Etude didactique des situations de recherche pour la classe concernant des jeux combinatoires de type Nim

Ximena Colipan

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Mathématiques-Informatique**

Arrêté ministérial : 12.1

Présentée par

Ximena COLIPAN URIBE

Thèse dirigée par **Sylvain GRAVIER**
et codirigée par **Denise GRENIER**

préparée au sein **de l'Institut Fourier**
et de **l'école doctorale MSTII**

Étude didactique des situations de recherche pour la classe concernant des jeux combinatoires de type Nim

Thèse soutenue publiquement le **16 janvier 2014**,
devant le jury composé de :

M.,Roland BACHER
Maître de conférence, Université de Grenoble 1, Président
Mme, Viviane DURAND-GUERRIER
Professeur, Université de Montpellier 2, Rapporteur
M., Michel RIGO
Professeur, Université de Liège, Rapporteur
M.,Eric DUCHENE
Maître de conférence, Université de Lyon 1, Examinateur
M., Sylvain GRAVIER
Directeur de recherche, CNRS et Université de Grenoble 1, Directeur de thèse
Mme, Denise GRENIER
Maître de conférence, Université de Grenoble 1, Co-Directeur de thèse

A mi esposo Alvaro y a nuestra hija Sofía
que llegó a iluminar estos últimos años de tesis

Remerciements

Cette thèse a profité du soutien financier du CONICYT au Chili. Alors, je voudrais commencer par remercier la présidente du Chili, Michelle Bachelet, qui grâce à son intervention en augmentant les bourses à rendu cette thèse possible.

Je remercie énormément les membres de mon jury de thèse : Michel Rigo et Vivianne Durand-Guerrier, qui ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse, merci d'avoir accepté de lire, commenter et corriger ma thèse en faisant un travail très riche et minutieux. Roland Bacher et Éric Duchene, merci d'avoir accepté d'être examinateurs lors de la soutenance.

Un grand merci à mes directeurs de thèse Denise et Sylvain.

Sylvain, merci de m'avoir accepté comme thésarde, même si tu en avais déjà mille ! Merci d'interpréter mes idées et de les rendre plus compréhensibles, merci de voir toujours plus loin et de m'apporter de bonnes idées et des réflexions profondes.

Denise, merci pour avoir donné forme à tout le chemin parcouru, merci pour ta patience, ton respect et ton ouverture, qui se sont manifestement exprimés dans plusieurs occasions que je ne vais pas oublier, merci de croire en moi, merci de ne jamais dire : « ce n'est pas possible », et merci, aussi, pour tous tes conseils pratiques à l'heure de m'apprendre le métier. M'arrêter pour te remercier ici m'a fait saisir la profondeur de ton influence sur moi dans ce travail.

Je voudrais remercier toutes les personnes que j'ai rencontrées à l'Institut Fourier pendant les ans que j'y ai passé, le personnel administratif et technique, les thésards, les membres permanents, les post-docs et les ATER.

Merci aussi à Hamid Chaachoua mon professeur du master, pour son aide dans le master 2 et par son soutien à mon candidature de bourse de doctorat.

Merci à mes anciens professeurs Alvaro Poblete y Verónica Diaz qui me ont montré «le monde de la didactique».

Merci aux correcteurs de français de cette texte , Celine, Corine, Dominique, Luc, Marie, Moktar, Nicolas, Paty, Simon et Souad, d'avoir collaboré énormément pour que cette thèse devienne plus compréhensible et merci à Gaby d'avoir été aussi efficace pour imprimer ma thèse rapidement.

Merci à mes amies mexicains : Claudia, Carlitos par les super soirées de jeux et de dîners (lo mejor que he probado en mi vida) et Abby, Josué pour nous avoir accueillir chez eux et merci encore de prendre ma place en faisant les formalités administratives que la distance m'empêchait d'affronter. Merci à vous, mexicains, pour votre amitié y gracias por habernos mostrado su hermoso país.

Merci à mon ami et collège Nicolas Giroud car dans cette thèse il y a beaucoup de toi, de tes conseils, de tes corrections, de tes commentaires, de tes réponses... Je n'en finirai jamais avec cette liste ! Merci mon cher ami pour ta compagnie, je suis très heureuse d'avoir partagé avec toi et d'avoir appris de ta solidarité et de ta bonne volonté avec Alvaro et moi.

Merci aux amis « faites en Grenoble » Hervé, Celine, Camilo, Adela, Clara, merci d'avoir rendu nos vies à Grenoble très heureuses. Merci aussi à notre café « l'InsTant » pour avoir été notre refuge pendant ce temps.

Je voudrais remercier particulièrement Fadila pour avoir aussi bien gardé Sofía, pour l'avoir rendu heureuse avec tes jeux et câlins tandis que sa maman travaillait comme une folle ! Muchas, muchas gracias, une grande partie de cette thèse a pu se faire grâce à toi.

Merci à Max Leyton. Merci d'être, tout simplement, toujours présent.

Finalmente, el agradecimiento más importante de todos es para mi familia.

A mi papá Florencio Colipan y mi mamá Juana Uribe. Gracias por su apoyo incondicional, por haberme dado la educación que me permite estar hoy acá y simplemente por ser mis padres. A mis hermanos Lesly, Liliana y Daniel y a mi hermoso sobrino Benjamín, gracias por estar siempre ahí.

A mi abuela Sol Rebeca y a mis tías Charo, Vicky y Kika, por todo el apoyo, amor y cariño que ustedes me han dado durante mi vida. Gracias por vivir mis emociones como si fueran las suyas.

A mi suegra Verónica, gracias por el apoyo que me has dado siempre. Gracias por haberme soportado en esta epoca de estrés y por cuidar de Sofía.

Pero nada esto habría sido posible sin tí, Alvaro Liendo. Es imposible expresarte en papel (y lo sabes) todo lo que has influenciado en mí, quizá vagamente puedo decir que tu eres simplemente ¡mi vida ! . Esta tesis eres tú, es Sofía, es nosotros. Te amo.

Table des matières

Introduction

« Nous savons que le seul moyen de « faire » des mathématiques, c'est de chercher et résoudre certains problèmes spécifiques et, à ce propos, de poser de nouvelles questions » (Brousseau, 2004).

Contexte

La thèse s'inscrit dans le thème « Combinatoire et Didactique des mathématiques » de l'Institut Fourier. Notre recherche est centrée sur l'étude du rôle, pour l'apprentissage des savoir-faire fondamentaux de l'activité mathématique, des jeux combinatoires, et plus particulièrement des *jeux de type Nim*. Nous mettons sous l'expression « savoir-faire fondamentaux » les savoirs, méthodes et techniques qui sont à la base de toute activité mathématique : l'expérimentation, l'étude de cas particuliers, l'énoncé et l'étude de conjectures, la construction d'exemples et contre-exemples, la modélisation, l'élaboration et l'écriture de preuves, la définition d'objets, etc. (Grenier et Payan, 2002).

Depuis de nombreuses années, dans les recherches en didactique des mathématiques, il existe un intérêt particulier pour la «résolution de problèmes » en classe. Cette intérêt vient, essentiellement, d'un constat bien partagé dans l'enseignement que ces savoir-faire sont nécessaires pour faire des mathématiques. Ce constat a amené plusieurs chercheurs en didactique à considérer les «problèmes ludiques » comme un dispositif pouvant participer au processus d'apprentissage des mathématiques. Ainsi, Brousseau (2002), Godot (2005), Giroud (2011), Pelay (2011), de Guzmán (1990), l'équipe PREMAT Edo *et al.* (2008), et d'autres auteurs, ont démontré que les problèmes ludiques peuvent être utilisés pour introduire ou explorer une notion, mais aussi pour favoriser l'apprentissage des savoir-faire associés à la recherche et à la résolution de problèmes mathématiques. Nous en donnons quelques éléments dans les chapitres V et VI.

Par ailleurs, les travaux sur le modèle des « Situations de Recherche pour la Classe » (SiRC) menés depuis vingt ans, ont prouvé la pertinence des mathématiques discrètes (source de nombreux jeux mathématiques) pour faire travailler ces savoir-faire fondamentaux de l'activité mathématique. De même, nous verrons que dans plusieurs recherches didactiques concernant les SiRC, des problèmes combinatoires ont été utilisés comme dispositifs pour la dévolution de l'activité de recherche.

Parmi les recherches sur le SiRC nous pouvons citer :

- Grenier et Payan (1998) qui ont caractérisé le modèle SiRC, construit et étudié des problèmes de mathématiques discrètes relevant de ce modèle.
- Rolland (1998) dans son travail de thèse a plus particulièrement étudié la pertinence des mathématiques discrètes et des problèmes sur le modèle SiRC pour la compréhension de la notion de modèle en mathématique.

- Ouvrier-Buffet (2003) a présenté dans sa thèse plusieurs situations issues des mathématiques discrètes relevant du SiRC en ce qui concerne l'apprentissage du sens des définitions en mathématique.
- Deloustal-Jorrand (2004) dans son travail de thèse, a construit et montré pour l'apprentissage plus spécifiquement du raisonnement et l'implication mathématique.
- Godot (2005) a étudié les situations de recherche en classe et dans le cadre de la vulgarisation mathématique.
- Cartier (2008) a travaillé sur l'utilisation de l'objet mathématique graphe pour l'enseignement de la preuve et de la modélisation.
- Giroud (2011) a étudié la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe proposées sur forme de jeux combinatoires.

Les SiRC relèvent du modèle situation a-didactique au sens de Brousseau (voir section V.1.1) et peuvent être considérées comme un modèle pour une transposition en classe de l'activité du chercheur en mathématique. Ce modèle est caractérisé de la manière suivante (Grenier et Payan, 2002) :

1. La situation s'inscrit dans une problématique de recherche professionnelle.
2. La question initiale est facile d'accès.
3. Des stratégies initiales existent.
4. Plusieurs stratégies d'avancée dans la recherche et plusieurs développements sont possibles.
5. Une question résolue renvoie très souvent à une nouvelle question.
6. Les variables du problème sont laissées libres pour l'élève.

Dans une SiRC, il n'y a pas nécessairement de savoir mathématique notionnel spécifique visé, même si, bien sûr, des notions mathématiques sont évidemment mobilisées ou explorées. Les apprentissages prioritairement visés sont ceux qui caractérisent l'activité mathématique décrits. Ce modèle sera plus détaillé dans le chapitre IV.

Dans ce contexte, nous nous sommes intéressés à l'étude de quelques jeux combinatoires, et plus spécifiquement aux « jeux de type Nim ». Nous émettons l'hypothèse que ceux-ci présentent des caractéristiques intéressantes pour la construction de situations de type SiRC :

- Ils présentent un aspect ludique.
- Le jeu à deux joueurs les rend plus attractif.
- Ils sont bien adaptés pour une utilisation en classe, dans la plupart des cas, grâce à la simplicité du matériel requis.
- Leur règles sont très simples et peu nombreuses.
- Chaque partie prend peu de temps.
- Il y a plusieurs méthodes de résolution.

Cependant, même si les énoncés de ces problèmes-jeux sont faciles à comprendre, leur résolution fait appel à des raisonnements plus complexes. C'est pour cette raison qu'ils nous intéressent d'un point de vue didactique. En effet, nous hypothèse de travail est que la résolution de ce type de problèmes en classe peut susciter le plaisir de faire des mathématiques, favoriser différents types de raisonnement et développer la créativité de l'élève quant à la création de nouveaux problèmes.

Questions et hypothèses de départ

Le sujet de notre recherche est **la construction, expérimentation et analyse des SiRC basées sur des jeux combinatoires de type Nim pour des élèves du secondaire et des étudiants en licence, afin de leur faire construire et développer les savoir-faire indispensables à la mise en œuvre d'une « démarche mathématique ».**

Notre questionnement général se situe donc autour des questions suivantes :

Question de recherche 1 (QR1)

> *Quels savoirs notionnels et quels savoir-faire fondamentaux de l'activité mathématique sont mis en œuvre dans les jeux combinatoires de type Nim ?*

Question de recherche 2 (QR2)

> *Quelles sont les conditions et contraintes épistémologiques et didactiques pour que des jeux de type Nim permettent l'apprentissage en classe des savoirs identifiés en QR1 ?*

Notre travail de recherche étant centré sur l'apprentissage des savoir-faire liés à la l'activité mathématique, nous faisons l'hypothèse fondamentale suivante :

Hypothèse générale :

> ***L'utilisation de certains jeux combinatoires de type Nim en classe est pertinente pour l'apprentissage des savoir-faire fondamentaux de l'activité mathématique.***

Dans cette thèse, nous nous appuierons d'une part, sur certains éléments de la théorie des situations didactiques de Brousseau (Brousseau, 2004) et de la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (Vergnaud, 1994) et d'autre part, sur le modèle SiRC, contribuant a préciser ce modèle.

Structure du document

Le texte est présenté en trois parties. La première décrit notre étude épistémologique et didactique des jeux combinatoires alors que la deuxième et troisième partie concerne l'étude et l'expérimentation des SiRC.

Dans la première partie, nous définirons quelques concepts clés tels que : « jeu combinatoire », « position gagnante » et « position perdante ». Nous exposerons ensuite une analyse mathématique du jeu de Nim classique. Puis, aux chapitres V et VI nous nous concentrerons sur la place et le rôle des jeux combinatoires de type Nim dans l'enseignement des Mathématiques. Pour cela, nous ferons une étude des méthodes et des savoirs associés à la « résolution de problèmes » dans les institutions scolaires françaises. Nous présenterons les résultats de quelques travaux didactiques autour de la notion de jeu dans l'enseignement de mathématique.

Nous remarquerons que l'analyse mathématique d'un jeu combinatoire fait appel à des raisonnements complexes. C'est pourquoi au chapitre IV nous nous servirons du modèle SiRC pour étudier ces situations. Ce modèle nous aidera à construire une situation de classe en situant les jeux de type Nim dans la pratique de la recherche et la résolution de problèmes.

L'étude et les analyses décrites dans ce première partie nous amènent à formuler de nouvelles hypothèses sur les conditions de dévolution et de transposition en classe des jeux combinatoires de type Nim.

De ce fait, dans les parties suivantes, nous étudierons deux situations-recherche : la première, nommée « jeu d'Euclide géométrique » est une situation de jeu de type Nim, construite spécifiquement pour cette recherche, basée sur un jeu d'Euclide classique. La seconde, nommée le « jeu du chocolat », est une situation expérimentée régulièrement dans l'équipe maths-à-modeler, mais dont l'étude didactique n'avait pas vraiment été faite. Nous nous servirons des analyses mathématique et didactique menées dans cette thèse pour étudier ces situations, et donné quelques éléments sur la dévolution et la gestion de ces situations repérées lors de nos expérimentations en classe. Nous conclurons en explicitant les apprentissages des élèves et les conséquences de nos choix didactiques.

Première partie

Un point de vue épistémologique et didactique sur des jeux combinatoires

CHAPITRE I

Jeux Combinatoires en mathématiques

I.1. Introduction

Les jeux ont existé tout au long de l'histoire, mais l'application systématique des mathématiques aux jeux est un phénomène relativement récent.

La théorie des jeux combinatoires est une théorie mathématique qui étudie les jeux à deux joueurs qui jouent à tour de rôle, d'une façon définie par des règles avec le but d'atteindre une certaine condition de victoire.

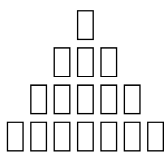
Un fameux jeu de la théorie des jeux combinatoires est le jeu de Marienbad que nous exposons dans la suite. Ce jeu est répresentatif des types de jeu que nous étudierons dans cette thèse.

Le jeu de Marienbad

Le célèbre jeu de Marienbad tire son nom du film « l'année dernière à Marienbad » d'Alain Resnais sorti en 1961. Dans le film l'un des protagonistes, appelé M, propose à ses interlocuteurs de jouer avec lui un jeu de société où, de façon surprenante, il gagne toujours. M prononce cette phrase à la portée symbolique « je puis perdre, mais je gagne toujours... ».

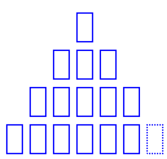
Règles du jeu

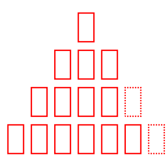
Dans ce jeu à deux joueurs, il y a quatre tas, avec respectivement un, trois, cinq et sept cartes. Les joueurs doivent, à tour de rôle, prendre un nombre quelconque (non nul) de cartes dans un et un seul tas de son choix (on dira qu'il joue un coup). Le perdant est celui qui prend la dernière carte.



Exemple de partie

Nous avons le premier joueur « Bleu » à Gauche et le deuxième joueur « Rouge » à Droite. Dans le premier tour, Bleu prend une carte du dernier tas et Rouge prend une carte du troisième tas.





Ensuite, Bleu prend tout ce qui reste du dernier tas et Rouge prend deux cartes du troisième tas.

Au troisième tour, Bleu prend une carte du troisième tas et Rouge prend deux cartes du deuxième tas.

Puis, Bleu prend la carte du premier tas et Rouge la carte qui reste du deuxième tas.

Finalement, Bleu doit prendre la dernière carte qui reste et donc il perd la partie.

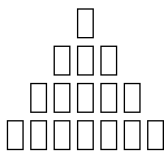
Le jeu de Marienbad est une variante d'un jeu beaucoup plus fameux appelé le jeu de Nim qui a inspiré plusieurs travaux en mathématiques au fondement de la théorie de jeux combinatoires. L'un de ces travaux est celui de Berlekamp, Conway et Guy, qui est le point de départ d'une théorie complète dans les années 1960, l'ensemble des résultats a été publie en 1982 dans leur livre « Winning Ways for your Mathematical Plays » (Berlekamp *et al.*, 2001). Cet ouvrage reste à ce jour la référence dans la théorie de jeux combinatoire.

I.2. Qu'est-ce qu'un jeu combinatoire ?

Berlekamp *et al.* 2001 ont donné une définition précise d'un jeu combinatoire en huit axiomes, illustrés ci-après avec le jeu de Marienbad (voir aussi (Duchêne, 2006)) :

1. *Il y a exactement deux joueurs, qui jouent à tour de rôle.*
2. *Le jeu consiste en un certain nombre fini de positions. Nous avons aussi besoin de connaître une position initiale appelée position de départ.*

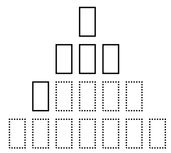
Dans le jeu de Marienbad, la position de départ est :



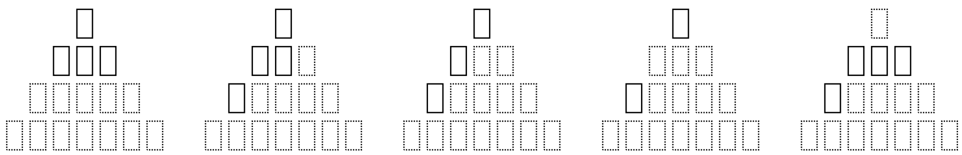
Les différentes positions du jeu correspondent à cette position de départ avec n'importe quelle nombre de cartes enlevées de chaque tas. Comme nous avons un nombre fini de cartes (16 dans l'occurrence), il y a un nombre fini de positions.

3. *La règle du jeu précise clairement les coups qu'un joueur peut réaliser à partir d'une position donnée. À partir d'une position P, l'ensemble des positions accessibles en un seul coup est appelé* options de P, noté $\mathrm{opt}(P)$.

Avec ces définitions, jouer un coup à partir d'une position correspond à choisir l'un des options de cette position. Par exemple, pour la position du jeu de Marienbad suivante :



L'ensemble des options de cette position est :



4. *Les deux joueurs jouent alternativement et il est interdit de passer son tour.*

Si un joueur peut passer son tour le jeu peut ne jamais s'arrêter. En effet, s'il découvre qu'il ne peut pas gagner, il passera son tour et l'autre joueur ne voudra continuer le jeu.

5. *Les deux joueurs connaissent parfaitement l'état du jeu, c'est-à-dire, chaque joueur connaît la position courante et l'ensemble des options de cette position.*
6. *Le hasard n'intervient pas dans les coups (que ce soit sous forme de jet de dés, de tirage de cartes, etc...).*
7. *Dans la convention normale*[1] *du jeu, le premier joueur qui ne peut plus jouer est le perdant, c'est-à-dire, le joueur qui fait le dernier coup valable gagne.*

Lorsque la convention inverse est adoptée, on parle de la *convention misère* ou « qui perd gagne » du jeu : celui qui fait le dernier coup valable perd. Cela est le cas, par exemple, pour le jeu de Marienbad.

8. *La règle du jeu doit être construite de telle sorte que le jeu ait une fin en un nombre fini des coups.*

C'est-à-dire, chaque coup doit rapprocher les deux joueurs de la fin du jeu. La partie se termine lorsqu'un joueur ne peut plus jouer.

Les jeux combinatoires se classent dans deux grandes familles. Il s'agit, d'une part, des *jeux partisans* dans lesquels ils existent des positions avec des options différentes pour les deux

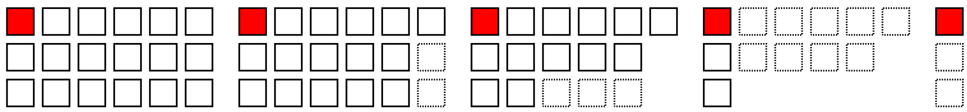
1. *Convention normale est le terme utilisé dans la théorie des jeux combinatoires pour cette notion. De même nous parlons de convention misère. Dans le langage courant, il est plus connu de dire « version normal » et « version misère ».*

joueurs ; et d'autre part, des *jeux impartiaux* dans lequel les options disponibles sont toujours les mêmes pour les deux joueurs. Ici nous nous intéresserons aux jeux combinatoires impartiaux.

Des jeux qui rentrent dans la catégorie de jeux combinatoires sont, par exemple :

Le jeu de Nim classique : des objets sont répartis en un ou plusieurs tas. Les joueurs enlèvent, à tour de rôle, entre un et tous les objets d'un tas. Quand l'un des joueurs est dans l'impossibilité de jouer parce qu'il n'y a plus d'objets, il perd, c'est-à-dire, le joueur ayant enlevé le dernier objet est le gagnant. Le jeu de Nim sera l'objet de la Section II.2 dans le chapitre suivant.

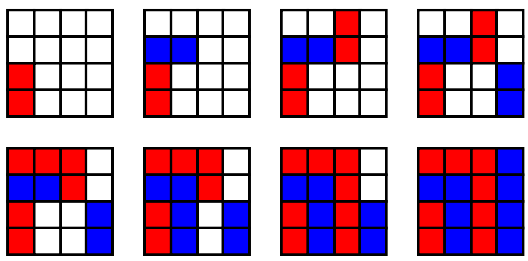
Le Chomp : joué avec un rectangle composé de blocs carrés. Les joueurs choisissent un carré à tour de rôle et le prennent, ainsi que tous les carrés situés à droite et plus bas. Celui qui prend le carré en haut à gauche (appelé l'empoisonné) perd la partie. L'image suivante montre les coups d'une partie.



Les carrés mangés à tour de rôle sont indiqués en pointillés. La dernière figure montre le dernier coup du deuxième joueur. C'est alors au premier joueur de jouer. Comme il ne reste que le carré empoisonnée, le joueur est obligé de le prendre et donc il perd la partie.

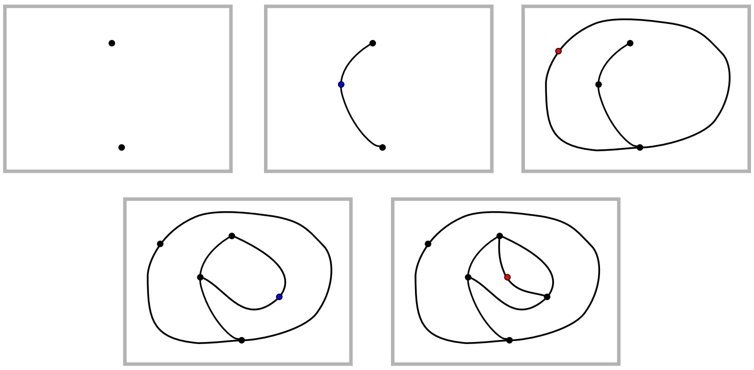
Le jeu de Cram : le jeu se joue sur une grille que l'on remplit progressivement de dominos. Chaque joueur dispose d'un ensemble de dominos en nombre suffisant pour recouvrir l'ensemble du quadrillage. Ils placent un domino sur la grille à tour de rôle, horizontalement ou verticalement. Le dernier joueur à jouer gagne.

Un exemple de partie du jeu où le joueur bleu gagne est le suivante.



Le Sprouts : ce jeu se joue à deux joueurs avec un stylo et une feuille de papier. Au départ il y a n points sur la feuille. Chaque joueur, à tour de rôle, relie deux points existants par une ligne et ajoute un nouveau point sur cette ligne. Deux contraintes doivent être respectées : les lignes ne peuvent pas se croiser et un point ne peut pas être relié à plus de trois lignes.

La figure suivante illustre un exemple d'une partie, avec deux points initialement. Après quatre coups, la partie est terminée et c'est le joueur qui avait joué en premier qui est donc le perdant puisqu'il ne peut plus jouer.



Par ailleurs, nous donnons dans la suite quelques jeux bien connus qui ne sont pas classés comme jeux combinatoires.

Le jeu de dominos : il n'est pas un jeu combinatoire parce qu'il ne remplit pas les axiomes 4, 5 et 6. Ce jeu contient une part de hasard (dans le tirage des pièces), nous pouvons passer notre tour et nous ne pouvons pas dire que l'information soit totale. Chaque joueur ne connaît pas les dominos que possède son adversaire.

Le jeu d'échecs : ne satisfait pas l'axiome 7, car ils existent de positions sans vainqueur. De plus, les échecs ne satisfait pas l'axiome 3 en raison du roque. Le roque ne peut être réalisé que si le roi et la tour concernée n'ont jamais été déplacés. Ceci n'est pas reflété dans la position courante.

Dots and Boxes : ce jeu qui consiste à fermer des carrés sur une grille quadrillée où le vainqueur est le joueur qui ferme la plus grande quantité de carrés. Ce jeu ne satisfait pas l'axiome 7 puisque la dernière personne à jouer n'est pas garanti d'avoir la plus grande quantité ou la plus petite quantité de carrés.

Jeux de cartes : la plupart de jeux de cartes, comme le poker, comportent une part de chance dans le tirage des cartes (donc, il ne remplit pas l'axiome 6). Par ailleurs ce type de jeux se jouent souvent à trois joueurs ou plus (donc, il ne remplit pas l'axiome 1) et ils favorisent les alliances entre joueurs. De plus, l'information n'est pas totale (donc, il ne remplit pas l'axiome 5).

I.3. Stratégie, position gagnante et position perdante dans un jeu combinatoire

Dans cette section nous présentons la base mathématique que nous utiliserons pour étudier les jeux combinatoires. L'objet principal de notre étude est l'ensemble des positions d'un jeu combinatoire.

Dans notre travail, ce que nous intéresse sont les jeux impartiaux, plus spécifiquement les jeux de type Nim (que nous exposons ultérieurement) sur lesquels nous ferons une analyse mathématique et didactique pour vérifier sa mise en place dans l'enseignement comme outil pour l'apprentissage de certaines notions mathématiques.

Tout d'abord, nous présentons les définitions des notions mathématiques qui seront la base de l'étude des jeux combinatoires.

DÉFINITION I.1. Pour une position P dans un jeu combinatoire quelconque, nous définissons la *longueur* de P comme le nombre des coups du plus long jeu qui peut être joué à partir de la position de départ P. La longueur de P est toujours finie par l'axiome 8 d'un jeu combinatoire.

EXEMPLE I.2. Pour la position de départ P du jeu de Marienbad, il y a 16 cartes dans tous les tas et à chaque coup le joueur doit enlever au moins une carte. Le jeu le plus long qui peut être joué à partir de P correspond à enlever une carte à chaque tour. Ceci montre que la longueur de la position de départ du jeu de Marienbad est 16.

Dans cette thèse, nous ne nous intéressons qu'aux jeux impartiaux où les positions et les ensembles des options ne dépendent pas du joueur. Pour ce type de jeu, il est plus convenable de faire l'analyse mathématique en fonction des positions perdantes et positions gagnantes.

Une position dans un jeu combinatoire est dite gagnante s'il existe une stratégie gagnante pour le premier joueur à jouer. Elle est dite perdante s'il existe une stratégie gagnante pour le deuxième joueur à jouer.

En termes mathématiques, nous pouvons faire une définition par récurrence des positions gagnantes et positions perdantes.

DÉFINITION I.3. Soit P une position dans un jeu combinatoire impartial. La position P est dite gagnante si elle a au moins une option perdante ; et P est dite perdante si toutes ses options sont gagnantes.

Une position P de longueur zéro est perdante et non pas gagnante par l'axiome 7 d'un jeu combinatoire. En effet, avec la définition I.3, la position P est perdante et pas gagnante puisque $\mathrm{opt}(P)$ est l'ensemble vide [2] qui satisfait la définition de position perdante, mais pas celle de position gagnante.

Toute position de longueur 1 est gagnante puisque toutes ses options sont de longueur zéro, donc perdantes. A partir de la longueur deux, il peut y avoir des positions perdantes et positions gagnantes de chaque longueur.

EXEMPLE I.4. Dans le jeu de Nim classique à un tas la position avec deux objets est de longueur deux et gagnante puisqu'il existe le coup qui consiste de tout prendre et gagner la partie. Dans le jeu de Nim à deux tas, la position avec un objet dans chaque tas est de longueur deux et perdante puisque toutes ses options sont de longueur un, donc gagnantes.

Dans le théorème suivant nous démontrons que chaque position dans un jeu combinatoire impartial est soit gagnante, soit perdante.

THÉORÈME I.5. *Une position P d'un jeu combinatoire impartial est soit gagnante, soit perdante.*

DÉMONSTRATION. Nous procédons par récurrence.

Toute position de longueur zéro est perdante par l'axiome 7.

Soit P une position de longueur $n > 0$. Supposons que toute position de longueur plus petite que n est soit gagnante, soit perdante. Puisque toutes les options de P sont de longueur plus petite que n, donc soit gagnantes, soit perdantes, le même suit maintenant pour P d'après la définition I.3. $\square$

2. Rappelons que $\mathrm{opt}(P)$ est l'ensemble des options de P.

Nous définissons maintenant ce qui est une stratégie gagnante dans ce formalisme.

DÉFINITION I.6. Soit P une position gagnante. Par définition il existe une option perdante P' de la position P. Un *coup gagnant* est un coup de P qui donne P'.

Une *stratégie gagnante* pour un jeu combinatoire impartial quelconque est un algorithme qui donne un coup gagnant pour chaque position gagnante.

Nous appliquons une stratégie gagnante pour gagner une partie de la manière suivante. Si la position de départ du jeu est gagnante, nous jouons, à l'aide de notre stratégie gagnante, un coup gagnant. L'adversaire n'a pas d'autre choix que de nous rendre, à son tour, une position gagnante et on continue à jouer de cette manière.

Puisque le jeu est fini, au bout d'un nombre fini de coup, notre adversaire se retrouvera avec une position perdante de longueur zéro et donc aura perdu la partie.

I.3.1. Le cas des jeux combinatoires en convention misère

Le jeu dans lequel est basé cette thèse est donnée en convention misère pour des raisons que nous préciserons plus loin. Dans cette section, nous présentons les définitions nécessaires pour étudier ce type de jeux.

Tout d'abord, remarquons que la définition de position gagnante et position perdante dans la définition I.3 ne marche pas dans la convention misère. Par exemple, les positions de longueur zéro doivent être gagnantes et pas perdantes dans la convention misère. Ceci nous amène à introduire la définition suivante analogue à la définition I.3.

DÉFINITION I.7. Soit P une position dans un jeu combinatoire impartial en convention misère. La position P est dite gagnante si elle est de longueur zéro ou si P a au moins une option perdante ; et P est dite perdante si sa longueur est non nulle et toutes ses options sont gagnantes.

Avec cette nouvelle définition, une position P de longueur zéro dans un jeu en convention misère est gagnante et pas perdante comme prévue par l'axiome 7 d'un jeu combinatoire.

Dans le théorème suivant, analogue du théorème I.5 nous démontrons qu'avec la nouvelle définition I.7 chaque position dans un jeu combinatoire impartial en convention misère est soit gagnante, soit perdante.

THÉORÈME I.8. *Une position P d'un jeu combinatoire impartial en convention misère est soit gagnante, soit perdante.*

DÉMONSTRATION. Toute position de longueur zéro est gagnante et pas perdante par l'axiome 7 du jeu combinatoire.

Soit P une position de longueur $n > 0$. Supposons que toute position de longueur plus petite que n est soit gagnante, soit perdante. Alors toutes les options de P sont de longueur plus petite que n, donc soit gagnantes, soit perdantes. Le théorème suit maintenant pour P d'après la définition. $\square$

Dans le cas d'un jeu combinatoire en convention misère, les définitions de coup gagnante et de stratégie gagnante sont les mêmes que dans le cas de convention normale déjà analysée.

I.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit des notions spécifiques aux jeux combinatoires : « stratégie », « stratégie gagnante », « position », « position gagnante », « position perdante » et « définition axiomatique » d'un jeu.

Des notions mathématiques usuelles dans enseignement sont liées à ces dernières : « définition axiomatique » (des jeux), définition récursive « croisée » des notions de « position gagnante » et « perdante ». Il y a aussi une apparition des quantificateurs existentiels et quantificateurs universels dans les définitions de position gagnante et perdante.

Nous avons vu que, pour la résolution d'un jeu combinatoire, les notions de position gagnante et position perdante sont fondamentales.

Dans le chapitre suivant, nous allons étudier un type de jeu combinatoire particulier, les jeux de type Nim. Une analyse mathématique et épistémologique des jeux de type Nim sera ensuite proposée dans le chapitre III. Ces jeux sont à la base des situations didactiques proposées dans cette thèse.

CHAPITRE II

Les jeux de type Nim

Ce chapitre est consacré à développer le cadre mathématique que nous utiliserons dans cette thèse. À partir de la section II.6 les résultats sont originaux et ont été obtenus pour faire l'analyse mathématique du jeu d'Euclide étudié dans la deuxième partie.

II.1. Introduction

Les jeux de type Nim sont des jeux combinatoires. Ces jeux, dont il existe d'innombrables variantes, se jouent avec des graines, des billes, des jetons, des allumettes ou tout autre objet facilement manipulable, avec de nombres et objets géométriques.

Sous diverses formes, les jeux de type Nim semblent avoir été pratiqués en Europe depuis le Sixième Siècle et même bien avant en Chine où nous trouvons ses premières traces sous le nom de fan-tan, mais sa vraie origine est incertaine. Le nom actuel Nim (tiré du mot allemand « nimm » qui signifie prendre, mais pourrait venir également de « win », gagner qui en anglais, que nous pouvons lire lorsque nous retournons le mot) a été donné par le mathématicien anglais Charles Bouton de l'Université de Harvard en 1901, qui a également développé une théorie complète du jeu en 1901. En 1951, un ordinateur, le Nimrod, a été construit dédié uniquement à sa résolution.

Les règles du jeu de Nim sont les suivantes : des objets sont disposés en tas devant les joueurs. Jouer signifie prendre un ou plusieurs objets. Dans les jeux de Nim nous pouvons trouver différentes variantes que nous pouvons distinguer selon les trois variables suivantes :

1. La quantité et disposition des objets au départ : En ce qui concerne les objets initiaux, le cas le plus simple utilise un seul tas d'objets, dans ce cas, chaque joueur à tour de rôle enlève un nombre variable d'objets (1, 2 ou 3 à chaque tour, par exemple).
2. Les règles pour prendre les objets : Dans ce cas, il y a plusieurs possibilités tels que à chaque tour le joueur prend n'importe quelle quantité d'objets dans un tas, à chaque tour le joueur prend une quantité fixe dans chacun des tas parmi d'autres.
3. Le but final du jeu : Par rapport à l'objectif final, il n'y a que deux possibilités : celui qui prend le dernier objet perd (convention misère) ou celui qui prend le dernier objet gagne (convention normale).

Un exemple de jeu de type Nim, connu en didactique comme la course à 20 (Brousseau, 2004), est le suivant :

> « Deux joueurs disposent d'un tas de 20 objets, chaque joueur au tour de rôle, doit enlever un ou deux objets, le gagnant est celui qui prend le dernier objet »

II.2. Le jeu de Nim Classique

Dans cette section, nous faisons l'analyse mathématique du jeu de Nim classique. Pour faire l'analyse, nous avons besoin de la notion de Nim-somme que nous introduisons maintenant.

II.2.1. Nim-somme

Rappelons d'abord qu'un « bit » est un chiffre binaire qui ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1. Pour un numéro quelconque a, le bit écrit dans la position i de droite à gauche dans la représentation binaire de a es appelé le i-ème bit de a.

Exemple II.1. Par exemple, si $a = 19$ (dans le système décimal usuel) alors sa représentation en base deux est 10011. Le premier, deuxième et cinquième bit de a sont 1 et le troisième et quatrième sont 0.

Nous définissons la Nim-somme $a \oplus b$ de deux nombres entier a et b comme le nombre entier dont la valeur du i-ème bit est 0 si les i-ème bits de a et b sont égaux et 1 s'ils sont différents. Cette opération correspond au « ou-exclusif » utilisé en logique. Cette opération est souvent appelée « la somme binaire sans retenue » puisqu'elle peut être calculée par ce procédé comme nous le voyons dans l'exemple suivant.

Exemple II.2. Soit $a_1 = 11$, $a_2 = 9$ et $a_3 = 7$. En écriture binaire, ces trois numéros correspondent a 1011, 1001 et 111, respectivement.

Pour calculer la Nim-somme, nous disposons les numéros en binaire comme nous le faisons lorsque nous posons une addition habituelle, puis nous additionnons les colonnes sans prendre en compte les retenues. Le nombre binaire ainsi obtenu est la Nim-somme. Dans notre exemple nous avons que $11 \oplus 9 \oplus 7 = 5$, car

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \oplus & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Comme l'opération « ou-exclusif » utilisé en logique est associative et commutative la même est valable pour la Nim-somme. De plus, zéro est l'élément neutre pour cette opération puisque $a \oplus 0 = 0 \oplus a = a$. Enfin, chaque nombre naturel a est son propre inverse pour cette opération puisque $a \oplus a = 0$. Ceci montre que l'ensemble des nombres naturels avec l'opération $\oplus$ forme un groupe abelien.

Pour la preuve du théorème II.4, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme II.3. *Les propositions suivantes sont valables :*

(i) *Soit $a_1, \dots a_n$ des nombres naturels tels que leur Nim-somme est zéro. Alors, si nous remplaçons a_i par $a_i' < a_i$, la Nim-somme n'est plus zéro.*

(ii) *Soit $a_1, \dots a_n$ des nombres naturels tels que leur Nim-somme est différente de zéro. Alors, il existe $1 \leq i \leq n$ et $a_i' < a_i$ tel que si nous remplaçons a_i par a_i', la Nim somme devient zéro.*

Démonstration. Nous montrons d'abord (i). Puisque la Nim-somme est commutative, sans perte de généralité, nous pouvons supposer $i = 1$. Alors, le résultat suit de l'unicité de l'inverse dans un groupe puisque si

$$\begin{aligned} a_i' \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n = a_i \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n &\Leftrightarrow \left(a_i' \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n\right) \oplus (a_i \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow a_i' \oplus a_i = 0 \Leftrightarrow a_i' = a_i \,, \end{aligned}$$

ce qui conduit à une contradiction.

Nous montrons maintenant (ii). Soit $c = a_1 \oplus \ldots \oplus a_n$. Soit k la position du bit le plus grand non nul de c.

Puisque le k-ème bit de la somme $c = a_1 \oplus \ldots \oplus a_n$ est 1, il existe i tel que le k-ème bit de a_i est 1 aussi. Soit $a_i' = a_i \oplus c$.

Nous avons que $a_i' < a_i$ puisque le k-ème bit de a_i est 1, le k-ème bit de a_i' est 0 et tous les bits à gauche du k-ème bit de a_i et a_i' coïncident.

Nous allons montrer que si nous remplaçons a_i par a_i', la Nim-somme devient zéro. Puisque la Nim-somme es commutative, nous pouvons supposer que $i = 1$. Avec cette supposition, nous pouvons remarquer que

$$a_1' = a_1 \oplus c = a_1 \oplus (a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n) = a_2 \oplus \ldots \oplus a_n \,.$$

Alors, la Nim-somme après avoir remplacé a_1 par a_1' devient

$$a_1' \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n = (a_2 \oplus \ldots \oplus a_n) \oplus (a_2 \oplus \ldots \oplus a_n) = 0 \,,$$

ce qui achève la démonstration du lemme. □

II.2.2. Position perdante et position gagnant dans le jeu de Nim classique

Dans la suite, nous dénotons la position P du jeu de Nim à n tas avec des tas de tailles a_1 jusqu'à a_n par le n-uple $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. La longueur de la position P est $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ puisque, à chaque tour, il faut enlever au moins un objet.

Dans le théorème suivante, nous donnons une caractérisation des positions perdantes et gagnantes pour le jeu de Nim classique en fonction de la Nim-somme définie auparavant.

Théorème II.4. *La position $(a_1, \ldots, a_n)$ dans le jeu de Nim à n tas est perdante si et seulement si $a_1 \oplus \ldots \oplus a_n = 0$*

Démonstration. Nous démontrons le théorème par récurrence sur le nombre d'objets $k = a_1 + \ldots + a_n$. Tout d'abord, notons que le théorème est vrai pour l'unique position $(0, \ldots, 0)$ avec zéro éléments.

Supposons maintenant que le théorème est vrai pour toutes les positions avec moins de k objets et montrons le pour une position avec k objets.

Soit $P = (a_1, \ldots, a_n)$ une position avec $a_1 + \ldots + a_n = k$. Si $a_1 \oplus \ldots \oplus a_n = 0$, les Nim-sommes de toutes les options de P différent toujours de zéro par le lemme II.3. Alors toutes les options de P sont gagnantes d'après l'hypothèse de récurrence. Donc P est perdante.

Maintenant, si $a_1 \oplus \ldots \oplus a_n \neq 0$, alors le lemme II.3 montre qu'il existe une option de P avec Nim-somme nulle. Cette option est perdante par l'hypothèse de récurrence. Donc P est gagnante, ce qui montre le théorème. □

II.2.3. Stratégie gagnante pour le jeu de Nim

Notons que le lemme II.3 nous fournit une stratégie gagnante pour le jeu de Nim à un nombre arbitraire de tas. En effet, étant donné une position gagnante $P = (a_1, \ldots, a_n)$, pour trouver un coup gagnant il suffit de suivre l'algorithme suivante :

1. Calculer la Nim-somme de toutes les tas (qui n'est pas nulle puisque la position est gagnante).
2. Identifier un tas qui a un 1 dans la position du bit le plus significatif de la Nim-somme (ce tas pourrai ne pas être unique).
3. Réduire ce tas pour qu'il comporte autant des objets que la Nim-somme de tous les autres tas.

Dans cette dernière étape, la preuve du lemme précédent assure que la Nim-somme de tous les autres tas est en effet plus petite que la taille du tas identifié dans l'étape 2.

Nous finirons cette section avec un exemple d'une partie pour laquelle la stratégie gagnante est utilisée par le premier joueur.

Exemple II.5. Nous jouons une partie de Nim à trois tas entre les joueurs Rouge et Bleu. Rouge joue en premier. La position de départ du jeu est avec les tas de taille 3, 4 et 5, respectivement, c'est-à-dire, $(3, 4, 5)$ dans notre notation des positions. La position de départ est perdante puisque $3 \oplus 4 \oplus 5 = 2 \neq 0$ donc le premier joueur Rouge peut appliquer la stratégie gagnante.

- Rouge prend deux objets du premier tas pour laisser la position $(1, 4, 5)$. L'unique tas qui contribue au deuxième bit de 2 est le premier. Puisque $4 \oplus 5 = 1$, une option perdante est $(1, 4, 5)$.
- Bleu prend deux objets du deuxième tas pour laisser la position $(1, 2, 5)$.
- Rouge prend deux objets du troisième tas pour laisser la position $(1, 2, 3)$. En effet, $1 \oplus 2 \oplus 5 = 4$ et l'unique tas qui contribue au troisième bit de 4 est le troisième. Puisque $1 \oplus 2 = 3$, une option perdante est $(1, 2, 3)$.
- Bleu prend un objet du deuxième tas pour laisser la position $(1, 1, 3)$.
- Rouge prend tout le troisième tas pour laisser la position $(1, 1, 0)$. En effet, $1 \oplus 1 \oplus 3 = 3$ et l'unique tas qui contribue au deuxième bit de 3 est le troisième. Puisque $1 \oplus 1 = 0$, une option perdante est $(1, 1, 0)$.
- Bleu prend un objet du premier tas pour laisser la position $(0, 1, 0)$.
- Rouge prend le dernier objet qui reste et gagne la partie.

II.3. Le théorème de Grundy-Sprague

Dans cette section nous présentons un cadre mathématique général pour étudier les positions gagnantes et perdantes des jeux combinatoires impartiaux, connu comme le théorème de Grundy-Sprague. Ce cadre nous permettra de réviser la section précédente d'un nouveau point de vue. Dans toute cette section un jeu désigne un jeu combinatoire impartial.

Jusqu'à présent, à chaque fois que nous avons fait une analyse mathématique, nous avons eu un jeu concret pour nous référer, le jeu de Nim classique. Nous allons maintenant définir et démontrer des outils mathématiques généraux qui s'appliquent à tous les jeux combinatoires impartiaux.

Dans cette généralité, il est plus convenable pour les notations, de penser aux positions d'un jeu combinatoire au lieu du jeu lui-même.

EXEMPLE II.6. Nous dénoterons par $*a$ la position du jeu de Nim classique à un tas avec a objets dans le tas. Avec cette notation, $*0$ est l'unique position perdante du jeu de Nim classique à un tas. Si $a > 0$, les options de $*a$ sont les positions

$$\mathrm{opt}(*a) = \{*0, *1, \ldots, *(a-2), *(a-1)\} \ .$$

Nous définissons maintenant la somme de deux jeux combinatoires. Cette opération correspond au jeu où chaque joueur, à tour de rôle, doit choisir l'un des jeux pour jouer. Comme d'habitude pour la convention normale du jeu, le perdant est le joueur qui ne peut plus jouer dans aucun des jeux. Dans notre formalisme mathématique, cette définition correspond à la définition suivante.

DÉFINITION II.7. Soit G_1 et G_2 deux jeux combinatoires impartiaux et soit P_1 et P_2 des positions des jeux. Nous définissons de façon récursive le jeu combinatoire $G_1 + G_2$ comme le jeu où les positions sont $P_1 + P_2$ et les options de cette position sont $P_1' + P_2$ où P_1' est une option de P_1 et $P + P_2'$ où P_2' est une option de P_2, c'est-à-dire,

$$\mathrm{opt}(P_1 + P_2) = \{P_1' + P_2 \mid P_1' \in \mathrm{opt}(P_1)\} \cup \{P_1 + P_2' \mid P_2' \in \mathrm{opt}(P_2)\}$$

Le jeu de Nim à deux tas est un exemple d'application de cette définition puisqu'il consiste exactement à la somme comme définit ci-dessus de deux jeux de Nim à un tas.

En général, le jeu de Nim à n tas correspond à la somme de n jeux de Nim à un tas. Pour cette raison, nous n'avons plus besoin d'une notation pour la position du jeu de Nim à n tas avec des tas de a_1 jusqu'à a_n objets qui correspondent à $*a_1 + *a_2 + \ldots + *a_n$.

Comme premier résultat pour cette opération, nous avons le lemme suivant.

LEMME II.8. *Soit P_1 et P_2 des positions dans des jeux combinatoires impartiaux.*

(*i*) *Si P_1 est perdante et P_2 est perdante, alors $P_1 + P_2$ est perdante.*

(*ii*) *Si P_1 est perdante et P_2 est gagnante, alors $P_1, +P_2$ est gagnante.*

(*iii*) *Si P_1 est gagnante et P_2 est perdante, alors $P_1 + P_2$ est gagnante.*

(*iv*) *Si P_1 est gagnante et P_2 est gagnante, alors $P_1 + P_2$ peut être perdante ou gagnante.*

DÉMONSTRATION. La preuve suit par récurrence. Le lemme est vrai lorsque $P_1 + P_2$ est de longueur zéro puisque dans ce cas P_1, P_2 et $P_1 + P_2$ sont perdantes par définition.

Nous considérons maintenant le cas où $P = P_1 + P_2$ est de longueur $k > 0$. Nous supposons que le lemme est vrai pour toutes les positions de longueur plus petites que k.

Pour montrer (*i*), on suppose que P_1 et P_2 sont perdantes. Les options de P sont toutes de la forme $P_1' + P_2$ où P_1' est une option de P_1 et $P_1 + P_2'$ où P_2' est une option de P_2. Puisque P_1 et P_2 sont perdantes, P_1' et P_2' sont gagnantes. Alors, par l'hypothèse de récurrence, toutes les options de P sont gagnantes, d'où P est perdante.

Pour montrer (*ii*), on suppose que P_1 est perdante et P_2 est gagnante. Soit P_2' une option perdante de P_2. Alors, $P' = P_1 + P_2'$ est une option de P. Par l'hypothèse de récurrence, cette option est perdante d'où P est gagnante.

Par symétrie, le même démonstration s'applique pour (*iii*).

Pour montrer (*iv*) il suffit d'un exemple. Pour cela, nous utiliserons le jeu de Nim. Les positions $*1$ et $*2$ sont toutes les deux gagnantes. Cependant, par notre analyse dans la section précédente du jeu de Nim à deux tas, $*1+*1$ est perdante et $*1+*2$ est gagnante. $\square$

Le lemme précédent nous montre qu'il ne suffit pas de connaître les positions gagnantes et perdantes des jeux G_1 et G_2 pour trouver les positions gagnantes et perdantes de la somme $G_1 + G_2$. Le but de cette section est d'énoncer le théorème de Grundy-Sprague qui nous permettra, entre autres, de connaître les positions gagnantes et perdantes du jeu $G_1 + G_2$.

Dans la définition suivante, nous définissons une équivalence des positions des jeux. Par cette définition, deux positions d'un jeu sont équivalentes si nous pouvons changer l'une par l'autre dans une somme des jeux sans changer le résultat. De façon plus precise, nous énonçons :

DÉFINITION II.9. Soit P_1 et P_2 des positions dans des jeux combinatoires impartiaux. Nous dirons que P_1 et P_2 sont équivalentes si pour toute position Q dans un autre jeu combinatoire impartial, la position $P_1 + Q$ est gagnante si et seulement si la position $P_2 + Q$ est gagnante.

Si dans la définition précédente nous prenons $Q = *0$. Nous obtenons que si P_1 est équivalente à P_2, alors P_1 est gagnante si et seulement si P_2 est gagnante.

Avant d'énoncer le résultat principal de cette section nous devons encore définir un dernier objet mathématique : la fonction de Grundy. Nous définissons d'abord la fonction mex qui, à chaque sous ensemble propre A des nombres naturels associe le plus petit nombre naturel qui n'est pas contenu dans A (mex est un acronyme de “minimal excluded”).

EXEMPLE II.10. Quelques exemples de calcul de la fonction mex :

- $\text{mex}(1, 2, 3, 4, 5) = 0$
- $\text{mex}(0, 1, 2, 3, 5, 6, 7) = 4$
- $\text{mex}(\text{ensemble des nombres paires non negatifs}) = 1$

DÉFINITION II.11. Soit P une position dans un jeu combinatoire impartial. À l'aide de la fonction mex, nous définissons la fonction de Grundy de façon récursive comme

$$g(P) = \text{mex}(\{g(P') \mid P' \text{ est une option de } P\}).$$

La fonction de Grundy de la position $*a$ dans le jeu de Nim à un tas est $g(*a)) = a$. En effet, si $a = 0$, alors $g(*0) = \text{mex}(\emptyset) = 0$. Par récurrence, si nous supposons que $g(*i)) = i$ pour $i < a$, alors

$$g(*a) = \text{mex}\{g(*0), g(*1), \ldots, g(*(a-1))\} = \text{mex}\{0, 1, \ldots, a-1\} = a.$$

Nous énonçons à continuation le théorème de Grundy-Sprague dont une preuve peut être trouvée dans (Berlekamp *et al.*, 2001).

THÉORÈME II.12 (Grundy-Sprague). *Soit P_1 et P_2 des position dans des jeux combinatoires impartiaux. Alors, P_1 est équivalente à P_2 si et seulement si $g(P_1) = g(P_2)$. En particulier, la position P_1 est équivalente au jeu de Nim à un tas de taille $g(P_1)$.*

Le théorème précédent nous dit en particulier que chaque position d'un jeu est équivalente à une position du jeu de Nim d'un tas. Puisque nous savons que l'unique position perdante du jeu de Nim d'un tas est $*0$ nous obtenons le corollaire suivante.

COROLLAIRE II.13. *Soit P une position dans un jeu combinatoire impartial. Alors, P est perdante si et seulement si $g(P) = 0$.*

Le corollaire suit directement du théorème de Grundy-Sprague puisque P est perdante si et seulement si $*g(P)$ est perdante si et seulement si $g(P) = 0$. Cependant, nous pouvons donner une preuve directe de ce résultat.

DÉMONSTRATION. Si P est une position de longueur zéro, alors $\mathrm{opt}(P) = \emptyset$ et donc $g(P) = \mathrm{mex}(\emptyset) = 0$. Supposons que P est une position de longueur k et que le corollaire est vrai pour toutes les positions de longueur plus petite que k.

Si $g(P) \neq 0$, alors par la définition de mex nous savons qu'il existe une option P' de P tel que $g(P') = 0$. Par l'hypothèse de récurrence, cette option est perdante, donc P est gagnante.

Si $g(P) = 0$, alors par la définition de mex nous savons que chaque option P' de P est tel que $g(P') > 0$. Par l'hypothèse de récurrence, nous savons alors que toutes les options de P sont gagnantes, donc P est perdante. □

Le corollaire précédent nous fournit un outil pour décider si une position est perdante ou gagnante. Il ne nous reste seulement à trouver une méthode pour calculer la fonction de Grundy d'une somme de deux jeux. Pour cela, nous aurons de nouveau recours encore à la Nim-somme.

THÉORÈME II.14. *Soit P_1 et P_2 des positions dans des jeux combinatoires impartiaux. Alors,*

$$g(P_1 + P_2) = g(P_1) \oplus g(P_2).$$

DÉMONSTRATION. Soit $a = g(P_1)$ et $b = g(P_2)$. Par le Théorème de Grundy-Sprague nous avons que P_1 est équivalente à $*a$ et P_2 est équivalente a $*b$. Par conséquence, $g(P_1 + P_2) = g(*a + *b)$. Pour conclure, il suffit de montrer que $g(*a + *b) = a \oplus b$ ce qui est établi dans le lemme suivante. □

LEMME II.15. *La fonction de Grundy de la position du jeu de Nim à deux tas avec a et b éléments respectivement est $a \oplus b$, c'est-à-dire,*

$$g(*a + *b) = a \oplus b\,.$$

.

DÉMONSTRATION. La preuve sera faite par récurrence sur la somme $a + b$. Notons d'abord que $g(*0 + *0) = 0 \oplus 0 = 0$.

Supposons maintenant que $g(*a' + *b') = a' \oplus b'$ pour tous les nombres naturels a', b' tels que $a' + b' < n$. Soit a, b des nombres naturels avec $a + b = n$. Nous démontrerons que $g(*a + *b) = a \oplus b$.

Du fait de la définition de la fonction de Grundy et par l'hypothèse de récurrence, nous avons

$$g(*a + *b) = \mathrm{mex}\left(\left\{g(*a' + *b) \mid a' < a\right\} \cup \left\{g(*a + *b') \mid b' < b\right\}\right)\,,$$
$$g(*a + *b) = \mathrm{mex}\left(\left\{a' \oplus b \mid a' < a\right\} \cup \left\{a \oplus b' \mid b' < b\right\}\right)\,.$$

Soit $A = \{a' \oplus b \mid a' < a\} \cup \{a \oplus b' \mid b' < b\}$, l'ensemble de l'équation au-dessus. Nous montrerons que $\mathrm{mex}(A) = a \oplus b$, ce qui montre le théorème.

Tout d'abord, $a \oplus b \notin A$ puisque sinon $a \oplus b = a' \oplus b$ avec $a' < a$ ou $a \oplus b = a \oplus b'$ avec $b' < b$, ce qui est une contradiction.

Soit $c < a \oplus b$. Pour conclure la preuve, nous montrerons que $c \in A$. Soit $d = a \oplus b \oplus c$ et soit i la position du bit le plus significatif de d, c'est-à-dire, le i-ème bit de d en notation binaire est 1 et toutes les bits à gauche sont 0. Puisque le bit i-ème de d est 1, le même est vrai pour au moins l'un de a, b, c. Ceci entraîne qu'au moins l'une de trois inégalités suivantes est vérifiée :

$$a \oplus d < a, \quad b \oplus d < b, \quad \text{ou} \quad c \oplus d < c\,.$$

Supposons que $c \oplus d < c$. Nous avons que $c \oplus d = c \oplus (a \oplus b \oplus c) = a \oplus b < c$ ce qui est une contradiction puisque nous avons choisi $c < a \oplus b$. Nous concluons que $c \oplus d < c$, ne peut jamais arriver.

Supposons maintenant que $a \oplus d < a$. Alors $(a \oplus d) \oplus b = a \oplus a \oplus b \oplus c \oplus b = c$. Donc si nous posons $a' = a \oplus d$ nous obtenons que $a' \oplus b = c$, et donc $c \in A$.

Supposons pour conclure que $b \oplus d < b$. Alors $a \oplus (b \oplus d) = a \oplus b \oplus a \oplus b \oplus c = c$. Comme dans le cas précédente, si nous posons $b' = b \oplus d$, nous obtenons que $a \oplus b' = c$, et donc $c \in A$. □

Nous pouvons utiliser le Corollaire II.13 et le théorème précédent pour trouver les positions perdantes et gagnantes des jeux qui sont définies comme la somme des jeux combinatoires plus simples. Comme exemple, nous révisons le jeu de Nim classique pour redémontrer le théorème II.4.

Exemple II.16. Soit $a_1, \ldots, a_n$ des nombres entiers. Dans notre notation de la section II.2, la position $P = (a_1, \ldots, a_n)$ correspond au jeu de Nim à n tas avec $a_1, \ldots, a_n$ objets dans les tas. À l'aide de la somme des jeux, cette position est décrite par $P = *a_1 + \ldots + *a_n$. D'après le corollaire II.13, P est perdante si et seulement si $g(P) = 0$ et d'après le théorème II.14,

$$g(P) = g(*a_1 + \ldots + *a_n) = g(*a_1) \oplus \ldots \oplus g(*a_n) = a_1 \oplus \ldots \oplus a_n.$$

Nous concluons que la position P est perdante si et seulement si $a_1 \oplus \ldots \oplus a_n = 0$.

II.4. Un jeu de type Nim particulier : Le jeu de soustraction

Dans cette section nous faisons l'analyse mathématique d'un jeu de type Nim, appelé le jeu de soustraction, qui sera très utile dans l'analyse mathématique du jeu étudié dans cette thèse.

Soit S un sous ensemble des nombres naturels qui ne contient pas zéro. Comme dans le jeu de Nim classique, dans ce jeu des objets sont répartis en un ou plusieurs tas. Les joueurs enlèvent, à tour de rôle, un nombre $s \in S$ d'objets d'un tas. Quand l'un des joueurs est dans l'impossibilité de jouer parce qu'il n'y a plus d'objets, il perd, c'est-à-dire, le joueur ayant enlevé le dernier objet est le gagnant.

Par exemple, si $S = \{1, 3\}$ cela correspond au cas où les joueurs enlèvent un ou trois objets d'un tas à chaque tour. Dans cette généralité, le jeu de soustraction est un problème ouvert. Le cas le plus connu de ce jeu est le cas où S est l'ensemble des nombres entiers positifs plus petits que $b \geq 2$, c'est-à-dire, $S = \{1, 2, \ldots, b-1\}$. Nous étudierons uniquement ce dernier cas dans cette thèse.

DÉFINITION II.17. Soit a, b des nombres naturels avec $b \geq 2$. Nous dénoterons par $*(a, b)$ la position du jeu de soustraction à un seul tas de a objets où, à tour de rôle, les joueurs enlèvent entre 1 et $b - 1$ objets du tas. Dans notre formalité mathématique, ce jeu est caractérisé par le fait que les options de $*(a, b)$, avec $a > 0$ sont

$$\operatorname{opt}(*(a,b)) = \begin{cases} *(0,b), *(1,b), \ldots, *(a-1,b) & \text{si } a < b\,, \\ *(a-b+1,b), \ldots, *(a-1,b) & \text{si } a \geq b\,. \end{cases}$$

En particulier, nous voyons au travers de cette définition que si $a < b$ alors la position du jeu $*(a, b)$ est le même que la position du jeu de Nim classique $*a$ puisque les options sont les mêmes.

D'après la section précédente, nous n'avons pas besoin d'une nouvelle définition pour le jeu de soustraction avec plus d'un tas parce qu'elles peuvent être décrites à l'aide la somme des jeux.

En effet, soit $a_1, \ldots, a_n, b$ des nombres naturels avec $b \geq 2$. La position P du jeu de soustraction avec n tas de taille $a_1, \ldots, a_n$ et où nous enlevons, à tour de rôle, entre 1 et $b - 1$ objets d'un tas correspond à la position

$$P = *(a_1, b) + *(a_2, b) + \ldots + *(a_n, b).$$

Il est clair que nous pouvons aussi traiter le cas où le nombre maximal d'objets que nous pouvons enlever dépend du tas. En effet, soit $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ des nombres naturels avec $b_i \geq 2$. La position P du jeu qui consiste en n tas avec a_i objets, respectivement ; où nous pouvons enlever du i-ème tas entre 1 et $b_i - 1$ objets et donné, à l'aide de la somme des jeux, par la position

$$P = *(a_1, b_1) + *(a_2, b_2) + \ldots + *(a_n, b_n).$$

D'après le corollaire II.13 et le théorème II.14, il suffit de calculer la fonction de Grundy de la position $*(a, b)$ pour tout a, b. Ceci est fait dans le théorème II.20 en bas. Pour l'énoncé du théorème, nous avons besoin de la définition suivante.

DÉFINITION II.18. Nous définissions la fonction rde (reste de la division euclidienne) donnée par

$$\begin{aligned} \operatorname{rde} : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* &\to \mathbb{N} \\ (a,b) &\mapsto \operatorname{rde}(a,b) = r \end{aligned}$$

où r est le reste de la division euclidienne de a par b, c'est-à-dire, r est l'unique nombre entier $0 \leq r < b$ tel que $a \equiv r \pmod b$.

REMARQUE II.19. La notation $\operatorname{rde}(a, b)$ n'est pas standard. Habituellement, si $r = \operatorname{rde}(a, b)$ nous le dénotons par $a \equiv r \pmod b$. Nous prenons cette notation parce que nous avons besoin d'obtenir r à partir de a et b, ce qui n'est pas possible avec la notation standard.

THÉORÈME II.20. *La fonction de Grundy de $*(a, b)$ vaut $g(*(a, b)) = \operatorname{rde}(a, b)$.*

DÉMONSTRATION. Pour $a = 0$ le théorème est vrai puisque $*(a, b)$ est perdante et $\operatorname{rde}(0, b) = 0$.

Soit $P = *(a, b)$, avec $a > 0$. Nous supposons que le théorème est vrai pour toute position de longueur plus petite que P.

Si $a < b$, alors les options de P sont $*(0,b), *(1,b), \ldots, *(a-1,b)$ et alors par l'hypothèse de récurrence nous avons

$$\begin{aligned} g(P) &= \operatorname{mex}\{g(*(0,b)), g(*(1,b)), \ldots, g(*(a-1,b))\} \\ &= \operatorname{mex}\{0, 1, \ldots, a-1\} = a = \operatorname{rde}(a,b). \end{aligned}$$

Si $a \geq b$, alors les options de P sont $*(a-b+1,b), *(a-b+2,b), \ldots, *(a-1,b)$ et alors par l'hypothèse de récurrence nous avons

$$\begin{aligned} g(P) &= \operatorname{mex}\{*(a-b+1,b), *(a-b+2,b), \ldots, *(a-1,b)\} \\ &= \operatorname{mex}\{\operatorname{rde}(a-b+1,b), \operatorname{rde}(a-b+2,b), \ldots, \operatorname{rde}(a-1,b)\} \\ &= \operatorname{mex}\{\operatorname{rde}(a+1,b), \operatorname{rde}(a+2,b), \ldots, \operatorname{rde}(a+(b-1),b)\} \end{aligned}$$

Ceci correspond aux $b-1$ valeurs parmi les b valeurs que la fonction $\operatorname{rde}(\cdot, b)$ peut prendre. La valeur qui manque est $\operatorname{rde}(a,b)$, alors

$$g(P) = \operatorname{rde}(a,b).$$

Ceci conclut la preuve. □

Comme nous l'avons signalé avant, à l'aide des résultats dans la section précédente, nous pouvons obtenir les valeurs de la fonction de Grundy pour le jeu de soustraction à plusieurs tas.

Corollaire II.21. *Soit $a_1, \ldots, a_n, b$ des nombres naturels avec $b \geq 2$. Soit $P = *(a_1,b) + *(a_2,b) + \ldots + *(a_n,b)$ la position du jeu de soustraction qui correspond au jeu à n tas de tailles $a_1, \ldots, a_n$ où, à tour de rôle, nous enlevons entre 1 et $b-1$ objets d'un tas. Alors, la fonction de Grundy de P vaut*

$$g(P) = \operatorname{rde}(a_1,b) \oplus \operatorname{rde}(a_2,b) \oplus \ldots \oplus \operatorname{rde}(a_n,b).$$

En particulier, la position P est perdante si et seulement si

$$\operatorname{rde}(a_1,b) \oplus \operatorname{rde}(a_2,b) \oplus \ldots \oplus \operatorname{rde}(a_n,b) = 0$$

Démonstration. Par le théorème II.20, nous avons que $g(*(a_i,b)) = \operatorname{rde}(a_i,b)$ et par le théorème II.14, nous avons que

$$g(P) = \operatorname{rde}(a_1,b) \oplus \operatorname{rde}(a_2,b) \oplus \ldots \oplus \operatorname{rde}(a_n,b).$$

La dernière assertion du corollaire suit directement du corollaire II.13. □

Le corollaire précédent peut être combiné avec le lemme II.3 pour obtenir une stratégie gagnante pour le jeu de soustraction.

Soit $P = *(a_1,b) + *(a_2,b) + \ldots + *(a_n,b)$ la position dans le jeu de soustraction qui correspond au jeu à n tas de tailles $a_1, \ldots, a_n$ où, à tour de rôle, nous enlevons entre 1 et $b-1$ objets d'un tas. Supposons que P est une position gagnante, c'est-à-dire,

$$g(P) = \operatorname{rde}(a_1,b) \oplus \operatorname{rde}(a_2,b) \oplus \ldots \oplus \operatorname{rde}(a_n,b) > 0.$$

1. D'abord nous identifions un tas a_i tel que $\operatorname{rde}(a_i,b)$ contribue au bit le plus significatif de la somme de la fonction de Grundy $g(P)$. Ce tas pourrai ne pas être unique.

2. Puis, nous calculons la Nim-somme $s = g(P) \oplus \mathrm{rde}(a_i, b)$. Par le Lemme II.3 et sa preuve, nous avons que $s < g(*(a_i, b) = \mathrm{rde}(a_i, b)$, et donc il existe une option $*(a'_i, b)$ de $*(a_i, b)$, tel que sa fonction de Grundy vaut s. En effet, cette option correspond à choisir $a'_i = a_i - (\mathrm{rde}(a_i, b) - s)$ puisque
$$g(*(a'_i, b)) = \mathrm{rde}(a_i - \mathrm{rde}(a_i, b) + s, b) = \mathrm{rde}(s, b) = s.$$
3. Enfin, le coup gagnant de P correspond à réduire le i-ème tas pour qu'il ait a'_i objets. Cette position P' correspond à
$$P' = *(a_1, b) + \ldots + *(a_{i-1}, b) + *(a'_i, b) + *(a_{i+1}, b) + \ldots + *(a_n, b).$$

Par le lemme II.3 et sa preuve, nous avons que $g(P') = 0$.

Nous présentons un exemple d'une partie pour laquelle la stratégie est utilisée par le premier joueur.

Exemple II.22. Nous fixons pour cet exemple $b = 3$, c'est-à-dire, à tour de rôle, les joueurs enlèvent soit 1 soit 2 objets d'un tas. Nous jouons une partie avec trois tas entre les joueurs Rouge et Bleu. Rouge joue en premier. La position de départ du jeu est avec les tas de taille 3, 4 et 5, respectivement, c'est-à-dire, $*(3, 3) + *(4, 3) + *(5, 3)$ dans notre notation des positions. La position de départ est perdante puisque $0 \oplus 1 \oplus 2 = 3 \neq 0$ donc le premier joueur Rouge peut appliquer la stratégie gagnante.

- Rouge prend un objet du troisième tas pour laisser la position $*(3, 3) + *(4, 3) + *(4, 3)$. L'unique tas qui contribue au deuxième bit de 3 est le dernier. Puisque $0 \oplus 1 = 1$, une option perdante est $*(3, 3) + *(4, 3) + *(4, 3)$.
- Bleu prend deux objets du deuxième tas pour laisser la position $*(3, 3) + *(2, 3) + *(4, 3)$.
- Rouge prend un objet du deuxième tas pour laisser la position $*(3, 3) + *(1, 3) + *(4, 3)$. En effet, $0 \oplus 2 \oplus 1 = 3$ et l'unique tas qui contribue au deuxième bit de 3 est le deuxième. Puisque $0 \oplus 1 = 1$, une option perdante est $*(3, 3) + *(1, 3) + *(4, 3)$.
- Bleu prend deux objets du premier tas pour laisser la position $*(1, 3) + *(1, 3) + *(4, 3)$.
- Rouge prend un objet du troisième tas pour laisser la position $*(1, 3) + *(1, 3) + *(3, 3)$. En effet, $1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$. Tous les tas contribuent au premier bit de 1. Donc Rouge a le choix de prendre 1 objet dans n'importe quel tas.
- Bleu prend un objet du premier tas pour laisser la position $*(0, 3) + *(1, 3) + *(3, 3)$.
- Rouge prend un objet du deuxième tas pour laisser la position $*(0, 3) + *(0, 3) + *(3, 3)$. En effet, $0 \oplus 1 \oplus 0 = 1$ et l'unique tas qui contribue au premier bit de 1 est le deuxième. Puisque $0 \oplus 0 = 0$, une option perdante est $*(0, 3) + *(0, 3) + *(3, 3)$.
- Bleu prend un objet du dernier tas pour laisser la position $*(0, 3) + *(0, 3) + *(2, 3)$.
- Rouge prend les deux derniers objets qui restent et gagne la partie.

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés uniquement aux jeux de type Nim en convention normale. Pour notre analyse didactique dans le chapitre IX, nous avons besoin du théorème suivant qui concerne le jeu de soustraction en convention misère.

Théorème II.23. *La position du jeu de soustraction* $P = *(a, b)$ *est perdante en convention misère si et seulement si* $\mathrm{rde}(a, b) = 1$.

Démonstration. Nous procédons par récurrence sur la longueur de P. Si $a = 0$, alors la position P est de longueur zéro et donc gagnante en convention misère par la définition I.7. Si $a = 1$, alors la position P est perdante en convention misère parce qu'elle a une seule option $*(0, b)$ qui est gagnante.

Soit $P = *(a, b)$, avec $a > 1$. Nous supposons que le théorème est vrai pour toute position de longueur plus petite que P.

Si $a < b$, alors les options de P sont $*(0, b), *(1, b), \dots, *(a-1, b)$ et alors par l'hypothèse de récurrence nous avons que P est gagnante en convention misère parce qu'elle a l'option perdante $*(1, b)$.

Si $a \geq b$, alors les options de P sont $*(a-b+1, b), *(a-b+2, b), \dots, *(a-1, b)$ et la position P est gagnante en convention misère si et seulement si l'une de ces options est perdante en convention misère. Ceci est le cas si et seulement si $\mathrm{rde}(a, b) \neq 1$ par l'hypothèse de récurrence. □

II.5. La composition séquentielle de deux jeux

Dans ce qui reste de ce chapitre, nous calculons la fonction de Grundy d'une composition séquentielle de n jeu de soustraction, $n \geq 2$. Ceci n'avait pas été étudié auparavant et ces résultats font l'objet de l'article (Colipan et Liendo, 2013). Cet article est issue d'une collaboration avec A. Liendo.

L'opération des jeux qui nous intéresse dans cette section est la composition séquentielle des jeux définie par Stromquist et Ullman (1993). Soit G_1 et G_2 des positions dans des jeux combinatoires impartiaux. La composition séquentielle correspond au jeu où nous jouons G_1 jusqu'à que nous arrivons à une position finale pour ensuite jouer G_2. Le gagnant est le joueur qui arrive à une position finale pour le jeu G_2. En termes mathématiques nous avons la définition suivante.

Définition II.24. Soit P_1 et P_2 des positions dans des jeux combinatoires impartiaux G_1 et G_2 respectivement. Nous définissons de façon récursive la composition séquentiel de G_1 et G_2 comme le jeu $G_1 \lhd G_2$ dont les positions sont $P_1 \lhd P_2$ et les options de $P_1 \lhd P_2$ sont :
- $P_1' \lhd P_2$ où P_1' est une option de P_1 si P_1 a des options et
- $P_1 \lhd P_2'$ où P_2' est une option de P_2 si P_1 n'a pas des options.

Il suit de la définition précédente que si P_1 est une position qui n'a pas d'options, alors $P_1 \lhd P_2$ est équivalente à P_2. De même, si P_2 n'a pas d'options, alors $P_1 \lhd P_2$ est équivalente à P_1.

Rappelons que pour une position P d'un jeu combinatoire impartial, la valeur de la fonction de Grundy définie dans la section II.3 est dénoté par $g(P)$. Pour la suite, nous avons besoin du lemme suivant qui montre que pour calculer $g(P_1 \lhd P_2)$ il suffit de connaître P_1 et $g(P_2)$. Ce résultat est énoncé sans preuve dans (Stromquist et Ullman, 1993). Le résultat n'est pas vrai pour la position P_1 à gauche de la composition séquentielle comme le montrent les exemples de la section 2 de (Stromquist et Ullman, 1993).

Lemme II.25. *Soit P_1, P_2 et P_3 des positions dans des jeux combinatoires impartiaux. Si $g(P_2) = g(P_3)$ alors, $g(P_1 \lhd P_2) = g(P_1 \lhd P_3)$.*

Démonstration. La preuve suit par récurrence sur la longueur de P_1. Si P_1 n'a pas d'option, alors le théorème est trivial puisque

$$g(P_1 \lhd P_2) = g(P_2) = g(P_3) = g(P_1 \lhd P_3)$$

Supposons maintenant que P_1 a des options et que le théorème est vrai pour ces options. Alors,

$$\begin{aligned} g(P_1 \lhd P_2) &= \operatorname{mex}\{g(P_1', P_2) \mid P_1' \text{ option de } P_1\} \\ &= \operatorname{mex}\{g(P_1', P_3) \mid P_1' \text{ option de } P_1\} = g(P_1 \lhd P_3. \end{aligned}$$

□

II.6. Composition séquentielle de deux jeux de soustraction

Dans cette section, nous nous intéressons au jeu de soustraction défini dans la section II.4. Le but est de calculer la fonction de Grundy de la composition séquentielle $*(a,b) \lhd *(c,d)$ de deux positions du jeu de soustraction. D'après le lemme II.25 et le théorème II.20, nous avons que

$$g\big(*(a,b) \lhd *(c,d)\big) = g\big(*(a,b) \lhd *(\mathrm{rde}(c,d)\big)\,,$$

d'où, il suit que pour connaître la valeur de la fonction de Grundy $g(*(a,b) \lhd *(c,d))$, il suffit de calculer les fonctions de Grundy $g(*(a,b) \lhd *n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour la position $*(a,b)$, la fonction $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui à chaque $n \in \mathbb{N}$ lui associe la valeur $g(*(a,b) \lhd *n)$ est appelé la signature de $*(a,b)$ dans (Stromquist et Ullman, 1993). Le théorème suivante donne la valeur de la fonction de Grundy $g(*(a,b)\lhd *n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc la signature du jeu $*(a,b)$.

Théorème II.26. *Soit a, b, n des nombres naturels avec $b \geq 2$. Alors,*

$$g(*(a,b) \lhd *n) = \begin{cases} n & \text{si } n \geq b \text{ et } a = 0, \\ \mathrm{rde}(a-1,b) & \text{si } n \geq b \text{ et } a > 0, \\ n & \text{si } n < b \text{ et } \mathrm{rde}(a,b) = 0, \\ \mathrm{rde}(a-1,b) & \text{si } n < b \text{ et } 0 < \mathrm{rde}(a,b) \leq n, \\ \mathrm{rde}(a,b) & \text{si } n < b \text{ et } \mathrm{rde}(a,b) > n. \end{cases}$$

Dans la preuve du théorème nous utiliserons la notation chapeau que nous décrivons à continuation. Dans une liste indexé par des nombres naturels tel que $a_1, a_2, \ldots, a_n$, la notation chapeau $a_1, a_2, \ldots, \widehat{a_i}, \ldots a_n$ dénote la liste $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots a_n$ où nous excluons a_i.

Démonstration. Notons que si $a = 0$, le théorème est vrai puisque $g(*(0,b) \lhd *n) = g(*n) = n$. Si $n = 0$, nous avons $g(*(a,b) \lhd *n) = g(*(a,b)) = \mathrm{rde}(a,b)$ et le théorème est aussi vrai dans ce cas.

Dans la suite, nous supposons que $a, n > 0$. Nous procéderons en trois étapes pour montrer le théorème dans les cas $0 < a < b$, $a = b$ et $a > b$.

Cas où $0 < a < b$: Dans ce cas, les options de $*(a,b) \lhd *n$ sont

$$*(0,b) \lhd *n, *(1,b) \lhd *n, \ldots, *(a-1,b) \lhd *n\,. \tag{II.6.1}$$

Nous procédons par récurrence sur la valeur de a. Supposons que le théorème est vrai pour toutes les options de la position $*(a,b) \lhd *n$.

Si $a < n$, par l'hypothèse de récurrence les valeurs de la fonction de Grundy des options de $*(a,b) \lhd *n$ dans (II.6.1) sont respectivement $n, 0, 1, \ldots, a-2$. Alors

$$g(*(a,b) \lhd *n) = \operatorname{mex}\{n, 0, 1, \ldots, a-2\} = a-1 = \operatorname{rde}(a-1,b)\,.$$

Si $a > n$, par l'hypothèse de récurrence les valeurs de la fonction de Grundy des options de $*(a,b) \lhd *n$ dans (II.6.1) sont respectivement $n, 0, 1, \ldots, \widehat{n}, \ldots, a-1$. Alors

$$g(*(a,b) \lhd *n) = \operatorname{mex}\{n, 0, 1, \ldots, \widehat{n}, \ldots, a-1\} = a = \operatorname{rde}(a,b)\,.$$

Ceci montre le théorème dans le cas où $0 < a < b$.

Cas où $a = b$: Les options de $*(b,b) \lhd *n$ sont

$$*(1,b) \lhd *n, *(2,b) \lhd *n, \ldots, *(b-1,b) \lhd *n\,. \tag{II.6.2}$$

Nous appliquons le théorème pour $a < b$ qui a déjà été démontré. Si $n \geq b$, les valeurs de la fonction de Grundy des options de $*(b,b) \lhd *n$ dans (II.6.2) sont respectivement $0, 1, \ldots, b-2$. Alors

$$g(*(b,b) \lhd *n) = \operatorname{mex}\{0, 1, \ldots, b-2\} = b-1 = \operatorname{rde}(b-1,b)\,.$$

Si $n < b$, les valeurs de la fonction de Grundy des options de $*(b,b) \lhd *n$ dans (II.6.2) sont respectivement $0, 1, \ldots, \widehat{n}, \ldots, b-1$. Alors

$$g(*(b,b) \lhd *n) = \operatorname{mex}\{0, 1, \ldots, \widehat{n}, \ldots, b-1\} = n\,.$$

Ceci montre le théorème dans le cas où $a = b$.

Cas où $a > b$: Soit i l'unique nombre entier $i \in \{1, 2, \ldots, b\}$ tel que $\operatorname{rde}(a,b) = \operatorname{rde}(i,b)$. Avec cette définition,

$$i = \begin{cases} \operatorname{rde}(a,b) & \text{si } \operatorname{rde}(a,b) \neq 0\,, \\ b & \text{si } \operatorname{rde}(a,b) = 0\,. \end{cases}$$

Pour conclure la preuve, nous montrerons

$$g(*(a,b) \lhd *n) = g(*(i,b) \lhd *n)\,. \tag{II.6.3}$$

Nous appliquons le théorème pour $a \leq b$ qui a déjà été démontré. Nous procédons par récurrence sur la valeur de a. Si $a = b+1$ alors les options de $*(b+1,b) \lhd *n$ sont

$$*(2,b) \lhd *n, *(3,b) \lhd *n, \ldots, *(b,b) \lhd *n\,. \tag{II.6.4}$$

Si $n \geq b$, par le théorème pour $a \leq b$ les valeurs de la fonction de Grundy des options de $*(b+1,b) \lhd *n$ dans (II.6.4) sont respectivement $1, 2 \ldots, b-1$. Alors

$$g(*(b+1,b) \lhd *n) = \operatorname{mex}\{1, 2 \ldots, b-1\} = 0 = \operatorname{rde}(1,b)\,.$$

Si $n < b$, par le théorème pour $a \leq b$ les valeurs de la fonction de Grundy des options de $*(b+1,b) \lhd *n$ dans (II.6.4) sont respectivement $1, 2, \ldots, \widehat{n}, \ldots, b-1, n$. Alors

$$g(*(b+1,b) \lhd *n) = \operatorname{mex}\{1, 2, \ldots, \widehat{n}, \ldots, b-1, n\} = 0\,.$$

Ceci montre (II.6.3) dans le cas où $a = b+1$.

Soit $a > b+1$. Supposons maintenant que (II.6.3) est vrai pour toutes les options de $*(a,b) \lhd *n$, nous montrerons que (II.6.3) est vrai aussi pour $*(a,b) \lhd *n$. Les options de $*(a,b) \lhd *n$ sont

$$*(a-b+1,b) \lhd *n, *(a-b+2,b) \lhd *n, \ldots, *(a-1,b) \lhd *n\,. \tag{II.6.5}$$

Par l'hypothèse de récurrence, nous savons que les valeurs de la fonction de Grundy des options de $*(a,b) \lhd *n$ dans (II.6.5) sont

$$g(*(1,b) \lhd *n), g(*(2,b) \lhd *n), \ldots, g(\widehat{*(i,b) \lhd} *n), \ldots, g(*(b,b) \lhd *n)\,.$$

Cette liste n'est pas nécessairement dans le même ordre que (II.6.5).

Il suit du théorème pour $a \leq b$ que dans le deux cas $n \geq b$ et $n < b$, nous avons une égalité des ensembles

$$\{g(*(1,b) \lhd *n), g(*(2,b) \lhd *n), g(*(b,b) \lhd *n)\} = \{0, 1, \ldots, b-1\}\,.$$

D'où, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} g(*(a,b) \lhd *n) &= \operatorname{mex}\{g(*(1,b) \lhd *n), g(*(2,b) \lhd *n), \ldots, g(\widehat{*(i,b) \lhd} *n), \ldots, g(*(b,b) \lhd *n)\} \\ &= g(*(i,b) \lhd *n)\,. \end{aligned}$$

Ceci montre (II.6.3) et donc achève la preuve du théorème. □

Nous portons un intérêt particulier sur le cas des positions $*(a,b) \lhd *(c,b)$ de composition séquentielle des jeux de soustraction où le nombre maximal d'objets que nous pouvons soustraire des deux tas est le même parce que le jeu d'Euclide est défini ainsi. Dans ce cas, nous pouvons donner un résultat avec une formulation plus simple.

COROLLAIRE II.27. *Soit a, b, c des nombres naturels avec $b \geq 2$. Alors*

$$g(*(a,b) \lhd *(c,b)) = \begin{cases} \operatorname{rde}(c,b) & si \ \operatorname{rde}(a,b) = 0, \\ \operatorname{rde}(a-1,b) & si \ 0 < \operatorname{rde}(a,b) \leq \operatorname{rde}(c,b), \\ \operatorname{rde}(a,b) & si \ \operatorname{rde}(a,b) > \operatorname{rde}(c,b). \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Le résultat suit directement du Théorème II.26 en prenant $n = \operatorname{rde}(c,b)$. □

Nous remarquons que si dans le corollaire précédent, nous prenons b tel que $b > a$ et $b > c$, alors nous sommes dans le cas de Nim classique puisque $*(a,b)$ et $*(c,b)$ correspondent aux jeux $*a$ et $*c$. Avec cette remarque, dans le corollaire suivante nous retrouvons le résultat dans (Stromquist et Ullman, 1993) pour le jeu de Nim classique.

COROLLAIRE II.28. *Soit a, c des nombres naturels. Alors,*

$$g(*a \lhd *c) = \begin{cases} c & si \ a = 0, \\ a-1 & si \ 0 < a \leq c, \\ a & si \ a > c. \end{cases}$$

II.7. Composition séquentielle de n jeux de soustraction, $n > 2$

Nous allons maintenant calculer la fonction de Grundy d'une composition séquentielle successive des jeux de soustraction, c'est-à-dire, nous computerons

$$g(P), \quad \text{où} \quad P = *(a_1,b) \lhd *(a_2,b) \lhd \ldots \lhd *(a_n,b)\,.$$

Tout d'abord, nous montrons le lemme suivante qui dit que les positions $*(a_i,b)$ avec $\operatorname{rde}(a_i,b) = 0$ n'affectent pas la valeur de la fonction de Grundy $g(P)$.

LEMME II.29. *Soit* $a_1, \ldots, a_n, b$ *des nombres naturels avec* $b \geq 2$ *et soit* $P = *(a_1, b) \lhd *(a_2, b) \lhd \ldots \lhd *(a_n, b)$. *Si* $\mathrm{rde}(a_i, b) = 0$ *alors,*

$$g(P) = g(*(a_1, b) \lhd \ldots \lhd \widehat{*(a_i, b)} \lhd \ldots \lhd *(a_n, b))\,.$$

DÉMONSTRATION. Soit $P_1 = *(a_1, b) \lhd \ldots \lhd *(a_{i-1}, b)$ et $P_2 = *(a_i, b) \lhd \ldots \lhd *(a_n, b)$. Par le lemme II.25, nous avons que $g(P_1 \lhd P_2) = g(P_1 \lhd *g(P_2))$. Il suffit donc de montrer

$$g(P_2) = g(*(a_{i+1}, b) \lhd \ldots \lhd *(a_n, b))\,,$$

c'est-à-dire, il suffit de montrer le lemme avec $i = 1$.

Supposons maintenant que $i = 1$. Soit $P_3 = *(a_2, b) \lhd \ldots \lhd *(a_n, b)$. Encore par le lemme II.25, nous avons

$$g(*(a_1, b) \lhd P_3) = g(*(a_1, b) \lhd *g(P_3))\,.$$

Puisque $\mathrm{rde}(a_1, b) = 0$, par le théorème II.26 nous avons

$$g(*(a_1, b) \lhd *g(P_3)) = g(P_3)\,.$$

Ceci montre le lemme. □

Dans le théorème suivant nous calculons la fonction de Grundy d'une composition séquentielle de plusieurs jeux de soustraction. Nous pouvons supposer que toutes les positions $*(a_i, b)$ sont tels que $\mathrm{rde}(a_i, b) \neq 0$ puisque dans le cas contraire, le lemme précédent montre la valeur de la fonction de Grundy du jeu ne change pas.

THÉORÈME II.30. *Soit* $a_1, \ldots, a_n, b$ *des nombres naturels avec* $b \geq 2$ *et* $\mathrm{rde}(a_i, b) \neq 0$ *pour tout* i. *Nous calculons* $g(P)$, *où* $P = *(a_1, b) \lhd \ldots \lhd *(a_n, b)$ *de la manière suivante : soit* ℓ *le plus petit nombre entier positif tel que* $\mathrm{rde}(a_\ell, b) \neq \mathrm{rde}(a_1, b)$. *S'il n'existe pas un tel* ℓ, *nous posons* $\ell = n + 1$ *et* $a_{n+1} = 0$. *Alors,*

$$g(P) = \begin{cases} \mathrm{rde}(a_1, b) & \textit{si } \ell \textit{ est pair et } \mathrm{rde}(a_1, b) > \mathrm{rde}(a_\ell, b), \\ \mathrm{rde}(a_1 - 1, b) & \textit{si } \ell \textit{ est pair et } \mathrm{rde}(a_1, b) < \mathrm{rde}(a_\ell, b), \\ \mathrm{rde}(a_1 - 1, b) & \textit{si } \ell \textit{ est impair et } \mathrm{rde}(a_1, b) > \mathrm{rde}(a_\ell, b), \\ \mathrm{rde}(a_1, b) & \textit{si } \ell \textit{ est impair et } \mathrm{rde}(a_1, b) < \mathrm{rde}(a_\ell, b)\,. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Nous procédons par récurrence sur le nombre des jeux n dans la composition séquentielle. Si $n = 1$, nous avons que $\ell = 2$ qui est pair et $\mathrm{rde}(a_1, b) > \mathrm{rde}(a_\ell, b) = 0$. Le théorème dit alors que $g(P) = \mathrm{rde}(a_1, b)$, ce qui est correct.

Supposons maintenant que le théorème est vrai pour des compositions séquentielles de moins de n jeux. Par l'hypothèse de récurrence, nous avons que $g(*(a_2, b) \lhd \ldots \lhd *(a_n, b))$ vaut $\mathrm{rde}(a_2, b) := k \geq 1$ ou $\mathrm{rde}(a_2 - 1, b) = k - 1$. Donc par le lemme II.25, nous avons que

$$g(P) = g(*(a_1, b) \lhd *k), \quad \text{ou} \quad g(P) = g(*(a_1, b) \lhd *(k - 1))\,.$$

Supposons que $\mathrm{rde}(a_1, b) < \mathrm{rde}(a_2, b)$ ce qui entraîne $\ell = 2$. Dans les deux cas pour $g(P)$, par le théorème II.26, nous avons que $g(P) = \mathrm{rde}(a_1 - 1, b)$ ce qui preuve le théorème dans ce cas.

Supposons maintenant que $\mathrm{rde}(a_1, b) > \mathrm{rde}(a_2, b)$. Encore $\ell = 2$ et dans les deux cas pour $g(P)$, par le théorème II.26, nous avons que $g(P) = \mathrm{rde}(a_1, b)$ ce qui preuve le théorème dans ce cas.

Enfin, supposons que $\mathrm{rde}(a_1, b) = \mathrm{rde}(a_2, b)$. Soit $a'_i = a_i + 1$ pour $i = 1, \ldots, n-1$ de telle manière que

$$*(a_2, b) \lhd \ldots \lhd *(a_n, b) = *(a'_1, b) \lhd \ldots \lhd *(a'_{n-1}, b)\,.$$

Nous définissons ℓ' comme le plus petit nombre entier positif tel que $\mathrm{rde}(a'_\ell, b) \neq \mathrm{rde}(a'_1, b)$. S'il n'existe pas un tel ℓ', nous posons $\ell' = n$ et $a'_n = 0$. Avec cette définition $\ell' = \ell - 1$ et $a'_{\ell'} = a_\ell$.

Si $g(*(a_2, b) \lhd \ldots \lhd *(a_n, b)) = \mathrm{rde}(a_2, b) = k$ alors $g(P) = g(*(a_1, b) \lhd *k) = \mathrm{rde}(a_1 - 1, b)$ par le théorème II.26. Par l'hypothèse de récurrence, ceci est le cas si et seulement si ℓ' est pair et $\mathrm{rde}(a'_1, b) > \mathrm{rde}(a'_{\ell'}, b)$ ou si ℓ' est impair et $\mathrm{rde}(a'_1, b) < \mathrm{rde}(a'_{\ell'}, b)$. Enfin, cette dernière condition est satisfaite si et seulement si ℓ est impair et $\mathrm{rde}(a_1, b) > \mathrm{rde}(a_\ell, b)$ ou si ℓ est pair et $\mathrm{rde}(a_1, b) < \mathrm{rde}(a_\ell, b)$. Ceci confirme le théorème dans ce cas.

Si $g(*(a_2, b) \lhd \ldots \lhd *(a_n, b)) = \mathrm{rde}(a_2 - 1, b) = k - 1$ alors $g(P) = g(*(a_1, b) \lhd *(k-1)) = \mathrm{rde}(a_1, b)$ par le théorème II.26. Par l'hypothèse de récurrence, ceci est le cas si et seulement si ℓ' est pair et $\mathrm{rde}(a'_1, b) < \mathrm{rde}(a'_{\ell'}, b)$ ou si ℓ' est impair et $\mathrm{rde}(a'_1, b) > \mathrm{rde}(a'_{\ell'}, b)$. Enfin, cette dernière condition est satisfaite si et seulement si ℓ est impair et $\mathrm{rde}(a_1, b) < \mathrm{rde}(a_\ell, b)$ ou si ℓ est pair et $\mathrm{rde}(a_1, b) > \mathrm{rde}(a_\ell, b)$. Ceci achève la preuve. □

Comme dans le cas du corollaire II.28, si nous prenons $b > a_i$ pour tout i, nous sommes dans le cas du jeu de Nim classique et donc nous pouvons retrouver le résultat dans (Stromquist et Ullman, 1993).

Corollaire II.31. *Soit $a_1, \ldots, a_n$ des nombres naturels positifs. Nous calculons $g(*a_1 \lhd \ldots \lhd *a_n)$ de la manière suivante : soit ℓ le plus petit nombre entier positif tel que $a_\ell \neq a_1$. S'il n'existe pas un tel ℓ, nous posons $\ell = n+1$ et $a_{n+1} = 0$. Alors,*

$$g(*a_1 \lhd \ldots \lhd *a_n) = \begin{cases} a_1 & \text{si } \ell \text{ est pair et } a_1 > a_\ell, \\ a_1 - 1 & \text{si } \ell \text{ est pair et } a_1 < a_\ell, \\ a_1 - 1 & \text{si } \ell \text{ est impair et } a_1 > a_\ell, \\ a_1 & \text{si } \ell \text{ est impair et } a_1 < a_\ell\,. \end{cases}$$

Pour la suite nous avons besoin d'une définition inspirée du paramètre ℓ définit dans le théorème II.30.

Définition II.32. Soit $a_1, \ldots, a_n, b$ des nombres naturels avec $b \geq 2$ et soit $P = *(a_1, b) \lhd \ldots \lhd *(a_n, b)$. Nous définissons $\ell(P) = \ell$ comme le plus petit nombre entier positif tel que $\mathrm{rde}(a_\ell, b) > 1$. S'il n'existe pas un tel ℓ, nous posons $\ell = n+1$. Nous définissons aussi $L(P)$ comme le cardinal de l'ensemble $\{i < \ell \mid \mathrm{rde}(a_i, b) = 1\}$.

Remarquons que si $\mathrm{rde}(a_i, b) \neq 0$ pour tout i et $\mathrm{rde}(a_1, b) = 1$, alors $\ell(P)$ coïncide avec la définition de ℓ dans le théorème II.30. À l'aide de cette définition, dans le corollaire suivant nous caractérisons les jeux perdants pour la composition séquentielle de plusieurs jeux de soustraction.

Corollaire II.33. *Soit $a_1, \ldots, a_n, b$ des nombres naturels positifs avec $b \geq 2$. La position $P = *(a_1, b) \lhd \ldots \lhd *(a_n, b)$ est perdante si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite.*

(i) *$\ell(P) < n+1$ et $L(P)$ est impair.*

(ii) *$\ell(P) = n+1$ et $L(P)$ est pair.*

Démonstration. La position est perdante si et seulement si sa valeur de Grundy est zéro. Nous montrerons que ceci est le cas si et seulement si l'une des conditions du corollaire est satisfaite.

Nous dénotons $\ell = \ell(P)$ et $L = L(P)$. D'après le lemme II.29, nous pouvons supposer $\mathrm{rde}(a_i, b) \neq 0$ pour tout i. Ceci entraîne $L = \ell - 1$. Dans ce cas, d'après le théorème II.30, la fonction de Grundy $g(P)$ peut prendre les valeurs $\mathrm{rde}(a_1, b)$ ou $\mathrm{rde}(a_1, b) - 1$. Si $\mathrm{rde}(a_1, b) > 1$, alors $g(P) > 0$ et P est gagnante. Dans le corollaire, ce cas correspond au cas (ii) avec $\ell = 1$ et $L = 0$ qui est pair, d'où le corollaire est vrai dans ce cas.

Dans la suite, nous supposons que $\mathrm{rde}(a_1, b) = 1$. Dans ce cas la définition de $\ell = \ell(P)$ coïncide avec celle de ℓ dans le théorème II.30. D'après ce théorème, la fonction de Grundy $g(P)$ vaut zéro si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite.

(i) ℓ est pair et $\mathrm{rde}(a_\ell, b) > 1$.

(ii) ℓ est impair et $\mathrm{rde}(a_\ell, b) < 1$.

Notons que $\mathrm{rde}(a_\ell, b) < 1$ seulement si $\ell = n + 1$. Puisque $L = \ell - 1$, nous avons que la condition (i') est équivalente à (i), et la condition (ii') est équivalente à (ii). □

Nous pouvons aussi décrire une stratégie gagnante pour la composition séquentielle de plusieurs jeux de soustraction.

Corollaire II.34. *Soit* $a_1, \ldots, a_n, b$ *des nombres naturels positifs avec* $b \geq 2$. *Si la position* $P = *(a_1, b) \lhd \ldots \lhd *(a_n, b)$ *est gagnante, alors un coup gagnant de* P *est :*

(i) *Si* $\mathrm{rde}(a_1, b) = 0$, *alors nous enlevons* $b - 1$ *objets.*

(ii) *Si* $\mathrm{rde}(a_1, b) = 1$, *alors nous enlevons un objet.*

(iii) *Si* $\mathrm{rde}(a_1, b) = k > 1$, *nous définissons* $P' = *(0, b) \lhd *(a_2, b) \lhd \ldots \lhd *(a_n, b)$. *Nous distinguons quatre cas :*

(a) Si $\ell(P') < n + 1$ *et* $L(P')$ *est pair, alors nous enlevons* $k - 1$ *objets.*

(b) Si $\ell(P') < n + 1$ *et* $L(P')$ *est impair, alors nous enlevons* k *objets.*

(c) Si $\ell(P') = n + 1$ *et* $L(P')$ *est pair, alors nous enlevons* k *objets.*

(d) Si $\ell(P') = n + 1$ *et* $L(P')$ *est impair, alors nous enlevons* $k - 1$ *objets.*

Démonstration. Il suit directement du corollaire II.33. En effet, dans les cas (i) et (ii), le coup choisi par la stratégie gagnante change la parité de $L(P)$ et donc cette option est perdante puisque P est gagnante.

Dans le cas (iii), la stratégie gagnante compute $L(P')$ pour la position

$$P' = *(0, b) \lhd *(a_2, b) \lhd \ldots \lhd *(a_n, b) = *(a_2, b) \lhd \ldots \lhd *(a_n, b)\,,$$

où nous ne considérons pas le premier tas, pour décider si ce jeu est gagnant ou perdant. Puis, la stratégie gagnante choisit le coup qui change la parité de $L(P')$ si P' est gagnante et celle qui garde la parité de $L(P')$ si P' est perdante. □

II.8. Composition séquentielle de jeux de soustraction en convention misère

Comme décrit par Stromquist et Ullman (1993), la composition séquentiel peut aussi être utilisée pour étudier la version misère d'un jeu. Dans cette section nous appliquons cette idée pour caractériser les positions perdantes de la composition séquentielle de plusieurs jeux de soustraction.

LEMME II.35. *Soit P une position d'un jeu combinatoire impartial. La position P est perdante en convention misère si et seulement si $P \lhd *1$ est perdante (en convention normale).*

DÉMONSTRATION. Puisque la position $*1$ du jeu de Nim n'a qu'une seule option qui est une position finale, le perdant de la position $P \lhd *1$ est le joueur qui effectue le dernier coup dans P, c'est-à-dire, le perdant de P lorsque le jeu est joué en convention misère. □

Si $b \geq 2$, la position$*1$ du jeu de Nim est la même que la position $*(1, b)$ du jeu de soustraction, donc la position P est perdant en convention misère si et seulement si $P \lhd *(1, b)$ est perdant (en convention normale). Ceci nous permet d'énoncer le résultat suivant.

COROLLAIRE II.36. *Soit $a_1, \ldots, a_n, b$ des nombres naturels positifs avec $b \geq 2$. La position $P = *(a_1, b) \lhd \ldots \lhd *(a_n, b)$ est perdant en convention misère si et seulement si $L(P)$ est impair.*

DÉMONSTRATION. La position $P = *(a_1, b) \lhd \ldots \lhd *(a_n, b)$ est perdante en convention misère si et seulement si la position $P' = *(a_1, b) \lhd \ldots \lhd *(a_n, b) \lhd *(1, b)$ est perdante en convention normale.

S'il existe un entier k tel que $\mathrm{rde}(a_k, b) > 1$, alors $\ell(P') = \ell(P)$ et $L(P') = L(P)$. S'il n'existe pas un tel k, alors, $\ell(P') = \ell(P) + 1$ et $L(P') = L(P) + 1$. Par le corollaire II.33, il suit que P' est perdante et donc P est perdante pour la convention misère si et seulement si l'un de deux conditions suivantes est satisfaite :

(i) $\ell(G) < n + 1$ et $L(G)$ est impair.

(ii) $\ell(G) = n + 1$ et $L(G)$ est impair.

Ceci montre le corollaire. □

REMARQUE II.37. Remarquons que par hasard, il arrive que la description des positions perdantes pour la composition séquentielle des jeux de soustraction en convention misère est plus simple qu'en convention normale puisqu'elle ne dépend plus au paramètre $\ell(P)$ et seulement du paramètre $L(P)$. Ceci est la raison pour laquelle nous avons choisi d'énoncer le jeu d'Euclide en convention misère.

Comme dans le cas du jeu en convention normale, à l'aide de la proposition précédente, nous pouvons décrire une stratégie gagnante pour la composition séquentielle de plusieurs jeux de soustraction en convention misère.

