



**HAL**  
open science

# Caractérisation orbitale et physique des astéroïdes binaires

Irina Kovalenko

► **To cite this version:**

Irina Kovalenko. Caractérisation orbitale et physique des astéroïdes binaires. Astrophysique [astro-ph].  
Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2016. Français. NNT : 2016PA066737 . tel-01679629

**HAL Id: tel-01679629**

**<https://theses.hal.science/tel-01679629>**

Submitted on 10 Jan 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



École Doctorale d'Astronomie et d'Astrophysique d'Île-de-France

Thèse de doctorat de  
L'UNIVERSITÉ PARIS VI  
PIERRE ET MARIE CURIE

présentée par

**Irina Kovalenko**

---

Caractérisation orbitale et physique des  
astéroïdes binaires

---

dirigée par

Alain DORESSOUDIRAM  
et Daniel HESTROFFER

Soutenue le 28 septembre 2016 devant le jury composé de :

Bruno SICARDY (LESIA - Obs. de Paris)	Président du Jury
Didier FRAIX-BURNET (IPAG)	Rapporteur
Richard P. BINZEL (EAPS - MIT)	Rapporteur
Paolo TANGA (Obs. de la Côte d'Azur)	Examineur
Christian P. ROBERT (Univ. Paris-Dauphine)	Examineur
Alain DORESSOUDIRAM (LESIA - Obs. de Paris)	Directeur de thèse
Daniel HESTROFFER (IMCCE - Obs. de Paris)	Co-directeur de thèse



## Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude des objets binaires du Système solaire selon deux axes principaux. Premièrement, nous examinons les paramètres physiques, tels que la taille et l'albédo des binaires transneptuniens, obtenus à partir des mesures de flux thermique en infrarouge par les télescopes spatiaux Herschel et Spitzer. Avec ces paramètres, nous comparons les objets binaires avec les transneptuniens sans satellite. Cette analyse montre que les distributions de tailles dans les deux populations sont différentes. Nous supposons que cette tendance est liée à la prépondérance des petits binaires dans le groupe des objets « froide », qui est plus favorable à la survie des binaires, parmi les autres groupes.

De plus, nous étudions les corrélations entre la taille et l'albédo et d'autres paramètres physiques et orbitaux pour la population des binaires. Cette étude montre les fortes corrélations suivantes : entre la taille et la masse, la taille et l'inclinaison héliocentrique, la taille et la différence de magnitudes des composantes. L'étude trouve également deux corrélations moins significatives – la densité avec la taille et la densité avec l'albédo – qui nécessitent des vérifications ultérieures avec des données complémentaires. Nous donnons une interprétation possible des résultats du point de vue des différents modèles de formation de tels objets.

Deuxièmement, nous présentons une nouvelle méthode de détermination d'orbite mutuelle d'un système binaire. Cette méthode est basée sur la technique de Monte-Carlo par chaînes de Markov avec une approche bayésienne. L'algorithme, développé dans cette thèse, permet de déterminer ou d'ajuster les paramètres d'une orbite képlérienne ou d'une orbite perturbée à partir des observations simulées et réelles. Nous montrons que la méthode peut être efficace même pour un petit nombre d'observations et sans condition initiale particulière.

*Mots-clés : astéroïdes binaires, ceinture de Kuiper, mécanique céleste, méthodes statistiques, méthode de Monte-Carlo par chaînes de Markov, inférence bayésienne, optimisation.*



## Abstract

### Orbital and physical characterisation of binary asteroids

This thesis is devoted to the study of binary objects in the Solar System and explores two main themes. First, we examined physical parameters, such as size and albedo of trans-Neptunian binaries, obtained from thermal flux measurements by the Herschel and Spitzer space telescopes. Within these parameters, we compared binary objects with simple trans-Neptunian objects without satellites. This analysis showed that the size distributions of two populations are different. We assume that this trend is related to the predominance of small binaries of cold classical group, which may be more favourable for the survival of binaries, among other groups.

In addition, we studied the correlations between the size and albedo and other physical and orbital parameters of the binaries population. This study obtained the following strong correlation : size vs. system mass, size vs. heliocentric inclination, size vs. magnitude difference of components. We also found two less significant correlations – bulk density vs. size and bulk density vs. albedo – which require further verification with additional data. We then set out a possible interpretations of the results from the perspective of different formation models of such objects.

Secondly, we have presented a new method of binary system mutual orbit determination. This method is based on the Monte Carlo Markov chain techniques with a Bayesian approach. The algorithm developed in this thesis is used for Keplerian or perturbed orbit fitting to simulated or real observations. We show that the method can be effective even for a small number of observations and without regard to particular initial conditions.

*Key words : binary asteroids, Kuiper belt, celestial mechanics, statistical methods, Markov chain Monte Carlo, Bayesian inference, optimization.*



# Remerciements

Tout d'abord j'aimerais remercier mon mari Vincent que j'aime énormément. Je le remercie pour son aide avec la thèse : pas seulement d'avoir lu mon manuscrit plusieurs fois et sans doute plus scrupuleusement que personne, mais aussi pour tout son soutien pendant mon doctorat.

Je remercie profondément Alain Doressoundiram. J'ai apprécié son talent de directeur de thèse : ses consultations et conseils n'ont jamais mené à une perte de temps mais toujours à un travail efficace donnant des résultats. Je suis sûre que le jeune public en lisant ses livres rêve déjà d'avoir Alain comme directeur de thèse.

Un énorme merci à Radu Stoica que je considère comme un véritable codirecteur de thèse, même s'il ne l'était pas administrativement. Particulièrement, je le remercie pour son soutien et ses idées pour ma thèse au moment où j'étais prête à l'abandonner.

Tous mes remerciements vont aussi à Nikolay Vladimirovich Emeliyanov qui m'a conseillé pendant non seulement deux courts stages à l'Université Lomonossov, mais aussi tout le long de mon doctorat. Il est juste de dire que Radu et Nikolay Vladimirovich ont joué un rôle crucial pour tout ce qui correspond à la deuxième partie de la thèse.

Je suis très reconnaissante aux membres du jury de m'avoir fait l'honneur d'évaluer mon travail. En particulier, je remercie Didier Fraix-Burnet et Richard P. Binzel d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce manuscrit.

Merci à toutes les personnes sympathiques que j'ai croisées à l'IMCCE, en particulier Melaine Saillenfest et William Polycarpe. Merci également à Florent Deleflie de m'avoir invité à venir à l'Observatoire pour la première fois. En vérité, il n'est pas facile de s'intégrer dans la vie de l'IMCCE. Je ne sais si cela était la faute de ma timidité ou si c'est une particularité du laboratoire, mais je sais que beaucoup d'étrangers ont le même sentiment. Je n'ai également jamais compris pourquoi les chercheurs des différents étages de l'IMCCE ne communiquent presque pas entre eux.

Je remercie beaucoup le LESIA. J'ai remarqué une très agréable ambiance dans ce laboratoire de Meudon, en particulier l'organisation des journées des doctorants. J'étais toujours amicalement accueillie, malgré que je ne sois pas venue souvent la-bas. Merci beaucoup à Alain et à la direction du LESIA pour le soutien financier de mes missions.

Je suis très reconnaissante à l'école doctorale, particulièrement à Florence Durret pour sa bienveillance. Je remercie Agnès Le Guerer de m'avoir aidé au tout début de thèse à sortir du labyrinthe administratif de l'UPMC.

Je voudrais remercier l'Université Bauman de Moscou, car, selon la chaîne de Markov, dans ma vie la probabilité d'arriver à l'Observatoire de Paris ne dépendait que de mes études là-bas. Merci de m'avoir donné une très bonne formation pour pouvoir faire une thèse. L'honneur d'étudier dans un endroit où Sergey Korolev, à qui cette thèse est dédiée, a obtenu son diplôme et où enseignent des cosmonautes, a lié pour toujours ma vie à l'étude de l'espace.

Je ne peux oublier mes amis qui ont égayé cette période de la thèse, notamment Celino Moraes qui m'a toujours sauvé dans mes impasse informatiques. Un énorme merci à Ziya qui m'a fait découvrir l'art du vitrail, et également à Grant, Olga, Carlos, mes beaux-parents Christine et Daniel, Yana et Emmanuel. De plus, un grand merci à Amy Winehouse et aux Brassta.

Il y a des gens que je ne vois pas pendant des mois mais qui restent pourtant les plus proches : mes parents. Je les remercie en dernier mais ils sont à la première place pour moi car je les aime très fort et je leur dois tout. Je suis très reconnaissante à mes parents de s'être déplacés pour assister à ma soutenance. En vérité, je ne saurais jamais les remercier assez pour tout ce qu'ils font pour moi.

# Благодарности

Прежде всего я хочу поблагодарить моего мужа Винсента, которого я очень люблю. Большое спасибо за помощь с диссертацией: не только за то что перечитал ее не один раз и внимательнее чем кто-либо, но и за поддержку, оказанную мне на протяжении всей аспирантуры.

Я очень благодарна Алану Доресундираму. Думаю, что у него настоящий талант научного руководителя: его консультации и советы никогда не привели меня к пустой трате времени и всегда к хорошим результатам.

Большое спасибо Раду Стоике, которого по праву можно считать со-руководителем аспирантуры. В частности, спасибо за его идеи в момент когда я была готова уйти из аспирантуры. Я выражаю свою благодарность также Николаю Владимировичу Емельянову, который консультировал меня не только во время моих стажировок в МГУ, но и в дальнейшем до конца аспирантуры. Справедливости ради отмечу, что Раду и Николай Владимирович играли очень важную роль в работе над второй частью диссертации.

Выражаю глубокую благодарность жюри за оценку моей работы. Отдельное спасибо Дидье Фрэ-Берне и Ричарду Бинзелу за их рецензии на мою диссертацию.

Спасибо всем приветливым людям из Института небесной механики, особенно Мелену и Вильяму, а также Флорану, благодаря которому я впервые попала в институт. К сожалению, не так легко интегрироваться в жизнь института. Я не знаю, связано это с моей скромностью или это особенность института, но я знаю, что у многих иностранцев такое же чувство.

Большое спасибо Лаборатории космических исследований и приборостроения. Хочу отметить очень приятную атмосферу этой лаборатории в Медоне. Особенно меня впечатлила организация дня аспиранта. В лаборатории меня всегда дружелюбно встречали, хотя бывала я там не часто. Большое спасибо руководству лаборатории за финансовую поддержку для посещения конференций.

Отдельное спасибо заведующей аспирантуры – Флорансе Дюрэ – за ее доброжелательность, а также Аньес Ле Герэ за то, что помогла мне выбраться из административного лабиринта университета.

Обязательно хочу упомянуть МГТУ имени Баумана и поблагодарить за замечательно образование, которое позволило мне учиться в аспирантуре. Для меня было большой честью учиться там, где учился Сергей Павлович Королев и где лекции читают космонавты. Думаю, это навсегда связало мою жизнь с изучением космоса.

Не могу не поблагодарить моих друзей, которые осветили этот период аспирантуры, особенно Селино, который меня всегда спасал из тупиков программирования. Огромное спасибо Зие, который открыл для меня искусство витражей, а также Гранту, Оле, Карлосу, моим свекрам Даниэлю и Кристин, еще Яне и Эмануэлю. Еще большое спасибо Эми Уайнхаус и Брассте за музыку.

Есть люди, которых я не вижу месяцами, а они все равно самые близкие. Это мои родители. Я очень благодарна им за то, что они проделали длинный путь и приехали на мою защиту. В действительности, я никогда не смогу их достаточно поблагодарить за все, что они сделали для меня, ведь им я обязана всем, чего достигла.

Dédiée à Korolev  
(Sergueï Pavlovitch et la ville)

Посвящается Королеву  
(Сергею Павловичу и городу)



# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>5</b>
<b>I Caractérisation des objets transneptuniens binaires</b>	<b>9</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>11</b>
1.1 Mission Spitzer . . . . .	11
1.2 Mission Herschel . . . . .	12
1.3 Programme « TNOs are Cool » . . . . .	12
1.4 Classification des TNO . . . . .	13
1.4.1 Objets en résonance . . . . .	14
1.4.2 Disque des objets épars . . . . .	15
1.4.3 Objets détachés . . . . .	15
1.4.4 Objets classiques . . . . .	15
<b>2 Présentation des données</b>	<b>16</b>
2.1 Origine des données . . . . .	16
2.2 Calculs de diamètre et d'albédo . . . . .	21
2.3 Calcul de la densité . . . . .	23
2.4 L'ensemble des données . . . . .	24
<b>3 Comparaison avec les astéroïdes simples</b>	<b>28</b>
3.1 Test d'hypothèse . . . . .	28
3.2 Test de Kolmogorov-Smirnov . . . . .	29
3.3 Test de Mann-Whitney-Wilcoxon . . . . .	30
3.4 Application des tests . . . . .	30
<b>4 Étude des corrélations entre paramètres</b>	<b>35</b>
4.1 Corrélations non-paramétriques . . . . .	35
4.1.1 Coefficient de Spearman $\rho$ . . . . .	35
4.1.2 Coefficient de Kendall $\tau$ . . . . .	36
4.2 Analyse des incertitudes des coefficients de corrélation . . . . .	37
4.3 Recherche de corrélations . . . . .	38
4.3.1 Diamètre et masse . . . . .	39
4.3.2 Diamètre et inclinaison . . . . .	39
4.3.3 Diamètre et différence de magnitude . . . . .	42
4.3.4 Diamètre et densité . . . . .	43
4.3.5 Albédo et densité . . . . .	45
<b>5 Conclusions et perspectives</b>	<b>47</b>

<b>II</b>	<b>Détermination d'orbite</b>	<b>49</b>
<b>6</b>	<b>Positionnement du problème</b>	<b>51</b>
6.1	Modèle dynamique . . . . .	51
6.1.1	Système binaire . . . . .	51
6.1.2	Observations . . . . .	51
6.1.3	Orbite képlérienne . . . . .	54
6.1.4	Orbite perturbée . . . . .	55
6.1.5	Coordonnées à partir des paramètres orbitaux . . . . .	60
6.2	Modèle statistique . . . . .	61
6.2.1	Modèle de régression . . . . .	61
6.2.2	Inférence bayésienne . . . . .	61
6.2.3	Estimateur des paramètres . . . . .	63
6.3	État de l'art . . . . .	64
6.3.1	Les moindres carrés dans le problème de l'objet binaire . . . . .	64
6.3.2	Approche bayésienne avec la technique Monte-Carlo . . . . .	66
<b>7</b>	<b>Méthode de Monte-Carlo par les chaînes de Markov</b>	<b>68</b>
7.1	La chaîne de Markov . . . . .	68
7.2	Algorithme de Metropolis-Hastings . . . . .	69
7.3	Recuit simulé . . . . .	70
7.3.1	Configuration de l'algorithme . . . . .	71
7.3.2	Modifications de la méthode de recuit simulé . . . . .	72
<b>8</b>	<b>Application de la méthode</b>	<b>74</b>
8.1	Fonction d'énergie . . . . .	74
8.2	Algorithme . . . . .	75
8.3	Simulations . . . . .	76
8.3.1	Étape 1 : cas simple . . . . .	76
8.3.2	Étape 2 : cas proche du réel . . . . .	90
8.4	Test sur les vraies observations . . . . .	92
8.4.1	Comparaison des méthodes . . . . .	92
8.4.2	Estimation des incertitudes . . . . .	98
8.4.3	Détermination de $J_2$ pour Teharonhiawako 2001 QT297 . . . . .	99
8.5	Problème de minimums locaux . . . . .	101
8.5.1	Proposition 1 : loi <i>a priori</i> informative . . . . .	106
8.5.2	Proposition 2 : parallélisme de l'algorithme . . . . .	107
8.5.3	Proposition 3 : modification du schéma de la température . . . . .	109
8.5.4	Résumé . . . . .	109
<b>9</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>110</b>
	<b>Annexes</b>	<b>113</b>
<b>A</b>	<b>Tests sur corrélation</b>	<b>114</b>
A.1	Corrélation de Spearman . . . . .	114
A.2	Corrélation de Kendall . . . . .	116

---

<b>B Résultats des simulations</b>	<b>118</b>
B.1 Simulations : étape 1, test 1 . . . . .	118
B.2 Simulations : étape 1, test 2.1 . . . . .	121
B.3 Simulations : étape 1, test 2.2 . . . . .	125
B.4 Simulations : étape 2 . . . . .	129
<b>C Données des observations</b>	<b>133</b>
<b>D Calculs complémentaires</b>	<b>134</b>
D.1 Dérivée de la fonction d'énergie . . . . .	134
D.2 Matrice jacobienne . . . . .	136
<b>Bibliographie</b>	<b>139</b>



---

# Introduction générale

L'astéroïde binaire est un système de deux astéroïdes qui s'attirent par la force gravitationnelle et orbitent autour de leur centre de masse commun. Généralement, l'objet le plus grand dans un tel système s'appelle le *primaire*, et le plus petit s'appelle le *secondaire*. Si les deux composantes ont des tailles comparables, le barycentre se trouve dans l'espace entre eux. Si la taille d'une composante est considérablement inférieure à l'autre, le barycentre se trouve à l'intérieur du primaire. Dans ce dernier cas, la désignation *satellite* pour le secondaire est souvent utilisée.

**Histoire.** Les premières hypothèses sur l'existence des astéroïdes binaires sont apparues dès le début du XX<sup>ème</sup> siècle. A cette époque, l'astronome français André (1901), en étudiant la ressemblance de la courbe de lumière de (433) Éros avec celle de l'étoile binaire  $\beta$ -Lyrae, a supposé la binarité de l'astéroïde. Bien que son hypothèse n'ait jamais été confirmée pour (433) Éros, les recherches se sont poursuivies et l'existence des astéroïdes binaires a été indirectement prouvée par les cratères doubles sur la surface des planètes et de leurs satellites (Melosh and Stansberry, 1991).

De nombreuses observations depuis le sol ont été faites pour tenter de découvrir un astéroïde binaire, cependant, le premier satellite d'astéroïde a été découvert par hasard à l'aide d'une sonde spatiale en 1993. C'est la sonde *Galileo* qui sur sa route vers Jupiter a découvert une lune de 1.6 km, nommée Dactyl, à l'astéroïde (243) Ida. Une série de découvertes a suivi à la fin des années 90 et au début des années 2000.

Aujourd'hui, 285 objets multiples sont connus (Johnston, 2016), ils sont présents dans toutes les régions du Système solaire. La plupart des objets de ce type est concentrée dans la ceinture principale d'astéroïdes (115 binaires et 6 triples). En outre, une quantité importante de binaires (77 objets) et multiples (2 triples et Pluton avec 5 satellites) a été découverte parmi les objets transneptuniens et centaures et il y a même un objet ((10199) Chariklo) qui possède des anneaux (Braga-Ribas et al., 2014). En plus, nous connaissons 57 objets binaires géocroiseurs (et 2 triples), 20 astéroïdes binaires aréocroiseurs (et 1 triple) – astéroïdes dont l'orbite croise celle de Mars, et 4 binaires troyens de Jupiter.

**Méthodes d'observations.** Une des méthodes les plus efficaces, mais en même temps la plus chère, pour étudier et découvrir des satellites d'astéroïdes est d'envoyer une sonde spatiale. La sonde doit rester suffisamment longtemps dans le voisinage de l'objet pour démontrer qu'un satellite se trouve vraiment en orbite autour de l'objet. Autrement, la sonde peut observer un rapprochement aléatoire de deux objets qui n'ont pas de liaison gravitationnelle.

Après le succès de *Galileo*, la sonde *NEAR Shoemaker* a été lancée en 1996. La sonde a fait un passage vers l'astéroïde (253) Mathilde (Merline et al., 1998) et s'est ensuite mise en orbite autour de l'astéroïde Éros (Veverka et al., 2000). Malheureusement, la recherche de satellite pour ces deux astéroïdes n'a pas été couronnée de succès, bien qu'une séquence

d'imagerie bien planifiée dans ce but ait été incluse dans le programme (ce qui manquait dans le programme de *Galileo*).

Aujourd'hui une autre mission vers un astéroïde binaire est en projet. La cible est l'astéroïde Didymos avec son petit satellite, qui porte le nom officieux de Didymoon. Le projet AIDA (en angl. « Asteroid Impact and Deflection Assessment ») est un projet commun de l'ESA et la NASA (Cheng et al., 2012). La sonde se compose de deux vaisseaux : AIM (en angl. « Asteroid Impact Monitor ») et DART (en angl. « Double Asteroid Redirection Test »). Le premier servira à suivre comment le second impactera Didymoon à la vitesse d'environ 6.5 km/s. Le but de la mission est d'étudier les possibilités de changement de trajectoire de l'astéroïde à la suite d'un impact. Cette expérience pourrait être utile pour éviter la collision d'un astéroïde avec la Terre.

Le télescope spatial Hubble (HST) a apporté une contribution importante dans l'observation des objets binaires. Une série de programmes d'observations avec HST a débouché sur la découverte de la plupart des binaires transneptuniens connus (Noll et al., 2008). Aujourd'hui, ce télescope est le plus efficace pour trouver et étudier les binaires transneptuniens. Le HST fournit des images de haute résolution, mais obtenir du temps d'observation n'est pas toujours facile. Ainsi, les observations de HST sont souvent complémentaires aux observations au sol.

Des télescopes au sol peuvent également être utilisés dans l'observation des objets binaires. La technique de l'optique adaptative (OA) est largement mobilisée dans ce but depuis les années 90 (Merline et al., 2002). Cette technique permet de minimiser les déformations liées à l'atmosphère de la Terre dans l'image en les corrigeant en temps réel à l'aide d'un miroir déformable. En pratique, l'OA fait résoudre le binaire et permet donc de détecter plus facilement le satellite. Le premier binaire découvert par cette technique en 1998 était l'astéroïde (45) Eugenia (Merline et al., 1999).

Pour les binaires transneptuniens suffisamment séparés la technique directe de camera CCD sur les grands télescopes est possible. Cette technique permet même d'observer les objets transneptuniens qui ne peuvent pas être observés avec OA à cause de leur faible signal. Ainsi, en 2000 la binarité du transneptunien lointain 1998 WW<sub>31</sub> a été découverte par Veillet et al. (2001) au CFHT (Canada-France-Hawaii Telescope).

La technique des radars est aussi mobilisée dans l'observation des binaires, particulièrement pour les objets géocroiseurs. Bien que cette technique possède plusieurs contraintes, elle a permis de découvrir la plupart des satellites géocroiseurs (43 satellites) (Johnston, 2014). Les autres satellites géocroiseurs ont été découverts (ou supposés découverts) en analysant les courbes de lumière photométriques, ou en combinant cette analyse avec les radars. Généralement, l'objet binaire possède une courbe de lumière complexe, influencée par les événements mutuels (occultation et éclipse) et la rotation propre du primaire. D'habitude, la courbe de lumière a deux périodes de perturbation : la première est causée par la rotation du primaire non-sphérique, et la seconde, généralement plus longue, est seulement liée aux occultations et éclipses (Pravec et al., 2000). Cette technique est contrainte par les conditions géométriques, la période orbitale et la taille du satellite afin de pouvoir détecter la binarité (Merline et al., 2002).

**Modèles de formation.** Plusieurs scénarios, expliquant la formation des astéroïdes et des objets transneptuniens multiples, existent dans la littérature et continuent à se développer. La plupart d'entre eux sont basés sur le concept selon lequel la majorité des astéroïdes se présentent sous forme d'une soi-disante « rubble pile » (ou agglomérat lâche). Mais aucun des scénarios n'explique l'origine de tous les types de binaires.

Un scénario possible est celui d'une collision non-catastrophique, quand l'objet cible n'est pas disloqué complètement après l'impact. Il est possible que l'impact produise des

éjectas de cratères. Certains fragments éjectés peuvent alors être capturés en orbite autour du corps cible, s'ils ont une énergie cinétique suffisante. Dans le même temps, la vitesse d'éjection ne doit pas être trop grande pour que les fragments ne s'échappent pas complètement. Une accréation entre les fragments est aussi probable. Ainsi, selon Weidenschilling et al. (1989) les satellites formés par ce scénario ont une structure « rubble pile » en orbite prograde autour d'un primaire d'une forme très asphérique.

Un autre modèle de formation des systèmes binaires est celui d'une collision catastrophique (Doressoundiram et al., 1997). Selon ce modèle, certaines paires de fragments d'un corps parent disloqué peuvent être capturées en orbite l'un autour de l'autre. Dans ce scénario, la formation de plusieurs systèmes binaires est possible, ainsi que la formation de paires temporaires, détruites par la poursuite de l'évolution dynamique ou par des collisions avec les autres fragments.

La formation d'un système binaire par une fission d'un corps dû à un impact oblique est aussi probable (Merline et al., 2002). Selon ce scénario, le corps cible acquiert un moment angulaire suffisamment grand au moment de l'impact de sorte qu'il ne peut plus rester uni et doit se fissionner en deux, avec un certain moment angulaire transféré dans le mouvement orbital. En revanche, ce modèle semble moins probable que la dislocation complète de l'objet. Weidenschilling et al. (1989) suppose qu'il est difficile de donner un moment angulaire suffisant sans destruction de l'objet.

Le modèle de fragmentation dû à la rotation semble plus probable pour les petits binaires. Selon Richardson et al. (1998) les géocroiseurs de type « rubble pile » peuvent se défragmenter sous les effets de marée en se rapprochant de la Terre. En revanche, les études suivantes de Walsh and Richardson (2008) montrent que la fragmentation due à l'effet de marée n'est pas le mécanisme principal. Les binaires géocroiseurs possèdent des satellites en orbite très allongée, avec une excentricité et un demi-grand axe considérables. Par des simulations numériques en prenant en compte tous les aspects comme la forme et la rotation du corps, les rapprochements de planète, l'évolution de l'orbite sous l'effet de marée, Walsh and Richardson (2008) ont trouvé que de tels systèmes ne peuvent pas survivre longtemps. De plus, la découverte des petits systèmes binaires dans la ceinture principale, pour lesquels le rapprochement de planète pour la dislocation sous l'effet de marée n'est pas possible, a conduit à envisager un autre mécanisme de formation (Walsh and Jacobson, 2015).

L'effet YORP (Yarkovsky-O'Keefe-Radzievskii-Paddack) est un phénomène très probable pour expliquer l'origine des petits binaires. Selon l'effet YORP, un corps relativement petit et de forme irrégulière, chauffé par le Soleil, change sa vitesse de rotation. Rubincam (2000) suppose que l'effet YORP peut faire tourner l'astéroïde suffisamment rapidement pour amener à une fission rotationnelle.

La capture dynamique est un modèle de formation très probable pour plusieurs binaires transneptuniens qui possèdent un moment angulaire élevé (Noll et al., 2008). En raison de leur grande distance au Soleil et de leur vitesse orbitale, ils possèdent une énergie cinétique du mouvement très petite. Ainsi, lorsque deux corps de taille similaire entrent dans la sphère de Hill l'un de l'autre, leur attraction mutuelle est plus grande que la force de marée du Soleil. Ensuite, une perte d'énergie est nécessaire pour la stabilisation de l'orbite binaire. Elle peut alors se produire par le frottement dynamique de petits corps dans l'environnement orbital. Goldreich et al. (2002) supposent que ces mécanismes ont eu lieu pendant la période d'accréation, au début de l'histoire du Système solaire, ainsi que de tels binaires sont primordiaux. Les modèles de collision sont aussi considérés comme des mécanismes probables de formation de certains binaires transneptuniens (Noll et al., 2008).

---

**Objectif de la thèse : les binaires transneptuniens et la détermination d'orbite.** Les binaires transneptuniens (TNB, de l'anglais « transneptunian binaries ») sont d'un intérêt particulier dans cette thèse et en général. Étant des objets primordiaux, ils contiennent des informations importantes sur la formation et l'évolution du Système solaire (Gomes et al., 2005). Ils ont un avantage unique devant les objets sans satellite : leur masse peut être déterminée à partir de l'orbite du satellite. En conséquence, quand la taille de l'objet est mesurée ou estimée, par exemple à partir des mesures thermiques en infrarouge, la densité peut être déterminée. Cette propriété physique permet de déterminer des informations cruciales sur la structure interne des objets transneptuniens.

Malheureusement, très peu de TNB ont l'orbite de leur satellite bien déterminée. D'habitude, ces objets lointains et faibles ne sont pas faciles à observer, surtout si les deux composantes sont proches l'une de l'autre. Ainsi donc, la détermination d'orbite avec très peu d'observations rend le problème difficile voire même inapproprié pour la méthode classique des moindres carrés. Une méthode statistique avec une approche bayésienne est proposée dans cette thèse pour résoudre ce problème.

L'étude des caractéristiques physiques et orbitales des binaires transneptuniens mène à la compréhension de l'évolution de tels objets, permettant ainsi d'ajuster ou de rejeter l'un ou l'autre des modèles de formation.

**Structure de la thèse.** La thèse contient deux parties principales. La première partie est consacrée à l'étude et à la caractérisation de la population des TNB, observés au cours du programme « TNOs are Cool : A Survey of the Transneptunian Region » (Müller et al., 2009). Dans le premier chapitre nous présentons le programme « TNOs are Cool » et la population des objets transneptuniens de manière générale. Ensuite, dans le deuxième chapitre, nous décrivons l'ensemble des données à notre disposition sur les TNB, déduites ou prises dans la littérature. Dans le chapitre 3, des tests statistiques sont présentés et appliqués dans le but de comparer la population de TNB avec les objets transneptuniens sans satellite. Le dernier chapitre de la première partie, le chapitre 4, est consacré à l'étude des corrélations entre les paramètres physiques et orbitaux de la population des binaires transneptuniens. Les tests statistiques, contenant une analyse des incertitudes, ainsi que ces résultats et leur interprétation sont présentés.

La deuxième partie de la thèse décrit le problème de la détermination d'orbite mutuelle d'un système binaire et une méthode proposée pour le résoudre. Le modèle des deux points de vue – dynamique et statistique – est présenté dans le chapitre 6. Dans ce chapitre nous décrivons également deux méthodes existantes utilisées pour ce problème. Ensuite une méthode de Monte-Carlo par les chaînes de Markov est décrite et proposée dans le chapitre 7. L'application de cette méthode sur les observations simulées et réelles est présentée dans le chapitre 8, ainsi que les résultats et les difficultés de la méthode.

Les conclusions à la fin de chaque partie de la thèse rassemblent les résultats obtenus avec des perspectives de développements ultérieurs.

## Première partie

# Caractérisation des objets transneptuniens binaires



# Chapitre 1

## Introduction

### Sommaire

<b>1.1</b>	<b>Mission Spitzer</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>1.2</b>	<b>Mission Herschel</b> . . . . .	<b>12</b>
<b>1.3</b>	<b>Programme « TNOs are Cool »</b> . . . . .	<b>12</b>
<b>1.4</b>	<b>Classification des TNO</b> . . . . .	<b>13</b>
1.4.1	Objets en résonance . . . . .	14
1.4.2	Disque des objets épars . . . . .	15
1.4.3	Objets détachés . . . . .	15
1.4.4	Objets classiques . . . . .	15

Jusqu'à présent, plus de deux mille objets ont été découverts en orbite au-delà de Neptune, parmi lesquels 80 sont des systèmes multiples : 77 systèmes binaires, deux systèmes triples et le système de Pluton avec ses 5 satellites (Johnston, 2014). Ces objets transneptuniens (TNO, de l'anglais « transneptunien objects ») sont formés des restes du disque protoplanétaire, ainsi, leurs propriétés physiques fournissent des informations importantes sur la formation et l'évolution du Système solaire (Gomes et al., 2005). Malheureusement, les paramètres fondamentaux, comme la taille, l'albédo, la densité et la température sont difficiles à mesurer. La mesure du flux thermique est le meilleur moyen à notre disposition pour déterminer les propriétés physiques. Cependant, cette mesure – surtout pour les objets froids dans le Système solaire externe – n'est possible que depuis l'espace, car l'atmosphère terrestre bloque le rayonnement spatial. Les TNO ont des pics d'émission thermique aux longueurs d'onde pour lesquels l'atmosphère de la Terre est opaque. Grâce aux télescopes spatiaux, comme Spitzer (Werner et al., 2004) et Herschel (Pilbratt, 2008), il est devenu possible d'obtenir la taille et l'albédo d'environ 140 TNO.

### 1.1 Mission Spitzer

Spitzer est un télescope spatial infrarouge de la NASA (Werner et al., 2004) et il est le quatrième du programme « Grands Observatoires ». Il a été lancé en 2003 et continue à fonctionner aujourd'hui. D'une masse initiale de 950 kg, il a été placé sur une orbite héliocentrique parallèle à celle de la Terre avec une période orbitale de 372 jours. Ce choix d'orbite est justifié : en effet, le télescope infrarouge doit tenir ses instruments à une température basse. Par rapport aux télescopes infrarouges précédents placés en orbite autour de la Terre (qui réfléchit une partie de la chaleur émise par le Soleil) l'orbite de Spitzer permet d'économiser l'hélium utilisé pour le refroidissement initial des instruments. Spitzer est constitué d'un télescope de 85 cm de diamètre et de trois instruments pour

analyser le rayonnement infrarouge. Ces trois instruments scientifiques sont : IRAC (Infrared Array Camera) une caméra permettant d'observer l'infrarouge proche et moyen (3 à 8 microns), IRS (Infrared Spectrograph) un spectrographe produisant des spectres du rayonnement entre 5 et 38 microns et MIPS (Multiband Imaging Photometer) un spectrophotomètre pour l'infrarouge lointain (50-160 microns). Tous les appareils optiques sont refroidis par de l'hélium liquide (Werner et al., 2004). Au début de la mission, Spitzer avait 360 litres d'hélium liquide à son bord qu'il a utilisés pour refroidir les instruments et le télescope jusqu'à mai 2009. Actuellement, le télescope n'est plus refroidi et seule la caméra infrarouge IRAC (infrarouge proche et moyen) continue de fonctionner sans refroidissement. Dans cet état, le télescope peut rester partiellement opérationnel encore quelques années.

L'objectif scientifique principal de la mission est d'observer des phénomènes visibles dans l'infrarouge comme : la naissance de l'univers, la formation et l'évolution des galaxies, des étoiles et des planètes ainsi que la composition chimique de l'univers.

## 1.2 Mission Herschel

Herschel est un télescope spatial infrarouge de l'Agence spatiale européenne (Pilbratt, 2008). Il a été lancé en 2009 et a fonctionné jusqu'en 2013. Herschel a été lancé avec un autre observatoire spatial, Planck, et placé au point de Lagrange L2 du système Terre-Soleil. Avec un miroir de 3.5 mètres de diamètre, Herschel est le plus grand des télescopes spatiaux.

Herschel possède trois instruments scientifiques : PACS (Photodetector Array Camera and Spectrometer) un bolomètre et un spectromètre de moyenne résolution fonctionnant sur les longueurs d'onde de 55 à 210 microns, SPIRE (Spectral and Photometric Imaging Receiver) une caméra et un spectromètre de moyenne résolution, fonctionnant sur les longueurs d'onde de 200 à 670 microns, et HIFI (Heterodyne Instrument for the Far-Infrared) un spectromètre hétérodyne à très haute résolution, fonctionnant sur les longueurs d'onde de 157 à 625 microns.

Comme pour Spitzer, l'hélium liquide a été utilisé pour refroidir les instruments. Herschel a été fourni avec 2 400 litres d'hélium ce qui a suffi pour les 3 ans et demi de la mission. Les objectifs scientifiques principaux de Herschel sont similaires à ceux de Spitzer. Herschel est destiné à l'observation dans l'infrarouge pour étudier la formation des étoiles, des galaxies primitives et l'évolution des galaxies ainsi que la chimie du milieu spatial.

## 1.3 Programme « TNOs are Cool »

Le programme « TNOs are Cool : A Survey of the Transneptunian Region » (Müller et al., 2009), nom inspiré du fait que les TNO sont des objets froids (20-50 K), a été créé pour étudier les objets transneptuniens, en particulier ceux observés par le télescope spatial Herschel. Le projet contient l'utilisation de deux instruments scientifiques : PACS et SPIRE, pour des mesures précises en différentes longueurs d'onde.

Le programme a reçu 373 heures de temps d'observation pour les 140 objets du projet initial. Deux satellites naturels, Phoebe de Saturne et Sycorax d'Uranus, font partie des 140 objets. Les autres sont des TNO et des centaures en transition de la ceinture de Kuiper vers le Système solaire interne (la classification est décrite dans la section 1.4). Par ailleurs, le programme a prévu de compléter les observations de Herschel avec les résultats déjà obtenus avec la mission Spitzer. Le projet « TNOs are Cool » a quatre buts scientifiques principaux (Müller et al., 2009).

Premièrement, mesurer la taille et l'albédo. Le grand échantillon de TNO observés permet d'avoir une information sur la distribution initiale des tailles dans la ceinture de Kuiper et ainsi contraindre les modèles de formation. De plus, la connaissance de l'albédo va permettre d'estimer la composition de la surface. Un intérêt important du projet réside dans la recherche de corrélations entre la taille, l'albédo et d'autres paramètres physiques et orbitaux.

Deuxièmement, mesurer la densité. Celle-ci concerne particulièrement les systèmes binaires dont la masse peut être déterminée à partir de leurs observations astronomiques. Les mesures de diamètre permettent de calculer la masse volumique (angl. « bulk density »). Ce paramètre physique contient une information importante sur la structure interne et, par conséquent, il est relié à l'origine et l'évolution des TNO (Noll et al., 2008).

Le troisième but du projet est l'étude des caractéristiques de la surface des TNO. L'émission thermique d'objets ne dépend pas que de la taille et de l'albédo, mais aussi des propriétés de la surface, comme l'inertie thermique, la rugosité de surface et l'émissivité. Quand la mesure en une seule longueur d'onde est disponible, ces effets ne sont pas pris en compte, et dans ce cas la précision de l'albédo et de la taille est très faible. En revanche, si l'objet est observé en deux ou plusieurs longueurs d'onde, ces effets peuvent être pris en compte. Dans ce cas, le modèle de distribution de température à la surface est ajusté, ce qui permet d'améliorer considérablement la détermination de l'albédo et du diamètre.

Le quatrième but du projet est de comprendre l'origine de la périodicité de la courbe de lumière : dépend-elle de la forme de l'objet ou de la variation de l'albédo ? La courbe thermique permet de résoudre cette ambiguïté. Dans le projet « TNOs are cool » il est prévu d'observer 4 objets pour déterminer leurs courbes de lumière pendant toute leur période de rotation.

## 1.4 Classification des TNO

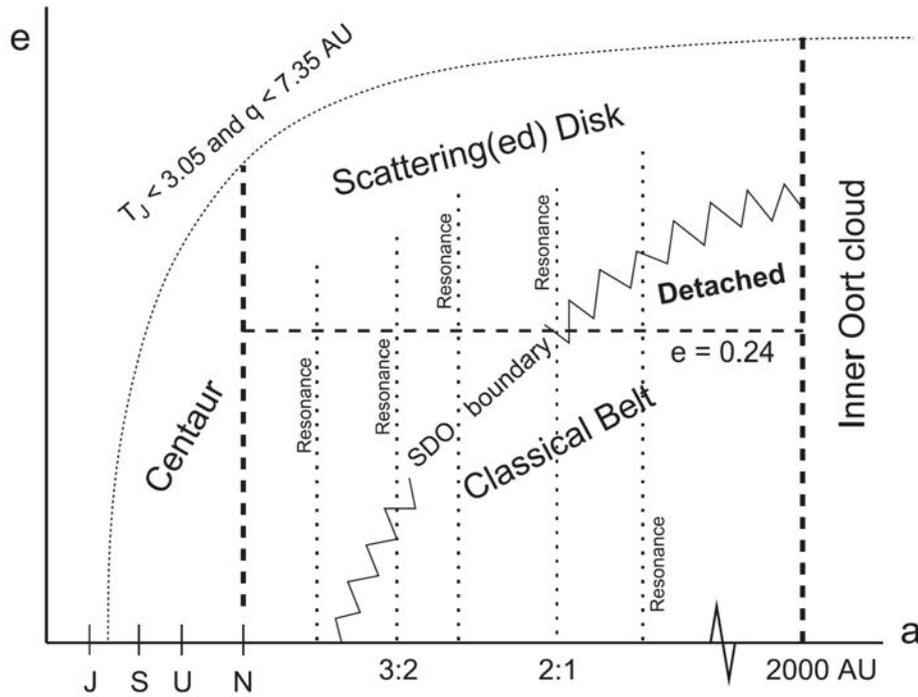
Plusieurs classifications des objets transneptuniens existent dans la littérature. Cela est dû au fait que les limites entre certains groupes ne sont souvent pas très bien déterminées. Ici, nous utilisons la classification par la dynamique de Gladman et al. (2008). Cette classification est basée principalement sur l'idée de distinction entre les classes de TNO à partir de leur dynamique actuelle à court-terme. La classification est présentée sur la figure 1.1.

Tout d'abord, pour séparer les TNO des autres groupes, nous déterminons les contraintes sur le demi-grand axe et l'excentricité. Pour cela, le paramètre de Tisserand par rapport à Jupiter, noté  $T_J$ , (voir équation 1.1) et le périhélie  $q = a(1 - e)$  sont choisis comme critères de contraintes.

$$T_J = \frac{a_J}{a} + 2\sqrt{\frac{a_J}{a} + (1 - e^2)} \cos i, \quad (1.1)$$

où  $a$ ,  $e$ , et  $i$  sont les paramètres orbitaux de l'objet considéré : demi-grand axe, excentricité et inclinaison respectivement et  $a_J$  est le demi-grand axe de Jupiter (environ 5.2 ua). Ainsi, avec  $T_J < 3.05$ , ce qui correspond aux orbites avec un périhélie au-delà de Jupiter et une inclinaison suffisamment haute de sorte que le deuxième terme de l'équation (1.1) devient petit, nous fixons la frontière entre les TNO et les comètes.

La contrainte  $q < 7.35$  ua (en équidistance entre Jupiter et Saturne,  $q \approx 1/2(q_J + q_S)$  où  $q_J$  et  $q_S$  sont les périhélies de Jupiter et Saturne respectivement), est utilisée comme un critère complémentaire. Cette combinaison de conditions pour  $T_J$  et  $q$  ne sépare les TNO que des comètes de Jupiter, mais pas des centaures. Pour déterminer la frontière



**Figure 1.1** – Schéma des contraintes entre les centaures, les objets éparés, le nuage d’Oort, les objets détachés et les objets classiques (Gladman et al., 2008).

entre les TNO et les centaures, une condition sur le demi-grand axe  $a < a_N$  (où  $a_N$  est le demi-grand axe de Neptune) est choisie.

La frontière suivante qui contraint les TNO est le nuage d’Oort interne. Malgré que les limites du nuage d’Oort ne soient pas déterminées exactement, formellement on pose la limite interne du nuage :  $a = 2000$  ua.

Pour résumer, les TNO sont délimités sur le demi-grand axe  $a$  par les centaures à gauche et le nuage d’Oort à droite (voir schéma 1.1), et au dessus par la population des comètes de Jupiter (JFC). Les TNO sont classifiés en deux grands groupes : la ceinture classique (KBO, en anglais « Kuiper belt objects ») puis les objets éparés et détachés (SDO/DO). Cependant, la limite entre ces deux groupes n’est pas bien déterminée par une division simple, car la frontière entre les deux populations est complexe et implique tous les paramètres orbitaux. Bien que les frontières de la ceinture classique ne soient pas très claires, il est d’usage de considérer qu’elle s’étend entre 32 et 55 ua et contient des objets en orbite résonante et non-résonante.

En effet, comme noté par Gladman et al. (2008) les terminologies « région transneptunienne » et « ceinture de Kuiper » deviennent quasiment les mêmes, et la région transneptunienne est définie comme l’ensemble des objets classiques, de la population des SDO/DO et les objets résonants extérieurs aux Troyens de Neptune.

### 1.4.1 Objets en résonance

L’objet est en résonance  $p : q$  quand sa période orbitale est une fraction entière ( $p/q$ ) de celle de Neptune (cela s’appelle la résonance du moyen mouvement). Ces objets restent en mouvement synchronisé avec Neptune et évitent d’être perturbés.

En particulier, les objets en résonance 2:3 sont appelés *plutinos*, car Pluton en fait partie. Plus de 200 objets se trouvent dans cette résonance, ils ont un demi-grand axe d’environ

39.4 ua. Parmi les autres résonances existent des groupes à 1:2, 3:4, 3:5, 4:7 et 2:5. On peut évoquer aussi les objets *troyens* qui sont en résonance 1:1 avec Neptune. Ils se trouvent sur des orbites très stables et occupent les points de Lagrange L4 et L5.

### 1.4.2 Disque des objets épars

Les objets épars (SDO) sont des objets avec un périhélie  $q > 30$  ua. Ils sont généralement situés sur des orbites très excentriques, non-stables et très perturbées par Neptune. Par définition de Gladman et al. (2008), les SDO sont les objets qui sont caractérisés par une variation forte du demi-grand axe. Il est d'usage de considérer qu'une variation du demi-grand axe supérieure à 1.5 ua pendant 10 millions d'années (dans l'intégration numérique) classe l'objet comme un SDO. Ainsi, les objets épars se dispersent en un très large intervalle du demi-grand axe et se bornent aux centaures ( $a > 50$  ua) et le nuage de Oort interne ( $a < 2000$  ua).

### 1.4.3 Objets détachés

Les objets détachés (DO) sont parfois classés de manière inappropriée parmi les objets épars, car certains d'entre eux se trouvent dans la même région. Mais il est préférable de les classer dans un groupe séparé, dans lequel les objets sont en orbite avec un périhélie très éloigné de Neptune. Plus précisément, ces objets doivent être suffisamment loin de l'influence gravitationnelle de Neptune pour qu'ils en soient détachés.

La frontière des objets détachés dans l'espace des paramètres est inconnue et s'éloigne de plus en plus avec la découverte de nouveaux TNO en orbite avec de très grand demi-grand axe. Ils peuvent inclure des objets du nuage de Oort et des objets en transition entre les SDO et le nuage de Oort interne.

Pour séparer les objets détachés des SDO, l'intégration numérique de la variation du demi-grand axe sur 10 millions d'années peut être appliquée. Mais trouver la limite inférieure d'excentricité est un problème ouvert. Selon Gladman et al. (2008) cette frontière est déterminée à  $e = 0.24$ . Ils ont établi cette division pour tenir compte des orbites stables à l'intérieur de la résonance 2:1 avec une inclinaison modérée ( $10^\circ - 20^\circ$ ) et pour les classer comme des objets classiques, plutôt que comme des détachés.

### 1.4.4 Objets classiques

Les objets classiques, aussi appelés *cubewanos*, sont tous des objets non-résonants qui n'appartiennent à aucun autre groupe. Généralement, ils se trouvent en orbite presque circulaire. Les objets classiques se répartissent entre la ceinture principale des classiques, la ceinture interne ( $a < 39.4$  ua) et la ceinture externe ( $a > 48.4$  ua). La limite des classiques est en  $e < 0.24$ , au-delà de laquelle se trouvent les SDO et les DO. Une autre division existe pour les objets classiques. Elle les sépare en deux groupes : la population des « froids » (cCl), qui possède des orbites peu inclinées et presque circulaires, et la population des « chauds » (hCl), qui possède des orbites inclinées plus excentriques. Cette notation signifie que les objets « chauds » sont dynamiquement « chauds », c'est-à-dire qu'ils sont en orbites excitées, tandis que les objets « froids », sont dynamiquement stables. Les cCl sont caractérisés par la présence d'une grande quantité d'objets binaires. Plusieurs limites de l'inclinaison sont proposées pour distinguer les hCl et cCl. Les limites à  $i = 4.5^\circ$  ou  $i = 5^\circ$  (Doressoundiram et al., 2002) sont souvent utilisées.

## Chapitre 2

# Présentation des données

### Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Origine des données . . . . .</b>	<b>16</b>
<b>2.2</b>	<b>Calculs de diamètre et d'albédo . . . . .</b>	<b>21</b>
<b>2.3</b>	<b>Calcul de la densité . . . . .</b>	<b>23</b>
<b>2.4</b>	<b>L'ensemble des données . . . . .</b>	<b>24</b>

Au cours du programme « TNOs are cool » un échantillon de 30 objets binaires a été examiné. Parmi ces objets, 6 font partie du groupe des résonants (dont 4 sont des plutinos), 2 sont des objets épairs, 3 sont des objets détachés et 19 sont des objets classiques (dont 11 objets « froids » et 8 objets « chauds »). L'histogramme de distribution des objets binaires observés selon la classe dynamique est présenté sur la figure 2.1.

Dans les prochaines sections nous allons analyser les paramètres physiques et orbitaux des astéroïdes binaires transneptuniens. Avant cette analyse détaillée, nous présentons toutes les données que nous allons utiliser.

### 2.1 Origine des données

Dans notre analyse, nous ne prenons en compte que les astéroïdes du programme « TNOs are cool ». Ainsi, ce sont 138 objets, dont 28 astéroïdes binaires et 2 multiples. Dans notre étude, nous ajoutons les astéroïdes multiples à l'ensemble des binaires. En parlant du groupe des astéroïdes binaires nous sous-entendons donc que les multiples font partie de ce groupe. Nous n'avons pas pris en analyse Pluton car cet objet est un système dynamiquement beaucoup plus complexe et déjà largement étudié par d'autres équipes.

Les informations sur les objets contiennent les caractéristiques suivantes :

- des informations générales qui proviennent de la base de données « TNOs are cool » située à Meudon : désignation, nom du satellite (s'il existe), type de système (binaire ou multiple), classe dynamique, nombre d'observations par Herschel et Spitzer (Tableau 2.1) etc. ;
- les paramètres d'orbite héliocentrique : demi-grand axe ( $a$ ), distance périhélique ( $q$ ), excentricité ( $e$ ), inclinaison ( $i$ ) (Tableau 2.2) ;
- les valeurs du diamètre effectif  $D$  et de l'albédo géométrique  $p_V$  avec leur incertitude correspondante sont calculées (voir 2.2) par l'équipe « TNOs are cool » et aimablement fournies par Emmanuel Lellouch et Esa Vilenius (Tableau 2.3) ;
- les informations sur la différence de magnitude entre le primaire et secondaire  $\Delta H_V$  (Tableau 2.4), les paramètres de l'orbite relative du secondaire autour du primaire (la période orbitale ( $P$ ) et le demi-grand axe ( $a_r$ )), si elle est déterminée, ainsi

**Table 2.1** – Données utilisées dans ce travail : objets binaires et triples selon le nombre d’observations par Herschel et Spitzer, leur groupe dynamique (objets classiques froids (cCl) et chauds (hCl), objets épars (ScD) et détachés (Det), objets en résonance avec Neptune (Res) et plutinos (Plu)).

Désignation	Groupe	Type	Herschel	Spitzer
(275809) 2001 QY297	cCl	Binaire	8	4
(66652) Borasisi	cCl	Binaire	8	14
(79360) Sila-Nunam	cCl	Binaire	9	5
(88611) Teharonhiawako	cCl	Binaire	8	4
2001 RZ143	cCl	Binaire	8	4
2001 XR254	cCl	Binaire	8	0
2002 VT130	cCl	Binaire	0	11
2003 QA91	cCl	Binaire	8	8
2003 QR91	cCl	Binaire	non publié	
2003 WU188	cCl	Binaire	8	0
2005 EF298	cCl	Binaire	8	0
2001 QC298	hCl	Binaire	non publié	
Makemake	hCl	Binaire	16	15
(136108) Haumea	hCl	Triple	9	6
(120347) Salacia	hCl	Binaire	12	2
(148780) Altjira	hCl	Binaire	8	11
(174567) Varda	hCl	Binaire	8	0
(50000) Quaoar	hCl	Binaire	10	16
(55637) 2002 UX25	hCl	Binaire	10	5
(208996) 2003 AZ84	Plu	Binaire	6	3
(38628) Huya	Plu	Binaire	non publié	
(47171) 1999 TC36	Plu	Triple	8	3
(90482) Orcus	Plu	Binaire	12	5
(119979) 2002 WC19	Res	Binaire	8	4
(26308) 1998 SM165	Res	Binaire	8	18
(42355) Typhon	ScD	Binaire	10	4
(65489) Ceto	ScD	Binaire	8	2
(136199) Eris	Det	Binaire	8	19
(229762) 2007 UK126	Det	Binaire	8	0
(48639) 1995 TL8	Det	Binaire	8	4

**Table 2.2** – Objets binaires, observés par Herschel et Spitzer, selon leur groupe (objets classiques froids (cCl) et chauds (hCl), objets épars (ScD) et détachés (Det), objets en résonance avec Neptune (Res) et plutinos (Plu)), et les éléments d’orbite héliocentrique (demi-grand axe (a), excentricité (e), inclinaison (i) et périhélie (q)).

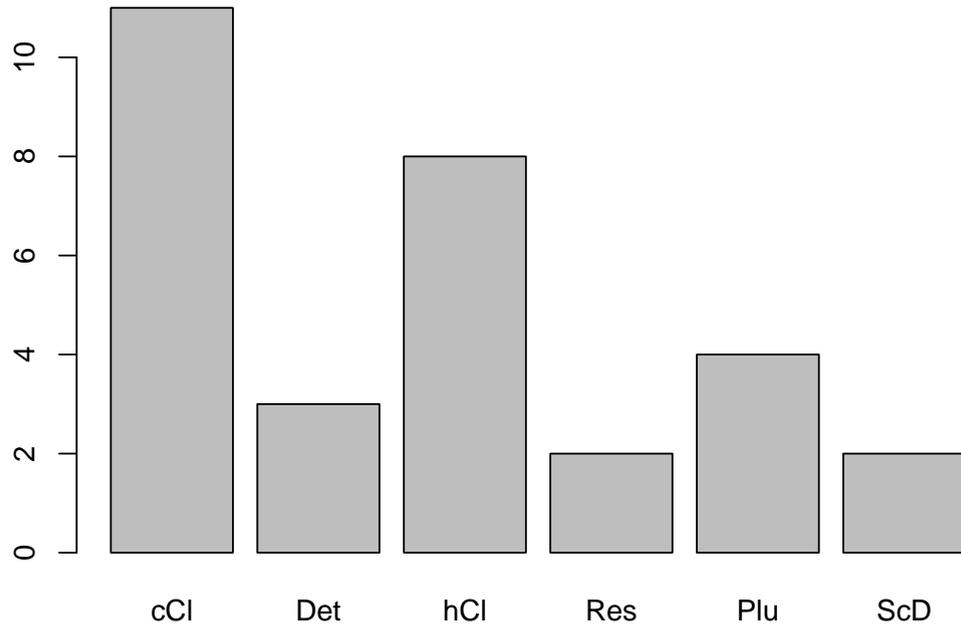
TNB	Groupe	a, ua	e	i, deg	q, ua
Typhon	ScD	38.383	0.543	2.426	17.529
Huya	Plu	39.423	0.275	15.465	28.563
Orcus	Plu	39.442	0.219	20.569	30.821
2003 AZ84	Plu	39.657	0.175	13.558	32.709
1999 TC36	Plu	39.659	0.23	8.416	30.541
Salacia	hCl	41.869	0.109	23.944	37.319
2002 VT130	cCl	42.429	0.03	1.163	41.146
2002 UX25	hCl	42.712	0.145	19.444	36.522
2001 XR254	cCl	42.893	0.033	1.235	41.479
Haumea	hCl	43.256	0.192	28.217	34.964
Quaoar	hCl	43.39	0.034	7.984	41.902
Borasisi	cCl	43.627	0.085	0.562	39.928
2001 QY297	cCl	43.763	0.085	1.546	40.053
Teharonhiawako	cCl	43.812	0.031	2.59	42.436
2005 EF298	cCl	43.839	0.087	2.869	40.038
2001 RZ143	cCl	44.048	0.065	2.129	41.204
Altjira	hCl	44.107	0.062	5.208	41.385
Sila-Nunam	cCl	44.108	0.013	2.237	43.515
2003 WU188	cCl	44.118	0.041	3.773	42.309
2003 QA91	cCl	44.653	0.069	2.413	41.592
Makemake	hCl	45.715	0.156	29.007	38.463
Varda	hCl	45.809	0.144	21.53	39.196
2001 QC298	hCl	46.124	0.121	30.626	40.550
2003 QR91	cCl	46.795	0.190	3.489	37.895
2002 WC19	Res	47.884	0.26	9.192	35.432
1998 SM165	Res	48.112	0.374	13.466	30.098
1995 TL8	Det	53.065	0.245	0.245	40.087
Eris	Det	67.665	0.442	44.178	37.758
2007 UK126	Det	73.744	0.49	23.367	37.642
Ceto	ScD	101.001	0.824	22.309	17.771

**Table 2.3** – Données de diamètre effectif ( $D$ ) et d'albédo ( $p_V$ ) avec les limites d'erreur supérieures ( $\varepsilon_{D+}$ ,  $\varepsilon_{p_V+}$ ) et inférieures ( $\varepsilon_{D-}$ ,  $\varepsilon_{p_V-}$ ).

