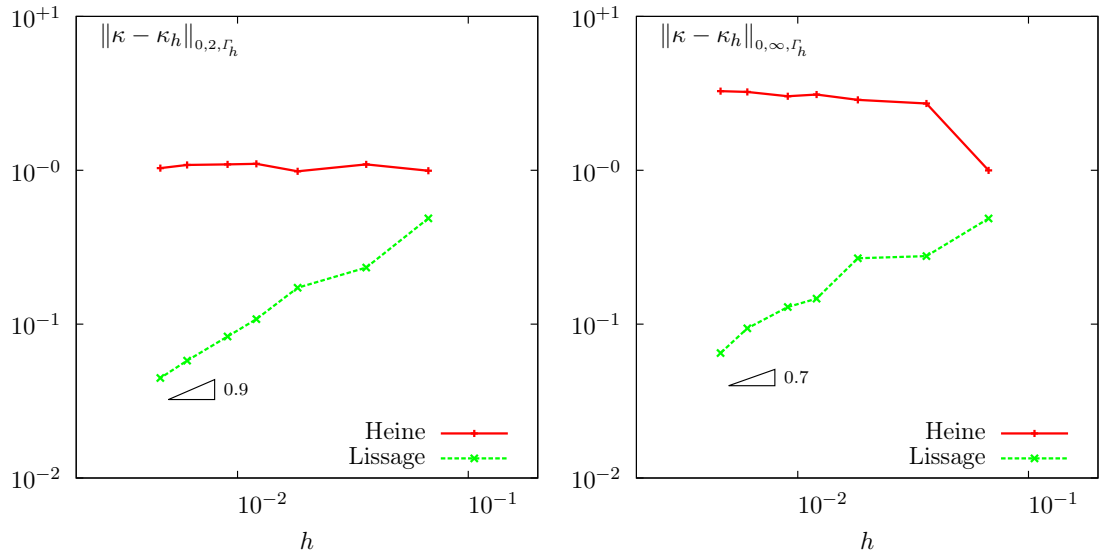
2.6 Comparaison avec d'autres méthodes

L'objectif de cette section est de comparer respectivement notre méthode d'approximation de courbure et celles de [Heine, 2004] et de [Cazals and Pouget, 2003]. Le principal axe de comparaison sera la convergence numérique de la courbure moyenne pour les approximations affines par morceaux. Ces comparaisons seront faites sur la sphere unité (surface (2.4.17a)).

2.6.1 Méthode de Heine

Avec la définition 2.2, nous avons obtenu des résultats théoriques et numériques analogues à ceux obtenus dans [Heine, 2004] sur l'approximation de la courbure. La différence se situe au niveau de généralisation de la définition 2.2 avec l'algorithme de lissage qui nous permet d'avoir la convergence de la courbure pour les approximations affines par morceaux. La fig. 2.21 illustre l'amélioration (numérique) que nous apportons sur la méthode [Heine, 2004] pour les approximations affines par morceaux. Pour les degrés supérieurs, il n'y a pas d'amélioration significative par rapport aux résultats obtenus dans [Heine, 2004].

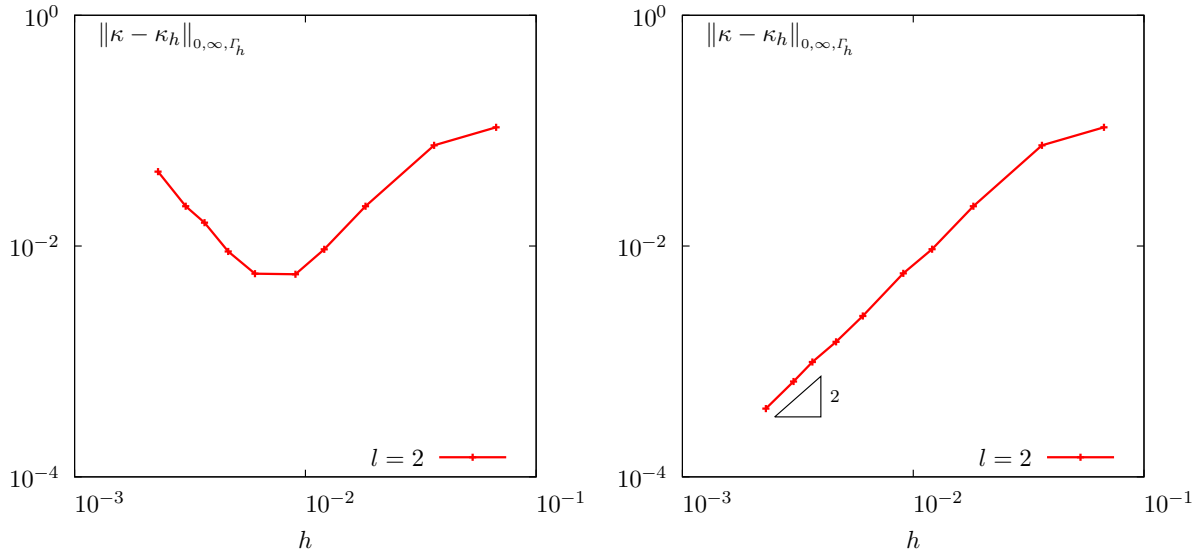
FIGURE 2.21 Erreurs commises en échelle logarithmique sur la courbure moyenne en norme L^2 et L^∞ en utilisant des approximations affines par morceaux de la sphère unité.



2.6.2 Méthode de Cazals et Pouget

Cette méthode a été étudiée et testée uniquement pour les nuages de points et les approximations affines par morceaux. Cazals et Pouget ont démontré dans [Cazals and Pouget, 2003] qu'une approximation polynomiale de degré l du tenseur de courbure converge en $O(h^{l-1})$. Donc comme nous, leur méthode ne converge pas pour $l = 1$. Mais, avec cette méthode on peut varier le degré polynomial l. La méthode a été validée dans [Cazals and Pouget, 2003] pour $2 \leq l \leq 9$. De plus, le coût de leur algorithme est $O(N)$. L'inconvénient de la méthode est sa sensibilité à la precision des coordonnées des points du maillage (illustration sur la fig. 2.22).

FIGURE 2.22 Erreur en échelle logarithmique sur la courbure moyenne en norme L^∞ en utilisant des approximations affines par morceaux de la sphère unité.



(a) Simple précision (b) Double précision

Chapitre 3

Éléments finis pour des écoulements tangentiels à des surfaces courbes

Sommaire

3.1 Position du problème **70**
3.2 Méthode de pénalisation **71**
3.3 Problème continu **72**
3.3.1 Formulation variationnelle 73
3.3.2 Existence et unicité de la solution du problème continu 74
3.4 Problème discret **81**
3.4.1 Discrétisation par la méthode des éléments finis 81
3.4.2 Relations entre les opérateurs discrets et continus 82
3.4.3 Existence et unicité de la solution du problème discret 90
3.4.4 Problème discret équivalent sur la surface exacte 92
3.5 Estimations d'erreur **94**
3.5.1 Estimation des erreurs géométriques 94
3.5.2 Estimation en norme de l'énergie 95
3.6 Tests et validations numériques **100**
3.6.1 Convergence en norme H^1 101
3.6.2 Convergence en norme L^2 et L^∞ 101
3.7 Conclusion **102**

Dans ce chapitre, nous développons une nouvelle approche éléments finis pour des équations aux dérivées partielles elliptiques de type Stokes tangentiel sur une surface fermée sans bord. La surface considérée est décrite implicitement par le zéro d'une fonction de niveau assez régulière (cf. sous-section 2.2.2). Le problème se ramène à la minimisation d'une fonctionnelle énergie sous contrainte pour le champ de vitesse. Nous abordons ce problème en introduisant un terme de pénalisation dont nous présentons pour la première fois l'analyse théorique et numérique. Nous montrons des estimations d'erreur a priori sur la solution discrète. Nous présentons aussi des tests numériques pour la validation.

3.1 Position du problème

Soit Γ une surface fermée sans bord ($\partial\Gamma = \emptyset$) contenue dans $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ comme décrite dans le chapitre 2. Soient $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{H}$ respectivement la normale à Γ, le vecteur courbure et le tenseur de courbure de la surface Γ. Nous supposons que la surface Γ est assez régulière pour obtenir :

$$\boldsymbol{n} \in \left(L^\infty(\Gamma)\right)^d, \boldsymbol{y} \in \left(L^\infty(\Gamma)\right)^d \text{ et } \boldsymbol{H} \in \left(L^\infty(\Gamma)\right)^{d\times d}.$$

Autrement dit, la surface Γ est supposée être au moins de classe C^2. Soit $H(\Gamma)$ le sous-espace vectoriel des champs vectoriels tangent à la surface Γ de $\left(H^1(\Gamma)\right)^d$:

$$H(\Gamma) = \left\{\boldsymbol{v} \in \left(H^1(\Gamma)\right)^d \mid \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = 0\right\}. \tag{3.1.1}$$

Nous nous intéressons ici à l'écoulement tangentiel de type Stokes sur la surface Γ d'un fluide newtonien de viscosité de cisaillement η et de viscosité de compression λ. Nous supposons que l'équilibre mécanique du système qui gouverne la vitesse de l'écoulement du fluide peut s'écrire mathématiquement sous la forme :

Problème 3.1 (Problème de minimisation sous contrainte)**.** *Trouver $\boldsymbol{u} \in H(\Gamma)$ tel que :*

$$\boldsymbol{u} = \arg\inf_{\boldsymbol{v}\in H(\Gamma)} E(\boldsymbol{v}).$$

où E est l'énergie dissipée dans le fluide considéré que l'on définit par :

$$E(\boldsymbol{v}) = \int_\Gamma \frac{c_f}{2}|\boldsymbol{v}|^2 \,\mathrm{ds} + \int_\Gamma \eta\,|\mathbf{D}_\Gamma(\boldsymbol{v})|^2 \,\mathrm{ds} + \int_\Gamma \frac{\lambda}{2}|\mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{v})|^2 \,\mathrm{ds} - \int_\Gamma \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{ds}. \tag{3.1.2}$$

Il s'agit de trouver un champ vectoriel $\boldsymbol{u} \in \left(H^1(\Gamma)\right)^d$ qui minimise l'énergie E sous la contrainte :

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \text{ sur } \Gamma. \tag{3.1.3}$$

Dans l'expression de l'énergie, les opérateurs $\mathbf{D}_\Gamma$ et div_Γ sont définis dans le chapitre 1, le champ vectoriel $\boldsymbol{f}$ représente les forces extérieures et c_f est le coefficient de friction. Le premier

terme dans l'expression de l'énergie correspond à l'énergie de friction, le second terme est l'énergie de déformation plane, le troisième terme correspond à l'énergie de compression (qui provient des éventuels changements d'aire de Γ sous l'effet d'une compression) et le dernier terme correspond à l'énergie injectée dans le système par les forces externes. Du point de vue mécanique et mathématique, le problème continu 3.1 est bien posé (cf. [Ciarlet, 2002]). Mais, ce problème tel qu'il est posé présente des difficultés numériques par rapport à la méthode des éléments finis. En effet, pour résoudre le problème continu 3.1 numériquement, il faut des espaces éléments finis dans lesquels la contrainte (3.1.3) est fortement imposée. C'est la méthode utilisée par exemple dans [Destuynder and Salaün, 1995a]. Il y a aussi une variante qui a été utilisée dans [Hecht, 1981] pour les écoulements de Stokes classiques. Cela nécessite la construction de bases polynomiales directement tangents pour l'espace $H(\Gamma)$, qui est assez délicate. Peu de travaux ont suivi ceux de [Destuynder and Salaün, 1995a] et [Hecht, 1981] et les résultats obtenus présentent peu d'avantages. Il existe d'autres moyens comme la formulation utilisant une fonction de courant (cf. [Nitschke et al., 2012a]), qui est une méthode utilisée pour des écoulements de fluides incompressibles. Notre objectif ici, est de reformuler le problème 3.1 sans la contrainte (3.1.3) afin d'éviter les difficultés numériques mentionnées ci-dessus. Pour cela, il existe deux alternatives : méthode de pénalisation ou méthode de multiplicateurs de Lagrange. Dans ce chapitre, nous proposons une méthode de pénalisation pour reformuler le problème 3.1 sur $(H^1(\Gamma))^d$ tout entier. Cette méthode de pénalisation est décrite dans la section suivante. Nous nous limitons dans ce chapitre à l'étude des écoulements tangentiels de fluides compressibles. Les écoulements tangentiels de fluides incompressibles seront traités en détail dans le chapitre 4 en utilisant une méthode de multiplicateurs de Lagrange.

3.2 Méthode de pénalisation

L'objectif de cette section est de reformuler le problème 3.1 sans la contrainte (3.1.3). Dans cette optique, nous décrivons une méthode de pénalisation qui est une technique assez classique permettant d'analyser théoriquement (existence et unicité de solution) ou numériquement des problèmes de minimisations avec contrainte(s). La pénalisation consiste à transformer le problème avec contrainte(s) en un problème ou plusieurs problèmes de minimisation sans contrainte. On peut consulter par exemple les références [Bonnans et al., 2006], [Bertsekas, 1999] ou [Bertsekas and Tsitsiklis, 1997] pour plus de détails sur la méthode de pénalisation et les problèmes de minimisation ou d'optimisation en général.

Dans le cas du problème 3.1, l'idée est de remplacer l'énergie E qui ne nous permet pas de contrôler les déformations normales, par une nouvelle énergie qui pourra les contrôler. Nous définissons ici cette énergie notée E_γ définie à partir de E par la relation :

$$E_\gamma(\boldsymbol{v}) = E(\boldsymbol{v}) + \gamma E_p(\boldsymbol{v}), \tag{3.2.1}$$

où γ est un nombre réel strictement positif appelé paramètre de pénalisation et E_p est la fonction de pénalisation. Il y a plusieurs manières de choisir cette fonction de pénalisation. Nous la choisissons

ici comme suit :

$$E_p(\boldsymbol{v}) = \int_\Gamma \frac{1}{2} \left|\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{v}\right)\right|^2 \mathrm{ds}, \tag{3.2.2}$$

où $\boldsymbol{L} : \left(H^1\left(\Gamma\right)\right)^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est l'opérateur défini par :

$$\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{v}\right) = \mathbf{div}_\Gamma^*\left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\right) = \left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{v} - \mathbf{grad}_\Gamma^T\left(\boldsymbol{v}\right)\boldsymbol{n}, \tag{3.2.3}$$

où div_Γ^* désigne l'opérateur adjoint de l'opérateur div_Γ (cf. définition 1.15, page 20). Cette fonction de pénalisation a les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} E_p \text{ est continue sur } \left(H^1\left(\Gamma\right)\right)^d, \\ \forall\, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^d : E_p(\boldsymbol{v}) \geq 0, \\ E_p(\boldsymbol{v}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{v} \in H\left(\Gamma\right). \end{cases} \tag{3.2.4}$$

La dernière propriété est une conséquence de la relation (1.5.1) (page 20). En outre, pour $\boldsymbol{v}$ donné, la fonction de pénalisation E_p peut être interprétée comme une énergie qui ne dépend que de la composante normale de $\boldsymbol{v}$. Donc par la relation (3.2.1), l'énergie E_γ s'interprète comme une énergie pénalisée permettant de contrôler toutes les composantes de $\boldsymbol{v}$ via le paramètre de pénalisation γ.

Remarque 3.1. *Les énergies E et E_γ sont égales si et seulement si l'écoulement est tangentiel, c'est à dire que la contrainte* (3.1.3) *est satisfaite.*

Considérons maintenant le problème de minimisation suivant pour γ fixé :

Problème 3.2 (Problème de minimisation sans contrainte)**.** *Trouver $\boldsymbol{u}_\gamma \in \left(H^1\left(\Gamma\right)\right)^d$ tel que :*

$$\boldsymbol{u}_\gamma = \arg \inf_{\boldsymbol{v}\in\left(H^1(\Gamma)\right)^d} E_\gamma(\boldsymbol{v}).$$

Il est clair que les problèmes 3.1 et 3.2 ne sont pas équivalents quel que soit le choix γ. Mais sous les propriétés (3.2.4), on peut vérifier que la suite de solutions $(\boldsymbol{u}_\gamma)_{\gamma>0}$ converge vers une solution du problème 3.1 (cf. [Polyak, 1971], [Kleinmichel, 1972] par exemple). Autrement dit, le problème 3.2 est une approximation convergente du problème 3.1 quand le paramètre de pénalisation tend vers l'infini. Par rapport au problème 3.1, le problème 3.2 a l'avantage d'être sans contrainte, donc il est simple à étudier théoriquement et numériquement.

3.3 Problème continu

Dans cette section, l'objectif est d'étudier l'existence et l'unicité de la solution associée au problème de minimisation 3.2. Pour cela, nous allons d'abord écrire le problème 3.2 sous formulation variationnelle, ensuite utiliser le théorème de Lax-Milgram (cf. par exemple [Brezis, 1983]).

3.3.1 Formulation variationnelle

Soit $\boldsymbol{u}_\gamma \in (H^1(\Gamma))^d$ une solution du problème 3.2. alors $\boldsymbol{u}_\gamma$ vérifie

$$\frac{dE_\gamma}{d\boldsymbol{u}_\gamma}(\boldsymbol{u}_\gamma) = 0.$$

Comme l'énergie E_γ est quadratique et dérivable en $\boldsymbol{u}_\gamma$, alors cette dernière équation s'écrit :

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{E_\gamma(\boldsymbol{u}_\gamma + \epsilon\boldsymbol{v}) - E_\gamma(\boldsymbol{u}_\gamma)}{\epsilon} = 0, \qquad \forall\, \boldsymbol{v} \in \left(H^1(\Gamma)\right)^d.$$

Il s'agit d'une dérivée directionnelle. En utilisant l'expression de E_γ dans le problème de minimisation 3.2, nous avons

$$\begin{aligned} E_\gamma(\boldsymbol{u}_\gamma + \epsilon\boldsymbol{v}) = &\int_\Gamma \frac{c_f}{2} \left|\boldsymbol{u}_\gamma + \epsilon\boldsymbol{v}\right|^2 \mathrm{ds} + \int_\Gamma \eta \left|\mathbf{D}_\Gamma\left(\boldsymbol{u}_\gamma + \epsilon\boldsymbol{v}\right)\right|^2 \mathrm{ds} + \int_\Gamma \frac{\lambda}{2} \left|\mathrm{div}_\Gamma\left(\boldsymbol{u}_\gamma + \epsilon\boldsymbol{v}\right)\right|^2 \mathrm{ds} \\ &+ \int_\Gamma \frac{\gamma}{2} \left|\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{u}_\gamma + \epsilon\boldsymbol{v}\right)\right|^2 \mathrm{ds} - \int_\Gamma \boldsymbol{f}\cdot\left(\boldsymbol{u}_\gamma + \epsilon\boldsymbol{v}\right) \mathrm{ds}. \end{aligned}$$

En utilisant la linéarité des opérateurs considérés, nous obtenons

$$E_\gamma(\boldsymbol{u}_\gamma + \epsilon\boldsymbol{v}) = E_\gamma(\boldsymbol{u}_\gamma) + \epsilon(a(1;\boldsymbol{u}_\gamma,\boldsymbol{v}) - \ell(1;\boldsymbol{v})) + \epsilon^2 E_\gamma(\boldsymbol{v})$$

où $a : L^\infty(\Gamma) \times (H^1(\Gamma))^d \times (H^1(\Gamma))^d \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\ell : L^\infty(\Gamma) \times (L^2(\Gamma))^d \longrightarrow \mathbb{R}$ sont respectivement les formes trilinéaire et bilinéaire définies par

$$\begin{aligned} a(\mu;\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}) = &\int_\Gamma c_f \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}\,\mu\mathrm{ds} + \int_\Gamma 2\eta\mathbf{D}_\Gamma(\boldsymbol{w}) : \mathbf{D}_\Gamma(\boldsymbol{v})\,\mu\mathrm{ds} + \int_\Gamma \lambda\mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{w})\,\mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{v})\,\mu\mathrm{ds} \\ &+ \int_\Gamma \gamma\boldsymbol{L}(\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{L}(\boldsymbol{v})\,\mu\mathrm{ds}, \end{aligned} \tag{3.3.1a}$$

$$\ell(\mu;\boldsymbol{v}) = \int_\Gamma \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,\mu\mathrm{ds}. \tag{3.3.1b}$$

Nous verrons l'interêt de ces notations particulières notamment la présence de $\mu \in L^\infty(\Gamma)$ dans la définition des formes a et ℓ dans les sections 3.4 et 3.5. Par suite, nous avons :

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{E_\gamma(\boldsymbol{u}_\gamma + \epsilon\boldsymbol{v}) - E_\gamma(\boldsymbol{u}_\gamma)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0}\left(a(1;\boldsymbol{u}_\gamma,\boldsymbol{v}) - \ell(1;\boldsymbol{v}) + \epsilon E_\gamma(\boldsymbol{v})\right) = a(1;\boldsymbol{u}_\gamma,\boldsymbol{v}) - \ell(1;\boldsymbol{v}).$$

Donc le problème 3.2 est équivalent au problème suivant :

Problème 3.3 (Formulation variationnelle continue)**.** *Trouver* $\boldsymbol{u}_\gamma \in (H^1(\Gamma))^d$ *tel que :*

$$a(1;\boldsymbol{u}_\gamma,\boldsymbol{v}) = \ell(1;\boldsymbol{v}), \qquad \forall\, \boldsymbol{v} \in \left(H^1(\Gamma)\right)^d.$$

Remarque 3.2. *Si $\boldsymbol{u}_\gamma \in (H^2(\Gamma))^d$ alors en utilisant les formules de Green surfaciques (cf. section 1.4, page 17), nous pouvons monter que le problème 3.3 correspond à la formulation variationnelle du problème suivant :*

Problème 3.4 (Formulation forte)**.** *Trouver $\boldsymbol{u}_\gamma \in (H^2(\Gamma))^d$ tel que :*

$$c_f \boldsymbol{u}_\gamma - \mathbf{div}_\Gamma \left(2\eta \mathbf{D}_\Gamma(\boldsymbol{u}_\gamma) + \lambda \mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{u}_\gamma)\mathbf{P}\right) + \gamma \mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{L}(\boldsymbol{u}_\gamma))\boldsymbol{n} = \boldsymbol{f} \qquad \text{sur } \Gamma.$$

Remarque 3.3. *Si $c_f = 0$ alors pour tout $\boldsymbol{u}_0$ appartenant l'intersection des noyaux de $\mathbf{D}_\Gamma$ et $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{u}_\gamma + \boldsymbol{u}_0$ est une solution du problème 3.3. Autrement dit, les solutions du problème 3.3 sont déterminées à une translation et rotation tangente près (cf. annexe A).*

3.3.2 Existence et unicité de la solution du problème continu

Dans le but de démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème 3.3, nous avons besoin de quelques résultats préliminaires :

- la continuité de a sur $L^\infty(\Gamma) \times (H^1(\Gamma))^d \times (H^1(\Gamma))^d$,
- la continuité de ℓ sur $L^\infty(\Gamma) \times (L^2(\Gamma))^d$,
- et la coercivité de $a(1;\cdot,\cdot)$ sur $(H^1(\Gamma))^d$.

Nous faisons les hypothèses suivantes :

Hypothèse 3.1. *Les paramètres sont tels que*

- *c_f et λ sont des nombres réels positifs ou nuls,*
- *η et γ sont des nombres réels strictement positifs,*

Le terme source $\boldsymbol{f}$ appartient à $(L^\infty(\Gamma))^d$.

Notons par $|\cdot|_a$ la semi norme associée à la forme bilinéaire $a(1;\cdot,\cdot)$:

$$|\boldsymbol{v}|_a = \sqrt{a(1;\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})}, \qquad \forall\, \boldsymbol{v} \in \left(H^1(\Gamma)\right)^d. \tag{3.3.2}$$

Lemme 3.1. *Sous l'hypothèse 3.1, il existe une constante strictement positive C ne dépendant que de Γ et des paramètres c_f, η, λ et γ, telle que*

$$|\boldsymbol{v}|_a \leq C \|\boldsymbol{v}\|_{1,2,\Gamma} \qquad \forall\, \boldsymbol{v} \in \left(H^1(\Gamma)\right)^d.$$

Démonstration. Soit $\boldsymbol{v} \in (H^1(\Gamma))^d$. Par définition de a, nous avons :

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{v}|_a^2 &= a(1;\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) \\ &= c_f \|\boldsymbol{v}\|_{0,2,\Gamma}^2 + 2\eta \|\mathbf{D}_\Gamma(\boldsymbol{v})\|_{0,2,\Gamma}^2 + \lambda \|\mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{v})\|_{0,2,\Gamma}^2 + \gamma \|\boldsymbol{L}(\boldsymbol{v})\|_{0,2,\Gamma}^2. \end{aligned}$$

Nous avons d'une part par définition de $\mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{v}) = \mathrm{tr}(\mathbf{D}_{\Gamma}(\boldsymbol{v}))$, cela implique que :

$$\|\mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{v})\|_{0,2,\Gamma} \leq \|\mathbf{D}_{\Gamma}(\boldsymbol{v})\|_{0,2,\Gamma},$$

et d'autre part, par définition (cf. définition 1.10, page 12) :

$$2\mathbf{D}_{\Gamma}(\boldsymbol{v}) = \mathbf{Pgrad}_{\Gamma}(\boldsymbol{v}) + \left(\mathbf{Pgrad}_{\Gamma}(\boldsymbol{v})\right)^{T},$$

nous obtenons, de l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} 2\|\mathbf{D}_{\Gamma}(\boldsymbol{v})\|_{0,2,\Gamma} &\leq \left\|\mathbf{Pgrad}_{\Gamma}(\boldsymbol{v})\right\|_{0,2,\Gamma} + \left\|\left(\mathbf{Pgrad}_{\Gamma}(\boldsymbol{v})\right)^{T}\right\|_{0,2,\Gamma} \\ &\leq 2\left\|\mathbf{Pgrad}_{\Gamma}(\boldsymbol{v})\right\|_{0,2,\Gamma} \\ &\leq 2\|\mathbf{P}\|_{0,\infty,\Gamma}\left\|\mathbf{grad}_{\Gamma}(\boldsymbol{v})\right\|_{0,2,\Gamma}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, en utilisant une seconde fois l'inégalité triangulaire, nous avons :

$$\|\mathbf{P}\|_{0,\infty,\Gamma} \leq \underbrace{\|\boldsymbol{I}\|_{0,\infty,\Gamma}}_{=1} + \underbrace{\|\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}\|_{0,\infty,\Gamma}}_{=1} = 2.$$

Par suite, nous avons :

$$\|\mathbf{D}_{\Gamma}(\boldsymbol{v})\|_{0,2,\Gamma} \leq 2\left\|\mathbf{grad}_{\Gamma}(\boldsymbol{v})\right\|_{0,2,\Gamma}.$$

Donc, sous l'hypothèse 3.1, nous avons :

$$\begin{aligned} 2\eta\|\mathbf{D}_{\Gamma}(\boldsymbol{v})\|_{0,2,\Gamma}^{2} + \lambda\|\mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{v})\|_{0,2,\Gamma}^{2} &\leq (2\eta+\lambda)\|\mathbf{D}_{\Gamma}(\boldsymbol{v})\|_{0,2,\Gamma}^{2} \\ &\leq 4(2\eta+\lambda)\left\|\mathbf{grad}_{\Gamma}(\boldsymbol{v})\right\|_{0,2,\Gamma}^{2}. \end{aligned}$$

Il reste à majorer le terme $\|\boldsymbol{L}(\boldsymbol{v})\|_{0,2,\Gamma}^{2}$. Rappelons que :

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{v} + \mathbf{grad}_{\Gamma}^{T}(\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{n} = \mathbf{grad}_{\Gamma}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}),$$

donc $(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{y}\cdot\left(\boldsymbol{H}\boldsymbol{v} + \mathbf{grad}_{\Gamma}^{T}(\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{n}\right) = (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{y}\cdot\mathbf{grad}_{\Gamma}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}) = 0$. Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{L}(\boldsymbol{v})\|_{0,2,\Gamma}^{2} &= \int_{\Gamma}|\boldsymbol{L}(\boldsymbol{v})|^{2}\,\mathrm{ds} \\ &= \int_{\Gamma}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})^{2}|\boldsymbol{y}|^{2}\,\mathrm{ds} + \int_{\Gamma}\left|\boldsymbol{H}\boldsymbol{v} + \mathbf{grad}_{\Gamma}^{T}(\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{n}\right|^{2}\,\mathrm{ds}. \end{aligned}$$

En utilisant la relation 2.2.2b, page 23, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{L}(\boldsymbol{v})\|_{0,2,\Gamma}^2 &= \int_\Gamma \kappa^2(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})^2\,|\boldsymbol{n}|^2\ \mathrm{ds} + \int_\Gamma \left|\boldsymbol{H}\boldsymbol{v} + \mathbf{grad}_\Gamma^T(\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{n}\right|^2\ \mathrm{ds} \\
&= \int_\Gamma \kappa^2(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})^2\ \mathrm{ds} + \int_\Gamma \left|\boldsymbol{H}\boldsymbol{v} + \mathbf{grad}_\Gamma^T(\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{n}\right|^2\ \mathrm{ds} \\
&= \|\kappa(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\|_{0,2,\Gamma}^2 + \left\|\boldsymbol{H}\boldsymbol{v} + \mathbf{grad}_\Gamma^T(\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{n}\right\|_{0,2,\Gamma}^2 .
\end{aligned}$$

Par suite, en utilisant l'inégalité triangulaire et le lemme C.5, page 165, nous avons :

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{L}(\boldsymbol{v})\|_{0,2,\Gamma}^2 &\leq \|\kappa\|_{0,\infty,\Gamma}^2\,\|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\|_{0,2,\Gamma}^2 + \left(\|\boldsymbol{H}\boldsymbol{v}\|_{0,2,\Gamma} + \left\|\mathbf{grad}_\Gamma^T(\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{n}\right\|_{0,2,\Gamma}\right)^2 \\
&\leq \|\kappa\|_{0,\infty,\Gamma}^2\,\|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\|_{0,2,\Gamma}^2 + 2\,\|\boldsymbol{H}\boldsymbol{v}\|_{0,2,\Gamma}^2 + 2\left\|\mathbf{grad}_\Gamma^T(\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{n}\right\|_{0,2,\Gamma}^2 \\
&\leq \sqrt{d}\,\|\kappa\|_{0,\infty,\Gamma}^2\,\|\boldsymbol{n}\|_{0,\infty,\Gamma}^2\,\|\boldsymbol{v}\|_{0,2,\Gamma}^2 + 2\sqrt{d}\,\|\boldsymbol{H}\|_{0,\infty,\Gamma}^2\,\|\boldsymbol{v}\|_{0,2,\Gamma}^2 \\
&\quad + 2\sqrt{d}\,\|\boldsymbol{n}\|_{0,\infty,\Gamma}^2\left\|\mathbf{grad}_\Gamma(\boldsymbol{v})\right\|_{0,2,\Gamma}^2 .
\end{aligned}$$

Or $\boldsymbol{n}$ est un vecteur unitaire, donc l'inégalité précédente devient :

$$\|\boldsymbol{L}(\boldsymbol{v})\|_{0,2,\Gamma}^2 \leq 2\sqrt{d}\left(\|\kappa\|_{0,\infty,\Gamma}^2\,\|\boldsymbol{v}\|_{0,2,\Gamma}^2 + \|\boldsymbol{H}\|_{0,\infty,\Gamma}^2\,\|\boldsymbol{v}\|_{0,2,\Gamma}^2 + \left\|\mathbf{grad}_\Gamma(\boldsymbol{v})\right\|_{0,2,\Gamma}^2\right).$$

En utilisant la relation 2.2.2a, page 23 nous avons :

$$\|\kappa\|_{0,\infty,\Gamma} = \|\mathrm{tr}(\boldsymbol{H})\|_{0,\infty,\Gamma} \leq d\,\|\boldsymbol{H}\|_{0,\infty,\Gamma} .$$

Par conséquent,

$$\|\boldsymbol{L}(\boldsymbol{v})\|_{0,2,\Gamma}^2 \leq 2\sqrt{d}\left((1+d^2)\,\|\boldsymbol{H}\|_{0,\infty,\Gamma}^2\,\|\boldsymbol{v}\|_{0,2,\Gamma}^2 + \left\|\mathbf{grad}_\Gamma(\boldsymbol{v})\right\|_{0,2,\Gamma}^2\right).$$

Donc, sous l'hypothèse 3.1, nous avons :

$$\|\boldsymbol{L}(\boldsymbol{v})\|_{0,2,\Gamma}^2 \leq 2\sqrt{d}(1+d^2)\left(\|\boldsymbol{H}\|_{0,\infty,\Gamma}^2\,\|\boldsymbol{v}\|_{0,2,\Gamma}^2 + \left\|\mathbf{grad}_\Gamma(\boldsymbol{v})\right\|_{0,2,\Gamma}^2\right).$$

Par conséquent, nous avons :

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{v}|_a^2 &\leq \left(c_f + 2\sqrt{d}(1+d^2)\,\|\boldsymbol{H}\|_{0,\infty,\Gamma}^2\right)\|\boldsymbol{v}\|_{0,2,\Gamma}^2 \\
&\quad + \left(4\,(2\eta+\lambda) + 2\gamma\sqrt{d}(1+d^2)\right)\left\|\mathbf{grad}_\Gamma(\boldsymbol{v})\right\|_{0,2,\Gamma}^2 .
\end{aligned}$$

Donc, en choisissant

$$C = \sqrt{\max\left(c_f + 2\sqrt{d}(1+d^2)\,\|\boldsymbol{H}\|_{0,\infty,\Gamma}^2\,,\,4\,(2\eta+\lambda) + 2\gamma\sqrt{d}(1+d^2)\right)},$$

nous avons

$$|\boldsymbol{v}|_a^2 \leq C^2 \left(\|\boldsymbol{v}\|_{0,2,\Gamma}^2 + \left\|\mathbf{grad}_\Gamma(\boldsymbol{v})\right\|_{0,2,\Gamma}^2 \right).$$

D'où

$$|\boldsymbol{v}|_a \leq C \|\boldsymbol{v}\|_{1,2,\Gamma}.$$

Ce qui prouve le lemme 3.1. □

Lemme 3.2 (Continuité de a et ℓ)**.** *Il existe deux constantes strictement positives C_a, C_ℓ telles que pour tout $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{v}$ appartenant à $(H^1(\Gamma))^d$ et μ appartenant à $L^\infty(\Gamma)$:*

$$\begin{aligned} |a(\mu;\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})| &\leq C_a \|\mu\|_{0,\infty,\Gamma} \|\boldsymbol{w}\|_{1,2,\Gamma} \|\boldsymbol{v}\|_{1,2,\Gamma}, \\ |\ell(\mu;\boldsymbol{v})| &\leq C_\ell \|\mu\|_{0,\infty,\Gamma} \|\boldsymbol{v}\|_{0,2,\Gamma}. \end{aligned}$$

Autrement dit, a et ℓ sont respectivement continues sur $L^\infty(\Gamma) \times (H^1(\Gamma))^d \times (H^1(\Gamma))^d$ et $L^\infty(\Gamma) \times (L^2(\Gamma))^d$.

Démonstration. Soit $(\mu, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) \in L^\infty(\Gamma) \times (H^1(\Gamma))^d \times (H^1(\Gamma))^d$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur la forme bilinéaire $a(\mu;\cdot,\cdot)$ nous avons

$$\begin{aligned} |a(\mu;\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})| &\leq c_f \|\mu\|_{0,\infty,\Gamma} \|\boldsymbol{w}\|_{0,2,\Gamma} \|\boldsymbol{v}\|_{0,2,\Gamma} + 2\eta \|\mu\|_{0,\infty,\Gamma} \|\mathbf{D}_\Gamma(\boldsymbol{w})\|_{0,2,\Gamma} \|\mathbf{D}_\Gamma(\boldsymbol{v})\|_{0,2,\Gamma} \\ &\quad + \lambda \|\mu\|_{0,\infty,\Gamma} \|\mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{w})\|_{0,2,\Gamma} \|\mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{v})\|_{0,2,\Gamma} + \gamma \|\mu\|_{0,\infty,\Gamma} \|\boldsymbol{L}(\boldsymbol{w})\|_{0,2,\Gamma} \|\boldsymbol{L}(\boldsymbol{v})\|_{0,2,\Gamma}. \end{aligned}$$

En utilisant la définition de la semi-norme $|\cdot|_a$, nous avons :

$$c_f \|\mu\|_{0,\infty,\Gamma} \|\boldsymbol{w}\|_{0,2,\Gamma} \|\boldsymbol{v}\|_{0,2,\Gamma} \leq c_f \|\mu\|_{0,\infty,\Gamma} |\boldsymbol{w}|_a |\boldsymbol{v}|_a.$$

De la même manière, nous pouvons majorer les autres termes de l'inégalité précédente. Par conséquent, nous obtenons :

$$|a(\mu;\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})| \leq (c_f + 2\eta + \lambda + \gamma) \|\mu\|_{0,\infty,\Gamma} |\boldsymbol{w}|_a |\boldsymbol{v}|_a.$$

En utilisant le lemme 3.1, nous pouvons trouver une constante $C_a = C_a(c_f, \eta, \lambda, \gamma, \Gamma)$ strictement positive indépendante de h telle que

$$|a(\mu;\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})| \leq C_a \|\mu\|_{0,\infty,\Gamma} \|\boldsymbol{w}\|_{1,2,\Gamma} \|\boldsymbol{v}\|_{1,2,\Gamma}.$$

De même, nous avons par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\ell(\mu;\boldsymbol{v})| \leq \|\boldsymbol{f}\|_{0,\infty,\Gamma} \|\mu\|_{0,\infty,\Gamma} \|\boldsymbol{v}\|_{0,2,\Gamma}.$$

D'où

$$|\ell(\mu;\boldsymbol{v})| \leq C_\ell \|\mu\|_{0,\infty,\Gamma} \|\boldsymbol{v}\|_{0,2,\Gamma},$$

avec $C_\ell = \|\boldsymbol{f}\|_{0,\infty,\Gamma}$. □

A noter que dans la démonstration du lemme précédent, nous avons déterminé la valeur exacte de la constante de continuité C_ℓ :

$$C_\ell = \|\boldsymbol{f}\|_{0,\infty,\Gamma}.$$

Donc pour tout $\boldsymbol{v}$ appartenant à $(L^2(\Gamma))^d$ et μ appartenant à $L^\infty(\Gamma)$ nous avons l'inégalité

$$|\ell(\mu;\boldsymbol{v})| \leq \|\mu\|_{0,\infty,\Gamma} \|\boldsymbol{f}\|_{0,\infty,\Gamma} \|\boldsymbol{v}\|_{0,2,\Gamma}. \tag{3.3.3}$$

Remarque 3.4. *La continuité de la forme bilinéaire ℓ sur l'espace $L^\infty(\Gamma) \times (L^2(\Gamma))^d$ entraîne sa continuité sur $L^\infty(\Gamma) \times (H^1(\Gamma))^d$, puisque Γ est bornée, donc $H^1(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$. De plus, à partir de la relation (3.3.3), nous avons pour tout $(\mu,\boldsymbol{v}) \in L^\infty(\Gamma) \times (H^1(\Gamma))^d$ l'inégalité :*

$$|\ell(\mu;\boldsymbol{v})| \leq \|\mu\|_{0,\infty,\Gamma} \|\boldsymbol{f}\|_{0,\infty,\Gamma} \|\boldsymbol{v}\|_{1,2,\Gamma}.$$

Lemme 3.3 (Coercivité de a)**.** *Sous l'hypothèse 3.1, il existe une constante strictement positive α_a telle que :*

$$a(1;\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) \geq \alpha_a \|\boldsymbol{v}\|^2_{1,2,\Gamma}, \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in \left(H^1(\Gamma)\right)^d.$$

Nous donnons la preuve de ce lemme dans le cas où $c_f > 0$. Elle peut être adaptée au cas $c_f = 0$ en se plaçant dans l'espace quotient $(H^1(\Gamma))^d/M$ où M est l'ensemble des translations et des rotations tangentes :

$$M = \left\{\boldsymbol{v} \in \left(H^1(\Gamma)\right)^d \mid \mathbf{D}_\Gamma(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{v}) = 0\right\}.$$

Démonstration. Soit $\boldsymbol{v} \in (H^1(\Gamma))^d$. Nous pouvons écrire $\boldsymbol{v}$ sous la forme :

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_\Gamma + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n},$$

où $\boldsymbol{v}_\Gamma$ est la composante tangentielle $\boldsymbol{v}$. En utilisant l'inégalité de Korn sur la surface Γ (cf. [Ciarlet, 2002] ou [Mardare, 2003] par exemple), on peut trouver une constante C strictement positive telle que

$$\|\mathbf{D}_\Gamma(\boldsymbol{v})\|^2_{0,2,\Gamma} \geq \|\mathbf{D}_\Gamma(\boldsymbol{v}_\Gamma)\|^2_{0,2,\Gamma} \geq C\,|\boldsymbol{v}_\Gamma|^2_{1,2,\Gamma}.$$

Par conséquent,

$$2\eta \left\|\mathbf{D}_{\Gamma}\left(\boldsymbol{v}\right)\right\|_{0,2,\Gamma}^{2} + \lambda \left\|\mathrm{div}_{\Gamma}\left(\boldsymbol{v}\right)\right\|_{0,2,\Gamma}^{2} \;\geq\; 2\eta C \left|\boldsymbol{v}_{\Gamma}\right|_{1,2,\Gamma}^{2}. \tag{3.3.4}$$

Nous avons vu dans la démonstration du lemme 3.1 que :

$$\left\|\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{v}\right)\right\|_{0,2,\Gamma}^{2} \;=\; \left\|\kappa(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\right\|_{0,2,\Gamma}^{2} + \left\|\mathbf{grad}_{\Gamma}\left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\right)\right\|_{0,2,\Gamma}^{2}.$$

Par conséquent, nous avons l'inégalité

$$\left\|\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{v}\right)\right\|_{0,2,\Gamma}^{2} \;\geq\; \min\left(\inf_{\boldsymbol{x}\in\Gamma}\kappa^{2}(\boldsymbol{x}),1\right)\left\|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\right\|_{1,2,\Gamma}^{2}.$$

En utilisant le lemme C.2, page 163, l'inégalité précédente entraîne

$$\left\|\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{v}\right)\right\|_{0,2,\Gamma}^{2} \;\geq\; \min\left(\inf_{\boldsymbol{x}\in\Gamma}\kappa^{2}(\boldsymbol{x}),1\right)\left(1+\left\|\boldsymbol{H}\right\|_{0,\infty,\Gamma}\right)^{-2}\left\|(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\right\|_{1,2,\Gamma}^{2}. \tag{3.3.5}$$

À partir des inégalités (3.3.4) et (3.3.5), nous avons

$$\begin{aligned} a(1;\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) \;&\geq c_f\left\|\boldsymbol{v}\right\|_{0,2,\Gamma}^{2} + 2\eta C\left|\boldsymbol{v}_{\Gamma}\right|_{1,2,\Gamma}^{2} \\ &\quad + \gamma\min\left(\inf_{\boldsymbol{x}\in\Gamma}\kappa^{2}(\boldsymbol{x}),1\right)\left(1+\left\|\boldsymbol{H}\right\|_{0,\infty,\Gamma}\right)^{-2}\left\|(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\right\|_{1,2,\Gamma}^{2}. \end{aligned}$$

Or, on peut facilement vérifier que

$$\left\|\boldsymbol{v}\right\|_{0,2,\Gamma}^{2} = \left\|\boldsymbol{v}_{\Gamma}\right\|_{0,2,\Gamma}^{2} + \left\|(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\right\|_{0,2,\Gamma}^{2}.$$

Par conséquent, l'inégalité précédente devient

$$\begin{aligned} a(1;\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) \;&\geq \min(c_f,2\eta C)\left\|\boldsymbol{v}_{\Gamma}\right\|_{1,2,\Gamma}^{2} \\ &\quad + \min\left(c_f,\gamma\min\left(\inf_{\boldsymbol{x}\in\Gamma}\kappa^{2}(\boldsymbol{x}),1\right)\left(1+\left\|\boldsymbol{H}\right\|_{0,\infty,\Gamma}\right)^{-2}\right)\left\|(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\right\|_{1,2,\Gamma}^{2}. \end{aligned}$$

Donc

$$a(1;\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) \;\geq \alpha_a\left(\left\|\boldsymbol{v}_{\Gamma}\right\|_{1,2,\Gamma}^{2} + \left\|(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\right\|_{1,2,\Gamma}^{2}\right),$$

où

$$\alpha_a = \min\left(c_f, 2\eta C, \gamma\min\left(\inf_{\boldsymbol{x}\in\Gamma}\kappa^{2}(\boldsymbol{x}),1\right)\left(1+\left\|\boldsymbol{H}\right\|_{0,\infty,\Gamma}\right)^{-2}\right).$$

Sous l'hypothèse 3.1 et pour $c_f > 0$, α_a est bien une constante strictement positive. D'où

$$a(1;\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) \ \geq \alpha_a \left\|\boldsymbol{v}\right\|_{1,2,\Gamma}^2 .$$

Ce qui prouve le lemme 3.3. □

Remarque 3.5. *A travers la démonstration du lemme 3.3, notamment l'inégalité (3.3.5), nous montrons que si $\boldsymbol{u}_\gamma$ est une solution du problème 3.3 alors l'opérateur $\boldsymbol{L}$ permet de contrôler les dérivées de la composante normale de $\boldsymbol{u}_\gamma$. Cela permet d'assurer que le problème initial (problème de minimisation 3.2) est bien posé. Sans cet opérateur c'est à dire pour $\gamma = 0$ (cas exclu par l'hypothèse 3.1), il faut une (ou des) contrainte(s) sur la composante normale de $\boldsymbol{u}_\gamma$ pour avoir un problème bien posé.*

Nous avons le théorème suivant sur l'existence et l'unicité de la solution du problème 3.3.

Théorème 3.1 (Existence et unicité de la solution du problème 3.3)**.** *Sous l'hypothèse 3.1,*

(i) si $c_f > 0$ alors le problème 3.3 admet une unique solution $\boldsymbol{u}_\gamma \in \left(H^1(\Gamma)\right)^d$,

(ii) si $c_f = 0$ alors le problème 3.3 admet une unique solution $\boldsymbol{u}_\gamma \in \left(H^1(\Gamma)\right)^d / M$, c'est à dire $\boldsymbol{u}_\gamma$ est unique à une translation et rotation tangente près.

De plus, dans les deux cas $\boldsymbol{u}_\gamma$ vérifie :

$$\left|\boldsymbol{u}_\gamma\right|_a \ \leq \ \frac{1}{\sqrt{\alpha_a}} \left\|\boldsymbol{f}\right\|_{0,2,\Gamma}$$

où α_a est la constante de coercivité de a.

Démonstration. En utilisant les résultats des lemmes 3.2, 3.3 et la remarque 3.4, $a(1;\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire continue et coercive sur $\left(H^1(\Gamma)\right)^d \times \left(H^1(\Gamma)\right)^d$, $\ell(1;\cdot)$ est une forme linéaire continue sur $\left(H^1(\Gamma)\right)^d$. Alors, le théorème de Lax-Milgram permet de déduire que le problème 3.3 admet une unique solution dans $\left(H^1(\Gamma)\right)^d \times \left(H^1(\Gamma)\right)^d$ pour tout c_f strictement positif. Dans le cas où $c_f = 0$, nous avons l'unicité de la solution à une translation et rotation près (cf. la remarque 3.3). Et de plus, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\ell(1;\cdot)$, nous avons pour $\boldsymbol{u}_\gamma$ solution de 3.3 :

$$\left|\boldsymbol{u}_\gamma\right|_a^2 \ = \ a(1;\boldsymbol{u}_\gamma,\boldsymbol{u}_\gamma) \ = \ \ell(1;\boldsymbol{u}_\gamma) \ \leq \ \left\|\boldsymbol{f}\right\|_{0,2,\Gamma} \left\|\boldsymbol{u}_\gamma\right\|_{0,2,\Gamma} \ \leq \ \left\|\boldsymbol{f}\right\|_{0,2,\Gamma} \left\|\boldsymbol{u}_\gamma\right\|_{1,2,\Gamma} .$$

Le lemme 3.3 permet d'écrire

$$\left|\boldsymbol{u}_\gamma\right|_a^2 \ \leq \ \frac{1}{\sqrt{\alpha_a}} \left\|\boldsymbol{f}\right\|_{0,2,\Gamma} \left|\boldsymbol{u}_\gamma\right|_a ,$$

où α_a est la constante de coercivité de a. D'où

$$\left|\boldsymbol{u}_\gamma\right|_a \ \leq \ \frac{1}{\sqrt{\alpha_a}} \left\|\boldsymbol{f}\right\|_{0,2,\Gamma} .$$

Ce qui prouve le théorème 3.1. □

3.4 Problème discret

Dans cette section, l'objectif est d'écrire une formulation variationnelle (discrète) associée au problème 3.3 sur un espace vectoriel de dimension finie de $\left(H^1\left(\Gamma_h\right)\right)^d$, puis d'étudier l'existence et l'unicité de la solution associée sous certaines hypothèses qui vont suivre. Soit Γ_h une approximation globalement continue de Γ, polynomiale par morceaux et de degré polynomial k ($k \geq 1$). Nous supposons que Γ_h est construite comme dans la sous-section 2.2.3 du chapitre 2 et qu'elle vérifie l'hypothèse 3.2 :

Hypothèse 3.2. *Il existe une constante strictement positive $h_0 > 0$ telle que pour tout $h < h_0$, Γ_h est contenu dans U_δ (bande autour de Γ définie par (2.2.5) dans le chapitre 2) et que la restriction de $\boldsymbol{p}$ (projection orthogonale sur Γ) à Γ_h est bijective.*

Soit $\boldsymbol{n}_{\Gamma_h}$ la normale discrète sortante à Γ_h. Sous l'hypothèse 3.2, nous avons la proposition 2.3. Soient $\boldsymbol{n}_h, \boldsymbol{y}_h$ et $\boldsymbol{H}_h$ des approximations respectives sur Γ_h de $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{H}$. Nous supposons qu'il existe un algorithme pour définir ces approximations, par exemple en utilisant notre méthode décrite dans le chapitre 2 ou par une autre méthode. Nous faisons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3.3. *Lorsque h tend vers zero, les approximations $\boldsymbol{n}_h, \boldsymbol{y}_h$ et $\boldsymbol{H}_h$ convergent respectivement vers $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{H}$ et il existe une constante C strictement positive indépendante de h et deux nombres réels strictement positifs $p \geq k$ et $q \geq k-1$ tels que*

$$\|\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}_h\|_{0,\infty,\Gamma_h} \leq Ch^p, \tag{3.4.1a}$$

$$\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_h\|_{0,\infty,\Gamma_h} \leq Ch^q, \tag{3.4.1b}$$

$$\|\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}_h\|_{0,\infty,\Gamma_h} \leq Ch^q. \tag{3.4.1c}$$

A noter que les approximations $\boldsymbol{n}_h, \boldsymbol{y}_h$ et $\boldsymbol{H}_h$ ne sont pas nécessairement continues.

