



**HAL**  
open science

# Sur une anomalie du développement perturbatif de la théorie de Chern-Simons

Kévin Corbineau

► **To cite this version:**

Kévin Corbineau. Sur une anomalie du développement perturbatif de la théorie de Chern-Simons. Topologie générale [math.GN]. Université Grenoble Alpes, 2016. Français. NNT : 2016GREAM038 . tel-01679640

**HAL Id: tel-01679640**

**<https://theses.hal.science/tel-01679640>**

Submitted on 10 Jan 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE** Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE la Communauté UNIVERSITÉ  
GRENOBLE ALPES**

Spécialité : **Topologie**

Arrêté ministériel : 7 Août 2006

Présentée par

**Kévin Corbineau**

Thèse dirigée par **Christine Lescop**

préparée au sein de l'**Institut Fourier**  
et de **MSTII**

## **Sur une anomalie du développement perturbatif de la théorie de Chern-Simons**

Thèse soutenue publiquement le **21 Septembre 2016**,  
devant le jury composé de :

**Mr Gwénaél Massuyeau**

Chargé de Recherche, Université de Strasbourg et CNRS, Président

**Mr Pierre Vogel**

Professeur émérite, Université Paris Diderot , Rapporteur

**Mr Thomas Fiedler**

Professeur, Institut de Mathématiques de Toulouse, Rapporteur

**Mr Louis Funar**

Professeur, Institut Fourier, Examineur

**Mr Jean-Baptiste Meilhan**

Maître de Conférence, Institut Fourier, Examineur

**Mme Christine Lescop**

Directrice de Recherche au CNRS, Directeur de thèse



# Remerciements

Il est temps pour moi de tirer ma révérence après ces 5 années de dur labeur. On ne se rend compte véritablement de l'importance d'être soutenu qu'une fois les épreuves passées et finies, et je tiens à adresser à toutes les personnes qui m'ont encadré et soutenu mes remerciements les plus sincères. Des auteurs, il n'y en a qu'un, moi même. En revanche, des acteurs, il y en a eu beaucoup. En effet, pour écrire ce manuscrit, il m'a fallu l'aide de nombreuses personnes, qu'elles en soient conscientes ou non.

Je débute évidemment par Christine, ma tutrice sans qui ce manuscrit n'aurait jamais vu le jour. Outre le fait de m'avoir initié à la Recherche, vous avez fait preuve d'une incroyable gentillesse et générosité envers moi. À mes yeux, vous avez ré-inventé la définition du mot patience. Vous avez été une directrice de thèse exemplaire et cela a été un véritable privilège d'apprendre à vos côtés. Merci.

Je remercie Thomas Fiedler et Pierre Vogel qui ont gentiment accepté d'être mes rapporteurs. Je remercie tout particulièrement Pierre Vogel pour ses remarques et corrections qui ont rendu mon manuscrit plus fluide et lisible. Merci aussi à Jean-Baptiste Meilhan, Gwénaél Massuyeau et Louis Funar qui ont accepté de faire partie de mon jury de thèse.

Merci à toute l'équipe de l'Institut Fourier. D'une part, le travail de l'administration m'a permis de travailler dans les meilleures conditions possibles. D'autre part, l'équipe de mathématiques au complet m'a toujours très bien encadré. Je tiens à remercier plus particulièrement Jean-Mathieu, mon co-thésard qui aura été de toute l'aventure, qui m'a fait découvrir les plaisirs des jeux de société, avec qui j'ai eu de délicieuses et savantes conversations musicales. Lui et son épouse Élodie ont été présents pour moi dans les moments difficiles. J'ai également une pensée pour les anciens thésards Bashar, Delphine, Julien, Maxime, BinBin, Simon, Mickael. Mais aussi pour les plus gradés : Greg McShane, Louis Funar, Gérard Besson, François Dahmani, Erwan Lanneau, Alexis Marin et Pierre Will. Parmi eux, je tiens à apporter une reconnaissance plus appuyée à deux jeunes anciens : Jean-Baptiste, toujours de bons conseils et dont la zen attitude que lui envie le dalaï lama, a su me rassurer. Pierre, pour son incroyable sens de l'humour, et qui j'espère m'aura pardonné de l'avoir fait dormir dehors à la Llagonne.

Je n'oublie pas non plus les personnes qui ont été à mes côtés à mes premiers balbutiements de mathématicien, en commençant par mon professeur de prépa François Lachaux. C'est à cause de lui (ou grâce, cela dépend des jours) que je me suis engagé sur la voie des mathématiques. Mais aussi ceux qui ont pris le relais à Cachan : Alain Trouve, Frederic Pascal, J-M Ghidaglia (peut-on parler d'une poule qui tombe du ciel?), ... Je ne peux oublier mes camarades Emilien et Caliméro, forts de nombreuses participations endiablées aux tarots, coïncidences et autres discussions politiques. Il serait injuste de ne pas citer les personnes qui m'ont accompagné dans cette dernière ligne droite, notamment mes compagnons de radio Olivier, Cécile, La Griffe, Alexis et

Pauline, mais aussi JB, compagnon de ciné et autres activités audiovisuelles dont je tairai le nom.

J'en arrive maintenant au paragraphe qui me tient le plus à cœur. Celui des personnes les plus proches de moi, qui n'ont pour la plupart aucun lien avec les mathématiques. À mon ancienne équipe de rugby qui a été pour moi une échappatoire nécessaire. Des rugbymans, certains ont été au-dessus de la mêlée : François, présent du début jusqu'à la fin, et j'espère que cela ne s'arrêtera pas là. Lionel, avec qui j'ai passé des séances de physiques qui resteront gravées dans ma mémoire (et mon corps... ). Sans oublier Batho, un véritable ami avec qui j'ai tant partagé. Les gars, vous m'avez fait hurler de rire, on a passé des soirées mémorables et des matchs inoubliables. Pour tout cela, merci. À mes vieux potes : Sébinou, mon formidable coloc', qui a été le plus présent dans les moments durs. Tu m'as aidé à remonter la pente et à aller jusqu'au bout. Mais aussi Jérôme, mon Jé! Toi aussi tu as été là quand cela n'allait pas. Tu fus aussi à mes côtés pour mes débuts dans l'enseignement. Si je ne suis pas un trop mauvais professeur, c'est en partie grâce à toi. Vous êtes des mecs merveilleux. Merci. À mon autre duo de copains : Romain et Guigui. Vous m'êtes indispensables depuis bien longtemps. Romain, je ne te résumerai jamais à ton soutien administratif! Tu es un super ami. Et mon Guigui, tu en as déjà fait tant pour moi que je ne sais pas par quoi commencer. En tout cas, je sais par quoi finir : Merci de m'avoir présenté Marie-Anne! Marie-Anne, grâce à toi, j'ai pu terminer de la plus belle des façons cette aventure. Pour ces trois dernières années, tu as été un formidable soutien, toujours à me motiver quand j'en avais besoin, toujours derrière moi pour que je me dépasse, toujours à me reconforter quand cela n'allait pas. Du fond du cœur, merci.

Enfin, je souhaite terminer ces remerciements par les deux personnes qui ont le plus compté dans cette histoire. Ils ont été là depuis le tout début. Ils m'ont soutenu du mieux qu'ils ont pu, c'est-à-dire à peu près exponentiellement plus que je ne le mérite. Ils m'ont redressé la tête quand j'ai pensé tout abandonner. Ils se sont toujours montrés à la fois présents et discrets, et d'une justesse incroyable. Sans eux, je ne serais jamais allé jusqu'au bout. Personne ne peut rêver de meilleurs soutiens.

Papa, Maman, cette thèse est pour vous.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Résumé et résultat</b>	<b>7</b>
2.1	L'espace de graphes $\mathcal{A}_n$ . . . . .	7
2.2	Conventions d'orientation . . . . .	8
2.3	Définition de l'anomalie $\beta_n$ . . . . .	10
2.4	Le cas $\beta_3$ . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Combinatoire sur les graphes</b>	<b>18</b>
3.1	Démonstration du lemme 2.2 . . . . .	18
3.2	Démonstration du lemme 2.3 . . . . .	23
<b>4</b>	<b>La chaîne <math>G_V</math></b>	<b>27</b>
4.1	L'éclaté $Bl(B^3, C_V)$ . . . . .	27
4.2	Construction de $G_V$ . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Définition de <math>I</math></b>	<b>33</b>
5.1	Introduction . . . . .	33
5.2	Existence . . . . .	34
5.3	Indépendance en $G$ . . . . .	47
5.4	Indépendance en $(V_i)$ . . . . .	53
5.5	Numérotation des sommets . . . . .	54
<b>6</b>	<b>Simplification</b>	<b>56</b>
6.1	Réduction à un type d'intersection . . . . .	56
6.2	Rotation . . . . .	58
6.3	Réduction à un seul graphe . . . . .	60
6.4	Énumération des intersections à calculer . . . . .	62
<b>7</b>	<b>Mise en équation des anomalies</b>	<b>71</b>
7.1	Degré . . . . .	71
7.2	Recherche des points d'intersection de $\beta_{1,1}$ . . . . .	76
7.3	Signe d'un point d'intersection . . . . .	85
7.4	Calcul de $\beta_{1,2}$ . . . . .	102
7.5	Calcul de $\beta_2$ . . . . .	108

## Résumé

Maxim Kontsevich a défini un invariant  $Z$  des sphères d'homologie rationnelle orientées de dimension 3 en 1992, en poursuivant l'étude initiée par Edward Witten du développement perturbatif de la théorie de Chern-Simons. L'invariant  $Z$  de Kontsevich est gradué. Il s'écrit  $Z = (Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , où  $Z_n$  prend ses valeurs dans un espace  $\mathcal{A}_n$  engendré par des diagrammes trivalents à  $2n$  sommets appelés diagrammes de Feynman-Jacobi de degré  $n$ . L'invariant  $Z$  apparaît d'abord comme un invariant  $Z(M, \tau)$  des sphères d'homologie rationnelle  $M$  de dimension 3 munies d'une parallélisation  $\tau$ . Il est l'exponentielle d'un invariant  $z(M, \tau) = (z_n(M, \tau))_{n \in \mathbb{N}}$  dont la partie de degré  $n$  compte algébriquement les plongements des diagrammes de Feynman-Jacobi connexes à  $2n$  sommets assujettis à vérifier certaines conditions. On peut associer un invariant homotopique entier  $p_1(\tau)$  aux parallélisations  $\tau$  des variétés orientées de dimension 3, et il existe un élément  $\beta = (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{A}_n$  appelé anomalie tel que

$$z_n(M, \tau) - \frac{p_1(\tau)}{4} \beta_n$$

soit indépendant de  $\tau$  et noté  $z_n(M)$ .

$$Z(M) = \exp((z_n(M))_{n \in \mathbb{N}}).$$

On sait depuis l'introduction de la constante  $\beta$  par Greg Kuperberg et Dylan Thurston en 1999 que  $\beta_n = 0$  si  $n$  est pair et que  $\beta_1 \neq 0$ . Cette thèse porte sur le calcul de la première valeur inconnue  $\beta_3$ . Elle en présente des expressions très simplifiées et implémentables sur ordinateur.

## 1 Introduction

Maxim Kontsevich a défini un invariant  $Z$  des sphères d'homologie rationnelle orientées de dimension 3 dans [Kon94], en poursuivant l'étude initiée par Edward Witten [Wit89] du développement perturbatif de la théorie de Chern-Simons. Greg Kuperberg et Dylan Thurston ont montré en 1999 que tous les invariants de type fini des sphères d'homologie entière se factorisent par  $Z$  dans [KT99]. Ce résultat a été généralisé aux sphères d'homologie rationnelle avec la théorie d'invariants de type fini développée par Delphine Moussard [Mou12]. L'invariant  $Z$  de Kontsevich est gradué. Il s'écrit  $Z = (Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , où  $Z_n$  prend ses valeurs dans un espace  $\mathcal{A}_n$  engendré par des diagrammes trivalents appelés *diagrammes de Feynman-Jacobi*, introduit par Dror Bar-Natan dans [BN95a] et étudié en profondeur par Pierre Vogel dans [Vog11]. L'invariant  $Z$  apparaît d'abord comme un invariant  $Z(M, \tau)$  des sphères d'homologie rationnelle  $M$  de dimension 3 munies d'une parallélisation  $\tau$ . Il est l'exponentielle d'un invariant  $z(M, \tau) = (z_n(M, \tau))_{n \in \mathbb{N}}$  dont la partie de degré  $n$  compte algébriquement les plongements des diagrammes de Feynman-Jacobi connexes à  $2n$  sommets assujettis à vérifier certaines conditions en un sens défini précisément dans [Les13] et [Les04a]. On peut associer un invariant homotopique entier

$p_1(\tau)$ , défini comme une classe de Pontrjagin relative, aux parallélisations  $\tau$  des variétés orientées de dimension 3, et il existe un élément  $\beta = (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{A}_n$  appelé *anomalie* tel que

$$z_n(M, \tau) - \frac{p_1(\tau)}{4} \beta_n$$

soit indépendant de  $\tau$  et noté  $z_n(M)$ .

$$Z(M) = \exp((z_n(M))_{n \in \mathbb{N}}).$$

On sait depuis l'introduction de la constante  $\beta$  par Greg Kuperberg et Dylan Thurston en 1999 que  $\beta_n = 0$  si  $n$  est pair et que  $\beta_1 \neq 0$ . Mais on ne connaît pas  $\beta_n$  pour les entiers  $n$  impairs plus grands que 2. Cette thèse porte sur le calcul de la première valeur inconnue  $\beta_3$ . Elle en présente des expressions très simplifiées et implémentables sur ordinateur.