TNB	D, km	$\varepsilon_{D+}$	$\varepsilon_{D-}$	$p_V$	$\varepsilon_{p_V+}$	$\varepsilon_{p_V-}$
Typhon	185	7	7	0.044	0.003	0.003
2002 WC19	348	45	45	0.167	0.052	0.037
1998 SM165	291	22	26	0.083	0.018	0.013
Orcus	958	23	23	0.231	0.018	0.011
Ceto	281	11	11	0.056	0.006	0.006
Salacia	901	45	45	0.044	0.004	0.004
2001 QY297	229	22	108	0.152	0.439	0.035
2001 XR254	221	41	71	0.136	0.168	0.044
Haumea	1240	69	59	0.804	0.062	0.095
Altjira	331	51	187	0.043	0.1825	0.0095
Borasisi	163	32	66	0.236	0.438	0.077
Varda	792	91	84	0.102	0.024	0.020
Teharonhiawako	220	41	44	0.145	0.086	0.045
2005 EF298	174	27	32	0.16	0.13	0.07
Eris	2454	117	117	0.845	0.088	0.088
Quaoar	1074	38	38	0.127	0.010	0.009
1999 TC36	393	25	27	0.079	0.013	0.011
2002 UX25	697	23	25	0.107	0.005	0.008
2001 QC298	303	27	30	0.061	0.027	0.017
Sila-Nunam	343	42	42	0.090	0.027	0.017
1995 TL8	244	82	63	0.231	0.189	0.102
2001 RZ143	140	39	33	0.191	0.066	0.045
2003 AZ84	727	62	67	0.107	0.023	0.016
2003 QA91	260	30	36	0.130	0.119	0.075
2003 QR91	280	27	30	0.054	0.035	0.028
2003 WU188	220	-	-	0.15	-	-
2007 UK126	599	77	77	0.167	0.058	0.038
Huya	458	9	9	0.083	0.004	0.004
2002 VT130	324	57	68	0.097	0.098	0.049
Makemake	1430	9	9	0.77	0.030	0.030

**Table 2.4** – Données de la différence de magnitude avec sa référence publiée.

TNB	Satellite	$\Delta H_V$	Référence
2001 RZ143		0.1	Noll et al. (2008)
2003 QA91		0.1	Noll et al. (2008)
Sila-Nunam	Nunam	0.12	Grundy et al. (2012)
2001 QY297		0.2	Grundy et al. (2011)
2003 QR91		0.2	Grundy (2015)
Altjira		0.23	Grundy et al. (2011)
2001 XR254		0.415	Grundy et al. (2011)
2001 QC298		0.44	Grundy (2015)
2002 VT130		0.44	Grundy (2015)
Borasisi	Pabu	0.45	Grundy et al. (2011)
Ceto	Phorcys	0.56	Grundy et al. (2007)
2005 EF298		0.59	Grundy (2015)
Teharonhiawako	Sawiskera	0.7	Grundy et al. (2011)
2003 WU188		0.7	Noll et al. (2008)
Typhon	Echidna	1.3	Grundy (2015)
Huya		1.4	Mommert et al. (2012)
Varda		1.45	Grundy (2015)
1995 TL8		1.7	Stephens and Noll (2006)
1999 TC36	S/2001 (47171) 1	2.14, 0.2	Benecchi et al. (2010)
Salacia	Actaea	2.37	Stansberry et al. (2012)
2002 UX25		2.5	Brown (2013)
2002 WC19		2.5	Grundy (2015)
Orcus	Vanth	2.61	Grundy et al. (2011), B09b
1998 SM165	S/2001 (26308) 1	2.69	Grundy et al. (2011)
Haumea	Hi'iaka, Namaka	2.98, 4.6	Ragozzine and Brown (2009)
2007 UK126		3.79	Grundy (2015)
Eris	Dysnomia	4.43	Brown and Schaller (2007)
2003 AZ84		5.0	Grundy (2015)
Quaoar	Weywot	5.6	Fraser et al. (2013)
Makemake	S/2015 (136472) 1	7.8	Parker et al. (2016)



**Figure 2.1** – Distribution des objets binaires, observés par Herschel et Spitzer, selon leur classe dynamique (objets classiques froids (cCl) et chauds (hCl), objets épars (ScD) et détachés (Det), objets en résonance avec Neptune (Res) et plutinos (Plu)).

que la masse totale ( $m$ ) du système binaire (Tableau 2.5) ont été recueillies dans la littérature et la base de données de Johnston (Johnston, 2014), disponible sur Internet en libre accès<sup>1</sup> ;

- la valeur de la masse volumique (ensuite appelée densité et désignée  $\rho_b$ , en anglais « bulk density ») a été calculée par nous-mêmes à partir du diamètre effectif, de la masse totale du système binaire (si disponible) et de la différence de magnitude (voir section 2.3, Tableau 2.5).

## 2.2 Calculs de diamètre et d'albédo

L'émission thermique d'un objet est liée à son albédo et à sa taille, ainsi, comme nous l'avons déjà mentionné, les observations thermiques en infra-rouge jouent un rôle important dans la caractérisation physique des astéroïdes.

L'émission thermique des TNO a son pic en longueur d'onde à  $40 \mu m$  ou plus, ce qui est inaccessible avec les observations depuis le sol (bande passante  $5-20 \mu m$ ) à cause de l'absorption atmosphérique. La combinaison des mesures de flux thermique par Spitzer-MIPS et par Herschel-PACS donne la possibilité de déduire le diamètre et l'albédo géométrique.

Pour interpréter l'émission thermique d'astéroïdes en terme de paramètres physiques, un modèle thermique est nécessaire. Dans le programme « TNO are cool » les modèles

1. <http://www.johnstonsarchive.net/>

**Table 2.5** – Données d'orbite du satellite : la période orbitale  $P$  et le demi-grand axe  $a_r$ . Données du système binaire : la masse totale  $m$ , la densité calculée  $\rho_b$  et son incertitude  $\pm\varepsilon_\rho$ .

TNB	P, jours	$a_r$	$m \pm \sigma_m \times 10^{19}$ , kg	$\rho_b, \frac{g}{cm^3}$	$\pm\varepsilon_\rho$
Typhon	18.982	1628	$0.087 \pm 0.003$	0.33	0.012
2002 WC19	8.403	4090	$7.7 \pm 0.005$	3.90	0.253
1998 SM165	130.158	11377	$0.687 \pm 0.0018$	0.59	0.002
Orcus	9.539	9006	$63.6 \pm 0.33$	1.53	0.008
Ceto	9.554	1840	$0.541 \pm 0.042$	0.64	0.050
Salacia	5.494	5619	$43.6 \pm 1.1$	1.29	0.032
2001 QY297	138.11	9960	$0.411 \pm 0.0038$	0.92	0.009
2001 XR254	125.58	9310	$0.406 \pm 0.02$	1.00	0.049
Haumea	18.278	49880	$403 \pm 4$	4.44	0.044
Altjira	139.56	9904	$0.399 \pm 0.0067$	0.30	0.005
Borasisi	46.289	4528	$0.343 \pm 0.0027$	2.11	0.017
Varda	5.7508	4800	$26.5 \pm 0.39$	1.27	0.019
Teharonhiawako	828.8	27670	$0.244 \pm 0.0032$	0.60	0.008
2005 EF298	0.59	7700	$0.22 \pm 0.01$	1.10	0.050
Eris	15.79	37580	$1660 \pm 20$	2.20	0.026
Quaoar	12.26	13800	$140 \pm 21$	2.18	0.326
1999 TC36	2.14	7411	$1.28 \pm 0.006$	0.62	0.003
2002 UX25	8.3095	4770	$12.5 \pm 0.3$	0.79	0.019
2001 QC298	19.2287	3813	$1.19 \pm 0.014$	1.14	0.013
Sila-Nunam	12.51	2777	$1.08 \pm 0.022$	0.72	0.015
Makemake	12.4	21000	$260 \pm 50$	1.7	0.3267

« Near-Earth Asteroid Thermal Model » (NEATM, Harris (1998)) et « hybrid standard thermal model » (hybrid STM, Stansberry et al. (2008)) ont été utilisés. Les deux modèles sont identiques, sauf que le modèle hybride STM suppose que l'angle de phase est nul. Initialement, le modèle NEATM a été créé pour les objets géocroiseurs, mais il est applicable et utilisé pour tous les objets sans atmosphère.

Les mesures en différentes longueurs d'onde sont utilisées pour contraindre un paramètre, qui s'appelle le « paramètre rayonnant »,  $\eta$  (en angl. « beaming parameter »). Il a été introduit dans le but de modifier le modèle de distribution de température pour prendre en compte l'augmentation de l'émission thermique en petit angle de phase, lié à la rugosité de surface, l'inertie thermique et la rotation. Ainsi, pour les objets parfaitement lisses et sans inertie thermique on aura  $\eta = 0$ . Finalement, les mesures thermiques permettent de contraindre non seulement deux paramètres – taille et albédo – mais aussi le paramètre rayonnant (quand on a des mesures en plusieurs longueurs d'onde).

Le problème de détermination de  $D$  et  $p_V$  (et  $\eta$ , si les mesures de Herschel sont combinées à celles de Spitzer) est un ajustement du modèle thermique aux observations. Soit, pour une distribution de température donnée, l'émission thermique  $F$  observée en longueur d'onde  $\lambda$

$$F(\lambda) = \frac{\epsilon}{\Delta^2} \int_S B(\lambda, T(S)) dS \mathbf{u}, \quad (2.1)$$

où  $\epsilon$  est l'émissivité,  $\Delta$  est la distance entre l'observateur et l'astéroïde,  $B(\lambda, T(S))$  est la loi de rayonnement de Planck pour les corps noirs,  $T(S)$  est la distribution de température sur la surface  $S$  et  $\mathbf{u}$  est le vecteur unitaire vers l'observateur d'élément de surface  $dS$ .

Dans le travail du groupe « TNOs are cool » les hypothèses suivantes sont faites :

- $\epsilon = 0.9$ , qui est basé sur des mesures de laboratoire sur de la poudre de silicate en longueur d'onde  $22 \mu m$  ;
- l'intégrale de phase  $q = 0.336 p_V + 0.479$  ;
- si l'observation de Spitzer est indisponible,  $\eta = 1.2 \pm 0.35$ .

Avec ces hypothèses la température subsolaire est :

$$T_{SS} = \left( \frac{F_S(1 - p_V q)}{r^2 \eta \epsilon \sigma} \right)^{1/4}, \quad (2.2)$$

où  $F_S$  est la constante solaire (le flux solaire à 1 ua),  $\sigma$  est la constante de Boltzmann,  $r$  est la distance héliocentrique. Le diamètre  $D$  est lié à l'albédo par la relation :

$$D = \frac{2 \times 10^{0.2(V_s - H_v)}}{\sqrt{p_V}}, \quad (2.3)$$

où  $V_s = -26.76 \pm 0.02$  est la magnitude apparente du Soleil, et  $H_v$  est la magnitude absolue de l'objet en bande V. Ainsi, la solution pour  $D$ ,  $p_V$  (et  $\eta$ ) est déterminée en utilisant l'approche des moindres carrés pour la minimisation du  $\chi_\nu^2$  :

$$\chi_\nu^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^N \frac{[F(\lambda_i) - F_{model}(\lambda_i)]^2}{\sigma_i^2}, \quad (2.4)$$

où  $\nu$  est le nombre de degrés de liberté,  $N$  le nombre de mesures,  $F(\lambda_i)$  est la densité de flux mesurée à la longueur d'onde  $\lambda_i$  avec l'incertitude  $\sigma_i$  et  $F_{model}(\lambda_i)$  est le flux de la modélisation d'émission.

Dans le cas des systèmes binaires,  $D$  est le diamètre des aires équivalentes, c'est-à-dire le diamètre de la sphère avec la même aire totale de surface.

L'estimation des erreurs du diamètre et de l'albédo est faite par la méthode de Monte-Carlo, avec une simulation de 500 ensembles de densités de flux, distribués normalement autour des densités de flux observées et avec l'écart type des observations.

## 2.3 Calcul de la densité

Contrairement aux astéroïdes simples, les binaires permettent la détermination de leur densité. La masse du système binaire est calculée à partir de la troisième loi de Kepler :

$$m = \frac{4\pi^2}{G} \frac{a_r^3}{P^2}, \quad (2.5)$$

où  $m = m_1 + m_2$  est la masse totale du système binaire,  $G$  la constante gravitationnelle,  $a_r$  son demi-grand axe et  $P$  sa période orbitale. Évidemment, connaître l'orbite relative de l'astéroïde secondaire autour du primaire est une contrainte importante et pas toujours facile à résoudre (voir la deuxième partie de cette thèse).

Dès que la masse est calculée et la différence de luminosité connue, nous pouvons estimer la densité des astéroïdes, en faisant les suppositions suivantes :

- les composantes du système binaire ont des albédos identiques ;
- les composantes du système ont une forme sphérique ;
- les composantes du système ont une même densité.

Ainsi, la différence de luminosité entre le primaire et le secondaire, exprimée en différence de leur magnitude  $\Delta H_V = H_{V2} - H_{V1}$ , où  $H_{V1}$  et  $H_{V2}$  sont des magnitudes en bande V (magnitudes visuelles) du primaire et secondaire respectivement, peut être convertie en rapport de leur diamètre. La relation entre la magnitude, le diamètre et l'albédo a été déjà

décrite (voir l'équation (2.3)). Ainsi, en supposant que les composantes ont des albédos identiques, le rapport des diamètres vaut :

$$k = D_2/D_1 = 10^{-0.2\Delta H_V}. \quad (2.6)$$

En supposant que les deux objets du système binaire sont sphériques, le « diamètre volumique » est :

$$D' = 2\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}V}, \quad (2.7)$$

où  $V = V_1 + V_2$ , et  $V_i = \frac{1}{6}\pi D_i^3$  est le volume de chaque composante. Ainsi, le rapport  $k$  et le diamètre effectif  $D^2 = D_1^2 + D_2^2$  mènent au diamètre volumique :

$$D' = \frac{(1 + k^3)^{1/3}}{\sqrt{1 + k^2}} D. \quad (2.8)$$

Pour les objets triples, une formule similaire peut être appliquée :

$$D' = \frac{(1 + k_1^3 + k_2^3)^{1/3}}{\sqrt{1 + k_1^2 + k_2^2}} D, \quad (2.9)$$

où  $k_1 = D_2/D_1$  et  $k_2 = D_3/D_1$ . Ensuite, la densité est calculée par une simple relation :

$$\rho_b = \frac{6m}{\pi D'^3}. \quad (2.10)$$

Les incertitudes sur la densité sont calculées par la formule des mesures indirectes. Soit  $\rho_b$  une fonction de deux paramètres ( $m, D'$ ), l'erreur sur la densité sera :

$$\Delta\rho_b = \sqrt{\left(\Delta m \frac{\partial\rho_b}{\partial m}\right)^2 + \left(\Delta D' \frac{\partial\rho_b}{\partial D'}\right)^2}. \quad (2.11)$$

## 2.4 L'ensemble des données

L'analyse exploratoire débute par la présentation des caractéristiques standards de l'ensemble des données. Dans le tableau 2.6, un relevé de ces caractéristiques pour les différents paramètres est présenté. Le relevé contient la moyenne, la médiane, la variance, l'écart type et la taille de chaque paramètre.

Nous présentons ensuite les données sous forme de « boîtes à moustaches », qui affichent schématiquement les propriétés statistiques suivantes : les premier et troisième quartiles, la médiane, les extrémités inférieure et supérieure (les « moustaches ») qui sont les valeurs maximales et minimales ne dépassant pas 1.5 fois l'écart inter-quartile et les valeurs extrêmes des données. Les « boîtes à moustaches » pour le diamètre et l'albédo avec tous les autres paramètres orbitaux et physiques sont présentées sur la figure 2.3.

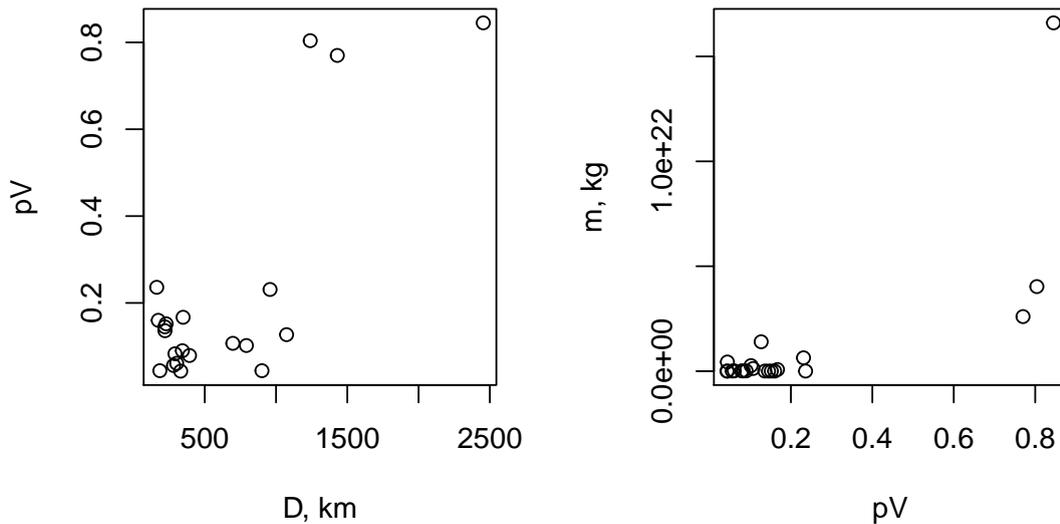
Les « boîtes à moustaches » révèlent une forte dissymétrie des données : concentration de valeurs petites et présence de quelques valeurs très grandes. Par exemple, les valeurs extrêmes de la masse  $m$ , très grandes par rapport aux autres, correspondent aux objets Eris, Haumea et Orcus, qui sont classés comme des planètes naines (ou candidats au statut de planète naine dans le cas de Orcus).

Pour finaliser notre analyse préliminaire de l'ensemble des données, nous montrons schématiquement les matrices de corrélations entre tous les paramètres en utilisant trois

**Table 2.6** – Résumé statistique des données

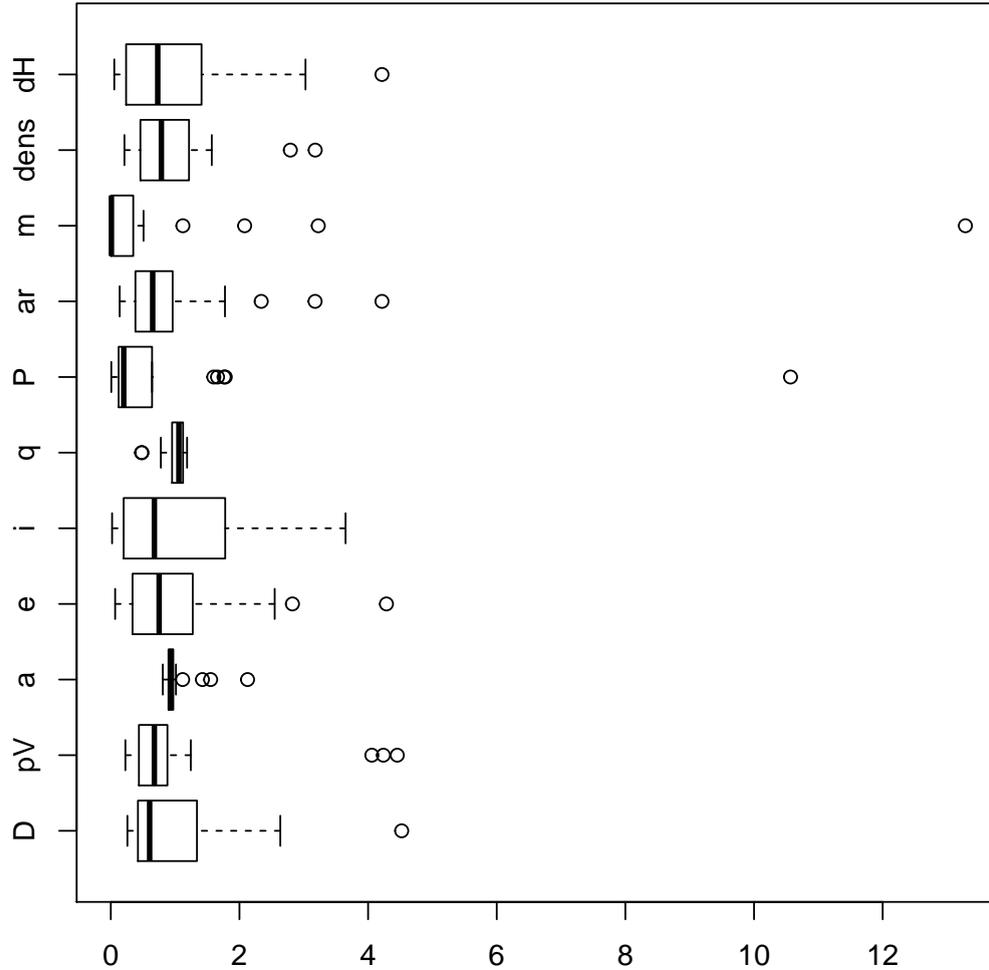
	moyenne	médiane	écart type	nombre
D, km	542.67	327.50	499.68	30
$p_V$	0.19	0.13	0.22	30
a, ua	47.50	43.94	12.57	30
e	0.19	0.14	0.18	30
i, deg	12.11	8.20	11.64	30
q, ua	36.69	38.83	6.56	30
$\Delta H_V$	1.85	1.35	1.91	30
P, jours	78.43	15.79	178.6	21
$a_r$ , km	11831.57	7700	12468.44	21
m, kg	1.25e+21	1.19e+19	3.66e+21	21
$\rho_b$ , g/cm <sup>3</sup>	1.4	1.1	1.09	21

coefficients différents – Pearson, Spearman et Kendall – qui sont présentées sur la figure 2.4. Ces schémas sont des représentations graphique de la matrice de corrélation. Elles montrent avec évidence des corrélations : les grandes cercles foncés (bleu ou rouge sont des corrélations positives ou négatives respectivement) signifient une corrélation forte entre les paramètres. De cette manière, nous voyons qu’avec les coefficients de Spearman et Kendall nous mettons en évidence les mêmes combinaisons de paramètres en corrélation. Au contraire, le coefficient de Pearson donne des résultats différents, montrant ainsi que le modèle linéaire n’est pas toujours adapté. Par exemple, il est certainement improbable

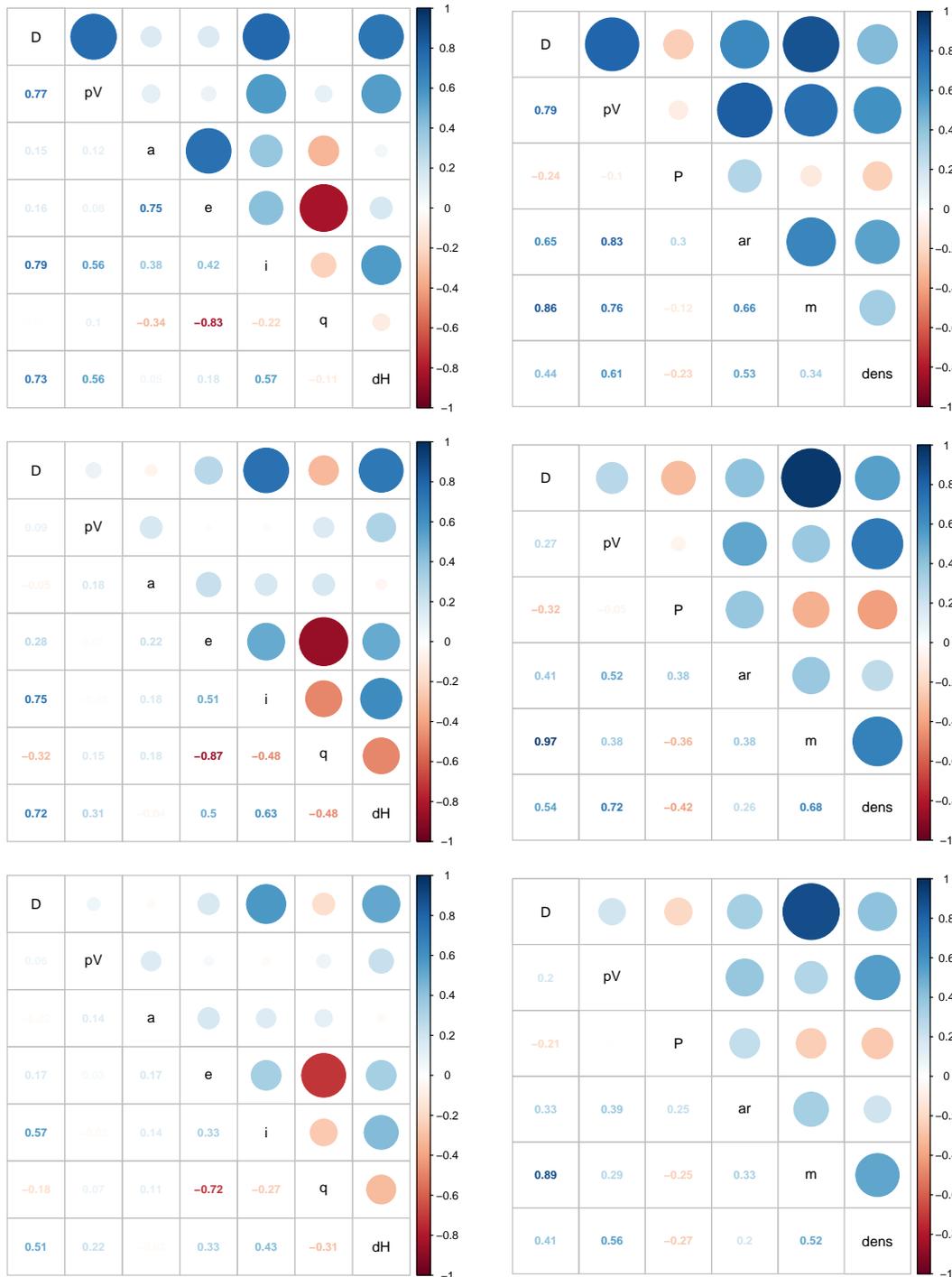
**Figure 2.2** – Contre-exemple de corrélation forte par le coefficient de Pearson.

que le diamètre avec l’albédo ou l’albédo avec la masse soient en corrélation linéaire (voir distributions sur les figures 2.2), même si le test de Pearson le montre. Ainsi, il est évidemment préférable d’utiliser les coefficients de corrélation monotone (Spearman et Kendall) qui permettent d’étudier un lien entre variables pas forcément linéaire. Nous allons étudier

ces deux coefficients plus en détails dans les prochaines sections.



**Figure 2.3** – « Boîtes à moustaches » pour les données de diamètre, albédo, demi-grand axe, excentricité, inclinaison, périhélie, période et demi-grand axe de l'orbite relative, masse totale, densité, différence de magnitude. Les paramètres sont normalisés (divisés par la moyenne). Sur la figure sont représentés les premier et troisième quartiles (les côtés inférieure et supérieure du rectangle), la médiane (ligne qui coupe le rectangle), les extrémités inférieure et supérieure (les « moustaches », les valeurs maximales et minimales, mais ne dépassant pas 1.5 fois l'écart inter-quartile) et les valeurs extrêmes (petits cercles, les valeurs qui dépassent 1.5 l'écart inter-quartile).



**Figure 2.4** – Illustration de corrélations entre les paramètres pour les 30 (à gauche) et 21 (à droite) objets données, exprimées en trois coefficients de corrélations (du haut en bas) : Pearson, Spearman et Kendall. Pour lire la corrélation entre deux paramètres, il suffit de choisir ces paramètres sur la diagonale, tracer les lignes verticales et horizontales à partir des cellules de chaque paramètre et voir la corrélation dans l'intersection de ces lignes : la cercle ou la valeur du coefficient. Par exemple :  $D$  et  $m$  sont fortement corrélés (grand cercle bleu) avec un coefficient de Spearman 0.96.

## Chapitre 3

# Comparaison avec les astéroïdes simples

### Sommaire

<b>3.1</b>	<b>Test d'hypothèse . . . . .</b>	<b>28</b>
<b>3.2</b>	<b>Test de Kolmogorov-Smirnov . . . . .</b>	<b>29</b>
<b>3.3</b>	<b>Test de Mann-Whitney-Wilcoxon . . . . .</b>	<b>30</b>
<b>3.4</b>	<b>Application des tests . . . . .</b>	<b>30</b>

Notre connaissance des astéroïdes simples est plus grande que celle des binaires. Peut-on affirmer qu'ils ont les mêmes propriétés physiques et sont issues de la même population parente ? Pour clarifier cela, nous allons commencer notre analyse par la comparaison de deux populations d'astéroïdes : la population des binaires avec la population des astéroïdes simples. A l'aide de tests statistiques, nous allons déterminer si la distribution des données est la même dans les deux groupes.

### 3.1 Test d'hypothèse

Avant de procéder aux tests statistiques nous donnons quelques notions nécessaires.

L'hypothèse statistique est une supposition sur la distribution ou les propriétés d'une variable aléatoire. Dans le test d'hypothèse on pose une hypothèse nulle  $H_0$  et une hypothèse alternative  $H_a$  sur les données. Deux conclusions fausses sur ces hypothèses sont possibles :

- Erreur de type 1. L'hypothèse nulle est rejetée quand elle est juste.
- Erreur de type 2. L'hypothèse nulle n'est pas rejetée quand elle est fausse.

Idéalement il faut minimiser les deux erreurs, mais généralement ce n'est pas possible. Ainsi il faut choisir quelle erreur est la plus importante dans le test. Traditionnellement, les scientifiques ne contrôlent que l'erreur de type 1 au niveau 5% (Feigelson and Babu, 2012). Ce choix s'appelle un *seuil de signification*  $\alpha$ , et représente la probabilité d'erreur de type 1, c'est-à-dire la probabilité de rejeter l'hypothèse nulle quand elle est juste. Une autre caractéristique du résultat s'appelle la *valeur-p*. La valeur- $p$  est la probabilité, en supposant que l'hypothèse nulle soit vraie, d'obtenir la même valeur ou une valeur plus extrême du test. Autrement dit, c'est la probabilité d'erreur de type 1. Il est important de noter que nous ne pouvons jamais accepter définitivement l'hypothèse nulle, mais pouvons seulement la rejeter par le test statistique avec un certain seuil de signification.

Dans ce chapitre nous allons utiliser deux méthodes pour tester l'hypothèse nulle  $H_0$  exprimant le fait que les deux populations d'astéroïdes – binaires et simples – ont les

**Table 3.1** –  $c(\alpha)$ 

$\alpha$	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
$c(\alpha)$	1.22	1.36	1.48	1.63	1.73	1.95

mêmes distributions. Les deux tests sont indépendants de la distribution des paramètres, ils peuvent ainsi être facilement appliqués. La méthode de Mann-Whitney-Wilcoxon teste la différence entre les échantillons liée à leur tendance centrale – aux médianes. Mais si on veut tester l'égalité des distributions d'une manière globale, le test de Kolmogorov-Smirnov est préférable.

## 3.2 Test de Kolmogorov-Smirnov

Le test de Kolmogorov-Smirnov (KS-test) (Bol'Shev and Smirnov, 1983) est un test statistique non paramétrique qui permet de déterminer si deux échantillons suivent une même loi. Le KS-test a l'avantage de ne faire aucune supposition sur la forme de la distribution des données.

Le test quantifie la distance entre les fonctions de répartition empiriques de deux échantillons. L'hypothèse nulle dans ce test est que les échantillons viennent de la même loi de probabilité. Soient deux échantillons de tailles  $n_1$  et  $n_2$ . La statistique de Kolmogorov-Smirnov, notée  $D_{n_1, n_2}$ , est la distance maximale entre les fonctions de répartition empiriques  $F_{1, n_1}(x)$  et  $F_{2, n_2}(x)$  calculée de la manière suivante :

$$D_{n_1, n_2} = \sup_x |F_{1, n_1}(x) - F_{2, n_2}(x)|, \quad (3.1)$$

où  $F_{1, n_1}$  et  $F_{2, n_2}$  sont les fonctions de répartition empiriques du premier et du deuxième échantillon respectivement. L'hypothèse nulle est rejetée au niveau  $\alpha$  si

$$D_{n_1, n_2} > c(\alpha) \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}, \quad (3.2)$$

où  $\alpha$  est un seuil de signification pour l'hypothèse nulle (les deux distributions sont identiques). La valeur de  $c(\alpha)$  est donnée pour différents  $\alpha$  dans le tableau 3.1 (Bol'Shev and Smirnov, 1983).

**Test de Kolmogorov-Smirnov à 2 dimensions.** Le KS-test standard permet de comparer deux distributions pour un seul paramètre. Mais il est souvent intéressant de comparer deux populations caractérisées par plusieurs paramètres. La méthode, développée par Peacock (1983), permet de comparer deux échantillons pour deux paramètres simultanément. Sa méthode est une version du KS-test avec utilisation de la technique de Monte-Carlo pour la statistique du test. Peacock (1983) montre que son test est très proche d'un test non-paramétrique et donne une formule empirique pour le niveau de confiance. Le test est appliqué de la manière suivante :

- Calculer  $D_{n_1, n_2}$  pour chaque paramètre avec le KS-test standard, choisir entre les deux résultats le plus grand des deux.
- Calculer  $n = n_1 n_2 / (n_1 + n_2)$ .
- Calculer la statistique du test  $Z_n = \sqrt{n} D_{n_1, n_2}$ , convertir  $Z_n$  vers  $Z_\infty$  en utilisant l'expression approximative :

$$1 - Z_n / Z_\infty = 0.53 n^{-0.9}.$$

- Calculer la valeur  $p = 2 \exp[-2(Z_\infty - 0.5)^2]$  (si  $p > 0.2$  prendre  $p = 0.2$ ). Comparer la valeur- $p$  à un seuil  $\alpha$  préalablement défini.

### 3.3 Test de Mann-Whitney-Wilcoxon

Le test de Mann-Whitney-Wilcoxon (U-test) Wilcoxon (1945) (aussi appelé « test de la somme des rangs de Wilcoxon » ou test  $U$  de Mann-Whitney) est un test statistique qui permet de vérifier l'hypothèse selon laquelle les deux distributions des données sont les mêmes. Comme le KS-test, le U-test est un test non-paramétrique, ainsi il ne demande pas de connaître la loi de distribution du paramètre testé.

Soient deux ensembles  $X$  et  $X'$ , des échantillons de tailles  $n$  et  $n'$  respectivement, suivant les lois  $f$  et  $g$  respectivement. L'hypothèse nulle est  $f = g$ . Pour calculer la statistique du test, nous ordonnons tout d'abord les  $(n + n')$  éléments des deux échantillons,  $X$  et  $X'$  par ordre croissant. Ensuite, nous définissons son rang pour chaque élément dans la séquence ainsi formée. La somme des  $n$  rangs des éléments de  $X$  vaut :

$$T_1 = \sum_{i=1}^n R(X_i), \quad (3.3)$$

et

$$T_2 = \sum_{i=1}^{n'} R(X'_i), \quad (3.4)$$

où  $R(X_i)$  et  $R(X'_i)$  sont les rangs des éléments  $X_i$  et  $X'_i$  respectivement. Ainsi, la statistique du test  $U$  est le minimum entre les valeurs

$$U_1 = T_1 - \frac{n(n+1)}{2} \quad (3.5)$$

et

$$U_2 = T_2 - \frac{n'(n'+1)}{2}. \quad (3.6)$$

Si  $U \leq U_{crit}$   $H_0$  est rejetée. La valeur critique  $U_{crit}$  est pré-calculées et données dans des tableaux selon  $\alpha$  pour les petits échantillons ( $n$  et  $n' < 20$ ). Pour les échantillons de plus grande taille, ( $n$  et  $n' \geq 20$ ) la statistique est asymptotiquement normale avec la moyenne et la variance suivantes :

$$\mu_U = \frac{nn'}{2}, \quad \sigma_U^2 = \frac{nn'(n+n'+1)}{12}. \quad (3.7)$$

La valeur- $p$  est calculée en utilisant l'approximation de cette distribution normale

$$z = \frac{U - \mu_U}{\sigma_U} \quad (3.8)$$

et comparée à un seuil choisit  $\alpha$ .

### 3.4 Application des tests

**Données.** Les données à tester se composent de deux échantillons de taille 108 et 30 objets, simples et binaires respectivement. Les caractéristiques générales des échantillons sont présentées dans le tableau 3.2. Les distributions selon le diamètre et l'albédo pour les deux populations à comparer sont affichées sur la figure 3.1. Selon le résumé statistique des échantillons ainsi que visuellement selon les histogrammes, il semble que les distributions de

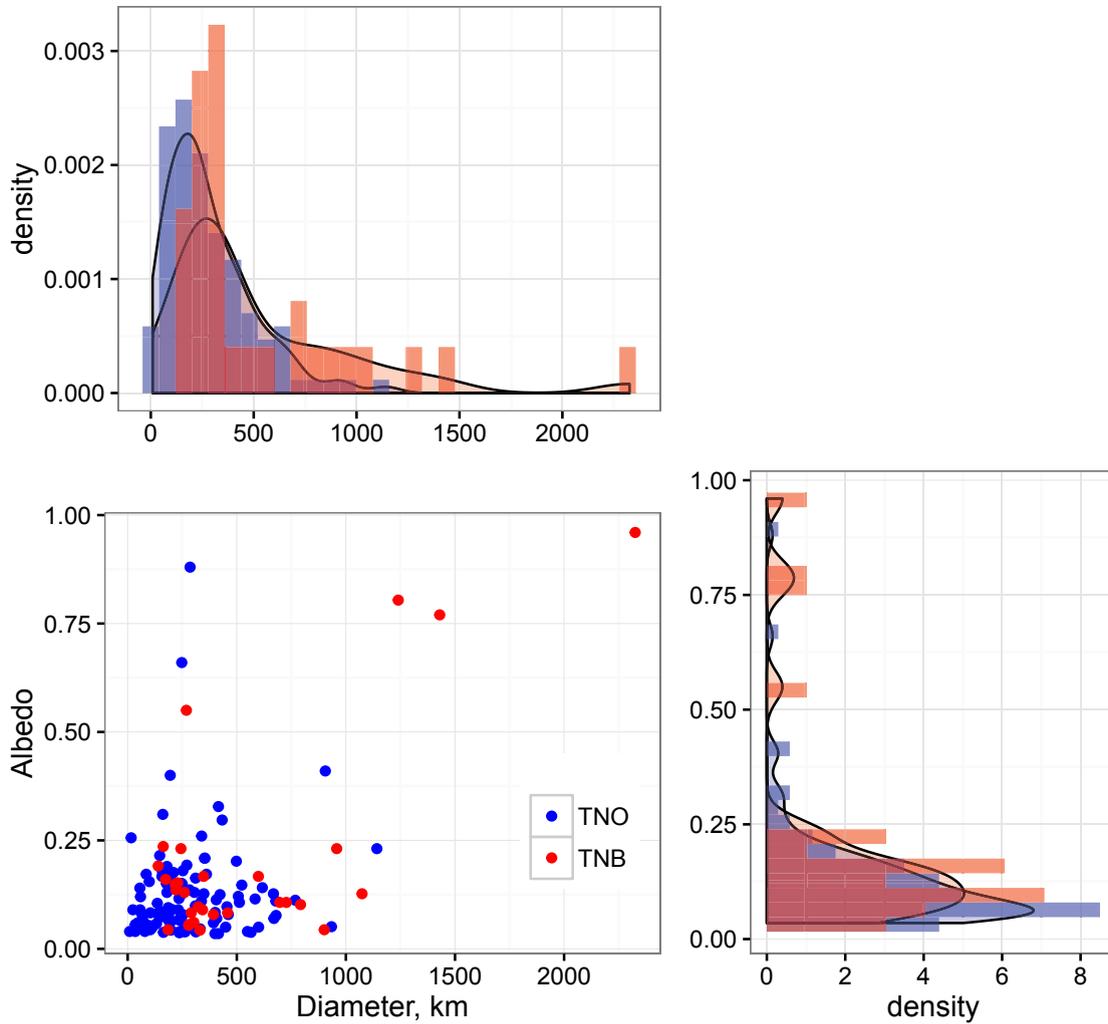
diamètres sont différentes, quand les distributions d'albédo semblent d'être plus proches. Pour clarifier ces tendances, nous appliquons les tests statistiques (KS-test et U-test) pour les deux paramètres – albédo et diamètre – pour comparer les populations des TNO binaires et simples.

**Table 3.2** – Caractéristiques des échantillons de TNO selon diamètre et albédo.

	Diamètre			
	N	Moyenne	Écart type	Erreur type de la moyenne
Binaires	30	538.4	483.1	88.2
Simple	108	284.5	212.6	20.5

	Albédo			
	N	Moyenne	Écart type	Erreur type de la moyenne
Binaires	30	0.194	0.229	0.042
Simple	108	0.13	0.124	0.012



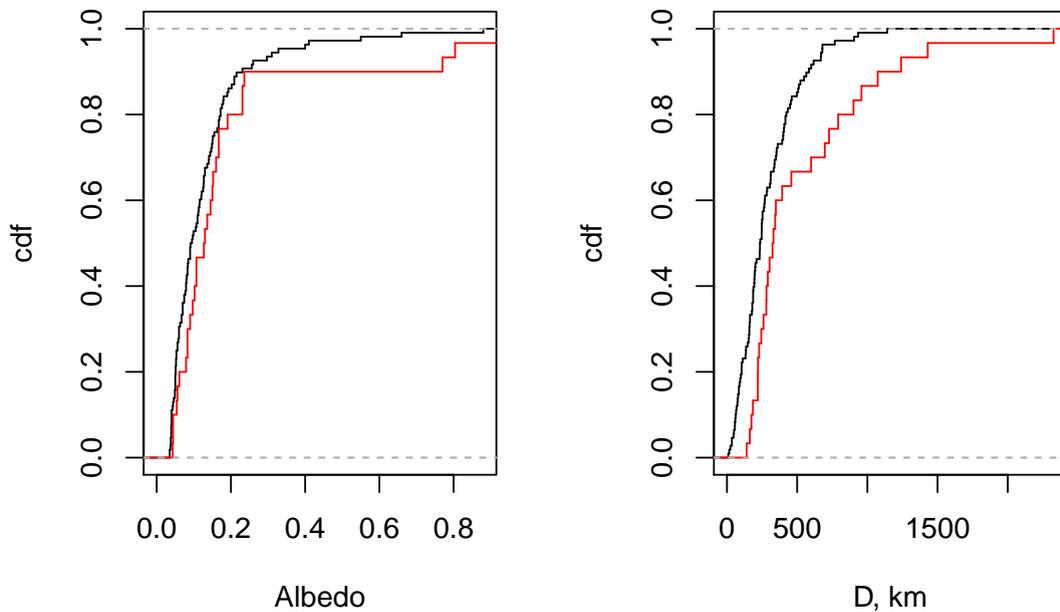
**Figure 3.1** – Distribution de deux populations de TNO : binaires (rouge) et simples (bleu). Les densités de probabilité de diamètre (en haut) et albédo (à droite) sont estimées par les histogrammes concordants (Parzen, 1962).

**Résultats.** Nous testons l'hypothèse nulle  $H_0$  que les deux échantillons ont une distribution identique, contre l'hypothèse alternative  $H_1$  qu'ils sont différents (test à deux queues, en anglais « two-tailed »). Pour le KS-test tout d'abord, nous déterminons la valeur critique avec le seuil de signification  $\alpha = 0.05$ . Pour les tailles d'échantillons 30 et 108 pour les binaires et simples, respectivement, cette valeur critique calculée par la formule (3.2) est  $D_{crit} = 0.28$ . Ainsi, si la valeur de statistique est plus grande que la valeur critique, l'hypothèse nulle que les deux échantillons ont une distribution identique serait rejetée.

Les échantillons dans notre test sont de taille  $>20$ , ainsi donc la statistique de Wilcoxon-test ne peut pas être comparée à une valeur critique pré-calculée, mais la conclusion peut être faite sur la valeur- $p$ . Si la valeur- $p$  est plus petite que le seuil de signification  $\alpha = 0.05$ , l'hypothèse nulle est rejetée. Les résultats sont dans le tableau 3.3 pour les deux tests. Pour la clarté du KS-test, les fonctions de répartition empiriques des deux échantillons sont montrées sur la figure 3.2.

**Table 3.3** – Résultats de KS-test et U-test (« two-tailed »).

Paramètre	KS-test. $D_{crit} = 0.28$		U test	
	$D_n$	valeur- $p$	$U$	valeur- $p$
Albédo	0.19	0.35	1955.5	0.084
Diamètre	0.33	0.01	2239.5	0.001
D avec $p_V$	$Z=1.6$	0.14		



**Figure 3.2** – Fonctions de répartition du diamètre et de l'albédo pour les objets binaires (ligne rouge) et simples TNO (ligne noire).

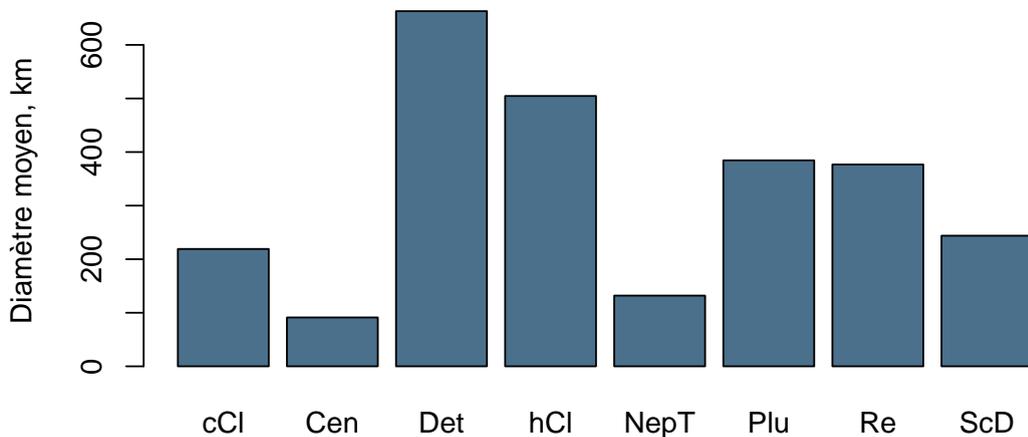
Les résultats des deux tests indiquent que l'hypothèse nulle d'égalité des distributions est rejetée en comparant les diamètres des deux groupes, mais dans le test sur l'albédo et dans le test à deux dimensions, l'hypothèse nulle reste possible.

**Interprétation.** Les deux populations de TNO – binaires et simples – ont des distributions de diamètre différentes, mais il n’est pas improbable qu’ils aient la même distribution d’albédo. Cela n’est pas contradictoire. L’albédo caractérise les propriétés de composition de la surface, laquelle évolue avec le temps sous l’effet du « space weathering » (Hudson et al., 2008), ainsi il est tout à fait possible qu’ils aient mêmes propriétés de surface lorsqu’ils se trouvent dans une même région. Par exemple Benecchi et al. (2009) montrent que les deux populations de TNO – binaires et simples – ont la même distribution de couleurs.

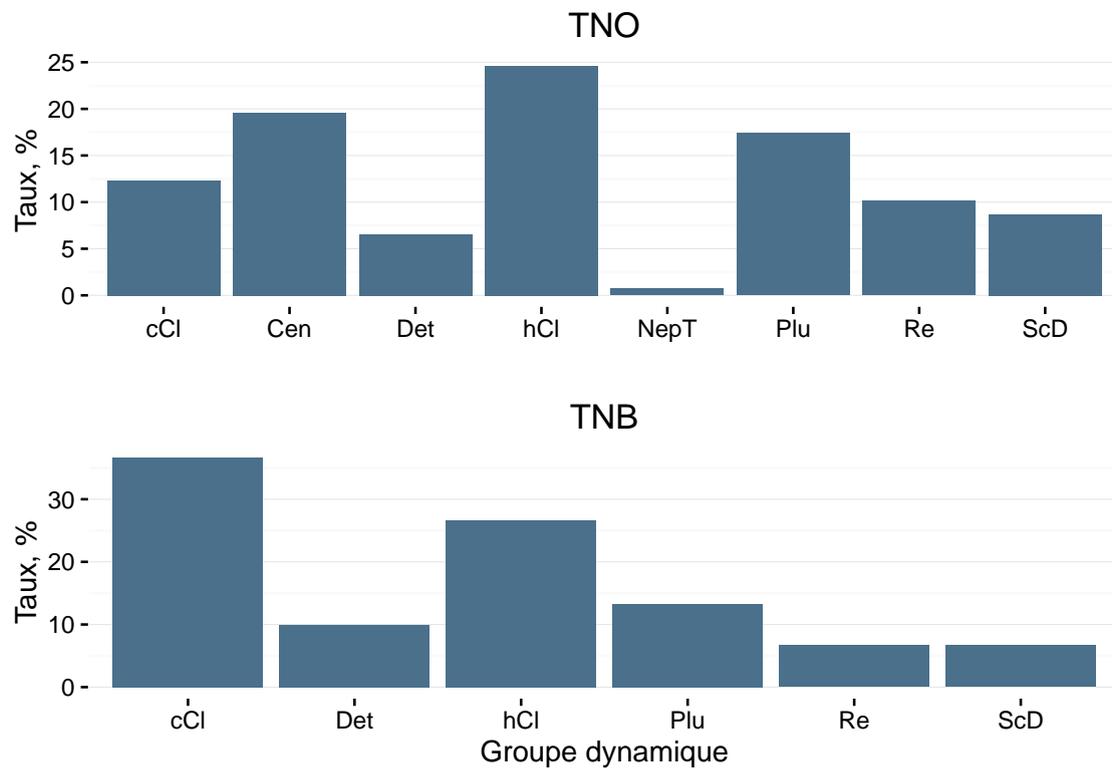
La différence en distribution des tailles peut être liée à l’absence de binaires parmi les très petits TNO. L’histogramme de la distribution de la taille moyenne des objets observés par Herschel et Spitzer selon le groupe dynamique montre que les centaures sont plus petits que les objets des autres groupes. Dans la figure 3.4 la répartition des objets des deux populations est présentée selon le groupe dynamique. Il est remarquable que le nombre de centaures est élevé, mais les binaires sont absents dans ce groupe.

D’un côté, les centaures ont une orbite instable, ils croisent ou s’approchent des planètes géantes. Cela peut détruire les binaires faiblement liés. D’un autre côté, les systèmes liés plus fortement peuvent devenir encore plus étroitement liés à la suite de rencontres avec un troisième corps (Petit and Mousis, 2004). Plus l’objet est petit, plus son rayon de Hill est petit et, par conséquent, les petits binaires avec un rayon plus petit pour le primaire auront une séparation sur le ciel plus petite. Ainsi, il est possible que parmi ces petits centaures des binaires soient présents, mais la limite de la séparation imposée par la méthode d’observation les rend indétectables.

Une autre cause de la différence en distribution des tailles peut être liée à la quantité considérable de binaires classiques « froids » par rapport aux autres groupes, quand les TNO simples sont distribués d’une manière plus homogène dans les différents groupes. Il est possible que les objets dans la région des classiques « froids » n’ont pas été trop perturbés du disque protoplanétaire, ainsi cet environnement était plus approprié pour la survie des binaires.



**Figure 3.3** – Distribution de la taille moyenne selon les groupes dynamiques : objets classiques froids (cCl) et chauds (hCl), objets épars (ScD) et détachés (Det), objets en résonance avec Neptune (Re) et plutinos (Plu), astéroïde troyen de Neptune (NepT), centaurs (Cen).



**Figure 3.4** – Répartition des TNO binaires et simples selon les groupes dynamiques : objets classiques froids (cCl) et chauds (hCl), objets épars (ScD) et détachés (Det), objets en résonance avec Neptune (Re) et plutinos (Plu), astéroïde troyen de Neptune (NepT), centaurs (Cen).

## Chapitre 4

# Étude des corrélations entre paramètres

### Sommaire

<b>4.1</b>	<b>Corrélations non-paramétriques . . . . .</b>	<b>35</b>
4.1.1	Coefficient de Spearman $\rho$ . . . . .	35
4.1.2	Coefficient de Kendall $\tau$ . . . . .	36
<b>4.2</b>	<b>Analyse des incertitudes des coefficients de corrélation . . . . .</b>	<b>37</b>
<b>4.3</b>	<b>Recherche de corrélations . . . . .</b>	<b>38</b>
4.3.1	Diamètre et masse . . . . .	39
4.3.2	Diamètre et inclinaison . . . . .	39
4.3.3	Diamètre et différence de magnitude . . . . .	42
4.3.4	Diamètre et densité . . . . .	43
4.3.5	Albédo et densité . . . . .	45

Dans ce chapitre, nous allons examiner s'il existe des corrélations significatives entre les paramètres physiques des binaires transneptuniens. Pour cette analyse, nous utilisons des tests statistiques non-paramétriques. L'avantage de ce type de tests est qu'ils peuvent être appliqués sans aucune supposition sur la distribution des données. Ainsi, nous appliquons deux calculs de corrélation – Spearman (1904) et Kendall (1938) – aux nouvelles données des valeurs d'albédo et de diamètre, obtenues dans le cadre du programme « TNOs are cool ». Les performances des deux coefficients sont équivalentes et ils sont largement utilisés en astronomie. Dans certaines circonstances, il est préférable d'utiliser l'un plutôt que l'autre, ils jouent un rôle complémentaire. Par exemple, Kendall est préférable pour les petits échantillons. En revanche, le  $\rho$  de Spearman, qui est similaire au coefficient de Pearson pour sa formule et son interprétation, est plus souvent appliqué, ainsi il peut être utilisé pour comparer nos résultats avec les travaux existants.

### 4.1 Corrélations non-paramétriques

#### 4.1.1 Coefficient de Spearman $\rho$

Le coefficient de Spearman est utilisé pour caractériser la corrélation entre deux ensembles de données. Cette méthode statistique consiste à déterminer un coefficient de corrélation, non pas entre les valeurs prises par les deux variables mais entre les rangs de ces valeurs. Le test de corrélation de Spearman a un avantage : il permet de repérer des corrélations même entre des fonctions monotones non nécessairement affines, ce qui n'est

pas possible avec le coefficient de Pearson. La formule pour calculer le coefficient de Spearman est similaire à celle de Pearson, mais appliquée aux rangs. Ainsi, pour un ensemble de paires d'observations  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  des variables  $X$  et  $Y$ , le coefficient  $\rho$  vaut

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2 - 1)}, \quad (4.1)$$

où  $d_i = R(x_i) - R(y_i)$  est la différence entre les rangs des deux variables données et  $n$  la taille de l'échantillon. La valeur de  $\rho$  est entre -1 et 1. Il existe plusieurs manières de classifier l'intensité de la corrélation, nous allons utiliser la suivante :

$$\begin{aligned} \rho = 0 & - \text{absence de corrélation;} \\ 0 < |\rho| < 0.3 & - \text{corrélation négligeable;} \\ 0.3 \leq |\rho| < 0.6 & - \text{corrélation faible;} \\ 0.6 \leq |\rho| \leq 1 & - \text{corrélation forte.} \end{aligned}$$

#### 4.1.2 Coefficient de Kendall $\tau$

Le coefficient  $\tau$  de Kendall est une mesure non-paramétrique de corrélation entre les rangs de deux variables. Il est similaire au  $\rho$  de Spearman par l'idée qu'il exprime la relation de corrélation entre les rangs des deux variables, mais, contrairement à  $\rho$ , le  $\tau$  de Kendall est lié à une notion de probabilité. En effet, c'est le dénombrement de la différence des paires en concordance et des paires discordantes. Ainsi, pour un ensemble de paires d'observations  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  des variables  $X$  et  $Y$ , le coefficient de Kendall est calculé par la formule

$$\tau = \frac{(\text{nombre de paires concordantes}) - (\text{nombre de paires discordantes})}{\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 1)}, \quad (4.2)$$

où les paires d'observations  $(x_i, y_i)$  et  $(x_j, y_j)$  s'appellent concordantes si  $(x_i < x_j$  et  $y_i < y_j)$  ou si  $(x_i > x_j$  et  $y_i > y_j)$ . Elles sont discordantes si  $(x_i < x_j$  et  $y_i > y_j)$  ou si  $(x_i > x_j$  et  $y_i < y_j)$ . La formule (4.2) est appliquée en absence de paires avec liaisons, qui ne sont ni concordantes ni discordantes, c'est-à-dire telles que  $x_i = x_j$  ou  $y_i = y_j$ . Lorsqu'il y a des liaisons dans les données, la formule suivante est utilisée :

$$\tau_B = \frac{n_c - n_d}{\sqrt{(n_0 - n_1)(n_0 - n_2)}}, \quad (4.3)$$

où  $n_c$  et  $n_d$  sont les nombres de paires concordantes et discordantes respectivement et

$$n_0 = n(n - 1)/2,$$

$$n_1 = \sum_{i=1}^{t_x} u_{xi}(u_{xi} - 1)/2,$$

$$n_2 = \sum_{i=1}^{t_y} u_{yi}(u_{yi} - 1)/2,$$

où  $t_x$  et  $t_y$  sont les nombres de groupes des valeurs identiques par  $x$  et  $y$  respectivement,  $u_{xi}$  et  $u_{yi}$  sont les nombres d'éléments dans chaque groupe des valeurs identiques  $x$  et  $y$  respectivement. Le rapport entre le  $\tau$  de Kendall et le  $\rho$  de Spearman n'est pas déterminé avec exactitude, mais pour les grands échantillons avec une corrélation non forte, il existe une formule approximative les mettant en relation (Gmurman, 1977). Cette formule est :

$$\rho \approx 3/2\tau. \quad (4.4)$$

## 4.2 Analyse des incertitudes des coefficients de corrélation

Les tests statistiques de Kendall et Spearman sont souvent intéressants à utiliser du fait de leur approche non-paramétrique. Mais il est important d'analyser les incertitudes de ces tests ainsi que d'estimer l'influence des incertitudes de mesure sur le résultat. Nous utilisons l'approche, proposée par Curran (2015), utilisant trois méthodes de Monte-Carlo pour déterminer l'incertitude sur les coefficients de corrélation.