3.4.1 Discrétisation par la méthode des éléments finis

Nous approchons la solution du problème continu en utilisant la formulation suivante :
trouver $\boldsymbol{u}_{\gamma,h} \in \left(H^1\left(\Gamma_h\right)\right)^d \cap \left(C^0\left(\Gamma_h\right)\right)^d$ tel que

$$a_h(\boldsymbol{u}_{\gamma,h}, \boldsymbol{v}_h) = \ell_h(\boldsymbol{v}_h), \qquad \forall\, \boldsymbol{v}_h \in \left(H^1\left(\Gamma_h\right)\right)^d \cap \left(C^0\left(\Gamma_h\right)\right)^d, \tag{3.4.2}$$

où a_h et ℓ_h sont respectivement les formes bilinéaire et linéaire définies par

$$\begin{aligned} a_h(\boldsymbol{w}_h, \boldsymbol{v}_h) = &\int_{\Gamma_h} c_f \boldsymbol{w}_h \cdot \boldsymbol{v}_h \,\mathrm{d}s_h + \int_{\Gamma_h} 2\eta \mathbf{D}_{\Gamma_h}\left(\boldsymbol{w}_h\right) : \mathbf{D}_{\Gamma_h}\left(\boldsymbol{v}_h\right) \,\mathrm{d}s_h \\ &+ \int_{\Gamma_h} \lambda \mathrm{div}_{\Gamma_h}\left(\boldsymbol{w}_h\right) \mathrm{div}_{\Gamma_h}\left(\boldsymbol{v}_h\right) \,\mathrm{d}s_h + \int_{\Gamma_h} \gamma \boldsymbol{L}_h\left(\boldsymbol{w}_h\right) \cdot \boldsymbol{L}_h\left(\boldsymbol{v}_h\right) \,\mathrm{d}s_h \\ \ell_h(\boldsymbol{v}_h) = &\int_{\Gamma_h} \boldsymbol{f}_h \cdot \boldsymbol{v}_h \mathrm{d}s_h, \end{aligned}$$

avec

- $\mathbf{D}_{\Gamma_h}(\boldsymbol{v}_h) = \mathbf{P}_h \mathbf{D}(\boldsymbol{v}_h)\mathbf{P}_h$, $\mathrm{div}_{\Gamma_h}(\boldsymbol{v}_h) = \mathrm{tr}\left(\mathbf{D}_{\Gamma_h}(\boldsymbol{v}_h)\right)$ pour $\boldsymbol{v}_h \in (H^1(\Gamma_h))^d$ et $\mathbf{P}_h$ est l'opérateur de projection sur Γ_h défini par :

$$\mathbf{P}_h = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{n}_{\Gamma_h} \otimes \boldsymbol{n}_{\Gamma_h}$$

- $\boldsymbol{L}_h$ est l'opérateur défini par :

$$\boldsymbol{L}_h(\boldsymbol{v}_h) = (\boldsymbol{v}_h \cdot \boldsymbol{n}_h)\,\boldsymbol{y}_h - \boldsymbol{H}_h \boldsymbol{v}_h - \mathbf{grad}^T_{\Gamma_h}(\boldsymbol{v}_h)\,\boldsymbol{n}_h, \qquad \boldsymbol{v}_h \in \left(H^1(\Gamma_h)\right)^d, \quad (3.4.3)$$

- et $\boldsymbol{f}_h$ est une approximation polynomiale par morceaux de $\boldsymbol{f}$ sur Γ_h, nous avons :

$$\boldsymbol{f}_h \in \left(L^2(\Gamma_h)\right)^d.$$

Le choix de l'espace $(H^1(\Gamma_h))^d \cap (C^0(\Gamma_h))^d$ est nécessaire pour bien définir globalement les opérateurs différentiels sur Γ_h. Soit V_h un sous-espace de dimension finie de $(H^1(\Gamma_h))^d \cap (C^0(\Gamma_h))^d$ quelconque, nous allons chercher la solution du problème 3.4.2 dans V_h. Cela nous conduit au problème suivant :

Problème 3.5 (Problème discret sur Γ_h)**.** *Trouver* $\boldsymbol{u}_{\gamma,h} \in V_h$ *tel que*

$$a_h(\boldsymbol{u}_{\gamma,h}, \boldsymbol{v}_h) = \ell_h(\boldsymbol{v}_h), \qquad \forall\, \boldsymbol{v}_h \in V_h.$$

Pour étudier l'existence et l'unicité de la solution associée au problème 3.5, nous allons établir une notion d'équivalence entre les normes définies sur Γ et Γ_h sous les hypothèses 3.2 et 3.3. Cette notion d'équivalence nous permettra de déduire certaines propriétés sur le problème discret à partir de celles du problème continu. Cela fera l'objet de la sous-section suivante.

3.4.2 Relations entre les opérateurs discrets et continus

Soit $\boldsymbol{v}_h \in V_h$. Nous avons :

$$2\mathbf{D}_{\Gamma_h}(\boldsymbol{v}_h) = \mathbf{P}_h \mathbf{grad}_{\Gamma_h}(\boldsymbol{v}_h) + \mathbf{grad}^T_{\Gamma_h}(\boldsymbol{v}_h)\,\mathbf{P}_h.$$

Soient $\tilde{\boldsymbol{v}}_h \in (H^1(\Gamma))^d$ et $\tilde{\mathbf{P}}_h \in (H^1(\Gamma))^{d\times d}$ les fonctions définies respectivement par :

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_h = \boldsymbol{v}_h \circ \boldsymbol{p}^{-1}_{|\Gamma_h} \text{ et } \tilde{\mathbf{P}}_h = \mathbf{P}_h \circ \boldsymbol{p}^{-1}_{|\Gamma_h}.$$

Rappelons que (cf. le lemme 2.2, page 31) :

$$\mathbf{grad}_{\Gamma_h}(\boldsymbol{v}_h) = \mathbf{grad}_{\Gamma}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h) - \mathbf{grad}_{\Gamma}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\,\mathbf{P}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_h),$$

où $\boldsymbol{A}_h$ est défini par :

$$\boldsymbol{A}_h(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})) = \left(\mathbf{P}\left(\boldsymbol{I} - \phi\boldsymbol{H}\right)\tilde{\mathbf{P}}_h\right)(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})).$$

En écrivant $\tilde{\mathbf{P}}_h = \mathbf{P} - \left(\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{P}}_h\right)$ alors nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_h\mathbf{grad}_{\Gamma_h}(\boldsymbol{v}_h) &= \tilde{\mathbf{P}}_h\mathbf{grad}_{\Gamma}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h) + \tilde{\mathbf{P}}_h\mathbf{grad}_{\Gamma}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\,\mathbf{P}\left(\boldsymbol{A}_h - \boldsymbol{I}\right) \\
&= \mathbf{P}\mathbf{grad}_{\Gamma}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h) - \left(\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{P}}_h\right)\mathbf{grad}_{\Gamma}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h) + \mathbf{P}\mathbf{grad}_{\Gamma}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\,\mathbf{P}\left(\boldsymbol{A}_h - \boldsymbol{I}\right) \\
&\quad - \left(\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{P}}_h\right)\mathbf{grad}_{\Gamma}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\,\mathbf{P}\left(\boldsymbol{A}_h - \boldsymbol{I}\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
2\mathbf{D}_{\Gamma_h}(\boldsymbol{v}_h) = {} & \mathbf{P}\mathbf{grad}_{\Gamma}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h) + \mathbf{grad}_{\Gamma}^T(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\,\mathbf{P} \\
& - \left(\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{P}}_h\right)\mathbf{grad}_{\Gamma}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h) - \mathbf{grad}_{\Gamma}^T(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\left(\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{P}}_h\right) \\
& + 2\mathbf{Sym}\left(\mathbf{P}\mathbf{grad}_{\Gamma}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\,\mathbf{P}\left(\boldsymbol{A}_h - \boldsymbol{I}\right)\right) \\
& - 2\mathbf{Sym}\left(\left(\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{P}}_h\right)\mathbf{grad}_{\Gamma}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\,\mathbf{P}\left(\boldsymbol{A}_h - \boldsymbol{I}\right)\right),
\end{aligned}$$

où $\mathbf{Sym}(\cdot)$ désigne la fonction partie symétrique définie par :

$$\mathbf{Sym}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^T\right), \qquad \forall\, \boldsymbol{\sigma}.$$

On en déduit que

$$\mathbf{D}_{\Gamma_h}(\boldsymbol{v}_h)(\boldsymbol{x}) = \left(\mathbf{D}_{\Gamma}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h) - \boldsymbol{\tau}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\right)(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})), \qquad \boldsymbol{x} \in \Gamma_h. \tag{3.4.4}$$

où $\boldsymbol{\tau} : \left(H^1(\Gamma)\right)^d \longrightarrow L^2(\Gamma)^{d\times d}$ est l'opérateur défini par :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} \longmapsto 2\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{v}) = {} & \left(\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{P}}_h\right)\mathbf{grad}_{\Gamma}(\boldsymbol{v}) - \mathbf{grad}_{\Gamma}^T(\boldsymbol{v})\left(\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{P}}_h\right) \\
& - 2\mathbf{Sym}\left(\mathbf{P}\mathbf{grad}_{\Gamma}(\boldsymbol{v})\,\mathbf{P}\left(\boldsymbol{A}_h - \boldsymbol{I}\right)\right) \\
& + 2\mathbf{Sym}\left(\left(\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{P}}_h\right)\mathbf{grad}_{\Gamma}(\boldsymbol{v})\,\mathbf{P}\left(\boldsymbol{A}_h - \boldsymbol{I}\right)\right).
\end{aligned}$$

On déduit de (3.4.4) que pour tout $\boldsymbol{v}_h \in \Gamma_h$:

$$\mathrm{div}_{\Gamma_h}(\boldsymbol{v}_h) = \boldsymbol{I} : \mathbf{D}_{\Gamma_h}(\boldsymbol{v}_h) = \boldsymbol{I} : \mathbf{D}_{\Gamma}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h) - \boldsymbol{I} : \boldsymbol{\tau}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h) = \mathrm{div}_{\Gamma}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h) - \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\tau}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\right)$$

d'où

$$\mathrm{div}_{\Gamma_h}(\boldsymbol{v}_h)(\boldsymbol{x}) = \left(\mathrm{div}_{\Gamma}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h) - \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\tau}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\right)\right)(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})), \qquad \boldsymbol{x} \in \Gamma_h. \tag{3.4.5}$$

Lemme 3.4 (Estimation de l'opérateur $\boldsymbol{\tau}$)**.** *Soit* $\boldsymbol{v} \in \left(H^1(\Gamma)\right)^d$*. Sous l'hypothèse 3.2, il existe*

une constante strictement positive C indépendante de h telle que

$$\|\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{v})\|_{0,2,\Gamma} \leq Ch^k |\boldsymbol{v}|_a .$$

Démonstration. En utilisant l'inégalité triangulaire, nous avons :

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{v})\|_{0,2,\Gamma} \leq & \left\|\mathbf{P}-\tilde{\mathbf{P}}_h\right\|_{0,\infty,\Gamma} \left\|\mathbf{grad}_\Gamma(\boldsymbol{v})\right\|_{0,2,\Gamma} + \|\mathbf{P}(\boldsymbol{A}_h-\boldsymbol{I})\|_{0,\infty,\Gamma} \left\|\mathbf{P}\mathbf{grad}_\Gamma(\boldsymbol{v})\right\|_{0,2,\Gamma} \\ & + \left\|\mathbf{P}-\tilde{\mathbf{P}}_h\right\|_{0,\infty,\Gamma} \|\mathbf{P}(\boldsymbol{A}_h-\boldsymbol{I})\|_{0,\infty,\Gamma} \left\|\mathbf{grad}_\Gamma(\boldsymbol{v})\right\|_{0,2,\Gamma} .\end{aligned}$$

Par suite, nous avons

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{v})\|_{0,2,\Gamma} \leq & \left(\left\|\mathbf{P}-\tilde{\mathbf{P}}_h\right\|_{0,\infty,\Gamma} + \|\mathbf{P}(\boldsymbol{A}_h-\boldsymbol{I})\|_{0,\infty,\Gamma} \|\mathbf{P}\|_{0,\infty,\Gamma}\right) \left\|\mathbf{grad}_\Gamma(\boldsymbol{v})\right\|_{0,2,\Gamma} \\ & + \left\|\mathbf{P}-\tilde{\mathbf{P}}_h\right\|_{0,\infty,\Gamma} \|\mathbf{P}(\boldsymbol{A}_h-\boldsymbol{I})\|_{0,\infty,\Gamma} \left\|\mathbf{grad}_\Gamma(\boldsymbol{v})\right\|_{0,2,\Gamma} .\end{aligned}$$

Par définition de la norme H^1, nous avons $\left\|\mathbf{grad}_\Gamma(\boldsymbol{v})\right\|_{0,2,\Gamma} \leq \|\boldsymbol{v}\|_{1,2,\Gamma}$, par conséquent, l'inégalité précédente devient :

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{v})\|_{0,2,\Gamma} \leq & \left(\left\|\mathbf{P}-\tilde{\mathbf{P}}_h\right\|_{0,\infty,\Gamma} + \|\mathbf{P}(\boldsymbol{A}_h-\boldsymbol{I})\|_{0,\infty,\Gamma} \|\mathbf{P}\|_{0,\infty,\Gamma}\right) \|\boldsymbol{v}\|_{1,2,\Gamma} \\ & + \left\|\mathbf{P}-\tilde{\mathbf{P}}_h\right\|_{0,\infty,\Gamma} \|\mathbf{P}(\boldsymbol{A}_h-\boldsymbol{I})\|_{0,\infty,\Gamma} \|\boldsymbol{v}\|_{1,2,\Gamma} .\end{aligned}$$

En utilisant le résultat du lemme 3.3 (coercivité de a) et le fait que $\|\mathbf{P}\|_{0,\infty,\Gamma} \leq 2$, l'inégalité précédente devient :

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{v})\|_{0,2,\Gamma} \leq & \frac{2}{\sqrt{\alpha_a}} \left(\left\|\mathbf{P}-\tilde{\mathbf{P}}_h\right\|_{0,\infty,\Gamma} + \|\mathbf{P}(\boldsymbol{A}_h-\boldsymbol{I})\|_{0,\infty,\Gamma}\right) |\boldsymbol{v}|_a \\ & + \frac{1}{\sqrt{\alpha_a}} \left\|\mathbf{P}-\tilde{\mathbf{P}}_h\right\|_{0,\infty,\Gamma} \|\mathbf{P}(\boldsymbol{A}_h-\boldsymbol{I})\|_{0,\infty,\Gamma} |\boldsymbol{v}|_a .\end{aligned}$$

où α_a est la constante de coercivité de a. Sous l'hypothèse 3.2, nous pouvons appliquer le lemme 2.5. Autrement dit, il existe une constante strictement positive C_0 indépendante de h telle que :

$$\|\mathbf{P}(\boldsymbol{A}_h-\boldsymbol{I})\|_{0,\infty,\Gamma} \leq C_0 h^k.$$

Il nous reste à estimer $\left\|\mathbf{P}-\tilde{\mathbf{P}}_h\right\|_{0,\infty,\Gamma}$. Par unicité de $\tilde{\mathbf{P}}_h$, nous avons

$$\tilde{\mathbf{P}}_h = \boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h} \otimes \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h},$$

où $\tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}$ est l'unique fonction définie par $\tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h} = \boldsymbol{n}_{\Gamma_h} \circ \boldsymbol{p}^{-1}_{|\Gamma_h}$. Par conséquent,

$$\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{P}}_h \;=\; \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h} \otimes \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h} - \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n}.$$

En écrivant $\tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h} = \boldsymbol{n} - \left(\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}\right)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{P}}_h &= \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n} - 2\boldsymbol{n} \otimes \left(\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}\right) + \left(\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}\right) \otimes \left(\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}\right) - \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n} \\ &= -2\boldsymbol{n} \otimes \left(\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}\right) + \left(\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}\right) \otimes \left(\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}\right).\end{aligned}$$

En utilisant donc l'inégalité triangulaire et le fait que $\boldsymbol{n}$ est unitaire :

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{P}}_h\right\|_{0,\infty,\Gamma} &\leq 2\left\|\boldsymbol{n}\right\|_{0,\infty,\Gamma}\left\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}\right\|_{0,\infty,\Gamma} + \left\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}\right\|^2_{0,\infty,\Gamma} \\ &\leq 2\left\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}\right\|_{0,\infty,\Gamma} + \left\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}\right\|^2_{0,\infty,\Gamma} \\ &\leq 2\left(1 + \left\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}\right\|_{0,\infty,\Gamma}\right)\left\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}\right\|_{0,\infty,\Gamma}.\end{aligned}$$

Or, d'après la proposition 2.3, il existe une constante C_1 strictement positive indépendante de h telle que

$$\left\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}\right\|_{0,\infty,\Gamma} \leq C_1 h^k.$$

Par conséquent, nous avons :

$$1 + \left\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}\right\|_{0,\infty,\Gamma} \leq 1 + C_1 h^k \;\leq\; 1 + C_1 h_0^k.$$

où h_0 est la constante de l'hypothèse 3.2. Donc, nous avons :

$$\left\|\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{P}}_h\right\|_{0,\infty,\Gamma} \leq 2\left(1 + C_1 h_0^k\right)\left\|\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_{\Gamma_h}\right\|_{0,\infty,\Gamma}.$$

Par suite, nous obtenons :

$$\left\|\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{P}}_h\right\|_{0,\infty,\Gamma} \leq C_1' h^k, \text{ avec } C_1' = 2\left(1 + C_1 h_0^k\right) C_1.$$

Par conséquent, nous obtenons après quelques majorations élémentaires l'inégalité

$$\left\|\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{v})\right\|_{0,2,\Gamma} \leq \frac{2}{\sqrt{\alpha_a}} \max(C_0, C_1')\left(1 + C_0 C_1' h_0^k\right) h^k \left|\boldsymbol{v}\right|_a.$$

D'où

$$\|\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{v})\|_{0,2,\Gamma} \leq Ch^k \left|\boldsymbol{v}\right|_a ,$$

avec

$$C = \frac{2}{\sqrt{\alpha_a}} \max(C_0, C_1') \left(1 + C_0 C_1' h_0^k\right).$$

Ce qui prouve le lemme 3.4. □

On peut aussi exprimer de la même manière $\boldsymbol{L}_h(\boldsymbol{v}_h)$ en fonction de $\boldsymbol{L}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)$. En effet, pour tout $\boldsymbol{v}_h \in V_h$, nous avons

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_h(\boldsymbol{v}_h) &= (\boldsymbol{v}_h \cdot \boldsymbol{n}_h)\,\boldsymbol{y}_h - \boldsymbol{H}_h \boldsymbol{v}_h - \mathbf{grad}_{\Gamma_h}^T(\boldsymbol{v}_h)\,\boldsymbol{n}_h \\ &= (\tilde{\boldsymbol{v}}_h \cdot \tilde{\boldsymbol{n}}_h)\,\tilde{\boldsymbol{y}}_h - \tilde{\boldsymbol{H}}_h \tilde{\boldsymbol{v}}_h - \boldsymbol{A}_h^T \mathbf{grad}_\Gamma^T(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\,\tilde{\boldsymbol{n}}_h.\end{aligned}$$

Nous transformons le dernier terme dans la relation précédente comme suit :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_h^T \mathbf{grad}_\Gamma^T(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\,\tilde{\boldsymbol{n}}_h &= \mathbf{grad}_\Gamma^T(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\,\tilde{\boldsymbol{n}}_h - [\mathbf{P}(\boldsymbol{A}_h - \boldsymbol{I})]^T \mathbf{grad}_\Gamma^T(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\,\tilde{\boldsymbol{n}}_h \\ &= \mathbf{grad}_\Gamma^T(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\,\boldsymbol{n} - \mathbf{grad}_\Gamma^T(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)(\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h) - [\mathbf{P}(\boldsymbol{A}_h - \boldsymbol{I})]^T \mathbf{grad}_\Gamma^T(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\,\boldsymbol{n} \\ &\quad + [\mathbf{P}(\boldsymbol{A}_h - \boldsymbol{I})]^T \mathbf{grad}_\Gamma^T(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)(\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h).\end{aligned}$$

En écrivant $\tilde{\boldsymbol{y}}_h = \boldsymbol{y} - (\boldsymbol{y} - \tilde{\boldsymbol{y}}_h)$ et $\tilde{\boldsymbol{n}}_h = \boldsymbol{n} - (\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h \cdot \tilde{\boldsymbol{n}}_h)\,\tilde{\boldsymbol{y}}_h &= (\tilde{\boldsymbol{v}}_h \cdot \tilde{\boldsymbol{n}}_h)\,\boldsymbol{y} - (\tilde{\boldsymbol{v}}_h \cdot \tilde{\boldsymbol{n}}_h)(\boldsymbol{y} - \tilde{\boldsymbol{y}}_h) \\ &= (\tilde{\boldsymbol{v}}_h \cdot \boldsymbol{n})\,\boldsymbol{y} - [\tilde{\boldsymbol{v}}_h \cdot (\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h)]\,\boldsymbol{y} - (\tilde{\boldsymbol{v}}_h \cdot \boldsymbol{n})(\boldsymbol{y} - \tilde{\boldsymbol{y}}_h) + [\tilde{\boldsymbol{v}}_h \cdot (\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h)](\boldsymbol{y} - \tilde{\boldsymbol{y}}_h).\end{aligned}$$

De même,

$$\tilde{\boldsymbol{H}}_h \tilde{\boldsymbol{v}}_h = \boldsymbol{H}\tilde{\boldsymbol{v}}_h - \left(\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h\right)\tilde{\boldsymbol{v}}_h.$$

Nous déduisons alors que

$$\boldsymbol{L}_h(\boldsymbol{v}_h)(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{L}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h) - \boldsymbol{t}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h))(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})), \qquad \boldsymbol{x} \in \Gamma_h \tag{3.4.6}$$

où $\boldsymbol{t} : (H^1(\Gamma))^d \longrightarrow (L^2(\Gamma))^d$ est l'opérateur défini par :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} \longmapsto \boldsymbol{t}(\boldsymbol{v}) = &\ [\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h)]\,\boldsymbol{y} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})(\boldsymbol{y} - \tilde{\boldsymbol{y}}_h) - [\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h)](\boldsymbol{y} - \tilde{\boldsymbol{y}}_h) \\ &+ \left(\boldsymbol{H} - \tilde{\boldsymbol{H}}_h\right)\boldsymbol{v} + \mathbf{grad}_\Gamma^T(\boldsymbol{v})(\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h) + [\mathbf{P}(\boldsymbol{A}_h - \boldsymbol{I})]^T \mathbf{grad}_\Gamma^T(\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{n} \\ &- [\mathbf{P}(\boldsymbol{A}_h - \boldsymbol{I})]^T \mathbf{grad}_\Gamma^T(\boldsymbol{v})(\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{n}}_h).\end{aligned}$$

Lemme 3.5 (Estimation de l'opérateur $\boldsymbol{t}$)**.** *Soit $\boldsymbol{v} \in \left(H^1(\Gamma)\right)^d$. Sous l'hypothèse 3.3, il existe une constante strictement positive C indépendante de h telle que*

$$\|\boldsymbol{t}(\boldsymbol{v})\|_{0,2,\Gamma} \leq Ch^m |\boldsymbol{v}|_a ,$$

où $m = \min(k, q)$.

Démonstration. En utilisant l'inégalité triangulaire, nous avons :

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{t}(\boldsymbol{v})\|_{0,2,\Gamma} \leq\ & \|\boldsymbol{y}\|_{0,\infty,\Gamma} \|\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{n}-\tilde{\boldsymbol{n}}_h)\|_{0,2,\Gamma} + \|\boldsymbol{y}-\tilde{\boldsymbol{y}}_h\|_{0,\infty,\Gamma} \|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\|_{0,2,\Gamma} \\
& + \|\boldsymbol{y}-\tilde{\boldsymbol{y}}_h\|_{0,\infty,\Gamma} \|\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{n}-\tilde{\boldsymbol{n}}_h)\|_{0,2,\Gamma} + \left\|\boldsymbol{H}-\tilde{\boldsymbol{H}}_h\right\|_{0,\infty,\Gamma} \|\boldsymbol{v}\|_{0,2,\Gamma} \\
& + \|\boldsymbol{n}-\tilde{\boldsymbol{n}}_h\|_{0,\infty,\Gamma} \left\|\mathbf{grad}_\Gamma(\boldsymbol{v})\right\|_{0,2,\Gamma} + \|\mathbf{P}(\boldsymbol{A}_h-\boldsymbol{I})\|_{0,\infty,\Gamma} \left\|\mathbf{grad}_\Gamma^T(\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{n}\right\|_{0,2,\Gamma} \\
& + \|\mathbf{P}(\boldsymbol{A}_h-\boldsymbol{I})\|_{0,\infty,\Gamma} \left\|\mathbf{grad}_\Gamma^T(\boldsymbol{v})\,(\boldsymbol{n}-\tilde{\boldsymbol{n}}_h)\right\|_{0,2,\Gamma} .
\end{aligned}$$

D'après le lemme C.5, page 165, nous avons les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\|_{0,2,\Gamma} &\leq \sqrt{d}\,\|\boldsymbol{n}\|_{0,\infty,\Gamma} \|\boldsymbol{v}\|_{0,2,\Gamma} \leq \sqrt{d}\,\|\boldsymbol{v}\|_{0,2,\Gamma} , \\
\|\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{n}-\tilde{\boldsymbol{n}}_h)\|_{0,2,\Gamma} &\leq \sqrt{d}\,\|\boldsymbol{n}-\tilde{\boldsymbol{n}}_h\|_{0,\infty,\Gamma} \|\boldsymbol{v}\|_{0,2,\Gamma} , \\
\left\|\mathbf{grad}_\Gamma^T(\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{n}\right\|_{0,2,\Gamma} &\leq \sqrt{d}\,\|\boldsymbol{n}\|_{0,\infty,\Gamma} \left\|\mathbf{grad}_\Gamma^T(\boldsymbol{v})\right\|_{0,2,\Gamma} \leq \sqrt{d}\,\left\|\mathbf{grad}_\Gamma(\boldsymbol{v})\right\|_{0,2,\Gamma} , \\
\left\|\mathbf{grad}_\Gamma^T(\boldsymbol{v})\,(\boldsymbol{n}-\tilde{\boldsymbol{n}}_h)\right\|_{0,2,\Gamma} &\leq \sqrt{d}\,\|\boldsymbol{n}-\tilde{\boldsymbol{n}}_h\|_{0,\infty,\Gamma} \left\|\mathbf{grad}_\Gamma(\boldsymbol{v})\right\|_{0,2,\Gamma} .
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{t}(\boldsymbol{v})\|_{0,2,\Gamma} \leq\ & \sqrt{d}\,\|\boldsymbol{y}\|_{0,\infty,\Gamma} \|\boldsymbol{n}-\tilde{\boldsymbol{n}}_h\|_{0,\infty,\Gamma} \|\boldsymbol{v}\|_{0,2,\Gamma} + \sqrt{d}\,\|\boldsymbol{y}-\tilde{\boldsymbol{y}}_h\|_{0,\infty,\Gamma} \|\boldsymbol{v}\|_{0,2,\Gamma} \\
& + \sqrt{d}\,\|\boldsymbol{y}-\tilde{\boldsymbol{y}}_h\|_{0,\infty,\Gamma} \|\boldsymbol{n}-\tilde{\boldsymbol{n}}_h\|_{0,\infty,\Gamma} \|\boldsymbol{v}\|_{0,2,\Gamma} + \left\|\boldsymbol{H}-\tilde{\boldsymbol{H}}_h\right\|_{0,\infty,\Gamma} \|\boldsymbol{v}\|_{0,2,\Gamma} \\
& + \|\boldsymbol{n}-\tilde{\boldsymbol{n}}_h\|_{0,\infty,\Gamma} \left\|\mathbf{grad}_\Gamma(\boldsymbol{v})\right\|_{0,2,\Gamma} + \sqrt{d}\,\|\mathbf{P}(\boldsymbol{A}_h-\boldsymbol{I})\|_{0,\infty,\Gamma} \left\|\mathbf{grad}_\Gamma(\boldsymbol{v})\right\|_{0,2,\Gamma} \\
& + \sqrt{d}\,\|\boldsymbol{n}-\tilde{\boldsymbol{n}}_h\|_{0,\infty,\Gamma} \|\mathbf{P}(\boldsymbol{A}_h-\boldsymbol{I})\|_{0,\infty,\Gamma} \left\|\mathbf{grad}_\Gamma(\boldsymbol{v})\right\|_{0,2,\Gamma} .
\end{aligned}$$

Par suite, après quelques majorations élémentaires sur l'inégalité précédente, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{t}(\boldsymbol{v})\|_{0,2,\Gamma} \leq\ & \sqrt{d}\left(1+\|\boldsymbol{y}\|_{0,\infty,\Gamma}\right) \|\boldsymbol{n}-\tilde{\boldsymbol{n}}_h\|_{0,\infty,\Gamma} \|\boldsymbol{v}\|_{1,2,\Gamma} \\
& + \sqrt{d}\,\|\boldsymbol{y}-\tilde{\boldsymbol{y}}_h\|_{0,\infty,\Gamma} \|\boldsymbol{n}-\tilde{\boldsymbol{n}}_h\|_{0,\infty,\Gamma} \|\boldsymbol{v}\|_{1,2,\Gamma} \\
& + \sqrt{d}\left(\|\boldsymbol{y}-\tilde{\boldsymbol{y}}_h\|_{0,\infty,\Gamma} + \left\|\boldsymbol{H}-\tilde{\boldsymbol{H}}_h\right\|_{0,\infty,\Gamma}\right) \|\boldsymbol{v}\|_{1,2,\Gamma} \\
& + \sqrt{d}\left(1+\|\boldsymbol{n}-\tilde{\boldsymbol{n}}_h\|_{0,\infty,\Gamma}\right) \|\mathbf{P}(\boldsymbol{A}_h-\boldsymbol{I})\|_{0,\infty,\Gamma} \|\boldsymbol{v}\|_{1,2,\Gamma} .
\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse 3.3 et le lemme 2.5, page 36, nous pouvons trouver une constante

strictement positive C_0 indépendante de h telle que

$$\|\boldsymbol{t}(\boldsymbol{v})\|_{0,2,\Gamma} \leq C_0\sqrt{d}\left[\left(1+\|\boldsymbol{y}\|_{0,\infty,\Gamma}\right)h^p + h^{p+q} + 2h^q + \left(1+C_0h^p\right)h^k\right]\|\boldsymbol{v}\|_{1,2,\Gamma}.$$

Soit $m = \min(k,q)$. Nous avons $m \leq k$ et $m \leq q$, donc $m \leq p$ car $k \leq p$ par hypothèse. L'inégalité précédente peut s'écrire comme suit :

$$\|\boldsymbol{t}(\boldsymbol{v})\|_{0,2,\Gamma} \leq C_0\sqrt{d}\left[\left(1+\|\boldsymbol{y}\|_{0,\infty,\Gamma}\right)h^{p-m} + h^{p+q-m} + 2h^{q-m} + \left(1+C_0h^p\right)h^{k-m}\right]h^m\|\boldsymbol{v}\|_{1,2,\Gamma}.$$

En utilisant la constante h_0 de l'hypothèse 3.2, nous obtenons :

$$\|\boldsymbol{t}(\boldsymbol{v})\|_{0,2,\Gamma} \leq C_0\sqrt{d}\left[\left(1+\|\boldsymbol{y}\|_{0,\infty,\Gamma}\right)h_0^{p-m} + h_0^{p+q-m} + 2h_0^{q-m} + \left(1+C_0h_0^p\right)h_0^{k-m}\right]h^m\|\boldsymbol{v}\|_{1,2,\Gamma}.$$

En utilisant la coercivité de a (cf. lemme 3.3), nous obtenons :

$$\|\boldsymbol{t}(\boldsymbol{v})\|_{0,2,\Gamma} \leq Ch^m|\boldsymbol{v}|_a,$$

où

$$C = \frac{C_0\sqrt{d}}{\sqrt{\alpha_a}}\left[\left(1+\|\boldsymbol{y}\|_{0,\infty,\Gamma}\right)h_0^{p-m} + h_0^{p+q-m} + 2h_0^{q-m} + \left(1+C_0h_0^p\right)h_0^{k-m}\right].$$

et α_a est la constante de coercivité de a. Ce qui prouve lemme 3.5. □

Soit $|\cdot|_{a_h}$ est la semi norme associée à la forme a_h :

$$|\boldsymbol{v}_h|_{a_h} = \sqrt{a_h(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{v}_h)}, \qquad \boldsymbol{v}_h \in \left(H^1(\Gamma_h)\right)^d.$$

A partir des résultats précédents, nous pouvons établir une notion d'équivalence entre les semi normes $|\cdot|_{a_h}$ et $|\cdot|_a$. Nous avons le lemme suivant :

Lemme 3.6 (Equivalence des semi normes)**.** *Soit h_0 la constante positive de l'hypothèse 3.2. Alors sous l'hypothèse 3.3 et h_0 suffisamment petit, il existe deux constantes strictement positives C et C' indépendantes de h telles que pour tout $\boldsymbol{v}_h \in \left(H^1(\Gamma_h)\right)^d$:*

$$\frac{1}{C}|\tilde{\boldsymbol{v}}_h|_a \leq |\boldsymbol{v}_h|_{a_h} \leq C'|\tilde{\boldsymbol{v}}_h|_a$$

où $\tilde{\boldsymbol{v}}_h \in \left(H^1(\Gamma)\right)^d$ est l'unique fonction définie par $\tilde{\boldsymbol{v}}_h = \boldsymbol{v}_h \circ \boldsymbol{p}^{-1}_{|\Gamma_h}$.

Démonstration. Soit $\boldsymbol{v}_h \in \left(H^1(\Gamma_h)\right)^d$. En utilisant la relation (3.4.6), nous avons :

$$\boldsymbol{L}_h(\boldsymbol{v}_h) = \boldsymbol{L}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h) - \boldsymbol{t}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h),$$

où $\tilde{\boldsymbol{v}}_h = \boldsymbol{v}_h \circ \boldsymbol{p}^{-1}_{|\Gamma_h}$. Par conséquent, nous avons :

$$\int_{\Gamma_h} |\boldsymbol{L}_h(\boldsymbol{v}_h)|^2 \, \mathrm{ds}_h \;=\; \int_{\Gamma} |\boldsymbol{L}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h) - \boldsymbol{t}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)|^2 \, \mu_h \mathrm{ds}.$$

On rappelle que μ_h est le jacobien de la projection $\boldsymbol{p}$ et vérifie (cf. remarque 2.2, page 30) :

$$\frac{1}{C_0} \leq \mu_h \leq C_0$$

où C_0 est une constante strictement positive dépendante uniquement de Γ. Donc, nous avons l'inégalité :

$$\frac{1}{C_0} \int_{\Gamma} |\boldsymbol{L}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h) - \boldsymbol{t}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)|^2 \, \mathrm{ds} \leq \int_{\Gamma_h} |\boldsymbol{L}_h(\boldsymbol{v}_h)|^2 \, \mathrm{ds}_h \;\leq\; C_0 \int_{\Gamma} |\boldsymbol{L}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h) - \boldsymbol{t}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)|^2 \, \mathrm{ds}.$$

Par suite, nous avons d'une part :

$$\frac{1}{C_0} \left(\int_{\Gamma} |\boldsymbol{L}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)|^2 - \int_{\Gamma} |\boldsymbol{t}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)|^2 \, \mathrm{ds} \right) \leq \int_{\Gamma_h} |\boldsymbol{L}_h(\boldsymbol{v}_h)|^2 \, \mathrm{ds}_h$$

et d'autre part

$$\int_{\Gamma_h} |\boldsymbol{L}_h(\boldsymbol{v}_h)|^2 \, \mathrm{ds}_h \;\leq\; C_0 \left(\int_{\Gamma} |\boldsymbol{L}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)|^2 \, \mathrm{ds} + \int_{\Gamma} |\boldsymbol{t}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)|^2 \, \mathrm{ds} \right).$$

Ce qui est équivalent à dire que :

$$\frac{1}{C_0} \left(\|\boldsymbol{L}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\|^2_{0,2,\Gamma} - \|\boldsymbol{t}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\|^2_{0,2,\Gamma} \right) \leq \|\boldsymbol{L}_h(\boldsymbol{v}_h)\|^2_{0,2,\Gamma_h} \;\leq\; C_0 \left(\|\boldsymbol{L}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\|^2_{0,2,\Gamma} + \|\boldsymbol{t}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\|^2_{0,2,\Gamma} \right).$$

En utilisant le résultat du lemme 3.5, on peut trouver une constante strictement positive C_1 indépendante de h telle que :

$$\|\boldsymbol{t}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\|^2_{0,2,\Gamma} \;\leq C_1 h^{2m} |\tilde{\boldsymbol{v}}_h|^2_a \;\leq\; C_1 h_0^{2m} |\tilde{\boldsymbol{v}}_h|^2_a .$$

où h_0 est la constante positive de l'hypothèse 3.2 et $m = \min(k, q)$. Posons $\varepsilon_m = h_0^{2m} |\tilde{\boldsymbol{v}}_h|^2_a$. Donc, nous avons :

$$\frac{1}{C_0} \left(\|\boldsymbol{L}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\|^2_{0,2,\Gamma} - C_1 \varepsilon_m \right) \leq \|\boldsymbol{L}_h(\boldsymbol{v}_h)\|^2_{0,2,\Gamma_h} \;\leq\; C_0 \left(\|\boldsymbol{L}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\|^2_{0,2,\Gamma} + C_1 \varepsilon_m \right).$$

De la même manière, nous montrons à partir des relations (3.4.4), (3.4.5) et le lemme 3.4 que :

$$\frac{1}{C_0}\left(\|\mathbf{D}_\Gamma(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\|^2_{0,2,\Gamma} - C_2\varepsilon_k\right) \leq \left\|\mathbf{D}_{\Gamma_h}(\boldsymbol{v}_h)\right\|^2_{0,2,\Gamma_h} \leq C_0\left(\|\mathbf{D}_\Gamma(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\|^2_{0,2,\Gamma} + C_2\varepsilon_k\right)$$
$$\frac{1}{C_0}\left(\|\mathrm{div}_\Gamma(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\|^2_{0,2,\Gamma} - C_2\varepsilon_k\right) \leq \left\|\mathrm{div}_{\Gamma_h}(\boldsymbol{v}_h)\right\|^2_{0,2,\Gamma_h} \leq C_0\left(\|\mathrm{div}_\Gamma(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\|^2_{0,2,\Gamma} + C_2\varepsilon_k\right).$$

où C_2 est une constante strictement positive indépendante de h. Par ailleurs, en utilisant le lemme 2.3, page 32 nous avons l'encadrement :

$$\frac{1}{C_0}\|\tilde{\boldsymbol{v}}_h\|^2_{0,2,\Gamma} \leq \|\boldsymbol{v}_h\|^2_{0,2,\Gamma_h} \leq C_0\|\tilde{\boldsymbol{v}}_h\|^2_{0,2,\Gamma}.$$

Donc, en faisant la somme membre à membre des encadrements précédents avec les paramètres c_f, η, λ et γ, nous obtenons :

$$\frac{1}{C_0}\left(|\tilde{\boldsymbol{v}}_h|^2_a - C_3\varepsilon_m\right) \leq |\boldsymbol{v}_h|^2_{a_h} \leq C_0\left(|\tilde{\boldsymbol{v}}_h|^2_a + C_3\varepsilon_m\right)$$

avec

$$C_3 = \max(c_f, \eta, \lambda, \gamma)\,(C_1 + C_2).$$

Par conséquent, nous avons :

$$\frac{1}{C_0}\left(1 - C_3h_0^{2m}\right)|\tilde{\boldsymbol{v}}_h|^2_a \leq |\boldsymbol{v}_h|^2_{a_h} \leq C_0\left(1 + C_3h_0^{2m}\right)|\tilde{\boldsymbol{v}}_h|^2_a.$$

Posons $C = C_0\left(1 - C_3h_0^{2m}\right)^{-1}$ et $C' = C_0\left(1 + C_3h_0^{2m}\right)$. Pour $h_0 < \left(\sqrt{C_3^{-1}}\right)^{\frac{1}{m}}$, les constantes C et C' sont strictement positives et indépendantes de h et nous avons :

$$\frac{1}{C}|\tilde{\boldsymbol{v}}_h|_a \leq |\boldsymbol{v}_h|_{a_h} \leq C'|\tilde{\boldsymbol{v}}_h|_a.$$

Ce qui prouve lemme 3.6. □

Ce lemme est très important dans le cadre de notre étude d'existence et unicité de la solution du problème discret 3.5 car il nous permet d'établir que les formes bilinéaires (resp. linéaires) définies sur Γ_h et Γ ont les mêmes propriétés de continuité et de coercivité pour h_0 suffisamment petit.

3.4.3 Existence et unicité de la solution du problème discret

L'objectif de cette sous-section est de démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème 3.5. Pour cela, nous avons besoin de deux résultats préliminaires importants sur la continuité et la coercivité des formes définies sur Γ_h. Nous avons les résultats suivants.

Lemme 3.7 (Continuité de a_h et ℓ_h)**.** *Sous l'hypothèse 3.2, les formes a_h et ℓ_h sont respectivement continues sur $V_h \times V_h$ et V_h.*

Démonstration. Ce lemme est une conséquence directe des lemmes 2.3, 3.2 et de la remarque 3.4. En effet, sous l'hypothèse 3.2, nous avons démontré que les normes $\|\cdot\|_{1,2,\Gamma}$ et $\|\cdot\|_{1,2,\Gamma_h}$ sont équivalentes. Cela nous permet de conserver la continuité des formes a et ℓ en passant de la surface Γ à son approximation Γ_h. □

Lemme 3.8 (Coercivité de a_h)**.** *Il existe une constante strictement positive α_{a_h} telle que l'on ait pour tout $\boldsymbol{v}_h$ appartenant à V_h :*

$$a_h(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{v}_h) \ \geq \alpha_{a_h} \|\boldsymbol{v}_h\|^2_{1,2,\Gamma_h} .$$

Démonstration. Soit $\boldsymbol{v}_h \in V_h$. Rappelons que

$$a_h(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{v}_h) \ = \ |\boldsymbol{v}_h|^2_{a_h} .$$

En utilisant successivement les lemme 3.6, 3.3, et 2.3 dans cet ordre, nous pouvons trouver deux constantes C_0 et C_1 strictement positive et indépendante de h telles que

$$a_h(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{v}_h) \ \geq \frac{1}{C_0} |\tilde{\boldsymbol{v}}_h|^2_a \ \geq \ \frac{\alpha_a}{C_0} \|\tilde{\boldsymbol{v}}_h\|^2_{1,2,\Gamma} \ \geq \ \frac{\alpha_a}{C_0 C_1} \|\boldsymbol{v}_h\|^2_{1,2,\Gamma_h} ,$$

où $\tilde{\boldsymbol{v}}_h$ est l'unique fonction donnée par la relation $\tilde{\boldsymbol{v}}_h = \boldsymbol{v}_h \circ \boldsymbol{p}^{-1}_{|\Gamma_h}$. Il suffit de faire le choix

$$\alpha_{a_h} \ = \ \frac{\alpha_a}{C_0 C_1},$$

pour obtenir

$$a_h(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{v}_h) \ \geq \alpha_{a_h} \|\boldsymbol{v}_h\|^2_{1,2,\Gamma_h} .$$

Ce qui prouve lemme 3.8. □

Les deux lemmes précédents nous conduisent au théorème suivant sur l'existence et l'unicité de la solution du problème 3.5.

Théorème 3.2 (Existence et unicité de la solution du problème 3.5)**.** *Soit $\boldsymbol{f}_h \in V_h$. Sous les hypothèses 3.2 et 3.3,*

(i) si $c_f > 0$ alors le problème 3.5 admet une unique solution $\boldsymbol{u}_{\gamma,h} \in V_h$,

(ii) si $c_f = 0$ alors il existe une solution $\boldsymbol{u}_{\gamma,h} \in V_h$ du problème 3.5, unique à une translation et rotation tangente près.

De plus, dans les deux cas $\boldsymbol{u}_{\gamma,h}$ vérifie :

$$|\boldsymbol{u}_{\gamma,h}|_{a_h} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha_{a_h}}} \|\boldsymbol{f}_h\|_{0,2,\Gamma_h}$$

où α_{a_h} est la constante de coercivité de a_h.

Démonstration. En utilisant les résultats des lemmes 3.7 et 3.8, a_h est une forme bilinéaire continue et coercive sur $V_h \times V_h$, ℓ_h est une forme linéaire continue sur V_h. Alors, le théorème de Lax-Milgram permet de déduire que le problème 3.5 admet une unique solution dans $V_h \times V_h$ pour tout c_f strictement positif. Dans le cas où $c_f = 0$, nous avons l'unicité de la solution à une translation et rotation près comme pour le problème 3.3. Et de plus, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur ℓ_h, nous avons pour $\boldsymbol{u}_{\gamma,h}$ solution du problème 3.5 :

$$|\boldsymbol{u}_{\gamma,h}|^2_{a_h} = a_h(\boldsymbol{u}_{\gamma,h}, \boldsymbol{u}_{\gamma,h}) = \ell_h(\boldsymbol{u}_{\gamma,h}) \leq \|\boldsymbol{f}_h\|_{0,2,\Gamma_h} \|\boldsymbol{u}_{\gamma,h}\|_{0,2,\Gamma_h} \leq \|\boldsymbol{f}_h\|_{0,2,\Gamma_h} \|\boldsymbol{u}_{\gamma,h}\|_{1,2,\Gamma_h}.$$

La coercivité de a_h permet d'écrire

$$|\boldsymbol{u}_{\gamma,h}|^2_{a_h} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha_{a_h}}} \|\boldsymbol{f}_h\|_{0,2,\Gamma_h} |\boldsymbol{u}_{\gamma,h}|_{a_h},$$

où α_{a_h} est la constante de coercivité de a_h. D'où

$$|\boldsymbol{u}_{\gamma,h}|_{a_h} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha_{a_h}}} \|\boldsymbol{f}_h\|_{0,2,\Gamma_h}.$$

□

3.4.4 Problème discret équivalent sur la surface exacte

L'objectif de cette sous-section est de réécrire le problème 3.5 sur Γ. Cela servira dans la section 3.5 pour l'estimation d'erreurs. Soient $\boldsymbol{u}_\gamma \in (H^1(\Gamma))^d$, $\boldsymbol{u}_{\gamma,h} \in V_h$ respectivement solutions des problèmes 3.3 et 3.5, et $\boldsymbol{f}_h \in V_h$. Soient $\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}, \tilde{\boldsymbol{v}}_h, \tilde{\boldsymbol{f}}_h \in (H^1(\Gamma))^d \cap (C^0(\Gamma))^d$ trois fonctions telles que :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_{\gamma,h}(\boldsymbol{x}) &= \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}(\boldsymbol{x} - \phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})), && \boldsymbol{x} \in \Gamma_h \\
\boldsymbol{v}_h(\boldsymbol{x}) &= \tilde{\boldsymbol{v}}_h(\boldsymbol{x} - \phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})), && \boldsymbol{x} \in \Gamma_h \\
\boldsymbol{f}_h(\boldsymbol{x}) &= \tilde{\boldsymbol{f}}_h(\boldsymbol{x} - \phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})), && \boldsymbol{x} \in \Gamma_h.
\end{aligned}$$

Sans perdre de généralité, on peut choisir $\boldsymbol{f}_h$ de sorte que $\tilde{\boldsymbol{f}}_h \circ \boldsymbol{p}$ coincide avec $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{p}$ sur Γ_h. Donc dans la suite, nous utiliserons

$$\boldsymbol{f}_h(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} - \phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})), \qquad \boldsymbol{x} \in \Gamma_h. \tag{3.4.7}$$

Soit $\tilde{V}_h$ le sous-espace de dimension finie de $(H^1(\Gamma))^d \cap (C^0(\Gamma))^d$ défini par

$$\tilde{V}_h = \left\{ \tilde{\boldsymbol{v}}_h \in \left(H^1(\Gamma)\right)^d \cap \left(C^0(\Gamma)\right)^d,\ \tilde{\boldsymbol{v}}_h = \boldsymbol{v}_h \circ \boldsymbol{p}^{-1}_{|\Gamma_h},\ \boldsymbol{v}_h \in V_h \right\}. \tag{3.4.8}$$

En utilisant les relations 3.4.4-3.4.7, nous avons d'une part

$$a_h(\boldsymbol{u}_{\gamma,h}, \boldsymbol{v}_h) = a(\mu_h; \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}, \tilde{\boldsymbol{v}}_h) - b(\mu_h; \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}, \tilde{\boldsymbol{v}}_h), \qquad \boldsymbol{v}_h \in V_h, \tag{3.4.9}$$

où $b:\ L^\infty(\Gamma) \times (H^1(\Gamma))^d \times (H^1(\Gamma))^d \longrightarrow \mathbb{R}$ est la forme trilinéaire définie par

$$\begin{aligned} b(\mu; \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) \ = \ & \int_\Gamma 2\eta \mathbf{D}_\Gamma(\boldsymbol{w}) : \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{v})\, \mu_h \mathrm{ds} + \int_\Gamma \lambda \mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{w})\, \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{v})\right)\, \mu_h \mathrm{ds} \\ & + \int_\Gamma \gamma \boldsymbol{L}(\boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{t}(\boldsymbol{v}) \mu_h \mathrm{ds} + \int_\Gamma 2\eta \mathbf{D}_\Gamma(\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{w})\, \mu_h \mathrm{ds} \\ & + \int_\Gamma \lambda \mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{v})\, \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{w})\right)\, \mu_h \mathrm{ds} + \int_\Gamma \gamma \boldsymbol{L}(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{t}(\boldsymbol{w}) \mu_h \mathrm{ds} \\ & - \int_\Gamma 2\eta \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{w}) : \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{v})\, \mu_h \mathrm{ds} - \int_\Gamma \lambda \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{w})\right) \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{v})\right)\, \mu_h \mathrm{ds} \\ & - \int_\Gamma \gamma \boldsymbol{t}(\boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{t}(\boldsymbol{v})\, \mu_h \mathrm{ds} \end{aligned}$$

et d'autre part

$$a_h(\boldsymbol{u}_{\gamma,h}, \boldsymbol{v}_h) = \ell_h(\boldsymbol{v}_h) = \ell(\mu_h; \tilde{\boldsymbol{v}}_h), \qquad \boldsymbol{v}_h \in V_h. \tag{3.4.10}$$

Par conséquent, nous avons

$$a(1; \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}, \tilde{\boldsymbol{v}}_h) = \ a(1-\mu_h; \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}, \tilde{\boldsymbol{v}}_h) + b(\mu_h; \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}, \tilde{\boldsymbol{v}}_h) + \ell(\mu_h; \tilde{\boldsymbol{v}}_h), \qquad \tilde{\boldsymbol{v}}_h \in \tilde{V}_h \tag{3.4.11}$$

Ce qui nous conduit au problème suivant :

Problème 3.6 (Problème discret équivalent sur Γ)**.** *Trouver $\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h} \in \tilde{V}_h$ tel que*

$$a(1; \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}, \tilde{\boldsymbol{v}}_h) = \ a(1-\mu_h; \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}, \tilde{\boldsymbol{v}}_h) + b(\mu_h; \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}, \tilde{\boldsymbol{v}}_h) + \ell(\mu_h; \tilde{\boldsymbol{v}}_h), \qquad \forall\ \tilde{\boldsymbol{v}}_h \in \tilde{V}_h$$

Remarque 3.6. *La forme bilinéaire b contient toutes les erreurs géométriques à travers les opérateurs $\boldsymbol{\tau}$ et $\boldsymbol{t}$. Il s'agit des erreurs commises en approchant Γ par Γ_h, directement liées aux approximations de la normale et des courbures de Γ.*

Il est clair que les problèmes 3.5 et 3.6 définissent la même approximation exprimée respectivement sur Γ_h et Γ. De plus, ces problèmes ont les mêmes propriétés numériques notamment l'existence et l'unicité de leurs solutions respectives et les propriétés de convergence vers la solution de 3.3. Dans la section suivante, nous allons utiliser le problème 3.6 au lieu du problème 3.5 pour estimer l'erreur commise sur la solution exacte.