La théorie des invariants des variétés de dimension 3 qui “comptent” des plongements de graphes trivalents dans les sphères d’homologie rationnelle est parallèle à une théorie similaire précédemment développée pour les noeuds de  $\mathbb{R}^3$  par beaucoup d’auteurs parmi lesquels Guadagnini, Martellini and Mintchev [GMM90], Bar-Natan [BN95b], Kontsevich [Kon94], Bott et Taubes [BT94], Altschüler and Freidel [AF97] aussi inspirés par les travaux de Witten sur le développement perturbatif de la théorie de Chern-Simons.

Comme Dylan Thurston [Thu99] et Sylvain Poirier [Poi02] l’ont expliqué indépendamment, on peut penser à la partie  $Z_n^c$  de degré  $n$  de l’invariant de Vassiliev universel  $Z^c = (Z_n^c)_{n \in \mathbb{N}}$  qui résulte des travaux de ces auteurs comme à un nombre algébrique de plongements de graphes uni-trivalents à  $2n$  sommets dans  $\mathbb{R}^3$  dont les sommets univalents sont assujettis à appartenir à l’image du noeud et l’ensemble des directions des arêtes plongées comme des segments linéaires doit s’injecter dans un ensemble générique fixé de  $3n$  directions. Là aussi, l’invariant  $Z^c$  apparaît d’abord comme un invariant de noeuds parallélisés, et on s’affranchit de la parallélisation comme précédemment à l’aide de l’auto-enlacement associé à une parallélisation de noeuds, qui a le même rôle que  $p_1(\tau)$  et d’une constante  $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  appelée *anomalie de Bott et Taubes*. Cette anomalie est aussi nulle en degré pair et non nulle en degré 1. Sylvain Poirier a montré qu’elle s’annulait en degré 3 et 5, confortant ainsi les physiciens dans leur conjecture toujours ouverte depuis plus de vingt ans qui stipule que cette anomalie  $\alpha$  s’annule en degré impair différent de 1.

L’intégrale de Kontsevich des noeuds et cet autre invariant  $Z^c = (Z_n^c)_{n \in \mathbb{N}}$  que l’on peut aussi attribuer à Kontsevich s’obtiennent l’un à partir de l’autre par un isomorphisme de l’algèbre de diagrammes de Feynman-Jacobi dans laquelle ils prennent leurs valeurs. Cet isomorphisme est explicitement décrit en fonction de l’anomalie  $\alpha$  par Christine Lescop dans [Les02]. Il est l’identité si et seulement si l’anomalie s’annule en degré impair différent de 1.

L’annulation de  $\beta_3$  simplifierait notablement la définition de  $z_3(M)$  comme compte algébrique de graphes à 6 sommets dans  $M$ . Si  $\beta_3$  était non nulle, il serait intéressant de comprendre la différence inattendue entre les théories afférentes aux noeuds et aux variétés ainsi exhibée. Le but initial de cette thèse était de déterminer  $\beta_3$ . Nous avons réussi à en simplifier considérablement le calcul et nous en présentons un algorithme complet implémentable.

## 2 Résumé et résultat

Le but de ce chapitre est de présenter les anomalies  $\beta_n$ . On commence par introduire les espaces de graphes  $\mathcal{A}_n$ , avec une description précise de  $\mathcal{A}_3$  (section 2.1). Puis on donne dans la section 2.3 une définition discrète de l'anomalie  $\beta_n$ , que l'on détaille dans le cas particulier de  $\beta_3$  dans la section 2.4 où l'on présente le théorème 2.15, qui est le résultat principal de cette thèse. On étudiera au chapitre 7 un algorithme implémentable permettant d'appliquer le théorème 2.15.

### 2.1 L'espace de graphes $\mathcal{A}_n$

**Définition 2.1** Une *orientation d'un sommet* est la donnée d'un ordre cyclique sur l'ensemble des demi-arêtes issues de ce sommet. Une *orientation* d'un graphe trivalent connexe est la donnée d'une orientation de chacun de ses sommets.

On note  $\mathcal{A}_n$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{Q}$  engendré librement par les graphes trivalents connexes à  $2n$  sommets avec toutes les orientations possibles, que l'on quotiente par les relations suivantes

$$\begin{aligned} \text{AS : } & \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} = - \begin{array}{c} \diagdown \\ | \\ \diagup \end{array}, \\ \text{IHX : } & \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \\ | \\ \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ | \\ \diagdown \diagup \end{array} = 0 \end{aligned}$$

qui relie des graphes qui peuvent être immergés de telle sorte qu'ils coïncident hors de la portion représentée où ils sont comme sur le dessin.

Il est bien connu que

$$\mathcal{A}_1 = \mathbb{Q}[\ominus]$$

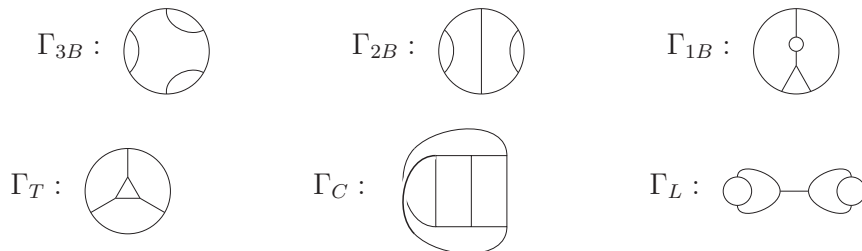
$$\mathcal{A}_2 = \mathbb{Q}[\triangle]$$

et que

$$\mathcal{A}_3 = \mathbb{Q}[\bigcirc]$$

On va redémontrer la dernière formule, à l'aide des deux lemmes suivants. Une *boucle interne* est un sous-graphe de la forme  $\text{---}\bigcirc$

**Lemme 2.2** *Il y a exactement 6 types de graphes trivalents connexes sans boucles internes à 6 sommets, à isomorphisme près possibles :*





Ce lemme sera démontré dans le paragraphe 3.1.

**Lemme 2.3** *Dans l'espace vectoriel  $\mathcal{A}_3$ , on a les relations suivantes :*

$$[\Gamma_{1B}] = 2[\Gamma_T]$$

$$[\Gamma_{2B}] = 4[\Gamma_T]$$

$$[\Gamma_{3B}] = 4[\Gamma_T]$$

$$[\Gamma_L] = 0$$

$$[\Gamma_C] = 0$$

et la classe d'un graphe qui contient une boucle interne est nulle. Les graphes sont munis de l'orientation induite par l'ordre trigonométrique sur les dessins. Ce sont les seules relations existantes, ce qui fait que l'espace  $\mathcal{A}_3$  est de dimension 1, engendré, par exemple, par la classe de  $\Gamma_T$ , soit :  $\mathcal{A}_3 = \mathbb{Q}[\Gamma_T]$ .

Ce lemme sera démontré dans la section 3.2.

## 2.2 Conventions d'orientation

Une variété  $M$  topologique de dimension  $n$  sans bord est un espace topologique séparé, qui est une union de sous-ensembles ouverts  $U_i$  indexés par un ensemble  $I$ , où chaque  $U_i$  est identifié à un ouvert  $V_i$  de  $\mathbb{R}^n$  par un homéomorphisme  $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$  appelé *carte*. Les variétés sont considérées à un homéomorphisme près de telle manière que toutes les variétés homéomorphes sont considérées comme identiques.

Pour  $r = 0, 1, \dots, \infty$ , la variété topologique  $M$  a une structure  $C^r$  (ou est une variété  $C^r$ ) si pour toute paire  $\{i, j\} \subset J$ , l'application  $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$  définie sur  $\phi_i(U_i \cap U_j)$  est un  $C^r$ -difféomorphisme sur son image.

Une orientation d'un espace vectoriel  $V$  de dimension finie est une base de  $V$  à un changement de base de déterminant positif près. Lorsque  $V = \{0\}$ , une orientation de  $V$  est un élément de  $\{-1, 1\}$ . Un difféomorphisme  $h$  d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  sur un ouvert  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  *préserve l'orientation* en un point  $x$  si et seulement si le déterminant de son jacobien  $D_x h$  est positif. Si  $\mathbb{R}^n$  est orienté et si les changements de cartes  $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$  préservent l'orientation (en tout point) pour tout  $\{i, j\}$ , alors la variété  $M$  est dite *orientée*. Sauf indication contraire, les variétés seront lisses ( $C^\infty$ ) et orientées. Les variétés produits sont orientées par l'ordre des facteurs. Plus généralement, sauf indications contraires, l'ordre d'apparition des coordonnées ou des paramètres oriente les variétés.

Le fibré tangent d'une sous-variété orientée  $A$  d'une variété  $M$  en un point  $x$  est noté par  $T_x A$ . Pour une structure riemannienne fixée,  $(T_x A)^\perp$  est canoniquement isomorphe à  $N_x A = T_x M / T_x A$ . Il est orienté de telle manière que (une base orientée de)  $(T_x A)^\perp$  suivie de (une base

orientée de)  $T_x A$  induise l'orientation de  $M$ . Le bord  $\partial M$  d'une variété orientée est orienté par la convention " normale extérieure premier vecteur " : si  $x \in \partial M$  n'est pas un coin, le vecteur normal sortant de  $M$  en  $x$  suivi par une base orientée de  $T_x \partial M$  induit l'orientation de  $M$ .

Deux sous-variétés  $A$  et  $B$  d'une variété  $M$  sont dites transverses si en chaque point d'intersection  $x$ ,  $T_x M = T_x A + T_x B$ . L'intersection transverse de deux sous-variétés  $A$  et  $B$  d'une variété  $M$  en un point  $x$  est orientée de telle manière que le fibré orthogonal de  $A \cap B$  en  $x$  est  $((T_x A)^\perp \oplus (T_x B)^\perp)$ . Si deux sous-variétés ont des dimensions complémentaires, le signe d'un point d'intersection est  $+1$  si l'orientation de son fibré normal coïncide avec l'orientation de l'espace ambiant, c'est à dire si  $T_x M = (T_x A)^\perp \oplus (T_x B)^\perp$  (comme espaces vectoriels orientés). Sinon, son signe est  $-1$ . Si  $A$  et  $B$  sont compactes et ont des dimensions complémentaires, alors leur *intersection algébrique*, notée  $\langle A, B \rangle$ , est la somme de tous les signes des points d'intersections. On vérifie facilement le lemme suivant.

**Lemme 2.4** *Soient  $A$  et  $B$  deux sous-variétés de  $M$  de dimensions complémentaires et transverses. Le signe d'un point d'intersection  $x$  est  $+1$  si et seulement si  $T_x M = T_x A \oplus T_x B$  (comme espaces vectoriels orientés).*

PREUVE: On sait que

$$T_x M = (T_x A)^\perp \oplus T_x B$$

$$T_x M = (T_x B)^\perp \oplus T_x A$$

et par hypothèse, on a

$$T_x M = (T_x A)^\perp \oplus (T_x B)^\perp$$

car les deux variétés sont transverses et de dimensions complémentaires. On note  $p = \dim(A)$  et  $q = \dim(B)$ . On choisit une base  $(e_1, \dots, e_p)$  de  $T_x A$  que l'on complète par une base  $(b_1, \dots, b_q)$  de  $(T_x A)^\perp$ , et une base  $(e'_1, \dots, e'_q)$  de  $T_x B$  que l'on complète par une base  $(b'_1, \dots, b'_p)$  de  $(T_x B)^\perp$ . On veut montrer que  $(e_1, \dots, e_p, e'_1, \dots, e'_q)$  est du même signe que la base  $(b_1, \dots, b_q, b'_1, \dots, b'_p)$ . La matrice de changement de base de  $(b_1, \dots, b_q, e_1, \dots, e_p)$  à  $(e'_1, \dots, e'_q, e_1, \dots, e_p)$  est de la forme

$$\begin{bmatrix} M_1 & & \times \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

D'autre part, la matrice de changement de base de  $(b'_1, \dots, b'_p, e'_1, \dots, e'_q)$  à  $(b'_1, \dots, b'_p, b_1, \dots, b_q)$  est de la forme

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ & \times & & M_1^{-1} \end{bmatrix}$$

Comme par définition, les bases  $(b_1, \dots, b_q, e_1, \dots, e_p)$  et  $(b'_1, \dots, b'_p, e'_1, \dots, e'_q)$  sont directes, les bases  $(e'_1, \dots, e'_q, e_1, \dots, e_p)$  et  $(b'_1, \dots, b'_p, b_1, \dots, b_q)$  ont donc le même signe, donc les bases  $(e_1, \dots, e_p, e'_1, \dots, e'_q)$  et  $(b_1, \dots, b_q, b'_1, \dots, b'_p)$  ont le même signe.