**Bootstrap.** Plusieurs procédures existent pour déterminer la distribution des estimateurs statistiques. L'une des techniques est une méthode de rééchantillonnage qui s'appelle *bootstrap* (Efron and Efron, 1982). Cette méthode permet d'estimer la distribution théorique des statistiques. L'idée du *bootstrap* est une simulation de tirages aléatoires des données, de même taille que l'échantillon initial – il s'agit de rééchantillonner avec remplacement puis de redéterminer les statistiques. Ainsi, nous allons appliquer la technique du *bootstrap* aux deux tests statistiques, de Spearman et de Kendall, pour estimer les distributions de  $\rho$  et  $\tau$  ainsi que leur valeur- $p$ .

Soit un ensemble de données de  $N$  paires  $(X_i, Y_i)$ . Le *bootstrap* implique la simulation de  $M$  nouveaux ensembles de données, constitués de  $N$  paires  $(x_i, y_i)$ . Chacune de ces paires a été choisie de manière aléatoire dans l'ensemble initial des données  $(X_j, Y_j)$ , où  $j$  est le résultat d'un tirage uniforme dans  $\{1, \dots, N\}$ ,  $X_i = x_j$  et  $Y_i = y_j$ , de sorte que certaines des paires initiales peuvent être tirées plusieurs fois ou, au contraire, ne jamais être tirées. Pour chacun de ces  $M$  nouveaux échantillons de paires, le coefficient de corrélation ( $\rho$  ou  $\tau$ ) ainsi que la valeur- $p$  sont calculés. Pour la signification statistique il est nécessaire d'avoir  $M \geq N(\log N)^2$  (Feigelson and Babu, 2012). La distribution de valeurs obtenue est utilisée pour estimer leur loi de probabilité. Dans les cas les plus simples cette distribution suit une loi normale; l'estimation du coefficient de corrélation,  $\hat{\rho} = \bar{\rho}$  ou  $\hat{\tau} = \bar{\tau}$ , est égale à la moyenne des valeurs calculées et l'estimation de l'erreur est égale à l'écart type  $\sigma_\rho$  ou  $\sigma_\tau$  respectivement. La valeur- $p$  est estimée pour la valeur moyenne du coefficient obtenu par une approximation par la loi de Student. La distribution de *bootstrap* n'est pas toujours de la forme d'une loi normale, mais dans notre analyse nous allons utiliser cette hypothèse pour  $\rho$  et  $\tau$ .

**Méthode des perturbations.** La technique du *bootstrap* ne prend pas en compte les incertitudes des mesures,  $\Delta X_i$  et  $\Delta Y_i$ , donc pour en tenir compte, une méthode de perturbation peut être utilisée. Dans cette méthode nous simulons  $M$  nouveaux ensembles de données, chacun formé de  $N$  paires de données  $(x_i, y_i)$ ; chaque paire est une perturbation des valeurs initiales  $(X_j, Y_j)$ , obtenue en rajoutant une incertitude aléatoire dans sa loi de probabilité, i.e.  $x_i = X_j + \Delta X_i$  et  $y_i = Y_j + \Delta Y_i$  où  $\Delta X_i$  et  $\Delta Y_i$  sont des incertitudes aléatoires qui suivent une certaine loi de probabilité connue. Dans notre analyse, comme il est souvent le cas, il est supposé que les incertitudes suivent des lois gaussiennes.

Enfin, les coefficients de corrélation  $\rho$  ou  $\tau$  sont calculés pour chacun des  $M$  ensembles de données. Les distributions des valeurs obtenues sont utilisées comme un estimateur de la loi de probabilité pour les paramètres, de la même manière que dans la méthode du *bootstrap*.

**Méthode composite.** Une méthode alternative, proposée dans Curran (2015), combine la méthode classique de rééchantillonnage *bootstrap* et la méthode des perturbations. Dans ce cas, chaque nouvelle paire de données  $(x_i, y_i)$ , est une perturbation des valeurs initiales  $(X_j, Y_j)$ , où  $j$  est choisie aléatoirement, i.e.  $x_i = X_j + \Delta X_j$  et  $y_i = Y_j + \Delta Y_j$  où  $\Delta X_j$  et  $\Delta Y_j$  sont des valeurs aléatoires dans la loi de probabilité pour l'incertitude. La loi de

**Table 4.1** – Test de corrélation de Kendall et de Spearman, méthode composite.  $N$  est le nombre d’objets dans l’ensemble de données,  $\tau$  et  $\rho$  sont les coefficients de Kendal et de Spearman, respectivement. La valeurs- $p$  est calculée dans l’hypothèse nulle :  $\tau = 0$  ou  $\rho = 0$ .

Paramètres	N	Kendall			Spearman		
		$\tau$	$\pm\sigma_\tau$	valeur- $p$	$\rho$	$\pm\sigma_\rho$	valeur- $p$
$D$ vs. $p_V$	30	0.15	0.17	0.25	0.19	0.23	0.31
$\mathbf{D}$ vs. $\mathbf{m}$	21	0.84	0.08	< 0.001	0.93	0.06	< 0.001
$\mathbf{D}$ vs. $\mathbf{i}$	30	0.56	0.11	< 0.001	0.72	0.1	< 0.001
$\mathbf{D}$ vs. $\Delta\mathbf{H}_V$	30	0.52	0.1	< 0.001	0.69	0.11	< 0.001
$\mathbf{D}$ vs. $\rho_b$	21	0.4	0.17	0.01	0.5	0.2	0.02
$D$ vs. $a_r$	21	0.14	0.21	0.39	0.2	0.3	0.39
$D$ vs. $e$	30	0.16	0.12	0.21	0.26	0.18	0.16
$D$ vs. $P$	21	-0.19	0.17	0.23	-0.3	0.22	0.19
$D$ vs. $a$	30	-0.02	0.13	0.86	-0.05	0.19	0.8
$D$ vs. $q$	30	-0.17	0.12	0.19	-0.3	0.18	0.11
$p_V$ vs. $m$	21	0.34	0.19	0.03	0.42	0.24	0.06
$p_V$ vs. $i$	30	0.04	0.17	0.79	0.08	0.23	0.67
$p_V$ vs. $\Delta H_V$	30	0.25	0.15	0.05	0.34	0.19	0.07
$\mathbf{p}_V$ vs. $\rho_b$	21	0.51	0.15	< 0.001	0.65	0.16	< 0.001
$p_V$ vs. $a_r$	21	0.1	0.22	0.54	0.13	0.31	0.58
$p_V$ vs. $e$	30	0.01	0.14	0.93	0.02	0.21	0.93
$p_V$ vs. $P$	21	-0.01	0.18	0.95	-0.05	0.24	0.82
$p_V$ vs. $a$	30	0.1	0.16	0.43	0.15	0.21	0.44
$p_V$ vs. $q$	30	0.08	0.14	0.54	0.11	0.2	0.55

probabilité du coefficient de corrélation ( $\rho$  ou  $\tau$ ) et la valeur- $p$  sont estimées comme dans les méthodes précédentes.

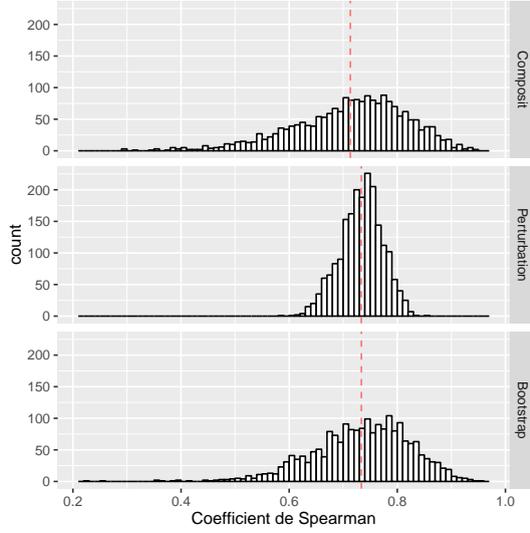
### 4.3 Recherche de corrélations

Les valeurs du diamètre et de l’albédo obtenues dans le cadre du programme « TNOs are cool » sont incluses dans l’analyse de recherche des corrélations avec les autres paramètres physiques et orbitaux à notre disposition (voir tableau 2.3).

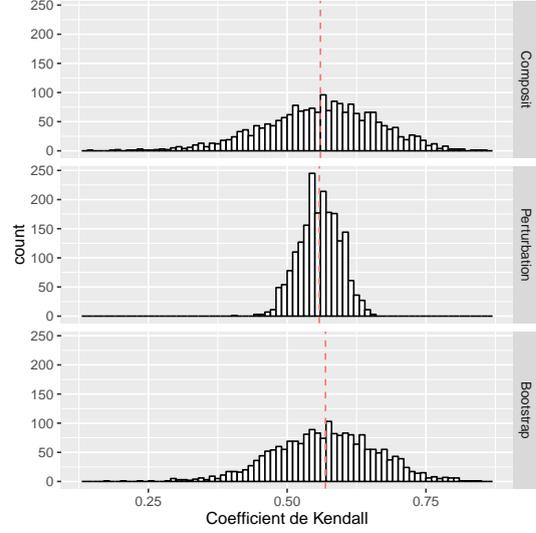
Les résultats des coefficients de Spearman ( $\rho$ ) et de Kendall ( $\tau$ ) calculés ainsi que les valeurs- $p$  correspondantes sont rassemblés dans les tableaux A.1 et A.3 respectivement. Dans le test de Spearman la valeur- $p$  est exacte pour les échantillons de taille  $\leq 22$  (tabulé dans (Van de Wiel and Di Bucchianico, 2001)). Pour des échantillons de taille plus grande, la valeur- $p$  est calculée avec une approximation (asymptotique à la loi de Student). Dans les tableaux, les deux résultats sont affichés : calculé par la méthode standard, qui ne donne pas les incertitudes aux valeurs obtenues, et avec le méthode *bootstrap*. Ensuite, nous avons pris en considération les incertitudes sur le diamètre  $D$ , l’albédo  $p_V$ , la masse totale  $m$  et la densité  $\rho_b$  et calculé les coefficients de corrélation et les valeurs- $p$  avec la méthode des perturbations et composite. Les résultats sont rassemblés dans les tableaux A.2 et A.4 pour les coefficients de Spearman et de Kendall respectivement.

Un exemple de résultats des trois méthodes (décrit dans 4.3.2) pour le diamètre et l’inclinaison est présenté sur les histogrammes 4.1 et 4.2 pour le  $\rho$  de Spearman et le  $\tau$  de Kendall respectivement. Il est clair (à partir des histogrammes et des tableaux) que la méthode composite donne des incertitudes plus larges que les méthodes de *bootstrap* ou de perturbation. En plus, elle donne les valeurs des coefficients de corrélation légèrement plus

petits. Nous préférons utiliser ensuite les valeurs de la méthode composite dans le but de ne pas surestimer les corrélations possibles.



**Figure 4.1** – Coefficient de Spearman sur la corrélation entre le diamètre et l’inclinaison.



**Figure 4.2** – Coefficient de Kendall sur la corrélation entre le diamètre et l’inclinaison.

Comme nous pouvons le voir (tableau 4.1), la plupart des paramètres ne sont pas corrélés. En revanche, nous trouvons 5 corrélations avec une valeur- $p < 0.05$  (qui correspond au seuil de signification  $> 95\%$ ). Parmi elles, quatre corrélations du diamètre avec la masse totale, l’inclinaison, la différence de magnitude et la densité puis une corrélation de l’albédo avec la densité. Les dépendances entre les trois paramètres – l’inclinaison, la différence de magnitude, la densité – avec le diamètre, sont présentées sur la figure 4.3.

#### 4.3.1 Diamètre et masse

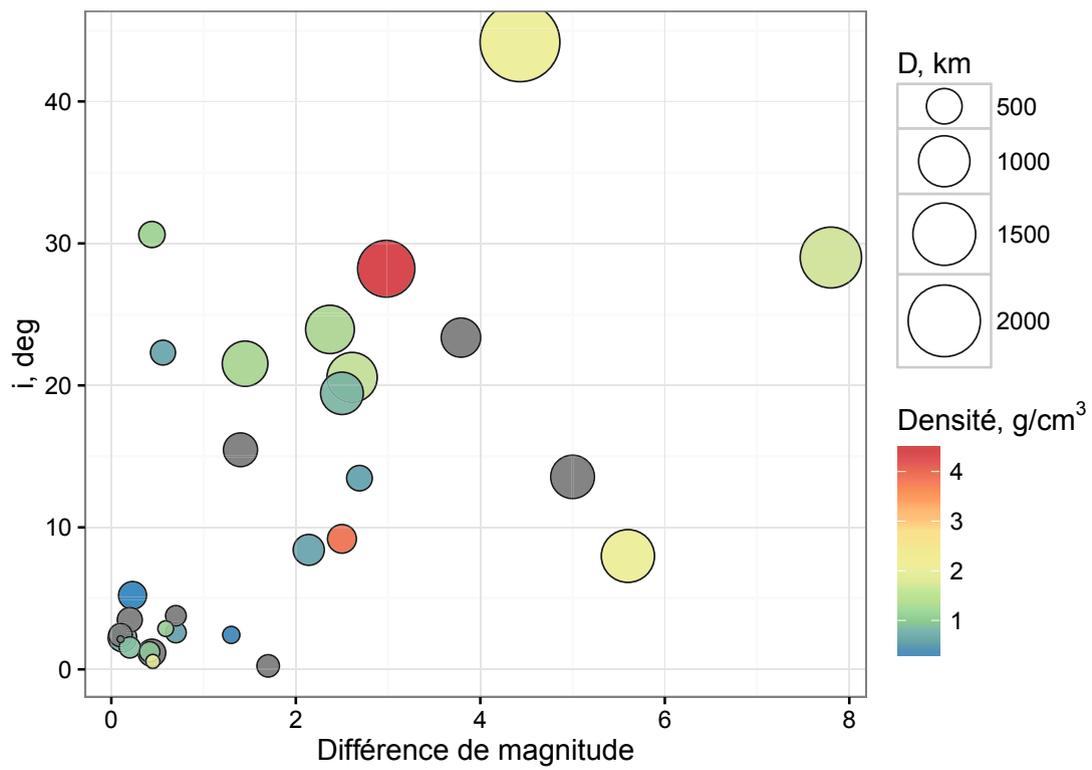
La corrélation entre le diamètre effectif et la masse totale du système binaire est évidente : la masse est proportionnelle à  $D^3 \rho_b$ , où  $\rho_b$  est la densité. Ainsi, nous considérons cette corrélation comme triviale, elle ne demande pas d’explication particulière.

#### 4.3.2 Diamètre et inclinaison

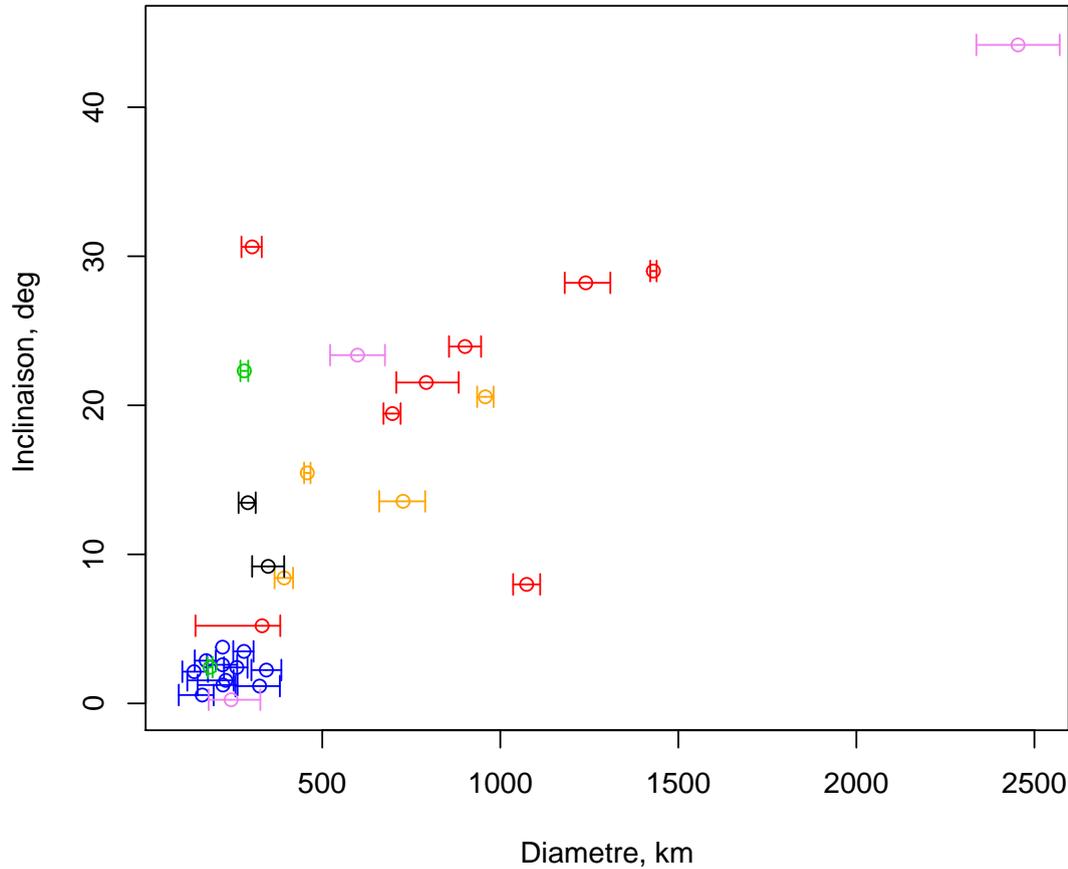
Les deux tests de corrélation (pour  $\tau$  et  $\rho$ ) donnent des valeurs- $p$  très petites ( $p < 0.001$ ), cela montre une très forte présomption contre l’hypothèse nulle (le diamètre et l’inclinaison sont non-corrélés), et le résultat du test est déclaré « statistiquement significatif ». En outre, les coefficients obtenus  $\rho$  et  $\tau$  sont grands (voir la tableau 4.3, ce qui permet de qualifier la corrélation comme forte entre les deux valeurs.

**Table 4.2** – Tests de corrélations entre le diamètre et l’inclinaison.

	Toutes les classes dynamiques				Sans objets froids			
	N	Coeff.	$\sigma$	valeur-p	N	Coeff.	$\sigma$	valeur-p
Spearman	30	0.72	0.1	$< 0.001$	19	0.5	0.24	0.03
Kendall	30	0.56	0.11	$< 0.001$	19	0.42	0.2	0.01



**Figure 4.3** – Illustration des corrélations entre le diamètre avec les trois paramètres suivants : inclinaison, différence de magnitude et densité. Les cercles gris correspondent aux objets dont la densité est inconnue.



**Figure 4.4** – Distribution des astéroïdes dans le plan de l’inclinaison et du diamètre. Les classes dynamiques sont désignées par des couleurs : rouge - objets classiques chauds, bleu - objets classiques froids, vert - objets épars, violet - détachés, noir - plutinos, orange - objets en résonance avec Neptune.

Le diagramme 4.4 illustre la distribution des TNB en fonction de l’inclinaison (axe vertical) et du diamètre avec les incertitudes (axe horizontal). Sur cette illustration les différentes couleurs correspondent aux différentes classes dynamiques.

Nous remarquons que les objets classiques froids, en orbites basses-inclinées, concernent une grande partie de la population. Par cette supériorité numérique ils peuvent influencer la statistique plus que les autres classes dynamiques. Nous avons donc refait les tests, mais sans les objets froids, pour vérifier si la statistique restait la même. Les résultats obtenus sont dans le tableau 4.2. Dans cette configuration, nos résultats ont changés : la valeur- $p$  est devenue plus grande et les coefficients  $\rho$  et  $\tau$  ont diminué. Ainsi, nous ne pouvons plus conclure à un résultat autant significatif contre l’hypothèse  $H_0$  et, en conséquence, à une corrélation forte entre les paramètres. Néanmoins, nos échantillons de données ne sont pas si grands pour la signification des tests, et il n’est pas improbable que de nouveaux binaires découverts changeront les statistiques. L’échantillon sans le CC est véritablement petit, ainsi pour une première approche nous gardons l’idée de la corrélation forte entre le diamètre et l’inclinaison, mais suggérons de refaire les tests dès que de nouveaux objets

seront disponibles.

**Interprétation.** Les résultats des tests sur la corrélation sont clairs du point de vue statistique. Maintenant, comment peuvent-ils être interprétés physiquement ? La corrélation entre le diamètre et l'inclinaison signifie que plus les astéroïdes sont grands plus leur orbite héliocentrique est inclinée. Le diagramme 4.4 illustre la distribution des TNB en fonction de l'inclinaison (axe vertical) et du diamètre avec les incertitudes (axe horizontal). Sur cette illustration les différentes couleurs correspondent aux différentes classes dynamiques.

La même corrélation entre la taille et l'inclinaison a été déjà obtenue dans les études des objets transneptuniens. Notamment, le travail de Vilenius et al. (2012) montre cette corrélation pour les objets classiques. De plus, précédemment, cette tendance a été extrapolée de la corrélation entre la luminosité et l'inclinaison dans le travail de Levison and Stern (2001). Ce résultat à été vérifié et prouvé en l'absence de biais observationels. Levison and Stern (2001) considèrent que les objets plus grands (et plus brillants) se trouvent sur des orbites plus inclinées, ils sont dynamiquement instables, et les petits objets se trouvent sur les orbites peu inclinées, ils sont dynamiquement stables. L'interprétation est liée à la présence de deux groupes (hCl et cCl) et au modèle de formation des objets dans ces groupes. Selon le modèle de Nice (Gomes et al., 2005), il est probable que les grands objets ont migré du disque protoplanétaire interne vers l'extérieur. Ainsi, certains sont devenus gravitationnellement liés à l'orbite de Neptune (objets résonants), certains sont devenus des objets dynamiquement instables (les objets chauds) et certains sont devenus des objets épars. Les objets froids sont dynamiquement stables et primordiaux ; il est plus probable qu'ils aient été formés où ils se situent actuellement et n'ont pas été perturbés pendant la formation du Système solaire.

### 4.3.3 Diamètre et différence de magnitude

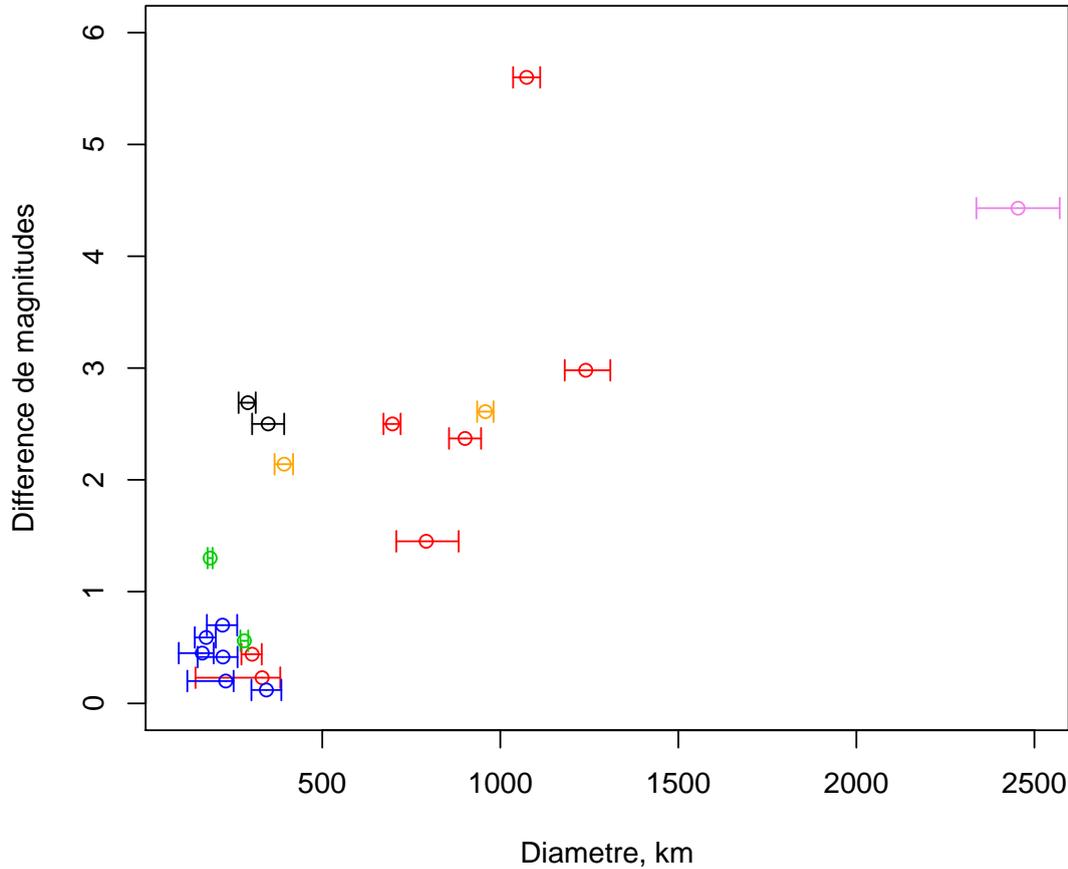
La corrélation suivante trouvée est celle entre le diamètre et la différence de magnitude, ce qui est détecté par une valeur- $p$  basse ( $<0.01$ ) pour les deux statistiques (Kendall et Spearman). Avec les valeurs de  $\rho = 0.69 \pm 0.11$  et  $\tau = 0.52 \pm 0.1$  nous considérons cette corrélation comme étant forte (selon le critère de Spearman) ou au moins non-négligeable (selon le critère de Kendall). La distribution des objets binaires en fonction de leur diamètre effectif par rapport à la différence de magnitude est illustrée dans la figure 4.5.

**Interprétation.** Cette corrélation peut avoir l'interprétation suivante : plus le système binaire est grand, plus les composantes du système sont différents en luminosité. En supposant que les composantes ont des albédos identiques, la différence de magnitude peut être liée à la différence de tailles :

$$D_1/D_2 = 10^{0.2\Delta H_V}. \quad (4.5)$$

Nous avons vérifié la corrélation  $D_1/D_2$  avec  $D = \sqrt{D_1^2 + D_2^2}$  et trouvé une forte présomption de corrélation (valeur- $p < 0.001$ ). Ainsi donc, la corrélation peut être interprétée d'une manière suivante : les petits systèmes ont tendance à avoir leurs deux composantes de taille similaire quand les systèmes massifs se composent plutôt d'un grand astéroïde avec un petit satellite.

Une explication de la corrélation entre le diamètre et la différence de magnitude peut être dans l'origine des objets. Ainsi, il est très probable que les satellites des grands objets aient été formés par une collision. Par exemple, les études sur les satellites de Hauméa et Eris (Brown et al., 2006) montrent qu'il est peu probable que le système de satellites ait



**Figure 4.5** – Distribution des astéroïdes dans le plan de la différence de magnitude et du diamètre. Les classes dynamiques sont désignés par des couleurs : rouge - objets classiques chauds, bleu - objets classiques froids, verts - objets épars, violet - détachés, noir - plutinos, orange - objets en résonance avec Neptune.

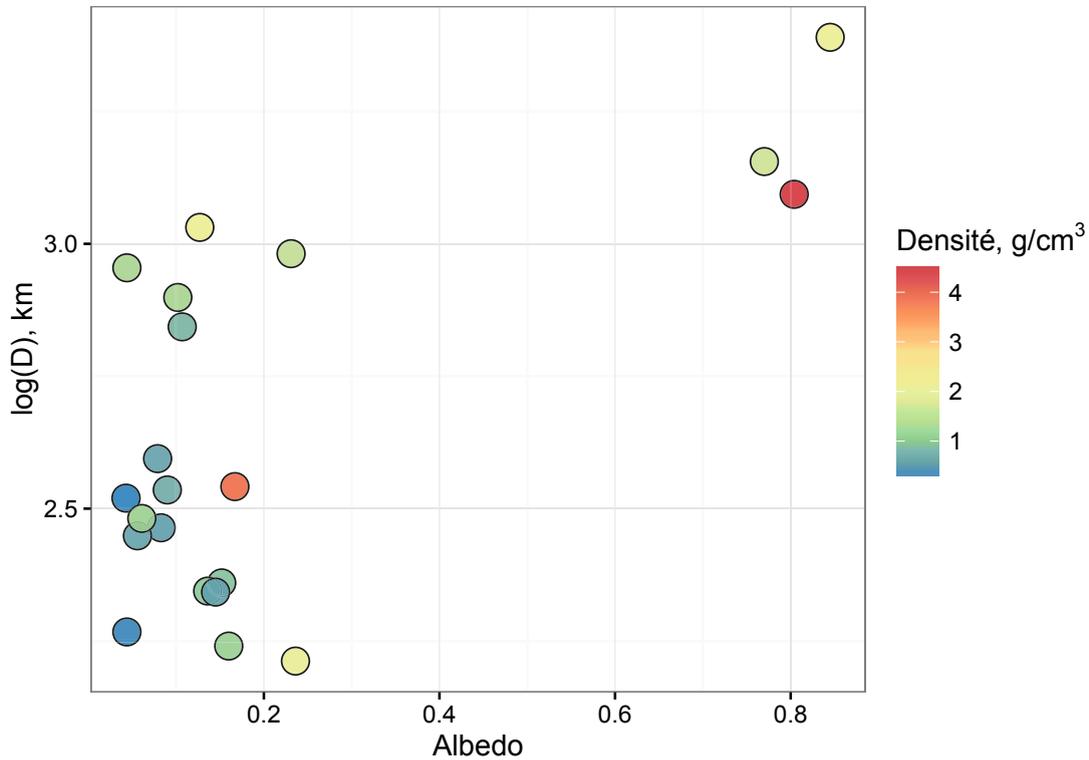
été réalisé par la capture gravitationnelle des objets. Ces satellites ont une masse beaucoup plus petite par rapport à leur primaire (le ratio de masses satellite/primaire est d'environ 1%) et il est donc certain qu'ils sont des fragments du primaire, créés à la suite d'une collision. Concernant les petits binaires, avec des composantes de presque même taille, le modèle de la capture dynamique est plus probable. Ces systèmes pourraient avoir été formés pendant la formation du Système solaire à la suite de la capture mutuelle (Noll et al., 2008). Car ces TNB sont à une grande distance du Soleil, leur vitesse orbitale, et en conséquence l'énergie cinétique du mouvement sont très petites, ce qui rend une telle capture tout à fait possible.

#### 4.3.4 Diamètre et densité

Les tests sur la relation entre le diamètre et la densité ne montrent pas de corrélations aussi significatives que les corrélations décrites précédemment. Pourtant, si nous posons le seuil de signification  $\alpha = 5\%$ , nous concluons que les résultats sont statistiquement significatifs.

Ainsi, les statistiques  $\rho = 0.5 \pm 0.2$  et  $\tau = 0.4 \pm 0.17$  avec la valeur- $p < 0.05$  pour le test du rapport entre le diamètre et la densité montrent que nous avons une corrélation faible. La dépendance du diamètre et de la densité (ainsi que de l'albédo) est présentée sur la figure 4.6.

Ces résultats de corrélations non-négligeables entre les paramètres doivent être absolument vérifiés dès que de nouvelles valeurs de la densité seront disponibles, car notre conclusion est basée sur un échantillon de petite taille.



**Figure 4.6** – Illustration de deux corrélations : du diamètre avec la densité et de l'albédo avec la densité.

**Interprétation.** Bien que les TNO proviennent certainement des mêmes régions de la nébuleuse solaire, la diversité de densité, découverte assez récemment, est très étonnante (Brown, 2012). Une tendance a été remarquée : les petits TNO possèdent une densité faible, quand les grands TNO sont plus denses (Brown, 2012, Vilenius et al., 2012, Fornasier et al., 2013, Stansberry et al., 2006).

Certains scénarios existent pour expliquer la corrélation entre la taille et la densité. Première explication possible : les petits objets, qui possèdent une densité faible, ont une porosité considérable et/ou une fraction importante de glace d'eau (Vilenius et al., 2012), quand les grands objets possèdent une grande partie de roche et moins de porosité. Dans ce scénario les grands TNO ont été formés par coagulation et compression de petits objets, suivis d'une grande perte de glace d'eau à cause de nombreux impacts pendant l'accrétion (Lupo and Lewis, 1979, Brown, 2012). Les binaires de ce scénario se sont probablement formées par une collision à relativement petite vitesse, proche de la vitesse de libération mutuelle, où les deux corps ont gardé leurs compositions primordiales (Brown, 2012, Barr and Schwamb, 2016). Ce scénario est le plus classique et sans doute joue-t-il un rôle dans la tendance générale d'augmentation de la densité avec la taille. En revanche, le processus

de coagulation ne semble pas très probable pour expliquer certaines densités très élevées de grands objets. Par exemple, Brown (2013), en étudiant spécifiquement l'objet 2002 UX25, montre que ce scénario n'est pas compatible. Ainsi, un autre scénario est requis pour expliquer la densité très élevée de certains objets.

Les grands objets comme Eris, Quaoar et Haumea, possédant une densité forte, sont probablement formés par un impact géant (Brown and Schaller, 2007, Barr and Schwamb, 2016). Cette collision a libéré une grande quantité de glace d'eau du manteau de l'objet différencié et produit un primaire dense avec un petit satellite, riche en glace. En revanche, ce dernier scénario n'est pas très réaliste du point de vue dynamique (Stewart and Leinhardt, 2009).

Une hypothèse alternative d'explication de la différence en densités est que la densité est primordiale, c'est-à-dire que le disque n'était pas homogène initialement (Brown, 2012).

Malheureusement, aucun des scénarios proposés actuellement n'est satisfaisant à 100%. Le nombre d'objets avec une densité mesurée n'est pas suffisant pour confirmer ces hypothèses. De plus, les mesures de la densité ont de très grandes incertitudes. Même pour le diamètre dérivé à partir des observations précises de Herschel et Spitzer, l'incertitude de la densité est une fonction d'un paramètre valant trois fois l'incertitude du diamètre (voir la formule (2.11)). La compréhension de la corrélation de la densité avec la taille demande des mesures de meilleure qualité et de plus grand échantillon d'objets avec une masse connue.

### 4.3.5 Albédo et densité

Concernant la corrélation entre l'albédo et la densité, nous n'avons pas trouvé d'études similaires dans la littérature. Cette corrélation montre une tendance à l'augmentation de l'albédo avec la densité, ce qui n'est pas évident, car l'albédo caractérise la surface des objets quand la densité caractérise sa structure interne.

Une explication possible : les objets plus denses et, par conséquence de la corrélation avec le diamètre, plus larges peuvent retenir des glaces brillantes (liés soit aux collisions soit aux processus actifs) plus facilement que les petits objets avec une densité faible (Santos-Sanz et al., 2012). Les objets suffisamment grands pour retenir les matières volatiles et, dans certains cas, l'atmosphère peuvent produire du givre, ce qui donne l'effet d'albédo élevé (Brown, 2012). Les autres objets ont un albédo faible du fait du « space weathering » (Hudson et al., 2008). Il est possible que la corrélation trouvée entre l'albédo et la densité soit biaisée du fait de la correction de la densité avec le diamètre et la présence d'objets très massifs avec un albédo très élevé. En revanche, la corrélation entre le diamètre et l'albédo n'a pas été trouvée dans nos données.

**Table 4.3** – Tests de corrélations entre l'albédo et la densité.

Coefficients	N	Coeff.	$\sigma$	valeur-p
Spearman	17	0.48	0.25	0.05
Kendall	17	0.37	0.22	0.03

Comme nous l'avons vu dans la présentation des données, certains paramètres ont des valeurs extrêmes (voir la figure 2.3) : ce sont les valeurs qui sont très différentes des autres données dans l'échantillon. Ainsi, ces valeurs extrêmes correspondent à Eris, Hauméa et Makemake pour l'albédo, et à Hauméa et 2002 WC19 pour la densité. Dans le but de vérifier si ces objets influencent trop la statistique, nous refaisons les tests de corrélation. Le résultats du test de corrélation entre l'albédo et la densité est moins significatif, mais, avec la seuil significatif  $\alpha = 5\%$ , la corrélation est toujours présente. Comme dans la

---

corrélation précédente ( $D$  vs.  $\rho_b$ ) les résultats de corrélations non-négligeables doivent être vérifiés avec des valeurs de densité complémentaires.

---

## Chapitre 5

# Conclusions et perspectives

Les mesures de l'émission thermique, obtenues dans le cadre du programme « TNOs are cool » par les télescopes spatiaux Herschel et Spitzer, ont permis d'estimer des paramètres essentiels, à savoir le diamètre et l'albédo. Dans la première partie de cette thèse ces paramètres, ainsi que les autres propriétés physiques des objets binaires transneptuniens, ont été étudiés et analysés.

Tout d'abord, la population des binaires a été comparée à la population des objets simples par leurs valeurs du diamètre et de l'albédo. Nous avons trouvé que les deux populations sont différentes par leur distribution de taille, ce qui est lié probablement à différents modèles de formation. D'un autre côté, nous ne pouvons ni confirmer ni rejeter l'hypothèse que les deux populations ont une même distribution d'albédo.

Ensuite, le diamètre et l'albédo ont été testés sur leurs corrélations possibles avec d'autres paramètres physiques et orbitaux. La statistique non-paramétrique avec les techniques de rééchantillonnage pour les erreurs de mesures, ont été utilisés. Dans cette analyse les cinq corrélations suivantes ont été trouvées :

- le diamètre et la masse : corrélation forte ;
- le diamètre et l'inclinaison : corrélation forte ;
- le diamètre et la différence de magnitude : corrélation forte ;
- le diamètre et la densité : corrélation modérée ;
- le albédo et la densité : corrélation forte.

La corrélation entre le diamètre et la densité est obtenue avec la signification statistique 98% (valeur- $p = 0.02$  selon la corrélation de Spearman), les autres corrélations sont statistiquement plus significatives : la valeur- $p < 0.001$  (selon la corrélation de Spearman).

Nos échantillons de données ne sont pas très grands pour la signification des tests, et il n'est pas improbable que de nouveaux binaires découverts changeront les statistiques. Ainsi, nous suggérons de refaire les tests dès que de nouvelles données seront disponibles.

Les résultats obtenus sont essentiellement interprétés du point de vue de la formation des objets transneptuniens en général et binaires en particulier. En conséquence, aucune des interprétations n'est complètement satisfaisante pour expliquer les tendances obtenues, car les mécanismes de formation de ces objets ne sont souvent que des hypothèses. L'importance de la vérification et de l'amélioration des scénarios de formation des TNB est évidente.

Pour conclure, il semble que le scénario de formation d'une part pour les petits TNB sur les orbites stables et d'autre part pour les grands objets peut être différent. Les premiers sont sans doute primordiaux et formés par une capture dynamique et les seconds ont probablement migré du disque protoplanétaire interne et se sont formés à la suite d'un impact.



Deuxième partie

Détermination d'orbite



## Chapitre 6

# Positionnement du problème

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Modèle dynamique</b>	<b>51</b>
6.1.1	Système binaire	51
6.1.2	Observations	51
6.1.3	Orbite képlérienne	54
6.1.4	Orbite perturbée	55
6.1.5	Coordonnées à partir des paramètres orbitaux	60
<b>6.2</b>	<b>Modèle statistique</b>	<b>61</b>
6.2.1	Modèle de régression	61
6.2.2	Inférence bayésienne	61
6.2.3	Estimateur des paramètres	63
<b>6.3</b>	<b>État de l'art</b>	<b>64</b>
6.3.1	Les moindres carrés dans le problème de l'objet binaire	64
6.3.2	Approche bayésienne avec la technique Monte-Carlo	66

---

Dans ce chapitre, nous exposons le problème de la détermination d'orbite mutuelle du système binaire selon deux approches : dynamique et statistique. Tout d'abord, nous décrivons le modèle physique du mouvement képlérien et du mouvement perturbé en liaison avec les observations.

Ensuite, le problème est présenté du point de vue de la statistique bayésienne. Au final, deux méthodes pour ce problème, alternatives à la nôtre, sont décrites.

## 6.1 Modèle dynamique

### 6.1.1 Système binaire

L'objet binaire est un système de deux corps qui s'attirent par force gravitationnelle et orbitent autour de leur centre de masse commun. Généralement, on considère le mouvement relatif d'un astéroïde, qui est plus petit et s'appelle *secondaire*, autour du plus grand – le *primaire*. La désignation « satellite » pour l'astéroïde secondaire est couramment utilisée dans la littérature, particulièrement quand il est considérablement plus petit que le primaire. Dans ce travail les termes *satellite* et *secondaire* sont équivalents.

### 6.1.2 Observations

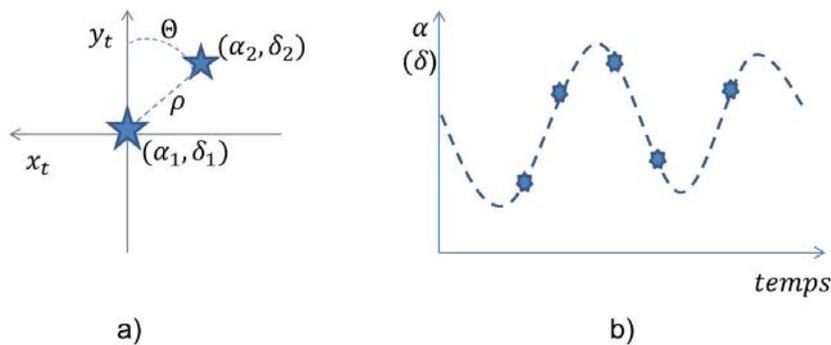
Quand le rapport des masses des deux composantes du système binaire est inconnu, il est impossible de déterminer leur barycentre et par conséquent leurs orbites autour du

centre. Mais il est possible de déterminer l'orbite relative d'une composante (le secondaire) décrite par rapport à l'autre (le primaire), en supposant que le primaire reste stationnaire au point focal. Deux types de binaires sont considérés dans ce travail : les résolus et les non-résolus. Les binaires résolus possèdent une séparation entre les deux composantes suffisamment large par rapport à la précision du télescope, ainsi les deux composantes du système peuvent être observées comme des objets distincts. A l'inverse, les binaires non-résolus possèdent deux composantes qui ne sont pas résolues, la duplicité de ce type d'objets est révélée par le mouvement orbital du photocentre.

Par ailleurs, le mouvement qu'on observe n'est pas un vrai mouvement, c'est une projection sur un plan perpendiculaire à la direction d'observation. Ainsi, les observations astrométriques donnent les positions apparentes du secondaire par rapport au primaire (binaires résolus) ou du photocentre par rapport au barycentre (binaires non-résolus) sur un plan tangent à la sphère céleste.

### Binaire résolu

Chaque observation complète d'astéroïde binaire résolu se compose de la date de l'observation  $t$  et de deux coordonnées sur le plan tangent : l'angle de position  $\theta$  de l'astéroïde secondaire par rapport au primaire, et la distance angulaire  $\rho$  entre les deux astéroïdes (voir figure 6.1).



**Figure 6.1** – Observations du système binaire. a) Binaire résolu : deux composantes sont observées séparément. b) Binaire non-résolu : l'oscillation d'un photocentre est observée.

L'ensemble de coordonnées  $(\rho, \theta)$  peut également être exprimé en coordonnées rectangulaires  $(x_t, y_t)$  dans le plan tangent par les équations :

$$\begin{aligned} x_t &= \rho \sin \theta, \\ y_t &= \rho \cos \theta. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Ces coordonnées  $(x_t, y_t)$  sont mesurées dans le plan tangent qui est associé à l'astéroïde. Le mouvement du plan tangent peut être important entre les observations même pour un court intervalle entre les observations. La direction vers l'astéroïde est déterminée par deux angles, l'ascension droite  $\alpha$  et la déclinaison  $\delta$ , associées à l'époque standard J2000. Mesurées en secondes d'arc, les coordonnées tangentes  $(x_t, y_t)$  sont liées à  $(\alpha, \delta)$  par les équations (6.2),

$$\begin{aligned} x_t &= (\alpha_2 - \alpha_1) \cos \delta_1, \\ y_t &= \delta_2 - \delta_1, \end{aligned} \quad (6.2)$$

où les indices sur  $\alpha$  et  $\delta$  font référence au primaire (1) et au secondaire (2) respectivement.

On considère un système de coordonnées, appelé système tangent, lié au plan tangent et avec point origine l'astéroïde primaire, tel que l'axe  $y$  est dirigé vers le Nord de la

sphère céleste, l'axe  $x$  est dirigé vers l'est et l'axe  $z$  est normal au plan tangent et dirigé vers l'observateur (voir la figure 6.2). La distance entre l'observateur et l'astéroïde est désignée par la lettre  $R$  au temps d'observation  $t$ . Dans ce système, la position relative du secondaire par rapport au primaire est liée à la position observée dans le plan tangent par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} x &= Rx_t, \\ y &= Ry_t. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Soit le système de coordonnées  $(x_E, y_E, z_E)$  avec point origine l'astéroïde primaire et associé au système équatorial de l'époque J2000. Ainsi, la matrice de transformation du système tangent  $(x, y, z)$  au système équatorial  $(x_E, y_E, z_E)$  est :

$$S(\alpha, \delta) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha & -\cos \alpha \sin \delta & \cos \alpha \cos \delta \\ \cos \alpha & -\sin \alpha \sin \delta & \sin \alpha \cos \delta \\ 0 & \cos \delta & \sin \delta \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Le vecteur  $(x_E, y_E, z_E)^T$  peut être exprimé de la manière suivante :

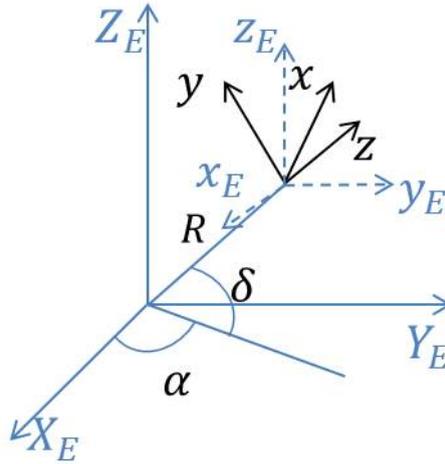


Figure 6.2 – Système tangent dans le système équatorial.

$$\begin{pmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E \end{pmatrix} = S(\alpha, \delta) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

### Binaire non-résolu

Les binaires non-résolus sont détectés par l'oscillation du photocentre, pour lequel des mesures astrométriques précises et très exactes sont nécessaires.

Soit le centre de gravité

$$\mathbf{r}_g = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m},$$

et le photocentre

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_p &= \frac{I_1(\mathbf{r}_1 + \delta \mathbf{r}_{p1}) + I_2(\mathbf{r}_2 + \delta \mathbf{r}_{p2})}{I} \\ &= \frac{I_1 \mathbf{r}_1 + I_2 \mathbf{r}_2}{I} + \frac{I_1 \delta \mathbf{r}_{p1} + I_2 \delta \mathbf{r}_{p2}}{I} \\ &= \frac{I_1 \mathbf{r}_1 + I_2 \mathbf{r}_2}{I} + \mathcal{O}_p, \end{aligned}$$

où  $m_i$  est la masse,  $I_i$  est le flux de lumière,  $\mathbf{r}_i$  est le vecteur de position du gravicentre et  $\delta\mathbf{r}_{pi}$  est le vecteur de décalage du photocentre du disque apparent par rapport au centre de masse de la  $i$ -ème composante,  $m = m_1 + m_2$  est la masse totale,  $I = I_1 + I_2$  est le flux de lumière total. Le terme  $\mathcal{O}_p$  corrige les décalages du photocentre des composantes.

Le décalage du photocentre par rapport au centre de gravité est :

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_g = \left( \frac{I_2}{I} - \frac{m_2}{m} \right) \mathbf{r} + \mathcal{O}_p, \quad (6.6)$$

où  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  est le vecteur de position entre le centre du primaire et le centre du secondaire (Pravec and Scheirich, 2012).

Supposant que les composantes du système binaire ont

- des albédos identiques,
- des formes sphériques,
- une même densité,

et que  $\mathcal{O}_p \approx 0$ , le vecteur de déplacement de photocentre devient

$$\Delta\mathbf{r} = [(1 + k^{-2})^{-1} - (1 + k^{-3})^{-1}] \mathbf{r}, \quad (6.7)$$

où  $k = D_2/D_1$  est le rapport des diamètres des composantes.

Sur le plan tangent l'observation de cette position du photocentre est décrite par

$$\begin{aligned} x_p &= (\alpha_p - \alpha_g) \cos \delta_g, \\ y_p &= \delta_p - \delta_g, \end{aligned} \quad (6.8)$$

où  $(\alpha_p, \delta_p)$  et  $(\alpha_g, \delta_g)$  sont les coordonnées équatoriales du photocentre et du centre de gravité.

### Délai temps-lumière

La position observée de l'astéroïde ne correspond pas à la position au moment de l'observation à cause du délai de lumière en distance entre l'observateur et l'objet. Ce délai doit être pris en compte et peut être calculé facilement par l'équation linéaire suivante :

$$t = t_o - R/v_c, \quad (6.9)$$

où  $t_o$  est l'époque de l'observation,  $R$  la distance entre l'observateur et l'objet et  $v_c$  la vitesse de la lumière.

### 6.1.3 Orbite képlérienne

Le mouvement héliocentrique de l'astéroïde est supposé connu, ainsi la distance topocentrique  $R$  et les coordonnées d'ascension droite  $\alpha$  et de déclinaison  $\delta$  peuvent être déduites des éphémérides disponibles. Dans une première approche nous considérons l'orbite du secondaire comme étant képlérienne avec le primaire au foyer sans compter les perturbations de l'orbite képlérienne. Si la masse totale de l'astéroïde binaire est inconnue, cette orbite peut être décrite par sept paramètres indépendants :  $(a, e, i, \Omega, \omega, \tau, P)$  six paramètres képlériens – demi-grand axe, excentricité, inclinaison, longitude du nœud, argument du péricentre, temps du passage du péricentre, respectivement – et la période d'une révolution du secondaire autour du primaire.

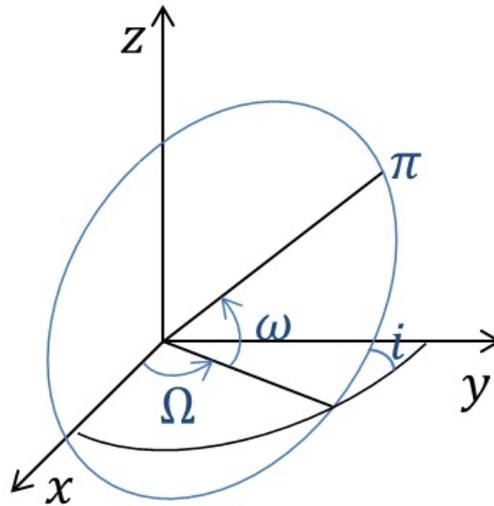


Figure 6.3 – Paramètres orbitaux définis dans le système équatorial.

#### 6.1.4 Orbite perturbée

Les éléments orbitaux subissent des perturbations séculaires et périodiques. L'influence de chaque type de perturbation dépend de l'intervalle de temps sur lequel le mouvement est considéré et des conditions initiales du mouvement. En effet, dans notre cas, cela dépend de l'intervalle de temps, sur lequel on dispose d'observations.

Les perturbations périodiques à court terme ont des périodes multiples de la période orbitale de l'astéroïde secondaire autour du primaire. Les perturbations périodiques à long terme ont des périodes multiples de la période orbitale de l'astéroïde binaire autour du Soleil. Il existe aussi les perturbations à long terme multiples de la période de rotation de la ligne des nœuds et du péricentre, mais dans la plupart des cas, ces dernières sont tellement longues, que sur l'intervalle de temps considéré, elles sont comparables aux perturbations séculaires et jouent un rôle complémentaire.

Soit  $M$  l'anomalie moyenne, et soit  $n$  le moyen mouvement lié au demi-grand axe :

$$n = \sqrt{\frac{Gm}{a^3}}. \quad (6.10)$$

Pour prendre en considération les perturbations sur les éléments orbitaux, nous utilisons

les équations différentielles de Lagrange (Subbotin, 1968) :

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M}, \\
\frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{ena^2} \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \\
\frac{di}{dt} &= \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \\
\frac{dM}{dt} &= n - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{ena^2} \frac{\partial R}{\partial e}, \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}, \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i},
\end{aligned} \tag{6.11}$$

où  $R$  est la fonction perturbatrice.

Une conséquence de la résolution des équations de Lagrange est que les amplitudes des perturbations courte-périodiques sont presque toujours considérablement plus petites que les amplitudes des perturbations à long terme (à l'exception des perturbations résonantes).

Ici, nous ne considérons que les effets séculaires liée à la non-sphéricité des astéroïdes et les effets séculaires et périodiques à long terme liés à l'attraction du Soleil. Les autres effets sont supposés être négligeables.

En se basant sur la théorie des perturbations (Aksenov, 1977), les effets séculaires ne sont présents que dans les éléments :  $\omega$ ,  $\Omega$  et  $M$ . Les éléments  $a$ ,  $e$ ,  $i$  sont constants.

$$M = M_0 + n_1 (t - t_0), \tag{6.12}$$

$$\omega = \omega_0 + n_2 (t - t_0), \tag{6.13}$$

$$\Omega = \Omega_0 + n_3 (t - t_0), \tag{6.14}$$

où  $M_0$ ,  $\omega_0$  et  $\Omega_0$  sont constants. Les coefficients

$$\begin{aligned}
n_1 &= n (1 + \nu_1(J_2) + \nu_1(m')), \\
n_2 &= n (\nu_2(J_2) + \nu_2(m')), \\
n_3 &= n (\nu_3(J_2) + \nu_3(m')),
\end{aligned} \tag{6.15}$$

où  $\nu_1(J_2)$ ,  $\nu_2(J_2)$ ,  $\nu_3(J_2)$  sont les termes de premier degré de la deuxième harmonique zonale dans la décomposition du potentiel gravitationnel,  $\nu_1(m')$ ,  $\nu_2(m')$ ,  $\nu_3(m')$  sont les termes liés à l'attraction du Soleil.

### Effets séculaires de non-sphéricité de l'astéroïde primaire

Soit  $r_0$  le rayon moyen à l'équateur de l'astéroïde primaire. Ainsi donc

$$\nu_1(J_2) = \frac{3}{4} J_2 \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \frac{2 - 3 \sin^2 i}{(1 - e^2)^{3/2}}, \tag{6.16}$$

$$\nu_2(J_2) = \frac{3}{4} J_2 \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \frac{4 - 5 \sin^2 i}{(1 - e^2)^{3/2}}, \quad (6.17)$$

$$\nu_3(J_2) = \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \frac{\cos i}{(1 - e^2)^{3/2}}. \quad (6.18)$$

Ici, l'inclinaison  $i$  doit être fixée. Ainsi, nous déterminons les angles  $i$ ,  $\omega$  et  $\Omega$  par rapport à un plan où  $i$  est constant. Pour distinguer ces éléments de ceux du système lié à l'équateur de la Terre, nous les désignons  $i_p$ ,  $\omega_p$  et  $\Omega_p$ . Soit  $(x_p, y_p, z_p)$  un système de coordonnées centré sur l'astéroïde primaire et lié au vecteur fixe du moment angulaire qui est la somme des moments de rotation du primaire et du secondaire. L'axe  $z_p$  est orienté le long de ce vecteur, l'axe  $x_p$  est dirigé dans le nœud du plan  $Ox_p y_p$  à travers l'équateur de la Terre (à l'époque J2000) et l'axe  $y$  forme un angle aigu avec l'équateur de la Terre. Ainsi, l'inclinaison  $i_p$  est stable par rapport au plan perpendiculaire à  $z_p$ . L'axe  $z$  est déterminé dans le système équatorial  $(x_E, y_E, z_E)$  centré dans le primaire (voir la figure 6.2) par l'ascension droite  $\alpha_p$  et la déclinaison  $\delta_p$ .