3.5 Estimations d'erreur

Le but de cette section est d'établir l'estimation a priori de l'erreur commise sur la solution exacte (solution du problème 3.3), notamment en norme H^1. Rappelons que $\boldsymbol{u}_\gamma \in (H^1(\Gamma))^d$, $\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h} \in \tilde{V}_h$ sont respectivement solutions des problèmes 3.3 et 3.6.

3.5.1 Estimation des erreurs géométriques

Il s'agit d'estimer la forme trilinéaire b contenant toutes les erreurs géométriques. Nous avons le résultat suivant :

Lemme 3.9 (Estimation des erreurs géométriques)**.** *Sous les hypothèses 3.2 et 3.3, il existe une constante C positive indépendante de h telle que pour tout $\tilde{\boldsymbol{v}}_h \in \tilde{V}_h$, on ait l'inégalité*

$$|b(\mu_h; \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}, \tilde{\boldsymbol{v}}_h)| \leq \frac{C}{\sqrt{\alpha_a}} h^m \|\boldsymbol{f}\|_{0,2,\Gamma} |\tilde{\boldsymbol{v}}_h|_a ,$$

où α_a est la constante de coercivité de a et $m = \min(k, q)$.

Démonstration. Soit $\tilde{\boldsymbol{v}}_h \in \tilde{V}_h$. En utilisant le résultat du lemme 2.5, on peut donc écrire pour h suffisamment petit que $\mu_h = 1 + o(h^{k+1})$, par conséquent nous avons :

$$\begin{aligned}
b(\mu; \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}, \tilde{\boldsymbol{v}}_h) \;=\; & \int_\Gamma 2\eta \mathbf{D}_\Gamma(\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}) : \boldsymbol{\tau}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\,\mathrm{ds} + \int_\Gamma \lambda \mathrm{div}_\Gamma(\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h})\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h))\,\mathrm{ds} \\
& + \int_\Gamma \gamma \boldsymbol{L}(\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}) \cdot \boldsymbol{t}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\,\mathrm{ds} + \int_\Gamma 2\eta \mathbf{D}_\Gamma(\tilde{\boldsymbol{v}}_h) : \boldsymbol{\tau}(\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h})\,\mathrm{ds} \\
& + \int_\Gamma \lambda \mathrm{div}_\Gamma(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau}(\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}))\,\mathrm{ds} + \int_\Gamma \gamma \boldsymbol{L}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h) \cdot \boldsymbol{t}(\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h})\,\mathrm{ds} \\
& - \int_\Gamma 2\eta \boldsymbol{\tau}(\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}) : \boldsymbol{\tau}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\,\mathrm{ds} - \int_\Gamma \lambda \mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau}(\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}))\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h))\,\mathrm{ds} \\
& - \int_\Gamma \gamma \boldsymbol{t}(\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}) \cdot \boldsymbol{t}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\,\mathrm{ds} + o(h^{k+1}).
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur la relation précédente, nous obtenons

$$\begin{aligned}
|b(\mu; \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}, \tilde{\boldsymbol{v}}_h)| \leq\; & 2\eta \|\mathbf{D}_\Gamma(\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h})\|_{0,2,\Gamma} \|\boldsymbol{\tau}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\|_{0,2,\Gamma} + \lambda \|\mathrm{div}_\Gamma(\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h})\|_{0,2,\Gamma} \|\mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h))\|_{0,2,\Gamma} \\
& + \gamma \|\boldsymbol{L}(\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h})\|_{0,2,\Gamma} \|\boldsymbol{t}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\|_{0,2,\Gamma} + 2\eta \|\mathbf{D}_\Gamma(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\|_{0,2,\Gamma} \|\boldsymbol{\tau}(\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h})\|_{0,2,\Gamma} \\
& + \lambda \|\mathrm{div}_\Gamma(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\|_{0,2,\Gamma} \|\mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau}(\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}))\|_{0,2,\Gamma} + \gamma \|\boldsymbol{L}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\|_{0,2,\Gamma} \|\boldsymbol{t}(\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h})\|_{0,2,\Gamma} \\
& + 2\eta \|\boldsymbol{\tau}(\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h})\|_{0,2,\Gamma} \|\boldsymbol{\tau}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\|_{0,2,\Gamma} + \lambda \|\mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau}(\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}))\|_{0,2,\Gamma} \|\mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h))\|_{0,2,\Gamma} \\
& + \gamma \|\boldsymbol{t}(\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h})\|_{0,2,\Gamma} \|\boldsymbol{t}(\tilde{\boldsymbol{v}}_h)\|_{0,2,\Gamma} + C_0 h^{k+1}.
\end{aligned}$$

où C_0 est une constante strictement positive indépendante h. En utilisant les lemmes 3.4 et 3.5,

nous pouvons trouver une constante C_1 positive indépendante de h telle que :

$$|b(\mu; \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}, \tilde{\boldsymbol{v}}_h)| \leq C_1 h^m \left|\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}\right|_a \left|\tilde{\boldsymbol{v}}_h\right|_a + C_0 h^{k+1},$$

où $m = \min(k, q)$. Les constantes C_0 et C_1 dépendent des paramètres c_f, η, λ et γ. Par conséquent, nous avons :

$$|b(\mu; \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}, \tilde{\boldsymbol{v}}_h)| \leq \max(C_1, C_0) \left(h^m \left|\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}\right|_a \left|\tilde{\boldsymbol{v}}_h\right|_a + h^{k+1}\right).$$

Or $m < k+1$, donc en utilisant la constante h_0 de l'hypothèse 3.2, nous avons

$$h^{k+1} = \left(h^{k+1-m}\right)(h^m) \leq \left(h_0^{k+1-m}\right)(h^m).$$

Par suite, nous pouvons trouver une constante $C_2 \geq \max(C_1, C_0)$ strictement positive et indépendante de h telle que :

$$|b(\mu; \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}, \tilde{\boldsymbol{v}}_h)| \leq C_2 \left(1 + h_0^{k+1-m}\right) h^m \left|\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}\right|_a \left|\tilde{\boldsymbol{v}}_h\right|_a.$$

En utilisant le lemme 3.6 et le théorème 3.2, nous avons :

$$\left|\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}\right|_a \leq C_3 \left|\boldsymbol{u}_{\gamma,h}\right|_{a_h} \leq \frac{C_3}{\sqrt{\alpha_{a_h}}} \left\|\boldsymbol{f}_h\right\|_{0,2,\Gamma_h} \leq \frac{C_4}{\sqrt{\alpha_a}} \left\|\boldsymbol{f}\right\|_{0,2,\Gamma},$$

où C_3 et C_4 sont deux constantes strictement positives indépendantes de h. Finalement, nous obtenons :

$$|b(\mu; \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}, \tilde{\boldsymbol{v}}_h)| \leq \frac{C}{\sqrt{\alpha_a}} h^m \left\|\boldsymbol{f}\right\|_{0,2,\Gamma} \left|\tilde{\boldsymbol{v}}_h\right|_a.$$

avec $C = C_2 C_4 \left(1 + h_0^{k+1-m}\right)$. Ce qui prouve le lemme 3.9. □

Ce lemme exprime globalement que l'erreur géométrique ne dépend que de l'erreur commise sur la courbure de la surface Γ. Cela signifie que le choix de l'approximation de $\boldsymbol{n}$ n'est pas très contraignant. On peut donc choisir $\boldsymbol{n}_{\Gamma_h}$ au lieu de $\boldsymbol{n}_h$ dans la définition de $\boldsymbol{L}_h$ sans perdre de précision sur l'erreur géométrique.

3.5.2 Estimation en norme de l'énergie

Nous avons le résultat suivant :

Théorème 3.3 (Estimation abstraite en norme de l'énergie)**.** *Soient Γ une surface fermée ($\partial\Gamma = \emptyset$) bornée de classe C^2 dans $\mathbb{R}^d$ et Γ_h une approximation polynomiale par morceaux de Γ de degré k, globalement continue et quasi-uniforme. Soit V_h un sous-espace vectoriel de dimension finie de $(H^1(\Gamma_h))^d \cap (C^0(\Gamma_h))^d$. Si $\boldsymbol{u}_\gamma$ est la solution du problème 3.3, $\boldsymbol{u}_{\gamma,h}$ est la solution du problème 3.5, $\boldsymbol{f}_h \in V_h$, alors sous les hypothèses 3.1, 3.2 et 3.3, il existe une constante positive C indépendante*

de h telle que

$$|\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}|_a \leq C \left(\inf_{\tilde{\boldsymbol{v}}_h \in \tilde{V}_h} |\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{v}}_h|_{1,2,\Gamma} + h^m \|\boldsymbol{f}\|_{0,2,\Gamma} \right)$$

où $\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h} \in \tilde{V}_h$ est définie par $\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h} = \boldsymbol{u}_{\gamma,h} \circ \boldsymbol{p}^{-1}_{|\Gamma_h}$ et $m = \min(k,q)$.

Démonstration. Soit $\tilde{\boldsymbol{v}}_h \in \tilde{V}_h$. Nous avons

$$a(1; \boldsymbol{u}_\gamma, \tilde{\boldsymbol{v}}_h) = \ell(1; \tilde{\boldsymbol{v}}_h), \tag{3.5.1}$$
$$a(1; \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}, \tilde{\boldsymbol{v}}_h) = a(1-\mu_h; \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}, \tilde{\boldsymbol{v}}_h) + b(\mu_h; \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}, \tilde{\boldsymbol{v}}_h) + \ell(\mu_h; \tilde{\boldsymbol{v}}_h). \tag{3.5.2}$$

D'une part, en retranchant 3.5.2 à 3.5.1, nous obtenons

$$a(1; \boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}, \tilde{\boldsymbol{v}}_h) = \ell(1-\mu_h; \tilde{\boldsymbol{v}}_h) - a(1-\mu_h; \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}, \tilde{\boldsymbol{v}}_h) - b(\mu_h; \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}, \tilde{\boldsymbol{v}}_h) \tag{3.5.3}$$

et d'autre part, en utilisant la décomposition $\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h} = (\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{v}}_h) - (\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h} - \tilde{\boldsymbol{v}}_h)$ et la trilinéarité de a, nous

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}|_a^2 &= a(1; \boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}, \boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}) \\ &= a(1; \boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}, \boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{v}}_h) - a(1; \boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}, \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h} - \tilde{\boldsymbol{v}}_h). \end{aligned}$$

Puis, en prenant comme fonction test $\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h} - \tilde{\boldsymbol{v}}_h$ dans la relation (3.5.3), nous pouvons réécrire la relation précédente comme suit :

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}|_a^2 &= a(1; \boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}, \boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{v}}_h) + a(1-\mu_h; \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}, \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h} - \tilde{\boldsymbol{v}}_h) \\ &\quad + b(\mu_h; \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}, \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h} - \tilde{\boldsymbol{v}}_h) - \ell(1-\mu_h; \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h} - \tilde{\boldsymbol{v}}_h). \end{aligned}$$

En utilisant la continuité des formes a et ℓ (cf. lemme 3.2 et l'inégalité (3.4)), nous avons

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}|_a^2 \leq\ & C_a \|\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}\|_{1,2,\Gamma} \|\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{v}}_h\|_{1,2,\Gamma} + C_a \|1-\mu_h\|_{0,\infty,\Gamma} \|\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}\|_{1,2,\Gamma} \|\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h} - \tilde{\boldsymbol{v}}_h\|_{1,2,\Gamma} \\ & + \|1-\mu_h\|_{0,\infty,\Gamma} \|\boldsymbol{f}\|_{0,2,\Gamma} \|\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h} - \tilde{\boldsymbol{v}}_h\|_{1,2,\Gamma} + |b(\mu_h; \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}, \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h} - \tilde{\boldsymbol{v}}_h)| \end{aligned}$$

où C_a est la constante de continuité de a. En utilisant la coercivité de a (cf. lemme 3.3) et le lemme 3.9, nous obtenons :

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}|_a^2 \leq\ & \frac{C_a}{\alpha_a} |\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}|_a |\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{v}}_h|_a + \frac{C_a}{\alpha_a} \|1-\mu_h\|_{0,\infty,\Gamma} |\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}|_a |\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h} - \tilde{\boldsymbol{v}}_h|_a \\ & + \frac{1}{\sqrt{\alpha_a}} \|1-\mu_h\|_{0,\infty,\Gamma} \|\boldsymbol{f}\|_{0,2,\Gamma} |\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h} - \tilde{\boldsymbol{v}}_h|_a + \frac{C_0}{\sqrt{\alpha_a}} h^m \|\boldsymbol{f}\|_{0,2,\Gamma} |\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h} - \tilde{\boldsymbol{v}}_h|_a , \end{aligned}$$

où α_a est la constante de coercivité de a, $m = \min(k,q)$ et C_0 est une constante strictement positive indépendante de h. En utilisant le lemme 3.6 et le théorème 3.2, nous pouvons trouver

une constante C_1 strictement positive indépendante de h telle que

$$|\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}|_a \leq \frac{C_1}{\sqrt{\alpha_a}} \|\boldsymbol{f}\|_{0,2,\Gamma}.$$

Par conséquent, nous avons :

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}|_a^2 \leq & \frac{C_a}{\alpha_a} |\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}|_a |\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{v}}_h|_a + \frac{C_0}{\sqrt{\alpha_a}} h^m \|\boldsymbol{f}\|_{0,2,\Gamma} |\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h} - \tilde{\boldsymbol{v}}_h|_a \\ & + \frac{(\alpha_a + C_1 C_a)}{\alpha_a \sqrt{\alpha_a}} \|1 - \mu_h\|_{0,\infty,\Gamma} \|\boldsymbol{f}\|_{0,2,\Gamma} |\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h} - \tilde{\boldsymbol{v}}_h|_a .\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 2.5, page 36, nous pouvons trouver une constante C_2 strictement positive indépendante de h telle que

$$\|1 - \mu_h\|_{0,\infty,\Gamma} \leq C_2 h^{k+1}.$$

Par conséquent, l'inégalité précédente devient

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}|_a^2 \leq & \frac{C_a}{\alpha_a} |\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}|_a |\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{v}}_h|_a \\ & + \left(\frac{C_0}{\sqrt{\alpha_a}} h^m + \frac{(\alpha_a + C_1 C_a)}{\alpha_a \sqrt{\alpha_a}} C_2 h^{k+1} \right) \|\boldsymbol{f}\|_{0,2,\Gamma} |\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h} - \tilde{\boldsymbol{v}}_h|_a .\end{aligned}$$

En utilisant la constante h_0 de l'hypothèse 3.2, nous obtenons à partir de l'inégalité précédente

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}|_a^2 \leq & \frac{C_a}{\alpha_a} |\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}|_a |\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{v}}_h|_a \\ & + \left(\frac{C_0}{\sqrt{\alpha_a}} + \frac{(\alpha_a + C_1 C_a)}{\alpha_a \sqrt{\alpha_a}} C_2 h_0^{k+1-m} \right) h^m \|\boldsymbol{f}\|_{0,2,\Gamma} |\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h} - \tilde{\boldsymbol{v}}_h|_a .\end{aligned}$$

Posons

$$C = \frac{C_a}{\alpha_a} + \left(\frac{C_0}{\sqrt{\alpha_a}} + \frac{(\alpha_a + C_1 C_a)}{\alpha_a \sqrt{\alpha_a}} C_2 h_0^{k+1-m} \right).$$

Nous avons donc

$$|\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}|_a^2 \leq C \left(|\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}|_a |\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{v}}_h|_a + h^m \|\boldsymbol{f}\|_{0,2,\Gamma} |\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h} - \tilde{\boldsymbol{v}}_h|_a \right),$$

valable pour tout $\tilde{\boldsymbol{v}}_h \in \tilde{V}_h$. En particulier, nous avons :

$$|\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}|_a^2 \leq C \left(|\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}|_a \left|\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}^a_{\gamma,h}\right|_a + h^m \|\boldsymbol{f}\|_{0,2,\Gamma} \left|\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h} - \tilde{\boldsymbol{u}}^a_{\gamma,h}\right|_a \right), \tag{3.5.4}$$

où $\tilde{\boldsymbol{u}}^a_{\gamma,h}$ désigne la projection orthogonale de $\boldsymbol{u}_\gamma$ sur $\tilde{V}_h$ au sens de la semi-norme associée à a.

Cette projection vérifie

$$\left|\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}^a_{\gamma,h}\right|_a = \inf_{\tilde{\boldsymbol{v}}_h \in \tilde{V}_h} \left|\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{v}}_h\right|_a , \tag{3.5.5}$$

et elle est caractérisée par

$$a(1; \boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}^a_{\gamma,h}, \tilde{\boldsymbol{v}}_h) = 0, \qquad \forall\, \tilde{\boldsymbol{v}}_h \in \tilde{V}_h. \tag{3.5.6}$$

En prenant $\tilde{\boldsymbol{v}}_h = \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h} - \tilde{\boldsymbol{u}}^a_{\gamma,h}$ dans la relation (3.5.6), nous obtenons

$$a(1; \boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}^a_{\gamma,h}, \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h} - \tilde{\boldsymbol{u}}^a_{\gamma,h}) = 0.$$

Par conséquent, en utilisant la bilinéarité de a nous avons

$$a(1; \boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}, \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h} - \tilde{\boldsymbol{u}}^a_{\gamma,h}) = a(1; \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h} - \tilde{\boldsymbol{u}}^a_{\gamma,h}, \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h} - \tilde{\boldsymbol{u}}^a_{\gamma,h}) = \left|\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h} - \tilde{\boldsymbol{u}}^a_{\gamma,h}\right|_a^2 .$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur a, nous obtenons :

$$\left|\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h} - \tilde{\boldsymbol{u}}^a_{\gamma,h}\right|_a^2 \leq \left|\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}\right|_a \left|\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h} - \tilde{\boldsymbol{u}}^a_{\gamma,h}\right|_a .$$

Par suite, nous avons :

$$\left|\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h} - \tilde{\boldsymbol{u}}^a_{\gamma,h}\right|_a \leq \left|\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}\right|_a .$$

Par conséquent, de l'inégalité (3.5.4) et (3.5.5), nous avons

$$\left|\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}\right|_a^2 \leq C \left(\inf_{\tilde{\boldsymbol{v}}_h \in \tilde{V}_h} \left|\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{v}}_h\right|_a + h^m \left\|\boldsymbol{f}\right\|_{0,2,\Gamma} \right) \left|\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}\right|_a .$$

D'où

$$\left|\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}\right|_a \leq C \left(\inf_{\tilde{\boldsymbol{v}}_h \in \tilde{V}_h} \left|\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{v}}_h\right|_a + h^m \left\|\boldsymbol{f}\right\|_{0,2,\Gamma} \right) .$$

Ce qui prouve le théorème 3.3. □

Ce théorème exprime l'estimation abstraite de l'erreur de consistance qui découle de l'approximation de Γ par Γ_h. Concrètement, nous nous plaçons dans le cadre classique des éléments finis de Lagrange, nous supposons que la solution $\boldsymbol{u}_\gamma$ du problème 3.3 appartient à $\left(H^{k+1}(\Gamma)\right)^d$ et nous définissons le sous-espace V_h par

$$V_h = \left\{ \boldsymbol{v}_h \in \left(C^0(\Gamma_h)\right)^d \cap \left(H^1(\Gamma_h)\right)^d , \boldsymbol{v}_{h_{|K_h}} \in P_k^d(K_h) , \forall K_h \in \Gamma_h \right\} . \tag{3.5.7}$$

Dans ce cas nous avons le résultat suivant :

Corollaire 3.1 (Estimation de l'énergie pour les éléments finis de Lagrange)**.** *Sous les hypothèses*

du théorème 3.3, il existe une constante positive C indépendante de h telle que

$$|\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}|_a \leq Ch^m \left(\|\boldsymbol{u}_\gamma\|_{k+1,2,\Gamma} + \|\boldsymbol{f}\|_{0,2,\Gamma} \right)$$

où $\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h} \in \tilde{V}_h$ est définie par $\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h} = \boldsymbol{u}_{\gamma,h} \circ \boldsymbol{p}^{-1}_{|\Gamma_h}$ et $m = \min(k,q)$.

Démonstration. Soit $\boldsymbol{\pi}_h$ l'opérateur d'interpolation de $\left(H^{k+1}(\Gamma)\right)^d$ dans V_h. D'après la proposition 2.6, nous pouvons définir $\tilde{\boldsymbol{\pi}}_h$ l'opérateur d'interpolation de $\left(H^{k+1}(\Gamma)\right)^d$ dans $\tilde{V}_h$. De plus, en utilisant le lemme 3.1, nous pouvons trouver une constante C_0 strictement positive et indépendante de h telle que

$$\inf_{\tilde{\boldsymbol{v}}_h \in \tilde{V}_h} |\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{v}}_h|_a \leq |\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{\pi}}_h \boldsymbol{u}_\gamma|_a \leq C_0 h^k \|\boldsymbol{u}_\gamma\|_{k+1,2,\Gamma}.$$

Par conséquent, en utilisant le théorème 3.3, nous pouvons trouver une constante C_1 strictement positive et indépendante de h telle que

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}|_a &\leq C_1 \left(C_0 h^k \|\boldsymbol{u}_\gamma\|_{k+1,2,\Gamma} + h^m \|\boldsymbol{f}\|_{0,2,\Gamma} \right) \\ &\leq C_1 h^m \left(C_0 h^{k-m} \|\boldsymbol{u}_\gamma\|_{k+1,2,\Gamma} + \|\boldsymbol{f}\|_{0,2,\Gamma} \right) \end{aligned}$$

Comme $k \geq m$, donc $h^{k-m} \leq h_0^{k-m}$, où h_0 est la constante de l'hypothèse 3.2. Par conséquent, nous obtenons

$$|\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}|_a \leq C_1 h^m \left(C_0 h_0^{k-m} \|\boldsymbol{u}_\gamma\|_{k+1,2,\Gamma} + \|\boldsymbol{f}\|_{0,2,\Gamma} \right).$$

Par suite, nous avons :

$$|\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}|_a \leq C_1 \left(1 + C_0 h_0^{k-m}\right) h^m \left(\|\boldsymbol{u}_\gamma\|_{k+1,2,\Gamma} + \|\boldsymbol{f}\|_{0,2,\Gamma} \right).$$

D'où

$$|\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}|_a \leq Ch^m \left(\|\boldsymbol{u}_\gamma\|_{k+1,2,\Gamma} + \|\boldsymbol{f}\|_{0,2,\Gamma} \right),$$

avec $C = C_1 \left(1 + C_0 h_0^{k-m}\right)$. Ce qui prouve le corollaire 3.1. □

Corollaire 3.2 (Estimation en norme H^1)**.** *Sous les hypothèses du théorème 3.3, il existe une constante positive C indépendante de h telle que*

$$\|\boldsymbol{u}_\gamma - \tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h}\|_{1,2,\Gamma} \leq Ch^m$$

où $\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h} \in \tilde{V}_h$ est définie par $\tilde{\boldsymbol{u}}_{\gamma,h} = \boldsymbol{u}_{\gamma,h} \circ \boldsymbol{p}^{-1}_{|\Gamma_h}$ et $m = \min(k,q)$.

Démonstration. Ce lemme est une conséquence directe du lemme 3.3 et le corollaire 3.1. □

3.6 Tests et validations numériques

Nous présentons dans cette section les résultats de tests numériques obtenus en utilisant notre approche numérique. Les tests sont effectués sur les surfaces (2.4.17a)-(2.4.17d) définie au chapitre 2 à la page 51. Nous utilisons ici aussi des maillages de degré polynomial $k = 1, 2, 3, 4$ de ces surfaces. On se donne le champ vectoriel $\boldsymbol{u}_\gamma$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$ définit par

$$\boldsymbol{u}_\gamma(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sin(xyz) + yzx^2 \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \cos(xy^2) \\ \cos(x + y + z - xyz) \end{pmatrix} \tag{3.6.1}$$

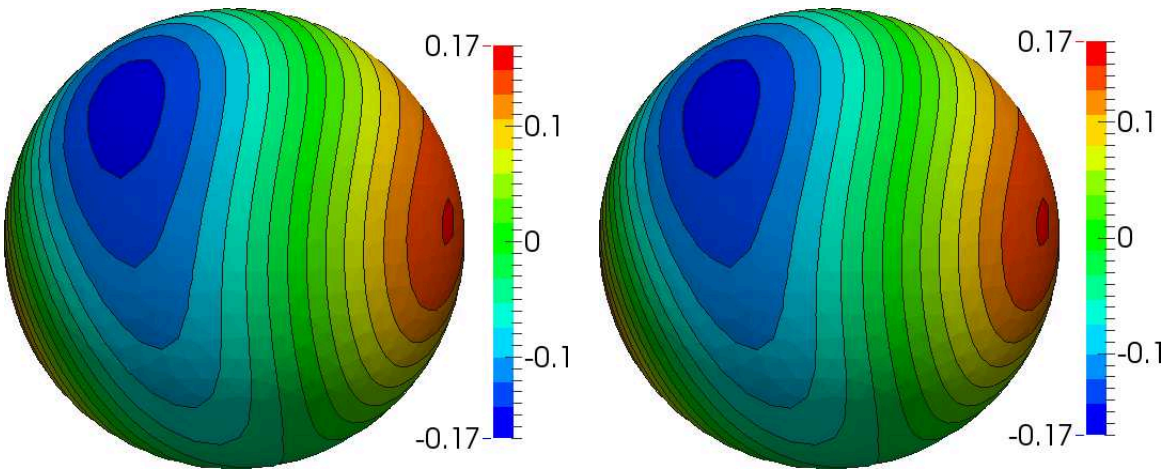
À partir de ce champ, nous calculons exactement le champs vectoriel $\boldsymbol{f}$ de tel sorte que $\boldsymbol{u}_\gamma$ soit solution du problème 3.3 pour les paramètres $c_f = \eta = \lambda = \gamma = 1$, en utilisant la relation :

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{u}_\gamma - \mathbf{div}_\Gamma \left(2\mathbf{D}_\Gamma \left(\boldsymbol{u}_\gamma\right) + \mathrm{div}_\Gamma \left(\boldsymbol{u}_\gamma\right) \mathbf{P}\right) + \mathrm{div}_\Gamma \left(\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{u}_\gamma\right)\right) \boldsymbol{n}. \tag{3.6.2}$$

Nous approchons $\boldsymbol{u}_\gamma$ par $\boldsymbol{u}_{\gamma,h}$ en utilisant le problème 3.5 sur les approximations isoparamétriques k des quatre surfaces. Pour ces tests, nous avons utilisé respectivement la normale approché de la définition 2.1 et le tenseur de courbure approché obtenu par l'algorithme de lissage. En utilisant les résultats des tests numériques du chapitre 2.1, nous connaissons les valeurs des entiers p et q en fonction de k :

$$p = k \text{ et } q = m = \min(k, q) = \begin{cases} k & \text{si } k \leq 2 \\ k - 1 & \text{si } k > 2. \end{cases}$$

FIGURE 3.1 A gauche, solution approchée et à droite l'interpolée de la solution exacte (3.6.1) sur une approximation affine par morceaux de la surface (2.4.17a).



Nous avons choisi $\boldsymbol{f}_h$ comme la restriction du champ vectoriel $\boldsymbol{f}$ sur le maillage considéré. La fig. 3.1 montre les fonctions de courant de la solution obtenue par le problème 3.5 et la solution exacte sur la surface (2.4.17a).

3.6.1 Convergence en norme H^1

Les erreurs commises en échelle logarithmique sur la solution exacte en norme H^1 sont représentées sur la fig. 3.2, page 103. Comme prévu par la théorie, nous observons une convergence de la solution approchée vers la solution exacte (3.6.1) en norme H^1 pour les quatre surfaces. Précisément, nous constatons que pour les surfaces (2.4.17b) et (2.4.17d), l'ordre de convergence numérique β est très proche de k pour $k = 1, 2, 3, 4$. Nous retrouvons les mêmes résultats pour les surfaces (2.4.17a) et (2.4.17c) sauf respectivement sur l'exemple $k = 3$ pour la surface (2.4.17a) où $\beta \simeq k - 1 = 2$ et sur l'exemple $k = 4$ pour la surface (2.4.17c) où $\beta \simeq k - 1 = 3$. Par conséquent, vu les résultats obtenus par l'algorithme de lissage, ce qu'on observe pour $k > 2$ dans les cas des surfaces (2.4.17b) et (2.4.17d) respectivement pour $k = 4$ et pour $k = 3$ s'interprète comme une superconvergence de la solution approchée vers la solution exacte (3.6.1).

Donc, globalement l'ordre de convergence numérique $\beta \simeq m$:

$$\|\boldsymbol{u}_\gamma - \boldsymbol{u}_{\gamma,h}\|_{1,2,\Gamma_h} = O(h^m).$$

Nous retrouvons donc l'ordre de convergence théorique du corollaire 3.2. Ces résultats numériques confirment notre théorie sur l'estimation de l'énergie (estimation en norme H^1) démontrée dans la section 3.5.

3.6.2 Convergence en norme L^2 et L^∞

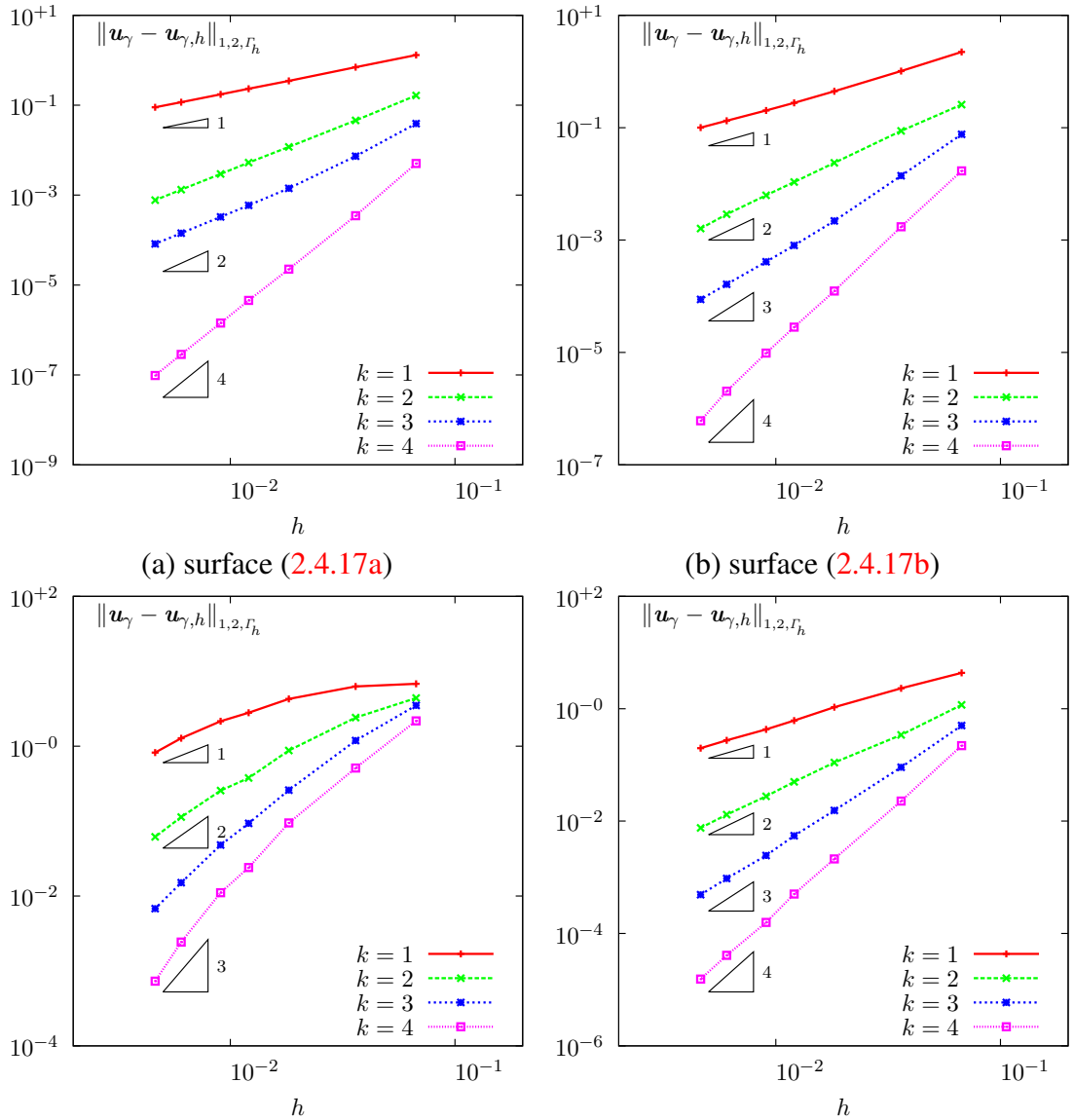
Les erreurs commises en échelle logarithmique sur la solution exacte respectivement en norme L^2 et L^∞ sont représentées sur la fig. 3.3, page 104 et la fig. 3.4, page 105. Contrairement à la norme H^1, nous n'avons pas de résultats théoriques sur la convergence de l'erreur en norme L^2 et L^∞. Néanmoins, nous observons numériquement sans ambiguité sur les surfaces (2.4.17a)-(2.4.17d) que la solution approchée obtenue converge vers la solution exacte (3.6.1). En principe, selon la théorie des éléments finis classiques, on peut s'attendre à une convergence d'ordre $m + 1$ en norme L^2 et L^∞. Mais, ici ce n'est pas le cas comme l'illustre l'exemple sur $k = 1$ pour la surface (2.4.17c) où l'ordre de convergence numérique α est sensiblement égal à 1 différent de $m + 1 = 2$. Cette théorie est vérifiée uniquement pour la surface (2.4.17a). En revanche, nous constatons que $\alpha \geq k$ pour les quatre surfaces. Cela montre empiriquement que :

$$\|\boldsymbol{u}_\gamma - \boldsymbol{u}_{\gamma,h}\|_{0,2,\Gamma_h} \simeq \|\boldsymbol{u}_\gamma - \boldsymbol{u}_{\gamma,h}\|_{0,\infty,\Gamma_h} = O(h^k).$$

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé une approche éléments finis par la méthode de pénalisation pour des équations aux dérivées partielles elliptiques de type élasticité linéaire ou Stokes tangentiel sur une surface fermée sans bord. D'abord, nous avons montré théoriquement l'existence et l'unicité de la solution continue du problème modèle utilisé. Ensuite, nous avons proposé une discrétisation du problème continu. Nous avons montré sous certaines conditions que le problème discret ainsi obtenu admet une unique solution. Nous avons aussi montré la convergence de ce problème discret théoriquement et qui a été validée numériquement. Ainsi, nous avons vu globalement que l'approche numérique développée n'est utilisable en pratique que pour des valeurs peu élevées du paramètre de pénalisation et du module de compression, ou pour des maillages très fins. Donc, la méthode est difficilement exploitable en pratique pour des écoulements quasi-incompressibles ou tangentiels. Ce qui nous amène au chapitre suivant.

FIGURE 3.2 Erreurs commises en échelle logarithmique sur la solution exacte (3.6.1) en norme H^1 en utilisant le problème 3.5 sur des approximations de degré polynomial k des surfaces (2.4.17a)- (2.4.17d).



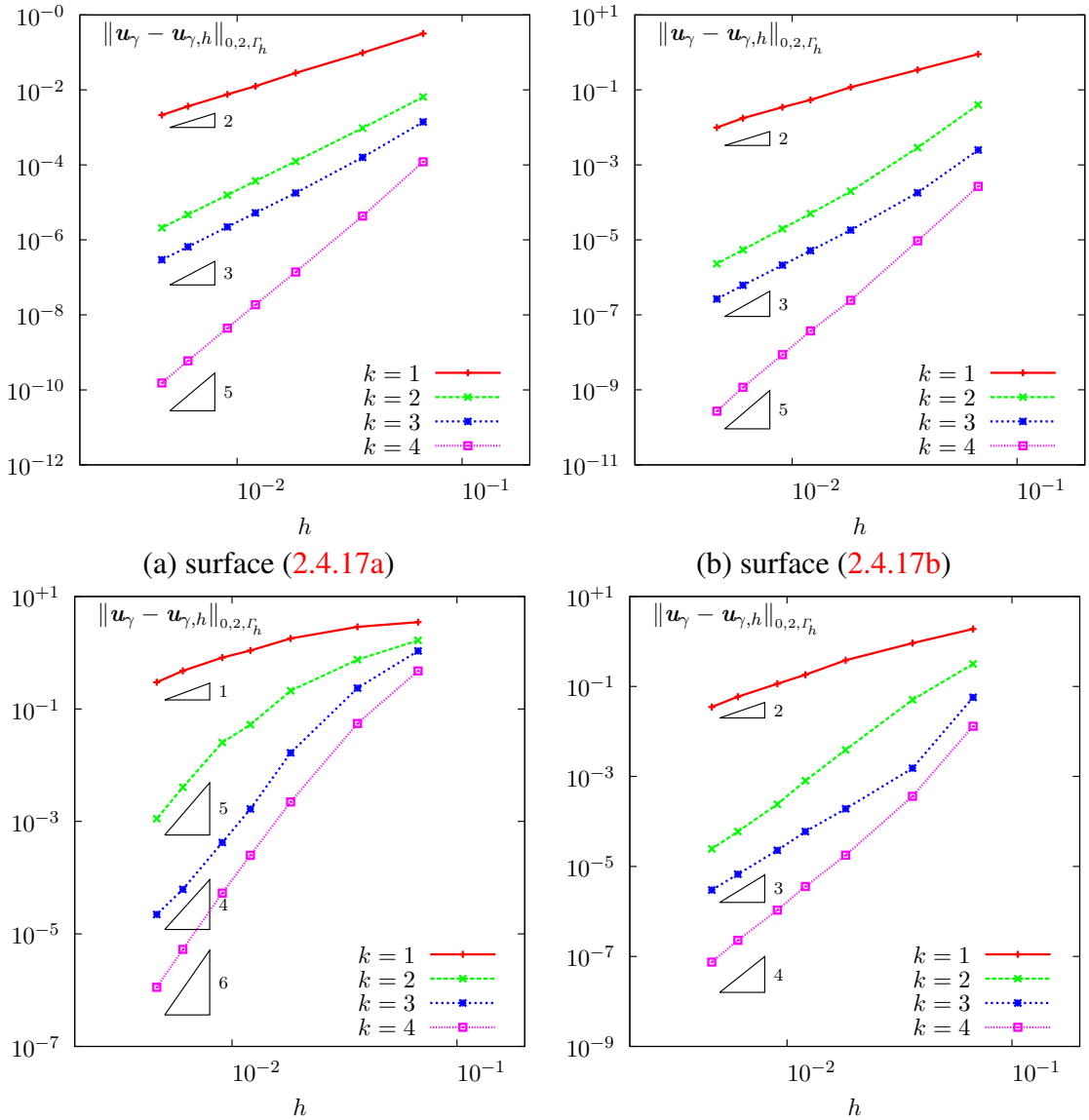
(a) surface (2.4.17a)

(b) surface (2.4.17b)

(c) surface (2.4.17c)

(d) surface (2.4.17d)

FIGURE 3.3 Erreurs commises en échelle logarithmique sur la solution exacte (3.6.1) en norme L^2 en utilisant le problème 3.5 sur des approximations de degré polynomial k des surfaces (2.4.17a)-(2.4.17d).



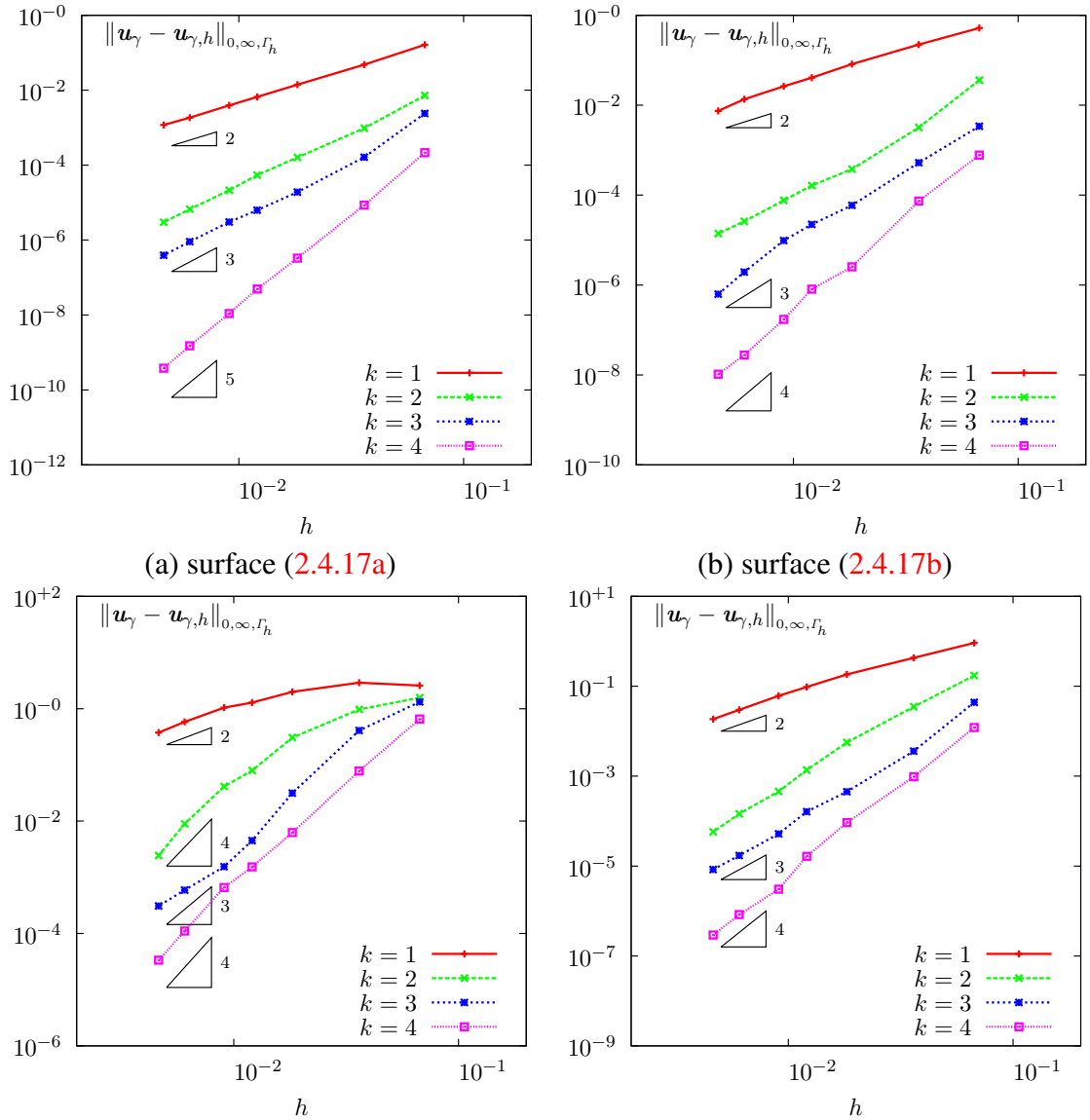
(a) surface (2.4.17a)

(b) surface (2.4.17b)

(c) surface (2.4.17c)

(d) surface (2.4.17d)

FIGURE 3.4 Erreurs commises en échelle logarithmique sur la solution exacte (3.6.1) en norme L^∞ en utilisant le problème 3.5 sur des approximations de degré polynomial k des surfaces (2.4.17a)- (2.4.17d).



(a) surface (2.4.17a)

(b) surface (2.4.17b)

(c) surface (2.4.17c)

(d) surface (2.4.17d)

Chapitre 4

Éléments finis mixtes pour des écoulements tangentiels à des surfaces courbes

Sommaire

4.1 Position du problème 108
4.2 Méthode des multiplicateurs de Lagrange 109
4.2.1 Formulation duale 109
4.2.2 Caractérisation du point selle 110
4.2.3 Problème du point selle : cas limites incompressible et tangentiel 111
4.3 Analyse mathématique du problème du point selle 112
4.3.1 Continuité des formes bilinéaires 112
4.3.2 Conditions de Brezzi-Babuska continues 114
4.3.3 Existence et unicité de la solution du problème du point selle 121
4.4 Mise en œuvre numérique 123
4.4.1 Méthode des éléments finis mixtes 123
4.4.2 Tests numériques et choix des éléments finis mixtes 124
4.5 Conclusion 130

Dans ce chapitre, nous développons une approche éléments finis efficace pour résoudre la pénalisation introduite dans le chapitre 3. L'approche est basée sur la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Nous montrons l'existence et l'unicité du problème de point selle obtenu puis des tests numériques sont proposés pour montrer l'efficacité de la méthode.

4.1 Position du problème

Soit Γ une surface fermée ($\partial\Gamma = \emptyset$) et bornée contenue dans $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ comme décrite dans le chapitre 2. Nous supposons que la surface Γ est suffisamment régulière pour que la courbure soit au moins de classe C^1. Pour cela, on peut supposer que Γ est au moins de classe C^3. Comme dans le chapitre 3, nous nous intéressons à l'écoulement tangentiel de type Stokes sur la surface Γ d'un fluide newtonien de viscosité de cisaillement η et de viscosité de compression λ dont l'équilibre mécanique s'écrit :

Problème 4.1 (Problème de minimisation sous contrainte)**.** *Trouver* $\boldsymbol{u} \in H(\Gamma)$ *tel que :*

$$\boldsymbol{u} = \arg \inf_{\boldsymbol{v} \in H(\Gamma)} E(\boldsymbol{v}).$$

Nous rappelons que $\boldsymbol{u}$ est la vitesse de l'écoulement du fluide, $H(\Gamma)$ est le sous-espace vectoriel des champs vectoriels tangents à la surface Γ de $(H^1(\Gamma))^d$:

$$H(\Gamma) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \left(H^1(\Gamma)\right)^d \mid \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \right\}.$$

et E est l'énergie dissipée dans le fluide considéré défini par :

$$E(\boldsymbol{v}) = \int_\Gamma \frac{c_f}{2} |\boldsymbol{v}|^2 \, \mathrm{ds} + \int_\Gamma \eta \, |\mathbf{D}_\Gamma(\boldsymbol{v})|^2 \, \mathrm{ds} + \int_\Gamma \frac{\lambda}{2} |\mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{v})|^2 \, \mathrm{ds} - \int_\Gamma \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{ds}$$

où c_f est le coefficient de friction permettant de contrôler l'énergie de friction et $\boldsymbol{f}$ représente les forces extérieures. Le problème 4.1 est approché par un problème de minimisation sans contrainte sur Γ en utilisant la méthode de pénalisation (cf. chapitre 3, section 3.2, page 71). Ce problème de minimisation sans contrainte s'écrit :

Problème 4.2 (Problème de minimisation sans contrainte)**.** *Trouver* $\boldsymbol{u}_\gamma \in (H^1(\Gamma))^d$ *tel que :*

$$\boldsymbol{u}_\gamma = \arg \inf_{\boldsymbol{v} \in (H^1(\Gamma))^d} E_\gamma(\boldsymbol{v}).$$

l'énergie E_γ est définie par :

$$E_\gamma(\boldsymbol{v}) = E(\boldsymbol{v}) + \int_\Gamma \frac{\gamma}{2} |\boldsymbol{L}(\boldsymbol{v})|^2 \, \mathrm{ds}$$

où γ est le paramètre de pénalisation. En pratique, pour obtenir des écoulements (quasi) incompressibles ou tangentiels nous nous servons du problème 4.2 avec des grandes valeurs des paramètres λ et γ. Dans ce cadre, la formulation primale de la section 3.3, page 72 devient difficile à résoudre numériquement puisque la constante intervenant dans l'estimation d'erreur du corollaire 3.2 devient grand : la précision de la solution approchée est mauvaise. Pour contourner ce problème numériquement, il existe deux façons : soit on utilise des maillages très fins (une méthode souvent très couteuse) soit on utilise une méthode classique qui est la méthode de multiplicateurs de Lagrange. Nous avons opté pour la deuxième méthode, qui sera étudiée et testée numériquement.

4.2 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Soient p et $\boldsymbol{\theta}$ les multiplicateurs de Lagrange donnés par :

$$\mathrm{p} = -\lambda \mathrm{div}_{\Gamma}\left(\boldsymbol{u}_{\gamma}\right) \text{ et } \boldsymbol{\theta} = \gamma \boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{u}_{\gamma}\right). \tag{4.2.1}$$

L'objectif de cette section est d'écrire le problème du point selle associé aux multiplicateurs de Lagrange p et $\boldsymbol{\theta}$ définis ci-dessus.

4.2.1 Formulation duale

Soit L le Lagrangien défini pour tout $(\boldsymbol{v}, \mathrm{q}, \boldsymbol{\xi}) \in \left(H^1(\Gamma)\right)^d \times L^2(\Gamma) \times \left(L^2(\Gamma)\right)^d$ par

$$L(\boldsymbol{v}, \mathrm{q}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2}a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) + b_1(\boldsymbol{v}, \mathrm{q}) - \frac{1}{2}c_1(\mathrm{q}, \mathrm{q}) + b_2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\xi}) - \frac{1}{2}c_2(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) - \ell(\boldsymbol{v}), \tag{4.2.2}$$

où a, b_1, b_2, c_1 et c_2 sont les formes bilinéaires définies par

$$\begin{aligned}
a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) &= \int_{\Gamma} c_f \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} \,\mathrm{ds} + \int_{\Gamma} 2\eta \mathbf{D}_{\Gamma}(\boldsymbol{v}) : \mathbf{D}_{\Gamma}(\boldsymbol{w}) \,\mathrm{ds}, \\
b_1(\boldsymbol{v}, \mathrm{q}) &= \int_{\Gamma} -\mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{v})\, \mathrm{q} \,\mathrm{ds}, \\
c_1(\mathrm{p}, \mathrm{q}) &= \int_{\Gamma} \frac{1}{\lambda} \mathrm{pq} \,\mathrm{ds}, \\
b_2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\xi}) &= \int_{\Gamma} \boldsymbol{L}(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{\xi} \,\mathrm{ds}, \\
c_2(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}) &= \int_{\Gamma} \frac{1}{\gamma} \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\xi} \,\mathrm{ds}
\end{aligned}$$

où ℓ la forme linéaire définie par

$$\ell(\boldsymbol{v}) = \int_{\Gamma} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \,\mathrm{ds}.$$

Pour simplifier les notations, nous introduisons :

$$V = \left(H^1(\Gamma)\right)^d,\ Q = L^2(\Gamma) \text{ et } \Xi = \left(L^2(\Gamma)\right)^d.$$

Considérons maintenant le problème d'optimisation suivant :

Problème 4.3 (Minimisation du Lagrangien L)**.** *Trouver* $(\boldsymbol{u}_\gamma, \mathrm{p}, \boldsymbol{\theta}) \in V \times Q \times \Xi$ *tel que :*

$$(\boldsymbol{u}_\gamma, \mathrm{p}, \boldsymbol{\theta}) = \arg \inf_{\boldsymbol{v}\in V} \sup_{\substack{\mathrm{q}\in Q \\ \boldsymbol{\xi}\in\Xi}} L(\boldsymbol{v}, \mathrm{q}, \boldsymbol{\xi}).$$

Ce problème est équivalent au problème 4.2 sous les contraintes (4.2.1). Cette formulation a l'avantage de traiter les cas limites incompressible et tangentiel d'un écoulement compressible en surface par rapport à la formulation primale. La solution du problème 4.3 est appelée le point selle. Nous allons à présent caractériser cette solution.