COROLLAIRE II.38. *Soit $a_1, \ldots, a_n, b$ des nombres naturels positifs avec $b \geq 2$. Nous supposons que la position $P = *(a_1, b) \lhd \ldots \lhd *(a_n, b)$ est gagnante en convention misère, alors un coup gagnante de P pour la convention misère est :*

(i) *Si* $\mathrm{rde}(a_1, b) = 0$, *alors nous enlevons $b - 1$ objets.*

(ii) *Si* $\mathrm{rde}(a_1, b) = 1$, *alors nous enlevons un objet.*

(iii) *Si* $\mathrm{rde}(a_1, b) = k > 1$, *nous définissons $P' = *(0, b) \lhd *(a_2, b) \lhd \ldots \lhd *(a_n, b)$. Nous distinguons deux cas :*

  (a) Si $L(P')$ est pair, alors nous enlevons $k - 1$ objets.

  (b) Si $L(P')$ est impair, alors nous enlevons k objets.

DÉMONSTRATION. La preuve suit du corollaire II.36 par le même argument que dans la preuve du corollaire II.34. □

II.9. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les jeux de type Nim du point vu mathématique. Nous avons alors fait émerger des notions propres pour cette catégorie de jeu tels que le système de numération binaire, les classes d'équivalence, la Nim-somme, la fonction mex, la preuve par récurrence, la modélisation, la division euclidienne...

D'autre part les jeux de type Nim sont de problèmes de recherche en mathématique, donc leur résolution offre l'occasion de mettre en œuvre des apprentissages relatifs à la démarche de recherche tels que :

> « *... s'interroger, essayer, tâtonner, observer, raisonner, émettre des conjectures, généraliser, prouver, s'accrocher, imaginer, trouver du plaisir à chercher, échanger avec autrui, partager ses découvertes, critiquer, argumenter...* »(Godot, 2005)

Dans le chapitre suivant, nous allons faire une analyse plus détaillée de ces notions et de celles du chapitre I.

CHAPITRE III

Savoirs et savoir-faire qui relèvent des jeux combinatoires de type Nim

Dans les chapitres précédents, nous avons présenté la théorie des jeux combinatoires et nous avons fait une analyse mathématique des jeux combinatoires de type Nim. Cette analyse nous a montré que la résolution de ce type de jeu est réalisé à partir de la Nim-somme et de la notion de congruence. Nous pouvons voir également que les variantes avec un, deux et trois tas (avec deux tas égaux) peuvent être analysées en utilisant les critères de divisibilité dans N ou la notion de multiple.

Dans ce chapitre, nous reprendrons le savoir et/ou compétences relatives à l'étude mathématique des jeux combinatoires et des jeux de Nim, en vue d'une transposition en classe. Ainsi, dans les notions et compétences liées aux jeux combinatoires et aux jeux de type Nim nous pouvons identifier trois types de savoirs : savoir-faire de l'activité mathématique, savoirs propres d'un jeu combinatoire et savoirs notionnels.

III.1. Savoir-faire de l'activité mathématique

La résolution des jeux combinatoires de type Nim fait appel à des raisonnements complexes. En effet, résoudre un problème de ce type implique des raisonnements scientifiques tels que : traiter, argumenter, raisonner, formuler une conjecture, dégager une méthode de travail, généraliser, structurer, synthétiser, présenter ses résultats, etc.

III.2. Savoirs propres d'un jeu combinatoire

Comme nous avons vue au chapitre I et II, les jeux de type Nim sont des jeux combinatoires. Il y a des notions propres aux jeux combinatoires et certaines sont associées aux notions mathématiques :

- Les notions de position gagnante et position perdante : « être dans une position perdante » ne signifie pas que nous allons perdre à coup sûr. De même, « être dans une position gagnante » ne signifie pas que nous allons forcément gagner. Cet effet rend difficile la compréhension du fait qu'une position est soit gagnante, soit perdante.
- La notion de stratégie gagnante : elle consiste à trouver un algorithme qui permet de toujours gagner. Ce qui nous semble difficile à comprendre avec cette notion est la distinction entre la victoire due au hasard et la victoire systématique due à une stratégie gagnante.
- Les notions de quantificateur existentiel et universel : les notions de position gagnante et position perdante sont basées sur ces notions mathématiques. Plus généralement, les axiomes de jeu combinatoire reposent sur ces quantificateurs. Par

exemple, l'axiome 8 correspond à : $\forall P$ position de départ, $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que le jeu s'arrête au bout d'au plus n coups.

- La notion de récursivité : Dans la définition de position gagnante et position perdante, la notion de récursivité apparaît de façon évidente comme nous l'avons remarqué dans le chapitre I.
- La preuve par récurrence : La plupart des preuves dans la théorie des jeux combinatoires comportent des arguments par récurrence, parfois à plusieurs reprises.

III.3. Savoirs notionnels

Comme nous l'avons déjà remarqué dans la section I.4, il y a des notions mathématiques usuelles dans l'enseignement qui sont liées à la résolution des jeux combinatoires. Parmi elles, nous pouvons citer :

- Propriétés des nombres entiers : reconnaître différents usages des nombres tels que compter, ordonner, grouper et classer ; développer et appliquer des concepts de la théorie des nombres reliés aux nombres premiers, aux facteurs, aux multiples et à la division euclidienne ; comprendre et identifier des classes d'équivalence dans les entiers modulo p.
- En classification et modélisation : créer et étendre des modèles de plusieurs façons et décrire leurs propriétés ; appliquer des modèles pour faire des prédictions et résoudre des problèmes ; appliquer des modèles pour identifier des relations dans le système numérique.
- Recensement et interprétation des données : dans les jeux de type Nim, nous avons la possibilité de collecter, organiser et expliquer les données obtenues à travers diverses expérimentations.

Donc, dans ce trois groupes il y a des notions que nous pouvons classé comme de notions qui sont institutionnels et de notions institutionnels. Le tableau suivante résume cette idée.

	savoir-faire mathématique	savoir-faire des jeux combinatoires	savoirs notionnels
institutionnels	tous	quantificateur existentiel et universel, la définition récursive et la preuve par récurrence	tous
non-institutionels		Stratégie gagnante, position gagnante et position perdante	

Dans le chapitre V, nous étudierons comment les savoirs et savoir-faire énoncés précédemment sont mis en place dans les différentes institutions. Nous verrons également quelles sont les activités proposées aux élèves.

CHAPITRE IV

Le modèle situation de recherche pour la classe (SiRC)

L'intention des SiRC est, sur la base de connaissances mathématiques élémentaires, d'amener les élèves (de l'école élémentaire à l'université) à une véritable pratique mathématique, en leur donnant l'occasion d'être autonomes dans leurs recherche.

> *« En situation de recherche, le chercheur peut, et doit, faire évoluer sa question, choisir lui-même le cadre de résolution, modifier les règles ou en changer, s'autoriser à redéfinir les objets ou à modifier la question posée. Il peut momentanément s'attaquer à une autre question si cela lui semble nécessaire. C'est à ce type de pratique (praxis pour la résolution d'une question) que nous souhaitons confronter l'élève. »* (Grenier et Payan, 2003)

Les SiRC s'adressent aussi bien aux élèves de l'école élémentaire, du collège, du lycée, qu'aux étudiants ou aux enseignants.

IV.1. Caractérisation du Modèle

Le modèle est décrit ainsi par Grenier et Payan (2002) [1] :

1. ***Une SiRC s'inscrit dans une problématique de recherche***. *Une SiRC s'inscrit dans une problématique de recherche professionnelle. Elle doit être proche de questions non résolues. Nous faisons l'hypothèse que cette proximité à des questions non résolues (non seulement pour les élèves, pour l'ensemble de la classe, mais aussi pour l'enseignant, les chercheurs) va être déterminante pour le rapport que vont avoir les élèves avec la situation.*
2. ***La question initiale est facile d'accès***. *Pour que la question soit facilement identifiable par l'élève, le problème doit se situer hors des mathématiques formalisées et c'est la situation elle-même qui doit « amener » l'élève à l'intérieur des mathématiques*
3. ***Des stratégies initiales existent, sans que soient indispensables des prérequis spécifiques***. *De préférence, les connaissances scolaires nécessaires sont les plus élémentaires et les plus réduites possibles.*
4. ***Plusieurs stratégies d'avancée dans la recherche et plusieurs développements sont possibles***, *aussi bien du point de vue de l'activité (construction, preuve, calcul) que du point de vue des notions mathématiques.*
5. ***Une question résolue peut renvoyer à une nouvelle question***. *Critère de « non-fin » de la situation. On peut changer les hypothèses (un contre-exemple ne clôt pas le problème, on peut changer la question.*

1. Nous analyserons dans le V, les caractéristiques de ce modelé relativement au situations didactique de Brousseau, situation-problème de Douady et problème ouvert de Arsac *et al.* (1991)

6. ***Une SiRC est caractérisée par des « variables de recherche**, paramètres du problème qui pourraient être des variables didactiques (c'est-à-dire, à la disposition de l'enseignant), mais qui sont laissés à la disposition de l'élève. Elles doivent être choisies avec attention.*

Ainsi un problème de type SiRC est forcement non usuel dans la classe. L'autonomie dans la recherche implique que les élèves peuvent tenter de résoudre leurs propres questions. Il n'y a pas nécessairement de réponse finale au problème posé au départ, l'objectif n'est pas l'exercice de une technique ou de une méthode vue en cours et c'est la preuve le moyen de validation à la charge des élèves.

IV.1.1. Le milieu de une SiRC

Le milieu pour une SiRC a les caractéristiques suivantes (Giroud, 2011) :

- *Les concepts mathématiques qui sont en jeu pour résoudre la question ne sont pas désignés à l'avance et ne sont pas restreints a priori, ils sont au service du problème et de sa résolution.*
- *Les apprentissages en jeu sont ceux qui sont constitutifs de toute activité de recherche mathématique : l'argumentation, l'activité de conjecturer, celle de structurer (un objet), la preuve, la modélisation, tous plus ou moins présents selon le type de SiRC choisi.*
- *Des savoirs notionnels sont aussi en jeu, ils vont constituer les « points d'ancrage notionnels » pour l'enseignant.*
- *Aucune stratégie, aucune connaissance ne doit être a priori exclue.*
- *Présence de variables de recherche.*
- *Pour l'élève, un critère de réussite « provisoire » est l'émission d'une conjecture forte ou la résolution d'un cas particulier.*
- *Pour l'enseignant, le critère de réussite est la reconnaissance d'apprentissages liés au triplet (question, conjecture, preuve).*

IV.1.2. Positions des acteurs et gestion d'une SiRC

Dans une SiRC, les acteurs (élèves et enseignant) sont dans des positions différentes de celles qu'ils ont habituellement dans une situation didactique classique.

Les élèves sont en position de *chercheur* et ont pour tâche résoudre le problème et de produire des résultats qui sont nouveaux pour eux.

> *« [l'élève] est dans une tâche de production de quelque chose de « nouveau » qui n'est pas seulement nouveau pour lui. Les résultats de son activité de recherche sont des conjectures, résolution de cas particuliers, des contre-exemples, des questions nouvelles, etc... (Grenier et Payan, 2002)*

Godot (2005) rajoute :

> *« **l'élève est gestionnaire de la recherche**, il ne sait pas à l'avance où vont le mener ses recherches, le résultat de ses recherches n'est pas une solution unique, il peut suivre plusieurs pistes et a à sa charge le choix de certaines variables. »*

L'enseignant est dans une double position *de chercheur et de gestionnaire de la situation*, il est en position de chercheur, car les élèves peuvent se poser des problèmes pour lesquels il n'a pas immédiatement les réponses, il peut alors s'associer à eux pour chercher des solutions.

> *« Pour le pôle recherche, sa position est plus proche de celle de l'élève que dans une situation classique, car il n'est pas nécessairement détenteur des solutions du problème. Mais il est (censé être) détenteur des savoirs transversaux et avoir des critères d'évaluation sur leur validité. C'est une position qui se révèle difficile, parce qu'il n'est pas d'usage pour un enseignant d'avoir une activité de recherche. » (Grenier et Payan, 2002)*

Il est gestionnaire de la situation, car il doit contrôler l'activité de l'élève par rapport aux objectifs d'apprentissage, les savoirs transversaux.

> *« Dans la gestion des SiRC, le contrôle par l'enseignant de l'activité de l'élève se fait d'abord en fonction de l'avancée dans la résolution du problème et aussi par rapport aux objectifs d'apprentissage, les savoirs transversaux. Les notions mathématiques susceptibles d'apparaître comme des outils de résolution peuvent être fournies par l'enseignant.*
>
> *Le « jeu d'obligations » entre l'élève et l'enseignant porte bien sur ces savoirs transversaux. Les règles de base associées sont celles habituelles du débat scientifique (Legrand, 1993) : une affirmation doit être argumentée, un contre-exemple est suffisant pour annuler une conjecture, des exemples ne suffisent pas à prouver, etc... Des règles moins « classiques » sont aussi en jeu, telles que celle-ci « Si une conjecture s'avère fausse, peut-on la modifier pour en faire une autre conjecture ? ». Ces règles et propriétés du débat scientifique forment des connaissances de base pour l'activité mathématique et des éléments de rétroaction. Elles sont constitutives d'un milieu pour une situation SiRC. » (Grenier et Payan, 2002)*

Ainsi, nous pouvons voir que le contrat didactique que dérive des caractéristiques des situations recherche n'est pas un contrat didactique usuel. Nous allons étudier le modèle SiRC, le milieu, les positions des acteurs et la gestion de SiRC dans des cas particuliers des problèmes de jeux combinatoires de type Nim

IV.2. Les travaux didactiques sur les SiRC

Depuis une dizaine d'années, l'équipe maths à modeler de l'Institut Fourier de la Université de Grenoble, construit, analyse et expérimente des SiRC. L'objectif est d'amener de façon ludique les élèves vers une démarche de recherche en mathématiques et de les sensibiliser à l'activité scientifique en général

La méthodologie adoptée repose dans un premier temps dans l'identification de problèmes de la recherche actuelle susceptibles d'être transposés dans des pratiques scolaires et des pratiques d'animation et de médiation scientifique. ainsi l'équipe dispose de plusieurs situations de recherche pour la classe dont une grand majorité son présentées sous forme de jeu et expérimentées à tous les niveaux et pour lesquelles une analyse a priori fiable montre leur rôle dans la mise en œuvre de notions transversales au savoir.

Comme nous avons cité dans la section de contexte au tout debout de cette thèse, plusieurs thèses ont été faites sur ce sujet. Dans la suite nous résumerons les travaux de Godot et Giroud, thèses proches de notre recherche et qui vont nous servir pour l'analyse des situations recherche.

IV.2.1. Situations recherche et jeux mathématiques pour la formations et la vulgarisation

Karine Godot, s'est intéressé aux situations de recherche présentées sous forme de jeu, accompagnées d'un support matériel. Cette recherche s'est concentrée dans le rôle du support de communication que représente le jeu dans la dévolution des situations ainsi que les influences qu'il peut avoir dans la mise en place de démarches de recherche. Les phases expérimentales de cette recherche ont été réalisées en l'institution scolaire et dans institutions que l'auteur appelle « loisir scientifiques » c'est à dire, des institutions que font sensibiliser aux sciences au grand publique.

Toute d'abord, dans sa thèse elle considéré qu'est-que ce rentrer dans une démarche de recherche en mathématique :

> « *Nous considérerons que l'élève ou le public est rentré dans une démarche de recherche en mathématiques dans une situation de jeu si : il choisit les sous-problèmes qu'il souhaite étudier si le problème est posé de façon ouverte. Il ne se contente pas de jouer et abandonne la recherche par essais-erreurs pour mettre en place une recherche organisée, imaginer des stratégies de résolution. Pour cela, il peut chercher à modéliser la situation [...] Il observe ce qu'il fait, est amené à énoncer des propriétés, à généraliser, à déterminer des méthodes de construction de solution [...] Il cherche à énoncer des conjectures. Il produit des contre-exemples pour invalider certaines de ses propositions. Il cherche à apporter des arguments de preuve. Il se pose de nouvelles questions.* »

Ainsi ses expérimentations ont montré que le support matériel est une aide à la recherche pour les élèves.

> « *Il permet à chacun, quel que soit son niveau de connaissance en mathématiques, d'avancer dans la résolution du problème, en mettant en œuvre les différentes composantes de la recherche en mathématiques. Il donne notamment l'opportunité de faire facilement des essais et d'exhiber des contre-exemples* »

Elle montre aussi que les apprentissages en jeu dans la recherche de la situation « La roue aux couleurs » comme dans celle des autres situations recherche et ce sont ceux qui sont constitutifs de toute activité de recherche mathématique, c'est ce qui donne une légitimité institutionnelle à ces situations. Dès l'école primaire, elle a retrouve dans les productions des élèves, l'activité de conjecturer, la confrontation à l'impossibilité, celle de structurer (un objet, ses essais), la recherche de preuve (par forçage, exhaustivité ou recherche d'arguments plus formels), la recherche d'une modélisation, la recherche de généralisation, l'argumentation...

Ses résultats sont :

1. *« Le fait de travailler en groupe favorise, compte tenu de nos observations, le débat, l'argumentation et évite les découragements chez les élèves. De plus, il semble permettre de valoriser les élèves en difficulté, ils sont amenés à débattre avec ceux qui réussissent habituellement en mathématiques et se retrouvent là, finalement, à « connaissances égales ».*

2. *« Les situations recherche peuvent être un support à la disposition des enseignants pour mettre en application les directives officielles et faire de leur classe « une véritable petite communauté mathématique » »* .
3. *« La pratique régulière de situations recherche peut conduire à enrichir le rapport personnel de l'élève vis-à-vis des mathématiques car elle implique une appréhension différente de l'activité mathématique »*.

Donc au regard de l'étude fait par Godot, la pratique régulière de situations recherches peut contribuer à développer un aspect de la culture mathématique très peut traite, que se soit dans institutions scolaire ou dans la institution de loisir scientifique.

IV.2.2. Étude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe

Giroud dans sa thèse a étudié la démarche expérimental dans les situations de recherche pour la classe et en particulier au rôle qu'il joue dans la résolution de problèmes de recherche.

Il postule que savoir faire des mathématiques, c'est savoir résoudre partialement des problèmes de recherche et la résolution de tels problèmes nécessitant de passer par des phases expérimentales.

> *« L'hypothèse fondamentale de notre étude est que l'apprentissage de la démarche expérimentale ne peut se faire qu'en situation de résolution de problèmes. La partie didactique de notre travail a donc été, en partie, consacré à la détermination de conditions épistémologique et didactiques favorisant la pratique de la démarche expérimentale en situation de résolution de problème de recherche »*

Donc, pour l'auteur pratiquer la démarche expérimentale en mathématiques consister à essayer de résoudre un problème en effectuant les actions suivantes « *de façon non nécessairement ordonnées et à, éventuellement, répéter* » :

- *proposer de nouveaux problèmes*
- *expérimenter-observer-valider*
- *tenter de prouver.*

Ainsi le milieu adidactique permettant de réaliser ces trois actions son selon Giroud :

1. L'élève doit prendre l'expérimentation à sa charge
2. Les outils matériels contenus dans le milieu doivent être maîtrisés par les élèves.
3. Les instances du problème initial doivent être des objets apparaissant comme non-usuels pour les élèves
4. Le milieu doit permettre la construction de nouveaux objets mathématiques.
5. Un grand nombre de propositions doivent être vérifiables expérimentalement sur des cas particuliers.
6. Mais la validation expérimentale doit apparaître comme insuffisante.
7. Le milieu doit permettre l'étude de cas particuliers.

Concernant au contrat didactique, Giroud considère celle donne par Durand-Guerrier (2010)

> *« L'organisation par le professeur d'un milieu permettant de favoriser le recours à l'expérience est une tâche complexe et exigeante. Un tel milieu doit être nourri par la connaissance a priori, pour le professeur, de l'épistémologie et de l'histoire des savoirs en jeu dans la situation. Il doit comporter des objets matériels (sensibles) ou des objets mathématiques suffisamment familiers pour le sujet pour que celui-ci puisse s'engager dans l'action, en dégager des conjectures et les questionner. Il est nécessaire que ce milieu favorise la mobilisation d'outils (par exemple : élaboration de conjectures ou de règles, élaborations d'objets nouveaux, changement de cadre, mise en relation de propriétés etc...) permettant de mettre en œuvre un traitement mathématique général dont les résultats pourront être confrontés aux résultats des actions sur les objets. Il faut enfin qu'il permette la médiation entre sujets et objets et favorise l'articulation entre les aspects sémantiques, syntaxiques et pragmatiques qui sont mobilisés pour l'élaboration de conjectures puis de preuves. »*

Ainsi, ses expérimentations basses sur le jeu « Chercher la frontière » ont confirmé qu'il est possible de faire pratiquer la démarche expérimental à des élèves lorsque les conditions didactiques et épistémologiques sont réunies :

- *La pratique de la démarche expérimentale en mathématiques nécessite de mettre en place un contrat didactique différent de l'usuel. Ce contrat devra laisser plus de responsabilité à l'élève dans l'avancement de la résolution du problème.*
- *La pratique de la démarche expérimentale permet aux élèves d'effectuer des tentatives de preuve négatives de manière adidactique. Pour obtenir des tentatives de preuves positives de manière adidactique, il est nécessaire que les élèves aient une « certaine » expérience de l'activité de recherche en mathématiques »*
- *Les actions que nous effectuons sont guidées par la « conception » que nous portons sur le problème que nous essayons de résoudre*

CHAPITRE V

L'activité de recherche dans l'enseignement et dans les travaux de didactique

Dans ce chapitre nous étudierons l'activité de recherche en mathématiques du point de vue de l'enseignement en France et du point de vue de la recherche en didactique. Nous examinerons les types de problèmes que l'on trouve dans l'enseignement et dans les travaux de didactique et nous analyserons s'ils ressemblent aux problèmes du type SiRC ou non.

Dans la première section, nous étudierons quelques théories et dispositifs didactiques du point vue de la recherche en didactique en faisant une étude comparative par rapport aux SiRC.

Ensuite, nous étudierons les programmes scolaires du primaire, du collège et du lycée, nous chercherons à identifier les dispositifs, les outils et les méthodes suggérées par les instructions officielles. Pour cette étude, nous reprendrons le travail fait par Godot (2005) à propos du même sujet, mais avec les nouveau programmes.

V.1. L'activité de recherche dans les études didactiques

Malgré les nombreux travaux qui ont été réalisés autour de la résolution de problèmes, il reste encore beaucoup à faire pour systématiser sur ce champ et un exemple de cela consiste en ce qu'il n'existe pas toujours une caractérisation universellement acceptée sur la notion de problème et résolution de problèmes. Brousseau (2004) souligne

> « *... un élève ne fait pas de mathématiques s'il ne se pose et ne résout pas de problèmes. Tout le monde est d'accord là-dessus. Les difficultés commencent lorsqu'il s'agit de savoir quels problèmes il doit se poser, qui les pose et comment* »

L'effet de poser des « problèmes » pour placer les élèves dans la situation du chercheur n'est pas nouveau. En effet cette idée a été bien étudiée et développée dans les travaux de Brousseau, Régine Douady ou dans des dispositifs didactiques comme « le problème ouvert », entre autres. Ces dispositifs ont tous donné des caractéristiques particulières et il existe des spécificités, des différences et des accords.

Dans la suite, nous ferons une analyse comparative des caractéristiques des théories mentionnées ci-dessus avec le SiRC.

V.1.1. La théorie des situations didactiques de Brousseau

Dans la théorie de situations didactiques, d'après Brousseau (1982), les problèmes sont :

> *« Des situations problématiques qui laissent le sujet en charge d'obtenir un certain résultat par la mise en œuvre de choix ou d'actions dont il a la responsabilité, ces situations problématiques remettent en question ce que*

l'élève connaît, ou croit connaître (ses représentations) et le laisse libre quant à la démarche de recherche et de résolution ».

De cette façon, résoudre un problème est un travail de production et non de reproduction, dans lequel il faut élaborer des stratégies (et pas simplement appliquer une technique apprise antérieurement), il faut chercher, créer, aller à la découverte et analyser, synthétiser et justifier.

En effet,

« Poser un problème consiste à trouver une situation dans laquelle l'élève va entreprendre une suite d'échanges relatifs à une même question qui fait « obstacle » pour lui et sur laquelle il va prendre appui pour s'approprier, ou construire, une connaissance nouvelle. Les conditions dans lesquelles se déroule cette suite d'échanges sont initialement choisies par l'enseignant, mais le processus doit très vite passer sous le contrôle du sujet qui va " questionner " à son tour la situation » (Brousseau, 2004).

Ainsi, pour Brousseau, l'objectif principal de formation d'une situation, se trouve alors dans l'obstacle à franchir et non dans la tâche à réaliser. Il s'agit alors de proposer aux élèves de poursuivre une tâche qui ne peut être menée à bien que si l'on surmonte un obstacle.

D'autre part, dans l'approche proposée par Brousseau, trois éléments fondamentaux interviennent : l'élève, l'enseignant et le milieu [1] didactique. Dans cette triade, le professeur est celui qui facilite le milieu dans lequel l'étudiant construit sa connaissance. Pour comprendre mieux cette relation nous exposons ensuite deux concepts fondamentaux : les situations didactiques et adidactiques.

Situation didactique et situation adidactique

Dans cette théorie nous nous retrouvons, avec deux types de situations-problèmes : des situations didactiques et des situations adidactiques (Brousseau, 2004). Les premières font référence à des situations dont l'objet est l'enseignement, il s'agit en particulier des problèmes d'organisation et de dévolution du contenu de l'enseignant. Les deuxièmes se réfèrent aux situations dans laquelle l'intention d'enseigner n'est pas explicite au regard de l'élève, c'est à l'élève de prendre des décisions, d'engager des stratégies, d'évaluer leur efficacité.

Ainsi, une situation didactique est l'ensemble des relations entre les trois sujets enseignant-élève-milieu et c'est dans cette dynamique que nous identifions la situation adidactique, processus dans lequel l'étudiant s'approprie la situation proposée par l'enseignant, non pas en faisant son travail typique d'élève mais plutôt celui d'un «mathématicien» préoccupé seulement par la résolution du problème proposé. Le problème devient son problème à l'issue d'un processus de dévolution fondamental dans cette conception de l'apprentissage où l'élève doit participer à l'élaboration de ses connaissances de manière active.

En d'autres termes, l'étudiant se verra dans une micro-communauté scientifique en résolvant des situations sans intervention directe de l'enseignant. À propos des situations didactiques Brousseau dit :

« La description systématique des situations didactiques est un moyen plus direct pour discuter avec les enseignants ce qu'ils font ou ce qu'ils pourraient faire et de considérer comment ils pourraient pratiquement prendre

1. un milieu est une entité que le professeur peut mouler afin d'obtenir les objectifs d'apprentissage

> *en compte les résultats des recherches dans d'autres domaines. Une théorie des situations apparaît donc comme un moyen privilégié, non seulement de comprendre ce que font les professeurs et les élèves, mais aussi de produire des problèmes ou des exercices adaptés aux savoirs et aux élèves et enfin un moyen de communication entre les chercheurs entre eux et avec les enseignants » (Brousseau 2000)*

D'après Brousseau, la connaissance est différente du savoir. La connaissance est personnelle et contextualisée tandis que le savoir est impersonnel et de-contextualisé. Une fois la situation adidactique finit, l'enseignant doit expliciter les relations entre la connaissance construit par l'élève à l'aide de la situation adidactique et le savoir qu'il veut enseigner.

Brousseau appelle situation d'action lorsque l'élève agit sur le milieu (matériel ou symbolique) en mettant en jeu ses connaissances. Dans la situation de formulation les élèves discutent entre eux et formulent des hypothèses et des conjectures afin d'obtenir des affirmations. Dans la situation de validation, les élèves, où plutôt les groupes d'élèves, soumettent les affirmations proposées à la considération des autres. Dans cette dernière situation, les autres ont la capacité de sanctionner ces affirmations, c'est-à-dire, de les accepter, de les refuser, de demander des preuves ou d'y opposer d'autres affirmations.

Pendant toute la durée de la situation adidactique, l'enseignant doit s'abstenir de communiquer le savoir aux élèves, puisque, s'il le faisait, il empêcherait que l'apprentissage ait lieux. Ceci ne veut pas dire que l'enseignant ne doit pas intervenir pendant la situation adidactique. Cependant, ses interventions doivent se limiter à encourager l'élève à résoudre le problème ; et lui faire prendre conscience des actions qu'il peut réaliser et des rétroactions du milieu, en lui demandant que ce soit lui-même qui décide s'il a résolu le problème (validation). Ce processus se nomme de dévolution.

Une fois conclue la situation adidactique, l'enseignant reprend sa responsabilité d'enseigner, en explicitant les relations entre la connaissance construite pendant la situation adidactique et le savoir qu'il veut enseigner. Ceci correspond à la situation d'institutionnalisation.

Deux conditions sont inhérentes à la notion de situation adidactique. La première est que l'élève doit pouvoir choisir parmi plusieurs stratégies, en étant conscient que, lorsque l'élève fait son choix, il rejette en même temps les autres alternatives. La deuxième est que la situation a un but identifiable de manière indépendante de la connaissance à produire.

Cette idée de choisir parmi des options multiples est basée sur la nécessité de provoquer un jeu entre anticipation et décision à partir duquel le sujet modifie ses repères et produit de la connaissance.

La possibilité de choisir se construit lors des instances successives de la situation, c'est-à-dire, le modèle de situation adidactique est conçu sous l'hypothèse que les savoirs en jeu dans la situation sont assez complexes pour avoir un temps d'élaboration prolongé. Pour cette raison, on considère des situations à réaliser en plusieurs fois changeant, à chaque fois, quelques conditions, par exemple, les numéros en jeu, les outils permis pour aborder la situation ou la formulation proposée. On suppose que ces changements vont donner lieu à la production de nouvelles relations mathématiques de la part de l'élève. Plutôt que de considérer un problème en particulier comme noyau central, on pense à un type de problème avec des conditions variables dont les particularités sont fixées à chaque instance.

La théorie des situations didactiques et les SiRC

Bien qu'une grande partie du modèle situation recherche pour la classe est basée sur la théorie de Brousseau (surtout dans la dévolution) il existe des différences telles que :

- Dans une SiRC le problème est fondamental, c'est le problème que construit la SiRC.
- Les SiRC regardent la situation et les connaissances qui sont en jeu. Le type de problème que l'on va regarder est vraiment ce qui est au cœur.
- Dans une SiRC le problème est résolu pour résoudre le problème, non pour travailler une notion désignée ou visée par l'enseignant. Le problème est « le problème » et l'objectif est de le résoudre, même partiellement.

Mais comme nous l'avons dit avant, les SiRC ont des caractéristiques de cette théorie, en effet, le triplet (Question, Conjecture, Preuve) est considéré comme un savoir, Les éléments du triplet sont les invariants de la situation. Les variables didactiques associées sont des variables de recherche. Ainsi, l'enjeu de vérité, l'aspect social de l'activité et l'aspect recherche sont les trois aspects fondamentaux d'une situation de recherche.

V.1.2. La dialectique Outil-Objet et jeux de cadres de Régine Douady

Dans l'approche de Douady, la dialectique Outil-Objet et jeux de cadres, une notion doit être introduite comme outil pour résoudre un problème avant d'être étudiée en tant qu'objet mathématique puis d'être à nouveau utilisée comme outil apportant des solutions à d'autres situations qui permettent ainsi d'en étendre et d'en consolider le sens.

Cette théorie est formulée autour d'affirmations épistémologiques essentielles dans l'activité mathématique. Tout concept mathématique a une double dimension comme outil et comme objet. Par outil on considère son fonctionnement scientifique dans les divers problèmes que le concept permet de résoudre. Par objet, cette théorie considère le concept mathématique comme un objet culturel, placé dans une construction culturelle plus ample, celle de la connaissance scientifique à un certain moment, socialement reconnue.

D'autre part les *cadres* sont les espaces de la représentation dans lesquels on peut considérer un problème ou une situation, par exemple en mathématiques nous pouvons considérer le cadre géométrique, cadre algébrique, cadre arithmétique, cadre des fonctions, cadre de la géométrie analytique.

La dialectique Outil-Objet et les SiRC

Ainsi les situations-problèmes de Douady sont caractérisées de façon suivante (texte extrait de Fénichel et Pfaff (2005)) nous comparerons ces caractéristiques avec celles de SiRC

1. *L'énoncé a du sens dans le champ de connaissance de l'élève.*
   - Les SiRC vont un peu plus loin, l'énoncé est très peu mathématisé, et ils sont pas dans le champs conceptuel d'élève. Les SiRC se posent à tous les niveaux sans notions pré-requises
2. *L'élève doit pouvoir envisager ce que peut être une réponse au problème.*
   - Dans les SiRC on ne sait pas si le problème peut avoir une réponse.

3. *Compte tenu de ses connaissances, l'élève peut engager une procédure. Mais la réponse n'est pas évidente. Cela veut dire qu'il ne peut pas fournir de réponse complète sans développer une argumentation le conduisant à des questions auxquelles ils ne sait pas répondre immédiatement*
4. *Le problème est riche. cela veut dire que le réseau des connaissances impliquées est assez important, mais pas trop pour que l'élève puisse en gérer la complexité, sinon tout seul, du moins en équipe ou même au sein de la collectivité classe*
   - Dans les SiRC les connaissances ne sont pas notionnelles
5. *Le problème est ouvert par la diversité des stratégies qu'il peut mettre en œuvre et par la incertitude qui en résulte pour l'élève*
   - Dans une SiRC le cadre est optionnel, changer fait partie de la situation, fait partie du travail et fait partie de l'apprentissage en jeu.
6. *Le problème peut se formuler dans au moins deux cadres différents [...] (par exemple, géométrique, numérique, graphique)*
7. *La connaissance visée par l'apprentissage est le moyen scientifique de répondre efficacement au problème*

V.1.3. Le problème Ouvert de l'IREM de Lyon

Depuis une vingtaine d'années, l'équipe de L'IREM de Lyon propose un dispositif dont le but est de placer les élèves sur le même le plan que chercheur. Il s'agit donc de proposer des problèmes de recherche à des élèves dans tous les niveaux.

Les principales composantes d'un problème ouvert d'après cette équipe sont (Arsac *et al.*, 1991)

- L'énoncé est court.
- L'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution (pas de questions intermédiaires ni de questions du type « montrer que »). En aucun cas, cette solution ne doit se réduire à l'utilisation ou l'application immédiate des derniers résultats présentés en cours.
- Le problème se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité. Ainsi, peuvent-ils prendre facilement "possession" de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution, des contre-exemples.

Le problème Ouvert et les SiRC

Même s'ils ont des caractéristiques communes telles que l'énoncé n'induise ni la méthode ni la solution, la solution ne doit pas être une application directe des cours présentés, que la résolution nécessite la mise en œuvre d'une démarche de recherche, il existe cependant de différences telles que :

- Dans une SiRC nous pouvons avoir, une, plusieurs ou aucune solution.
- Dans une SiRC il n'y a pas nécessairement de savoir mathématique notionnel à assimiler. En effet, les SiRC mettre l'accent sur la démarche de recherche en elle-même.

et en citant Poisard (2005) dans sa thèse :

« *Ces démarches ont des caractéristiques communes, en particulier le souci d'argumentation, de formulation de conjectures... mais le problème ouvert et le problème long ont des contraintes institutionnelles assez fortes et même s'il existe plusieurs pistes pour aboutir à la solution, celle-ci est souvent immédiate pour le professeur. Par exemple, la question : Le boulier, comment ça marche ? induit une situation de recherche ; alors que la formulation : Écrire 5 269 sur le boulier, induit un problème ouvert parce qu'en particulier on sous-entend pouvoir écrire ce nombre.* »

V.2. L'activité de recherche dans l'enseignement des mathématiques

Actuellement dans les programmes scolaires français, les problèmes sont situés au centre de l'activité mathématique des élèves :

> *« La maîtrise des principaux éléments de mathématiques s'acquiert et s'exerce essentiellement par la résolution de problèmes »*

Cette organisation de la classe autour des problèmes est indiquée dans l'introduction générale des programmes de mathématiques à tous les niveaux, en privilégiant le développement de la recherche et compétences d'ordre méthodologique tels que :

> « Émettre des hypothèses et les tester. Faire et gérer des essais successifs. Élaborer une solution originale et en éprouver la validité. Argumenter »

Dans cette section, nous précisons quelles sont les caractéristiques des activités à mettre en place et les compétences visées pour chaque niveaux (pour l'école primaire nous nous centrerons que dans le cycle 2 et 3).

V.2.1. L'heuristique dans les programmes scolaires

L'école primaire

Dans sa thèse, Godot (Godot, 2005) a étudié ce sujet par rapport aux programmes 2002, dans cette étude, elle a repéré que l'activité « résolution de problèmes » est vue comme une initiation à la recherche en mathématiques « *s'appuyant sur l'esprit créatif, l'imagination et la mise en œuvre d'une démarche de recherche* ».

Au 2002 comme montre Godot, les compétences relatives à la résolution de problèmes font partie des compétences générales propres aux mathématiques, ainsi on peut trouver :

- Pour le cycle 2
  - S'engager dans une procédure personnelle de résolution et la mener à son terme.
  - Rendre compte oralement de la démarche utilisée, en s'appuyant éventuellement sur sa "feuille de recherche".
  - Admettre qu'il existe d'autres procédures que celle qu'on a soi-même élaborée et essayer de les comprendre.
  - Rédiger une réponse à la question posée.
  - Identifier des erreurs dans une solution.
- et pour le cycle 3 :
  - Utiliser ses connaissances pour traiter des problèmes.
  - Chercher et produire une solution originale dans un problème de recherche - mettre en œuvre un raisonnement, articuler les différentes étapes d'une solution.

– Formuler et communiquer sa démarche et ses résultats par écrit et les exposer oralement. contrôler et discuter la pertinence ou la vraisemblance d'une solution
– Identifier des erreurs dans une solution en distinguant celles qui sont relatives au choix d'une procédure de celles qui interviennent dans sa mise en œuvre.

Dans les nouveaux programmes (BO n°3 du 19 juin 2008. Hors-série) la pratique des mathématiques est présentée comme permettant de développer :

> « ... le goût de la recherche et du raisonnement, l'imagination et les capacités d'abstraction, la rigueur et la précision ».

La « résolution de problèmes » doit jouer un rôle essentiel dans l'activité mathématique. Ainsi elle est présente dans tous les domaines et s'exerce à tous les stades des apprentissages, mais en analysant nous trouvons que c'est plutôt aux aspects numériques que la résolution de problèmes semble reliée aux caractéristiques décrites ci-dessus.

> *« La résolution de problèmes liés à la vie courante permet d'approfondir la connaissance des nombres étudiés, de renforcer la maîtrise du sens et de la pratique des opérations, de développer la rigueur et le goût du raisonnement ».*

Dans les textes de 2008 les compétences évoquées sont reliées à des types de tâches associées à des notions précises du programme :
– Géométrie

> *« Les problèmes de reproduction ou de construction de configurations géométriques diverses mobilisent la connaissance des figures usuelles. Ils sont l'occasion d'utiliser à bon escient le vocabulaire spécifique et les démarches de mesurage et de tracé ».*

– Grandeurs et mesure :

> *« La résolution de problèmes concrets contribue à consolider les connaissances et capacités relatives aux grandeurs et à leur mesure, et, à leur donner un sens. À cette occasion des estimations de mesure peuvent être fournies puis validées ».*

Cependant, seulement les capacités d'organisation et gestion de données sont citées :

> *« Les capacités d'organisation et de gestion des données se développent par la résolution de problèmes de la vie courante ou tirés d'autres enseignements. Il s'agit d'apprendre progressivement à trier des données, à les classer, à lire ou à produire des tableaux, des graphiques et à les analyser ».*

Les programmes du 2002 tel que l'a dit Godot (2005) *« cherchent à développer chez les élèves un comportement de recherche »* alors que dans ceux de 2008, le mot *recherche* est presque supprimé. Ainsi, l'activité de résolution de problèmes comme elle avait été proposée en 2002 nous semble assez floue dans le programme 2008. En effet, les différentes composantes de la démarche de recherche ont presque disparu.

Le collège

Par rapport au collège Godot a trouvé que les programmes sont dans la continuation de ceux du primaire

> *« ce qui faisait partie des apprentissages relatifs à la résolution de problèmes en primaire est donc également pointé dans les niveaux supérieurs.*

> *Le contenu des programmes du collège est quasi identique à celui du primaire, hormis l'introduction progressive du raisonnement déductif et l'importance accordée à l'écrit en mathématiques* ».

Dans les programmes de 2008 la résolution de problèmes continue à être l'exigence de formation la plus importante induite par le socle :

> « *... les mathématiques fournissent des outils pour agir, choisir et décider dans la vie quotidienne [. . .]. La maîtrise des principaux éléments de mathématiques s'acquiert et s'exerce essentiellement par la résolution de problèmes ...* »

Et l'activité « résolution de problème » est complètement liée à l'activité mathématique qui est décrite comme :

> « *Identifier et formuler un problème, conjecturer un résultat en expérimentant sur des exemples, bâtir une argumentation, contrôler les résultats obtenus en évaluant leur pertinence en fonction du problème étudié, communiquer une recherche, mettre en forme une solution* ».

D'autre part, les programmes privilégient, comme méthode d'enseignement la démarche d'investigation, Cette démarche s'appuie sur le questionnement des élèves sur le monde réel et sur la résolution de problèmes. Elle est décrite dans cinq étapes, pour chacune de ces étapes le programme identifie des compétences d'ordre méthodologique :

1. Réflexion sur le problème posé : lire, interpréter et organiser l'information, questionner, identifier un problème.
2. Élaboration d'une conjecture : rechercher, formuler une conjecture, expérimenter.
3. Mise en place d'une preuve argumentée : mettre en relations les connaissances acquises, les techniques et les outils adéquats pour produire une preuve.
4. Temps de synthèse : communiquer par des moyens variés et adaptés.
5. Institutionnalisation des acquis (notions, savoir-faire, démarches) et de leurs mise en œuvre.

Nous observons que les compétences décrites ci-dessus reprennent et précisent celles de l'activité mathématique citée précédemment.

Jusqu'à présent, nous n'avions trouvé dans le programme aucune piste sur la gestion, de la part de l'enseignant, des situations proposées. Les étapes pour la démarche d'investigation, que nous venons de décrire, nous semblent un début de méthode de gestion.

Contrairement au nouveau programme de l'école primaire, dans le programme du collège la activité de recherche est encouragée et les compétences visées sont très proches de celles qui proposent les SiRC.

Le lycée

L'analyse faite par Godot des programmes 2001 de lycée, a montré la continuité de l'activité de résolution de problèmes. Ils reprennent l'ensemble des connaissances relatives à la résolution de problèmes en les précisant, les affinant, les complétant.

> *« Apparaissent par exemple, le terme de «résultats partiels» et l'idée d'ouverture de la recherche par le biais « d'énoncés de conjectures sur des questions voisines » ou du fait de «supprimer une hypothèse dans un problème» afin d'en étudier les conséquences... »*

Les programmes de 2009 met l'accent sur la pratique du raisonnement, en disant qu'il est la base de l'activité mathématique des élèves, ainsi la démarche d'investigation continue d'être privilégiée comme méthode d'enseignement.

> *« l'objectif de ce programme est de former les élèves à la démarche scientifique sous toutes ses formes pour les rendre capables de : modéliser et s'engager dans une activité de recherche ; conduire un raisonnement, une démonstration ; pratiquer une activité expérimentale ou algorithmique ; faire une analyse critique d'un résultat, d'une démarche ; pratiquer une lecture active de l'information (critique, traitement), en privilégiant les changements de registre (graphique, numérique, algébrique, géométrique) ; utiliser les outils logiciels (ordinateur ou calculatrice) adaptés à la résolution d'un problème ; communiquer à l'écrit et à l'oral ».*

Le programme du lycée comprend aussi un ensemble de trois thèmes d'étude, parmi lesquels, l'un est choisi par l'élève pour un travail en classe d'une durée de 15 à 20 heures. Le travail peut être individuel ou en groupe. Les thèmes sont : cryptologie et codage ; utilisation des graphes et phénomènes d'évolution. Les problèmes proposés dans chaque thème doivent privilégier une activité de recherche. Ainsi, pour le thème utilisation des graphes les exemples cités sont :

- Problèmes de circuits, de liens, de rencontres entre individus pouvant être modélisés par des graphes orientés ou non, pondérés ou non :
  - Peut-on trouver un chemin qui emprunte une fois et une fois seulement chaque arête ? exemple : les ponts de Königsberg.
  - Peut-on minimiser un coût, une distance, un temps ?
- Problèmes d'incompatibilités donnant lieu à une coloration du graphe :
  - Peut-on trouver un sous-ensemble contenant le plus possible d'individus compatibles ?
  - Comment trouver le nombre minimum de sous-ensembles nécessaires pour ne regrouper dans un même sous-ensemble que des individus compatibles ?
  - Quel est le nombre de couleurs nécessaires pour colorer une carte de sorte que deux pays voisins ne soient pas de la même couleur ?

Comme nous pouvons le voir, ces énoncés correspondent bien à des problèmes de recherche, mais il n'y a aucune indication de comment il faut conduire cette activité avec les élèves.

Le programme de lycée dit explicitement que les compétences principales pour ce socle sont l'observation, l'abstraction, l'expérimentation et la démonstration, ce qui pour nous constitue l'activité mathématique.

Nous voyons que l'enseignement actuel des mathématiques en France à partir du collège, vise la mise en place d'une démarche expérimentale et l'acquisition des capacités qui la caractérisent et comme Godot l'a dit, les définitions données dans les programmes sont très proches de celles que proposent les SiRC. Donc l'heuristique en mathématiques continue d'avoir une place importante" à l'intérieur de l'institution scolaire française surtout au collège et au lycée.

V.2.2. Qu'est-ce qu'un « problème » dans l'enseignement de mathématiques ?

Dans sa thèse Godot a aussi étudié les méthodes proposées dans les programmes pour la pratique de l'heuristique, elle a regardé quels outils et quelles définitions ou caractéristiques à un problème dans les instructions officielles, Dans cette section nous présentons la même analyse par rapport aux nouveaux programmes :

L'école primaire

Dans les nouveaux programmes de l'école primaire, il n'existe aucune indication sur le type de problèmes à donner aux élèves, mais dans le document ressource de 2012 pour le cycle 3 nous avons trouvé :

> *« Nous distinguerons, pour l'analyse, plusieurs fonctions des problèmes : d'une part l'apprentissage par résolution de problème, en confrontant l'élève à des situations qui lui permettront en franchissant un obstacle ou en réinvestissant des connaissances dans des contextes variés d'acquérir une compétence visée ; d'autre part l'apprentissage de la résolution de problème. »*
>
> *« Nous distinguons deux types de tâches auxquelles l'élève peut être confronté dans le contexte des apprentissages scolaires, suivant qu'il dispose d'un modèle de résolution ou non :*
>
>> *Si le problème relève d'une catégorie de problèmes que l'élève a appris à résoudre, par exemple des problèmes de « recette-dépense » au CM2, l'élève doit successivement identifier les étapes de la résolution, puis exécuter les calculs.*
>>
>> *Si l'élève, contrairement au cas précédent, ne dispose pas d'un modèle mathématique qui lui aurait été enseigné auparavant, il doit alors élaborer une procédure de résolution, pouvant comporter des essais, s'appuyer sur des hypothèses... ; il doit lui-même évaluer cette procédure au fur et à mesure de sa recherche en confrontant ses résultats au but à atteindre, puis améliorer ou changer. »*

Ainsi le document ressource distingue différents types de problèmes, d'une part celui que l'on vient d'évoquer, d'autre part la finalité principale du problème proposé (acquérir des connaissances ou apprendre à résoudre des problèmes).

Au collège

Au collège deux types de problèmes sont évoqués : *situation-problème* et *situation ouverte.*

Selon le programme les *situations-problèmes* sont des situations qui créent :

> *« ... un problème dont la solution fait intervenir des « outils », c'est-à-dire, des techniques ou des notions déjà acquises, afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles »*

Ce type de problème a par objectif le réinvestissement des acquis, la découverte de nouveaux savoirs, l'entretien ou l'acquisition des compétences méthodologiques (qui sont les mêmes citées dans le programme de primaire). En effet ce sont de problèmes de application du cours ou d'activités introductives à un chapitre

D'autre part les *situations ouvertes* sont des situations :

> *« … dans lesquelles les élèves doivent solliciter en autonomie les connaissances acquises, […]. Leur traitement nécessite initiative et imagination et peut être réalisé en faisant appel à différentes stratégies qui doivent être explicitées et confrontées, sans nécessairement que soit privilégiée l'une d'entre elles. »*

Ses situations sont les situations décrites par Arsac *et al.* (1991) et sont les problèmes proposés par le socle pour travailler la démarche d'investigation.

Au lycée

Dans les programmes 2009 pour la classe de seconde, nous trouvons la suivante phrase suivante par rapport au type de problèmes à travailler.

> *« Dans la mesure du possible, les problèmes posés s'inspirent de situations liées à la vie courante ou à d'autres disciplines. Ils doivent pouvoir s'exprimer de façon simple et concise et laisser dans leur résolution une place à l'autonomie et à l'initiative des élèves. Au niveau d'une classe de seconde de détermination, les solutions attendues sont aussi en général simples et courtes. »*

Les documents d'accompagnement de la classe de seconde, comportent des problèmes permettant de travailler la démarche mathématique, car ils sont posés de façon ouverte et non guidée et les élèves maîtrisent les savoirs notionnels requis, tels que nous avons montré dans la section précédente

Comme nous l'avons vu, les directives quant aux apprentissages en jeu et aux conditions de mise en place de la résolution de problèmes, ont presque disparu des programmes d'école primaire mais elles ont été renforcées au collège et au lycée, où les caractéristiques générales quant aux types d'activités à mettre en œuvre, dans ces deux niveaux sont proches de celles des SiRC.

Ainsi le programme propose la démarche de recherche comme méthode principale d'enseignement des mathématiques surtout au collège où les élèves doivent être confrontés à de véritables activités mathématiques ; et au lycée où les élèves doivent être submergés dans la démarche mathématique en général.

Donc nous pouvons dire que le programme évoque réellement le cadre général dans lequel l'enseignement des mathématiques s'inscrit. Cependant, tout y est flou, il n'y a rien sur la démarche qu'il faut adopter pour la gestion et il y a très peu d'outils disponibles à propos de comment évaluer la maîtrise des élèves.

Cependant, dans n'importe quelle de ces classifications, les problèmes sont utilisés comme moyens pour accomplir certains objectifs. C'est-à-dire, la résolution de problèmes n'est pas vue comme un objectif en soi, mais comme facilitateur de la réussite d'autres objectifs et a une interprétation minimale : résoudre les tâches qui ont été proposées.

V.3. Conclusion

Jusqu'à ici, nous avons vu que l'objectif principal de la résolution de problème est de susciter une activité autonome chez l'élève. Les situations contiennent des questions qui ne sont pas triviales et qui n'ont pas de réponse évidente. L'élève, le professeur et les objets du savoir font partie des situations en même temps.

La pratique de la résolution de problèmes apparaît donc comme un levier à l'apprentissage de savoirs notionnels où la situation doit être vécue comme non-didactique par l'élève. Les enseignants sont responsables du savoir à enseigner et des conditions permettant l'apparition de ce savoir, c'est-à-dire la situation où l'élève dispose à priori d'une stratégie de base lui permettant d'entrer dans la problématique. Au mieux, on peut dire qu'ils s'inspirent du travail des mathématiciens et cherchent à faire pratiquer aux élèves des savoir-faire fondamentaux de l'activité mathématique. Par contre, notamment chez Brousseau, la mise en scène des situations n'est pas celle d'une réelle recherche en mathématiques (voir puzzle ou course à vingt).

Par conséquent, nous pouvons dire « qu'une vraie » activité de recherche doit mettre en œuvre les savoir-faire de l'activité mathématique. Pour cela, il faut que l'élève se pose des questions ou qu'il puisse reconnaître les aspects qui servent à définir le problème dans une situation. En effet, c'est le plus souvent par le tâtonnement, l'exploration de pistes variées, la mise à l'essai d'hypothèses, les retours en arrière et le recadrage du problème que nous pouvons réussir à trouver « une réponse » qui, en plus, peut ne pas être unique. De ce fait, nous avons choisi le SiRC comme référence théorique.

CHAPITRE VI

Travaux didactiques autour du jeu

Dans ce chapitre nous montrons quelques uns des travaux didactiques liés à la notion de jeu et son rapport à l'enseignement des mathématiques.

VI.1. La course à n

La course à 20 est une situation conçue par Brousseau dans les années 70, et qui a joué un rôle important dans la construction des concepts fondamentaux en didactique des mathématiques, notamment sur le plan de la caractérisation des diverses formes de situation a-didactiques. Cette situation a été analysée et expérimentée plusieurs fois dans la recherche en didactique.

> *Règle : Le jeu comporte deux adversaires qui disent un nombre tour à tour. Il s'agit pour chacun des adversaires de réussir à dire n le premier. Le premier qui joue a le droit de dire un entier positif inférieur à p. On ne peut dire un nombre que s'il s'obtient en ajoutant un entier positif inférieur à p au nombre que l'adversaire vient de dire. (n et p sont des entiers naturels avec $n > p$).*

Ce jeu permet d'amener les élèves à l'aboutissement de l'algorithme de la division euclidienne. Il met en évidence l'obtention du reste par une succession de soustractions à partir du nombre n à atteindre (Bessot, 2003). Ce nombre n est équivalent au dividende, p correspond au diviseur, et le reste est le nombre à jouer au premier coup. La découverte de la stratégie gagnante permet aux élèves de construire la technique opératoire de la division.

> « *Nous voulions faire redécouvrir l'algorithme de la division par les élèves, sans qu'ils se servent de ce qu'ils avaient appris précédemment et qui s'était un peu enkysté. La compréhension était occultée par l'habitude. Pour qu'ils ne se doutent pas qu'ils allaient devoir faire des divisions, nous avons eu l'idée de leur en faire chercher le reste et non pas le quotient* » Brousseau (2002).

Le but de ce jeu est de trouver le reste pour pouvoir mettre en place la stratégie gagnante. Ce paramètre est très important car, pour une fois, les enfants considèrent ce reste, et ne formulent pas que la division ne tombe pas juste (Sensevy *et al.*, 2001). En effet, il ne faut surtout pas que les enfants considèrent la division euclidienne comme une opération « instable » qui ne donne pas le même résultat que celui indiqué par la calculatrice. Dans ce jeu, la division euclidienne prend sens.

> *« La course à vingt a été le paradigme des études sur les premières formes de la théorie des situations. Les trois phases : d'action, de communication (ou ce formulation), et de validation (ou de preuve) deviennent l'armature d'un grand nombre de situations nouvelles permettant la construction de leçons*

sur tous les sujets de mathématiques aux différents niveaux de l'enseignement élémentaire entre les années 70 et 78. L'étude de chacune des phases de la leçon sur la course à vingt a fait l'objet d'une étude expérimentale. Cette leçon a été reproduite et étudiée dans un échantillon de plus de 60 classes ordinaires. Le déroulement était le même et les événements laissés ouverts se reproduisaient avec une stabilité impressionnante. De nombreuses observations très particulières mais reproduites ont permis des progrès dans la conception des autres situations d'apprentissage » Brousseau (2002).

VI.1.1. Analyse didactique de la course à n

Le jeu « la course à n » peut être modélisé comme le jeu de soustraction avec n objets. L'analyse mathématique de ce jeu dénoté par $*(n, p)$ a été fait dans la section II.4.

Dans le jeu de la course à n, deux variables de recherche apparaissent, n et p, ces valeurs conduisent à des conjectures différentes, propres à l'identification des situations gagnantes et perdantes pour chaque sous-problème ainsi qu'à la stratégie de jeu à adopter, qui dépend de n, pour chaque p.

Pour jouer, il suffit de savoir compter. Les élèves de cours élémentaires peuvent donc à priori avancer dans la résolution du problème. Bien entendu, les notions de congruence ou de division euclidienne peuvent être utiles mais elles ne sont pas nécessaires. Les jeunes élèves peuvent avoir recours aux notions de multiples, ou de paquets, et de restes.

VI.1.1.1. *Recherche en fonction des positions gagnantes et perdantes*

Le jeu de la course à n peut être analysé en fonction de positions gagnantes et positions perdantes, En effet si n est petit par rapport à p, l'écriture de tous les entiers correspondant aux les positions gagnantes et perdantes est possible donc la stratégie de soustraction réitérée de p est une stratégie optimale. Pour le cas $n = 20$ et $p = 3$ nous avons :

> *« On y voit apparaître l'axiome « il faut jouer 20 » dès la première partie, la tactique « jouer 17 si l'autre a dit 16 » à la deuxième et le théorème « Il faut jouer 17 » (à partir de 15 ou de 16) dès la quatrième partie. Impossible de dire ici si chaque élève développe une meilleure probabilité de choix ou si une certaine partie des élève s'est déterminée et l'autre joue de façon équiprobable »* Brousseau (2002).
>
> *« La connaissance qui détermine la stratégie gagnante est celle qui consiste à prendre dès qu'on le peut la suite gagnante 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20. Le savoir qui correspond à cette connaissance est celui du calcul du reste de la division par 3 du but . En fait, cette situation peut être utilisée pour introduire l'étude de l'algorithme de la division »* Brousseau (2002).

VI.1.1.2. *Stratégie gagnante en fonction de la notion de multiple*

Si n est très grand relativement à p, la stratégie par rapport à la recherche des positions gagnantes n'est pas du tout optimale. Donc des stratégies de rechercher en fonction de la notion de multiple peuvent apparaître.

En effet, on se rend compte que si l'autre joueur joue a, alors on ne change pas le résultat de la partie si on joue $p - a$. Cette remarque, nous permet de construire la stratégie gagnante suivante :

1. Si n n'est pas multiple de p, la position est gagnante : pour gagner, au premier coup il faut jouer l'unique coup r tel que $n - r$ est un multiple de p. Ensuite, nous jouons toujours le complémentaire du coup de l'adversaire (s'il joue a, nous jouons $p - a$) pour rendre toujours une position où il reste un multiple de p de nombres à dire.
2. Si n est multiple de p, la position est perdante : Dans ce cas, pour gagner il ne faut pas être le premier à jouer. La stratégie gagnante est ensuite la même qu'avant, nous jouons le complémentaire du coup de l'adversaire.

VI.1.1.3. *stratégie gagnante en fonction de la notion de division euclidienne*

Suite à la stratégie gagnante obtenue en fonction de la notion de multiple, nous pouvons raffiner cette stratégie si nous nous rendons compte que le nombre r définit dans la stratégie gagnante correspond au reste de la division euclidienne de n par p. En effet, r est l'unique nombre entier $0 \leq r < p$ tel que $n = q \times p + r$. Le reste de la division euclidienne a été dénoté par $r = \text{rde}(n, p)$. Ainsi, la stratégie gagnante devient :

1. Si n n'est pas multiple de p, la position est gagnante. Pour gagner, nous jouons les coups dans la suite arithmétique de raison p et de premier terme $\text{rde}(n, p)$.
2. Si n est multiple de p, la position est perdante. Pour gagner nous jouons les coups dans la suite arithmétique de raison p et de premier terme p.

VI.2. Jeu et apprentissages mathématiques

VI.2.1. Le travail de Pelay

Dans sa thèse, Pelay (2011) s'intéresse au lien entre jeu et apprentissage dans le champ de l'animation scientifique, son objectif est de mettre en place des activités ludiques et attrayantes permettant aux enfants de faire des mathématiques en s'amusant. Sa recherche se centre sur l'étude didactique de la dialectique Jeu/Apprentissage pour concevoir et expérimenter des ingénieries prenant explicitement en charge les enjeux didactiques et ludiques.

Son expérience dans le champ d'animations scientifiques, et plus spécifiquement en séjour de vacances, l'a fait observer une bonne harmonisation entre le jeu et l'apprentissage en contexte d'animation.

Cependant, il remarque aussi une tension jeu-apprentissage, en particulier dans le contexte scolaire dans lequel le jeu est peu utilisé et dans un contexte de loisir où les objectifs d'apprentissage tuent le "vrai " jeu. L'autour s'est interrogé sur l'origine de ces prises de position et dans la recherche de réponses il constate dans les définitions courantes de jeu :

- Il existe une opposition récurrente entre le jeu qui est rattaché à la liberté, la frivolité et au plaisir et le travail qui se rattache à l'obligation, le sérieux et l'effort.
- Créent des raisonnements caricaturaux au niveau de l'utilisation du jeu dans le domaine éducatif :
  - « le jeu est libre et gratuit. Or l'école est obligatoire, donc il ne peut y avoir de "vrai" jeu à l'école »
- Créent aussi l'apparition de termes :
  - « vrai » jeu
  - Jeu libre, jeu dirigé

– jeu éducatif, jeu didactique, serious game

Afin de situer ses questions sur le jeu, Pelay s'appuie sur les théories de Brougère (2005) « dans jeu/apprentissage, ce chercheur en sciences de l'éducation fait un tour d'horizon complet de l'ensemble des recherches actuelles et internationales menées sur le jeu »

En considérant la démarche de Brougere, Pelay spécifie deux aspects dans son travail :

- *L'utilisation du jeu pour développer des apprentissages dans l'animation scientifique : d'une part, Il cherche à donner des preuves scientifiques d'utiliser le jeu pour l'apprentissage en contexte d'animation, pour après impliquer les vertus du jeu sur le terrain et montrer ainsi ses potentialités pour l'apprentissage.*
- *Faire de la dialectique jeu/apprentissage une problématique didactique : L'auteur cherche à élaborer des concepts et des modèles pour l'étude de la dialectique jeu/apprentissage.*

Pour chercher des réponses à ses interrogations, l'autour met en place des expérimentations et il propose à des enfants un jeu sur les nombres

La situation des 10 consécutifs

Cette situation didactique créée pour la validation intellectuelle dans l'enseignement introductif de l'algèbre par Barallobres (2006) est le fil conducteur de la thèse, elle a été expérimentée plus de 20 fois en séjours de vacances, fête de la science, classe scolaire et classe scientifique.

Description de la situation

Jeu par équipe qui consiste à calculer le plus rapidement possible la somme de n nombres consécutifs à partir de p (n est fixé à 10, p augmente).

Les potentialités visées dans la situation :

- Faire émerger les écritures algébriques : Stratégies liées à la formule $10x + 45$ (x premier nombre de la suite).
- Développer la dimension expérimentale des mathématiques.
- Développer des savoirs transversaux : preuve et validation.
- Améliorer les aptitudes numériques.
- Course entre équipes
- L'inclure dans l'imaginaire du séjour : la situation est mise sous forme d'une histoire 20

Dans ses expérimentations il a constaté que les enfants rentrent dans le jeu avec plaisir et entrent en même temps dans une activité mathématique en développant des stratégies et raisonnements mathématiques.

De plus que l'articulation entre jeu et apprentissage implique la prise en charge explicite du jeu dans l'élaboration théorique au niveau de la gestion par l'animateur des interactions avec les enfants, ainsi que dans la conception de situations ayant une double valence didactique et ludique.

Suite à cette constatation, plusieurs questions émergent : *« comment l'animateur gère l'animation ? Comment concilier les enjeux didactiques et ludiques ? »*

Il expose ensuite la notion de contrat didactique et remarque l'existence de deux pôles : d'un côté le pôle ludique relatif au contrat ludique basé sur le jeu, et le pôle didactique relatif au contrat didactique basé sur l'apprentissage. Ces deux pôles s'opposent parfois, coexistent et s'articulent et conclue :

> « *dans certaines phases, il n'est pas possible de décrire les interactions par un contrat didactique, mais au contraire par un contrat de nature ludique* »

Donc, Pelay introduite un concept qu'il appelle « Le contrat didactique et ludique » pour modéliser les interactions ludiques et didactiques entre les participants engagés dans un projet qui lie, de façon explicite ou implicite, jeu et apprentissage dans un contexte donné. Alors, le concept « légaliberté » prendre une place centrale où ce concept repose sur la liberté et les règles.

> « *En effet, le joueur à cette liberté de rentrer dans le jeu. Mais cette liberté est encadrée par des règles sinon il y a rupture du contrat ludique* »
>
> « *La règle est donc au cœur du contrat ludique. Les règles évoluent. Ainsi, il est nécessaire de garder les règles ludiques en amenant des règles d'apprentissage. Il existe donc les règles constitutives et les règles régulatrices. L'animateur et le participant évoluent avec les règles. L'animateur agit indirectement, il permet des apprentissages informels en modulant le jeu via les règles* »

VI.3. Les travaux de l'équipe PREMAT de la Universitat Autònoma de Barcelona

L'objet de recherche de cette équipe est la résolution de problèmes et l'enseignement de la mathématique, un de ces travaux a été l'utilisation des jeux dans l'enseignement de la mathématique.

Dans leurs différentes publications (Corbalán et Deulofeu, 1996, Corbalán, 1997, Edo, 2002, Edo *et al.*, 2008), les auteurs distinguent deux types de jeu à utiliser dans le cadre scolaire. D'une part, les jeux qui poursuivent la compréhension des savoirs notions ou l'amélioration des techniques mathématiques, appelés « jeux de connaissance ». D'autre part, les jeux centrés dans l'acquisition des méthodes de résolution des problèmes, appelés « jeux de stratégie ».

Leur recherche est centrée sur le second type de jeu. Ils définissent les jeux de stratégie comme des jeux pour lesquels ils existent des stratégies pour gagner toujours (ou pour ne pas perdre).

Ils essaient d'établir une relation entre les jeux de stratégie et la résolution des problèmes parce qu'ils conjecturent que les deux notions partagent le même procès heuristique, c'est-à-dire, ils conjecturent que les phases de résolution de l'un et de l'autre coïncident et que les actions requises pour les résoudre coïncident aussi en grande partie.

Pour établir cette relation, ils se basent sur les définitions proposées par Polya pour qui le but de l'heuristique est de « comprendre le méthode qui conduit à la solution des problèmes, en particulier, comprendre les opérations mentales typiquement utiles dans ce processus » (Polya, 1965).

Ces opérations mentales comportent, parmi d'autres, l'enquête, l'exploration et la découverte, ce qui est en étroite relation avec leur idée de l'usage des jeux de stratégie en groupe pour développer la résolution des problèmes en classe mathématique.

De cette façon, ils considèrent que « l'heuristique des jeux de stratégie requiert la même attention et analyse que la résolution des problèmes parce que, en essence, elles coïncident. La ressemblance de cette structure permet de développer dans les uns et les autres les mêmes outils, les mêmes processus de raisonnement que nous utilisons dans les développements mathématiques.

La table suivante montre le parallélisme entre les phases de la résolution des problèmes et les phases de la résolution d'un jeu de stratégie, voir (Edo *et al.*, 2008).

Résolution des problèmes	Résolution d'un jeu
Compréhension du problème	Compréhension des objectifs et règles du jeu
Création et exécution d'un plan général où des plans partiels	Développement de la partie : expérimentation, poser des conjectures, développement des plans partiels, planification d'une stratégie
Vérification de la solution obtenue	Validation ou invalidation de la conjecture et analyse du résultat

Le jeu « cerrar quince »

Comme nous l'avons déjà dit, le but de cette recherche est d'identifier des évidences qui nous permettent de décrire les processus heuristiques de la découverte des stratégies gagnantes et le possible parallélisme avec les phases de la résolution des problèmes. Le jeu de stratégie choisi pour ce travail est le jeu « cerrar quince » (fermer quinze).

Ce jeu pour deux joueurs consiste en une grille de taille 3×3 et 9 jetons numérotés de 1 à 9. À tour de rôle, les joueur mettent un des jetons sur la grille. Le gagnant est le premier joueur qui trouve une ligne, une colonne ou une diagonale telle que la somme des trois jetons est 15.

Dans cette expérience menée par l'équipe PREMAT, le but pour les élèves est de trouver des stratégies gagnantes. Ce jeu à été choisi parce que il est riche en possibilités à explorer et il créé une situation similaire à la résolution des problèmes.

Dans cette recherche, ils concluent que dans l'exécution du jeu, les trois phases de la résolution des problèmes apparaissent naturellement. Ces phases se répètent dans le développement du jeu sans un ordre particulier.

Ils concluent aussi que les jeux mathématiques peuvent aider à développer les compétences requises pour la résolution des problèmes, étant donné qu'ils sont proposés avec un but clair et dans un milieu de résolution des problèmes, où la pensée mathématique est stimulée pour générer des « situations-problème » qui appartiennent au domaine des objectifs mathématiques plus généraux.

Nous remarquons que le jeu « cerrar quince » utilisé par l'équipe PREMAT n'est pas un jeu combinatoire parce qu'il y existe des parties sans vainqueur ce qui contredit l'axiome 7. Par exemple, dans la position finale $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \\ 6 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ la somme de chaque ligne, colonne et diagonale est différente de 15.

VI.4. Conclusion

Nous avons vu que dans les travaux didactiques, les problèmes ludiques peuvent être utilisés pour introduire ou explorer une notion, motiver la dévolution du problème, et aider à développer les compétences requises pour la résolution des problèmes. Cela confirme notre hypothèse sur les « problèmes ludiques ».

> « Les problèmes ludiques peuvent être utilisés pour introduire ou explorer une notion, mais aussi pour favoriser l'apprentissage associé à la résolution de problèmes mathématiques »

Dans cette recherche nous nous plaçons d'un point de vue épistémologique et nous regardons les jeux comme un « objet mathématique », pour nous situer dans le contexte de la recherche en mathématiques et faire émerger des savoir-faire propres de l'activité mathématique.

CHAPITRE VII

Position de la recherche

VII.1. Hypothèses de recherche

Dans l'analyse précédente, nous avons vu que dans la résolution de jeux de type Nim, il y a des savoirs qui sont de nature notionnelle et de nature heuristique. Nous avons aussi remarqué qu'il y a des notions liées à la théorie des jeux combinatoires. Elles vont avoir un statut particulier au moment de la transposition parce qu'elles sont fondamentales pour l'étude du jeu combinatoire. Ainsi, l'analyse réalisée au chapitre précédent nous amène à formuler l'hypothèse suivante :

Postulat

La plupart des problèmes combinatoires de type Nim vont nous permettre de mettre en œuvre des savoir-faire fondamentaux pour l'activité mathématique.

Nos objets de recherche portent sur l'apprentissage de savoir-faire pour l'activité mathématique et l'apprentissage de savoirs spécifiques liés à la résolution d'un jeu combinatoire. En effet, les problèmes mathématiques des jeux combinatoires sont de nature notionnelle et heuristique assez complexes. C'est pourquoi, afin d'atteindre de tels objectifs en termes d'apprentissage, il nous faut un modèle de situation adéquate. Par conséquence, nous formulons à continuation une première hypothèse de recherche.

Hypothèse de travail :

Pour construire et faire la transposition didactique de ces jeux combinatoires, le modèle SiRC est adapté.

Cette première hypothèse s'appuie aussi sur les travaux présentés dans le chapitre IV

Les savoirs spécifiques liés à la résolution d'un jeu combinatoire (stratégie, stratégie gagnante, position gagnante et position perdante) et à quelques notions mathématiques (quantificateurs et récursivité) peuvent susciter des difficultés au moment de la transposition. Ainsi, nous faisons une deuxième hypothèse de recherche :

Donc nous faisons une deuxième hypothèse de recherche :

Première hypothèse de recherche :

La résolution des jeux de type Nim peut soulever des difficultés à cause de deux types de notions : celles qui sont directement rattachées au jeu (stratégie, stratégie gagnante, position gagnante, position perdante) et celles liées à des notions mathématiques c'est-à-dire quantificateurs et récursivité.

Cette deuxième hypothèse nous permet de formuler une troisième hypothèse, due à la condition sine qua-non, c'est-à-dire que, s'il n'est pas possible de surmonter les difficultés liées aux notions décrites ci-dessus, il n'est pas possible de résoudre des jeux combinatoires.

> ***Deuxième hypothèse de recherche :***
> *Tant que les notions de stratégie, stratégie gagnante, position gagnante, position perdante ne sont pas abordées, il n'est pas possible de résoudre un jeu combinatoire.*

VII.2. Méthodologie

Pour vérifier ces hypothèses, nous avons mené une étude épistémologique et didactique de deux jeux de type Nim, le « jeu d'Euclide géométrique » et « le jeu du chocolat ». Le jeu d'Euclide géométrique est une situation qui a été construite spécifiquement pour ce travail de thèse. Le jeu du chocolat est, quant à lui, un jeu qui appartient au réseau de situations de l'équipe « maths à modeler ».

Afin d'étudier la dévolution et la gestion de la situation « jeu d'Euclide géométrique » , nous avons mis en place des expérimentations avec des étudiants de licence scientifique L1-L2 et avec des élèves d'une classe de première scientifique, dont vous trouverez les analyses mathématique et didactique au chapitre X et XI. Les expérimentations de la « situation du jeu du chocolat » ont eu lieu au Chili avec des étudiants appartiennent à la deuxième année de la filière « pédagogie en mathématiques ». Nous présenterons l'analyse au chapitre XVI.

Chacune de ces expérimentations sera analysée par le biais des dialectiques de l'action, de la formulation et de la validation [Brousseau, 1998].

Deuxième partie

Étude d'une SiRC de type Nim : le jeu d'Euclide Géométrique

Introduction

La version classique du jeu d'Euclide a été introduit pour la première fois (à notre connaissance) par Cole et Davie (1969). Le jeu qu'ils énoncent et étudient est le suivant :

> « *Let (a, b) be a pair of positive integers satisfying $a > b$ and let A, B be two players, A making the first move. Each player may in turn subtract as many times the smaller of the remaining integers from the larger without making the result negative. The winner is the player who discovers the highest common factor of a and b, that is, by the Euclidean algorithm, the player who reduces one of the factors to zero.* »

Exemple VII.1. Les différents coups d'une partie jouée à partir de la position de départ $(a, b) = (135, 50)$ pourraient être :

- A joue $(50, 35)$,
- B joue $(35, 15)$,
- A joue $(20, 15)$,
- B joue $(15, 5)$,
- A joue $(10, 5)$,
- B joue $(5, 0)$ et gagne la partie.

Dans (Cole et Davie, 1969) la caractérisation suivante des positions gagnantes pour ce jeu est donnée par le théorème suivante.

Théorème VII.2. *Soit a, b deux entiers positifs avec $a > b$. Alors, la position (a, b) du jeu d'Euclide original est gagnante si et seulement si*

$$b < \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)a\,.$$

Le jeu a été repris par Spitznagel (1973) pour obtenir une nouvelle description des positions gagnantes qui ne fait recours que aux nombres entiers et donc n'a pas besoin du nombre d'or $\phi = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Les deux résultats mènent à une même stratégie gagnante pour le jeu d'Euclide original. Ensuite, Nivasch (2006) et Cairns *et al.* (2011) ont calculé la fonction de Grundy du jeu d'Euclide original (voir la définition II.11).

Le jeu d'Euclide original correspond à la description de l'exécution l'algorithme d'Euclide. En effet, considérons les divisions euclidiennes successives de l'algorithme d'Euclide appliqué au couple (a, b), nous avons :

$$
\begin{aligned}
a &= b \times q_1 + r_1 \\
b &= r_1 \times q_2 + r_2 \\
r_1 &= r_2 \times q_3 + r_3 \\
&\vdots \\
r_{n-3} &= r_{n-2} \times q_{n-1} + r_{n-1} \\
r_{n-2} &= r_{n-1} \times q_n + 0
\end{aligned}
$$

où dans chaque étape r_{k-2} représente le dividende, r_{k-1} représente le diviseur, q_k représente le quotient et r_k représente le reste.

Le jeu d'Euclide original peut, donc être vue comme un jeu de soustraction dont les tas sont les quotients successives q_k de l'algorithme d'Euclide et la règle consiste à prendre successivement dans le tas non encore vide de plus grand quotients.

En tant que objet mathématique, le jeu d'Euclide est très intéressants, mais il a un défaut crucial à l'heure de les regarder comme des jeux ludiques. En effet, lors que un joueur applique la stratégie gagnante dans (Cole et Davie, 1969) et (Spitznagel, 1973), l'adversaire se retrouve, à tour de rôle, avec une position qui n'a qu'une seule option. Ce fait rend très facile pour l'adversaire de reconnaître et d'adopter la stratégie gagnante. Cet effet a déjà été reconnu par Spitznagel (1973) :

> *« Compared to Nim, then, the workings of the strategy in Euclid lie much closer to the surface. In Nim, the opponent of a player following the strategy usually has more than one move open to him at every stage of the game except the last. He therefore does not get such an obvious warning that he is doomed to lose. In Euclid, on the other hand, the opponent of someone following the strategy is likely to notice his moves are being forced every step of the way, and from this observation it might be possible for him to determine what the strategy must be. »*

Pour corriger ce défaut, nous proposons de modifier la règle en donnant une ensemble S de valeurs que l'on peut ôter dans chaque coup. Alors, la règle du jeu devient :

> *« Each player may in turn subtract s times the smaller of the remaining integers from the larger without making the result negative, for some $s \in S$ ».*

Bien évidement, en prenant $S = \mathbb{N}$, nous retrouvons le jeu d'Euclide original.

Exemple VII.3. Soit $S = \{1, 2\}$. Avec $(a, b) = (29, 9)$ en convention normal nous obtenons des tas de taille $3, 4, 2$ respectivement. Le jeu d'Euclide ainsi modifié est perdante même si le premier joueur a deux options disponibles dans tous ses coups sauf le dernier.

Nous proposerons une représentation géométrique de ce jeu car nous souhaitons le mettre en situation en classe. Donc nous faisons la suivante hypothèse didactique

Hypothèse didactique :

La représentation géométrique facilite l'appropriation, et plus généralement, la dévolution du problème plutôt que la version numérique.

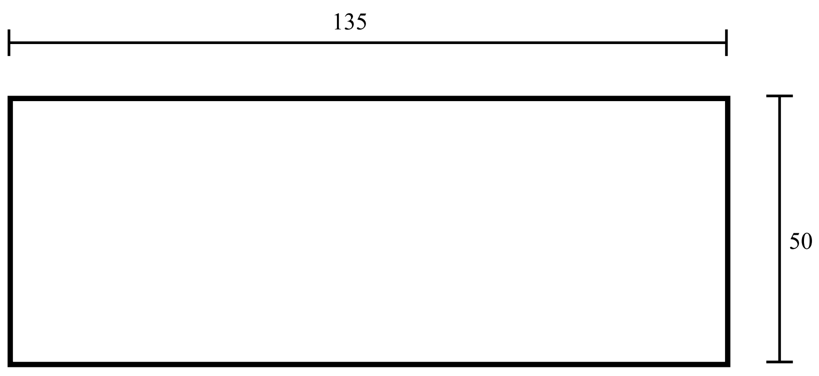
De plus, cette version géométrique permet de travailler sur les questions de modélisation en tas ce qui peut être effectuer en appliquant l'algorithme d'Euclide. Celui-ci n'étant plus donné directement dans la règle du jeu comme dans la version numérique.

> ***Hypothèse didactique :***
>
> *La version géométrique du jeu d'Euclide permet de travailler la modélisation en tas à travers l'algorithme d'Euclide, celui-ci étant donné de manière implicite dans la règle du jeu.*

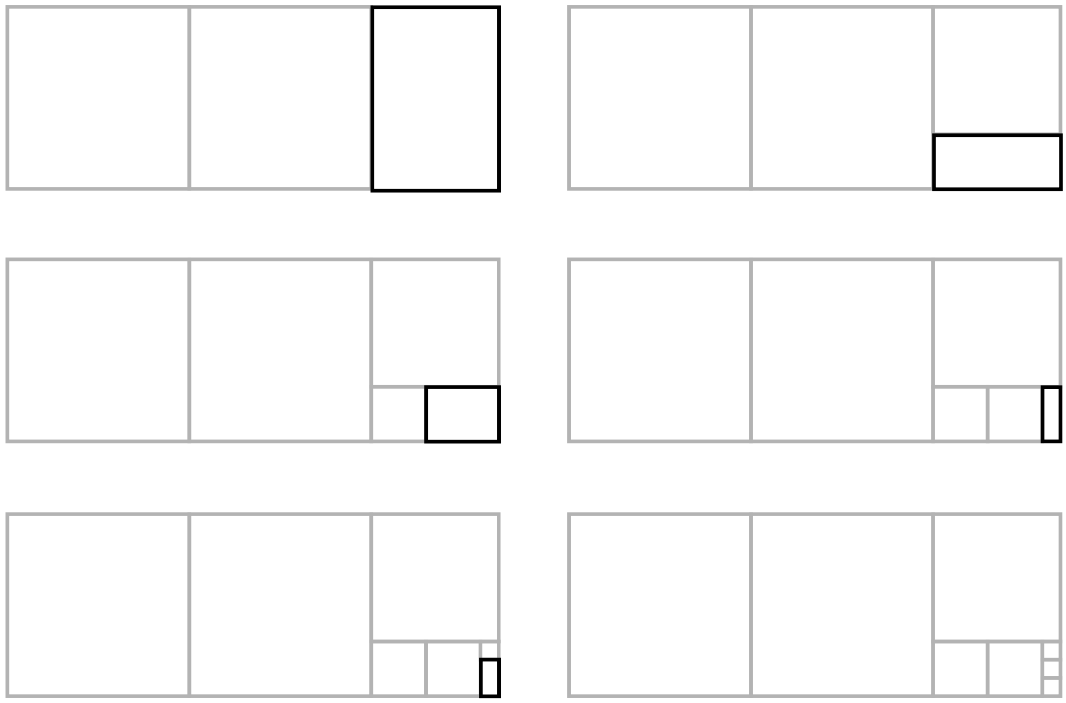
Ainsi dans cette thèse, nous nous intéressons à une variante de soustraction (voir la section II.4) du jeu d'Euclide que nous appellerons « le jeu d'Euclide géométrique ». L'énoncé du jeu est le suivante :

> Le jeu d'Euclide géométrique est un jeu à deux joueurs. Nous disposons au départ d'un rectangle et d'un ensemble non vide S de nombres entiers positifs. À tour de rôle, chaque joueur doit « prendre » des parties du rectangle selon le règles suivantes :
>
> 1. Chaque partie prise doit être un carré le plus grand possible adjacent à un coin du rectangle.
> 2. À chaque tour, le joueur doit prendre un nombre, appartenant à S, de carrés adjacents tous de même taille.
> 3. Le premier joueur ne pouvant jouer a perdu (convention normale).

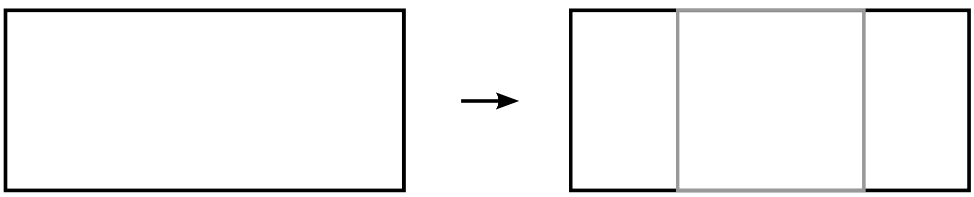
Exemple VII.4. La partie du jeu d'Euclide dans l'exemple VII.1 dans cette version géométrique du jeu est la suivante. Au départ d'un carré de taille $a \times b = 135 \times 50$ comme dans la figure suivante :



Les coups successifs de une partie du jeu d'Euclide géométrique a partir de ce rectangle sont :



La règle 2 peut paraître artificielle, mais la contrainte de carrés de même taille explicite la notion de tas distinct. Si on omet la contrainte de carrés adjacents on obtient un jeu facile à résoudre. En effet, soit le rectangle contient un nombre de carré de taille maximum qui est plus petit que le minimum de S et alors on ne peut pas jouer donc c'est une position perdante. Sinon, il suffit de prendre le minimum de S carrés de taille maximum au centre du rectangle, la position que l'on obtient consiste en deux rectangles de même dimension et est donc perdante. Par exemple, si S contient 1, alors le coup suivante est toujours un coup gagnant.



Dans l'analyse mathématique, il apparaît que la description des positions perdantes, gagnantes et une stratégie gagnante pour ce jeu sont plus faciles à énoncer en convention misère qu'en convention normale, ce choix n'a aucune incidence dans le but didactique du jeu que nous expliquerons dans le chapitre suivant. C'est pourquoi, nous modifions la règle 3 en proposant la convention misère : le joueur qui prend le dernier carré a perdu.

CHAPITRE VIII

Analyse mathématique du Jeu d'Euclide Géométrique

Dans ce chapitre nous faisons l'analyse mathématique de la situation « Le jeu d'Euclide géométrique » tel que décrit dans l'introduction de cette partie.

Nous disposons au départ d'un rectangle de taille $a \times b$ et d'un ensemble non vide S de nombres entiers positifs. À tour de rôle, chaque joueur doit « prendre » des parties du rectangle selon le règles suivantes :

1. Chaque partie prise doit être un carré le plus grand possible adjacent à un coin du rectangle.

2. À chaque tour, le joueur doit prendre un nombre, appartenant à S, de carrés adjacents tous de même taille.

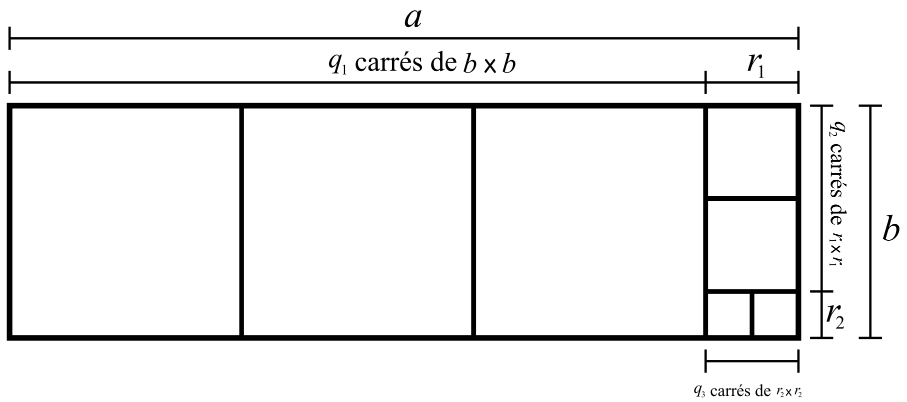
3. Le perdant est le joueur qui prend le dernier carré (convention misère).

Dans la section II.4, nous avons vu que le jeu de soustraction pour un S quelconque est ouvert. Pour cela, nous fixons $S = \{1, 2, \ldots, s-1\}$ avec $s \geq 2$.

Après avoir joué quelques parties, nous pouvons faire certaines observations pour rapport au jeu. Le jeu comporte différentes étapes qui correspondent aux différentes tailles de carrés qui peuvent être prises. Pour obtenir le nombre de carrés de chaque étape, on se rend compte que c'est l'algorithme d'Euclide qui intervient. En effet, il est possible de faire une partition d'un rectangle de taille $a \times b$ avec a, b entiers positifs en carrés de plus en plus petits, coïncidant avec l'algorithme d'Euclide appliqué au couple (a, b) :

$$\begin{aligned}
a &= b \times q_1 + r_1 \\
b &= r_1 \times q_2 + r_2 \\
r_1 &= r_2 \times q_3 + r_3 \\
&\vdots \\
r_{n-3} &= r_{n-2} \times q_{n-1} + r_{n-1} \\
r_{n-2} &= r_{n-1} \times q_n + 0
\end{aligned}$$

Dans chaque étape r_{k-2} représente le dividende, r_{k-1} représente le diviseur, q_k représente le quotient et r_k représente le reste. Cette algorithme appliqué à notre jeu, nous permet de découper le rectangle en carrés de plus en plus petits comme dans la figure suivante.



Nous commençons la partition par le plus grand nombre q_1 de carrés de côté b, ensuite nous découpons le rectangle qui reste de taille $b \times r_1$ avec le plus grand nombre q_2 des carrés de côté r_1, puis nous continuons successivement avec les rectangles qui restent à chaque étape de l'algorithme d'Euclide.

Il est clair que la règle 1 du jeu force que les carrés pris doivent être comme dans la figure. De plus, la règle 2 entraîne qu'il faut finir avec les q_i carrés de la i-ème étape avant de continuer avec les q_{i+1} carrés de l'étape suivante.

La démarche du jeu, correspond donc à la définition de composition séquentielle des jeux définie par Stromquist et Ullman (1993) et étudié dans le Chapitre II. Les joueurs commencent à jouer, dans la première étape du jeu, un jeu de soustraction avec les q_1 carrés de taille maximale $b \times b = r_0 \times r_0$, où nous pouvons soustraire dans l'ensemble $S = 1, 2, \ldots, s-1$. Ceci a été noté par $*(q_1, s)$ dans la section II.4. Ensuite, nous passons à jouer, dans la deuxième étape du jeu, avec les q_2 carrés de taille $r_1 \times r_1$, c'est-à-dire, le jeu $*(q_2, s)$. Cette démarche se poursuit ainsi pour, dans la dernière étape, jouer le jeu $*(q_n, s)$ avec les q_n carrés de taille la plus petite $r_{n-1} \times r_{n-1}$.

Soit $P = (a, b)$ la position du jeu d'Euclide avec un rectangle de taille $a \times b$ et soit $q_1, \ldots, q_n$ la suite des quotients de l'algorithme d'Euclide appliqué au couple (a, b). La démarche du jeu d'Euclide à partir de la position de départ $P = (a, b)$ correspond à la composition séquentielle suivante en condition misère.

$$P = *(q_1, s) \lhd *(q_n, s) \lhd \ldots \lhd *(q_n, s)\,.$$

La description des positions perdantes et positions gagnantes et une stratégie gagnante pour ce jeu ont été obtenues dans la section II.8 (corollaires II.36 and II.38).

VIII.1. Questions initiales

En fonction de ces conditions, nous nous posons deux questions initiales :

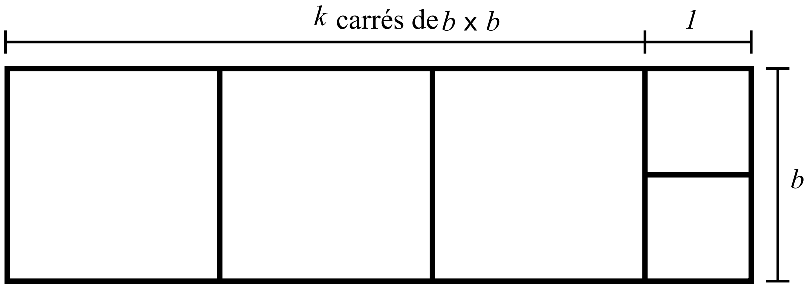
1. Quelle est la condition sur (a, b) pour que le jeu soit fini ?
2. Quelle est la condition sur (a, b) pour que le jeu ait n étapes ?

Pour la première question, d'après l'interprétation en fonction de l'algorithme d'Euclide de notre jeu, elle est équivalente a se demander pour quelle couple de nombres réels (a, b) l'algorithme d'Euclide s'arrête après un nombre fini d'étapes. La réponse à cette question apparaît déjà dans le livre X des éléments d'Euclide, ce qui correspond à se demander si a et b soient commensurables, c'est-à-dire, qu'il existe un nombre rationnel q tel que $a/b = q$.

Puisque un jeu combinatoire doit être par définition fini, nous imposons pour la suite que (a, b) soit commensurables. De plus, il est clair d'après la nature géométrique du jeu, qu'un changement d'échelle ne change pas le résultat du jeu, ceci nous permet pour la suite de supposer que (a, b) sont toujours des nombres entiers positifs.

Pour la deuxième question sur le nombre d'étapes du jeu, pour $n = 1$ ou $n = 2$ nous pouvons donner des critères assez simples. Par exemple, pour que le jeu ait une seule étape, il faut que le algorithme d'Euclide s'arrête après une seule étape. Ceci est le cas si et seulement si a est un multiple de b.

Pour que le jeu ait deux étapes, il faut une analyse un peut plus détaillé. Si le jeu n'a que deux étapes, le découpage final du rectangle est le suivant.



Nous pouvons supposer que le coté du dernier carré à être enlevé vaut 1 et donc (a, b) sont des nombres premier relatifs. De la figure nous obtenons que $a = k \times b + 1$, c'est-à-dire, que a est congru à 1 modulo b. Pour que le nombre d'étapes du jeu soit $n = 3$ il est déjà plus difficile de donner un critère, même si cela est possible. En général il n'y a pas de formule qui donne le nombre d'étapes de l'algorithme d'Euclide pour un couple (a, b). Voir (Dixon, 1970) pour un estimatif du nombre d'étapes de l'algorithme d'Euclide.

D'après les deux problématiques que nous venons de voir, on voit apparaître deux procédures de recherche possibles liées à trois modélisations assez différentes :

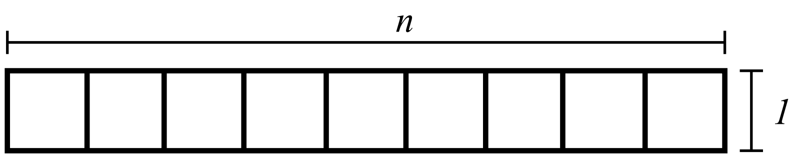
1. Fixer la taille du rectangle $a \times b$: cette stratégie est liée à une modélisation dans un cadre géométrique.
2. Fixer le nombre d'étapes du jeu : cette stratégie est liée à une modélisation dans le cadre arithmétique et dans le domaine des jeux combinatoires.

VIII.2. Première procédure de recherche : fixer la taille du rectangle

Nous étudierons quatre cas particuliers pour la taille du rectangle.

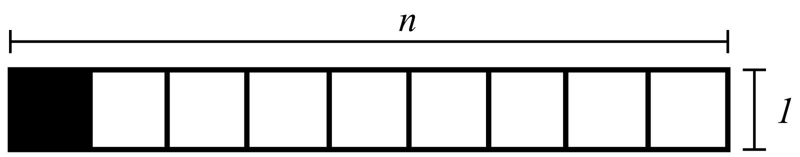
VIII.2.1. Rectangle de taille $n \times 1$

Pour le cas d'un rectangle où l'une des dimensions est 1, l'analyse du jeu est très simple. Il est évident que la position du jeu $P = (n, 1)$ n'a que une seule étape et donc correspond au jeu de soustraction avec un tas de n objets (les n carrés de taille 1×1) en convention misère (puisque le jeu d'Euclide géométrique est défini en convention misère).



Nous obtenons ainsi que la position $(n, 1)$ est perdante si et seulement si n est de la forme $n = sk+1$ (voir la section II.4). Si la position est perdante, c'est a dire si n est de la forme $n = sk + s_0$ avec $0 \leq s_0 < s$, alors la stratégie gagnante consiste à laisser à l'adversaire, à tour de rôle, une position perdante en prenant $s_0 - 1$ carrés si $s_0 \geq 2$ ou $s - 1$ carrés si $s_0 = 0$.

Si nous voulons éviter d'avoir recours au jeu de Nim en convention misère, nous pouvons voir que ce cas est équivalent aussi au jeu de soustraction en convention normale avec un tas de $n - 1$ objets.



En effet, dans ce cas nous considérons que le but du jeu est d'arriver à la position $(1, 1)$ pour gagner puisque l'adversaire n'a que l'option de prendre le dernier carré disponible et perdre la partie.

Dans cette analyse du jeu comme jeu de soustraction en convention normale, la position $(n, 1)$ est perdante si et seulement si $n - 1 = sk$ et nous obtenons la même caractérisation des positions perdantes et gagnantes et la même stratégie gagnante que dans l'analyse précédente.

Vu que le jeu du rectangle pour la position $P = (n, 1)$ corresponde au jeu de soustraction (en condition misère), il y a un algorithme pour décider si une position est gagnante gagnante où perdante, appelé « l'algorithme de marquage » qui corresponde a appliquer directement la définition d'une position gagnante et position perdante. Il est tellement simple qu'elle marche même pour le cas où nous soustrayons dans un ensemble S quelconque des nombres positives.

Supposons par simplicité que S contient 1. Nous démarrons l'algorithme de la façon suivante : nous marquons la position $(1, 1)$ comme perdante il y a l'unique option de prendre l'unique carré. Si $P = (a, 1)$ avec $a + 1 \in S$, alors nous marquons P comme gagnante puisque il y a un coup qui mène a la position $(1, 1)$ qui est perdante.

Maintenant, l'algorithme se poursuit en itérant la procédé suivante : soit $P = (b, 1)$ la position avec le plus petit a qui n'a pas encore été marqué. Elle est forcement perdante parce que aucune coup mène a une position gagnante (sinon, elle aurai été marqué comme gagnante dans une étape précédente). Si $P = (a, 1)$ avec $a + b \in S$, alors nous marquons P comme gagnante puisque il y a un coup qui mène a la position $(a, 1)$ qui est perdante.

VIII.2.2. Rectangle de taille $kn \times k$

Dans ce cas, à l'aide de la représentation géométrique du jeu, il est facile de se rendre compte que la position du jeu $P = (kn, k)$ est équivalente à la position $(n, 1)$ puisque dans les deux cas, le jeux consiste en une ligne des n carrés. Il s'en suit que la caractérisation des positions gagnantes et la stratégie gagnante sont les mêmes que dans le cas précédent.

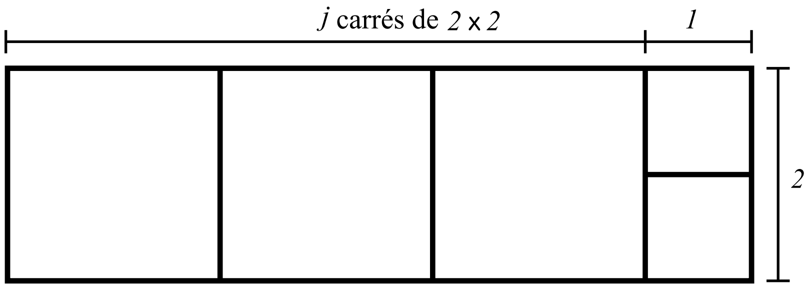
Plus généralement, le jeu (a, b) est équivalent au jeu (ka, kb) pour tout $k \geq 1$ puisque la suite de quotients de l'algorithme d'Euclide appliqué au couple (a, b) est le même que celui appliqué a (ka, kb). Donc, nous pouvons nous contenter d'analyser les positions où a, b sont des nombres premiers entre eux.

VIII.2.3. Rectangle de taille $n \times 2$

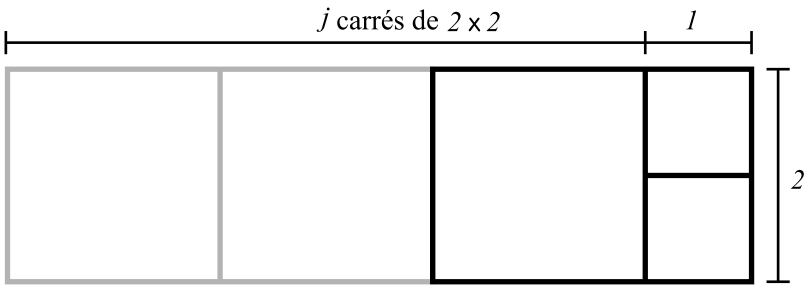
L'analyse du jeu d'Euclide pour la position $P = (n, 2)$ devient plus complexe. Il est trop fastidieux de faire l'analyse en prenant les carrés dans l'ensemble $S = 1, 2, \ldots, s-1$. Pour simplifier la présentation, nous fixons dorénavant $s = 3$, c'est-à-dire, $S = 1, 2$.

D'abord, si n est pair, nous sommes dans le cas précédent. En appliquant le cas déjà analysé, nous concluons que la position $(n, 2)$ avec n pair est perdante si et seulement si n est de la forme $\frac{n}{2} = 3k + 1$. Ceci est le cas si et seulement si $\mathrm{rde}(n, 6) = 2$. [1]

Supposons maintenant que n est impair, notons $n = 2j + 1$. Avec cette notation, nous obtenons que le jeu d'Euclide dans ce cas particulier comporte deux étapes. D'abord une suite de j carrés de taille 2×2 pour finir avec deux carrés de taille 1×1.



Pour obtenir une caractérisation des positions perdantes et gagnantes dans ce cas, nous nous rendons vite compte qu'il faut commencer à analyser par la fin du jeu. Le jeux final avec deux carrés de taille 1×1 est gagnant (position $(2, 1)$). Donc, pour gagner la partie il faut arriver à laisser à l'adversaire la position perdante $P = (3, 2)$ qui a pour unique option la position $(2, 1)$.



C'est-à-dire, pour gagner, il faut à nouveau jouer à un jeu de soustraction en convention misère avec les j carrés de taille 2×2. Ceci entraîne que la position $P = (n, 2)$ avec n impair est perdante si et seulement si $\frac{n-1}{2} = 3k + 1$. Ceci est le cas si et seulement si $\mathrm{rde}(n, 6) = 3$. En mettant ensemble l'analyse des deux cas, nous obtenons le théorème suivante.

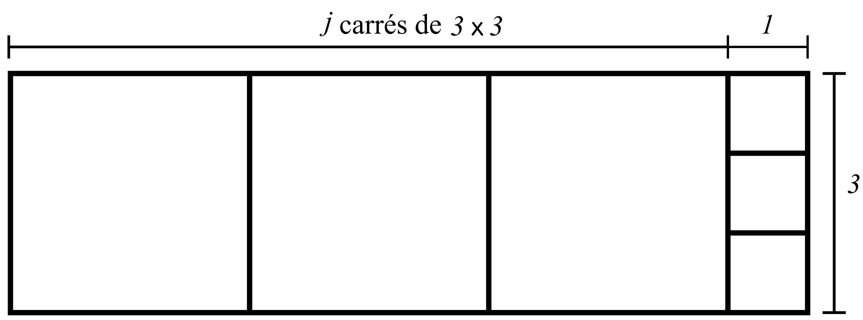
THÉORÈME. *La position* $P = (n, 2)$ *est perdante si et seulement si* $\mathrm{rde}(n, 6) = 2$ *ou* $\mathrm{rde}(n, 6) = 3$.