Soit le moment angulaire dans le système équatorial  $L_e = (x_{Le}, y_{Le}, z_{Le})$ ,

$$\begin{aligned} x_{Le} &= \sin i \sin \Omega, \\ y_{Le} &= -\sin i \cos \Omega, \\ z_{Le} &= \cos i. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Soit le vecteur de Laplace :  $A_e = (a_{xE}, a_{yE}, a_{zE})$ ,

$$\begin{aligned} a_{xE} &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \cos i \sin \Omega, \\ a_{yE} &= \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos i \cos \Omega, \\ a_{zE} &= \sin \omega \sin i. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Dans le système lié à l'équateur de l'astéroïde primaire  $L_p = S^{-1}(\alpha_p, \delta_p) \times L_e$ , ainsi donc

$$\begin{aligned} x_{Lp} &= -\sin \alpha_p x_{Le} + \cos \alpha_p y_{Le}, \\ y_{Lp} &= -\cos \alpha_p \sin \delta_p x_{Le} - \sin \alpha_p \sin \delta_p y_{Le} + \cos \delta_p z_{Le}, \\ z_{Lp} &= \cos \alpha_p \cos \delta_p x_{Le} + \sin \alpha_p \cos \delta_p y_{Le} + \sin \delta_p z_{Le}, \end{aligned} \quad (6.21)$$

et  $A_p = S^{-1}(\alpha_p, \delta_p) \times A_e$ , d'où

$$\begin{aligned} a_{xp} &= -\sin \alpha_p a_{xp} + \cos \alpha_p a_{yp}, \\ a_{yp} &= -\cos \alpha_p \sin \delta_p a_{xp} - \sin \alpha_p \sin \delta_p a_{yp} + \cos \delta_p a_{zE}, \\ a_{zp} &= \cos \alpha_p \cos \delta_p a_{xp} + \sin \alpha_p \cos \delta_p a_{yp} + \sin \delta_p a_{zE}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

où  $S^{-1}$  est la matrice inverse de la matrice de transformation (6.4). Les éléments dans le système lié à l'équateur de l'astéroïde sont dérivés des équations suivantes :

$$\begin{aligned} \cos i_p &= z_{Lp}, \\ \sin i_p &= \sqrt{x_{Lp}^2 + y_{Lp}^2}, \end{aligned} \quad (6.23)$$

$$\Omega_p = \operatorname{atan} \frac{-y_{Lp}}{x_{Lp}}, \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned} \sin \omega_p &= \frac{-a_{xp} \sin \Omega_p + a_{yp} \cos \Omega_p}{\cos i_p}, \\ \cos \omega_p &= a_{xp} \cos \Omega_p + a_{yp} \sin \Omega_p. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Dès que les éléments  $i_p$ ,  $\omega_p$  et  $\Omega_p$  sont déterminés, les coefficients  $\nu_1(J_2)$ ,  $\nu_2(J_2)$ ,  $\nu_3(J_2)$ ,  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  (voir les formules (6.15)) et, en conséquence, les effets secondaires sur  $M$ ,  $\Omega_p$  et  $\omega_p$  peuvent être calculés. Ensuite, les éléments  $i_p$ ,  $\Omega_p$  et  $\omega_p$  peuvent être transformés vers ceux du système équatorial de la même façon.

### Estimation de la perturbation liée à l'attraction du Soleil

Avant d'introduire l'effet séculaire et l'effet périodique à long terme lié à l'attraction du Soleil, il faut clarifier si cela est vraiment nécessaire. Dans ce but il faut d'abord estimer la grandeur du décalage visuel de la position du satellite par rapport au primaire. Si ce décalage est considérablement plus petit que la précision de l'observation, il peut être négligé.

L'estimation de ce décalage peut être faite en estimant la grandeur de la perturbation des éléments képlériens liée à l'attraction du Soleil. Soient des perturbations des éléments du mouvement képlérien proportionnelles à un certain petit paramètre  $\varepsilon$ . En accord avec la théorie générale du mouvement perturbé (Aksenov, 1977) dans le problème donné, le paramètre  $\varepsilon$  est déterminé de la manière suivante :

$$\varepsilon = \frac{m' a^3}{m a'^3} = \frac{n'^2}{n^2}, \quad (6.26)$$

où  $m'$  est la masse du Soleil,  $m$  est la masse du primaire,  $a$  est le demi-grand axe de l'orbite du satellite autour du primaire,  $a'$  est le demi-grand axe de l'orbite héliocentrique de l'astéroïde,  $n'$  est le moyen mouvement de l'orbite héliocentrique et  $n$  est le moyen mouvement de l'orbite du secondaire autour du primaire.

L'estimation de la perturbation par la valeur de  $\varepsilon$  peut ne pas être suffisamment précise, car dans les éléments d'orbite des perturbations séculaires, ainsi que des perturbations à longues et courtes périodes sont également présentes. La contribution de chaque type de perturbation dépend de l'intervalle de temps sur lequel le mouvement est considéré, en pratique de l'intervalle de temps des observations.

Pour estimer les effets séculaires sur les éléments orbitaux, les formules présentées dans Aksenov (1977), sont utilisées. En prenant en compte seulement les perturbations du premier ordre par rapport à  $\varepsilon$ , les perturbations séculaires sont exprimées par la formule suivante :

$$\delta E = K \varepsilon n(t - t_0), \quad (6.27)$$

où  $\delta E$  est une perturbation d'un élément orbital ( $M$ ,  $\omega$  et  $\Omega$ ),  $t$  est un temps,  $t_0$  est l'époque initiale,  $K$  est un coefficient qui dépend des excentricités et des inclinaisons de l'orbite du satellite autour du primaire et de l'orbite héliocentrique du système binaire. La grandeur de  $K$  peut être estimée dans les limites  $0.1 < K < 10$  (exception des très grandes excentricités). La valeur de  $\delta E$  est un angle avec son sommet dans le primaire. En multipliant  $\delta E$  par un rayon d'orbite (ou approximativement par le demi-grand axe  $a$ ) nous obtenons le décalage linéaire observé sur l'orbite du satellite à cause des perturbations.

Ainsi, pour estimer le décalage angulaire dans les observations de l'astéroïde secondaire par rapport au primaire, lié aux perturbations séculaires du Soleil, l'expression suivante peut être utilisée :

$$\Delta\alpha = \frac{a}{R} K \varepsilon n(t - t_0), \quad (6.28)$$

où  $\Delta\alpha$  et  $n$  sont exprimés en radians,  $R$  est une distance entre l'observateur et l'astéroïde et  $\varepsilon$  est une petite valeur. De plus, il faut prendre en compte que le décalage ne peut pas être supérieur à la taille de l'orbite  $\Delta\alpha \leq \frac{a}{r}$ .

Les perturbations à long terme liées à la période de l'orbite héliocentrique de l'astéroïde sont les secondes par la grandeur après les perturbations séculaires. Dans cette thèse nous ne faisons pas de description très détaillée de l'expression analytique pour le décalage angulaire dans les observations, car on s'intéresse seulement à son estimation approximative. L'estimation exacte a été faite dans le travail de Emelyanov and Samorodov (2015) dans la construction du modèle analytique du mouvement du satellite de Neptune.

Nous utilisons la formule de la fonction perturbatrice, présentée dans ce travail. En posant cette formule dans les équations de Lagrange et en faisant des intégrations, nous obtenons l'expression généralisée pour les amplitudes des perturbations à longues périodes sur les éléments orbitaux :

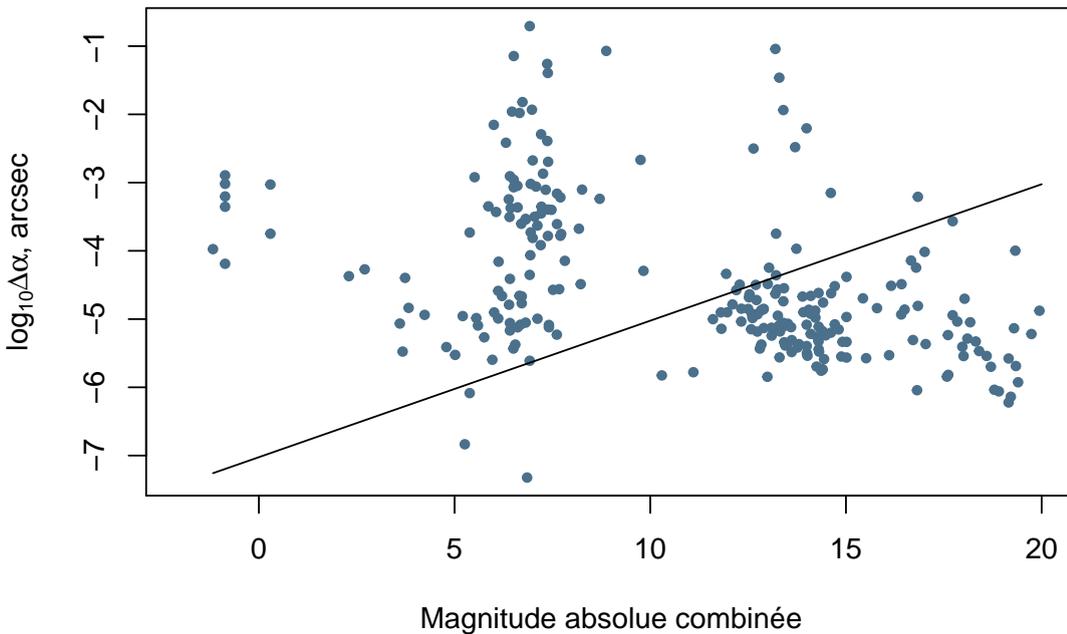
$$A = K\varepsilon \frac{n}{n'}. \quad (6.29)$$

Par analogie avec  $\delta E$ , la valeur est un angle avec son sommet dans le primaire. En multipliant par le demi-grand axe, nous obtenons le décalage linéaire. Cette amplitude  $A$  peut être également obtenue en utilisant le développement de la fonction perturbatrice donné dans le livre de Murray and Dermott (1999). Ainsi, en utilisant la formule (6.26) et posant  $K = 1$ , pour le décalage angulaire observé du secondaire par rapport au primaire, lié aux perturbations à long terme, l'expression suivante peut être obtenue :

$$\Delta\alpha = \frac{a}{R} \frac{n'}{n}, \quad (6.30)$$

où  $\Delta\alpha$  est exprimé en radians,  $R$  est la distance entre l'observateur et l'objet.

**Estimation avec la précision du télescope spatial Gaïa.** Pour estimer la valeur de  $\Delta\alpha$  nous avons pris un échantillon de 254 astéroïdes binaires avec les orbites déterminées du satellite autour du primaire (ou avec les paramètres  $a$  et  $n$  estimés) (Johnston, 2014).



**Figure 6.4** – Estimation de la grandeur du décalage angulaire des satellites, lié à l'attraction du Soleil. La ligne noire correspond à la précision approximative du télescope Gaïa. Tous les décalages  $\Delta\alpha$  supérieurs à cette limite peuvent être importants.

La magnitude absolue d'objet est estimée par la relation suivante (Fowler and Chillemi, 1992) :

$$H_V = -5 \log_{10}(D_e \sqrt{p_V} / 1329),$$

où le diamètre effectif  $D_e$  et l'albédo sont pris de Johnston (2014). Soit la distance approximative  $R$  celle entre l'astéroïde dans son périhélie et le point de Lagrange L2 du

système Terre-Soleil, telle que l'angle entre l'astéroïde et L2 vus depuis le Soleil est égale à  $45^\circ$  (cela correspond à la position du télescope spatial Gaïa qui n'observe pas à l'opposition mais entre  $45^\circ$  et  $135^\circ$  d'élongation solaire). La valeur obtenue (équation (6.30)) de  $\Delta\alpha$  est comparée ensuite avec l'incertitude estimée du télescope Gaïa  $\sigma$  en fonction de la magnitude absolue  $H_V$  (Pravec and Scheirich, 2012) :

$$\sigma = 0.15 \times 10^{0.2(H_V - 16)}, \quad (6.31)$$

où  $\sigma$  est exprimée en millisecondes d'arc (mas).

Il est remarquable (voir la figure 6.4) qu'une partie considérable peut subir une importante influence de l'attraction du Soleil pour cette précision. Ici, les valeurs de  $\Delta\alpha$  ne sont que des estimations. En pratique, elle doivent être calculées pour une distance  $R$  donnée à chaque observation.

### 6.1.5 Coordonnées à partir des paramètres orbitaux

Calculer les éphémérides d'objets en un temps donné est un problème direct de la mécanique céleste. Pour le mouvement du satellite autour de l'astéroïde primaire il suffit de connaître les sept éléments orbitaux  $(a, e, i, \Omega, \omega, \tau, P)$ , qui sont constants pour le mouvement képlérien sans perturbation ou calculés pour un temps donné en considérant les effets séculaires et à long terme. Les coordonnées au temps  $t$  donné du satellite sont calculées par les équations suivantes :

$$M = n(t - \tau), \quad \text{où } n = 2\pi/P. \quad (6.32)$$

Ensuite, l'anomalie excentrique  $E$  est calculée de l'équation de Kepler :

$$M = E - e \sin E, \quad (6.33)$$

le vecteur position  $r$  et l'anomalie vraie  $\nu$  par :

$$\begin{aligned} r &= a(1 - e \cos E), \\ \tan \nu &= \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{\cos E - e}. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Les coordonnées de la position du satellite dans le système équatorial (voir 6.2), centré sur le primaire sont :

$$\begin{aligned} x_E &= r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y_E &= r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z_E &= r \sin u \sin i, \end{aligned} \quad (6.35)$$

où  $u = \nu + \omega$  s'appelle l'argument de latitude.

Pour les binaires résolus, au final, les coordonnées  $(x, y)$  de la position apparente du secondaire par rapport au primaire proviennent de :

$$\begin{aligned} x &= -x_E \sin \alpha + y_E \cos \alpha, \\ y &= -x_E \cos \alpha \sin \delta - y_E \sin \alpha \sin \delta + z_E \cos \delta. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Pour les binaires non-résolus, le rapport entre les diamètres du secondaire et primaire  $k = D_2/D_1$  est nécessaire. Ainsi les coordonnées  $(x, y)$  de la position apparente du photocentre proviennent de :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = [(1 + k^{-2})^{-1} - (1 + k^{-3})^{-1}] \begin{pmatrix} -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -\cos \alpha \sin \delta & -\sin \alpha \sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E \end{pmatrix}, \quad (6.37)$$

Lorsque les coordonnées  $(x, y)$  sont calculées, les résidus entre les positions observées et calculées peuvent être déterminés.

## 6.2 Modèle statistique

### 6.2.1 Modèle de régression

Dans le but de lier les observations avec le modèle théorique (voir 6.1), nous écrivons une équation, qu'on appelle équation observationnelle (Virtanen et al., 2001), sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (6.38)$$

où  $\boldsymbol{\varphi}$  est un ensemble de  $N$  observations de la position relative du satellite par rapport à l'astéroïde primaire ou du photocentre par rapport au centre de gravité du système binaire, faites aux temps  $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \dots, t_N)$  :

$$\boldsymbol{\varphi} = (x_1, y_1; \dots; x_N, y_N)^T.$$

$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\theta})$  est le vecteur de positions calculées pour un modèle dynamique, décrit par un vecteur de paramètres  $\boldsymbol{\theta}$ , et le vecteur  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{x1}, \varepsilon_{y1}; \dots; \varepsilon_{xN}, \varepsilon_{yN})^T$  décrit les erreurs observationnelle et théorique. Les valeurs de  $\boldsymbol{\theta}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sont inconnues, et la fonction  $\boldsymbol{\psi}$  dépend d'une manière très implicite de  $\boldsymbol{\theta}$  (la relation implicite qui lie  $\boldsymbol{\psi}$  et  $\boldsymbol{\theta}$  est décrite dans la section 6.1.5). Ainsi, le problème est de trouver les paramètres  $\boldsymbol{\theta}$  pour que les erreurs  $\boldsymbol{\varepsilon}$  soient minimales. L'équation (6.38) représente un modèle non-linéaire de régression pour lequel plusieurs méthodes peuvent être appliquées. La méthode la plus classique est la méthode des moindres carrés. Dans ce travail nous présentons une méthode statistique, qui s'appelle *recuit simulé* avec approche bayésienne.

### 6.2.2 Inférence bayésienne

L'inférence bayésienne est souvent utilisée en physique pour des problèmes inverses (von Toussaint, 2011). Muinonen and Howell (1993) a introduit la formulation bayésienne dans le problème de détermination d'orbite. L'approche statistique bayésienne est utilisée dans le but d'estimer les paramètres inconnus à partir des données et de certaines informations *a priori*. En utilisant la même désignation que dans (6.38), soit, un vecteur de paramètres inconnus  $\boldsymbol{\theta}$  et les données d'observations  $\boldsymbol{\varphi}$ , la densité de probabilité conditionnelle  $p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\varphi})$ , qui s'appelle *a posteriori*, peut être déterminée par la formule de Bayes :

$$p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\varphi}) = \frac{p(\boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{\theta})}{p(\boldsymbol{\varphi})}. \quad (6.39)$$

La densité de probabilité  $p(\boldsymbol{\varphi})$  ne dépend pas de  $\boldsymbol{\theta}$  et, avec les observations  $\boldsymbol{\varphi}$  fixes, peut être considérée comme constante. Ainsi, l'*a posteriori* est proportionnel à  $p(\boldsymbol{\theta})$ , appelé *a priori*, et  $p(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{\theta})$ , appelé la fonction de vraisemblance :

$$p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\varphi}) \propto p(\boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{\theta}). \quad (6.40)$$

De cette manière, les paramètres d'orbite sont modélisés avec le terme de vraisemblance, qui dépend des données d'observations, et le terme d'*a priori*, qui introduit l'information disponible sur les paramètres.

#### Fonction de vraisemblance

La fonction de vraisemblance  $\mathcal{L}$ , par définition, est égale à une densité de probabilités conditionnelles de  $\varphi_i$ , en sachant les paramètres  $\boldsymbol{\theta}$  :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{\theta}) = p(\varphi_1, \varphi_1, \dots, \varphi_N|\boldsymbol{\theta}) = p(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{\theta}). \quad (6.41)$$

Pour la construction de notre modèle, il est raisonnable de supposer que les paramètres optimaux, correspondant à  $\varepsilon$  minimal, sont tels que les observations soient ajustées le mieux possible. Cela permet de lier la fonction de vraisemblance avec la distance entre les positions observées et les positions calculées qui leur sont associés. La position calculée est un point calculé avec les paramètres d'orbite pour le moment du temps d'observation. En supposant que les observations sont indépendantes, la fonction de vraisemblance est définie par la formule :

$$\mathcal{L}(\varphi|\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^N l(\varphi_i|\boldsymbol{\theta}), \quad (6.42)$$

où

$$l(\varphi_i|\boldsymbol{\theta}) = \exp \left[ - \left( |x_i^O - x_i^C|^2 + |y_i^O - y_i^C|^2 \right)^{k/2} \right] = \exp[-\varepsilon_i^k], \quad k \in \mathbb{N}$$

avec  $(x_i, y_i)^O$  et  $(x_i, y_i)^C$ , les coordonnées des positions observées et calculées au même temps associé, respectivement. Les fonctions  $\varepsilon_i$  sont interprétées comme la distance euclidienne entre les positions observées et calculées. Ainsi, la fonction de vraisemblance peut être exprimée par :

$$\mathcal{L}(\varphi|\boldsymbol{\theta}) = \exp \left[ - \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^k \right], \quad k \in \mathbb{N}. \quad (6.43)$$

En plus, si les incertitudes des observations sont disponibles, elles interviennent dans le modèle :

$$\mathcal{L}(\varphi|\boldsymbol{\theta}) = \exp \left[ - \sum_{i=1}^N \left( \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \right)^k \right], \quad k \in \mathbb{N}, \quad (6.44)$$

où  $\sigma_i, i = 1, \dots, N$  sont les incertitudes données pour chaque observation. Ce modèle est appelé modèle pondéré.

### Fonction *a priori*

La fonction *a priori* sert à contraindre l'espace des paramètres. Elle est construite à partir d'informations sur les paramètres, connues avant l'observation. En revanche, le cas d'une absence de connaissance particulière sur les paramètres arrive souvent quand on a besoin de déterminer une orbite préalablement inconnue. Dans cette situation, le choix de la loi *a priori* doit être tel que son influence soit minimale pour l'inférence bayésienne. La loi *a priori* non-informative de Jeffreys (Jeffreys, 1961) est un choix naturel. Elle est déterminée par la densité de probabilité

$$p(\boldsymbol{\theta}) = \det(\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta}))^{1/2}, \quad (6.45)$$

où  $\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta})$  est la matrice d'information de Fisher, dont les éléments sont

$$\mathcal{I}_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{E}_{\boldsymbol{\theta}} \left( \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}(\varphi|\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right). \quad (6.46)$$

L'*a priori* de Jeffreys a une propriété importante : elle est invariante par reparamétrisation du vecteur de paramètres  $\boldsymbol{\theta}$ . C'est-à-dire, pour toutes les paramétrisations  $h$  telles que

$$p(\boldsymbol{\theta}) = p(h(\boldsymbol{\theta})) \left| \det \frac{\partial h(\boldsymbol{\theta})_i}{\partial \theta_j} \right|,$$

les distributions de valeurs résultantes sont indépendantes. En pratique, cela signifie, par exemple, que les incertitudes sur les éphémérides, calculées à partir des éléments

orbitaux, sont indépendantes du choix des éléments (par exemple on peut choisir  $\theta = (a, e, i, \Omega, \omega, \tau, P)$  ou également  $\theta = (x_y, y_t, z_t, \dot{x}_y, \dot{y}_t, \dot{z}_t, m)$  ( $m$  est la masse totale de l'objet binaire), mais la reparamétrisation pour la loi *a priori* doit être prise en compte).

En examinant le cas de plusieurs paramètres indépendants, Jeffreys propose de considérer leurs *a priori* séparément. En absence de corrélation entre les paramètres, la fonction *a priori* peut être exprimée sous la forme d'une densité de probabilité jointe :

$$p(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^m p(\theta_i), \quad (6.47)$$

où  $\theta_i$  est un des  $m$  paramètres inconnus décrivant l'orbite. Le choix de l'*a priori* est expliqué plus en détails pour un cas concret (cf. section 8.1).

### 6.2.3 Estimateur des paramètres

Par définition, un estimateur  $\hat{\theta}$  du paramètre inconnu  $\theta$  est une fonction qui fait correspondre  $\theta$  à une suite d'observations empiriques  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  issues du modèle. L'expression pour les paramètres inconnus  $\boldsymbol{\theta}$  (6.40) néglige les erreurs de mesure et théoriques  $\varepsilon$ , qui figurent dans le modèle de régression (6.38). En effet, le but du problème est de retrouver les paramètres  $\boldsymbol{\theta}$  tels que les erreurs  $\varepsilon$  soient minimales. Le minimum de  $\varepsilon$  correspond au maximum de la fonction de probabilité  $p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\varphi})$ . Ainsi, l'estimateur des paramètres  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  sera l'argument de maximum de la fonction *a posteriori* :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\varphi}), \quad (6.48)$$

où  $\Theta \subset \mathbb{R}^m$  est un espace des paramètres de dimension  $m$ . A ce moment-là, le problème de détermination d'orbite est posé comme un problème d'optimisation : le problème de maximisation de la fonction *a posteriori*  $p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\varphi})$ . Plusieurs méthodes existent pour résoudre ce problème d'optimisation. Nous allons utiliser l'une des méthodes de Monte-Carlo par chaînes de Markov, qui est décrite plus en détails dans le chapitre suivant.

## 6.3 État de l'art

### 6.3.1 Les moindres carrés dans le problème de l'objet binaire

La méthode des moindres carrés est une méthode qui est couramment utilisée dans les problèmes de détermination d'orbites (Emel'yanov, 1983, Descamps, 2005). Ici nous décrivons l'application de cette méthode dans le problème de la détermination d'orbite mutuelle du système binaire à partir des observations astrométriques.

Nous utilisons les mêmes désignations qui étaient prises dans l'équation observationnelle (6.38) :

$$\varphi = \psi(\boldsymbol{\theta}) + \varepsilon. \quad (6.49)$$

Si les erreurs d'observations et théorétiques sont négligées, l'équation observationnelle peut s'écrire :

$$\varphi = \psi(\boldsymbol{\theta}),$$

où

$$\varphi_i = \psi_i(\boldsymbol{\theta}), \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (6.50)$$

$\boldsymbol{\theta} = (a, e, i, \Omega, \omega, \tau, P, \dots) = \{\theta_j\}$ ,  $j = 1 \dots m$  (ici  $m$  est le nombre de paramètres inconnus) est le vecteur des vrais paramètres. Ici nous examinons chaque mesure séparément (contrairement à l'équation donnée dans la section 6.2.1). Ainsi, si une observation possède deux mesures pour  $N$  observations on a  $n = 2N$  équations.

Pour chaque observation, qui correspond à la position du secondaire par rapport au primaire dans le système binaire, au temps donné  $t^{(k)}$  on a deux valeurs mesurées  $x_k$   $y_k$  ( $k = 1, 2 \dots N$ , où  $N$  est le nombre d'observations). Introduisons la notation suivante :

$$\begin{aligned} \varphi_{2k-1} &= x_k, \\ \varphi_{2k} &= y_k, \\ t_{2k-1} &= t_{2k} = t^{(k)}. \end{aligned} \quad (6.51)$$

Ainsi, l'ensemble des observations peut être décrit par le vecteur suivant :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi} &= (x_1^o, y_1^o, x_2^o, y_2^o, \dots, x_N^o, y_N^o)^T \\ &= (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{2N})^T. \end{aligned} \quad (6.52)$$

Pour un modèle théorique choisi et un temps d'observation donné  $t$ , les valeurs  $x$ ,  $y$  peuvent être calculées (voir section 6.1.5) :

$$\begin{aligned} x &= \psi_x(t, \boldsymbol{\theta}), \\ y &= \psi_y(t, \boldsymbol{\theta}), \end{aligned} \quad (6.53)$$

où  $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_j\}$ ,  $j = 1 \dots m$ , est un vecteur de  $m$  paramètres qui décrit le modèle.

Soit un ensemble de temps d'observations  $\mathbf{t} = \{t_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots, 2N$ ), où  $t_i = t^{(k)}$ ,  $k = i/2$  quand  $i$  est pair, et  $k = (i + 1)/2$  quand  $i$  est impair. Ainsi,

$$\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_{2N})^T, \quad (6.54)$$

où

$$\psi_i = \begin{cases} \psi_x(t_i, \boldsymbol{\theta}), & \text{où } i \text{ est un impair,} \\ \psi_y(t_i, \boldsymbol{\theta}), & \text{où } i \text{ est un pair.} \end{cases} \quad (6.55)$$

Soit  $\boldsymbol{\theta}^0 = \{\theta_j^0\}$ ,  $j = 1 \dots m$  un vecteur des paramètres préliminaires. Ainsi la correction  $\Delta\theta_j$  entre chaque paramètre préliminaire et la vraie valeur  $\theta_j$  sera :

$$\Delta\theta_j = \theta_j - \theta_j^0 \quad (6.56)$$

et l'équation observationnelle :

$$\varphi_i = \psi_i(\boldsymbol{\theta}^0 + \Delta\boldsymbol{\theta}), \quad (6.57)$$

où  $\Delta\boldsymbol{\theta} = \{\Delta\theta_j\}$ ,  $j = 1 \dots m$ . D'habitude, la méthode des moindres carrés est appliquée aux objets préalablement connus, quand certains paramètres sont déjà estimés, et généralement utilisée dans le but d'ajustement des paramètres, plutôt que leur détermination initiale. Ainsi, cela permet de supposer que  $\Delta\boldsymbol{\theta}$  est petit et de développer l'équation (6.57) en série de Taylor :

$$\varphi_i = \psi_i(\boldsymbol{\theta}^0) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \psi_i(\boldsymbol{\theta}^0)}{\partial \theta_j} \Delta\theta_j + \dots \quad (6.58)$$

Gardons seulement les termes de premier ordre par rapport à  $\Delta\theta_j$  et introduisons la notation suivante :

$$\varphi_i^{c(0)} = \psi_i(\boldsymbol{\theta}^0), \quad (6.59)$$

$$J_{i,j} = \frac{\partial \psi_i(\boldsymbol{\theta}^0)}{\partial \theta_j}, \quad (6.60)$$

$$\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_i^{c(0)}. \quad (6.61)$$

Ainsi donc,

$$\Delta\varphi_i = \sum_{j=1}^m J_{i,j} \Delta\theta_j. \quad (6.62)$$

L'approximation (6.62) s'appelle *équation conditionnelle* (Emel'yanov, 1983). Ces équations conditionnelles sont approximatives, parce que, premièrement, les erreurs du modèle théorique ainsi que les erreurs d'observations sont négligées, deuxièmement, tous les termes d'ordre plus grand que le premier ordre dans la série de Taylor sont également négligés. Dès que les ajustements  $\Delta\theta_j$  sont obtenus, ils sont rajoutés aux paramètres initiaux. Cette méthode s'appelle ajustement différentiel. Les ajustements peuvent être répétés plusieurs fois et, si le processus converge, c'est-à-dire si les ajustements deviennent plus petits, l'algorithme peut être arrêté quand ils sont considérablement plus petit que les incertitudes des paramètres.

Un inconvénient de cette méthode : dans certains cas le processus ne converge pas ou converge vers une solution fausse. Néanmoins, si elle converge, le résultat est très précis.

En chaque pas d'ajustement de paramètres, les résidus des équations conditionnelles (6.62) sont déterminés par la relation :

$$\delta_i = \Delta\varphi_i - \sum_{j=1}^m J_{i,j} \Delta\theta_j, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (6.63)$$

Plusieurs algorithmes existent pour l'ajustement des paramètres. La technique des moindres carrés, dont le but est de minimiser la somme des résidus au carré, est couramment utilisée en mécanique céleste.

Pour minimiser la somme des carrés de  $\delta_i$ , l'équation de gradient est posée égale à zéro et on la résout par rapport à  $\Delta\theta_j$  :

$$-2 \sum_{i=1}^n J_{ij} \left( \Delta\varphi_i - \sum_{j=1}^m J_{ij} \Delta\theta_j \right) = 0, \quad (6.64)$$

qui deviennent  $n$  équations linaires, appelées les équations normales :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m J_{ij} J_{ik} \Delta \theta_k = \sum_{i=1}^n J_{ij} \Delta \varphi_i \quad (j = 1, \dots, m), \quad (6.65)$$

ou bien écrites sous forme matricielle :

$$\left( \mathbf{J}^T \mathbf{J} \right) \Delta \boldsymbol{\theta} = \mathbf{J}^T \Delta \boldsymbol{\varphi}. \quad (6.66)$$

### Méthode pondérée

La méthode classique peut être généralisée par la méthode pondérée des moindres carrées. Elle peut être appliquée dans le but de donner des poids aux observations, quand les variances des observations sont différentes. Ainsi, si les mesures ne sont pas corrélées, l'équation normale devient :

$$\left( \mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J} \right) \Delta \boldsymbol{\theta} = \mathbf{J}^T \mathbf{W} \Delta \boldsymbol{\varphi}, \quad (6.67)$$

où  $\mathbf{W}$  est une matrice diagonale pondérée, par exemple, avec  $W_{i,i} = \frac{1}{\sigma_i^2}$ ,  $\sigma_i$  est l'erreur estimée de la  $i$ -ème observation.

### 6.3.2 Approche bayésienne avec la technique Monte-Carlo

La formulation bayésienne de la probabilité *a posteriori* dans le problème de détermination d'orbite a été introduite par Muinonen and Bowell (1993). Leur approche avec la technique de Monte Carlo a été implémentée dans la méthode « statistical ranging » de Virtanen et al. (2001), pour la détermination de l'orbite héliocentrique d'astéroïde. Plus précisément, cette méthode détermine un échantillon d'orbites possibles, plutôt que détermine une seule orbite.

Une approche similaire pour les astéroïdes binaires a été développée par Oszkiewicz et al. (2013). Cette méthode continue les idées précédentes du modèle bayésien sous la forme suivante :

$$p(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\varphi}) \propto p(\boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\varphi} | \boldsymbol{\theta}). \quad (6.68)$$

Contrairement à notre modèle, ici ils expriment l'*a priori* et la vraisemblance en fonction des erreurs d'observations de la manière suivante :

– *a priori* de Jeffreys

$$p(\boldsymbol{\theta}) \propto \sqrt{\det \Sigma^{-1}(\boldsymbol{\theta})}, \quad \text{où } \Sigma^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = \phi(\boldsymbol{\theta})^T \Lambda^{-1} \phi(\boldsymbol{\theta}). \quad (6.69)$$

$\Sigma^{-1}(\boldsymbol{\theta})$  est la matrice d'information qui est la matrice de covariance inversée pour les éléments orbitaux ;  $\phi(\boldsymbol{\theta})$  contient les dérivées partielles de  $x$  et  $y$  (les coordonnées du secondaire par rapport au primaire sur le plan tangent) par les éléments orbitaux  $\boldsymbol{\theta}$  et  $\Lambda$  est la matrice de covariance pour les erreurs d'observations ;

– la fonction de vraisemblance  $p(\boldsymbol{\varphi} | \boldsymbol{\theta})$  est liée à la densité de probabilité d'erreur d'observation, qui est d'habitude supposée gaussienne, qui vaut

$$p(\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\theta})) \propto \exp \left( -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \right), \quad (6.70)$$

où  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\theta})$ .

Bien que les deux méthodes – la nôtre et celle de Oszkiewicz et al. (2013) – soient basées sur un même type d'échantillonnage – Metropolis-Hastings (voir plus en détails les chapitres suivants), il subsiste entre elles deux différences importantes. Premièrement, quand nous faisons l'échantillonnage directement des paramètres d'orbite, dans la méthode de Oszkiewicz et al. (2013) l'échantillonnage est effectué à partir d'un échantillonnage des observations avec un des paramètres – la période de l'orbite, ce qui nécessite le calcul du Jacobien à partir des paramètres d'échantillonnage aux paramètres orbitaux en chaque itération. Plus précisément, l'échantillonnage d'orbites est fait de la manière suivante :

- trois observations  $(x_i, y_i)$  dans le même plan tangent sont tirées au hasard parmi toutes les observations avec une période orbitale  $P$ , choisie aussi aléatoirement ;
- l'orbite initiale est calculée à partir de  $(x_1; y_1; x_2; y_2; x_3; y_3; P)$  par la méthode classique pour les étoiles binaires de Thiele-Innes (Aitken, 1964) ;
- des déviations aléatoires sont rajoutées aux observations et à la période selon des lois normales, centrées dans les valeurs précédentes, avec un écart type proportionnel au bruit d'observation  $(\sigma_x, \sigma_y)$  pour les coordonnées  $(x_i, y_i)$  et un  $\sigma_P$  choisi pour la période ;
- à partir des nouveaux  $(x_1^c; y_1^c; x_2^c; y_2^c; x_3^c; y_3^c; P^c)$  une nouvelle orbite d'échantillon est proposée ; l'orbite proposée est acceptée ou rejetée selon le critère de Metropolis-Hastings ;
- l'échantillonnage est répété jusqu'à ce que un nombre suffisant d'orbites ait été obtenu.

Nous affirmons que l'utilisation de la méthode de Thiele-Innes, développée pour les étoiles binaires, peut être inappropriée pour les astéroïdes. Les observations d'une étoile lointaine sont censées être dans un même plan tangent, mais pour les observations d'un objet du Système solaire cette approximation peut être rarement faite. Même si un nombre suffisant d'observations dans le même plan tangent est disponible, la méthode de Thiele-Innes nécessite de résoudre un système d'équations non-linéaires en chaque itération d'échantillonnage, dont il n'est pas toujours possible de trouver une solution avec des algorithmes numériques programmés.

Deuxièmement, par rapport à la méthode de Oszkiewicz et al. (2013), qui simule une loi, nous utilisons un algorithme d'optimisation, qui maximise cette loi. Autrement dit, au lieu de générer des échantillons entiers de paramètres orbitaux dans leur loi de distribution, nous obtenons au final une réalisation de ces lois qui correspond au maximum de la loi *a posteriori*.

## Chapitre 7

# Méthode de Monte-Carlo par les chaînes de Markov

### Sommaire

<b>7.1</b>	<b>La chaîne de Markov</b>	<b>68</b>
<b>7.2</b>	<b>Algorithme de Metropolis-Hastings</b>	<b>69</b>
<b>7.3</b>	<b>Recuit simulé</b>	<b>70</b>
7.3.1	Configuration de l'algorithme	71
7.3.2	Modifications de la méthode de recuit simulé	72

Ce chapitre décrit les bases nécessaires à l'explication de la méthode proposée dans cette thèse pour le problème de détermination d'orbite. Nous commençons par une introduction brève sur les chaînes de Markov. Ensuite, l'algorithme de Metropolis-Hastings – un des algorithmes de Monte-Carlo par chaînes de Markov – est présenté, suivi dans la dernière section, d'une méthode d'optimisation : le recuit simulé.

### 7.1 La chaîne de Markov

La chaîne de Markov, nommée en l'honneur de son créateur, a été introduite au début du XX<sup>e</sup> siècle (Markov, 1906). Notamment, elle a été appliquée en linguistique sur les premières 20 000 lettres de l'œuvre « Eugène Onéguine » de Pouchkine (Markov, 1913) pour déterminer la probabilité d'apparition d'une voyelle connaissant la lettre précédente. En peu de temps, la chaîne de Markov a trouvé son application, plus pratique, en physique et aujourd'hui cette approche est utilisée dans presque toutes les sciences. Dans cette section nous décrivons les bases de la théorie de la chaîne de Markov, nécessaires pour l'appliquer dans les algorithmes de Monte-Carlo par les chaînes de Markov (MCMC).

Une chaîne de Markov  $(X^{(t)})$  est une suite de variables aléatoires

$$X^{(0)}, X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(t)}, \dots$$

telles que  $X^{(t)}$  sachant les variables précédentes ne dépende que de  $X^{(t-1)}$ . La probabilité conditionnelle de  $X^{(t)}$  sachant les variables passées s'appelle un noyau markovien ou un noyau de transition  $K$

$$X^{(t+1)} | X^{(0)}, X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(t)} \sim K(X^{(t)}, X^{(t+1)}).$$

Dans ce travail nous ne considérons que le processus de Markov à temps discret. Dans ce cas, le noyau de transition  $K$  est une matrice avec les éléments

$$p_{ij}^{(t)} = P(X^{(t+1)} = i | X^{(t)} = j), \quad i, j \in \chi, \quad (7.1)$$

et  $\chi$  est un espace d'états. Généralement, la chaîne de Markov qui intervient dans les algorithmes MCMC possède certaines propriétés.

*Stationnarité.* La loi de probabilité  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots)$  est stationnaire si

$$\pi K = \pi. \quad (7.2)$$

Cette loi est également dite invariante. Ainsi, la loi  $\pi$  est telle que, si  $X^{(t)} \sim \pi$  alors  $X^{(t+1)} \sim \pi$ .

*Ergodicité.* La chaîne de Markov est ergodique si sa loi stationnaire est aussi une loi limite de  $X^{(t)}$  pour presque tous les états initiaux  $X^{(0)}$ . Cela signifie également que la chaîne de Markov converge vers sa loi stationnaire indépendamment de  $p_{ij}^{(0)}$ .

Pour l'application dans les algorithmes MCMC une conséquence plus importante est la suivante :

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N h(X^{(t)}) \rightarrow \mathbb{E}_\pi[h(X)], \quad (7.3)$$

où  $h$  est une fonction intégrable. Les conditions nécessaires pour l'ergodicité sont que la chaîne soit irréductible, apériodique et récurrente positive.

*Irréductibilité.* La chaîne de Markov est irréductible, si quelle que soit la valeur initiale  $X^{(0)}$ , la probabilité que la suite  $(X^{(t)})$  atteigne n'importe quelle région de l'espace d'états est non nulle. En effet, cela signifie qu'il est possible d'atteindre tous les états à partir de n'importe quel état.

*Apériodicité.* L'état  $X^{(t)}$  est apériodique s'il est visité un nombre irrégulier de fois. Ainsi, la chaîne est apériodique si elle se compose d'états apériodiques.

*Réurrence.* La chaîne de Markov est récurrente si elle visite chaque état un nombre infini de fois. Autrement dit, la chaîne se compose des états récurrents, et l'état est récurrent si en provenance de cet état, la probabilité d'y revenir en temps fini est 1. Si le temps moyen de récurrence est fini, l'état est récurrent positif.

## 7.2 Algorithme de Metropolis-Hastings

L'idée des algorithmes de MCMC n'est pas très compliquée. Étant donnée une densité cible  $\pi$ , il faut construire un noyau de Markov  $K$  de loi stationnaire  $\pi$  et générer une chaîne de Markov  $(X^{(t)})$  avec ce noyau telle que la loi limite de  $(X^{(t)})$  soit  $\pi$ .

L'algorithme de Metropolis-Hastings (M-H) (Hastings, 1970) est un algorithme MCMC qui permet de construire des noyaux  $K$  universels, théoriquement, quelle que soit une loi cible  $\pi$ . Ainsi, l'idée de l'algorithme est, partant d'une valeur  $\theta^{(0)}$ , de construire  $\theta^{(t)}$  à l'aide d'un noyau de transition tel que la loi cible soit  $\pi$ . Étant donnée une loi cible  $\pi$ , nous choisissons une loi conditionnelle  $q(y|\theta)$ , appelée la loi instrumentale ou loi de proposition, avec laquelle nous construisons une chaîne de Markov  $(\theta^{(t)})$  de la manière suivante :

1. Initialiser la chaîne de Markov  $\theta^{(0)}$ .
2. Pour  $t = 1, 2, \dots$  :
  - Générer  $y_t \sim q(y|\theta^{(t-1)})$ ;
  - Calculer la probabilité d'acceptation

$$\alpha = \min \left\{ \frac{\pi(y_t)}{\pi(\theta^{(t-1)})} \frac{q(\theta^{(t-1)}|y_t)}{q(y_t|\theta^{(t-1)})}, 1 \right\}; \quad (7.4)$$

- Prendre

$$\theta^{(t)} = \begin{cases} y_t, & \text{avec probabilité } \alpha, \\ \theta^{(t-1)}, & \text{avec probabilité } 1 - \alpha. \end{cases} \quad (7.5)$$

*Cas symétrique : marches aléatoires.* L'algorithme de Metropolis (Metropolis et al., 1953) est un cas particulier de l'algorithme M-H, quand la loi instrumentale est symétrique, c'est-à-dire  $q(\theta|y) = q(y|\theta)$ . Dans ce cas la probabilité d'acceptation est indépendante de  $q$ .

Un choix courant en pratique de loi instrumentale est la loi uniforme ou normale centrée dans la valeur précédente de la chaîne de Markov. Ainsi, à chaque pas, une nouvelle valeur proposée sera  $y_t \sim \mathcal{N}(\theta^{(t-1)}, \sigma)$  ou  $y_t \sim \mathcal{U}[\theta^{(t-1)} - \delta, \theta^{(t-1)} + \delta]$ . La chaîne construite de cette manière s'appelle la marche aléatoire.

L'algorithme de Metropolis est le suivant :

1. Initialiser la chaîne de Markov  $\theta^{(0)}$ .
2. Pour  $t = 1, 2, \dots$  :
  - Générer  $y_t \sim q(y|\theta^{(t-1)})$ ;
  - Calculer la probabilité d'acceptation

$$\alpha = \min \left\{ \frac{\pi(y_t)}{\pi(\theta^{(t-1)})}, 1 \right\}; \quad (7.6)$$

- Prendre

$$\theta^{(t)} = \begin{cases} y_t, & \text{avec probabilité } \alpha, \\ \theta^{(t-1)}, & \text{avec probabilité } 1 - \alpha. \end{cases} \quad (7.7)$$

Comme nous pouvons le voir, l'algorithme accepte toujours les valeurs  $y_t$  quand sa probabilité  $\pi(y_t)$  est supérieure à la précédente  $\pi(\theta^{(t-1)})$ . Mais certaines valeurs  $y_t$  peuvent aussi être acceptées quand  $\pi(y_t)$  est inférieure à  $\pi(\theta^{(t-1)})$ . Si le ratio  $\frac{\pi(y_t)}{\pi(\theta^{(t-1)})}$  est petit, la valeur  $y_t$  aura très peu de chance d'être acceptée.

### 7.3 Recuit simulé

La méthode du recuit simulé a été introduite pour la première fois par Metropolis et al. (1953) et, plus tard, décrite et appliquée pour le problème d'optimisation par Kirkpatrick et al. (1983). Cette méthode est basée sur l'imitation du processus de recuit utilisé dans la métallurgie. Dans ce processus, le métal subit un refroidissement très lent dans le but d'avoir de meilleures propriétés du matériel, qui correspondent au minimum d'énergie des atomes dans le réseau cristallin. Ainsi, les métaux qui refroidissent lentement sont plus résistants que ceux qui refroidissent vite.

L'idée fondamentale de la méthode stochastique du recuit simulé est l'analogie avec ce processus en métallurgie par l'utilisation d'un paramètre  $T$ , appelé *température*, posée suffisamment haute au départ et réduite successivement afin d'atteindre le minimum d'une fonction, appelée *énergie*. La suite  $(\theta^{(t)})$  est construite à partir de la distribution de Boltzmann (aussi appelée la distribution de Gibbs)

$$\pi_t(\theta^{(t)}) \propto \exp(-E(\theta^{(t)})/T_t), \quad (7.8)$$

où  $E$  est une fonction d'énergie et  $T_t$  une température. Ainsi, quand la température décroît vers 0, les valeurs simulées seront dans le voisinage du minimum de l'énergie  $E$ .

L'algorithme de recuit simulé (RS) est le suivant

1. Initialiser la température  $T_0$  et  $\theta^{(0)}$ .
2. Pour  $t = 1, 2, \dots$  (théoriquement jusqu'à  $T = 0$ ) :
  - Simuler  $y_t \sim q(y|\theta^{(t-1)})$ ;

- Calculer

$$\alpha = \min \left\{ \exp(-\Delta E(\theta^{(t)})/T_t), 1 \right\}, \quad (7.9)$$

où  $\Delta E = E(y_t) - E(\theta^{(t-1)})$ ;

- Prendre

$$\theta^{(t)} = \begin{cases} y_t, & \text{avec probabilité } \alpha, \\ \theta^{(t-1)}, & \text{avec probabilité } 1 - \alpha. \end{cases} \quad (7.10)$$

- Diminuer la température par une certaine fonction décroissante  $f$

$$T_t = f(T_{t-1}). \quad (7.11)$$

Il est clair que la valeur proposée  $y_t$  est toujours acceptée quand son énergie  $E(y_t)$  est inférieure à celle de l'étape précédente, mais elle peut être aussi acceptée quand  $E(y_t) > E(\theta^{(t-1)})$  avec la probabilité  $\alpha$ . Une température  $T$  haute augmente la chance d'être acceptée. Cette propriété donne à l'algorithme un grand avantage. L'algorithme arrive à sortir des minimums locaux quand la température est grande. Quand la température  $T_t$  décroît vers 0, les valeurs simulées s'approchent de plus en plus du minimum de l'énergie.

La densité de probabilité peut être toujours présentée sous la forme

$$\pi_t(\theta) \propto \exp(-E(\theta)). \quad (7.12)$$

Ainsi la probabilité  $\alpha$  présentée comme

$$\alpha = \min \left\{ \left( \frac{\pi(y_t)}{\pi(\theta^{(t-1)})} \right)^{1/T_t}, 1 \right\}. \quad (7.13)$$

Comme nous pouvons le remarquer avec cette présentation de la probabilité et la fonction d'acceptation (7.6), les algorithmes de M-H et de RS se ressemblent beaucoup. La seule différence est la présence du paramètre  $T$  dans le RS. En effet, la valeur  $\alpha$  dans l'algorithme de RS est aussi le critère de Metropolis, et les deux algorithmes partagent les mêmes propriétés d'acceptation des valeurs proposées  $y_t$ . La différence entre les deux algorithmes est dans leur objectif : l'algorithme de M-H simule la loi  $\pi(\theta)$ , alors que l'algorithme de RS maximise cette loi.

En pratique, nous allons utiliser la méthode de RS dans le problème de maximisation de la fonction *a posteriori* (voir section 6.2.3) qui détermine l'orbite. L'algorithme de Metropolis sera utilisé pour effectuer un échantillonnage des orbites selon la loi cible, qui est la loi *a posteriori*  $p(\theta|\varphi)$  (voir formule (6.40)). L'algorithme de M-H dans le RS permet, étant donnée  $p(\theta|\varphi)$ , de construire une chaîne de Markov dont la loi stationnaire est cette loi  $p(\theta|\varphi)$ .

### 7.3.1 Configuration de l'algorithme

L'algorithme de RS que nous allons appliquer doit posséder certaines contraintes pour être efficace. Les paramètres, comme la loi instrumentale  $q$  et le schéma de refroidissement, jouent des rôles importants pour la performance de l'algorithme.

**Loi instrumentale.** Le choix de la loi instrumentale, ou, plus précisément de l'échelle de cette loi dans le cas des marches aléatoires, est crucial dans la réalisation efficace de l'algorithme. Si l'échelle de  $q$  est trop petite par rapport à la loi cible  $\pi$ , la chaîne de Markov aura du mal à explorer tout l'espace des paramètres et convergera vers un minimum local,

proche de l'état initial. En plus, le ratio  $\pi(y_t)/\pi(\theta^{(t-1)})$  sera toujours proche de 1, ainsi  $y_t$  sera presque tout le temps accepté et les éléments de la chaîne seront très corrélés. En revanche, si l'échelle de  $q$  est trop grande, le ratio  $\pi(y_t)/\pi(\theta^{(t-1)})$  sera trop faible et  $y_t$  sera presque toujours rejeté. Ainsi, l'algorithme va faire beaucoup d'itérations inutiles.

Nous allons voir dans les prochaines sections comment la calibration de la loi instrumentale influence les résultats.

**Schéma de refroidissement.** En théorie, il existe un schéma optimal de décroissance de la température qui garantit la convergence vers le minimum global (Geman and Geman, 1984, Li, 2009). Il indique que si la séquence décroissante de la température satisfait

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T_t = 0, \quad (7.14)$$

et

$$T_t \geq \frac{m \times \Delta}{\ln(1+t)}, \quad (7.15)$$

où  $\Delta = \max_{\theta} E(\theta) - \min_{\theta} E(\theta)$  et  $m$  est le nombre d'états visités, l'algorithme atteint le minimum global. Malheureusement, en pratique il est très difficile de réaliser ce schéma, car même la meilleure (la plus petite) valeur de  $N$  obtenue (Geman and Geman, 1984) est beaucoup trop grande pour les calculs. En principe, la température doit être suffisamment élevée au départ et décroître suffisamment lentement vers une valeur très proche de 0. En construisant l'algorithme de RS les schémas suivants sont souvent utilisés :

- schéma de Boltzmann  $T_t = \frac{T_0}{\ln(1+t)}$  ;
- schéma de Cauchy  $T_t = \frac{T_0}{(1+t)}$  ;
- schéma exponentiel  $T_t = T_0 c^t$ , où  $0.8 < c < 1$ .

Les études de Uossermen (1992) montrent que le schéma de Boltzmann demande un trop grand nombre d'itérations et une température initiale très élevée pour obtenir une solution acceptable. Le schéma de Cauchy nécessite moins d'itérations pour le refroidissement. Cependant, avec ce schéma, l'algorithme a tendance à converger vers des optimums locaux. L'avantage du schéma exponentiel, choisi par Kirkpatrick et al. (1983), est qu'il est flexible : le coefficient  $c$  peut être choisi selon le problème.

En théorie la température atteint zéro à l'infini. En pratique, une condition d'arrêt est nécessaire. Kirkpatrick et al. (1983) propose que le système soit « gelé » et que le recuit s'arrête si le nombre souhaité d'acceptations n'est pas atteint après trois températures successives.

*Espacement des échantillons.* Dans le but de minimiser la corrélation des échantillons il est conseillé de ne pas prélever la température à chaque itération, mais après un certain nombre d'itérations  $m$ . Cela permet d'effectuer l'échantillonnage pour  $m$  itérations avec une même température, ainsi les états successives  $\theta^{(t)}$  et  $\theta^{(t+1)}$  ne seront pas trop corrélés. On appelle la valeur  $m$ , l'espacement des échantillons.

### 7.3.2 Modifications de la méthode de recuit simulé

Malheureusement, l'avantage de la méthode RS qui est d'éviter les minimums locaux ne garantit pas de les éviter tous et de trouver le minimum global (Corana et al., 1987). Quand la fonction à minimiser a plusieurs minimums locaux proches en grandeur de la solution optimale, l'algorithme va trouver l'un d'entre eux, qui peut être global ou pas. Ainsi, les cas de distributions cibles multimodales peuvent poser une grande difficulté pour l'algorithme.

---

Le choix optimal de la bonne loi instrumentale est un problème ouvert et dépend fortement du problème sur lequel l'algorithme s'applique (von Toussaint, 2011). Le schéma optimal théorique de température est trop lent pour le réaliser en pratique. Cependant, il existe quelques algorithmes et recommandations très générales, qui proposent des solutions pour les distributions multimodales. Par exemple, Corana et al. (1987) conseillent de garder le taux d'acceptation, c'est-à-dire le ratio d'états acceptés et proposés, à environ 50%, et en fonction de ce critère augmenter ou diminuer l'échelle de la loi de proposition. Robert and Casella (2009) propose un algorithme où l'échelle ne dépend pas que du taux d'acceptations mais est aussi proportionnelle à  $\sqrt{T}$ . En outre, deux modifications de la méthode de RS standard existent. La première est la méthode « simulated tempering » (Marinari and Parisi, 1992), qui effectue une marche aléatoire dans l'espace d'énergie, comme dans la méthode standard, ainsi que dans l'espace discret de la température. La deuxième, est la méthode « parallel tempering » (Swendsen and Wang, 1986, Geyer, 1991) qui lance plusieurs simulations en parallèle, chacune étant générée de la même manière que dans le « simulated tempering ».

## Chapitre 8

# Application de la méthode

### Sommaire

<b>8.1</b>	<b>Fonction d'énergie</b>	<b>74</b>
<b>8.2</b>	<b>Algorithme</b>	<b>75</b>
<b>8.3</b>	<b>Simulations</b>	<b>76</b>
8.3.1	Étape 1 : cas simple	76
8.3.2	Étape 2 : cas proche du réel	90
<b>8.4</b>	<b>Test sur les vraies observations</b>	<b>92</b>
8.4.1	Comparaison des méthodes	92
8.4.2	Estimation des incertitudes	98
8.4.3	Détermination de J2 pour Teharonhiawako 2001 QT297	99
<b>8.5</b>	<b>Problème de minimums locaux</b>	<b>101</b>
8.5.1	Proposition 1 : loi <i>a priori</i> informative	106
8.5.2	Proposition 2 : parallélisme de l'algorithme	107
8.5.3	Proposition 3 : modification du schéma de la température	109
8.5.4	Résumé	109

Nous présentons dans ce chapitre l'application de la méthode de recuit simulé dans le problème de détermination d'orbite. Tout d'abord le choix de la fonction d'énergie à minimiser ainsi que de l'algorithme est présenté. Ensuite, la méthode est appliquée aux observations artificielles dans le but de retrouver les paramètres d'orbite choisis. Au final, la méthode est utilisée sur des données réelles pour des orbites képlérienne et perturbée et comparée à la méthode des moindres carrés.

L'algorithme de recuit simulé pour déterminer les paramètres d'une orbite, képlérienne ou perturbée, à partir des observations a été développé dans cette thèse en collaboration avec R.S. Stoica (Université de Lorraine) et réalisée en langage orienté objet *Java*. La méthode des moindres carrés a été programmée en langage *C* en collaboration avec N.V. Emelianov à l'Institut astronomique Sternberg situé à Moscou, Russie.

### 8.1 Fonction d'énergie

Pour résoudre notre problème de détermination d'orbite avec la méthode de RS, il est nécessaire de construire une fonction d'énergie  $E$  à minimiser. Comme nous l'avons noté dans la problématique (voir section 6.2.3), l'estimateur des paramètres qui décrivent l'orbite est exprimé par le maximum de la fonction *a posteriori* :

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} p(\theta | \varphi),$$

où  $\Theta \subset \mathbb{R}^m$  est l'espace des paramètres de dimension  $m$ .

La densité de probabilité peut toujours être exprimée comme :

$$p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\varphi}) \propto \exp(-E(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varphi})). \quad (8.1)$$

De cette manière, nous pouvons appliquer l'algorithme de RS pour trouver le minimum de la fonction d'énergie  $E(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varphi})$ . En utilisant l'approche bayésienne (6.40) et l'expression (8.1), l'énergie est :

$$E(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varphi}) = U(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{\theta}) + U(\boldsymbol{\theta}), \quad (8.2)$$

où  $U(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{\theta})$  est le terme de vraisemblance, attaché aux données, et  $U(\boldsymbol{\theta})$  est le terme de régularisation *a priori*, tel que  $p(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{\theta}) = \exp(-U(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta}))$  et  $p(\boldsymbol{\theta}) = \exp(-U(\boldsymbol{\theta}))$ .

## 8.2 Algorithme

En utilisant l'expression (8.1), l'algorithme de RS dans notre problème va avoir la forme suivante :

1. Commencer avec des paramètres d'orbite quelconques  $\boldsymbol{\theta}_0 \in \Theta$ .  
Poser une température initiale élevée  $T_0$ , un compteur  $i = 1$ , une condition d'arrêt et l'espacement des échantillons  $m$ .
2. Pour chaque  $i$  jusqu'à la condition d'arrêt
  - Générer une orbite proposée avec les paramètres  $\boldsymbol{\theta}'$  à partir de la loi instrumentale

$$\boldsymbol{\theta}' \sim Q(\boldsymbol{\theta}'|\boldsymbol{\theta}^{i-1}).$$

- Calculer la probabilité d'acceptation :

$$\alpha = \min \left\{ 1, \left[ \frac{p(\boldsymbol{\theta}'|\boldsymbol{\varphi})}{p(\boldsymbol{\theta}^{i-1}|\boldsymbol{\varphi})} \right]^{1/T_{i-1}} \right\}. \quad (8.3)$$

- L'orbite proposée est acceptée  $\boldsymbol{\theta}^i = \boldsymbol{\theta}'$  avec la probabilité  $\alpha$ . Si l'orbite proposée est rejetée, poser  $\boldsymbol{\theta}^i = \boldsymbol{\theta}^{i-1}$ .
- Si  $i \bmod m = 0$ , diminuer la température  $T_i = h(i, T_0)$ , où  $h$  est une fonction décroissante décrivant le schéma de refroidissement.
- $i = i + 1$

### Configurations de l'algorithme

Comme nous l'avons déjà écrit, le choix de la loi instrumentale et du schéma de refroidissement sont cruciaux pour la performance de l'algorithme de RS. Malheureusement, ces configurations optimales sont indéterminées ou ne peuvent pas être réalisées d'une manière pratique. Ainsi, il n'est possible de les choisir que d'une manière empirique. Nous avons réalisé un nombre important de tests avant d'arriver aux configurations satisfaisantes. Ici, nous n'en présentons que quelques-unes.