4.2.2 Caractérisation du point selle

Comme L est dérivable le point selle $(\boldsymbol{u}_\gamma, \mathrm{p}, \boldsymbol{\theta})$ vérifie :

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{u}_\gamma}(\boldsymbol{u}_\gamma, \mathrm{p}, \boldsymbol{\theta}) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \mathrm{p}}(\boldsymbol{u}_\gamma, \mathrm{p}, \boldsymbol{\theta}) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{u}_\gamma, \mathrm{p}, \boldsymbol{\theta}) = 0.$$

Par définition, pour toute fonction $\boldsymbol{v} \in H^1(\Gamma)$:

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{u}_\gamma}(\boldsymbol{u}_\gamma, \mathrm{p}, \boldsymbol{\theta}).(\boldsymbol{v}) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{L(\boldsymbol{u}_\gamma + \epsilon\boldsymbol{v}, \mathrm{p}, \boldsymbol{\theta}) - L(\boldsymbol{u}_\gamma, \mathrm{p}, \boldsymbol{\theta})}{\epsilon}. \tag{4.2.3}$$

En utilisant la définition de L (cf. relation (4.2.2)), nous avons :

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{u}_\gamma + \epsilon\boldsymbol{v}, \mathrm{p}, \boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{2}a(\boldsymbol{u}_\gamma + \epsilon\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_\gamma + \epsilon\boldsymbol{v}) + b_1(\boldsymbol{u}_\gamma + \epsilon\boldsymbol{v}, \mathrm{p}) - \frac{1}{2}c_1(\mathrm{p}, \mathrm{p}) \\ &\quad + b_2(\boldsymbol{u}_\gamma + \epsilon\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\theta}) - \frac{1}{2}c_2(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) - \ell(\boldsymbol{u}_\gamma + \epsilon\boldsymbol{v}). \end{aligned}$$

En utilisant la bilinéarité des formes a, b_1, b_2, c_1 et c_2 et la linéarité de ℓ, nous obtenons :

$$L(\boldsymbol{u}_\gamma + \epsilon\boldsymbol{v}, \mathrm{p}, \boldsymbol{\theta}) = L(\boldsymbol{u}_\gamma, \mathrm{p}, \boldsymbol{\theta}) + \epsilon\left(a(\boldsymbol{u}_\gamma, \boldsymbol{v}) + b_1(\boldsymbol{v}, \mathrm{p}) + b_2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\theta}) - \ell(\boldsymbol{v})\right) + \frac{\epsilon^2}{2}a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}).$$

Par suite, nous avons :

$$L(\boldsymbol{u}_\gamma + \epsilon\boldsymbol{v}, \mathrm{p}, \boldsymbol{\theta}) - L(\boldsymbol{u}_\gamma, \mathrm{p}, \boldsymbol{\theta}) = \epsilon\left(a(\boldsymbol{u}_\gamma, \boldsymbol{v}) + b_1(\boldsymbol{v}, \mathrm{p}) + b_2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\theta}) - \ell(\boldsymbol{v})\right) + \frac{\epsilon^2}{2}a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}).$$

Par conséquent, la relation (4.2.3) devient

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{u}_\gamma}(\boldsymbol{u}_\gamma, \mathrm{p}, \boldsymbol{\theta}).(\boldsymbol{v}) &= \lim_{\epsilon\to 0}\Big(a(\boldsymbol{u}_\gamma, \boldsymbol{v}) + b_1(\boldsymbol{v}, \mathrm{p}) + b_2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\theta}) - \ell(\boldsymbol{v}) + \frac{\epsilon}{2}a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})\Big)\\ &= a(\boldsymbol{u}_\gamma, \boldsymbol{v}) + b_1(\boldsymbol{v}, \mathrm{p}) + b_2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\theta}) - \ell(\boldsymbol{v}).\end{aligned}$$

De même, pour tout $\mathrm{q} \in L^2(\Gamma)$ et pour tout $\boldsymbol{\xi} \in (L^2(\Gamma))^d$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \mathrm{p}}(\boldsymbol{u}_\gamma, \mathrm{p}, \boldsymbol{\theta}).(\mathrm{p}) &= b_1(\boldsymbol{u}_\gamma, \mathrm{q}) - c_1(\mathrm{p}, \mathrm{q}),\\ \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{u}_\gamma, \mathrm{p}, \boldsymbol{\theta}).(\boldsymbol{\xi}) &= b_2(\boldsymbol{u}_\gamma, \boldsymbol{\xi}) - c_2(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}).\end{aligned}$$

La caractérisation du point de selle conduit ainsi à la formulation variationnelle du problème 4.3 :

Problème 4.4 (Problème du point selle)**.** *Trouver* $(\boldsymbol{u}_\gamma, \mathrm{p}, \boldsymbol{\theta}) \in V \times Q \times \Xi$ *tel que :*

$$\begin{array}{ccccccccc} a(\boldsymbol{u}_\gamma, \boldsymbol{v}) & + & b_1(\boldsymbol{v}, \mathrm{p}) & + & b_2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\theta}) & = & \ell(\boldsymbol{v}) & & \forall\, \boldsymbol{v} \in V\\ b_1(\boldsymbol{u}_\gamma, \mathrm{q}) & - & c_1(\mathrm{p}, \mathrm{q}) & & & = & 0 & & \forall\, \mathrm{p} \in Q\\ b_2(\boldsymbol{u}_\gamma, \boldsymbol{\xi}) & & & - & c_2(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}) & = & 0 & & \forall\, \boldsymbol{\xi} \in \Xi \end{array}$$

Ce dernier problème est linéaire et sans contrainte : il a l'avantage d'être simple à étudier théoriquement et numériquement.

4.2.3 Problème du point selle : cas limites incompressible et tangentiel

Le problème 4.4 traite les écoulements quasi-incompressibles qui ne sont pas parfaitement tangentiels puisque les paramètres λ et γ sont supposés très grands mais restent finis. Pour traiter les écoulements incompressibles et tangentiels, nous faisons tendre respectivement λ et γ vers l'infini. Cela aboutit au problème limite suivant :

Problème 4.5 (Problème du point selle : cas limites)**.** *Trouver* $(\boldsymbol{u}, \mathrm{p}, \boldsymbol{\theta}) \in V \times Q \times \Xi$ *tel que :*

$$\begin{array}{ccccccccc} a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) & + & b_1(\boldsymbol{v}, \mathrm{p}) & + & b_2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\theta}) & = & \ell(\boldsymbol{v}) & & \forall\, \boldsymbol{v} \in V\\ b_1(\boldsymbol{u}, \mathrm{q}) & & & & & = & 0 & & \forall\, \mathrm{p} \in Q\\ b_2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\xi}) & & & & & = & 0 & & \forall\, \boldsymbol{\xi} \in \Xi \end{array}$$

Nous pouvons remarquer que la solution $\boldsymbol{u}$ dans le problème 4.5 est solution du problème initial 4.1 car c'est la limite de la solution du problème 4.2.

4.3 Analyse mathématique du problème du point selle

Dans cette section, l'objectif est d'étudier l'existence et l'unicité de la solution associée au problème du point selle. Puisqu'il s'agit d'une formulation mixte, nous nous basons sur les résultats établis dans [Brezzi and Fortin, 1991] pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème 4.4. Pour cela, nous récrivons le problème 4.4 sous la forme :

Problème 4.6 (Problème du point selle : forme réduite)**.** *Trouver* $(\boldsymbol{u}_\gamma, \boldsymbol{\lambda}) \in V \times \Lambda$ *tel que :*

$$\begin{array}{rcrcll} a(\boldsymbol{u}_\gamma, \boldsymbol{v}) & + & b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\lambda}) & = & \ell(\boldsymbol{v}) & \forall\, \boldsymbol{v} \in V \\ b(\boldsymbol{u}_\gamma, \boldsymbol{\mu}) & - & c(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) & = & 0 & \forall\, \boldsymbol{\mu} \in \Lambda \end{array}$$

où $\boldsymbol{\lambda} = (\mathrm{p}, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\mu} = (\mathrm{q}, \boldsymbol{\xi})$, Λ désigne l'espace fonctionnel produit $Q \times \Xi$ et les formes bilinéaires b et c sont définies par :

$$\begin{aligned} b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\mu}) &= b_1(\boldsymbol{v}, \mathrm{q}) + b_2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\xi}) \\ c(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) &= c_1(\mathrm{p}, \mathrm{q}) + c_2(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}). \end{aligned}$$

Il est clair que le problème 4.6 est équivalent au problème 4.4. Notre étude sera donc menée sur le problème 4.6. Soit $\|\cdot\|_{\Lambda,\Gamma}$ la norme définie sur Λ pour tout $\boldsymbol{\mu} = (\mathrm{q}, \boldsymbol{\xi})$ par :

$$\|\boldsymbol{\mu}\|_{\Lambda,\Gamma} = \sqrt{\|\mathrm{q}\|^2_{0,2,\Gamma} + \|\boldsymbol{\xi}\|^2_{0,2,\Gamma}}.$$

Remarquons que les formes bilinéaires a et c sont symétriques et semi-définies positives :

$$a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = a(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}), \quad \forall\, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V \qquad \text{et} \qquad a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \geq 0, \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in V \tag{4.3.1a}$$

$$c(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = c(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}), \quad \forall\, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \in \Lambda \qquad \text{et} \qquad c(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) \geq 0, \quad \forall\, \boldsymbol{\mu} \in \Lambda. \tag{4.3.1b}$$

4.3.1 Continuité des formes bilinéaires

La continuité des formes a et ℓ a été démontrée dans le chapitre 3. Notamment, il suffit de faire le choix particulier $\lambda = \gamma = 0$ dans le lemme 3.2 pour obtenir le résultat. Nous avons le résultat suivant sur la continuité des formes bilinéaires b et c :

Lemme 4.1 (Continuité de b et c)**.** *Il existe deux constantes strictement positives* C_b, C_c *telles que pour tout* $\boldsymbol{v}$ *appartenant à* V *et* $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}$ *appartenant à* Λ *:*

$$\begin{aligned} |b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\mu})| &\leq C_b \|\boldsymbol{v}\|_{1,2,\Gamma} \|\boldsymbol{\mu}\|_{\Lambda,\Gamma}, \\ |c(\boldsymbol{\lambda}; \boldsymbol{\mu})| &\leq C_c \|\boldsymbol{\lambda}\|_{\Lambda,\Gamma} \|\boldsymbol{\mu}\|_{\Lambda,\Gamma}. \end{aligned}$$

Autrement dit, b *et* c *sont respectivement continues sur* $V \times \Lambda$ *et* $\Lambda \times \Lambda$.

Démonstration. Soient $\boldsymbol{v} \in V$ et $\boldsymbol{\lambda} = (\mathrm{p}, \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\mu} = (\mathrm{q}, \boldsymbol{\xi}) \in \Lambda$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur la forme bilinéaire b nous avons

$$\begin{aligned} |b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\mu})| &\leq |b_1(\boldsymbol{v}, \mathrm{q})| + |b_2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\xi})| \\ &\leq \|\mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{v})\|_{0,2,\Gamma} \|\mathrm{q}\|_{0,2,\Gamma} + \|\boldsymbol{L}(\boldsymbol{v})\|_{0,2,\Gamma} \|\boldsymbol{\xi}\|_{0,2,\Gamma}. \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Or, nous avons d'une part :

$$\|\mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{v})\|_{0,2,\Gamma} \leq \left\|\mathbf{grad}_\Gamma(\boldsymbol{v})\right\|_{0,2,\Gamma} \leq \|\boldsymbol{v}\|_{1,2,\Gamma},$$

et d'autre part (cf. démonstration du lemme 3.1, page 74)

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{L}(\boldsymbol{v})\|^2_{0,2,\Gamma} &\leq 2\sqrt{d}(1+d^2)\left(\|\boldsymbol{H}\|^2_{0,\infty,\Gamma} \|\boldsymbol{v}\|^2_{0,2,\Gamma} + \left\|\mathbf{grad}_\Gamma(\boldsymbol{v})\right\|^2_{0,2,\Gamma}\right) \\ &\leq 2\sqrt{d}(1+d^2)\left(1 + \|\boldsymbol{H}\|^2_{0,\infty,\Gamma}\right)\left(\|\boldsymbol{v}\|^2_{0,2,\Gamma} + \left\|\mathbf{grad}_\Gamma(\boldsymbol{v})\right\|^2_{0,2,\Gamma}\right). \end{aligned}$$

Donc

$$\|\boldsymbol{L}(\boldsymbol{v})\|_{0,2,\Gamma} \leq C_0 \|\boldsymbol{v}\|_{1,2,\Gamma},$$

où $C_0 = \sqrt{2\sqrt{d}(1+d^2)\left(1 + \|\boldsymbol{H}\|^2_{0,\infty,\Gamma}\right)}$. Par conséquent, la relation (4.3.2) devient :

$$\begin{aligned} |b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\mu})| &\leq \|\boldsymbol{v}\|_{1,2,\Gamma} \|\mathrm{q}\|_{0,2,\Gamma} + C_0 \|\boldsymbol{v}\|_{1,2,\Gamma} \|\boldsymbol{\xi}\|_{0,2,\Gamma} \\ &\leq (1 + C_0) \|\boldsymbol{v}\|_{1,2,\Gamma} \left(\|\mathrm{q}\|_{0,2,\Gamma} + \|\boldsymbol{\xi}\|_{0,2,\Gamma}\right). \end{aligned}$$

Par ailleurs, en utilisant le lemme C.4, page 165, pour $\beta = 2$, nous avons :

$$\left(\|\mathrm{q}\|_{0,2,\Gamma} + \|\boldsymbol{\xi}\|_{0,2,\Gamma}\right)^2 = \|\mathrm{q}\|^2_{0,2,\Gamma} + \|\boldsymbol{\xi}\|^2_{0,2,\Gamma} + 2\|\mathrm{q}\|_{0,2,\Gamma} \|\boldsymbol{\xi}\|_{0,2,\Gamma} \leq 2\left(\|\mathrm{q}\|^2_{0,2,\Gamma} + \|\boldsymbol{\xi}\|^2_{0,2,\Gamma}\right).$$

Par conséquent, nous avons

$$|b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\mu})| \leq (1 + C_0)\sqrt{2} \|\boldsymbol{v}\|_{1,2,\Gamma} \sqrt{\|\mathrm{q}\|^2_{0,2,\Gamma} + \|\boldsymbol{\xi}\|^2_{0,2,\Gamma}}.$$

En utilisant la définition de la norme $\|\cdot\|_{\Lambda,\Gamma}$, nous obtenons :

$$|b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\mu})| \leq C_b \|\boldsymbol{v}\|_{1,2,\Gamma} \|\boldsymbol{\mu}\|_{\Lambda,\Gamma},$$

avec $C_b = (1 + C_0)\sqrt{2}$. D'où la continuité de b. De même, pour la continuité de c, nous avons

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}|c(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})| &\leq |c_1(\mathrm{p},\mathrm{q})| + |c_2(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\xi})| \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\|\mathrm{p}\|_{0,2,\Gamma}\|\mathrm{q}\|_{0,2,\Gamma} + \frac{1}{\gamma}\|\boldsymbol{\theta}\|_{0,2,\Gamma}\|\boldsymbol{\xi}\|_{0,2,\Gamma} \\ &\leq \left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\gamma}\right)\left(\|\mathrm{p}\|_{0,2,\Gamma}\|\mathrm{q}\|_{0,2,\Gamma} + \|\boldsymbol{\theta}\|_{0,2,\Gamma}\|\boldsymbol{\xi}\|_{0,2,\Gamma}\right).\end{aligned}$$

Par suite, nous obtenons :

$$\begin{aligned}|c(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})| &\leq \left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\gamma}\right)\left(\|\mathrm{p}\|_{0,2,\Gamma} + \|\boldsymbol{\theta}\|_{0,2,\Gamma}\right)\left(\|\mathrm{q}\|_{0,2,\Gamma} + \|\boldsymbol{\xi}\|_{0,2,\Gamma}\right) \\ &\leq \left(\frac{2}{\lambda}+\frac{2}{\gamma}\right)\left(\sqrt{\|\mathrm{p}\|^2_{0,2,\Gamma} + \|\boldsymbol{\theta}\|^2_{0,2,\Gamma}}\right)\left(\sqrt{\|\mathrm{q}\|^2_{0,2,\Gamma} + \|\boldsymbol{\xi}\|^2_{0,2,\Gamma}}\right).\end{aligned}$$

D'où

$$|c(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})| \leq C_c\|\boldsymbol{\lambda}\|_{\Lambda,\Gamma}\|\boldsymbol{\mu}\|_{\Lambda,\Gamma}.$$

avec $C_c = \dfrac{2}{\lambda}+\dfrac{2}{\gamma}$. Ce qui prouve le lemme 4.1. □

4.3.2 Conditions de Brezzi-Babuska continues

Introduisons l'opérateur linéaire continu $\boldsymbol{A} : V \longrightarrow V'$ associé à la forme bilinéaire et symétrique a, défini par :

$$\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle_{V,V'} = a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}), \qquad \forall\, \boldsymbol{v}\in V, \forall\, \boldsymbol{w}\in V. \tag{4.3.3}$$

Rappelons que la notation V' désigne l'espace dual de V. Comme l'espace dual de $L^2(\Gamma)$ s'identifie à lui même, alors :

$$\Lambda' = \Lambda = L^2(\Gamma)\times\left(L^2(\Gamma)\right)^d.$$

Soient les opérateurs linéaires continus $\boldsymbol{B} : V \longrightarrow \Lambda$ et son opérateur adjoint (sa transposée) $\boldsymbol{B}^T : \Lambda \longrightarrow V'$ définis par :

$$\langle \boldsymbol{B}\boldsymbol{v},\boldsymbol{\lambda}\rangle_{V,\Lambda} = \left\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\lambda}\right\rangle_{\Lambda,V'} = b(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\lambda}), \qquad \forall\, \boldsymbol{v}\in V, \forall\, \boldsymbol{\lambda}\in\Lambda. \tag{4.3.4}$$

Nous définissons également l'opérateur linéaire continu $\boldsymbol{C} : \Lambda \longrightarrow \Lambda$, associé à la forme bilinéaire c par

$$\langle \boldsymbol{C}\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}\rangle_{\Lambda,\Lambda} = c(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}), \qquad \forall\, \boldsymbol{\lambda}\in\Lambda, \forall\, \boldsymbol{\mu}\in\Lambda. \tag{4.3.5}$$

Soient $\ker \boldsymbol{B}$ le noyau de l'opérateur $\boldsymbol{B}$ défini par

$$\ker \boldsymbol{B} \ = \ \{\boldsymbol{v} \in V \mid \boldsymbol{B}\boldsymbol{v} = 0\},$$

et $\mathrm{Im}\boldsymbol{B}$ l'image de l'opérateur $\boldsymbol{B}$ définie par

$$\mathrm{Im}\boldsymbol{B} \ = \ \{(\mathrm{q}, \boldsymbol{\xi}) \in \Lambda \mid \exists\, \boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{B}\boldsymbol{v} = (\mathrm{q}, \boldsymbol{\xi})\}.$$

De même, nous définissons $\ker \boldsymbol{B}^T$ le noyau de l'opérateur $\boldsymbol{B}^T$ par

$$\ker \boldsymbol{B}^T \ = \ \left\{\boldsymbol{\mu} \in \Lambda \mid \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\mu} = 0\right\}.$$

L'objectif de cette section est de caractériser les espaces $\ker \boldsymbol{B}$ et $\ker \boldsymbol{B}^T$ et de démontrer que :

- $\boldsymbol{B}$ est surjectif,
- l'image de $\boldsymbol{B}$ est fermé dans Λ,
- la forme bilinéaire a est coercive le noyau de $\boldsymbol{B}$, autrement dit, $\boldsymbol{A}$ est inversible sur $\ker \boldsymbol{B}$,
- la forme bilinéaire c est coercive sur Λ.

Lemme 4.2 (Caractérisation du noyau de $\boldsymbol{B}$)**.** *Le noyau de $\boldsymbol{B}$ est le sous-espace des champs vectoriels tangents à Γ et à divergence surfacique nulle de V. Autrement dit,*

$$\ker \boldsymbol{B} = H\left(\mathrm{div}_\Gamma, \Gamma\right) = \{\boldsymbol{v} \in V \mid \mathrm{div}_\Gamma\left(\boldsymbol{v}\right) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0\}.$$

Démonstration. Soit $\boldsymbol{v}$ appartenant au noyau de $\boldsymbol{B}$. Alors, nous avons $\boldsymbol{B}\boldsymbol{v} = 0$ dans Λ. Autrement dit, $b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\mu}) = 0$ pour tout $\boldsymbol{\mu} = (\mathrm{q}, \boldsymbol{\xi})$ appartenant à Λ. Cela signifie que :

$$b_1(\boldsymbol{v}, \mathrm{q}) + b_2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\xi}) \ = 0, \qquad \forall\, \mathrm{q} \in L^2\left(\Gamma\right), \forall\, \boldsymbol{\xi} \in \left(L^2\left(\Gamma\right)\right)^d.$$

En utilisant les définitions des formes bilinéaires b_1 et b_2, la relation précédente est équivalente à :

$$\int_\Gamma -\mathrm{div}_\Gamma\left(\boldsymbol{v}\right) \mathrm{q}\, \mathrm{ds} + \int_\Gamma \boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{v}\right) \cdot \boldsymbol{\xi}\, \mathrm{ds} \ = 0, \qquad \forall\, \mathrm{q} \in L^2\left(\Gamma\right), \forall\, \boldsymbol{\xi} \in \left(L^2\left(\Gamma\right)\right)^d.$$

En particulier, en choisissant les fonctions tests q_0 et $\boldsymbol{\mu}_0$ telles que :

$$\mathrm{q}_0 = -\mathrm{div}_\Gamma\left(\boldsymbol{v}\right) \ \text{ et } \boldsymbol{\mu}_0 = \boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{v}\right)$$

nous obtenons l'égalité :

$$\int_\Gamma \left|\mathrm{div}_\Gamma\left(\boldsymbol{v}\right)\right|^2 \mathrm{ds} + \int_\Gamma \left|\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{v}\right)\right|^2 \mathrm{ds} \ = 0.$$

Ce qui est équivalent à :

$$\int_{\Gamma} |\mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{v})|^2 \, \mathrm{ds} = \int_{\Gamma} |\boldsymbol{L}(\boldsymbol{v})|^2 \, \mathrm{ds} \; = 0.$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{v}) = 0 \text{ dans } \left(L^2(\Gamma)\right)^d.$$

Or, en utilisant la proposition 1.5.1, nous déduisons que

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{v}) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{div}^*_{\Gamma}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0.$$

Par conséquent, nous avons

$$\mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \text{ dans } L^2(\Gamma).$$

D'où l'implication

$$\boldsymbol{v} \in \ker \boldsymbol{B} \Longrightarrow \boldsymbol{v} \in H(\mathrm{div}_{\Gamma}, \Gamma).$$

L'implication dans l'autre sens est triviale. En effet, si $\boldsymbol{v} \in H(\mathrm{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ alors pour tout $\boldsymbol{\mu} = (\mathrm{q}, \boldsymbol{\xi}) \in \Lambda$, nous avons

$$\int_{\Gamma} -\mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{v}) \, \mathrm{q} \, \mathrm{ds} = \int_{\Gamma} \boldsymbol{L}(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{\xi} \, \mathrm{ds} \; = 0.$$

car $\mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0$. Par conséquent, nous obtenons :

$$b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\mu}) \; = \int_{\Gamma} -\mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{v}) \, \mathrm{q} \, \mathrm{ds} + \int_{\Gamma} \boldsymbol{L}(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{\xi} \, \mathrm{ds} \; = \; 0,$$

Ainsi, nous avons démontré que :

$$\ker \boldsymbol{B} \subset H(\mathrm{div}_{\Gamma}, \Gamma) \text{ et } H(\mathrm{div}_{\Gamma}, \Gamma) \subset \ker \boldsymbol{B}.$$

Donc $\ker \boldsymbol{B} = H(\mathrm{div}_{\Gamma}, \Gamma)$. Ce qui prouve le lemme 4.2. □

Nous pouvons remarquer que le noyau de $\boldsymbol{B}$ n'est rien d'autre que l'intersection des noyaux des opérateurs div_{Γ} et $\boldsymbol{L}$ dans V. De plus, le noyau de $\boldsymbol{B}$ n'est pas réduit au vecteur nul, ce qui signifie que $\boldsymbol{B}$ n'est pas injectif sur V. Par contre, nous pouvons démontrer que $\boldsymbol{B}$ est surjectif sur V.

Lemme 4.3 (Surjectivité de $\boldsymbol{B}$)**.** *L'opérateur $\boldsymbol{B}$ est surjectif sur V.*

Démonstration. Soit $(\mathrm{q}, \boldsymbol{\xi})$ appartenant à Λ. L'idée est de montrer qu'il existe un champ vectoriel $\boldsymbol{v}$ appartenant à V tel que $\boldsymbol{B}\boldsymbol{v} = (\mathrm{q}, \boldsymbol{\xi})$. La définition de l'opérateur $\boldsymbol{B}$ permet de caractériser son

image comme suit :

$$\mathrm{Im}\boldsymbol{B} \;=\; \{(\mathrm{q},\boldsymbol{\xi}) \in \Lambda \mid \exists\, \boldsymbol{v} \in V, \mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{v}) = \mathrm{q} \text{ et } \boldsymbol{L}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\xi}\}\,.$$

Donc, l'opérateur $\boldsymbol{B}$ est surjectif si et seulement si le système

$$\begin{cases} \mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{v}) = \mathrm{q} & \text{sur } \Gamma \\ \boldsymbol{L}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\xi} & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{4.3.6}$$

admet au moins une solution. Supposons que $\boldsymbol{v}$ est solution du système (4.3.6). Alors nous avons :

$$\mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{L}(\boldsymbol{v})) \;=\; \mathrm{div}_{\Gamma}((\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{y}) - \mathrm{div}_{\Gamma}\left(\mathbf{grad}_{\Gamma}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\right) \;=\; \mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{\xi})\,.$$

Ce qui est équivalent à :

$$(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{y}) - \Delta_{\Gamma}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}) \;=\; \mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{\xi})\,.$$

En effet, en utilisant la propriété (1.2.13), page 14 et la relation (2.2.2b), page 23, nous avons :

$$\mathrm{div}_{\Gamma}((\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{y}) \;=\; \underbrace{\mathbf{grad}_{\Gamma}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{y}}_{=0} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{y}) \;=\; (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{y})\,.$$

Par conséquent, la composante normale de $\boldsymbol{v}$ est une solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$(\mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{y}))\,\varphi - \Delta\varphi \;=\; \mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{\xi}) \qquad \text{sur } \Gamma. \tag{4.3.7}$$

Supposons maintenant qu'il existe $\psi \in H^2(\Gamma)$ tel que $\boldsymbol{v} = \mathbf{grad}_{\Gamma}(\psi) + \varphi\boldsymbol{n}$ où φ est une solution de (4.3.7). En utilisant le système (4.3.6), nous avons :

$$\mathrm{div}_{\Gamma}\left(\mathbf{grad}_{\Gamma}(\psi)\right) + \mathrm{div}_{\Gamma}(\varphi\boldsymbol{n}) \;=\; \mathrm{q}.$$

Ce qui est équivalent à :

$$\mathrm{div}_{\Gamma}\left(\mathbf{grad}_{\Gamma}(\psi)\right) + \varphi\mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{n}) \;=\; \mathrm{q}.$$

Donc, ψ est une solution de l'équation de Laplace-Beltrami :

$$-\Delta\psi \;=\; \varphi\mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{n}) - \mathrm{q} \qquad \text{sur } \Gamma. \tag{4.3.8}$$

Cependant, pour que $\boldsymbol{v} = \mathbf{grad}_{\Gamma}(\psi) + \varphi\boldsymbol{n}$ soit solution de (4.3.6) il suffit que φ et ψ soient respectivement solution des équations aux dérivées partielles (4.3.7) et (4.3.8). Par conséquent, l'existence de $\boldsymbol{v}$ découle de l'existence des solutions φ et ψ respectivement de (4.3.7) et (4.3.8) (cf. [Dziuk, 1988] et [Dziuk and Elliott, 2013]). En résumé, pour tout couple $(\mathrm{q},\boldsymbol{\xi})$ appartenant à Λ, le système (4.3.6) admet au moins une solution. D'où la surjectivité de l'opérateur $\boldsymbol{B}$. Ce qui prouve le lemme 4.3. □

La surjectivité de l'opérateur $\boldsymbol{B}$ est un résultat très important pour l'analyse mathématique du problème 4.6. Ce résultat nous conduit au lemme suivant sur l'image de $\boldsymbol{B}$.

Lemme 4.4. *L'image de $\boldsymbol{B}$ est fermée dans Λ.*

Démonstration. Pour montrer que $\mathrm{Im}\boldsymbol{B}$ est fermée dans Λ, il suffit de montrer qu'elle est égale à son adhérence topologique, c'est à dire que $\mathrm{Im}\boldsymbol{B} = \overline{\mathrm{Im}\boldsymbol{B}}$. Par définition, nous avons $\mathrm{Im}\boldsymbol{B} \subset \overline{\mathrm{Im}\boldsymbol{B}}$. La surjectivité de $\boldsymbol{B}$ (cf. lemme 4.3) permet déduire l'inclusion inverse. En effet, si $\boldsymbol{\mu} \in \overline{\mathrm{Im}\boldsymbol{B}} \subset \Lambda$ alors par surjectivité de $\boldsymbol{B}$:

$$\exists\, \boldsymbol{v} \in V \text{ tel que } \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}.$$

Cela signifie que $\boldsymbol{\mu} \in \mathrm{Im}\boldsymbol{B}$. Par conséquent, nous avons $\mathrm{Im}\boldsymbol{B} = \overline{\mathrm{Im}\boldsymbol{B}}$. D'où l'image de $\boldsymbol{B}$ est fermée dans Λ. Ce qui prouve le lemme 4.4. □

Le lemme 4.4 implique (cf. [Brezzi and Fortin, 1991]) qu'il existe une constante strictement positive α_b telle que :

$$\sup_{\boldsymbol{v}\in V} \frac{b(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\mu})}{\|\boldsymbol{v}\|_{1,2,\Gamma}} \geq \alpha_b \|\boldsymbol{\mu}\|_{\Lambda/\ker \boldsymbol{B}^T}. \tag{4.3.9}$$

À présent, nous allons énoncer un autre résultat sur la caractérisation du noyau de $\boldsymbol{B}^T$.

Lemme 4.5 (Caractérisation du noyau de $\boldsymbol{B}^T$)**.** *Le noyau de $\boldsymbol{B}^T$ est donné par :*

$$\ker \boldsymbol{B}^T = \{(\mathrm{q}, \boldsymbol{\xi}) \in \Lambda \mid \mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{\xi}) = \mathrm{q}\kappa, \mathrm{q} = \text{constante} \in \mathbb{R}\}.$$

Démonstration. Soient $\boldsymbol{\mu} = (\mathrm{q}, \boldsymbol{\xi})$ appartenant au noyau de $\boldsymbol{B}^T$ et

$$J = \{(\mathrm{q}, \boldsymbol{\xi}) \in \Lambda \mid \mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{\xi}) = \mathrm{q}\kappa, \mathrm{q} = \text{constante} \in \mathbb{R}\}.$$

Alors, nous avons $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\mu} = 0$ dans V'. Autrement dit, $b(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\mu}) = 0$ pour tout $\boldsymbol{v}$ appartenant à V. Cela se traduit par :

$$b_1(\boldsymbol{v}, \mathrm{q}) + b_2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\xi}) = 0, \qquad \forall\, \boldsymbol{v} \in V.$$

En utilisant les définitions des formes bilinéaires b_1 et b_2, la relation précédente est équivalente à :

$$\int_\Gamma -\mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{v})\,\mathrm{q}\,\mathrm{ds} + \int_\Gamma \boldsymbol{L}(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{\xi}\,\mathrm{ds} = 0, \qquad \forall\, \boldsymbol{v} \in V.$$

Sachant que $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{v}) = \mathbf{div}^*_\Gamma(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})$, alors nous avons :

$$\int_\Gamma -\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{div}^*_\Gamma(\mathrm{q})\,\mathrm{ds} + \int_\Gamma (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{ds} = 0, \qquad \forall\, \boldsymbol{v} \in V.$$

Nous pouvons réécrire cette dernière relation sous la forme :

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{v} \cdot \left(-\mathbf{div}^*_{\Gamma}(\mathrm{q}) + \mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{\xi})\,\boldsymbol{n}\right)\,\mathrm{ds} \;= 0, \qquad \forall\, \boldsymbol{v} \in V.$$

En particulier, en choisissant la fonction test $\boldsymbol{v}_0$ telle que

$$\boldsymbol{v}_0 = -\mathbf{div}^*_{\Gamma}(\mathrm{q}) + \mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{\xi})\,\boldsymbol{n} = (-\mathrm{q}\kappa + \mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{\xi}))\,\boldsymbol{n} + \mathbf{grad}_{\Gamma}(\mathrm{q}),$$

nous obtenons :

$$\int_{\Gamma} \left|(-\mathrm{q}\kappa + \mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{\xi}))\,\boldsymbol{n} + \mathbf{grad}_{\Gamma}(\mathrm{q})\right|^2 \,\mathrm{ds} \;= 0.$$

Ce qui est équivalent à :

$$\int_{\Gamma} |(-\mathrm{q}\kappa + \mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{\xi}))|^2 \,\mathrm{ds} + \int_{\Gamma} \left|\mathbf{grad}_{\Gamma}(\mathrm{q})\right|^2 \,\mathrm{ds} \;= 0,$$

car $\boldsymbol{n}$ est un vecteur unitaire. Par conséquent, nous obtenons :

$$\int_{\Gamma} |(-\mathrm{q}\kappa + \mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{\xi}))|^2 \,\mathrm{ds} \;=\; \int_{\Gamma} \left|\mathbf{grad}_{\Gamma}(\mathrm{q})\right|^2 \,\mathrm{ds} \;=\; 0,$$

Par suite, nous avons :

$$\begin{aligned} -\mathrm{q}\kappa + \mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{\xi}) \;&= 0 \quad \text{dans } L^2(\Gamma) \\ \mathbf{grad}_{\Gamma}(\mathrm{q}) \;&= 0 \quad \text{dans } \left(L^2(\Gamma)\right)^d. \end{aligned}$$

Ce qui signifie que q est constant sur Γ presque partout et $\mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{\xi}) = \mathrm{q}\kappa$. Donc, nous avons $\boldsymbol{\mu} = (\mathrm{q}, \boldsymbol{\xi}) \in J$. D'où $\ker \boldsymbol{B}^T \subset J$. L'inclusion $J \subset \ker \boldsymbol{B}^T$ est trivial. En effet, si $\boldsymbol{\mu} \in J$ alors pour tout $\boldsymbol{v} \in V$:

$$\begin{aligned} b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\mu}) \;&= \int_{\Gamma} -\mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{q}\,\mathrm{ds} + \int_{\Gamma} \boldsymbol{L}(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{\xi}\,\mathrm{ds} \\ &= \int_{\Gamma} -\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{div}^*_{\Gamma}(\mathrm{q})\,\mathrm{ds} + \int_{\Gamma} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{ds}. \end{aligned}$$

En utilisant la définition de $\mathbf{div}^*_{\Gamma}$, nous obtenons l'égalité :

$$b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\mu}) \;=\; \int_{\Gamma} \boldsymbol{v} \cdot \left((-\mathrm{q}\kappa + \mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{\xi}))\,\boldsymbol{n} + \mathbf{grad}_{\Gamma}(\mathrm{q})\right)\,\mathrm{ds}$$

Par conséquent, nous avons :

$$b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\mu}) = 0, \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in V.$$

puisque q est constant et $-\mathrm{q}\kappa + \mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{\xi}) = 0$. D'où

$$\ker \boldsymbol{B}^T = J = \{(\mathrm{q}, \boldsymbol{\xi}) \in \Lambda \mid \mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{\xi}) = \mathrm{q}\kappa, \mathrm{q} = \text{constante} \in \mathbb{R}\}.$$

Ce qui prouve le lemme 4.5. □

Lemme 4.6 (Coercivité de a sur le noyau de $\boldsymbol{B}$)**.** *Il existe une constante strictement positive α telle que :*

$$a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \geq \alpha \|\boldsymbol{v}\|^2_{1,2,\Gamma}, \qquad \forall\, \boldsymbol{v} \in \ker \boldsymbol{B}.$$

Démonstration. Nous donnons la preuve de ce lemme dans le cas où $c_f > 0$. Elle peut être adaptée au cas $c_f = 0$ en se plaçant dans un espace quotienté par les translations et les rotations solides. Soit $\boldsymbol{v} \in \ker \boldsymbol{B}$. Alors $\boldsymbol{v}$ est un vecteur tangent. En utilisant l'inégalité de Korn sur la surface Γ (cf. [Ciarlet, 2002] par exemple) on peut trouver une constante C strictement positive telle que :

$$\|\mathbf{D}_\Gamma(\boldsymbol{v})\|^2_{0,2,\Gamma} \geq C\, |\boldsymbol{v}|^2_{1,2,\Gamma},$$

Par conséquent, nous avons

$$2\eta\, \|\mathbf{D}_\Gamma(\boldsymbol{v})\|^2_{0,2,\Gamma} \geq 2\eta C\, |\boldsymbol{v}|^2_{1,2,\Gamma}.$$

Par suite, nous obtenons l'inégalité

$$\begin{aligned} c_f \|\boldsymbol{v}\|^2_{0,2,\Gamma} + 2\eta \|\mathbf{D}_\Gamma(\boldsymbol{v})\|^2_{0,2,\Gamma} &\geq c_f \|\boldsymbol{v}\|^2_{0,2,\Gamma} + 2\eta C\, |\boldsymbol{v}|^2_{1,2,\Gamma} \\ &\geq \min(c_f, 2\eta C) \left(\|\boldsymbol{v}\|^2_{0,2,\Gamma} + |\boldsymbol{v}|^2_{1,2,\Gamma} \right). \end{aligned}$$

Posons $\alpha = \min(c_f, 2\eta C)$. En utilisant la définition de la forme bilinéaire a, nous obtenons l'inégalité :

$$a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \geq \alpha \|\boldsymbol{v}\|^2_{1,2,\Gamma}.$$

Ce qui prouve le lemme 4.6. □

Le lemme 4.6 signifie que l'opérateur $\boldsymbol{A}$ est bijectif sur le noyau de $\boldsymbol{B}$. Cela se traduit par

$$\inf_{\boldsymbol{v} \in \ker \boldsymbol{B}} \sup_{\boldsymbol{w} \in \ker \boldsymbol{B}} \frac{a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})}{\|\boldsymbol{v}\|_{1,2,\Gamma} \|\boldsymbol{w}\|_{1,2,\Gamma}} \geq \alpha_a. \tag{4.3.10}$$

Nous avons un autre résultat important sur la coercivité de la forme bilinéaire c :

Lemme 4.7 (Coercivité de c sur Λ)**.** *Il existe une constante strictement positive α_c telle que :*

$$c(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) \ \geq \alpha_c \left\|\boldsymbol{\mu}\right\|^2_{\Lambda,\Gamma}, \qquad \forall\, \boldsymbol{\mu} \in \Lambda.$$

Démonstration. Par définition de la forme bilinéaire c et la norme $\|\cdot\|_{\Lambda,\Gamma}$, nous avons pour tout $\boldsymbol{\mu} = (\mathrm{q}, \boldsymbol{\xi}) \in \Lambda$:

$$c(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) \ = \int_\Gamma \frac{1}{\lambda} \left|\mathrm{q}\right|^2 \mathrm{ds} + \int_\Gamma \frac{1}{\gamma} \left|\boldsymbol{\xi}\right|^2 \mathrm{ds} \ = \ \frac{1}{\lambda} \left\|\mathrm{q}\right\|^2_{0,2,\Gamma} + \frac{1}{\gamma} \left\|\boldsymbol{\xi}\right\|^2_{0,2,\Gamma}.$$

Par conséquent, nous avons l'inégalité :

$$c(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) \ \geq \ \min\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\gamma}\right) \left(\left\|\mathrm{q}\right\|^2_{0,2,\Gamma} + \left\|\boldsymbol{\xi}\right\|^2_{0,2,\Gamma}\right).$$

D'où

$$c(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) \ \geq \alpha_c \left\|\boldsymbol{\mu}\right\|^2_{\Lambda,\Gamma},$$

avec $\alpha_c = \min\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\gamma}\right)$. Ce qui prouve le lemme 4.7. □

Le résultat du lemme 4.7 signifie simplement que l'opérateur $\boldsymbol{C}$ est injectif sur Λ. Cela se traduit par

$$\ker \boldsymbol{C} = \{0\}. \tag{4.3.11}$$

4.3.3 Existence et unicité de la solution du problème du point selle

Nous avons maintenant tous les outils pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution associée du problème 4.6. Nous avons le théorème suivant :

Théorème 4.1 (Existence et unicité de la solution du problème 4.6)**.** *Soit $\boldsymbol{f} \in V'$. Alors*

(i) si $c_f > 0$ alors le problème 4.6 admet une unique solution $(\boldsymbol{u}_\gamma, \boldsymbol{\lambda}) \in V \times \Lambda$,

(ii) si $c_f = 0$ alors il existe une solution $(\boldsymbol{u}_\gamma, \boldsymbol{\lambda}) \in V \times \Lambda$ du problème 4.6, unique à une translation et rotation près.

Dans les deux cas, la solution $(\boldsymbol{u}_\gamma, \boldsymbol{\lambda})$ vérifie :

$$\left\|\boldsymbol{u}_\gamma\right\|_{1,2,\Gamma} + \left\|\boldsymbol{\lambda}\right\|_{\Lambda/\ker \boldsymbol{B}^T} \leq C \left\|\boldsymbol{f}\right\|_{-1,2,\Gamma} \tag{4.3.12}$$

où C est une constante qui ne depend que de C_a, C_c, α_a et α_b.

Démonstration. Nous avons démontré dans la section précédente que pour tout $c_f > 0$:

- a, b et c sont des formes bilinéaires continues respectivement sur $V \times V$, $V \times \Lambda$ et $\Lambda \times \Lambda$ (cf. lemme 4.1),

- a et c sont semidéfinies positives et symétriques (cf. les relations (4.3.1a) et (4.3.1b)),
- l'image de $\boldsymbol{B}$ est fermé dans Λ (cf. lemme 4.4), qui se traduit par la relation (4.3.9),
- a est coercive sur le noyau de l'opérateur $\boldsymbol{B}$ (cf. lemme 4.6),
- c est coercive sur Λ (cf. lemme 4.7).

Alors, d'après [Brezzi and Fortin, 1991] théorème 1.2 (page 47), il existe une unique solution $(\boldsymbol{u}_\gamma, \boldsymbol{\lambda})$ du problème 4.6 dans $V \times \Lambda/M$, où $M = \ker \boldsymbol{B}^T \cap \ker \boldsymbol{C}$. Comme le noyau de $\boldsymbol{C}$ est réduit à zéro (cf. relation (4.3.11)), alors $M = \{0\}$. Par conséquent, la solution $(\boldsymbol{u}_\gamma, \boldsymbol{\lambda})$ du problème 4.6 est dans $V \times \Lambda$. De plus, la solution $(\boldsymbol{u}_\gamma, \boldsymbol{\lambda})$ vérifie l'inégalté (4.3.12). Dans le cas où $c_f = 0$, on raisonne de la même manière en se plaçant dans un espace quotienté par les translations et les rotations solides. Nous obtenons l'unicité de la solution à une translation et rotation près (cf. la remarque 3.3, page 74). Ce qui prouve le théorème 4.1. □

Nous déduisons le résultat suivant sur l'existence et l'unicité de la solution du problème du point selle 4.4.

Corollaire 4.1 (Existence et unicité de la solution du problème 4.4)**.** *Soit $\boldsymbol{f} \in V'$. Alors*

(i) si $c_f > 0$ alors le problème 4.4 admet une unique solution $(\boldsymbol{u}_\gamma, \mathrm{p}, \boldsymbol{\theta})$:

$$(\boldsymbol{u}_\gamma, \mathrm{p}, \boldsymbol{\theta}) \in V \times L^2(\Gamma) \times \left(L^2(\Gamma)\right)^d,$$

(ii) si $c_f = 0$ alors il existe une solution $(\boldsymbol{u}_\gamma, \mathrm{p}, \boldsymbol{\theta}) \in V \times L^2(\Gamma) \times (L^2(\Gamma))^d$ du problème 4.4, unique à une translation et rotation près.

Démonstration. Nous déduisons ce résultat en utilisant le théorème 4.1 et l'équivalence des problèmes 4.4 et 4.6. □

Remarque 4.1. *Les conditions :*

- *a, b continues respectivement sur $V \times V$ et $V \times \Lambda$,*
- *l'image de $\boldsymbol{B}$ est fermé dans Λ,*
- *a est coercive sur le noyau de l'opérateur $\boldsymbol{B}$,*

suffisent pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème 4.5 (cf. [Brezzi and Fortin, 1991]).

4.4 Mise en œuvre numérique

Dans cette section, l'objectif est de tester numériquement le problème du point selle 4.4. Pour cela, nous proposons une discrétisation du problème 4.4 par la méthode des éléments finis mixtes. Ensuite, nous montrons à travers des tests sur une solution analytique, que la solution du problème discret associé au problème 4.4 converge vers le point selle pour certains choix d'éléments finis.

4.4.1 Méthode des éléments finis mixtes

Soit Γ_h une approximation globalement continue de Γ, polynomiale par morceaux et de degré polynomial k ($k \geq 1$). Nous supposons que Γ_h est construite par exemple comme dans le chapitre 2, sous-section 2.2.3, page 25. L'objectif est d'écrire le problème 4.4 sur Γ_h, en utilisant des sous-espaces vectoriels de dimension finie V_h, Q_h et Ξ_h respectivement de $V_h, L^2(\Gamma_h)$ et $(L^2(\Gamma_h))^d$. Le problème discret associé au problème 4.4 s'écrit donc sous la forme :

Problème 4.7 (Problème approché sur Γ_h)**.** *Trouver* $(\boldsymbol{u}_{\gamma,h}, \mathrm{p}_h, \boldsymbol{\theta}_h) \in V_h \times Q_h \times \Xi_h$ *tel que*

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_h(\boldsymbol{u}_{\gamma,h}, \boldsymbol{v}_h) & + & b_{1,h}(\boldsymbol{v}_h, \mathrm{p}_h) & + & b_{2,h}(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{\theta}_h) & = & \ell_h(\boldsymbol{v}_h) & & \forall\, \boldsymbol{v}_h \in V_h \\
b_{1,h}(\boldsymbol{u}_{\gamma,h}, \mathrm{q}_h) & - & c_{1,h}(\mathrm{p}_h, \mathrm{q}_h) & & & = & 0 & & \forall\, \mathrm{p}_h \in Q_h \\
b_{2,h}(\boldsymbol{u}_{\gamma,h}, \boldsymbol{\xi}_h) & & & - & c_{2,h}(\boldsymbol{\theta}_h, \boldsymbol{\xi}_h) & = & 0 & & \forall\, \boldsymbol{\xi}_h \in \Xi_h
\end{array}$$

où $a_h, b_{1,h}, b_{2,h}, c_{1,h}$ et $c_{2,h}$ sont les formes bilinéaires définies par

$$\begin{aligned}
a_h(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{w}_h) &= \int_{\Gamma_h} c_f \boldsymbol{v}_h \cdot \boldsymbol{w}_h \, \mathrm{ds}_h + \int_{\Gamma_h} 2\eta \mathbf{D}_{\Gamma_h}(\boldsymbol{v}_h) : \mathbf{D}_{\Gamma_h}(\boldsymbol{w}_h) \, \mathrm{ds}_h, \\
b_{1,h}(\boldsymbol{v}_h, \mathrm{q}_h) &= \int_{\Gamma_h} -\mathrm{div}_{\Gamma_h}(\boldsymbol{v}_h) \, \mathrm{q}_h \, \mathrm{ds}_h, \\
c_{1,h}(\mathrm{p}_h, \mathrm{q}_h) &= \int_{\Gamma_h} \frac{1}{\lambda} \mathrm{p}_h \mathrm{q}_h \, \mathrm{ds}_h, \\
b_{2,h}(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{\xi}_h) &= \int_{\Gamma_h} \boldsymbol{L}_h(\boldsymbol{v}_h) \cdot \boldsymbol{\xi}_h \, \mathrm{ds}_h, \\
c_{2,h}(\boldsymbol{\theta}_h, \boldsymbol{\xi}_h) &= \int_{\Gamma_h} \frac{1}{\gamma} \boldsymbol{\theta}_h \cdot \boldsymbol{\xi}_h \, \mathrm{ds}_h
\end{aligned}$$

et ℓ_h la forme linéaire définie par :

$$\ell_h(\boldsymbol{v}_h) = \int_{\Gamma_h} \boldsymbol{f}_h \cdot \boldsymbol{v}_h \, \mathrm{ds}_h.$$

Rappelons que $\boldsymbol{f}_h \in (L^2(\Gamma_h))^d$ est une approximation polynomiale par morceaux de $\boldsymbol{f}$ sur Γ_h et que l'opérateur $\boldsymbol{L}_h$ est défini par :

$$\boldsymbol{L}_h(\boldsymbol{v}_h) = (\boldsymbol{v}_h \cdot \boldsymbol{n}_h) \boldsymbol{y}_h - \boldsymbol{H}_h \boldsymbol{v}_h - \mathbf{grad}^T_{\Gamma_h}(\boldsymbol{v}_h) \boldsymbol{n}_h, \qquad \boldsymbol{v}_h \in V_h$$

où $\boldsymbol{n}_h$ et $\boldsymbol{H}_h$ sont respectivement les approximations de $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{H}$ du chapitre 2. On peut aussi utiliser d'autres approximations de $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{H}$.

Le choix des éléments finis V_h, Q_h et Ξ_h n'est pas arbitraire puisqu'il s'agit d'un problème mixte. Il faut un choix convenable pour que le problème approché 4.7 converge vers le problème du point selle. Le problème 4.7 doit vérifier deux conditions **inf-sup** ou de **Brezzi-Babuska** (cf. [Brezzi and Fortin, 1991]) : d'abord entre les espaces V_h et Q_h via la forme bilinéaire $b_{1,h}$, puis entre les espaces V_h et Ξ_h via la forme bilinéaire $b_{2,h}$. Ici, nous n'avons pas de résultats théoriques sur ces conditions **inf-sup**. L'idée est d'exhiber des combinaisons d'éléments finis mixtes compatibles pour obtenir la convergence de $(\boldsymbol{u}_{\gamma,h}, \mathrm{p}_h, \boldsymbol{\theta}_h)$ vers $(\boldsymbol{u}_\gamma, \mathrm{p}, \boldsymbol{\theta})$. Pour cela, nous avons guidé notre choix des éléments finis par similarité avec les choix usuels pour des problèmes plus classiques (comme le problème Stokes tridimensionnel).