1. Rappelons que $\mathrm{rde}(a, b)$ correspond au reste de la division euclidienne de a par b.

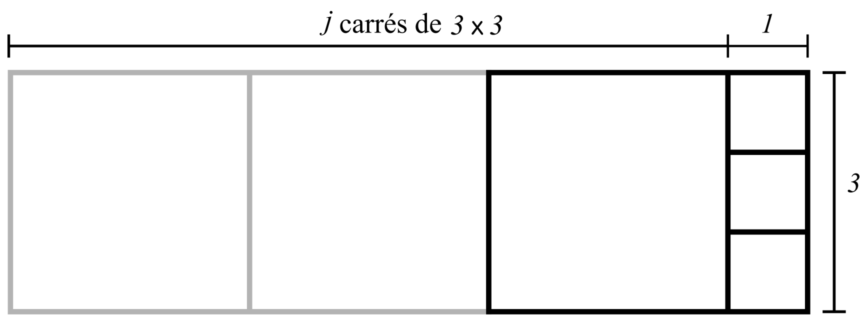
VIII.2.4. Cas particulier $P = (n, 3)$

En analogie avec le cas de position $(n, 2)$, il faut distinguer trois cas en fonction du reste de la division euclidienne de n et 3. Si $n = 3j$, la position $P = (n, 3)$ est équivalente a la position $(j, 1)$. D'où il suit que P est perdante si et seulement si $j = 3k + 1$. Ceci est le cas si et seulement si $\mathrm{rde}(n, 9) = 3$.

Supposons maintenant $n = 3j + 1$. Le jeu d'Euclide dans ce cas particulier comporte deux étapes. D'abord une suite de j carrés de taille 3×3 pour finir avec trois carrés de taille 1×1.

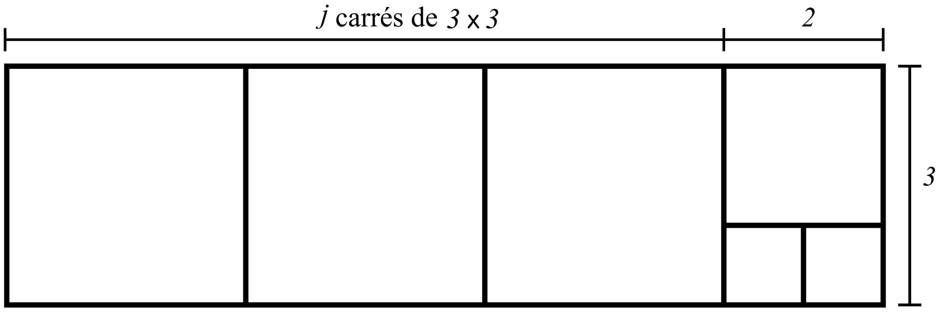


Comme dans le cas précédent, pour obtenir une caractérisation des positions perdantes et gagnantes il faut commencer à analyser par la fin du jeu. Le jeu final avec trois carrés de taille 1×1 est gagnant (position $(3, 1)$). Donc, pour gagner la partie il faut arriver à laisser à l'adversaire la position perdante $(4, 3)$ qui a pour unique option la position $(3, 1)$:

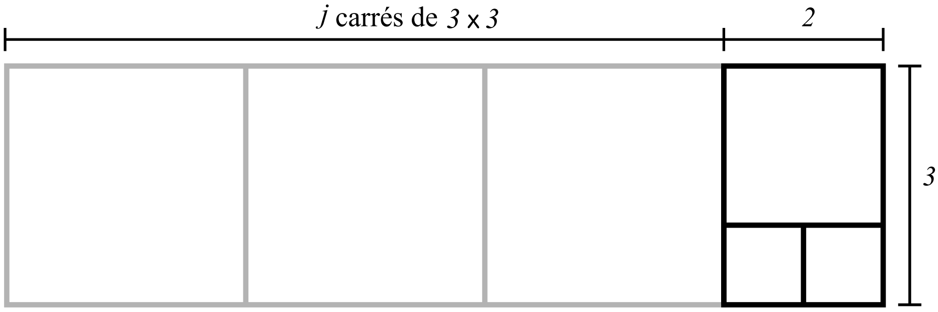


C'est-à-dire que pour gagner, il faut jouer un jeu de soustraction en convention misère avec les j carrés de taille 3×3. Ceci entraîne que la position $P = (n, 3)$ avec $n = 3j + 1$ est perdante si et seulement si $j = 3k + 1$. Ceci est le cas si et seulement si $\mathrm{rde}(n, 9) = 4$.

Supposons enfin que $n = 3j + 2$. Le jeu d'Euclide dans ce cas particulier comporte trois étapes. D'abord une suite de j carrés de taille 3×3, ensuite un unique carré de taille 2×2 pour finir avec deux carrés de taille 1×1.



Comme dans les cas précédents, pour obtenir une caractérisation des positions perdantes et gagnantes il faut analyser le jeu en ordre inverse. La position pour les deux dernières étapes est $(3, 2)$ qui est une position perdante d'après notre analyse du cas $(n, 2)$. Pour gagner la partie il faut arriver à laisser à l'adversaire la position perdante $(3, 2)$:



C'est-à-dire, pour gagner, il faut jouer un jeu de soustraction avec les j carrés de taille 3×3 en convention normal cette fois. Ceci entraîne que la position $P = (n, 3)$ avec $n = 3j + 2$ est perdante si et seulement si $j = 3k$. Ceci est le cas si et seulement si $\mathrm{rde}(n, 9) = 2$.

En mettant ensemble l'analyse des trois cas, nous obtenons le théorème suivant.

THÉORÈME. *La position $P = (n, 3)$ est perdante si et seulement si*

$$\mathrm{rde}(n, 9) \in \{2, 3, 4\} .$$

VIII.3. Deuxième procédure de recherche : fixer le nombre d'étapes

Dans cette section nous étudions les stratégies obtenues en fixant le nombre d'étapes du jeu.

VIII.3.1. Jeu avec une étape

Une partie avec une seule étape correspond au rectangle $n \times 1$ qui a déjà été étudié auparavant. Il correspond au jeu de soustraction $*(n, 3)$. Donc, une position est gagnante si et seulement si $n = 3k + 1$.

VIII.3.2. Jeu avec deux étapes

Une position P avec un rectangle de taille $a \times b$ du jeu d'Euclide géométrique a deux étapes si et seulement si l'algorithme d'Euclide appliqué au couple (a, b) a deux étapes. Soit q_1 et q_2 les deux quotients obtenus avec l'algorithme d'Euclide. Cette position du jeu correspond alors à la composition séquentielle $P = *(q_1, 3) \lhd *(q_2, 3)$. A partir de ce point, nous pouvons oublier la représentation géométrique du jeu et ne travailler qu'avec le couple (q_1, q_2).

Nous pouvons trouver les positions perdantes en analysant le jeu dans l'ordre inverse. Supposons que la position $*(q_2, 3)$ est perdante en convention misère, c'est-à-dire, q_2 est congru à 1 modulo 3. Dans ce cas, pour gagner, il ne faut pas être le premier à jouer dans la position $*(q_2, 3)$. Il faut donc jouer le jeu $*(q_1, 3)$ en convention normale pour que se soit l'autre joueur qui commence à jouer dans le jeu $*(q_2, 3)$ qui est perdante. Ceci montre que $P = *(q_1, 3) \lhd *(q_2, 3)$ est perdante si q_1 est congru à 0 modulo 3 et q_2 est congru a 1 modulo 3.

Supposons maintenant que la position $*(q_2, 3)$ est gagnante en convention misère, c'est-à-dire, q_2 n'est pas congru à 1 modulo 3. Dans ce cas, pour gagner, il ne faut pas être le premier à jouer dans le jeu $*(q_2, 3)$. Il faut donc jouer le jeu $*(q_1, 3)$ en convention misère pour que se soit l'autre joueur qui prenne le dernier carré de la première étape. Ceci montre que $P = *(q_1, 3) \lhd *(q_2, 3)$ est perdante si q_1 est congru à 1 modulo 3 et q_2 n'est pas est congru a 1 modulo 3.

Cette analyse montre le théorème suivant :

Théorème.

$$\textit{La position } P = *(q_1, 3) \lhd *(q_2, 3) \textit{ est perdante ssi } \begin{cases} q_1 \equiv 0 \textit{ et } q_2 \equiv 1 & \mod 3 \textit{ ou} \\ q_1 \equiv 1 \textit{ et } q_2 \not\equiv 1 & \mod 3 \end{cases}$$

VIII.4. Un méthode de résolution plausible

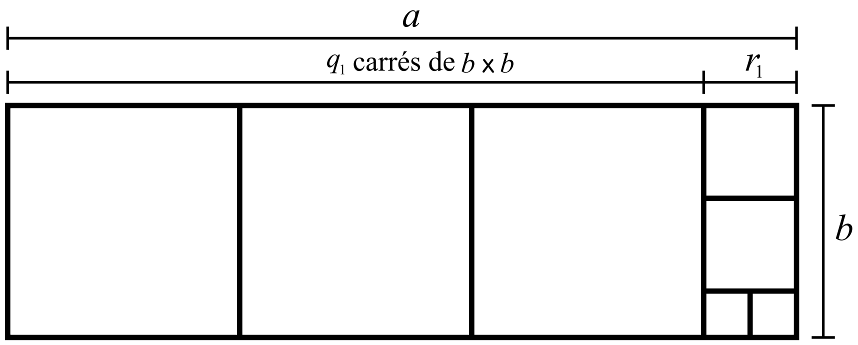
Dans cette section nous donnons une méthode pour décider si une position est gagnante ou perdante et dans le cas où elle est gagnante, nous donnons une stratégie gagnante. Ceci a déjà été fait dans la section II.8 en termes de la théorie des jeux combinatoires et, en particulier, de la composition séquentielle des jeux combinatoires impartiaux.

Ces savoirs ne sont pas à la portée des élèves, même de niveau licence. Dans cette section, nous donnons une méthode analogue à celui de la section II.8, mais qui évite d'avoir recours aux notions mathématiques plus sophistiquées que la division euclidienne, l'algorithme d'Euclide et le raisonnement par récurrence. D'après nous, il est plausible qu'un élève motivé au niveau licence puisse arriver à une solution de ce type après avoir travaillé plusieurs cas particuliers.

Soit $P = (a, b)$, avec $a \geq b$ une position quelconque du jeu d'Euclide. D'après l'analyse des cas particuliers pour des positions $(n, 1)$, $(n, 2)$ et $(n, 3)$ il est clair que le jeu peut être analysé en fonction des résultats de la division euclidienne de a par b. Soit q_1 et r_1 des entiers positifs avec $r_1 < b$ tels que

$$a = b \times q_1 + r_1 \,.$$

Cette expression, correspond au fait que la première étape du jeu d'Euclide consiste à jouer un jeu de soustraction avec les q_1 carrés de taille $b \times b$ et après cette étape finie, le jeu est dans la position $P' = (b, r_1)$.



L'analyse maintenant se divise en deux cas : si la position P' est perdante et si la position P' est gagnante.

Si P' est perdante, alors nous devons jouer le jeu de soustraction avec les q_1 carrés de taille $b \times b$ en convention normale pour prendre le dernier de ces carrés et laisser la position perdante P' à l'adversaire. Il suit que si P' est perdante, alors P est perdante si et seulement si le jeu de soustraction avec q_1 objets est perdante en convention normale. Ceci est le cas si et seulement si $\mathrm{rde}(q_1, 3) = 0$.

Par contre, si P' est gagnante, nous devons jouer le jeu de soustraction avec les q_1 carrés de taille $b \times b$ en convention misère pour que se soit l'adversaire qui prenne le dernier de ces carrés et nous laisse la position gagnante P' à nous. Il suit que si P' est gagnante, alors P est perdante si et seulement si le jeu de soustraction avec q_1 objets est perdante en convention misère. Ceci est le cas si et seulement si $\mathrm{rde}(q_1, 3) = 1$.

Ceci, fournit le théorème suivant :

THÉORÈME VIII.1. *La position $P = (a, b)$ est perdante si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite*

(*i*) *La position $P' = (b, r_1)$ est perdante et* $\mathrm{rde}(q_1, 3) = 0$.

(*ii*) *La position $P' = (b, r_1)$ est gagnante et* $\mathrm{rde}(q_1, 3) = 1$.

Ce théorème peut être utilisé une autre fois pour la position $P' = (b, r_1)$ en considérant la division euclidienne de b et r_1, c'est-à-dire, soit q_2 et r_2 des entiers positifs avec $r_2 < r_1$ tels que

$$b = r_1 \times q_2 + r_2 .$$

Cet remarque nous mène à considérer non seulement la division euclidienne de a par b, mais l'algorithme d'Euclide appliqué au couple (a, b) :

$$\begin{aligned} a &= b \times q_1 + r_1 \\ b &= r_1 \times q_2 + r_2 \\ r_1 &= r_2 \times q_3 + r_3 \\ &\vdots \\ r_{n-3} &= r_{n-2} \times q_{n-1} + r_{n-1} \\ r_{n-2} &= r_{n-1} \times q_n + 0 \end{aligned}$$

Le jeu d'Euclide à partir de la position $P = (a, b)$ consiste maintenant à jouer de façon séquentielle n jeux de soustraction avec $q_1, q_2, \ldots, q_n$ objets respectivement, où q_i sont les quotients successifs de l'algorithme d'Euclide. Nous appelons ces n jeux les étapes du jeu d'Euclide qui correspondent aux étapes de l'algorithme d'Euclide appliqué au couple (a,b). Nous pouvons maintenant procéder dans l'ordre inverse pour décider si la position $P=(a,b)$ est gagnante ou perdante de la façon suivante :

1. La dernière étape du jeu d'Euclide correspond à la position (r_{n-2}, r_{n-1}) et consiste à un jeu de soustraction avec q_n carrés. Puisque le jeu d'Euclide est un jeu en convention misère, cette position est perdante si et seulement si $\mathrm{rde}(q_n,3)=1$.
2. Maintenant, dans l'ordre inverse, nous pouvons décider si la position originale $P=(a,b)$ est gagnante ou perdante à l'aide du théorème VIII.1.

Avec un temps suffisant d'expérimentation de la part des élèves, il est même possible d'obtenir une description des positions perdantes sans avoir à faire l'analyse dans l'ordre inverse. Pour l'obtenir, nous commençons par donner un énoncé équivalent du Théorème VIII.1 :

Théorème VIII.2. *Soit $P=(a,b)$ et $P'=(b,r_1)$ comme dans le théorème VIII.1.*

- (i) *Si* $\mathrm{rde}(q_1,3)=0$, *alors P est gagnante si et seulement si P' est gagnante.*
- (ii) *Si* $\mathrm{rde}(q_1,3)=1$, *alors P est gagnante si et seulement si P' est perdante.*
- (iii) *Si* $\mathrm{rde}(q_1,3)=2$, *alors P est gagnante.*

Soit maintenant $P=(a,b)$ une position du jeu d'Euclide et soit q_i et r_i les suites des résultats de l'algorithme d'Euclide. D'après ce nouveau énoncé du théorème, et à l'appui de beaucoup d'exemples, un élève peut remarquer les effets suivants qui généralisent les conditions $(i)-(iii)$ du théorème :

- (i) Lorsque l'un des quotients q_i est tel que $\mathrm{rde}(q_i,3)=0$, cette étape ne change pas le résultat du jeu. C'est-à-dire, le jeu P est gagnant si et seulement si le jeu P avec l'étape i-ème enlevée est gagnant.
- (ii) Lorsque l'un des quotients q_i est tel que $\mathrm{rde}(q_i,3)=1$, et tous les q_j pour $j<i$ sont tels que $\mathrm{rde}(q_j,3)\neq 2$, cette étape inverse le résultat du jeu. C'est-à-dire, le jeu P est gagnant si et seulement si le jeu P avec l'étape i-ème enlevée est perdant.
- (iii) Lorsque l'un des quotients q_i est tel que $\mathrm{rde}(q_i,3)=2$, la position correspondante à cette étape est gagnante et nous pouvons analyser le jeu dans l'ordre inverse à partir de ce point pour décider si P est gagnante ou perdante. Il n'y a pas besoin de commencer de la dernière étape.

Ces remarques empiriques inspirées du théorème VIII.2 nous mènent à conjecturer que le fait d'être gagnant dépend de la parité du nombre de q_i tels que $\mathrm{rde}(q_i,3)=1$ que nous trouvons en tant que nous n'avons pas trouvé un q_j avec $\mathrm{rde}(q_j,3)=2$. En fonction de notre conjecture, nous posons la définition suivante.

Définition VIII.3. Soit $L(P)$ le nombre des q_i tels que $\mathrm{rde}(q_i,3)=1$ et $\mathrm{rde}(q_j,3)\neq 2$ pour tout $j<i$.

Remarquons que cette définition est analogue de la Définition II.32 avec un langage mathématique moins élaboré. A nouveau de manière empirique il est possible de épurer notre conjecture pour en arriver à conjecturer le théorème suivante. Il correspond exactement au corollaire II.36.

THÉORÈME VIII.4. *La position $P = (a, b)$ du jeu d'Euclide est perdante si et seulement si $L(P)$ est impair.*

A ce stade du développement de la réponse, il parait qu'il est impossible de continuer de manière rigoureuse pour obtenir un preuve du théorème sans avoir recours à un nouveau savoir mathématique : la preuve par récurrence.

DÉMONSTRATION. Nous procédons par récurrence sur le nombre d'étapes de l'algorithme d'Euclide.

Supposons d'abord que jeu d'Euclide n'a qu'une seule étape, c'est-à-dire, $a = q_1 b$. Dans ce cas, et $L(p) = 1$ est impair si et seulement si $\mathrm{rde}(q_1, 3) = 1$. Ceci est le cas si et seulement si la position $P = (a, b)$ est perdante. Donc le théorème est vrai lorsque il n'y a qu'une seule étape.

Supposons maintenant que la position $P = (a, b)$ du jeu d'Euclide a n étapes et que le théorème est vrai pour les jeux avec moins de n étapes. Soit r_1 et q_1 le reste et quotient de la division euclidienne de a et b. La position $P' = (b, r_1)$ a $(n - 1)$ étapes et donc le théorème est vrai pour elle. Nous divisons la preuve en trois cas :

(*i*) Si $\mathrm{rde}(q_1, 3) = 0$, alors $L(P) = L(P')$. D'après le théorème VIII.2, P est perdante si et seulement si P' est perdante. D'après l'hypothèse de récurrence, ceci est le cas si et seulement si $L(P')$ est impair. Il suit que P est perdante si et seulement si $L(P)$ est impair, ce qui confirme le théorème dans ce cas.

(*ii*) Si $\mathrm{rde}(q_1, 3) = 1$, alors $L(P) = L(P')+1$. D'après le théorème VIII.2, P est perdante si et seulement si P' est gagnante. D'après l'hypothèse de récurrence, Ceci est le cas si et seulement si $L(P')$ est pair. Il suit que P est perdante si et seulement si $L(P)$ est impair, ce qui confirme le théorème dans ce cas.

(*iii*) Si $\mathrm{rde}(q_1, 3) = 2$, alors $L(P) = 0$. D'après le théorème VIII.2, P est gagnante. Ceci confirme le théorème aussi dans ce cas et conclut la preuve.

$\square$

En ce qui concerne une stratégie gagnante pour le jeu d'Euclide, remarquons que chaque position du jeu d'Euclide a au plus deux options. Donc, une stratégie gagnante pour ce jeu est facile à obtenir avec le théorème précédente par simple analyse de tous les cas possibles.

En effet, soit $P = (a, b)$ une position gagnante du jeu d'Euclide. Soit P' l'une de ses options. Avec le théorème précédent, nous pouvons décider si P' est perdante ou gagnante :

1. Si P' est perdante, alors on joue le coup qui mène à la position P'.
2. Si P' est gagnante, alors il existe un autre coup possible à jouer. On joue ce coup qui mène forcement à une position perdante.

VIII.5. Conclusion

Nous pensons que, en prenant en compte les caractéristiques de notre situation, des stratégies de recherche variées peuvent apparaître lors d'une recherche sur support papier-crayon.

Lorsque la situation sera introduite dans les expérimentations, nous souhaitons étudier, en fonction des niveaux scolaires, si les stratégies décrites au-dessus vont apparaître et sous quelles conditions et formes. De ce fait, nous faisons l'hypothèse que ces stratégies seront mises en œuvre de manières différentes selon la classe et le niveau scolaire à laquelle appartiennent les élèves.

CHAPITRE IX

Analyse didactique du jeu d'Euclide Géométrique

IX.1. Les supports physiques possibles pour la dévolution du jeu

À priori nous pouvons choisir quatre types de supports physiques pour jouer au jeu d'Euclide.

- avec papier–crayon en traçant les rectangles et hachurant les carrés joués,
- sur un tableau ou avec papier–crayon en traçant les rectangles et effaçant les carrés joués,
- sur des rectangles en carton en coupant les carrés joués, parmi d'autres.
- sur l'ordinateur.

Dans la section suivante, nous ferons une analyse où nous mettrons en rapport ces différents supports physiques en fonction de la représentation où modélisation dans les différentes niveaux d'abstraction.

IX.2. Différentes représentations où modélisations du jeu

IX.2.1. Une représentation réaliste du jeu

Bien entendu, dans toutes les supports physiques nommés ci-dessus, il y a le choix implicite *d'une unité de mesure* canonique, par exemple, des centimètres lorsque nous traçons les rectangles avec une règle ou les carreaux du papier s'il y en a.

D'autre part la règle du jeu consiste à prendre des carrés donc il faut construire des carrés, et pour construire des carrés il faut mesurer, donc les mesures sont nécessaires parce qu'il faut distinguer les carrés du rectangle.

Sur des rectangles de petites dimensions, il n'y a pas difficultés a priori pour jouer le jeu d'Euclide avec ces supports physiques. Les premières difficultés arrivent lors que nous essayons de jouer le jeu sur des rectangles de grandes dimensions. Par exemple, pour représenter un rectangle de taille 100×70 il est fort probable que notre règle graduée ne soit pas assez grande ou qu'il n'y ait pas assez des carreaux pour le tracer.

Pour surmonter ces contraintes, nous comprenons assez rapidement qu'il faut admettre de prendre un rectangle à *l'échelle* du rectangle original pour être capable de le représenter. Par exemple, comme nous l'avons dit dans la section VIII.2.2, le jeu à partir d'un rectangle de taille 100×70 est équivalent au jeu à partir d'un rectangle de taille 10×7.

La grande difficulté des représentations réalistes du jeu est que la relation entre les tailles des carrés, dans les différents étapes, peut être très importante. Par exemple, sur un rectangle de taille 101×70 le jeu commence par une étape avec un carré de taille 70×70 et finit par un sous-jeu avec sept carrés de taille 1×1.

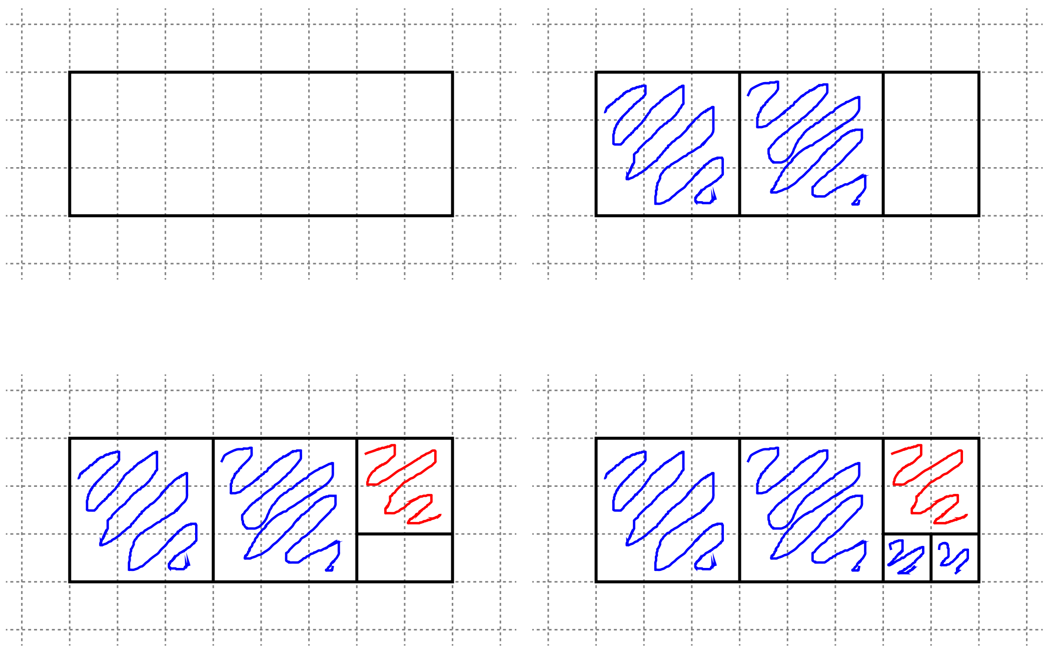
Dans cet exemple nous voyons clairement que n'importe quelle représentation réaliste du jeu doit permettre de manipuler des carrés de tailles si différentes que 70×70 et 1×1, c'est-à-dire, des carrés 7000% plus grands les uns que les autres.

Bien évidement, il est possible de rendre cet exemple encore pire en prenant un carré de taille 999×700 (et plus si besoin). Ceci montre qu'il est impossible de garder des représentations réalistes si nous voulons être capable de traiter le cas général du jeu d'Euclide.

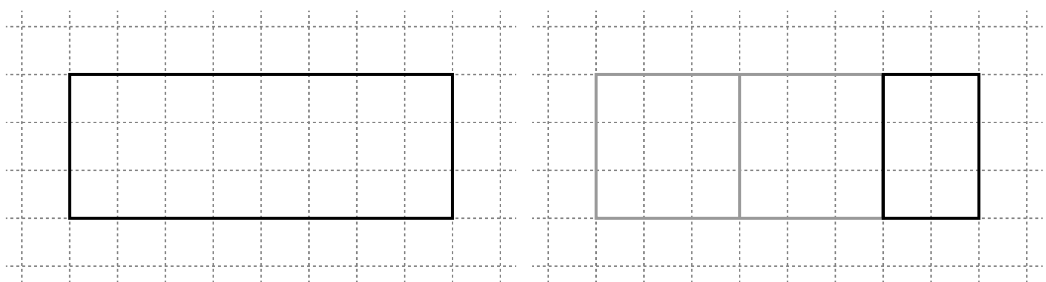
Donc nous sommes obligés de commencer à faire de l'abstraction. Ainsi il est nécessaire d'accepter que les carrés ne seront pas de carrés et que les échelles vont changer ....

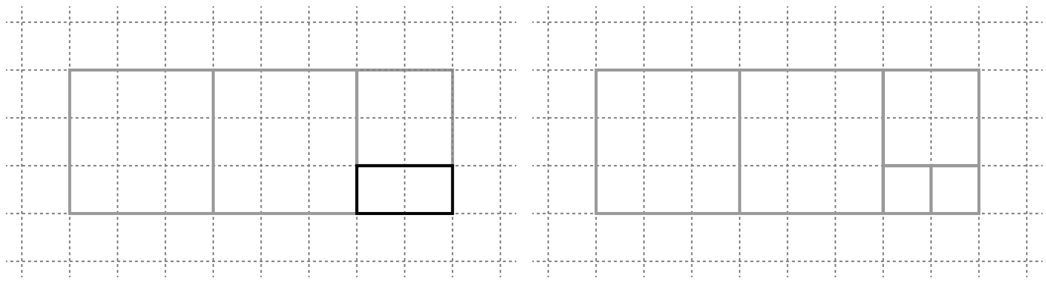
IX.2.1.1. *Quels sont les dessins prévisibles ?*

Pour une représentation réaliste sur papier à carreaux où les joueurs jouent en hachurant des carrés, les différents coups d'une partie à partir de la position de départ avec un rectangle de 8×3 pourrai être :

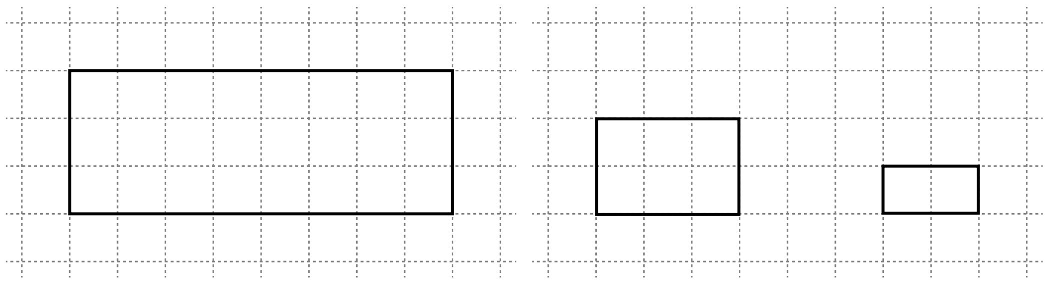


La même partie avec une représentation sur papier à carreaux en traçant le rectangle initial et effaçant les carrés joués est (la couleur gris claire représente la trace sur papier après avoir effacé) :





Encore la même partie avec une représentation sur papier à carreaux en retraçant les rectangles pour avoir toujours que le coté le plus longue dans la largeur est la suivante : (le dernier coup correspond à tout prendre et donc il ne reste aucun rectangle) :

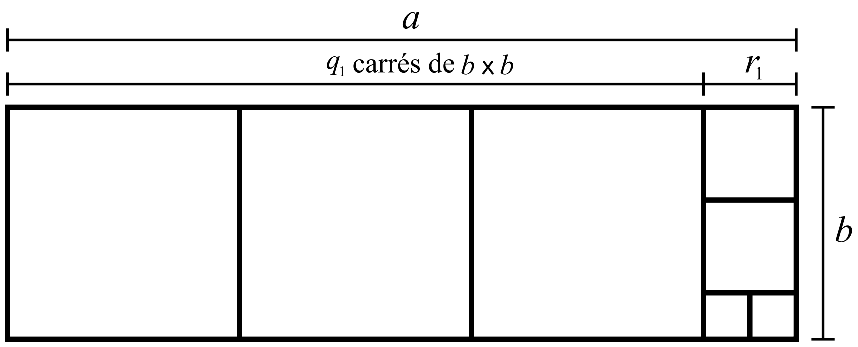


La nature séquentielle du jeu d'Euclide est plus facile à repérer dans cette dernière représentation parce qu'il y a un indice clair du changement d'étape, le changement du rectangle. La première représentation permet aussi de repérer la nature séquentielle en analysant, à la fin d'une partie, les coup joués en fonction de la taille des carrés enlevés. La deuxième représentation rend plus difficile de repérer la nature séquentielle puisque quand on joue en effaçant les coups, il ne reste pas de traces des coup effectués pendant le jeu.

IX.2.2. Premier niveau d'abstraction

Les difficultés d'une représentation réaliste du jeu que nous venons de voire montre qu'il est nécessaire d'avoir une représentation ou une modélisation plus abstraite pour pouvoir aborder le cas général.

Donc il est nécessaire de considérer un « rectangle générique », dans lequel les mesures a et b dessinées ne sont pas représentatives de valeurs particulières. Pour jouer le jeu d'Euclide dans un rectangle de taille $a \times b$, l'information que nous précisons du rectangle est le nombre q_1 de carrés de taille $b \times b$ qu'il y a dans le rectangle et les dimensions $r_1 \times b$ du rectangle qui reste une fois que les q_1 carrés ont été enlevés.



Cette abstraction géométrique correspond évidemment à la division euclidienne de a par b où q_1 est le quotient et r_1 est le reste. Pendant le jeu, une fois que les q_1 carrés de taille $b \times b$ ont été enlevés, nous recommençons le jeu cette fois avec un rectangle de taille $r_1 \times b$.

IX.2.2.1. *Quels sont les dessins prévisibles ?*

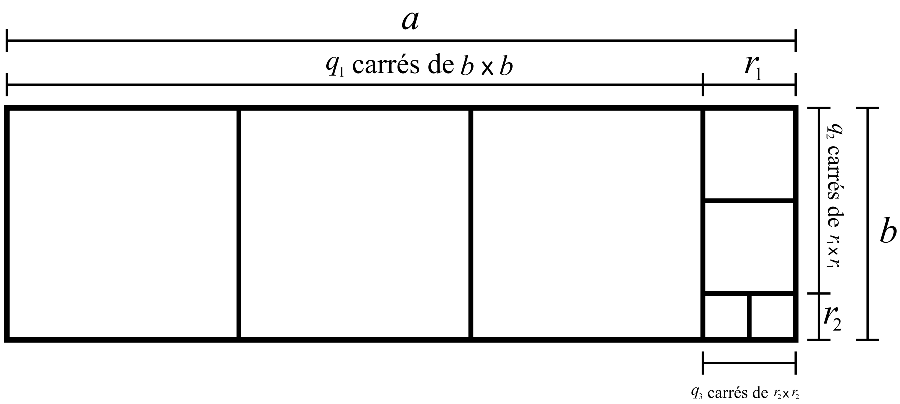
Dans ce niveau d'abstraction, nous nous attendons au même type de dessins que dans le cas d'une représentation réaliste du jeu avec la différence que les mesures des rectangles n'ont pas besoin d'être respectes précisément, mais prises en compte pour effectuer la division euclidienne de a par b pour connaître le nombre q_1 de carrés de taille $b \times b$.

Le dernier type de dessin montré dans le cas réaliste parait le plus approprié pour ce niveau d'abstraction puisque le fait que les rectangles n'ont pas les dimensions justes à chaque étape peut rendre difficile de jouer le jeu complet sur le même rectangle.

En fonction des conditions de chaque expérimentation en particulier, les élèves peuvent être amenés à commencer leur analyse par une représentation déjà dans ce niveau d'abstraction. C'est le cas, par exemple, si les élèves ne disposent pas d'un outil pour mesurer et faire des représentations réalistes, comme du papier à carreaux, où une règle.

IX.2.3. Deuxième niveau d'abstraction : les rectangles ont disparu

L'itération du processus décrit au-dessus nous amène à considérer l'algorithme d'Euclide appliqué au couple (a, b). Cet algorithme nous permet d'obtenir le nombre des carrés de chaque taille qui peuvent être enlevés. Dans ce niveau d'abstraction, nous obtenons que tout ce qu'il faut et suffit pour jouer au jeu d'Euclide c'est la suite des quotients $q_1, q_2, \ldots, q_n$ de l'algorithme d'Euclide qui nous permet de partitionner, comme nous l'avons décrit précédemment, le rectangle de la façon suivante.

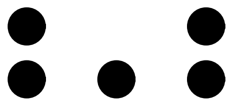


À ce niveau d'abstraction, nous n'avons plus besoin d'un rectangle qui représente le rectangle de taille $a \times b$ pour jouer au jeu d'Euclide. Il suffit de connaître les quotients de l'algorithme d'Euclide appliqué au couple (a, b).

IX.2.3.1. *Quels sont le dessins prévisibles ?*

A ce niveau d'abstraction, les élèves ont déjà compris que toute l'information nécessaire pour jouer le jeu d'Euclide est contenue dans la suite des quotients $q_1, q_2, \ldots, q_n$ de l'algorithme d'Euclide. Alors, une possible représentation du jeu est, par exemple, avec une n-uple ordonné $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$. Nous avons dénoté ce jeu par la notation $*(q_1, 3) \lhd *(q_2, 3) \lhd \ldots \lhd *(q_n, 3)$ (dans ce cas, le jeu est en convention misère).

Il est tout a fait possible que les élèves préfèrent garder une représentation « géométrique », même s'ils ont compris que avec le n-uple $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ suffit, pour garder l'aspect ludique du jeu. Pour cela, ils peuvent prendre des tas qui représentent chacun des nombres q_i. Par exemple, si les élèves connaissent le jeu des allumettes, il est possible qu'ils représentent une partie à partir de la position de départ avec un rectangle de 8×3 où $q_1 = 2$, $q_2 = 1$ et $q_3 = 2$ par :



IX.2.4. Les difficultés envisageables

Comme nous venons de voir, le passage entre les différents niveaux peut ne pas être évident, donc nous pouvons prévoir des difficultés des élèves dans les passages.

Dans ce qui suit, nous donnons quelques éléments qui doivent être surmontés pour pouvoir faire le passage entre chaque niveau.

1. Dans le passage entre la représentation réaliste et le premier niveau d'abstraction, il faut :
   (a) Accepter de dessiner des carrés qui ne sont pas des carrés.
   (b) Laisser tomber l'exactitude des unités de mesure
   (c) Mettre des nombres qui ne correspondent pas aux mesures des rectangles qui se dessinent.
   (d) Et que à chaque changement de taille de carrés, il y a un changement d'échelle implicite.
2. Dans le passage entre le premier niveau d'abstraction et le deuxième niveau d'abstraction.
   (a) Il faut repérer ce qui est important, que la simple liste des q_i peut tout donner c'est-à-dire les quotients de la division euclidienne.
   (b) Laisser tomber le cadre géométrique.

IX.3. Savoirs et savoir-faire en jeu dans la situation

Rappelons que :

> « *l'objectif principal d'une SiRC n'est pas la transmission d'un savoir notionnel mais chaque situation met en jeu des savoirs notionnels qui apparaissent comme requis durant le processus de résolution du problème [...] nous pourrions considérer que ces savoirs correspondent aux savoirs notionnels visés lors d'une situation adidactique. De ce fait, certains éléments de la théorie des situations didactiques apparaissent comme pertinents pour effectuer l'analyse didactique des savoirs notionnels en jeu dans une SiRC. Ces savoirs notionnels seront appelés savoirs en jeu* » Giroud (2011)

De ce fait, dans un premier temps, notre analyse va tenter d'identifier les savoirs notionnels et les savoir-faire de l'activité mathématique, dans la situation du jeu d'Euclide, en nous basant sur l'analyse mathématique de la situation et l'analyse de stratégies envisageables. Nous nous rappellerons aussi les savoirs propres à un jeu combinatoire.

IX.3.1. Savoirs notionnel

Par rapport aux savoirs notionnels, ceux qui peuvent apparaître en fonction de la démarche choisie pour aborder le problème, nous pouvons trouver :

- Division euclidienne : c'est le premier outil qui nous permet de mieux comprendre le problème en calculant combien de carrés de taille maximale possède une position donnée.
- Algorithme d'Euclide : Comme nous l'avons vu, cet algorithme est directement lié à notre algorithme de la partition d'un rectangle en carrés, ceci nous permet postérieurement de travailler avec les quotients en tant que le nombre des carrés à chaque étape du jeu.
- Congruence sur les entiers : ce savoir est inhérent au jeu de soustraction et donc il apparaît naturellement dans toutes les solutions que nous avons présentées du jeu d'Euclide.
- Notion de multiple : Il apparaît lors que les élèves réalisent que les position (a, b) et (ka, kb) sont équivalentes.
- Notion de plus grand commun diviseur : D'après la notion de multiple, les élèves réalisent qu'il peuvent diviser a et b par leur plus grand commun diviseur.
- Nombres premiers entre eux : Les côtés du rectangle seront premiers entre eux si et seulement si la taille du plus petit carré de la partition est 1. De ce fait, nous pouvons travailler avec des rectangles tels que leurs dimensions sont des nombres premiers entre eux.
- Notion d'algorithme : qui va être la recherche d'une stratégie gagnante.

IX.3.2. Savoir-faire propres d'un jeu combinatoire

Parmi les savoirs en jeu, nous pouvons citer :

- Une stratégie et sa construction : une stratégie répond à toutes les règles nécessaires qui permettent de déterminer d'une forme unique et non ambiguë ce que nous allons faire dans chaque moment du jeu c'est-à-dire du départ à la fin. Une stratégie est un plan de jeu pour toute la partie. De ce fait, construire une stratégie correspond à trouver un algorithme pour jouer.
- Stratégie gagnante : une stratégie gagnante est une stratégie qui nous mène à gagner la partie.

- Position gagnante : une position est gagnante s'il existe une stratégie gagnante pour le premier joueur à jouer.
- Position perdante : c'est le contraire d'une position gagnante, une position est perdante s'il n'existe pas une stratégie gagnante pour le premier joueur, c'est-à-dire, s'il existe une stratégie gagnante pour le deuxième joueur à jouer.

IX.3.3. Savoir-faire de l'activité mathématique en jeu dans cette situation

La situation du jeu d'Euclide met en place aussi de savoir-faire propres à l'activité mathématique, notamment les éléments qui nous apparaissent nécessaires pour formuler et valider des résultats concernant le jeu.

IX.3.3.1. *La modélisation ou changement de cadre*

Le jeu d'Euclide est donné dans un cadre purement géométrique. Cependant, pour trouver une stratégie gagnante, nous avons montré qu'il faut transporter le jeu dans un cadre arithmétique à l'aide de l'algorithme d'Euclide. Cette réinterprétation du jeu est un acte de modélisation d'un cadre mathématique vers un autre.

IX.3.3.2. *Formulation des conjectures*

Dans plusieurs types de problèmes, les conjectures peuvent émerger « naturellement » de l'expérimentation. Par exemple, dans un jeu d'optimisation (trouver le nombre minimal des coups pour atteindre un but), chaque expérience nous induit une conjecture (il m'a fallu x coups, conjecture : le nombre minimal est x coups).

Cependant, dans le jeu d'Euclide il est possible que les conjectures n'émergent pas facilement. Le comportement du jeu peut varier beaucoup avec un petit changement de la donnée initiale ce qui rend la tâche de trouver des conjectures plus difficile. Par exemple, avec un rectangle de taille 10×5 le jeu est trivial (la position est gagnante, il suffit de prendre un carré), mais avec un rectangle de taille 9×5 ou un rectangle de taille 10×6 le jeu est plus difficile. En effet, dans le premier cas la position est perdante et dans le deuxième cas elle est gagnante.

Les conjectures qui peuvent émerger dépendront des cas particuliers que les élèves vont tenter de résoudre. De ce fait, les expérimentations des élèves vont viser deux objectifs : trouver des éléments pour construire une stratégie gagnante; et/ou affirmer la validité d'une stratégie gagnante déjà trouvée. Dans cette section nous analysons le premier. Le deuxième type sera analysé dans la section IX.3.3.3.

Expérimentations aléatoires

Dans un premier temps, il est très probable qu'il y ait une phase « d'expérimentation aléatoire » où les élèves vont jouer au hasard sur des rectangles choisis au hasard. Ces expérimentations peuvent aider les élèves à s'approprier les règles du jeu et à découvrir quelques-unes de ses caractéristiques, telles que :

- La taille des carrés et le nombre de carrés de chaque taille ne dépendent pas des coups joués. Ils dépendent seulement des dimensions (a, b) du rectangle.
- Le jeu comporte autant d'étapes (sous-jeux) que de tailles différentes de carrés qui interviennent dans le jeu.
- Chaque étape doit être fini avant de passer à l'étape suivante.

- Chaque étape du jeu est un jeu de soustraction avec des carrés de même taille
- Les étapes du jeu peuvent finir soit en convention normal soit en convention misère, sauf la dernière étape qui est toujours un jeu en convention misère.
- Le jeu doit être analysé dans l'ordre inverse, à partir de la dernière étape. Le fait que la dernière étape du jeu soit en convention misère, n'entraîne pas que toutes les étapes doivent être jouées dans cette convention.
- Le nombre des carrés de même taille et de taille maximale pour une rectangle $a \times b$ correspond au quotient de la division euclidienne de a par b. Cette caractéristique peut être une propriété en acte, utilisé de manière implicite
- Le nombre des carrés de chaque étape correspond au quotient d'une étape spécifique de l'algorithme d'Euclide. Cette caractéristique peut être une propriété en acte, utilisé de maniéré implicite.

Expérimentations inductives

Après des expérimentations aléatoires pour l'appropriation du jeu, nous faisons l'hypothèse que les élèves peuvent passer à une phase d'expérimentation inductive.

Dans cette phase, les élèves peuvent jouer dans des carrés spécialement choisis par eux mêmes pour trouver des conjectures sur la stratégie gagnante.

La nature des expérimentations dans cette étape dépendra fortement des propriétés repérées lors de la phase aléatoire. Par exemple :

- Fixer le nombre d'étapes dans le jeu ; Les élèves qui remarquent la nature par étapes du jeu, les élèves peuvent choisir des rectangles avec un nombre fixe d'étapes : une seule étape d'abord, puis deux, etc, pour trouver des conjectures dans ces cas particuliers.
- Les élèves qui remarquent que le jeu peut s'étudier dans l'ordre inverse peuvent choisir des rectangles avec plusieurs carrés dans chaque étape.
- Les élèves qui remarquent qu'il y a des positions du jeu où, à tour de rôle, les joueurs n'ont qu'un seul coup possible peuvent étudier ces positions plus en détail.

IX.3.3.3. *Validation des conjectures*

Les argumentations pour valider les conjectures peuvent être de différents types. En considérant les éléments d'analyse faits par Giroud (2011) pour sa situation recherche, nous citons les suivants :

Expérimentations répétitives et validatives

Une expérimentation est appelée répétitive quand après de quelques expériences aléatoires la conjecture se confirme. Évidemment, comme dit Giroud :

> *« il n'est pas absurde de penser qu'un résultat est vrai car il se répète. Toutefois, ceci est insuffisant pour prouver un résultat mathématique ».*

Une expérimentation est validative si elle vise à trouver un contre-exemple pour une conjecture particulière, si un tel contre-exemple n'est pas trouvé alors la conjecture est considérée comme vraie.

Cependant, ce type de raisonnement peut mener à une preuve par exhaustivité des cas si nous restreignons le jeu pour n'avoir qu'un nombre fini de cas. Par exemple, le jeu d'Euclide sur des rectangles de taille $a \times b$ avec $a, b \leq 10$.

Arguments mathématiques

Les arguments mathématiques valides que nous croyons qui peuvent être utilisés par les élèves pour valider les conjectures ont déjà été présentés dans les sections VIII.2, VIII.3 et VIII.4 lors que nous décrivons les stratégies de recherche envisageables et une stratégie gagnante pour le jeu d'Euclide.

Ces arguments ont été présentés avec un langage mathématique qui peut être hors de la portée des élèves, mais les arguments contenus dans les preuves peuvent être utilisés par les étudiant sous des formes moins élaborées.

Exemple générique

Un exemple générique est un exemple où les comportements observés vont s'étendre au cas général, c'est-à-dire, un exemple assez complexe pour que, en le résolvant, les élèves puissent comprendre en même temps comment résoudre tout autre cas du jeu.

Pour la méthode de résolution du jeu d'Euclide en analysant le jeu dans l'ordre inverse présenté dans la section VIII.4, nous considérons qu'un exemple générique doit comporter au moins trois étapes où le nombre de carrés dans chaque étape du jeu représente les trois valeurs possibles d'un entier modulo trois.

Ainsi, exemple générique pourrait être $P = (30, 7)$ où les quotients sont $q_1 = 4$, $q_2 = 3$ et $q_3 = 2$. Cette position est perdante, donc la stratégie gagnante est pour le deuxième joueur. Pour un exemple générique gagnant, c'est-à-dire, où il y a une stratégie gagnante pour le premier joueur nous pouvons prendre $P = (30, 13)$ où les quotients sont $q_1 = 2$, $q_2 = 3$ et $q_3 = 4$.

Pour le résultat plus développé dans le théorème VIII.4, nous pensons qu'aucun exemple en lui même ne suffit pour tenir compte de toute la complexité du résultat.

IX.4. Questions et éléments de validation

Dans la section IX.3.3, nous avons déterminé les types de preuves associés à la situation et les conjectures et les arguments pouvant les supporter. Cela nous permettra de déterminer les éléments de validation qu'il est possible d'introduire en fonction des problèmes étudiés par les élèves.

Preuve par exhaustivité des cas

Lorsque les dimensions du rectangle (a, b) sont fixées à des petites valeurs pour faire une analyse d'un cas particulier, il est possible de produire des preuves par exhaustivité des cas. En effet, il est possible de monter la validité d'une conjecture de stratégie gagnante dans un cas particulier en l'appliquant à tous les parties possibles à partir de cette position de départ et en vérifiant que le résultat du jeu est toujours la victoire pour le joueur qui applique la stratégie gagnante.

Contre-exemples

De fois, il est possible de rejeter une conjecture par le biais d'un contre-exemple. Il suffit d'un contre-exemple bien choisi pour invalider une conjecture, mais il pourrait être assez difficile de trouver ce contre-exemple. Cependant, le gestionnaire de la situation peut produire les contre-exemples pertinents pour invalider les conjectures fausses des élèves s'ils n'arrivent pas à les invalider eux-mêmes. Ceci permet au gestionnaire d'aider les élèves à progresser dans l'analyse du jeu sans pour autant leur donner des pistes de solution.

Validation d'une stratégie gagnante

Une fois que les élèves ont trouvé une conjecture de stratégie gagnante pour le cas général ou pour une famille infinie de cas, arrive le problème de comment valider cette conjecture. Vu que l'infinité de la famille rend impossible une preuve par exhaustivité des cas, les élèves vont devoir trouver des méthodes de preuve générales.

Il est difficile de démontrer qu'une stratégie quelconque est effectivement une stratégie gagnante. La façon la plus rigoureuse de le faire est d'introduire la notion de position gagnante et position perdante et montrer que la stratégie en question appliquée à une position gagnante donne une position perdante. Mais il est improbable que la notion de position perdante et position gagnante apparaisse toute seule chez les élèves.

Pour guider les élèves, les notions de position perdante et position gagnante pourraient être introduites auparavant par le gestionnaire. Pour éviter la définition récursive de position gagnante et position perdante (voir la section I.3) l'enseignant peut définir une position gagnante comme une position où le premier joueur à jouer à une stratégie gagnante.

IX.5. Variables

Dans la situation du jeu d'Euclide nous pouvons identifier des variables de la situation et des variables de l'énoncé. Dans la suite, nous analysons ces variables.

IX.5.1. Variables de la situation

Dans les variables de la situations nous trouvons deux : celle liée au support physique et celle liée au choix de cadre.

Variable liée au support physique

Comme nous avons vu dans la section IX.1 nous pouvons jouer au jeu d'Euclide avec papier-crayon en traçant les rectangles et hachurant les carrés joués, sur un tableau ou avec papier–crayon en traçant les rectangles et effaçant les carrés joués, sur des rectangles en carton en coupant les carrés joués, sur l'ordinateur, entre autres.

Les choix des différents supports physiques peut nous mener a différentes conjectures sur les niveaux d'abstraction présentés dans la section IX.2

Variable liée au choix du cadre

Le jeu peut être proposé dans différents cadres comme, par exemple, dans un cadre numérique, où nous sommes complètement dans l'abstraction du jeu ; dans une support physique avec des battons, ou d'autres objets de type non mathématique ou avec des objets mathématiques de type géométrique (rectangles)

Cette variable pourrait être une variable didactique mais nous l'avons fixée et avons choisi de présenter la situation dans une cadre géométrique avec de rectangles comme nous l'avons expliqué dans la section d'introduction ce cette partie de la thèse.

IX.5.2. Variables de l'énoncé

Dans les variables de l'énoncé nous pouvons identifier trois types de variables, celle de la valeur numérique du couple $(a,\ b)$, celle qui concerne le rapport entre a et b et celle du rapport à la valeur de la quantité de carrés à prendre à chaque coup.

Variable liée au rapport entre a et b

Les valeurs numériques de la couple $(a,\ b)$ qui correspond aux dimensions du rectangle, vont avoir une statuts particulier au jeu, en effet nous pouvons choisir de donner la situation avec de valeurs $(a,\ b)$ entiers, $(a,\ b)$ commensurables et $(a,\ b)$incommensurables.

L'étude des valeurs de $(a,\ b)$ conduisent à les conditions d'arrêt du jeu.

Variable liée au valeur numérique du couple $(a,\ b)$

À partir des dimensions du rectangle nous obtenons les données nécessaires pour résoudre le jeu d'Euclide. Le nombre n d'étapes dans le jeu d'Euclide qui corresponde au nombre de divisions euclidiens dans l'algorithme d'Euclide appliqué au couple a et b. Le nombre q_i de carrés dans chaque étape du jeu correspond au quotient de chaque division euclidienne dans l'algorithme d'Euclide.

Les différents valeurs du couple (a, b) conduisent à des conjectures différentes, propres à l'identification des situations gagnantes et perdants pour chaque sous problème.

Nous identifions cette variable comme une variable de rechercher c'est-à-dire qu'elle va être mise à la disposition des élèves.

Variables liée à la quantité maximale de carrés à prendre à chaque tour

Même si dans la version dans notre jeu, cette variable es fixé au 2, c'est à dire $S = \{1, 2\}$, elle pourrai être modifiée pour étendre le jeu.

Par exemple, nous pouvons imposer qu'à chaque tour il faut prendre un et un seul carré. Dans ce cas, le jeu n'est pas vraiment un jeu parce que les joueurs n'ont jamais un choix à faire. Malgré le fait que cette version du jeu n'est pas un jeu, elle peut aider les élèves à se rendre compte de la relation entre le jeu d'Euclide et l'algorithme d'Euclide.

Il est aussi envisageable de n'admettre que de prendre un nombre de carrés dans un ensemble prescrit S qui ne forme pas un intervalle (par exemple $S = \{1, 3\}$, voir section II.4). Dans cette généralité, même le cas d'un rectangle de taille $n \times 1$ est un problème largement ouvert.

IX.6. Difficultés et obstacles possibles

Le jeu d'Euclide, comme tout problème mathématique, confronte les élèves à certaines difficultés et obstacles. Dans cette section nous essayons de prévoir quelques-uns d'entre eux et de déterminer des solutions employables par le gestionnaire pour aider les élèves à les franchir.

1. De l'informel au formel : en général, il est difficile pour les élèves de formaliser les arguments trouvés en discutant entre eux. Ceci est particulièrement vrai pour le jeu d'Euclide qui a un support physique concret où les élèves peuvent argumenter en traçant des rectangles sur papier. Le gestionnaire de la situation peut aider les

élèves à formaliser leurs arguments dans un premier cas particulier qu'ils auront déjà résolu de façon intuitive.

2. Preuve par des expérimentations répétitives : il arrive souvent que les élèves soient convaincus de la validité d'une conjecture parce qu'elle marche correctement pour tous les exemples qu'ils ont testés. Ceci ne correspond évidemment pas à une preuve. Si la conjecture est fausse, le gestionnaire de la situation peut leur proposer le bon contre-exemple pour invalider la conjecture et les aider à comprendre la nécessité de preuves. Si la conjecture est correcte, il est tout à fait possible de guider les élèves vers une preuve à l'aide des positions gagnantes et positions perdantes en leur donnant des pistes de ce qui est une stratégie gagnante dans ces termes.
3. Représentation du jeu (abstraction) : les différents niveaux d'abstraction de la représentation du jeu et des exemples pertinents pour faire apparaître ces différents niveaux d'abstraction ont été introduits dans la section IX.2.
4. La notion de stratégie : la définition de base d'une stratégie gagnante, c'est-à-dire, une méthode pour gagner toujours est assez claire. Cependant, cette définition n'est pas adaptée aux besoins des preuves. La définition en termes de positions gagnantes et positions perdantes est plus complexe et a besoin d'une bonne appropriation du problème pour être comprisse par les élèves.
5. La notion de position gagnante et position perdante : cette notion est difficile à comprendre, mais très utile à l'heure de faire des preuves. Pour les notions de position gagnante, position perdante et stratégie gagnante, le gestionnaire de la situation peut définir et formaliser les notions dans un cas particulier que les élèves auront déjà résolu, par exemple, un petit cas particulier qui peut être montré par exhaustivité des cas.

IX.7. Hypothèses sur la difficulté de la situation

Tout d'abord, nous faisons l'hypothèse que les connaissances requises pour la transposition didactique du jeu d'Euclide sont des connaissances que tous les élèves du collège au supérieur possèdent. De ce fait, il n'y a pas à posséder de connaissances particulières pour pouvoir jouer au jeu d'Euclide géométrique.

Les éléments d'analyse précédentes nous permettent aussi de faire les hypothèses suivantes concernant la situation « Le jeu de Euclide géométrique » :

- La construction d'une stratégie gagnante pour quelques cas particuliers du jeu est une tâche accessible.
- La modélisation du jeu d'Euclide par le biais de l'algorithme d'Euclide est une tâche complexe, qui pourrait apparaître à partir du niveau lycée.
- La construction d'une stratégie gagnante est une tâche très complexe.

Cette dernière hypothèse est supportée par le fait qui une stratégie gagnante pour le jeu d'Euclide géométrique a besoin d'avoir recours à la composition séquentielle des jeux combinatoires, comme notre analyse mathématique le montre. Cette notion correspond au niveau expert.

IX.8. Le jeu d'Euclide comme SiRC

En considérant l'analyse mathématique et didactique du jeu d'Euclide que nous avons effectué dans les deux derniers chapitres, nous procédons à vérifier que le jeu d'Euclide remplit les caractéristiques nécessaires pour constituer une SiRC.

1. Le jeu d'Euclide tel que présenté dans cette thèse est un problème de recherche dont une première solution a été donnée par nous dans le chapitre II section II.6.
2. La question initiale est d'accès facile et elle est envisageable pour un public du collège à l'université.
3. Comme nous avons vu dans la section VIII, il existe plusieurs stratégies initiales possibles pour démarrer une recherche.
4. L'analyse didactique montre qu'il existe de nombreuses stratégies différentes pour avancer dans la recherche menant à des conjectures différentes.
5. L'espace problème est (très) expansible. Dans la section VIII, nous montrons plusieurs instances de comment la solution d'un cas particulier mène à des nouvelles questions.

   De plus, même si le jeu d'Euclide est complètement résolu par un élève, il reste encore la variable de recherche « quantité maximale des carrés à prendre » qui est fixé à deux dans notre cas, mais qui pourrait être modifiée pour étendre la situation et revenir à un problème ouvert.
6. Le jeu d'Euclide a les variables de recherche que nous avons présentées dans la section IX.5. Parmi ces variables, les dimensions du rectangle (a, b) sont laissées complètement à la disposition des élèves.

IX.9. Conclusion

L'analyse didactique de la SiRC le jeu d'Euclide géométrique évoquée dans ce chapitre constitue notre analyse préalable pour des séances expérimentales présentées dans les deux chapitres suivants.

Lors de ces séances expérimentales, nous voulons déterminer dans quelle mesure les élèves sont capables d'avancer dans la résolution du jeu d'Euclide et quels résultats vont être mis en place.

En particulier, nous tâcherons d'identifier les aspects suivants dans les productions des élèves :

1. Négociation entre les notions de stratégie, stratégie gagnante, position gagnante et position perdante,
2. Recherche des solutions particulières,
3. Méthodes de généralisation des solutions particulières trouvées,
4. Énoncé de méthode de construction générale,
5. Conjectures sur l'existence et l'inexistence de solutions,
6. Occurrence des preuves.

Ainsi, plus précisément par rapport à l'étude de la dévolution, nous chercherons à répondre aux questions suivantes :

- Quelles sont les stratégies susceptibles d'être développées par les élèves ?
- À quels résultats (solutions, conjectures, contre-exemples, méthodes, preuves) ont-ils abouti ?

CHAPITRE X

Première expérimentation du jeu d'Euclide géométrique

X.1. Présentation de la situation

Nous avons débuté notre série d'expérimentations avec des étudiants de licence scientifique L1-L2 du module optionnel « jeux combinatoires et raisonnements mathématiques » encadrés par des membres de l'équipe Maths à modeler de l'université Joseph Fourier de Grenoble. Ces étudiants étaient issus de plusieurs filières scientifiques. Le fait d'expérimenter la situation avec ces étudiants étaient pour nous l'occasion d'évaluer son accessibilité et de vérifier nos hypothèses auprès d'un public préalablement confronté à des situations recherche pour la classe (SiRC).

Quatorze étudiants ont été répartis en quatre groupes (trois groupes de quatre et un groupe de deux étudiants) que nous avons nommé Vert, Bleu, Rouge et Jaune. Le groupe Bleu a été enregistré, pour les autres groupes nous avons pris des notes, nous avons affecté un accompagnateur fixe au groupe vert. L'accompagnateur principal pouvait se déplacer à la demande des étudiants, notamment auprès des groupes Rouge et Jaune.

La recherche a eu lieu pendant deux heures successives. Les étudiants ont à leurs dispositions des feuilles blanches sans quadrillage, des règles graduées et des stylos de différentes couleurs.

L'expérimentation s'est déroulée en trois moments.

- La découverte et appropriation du jeu. Chaque groupe a joué en faisant deux équipes rivales, la recherche était libre, aucune indication quant au choix des valeurs (a, b) (taille du rectangle) n'était donnée.
- La recherche de réponses aux questions. Nous avons demandé aux différents groupes de synthétiser les résultats obtenus sur une feuille ; cette étape avait pour objectif d'amener les étudiants à faire le point sur leur recherche.
- Elle était destinée à la construction de méthodes génériques à travers une généralisation ou des variantes du jeu.

La gestion de la classe était assurée par les deux chercheurs de l'équipe Maths à modeler qui encadraient habituellement le cours. Ils circulaient entre les groupes afin de vérifier que le problème avait été bien compris et aider les étudiants dans leurs recherche. Cependant, ils restaient neutres dans leurs réponses, ne fournissaient aucune piste de résultat.

X.1.1. Énoncé du problème

Le problème a été donné de la manière suivante au début de la séance :

> Il s'agit d'un jeu à deux joueurs. On dispose d'un rectangle. À tour de rôle, chaque joueur doit «prendre » un ou deux carrés de mêmes dimensions et les plus grands possibles adossés à un coin du rectangle. Le joueur qui prend le dernier carré a perdu.

Nous avons demandé aux étudiants de répondre aux questions suivantes :

- Le jeu est-il fini quelles que soient les dimensions du rectangle initial ? Autrement dit, est-on sûr qu'on arrive en un nombre fini de coups sur un carré ?
- Dans le cas où le jeu est fini, y a-t-il une stratégie gagnante pour l'un des joueurs ?

L'énoncé du problème a été donné à chaque groupe par écrit et oralement à l'ensemble de la classe.

Dans le cas où les étudiants restaient bloqués dans leur recherche, nous avions prévu de proposer aux étudiants de travailler sur quelques rectangles en particulier : le rectangle de dimensions 38×11, qui a 3 étapes de jeu avec une stratégie gagnante pour le premier à jouer ; le rectangle 42×29 qui a 4 étapes de jeu avec une stratégie gagnante pour le deuxième à jouer et le rectangle 125×56 qui a 4 étapes avec une stratégie gagnante pour le premier à jouer. Ce choix de dimensions du rectangle va nous permettre de faire des analyses en termes de variables.

Nous avons posé deux questions : Le jeu est-il fini quelles que soient les dimensions du rectangle initial ? Dans le cas où le jeu est fini, existe-il une stratégie gagnante pour l'un des joueurs ?

Nous débuterons l'analyse des productions des étudiants en analysant les productions par rapport à la deuxième question. La question à propos de la finitude du jeu sera analysée à la fin.

Dans l'analyse de production, les groupes Vert, Bleu, Rouge et Jaune, seront nommés par la suite LV, LB, LR, LJ.

X.2. Déroulement et analyse des productions

D'abord, nous présentons, dans le quatre premiers points, ce qui relève du côté jeu combinatoire et ensuite nous présentons ce qui relève du côté SiRC

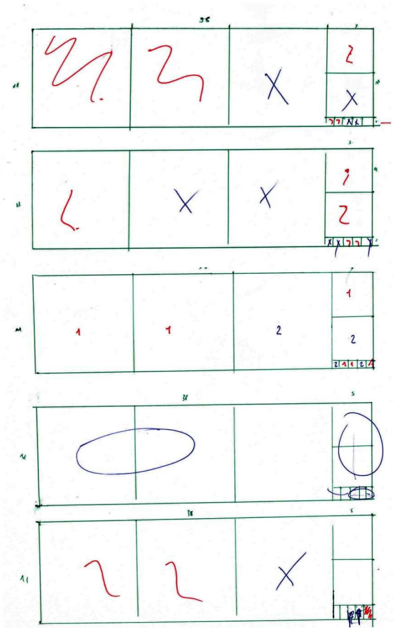
X.2.1. Dévolution

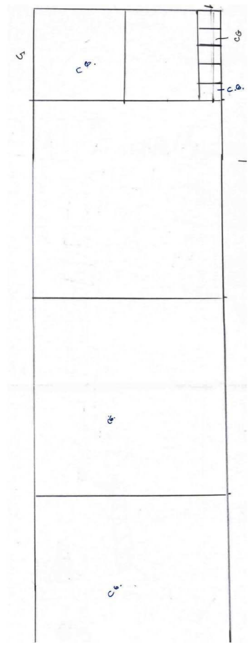
L'énoncé du problème a posé des difficultés de compréhension aux étudiants en relation à la façon de découper le rectangle donné. Pour surmonter cette difficulté, nous avons fait un exemple d'une partie du jeu au tableau. Après cela, la démarche de recherche s'est très vite opérée dans tous les groupes.

X.2.2. Représentations ou modélisations du jeu

Comme nous l'avons dit, les étudiants avaient à leur disposition des règles graduées et de feuilles blanches sans quadrillage. Ainsi, tous les groupes ont commencé à jouer en traçant des rectangles à l'aide de la règle graduée.

Passer au premier niveau d'abstraction n'a pas du tout été évident (sauf pour LB), les étudiants ont commencé par des expérimentations aléatoires, en traçant des rectangles avec la règle et en utilisant des dimensions entières, que la règle pouvait leur fournir. Ainsi nous avons repéré les dessins de rectangles tels que :





La première image, à gauche, correspond au Groupe LG où nous avons détecté de grands problèmes de calcul ; lorsqu'ils ont travaillé sans une règle, ils ont eu du mal à trouver le nombre des carrés qu'ils pouvaient extraire de chaque position. Ils se sont servis d'une calculatrice pour le faire. La deuxième image, à droite, correspond au groupe LV qui a fait un rectangle sur toute une feuille A3 qui a été donné. Ils sont allés tellement proche de la marge de la page que l'un des bords de la figure est sortie de capacité du scanner utilisé et n'est pas visible dans cette image.

Après des interventions dans les groupes, les étudiants se sont rendus compte que tracer des rectangles avec dimensions exactes était inutile et leur faisait perdre du temps. Ils ont compris que si ils voulaient avancer dans leur recherche, ils devaient admettre de tracer des rectangles génériques à la place des rectangles parfaits.

Au contraire des autres groupes, le groupe LB a contourné complètement l'étape des représentations réalistes du jeu et a commencé à jouer directement avec un rectangle générique représentant le rectangle donné.

X.2.2.1. *Premier niveau d'abstraction*

Après avoir surmonté les contraintes générées dans le niveau précédent, le travail sur le registre géométrique continue avec des figures approximatives.

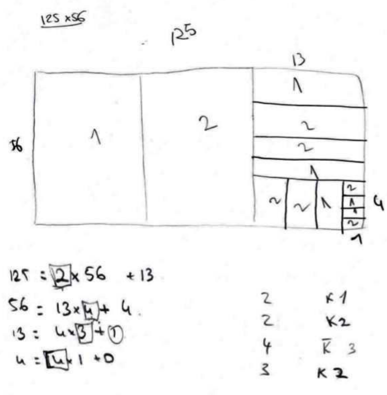
La règle graduée est laissée de côté et les calculs se font à travers la division euclidienne.

> « *pour trouver les carrés on fait la division euclidienne entre la longueur et la largeur, dans le rectangle* 30×12 *on fait la division euclidienne nous avons deux carrés de* 12×12 *et un rectangle de* 12×6 *et on fait 12 divisé par 6, donc on a* deux carrés de 6×6... » (groupe LV)

L'algorithme d'Euclide est aussi repéré dans une grande partie des groupes.

> « *En fait quand on divise un rectangle en fin de compte on arrive à la base commune. La base commune qui est en fait la plus petite unité du plus grand sur le plus petit. On prend la plus petite unité du plus grand sur le plus petit ce sera forcément le plus petit rectangle que l'on aura* » (groupe LB)

Et les quotients sont identifiés comme les étapes dans le jeu. La figure suivante montre comme le groupe vert se sert des quotients pour tracer le rectangle.

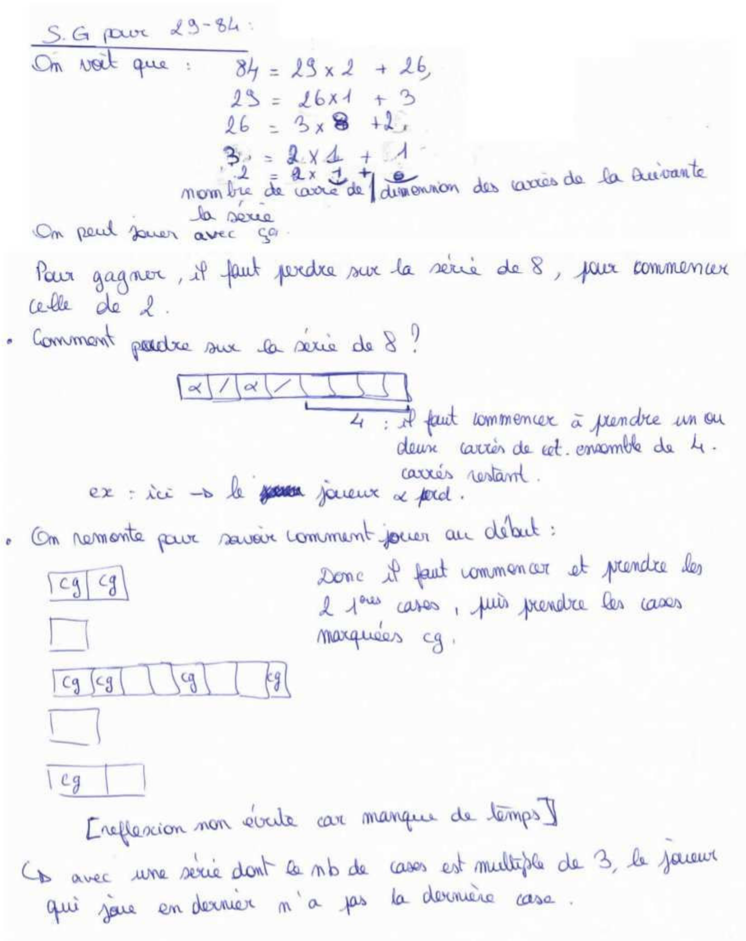


X.2.2.2. *Le deuxième niveau d'abstraction*

Le travail sur le registre numérique se fait vite après avoir fait le rapport avec la suite de quotients et le nombre des carrés de chaque taille qui peuvent être enlevés. Par exemple, dans l'extrait suivant du travail du groupe LB.

> « *On prend la largeur et la longueur. On divise le plus grand par le plus petit. On prend la dernière unité de ce nombre et ce sera la taille du rectangle que l'on aura à la fin* »
>
> « *Si, en fait ton algorithme il partait bien, celui que tu avais fait au début. En fait, ce qu'il nous faut c'est le nombre de quotient, ça on est d'accord, plus à chaque nombre ou tu va devoir faire passer d'uné étape à l'autre* »

La figure suivante montre la production du groupe LV avec un exemple clair du deuxième d'abstraction.


S.G pour 29-84 :

On voit que : 84 = 29 x 2 + 26,
29 = 26x1 + 3
26 = 3x8 +2,
3 = 2x1 + 1
2 = 2x 1 + 0
nombre de carré de la série | dimension des carrés de la suivante

On peut jouer avec S9.

Pour gagner, il faut perdre sur la série de 8, pour commencer celle de 2.

• Comment perdre sur la série de 8 ?

α / α /

4 : il faut commencer à prendre un ou deux carrés de cet. ensemble de 4. carrés restant.

ex : ici → le ~~joueur~~ joueur α perd.

• On remonte pour savoir comment jouer au début :

cg cg

cg cg cg cg

cg

Donc il faut commencer et prendre les 2 1ères cases, puis prendre les cases marquées cg.

[reflexion non écrite car manque de temps]

↳ avec une série dont le nb de cases est multiple de 3, le joueur qui joue en dernier n'a pas la dernière case.

D'autre part, ce niveau a permis aux étudiants de faire de conjectures par rapport à la première question, comme nous le verrons plus loin.

X.2.3. Les notions de stratégie gagnante, position gagnante et position perdante

Les étudiants avaient déjà eu une exposition aux notions de position gagnante et position perdante dans le cours précédent, donc nous n'avons pas présenté la situation en termes de ces notions, mais nous avons parlé de stratégie gagnante, cette notion a aussi été renforcée dans l'exemple.

Les productions montrent que les groupes se sont servis de ces notions pour leur analyse et ils n'ont provoqué aucun obstacle ni difficulté. Ainsi, dans les extraits des groupes, nous trouvons que :

- Le groupe LB a utilisé, ses notions, en dénotant quelques positions comme « *gagnante* » où « *perdante* »,
- le groupe LB a désigné quelques positions comme le « *cas gagnant* »,
- dans les groupes LR et LJ, les notions sont apparues de façon implicite dans des expressions comme : « *si je prends ce carré je vais perdre* », « *si on prend le premier carré on gagne* », ou « *ce coup mène à la victoire* ».

X.2.4. Les expérimentations aléatoires

Les recherches ont démarré par des expérimentations aléatoires avec des rectangles choisis au hasard. Comme nous l'avons prévu dans notre analyse didactique les étudiants ont découvert quelques caractéristiques du jeu. Nous montrerons un récapitulatif des propriétés repérées dans chaque groupe.

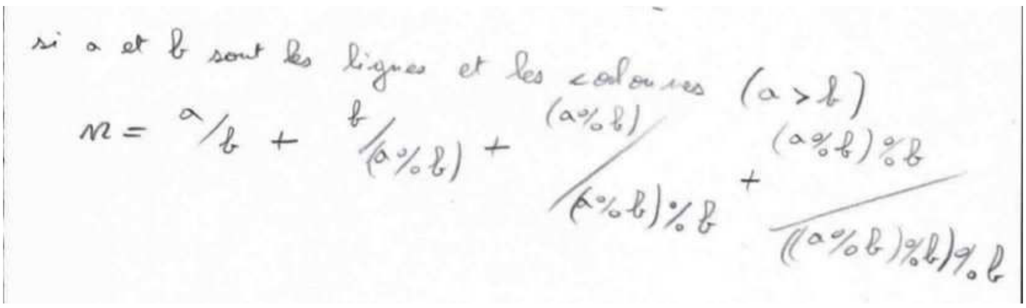
1. Groupe LV : Après avoir joué quelques parties, ce groupe a identifié que le jeu est composé d'étapes. Ainsi, avant de proposer des conjectures, le groupe pose les définitions suivantes :

   - Un carré qui sera enlevé pendant une partie est appelé « une case ».
   - L'ensemble des cases de même dimension est appelé « une série ».
   - Une position gagnante pour le jeu est appelé une « cas gagnant » (voir la figure précédente).

   Ce groupe a aussi repéré dans cette étape que le jeu doit s'analyser dans l'ordre inverse, c'est-à-dire, à partir de la dernière étape, donc les conjectures et preuves faites par le groupe ont été toutes analysées de cette façon.

2. Le groupe LB : ce groupe a aussi repéré assez vite les étapes du jeu. Ils ont appelés les dimensions du rectangle « *ligne* » et « *colonnes* ».

   Dans la production de ce groupe nous avons aussi trouvé cette idée où, il est clair qu'ils utilisent l'algorithme d'Euclide (un peu caché) pour réduire le jeu a une seule étape. Ils dénotent $a\%b$ le quotient de la division euclidienne de a par b.



si a et b sont les lignes et les colonnes $(a > b)$

$$n = a/b + \frac{b}{(a\%b)} + \frac{(a\%b)}{(a\%b)\%b} + \frac{(a\%b)\%b}{((a\%b)\%b)\%b}$$

   Cependant, à ce niveau le groupe n'a pas encore pris en compte que, d'après la règle du jeu, chaque étape doit être finie avant de passer à l'étape suivante et donc, le jeu ne peut pas être réduit à une seule étape. Ils ont repéré ce fait plus loin.

   L'analyse du jeu dans l'ordre inverse a aussi été repéré par ce groupe. De plus, ce groupe s'est rendu compte à l'aide de plusieurs exemples, que le jeu peut être analysé à l'aide de l'algorithme d'Euclide et que chaque quotient correspond à une étape du jeu.

3. Les groupes LR et LJ : Le groupe LR a identifié comme les autres la présence d'étapes dans le jeu qui sont obtenues à l'aide de l'algorithme d'Euclide, mais ils n'ont aucune trace écrite de cette idée. Le groupe LJ n'a pas réussi à sortir de l'étape des expérimentations aléatoires.

X.2.5. Stratégies de recherche et conjectures

La dévolution d'une démarche de recherche mathématique se fait de manière autonome et sans difficultés (sauf par le LJ). Au départ, les rectangles ont été choisis au hasard et de préférence de petites dimensions.

Ainsi, une première stratégie de généralisation est apparue : pour démarrer la recherche il est préférable de travailler avec des petites dimensions pour borner le problème.

> « *Donc en fait il ne faut pas partir d'un truc compliqué faut résoudre les simples et voir en fonction de la solution des simples qu'on peut avoir qu'est ce qu'on peut faire... comment on peut y arriver avec un truc compliqué* » (groupe LB)

Les stratégies de recherche que nous avions prévues dans notre analyse préalable sont apparues mélangées, donc les stratégies sont basées sur la fixation des tailles des rectangles en fixant aussi le nombre d'étapes. Pour comprendre mieux ces analyses nous présentons les stratégies de recherche par rapport à l'étude des cas particuliers et l'étude du jeu dans l'ordre inverse.

X.2.5.1. *Cas particulier* $P = (n, 1)$

L'étude d'un rectangle de taille $n \times 1$ (qui correspond aussi à fixer le jeu à une étape) a conduit à des conjectures telles que,

- Si $P = (n, 1)$ et n est congruente à 1 modulo 3, alors P est perdante.

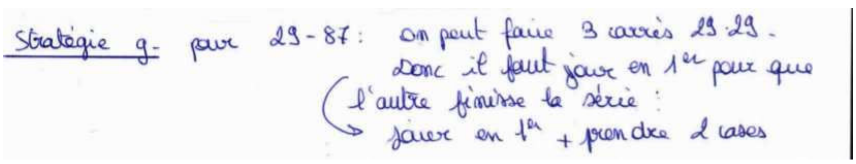
  > « *C'était sur une colonne de 1. C'était pour exprimer plus facilement. En gros quand tu te retrouves dans ce genre de cas tu peux exprimer selon le cas. Donc tous les cas où ça ne marche pas c'est du* $n \times 3 + 1$. *Si tu commences à* 10 *tu perds, si tu commences à* 13 *tu perds, si tu commences à* 16 *tu perds...* » (Groupe LB)

- Jouer le complément à 3 de ce qui dit l'adversaire.

  > « *En fonction du nombre que tu as, tu laisse l'autre choisir. Et tu fais 1 2, 1 2 ou 2 1 [...] le but c'est d'essayer toi de finir à 3 comme ça tu lui enlève 2 comme ça il sera obligé de choisir* » (groupe LV)

X.2.5.2. *Le Cas particulier* $P = (kn, k)$

Ce cas particulier qui correspond à choisir un rectangle où la largeur est un multiple de la longueur a aussi été étudié. Cependant, la conjecture pour que ce cas soit équivalent au cas $P = (n, 1)$ n'est pas apparue. Nous avons, par exemple, l'extrait suivant du groupe Rouge.


Stratégie g- pour 29-87 : on peut faire 3 carrés 29·29.
Donc il faut jouer en 1er pour que
l'autre finisse la série :
jouer en 1er + prendre 2 cases

L'étude des rectangles des différents tailles $3n \times 1$ a permis de mettre en place la conjecture très bien exprimée par le groupe.

> « *si la quantité de carrés est* $3k+1$*, on laisse l'adversaire jouer, s'il prend 1 nous on prendre 2, s'il prend 2 nous on prendre 1, jusqu'au laisse le dernier carré à l'autre joueur. Sinon on commence et on prend 1 ou 2 carrés pour créer un nombre de colonne* $3k+1$ » (Groupe LR).

X.2.5.3. *Les cas* $P = (n, 2)$ *et* $P = (n, 3)$

Ce cas a été étudié lors de la séance, mais aucune conjecture n'est aboutie.

X.2.5.4. *D'autres cas particulières : la parité*

Une stratégie basée sur la parité de la quantité de carrés tracés a aussi été proposée par l'un des groupes. Nous présentons leur analyse.

> « *S'il y a une quantité paire des carrés, je peux gagner, s'il y a une quantité impaire c'est le deuxième joueur qui gagne* » (Groupe LV)

Pour formuler cette conjecture, les étudiants ont travaillé sur les rectangles 1×1 1×2, 2×5, 3×10, 4×12 et effectivement cette stratégie marche pour ces cas. Mais rapidement un étudiant à repéré qu'avec le rectangle 1×3, la stratégie ne marche pas. Alors, ils passent sur des stratégies basées sur des dimensions *paire* $\times$ *paire* et *impaire* $\times$ *impaire.*

> « *il y a quelque chose avec la parité, il faut analyser les cas où les dimensions sont paires* »
> « *si les dimensions sont paires, celui qui commence gagne, si elle sont impaires, celui qui gagne c'est le deuxième joueur* »

Pour vérifier cette conjecture, les étudiants tracent un rectangle de taille 2×4 puis un rectangle de taille 4×6, avec ce dernier exemple ils se rendent compte que la conjecture est encore fausse. Ensuite, ils passent à analyser le cas des dimensions impaire, ils analysent les rectangles 1×1, 1×3, 1×5 3×5, 3×7, une nouvelle conjecture émerge :

> « *à l'exception du cas* 1×1*, celui qui commence gagne* »

Un contre-exemple a cette dernière conjecture a finalement été fourni par un étudiant.

> « *avec le rectangle* 3×7 *ça ne marche plus* »

Nous remarquons que l'invalidation des conjectures par des contre-exemples a joué un rôle important dans leur analyse. Nous approfondirons cette idée dans la section de validation.

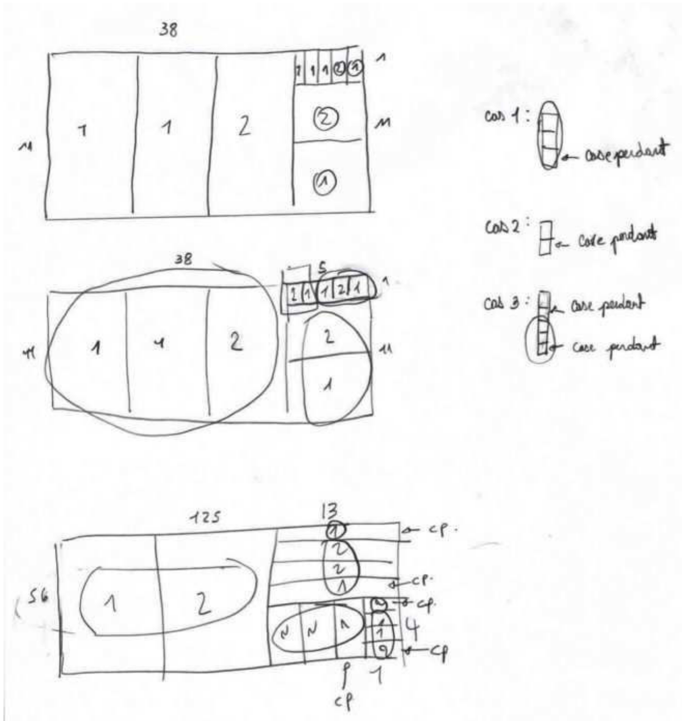
X.2.5.5. *L'étude du jeu dans le sens inverse*

Les expérimentations aléatoires ont mené à la mise en place d'une stratégie de recherche pour trouver une stratégie gagnante où il faut étudier les différentes étapes du jeu dans le sens inverse. Les étudiants qui ont trouvé cette stratégie de recherche, ont étudié tous les cas suivants de cette façon.

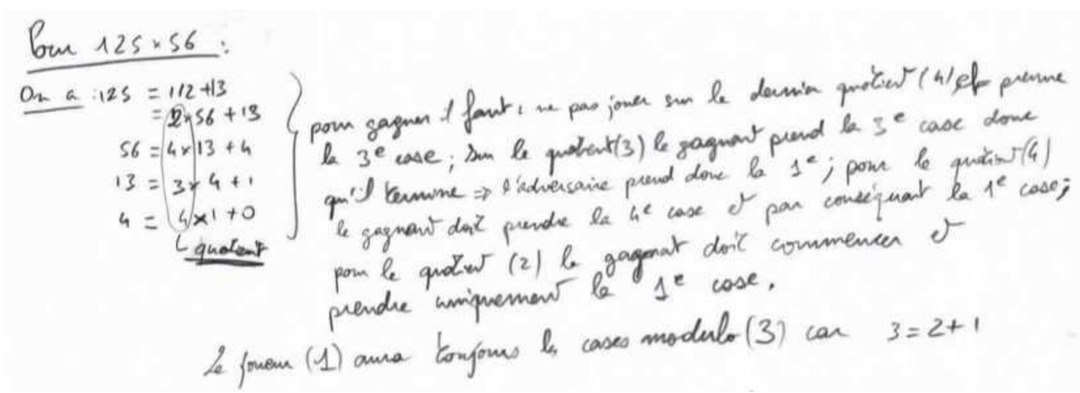
> « *Là le but est de se retrouver avec trois carrés comme ça, comme ça on en enlève 2 et l'autre il est obligé de perdre* » *(*groupe LR)

> « *C'est que dans le dernier jeu il faut faire attention de ne pas prendre le dernier carré, dans les autres jeux, ça va dépendre de la quantité de carrés qui existent...* » (groupe LV)

D'autre part, l'un des groupes a étudié les rectangles proposés par les observateurs, ils ont travaillé sur la construction d'une méthode en regroupant par groupe de 3 les carrés de chaque étape. Ensuite, ils se sont servis de la stratégie trouvée pour le cas d'un rectangle avec une seule étape, c'est-à-dire, de taille $kn \times k$. Malheureusement, en raison des limitations du temps, ils ne sont pas arrivés à exhiber une méthode générale. Cependant, leur idée était de chercher d'abord le nombre d'étapes du jeu.



L'algorithme d'Euclide a permis de donner la stratégie de résolution pour le cas de l'étude du jeu dans le sens inverse. Seulement quelques groupes sont arrivés à faire ce rapport. Les autres groupes se sont servis que la division euclidienne (à plusieurs reprises) pour trouver le nombre de carrés de chaque étape. La figure suivante montre l'utilisation de l'algorithme d'Euclide dans la production du groupe LR.



« *Pour gagner il faut : ne pas jouer sur le dernier quotient (4) et prendre la* 3^e^ *troisième case ; sur le quotient (3) le gagnant prend la* 3^e^ *case lorsqu'il termine, alors l'adversaire prend donc la* 1^e^ *; pour le quotient (4) le gagnant doit prendre la* 4^e^ *case et par conséquent* *la* 1^e *case ; pour le quotient (2) le gagnant doit commencer et prendre uniquement la* 1^e *case.*

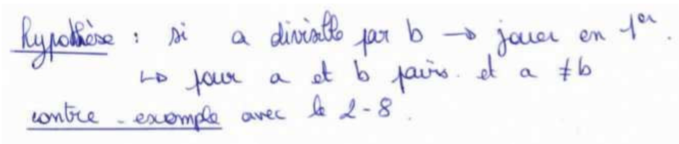
Le joueur (1) aura toujours les cases modulo (3) *car* $3 = 2 + 1$ »

X.2.6. Éléments de validation

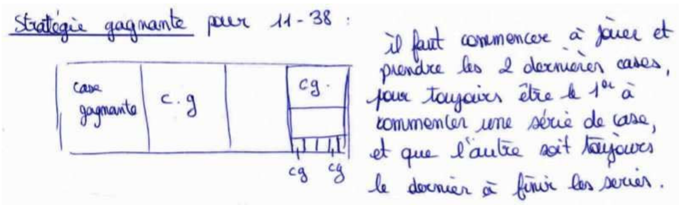
La plupart des arguments de preuve sont apparus à la suite de discussions avec les observateurs pendant lesquelles ils répondaient à chaque affirmation des étudiants par la question « pourquoi ? » ou « êtes-vous sûrs ? ».

Malgré ce fait, les différentes fausses conjectures énoncées tout au long de la séance ont été invalidées dans la plupart des cas, par des contre-exemples (comme nous avons déjà vu dans les analyses des stratégies de recherche). Les contre-exemples ont été très accessibles, pertinents et facile à comprendre pour invalider des conjectures. En effet, un exemple ne suffit pas à prouver la véracité d'une affirmation, mais un contre-exemple suffit pour en prouver la fausseté.

Les étudiants ont été conscientes que la découverte d'un contre-exemple peut rejeter une conjecture, mais aussi il permet d'arrêter la recherche d'une démonstration ou d'affiner les hypothèses nécessaires à la réalisation de la conclusion.



Nous avons proposé aux étudiants trois exemples génériques au sens de notre analyse didactique, les rectangles de taille 38×11, 49×29 et 125×56. Ces exemples sont utiles pour la validation de la méthode de résolution en analysant le jeu dans l'ordre inverse. L'exemple 38×11 où la stratégie gagnante est pour le premier joueur a été analysé par le groupe LV.



Un autre élément de validation employé par les étudiants a été les expérimentations répétitives et validatives. En effet, une fois que les étudiants ont résolu des exemples génériques ils ont analysés d'autres cas de la même manière, c'est-à-dire, dans l'ordre inverse en examinant « case par case » dans leur notation.

X.3. Difficultés induites par les contraintes de la situation

Lors de la séance d'expérimentation, nous avons repéré quelques contraintes que les étudiants ont surmontées. Parmi eux nous pouvons mentionner :

1. Complexité de la règle du jeu : Comme nous l'avons déjà dit auparavant dans la section X.2.1, au début de l'expérimentation, il y a eu quelques difficultés par rapport à la compréhension de l'énoncé. Nous faisons l'hypothèse que cette complexité vient du fait que c'est une situation non usuelle en classe.

   Nous croyons qu'il est pertinent de faire un exemple d'une partie au début de chaque expérimentation pour favoriser la dévolution.
2. L'utilisation de la règle graduée : La règle graduée a introduit la contrainte qu'on est obligé de donner des valeurs « mesurables dans la feuille » aux dimensions du rectangle. Ce fait peut mener à une difficulté parce que, finalement, la stratégie gagnante est recherchée pour un rectangle quelconque. Nous faisons l'hypothèse que l'utilisation de la règle graduée empêche le passage au deuxième niveau d'abstraction.

   Notre but était de fournir les étudiants d'une règle pour les aider à faire leurs dessins. Mais cette règle était graduée. Suite à cette contrainte, nous avons décidé de proposer dans la prochaine expérimentation des règles non-graduées aux étudiants.
3. Le travail avec des figures approximatives et génériques : comme nous l'avons prévu dans notre analyse didactique, le fait d'accepter de dessiner des carrés qui ne sont pas de carrés et de laisser tomber l'exactitude des unités de mesure a été une contrainte. Cette contrainte a été insurmontable pour quelques étudiants.
4. Problèmes de calcul : Pendant l'expérimentation nous avons remarqué des gros problèmes de calcul de la part des étudiants. Par exemple, le groupe LJ qui a dû faire recours à une calculatrice pour faire les divisions euclidiennes. Aussi, les groupes LV et LR avait du mal à trouver les quotients des divisions euclidiennes.

X.4. Conceptions sur le jeu et la SiRC

Dans ce qui va suivre, nous allons montrer les conceptions des étudiants par rapport à la situation. Nous n'avons pas recueilli suffisamment de données pour tous les groupes, c'est pour cela que nous construirons les conceptions des étudiants au général. Ainsi nous considérons que les conceptions développées par les étudiants sont les suivantes.

X.4.1. Les tâches

Dans la situation nous pouvons identifier des tâches par rapport à celles qui sont constitutives de la résolution du jeu et celles à propos de la construction d'une stratégie gagnante.

1. Tâches constitutives de la résolution du jeu et qui ont été effectuées chez les étudiants sont les suivantes
   (a) Tracer les carrés du rectangle à l'aide de la règle graduée
   (b) Effectuer des divisions euclidiennes pour :
      – Faire une partition du rectangle en carrés par rapport au quotient
      – Identifier des restes pour continuer à tracer des carrés s'il faut.
   (c) Effectuer l'algorithme d'Euclide pour :
      – Trouver la liste ordonnée des q
      – Identifier les q comme l'ensemble de carrés
2. Tâches à propos de recherche d'un stratégie gagnante

(a) Fixer la taille du rectangle
  - Étudier des cas particuliers
    - Étudier le cas $P = (n, 1)$ et $P = (kn, k)$
    - Identifier des positions gagnantes et positions perdantes
    - Chercher à atteindre une position gagnante déjà identifiée
    - Trouver des nouvelles positions gagnantes
    - Dégager une stratégie
    - Choisir des nouveaux couples de valeur (a, b)
  - Étudier de cas particuliers par rapport à la parité des dimensions

(b) Fixer le nombre d'étapes dans le jeu
  - Étudier des cas particuliers par rapport à la parité

(c) Analyser le jeu dans l'ordre inverse à partir de la dernière étape
  - Attribuer un label position gagnante et position perdante à chaque élément de q

X.4.2. Les invariants

1. Les notions mathématiques en jeu :
   - Partition d'un rectangle en carrés
   - Algorithme
   - Division euclidienne
   - Algorithme d'Euclide
   - Notions de multiple, paire, impaire, PGCD,
   - Notion de stratégie
   - Stratégie gagnante
   - Notion de position perdante et position gagnante
2. Les résultats mathématiques suivants
   - Si $P = (n, 1)$ et n est congruente à 1 modulo 3 alors P est perdante.
   - Si $P = (n, 1)$ il faut jouer le complément à 3 de ce que l'adversaire dit.
   - Pour $P = (n, 1)$. Si la quantité de carrés est $3k + 1$, on laisse l'adversaire jouer, s'il prend 1 nous on prend 2, s'il prend 2 nous on prend 1, jusqu'à laisser le dernier carré à l'autre joueur. Sinon, on commence et on prend 1 ou 2 carrés pour créer un nombre de colonne $3k + 1$
3. Sur le raisonnement et la preuve
   - Contre-exemple
   - Preuve par exhibition d'un exemple
   - Preuve par exhaustivité
4. Sur les invariants du jeu
   - La taille des carrés et le nombre de carrés de chaque taille ne dépendent pas des coups joués. Ils dépendent seulement des dimensions (a, b) du rectangle.
   - Le jeu comporte autant d'étapes (sous-jeux) que de tailles différentes de carrés qui interviennent dans le jeu.
   - Chaque étape doit être finie avant de passer à l'étape suivante.
   - Le jeu doit être analysé dans l'ordre inverse, à partir de la dernière étape.
   - Le nombre des carrés de même taille et de taille maximale pour une rectangle $a \times b$ correspond au quotient de la division euclidienne de a par b.
   - Le nombre des carrés de chaque étape correspond au quotient, d'une étape spécifique de l'algorithme d'Euclide.

X.4.3. Les représentations graphiques et symboliques

- Rectangles
- Carrés
- Figures approximatives
- Symboles pour représenter les quotients d'algorithme d'Euclide (liste ordonné de carres par un liste des quotients)
- Codage avec les quotients de l'algorithme d'Euclide

X.5. Deuxième question de l'expérimentation Est-ce que le jeu est fini ?

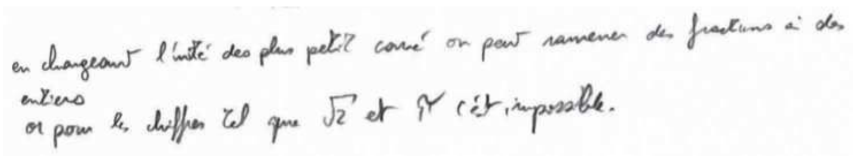
Cette question a été abordée par tous les groupes, étant le groupe LB celui qui a plus travaillé sur elle. L'analyse de ce que les groupes ont fait peut se résumer dans les quatre cas suivants :

1. Le cas où a et b sont des entiers : Les groupes ont expliqué que c'était évident que pour les entiers le jeu est fini, la justification à cette réponse est que dans chaque coup le rectangle diminuera et finalement nous finirons avec un carré, par conséquent le jeu est fini.

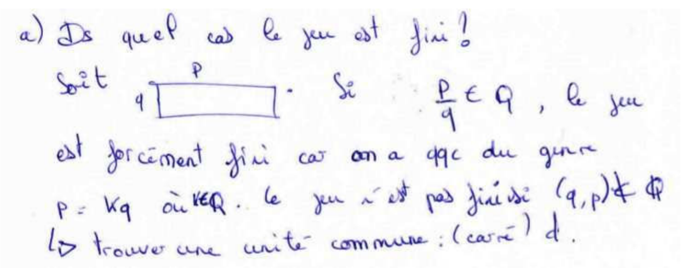
   Les groupes LV et LB ont réfléchi par rapport à l'algorithme d'Euclide « *comme l'algorithme d'Euclide est fini, alors le jeu aussi* » (groupe LV).

2. Le cas où a et b sont rationnels : Une réponse s'appuyant sur un changement d'unités est donnée par le Groupe LB. ils remarquent que si le rapport entre la longueur et la largeur est rationnelle, alors le jeu est fini. Sa preuve est basée sur des unités en commun.

3. Le cas de la conmensurabilité : le groupe LR remarque au passage dans leur production que si a et b ne sont pas commensurables, le jeu ne s'arrête pas.


en changeant l'unité des plus petit carré on peut ramener des fractions à des entiers
or pour les chiffres tel que $\sqrt{2}$ et π c'est impossible.

D'autre part, LB a fait une preuve du fait que si a et b ne sont pas commensurables, alors il est impossible de trouver une unité de mesure commune.


a) Ds quel cas le jeu est fini !
Soit q [rectangle] p. Si $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, le jeu est forcément fini car on a qqc du genre $p = kq$ où $k \in \mathbb{Q}$. le jeu n'est pas fini si $(q,p) \notin \mathbb{Q}$
↳ trouver une unité commune : (carré) d.

Bien que la notation ne soit pas tout à fait correcte, l'idée derrière l'est.

X.6. Conclusion

Le jeu d'Euclide géométrique a amené les étudiants à travailler les savoir-faire fondamentaux de l'activité mathématique : choix de valeurs, définitions, essais, observations, modélisations, recherche de résultats généraux, formulation, etc.

En terme de dévolution, l'énoncé initial du jeu n'a pas été suffisamment clair pour les étudiants. Cependant, après leur avoir fourni un exemple de partie, les étudiants sont entrés de manière autonome et sans difficulté dans une démarche de recherche en mathématiques. Pour une prochaine expérimentation, nous pensons que l'exemple de partie devra être fourni dès le départ.

Les notions de position gagnante, position perdante et stratégie gagnante n'ont pas été un obstacle pour la validation. Bien que les étudiants avaient déjà eu une exposition à ces notions, elles sont apparues de manière implicite dans la plupart des groupes. Le groupe LV a défini la notion de « case gagnante » qui est équivalente à celle de position gagnante.

Comme nous l'avons remarqué auparavant, l'utilisation de la règle graduée a été un mauvais choix didactique puisqu'elle a amené les étudiants à se servir de la graduation de la règle. Vu que ce problème s'est produit au niveau Licence, nous prévoyons que cette contrainte sera encore plus importante dans les niveaux plus élémentaires. Pour cela, dans une prochaine expérience, nous proposerons des règles non-graduées aux élèves.

Tous les groupes ont repérés plus ou moins facilement la relation entre le jeu d'Euclide et la division euclidienne. De plus, ils ont aussi été capables d'identifier l'algorithme d'Euclide dans la démarche du jeu. Avec cette idée, ils ont pu définir les étapes successives dans le jeu et analyser chacune d'elle dans l'ordre inverse. Cela leur a permit de trouver des stratégies gagnantes pour des cas particuliers, mais le cas général n'a pas été résolu ni abordé.

Au regard des contraintes qu'ont rencontrées les étudiants, nous pensons que la résolution de cette situation peut susciter des apprentissages relatifs aux différentes composantes de la recherche en mathématiques : modélisation, généralisation, preuve, raisonnement, etc.

Cependant, le fait que tous les élèves (même ceux qui avaient habituellement des difficultés comme le groupe LJ) soient entrés dans une démarche de recherche, qu'ils aient progressé dans sa résolution et aient mis en œuvre ses différentes composantes, nous conduit à penser que cette situation peut être accessible à un public plus large. En effet, pendant la recherche, cette situation a permis à tous les étudiants d'exhiber des solutions, des méthodes et de formuler des conjectures sans avoir recours à des savoirs mathématiques complexes.

En conclusion, cette première expérimentation nous amène à faire l'hypothèse que le jeu d'Euclide géométrique est également une situation de recherche appropriée pour des niveaux inférieurs à ceux de la Licence.

Deuxième expérimentation : présentation

Nous présentons dans les deux chapitres suivants une analyse concernant une expérimentation mise en place au lycée Mounier de Grenoble dans une classe de première scientifique.

Dans cette expérimentation, nous avons intégrés dans la situation les outils de gestion induits par les résultats de notre première expérimentation. Ainsi nous avons rajouté un exemple de partie à la présentation orale du jeu d'Euclide et nous avons intégré une situation zéro de dévolution pour introduire les notions de jeu combinatoire et stratégie gagnante.

Cette expérimentation a été effectuée en deux phases qui correspondent à deux séances différentes qui se sont déroulées à deux semaines d'écart. Dans la première phase, nous avons travaillé la situation zéro. La situation zéro choisie pour cet objectif a été « la course à n » (l'analyse didactique de cette situation a été montrée dans la section VI.1 du chapitre VI). La deuxième phase consistait à résoudre le « jeu d'Euclide Géométrique », objet de cette partie de la thèse.

Nous remarquons que les situations proposées dans ces deux phases de l'expérimentation ne sont pas du même niveau. En effet, pour la situation « la course à n », il a déjà été démontré qu'elle peut être proposée à des niveaux plus élémentaires. La situation « jeu d'Euclide géométrique » n'a jamais été proposée à niveau lycée avant notre expérimentation. Enfin, le jeu d'Euclide géométrique est une composition séquentielle de plusieurs jeux du type « la course à n. »

CHAPITRE XI

Deuxième expérimentation, première phase : La course à n

XI.1. Présentation de la situation

Cette première phase s'est déroulée avec 30 élèves. Les élèves ont à leur disposition des feuilles blanches et des stylos de différentes couleurs pour distinguer les coups de chaque équipe. Nous avons réorganisés la classe en sept groupes de quatre élèves et un groupe de deux élèves que nous noterons par la suite par les lettres de A à G.

Les conversations des groupes A et F ont été enregistrées (annexe C) avec un dictaphone, mais afin de recueillir le plus d'information possible, il y a deux observateurs qui ont pris des notes et ont aussi circulé dans la classe en vérifiant que la situation était bien comprise ; ils ont répondu aux questions bien souvent par d'autres questions. Cependant, dans aucun cas, les observateurs ont fourni des résultats aux élèves. Il y a aussi l'enseignante de la classe qui assurait la gestion sociale et la constitution des groupes.