**Température.** Dans nos simulations nous utilisons le schéma de décroissance exponentiel de la température :

$$T_i = T_0 c^i, \quad (8.4)$$

où  $c$  est une constante dans l'intervalle  $[0.95, 1)$ . Nous choisissons la valeur  $c = 0.999$ , trouvée empiriquement. La température initiale doit être suffisamment haute pour que l'algorithme converge vers la solution. Ici, elle est choisie empiriquement.

**Condition d'arrêt.** Dans la théorie l'algorithme converge vers l'optimum global quand la température  $T \rightarrow 0$ , ce qui ne peut pas être réalisé en pratique. Nous arrêtons l'algorithme quand la température devient  $T_n = 10^{-10}$  ou quand l'état est « gelé ». Nous considérons que l'état devient « gelé » si pendant 100 températures successives aucune orbite proposée n'a été acceptée.

**Espacement des échantillons.** Dans le but d'éviter la corrélation entre les itérations pendant l'algorithme RS, nous ne diminuons la température qu'à chaque  $m$  itérations. Nous posons l'espacement des échantillons  $m = 30$ , choisi empiriquement.

**Loi instrumentale.** Nous effectuons la marche aléatoire avec les lois uniformes pour chaque paramètre d'orbite  $\mathcal{U}[\theta_j^{(i-1)} - \Delta\theta_j, \theta_j^{(i-1)} + \Delta\theta_j]$ , où  $\theta_j$  est l'un des sept paramètres d'orbite. Ainsi, dans l'algorithme, l'orbite proposée est générée à partir de la loi suivante :

$$Q(\theta'|\theta^{i-1}) = \prod_{j=1}^n \frac{\mathbb{1}\{\theta'_j \in [\theta_j^{i-1} - \Delta\theta_j, \theta_j^{i-1} + \Delta\theta_j]\}}{2\Delta\theta_j}, \quad (8.5)$$

où  $n$  est le nombre de paramètres inconnus. Nous choisissons une même échelle  $\delta$  proportionnelle à chaque loi *a priori* de chaque paramètre. Cela permet à chaque paramètre d'avoir la même possibilité pour parcourir son espace de recherche. Quand on dit l'échelle  $\delta$  dans le texte suivant on sous-entend  $\Delta\theta_j = \delta \times \Delta\theta_j^{prior}$ , où  $\Delta\theta_j^{prior}$  est lié à la loi *a priori* du paramètre  $\theta_j$  par la relation suivante

$$\Delta\theta_j^{prior} = (\max(\theta_j) - \min(\theta_j))/2. \quad (8.6)$$

En pratique, chaque itération  $i$  inclue  $n$  sous-itérations : à chaque sous-itération un seul paramètre est changé pour construire une nouvelle orbite. Après  $n$  sous-itérations successives l'algorithme passe à l'itération  $i + 1$ .

## 8.3 Simulations

Avant d'appliquer l'algorithme de RS à un cas concret, nous procédons à des simulations. Nous commençons par un cas très simple et complexifions le problème pas à pas en l'approchant d'un cas réel. Dans une première étape, nous allons déterminer les sept paramètres du mouvement képlérien sans perturbation. Nous choisissons nous-même les temps d'observation ainsi que les directions topocentriques du plan tangent pour créer des observations artificielles. Ainsi, nous créons des positions relatives d'astéroïde secondaire par rapport au primaire avec des paramètres orbitaux que nous choisissons. À partir de ces observations, nous reconstruisons les éléments avec l'algorithme de RS.

En second lieu, nous prendrons les temps d'observations réels, avec les coordonnées du plan tangent correspondant à ces temps, et nous utiliserons des observations artificielles de positionnement relatif construites à partir des éléments orbitaux donnés par nous-mêmes. Au final, nous appliquons l'algorithme aux données réelles et le comparons à la méthode des moindres carrés.

### 8.3.1 Étape 1 : cas simple

Tout d'abord, nous essayons de retrouver les paramètres orbitaux à partir des observations artificielles à l'aide de l'algorithme de RS.

Dans ce but, nous posons les paramètres d'une orbite relative suivants :  $a = 10000$  km,  $e = 0.5$ ,  $i = 135^\circ$ ,  $\Omega = \omega = 45^\circ$ ,  $\tau = 0$ ,  $P = 30$  jours.

De plus, il est nécessaire de choisir une orbite héliocentrique du système binaire pour donner les directions topocentriques de chaque plan tangent – l’ascension droite  $\alpha_i$  et la déclinaison  $\delta_i$  – ainsi que la distance  $R_i$  entre l’observateur et l’astéroïde au moment de la  $i$ -ème observation. Pour rendre les simulations proches d’un cas réel, nous choisissons une orbite héliocentrique d’un astéroïde existant. Nous prenons l’astéroïde lointain Altjira, transneptunien, ainsi le plan tangent ne va pas trop changer dans un court intervalle de temps.

Nous posons 10 temps d’observation qui se répartissent d’une manière non homogène et qui couvrent un peu plus qu’une période et tracent visuellement une ellipse (voir figure 8.7). Avec les paramètres d’orbite, les moments d’observations et les coordonnées  $(\alpha_i, \delta_i)$  et  $R_i$  nous générons les positions observées d’astéroïde secondaire par rapport au primaire. La correction en temps-lumière est prise en compte. Les observations simulées sont présentées dans le tableau 8.1 et la figure 8.7.

**Table 8.1** – Observations artificielles pour la première étape de simulation.

$t_{obs}$	$\Delta x$ , arcsec	$\Delta y$ , arcsec	R, ua	$\alpha$ , deg	$\delta$ , deg	$\sigma_x$ et $\sigma_y$ , arcsec
5	-0.0175	0.1771	45.353	55.19	24.06	0.001 0.001
14	0.2617	-0.0584	45.354	55.21	24.06	0.002 0.001
26	0.1538	-0.2208	45.354	55.23	24.07	0.003 0.004
30	-0.0822	0.0090	45.355	55.24	24.07	0.004 0.001
38	0.0975	0.1186	45.356	55.26	24.08	0.005 0.004
41	0.1933	0.0328	45.356	55.28	24.08	0.009 0.001
47	0.2996	-0.1427	45.357	55.29	24.08	0.001 0.004
50	0.3007	-0.2096	45.358	55.31	24.09	0.007 0.001
59	-0.0237	-0.0756	45.358	55.33	24.09	0.001 0.004
62	-0.1127	0.1460	45.359	55.34	24.10	0.008 0.001

Maintenant, nous allons essayer de retrouver les paramètres d’orbite choisis à partir des observations simulées avec la méthode de RS. Avant d’appliquer l’algorithme, une analyse de sa configuration doit être faite : en particulier, l’analyse de la fonction d’énergie – ses termes *a priori* et d’attache aux données – ainsi que le choix de la loi instrumentale et du schéma de température.

### Loi *a priori* des paramètres

Dans une première approche, il est plus simple de choisir des lois uniformes pour tous les paramètres.

$$p(\theta) = \frac{\mathbb{1}\{a \in [a_{min}, a_{max}]\}}{a_{max} - a_{min}} \times \frac{\mathbb{1}\{e \in [e_{min}, e_{max}]\}}{e_{max} - e_{min}} \dots \quad (8.7)$$

Les intervalles de ces lois doivent être suffisamment grands pour pouvoir examiner toutes les valeurs possibles.

En absence d’information *a priori* sur l’excentricité  $e$ , la longitude du nœud ascendant  $\Omega$  et l’argument de péricentre  $\omega$  nous prenons les lois uniformes dans l’intervalle de toutes les valeurs possibles :

$$e \sim \mathcal{U}[0, 1), \quad (8.8)$$

$$\Omega \sim \mathcal{U}[0, 2\pi), \quad (8.9)$$

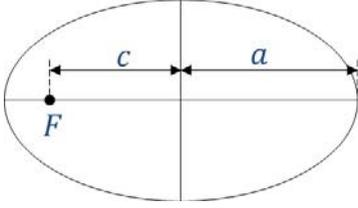
$$\omega \sim \mathcal{U}[0, 2\pi]. \quad (8.10)$$

*Demi-grand axe.* La valeur minimale possible pour le demi-grand axe peut être déterminée à partir des observations. La distance entre les deux objets  $\rho$  est calculée par la formule

$$\rho_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}. \quad (8.11)$$

Comme  $\rho_i$  est une projection sur le plan tangent, la valeur maximale n'est jamais plus grande que la somme du demi-grand-axe  $a$  et de la distance focale  $c$  (voir la figure 8.1).

Ainsi, nous avons la relation



$$\begin{aligned} \rho_{max} &\leq a + c, \\ \text{où } c &= ae. \end{aligned}$$

Dans le cas dégénéré, quand l'orbite devient une parabole  $e = 1$ , on a  $\rho_{max} \leq 2a$ . Ainsi, le minimum du demi-grand axe est :

**Figure 8.1** – Ellipse.

$$a_{min} = 0.5 \rho_{max}. \quad (8.12)$$

Dans notre exemple pour les observations générées nous avons  $a_{min} = 6\,029$  km.

Nous ne pouvons pas contraindre la valeur maximale de  $a$  à partir des observations, ainsi nous l'estimons à partir des connaissances sur la population des astéroïdes du même groupe. Pour les astéroïdes binaires du groupe transneptunien avec leurs orbite relative déterminées, la valeur maximale est 102 000 km (Johnston, 2014). En conséquence, la loi *a priori* sera

$$a \sim \mathcal{U}[6029, 102000]. \quad (8.13)$$

*Inclinaison.* Dans le cas général, si la direction du mouvement du secondaire n'est pas claire, deux orbites miroirs sont possibles : la première orbite avec l'inclinaison  $i$  entre 0 et  $90^\circ$ , la deuxième avec l'inclinaison  $i + 180^\circ$ . Pour trouver les deux solutions il faut diviser le problème en deux cas avec les deux *a priori* respectifs

$$\begin{aligned} i &\sim \mathcal{U}[0, \frac{\pi}{2}), \text{ mouvement direct,} \\ \text{ou} & \\ i &\sim \mathcal{U}[\frac{\pi}{2}, \pi), \text{ mouvement rétrograde.} \end{aligned} \quad (8.14)$$

Pour rendre les simulations simples, nous examinons seulement le cas d'orbite rétrograde. En conséquence, la loi *a priori* sera

$$i \sim \mathcal{U}[\pi/2, \pi]. \quad (8.15)$$

*Période d'orbite.* Estimer la période à partir des observations n'est pas toujours possible, surtout quand le plan tangent est trop différent pour les observations et il est impossible de tracer une ellipse. En revanche, en utilisant encore les connaissances sur les autres astéroïdes du même groupe et la valeur estimée de  $a_{min}$  nous pouvons faire une estimation de la période par la troisième loi de Kepler :

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{Gm} a^3, \quad (8.16)$$

où  $G$  est la constante gravitationnelle,  $a = a_{min}$ ,  $m$  la masse du système binaire, que nous prenons ici égale à la masse moyenne des astéroïdes binaires du même groupe.

Dans notre exemple, cette estimation donne une période  $P = 46.4$  jours (avec la masse  $m = 4.5 \times 10^{18}$  kg, la masse moyenne des astéroïdes binaires du groupe « classique »

transneptunien). Cette valeur est seulement une estimation préliminaire de la période, c'est pourquoi nous élargissons l'intervalle de recherche. Nous faisons deux tests dans cette étape de simulation avec la loi *a priori*

$$P \sim \mathcal{U}[1, 100], \quad (8.17)$$

et

$$P \sim \mathcal{U}[1, 1000], \quad (8.18)$$

dans les premier et deuxième tests respectivement. Le premier choix est dû au fait que la valeur estimée est du même ordre de grandeur, le deuxième choix est fait dans le but de vérifier si l'algorithme fonctionne bien quand l'espace de recherche est plus grand, car cela peut arriver dans un cas réel.

*Temps du passage du péricentre.* Le temps du passage du péricentre  $\tau$  peut être limité par le moment de la première observation et la période maximale. Ainsi, la loi *a priori* est

$$\tau \in \mathcal{U}[t_1 - P_{max}, t_1], \quad (8.19)$$

où  $t_1$  est le temps de la première observation et  $P_{max}$  est la période limite.

### Fonction de vraisemblance

La fonction de vraisemblance, attachée aux données, a été déterminée avant par la formule (6.44). Ici, nous testons les quatre modèles suivants :

- Modèle 1 : non-pondéré,  $k = 1$  ;

$$p(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{\theta}) = \exp\left[-\sum_{i=1}^N \varepsilon_i\right] \quad (8.20)$$

- Modèle 2 : non-pondéré,  $k = 2$  ;

$$p(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{\theta}) = \exp\left[-\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2\right] \quad (8.21)$$

- Modèle 3 : pondéré,  $k = 1$  ;

$$p(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{\theta}) = \exp\left[-\sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\right] \quad (8.22)$$

- Modèle 4 : pondéré,  $k = 2$ .

$$p(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{\theta}) = \exp\left[-\sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon_i^2}{\sigma_i^2}\right] \quad (8.23)$$

### Tests sur la configuration de RS

Toutes les configurations des simulations de l'étape 1 sont présentées dans le tableau 8.2.

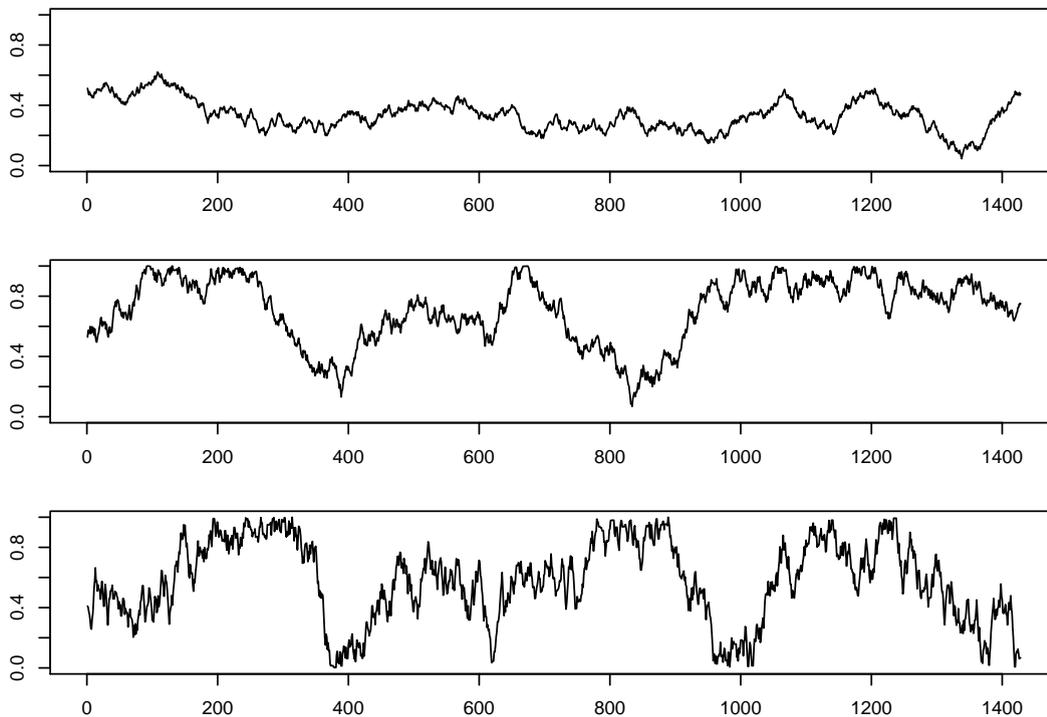
Dans le premier test de simulation, où l'intervalle de recherche pour la période est réduit, nous posons  $T_0 = \Delta \times 10^4$ . Dans le deuxième test, nous choisissons  $T_0 = \Delta \times 10^6$ . Ici, selon Li (2009) le coefficient  $\Delta = \max(E) - \min(E)$ . La valeur  $\min(E)$  est supposée être 0 et correspond à une orbite parfaitement ajustée aux observations. La valeur  $\max(E)$  est inconnue. Pour faire une estimation de cette valeur nous examinons la fonction d'énergie comme une fonction des paramètres d'orbite. En propageant chaque paramètre dans

l'intervalle de sa loi *a priori* avec les autres paramètres fixés à leur valeur initiale, les maximums de la fonction d'énergie par rapport à chaque paramètre peuvent être calculés. Ainsi, en choisissant la valeur supérieure, on estime  $\max(E)$ . En conséquence, pour chaque modèle de la fonction de vraisemblance et de la loi *a priori* le  $\Delta$  sera différent mais peut être estimé dans l'étape initiale des calculs. Dans notre exemple, selon les modèles proposés (voir section 8.3.1),  $\Delta_1 = 1.9$ ,  $\Delta_2 = 4.5$ ,  $\Delta_3 = 2$  et  $\Delta_4 = 4.8$  pour les modèles 1, 2, 3 et 4 respectivement.

**Table 8.2** – Configurations des tests.  $T_0$  est la température initiale,  $h(t)$  le schéma de température,  $m$  l'espacement des échantillons,  $\delta$  l'échelle de la loi instrumentale.

N test	$T_0$	$h(t)$	$\delta$	$m$	$p(P)$
1	$10^4$	$0.999^t$	0.1	30	$\mathcal{U}[1, 100]$
2.1	$10^6$	$0.999^t$	0.1	30	$\mathcal{U}[1, 1000]$
2.2	$10^6$	$0.999^t$	0.2	30	$\mathcal{U}[1, 1000]$

Pour comparer les échelles de la loi instrumentale sur la figure 8.2 les trois exemples de la suite  $\theta^{(i)}$ , où  $\theta$  est l'excentricité avec la loi *a priori*  $\mathcal{U}[0, 1]$  des différents échelles de la loi instrumentale. Comme nous pouvons le voir, avec l'échelle  $\delta = 0.05$  la chaîne de Markov se déplace très lentement. Ainsi nous allons tester d'abord l'échelle  $\delta = 0.1$ , car une petite échelle est préférable pour une bonne approximation de la loi cible, mais nous sommes passé à l'échelle  $\delta = 0.2$  dans le test 2, car le minimum global n'a pas été toujours atteint. Le résultat du test 2.1 signifie que l'échelle est trop petite pour converger vers le minimum global en un nombre d'itérations raisonnable, et l'algorithme a convergé vers le minimum global environ dans 20% des essais de l'algorithme (voir B.2).



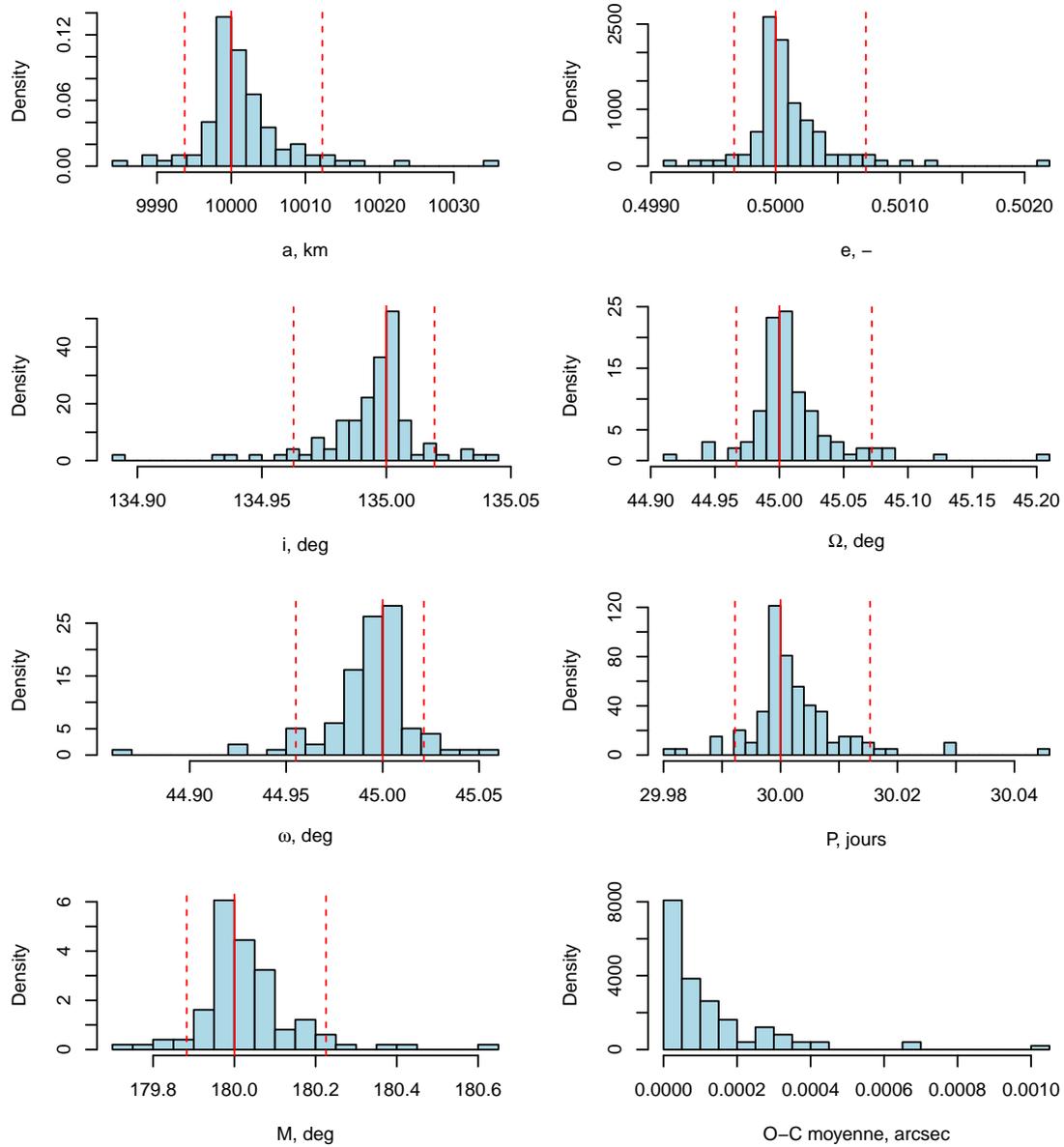
**Figure 8.2** – Les trois exemples de l'échelle de la loi instrumentale (du haut en bas) :  $\delta = 0.05$ ,  $\delta = 0.1$  et  $\delta = 0.2$ . L'axe horizontal représente les temps discrets  $i$  de la chaîne  $\theta^{(i)}$ , l'axe verticale représente la valeur de l'excentricité  $e$  avec la loi *a priori*  $\mathcal{U}[0, 1]$ .

### Résultats des simulations

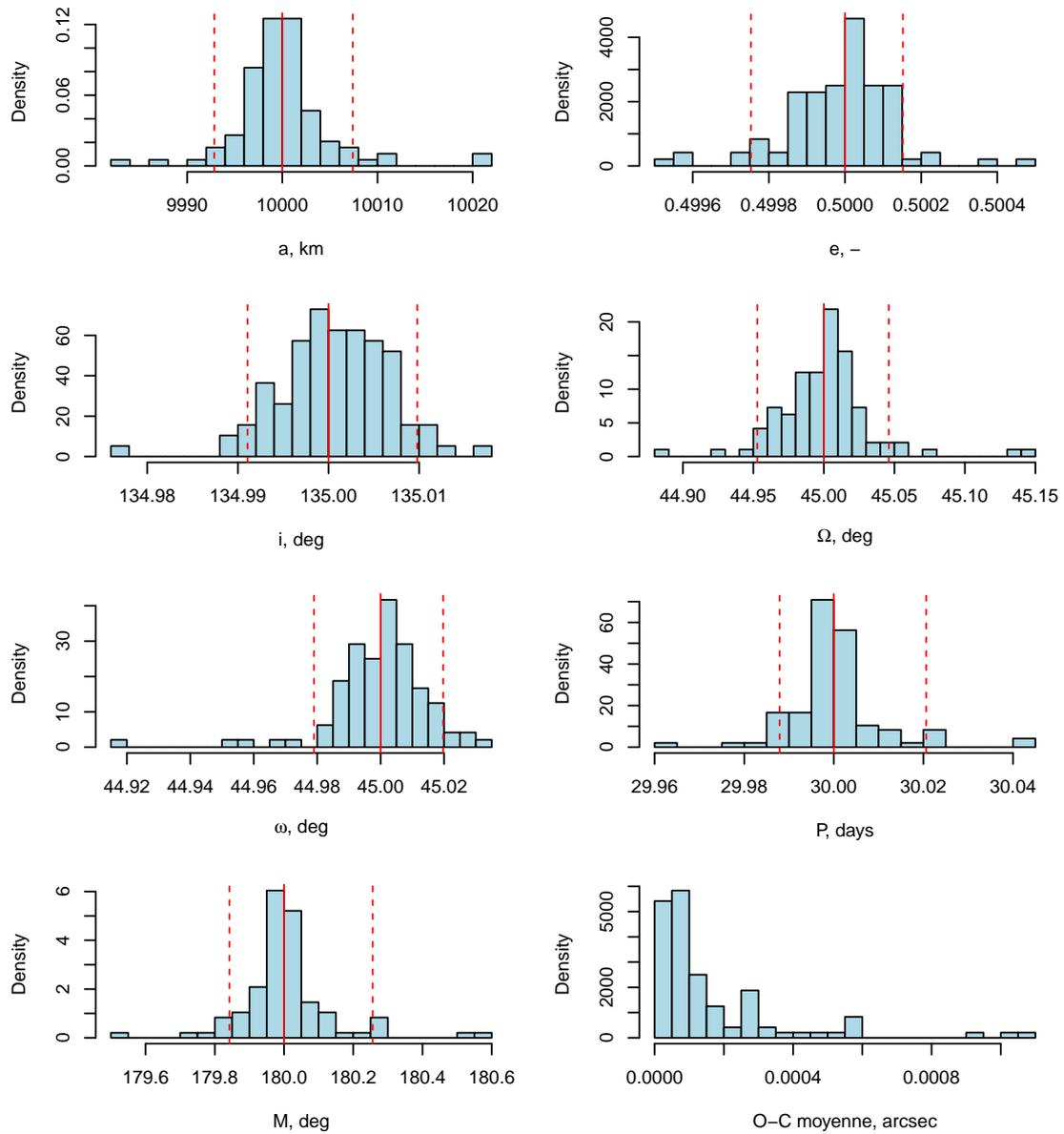
Les résultats sont présentés sous forme de distributions des paramètres. Ces distributions correspondent aux orbites résultantes de l'algorithme de RS lancé 100 fois avec les mêmes valeurs initiales. Chaque orbite résultante est caractérisée par sa moyenne de  $O - C$  des observations

$$\overline{O - C} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta_i^{O-C}, \quad \Delta_i^{O-C} = \left( |x_i^O - x_i^C|^2 + |y_i^O - y_i^C|^2 \right)^{1/2} \quad (8.24)$$

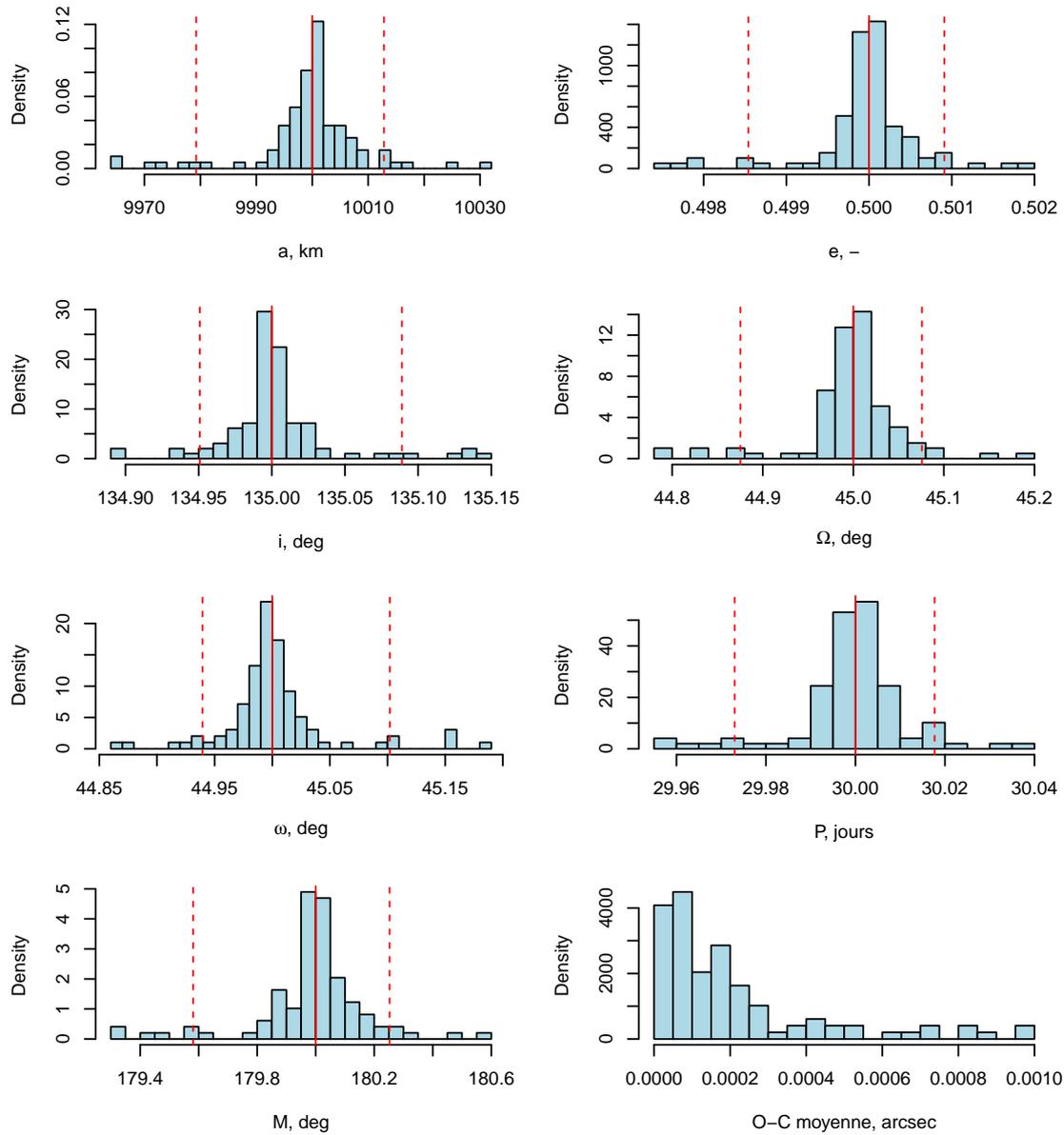
où  $\Delta_i^{O-C}$  est un résidu géométrique dans le plan tangent entre le point observé et le point calculé correspondant. La distribution de  $\overline{O - C}$  est également présentée pour chaque test. Les résultats sont présentés sur les figures 8.3, 8.4, 8.5, 8.6 dans cette section, et dans B.2, B.3 pour chaque test de la première étape de simulations respectivement (pour quatre modèles de la fonction de vraisemblance par test).



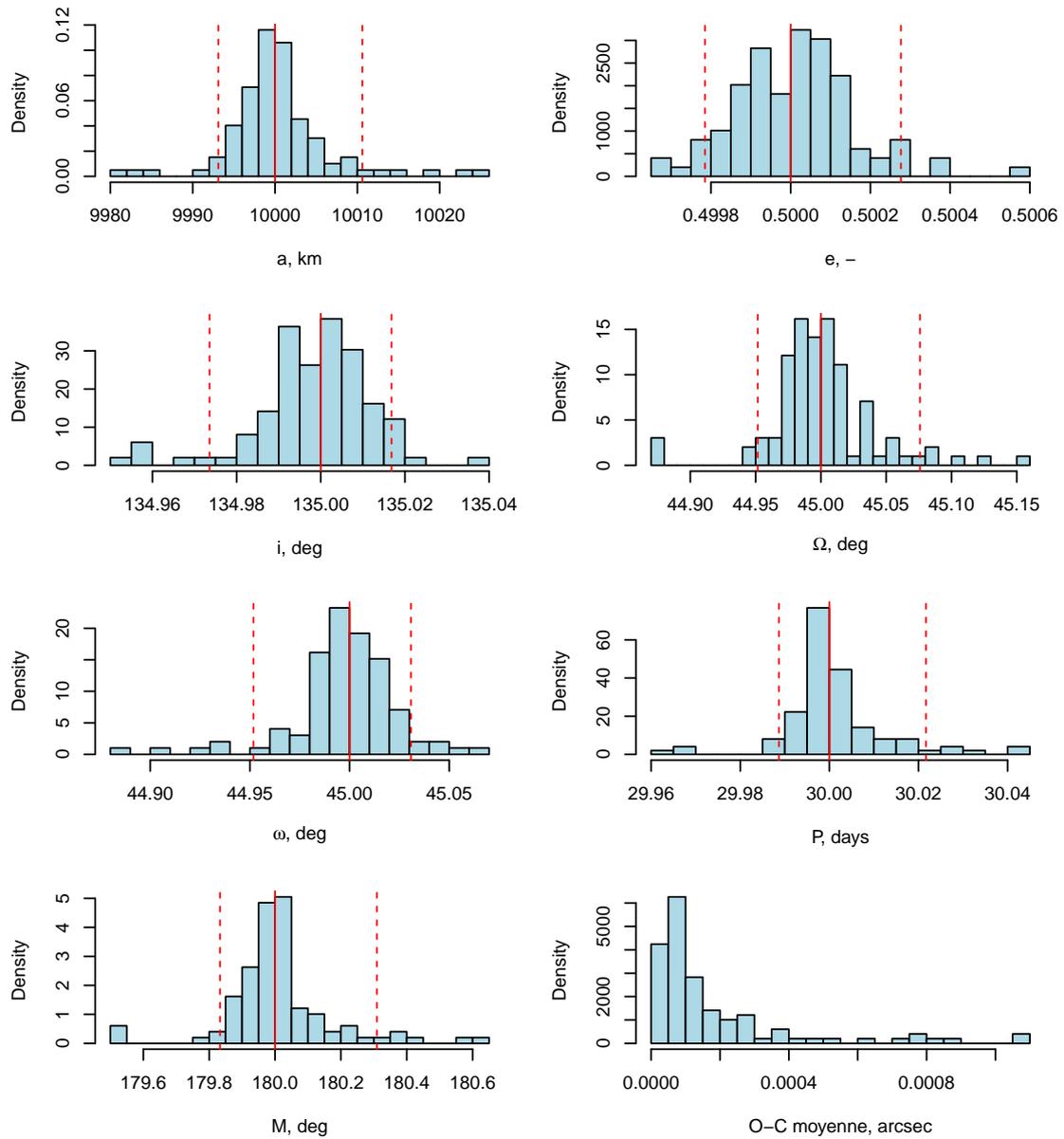
**Figure 8.3** – Test 1, modèle 1. La ligne rouge continue correspond à la vraie valeur, les deux lignes pointillées correspondent aux quantiles à 5% et 95%.



**Figure 8.4** – Test 1, modèle 2. La ligne rouge continue correspond à la vraie valeur, les deux lignes pointillées correspondent aux quantiles à 5% et 95%.



**Figure 8.5** – Test 1, modèle 3. La ligne rouge continue correspond à la vraie valeur, les deux lignes pointillées correspondent aux quantiles à 5% et 95%.



**Figure 8.6** – Test 1, modèle 4. La ligne rouge continue correspond à la vraie valeur, les deux lignes pointillées correspondent aux quantiles à 5% et 95%.

La procédure de répétition de l'algorithme de RS est faite 100 fois dans le but d'avoir un relevé statistique sur le résultat. Ainsi, la valeur finale de chaque paramètre est donnée sous forme de leur valeur moyenne avec une incertitude qui correspond à l'écart type de la distribution résultante. Les résultats des simulations sont listés dans les tableaux 8.3 et 8.4. L'erreur  $\varepsilon$  entre la valeur finale et la valeur posée de chaque paramètre est également présentée dans les tableaux.

**Table 8.3** – Résultats du test 1 sur les observations simulées : les moyennes et les écart types des paramètres – basés sur 100 évolutions de RS.

Paramètres	Modèle 1		Modèle 2	
	$\mu \pm \sigma$	$\varepsilon$	$\mu \pm \sigma$	$\varepsilon$
$a$ , km	$10001.8 \pm 6.5$	1.8	$10000.1 \pm 5.4$	0.1
$e$ , -	$0.5001 \pm 0.0004$	0.0001	$0.5 \pm 0.0001$	$\approx 0$
$i^a$ , deg	$134.99 \pm 0.02$	0.01	$135 \pm 0.01$	$\approx 0$
$\Omega^a$ , deg	$45.01 \pm 0.04$	0.01	$45 \pm 0.03$	$\approx 0$
$\omega^a$ , deg	$44.99 \pm 0.02$	0.01	$45 \pm 0.02$	$\approx 0$
$P$ , jours	$30 \pm 0.01$	$\approx 0$	$30 \pm 0.01$	$\approx 0$
$M^b$ , deg	$180.03 \pm 0.12$	0.03	$180.01 \pm 0.13$	0.01
$O - C$ , arcsec	0.0001269		0.000166	
Nb. d'itérations	$\approx 753849$		$\approx 966630$	
Paramètres	Modèle 3		Modèle 4	
	$\mu \pm \sigma$	$\varepsilon$	$\mu \pm \sigma$	$\varepsilon$
$a$ , km	$9999.5 \pm 9.7$	0.5	$10000.35 \pm 6.4$	0.35
$e$ , -	$0.5 \pm 0.0007$	$\approx 0$	$0.5 \pm 0.0002$	$\approx 0$
$i^a$ , deg	$135 \pm 0.04$	$\approx 0$	$135 \pm 0.01$	$\approx 0$
$\Omega^a$ , deg	$45 \pm 0.06$	$\approx 0$	$45 \pm 0.04$	$\approx 0$
$\omega^a$ , deg	$45 \pm 0.05$	$\approx 0$	$45 \pm 0.03$	$\approx 0$
$P$ , jours	$30 \pm 0.01$	$\approx 0$	$30 \pm 0.01$	$\approx 0$
$M^b$ , deg	$179.99 \pm 0.19$	0.01	$180.01 \pm 0.16$	0.01
$O - C$ , arcsec	0.00021		0.0001841	
Nb. d'itérations	$\approx 756214$		$\approx 966630$	

<sup>a</sup> Les angles se réfèrent au plan équatorial J2000. <sup>b</sup> à l'époque 15 jours.

**Table 8.4** – Résultats du test 2.2 - les moyennes et les écart types des paramètres - basés sur 100 évolutions de RS.

Paramètres	Modèle 1		Modèle 2	
	$\mu \pm \sigma$	$\varepsilon$	$\mu \pm \sigma$	$\varepsilon$
$a$ , km	$9970.3 \pm 162.1$	29.7	$9989.5 \pm 97.8$	10.5
$e$ , -	$0.4982 \pm 0.0092$	0.0018	$0.4995 \pm 0.003$	0.0005
$i^a$ , deg	$135.11 \pm 0.49$	0.11	$135.02 \pm 0.04$	0.02
$\Omega^a$ , deg	$44.8 \pm 0.9$	0.2	$44.94 \pm 0.6$	0.06
$\omega^a$ , deg	$45.11 \pm 0.54$	0.09	$45.04 \pm 0.19$	0.04
$P$ , jours	$29.96 \pm 0.22$	0.06	$29.99 \pm 0.22$	0.01
$M^b$ , deg	$179.37 \pm 3.02$	0.63	$179.86 \pm 2.6$	0.14
$\overline{O - \overline{C}}$	0.004233		0.004338	
Nb. d'itérations	$\approx 923910$		$\approx 1104690$	
Paramètres	Modèle 3		Modèle 4	
	$\mu \pm \sigma$	$\varepsilon$	$\mu \pm \sigma$	$\varepsilon$
$a$ , km	$10007.5 \pm 180.8$	7.5	$9986.3 \pm 93.6$	13.7
$e$ , -	$0.5 \pm 0.012$	$\approx 0$	$0.4991 \pm 0.0014$	0.0009
$i^a$ , deg	$135.01 \pm 0.69$	0.01	$135.05 \pm 0.17$	0.05
$\Omega^a$ , deg	$44.98 \pm 1.06$	0.02	$44.92 \pm 0.61$	0.08
$\omega^a$ , deg	$45.03 \pm 0.81$	0.03	$45.07 \pm 0.33$	0.07
$P$ , jours	$30 \pm 0.24$	$\approx 0$	$29.99 \pm 0.2$	0.01
$M^b$ , deg	$179.99 \pm 3.51$	0.01	$179.78 \pm 2.67$	0.22
$\overline{O - \overline{C}}$	0.004832		0.003868	
Nb. d'itérations	$\approx 925530$		$\approx 1104690$	

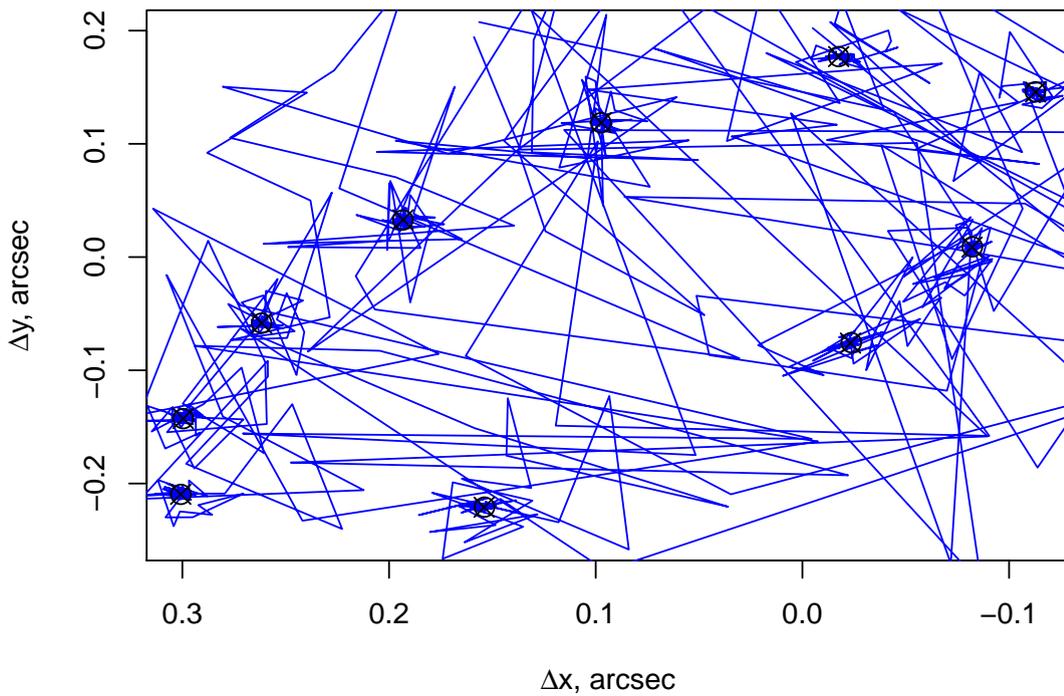
<sup>a</sup> Les angles se réfèrent au plan équatorial J2000. <sup>b</sup> à l'époque 15 jours.

Un exemple (modèle 1) de la convergence de RS est également montré sur la figure 8.7 pour les observations et sur la figure 8.8 pour les paramètres (des exemples pour les modèles 2, 3 et 4 voir dans l'annexe B.1).

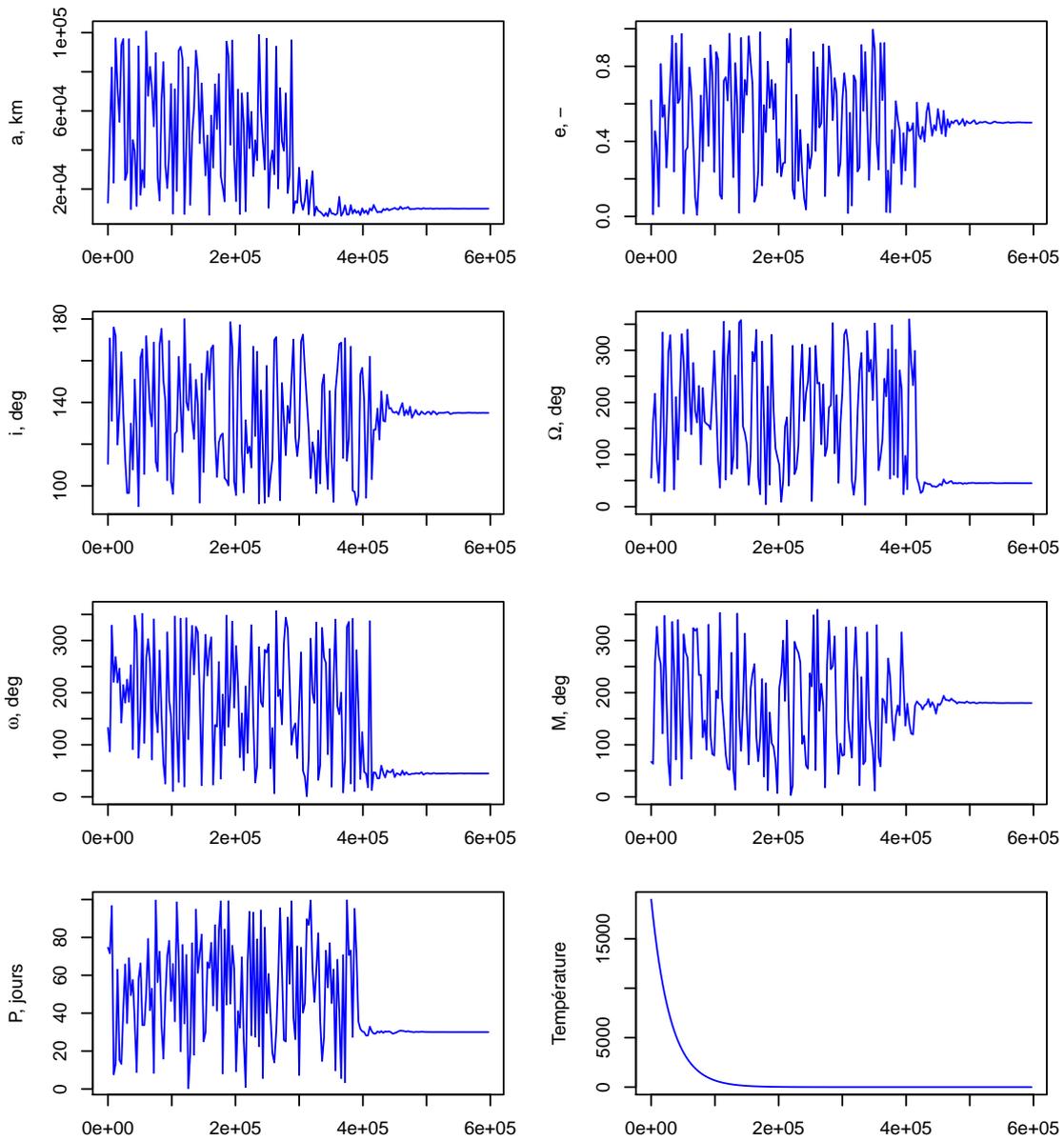
Il est remarquable que les distributions résultantes sont toutes dans le voisinage des valeurs posées. Cela signifie que l'algorithme, avec les configuration choisies, converge vers des solutions très proches de l'optimum pour les quatre modèles. Les erreurs  $\varepsilon$  des paramètres sont négligeables et rentrent dans l'intervalle  $\pm\sigma$ .

À première vue aucun modèle n'est plus considérablement performant que l'autre, mais les résultats des modèles 2 et 4 ont les écart types légèrement inférieurs à ceux des modèles 1 et 3, respectivement. De plus, les erreurs  $\varepsilon$  des paramètres sont plus élevées pour le modèle 1. En revanche, en comparant le nombre d'itérations, l'algorithme avec le modèle 1 converge plus vite.

Les résultats du test 2.2 sont légèrement moins bons par rapport au test 1. L'augmentation de l'intervalle de recherche pour la période orbitale et l'augmentation de l'échelle de la loi instrumentale mènent à l'augmentation des erreurs des paramètres. Ces erreurs restent quand même petites et rentrent dans l'intervalle  $\pm\sigma$  des distributions résultantes.



**Figure 8.7** – Observations artificielles (cercles noires) avec les points calculés (croix noires) :  $\Delta x$  et  $\Delta y$  correspondent aux positions du secondaire par rapport au primaire. Les lignes bleues correspondent aux mouvements des points calculés pendant la recherche de solution optimale (seulement un mouvement sur 100 pour les 7000 dernières orbites acceptées pendant le RS est affiché).



**Figure 8.8** – Test 1, modèle 1. Un exemple de recherche des paramètres optimaux pendant l'algorithme de RS. L'axe horizontal montre le nombre d'itérations.

### 8.3.2 Étape 2 : cas proche du réel

Dans la deuxième étape de simulation, nous nous approchons encore plus des observations réelles. Les moments d'observations, la distance entre l'observateur et l'objet et les incertitudes d'observations sont prises égales à celles de l'objet transneptunien Teharonhiawako (2001 QT<sub>297</sub>) de la publication Grundy et al. (2011). Les coordonnées du plan tangent  $\alpha$  et  $\delta$  aux temps donnés sont extraits du service des éphémérides *IMCCE*. Nous posons les éléments orbitaux suivants :

$$a = 28125.78 \text{ km ;}$$

$$e = 0.243577 ;$$

$$i = 144.01 ;$$

$$\Omega = 51.89 ;$$

$$\omega = 324.3 ;$$

$$P = 828.15 ;$$

$M = 275.25$ , où  $M$  est l'anomalie moyenne à l'époque 2452000.0 JJ. (Ces éléments ont été calculés précédemment avec la méthode des moindres carrés à partir des données de Grundy et al. (2011)).

Ainsi, les observations générées sont listées dans le tableau 8.5.

**Table 8.5** – Observations artificielles pour la deuxième étape de simulation.

$t_{obs}$ , JJ	$\Delta x$ et	$\Delta y$ , arcsec	R, ua	$\alpha$ , deg	$\delta$ , deg	$\sigma_x$ et $\sigma_y$ , arcsec	
2452193.54	0.5463	-0.2925	44.370	325.17	-12.99	0.0051	0.0052
2452194.578	0.5510	-0.2870	44.385	325.16	-12.99	0.0081	0.0084
2452214.532	0.6242	-0.1748	44.699	325.05	-13.03	0.021	0.024
2452215.518	0.6270	-0.1690	44.716	325.05	-13.03	0.021	0.026
2452216.514	0.6297	-0.1631	44.733	325.05	-13.03	0.04	0.039
2452217.538	0.6324	-0.1570	44.750	325.05	-13.03	0.021	0.035
2452468.781	-0.3270	0.7263	44.130	327.73	-12.06	0.023	0.029
2452473.79	-0.3545	0.7253	44.085	327.66	-12.09	0.068	0.055
2452493.69	-0.4596	0.7141	43.970	327.33	-12.20	0.013	0.013
2452525.74	-0.6133	0.6723	44.024	326.75	-12.39	0.091	0.091
2452935.573	-0.0180	-0.5421	44.536	327.35	-12.14	0.06	0.05
2453150.866	0.4681	0.4317	44.878	330.33	-11.06	0.007	0.007
2453261.636	-0.1384	0.7154	44.074	328.94	-11.52	0.007	0.006
2453562.745	-1.0155	-0.0289	44.234	331.15	-10.68	0.008	0.008
2455177.717	-1.0268	0.1224	45.368	334.10	-9.39	0.0077	0.0053
2455411.925	0.0158	-0.5174	44.166	336.42	-8.43	0.003	0.003

Par la suite, nous appliquons l'algorithme de RS pour retrouver les paramètres d'orbite à partir des observations générées. Nous construisons la loi *a priori* de la même façon que dans l'étape précédente de simulation (voir section 8.3.1). Ainsi, la loi *a priori* du demi-grand-axe est  $\mathcal{U}[16893.7; 102000]$  km. La loi *a priori* pour la période coïncide avec le choix dans le test 2, c'est-à-dire  $\mathcal{U}[1, 1000]$ . Les choix des lois *a priori* pour les autres paramètres sont les mêmes que dans les tests précédents. Les configurations de l'algorithme (schéma de la température, la loi instrumentale et l'espacement d'échantillons) de RS coïncident avec celles du test 2.2. (voir le tableau 8.2). Les quatre modèles (voir la section 8.3.1) de la fonction de vraisemblance sont testés.

Les résultats de ce test sont présentés dans la section B.4 et dans le tableau 8.6. Comme nous pouvons le remarquer, les distributions résultant des paramètres sont dans le voisinage de leur vraie valeur, les erreurs des paramètres rentrent dans l'intervalle  $\pm\sigma$ . Cela signifie

que l'algorithme converge vers des solutions très proches de la solution optimale pour les quatre modèles. Comme dans les simulations précédentes, aucun modèle de la fonction de vraisemblance n'est plus significativement performant que l'autre, mais les résultats des modèles 2 et 4 ont les écart types et les erreurs des paramètres légèrement inférieurs à ceux des modèles 1 et 3, respectivement, et les modèles 1 et 3 convergent plus vite que les modèles 2 et 4 respectivement.

**Table 8.6** – Résultats de la deuxième étape de simulations - les moyennes et les écart types des paramètres - basés sur 100 résultats de RS.

Paramètres	Modèle 1		Modèle 2	
	$\mu \pm \sigma$	$\varepsilon$	$\mu \pm \sigma$	$\varepsilon$
$a$ , km	$28126.4 \pm 5.86$	0.76	$28124.16 \pm 2.75$	0.21
$e$ , -	$0.2439 \pm 0.00048$	0.00001	$0.2439 \pm 0.00053$	8.1e-06
$i$ , deg	$144.07 \pm 0.09$	0.002	$144.04 \pm 0.04$	0.0009
$\Omega$ , deg	$51.8 \pm 0.2$	0.0035	$51.84 \pm 0.08$	0.0008
$\omega$ , deg	$324.07 \pm 0.46$	0.0007	$324.06 \pm 0.42$	0.0004
$P$ , jours	$828.17 \pm 0.03$	0.0043	$828.14 \pm 0.02$	0.002
$M^b$ , deg	$275.46 \pm 0.34$	0.0007	$275.48 \pm 0.34$	0.0007
$O - C$	0.001089		0.001178	
Paramètres	Modèle 3		Modèle 4	
	$\mu \pm \sigma$	$\varepsilon$	$\mu \pm \sigma$	$\varepsilon$
$a$ , km	$28125.5 \pm 9.63$	0.52	$28126.93 \pm 2.47$	0.14
$e$ , -	$0.244 \pm 0.00068$	1.6e-7	$0.244 \pm 0.00063$	3e-6
$i$ , deg	$144.1 \pm 0.13$	0.0003	$144.06 \pm 0.08$	0.0008
$\Omega$ , deg	$51.7 \pm 0.34$	0.006	$51.79 \pm 0.15$	0.001
$\omega$ , deg	$323.98 \pm 0.58$	0.004	$324.05 \pm 0.46$	0.002
$P$ , jours	$828.15 \pm 0.05$	0.005	$828.14 \pm 0.03$	0.001
$M^b$ , deg	$275.47 \pm 0.33$	0.002	$275.46 \pm 0.32$	0.001
$O - C$	0.00149		0.001041	

<sup>a</sup> Les angles se réfèrent au plan équatorial J2000. <sup>b</sup> à l'époque 2452000 JJ.

## 8.4 Test sur les vraies observations

Dans cette section nous appliquons l'algorithme de RS aux vraies observations (présentés dans le tableau C.1) de l'objet transneptunien Teharonhiawako (2001 QT<sub>297</sub>) provenant de la publication Grundy et al. (2011). De plus, nous appliquons la méthode des moindres carrés pour ensuite comparer les résultats.

### 8.4.1 Comparaison des méthodes

Les mêmes configurations et les mêmes modèles de la fonction de vraisemblance et d'*a priori* que dans les simulations précédentes (voir section 8.3) ont été appliqués ici pour les vraies observations. Les résultats obtenus sont présentés sous la forme de distribution (voir 8.9, 8.10, 8.11 et 8.12). Sur un même graphique les résultats de la méthode des moindres carrés avec ses incertitudes correspondantes sont présentés. Ces résultats sont obtenus avec les valeurs initiales des paramètres prises de Grundy et al. (2011). Les résultats numériques pour les deux méthodes sont présentés dans le tableau 8.7.

Le modèle 1 de RS donne des résultats rentrant dans l'intervalle des incertitudes de la méthode des moindres carrés. Cela permet de conclure que nos résultats sont acceptables. Les résultats du modèle 2 coïncident avec les résultats des moindres carrés non-pondérés et ont des incertitudes plus petites par rapport au modèle 1.

La méthode des moindres carrés pondérés a des incertitudes plus petites par rapport à celles de la méthode non-pondérés. Nos résultats de RS avec les modèles 3 et 4 ne rentrent pas dans ces incertitudes. Le modèle 3 donne des distributions légèrement décalées des résultats de moindres carrés, mais en revanche ces résultats sont mieux par leurs erreurs  $O - C$  moyenne. Le modèle 4 a des distributions résultantes qui couvrent le résultat obtenu par la méthode des moindres carrés.