□

Soit  $h$  une application différentiable d'une variété orientée  $A$  sur une variété  $M$  orientée. Soit  $B$  une sous-variété orientée de  $M$ . Elle est donc co-orientée (son fibré normal est orienté comme ci-dessus). En un point régulier  $x$  (un point en lequel la différentielle est surjective) de  $h^{-1}(B)$ , on co-orienté  $h^{-1}(B)$  par  $(Dh)^{-1}(N_{h(x)}B)$ .

Lorsque  $M$  est une variété orientée,  $(-M)$  désigne la même variété, mais munie de l'orientation contraire. Dans une variété  $M$ , une  $k$ -chaîne est une combinaison finie (à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ ) de sous-variétés  $C$  lisses orientées de dimension  $k$  de  $M$ , avec bords et coins, où l'on identifie  $-C$  avec  $(-1)C$  et la réunion disjointe de deux variétés est identifiée à leur somme.

Sauf indication contraire, dans toute la thèse, les variétés sont orientées.

L'orientation canonique d'un point est le signe  $+1$ , et  $\partial[0, 1] = \{1\} - \{0\}$ .

L'*orientation* d'un ensemble fini est un ordre sur cet ensemble à une permutation paire près. Si  $X$  est un ensemble fini, on désigne par  $|X|$  son cardinal.

### 2.3 Définition de l'anomalie $\beta_n$ .

On décrit dans cette section la définition de l'anomalie  $\beta_n$ .

**Définition 2.5** Soit  $X$  un ensemble fini. On note  $C_X(\mathbb{R}^3)$  l'ensemble des injections  $c : X \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ . C'est aussi l'espace des configurations de  $X$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Une orientation de  $X$  induit une orientation naturelle de  $C_X(\mathbb{R}^3)$ , en ordonnant les facteurs de  $(\mathbb{R}^3)^X$  à une permutation paire près. On définit aussi le quotient  $\tilde{C}_X(\mathbb{R}^3) := C_X(\mathbb{R}^3)/\mathcal{H}$  de l'espace de configurations par les translations et les *dilatations* qui sont les homothéties de rapport strictement positif. Dans ce quotient, on a les relations suivantes :  $c = c + v$  pour  $v \in \mathbb{R}^3$  et  $((c + v) : x \mapsto c(x) + v)$ , et  $c = \lambda c$  pour  $\lambda > 0$  et  $(\lambda c : x \mapsto \lambda c(x))$ .

On utilise la compactification étudiée par D. Sinha [Sin04] :

**Théorème 2.6** *Il existe une variété lisse à coins, compacte, bien définie  $C_X$  dont l'intérieur est canoniquement difféomorphe à  $\tilde{C}_X(\mathbb{R}^3)$ . Cette variété  $C_X$  est de dimension  $3|X| - 4$ . De plus, pour  $(i, j) \in X^2$  avec  $i \neq j$ , l'application*

$$\pi_{ij} : \begin{cases} C_X(\mathbb{R}^3) & \longrightarrow & \mathbb{S}^2 \\ c & \longmapsto & \frac{c(j) - c(i)}{\|c(j) - c(i)\|} \end{cases}$$

*passé au quotient et s'étend à  $C_X$  en une application encore notée  $\pi_{ij}$ .*

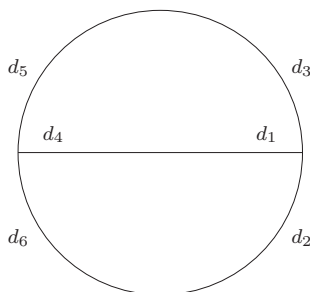
Compte tenu du théorème, pour orienter  $C_X$ , il suffit d'orienter  $\tilde{C}_X(\mathbb{R}^3) := C_X(\mathbb{R}^3)/\mathcal{H}$ . On oriente  $\tilde{C}_X$  de sorte que le difféomorphisme  $f : C_X(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}^3 \times ]0, +\infty[ \times \tilde{C}_X$  défini par

$$f(c) = (c(x_0), \|c - c(x_0)\|, \bar{c})$$

soit un difféomorphisme qui préserve l'orientation. Ceci ne dépend pas du point  $x_0$  choisi puisque cela revient à orienter localement le groupe  $\mathcal{H}$  comme un produit du groupe de translation par un groupe de dilatation et à orienter le quotient de sorte que localement,  $C_X(\mathbb{R}^3)$  est orienté comme le produit de ce groupe par  $C_X$ .

Un *graphe trivalent connexe*  $\Gamma$  de degré  $n$  est la donnée d'un ensemble  $H(\Gamma)$  à  $6n$  éléments muni de deux partitions  $V(\Gamma)$  et  $E(\Gamma)$  où  $V(\Gamma)$  partitionne  $H(\Gamma)$  en triplets d'éléments, et  $E(\Gamma)$  partitionne  $H(\Gamma)$  en paires d'éléments. Les partitions  $V(\Gamma)$  et  $E(\Gamma)$  représentent respectivement l'ensemble des sommets et des arêtes du graphe  $\Gamma$ , et  $H(\Gamma)$  est l'ensemble des demi-arêtes de  $\Gamma$ .

**Exemple 2.7** Si on considère le graphe  $\Gamma$  suivant :



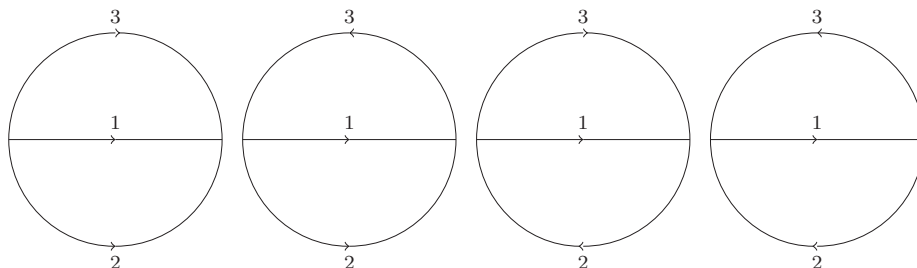
Le graphe  $\Gamma$  est alors la donnée de l'ensemble  $H(\Gamma) = \{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6\}$  muni des deux partitions  $V(\Gamma) = \{\{d_1, d_2, d_3\}, \{d_4, d_5, d_6\}\}$  et  $E(\Gamma) = \{\{d_1, d_4\}, \{d_2, d_6\}, \{d_3, d_5\}\}$ .

Un *isomorphisme*  $f$  d'un graphe  $\Gamma$  dans un graphe  $\Gamma'$  est une application  $f : H(\Gamma) \rightarrow H(\Gamma')$  qui respecte chacune des deux partitions sur  $H(\Gamma)$  et  $H(\Gamma')$  au sens où, si  $\{e_1, e_2, e_3\} \in V(\Gamma)$ , alors  $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\} \in V(\Gamma')$  et si  $\{e_1, e_2\} \in E(\Gamma)$ , alors  $\{f(e_1), f(e_2)\} \in E(\Gamma')$ . Un *automorphisme* est un isomorphisme d'un graphe dans lui-même et on note  $Aut(\Gamma)$  le groupe des automorphismes d'un graphe.

**Exemple 2.8** Il n'est pas difficile de montrer que  $|Aut(\bigoplus)| = 12$ . En effet, les automorphismes qui fixent les sommets sont les six permutations des trois arêtes, et il existe des automorphismes qui échangent les deux sommets.

$D_n^{or}$  désigne l'ensemble des graphes trivalents connexes à  $2n$  sommets sans boucles internes dont les arêtes sont numérotées dans  $\{1, \dots, 3n\}$  (par une bijection de  $E(\Gamma)$  dans  $\{1, \dots, 3n\}$ ) et orientées, à automorphismes qui préservent cette structure près.

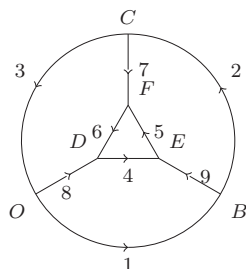
**Exemple 2.9** On peut décrire rapidement  $D_1^{or}$ . Comme les graphes de  $D_1^{or}$  ne contiennent pas de boucles internes, il n'existe qu'un graphe possible :  $\bigcirc$  que l'on doit munir de toutes les numérotations et orientations possibles. Cela nous donne, à automorphisme près, les 4 possibilités suivantes, qui représentent les 4 éléments de  $D_1^{or}$  :



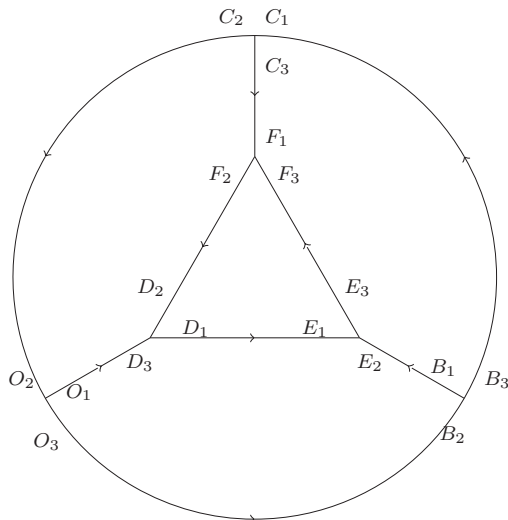
En général, pour un graphe trivalent abstrait de degré  $n$ , il y a  $\frac{2^{3n}(3n)!}{|\text{Aut}(\Gamma)|}$  éléments de  $D_n^{or}$ .

Soit  $\Gamma \in D_n^{or}$ . L'orientation des arêtes induit une orientation sur l'ensemble  $H(\Gamma)$  des demi-arêtes de  $\Gamma$  : notons  $u_i^1$  la demi-arête issue de la source de l'arête  $i$  et  $u_i^2$  la demi-arête issue du but de l'arête  $i$ . Alors l'ordre sur l'ensemble  $H(\Gamma)$  induit par l'orientation des arêtes est, à une permutation paire près :  $(u_1^1, u_1^2, \dots, u_{3n}^1, u_{3n}^2)$ . On numérote arbitrairement les sommets de  $\Gamma$  dans  $V(\Gamma) = \{M^1, \dots, M^{2n}\}$ . Lorsque  $\Gamma$  est muni d'une orientation  $\sigma_\Gamma$  de ses sommets au sens de la définition 2.1, l'orientation  $n_\Gamma$  de  $V(\Gamma)$  induite par la numérotation des sommets induit une seconde orientation sur  $H(\Gamma)$ . Soit  $M^i \in V(\Gamma)$ , on note  $(M_1^i, M_2^i, M_3^i)$  les demi-arêtes issues du sommet  $M^i$ , dans l'ordre cyclique. L'ordre sur  $H(\Gamma)$  induit par l'orientation des sommets est alors, à une permutation paire près :  $(M_1^1, M_2^1, M_3^1, \dots, M_1^{2n}, M_2^{2n}, M_3^{2n})$ . On note  $\epsilon(n_\Gamma, \sigma_\Gamma)$  le signe de la permutation entre ces deux orientations.