Les deux observateurs sont des chercheurs appartenant à l'équipe maths à modeler, dont l'un a le rôle « d'observateur principal », il a donc à sa charge les choix didactiques relatifs au contenu des différentes phases, de donner les consignes à la classe et de mener les discussions mises en place lors de l'étape de mise en commun.

L'énoncé du problème a été donnée à chaque groupe par écrit, puis il a été expliqué oralement à l'ensemble de la classe. L'énoncé fournit est le suivant :

> « Le jeu comporte deux adversaires qui disent un nombre tour à tour. Il s'agit pour chacun des adversaires de réussir à dire n le premier. Le premier qui joue a le droit de dire un entier non nul inférieur à p. On ne peut dire un nombre que s'il s'obtient en ajoutant un entier non nul inférieur à p au nombre que l'adversaire vient de dire. (n et p sont des entiers naturels avec $n > p$).
>
> Est-ce qu'il y a une stratégie gagnante (c'est-à-dire une stratégie qui permet de gagner quoi que l'adversaire dise) ? Et si oui, trouvez-la ! »

Comme dans le cas de la première expérimentation au niveau Licence, nous n'avons pas présenté la situation en termes de position gagnante et position perdante, cela est montrée de façon implicite. Cependant, pendant la présentation orale du jeu nous avons mis l'accent sur ce que veut dire de trouver une stratégie gagnante.

La recherche s'est déroulée pendant deux heures successives. Comme dans l'expérimentation en licence, nous avons aussi divisé cette première phase en trois moments.

1. Découverte et appropriation du jeu : Les élèves de chaque groupe ont joué entre eux en faisant deux équipes rivales. Nous avons fixé $(n, p) = (20, 3)$, puis nous avons laissé les différents groupes d'approprier le problème et entrer dans sa résolution.

2. Recherche d'une stratégie : c'est le moment où les élèves commencent à trouver des conjectures et stratégies gagnantes pour $(n, p) = (20, 3)$. Nous avons proposé aux groupes de modifier n et après changer aussi p.

3. Établissement de méthodes génériques : Les élèves ont cherché des stratégies gagnantes pour la course à n. Cette étape a aussi eu pour objectif d'amener les élèves à faire le point sur leur recherche.

XI.2. Déroulement et analyse de productions

Au contraire de la classe de Licence de la première expérimentation, ces élèves n'ont jamais été confrontés à une recherche de ce type. Cependant, chacun des groupes a eu une avancée qui lui est propre, tant du point vue des cas étudiés, que des stratégies et des résultats mis à jour.

Tous les groupes ont débuté la recherche sur la base des positions gagnantes, mais après chacun a commencé à chercher des méthodes pour les cas $(n, p) = (n, 3)$.

D'abord le groupe A a fait une analyse en relation aux « chiffres gagnantes » pour $(n, p) = (20, 3)$. Leur recherche s'est basée dans une conjecture qu'ils ont appelés « alternance nombre pair/impair » que nous développerons plus tard. Ils ont faits l'usage aussi de la notion de paquets et multiple. Avec ces techniques, ils ont travaillé les cas $(n, p) = (19, 3)$, $(n, p) = (20, 3)$ et $(n, p) = (21, 3)$.

Le groupe B, tout comme le groupe A, commence par chercher les positions gagnantes. Pour cela, ils ont fait appel à la notion de paquets de 3 en analysant dés la fin de chaque coup pour trouver une stratégie de résolution. Ainsi, ils ont aussi analysé le course à 21 avec $p = 3$ et $p = 4$.

Le groupe C, après avoir trouvé les positions gagnantes a utilisé la notion de multiples et postérieurement, celle de division euclidienne.

Le groupe D, comme les groupes A, B et C ont fait une analyse en termes des « coups gagnants ». Ils ont aussi fait l'usage de la notion d'arbre dans le théorie des graphes, comme nous le verrons plus loin. Finalement, c'est la division euclidienne qu'ils ont utilisé pour faire leur analyse pour les cas $(n, p) = (n, 3)$ et $(n, p) = (n, 4)$.

Le groupe E, de plus que la course à 20 proposée au début, a analysé les cas $(n, p) = (19, 3)$, $(n, p) = (21, 3)$ et $(n, p) = (22, 3)$. De plus, à travers la division euclidienne, ils ont aussi étudié le cas $(n, p) = (n, 3)$ et $(n, p) = (n, 4)$.

Les élèves du groupe F connaissait déjà une émission de télé appelée « Fort Boyard » où il apparaît un jeu de type Nim. Ceci a acheminé leur recherche et a joué un rôle important dans la dévolution. Ce groupe a identifié rapidement le rapport entre le jeu et la notion de multiple et division euclidienne, pour cela, ils n'ont pas eu de difficultés pour trouver une solution dans le cas général où (n, p) est arbitraire.

Le groupe G a aussi analysé le jeu en termes de « chiffres gagnantes » de la course à 20. Après, avec la notion de multiple, ils ont analysé les cas $(n, p) = (18, 3)$ et $(n, p) = (19, 3)$.

Voici un tableau récapitulatif des cas étudiés par les différents groupes :

	A	B	C	D	E	F	G
Cas $(20, 3)$: positions gagnantes	✓	✓	✓	✓	✓	×	✓
Cas $(n, 3)$: positions gagnantes	✓	✓	×	×	✓	×	✓
Cas $(n, 3)$: multiples	✓	×	✓	×	×	✓	✓
Cas (n, p) : multiples	×	×	✓	×	×	✓	×
Cas (n, p) : division euclidienne	×	×	✓	✓	✓	✓	×

La retranscription complète des séances du groupe A et F se trouve en annexe D, les résumés des autres groupes sont basés sur la prise de notes des observateurs et les notes rendues par chaque groupe. Dans ce qui suit, les élèves du groupe A seront désignés par A1, A2, A3 et A4 et les élèves du groupe F seront désignés par F1, F2, F3, F4, les observateurs par O et l'enseignant par E.

XI.2.1. Dévolution et mise de la recherche

L'appropriation des règles du jeu a bien été bien assimilée lors de la séance, donc la formulation de l'énoncé n'a pas relevé des problèmes de compréhension. La dévolution du problème s'est très vite opérée dans tous les groupes.

La notion de stratégie gagnante a été bien comprise. En effet, les élèves sont entrés facilement dans une réflexion pour trouver la méthode permettant de « gagner à chaque fois ». D'autre part, bien que la notion de position gagnante a été seulement présentée de manière implicite, elle a été bien assimilée par les élèves qui ont démarré leur recherche à l'aide de cette notion sous des noms tels que « chiffres gagnantes » et « coups gagnants » parmi d'autres. Nous approfondirons sur ces notions ci-dessous.

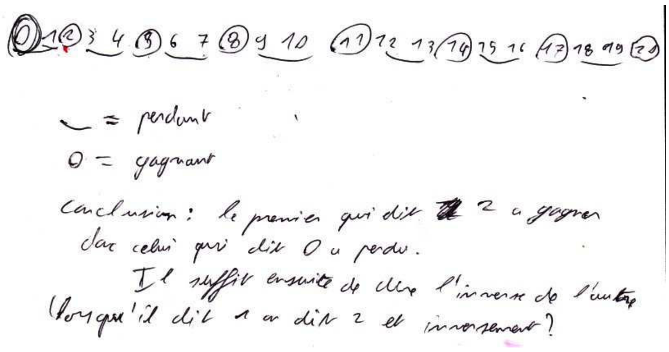
À la fin du premier moment une grande partie des groupes a été capable de proposer une stratégie qu'ils pensent être gagnante à chaque partie. Ainsi les élèves ont compris qu'ils pouvaient, en fonction des parties qu'ils ont jouées, anticiper le résultat final sans toutefois maîtriser la stratégie optimale.

XI.2.2. Les notions de stratégie gagnante, position gagnante et position perdante

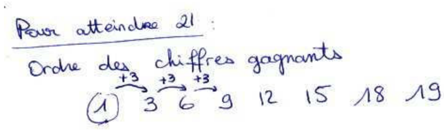
Lors de la présentation du jeu, nous avons donné une définition de stratégie gagnante, mais nous n'avons pas présenté le formalisme des jeux combinatoires impartiaux en termes des positions gagnantes et positions perdantes. Pour cette raison, les élèves ont dû créer leurs propres notions, analogues à celles de positions gagnantes et positions perdantes, pour présenter leurs stratégies.

Nous remarquons que les élèves ont dénoté les positions perdantes par l'adjective « gagnant » (par exemple « chiffres gagnants » ou « nombres gagnants »). Cette inversion des termes vient du fait que les élèves ont identifié les positions perdantes aux possibles coup gagnants du jeu. En effet, que lorsque nous utilisons une stratégie gagnante pour un jeu combinatoire, à tour de rôle, le « coup gagnant » est une option perdante de la position actuelle.

Ainsi une stratégie gagnante a été donnée en termes d'une « suite gagnante » qui contient toutes les positions perdantes du jeu et d'un algorithme qui permet de jouer, à chaque coup, l'une des positions gagnantes contenues dans la « suite gagnante ».



Dans d'autres cas, des caractérisations des positions perdantes ont été données sous le nom de « chiffres gagnantes » ou « nombres gagnants ».



En ce qui concerne les positions de départ, la dichotomie position gagnante et position perdante a été repérée et représentée de la forme « celui qui commence perd », « celui qui commence gagne » ou « laisser l'adversaire commencer ».

Une réticence à admettre l'existence des positions de départ perdantes a été aussi constatée. Les élèves sont même allés au point de modifier la règle du jeu en décidant que dans ces positions pour gagner il faut « dire 0 ». Avec cette modification introduite par les élèves, la règle du jeu est :

> « Le jeu comporte deux adversaires qui disent un nombre tour à tour. Il s'agit pour chacun des adversaires de réussir à dire n le premier. Le premier qui joue a le droit de dire un entier ~~non nul~~ inférieur à p. On ne peut dire un nombre que s'il s'obtient en ajoutant un entier non nul inférieur à p au nombre que l'adversaire vient de dire. (n et p sont des entiers naturels avec $n > p$). »

En effet, nous avons remarqué à posteriori que dans le jeu « la course à n » avec cette modification, toutes les positions de départ avec $n \neq 0$ sont gagnants. Nous faisons l'hypothèse que l'étude de cette variante du jeu est intéressante comme perspective pour le sujet de cette thèse.

XI.2.3. Stratégies de recherche et conjectures

Les stratégies de recherche mises en place par les élèves sont les mêmes déjà repérées dans d'autres expérimentations à propos de la situation « la course à n ». La seule différence est que nous avons poussé ces stratégies par rapport aux jeux combinatoires.

XI.2.3.1. *Analyse sur des positions perdantes et positions gagnantes, étude de* $(n, p) = (20, 3)$

Comme nous l'avons dit précédemment, les recherches sur le jeu « la course à 20 » ont démarrées immédiatement à l'aide de la notion de position perdante et position gagnante.

Après une phase de jeu aléatoire, la première conjecture émerge avec l'identification du chiffre 17 comme une position perdante du jeu.

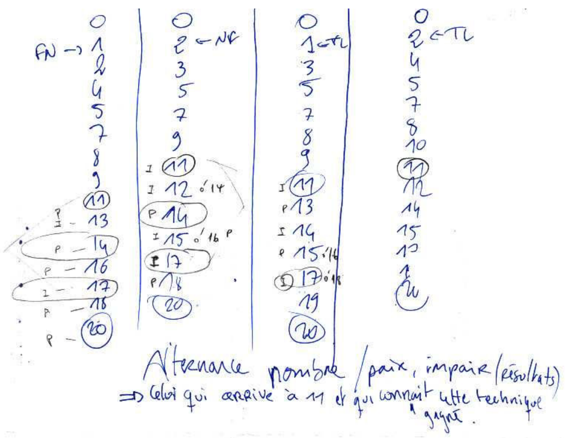
A3 : Ça va être le même cas que tout à l'heure, on arrive à 17.
A1 : Non on va gagner... On a gagné.
A4 : On s'est fait avoir.
A3 : Ah bon.
A1 : Oui regarde. On est à 17, il vont dire soi 18 soi 19. (groupe A).

Ensuite, les recherches se dirigent sur le problème de « comment faire 17 ». La conjecture trouvée est qu'il faut dire 14. Par exemple, le groupe A se met à noter les coups pour trouver des analogies entre eux et identifier des nombres gagnants. De cette manière, ils identifient que le nombre 13 est un nombre que « il faut éviter » et qu'il faut dire 14.

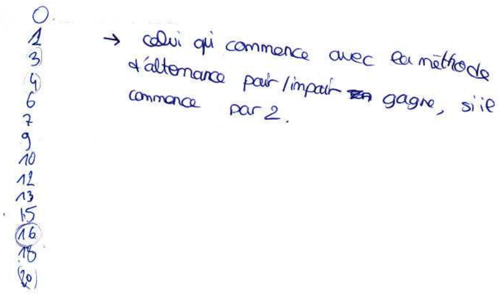
A3 : Et ben si on arrive au 13, c'est celui qui a le chiffre après 13 qui décide s'il va gagner, s'il réfléchit bien et ben.. Il peut gagner ou pas.
[...]
A1 : Ah j'ai compris 7.
A2 : Allez 8.
A1 : 9.
A2 : 11, Vous avez gagné.
A1 : On a perdu ouais. 13.
A2,A4 : 14.
A1 : C'est bon vous avez gagné [...] Ben si on va dire 15 ou 16.

Après plusieurs parties, les élèves produisent la conjecture de jouer le complémentaire du coup de l'adversaire (s'il joue a, nous jouons $3 - a$). Par exemple, dans l'extrait suivant, les élèves appellent cette conjecture « alternance nombre pair/impair ».

A2 : En fait on fait une alternance entre paire et impaire à chaque fois que nous on dit nos chiffres.
A2 : C'est par rapport au résultat, par rapport au résultat il faut mettre paire ou impaire.
A4 : Ben par exemple si on a 11, que les autres ils disent 2, ça fait 13. Nous on va en ajouter 1 pour avoir 14.
A2 : Parce que celui là c'est un impaire et celui d'après il doit être paire.

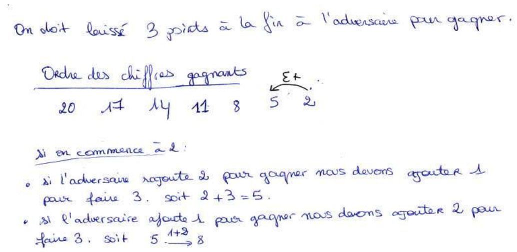


Ainsi, à partir de cette conjecture, tous les positions perdantes et positions gagnantes peuvent être déterminées. Par exemple, dans la figure suivante, une liste exhaustive des positions gagnantes est donnée pour le jeu de la « course à 20 ».


0
1
3
4
6
7
9
10
12
13
15
16
18
20

→ celui qui commence avec la méthode d'altenance pair/impair gagne, si il commence par 2.

Voici un extrait montrant la même conjecture faite par un autre groupe.


On doit laissé 3 points à la fin à l'adversaire pour gagner.

Ordre des chiffres gagnants

20 17 14 11 8 5 2

Et

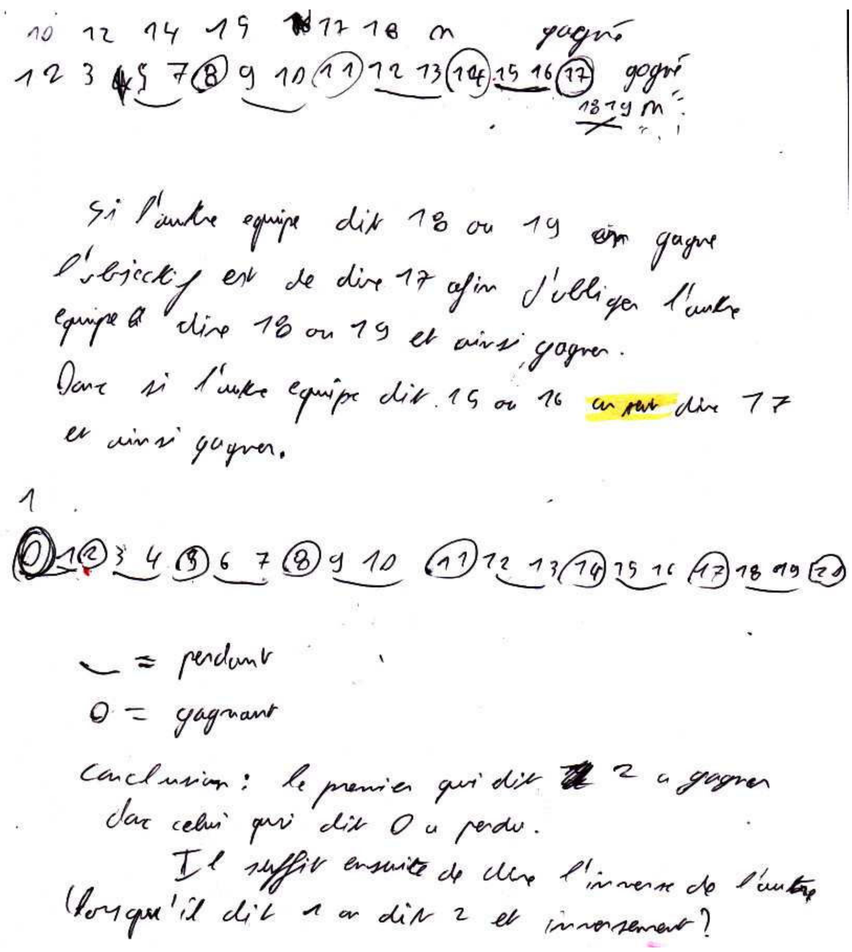
si on commence à 2 :

- si l'adversaire rajoute 2 pour gagner nous devons ajouter 1 pour faire 3. soit $2+3=5$.
- si l'adversaire ajoute 1 pour gagner nous devons ajouter 2 pour faire 3. soit $5 \xrightarrow{1+2} 8$

Comme nous l'avons vu dans le chapitre VI.1, cette première stratégie de recherche est très courante. Tous les groupes ont commencé leur recherche à partir du « but », qui dans ce cas est 20. Comme nous l'avons dit précédemment, la plupart des élèves ont vite compris que s'ils se retrouvaient sur le nombre 17, alors ils avaient gagné. Ensuite, les groupes ont commencé à chercher les coups gagnants, donc la course à 20 devint la course à 17 et donc réitérèrent leur raisonnement en trouvant finalement que la suite gagnante est 20, 17, 14, etc.

Mais il faut remarquer que si bien le passage de 20 à 17 a été tout de suite repéré, la recherche de la suite complète a été plus lente. Donc, nous pouvons voir que le raisonnement par récurrence (principe d'induction) n'est pas immédiatement opérationnel même au niveau lycée.

Un autre groupe fait une analyse analogue au précédent en démontrant par exhaustivité des cas la liste des positions perdantes.


10 12 14 19 ~~16~~ 17 18 on gagné
1 2 3 4 5 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 gagné
18 19 on

Si l'autre equipe dit 18 ou 19 on gagne
l'objectif est de dire 17 afin d'obliger l'autre
equipe à dire 18 ou 19 et ainsi gagner.
Donc si l'autre equipe dit 15 ou 16 on peut dire 17
et ainsi gagner.

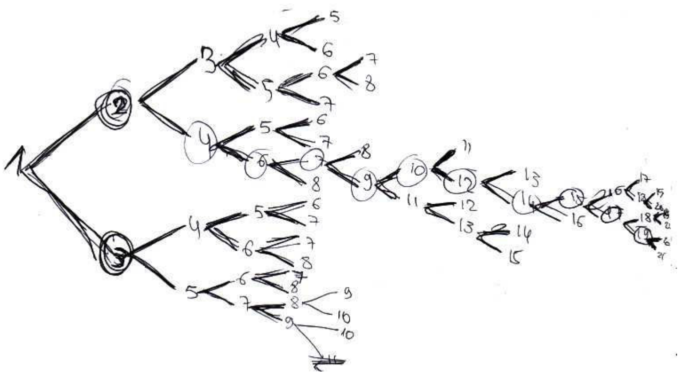
1

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

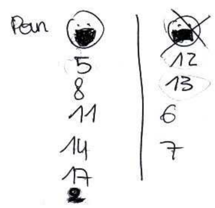
‿ = perdant
O = gagnant

Conclusion : le premier qui dit 2 a gagner
car celui qui dit 0 a perdu.
Il suffit ensuite de dire l'inverse de l'autre
(lorsqu'il dit 1 on dit 2 et inversement)

Une autre stratégie de recherche utilisée dans cette expérimentation a consisté à la construction d'un graphe de type arbre qui représente toutes les positions du jeu ainsi que ses options.



Ceci a permis l'obtention d'une liste comportant les positions perdantes et les positions gagnantes du jeu.



XI.2.3.2. *Étude de la course à* $(n, p) = (n, 3)$

Nous avons aussi proposé aux différents groupes de modifier la variable n. Ainsi, quelques groupes ont étudié « la course à 18 », « la course à 19 », « la course à 21 » et « la course à 22 ». Les raisonnements utilisés ont été analogue à ceux utilisés pour la course à 20 en analysant les positions perdantes et les positions gagnantes à travers de la conjecture de jouer le complémentaire du coup de l'adversaire.

> « *Si je dis 20, l'adversaire peut ajouter 1 et dire 21, si je dis 19, mon adversaire peut ajouter 2 et dire 21, si je dis 18, quoique mon adversaire ajoute, 1 ou 2, je dirais donc 21 le premier* » (la course à 21, groupe B)

Dans le cas de « la course à 18 » et « la course à 21 » l'analyse de la stratégie gagnante a présenté quelques difficultés par rapport à la position de départ. Cela vient du fait que les deux positions sont perdantes. Ceci a provoqué des conflits chez les élèves pour définir ces positions. Nous avons déjà remarqué cette contrainte dans la section précédente.

XI.2.3.3. *La notion de multiple pour le cas* $(n, p) = (n, 3)$

Les stratégies de recherche que nous avons décrites jusqu'ici font toujours appel à un certain type d'étude par exhaustivité des cas dans le sens où ils doivent, soit trouver une « série gagnante » contenant toutes les positions perdantes du jeu à partir de la position de départ, soit se ramener à un cas déjà étudié à l'aide de la conjecture du complémentaire.

Dans tous les cas, ces méthodes ne peuvent pas s'appliquer dans la pratique au cas où n est très grand. Donc, nous leur avons proposé de trouver une méthode qui marche pour n quelconque.

La conjecture du complémentaire a mené sur la notion de multiple pour trouver des conjectures par rapport au cas général $(n, p) = (n, 3)$. Voici quelques exemples des productions des élèves.

Conjecture énoncée par le groupe C :

> *« Si on cherche un non multiple de 3, dire 2 puis faire en sorte de dire des chiffres allant de 3 en 3. Si l'autre équipe rajoute 1, on rajoute 2 et inversement. – Si on cherche un chiffre multiple de 3, dire 0 puis faire en sorte de dire des chiffres allant de 3 en 3 »*

Conjecture énoncée par le groupe F :

Pour un nombre à atteindre tel que $\boxed{3K}$ avec K un entier :
celui qui commence va perdre la partie.

Pour un nombre à atteindre tel que $\boxed{3K+1}$:
Celui qui commence peut gagner, à condition qu'il pose le premier baton, et qu'il complète le jeu de façon qu'à chaque tour, il pose 3 chiffres.

Pour un nombre à atteindre tel que $\boxed{3K+2}$:
Celui qui commence peut encore gagner, à condition, qu'il pose les deux premiers batons, et qu'il complète ensuite le jeu de l'adversaire pour ~~pour~~ que à chaque tour, le total des deux jeux fasse 3.

Conjecture énoncée par le groupe G :

Règle : On part du nombre que l'on doit obtenir : on trouve à partir de ce nombre le plus proche multiple de 3 inférieur à ce nombre.
exemple : La course à 22
on prend comme multiple de 3 : 21.
Il y a donc une différence de 1 entre 21 et 22.
Le joueur qui commence doit donc commencer par 1.
Si la différence avait été de deux, le joueur aurait dû commencer par 2.
À partir du chiffre de départ du joueur, il doit ajouter 3 et ainsi de suite en ajoutant 3 à chaque fois par rapport à son résultat précédent.

pour un multiple imparfait.

course en 19 :
+ proche multiple de 3 : 18
donc différence de $\boxed{1}$

0
$\boxed{1}$ ← 1er joueur.
+3 : 2, 4
+3 : 6, 7
+3 : 9, 10
+3 : 11, 13
+3 : 15, 16
+3 : 17, 19

course en 20 :
+ proche multiple de 3 : 18
donc différence de $\boxed{2}$.

0
$\boxed{2}$ ← 1er joueur.
+3 : 3, 5
+3 : 6, 8
+3 : 10, 11
+3 : 13, 14
+3 : 15, 17
+3 : 18, 20

Lorsque c'est un multiple parfait de 3 comme la course en 18.
Il faut laisser commencer l'autre joueur

XI.2.3.4. *Une méthode général pour (n, p), la division euclidienne*

Après avoir trouvé des conjectures en utilisant la notion de multiple pour le cas de n, la conjecture énoncée dans notre analyse didactique est apparue, c'est-à-dire, une position est perdante si et seulement si $\mathrm{rde}(n, p) = 0$, et la stratégie gagnante consiste à jouer $\mathrm{rde}(n, p) = 0$ au premier coup et ensuite jouer le complémentaire de ce que joue l'adversaire. Voici quelques extraits des productions des groupes qui montrent des instances de cette conjecture.

Groupe C :

> « Si on peut ajouter 1, 2 et 3 on fait la division euclidienne de n par $(3+1) = 4$ et on commence par la partie entière du reste. Si on peut ajouter 1, 2, 3

et 4 on fait la division euclidienne de n par $(4+1) = 5$ et on commence par la partie entière du reste »

Groupe D :

N) : il faut diviser ~~le nb~~ N par 3 et commencer par le reste on ajoute donc 3 au nombre que l'on dit au depart et ainsi de suite . .

~~marge de~~ 3 . $\boxed{1, 2, 3}$.

N . il faut diviser N par 4 et commencer par le rest on ajoute donc 4 au nombre que l'on dit au depart et inci de suite .

Groupe E :

« Si n est un multiple de 3. On fait la division euclidienne de n par 3, le reste peut-être un nombre entier égal à 0, 1, 2. Pour un reste égal à 0, on laisse l'adversaire commencer pour ensuite dire 3.
Pour un reste égal à 1 on commence en disant 1.
Pour un reste égal à 2, on commence en disant 2.
Avec x le reste de la division euclidienne de n par 3. En partant de 1, 2 ou 3 on dit toujours +3 »

– A partir des exemples de jeu, on tire une relation qui est la suivante ;

$u_{n+1} = u_n + 3$

avec $u_0 = 3$ si n est un multiple de 3.

– on fait la division Euclidienne de n par 3, le reste pouvant être un nombre entier égale à 0,1,2 pour un reste égale à 0, on laisse l'adversaire commencer pour ensuite dire 3.
Pour un reste égale à 1 on commence en disant 1.
Pour un reste égale à 2, on commence en disant 2.
$u_0 = x$ avec x le reste de la division Euclidienne de n par 3.
En partant de 1, 2 ou 3 on dit toujours +3

Course à N avec des pas de 1, 2 ou 3

$u_0 = x$

x étant le reste de la division euclidienne de N par 4
puis on applique la formule :

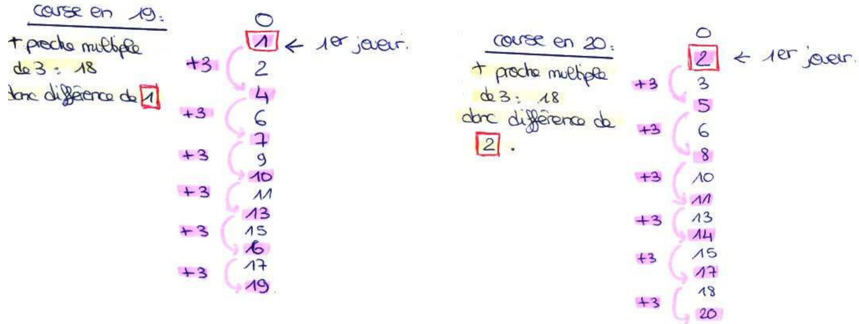
$$\boxed{u_{n+1} = u_n + 4}$$

Groupe F :

« Course à n avec pas 1 à 2 ... on fait la division euclidienne de n par 3, le reste pouvant être un nombre entier égale à 0, 1, 2 pour un reste égal à 0, on laisse l'adversaire commencer pour ensuite dire 3. Pour un reste égal à 1 on commence en disant 1. Pour un reste égal à 2, on commence en disant 2»

XI.2.4. Éléments de validation

Pour les cas particuliers où n et p sont fixés, la plupart des groupes ont eu recours à des arguments inspirés de l'exhaustivité des cas. Ceci peut fournir des preuves dans des cas particuliers avec n petit.



Pour les cas plus généraux où au moins l'une des variables de recherche n ou p est quelconque, il y a plusieurs conjectures, mais les élèves n'ont produit aucune preuve formelle de ces conjectures.

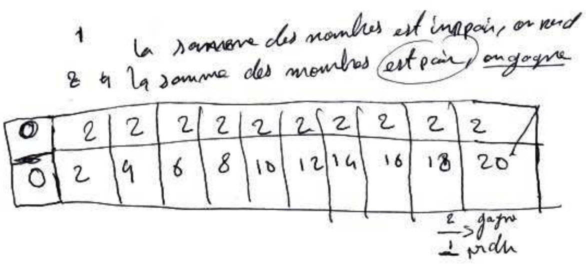
XI.2.5. Contraintes de la situation

Nous n'avons pas repéré des contraintes pour l'analyse du jeu en termes de stratégie gagnante. Cependant, comme nous venons de monter, nous avons remarqué que quelques groupes ne se sont pas permis d'avoir des positions de départ perdantes et ont modifié la règle du jeu pour les exclure.

Des arguments sur la parité des nombres ont mené sur des fausses conjectures telles que :

« Si n est pair il faut commencer, si n est impair il faut être le deuxième à jouer » (Groupe C)

« Si la somme des nombres est impaire on perd, si la somme des nombres est paire on gagne » (Groupe G)



Nous supposons que cet événement de parité était dû à un théorème en acte : si $n = 20$ il faut commencer, mais si $n = 21$ nous laissons à l'adversaire le départ, même si ce n'est pas faux, cette stratégie a été réfutée immédiatement après que l'on leur ait proposé de jouer à la course à 17.

Nous avons aussi repéré des contraintes qui ne sont pas directement reliées à notre expérimentation comme des problèmes de calcul surtout pour faire les divisions euclidiennes, problèmes pour rédiger leurs découvertes et des problèmes pour exprimer leurs conjectures.

XI.3. Conclusion de la première phase

Tout d'abord, en ce qui concerne l'aspect ludique de l'activité, les groupes d'élèves étaient enthousiastes dans leur travail. L'enseignante nous a rapporté qu'elle avait été surprise de voir les élèves, même les moins motivés de la classe, très concentrés en cherchant des réponses. Ainsi, cela a favorisé la réussite de l'expérimentation.

Les élèves qui ont participé à cette expérience n'avaient jamais travaillé sur des activités de type situation de recherche. Cela confirme, une fois de plus, que la « course à n » est une situation accessible qui permet aux élèves de rentrer dans une démarche de recherche en mathématiques.

Pour presque tous les groupes, s'approprier le problème et rentrer dans une démarche de recherche a été relativement facile. Tous les groupes ont émis des conjectures et ont trouvé des méthodes conduisant à des stratégies gagnantes. De plus, quatre groupes sont arrivés à émettre des conjectures de stratégie gagnante pour le cas général.

Les notions de stratégie gagnante, position gagnante et position perdante semblent avoir été bien assimilées par les élèves. Cela sera avantageux pour la prochaine phase de l'expérimentation. Cependant, la réticence des élèves à accepter l'existence des positions de départ perdantes peut être un obstacle pour la prochaine phase puisque le jeu d'Euclide est composé de plusieurs jeux « course à n » en composition séquentielle.

Comme nous l'avons remarqué précédemment, la division euclidienne a été une contrainte et elle sera sûrement une préoccupation pour la recherche de stratégies gagnantes pour le « jeu d'Euclide géométrique », dépendant fortement d'elle. Pour la prochaine phase, nous nous posons la question suivante : en quoi la course à n participe à la construction du milieu adidactique pour le jeu d'Euclide géométrique ?

CHAPITRE XII

Deuxième expérimentation, deuxième phase : Le jeu d'Euclide géométrique

XII.1. Présentation de la situation

La deuxième phase s'est déroulée avec 25 élèves, pour cette expérience nous avons donné aux élèves des feuilles quadrillées et de stylos de différentes couleurs pour distinguer les coups de chaque équipe. Tous les élèves qui participent à cette phase avait déjà participé à la première phase.

Étant donné que dans cette phase, il y a cinq élèves de moins, nous avons demandé à l'enseignante de constituer cinq groupes de quatre élèves, un groupe de trois élèves et un groupe de deux élèves, que nous noterons par la suite G_i, $(1 \leq i \leq 7)$. Les groupes G3, G6 et G7 ont été enregistrés avec un dictaphone et tout comme dans la phase précédente les discussions et recherches ont été suivies par les mêmes deux gestionnaires qui ont noté ce qu'ils jugeaient pertinent dans les étapes de recherche de chacun des groupes. Leurs notes ont été complétées par les feuilles de recherche personnelles de chaque élève.

La retranscription complète des séances des groupes G3, G6 et G7 se trouvent dans l'annexe E. Dans l'analyse suivante, les élèves de chaque groupe seront dénotés par A, B, C et D, les gestionnaires par O et l'enseignante par E.

Comme dans la première expérimentation du jeu d'Euclide, l'énoncé du problème a été donné à chaque groupe par écrit, puis il a été expliqué oralement à l'ensemble de la classe, l'énoncé est resté inchangé pour cette nouvelle expérimentation. Cependant, nous nous sommes centrés sur la recherche d'une stratégie gagnante, donc nous avons posé l'unique question :

> Est-ce qu'il y a une stratégie gagnante ? Et si oui, trouvez-la !

Suite aux conclusions de notre première expérimentation en licence, la présentation orale du jeu a été accompagnée d'un exemple de partie.

La recherche a eu lieu pendant deux heures successives. Elles étaient ainsi réparties :

1. Un premier temps de recherche libre, introduit par un exemple d'une partie.
2. Le temps de recherche centré sur les rectangles de taille 38×11, 125×56 et 87×38. Ces rectangles ont été utilisés aussi dans l'expérimentation précédente au niveau Licence pour l'appui à la recherche. Dans cette expérimentation ils auront le même but. Ces exemples ont été choisis parce qu'ils sont représentatifs du problème. Le premier rectangle comporte 3 étapes et les autres deux comportent 4 étapes chacun. Les deux premiers rectangles sont des positions de départ gagnantes et le dernier est une position de départ perdante.
3. Le temps de rédaction des stratégies de recherche, stratégies gagnantes et conjectures trouvées par les élèves.

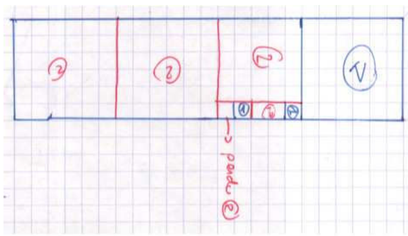
XII.2. Déroulement et analyse des productions

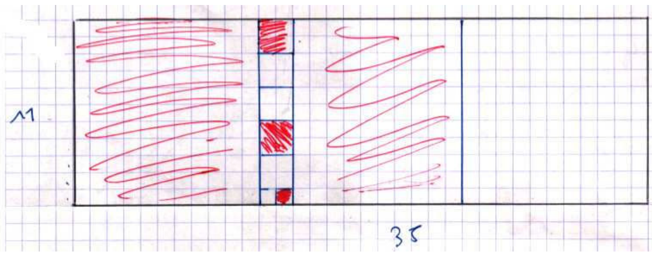
XII.2.1. Dévolution

La découverte du jeu ne s'est pas faite aussi vite que pour la course à n. Nous avons donné une explication des règles du jeu et on a fait un exemple de comment il fallait jouer, mais cela n'a pas été suffisant pour quatre de nos sept groupes, il a fallut faire une explication personnalisée pour les aider à comprendre les règles du jeu.

Quelques uns des problèmes identifiés ont été du type « c'est qui qui gagne ? ... C'est celui qui perd... ? » et « comment faut-il tracer le rectangle ? ». Nous faisons l'hypothèse que ceci est un théorème en acte et vient du fait que le jeu d'Euclide géométrique est en convention misère. Dans la phase précédente, le jeu la course à n, celui qui jouait en dernier, gagnait. Dans le jeu d'Euclide, l'interprétation de qui gagne et qui perd est tout le contraire.

Voici deux exemples des traces de rectangles et un dialogue d'un groupe avec le gestionnaire :





Extrait du groupe G4

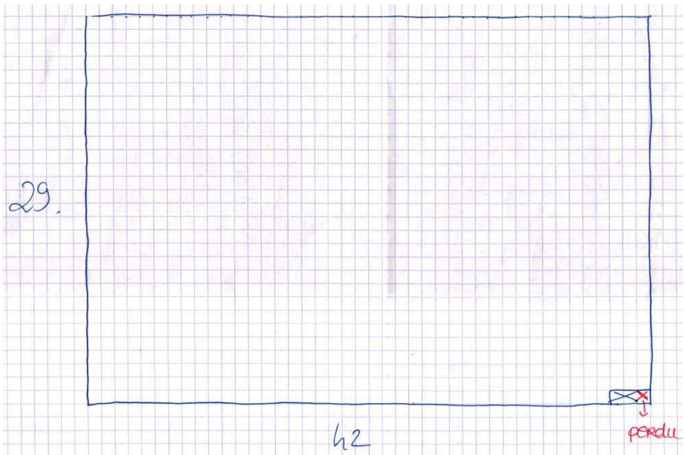
> C : Ouais, mais je ne sais pas s'ils comptent que des coins du grand rectangle ou du petit. Quand on arrive, quand on fait.. Il nous reste un rectangle vide, est-ce qu'on peut partir de n'importe quel coin où on est obligé de partir de ce coin là.
> O : Non à chaque fois c'est ça, à chaque tour c'est ce qu'on vous a dit là.
> C : Du coin du premier rectangle, ou de celui qu'on a fait ?
> O : Ben non puisque... Ben non pas du premier rectangle, puisque vous avez enlevé. Il faut que vous jouiez...
> [...]
> O : Je crois que de jouer, ça sera bon pour tout le monde.

Ce problème s'est présenté dans presque tous les groupes. Nous avons insisté à jouer des coups au hasard pour qu'ils maîtrisent la règle du jeu.

Une fois que les élèves ont compris les règles du jeu, rentrer dans une démarche de recherche a été, pour quelques groupes, beaucoup plus compliquée que dans la phase précédente. Ainsi, les groupes ont passés beaucoup de temps à jouer aléatoirement.

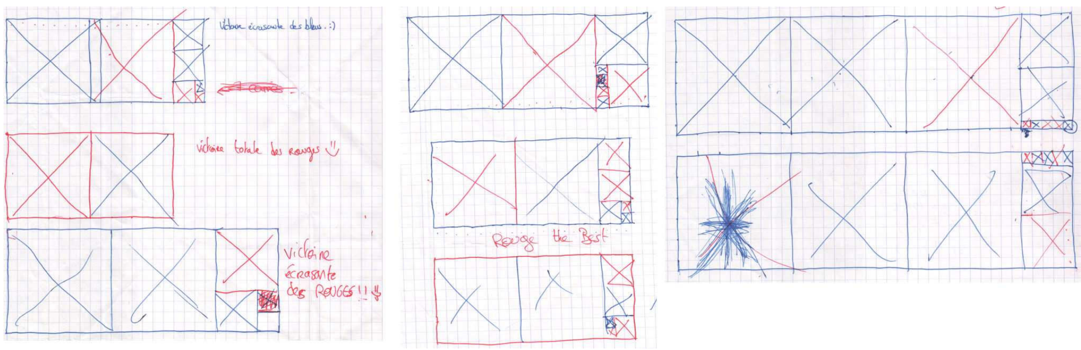
XII.2.2. Représentations où modélisations du jeu

Comme nous l'avons dit, les élèves avaient à leur disposition des feuilles quadrille, tous les groupes ont travaillées en traçant des rectangles aidés par les carreaux des feuilles.

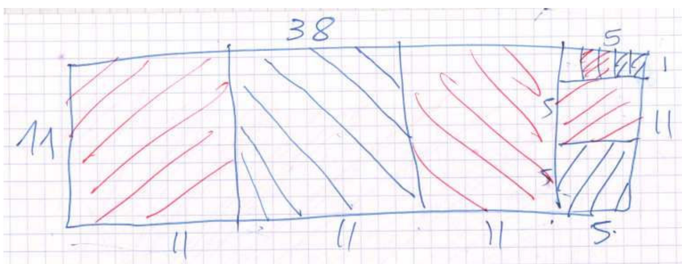


Les feuilles quadrillées ont présenté une contrainte similaire à la règle graduée qui a empêché le passage au premier niveau d'abstraction. En effet, les groupes G1, G3 et G7 ne sont jamais sortis d'une représentation réaliste du jeu.

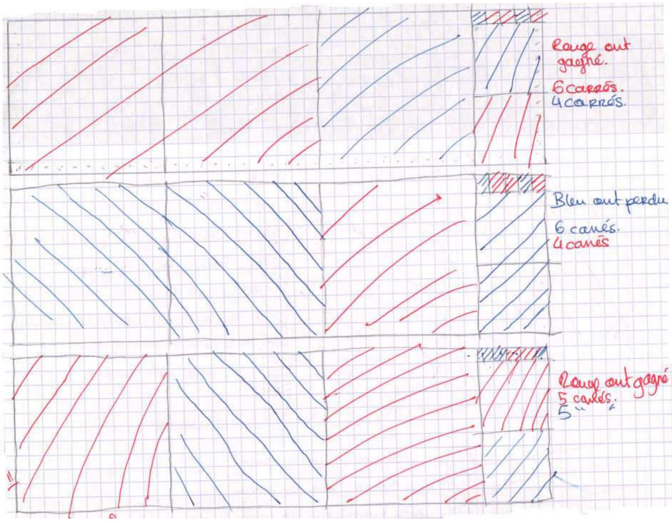
Le suivant est un extrait de la production du groupe G1.

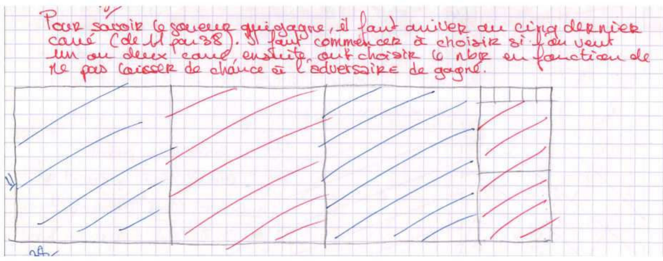


Nous remarquons le cas spécial de l'un des groupes (groupe G5) qui a eu un début de passage au premier niveau d'abstraction lorsque le gestionnaire leur a proposé de travailler sur le rectangle de taille 38×11. Le passage au premier niveau d'abstraction s'est produit, même avec l'utilisation de la division euclidienne pour jouer le jeu. Cependant, ils n'ont pas accepté de dessiner des carrés qui ne sont pas de « réels » carrés.



Enfin, le groupe est revenu à une représentation réaliste du jeu. Voici leur production finale pour le cas d'un rectangle de taille 38×11.





Nous faisons l'hypothèse que ces contraintes pour le passage au premier niveau d'abstraction sont dues, au moins en partie, à :

- Les groupes traçaient les premiers carrés et se mettaient à jouer, alors que les autres carrés n'étaient pas encore tracés.
- Les représentations réalistes que les groupes ont pris leur permettaient d'enlever des carrés sans faire des calculs numériques. Ils comptaient les nombres de carreaux de chaque coté pour dessiner un carré.
- Ils n'ont pas repéré le rapport entre les carrés tracés et la division euclidienne, par exemple, quelques groupes ont fait usage des soustractions successives pour trouver les carrés de chaque étape.

XII.2.2.1. *Premier niveau d'abstraction*

Seulement 3 parmi les 7 groupes sont arrivés au premier niveau d'abstraction. Ceci s'est produit dans tous les cas sous l'influence des gestionnaires qui leur a proposé d'analyser les cas 38×11 et 125×56. Comme nous l'avons vu auparavant, arriver à ce niveau n'a pas du tout été évident pour eux.

De plus, comme nous l'avons déjà remarqué dans le phase précédente, une grande contrainte est l'incapacité pour faire des calculs. Enfin, plusieurs élèves ont dû faire recours à la calculatrice.

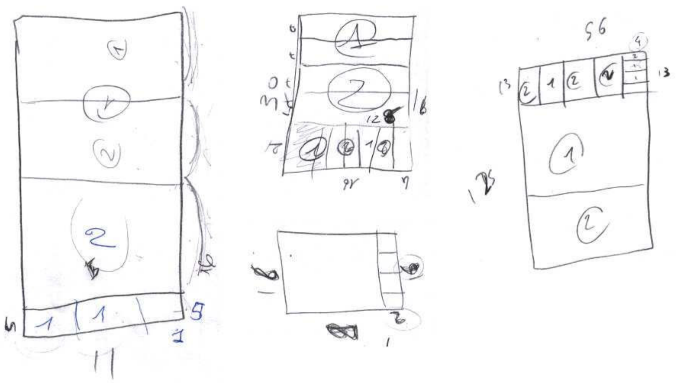
Nous décrivons ensuite le passage au premier niveau d'abstraction pour les 3 groupes qui sont y arrivés. D'abord, le groupe G4 a remarqué que le jeu avait une ressemblance avec la course à n, ils ont décidé de faire une analyse en fonction de la division euclidienne et trouver un rapport. De cette façon, le groupe s'est rendu compte de l'existence d'étapes dans le jeu. Pour eux, le jeu est maintenant composé de « plusieurs rectangles » qui correspondent à la quantité de divisions euclidiennes.

> B : Peut être il faut diviser...
> C : C'est une division.
> B : Ouais.. Division euclidienne.. Regarde par rapport au reste je ne sais pas quoi. Allez Margot, commence, fini ce que tu as commencé.
> [...]
> B : On prend le 38 11... 38 divisé par 11 ça fait combien ? Faut une calculette. Il faut une calculette Casio, elle fait des divisions euclidiennes.
> C : Je ne sais même pas ce que c'est une division euclidienne.
> A : C'est quand t'as le reste.
> C : T'as le reste ? C'est à dire ?
> B : Tu connais le reste, le quotient.. Voilà, et là je sais comment on fait.
> C : Ah la calculette de troisième..
> B : 38 par 11.. 3.. Le reste c'est 5. Alors, on a ça comme données.
> C : Comment ça 3, moi je trouve 3 quelque chose.
> A : Non, enfin c'est 3 et le reste c'est 5. Division euclidienne.
> D : Il reste 5. Donc tu peux faire 3, 33, 3 fois 11 33, il te reste 5.
> C : Ah mais oui, le truc que l'on faisait en 4ème là..
> B : Alors pour 38 11, le reste c'est 5, fait le lien vas y Margot.
> C : Après tu divises 5 par 11 par l'euclidienne, il reste 1.

D'autre part, le groupe G2 après l'intervention d'un des gestionnaires, s'est rendu compte vers la fin de la séance que l'usage de « vraies dimensions » n'était pas nécessaires pour analyser le jeu.

> O : C'est combien le rectangle là ?
> D : 56 par 125.
> O : Bon ben moi j'aimerais bien que quand même vous me fassiez une figure qui ne dépasse pas.
> D : Oui mais ce n'est pas possible.
> O : Comment ça c'est pas possible [...] Une figure qui fait 56 par 125 vous ne pouvez pas la faire ? On a jamais dit que c'était des centimètres, ni des carreaux. Alors, comment vous allez la faire ?
> A : Ben on fait un petit croquis on met 56 par 125.
> O : On peut faire un croquis où l'on met 56 par 125, je suis complètement d'accord. C'est un peu ce que l'on a fait au tableau. On n'a pas pris les mesures au tableau. Quelle est l'autre solution si vous voulez faire quelque chose de précis ?
> B : On prend des millimètres.
> O : Si vous voulez, mais surtout qu'est-ce qu'on fait quand on ne peut pas faire rentrer une figure dans une page ?
> B : On prend une échelle.
> O : Voilà,...

Le groupe G6 a décidé dès le début de travailler sur des feuilles blanches. Vu qu'ils ne disposaient pas d'une règle graduée, ce groupe a commencé son analyse immédiatement dans le premier niveau d'abstraction



Même si ces trois groupes sont arrivés à s'en servir de la division euclidienne et de l'algorithme d'Euclide implicitement, aucun groupe n'a réussi arriver au deuxième niveau d'abstraction, c'est-à-dire, ils n'ont pas laissé tomber le registre géométrique.

XII.2.3. Les notions de stratégie gagnante, position gagnante et position perdante

En relation à la notion de stratégies gagnante, il n'y a pas eu de difficultés chez les élèves. Cette notion a été bien acquise pendant la première phase de l'expérimentation avec le jeu « la course à n ». Cependant, nous avons remarqué que la plupart des élèves avaient des problèmes pour identifier une stratégie gagnante, même en fin de séance. De plus certains pensaient qu'il n'en existait pas. Nous faisons l'hypothèse que ceci est dû à la complexité de la situation « le jeu d'Euclide géométrique ». En effet, trouver une stratégie gagnante pour « la course à n » a été relativement facile et « le jeu d'Euclide géométrique » lui ressemble. Alors, ils ont eu tendance à penser que la stratégie gagnante pour « le jeu d'Euclide géométrique » serait aussi facile.

Nous avons remarqué que la définition des notions de position gagnante et position perdante est une difficulté pour les élèves. Spontanément, ils ont eu tendance à penser que l'on n'est pas perdant tant que l'autre n'a pas gagné. Il a été délicat de leur faire comprendre qu'on pouvait définir une situation gagnante/perdante indépendamment du jeu de l'autre. Cette situation nous a parue bizarre, surtout parce qu'ils avaient fait ce travail pendant la course à n et avaient l'air d'avoir compris.

XII.2.4. Expérimentations aléatoires

Les expérimentations aléatoires faites par les groupes n'ont pas eu le même résultat que dans l'expérience précédente avec la « course à n ». En effet, du aux contraintes trouvées pour le passage entre les différents niveaux d'abstraction et à l'absence de la division euclidienne et l'algorithme d'Euclide dans la partition du rectangle, la « découverte » de quelques caractéristiques essentielles du jeu s'est pas produit dans plusieurs groupes.

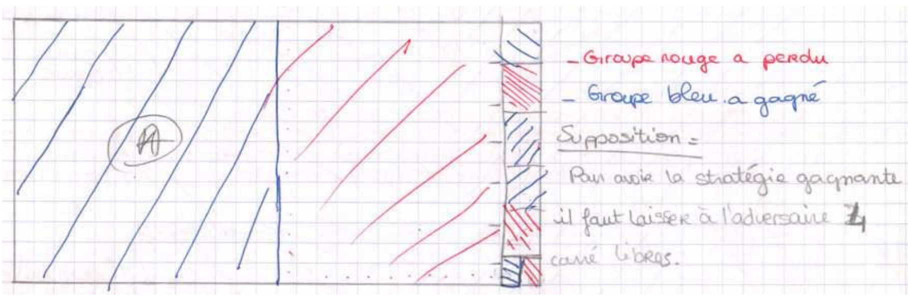
Cependant, à notre avis, les caractéristiques les plus importantes pour étudier le jeu en termes de stratégie gagnante ont été découvertes. Notamment, la nature séquentielle du jeu qui doit être joué par étapes.

Par exemple, quelques groupes commençaient à jouer avec l'ensemble des carrés de plus grande taille, ensuite, ils traçaient le rectangle restant et poursuivaient le jeu dans ce nouveau rectangle. Ceci est une façon d'identifier les différentes étapes du jeu. En effet, l'interprétation de ces groupes a été qu'ils devaient jouer les ensembles des carrés de la même taille dans l'ordre décroissant et qu'ils devaient finir chaque ensemble avant de passer au suivant.

D'autres groupes ont identifié les étapes du jeu directement en faisant les divisions euclidiennes successives. Par exemple, le groupe G4 a fait la définition que chaque étape division euclidienne correspond à un rectangle différent. De plus, ils ont identifié que la taille des carrés et le nombre des carrés de chaque taille ne dépendent que des dimensions du rectangle de départ.

> *« Des équations euclidiennes pour savoir le reste, combien de fois il faut diviser, combien de carrés tu peux faire à chaque fois, combien tu as de choix et tout ça »*
>
> *« Mais ce qui est différent avec ça par rapport à la semaine dernière c'est qu'il y a beaucoup plus de possibilités. Ça dépend du rectangle, comment tu le fais. T'as tellement de possibilités de largeur et de longueur que.. C'est ça qui est difficile en fait. »*
>
> *« De toute façon la division nous dit le nombre de carrés que l'on peut faire et combien de petits carrés il nous restera »*

Le groupe G5 a aussi identifié les étapes du jeu composées par les ensembles des carrés de la même taille, mais ce qui a été une difficulté pour eux, a été le fait que chaque étape doit être terminé avant de passer à la suivante. En particulier, lorsqu'il ne restait que deux étapes, ils comptaient tous les carrés de deux étapes ensemble pour essayer de faire des conjectures en fonction de la course a n. Voici un extrait de la production du groupe G5.



Dans cet extrait, ils conjecturent qu'il faut laisser 4 carrés à l'adversaire, ce qui serait correct si le jeu était la course à n en convention misère. Cependant, due à la règle du jeu d'Euclide, la position avec un rectangle de taille 5×2 où il ne reste que 4 carrés est gagnante.

Nous faisons l'hypothèse que ceci est due au fait qu'ils ne pouvaient pas faire la relation avec la course a n avec si peu d'éléments dans la dernière étape. Cette hypothèse est motivée aussi du fait que pendant l'expérimentation ce groupe a essayé de trouver, sans succès, un exemple de partie où il y a plusieurs carrés dans la dernière étape.

D'autre part, aucun groupe n'a repéré que les étapes du jeu peuvent finir, soit en convention normale, soit en convention misère, sauf pour la dernière étape qui est toujours en convention misère. Cependant, tous les groupes ont été capables de se rendre compte que le jeu doit être analysé dans l'ordre inverse à partir de la dernière étape.

Comme nous l'avons dit précédemment, les groupes ne sont pas passés au deuxième niveau d'abstraction. En raison de cela, il s'est avéré impossible pour eux de trouver la relation entre le nombre de carrés de chaque taille et les quotients des étapes de l'algorithme d'Euclide.

XII.2.5. Stratégies de recherche

Entrer dans la recherche de la situation a été dans ce cas plus difficile que dans la phase précédente. Ceci est due à la complexité de la situation comme nous l'avons remarqué dans section XII.2.1.

Les stratégies de recherche menées par les élèves ont été assez proches de celles développées par les étudiants de Licence, sauf que moins élaborées. Nous présentons à continuation les stratégies de recherche par rapport à l'étude des cas particuliers et l'étude du jeu dans l'ordre inverse.

XII.2.5.1. *Le cas d'un rectangle de taille* $P = (n, 1)$

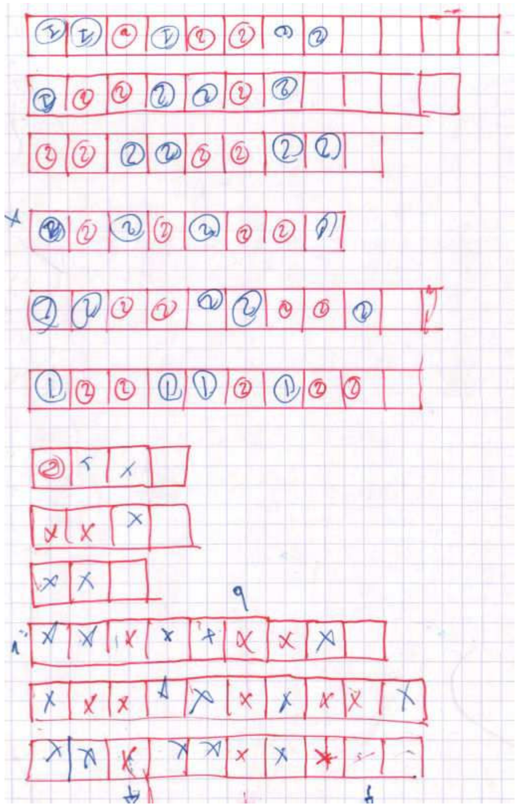
Le cas d'un rectangle de taille $n \times 1$ a été analysé et la première conjecture apparue est qu'il est équivalent à « la course à n » en convention misère.

> *« c'est comme une course à n à l'inverse, tu prends pas le dernier carré »* (Groupe G3)

Ainsi, la conjecture de stratégie gagnante pour ce jeu a été qu'il faut jouer la course à $n-1$ pour laisser le dernier carré à l'adversaire.

> *« dans ce jeu le gagnant c'est celui qui prend l'avant dernier carré. »* (Groupe G3)

De cette manière, ils sont analysés les cas $n-1=3k$, $n-1=3k+1$, $n-1=3k+2$ exactement comme ils l'avaient fait pour la course à n.



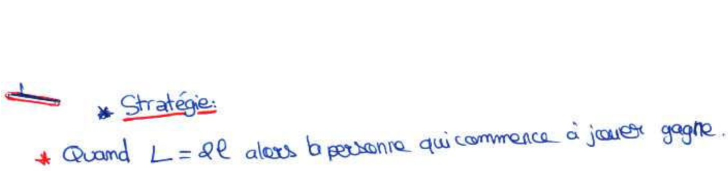
XII.2.5.2. *Rapport entre longueur et largeur*

Le fait que le jeu ne dépend que du rapport entre la longueur et la largeur du rectangle a été bien repéré. Le cas particulier de ce fait avec la position $P = (2n, n)$ a été le plus analysé par les groupes. Voici un extrait du groupe G4.

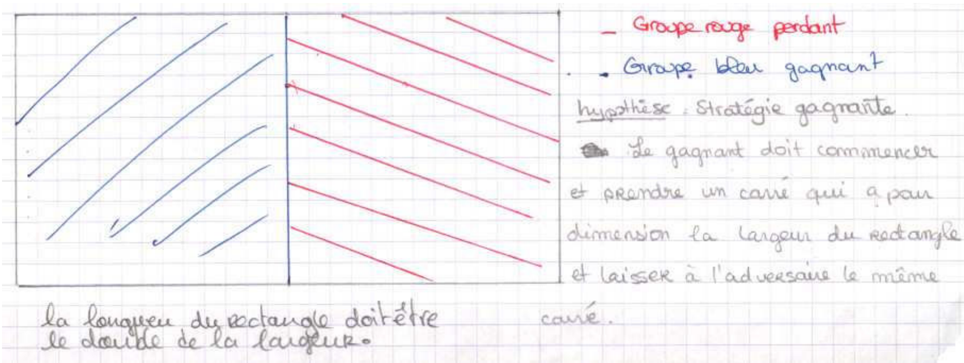
> *« Si c'est exactement deux fois, la personne qui commence à gagné »* (groupe G4 en référence à la longueur et largeur du rectangle)

Ils ont aussi fait des conjectures par rapport à la position $P = (a, b)$ dans les cas où $a > 2b$ et $a < 2b$ comme nous le verrons plus loin.

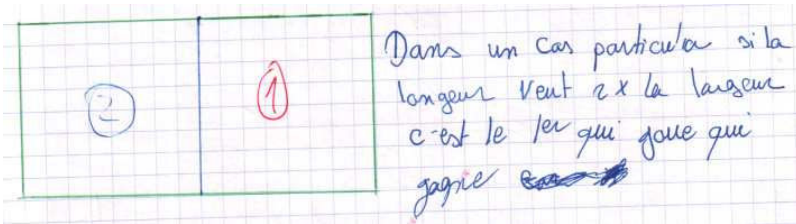
Pour le groupes G1, nous avons l'extrait.



Dans la production du groupe G5, nous trouvons l'extrait suivant.



« dans un ces cas particulier si la longueur veut deux fois la largeur c'est le premier qui joue qui gagne » (groupe G7)



XII.2.5.3. *L'étude du jeu dans le sens inverse*

Tous les groupes ont été capables de trouver une stratégie gagnante pour des cas particuliers en analysant le jeu dans l'ordre inverse. Ainsi, le tableau suivant est un récapitulatif des cas analysés par les différents groupes.

Groupe	Cas traités
G1	$(56, 125)$
G2	$(5, 19)$; $(29, 42)$ et $(11, 38 + 11 \times n)$, pour $n = 0, 1, 2, 3$.
G3	$(11, 38)$
G4	$(29, 42)$ et $(11, 38)$
G5	$(11, 38)$
G6	$(5, 29)$; $(11, 38)$ $(56, 125)$
G7	$(11, 38)$

XII.2.6. Conjectures et éléments de validation

Tous les groupes, ont été amenés au cours de leurs recherches à énoncer des conjectures. Bien entendu, ces conjectures ne sont pas toutes correctes. Les éléments de validations et invalidation ont été des exemples et contre-exemples. Au cours de la séance, les seules preuves qui ont été produites consistent en preuves par exhaustivité des cas.

Les conjectures ont été liées aux trois idées :

1. Conjectures liées à « la course à n ».
   - Chaque étape du jeu est une course à n en convention misère : Les groupes G2 et G4 ont trouvé cette conjecture sous différentes formes. Par exemple, nous avons l'extrait suivant du groupe G2.

D : Ben c'est un peut comme la course à $n-1$
B : Pour chaque ligne de carrés de la même taille, c'est la course à $n-1$ en fait
D : il ne faut pas prendre le dernier. Du coup il faut prendre celui qui est juste avant

- Une position avec 4 carrés est perdante : Le groupe G5 a émis cette conjecture sous la forme suivante.

  « Pour avoir la stratégie gagnante il faut laisser à l'adversaire 4 carrés libres ».

2. Conjectures liées aux variables de recherche $P = (a, b)$ du rectangle (rappelons que $a \geq b$). Le groupe G4 a formulé les conjectures suivantes.

   - Si $a = 2b$ alors P est gagnante.

     « Ben là, si c'est exact exactement deux fois, la personne qui commence elle a gagné » (Groupe G4)

   - Le premier jouer n'a qu'une seule option si et seulement si $a < 2b$.

     « Tu vois si la longueur elle est inférieur à deux fois la largeur, la hauteur ; ben tu ne peux pas mettre deux carrés, tu ne peux en mettre qu'un seul. Tu vois t'es obligé de jouer ça »

     « Tu vois ce que je veux dire. Alors que là, vu que la largeur elle est au moins plus grande que deux fois la hauteur, tu peux mettre au moins deux carrés. Déjà je pense qu'il y a un truc qui dépend de ça »

3. Conjectures liées aux étapes du jeu.

   - Chaque étape est en convention misère :

     « Pour gagner, il faut toujours obliger l'adversaire à prendre le dernier [à chaque étape] » (Groupe G1)

   - Les étapes les plus tardives dans le jeu ont une importance relative plus haute pour gagner :

     « le premier carré n'a pas d'importance mais le bout du rectangle qui reste est le plus important » (groupe G7)

4. Conjectures par rapport aux divisions euclidiennes : Si la quantité de divisions euclidiennes est paire, alors la position de départ est perdante et si elle est impaire, alors la position de départ est gagnante.

   « Là t'as juste à faire deux divisions, 12 par 8, puis 8 par 4, et tu arrives à 0. Là celui qui commence il perd. Là tu as trois divisions à faire, donc 10 par 6, 6 par 4, et 4 par 2, ça fait trois divisions et celui qui commence... Il gagne. Il faut que l'on essaye avec plus de division. Le nombre de divisions euclidiennes avant d'arriver, donc ça veut dire que quand c'est paire tu commences tu perds, quand c'est paire tu perds. Et quand tu commences et que c'est impaire tu dois gagner, normalement. On va essayer ça. » (Groupe G4)

XII.3. Difficultés induites par les contraintes de la situation

L'aspect ludique du jeu d'Euclide géométrique a capté l'attention des élèves. Il est alors devenu une contrainte parce qu'ils ont passé la plupart de leur temps à jouer de façon aléatoire. Ainsi, ils ont mis du temps avant de commencer à réfléchir l'aspect mathématique du jeu.

Une autre contrainte a été identifiée : le passage entre les différents niveaux d'abstraction. Cet obstacle vient du contrat usuel de la classe, c'est-à-dire que si l'on travaille sur la géométrie, on reste dans le domaine de la géométrie. De ce fait, les élèves nous ont toujours demandé si les rectangles devaient être tracés avec la règle (utilisant les centimètres) ou en utilisant les carrés de la feuille, comme si le résultat en dépendait. Ainsi, les élèves n'ont pas été capables d'arriver au deuxième niveau d'abstraction.

Cette dernière contrainte a été la source d'un nouvel obstacle : Quand nous avons demandé aux élèves de jouer sur le rectangle 38×11, ils ont tous tracé le rectangle soit avec la règle, soit en utilisant les carrés de la feuille. Aucun groupe n'a utilisé une échelle. Le problème s'est présenté à eux quand nous leur avons demandé d'étudier le rectangle 56×125. A ce moment il y a eu des groupes qui ont compris qu'il n'était pas nécessaire de tracer de vraies dimensions.

Une contrainte, qui a déjà été repérée dans la séance précédente, est le problème de calcul avec la division euclidienne : il y a des élèves qui, tout simplement, n'arrivent pas à la faire.

De plus, nous avons remarqué que la définition de la notion de position gagnante et position perdante est une difficulté pour les élèves. Spontanément, ils ont eu tendance à penser qu'il n'y a pas de perdant tant que l'autre n'a pas gagné. Il a été délicat de leur faire comprendre que l'on pouvait définir une situation gagnante/perdante indépendamment du jeu de l'autre. Ce point a déjà été expliqué précédemment.

La parité apparaît une autre fois, en créant fausses conjectures comme par exemple : « . . . si le total des divisions euclidiennes est pair, le deuxième joueur gagne, s'il est impair c'est le premier joueur qui gagne » (Groupe 3), « . . . à chaque nombre pair de carrés il faut prendre deux carrés » (Groupe 7). Ces conjectures ont été créées à partir des cas particuliers étudiés par les groupes.

XII.4. Conclusion de la deuxième phase

Dans cette séance les élèves avaient l'air plus fatigués et distraits, cela a pris du temps pour que les élèves se concentrent pendant l'explication des règles du jeu. Cela est peut-être dû au fait que la séance a eu lieu durant un jour très chaud et que les élèves avaient du mal à rester concentrés. Cependant, l'aspect ludique du jeu a facilement attiré leur attention, jusqu'à en devenir une contrainte comme nous l'avons remarqué précédemment.

L'appropriation du problème n'a pas été facile. Pendant longtemps, beaucoup d'élèves se sont sentis perdus. De ce fait, les gestionnaires de l'expérience ont dû intervenir pour expliquer les problèmes aux élèves. Ainsi, la validation s'est produite tard dans la séance.

Tous les groupes ont remarqué que la stratégie gagnante avait un lien avec la course à n, mais ils n'ont pas réussi à trouver le vrai rapport. L'une des causes est, peut être, qu'ils ne sont pas arrivés à visualiser le jeu comme une série d'étapes. Finalement, seulement deux groupes ont réussi à trouver quelques pistes.

Nous pensons que ce qui a le plus distrait les élèves dans la recherche des stratégies a été l'objectif final du jeu, c'est-à-dire « celui que prend le dernier perd ». Si cela avait était l'opposé, le groupe 7 aurait probablement plus avancé dans sa recherche.

CHAPITRE XIII

Conclusion sur les expérimentations

Un des premiers résultats montré par nos expérimentations est que, dès le début du lycée, la dévolution de ce type de situation est possible et produit une vraie activité mathématique. En effet, la grande majorité des élèves et étudiants a construit des stratégies pertinentes, même si toutes n'ont pas abouti. Ce qui montre que la découverte de résultats, la formulation de conjectures et la mise en place de preuves sont accessibles à des élèves de niveau lycée.

Le fait d'avoir expérimenté à deux niveaux distincts nous a permis de relever les conséquences de certains de nos choix pour la situation. En effet, si l'énoncé du jeu présenté aux étudiants de Licence n'était pas suffisamment clair au départ, il a suffi de montrer, en exemple, une seule « partie », jouée collectivement, pour que ces derniers démarrent la recherche. Et dans la deuxième expérimentation, un exemple intégré à la présentation orale du jeu a suffi pour une « bonne » dévolution.

De même, le milieu matériel a dû être modifié entre les deux expérimentations. Nous avons constaté que la règle graduée ou les feuilles quadrillées peuvent être des éléments perturbateurs pour le passage de la représentation réaliste du jeu au premier niveau d'abstraction.

Nous présenterons les conclusions des expérimentations en deux parties : celles concernant la situation en tant que jeu combinatoire, puis celles concernant les apprentissages mathématiques construits par l'activité de recherche.

XIII.1. Conclusions sur le jeu combinatoire

XIII.1.1. Représentations ou modélisations du jeu

Les différents cadres dans lesquels s'inscrit le jeu de Euclide géométrique ont mis en évidence quelques difficultés ou obstacles.

D'abord, nous constatons que la représentation réaliste du jeu, induite par la situation elle-même, a rendu difficile, voire a fait obstacle pour le passage au premier niveau d'abstraction. Le cadre géométrique a bien été utilisé par les étudiants et les élèves. En effet, en Licence comme au lycée, la représentation réaliste du rectangle a été utilisée pour dessiner les carrés enlevés à chaque partie. Au début, cette représentation a permis de s'approprier le jeu (particulièrement au niveau lycée), mais par la suite, elle a provoqué une difficulté pour la mise en place de la division euclidienne dans les stratégies de recherche. En conséquence, quelques aspects importants de la résolution du jeu n'ont pas été découverts. De plus, cette représentation a obligé élèves et étudiants à travailler la plupart du temps avec des rectangles de petite taille .

Les étudiants de Licence ont réussi à surmonter cette difficulté, contrairement aux élèves de lycée. Bien que ces derniers aient repéré la division euclidienne dans le jeu, aucun groupe n'a finalement abandonné le cadre géométrique. Nous faisons l'hypothèse que le contrat didactique usuel a joué un rôle : lorsqu'un problème de géométrie est posé, il est d'usage de raisonner et résoudre a priori dans ce cadre.

XIII.1.2. La notion de stratégie gagnante

Les expérimentations ont montré que la notion de stratégie gagnante a été bien comprise. En effet, presque tous les groupes ont bien repéré les éléments du jeu suivants :

- La différence entre une victoire due au hasard et une victoire due à une stratégie gagnante : « *de toute façon si l'autre joueur avait joué différemment, j'aurais gagne en appliquant ma technique* » (groupe de Licence)
- Il existe toujours un gagnant et un perdant : nous avons pu relever des phrases récurrentes telles que « Bien que les deux joueurs « connaissent la technique » (ont une stratégie) pour gagner, la victoire dépend de la configuration du jeu (quantité des étapes et carrés dans chacune) et de qui commence la partie ».
- La stratégie gagnante ne dépend que de la position à l'instant dans le jeu : les coups précédents n'ont aucune influence sur la stratégie gagnante, c'est uniquement le moment où l'on joue qui compte.

XIII.1.3. La négociation entre position gagnante et position perdante

Nous avons vu que élèves et étudiants ont bien conçu cette situation de supériorité qu'implique une position gagnante. Par contre, la notion de position perdante a été plus difficile à comprendre. Une règle-en-acte répandue chez tous est qu'à partir du moment où l'adversaire se trouve dans une position gagnante « c'est perdu pour eux ». De ce fait, les élèves ont eu du mal à comprendre qu'être en position perdante ne signifie pas forcément qu'ils vont perdre « à coup sûr ». « *Selon le nombre de carres qu'il reste, j'ai la possibilité de jouer un coup qui va m'amener vers la victoire certaine (je suis en position gagnante) ou non (je suis en position perdante)* » (un groupe de Licence)

De plus, dans quelques groupes, nous avons identifié les questionnements suivants : « Ai-je la possibilité de gagner quoi que fasse mon adversaire ? » ou alors « Suis-je dépendant de ce que mon adversaire va jouer ? ».

Finalement, nous pouvons conclure que les élèves ont réussi à ressentir l'aspect récursif de cette définition, sans pour autant se l'approprier en toute généralité.

XIII.1.4. La convention misère et la convention normale

Au niveau Licence, ces notions on été bien assimilées et n'ont pas provoqué de difficultés. D'autre part, les étudiants se sont bien persuadés que si la règle du jeu est en convention misère, cela n'implique pas que toutes les étapes doivent être jouées dans cette convention.

Cependant, au niveau lycée, la convention misère du jeu d'Euclide géométrique a créé un conflit dans certains groupes au Lycée. En effet, la connaissance de la stratégie gagnante pour la convention normale de la course à n (phase 1 de la situation au Lycée) a été un obstacle à la compréhension du jeu d'Euclide géométrique en convention misère. Cet obstacle a pu être surmonté par la présentation des deux conventions. Ce qui a conduit les élèves a explorer les différentes étapes de jeu, en jouant avec ces deux conventions.

En conclusion, il faut retenir que lors d'une expérimentation en deux phases, telle que celle conduite au niveau lycée, il est préférable d'introduire en phase 1 la course à n dans les deux conventions, normale et misère. Nous faisons l'hypothèse que le milieu ainsi construit pour la situation du Jeu d'Euclide géométrique (phase 2) permettra une meilleure dévolution.

XIII.1.5. Le jeu dans l'ordre inverse

L'unique stratégie générale trouvée lors de nos expérimentations est celle qui consiste a analyser le jeu dans l'ordre inverse.

Réaliser cette stratégie requiert de reconnaître deux propriétés correspondant à deux niveaux de compréhension du jeu, et reliées aux étapes et quotients de l'algorithme d'Euclide : tout d'abord, que le jeu est composé des différentes étapes ;ensuite, qu'il est nécessaire de trouver la règle qui permet de décider la convention à choisir pour chacune des étapes. La première propriété est induite par les expérimentations aléatoires. La deuxième est beaucoup plus difficile à repérer, à cause de la complexité de la situation. Cependant, ce deuxième niveau a été acquis par la plupart des groupes, et a permis à quelques-uns de trouver des stratégies gagnantes pour la situation. En conclusion, nous dirons que la situation « le jeu d'Euclide géométrique » est pertinente à partir du niveau lycée malgré sa complexité, car les productions des élèves en a-didactique sont consistantes, même si elles ne permettent pas de résoudre entièrement le jeu au niveau d'abstraction le plus haut.

XIII.2. Au niveau de l'activité recherche en mathématique

XIII.2.1. Mise en œuvre des savoir-faire de l'activité mathématique (SiRC)

Dans les expérimentations que nous avons conduites, tous les groupes ont mis en œuvre des savoir-faire fondamentaux de l'activité mathématiques : essais aléatoires (en jouant au hasard), codage et modélisation, construction de conjectures (stratégies gagnantes), invalidation d'une conjecture (contre-exemples, la stratégie gagnante fait perdre) ou validation (exhaustivité des cas, exemples)... Nous pouvons donc affirmer que le « jeu d'Euclide géométrique » permet de développer, chez des élèves à partir du Lycée, « un comportement de recherche » et des compétences méthodologiques sur l'activité mathématique comme celles citées dans les programmes scolaires français. (voir section V.2).

Cette situation a de plus l'intérêt non négligeable d'explorer de manière non usuelle l'algorithme d'Euclide et des concepts associés. Quelque soit le niveau atteint dans la résolution de la situation, on peut comprendre ce qu'est une solution à un problème mathématique et notamment l'importance d'une solution particulière pour construire une solution générale (par exemple, le cas $P = (n, 1)$ permet de résoudre chaque étape du jeu dans une position générale). Cette découverte amène à chercher des méthodes de construction générales locales dans un premier temps (par exemple le cas du jeu avec deux étapes) et éventuellement globales (position de départ quelconque).

Cette situation relève bien du modèle SiRC et en remplit les fonctions. En plus d'apprendre à s'organiser, la recherche amène à introduire les notions de conjecture (élément important dans la recherche en mathématiques et pourtant assez méconnu), preuve, forçage et celle d'exhaustivité.

Plus généralement, les expérimentations que nous avons menées ont montré que dès le début du lycée, les élèves formulent des conjectures et sont capables de les étudier, de les affiner et de les réfuter en analysant des exemples ou des cas particuliers. Ainsi, une fois que la conjecture est précisée, la démarche des élèves consiste soit à poursuivre l'expérimentation pour améliorer la conjecture soit à considérer que celle-ci est vraie et à passer à la résolution d'un autre problème. De fait, nous avons constaté que ce sont les interventions du gestionnaire qui ont incité les sujets à construire les preuves. La notion de contre-exemple à joué un rôle particulièrement important au niveau de validation de conjectures. En effet, malgré la complexité du jeu, les contre-exemples ont été pertinents, faciles à comprendre, très accessibles et convaincants. Ainsi, des conjectures ont été rejetées sans l'intervention des gestionnaires.

XIII.2.2. Une exploration non usuelle en classe de la division euclidienne et l'algorithme d'Euclide.

L'utilité de la division euclidienne et l'algorithme d'Euclide ne sont pas présents dans l'esprit des élèves. L'algorithme d'Euclide est enseigné en Troisième et en Terminale pour trouver le plus grand commun dénominateur (PGCD). Ainsi, dans les différents étapes d'algorithme d'Euclide, nous retenons uniquement les deux nombres initiaux et le dernier reste non nul, la valeur de restes intermédiaires, la valeur de quotients et le nombre d'étapes sont mis de côté. Cela entraîne donc un obstacle car dans le jeu d'Euclide géométrique, nous travaillons sur tous ces élément intermédiaires.

Dans cette situation, l'algorithme d'Euclide est exploré dans tous ses éléments. Pour modéliser et résoudre le jeu, il faut utiliser tous les éléments intermédiaires qui sont habituellement oubliés (en revanche, les nombres de départ sont mis de côté).

Pour réussir à trouver une stratégie gagnante pour le jeu d'Euclide géométrique, il faut que l'algorithme d'Euclide soit au moins une connaissance-en-acte. Dans le cas particulier de l'expérimentation au niveau lycée, nous avons relevé l'obstacle suivant : l'algorithme d'Euclide est seulement une connaissance-en-acte et les élèves ne sont pas capables de le formaliser. Par contre, la division euclidienne est connue, les élèves s'appuient sur celle-ci pour analyser le jeu à chaque étape.

XIII.2.3. Expressions symboliques et langagiers

L'expression écrite a été une contrainte pour les deux niveaux étudiés, les difficultés rencontrées sont du même ordre. Les étudiants de Licence ne sont pas tout de suite parvenus à retranscrire, par une formulation mathématique claire, leurs méthodes ou preuves. Les élèves de Lycée, quant à eux, ont eu des difficultés à trouver des mots qui décrivaient leurs actions .

Nous retrouvons aussi des contraintes inhérentes à différentes étapes de la recherche en mathématiques. Nous émettons l'hypothèse qu'elles sont particulièrement dues à l'absence de pratique dans l'enseignement. Cela nous conforte dans l'idée que les situations recherche peuvent permettre une présence régulière de l'heuristique en mathématiques au sein de l'institution scolaire, comme le préconisent les programmes scolaires.

XIII.2.4. Gestion et institutionnalisation

La présence du gestionnaire s'est avérée indispensable et ses interventions ont aidé à rendre les recherches fécondes, éviter les dispersions, relancer la résolution. Son rôle est d'inciter les élèves à généraliser, à étudier d'autres cas, à argumenter leurs propos. Le fait qu'il soit extérieur à la classe ou non importe peu, c'est surtout sa « position de chercheur » qui le distingue, le fait qu'il accepte de ne pas toujours tout savoir du problème et sa capacité à remettre en cause les propos des élèves sans pour autant leur fournir des réponses qui sont primordiaux.

Troisième partie

Une autre SiRC de type Nim : le jeu du chocolat

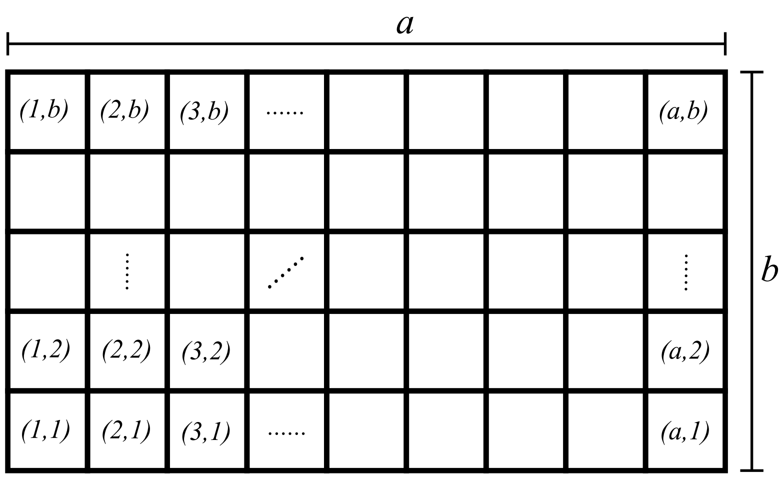
Introduction

Le jeu du chocolat est le jeu combinatoire impartial de type Nim suivant :

> *Supposons que l'on a une barre de chocolat de taille $a \times b$, avec a et b des nombres entiers. Le deux joueurs, à tour de rôle, cassent la barre en deux suivant une ligne horizontale ou verticale, puis mangent. Mais l'un de carrés est en savon. Le gagnant est le joueur qui évite de manger le carré en savon.*

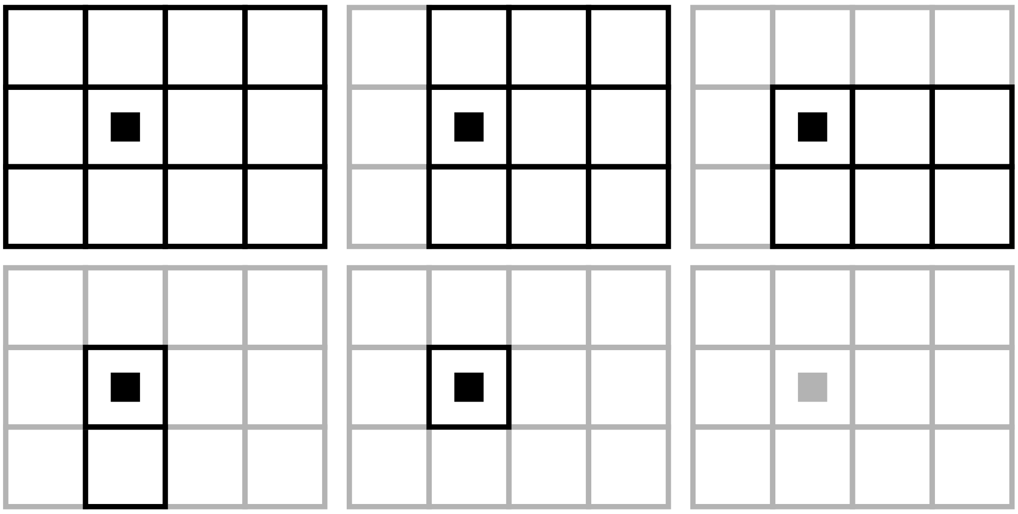
Tout d'abord, il nous faudra un système pour décrire les positions du jeu. Bien évidement, le chocolat est de taille $a \times b$, ce qui est décrit par les couple des entiers (a, b), mais il nous faut un système pour dénoter les carrés pour décrire la localisation du carré en savon dans la barre.

On va dénoter les carrés de la barre de chocolat de façon cartésienne par des paires ordonnées (i, j) comme dans la figure suivante :



Avec cette convention, le carré en savon sera dénotée (s, t). Dans les figures, nous dénotons le carré en savon par un petit carré noir comme dans l'exemple en bas. Nous étudierons en particulier le cas où le carré en savon se trouve dans le coin inférieur gauche, c'est-à-dire, quand le carré en savon est en position $(s, t) = (1, 1)$.

Exemple XIII.1. Les tours successifs d'une partie du jeu du chocolat à partir d'une barre de taille 4×3 avec le carré en savon dans l'angle inférieur gauche $(s, t) = (2, 2)$ sont :



Ici, comme dans le cas du jeu d'Euclide, la couleur gris claire dénote la portion du chocolat qui a déjà été mangée. Puisque cette partie compte 5 tours (la première figure correspond à la position de départ), c'est le premier joueur qui est amené à manger le dernier carré en savon et perd la partie.

CHAPITRE XIV

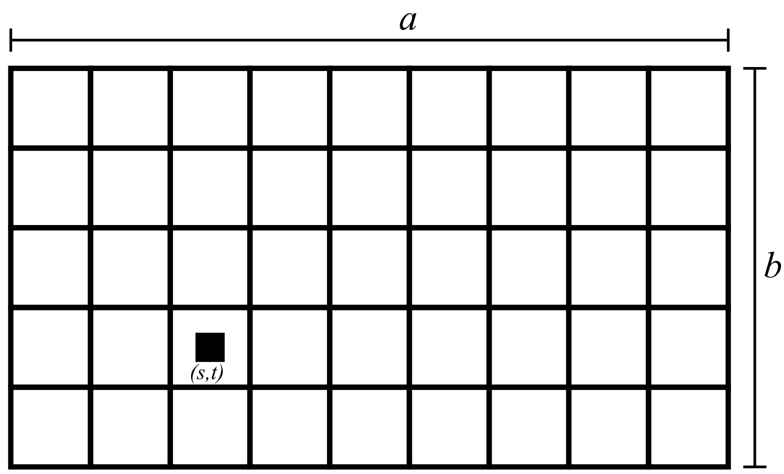
Analyse mathématique du jeu du chocolat

Dans ce chapitre nous faisons l'analyse mathématique du jeu du chocolat.

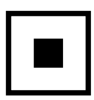
XIV.1. Description des positions du jeu

Comme on l'a expliqué antérieurement, pour les jeux combinatoires impartiaux il est plus simple de faire l'analyse mathématique en fonction des positions gagnantes et perdantes sans faire allusion aux joueurs.

Dans tout le chapitre, la position P du jeu du chocolat sera donnée par $P = (a, b, s, t)$, avec a, b, s, t des nombres naturels tels que $s \leq a$ et $t \leq b$, correspondant à une barre de chocolat de taille $a \times b$ et dont le carré en savon est situé en position (s, t).



Nous dénotons aussi par $P = (0, 0, 0, 0)$ l'unique position finale, donc de longueur zéro, du jeu où il ne reste plus de chocolat. La position $P = (1, 1, 1, 1)$ correspond à



ce qui est l'unique position de longueur 1 du jeu.

Notons que l'unique position de longueur zéro $(0, 0, 0, 0)$ est gagnante puisqu'elle correspond au cas où il ne reste plus de chocolat et donc où le carré en savon vient d'être mangé par le joueur précédent. Le fait que l'unique position de longueur zéro soit gagnante implique que le jeu du chocolat est dans la convention misère.

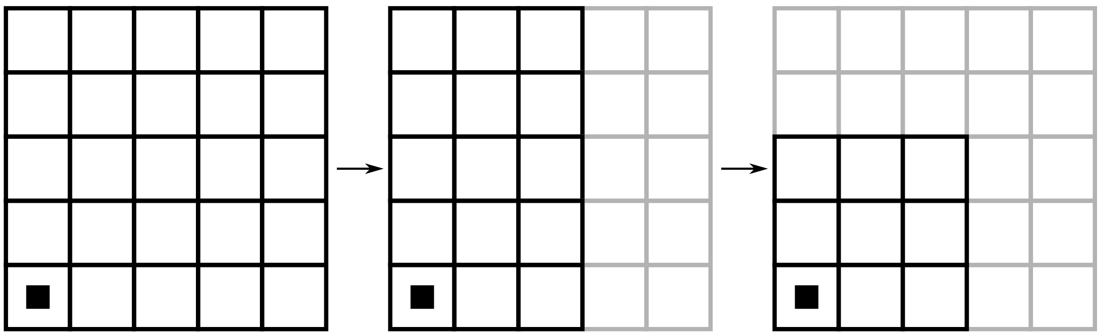
Il est facile de voir que l'unique position de longueur zéro $(0, 0, 0, 0)$ est une option de chaque position de longueur positive (elle correspond à manger tout le chocolat d'un seul coup). Si le jeu est joué en convention normale, où le gagnant est le joueur qui mange le carré en savon, le premier joueur est toujours le gagnant puisque $(0, 0, 0, 0)$ est l'une de ses options.

Nous remarquons aussi que la longueur d'une position quelconque $P = (a, b, s, t)$ est $a+b-1$ ce qui est obtenu en coupant des morceaux de longueur ou largeur 1 à chaque tour.

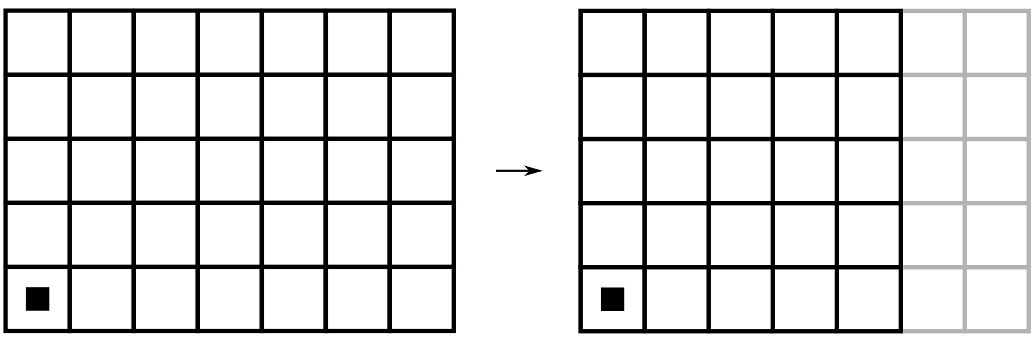
XIV.2. Le jeu du chocolat avec le carré en savon dans un coin

Avant de passer au cas général du jeu du chocolat, nous allons étudier plusieurs cas particuliers. Dans cette section nous allons étudier le cas particulier du jeu du chocolat où la barre de chocolat est quelconque, mais où la carré en savon est toujours dans un coin de la barre de chocolat. Par symétrie, nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que le carré en savon est dans le coin inférieur gauche.

Dans ce cas, toutes les positions non finales sont de la forme $P = (a, b, 1, 1)$ avec a et s des nombres naturels positifs. Nous dirons qu'une position est carrée si la barre de chocolat est carrée, c'est-à-dire $P = (a, b, 1, 1)$ est carrée si $a = b > 0$. Les positions carrées sont perdantes. En effet, le deuxième joueur a la stratégie gagnante d'imiter ce que le premier joueur fait dans l'autre dimension pour laisser de nouveau au premier joueur une position carrée.



Si une position n'est pas carrée, le premier joueur a une stratégie gagnante puisqu'il peut toujours rendre une position symétrique au deuxième joueur en coupant le chocolat de telle sorte que le morceau qui reste est carré.



Cette remarque nous permet de conjecturer le théorème suivant dont nous donnons une preuve rigoureuse.

THÉORÈME XIV.1. *La position $P = (a, b, 1, 1)$ est perdante si et seulement si elle est carrée, c'est-à-dire si et seulement si $a = b > 0$.*

DÉMONSTRATION. Nous donnerons, comme d'habitude, une preuve par récurrence sur la longueur de P qui correspond à $a + b - 1$. L'unique position de longueur zéro est $P = (0, 0, 0, 0)$ qui est gagnante. L'unique position de longueur un est $P = (1, 1, 1, 1)$ qui est perdante et carrée. Donc, le théorème est vrai dans ces deux cas.

Supposons maintenant que le théorème est vrai pour toute position de longueur plus petite que la longueur de P. Nous allons montrer que le théorème est aussi vrai pour la position $P = (a, b, 1, 1)$.

Si $a = b$, alors la position $P = (a, b, 1, 1)$ est carrée. Il est clair qu'aucune des options n'est carrée puisqu'on doit couper la barre du chocolat selon l'un des ses coté. Comme toutes les options de P, ses option sont de longueur plus petite que la longueur de P. Il s'ensuit par l'hypothèse de récurrence que toutes les options de P sont gagnantes, d'où P est perdante. Donc, le théorème est vrai dans ce cas.

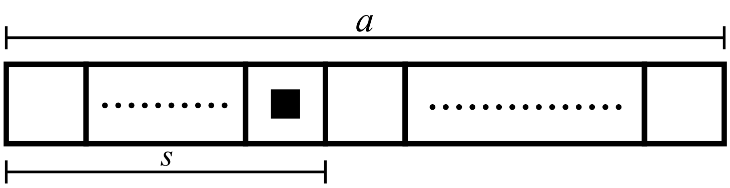
Si $a \neq b$, quitte à retourner la barre de chocolat, nous pouvons supposer que $a > b$. Alors, $(b, b, 1, 1)$ est une option carrée de P. Puisque $b + b < a + b$, Par l'hypothèse de récurrence, la position $(b, b, 1, 1)$ est une option perdante de P, alors P est gagnante. Ceci conclut la preuve du théorème. $\square$

XIV.3. Le jeu de chocolat dans une bande

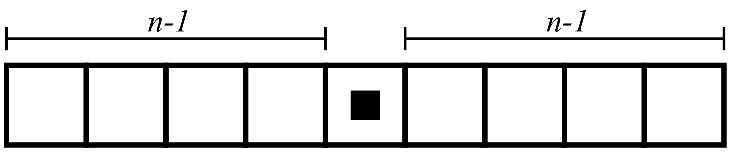
Pour avancer dans notre quête de déduire le cas général du jeu du chocolat, nous allons étudier dans cette section le cas où la barre de chocolat est une bande et le carré en savon est dans une position quelconque. On traitera trois cas correspondants c'est-à-dire le cas où la taille du chocolat est $a \times 1$, $a \times 2$ et $a \times 3$.

XIV.3.1. Une bande de taille $a \times 1$

Dans ce cas, toutes les positions non finales sont de la forme $P = (a, 1, s, 1)$ avec a et s des nombres naturels positifs tels que $s \leq a$.

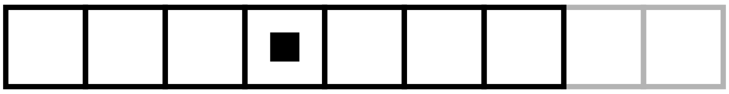


Soit n un nombre naturel positif et soit $P = (2n - 1, , 1, n, 1)$. Cette position correspond au cas suivant que nous appelerons bande symétrique



où il y a le même nombre des carrés de chaque coté du carré en savon. On remarque que cette position est perdante puisque le joueur qui joue deuxième a la stratégie gagnante d'imiter ce que le premier joueur fait, jusqu'à qu'il ne reste plus que le carré en savon qui devra donc être mangé par le premier joueur.

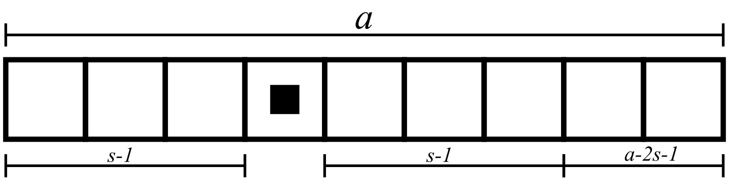
Remarquons qu'une position quelconque $P = (a, 1, s, 1)$ est de la forme bande symétrique si et seulement si $a = 2s - 1$. De plus, toute position qui n'est pas une bande symétrique a une position symétrique dans ces options correspondant à couper le chocolat du coté le plus long afin qu'il soit égal au plus court.



Cette remarque nous permet de conjecturer le théorème suivant dont nous donnons une preuve rigoureuse.

THÉORÈME XIV.2. *La position $P = (a, 1, s, 1)$ est perdante si et seulement si elle est une bande symétrique, c'est-à-dire, si et seulement si $a = 2s - 1$.*

DÉMONSTRATION. Remarquons que, quitte à retourner la barre de chocolat, nous pouvons supposer que la portion du chocolat à droite du carré en savon n'est pas plus petite que celle à gauche. Ceci correspond à supposer que $a \geq 2s - 1$.

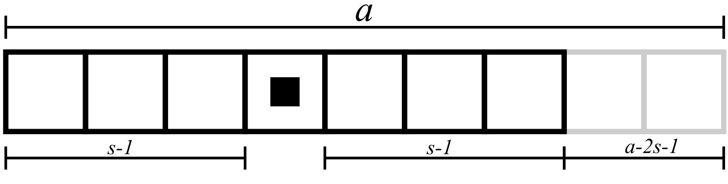


Nous ferons une preuve par récurrence sur la longueur de la position qui correspond à la valeur de a. Si $a = 0$ alors l'unique position possible est $P = (0, 0, 0, 0)$ qui est gagnante. Si $a = 1$ l'unique position possible est $P = (1, 1, 1, 1)$ qui est perdante. Donc, le théorème est vrai pour ce deux cas.

Supposons maintenant que le théorème est vrai pour toute position de longueur plus petite que a. Nous allons montrer qu'il est de même pour $P = (a, 1, s, 1)$. Rappelons que, sans perte de généralité, on s'est ramené au cas où $a \geq 2s - 1$.

Si $a = 2s - 1$, alors la position $P = (a, 1, s, 1)$ est symétrique. Il est claire qu'aucune de ses options n'est symétrique puisqu'on ne peut couper la barre du chocolat que d'un seul coté. Comme toutes les options de P ses options sont de longueur plus petite que a. Il s'ensuit, par l'hypothèse de récurrence, que toutes les options de P sont gagnantes, et donc que P est perdante. Par conséquent, le théorème est vrai dans ce cas.

Si $a > 2s - 1$, alors $(2s - 1, 1, s, 1)$ est une option de P qui correspond à couper un morceau de longueur $a - 2s - 1$ du coté droit de la barre de chocolat



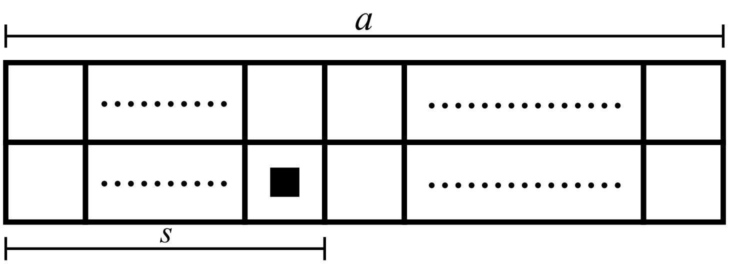
Puisque la longueur de $(2s-1,1,s,1)$ est $2s-1<a$, par l'hypothèse de récurrence, $(2s-1,1,s,1)$ est donc une option perdante de P, alors P est gagnante. Ceci conclut la preuve de notre théorème. □

Nous remarquons que cette preuve est exactement la même preuve que dans le cas du carré en savon en bas à gauche.

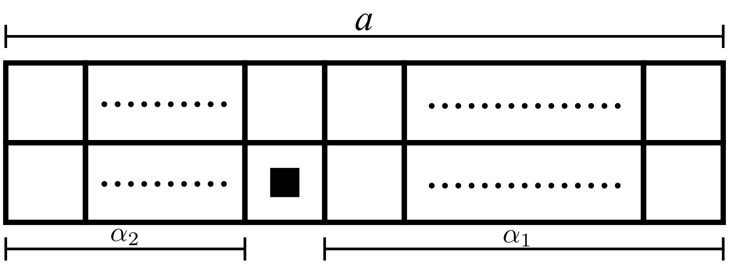
XIV.3.2. Une bande de taille $a \times 2$

Par symétrie, quitte a retourner la barre de chocolat, on peut supposer que le carré en savon se trouve en bas. Dans ce cas, toutes les positions non finales sont de la forme $P=(a,1,s,1)$ ou $P=(a,2,s,1)$ avec a et s des nombres naturels positifs tels que $s \leq a$.

Les positions perdantes de la forme $P=(a,1,s,1)$ ont déjà été déterminées dans la section précédente, on se contentera alors de caractériser les positions perdantes de la forme $P=(a,2,s,1)$.



On définit le deux quantités $\alpha_1 = a-s$ et $\alpha_2 = s-1$ qui correspondent au nombre de carrés de chocolat qui restent de chaque coté du carré en savon. Encore, quitte à retourner la barre de chocolat, nous pouvons supposer que $\alpha_1 \geq \alpha_2$.



Avec ces définitions, on peut énoncer le théorème suivant.

Théorème XIV.3. *La position $P=(a,2,s,1)$ avec $\alpha_1 \geq \alpha_2$ est perdante si et seulement si $\alpha_1 = \alpha_2 + 1$ et α_2 est pair.*

Démonstration. Comme d'habitude, nous faisons une preuve par récurrence sur la longueur de P qui est $\alpha_1+\alpha_2+2$. Si $\alpha_1=\alpha_2=0$ le théorème est vrai parce que la position $(1,2,1,1)$ est gagnante.

Soit $P=(a,2,s,1)$ et supposons que le théorème est vrai pour toutes les positions de longueur plus petite que la longueur de P.

Si $\alpha_1 = \alpha_2 + 1$ et α_2 est pair, alors les options de P sont $(a, 1, s, 1)$, $(a - i, 2, s, 1)$ et $(a - j, 2, s - j, 1)$ avec $i \leq \alpha_1$ et $j \leq \alpha_2$. Tous ces positions sont gagnantes par le théorème XIV.2 et l'hypothèse de récurrence. Donc P est perdante.

Si $\alpha_1 = \alpha_2$, alors P a l'option $P' = (a, 1, s, 1)$ qui est perdante par le théorème XIV.2. Donc P est gagnante.

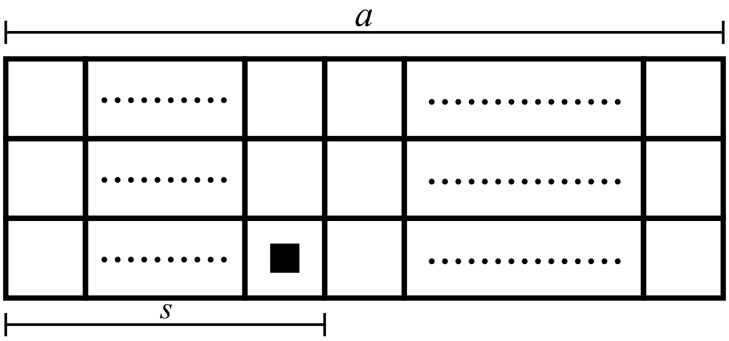
Si α_2 est impair, alors P a l'option $P' = (2\alpha_2, 2, s, 1)$ qui est perdante par l'hypothèse de récurrence (il faut retourner la tablette pour que P' soit dans la forme du théorème). Donc P est gagnante.