4.4.2 Tests numériques et choix des éléments finis mixtes

Dans cette section la surface Γ désigne la sphère unité :

$$\Gamma \;=\; \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3, |\boldsymbol{x}| = 1\right\}.$$

Nous présentons ici les résultats de tests numériques obtenus en utilisant le problème approché 4.7 pour quelques combinaisons d'éléments finis mixtes sur des approximations Γ_h de degré polynomial de degré polynomial $k = 1, 2$. On se donne le champ vectoriel $\boldsymbol{u}_\gamma$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$ défini en coordonnées sphériques par :

$$\boldsymbol{u}_\gamma(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right)\,\sin^2\theta \\ -3\,\cos\varphi\,\sin\varphi\,\cos\theta\,\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{4.4.1}$$

Par construction, le champ $\boldsymbol{u}_\gamma$ est tangent à Γ et à divergence surfacique nulle :

$$\mathrm{div}_\Gamma\left(\boldsymbol{u}_\gamma\right) = \boldsymbol{u}_\gamma \cdot \boldsymbol{n} = 0.$$

Par conséquent, les multiplicateurs de Lagrange p et $\boldsymbol{\theta}$ associés à $\boldsymbol{u}_\gamma$ (cf. relation (4.2.1)) sont nuls quel que soit le choix des paramètres λ et γ. Nous déduisons donc exactement le champ vectoriel $\boldsymbol{f}$ de tel sorte que $(\boldsymbol{u}_\gamma, 0, 0)$ soit solution du problème du point selle 4.4 pour les paramètres $c_f = \eta = 1$ en utilisant la relation :

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{u}_\gamma - \mathbf{div}_\Gamma\left(2\mathbf{D}_\Gamma\left(\boldsymbol{u}_\gamma\right)\right). \tag{4.4.2}$$

En utilisant les résultats sur les coordonnées sphériques dans l'Annexe E, nous obtenons :

$$\boldsymbol{f}(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ (20\,\cos^2\varphi - 10)\,\cos^2\theta - 10\,\cos^2\varphi + 5 \\ 30\,\cos\varphi\,\sin\varphi\,\cos\theta\,\sin^2\theta - 5\,\cos\varphi\,\sin\varphi\,\cos\theta \end{pmatrix} \tag{4.4.3}$$

Pour les tests numériques, nous avons pris : $\lambda = 10^3$ et $\gamma = 10^5$.

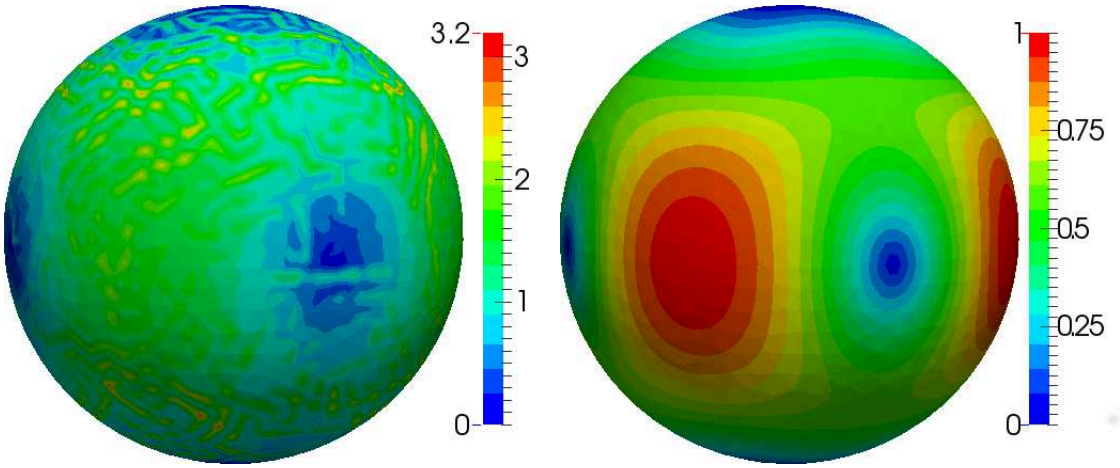
Éléments finis mixtes $P_2 - P_1 - P_1$

Dans ce cas, les espaces éléments finis sont donnés par :

$$\begin{aligned} V_h &= \left\{ \boldsymbol{v}_h \in \left(C^0(\Gamma_h)\right)^d \cap \left(H^1(\Gamma_h)\right)^d \mid \boldsymbol{v}_{h_{|K_h}} \in P_2(K_h)^d, \forall K_h \in \Gamma_h \right\} \\ Q_h &= \left\{ \mathrm{q}_h \in C^0(\Gamma_h) \cap L^2(\Gamma_h) \mid \mathrm{q}_{h_{|K_h}} \in P_1(K_h), \forall K_h \in \Gamma_h \right\} \\ \Xi_h &= \left\{ \boldsymbol{\xi}_h \in \left(C^0(\Gamma_h)\right)^d \cap \left(L^2(\Gamma_h)\right)^d \mid \boldsymbol{\xi}_{h_{|K_h}} \in P_1(K_h)^d, \forall K_h \in \Gamma_h \right\} \end{aligned}$$

Cas d'une approximation affine par morceaux ($k = 1$) **:** La figure 4.1 exprime clairement que la solution approchée $\boldsymbol{u}_{\gamma,h}$ ne converge pas vers la solution exacte.

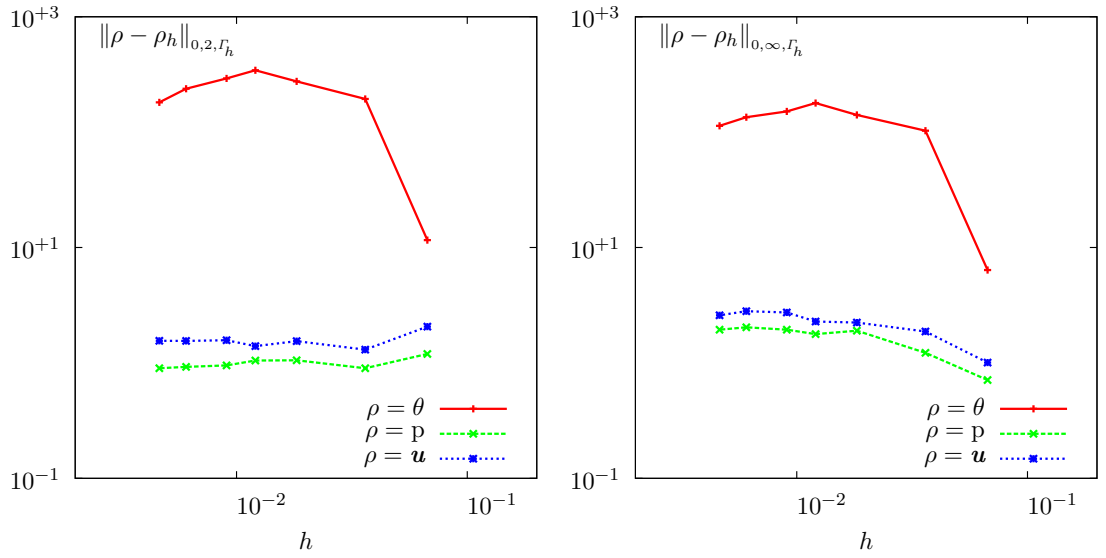
FIGURE 4.1 (a) Solution approchée obtenue par l'approche 4.7 dans le cas d'une approximation affine par morceaux de la sphère unité en utilisant la combinaison $P_2 - P_1 - P_1$ pour la solution $(\boldsymbol{u}_{\gamma,h}, \mathrm{p}_h, \boldsymbol{\theta}_h)$. (b) L'interpolée de Lagrange de la solution exacte sur la même approximation affine par morceaux.



(a) Solution $\boldsymbol{u}_{\gamma,h}$ (b) Solution $\boldsymbol{u}_{\gamma}$

Nous constatons que le champ vectoriel $\boldsymbol{u}_{\gamma,h}$ n'est pas tangent à Γ_h (maillage de la sphère unité). Les résultats des tests de convergence obtenus sur la figure 4.2 confirment cette non-convergence notamment en norme L^2 (fig. 4.2(c)) et en norme L^∞ (fig. 4.2(d)). Ces figures montrent aussi que p_h et $\boldsymbol{\theta}_h$ ne convergent pas non plus respectivement vers p et $\boldsymbol{\theta}$ ni en norme L^2, ni en norme L^∞. Mais ces résultats de non convergences ne permettent pas de conclure définitivement que la combinaison $P_2 - P_1 - P_1$ n'est pas compatible dans le cas d'une approximation affine par morceaux. En effet, ce problème de convergence peut être lié directement à la courbure de la

FIGURE 4.2 Erreurs commises en échelle logarithmique sur la solution exacte $(\boldsymbol{u}_\gamma, 0, 0)$ respectivement en norme L^2 et L^∞ sur des approximations affines par morceaux de la sphère unité.



surface via le multiplicateur de Lagrange $\boldsymbol{\theta}$, qui depend du tenseur de courbure $\boldsymbol{H}$:

$$\boldsymbol{\theta} \;=\gamma \boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{u}_\gamma\right) \;=\; \gamma\left((\boldsymbol{u}_\gamma \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{u}_\gamma - \mathbf{grad}_\Gamma^T\left(\boldsymbol{u}_\gamma\right)\boldsymbol{n}\right).$$

Nous avons vu dans le chapitre 2 qu'il faut une méthode itérative comme par exemple la méthode de lissage (cf. algorithme 1, page 58) pour espérer obtenir une convergence des termes de courbure. Par conséquent, quel que soit la combinaison d'éléments finis choisie, il est nécessaire d'utiliser une méthode de résolution itérative pour espérer la convergence de $\boldsymbol{\theta}$. Nous n'avons pas testé cette alternative puisque nous avons la possibilité d'utiliser des approximations de degré polynomial supérieur de Γ.

Cas d'une approximation isoparamétrique de degré $k = 2$: La fig. 4.3 montre bien que $(\boldsymbol{u}_{\gamma,h}, \mathrm{p}_h, \boldsymbol{\theta}_h)$ converge vers $(\boldsymbol{u}_\gamma, \mathrm{p}, \boldsymbol{\theta})$ pour la combinaison $P_2 - P_1 - P_1$, notamment en norme L^2 et L^∞. Précisément, les résultats obtenus sur le test de convergence (cf. figs. 4.3(c) et 4.3(d)) montrent une convergence d'ordre 3 en norme L^2 :

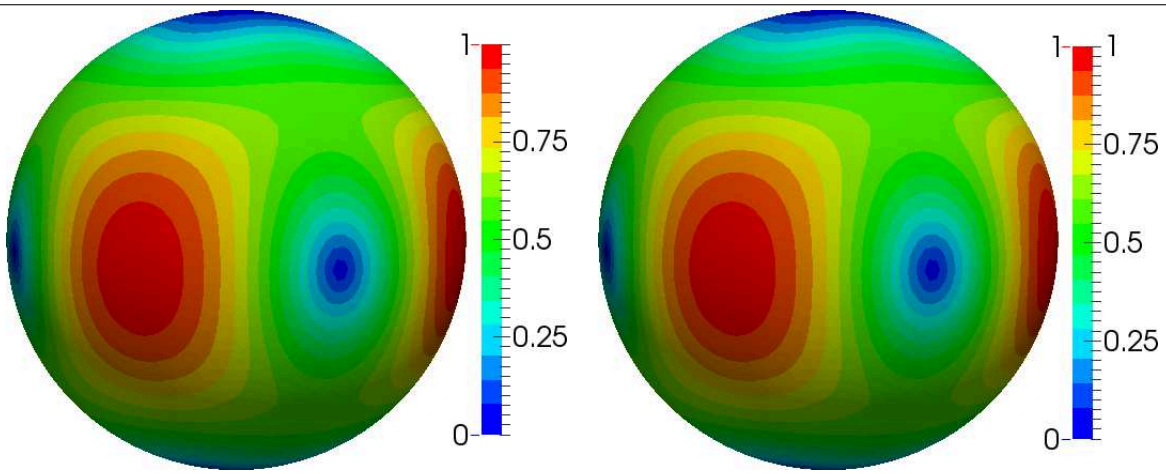
$$\|\boldsymbol{u}_\gamma - \boldsymbol{u}_{\gamma,h}\|_{0,2,\Gamma_h} \;\simeq\; \|\mathrm{p} - \mathrm{p}_h\|_{0,2,\Gamma_h} \;\simeq\; \|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_h\|_{0,2,\Gamma_h} \;=\; O(h^3),$$

et une convergence d'ordre 1 en norme L^∞ :

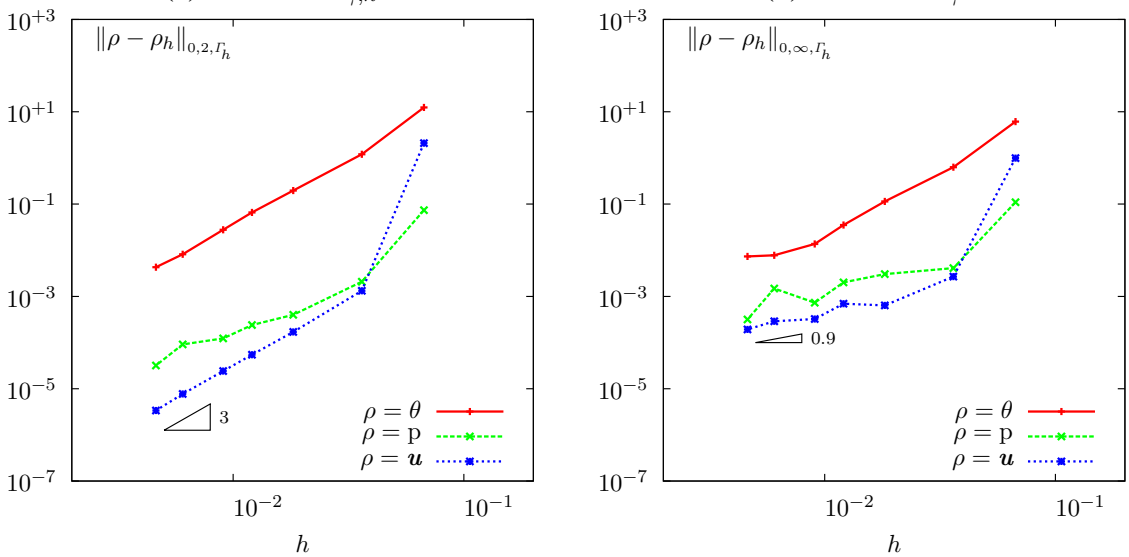
$$\|\boldsymbol{u}_\gamma - \boldsymbol{u}_{\gamma,h}\|_{0,\infty,\Gamma_h} \;\simeq\; \|\mathrm{p} - \mathrm{p}_h\|_{0,\infty,\Gamma_h} \;\simeq\; \|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_h\|_{0,\infty,\Gamma_h} \;=\; O(h).$$

Cette convergence en norme L^∞ n'est pas optimale du point de vu méthode éléments finis. Elle peut même être problématique pour des maillages moins réguliers (comme ceux de l'Annexe B).

FIGURE 4.3 (a) Lignes de niveau de la solution approchée dans le cas d'une approximation isoparamétrique de degré 2 de la sphère unité en pour la combinaison $P_2 - P_1 - P_1$. (b) Lignes de niveau de l'interpolée de Lagrange de la solution exacte. (c) et (d) Erreurs commises en échelle logarithmique sur la solution exacte $(\boldsymbol{u}_\gamma, 0, 0)$ respectivement en norme L^2 et L^∞ sur des approximations isoparamétriques de degré 2 de la sphère unité.



(a) Solution $\boldsymbol{u}_{\gamma,h}$ (b) Solution $\boldsymbol{u}_\gamma$



(c) Erreurs en norme L^2 (d) Erreurs en norme L^∞

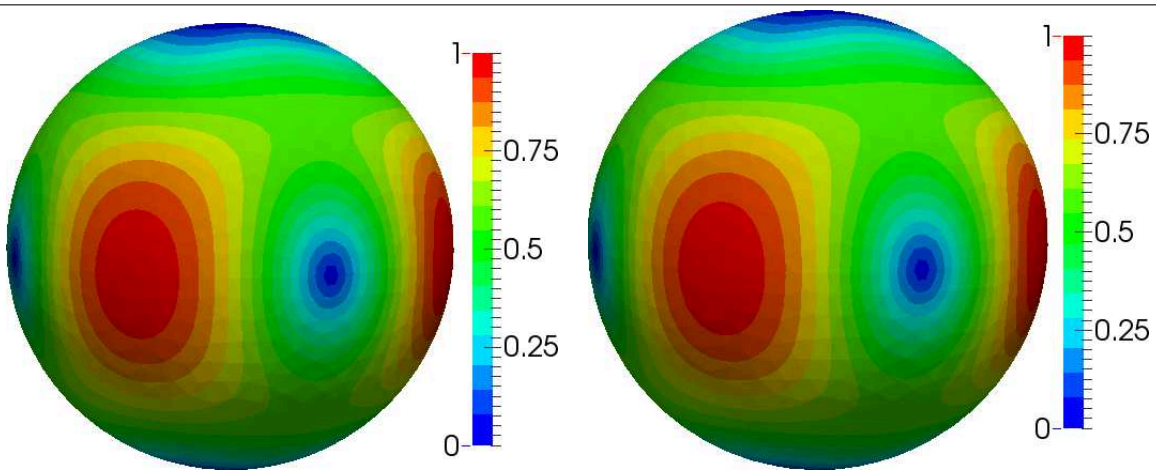
Éléments finis mixtes $P_3 - P_2 - P_2$

La fig. 4.4 montre que $(\boldsymbol{u}_{\gamma,h}, \mathrm{p}_h, \boldsymbol{\theta}_h)$ converge vers $(\boldsymbol{u}_\gamma, \mathrm{p}, \boldsymbol{\theta})$ pour la combinaison $P_3 - P_2 - P_2$ en norme L^2 et L^∞ :

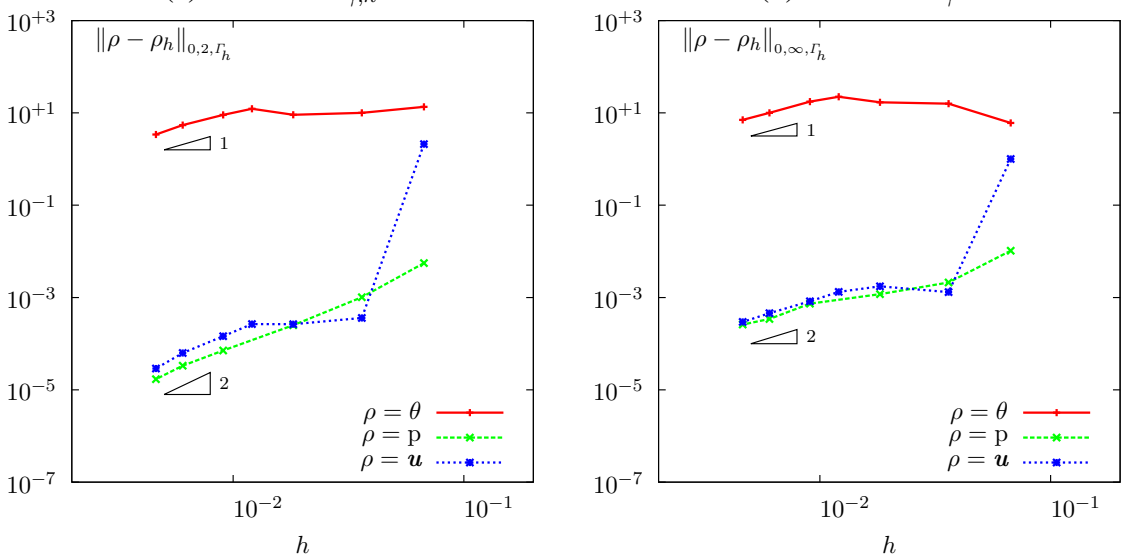
$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{u}_\gamma - \boldsymbol{u}_{\gamma,h}\|_{0,2,\Gamma_h} &= \|\boldsymbol{u}_\gamma - \boldsymbol{u}_{\gamma,h}\|_{0,\infty,\Gamma_h} = O(h^2) \\
\|\mathrm{p} - \mathrm{p}_h\|_{0,2,\Gamma_h} &= \|\mathrm{p} - \mathrm{p}_h\|_{0,\infty,\Gamma_h} = O(h^2) \\
\|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_h\|_{0,2,\Gamma_h} &= \|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_h\|_{0,\infty,\Gamma_h} = O(h).
\end{aligned}$$

Cette convergence n'est évidemment pas optimale du point de vu méthode éléments finis, mais elle est suffisante pour obtenir des approximations assez précises notamment en norme L^∞ (illustration sur les figs. 4.4(a) et 4.4(b)).

FIGURE 4.4 (a) Lignes de niveau de la solution approchée dans le cas d'une approximation isoparamétrique de degré 2 de la sphère unité en pour la combinaison $P_3 - P_2 - P_2$. (b) Lignes de niveau de l'interpolée de Lagrange de la solution exacte. (c) et (d) Erreurs commises en échelle logarithmique sur la solution exacte $(\boldsymbol{u}_\gamma, 0, 0)$ respectivement en norme L^2 et L^∞ sur des approximations isoparamétriques de degré 2 de la sphère unité.



(a) Solution $\boldsymbol{u}_{\gamma,h}$ (b) Solution $\boldsymbol{u}_\gamma$

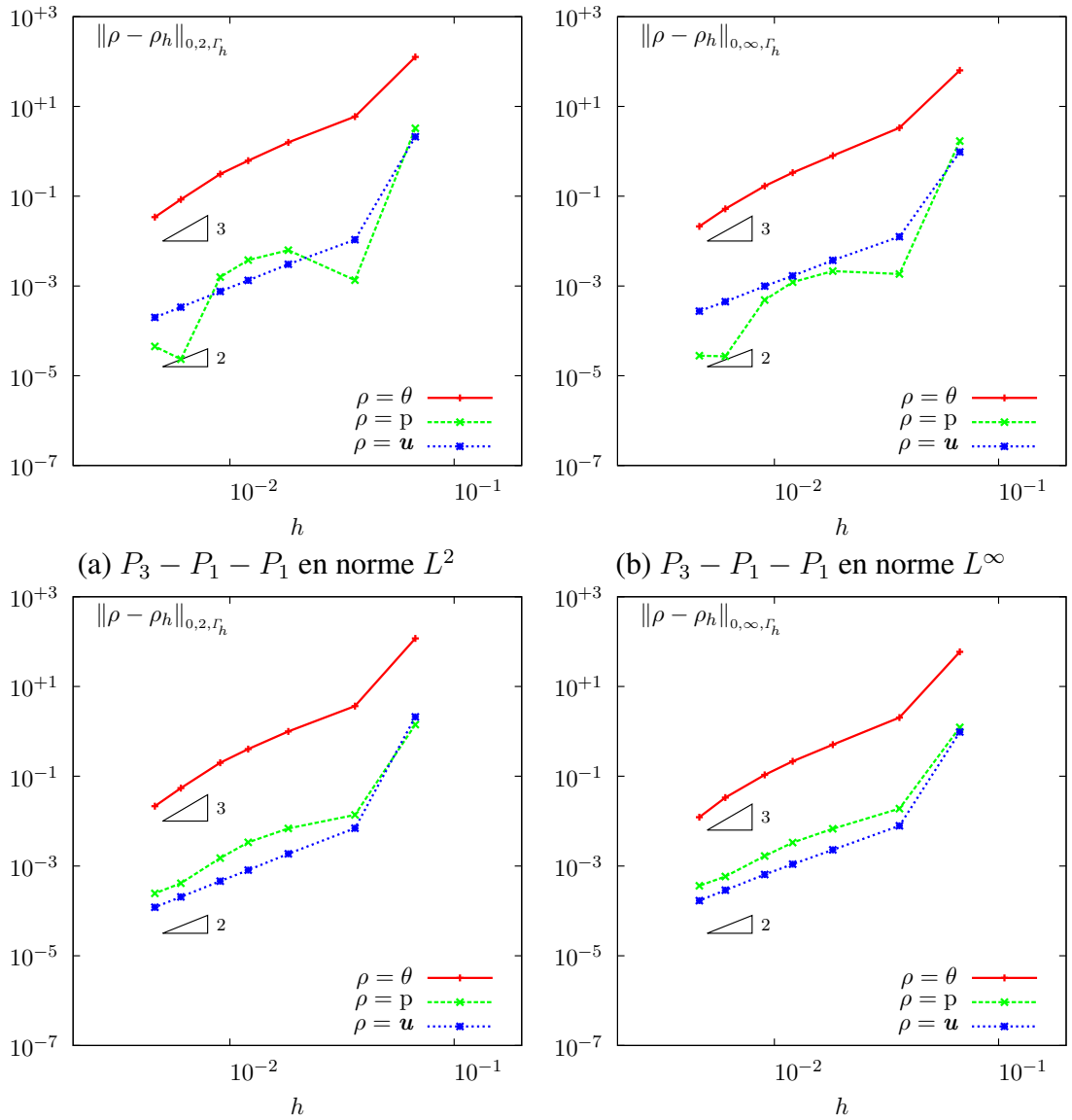


(c) Erreurs en norme L^2 (d) Erreurs en norme L^∞

D'autres éléments finis mixtes

Nous avons testé aussi les combinaisons $P_3 - P_1 - P_1$ et $P_3 - P_2 - P_1$ dans le cas des approximations isoparamétriques de degré 2. La fig. 4.5 présente les résultats obtenus. Nous pouvons noter une convergence en norme L^2 et L^∞ de $(\boldsymbol{u}_{\gamma,h}, \mathrm{p}_h, \boldsymbol{\theta}_h)$ vers $(\boldsymbol{u}_\gamma, \mathrm{p}, \boldsymbol{\theta})$ pour ces deux combinaisons avec la même précision.

FIGURE 4.5 Erreurs commises en échelle logarithmique sur la solution exacte $(\boldsymbol{u}_\gamma, 0, 0)$ respectivement en norme L^2 et L^∞ sur des approximations affines par morceaux de la sphère unité pour les combinaisons $P_3 - P_1 - P_1$ et $P_3 - P_2 - P_1$.



(a) $P_3 - P_1 - P_1$ en norme L^2 (b) $P_3 - P_1 - P_1$ en norme L^∞

(c) $P_3 - P_2 - P_1$ en norme L^2 (d) $P_3 - P_2 - P_1$ en norme L^∞

L'ordre de convergence numérique est quadratique pour les champs $\boldsymbol{u}_{\gamma,h}$ et p_h comme pour la combinaison $P_3 - P_2 - P_2$. Elle vaut 3 pour le champ $\boldsymbol{\theta}_h$ comme pour la combinaison $P_2 - P_1 - P_1$.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé une méthode éléments finis mixtes pour résoudre pour des équations aux dérivées partielles elliptiques de type élasticité linéaire ou Stokes tangentiel sur une surface fermée sans bord. Nous avons introduit un Lagrangien en utilisant deux multiplicateurs de Lagrange : un scalaire et l'autre vectoriel lié au terme de pénalisation. Nous avons démontré l'existence et l'unicité du problème de point selle associé au Lagrangien. Nous montrons la convergence (en norme L^2 et L^∞) à travers des tests numériques et certains choix compatibles des éléments finis utilisés pour des approximations isoparamétriques de degré 2 de la sphère unité. Cette méthode nous permet en pratique de simuler efficacement des écoulements incompressibles (ou quasi-incompressibles) ou tangentiels très précis.

Chapitre 5

Embryogenèse : extension de la bande germinale de la *Drosophile*

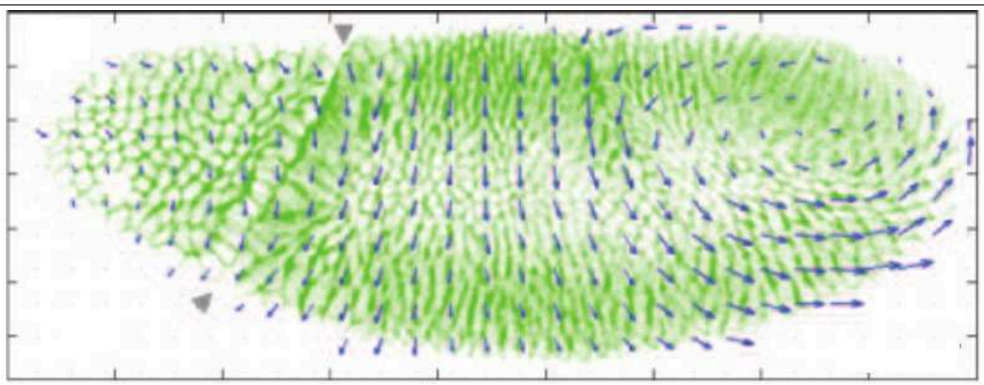
Sommaire

5.1 Introduction **132**
5.2 Modélisation mécanique **132**
5.3 Modélisation mathématique **135**
5.4 Simulations numériques **136**
5.4.1 Calcul du tenseur de contractilité de l'actomyosine 136
5.4.2 Résolution par éléments finis mixtes 136
5.4.3 Résultats numériques et intérêt biologique 137
5.5 Article en préparation **139**

5.1 Introduction

Les tissus vivants qui composent les embryons lors des stades initiaux de leur morphogenèse sont des monocouches de cellules, jointives, et entourées de liquides. Le programme génétique induit des contractions de certaines de ces cellules, ce qui conduit à des déformations tri-dimensionnelles des tissus eux-mêmes, ainsi qu'à des écoulements en surface. Un exemple d'écoulement surfacique est l'extension de la bande germinale de la *Drosophile* (fig. 5.1), durant laquelle la forme globalement ellipsoïdale de l'embryon n'est pas modifiée mais un écoulement en surface réarrange les différents tissus qui forment la surface de l'embryon. Dans ce chapitre, nous proposons un modèle mécanique de ce phénomène basé sur celui de [Étienne et al., 2015] à l'échelle de cellule unique. Nous mettons en évidence le lien entre le modèle mécanique et le modèle mathématique étudié dans les chapitres 3 et 4 qui va servir à simuler le phénomène. L'objectif de cette simulation est de comprendre le lien entre l'expression génétique et la morphologie obtenue. Enfin, un article en préparation plus détaillé du point de vue biophysique sera joint à ce chapitre.

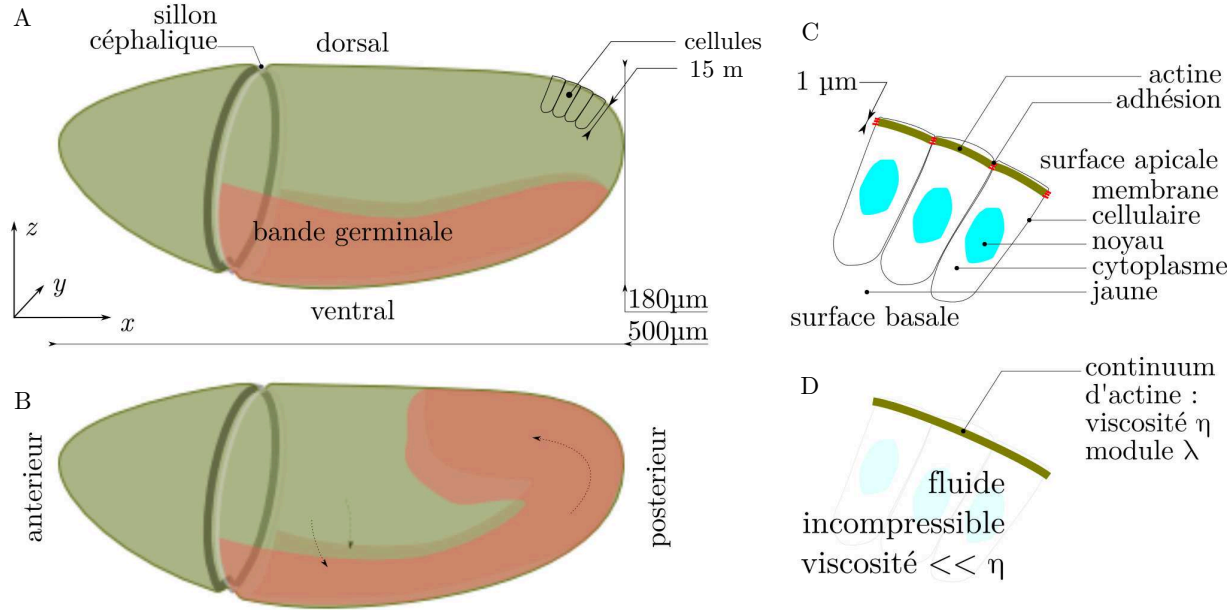
FIGURE 5.1 Visualisation d'un embryon de *Drosophile* et vecteurs déformation lors du début de l'extension de la bande germinale, tiré de [Supatto et al., 2005]. Les triangles désignent le sillon céphalique.



5.2 Modélisation mécanique

Il a été démontré [He et al., 2014] que lors de la formation du sillon ventral, qui précède immédiatement l'extension de la bande germinale, les matériaux biologiques formant l'intérieur de l'embryon (corps cellulaires et "jaune" de l'oeuf embryonaire) sont passivement entraînés par l'écoulement ayant lieu tangentiellement à la surface [Lye and Sanson, 2011]. Cet écoulement de surface concerne les *surfaces apicales* des cellules de l'embryon (fig. 5.2) qui sont formés de réseaux de protéines du cytosquelette, l'actine. L'observation expérimentale montre qu'avant que l'écoulement n'ait lieu, des moteurs moléculaires de myosine sont activés le long de structures d'actine présentes dans les cellules de la bande germinale seulement (fig. 5.3), tangentielles à la surface. Les biologistes ont pu montrer que dans les mutants *Kruppel ; torso-like* [Butler et al., 2009, Lye et al., 2015] et *torso* [Collinet et al., 2015], si ces moteurs moléculaires de

FIGURE 5.2 Géométrie de l'embryon de *Drosophile* au cours de l'extension de la bande germinale. (A) Géométrie initiale. Les cellules couvrent l'ensemble de la surface de l'embryon, quelques unes seulement sont représentées. (B) Géométrie finale. La forme de l'embryon est inchangée, mais les cellules qui composent la bande germinale se sont déplacées par un écoulement en surface. (C) Détail des cellules. (D) Seule l'actine formant la surface apicale est prise en compte dans la modélisation, les autres structures de la cellule se comportant comme un fluide relativement peu visqueux et passif aux échelles de temps de l'écoulement observé.

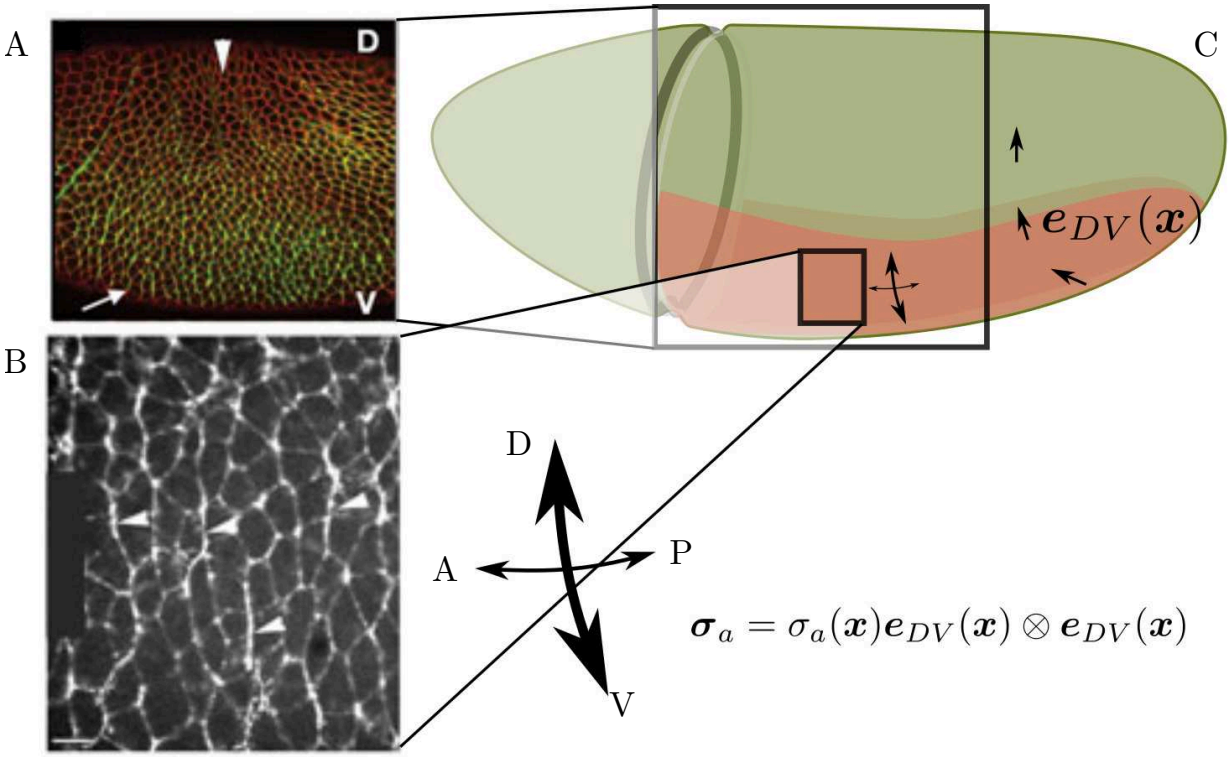


myosines sont empêchés d'agir, l'écoulement n'a pas lieu [1]. Les myosines sont connues pour générer des contraintes compressives, un modèle rhéologique a été validé à l'échelle de la cellule unique [Étienne et al., 2015]. Ces observations nous conduisent à formuler le problème mécanique comme un écoulement de type Stokes tangentiel à une surface fermée de $\mathbb{R}^3$. D'un point de vue biophysique, l'objectif de ce travail est de montrer que les écoulements constatés expérimentalement (fig. 5.2) peuvent être expliqués par l'activation de moteurs de myosine dans la bande germinale uniquement de l'embryon, ainsi que l'on le constate expérimentalement. Cet écoulement est dissymétrique selon l'axe x, or la seule dissymétrie dans le problème mécanique provient de la géométrie de l'embryon, qui présente un "fossé" appelé sillon céphalique (fig. 5.2). Nous cherchons à déterminer si ce sillon est la cause de la dissymétrie de l'écoulement, afin de tester si la géométrie de l'embryon peut ainsi être utilisée comme un guide pour des mouvements morphogénétiques.

Pour formaliser le modèle mécanique mathématiquement, nous désignons par Γ la géométrie de la *Drosophile* et $\boldsymbol{n}$ sa normale extérieure. Notons par $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes totales exercées

1. Dans le type naturel (c'est-à-dire en l'absence de mutation), un autre mouvement morphogénétique contribue à l'extension de la bande germinale, et elle a lieu partiellement même si la myosine n'agit pas. Ceci est discuté dans l'article qui suit.

FIGURE 5.3 Localisation de la myosine sur la surface apicale au début de l'extension de la bande germinale. (A) La myosine (vert) est spécifiquement présente sur les jonctions cellule-cellule (rouge) de la bande germinale (côté ventral, V) et non côté dorsal (D) [Bertet et al., 2004]. (B) Dans la bande germinale, la concentration de myosine (blanc) est renforcée le long des jonctions cellule-cellule orientées dans la direction dorso-ventrale (DV) par rapport aux jonctions orientées dans la direction antéro-postérieure (AP) [Zallen and Wieschaus, 2004], image [Bertet et al., 2004]. (C) Schéma de la distribution de myosine utilisée dans le modèle. Un terme d'intensité de l'activité de la myosine, $\boldsymbol{\sigma}_a$, vaut zéro en dehors de la bande germinale (zone surlignée) et prend des valeurs positives dans celle-ci, comme observé en (A). Le champ de vecteurs unitaires $\boldsymbol{e}_{DV}$ permet de repérer la direction dorsoventrale, et de définir en tout point de la surface un tenseur d'orientation $\boldsymbol{e}_{DV} \otimes \boldsymbol{e}_{DV}$ qui correspond aux orientations vues en (B). Le produit $\boldsymbol{\sigma}_a = \sigma_a \boldsymbol{e}_{DV} \otimes \boldsymbol{e}_{DV}$ correspond donc au tenseur de contractilité de l'actomyosine du modèle [Étienne et al., 2015], et le terme source $\boldsymbol{f}$ vaut $\boldsymbol{f} = \mathbf{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{\sigma}_a)$.



sur le système :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta \mathbf{D}_{\Gamma}(\boldsymbol{u}) + \lambda \mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{u})\,\mathbf{P} + \boldsymbol{\sigma}_a \tag{5.2.1}$$

la somme des dissipations visqueuses et la contraction de la myosine $\boldsymbol{\sigma}_a$ (fig. 5.3). L'équilibre

mécanique du système se traduit par les équations suivantes sur Γ :

$$c_f \boldsymbol{u} - \mathbf{div}_\Gamma(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \tag{5.2.2}$$

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \tag{5.2.3}$$

où $\boldsymbol{u}$ est la vitesse de l'écoulement. Le terme de friction dans l'équation (5.2.2) modélise l'influence du fluide visqueux incompressible à l'intérieur des cellules. D'après les expériences, le coefficient $c_f << 1$. L'équation (5.2.3) exprime que l'écoulement est tangentiel.

5.3 Modélisation mathématique

Des équations (5.2.1) et (5.2.2), nous avons :

$$c_f \boldsymbol{u} - \mathbf{div}_\Gamma\left(2\eta \mathbf{D}_\Gamma(\boldsymbol{u}) + \lambda \mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{u})\,\mathbf{P}\right) = \boldsymbol{f} \tag{5.3.1}$$

où $\boldsymbol{f}$ est le terme source donné par :

$$\boldsymbol{f} = \mathbf{div}_\Gamma(\boldsymbol{\sigma}_a)\,. \tag{5.3.2}$$

En utilisant les formules de Green sur les opérateurs surfaciques (cf. chapitre 1, section 1.4, page 17), nous pouvons montrer que l'équilibre mécanique du système est équivalent à minimiser l'énergie :

$$E(\boldsymbol{u}) = \int_\Gamma c_f\,|\boldsymbol{u}|^2\,\mathrm{ds} + \int_\Gamma \eta\,|\mathbf{D}_\Gamma(\boldsymbol{u})|^2\,\mathrm{ds} + \int_\Gamma \frac{\lambda}{2}\,|\mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{u})|^2\,\mathrm{ds} - \int_\Gamma \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{ds}$$

sous la contrainte (5.2.3). Ce qui correspond au problème mathématique étudié aux chapitres 3 et 4. Nous avons reformulé ce problème sans la contrainte (5.2.3) dans le chapitre 3 en utilisant méthode de pénalisation via le paramètre de pénalisation γ. Le problème pénalisé ainsi obtenu a été traité dans la chapitre 4 en utilisant une méthode de multiplicateurs de Lagrange (cf. section 4.2, page109) afin d'obtenir des solutions tangentes suffisamment précises. Donc, le problème du point selle 4.4, page 111 correspond au problème mathématique à résoudre pour le choix (5.3.2) du terme source $\boldsymbol{f}$ dans la forme linéaire ℓ.

Remarque 5.1. *En utilisant le résultat de la proposition 1.5, page 18, nous avons :*

$$\ell(\boldsymbol{v}) = \int_\Gamma \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{ds} = \int_\Gamma \mathbf{div}_\Gamma(\boldsymbol{\sigma}_a)\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{ds} = -\int_\Gamma \boldsymbol{\sigma}_a : \mathbf{D}_\Gamma(\boldsymbol{v})\,\mathrm{ds}.$$

Cette dernière écriture permet de baisser la régularité sur $\boldsymbol{\sigma}_a$.

Cependant, pour la résolution numérique dans ce chapitre, nous approchons $\boldsymbol{\sigma}_a$ au lieu de $\boldsymbol{f}$ contrairement à la méthode présentée au chapitre 4.

5.4 Simulations numériques

5.4.1 Calcul du tenseur de contractilité de l'actomyosine

Pour les simulations numériques, nous avons besoin d'une expression explicite du terme source $\boldsymbol{f}$ via $\boldsymbol{\sigma}_a$ correspondant aux observations des biologistes sur l'activité de la myosine (fig. 5.3). Ce terme source est non-nul seulement dans la zone de la bande germinale. Nous délimitons cette zone à l'aide d'un pavé : $[x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}] \times [z_{\min}, z_{\max}]$, où $x_{\min}, x_{\max}, y_{\min}, y_{\max}, z_{\min}$ et $z_{\max}$ sont des paramètres réels. En un point $\boldsymbol{x}$ de la surface de l'embryon, nous définissons tenseur de contractilité de l'actomyosine $\boldsymbol{\sigma}_a$ par :

$$\boldsymbol{\sigma}_a(\boldsymbol{x}) = \sigma_a(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_{DV}(\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{e}_{DV}(\boldsymbol{x}). \tag{5.4.1}$$

où $\boldsymbol{e}_{DV}$ est vecteur unitaire dans la direction dorsoventrale et tangent à Γ au point $\boldsymbol{x}$ et σ_a est la fonction qui correspond à la distribution de la myosine sur la surface de l'embryon. Soit $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. D'une part, nous définissons le vecteur $\boldsymbol{e}_{DV}$ par :

$$\boldsymbol{e}_{DV}(\boldsymbol{x}) \;=\; [\boldsymbol{n}_V(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{e}_y] \wedge \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) \tag{5.4.2}$$

où $\boldsymbol{n}_V$ est vecteur unitaire normal à la courbe Γ_V définie par :

$$\Gamma_V \;=\; \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\right\} \cap \Gamma.$$

D'autre part, nous définissons σ_a par :

$$\sigma_a(\boldsymbol{x}) \;=\; \varphi_{x_{\max}-\delta_m, x_{\max}}(x) \times \varphi_{-x_{\min}-\delta_m, x_{\min}}(-x) \times \left(1 - \varphi_{z_{\min}-\delta_m, z_{\min}}(z)\right) \times \varphi_{z_{\max}-\delta_m, z_{\max}}(z) \tag{5.4.3}$$

où $\varphi_{a,b}$ est la fonction définie pour tous nombres réels a et b par :

$$\varphi_{a,b}(\xi) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{si } \xi \leq a \\ p\left(\frac{\xi - a}{b - a}\right) & \text{si } \xi > a \text{ et } \xi < b \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

avec p la fonction polynomiale définie par : $p(\xi) \;=\; 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1$. Le paramètre δ_m dans (5.4.3) est de nature purement mathématique. En effet, nous l'utilisons pour contrôler la régularité de la fonction σ_a.

5.4.2 Résolution par éléments finis mixtes

La résolution numérique du problème nécessite d'introduire une approximation maillée Γ_h de Γ (géométrie de la *Drosophile*). La construction de Γ_h est détaillée dans l'Annexe B. Nous utilisons un maillage isoparamétrique de degré 2 pour la résolution numérique. Sur cette approximation Γ_h,

nous résolvons le problème discret 4.7, page 123 en utilisant les éléments finis mixtes :

$$\begin{aligned} V_h &= \left\{ \boldsymbol{v}_h \in \left(C^0\left(\Gamma_h\right)\right)^d \cap \left(H^1\left(\Gamma_h\right)\right)^d \mid \boldsymbol{v}_{h_{|K_h}} \in P_3(K_h)^d, \forall K_h \in \Gamma_h \right\} \\ Q_h &= \left\{ \mathrm{q}_h \in C^0\left(\Gamma_h\right) \cap L^2\left(\Gamma_h\right) \mid \mathrm{q}_{h_{|K_h}} \in P_2(K_h), \forall K_h \in \Gamma_h \right\} \\ \Xi_h &= \left\{ \boldsymbol{\xi}_h \in \left(C^0\left(\Gamma_h\right)\right)^d \cap \left(L^2\left(\Gamma_h\right)\right)^d \mid \boldsymbol{\xi}_{h_{|K_h}} \in P_2(K_h)^d, \forall K_h \in \Gamma_h \right\} \end{aligned}$$

et la forme linéaire ℓ_h définie par :

$$\ell_h(\boldsymbol{v}_h) = -\int_{\Gamma_h} \boldsymbol{\sigma}_{a,h} : \mathbf{D}_{\Gamma_h}\left(\boldsymbol{v}_h\right) \, \mathrm{ds}_h$$

où $\boldsymbol{\sigma}_{a,h}$ est une approximation $\boldsymbol{\sigma}_a$ sur Γ_h en utilisant une interpolation de Lagrange. Ces choix ont été validés dans la section 4.4, page 123.

5.4.3 Résultats numériques et intérêt biologique

La figure 5.4 montre des écoulements obtenus avec notre approche numérique et pour les paramètres donnés par le tableau 5.1. Ceux-ci peuvent être comparés aux écoulements observés expérimentalement (fig. 5.1). À noter que ces comparaisons restent qualitatives. L'intérêt de cette étude est de comprendre l'influence de la géométrie de l'embryon.

On constate une dissymétrie entre la direction des x positifs et négatifs dans l'écoulement. Étant donné que le matériau est homogène, et que le terme source $\boldsymbol{f}$ est symétrique par construction par rapport au plan $x = 0$:

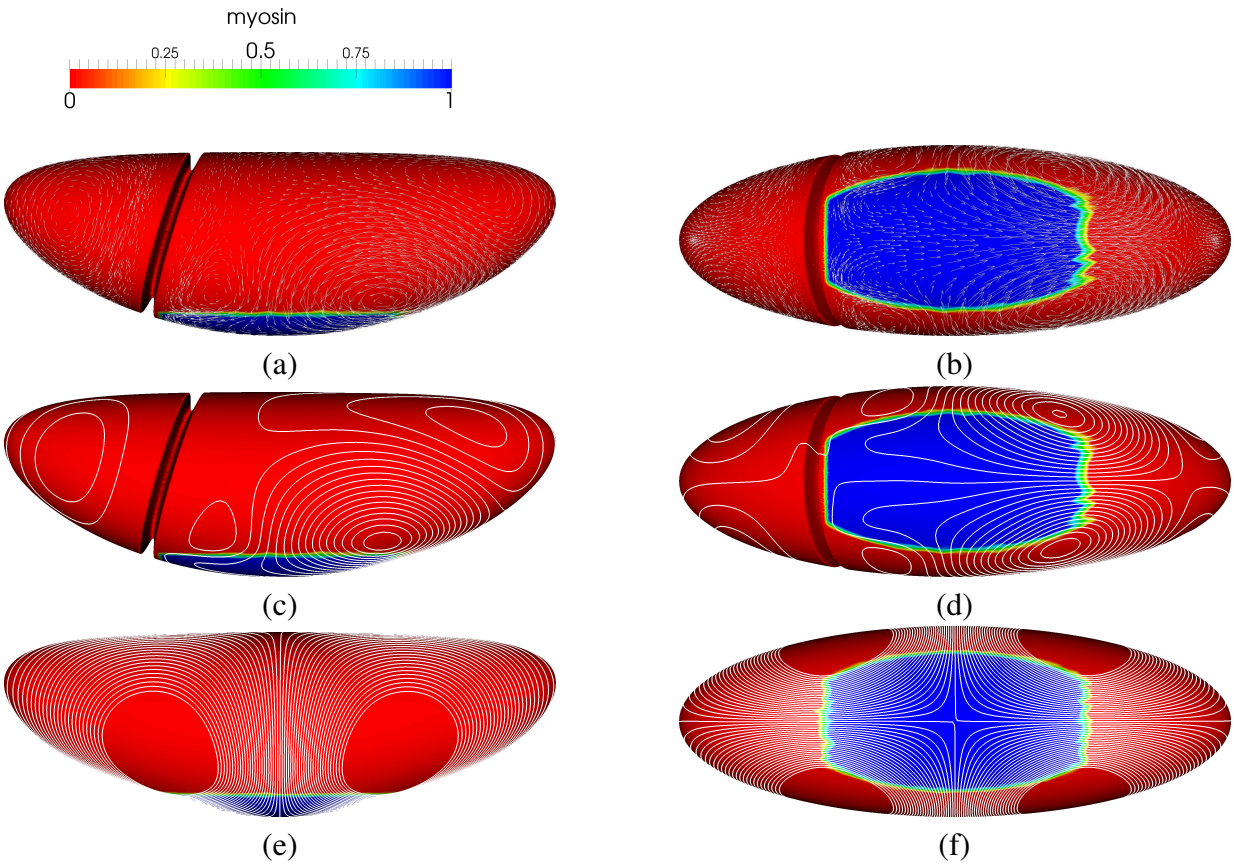
$$\boldsymbol{f}_{y,z}(-x) = \boldsymbol{f}_{y,z}(x) \text{ et } \boldsymbol{f}_x(-x) = -\boldsymbol{f}_x(x) = 0,$$

cette dissymétrie ne peut provenir que de la géométrie de l'embryon. Si nous utilisons une géométrie symétrique, sans sillon céphalique (fig. 5.4 (e-f)), la dissymétrie disparaît. Cela montre que le sillon céphalique agit comme un "guide" pour l'écoulement observé expérimentalement (fig. 5.1). La mécanique fournit donc le lien entre expression génétique (myosine) et la morphologie obtenue (bande germinale étendue) via l'influence de la géométrie sur l'écoulement.