**Exemple 2.10** On montre un exemple de calcul de  $\epsilon(n_\Gamma, \sigma_\Gamma)$  avec  $n = 3$ . On considère un exemple de numérotation des arêtes, avec les orientations fixées par définition, et la numérotation  $(O, B, C, D, E, F)$  des sommets suivante :



L'orientation de l'ensemble des  $1/2$  arêtes induite par l'ordre sur les sommets :



L'ordre sur les sommets induit l'ordre

$$(O_1, O_2, O_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3, E_1, E_2, E_3, F_1, F_2, F_3)$$

sur les 1/2 arêtes. L'ordre induit par l'orientation des arêtes est

$$(O_3, B_2, B_3, C_1, C_2, O_2, D_1, E_1, E_3, F_3, F_2, D_2, C_3, F_1, O_1, D_3, B_1, E_2)$$

La permutation associée entre ces deux ordres est

$$(O_1, O_3, B_3, O_2, B_2, C_2, E_1, C_3, E_3)(B_1, C_1, D_1, F_3, E_2, F_1, D_3, D_2, F_2)$$

qui est donc de signature 1.

Soit  $\Gamma \in D_n^{or}$ . On note  $E(\Gamma)$  l'ensemble des arêtes de  $\Gamma$  et pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\underline{k} = \{1, \dots, k\}$ . Par définition, les arêtes de  $\Gamma$  sont numérotées, donc il existe une bijection  $e(\Gamma, \cdot) : \underline{3n} \rightarrow E(\Gamma)$ . Cela revient à étiqueter toutes les arêtes de  $\Gamma$  par un entier  $i \in \underline{3n}$ . Par conséquent,  $e(\Gamma, i)$  correspond à l'arête de  $\Gamma$  portant l'indice  $i$  et  $M$  son but :

$$N \xrightarrow{i} M$$

On définit alors  $\pi_{e(\Gamma, i)} : C_{V(\Gamma)} \rightarrow \mathbb{S}^2$  de sorte que

$$\pi_{e(\Gamma, i)} = \pi_{NM}.$$

Sur l'intérieur  $\tilde{C}_{V(\Gamma)}(\mathbb{R}^3)$ , on a

$$\pi_{e(\Gamma, i)}(c) = \frac{c(M) - c(N)}{\|c(M) - c(N)\|}.$$

Cette application dépend de la numérotation arbitraire choisie. On obtient alors  $3n$  applications  $(\pi_{e(\Gamma,i)})$ . On étend ces applications en des applications encore notées  $\pi_{e(\Gamma,i)}$  :

$$\forall i \in \underline{3n}, \pi_{e(\Gamma,i)} : [0, 1] \times B^3 \times C_{V(\Gamma)} \rightarrow [0, 1] \times B^3 \times \mathbb{S}^2$$

par

$$\pi_{e(\Gamma,i)} = id_{[0,1] \times B^3} \times \pi_{e(\Gamma,i)}.$$

On écrit  $B^3$  comme la boule de rayon  $2\pi$ . Tout point  $m \in B^3$  s'écrit sous la forme  $m = \theta u$ , avec  $\theta \in [0, 2\pi]$  et  $u \in \mathbb{S}^2$ , où  $\mathbb{S}^2$  désigne la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ . On définit l'application

$$\rho : \begin{cases} B^3 & \longrightarrow SO(3) \\ m & \longmapsto \rho(m) = \rho_m \end{cases}$$

où  $\rho_{\theta u}$  désigne la rotation d'axe  $u$  et d'angle  $\theta$ . Pour  $U$  et  $V$  deux vecteurs non proportionnels de  $\mathbb{S}^2$ , la notation  $[U, V]$  désigne l'arc géodésique le plus court reliant  $U$  et  $V$ . Soit  $V \in \mathbb{S}^2$ . On définit  $\partial_V \subset [0, 1] \times B^3 \times \mathbb{S}^2$  par

$$\partial_V = -\{0\} \times B^3 \times \{V\} - [0, 1] \times \partial B^3 \times \{V\} + \{(1, m, \rho_m(V)), m \in B^3\}.$$

**Lemme 2.11** *Soit  $V \in \mathbb{S}^2$ , il existe une chaîne  $\tilde{G}_V$  de codimension 2 de  $[0, 1] \times B^3 \times \mathbb{S}^2$  telle que  $\partial \tilde{G}_V = \partial_V$ .*

Ce lemme sera un corollaire de la proposition 4.7, qui montre que les chaînes  $G_V(t)$  du paragraphe 2.4 sont de telles chaînes, pour tout  $V$  de  $\mathbb{S}^2$ . Soient  $(V_1, \dots, V_{3n}) \in (\mathbb{S}^2)^{3n}$  et une famille  $(G_{V_1}, \dots, G_{V_{3n}})$  de chaînes associées,  $G_{V_i}$  est une chaîne de codimension 2 de  $[0, 1] \times B^3 \times \mathbb{S}^2$  et  $\partial G_{V_i} = \partial_{V_i}$ . Alors pour tout  $i \in \underline{3n}$ ,  $\pi_{e(\Gamma,i)}^{-1}(G_{V_i})$  est une chaîne de codimension 2 dans  $[0, 1] \times B^3 \times C_{V(\Gamma)}$ , co-orientée par la co-orientation de  $G_{V_i}$ . Lorsque les chaînes  $\pi_{e(\Gamma,i)}^{-1}(G_{V_i})$  sont transverses,  $\bigcap_{i=1}^{3n} \pi_{e(\Gamma,i)}^{-1}(G_{V_i})$  est une chaîne de codimension  $6n$  dans un espace de dimension  $6n - 4 + 4 = 6n$ , c'est donc un ensemble de points avec des signes induits par les co-orientations des  $\pi_{e(\Gamma,i)}^{-1}(G_{V_i})$ , et l'orientation de  $[0, 1] \times B^3 \times C_{V(\Gamma)}$  induite par l'orientation  $n_\Gamma$  de  $V(\Gamma)$ . On note  $I_{\Gamma, n_\Gamma}(G_{V_1}, \dots, G_{V_{3n}})$  la somme de ces signes. Le produit  $I_{\Gamma, n_\Gamma}(G_{V_1}, \dots, G_{V_{3n}})\epsilon(n_\Gamma, o_\Gamma)[\Gamma, o_\Gamma]$  est indépendant de  $n_\Gamma$  et  $o_\Gamma$ . On peut montrer qu'il existe un ensemble ouvert et dense  $\mathfrak{A}_n$  de  $(\mathbb{S}^2)^{3n}$  tel que pour tout  $(V_1, \dots, V_{3n})$ , pour tout graphe  $\Gamma$ , les chaînes  $\pi_{e(\Gamma,i)}^{-1}(G_{V_i} = G_{V_i}(\frac{i}{3n+1}))$  construites dans la proposition 4.7 sont transverses. On le montrera au chapitre 5 pour  $n = 3$ . Par conséquent, pour  $(V_1, \dots, V_{3n}) \in \mathfrak{A}_n$ , la somme

$$\beta_n = \sum_{\Gamma \in \mathcal{D}_n^{\text{or}}} \frac{I_{\Gamma, n_\Gamma}(G_{V_1}, \dots, G_{V_{3n}})\epsilon(n_\Gamma, o_\Gamma)}{(3n)!2^{3n}} [\Gamma, o_\Gamma] \in \mathcal{A}_n$$

a un sens.

**Proposition 2.12** *La définition ci-dessus de  $\beta_n$  est indépendante du choix de  $(V_1, \dots, V_{3n})$  dans  $\mathfrak{A}_n$ . Les chaînes  $G_{V_i}$  pourraient aussi être changées en d'autres chaînes  $\tilde{G}_{V_i}$  de bord  $\partial_{V_i}$  avec les mêmes propriétés de transversalité.*

On montre cette proposition en détails au chapitre 5 dans le cas  $n = 3$  sur lequel on se concentre dans cette thèse.

Cette proposition peut aussi être vue comme un corollaire de l'étude du logarithme  $z$  de l'invariant  $Z$  que Kontsevich a défini dans [Kon94], et qui est un invariant universel de type fini des sphères d'homologie entière de dimension 3, d'après des travaux de Greg Kuperberg et Dylan Thurston [KT99].

Cet invariant  $z$  est défini selon le schéma suivant pour les sphères d'homologie rationnelle  $M$  de dimension 3.

On se fixe un plongement  $\phi$  d'un voisinage  $N(\infty)$  du point  $\infty$  dans la sphère  $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$  dans  $M$ , on note  $\infty = \phi(\infty)$  et  $\check{M} = M \setminus \{\infty\}$ . On définit une compactification  $C_2(M)$  du complémentaire de la diagonale dans  $(\check{M})^2$ , à partir de  $M^2$  en y éclatant successivement  $(\infty, \infty)$ , puis les adhérences de  $\{\infty\} \times \check{M}$ ,  $(\check{M}) \times \{\infty\}$  et de la diagonale de  $(\check{M})^2$  dans l'éclatement obtenu. Ici, les éclatements s'entendent dans le sens de la topologie différentielle, ils consistent à remplacer une sous-variété par son fibré normal unitaire, comme expliqué dans la partie 4.1 ou dans [Les13, Section 2.1]. Ils créent du bord. Le bord de  $C_2(M)$  contient en particulier le fibré unitaire normal à la diagonale de  $(\check{M})^2$  qui est identifié au fibré unitaire tangent de  $\check{M}$  par l'application  $((x, y) \mapsto y - x)$ . À une parallélisation  $\tau$  de  $\check{M}$  qui est induite par  $\phi$  et par la parallélisation standard

$$\tau_s : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow T\mathbb{R}^3$$

de  $\mathbb{R}^3$  sur  $\phi(N(\infty))$ , on associe une application canonique  $p_\tau : \partial C_2(M) \rightarrow S^2$ . Cette application associe à une configuration limite de configurations de deux points distincts de  $\check{M}$ , la limite de la direction du premier point au deuxième lorsque  $\check{M} = \mathbb{R}^3$  et  $\tau = \tau_s$ . Dans le cas général, cette limite garde un sens naturel sur  $\partial C_2(M)$  alors que la direction du premier point au deuxième n'est pas définie sur l'intérieur de  $C_2(M)$  [Les13, Proposition 2.3].

Pour un point  $W$  de  $S^2$ , on définit un *propagateur* associé à  $(M, \tau, W)$  comme une chaîne de dimension 4 de la variété lisse compacte à bords et coins  $C_2(M)$  dont le bord est  $p_\tau^{-1}(W) \subset \partial C_2(M)$ . L'existence de tels propagateurs est justifiée dans [Les13, Section 2.3].

Pour tout ensemble fini  $V$ , il existe une compactification  $C_V(M)$  de l'ouvert de  $\check{M}^V$  constitué des applications injectives  $c$  de  $V$  dans  $\check{M}$ , telle que  $C_V(M)$  est une variété lisse à coins de dimension  $3n$  et pour tout couple  $(i, j)$  d'éléments distincts de  $V$ , l'application  $c \mapsto (c(i), c(j))$  de  $\check{M}^V$  dans  $\check{M}^2$  s'étend en une application  $\pi_{ij} : C_V(M) \rightarrow C_2(M)$ . Cette compactification est décrite précisément dans [Les13, Section 5.1], sa structure est détaillée dans [Les04a, Section 3]. En particulier, toute arête  $e$  d'un graphe  $\Gamma$  de  $D_n^{or}$  induit une application  $\pi_e : C_{V(\Gamma)}(M) \rightarrow C_2(M)$ .

Pour un élément  $(W_1, \dots, W_{3n})$  de  $\mathfrak{A}_n \subset (\mathbb{S}^2)^{3n}$ , il existe des propagateurs  $P_i$  associés à  $(M, \tau, W)$  tels que les  $\pi_e^{-1}(P_i)$  soient transverses dans  $C_{V(\Gamma)}(M)$  pour tout  $\Gamma$  de  $D_n^{or}$ . Pour de



tels propagateurs,  $z_n(M, \tau)$  s'écrit comme

$$z_n(M, \tau) = \sum_{\Gamma \in D_n^{or}} \langle \pi_{e(\Gamma, 1)}^{-1}(P_1), \dots, \pi_{e(\Gamma, 3n)}^{-1}(P_{3n}) \rangle_{C_{V(\Gamma)}(M)} \frac{\epsilon(n_\Gamma, o_\Gamma)}{(3n)! 2^{3n}} [\Gamma, o_\Gamma] \in \mathcal{A}_n$$

en utilisant comme précédemment une orientation  $n_\Gamma$  de  $V(\Gamma)$  pour orienter  $C_{V(\Gamma)}(M)$ .

Ainsi,  $z_n(M, \tau)$  compte algébriquement les plongements des diagrammes de Feynman-Jacobi connexes à  $2n$  sommets de  $D_n^{or}$ .

L'invariant  $z_n(M, \tau)$  est la projection naturelle de l'invariant  $Z_n(\emptyset, \check{M}, \tau)$  décrit dans les théorèmes 4.7 et 5.6 de [Les13] sur le sous-espace de  $\mathcal{A}_n$  engendré par les diagrammes connexes, comme expliqué dans [Les13, Section 5.3].