Si α_2 est pair et $\alpha_1 > \alpha_2 + 1$, alors P a l'option $P' = (2\alpha_2 + 2, 2, s, 1)$ qui est perdante par l'hypothèse de récurrence. Donc P est gagnante. Ceci conclut la preuve. □

XIV.3.3. Une bande de taille $a \times 3$

Dans cette situation, on se restreint à étudier le cas particulier où le carré en savon est en bas. Dans ce cas, toutes les positions non finales sont de la forme $P = (a, 1, s, 1)$, $P = (a, 2, s, 1)$ ou $P = (a, 2, s, 1)$ avec a et s des nombres naturels positifs tels que $s \leq a$.

Les positions perdantes de la forme $P = (a, 1, s, 1)$ et $P = (a, 2, s, 1)$ ont déjà été déterminées dans les sections précédentes, on se contentera alors de caractériser les positions perdantes de la forme $P = (a, 3, s, 1)$.



On définit comme avant, le deux quantités $\alpha_1 = a - s$ et $\alpha_2 = s - 1$ qui correspondent à la quantité de carrés de chocolat qui restent de chaque coté du carré en savon. Encore par symétrie, on peut supposer que $\alpha_1 \geq \alpha_2$. Avec ces définitions, on peut énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME XIV.4. *La position $P = (a, 3, s, 1)$ avec $\alpha_1 \geq \alpha_2$ est perdante si et seulement si $\alpha_1 = \alpha_2 + 2$ et α_2 est congruent à 0 ou 1 modulo 4.*

DÉMONSTRATION. Une preuve par récurrence de ce fait est possible, mais très longue et requiert l'analyse de plusieurs cas différentes. Le théorème suit directement du Théorème XIV.5 dans la section suivante. □

XIV.4. Analyse mathématique du cas général

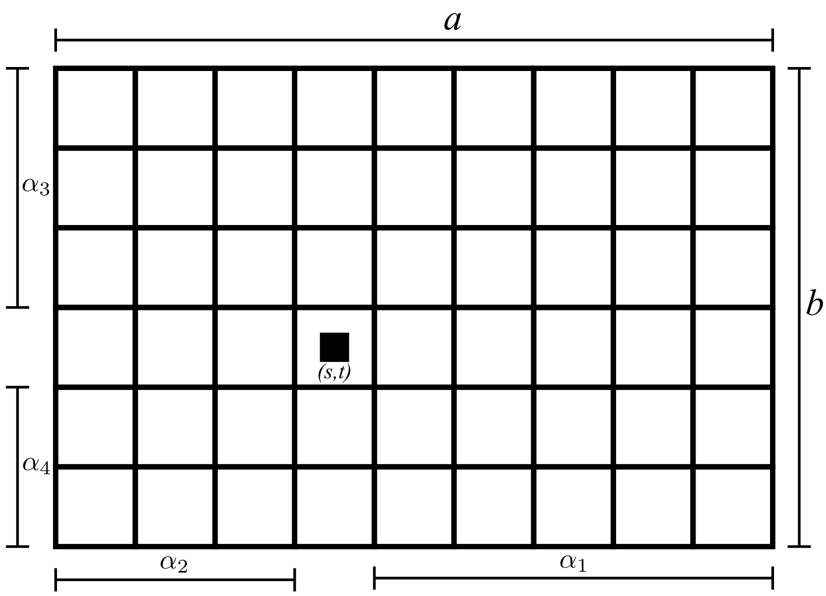
Dans cette section nous faisons l'analyse mathématique du jeu du chocolat en général.

Soit $P = (a, b, s, t)$, avec a, b, s, t des nombres naturels tels que $s \leq a$ et $t \leq b$ une position quelconque du jeu du chocolat. Nous rappelons que P correspond à la position où la barre de chocolat est de taille $a \times b$ et le carré en savon est le carré (s, t).

Pour notre analyse, nous définissions les quatre valeurs suivantes.

$$\alpha_1 = a - s, \quad \alpha_2 = s - 1, \quad \alpha_3 = b - t \quad \text{et} \quad \alpha_4 = t - 1$$

qui correspondent au nombre des carrés de chocolat qu'il y a à droite, à gauche, en haut et en bas du carré en savon, respectivement.



Il est facile de voir que la position $P = (a, b, s, t)$ est uniquement déterminée par les quatre valeurs α_1, α_2, α_3 et α_4 puisque

$$a = \alpha_1 + \alpha_2 + 1, \quad b = \alpha_3 + \alpha_4 + 1, \quad s = \alpha_2 + 1, \quad \text{and} \quad t = \alpha_4 + 1\,.$$

Par la règle du jeu, il est clair que, à chaque tour, seulement l'une des quatre valeurs α_1, α_2, α_3 et α_4 diminue d'un nombre positif. Cette formulation du jeu nous fait penser au jeu de Nim classique à quatre tas avec α_1, α_2, α_3 et α_4 objets respectivement.

De plus, la position finale du jeu de Nim classique n'est pas finale pour notre jeu. En effet, lors que α_1, α_2, α_3 et α_4 valent tous zéro, cela correspond à la position du jeu $P = (1, 1, 1, 1)$ qui est l'unique position perdante de longueur un où il ne reste qu'un seul coup possible à jouer qui est de prendre le carré en savon et perdre la partie.

Cela nous fait penser à une ressemblance avec le jeu de Nim classique en convention normale, même si le jeu du chocolat est en convention misère. D'après cette analyse nous conjecturons le théorème suivante :

Théorème XIV.5. *La position $P = (a, b, s, t)$ dans le jeu du chocolat est perdante si et seulement si*

$$\alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_3 \oplus \alpha_4 := (a - s) \oplus (s - 1) \oplus (b - t) \oplus (t - 1) = 0.$$

Démonstration. La formulation du théorème a un problème de définition pour la position $P = (0,0,0,0)$ puisque dans ce cas, $\alpha_2 = \alpha_4 = -1$ et la somme binaire n'est définie que pour des nombres naturels. Pour remédier cette mauvaise définition, nous définissons $0 \oplus (-1) \oplus 0 \oplus (-1) = 1$. Ce qui est bien d'accord avec notre théorème puisque la position finale $P = (0,0,0,0)$ du jeu du chocolat est gagnante.

Comme d'habitude, nous faisons une preuve par récurrence sur la longueur de la position P qui est $a + b - 1$.

Toute d'abord, le théorème est vrai pour l'unique position de longueur zéro $P = (0,0,0,0)$ par la définition faite avant cette preuve. Le théorème est aussi vrai pour l'unique position de longueur un $P = (1,1,1,1)$.

Supposons maintenant que le théorème est vrai pour toute position de longueur plus petite que P. Nous allons montrer que le théorème est aussi vrai pour la position $P = (a,b,s,t)$.

Soit $P' = (a',b',s',t')$ une option de P et soit $\alpha'_1 = a' - s'$, $\alpha'_2 = s' - 1$, $\alpha'_3 = b' - t'$ et $\alpha'_4 = t' - 1$. Puisque P' est une option de P les correspondantes valeurs de α_i et α'_i coïncident sauf pour un valeur de i. Si $\alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_3 \oplus \alpha_4 = 0$, alors $\alpha'_1 \oplus \alpha'_2 \oplus \alpha'_3 \oplus \alpha'_4 \neq 0$ par le Lemme 4.10 (i) dans le Chapitre 1. Donc toutes les options de P sont gagnantes d'après l'hypothèse de récurrence. Ceci montre que la position P est perdante. D'où le théorème suit dans ce cas.

Si $\alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_3 \oplus \alpha_4 \neq 0$, alors par le Lemme 4.10 (i) dans le Chapitre 1. il existe une position P' avec $\alpha'_1 \oplus \alpha'_2 \oplus \alpha'_3 \oplus \alpha'_4 \neq 0$. Cette option est perdante par l'hypothèse de récurrence. Donc P est gagnante ce qui montre le théorème. $\square$

Nous remarquons la similitude de cette preuve avec la preuve de la caractérisation des positions perdantes pour le jeu de Nim à n tas dans le Théorème 4.9 dans le Chapitre 1.

XIV.4.1. Stratégie gagnante

Comme dans le cas du Nim, le théorème précédent et sa preuve nous permet de donner une stratégie gagnante pour le jeu du chocolat. Soit $P = (a,b,s,t)$ une position gagnante quelconque dans le jeu du chocolat.

1. Calculer la Nim-somme $(a - s) \oplus (s - 1) \oplus (b - t) \oplus (t - 1)$ du nombre de carrés de chocolat à droite, à gauche, en bas et en haut du carré en savon. Cette somme n'est pas nulle puisque la position est gagnante.
2. Identifier un des cotés de la barre du chocolat (à droite, à gauche, en bas et en haut du carré en savon) tel que la valeur $(a - s)$, $(s - 1)$, $(b - t)$ et $(t - 1)$ des nombre des carrés de ce coté a un 1 dans la position du bit le plus significatif de la Nim-somme calculé dans l'étape précédente.
3. Couper la barre de chocolat du coté identifié dans l'étape précédente pour réduire le nombre de carrés de ce coté pour qu'il comporte autant de carrés que la Nim-somme du nombre de carrés de chocolat de tous les autres cotés du carré en savon.

Pour mieux comprendre cette stratégie gagnante, a continuation nous faisons un exemple du jeu avec une barre de chocolat de taille 8×6 avec le carré en savon en position $(3,3)$.

Il faut développer cet exemple à faire.

XIV.5. Interprétation en fonction du jeu de Nim

Dans la section précédente, nous avons vu que la stratégie gagnante du jeu du chocolat a une ressemblance avec le jeu de Nim à quatre tas. Dans cette section, nous développons cette idée pour montrer l'équivalence du jeu du chocolat avec le jeu de Nim classique.

Toute d'abord, l'obstacle le plus importante pour montrer une équivalence est que notre jeu est en convention misère et la ressemblance est avec le jeu de Nim classique à quatre tas en convention normale.

Pour résoudre ce problème, nous analysons la fin d'une partie du jeu du chocolat. Il y a l'unique position finale $P = (0, 0, 0, 0)$ qui est gagnante et une option de chaque autre position. Cependant, P est gagnante et finale, et donc aucun joueur (qui joue sérieusement pour gagner) la choisira en tant qu'il le peut puisque il aura perdu.

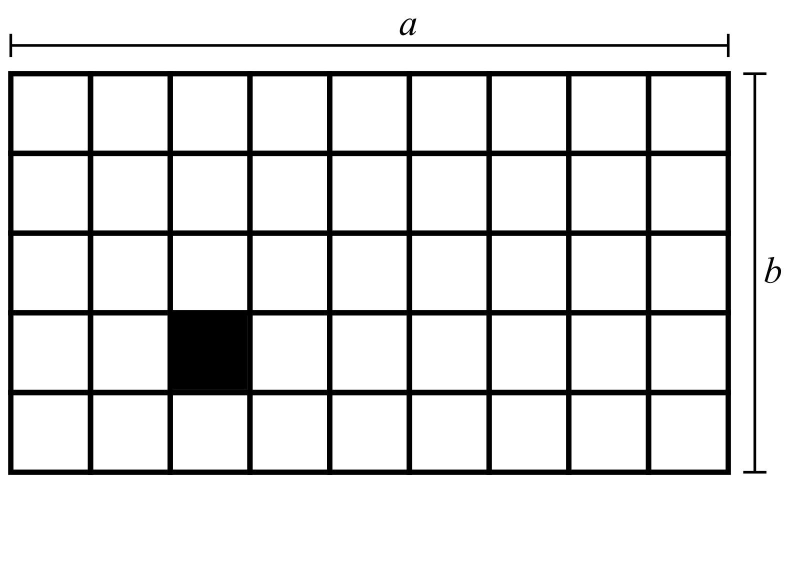
De plus, il n'y qu'une seule position de longueur un $P = (1, 1, 1, 1)$. Cette position du jeu est perdante. De l'analyse précédente il suit que toute partie sérieuses du jeu du chocolat doit passer par la position $P = (1, 1, 1, 1)$.

On peut donc éliminer la position $P = (0, 0, 0, 0)$ du jeu du chocolat et designer la position $P = (1, 1, 1, 1)$ comme l'unique position finale du jeu qui, dans ce cas, est perdante. nous avons modifié un peut le jeu du chocolat pour le convertir dans un jeu en convention normale.

On peut même donner une version concrète du jeu du chocolat qui correspond à cette modification. L'énoncé de ce jeu du chocolat modifié est :

> *Supposons que l'on a une barre de chocolat de taille $a \times b$, avec a et b des nombres entiers. Le deux joueurs, à tour de rôle, coupent la tablette en deux suivant une ligne horizontale ou verticale, puis mangent. Mais l'un de carrés est collé à la table et ne peut pas être mangé. Le gagnant est le joueur qui mange en dernier.*

Pour une position $P = (a, b, s, t)$, le jeu est décrit est maintenant comme dans la figure suivante, où le carré en noir correspond au carré qui est collé à la table.



Puisque le carré noir ne peut pas être pris, il est clair depuis la règle du jeu que, à chaque tour, l'une des quantités suivantes

$$\alpha_1 = a - s, \quad \alpha_2 = s - 1, \quad \alpha_3 = b - t \quad \text{et} \quad \alpha_4 = t - 1$$

diminue d'un nombre positif.

Le jeu se poursuit ainsi jusqu'à ce que les valeurs de α_i soient toutes zéro. Cela correspond à l'unique position finale perdante $P = (1, 1, 1, 1)$ où il ne reste que le carré collé à la table.

Dans cette formulation, il est évident que le jeu de chocolat avec cette petite modification est équivalente au jeu de Nim à quatre tas de tailles $\alpha_1 = a - s$, $\alpha_2 = s - 1$, $\alpha_3 = b - t$ et $\alpha_4 = t - 1$.

Puisque le positions perdantes pour le jeu du chocolat et le jeu du chocolat modifié comme dans cette section coïncident, l'analyse précédente fournit une autre preuve indirecte de notre caractérisation des positions perdantes dans le jeu du chocolat dans la section précédente.

CHAPITRE XV

Analyse didactique du jeu du chocolat

Le jeu du chocolat partage plusieurs caractéristiques avec le jeu d'Euclide. En effet, tous les deux sont des réalisation géométriques des jeux de type Nim. De ce fait, l'analyse didactique a aussi plusieurs points en commun avec celui du jeu d'Euclide. Ici, nous signalons les points communs sans répéter l'analyse complète et nous nous intéresserons plus particulièrement aux points où les deux analyses diffèrent.

XV.1. Les supports physiques possibles pour la dévolution du jeu

Comme dans le cas du jeu d'Euclide, nous pouvons aussi choisir quatre types de support physique pour jouer au jeu du chocolat.

- avec papier–crayon en traçant les rectangles et hachurant les carrés joués,
- sur un tableau ou avec papier–crayon en traçant les rectangles et effaçant les carrés joués,
- sur des rectangles en carton en coupant les carrés joués, parmi d'autres.
- sur l'ordinateur.

XV.2. Différentes représentations où modélisations du jeu

XV.2.1. Une représentation réaliste du jeu

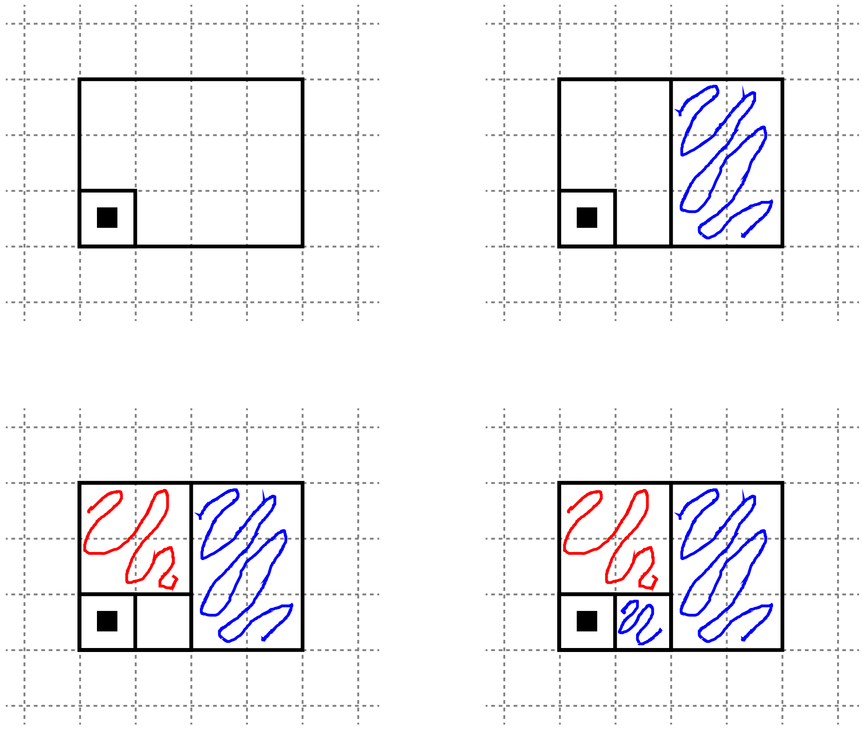
Comme dans le jeu d'Euclide, le premier contact avec le jeu sera probablement avec une représentation réaliste du jeu. Dans ce cas, nous dessinerons la barre de chocolat avec son carré en savon à l'échelle avec un support physique adapté, soit papier à carreaux, soit une règle, parmi d'autres.

Dans ce jeu le problème des représentations réalistes apparaît aussi, par exemple si nous voulons jouer au jeu avec une tablette de chocolat qui a une des dimensions beaucoup plus large que l'autre, par exemple, une barre de chocolat de taille 100×1 pose déjà des problèmes pour faire une représentation réaliste.

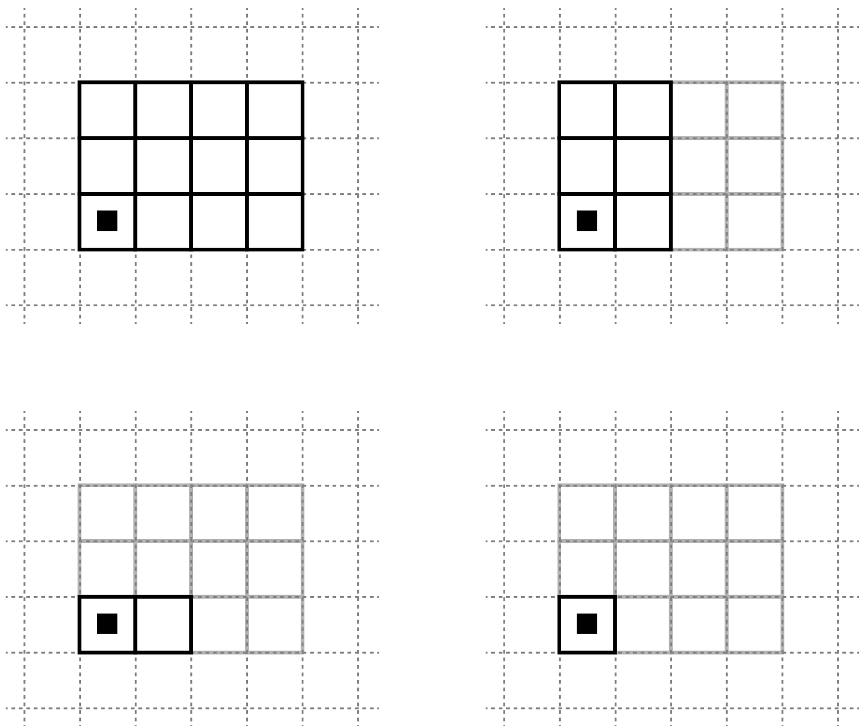
A différence du jeu d'Euclide, où il est difficile de jouer sans rencontrer le problème avec les représentations réalistes, il est possible de jouer au jeu du chocolat sans jamais faire face à des barres de chocolat où une représentation réaliste n'est pas possible.

XV.2.1.1. *Quels sont le dessins prévisibles ?*

Pour une représentation réaliste sur papier à carreaux où les joueurs jouent en hachurant la partie prise du chocolat, les différents coups d'une partie à partir de la position de départ $P = (4, 3, 1, 1)$ pourraient être :



La même partie avec une représentation sur papier à carreaux en traçant la barre du chocolat avec tous les carrés de chocolat et effaçant les carrés joués est (la couleur gris claire représente la trace sur papier après effacer) :



Parmi ce deux type de représentations réalistes, la première permet de passer aux niveaux d'abstraction supérieurs plus facilement puisque les différents coups restent sur le papier et peuvent être analysés à posteriori.

XV.2.2. Premier niveau d'abstraction

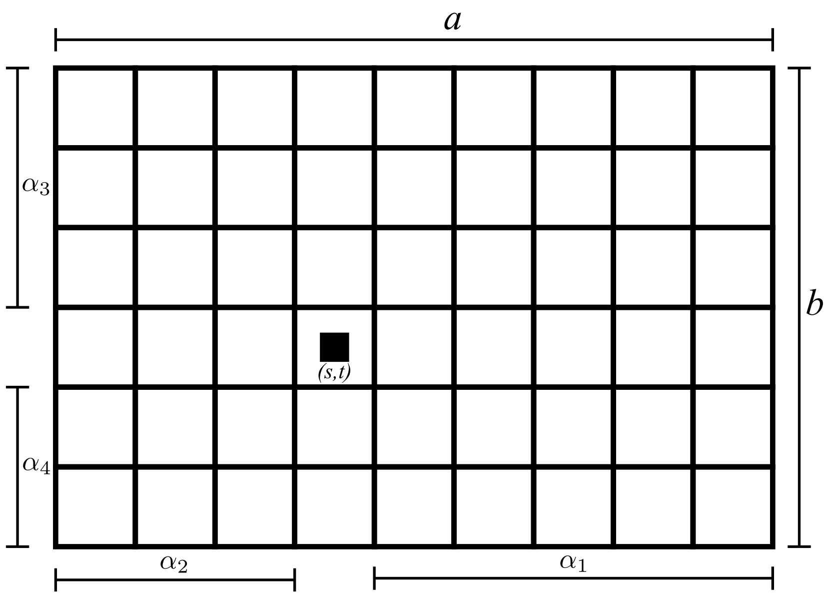
Le premier niveau d'abstraction consiste, comme dans le cas du jeu d'Euclide, à jouer le jeu dans un rectangle qui représente une barre de chocolat générique qui n'a pas nécessairement un dimension précise. À chaque coup, la dimension de la barre de chocolat change en fonction du coup.

XV.2.2.1. *Quels sont le dessins prévisibles ?*

Le type de dessins à ce niveau d'abstraction sont les mêmes que dans le cas d'une représentation réaliste sans que pour autant les dimensions du rectangle coïncident exactement avec les dimensions de la barre de chocolat originale.

XV.2.3. Deuxième niveau d'abstraction : le chocolat a disparu

Une fois passé au premier niveau d'abstraction, il est facile de se rendre compte qu'une position du jeu du chocolat est uniquement déterminée par les paramètres a, b, s, et t dans la figure suivante.

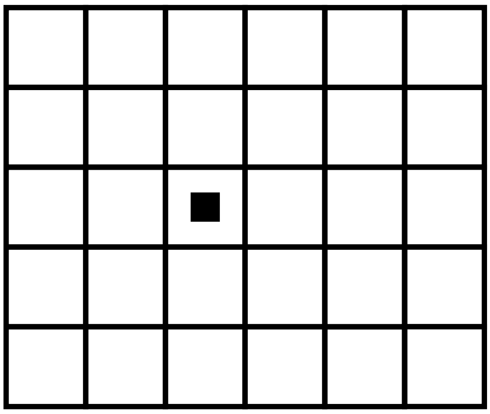


Le deuxième niveau d'abstraction est atteint lorsque nous nous rendons compte que nous pouvons prendre les paramètres α_1, α_2, α_3 et α_4 qui eux aussi déterminent uniquement une position du jeu. De plus, la règle du jeu fait réduire seulement l'un des paramètres α_i à la fois, alors le jeu est équivalent au jeu de Nim à quatre tas. A ce point là, nous pouvons oublier le chocolat et jouer uniquement avec le quadruple des nombres entiers $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$.

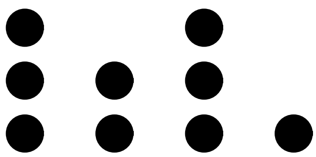
XV.2.3.1. *Quels sont le dessins prévisibles ?*

A ce niveau d'abstraction, les élèves ont déjà compris que toute l'information nécessaire pour jouer au jeu du chocolat est contenue dans le quadruple $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ et que la règle du jeu correspond au jeu de Nim. Nous avons dénoté ce jeu par $*\alpha_1 + *\alpha_2 + *\alpha_3 + *\alpha_4$.

Comme dans le cas du jeu d'Euclide, il est tout a fait possible que les élèves préfèrent garder une représentation «géométrique » pour mieux préserver l'aspect ludique du jeu. Pour ce fait, ils peuvent prendre des tas qui représentent chacun des nombres α_i. Par exemple, à partir de la position de départ par $P = (5, 6, 2, 3)$ qui correspond à la figure suivante.



Il est possible qu'ils représentent cette partie par :



XV.2.4. Les difficultés envisageables

Dans le jeu du chocolat aussi, le passage entre les différents niveaux peut ne pas être évident, donc nous pouvons prévoir des difficultés des élèves dans les passages.

1. Dans le passage entre la représentation réaliste et le premier niveau d'abstraction, il faut :
   (a) Accepter de dessiner des carrés qui ne sont pas des carrés.
   (b) Laisser tomber l'exactitude des unité de mesure
   (c) Mettre des nombres qui ne correspondent pas aux mesures des rectangles qui se dessinent.
   (d) Et que à chaque changement de taille de carrés il y a des changements de échelle implicite.
2. Dans le passage entre le premier niveau d'abstraction et le deuxième niveau d'abstraction.
   (a) Il faut repérer que le quadruple $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ contient toute l'information d'une position.
   (b) Laisser tomber le cadre géométrique.

XV.3. Étude des cas particuliers

Dans l'analyse mathématique, nous avons présenté plusieurs cas particuliers qui peuvent être étudiés pour trouver des pistes de solution pour le cas général. En particulier, les cas du jeu du chocolat dans une bande permet de saisir toute la complexité du problème en augmentant la longueur du rectangle.

Comme nous l'avons vu dans l'analyse mathématique, déjà la caractérisation des positions perdante et positions gagnantes du jeu du chocolat pour le cas d'une bande de longueur 2 qui correspondent aux positions $P = (a, 2, s, 1)$ avec $a \geq s$ n'est pas triviale du tout.

Nous voulons remarquer que l'étude de cas particuliers d'une position $P = (a, 1, s, 1)$ d'une bande de longueur 1 et du cas particulier $P = (a, b, 1, 1)$ avec le carré de savon dans un coin ont tous les deux été analysés par des argument de symétrie. En effet, avec les définitions du quadruple $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, il est clair que les deux cas sont équivalents où les symétries sont exprimés par $\alpha_1 = \alpha_2$ dans le premier cas et par $\alpha_1 = \alpha_3$ dans le deuxième. Avec ce notation, même les preuves des deux cas deviennent identiques quitte a remplacer α_2 par α_3.

Nous faisons l'hypothèse que lors de séances expérimentales, les élèves pourront trouver la relation entre les deux cas particuliers analysés par symétrie que nous venons d'expliquer.

XV.4. Savoirs et savoir-faire en jeu dans la situation

XV.4.1. Savoirs notionnel

Par rapport aux savoirs notionnels, ceux qui peuvent apparaître en fonction de la démarche choisie pour s'adresser au problème sont les mêmes considérées pour le jeu de Nim en III :

- Propriétés des nombres entiers : reconnaître différents usages des nombres tels que compter, ordonner, grouper et classer ; développer et appliquer des concepts de la théorie des nombres reliés aux nombres premiers, aux facteurs, aux multiples et à la division euclidienne ; comprendre et identifier des classes d'équivalence dans les entiers modulo p.
- En classification et modélisation : créer et étendre des modèles de plusieurs façons et décrire leurs propriétés ; appliquer des modèles pour faire des prédictions et résoudre des problèmes ; et appliquer des modèles pour identifier des relations dans le système numérique.
- Recensement et interprétation des données : dans des jeux de type Nim nous avons la possibilité de collecter, organiser et expliquer les données obtenues à travers les diverses expérimentations.

En plus, la notion de symétrie est essentielle dans l'analyse des stratégies gagnantes pour les cas particuliers d'une barre de chocolat de taille $a \times 1$ et d'une barre rectangulaire avec le carré de savon dans un coin.

XV.4.2. Savoir-faire propres d'un jeu combinatoire

Les savoir-faire propres d'un jeu combinatoire ont déjà été étudiés pour le jeu d'Euclide, ils correspondent à :

- Une stratégie et sa construction.
- Stratégie gagnante.

- Position gagnante.
- Position perdante.

XV.4.3. Savoir-faire de la activité mathématique en jeu dans cette situation

La situation du jeu du chocolat met en place aussi les savoir-faire propres de l'activité mathématique.

XV.4.3.1. *La modélisation ou changement de cadre*

Comme pour le jeu d'Euclide, le jeu du chocolat est aussi donné dans un cadre purement géométrique. Cependant, pour trouver une stratégie gagnante il faut transporter le jeu dans un cadre arithmétique. Cette réinterprétation du jeu est un acte de modélisation d'un cadre mathématique vers un autre.

XV.4.3.2. *Formulation des conjectures*

L'apparition des conjectures est encore plus difficile dans le jeu du chocolat que dans le jeu d'Euclide. Ceci découle du fait que le jeu se modélise comme le jeu de Nim à quatre tas où la stratégie gagnante dépend du fait de repérer la Nim-somme comme caractérisation des positions perdantes.

Pour les cas particuliers du jeu de chocolat dans une bande ou avec le carré en savon en bas à gauche étudies dans l'analyse mathématique et qui correspondent tous les deux au Nim à deux tas, l'apparition des conjectures devient plus facile puisque le même est vrai pour le jeu de Nim à deux tas.

Les expérimentations des élèves vont viser deux objectifs : trouver des éléments pour construire une stratégie gagnante ; et/ou affirmer la validité d'une stratégie gagnante déjà trouvée. Dans cette section nous analysons le premier. Le deuxième type sera analysé dans la section XV.4.3.3.

Expérimentations aléatoires

Dans un premier temps, il est très probable qu'il y ait une phase «d'expérimentation aléatoire » où les élèves vont jouer au hasard sur des barres de chocolat choisies au hasard. Le gestionnaire de l'expérimentation peut proposer aux élèves de jouer d'abord avec l'un des cas particuliers que nous avons analysé dans notre analyse mathématique (cas d'une bande ou avec le carré de savon en bas à gauche). Ces expérimentations vont aider les élèves à s'approprier le jeu et a découvrir ses premières caractéristiques, telles que :

- Les positions perdantes de petite taille avec le carré de savon en bas à gauche (ou sur une bande) sont toutes symétriques dans le sens de notre analyse mathématique.
- Les cas particuliers d'une bande et du carré de savon en bas à gauche peuvent être résolues par des arguments de symétrie. En effet une position symétrique est perdante puisque l'adversaire peut imiter mes coups jusqu'à qu'il ne reste que le carré en savon. Toute autre position est gagnante puisqu'elle possède une position symétrique comme option.
- Le cas d'une bande de largeur 2 est beaucoup plus difficile, mais peut être analysé à l'aide de la solution pour le cas d'une bande de largeur 1.
- La règle du jeu fait qu'une et une seule des quantités α_i définies auparavant diminue à chaque coup.

- La règle du jeu correspond au jeu de Nim à quatre tas avec les quantités α_i.
- Le jeu, même modélisé en termes du jeu de Nim, n'a pas une solution triviale. Ceci étant donné que les élèves ne connaissent pas la solution du jeu de Nim.

Expérimentations inductives

Après des expérimentations aléatoires pour l'appropriation du jeu, nous faisons l'hypothèse que les élèves peuvent passer à une phase d'expérimentation inductive. Dans cette phase, les élèves peuvent jouer avec des barres de chocolat spécialement choisies par eux-mêmes pour trouver des conjectures sur la stratégie gagnante.

La nature des expérimentations dans cette étape dépendra fortement des propriétés repérées lors de la phase aléatoire. Par exemple :

- Les élèves qui remarquent que les positions symétriques de petit taille sont perdantes peuvent tester des positions plus larges pour ensuite poser une conjecture par rapport à la symétrie des positions.
- Les élèves qui remarquent directement que les positions symétriques sont perdantes, peuvent étudies les positions qui ont une option symétrique pour poser une conjecture.
- Ceux qui remarquent le modèle du jeu en termes du jeu de Nim, peuvent directement passer au deuxième niveau d'abstraction et étudier le jeu de Nim à quatre tas sans garder la barre de chocolat.

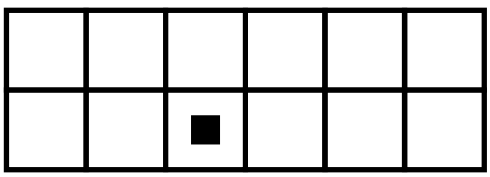
XV.4.3.3. *Validation des conjectures*

Les argumentations pour valider les conjectures peuvent être de différentes types. En considérant les éléments d'analyse faits par Giroud (2011) pour sa situation recherche, nous citons les suivants :

Expérimentations répétitives et validatives

Des expérimentations validatives vont apparaître dans le jeu de chocolat une fois qu'une conjecture est apparue. Par exemple, si dans un groupe un des élèves remarque que les positions symétriques sont perdantes, le groupe peut démarrer des expérimentation répétitives et validatives pour se convaincre de cette conjecture.

De plus, des expérimentations répétitives peuvent mener à une preuve par exhaustivité des cas si la barre de chocolat est assez petite pour permettre l'analyse de tous les cas possibles. Par exemple, la position de départ $P = (6, 2, 3, 1)$ est assez intéressante pour fournir de bonnes informations sur le jeu, mais elle peut être analysée par exhaustivité des cas puisqu'elle n'a que 6 options.



Arguments mathématiques

Les arguments mathématiques valides qui, selon nous, peuvent être utilisés par les élèves pour valider leur conjectures ont déjà été présentés dans l'analyse mathématique et le chapitre II. Ces arguments ont été présentés avec un langage mathématique qui peut être hors de la porté des élèves, mais les arguments contenus dans les preuves peuvent être utilisés par les étudiant sous des formes moins élaborés.

Exemple générique

Pour le cas particulier d'une barre de chocolat avec le carré en savon en bas et à gauche, un exemple générique est n'importe quel rectangle assez grande pour que son analyse permette de repérer que les positions symétriques sont les positions perdantes, par exemple la position de départ $P = (6, 7, 1, 1)$. De même, pour le jeu du chocolat dans une bande, un exemple générique qui permet de reconnaître le nature symétrique des positions perdantes est $P = (12, 1, 6, 1)$. Remarquons que ce deux positions de départ correspondent au jeu de Nim à deux tas de tailles 5 et 6.

Pour obtenir le résultat général avec n'importe quelle barre de chocolat et le carré en savon dans une position arbitraire, nous pensons qu'aucun exemple n'est capable de contenir toute l'information de la situation.

XV.5. Questions et éléments de validation

Preuve par exhaustivité des cas

Comme nous l'avons dit auparavant, lorsque les dimensions de la barre de chocolat sont petites, il est probable que les preuves des élèves soit basées sur une exhaustivité des cas. Par exemple, a partir de la position de départ $P = (6, 2, 3, 1)$ il n'y a que 6 coups possibles et ils peuvent tous être analysés avec des arguments de symétrie.

Contre-exemples

Il suffit d'un contre-exemple bien choisi pour invalider une conjecture, mais il pourrait être assez difficile de trouver ce contre-exemple. Comme nous l'avons remarqué pour le jeu d'Euclide, le gestionnaire de la situation peut produire des contre-exemples pertinents pour invalider les conjectures fausses des élèves s'ils n'arrivent pas à les invalider eux-mêmes. Ceci permet au gestionnaire d'aider les élèves à progresser dans l'analyse du jeu sans pour autant leur donner des pistes de solution.

Validation d'une stratégie gagnante

Encore dans ce paragraphe, notre analyse pour le jeu d'Euclide s'applique. Une fois que les élèves ont trouvé une conjecture de stratégie gagnante pour le cas général ou pour une famille infinie de cas, surgit le problème de comment valider cette conjecture. Vu que l'infinité de la famille rend impossible une preuve par exhaustivité des cas, les élèves vont devoir trouver des méthodes de preuve générales.

Il est difficile de démontrer qu'une stratégie quelconque est effectivement une stratégie gagnante. La façon la plus rigoureuse de le faire est d'introduire la notion de position gagnante et position perdante et montrer que la stratégie en question appliquée à une position gagnante donne une position perdante. Mais il est improbable que la notion de position perdante et position gagnante apparaisse toute seule dans les élèves.

Pour guider les élèves, les notions de position perdante et position gagnante pourraient être introduites auparavant par le gestionnaire. Pour éviter la définition récursive de position gagnante et position perdante le gestionnaire peut définir une position gagnante comme une position où le premier joueur à jouer a une stratégie gagnante.

XV.6. Variables

Dans la situation du jeu d'Euclide nous pouvons identifier des variables de la situation et des variables de l'énoncé. Dans la suite, nous analysons ses variables.

XV.6.1. Variables de la situation

Dans les variables de la situations nous trouvons deux : celle liée au support physique et celle sur cadre le choisi pour situe situation.

Variables liées au support physique

Comme nous l'avons vu nous pouvons jouer au jeu du chocolat avec papier-crayon en traçant la tablette de chocolat et hachurant les partie prises, sur des rectangles en carton, sur l'ordinateur, parmi d'autres.

Variables liée au choix du cadre

Comme pour le jeu d'Euclide, Le jeu du chocolat peut être proposé sur de différents cadres comme par exemple : dans un cadre numérique, où nous sommes complètement dans l'abstraction du jeu et il correspond au jeu de Nim à quatre tas ; dans un support physique avec une vraie barre de chocolat, ou d'autres objets de type non mathématique ou avec des objets mathématiques de type géométrique. Cette variable pourrait être une variable didactique mais nous l'avons fixée et avons choisi de présenter la situation dans un cadre géométrique.

XV.6.2. Variables de l'énoncé

Dans les variables de l'énoncé nous pouvons identifier deux types de variables, celle de la valeur numérique de la paire (a, b) qui définit la taille de la tablette de chocolat et celle qui fixe la position du carré en savon que nous avons dénoté par (s, t) dans l'analyse mathématique.

A différence du jeu d'Euclide, le problème de la commensurablité de a et b ne se pose pas puisque nous travaillons avec une barre de chocolat où il y a un nombre fini de lignes et de colonnes de carrés de chocolat.

Variables liées au valeur numérique des paires (a, b) et (s, t)

À partir des deux paires (a, b) et (s, t) nous obtenons les données nécessaires pour jouer et résoudre le jeu du chocolat. Pour cette raison, une position du jeu du chocolat a été dénoté par le quadruple $P = (a, bs, t)$. Dans un premier temps, nous pouvons fixer deux parmi ces quatre variables pour obtenir un jeu plus abordable. Ceci est le cas dans toutes les cas particuliers que nous avons étudié.

Les différents valeurs des couples (a, b) et (s, t) conduisent à des conjectures différentes, propres à l'identification des situations gagnantes et perdantes pour chaque sous problème.

Nous identifions ces variables comme une variable de rechercher c'est à dire il va être mis au disposition des élèves.

Variables liée à la quantité de carrés de chocolat à prendre à chaque tour

Même si dans l'énoncé du jeu du chocolat nous n'avons pas introduit des restriction sur le nombre maximal des carrés de chocolat à prendre à chaque tour, il est envisageable d'analyser une version de soustraction du jeu du chocolat où seulement un nombre borné des carrés peuvent être mangés à chaque tour. Cette généralisation du jeu est un problème ouvert.

XV.7. Difficultés et obstacles possibles

Le jeu du chocolat, tout comme le jeu d'Euclide, confronte les élèves à certains obstacles. Dans cette section nous essayons de prévoir quelques uns d'entre eux et déterminer des solutions employables par le gestionnaire pour aider les élèves à les franchir. La plupart de ces idées ont déjà été analysées dans le cas du jeu d'Euclide, donc nous nous limitons à les mentionner.

1. De l'informel au formel : en général, il est difficile pour les élèves de formaliser les arguments trouvés en discutant entre eux.
2. Preuve par des expérimentations répétitives.
3. Représentation du jeu.
4. La notion de stratégie.
5. La notion de position gagnante et position perdante.

XV.8. Hypothèses sur la difficulté de la situation

Tout d'abord, nous faisons l'hypothèse que les connaissances requises pour la transposition didactique du jeu du chocolat sont des connaissances que tous les élèves du collège au supérieur possèdent. De ce fait, il n'y a pas à posséder de connaissances particulières pour pouvoir jouer.

Les éléments d'analyse précédente nous permettent aussi de faire les hypothèses suivantes concernant la situation « Le jeu du chocolat » :

- La construction d'une stratégie gagnante pour quelques cas particuliers du jeu est une tâche accessible.
- La modélisation du jeu d'Euclide par le biais du jeu de Nim est une tâche complexe, mais qui pourrait apparaître à partir du niveau lycée.
- La construction de une stratégie gagnante est une tâche très complexe.

Cette dernière hypothèse est supporté par le fait que une stratégie gagnante pour le jeu du chocolat a besoin d'avoir recours à la Nim-somme et la somme des jeux combinatoires . Cette notion corresponde au niveau expert.

XV.9. Le jeu du chocolat comme SiRC

En considérant l'analyse mathématique et didactique du jeu du chocolat que nous avons effectuée dans les deux derniers chapitres, nous procédons à vérifier que le jeu du chocolat remplit les caractéristiques nécessaires pour constituer une SiRC.

1. Une généralisation simple du jeu du chocolat tel que proposée dans cette thèse est un problème ouvert (voir section XV.6.2).
2. La question initiale est d'accès facile et elle est envisageable pour un public du collège à l'université.
3. Comme nous avons vu dans le chapitre XIV, ils existe plusieurs stratégies initiales possibles pour démarrer une recherche.
4. L'analyse didactique montre qu'il existe de nombreuses stratégies différentes pour avancer dans la recherche menant à des conjectures différentes.
5. L'espace problème est expansible. La solution d'un cas particulier mène à des nouvelles questions, comme nous l'avons vu dans les cas particuliers etudiées au chapitre XIV.

   De plus, même si le jeu du chocolat est complètement résolu par un élève, il reste encore la variable de recherche « quantité des carrés de chocolat à prendre » qui pourrai être introduite pour étendre la situation et revenir à un problème ouvert.
6. Parmi les variables de recherche du jeu du chocolat, les dimensions de la tablette de chocolat (a, b) et la position du carré en savon (s, t) sont laissées complètement à la disposition des élèves.

XV.10. Conclusion

L'analyse mathématique et didactique de la situation «Le jeu du chocolat » montrent que cette situation est moins complexe que celle du jeu d'Euclide, qui s'avère donc une situation plus accessible pour travailler les notions de stratégies gagnante, position gagnante et position perdante. Ainsi nous faisons l'hypothèse qu'il est possible de présenter la situation aux élèves en termes de position gagnante et position perdante sans donner trop de pistes de recherche.

Donc, la séance expérimentale que nous pressentons dans le chapitre suivant a pour objectif d'amener les élèves à travailler sur ces notions et voir ses conséquences par rapport à la mise en place des stratégies de recherche. Nous chercherons a répondre à la question suivante :

> *Quel rôle ont les notions stratégies gagnantes, position gagnante et position perdante dans la productions et validation des conjectures ?*

L'expérimentation que nous présenterons dans le chapitre suivant et les ateliers qui se trouvent dans l'annexe B ont été menées au Chili. Nous fournissons également une présentation globale du contexte scolaire au Chili, qui diffère beaucoup du contexte actuel en France. Cela nous permettra de contextualiser les analyses des expérimentations

Contexte scolaire au Chili

Ces dernières années, le milieu scolaire chilien a connu des changements permanents en raison d'une grande reforme de l'éducation nationale (toujours en cours d'application). En ce qui concerne l'enseignement des mathématiques et, en particulier, les programmes des différents niveaux, les reformes ont été clairement marquées par l'introduction des « Mathématiques modernes ». Cela a eu un grand impact dans les cycles d'éducation primaire et secondaire.

Par rapport aux contenus originaux des programmes, les sujets reliés à la géométrie, à la théorie d'ensembles, au traitement des structures algébriques et à la construction formelle des ensembles numériques ont été largement réduits.

L'apprentissage des algorithmes de calcul, ainsi que l'introduction à l'algèbre, continuent d'être développés comme auparavant, mais la discussion s'est ouvert sur le niveau de compréhension nécessaire pour appréhender la signification d'une opération algébrique et le fonctionnement de l'algorithme qui la réalise.

Face a la difficulté d'enseigner des notions géométriques abstraites, les enseignants ont pour alternative la réduction de la géométrie aux aspects de quantification (calcul des superficies, calcul des volumes et mesure d'angles) ou simplement la suppression de contenus géométriques. Cela perpétue et accentue un cercle vicieux : la géométrie est rarement perçue comme instrument pour la visualisation et représentation, elle est abordée soit par des notions mathématiques d'origine non visuelle, soit par des concepts du « monde réel » en trois dimensions.

La résolution des problèmes continue d'être appréhendée comme une question non essentielle. Elle est réduite à la résolution des problèmes standardisés et elle est travaillée seulement comme une application des techniques apprises. Les problèmes sont soit de nature arithmétique soit algébrique, ce qui amène l'élève à classifier le problème pour ensuite appliquer la technique correspondante.

Système de mesure de la qualité de l'éducation

Le SIMCE (acronyme en pour la phrase espagnole « sistema de medición de la calidad de la educación ») est un système de recensement de connaissances qui est appliqué à tous les élèves de l'éducation nationale à un certain niveau scolaire.

Le SIMCE est composé de quatre questionnaires de sélection multiple avec des questions fermées pour les élèves âgés de 9 et 13 ans environ. Les quatre questionnaires traitent des mathématiques, de l'espagnol, de l'histoire et des sciences.

L'origine de ce projet vient de la proposition d'une commission gouvernementale. Elle a suggéré d''instaurer le SIMCE comme mesure de la qualité de l'éducation afin de guider la communauté éducative.

Elle a notamment proposé la périodicité de l'application du SIMCE c'est-à-dire que le questionnaire sera réalisé au moins un fois dans la vie de tous les élèves. L'objectif de départ du SIMCE est de repérer les établissements éducationnels qui présentent des difficultés.

Malgré le caractère original du SIMCE et ses améliorations successives, ce dernier présente des problèmes. Il a principalement créé des usages et des applications des résultats du SIMCE qui ne mènent pas vers une amélioration de la qualité de l'éducation.

En effet, le caractère public et très publicité des résultats du SIMCE vont pousser les établissements éducationnels à privilégier les cours du SIMCE plutôt que les cours qui ne sont pas évalués dans le questionnaire, ceci dans le but obtenir de meilleurs résultats. Cela provoque également la concentration des meilleurs professeurs dans les niveaux qui seront évalués. De manière plus drastique, quelques établissements éducationnels réalisent une sélection des élèves. Les élèves acceptés sont uniquement ceux qui ne devraient pas « endommager » leur score au SIMCE.

Ceci confirme une fois de plus que mesurer l'apprentissage des élèves n'est pas synonyme de qualité de l'éducation.

Concours de sélection universitaire

Tous les ans, les étudiants qui terminent leur niveau lycée passent un concours de sélection universitaire PSU acronyme de l'espagnol « prueba de selección universitaria ».

Comme son nom l'indique, la PSU est un instrument de sélection utilisé par les universités chiliennes pour l'admission des étudiants en première année. Ces dernières classent et acceptent les étudiants en fonction de leur score à la PSU. Si le résultat d'un étudiant à la PSU n'est pas suffisant pour accéder à la filière souhaitée, il peut repasser l'examen l'année suivante.

La PSU est composée de quatre épreuves réparties sur trois jours. Les épreuves sont mathématiques, espagnol, sciences naturelles et sciences sociales. Seulement les deux premières sont obligatoires pour toutes les filières.

Comme le SIMCS, la PSU a produit une série de pratiques qui ne répondent pas à la direction d'origine du concept. Par exemple, dans les dernières années du niveau lycée, les étudiants participent à des programmes d'entraînement pour améliorer leur résultat espérance de résultat. Cet entraînement se déroule, soit dans le même établissement éducationnel, soit dans des centres spécialisés, souvent à but lucratif, ce qui augmente le coût de l'éducation des étudiants dans les familles.

Dans la pratique, la PSU fonctionne comme une sélection socio-économique parce que le résultat est très sensible aux facteurs économiques, éducationnels etc.

CHAPITRE XVI

Expérimentation du jeu du chocolat

XVI.1. Présentation de la situation

Expérimentation que nous avons menée a eu lieu dans l'Université « Universidad Católica del Maule » dans le département de Talca au Chili. Les étudiants concernés appartiennent à la deuxième année de la filière « pédagogie en mathématiques » et comme nous l'avons dit avant, ils n'ont jamais été confrontés à une recherche de ce type. L'effective a été de 50 étudiants qui ont été repartis en 10 groupes de quatre et deux groupes de cinq étudiants.

La recherche a eu lieu pendant deux heures successives. Les groupes ont à leurs dispositions des feuilles blanches sans quadrillage et des stylos de différentes couleurs.

La gestion de la classe était assurée par deux chercheurs. Ils circulaient entre les groupes afin de vérifier que le problème avait été bien compris et aider les étudiants dans leurs recherches. Cependant, ils restaient neutres dans leurs réponses, ne fournissaient aucune piste de résultat.

XVI.1.1. Énoncé du problème

Nous rappelons que l'énoncé du problème est le suivant :

> Supposons que l'on a une barre de chocolat de taille $a \times b$, avec a et b des nombres entiers. Le deux joueurs, à tour de rôle, cassent la tablette en deux suivant une ligne horizontale ou verticale, puis mangent. Mais l'un de carrés est en savon. Le gagnant est le joueur qui évite de manger le carré en savon.

L'énoncé a été donné à chaque groupe par écrit et oralement à l'ensemble de la classe. De plus, la présentation orale a été accompagné de un exemple de partie qui introduit les notions de positions gagnante et position perdante sur la forme « le premier joueur gagne » où « le deuxième joueur gagne »

XVI.2. Déroulement et Analyse des productions

Nous avons débuté cette expérimentation avec un exemple de partie, afin de se familiariser avec les règles, nous avons laissé jouer les étudiants entre eux quelques minutes. Après nous avons fixé quelque cas particuliers :

1. Un chocolat de taille $a \times 1$.
2. Un chocolat de taille $a \times 2$.
3. Le carré en savon en bas à gauche.

Nous avons demandé aux groupes de trouver la stratégie gagnante de chacun de ces « chocolats ». Des noms représentatifs des marques chocolats présents dans le pays ont été donnés pour chacun des ces cas particuliers (Capri, Sahne Nuss et Trencito respectivement).

XVI.2.1. Dévolution

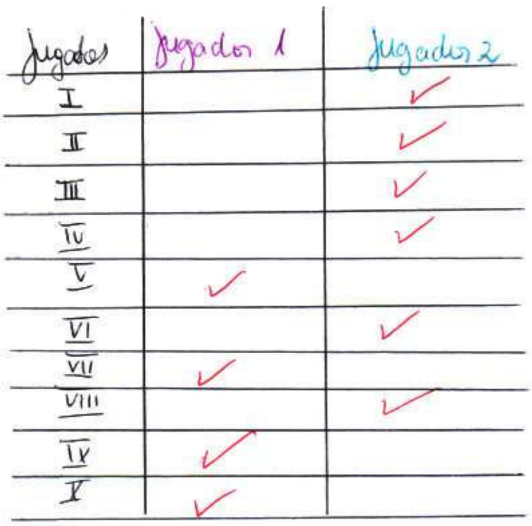
La dévolution a vite opéré dans tous les groupes, une fois donnée la règle du jeu et l'exemple tous les groupes se sont plongés dans la recherche d'une stratégie gagnante. Donc, la dévolution d'une démarche de recherche mathématique se fait de manière autonome et sans difficulté.

XVI.2.2. Stratégie gagnante, position gagnante et position perdante

Ces notions ont été bien assimilées et utilisées par les étudiants, en effet, lors de l'exemples donnés au départ, les étudiants on tout de suite compris que pour trouver une stratégie gagnante pour le jeu, il faut analyser la situation en termes de position gagnante et position perdante.

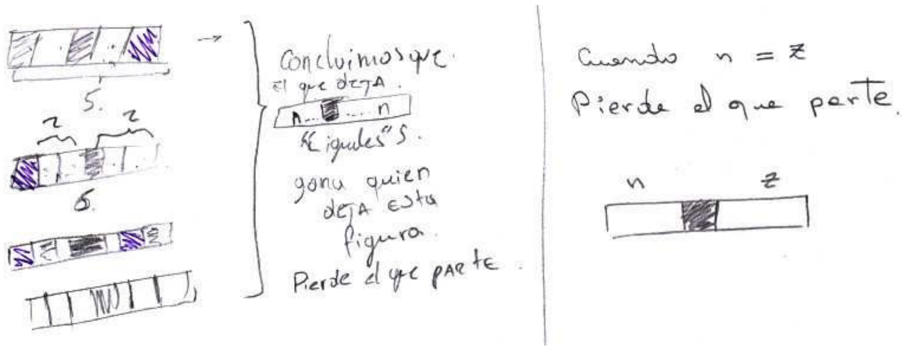
Ceci est une différence par rapport aux expérimentations du jeu d'Euclide géométrique puisque dans ce cas, nous n'avons pas présentés les notions des positions gagnantes et positions perdantes. Le fait d'avoir ces notions a beaucoup aidé pour démarrer la recherche. De ce fait, nous n'avons pas trouvé le conflit avec ces notions que nous avions trouvé lors des expérimentation précédentes.

Ainsi, les productions montrent que les groupes se sont servies de ces notions pour leur analyse et ils n'ont provoqué aucun obstacle ni difficulté. Voici quelques extraits des groupes.



Jugadas	Jugador 1	Jugador 2
I		✓
II		✓
III		✓
IV		✓
V	✓	
VI		✓
VII	✓	
VIII		✓
IX	✓	
X	✓	

Dans cet extrait nous montrons les conclusions par rapport à quel joueur à une stratégie gagnante pour 10 cas particuliers des positions du jeu.



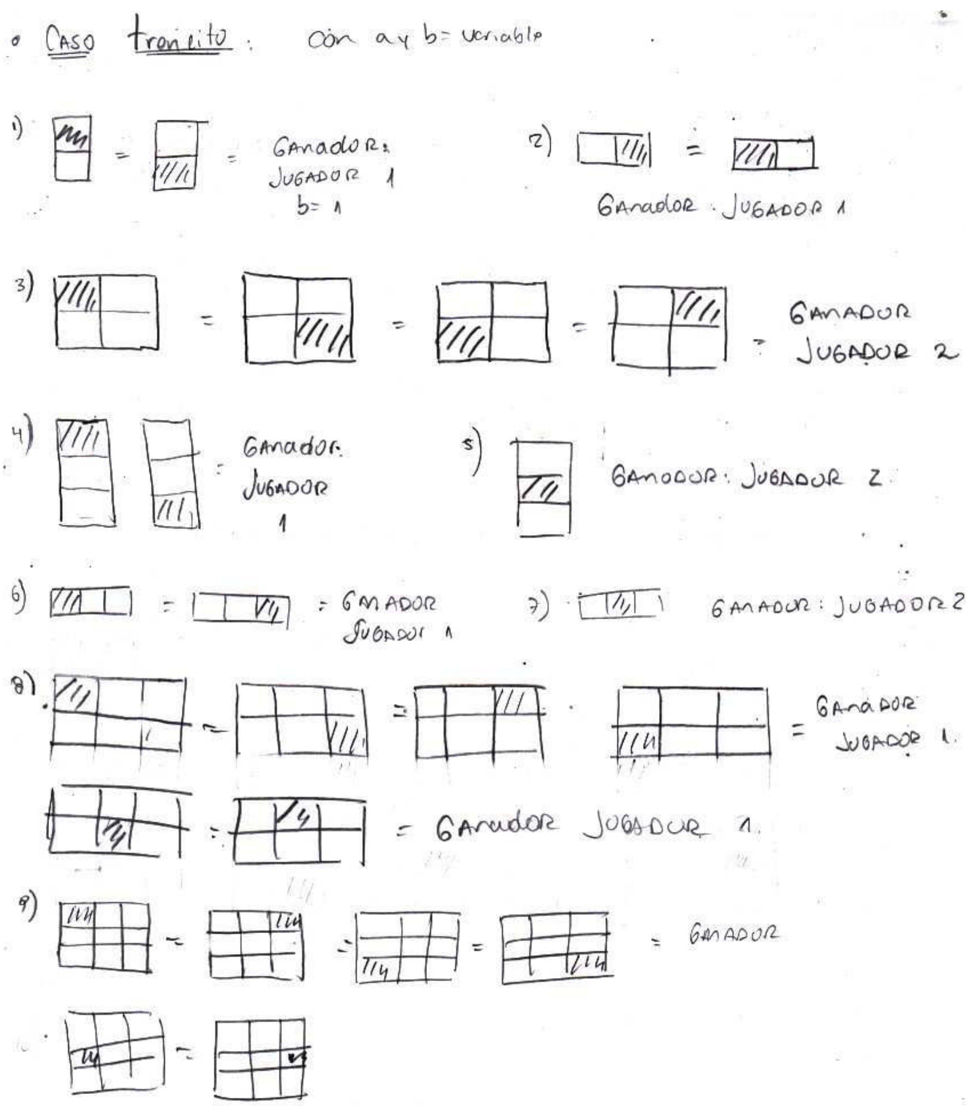
Ici, ils concluent qu'une position symétrique est perdante.

XVI.2.3. Expérimentations aléatoires

Les expérimentations aléatoires on aidé les élèves à repérer les caractéristiques suivantes du jeu :

1. Les positions perdantes de petite taille avec le carré de savon en bas à gauche (où sur une bande) sont toutes symétriques.

2. Les cas particuliers d'une bande et du carré de savon en bas à gauche peuvent être résolues par des arguments de symétrie.



Comme nous le verrons dans la suite, ces caractéristiques ont aidé les étudiants à développer des stratégies de recherche et à émettre des conjectures.

XVI.2.4. Stratégies de recherche et conjectures

Les stratégies de recherche que nous avions prévues dans notre analyse préalable ont été développées. Ainsi, tous le groupes ont été amenés au cours de leurs recherche à énoncer des conjectures. Nous présentons à continuation les stratégies de recherche par rapport à l'étude des cas particuliers.

XVI.2.4.1. *L'étude du chocolat de taille $a \times 1$*

L'étude d'un rectangle de taille $a \times 1$, a été étudié par la plupart des groupes (huit groupes). Tous ont émis des conjectures générales. L'analyse et conjectures faites, sont les suivants :

- Si l'une des positions est symétrique, alors elle est perdante. La stratégie gagnante pour le deuxième joueur est d'imiter le coup du premier.

> *« para a impar y jabón en el centro. El jugador 2 puede siempre hacer la misma jugada que el primero. El segundo gana »*

- Si a est paire, la position est gagnante avec la stratégie de jouer le coup qui donne une position symétrique.

> *« para a par : siempre habrá más chocolate a un lado del jabón que del otro. El primero tiene la opción de igualar la cantidad de chocolate y asi hacer jugadas idénticas al segundo jugador »*

- Une position est perdante si et seulement si elle est symétrique.

> *« el segundo siempre gana a menos que el número de filas a cada uno de los lados del jabón sea igual »*

- Une position est perdante si et seulement si elle est symétrique. Si la position n'est pas symétrique, le coup gagnant c'est jouer l'unique option symétrique.

> *« El caso de que la barra sea una columna partido por n filas siempre gana el primero igualando el número de filas a cada uno de los lados del jabón, a menos que ya esten igualados (y siempre y cuando el jabon no este en los extremos) »*

XVI.2.4.2. *L'étude du chocolat de taille* $a \times 2$

Ce cas a été étudié aussi dans six groupes, les conjectures formulées sont les suivantes :

- La position $P = (2, 2, 1, 1)$ est perdante.

> *« en un chocolate de* 2×2*, por simetria, gana el segundo »*

- Il faut se ramener au cas de taille $a \times 1$.

> *« hay que tratar de dejar el chocolate a una columna (siempre y cuando el jabon no este en una esquina) »*
> *« no importa la cantidad de cuadrados que hayan, siempre hay que llegar al caso* $a \times 1$ *»*

- Les positions $(2s - 1, 2, s, 1)$ et $(a, 2, 1, 1)$ sont gagnantes.

> *« gana si se deja al segundo jugador una figura de la forma :* $a \times 1$ *con el jabón al medio y* $a \times 1$ *con el jabón en la esquina »*

XVI.2.4.3. *L'étude du chocolat avec le carré en savon en bas à gauche.*

- Si le chocolat n'est pas carré, la position est gagnante. Le coup gagnant c'est de la rendre carré.

> *« en el caso de que el chocolate sea un rectangulo y el jabón esté en uno de los extremos siempre gana el primero si es que logra hacer un cuadrado en el que esté incluido el jabón »*
> *« en cuadrilatero de* $a \times b$*, el jugador debe forzar un cuadrado para ganar, cada vez que el contrincante desarme el cuadrado el jugador debe volver a formarlo, hasta llegar a un cuadrilatero de* 2×2*, obligando al contricante a perder »*

- Si le chocolat n'est pas carré, la position est gagnante.

> *« cuando se de el caso en que los lados son desiguales gana el segundo »*

- La position $P = (2, 2, 1, 1)$ est perdante.

> *« si el jabón esta en una esquina, gana el que trata de dejar un cuadrado de* 2×2 *»*

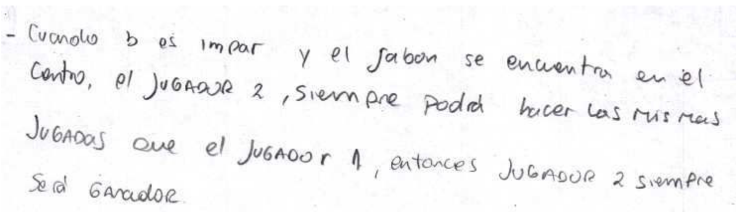
- Les options $P = (a, 1, 1, 1)$ sont toujours gagnantes ($a \geq 2$).

> *« pierde el jugador que deja una columna y el jabón en una esquina »*

XVI.2.5. Éléments de validation

Dans tous les cas, les idées de preuves fournies ont été plus ou moins formelles. Pour les petits cas traités au départ, la plupart des preuves s'appuyaient sur l'exhaustivité de cas. Ensuite, pour le cas d'un carré où d'une bande de taille $a \times 1$, les preuves produites reposaient sur des arguments de symétrie et la stratégie d'imitation. Dans le premier cas, la position est perdante si et seulement si la barre est carrée et pour le deuxième cas, la position est perdante s'il y a autant des carrés de chocolat d'un coté que de l'autre du carré en savon. Dans le deux cas, la stratégie gagnante est d'imiter le coup de l'adversaire dans « l'autre dimension » de la barre de chocolat.

L'extrait suivant montre un exemple d'une preuve du fait qu'une position symétrique est perdante en donnant la stratégie gagnante par imitation pour le deuxième joueur.



- Cuando b es impar y el jabon se encuentra en el Centro, el JUGADOR 2, siempre podrá hacer las mismas JUGADAS que el JUGADOR 1, entonces JUGADOR 2 siempre será GANADOR

Les différents conjectures fausses énoncées tout au long des deux séances ont quant à elles été invalidées dans la plupart des cas par la donnée de contre-exemples au sein même des groupes.

XVI.3. Conclusion

Au regard de la production des étudiants, nous pouvons conclure que la situation « Le jeu du chocolat » est une situation recherche moins complexe que le « jeu d'Euclide géométrique ». En effet, entrer dans la recherche a été plus facile. Nous faisons l'hypothèse que cette accessibilité du jeu est aussi due, en partie, au fait d'avoir présenté le jeu en termes des positions gagnantes et positions perdantes.

Ces notions on été abordées par les étudiants pour l'étude des méthodes de recherche et conjectures ou sa place a été bien présente. En effet, quelques soit les cas étudiés, des solutions particulières ont été exhibées par presque tous le groupes. La recherche de stratégies gagnantes qu'elles soient locales ou globales, n'est pas apparue identiquement dans les différents groupes. Certains sont restées au niveau local, d'autres ont progressé vers une généralisation. Les étudiants ont tous émis plusieurs conjectures, qu'ils ont validées à travers de l'exhaustivité des cas, exemples et contre-exemples.

L'expression écrite a été un frein pour retranscrire les idées. Comme dans le cas du « jeu d'Euclide géométrique », les problèmes rencontrés relevant du même ordre, retranscrire, les étudiants ne sont pas parvenus, tout de suite à une formulation mathématique de leur conjectures ou preuves.

D'autre part la gestion de la situation se relève à nouveau comme un facteur important. En effet, le gestionnaire a joué un rôle déterminant : en introduisant un nouveau problème, en aidant les élèves à formuler leurs réponses, en validant ou invalidant certains arguments (avec des contre-exemples), en aidant les étudiants à justifier leurs résultats.

Conclusion et perspectives de recherche

Conclusion sur la recherche effectuée

Le questionnement général de ce travail repose autour des questions suivantes :

QR1 :

> *Quels savoirs notionnels et quels savoir-faire fondamentaux de l'activité mathématique sont mis en œuvre dans les jeux combinatoires de type Nim ?*

QR2 :

> *Quelles sont les conditions et contraintes épistémologiques et didactiques pour que des jeux de type Nim permettant l'apprentissage en classe des savoirs identifiés en QR1 ?*

L'étude des jeux combinatoires et des jeux de type Nim dans les chapitres I et II nous a permis de fournir des éléments de réponse à notre première question dans le chapitre III.

Nous avons rencontré des notions propres aux jeux combinatoires et des notions mathématiques associées à la résolution des jeux de type Nim. Nous avons également vu au chapitre II que les notions de stratégie gagnante, de position gagnante et de position perdante sont fondamentales dans la résolution des jeux combinatoires impartiaux. D'autre part, l'analyse du jeu de Nim nous a montré que la mise en place d'une stratégie gagnante donne l'occasion de mettre en œuvre des apprentissages relatifs à la démarche de recherche.

Nous avons entrepris l'étude épistémologique de l'activité de recherche en mathématiques et l'étude de quelques travaux autour de la notion de jeu dans les chapitres IV, V et VI. Cela nous a permis, dans le chapitre VII,, de formuler nos hypothèses de recherche, d'élaborer et de choisir deux situations de jeu de type Nim en nous appuyant sur le modèle SiRC :le « jeu d'Euclide géométrique » et le « jeu du chocolat ».

L'analyse mathématique, l'analyse didactique et les expérimentations des ces situations, présentées dans les deuxième et troisième parties du texte, nous ont permis d'obtenir les résultats qui suivent.

Tout d'abord, l'analyse mathématique du jeu d'Euclide géométrique nous a conduit à l'étude de la composition séquentielle des jeux de soustraction qui, à notre connaissance, n'avait jamais été étudiée auparavant. Ces résultats mathématiques sont inclus dans le chapitre II sections 5 à 8 et font l'objet de l'article (Colipan et Liendo, 2013).

Ensuite, nous avons montré que la situation de type Nim « le jeu d'Euclide géométrique » était dévoluable dès le niveau lycée. Le caractère atypique de la situation, à la fois par rapport au contrat didactique et au milieu adidactique, n'a pas vraiment perturbé les élèves et les étudiants. Ils se sont tous appropriés les problèmes, même ceux qui avaient le plus de difficultés au départ. Ainsi, la situation le « jeu d'Euclide géométrique » a priori complexe, a été accessible aux élèves.

De plus, nous avons montré que cette situation met en œuvre des savoir-faire fondamentaux de l'activité mathématique tels que : expérimenter sur des cas particuliers, faire des essais aléatoires (en jouant au hasard), coder et modéliser (en lien avec le niveau d'abstraction du jeu), construire des conjectures (en terme de stratégies gagnantes), invalider une conjecture (par des contre-exemples, la stratégie gagnante fait perdre !) ou la valider (par exhaustivité des cas, ou des exemples).

D'autre part, bien que la situation du jeu d'Euclide n'ait pas été conçue pour faire travailler une notion ou technique en particulier, elle permet de travailler et d'explorer, de manière originale, la division euclidienne et l'algorithme d'Euclide. Déjà écrit ailleurs La situation pourrait être considérée comme « adidactique pour la division euclidienne et l'algorithme d'Euclide », au sens défini par Brousseau (2004) : ces deux notions sont indispensables à la résolution du jeu, et accessibles « en-acte » aux élèves dès le début du lycée.

Les analyses mathématique et didactique, et l'expérimentation de la situation le « jeu du chocolat » a montré son accessibilité et qu'elle permet une activité d'investigation, de recherche.

Les notions de stratégie gagnante, position gagnante et position perdante sont des notions qui ont été opérationnelles, même de façon implicite. Lors des expérimentations, les deux situations ont été analysées en caractérisant des positions perdantes et gagnantes. Nous pouvons conclure que les élèves ont réussi à repérer l'aspect récursif de cette définition, sans pour autant se l'approprier en toute généralité. Nous faisons donc l'hypothèse que les situations basées sur des jeux de type Nim, induisent une activité mathématique qui va au-delà du développement et de la pratique de techniques propres aux mathématiques. Elles ouvrent l'accès à des savoir-faire plus généraux qui peuvent être source d'apprentissage des savoir-faire propres de l'activité mathématique.

Cependant, introduire ces activités au sein de la classe demande la mise en place de conditions de gestion spécifiques. Comme nous l'avons dit auparavant, la présence du gestionnaire-chercheur est indispensable. En effet, nous avons observé que ce dernier joue un rôle déterminant, basé sur des savoirs-faire spécifiques, tels que : introduire un nouveau problème au « bon moment », aider les élèves à formuler leurs réponses sans les valider, ou au contraire valider ou invalider certains arguments complexes (avec des contre-exemples), ou enfin (et ce n'est pas le moindre) inciter les élèves à justifier leurs résultats.

Ainsi, la perception du gestionnaire sur la situation et son rôle seront fondamentaux. Le gestionnaire doit être convaincu que, dans une « situation de jeu », il est possible de créer un milieu pour une situation adidactique en mathématiques, que l'objectif fondamental est d'impliquer les élèves dans la résolution d'une question, et que la recherche de solutions par les élèves est plus intéressante que le résultat lui-même. Pour cela, il faut à la fois accepter les apports intuitifs et personnels et promouvoir l'utilisation des savoir-faire de l'activité mathématique. Il apparaît comme pertinent d'étudier plus finement le résultat de ces différents types d'actions sur l'activité des élèves.

En conclusion, nous pouvons dire qu'une situation didactique créée autour du jeu combinatoire peut générer des apprentissages significatifs chez les élèves, dans la mesure où son but et ses objectifs vont au-delà des contingents du programme scolaire. La finalité de ces situations doit être l'intervention de manière autonome et effective de l'élève, sans pour autant apprendre une connaissance ou une procédure en particulier. Les interventions des élèves vont acquérir du sens grâce aux situations.

Perspective de recherche

Nous allons tout d'abord continuer à expérimenter ces situations aux niveaux collège et lycée, en modifiant les situations relativement à nos analyses expérimentales. Par exemple, en modifiant des éléments du milieu matériel (interdiction de l'usage des instruments de mesure, surtout dans le jeu d'Euclide géométrique), ou la dévolution du problème (un énoncé avec un jeu collectif au départ permettant d'introduire les notions de stratégie gagnante, position gagnante et position perdante).

Un aspect intéressant issu de nos expérimentations est la modification du jeu « la course à n » où l'on admet de dire 0 comme premier coup (voir la section XI.2.2). Cette version du jeu à été introduite par les élèves pour éviter que la position de départ soit perdante. En effet, ce jeu a la propriété que toutes les positions de départ sont gagnantes pour tout n. Nous pensons que cette modification du jeu mérite d'être considéré avec plus de détails et qu'il est nécessaire d'y consacrer une séance d'expérimentation pour analyser ces implications didactiques.

Nos perspectives de recherche auront comme objectif central de développer les approches didactiques françaises et de diffuser les SiRC au Chili. Nous prévoyons d'introduire le travail sur des situations de recherche dans les collèges et les lycées chiliens avec des étudiants de pédagogie en mathématiques et les enseignants de mathématiques.

Les situations ludiques basées sur les jeux de type Nim tels que le « jeu d'Euclide » et le « jeu du chocolat » peuvent rendre les mathématiques plus accessibles et changer le rapport du sujet concerné envers cette Science. En effet, chercher, explorer, analyser, modéliser, expérimenter, prouver sont les principales activités pour étudier et construire les mathématiques et peuvent nous conduire à des surprises inattendues. Comme l'a dit de Guzmán (1990)

> *« Les mathématiques sont un grand jeu sophistiqué qui, d'un autre côté, peuvent être un travail d'art intellectuel apportant en même temps une lumière intense pour explorer l'univers et ayant de grandes répercutions pratiques. [...] Mais sans doute, aucune autre méthode ne peut mieux montrer ce que signifie faire des mathématiques qu'un jeu bien choisi ».*

Bibliographie

G Arsac, G Gilles et M. Mante : *Problème ouvert et situation-problème.* IREM de Lyon, 1991.

G. Barallobres : *Enseignement introductif de l'algèbre et validation.* Thèse de doctorat, Thèse de doctorat, Université de Montréal, Montréal, 2006.

Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway et Richard K. Guy : *Winning ways for your mathematical plays. Vol. 1.* A K Peters Ltd., Natick, MA, second édition, 2001.

A. Bessot : Une introduction à la théorie des situations didactiques. *Les cahiers du laboratoire Leibniz*, 91:1–31, 2003.

G. Brougère : *Jouer/Apprendre.* Paris, Economica-Anthropos, 2005.

G. Brousseau : Les doubles jeux de l'enseignement des mathématiques. *Revue du centre de recherche en education*, 22-23:83–155, 2002.

Guy Brousseau : *Théorie des situations didactiques.* Recherches en didactique des mathématiques. La pensée sauvage éditions, 2004.

Grant Cairns, Nhan Bao Ho et Tamás Lengyel : The Sprague-Gundy function of the real game Euclid. *Discrete Math.*, 311(6):457–462, 2011.

L. Cartier : *Le graphe comme outil pour enseigner la preuve et la modélisation.* Thèse de doctorat, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2008.

Gérard Chassan : Apport des situations de recherche à l'apprentissage des savoirs transversaux. Mémoire de D.E.A., Mémoire de Master 2, Université Joseph Fourier – Grenoble 1, 2009.

A. J. Cole et A. J. T. Davie : A game based on the Euclidean algorithm and a winning strategy for it. *Math. Gaz.*, 53:354–357, 1969.

Ximena Colipan et Alvaro Liendo : Sequential compounds of subtraction games. Submitted to Discrete Applied Mathematics, 2013.

F. Corbalán : *Juegos de estrategia y resolución de problemas : Análisis de estrategias y tipología de jugadores en el alumnado de secundaria.* Thèse de doctorat, Thèse de doctorat, Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, 1997.

F. Corbalán et J. Deulofeu : Juegos manipulativos en la enseñanza de las matemáticas. *Uno, Revista de la didáctica de las matemáticas*, 7:71–80, 1996.

M. de Guzmán : Jeux et mathématiques. *L'ouvert*, 58:15–20, 1990.

V. Deloustal-Jorrand : *L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique.* Thèse de doctorat, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2004.

J.D. Dixon : The number of steps in the euclidean algorithm. *Journal of Number Theory*, 2:414–422, 1970.

E. Duchêne : *Jeux combinatoires sur les graphes.* Thèse de doctorat, Thèse de doctorat, Université de Grenoble, 2006.

V. Durand-Guerrier : Expérimenter des problème de recherche innovants en mathématiques dans l'école. INPR, cédérom. Chap. La dimension expérimentale en mathématiques. Enjeux épistémologiques et didactiques, 2010.

M Edo : *Joc, interacció i construcció de coneixements mathemàtics.* Thèse de doctorat, Thèse de doctorat, Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, 2002.

M. Edo, M. Baeza, J. Deulofeu et E. Badillo : Estudio del paralelismo entre las fases de resolución de un juego y las fases de resolución de un problema. *Union, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 14:61–75, 2008.

Muriel Fénichel et Nathalie Pfaff : *Donner du sens aux mathématiques. Tome 2. Nombres, opérations et grandeurs.* Bordas pédagogie, 2005.

Nicolas Giroud : *Étude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe.* Thèse de doctorat, Thèse de doctorat, Université de Grenoble, 2011.

Karine Godot : *Situations recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation, exemple de la rue aux couleurs.* Thèse de doctorat, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2005.

Denise Grenier et Charles Payan : Spécificités de la preuve et de la modélisation en Mathématiques Discrètes. *Recherches en didactique des mathématiques*, 18.2:59–100, 1998.

Denise Grenier et Charles Payan : Situations de recherche en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Actes du séminaire national de didactique de mathématiques*, IREM de Paris 7, ARDM:189–205, 2002.

M. Legrand : Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. *Repères IREM*, 10:123–159, 1993.

Gabriel Nivasch : The Sprague-Grundy function of the game Euclid. *Discrete Math.*, 306 (21):2798–2800, 2006.

C. Ouvrier-Buffet : *Construction d définitions/construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques.* Thèse de doctorat, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2003.

N. Pelay : *Jeu et apprentissages mathématiques.* Thèse de doctorat, Thèse de doctorat, Université Claude Bernard, Lyon, 2011.

C. Poisard : *Ateliers de fabrication et d'étude d'objets mathématiques, le cas des instruments à calculer.* Thèse de doctorat, Thèse de doctorat, Université Aix-Marseille, Marseille, 2005.

G. Polya : *Comment résoudre un problème ?* Dunod, 1965.

J. Rolland : *Pertinence des mathématiques discrètes pour l'apprentissage de la modélisation et de l'implication.* Thèse de doctorat, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, 1998.

G. Sensevy, A. Mercier et M. Schubauer-Leoni : Vers un modèle de l'action didactique du professeur. A propos de la course à 20. *Recherches en didactique des mathématiques*, 20:263–304, 2001.

Edward L. Spitznagel, Jr. : Properties of a game based on Euclid's algorithm. *Math. Mag.*, 46:87–92, 1973.

Walter Stromquist et Daniel Ullman : Sequential compounds of combinatorial games. *Theoret. Comput. Sci.*, 119(2):311–321, 1993.

G. Vergnaud : Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuels. *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, La Pensée sauvage, 1994.

... y a Patricio Rojas
que con su alma paralela a la nuestra, nos sueña desde otro mundo (B. Colipan)

ANNEXE A

Glossaire sur les jeu combinatoires de type Nim

Dans ce glossaire, P dénote une position dans un jeu combinatoire impartial, a, b des nombres entiers non négatifs avec $b \geq 2$. Tous les jeux sont supposés en convention normale.

- Composition séquentielle de deux jeux : jeu où nous jouons le premier jeu jusqu'à que nous arrivons à une position finale pour ensuite jouer le deuxième jeu.
- Convention normale : jeu combinatoire où le premier joueur qui ne peut plus jouer est le perdant.
- Convention misère : jeu combinatoire où le premier joueur qui ne peut plus jouer est le gagnant.
- Coup gagnant de P : Un coup gagnant est un coup qui donne une option perdante de P.
- Équivalence des positions : deux positions P_1 et P_2 sont équivalentes si pour toute position Q dans un autre jeu combinatoire impartial, la position P_1+Q est gagnante si et seulement si la position $P_2 + Q$ est gagnante.
- Fonction mex : fonction qui à chaque sous ensemble propre A des nombres naturels associe le plus petit nombre naturel qui n'est pas contenu dans A.
- Fonction de Grundy : voir la définition II.11.
- Jeu combinatoire : voir la section I.2.
- Jeu de soustraction : voir la section II.4.
- Jeu impartial : jeu combinatoire où les options disponibles sont toujours les mêmes pour les deux joueurs.
- Jeu partisan : jeu combinatoire qui n'est pas impartial.
- Longueur de P : le nombre des coups du plus long jeu qui peut être joué à partir de la position de départ P.
- Nim-somme $\oplus$: voir la section II.2.1.
- Notation étoile $*a$: Position du jeu de Nim à un tas avec a objets.
- Notation étoile $*(a.b)$: Position du jeu de soustraction à un tas avec a objets où on enlève dans l'ensemble $S = \{1, 2, \cdots, b-1\}$.
- Options de P : l'ensemble des positions accessibles en un seul coup à partir de P.
- Position de départ : position initiale d'un jeu combinatoire.
- Position gagnante : Une position est gagnante si elle a au moins une option perdante.
- Position perdante : Une position est perdante si toutes ses options sont gagnantes.
- Reste de la division euclidienne $\mathrm{rde}(a, b)$: Fonction qui prends la valeur du reste de la division euclidienne de a par b.

- Somme de deux jeux : jeu où chaque joueur, à tour de rôle, doit choisir l'un des jeux pour jouer.
- Stratégie gagnante : un algorithme qui donne un coup gagnant pour chaque position gagnante.
- Théorème de Grundy-Sprague : Deux positions sont équivalentes si et seulement si ses fonctions de Grundy ont la même valeur.

ANNEXE B

Ateliers sur le jeu de Euclide géométrique avec des enseignants et étudiants de pédagogie

Avec l'objectif de faire connaître les situations recherche en classe au Chili. Nous avons présenté le jeu d'Euclide géométrique sur forme d'atelier à des étudiants de pédagogie en mathématiques et à des enseignantes du l'école primaire et lycées du département du Osorno. Cette expérimentation ne fait pas partie des analyses et conclusions précédentes, mais nous la mettons en annexe pour montrer tous nos expérimentation.

Tant les étudiants comme les enseignantes n'ont jamais été confrontés à ce type de recherche, donc avant l'atelier nous avons fait un exposé pour expliquer (sur tout aux enseignantes) les SiRC.

B.1. Atelier avec des étudiants de la filière pédagogie en mathématique

L'atelier c'est déroulé avec 14 étudiants de deuxième et troisième année (entre 20 et 22 ans) de la filière pédagogie en mathématiques de l'Université San Sebastian à Osorno, Chili. Les étudiants ont été répartis en trois groupes de quatre et un groupes de deux étudiants. Ils ont à leurs dispositions des feuilles blanches sans quadrillage, des stylos de différentes couleurs.

Un seul gestionnaire est pressente dans l'atelier, il circule d'un groupe à l'autre, les écoute, intervient parfois et prend des notes, les registres sont doc partiels et concernent tous les groupes.

Également que les expérimentations conduites en France, l'énoncé du problème a été donne à chaque groupe par écrit, puis a été explique oralement à l'ensemble de la classe, l'énoncé est resté inchangé et a été accompagné d'un exemple de partie.

L'atelier s'est déroulée en trois séances dans deux jours consécutifs :

1. Première séance : Nous avons débute l'atelier avec une première séance de recherche libre, nos avons laisse jouer les étudiants pour se familiariser avec le jeu, après nous avons propose aux étudiants étudier quelques tailles comme 38×11, 125×56 et 87×38. (environ 1 heure)

2. Deuxième séance : Cette séance c'est déroulé le matin du jour suivante, les étudiants ont été incité a la mise en place de conjectures pour la recherche de stratégies gagnantes. (environ 1 heure)

3. Troisième séance : L'après-midi a été consacré à la mise en commun des résultats et des questions. (environ 30 minutes)

B.1.1. Dévolution

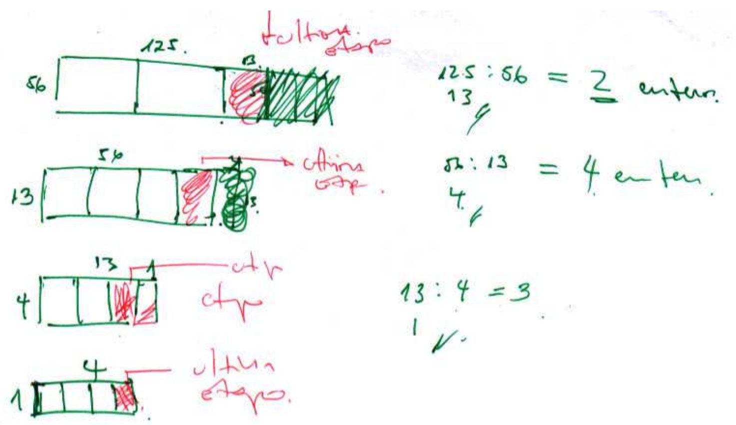
Les étudiants ont bien compris les règles du jeu, mais par contre il sont eu des difficultés au moment de rentrer dans la recherche, les élèves ne comprenaient pas qu'il signifiait trouver une stratégie gagnant, nous avons décidé de montrer un exemple de stratégie de jeu la course à n pour expliquer montrer qu'est-ce que une stratégie gagnante après ça la recherche se a démarré sans problèmes.

B.1.2. Représentations où modélisations du jeu

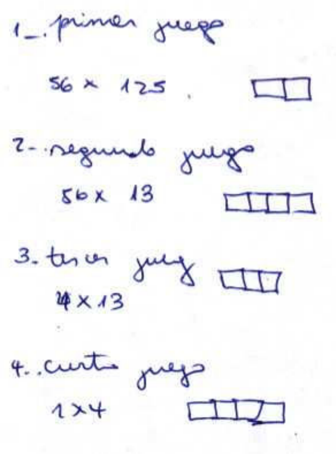
Pendant cette expérimentation nous avons interdit tous les instruments de mesure tels que règle graduée et papier quadrille). Bien que quelque étudiants se sont servis d'un objet droit comme règle non-graduée pour tracer les rectangles, ils sont tous démarres dans le premier niveau d'abstraction.

L'algorithme d'Euclide ne fait pas partie du curriculum chilien. Cependant, la division euclidienne est connue. Les étudiants on bien identifié le fait de tracer des rectangles à l'aide des divisions euclidiennes successives de l'algorithme d'Euclide, même s'ils ignoraient l'existence de l'algorithme d'Euclide.

Les représentations utilisés sont tous par rapport à la division euclidienne. La plus part des groupes traçait les rectangle issue de chaque division séparément.



Le fait de tracer les rectangles séparément à permis aux étudiants de repérer que le jeu est composé de plusieurs étapes et que chaque une d'entre elles doit être finie avant de passer à la suivante.


1_. primer juego
56 × 125 .
2-. segundo juego
56 x 13
3. tercer juego
4 x 13
4. cuarto juego
1 x 4

B.1.3. Déroulement de la recherche et résultats

La première séance a été destiné à l'appropriation du jeu de la part des étudiants. En jouant sur plusieurs rectangles choisis au hasard, ils sont identifié quelque propriétés du jeu :

« el juego esta compuesto de otros juegos »
« el juego esta compuesto de varias etapas de la forma $n \times 1$ »
« el juego total puede ser analisado desde el ultimo juego »

Une des premières stratégies adoptés par les étudiants a été d'analyser le jeu dans l'ordre inverse. De cette façon, ils ont analysés les cas $P = (n, 1)$, $P = (kn, n)$ et les rectangles de taille 38×11, 125×56 et 87×38, mais ils ne sont pas réussi d'émettre beaucoup des conjectures. Quelque conjectures pour la stratégie gagnante ont été les suivantes.

B.1.3.1. *Le cas d'un rectangle de taille $P = (n, 1)$*

L'étude de ce rectangle est apparue du fait d'avoir identifié les différentes étapes du jeu qui doivent être joués indépendamment. Ainsi, les conjectures formules sont les suivantes

- Si $P = (n, 1)$ et n est congruente à 0 modulo 3 alors P est gagnante

  « (para todo $n = 3k$) *Siempre va a ganar el primer jugador, siempre y cuando juegue bien* »

- Les positions $n - 1$ y $n - 2$ son perdantes

  « No se deben jugar los ultimos dos numeros antecesores a n »

- La position $n - 3$ est gagnante

  « Para ganar hay que dejar tres al adversario »

B.1.3.2. *Le Cas particulier $P = (kn, k)$*

- si $P = (2n, 2)$ alors P es gagnante

  « Si un lado es el doble del otro, el que comienza gana »

- Si $P = (kn, k)$ alors P est gagnante

  « Cuando un lado es multiplo del otro el que comienza gana »

B.1.3.3. *L'étude du jeu dans le sens inverse*

Comme nous l'avons dit précédemment, les étudiants ont bien identifié l'idée de analyser le jeu dans l'ordre inverse en marquant les positions gagnantes de chaque étape. Ainsi, les étudiants ont trouvé les stratégies gagnantes pour des différentes tailles de rectangle, parmi eux 38×11, 125×56 et 87×38. D'autre part, cette analyse leur à mené a émettre les conjectures suivantes :

- Si la dernier étape du jeu est $P = (4, 1)$ alors P est gagnante

  « Si en el ultimo rectangulo hay cuatro cuadrados, entonces hay que comenzar (en ese rectangulo) »

- Si la dernier étape du jeu est $P = (3, 1)$ alors P est perdante

  « Si en el ultimo rectangulo hay tres cuadrados, entonces hay que comenzar (en ese rectangulo) »

- Dans un rectangle de taille 9×5, la position initial est perdante.

  « en el rectangulo 9×5, el que comienza pierde siempre, independiente de cuantos cuadrados tome »

- Strategie gagnante pour un rectangle quelconque,

  « en el rectangulo de 19×15, el primero toma 2 partes del rectangulo para obligar al segundo jugador a tomar el tercero. Asi el primer jugador toma lo que queda y de esta manera obligar al segundo jugador a comenzar con los ultimos 4 cuadrados restantes y de esta manera ganar »

La validation a été faite à l'aide du gestionnaire. Les conjectures ont été valides dans la plus part de cas, par exhaustivité et exemples, les fausses conjectures énoncés ont été invalidées par des contre-exemples.

Difficultés induites par les contraintes de la situation ont été les rencontrées dans tous les expérimentation précédentes, mais les problèmes pour calculer ont été la difficulté la plus importante lors de cette expérimentation.

B.2. Atelier avec des enseignants du collège et lycée

Grâce au intervention de L'université San Sebastian de Osorno et le DAEM [1] nous avons organisé une atelier pour les enseignants du collèges et lycées (publics et privés) de l'agglomération de Osorno. L'objectif annonce étant de fournir des outils pouvant être utilises par eux dans leurs future classe. L'atelier se a déroulé avec 30 enseignants donc 10 ont été du collège. Ils ont à leurs dispositions des feuilles blanches sans quadrillage, des stylos de différentes couleurs.

L'atelier s'est déroulée en deux séances dans un même jour (le matin et l'après-midi), chacune d'approximativement 45 minutes. Le contrat conclu pour cette brève séquence en précise les objectifs :

1. Departamento de administracion educacional municipal

- S'initier à son analyse du point de vue mathématique.
- S'interroger sur l'opportunité de la proposer à ses élèves et sur les connaissances et aptitudes qu'on peut développer à son propos.

Comme dans le l'atelier précédent, il y a un seule gestionnaire, qui a eu par mission :les encourager dans leurs recherches, par ses questions, à verbaliser leurs actions, justifier leurs propos, fournir des arguments (notamment lorsqu'ils pensaient qu'il n'y avait pas de solution), chercher des méthodes... et cela sans leur fournir de réponses.

B.2.1. Déroulement de la recherche et résultats

L'énoncé a été accompagné d'un exemple de partie, et en raison de temps disponible, après de les laisser jouer sur des rectangles aléatoires, nous avons demandé aux enseignants d'étudier d'abord le cas $P = (n, 1)$.

Au regard des productions que nous avons recueillies, nous pouvons considérer que la situation a rapidement été dévouée, spécialement chez les enseignants de niveau collège.

Les représentation ont tous été faites dans le premier niveau d'abstraction, les rectangles ont été traces à l'aide des divisions euclidiennes successives.

Le cas $P = (n, 1)$ a été étudié par les enseignants de la même façon que la situation de la course à n, c'est-a-dire en analysant les positions gagnantes et perdantes. Nous avons faite un mise en commun avec les résultats que se a déroulé de la suivante façon.

Un des participants affirme :

> « Nous avons fixe $n = 10$ » « En laissant 4 carrés à son adversaire, on gagne la partie »

La plupart des autres groupes disent aussi être arrivés à ce constat. La justification fournie consiste en un inventaire des possibilités (schéma) à partir de la position 7

Puis, un autre participant :

> « Pour n, Nous avions trouvé aussi $n - 4$ comme situation intéressante, on peut refaire le même schéma à partir de 7 »

Un autre participant, sur un ton affirmatif :

> « Alors, si $n = 10$ il faut pas commencer »

Après une petite discussion, un graphique complet, avec $n = 10$ est établi en commun et la stratégie est formulée ainsi par plusieurs participants

> A ce jeu, il faut laisser commencer l'adversaire et retirer le troisième carré pour en laisser 9 à l'adversaire, puis 6 et finalement 4. A chaque fois, il suffit de compléter à 4 le nombre de pions à retirer. (Si l'adversaire en prend 1 ou 2, il faut en retirer respectivement 2 ou 1)

Nous allons continue en travaillent la même technique pour n=11, mais le temps n'a été pas suffisante pour continuer a trouver une technique pour $P = (n, 1)$, mais une grand partie des enseignantes on été très enthousiastes a continuer a chercher. Nous avons fini l'atelier avec un petit analyse didactique du jeu.

Bien que les enseignants on a pas arrive a formule beaucoup de conjectures ni de stratégies gagnantes, mais ils sont bien travaille les notions de position perdante et gagnante.

Les enseignants de collège ont été plus motivés et enthousiastes que les enseignants de lycée. En effet, ce les groupes composés des enseignants de collège qui sont le plus travaillé pour arriver à trouver une stratégie gagnante pour le jeu.

B.3. Conclusion sur les ateliers

Les étudiants ont apprécié l'aspect ludique du problème par rapport à l'approche classique qui peut avoir dans les cours de mathématiques, ils apportent une autre manière d'aborder des problèmes dans des mathématiques

Lors de la discussion finale, ils ont tous vu l'intérêt de proposer ce type de situations aux élèves ; le fait que cela donne du sens à la notion de division euclidienne et l'algorithme d'Euclide a été apprécié par les enseignants. Tous ont perçu la richesse de la situation, liée à l'ouverture de l'énoncé, aux concepts heuristiques mis en jeu et au fait que même de « jeunes élèves » puissent se lancer dans la recherche et énoncer des conjectures.

Ces ateliers ont été laborieux, les enseignantes et étudiantes on eu quelques « problèmes » pour trouver « le bon chemin » de recherche, énoncer ses conjectures, les valider et invalider. Nous croyons que la cause est que les enseignants sont déjà habitués à toujours faire la même chose, et qu'ils ont déjà perdu l'habitude de réfléchir sur ce type de problèmes.

ANNEXE C

Transcriptions première expérimentation du jeu d'Euclide géométrique

Groupe Bleu

1m22

E3 : Donc en fait on arrive a un problème où on diminue a chaque fois la difficulté,

E1 : Là le début va aller très très vite.

E3 : Là on est dans le 4 n, en fait on va arrivé au 1 4 ou au 2 4 ou au 3 4 .

E1 : T'es sur, ça ça va dépendre de ce qu'il nous reste a la fin.

E3 : Si on a 13 cases en fait on est obligé en fait d arriver à là.

E1 : Ok, dans ce cas de figure ça va aller assez vite parce que ça sera décidé dès le début, on va le voir assez vite.

E3 : Donc en fait il ne faut pas partir d'un truc compliqué faut résoudre les simples et voir en fonction de la solution des simples qu'on peut avoir qu'est ce qu'on peut faire..comment on peut y arriver avec un truc compliqué.

E1 : Là le but c'est de ce retrouver avec 3 carré comme ça, comme ça on en enlève 2 et l'autre il est obligé de perdre.

E3 : En fin de compte quand tu as ça tu génère forcement un 3 1.

Discours entre E1 et E3 pendant que E2, E4 et Observateur parlent d'autre chose

E1 : Parce que là quand tu te retrouves avec un carré comme ça t'es obligé de l'enlever de toute façon

E3 : Oui, t'es obligé d'enlever, là c'est un 3, un 3 4

E1 : Ah C'est un 3 4, moi je pensais au..

E3 : Le 3 4 l'autre a perdu

E3 : Je pense qu'il faut d'abord simplifier, faire les simples et une fois que l'on sera résoudre les simples on peut arriver facilement à un simple.

E1 : Oui je suis d'accord avec toi mais l'un des premiers cas de figures où l'on va se retrouver ça va être du 4*4... C'est un peu le jeu des allumettes.

E3 : En fonction du nombre que tu en as tu laisse l'autre choisir. Et tu fais 1 2, 1 2 ou 2 1

E1 : Et le but c'est d'essayer toi de finir à 3 comme ça tu lui en enlève 2 comme ça il sera obligé de choisir.

E3 : Où un multiple de 3.

E1 : Oui un multiple de 3.

[

E2 : Je peux te poser une question sur l'énoncé ? C'est un rectangle où une grille ?

Observateur : Non c'est un rectangle..heu..

E2 : C'est un rectangle peu importe sa taille.

Observateur : Oui peu importe ces dimensions, il peut faire les dimensions que tu veux ton rectangle.

E2 : Ok. Donc on est pas obligé de rester sur des entiers ?..

E4 : Ben si tu ne restes pas sur des entiers à ce moment là t'auras jamais le dernier mot, parce que ça va vers l'infini, ça tend vers 0 mais ça ne l'atteint pas.

E2 : Ça fait parti du problème aussi, non ?

E4 : Pour moi c'est des entiers...

E2 : C'est un peu le jeux des allumettes

Observateur : Non rien ne nous précise que nous sommes obligé de nous limiter aux entiers.

E2 : D'accord

]

E3 : Alors dans le cas où on a x, y. Si y est égal à k(y), k appartient à N.

E1 : On a déjà résolu en partie un des cas.

E3 : Alors si x égal 3, enfin n, je vais marquer 3ny, l'autre commence, si non, on se débrouille pour que cela soit le cas.

E1 : Oui voilà. Ensuite ce qu'il faut voir c'est quand on se retrouve dans un cas où x n'est pas exprimable par y, avec un entier.

E3 : Alors dans ce cas là, si on est par exemple de le 4n, à la fin on arrivera forcément dans un de ces trois cas.

E1 : Je suis d'accord.

E3 : Donc il faut déjà résoudre ces 3 cas pour savoir si dans ces cas là il faut mieux être celui qui joue en premier ou non.

E1 : Dans le cas où on se retrouve à y comme ça, on revient à ce cas là en fait.

5m00

E3 : Oui.

E1 : Donc ça fait déjà un de...

Observateur : Vous pouvez m'expliquer votre truc, parce que je n'ai pas suivi.

E3 : En fin de compte, tant que le nombre de lignes est vachement supérieur au nombre de colonnes (pas à peu près égal), on ne peut pas encore résoudre la partie. C'est quand on arrivera à un nombre de lignes à peu près égal au nombre de colonnes que l'on verra des cas qui s'isolent, et que donc il faut d'abord savoir résoudre ces cas là avant de se dire qu'on va résoudre..

Observateur : Ok.

Observateur : Et qu'est que c'était votre truc de x en fonction de y ?...

E1 : En fait on a regarder plusieurs cas, d'abord le cas où l'on va se retrouver à la fin avec un carré qui fait le même nombre de lignes et de colonnes. Donc en fait par exemple le nombre de lignes permet d'exprimer le nombre de colonnes, avec un entier.

Observateur : Oui.

E1 : Donc on va se retrouver qu'avec des carrés.

Observateur : Oui.

E1 : Donc là on avait déjà fait un truc comme ça, avec le jeu des allumettes je crois.

E3 : Oui

E1 : Le jeu des chocolats ?

E3 : Ça revient au même le jeu des chocolats.

E2 : Donc ça c'est quand le nombre de colonnes s'exprime en fonction du nombre de lignes ?

E1 : Voilà, avec un entier. Et là ensuite on regarde...

Observateur : Et dans ce cas là vous faites comment ?

E1 : Heu dans ce cas là...

E3 : C'est marqué là. Alors on à un nombre de lignes et de colonnes. Alors on à un nombre de lignes qui s'exprime en fonction du nombre de colonnes. Si c'est un multiple de 3 le facteur entre les deux, on laisse l'autre commencer et à chaque fois qu'il enlève une partie, si il en enlève 2 on en enlève 1, si il en enlève 1 on en enlève 2, et il sera forcément..

E1 : Alors si c'est paire au début c'est ça ?

E3 : Non ça marche pas.

E1 : Je ne me souviens plus comment on faisait.

E3 : C'est pas un multiple, c'est un multiple plus 1. Parce qu'il faut qu'il prenne le dernier.

E2 : Du coup si j'ai bien compris, vous attaquez direct avec la question b) ? Parce qu'il y a une question a) quand même dans cette histoire. Parce que là vous supposez que le jeu est finie.

A, **E3 :** Oui il est finie.

E2 : Dans le a) on nous demande..

E1 : De justifier ?

E2 : Est-ce qu'on est sûr que le jeu peu être finie.

E3 : Tu peux toujours trouver un carré dans un rectangle.

E2 : Si tu le quadrille.

E1 : Il sera bien quadriller au bout d'un moment.

E3 : Tu trouve forcément un carré dans un rectangle.

E4 : Oui, mais si tu ne le quadrille pas ton rectangle, t'enlève un carré, du coup là ...

E3 : Ton rectangle il est pas quadrillé, pourtant je te trouve un carré dedans.

E2 : Oui mais à l'infini est-ce que tu retomberas toujours sur un carré ?

E4 : Oui tu trouveras toujours un carré, tu retomberas pas sur un carré

E3 : Si on enlève des unités seulement, oui.

E2 : Ah donc il faut des unités.

E4 : Ah il faut le quadriller.

E3 : Ah oui c'est ça que je voulait dire. Oui si on a un nombre entier d'unités oui.

Observateur : On va se placer dans un nombre(monde ?) entier quand même. On va pas avoir racine de 2...

E2 : Mais pourquoi pas.

Observateur : Parce que c'est chiant.

E2 : Certes.

Observateur : C'est une raison suffisante.

E1 : Ah c'est vrai qu'on avait pas commencé par là, on est partie tout de suite sur comment résoudre le truc.

E3 : Ben en soi je me suis placé dans le cas où.

Observateur : Donc vous voulez qu'on fasse àa comme il faut où ?

E3 : C'est vous qui voyez. Pourquoi dans le cas où le jeu est finie, apparemment il y a un cas où le jeu ne peut pas finir.