En comparant les erreurs  $O - C$  moyennes, il semble qu'avec les modèles 1 et 3 nous obtenons de meilleurs résultats par rapport aux modèles 2 et 4, respectivement. Une explication simple a lieu. Soit  $(d_{(1)})_i = |O - C_1|_i$  et  $(d_{(2)})_i = |O - C_2|_i$  les résidus entre les observations et les points calculés pour une orbite (1), obtenue avec le modèle 1, et pour une orbite (2), obtenue avec le modèle 2, respectivement. Il n'est pas contradictoire d'avoir les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (d_{(1)})_i &\leq \sum_{i=1}^N (d_{(2)})_i, \\ \sum_{i=1}^N (d_{(1)})_i^2 &\geq \sum_{i=1}^N (d_{(2)})_i^2. \end{aligned}$$

En effet, les modèles qui minimisent la distance euclidienne dans le plan tangent (modèles 1 et 3) et les modèles qui minimisent la distance au carré (modèles 2 et 4) donnent des résultats légèrement différents. Cet effet est lié aux fonctions d'énergie dans l'algorithme de RS, qui ont différents minimums globaux.

En conclusion, la caractérisation d'orbite – ici par la moyenne de  $|O - C|$  (voir (8.24)) – peut jouer un rôle sur le choix de tel ou tel modèle. Un autre choix de caractérisation d'orbite peut être, par exemple,  $\chi^2$  (Virtanen et al., 2001) :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{2N} \frac{|O - C|_i^2}{\sigma_i^2},$$

où  $|O - C|_i = |x_i^O - x_i^C|^2$  et  $|O - C|_i = |y_i^O - y_i^C|^2$  pour  $i$  impair et  $i$  pair respectivement. Selon cette caractérisation les orbites résultant des modèles 2 et 4 auraient été plus convenables.

**Table 8.7** – Test sur les vraies observations de Teharonhiawako 2001 QT<sub>297</sub>. Résultats avec ses incertitudes  $\sigma$  de RS, modèles 1 et 2, en comparaison avec les résultats des moindres carrés non pondérés, et résultats de RS, modèles pondérés 3 et 4, en comparaison avec les résultats des moindres carrés pondérés.

Paramètres	Modèle 1	Modèle 2	Moindres carrés
$a$ , km	$28100.55 \pm 20.49$	$28124.31 \pm 1.58$	$28125.8 \pm 407.2$
$e$ , -	$0.2427 \pm 0.00026$	$0.2435 \pm 0.000045$	$0.243577 \pm 0.0081$
$i^a$ , deg	$145.29 \pm 0.04$	$144.01 \pm 0.01$	$144.01 \pm 1.5$
$\Omega^a$ , deg	$53.74 \pm 0.09$	$51.88 \pm 0.02$	$51.89 \pm 2.5$
$\omega^a$ , deg	$325.76 \pm 0.07$	$324.32 \pm 0.03$	$324.34 \pm 2.5$
$P$ , jours	$828.68 \pm 0.03$	$828.17 \pm 0.01$	$828.15 \pm 80.9$
$M^b$ , deg	$275.32 \pm 0.05$	$275.27 \pm 0.02$	$275.26 \pm 1.5$
O-C, arcsec	0.02737	0.03118	0.03117317

Paramètres	Modèle 3	Modèle 4	Moindres carrés pondérés
$a$ , km	$28028.13 \pm 32.29$	$27776.98 \pm 2.75$	$27780.18 \pm 1.78$
$e$ , -	$0.2485 \pm 0.00046$	$0.2547 \pm 0.00014$	$0.2548 \pm 0.000035$
$i^a$ , deg	$145.41 \pm 0.07$	$143.98 \pm 0$	$143.99 \pm 0.01$
$\Omega^a$ , deg	$54.9 \pm 0.14$	$55.08 \pm 0.03$	$55.09 \pm 0.01$
$\omega^a$ , deg	$325.62 \pm 0.1$	$324.81 \pm 0.02$	$324.84 \pm 0.01$
$P$ , jours	$828.43 \pm 0.08$	$828.08 \pm 0.02$	$828.07 \pm 0.004$
$M^b$ , deg	$275.87 \pm 0.12$	$276.7 \pm 0.02$	$276.68 \pm 0.01$
O-C,	0.02996	0.0324	0.03238

<sup>a</sup> Les angles se réfèrent au plan équatorial J2000. <sup>b</sup> à l'époque 2452000 JJ.

**Comparaison.** La méthode des moindres carrés nécessite d'avoir des valeurs initiales des paramètres proches de celles des vraies valeurs. Avec des paramètres mal choisis la méthode des moindres carrés ne converge pas. En pratique, il n'est pas toujours facile d'estimer les paramètres initiaux, ainsi le travail sur le choix de ces paramètres coûte parfois de grandes dépenses de temps.

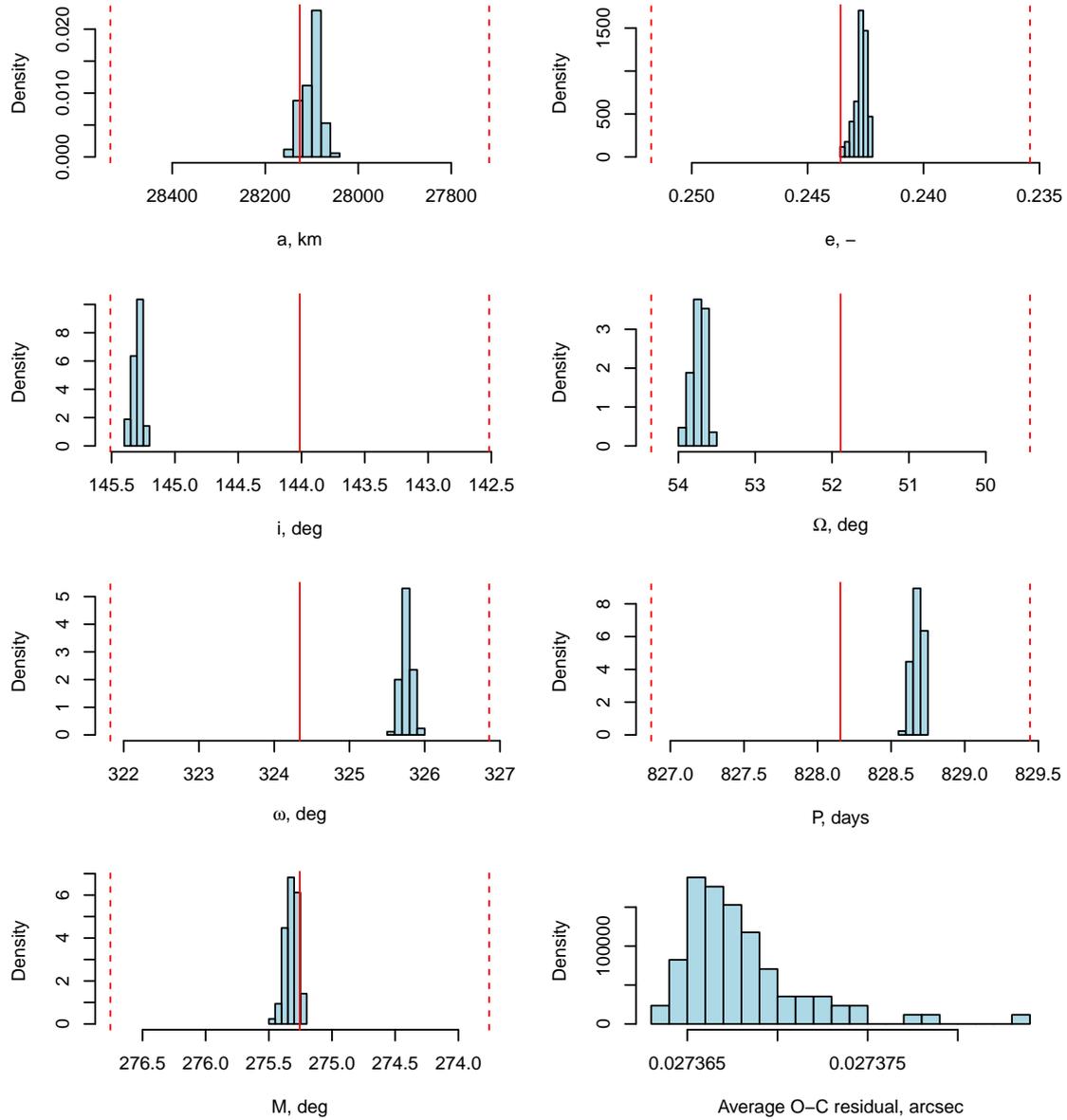
L'avantage de la méthode de RS est qu'elle ne dépend pas des valeurs initiales. Presque aucune connaissance sur les paramètres d'orbite n'est exigée, il suffit de contraindre l'intervalle des valeurs possibles. Cet intervalle peut être posé le plus large possible. Ainsi donc, l'algorithme peut être très utile pour déterminer une orbite préliminaire, quand très peu d'observations sont disponibles.

D'un autre côté, l'avantage de la méthode classique, si elle converge, est d'avoir un résultat précis avec une bonne estimation de précision. Plus d'observations sont disponibles, plus le résultat est précis. En même temps, un grand nombre d'observations, au contraire, ralentit les calculs de RS. Ainsi, les deux méthodes peuvent être complémentaires l'une de l'autre.

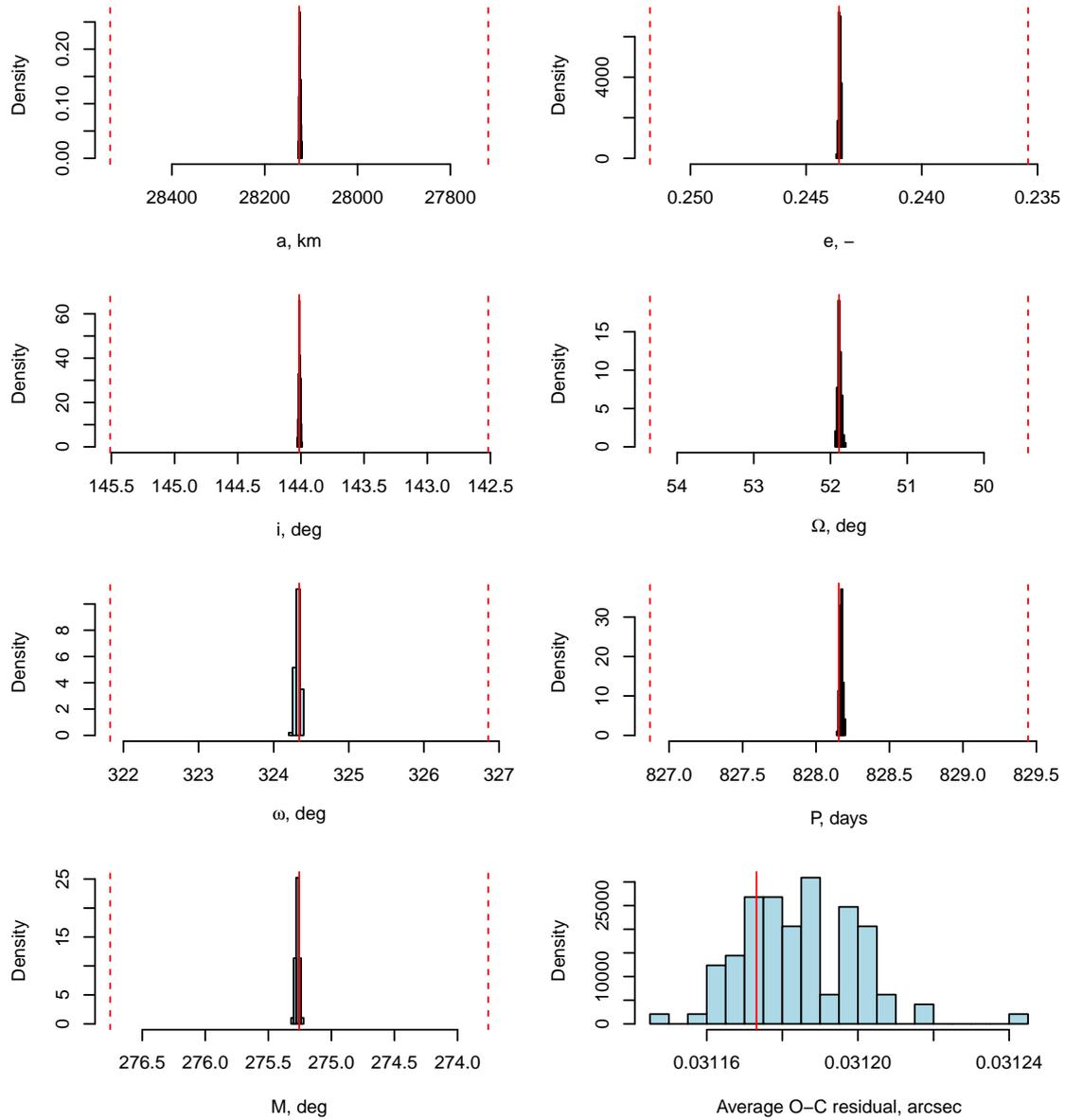
Une autre avantage de la méthode de RS est sa libre modélisation. Nous avons montré que plusieurs choix de la fonction de vraisemblance sont possibles. Cela signifie que l'algorithme est libre par le choix de résidus  $O - C$ . Par exemple, quand on minimise la somme des valeurs absolues  $O - C$ , les résidus sont supposés présenter un caractère laplacien, tandis que pour les valeurs  $O - C$  au carré les résidus sont considérés gaussiens. En outre, les résidus peuvent être considérés séparément par coordonnées  $x$  et  $y$  ou en vecteur  $(x, y)$ , c'est-à-dire que la distance euclidien  $O - C$  dans le plan tangent est considérée.

Une comparaison de la méthode de moindres carrés avec des autres modèles pour la

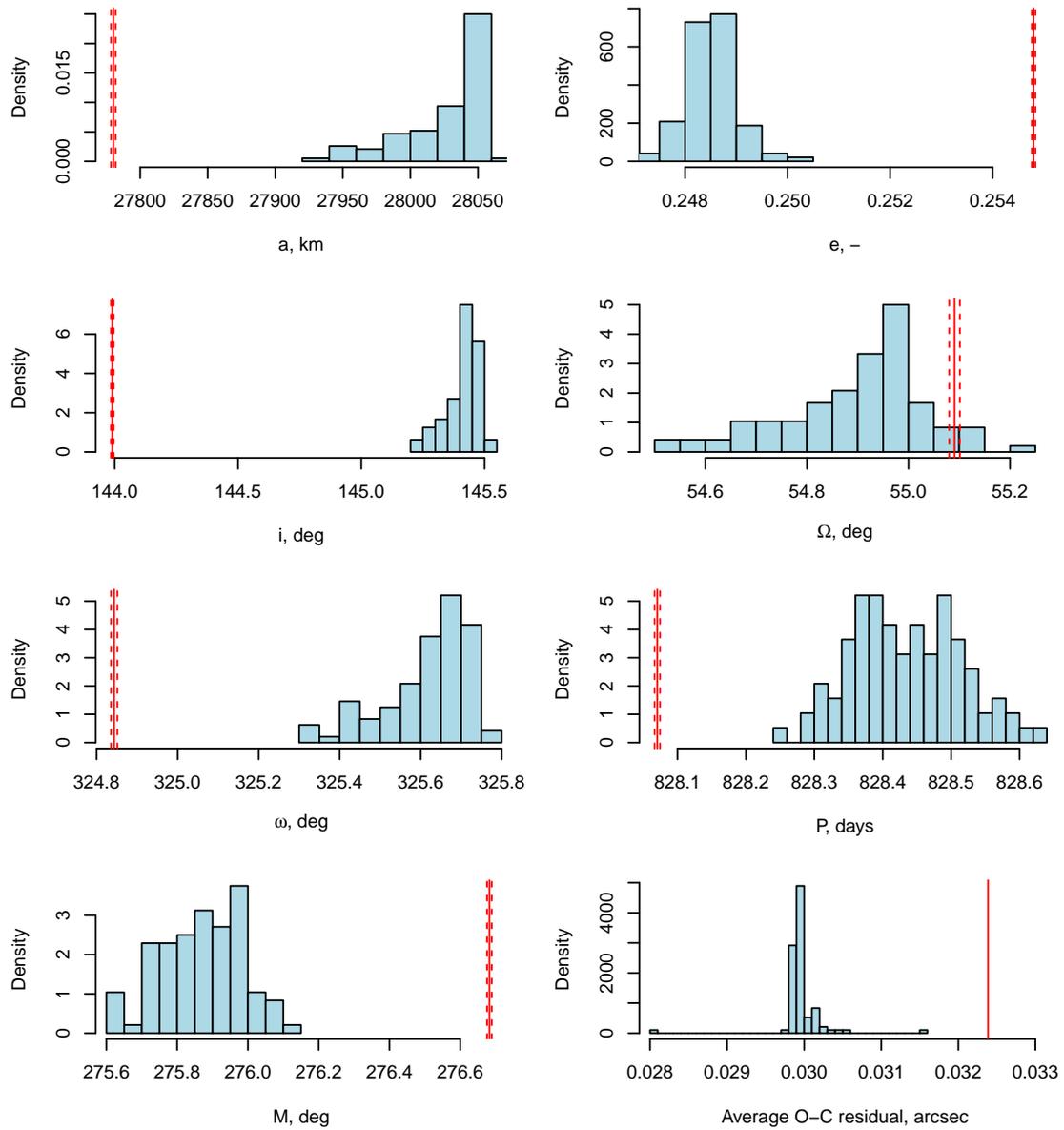
méthode de RS est décrite dans les publications Kovalenko et al. (2016) et Kovalenko et al. (2016).



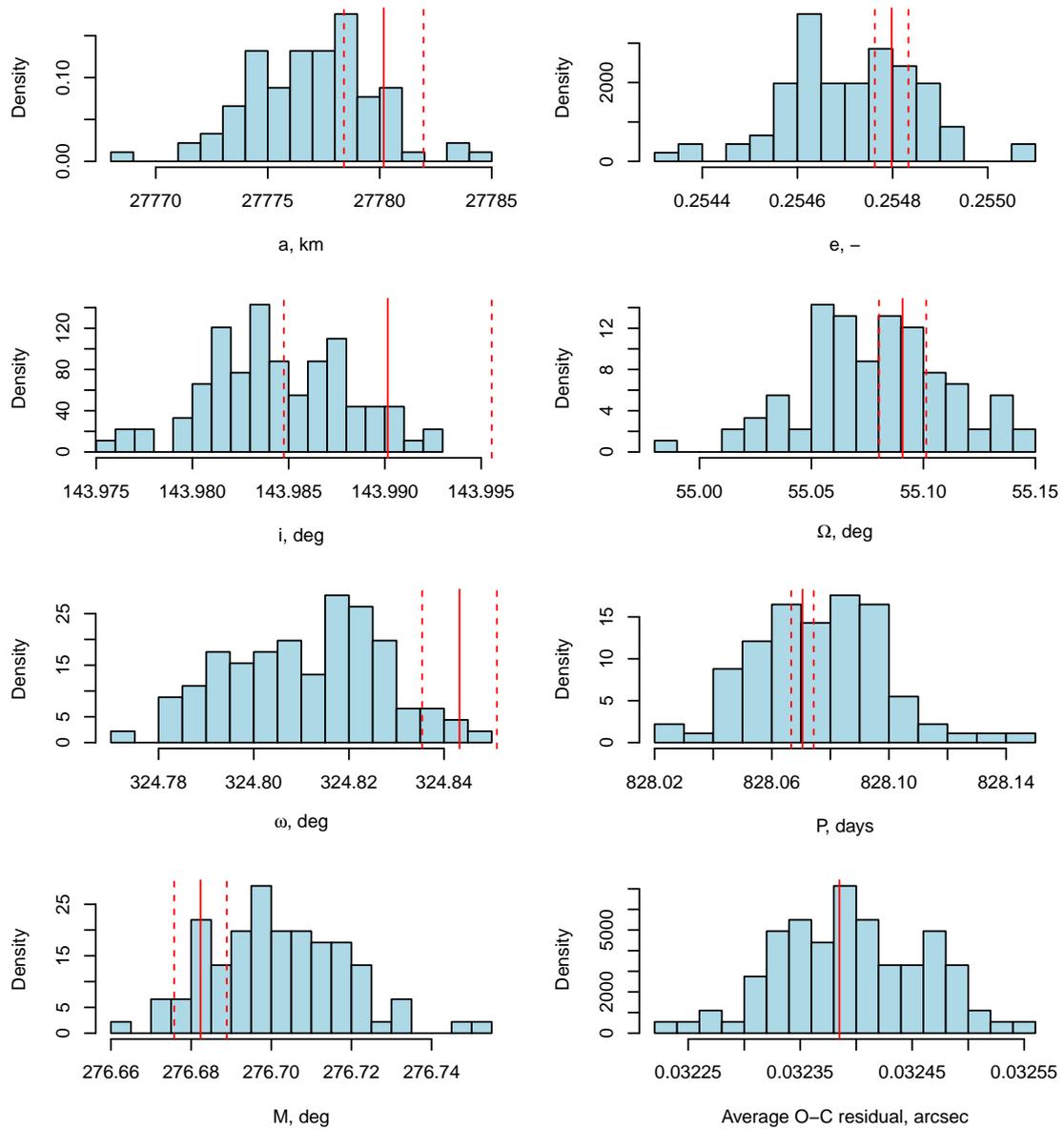
**Figure 8.9** – Test sur les vraies observations de 2001 QT297, modèle 1. La ligne rouge verticale correspond aux résultats des moindres carrés, la ligne pointillée est son incertitude. L’histogramme représente la distribution de 100 résultats de RS.



**Figure 8.10** – Test sur les vraies observations de 2001 QT297, modèle 2. La ligne rouge verticale correspond aux résultats des moindres carrés, la ligne pointillée est son incertitude. L’histogramme représente la distribution de 100 résultats de RS.



**Figure 8.11** – Test sur les vraies observations de 2001 QT297, modèle 3. La ligne rouge verticale correspond aux résultats des moindres carrés, la ligne pointillée est son incertitude. L’histogramme représente la distribution de 100 résultats de RS.



**Figure 8.12** – Test sur les vraies observations de 2001 QT297, modèle 4. La ligne rouge verticale correspond aux résultats des moindres carrés, la ligne pointillée est son incertitude. L’histogramme représente la distribution de 100 résultats de RS.

### 8.4.2 Estimation des incertitudes

Pour évaluer les incertitudes des paramètres, obtenus avec la méthode de RS, nous faisons les suppositions suivantes :

- les erreurs du modèle théorique sont négligées ;
- les erreurs d'observations sont négligées ;
- les valeurs des paramètres obtenues sont proches des vraies valeurs.

Soit  $\theta^c = \{\theta_j^c\}$ ,  $j = 1...m$  un vecteur des paramètres obtenus avec le RS, et  $\theta = \{\theta_j\}$ ,  $j = 1...m$  est le vecteur des vrais paramètres. Ainsi la correction entre les valeurs obtenues et vraies sera :

$$\Delta\theta = \theta - \theta^c. \quad (8.25)$$

Soit une coordonnée calculée ( $x$  ou  $y$  dans le plan tangent) au moment  $t_i$   $\varphi_i^c = \psi_i(\theta^c)$ . Ainsi, la coordonnée respective observée doit être

$$\varphi_i = \psi_i(\theta^c + \Delta\theta).$$

En utilisant l'hypothèse que  $\Delta\theta$  est petit, le  $\varphi_i$  peut être développé en série de Taylor :

$$\varphi_i = \psi_i(\theta^c) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial\psi_i(\theta^c)}{\partial\theta_j} \Delta\theta_j + \dots \quad (8.26)$$

Supposons que les termes supérieurs au premier ordre par rapport à  $\Delta\theta_j$  sont négligeables, ainsi l'équation conditionnelle (voir l'équation 6.62) (Emel'yanov, 1983) peut être écrite par :

$$\Delta\varphi_i = \sum_{j=1}^m J_{i,j} \Delta\theta_j, \quad (8.27)$$

où

$$J_{i,j} = \frac{\partial\psi_i(\theta^c)}{\partial\theta_j},$$

et

$$\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_i^c.$$

Ici, les  $\Delta\varphi_i$  seront les résidus  $O - C$  pour  $x$  et  $y$  séparément. Sous forme matricielle l'équation devient :

$$\Delta\varphi = \mathbf{J}\Delta\theta, \quad (8.28)$$

où  $\mathbf{J}$  est la matrice jacobienne entre les coordonnées  $x$  et  $y$  dans le plan tangent d'observation et les paramètres d'orbite. Cette matrice de taille  $2N \times n$ , où  $N$  est le nombre d'observations et  $n$  est le nombre de paramètres d'orbite, est décrite dans l'annexe D.2. L'équation est résolue pour  $\Delta\theta$  :

$$\Delta\theta = \left(\mathbf{J}^T \mathbf{J}\right)^{-1} \mathbf{J}^T \Delta\varphi. \quad (8.29)$$

Parmi les orbites obtenues dans la section précédente nous choisissons celles dont l'énergie finale est minimale pour chaque modèle de RS. Pour ces orbites nous avons calculé le  $\Delta\theta$ . Éventuellement la procédure d'ajustement différentiel des paramètres (voir la section 6.3.1 ou Emel'yanov (1983)) peut être appliquée en complément. Dans notre cas, pour les orbites trouvées avec la méthode de RS, cette procédure n'améliore pas les résultats. Nous interprétons le  $\Delta\theta$  calculé comme une estimation des incertitudes des paramètres. Ainsi, ces incertitudes pour les paramètres d'orbite (avec les paramètres eux-mêmes) pour les quatre modèles de RS sont comparées aux erreurs du résultat des moindres carrés et rassemblées dans le tableau 8.8. On observe que les incertitudes obtenues pour les orbites déterminées par la méthode de RS sont comparables à celles des moindres carrés.

**Table 8.8** – Estimation de la précision des résultats pour la méthode de RS et des moindres carrés. Pour les modèles 3 et 4 les résidus O-C sont réduits (divisés par  $\sigma$  d’observation).

Paramètres	Modèle 1	Modèle 2	LS
$a$ , km	28 109.4 $\pm$ 649.2	28 123.8 $\pm$ 319.4	28 125.8 $\pm$ 407.2
$e$ , -	0.2428 $\pm$ 0.0008	0.2435 $\pm$ 0.001	0.243577 $\pm$ 0.0081
$i^a$ , deg	145.3 $\pm$ 0.4	144.0 $\pm$ 1.002	144.01 $\pm$ 1.5
$\Omega^a$ , deg	53.8 $\pm$ 1.7	51.9 $\pm$ 0.86	51.89 $\pm$ 2.5
$\omega^a$ , deg	325.8 $\pm$ 0.03	324.3 $\pm$ 0.61	324.34 $\pm$ 2.5
$M^b$ , deg	275.3 $\pm$ 0.69	275.29 $\pm$ 0.71	275.26 $\pm$ 1.5
$P$ , jours	828.67 $\pm$ 30.3	828.17 $\pm$ 12.6	828.15 $\pm$ 80.9

Paramètres	Modèle 3	Modèle 4	LS pondérés
$a$ , km	28 051.3 $\pm$ 1.59	27 777.8 $\pm$ 0.6	27 780.18 $\pm$ 1.78
$e$ , -	0.2491 $\pm$ 0.000001	0.2547 $\pm$ 0.000001	0.2548 $\pm$ 0.000035
$i^a$ , deg	145.5 $\pm$ 0.009	143.9 $\pm$ 0.002	143.99 $\pm$ 0.01
$\Omega^a$ , deg	55.1 $\pm$ 0.004	55.1 $\pm$ 0.001	55.09 $\pm$ 0.01
$\omega^a$ , deg	325.7 $\pm$ 0.004	324.8 $\pm$ 0.007	324.84 $\pm$ 0.01
$M^b$ , deg	275.87 $\pm$ 0.004	276.7 $\pm$ 0.007	276.68 $\pm$ 0.01
$P$ , jours	828.37 $\pm$ 0.07	828.07 $\pm$ 0.02	828.07 $\pm$ 0.004

<sup>a</sup> Les angles se réfèrent au plan équatorial J2000. <sup>b</sup> à l’époque 2452000 JJ.

### 8.4.3 Détermination de J2 pour Teharonhiawako 2001 QT297

Précédemment nous déterminions des orbites képlériennes, décrites par les sept paramètres. En réalité, le mouvement est toujours plus complexe dû à plusieurs forces, connues ou inconnues (voir la section 6.1.4). En compliquant le modèle physique, le problème possède plus de paramètres à déterminer et, en conséquence, devient plus difficile à résoudre. Ainsi, il est souvent plus facile de déterminer une solution initiale avec un modèle simple et ensuite de l’ajuster avec des modèles plus complexes.

Dans l’étape précédente nous avons déjà déterminé l’orbite du satellite de Teharonhiawako 2001 QT<sub>297</sub>. Le résultat du modèle 2 de la vraisemblance est plus proche du résultat des moindres carrés que celui du modèle 1. En plus, par rapport aux modèles 3 et 4, les incertitudes de ce résultat évitent d’être surestimées dû à l’hypothèse de gaussianité des erreurs d’observation. Ainsi, nous choisissons ce résultat comme une orbite initiale dans l’algorithme de RS pour la prochaine étape.

Nous introduisons l’effet séculaire de non-sphéricité du primaire, décrit dans la section 6.1.4. Le nouveau modèle physique sera décrit par 10 paramètres à déterminer :  $(a, e, i, \Omega_0, \omega_0, \tau, P, \alpha_p, \delta_p, J_2 r^2)$ , où les sept premiers paramètres sont les mêmes que dans le modèle képlérien, à la différence près que  $\Omega_0$  et  $\omega_0$  sont attachés à un certain temps donné  $t_0$ . De plus, les angles  $\alpha_p, \delta_p$  caractérisent le vecteur fixe du moment angulaire de l’objet,  $J_2$  est le terme lié à l’aplatissement du primaire et  $r$  est le rayon moyen à l’équateur du primaire (voir plus en détails la section 6.1.4).

Le diamètre effectif  $D = \sqrt{D_1^2 + D_2^2}$  de Teharonhiawako 2001 QT<sub>297</sub>, déterminé dans le programme « TNOs are cool », est donné dans le tableau 2.3. En utilisant la relation (2.6) pour le rapport des diamètres  $k = D_2/D_1$ , le rayon moyen à l’équateur du primaire est  $r = D(1 + k^2)/2 = 89$  km. Ainsi, en supposant que  $r$  est connu, nous appliquons l’algorithme de RS pour déterminer les 10 paramètres suivants  $(a, e, i, \Omega_0, \omega_0, \tau, P, \alpha_p, \delta_p, J_2)$ .

La configuration suivante de l’algorithme de RS est choisie.

- Soient les lois *a priori* suivantes :

- pour chaque paramètre  $(a, e, i, \Omega_0, \omega_0, \tau, P)$  :  $\theta \sim \mathcal{U}[\theta_0 - 5\sigma, \theta_0 + 5\sigma]$ , où  $\theta$  est un paramètre,  $\sigma$  correspond aux incertitudes des paramètres et  $\theta_0$  est la valeur initiale du paramètre (voir tableau 8.8) ;
- $\alpha_p \sim \mathcal{U}[0, 2\pi]$ ,
- $\delta_p \sim \mathcal{U}[-\pi/2, \pi/2]$ ,
- $J_2 \sim \mathcal{U}[10^{-6}, 0.3]$ , où 0.3 correspond à la valeur légèrement augmentée du  $J_2$  de Hauméa (le TNB le plus allongé parmi les TNB connus).
- La température :  $T_i = T_{max}c^i$ , où  $T_{max} = 5 \times 10^6$  et  $c = 0.999$ . La température diminue chaque 30 itérations.
- La loi instrumentale :  $\mathcal{N}(\theta^{(i-1)}, \delta \sigma^{prior})$ , où l'échelle  $\delta = 0.02$  et  $\sigma^{prior} = 5\sigma$ .
- La fonction de vraisemblance correspond à celle du modèle 2 (voir section 8.3.1).

Avec cette configuration l'algorithme de RS a été répété dix fois, en convergeant vers des solutions proches. Une meilleure orbite (avec la valeur minimale de la fonction d'énergie finale) a été sélectionnée, dont les paramètres sont présentés dans le tableau 8.9. Pour comparer la nouvelle orbite avec l'orbite képlérienne obtenue auparavant, on les caractérise par leur erreur quadratique moyenne (MSE, d'anglais "Mean Squared Error"), qui vaut :

$$MSE = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{2N} |O - C|_i^2, \quad (8.30)$$

où  $|O - C|_i^2 = |x_i^O - x_i^C|^2$  et  $|O - C|_i = |y_i^O - y_i^C|^2$  pour  $i$  impair et  $i$  pair respectivement,  $N$  est le nombre d'observations.

La comparaison des résultats (voir tableau 8.9) pour le mouvement képlérien et perturbé ne montre pas de différence considérablement grande. En revanche, la valeur obtenue de  $J_2 = 0.007$  signifie que le corps primaire de Teharonhiawako 2001 QT<sub>297</sub> peut être légèrement aplati. En comparant les MSE des deux orbites, l'orbite perturbée est plus ajustée aux observations que l'orbite képlérienne. Ainsi, la non-sphéricité doit être prise en compte pour une meilleure précision.

**Table 8.9** – La comparaison des résultats pour le modèle képlérien et perturbé. L'orbite perturbée est liée à la non-sphéricité du primaire et caractérisée par les valeurs obtenues :  $J_2 = 0.007$ ,  $\alpha_p^a = 357^\circ$  et  $\delta_p^a = -79.9^\circ$

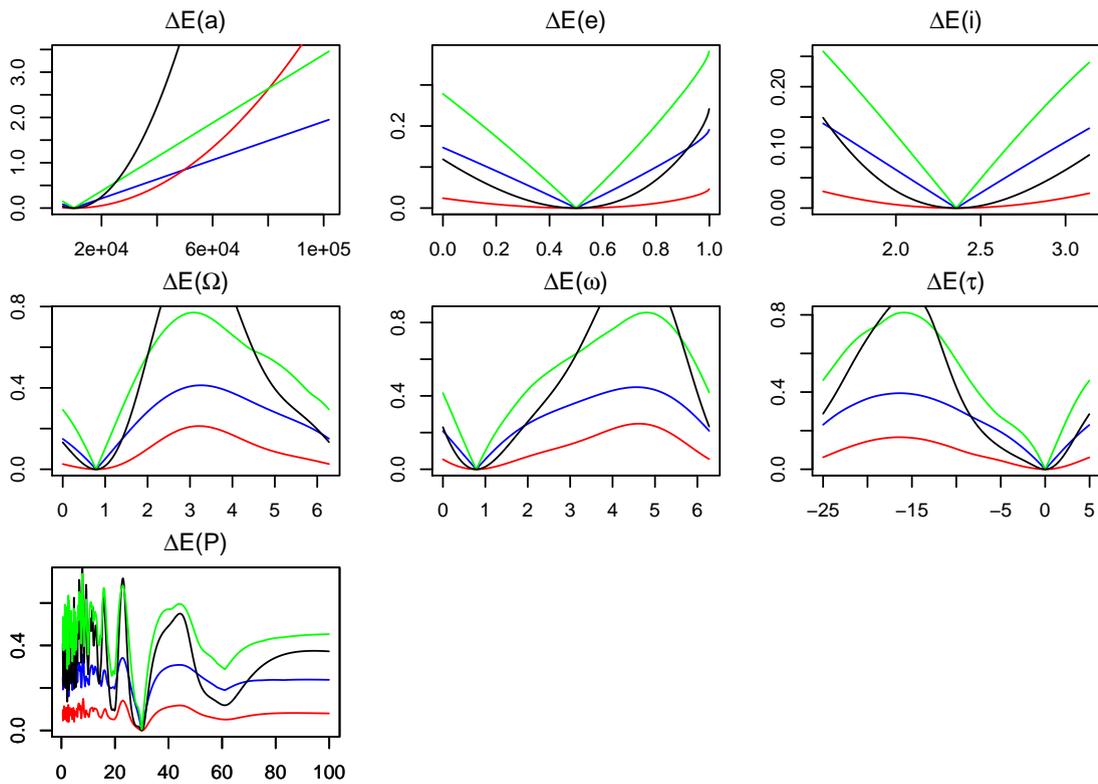
Paramètres	Orbite képlérienne	Orbite perturbée
$a$ , km	28 123.8 ± 319.4	28 061.9 ± 27.3
$e$ , -	0.2435 ± 0.001	0.2454 ± 0.0007
$i^a$ , deg	144. ± 1.	143.5 ± 0.12
$\Omega^{a,b}$ , deg	51.9 ± 0.86	56.8 ± 0.000008
$\omega^{a,b}$ , deg	324.3 ± 0.61	328.1 ± 0.36
$M^c$ , deg	51366.3 ± 0.71	276.7 ± 118.9
$P$ , jours	828.17 ± 12.6	829.9 ± 1.17
MSE	0.000713	0.000695

<sup>a</sup> Les angles se réfèrent au plan équatorial J2000. <sup>b</sup> A l'époque de la première observation (délai temps-lumière est pris en compte) 2452193.2832 JJ. <sup>c</sup> à l'époque 2452000 JJ.

## 8.5 Problème de minimums locaux

L'algorithme de recuit simulé aide à éviter les minimums locaux lors de la recherche d'un minimum global de la fonction d'énergie. En revanche, il ne garantit pas cela si le schéma la température et l'échelle de la loi instrumentale ne sont pas optimales. Évidemment, car les configurations optimales de RS sont difficiles à réaliser du point de vue pratique, dans de nombreux cas, l'algorithme peut facilement converger vers des minimums locaux.

Dans le but de comprendre l'origine des minimums locaux de l'énergie, nous analysons d'abord l'influence de chaque paramètre d'orbite sur cette fonction. Revenons à notre exemple de simulation (voir 8.3). Pour voir l'influence, nous propageons chaque paramètre dans l'intervalle de sa loi *a priori* en fixant les autres paramètres. L'énergie en fonction de chaque paramètre est présentée sur la figure 8.13. Nous voyons, que les six paramètres



**Figure 8.13** – Fonction d'énergie (terme d'attache aux données) en fonction des paramètres pour les quatre modèles : modèle 1 (ligne bleu), modèle 2 (ligne rouge), modèle 3 (ligne verte), modèle 4 (ligne noire).

képlériens ( $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $\tau$ ) ont un minimum, qui est le minimum global. Le septième paramètre – la période orbitale  $P$  – a plusieurs minimums. Pour expliquer cet effet nous examinons d'abord une orbite circulaire, donc  $e = 0$ . Les autres éléments orbitaux restent les mêmes que l'orbite générée dans 8.3 :  $a = 10000$  km,  $i = 135^\circ$ ,  $\Omega = \omega = 45^\circ$ ,  $\tau = 0$ ,  $P = 30$  jours. Soit une observation au temps  $t_i$ . Ainsi, en utilisant l'équation de Kepler nous avons la relation

$$M_i = \frac{2\pi}{P}(t_i - \tau) = E_i.$$

En prenant en compte que l'anomalie excentrique  $E$  est exprimée dans l'intervalle  $[0; 2\pi]$

nous écrivons

$$\frac{2\pi}{P_c}(t_i - \tau) = E_i + 2\pi k_i, \quad k_i \in \mathbb{N},$$

où  $P_c$  est une certaine valeur critique de la période, qui correspond à un minimum local de  $E(P)$ . Ainsi, la période peut être exprimée par la relation

$$P_c = \frac{t_i - \tau}{E_i/2\pi + k_i}, \quad k_i \in \mathbb{N}. \quad (8.31)$$

En conséquence, les minimums locaux se répètent avec la fréquence

$$\nu_i = \frac{E_i/2\pi + k_i}{t_i - \tau}, \quad k_i \in \mathbb{N}. \quad (8.32)$$

L'illustration de cette périodicité des minimums locaux est présentée sur la figure 8.14. Par analogie, une deuxième observation au temps  $t_j$  fait intervenir encore un ensemble de minimums locaux avec sa fréquence

$$\nu_j = \frac{E_j/2\pi + k_j}{t_j - \tau}, \quad k_j \in \mathbb{N}, \quad (8.33)$$

De plus, cela fait diminuer l'amplitude des perturbations de la fonction d'énergie, mais en revanche, la deuxième observation crée une superposition de deux minimums (voir graphique 8.15) quand

$$k_i = \frac{t_i - \tau}{t_j - \tau}(E_j/2\pi + k_j) - E_i/2\pi, \quad k_i, k_j \in \mathbb{N}. \quad (8.34)$$

D'une manière similaire, pour une orbite elliptique nous avons des minimums locaux, liés au point observé au temps  $t_i$ , qui se répètent avec la fréquence

$$\nu_i = \frac{(E_i - e \sin E_i)/2\pi + k_i}{t_i - \tau}, \quad k_i \in \mathbb{N}. \quad (8.35)$$

**La dérivée de la fonction d'énergie.** Considérons maintenant la dérivée de la fonction d'énergie par la période :

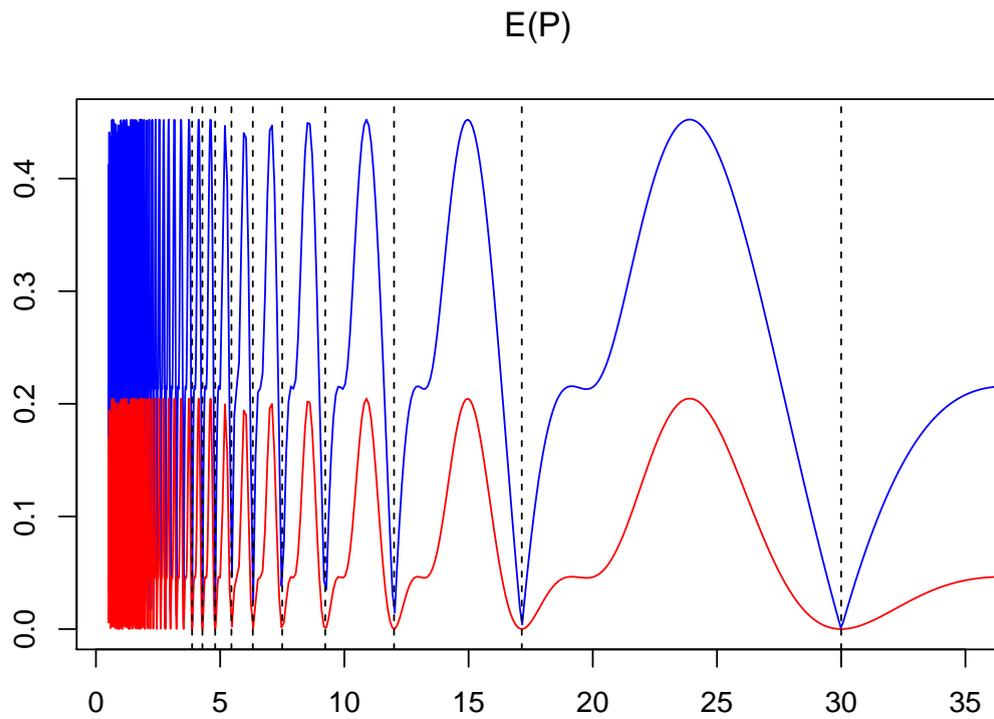
$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial P} &= \frac{l}{NP} \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon_i^{l-2}}{\sigma_i^l} \frac{E_i - e \sin E_i}{(1 - e \cos E_i)} \\ &\quad \times (\varepsilon_{xi}(-A \sin E_i + F \sqrt{1 - e^2} \cos E_i) \\ &\quad + \varepsilon_{yi}(-B \sin E_i + G \sqrt{1 - e^2} \cos E_i)), \end{aligned} \quad (8.36)$$

où  $\varepsilon_{xi} = (x_i^O - x_i^C)$ ,  $\varepsilon_{yi} = (y_i^O - y_i^C)$  et  $\varepsilon_i = \sqrt{\varepsilon_{xi}^2 + \varepsilon_{yi}^2}$  (plus en détails voir D.1 pour la dérivation détaillée).

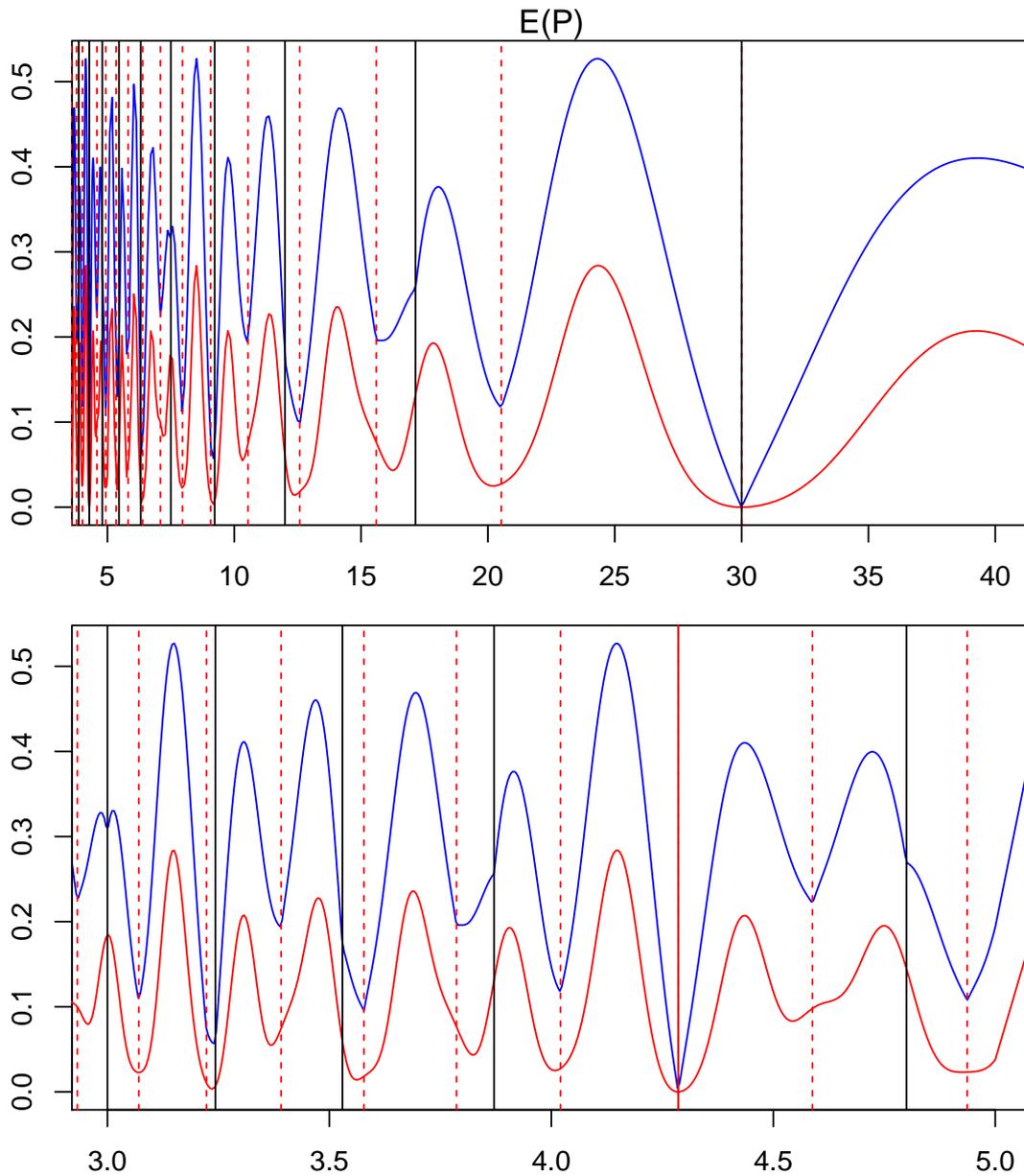
Les minimums locaux (ainsi que le minimum global) correspondent à  $\frac{\partial E}{\partial P} = 0$ . Il est évident que la dérivée (8.36) est égale à zero quand les points calculés coïncident avec les points observés, c'est-à-dire  $\varepsilon_i = \varepsilon_{xi} = \varepsilon_{yi} = 0$ . D'un autre côté, il est clair que la dérivée s'annule quand  $E_i = 0$ ,  $i = 1 \dots N$ . Cela est possible si tous les intervalles entre les observations sont multiples de la période orbitale. Pratiquement, pour ce cas la période doit être petite (peut être moins d'un jour), pour que chaque intervalle se divise entièrement sur la période. Si la période orbitale est très grande, tellement grande que même le plus large intervalle, entre la première et la dernière observation, est négligeable par rapport

à la période, on peut avoir le cas d'une orbite très excentrique sur laquelle toutes les observations se sont concentrées à côté du péricentre  $E_i \approx 0$ . Pour éviter les minimums locaux, liés à ceux des cas théoriques, mais pas très réalistes, l'intervalle de recherche peut être contraint.

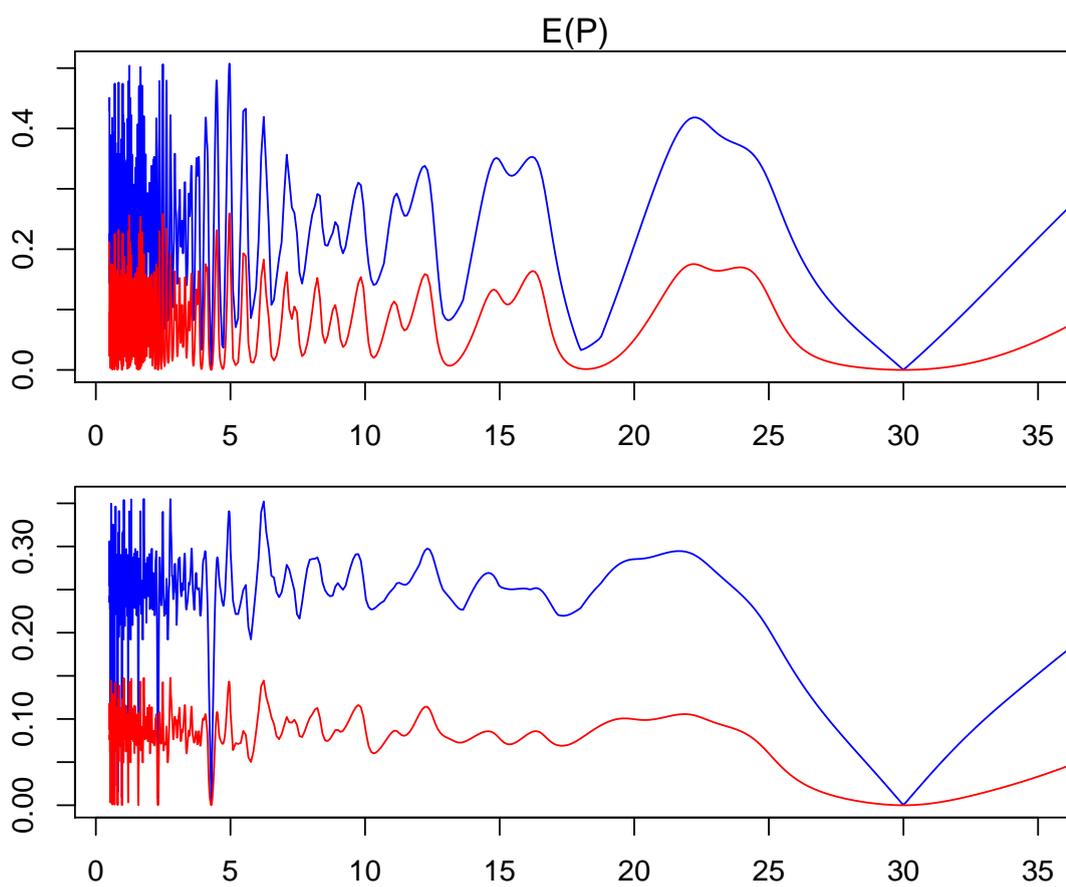
Finalement, les conditions des minimums locaux de l'énergie correspondent également à celles du minimum global. Pour conclure, notons que plus d'observations sont disponibles, plus petite est l'amplitude de la fonction d'énergie (voir l'illustration 8.16), en conséquence, l'algorithme sort plus facilement des minimums locaux. En revanche, la superposition de plusieurs minimums locaux, lié à la répartition des observations, donne un pic d'énergie profond, duquel l'algorithme a des difficultés à sortir. Autrement, des contraintes sur la période peuvent être introduites à l'aide de *a priori*.



**Figure 8.14** – Illustrations des minimums locaux de  $E(P)$  liés à une observation pour les modèles 1 (bleu) et 2 (rouge). Les lignes verticales correspondent aux valeurs critiques de la période  $P_c = \frac{t_i - \tau}{E_i/2\pi + k}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, 10$ .



**Figure 8.15** – Illustrations des minimums locaux de  $E(P)$  liés à deux observations pour les modèles 1 (bleu) et 2 (rouge). Les lignes verticales correspondent aux valeurs critiques de la période liées au point d'observation au temps  $t_i$  (ligne noire),  $t_j$  (ligne rouge), avec les fréquences  $\nu_i$  et  $\nu_j$  respectivement, et à la superposition de deux minimums locaux (ligne rouge) quand  $P_{ci} = P_{cj}$ . Le graphique en bas représente le même qu'en haut dans une échelle plus grande.

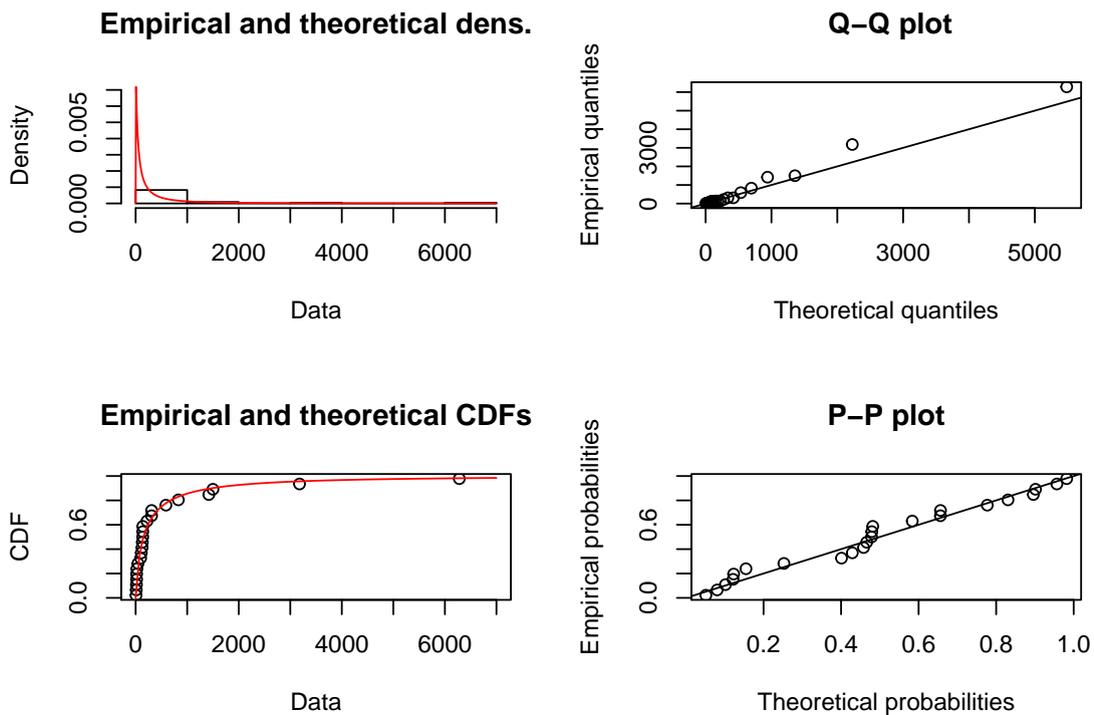


**Figure 8.16** – Fonction d'énergie, calculée pour 2 (en haut) et 10 (en bas) points observés, pour une orbite elliptique. Modèle 1 : courbe bleu, Modèle 2 : courbe rouge.

### 8.5.1 Proposition 1 : loi *a priori* informative

Une solution possible pour éviter les minimums locaux est de contraindre plus l'espace de recherche. Le problème est en effet essentiellement lié à la période orbitale, il est alors utile d'introduire une loi *a priori* informative pour ce paramètre. La loi peut être basée sur l'échantillon des objets binaires du même groupe par exemple, si la période ne peut pas être mieux estimée à partir des observations.

Considérons un échantillon de binaires transneptuniens. Cet échantillon n'est pas très grand, de taille 23 avec les orbites déterminées, mais suffisant pour faire une estimation de distribution. Par exemple, une loi log-normale ( $\mu = 5.02$  et  $\sigma = 1.778$ ) peut être adaptée (voir la figure 8.17)



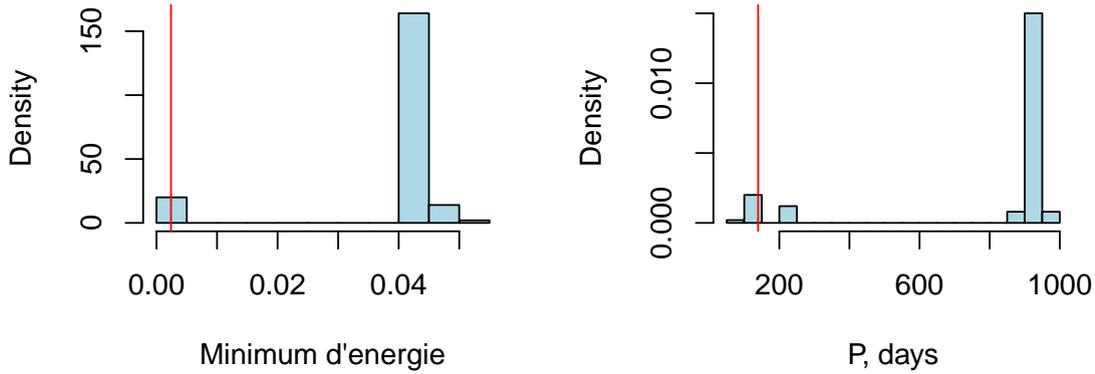
**Figure 8.17** – Choix de la loi *a priori* log-normale  $\mu = 5.02$  et  $\sigma = 1.778$  pour la distribution de la période orbitale des binaires transneptuniens.