On peut associer un invariant homotopique entier  $p_1(\tau)$ , défini comme une classe de Pontrjagin relative, aux parallélisations  $\tau$  comme ci-dessus. Cette application est définie précisément dans la section 6.5 de [Les13]. Elle vérifie  $p_1(\tau_s) = 0$  et  $p_1(\psi_{\mathbb{R}}(\rho) \circ \tau_s) = 4$  pour la parallélisation  $\psi_{\mathbb{R}}(\rho) \circ \tau_s$  de  $\mathbb{R}^3$  définie à partir de l'application

$$\psi_{\mathbb{R}}(\rho) : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto (x, \rho(x)(y)), \end{cases}$$

où  $\rho$  est étendue par l'application constante qui envoie tout élément en dehors de  $B^3$  sur l'identité de  $SO(3)$ , d'après [Les13, Proposition 6.13].

D'après le théorème 4.7 de [Les13], la projection (ou [Les04a, Théorème 1.9], où  $\xi_n = -\beta_n$ )

$$z_n(M, \tau) - \frac{p_1(\tau)}{4} \beta_n$$

est indépendant de  $\tau$ . En particulier,

$$\beta_n = z_n(\mathbb{S}^3, \psi_{\mathbb{R}}(\rho) \circ \tau_s) - z_n(\mathbb{S}^3, \tau_s).$$

On peut alors pressentir la formule annoncée pour  $\beta_n$  en utilisant des propagateurs  $P_i$  associés à  $(S^3, \tau_s, W_i)$  et  $P'_i$  associés à  $(S^3, \psi_{\mathbb{R}}(\rho) \circ \tau_s, W_i)$  qui coïncident en dehors d'un voisinage  $[0, 1] \times B^3 \times S^2$  du fibré unitaire tangent  $B^3 \times S^2$  de  $B^3$  (trivialisé par  $\tau_s$ ) dans le bord de  $C_2(B^3)$  où les propagateurs  $P_i$  s'écrivent  $[0, 1] \times B^3 \times \{W_i\}$  et les propagateurs  $P'_i$  s'écrivent  $G_{W_i}$ . Cette formule vient plus précisément du lemme 5.8 de [Les13]. On peut aussi voir grâce à ce lemme que  $\beta_n$  est indépendante du choix des chaînes  $G_{W_i}$  et des vecteurs  $W_1, \dots, W_{3n}$ . On sait depuis l'introduction de  $\beta_n$  par Greg Kuperberg et Dylan Thurston en 1999 que  $\beta_n = 0$  si  $n$  est pair et que

$$\beta_1 = \frac{1}{12} \left[ \ominus \right].$$

## 2.4 Le cas $\beta_3$ .

On précise dans cette sous-section la définition de  $\beta_3$  et le théorème 2.15 qui est le théorème principal de cette thèse. Pour tout  $t \in [0, 1]$  et pour tout  $V \in \mathbb{S}^2$ , on commence par construire une chaîne  $G_V(t) \subset [0, 1] \times B^3 \times \mathbb{S}^2$  de bord  $\partial_V$  avec les notations avant le lemme 2.11. Les notations suivantes seront détaillées à la sous-section 4.2. On note  $D_V \subset B^3$  le disque orthogonal à  $V$  de rayon  $\pi$  et on note  $C_V$  son bord. On définit :

$$\begin{aligned} G_{0,V}(t) &= [0, t] \times B^3 \times \{V\} \\ G_{1,V}(t) &= \{(u, m, \rho_m(V)); u \in [t, 1], m \in B^3\} \\ G_{2,V}(t) &= -\{t\} \times \overline{\bigcup_{m \in B^3 \setminus C_V} \{m\} \times [V, \rho(V)]} \\ G_{3,V}(t) &= \{t\} \times D_V \times \mathbb{S}^2 \\ G_{H,V}(t) &= G_{2,V}(t) - G_{3,V}(t) \end{aligned}$$

Enfin, on pose

$$G_V(t) = G_{0,V}(t) + G_{H,V}(t) + G_{1,V}(t).$$

On montre alors (proposition 4.7) que pour tout  $t \in [0, 1]$  on a  $\partial G_V(t) = \partial_V$ . Fixons un 9-uplet  $(t_i)_{i \in \mathbb{9}} \in [0, 1]^{\mathbb{9}}$  tel que  $0 < t_1 < \dots < t_9 < 1$ . Pour  $(V_1, \dots, V_9) \in (\mathbb{S}^2)^{\mathbb{9}}$ , posons  $G_{V_i} = G_{V_i}(t_i)$ . Pour ces chaînes particulières, on montrera la proposition suivante (section 5.2, proposition 5.2) :

**Proposition 2.13** *Il existe un ensemble  $\mathfrak{A}$  ouvert et dense de  $(\mathbb{S}^2)^{\mathbb{9}}$  tel que pour tout  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}$ , toutes les intersections des  $\pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(G_{V_i})$  sont transverses pour tout  $\Gamma$  de  $D_3^{or}$ . En particulier, la quantité*

$$\beta_3 = \sum_{\Gamma \in D_3^{or}} \frac{I_{\Gamma, n_{\Gamma}}(G_{V_1}, \dots, G_{V_9}) \epsilon(n_{\Gamma}, o_{\Gamma})}{(9)! 2^9} [\Gamma, o_{\Gamma}] \in \mathcal{A}_3$$

*est bien définie pour tout  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}$ .*

On démontrera le lemme 5.29 et les propositions 5.22 et 5.27, qui auront pour conséquence la proposition suivante :

**Proposition 2.14** *La quantité  $\beta_3$  ne dépend ni du choix de la numérotation  $n_{\Gamma}$  des graphes  $\Gamma$ , ni du choix des orientations  $o_{\Gamma}$  des sommets des graphes  $\Gamma$ , ni de l'élément  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}$ , ni du choix des chaînes  $G_{V_i}$  de bord  $\partial_{V_i}$ .*

Ceci démontre d'une manière indépendante les résultats annoncés dans la sous-section précédente. D'autre part, soit  $\Gamma \in D_3^{or}$  muni d'une numérotation  $n_{\Gamma}$  de ses sommets. On définit l'application et les 3 chaînes suivantes :

$$\pi_{e(\Gamma, i)} : SO(3) \times C^{14} \rightarrow SO(3) \times \mathbb{S}^2; (\rho, c) \mapsto (\rho, \pi_{e(\Gamma, i)}(c))$$

$$\begin{aligned}\overline{G_{0,V}} &= SO(3) \times \{V\} \\ \overline{G_{1,V}} &= \{(\rho, \rho(V)), \rho \in SO(3)\} \\ \overline{G_{2,V}} &= - \overline{\bigcup_{\rho \in SO(3), \rho(V) \neq -V} \{\rho\} \times [V, \rho(V)]}\end{aligned}$$

On note  $D_{or}^3(\Gamma_T)$  le sous ensemble de  $D_3^{or}$  constitué des graphes qui sont isomorphes à  $\Gamma_T$ .

### Théorème 2.15

$$\beta_3 = \frac{2}{299!} \sum_{\Gamma \in D_{or}^3(\Gamma_T)} \sum_{h=2}^8 \epsilon(n_\Gamma, o_\Gamma) \langle \prod_{i=1}^{h-1} \pi_{e(\Gamma,i)}^{-1}(\overline{G_{1,V_i}}), \pi_{e(\Gamma,h)}^{-1}(\overline{G_{2,V_h}}), \prod_{i=h+1}^9 \pi_{e(\Gamma,i)}^{-1}(\overline{G_{0,V_i}}) \rangle [\Gamma, o_\Gamma]$$

On prouve le théorème 2.15 au chapitre 6 en montrant

- que toutes les intersections arrivent en un temps  $t_h$  d'homotopie (lemme 5.6)
- que la contribution des parties  $\{t_h\} \times D_{V_h} \times \mathbb{S}^2$  est nulle (lemme 6.2)
- que l'on peut remplacer  $B^3$  par  $SO(3)$  (lemme 6.3)
- que la contribution des graphes non isomorphes à  $\Gamma_T$  est nulle (lemme 6.6).

Au chapitre 7, on donne un algorithme pour calculer l'expression ainsi simplifiée de  $\beta_3$ .

## 3 Combinatoire sur les graphes

Le but de ce chapitre est de démontrer les lemmes 2.2 et 2.3.

### 3.1 Démonstration du lemme 2.2

On détermine dans cette section l'ensemble  $D_3$  des graphes trivalents connexes à 6 sommets et sans boucles internes. Une *bulle* est un sous-graphe de la forme



Notons :

- $B_0 \subset D_3$  le sous ensemble de  $D_3$  composé des graphes qui ne comportent aucune bulle
- $B_1 \subset D_3$  le sous ensemble de  $D_3$  composé des graphes qui comportent exactement 1 bulle
- $B_2 \subset D_3$  le sous ensemble de  $D_3$  composé des graphes qui comportent au moins 2 bulles

On a alors  $D_3 = B_0 \cup B_1 \cup B_2$ , donc on détermine successivement  $B_0$ ,  $B_1$  et  $B_2$ .

Notons  $\tilde{D}_1$  (resp.  $\tilde{D}_2$ ) l'ensemble des graphes trivalents connexes à deux sommets avec éventuellement des boucles internes (resp. à 4 sommets) et  $D_2$ , l'ensemble des graphes trivalents connexes à 4 sommets et sans boucles internes.

**Lemme 3.1** Les ensembles  $D_2$  et  $\tilde{D}_1$  se décrivent de la manière suivante :

$$\tilde{D}_1 = \left\{ \text{---} \text{---} \text{---} \ ; \ \ominus \right\}$$

$$D_2 = \left\{ \text{---} \text{---} \text{---} \ ; \ \text{---} \right\}.$$

PREUVE: Construisons un graphe  $\Gamma$  de  $\tilde{D}_1$  : Le graphe  $\Gamma$  est composé de deux points. Comme  $\Gamma$  est connexe, ces deux points sont reliés par une arête.



Pour compléter ce graphe, soit les deux arêtes restantes relient les deux points, soit chaque point est relié à lui même. On obtient ainsi les deux graphes de  $\tilde{D}_1$ . Pour construire  $D_2$  on fixe tout d'abord un sommet de  $\Gamma$ , trois arêtes partent de ce sommet, et comme les trois arêtes ne peuvent être reliées au même point car  $\Gamma$  est connexe, il n'y a que deux alternatives pour construire ces arêtes :



Complétons le graphe de gauche : le sommet univalent ne peut être relié au sommet bivalent déjà construit, sinon la seule manière de compléter ce graphe en rajoutant le quatrième sommet donne une boucle interne. Par conséquent, le sommet univalent est relié seulement au quatrième sommet, ce qui laisse une dernière arête à rajouter, et on obtient



Pour compléter le graphe de droite, il suffit de constater que si un sommet univalent n'est pas relié aux deux autres, cela force à avoir une boucle interne. On obtient ainsi le dernier graphe annoncé pour  $D_2$ .

□

**Lemme 3.2** On a

$$B_2 = \left\{ \text{---} \ , \ \text{---} \ , \ \text{---} \right\}.$$

PREUVE: Un élément de  $B_2$  s'obtient en insérant 2 bulles à un graphe de  $\tilde{D}_1$ . Insérer deux bulles dans



produit deux graphes

$$\Gamma_{2B} = \text{---} \quad \Gamma_{3B} = \text{---}$$

Comme  $\Gamma_{2B}$  et  $\Gamma_{3B}$  sont des graphes qui contiennent respectivement deux et trois bulles, ils sont bien distincts. Lorsque l'on insère deux bulles dans



il n'y a qu'une seule possibilité pour placer ces deux bulles, de sorte qu'il n'y ait pas de boucles internes. Cela nous conduit à

$$\Gamma_L = \text{---}$$

On obtient bien un graphe distinct des deux précédents car on peut disconnecter  $\Gamma_L$  en enlevant une arête, ce qui n'est pas possible pour  $\Gamma_{2B}$  et  $\Gamma_{3B}$ .