E2 : Ça dépend juste de la taille de ton rectangle, par exemple si ton rectangle est comme ça ...

E4 : Si ton jeu il est pas finie...

E2 : Admettons que tu coupes là, du coup tu fais un carré là, après tu vas faire un carré là, après tu vas faire un carré là...

E3 : Dans tous les cas un rectangle contient forcément un carré t'es d'accord. Donc en fin de compte tu génère un rectangle où un carré. Si tu génère un carré l'autre à perdu. Si tu génère un rectangle celui-ci contient forcément un carré.

E2 : Oui, mais ça peu durer à l'infini comme ça.

10m00

E3 : Non, ce nombre n'est pas infini dès le début.

E2 : Ben si pourquoi pas.

E4 : Ben si, si tu ne quadrille pas ton truc et que le nombre ...

Observateur : On t'a pas dis que tu avais une grille, on t'as dis que tu avais un rectangle.

E4 : Si tu quadrilles pas ton truc, si ça ça s'exprime en fonction de ça tu peux le finir parce que ...

E3 : Ah oui d'accord tu pars du principe que c'est pas un rectangle.

E4 : Ah non pas forcément en fait, si si, si ça tu l'exprime en fonction de ça tu peux le finir.

E3 : Tu pars du principe que ce n'est pas forcément entier.

B, **Observateur :** Voilà.

E1 : On peut se retrouver avec un truc qui tend vers l'infini.

E4 : Voilà.

E3 : C'est le cas d'une feuille déjà. Une feuille tu part du format A1 t'arrive au format A4 et au final tu auras toujours le même rectangle, le même rapport.

E2 : Ça dépend si considère les quantités quantique de l'espace temps. (blague)

E1 : Donc on peut pas être sûr d'arriver sur un nombre infini de coup sur un carré.

E3 : Si on a x,y. Si x/y, ou xy même, appartiennent à Q. Alors on a une solution. à Q ou à R ? à R ! Puisque R ou Q...

E3 :Y'a quoi qui appartient à R et qu'appartient pas à Q ?

E2 : Hmm, racine de 2.

E3 : Non c'est un non réel(?) il ne fini pas.

E2 : C'est réel racine de 2.

E3 : Ah c'est réel, donc il faut que ça appartienne à Q c'est bien ça. Si x et y appartiennent à Q en fin de compte on peut trouver un facteur commune.

E4 : Comment tu veux que ça n'appartienne pas à Q on est dans des dimensions on est pas dans des complexes, enfin, ce n'est pas imaginable.

E3 : Si on a 1 et racine de 2, ça appartient à R et pas à Q.

E4 : Écoutes je n'ai jamais appris ce cours math là, je ne sais même pas à quoi correspond Q.

E3 : Q c'est les nombres qui peuvent se mettre sous la forme de x sur y.

E4 : Ok.

Observateur : Ca me semble pas mal.

E3 : En fin de compte si tu peux les mettres sous la forme x sur y tu peux arriverà une unité commune, ce qui est le but. Donc si tu as une unité commune entre les deux, quand tu vas diviser le rectangle, tu vas arriver à cette unité commune en fin de compte, forcément.

E4 : ... je ne sais pas....

Observateur : T'as raison c'est du 3 + 1 la suite par contre pour celui là.

E3 : Oui, puisque c'est le dernier qui doit prendre la carré.

E2 : Bon il y a quoi comme rectangle qui ne marcheraient pas, qui seraient à l'infini ?

E3 : Ben racine de 2, 1

D non racine de 3, 1. Toute les racines

Observateur : Pi, 1

E2 : Mais pourquoi ?

E4 : Parce que tu ne peux pas leur trouver de multiples...

E3 : Parce qu'ils n'ont pas d'unités...

E1 : Le problème de Pi c'est que tu ne peux pas l'exprimer sous forme de fractions.

E3 : Oui

E1 : Sauf si tu met Pi sur 1 ou Pi carré sur Pi.

E3 : En fin de compte ça ne donne pas un résultat... Donc en fin de compte il faut qu'on arrive ..

Observateur : Si c'est un nombre que tu ne peux pas exprimer sous la forme de fraction, tu peux pas...

15m00

E3 : Si le produit des deux, ou le quotient des deux peu importe appartient aux nombres rationnels (Q) alors il existe une unité finie commune. Alors que si tu ne peux pas les mettre sous forme rationnel, il existe une unité commune mais elle est infiniment petite. Donc en fin de compte ton carré sera infiniment petit.

E1 : Donc on en était au cas x fois n ...

E3 : En fait quand on divise un rectangle en fin de compte on arrive à la base commune. La base commune qui est en fait la plus petite unité du plus grand sur le plus petit. On prend la plus petite unité du plus grand sur le plus petit ce sera forcément le plus petit rectangle que l'on aura.

Observateur : Tu peux répéter ?

E3 : On prend la largeur et la longueur. On divise le plus grand par le plus petit. On prend la dernière unité de ce nombre et ce sera la taille du rectangle que l'on aura à la fin.

E2 : La dernière quoi ? La dernière unité. Ça veut dire quoi la dernière unité ?

E3 : 0,36 la dernière unité c'est 6. Quoi c'est 0,01.

Observateur : En gros c'est un PGCD ?

E3 : Oui c'est ça. Sauf que c'est un PGCD qui n'appartient pas aux entiers mais au rationnels.

E2 : Ou alors c'est une suite de modulo qui converge vers 0 si ça marche.

E3 : Oui

E1 : Bon allez on attaque maintenant la partie b)

E3 : Il faudrait réussir à lÂ 'expliquer ça

E1 : L'histoire du PGCD ?

E3 : Oui

E1 : Au bout d'un moment tu te retrouves... Puis en plus c'est pas un PGCD...

E3 : En fin de compte quand on divise un rectangle on tend vers une unité de base. Un rapport entre les largeurs et les longueurs. Donc en fait il suffit d'expliquer que pour que l'on arrive à une unité qui soit toujours la même il faut que ce soit un nombre entier, il faut qu'il y ai un rapport entre les deux. Et si on a 1/2 et 1/3, ça fait 2/3, et ça fait 0,66666, pourtant il est divisible ou pas ?

E1 : En fait elle à l'air est assez facile la partie b).

E3 : Fait le !

E1 : Je suis entrain d'y réfléchir... C'est parce que... Là sur cette partie, donc est d'accord là dessus, sauf que là on va se retrouver sur cette partie.

E3 : Dans un de ces trois cas

E1 : Voilà, mais sauf que avec ce cas là au bout d'un moment on va se retrouver sur ce cas là, ce cas là on va soi se retrouver sur celui là, soi sur celui là.

E3 : Oui, donc il faut commencer par le plus petit.

E1 : Non mais je suis d'accord.

E1 : Par contre c'est quand t'as 4, c'est 4, 7, 10 etc. Etc. Donc normalement si tu commences à 10 tu gagnes.

20m00

E1 : Si on a une colonne comme ça, qui a 10 cases, tu dois pouvoir gagner si il y a des cases.

E3 : Oui. Si tu commences.

E1 : Si je commence moi ?

E3 : Celui qui commence gagne si il connait la technique.

E1 : D'accord la dessus. Par contre je ne me souviens plus comment on le démontre cela.

E3 : Tu peux... Un invariant !

E1 : Non mais ça doit se faire par récurrence ?

E3 : Non mais ce que tu peux démontrer c'est qu'en fin de compte peu importe.., la personne a le choix entre enlever un ou 2 carré. Si tu joues après lui tu peux te débrouiller pour en enlever trois, peu importe le nombre qu'il en enlève. Et de cette manière tu montres que tu peux en enlever à chaque fois trois et donc en laisser plus qu'un. Ce qui l'oblige à prendre le dernier.

E1 : Oui par ce que tu vas retrouver au final, hmm ... Par exemple dans le cas où tu commences avec 10, t'as un chiffre hmmm

E4 : 10 par combien ?

E1 : 10 fois 1 par exemple. Là par exemple j'en enlève 1. Donc l'autre se retrouve à 9.

E3 : Là t'as perdu.

E4 : Ça dépend, si il en enlève qu'un le tour d'après c'est bon.

E3 : Moi j'en enlève 2.

E1 : T'en enlève 2 on se retrouve à 7. Moi j'en enlève 1 tu te retrouves à 6.

E3 : J'en enlève 2.

E1 : On se retrouve à 4. J'en enlève 1 on se retrouve à 3.

E3 : J'en enlève 2.

E1 : T'as raison.

E3 : J'hésite à en enlever 2 donc normalement ce n'est pas moi qui ai 2 c'est toi. Moi j'ai 1... Tricheur.

E1 : J'ai dis que tu avais raison.

E3 : Ça c'est vrai, c'est un pléonasme d'ailleurs.

E1 : Vous n'êtes pas réveillé vous deux, c'est le fait que l'on soit surveillé, vous êtes stressé ?

E2 : Ça fait peur

E1 : La règle c'est que... Parce que... Si je commence à 4 normalement tu perds.

E4 : Et si on comptais en binaire ?

E3 : J'ai déjà essayer de compter en binaire pendant une heure et demi... Pour n'avoir aucun résultat. Ah, et j'ai pas encore essayer de mettre mon invariant en binaire.

E2 : C'est pas bête ça. Faudrait essayer ça.

E3 : J'ai compté les pièces, leur position je l'ai exprimé en binaire, j'ai remarqué qu'il n'y avait pas d'invariants. Les invariants que j'ai trouvé ne servaient à rien. Donc j'ai essayé de compter les trous entre les pièces. Exprimé en binaire cela ne faisait rien non plus. En fin de compte j'ai compter les positions des pièces moins les trous et je ne l'ai pas encore exprimer en binaire.

E1 : Ils fonts peur des fois.

E3 : En fait j'avais trouver un invariant mais quant il y a moins de trois pièces à coté.

E1 : Attends, que l'on se mette d'accord sur la règle de ce cas là. Est-ce que c'est du N(?)... Mais t'exprime ça comment de manière mathématique ?

E3 : Quoi ?

E1 : Là pour gagner. T'exprime ça comme une suite, non ?

E3 : Je partirais à l'envers, on part du plus petit.

E1 : Donc si je commence à 4 alors normalement je gagne.

E3 : Non, le plus petit c'est si il y en a un.

E1 : Oui. Là je perd là. Non si il y en a 2 je peux encore gagner. Ah non là j'ai en fait les cas où l'autre il perd.

Observateur : Oh le boulet.

E1 : Oui c'est ça. Là j'ai fais les cas où l'autre perd, si il commence. Si tu commençais à 1, 4, 7, 10...

On essaye à 7, tu commences à 7 ?

E4 : J'en enlève 2.

E1 : On se retrouve à 5 j'en enlève 1.

25m00

E4 : J'en enlève 1.

E1 : J'en enlève 2.

E4 : Ah non, t'as gagné je suis bête.

E3 : Non, non. Car à partir de ce moment là vous avez un rectangle 4*4

E1 : Ouais ...

E3 : Ah non oui d'accord...

E1 : C'était sur une colonne de 1. C'était pour exprimer plus facilement. En gros quand tu te retrouves dans ce genre de cas tu peux exprimer selon le cas. Donc tous les cas où ça ne marche pas c'est du n*3+1. Si tu commences à 10 tu perds, si tu commences à 13 tu perd, si tu commences à 16 tu perds... Par contre pour le démontrer là ....

E3 : Alors ça veut dire...

E1 : Démonstration, démonstration...

E3 : ...Quand tu (..) à 3...

E1 : Ah ben oui, si il se retrouve à 3 il sera obliger de perdre... On est d'accord...

E4 : S'il se retrouve à 4.

E1 : S'il se retrouve à 4 il est obligé...

E4 : Non s'il se retrouve à 3 il est pas obligé de perdre il peut t'en enlever 2 et t'en laisser 1. C'est si il se retrouve à 4...

E1 : Oui c'est à 4 où il est obligé de perdre...

E4 : C'est à où t'es obligé de perdre.

E3 : Bon on sait résoudre le 1

E1 : Je suis pas sûr. Par exemple si l'on part de 4...

E3 : Non mais attend on sait résoudre le 1, si on a n on sait comment faire. Maintenant faut savoir comment on va résoudre le 2.

E1 : Le 2. En fait on va se retrouver dans ce genre de cas, sauf qu'à la fin on va se retrouver avec soi un carré comme ça.

E3 : Oui.

E1 : Soi avec un comme ça et là il sera enlevable.

E3 : Donc il faut résoudre dans les deux cas.

E1 : Ben ce cas ça représente l'autre, mais comment ça se passe quand on y arrive.

E3 : Oui sauf que dans ce cas là il faut jouer une fois de plus.

E1 : Oui, ce qu'il change tout.

E3 : Donc est-ce qu'il vaut mieux se débrouiller pour arriver à là où est ce qu'il vaut mieux se débrouiller pour ce que ce soit l'autre qui arrive là. En l'occurrence il vaut mieux se débrouiller pour que cela soit l'autre qui génère ça. Donc en fait il faut laisser ça pour gagner.

E1 : Non, si l'autre il arrive à ça il enlève une case puis il a gagner.

E3 : Si je produit ça tu fais quoi ?

E1 : Par contre j'ai un soucis, c'est avec ton 3+1, si tu commences à 4 tu peux gagner ou pas.

E3 : Oui. J'en enlève 1. J'en enlève heu, attend quand t'en es à 4.

E4 : Non, tu peux pas.

E3 : Si de toute façon c'est à toi de commencer.

E1 : C'est à moi de commencer ?

E3 : Oui.

E1 : Dans ce cas j'en enlève, heu, non là j'ai perdu.

E3 : Si c'est un multiple de 3 +1 c'est toi qui commence.

E1 : Parce que c'est moi qui perd.

E3 : Voilà.

E1 : C'est bien ce qui me semblait.

E3 : Quand on arrive à là tu fais quoi ?

E1 : Quand on se retrouve dans le cas avec une des deux cases comme ça ?

E3 : Non quand j'ai ça.

E1 : Quand t'as ça ?

E3 : Quand tu as ça. Qu'est ce que tu peux faire.

E1 : Et ben de tout façon je peux enlever que les cases là.

E3 : Oui, donc moi ensuite j'enlève ça et toi t'es obligé de prendre le dernier. Donc ça veut dire que quand il en a que deux il faut se débrouiller pour se débrouiller pour arriver à cette figure où à cette figure.

E1 : Donc soi du 3*2 soi du 2*2.

E3 : Oui. Donc le 2 ça se résout comme le 1 mais avec deux possibilités. En fait cela dépend du nombre de cases qu'il y a . S'il y un nombre paire le problème est réglé, et si c'est un nombre impaire il faut faire gaffe à bien générer ce truc là.

E1 : Oui mais dans ce cas là, on se retrouve dans un cas où... comment l'exprimer.

E3 : Regardes là il y en a combien ? 1,2,3,4,5,6,7,8,9, est-ce que tu veux jouer ?

E1 : Je pense que je vais perdre mais allez vas-y.

E3 : En fait il faut se débrouiller pour avoir ça. Donc en fait t'en enlève 3 et après tu recomptes. Si c'est un multiple de trois donc ça veut dire que celui qui commence à perdu....

E3 : Là j'en enlève 2. T'en Enlève combien ?

30m00

E1 : 2.

E3 : Ok j'en enlève 1... Là t'es obligé d'en enlever 2. Mais attend, pourquoi t'en a enlevé qu'une de cas ?

E4 : Oui il y a un truc que je ne comprends pas là.

E1 : Ah oui pardon, autant pour moi.

E3 : Si il y en a 11. Tu joues ou pas ?

E1 : Oui.

E3 : T'as gagné ..

E1 : J'ai gagné normalement ?

E3 : Joue.

E1 : Je vais en enlever 4.

E4 : Tu as encore enlevé un rectangle là.

E1 : Non mais tu as le droit d'enlever 2 carrés.

E2 : Sur la ligne vous avez fais comment déjà ? Quelqu'un qui peut m'expliquer ?

E4 : Je ne sais pas... Mais pourquoi vous enlevé des rectangles ?

E3 : Ah oui il faut que j'en enlève 2 pardon.

E4 : Mais toi aussi pourquoi tu viens d'enlever un rectangle ?

E3 : Il a enlever 2 carrés.

E1 : J'ai enlevé 2 carrés.

E4 : Ah oui c'est toi qui avait commencé ok.

E2 : Sur les lignes ?

E4 : Je ne sais pas ...

E2 : J'ai pas suivis...

E4 : C'est quoi ta question ?

E2 : Sur les lignes commet ils font pour trouver la solution qui marche ?

E4 : Ils sont entrain d'essayer, ils disent que si c'est impaire tu commences.

E3 : Pour le 2.

E4 : Pour le 2.

E3 : Pour le 2. Tu compte n, si n paire on connait c'est bon. Si n impaire tu fais n-3, si n-3 est un multiple de 6 l'autre commence, sinon tu génères un multiple de 6

E1 : Un multiple de 6.

E3 : Oui parce que 1+2.. Un multiple de 3.

E1 : Un multiple de 3 tu veux dire.

Observateur : Tu peux répéter ?

E1 : Attends tu m'exprimer ça..

E3 : Si on sait résoudre pour un bande de 1 ....

Observateur : Non mais ce que tu as dit juste avant.

E3 : Si n-3 est un multiple de 3... Pourquoi 3, non de 6 car c'est 2*3. Si n-3 est un multiple de 6 alors tu laisse l'autre commencer. Sinon tu génères ce multiple de 6.

E1 : Non mais attends si tu te retrouve avec du 5.

E3 : Moins 3 égale 2.

E1 : Mais si tu te retrouve avec du 11 ?

E3 : 11-3= 8 t'en enlève 2.

E1 : T'en enlève 2 mais l'autre il va se retrouver à 6 il va pouvoir générer un 6.

E3 : Tu vas pouvoir en enlever 4.

E1 : Ah oui.

E3 : 2 ou 4... Non tu vas pouvoir en enlever 4 ou 8.

E1 : Ah d'accord t'as passé fois 2 moi je pensais en terme de carré c'est pour ça.

E3 : Ah d'ailleurs ça ne marche pas attends... 1,2 1,2 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11....

E1 : En fait là on se retrouve dans le cas inverse si tu veux..

E3 : Non, faut faire un multiple de 3 qu'est que je disais. Pourquoi je disais un multiple de 6.

E1 : On se retrouve dans le cas inverse si tu veux. Si comme si on prenait une ligne.

E3 : 1,2,3 1,2,3,4,5,6,7,8, oui ben j'en ai 6 il faut en enlever 1.

E1 : Si tu veux c'est comme si on avait la ligne 1*1 et on se retrouve avec le cas où il faut avoir le dernier.

E3 : Non.

E1 : Si, si moi j'ai le dernier lui il est obligé de faire ça ...

E3 : Oui, mais il suffit que le dernier soit un 3*2.

E1 : Oui.

E3 : Ça dépend ce que t'appelle comme étant le dernier.

E1 : Non le dernier avant le 3*2 justement.

E3 : Il suffit de définir le dernier comme le 3*2... Que c'est compliqué.

E1 : Donc là on se retrouvera avec la règle d'avant.

E3 : Oui.

E1 : Du n3+1

E3 : Mais ce n'est pas la même forme de cases.

E1 : Oui. Donc si par exemple je commence par 4 cases avant le 3.

E3 : T'en enlève une.

E1 : J'en enlève une.

E3 : Oui, et puis ça reste un multiple de 3.

E1 : T'as raison. Et là je gagne à tous les coups.

E3 : Oui.

E2 : Alors en fait l'idée c'est que celui qui perdait au coup d'avant, il gagne. C'est la même stratégie sauf qu'il faut perdre.

35m00

E3 : Non.

E1 : Non si ça inverse là.

E3 : Oui mais ça dépend de quel est ton objectif en fait.

E2 : Ton objectif c'est de pas bouffer le dernier carré ?

E3 : Oui.

E1 : Mais de bouffer l'avant dernier.

E3 : Ça dépend si tu considère que le dernier carré c'est ça alors oui il faut le laisser à l'autre. Si la dernière forme c'est ça alors il faut la laisser à l'autre. Or on sait comment une forme à l'autre.

E1 : Si tu veux tu reprends ton cas là, et ça tu le met à part. Et là t'inverse car il faut que tu choppes le dernier, quoi l'avant dernier. Ton dernier carré, et ça c'est ta forme indéfinie. Donc là ça inverse les chiffres qu'on avait, où on était sûr de gagner.

E2 : D'accord ouais. Enfin ça dépend si il est divisible par 2 ou pas.

E1 : Alors par exemple si tu commences à 3 tu es sûr de perdre, et si tu commences à 5 tu es sur de perdre aussi normalement.

E2 : Ok

E1 : En plus de cette forme là

E3 : Alors quand on en a 3 ...

E1 : Et en fait après ça va être un truc comme ça jusqu'à un nombre indéterminé.

E3 : Non faut trouver un point commun après.

E1 : Ben on l'a déjà trouver un point commun.

E3 : Oui. Mais quand tu as le 7-8 tu joues en premier ou pas ? Moi je te laisse jouer.

E1 : Un rectangle 7*8 ?

E3 : Oui.

E1 : Donc je suis obligé d'enlever 7 cases donc tu vas te retrouver avec une ligne.2-8

E3 : Donc j'en enlève 1 et après ça fait 7. 6+1

E1 : Oui donc là j'ai perdu. Je suis obligé de. Oui mais là c'est un cas plus simple. Mais si par exemple je me retrouve avec un carré de 126*132.

E3 : En fait de compte le 126*132 ça devient le 6*126 ce qui va devenir le ... Et il faut le résoudre.

E1 : Je sais que pour l'instant on est obligé de décomposer, faudrait qu'on trouve un moyen avec notre nombre de colonnes et de lignes de pouvoir répondre à la question. Pas à chaque fois d'être obligé de décomposer à chaque fois parties par parties.

E4 : C'est pas des modulos ?

E1 : C'est quoi un modulo.

E4 : Quoi.

E2 : Il y a des modulos de partout de toute façon.

E4 : Ben oui.

E1 : Je vois plus ça comme une série U.N

E2 : Tout pareil.

E4 : Les modulos...

E2 : Modulo c'est juste une série que tu arrêtes au bon moment.

E1 : Alors déjà faudrait qu'on réussisse à exprimer le dernier carré qu'on aura, en fonction du nombre de lignes et de colonnes.

E2 : C'est pas bête ça.

E1 : Donc comment ça peut s'exprimer ça... p lignes, n colonnes... Putain c'est dur à cette heure là.

E3 : Qu'est ce qui a changé ?

E1 : Ben là on est partie sur un truc à partir du nombre de lignes et de colonnes, qu'on sache quelle taille le carré va faire le carré à la fin.

E3 : Oui, c'est modulo, p modulo n.

E1 : Tu me parles chinois là.

E3 : Modulo c'est reste de la division.

E1 : Ok.

E3 : Quelqu'un a fait spé math ?

E4 : Oui.

E3 : On fait modulo non ?

E4 : Oui.

E2 : Le modulo je vois, mais si par exemple t'as un 5 je sais pas, ben celui là typiquement.

E1 : 5 par 11.

40m00

E3 : 5 par 11.

E1 : On va avoir du 2*5 et après ça sera du 1*1.

E2 : Donc 1*4 ou 1 4*5 ça marche.

E3 : La question quand t'as 1*5 et est ce qu'il faut prendre 5 modulo 5*11. Quand tu as p 6 n, la question qu'il faut se poser c'est est-ce qu'il faut être le premier à jouer à p (si p>n) à n*p modulo n. Si oui tu t'organise si non tu t'organise.

E2 : Voilà, à 5*7

E3 : 5*7 ça laisse 2 2 5, 1. Oui je commence.

E2 : Le dernier carré il fait 1.

Observateur : Il faut être le premier à jouer à quoi.

E3 : 5*7

Observateur : Et avant tu disait avec ton p modulo n, p n

E3 : En fait la question qu'il faut se poser c'est faut être le premier à jouer à n fois p modulo n.

E2 : Ce que je veux dire c'est que le p modulo n il ne te donne pas le dernier carré.

E3 : Il te donne le suivant

E2 : Il te donne le suivant

E3 : Le suivant tu le résous de la même manière c'est une suite récurrente. Mais c'est ça la question qu'il faut se poser.

E2 : Mais c'est pour ça que c'est compliqué. Mais le problème c'est que la récurrence c'est que tu vas obtenir un truc qui va être... c'est pas une solution...

E1 : Que tu va pas pouvoir obtenir tout de suite.

E2 : Tu ne vas pas pouvoir dire j'ai n p, ça donne ça.

E3 : On doit trouver une formule qui va pouvoir trouver des trucs.

E1 : Déjà ce que je pense ce qui serait pas mal c'est qu'à partir de p et de n on exprime directement le carré finale.

E3 : Modulo c'est formule c'est une suite je pense, donc on va pouvoir faire la somme.

E1 : Donc comment exprimer le dernier carré... Le soucis c'est qu'on va avoir des fractions de fractions.

E4 : Ça doit faire deux suites(?).

E1 : Je ne vois pas comment exprimer ça de manière générale.

E3 : Dans tous les cas peu importe comment on joue on va enlever le même nombre de carrés. Par exemple si on a le 7*3, peu importe qui en enlève combien, en fin de compte on va enlever 5 carrés. On va en enlever 2 de 3 et 3 de 1...

E1 : Pourquoi tu dis qu'on va enlever forcément 5 carrés.

E3 : Ce que je veux dire c'est que le 7*3....

E2 : Comment on sait si un nombre est rationnel ou pas ?

O, **E4 :** Tu peux le mettre sous la forme d'une fraction.

E2 : Non mais d'un point de vue technique.

E1 : Ah on a fait un truc comme ça la dernière fois...

E4 : Si il est finit il est rationnel je pense.

E3 : Le 7*3 réagit comme 1*5.

E2 : Et genre sur un nombre immense avec pleins de virgules.

E4 : Ah sur un nombre immense..

E1 : Ah vous vous souvenez le truc quand on devait casser des tablettes de chocolat, c'est un peu ça.

E3 : Ce que je veux dire c'est est-ce qu'il faut commencer au 1*5 ?

E2 : Oui.

E3 : Alors il faut commencer au 7*3.

E2 : Pourquoi ?

E3 : Parce que 7 c'est égal à 2 *3 + 1. 3=3*1. Donc en fin de compte hop 2, 3, en fin de compte ça va donner 5 morceaux. Peu importe la forme du truc il va avoir 5 actions.

E1 : Mais c'est ça qu'on va chercher à exprimer, le nombre de morceaux.

E3 : Donc ça se fait avec le modulo.

E1 : Donc comment exprimer ça dans le cas général.

E3 : Alors c'est la somme de i..., de... 7, de..., p modulo. Comment on fait modulo ?

45m00

E3 : Ah c'est pour cent, si en programmation c'est pour cent. C'est la somme de p pour cent n sachant que p est = à p pourcent n, p de n=1 est égal à p n 100 n.

A Je suis d'accord mais on se retrouve avec une suite.

E3 :C'est une suite... On peut faire un algorithme qui te le résout sur un ordinateur. Il suffit de trouver une série de calcul simple qu'on lui donne et c'est bon.

E1 : Mais est-ce que l'on peut pas résumer ces calculs simples. Le soucis c'est qu'à chaque fois on a pas le même facteur.

E2 : Essaye ton algorithme par exemple sur un 4 par 7.

E3 : Ça veut dire que ça donne 7 pour 100 de 4, ça donne 1 +, ah non ! Ah oui. C'est égal à 7/4 +7 pour cent 4/ 4 sur 7 pour cent 4

E1 : Après il te reste du 1*4 à la fin

E3 : Attend. Alors ça veut dire que du 7/4 ça fait 1. Â$\frac{1}{4}$ ça fait 0.

E2 : Ce que je veux dire c'est que tu ne peux pas te contenter de compter le nombre de coup..

E3 : Si

E2 : Non car tu ne peux pas toujours jouer deux coups. C'est ça le problème.

E3 : Oui.

E2 : C'est comme jouer deux fois, y a certain cas où tu vas prendre un carré d'un côté et puis tu va le prendre là. Ce que tu ne peux pas faire.

E1 : T'es sur qu'on peut pas le faire ?

E2 : Je ne crois pas.

E1 : Ah oui de même dimensions.

E2 : De même dimension et le plus grand C possible à un coin du rectangle. Du coup ce n'est pas exactement pareil.

E1 : Du coup il faudra qu'on sache déjà quand il y a une changement de dimensions.

E2 : A chaque fois que tu as un changement de dimension c'est un peu tu recommence à 0.

E1 : En sachant ça avant tu peux savoir comment jouer.

E2 : Donc il est un peu plus compliqué ton algorithme.

E1 : Donc faut prendre en compte ça.

E2 : En plus je te dis pas la complexité de l'algorithme à ce stade là.

E1 : Ce qu'il proposait c'était pas non plus compliqué comme algorithme

E3 : Il suffit de savoir si il faut en enlever 2 ou non dès le début.

E2 : Hmm

E1 : De toute façon ce qu'on cherche à savoir c'est quand est-ce qu'il y a toujours une stratégie gagnante pour le joueur.

50m00

E1 : Donc en fait on se retrouve à chaque fois avec le nombre de lignes et de colonnes.

E4 : Inversé.

E1 : Voilà... Par exemple si l'on a le n plus grand. Donc ça fait n divisé par C....

E4 : Sinon tu passes avec Q. Sinon on peut faire n-Q modulo 0....

E1 : Si en fait ton algorithme il partait bien, celui que tu avais fait au début. En fait ce qu'il nous faut c'est le nombre de quotient, ça on est d'accord, plus à chaque le nombre ou tu va devoir faire passer d'une étape à l'autre.

E3 : Ouais...

E1 : Et à chaque fois le nombre de quotient qui y corresponde.

E2 : Le problème c'est que c'est un algorithme.. De toute façon même si il part bien, ça ne suffit pas. Quand on va avoir un million de colonne par je ne sais pas combien.

E1 : Oui mais t'as certaines taches rébarbatives où tu es obligé d'utiliser un algorithme.

E2 : Oui on est d'accord, mais par exemple c'est franchement pas efficace là comme solutions.

E1 : Je suis d'accord avec toi. Mais là...

Observateur : Faudrait qu'on appelle un mathématicien.

E2 : Si par exemple tu prend un carré avec peu importe le nombre de colonnes et en nombre de lignes, nombre de colonnes fois 2 + 1.

E1 : Ah tu veux dire ce genre de cas.

E2 : Oui et ben là ton algorithme il va devoir faire autant d'opérations que ton nombre de colonnes. Donc autant dire que si tu fais un million par deux millions, ton algorithme il rame pendant longtemps.

E1 : Non parce qu'au premier truc tu coupe un carré comme ça puis...

E3 : Non un million il va le couper en deux et puis après en un million et puis voilà.

E2 : Non mais un million par deux million 1. Ça va faire... D'abord il va le couper... Ah non. A ouais 2... Ah je me suis trompé dans le calcul oui c'est ça.

O : Il va le retourner 1 dès le début.

E1 : Mais là le soucis c'est qu'on est bloqué par nous soucis mathématiques en fait. En fait il doit y avoir une manière de voir mais on ne la trouve pas là...

55m00

E1 : En fait si ça se trouve on est parti sur un truc totalement faux.

E2 : Oui, aussi... Mauvais exemple... alors

E1 : Quelqu'un se souvient de la formule du PGCD ?

E2 : Je crois pas non.

E3 : Faut décomposer en produit de facteurs premiers non ?

E2 : Pareil c'est un algorithme le PGCD.

E1 : C'est un algorithme mais il n'y avait pas une formule générale ?

E4 : Non. Sinon ça aurait été cool.

E1 : C'est pour ça que j'avais un truc sur ma calculette pour le faire.

E4 : ... Moi je me suis tout tapé les calculs.

E2 : Je reprend mon contre exemple maintenant, il marche. Je prend 1999 et 2001.

E3 : Oui..

E1 : En fait il vient de le faire de tête là.

E2 : Attend mais pourquoi ça ne marche pas maintenant, ça marchait en exemple.

E4 : Parce que c'est trop carré tes trucs.

E2 : C'était bien carré oui, mais maintenant ça ne marche plus...

E1 : Par exemple si l'on prend 1 000 603 et 2 000 036...

E3 : Oui.

E1 : Là par contre l'algorithme il est en chien.

E3 : Toi aussi d'ailleurs, mais l'algorithme sera plus performant que toi.

E1 : Ça c'est évident.

E2 : Ça se discute.

E1 : Sauf si on réussi à trouver une règle de mathématique plus simple.

E3 : Voilà...

E1 : C'est là dessus qu'on bloque...

E3 : Qui sera quand même un algorithme.

E1 : On peu pas appeler ça vraiment un algorithme si l'on fait une formule. Le soucis c'est que là...

E4 : La plus part du temps on a pas résolu le truc par des formules...

E1 : C'est à dire ?

E4 : Ben genre quand t'es en binaire pour les allumettes et chocolat, l'espèce de...

E3 : On a pas essayer en binaire !

E1 : Je vous laisse partir là dessus.

E3 : Un million en binaire ça fait combien ?

E1 : Ça fait beaucoup de 1 et de 0.

E2 : Bon je vous montre mon exemple de contre exemple.

E3 : Je crois que ça ne fait pas tant de 1 que ça.

E2 : Je prend un carré qui fait 1, là tu mets 2, là tu mets 3, là tu mets 4, là tu mets 5 etc. Comme ça tu construis. J'arrive plus à calculer le truc, j'arrive plus à calculer la taille mais bon l'idée c'est ça. Tu continus ça jusqu'à qu'il y est un million par je ne sais pas combien.

E1 : Oui mais sauf que ce qu'il disait c'est que l'ordinateur sera quand même vachement plus performant que toi.

E2 : Mais il va quand même être super long.

E1 : Toi tu veux un truc que l'on ait tout de suite. Qu'est-ce que tu es impatient.

E2 : Ben oui.

E4 : Si ... Si c'est une suite...

E3 : En fonction du nombre de ligne et colonne ouais.

E2 : Sinon ce n'est pas efficace.

E1 : Ça paraît dur à trouver dès le départ. Est-ce que justement en calculant PGCD ça n'irait pas plus vite ? Est-ce qu'en passant par le PGCD il n'y aurait pas moyen de...

E3 : Oui mais le PGCD ça revient au modulo.

E1 : Oui on en revient toujours à la même problématique. Si ça se trouve on ne peut pas faire plus simple, on... On va faire comme tout bon physicien qui réussi.

En plus le soucis de cette méthode c'est que même en sachant comment..sur quand est-ce qu'on change de nombre de colonnes et nombre de lignes, ce qu'il faut quand même regarder au cas par cas.

Pourquoi vous faites ça ?

E2 : On essaie de trouver l'explication de pourquoi c'est en million en machin, c'est quand même une suite de...

60m00

E2 : Je ne me souviens plus le nom, suite de Fibonacci je crois.

E3 : La suite de Fibonacci en plus elle est résolvable par une suite géométrique et arithmétique. Et étonnamment tu retrouve le chiffre d'or dedans.

E2 : Classe.

E3 : Je trouve ça magique.

E2 : Ou par une matrice. Il y avais pas une histoire comme ça avec une puissance de matrice ?

E4 : Quelle horreur.

E2 : Si y avais un truc comme ça.

E3 : Tu veux qu'on essaye de passer par une matrice ?

E2 : La suite de Fibonacci je crois. Tu peux la résoudre par une puissance de matrice de je sais plus quelle gueule. Je me souviens plus, mais c'est un truc comme ça.

E3 : Non c'était de la forme (1 plus racine de 5)(1/5) - ....

E3 : Oui mais attend...

E1 : Et si on essayait de repartir sur autre chose... Car là on est trop enfermé dans notre raisonnement... Vas y D propose nous une idée nouvelle.

E4 : Je sais pas... chaque carré on le multiplie par 2.

E2 : Et si on faisait un damier.

E4 : Je sais pas pour avoir un carré à chaque fois plus grand à chaque fois on multiplie par 2, enfin, pour coller des carrés qui à chaque fois qui sont de la même dimensions que le précédent tu multiplies 2...

E2 : Ah ouais donc non il est pas si inefficace que ça notre algorithme.

E3 : Moins dans le cas où t'es obligé de faire des 1 au début qui est chiant.

E2 : Même dans le pire des cas, il est relativement efficace. Puisque le pire des cas c'est ça.

E1 : Par contre le soucis c'est le traitement après.

E2 : La pire des cas c'est ça, c'est qu'à chaque fois il reste un seul carré, il prend trop de temps il est trop pourris.

E1 : Et si on partait sur un autre raisonnement peu être que l'on trouverait une solution.

E2 : Ouais et si on vantait(?) en « triné »

E1 : Des fois mec tu fais peur.

E3 : En tertiaire ça ce dis non ?

E2 : Ouais mais c'est moins joli.

E3 : Comment on dit.

E4 : En base trois.

E3 : Ouais ouais, voilà.

E4 : Ouais mais ta méthode c'est pas la pire parce que toujours un carré sur un des deux trucs.

E1 : Dans le cas où c'est fini oui.

E4 : C'est vraiment pas le pire cas. Ben oui on est dans le cas ou c'est fini, on fait la b) là pas la a).

E1 : Oui mais de toute façon ça ne peut marcher que dans un cas ou c'est fini.

E4 : Oui.

E1 : C'est clair et net. Mais alors c'est quoi ton pire cas.

E4 : Ben alors il disait que c'était le pire cas quand t'avais un carré tu rajoute un carré, machin, machin, non mais parce que ça te fait un rectangle... Et on rajoute un rectangle de ..., et on fait un carré.

E1 : Et ainsi de suite et ainsi de suite.

E4 : Oui.

Ce qui est totalement... Bref.

E1 : Et si on reprenait cet exemple mais on prend pas un plateau on prend un cube.

E3 : Développe s'il te plait.

E1 : Non je plaisante, on va se contenter du 2D on va pas passer en 3D là tout de suite.

E2 : Ça doit être juste horrible un truc en 3D là comme ça. Ça va pas changer beaucoup notre...

65m00

E1 : Ben en fait soi tu te retrouve avec du 3D, soi tu finis avec un cube en 3D, soi à la fin tu finis avec du 2D et tu reviens à la même chose en fait.

E2 : Ça te rajoute une dimension ça doit pas tout détruire non plus. Je pense que si tu l'a résolu en 2D à mon avis ça doit marcher en 3D en 4D, c'est comme le truc de chocolat. Une fois que l'a résolu en 2 3 dimensions tu le résouts en autant de dimensions que tu veux.

E1 : Parce que vous l'avez résolus comment le truc du chocolat, j'étais pas là.

E2 : C'était avec les allumettes.

E4 : Que je t'ai expliqué tout à l'heure.

E2 : C'était exactement le problème avec les allumettes en fait. Sous une autre forme mais voilà. C'est comme si on reprenait chaque tas d'allumette était une dimension. Tu peux prendre 17 dimensions si tu veux.

E1 : Et là ça pourrait pas marcher là dessus.

E2 : Avec une hyper tablette de chocolat vaporisée dans l'espace temps.

E3 : Même dans l'espace temps t'en a que 4.

E1 : C'est pas applicable les allumettes là dedans.

E4 : Non car tu n'a qu'une dimension à côté du truc, vu que t'enlève celle qu'est au coin tes allumettes sont plus là. Et pas ni au dessus ni à gauche ni à droite, t'as qu'une seule dimension. Enfin à moins que les allumettes soient à l'intérieur du carré.

E3 : Ça revient quand même le bout de chocolat avec le poivre(?).

E1 : C'est ça.

E2 : C'est ça mais le seul problème c'est que l'on bouge pas de la même façon qu'avant.

E1 : Ouais parce qu'avant on avait réussi au tout début avec le truc en coin, on s'en souvient de ça.

E3 : Ça revient à résoudre les allumettes en fait.

E2 : Ça revient à résoudre les allumettes mais pas avec la même façon. Parce que tu ne peux pas en enlever le nombre que tu veux c'est ça le problème.

E3 : Oui mais quand tu enlève les allumettes tu en enlève le même nombre sur chaque colonne.

E4 : Mais comment tu veux faire parce que t'as pas de dimensions.

E3 : Si tu en as deux, tu as deux tas.

E4 : Mais vu que tu es au coin.... Je sais pas.

E3 : Ça veut dire ne fait qu'on a n allumettes..

E1 : Je me souviens qu'on avait réussi à le résoudre super facilement dans le cas où c'était dans le coin. On devait faire un carré comme ça à la fin, et paf c'était gagné. Si tu faisait un carré comme ça c'était fini pour lui. Sauf que là ça marche pas dans ce genre de cas.

E4 : Oh ben si, si tu fais un carré c'est fini pour lui.

E1 : Non mais je veux dire que ce n'est pas la même méthode de raisonnement, ça ne marche pas.

E2 : Je suis autorisé à découper les feuilles, faire d'autres feuilles de mon brouillon, ça fait trop grand sinon.

E1 : Parce que le chocolat on pouvait en enlever autant qu'on voulait c'est ça ?

E3 : Oui...

E2 : Oui c'est ça on pouvait manger autant qu'on voulait.

E1 : Pourtant sur le papier ça faisait plus compliqué. Ben le fait que l'on puisse enlever autant de lignes et de colonnes que l'on veut.

E2 : Dis comme ça ça pourrait paraître plus compliqué.

E1 : Maintenant faut dire qu'on connait le truc donc ...

E2 : De tout façon tu peux l'assimiler à la même chose c'est ne pas manger le grain de poivre qui est dans un angle de tablette de chocolat. Car au final peu importe les carrés que tu prenne ça revient à isoler un carré à la fin.

Observateur : Ah mais tu fais dans l'autre sens.

E1 : C'est à dire ?

E2 : On peut supposer que c'est le même problème.

E1 : Seulement tu ne peux pas enlever dans la même dimensions. Quoi la même...

E2 : Voilà.

E1 : Ce qui nous complique la chose.

E3 : Si tu ne l'enlève que dans une dimension.

E2 : Comment ça marche une soustraction en binaire ?

O et Observateur : Exactement pareil.

E2 : C'est à dire.

E3 : Tu fais 6 et 1 tu fais - 1 ...

E1 : Ça fait 0. Tu fais 100.

E3 : Là ça fait 1 2 1.

E1 : Par contre 100 ?

E3 : Ben tu fais 100, 1, donc là t'as 0 tu retient 1 tu met 1, là t'as 0 tu retient 1 tu met 1, ...

E2 : Ma vie en sera changée à jamais.

E3 : J'avais programmé comment faire l'addition en binaire, programmé avec avec des « et » et des « ou ».

70m00

E3 : En gros le binaire c'est juste un état d'énergie ou non. En fin de compte avec 2 nombres tu as 2 différents niveaux d'énergie, à chaque intervalle de temps t'as un niveau. Et là veut dire que ça te donne un nombre. Donc je disais que si là t'as 2 intervalles de temps tu fais plus ou en fin. Et j'ai réussi à définir l'addition avec des connecteurs logiques justement. J'étais assez content de moi.

E2 : Tu vas pouvoir créer un micro processeur bientôt.

E3 : Oui mon micro processeur il n'a que l'addition.

E2 : C'est déjà un début.

E3 : Après j'ai essayé de faire la multiplication et j'ai abandonné.

E1 : Après il te restera plus qu'à faire des transistors.

E2 : La multiplication ça doit commencer à devenir plus agressif.

E3 : Oui c'est sûr. Disons que c'est puissance le nombre de chiffre qu'il te faut de transistor.

E2 : Pour le faire ça devient un peu violent.

E1 : Après je ne me souvient plus quelle porte logique.

E3 : Globalement tu peux tout faire avec des p des ou et des pa...

E1 : Après t'as des variantes...

E3 : On s'est un égaré

E1 : Ouais c'est pas le sujet. Mais des fois ça fait du bien de s'égarer...

E1 : Donc le truc du chocolat. Mais sauf que là on va se retrouver avec le même soucis, je ne vois pas comment me débarrasser de ce soucis de quotient et de reste.

E2 : C'est un 7*4...

E1 : Non en fait là ce que l'on cherche à faire ça reviendrait à trouver une formule pour le PGCD.

E3 : Ouais.

E1 : ...On a révolutionner les math là cette après midi..

E1 : Le seul soucis c'est qu'on va pas pouvoir créer une suite car le problème c'est qu'à chaque fois ça va faire varier le quotient.

E4 : Sauf si l'on met une valeur absolue.

E1 : Une valeur absolue ?

E4 : Ouais je sais pas ce que ça vaut mais...

E1 : Comment ça une valeur absolue ?

E4 : Imaginons que je dise ça c'est p ça c'est q.. Donc si j'enlève un carré le carré sera (q-p) *q. La dimension du carré d'après.

E1 : Pourquoi...

E4 : Non c'est q là et c'est p là.

E1 : Oui je suis d'accord.

E4 : Donc q est invariant machin. Donc on appelle ça q' et p' voilà.

E1 : Non parce que t'en aura que tu vas garder sur ...

75m00

E4 : Ouais ... Et que... Donc là ça ferait q-p', ou alors p'-q... fois q.

E1 : De toute façon ce que tu vas obtenir sera plus petit que ton q forcément.

E4 : Oui certainement mais c'est pas ce que je dis. Regardes les équations ...

E1 : Sauf qu'après tu vas te retrouver avec un q' et ensuite avec un pp' ' ' et ensuite un q' '. C'est ça le soucis où on est bloqué.

E4 : Je ne suis pas sûr.

E3 : Le problème c'est que la somme d'après et générée en fonction de celle d'avant. Dépend de celle d'avant...

E1 : Ah tu essayes avec des sigles différents ?

E2 : Oui j'essaye de voir si ça peut donner quelque chose, finalement, disons en binaire pour voir.

E1 : C'est frustrant de bloquer là.

E4 : Ça ne change pas pour moi.

E1 : La dernière fois tu t'en ai bien sortie avec la pesé.

E4 : Merci monsieur.

E3 : Moi j'ai rien fait, je n'y arrivais pas à la pesé.

Observateur : Vous devriez peu être essayer de résoudre un cas, genre de bande 3, plutôt que d'essayer directement de résoudre le cas générale.

E1 : Un cas de bande 3 ?

Observateur : Non celui que vous voulez, vous en avez déjà fait 1.

E1 : Oui on tente.

E2 : On a déjà fait 2 aussi.

Observateur : Donc essayer 3. Ça va peu être vous donner des idées...

E1 : Donc soi on va se retrouver avec un cas ça va être du 3 fois 3 à la fin, donc ça on en a déjà parler.

E4 : Ou du 2 fois 3.

E1 : Ça aussi on va se retrouver ...

E4 : Et dans ce cas là on se retrouve avec du ...

E1 : Du 2 fois 3 à la fin ? Ben ça te fais une colonne de...

E4 : Oui ça te fais une colonne et hop.

Ximena parle à C !

E3 : Il y a quand même le cas qui revient que si tu as le nombre de 1 qui est pair et ben tu gagnes.

80m00

E2 : En binaire ?

E4 : Mais il corresponde à quoi t'es 1 en fait ?

E3 : Au produit des 2 je précise.

E4 : Au produit des 2 ?

E3 : J'ai fais le produit des 2 et quand le nombre de 1 est pair et ben ça semble marcher, dans deux cas !

Donne moi deux nombres, deux chiffres ?

E1 : 6 et 9.

E2 : C'est quoi ce que tu viens de dire ? Car je crois que je suis retombé sur le même chose au final.

E3 : Si tu les exprime en binaire et ...

E2 : Tu comptes le nombre de 1.

E3 : Et tu fais le produit.

E2 : Tu fais le produit ou tu compte juste le nombre de 1 ?

E3 : J'ai fais le produit.

E1 : Si vous le résolvez en binaire je me marre.

E2 : Parce que simplement en comptant le nombre de 1 déjà ça à l'air bon.

E3 : Là t'en a 4, là t'en a 3, là t'en a 2...

E4 : En même temps le produit d'un nombre pair par un nombre pair c'est un nombre pair alors... C'est normal... Que si il fasse le produit il trouve des nombres pairs. Enfin bref.

E2 : En même temps ça se tiens.

E1 : Donc on va se retrouver avec les trois cas que l'on connait. Soi un colonne de 1, 1*3, soi du 2*3, soi du 3*3. A partir du 2*3 on va se retrouver avec du 2*1.

E3 : Comme le miroir.

E1 : Tu sais que c'est quand même marquer dessus. Quand il est à remettre le rapport.

E2 : Sérieux ?

E4 : 18 avril dans une semaine.. Là il parle d'autre chose... De partielles, etc.

E1 : Récapitulatif.

E1 : Donc tu peux dire qu'on est parti sur la bande n * 1

Observateur : Y'a les deux questions aussi.

E1 : Ah oui.

E3 : Non ça ne marche pas, essayes avec le 6 9.

E2 : Non, moi ça avait l'air de bien marcher. Oh non je t'interdit.

85m00

E2 : Non ça marche pas.

E1 : De toute façon il y a des cas où ça ne peut pas être fini.

E3 : Le rectangle n'existe pas (:)).

E4 : Oui le cas où q et p...

E1 : Par exemple avec pi qui est pas exprimable sous forme de fraction.

E4 : Je dis là le cas où c'est fini. Ensuite je dis l'élargissement. Car si ça appartient à R ça peu appartenir à Q et pas le contraire, le truc c'est de mettre ... En fin bref.

E2 : Moi je pense quand même qu'en trinaire ça vaut le coup d'essayer.

E1 : Je pense qu'on va carrément passer en exa décimale.

E3 : On a déjà du mal avec les 7*3...

E4 : Comment on ferait pour calculer en base 60 ?

E1 : Déjà il faudrait que tu es 60 signes.

E3 : 60 signes et puis c'est bon.

E1 : C'est tout. Après c'est pas très pratique.

E3 : a,b,c,d,e,f...

E1 : Après tu prends les majuscules.

E4 : Non tu prends des fractions comme signes. 60 signes sous forme de fractions.

E3 : Comment ?

D : Je sais pas moi. Mais si je sais pas en base 60..

E1 : C'est quoi déjà cette question ?

E4 : Je ne sais pas.

E3 : Je cois qu'elle n'a pas envie d'écrire c'est compréhensible. En fait on a même pas besoin que les professeurs nous donnent des problèmes à résoudre, on s'en donne nous même.

E1 : Il pourrait nous laisser pendant une heure sur des problème tout bidon et à la fin on partirait sur des trucs...

E1 : Mets les où on sait que cela ne peut pas être fini.

E4 : Ben non justement si on met les cas ou ça peut être fini et qu'on met un .... Si et seulement si ...

Observateur : Ça dépend ce que vous voulez dire.

E1 : Ahah on voit pas. Tu nous dis si et seulement si... Mais non si tu montres déjà.

E4 : Bon si je dis c'est fini si et seulement si machin.

E1 : La question c'est : le jeu est-il fini quel que soient les dimensions du rectangle initial ? Si tu montres qu'il y a un contre exemple.

E4 : Faut que je marque.

A : Si tu as un exemple qui montre que ça marche pas, ça veut dire que c'est pas tout le temps.

E4 : Oui. Ah c'est ça... Mais j'écris pour rien !

E3 : T'as qu'à dire une feuille de papier, au pire.

E2 : Une feuille de papier ?

E3 : Ben une feuille de papier ça a une telle forme que quand tu plis ça a toujours le même rapport de longueur, car c'est toujours racine de deux, deux. C'est fait exprès. Et donc en fin de compte quand tu plis une feuille de papier tu vas toujours arriver à un rectangle qui a ce rapport là.

E2 : Bon ben d'accord mais quel est le rapport avec le carré ? Ah bon d'accord c'est racine de 2.

E3 : Approximatif. J'aimerais bien les commentaire en fait : Ils partent sur la mauvaise voie.

Observateur : Je n'écris pas de commentaire j'écris juste ce que vous dites.

E3 : Les commentaires seront après.

Observateur : Oui c'est pas moi qui ferais les commentaires.

E1 : Parce qu'en fait c'est pour votre thèse.

Observateur : Non c'est pour Ximena.

E1 : D'accord.

Observateur : Je prend des notes. Mais bon c'est mieux d'expliquer les cas qui marchent, que de dire ça marche pas...

E3 : On répond à la question.

E1 : Sauf que nous on répond à la question. Le jeu est-il fini quel que soi les dimensions initiales.

Observateur : Oui mais bon on aime bien savoir les cas pour les quels ça marche après.

90m00

Observateur : C'est une question après... Que vous vous êtes posé vous même.

E1 : En même temps après vu que c'était pour la synthèse la première question.

E4 : Par contre pour expliquer comment ça marche quand p et q appartiennent aux rationnels. Pour expliquer comment ça marche...

E3 : Ben parce qu'on peut leur trouver une unité commune.

E4 : Une unité commune, ouais...

E3 : D'accord, sinon.

E1 : Ce qui est bien c'est qu'on est doublement pris en note.

Observateur : C'est quoi une unité commune ?

E4 : C'est à dire qu'on aura un truc du la forme 1 sur 64, même si on doit chercher longtemps ben on trouvera.

E3 : Ben l'unité commune par exemple on aura 1 sur 64, c'est une unité on s'en fou.

E4 : Ben l'unité commune c'est la carré...

E3 : La norme.

Observateur : Ok, je viens de comprendre ce que vous voulez dire.

Observateur : Ben en fait c'est chacun des nombres vous pouvez l'exprimer, en fonction, dire que c'est c'est tant de fois cette unité et l'autre c'est pareil. Et ce nombre c'est un carré.

E3 : Ce nombre c'est un rationnel.

E4 : Oui.

Observateur : Alors dites moi c'est quoi l'unité.

E3 : Hein.

Observateur : Si on vous donne p et q comment vous faites pour trouver l'unité ?

E4 : Et si on divisait p par q.

E1 : Ben non on va pas trouver forcément l'unité car on aura le reste.

E3 : Il suffit de pas.

E1 : Là en fait ça revient à ce qu'on faisait avec l'algorithme.

E4 : Si on divise p par q ...

E1 : C'est vrai qu'on a mal identifié les cas où ça ne marchait pas.. Ou les cas où ça marche à coup sûr.

E4 : q * p c'est une aire, voilà, donc alors après...

E3 : Si c'est p sur q.

E4 : Je crois.

E3 : Si c'est un nombre rationnel et ben c'est bon.

E4 : Parce que mais.. Je sais pas...

E4 : Oui c'est ça ça doit être p sur q.

Observateur : Ben je sais pas essayer avec des exemples.

E1 : Parce que là vous êtes parti sur quoi... J'ai du mal à rester concentré...

E4 : On se demande comment trouver l'unité commune. C'est à dire.

E1 : Ça revient à ce qu'on faisait tout à l'heure sur l'algorithme.

E1 : En fait ce que vous voulais dire c'est le plus petit carré que l'on va trouver. C'est ça ce que vous cherchez à avoir ?

E3 : Voilà.

E1 : Ben ce dont on vous demandez tout à l'heure et qu'on ne trouvais pas la solution.

E3 : Non c'est p sur q.

E1 : Non pas forcément p sur q.

E3 : Pourquoi ?

E4 : Non c'est pas p sur q.

E1 : Ben parce que tu peux avoir des restes, c'est comme là ce qu'on faisait. T'as un reste. Ton un reste il va pouvoir être divisible par soi ton nombre de lignes soi ton nombre de colonnes.

E3 : Par exemple si t'as 2 sur 3.

E1 : Ouais. Donc tu va avoir du 2, et à la fin tu vas avoir du 1.

E3 : Oui.

E1 : Comme tu veux. Enfin comme carré.

E4 : Le 2 par 5 par exemple ça ne marche pas le p sur q. Si tu divise 5 par 2 en fait la dimension du truc pour le résoudre ça sera 1. Machin. Et 5 sur 2 ça fais 2,5 donc c'est pas 1.

95m00

E1 : Donc on va avoir du 3 fois 2.

E4 : Moi j'aurais plus tendance qu'avec l'essentiel (?) ça marche et puis voilà.

E1 : Car il y aussi des cas où on peut donner à l'adversaire un carré de suite, soi on peut en faire un rectangle.

E4 : Mais c'est pas le but, c'est de trouver...

E1 : 3 fois 2. Non mais je réfléchis en même temps.

Observateur : Et avec un autre truc ?

E4 : Et c'est pareil c'est 1... et c'est pas 8 sur 3... Donc au pire on a le choix 1

E1 : Non pas dans tout les cas il y a des cas où ça ne marchera pas.

E4 : Je dis au pire.

E1 : Au pire on en aura pas.

E4 : Ouais Je parlais... je pas allé chercher dans les Q, je parlais des entiers naturels parce que bon, si on a un pair pair il y aura autre chose que 1, non tout simplement si on a un truc ici qui est pas multiple de ça t'auras 1 et puis c'est tout.

E1 : Non pas forcément.

E4 : Si.

E1 : Non.

E4 : Bon, 3 c'est pas multiple de 8 et 2 c'est pas multiple de ça...

E1 : Par exemple là j'ai du 3*2, on est d'accord que..

E4 : C'est pas des multiples.

E1 : Sauf que...

E3 : Ils ont une unité commune.

E1 : Attends.

E4 : 6*3 allé...

E1 : Sauf que là 6*3 t'en a un qui est multiple de l'autre.

E4 : Ben oui justement c'est pour prouver par exemple..

E3 : C'est la PPCM.

E4 : C'est quoi ?

E3 : Plus petit comme un multiple.

E4 : Oh ça me fait chié là, je trouve 1 aussi... Aidé moi.

E3 : C'est leur PPCM. 2 c'est 1*2, 3 c'est 1*3

Observateur : C'est quoi la PPCM de 3 et 2 ?

O et **E4 :** 1.

Observateur : C'est quoi le plus petit multiple comment de 3 et 6.

E3 : Ah non c'est 6, c'est l'inverse. C'est quoi c'est le plus grand diviseur commun.

E4 : PGCD.

E3 : PGCD, c'est 1. C'est pas le PPCM c'est le PGCD...

Observateur : C'est pas vraiment la même chose.

E3 : Ah ben c'est des lettres.

E1 : Surtout qu'à un moment on était parti sur le PGCD.

Observateur : Mais là c'est que quand c'est des entiers, donc si c'est pas des entiers sur les...

E3 : Ben on les multiplies tous les deux par un nombre et puis c'est toujours le PGCD.

E4 : Oui j'avoue que ...

E1 : On peut les exprimer sous forme de fraction normalement.

Observateur : Ben essayez.

E4 : Si on a 1 sur 64 et là 1 sur 32. On multiplie par 64 de chaque coté et ça fait du...

Observateur : Oui, et après t'as des entiers.

E4 : Et après le PGCD on le multiplie par 64. Ou, on le divisera. Ça dépend dans quel sens on voit les choses.

Observateur : T'as ça à expliquer.

E3 : C'est PGCD. Alors si c'est p * n et p>n alors c'est PGCD de 1... sur ... p2(?).

E1 : C'est incroyable comme à cette heure là je n'arrive plus à me concentrer.

100m00

E1 : Non je peux bosser de 4h du matin jusqu'à 18h mais passé 18h...

E4 : Ptain comment on dit...

E3 : Comme ça non.

E4 : Distance...

E3 : Hey, PGCD de 1 sur p*p ;

E4 : Ouais mais en français c'est plus facile quand même, mais oui si tu veux...

E3 : Non c'est pas moi qui veut. Attend t'as oublié de multiplier p * PGCD de 1 sur ...

E4 : Attends bon si p égale PGCD de 1 sur a, attends, si q= 1 sur a et p= 1 sur b tu va mettre PGCD de...

E1 : Pourquoi on part là dessus ?

E3 : Car il faut trouver la base commune.

E1 : Mais sauf qu'avec le PGCD on va se retrouver avec le même soucis qu'avec l'algorithme.

E3 : Non.

E4 : Non non, on veut juste savoir quelle dimension aura le carré qu'on trouvera.

E1 : C'est juste ça. D'accord.

E4 : Et si on multiplie tout par b ça va faire PGCD de b q et b p.

E1 : Dans ce cas en connaissant la base commune on peut pas remonter pour trouver la solution ?

E4 : de 1 et 2 b sur a. PGCD de b/a. Le seul truc c'est que là il va falloir multiplier par a par ce que ... ça va être chiant.

E3 : Je t'avais dis qu'il y avais un p que tu avais oublié.

E4 : Je n'avais pas compris... Désolé.

E2 : Ça ne marche pas en trinaire. Je me suis dis au cas où, pourquoi pas, il n'y a aucune logique mais bon, allé.

E2 : Je compte même pas bien en trinaire.

E1 : Si ça trouve ça marche mais tu t'es planté.

E3 : Ça marchait déjà pour ton binaire.

E3 : 1, 2, 10,11,20,21,22,100,101,102,110,110,120,120,121,122,200...

Observateur : C'est bon ?

E4 : C'est à peu près rédigé.

Observateur : Et maintenant c'est quoi les cas qui ne marchent pas ?

E4 : Après les cas qui ne marchent pas c'est les cas qui n'appartiennent pas à Q parce que si c'est R. Enfin si...

E1 : C'est ceux au final qu'on ne peut pas exprimer sous la forme de fraction normalement.

E4 : Ouais si on ne peut pas les exprimer sous forme de fraction on ne va pas pouvoir exprimer un PGCD...

Observateur : C'est quoi.

E4 : Trouver un PGCD. C'est R privé de Q...

E2 : I.

E4 : I ça marche pas.

Observateur : Enfin I vous allez avoir du mal à faire des carrés...

E1 : Par exemple si tu prends pi et pi + 1 sur.. comme colonne.

E4 : Non mais là on veut tous les cas.

Observateur : Vous pouvez déjà prendre un cas et expliquer pourquoi ça ne marche pas.

E4 : Alors pi car il est pas exprimable sous forme de fraction.

E3 : Ouais mais pi et 2*pi ça marche.

E1 : Ouais mais si tu prends pi et pi+1.

E4 : Ah.. ouais le truc c'est qu'après il ne faut pas que ça soit des multiples entre eux. Enfin.. Si on comprend ce que je veux dire... Faut pas que l'un puisse être exprimer en fonction de l'autre.

O : Mais si c'est le cas où le PGCD est non nul.

Observateur : C'est juste une remarque, est-ce que c'est ça que tu as marqué au début ?

105m00

Observateur : Si là tu dis pas que c'est la division de l'un par l'autre qui doit être rationnel tu dis que c'est les deux qui doivent être rationnel.

E3 : Donc estce que quelqu'un a une idée pour résoudre ça ?

E2 : On peut compter en quaternaire.

E3 : faudrait peut être continuer.

E1 : Est-ce que l'on connait une solution simple à ce problème ou pas ?

E3 : Apparemment c'est un problème nouveau donc heu.

E4 : Ça a été résolue en fait ?

Observateur : Non pas tout je crois. Y'a des trucs qui sont dur.

E3 : En ce qui ce passe c'est quand on le résout si on arrive à le décomposer en un produit de facteurs en fin de compte ça se résout comme une série de truc simple. Le problème c'est 2 nombre premier ensemble ça se complique un petit peu. Je pense que c'est ça.

E4 : Si ça n'a pas été résolu, pas de remords quoi.

E1 : Sinon on aurait peu être pu faire avancer les math cette après midi. On a le droit d'y croire.

Observateur : Faut toujours se dire ça.

E1 : Et puis sur un coup de chance.

E3 : On ne sait jamais sur un malentendu ça peu marcher.

E4 : Et pourquoi ça ne marche pas ? Parce que l'un ne peut pas être exprimer en fonction de l'autre par rapport à une fonction. D'ailleurs.. Ah non... Enfin bref.

E1 : Ça doit être frustrant dans les cas dans la recherche où tu cherches et au final tu peux rien trouver. Ou partir sur une thèse ou tu ne peux pas répondre.

E2 : C'est quoi votre thèse ? C'est comme vous ...

A ce moment là il parle de la thèse de C, Nicolas.

Observateur : Allé le cas qui ne marche pas.

E4 : Ben c'est ça, parce qu'on va pouvoir exprimer un PGCD, parce qu'on va pas pouvoir multiplier...

Observateur : Mais pourquoi il y aurait forcément un PGCD ?

E4 : Parce que le PGCD c'est l'unité commune.

E1 : Enfin l'unité finale.

E4 : Oui le carré final qu'on trouve après avoir...

E2 : Mais ça ne te suffis pas que le quotient des trucs appartienne à Q ?

E4 : Oui mais on veut dire pourquoi ça marche maintenant et ce que c'est l'unité finale.

E2 : Moi j'ai une hypothèse.

Observateur : Ils veulent expliquer pourquoi si p sur q appartient à Q ça marche.

E2 : J'ai une idée. L'idée c'est que si ça marche c'est que notre rectangle il est décomposable en un nombre de carrés, c'est une grille en fait notre rectangle, si ça marche c'est que notre rectangle ça peut être une grille.

110m00

E2 : Et donc c'est une grille, on va mettre x et y là, x ça peut être c par a, y est égale à l par à.

E4 : Si t'as une grille ça veut dire que tu as un PGCD entre les deux et que la racine carré de l'aire de tes petits carrés, enfin bref...

E2 : T'as même pas besoin de t'embêter avec le filé(?) parce que t'as a qui appartient à R.

E4 : Le coté de tes petits carrés c'est le PGCD x et y

E2 : Vu que par définition c'est une grille t'as un nombre fini de lignes et de colonnes, l sur c tiens, q ...

E4 : Oui mais ça c'est bien ce qu'on te disait .

E2 : Mais du coup tu n'as pas besoin de PGCD dans cette histoire.

E4 : Oui mais on veut trouver à quoi est égal le...

E2 : Du coup en faisant dans l'autre sens t'as pas besoin de PGCD.

E4 : C'est pas moi qui voulait au PGCD

Observateur : En fait ça revient au même ce que vous faites

E4 : Ouais ...

Observateur : C'est ça sauf que ton l sur c tu peux voir que c'est leur p sur q.

E2 : Mais voilà donc y a pas besoin de PGCD en fait.

E4 : Pour répondre à la question non. Pour approfondir la question en tant que vrai scientifique.

E2 : Du coup c'est bon, non.

E4 : Voilà ça ne marche pas parce qu'on a pas trouvé de coté, c'est tout.

Observateur : Ça suffit pas vraiment à expliquer pourquoi ça marche pas.

E1 : Mais si on trouve un exemple où ça ne marche pas.

Observateur : Par contre avec ça vous pouvez peu être réussir à expliquer...

E1 : Dans un cas où on pourrait pas trouver de grille.

Observateur : Répète ce que tu as dis , écoute le.

E2 : J'ai une idée, c'est que comme disait Mathieu (O) c'est que si ça marche c'est que notre rectangle il est décomposable en une grille remplie par des carrés. Donc nous dans ce qu'on prends a c'est le coté d'un carré... voilà ... Donc ça veut dire que la longueur ,la largeur sont exprimables en fonction de ... a appartient à R en fait, et c et l à N + étoile, quoi N en fait + étoile, avec c et n appartiennent à N, du coup, plus... Du coup si tu fais x sur y c'est égal à c fois a, l fois a, donc c'est égal à l sur c, donc ça appartient à Q. Parce que l sur c ça appartient à Q par définition vu que c et l ils appartiennent à N.

E1 : Voilà

E2 : Il faut dire que appartient à Q c'est suffisant et nécessaire.

Observateur : Suffisant ou nécessaire ?

E3 : Nécessaire.

E2 : Les deux allé on s'en fou.

Observateur : Alors suffisant ou nécessaire ? Parce que ça c'est important. Ton raisonnement est-ce que ça veut dire que c'est suffisant ou nécessaire ?

E1 : Suffisant normalement.

Observateur : Donc suffisant ça veut dire quoi ? Si vous l'expliquez en si et alors.

E3 : Ça veut dire que si ils appartiennent à Q alors le truc il raisonne pas.

Observateur : Alors c'est ça qu'il a expliqué ?

E3 : Oui.

E1 : Ouais parce qu'on peut le décomposer en grille dans ce cas là.

Observateur : Non. Là il a expliqué que si l'on peut le décomposer en grille alors le rapport appartient à Q.

E1 : D'accord.

Observateur : Par contre elle ici elle à fait quoi...

E4 : Le contraire.

Observateur : Voilà. Alors on peut dire que là c'est le truc suffisant et qu'ici...

E1 : C'est ça.

Observateur : Donc finalement les deux ça fait...

E4 : Ça fait la solutions.

O et **E2 :** Trop bien.

Observateur : Vous avez compris pourquoi... A la base il suppose, si je peux décomposer...

115m00

Observateur : Donc il suppose déjà qu'il peut le décomposer, il ne sait pas...

E1 : Ah mais j'ai pas vu y'a une faute dans la question, on peut pas y répondre alors, « Dans le cas où le jeu est fini »

E2 : Ça change quoi.

E1 : Je ne comprend pas la question.

E3 : Tu vas pas chipoter.

...... Ils parlent d'autre chose.... Vais je voir la fin de ce truc.... Il parle de bbq et de judo....

Observateur : Allé maintenant il reste la b).

E2 : On a pas trouvé.

Observateur : Si vous avez fais pour au moins une ligne et deux lignes.

E1 : On a fait aussi pour 3. Après ce que l'on se rend compte c'est que c'est souvent la même chose. On va retrouver les même cas.

Observateur : Après vous pourrez expliquer comment vous feriez de manière générale.

E1 : C'est un peu ce qu'on a fait avec son algorithme en fait.

E3 : Tu veux que j'écrive mon algorithme ?

E1 : Et que tu donnes un petit bout d'explications quand même.

Observateur : D'abord commence par une ligne tout ça.

E3 : Donc genre là y a deux lignes...

2h

E1 : En fait c'est le truc des allumettes avec un changement de sens à un moment.

E4 : Je sais pas...

E1 : Si c'est comme si t'avais un truc comme ça et d'un seul coup tu pars dans ce sens et sauf que tu peux faire les 2, et après ainsi de suite

E4 : Ah pas bête.

E1 : Tac tac, tac tac, tac tac.

E4 : C'est une très bonne idée ça.

E2 : Attends t'as dis quoi ?

E1 : En gros c'est comme l'allumette tu va te retrouver à faire ça comme et puis après tu auras une cassure en faite, tu vas te retrouver dans un plus petit rectangle, tu vas passer comme ça, tu vas passer dans un plus petit rectangle, tu changes, c'est comme si tu changeais de coté, et ainsi de suite.

E2 : Ouais.

E1 : Voilà.

E1 : Ce qui nous reste à savoir c'est combien il y a d'allumettes et combien il y a de cassures.

Observateur : T'as dis quoi à la fin ?

E1 : Combien il y a d'allumettes et combien il y a de cassures. Donc on en revient à cette histoire de..

E4 : De chocolat.

E1 : Pas de chocolat d'algorithme.

Observateur : Tiens, explique ton algorithme vite fait aussi.

E3 : Il faut un crayon.

122m00

ANNEXE D

Transcriptions deuxième expérimentation, première phase : La course à n

D.1. Groupe A

3m20

B : Ah, c'est un truc de logique, à chaque fois il faut rajouter 1 ou 2.

C : Ouais, ouais.

B : Et le premier qui arrive à 20...

C : Donc si tu arrives à 18, tu rajoute 2 et tu as 20.

B : Ah j'ai compris, dans fort Boyard il y a le même truc avec des perles..

D : Ouais des allumettes.

B : Je vous jure que c'est vrai.

Observateur : Je ne regarde pas fort Boyard.

D : Mais si ils ont 20 et normalement c'est 14. En en fait..

D : Non mais y'a un truc, on me l'a dit, y'a un truc.

Le gestionnaire finit l' énnnoncé.

...

D : Madame on peut changer les équipes après ?

B : En fait, tu pars de 0 et chacun son tour l'équipe doit rajouter soi 1 soi 2, et le but du jeu c'est d'être le premier à arriver à 20.

Observateur : Alors quelles sont les équipes.

A : Ben si on peut changer on fait tous les deux contre tous les deux.

D : Voilà.

Observateur : Bon alors Tanguy et Léa et Fanny et Noémie.

A : Je suis désolé Fanny.

C : Non non mais...

B : Encore que là c'est pas vraiment des math, c'est différent, c'est moins dur que les limites... C'est qui qui commence ?

C : Allé.

B : On part de 0.

C : Allez y.

B : On rajoute combien.

D : 2.

A : 1.

C : 4.

Observateur : Soi tu ajoutes 1, soi tu ajoutes 2. Le but c'est d'arriver à être le premier à trouver une façon d'arriver à 20 le premier.

B : Ok, On va dire 2.

D : Ouais 6.

C : 1.

D : 7...C'est 8, ouais 9.

C : 1.

D : 2.

B : 1.

D : 1.

A : 2.

Observateur : Là vous faites au hasard..

B : Ouais.

A : Oui.

D : Attends.

B : 2.

D : Non non attends.

B : 2, c'est bon si ?

D : On est pas sur, non.

Observateur : Parlez plus fort ils vont rien entendre.

B, D : 1.

C : 2.

A : Attends.

D : 1.

A : Heu, on a perdu.

B : Ah putain ouais.

D : T'ajoutes combien ?

A : Si on a perdu, qu'on ajoute 1 ou 2 on a perdu.

D : On est les meilleurs.

Observateur : Alors là vous êtes allez, alors, c'était quoi.. Qui est-ce qui a commencé là ?

B : C'est nous.

Observateur : Vous avez mis 2 au hasard ou pas ?

B : En fait il a une méthode en fait.

C : Mais après Tanguy si on aurait du dire 2 on aurait gagné de toute façon.

D : Pas au début, au début on avait pas de méthode.

B : Au bout d'un moment on en a eu une.

B, D : Non.

C : Bon ben 13 si vous aviez dis 2 on aurait gagné.

D : On a pas dit 2.

Observateur : Bon alors tu parles de la méthode et vous essayez de ...

D : Non vous n'auriez pas obligatoirement gagné à 13.

C : Si, si, t'aurais dit 2, t'aurais dis 2, si, si.

Observateur : Ben essayez.

C : Si, si.

D : On essaye. On repars de 13..

C : Ça aurait fait 15...

Observateur : Non non vous repartez de 0.

D : Vas y commencez vous. Allez vous commencez.

A : Heu 1.

B, D : 2.

A : Heu 2.

D : Demande à Fanny, Noémie c'est une tyrannique.

C : Rien à voir.

D : Combien ?

A : 1.

B, D : 2.

C : En fait je pense que quand on dit on a plein ... non c'est pas ça.

D : A vous.

C : Ou peu être que quand c'est un nombre paire on met des 2 et quand c'est un nombre impaire faut mettre un 1...

Observateur : Non ...

C : J'aurais essayé.

A : 1.

D : 2.

C : T'as vu, à chaque fois qu'on ajoute 1 ils mettent 2.

A : Ouais.

A : 2.

C : Et là ils va rajouter 1.

D : 2.

C : Ah non.

A : 1.

D : Vous dites 1 ?

A : Oui.

D : 1.

A : 2.

C : Ça va être le même cas que tout a l'heure, on arrive à 17..

A : Non on va gagner... On a gagné.

D : On s'est fait avoir.

C : Ah bon.

A : Oui regardes. On est à 17, il vont dire soi 18 soi 19...

C : Ah ouais..

A : C'est à 13 que tout se décide.

B : J'ai l'impression que...

A : C'est au 13 que tout ce décide.

10m00

A : Parce que regardes, que tu dises 1 ou 2, c'est.., si tu dis 1... Enfin bref.

D : Parce que regardes au 13...

B : En fait c'est là si tu dis 1 ou 2..

A : Voilà c'est ça.

B : Ça change tout en fait...

C : Donc à partir de . . .

B : Allez on réessaye en voyant par rapport au nombre 13.

C : Rajoutes 1 à 13 et après on fera avec 2.

D : Ah ben on recommence, là c'est nous qui commençons. On commence.

B : 1.

C : 2.

D : Plus 2 ou plus 1 ?

C : 2.

D : 1.

C : 2.

D : 1.

C : 1.

D : 1.

C : En fait on ne peut pas l'éviter le 13. Si on peut l'éviter...

B : Si vous dites 1...

C : Évites le 13, évites le 13. Mets 1.

D : Il faut réfléchir si on évite le 13.

A : Justement on veut voir si ça marche quand même, mets 1.

B : Bon allez 2.

C : Là ça veut dire que ça se décide au 14.

A : . . .

D : Non mais en fait c'est dès le début..

A : Non non c'est pas dès le début. Bon allez continues.

D : . . . Non mais non il faut mettre 1. A vous..

C : 2.

A : On a gagné.

B : Fallait que tu mettes 2, t'es bêtes.

D : Oui mais sauf qu'après ils mettaient 1.

B : Ah oui. Ah donc ça se décide vachement tôt.

D : Ça se décide dès le début j'en suis certain.

C : Ah t'es un bon partie Noémie.

A : C'est bizarre comme jeu.

D : Je suis sur qu'il y a une technique. Il faut la trouver.

B : En gros Fanny elle a dit quand il y un nombre paire on met 2 et quand c'est un nombre impaire on met 1.

A : Vas y test.

B : On fait comme ça.

D : 0, allez à vous de commencer.

D : Vous avez dit quand c'est un nombre paire on met 1.

B : Non quand c'est un nombre paire on met 2.

D : Mais on va mettre 2 tout le temps.

C : Et 1, ça va faire 3.

A : Ouais mais 0 c'est un nombre paire.

. . .

C : Répète, quand on dit 2 tu dis 1, ok.

D : Heu 3.

C : Voilà.

A : 5.

D : 6.

C : 8

B : 9.

A, C : 11.

D : Attends, attends, faut qu'on réfléchisse ...

C : On va gagner.

D : Non c'est nous qui l'aurons. Parce qu'il faut avoir le 13.

A : Non pas forcément.

D : Si, parce que là c'est nous qui avions eu le 13... On s'en fou on prend le 13.

A : Ah oui... si si 1, 14.

D : 2, 16.

A : Non 1.

D : Mais comment ça se fait.

B : Ah mais c'est impossible à trouver une méthode.

D : Mais comment ça se fait, c'était nous...

A : En fait quand tu choppes le 14.

D : Nous nous, ah non en fait c'est nous qui avions 13.

15m00

C : C'est celui qui a pris le 13 qui décide. Il décide d'avoir 14...

D : C'est bon on a perdu tu vas pas nous expliquer on a compris.

C : En fait c'est celui qui décide après le 13...

A : Mais non, mais non, si t'as le 13 et qu'après tu décides de mettre 2, ça fait 15, et si tu met 2 du moment que tu as 17 ben tu gagnes....

D : Non mais à ce jeu là il y a un truc.

C : ... Avec les allumettes

...

D : Il y a une additions... Mais t'as une addition et si tu fais toute l'addition c'est bon, normalement tu gagnes.

B : Ah ouais au ben alors note là.

D : Mais je ne sais plus ce que c'est que cette addition.

Observateur : Ce qui serait bien c'est que vous notiez votre stratégie.

D : Non mais c'est le nombre qu'est 13.

B : A partir de 13.

...

D : Non faut avoir le 17.

A : Avec le 17 que vous disiez 1 ou que vous disiez 2.

B : On ne sait pas si ça enregistre... (petite coupure).

16m45

Fin d'enregistrement

Nouveau enregistrement

0m00

A : Montres ta feuille s'il te plait Tanguy.

D : T'en as une autre de feuille..

A : Oui je sais mais y'a pas marqué les trucs, là t'as marqué toute la suite de chiffre...

C : . . . Suivant quand t'additionnes il faut que tu tombes sur un nombre paire...

A : Je suis sur qu'il y a un truc comme quoi la somme de tes nombres doit être égale à...

D : Normalement il y a un truc comme ça .

B : Si on additionne toute les...

A : Ah ouais essayes là... Là c'est vous qui avait gagné...

B : Ça fait 6... Attends nous on a commencé là donc ça fait 6+2, 8...

A : Mettez nous sur la feuille les parties où on a gagné. Toute en fait.

D : On en a gagné une s'il te plait. On a gagné la première.

Observateur : Vous dites « à partir du 16 on sait qui va gagner ».. Mais . . . Ah c'est 17.

B : Parce que 17, à partir du 17, si nous on met 1...

D : A partir du 17 que l'équipe mette 1 ou 2, l'autre équipe a gagné.

Observateur : Ah d'accord...Ça peut pas se faire avant ça ?...

A : Si à partir de 13..

B : A partir du 13 on peut...

D : A partir du 13 si on réfléchis on peut, même avant... Non parce qu'à partir du 13 si tu fais n'importe comment ça sera qu'à partir du 17 que ça se décidera.

A : Oui évidemment mais...

Observateur : Essayer de construire une stratégie...

B : Si on essaye d'éviter le 17.

D : Non on peut pas l'éviter.

C : C'est pareil tu arrives à 18 et..

D : Et l'autre il a gagné.

C : T'as stratégie, t'as vu, si t'as pas le 13...

A : Ben il vaut mieux avoir le 17, de toute façon il faut pas avoir le 18.

Observateur : Alors c'est quoi votre stratégie ?

D : On en a pas.

C : Ouais.

D : Faut qu'on arrive au 13.

B : Si, il faut réfléchir à partir du 13.

D : Oui, à partir du 13.

Observateur : Non mais à partir du 13 j'ai compris que quand vous avez 13 vous savez qui est ce qui va gagner.

D : Non, non.

A : Pas vraiment.

D : C'est qu'en fait faut qu'on réfléchisse..

Observateur : Ben ça veut dire que l'autre équipe ne comprends pas grand chose alors.

D : Ben y'a Noémie dans l'autre équipe.

A : Tais toi j'ai gagné trois parties.

Observateur : Alors quand vous dites, c'est déterminant d'arriver au 13. Ça veut dire quoi pour vous déterminant ?

A : Et ben si on arrive au 13, c'est celui qui a le chiffre après 13 qui décide si il va gagner, si il réfléchit bien et ben.. Il peut gagner ou pas.

C : Parce qu'il a l'avantage.

A : Ouais voilà.

Observateur : Et du coup comment on pourrait arriver au 13...

D : Ça porte malheur.

B : Ben pas forcément il y en a à qui ça porte chance.

D : Mais il y en a une c'est sur.

...

D : Impaire.

A : C'est un 9 ?

D : Là ça ne marche pas.

D : Et du coup tu vois là ça fait alternant 1 sur 2.. A partir de 8...

A : Ouais 8, ben ouais ça peut pas être à 7...

D : Et là ça fait pareil 20,..., 14, 12... Après 10.

C : Je sais pas il y a trois nombres impaires...

A : A c'est sympa ça, au début ça fait impaire..

B : Ouais..

D : Non mais même, je pense que, on fait une partie, on met deux points (?)et puis après on alterne..

C : Et là on avait...

D : Mais juste en alternant ne réfléchis pas aux chiffres ...

C : On choisis 14 c'est ça ?

A : Ouais.

D : Allé on réessaye une partie.

B : On réessaye.

D : Mais écris aussi les chiffres sur ta feuille comme ça au moins je ne serais pas obligé de la découper.

C : Oh c'est dur de découper... Y'a toujours moins de nombres paires que de nombres impaires.

A : Ouais.

B : Quatre nombres

C : paires...

B : Et cinq impaires.

A : Et c'est qui, c'est les nombres impaires ou paires qui gagnent ?

D : Je sais pas, ça dépend ce que c'est. (Il me semble qu'il parle d'un autre sujet)

C : Je me suis arrêté au 14.

A : Ouais, ouais.

A : Bon on recommence, c'est partis.

B : Ouais.

A : Moi j'y vais au talent.

A : Heu... 2.

B : 2.

A : Est-ce que tu es d'accord ou pas ?

D : 3. En fait il y a une stratégie du début à faire...

A : 2.

D : 7.

A : Heu, 1.

C : 9.

D : 11.

A : 12.

D : 14. Heu...

B : Oui.

05m00

D : Ouais 14.

A : 15.

A : Merde on a perdu...

D : 17.

A : On a perdu, 18, 20, ok.

D : Ça marche.

B : Ça marche ?

D : Oui ça marche ce qu'on a fait.

C : C'est quoi votre truc ?

D : Attends on réessaye une autre fois pour voir si ça marche à tous les coup, si ça se trouve ça ne marche pas.

B : On commence cette fois.

D : On commence nous.

B, D : 1.

C : 2..

D : De 2 ou..

C : On rajoute te 2.

D : Voilà je savais pas si tu disais 2 ou si...

D : 5.

. . .

A : Ah j'ai compris.

A : 7.

B : Allez 8.

D : 8.

A : 9.

C : Mais ça fait comme tout à l'heure..

B, D : 11.

B : Vous avez gagné.

A : On a perdu ouais.

A : 13.

D : 14.

A : C'est bon vous avez gagné.

C, D : Continues.

D : Parce que...

A : Ben si on va dire 15 ou 16...

B : Faut continuer quand même.

D : Faut voir si ça marche.

A : 15.

B : 17.

D : Attends, attends... Ouais 17.

A : Et ben 1.

C : Et là par exemple si on avait dis 19, ouais c'est fini de toute façon.

D : Ça marche notre truc.

A : C'est quoi votre truc ?

D : Attends mais faut qu'on trouve c'est obligé qu'il y en a un avant.

A : Quoi ?

C : Parce que vous commencez à partir de 5 non ?

D : Ah non.

B : Non, en fait...

D : Attends on réessaye. Faut réessayer pleine de fois pour être sur que ça marche, parce que c'est pas sur... Imagines on se fait avoir on fait quoi ?

...

D : Si eux ils nous piquent le truc qu'ils font des...

B : Non c'est impossible..

D : Ouais ben moi je serais d'avis de retenter..

A : Vas y retente.

D : Allé, c'est vous qui commencez.

A : 1.

D : Faire pareil parce qu'après ils vont croire...

B, D : 2.

B : Et si on le faisait à partir de maintenant..

D : Ouais mais faudrait trouver le truc qui va, parce que ...

C : 4.

A : 4.

C : 4.

D : Oui attends, attends, je regarde juste un truc. Ça c'est vous qui avez commencé..

B : Là c'est nous.

D : Avant y'a pas...

B : Heu 5.

A : 7.

B : Tu mets 1 là ?

B : Allé 8.

D : 8.

A : 9.

C : Mais ça fait comme tout à l'heure.

B, D : 11.

A : Ah ouais d'accord, c'est à partir du 9.

D : Non..

A : Si.

D : Ben nous notre truc c'est pas partir du 9. On a une méthode mais c'est pas à partir du 9.

A : 13.

D : 14.

A : Ben parce qu'en fait ça fait toujours sortir les mêmes chiffres.

C : Ah vous avez gagné.

A : On dit 16.

C : Ah non.

A : Si si.

D : 17.

A : Ah ouais, ouais.

D : Madame on a trouvé.

D : Vous avez trouvé aussi ?.. Vous avez démontré ?

A : Et c'est quoi ?

C : Ben racontez nous.

D : Faut pas qu'on vous le dises après c'est pas drôle on ne peut pas gagner.

A : C'est bon ça va...

D : En fait quand tu arrives à 11..

A : Ah en fait c'est ça l'idée..

B : En fait ça dépend...

A : C'est entre 9 et 11.

B : Si tu à partir de 9 ça marche aussi.. Ah non parce que le 9 c'est pas nous qui l'avons mis. Mais si tu commences à partir de 8 ça marche aussi, regardes. En fait on fait une alternance entre paire et impaire, paire impaire, à partie de ... Par là.

D : Parce que le premier qu'on dit, si c'est impaire...

A : Ben sinon regardes, impaire, impaire, impaire...

D : Non mais nous ce qu'on dis, ...17,.. paire, impaire, paire, impaire... Et à partir du 11 ça marche.

A : Ah d'accord.

B : Même jusque là ça marche regardes..

A : Ah ouais à partir de paire..

B : A partir de à peu près 7, 8, 9, heu...

A : Impaire.. Vous disiez.. Ah ouais.. Paire, impaire, paire..

B : A partir de là..

A : Ah ouais d'accord.

C : C'était pas con notre truc... Ouais mais on l'a pas poussé plus loin le truc.

A : Ouais.

A : Ah merde on peut pas essayer avec des... Vous voulez pas faire sans ça et que nous on essaye ?

B : Maintenant qu'on connait c'est intuitif, on met direct le bon chiffre..

10m00

D : Non mais on peut essayer. Parce que si on vous dis pas avec quel chiffre nous on commence..

A : Oui oui d'accord.

D : Et si on commence pas au 11.

A : Bon alors c'est qui qui commence ?

B : Nous 1.

B : Non c'est nous on a pas encore commencé.

D : Non, ah ouais nous.

B : Bon 2.

A : 4.

D : 5.

A : 7.

B : 9.

D : Non 8.

B : 8.

A : 10.

D : 11.

A : 12.

B : 14. Non.. Si ?

D : Si 14. A toi.

A : Heu.. 15.

B : 17.

D : Vous avez perdu.

A : Mais on a fait la même. Comment ça se fait ?

C : En fait ils ont...

A : En fait il faut commencer au bon moment.. Non moi j'ai commencé dès le début.

D : Ouais nous aussi on a commencez dès le début.

A : Ah ben alors c'est celui qui commence. Si les deux personnes ont la même technique.

D : C'est nous qui avons commencé.

A : Ouais. Si les deux personnes ont la même technique c'est celui qui commence qui gagne.

D : C'est fort possible.

D : Attends ben on essayes...

B : Madame.

D : Madame on a trouvé un truc. Quand on fait.., l'équipe.., par exemple nous on fait une alternance on dit que c'est un chiffre paire...

A : On commence pas à partir du début..

D : Si ben ici on a commencé à partir du début.

A : Oui à partir..

C : Mais si vous vous commenciez...

D : En fait nous on dit 2.

Observateur : Vous avez gagné.

B, D : Non.

D : Ben non parce que là on a fait 1 et on a gagné.

B : En fait on fait une alternance entre paire et impaire à chaque fois que nous on dit nos chiffres.

D : Nos chiffres qu'on va dire.

B : Nos chiffres..

D : La somme que ça fait.

Observateur : Ah.

B : Par exemple là on a fait 2, après on a fait 5, 8, 11, 14..

Observateur : Ça dépend aussi de ce que dit l'autre.

B : Ça change rien.

A : Ouais ben si les autres font la même technique..

D : Ça change rien.

A : C'est celui qui commence qui gagne.

B : Non madame c'est pas par rapport aux chiffres, c'est juste par rapport au paire, impaire, on peut toujours rattraper...

D : A partir du 11 ça marche tout le temps, parce que là on a essayé sur les 3 parties à partir du 11ils savaient pas e que c'était.. On a réussi à avoir le 11...

B : Et là on a gagné quand même et là...

D : Là on ne leur avait pas dit et on essayé d'avoir le 11 car on avait remarqué qu'à partir du 11 ça marchait.

Observateur : Alors vous voyez tout à l'heure vous me disiez à partir du 17, après à partir du 15, maintenant à partir du 11.

D : Non mais à partir du 17, celui qui a 17 il a gagné..

B : Mais là c'est par rapport au 11...

D : Après...

A : Avec le paire, impaire ça marche.

D : Celui qui a le 11 et qui fait en paire impair comme on vous a expliqué, il gagne.

A : Mais là on a commencé à partir du début et ça a...

Observateur : Mais notez le ça. Il y a 11...

A : C'est celui qui commence aussi qui fait avec..

Observateur : Il ajoute soit.. Alternativement 1 et 2 c'est ça ?

C : Ben 11 il faut que ce soit paire..

B, D : Non ben en fait ça dépend..

B : C'est par rapport au résultat, par rapport au résultat faut mettre paire ou impaire..

D : Ben par exemple si on a 11, que les autres ils disent 2, ça fait 13. Nous on va en ajouter 1 pour avoir 14.

B : Parce que celui là c'est un impaire et celui d'après il doit être paire.

Observateur : Ah, vous voulait.. Ah d'accord.

D : Et l'autre après si il dit..

Observateur : Ah c'est le résultat qui doit être alternativement paire ou impaire.

B : Paire par rapport à celui d'avant.

D : Et 12 on ajoutera 2 pour avoir 14...

D : Et à partir du début y'a...

A : A partir du début si on commence et ben on gagne.

D : Ben vient on essaye en ayant la même technique, et vous vous commencez.

A : On commence ben ça va être la même chose.

D : Mais non en ayant cette technique là, nous on a essayer mais c'était pas..

B : Essayes.

A : Ben 2.

D : Non mais 2 on sait que ça marche, essayes avec 1.

A : Ben 1.

C : Après on doit faire pareil mais vous vous faites la technique et pas nous, mais vous commencez du début votre truc. Pas à partir de 11.

B : Ouais là on le fait par rapport au début.

C : Oui mais nous on faisait la même technique que vous.

D : Là faut ajouter au pif en fait.

B : 3.

A : 4.

D : 6.

A : 7.

D : 9.

C : 10.

B : 11.

D : 12.

B : Ah pardon.

D : Oui ben ça ne marche pas, c'est celui qui commence qui gagne quand on a la même technique.

A : Ouais voilà.

D : Vas y ben continues.

A : 13.

D : 15.

A : 17.

D : Non vous c'est 16.

A : Ah oui. Vous avez gagné.

C : 16 t'aurais pu dire 1. 17.

A : T'aurais dis 1..

D : Non mais si on essayé comme ça c'était pour voir qui c'est qui gagné.

B : Et ben tu commence en paire impaire.

D : Non.

B : Et à partir de là tu lâche la méthode et tu fais pour arriver au 17.

D : Ben là non, ça marche, si on fait les deux ça marche que si le premier qui...

B : Si l'autre connait pas la méthode ça marche aussi.

D : Non parce que là à la fin on était au pif aussi..

B : Non mais là l'autre il connaissait pas..

15m00

D : Madame il faut que l'on arrive à démontrer...

Observateur : Ben il faut arriver à une stratégie qui marche tout le temps.

B : Ben elle marche.

Observateur : Si y'en a une.

D : Nous elle marche.

Observateur : Ben non, est-qu'elle dépend du résultat ? Elle dépend du premier..

B : Elle dépend de si tu commences ou pas. Si tu commences pas même si tu as la méthode ça marche pas.

D : Elle dépend de si on arrive à 11 ou pas.

Observateur : Bon ben expliquez ça parce que la pauvre fille (Elle parle de toi Ximena, c'est pas très symp :)) si elle va regarder ça elle va rien comprendre. Il faut mettre les méthodes que vous avez mis.

A : Ben si mais ça marche de toute façon. Parce que si l'autre personne ne fait pas la technique, vous avez testé, que vous commenciez ou que l'on commence, ça marche.

D : Ouais nous on gagne. Quand on prend à 11, après on a pas essayé notre technique du début sans que l'autre fasse la technique.

B : Faut que tu expliques que celui qui commence.. Avec la méthode de paire, impaire.

A : La méthode de ?

B : Paire, impaire, alternance.

A : Ah ouais.

B : Gagne forcément, celui qui commence avec la méthode.

D : On a pas essayé avec du début.

A : Si si.

B : Mais si là. Là les deux connaissaient la méthode et on a commencez..

A : Oui mais il faut commencer par 2 pas par 1.

D : Il faut commencer par 2.

A : Parce que là regardes, on a commencez par 1 et là vous auriez pu gagner à partir 16(?)..

B : En commencent...

D : Par 2, il gagne obligatoirement.

Observateur : Mais c'est celui qui commence par 2 qui gagne ?

D : Oui, et si il fait la méthode du paire, impaire.

Observateur : Et si il commence par 1 ?

B : A partir du 16, là nous on aurais pu rattraper et gagner aussi.

A : Ouais voilà.

Observateur : Donc alors si on commence par 1 y'a pas une autre stratégie qui permet de gagner ?

B : En fait si on commence par 1 à partir du 16.. Il faut...

A : Non non à partir du 13.. Il faut.. Il faut réfléchir.

B : A du 13 il faut avoir l'objectif d'arriver au 17, 17 c'est bon ?

D : En fait le 11 ou le 17, non, faut avoir le 14.

C : Ouais faut avoir le 14.

B : Et là le 14 il n'y est pas.

A : Non mais oui voilà, là on l'aurait eu on aurait gagné, de toute façon, vous avez dis 13 on a dit 14...

D : A chaque fois on a eu le 14. Avec notre technique à chaque fois on a le 14, et quand tu as le 14 t'as gagné. Puisque quand tu as 14 tu as 17.

A : Ben oui il dit 15 ou 16..

D : Tu dis 1 ou 2 et tu as le 17.

A : Oui voilà.. Et t'as le 17 tu as 20. C'est pas ça ?

Observateur : Non mais continuez.

D : On est sur la bonne voie ?

Observateur : Faut persévérer.

B : Mais c'est bon on a trouvé, non ?

Observateur : Ben essayez de les mettre en.. Rédigez un peu mieux ce que vous venez de m'expliquer là.

D : Non mais il faut que l'on trouve une vrai technique parce que...

A : Elle est trop cool cette technique...

D : Non mais... Je suis sur en...

B : Cherches.

C : Moi j'ai le coup de barre.

A : Oui moi aussi.

B : Et si on prend en compte.. Parce que quand tu as une stratégie, l'autre il l a connait forcément pas.

A, D : Ben oui.

B : Donc si l'autre il ne a connait pas tu gagnes forcément.

D : Ben non parce que si t'arrive pas à 11.

B : Mais non mais.. Là..

D : C'est à partir de 11 qu'on gagne.

B : Regardes, que ce soi eux ou nous qui commençons dans tous les cas on gagné.

. . .

D : Attends on essaye un truc..

A : On pourrait essayer de faire contre un autre groupe qui a trouvé une technique.

D : Ludivine ?

C : . . .

D : Ah non.

B : Contre qui ?

D : Ah non je ne veux pas voir sa tête.

A : T'es vraiment un c*****. Sérieux, ça ne se fait pas.

C : On va demander à Lucas.

D : Pour moi ça ne marche toujours pas.

B : Laisse.

D : Je vais juste essayer un truc.

(petite coupure). Fin du groupe 1.2 à 19"0'

0"0'

B : On est le seul groupe à faire le truc.

D : Viens on fait un jeu.

E : Ok dans ce cas là on joue en 23.

D : Non en 20.

E : Ben nous on a la théorie pour tous. On sait faire dans tous les cas.

C : Oh. Au revoir Lucas.

E : On fait une partie en 20, une en 21, une en 23. C'est bon t'es prêt ?

D : En 21 en 23 on ne sait pas.

B : Allé on essaye en 20.

E : On essaye en 20, on fait papier caillou ciseaux pour savoir qui commence.

E : Vas y commence. Vas y joue.

D : 2.

E : Vous la connaissez la théorie ? Non ? Je mets 3.

F : Tu mets quoi.

D : 5.

F : Ouais c'est ça. Celui qui commence a gagné.

E : Et maintenant si on fait en 21. Faut compléter à chaque fois le.. 3.

D : Quoi ?

E : Si tu mets 1 faut que l'autre il mette 2, si tu mets 2 faut que l'autre... C'est pas ça la théorie.

A, B : Non.

E : C'est quoi votre théorie ?

B : C'est quoi ce truc par 3 là ?

C : Attends finissez non.

E : Ben vas y, j'ai mis 7.

D : 9.

E : J'ai gagné.

D : Oui tu as le 11.

E : Non c'est pas le 11.

A : Si, si.

D : Quand t'as le 11.

A : Ah si si non Tanguy.

E : Quand tu as le 2 tu a gagné. Je te le dis. Celui qui commence à gagné en vrai. Vas y je te le prouve.

D : Non mais vas y.

A : Non mais finis le.

E : 12.

D : 14.

B : Ouais d'accord c'est bon il a gagné.

A : Ah tu rajoutes 3 par rapport à celui là, c'est ça ?

D : Non . . .

A : Regardes il prend celui d'avant et il rajoute 3.

D : Ben non.

A : Si.

D : Ah ouais. Mais c'est pareil..

B : Nous en fait ont faisaient entre paire et impaire.

E : Regardes je te montre.

D : Mais c'est pareil, entre paire et impaire. On a exactement la même théorie. Attends parce que regardes..

E : En fait j'ai trouvé parce que j'ai mis 7 et tu as mis 9.

D : Ah mais oui. Il fallait mettre 8. Je me suis planté.

A : Ah ben oui.

B : Oui tu t'es planté.

E : Regardes, en fait vas y je te montre, je commence par 2.

B : Oui mais tu vas gagner.

E : A partir du moment où j'ai le 2, celui qui commence à forcément gagné. Parce qu'il a 2. Après il ne reste plus que 18 barres, et 18 c'est un multiple de 3. Donc lui il a plus qu'à compléter à chaque fois pour que ça fasse 3 et il arrive jusqu'à la fin et c'est lui qui a gagné. Donc celui qui met 2 a gagné.

B : Ah, ok.

D : Non mais en fait c'est comme..

E : Allé revenez quand vous avez...

D : Mais non mais non on complète(?).

B : Si, c'est ça.

A : Ouais c'est ça.

D : Mais non parce que là..

C : Moi je suis dégouté.

D : On complète pas par 3.

B : Mais bien sur que si regardes, de 2 à 5, à chaque fois il met 3. Là de 5 à 8 t'as 3, de 8 à 11 t'as 3...

A : Si tu ne t'étais pas trompé on aurait gagné.. C'est entièrement de ta faute.

C : Honte à toi Tanguy.

. . .

D : Paire impaire, pour aller de paire à impaire..

B : T'as vu que les chiffres que tu...

D : C'est plus 3.. Et il faut avoir le 2.

. . .

C : Il est quelle heure.

Observateur : Bon alors si vous passez à 21.

C, D : On a trouvé.

Observateur : Alors c'est quoi ?

D : En fait paire, impaire ça correspond à 3 chaque fois. Mais il faut commencer avec le 2.

Observateur : Non.. Il faut avoir..

B : Commences avec le 1.

05"

B : Allez y.

Observateur : 2. Quoi je veux dire 3.

A : On met 4.

Observateur : 6.

D : Si vous connaissez la technique Madame on peut pas gagner.

B : Attends.. Tais toi. 7.

Observateur : 9.

D : Tu t'es fait avoir.

A : 10, 10.

D : Mais non vas à 11.

B : Mais non.

D : Mais si. Vas à 11 et après tu fais notre méthode.

Observateur : 12.

A : 14.

Observateur : 15.

D : 17, et on a gagné. Vous vous êtes fait avoir, par des novices en plus.

B : Et là on a commencé par 1 et on a gagné quand même.

Observateur : C'est moi qui ai dis 1 ?

B : Non c'est nous. Ah .. Quand tu commences par 2 tu respectes la méthode jusqu'au bout, et quand tu commences par 1...

D : Faut avoir le 11.

B : Faut choper le 11 et après tu gagnes. Voilà.

A : Voilà.

. . .

Observateur : On recommence.

B : On vous laisse commencer.

Observateur : Ben non j'ai commencé la dernière.

...

Observateur : 3

D : 5.

Observateur : 6.

D : 8.