#### Exemple : (148780) Altjira

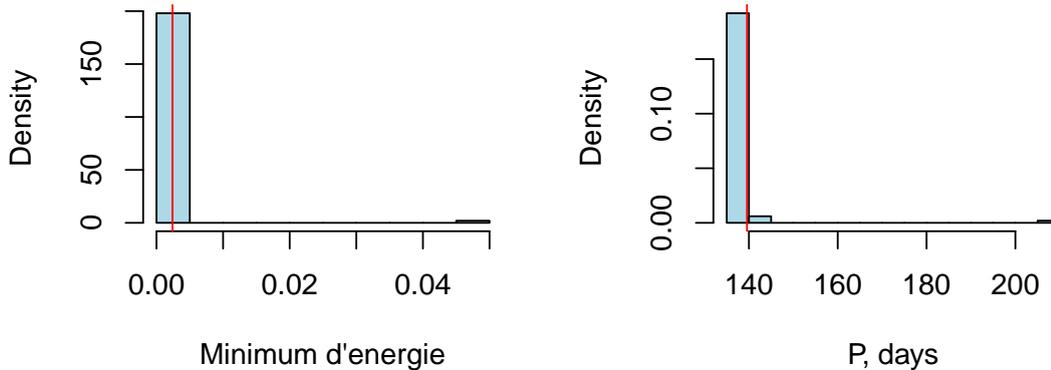
Nous avons appliqué l'algorithme de RS avec les mêmes configurations que dans le test 2.2 (voir tableau 8.3.1) avec le modèle 1 (voir la section 8.2), afin de retrouver les éléments orbitaux à partir des 7 observations de TNB Altjira, prises de la publication Grundy et al. (2011). Les résultats obtenus sont comparés avec ceux de Grundy et al. (2011), qui sont choisis comme référence.

Premièrement, nous avons utilisé la loi *a priori* uniforme non-informative. L'échantillon de 100 résultats de RS comparé aux valeurs publiées est présenté sur la figure 8.18. Il est clair que l'algorithme ne converge que quelques fois vers le minimum global de l'énergie, et presque tout le temps vers des minimums locaux. Ensuite, nous introduisons la loi *a priori* pour la période, basée sur l'échantillon des TNB.

Le résultat, présenté sur la figure 8.19, montre que la loi informative améliore considérablement la convergence vers l'optimum global. Dans cet exemple l'algorithme est arrivé à un optimum local une fois sur 100.



**Figure 8.18** – Résultats de 100 essais de RS sur les observations de Altjira. La loi *a priori* de la période orbitale est uniforme sur l'intervalle de toutes valeurs possibles pour les TNB connus.

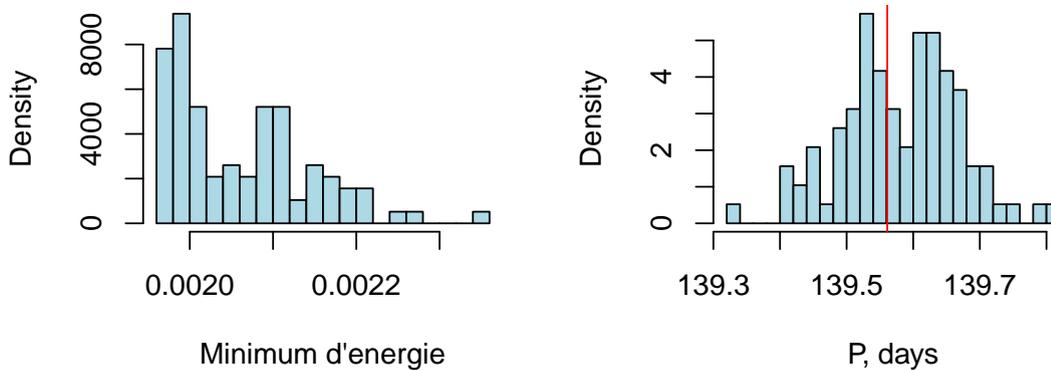


**Figure 8.19** – Résultats de 100 essais de RS sur les observations de Altjira. La loi *a priori* est construite sur l'échantillon des TNB connus.

### 8.5.2 Proposition 2 : parallélisme de l'algorithme

Il existe différentes approches de réalisation d'un algorithme de RS avec parallélisation (lorsque plusieurs chaînes de Markov simultanées figurent dans l'algorithme). Considérons trois d'entre elles.

**Recherches simultanées indépendantes.** Cette méthode a été proposée par Czech (2001). Les processus parallèles effectuent l'algorithme de RS, en commençant par différents points initiaux. A la fin de l'algorithme une solution optimale est choisie entre les résultats de chaque processus. Le plus grand avantage de cette méthode est la simplicité de parallélisation en un nombre de processus quelconque. Czech (2001) montre que la vitesse de recherche ne change presque pas par rapport à un RS standard.



**Figure 8.20** – Résultats de 100 essais de RS avec la parallélisation par la décomposition de l'espace de recherche.

**Recherches simultanées avec synchronisation périodique.** Dans cette méthode (Schmid and Schneider, 1999) les chaînes parallèles de RS commencent par un même état initial. Ensuite, à chaque itération (après la procédure standard de RS de proposition et d'acceptation d'un état), ou dans un certain nombre d'itérations choisies, les chaînes synchronisent leur état actuel. Cette synchronisation peut être faite soit avec le choix du meilleur état parmi les chaînes, soit avec un choix aléatoire.

**Décomposition de l'espace de recherche.** Les algorithmes de RS sont effectués indépendamment dans différents endroits de tout l'espace de recherche (Ram et al., 1996). Il est nécessaire d'assurer la décomposition en régions telles qu'elles ne s'intersectent pas et couvrent tout l'espace de recherche. En plus, la loi *a priori* doit être choisie pour chaque région en fonction de la décomposition. Pour chaque problème la décomposition s'effectue individuellement en considérant les caractéristiques de l'espace.

#### Exemple : (148780) Altjira

Le RS parallèle est appliqué pour les observations de TNB Altjira dans le but de retrouver les 7 paramètres orbitaux du mouvement képlérien. Premièrement, nous appliquons le RS avec la décomposition de l'espace de recherche. Diviser un espace de 7 dimensions n'est pas évident, ainsi donc nous allons diviser seulement l'intervalle de recherche d'un paramètre, celui qui introduit les minimums locaux de la fonction d'énergie – la période orbitale. La décomposition peut être faite simplement en plusieurs intervalles égaux ou bien en tenant compte de la loi *a priori* des TNB. Soit tout l'espace de paramètre  $x \in [a, b]$  divisée en  $N$  intervalles, telles que la probabilité de chaque intervalle

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = C, \quad \forall i \in [0, N], \quad x_0 = a, x_N = b, \quad (8.37)$$

où  $f(x)$  est la densité de la loi *a priori*,  $C$  est une constante déterminée par la formule :

$$C = \frac{F(x_N) - F(x_0)}{N}, \quad (8.38)$$

où  $F(x)$  est la fonction de répartition de la loi *a priori*.

De cette façon, en utilisant la loi *a priori* pour le TNB, proposée dans la section 8.5.1, l'espace de recherche est divisé en  $N = 6$  intervalles. Comme d'habitude, pour avoir un

relevé statistique sur le résultat, la procédure de RS a été répétée 100 fois. Le résultat est affiché sur la figure 8.20. Il est clair qu'un résultat dans le voisinage de l'optimum global a été obtenu pour tous les 100 essais de RS.

### 8.5.3 Proposition 3 : modification du schéma de la température

Kostenko and Kalashnikov (2006) propose d'augmenter temporairement la température si l'algorithme arrive dans un optimum local, pour augmenter la probabilité d'y échapper. Comme critère d'entrée dans un optimum local, un nombre d'itérations est utilisé au cours duquel la solution n'est pas améliorée. La modification suivante du schéma de la température est proposée :

$$T_i = \min[T_0, h(T_0, i) + \max(0, c_T(k - k_T))], \quad (8.39)$$

où  $h(T_0, i)$  est une fonction standard de refroidissement (par exemple (8.4)),  $k$  est un nombre d'itérations au cours duquel la solution n'est pas améliorée,  $k_T$  est un nombre critique d'itérations au cours duquel la solution n'est pas améliorée,  $c_T$  est un coefficient qui caractérise la vitesse d'augmentation de la température.

### 8.5.4 Résumé

Parmi les trois propositions d'amélioration de RS standard présentées ici pour résoudre le problème des minimums locaux de l'énergie, le parallélisme de l'algorithme semble le plus adapté. Par exemple, la décomposition de l'espace de recherche (voir l'exemple dans 8.5.2) ou les recherches simultanées indépendantes (testées mais pas présentées ici) sont faciles à réaliser et efficaces.

L'utilisation de la loi *a priori* construit sur un échantillon des TNB connus montre son efficacité dans l'exemple 8.5.1. En revanche, l'utilisation de la loi informative peut être risquée. L'*a priori* peut influencer trop fortement l'inférence bayésienne, et jouer un rôle plus important que la vraisemblance.

La troisième proposition – la modification du schéma de la température – peut être aussi performante, mais le choix des paramètres complémentaires dans l'algorithme (les valeurs  $c_T$ ,  $k$  et  $k_T$  dans la formule (8.39)) n'est pas évident et peut ne pas être optimal.

## Chapitre 9

# Conclusions et perspectives

La méthode d'optimisation *recuit simulé* (RS), basée sur un des algorithmes de Monte-Carlo par chaînes de Markov (algorithme de Metropolis-Hastings), avec une approche bayésienne a été proposé dans cette thèse pour le problème de la détermination de l'orbite mutuelle d'objet binaire. Les résultats suivants ont été obtenus :

- l'application sur les observations simulées montre que la méthode de RS permet de retrouver les paramètres d'orbite à partir des observations astrométriques ;
- l'application sur les vraies observations montre que les résultats sont comparables à ceux de la méthode classique des moindres carrés ;
- la méthode de RS a été appliquée au modèle simple (képlérien) décrit par 7 paramètres, ainsi qu'au modèle perturbé (lié à non-sphéricité d'objet) décrit par 10 paramètres.

En comparaison avec la méthode classique pour ce problème – la méthode des moindres carrés – le recuit simulé a certains avantages. Premièrement, il ne dépend pas des valeurs initiales des paramètres à déterminer. Il suffit d'introduire une loi *a priori* sur les paramètres, qui n'exige presque aucune connaissance particulière sur les paramètres d'orbite. Deuxièmement, le recuit simulé est flexible dans la modélisation de la fonction à optimiser. C'est-à-dire que l'algorithme est libre dans le choix du type de résidu  $O - C$  (les résidus peuvent être considérés laplacien ( $|O - C|$ ) ou gaussien ( $|O - C|^2$ ), séparément par coordonnées  $x$  et  $y$  ou en vecteur  $(x, y)$  etc.). Les incertitudes des paramètres obtenus avec le RS sont comparables à celles de la méthode des moindres carrés à nombre d'observations égal.

D'un autre côté, quand dans la méthode classique l'augmentation du nombre d'observations est favorable, dans le RS cela augmente le temps de calcul. Ainsi, les deux méthodes peuvent être complémentaires l'une de l'autre : l'algorithme de RS peut être utilisé pour déterminer une orbite préliminaire avec peu d'observations disponibles et la méthode des moindres carrés peut être ensuite appliquée pour améliorer l'orbite avec des observations complémentaires.

Par rapport à l'autre méthode MCMC pour les astéroïdes binaires, décrite par Oszkiewicz et al. (2013), la nôtre partage avec elle des idées communes, mais a aussi des différences et avantages. Premièrement, avec le RS on cherche une orbite la plus optimale, quand avec la méthode de Oszkiewicz et al. (2013) on obtient une distribution des orbites possibles. Deuxièmement, notre approche permet d'éviter l'utilisation de la méthode de Thiele-Innes (Aitken, 1964), développée pour les étoiles binaires, qui peut être inappropriée pour les observations d'astéroïdes.

Malgré tous les avantages de la méthode proposée dans cette thèse, elle n'est pas parfaite. Une grande difficulté du problème consiste en la présence de plusieurs optimums locaux de la fonction d'énergie qu'on minimise. Le choix des paramètres de l'algorithme

de RS n'est pas évident et demande plusieurs essais et erreurs. Les configurations de l'algorithme (la température maximale et l'échelle de la loi instrumentale) peuvent être sur-estimées ou sous-estimées, en conséquence, soit les calculs prennent beaucoup de temps soit l'algorithme n'atteint pas de solution optimale. Le parallélisme de l'algorithme de RS, testé dans cette thèse, est une solution possible à ce problème.

**Perspectives.** Dans les perspectives de ce travail les continuations suivantes peuvent être faites :

- application des méthodes plus complexes basées sur la méthode de recuit simulé (par exemple « simulated tempering » (Marinari and Parisi, 1992) ou « parallel tempering » (Swendsen and Wang, 1986, Geyer, 1991)) ;
- optimisation du choix de la température initiale et du schéma de refroidissement ;
- optimisation de la loi instrumentale,
- des modèles physiques du système binaire plus complexes (en prenant en compte plusieurs perturbations), ainsi que les modèles du système triple et multiple.

En se référant à la première partie de cette thèse, le travail sur la détermination d'orbite mutuelle des TNB est très important vu le manque d'objets avec une masse déterminée. En conséquence, des observations complémentaires pour déterminer les orbites inconnues, ainsi que pour préciser les orbites déjà déterminées et la non-sphéricité d'objet primaire, sont nécessaires.



# Annexes

## Annexe A

# Tests sur corrélation

### A.1 Corrélation de Spearman

**Table A.1** – Test de corrélation de Spearman.  $N$  est le nombre d'objets dans l'ensemble de données,  $\rho$  est le coefficient de Spearman, la valeur- $p$  est calculée dans l'hypothèse nulle :  $\rho = 0$ .

Paramètres	N	Méthode standard		Bootstrap		
		$\rho$	valeur- $p$	$\rho$	$\pm\sigma_\rho$	valeur- $p$
$D$ vs. $p_V$	30	0.09	0.65	0.08	0.23	0.67
$D$ vs. $m$	21	0.97	$1.2 \times 10^{-12}$	0.96	0.04	$1.22 \times 10^{-11}$
$D$ vs. $i$	30	0.75	$1.89 \times 10^{-6}$	0.73	0.09	$4.83 \times 10^{-6}$
$D$ vs. $\Delta H_V$	30	0.72	$8.74 \times 10^{-6}$	0.7	0.1	$1.93 \times 10^{-5}$
$D$ vs. $\rho_b$	21	0.54	0.01	0.53	0.19	0.01
$D$ vs. $a_r$	21	0.41	0.07	0.04	0.21	0.07
$D$ vs. $e$	30	0.28	0.14	0.27	0.17	0.16
$D$ vs. $P$	21	-0.32	0.16	-0.3	0.22	0.19
$D$ vs. $a$	30	-0.05	0.79	-0.05	0.19	0.78
$D$ vs. $q$	30	-0.32	0.08	-0.3	0.17	0.1
$p_V$ vs. $m$	21	0.38	0.09	0.37	0.24	0.1
$p_V$ vs. $i$	30	-0.02	0.94	-0.02	0.22	0.92
$p_V$ vs. $\Delta H_V$	30	0.31	0.1	0.3	0.18	0.11
$p_V$ vs. $\rho_b$	21	0.72	$2.44 \times 10^{-4}$	0.7	0.14	$4.37 \times 10^{-4}$
$p_V$ vs. $a_r$	21	0.52	0.01	0.51	0.2	0.02
$p_V$ vs. $e$	30	0.01	0.96	0	0.19	0.99
$p_V$ vs. $P$	21	0.003	0.99	0	0.22	1
$p_V$ vs. $a$	30	0.18	0.35	0.17	0.21	0.38
$p_V$ vs. $q$	30	0.15	0.42	0.15	0.18	0.42

**Table A.2** – Test de corrélation de Spearman avec les incertitudes des données.  $N$  est le nombre d’objets dans l’ensemble de données,  $\rho$  est le coefficient de Spearman, la valeur- $p$  est calculée dans l’hypothèse nulle :  $\rho = 0$ .

Paramètres	N	Méthode des perturbations			Méthode composite		
		$\rho$	$\pm\sigma_\rho$	valeur- $p$	$\rho$	$\pm\sigma_\rho$	valeur- $p$
$D$ vs. $p_V$	30	0.11	0.13	0.67	0.19	0.23	0.31
<b>D</b> vs. <b>m</b>	21	0.94	0.02	$1.4 \times 10^{-10}$	0.93	0.06	$1.24 \times 10^{-9}$
<b>D</b> vs. <b>i</b>	30	0.71	0.05	0	0.72	0.1	$7.06 \times 10^{-6}$
<b>D</b> vs. $\Delta H_V$	30	0.51	0.07	0.03	0.69	0.11	$2.49 \times 10^{-5}$
<b>D</b> vs. $\rho_b$	21	0.52	0.06	0.02	0.5	0.2	0.02
$D$ vs. $a_r$	21	0.21	0.19	0.36	0.2	0.3	0.39
$D$ vs. $e$	30	0.28	0.07	0.27	0.26	0.18	0.16
$D$ vs. $P$	21	-0.32	0.05	0.16	-0.3	0.22	0.19
$D$ vs. $a$	30	0.15	0.04	0.57	-0.05	0.19	0.8
$D$ vs. $q$	30	-0.2	0.08	0.44	-0.3	0.18	0.11
$p_V$ vs. $m$	21	0.44	0.08	0.04	0.42	0.24	0.06
$p_V$ vs. $i$	30	-0.1	0.1	0.71	0.08	0.23	0.67
$p_V$ vs. $\Delta H_V$	30	0.3	0.1	0.25	0.34	0.19	0.07
<b>pV</b> vs. $\rho_b$	21	0.67	0.07	$9.64 \times 10^{-4}$	0.65	0.16	0.002
$p_V$ vs. $a_r$	21	0.13	0.18	0.58	0.13	0.31	0.58
$p_V$ vs. $e$	30	-0.01	0.1	0.96	0.02	0.21	0.93
$p_V$ vs. $P$	21	-0.04	0.11	0.85	-0.05	0.24	0.82
$p_V$ vs. $a$	30	0.05	0.07	0.86	0.15	0.21	0.44
$p_V$ vs. $q$	30	0.06	0.1	0.82	0.11	0.2	0.55

## A.2 Corrélacion de Kendall

**Table A.3** – Test de corrélation de Kendall.  $N$  est le nombre d'objets dans l'ensemble de données,  $\tau$  est le coefficient de Kendall, la valeur- $p$  est calculée dans l'hypothèse nulle :  $\tau = 0$ .

Paramètres	N	Méthode standard		Bootstrap		
		$\tau$	valeur- $p$	$\tau$	$\pm\sigma_\tau$	valeur- $p$
$D$ vs. $p_V$	30	0.06	0.64	0.06	0.17	0.64
$D$ vs. $m$	21	0.89	0	0.89	0.06	$1.48 \times 10^{-14}$
$D$ vs. $i$	30	0.57	$1.05 \times 10^{-5}$	0.57	0.09	$1.53 \times 10^{-6}$
$D$ vs. $\Delta H_V$	30	0.51	$7.93 \times 10^{-5}$	0.51	0.1	$2.31 \times 10^{-5}$
$D$ vs. $\rho_b$	21	0.41	0.01	0.41	0.17	0.01
$D$ vs. $a_r$	21	0.33	0.04	0.33	0.17	0.04
$D$ vs. $e$	30	0.17	0.2	0.17	0.12	0.2
$D$ vs. $P$	30	-0.21	0.19	-0.22	0.15	0.17
$D$ vs. $a$	30	-0.02	0.87	-0.02	0.13	0.86
$D$ vs. $q$	30	-0.18	0.17	-0.18	0.12	0.16
$p_V$ vs. $m$	21	0.29	0.07	0.29	0.2	0.06
$p_V$ vs. $i$	30	-0.03	0.84	-0.03	0.17	0.81
$p_V$ vs. $\Delta H_V$	30	0.22	0.09	0.22	0.13	0.09
$p_V$ vs. $\rho_b$	21	0.56	$4.58 \times 10^{-4}$	0.56	0.14	$1.49 \times 10^{-4}$
$p_V$ vs. $a_r$	21	0.39	0.02	0.39	0.16	0.01
$p_V$ vs. $e$	30	0.03	0.8	0.03	0.14	0.83
$p_V$ vs. $P$	21	0	1	$10 \times 10^{-4}$	0.16	1
$p_V$ vs. $a$	30	0.14	0.28	0.15	0.16	0.26
$p_V$ vs. $q$	30	0.07	0.58	0.08	0.14	0.55

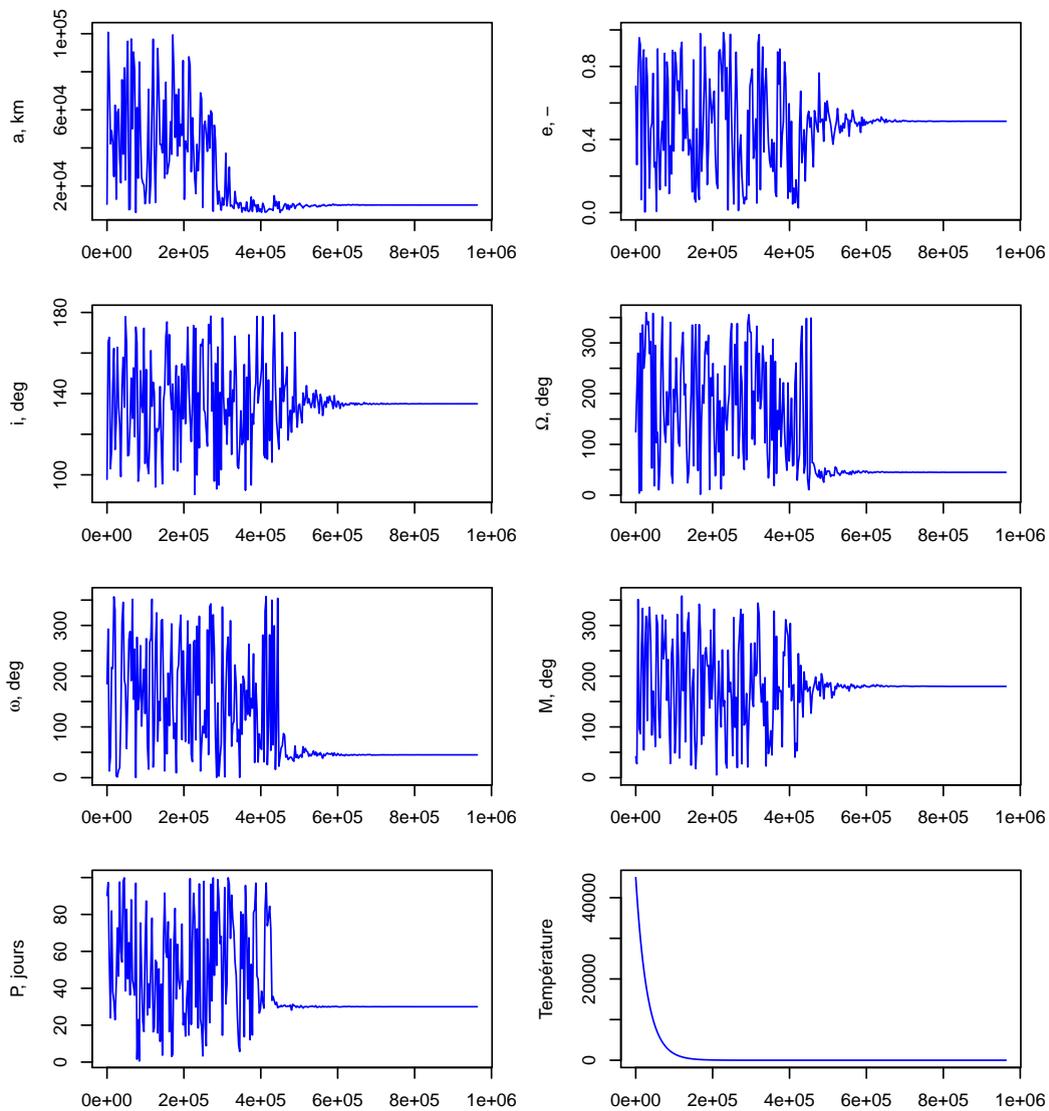
**Table A.4** – Test de corrélation de Kendall avec les incertitudes de données.  $N$  est le nombre d’objets dans l’ensemble de données,  $\tau$  est le coefficient de Kendall, la valeurs- $p$  est calculée dans l’hypothèse nulle :  $\tau = 0$ .

Paramètres	N	Méthode des perturbations			Méthode composite		
		$\tau$	$\pm\sigma_\tau$	valeur- $p$	$\tau$	$\pm\sigma_\tau$	valeur- $p$
$D$ vs. $p_V$	30	0.14	0.07	0.28	0.15	0.17	0.25
<b>D</b> vs. <b>m</b>	21	0.84	0.03	$8.3 \times 10^{-12}$	0.84	0.08	$6.57 \times 10^{-12}$
<b>D</b> vs. <b>i</b>	30	0.56	0.04	$2.86 \times 10^{-6}$	0.56	0.11	$2.83 \times 10^{-6}$
<b>D</b> vs. $\Delta H_V$	30	0.51	0.03	$3.19 \times 10^{-5}$	0.52	0.1	$2.06 \times 10^{-5}$
<b>D</b> vs. $\rho_b$	21	0.39	0.05	0.01	0.4	0.17	0.01
$D$ vs. $a_r$	21	0.16	0.13	0.33	0.14	0.21	0.39
$D$ vs. $e$	30	0.16	0.03	0.23	0.16	0.12	0.21
$D$ vs. $P$	21	-0.2	0.04	0.21	-0.19	0.17	0.23
$D$ vs. $a$	30	-0.03	0.03	0.84	-0.02	0.13	0.86
$D$ vs. $q$	30	-0.17	0.03	0.19	-0.17	0.12	0.19
$p_V$ vs. $m$	21	0.33	0.07	0.03	0.34	0.19	0.03
$p_V$ vs. $i$	30	0.04	0.07	0.79	0.04	0.17	0.79
$p_V$ vs. $\Delta H_V$	30	0.25	0.06	0.05	0.25	0.15	0.05
<b>pV</b> vs. $\rho_b$	21	0.51	0.06	$6.24 \times 10^{-4}$	0.51	0.15	$5.88 \times 10^{-4}$
$p_V$ vs. $a_r$	21	0.09	0.14	0.58	0.1	0.22	0.54
$p_V$ vs. $e$	30	0.01	0.06	0.93	0.01	0.14	0.93
$p_V$ vs. $P$	21	-0.01	0.07	0.93	-0.01	0.18	0.95
$p_V$ vs. $a$	30	0.1	0.05	0.42	0.1	0.16	0.43
$p_V$ vs. $q$	30	0.08	0.05	0.53	0.08	0.14	0.54

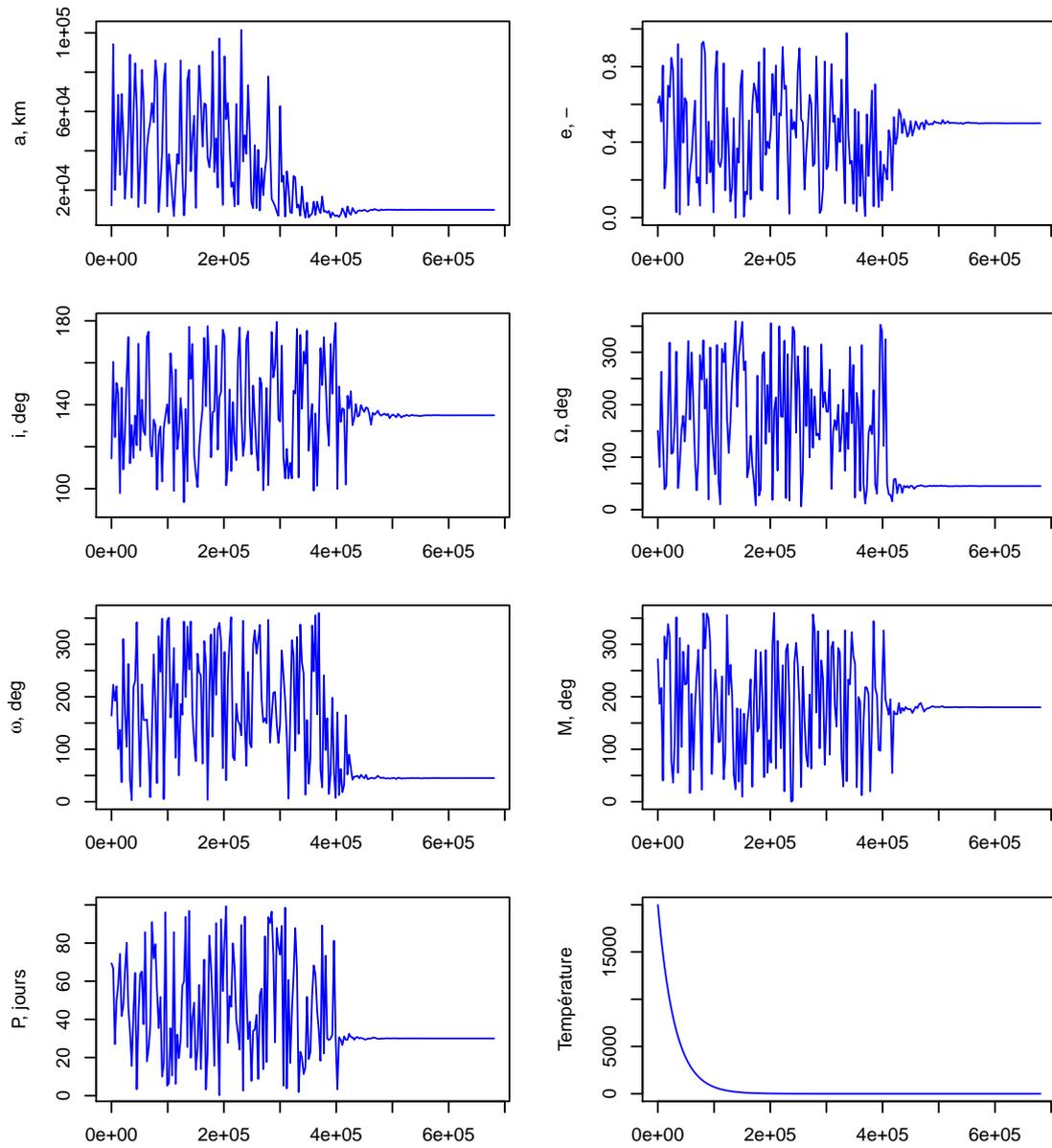
## Annexe B

# Résultats des simulations

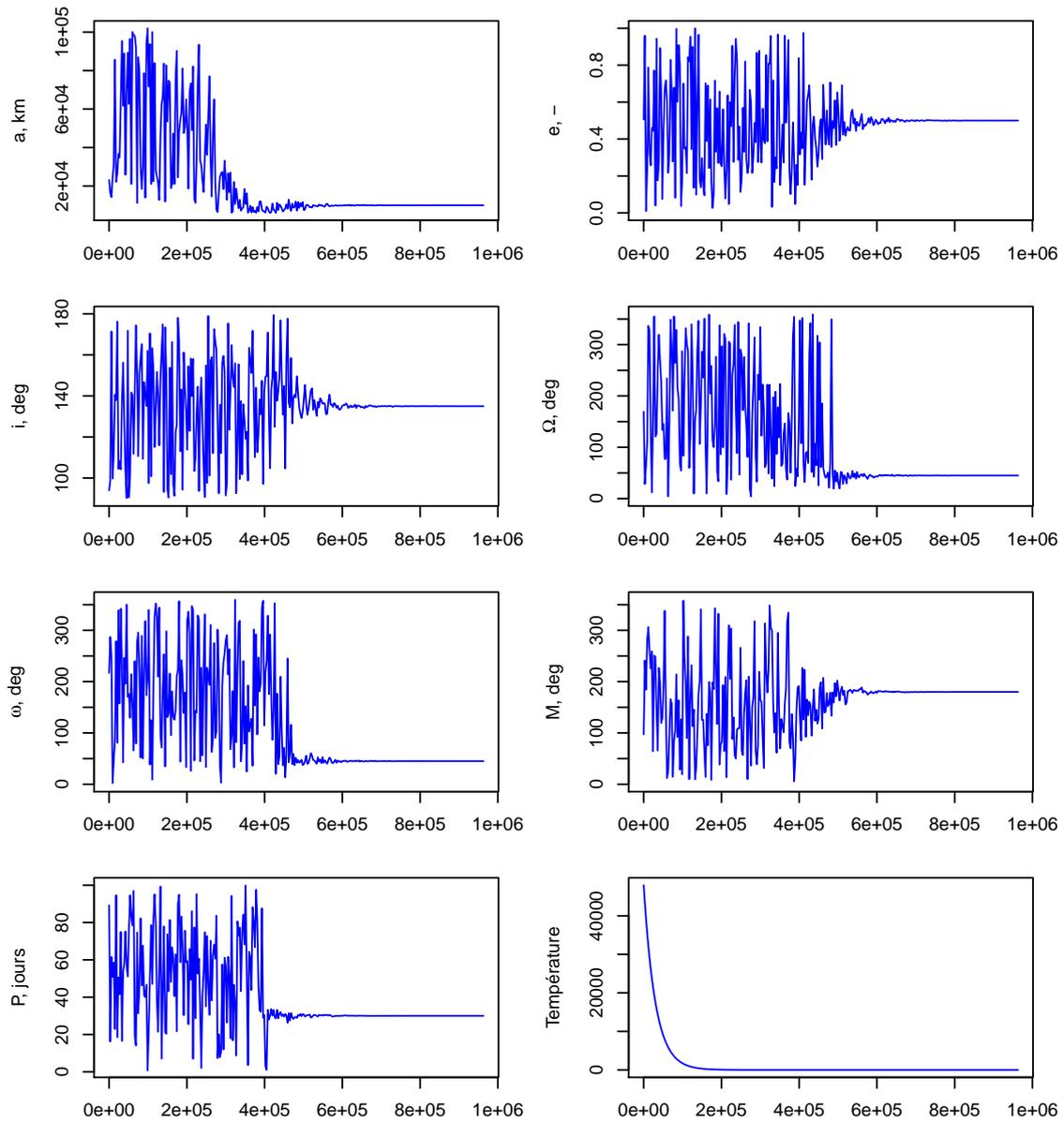
### B.1 Simulations : étape 1, test 1



**Figure B.1** – Test 1, modèle 2. Un exemple de recherche des paramètres optimaux pendant l'algorithme de RS. L'axe horizontal montre le nombre d'itérations.

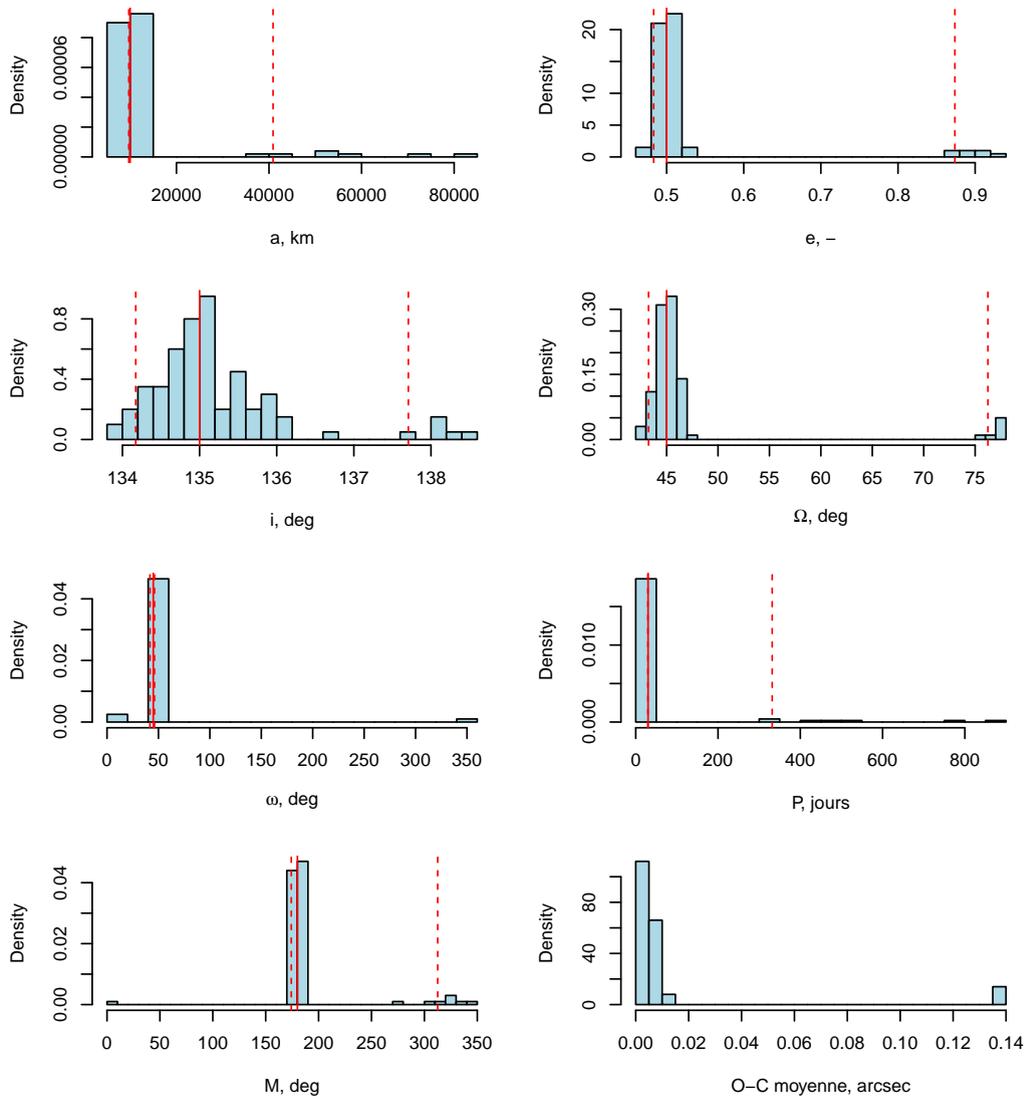


**Figure B.2** – Test 1, modèle 3. Un exemple de recherche des paramètres optimaux pendant l'algorithme de RS. L'axe horizontal montre le nombre d'itérations.

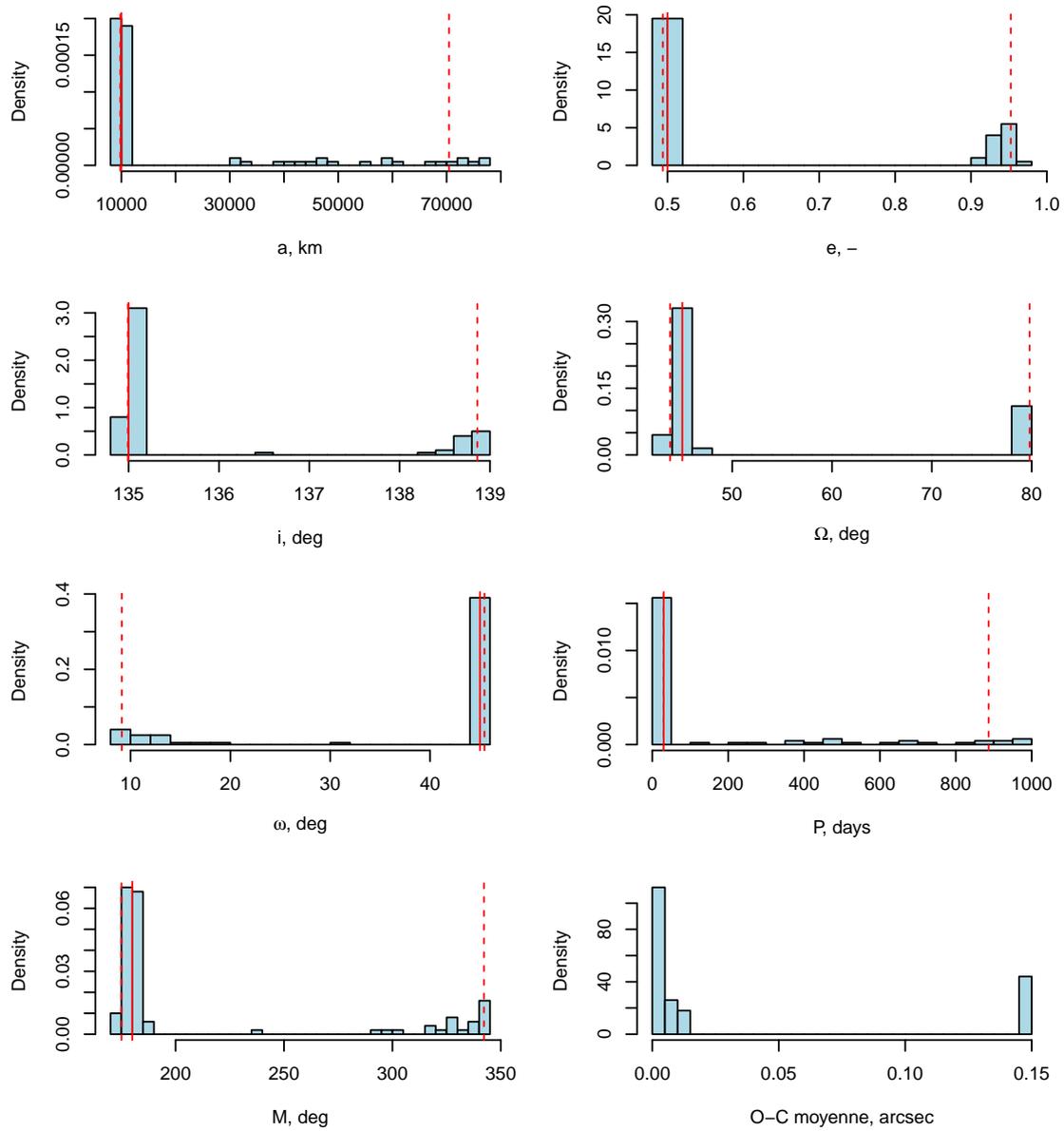


**Figure B.3** – Test 1, modèle 4. Un exemple de recherche des paramètres optimaux pendant l'algorithme de RS. L'axe horizontal montre le nombre d'itérations.

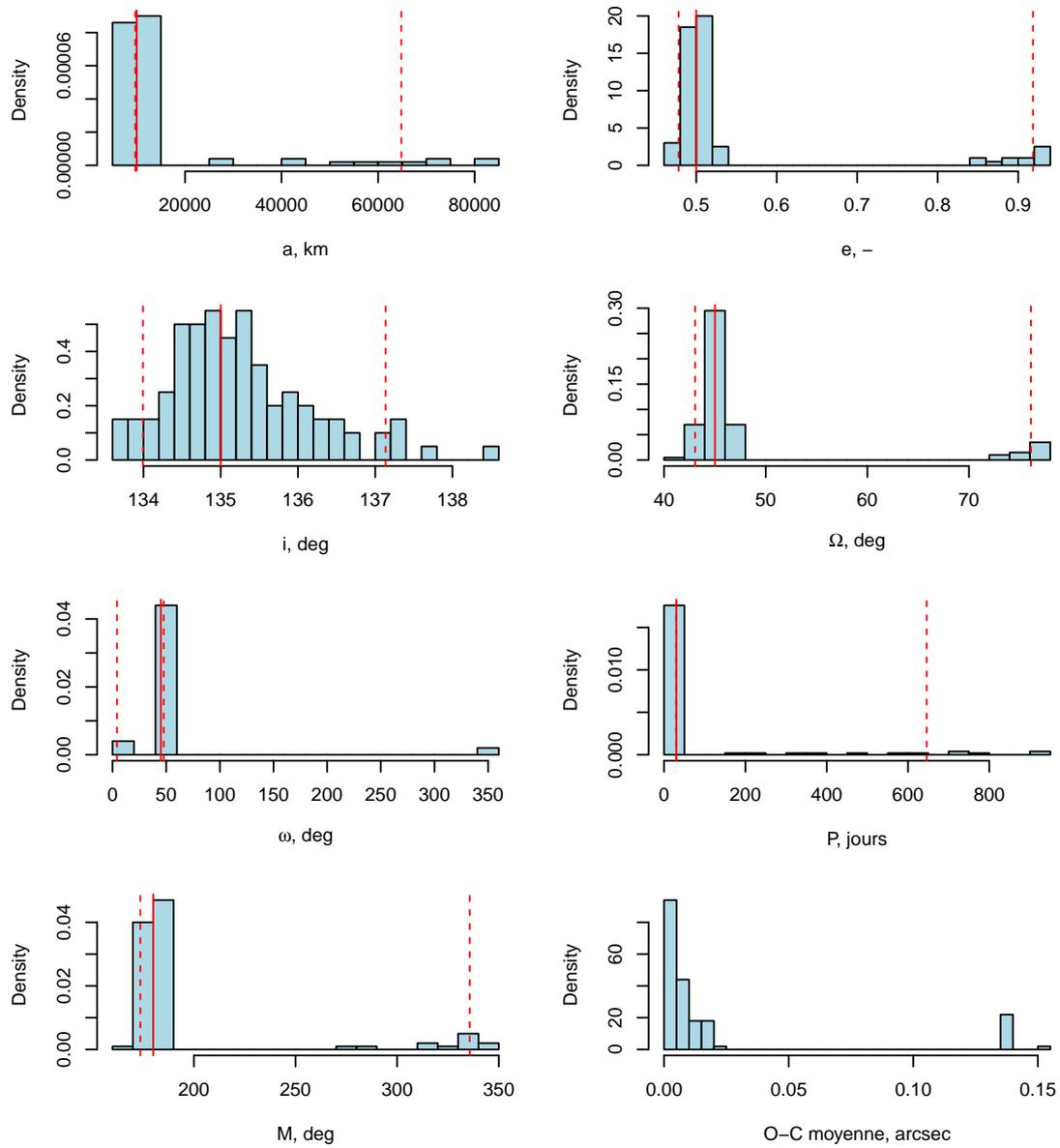
## B.2 Simulations : étape 1, test 2.1



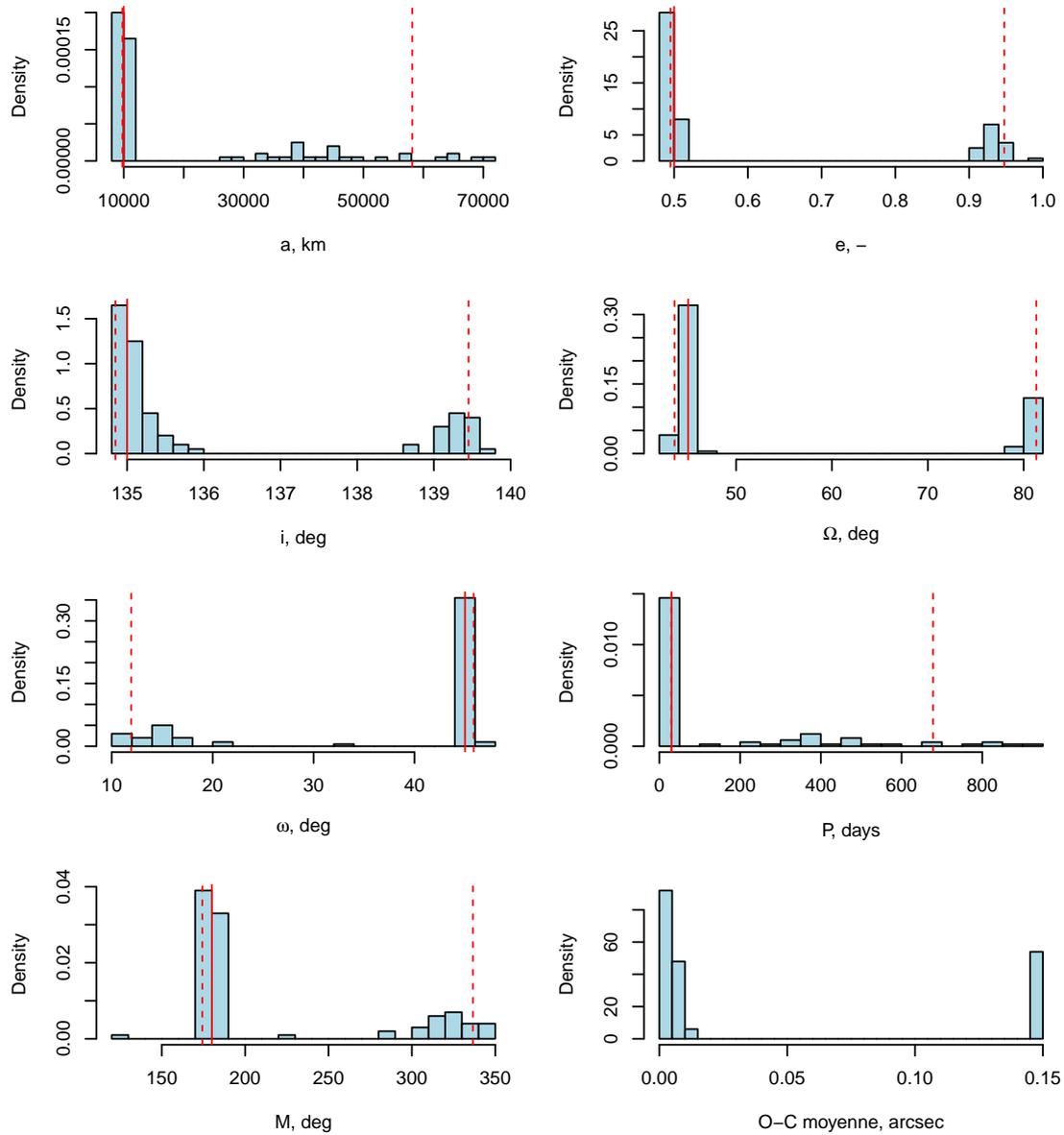
**Figure B.4** – Test 2.1, modèle 1. La ligne rouge continue correspond à la vraie valeur, les deux lignes pointillées correspondent aux quantiles à 5% et 95%.



**Figure B.5** – Test 2.1, modèle 2. La ligne rouge continue correspond à la vraie valeur, les deux lignes pointillées correspondent aux quantiles à 5% et 95%.

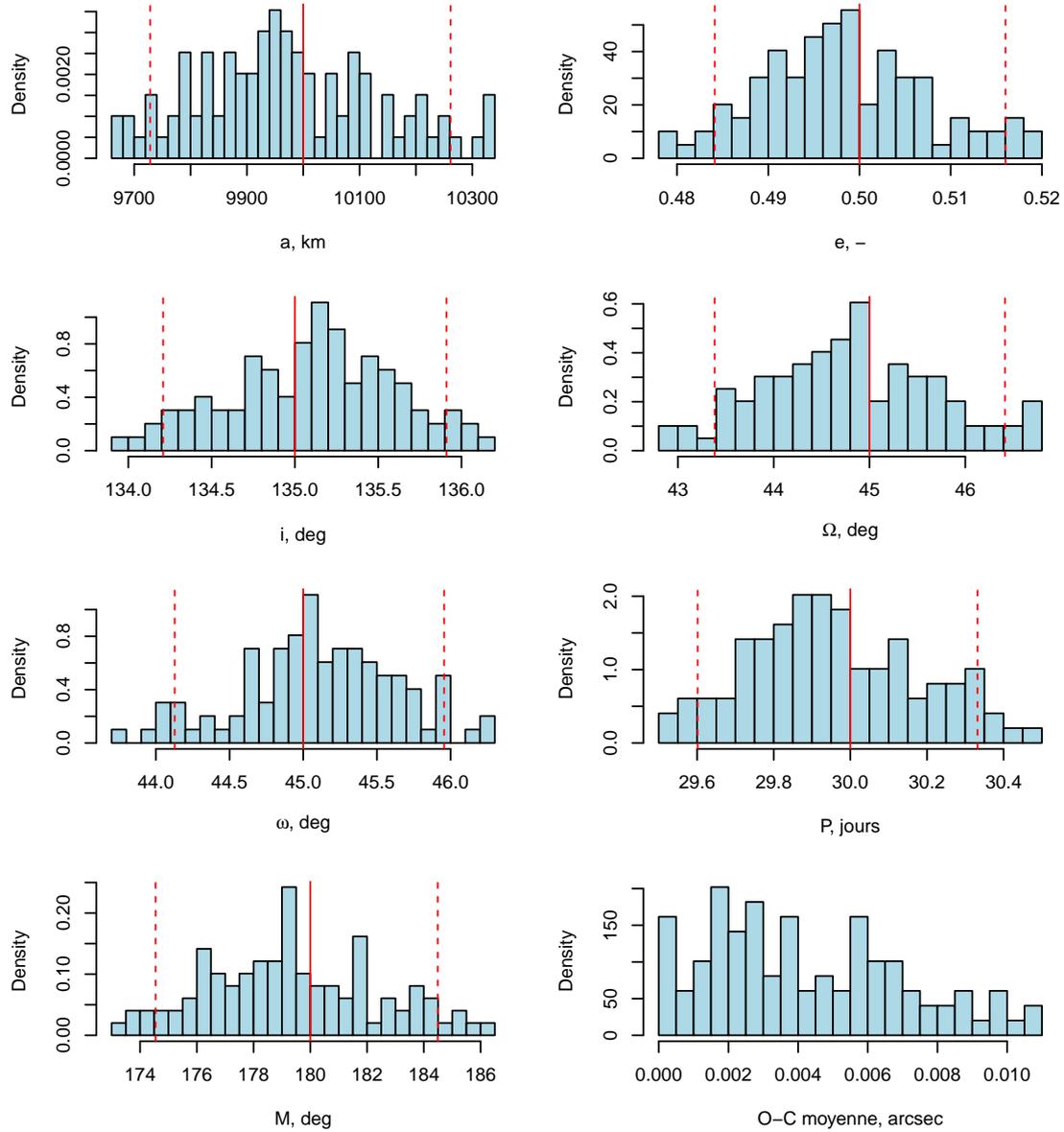


**Figure B.6** – Test 2.1, modèle 3. La ligne rouge continue correspond à la vraie valeur, les deux lignes pointillées correspondent aux quantiles à 5% et 95%.

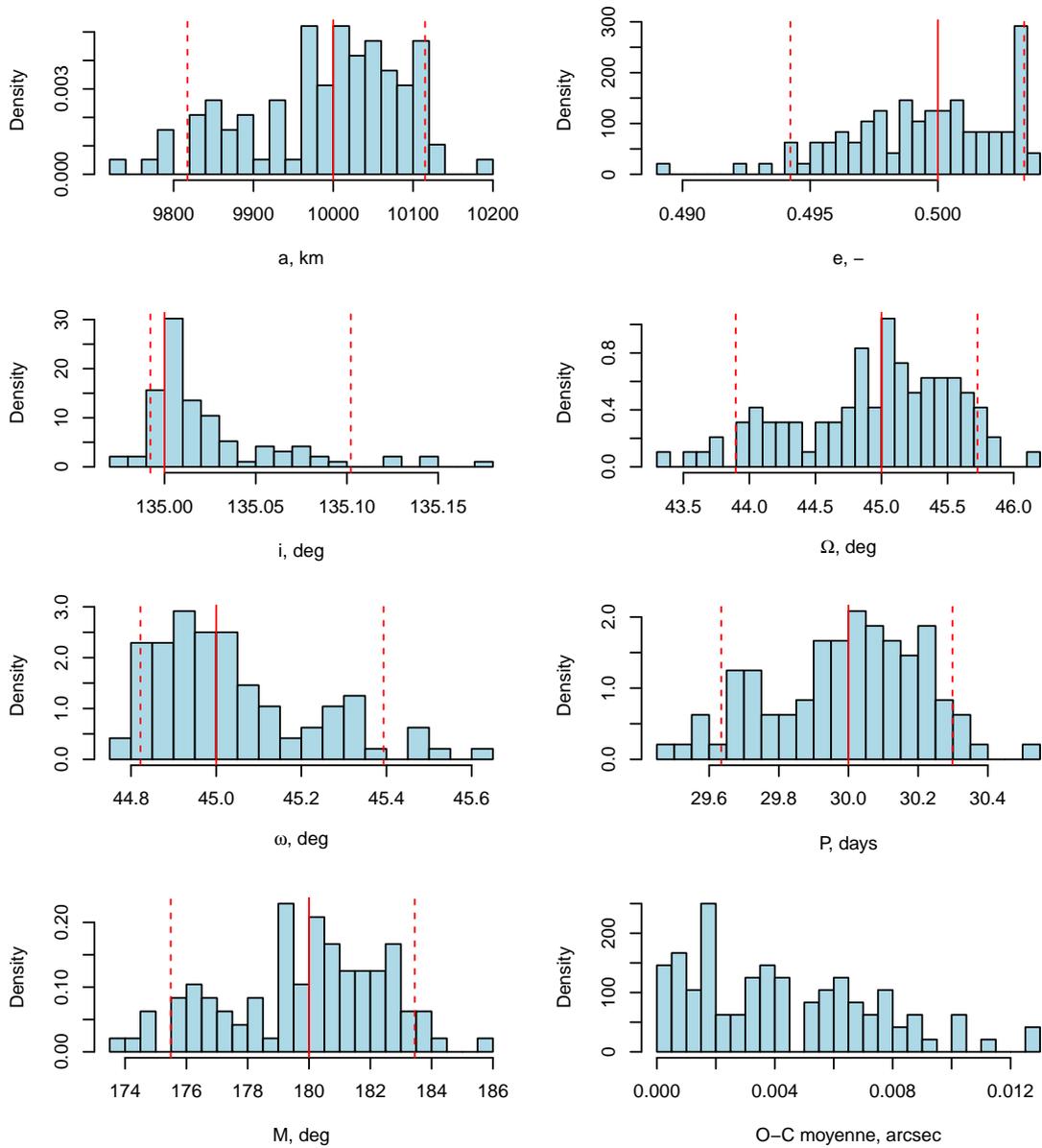


**Figure B.7** – Test 2.1, modèle 4. La ligne rouge correspond continue à la vraie valeur, les deux lignes pointillées correspondent aux quantiles à 5% et 95%.