TABLE 5.1 Listes des paramètres utilisés et leurs valeurs

Paramètres du modèle	Valeurs	Paramètres pour la myosine	Valeurs
c_f	0	$x_{\min}$	-1.3
η	1	$x_{\max}$	1.3
λ	10^3	$y_{\min}$	-1
γ	10^7	$y_{\max}$	1
$-$	$-$	$z_{\min}$	-2
$-$	$-$	$z_{\max}$	-0.5
$-$	$-$	δ_m	0.05

FIGURE 5.4 Écoulements générés par une contraction locale (zone marquée en bleu) et anisotrope. (a-d) Cas d'un embryon présentant le sillon céphalique (ce qui correspond au cas biologique), (e-f) Embryon de même forme mais ne présentant pas de sillon céphalique. Vues selon l'axe y (a,c,e) ou selon l'axe z depuis les z négatifs (b,d,f) du champ de vitesse (a,b) et des lignes de courant (c,d,e,f). On note que la présence du sillon céphalique est la cause de l'asymétrie de l'écoulement.



5.5 Article en préparation

Geometry can provide long-range mechanical guidance for embryogenesis

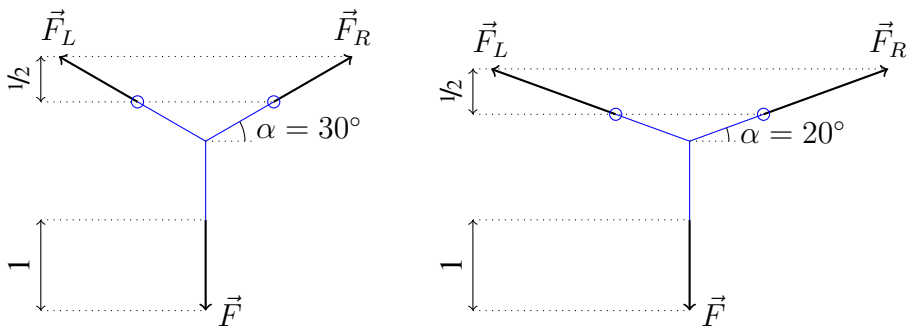
Mechanical cues have been shown to influence cell and organism phenotypes, through mechanisms of mechanosensation and mechanotransduction [Young et al., 1993, Yeung et al., 2005, Desprat et al., 2008]. At the cell scale, it has been shown that the mechanical properties of the environment could lead to a self-organised polarisation of the cytoskeleton [Zemel et al., 2010] and to a different cell morphology through collective dynamics of cytoskeletal molecules [Étienne et al., 2015], independently of a signaling pathway activated by transduction. In the case of a whole organism, this type of mechanical driving of morphological phenotype is of high interest, since the mechanics provide an alternative route to whole-organism coordination and function than the diffusion of chemical factors. In the context of embryogenesis, the notion of *extrinsic forces* has been introduced [Lye and Sanson, 2011] to insist on the fact that mechanical tension equilibrates over the size of the whole embryo and can thus be felt far from the location where biochemical energy has been converted to mechanical action.

Here we focus on how these extrinsic forces can be directed by the morphogenetic process in order to bring the correct signal to the whole organism from its originating point. The fundamental concept here is Newton's third law of action and reaction. In the context of early *Drosophila* embryogenesis, this law turns out to have implications of direct practical interest in the analysis of observations, because the interactions of the embryonic tissue with other structures is very limited: there is no specific adhesion on neighbouring vitelline membrane, and no matrix basally. This implies that the mechanical balance applies to the embryonic tissue as an isolated system. In addition, because of the small scale and high viscosity of the tissue, inertial forces are infinitesimal, thus Newton's second law yields that locally also, all forces are quasi-instantaneously balanced: together, this implies that there is a quasi-instantaneous equilibration of mechanical tension all across the embryonic tissue. Mechanical tension is thus an efficient messenger with properties very complementary to diffusion of biochemical factors. One additional interesting fact in this respect is the crucial role of geometry in the mechanical balance established, see figure 5.5 for an example at human scale. At embryo scale too, geometry can be used to obtain very different mechanical balances in the same material and with the same driving force. Thus, some geometrical features having arisen from previous morphogenetic movements can crucially affect how following morphogenetic events can be driven by extrinsic forces.

Specifically, this paper addresses the question of the driving of the germ-band (GB) extension by the local activation of myosin at stage 7 of Drosophila development. During a 90-minute process, germ-band narrows in the dorso-ventral (DV) direction, which is referred to as *convergence*, and simulatenously incurs *extension* in the antero-posterior (AP) direction (see figure 5.2A,B) [Costa et al., 1993]. This extension however is not occuring in a symmetric way toward anterior and posterior ends of the embryo: it is very markedly oriented toward posterior.

Two causes concur to this extension: within GB, the myosin organised in a so-called planar-polarised manner, creating cables aligned with the DV direction [Bertet et al., 2004, Blankenship et al., 2006]. Ultimately this is shown to lead to cell intercalation, from a mechanical point of view it thus has to exert a tensile stress in the DV direction. Concurrently, a part of the posterior

Figure 5.5 Example of the influence of geometry on forces. The same Y-shaped system of ropes (blue lines) is arranged in different geometries (angle α) and is otherwise identical. When subjected to a force $\vec{F}$, mechanical balance requires that the forces at the anchorages (blue circles) are such that $\vec{F}_L + \vec{F}_R = -\vec{F}$. This leads to a behaviour of the magnitude of forces at anchorages as $1/\tan\alpha$.



mesoderm invaginates as a funnel-shaped tube. It has been shown [Butler et al., 2009] that either of these mechanisms in the absence of the other could lead to GB extension, although to a different extent and with different characteristics (more or less of cell intercalation and shape change).

In this paper, we present numerical simulations of the mechanical process during GB extension. For a given distribution of myosin along the apices of cells, we solve mechanical balance equations and obtain a prediction of the velocity with which these apices will move. This resolution is based on some mechanical assumptions on how the apical actomyosin interacts with its environment, and on a rheological model of actomyosin itself [Étienne et al., 2015]. The numerical simulation of flows on a curved surface is based on a novel finite elements technique which is not limited to potential flows as in previous literature [Nitschke et al., 2012b], and for which we have proven convergence properties (chapter 3). The method is however for the time being limited to flows which do not deform the surface itself but are tangential to this surface (chapter 4.2.1), thus it does not allow to simulate the midgut invagination. Our simulations thus correspond to *Kruppel; torso-like* [Butler et al., 2009, Lye et al., 2015] and *torso* [Collinet et al., 2015] embryos, in which the planar-polarised myosin of the germ-band is the sole apparent of its extension. Our numerical results confirm that an anisotropic myosin contractility (mimicking its planar-polarised recruitment) in the GB leads to an extension flow along the AP direction in the GB.

Additionnally, numerical simulations allow to test the role of geometry on the flows that result from myosin action. In the case when posterior midgut contraction is not happening, we note that the distribution of myosin is close to symmetrical along the AP direction. However, the flow observed is markedly towards posterior. The most prominent nonsymmetrical feature of the embryo at this stage is the presence of the cephalic furrow, a trough that loops around the embryo dorso-ventrally, whereas no such structure perturbs the smoothness of the embryo surface at the other limits of GB. Although mutants exist that do not form a cephalic furrow [Blankenship and Wieschaus, 2001], the consequences of this on GB extension is not documented. Using numerical simulations, we can test to what degree the cephalic furrow can act as a barrier for deformations and guide myosin-driven convergence and extension toward the posterior end.

Results

A continuum shell model of the apical acto-myosin and adherens junctions structure can produce convergence and extension flows

It has been established that the structure driving the morphogenetic movements in early embryos is the apical acto-myosin. Indeed, it has been shown [He et al., 2014] that the movements of the whole embryo during gastrulation and early GB extension could be predicted accurately by the sole knowledge of the displacements of the apical acto-myosin through time, the other structures (cell cytoplasms, nuclei, membranes, and yolk) being passively deformed as a viscous medium. This is consistent with the observation that all morphogenetic movements are mediated by myosin. From a physics perspective, this means that the source of mechanical energy in the system is the conversion of biochemical energy by myosin.

Apical acto-myosin, which is located within 1 μm of the cell's apices, is connected from one cell to the other by transmembrane adherens junctions. From a mechanical point of view, the embryo should thus be seen as a thin shell of apical acto-myosin seamed together by adherens junctions, surrounding a viscous-like medium. Apical acto-myosin organisation is either junctional (i.e., lining cell-cell junctions within each cell) or medial (i.e., lining the apical membrane), and can have an anisotropic organisation within each cell. However, in normal development, there is no disconnection within the embryo-wide structure constituted by acto-myosin and adherens junctions: forces are transmitted across cell-cell junctions via the adherens junctions, and the whole of this structure is forming an embryo-wide shell. This shell is bound to the apical plasma membranes, making this compound structure mostly impermeable, but, as stressed in the introduction, it has little mechanical interaction with its environment. On the outer side of the apical shell is the perivitelline membrane, but no specific adhesion bind them together. On the inner side, the passive behaviour of the cell cytoplasms and basolateral membranes implies that they are felt only as a drag (viscous friction), and on the outer side, the perivitelline liquid can play the role of a lubricating fluid between the two. This results in a friction force per unit area proportional to the product of the velocity v by a friction coefficient c_f. In terms of forces, the balance of the forces tangentially to the surface is thus:

$$\mathbf{div}_{\Gamma}\left(\boldsymbol{\sigma}\right) = c_f \boldsymbol{v}. \tag{5.5.1}$$

The stress tensor $\boldsymbol{\sigma}$ is the tension in the apical shell. In order to obtain a *closed* model (i.e. a self-sufficient one), we need to describe it with a material law which links it to the deformations of the apical shell, and, in the present case, to the myosin activity. Because there are no solid structures in the apical shell of a scale comparable to the one of the embryo, this material law can be assumed to be local, i.e. the stress is related only to the local strain and myosin activity. We have recently derived and validated such a material law [Étienne et al., 2015] by quantitative comparison for the actomyosin cortex of single cells. In a linear approximation, the apical actomyosin of embryos can be expected to have a similar material law, which writes in general

$$\tau_\alpha \overset{\triangledown}{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma} - 2\eta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{v}) - \lambda(\mathrm{div}_{\Gamma}\left(\boldsymbol{v}\right))\mathbf{P} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{a}} \tag{5.5.2}$$

where τ_α is the relaxation time of acto-myosin, $\overset{\triangledown}{\sigma}$ the objective derivative of the stress tensor, η and λ are effective shear and compression viscosities of acto-myosin, and

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = {}^1\!/_2 \left(\mathbf{grad}\,(\boldsymbol{v}) + \mathbf{grad}\,(\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}} \right)$$

is the rate-of-strain tensor. The tensor $\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{a}$ describes the myosin contractility, it is proportional to the myosin concentration and rate of power strokes [Étienne et al., 2015], and $\mathbf{P}$ is the projection tensor onto Γ, which is also the identity tensor on the surface. The relaxation time was found to be around 15 minutes in this previous work, which means that for the 90-minute germ band extension process we are interested in the long times compared to relaxation. For the sake of simplicity, we will thus neglect the term $\tau_\alpha\ \overset{\triangledown}{\boldsymbol{\sigma}}$ in what follows.

With this hypothesis, the mechanical balance equation (5.5.1) and the constitutive equation (5.5.2) can be combined into a single equation:

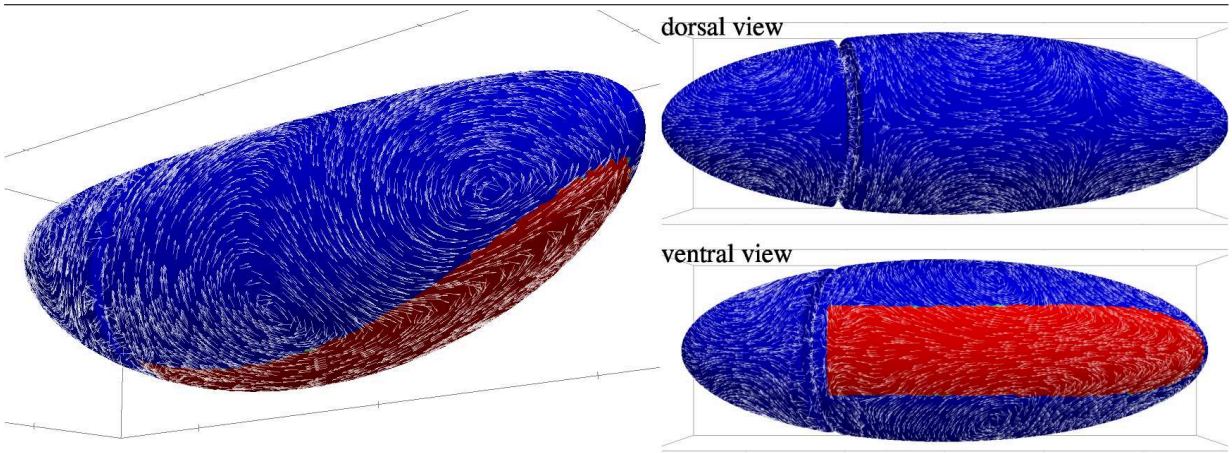
$$\mathrm{div}\,(\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{a}) = -2\eta \mathrm{div}\,(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{v})) - \lambda \mathbf{grad}\,(\mathrm{div}\,(\boldsymbol{v})) + c_f \boldsymbol{v} \tag{5.5.3}$$

On the left-hand side of equation 5.5.3 is the myosin term, which provides the energy for the motion. On the right-hand side are two terms corresponding to energy dissipation: the viscous forces, corresponding to the cost of deforming the apical shell of actin and myosin, and the forces of friction with the actomyosin's environment. Note that the tension does not appear *per se* in this equation.

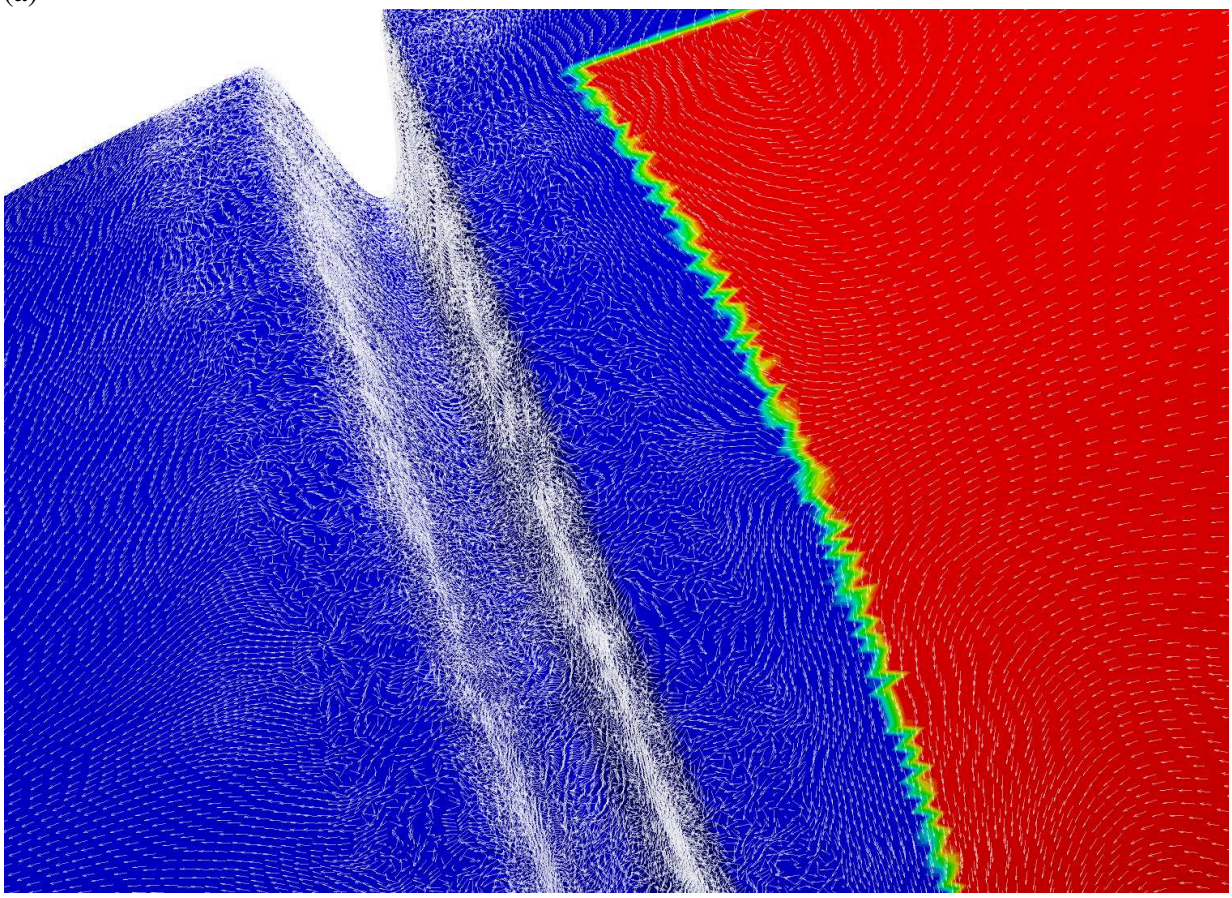
Using the numerical technique described in 3 and 4.2.1, we obtain numerical approximations of the solution of this problem for a geometry mimicking the shape of the cell apices of *Drosophila* embryo, for different choices of the myosin source term $\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{a}$. Figure figure 5.6 shows an example of a simulation result. The colour codes $\sigma_\mathrm{a}(\boldsymbol{x})$ the location where myosin is activated (in this example, along dorsoventral direction $\boldsymbol{e}_{DV} \otimes \boldsymbol{e}_{DV}$, see figure 5.3), the arrows are the velocity of the surface displacement of the apical continuum. Note that they are subsampled in the global view of the embryo for the sake of clarity, this is why they appear to have erratic orientations close to the cephalic furrow e.g. In a close-up figure 5.6b of this region, one notes that at a smaller scale the flow field is smoother, although the steepness of the cephalic furrow makes the numerical resolution difficult.

Note that we impose mathematically velocities tangential with the embryo surface (see chapter 4.2.1). Indeed, this is what is observed in experiments, we have thus made the simplifying choice of assuming this rather than try to predict it. A model by-passing this hypothesis would need to be significantly more complicated, as the force balance in the normal direction would need to be calculated in addition to the one in the tangent plane. This force balance should include the pressure difference between the periviteline liquid and the embryo interior beyond the apical membranes (yolk and cytoplasms), the possible contact force between the cell apices and vitelline membrane, and the tension and bending forces in the cell apices.

Figure 5.6 Flow field generated by planar-polarised myosin contractility in the GB. (a) Global views. The cephalic furrow is represented by a trough, the ventral furrow is not represented as we assume it to have closed completely at the time corresponding to the simulations. Red, ventral region of the GB where we assume myosin planar-polarised contractility. White arrows, velocity vectors (arbitrary units, not all vectors calculated are represented). (b) Close-up of the cephalic furrow region. Every velocity vector calculated is represented, in arbitrary units 10 times larger as in panel (a).



(a)



(b)

Figure 5.7 Flow field generated by planar-polarised myosin contractility in part of the GB. Red, ventral region of the GB where we assume myosin planar-polarised contractility. White arrows, velocity vectors (arbitrary units, not all vectors calculated are represented).

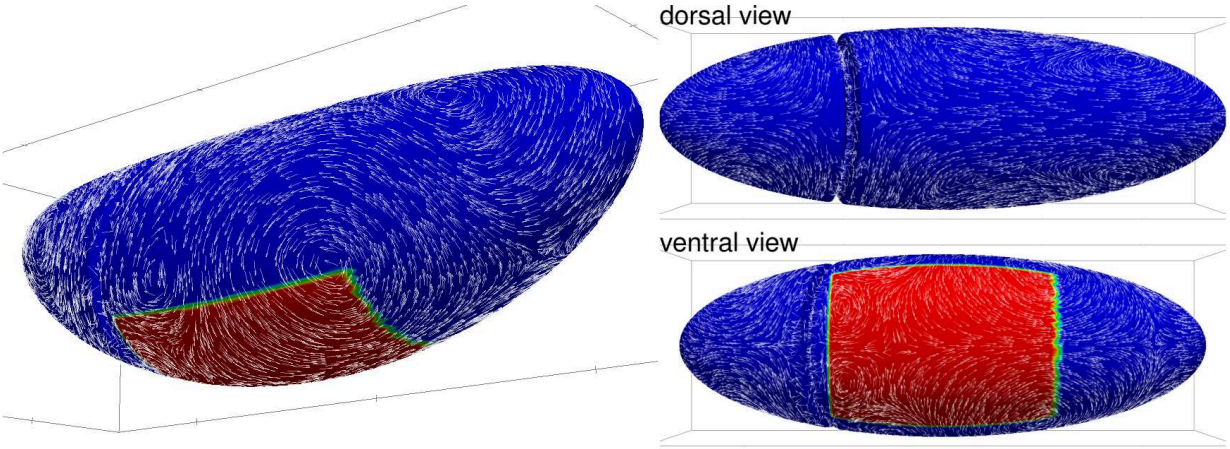
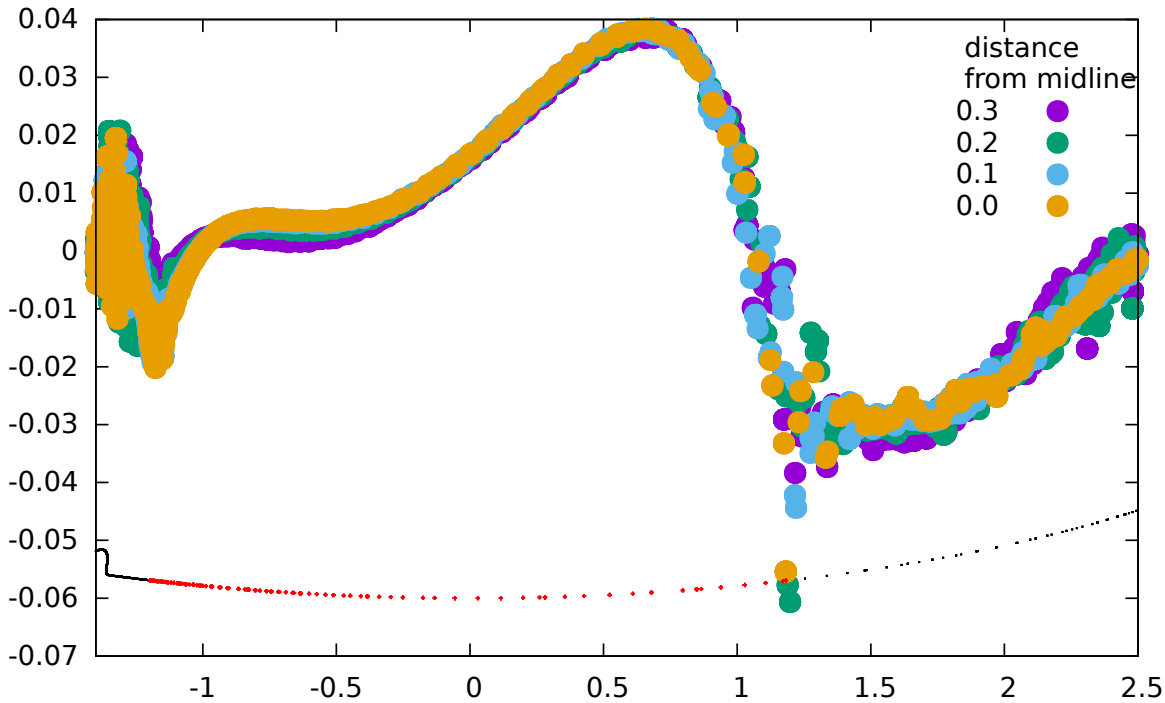


Figure 5.8 Rate of strain (arbitrary units) along the AP axis in the flow of figure 5.7. At the bottom, the outline of the ventral side of the embryo surface is recalled, with dots at mesh intersections with the sagittal plane ($y = 0$) colour-coded in red where myosin is present and black elsewhere. The rate of strain is calculated along lines at different distances from the ventral midline. Distances are normalised by the radius of the embryo shape in the transverse plane. Negative strain rates correspond to tissue compression, positive ones to tissue elongation (either by cell shape changes, or by AP→DV intercalations, see [Blanchard et al., 2009].



Posterior-oriented extension flows are obtained only when myosin is not activated posteriorly

The flow shown in figure 5.6 corresponds to an instance of convergence of extension, as the velocity vectors are mostly inwards at ML boundaries of the region where planar-polarised myosin action is simulated, and mosty outwards at its anterior and posterior boundaries. The extension can be quantified in figure 5.8, where the rate of strain along the AP axis is plotted, it is seen to be positive (extension) for most of the positions along AP. However, the global flow is oriented anteriorly towards the cephalic furrow, whereas in developping embryos the flow is mostly towards the posterior end, although the cephalic furrow is somewhat pushed anteriorly at its contact with GB. Indeed, it is seen that the myosin activity creates counter-rotating vortex-like structures at its anterior and posterior ML boundaries, a flow feature that matches mechanical intuition. However, if the posterior vortices are very close to the posterior end, we observe in our simulations that a large part of the GB region is entrained anteriorly by the anterior vortices, resulting on this large anterior flow.

This may of course be due to a shortcoming of our simple model, which assumes homogeneous properties of the actomyosin and its interactions with its surroundings across the embryo. The primary adjustment that can be done in the modelling is the actual location of planar-polarised myosin activation. For our first simulations in figure 5.6, we have assumed that this corresponds to a region extending nearly to the posterior end, although this is not evidenced in the literature. We thus changed this pattern into one stopping more anteriorly, figure 5.7. In this case the posterior vortices are now located half-way between the cephalic furrow and posterior end. It is observed that this results in a flow that is mostly oriented to posterior, which is similar to what is observed in embryos. We can also measure the rate of strain in the numerical simulations, see figure 5.7, which can be compared to the rate of tissue strain measurable in experiments [Blanchard et al., 2009]. It is seen that there is an elongation of tissue in the AP direction in the zone where myosin is acting, but this rate of elongation is much stronger in the posterior part of the myosin zone.

Cellularisation may not play a role beyond planar-polarisation of myosin activity

From the above, we conclude that a mechanical model that does not involve individual cells but only a continuum standing for the apical acto-myosin connected from cell to cell by apical junctions can produce a flow with similarities to GB extension. Cellularisation is of course important for the planar-polarisation of myosin in the GB, and it is observed that a cellular embryos do not exhibit myosin polarisation [Lye et al., 2015]. Here, planar polarisation is introduced in the mechanical by means of an anisotropic contractility action of myosin $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{a}}$. The fact that no further account of the cellularisation of the embryo is necessary in the model suggests that at the tissue scale, one can address morphogenetic questions by considering ensemble displacements. In this approach, the effect cell intercalation which is governed by planar-polarised junctional myosin is thus not directly taken into account, but rather encapsulated in a global tissue strain rate, which also includes the cell deformation [Blanchard et al., 2009]. This tissue strain rate $\dot{\varepsilon}$ and the corresponding tissue-scale tension $\boldsymbol{\sigma}$ are related by the constitutive equation 5.5.2, which

includes the contractility term $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{a}}$ resulting from planar-polarised myosin activity, and it thus the only one bearing a trace of the embryo's cellularised organisation. The respective values taken by $\dot{\varepsilon}$ and σ locally depend on the mechanical balance locally, i.e. both the local myosin activity and the tension transmitted by neighbouring tissue.

The cephalic furrow acts as a guide for morphogenetic movements

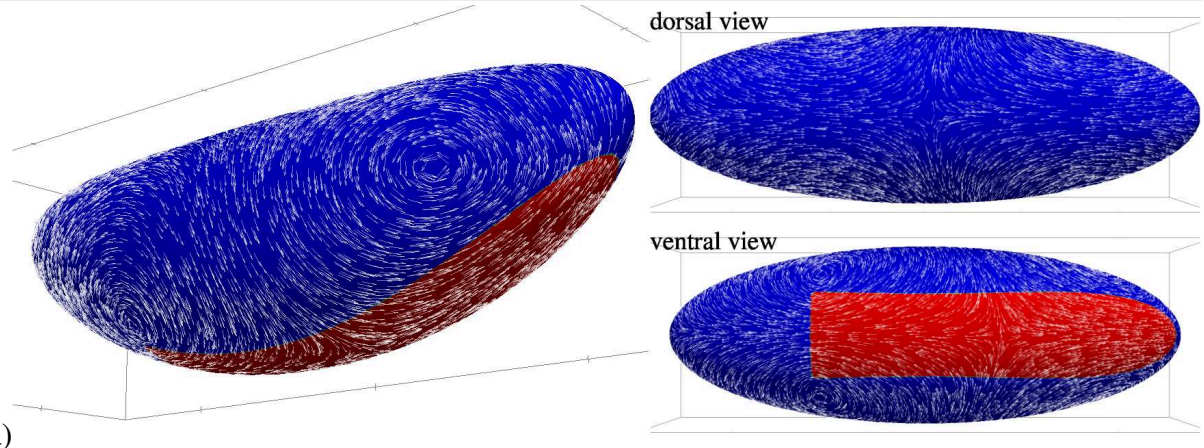
In figure 5.6b, it is seen that the flow follows the cephalic furrow in a parallel way. Thus we wondered whether the presence of the cephalic furrow could be of importance for the flow pattern observed. To test this, we performed the same simulation on two different meshes, one featuring the cephalic furrow and the other having none. It is seen on figure 5.9a that in the absence of a cephalic furrow, the flow at the anterior boundary of the GB is not deviated laterally but continues toward anterior. The flow field is thus much more symmetrical than in the case with a cephalic furrow figure 5.6a. From purely mechanical considerations, it is expected that if both the geometry of the embryo and the myosin expression are symmetrical, then the flow will be symmetrical too (see figure 5.9b for a verification of this). In real embryos, two sources of asymmetry arise: the invagination in the midgut, although blocking it does not suppress completely the posterior-wise extension of GB, and the likely weak offset of the planar-polarised myosin recruitment toward posterior, which is not explicitely documented in the literature. Our results suggest that another dissymetry could originate from the geometry of the embryo shape, with the cephalic furrow acting as a barrier resisting flow toward anterior. Indeed, if one introduces this geometric dissymmetry in the otherwise perfectly symmetrical embryo, the flow is strongly dissymetric toward the posterior end fig[c]5.9.

Discussion

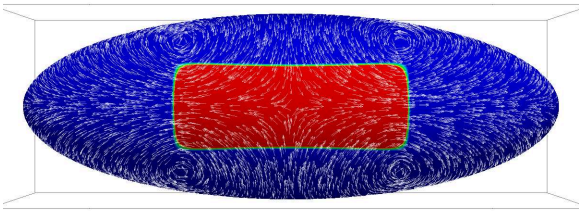
Cellularisation of GB may not be necessary for convergence and extension of planar-polarised tissue

The two prominent features in which cellularisation is involved in GB extension in WT *Drosophila* are the planar-polarised recruitment of myosin, which preferentially enriches DV-oriented junctions, and the medio-lateral cell intercalations [Irvine and Wieschaus, 1994, Bertet et al., 2004, Blankenship et al., 2006]. Because the DV-oriented junctions present both the characteristics of being enriched in myosin and of undergoing shrinkage to lead to intercalation, these two effects have so far been studied in association. However, some mutants such as *eve* that lack planar-polarisation of myosin can still exhibit some cell intercalation, although to a much lesser proportion than cell shape changes [Butler et al., 2009]. Here using our modelling approach we can envision the reverse case of studying convergence-extension due to planar-polarised myosin activity but without explicit cell intercalation. We show that the anisotropy of planar-polarised myosin activity is sufficient to explain convergence-extension, without the need for an intercalation mechanism.

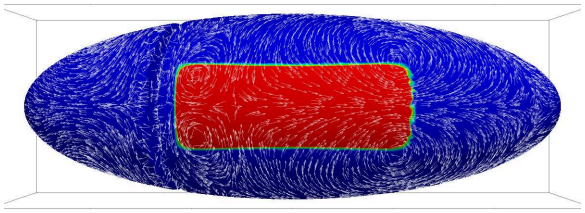
Figure 5.9 Flow field generated by planar-polarised myosin contractility in the GB in the absence of a cephalic furrow is symmetric of nearly symmetric. (a) With a dissymetric planar-polarised myosin activity. The flow is much stronger toward anterior than in figure 5.6a at the anterior limit of GB. (b) With a symmetric distribution of myosin activity, the flow is perfectly symmetric. (c) With a symmetric distribution of myosin activity and a dissymetry in the geometry introduced by the cephalic furrow, the flow is strongly asymmetric and more oriented towar the posterior end.



(a)



(b)



(c)

In the context of convergence-extension caused partly by invagination of the midgut, [Lye et al., 2015], it has been proposed that cell intercalation could relax the stress by allowing cell shape changes in a GB extended by an extrinsic force. Here we propose that the intrinsic planar-polarised contraction might still extend the GB in the absence of intercalation, although intercalation could in that case too relax the stress.

Geometry-governed mechanical balance as a messenger in early morphogenesis

Planar-polarised myosin in the germ-band is known to generate a global flow at the surface of the embryo. Our simulations show that the global flow which is generated by such a mechanical activity is dependent on the pre-existing geometry of the embryo, such as the presence or absence of the cephalic furrow. Thus, a prior morphogenetic movement such as cephalic furrow formation can affect further movements via mechanical interactions only. This "messaging" is proceeding via the establishment of a different mechanical balance depending on the geometry of the embryo, rather than the diffusion of a morphogen e.g. [Lander, 2007]. In the early embryo, the distance over which these forces are transmitted is likely to be much larger than in later organisms, as there is no extra-cellular matrix structure that will resist the stress.

This mechanical messaging behaves differently from biochemical messaging. Its speed of propagation is the speed of sound in the force-bearing structure—e.g. the actomyosin. It does not propagate in an isotropic way but in a more complex directional one. Although the simulations shown in this paper remain too rudimentary to actually predict how this transmission affects morphogenetic movements in embryos, they are sufficient to show that these mechanisms will necessarily exist and need to be considered when proposing models of morphogenesis. Regions of interest should not be treated as isolated systems, since a distant geometric property of the embryo can have a direct impact on the mechanical stress felt locally when intrinsic forces are being generated.

This prompts for further development of computing tools such as the one we are presenting here. Mechanical approaches of flat epithelia have shed light on many aspects of tissue growth and dynamics [Glazier and Graner, 1993, Rauzi et al., 2008a, Titli et al., 2015], in particular at the scale of a few cells, which is the relevant one for cell rearrangements. At the other end of the spectrum of tissue dynamics, 3D phenomenological models of shape changes during ventral furrow formation have been proposed [Rauzi and Leptin, 2013]. Here we propose a first step in bridging the gap between these approaches, with the objective to be able to address complex morphogenetic events in their actual geometry.

Chapitre 6

Conclusion générale et perspectives

Sommaire

6.1 Conclusion 150
6.2 Perspectives 152

6.1 Conclusion

Cette thèse, à l'interface entre les mathématiques appliquées, la mécanique des fluides et la biologie cellulaire, s'articule autour des méthodes éléments finis pour des équations aux dérivées partielles posées sur des surfaces et leurs applications. Elle s'appuie sur deux approches principales introduites par [Dziuk, 1988] et [Destuynder and Salaün, 1990]. Malgré sa linéarité, le problème mathématique étudié reste difficile à résoudre numériquement et très riche à exploiter. C'est ainsi que plusieurs résultats théoriques et numériques ont été mis en place.

Après avoir exposé dans l'introduction le contexte général de cette thèse, nous avons fait dans le chapitre 1 un tour d'horizon sur quelques notions de la géométrie différentielle, notamment quelques rappels et de définitions de nos opérateurs différentiels surfaciques.

Dans le chapitre 2, nous avons porté une attention particulière aux difficultés liées aux approximations polynomiales par morceaux d'une surface régulière, notamment l'approximation de la normale et de courbures. Compte tenu de la nécessité de telles approximations pour les équations aux dérivées partielles envisagées dans cette thèse, nous avons proposée une méthode d'éléments finis pour approcher la normale et des courbures d'une surface. Nous avons présenté des analyses de convergence théoriques sur ces approximations et des tests numériques sur quelques surfaces définies par des fonctions de niveau confirment les résultats obtenus. Nous avons évoqué à la suite de ces analyses, la principale limite de notre définition de courbures discrètes : la non convergence dans le cas d'une approximation affine par morceaux. Globalement, des résultats similaires ont été obtenus dans [Heine, 2004]. Nous avons donc proposé l'algorithme de lissage (un algorithme itératif) qui permet d'améliorer la précision de la convergence théorique. A travers des tests numériques, nous avons montré que cet algorithme garantit une convergence même dans le cas d'une approximation affine par morceaux. En terme de coût de calcul, cet algorithme reste moins performant que l'algorithme proposé dans [Cazals and Pouget, 2003], malgré un coût de résolution optimal (coût d'une résolution de systèmes linéaires en dimension 2). Par contre, il est assez robuste par rapport à la précision des nœuds des approximations polynomiales par morceaux contrairement à celui proposé dans [Cazals and Pouget, 2003].

Nous avons abordé dans le chapitre 3 le modèle mathématique formulé comme une minimisation d'une fonctionnelle d'énergie sous contrainte en utilisant une méthode de pénalisation. Dans un premier temps, nous avons démontré l'existence et l'unicité de la formulation variationnelle primale associée au problème pénalisé. Par la suite, nous avons proposé une méthode d'éléments finis pour la résolution numérique. Cette méthode numérique est basée sur celle de Dziuk proposée dans [Dziuk, 1988]. L'originalité de notre approche vient de la discrétisation du terme de pénalisation qui contient des termes de courbures (des dérivées de la normale). Par cette approche, nous évitons de dériver l'approximation de la normale choisie. Cela nous permet d'avoir une méthode éléments finis complètement indépendante de la méthode d'approximation choisie pour la normale et des courbures. À travers des estimations d'erreur a priori, nous avons démontré que l'ordre convergence global de la méthode (en norme H^1) est le minimum de l'ordre d'approximation polynomiale de la solution discrète et l'ordre de convergence de l'approximation de la

courbure. Cette théorie a été vérifiée aussi numériquement sur les surfaces proposées pour les tests numériques dans le chapitre 2. Donc l'optimalité de la méthode du point de vue des éléments finis depend fortement de la précision de l'approximation de la courbure. Cela justifie le travail effectué dans la chapitre 2. Nous avons aussi évoqué la limite de cette approche : elle n'est utilisable en pratique que pour des valeurs peu élevées des paramètres ou pour des maillages très fins. Elle est donc difficilement exploitable en pratique pour simuler des écoulements incompressibles (ou quasi-incompressibles) ou tangentiels assez précis. Ce qui justifie la variante de notre méthode des éléments finis proposée dans chapitre 4.

Dans le chapitre 4, nous avons traité le problème pénalisé du chapitre 3 en utilisant une méthode de multiplicateurs de Lagrange. Nous avons introduit un Lagrangien en utilisant deux multiplicateurs de Lagrange : un scalaire qui correspond à une pression surfacique et un autre vectoriel lié au terme de pénalisation (donc à la courbure). Nous avons démontré l'existence et l'unicité de la formulation variationnelle duale associée au Lagrangien. Par la suite, nous avons proposé une méthode d'éléments finis mixtes pour la résolution numérique inspirée de celle de Destuynder proposée dans [Destuynder and Salaün, 1995b]. À travers des tests numériques et certains choix compatibles des éléments finis, nous avons vérifié la convergence (en norme L^2 et L^∞) de la méthode sur une solution exacte tangente et à divergence surfacique nulle pour des approximations isoparamétriques de degré 2 de la sphère unité. L'avantage de cette approche numérique est qu'elle est indépendante de la surface exacte contrairement à celle de [Destuynder and Salaün, 1995b]. Cela nous donne la possibilité d'aborder certains problèmes posés sur des géométries complexes. Par contre, les solutions obtenues par cette approche ne sont pas parfaitement tangentes puisque nos espaces éléments finis ne sont pas directement tangents, mais nous pouvons garantir leurs convergence. En pratique, cette approche nous permet de simuler efficacement des écoulements incompressibles (ou quasi-incompressibles) ou tangentiels très précis.

Nous avons abordé dans le chapitre 5, la modélisation et la simulation de l'extension de la bande germinale de la *Drosophile*. Après une brève introduction sur le phénomène, nous l'avons décrit mécaniquement et mathématiquement en faisant le lien avec notre modèle mathématique. Nous avons utilisé naturellement notre méthode éléments finis mixtes développée et validée dans le chapitre 4 pour les simulations. Les paramètres de compressibilité et de pénalisation ont été choisis assez grand pour obtenir des écoulements quasi incompressibles et suffisamment tangents. Le fait que nos résultats numériques reproduisent qualitativement les écoulements observés expérimentalement nous a permis d'une part de valider notre modélisation qui tient compte simultanément la courbure de l'embryon, une activité anisotrope de la myosine, la faible épaisseur de la couche d'acto-myosine et les très grandes déformations inélastiques qui caractérisent l'écoulement. Et d'autre part, de comprendre le rôle de géométrie sur l'écoulement observé expérimentalement. En effet, nous avons montré que les écoulements observés expérimentalement peuvent être expliqués par l'activation de moteurs de myosine dans la bande germinale uniquement de l'embryon et que le sillon céphalique est la cause de la dissymétrie de l'écoulement. Donc, la géométrie de l'embryon peut ainsi être utilisée comme un guide pour des mouvements morphogénétiques lors de la formation de l'embryon.

6.2 Perspectives

Elles sont nombreuses, car les résultats obtenus dans cette thèse représentent une première étape pour s'orienter vers la modélisation et la simulation d'autres phénomènes plus complexes.

Sur le plan analyses numériques, plusieurs voies prometteuses sont à explorer. Dans un premier temps, il serait intéressant de traiter numériquement le cas limite du problème de point selle obtenu avec la méthode de multiplicateurs de Lagrange. Cela nous permettra d'obtenir solutions tangentes indépendamment de la pénalisation de notre modèle numérique présenté dans quatrième chapitre. Il serait aussi intéressant de démontrer les conditions inf-sup discrètes pour certains éléments finis mixtes utilisés dans le cadre de nos tests numériques. Une autre voie très intéressante serait de s'orienter vers des écoulements non tangentiels. Pour ces types d'écoulements, notre modèle n'est pas adéquat puisque le terme de pénalisation ne suffit pas mécaniquement pour contrôler les déformations normales. Il faut ajouter à notre modèle une énergie de rigidité de courbure (énergie de courbure d'Helfrich [Helfrich, 1973], [Zhong-Can and Helfrich, 1989] ou de Koiter [Koiter, 1970] par exemple). Un tel modèle permettra de traiter plus efficacement certaines approches existantes ([Meuel et al., 2013], [Laadhari et al., 2014], par exemple) et ouvre la voie vers des modèles non linéaires du type viscoélastiques ou éventuellement élastoviscoplastiques sur une surface.

Sur le plan biophysique, nous pouvons aborder la simulation en 3D certains problèmes sur les tissus biologiques : par exemple la gastrulation dans l'embryogenèse de la *Drosophile* (cf. [Conte et al., 2008] et [Allena et al., 2010]) ou d'autres dynamiques de tissus biologiques ([Tlili et al., 2015] par exemple).

Enfin, nous sommes très loin d'avoir épuisé le problème : le travail effectué dans cette thèse représente un premier pas vers une nouvelle voie pour la simulation de phénomènes physiques originaux et encore peu explorés numériquement.

Annexe A

Quelques résultats sur les noyaux d'opérateurs surfaciques

Dans cette partie Γ désigne une surface fermée et bornée ($\partial\Gamma = \emptyset$) dans $\mathbb{R}^d, d = 2, 3$. Le but est de caractériser l'ensemble :

$$M = \left\{ \boldsymbol{v} \in \left(H^1(\Gamma)\right)^d \mid \mathbf{D}_\Gamma(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{v}) = 0 \right\}.$$

Lemme A.1 (Caractérisation du noyau de $\mathbf{D}_\Gamma$ dans $H(\Gamma)$)**.** *Notons par* $\ker \mathbf{D}_\Gamma$ *le noyau de l'opérateur* $\mathbf{D}_\Gamma$ *:*

$$\ker \mathbf{D}_\Gamma = \left\{ \boldsymbol{v} \in \left(H^1(\Gamma)\right)^d \mid \mathbf{D}_\Gamma(\boldsymbol{v}) = 0 \right\}.$$

Nous avons :

$$\ker \mathbf{D}_\Gamma \cap H(\Gamma) \;=\; \ker \mathbf{D} \cap H(\Gamma) \;=\; \{\boldsymbol{v} \in H(\Gamma) \mid \mathbf{D}(\boldsymbol{v}) = 0\}.$$

Autrement dit, le noyau de $\mathbf{D}_\Gamma$ *dans* $H(\Gamma)$ *est l'ensemble des translations et rotations tangentes à* Γ *de* $\mathbb{R}^d$*.*

Démonstration. Il est clair que $\ker \mathbf{D} \cap H(\Gamma) \subset \ker \mathbf{D}_\Gamma \cap H(\Gamma)$ puisque $\ker \mathbf{D} \subset \ker \mathbf{D}_\Gamma$ par définition de l'opérateur $\mathbf{D}_\Gamma$ (cf. définition 1.10, page 12). Soit $\boldsymbol{v} \in \ker \mathbf{D}_\Gamma \cap H(\Gamma)$. Comme $\boldsymbol{v}$ est tangent à la surface Γ, alors :

$$\mathbf{D}_\Gamma(\boldsymbol{v}) = \mathbf{D}(\boldsymbol{v}) = 0.$$

Ce qui signifie que $\boldsymbol{v} \in \ker \mathbf{D} \cap H(\Gamma)$. Par conséquent, $\ker \mathbf{D}_\Gamma \cap H(\Gamma) \subset \ker \mathbf{D} \cap H(\Gamma)$. D'où

$$\ker \mathbf{D}_\Gamma \cap H(\Gamma) \;=\; \ker \mathbf{D} \cap H(\Gamma) \;=\; \{\boldsymbol{v} \in H(\Gamma) \mid \mathbf{D}(\boldsymbol{v}) = 0\}.$$

Sachant que $\ker \mathbf{D}$ est l'ensemble des translations et rotations de $\mathbb{R}^d$ (cf. [Saramito, 2016], section 3.4), nous déduisons que $\ker \mathbf{D}_\Gamma \cap H(\Gamma)$ est l'ensemble des translations et rotations tangentes à

Γ de $\mathbb{R}^d$. Ce qui prouve le lemme A.1. $\square$

Rappelons que la notation $\ker\left(\mathbf{div}^*_\Gamma\right)$ désigne le noyau de l'opérateur $\mathbf{div}^*_\Gamma$ dans $L^2(\Gamma)$:

$$\ker\left(\mathbf{div}^*_\Gamma\right) = \left\{\varphi \in L^2(\Gamma) \mid \mathbf{div}^*_\Gamma(\varphi) = 0\right\}.$$

Lemme A.2 (Caractérisation du noyau de l'opérateur $\mathbf{div}^*_\Gamma$ dans $H^1(\Gamma)$)**.** *Nous avons :*

$$\ker\left(\mathbf{div}^*_\Gamma\right) \cap H^1(\Gamma) = \{0\}.$$

Démonstration. Soit $\varphi \in \ker\left(\mathbf{div}^*_\Gamma\right) \cap H^1(\Gamma)$. Alors par définition nous avons :

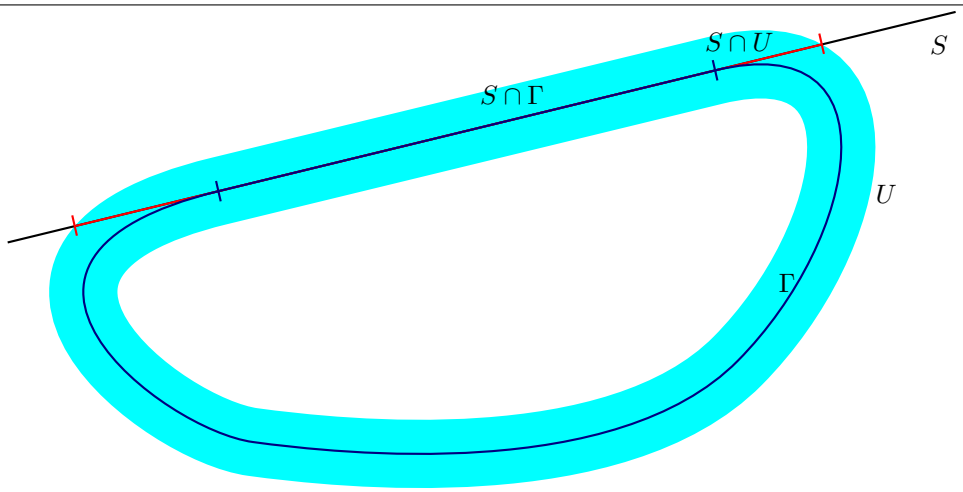
$$\varphi \mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{n} - \mathbf{grad}_\Gamma(\varphi) = 0.$$

Si $\mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{n}) \neq 0$ sur Γ alors nous avons nécessairement :

$$\varphi \mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{n} = \mathbf{grad}_\Gamma(\varphi) = 0.$$

Car le seul vecteur à la fois tangent et normal à Γ est le vecteur nul. Supposons maintenant que $\mathrm{div}_\Gamma(\boldsymbol{n}) = 0$ sur une portion de Γ. Cette portion est nécessairement incluse dans une surface minimale S. Etant donné qu'il n'existe pas de surface minimale bornée dans $\mathbb{R}^d$, S ne contient pas Γ (cf. fig. A.1). Donc sur $S \cap \Gamma$, $\mathbf{grad}_\Gamma(\varphi) = 0$ et par conséquent φ est égal à une constante

FIGURE A.1 Exemple de configuration en dimension 2 d'une surface fermée sans bord ayant la courbure moyenne nulle sur une portion. Sur cet exemple la surface minimale S contenant cette portion $(S \cap \Gamma)$ est une droite.