Observateur : 9.

D : 11. On a gagné.

B : De toute façon avec le 2 ça marche forcément.

Observateur : Ça serait intéressant de comparer avec des autres ...

B : On a déjà confronter Lucas.

Observateur : Il est déjà venu lui.

C : Ouais.

Observateur : C'était quoi sa stratégie à lui ?

B : Ben c'était la même que nous.

D : En fait nous c'était en paire, impaire.

B : En paire, impaire et eux ils voyaient en 3. Mais en fait ça revient au même.

D : En fait ça revient au même.

Observateur : En 3 ça veut dire quoi ?

B : Ben rajouter 3 à chaque fois.

Observateur : Passer de 3 en 3..

B : Oui voilà.

D : Le fait que eux entre leurs nombres ça fasse 3. Mais comment nous on fait d'un paire à un impaire..

B : Voilà, ça faisait exactement la même chose.

...

10"

A : On a pas essayé si c'est pas nous qui commençons ?

B : Je ne sais pas bien ce que font les autres.

B : Vas y commences.

A : Et moi je fais avec la règle ou pas ?

B : Fais comme tu veux.

A : Je fais au pif ?

B : Oui.

A : Toi tu fais avec la règles.

B : Fais pas au pif, fais ce que tu veux, une règle.. Fais une règle pour voir.

A : D'accord.

A : Donc 1.

B : Donc là je mets 3.

A : 4.

A : 6.

B : 7.

A : 9. Merde t'as gagné... 13.

B : Donc là je met 14..

A : 15. J'ai perdu.

B : Ça marche aussi. Et en fait ce que j'ai fais c'est que.. Au début j'ai rajouté 3.. Et là j'ai rajouté seulement 2, et ça a marché aussi.

A : Ouais.

B : Et après j'ai repris en.. Ah non... J'ai fais 2. Et là j'ai fais carrément 4.

A : Ahah oh pif. Mais t'as fait au pif en fait.

B : Oui.

A : Attends viens on réessaye.. 2.

B : 4.

A : 5.

B : 7.

A : 8.

B : 10.

A : 11.

B : A partir de 11 tu vois, parce que là si je respecte avec +3 je me fais avoir.

A : Ouais c'est ça.

B : Et c'est toi qui a commencé là ?

A : Oui.

B : Donc en fait quand c'est pas moi qui commence il faut que je me débrouille toujours pour reprendre le 11.

A : Voilà c'est ça.

B : Donc attends on refait. Je remet les même : 4, 5, 7, 8, et là je mets 11.

A : Tu ne peux pas.

B : Ah. 9.

A : Et je peux mettre 11 aussi.

B : Ah ouais.

A : Si tu as 2 il faut que tu te débrouille pour avoir .. ouais.. Si je commence par 2 tu fais genre..3...

B : Si tu commence par 2 tu gagne forcément.

A : Non non attends, si tu dis 3, je peux quand même dire 5.. Si tu dis 6.. Je peux dire 7, attends, 6, 7, et donc toi tu dirais.. non.. ouais.. Si, toi tu dis 8, après mon 7 si tu dis 8..

B : Toi tu dis 9.

A : Je dis 9 ou 10 et toi tu peux dire 11.

B : Ah oui donc si je mets 8 c'est bon alors.

A : Ouais, c'est toi qui a le 8, et après il faut que tu choppe le 11.

B : Ben là je l'avais le 8. Donc si je mets 8 toi tu dis quoi ?

A : Non c'est moi qui avait dis 8.

B : Non parce que regardes si tu mets 9..

A : Regardes moi, moi, moi.

B : Toi.. toi, toi, ah oui, donc c'est moi qui mets 9. Mais si je met 9 toi tu mets 11.

A : Voilà c'est ça.

B : Donc il faut carrément que..

A : Que tu ais le 8.

B : Non faut que je mette 10, et comme ça..

A : J'ai 11... C'est avant.

B : Oui. En fait quand tu ne commence pas c'est trop compliqué.

A : Oui.

B : Quand tu commences tu peux gagner à tous les coups mais quand tu ne commences pas tu ne peux pas.

A : Oui. Voilà, c'est ça. Ou alors si l'autre commence par 1 c'est possible aussi je crois.

B : Hum.

A : Par 21 c'est la même chose.

A : Il y a tous les groupes qui ont trouvé des trucs ?

B : Je ne sais pas.

15"

B : Ils sont long pour boire.

A : En fait ils sont allé au troisième étage. Oh là là il reste encore une heure...

B : C'est moins chiant que les cours.

A : C'est quoi après la deuxième partie, on va pas rester deux heures sur ça.

B : Une heure et demi elle a dit.

A : Mais là on a trouvé la technique on a plus rien à faire.

B : Oui mais il faut essayer en 21 aussi. Viens on essaye pour voir.

A : Ok, 2.

B : Je commence oh. 2.

A : Je vais perdre, 3... Ouais bon t'as gagné..

B : Mais continues.

A : Ben 10.

B : Attends..

A : 13.

B : Tu essayes avec la méthode de 13 là ?

A : Non, je fais au pif. Ben y'as gagné... 15.

B : On va en 21.

A : Ah oui 15... Ah non non, 16.

B : Si je mets 18 j'ai gagné, alors je crois que c'est par 2 cette fois.

A : Ouais.

D : Tiens viens on change de place, on change d'équipe aussi.

B : Oh le 21 faut aller par 2 pas par 3.

D : T'es sur ?

B : Et par contre pour le 20 si tu commences là, tu peux difficilement gagner.

D : Enfin ça dépend si l'autre il a la technique ou pas.

A : Et si l'autre il commence par 1 ou 2..

B : Oui mais si tu commences que ce soit par 1 ou par 2 tu peux toujours gagner.

Observateur : Alors vous avez une règle de façon générale ? Pour arriver vers n.

D : Non, ben c'est soi 2...

B : Oui.. Alors.. Si c'est nous qui commençons et qu'on commence par 2 il suffit de respecter la règle en rajoutant 3 à chaque fois et on gagne forcément..

Observateur : On peut pas ajouter 3.

D : En 3, la règle de 3, de + 3..

B : En prenant notre résultat d'avant et en ajoutant 3...

Observateur : Tu peux pas ajouter 3..

D : Ben si parce que ça fait 4, ou 5, ou 6..

B : Mais là madame..

D : Et nous il faut que l'on arrive à 7.

Observateur : Ah d'accord.

D : Et sinon ?

B : Et si on met 1.. Si on commence par 1 on fait la méthode du 3, et à partir d'un certain moment ici, à partir du moment où on peut rattraper le 11, on doit le rattraper et après on gagne forcément. On refait la règle...

Observateur : Par exemple si je veux avoir 22, comment vous faites ?

20m00

B : 22 c'est pareil je pense. Parce qu'on a essayé avec 21 ...

D : Ben essayes sans technique, je vais essayer avec la technique.

B : On a essayer avec Noémie en 21 et je crois que c'est par 2, enfin, c'est pas par 3.

D : Vous pouvez pas nous le dire madame.

B : Bon alors 0.

D : 1.

B : Là tu fais au pif ?

D : Oui.

B : 3.

C : 4.

B : 5.

D : 1.

B : 6. 8.

C : 10.

B : 11.

D : 13.

B : 14.

D : 15.

B : 16.

D : 18. Vas y.

B : 21. Ben non 22. Non ben dans tous les cas vous avez gagné.

D : Ben non. Tu fais 19.

B : Ah c'est en 22 pardon. 19.

D : 20.

B : 22.

Observateur : Oui mais là vous n'avez pas de stratégie vous avez fais ça au hasard.

D : Ben non Léa avait sa stratégie.

B : Ah non j'ai fais au pif là.

D : Je croyais que tu faisais avec la stratégie. Tu fais n'importe quoi.

Observateur : Attends je vais jouer moi je vais voir, un truc.

B : Je fais ma stratégie ?

D : Oui.

B : Du début ?

D : Ben oui.

B : Je commence alors sinon ça ne marche pas. Bon alors 2.

Observateur : 4.

B : 5.

Observateur : 7.

...

Observateur : Heu 10.

B : Je continues avec la règle de 3 ou je passe sur le 11 ?

D : Attends... Continues parce que celle du 11 ça ne marchera pas.

B : Alors...

D : Ben fais 12.

B : Ben non sinon c'est plus ma règle.

D : Ben alors fais 11 et ..

B : 11.

Observateur : 13.

D : T'as perdu.

Observateur : 16.

B : 18.. Si, celui qui est à 18 il gagne.

D : Non mais c'est la règle de 3, la O elle joue aussi la règle de 3.

B : Vous faites aussi la règle de 3 ?

Observateur : Je ne sais pas ce que vous appelez la règle de 3 mais continues.

D : Si, si madame vous le faites.

Observateur : Mais je ne sais pas ce que c'est.. Allez vas y.

B : 17.

D : Ah c'est bon j'ai compris.

Observateur : 19.

B : Calmes toi. 19. Ah mais vous avez le 19.

Observateur : Yes.

D : En fait faut faire 22, faut faire la règle de 3.. Par exemple nous on dit qu'on est les x et vous les y, entre 2 x il faut qu'il y est 3, plus 3... Vous êtes d'accord ? Et en fait 22 c'était un multiple...

Observateur : C'est plus compliqué que ça.

D : Oui mais en fait 22 ce n'est pas un multiple de 3. 21 c'est le plus proche multiple de 3 qui existe, et là quand vous avez joué 4, si on enlève 3 ça fait comme si vous avez fait 1, on peut dire que vous aviez fait 1 et que Léa avait fais un deuxième 1, vous comprenez ?

B : Moi je ne comprends pas.

D : Ben si vous faites 4-3 ça fait 1..

Observateur : Hmm.

D : Donc là en fait.. Comme de 22 à 21 il y a 1, vous avez joué 1 et après vous faites la règle de 3. Et si il y a 2 vous faites 2 avec la règle de 3.

B : Tanguy expliques moi.

D : Tu prends le nombre...

B : On l'a la règle madame.

D : Ouais. Tu regardes ce que c'est le plus proche multiple de 3.

B : Faut l'écrire après.

D : Genre 22 c'est 21 le plus proche multiple de 3. En dessus, faut que ça soit en dessous, car tu ne peux pas monter au dessus. 21 donc il y a 1, parce qu'il y a 1 de différence et après tu fais la règle de 3. Si c'était 23, le plus proche en dessous c'est toujours 21, et comme il y a 2 tu joues 2.

B : Mais si c'est pas toi qui commence ?

D : Ah ben ça après faut... Ben là la preuve c'est pas elle qui a commencé. T'essayes de te rattraper.

B : Ben écris là là règle parce qu'après..

D : Non mais écris là, moi je ne sais pas l'écrire. Là la O elle s'est rattrapé. C'est comme si elle avait fait 1 au départ. Sauf qu'elle l'a pas dit mais 1 + 3 ça fait 4 et c'est pour ça.

B : Alors vas y. J'écris quoi ?

25m00

D : Ben je ne sais pas.

C : Et après tu continues pour la règle de 2...

B : Alors je dis.. On part.. Du nombre....

B : Tanguy. Là j'écris le truc et avec ce que tu m'as expliqué. Mais après une fois que tu as commencé faut que tu refasse avec la règle de 3 ou pas ?

D : Ben une fois que tu fais... Si il faut enlevé 2 pour arriver au plus proche multiple, ou 1, après tu fais la règle de 3 avec ton premier résultat. Autrement faut essayer de reprendre le résultat à l'autre.

B : Là j'ai écris ça.

D : Voilà et après tu.. Faut dire que tu ajoutes 3 par rapport à ton dernier, attends,.. Chiffre précédent... Une fois que tu as fait ça..

B : Par rapport à ton chiffre de départ ?

D : Ben là par ton chiffre de départ et après.. Après..

B : Que ce soit 2 ou 1 ?

D : Oui. Parce que tu trouves un multiple de 3. Mais c'est sur ça marche.

B : Donc là à partir du chiffre de départ du joueur...

B : Bon allé on en fait une en respectant bien cette règle et comme ça après je le met en exemple. Vas y. 0.

D : On fait la course à combien ?

B : Ah..

D : 18. Tu commences ou je commence ?

B : Attends, le plus proche multiple de 3, c'est 6.

D : Tu commences ou je commence ?

B : Commences. Donc moi je fais au pif ?

D : 1.

B : Attends, juste, pourquoi tu fais 1.

D : Non mais ici c'est pas un bon exemple parce que c'est un multiple parfait.

30m00

B : Ben oui.

D : Heu, fais 19.

B : Hey ben voilà, si c'est un multiple parfait faut..

D : Si c'est un multiple parfait faut que t'arrive à arriver à 3, ou 6, ou 9... Et après tu fais la règle de 3. Parce que tu ne peux pas faire 3 du début.

B : Donc ça c'est pour un imparfait. Un multiple imparfait.

D : Ouais.

B : Bon vas y 19, donc là ça fait... 18, donc il faut commencer par 1. Vas y.. Donc tu mets 1.

D : Ouais je met 1.

B : Je mets n'importe quoi moi.

D : Ouais.. 4.

...

D : 7.

...

D : 10.

...

D : 13... 16.. Et voilà j'ai gagné.

B : Tanguy juste, on fait en 20 pour ... Je mets un autre exemple comme ça.

D : Ben commences.

B : Donc en 20.. Faut que je prenne 18 donc je commence par 2.. Tas dis quoi ?

D : Attends... 3.

..

D : 6.

B : Heu..

D : 10.

..

D : 13.

..

D : 15.

..

D : 18.

35m00

B : Voilà.

A : Le plus proche multiple de 3 c'est plutôt 21.

B : Oui mais en dessous.

B : Voilà. J'ai mis plein de couleurs pour que ça soit lisible.

38m03

D.2. Groupe F

4m50

O : Alors allez y. Donc si elle enregistre vous avez intérêt à échanger, de toute façon il faut que vous soyez d'accord pour jouer contre l'autre, à deux. Il faut bien que vous vous opposer.

A : Bon qui est-ce qui commence ?

B : Bon l'équipe de Lucas et Simon commence.

A : Vous dites quoi 1 ou 2.

C : Il faut dire un nombre avant. Il a même pas lu la fiche.

D : En 20 pour l'instant.

B : Ça ne sert à rien d'avoir une feuille chacun.

A : 3 ou 4 ?

C : Non c'est 1 ou 2.

A : Tu rajoutes 1 ou tu rajoute 2.

C : 3.

A : 1.

B : 1.

C : Là mets 1 aussi.

D : Attends 1, ok 2.

C : Non c'est 1,2,3,4 … 6.

D : Ça fait 6...14.

B : Jusqu'à 13 après on s'en...

A : Attends je réfléchis.

B : Ça fait 8.

A : Attends, 11.

B : 11. 13...

C : Vas y. Au prochain on met 1.

B : Non, non, mets en 1.

B : Attends, mets en 1 c'est bon. Si t'en met 1. On a gagné normalement.

A : C'est le premier qui met 15...

D : Celui qui met 20 a gagné.

B : Ah merde.

A : Mets en 2. Si mets en 2 y'a 15. Non, non mets en 2.

B : Il a raison. Moi je pensais que c'est celui qui mettais... Nous on avait gagné si...

A : Allé mal donne on repart.

B : Non 1-0 pour nous.

B : Moi je met 1.

A : Met 1. 5...

B : 6.

A : 11, 13, 14.

. . . .

A : Mets juste 17

. . . .

C et A : On en met 1.

10m00

B : 4.

C : 5, 6, 7.

A : Faut compter quand il annonce le nombre, ça fait 7, 8, 9.

C : Si on en met 2...

B : T'as mis 13 là ?

C : Je crois...

A : Mets en 1.

C : Tu pars de 15, tu m'as dis que c'était 1...

D : 15.

C : 1.

D : Non moi je pense que . . .

B : Y'a 13 ou 14 là ?

C : 13.

B : 13. Là c'est le 14 ème, imaginons qu'ils mettent 15 nous on met...

C : Imaginons on met 15.

B : On met 16, 17 nous on est obligé d'en mettre 2 et c'est mort. On met le 15.. 16, 17...

C : En fait ça dépend de à partir de 15.

B : Non mais regardes, regardes, ils mettes que 17, on doit mettre 18 et eux ils mettent 20... Non met là on peut en mettre qu'un c'est obligé. On peut gagner que si on en met qu'un... 15

B : Mets en 1.

A : Mets en 2, 16,17, ils mettent le 18 et ça fait 20.

. . .

B : Le 14, 15.

C : Avant le 15 alors.

A : Vous en avez mis 2 là. Mettez une couleur différente sinon on ne vois pas sinon.

A : Donc ils en ont mis 2.

B : A toi.

D : 5.

B : Ok.

A : 7.

C : 8.

B : Mets en qu'1.

D : 11 c'est ça ?

B et A : Oui.

D : Faut que tu en mette 1 ou 2 ça ne change rien ça sera eux les premier à 15.

B : On a gagné.

D : Attends, on finit.

C : C'est la combien là ?

D : 11, faut que t'en mette 1 ou 2 il arriverons à 14. Mets en 2... ça change rien.

A : 14...

C : Non mais là de toute façon.

A : A 14 si t'as pas le 14ème t'as perdu dans tous les cas.

B : 15..

C : Mets en 2.

B : Et là t'en mets 1 ou 2.

D : Avant le 15ème au alentours du 14ème.

A : Non, si c'est toi qui pose le 14ème tu as gagné.

C : Vers le 14ème ça veut dire.

D : Faut mettre le 14ème.

O1 : J'aimerais que vous écriviez votre stratégie et la stratégie gagnante.

B : On les dit comme ça elle.

O1 : Oui d'accord.

O1 : Écrivez le quand même parce que...

A : Donc celui qui met le 14ème bâton a gagner.

D : De toute façon tu peux faire le complément à 3. Non non je pense... Celui qui met le 2 a gagné.

C : Celui qui fait quoi ?

D : Le 2.

B : Le deuxième bâton ?

D : Oui parce que regardes après il met...

A : Petit à petit on va raccourcir...

D : il met 18, donc l'autre il peut en mettre 1 t'en mets 2, il en met 2 t'en met 1... Donc t'auras forcément le complément à 3.

B : Ah d'accord. Celui qui met le deuxième bâton il a gagné. Si il arrive à bien jouer.

D : Et si c'est à l'autre de jouer après ? En fait faut que tu mettes...

B : Faut 14, 14 et 3... Attends

D : Faut que tu mettes et qu'il t'en reste un multiple de 3

15m00

D : ... Pour aller à 20. Quand toi tu mets 14 il en reste 6, c'est un multiple de 3.

B : Vas y on essaye, c'est à nous de commencer. Mets 1, 2.

A : Alors là on a mal joué, car c'est nous qui avons mis le deuxième.

A : Faisons son truc du complément à 3, mets en juste 1.

D : 3, 4.

A : On en met 1, 5.

D : 7, 8.

B : Mets 9.

A : Attends... Non mais là on a déjà perdu.

A : 11, mets 12.

B : Ça se joue au deuxième.

...

B : Vas y y'a trop de solutions. Vas y mets en qu'un Simon...

B : A chaque fois faut que ça fasse 3 avec celui d'avant. Donc là si t'as 1 rouge tu mets 2 bleus.

C : Là t'en met 1, 8.

A : 9.

C : Mets en 2.

B : 11, 12.

C : Tu mets 14 et voilà.

A : Donc celui qui pose le deuxième a gagné.

D : Celui qui commence à gagné, puisque tu as le droit de mettre 2 bâtons.

B : Celui qui commence a gagné.

D : Celui qui commence a gagné si il connait cette technique.

O1 : Vous écrivez la stratégie gagnante... Vous avez mis quoi ?

D : Celui qui pose le 14ème bâtons gagne, mais ça c'était avant...

B : Celui qui commence a gagné, il met les deux premiers.

O1 : Et là c'est la course à combien ?

D, B : A 20.

O1 : Donc il faut l'écrire.

O1 : Celui qui commence a gagné ce n'est pas assez précis.

D : Celui qui commence gagne car il met 2 bâtons pour commencer... Si il ne met pas les 2 premiers il n'a pas gagné.

O1 : Vous pouvez me dire pourquoi vous parlez de bâtons ?

D : Parce qu'on connait un truc avec des bâtons.

D : Il pose le deuxième bâtons...

A : Les 2 premiers bâtons..

D : Oui. A partir de là on retombe sur un multiple de 3, et il a plus qu'à compléter. 20-2 ça te fais 18, t'as un multiple de 3.

A : Il reste un multiple de 3 et (?) décomposer (?) le complément à 3. (18"18').

D : Il reste 18 bâtons, c'est un multiple de 3...

A : Donc après celui qui en pose 1 ou 2 on complète jusqu'à 3 et... C'est gagné.

D : . . . A poser, pour gagner,..., 2, 3... Donc celui qui commence à chaque fois doit compléter pour que ça face 3 avec la mise d'avant.

B : Avec la mise de l'autre équipe.

O1 : Vous pensez avoir la stratégie gagnante pour 20, et maintenant vous la cherchez pour n'importe quel nombre.

D : Ben ça sera pareil.

O1 : Par exemple essayé pour 27. Et après pour 728...

A : Pour 27 c'est déjà un multiple de 3 donc le premier qui pose un bâton a gagné.

D : Non, non, celui qui pose le troisième bâton a gagné. Donc celui qui commence perd.

A : C'est celui qui complète le premier multiple de 3. Et après il doit compléter d'accord.

20m00

D : Donc quand c'est un multiple de 3 celui qui commence perd, si l'autre connait la solution.

B : Pour gagner faut que ça soit à l'autre de jouer pour que ça fasse un multiple de 3.

C : En fait à 20, chaque tours faut qu'il se débrouille pour que cela fasse 3 points.

B : En cas d'un multiple de 3 celui qui commence perd.

D : En fait le dernier faut que ça soit à l'autre de jouer pour que ça soit un multiple de 3 bâtons.

B : Et si c'est pas un multiple de trois, si c'est n'importe quel nombre, faut arriver à un multiple de 3, donc les premiers ne comptent pas et celui qui arrive à compléter le premier multiple de 3 et ben il a gagné.

D : Ouais voilà. Par exemple si il y en a 29 faut poser le deuxième. Si y'en a 28 faut poser le premier.

...

A : Donc pour n'importe quel nombre, attends... Marques pour n'importe quel nombre. Pour n'importe quel n.

D : Je mets ma formule.

A : C'est quoi ta formule ?

D : Pour gagner il faut que...

C : Il faut compléter le premier multiple de 3 possible, en partant de la fin.

D : Il faut que ce soit à l'autre de jouer...

C : Attends ça fais 3n, on va voir, on va en 40.

D : Attends j'ai une idée pour le théorème.

B : Faut faire 3x, dans le cas de 3x faut mettre un truc, dans le cas de 3x+1 faut mettre un autre truc, dans le cas de 3x+2 faut ...

D :Vas y mets 3x.

C : Dans le cas de 3x.

D : Si le nombre de bâtons est égal à ... un multiple de 3...

D : ... Celui qui commence a perdu.

D : ... Si il fait 3n+1 il en met qu'1 et il tombe sur 3n, et c'est l'autre qui joue. Si c'est 3n+2 il en met 2 , il retombe sur 3n et c'est à l'autre de jouer. Donc dans le cas de 3n+1 ou 3n+2, celui qui commence...

C : Gagne.

D : Il faudra mettre le théorème, pour gagner, il faut que ce soit à l'autre de jouer pour qu'il reste..

C : 3n.

D : Un multiple de 3...

A : C'est bon tu as écrit comment on fait.

D : Attends... Je mets une phrase avec...

C : c'est bon on a trouvé.

D : Dans le cas de 3n

25m00

D : Si le nombre de bâtons est un multiple de 3 celui qui commence a perdu. Dans le cas d'un multiple de 3+1 ou 3+2 celui qui commence a gagné. Parce qu'il met soit 1 soit 2 bâtons et c'est à l'autre de jouer...

O1 : Alors multiple de 3+1... Celui qui commence a gagné.

C : Celui qui commence met 1 bâton.

O1 : Ah il faut le dire ça, parce que si l'on ne dit pas qu'est-ce qu'il dit ça va pas. Et puis ça ne suffit pas il a pas gagné. Je ne suis pas d'accord. Celui qui commence peu perdre si il joue mal.

B : Il faut connaître la stratégie.

O1 : Donc il faut décrire la stratégie gagnante. Là c'est le tout début ce que vous faites là. Donc il faut que vous la décrivez dans les... Mais vous en êtes pas loin. Essayer d'écrire bien.

D : Et ensuite pose le nombre de bâtons que l'autre a proposé.

A : Donc pour un n multiple de 3 celui qui commence a perdu en suivant notre stratégie..

A : Si le nombre final est un multiple de 3 celui qui commence a perdu car faut...

B : Donc, on va récapituler... ...Voilà je crois qu'on a tout dit.

D : Si le nombre de bâtons est un multiple de 3...

B : n est un multiple de 3 donc,celui qui commence en suivant la stratégie, il a gagné normalement.

D : Non, il a perdu.

B : Il a perdu pardon.

D : Par exemple, le joueur (a) qui commence aura forcément perdu si le joueur (b) suit la stratégie. Si le joueur (a) pose un bâton et que le joueur (b) en pose 2...

D : La stratégie consiste...

30m00

D : Et dans le cas où on a 27... Si on a 27... Ah ben voilà, la voilà la vérité ! Non faut avoir un multiple de 3 Jess.

O2 : Est-ce que vous avez trouvé.

C : Oui.

A : Que dès que...

O2 : Vous avez trouvé ?

A : Pour 20 on a trouvé. En fait on a dit pour tous les nombres.

O2 : Comment. Qu'est-ce qu'il faut faire pour gagner ?

A : Ben pour la course à 20, c'est celui qui commence qui gagne.

D : A condition qu'il prenne les 2 premiers bâtons. Et qu'ensuite il complète ce que l'autre dit pour aller à 3. Si il dit 1 faut faire 2, et si il dit 2 faut dire 1.

O2 : D'accord. Pour commencer il faut dire quoi, 1...

D : Faut dire 2.

B : Pour la course à 20.

O2 : Et après il faut ?

A : Il faut compléter pour faire des multiples de 3.

O2 : Ah d'accord.

B : Ouais on a trouvé dans le cas de n'importe quel chiffre.

O2 : Ok. Pour la course à n alors ?

Oui

D : En fait il y a trois catégories type. Y' a les multiple de 3. Les multiples de...

C : 3n+1 et 3n+2.

D : Et en fait 3n+1 ou 3n+2 c'est celui qui commence qui a gagné...

3n+1 faut commencer par 1n et à 3n+2 il faut commencer par 2. Et ensuite faut ...

O2 : Ok.

C : C'est incompréhensible.

B : Ouais mais depuis tout à l'heure on essaye de l'écrire et de bien le rédiger et on n'y arrive pas.

O2 : Oui mais c'est bien.

35m00

O2 : On va changer la règle. Il faut écrire la course à n, mais si, je vais changer aussi la règle pour la course à n, il faut ajouter 1 ou 3 à chaque fois.

B : D'accord... 1 ou 3 ça veut dire quoi ? Si on a le choix

O2 : Si je dis ... Si je commence avec 2 tu as le droit de dire 5.

B : On a le droit le dire tous les chiffres, de 1 à 3.

O2 : 1 ou 3.

B : Donc faut compléter par 4.

D : faut compléter à 4...

B : Si on a 1 2 3 ...

B : Bon alors maintenant on fait pour trois chiffres.

D : Est-ce que tu mets 2, 3, +1 c'est un multiple de 4.

A : Donc là on a changé de course on peut ajouter 1 à 3 nombres. On peut ajouter de 1 à 3 n dans cette course là.

D : Non, c'est 1 ou 3 on peut pas...

A : Ah on peut pas ajouter 2. Sur ?

D : Ouais c'est pareil sauf que c'est des multiples de 4.

A : Donc c'est exactement le même principe mais faut le faire avec des multiples de 4.

C : ... Il faut compléter à 3, faut compléter, t'as craqué là.

D : On a finie madame ... Pour le 2 on a pas trouvé.

Professeur : Vous avez déjà fait le 20 ou pas.

B : Le 20, 21, 22 ... 3n, 3n+1, 3n+2, on a toute les théories. On peut vous éclater quand vous voulez.

Professeur : Vous avez marqué.

A : Oui c'est dur à comprendre mais nous on l'a.

C : Écris toi.

40m00

O2 : Et qu'est-ce qui s'est passé quand on a changé la règle.

D : Si on peut mettre 3 ou 1 ?

O2 : 1 ou 3.

D : C'est pareil sauf que c'est un multiple de 4.

O2 : Multiple de 4. Alors c'est quoi la règle si la course est à n, elle est pas...

B : Faut réussir le plus grand nombre du choix qu'on a, donc si par exemple on a 1 et 5, 1, 2, 3, 4, 5, faut à chaque fois trouver le multiple de 6. Faut compléter le multiple de 6.

C : Vous comprenez ou pas ?

O2 : Non non. On va jouer à la course à n. La course à n ça veut dire que celui qui arrive à n gagne, mais là règle c'est qu'il faut dire un nombre entre 1 et 6 par exemple. C'est quoi la stratégie gagnante ?

C : Faut compléter b+1 à chaque fois.

D ou A : C'est pas la bonne stratégie...

B : Faut compléter b+1 en partant du chiffre qu'on a, donc on va dire x, on trouve le plus grand multiple de b+1 inférieur à x..

O2 : Oui.

B : Et il faut retomber dessus...

D : Il faut que ça soit à l'autre de jouer quand il reste un multiple de b+1 pour arriver à n, et quand il joue compléter à ...

C : Faut compléter pour avoir b+1 à chaque fois.

O2 : Pareil ...pour la course à 20 et la course à n avec la règle 1, 2. Après vous avez fait la course à 20 avec 1 ou 3. Et maintenant il faut faire la course pour ce que vous venez de dire.

B : Ben c'est... Si on va en x, on va en k...

O2 : Alors est-ce que vous pouvez noter...

B : Non mais si c'est moi qui écrit on pourra pas relire.

O2 : Il faut écrire aussi.

Professeur : Là tu exprime comment (?)... Mais après il faut le démontrer. Faut montrer que ça marche.

B : Faut jouer pour ça.

Professeur : Pas du tout.

B : Oui mais faut que l'on prenne des valeurs.

Professeur : Non déjà... Vous avez un résultat. Écrivez le et après il s'agit de le démontrer.

O2 : Alors pour n, et ... la ... Comment ça s'appelle .. (?) a et b. Et il faut jouer avec ces nombres là.

C : D'accord.

Professeur : Alors ?

B : Oui ben on a un certain chiffre k... Allé.

45m00

O1 : C'est bon vous avez écris ? C'est bon vous l'avez écris la stratégie pour 1 et 2 ? Pas vraiment ? Pourtant vous étiez bien partis avez les trois cas 3k+1, 3k+2.

D : Mais il y a des chiffres en fait, si on comme pas...

O1 : Des nombres.

D : Oui des nombres, si on commence pas on a forcément perdu. Du coup la stratégie c'est de commencer, ou de ne pas commencer.

O1 : Oui d'accord. Dans la théorie des jeux quand on découvre une stratégie gagnante ça veut dire on dit ce qu'il faut faire, nous, pour gagner. Et si on ne peut pas le faire et bien on est pas sûr de gagner. Donc on est plus sur la stratégie gagnante. Mais si l'adversaire ne connait pas la stratégie gagnante peu être que l'on va peu être gagner car il n'auras pas joué bien, vous comprenez ?

O1 : Bon alors une fois que vous avez clos avec ça, si vous voulez je vous propose de jouer à la course à n avec 1, 2 ou 3.

C : On a déjà fait.

B : Non on a fait 1 ou 3.

C : Faut compléter en 7... heu en 4.

D : En 6.

C : Non 1, 2, 3 faut compléter en 6.

O1 : Et bien allez y... Bon ben visiblement vous avez au moins à vous mettre d'accord.

D : C'est en 4..

C : Il faut compléter en 4. C'est p+1, donc c'est en 4.

O1 : Alors vous l'avez fait où cette course à... Comme ça. Vous dites « on l'a déjà fait ».

B : Elle nous a demander toute à l'heure et..

O1 : Ah mais là, elle vous l'a fait faire... Ok. Je croyais que vous l'aviez vu ailleurs ou je ne sais pas quoi.

B : Quel que soi le nombre de chiffres si on a un intervalle de 1 à p faut compléter pour avoir p+1 à chaque fois.

O1 : D'accord. Ben vous pouvez l'écrire ça ? C'est pas difficile. Et alors vous avez fait la course de 1 à 3 ? Avec 1 et 3.

C : Pareil c'est 4. Faut avoir 4.

A : Faut prendre le plus grand nombre et le plus petit nombre et les ajouter pour savoir le multiple de combien...

O1 : Comment vous faites avec ça ?... Ah mais 3 ça veut dire que l'on ne peut pas faire 2.

B : Non c'est 4, faut avoir 4. Faut à chaque fois compléter 4.

O1 : Non mais par exemple je commence et je dis 2 moi, vous dites quoi ?

A : Ah ben ça dépend ça va en combien.

O1 : Et ben...ça dépends des nombres. Vous dites quoi ? Vous pouvez dire 3 ou 5. Et bien si l'on faisait la course à 4 vous n'auriez pas gagné.

C : Non.

O1 : Ben vous voyez que ce n'est pas pareil. Ben non, je veut dire ce n'est pas vrai.

B : Faut faire si n est plus petit et p plus grand faut faire en n+p...

O1 : J'ai dis 2, vous dites 3 ou 5. Hein d'accord. Si vous dites 3 je joue 4, vous dites quoi après ? 5 ou 7, et si c'est la course à 6 vous pouvez pas dire 6.

B : Non mais faut mettre des règles dans ce jeu, là il n'y a aucune règle. Vous dites que vous êtes à 2 alors que nous on a le droit qu'à 3 et 5.

O1 : Non on peut très bien être à 2 en faisant 1 et 1. La course avec 1 et 3, vous pouvez très bien...

B : Non mais dans ce cas là nous on jouer avant et on a pas décider après.

50m00

O1 : Non mais moi, si vous jouez 1 je peux dire +1, 2, et je vous faisait remarquer que si je dis 2 vous n'êtes pas sur d'arriver au nombre, ça dépends il y a derrière. D'accord. Voilà. Donc ce n'est pas tout à fait pareil. Ça ne se règle pas aussi vite que ça.

B : Si les deux veulent gagner forcément on arrivera au nombre.

O1 : Non.

B : Ben si +1, +1, +1, on va arriver au nombre.

O1 : Puisque vous en êtes convaincu écrivez là, on verra si on est d'accord. Voilà.

C : Moi j'ai quasi tout rédigé pour les deux là.

B : Attendez, je vous fait une course, on va en 26... Et on a le droit entre 3 et 5, 3, 4, 5.

D : 3, 4, 5. On vérifie, 3, 4, 5 ça fait 8.... 3 fois 8, 24, ce qui fait... le 2 a gagné.

B : Mais on peut pas mettre le 2.

D : C'est comme tout à l'heure, ben celui qui met le 10 a gagné.

B : Celui qui met le 10 a gagné. Donc vas y on essaye, t'as le droit à 3, 4, 5, tu commences.

A : Celui qui met le 2 a gagné.

B : Non on peut pas mettre le 2 on est à 3, 4, 5.

A : D'accord.

D : Moi par exemple je met 3.

C : Pourquoi 10, parce que 10 ça fait..

D : Après il reste 16.

C : Ah 8 et 8 16.

B : Je vais pas mettre 5 car ça n'a pas de sens, 4. Donc là toi tu met 3.

D : 3.

A : Ça fait 7, 10.

B : 1, 2, 3, 4, 5.

D : 3.

B : On arrive à 18. 1, 2, 3.

D : 21.

B : Non mais la théorie elle tient là.

D : Sauf que là si tu avais mis 5 ça n'aurait pas marché parce que … On serait allé à 11 et il aurait fallu chercher 18, non 17.

A : Faut faire des multiples du plus grand et du plus petit ajouté...

B : Cas a et b les deux extrêmes de solution...

55m00

B : Il faut donc réussir à arriver à k le nombre final, moins p de a,b moins 1. Celui qui arrive à ça il a gagné.

B : Non pas moins 1, moins a.

C : En fait là c'est pas a c'est y. En fait on s'en fou, si le mec...

D : Non , moins a.

C : Parce que si on est à -4 et ben on fait +4 alors que 4 c'est pas a. C'est -y, c'est l'ensemble des réponses, comme ça t'as plus qu'à compléter.

D : Mais non … J'essaye... k-p facteur de y-a...

B : Pourquoi -a ?

D : Parce que a c'est la (?) possible.

D : Après quand tu as multiple de 3. Tu cherches le plus grand multiple de 3 donc heu...

B : Oui mais là on a pas 1. Si on a pas 1 comme solution.

D : Et ben tu fais -3 regardes. Là ça fait a b et c... Dans ce cas là heu... a et b c'est quoi les deux extrémités ? Ah ben c'est bon. C facteur de 3+5, 8, moins 3. Non c'est toujours -1 à la fin.

B : Il faut donc réussir à ce que l'adversaire arrive k-p facteur de a+b moins 1... Nous faut qu'on arrive à k p moins 1.

60m00

O1 (dit à toute la classe) : Dans 5 minutes on met en commun ce que nous avons, alors vous vous débrouillez pour écrire quelque chose en cinq minutes.

C : Bon faut mettre au propre.

…

B : k c'est l'entier à trouver, c'est ça.

C : Oui. Ah ouais mets n, mets n.

65m00

D : Trouver le plus grand multiple de a b inférieur à n...

B : Multiple de a b ?

D : De a + b.

B : a + b inférieur à n.

A : P'tain les gars je pars 1h je reviens et vous avez encore rien fait. Faut que je reprenne les choses en main. Vous en êtes où ?

B : Ce multiple s'appelle p.

A : D'accord ok.

C : Nommons ce multiples p.

A : Nommons c'est avec un « s ».

B : Il faut donc réussir...

D : Non mais si c'est -1... Par exemple 3 et 5 ça ait 8... Quand tu vas arriver à 26...

...

D : Dans ce cas là c'est pas p, c'est un autre chiffre.. Et après...

B : Mets ça. Il faut donc réussir à arriver... A ((k-p) facteur de (a+b)) moins 1... Quand l'adversaire joue..

D : Il suffit de compléter son nombre pour aller à p+1.

O1 : Vous avez le droit de garder les feuilles blanches mais vous me rendez tout le reste.

B : Non mais attendez on a pas pu copier.

O1 : Ce n'est pas grave ce n'est pas la peine de recopier.

B : Non c'est pas p+1

D : Si si c'est p+1.

B : Non c'est a+b, c'est pas p+1.

D : Ah ouais c'est a+b à la fin.

B : C'est a+b.

68m23

ANNEXE E

Transcriptions deuxième expérimentation, deuxième phase : Le jeu d'Euclide géométrique

E.1. Groupe G3

4m00

B : J'ai rien compris, c'est qui qui gagne ?

D : C'est celui qui perd..

C : C'est celui qui prend le dernier carré.

B : En fait à chaque fois le carré on doit le diviser par trois.

D : Par 2 ou par 1..

A : T'en prends 1 ou 2 carrés.

C : Regardes.. On prend un carré de combien ? Un rectangle de combien ?

Observateur 1 : Excusez moi. Celui qui prend le dernier carré a perdu, donc il faut trouver une stratégie pour ne pas prendre le dernier carré.

C : On fait un rectangle de quelle largeur ?

B : Comme on veut.

Observateur 1 : On a le rectangle.

D : Tu fais ton rectangle comme tu veux.

C : Par exemple regardes, tu vas avoir ton rectangle... Comme ça tu vois. T'es la première personne qui va jouer. Tu peux prendre 1 ou 2 carrés, il faut que tu partes d'un coin. Tu vas partir de ce coin là, d'accord ?

B : Oui.

5m00

C : Donc il faut que tu prenne obligatoirement un carré. Donc pour aller jusqu'au.. le pus grand possible. Donc de côté ça va être, tu vois, parce que la hauteur c'est 4. Donc tu peux prendre ça au minimum, maximum tu vas pouvoir prendre ça. Tu vois. Tu vas prendre 2 carrés par exemple, tu vas prendre tout ça. Ça c'est le joueur un qui prend ça. Ensuite c'est au jouer deux, de partir de ce coin là ou ce coin là, d'accord. Donc là il doit prendre pareil, un carré. Soi plus grand soi au plus petit. Tu vois donc là il faut 3 de côté, le carré tu peux n'en prendre qu'un seul, ça va être celui là. Lui il va prendre ça. Après ce que je ne sais pas moi c'est si tu es obligé de partir du coin. Tu vois ce que je veux dire. Ou si tu peux partir du coin du rectangle.

D : De toute façon c'est la même.

C : Ouais, mais je ne sais pas si ils comptent que des coins du grand rectangle ou du petit. Quand on arrive, quand on fait.. Il nous reste un rectangle vide, est-ce qu'on peut partir de n'importe quel coin ou on est obligé de partir de ce coin là.

Observateur 1 : Non à chaque fois c'est ça, à chaque tour c'est ce qu'on vous a dit là.

C : Du coin du premier rectangle, ou de celui qu'on a fait ?

Observateur 1 : Ben non puisque.. Ben non pas du premier rectangle, puisque vous avez enlevé. Il faut que vous jouiez, si vous ne jouez pas..

A, B : Elle va nous montrer.

C : Je leur explique une fois....

Observateur 1 : Je crois que de jouer, ça sera bon pour tout le monde.

B : Mais on ne peut pas finir madame.

D : Mais si et là, après t'en prends 2.

C : Regardes, là tu en prends 2 par exemple. Le premier joueur il va rester ça, là tu peux..

D : Ben là il le prend et il a perdu.

C : Là il a perdu. Là c'est le joueur deux qui a perdu. Tu vois ?

B : Ouais. Mais pourquoi là t'en a pris 2 des ... Un comme ça et un comme ça ok.

C : Tu vois..

B : Cool.

C : C'est partis ? On essaye. Je fais un rectangle de n'importe quelle...

A : On va faire deux contre deux, on fait des équipes ?

C : On doit faire deux contre deux ?

B : Ben un contre un, non ?

A : Je ne sais pas.

B : C'est un jeu à deux joueurs.

C : Ben c'est un contre un.

...

C : Je mets au hasard.. Vas y commences.

B : Je prends 1 ou 2.

C : Comme tu veux.

B : Plus grand, on est obligé de prendre le plus grand à chaque fois ?

D : Ouais c'est trop impossible.

B : T'es obligé de prendre le plus grand.

A : Ah j'ai perdu.

C : Ouais.

B : ... (?)Le deuxième, tu peux en prendre 2.

D : Je ne suis pas obligé d'en prendre 2.

B : Ah mais elle est pas obligé d'en prendre 2.

C : Non, tu en prends 1 ou 2.

B : Ah m****.. Perdu.

Observateur 1 : Il faut que vous jouiez ensemble. Deux contre deux.

C : Ah, on croyait que c'était un contre un.

Observateur 1 : Mais non, je l'ai déjà dis, mais bon je le répète. Parce qu'il faut que vous échangiez entre vous pour comprendre ce qu'il faut faire. C'est pour vous éviter de trouver toute seule. Voilà. Sinon là vous ne travaillez pas du tout ensemble. Bon donc vous prenez juste ça, voilà, et vous continuez. Ok ? Et ça on va le mettre de côté pour tout à l'heure.

D : On vient de le faire le... Celui là.

C : P*** mais il faut compter, vous faites des rectangles de malade.

D : On s'en fou.

A : Ah oui m*** c'est vrai.

C : 1, 2, 3... 11, 13, 14, 15... Fais pas ta bizut non plus.

B : De toute façon on est obligé de prendre le plus grand.

C : Ouais. Vous pouvez en prendre 1 ou 2.

B : Ah oui c'est vrai, on peut en prendre 1 ou 2.

C : C'est pas compliqué regardes..

10m00

D : Tu prends le plus grand possible..

A : Ouais, ouais je sais..

C : Donc c'est soi ça au minimum, et si tu veux t'en prends..

A : Je comptais combien on pouvait faire de carrés.

B : Ça on en prend 2.

C : Alors..

A : .. Fallait en prendre 2 j'ai compté.

D : On a perdu.

B : Ah non.

C : Il faut en prendre 2 là.

A : Ah ces c****.

A, B : On a perdu.

A : Non..

D : T'es obligé d'en prendre 4(?).

C : Maximum vas y.

A : Ben on en prend 1.. Ah après elles en prennent 2..

..

B : Faites un carré, rectangle je ne sais pas..

C : Un triangle.. (ahah...)

...

C : Comme ça regardes... Tu vois ou pas pourquoi.

B : Non mais oui je sais j'ai compris.

C : Je ne sais pas comment le formuler mais j'ai à peu près compris.. En fait c'est d'instinct là.

B : Oui je sais.

C : C'est comme la dernière fois on était avec Eli pour le jeu de la dernière fois, et on sentait ce qu'il fallait faire mais on arrivait pas à..

A : à 4.

C : Allez y.

A : Heu ben j'ai perdu, tu barres ce trait.

D : Elle a perdu.

C : Trop pas.

D : Si.

A : Comme ça on en reprend 2.

C : Ah ouais.

B : En vrai vous auriez dû en prendre 2. Et on aurait perdu.

C : Ah ouais exact.

D : Non parce que vous auriez pris un 1 et ont auraient quand même pris..

B : Ah oui. Quoi qu'il arrive o a gagné !.. On doit mettre nos scores ou pas ?

C : Non..

B : On doit juste trouver la stratégie gagnante.

C : Ouais, on doit juste trouver la stratégie.

B : Ça doit être avec le carré.. le rectangle je pense.. Il faut trouver quelque chose.

C : Mais après ça dépend aussi de comment les gens ils jouent, tu vois si tu prends 1 ou 2 rectangles ça change tout.

B : Non mais je pense qu'il y a des chiffres à éviter au niveau des côtés du rectangle, qui font que..

...

B ou **D :** On prend 2 ?

..

C : De toute façon on est obligé.

A : Ah ça dépend des côtés si c'est paire..

C : Paire ou non.. Gagné, on a gagné.

B : Et voilà.

A : Ah ouais.

B : Elles ont gagné là ?

D : Ouais. Par contre si elle demande si on sait si on a gagné ou pas..

...

D : Je suis énervé donc..

C : Ah ah perdu.

A : Bon alors maintenant il faut trouver une..

D : Je crois que tu n'as pas compris toi, tu en prends 1 et après c'est sur qu'ils perdent.

B : Non Chantal a dit que je pense c'était par rapport au nombre, elle a dit.. Vas y dis ce que tu as dit Chantal. Exposes ta théorie.

A : C'est en fonction..

C : Allé parles plus fort.

A : De..

B : Si c'est paire le nombre

D : Ouais si il est paire là.

A : Après je ne sais pas trop..

C : Alors on va voir ça.

B : Toujours la technique.

15m00

C : Oui mais après c'est paire mais je veux dire ça dépend de combien de carré les gens prennent, tu vois ce que je veux dire ? Ça ça change complètement aussi.

..

C : Si tu pars du principe que tu joues que par 2, tu vois au maximum, comme là par exemple.. Ouais mais de toute façon on aurait perdu, 1, 2, 1, 2,.. Je pense que ça dépend si t'as de la largeur.. Tu vois.

D : C'est qui qui avait gagné là ?

C : C'est nous.

B : J'ai mis une croix à nous quand ont perdaient.

..

A : Non.

D : Là c'est vous qui perdez ?

C : Oui c'est nous qui devons perdre.

D : Et là aussi.

B : On a perdu deux fois et vous avez perdu deux fois.

D : On a commencez... Et là.... Ils ont fait on gagné... Ouais, donc là quand c'est impaire et là quand c'est paire. La personne qui commence quand c'est paire elle gagne, et la personne qui commence quand c'est impaire elle perd. Sauf que là ce n'est pas bon..

C : Ben non puisque tu prends deux carrés. En fait ça dépend si au début tu peux prendre 2 ou 1 carré. Tu vois ce que je veux dire. La t'es obligé de prendre ça..

B : Ouais en fait il faut établir quand est-ce que.. Déjà c'est par rapport au nombre, à la largeur et à la longueur, si c'est un nombre paire ou impaire..

C : Ça dépend..

B : Et si la personne commence par 1 ou 2.

C : Ça dépend si cette longueur est égale à deux fois la largeur. A au moins deux fois plus que la largeur, tu vois ce que je veux dire ?

B : Ça ferait quoi ?

C : Regardes. Quand la hauteur est..

A : Inférieur à deux fois la longueur.

C : Tu vois si la longueur elle est inférieur à deux fois la largeur, la hauteur ; ben tu ne peux pas mettre deux carrés, tu ne peux en mettre qu'un seul. Tu vois t'es obligé de jouer ça.

B : Ouais.

C : Tu vois ce que je veux dire. Alors que là, vu que la largeur elle est au moins plus grande que deux fois la hauteur, tu peux mettre au moins deux carrés. Déjà je pense qu'il y a un truc qui dépend de ça.

B : Oui c'est vrai que voilà.. Ben marques les tes hypothèses.

...

C : Là ça bloque là.

D : Oui elle bloque là. Si elle doit prendre le plus grand ça bloque.

C : Ben là, si c'est exact exactement deux fois, la personne qui commence elle a gagné.

A,B : Oui.

A : C'est encore elle si...

. . .

B : Et en vrai c'est pas longueur largeur.. d'un rectangle..

C : Si mais ça me perturbe toujours, en gros tu tournes le rectangle et tout de suite ça change alors je préfère dire la hauteur et la largeur ; je ne sais pas c'est... Ça me parle un peu plus. Je dirais, c'est sûr qu'on a trois cas.. Le cas où la largeur est égale à deux fois la hauteur, dans ce cas la personne qui commence elle gagne obligatoirement ; si là tu commences et ben moi je vais être obligé de faire ça.. Mais je vais perdre.

B, D : Ouais.

C : Après il y a un deuxième cas, donc ce cas là, où la largeur est supérieur à deux fois la hauteur, donc ça je ne sais pas encore qui gagne, comment, mais il y a ce cas là, et il y a le cas où la rageur est inférieure à deux fois la hauteur.

20m00

B : La largeur elle est inférieure à deux la hauteur ?

C : La largeur est inférieure à deux fois la hauteur, c'est à dire que par exemple elle va être comme ça, tu vois ce que je veux dire ? Ça veut dire que la personne qui commence elle ne peut pas faire autre chose que de mettre un seul carré.

A : La longueur ou la largeur ?

C : La longueur elle est inférieure à deux fois la hauteur, donc ça c'est inférieur à deux fois ça.

B : Ça c'est nos trois cas ?

C : Ouais pour l'instant, après tu ne sais pas comment tu peux gagner..

A : Il doit bien y avoir un truc avec les chiffres..

C : Il est où l'autre stylo rouge.. On va essayer après. Un truc simple, 3.., 3.., 2. Donc dans ce cas là..

B : C'est les nombres impaires là que tu as fait ?

C : C'est pour essayer plusieurs trucs, fais voir le stylo rouge. Donc dans ce cas là il y a deux cas, soi tu mets 2 rectangles soi t'en mets 1.. Soi tu fais ça, soi tu fais ça.. Dans ce cas là, la deuxième personne..

D : Elle peut faire deux choses.

C : Si elle fait ça..

B : Tu devrais mettre ça sur un autre côté.

C : Si elle fait ça, le rouge il a gagné, après il fait comme ça, donc..

A : Si il fait ça ben le petit rectangle ça revient à ça..

C : Si il fait ça, là c'est le rouge qui va gagner, attends fais voir.

B : Non pas obligé.

C : Là c'est le rouge qui va perdre.

D : Ouais, vas y t'en choisis 2.

C : Non mais si tu en choisis 2 tu as perdu.

B : Si t'en choisis 1 dans le rouge.

C : Mais là tu en choisis 1. C'est obligé d'en mettre 1.

B : Oui c'est vrai.

C : Et là c'est le rouge qui a perdu.

A : Là ça revient à que la longueur soit inférieure à la largeur..

B : Non c'est..

C : Voilà.

B : Et donc là c'est le rouge qui a perdu parce qu'il a choisis un seul carré au début, et là..

C : Moi je pense qu'il faut qu'on se repose (se concentre, ou se focalise, serait mieux dit :)) juste sur le fait d'abord comment le rectangle.. Comment c'est.. plus petit que deux fois la hauteur. Parce que si tu regardes, à chaque fois que tu termines, tu vois, tu termine toujours sur ce cas là. Donc après tu rajoute des trucs et après on en déduira après le.. Le avant tu vois mais.. Il faut qu'on déduise ça...

D : Ça va me retourner le cerveau ce truc.

C : Ce qui est sur c'est que cela doit être un truc trop simple.

B : Ouais.

C : Vraiment trop simple et..

B : Comme la semaine dernière là, il fallait juste faire moins 3.

C : Il faut juste trouver le truc. Bon alors, un côté, une hauteur de trois ça vous va pour.. C'est plus simple. 1, 2, 3... Bon alors, on va dire que c'est rouge qui commence. Là, obligé de faire ça..

B : C'est le rouge qui gagne.

C : On va prendre ça plutôt..

B : T'as changé quoi là ?

C : J'en ai enlevé un sur le côté parce que la regardes tu retournes encore sur le même cas. En gros tant qu'il ne te reste pas une barre tu retombe sur le même cas. Sur le cas où c'est inférieur à deux h (hauteur). Donc là, tu es obligé de faire ça.

B : Et après là tu choisis.

C : Là c'est tu choisis. Donc là ça dépend..

B : Si tu en prends 2 tu gagnes.

C : Si tu en prends 2 tu gagnes, si tu en prends 1 tu perds.

B : Ouais.

...

C : Donc on va prendre encore plus simple...

B : Tu as trouvé toi Sarah ?

C : Là si tu commences tu perds, regardes.

25m00

C : Là si tu commences tu perds. Et là si tu commences tu perds aussi. Donc, à partir du moment..

A : Attends deux secondes. T'as pas remarqué qu'à chaque fois qu'il commence par 2.. Dans chacun de ces cas ben que ce soit le rouge ou le bleu..

D : Trois sur trois il faut essayer avec autre chose.

B : Non mais regardes là, là il commence par 2 carrés et il gagne. Là il commence par 2 carrés il gagne, tout le reste..

D : Mais là il a pas gagné.. Il a pas commencé par 2 carrés ici et il a réussis.

B : Ben il perd, regardes là, quand il commence par 1 carré il perd, 1 carré il perd..

C : Non mais je veux dire à partir du moment où tu as ça il faut pas être con, je veux dire..

B : Non mais est-ce que quand tu commences par 1 carreaux est-ce que t'es forcément obligé de perdre ?

C : Moi je dis qu'à partir du moment où tu te retrouves dans cette situation là, si tu commences tu perds. C'est ce que j'allais te dire, regardes..

B : Non, non, je parles du nombre de carreaux avec lequel elle commence.

C : Mais après quand il reste ici, je veux dire après ça..c'est...

Observateur 1 : Alors vous en êtes où là ?

C : Alors on va dire qu'il y a à peu près trois cas. Il y a le premier cas où la largeur elle est égale à la hauteur, la largeur égale à la longueur. Alors là..

Observateur 1 : Là c'est la largeur est égale à la longueur ?

C : Deux fois la hauteur pardon.

Observateur 1 : Il n'y a pas de hauteur sur les rectangles.

C : Oui c'est parce que moi..

Observateur 1 : C'est quoi ? Comment on dit ?

C : Longueur, largeur.

Observateur 1 : Oui, où une dimension est égale à deux fois, mais pourquoi deux fois ? C'est un cas particulier deux fois ?

C : Si c'est égal à exactement deux fois la personne qui commence elle gagne

Observateur 1 : Oui.

C : Parce qu'elle va prendre la moitié et l'autre..

Observateur 1 : Bon, vous êtes quel groupe vous, c'est le trois, je vais le noter. Donc il y a trois cas.

C : Pour l'instant..

Observateur 1 : Si l égal 2l, voilà, donc celui qui commence il gagne.

C : C'est obligatoire.

B : Ouais.

Observateur 1 : Ensuite.

C : Ensuite après il va avoir..

Observateur 1 : J'aimerais bien que vous l'écriviez ça.

C : Je l'ai écris.

Observateur 1 : Bon alors ensuite le deuxième cas.

C : Y'a où la largeur est supérieur à deux fois la hauteur. Donc on est entrain de voir ça, on arrive pas à comprendre exactement le..

B : Mécanisme.

Observateur 1 : Parce que supérieur à deux fois, il y a une infinité de possibilités.

C : C'est ça. Et après surtout c'est quand c'est inférieur à deux fois la longueur. Quand c'est inférieure..

Observateur 1 : Le troisième cas ça serait si la longueur, enfin si une des dimensions, est strictement plus petite que deux fois ?

C : Alors là la personne qui commence..

Observateur 1 : Mais pourquoi ce 2 là ? Qu'est-ce qui vous a amené à ce deux fois ? Pourquoi deux fois et pas trois fois ?

C : Parce qu'on peut choisir de prendre 1 rectangle soi 2 et au début on est obligé de prendre 1 rectangle donc c'est une obligation ; donc si c'est inférieur à deux fois on a qu'une seule possibilité on ne peut pas faire autre chose, on peut juste prendre 1 rectangle..

Observateur 1 : Oui.

C : On ne peut pas jouer autrement.

Observateur 1 : D'accord.

C : Et quand on fait cela, après le joueur d'après il peut avoir plus de possibilités, c'est pas sûr ça dépend des cas mais souvent il peut avoir plus de possibilités par la suite.

Observateur 1 : D'accord.

C : Alors que si on commence et que c'est comme ça on ne peut pas faire autre chose.

Observateur 1 : Ouais. Alors je vous propose de regarder le 11 par 38, pour que vous regardiez un petit peu ça plus précisément.

B : On a une hypothèse aussi..

Observateur 1 : Oui c'est quoi ?

B : Je pense que quand on commence par choisir 2 carreaux, 2 carrés, on est obligé de gagner.

C : Non moi je pense pas.

D : Non.

C : Non, regardes, ça dépend des cas.

D : Quand tu as un nombre impaire ici, quand tu commences par 2 tu perds.

B : Ah ouais ?

D : C'est obligé tu perds. Et en plus si tu commences par 1..

Observateur 1 : Qu'est-ce que c'est cette histoire de impaire là, faites voir ce que vous avez fait.

D : Non, non mais..

Observateur 1 : Donc là vous avez quoi ? Vous avez deux rectangles et après il y a combien de carrés là ? Qu'est-ce que c'est la fin du jeu là ?

D : Ben c'est là après.

Observateur 1 : Oui. Donc vous avez quoi, vous considérez qu'il y a deux carrés, c'est tout ?

B : Oui.

Observateur 1 : Bon ben je les dessines alors, d'accord. Donc là qu'est-ce que vous êtes entrain de dire, il faut faire quoi ?.. Donc celui qui prend ça a perdu..

B : Voilà, non c'est le bleu qui a perdu..

D : Non c'est celui qui prend ça, il a gagné.

B : Ben oui, c'est pas lui le dernier.

Observateur 1 : C'est celui là le dernier. Alors celui qui prend ça a perdu, donc, pour gagner il faut prendre celui là.. Et avant ?

D : Et avant il ne faut pas commencer en premier.

Observateur 1 : Faut pas commencer ?

D : Si, mais si on commence par 2 on perd.

30m00

D : Alors que si on commence par 1 on peut gagner.

Observateur 1 : Oui mais justement, c'est quoi la stratégie gagnante ? Puisque ce n'est pas au choix la stratégie gagnante.

D : Ben là c'est.. On commence par un...

Observateur 1 : Maintenant c'est bien, on va regarder celui là précisément. Donc vous avez deux grands carrés et deux petits carrés. Alors finalement pour gagner vous faites quoi ?

D : On commence pas par 2 on commence par 1.

Observateur 1 : Donc pour gagner vous commencez et vous en prenez 1.

D : Oui.

Observateur 1 : C'est ça ? Donc c'est celui là.

B : Oui.

D : Ça va obliger l'autre personne à prendre le plus grand possible.

B : Voilà.

Observateur 1 : Donc l'autre prend celui là.

B : Voilà.

D : Et après on va.. En 2 on en prend 1 et le bleu il prend ça.

Observateur 1 : Après on prend celui là.

B : Et le rouge il a perdu.

Observateur 1 : D'accord.

C : C'est vrai que quand on a le choix entre 1 et 2, il faut pousser l'autre personne à ne plus avoir de choix possibles. A ne pouvoir faire que un grand carré. En gros décider ce que l'équipe d'après va devoir jouer. En gros à mener le jeu, je dirais.

Observateur 1 : Alors pour celui là il y combien de carrés ? Vous considérez qu'il y en a 3 c'est ça ?

C : Oui.

Observateur 1 : D'accord bon, alors quelle est la stratégie gagnante ?

C : Là il faut que le bleu...

D : Là il faut commencer par 3, par 2.

C : Le bleu... Faut commencer par 2 là.

B : Ouais.

Observateur 1 : La stratégie gagnante, mettons.. C'est vous. Vous commencez ou pas ?

B,C : On commence.

Observateur 1 : Et vous en prenez 2.

C : On en prend 2.

B : 2 voilà.

Observateur 1 : Donc l'autre prend celui là..

C : Il est obligé de.. prendre 1..

B : Après on en prend 2.

Observateur 1 : Ensuite vous continuez et vous en prenez 2 et voilà.

D : On peut commencer par 1 aussi.

C : Ben après ça dépend, parce que si..

Observateur 1 : Attends, si on commence par 1 qu'est-ce qui se passe ?

C : Lui il peut en mettre 2 ou 1.

Observateur 1 : Est-ce que vous êtes sur le stratégie gagnante si vous commencez et que vous en prenez 1 ?

D, **C :** Non.

Observateur 1 : Non, donc ce n'est pas ça la stratégie gagnante.

C : Non.

Observateur 1 : Donc il ne faut pas dire on peut aussi. On ne peut pas, si l'on veut gagner on est obligé de faire ça.

C : C'est ce que je disais tout à l'heure il faut l'obliger à ne pas avoir le choix.

Observateur 1 : Ça c'est autre chose. Alors maintenant je vous propose de travailler sur le 11 38 pour voir si ça marche.

C : Je suis en train de le tracer.

A : Donc ... Nombre de carrés ils en ont 10.

D : Tiens.

C : On commence ou vous commencez ?

A : Ben commençons.

D : Attends, tu ne peux pas faire un comme ça, si ?.. Ah mais tu en prend 2 là de ce côté.

A : On est obligé d'en prendre 2.

B : Hum ils nous oblige.

...

B : P*** ça y est ils ont la stratégie gagnante.

A : En fait on est obligé d'en prendre 1.

C : Et là..

D : Faut en prendre 2.

C : J'en prends 1.

B : Ouais.

C : J'en prends 1.

A : Elles ont gagné.

B : On en prend 1 elles en prennent 1 ouais elles ont gagné. Vous auriez dû en prendre 2 on aurait gagné.

C : Tu vois c'est ce que je te dis, il faut les pousser à n'avoir qu'un seul choix.

B : Ouais.

C : Après je ne sais pas si ça marche partout.

A : Mais 11 par 38 il a quoi de spécial ?

B : Ouais..

35m00

C : Le pire c'est que si ici on fait la même chose, si c'est vous qui commencez et ben vous pouvez gagner aussi, ça dépend de la personne qui commence. Vraiment.

B : vas y on commence, on va voir, on va essayer avec 1 carreau pour voir.

C : 1 carreau ?

B : 1 carré.

C : Mais vous allez perdre.

B : Sûr ?

C : Vas y je te montre.

B : Obligatoirement ?

C : Ah oui.

A : On se concerte avant.

B : Mais non, on s'en fou qu'on perde, je veux dire, nous on est là pour chercher la stratégie.

C : Là je te dis que tu vas perdre.

A : Elle va faire pareil elle va le mettre là.

B : C'est quoi ta théorie ? Pourquoi est-ce que je devrais perdre ?

D : Elle en prend 1 et après tu es obligé d'en prendre 1 et ça va repartir comme l'autre..

C : Et après ça repart comme l'autre et tu es morte. Parce que là tu n'as qu'un seul choix regardes. Là tu peux refaire que ça.

B : Là j'en prends qu'un mais après.. Pourquoi il y en a plus là ?

A : Parce que si elle est là elle peut avoir soi un petit carré...

B : Pourquoi il y en a plus là ? J'ai pas tracé mon bon carré, on a dû faire un truc bizarre..

A : Je crois qu'il manque une ligne.

B : C'est toi qui n'a pas fait le bon là.

C : 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5.. Là il y en a 12 là ?

B : Ah ah tu n'as pas fait le bon, on va te gagner vas y.

D : Ouais mais elle est partie dans la mesure où..

B : Allé vas y. Joues que je rigoles. De toute façon on a gagné quoi qu'il arrive.

C, D : Ben non vous n'avez pas gagné. Vous avez perdu là.

A : Non regardes..

D : Ben si t'en prends 1 ou 2 et nous on en prend soi 1 ou 2 et vous avez perdu.

B : Ah ouais après tu en prends 2.

C : Joues.

A : .. T'es obligé d'en prendre 2... Ahhhh p**** j'aurais dû fermer ma gueule.

C : Tu vois là par exemple t'avais le choix et on a quand même gagné. Je ne comprends pas.

B : Où j'avais le choix, ah là ouais. Même si j'en avais pris t'en aurais pris et on aurait quand même finis par perdre...

C : Ouais j'en avais pris on aurait perdu.

B : Voilà.

. . .

A : Pourquoi vous faites toujours le même.

B : Parce qu'on travail sur le 11 38.

C : Elle nous a dit de travailler là dessus.

D : On doit faire toute les possibilités ?

..

B : Viens si on commence par 2.

A : Ben ça fait comme ici.

B : Non parce que là ça inverse les rôles.

A : Oui ça fait comme ici mais sauf qu'on gagne. C'est un carré ça ?

B : Il me semble. 2, 3, 4, 5..

D : Non mais là t'es sûr tu gagnes.

B : Non parce que si j'en prend 2 vous gagnez vous.

C : Si t'en prends 2 tu gagnes.

B : Non, si j'en prends 2 tu gagnes.

C : Ouais je gagnes.

B : Si j'en prend 1 vous vous perdez. Parce que là on échange les rôles.

A : Mais non..

B : Si regardes ça fait la même après.

A : Tu aurais dû en prendre 2.

B : Quoi si j'en prends 2.

A : On en aurait pris 1.. Heu je sais plus quoi.

B : Hum..

A : Non on en aurait pris 2. On en prend 2.

D : Non mais réfléchissez. Et après vous verrez.

B : Non mais de toute façon on fait pas une stratégie, on essaye de trouver la stratégie ensemble.

40m00

D : Oui faut que vous réfléchissez. Nous on a compris mais vous est-ce que vous avez compris ?

C : Tu mets combien là ?.. T'as perdu.

B : Ah ben voilà.

C : Pourquoi tu n'as pas refait comme j'ai fait là, t'en fait un seul, puis après nous qu'on en fasse 1 ou 2 vous gagnez.

B : Ah bon. Ah ouais.. Attends si j'en avais pris 2..

D : Ouais au moins c'était drôle avant, là il est trop nul.

A : Ben là je commence.

D : Je ne suis pas d'humeur..

B : Après là ça aurait été le contraire.

A : Ouais.

C : T'as trouvé ou pas ? (elle parle à un autre groupe).. Mais nous on ne sait pas comment l'énoncer, enfin on a... Madame, là aussi il y a une division machin euclidien ou..

...

B : Peut être il faut diviser..

C : C'est une division.

B : Ouais.. Division euclidienne.. Regardes par rapport au reste je ne sais pas quoi. Allé Margot, commences, finies ce que tu as commencé.

C : J'ai fais le trait de la division.

B : Après diviser quoi par quoi, la longueur par la hauteur, l'inverse... Allé Sarah toi qui a compris expliques nous.. Allé Sarah.

...

B : On prend le 38 11... 38 divisé par 11 ça fait combien ? Faut une calculette. Il faut une calculette Casio, elle fait des divisions euclidienne.

C : Je ne sais même pas ce que c'est une division euclidienne.

A : C'est quand t'as le reste.

C : T'as le reste ? C'est à dire ?

B : Tu connais le reste, le quotient.. Voilà, et là je sais comment on fait.

C : Ah la calculette de troisième..

B : 38 par 11.. 3.. Le reste c'est 5. Alors, on a ça comme données.

C : Comment ça 3, moi je trouve 3 quelque chose.

A : Non, enfin c'est 3 et le reste c'est 5. Division euclidienne.

D : Il reste 5. Donc tu peux faire 3, 33, 3 fois 11 33, il te reste 5.

C : Ah mais oui, le truc que l'on faisait en 4ème là..

B : Alors pour 38 11, le reste c'est 5, fait le lien vas y Margot.

C : Après tu divise 5 par 11 par l'euclidienne, il reste 1..

B : Non. Pourquoi tu veux faire ça..

C : Ben si c'est ça.

D : Non mais c'est juste pour te dire à la fin sur quoi tu tombe.

B : Ce qui reste quoi.

C : Et ben là je te fais la même pour celle là, là tu viens de me le faire pour tout ça, là tu me fais la même pour celle là. Donc il reste 1 ici.

D : 1 divisé par 11.

B : Je ne comprends pas ce que tu veux faire là.

45m00

C : 11 divisé par 5.

B : Oui et alors.

A : Il reste 1.

C : Bien sûr qu'il reste 1.

D : Mais pourquoi tu veux faire 11 alors que tu le fais sur ce carré là.

C : Si tu fais sur ce rectangle là il te reste ça.

A : Oui.

C : C'est ça tes 5.

B : Non. C'est ça.

D : C'est ça.

B : C'est que cela là.

C : T'as 3 fois 11, il reste 5. Maintenant après t'échange ton rectangle, tu le met comme ça, là tu as 5 et 11 donc il faut que tu divise 11 par 5.

B : Oui et après.

C : Y'en a 2 et il en reste 1. Tu comprends.

B : Et après il y en a 2 il reste..

C : 1 sur 5, tu divises 5 par 1, 5.

B : Il en reste 1 et alors ça prouve quoi, ça te dis si tu es gagnant ou pas, ça te dis..

C : Ben j'en sais rien, tu me demandes de faire la division euclidienne je te fais la division euclidienne et après je sais pas.

B : Non mais le fait que le reste c'est 1 ça va nous expliquer quoi.. Le résultat...

. . . .

B : On peut pas mettre pause avec l'enregistreur..

...

A : P*** ils vont écouter ça pendant 2h...

C : T'imagines ça... 16h d'écoutes.

B : Et là ils vont faire ça sur tout le monde.. Bon alors, le reste, qu'est ce qu'il nous indique ?

C : Non mais c'est cool de faire des divisions euclidiennes mais je vois pas à quoi..

B : Faire le rapport maintenant.

C : Il doit y avoir le rapport mais je..

B : Le fait qu'il y ai un 1 ça nous indique quoi ? Qu'on perd, qu'on gagne..

C : Mais ça dépend après de quoi tu divise par quoi..

D : Ah ok.

D : Ah j'ai compris. En fait quand tu fais 10 divisé par 6, tu tombes sur 4 le reste.. Après quand tu vas le faire il va te rester 2, donc tu fais 4 divisé par 2 ça va te faire 0.. Ça veut dire qu'icitu vas perdre, la personne qui va jouer il faut qu'elle fasse..

B : Ah il reste 1 ça veut dire qu'il restera un carreau donc du coup c'est pas toi qui.. Non mais attends ça c'est si toi tu commences, à chaque fois. Arrête de me regarder comme ça, réponds.

D : 6 divisé par 4..

50m00

D : Ah c'est bon j'ai compris. Tu vas avoir 4 ici et 6 de largeur. Si tu fais 6 divisé par 4 tu retombes sur 2 et là ça sera 2. Tu fais 4 divisé par 2 tu tombe sur 0, ce qui fait que celui qui joue en premier a perdu.

B : Quelle est la stratégie gagnante ?

D : Mais j'en sais rien moi..

B : Mais tu viens de nous l'expliquer.

D : J'ai juste compris que l'on doit faire comme ça. C'est la première personne qui joue, l'autre elle va devoir faire ça, et l'autre ça.. Après ici ce sera le contraire, la personne qui joue ici, elle perdra, parce que la première doit faire ça, et là il reste rien.

A : Il reste deux entiers en fait, quand il reste deux entiers, non . . .

C : Vous avez trouvé le rapprochement des . . . Euclidiennes avec heu.. Le bordel.

B : Sarah a trouvé la stratégie gagnante. Expliques lui Sarah.

C : Mais ce qui est différent avec ça par rapport à la semaine dernière c'est qu'il y a beaucoup plus de possibilités. Ça dépend du rectangle, comment tu le fais. T'as tellement de possibilités de largeur et de longueur que.. C'est ça qui est difficile en fait. Alors expliques moi.

D : Ben en fait ce que j'ai compris c'est que là tu as largeur, 6 de largeur et 10 de longueur. Tu divises 10 par 6, tu tombes sur 4 de reste. Après le reste tu le divises par 6 tu tombes sur 2, et 4 divisé par 2 ça fait 0.

C : 4 divisé par 2 ça fait 0 ?

D : Ben ..

C : Ah le reste c'est 0, et quand le reste c'est 0..

D : Ça veut dire que..

C : Celui qui commence a gagné. Quand le reste c'est 0 celui qui commence a gagné.

D : Ouais. Alors que là... Celui qui commence il a perdu.

C : Non mais je te parle juste pour la dernière.

D : Pour elle oui, mais pour elle non. Là je fais 12 divisé par 8 je tombe sur un reste 4 . Donc 8 divisé par 4 ça va faire 2 et le reste 0, et là en fait la personne qui va jouer après elle va gagner. Elle va faire ici et l'autre aura perdu.

B : Je suis d'accord avec toi Sarah.

C : Tu me casses la crâne.

B : Non c'est vrai elle a raison, c'est la stratégie..

D : Oui mais on arrive pas à l'expliquer cette m****.

B : Mais c'est ça, donc tu prends a hauteur et la largeur..

D : Oui mais regardes là tu finis par 0 et là 0, alors que là tu gagnes et là tu perds, quand tu commences. Donc on ne peut pas l'expliquer comme ça.

A : Ben si ça fait deux entiers..

D : Alors qu'ici j'ai fait 19 divisé par 9 ça fait 1, là 1. Mais 9 divisé par 1...

55m00

. . . Elle parlent d'aller boire puis d'autre chose...

55m36

C : Alors... Alors en gros quand dans la division euclidienne t'arrive le reste c'est 0, c'est à dire que la largeur est égale à deux fois.. Là celui qui commence là il a gagné. Celui qui commence il gagne.

A : Genre ici.. Non il perd.

C : Non celui qui..

A : Ah qui commences ici. Ouais.

C : Ça dépend.. Du nombre de division euclidienne que tu peux faire avant d'arriver à 0.

A : Peut être.

C : Regardes. Là t'as juste à faire deux divisions, 12 par 8, puis 8 par 4, et tu arrives à 0. Là celui qui commence il perd. Là tu as trois divisions à faire, donc 10 par 6, 6 par 4, et 4 par 2, ça fait trois divisions et celui qui commence... Il gagne. Il faut que l'on essaye avec plus de division. Le nombre de divisions euclidiennes avant d'arriver, donc ça veut dire que quand c'est paire tu commences tu perds, quand c'est paire tu perds. Et quand tu commences et que c'est impaire tu dois gagner, normalement. On va essayer ça. Mais je ne sais pas comment faire plein de divisions. Et par contre c'est toujours pour le cas où L inférieur à 2l. Parce qu'après quand c'est supérieur je ne sais pas...

...

C : Comment tu rédiges ça une division euclidienne ?

...

C : Mais j'ai un problème là.. C'est quand il reste une ligne de 1..

60m00

C : Oui et bien là.. Là il faut commencer, ça veut dire qu'il faut que tu commences.Regardes on a trouvé un truc. Ce carré là, tu fais deux divisions euclidienne et pour celui là tu en fait trois. Quand tu fais deux divisions tu perds, on pense que quand c'est un nombre paire de division euclidienne tu vas perdre quand tu commences, et quand c'est un nombre impaire et bien tu vas gagner.

D : T'essayes d'autres ?

C : Je suis en train. Mais ça c'est dans le cas par contre où L est inférieur à 2 l.

D : Mais tu me diras après tu peux faire la même.

C : Mais oui après ça dépend..

D : De toute façon tu dois toujours utiliser le plus grand pour le diviser par l'autre.

C : Donc là je suis là mais j'arrive à un truc où il reste 4 carrés. Donc là si tu commences tu perds..

D : Hum. Ben là tu fais deux divisions en fait.

C : Oui là tu fais deux divisions, même trois, je peux en faire jusqu'à trois. Ça fait 1, 2, 3, 4 5. En fait 5 ou 3. Mais en gros à partir du moment où tu arrives là t'as perdu. T'en fait deux t'as perdu.

. . . Elles parlent d'aller à la FNAC

A : C'est dur, c'est dur.

B : On est pas loin de la stratégie gagnante.

A : On se rapproche petit à petit. Ça fait une heure et deux minutes que l'on parle.

...

A : Nous avons la stratégie gagnante.

C : Regardes là c'est pareil. Là c'est paire et tu as perdu.. C'est paire ou impaire ?

D : Et bien ça fait 5.. 3, 2, 1.

C : Et tu gagnes ou tu perds ?

D : ...

C : Là c'est paire et le premier qui il gagne, il perd.

D : On devrait faire un tableau.

...

D : Alors le premier, on va sortir celui-là là bas.

C : 9 et quoi ?

D : 9 et 5.

. . .

C : J'ai vraiment trop chaud là. Mon sac il est trop froid.

B : Ben ouvre les fenêtres.

65m00

C : Il reste une heure.

A : Non 35 minutes.

C : Pourquoi 35 minutes ?

A : Moi j'ai 40...

C : Madame vous pouvez venir nous aider après ? Parce que ce n'est pas qu'il y ai personne qui vient nous voir mais on est un peu perdu en fait.

D : On n'arrive pas à expliquer mais même..

C : On sent, on comprend bien comment ça marche mais à expliquer.. Alors on a utilisé les divisions euclidiennes pour l'instant..

Professeur : De quoi par quoi ?

C : De la largeur par la longueur. Quand la largeur est plus petite que deux fois la longueur.. Je n'arrives jamais à le dire, moi je dis hauteur et sauf qu'il ne faut pas dire hauteur.. En gros quand ça c'est deux fois.. C'est plus petit que deux fois ça..

Professeur : La longueur est plus petite que deux fois la largeur..

C : Dans ce cas là, si l'on doit faire au total un nombre de divisions euclidiennes paires, si on commence..

Professeur : Si l'on doit faire au total un nombre de divisions euclidiennes paires..

C : Pour arriver au dernier carré. Si on commence on a perdu. Et si ce nombre est impaire si on commence on a gagné. C'est rigolo non.

Professeur : Un truc simple de division euclidienne.. Tu l'a fait au départ visiblement. Non ?

D : Oui.

C : A partir du départ.

Professeur : Et après, par exemple.

C : Par exemple sur ce carré de 6 par 10, donc on divise 10 par 6 il nous reste 4. Ensuite on va diviser 6 par 4, c'est notre deuxième division, il nous reste 2. Si on va diviser 4 par 2 il nous reste 0, donc là on a fini on a le dernier carré. Donc là on a fait trois divisions et si on commence.. Là on va commencer on va dire ensuite le bleu il va jouer ensuite le rouge ici et le bleu il va terminer le dernier carré. Et donc il aura perdu. Donc si il y a trois divisions et que l'on commence on gagne.

On a fait d'autres essaies et ça marche aussi. Alors que si l'on en a que deux à faire, par exemple 8 par 12, donc on divise 12 par 8 il nous reste 4.. 8 par 4 ben il nous reste 0, donc le rouge il commence, le bleu, ensuite le rouge il fait le dernier.. Et donc il a perdu. Quand on commence on perd si il y a deux divisions euclidiennes à faire et si y en a trois, enfin si c'est un nombre ... Si c'est un nombre paire.

70m00

C : Mais sauf qu'on sait que ce n'est pas forcément certain et que c'est pas comme ça que l'on doit l'énoncer, et donc on ne sait absolument pas quoi faire.

Professeur : La discussion du coup elle s'entame si j'ai bien compris sur le nombre de division que vous allez faire pour obtenir un reste nul ? C'est ça que vous faites.

C : Ouais, ouais. Par contre c'est que des choix où l'on peut ne prendre qu'un seul carré en fait.

Professeur : Ben essayez avec un autre.

C : C'est prise de tête madame il fait chaud.

...

D : Hum.. 3 fois 6, 18..

B : Fais avec ça, ça te donne le reste si tu veux. Tu veux diviser quoi ?

D : Le reste..

B : 5 par 6 ? 5 par 6 ? !Ouais elle a juste...

B : Et donc là... C'est au rouge de gagner, il gagne du coup... Avec 1 et 2...

D : Ouais en fait c'est à chaque fois qu'il y a 0.

B : Comment ça il y a 0 ? Comment ça y'a 0 ?

D : Je finis encore par 0, j'ai divisé par 2 ça fait 3, là et il reste 0.

C : Le fait est que l'on a pas de stratégie gagnante là, on essaye de comprendre mais on a pas le « stock » (?_1h12"48').

B : Ouais...

...

D : Non ! Regardes 3, 1, 2, 3... 2, combien il reste de carrés.

C : Ouais. C'est sûr que si il y a 3 fois tu peux le faire 3 fois, donc c'est normale que tu puisse faire.. Ben oui c'est normal ça Sarah.

A : C'est a même chose que la course à 20.

D : 5, 6, 7. 7.

A : J'ai entendu on prend le reste et on le divise par...

D : Par le nombre de.. Ah tu fais 9 divisé par 7.

C : Ben oui une division euclidienne quoi. On va reprendre où on était. Élie ! Tu veux pas nous aider.

D : Là t'en fais un seul de carré.

C : On y arrive trop pas.

B : T'as trouvé la stratégie gagnante ?

E : Ouais là on est en train de voir contre eux..

A : Mais on est nul.

B : Normal je me suis mis avec toi.

C : On est avec les équations euclidiennes mais on arrive pas à faire de rapprochement concret.

E : Vous faites des rectangles de combien ?

C : De n'importe, on essaye avec n'importe quoi, on fait des..

75m00

C : Des équations euclidiennes pour savoir le reste, combien de fois il faut diviser, combien de carrés tu peux faire à chaque fois, combien tu as de choix et tout ça, et on arrive pas à faire de rapprochement. Tu nous mets dans le truc, on arrivera peut être à gagner tu vois...

D : Mais regardes ! Ça fait ça à chaque fois !

E : Vous cherchez à faire un rapprochement au niveau de quoi ? Alors vous essayer de déterminer le nombre de carrés, les dimensions..

D : On fait les divisions ; on a remarqué comme quoi.. Tu vois ici c'est mon premier. Alors j'ai fait 25 divisé par 9, tu vois que ça fais 2, tu vois tu peux faire 2 carrés là, 1, 2, il reste 7. Après 9 divisé par 7 ça fait 1 carré et il reste 2.. Après j'ai refait, regardes, 7 divisé par 2, tu tombes sur 3 carrés, 1 ,2, 3, et tu tombes sur 1.

E : Ouais en fait je comprends pas pourquoi ça fait [?] directement.. Essayez de faire genre.. Vous essayez de trouver un seul heu... Vas y écris plus gros que ça. Essayez genre de trouver, de déterminer un nombre de . . .

B : C'est ce qu'on voulait savoir. Expliques.

E : Moi non je n'expliques rien je vous donnes juste.. T'as une règle ? Attends tu vas voir.

. . .

E : Mais laisses moi finir ! Je vous dis d'arrêter de m'écrire dessus.

Observateur 2 : Alors vous avez jouez quoi exactement, [?]

B : Ben..

C : Ben on a fait n'importe quoi.

Observateur 2 : Vous avez déjà joué au 38 11 ?

C : Oui

Observateur 2 : Vous avez trouvé la stratégie gagnante ?

Observateur 2 : Pourquoi il est à le garçon ?

Observateur 2 : Pourquoi il était là ?

C : Parce que tout à l'heure j'ai faillis le faire tomber.

E : Faites autant de fois que vous voulez ce rectangle et essayez de trouver la solution.

C : Mais ça c'est un rectangle parmi tant d'autres, si tu prends ça tu fais comment si ce n'est pas égal.

E : Essayes de trouver d'abord avec ça et ça va t'aider.

Observateur 2 : Vous avez trouvé ça ? Le 56 125 ?

E : On est en train de voir contre eux, on cherche, on est au hasard.

A : 56 ? ! Ça ne rentre pas 56.

C : 1, 2, 3, . . . , 10. Il y a 10 carrés.

A : Ah c'est ça qu'il disait 10 carrés. J'ai vu ça sur la feuille.

B : Ah oui.

C : Il faut que l'on arrive à.. 2 carrés. Celui qui fait 2 carrés c'est celui qui.. il touche celui là il a gagné. Il win.

B : 2 carrés..

C : Donc il en reste 8.

B : Pourquoi tu en enlèves 2 ? Tu ne devrais pas en enlever juste 1 ?

C : Est-ce que je peux essayer de calculer ma hein.. Par ce que franchement voilà hein.

A : C'est à toi ?

D : Regardes, fais avec moi. On va jouer, on va jouer il est fait. Bon ben Chantal joues avec moi elle ne veux pas jouer.

B : J'en prends 2.

...

C : Vas y.

A : 1.

D : T'en as pris 1 ?

A : Ouais.

80m00

D : Elle a perdu.

A : J'en prends 2 petits. Ah ouais.

D : T'as perdu ahah ! Elle est taré elle.

A : Non mais on peut faire des carrés là.

D : Non tu ne peux pas.

C : Ce rectangle là honnêtement ça ne me vas absolument pas ça.

A : Ah mais oui.

D : Alors que si t'en prends 1 ici moi j'en prends..

C : Si tu cherches une stratégie sur un rectangle comme ça, je te mets un rectangles comme ça et tu ne sais rien faire. Tu veux ce que je veux dire ? Faites un rectangle comme ça on va voir qui c'est qui gagne..

D : Au moment où tu arrives ici, il faut que tu fasses..

C : Moi ça m'énerve.

B : Il fallait commencer là mais ça fait rien. Tu en choisis 1 quand même ?

A : Ouais. Je voulais être en deuxième position.

B : Ça y est tu as joué en deuxième là.

A : Lui il compte ?

B : Oui.

A : Attends. Ah mais oui, mais oui. Si j'en avais pris 1..

B : Ça aurait fait quoi ?

A : Ben j'aurais gagné.

B : Non.

A : Ah tu aurais gagné.

B : Ça y est Margot elle en peux plus.

C : C'est Eddy il dit que des conneries.

Observateur 1 : Bon, vous en êtes où là ?

C : On fait par rapport à des divisions euclidiennes.

Observateur 1 : Vous avez cherché en tout cas.

C : On fait par rapport à des divisions euclidiennes.

Observateur 1 : Oui, oui, bien.

C : En fait on a trouvé un raisonnement mais on est pas certain que cela soit le bon. C'est par rapport au nombre de divisons euclidiennes que l'on a besoin de faire pour arriver au dernier carré. Pour l'instant si on prend des rectangles..

D : De toute façon la division nous dit le nombre de carrés que l'on peut faire et combien de petits carrés il nous restera sur le..

Observateur 1 : Pourquoi vous évoquez la division euclidienne ? Ça vous donne la stratégie pour chacune des parties c'est ça ?

C : On arrive pas à trouver vraiment le raisonnement, on sait que c'est par là qu'il faut chercher mais on arrive pas à faire de vrai rapprochement, on sait que c'est par là qu'il faut chercher, on se questionne.. Mais il manque quelque chose.

Observateur 1 : Essayez au moins de le décrire sur des cas particuliers, on vous demande pas de décrire sur un cas général.

C : En fait en gros quand on est dans un rectangle où.. Où.. C'est sur celui-là, non fais voir. On va dire L est plus petit que deux fois.. Je n'arrive jamais largeur longueur. Quand la largeur est plus petite que deux fois la longueur dans ce cas là si on doit faire un nombre de divisions euclidiennes qui est paire, si on commence on va perdre.

Observateur 1 : Et pourquoi ce paire là ? Est-ce que vous vous rappelez la course à 20 la dernière fois ?

C : Oui.

D : Ouais.

Observateur 1 : On partait de 0, on avait le droit de rajouter 1 ou 2 et il fallait dire 20. Quel est le rapport avec celui là ?

C : C'est pareil il nous reste on enlève et il nous reste.. Faut qu'on arrive à..

B : Ben si on a deux possibilités..

Observateur 1 : Ouais c'est ça, on prend 1 ou 2 et on doit selon les cas on doit terminer ou pas terminer.

B : Voilà.

Observateur 1 : Donc c'est juste ça, à chaque fois vous avez ça. Et donc vous pourriez donc le décrire ça par exemple pour le.. C'est lequel que vous venez de faire là ? Le 11 par 18 ?

A : C'est ça.

Observateur 1 : C'est les dimensions que je veux.

A : Oui, oui c'est 11 par 38.

Observateur 1 : D'accord. Alors pour celui ci vous avez d'abord trois grands carrés, ensuite on avait deux carrés un peu plus petit, et ensuite 5 des tout petits. Alors si l'on prend la dernière étape il ne faut pas prendre celui là.

C : Si on commence là on perd.

D : Si on commence ici on fait 1.

C : Si on fait 1 la personne fait..

D : Soi 1 soi 2 et on gagne.

C : Tu gagnes si tu commences.

B : Voilà.

D : Alors que si on ne commence pas on perd.

Observateur 1 : Oui mais justement j'essaye de vous montrer par rapport à la course à.. A quoi là ? C'est la course à combien ?

B, D, **C :** A 5.

Observateur 1 : Ben non car le cinquième on perd.

D : A 4.

85m00

Observateur 1 : Voilà super, c'est la course à 4. Donc si vous vous rappelez de la course à 4.

D : A oui on prend..

Observateur 1 : Il faut faire 1 et 4.

D : On a 1, 4, on rajoute 2.

Observateur 1 : D'accord. Donc c'est ça qui vous dit, c'est le nombre de petits carreaux qui vous dit ce qu'il faut faire. Alors la fois d'avant c'est la course à 2, mais comme..

A : Ben voilà en fait c'est nos restes !

Observateur 1 : Vous voulez commencer ici ça veut dire qu'il faut perdre ici donc il faut commencer. Vous voyez ce que je veux dire ?

C : Oui.

Observateur 1 : Alors essayez de le faire sur 29 par 42. Essayez de faire ce raisonnement sur celui là.

B : 29 par 42..

C : Donc 29 par 42

B : 6, 7, 8, 9, 10, 11...

C : Tu veux pas faire la division euclidienne de 29 par 42.

B : 29 ou le contraire..

C : C'est à dire qu'il reste 13..

B : 42 divisé par 29 ou 29 divisé par 42..

C : C'est à dire que l'on peut faire un grand carré.

B : Ouais.

C : Donc après on a 29, 29 par.., 13 par 29.. Donc normalement il doit rester deux carrés.

B : Ouais. Et à la fin il reste 3.

C : Donc deux petits carrés et à la fin il reste 3. Donc 3 par 13.

B : 4, 4 grands carrés, après il reste 1.

D : Ah ouais c'est vrai j'avais oublié.

C : Après tu fais..

Professeur (A toute la classe) : Allez on met tout en commun.

A : 3 par 1.

C : 3 par 1 il reste 3. Tu sais que là tu le fais avec la division et là tu sais direct.

B : Ouais je sais, quoi, je ne sais pas, la dernière étape. Là il y en a 42, là il y en a 29..

C : Alors dans les trois derniers tu ne peux pas avoir le 3.

B : C'est dans les trois derniers ?

A : Il reste trois petits carrés à la fin.

C : Ça veut dire qu'il faut pas que..

B : Il reste trois petits carrés et c'est qui qui commence ?

C : Ben non quand il reste trois petits carrés il ne faut pas que ça soit eux qui commencent. Il faut que ça soit toi qui commence si tu veux gagner.

B : Ouais.

A : Ouais.

C : Parce que sinon t'as perdu. Il faut que tu mettes 2..

A : Ah parce qu'il reste trois petits carrés c'est à peu près 2..

B : Non à part si tu es bête et que tu commences.

C : Non regardes il reste..

B : Non, non, sérieux regardes

87m50

E.2. Groupe G6

05m23

B : Plus on fait long... ça va être ... un petit carré, un petit carré, un petit carré.

A : Bon on commence. Attends attends, il faut d'abord compter les carreaux pour faire un vrai carré.

B : 5.

C : Ah en centimètre pas en carré.

Observateur 1 : Il faut que vous jouiez, c'est à dire rapidement, vous choisissez un rectangle et ensuite vous jouez.

B : J'ai dis 5 centimètres le carré.

D : T'as pas compris les règles.

B : 5 c'est là.

B : Bon 1.

C : Ah vous n'en prenez qu'un ?

D : Vas y met ....

A : Je pense qu'il y en a deux là.

D : Je pense qu'on a pas le choix.

A : Si il y en a deux on en prend deux on a gagné.

B : On vient de perdre comme des cons.

A : Comme des ...

B : Je pensez qu'il y en avait trois.

A : Vous en auriez pris deux vous auriez gagné.

C : Vas y prends 5, prends 5.

D : Et vous êtes obligé de prendre le plus grand là.

C : Vas y prends 5.

B : Voilà.

C : Y'a 5 là ?

B : Ouais.

C : C'est un mauvais rectangle.

B : C'est ça.

A : 15 cm le rectangle.

C : Il est mal fait.

D : Attends, j'en prends un au hasard.

B : Ok.

A : Allé on va se concentrer.

C : C'est vrai que ce n'est pas facile.

B : Allé on vous laisse commencer.

Observateur 1 : Vous n'avez pas besoin de perdre du temps à tracer, regarder au tableau on a joué on a pas besoin de tout ce temps. Qu'est-ce que vous avez fait là ? Je peux savoir.

D : Ben eux ils ont pris celui-là nous on a pris celui-là et après...

Observateur 1 : Mais vous aviez trois carrés

B : Oui on avait trois carré

Observateur 1 : Bon alors qui est-ce qui a perdu ?

D : Eux.

Observateur 1 : Vous avez joué en premier ?

C : Oui.

Observateur 1 : Et vous avez perdu. Bon maintenant sur le même rectangle, il faut comprendre le jeu, que ce n'est pas la peine de tracer 306 mille rectangles.

A, D : Ben on en prend deux.

Observateur 1 : Qu'est-ce que vous auriez du faire pour gagner au lieu de perdre.

B : En prendre deux.

Observateur 1 : Voilà, donc dans ce cas particulier, si vous en aviez pris deux l'autre serait obligé de ... Mais c'est un cas particulier. Maintenant je vous propose ça et vous supposez que votre rectangle c'était celui là. Donc le jeu n'est pas fini là. Ok. Et vous rejouez, donc c'est à vous...

Et puis regardez ce qui se passe car ce qu'il faut c'est comprendre ce qu'il se passe.

A : A vous, on en prend 2.

D : Tu en prends 2.

A : On a gagné vu qu'il n'en reste plus.

B : Ben j'en prends 1.

A : Ouais et après on a perdu...

B : 9 ... Alors combien il y a ça fait 8, donc 8...

10m00

C : On en prend 2.

B : Là ça revient au même truc que la semaine dernière. Faut compter le nombre de carrés qu'il y a.

D : Ouais.

B : J'arrive pas à compter.

A : C'est que deux carreaux.

B : 1,2,3,4,5,6, 10.

A : On en prend 1.

C : Y'en avais 5 si l'on en prend 1 ça fait 4.

A : Ouais prends en qu'un seul. Si prends en qu'un seul, après vous allez en prendre 1, vous prenez 2, on en prend 1.

B : Ouais en fait...

C : On en prend 1.

A : Ben on en prend 2 et vous avez...

C : Prends en un. Allez Brahim c'est bon c'est terminé. Alors là faut remarquer que...

C : Mais non mais vous avez gagné, vous avez gagné. Mais faut remarquer comment vous avez gagné.

A : On a dis 2 après vous avez dis 1 on a redis 1.

D : Après ça fini comme la course à n de la dernière fois.

A : On va en prendre 2.

D : Hop on en prends 2.

A : Et vous avez perdu.

C : Et on a perdu.

D : Donc ... En fait il faut faire comme la course à n, faut faire ...

B : Non mais là ça ne marchait pas.

D : Genre là y'en avait 8 des carrés tu fais 8-3 moins encore 3 ça fait 2.

B : Attends ça fait multiple de trois, division euclidienne par 3.

D : Ouais machin. 8 par 3 ça fait 2 virgule quelque chose.

B : Il reste 2.

D : Donc je met 2. Et après 8 par 3, on vas prendre 3.

A : Ben là c'était pair, on en a pris 2 au début ils en dit 1. Si vous aviez dit 2 vous auriez pu retourner le truc.

B : Et oui.

A : Parce que on aurait dit 2 vous auriez dit 1 vous auriez gagné.

B : Non vous auriez dit 1.

A : Ouais voilà.

D : En fait nous si on avais dit 1 au début on aurait était sur de gagner... non ... là 1 au début on est sûr de gagner.

B : 1, 2.

A : Ils disent 2.

D : Non regarde si vous dites 1 nous on dit 2 et on se retrouve comme ça et on est obligé de gagner.

A : Si vous dites 2...

D : Si vous dites 2 après nous ont dit 1 et après ...

A : Mais si vous aviez 2 vous auriez aussi gagné.

D : Ouais ouais.

B : Ouais c'est ça il fallait commencer par 2 et après . . .

D : Ouais.

B : . . . .

D : Alors il y en a . . .

A : 4.

B : Il n'y a peu être pas que des carrés... Ah si si parce que c'est des 8...

A : Attends si on dit 2 ils disent 1 on a perdu.

D : Là on a forcément perdu.

A : Si on dit 1 vous dites 2 et après on dit 1, si on dit 2 vous dites 1 après on a perdu.

D : Ouais.

C : On peut aussi dire deux fois , après nous... Admettons nous on redis...

D : Non non mais si vous redites 1... Donc ben voilà vous avez gagné.

A : Celui qui commence il un avantage.

D : Qui commence ben ouais là ...

B : Même pas compté aussi, on savait pas que... Ben au final on a gagné.

A : On a commencé on a gagné.

D : On recommence encore.

B : C'est parti.

C : Donc faudrait essayer un stratégie. On va dire vous commencez.

15m00

C : On va dire déjà il faut commencer. Le match celui qui a commencé a gagné.

B : Ça dépend de la taille du rectangle.

D : Oui.

A : Ben on va essayer sur un rectangle bizarre.

D : Bon du coup c'est nous qui commençons.

C : C'est vous qui commencez allé, on va voir ce que ça donne.

D : 5.

B : Il y a 10... On peut pas en prendre 10.

D : Hop.

D : On en reprend un deuxième ou pas.

A : Oui vas-y.

O1 : Qu'est ce qui arrive. C'est qui qui a gagné ?

A : C'est nous.

D : Ça c'est les bleus et ça c'est les rouge.

O1 : D'accord. Et alors vous savez jouer... Ce sont 4 rectangles différents. Et vous avez une idée déjà de comment ça va se passer ?

D : Ben là à partir de là ça fait comme la course à n.

C : Jouez en 1.

O1 : Oui c'est vrai.

C : Jouez en que 1.

D : Ben attends vous avez le 2.

C : On va trouver une stratégie. Apparemment commencer par 1 ça fait gagner.

D : Attends.

A : On a perdu.

D : On a perdu ?

C : Je pense qu'il faut commencer par 1.

A : On va dire 1 ils vont dire 2, on va dire 2 ils vont dire 2.

D : Non regardes...

C : Vous n'avez peu être pas perdu.

A : Non non ça ne marche pas.

B : Ça ne marche pas. C'est pas avec 2 carrés.

A : Ça marche que par 3.

D : Si on dit 2, à vous.

C : T'en fait que 1 ?

B : De toute façon on ne peut faire que 1 là.

D : Ben non vous pouvez faire 2.

B : Non on peut pas faire 2.

A : Non on peut faire que 1. Moi je dis 1 et après on a gagné.

D : Pourquoi vous pouvez pas faire 2 ?

B : Parce que ...si tu dis ça veut dire que t'as deux fois le même carré.

D : Ah ouais c'est vrai.

A : Ah non on dit 2 et on a gagné.

D : Là on fait 2.

B : Vous faites 1.

A : D'accord.

D : On prend combien ?

C : Peu importe.

B : 18 par 12.

A : Non 18 c'est la même chose que 3.

Observateur 2 : Ce que vous pouvez faire . . . .

A : Ouais fais 14.

D : 17 par 5 il faisait le premier.

B : Comment il marche....

D : Bon on fait 14 alors.

B : Non mais c'est bon on garde le même.

D : 19.

Observateur 2 : Qu'est-ce que vous avez choisis ?

D : 5 par 19.

B : Centimètre pas carreaux.

D : Oui centimètre. Qui est-ce qui commence ?

B : A vous l'honneur.

C : Commences.

B : C'est nous qui avons commencé.

C : Prends de l'initiative.

. . .

D : On prend 1 ou 2 ?

A : Prends en 1.

A : Prenez en deux comme ça ça va aller vite.

C : Attends, attends.

B : Quoi quoi. Mais non...

D : Mais non c'est juste pour...

B : Faut en prendre 2 on arrive là.

C : On arrive là. Après il prend 2 nous on prend 1.

D : C'est pas le même.

B : Ah bon ce n'est pas le même.

D : Non c'est la 19 par 5.

C : Ah c'est 19. T'essayes de nous escroquer.

B : Bon ben on prend 2 quand même.

A : Prends en 2 on devrait gagner. Ça va le faire.

C : Je suis pas sur.

A : Ça devrait le faire.

C : Je crois que c'est le plus grand carré que tu puisse prendre là.

D : 4 ..

C : 4, 5.

B : Et 4. Après on va la course à combien...(?)

C : Ouais c'est pas grave.

D : On est obligé de prendre ça.

B : Et après il nous reste ?

A : Et on en prend 2, ah non on a gagné.

D : On a gagné.

B : Ah ouais on a perdu.

C : Ouais.

20m00

D : En fait il faut arriver à ce que ces 4 carrés pareils ce soient aux autres de jouer.

A : Ouais c'est ça.

B : Ou pareil la course à n.

D : Oui.

Observateur 2 : C'est à vous ?

C : Oui c'est à nous.

C : Comment on fait pour arriver à 4 à la fin. C'est à ça qu'il faut penser.

B : Mais 4 ou pas 4.

D : Ça dépend...

B : Faut arriver à . . .