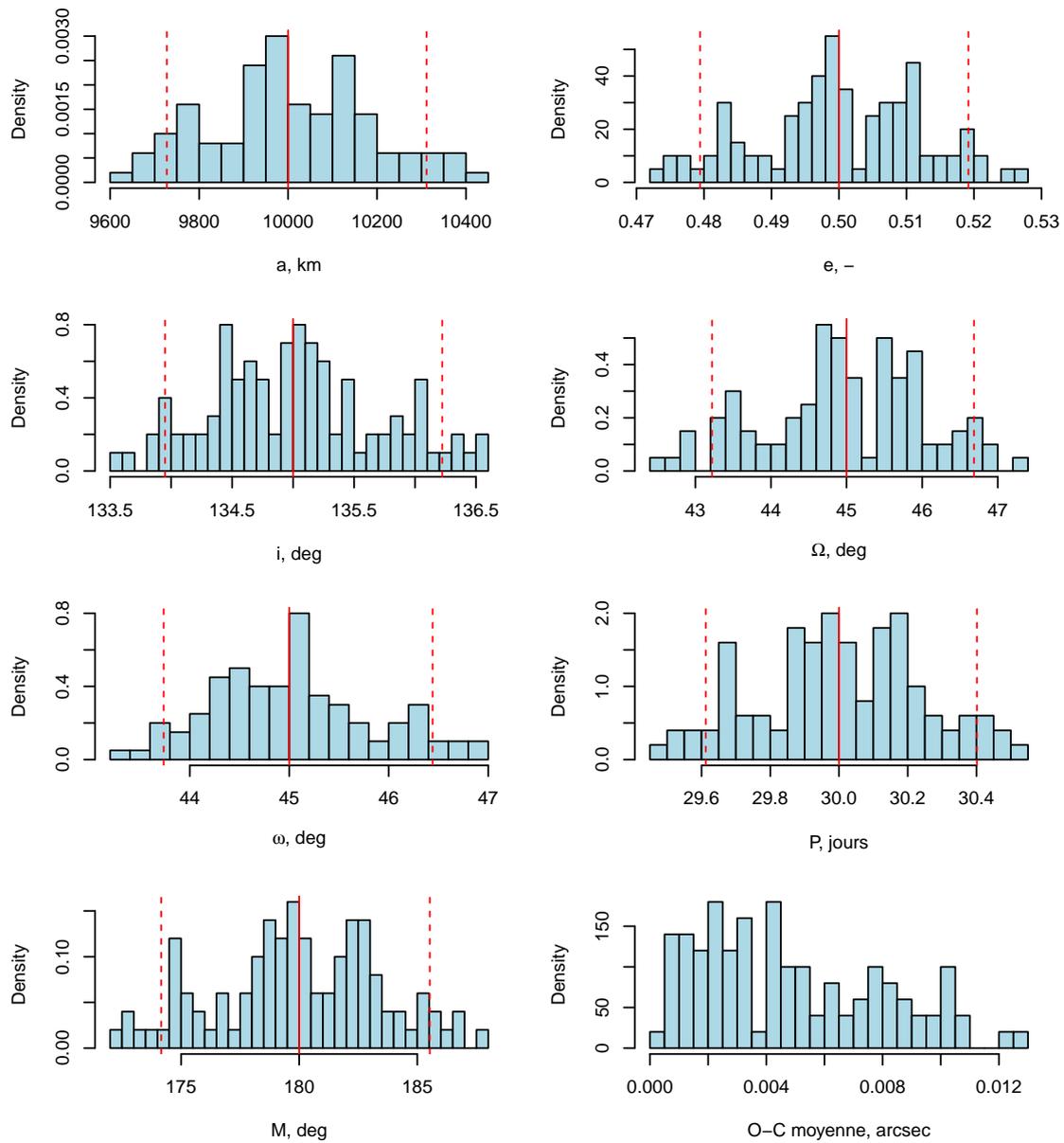
## B.3 Simulations : étape 1, test 2.2



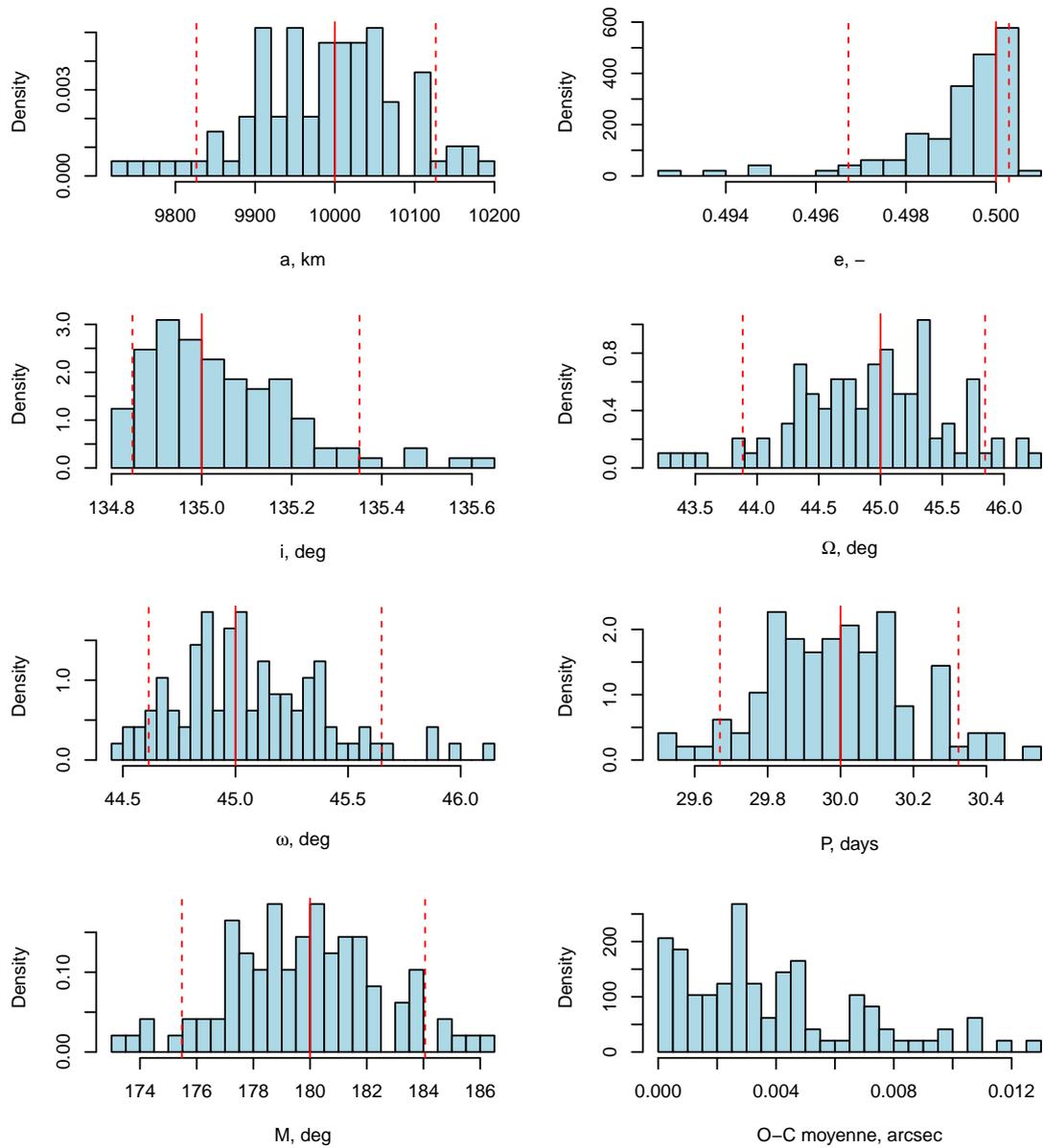
**Figure B.8** – Test 2.2, modèle 1. La ligne rouge continue correspond à la vraie valeur, les deux lignes pointillées correspondent aux quantiles à 5% et 95%.



**Figure B.9** – Test 2.2, modèle 2. La ligne rouge continue correspond à la vraie valeur, les deux lignes pointillées correspondent aux quantiles à 5% et 95%.

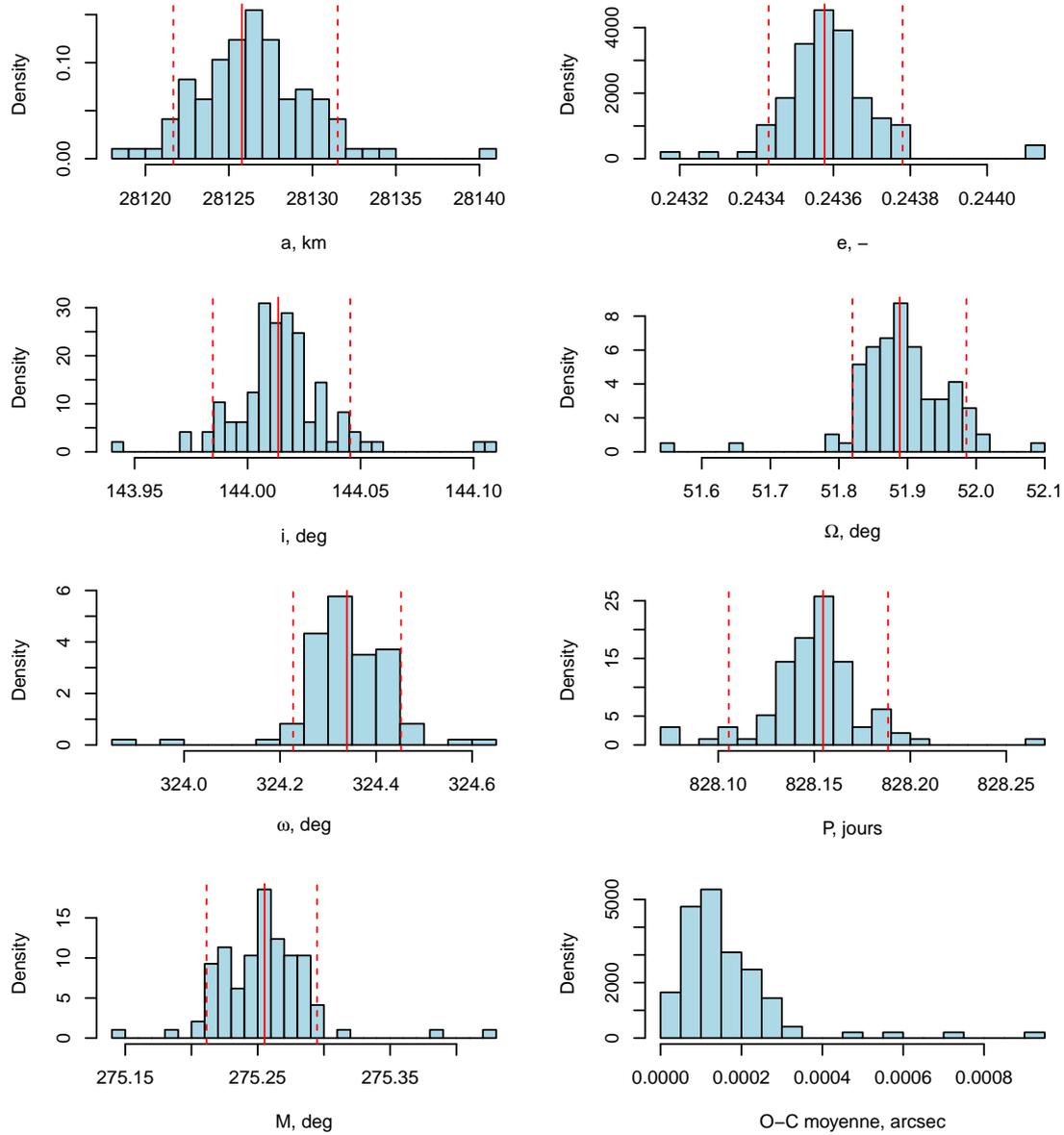


**Figure B.10** – Test 2.2, modèle 3. La ligne rouge continue correspond à la vraie valeur, les deux lignes pointillées correspondent aux quantiles à 5% et 95%.

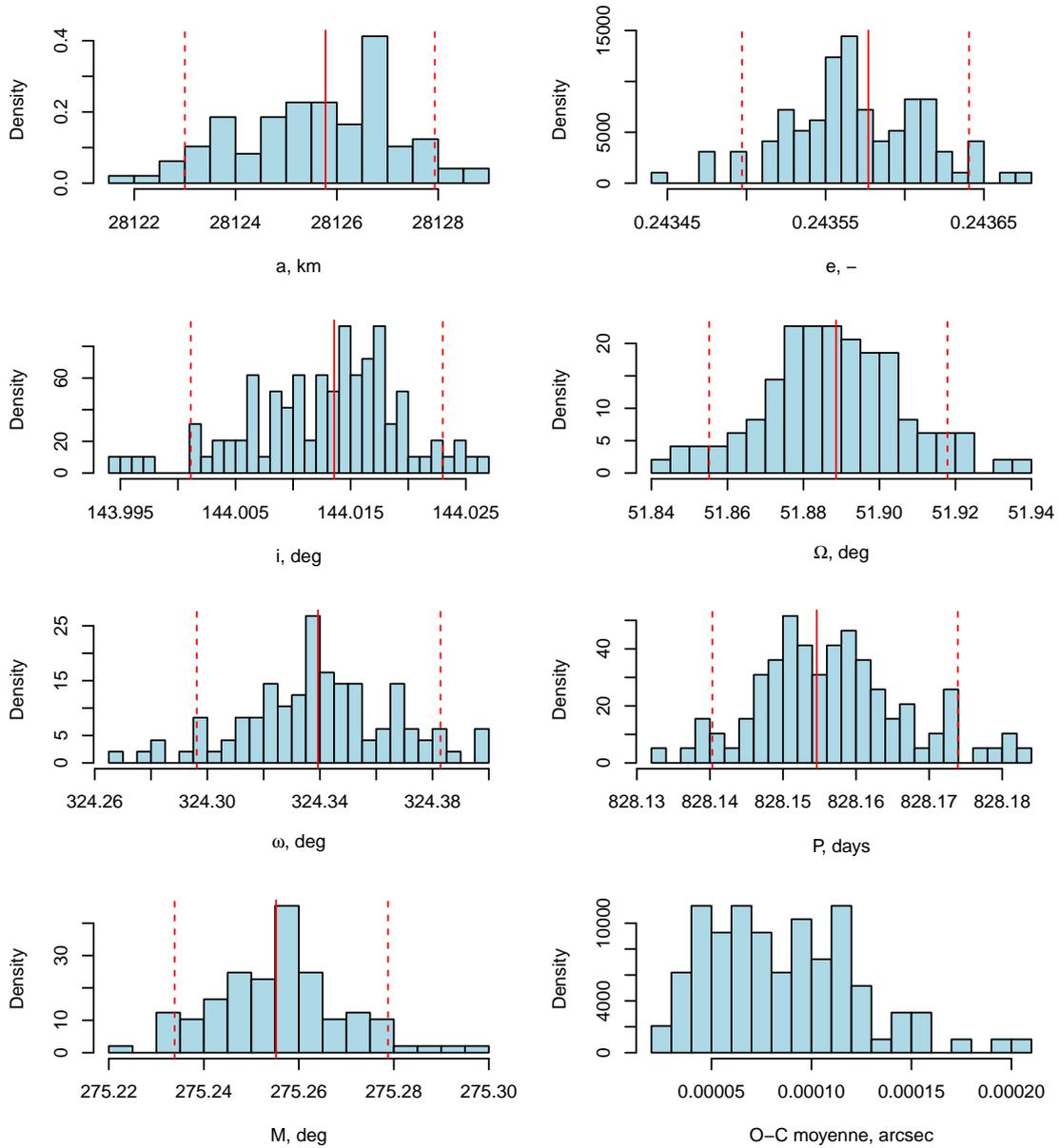


**Figure B.11** – Test 2.2, modèle 4. La ligne rouge continue correspond à la vraie valeur, les deux lignes pointillées correspondent aux quantiles à 5% et 95%.

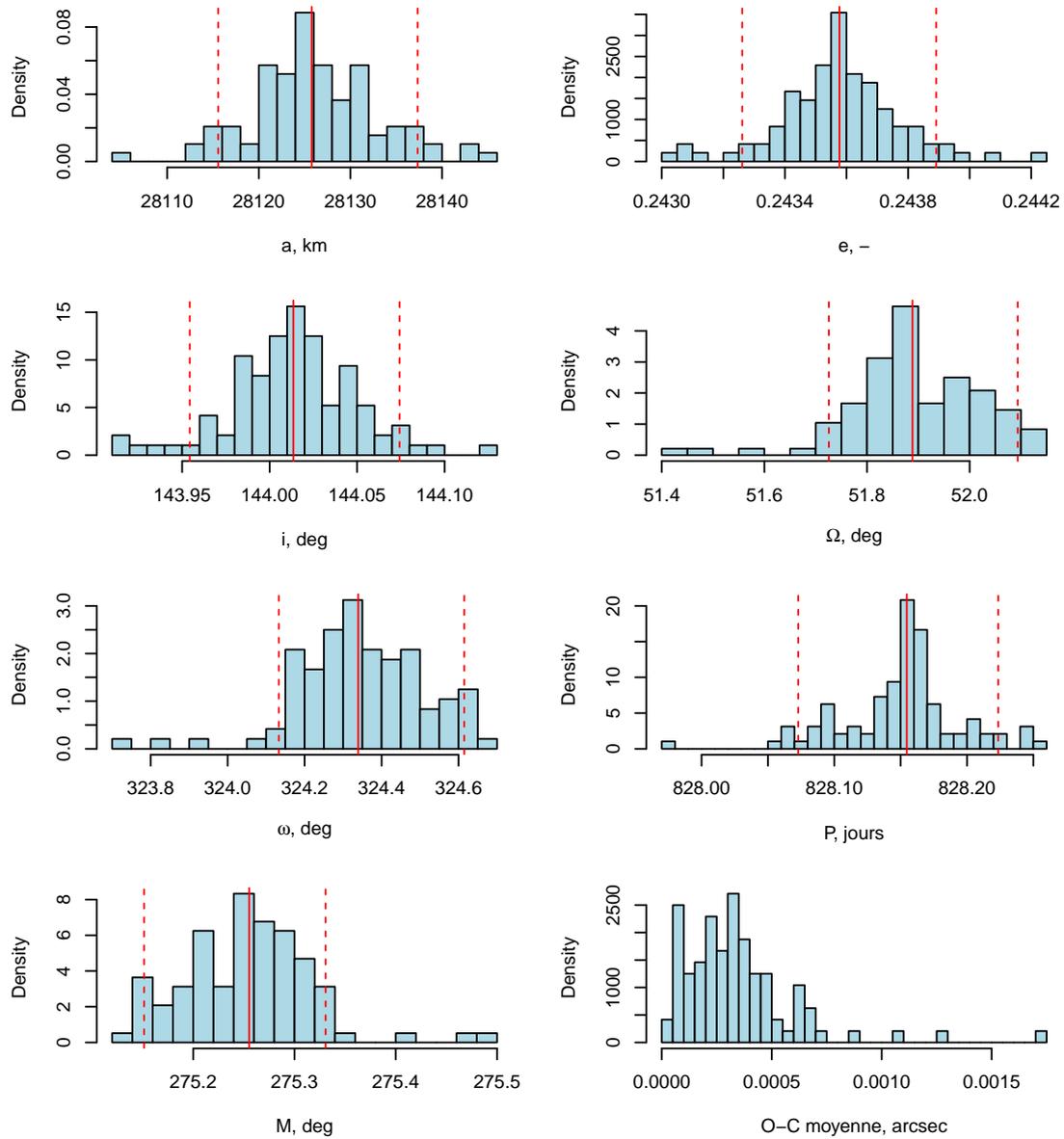
## B.4 Simulations : étape 2



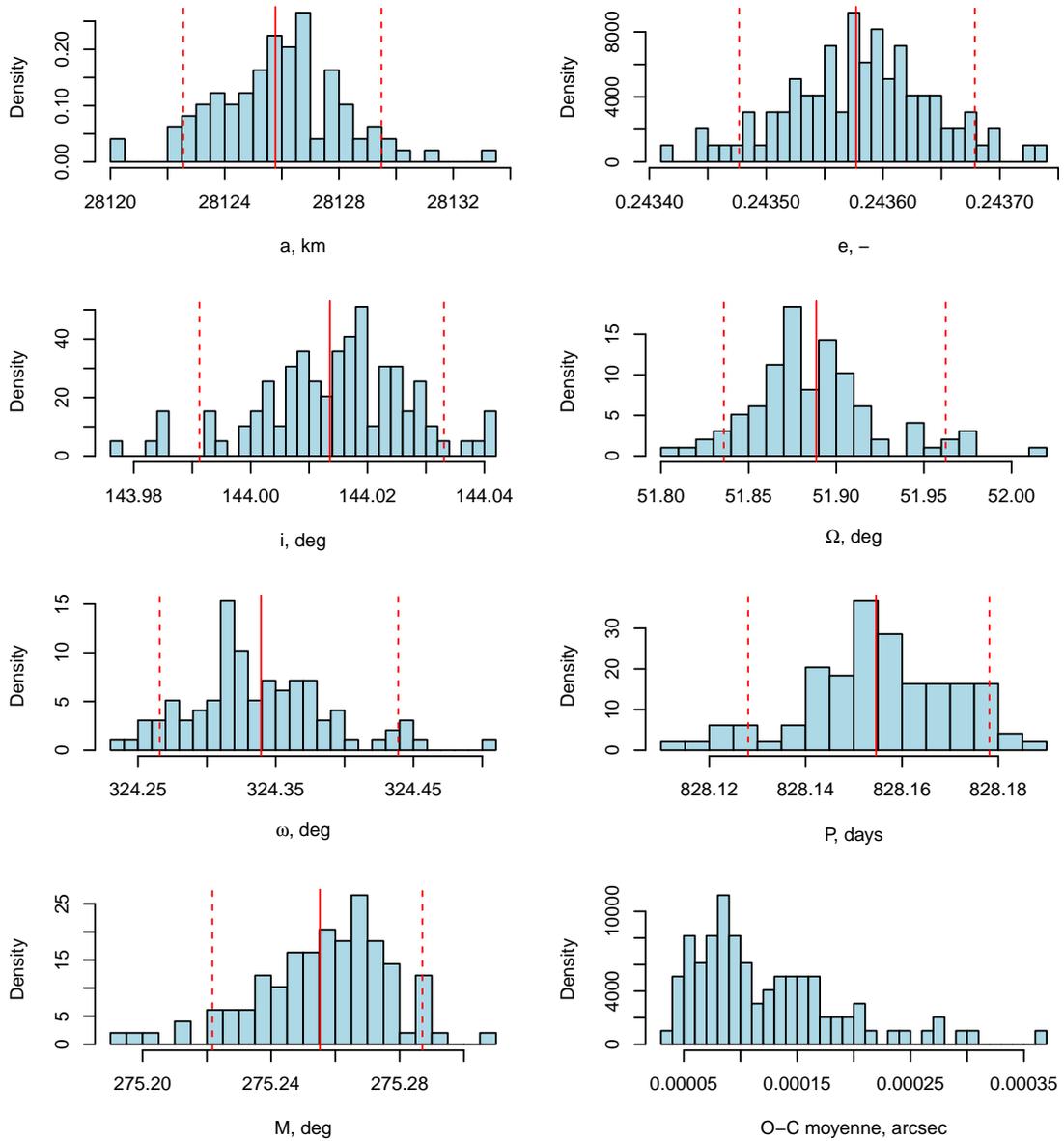
**Figure B.12** – Modèle 1. La ligne rouge continue correspond à la vraie valeur, les deux lignes pointillées correspondent aux quantiles à 5% et 95%.



**Figure B.13** – Modèle 2. La ligne rouge continue correspond à la vraie valeur, les deux lignes pointillées correspondent aux quantiles à 5% et 95%.



**Figure B.14** – Modèle 3. La ligne rouge continue correspond à la vraie valeur, les deux lignes pointillées correspondent aux quantiles à 5% et 95%.



**Figure B.15** – Modèle 4. La ligne rouge continue correspond à la vraie valeur, les deux lignes pointillées correspondent aux quantiles à 5% et 95%.

## Annexe C

# Données des observations

**Table C.1** – Données astrométriques de 2001 QT<sub>297</sub> (Teharonhiawako) (Grundy et al., 2011)  $x = (\alpha_2 - \alpha_1) \cos \delta_1$  et  $y = \delta_2 - \delta_1$ , où  $\alpha$  et  $\delta$  se réfèrent au primaire (1) et secondaire (2), respectivement. L'incertitude  $\sigma$  dans les derniers chiffres est indiqué entre parenthèses.

UT jour	et temps	x(arcsec)	y(arcsec)
11/10/2001	0.9528	+0.5390 (51)	-0.2770 (52)
12/10/2001	1.873	+0.5460 (81)	-0.2675 (84)
01/11/2001	0.7697	+0.624 (21)	-0.214 (24)
02/11/2001	0.4299	+0.644 (21)	-0.184 (26)
03/11/2001	0.3249	+0.642 (40)	-0.193 (39)
04/11/2001	0.9046	+0.645 (21)	-0.138 (35)
13/07/2002	6.7387	-0.314 (23)	+0.692 (29)
18/07/2002	6.9538	-0.344 (68)	+0.700 (55)
07/08/2002	4.5629	-0.43 (13)	+0.81 (13)
08/09/2002	5.7632	-0.658 (91)	+0.658 (91)
23/10/2003	1.7567	-0.012 (60)	-0.527 (50)
25/05/2004	8.789	+0.4350 (70)	+0.4560 (70)
13/09/2004	3.2531	-0.1330 (70)	+0.6990 (60)
11/07/2005	5.8782	-1.0020 (80)	-0.0440 (80)
12/12/2009	5.207	-1.0257 (77)	+0.1098 (53)
03/08/2010	10.1942	-0.0032 (30)	-0.5015 (30)

## Annexe D

# Calculs complémentaires

### D.1 Dérivée de la fonction d'énergie

$$E = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon_i^k}{\sigma_i^k} \quad (\text{D.1})$$

$$\frac{\partial E}{\partial P} = \frac{k}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon_i^{k-1}}{\sigma_i^k} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial P} \quad (\text{D.2})$$

où

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial P} &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i^C} \frac{\partial x_i^C}{\partial P} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y_i^C} \frac{\partial y_i^C}{\partial P} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{\varepsilon_{xi}^2 + \varepsilon_{yi}^2}} (\varepsilon_{xi} \frac{\partial x_i^C}{\partial P} + \varepsilon_{yi} \frac{\partial y_i^C}{\partial P}) \\ &= \frac{-1}{\varepsilon_i} (\varepsilon_{xi} \frac{\partial x_i^C}{\partial P} + \varepsilon_{yi} \frac{\partial y_i^C}{\partial P}) \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

où

$$\varepsilon_{xi} = (x_i^O - x_i^C) \text{ et } \varepsilon_{yi} = (y_i^O - y_i^C) \quad (\text{D.4})$$

Les coordonnées  $x_i^C$  et  $y_i^C$  dépendent de  $P$  très implicitement (surtout à cause de l'équation de Kepler qui est une équation transcendante, qu'on ne peut pas résoudre analytiquement, seulement numériquement).

Éléments vectoriels d'orbite

$$\begin{aligned} A &= a(\cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i) \\ B &= a(\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i) \\ F &= a(-\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i) \\ G &= a(-\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i) \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

$$\begin{aligned} x &= A(\cos E - e) + F(\sqrt{1 - e^2} \sin E) \\ y &= B(\cos E - e) + G(\sqrt{1 - e^2} \sin E) \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Les éléments  $(a, e, i, \Omega, \omega, \tau, P)$  sont indépendants. Ainsi

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial P} &= \frac{\partial x}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial P} \\ \frac{\partial y}{\partial P} &= \frac{\partial y}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial P}\end{aligned}\quad (\text{D.7})$$

Équation de Kepler

$$\frac{2\pi}{P}(t - \tau) = E - e \sin E \quad (\text{D.8})$$

En dérivant la partie gauche et droite de l'équation (D.8) par la période  $P$  nous avons :

$$\frac{\partial E}{\partial P} = \frac{2\pi(t - \tau)}{P^2(e \cos E - 1)} \quad (\text{D.9})$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial P} &= (-A \sin E + F \sqrt{1 - e^2} \cos E) \frac{2\pi(t - \tau)}{P^2(e \cos E - 1)} \\ \frac{\partial y}{\partial P} &= (-B \sin E + G \sqrt{1 - e^2} \cos E) \frac{2\pi(t - \tau)}{P^2(e \cos E - 1)}\end{aligned}\quad (\text{D.10})$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial P} &= \frac{2\pi(t_i - \tau)}{P^2(1 - e \cos E_i) \varepsilon_i} \\ &\times \left( \varepsilon_{xi}(-A \sin E_i + F \sqrt{1 - e^2} \cos E_i) \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_{yi}(-B \sin E_i + G \sqrt{1 - e^2} \cos E_i) \right)\end{aligned}\quad (\text{D.11})$$

Ainsi, en revenant à l'équation D.3, pour la  $i$ -ème observation nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial P} &= \frac{2\pi(t_i - \tau)}{P^2(1 - e \cos E_i) \varepsilon_i} \\ &\times \left( \varepsilon_{xi}(-A \sin E_i + F \sqrt{1 - e^2} \cos E_i) \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_{yi}(-B \sin E_i + G \sqrt{1 - e^2} \cos E_i) \right),\end{aligned}\quad (\text{D.12})$$

et la dérivée de l'énergie par la période

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial P} &= \frac{l}{NP^2} \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon_i^{l-2}}{\sigma_i^l} \frac{2\pi(t_i - \tau)}{(1 - e \cos E_i)} \\ &\times \left( \varepsilon_{xi}(-A \sin E_i + F \sqrt{1 - e^2} \cos E_i) \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_{yi}(-B \sin E_i + G \sqrt{1 - e^2} \cos E_i) \right).\end{aligned}\quad (\text{D.13})$$

En utilisant l'équation de Kepler (D.8) nous écrivons

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial P} &= \frac{k}{NP} \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon_i^{k-2}}{\sigma_i^k} \frac{E_i - e \sin E_i}{(1 - e \cos E_i)} \\ &\times \left( \varepsilon_{xi}(-A \sin E_i + F \sqrt{1 - e^2} \cos E_i) \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_{yi}(-B \sin E_i + G \sqrt{1 - e^2} \cos E_i) \right).\end{aligned}\quad (\text{D.14})$$

## D.2 Matrice jacobienne

$$J = \begin{pmatrix} \partial x_1 / \partial \theta_1 & \cdots & \partial x_1 / \partial \theta_n \\ \partial y_1 / \partial \theta_1 & \cdots & \partial y_1 / \partial \theta_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial x_N / \partial \theta_1 & \cdots & \partial x_N / \partial \theta_n \\ \partial y_N / \partial \theta_1 & \cdots & \partial y_N / \partial \theta_n \end{pmatrix}$$

Dans cette matrice jacobienne les coordonnées  $(x_i, y_i)$  font référence au système lié au plan tangent de la  $i$ -ème observation, les paramètres  $i, \Omega$  et  $\omega$  font référence au système équatorial et, si on considère les perturbations, liés à l'aplatissement du corps primaire, à un certain temps  $t_0$ . En pratique, il est plus facile de calculer les dérivées entre les coordonnées et les éléments référées à un même système de coordonnées et ensuite passer au système lié au plan tangent d'observation.

Pour un ensemble des paramètres d'orbite on peut toujours passer aux vecteurs de la position  $(x, y, z)$  et de la vitesse  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  au temps  $t$  donné. Soit les éléments  $i, \Omega$  et  $\omega$  rattachés au système lié à un vecteur fixe du moment angulaire de rotation du primaire et secondaire (voir 6.1.4). Ainsi, les dérivées sont calculées par les formules suivantes.

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{x}{a} - \frac{3\dot{x}}{2a}(t - t_0), \quad (\text{D.15})$$

$$\frac{\partial y}{\partial a} = \frac{y}{a} - \frac{3\dot{y}}{2a}(t - t_0), \quad (\text{D.16})$$

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{z}{a} - \frac{3\dot{z}}{2a}(t - t_0). \quad (\text{D.17})$$

$$\frac{\partial x}{\partial e} = hx - k\dot{x}, \quad (\text{D.18})$$

$$\frac{\partial y}{\partial e} = hy - k\dot{y}, \quad (\text{D.19})$$

$$\frac{\partial z}{\partial e} = hz - k\dot{z}. \quad (\text{D.20})$$

$$\text{où } h = \frac{r - a(1 + e^2)}{ea(1 - e^2)}, \quad k = \frac{as}{\mu^2 e} \left( 1 + \frac{r}{a(1 - e^2)} \right), \quad s = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}.$$

$$\frac{\partial x}{\partial i} = z \sin \Omega, \quad (\text{D.21})$$

$$\frac{\partial y}{\partial i} = z \cos \Omega, \quad (\text{D.22})$$

$$\frac{\partial z}{\partial i} = y \cos \Omega - x \sin \Omega. \quad (\text{D.23})$$

$$\frac{\partial x}{\partial \Omega} = -y, \quad (\text{D.24})$$

$$\frac{\partial y}{\partial \Omega} = x, \quad (\text{D.25})$$

$$\frac{\partial z}{\partial \Omega} = 0. \quad (\text{D.26})$$

$$\frac{\partial x}{\partial \omega} = R_y z - R_z y, \quad (\text{D.27})$$

$$\frac{\partial y}{\partial \omega} = R_z x - R_x z, \quad (\text{D.28})$$

$$\frac{\partial z}{\partial \omega} = R_x y - R_y x, \quad (\text{D.29})$$

où  $R_x = \sin i \sin \Omega$ ,  $R_y = -\sin i \cos \Omega$  et  $R_z = \cos i$ .

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = -\dot{x}, \quad (\text{D.30})$$

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = -\dot{y}, \quad (\text{D.31})$$

$$\frac{\partial z}{\partial \tau} = -\dot{z}. \quad (\text{D.32})$$

$$\frac{\partial x}{\partial P} = -\dot{x}(t - t_0)/P, \quad (\text{D.33})$$

$$\frac{\partial y}{\partial P} = -\dot{y}(t - t_0)/P, \quad (\text{D.34})$$

$$\frac{\partial z}{\partial P} = -\dot{z}(t - t_0)/P. \quad (\text{D.35})$$

$$\frac{\partial x}{\partial J_2} = \frac{\partial x}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial J_2} + \frac{\partial x}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial J_2}, \quad (\text{D.36})$$

$$\frac{\partial y}{\partial J_2} = \frac{\partial y}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial J_2} + \frac{\partial y}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial J_2}, \quad (\text{D.37})$$

$$\frac{\partial z}{\partial J_2} = \frac{\partial z}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial J_2} + \frac{\partial z}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial J_2}, \quad (\text{D.38})$$

où

$$\frac{\partial \Omega}{\partial J_2} = \frac{3}{2} \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \frac{\cos i}{(1 - e^2)^{3/2}}, \quad (\text{D.39})$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial J_2} = \frac{3}{4} \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \frac{4 - 5 \sin^2 i}{(1 - e^2)^{3/2}}. \quad (\text{D.40})$$

Ensuite, chaque vecteur de dérivées  $(\frac{\partial x}{\partial \theta_j}, \frac{\partial y}{\partial \theta_j}, \frac{\partial z}{\partial \theta_j})^T$  doit être transformé selon le système lié au plan tangent de la  $i$ -ème observation. Deux passages sont nécessaires pour ça : (1) du système lié au vecteur fixe du moment angulaire de rotation du primaire et secondaire vers la système équatoriale et (2) du dernier vers le système lié au plan tangent d'observation.

Les dérivées des coordonnées par les angles  $\alpha_p, \delta_p$ , qui déterminent le vecteur fixe du moment angulaire de rotation du primaire et secondaire, sont plus faciles à calculer par les dérivées des coordonnées dans le système équatoriale. Soit ces coordonnées  $(x, y, z)$ .

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_p} = -x \cos \alpha_p + y \sin \alpha_p \sin \delta_p - z \sin \alpha_p \cos \delta_p, \quad (\text{D.41})$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha_p} = -x \sin \alpha_p \sin \delta_p - y \cos \alpha_p \sin \delta_p + z \cos \alpha_p \cos \delta_p, \quad (\text{D.42})$$

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha_p} = 0. \quad (\text{D.43})$$

$$\frac{\partial x}{\partial \delta_p} = -y \cos \alpha_p \cos \delta_p - z \cos \alpha_p \sin \delta_p, \quad (\text{D.44})$$

$$\frac{\partial y}{\partial \delta_p} = -y \sin \alpha_p \cos \delta_p - z \sin \alpha_p \sin \delta_p, \quad (\text{D.45})$$

$$\frac{\partial z}{\partial \delta_p} = -y \sin \delta_p + z \cos \delta_p. \quad (\text{D.46})$$

Ensuite, un passage est nécessaire du système équatorial vers le système lié au plan tangent d'observation.

---

# Bibliographie

- Aitken, R. G.  
1964. *The binary stars*.
- Aksenov, E.  
1977. Theory of motion of artificial earth satellites. *Theory of motion of artificial earth satellites.*, by Aksenov, EP. Moskva : Nauka, 360 p., 1.
- André, C. L. F.  
1901. Sur le système formé par la planète double (433) eros. *Astronomische Nachrichten*, 155 :27.
- Barr, A. C. and M. E. Schwamb  
2016. Interpreting the densities of the kuiper belt's dwarf planets. *arXiv preprint arXiv :1603.06224*.
- Benecchi, S., K. Noll, W. Grundy, M. Buie, D. Stephens, and H. Levison  
2009. The correlated colors of transneptunian binaries. *Icarus*, 200(1) :292 – 303.
- Benecchi, S. D., K. Noll, W. Grundy, and H. Levison  
2010. (47171) 1999 tc 36, a transneptunian triple. *Icarus*, 207(2) :978–991.
- Bol'Shev, L. and N. Smirnov  
1983. Tables of mathematical statistics.
- Braga-Ribas, F., B. Sicardy, J. Ortiz, C. Snodgrass, F. Roques, R. Vieira-Martins, J. Caramargo, M. Assafin, R. Duffard, E. Jehin, et al.  
2014. A ring system detected around the centaur (10199) chariklo. *Nature*, 508(7494) :72–75.
- Brown, M., M. Van Dam, A. Bouchez, D. Le Mignant, R. Campbell, J. Chin, A. Conrad, S. Hartman, E. Johansson, R. Lafon, et al.  
2006. Satellites of the largest kuiper belt objects. *The Astrophysical Journal Letters*, 639(1) :L43.
- Brown, M. E.  
2012. The Compositions of Kuiper Belt Objects. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, 40 :467–494.
- Brown, M. E.  
2013. The density of mid-sized kuiper belt object 2002 ux25 and the formation of the dwarf planets. *The Astrophysical Journal Letters*, 778(2) :L34.
- Brown, M. E. and E. L. Schaller  
2007. The mass of dwarf planet eris. *Science*, 316(5831) :1585–1585.

- Cheng, A. F., A. Galvez, I. Carnelli, P. Michel, A. Rivkin, and C. Reed  
2012. AIDA : Asteroid Impact & Deflection Assessment. *AGU Fall Meeting Abstracts*.
- Corana, A., M. Marchesi, C. Martini, and S. Ridella  
1987. Minimizing multimodal functions of continuous variables with the “simulated annealing” algorithm corrigenda for this article is available here. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 13(3) :262–280.
- Curran, P. A.  
2015. Mcspearman : Monte carlo error analyses of spearman’s rank test. *Astrophysics Source Code Library*, 1 :04008.
- Czech, Z. J.  
2001. Parallel simulated annealing for the delivery problem. In *Parallel and Distributed Processing, 2001. Proceedings. Ninth Euromicro Workshop on*, Pp. 219–226. IEEE.
- Descamps, P.  
2005. Orbit of an Astrometric Binary System. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 92 :381–402.
- Doressoundiram, A., P. Paolicchi, A. Verlicchi, and A. Cellino  
1997. The formation of binary asteroids as outcomes of catastrophic collisions. *Planetary and space science*, 45(7) :757–770.
- Doressoundiram, A., N. Peixinho, C. De Bergh, S. Fornasier, P. Thebault, M. Barucci, and C. Veillet  
2002. The color distribution in the edgeworth-kuiper belt. *The Astronomical Journal*, 124(4) :2279.
- Efron, B. and B. Efron  
1982. *The jackknife, the bootstrap and other resampling plans*, volume 38. SIAM.
- Emelyanov, N. and M. Y. Samorodov  
2015. Analytical theory of motion and new ephemeris of triton from observations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 454(2) :2205–2215.
- Emel’yanov, N. V.  
1983. *Metodi sostavleniya algoritmov i programm v zadachah nebesnoi mehaniki*. Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit.
- Feigelson, E. D. and G. J. Babu  
2012. *Modern Statistical Methods for Astronomy : With R Applications*. Cambridge University Press.
- Fornasier, S., E. Lellouch, T. Müller, P. Santos-Sanz, P. Panuzzo, C. Kiss, T. Lim, M. Mommert, D. Bockelée-Morvan, E. Vilenius, et al.  
2013. Tnos are cool : A survey of the trans-neptunian region-viii. combined herschel pacs and spire observations of nine bright targets at 70–500  $\mu\text{m}$ . *Astronomy & Astrophysics*, 555 :A15.
- Fowler, J. and J. Chillemi  
1992. Iras asteroid data processing. *The IRAS Minor Planet Survey*, 17 :43.
- Fraser, W. C., K. Batygin, M. E. Brown, and A. Bouchez  
2013. The mass, orbit, and tidal evolution of the quaoar–weywot system. *Icarus*, 222(1) :357–363.

- Geman, S. and D. Geman  
1984. Stochastic relaxation, gibbs distributions, and the bayesian restoration of images. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, (6) :721–741.
- Geyer, C. J.  
1991. Markov chain monte carlo maximum likelihood.
- Gladman, B., B. G. Marsden, and C. VanLaerhoven  
2008. Nomenclature in the outer solar system. *The Solar System Beyond Neptune*, 43.
- Gmurman, V. E.  
1977. *Probability theory and mathematical statistics*. Visshaya shkola.
- Goldreich, P., Y. Lithwick, et al.  
2002. Formation of kuiper-belt binaries by dynamical friction and three-body encounters. *Nature*, 420(6916) :643–646.
- Gomes, R., H. F. Levison, K. Tsiganis, and A. Morbidelli  
2005. Origin of the cataclysmic late heavy bombardment period of the terrestrial planets. *Nature*, 435(7041) :466–469.
- Grundy, W. M., e. a.  
2015. Orbit status of known binary tnos.
- Grundy, W., S. Benecchi, D. Rabinowitz, S. Porter, L. Wasserman, B. Skiff, K. Noll, A. Verbiscer, M. Buie, S. Tourtellotte, et al.  
2012. Mutual events in the cold classical transneptunian binary system sila and nunam. *Icarus*, 220(1) :74–83.
- Grundy, W., K. Noll, F. Nimmo, H. Roe, M. Buie, S. Porter, S. Benecchi, D. Stephens, H. Levison, and J. Stansberry  
2011. Five new and three improved mutual orbits of transneptunian binaries. *Icarus*, 213(2) :678–692.
- Grundy, W., J. Stansberry, K. Noll, D. Stephens, D. E. Trilling, S. Kern, J. Spencer, D. Cruikshank, and H. Levison  
2007. The orbit, mass, size, albedo, and density of (65489) ceto/phorcys : A tidally-evolved binary centaur. *Icarus*, 191(1) :286–297.
- Harris, A. W.  
1998. A thermal model for near-earth asteroids. *Icarus*, 131(2) :291–301.
- Hastings, W. K.  
1970. Monte carlo sampling methods using markov chains and their applications. *Biometrika*, 57(1) :97–109.
- Hudson, R., M. Palumbo, G. Strazzulla, M. Moore, J. Cooper, and S. Sturmer  
2008. Laboratory studies of the chemistry of transneptunian object surface materials.
- Jeffreys, M.  
1961. *Theory of probability*. Oxford University Press.
- Johnston, W. R.  
2014. Binary Minor Planets V7.0. *NASA Planetary Data System*, 219.

- Johnston, W. R.  
2016. Asteroids with satellites.
- Kendall, M. G.  
1938. A new measure of rank correlation. *Biometrika*, 30(1/2) :81–93.
- Kirkpatrick, S., M. Vecchi, et al.  
1983. Optimization by simulated annealing. *science*, 220(4598) :671–680.
- Kostenko, V. A. and A. V. Kalashnikov  
2006. Issledovanie razlichnih modifikatsii algoritmov imitatsii otzhiga dlya resheniya zadachi postroeniya mnogoprotsessornih raspisaniy.
- Kovalenko, I. D., R. S. Stoica, N. Emelyanov, A. Doressoundiram, and D. Hestroffer  
2016. Bayesian statistical approach to binary asteroid orbit determination. In *IAU Symposium*, volume 318, Pp. 244–249.
- Kovalenko, I. D., R. S. Stoica, and N. V. Emelyanov  
2016. Map estimation through simulated annealing for binary asteroid orbit determination.
- Levison, H. F. and S. A. Stern  
2001. On the size dependence of the inclination distribution of the main kuiper belt. *The Astronomical Journal*, 121(3) :1730.
- Li, S. Z.  
2009. *Markov random field modeling in image analysis*. Springer Science & Business Media.
- Lupo, M. J. and J. S. Lewis  
1979. Mass-radius relationships in icy satellites. *Icarus*, 40(2) :157 – 170.
- Marinari, E. and G. Parisi  
1992. Simulated tempering : a new monte carlo scheme. *EPL (Europhysics Letters)*, 19(6) :451.
- Markov, A. A.  
1906. Extension of the law of large numbers to dependent quantities. *Izv. Fiz.-Matem. Obsch. Kazan Univ.(2nd Ser)*, 15 :135–156.
- Markov, A. A.  
1913. Essai d’une recherche statistique sur le texte du roman “eugene oneguine”. *Bull. Acad. Imper. Sci. St. Petersbourg*, 7.
- Melosh, H. and J. Stansberry  
1991. Doublet craters and the tidal disruption of binary asteroids. *Icarus*, 94(1) :171–179.
- Merline, W., L. M. Close, C. Dumas, C. Chapman, F. Roddier, F. Menard, D. Slater, G. Duvert, C. Shelton, and T. Morgan  
1999. Discovery of a moon orbiting the asteroid 45 eugenia. *Nature*, 401(6753) :565–568.
- Merline, W. J., C. R. Chapman, M. Robinson, J. Veverka, A. Harch, J. Bell, III, P. Thomas, J. Joseph, B. Carcich, S. Murchie, A. Cheng, N. Izenberg, L. McFadden, M. Malin, and

- B. E. Clark  
1998. NEAR's Encounter with 253 Mathilde : Search for Satellites. In *Lunar and Planetary Science Conference*, volume 29 of *Lunar and Planetary Science Conference*.
- Merline, W. J., S. J. Weidenschilling, D. D. Durda, J.-L. Margot, P. Pravec, and A. D. Storrs  
2002. Asteroids do have satellites. *Asteroids III*, 1 :289–312.
- Metropolis, N., A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller, and E. Teller  
1953. Equation of state calculations by fast computing machines. *The journal of chemical physics*, 21(6) :1087–1092.
- Mommert, M., A. Harris, C. Kiss, A. Pál, P. Santos-Sanz, J. Stansberry, A. Delsanti, E. Vilenius, T. Müller, N. Peixinho, et al.  
2012. Tnos are cool : A survey of the trans-neptunian region-v. physical characterization of 18 plutinos using herschel-pacs observations. *Astronomy & Astrophysics*, 541 :A93.
- Muononen, K. and E. Bowell  
1993. Asteroid orbit determination using Bayesian probabilities. *Icarus*, 104 :255–279.
- Müller, T. G., E. Lellouch, H. Bönhardt, J. Stansberry, A. Barucci, J. Crovisier, A. Delsanti, A. Doressoundiram, E. Dotto, R. Duffard, S. Fornasier, O. Groussin, P. J. Gutiérrez, O. Hainaut, A. W. Harris, P. Hartogh, D. Hestroffer, J. Horner, D. Jewitt, M. Kidger, C. Kiss, P. Lacerda, L. Lara, T. Lim, M. Mueller, R. Moreno, J.-L. Ortiz, M. Rengel, P. Santos-Sanz, B. Swinyard, N. Thomas, A. Thirouin, and D. Trilling  
2009. TNOs are Cool : A Survey of the Transneptunian Region. *Earth Moon and Planets*, 105 :209–219.
- Murray, C. D. and S. F. Dermott  
1999. *Solar system dynamics*. Cambridge university press.
- Noll, K. S., W. M. Grundy, E. I. Chiang, J.-L. Margot, and S. D. Kern  
2008. *Binaries in the Kuiper Belt*, Pp. 345–363.
- Oszkiewicz, D., D. Hestroffer, and P. David  
2013. Markov chain monte-carlo orbit computation for binary asteroids. In *European Planetary Science Congress 2013, held 8-13 September in London, UK*. Online at : <http://meetings.copernicus.org/eps2013>, id. EPSC2013-522, volume 8, P. 522.
- Parker, A. H., M. W. Buie, W. M. Grundy, and K. S. Noll  
2016. Discovery of a makemakean moon. *arXiv preprint arXiv :1604.07461*.
- Parzen, E.  
1962. On estimation of a probability density function and mode. *The annals of mathematical statistics*, 33(3) :1065–1076.
- Peacock, J.  
1983. Two-dimensional goodness-of-fit testing in astronomy. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 202(3) :615–627.
- Petit, J.-M. and O. Mousis  
2004. Kbo binaries : how numerous were they ? *Icarus*, 168(2) :409–419.
- Pilbratt, G.  
2008. Herschel Mission Overview, Photometry, and Key Programmes. In *37th COSPAR Scientific Assembly*, volume 37 of *COSPAR Meeting*, P. 2437.

- Pravec, P., L. Šarounová, D. L. Rabinowitz, M. D. Hicks, M. Wolf, Y. N. Krugly, F. P. Velichko, V. G. Shevchenko, V. G. Chiorny, N. M. Gaftonyuk, et al.  
2000. Two-period lightcurves of 1996 fg 3, 1998 pg, and (5407) 1992 ax : One probable and two possible binary asteroids. *Icarus*, 146(1) :190–203.
- Pravec, P. and P. Scheirich  
2012. Small binary asteroids and prospects for their observations with gaia. *Planetary and Space Science*, 73(1) :56–61.
- Ragozzine, D. and M. E. Brown  
2009. Orbits and masses of the satellites of the dwarf planet haumea (2003 el61). *The Astronomical Journal*, 137(6) :4766.
- Ram, D. J., T. Sreenivas, and K. G. Subramaniam  
1996. Parallel simulated annealing algorithms. *Journal of parallel and distributed computing*, 37(2) :207–212.
- Richardson, D. C., W. F. Bottke, and S. G. Love  
1998. Tidal distortion and disruption of earth-crossing asteroids. *Icarus*, 134(1) :47–76.
- Robert, C. and G. Casella  
2009. *Introducing Monte Carlo Methods with R*. Springer Science & Business Media.
- Rubincam, D. P.  
2000. Radiative spin-up and spin-down of small asteroids. *Icarus*, 148(1) :2–11.
- Santos-Sanz, P., E. Lellouch, S. Fornasier, C. Kiss, A. Pal, T. Müller, E. Vilenius, J. Stansberry, M. Mommert, A. Delsanti, et al.  
2012. “tnos are cool” : A survey of the trans-neptunian region-iv. size/albedo characterization of 15 scattered disk and detached objects observed with herschel-pacs. *Astronomy & Astrophysics*, 541 :A92.
- Schmid, M. and R. Schneider  
1999. Parallel simulated annealing techniques for scheduling and mapping dsp-applications onto multi-dsp platforms. In *In Proceedings of the International Conference on Signal Processing Applications and Technology (ICSPAT 99)*. Miller Freeman. Citeseer.
- Spearman, C.  
1904. The proof and measurement of association between two things. *The American Journal of Psychology*, 15(1) :pp. 72–101.
- Stansberry, J., W. Grundy, M. Brown, D. Cruikshank, J. Spencer, D. Trilling, and J.-L. Margot  
2008. Physical properties of kuiper belt and centaur objects : Constraints from the spitzer space telescope. *The Solar System Beyond Neptune*, 161.
- Stansberry, J., W. Grundy, J. Margot, D. Cruikshank, J. Emery, G. Rieke, and D. E. Trilling  
2006. The albedo, size, and density of binary kuiper belt object (47171) 1999 tc36. *The Astrophysical Journal*, 643(1) :556.
- Stansberry, J., W. Grundy, M. Mueller, S. Benecchi, G. Rieke, K. Noll, M. Buie, H. Levison, S. Porter, and H. Roe  
2012. Physical properties of trans-neptunian binaries (120347) salacia–actaea and (42355) typhon–echidna. *Icarus*, 219(2) :676–688.

- Stephens, D. C. and K. S. Noll  
2006. Detection of six trans-neptunian binaries with nicmos : A high fraction of binaries in the cold classical disk. *The Astronomical Journal*, 131(2) :1142.
- Stewart, S. T. and Z. M. Leinhardt  
2009. Velocity-dependent catastrophic disruption criteria for planetesimals. *The Astrophysical Journal Letters*, 691(2) :L133.
- Subbotin, M. F.  
1968. Vvedenie v teoreticheskuiu astronomiiu. 1968., 1.
- Swendsen, R. H. and J.-S. Wang  
1986. Replica monte carlo simulation of spin-glasses. *Physical Review Letters*, 57(21) :2607.
- Uossermen, F.  
1992. Neurocompyuternaya tehnika : teoriya i praktika.
- Van de Wiel, M. and A. Di Bucchianico  
2001. Fast computation of the exact null distribution of spearman's  $\rho$  and page's l statistic for samples with and without ties. *Journal of statistical planning and inference*, 92(1) :133–145.
- Veillet, C., A. Doressoundiram, J. Shapiro, J. J. Kavelaars, and A. Morbidelli  
2001. S/2000 (1998 WW\_31) 1. *IAU Circ.*, 7610.
- Veverka, J., M. Robinson, P. Thomas, S. Murchie, J. F. Bell, N. Izenberg, C. Chapman, A. Harch, M. Bell, B. Carcich, A. Cheng, B. Clark, D. Domingue, D. Dunham, R. Farquhar, M. J. Gaffey, E. Hawkins, J. Joseph, R. Kirk, H. Li, P. Lucey, M. Malin, P. Martin, L. McFadden, W. J. Merline, J. K. Miller, W. M. Owen, C. Peterson, L. Prockter, J. Warren, D. Wellnitz, B. G. Williams, and D. K. Yeomans  
2000. NEAR at Eros : Imaging and Spectral Results. *Science*, 289 :2088–2097.
- Vilenius, E., C. Kiss, M. Mommert, T. Müller, P. Santos-Sanz, A. Pal, J. Stansberry, M. Mueller, N. Peixinho, S. Fornasier, et al.  
2012. “tnos are cool” : A survey of the trans-neptunian region-vi. herschel/pacs observations and thermal modeling of 19 classical kuiper belt objects. *Astronomy & Astrophysics*, 541 :A94.
- Virtanen, J., K. Muinonen, and E. Bowell  
2001. Statistical Ranging of Asteroid Orbits. *Icarus*, 154 :412–431.
- von Toussaint, U.  
2011. Bayesian inference in physics. *Reviews of Modern Physics*, 83(3) :943.
- Walsh, K. J. and J. A. Jacobson  
2015. *Formation and Evolution of Binary Asteroids*, Pp. 375–393.
- Walsh, K. J. and D. C. Richardson  
2008. A steady-state model of nea binaries formed by tidal disruption of gravitational aggregates. *Icarus*, 193(2) :553–566.
- Weidenschilling, S. J., P. Paolicchi, and V. Zappala  
1989. Do asteroids have satellites ?

Werner, M. W., T. L. Roellig, F. J. Low, G. H. Rieke, M. Rieke, W. F. Hoffmann, E. Young, J. R. Houck, B. Brandl, G. G. Fazio, J. L. Hora, R. D. Gehrz, G. Helou, B. T. Soifer, J. Stauffer, J. Keene, P. Eisenhardt, D. Gallagher, T. N. Gautier, W. Irace, C. R. Lawrence, L. Simmons, J. E. Van Cleve, M. Jura, E. L. Wright, and D. P. Cruikshank 2004. The Spitzer Space Telescope Mission. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 154 :1–9.

Wilcoxon, F.

1945. Individual comparisons by ranking methods. *Biometrics bulletin*, 1(6) :80–83.