□

**Lemme 3.3** *On a*

$$B_1 = \left\{ \text{---} \right\}.$$

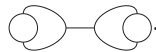
PREUVE: On définit l'application suivante  $b_1 : B_1 \rightarrow \tilde{D}_2$  qui au graphe  $\Gamma$  associe le graphe où l'unique bulle  $\text{---}$  est remplacée par  $\text{---}$ . On rappelle que  $\tilde{D}_2$  désigne l'ensemble des graphes trivalents connexes à quatre sommets avec éventuellement des boucles internes. On montre que

$$Im(b_1) \subset D_2.$$

En effet, soit  $\Gamma \in D_3$  et supposons par l'absurde que  $b_1(\Gamma) \in \tilde{D}_2 \setminus D_2$ . Par conséquent,  $\Gamma$  a une bulle, qui quand on l'écrase donne une boucle interne. Par conséquent,  $\Gamma$  contient un sous graphe de la forme



Or il n'existe qu'une seule manière de compléter ce morceau de graphe sans créer de boucle interne :



Or ce graphe n'appartient clairement pas à  $B_1$  et par suite,  $Im(b_1) \subset D_2$ . On peut donc écrire  $B_1 = b_1^{-1}(D_2)$ . Déterminer  $B_1$  revient alors à trouver toutes les façons de rajouter une bulle aux graphes de  $D_2$ . Rappelons que

$$D_2 = \left\{ \text{---} ; \text{---} \right\}.$$

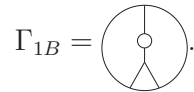
Comme



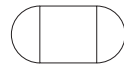
toutes les arêtes de  $\Gamma_T$  jouent le même rôle. Il y a donc qu'une seule façon de rajouter une bulle à



qui conduit au graphe



Ce graphe ne comportant qu'une seule bulle, c'est bien un graphe distinct des précédents trouvés. En insérant une bulle à






on aura un graphe avec au moins deux bulles. Donc

$$b_1^{-1}(D_2) = \left\{ \text{Diagram of a circle with a small circle inside and three lines meeting at its center} \right\}.$$

□

**Lemme 3.4** On a

$$B_0 = \left\{ \text{Diagram of a circle with three lines meeting at the center forming a triangle}, \text{ Diagram of a capsule with two vertical lines inside} \right\}.$$

PREUVE: L'ensemble  $B_0$  est constitué des graphes n'ayant aucune bulle. Un *triangle* est un sous-graphe de la forme . On note  $T_1 \subset D_3$  le sous ensemble de  $D_3$  composé des graphes qui comportent au moins 1 triangle. Pour déterminer  $B_0$  on détermine successivement  $B_0 \cap T_1$  et  $B_0 \setminus (B_0 \cap T_1)$ . Un graphe de  $B_0 \cap T_1$  s'obtient en rajoutant un triangle à un graphe de  $D_2$  de la manière suivante : on remplace  par . Tout triangle inséré dans



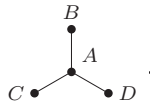
laisse au moins une bulle intacte, ce qui est interdit dans  $B_0$ . Il reste à insérer un triangle dans



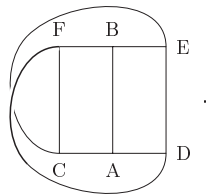
mais comme tous les sommets jouent le même rôle dans ce graphe, on peut par exemple choisir de le mettre au centre pour obtenir



Il reste alors à décrire  $B_0 \setminus (B_0 \cap T_1)$  : ce sont les graphes qui ne contiennent ni bulles ni triangles. Nous allons construire un tel diagramme  $\Gamma$ . Fixons  $A$  un sommet quelconque. Comme  $\Gamma$  n'a aucune bulle, les trois arêtes partant de ce sommet sont reliées à trois sommets distincts.



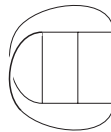
Comme  $\Gamma$  ne contient aucun triangle, aucune arête ne contient deux éléments de  $\{B, C, D\}$ . Les sommets  $B, C$  et  $D$  sont donc tous les trois reliés aux deux autres sommets  $E$  et  $F$  qui restent à placer. Le sommet  $B$  (resp.  $C, D$ ) est donc relié à un des deux autres sommets restant  $E$  et  $F$  et en fait aux deux, puisque  $\Gamma$  ne contient aucune bulle. Le graphe est alors fini et l'on obtient



Le graphe construit est alors unique.

□

**Remarque 3.5** Par construction, les sommets de



jouent le même rôle : pour tout

*couple de sommets, il existe un automorphisme de  $\Gamma_C$  qui envoie l'un sur l'autre. Le résultat persiste sur les arêtes : pour tout couple d'arêtes, il existe un automorphisme de  $\Gamma_C$  qui envoie l'une sur l'autre.*

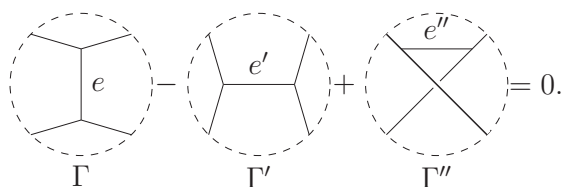
La démonstration du lemme 2.2 découle directement des lemmes 3.2, 3.3 et 3.4.

□

### 3.2 Démonstration du lemme 2.3

Classiquement, pour montrer le lemme 2.3, on montre les relations annoncées et on construit une forme linéaire sur  $\mathcal{A}_3$  non nulle sur  $[\Gamma_T]$  (voir [BN95a, paragraphe 2.4] ou [Vog11]).

On présente dans cette sous-section une seconde méthode qui consiste à faire la liste de toutes les relations qui définissent  $\mathcal{A}_3$ . Pour chaque graphe numéroté, on dresse les listes de tous les types d'arêtes qu'il contient, et toutes les relations IHX qui interviennent sur chaque type d'arêtes. Toutes les relations qui suivent sont écrites dans  $\mathcal{A}_3$ . Soient un graphe  $\Gamma$  et  $e$  une arête de  $\Gamma$ . La relation IHX associée à  $(\Gamma, e)$ , qui relie 3 graphes identiques hors des disques représentés, est :



et on la note

$$(\Gamma, e) - (\Gamma', e') + (\Gamma'', e'') = 0.$$

Soient  $\Gamma'$  et  $\Gamma''$  les deux autres graphes intervenant dans cette relation et soient  $e'$  et  $e''$  leurs arêtes respectives visibles. Notons que la relation IHX associée à  $(\Gamma', e')$  (resp. à  $(\Gamma'', e'')$ ) coïncide avec la relation IHX de  $(\Gamma, e)$ , à antisymétrie près. Il suffira donc de faire apparaître une fois chaque couple  $(\Gamma, e)$  dans toutes nos relations pour être certain d'avoir une liste complète.

**Lemme 3.6** *Soit un graphe  $G$  qui contient une boucle interne, alors  $[G] = 0$ .*

PREUVE: En effet, en utilisant la relation AS on obtient

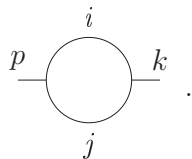
$$-\bigcirc = -\infty.$$

Donc on obtient  $[G] = -[G]$ .

□

Cela signifie que la classe de tout graphe trivalent contenant une boucle interne est nulle dans  $\mathcal{A}_3$ . On peut donc se restreindre à l'ensemble  $D_3$  des graphes trivalents connexes à 6 sommets et sans boucles internes, que l'on a décrit au lemme 2.2. De plus :

**Lemme 3.7** *Soit une bulle*





Alors une relation IHX sur  $j$  donne :

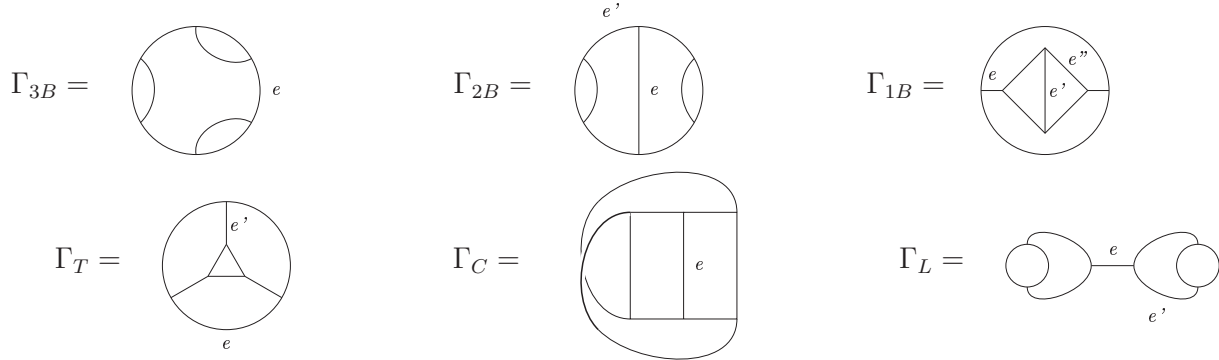
$$\begin{array}{c} i \\ \circlearrowleft \\ p \text{---} \text{---} k \\ \circlearrowright \\ j \end{array} - \begin{array}{c} j \\ \circlearrowleft \\ p \text{---} \text{---} k \\ \circlearrowright \\ i \end{array} - \begin{array}{c} i \\ \circ \\ \text{---} j \text{---} k \\ \text{---} \end{array} = 0.$$

□

Une relation IHX sur une arête  $j$  d'une bulle d'un graphe  $\Gamma$  s'écrit

$$[\Gamma, j] - [\Gamma, j] = 0.$$

**Lemme 3.8** Les couples  $(\Gamma, e)$  à isomorphisme près, où  $\Gamma \in \mathcal{D}_3$  et  $e$  est une arête hors d'une bulle de  $\Gamma$  sont décrits par les types d'arêtes suivantes, sur chaque graphe  $\Gamma$  de  $\mathcal{D}_3$ .



les graphes ont l'orientation du dessin, et on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 (\Gamma_T, e) + (\Gamma_T, e) - (\Gamma_{1B}, e) &= 0 \\
 (\Gamma_C, e) + (\Gamma_T, e') - (\Gamma_T, e') &= 0 \\
 (\Gamma_{1B}, e'') + (\Gamma_{1B}, e'') - (\Gamma_{2B}, e') &= 0 \\
 (\Gamma_{1B}, e') + (\Gamma_{1B}, e') - (\Gamma_{3B}, e) &= 0 \\
 (\Gamma_{2B}, e) - (\Gamma_{2B}, e) - (\Gamma_L, e) &= 0 \\
 (\Gamma_L, e') + (\Gamma_L, e') - (\Gamma_L, e') &= 0.
 \end{aligned}$$

PREUVE:

**Lemme 3.9** Une relation IHX sur une arête  $e$  d'un graphe  $\Gamma$  qui se trouve sur un triangle donne la relation suivante :

Diagrammatic equation: A triangle with edges  $a$  (top),  $b$  (right), and  $e$  (left) and vertices  $x$ ,  $y$ ,  $z$  is added to a triangle with edges  $b$  (top),  $a$  (right), and  $e$  (left) and vertices  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . This sum is subtracted by a circle with edges  $a$  (top) and  $b$  (bottom) and an edge  $e'$  on the left, with vertices  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . The result is zero.

Soit

$$(\Gamma, e) + (\Gamma, e) - (\Gamma', e') = 0.$$

PREUVE: La relation *IHX* appliquée à  $(\Gamma, e)$  donne

Diagrammatic equation: A triangle with edges  $a$  (top),  $b$  (right), and  $e$  (left) and vertices  $x$ ,  $y$ ,  $z$  is subtracted by a circle with edges  $a$  (top) and  $b$  (bottom) and an edge  $e$  on the left, with vertices  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . This is added to a triangle with edges  $e$  (top),  $a$  (right), and  $b$  (left) and vertices  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . The result is zero.

et l'on retrouve l'égalité du lemme en appliquant deux fois une relation *AS* au dernier graphe. □

En appliquant le lemme 3.9 à  $(\Gamma_T, e)$ , à  $(\Gamma_{1B}, e')$ , à  $(\Gamma_{1B}, e'')$  et à  $(\Gamma_L, e')$  on trouve :

$$\begin{aligned} (\Gamma_T, e) + (\Gamma_T, e) - (\Gamma_{1B}, e) &= 0 \\ (\Gamma_{1B}, e') + (\Gamma_{1B}, e') - (\Gamma_{3B}, e) &= 0 \\ (\Gamma_{1B}, e'') + (\Gamma_{1B}, e'') - (\Gamma_{2B}, e') &= 0 \\ (\Gamma_L, e') + (\Gamma_L, e') - (\Gamma_L, e') &= 0. \end{aligned}$$

Pour une arête qui se situe sur un carré, on peut ré-écrire la relation *IHX* de la façon suivante, en appliquant *AS* au dernier graphe :

Diagrammatic equation: A square with edges  $a$  (top),  $c$  (bottom),  $e$  (left), and  $b$  (right) is subtracted by a square with edges  $a$  (top),  $c$  (bottom),  $e$  (left), and  $b$  (right) where the top and bottom edges are crossed. This is subtracted by a square with edges  $a$  (top),  $c$  (bottom),  $e$  (left), and  $b$  (right) where the left and right edges are crossed. The result is zero.