B : Ça dépend de la taille du carré que tu as au départ aussi...

. . . .

C : Ben je fais le même.

. . . .

C : A nous de commencer.

D : C'est qui qui commence.

C : A nous. T'es prêt.

B : Au 'départ il est fait au carré' (?).

D : C'est bon. Si l'on refait comme au dessus, on en prend 1...

A : Et on a gagné.

D : On va être est obligé d'en prendre 1, ça refait comme le truc de la dernière fois.

A : On en prend 1 vous avez perdu.

D : Bon..

C : Ah ben si l'autre il dit 1, toi tu dis 2. Ça dépend des rectangles.

Professeur : Alors vous avez une idée ?

B : Faut faire avec des rectangles de différentes taille peu être ?

Professeur : Ah mais vous prenez toujours la même taille ?

B : C'est ce qu'on vient de nous dire.

D : C'est ce qu'on viens de nous dire. Regardez on en a fait plein comme ça.

C : Non mais c'est vrai, différentes taille c'est plus intéressant.

D : De toute façon ...

A : C'est bon de toute façon c'est le premier qui commence.

Professeur : Alors vous avez une idée ? Le premier qui commence à gagner.

D : Ben non.

A : Ben non, si on refait plusieurs fois le même rectangle.

C : Non c'est pas celui qui commence qui a gagné non.

A : Vas y tu commences, tu dis quoi ? Sur cet exemple. Tu dis 2 je dis 1, tu dis 1 je dis 2.

D : Sur ce rectangle celui qui commence il a gagné.

C : Voilà, celui qui commence c'est celui qui est intelligent. Nous on a commencé et on a perdu.

B : Parce qu'on a mis qu'1.

C : Ben fallait en mettre 2 alors. Faut le dire.

A : Non mais là on a commencé vous aviez dis 1 déjà, si vous auriez dis 2 on aurait perdu.

D : C'est sur qu'il ne faut pas prendre le dernier carré de la ligne. Sauf s'il n'y en a qu'un seul on est obligé mais là faut pas prendre celui là en fait.

B : Essayes sur un carré de plus grande taille.

C : Donc il faut laissé l'autre commencer.

A : Non ça n'a rien à voir.

. . . .

D : Bon on commence.

B : Y'en a combien là.

D : Là il n'y en a que 2. Vas y.

25m00

B : Comment ça se fait qu'il faut pas prendre le bout.

D : Donc vous vous êtes obligé de prendre 1 seul.

C : De toute façon on a pas le choix.

B : Ouais.

Professeur : Qu'est ce qu'il ont dit.

D : Ils ont dit qu'il ne faut pas prendre le dernier carré avant le changement de taille, sauf si il n'y en qu'un seul là on est obligé... C'est ça.

B : Ben oui.

D : Là il y en a . . . 7...

B : Mais t'en prend 1 ou 2 ?

D : De toute façon on peut en prendre qu'un.

A : Je pense qu'on a gagné.

B : Attends ça dépend de combien il en reste.

C : Tu penses mal.

D : A toi.

B : On est avec quoi, 4 par 4.

C : Non on prend les deux on a perdu.

A : On a gagné.

B : 1,2,3,4... T'en prend qu'un, faut essayer.

D : Si on suit ce qu'on dit, ouais il faut que vous n'en preniez qu'un. Du coup on doit en prendre qu'un aussi.

C : Ouais ben on a gagné maintenant.

A : Faut en prendre qu'un seul avant le changement de taille c'est ça ?

D : Faut pas prendre le dernier avant le changement de taille, si on a le choix.

C : Ah ouais faut pas prendre celui de changement de taille.

D : On va essayer sur un autre carré.

A : Après faut trouver une astuce logique.

C : On a gagné.

D : Ah ouais ben là on en prend 2.

A : Un seul.

C : En même temps on a perdu de ta faute.

A : Ben non.

B : En même temps c'est pas moi qui choisis.

A : Faut pas prendre le carré après le changement de taille.

B : De toute manière on a pas le choix.

D : Mais là il a pas le choix.

A : Ah ouais. Mais ça dépend des rectangles.

D : Réessayes.

C : Celui qui prend le carré après le changement de taille et ben il a perdu.

D : C'est ça un plus grand, un plus grand, pour pouvoir essayer...

C : Toute la feuille.

A : Toute la feuille ouais.

B : Au moins...

C : Non mais il en faut un grand comme ça...

C : Brahim.

A : A toi.

B : 'Teste d'abord des carrés de 9

D : 20 et trois par trois.

Observateur 2 : Qu'est ce qui est arrivé. Vous avez jouez le 5 par 19.

D : Ouais

Observateur 2 : Et vous avez trouvé la stratégie ?

D : Oui en fait il ne fallait pas prendre le dernier carré.

Observateur 2 : C'est où les...

A : Attends 2 minutes.

D : C'est ça là.

A : On en a fait 2.

D : En fait ce qui prenaient ce carré là/

Observateur 2 : Alors c'est...

30m00

D : Ce qui prenaient c'est deux là là...

Observateur 2 : : Oui. Qu'est-ce qu'il faut faire ?

D : Ce carré là il a perdu.

Observateur 2 : Alors c'est celui qui fait ça qui a perdu. Vous êtes sûr de pourquoi ?

D : Alors parce qu'on a essayé les deux fois et ...

Observateur 2 : Parce qu'après...

D : Après l'autre équipe est obligé de prendre ça...

Observateur 2 : Et après le perdant...

D : 1 ou 2 il a perdu.

Observateur 2 : Et après vous faites 1 et c'est perdu. Et alors ce qu'il faut faire c'est ?

D : De ne pas prendre le dernier carré avant de prendre le dernier.

Observateur 2 : Oui, oui. L'objectif c'est de commencer mais c'est le rouge qui a commencé.

A : Oui mais il a fait une erreur le rouge. Quand on commence jouer deux fois et, quand on ne comme pas ... Jouer deux fois encore.

Observateur 2 : Et alors tu as le dis le un coup gagnant justement c'est ne pas prendre ce carré alors, ça on part de ... C'est pas prendre, alors ça veut dire, pour ne pas prendre le carré qu'est ce que vous faites ? Vous commencez ou pas ?

C : Oui il faut commencer et jouer deux fois.

B : Faut commencer et jouer...

Observateur 2 : Faut commencer et jouer deux fois.

D : Deux fois.

Observateur 2 : Oui voilà, ça c'est la stratégie gagnante. Et après ...

B : 1 et ...

Observateur 2 : Et après si l'autre il prend 1 tu prends 2, et si il prend 2 ..

D : Si il prend 2 on prend 1.

Observateur 2 : Voilà, ça c'est la stratégie gagnante. Ça va ? Alors il faut trouver c'est qui qui commence qu'est-ce que vous prenez ? Alors je vous propose de jouer avec les 11 38 et de trouver la stratégie gagnante pour celui-là.

D : D'accord.

C : Allé si, si, si.

D : Alors on fait par carreaux du coup, non ?

B : Carreaux ça fait cinq et demi.

D : Ouais.

D : Bon allez y....

B : Bon c'est quoi cinq et demi déjà ?

D : Oui.

C : Elle vient de parler en carreaux ou en centimètres ?

B : C'est pareil. C'est des unités de longueur... 5, ..11 ...et là 16,5...

B : Nous on commence on prend 2.

D : Là je vais prendre 1.

B : Ok.

Observateur 1 : Vous en êtes où de la stratégie alors ? Vous avez fais 11 38 par exemple.

D, A : Non, on est entrain de le faire.

Observateur 1 : Vous êtes en train de le faire.

D : A vous.

B : Et après combien il reste.

Observateur 1 : Vous avez une idée de la stratégie gagnante ou pas ?

C : Oui.

Observateur 1 : Vous avez trouvez sur certains cas particuliers ?

D : Sur 5 par 19 on a trouvé.

Observateur 1 : Alors sur 5 par 19. Vous pouvez me le montrer ?

D : Oui, oui.

Observateur 1 : Après je vous laisse tranquille. Donc sur le 5 par 19...

D : Il est pas grand celui là.

Observateur 1 : Ça c'est pas une stratégie.

A : Il fallait commencer par 2...

Observateur 1 : Décrivons là. Pour gagner vous commencez ou vous laissé l'autre commencer ?

A : On commence.

Observateur 1 : Vous commencez et vous en prenez ?

A : 2... On oblige heu à en prendre 1...

Observateur 1 : Donc comme il y a 3 grands carrés vous en prenez 2 l'autre ne peut plus qu'en prendre 1, ensuite vous avez combien de carrés là ?

A : Un seul.

Observateur 1 : Un seul. Donc vous le prenez car c'est à vous de jouer, et vous n'avez pas le choix. Et ensuite donc l'autre commence...

A : Ici il reste 4. L'autre commence si il dit 1.

Observateur 1 : Il en reste 4.

A : Oui. Si il en prend 1 on en prend 2 et si on en prend 2 on en prend 1.

Observateur 1 : D'accord. Ok. Vous pourriez l'écrire cette stratégie ? Sur votre feuille dans un coin. Pour celui que vous m'avez dit le 5 19. Y'a un qui écrit. Vous avez le droit de partager la feuille car pendant qu'il y en a un qui cherche l'autre écrit.

B : Ben voilà, attends c'est à nous de jouer.

C : Pour le 5 par 19 c'est ça.

D : Faut commencer faut prendre 2 voilà.

B : Attends, il reste ça ça et après...

C : Par ce que tu peux le diviser en 2 carrés

35m00

... On en prends 2.

B : Mais non t'en prends qu'un.

C : Vas y en prends en 2.

B : On en prend qu'un, prends pas celui qui est au bout de la ligne. On en prend qu'un. On essaye le technique.

C : T'as pas compris on en prend 2 et après on se retrouve à celui qui joue 1.

B : Non c'est pas les carrés de 4, c'est carré de 1.

B : 4 et après il reste 5.

C : Y'a une cinquième à table(?).

B : Sérieux ? Sur une division euclidienne de 5 par 3 t'enlève 1, tu commence par 2... On a perdu.

C : Je te dis qu'on a perdu... Faut jouer 1. Et là si on joue 1.

B : Ça ne marche pas la technique, le truc, la division euclidienne.

C : Je te dis fallait en prendre... Elle en joue 1 ou 2, toi t'es là...

D : Attends attends, laisse finir que l'on voit si ça marche ou pas.

B : Ça ne marche pas la technique que l'on a utilisé.

D : Vous en prenez 1... Ben non en prend 2.

C : On a perdu.

D : Vous en prenez 2 nous on en prend 2 aussi. Si vous en prenez qu'un..

C : On a perdu.

B : Vous en prenez 1.

D : On en prend 2.

C : Attends on peu réessayer à un endroit..

B : Si vous en prenez 2 on en prends 1 vous avez perdu.

D : Oui.

B : Si on en prend 1 vous en prenez 1...

D : C'est là que ça se décide. Le truc est décidé là dessus pour gagner.

C : On essayes nous, on refait, et là on en prends 2. Commence de là.

D : Et ben nous on en prend 1.

B : 1.

D : On en prend 2 et vous avez perdu aussi.

C : On a perdu aussi.

D : Là il faut arriver là, et en prendre 1.

C : Ouais en fait faut être à chaque fois le cinquième.

D : Faut que l'autre joue celui là, donc nous faut qu'on joue celui là.

A : D'accord.

D : La stratégie elle est bonne que mais sauf que vous ne l'avez pas...

C : On le fait correctement... Mais en fait je pense qu'elle est bonne juste si il reste 4 carreaux à la fin. Dans le dernier rectangle.

D : Je ne sais pas ... Au moins l'autre c'était marrant.

B : Alors...

D : De toute façon ce qu'il faut c'est jouer... Faut arriver là en premier en gros. Enfin il faut que nous on parle quand il en reste 5.

B : Si je commence, vous faites quoi après... Si je n'en prend qu'un.

D : Moi je dis 2.

B : Je prend 1.

D : Je dis 1. J'ai perdu. Si je dis 1 tu dis 2 et j'ai perdu aussi.

D : Donc pour arriver là, faut que l'autre il dise ça... En fin ... Pour être sûr que...

B : Faut commencer à jouer.

D : Oui faut commencer par jouer de là.

B : Faut en prendre qu'un, nous on a pris 1, c'est pour ça qu'on a perdu.

D : Ça veut dire que c'est l'autre qui doit prendre celui là.

B : Non mais c'est bon... C'est juste qu'on s'est trompé à la fin.

D : Et nous on doit prendre celui là ouais.

À 38"35' B et D parlent mais la conversation de A et C couvre l'autre conversation.

B : Vous aviez une division qui se fait par 3 non ?

D : Non mais là l'autre jeu c'est qu'il fallait arriver à 20, là il faut arriver à 20 moins 1.

...

D : ... Ça nous fait de la division euclidienne de 4 par 3. La fait 1.

B : Ça fait 1. Ouais c'est n-1.

D : On essaye le même ou pas.

B : ... Ben on peut essayer sur le même carré.

...

40m00

D : Mais c'est sauf qu'il y en a plusieurs là. Là dans les 1,2,3,4,5,6...

...

D : Certaine il fallait commencer par 1...

....

41m56

C : T'as pensé à ça. Ce coup là fallait que ce soit toi qui sois là. De toute façon fallait les laisser jouer.

B : Non. On a gagné justement là...

C : Ouais. Je laisse commencer après ... je fais l'inverse après .. je met l'inverse et moi je met heu, admettons là elle met 2 je mets 1, là elle met 2 je met 1 et là elle met 1. Et si faillait faire l'inverse de l'autre comme l'autre coup. Tu crois c'est possible ? Faut faire l'inverse à chaque fois.

B : Ah non mais de toute manière c'est... C'est une stratégie gagnante qui...

...

C : Si il fait 2 on fait 1 et si il fait 1 on fait 2.

... Problème de micro.

C : Pour celui là, pour celui là, on laisse commencer.

D : Mais non il faut commencer.

C : Moi je te proposer on va faire un jeu.

B : Qui c'est qui commence ?

D : Tu me laisse commencer là ?

C : Oui je te laisse commencer. Vas y commence.

D : A toi.

C : T'en pose 2. C'est combien ?

D : C'est des 8(?).

...

D : Après on a dit qu'il fallait commencé prendre 1.

B : Oui.

A : Il va en prendre 1.

C : 2.

45m00

C : Tu ne peux en prendre qu'un.

A : Tu peux en prendre qu'un, elle va en prendre 1 et après tu perdu.

C : J'ai perdu.

D : Faut commencer prendre 2, commencer prendre 1.

C : En fait c'est … à chaque tours.

D : Mais non là t'en prends 2, là t'en prends 1, là t'en prends 1.

D : De tout façon là la technique c'est de ne pas prendre celui là.

B : Ouais.

Observateur 2 : Qu'est- ce que vous avez trouvé ?

D : Ben c'est un peu comme la course à n-1.

B : Pour chaque lignes de carrés de même taille, c'est la course à n-1 en fait.

Observateur 2 : Pour chaque ligne il faut faire la course à n-1.

D : Voilà.

Observateur 2 : D'accord, pourquoi ?

D : Ben là par exemple il y a trois carrés. La par exemple y'en a 2 j'en prends 1.

Observateur 2 : Pourquoi n-1 ?

D : Il ne faut pas prendre le dernier. Du coup il faut prendre celui qui est juste avant.

Observateur 2 : Et pour le 38 11 qu'est ce que vous avez trouvé ?

B : On commence on prend 2. On prend un 1 carré, après on prend 1. Et après on complète jusqu'au quatrième. Soi il en prend 1 soi il en prend c'est pareil.

Observateur 2 : Ok, vous avez 2 carrés, 2 carrés et quatre 1.

B : Et là y'en à 5 en 1. C'est la course à 4.

D : On en prend 1 après...

Observateur 2 : 5 ; d'accord. Et il faut commencer et prendre les deux premières.

D : 2 après on dit 1.

B : Faut prendre les 2 premiers.

Observateur 2 : Et l'autre, l'autre.

B : Ben là c'est là course à 1.

Observateur 2 : Mais si l'autre il prend 2.

B, D : Non mais c'est nous qui commençons.

Observateur 2 : Non mais c'est qui qui commence.

B : On commence.

D : Les bleus.

Observateur 2 : Il faut commencer.

D : Oui.

Observateur 2 : Et vous prenez 1.

B, D : Non 2.

Observateur 2 : Ah il y a trois carrés ici.

B, D : Oui.

Observateur 2 : Ah d'accord. Je prends 2 et je laisse le dernier à l'autre. En fait je commence et je joue 1.

D : Oui.

Observateur 2 : Et l'autre il doit jouer que 1 aussi.

Observateur 2 : Après c'est vous qui commencez et vous jouez..

D : 1.

Observateur 2 : Et l'autre vous jouez...

D : L'autre il peut jouer 1 ou 2.

B : Nous on s'en fou on prend, et terminer sur le quatrième.

D : On doit être au 4. Genre...

50m00

Observateur 2 : Ah c'est 5, ok.

D : Nous on prend celui là... Vas y fais voir le rouge... Soi l'autre il fait ça soi il fait ça.

Observateur 2 : Oui..

D : Et nous nous s'il fait ça on en prend 1, si il fait ça on en prend 2.

B : Et après il reste le dernier.

Observateur 2 : Alors la stratégie gagnante c'est de commencer et de prendre les 2 premières.

D : Ben après il faut encore en prendre un deuxième et...

Observateur 2 : Après c'est de prendre 1... Vous avez écrit ça ?

D : Oui.

Observateur 2 : D'accord.

B : Mais après faut faire pour le cas général... Et faut vérifier une fois quand même.

Observateur 2 : Alors d'abord 29 44.

B : 44 ça fait 21...

B : Ben allé commence. Donc...

D : Ouais neuf et demi.

Observateur 1 : Vous avez la stratégie gagnante générale ?

A : Oui.

B : On vérifie.

A : Pas générale.

B : Pour 25 8 on l'a, pour 5 19 on l'a, et là on essaye pour 44 21.

Observateur 1 : C'est quel groupe que vous êtes, groupe 6 c'est ça. Allé je vais voir avec vous. Pour le 11 38 on joue ? 11 38 allé. Donc y'a combien de carrés, il y a trois carrés. Et ils reste... Il reste combien ici ?

A : Il reste deux carrés.

Observateur 1 : Non mais en dimension.

D : 5.

Observateur 1 : Donc 5 sur 11. il vous reste 2 carrés de 5 par 5, et ici il reste ?

A : 5.

Observateur 1 : Non mais ici reste.

D : 1.

Observateur 1 : 1 d'accord. Et ici 5. Ok, donc qui est-ce qui commence par gagner ?

A : Nous.

B : On commence on en prend 2.

Observateur 1 : Allez y.

Observateur 1 : Donc moi je suis obligé de prendre celui là.

B : Après on en prend qu'un.

A : Vous êtes forcément obligé de prendre 1.

Observateur 1 : Voilà.

B : On en prend 1.

C : On a gagné.

Observateur 1 : Moi j'en prend 1.

C : On en prend 2.

Observateur 1 : Voilà d'accord. Et si j'en avais pris 2 là parce que c'est là où j'ai le choix.

B : On en aurait pris 1 seulement.

Observateur 1 : D'accord. Vous l'avez écris ça.

A : Oui.

Observateur 1 : D'accord. Je vais vous donner une autre dimension peut être.

B, D : On est en train de la faire.

Observateur 1 : Vous en avez une c'est quoi celle là.

B : La 29 42.

Observateur 1 : D'accord allez y.

D : En commençant c'est pas possible.

D : Ben ou alors là faut commencer et prendre 2.

B : C'est galère là faut tout avoir prévu tous les... Tu peux pas faire dans le jeu comme ça.

D : Quoi ?

B : En fait faut réfléchir avant.

D : Ça doit être en fonction des dimensions. Mais heu...

B : Ouais en fait faut commencer après tu fais les différents carrés et tu commence à jouer...

D : Oui.

B : Attends donc c'est à 3...

D : Moi je fais... A toi...

B : Je prends 1. Et après y'en a...

D : Après je prends ça.

B : Après c'est une course à 3.

D : Et là j'ai gagné.

B : Ça fait 0. Donc là heu... Non faut pas que tu commence.

D : Ah non non non, là j'ai perdu.

B : Parce que là moi j'en prend 2.

D : Oui.

55m00

D : Donc ça veut dire que là il fallait que j'en prenne 2.

B : Oui c'est ça. Donc en fait faut bien commencer par 1.

D : Non faut commencer par 2 mais là il faut que j'en reprenne 2 encore.

B : Oui ou sinon tu commence par 1... Attends... Ah non en fait.

A : Et là il en prend 1, et t'en prends 2 ou 1 t'as...

D : Faut commencer par 2 après c'est que il faut arriver à 4... Donc après c'est forcément à l'autre de jouer, et là on a gagné. Voilà.

B : Faut jouer celui là.

D : Faut jouer celui là.

D : Pour jouer celui là il ne faut en jouer qu'1.

B : Ouais c'est ça t'en rejoue qu'1, en fait c'est pareil, continues... Et à la fin... En fait y'a deux fois deux changements.

D : Donc il faut.... Jouer 1... Tu marques....

B : 29 * 42.

D : Faut jouer 1.

B : On commence.

D : Ouais on commence.

D : 1, après on joue 1 encore.

B : On termine la ligne.

D : Oui, on termine la ligne et on joue 1.

B : En fait ça dépend s'il en prends 2 ou 1. On termine la ligne.

D : Oui on termine la ligne.

Observateur 2 : Vous avez trouvé déjà ?

D : Pour le 29 42 oui.

Observateur 2 : Qu'est ce qu'il faut faire ?

D : Alors, il faut commencer.

Observateur 2 : Combien il y a de carrés ?

A : En tout il y 10 carrés.

D : On s'est trompé on a fait pour 19 12.

Observateur 2 : Comment vous avez trouvé la stratégie pour le jeu ? Comment vous commencez à analyser le jeu ?

B : En fait il faut mettre tous les carrés dès le début.

Observateur 2 : Oui, vous tracez les carrés et après ?

D : Après c'est la course à 10 moins 1.

Observateur 2 : Oui mais pourquoi ? Comment tu analyses le jeu après ?

D : Ben on prend le nombre de carrés. Donc là il y en a 10 je crois.

A : Oui il y en a 10.

D : Divisé par 3.

B : Non c'est 9 divisé. C'est n- 1.

D : Ah oui. 9 divisé par 3, ce qui fait arriver à la suite d'avant. Donc ça donne 3 ...

Observateur 2 : Mais tu sais qu'à chaque fois que tu joue avec des carrés, tu changes de dimension. Alors tu commences un autre jeu... Donc vous avez tracé les carrés après vous avez joué et après qu'est ce que vous avez fait ?

Pour dire après qui c'est qui commence ?

D : On a fait à l'envers.

Observateur 2 : D'accord. Ça veut dire que pour analyser qui sera le gagnant il faut commencer à l'envers.

Vous analysez cette partie, après vous avez analyser ça, et après vous avez analysé ça. Alors je ne comprends pas pourquoi il faut mélanger tous les carrés, pour faire la course à n-1. Parce que si tu vois c'est des différentes dimensions, on ne joue pas toujours avec les même dimensions. On change de dimension à chaque fois. Ça va ? Voilà.

D : Vas y passes une autre feuille.

Observateur 2 : Jouez à ça...

D : 29 42.

Observateur 2 : Faites moi le 38 pour savoir ce que vous trouvez d'accord ?

60m00

Observateur 2 : Pour le 5, 6... Et voilà comment il faut faire avec ça ? Comment il faut jouer avec ça ?

B : 125, 125 carrés.

Observateur 2 : Tu vois c'est une grosse dimension, comment faire...

A : 1m25.

B : Non 1 mètre 25 en carré ça fait...

A : Ah mais c'est 56 carreaux...

D : Et en hauteur 56.

B : Attends des demi-carreaux...

A : 58 125 c'est trop grand.

B : Mais non 125, tu divise juste par 2.

A : 65.

D : Pourquoi 65.

B : Parce que tu divises par 2...

...

B : Divisé par 5, ah non 56 ça ne se divise pas par 5.

D : Comment on fait pour faire 125 carreaux.

B : 125 ça ne rentre pas dans une feuille.

Observateur 2 : Oui mais comment on fait alors ?

D : Déjà on enlève un carré de 56 par 126.

Observateur 2 : Oui.

A : Ça fait 57,7 cm.

Observateur 2 : Et...

D : On fait 125, 56. (?)

Observateur 2 : Qu'est-ce qu'il faut faire ?

D : Ça fait 74.

Observateur 2 : Oui voilà. C'est pas nécessaire d'avoir... Comment je peux faire le jeu avec cette dimension sans tracer les rectangles ? Comment je fais ?

A : Y'a combien de fois 56 dans 125 ?

C : 2.

A : Ben voilà ça fait 2 grands carrés. Ensuite... Et après il reste encore les 2 carreaux à remplir...

C : Je vais essayer d'élaborer une stratégie attends. On prends 1, ...

65m00

C : T'aurais pu mettre une échelle. Genre un carreau ça fait deux unités.

A : Non ça ne marche pas ça.

C : Ça aurait été plus simple.

B : Ça fait des demis carreaux après...

A : Oui...

D : Donc c'est qui qui commence ?

C : Moi je commence.

B : Attends, trace tous les carrés d'abord, qu'on peut faire.

C : Moi je commence et je prends 1.. Si vas y prends 1.

D : Font que l'on essaye de résoudre déjà une stratégie.

A : Oui.

C : C'est combien ? 125.

B : 12...

A : Ça fait une seul carré là.

D : Y'en a un là et un là.

B : ... Des bords.

A : Ah d'accord.

B : Y'aura une tonne de carrés...

C : Attends. 66(?) divisé par 13...

B : 18...

D : Et après ça va te faire un truc ... Multiplié par 9.

B : Oui..

D : Oui oui ça fait 9.

A et C parle dans le micro...

B : 88... 8 divisé par 3. Il reste 2.

D : Oui.

B : T'en prends 2.

D : Attends, 2 plus 3 ça fait 5. 2 après faut arriver à 5... Si c'est bon. T'en prends ça...

B : J'en prends 2.

D : Après 1 ou 2 en tout cas il faut arriver à là. Et là t'as gagné.

B : ...ça marche... n-1.

D : Vas y refait voir.

B : C'est qui est le plus dur c'est celui d'avant...

C : Ben ça fait 1, 2, 2.

A : Ben il faut arriver à la alors.

D : On a pas fini mais... Vous avez fait 56 par 25 ?

C : C'est ce que j'ai dis 1,2,2.

A : Faut arriver ici, dès que tu arrives à là t'as gagné. Vous avez trouvé du 1, l'autre il dit 1, toi tu dis 1, et ... 2 tu dis 1, il dit 1.

B : Tu peux pas dire 2.

A : Il dit 1, tu dis 1.

B : ...

A : Celui qui commence et qui dit 2 il a gagné.

B : Si il dit 2 il a perdu.

D : Attends il faut qu'on appelle la fille...

B : Vas y on joue, on lui fait croire que l'on a pas réfléchie.

A : Ok c'est qui que t'as a gagné.

C : Je t'ai gagné une fois tu m'a gagné deux fois.

A : Trois fois.

C : Deux fois.

D : C'est bon on a fait notre stratégie.

B : On joue.

D : Celui là... Il que l'on commence.

Observateur 2 : Mais c'est quoi cette démon ....Voilà.

B : C'est la stratégie...

A : C'est la stratégie.

B : Il dépasse il est trop grand.

Observateur 2 : D'accord.

Observateur 1 : C'est combien le rectangle là ?

D : 56 par 125.

Observateur 1 : Bon ben moi j'aimerais bien que quand même vous me fassiez une figure qui ne dépasse pas.

D : Oui mais ce n'est pas possible.

Observateur 1 : Comment ça c'est pas possible.

Observateur 2 : Mais vous avez trouvé déjà le ...

Observateur 1 : Attention parce que là moi je vais me fâcher. Une figure qui fait 56 par 125 vous ne pouvez pas la faire ? On a jamais dit que c'était des centimètres, ni des carreaux. Alors, comment vous allez la faire ?

A : Ben on fait un petit croquis on met 56 par 125.

Observateur 1 : On peut faire un croquis où l'on met 56 par 125, je suis complètement d'accord. C'est un peu ce que l'on a fait au tableau. On a pas pris les mesures au tableau. Quelle est l'autre solution si vous voulez faire quelque chose de précis ?

B : On prend des millimètres.

Observateur 1 : Si vous voulez, mais surtout qu'est-ce qu'on fait quand on ne peut pas faire rentrer une figure dans une page ?

B : On prend une échelle.

Observateur 1 : Voilà, ça s'appelle comment ?

70m00

Observateur 1 : Ça s'appelle l'utilisation de quel théorème que vous avez vu et revu.

C : Ah, la division euclidienne.

Observateur 1 : Non. Non mais attendais vous êtes en science là oh.

A : Je vous ai dit il faut prendre une échelle, ça m'écoute pas...

Observateur 1 : Ça veut dire quoi prendre une échelle ?

B : Un centimètre égal . . .

D : Une division.

Observateur 1 : Comment ça s'appelle quand on veut réduire une figure... Pour la faire rentrer quelque part.

C : Thalès...

Observateur 1 : Voilà. Alors vous allez pas me faire croire que vous ne pouvez pas faire une figure qui rentre dans cette double page, vous pouvez même la faire qui rentre dans une simple page. Ok ?

Observateur 1 : Alors ce n'est pas grave pour le jeu, mais vous ne pouvez pas dire de chose comme ça et être scientifique. Faites attention... Allez.

A : Je vous ai parlé d'une échelle ou pas.

C, D : Non.

B : On a pas dit qu'elle ne pouvait pas rentrer.

Observateur 2 : Comment vous avez trouvé le carré ? Qu'est ce que vous avez fait ?

B : Pour chaque lignes on fait la course à n-1.

Observateur 2 : Non non, mais comment vous avez fait pour trouver la quantité de carrés pour la dimension que vous n'avez pas tracé... Ah non vous avez tracé justement.

A : Oui sauf que ça ne fait pas ça.

D : Il en manque un mais...

A : Il manque un bout.

Observateur 2 : Il y a justement 56 ici.

A, B, C, D : Oui.

C : Et 125 ça dépasse.

Observateur 2 : Et si je vous donne 100 et 8 (68 ?)...

D : 125 et 56 c'est pas des multiples alors...

D : On nous a dis 125 par 56 alors bon ça dépasse...

Observateur 2 : Mais justement il y a une façon plus facile de le faire...

D : Mais le but c'est pas de faire des rectangles.

Observateur 2 : Justement si je te donne que ça pour jouer.

A : Je fais un croquis.

Observateur 2 : Je te dis joué... Comment... Il faut trouver la quantité de carrés.

A : Ben tu commence à faire les plus grand carrés et . . . .

B : On fait 125 – 56.

Observateur 2 : Voilà, comment on fait ?

D : 125 – 56. On a 74.

A, B : Encore – 56.

D : Moins 56....

Observateur 2 : D'accord. Encore 56.

D : Donc là ça fait quoi... 18.

Observateur 2 : 18.

D : Voilà.

A : Et après on fait 56 divisé par 18 pour savoir . . .

Observateur 2 : Non non, combien... Ily a 2 carrés et 56... Voilà.

D : 18, 18 il y en a 3.

Observateur 2 : Il y a 18... Fais le carré. Comment faut faire ?

C : Je divise 125, 56..

Observateur 2 : Oui.

C : Donc ça fait... 112 les deux.

Observateur 2 : Oui.

C : Il me reste 13. Après je sais que pourrais placer que 2 carrés..

Observateur 2 : Oui voilà.

C : Après je rajoute un 0, je re-divise par 56. J'ai 112 encore... Et j'en ai que 2...

Observateur 2 : Mais voilà, c'est proche.

B : Et nous ça ne marche plus.

Observateur 2 : Non mais ça marche ce qu'il vient de faire aussi. Il s'est trompé il a dit dans... il a pas dit...

C : 56-13.

A : Ah c'est 13, on fait 56 divisé par 13.

Observateur 2 : Voilà c'est ça. On en a combien ?

A : 4.

Observateur 2 : D'accord.

A : Il reste 4.

Observateur 2 : Voilà il y a 4 là. Et il après il y a quoi.

A : Ensuite on fait 13 divisé par 4.

B : Ça fait 3 il reste 1.

Observateur 2 : Et après ?

A : Ben c'est 1 et 1 les cotés.

Observateur 2 : Non mais il y a 12 de 56. Il y a... 4 de 13, 4 de 4 et après il en manque encore.

D : Y 'a 1 et 3, non ?

B : Et après il y en a 3 de 1 à la fin.

Observateur 2 : Non.

A : 13 de 1.

Observateur 2 : Non. Non mais c'est la fin il y avait 4 et 1. Ta dernière ligne c'est 1 et 4.

D : Il en reste 4...

B : Et après il y en a 4 de 1.

75m00

Observateur 2 : Oui 4 de 1. Voilà, alors c'est ça. Comment vous pouvez dessiner alors ce dessin ?

A : Ben on divise tout le temps.

Observateur 2 : C'est quoi cette dimension ? Ça ressemble à quoi ? Alors fais le dessin... Avec les dimensions... Par exemple ça c'est 56...125, voilà.

C : Ça donnerait ça en fait.

Observateur 2 : Voilà, y'a 2 carrés.

C : Re-divisé, là ça fait 56...

Observateur 2 : Voilà. Parfait alors il y a 13 ici.

C : Après là il y en a 4.

Observateur 2 : Mais il faut d'abord faire 13.

C : 13 oui.

Observateur 2 : Oui voilà, et là il y a combien ?

B, D : 4.

C : Après là il me reste...

A : 4 de 1.

C : Voilà, 4 de 1.

Observateur 2 : Voilà. Non mais là il te manque... T'as fait mal... Voilà et...

C : Après il m'en reste 1.

A : Il y avait 3 de 4 et ensuite 4 de 1. Tu t'es trompé là...T'en a mis 4 de 13 et tout de suite après t'as mis 3 de 1, t'as oublié le 4 de 3 ici.

D : Et donc...

Observateur 2 : Vous avez déjà la dimension donc ... 56 par 56 ensuite c'est 4... Après c'est ... (problème de micro).

Professeur : Alors c'est bon vous avez trouvé ? 2, 4 3, 4. Ça fait quoi ça ?

B : En fait on a fait ça en vrai grandeur et elles n'ont pas aimé.

Professeur : Pourquoi vous avez fait ces divisions là ?

D : Parce qu'on nous a demandé...

B : Faut trouver le nombre de carrés sans faire le dessin.

A : Et le nombre de carré c'est ça plus ça plus ça.

Professeur : Ben alors une fois que vous avez le nombre de carrés ça vous aide à faire quoi ?

B : Ben j'en sais rien, on a jamais fait comme ça nous.

D : Elle nous a engueulé car on ne savait pas faire le rectangle...

A : On a dépassé...

D : On a fait dépassé un petit peu, on avait pas la place. Normalement il est grand comme ça mais on avait pas la place. Et a dit que bon y'en avait un là.

A : Et elle a pas aimé.

...

B : Bon du coup si on joue donc on en prend 1... 1,2,3,4...

D : Ou alors faut en prendre 2.

B : Au final ça termine la ligne (?) c'est un peu bête.

D : Oui faut terminer la ligne. On va voir ce que ça fait juste 1 dans celui de gauche.

B : Merde y'en a 4 là, donc c'est la course à 2... Donc de 1. Et après on en prend...

80m00

D : Attends on ne peut pas jouer les 2 d'affilé, les 1...

B : Ah oui... C'est à qui le tour. Donc on est obligé de terminer la ligne... et après la course à 3 on commence quoi...

B : On prend 1.

D : On est obligé de terminer la ligne aussi.

B : On est obligé de terminer la ligne sinon ça marche pas...

D : En gros, tant que l'on peut il ne faut pas terminer la ligne. Après si on est obligé ben...

B : On est obligé.

D : Madame on a trouvé.

Observateur 2 : C'est quoi le dessin... C'est parfait.

B : On commence on dit 1 après on termine la ligne. On commence on dit 1 et après on termine la ligne. Donc soi il a dit 1 on dit 2 soi il a dit 2 on prend 1.

Observateur 2 : Ok.

B : Après là si on en prend 1 on termine la ligne. Et après on prend l'avant dernier.

Observateur 2 : Donc comment il faut faire... Il faut pas... Commencer. D'accord. Faut pas finir ici.

D : Si, il faut finir ici. Faut finir là, comme ça l'autre il prend celle là ou ces deux là.

Observateur 2 : Faut finir ici, faut pas commencer...

B, D : Non.

D : Pour commencer il faut finir ici.

Observateur 2 : Voilà.

D : Jouer là et jouer là.

Observateur 2 : Voilà.

B : Nous on a fait l'inverse...

Observateur 2 : Merci beaucoup.

81m26

E.3. Groupe G7

3m20

A : Est-ce qu'il y a une dimension particulière ? Un carré c'est déjà un rectangle..

B : Madame on doit prendre toute la feuille ?

Observateur 1 : Non, non...

D : Bon ben on va économiser.

Observateur 1 : Est-ce que c'est nécessaire de prendre un très très grand...

C : Non, non..

Observateur 1 : Moi j'aimerais bien que vous jouiez ensemble. C'est à dire non vous n'avez pas une feuille chacun.

C : Ah.

D : Ah d'accord.

Observateur 1 : Comme ça vous faites deux équipes de deux et comme ça ça vous oblige à échanger et sinon vous aurez pas un correcteur, vous cherchez ensemble. Simplement on vous a donné deux feuilles car peut être que vous en aurez besoin.

D : Ok, ok.

A : Donc vous êtes les rouges et nous les bleus.

C : Moi je veux bien être les bleus.

D : En fait c'est juste de savoir si l'on prend un carré ou deux quoi.

C : Vas y on prend les rouges.

D : A mon avis ça va dépendre de l'aire du carré, parce que, heu du rectangle.

...

A : Ok...

C : Commencez.

D : Ok.

A : Vas y Cyril joues.

D : Alors un carré de plus grande taille possible...

B : Je ne sais même pas combien il y a de carreaux en longueur ?

D : Il faut faire le plus grand possible.

A : Il suffit de mesurer.

C : Mesure c'est..

B : Tu veux mesurer comment avec ça.

5m00

C : Mais si il y en a 10 et demi...

D : On prend 5 là..

B : Ça fait 20 carreaux.. Heu non..

C : Mais si 5 et 5..

B : 21.

C : 21 carreaux.

A : Voilà.

B : 21 carreaux ok et en largeur ?

D : Mais non ça veut dire que tu ne peux pas prendre comme ça..

C : Si parce que t'es obligé d'en prendre plusieurs..

D : Tu es obligé de prendre là et couper là et en laisser 1..

C : Mais non il faut voir combien il y en a là..

D : Là il y en a.. Ah ok.

C : Ben voilà c'est ça.

D : C'est ce que j'ai dit.

...

D : Ok. Ben de toute façon il y aura juste la ligne au bout.

C : Tu crois ?

D : Y'a 21 carreaux.

A : Pierrick tu ne veux pas

B : Non, je n'ai pas envie de faire d'efforts.

C : Bon tu en prends 1 ou 2 carreaux ?

D : On en prend 1 ou 2 ?

A : Il faut que tu fasses le deuxième.

D : On en prend 1 ou 2 ?

A : On en prend 2.

D : On en prend 2 allé.

. . .

B : Ah ben oui..

...

A : Ah j'ai décidé comme ça (6"63 ?)..

D : On a commencé en premier donc (?).. Disons c'est 2 hein.. Il faut que ça fasse un carré (?).

B : Dès que c'est 1 carré on est obligé de prendre là...

C : T'en prends 2 et ben.

B : 2 et ben 2, 3...

C : Il faut en prendre 2 et on a gagné.

B : On en prend 2 il va en rester (?)

C : On en prend 1

B : Il prenne 2.

C : Ah ouais . Et si on en prend 1.

. . .

C : Et si on en prend 1 ils vont en prendre 2..

B : Attends attends. Ok, vous en prenez 1.

A : A nous.

C : Ah non c'est bon, quoi que vous preniez on aura le dernier mot.

D : Attends, attends..

C : Vous en prenez 1 on en prendra 2, vous en prenez..

D : Ah oui d'accord.. En fait ça dépend de l'air du rectangle.

D : On a joué une fois on a gagné.

C : Ouais.

D : On accepte notre défaite voilà.

B : Vous en prenez 1 ?

D : On à fait ça au « pif » (= au hasard)..

C : Marquez bien 1.

A : Mais ça on peut encore le diviser en 2.

C : Non.

D : Non, non. Allé on triche une peu.

C : Allé mettez 1.

D : Olala.

B : Vous êtes mort.

A : On va prendre un autre carré.

B : Oh on a fait deux écrits et on vous a battu.

C : On les a bou****.

D : Pourquoi tu fais des grands rectangles ? On pourrait aussi faire des petits.

B : Parce qu'il aime ce qui est grand. Comme ça on va se faire « chier ».

C : Faut qu'on trouve...

B : 1, 2, 3.. Ok on fait des carrés de 6 de largeur. Quand il y 6 en largeur.

D : 6 carreaux là ?

B : Il y a 6 en largeur.

C : En fait cela dépend tout de la largeur du rectangle.

B : Largeur et longueur, il y a un lien entre les deux..

C : Ouais.

D : Attends, il faut toujours prendre le plus grand ?

C : Possible. T'en prends 1 ou 2.

B : Faut diviser en 2.

C : Je vais en prendre 2 tiens.

B : Tu as combien là ?

D : Je n'ai pas compté.

C : Ça dépend (9"11')..

B : Combien .. On est a..

C : 12.

B : 11, 22, 23.

C : ?(9"18').

B : Il faut en faire 4. 4 et 4, 6...

C : Il faut en faire 1 de 6 là.

B : Un 6 là et..

B : Après ça fait 1, 2..

C : Ouais ouais on prend les 2.

B : On prend 2.

D : Ok, ok

10m00

D : De toute façon il y aura des carrés qui feront la même largeur. Si on en prend 2 il reste 1 ligne.

C : Non vous ne pouvez pas en prendre 2.

B : Il faut prendre le plus grand.

C : On peut en prendre qu'1.

B : Il faut prendre le plus grand.

D : Mais si il reste encore deux paquets de 6 et 1.

B : Non.

C : Non, regardes il n'y a pas 6. Tu même prendre un paquet de 6 et c'est tout.

D : Fais voir, attends.

C : Ouais, ouais.

D : Ah oui tu as raison.. Ça force à prendre 1.

C : Ah vous avez pris ici ?

B : Ben oui.

D : C'est pareil.

C : Non...

B : Mais oui ils ont raison le plus grand c'est adossé à ...(10"48').

B : 3, 4, 5..

D : Y'a 6 et 5.

C : Pourquoi moi je suis obligé de le mettre dans un coin..

A : Mais il est dans un coin.

B : Il est dans un coin obligatoirement.

C : Ouais mais regardes.

B : Parce que si tu dois prendre le plus grand..

D : Vérifiez qu'il fasse 5.

B : 1, 2, 3, 4.. 4

C : On est obligé de prendre le plus grand c'est ça ?

B : Ouais.

A : Ouais.

D : Vous pouvez en prendre qu'un de toute façon là.

C : De même dimension ouais.

B : Donc ça..

C : Put*** il y en a 6.. Ah d'accord.

D : D'accord ok. Voilà, de toute façon ça ne peut être que des carrés de 1, attends il faut réfléchir.

C : Ouais, ouais.

B : Vous en prenez 1 ?

D : Ouais. En fait il a recopié.

C : Heu ouais, sauf qu'en fait là il y en a 6.

A : Non il y en 5.

D : Moi aussi j'ai compté avant qu'il fasse..

A : Mais non ça va pas.

B : C'est un des plus grands carrés..

A : Comment il est ? Il sort d'où celui là ?

C : Et ben il était à 2. Parce qu'en fait il a mis lui avant vu qu'il fait avec la règle des coins.

A : Ouais.

C : .. On a de la chance de le mettre ici..

A : Mais ceux là ils sont bien identique à celui là ? Ah et donc il a choisis c'est deux là.

C : Ouais.

B : Ouais.

B : Ben qu'on prenne 2 ou 1.

C : Ouais ils nous font le même coup qu'on leur a fait ici.

B : Donc déjà c'est sûr quand il ya 5 de longueur, parce que le premier qui pose 1.. qui gagne.

C : Ah non ça dépend..

B : Ah ouais quand il reste 5 c'est celui qui joue qui..

C : Après c'est comme tout tu peux (13"02' ?) dans la suite à chaque fois.

D : Ouais ouais ben on va agrandir.

B : Oui ben là il faut mettre 1 ou 2.

A : On a eu notre revanche.

C : Mets en 3, 4.

D : On en prend 1 ?

A : Ouais.

D : Non on en prend 2 en fait.

A : T'as pas oublié de marquer un truc ?

C : Non.

D : Si tu as marqué un truc en plus il me semble.

C : Alors.. ?

...

D : Ouais je sais je sais. Ouais ils vont faire une longueur cinq fois plus grande que la largeur, c'est difficile aussi.

C : On commence.

A : Ben non c'est vous qui faites les carrés c'est nous qui commençons.

C : Non.

B : Ben non. Allé à vous. On vous laisse deux tours, on est trop sympa.

...

Professeur : Donc là vous avez un début d'idée de stratégie ?

C : Ça dépend de l'aire.

D : Si c'est une longueur cinq fois plus grande que la largeur.

Professeur : De l'aire ?

C : Ben surtout de la largeur.

D : Regardes, regardes, si tu en mets 3, 3, 3, 3, tu vois.. Attends j'ai une idée..

A : Regardes 3 ? (14"57') on a gagné.

15m00

D : Ah mais tu fais 3 de largeur c'est plus marrant. Sinon tu fais au pif aussi, ça peut être intéressant car si on connait la règle

Professeur : Non mais oui essayez de faire des... Sinon..

D : On est pas mauvais joueurs comme...

C : On est pas des mauvais joueurs..

D : Oui c'est ça vous faites des carrés..

B : Non déjà c'est un rectangles.

D : Des rectangles comme ça heu.. Il faut qu'il y ai un nombre impaire sinon c'est pas intéressant.

A : 1, 2, 3, 4..

C : Ah tu vas diviser.. Tu vas ton truc mais en plus grand.

Professeur : Moi je vais vous en faire un.. Au pif..

D : Vous le faites grand madame.. Après il va falloir compter les carreaux ça va être compliqué.

A : On a le droit de compter les carreaux madame ?

Professeur : Ah mais vous faites ce que vous voulez. C'est qui qui commence.

A : Alors .. 11. 1, 2, 3, 4, 5..

C : 24.

B : 11 sur combien ?

A : 25.

B : Ok. Note le comme ça on oublie pas.

C : Faut faire un carré de 11 sur 11 et..

A : 2, 3, 4..

C : Vous en prenez 1 ou 2 ?

D : Attends.

A : Attends.

D : Laisse venir laisse venir.

A : On dessine aussi le deuxième carré ?

Professeur : Oui. T'apprends à dessiner..

D : Oui mais ça dépend si on le prend ou pas.

Professeur : Mais après l'autre t'es pas obligé de le prendre tu marques un numéro dessus.

C : En fait dessine tous les carrés une bonne fois.

D : Alors.

Professeur : Celui là il ne me semble pas bien carré.

C : Ouais.. Là t'en refait un ou deux.. Mais vas y fais ça une bonne fois. Comme ça on peut voir si il y a une stratégie..

D : Ah ouais c'est pas mal ça. Mais ça dépend si on en prend un ou deux au départ.

Professeur : Peu importe tu les traces tous de toute façon tu seras bien obligé de les tracer.

B : Ben écoute tu peux faire 11 sur 11 et ? (17"44'). Il en restera 3 ici.

C : Non 2.

A : 2 ou 3 ?

D : Non 2.

B : 11 et ? 17"54' il en restera 16.

C : Je crois que tu as oublié..

Professeur : Mais non. Là.

B : Là, là là.

C : Ça dépend du nombre de carrés qu'on veut..

B : 2, c'est sûr que..

Professeur : Allé allé allé. Non mais autant que tu peux.

D : Encore un vas y.

B : Encore un là et après..

D : Et après tu coupes en deux.

D : Ok.

B : Alors ça fait 1, 2, ,3..

Professeur : Qui est-ce qui a commencé ?

C : ..10 carrés.

Observateur 1 : Pour la représentation, il aurait mieux fallu faire les grands carrés tous côte à côte parce que comme vous devez en prendre 1 ou 2 si vous avez un truc au milieu ça va poser problème.

Professeur : Ce qu'ils ont compris c'est que les premiers carrés qu'ils traçaient ils devaient être à.. Je pense que c'est surtout ça qu'ils ont compris c'est pour ça que vous les mettez dans les coins.

Observateur 1 : Oui non, .. ? un coin mais quand tu en as pris un tu repars du même coin. Mais c'est pas grave c'est juste que ce truc là au milieu ça risque de gêner pour votre stratégie. Mais allez y, commencez. Donc celui qui prend le dernier, ça va être quoi le dernier ? Ben oui c'est forcément un de cela, a perdu. Donc vous pouvez essayer déjà d'imaginer la stratégie avant de commencer. C'est à dire chacun vous cherchez de votre côté une stratégie.

D : On peut mettre en commun. C'est pas gênant, je ne sais pas..

Observateur 1 : Ah oui vous pouvez chercher à quatre la stratégie. Alors vas y qu'est-ce que tu veux dire ?

D : Non mais je n'ai pas encore d'idée..

Observateur 1 : Il ne faut pas prendre ce dernier. Donc ça veut dire que c'est l'autre qui va prendre ce dernier.

C : On a le droit de prendre deux carrés simplement si ils sont de la même taille..

20m00

D : Après c'est la même méthode que la course à 20..

C : On peut pas prendre lui et lui.

Observateur 1 : Oui c'est écrit je crois que c'est clairement écris.

D : Donc il faut arriver à cocher celui là. C'est la même méthode que la course à 20 en fait. C'est le même raisonnement.

Observateur 1 : Oui, donc pour ne pas prendre celui-là il faut prendre celui là. C'est ça que tu dis ?

D : Ouais voilà.

Observateur 1 : Oui d'accord..

B : Et pour ne pas prendre celui-ci, il faut s'arrêter heu..

D : Oui il ne faut pas prendre celui-ci.

B : Il faut s'arrêter avant comme ça l'autre il sera obligé de prendre ça il ne pourra pas en prendre 1.

Observateur 1 : Oui c'est bien.

D : Si là.. Il faut en prendre 1... Faut prendre celui là..

B : 2.. Déjà ici.. Tu veux gagner il faut que tu arrives..

C : Là..

B : Non pas là, ici..

C : Non mais là ça dépend de ce que l'adversaire joue.

B : Il faut que tu tombes ?(20"55' tous le monde parle en même temps)..

C : Il faut que tu commences avec lui, comme tout à l'heure vous avez ? (20"58') il y en a 5 là, donc il faut que toi tu joues lui.

B : Oui.

C : Et après il faut que tu joues lui.

B : Oui.

C : Et après il faut que tu joues lui. Donc si tu veux pouvoir jouer lui il ne faut pas que tu ai joué les deux d'avant donc faut que tu commences et que tu en ai joué qu'un..

D : Mais non mais non lui il ne faut pas que tu le joues car l'autre il peut faire 2 et hop.. Ah oui t'as raison ouais.

..

C : Il faut aussi que tu tombe sur lui parce que.. Enfin il faut qu'il soit compris lui voilà, tout les 3 comme la course à 20. Il ne faut pas prendre lui et lui, il faut en prendre juste 1 au début.. Et après 2..

Observateur 1 : Vous êtes quel groupe ? Je vais juste le marquer là. Parce que je vais noter ce que vous dites.

D : 67.

Observateur 1 : 67 ? Non c'est le groupe 7. Vous n'êtes pas si nombreux pour qu'il y en ait 67. Bon alors vous dites quoi là sur l'exemple.

B : C'est un peu comme la course à 20, faire de 11 ?

C : Voilà.

Observateur 1 : Alors vous pouvez m'expliquer ce que ça veut dire c'est un peu comme la course à 20 ?

C : Là il y a 10..

B : 10 carrés.

C : Il faut commencer pour être sûr de gagner, je ne sais pas si ça marche si l'autre..

Observateur 1 : Il y a 10 carrés.. Il faut commencer pour être sûr de gagner.

C : Ouais.

A : Regardes si l'autre il met un bleu ici, quand tu vas mettre rouge c'est l'autre qui va gagner.. Pourtant c'est toi qui a gagné, comment ça se fait ?

B : Ah ouais.. Donc il faut.. Attends.

C : Mais non faut en mettre..

B : Il faut en mettre 2, tu en mets 2.. Ben oui comme ce qu'on a fait.

C : Voilà tu en mets 2 quand tu commences, l'autre il va être obligé d'en mettre 1 puisqu'après ils ne font plus la même taille, après tu en mets 1, lui il en met 1 ou 2 après en fait tu complètes avec 1..

B : Il en met 1 et après ça change de taille, après c'est encore à toi de jouer et c'est toi qui recommences. En fait à chaque fois qu'il y a un changement de taille il faut recommencer.

C : Oui il faut toujours commencer avant le..

D : Ah ouais c'est ça. Il faut forcer l'autre à se mettre dans une position de changement de taille.

Observateur 1 : Qu'est-ce que vous coulez dire par « il faut toujours commencer » ?

C : Là on commence dès le début.

B : Donc on en met 1 ou 2..

C : Par contre il ne faut pas que l'on mette le dernier carré avant le changement de taille des carrés.

Observateur 1 : Donc vous avez quoi le 30..

C : Non c'est le nombre de carreaux qu'il y a..

Observateur 1 : C'est vous qui vous l'êtes donné ou quelqu'un qui vous l'a donné ?

B : La professeur a donné le carré, le rectangle, et nous on a compté les carreaux.

Observateur 1 : D'accord, et vous avez un.. 35 par 11. Alors vous avez, vous dites que la stratégie gagnante..

B : Il faudrait commencer..

Observateur 1 : Dans une stratégie gagnante il n'y a pas toujours parce qu'on dit que c'est la stratégie.. C'est pas toujours, il faut faire ça. D'accord. Donc il faut commencer, il faut prendre 2..

D : Dans ce cas là oui.

Observateur 1 : Il faut prendre 2. Ensuite il faut en prendre combien ?

B : ? (23"55) l'adversaire..

Observateur 1 : Non on a dit qu'on mettait pas l'adversaire pour le moment. Donc on prend 2, la fois d'après..

C : Ensuite on prend 1.

B : Il faut en prendre 1, encore 1.

C : Non ça dépend s'il en a pris..

B : Non non, si il en prend 1 il faut en prendre 2, et si il en prend 2 il faut en prendre 1.

Observateur 1 : Oui.

B : Pour ici et après...

Observateur 1 : D'accord, alors vous essayez d'écrire ça sur votre feuille là par exemple sur celle là, il y a quelqu'un qui essaye de l'écrire, stratégie gagnante sur celui là. D'accord.

C : Marques, commencer prendre 2.

Observateur 1 : Mettez que c'est pour le 35 11 parce que..

A : Oui on a fait flèche c'est bon ?

D : Ensuite il y a changement de taille tu prends 1. Si là, là.

B : Attends, commencer prendre 2.

C : Prendre 1.

B : Après non, changement de taille..

C : Mais non c'est pas grave.

B : Ouais prendre 1.

25m00

A : Là t'as vu regardes ?

B : Non mais attends il faut faire d'abord la stratégie gagnante pour lui..

A : Non mais regardes, écoutes, regardes dans ce cas là, c'était un nombre heu...

C : Mais regardes ça marche aussi.

D : Ouais mais il fallait en prendre 1 au départ.

A : Regardes dans ce cas vous avez pris 2.

C : Ouais vous vous avez pris 1.

A : Et vous vous avez perdu.

C : Ouais. Donc là il ne fallait pas commencer.

A : Il fallait commencer mais en prendre 1.

D : Voilà.

C : Heu..

A : Non dans tous les cas vous auriez perdu.

B : Ça change rien.

D : Ouais.

B : Il fallait laisser l'autre..

A : Non, non vous n'auriez pas perdu.

D : Si, si.

B : Nous on aurait mis 1 ou 2. 1 on arrive ici donc après c'est toi qui joues le 2 alors que si on avait mis 2 tu aurais joué ici aussi donc c'est...

C : Là il y a un nombre impaire de carrés..

D : Attends, finies déjà de noter la stratégie il faut la noter.

B : Là 1, 2, 3...6, 7. A 7 aussi.

A : Les nombres impaires il faut..

B : Quand le nombre de carrés est impaires il ne faut pas commencer. Après selon..

C : Il faut prendre 1 ou 2 selon le choix de l'adversaire.

B : Oui voilà.

C : Selon le choix inverse de l'adversaire.

B : Prendre 1 ou 2..

D : Mais non sur celui là il faut commencer sur le premier qu'on avait fait.. Ben si tu commences tu fais 1, l'autre il prend 1..

B : Et après c'est prendre 1..

D : Ah oui, attends.. Si tu commences et tu prends 1 et l'autre tu vois.. Il se retrouve à prendre le dernier..

B : Ben ça fait 2, 1

D : .. Carré, et tu arrives au changement de taille.

C : Moi je crois que ça dépend de la taille du carré aussi.

B : Ça dépend de la taille du carré et du nombre de carrés qu'il y a.

C : Combien il y a de carrés et de changements..

D : Mais les changements ça dépend de la taille des carrés aussi.

C : Ouais. On va essayer un truc.

B : Fais en un au hasard.

C : Non pas au hasard justement.

B : Un paire ou impaire ?

. . . .

C parle à lui même, il marmonne.

C : Voilà. Quand il n'y a pas de changement de taille, qui doit commencer ?

D : Nous je pense. Attends..

A : Là il y en a 1, 2, 3, 4...

B : Il y en a 12.

D : Normalement si il n'y a pas de changement de taille ça devrait être nous qui devons commencer..

A : Si on commence on a gagné.

D : On en fait un.

B : Vous êtes sûr ? On va tester alors.

A : On prend 2.

B, C : On prend 1. A vous.

A : 2.

. . .

B : Ah j'ai compris ce que tu fais..

. . .

A : Si tu prends 1 ou 2 j'ai gagné.

B : Ce que tu voulais voir c'est quand tu prends toujours l'inverse de l'adversaire.

C : Ouais. Ça marche..

A : Non j'ai pas pris l'inverse..

D : Au contraire..

A : J'ai calculé.

B : Non lui il a fait l'inverse de toi 2, 1, 1, 2.

C : .. Mettre 2 ? (28"54')

C : Faudrait essayer avec un carré en moins.

A : Mais moi vu que j'ai fait la même chose que toi..

. . .

B : Tu as mis deux carrés en moins.

C : Vas y recommences.

A : tu vas gagner.

C : Ouais.

B : Ah ouais c'est ça, c'est ça.

A : Non j'ai gagné ahah.

B : Toujours.. A chaque fois il fait toujours la même que toi.

C : Non, non, non.

A : Non regardes. Je fais tout le temps la même chose que toi comme ça tu ne peux pas être l'inverse de moi.

30m00

D : Après il refait pareil je vois ce que tu veux dire. En fait dans ce cas il ré-inverse..

A : Je ré-inverse ? (30"08')..

. . .

A : Plus tu te rapproches du truc, plus tu vois ce que tu fais..

B : Donc en gros il ne faut pas jouer à l'inverse. Déjà ça c'est un bon..

A : Si si l'inverse du choix de l'autre ça marche.

C : Ouais.

A : Regardez moi je joue l'inverse de toi, toi tu ne peux pas jouer l'inverse de moi vu que c'est moi qui ai commencé. Tu essayes de jouer l'inverse de moi.. Moi je peux te contrer..

B : Faudrait changer ?(30"40')..

C : Ouais vas y recommences.

A : Raccourcis encore.

B : Il faut que tu raccourcisses de deux.

A : De deux, on fait que les nombres impaires.

C : D'accord.

B : Et là c'est nous qui commençons pour voir.

C : Ça ne change pas grand chose.

A : Si commences.

B : Mets 1 ou 2 comme tu veux.

A : Là si tu avais joué 1 tu aurais gagné dans les deux cas.

B : Ouais c'est ce qu'il a fait ; il a mis 2 et après il rejoues..

A : Non c'est seulement quand c'est un nombre paire.

C : Ouais mais là on essayes avec les nombres paires.

A : Le nombre 2 il porte chance.

...

D : Un nombre paire en fait il joue la même chose que l'adversaire et lui..

A : Et là tu as gagné.

D : Écoutez, attends essayes avec un..

A : Non fait ce que je t'ai dit, tu joues la même chose que l'autre..

D : Attends essayes en un plus long pour voir si ça marche aussi.

A : Par contre si il avait joué 2 cases au départ j'aurais gagné.

C : On va essayer de ? 32"24. . .

B : Ouais, c'est juste histoire de voir si ça marche pour 2 aussi.

A : Je crois que quand c'est impaire il faut commencer par une case et quand c'est paire il faut commencer par les deux.

D : Attends vas y essayes.

C : Essayes.

D : Mets en 2.

A : Attends j'en mets 2.

B : Tu mets 1 ou 2.

A : Je mets 2.

B : Et c'est fini.

C : Ouais.

A : J'en mets 1 et t'as perdu.

C : Ouais.

B : Donc en gros quand c'est paire t'en mets, non, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, non ça ne marche pas la règle du paire quand tu en mets 2.

C : Hum.

A : Mais ça c'est impaire ça.

B : C'est paire.

A : 1, 2, 3, . . . , 8 mais là j'ai commencé par 1 !

D : Donc peut être qu'il faut changer ...Ce qu'on va faire c'est peut être juste un multiple de 3..

A : Là j'ai commencé par une case, là j'avais commencé par 2.

B : Et dans les deux cas tu as gagné ?

A : Non là j'ai perdu.

B : Ah donc quand c'est paire il faut commencer par 2.

A : Il faut prendre 2 cases.

B : Et ensuite toujours faire la même chose. Parce que là c'était paire et il a mis 1 et il a perdu.

A : Regardes, là c'était paire non ?

C : Ouais.

A : T'as commencé par 2 c'est toi le gagnant.

C : Ouais.

A : Là c'était impaire.

C : Là aussi c'est impaire tu as mis 2 et tu as perdu.

A : Voilà. Mais là quand j'ai mis 1 je gagne.

D : Attends on va essayer comme ça, le même mais on va changer ce que l'on met.

C : La fin ?

B : Heu non, attends.

C : Alors il y a combien de carrés...

A : Le même qu'avant, si voilà, on va commencer je vais mettre 1..

B : Ensuite tu mets 2 ou 1.

A : Vas y.

B : Toi t'en mets 1.

A : Non mets 2.

B : Mets en 2 pour voir

A : Voilà. Moi j'en mets 1.

B : Là t'en mets 1.

A : Encore.

C : Vas y essayes.

B : Et là normalement c'est fini.

A : Normalement là c'est toi qui gagne.

D : Ok.

C : Alors dans ce cas là ça marche.

A : Non mais en c'est soi je commence, il faut que je commence quand c'est un nombre paire il faut que je prenne les deux cases du départ.

B : Ouais.

Observateur 2 : Alors vous jouez..

35m00

Observateur 2 : .. à un rectangle 1 pour n. Oui c'est ça, c'est un rectangle de dimension 1 pour n.

C : Ouais.

Observateur 2 : Parce que chaque fois vous changez. Alors qu'est-ce que vous avez trouvé ?

A : Ben on a trouvé que à chaque nombre paire il fallait prendre les deux cases les plus grandes au début.

B : Quand le nombre de carrés est paire.

Observateur 2 : Oui.

A : Comme vous avez dit n, 1 + n, et si n est un nombre paire.

Observateur 2 : Oui.

A : Il faut prendre.. Il faut toujours commencer et prendre les deux premières cases.

Observateur 2 : Il faut toujours commencer et prendre les deux premières cases.. Mais non mais si j'ai 4.. Si j'ai 4..

D : Non ça ne marche pas.

C : Ah ouais

A : Donc 4 il ne faut pas commencer. Vas y mets 4.

D : Avec 4 il ne faut pas commencer, il faut faire 1.

C : Avec 4 il ne faut pas commencer.

B : Fais en un autre de 4. On va dire on commence on en met 1.

A : Moi j'en mets 2..

C : Voilà et donc on a perdu.. Nous on en met 2.

D : Nous on en mets 1.

B : Donc en gros il ne faut pas commencer.

A : Pour 2 il faut commencer.

Observateur 2 : Il ne faut pas prendre les doubles sinon tu vas perdre. Il faut prendre 1.

B : Si tu en as 3 il faut..

C : Il faut laisser, non même pas tu as perdu.

B : Non..

A : Tu commences, tu prends les 2 premières cas.

D : Celui qui commences il a perdu, non, celui qui commence il a gagné.

A : Il a gagné.

B : Si il prend les 2 premières cases.

Observateur 2 : Justement avec 3 c'est impaire il faut prendre combien de carrés..

B : Il faut en prendre 2.

C : Avec des multiples de 3 tu avais raison. Ça doit être ça..

On va dire que c'est un multiple de 3, tu peux en prendre 2..

B : Ça veut dire que tu en prends 2.

A : Je vais en prendre 2. T'en prends combien ?

B : On en prend 1. Dans les deux cas c'est fini.

C : Voilà ans les deux cas c'est gagné.

A : Et si c'est un multiple de 3 on prend..

C : Si c'est multiple de 3 il faut commencer et en prendre 2.

B : C'est un peu comme la règle de ..

Observateur 2 : La règle de quoi ?

B : La règle de .. C'est un peu comme la course à 20.

Observateur 2 : Oui et c'est quoi le rapport avec la course à 20 ?

B : Par rapport au multiple..

D : Par rapport au nombre de carrés qu'on choisis, qu'on doit prendre..

Observateur 2 : Oui voilà.

D : Et du nombre de carrés.

B : Ouais.

Observateur 2 : Vous pouvez jouer avec ? (38'07).. Pour savoir si ça marche.

C : Multiple de 3. Avec un multiple de 3 tu vas commencer et mettre 2..

Observateur 2 : Vous avez combien de carrés ? 38"17.

B : Non non tu en mets 1, normalement..

A : 2.

B : Et là tu en mets 2 aussi.

C : Là j'en mets 1 et il a perdu.

A : Non si t'en mets 1 j'ai gagné.

C : Ah oui.

D : Et si tu en mets 2 il en met 1.

B : Si t'en met 2..

C : Là, tu commences t'en mets 2..

B : Attends attend, ouais d'accord..

A : Moi j'essaye un même multiple de 3 au pif..

B : Attends fait pour voir..

C : Mais là ça marche..

B : On en met 2 aussi..

C : Mais même après il fera 1.

B : Après ici il en met pas 2

C : Non mais il en met 1.

D : Il en met 1. En fait je pense qu'on essaye en ligne comme ça et ça fonctionne comme la course à 20. En ligne c'est pareil.

A : même le 12.

C : Le 12 c'est pareil avec 9, 12, 10.

A : Mais on a pas essayé si on commence par 1.

D : Ah ouais.

Observateur 2 : C'est qui qui a joué ici ?

C : C'est les bleus qui ont gagné.

Observateur 2 : Là vous avez gagné.

D : Vas y refait là.

C : Avec un multiple de 10 (39"32').

B : Attends attends.. 3, 6, 12..

A : Je vais gagner ça va faire comme l'autre.

Observateur 2 : La différence c'est que dans la course à 20 si tu dis 20 tu gagnes. Et là..

C : Là faut pas prendre le dernier..

Observateur 2 : Et là . . . ? (39"54')

A : Mais là je vais gagner je met 1 vas y..

Observateur 2 : Voilà.

40m00

A : Ouais j'ai perdu. Si j'avais joué 2 au départ j'aurais gagné.

C : Ouais... Essayes vas y joues en 2 au départ.

Observateur 2 : Mais c'est toi qui joues il est fini le jeu ?

C : Ah parce que c'est ?(40"25')

A : Il joue pas ?

Observateur 2 : C'est pour ça alors, c'est pas la stratégie, c'est pas le coup gagnant ici.

A : C'est le rouge. Le rouge.

C : Il ne faut pas commencer.

Observateur 2 : Faut pas commencer ?

C : On ne sait pas en fait on essaye de voir.

B : Il faut essayer de trouver en fait.

D : Si on considère que c'est comme la course à 20 mais on dit que c'est 9.

A : Bon j'en prends 2.

D : C'est jusqu'à 9 en fait.

B : Donc t'en prends 1.

D : A mon avis c'est pareil, c'est multiple de 3.. Donc..

A : Vas y continues.

B : Pour gagner là tu en prends 1..

Observateur 2 : Oui mais c'est pas le contrat(?), c'est ça.. ?'41") Il faut pas prendre le dernier..

B : .. T'en prends 1 ou 2 c'est fini.

D : Ah mais il faut prendre le chiffre juste en dessous en fait.

Observateur 2 : Oui.

B : Dès le début c'était fini en fait. Après tu retombes sur les même chiffres gagnants.

C : Ouais.

B : Qu'il prenne 1 ou 2 tu..

C : En fait à chaque fois tu retombes sur la configuration..

B : Ouais voilà c'est ça.

D : Oui mais c'est 9..

A : Mais non mais là je perds et dans ce cas là je gagne.

D : Ben non justement tu ne dois pas tomber sur ce piège, juste avant donc c'est 9, donc multiple de 3. C'est comme une course à n +1.

C : Ouais.

D : Un truc dans le genre quoi. Ou -1 c'est pareil.

C : Ouais non c'est ça.

D : Déjà en ligne, je ne suis pas sûr qu'en carr.. (41"38) problème de micro.

B : Parce que si tu prend à 3, à 3 qu'il prenne 1 ou 2 tu retomberas toujours sur la même case.. Donc il faut laisser l'autre commencer..

A : Après ça dépend..

B : Après jouer toujours le jeu de jeu à 3.

Observateur 2 : Qu'est ce qu'il faut faire pour toujours gagner dans les dernières fois ?

C : Là ?

Observateur 2 : Oui.

B : Il faut avoir l'avant dernier.

A : Il faut retomber sur le multiple..

C : Voilà sur l'avant dernier.

A : Donc c'est le multiple de trois.

Observateur 2 : Il faut jouer ici.

A : Ouais et là c'est un multiple de 3.

Observateur 2 : Alors pour jouer ici qu'est-ce qu'il faut faire ?

B : C'est un multiple de 3 il faut..

A : Il ne faut pas commencer.

C : Il faut avoir mis au moins ici.

A : Ici ou là.

Observateur 2 : Il faut..

C : Il faut avoir mis quelque chose ici et ici.

Observateur 2 : Il faut que l'on ait celui-ci..

C : Ouais.

B : Celui là et celui là.

Observateur 2 : C'est vrai ou pas ? Alors.

B : Parce que dans les deux cas..

Observateur 2 : Ah ça c'est le deuxième (ou troisième ? 42"38') cas..

B : Ouais.

D : Ben d'ailleurs ce n'est pas étonnant que ça soit comme dans la course à 20 parce que c'est pareil on enlève 1 ou 2 carrés..

Observateur 2 : Ah oui.

D : Mais en.. Je ne sais pas si cela fonctionne pareil quand on..

Observateur 2 : Est-ce que vous pouvez relier ça ? Ça c'est déjà une stratégie gagnante pour un rectangle de dimension 1 et n..

C : Ouais.

Observateur 2 : Je ne sais pas encore mais vous avez déjà trouvé pour ça. Je vous laisse travailler. Mais alors c'est quoi cette histoire de multiple.

B : Il faut faire 3, 6, 9..

D : Ouais.

B : Faut jouer dans la troisième case..

C : C'est le nombre n-1.

D : C'est la course à n-1 en fait.

Observateur 2 : n-1..

B : Donc la totalité est..

D : Si n-1 c'est un multiple de 3..

Observateur 2 : Alors c'est quoi la stratégie gagnante pour la course à n ?

A : Sur le n-1 c'est un multiple de 3.

C : Si n-1 est un multiple de 3.

A : Il faut qu'on commence et notre premier... Faut que ça soit la troisième case.

B : 3, 6, 9 heu si il y a 10 cases il faut faire 3, 6, 9.

A : Donc c'est n-1, 10-1, 9.

B : Si il y en a 16, donc 16-1 ça fait 12, 12 c'est un multiple de 3 donc faut faire 3, 6, 9, et 12.

Observateur 2 : Donc est-ce que ça marche pour ça ?

A : Oui.

B : Oui pour celui là ça marche.

Observateur 2 : La différence c'est qu'il ne faut pas prendre le dernier.

D : Oui. Dans tous les cas c'est ça.

Observateur 2 : Est-ce que vous pouvez relier ça ? Et après vous montrer... Juste écrire ce que vous venez de me dire.

B : Ok.

Observateur 2 : Alors ça c'est la solution pour...

A : N-1.

D : Cas de rectangle n fois . . .

B : Course à n-1.

D : Ça fonctionne comme..

A : N-1, si n-1 est un multiple de 3..

45m00

D : Comme une course à n . . . Donc . . .

Observateur 2 : Qu'est-ce que ça a changé ? Non mais pourquoi..

B : Ben on avait trouvé qu'il fallait commencé par 2. Non c'est 35. Ça nous avais servis à écrire.

C : A commencer.

Observateur 2 : Mais pourquoi vous avez joué comme ça ?

B : C'était juste que l'on avait tracé. Il fallait commencer à partir des points donc on a mis un carré là, un carré là, après on a repris..

Observateur 2 : Ah d'accord, ouais mais c'est la... Donc je vous propose de jouer avec ce rectangle et de trouver la stratégie pour ce rectangle. La même chose que vous avez fait avant ça mais pour celui là.

A : Il faut regarder si 38 est un multiple de, non regardes, 38 est un multiple de 3, non, c'est quoi le multiple de 3 le plus proche ? C'est 39.

B : Oh p*** il passe pas.

C : 16 divisé par 9.

B : 8, 6 9..

C : non ça fait 6 nombres..

B : 11 38.. 11 35 c'est ...

A : Il faut que l'on tombe sur 37.

B : C'est 35 c'est 17 ?(46"36').. Je vais faire comme ça.

C : Ben rajoutes en 1.

B : Je vais faire comme ça.

C : T'as pas rajouté, rajoutes une ligne.

A : Regardes j'ai trouvé. On a pris 11 fois 38, tu fais 38-1 c'est 37, tu dois pas commencer, toi tu dois pas être le numéro 3.

D : non mais là..

C : Tout va dépendre de la largeur des carrés.

A : Mais non on a fait avec le 35 ça ne compte pas.

C : C'est 11 regardes. C'est 38 divisé par 11.

A : Mais regardes après ça devient 1 fois n, n le nombres de carrés.

C : Tu vois avec la division euclidienne qu'elle disait la dernière fois, c'est 38 divisé par 11, ça te donne 3,.. Qu'est ce que c'est déjà la division euclidienne ?

B : Tu fais avec les restes.

C : Ouais ouais.. 3 +... Qui sait qui se souvient comment on fait ce machin ?

B : Ben fais le tableau.

C : Je ne sais même plus faire ce truc..

D : Laisse tomber depuis que l'on connait la calculatrice. Division euclidienne c'est..

C : 3,45..

D : 38 divisé par...

D : Alors..

D : Bizarre tes carrés non ?

A : C'est bon traces les carrés...

D : Et après tu fais 1..

C : Tu peux faire pareil 3 carrés de..

D : Mais là faut commencer à en faire 2, non, si si si, oui commencez à en faire 2.

A : Comment il arrive à comprendre les notes des gens ?

C : Il doit avoir un mec spéciale (moi ! ! !) qui bosse juste pour ça.

B : Et après c'est...

C : Et après on retombe sur la même chose..

B : Et oui ! C'est pareil qu'à 35.

C : Ouais.

C : Toujours les mêmes chiffres +3, +3, +3..

A : A 35 regardes..

50m00

B : On a la même configuration..

A : 1, 2, 3, multiples de 3, tu dois tomber sur 35.

B : 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, c'est exactement la même chose que.. C'est la taille des carrés qui sont différentes.

C : Allé on commence.

B : Acceptez votre défaite on doit prendre le plus grand.

D : Ce n'est pas une défaite pour moi. Je ne considère pas ça comme une défaite.

B : Attends, 1 ou ... On va être gentil on en prend 2, la blague on en prend 1.

C : Il ne faut pas prendre le dernier.

A : J'ai le droit de faire ce que je veux.

B : Vas y vas y.

...

B : Bon ben en fait on a trouvé.

D : Je vous laisse noter.. Non mais moi j'écris mal.

C : Toi t'as une belle écriture.

A : J'ai mal à la main je ne peux pas.

C : Allé.

...

A : Allé Thierry écrit s'il te plait.

D : Non.

A : Moi elle ne va pas comprendre..

B : Moi quand je rédige j'explique mal.

D : Moi quand j'explique mathématiquement..

A : Allé moi j'ai déjà écris.

D : Vas y écris le..

C : Tu commences le travail et tu ne finis pas..

Problème de micro 53"14

D : Mais je ne sais pas comment l'écrire. On écrit comment on écrit quoi.

C : Si la division du carré enfin du nombre..

D : Attends attends..

C : la longueur par la largeur est égale à 3..

D : Non..

C : Marques ça.

D : Celui là je l'ai marqué déjà. J'ai déjà dit il faut faire de 3 en 3. Justement j'ai déjà dit que ça fonctionnait comme la course à n-1 ça résume tout.

B : De largeur 1 et de longueur..

B et D parlent en même temps

A : N-1 doit être un multiple de 3.

D : Mais non, si c'est pas un multiple de 3 tu changes juste la stratégie..

B : Oui mais nous on doit marquer pour ça donc..

C : Mais non il faut marquer pour les autres cas aussi.

...

D : Si la division du carré.. Il arrête de parler.

Professeur : Alors.

C : Je voulais savoir, est-ce que diviser la longueur par la largeur ça aide ?

Professeur : Ça a peut être un rapport avec ce que vous avez fait.

C : Si c'est un multiple de 3..

Professeur : Oui ben essayez de le mettre en phrase, c'est ce que tu es entrain de faire.

D : Oui mais je ne sais pas écrire. Je ne sais pas rédiger vous avez bien vu dans mes contrôles.

Professeur : Justement c'est un très bon exercice..

B : Voilà exactement.

C : C'est ce qu'on arrête pas de lui dire.

Professeur : Tu ne peux pas dire que ça te plait pas c'est un jeu.

C : C'est marrant.

D : C'est un jeu « cheeté ».

Professeur : Bon allé. Alors c'est quoi votre stratégie vous ne m'avez pas expliqué vraiment.

B : on a trouvé la stratégie gagnante pour celui ci. Si n-1..

Professeur : Et c'est quoi n ?

B : N c'est le nombre de carrés.

Professeur : La longueur ou la largeur ?

B : Ben y'a que sur la longueur vu que c'est de largeur 1..

Professeur : Ah d'accord.

B : Si n-1 est un multiple de 3 et ben il faut commencer, non, il ne faut pas commencer et jouer tous les multiples de 3. Comme à la course à 20, faut mettre dans 1 dans 3, un dans 6, .. 9, ça dépend de combien il y a de carrés.

Professeur : Ben là c'est un cas bien particulier là.

C : Ouais.

D : Le cas générale on divise la longueur par la largeur..

C : C'est sûr qu'on peut faire le machin avec la division euclidienne mais bon on ne sait plus la faire.

Professeur : Vous ne savez plus la faire ?

C : Non..

Professeur : Quand même.

A : Mais si moi je sais la faire. Tu prends les multiples les machins.

Professeur : Olala ça fait peur... On va faire 212 divisé par 4.

A : 4 fois 8 madame, ça fait 200 il reste 12..

D : 4 fois 8 ça fait 200 ?!

A : Ouais tu mets un 8 ici.

Professeur : On prend 21. Dans 21 combien je mets 4..

D : Je ne suis nul en calcul mentale vous ne vous rendez pas compte..

Professeur : Il reste 1, dans 12..

...

Professeur : C'est quoi les divisions que vous vouliez poser ?

D : 35 sur 11..

B : Non on nous a demandé 38 sur 11.

Professeur : Dans 38 combien je peux mettre de fois 11 ?

C, D : 3.

C : Et si il y a une virgule il faut mettre un 0 c'est ça.

Professeur : A oui si vous voulez continuer mais là je crois que.. Dans la division euclidienne on s'arrête là.

B : Et après faut diviser 5 par..

A : Après tu peux la continuer mais..

B : Mais ça ça veut dire qu'il restera 5 carrés..

Professeur : 38 c'est égale à 3 fois 11 plus 5. C'est ça la division euclidienne le reste n'est plus divisible. Ça c'est la division euclidienne à 38 par 11. C'est quoi ce que vous trouviez ? un multiple de 3 ?

60m00

D : Le reste je ne sais pas.

B : Ah ce qu'on a fait..

D : C'est le nombre de carrés moins 1.

B : Parce que là il y a 10, on en enlève 1 donc ça fait 9 et c'est un multiple de 3, donc on joue toute les trois cases, et on est sûr d'avoir la stratégie gagnante.

Professeur : 1, 2, 3, 4..

B : On sait que pour gagner il ne faut pas avoir 10 il faut avoir 9.

Professeur : Par exemple vous avez 9 cases vous faites quoi ?

C : Ben là c'est une autre stratégie.

B : Ça ne saura pas celle là. Ça sera une autre.

Professeur : Ben alors vous pouvez voir par rapport au reste.. Un nombre par rapport à 3 soit il est multiple de 3.. Soit il est multiple de 3 +1..

B : Ou 3+2..

Professeur : Dans ce cas là..

C : Attendais je vous expliques..

Professeur : Non..

B : Là il faut faire 1, là il faut commencer par 1, et là il faut commencer par 2.

61m25

Professeur : Pourquoi c'est n-1 ?

B : Parce que justement il ne faut pas tomber sur ce nombre. Il faut tomber sur le nombre qui est juste avant.

Professeur : Ah oui. Regardez ce que ça fait. N c'est le nombre de cases ?

B : Ouais.

Professeur : Donc c'est sur n qu'il faut résonner.

C : Il faut voir en fonction de la longueur et de la largeur..

...

Beaucoup de bruit pendant quelque seconde pour entendre quoi que ce soit.

A : Mais tais toi tu ne sais pas ce que je vais dire.

D : Vous avez fait les lesquelles ?

C : La division de deux c'est un multiple de 3 + 1.

D : Divise 35 par...

...

A : Les mecs ils peuvent choisir le rectangle ?

B : on peut choisir le rectangle ?

A : On peut choisir le rectangle ? On choisit le rectangle et c'est nous qui décidons si on commence ou pas.

D : Attends, attends, t'y vas pas.

A : Attends moi je veux regarder comment il va se faire laminer.

70m00

...

80m00

A : Regardes tu divises le nombre par 5, le nombre par..

B : La longueur par la largeur

A : La longueur par la largeur et le reste tu divises la largeur par ce nombre là. Et tu trouves.. Si c'est un nombre paire ou impaire..

C : C'est quoi les dimensions du dernier comme ça on le fait.

D : 120...

A : Madame c'est quoi les dimensions du derniers qu'on doit faire ?

Observateur 1 : 56 par 125.

C : 56 par ..

A : Tu divises 56.. Non tu multiplies, non, tu divises par 2.. C'est bon on a trouvé la stratégie (en parlant à quelqu'un d'autre)..

B : Nous on avait déjà trouvé ça.

C : Ça fait une heure et demi.

A : On a trouvé.. Après la suite tu veux quoi, la largeur tu la divise par le reste..

Professeur : Vous faîtes trop de bruit là, Brahim tu reste à ta place.

B : Ils croient qu'ils nous apprennent quelque chose..

A : Brahim fait pas l'intelligent ça ne sert à rien..

C : Ça fait 2 il reste..

D : T'es sûr ?

C : Il reste 13..

A : Ensuite tu divises 56 par 13.

D : Mais il y a combien là ?

C : T'as pas besoin tu t'en fou.

D : Mais tu as besoin de savoir ça pour diviser après..

A : Regardes tu divises..

D : T'as besoin de savoir..

C : Regardes ça fait 2 et il reste 13 là tu as tout.

D : Mais t'es obligé de marquer..

A : Mais là tu divises 56 par 13 et ça te donne le nombre de carrés..

C : 13 c'est le nombre de carrés et le reste..

C : Regardes 2 carrés de 56, ça t'en fais 2.. Tu commence t'en prends 1 et après t'en prends 2..

A : Tu prends le 2..

C : Et après il en reste combien d'après toi ?

D : 56 sur 13..

A : T'as raison il doit nous rester un bon petit paquet.

D : 13.. Heu.. 3, non 4, et il reste.. Il reste 4 aussi. Après tu le remets à 0, ou tu mets un 0 et tu mets la virgule..

C : Mais non..

Professeur : Mais il n'y a pas besoin de virgules là il suffit de compter le nombre de carrés.

C : Ouais c'est le nombre de carré en fait.

D : Ah ben oui.

Professeur : Mais ça vous rappelle rien ça ? Ça vous l'avez déjà fait normalement en troisième. A chaque fois vous divisiez le diviseur par un reste.

C : Ça me dit quelque chose..

Professeur : Vous ne vous rappelez pas... A quelle occasion vous avez fait ça ?

B : C'est le ?

85m00

Professeur : Oui, ça s'appelle comment ?

D : C'était en seconde..

Professeur : Ah oui vous l'avez fait en seconde mais en troisième.. Ça s'appelle comment ça ?

C : Le plus grand multiplicateur commun..

D : Dénominateur commun.

Professeur : Algorithme d'Euclide.

D : Ah oui.

Professeur : C'est des divisions successive. Ça vous dit rien ?

B : Juste le nom de Euclide me..

C : Mais on a appris plein de trucs en math..

Professeur : Donc vous avez fait de la place..

C : Ouais. C'est ça le cerveau il est obligé sinon il sature.

A : Et elle elle a fait comment ?

D : En fait tu prends tous les dividendes et tu les..

Ils font leurs affaires

Observateur 1 : On va changer, je n'ai pas tout à fait fini. Donc le 11 par 38 qui est-ce qui se sent près à donner la stratégie gagnante ? Épurée de tout, c'est-à-dire pas la méthode, la stratégie. Pour gagner il faut commencer ou pas ? Alors vas y..

87m24

ANNEXE F

Transcriptions expérimentation du jeu du chocolat

F.1. Groupe A

05m20

A : Yo creo que hay que hacer muchos casos

B : Adonde están las cosas del Ricardo

A : Aquí abajo

C : Ya, empecemos

A : Hay que romper una barra de chocolate detallada en varios trozos.

B : de cualquier medida ?

A : Cada jugador en su turno debe romper la barra en 2 trozos siguiendo una línea vertical u horizontal y luego debe comerse 1 de los trozo, pero cuidado porque un trozo es de jabón. El objetivo debe ser el último en comer chocolate sin comer el de jabón.

A : Pura estrategia, pero dijo que no era necesario usar formulas.

C : Pero es mejor usar formulas, digo yo ?

B : Hay que partir con uno que tenga uno.

C : Hagamos ese caso con uno primero así empezando y luego con uno y uno ...

B : Ya empecemos pero con uno porque si empezamos por el medio del chocolate..... pero tiene que ser con a par y b par y luego a impar y b impar

C : Empecemos con la fórmula del capri. ¿Cómo le ponemos ? Caso CAPRI.

B : Mi idea es que pongamos que a es el alto, a siempre va ser 1, porque capri siempre será 1

A : Es de 4

B : Si pero no es necesario que tenga los 4 cuadrados

C : Si ahí vamos dándole la forma a x b con a siempre = 1 y b

B : Variable

C : b uno entero

B : Siempre va ser entero si te dicen.

C : ya por b entero

B : si entero y variable, David colócale variable.

C : No ahí no mas

B : que eres porfiado si sabes que mi idea es buena. Cierto

A : Si

C : No mi idea fue mejor

B : no porque entero te lo dictan.

C : No lo hagas así amiga

A : hazlo más grande

Observateur : y quien va ganando entre Uds.

A : Todavía no empezamos.

Observateur : Tienen que competir entre Uds. De a dos-

C : Y se puede dar el caso de que este el puro jabón

B : No porque no habría como dividir en 2

C : ya entonces......... Aquí en este. gana el jugador 1

B : Si

10m10

A : Aquí sería con b = 2

B : Es que si fuera en i solo sentido, siempre va a ganar el 1ero-

C : No es que hay que tomar en cuenta que este va a estar acá.

A : Hay que hacer el mismo caso, pero con el negro.

B : Estuviera acá también va a ganar el 1ero.

C : En la parte.......

B : Igual que.......

B : y si tenemos 4

C : De todas forma

B : Ya lo hice ese

B : Es equivalente

C : Es congruente

B : Si pero no es historial

B : Guarda ese montón de hojas, que son de los demás

B : No todo ese monto e ahí, que no es tuyo

A : Tienen que firmar eso.

B : Ya el de 4 puede estar en los extremos-

Observateur : Atención un momento parece que no escucharon bien una parte si intentan hacer el juego desde el principio es bastante difícil, se recomienda si quieren que la barra se parezca a un capri o rectangular, pero el jabón está siempre en un rinconcito, o si quieren hay casos Uds. Hacen lo que quieren es solo una recomendación-

B : Gana el 1ero

C : Estoy viendo," denante "lo explicaron una cuestión así.

B : Pierde

C : Así es el juego

D : Ya

B : Explícale que en una parte está el jabón.

C : Juega uno primero en forma alternada sin comerse el jabón....

Observateur : Quien va ganando ?

D : Yo

A : Estamos intentando si está en los extremos siempre va a ganar el 1ero

B : Si esta al centro gana el 2do.

Observateur : A ver juguemos, pero yo juego primero y tu m vas a ganar, ¿Dónde está el jabón ?

B : Aquí

Observateur : yo juego aquí entonces juego primero y dices que me ganas, yo me voy a comer este.

B : Yo juego aquí y tu allá, Ah entonces perdimos.

Observateur : Bueno, pero está bien, es el espíritu ahora les toca uno de tamaño 5 y que pasa si el jabón esta al medio justo al medio.

B : Bueno se supone que el primero va a ganar, que siempre hace la jugada que mas le conviene. No porque el primero siempre juega a ganador-

A : Seria ganador el primero.

C : Mira en este también puede ganar el segundo

B : Yo juego primero

C : dijo esto

B : Ahí teni 2 opciones, cachais

D : Si cacho

C : Entonces ahí gana el segundo

B : Es lo mismo que en caso 3 el podría jugar aca... aca, pero no estaría haciendo perder al otro.

A : Entonces no sería ganador el 1. El 1 cierto.

C : Pero mira en esta también puede ganar el 2°

A : En el caso 2

B : Pero mira yo juego primero, te lo comiste ! ! Porque uno siempre tiene que jugar a ganador.

A : A ganar él po a que si tu te comiste eso

C : Eso también dijo suponte que si tu jugai

A : En este caso teni 2 opciones tirai aquí o aca-

B : Pero cual es tu juego ganador ?

D : Si cache

B : Eso mismo nos dijeron

C : En este gana el 2° y en este el 1

D : A cuanto estamos

C : a 16

C : Con números normales-

A : Aquí depende igual

B : En la esquina gana el 1ero

A : Igual puede ganar el 2°

20m15

C : Voy a comprar hartos chocolates para ganar.

C : Ahí gana el 1 siempre gana el 1

B : A ver

A : a ver hagámoslo

D : No me lo comí yo

B : No no aquí ganas tú

D : Pero se puede romper varios chocolate ?

C : De los que queráis si queri te los comí todos al tiro.

D : Ósea ahí gana......

C : El que juega primero osea gana el 1

D : Ahí perdi si juega....

C :

D : Como uds. Dicen que siempre de matar a otro

C : Oye cual jugaste con el profe

B :

Observateur : Se acabaron las sillas

D :

C : Tu juegas ahí

D : No po

C : Tu siempre vas a ser el 1ero

C : Con 4 siempre gana..

B : No mira....

C : Con pares gana el 1

B : Siempre

A : No porque en el..

B : No con pares gana el 1

C : Con chocolates pare

A : y con 3 siempre va a ganar el 1ero

C : Seguro me queda mas bonito ?

B : Es igual a 5

C : A da lo mismo

B : Colocalo aquí y el otro colocalo alla.

C : [?]

B : Mira juguemos aca

C : [?]

B : No po juguemos este 1ero, juguemos ordenadamente

C : Gana el 1

D : Juego yo ?

A : Estamos haciendo el otro

B : No se puede borrar

C : Pero siempre va a ser la ganadora

A : No pero...

C : da lo mismo te va a comer alla

A : No me lo como yo

C : Tendria que ser muy pavo para comerse el de alla

A : No te podi comer todo esto

D : Se supone que yo quiero ganar

A : a lo que voy yo quiero

B : tiene un orden

A : no te comi toso eso, gano yo

A : en el de 5 siempre gana el 2

C : no gana el 1

B : es que tiene ....

D no va ser tan tonto de comerse 2

A : ahí gana el 2

D : no el 1

A : No porque tu te comi ...

D : a verdad

A : Mira jugador 1 se come ese pedazo, jugador 2 s come ese pedazo, jugador 1 jugador 2, se lo come el 1

D : la maquinista

C : no tu tienes que ir a ganador

B : pero estoy viendo todas las posibilidades

C : no tu tienes que jugar a ganador

D : si solo a ganador

C : Tienes que comerte este no mas y yo aquí obligadamente y tu juegas aquí y yo ahí, siempre ganas tú

30m02

B : Despues mira en los impares, cuando esta al medio gana el 1

C : ya ganaste

C : aquí tus mismas posibilidades, yo empiezo, tu siempre vas terminar

B : no po jajajajj

D : buena David ! ! ! ! Feroz razonamiento

C : Siempre que esta al medio gana el 2

D : osea yo

B : Dijeron que no hablaramos de otra cosa porque ellos lo van a ocupar en un doctorado

C : A ver cuando es lineal

B : para pa que meti cosas, es barra

C : igual

B : no tiene que tomar en cuenta

A : Preguntale

D : yo no quiero preguntar nada

Observateur : Pregunten que pasó ?

A : El hecho cuando es impar y esta el jabon al medio siempre gana el 2 y si esta en extremo y es par gana el 1 cuando esta al medio

Observateur : y fueran 80 ? ? Cual es la conjetura ? Impar al medio gana el 2 par extremos gana el 1 y si no está en ninguna de esas 2 opciones.

Observateur : si son 2000 para este lado y 200 para este otro, yo primero como 57 de este lado quedan 143

A : Me como 43

Observateur : quedan 100

A : ahí gano yo

Observateur : ¿Por qué ?

C : gana él

D : no es necesario que e coma los 200

Observateur : no es necesario que sean 200 pueden ser 5

D : se puede comer 199 y dejar 1

B : Ahí puede ganar

C : si dejas 1 a cada lado ya puedes ganar, Si parte el 1 juega aca él da lo mismo que vaya para alla, ahí te comes este y siempre gana el 1 da lo mismo.

C : no juega aquí gana el 2

B : A ver juega ahí que hizo ?

D : no para yo juego primero

C : da lo mismo

D : yo juego ahí y tu donde ?

C : me vas a ganar

D : no ganas tú

C : Dale siempre tienes que....

D : gano yo

C : osea el que juega 1ero gana

D : es eel mismo

C : si pero yo juego 1ero

D : ganas tú

C : gano yo, gana el 1ero

D : siempre gana el 1ero.

C : una estrategia para sigues tratar de ganar tu

D : no no

B : teniendo en cuenta que yo juego ahí

C : siempre gana el 1ero en este caso

D : aquí me como estos 2

C : no y en este caso siempre gana el 2

D : y que hay que hacer

C : una estrategia para ganar

B : Siempre gana el 1 yo quiero ser el 1 para ser ganador

C : a ver y acá ?

D : para que sigas haciéndolo ahí, junta ese con el b5 con el b2

C : está en la línea y ahí va a ganar el 1, gana el 1 si esta acá

D : Que le pasa a esta impar

A : ya es obvio si son impares gana el 1

C : A los extremos gana el 1, al medio gana el 2

D : porque hiciste el 9 ?

B : si ya está hecho

A : son 7

B : ah me equivoque

A : ah nos falta el trencito todavía

D : y es trencito cuál es ?

C : el más grande todavía

D : para que lo sigues haciendo si ya sabes

C :

D : ahí gana el 2

B : ahí gana el 1

D ahí gana el 3

C : te puede faltar ahí va a ganar......

D : o gano yo

C : esta diciendo que gana el 1

B : siempre va a ganar el1

D : y que dije yo ?

C : 1 2 3 4 8 esta.....

D : porque ?

B : gana siempre el 1 menos cuando esta al medio

B : lo único que sabemos que gan el 2do. Es cuando está al medio

B : que te complica David ?

C : Que no está dado todos los casos

A : hagamos el caso del trencito mejor

Observateur : oye chicos cuando llegan a esta posición del juego tienen que justificar quien gana y porque

B : David que te complica ?

D : no te compliques hermano

C : escríbelo si quieres

50m14

D : siempre gana el 2

C : Que está haciendo ?

A : el trencito

C : no te compliques hermano

B : que estas haciendo Javiera

C : siempre gana el 2

B : que estas haciendo ?

A : El trencito

B : no tienes que parti asi

C : ahí tienes miles de casos

A : Cualquier punta depende

B : si está en la esquina da lo mismo

D : hay muchos casos, llega a dar flojera

A : ahí depende de los cortes

B : solo depende de eso

D : ya po

C : vamos a tener clases

B : toda la semana

A : todavía estas pensando ?

B : el problema puede tener solución

C : déjame pensar

B : puede

C : quiero pensarlo bien

B : podemos hacer...

C : a ver tráeme, asi como tráeme

D : igual perro

D : si quiere jugar yo juego al tiro

B : ganas tú

B : que lo único posible que tienes

A : tu asi eso

60m35

B : hagamos

B : gana el 1ero

C : cuando uno no está en la bandeja

B : ¿Cómo ?

C : cuando uno no esta en ....

B : junto contigo

B : bueno en el mundo real cualquier persona puede..

A : tanto chocolate me da hambre

D : que estas haciendo perro ? ?

B : que pasó ?

D : que cosa

A : llega a una conjetura

C : a ver dale información

B : que tenemos ? ?

D : por ahora nada

...

Observateur : se escucha a lo lejos hablando del chocolate...

C : tal para cual

D : saleee

A : lo que es ojo, no

D : chica para que hiciste eso

Observateur : tiene alguna cosa

C : más o menos, aquí siempre va a ganar el 2do-

Observateur : seguro ¿porque ?

C : si esta al medio tenemos una barra de chocolate

Observateur : de 1 x 7

D : juguemos

Observateur : no, deja que explique.

C : por que el 2do. Siempre tiene las mismas jugadas del 1 entonces el jugador 2 siempre ganará. Ej. Si el jugador 1 come acá el jugador 2 hace lo mismo después el 1 juega aca y el 2 repite siempre la misma jugada.

Observateur : yo como 1er jugador nunca voy a ganar entonces, en ese caso,¿ cuál es la estrategia entonces ?

C : cuando sea impar y esta al medio siempre gana el 2do.

C : Cuando es impar y está en el medio el jugador 2 siempre va poder hacer las mismas jugadas que el jugador 2 en este caso siempre ganará, o sea es el último.

C : Cuando es par el jugador 1 comenzara el juego y tendrá la posibilidad de igualar los chocolates a cada lado, luego de eses paso el jugador 1 puede hacer las mismas jugadas que el jugador 2

C : El trencito es más grande que el sanenu

B : Amigo colócale cuando A = 2 y B = 1

C : No lo hago de nuevo, pues la conjetura ya la sacamos.

C : En este también gana el 2

D : Gana el 1. Mira si es par gana el 1

A : Porque gana el 1 ¿ ?

B : ¿ Cuál es tu jugada ?

C : Yo me como este tu esa y esa

D : Yo me como todo esto.

B : Entonces si está en el medio ? ? ?

C : Gana el 1

B : y el de 3 x 3 te lo saltaste.

A : El Gabriel está haciendo el sanenu

B : Oye siempre gana el 1

C : El trencito es más complicado.

C : Cuando está al medio ganará el 1

C : Hasta el último está listo.

D : Entreguemos todos los papeles.

Observateur : Terminaron ?

RÉSUMÉ

La recherche que nous avons menée s'inscrit dans les projets de l'équipe de recherche Maths à Modeler. En particulier dans celui portant sur les situations de recherche pour la classe (SiRC). Cette recherche est centrée sur l'étude du rôle, pour l'apprentissage des savoir-faire fondamentaux, de l'activité mathématique, des jeux combinatoires et plus particulièrement des jeux de type Nim. Nous mettons sous l'expression « savoir-faire fondamentaux » les savoirs, méthodes et techniques qui sont à la base de toute activité mathématique : l'expérimentation, l'étude de cas particuliers, l'énoncé et l'étude de conjectures, la construction d'exemples et contre-exemples, la modélisation, l'élaboration et l'écriture de preuves, la définition d'objets, etc. (Grenier et Payan, 2002).
Le sujet est la construction, l'expérimentation et l'analyse de SiRC basées sur des jeux combinatoires de type Nim pour des élèves, afin de leur faire construire et développer les savoir-faire indispensables à la mise en œuvre d'une « démarche mathématique ».
Notre problématique porte donc sur l'identification des savoirs notionnels et des savoir-faire fondamentaux de l'activité mathématique qui sont mis en œuvre dans les jeux combinatoires de type Nim et la détermination des conditions et contraintes épistémologiques et didactiques favorisant l'apprentissage en classe de ces savoirs.
Pour mener à bien notre étude, nous nous sommes appuyés d'une part sur certains éléments de la théorie des situations didactiques de Brousseau (Brousseau, 2004) et de la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (Vergnaud, 1994) et, d'autre part, sur le modèle SiRC, contribuant à préciser ce modèle.
Nous nous sommes servis de l'étude épistémologique et didactique des jeux de type Nim, pour mener les analyses mathématique et didactique de deux SiRC : la première, nommée « jeu d'Euclide géométrique », situation de jeu de type Nim, construite spécifiquement pour cette recherche, basée sur un jeu d'Euclide classique. La seconde, nommée le « jeu du chocolat », situation expérimentée régulièrement dans l'équipe Maths à Modeler, mais dont l'étude didactique n'avait pas vraiment été faite.
Les analyses et expérimentations que nous avons menées montrent que les situations basées sur des jeux de type Nim, peuvent induire une activité mathématique qui va au-delà du développement et de la pratique de techniques mathématiques : Elles peuvent ouvrir l'accès à des savoir-faire plus généraux propres de l'activité mathématique.

MOTS-CLÉS

Situation recherche, jeu combinatoire, jeu de type Nim