α sur $S \cap \Gamma$. Soient U_δ la bande définie par (2.2.5) contenant Γ et $\breve{\varphi}$ l'unique prolongement de φ

sur U_δ défini par la relation (2.2.8), page 25. Alors :

$$\check{\varphi} = \begin{cases} \alpha & \text{sur } S \cap \Gamma \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Le prolongement $\check{\varphi}$ appartient $H^1(U_\delta)$ puis que $\varphi \in H^1(\Gamma)$. Par conséquent, pour toute tangente t d'une courbe de $S \cap U_\delta$ coupant $\partial(S \cap \Gamma)$ et non tangentielle à $\partial(S \cap \Gamma)$, la dérivée de $\check{\varphi}$ par rapport t appartient à $L^2(\Gamma)$ et donc $\alpha = 0$. Ce qui prouve le lemme A.2. □

Lemme A.3 (Caractérisation du noyau de $\boldsymbol{L}$ dans $(H^1(\Gamma))^d$)**.** *Notons par* $\ker \boldsymbol{L}$ *le noyau de l'opérateur* $\boldsymbol{L}$ *dans* $(H^1(\Gamma))^d$ *:*

$$\ker \boldsymbol{L} = \left\{ \boldsymbol{v} \in \left(H^1(\Gamma)\right)^d \mid \boldsymbol{L}(\boldsymbol{v}) = 0 \right\}.$$

Nous avons :

$$\ker \boldsymbol{L} \;=\; H(\Gamma) \;=\; \left\{ \boldsymbol{v} \in \left(H^1(\Gamma)\right)^d \mid \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \right\}.$$

Démonstration. Rappelons que pour $\boldsymbol{v} \in (H^1(\Gamma))^d$:

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{v}) \;=\; \mathbf{div}^*_\Gamma(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) = \kappa(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n} - \mathbf{grad}_\Gamma(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}).$$

Par conséquent, si $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ alors $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{v}) = 0$. Donc nous avons : $H(\Gamma) \subset \ker \boldsymbol{L}$. Inversement, si $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{v}) = 0$ pour $\boldsymbol{v} \in (H^1(\Gamma))^d$ alors nécessairement $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ d'après le lemme A.2 puisque $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \in H^1(\Gamma)$. Donc nous avons : $\ker \boldsymbol{L} \subset H(\Gamma)$. D'où

$$\ker \boldsymbol{L} = \left\{ \boldsymbol{v} \in \left(H^1(\Gamma)\right)^d \mid \boldsymbol{L}(\boldsymbol{v}) = 0 \right\}.$$

Ce qui prouve le lemme A.3. □

Lemme A.4 (L'intersection des noyaux de $\mathbf{D}_\Gamma$ et $\boldsymbol{L}$ dans $(H^1(\Gamma))^d$)**.** *Soit* M *l'intersection des noyaux de* $\mathbf{D}_\Gamma$ *et* $\boldsymbol{L}$ *dans* $(H^1(\Gamma))^d$ *:*

$$M = \left\{ \boldsymbol{v} \in \left(H^1(\Gamma)\right)^d \mid \mathbf{D}_\Gamma(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{v}) = 0 \right\}.$$

M est l'ensemble des translations et rotations tangentes à Γ de $\mathbb{R}^d$.

Démonstration. En utilisant le résultat du lemme A.3, nous déduisons que :

$$M \;=\; \ker \mathbf{D}_\Gamma \cap \ker \boldsymbol{L} \;=\; \ker \mathbf{D}_\Gamma \cap H(\Gamma).$$

Par conséquent, le lemme A.1 permet de déduire que M est l'ensemble des translations et rotations tangentes à Γ de $\mathbb{R}^d$. Ce qui prouve le lemme A.4. □

Annexe B

Géométrie de l'embryon de la *Drosophile*

L'objectif de cette partie est d'expliquer une méthode pour mailler la géométrie de l'embryon de la *Drosophile*. Le principe est simple, nous nous servons d'un maillage de la sphère unité qu'on transforme pour obtenir un maillage de l'embryon en passant par les maillages d'une ellipsoïde et d'une forme intermédiaire de la géométrie l'embryon sans le sillon céphalique (fig. B.1). Pour cela, nous utilisons une méthode projection qui permet le construire un maillage d'une surface décrite par le zéro d'une fonction de niveau à partir d'un autre maillage. Pour cela soit possible, il est nécessaire que les deux géométries ne soit pas très différentes en terme de topologie, c'est à dire qu'on puisse l'une comme l'image de l'autre par d'une transformation bijective.

B.1 Projection sur le zéro d'une fonction régulière

B.1.1 Description de la méthode

Soient ψ une fonction régulière sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{v}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et $\boldsymbol{x}$ un point de $\mathbb{R}^3$. Le but est de projeter le point $\boldsymbol{x}$ sur la surface définie par le niveau zéro de ψ suivant la direction de $\boldsymbol{v}$. Si $\psi(\boldsymbol{x}) = 0$ alors le problème est résolu. Si non, le problème revient à trouver un point $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^3$ tel que $\psi(\tilde{\boldsymbol{x}}) = 0$ et que le vecteur $\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}$ soit colinéaire à $\boldsymbol{v}$. Autrement dit, trouver $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\psi(\tilde{\boldsymbol{x}}) = 0 \text{ et } \exists\, t \in \mathbb{R} \mid \tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x} = t\boldsymbol{v}.$$

Ce problème est équivalent au problème d'optimisation suivante :

Problème B.1 (Optimisation 1D)**.** *Trouver $t \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$\psi(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}) = 0.$$

Ce problème admet une solution si l'on peut trouver deux nombres réels a et b tels que :

$$\psi(\boldsymbol{x} + a\boldsymbol{v}) \times \psi(\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{v}) < 0.$$

Dans ce cas, un moyen classique de résoudre le problème B.1 est d'utiliser la méthode de dichotomie (algorithme 2). Ainsi, si t est connu alors $\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}$ est connu.

dichotomie$(a, b, \epsilon, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, \psi)$
Entrées: ψ une fonction régulière définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$, a, b deux réels avec $a < b$, $\boldsymbol{x}$ un point de $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{v}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$, ϵ un seuil de précision.
Sorties: t tel que $\psi(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}) = 0$.
début
  si $|\psi(\boldsymbol{x} + a\boldsymbol{v})| < \epsilon$ **alors**
    retourne $t := a$.
  fin
  si $|\psi(\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{v})| < \epsilon$ **alors**
    retourne $t := b$.
  fin
  $c := \dfrac{a+b}{2}$
  si $|\psi(\boldsymbol{x} + c\boldsymbol{v})| < \epsilon$ **alors**
    retourne $t := c$.
  fin
  sinon
    si $\psi(\boldsymbol{x} + a\boldsymbol{v}) \times \psi(\boldsymbol{x} + c\boldsymbol{v}) < 0$ **alors**
      retourne *dichotomie*$(a, c, \epsilon, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, \psi)$.
    fin
    sinon
      retourne *dichotomie*$(c, b, \epsilon, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, \psi)$.
    fin
  fin
fin

Algorithm 2: Algorithme de dichotomie. L'utilité du paramètre ϵ purement numérique. On retrouve l'algorithme classique pour $\epsilon = 0$.

B.1.2 Application dans construction d'un maillage

On se donne un maillage de surface initial noté Γ_h^i. À partir de ce maillage, on veut construire un maillage noté Γ_h^f d'une surface décrite par le zéro de la fonction de niveau ϕ_f. Soient $\boldsymbol{n}_h^i$ une approximation de la normale à Γ_h^i et N_{ddl} le nombre de nœuds du maillage Γ_h^i. En utilisant la méthode de projection précédente sur chaque nœud de Γ_h^i, on construit un nouveau maillage Γ_h^f dont les nœuds correspondent aux projections des nœuds de Γ_h^i (cf. algorithme 3). L'étape difficile de l'algorithme est le choix d'une taille caractéristique locale h_{loc} qui permet de définir l'intervalle

de recherche de l'algorithme de dichotomie. Nous cherchons la solution de l'algorithme 2 dans l'intervalle $[-h_{loc}, h_{loc}]$ pour cela h_{loc} doit nécessairement vérifier la condition :

$$\phi_f\left(\boldsymbol{x}_j^i - h_{loc}\boldsymbol{n}_{j,h}^i\right) \times \phi_f\left(\boldsymbol{x}_j^i + h_{loc}\boldsymbol{n}_{j,h}^i\right) > 0$$

où $\boldsymbol{x}_j^i$ est le j ième nœud du maillage Γ_h^i et $\boldsymbol{n}_{j,h}^i := \boldsymbol{n}_h^i\left(\boldsymbol{x}_j^i\right)$.

mesh$(\Gamma_h^i, \phi_f, \epsilon)$
Entrées: Γ_h^i maillage initial, ϕ_f une fonction régulière définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$, ϵ un seuil de précision.
Sorties: Γ_h^f maillage de la surface $\{\phi_f = 0\}$.
début
  pour j *allant de* 0 *à* $N_{ddl} - 1$ **faire**
    Récupérer le j ième nœud $\boldsymbol{x}_j^i$ du maillage Γ_h^i.
    si $\left|\phi_f\left(\boldsymbol{x}_j^i\right)\right| > \epsilon$ **alors**
      Récupérer le vecteur $\boldsymbol{n}_{j,h}^i := \boldsymbol{n}_h^i\left(\boldsymbol{x}_j^i\right)$.
      Choisir h_{loc} tel que $\phi_f\left(\boldsymbol{x}_j^i - h_{loc}\boldsymbol{n}_{j,h}^i\right) \times \phi_f\left(\boldsymbol{x}_j^i + h_{loc}\boldsymbol{n}_{j,h}^i\right) > 0$.
      Calculer t := *dichotomie*$\left(-h_{loc}, h_{loc}, \epsilon, \boldsymbol{x}_j^i, \boldsymbol{n}_{j,h}^i, \phi_f\right)$.
      Calculer $\boldsymbol{x}_j^f := \boldsymbol{x}_j^i + t\boldsymbol{n}_{j,h}^i$.
    fin
  fin
  $\Gamma_h^f := \left\{\boldsymbol{x}_j^f, j = 0, ..., N_{ddl} - 1\right\}$.
fin

Algorithm 3: Algorithme de construction d'un maillage de la surface par le niveau zéro d'une fonction régulière à partir d'un maillage initial.

B.2 Construction du maillage de l'embryon de la *Drosophile*

Étant donné un maillage de la sphère unité noté Γ_h^s. Nous utilisons l'algorithme 3 pour construire le maillage noté Γ_h de l'embryon de la *Drosophile* à partir Γ_h^s en suivant le diagramme B.1. Pour cela, décrivons les différentes surfaces par le niveau zéro de fonctions régulières. Introduisons les fonctions suivantes :

$$\phi_e(x, y, z) = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \tag{B.2.1}$$

$$\phi_{init}(x, y, z) = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{(z - f(x))^2}{c^2} \tag{B.2.2}$$

$$\psi_{sillon}(x, y, z) = D \times g\left(\frac{x - Sz - X}{W}\right) \tag{B.2.3}$$

$$\phi(x, y, z) = \phi_{init}(x, y, z) - \psi_{sillon}(x, y, z) \tag{B.2.4}$$

où f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{\kappa_a \xi^2}{2a} \\ g(\xi) &= \begin{cases} \exp\left(-\left(\frac{2}{1-\xi^2} + 1 + \ln \mathrm{C}\right)\right) & \text{si } |\xi| < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \end{aligned}$$

et les nombres réels $a, b, c, \kappa_a, D, S, X, W$ et C sont des paramètres. À partir de ces fonctions, nous définissons les surfaces suivantes :

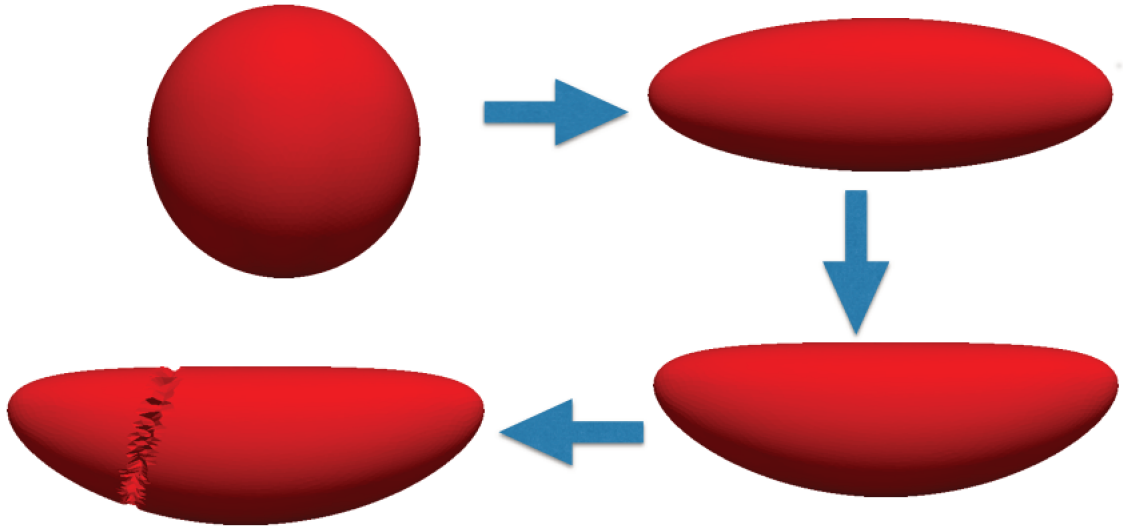
$$\phi_e(x,y,z) = 0 \quad \text{(ellipsoide)} \tag{B.2.5}$$

$$\phi_{init}(x,y,z) = 0 \quad \text{(géométrie de la } \textit{Drosophile} \text{ sans le sillon céphalique)} \tag{B.2.6}$$

$$\phi(x,y,z) = 0 \quad \text{(géométrie de la } \textit{Drosophile} \text{ avec le sillon céphalique)} \tag{B.2.7}$$

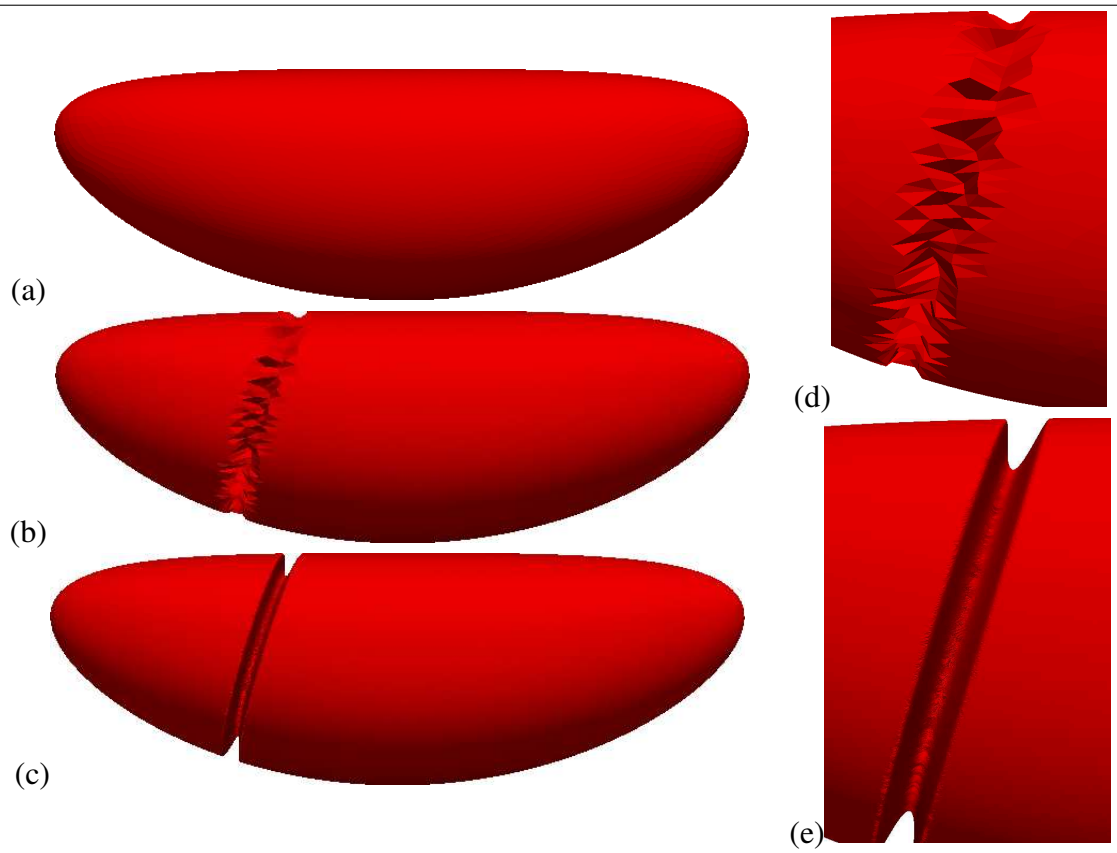
Dans l'expression de ϕ (cf. (B.2.4)), la fonction ψ_{sillon} représente le sillon céphalique. Les paramètres W et D correspondent respectivement à la largeur et la profondeur du sillon céphalique.

FIGURE B.1 Les différentes étapes dans la construction d'un maillage de l'embryon de la *Drosophile*.



Dans le diagramme B.1, les deux premières étapes sont assez simples à mettre en place puisque la courbure ne change pas de signe contrairement à la dernière étape (la formation du sillon céphalique). On peut illustrer cela en utilisant successivement l'algorithme 3. Nous obtenons la surface représentée par la fig. B.2(b). Le maillage obtenu est de très mauvaise qualité au niveau du sillon céphalique (fig. B.2(d)) en terme de courbure. Numériquement, on ne peut pas bien approcher les courbures d'un tel maillage.

FIGURE B.2 (a) Géométrie de la *Drosophile* sans le sillon céphalique. (b) Géométrie de la *Drosophile* avec le sillon céphalique obtenue directement par l'algorithme 3. (c) Géométrie de la *Drosophile* avec le sillon céphalique après adaptation de maillage. (d) Zoom sur le sillon céphalique de (b). (e) Zoom sur le sillon céphalique de (c).



La solution adoptée pour contourner cette difficulté est de faire une adaptation de maillage. Nous utilisons le mailleur *MMGS* [Dapogny et al., 2014] qui est outil adéquat pour faire l'adaptation de maillage de surface.

Annexe C

Quelques propriétés des normes L^2 et H^1

Dans cette partie, nous allons démontrer quelques résultats utiles sur des normes L^2 et H^1. Ces résultats sont utilisés dans les chapitres 2 et 3. Soit Γ une surface assez régulière, bornée et orientable contenue dans $\mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3.

Lemme C.1 (Inégalité de Jensen : application sur les espaces de Lebesgue)**.** *Soient p et q deux entiers tels que*

$$0 < p < q \leq +\infty.$$

Alors $L^q \subset L^p$ et pour tout $\boldsymbol{u} \in (L^q(\Gamma))^d$, nous avons

$$\|\boldsymbol{u}\|_{0,p,\Gamma} \leq |\Gamma|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|\boldsymbol{u}\|_{0,q,\Gamma}.$$

Démonstration. Ce résultat est une conséquence de l'inégalité de Jensen (cf. par exemple dans [Jensen, 1906] ou [Niculescu and Persson, 2006]). □

Lemme C.2. *Soient $\varphi \in H^1(\Gamma)$ et $\boldsymbol{u} \in (W^{1,\infty}(\Gamma))^d$ non nul. Nous avons l'inégalité :*

$$\|\varphi\|_{1,2,\Gamma} \geq \left(\|\boldsymbol{u}\|_{0,\infty,\Gamma} + \|\mathbf{grad}_\Gamma(\boldsymbol{u})\|_{0,\infty,\Gamma}\right)^{-1} \|\mathbf{grad}_\Gamma(\varphi\boldsymbol{u})\|_{0,2,\Gamma}.$$

Démonstration. Soient $\varphi \in H^1(\Gamma)$ et $\boldsymbol{u} \in (W^{1,\infty}(\Gamma))^d$ non nul. En utilisant la proposition 1.2, page 14, nous avons

$$\mathbf{grad}_\Gamma(\varphi\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \otimes \mathbf{grad}_\Gamma(\varphi) + \varphi\mathbf{grad}_\Gamma(\boldsymbol{u}).$$

Par conséquent, en utilisant l'inégalité triangulaire, nous avons l'inégalité :

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{grad}_{\Gamma}(\varphi\boldsymbol{u})\right\|_{0,2,\Gamma} &\leq \left\|\boldsymbol{u}\otimes\mathbf{grad}_{\Gamma}(\varphi)\right\|_{0,2,\Gamma}+\left\|\varphi\mathbf{grad}_{\Gamma}(\boldsymbol{u})\right\|_{0,2,\Gamma}\\ &\leq \|\boldsymbol{u}\|_{0,\infty,\Gamma}\left\|\mathbf{grad}_{\Gamma}(\varphi)\right\|_{0,2,\Gamma}+\left\|\mathbf{grad}_{\Gamma}(\boldsymbol{u})\right\|_{0,\infty,\Gamma}\|\varphi\|_{0,2,\Gamma}\\ &\leq \left(\|\boldsymbol{u}\|_{0,\infty,\Gamma}+\left\|\mathbf{grad}_{\Gamma}(\boldsymbol{u})\right\|_{0,\infty,\Gamma}\right)\|\varphi\|_{1,2,\Gamma}.\end{aligned}$$

D'où l'inégalité :

$$\left(\|\boldsymbol{u}\|_{0,\infty,\Gamma}+\left\|\mathbf{grad}_{\Gamma}(\boldsymbol{u})\right\|_{0,\infty,\Gamma}\right)^{-1}\left\|\mathbf{grad}_{\Gamma}(\varphi\boldsymbol{u})\right\|_{0,2,\Gamma} \leq \|\varphi\|_{1,2,\Gamma}.$$

Ce qui prouve lemme C.2. □

De la même manière, si $\boldsymbol{u}\in(H^1(\Gamma))^d$ et $\varphi\in W^{1,\infty}(\Gamma)$ non nul alors nous avons l'inégalité :

$$\|\boldsymbol{u}\|_{1,2,\Gamma} \geq \left(\|\varphi\|_{0,\infty,\Gamma}+\left\|\mathbf{grad}_{\Gamma}(\varphi)\right\|_{0,\infty,\Gamma}\right)^{-1}\left\|\mathbf{grad}_{\Gamma}(\varphi\boldsymbol{u})\right\|_{0,2,\Gamma}. \tag{C.0.1}$$

Lemme C.3. *Soient $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ appartenant à $(L^\infty(\Gamma))^d$, nous avons l'inégalité*

$$\begin{aligned}\||\boldsymbol{u}|-|\boldsymbol{v}|\|_{0,2,\Gamma} &\leq \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|_{0,2,\Gamma}\\ \||\boldsymbol{u}|-|\boldsymbol{v}|\|_{0,\infty,\Gamma} &\leq \sqrt{d}\,\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|_{0,\infty,\Gamma}.\end{aligned}$$

Démonstration. Pour monter ces inégalités, nous utilisons les définitions de base des espaces de Lebesgue (cf. chapitre 1, section 1.3, page 16). Soit $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\in(L^\infty(\Gamma))^d\times(L^\infty(\Gamma))^d$. Nous avons :

$$\begin{aligned}(|\boldsymbol{u}|-|\boldsymbol{v}|)^2 &= |\boldsymbol{u}|^2+|\boldsymbol{v}|^2-2\,|\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}|\\ |\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|^2 &= |\boldsymbol{u}|^2+|\boldsymbol{v}|^2-2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}.\end{aligned}$$

Donc

$$(|\boldsymbol{u}|-|\boldsymbol{v}|)^2-|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|^2 = 2\,(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}-|\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}|) \leq 0.$$

Par conséquent, $||\boldsymbol{u}|-|\boldsymbol{v}||\leq|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|$. Nous déduisons donc que :

$$\||\boldsymbol{u}|-|\boldsymbol{v}|\|_{0,2,\Gamma} = \sqrt{\int_{\Gamma}(|\boldsymbol{u}|-|\boldsymbol{v}|)^2\,\mathrm{ds}} \leq \sqrt{\int_{\Gamma}|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|^2\,\mathrm{ds}}.$$

D'où la première inégalité :

$$\||\boldsymbol{u}|-|\boldsymbol{v}|\|_{0,2,\Gamma} \leq \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|_{0,2,\Gamma}.$$

Nous avons par définition :

$$\left\| |\boldsymbol{u}| - |\boldsymbol{v}| \right\|_{0,\infty,\Gamma} = \sup_{\boldsymbol{x}\in\Gamma} ||\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})| - |\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})|| \text{ et } \|u - \boldsymbol{v}\|_{0,\infty,\Gamma} = \max_{0\leq i\leq d-1} \|u_i - v_i\|_{0,\infty,\Gamma}$$

où les u_i et v_i sont respectivement les composantes de $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$. Donc, pour tout $\boldsymbol{x} \in \Gamma$, nous avons :

$$\begin{aligned} ||\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})| - |\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})|| &\leq |\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})| \\ &\leq \sqrt{d}\left(\max_{0\leq i\leq d-1} |u_i(\boldsymbol{x}) - v_i(\boldsymbol{x})|\right) \\ &\leq \sqrt{d}\left(\max_{0\leq i\leq d-1} \|u_i - v_i\|_{0,\infty,\Gamma}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons :

$$\sup_{\boldsymbol{x}\in\Gamma} ||\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})| - |\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})|| \leq \sqrt{d} \max_{0\leq i\leq d-1} \|u_i - v_i\|_{0,\infty,\Gamma}.$$

D'où

$$\left\| |\boldsymbol{u}| - |\boldsymbol{v}| \right\|_{0,\infty,\Gamma} \leq \sqrt{d}\, \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|_{0,\infty,\Gamma}.$$

Ce qui prouve le lemme C.3. □

Lemme C.4 (Majoration d'un produit)**.** *Soient r_1, r_2 deux nombres réels, alors pour tout nombre réel β strictement positif on a l'inégalité*

$$r_1 r_2 \leq \frac{1}{2}\left(\beta r_1^2 + \frac{r_2^2}{\beta}\right).$$

Démonstration. On a pour tous nombres réels a et b, l'inégalité suivante :

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

En particulier, pour $\beta > 0$, on pose $a = r_1\sqrt{\beta}$ et $b = \dfrac{r_2}{\sqrt{\beta}}$ dans l'inégalité précédente, d'où le résultat. □

Ce résultat sera beaucoup utiliser dans calculs élémentaires lors des estimations des erreurs.

Lemme C.5. *Soient $\boldsymbol{u} \in (L^2(\Gamma))^d$, $\boldsymbol{v} \in (L^\infty(\Gamma))^d$ et $\boldsymbol{\tau} \in (L^2(\Gamma))^{d\times d}$, nous avons les inégalités suivantes :*

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\|_{0,2,\Gamma} &\leq \sqrt{d}\, \|\boldsymbol{v}\|_{0,\infty,\Gamma} \|\boldsymbol{u}\|_{0,2,\Gamma} \\ \|\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{v}\|_{0,2,\Gamma} &\leq \sqrt{d}\, \|\boldsymbol{v}\|_{0,\infty,\Gamma} \|\boldsymbol{\tau}\|_{0,2,\Gamma}. \end{aligned}$$

Démonstration. Soient $\boldsymbol{u} = (u_i) \in (L^2(\Gamma))^d$, $\boldsymbol{v} = (v_i) \in (L^\infty(\Gamma))^d$ et $\boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) \in (L^2(\Gamma))^{d\times d}$. Nous avons :

$$|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|^2 = \left(\sum_{i=0}^{d-1} u_i v_i\right)^2 \leq \|\boldsymbol{v}\|^2_{0,\infty,\Gamma}\left(\sum_{i=0}^{d-1} u_i\right)^2$$

puisque par définition, pour tout $i < d$, $v_i \leq \|\boldsymbol{v}\|_{0,\infty,\Gamma}$. En outre, nous avons

$$\left(\sum_{i=0}^{d-1} u_i\right)^2 = \sum_{i=0}^{d-1} u_i^2 + 2\sum_{\substack{i,j=0\\ i\neq j}}^{d-1} u_i u_j.$$

En appliquant le lemme C.4 pour $\beta = 1$ sur le produit $u_i u_j$, nous avons :

$$\left(\sum_{i=0}^{d-1} u_i\right)^2 \leq \sum_{i=0}^{d-1} u_i^2 + 2\sum_{\substack{i,j=0\\ i\neq j}}^{d-1} u_i u_j \leq \sum_{i=0}^{d-1} u_i^2 + \sum_{\substack{i,j=0\\ i\neq j}}^{d-1}\left(u_i^2 + u_j^2\right).$$

Par suite, en utilisant la relation (1.1.1), page 8, nous avons

$$\left(\sum_{i=0}^{d-1} u_i\right)^2 \leq \sum_{i=0}^{d-1} u_i^2 + (d-1)\sum_{i=0}^{d-1} u_i^2 \leq d\sum_{i=0}^{d-1} u_i^2 \leq d\,|\boldsymbol{u}|^2.$$

Par conséquent, nous obtenons l'inégalité :

$$|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|^2 \leq d\,\|\boldsymbol{v}\|^2_{0,\infty,\Gamma}\,|\boldsymbol{u}|^2.$$

En utilisant la définition de la norme L^2, nous obtenons

$$\|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\|^2_{0,2,\Gamma} \leq \int_\Gamma d\,\|\boldsymbol{v}\|^2_{0,\infty,\Gamma}\,|\boldsymbol{u}|^2\,\mathrm{ds} \leq d\,\|\boldsymbol{v}\|^2_{0,\infty,\Gamma}\int_\Gamma |\boldsymbol{u}|^2\,\mathrm{ds} \leq d\,\|\boldsymbol{v}\|^2_{0,\infty,\Gamma}\,\|\boldsymbol{u}\|^2_{0,2,\Gamma}.$$

Par conséquent, nous avons

$$\|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\|_{0,2,\Gamma} \leq \sqrt{d}\,\|\boldsymbol{v}\|_{0,\infty,\Gamma}\,\|\boldsymbol{u}\|_{0,2,\Gamma}.$$

Nous procédons de la même manière le cas du produit tenseur/vecteur. Nous avons

$$|\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{v}|^2 = \sum_{i=0}^{d-1}\left(\sum_{j=0}^{d-1}\tau_{ij}v_j\right)^2 = \sum_{i=0}^{d-1}\left(\sum_{j=0}^{d-1}\tau_{ij}^2 v_j^2 + 2\sum_{\substack{k,j=0\\ k\neq j}}^{d-1}(\tau_{ik}v_k)(\tau_{ij}v_j)\right).$$

En appliquant le lemme C.4 pour $\beta = 1$ sur le produit $(\tau_{ik} v_k)(\tau_{ij} v_j)$, nous avons :

$$|\boldsymbol{\tau v}|^2 \leq \sum_{i=0}^{d-1} \left(\sum_{j=0}^{d-1} \tau_{ij}^2 v_j^2 + \sum_{\substack{k,j=0 \\ k \neq j}}^{d-1} \left(\tau_{ik}^2 v_k^2 + \tau_{ij}^2 v_j^2 \right) \right).$$

Par suite, nous avons

$$|\boldsymbol{\tau v}|^2 \leq \sum_{i=0}^{d-1} \left(\sum_{j=0}^{d-1} \tau_{ij}^2 v_j^2 + (d-1) \sum_{k,j=0}^{d-1} \tau_{ij}^2 v_j^2 \right) \leq \sum_{i=0}^{d-1} \left(d \sum_{j=0}^{d-1} \tau_{ij}^2 v_j^2 \right) \leq d \|\boldsymbol{v}\|_{0,\infty,\Gamma}^2 \sum_{i,j=0}^{d-1} \tau_{ij}^2.$$

Donc, en utilisant la relation (1.1.2), page 8, nous avons

$$|\boldsymbol{\tau v}|^2 \leq d \|\boldsymbol{v}\|_{0,\infty,\Gamma}^2 |\boldsymbol{\tau}|^2.$$

En utilisant la définition de la norme L^2, nous obtenons

$$\|\boldsymbol{\tau v}\|_{0,2,\Gamma}^2 \leq \int_\Gamma d \|\boldsymbol{v}\|_{0,\infty,\Gamma}^2 |\boldsymbol{\tau}|^2 \, \mathrm{ds} \leq d \|\boldsymbol{v}\|_{0,\infty,\Gamma}^2 \int_\Gamma |\boldsymbol{\tau}|^2 \, \mathrm{ds} \leq d \|\boldsymbol{v}\|_{0,\infty,\Gamma}^2 \|\boldsymbol{\tau}\|_{0,2,\Gamma}^2.$$

Par conséquent, nous avons

$$\|\boldsymbol{\tau v}\|_{0,2,\Gamma} \leq \sqrt{d} \|\boldsymbol{v}\|_{0,\infty,\Gamma} \|\boldsymbol{\tau}\|_{0,2,\Gamma}.$$

Ce qui prouve lemme C.5. □

Lemme C.6 (Injections continues de L^∞)**.** *Soient Γ_h une approximation de Γ et X_h un espace d'éléments finis conformes de Lagrange de degré k sur Γ_h. Alors pour tout $\psi_h \in X_h$, nous avons :*

$$\|\psi_h\|_{0,\infty,\Gamma_h} \leq C h^{-\frac{d-1}{2}} \|\psi_h\|_{0,2,\Gamma_h}.$$

Démonstration. On peut consulter par exemple [Ciarlet, 2002] pour le résultat dans le cadre général :

$$\|\psi_h\|_{0,\infty,\Gamma_h} \leq C h^{-\frac{d-1}{p}} \|\psi_h\|_{0,p,\Gamma_h}.$$

Le lemme C.6 correspond au cas particulier $p = 2$. □

Annexe D

Rappel sur les tenseurs euclidiens

L'objectif ici est de rappeler quelques notions sur les tenseurs euclidiens. On part de la structure d'espace vectoriel de l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$. Nous nous limiterons aux cas des tenseurs euclidiens d'ordre n, $n = 0, 1, 2$. Nous donnerons quelques définitions et propriétés importantes sur les tenseurs euclidiens d'ordre 2. On pourra consulter par exemple [Kostrikin et al., 1997] pour plus de details sur les tenseurs dans la généralité.

D.1 Tenseurs d'ordre 0

Les tenseurs d'ordre 0 sont les scalaires. L'espace des tenseurs d'ordre 0 est identifié à $\mathbb{R}$ muni de sa structure d'espace vectoriel usuel.

D.2 Tenseurs d'ordre 1

Les tenseurs d'ordre 1 sont les vecteurs de $\mathbb{R}^d$. A chaque vecteur $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^d$, on peut lui associer la forme linéaire ψ définie par :

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \quad \psi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x}.$$

Il s'agit du produit produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^d$. On définit le produit tensoriel de deux vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ noté $\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}$ en y associant la forme bilinéaire φ telle que :

$$\forall\, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \quad \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{x})\,(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{y})\,.$$

On peut alors construire à partir de la base $\{\boldsymbol{e}_i, 0 \leq i \leq d-1\}$ de $\mathbb{R}^d$, un espace vectoriel $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$de dimension d^2, ayant pour base $\{\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j, 0 \leq i, j \leq d-1\}$. Cet espace n'est pas isomorphe à $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

D.3 Tenseurs d'ordre 2

Un tenseur d'ordre 2 notée $\boldsymbol{\tau}$, est défini comme :

1. un élément de l'espace tensoriel $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$:

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_{ij} \left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \right)$$

2. une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ telle que :

$$\forall \left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \right) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \quad \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \tau_{ij} \left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \right) (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \tau_{ij} \left(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{x} \right) \left(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{y} \right)$$

3. un élément associé à une application ω de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$. telle que :

$$\boldsymbol{\tau} = \omega(\boldsymbol{e}_j) \otimes \boldsymbol{e}_j = \omega_{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j = \omega_{ij} \left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \right)$$

   Les composantes du tenseur $\boldsymbol{\tau}$ sont égales aux composantes de la matrice de l'application linéaire ω dans la base $\{\boldsymbol{e}_i, 0 \leq i \leq d-1\}$: $\tau_{ij} = \omega_{ij}$.

En particulier, si $\boldsymbol{u} = (u_i)$ et $\boldsymbol{v} = (v_i)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^d$ alors leur produit tensoriel $\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}$ est un tenseur d'ordre 2 :

$$\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v} = \sum_{i,j=0}^{d-1} u_i v_j \left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \right), \tag{D.3.1}$$

Nous introduisons avec les tenseurs d'ordre 2 toutes les définitions couramment utilisées avec les applications linéaires (ou avec les matrices). Par exemple :

Tenseur identité ou métrique :

$$\boldsymbol{I} = \sum_{i,j=0}^{d-1} \delta_{ij} \left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \right) \tag{D.3.2}$$

où $\delta_{ii} = 1$ et $\delta_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.

Tenseur inverse : si $\boldsymbol{\tau}$ est un tenseur inversible d'ordre 2 alors son inverse noté $\boldsymbol{\tau}^{-1}$ est aussi un tenseur d'ordre 2 et il vérifie :

$$\sum_{k=0}^{d-1} \tau_{ik} \tau_{kj}^{-1} = \sum_{k=0}^{d-1} \tau_{ik}^{-1} \tau_{kj} = \delta_{ij}. \tag{D.3.3}$$

Transposition : si $\boldsymbol{\tau}$ est un tenseurd'ordre 2 alors sa transposée noté $\boldsymbol{\tau}^T$ est le tenseur d'ordre 2 défini par :

$$\boldsymbol{\tau}^T = \sum_{i,j=0}^{d-1} \tau_{ji} \left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \right). \tag{D.3.4}$$

En particulier : si $\boldsymbol{u} = (u_i)$ et $\boldsymbol{v} = (v_i)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^d$ alors

$$(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})^T = \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u} = \sum_{i,j=0}^{d-1} u_j v_i \left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j\right). \tag{D.3.5}$$

Trace : si $\boldsymbol{\tau}$ est un tenseurd'ordre 2 alors sa trace notée $\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\tau}\right)$ est le nombre réel défini par :

$$\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\tau}\right) = \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\tau}^T\right) = \sum_{i=0}^{d-1} \tau_{ii}. \tag{D.3.6}$$

En particulier : si $\boldsymbol{u} = (u_i)$ et $\boldsymbol{v} = (v_i)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^d$ alors

$$\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}\right) = \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}\right) = \sum_{i=0}^{d-1} u_i v_i = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}. \tag{D.3.7}$$

Produit contracté de deux tenseurs : si $\boldsymbol{\tau}^1$ et $\boldsymbol{\tau}^2$ sont deux tenseurs d'ordre 2 alors le produit contracté de $\boldsymbol{\tau}^1$ et $\boldsymbol{\tau}^2$ noté$\boldsymbol{\tau}^1\boldsymbol{\tau}^2$ est le tenseur d'ordre 2 défini par :

$$\boldsymbol{\tau}^1\boldsymbol{\tau}^2 = \sum_{i,j=0}^{d-1} \tau^1_{ik}\tau^1_{kj} \left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j\right). \tag{D.3.8}$$

Produit doublement contracté de deux tenseurs : si $\boldsymbol{\tau}^1$ et $\boldsymbol{\tau}^2$ sont deux tenseurs d'ordre 2 alors le produit doublement contracté de $\boldsymbol{\tau}^1$ et $\boldsymbol{\tau}^2$ noté $\boldsymbol{\tau}^1 : \boldsymbol{\tau}^2$ est le nombre réel défini par :

$$\boldsymbol{\tau}^1 : \boldsymbol{\tau}^2 = \sum_{i,j=0}^{d-1} \tau^1_{ij}\tau^1_{ij}. \tag{D.3.9}$$

Annexe E

Opérateurs surfaciques en coordonnées cartésiennes et sphériques

Dans cette partie, nous donnons quelques formulaires sur les opérateurs différentiels surfaciques en coordonnées cartésiennes et sphériques dans $\mathbb{R}^3$. Nous avons déjà défini la plupart des ces opérateurs dans la chapitre 1. On peut consulter par exemple [Bird et al., 1987a] (précisément en Annexe A), [Edward et al., 1991] pour plus details sur les formules qui vont suivre.

E.1 Coordonnées sphériques

E.1.1 Changement de coordonnées

La position d'un point M dans le repère $(O, \boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$ peut être spécifié soit par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) soit par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ). Avec cette convention, nous avons la correspondance suivante entre les deux systèmes de coordonnées :

$$x = r \sin\theta \cos\varphi \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{E.1.1a}$$

$$y = r \sin\theta \sin\varphi \qquad \theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \tag{E.1.1b}$$

$$z = r \cos\theta \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \tag{E.1.1c}$$

La restriction (E.1.1c) assure l'unicité de la correspondance entre les deux systèmes de coordonnées et les ensembles d'équations (E.1.1a) ou (E.1.1b) définissent un changement de coordonnées.

E.1.2 Vecteurs unités dans le système de coordonnées sphériques

À partir de la base canonique $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$ de $\mathbb{R}^3$, on peut définir une base orthonormées dite "*naturelle*" $(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi)$ à partir de la convention (E.1.1a)-(E.1.1b)-(E.1.1c)). Nous avons alors :

$$\boldsymbol{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}_{\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z} \qquad \boldsymbol{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}_{\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z} \qquad \boldsymbol{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}_{\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z} \tag{E.1.2}$$

Et inversement, on peut écrire $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ dans la base $(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi)$:

$$\boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}_{\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_\varphi} \qquad \boldsymbol{e}_y = \begin{pmatrix} \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}_{\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_\varphi} \qquad \boldsymbol{e}_z = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}_{\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_\varphi} \tag{E.1.3}$$

E.1.3 Propriétés sur les dérivées partielles

Pour exprimer des opérateurs comme le gradient, la divergence ou le laplacien en coordonnées sphériques il est nécessaire de passer par une relation entre les dérivées partielles des deux systèmes de coordonnées et les dérivées partielles des vecteurs de base en coordonnées sphériques.

E.1.3.1 Relation entre les dérivées partielles des deux systèmes de coordonnées

Nous avons la relation suivante entre les dérivées partielles des deux systèmes de coordonnées :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \dfrac{\cos\theta\cos\varphi}{r} & -\dfrac{\sin\varphi}{r\sin\theta} \\ \sin\theta\sin\varphi & \dfrac{\cos\theta\sin\varphi}{r} & \dfrac{\cos\varphi}{r\sin\theta} \\ \cos\theta & \dfrac{-\sin\theta}{r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \tag{E.1.4}$$

E.1.3.2 Dérivées partielles des vecteurs de base en coordonnées sphériques

Les dérivées partielles de $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$ et $\boldsymbol{e}_\varphi$ (cf. relations (E.1.2)) sont données par :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial r} = 0 && \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial r} = 0 && \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial r} = 0 \\
&\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \theta} = \boldsymbol{e}_\theta && \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \theta} = -\boldsymbol{e}_r && \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \theta} = 0 \\
&\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \varphi} = \sin\theta \boldsymbol{e}_\varphi && \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \varphi} = \cos\theta \boldsymbol{e}_\varphi && \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\left(\sin\theta \boldsymbol{e}_r + \cos\theta \boldsymbol{e}_\theta\right)
\end{aligned} \tag{E.1.5}$$

E.2 Opérateurs différentiels classiques

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^3$.

E.2.1 Gradient d'un champ scalaire

Soit $\psi : U \longrightarrow \mathbb{R}$, un champ scalaire de classe C^1 sur U. Le gradient de ψ est le champ de vecteur noté $\mathbf{grad}\,(\psi)$ définit par :

$$\mathbf{grad}\,(\psi) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) \tag{E.2.1}$$

dans la base canonique $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$ de $\mathbb{R}^3$. En utilisant les relations (E.1.4) et (E.1.5), ce champ de vecteurs s'exprime en coordonnées sphériques comme suit :

$$\mathbf{grad}\,(\psi) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\right) \tag{E.2.2}$$

dans la base $(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi)$ de $\mathbb{R}^3$.

E.2.2 Gradient d'un champ vectoriel

Soit $\boldsymbol{u} : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, un champ vectoriel de classe C^1 sur U. Notons par u_x, u_y et u_z les coordonnées de $\boldsymbol{u}$ dans la base canonique $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$ de $\mathbb{R}^3$. Le gradient de $\boldsymbol{u}$ est le tenseur

d'ordre 2 noté $\mathbf{grad}\,(\boldsymbol{u})$ définit par :

$$\mathbf{grad}\,(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_x}{\partial x} & \dfrac{\partial u_x}{\partial y} & \dfrac{\partial u_x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_y}{\partial x} & \dfrac{\partial u_y}{\partial y} & \dfrac{\partial u_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_z}{\partial x} & \dfrac{\partial u_z}{\partial y} & \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{E.2.3}$$

dans la base canonique $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$ de $\mathbb{R}^3$. En utilisant les relations (E.1.4) et (E.1.5), ce tenseur s'exprime en coordonnées sphériques comme suit :

$$\mathbf{grad}\,(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} - \dfrac{u_\theta}{r} & \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \dfrac{u_\varphi}{r} \\ \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{u_r}{r} & \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \dfrac{u_\varphi}{r}\cot\theta \\ \dfrac{\partial u_\varphi}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} & \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \dfrac{u_r}{r} + \dfrac{u_\theta}{r}\cot\theta \end{pmatrix} \tag{E.2.4}$$

dans la base $(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi)$ de $\mathbb{R}^3$. On définit aussi la partie symétrique du gradient de $\boldsymbol{u}$ noté $\mathbf{D}\,(\boldsymbol{u})$ par la relation :

$$\mathbf{D}\,(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{grad}\,(\boldsymbol{u}) + \mathbf{grad}^T\,(\boldsymbol{u})\right)$$

En coordonnées cartésiennes, nous avons :

$$\mathbf{D}\,(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_x}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \dfrac{\partial u_y}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{E.2.5}$$

Introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
d_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\
d_{\theta\theta} &= \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \\
d_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta}{r}\cot\theta, \\
d_{r\theta} &= d_{\theta r} = \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right), \\
d_{r\varphi} &= d_{\varphi r} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right)\right), \\
d_{\theta\varphi} &= d_{\varphi\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{u_\varphi}{\sin\theta}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}\right).
\end{aligned}$$

En coordonnées sphériques, nous avons :

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} d_{rr} & d_{r\theta} & d_{r\varphi} \\ d_{\theta r} & d_{\theta\theta} & d_{\theta\varphi} \\ d_{\varphi r} & d_{\varphi\theta} & d_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} \tag{E.2.6}$$

E.2.3 Divergence d'un champ vectoriel

Soit $\boldsymbol{u} = (u_x, u_y, u_z) : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, un champ vectoriel de classe C^1 sur U. La divergence de $\boldsymbol{u}$ est le champ scalaire noté $\operatorname{div}(\boldsymbol{u})$ définit par :

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{u}) = \operatorname{tr}(\mathbf{grad}(\boldsymbol{u})) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \tag{E.2.7}$$

dans la base canonique $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$ de $\mathbb{R}^3$. Comme la trace d'un tenseur est indépendante du système de coordonnées, nous déduisons de la relation (E.2.4) que :

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{u}) = \frac{2}{r}u_r + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r}\cot\theta.$$

En utilisant la relation :

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(u_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + u_\theta\cot\theta\right) \tag{E.2.8}$$

nous obtenons l'expression de $\operatorname{div}(\boldsymbol{u})$ en coordonnées sphériques :

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{u}) = \frac{2}{r}u_r + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(u_\theta \sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right). \tag{E.2.9}$$

E.3 Opérateurs différentiels surfaciques

L'objectif de cette section est d'écrire en coordonnées sphériques quelques opérateurs différentiels surfaciques. On trouvera la définition de ces opérateurs dans le chapitre 1 de ce document. Soient Γ une surface bornée et orientable contenue dans un ouvert U_Γ de $\mathbb{R}^3$ et $\boldsymbol{n}$ la normale sortante à Γ.

E.3.1 Tenseur de projection

En coordonnées sphériques, la normale sortante à la surface Γ est égale au vecteur unitaire $\boldsymbol{e}_r$:

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_r = (1,0,0) \quad \text{dans la base } (\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi). \tag{E.3.1}$$

Par conséquent, en utilisant la définition 1.5 (page 9) du projecteur, nous obtenons :

$$\mathbf{P} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{e}_r \otimes \boldsymbol{e}_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{E.3.2}$$

E.3.2 Gradient surfacique d'un champ scalaire

Soit $\psi : U_\Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$, un champ scalaire de classe C^1 sur U_Γ. En utilisant la définition 1.8 (page 11), le gradient surfacique de ψ est :

$$\mathbf{grad}_\Gamma(\psi) = \mathbf{P}\mathbf{grad}(\psi).$$

Par conséquent, en utilisant les relations (E.2.2) et (E.3.2), nous obtenons :

$$\mathbf{grad}(\psi) = \left(0, \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right) \tag{E.3.3}$$

dans la base $(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi)$ de $\mathbb{R}^3$.

E.3.3 Gradient surfacique d'un champ vectoriel

Soit $\boldsymbol{u} : U_\Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^3$, un champ vectoriel de classe C^1 sur U_Γ. En utilisant la définition 1.9 (page 11), le gradient surfacique de $\boldsymbol{u}$ est :

$$\mathbf{grad}_\Gamma(\boldsymbol{u}) = \mathbf{grad}(\boldsymbol{u})\,\mathbf{P}.$$

Par conséquent, en utilisant les relations (E.2.4) et (E.3.2), nous obtenons :

$$\mathbf{grad}_{\Gamma}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} & \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} \\ 0 & \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r}\cot\theta \\ 0 & \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} & \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta}{r}\cot\theta \end{pmatrix} \tag{E.3.4}$$

dans la base $(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi)$ de $\mathbb{R}^3$. De plus, en utilisant la définition 1.10 (page 12) et les relations (E.2.6) et (E.3.2), nous avons :

$$\mathbf{D}_{\Gamma}(\boldsymbol{u}) = \mathbf{P}\mathbf{D}(\boldsymbol{u})\mathbf{P}$$

et par conséquent, nous avons en coordonnées sphériques :

$$\mathbf{D}_{\Gamma}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{u_\varphi}{\sin\theta}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\right) \\ 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{u_\varphi}{\sin\theta}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\right) & \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta}{r}\cot\theta \end{pmatrix} \tag{E.3.5}$$

E.3.4 Divergence surfacique d'un champ vectoriel

Soit $\boldsymbol{u} : U_{\Gamma} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, un champ vectoriel de classe C^1 sur U_{Γ}. En utilisant la définition 1.11 (page 12), la divergence surfacique de $\boldsymbol{u}$ est :

$$\mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{u}) = \mathbf{P} : \mathbf{grad}(\boldsymbol{u}).$$

Par conséquent, en utilisant les relations (E.2.2) et (E.3.2), nous obtenons :

$$\mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{u}) = \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\frac{1}{r}u_\theta\cot\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}.$$

En utilisant la relation (E.2.8), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathrm{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{u}) &= \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_\theta\cot\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \\ &= \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(u_\theta\sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \\ &= \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(u_\theta\sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}\right). \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$\mathrm{div}_{\Gamma}\left(\boldsymbol{u}\right) \;=\; \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(u_\theta \sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right) \tag{E.3.6}$$

dans la base $(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi)$ de $\mathbb{R}^3$.