Appliquons cette relation à  $(\Gamma_C, e)$  :

Diagrammatic equation: A cylinder with edges  $a$  (top),  $c$  (bottom),  $e$  (left), and  $b$  (right) is subtracted by a cylinder with edges  $a$  (top),  $c$  (bottom),  $e$  (left), and  $b$  (right) where the top and bottom edges are crossed. This is subtracted by a cylinder with edges  $a$  (top),  $c$  (bottom),  $e$  (left), and  $b$  (right) where the left and right edges are crossed. The result is zero.

ce qui donne, après avoir appliqué  $AS$  aux deux derniers graphes de l'égalité précédente :

$$(\Gamma_C, e) + (\Gamma_T, e') - (\Gamma_T, e') = 0.$$

Appliquons enfin la relation  $IHX$  à  $(\Gamma_L, e)$ , où  $(\Gamma_L, e)$  est identifié au second terme de la relation  $IHX$  :

$$\text{Diagram 1} - \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} = 0$$

ce qui, avec la relation  $AS$ , conduit à la relation :

$$(\Gamma_{2B}, e) - (\Gamma_L, e) - (\Gamma_{2B}, e) = 0$$

et cela termine la démonstration du lemme 2.3.

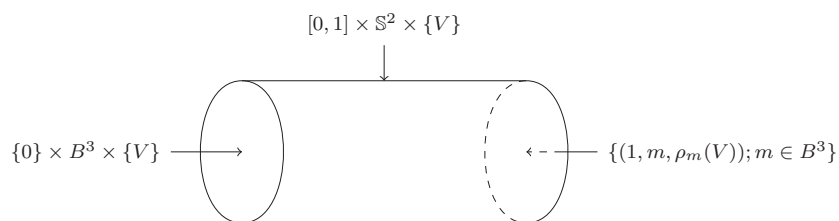
□

## 4 La chaîne $G_V$

Le but de ce chapitre est de démontrer le lemme 2.11 en détaillant la construction des chaînes  $G_V$  et en démontrant la proposition 4.7 .

Ecrivons  $B^3$  comme la boule de rayon  $2\pi$ . On peut alors écrire un point  $m \in B^3$  sous la forme  $m = \theta u$  où  $\theta \in [0, 2\pi]$  et  $u \in \mathbb{S}^2$ . Pour  $m = \theta u$ , on définit l'application  $\rho_m : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  où  $\rho_m(V)$  désigne l'image du vecteur  $V$  par la rotation d'angle  $\theta$  et d'axe  $u$ . La variété  $B^3$  hérite de l'orientation de  $\mathbb{R}^3$ , et  $\mathbb{S}^2$  est orientée comme la variété bord de  $B^3$  avec la convention "normale extérieure premier vecteur". Rappelons que toutes les variétés bords sont par ailleurs orientées par cette convention. Soit  $V \in \mathbb{S}^2$ , dans l'espace  $[0, 1] \times B^3 \times \mathbb{S}^2$  on pose

$$\partial_V = -\{0\} \times B^3 \times \{V\} + \{(1, m, \rho_m(V)); m \in B^3\} - [0, 1] \times \mathbb{S}^2 \times \{V\}.$$

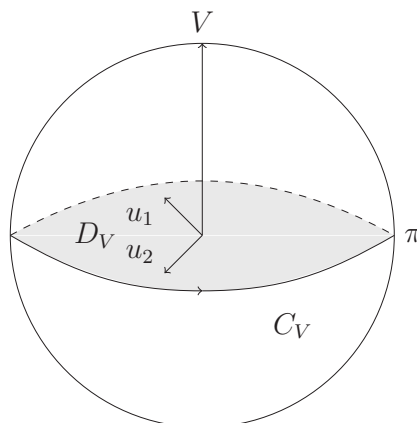


Nous allons définir dans la proposition 4.7 une 4 chaîne  $G_V$  dans  $[0, 1] \times B^3 \times \mathbb{S}^2$  telle que  $\partial G_V = \partial_V$ .

### 4.1 L'éclaté $Bl(B^3, C_V)$

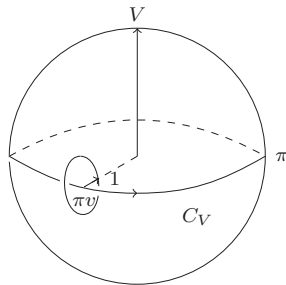
**Définition 4.1** On définit  $D_V = \{\theta u; \theta \in [0, \pi], u \in \mathbb{S}^2, u \perp V\}$  et on pose  $C_V = \partial D_V$ .

On oriente  $D_V$  de sorte que  $V \times D_V$  oriente  $B^3$  et  $C_V$  est orienté comme bord de  $D_V$ .



**Notation 4.2** On note  $SN_{B^3}(C_V)$  le fibré unitaire normal de  $C_V$  dans  $B^3$ , ce fibré est orienté comme bord d'un voisinage tubulaire de  $C_V$ .

Ce fibré a pour fibre  $\mathbb{S}^1$ . Notons la section  $u : C_V \rightarrow SN_{B^3}(C_V)$  telle que pour  $m = \pi v \in C_V$ ,  $u(m)$  est égale au vecteur tangent à  $D_V$  rentrant dans  $D_V$ . On peut alors écrire  $SN_{B^3}(C_V) = \mathbb{S}^1 \times C_V$  où  $(1, \pi v)$  est la section qu'on vient de définir.

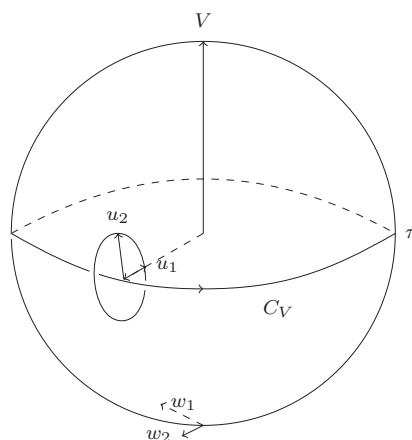


Soit  $\phi_V : B^3 \rightarrow \mathbb{S}^2; m \mapsto \rho_m(V)$ . On a  $\phi_V^{-1}(-V) := \{m \in B^3; \rho_m(V) = -V\}$  et cet ensemble hérite de la co-orientation induite par  $\phi_V$ .

**Lemme 4.3** On a  $C_V = -\phi_V^{-1}(-V)$ .

PREUVE: Ensemblistement, on a bien l'égalité. Il reste à voir que les orientations sont contraires. L'ensemble  $\{m \in B^3; \rho_m(V) = -V\}$  est co-orienté par le fibré normal de  $-V$  qui est l'espace tangent  $T_{-V}\mathbb{S}^2$ . On sait que  $N_{B^3}(C_V) = D^2 \times C_V$  où  $D_2$  est la fibre du fibré normal à  $C_V$ , qu'on oriente par une base  $(u_1, u_2)$ . La base image  $(w_1, w_2)$  par l'application tangente  $D\phi$  est dessinée sur la figure ci-dessous. Alors  $(N_{ext}, w_1, w_2)$  est indirecte ce qui conclut la preuve du lemme.

□

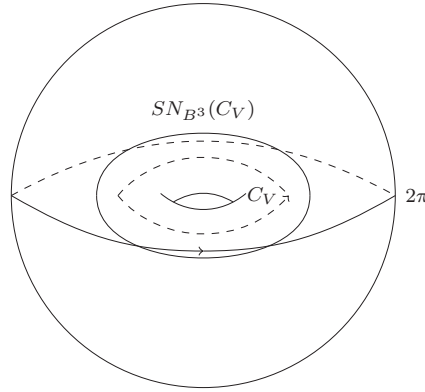


On définit l'éclaté  $Bl(B^3, C_V)$  comme suit : en tant qu'ensemble, il est obtenu en remplaçant  $C_V$  dans  $B^3$  par son fibré normal unitaire  $SN_{B^3}(C_V)$ . Sa structure lisse est obtenue en remplaçant dans le fibré normal  $N_{B^3}(C_V) = D^2 \times C_V = (\{0\} \cup ]0, 1] \times \mathbb{S}^1) \times C_V$ , l'ensemble  $C_V = \{0\} \times C_V$  par  $SN_{B^3}(C_V) = \{0\} \times \mathbb{S}^1 \times C_V$ . La projection canonique induit une projection lisse. Une carte au voisinage de  $SN_{B^3}(C_V)$  est de la forme  $[0, 1] \times \mathbb{S}^1 \times C_V$ .

**Lemme 4.4** *On a*

$$\partial Bl(B^3, C_V) = \mathbb{S}^2 - \mathbb{S}^1 \times C_V.$$

PREUVE: Avec nos orientations,  $\mathbb{S}^1 \times C_V$  est orienté comme bord d'un voisinage tubulaire, qui est l'opposé du bord de  $Bl(B^3, C_V)$ .



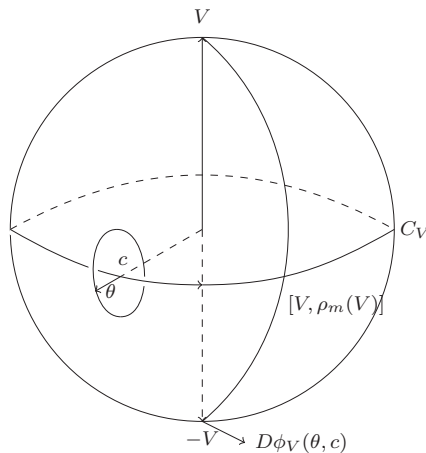
□

**Notation 4.5** *Pour  $X$  et  $Y$  deux vecteurs de  $\mathbb{S}^2$ , non proportionnels, on note  $[X, Y]$  l'unique géodésique de longueur minimale reliant  $X$  à  $Y$ , et orientée de  $X$  vers  $Y$ .*

**Lemme 4.6** *Il existe une unique application continue  $H_V : [0, 1] \times Bl(B^3, C_V) \rightarrow \mathbb{S}^2$  telle que*

- $\forall m \in Bl(B^3, C_V), H_V(0, m) = V$
- $\forall m \in Bl(B^3, C_V), H_V(1, m) = \rho_{p(m)}(V)$
- $\forall m \in B^3 \setminus C_V, \{H_V(t, m); t \in [0, 1]\} = [V, \rho_m(V)]$  et  $d(V, H_V(t, m)) = td(V, \rho_m(V))$ .

PREUVE: Pour  $m \in B^3 \setminus C_V$ , on définit  $H_V(t, m) \in [V, \rho_m(V)]$  tel que  $d(V, H_V(t, m)) = td(V, \rho_m(V))$ . D'après la démonstration du lemme 4.3, l'application  $D\phi_V$  fournit un isomorphisme qui renverse l'orientation entre la fibre  $\mathbb{S} \times m$  de  $SN_{B^3}(C_V)$  et  $ST_{-V}(\mathbb{S}^2)$ . On considère la carte  $[0, 1] \times \mathbb{S}^1 \times C_V$  au voisinage de  $SN_{B^3}(C_V)$  dans  $Bl(B^3, C_V)$ . Soit une suite  $m_n \in N_{B^3}(C_V)$  que l'on écrit sous la forme  $m_n = (u_n, \theta_n, c_n)$ , qui converge dans  $Bl(B^3, C_V)$  vers  $m_\theta = (0, \theta, c) \in SN_{B^3}(C_V)$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $H_V(t, m_n) \in [V, \rho_{m_n}(V)]$  a un sens. La géodésique  $[V, \rho_{m_n}(V)]$  converge vers  $[V, -V]_\theta$  qui est la géodésique de longueur  $\pi$  reliant  $V$  à  $\rho_m(V) = -V$ , et dont la tangente sortante en  $-V$  est  $D\phi_V(-\theta)$ . On définit alors  $H_V(t, m)$  comme le point de  $[V, -V]_\theta$  tel que  $d(V, H_V(t, m)) = td(V, \rho_m(V)) = t\pi$ .