E.3.5 Divergence surfacique d'un tenseur

Nous avons défini la divergence surfacique d'un tenseur dans le cadre général au chapitre 1 (cf. définition 1.12, page 13) :

$$\mathrm{div}_{\Gamma}\left(\boldsymbol{\tau}\right) = \mathbf{grad}\left(\boldsymbol{\tau}\right) : \mathbf{P}. \tag{E.3.7}$$

Dans cette sous section, nous nous limitons aux tenseurs d'ordre 2 surfaciques tangentiels et symétriques de $\mathbb{R}^3$. Soit $\boldsymbol{\tau}$ un tenseur surfacique tangentiel et symétrique. Un tel tenseur peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{\tau} \;=\; \tau_{\theta\theta}\boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{e}_\theta + \tau_{\theta\varphi}(\boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{e}_\varphi + \boldsymbol{e}_\varphi \otimes \boldsymbol{e}_\theta) + \tau_{\varphi\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi \otimes \boldsymbol{e}_\varphi. \tag{E.3.8}$$

Par conséquent, en utilisant les propriétés (E.1.5), le gradient de $\boldsymbol{\tau}$ écrit :

$$\mathbf{grad}\left(\boldsymbol{\tau}\right) = \boldsymbol{e}_r \otimes \frac{\partial\boldsymbol{\tau}}{\partial r} + \frac{1}{r}\boldsymbol{e}_\theta \otimes \frac{\partial\boldsymbol{\tau}}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\boldsymbol{e}_\varphi \otimes \frac{\partial\boldsymbol{\tau}}{\partial\varphi} \tag{E.3.9}$$

avec

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\boldsymbol{\tau}}{\partial r} &= \frac{\partial\tau_{\theta\theta}}{\partial r}\boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{e}_\theta + \frac{\partial\tau_{\theta\varphi}}{\partial r}\left(\boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{e}_\varphi + \boldsymbol{e}_\varphi \otimes \boldsymbol{e}_\theta\right) + \frac{\partial\tau_{\varphi\varphi}}{\partial r}\boldsymbol{e}_\varphi \otimes \boldsymbol{e}_\varphi, \\
\frac{\partial\boldsymbol{\tau}}{\partial\theta} &= \frac{\partial\tau_{\theta\theta}}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{e}_\theta - \tau_{\theta\theta}\left(\boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{e}_r + \boldsymbol{e}_r \otimes \boldsymbol{e}_\theta\right) + \frac{\partial\tau_{\theta\varphi}}{\partial\theta}\left(\boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{e}_\varphi + \boldsymbol{e}_\varphi \otimes \boldsymbol{e}_\theta\right) \\
&\quad - \tau_{\theta\varphi}\left(\boldsymbol{e}_\varphi \otimes \boldsymbol{e}_r + e_r \otimes e_\varphi\right) + \frac{\partial\tau_{\varphi\varphi}}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\varphi \otimes \boldsymbol{e}_\varphi
\end{aligned}$$

et le dernier terme :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\boldsymbol{\tau}}{\partial\varphi} &= \frac{\partial\tau_{\theta\theta}}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{e}_\theta - \tau_{\theta\theta}\cos\theta\left(\boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{e}_\varphi + \boldsymbol{e}_\varphi \otimes \boldsymbol{e}_\theta\right) \\
&\quad + \frac{\partial\tau_{\theta\varphi}}{\partial\varphi}\left(\boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{e}_\varphi + \boldsymbol{e}_\varphi \otimes \boldsymbol{e}_\theta\right) + \frac{\partial\tau_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi \otimes \boldsymbol{e}_\varphi \\
&\quad + \tau_{\theta\varphi}\left(\cos\theta\boldsymbol{e}_\varphi \otimes \boldsymbol{e}_\varphi - \sin\theta\boldsymbol{e}_r \otimes \boldsymbol{e}_\theta - \cos\theta\boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{e}_\theta\right) \\
&\quad + \tau_{\theta\varphi}\left(-\sin\theta\boldsymbol{e}_r \otimes \boldsymbol{e}_\theta - \cos\theta\boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{e}_\theta + \cos\theta\boldsymbol{e}_\varphi \otimes \boldsymbol{e}_\varphi\right) \\
&\quad + \tau_{\varphi\varphi}\left(-\sin\theta e_r \otimes e_\varphi - \cos\theta\boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{e}_\varphi - \sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi \otimes \boldsymbol{e}_r - \cos\theta\boldsymbol{e}_\varphi \otimes \boldsymbol{e}_\theta\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \varphi} &= \left(\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \varphi} - 2\tau_{\theta\varphi}\cos\theta\right)\boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{e}_\theta + \left(\frac{\partial \tau_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} - 2\tau_{\theta\varphi}\cos\theta\right)\boldsymbol{e}_\varphi \otimes \boldsymbol{e}_\varphi \\ &\quad - \tau_{\theta\varphi}\sin\theta\left(\boldsymbol{e}_r \otimes \boldsymbol{e}_\theta + \boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{e}_r\right) - \tau_{\varphi\varphi}\sin\theta\left(\boldsymbol{e}_r \otimes \boldsymbol{e}_\varphi + \boldsymbol{e}_\varphi \otimes \boldsymbol{e}_r\right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \tau_{\theta\theta}\cos\theta - \tau_{\varphi\varphi}\cos\theta\right)\left(\boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{e}_\varphi + \boldsymbol{e}_\varphi \otimes \boldsymbol{e}_\theta\right).\end{aligned}$$

Donc la relation (E.3.9) devient :

$$\begin{aligned}\mathbf{grad}\left(\boldsymbol{\tau}\right) &= \boldsymbol{e}_r \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial r} & \dfrac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial r} \\ 0 & \dfrac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial r} & \dfrac{\partial \tau_{\varphi\varphi}}{\partial r} \end{pmatrix} + \frac{1}{r}\boldsymbol{e}_\theta \otimes \begin{pmatrix} 0 & -\tau_{\theta\theta} & -\tau_{\theta\varphi} \\ -\tau_{\theta\theta} & \dfrac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} & \dfrac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta} \\ -\tau_{\theta\varphi} & \dfrac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta} & \dfrac{\partial \tau_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{r\sin\theta}\boldsymbol{e}_\varphi \otimes \begin{pmatrix} 0 & -\tau_{\theta\varphi}\sin\theta & -\tau_{\varphi\varphi}\sin\theta \\ -\tau_{\theta\varphi}\sin\theta & \dfrac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \varphi} - 2\tau_{\theta\varphi}\cos\theta & \dfrac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \left(\tau_{\theta\theta} - \tau_{\varphi\varphi}\right)\cos\theta \\ -\tau_{\varphi\varphi}\sin\theta & \dfrac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \left(\tau_{\theta\theta} - \tau_{\varphi\varphi}\right)\cos\theta & \dfrac{\partial \tau_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + 2\tau_{\theta\varphi}\cos\theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Par ailleurs, la projection $\mathbf{P}$ (cf. relation (E.3.2)) s'écrit :

$$\mathbf{P} = \boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{e}_\theta + \boldsymbol{e}_\varphi \otimes \boldsymbol{e}_\varphi$$

Donc en utilisant la formule (E.3.7) la divergence surfacique de $\boldsymbol{\tau}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathbf{div}_\Gamma\left(\boldsymbol{\tau}\right) &= \mathbf{grad}\left(\boldsymbol{\tau}\right) : \boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{e}_\theta + \mathbf{grad}\left(\boldsymbol{\tau}\right) : \boldsymbol{e}_\varphi \otimes \boldsymbol{e}_\varphi \\ &= -\frac{\tau_{\theta\theta}}{r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\varphi - \frac{\tau_{\varphi\varphi}}{r}\boldsymbol{e}_r \\ &\quad + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\left(\tau_{\theta\theta} - \tau_{\varphi\varphi}\right)\cot\theta\right)\boldsymbol{e}_\theta \\ &\quad + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \tau_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r}\tau_{\theta\varphi}\cot\theta\right)\boldsymbol{e}_\varphi.\end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\mathbf{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{\tau}) &= -\frac{1}{r}(\tau_{\theta\theta}+\tau_{\varphi\varphi})\,\boldsymbol{e}_r \\ &+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\tau_{\theta\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}(\tau_{\theta\theta}-\tau_{\varphi\varphi})\cot\theta\right)\boldsymbol{e}_\theta \\ &+\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\tau_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta\varphi}}{\partial\theta}+\frac{2}{r}\tau_{\theta\varphi}\cot\theta\right)\boldsymbol{e}_\varphi.\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbf{div}_{\Gamma}(\boldsymbol{\tau}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r}(\tau_{\theta\theta}+\tau_{\varphi\varphi}) \\ \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\tau_{\theta\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}(\tau_{\theta\theta}-\tau_{\varphi\varphi})\cot\theta \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\tau_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta\varphi}}{\partial\theta}+\frac{2}{r}\tau_{\theta\varphi}\cot\theta \end{pmatrix} \tag{E.3.10}$$

En particulier pour $\boldsymbol{\tau} = 2\mathbf{D}_{\Gamma}(\boldsymbol{u})$ nous avons d'après (E.3.5) :

$$\begin{aligned}\tau_{\theta\theta} &= 2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r}\right) \\ \tau_{\theta\varphi} &= \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{u_\varphi}{\sin\theta}\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi} \\ \tau_{\varphi\varphi} &= 2\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_r}{r}+\frac{u_\theta\cot\theta}{r}\right).\end{aligned}$$

Donc la composante radiale du vecteur $\mathbf{div}_{\Gamma}(2\mathbf{D}_{\Gamma}(\boldsymbol{u}))$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathbf{div}_{\Gamma}(2\mathbf{D}_{\Gamma}(\boldsymbol{u}))_r &= -\frac{1}{r}\left[2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r}\right)+2\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_r}{r}+\frac{u_\theta\cot\theta}{r}\right)\right] \\ &-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}-\frac{2}{r^2}u_r-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}-\frac{2}{r^2}u_r-\frac{2}{r^2}u_\theta\cot\theta \\ &-\frac{4}{r^2}u_r-\frac{2}{r^2}\left[\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+u_\theta\cot\theta+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right] \\ &-\frac{4}{r^2}u_r-\frac{2}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial(u_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right].\end{aligned}$$

Finalement, la composante radiale du vecteur $\mathbf{div}_{\Gamma}(2\mathbf{D}_{\Gamma}(\boldsymbol{u}))$ est donnée par :

$$\mathbf{div}_{\Gamma}(2\mathbf{D}_{\Gamma}(\boldsymbol{u}))_r = -\frac{4}{r^2}u_r-\frac{2}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial(u_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right)\right]. \tag{E.3.11}$$

De même la composante suivant θ du vecteur $\mathbf{div}_{\Gamma}\left(2\mathbf{D}_{\Gamma}\left(\boldsymbol{u}\right)\right)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
r^2\mathbf{div}_{\Gamma}\left(2\mathbf{D}_{\Gamma}\left(\boldsymbol{u}\right)\right)_{\theta} &= 2\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+u_r\right)\\
&\quad+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{u_\varphi}{\sin\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}\right)\\
&\quad+2\cot\theta\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+u_r-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}-u_r-u_\theta\cot\theta\right)\\
&= 2\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+2\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+u_\theta\cot\theta\right)-2\frac{\partial(u_\theta\cot\theta)}{\partial\theta}\\
&\quad+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}-u_\varphi\cot\theta\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}\right)\\
&\quad+2\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\cot\theta-\frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\cot\theta-2u_\theta\cot^2\theta.
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons :

$$\begin{aligned}
r^2\mathbf{div}_{\Gamma}\left(2\mathbf{D}_{\Gamma}\left(\boldsymbol{u}\right)\right)_{\theta} &= 2\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+2\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial(u_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}\right)-2\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\cot\theta+\frac{2}{\sin^2\theta}u_\theta\\
&\quad+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}-u_\varphi\cot\theta\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}\right)\\
&\quad+2\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\cot\theta-\frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\cot\theta+2u_\theta-\frac{2}{\sin^2\theta}u_\theta\\
&= 2u_\theta+2\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+2\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial(u_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}\right)\right]\\
&\quad+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}-u_\varphi\cot\theta\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}\right)\\
&\quad+2\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right)-\frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right).
\end{aligned}$$

Donc, nous avons :

$$\begin{aligned}
r^2\mathbf{div}_{\Gamma}\left(2\mathbf{D}_{\Gamma}\left(\boldsymbol{u}\right)\right)_{\theta} &= 2u_\theta+2\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+2\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial(u_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right)\right]\\
&\quad-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}+u_\varphi\cot\theta\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}\right)\\
&= 2u_\theta+2\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+2\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial(u_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right)\right]\\
&\quad-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial(u_\varphi\sin\theta)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}\right).
\end{aligned}$$

Par suite, nous avons :

$$\begin{aligned} r^2\mathbf{div}_{\Gamma}\left(2\mathbf{D}_{\Gamma}\left(\boldsymbol{u}\right)\right)_{\theta} &= 2u_{\theta} + 2\frac{\partial u_r}{\partial\theta} + 2\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial(u_{\theta}\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial\varphi}\right)\right] \\ &\quad + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial u_{\theta}}{\partial\varphi} - \frac{\partial(u_{\varphi}\sin\theta)}{\partial\theta}\right)\right]. \end{aligned}$$

Finalement, la composante suivant θ du vecteur $\mathbf{div}_{\Gamma}\left(2\mathbf{D}_{\Gamma}\left(\boldsymbol{u}\right)\right)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{div}_{\Gamma}\left(2\mathbf{D}_{\Gamma}\left(\boldsymbol{u}\right)\right)_{\theta} &= \frac{2}{r^2}u_{\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial(u_{\theta}\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial\varphi}\right)\right] \\ &\quad + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial u_{\theta}}{\partial\varphi} - \frac{\partial(u_{\varphi}\sin\theta)}{\partial\theta}\right)\right]. \end{aligned} \tag{E.3.12}$$

De même la composante suivant φ du vecteur $\mathbf{div}_{\Gamma}\left(2\mathbf{D}_{\Gamma}\left(\boldsymbol{u}\right)\right)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} r^2\mathbf{div}_{\Gamma}\left(2\mathbf{D}_{\Gamma}\left(\boldsymbol{u}\right)\right)_{\varphi} &= \frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_{\varphi}}{\partial\varphi} + u_r + u_{\theta}\cot\theta\right) \\ &\quad + 2\cot\theta\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{u_{\varphi}}{\sin\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_{\theta}}{\partial\varphi}\right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{u_{\varphi}}{\sin\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_{\theta}}{\partial\varphi}\right) \\ &= \frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} + \frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_{\varphi}}{\partial\varphi}\right) + \frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial(u_{\theta}\cot\theta)}{\partial\varphi} \\ &\quad + 2\cot\theta\left(\frac{\partial u_{\varphi}}{\partial\theta} - u_{\varphi}\cot\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_{\theta}}{\partial\varphi}\right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u_{\varphi}}{\partial\theta} - u_{\varphi}\cot\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_{\theta}}{\partial\varphi}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\begin{aligned} r^2\mathbf{div}_{\Gamma}\left(2\mathbf{D}_{\Gamma}\left(\boldsymbol{u}\right)\right)_{\varphi} &= \frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} + \frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_{\varphi}}{\partial\varphi}\right) + \frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial(u_{\theta}\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial u_{\theta}}{\partial\theta}\right) \\ &\quad + 2\frac{\partial u_{\varphi}}{\partial\theta}\cot\theta + 2u_{\varphi} - 2\frac{u_{\varphi}}{\sin^2\theta} + \frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial u_{\theta}}{\partial\varphi}\cot\theta + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u_{\varphi}}{\partial\theta}\right) \\ &\quad - \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial\theta}\cot\theta + \frac{u_{\varphi}}{\sin^2\theta} + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_{\theta}}{\partial\varphi}\right). \end{aligned}$$

Par suite, nous avons :

$$\begin{aligned}
r^2\mathbf{div}_\Gamma\left(2\mathbf{D}_\Gamma\left(\boldsymbol{u}\right)\right)_\varphi &= 2u_\varphi + \frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} + \frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial(u_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right)\right] \\
&\quad - \frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}\cot\theta - \frac{u_\varphi}{\sin^2\theta} + \frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}\cot\theta \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}\right) \\
&= 2u_\varphi + \frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} + \frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial(u_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right)\right] \\
&\quad - \frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial(u_\varphi\cot\theta)}{\partial\theta} + \frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}\cot\theta \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}\right) \\
&= 2u_\varphi + \frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} + \frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial(u_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right)\right] \\
&\quad - \frac{2}{\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}\right) - \frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}\cot\theta\right] + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta} + u_\varphi\cot\theta\right) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}\right).
\end{aligned}$$

Finalement, la composante suivant φ du vecteur $\mathbf{div}_\Gamma\left(2\mathbf{D}_\Gamma\left(\boldsymbol{u}\right)\right)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathbf{div}_\Gamma\left(2\mathbf{D}_\Gamma\left(\boldsymbol{u}\right)\right)_\varphi =& \frac{2}{r^2}u_\varphi + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi} - \frac{\partial(u_\varphi\sin\theta)}{\partial\theta}\right)\right] \\
&+ \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial(u_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right)\right].
\end{aligned} \tag{E.3.13}$$

Le vecteur $\mathbf{div}_\Gamma\left(2\mathbf{D}_\Gamma\left(\boldsymbol{u}\right)\right)$ s'écrit :

$$\mathbf{div}_\Gamma\left(2\mathbf{D}_\Gamma\left(\boldsymbol{u}\right)\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{div}_\Gamma\left(2\mathbf{D}_\Gamma\left(\boldsymbol{u}\right)\right)_r \\ \mathbf{div}_\Gamma\left(2\mathbf{D}_\Gamma\left(\boldsymbol{u}\right)\right)_\theta \\ \mathbf{div}_\Gamma\left(2\mathbf{D}_\Gamma\left(\boldsymbol{u}\right)\right)_\varphi \end{pmatrix}$$

avec

$$
\begin{aligned}
\mathbf{div}_{\Gamma}\left(2\mathbf{D}_{\Gamma}\left(\boldsymbol{u}\right)\right)_r &= -\frac{4}{r^2}u_r - \frac{2}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial(u_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right)\right] \\
\mathbf{div}_{\Gamma}\left(2\mathbf{D}_{\Gamma}\left(\boldsymbol{u}\right)\right)_\theta &= \frac{2}{r^2}u_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial(u_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right)\right] \\
&\quad + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi} - \frac{\partial(u_\varphi\sin\theta)}{\partial\theta}\right)\right] \\
\mathbf{div}_{\Gamma}\left(2\mathbf{D}_{\Gamma}\left(\boldsymbol{u}\right)\right)_\varphi &= \frac{2}{r^2}u_\varphi + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi} - \frac{\partial(u_\varphi\sin\theta)}{\partial\theta}\right)\right] \\
&\quad + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial(u_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Bibliographie

[Allena et al., 2010] Allena, R., Mouronval, A.-S., and Aubry, D. (2010).
Simulation of multiple morphogenetic movements in the Drosophila embryo by a single 3D finite element model.
J. Mech. Behavior Biomech. Mat., 3 :313–323.

[Aubin, 1982] Aubin, T. (1982).
Nonlinear analysis on manifolds. Monge-Ampere equations, volume 252.
Springer Science & Business Media.

[Bertet et al., 2004] Bertet, C., Sulak, L., and Lecuit, T. (2004).
Myosin-dependent junction remodelling controls planar cell intercalation and axis elongation.
Nature, 429 :667.

[Bertsekas, 1999] Bertsekas, D. P. (1999).
Nonlinear programming.

[Bertsekas and Tsitsiklis, 1997] Bertsekas, D. P. and Tsitsiklis, J. N. (1997).
Parallel and distributed computation : Numerical methods.

[Bird et al., 1987a] Bird, R., Armstrong, R. C., and Hassager, O. (1987a).
Dynamics of polymeric liquids. Volume 1. Fluid mechanics, volume vol1.
Wiley, New-York, second edition.

[Bird et al., 1987b] Bird, R., Armstrong, R. C., and Hassager, O. (1987b).
Dynamics of polymeric liquids. Volume 2. Kinetic theory, volume vol2.
Wiley, New-York.

[Blanchard et al., 2009] Blanchard, G. B., Kabla, A., Schultz, N., Butler, L., Sanson, B., Gorfinkiel, N., Mahadevan, L., and Adams, R. (2009).
Tissue tectonics : morphogenetic strain rates, cell shape change and intercalation.
Nature Methods, 6 :458–464.

[Blankenship et al., 2006] Blankenship, J. T., Backovic, S. T., Sanny, J. S., Weitz, O., and Zallen, J. A. (2006).
Multicellular rosette formation links planar cell polarity to tissue morphogenesis.
Dev. Cell, 11 :459–470.

[Blankenship and Wieschaus, 2001] Blankenship, J. T. and Wieschaus, E. (2001).
Two new roles for the drosophila ap patterning system in early morphogenesis.
Dev., 128 :5129.

[Bonnans et al., 2006] Bonnans, J.-F., Gilbert, J. C., Lemaréchal, C., and Sagastizábal, C. A. (2006).
Numerical optimization : theoretical and practical aspects.
Springer Science & Business Media.

[Brenner and Scott, 2008] Brenner, S. C. and Scott, L. R. (2008).
The mathematical theory of finite element methods, volume 15.
Springer.

[Brezis, 1983] Brezis, H. (1983).
Analyse fonctionelle, volume 5.
Masson.

[Brezzi and Fortin, 1991] Brezzi, F. and Fortin, M. (1991).
Mixed and hybrid finite element methods.
Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA.

[Butler et al., 2009] Butler, L. C., Blanchard, G. B., Kabla, A. J., Lawrence, N. J., Welchman, D. P., Mahadevan, L., Adams, R. J., and Sanson, B. (2009).
Cell shape changes indicate a role for extrinsic tensile forces in drosophila germ-band extension.
Nature Cell Biol.

[Cazals and Pouget, 2003] Cazals, F. and Pouget, M. (2003).
Estimating Differential Quantities using Polynomial fitting of Osculating Jets.
Technical Report RR-4823, INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE.

[Ciarlet, 2000] Ciarlet, P. (2000).
Mathematical elasticity. Volume 3. Theory of shells.
Elsevier.

[Ciarlet, 2002] Ciarlet, P. G. (2002).
The finite element method for elliptic problems, volume 40.
Siam.

[Ciarlet and Raviart, 1972] Ciarlet, P. G. and Raviart, P.-A. (1972).
Interpolation theory over curved elements, with applications to finite element methods.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1(2) :217–249.

[Collinet et al., 2015] Collinet, C., Rauzi, M., Lenne, P.-F., and Lecuit, T. (2015).
Local and tissue-scale forces drive oriented junction growth during tissue extension.
Nature Cell Biol., 17 :1247–1258.

[Conte et al., 2008] Conte, V., Muñoz, J. J., and Miodownik, M. (2008).
A 3d finite element model of ventral furrow invagination in the drosophila melanogaster embryo.
Journal of the mechanical behavior of biomedical materials, 1(2) :188–198.

[Costa et al., 1993] Costa, M., Sweeton, D., and Wieschaus, E. (1993).
Gastrulation in Drosophila : Cellular mechanims of morphogenetic movements, pages 425–465.

[Dapogny et al., 2014] Dapogny, C., Dobrzynski, C., and Frey, P. (2014).

Three-dimensional adaptive domain remeshing, implicit domain meshing, and applications to free and moving boundary problems.
J. Comput. Phys., 262 :358–378.

[Demlow, 2009] Demlow, A. (2009).
Higher-order finite element methods and pointwise error estimates for elliptic problems on surfaces.
SIAM Journal on Numerical Analysis, 47(2) :805–827.

[Demlow and Dziuk, 2007] Demlow, A. and Dziuk, G. (2007).
An adaptive finite element method for the laplace–beltrami operator on implicitly defined surfaces.
SIAM Journal on Numerical Analysis, 45(1) :421–442.

[Desprat et al., 2008] Desprat, N., Supatto, W., Pouille, P.-A., Beaurepaire, E., and Farge, E. (2008).
Tissue deformation modulates twist expression to determine anterior midgut differentiation in drosophila embryos.
Developmental Cell, 15 :470–477.

[Destuynder, 1985] Destuynder, P. (1985).
A classification of thin shell theories.
Acta Applicandae Mathematicae, 4(1) :15–63.

[Destuynder and Salaün, 1990] Destuynder, P. and Salaün, M. (1990).
Une formulation variationnelle mixte pour les modèles généraux de coques minces = a mixed variational formulation for general thin shell models.
Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique, 310(4) :215–220.

[Destuynder and Salaün, 1995a] Destuynder, P. and Salaün, M. (1995a).
A mixed finite element for shell model with free edge boundary conditions part 1. the mixed variational formulation.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 120(3–4) :195–217.

[Destuynder and Salaün, 1995b] Destuynder, P. and Salaün, M. (1995b).
A mixed finite element for shell model with free edge boundary conditions part 2. the numerical scheme.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 120(3–4) :219–242.

[Destuynder and Salaün, 1996] Destuynder, P. and Salaün, M. (1996).
A mixed finite element for shell model with free edge boundary conditions part 3. numerical aspects.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 136(3–4) :273–292.

[Do Carmo, 1976] Do Carmo, M. P. (1976).
Differential geometry of curves and surfaces, volume 2.
Prentice-hall Englewood Cliffs.

[Do Carmo, 1994] Do Carmo, M. P. (1994).
Differential forms and applications.
Springer Science & Business Media.

[Dziuk, 1988] Dziuk, G. (1988).
Finite elements for the beltrami operator on arbitrary surfaces.
Springer Berlin Heidelberg, 1357 :142–155.

[Dziuk and Elliott, 2007] Dziuk, G. and Elliott, C. M. (2007).
Finite elements on evolving surfaces.
IMA journal of numerical analysis, 27(2) :262–292.

[Dziuk and Elliott, 2013] Dziuk, G. and Elliott, C. M. (2013).
Finite element methods for surface pdes.
Acta Numerica, 22 :289–396.

[Edward et al., 1991] Edward, D. A., Brenner, H., and Wasan, D. T. (1991).
Interfacial transport processes and rheology.
Butterworth-Heinemann, Newton, MA, USA.

[Elliott and Stinner, 2010] Elliott, C. M. and Stinner, B. (2010).
Modeling and computation of two phase geometric biomembranes using surface finite elements.
Journal of Computational Physics, 229(18) :6585–6612.

[Elliott et al., 2012] Elliott, C. M., Stinner, B., and Venkataraman, C. (2012).
Modelling cell motility and chemotaxis with evolving surface finite elements.
Journal of The Royal Society Interface, page rsif20120276.

[Étienne et al., 2015] Étienne, J., Fouchard, J., Mitrossilis, D., Bufi, N., Durand-Smet, P., and Asnacios, A. (2015).
Cells as liquid motors : Mechanosensitivity emerges from collective dynamics of actomyosin cortex.
Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 112 :2740–2745.

[Garcke et al., 2014] Garcke, H., Lam, K. F., and Stinner, B. (2014).
Diffuse interface modelling of soluble surfactants in two-phase flow.
Communications in Mathematical Science, 12(8) :1475–1522.

[Gilbarg and Trudinger, 2001] Gilbarg, D. and Trudinger, N. S. (2001).
Elliptic partial differential equations of second order, volume 224.
Springer Science & Business Media.

[Glazier and Graner, 1993] Glazier, J. A. and Graner, F. (1993).
Simulation of the differential adhesion driven rearrangement of biological cells.
Phys. Rev. E, 47 :2128–2154.

[Gurtin et al., 1998] Gurtin, M. E., Weissmüller, J., and Larché, F. (1998).
A general theory of curved deformable interfaces in solids at equilibrium.
Philosophical Magazine A, 78(5) :1093–1109.

[He et al., 2014] He, B., Doubrovinski, K., Polyakov, O., and Wieschaus, E. (2014).
Apical constriction drives tissue-scale hydrodynamic flow to mediate cell elongation.
Nature.

[Hecht, 1981] Hecht, F. (1981).
Construction d'une base de fonctions p_1 non conforme à divergence nulle dans $\mathbb{R}^3$.
RAIRO-Analyse numérique, 15(2) :119–150.

[Heine, 2003] Heine, C.-J. (2003).
Computations of form and stability of rotating drops with finite elements.
PhD thesis, Université de Fieburg.

[Heine, 2004] Heine, C.-J. (2004).
Isoparametric finite element approximation of curvature on hypersurfaces.
Preprint Fak. f. Math. Phys. Univ. Freiburg, (26).

[Heine, 2006] Heine, C.-J. (2006).
Computations of form and stability of rotating drops with finite elements.
IMA J. Numer. Anal., 26(4) :723–751.

[Helfrich, 1973] Helfrich, W. (1973).
Elastic properties of lipid bilayers : theory and possible experiments.
Zeitschrift für Naturforschung C, 28(11-12) :693–703.

[Henrot and Pierre, 2005] Henrot, A. and Pierre, M. (2005).
Variation et optimisation de formes : une analyse géométrique, volume 48.
Springer.

[Irvine and Wieschaus, 1994] Irvine, K. D. and Wieschaus, E. (1994).
Cell intercalation during drosophila germband extension and its regulation by pair-rule segmentation genes.
Development, 120 :827–841.

[James and Lowengrub, 2004] James, A. J. and Lowengrub, J. (2004).
A surfactant-conserving volume-of-fluid method for interfacial flows with insoluble surfactant.
Journal of computational physics, 201(2) :685–722.

[Jensen, 1906] Jensen, J. L. W. V. (1906).
Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes.
Acta Mathematica, 30(1) :175–193.

[Kleinmichel, 1972] Kleinmichel, H. (1972).
Av fiacco/gp mccormick, nonlinear programming : Sequential unconstrained minimization techniques. xiv+ 210 s. m. fig. new york/london/sydney/toronto 1969. john wiley and sons, inc. preis. geb.£ 5, 20.
ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 52(7) :437–437.

[Koiter, 1970] Koiter, W. (1970).
On the foundations of the linear theory of thin elastic walls.
In *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. B*, volume 73, pages 169–195.

[Koiter, 1980] Koiter, W. (1980).
General theory of shell stability.
In *Thin Shell Theory*, pages 63–87. Springer.

[Kostrikin et al., 1997] Kostrikin, A. I., Manin, Y. I., and Alferieff, M. E. (1997).
Linear algebra and geometry.
Gordon and Breach Science Publishers.

[Laadhari et al., 2014] Laadhari, A., Saramito, P., and Misbah, C. (2014).

Computing the dynamics of biomembranes by combining conservative level set and adaptive finite element methods.
J. Comput. Phys., 263 :328–352.

[Lander, 2007] Lander, A. D. (2007).
Morpheus unbound : Reimagining the morphogen gradient.
Cell, 128 :245–256.

[Lenoir, 1986] Lenoir, M. (1986).
Optimal isoparametric finite elements and error estimates for domains involving curved boundaries.
SIAM Journal on Numerical Analysis, 23(3) :562–580.

[Lye et al., 2015] Lye, C., Blanchard, G., Naylor, H., Muresan, L., Huisken, J., Adams, R., and Sanson, B. (2015).
Mechanical coupling between endoderm invagination and axis extension in drosophila.
PLoS Biol., in press.

[Lye and Sanson, 2011] Lye, C. M. and Sanson, B. (2011).
Tension and epithelial morphogenesis in *drosophila* embryos.
In Labouesse, M., editor, *Forces and Tension in Development*, volume 95 of *Curr. Topics Dev. Biol.*, pages 145–187. Elsevier.

[Madhavan, 2014] Madhavan, P. (2014).
Analysis of discontinuous Galerkin methods on surfaces.
PhD thesis, University of Warwick.

[Mardare, 2003] Mardare, S. (2003).
Inaquality of korn's type on compact surfaces without boundary.
Chinese Annals of Mathematics, 24(02) :191–204.

[Meuel et al., 2013] Meuel, T., Xiong, Y. L., Fischer, P., Bruneau, C. H., Bessafi, M., and Kellay, H. (2013).
Intensity of vortices : from soap bubbles to hurricanes.
Scientific Reports, 3 :3455 EP –.

[Nedelec, 1976] Nedelec, J. (1976).
Curved finite element methods for the solution of singular integral equations on surfaces in r 3.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 8(1) :61–80.

[Niculescu and Persson, 2006] Niculescu, C. and Persson, L.-E. (2006).
Convex functions and their applications : a contemporary approach.
Springer Science & Business Media.

[Nitschke et al., 2012a] Nitschke, I., Voigt, A., and Wensch, J. (2012a).
A finite element approach to incompressible two-phase flow on manifolds.
Journal of Fluid Mechanics, 708 :418–438.

[Nitschke et al., 2012b] Nitschke, I., Voigt, A., and Wensch, J. (2012b).
A finite element approach to incompressible two phase flow on manifolds.
J. Fluid Mech.

[Olshanskii et al., 2009] Olshanskii, M., Reusken, A., and Grande, J. (2009).

A finite element method for elliptic equations on surfaces.
SIAM Journal on Numerical Analysis, 47(5) :3339–3358.

[Polyak, 1971] Polyak, B. (1971).
The convergence rate of the penalty function method.
USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 11(1) :1–12.

[Rauzi and Leptin, 2013] Rauzi and Leptin (2013).
Physical models of mesoderm invagination in drosophila embryo.

[Rauzi et al., 2008a] Rauzi, M., Verant, P., Lecuit, T., and Lecuit, P.-F. (2008a).
Nature and anisotropy of cortical forces orienting drosophila tissue morphogenesis.
Nat. Cell. Biol., 10 :1401–1410.

[Rauzi et al., 2008b] Rauzi, M., Verant, P., Lecuit, T., and Lenne, P.-F. (2008b).
Nature and anisotropy of cortical forces orienting drosophila tissue morphogenesis.
Nat. Cell. Biol., 10 :1401–1410.

[Reuther and Voigt, 2014] Reuther, S. and Voigt, A. (2014).
The interplay of curvature and vortices in flow on curved surfaces.
arXiv preprint arXiv :1406.5021.

[Saramito, 2012] Saramito, P. (2012).
Efficient C++ finite element computing with Rheolef.
`https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00573970`.

[Saramito, 2016] Saramito, P. (to appear, 2016).
Complex fluids : modeling and algorithms.
Springer.

[Supatto et al., 2005] Supatto, W., Débarre, D., Moulia, B., Brouzés, E., Martin, J.-L., Farge, E., and Beaurepaire, E. (2005).
In vivo modulation of morphogenetic movements in drosophila embryos with femtosecond laser pulses.
Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 102(4) :1047–1052.

[Titli et al., 2015] Titli, S., Gay, C., Graner, F., Marcq, P., Molino, F., and Saramito, P. (2015).
Colloquium : Mechanical formalisms for tissue dynamics.
Eur. Phys. J. E, 38 :33.

[Tlili et al., 2015] Tlili, S., Gay, C., Graner, F., Marcq, P., Molino, F., and Saramito, P. (2015).
Colloquium : mechanical formalism for tissue dynamics.
Eur. Phys. J. E, 38 :33–63.

[Yeung et al., 2005] Yeung, T., Georges, P. C., Flanagan, L. A., Marg, B., Ortiz, M., Funaki, M., Zahir, N., Ming, W., Weaver, V., and Janmey, P. A. (2005).
Effects of substrate stiffness on cell morphology, cytoskeletal structure, and adhesion.
Cell Motil. Cytoskeleton, 60 :24–34.

[Young et al., 1993] Young, P. E., Richman, A. M., Ketchum, A. S., and Kiehart, D. P. (1993).
Morphogenesis in Drosophila requires nonmuscle myosin heavy chain function.
Genes Dev., 7 :29–41.

[Zallen and Wieschaus, 2004] Zallen, J. A. and Wieschaus, E. (2004).
Patterned gene expression directs bipolar planar polarity in drosophila.
Dev. Cell, 6 :343–355.

[Zemel et al., 2010] Zemel, A., Rehfeldt, F., Brown, A. E. X., Discher, D. E., and Safran, S. A. (2010).
Optimal matrix rigidity for stress-fibre polarization in stem cells.
Nature Phys., 6 :468–473.

[Zhong-Can and Helfrich, 1989] Zhong-Can, O.-Y. and Helfrich, W. (1989).
Bending energy of vesicle membranes : General expressions for the first, second, and third variation of the shape energy and applications to spheres and cylinders.
Physical Review A, 39(10) :5280.

[Zlámal, 1974] Zlámal, M. (1974).
Curved elements in the finite element method. ii.
SIAM Journal on Numerical Analysis, 11(2) :347–362.

Table des figures

2.1 Un exemple de configuration dans $\mathbb{R}^3$. Les directions principales $\boldsymbol{t}_1$ et $\boldsymbol{t}_2$ sont respectivement les vecteurs propres associés aux courbures principales κ_1 et κ_2. . 23

2.2 Exemple de surface Γ définie comme le niveau zéro d'une fonction régulière ϕ dans le plan $d = 2$. La fonction ϕ est définie sur $\mathbb{R}^2$. La bande U_δ de largeur δ est représentée en jaune. Chaque point contenu dans U_δ s'écrit de façon unique par la décomposition (2.2.6). 24

2.3 Approximation d'une surface régulière par une surface polygonale pour $d = 2$. La taille caractéristique des éléments de Γ_h doit être choisie suffisamment petite pour assurer l'inclusion $\Gamma_h \subset U_\delta$. 26

2.4 Projection orthogonale de K sur la surface régulière Γ. 26

2.5 Exemple de construction d'un élément courbe de degré 2 de Γ_h^2 à partir d'un segment contenu dans Γ_h^1. On construit ainsi segment par segment une approximation polynomiale par morceaux de degré 2 de la surface Γ. 27

2.6 Approximation polynomiale de degré supérieur d'une surface régulière Γ. 28

2.7 Approximation affine $(k = 1)$ quasi-uniforme de la surface de niveau zéro définie par (2.4.17a) en 3D avec les lunettes rouge-cyan et les erreurs en échelle logarithmique sur nos définitions de normale approchée 2.1 et du tenseur de courbure 2.2, respectivement en norme H^1, L^2 et L^∞ sur des approximations de degré polynomial k de la surfaces (2.4.17a). 52

2.8 Approximation affine $(k = 1)$ quasi-uniforme de la surface de niveau zéro définie par (2.4.17b) en 3D avec les lunettes rouge-cyan et les erreurs sur nos définitions de normale approchée 2.1 et du tenseur de courbure 2.2, respectivement en norme H^1, L^2 et L^∞ sur des approximations de degré polynomial k de la surfaces (2.4.17b). 53

2.9 Approximation affine $(k = 1)$ quasi-uniforme de la surface de niveau zéro définie par (2.4.17c) en 3D avec les lunettes rouge-cyan et les erreurs sur nos définitions de normale approchée 2.1 et du tenseur de courbure 2.2, respectivement en norme H^1, L^2 et L^∞ sur des approximations de degré polynomial k de la surfaces (2.4.17c). 54

2.10 Approximation affine $(k = 1)$ quasi-uniforme de la surface de niveau zéro définie par (2.4.17d) en 3D avec les lunettes rouge-cyan et les erreurs sur nos définitions de normale approchée 2.1 et du tenseur de courbure 2.2, respectivement en norme H^1, L^2 et L^∞ sur des approximations de degré polynomial k de la surfaces (2.4.17d). 55

2.11 Erreurs commises en échelle logarithmique sur tenseur de courbure en utilisant l'algorithme 1 pour $n = 5, 20$ en norme L^2 et L^∞ sur des approximations affines par morceaux des surfaces (2.4.17a)-(2.4.17d). 59
2.12 L'évolution de l'erreur commise en échelle logarithmique sur le tenseur de courbure exacte $\boldsymbol{H}$ en fonction du nombre d'itérations n en norme L^2 sur des approximations affines par morceaux des surfaces de niveau zéro (2.4.17a)-(2.4.17d). . . 60
2.13 L'évolution de l'erreur commise en échelle logarithmique sur le tenseur de courbure exacte $\boldsymbol{H}$ en fonction du nombre d'itérations n en norme L^∞ sur des approximations affines par morceaux des surfaces de niveau zéro (2.4.17a)-(2.4.17d). 61
2.14 Erreurs commises en échelle logarithmique sur tenseur de courbure en utilisant l'algorithme 1 pour $n = n_2^*, n_\infty^*$ en norme L^2 et L^∞ sur des approximations affines par morceaux des surfaces (2.4.17a)-(2.4.17d). 62
2.15 Les courbes des fonctions $n_2^*(h)$ et $n_\infty^*(h)$ en échelle logarithmique sur des approximations affines par morceaux des surfaces de niveau zéro (2.4.17a)-(2.4.17b). 63
2.16 Erreurs commises en échelle logarithmique sur le tenseur de courbure en utilisant l'algorithme 1 pour $n = n_{\log}$ en norme L^2 et L^∞ sur des approximations affines par morceaux des surfaces (2.4.17a)-(2.4.17d). 64
2.17 Erreurs commises en échelle logarithmique sur le tenseur de courbure en utilisant l'algorithme 1 pour $n = n_{\log}$ en norme L^2 et L^∞ sur des approximations de degré polynomial k de la surface (2.4.17a). 64
2.18 Erreurs commises en échelle logarithmique sur le tenseur de courbure en utilisant l'algorithme 1 pour $n = n_{\log}$ en norme L^2 et L^∞ sur des approximations de degré polynomial k de la surface (2.4.17b). 65
2.19 Erreurs commises en échelle logarithmique sur le tenseur de courbure en utilisant l'algorithme 1 pour $n = n_{\log}$ en norme L^2 et L^∞ sur des approximations de degré polynomial k de la surface (2.4.17c). 65
2.20 Erreurs commises en échelle logarithmique sur le tenseur de courbure en utilisant l'algorithme 1 pour $n = n_{\log}$ en norme L^2 et L^∞ sur des approximations de degré polynomial k de la surface (2.4.17d). 66
2.21 Erreurs commises en échelle logarithmique sur la courbure moyenne en norme L^2 et L^∞ en utilisant des approximations affines par morceaux de la sphère unité. 67
2.22 Erreur en échelle logarithmique sur la courbure moyenne en norme L^∞ en utilisant des approximations affines par morceaux de la sphère unité. 68

3.1 A gauche, solution approchée et à droite l'interpolée de la solution exacte (3.6.1) sur une approximation affine par morceaux de la surface (2.4.17a). 100
3.2 Erreurs commises en échelle logarithmique sur la solution exacte (3.6.1) en norme H^1 en utilisant le problème 3.5 sur des approximations de degré polynomial k des surfaces (2.4.17a)- (2.4.17d). 103
3.3 Erreurs commises en échelle logarithmique sur la solution exacte (3.6.1) en norme L^2 en utilisant le problème 3.5 sur des approximations de degré polynomial k des surfaces (2.4.17a)- (2.4.17d). 104

3.4 Erreurs commises en échelle logarithmique sur la solution exacte (3.6.1) en norme L^∞ en utilisant le problème 3.5 sur des approximations de degré polynomial k des surfaces (2.4.17a)- (2.4.17d). 105

4.1 (a) Solution approchée obtenue par l'approche 4.7 dans le cas d'une approximation affine par morceaux de la sphère unité en utilisant la combinaison $P_2 - P_1 - P_1$ pour la solution $(\boldsymbol{u}_{\gamma,h}, \mathrm{p}_h, \boldsymbol{\theta}_h)$. (b) L'interpolée de Lagrange de la solution exacte sur la même approximation affine par morceaux. 125

4.2 Erreurs commises en échelle logarithmique sur la solution exacte $(\boldsymbol{u}_\gamma, 0, 0)$ respectivement en norme L^2 et L^∞ sur des approximations affines par morceaux de la sphère unité. 126

4.3 (a) Lignes de niveau de la solution approchée dans le cas d'une approximation isoparamétrique de degré 2 de la sphère unité en pour la combinaison $P_2 - P_1 - P_1$. (b) Lignes de niveau de l'interpolée de Lagrange de la solution exacte. (c) et (d) Erreurs commises en échelle logarithmique sur la solution exacte $(\boldsymbol{u}_\gamma, 0, 0)$ respectivement en norme L^2 et L^∞ sur des approximations isoparamétriques de degré 2 de la sphère unité. 127

4.4 (a) Lignes de niveau de la solution approchée dans le cas d'une approximation isoparamétrique de degré 2 de la sphère unité en pour la combinaison $P_3 - P_2 - P_2$. (b) Lignes de niveau de l'interpolée de Lagrange de la solution exacte. (c) et (d) Erreurs commises en échelle logarithmique sur la solution exacte $(\boldsymbol{u}_\gamma, 0, 0)$ respectivement en norme L^2 et L^∞ sur des approximations isoparamétriques de degré 2 de la sphère unité. 128

4.5 Erreurs commises en échelle logarithmique sur la solution exacte $(\boldsymbol{u}_\gamma, 0, 0)$ respectivement en norme L^2 et L^∞ sur des approximations affines par morceaux de la sphère unité pour les combinaisons $P_3 - P_1 - P_1$ et $P_3 - P_2 - P_1$. 129

5.1 Visualisation d'un embryon de *Drosophile* et vecteurs déformation lors du début de l'extension de la bande germinale, tiré de [Supatto et al., 2005]. Les triangles désignent le sillon céphalique. 132

5.2 Géométrie de l'embryon de *Drosophile* au cours de l'extension de la bande germinale. (A) Géométrie initiale. Les cellules couvrent l'ensemble de la surface de l'embryon, quelques unes seulement sont représentées. (B) Géométrie finale. La forme de l'embryon est inchangée, mais les cellules qui composent la bande germinale se sont déplacées par un écoulement en surface. (C) Détail des cellules. (D) Seule l'actine formant la surface apicale est prise en compte dans la modélisation, les autres structures de la cellule se comportant comme un fluide relativement peu visqueux et passif aux échelles de temps de l'écoulement observé. 133

5.3 Localisation de la myosine sur la surface apicale au début de l'extension de la bande germinale. (A) La myosine (vert) est spécifiquement présente sur les jonctions cellule-cellule (rouge) de la bande germinale (côté ventral, V) et non côté dorsal (D) [Bertet et al., 2004]. (B) Dans la bande germinale, la concentration de myosine (blanc) est renforcée le long des jonctions cellule-cellule orientées dans la direction dorso-ventrale (DV) par rapport aux jonctions orientées dans la direction antéro-postérieure (AP) [Zallen and Wieschaus, 2004], image [Bertet et al., 2004]. (C) Schéma de la distribution de myosine utilisée dans le modèle. Un terme d'intensité de l'activité de la myosine, $\boldsymbol{\sigma}_a$, vaut zéro en dehors de la bande germinale (zone surlignée) et prend des valeurs positives dans celle-ci, comme observé en (A). Le champ de vecteurs unitaires $\boldsymbol{e}_{DV}$ permet de repérer la direction dorsoventrale, et de définir en tout point de la surface un tenseur d'orientation $\boldsymbol{e}_{DV} \otimes \boldsymbol{e}_{DV}$ qui correspond aux orientations vues en (B). Le produit $\boldsymbol{\sigma}_a = \sigma_a \boldsymbol{e}_{DV} \otimes \boldsymbol{e}_{DV}$ correspond donc au tenseur de contractilité de l'actomyosine du modèle [Étienne et al., 2015], et le terme source $\boldsymbol{f}$ vaut $\boldsymbol{f} = \mathbf{div}_\Gamma(\boldsymbol{\sigma}_a)$. . . . 134

5.4 Écoulements générés par une contraction locale (zone marquée en bleu) et anisotrope. (a-d) Cas d'un embryon présentant le sillon céphalique (ce qui correspond au cas biologique), (e-f) Embryon de même forme mais ne présentant pas de sillon céphalique. Vues selon l'axe y (a,c,e) ou selon l'axe z depuis les z négatifs (b,d,f) du champ de vitesse (a,b) et des lignes de courant (c,d,e,f). On note que la présence du sillon céphalique est la cause de l'asymétrie de l'écoulement. 138

5.5 Example of the influence of geometry on forces. The same Y-shaped system of ropes (blue lines) is arranged in different geometries (angle α) and is otherwise identical. When subjected to a force $\vec{F}$, mechanical balance requires that the forces at the anchorages (blue circles) are such that $\vec{F}_L + \vec{F}_R = -\vec{F}$. This leads to a behaviour of the magnitude of forces at anchorages as $1/\tan\alpha$. 140

5.6 Flow field generated by planar-polarised myosin contractility in the GB. (a) Global views. The cephalic furrow is represented by a trough, the ventral furrow is not represented as we assume it to have closed completely at the time corresponding to the simulations. Red, ventral region of the GB where we assume myosin planar-polarised contractility. White arrows, velocity vectors (arbitrary units, not all vectors calculated are represented). (b) Close-up of the cephalic furrow region. Every velocity vector calculated is represented, in arbitrary units 10 times larger as in panel (a). 143

5.7 Flow field generated by planar-polarised myosin contractility in part of the GB. Red, ventral region of the GB where we assume myosin planar-polarised contractility. White arrows, velocity vectors (arbitrary units, not all vectors calculated are represented). 144

5.8 Rate of strain (arbitrary units) along the AP axis in the flow of figure 5.7. At the bottom, the outline of the ventral side of the embryo surface is recalled, with dots at mesh intersections with the sagittal plane ($y = 0$) colour-coded in red where myosin is present and black elsewhere. The rate of strain is calculated along lines at different distances from the ventral midline. Distances are normalised by the radius of the embryo shape in the transverse plane. Negative strain rates correspond to tissue compression, positive ones to tissue elongation (either by cell shape changes, or by AP→DV intercalations, see [Blanchard et al., 2009]. . . 144

5.9 Flow field generated by planar-polarised myosin contractility in the GB in the absence of a cephalic furrow is symmetric of nearly symmetric. (a) With a dissymetric planar-polarised myosin activity. The flow is much stronger toward anterior than in figure 5.6a at the anterior limit of GB. (b) With a symmetric distribution of myosin activity, the flow is perfectly symmetric. (c) With a symmetric distribution of myosin activity and a dissymetry in the geometry introduced by the cephalic furrow, the flow is strongly asymmetric and more oriented towar the posterior end. 147

A.1 Exemple de configuration en dimension 2 d'une surface fermée sans bord ayant la courbure moyenne nulle sur une portion. Sur cet exemple la surface minimale S contenant cette portion $(S \cap \Gamma)$ est une droite. 154

B.1 Les différentes étapes dans la construction d'un maillage de l'embryon de la *Drosophile*. 160

B.2 (a) Géométrie de la *Drosophile* sans le sillon céphalique. (b) Géométrie de la *Drosophile* avec le sillon céphalique obtenue directement par l'algorithme 3. (c) Géométrie de la *Drosophile* avec le sillon céphalique après adaptation de maillage. (d) Zoom sur le sillon céphalique de (b). (e) Zoom sur le sillon céphalique de (c). 161