□

## 4.2 Construction de $G_V$

Soit  $t \in [0, 1]$ . On pose

$$G_{0,V}(t) = [0, t] \times B^3 \times \{V\}$$

$$G_{1,V}(t) = \{(u, m, \rho_m(V)); u \in [t, 1], m \in B^3\}.$$

$G_{0,V}(t)$  et  $G_{1,V}(t)$  sont clairement des 4-chaînes. On pose alors :

$$G_{2,V}(t) = \{(t, p(m), H_V(u, m)); u \in [0, 1], m \in Bl(B^3, C_V)\}$$

$$G_{3,V}(t) = \{t\} \times D_V \times \mathbb{S}^2$$

$$G_{H,V}(t) = G_{2,V} - G_{3,V}.$$

Enfin, on pose

$$G_V(t) = G_{0,V}(t) + G_{H,V}(t) + G_{1,V}(t).$$

**Proposition 4.7** *Pour tout  $t \in [0, 1]$ , la 4-chaîne  $G_V(t)$  vérifie le problème posé, c'est à dire  $\partial G_V(t) = \partial_V$ .*

PREUVE: Calculons successivement les bords des morceaux constituant  $G_V(t)$ . On a

$$\partial G_{0,V}(t) = t \times B^3 \times V - 0 \times B^3 \times V - [0, t] \times \mathbb{S}^2 \times V$$

$$\partial G_{1,V}(t) = \{(1, m, \rho_m(V)); m \in B^3\} - \{(t, m, \rho_m(V)); m \in B^3\} - [t, 1] \times \mathbb{S}^2 \times V,$$

puis

$$\partial G_{3,V}(t) = t \times C_V \times \mathbb{S}^2,$$

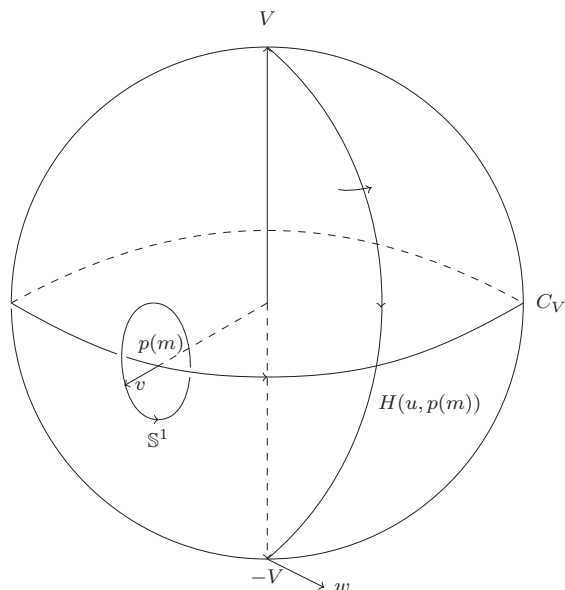
$$\begin{aligned} \partial G_{2,V}(t) = & -\{(t, p(m), H_V(u, m)); u \in [0, 1], m \in \partial Bl(B^3, C_V)\} \\ & +\{(t, p(m), H_V(1, m)); m \in Bl(B^3, C_V)\} \\ & -\{(t, p(m), H_V(0, m)); m \in Bl(B^3, C_V)\}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \partial G_{2,V}(t) = & -\{(t, p(m), H_V(u, m)); u \in [0, 1], m \in \mathbb{S}^2\} \\ & +\{(t, p(m), H_V(u, m)); u \in [0, 1], m \in \mathbb{S}^1 \times C_V\} \\ & +\{(t, m, \rho_m(V)); m \in B^3\} \\ & -\{(t, m, V); m \in B^3\}. \end{aligned}$$

**Lemme 4.8** On a  $\{(t, p(m), H_V(u, m)); u \in [0, 1], m \in \mathbb{S}^1 \times C_V\} = +t \times C_V \times \mathbb{S}^2$ .

PREUVE: Fixons  $p(m)$  et  $m$  qui s'écrit  $m = (v, p(m))$  pour une direction  $v \in \mathbb{S}^1$ . L'ensemble  $\{H(u, m); u \in [0, 1]\}$  est un demi grand cercle de  $V$  à  $-V$ .



Lorsque l'on tourne autour du cercle  $\mathbb{S}^1$  noté sur la figure précédente, les demis grands cercles tournent autour de l'axe de  $-V$  à  $V$ , dans le sens noté sur le dessin d'après la démonstration du lemme 4.3.

□

On a alors

$$\begin{aligned} \partial G_{2,V}(t) = & -t \times \mathbb{S}^2 \times V \\ & +t \times C_V \times \mathbb{S}^2 \\ & +\{(t, m, \rho_m(V)); m \in B^3\} \\ & -t \times B^3 \times V. \end{aligned}$$



On peut alors négliger le morceau  $t \times \mathbb{S}^2 \times V$  qui est de codimension 2 et donc

$$\partial G_{H,V}(t) = \{(t, m, \rho_m(V)); m \in B^3\} - t \times B^3 \times V.$$

Finalement,

$$\partial G_V(t) = -0 \times B^3 \times V - [0, 1] \times \mathbb{S}^2 \times V + \{(1, m, \rho_m(V)), m \in B^3\}.$$

□

## 5 Définition de $I$

On détaille dans cette section des arguments de transversalité. On montre aussi que la définition donnée de l'anomalie est cohérente et que les chaînes  $G_{V_i}$  choisies pourraient être changées en des chaînes de même bord. Les résultats de ce chapitre peuvent être vus comme des corollaires de résultats plus généraux comme expliqué dans l'introduction.

### 5.1 Introduction

On rappelle en introduction les notations et objectifs de la section 2.3. On rappelle que  $C_{V(\Gamma)}(\mathbb{R}^3) := \{c : V(\Gamma) \hookrightarrow \mathbb{R}^3\}$  désigne l'espace des configurations de  $V(\Gamma)$  dans  $\mathbb{R}^3$ . On désigne par  $\tilde{C}_{V(\Gamma)}(\mathbb{R}^3) := C_{V(\Gamma)}(\mathbb{R}^3)/\mathcal{H}$  le quotient de l'espace de configurations par les translations et les homothéties de rapport positif. On oriente  $\tilde{C}_{V(\Gamma)}$  de sorte que le difféomorphisme  $f : C_{V(\Gamma)}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}^3 \times ]0, +\infty[ \times \tilde{C}_{V(\Gamma)}$  défini par

$$f(c) = (c(x_0), \|(c - c(x_0))\|, \bar{c})$$

soit un difféomorphisme qui préserve l'orientation.

On rappelle le cas particulier suivant du théorème 2.6.

**Théorème 5.1** *Il existe une variété lisse à coins, compacte, bien définie  $C_{V(\Gamma)}$  dont l'intérieur est canoniquement difféomorphe à  $\tilde{C}_{V(\Gamma)}(\mathbb{R}^3)$ . Cette variété  $C_{V(\Gamma)}$  est de dimension 14*

On note les éléments de l'intérieur de  $C_{V(\Gamma)}$  par un 6-uplet  $(O, B, C, D, E, F)$  de  $(\mathbb{R}^3)^6$ . Soit  $\Gamma \in D_3^{or}$ . On numérote arbitrairement les sommets de  $\Gamma$  dans  $\{O, B, C, D, E, F\}$ . On note cette numérotation  $n_\Gamma$  et on note  $C_{14} = C_{V(\Gamma)}$ . On note  $e(\Gamma, i)$  l'arête de  $\Gamma$  portant l'indice  $i$  :

$N \xrightarrow{i} M$ . On définit alors  $\pi_{e(\Gamma, i)} : C_{14} \rightarrow \mathbb{S}^2$  par

$$\pi_{e(\Gamma, i)} = \pi_{NM}$$

où  $\pi_{NM}$  est l'application définie au théorème 2.6. Cette application dépend de la numérotation arbitraire choisie des sommets mais on oublie volontairement de le préciser dans la notation pour ne pas alourdir les notations. On obtient alors 9 applications  $(\pi_{e(\Gamma, i)})$ . On étend ces applications en

$$\forall i \in \{1, \dots, 9\}, \pi_{e(\Gamma, i)} : [0, 1] \times B^3 \times C_{14} \rightarrow [0, 1] \times B^3 \times \mathbb{S}^2$$

par

$$\pi_{e(\Gamma, i)} = id_{[0, 1] \times B^3} \times \pi_{e(\Gamma, i)}.$$

Fixons  $(t_i)_{i \in \underline{9}} \in [0, 1]^9$  tel que  $0 < t_1 < \dots < t_9 < 1$ . Pour tout  $(V_i)_{i \in \underline{9}} \in (\mathbb{S}^2)^9$ , on pose  $G_{V_i} = G_{V_i}(t_i)$ . Alors pour tout  $i \in \underline{9}$ ,  $\pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(G_{V_i})$  est une chaîne de codimension 2 dans  $[0, 1] \times B^3 \times C_{14}$ . On montre dans cette section la proposition suivante :

**Proposition 5.2** *Il existe un ensemble  $\mathfrak{A}$  ouvert et dense de  $(\mathbb{S}^2)^9$  tel que pour tout  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}$ , pour tout graphe  $\Gamma \in D_{or}^3$ , les chaînes  $\pi_{e(\Gamma,i)}^{-1}(G_{V_i})$  sont transverses deux à deux sur les intersections  $\bigcap_{i=1}^9 \pi_{e(\Gamma,i)}^{-1}(G_{V_i})$ . Pour  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}$ , l'intersection  $\bigcap_{i=1}^9 \pi_{e(\Gamma,i)}^{-1}(G_{V_i})$  est un ensemble de points avec des signes induits par les co-orientations des  $\pi_{e(\Gamma,i)}^{-1}(G_{V_i})$  et l'orientation de  $C^{14}$  induite par la numérotation  $n_\Gamma$  des sommets. On note alors  $I_{\Gamma, n_\Gamma}(G_{V_1}, \dots, G_{V_9})$  la somme de ces signes. De plus, pour tout  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}$ , on a*

$$\bigcap_{i=1}^9 \pi_{e(\Gamma,i)}^{-1}(G_{V_i}) \subset \bigcup_{h=1}^9 \left( \bigcap_{i=1}^9 \pi_{e(\Gamma,i)}^{-1}(G_{V_i})|_{t=t_h} \right).$$

## 5.2 Existence

Pour que  $I_\Gamma$  soit bien défini, il faut que les chaînes  $G_{V_i}$  soient transverses. Dans cette partie, nous allons définir plusieurs ensembles  $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n$  qui sont des ouverts denses de  $(\mathbb{S}^2)^9$ . L'intersection  $\mathfrak{A} = \bigcap \mathfrak{A}_i$  désignera l'ensemble des vecteurs admissibles, et sera donc un ouvert dense. Ces vecteurs *admissibles* vérifieront donc plusieurs propriétés de transversalité nécessaires à la définition de  $I$  et aussi des propriétés de simplification du calcul de  $I$ . On commence par énoncer et démontrer un lemme générique. Une valeur régulière d'une application différentiable est une valeur en laquelle la différentielle de  $f$  est surjective en tout point de la préimage. On démontre le lemme classique suivant.

**Lemme 5.3** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application lisse, avec  $X$  compacte. Alors, l'ensemble des valeurs régulières de  $f$ , noté  $Reg(f)$ , forme un ensemble ouvert et dense de  $Y$ . De plus, si  $dim(X) < dim(Y)$  alors le complémentaire de  $f(X)$  est un ensemble ouvert et dense de  $Y$ .*

PREUVE: Supposons  $dim(X) < dim(Y)$ . D'après le théorème de Sard [Hir94, Chapitre 3 théorème 1.3], l'ensemble des valeurs régulières pour  $f$  est un ensemble dense. Comme  $dim(X) < dim(Y)$  aucune valeur de  $f(X)$  ne peut être régulière car en aucune valeur, la différentielle ne peut être surjective. Le complémentaire de  $f(X)$ , qui est l'ensemble des valeurs régulières, est alors dense. Comme  $f$  est supposée lisse, elle est en particulier continue. Comme  $X$  est compacte, l'image  $f(X)$  est compacte, et son complémentaire est donc ouvert.

Supposons maintenant  $dim(X) \geq dim(Y)$ . Le théorème de Sard affirme que l'ensemble  $Reg(f)$  des valeurs régulières de  $f$  forme un ensemble dense dans  $Y$ . Il reste à montrer qu'il est aussi ouvert.

Soit  $Z$  une variété. Un ouvert  $W$  est dit *trivialisé* s'il existe un difféomorphisme  $\phi : W \rightarrow \phi(W) \subset \mathbb{R}^{dim(Z)}$ . Soient  $f : Z \rightarrow Z'$  une application différentiable et deux ouverts  $W \subset Z$  et  $W' \subset Z'$  trivialisés, tels que  $f(W) \subset W'$ . Alors on peut définir la matrice jacobienne  $J_{W,W'}$  de  $f$  relativement aux ouverts trivialisés  $W$  et  $W'$ , comme la matrice jacobienne de l'application

tangente de  $f$ , par rapport aux cartes  $(W, \phi)$  et  $(W', \phi')$ .

Soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de la variété  $X$  tel qu'il existe, pour tout  $i \in I$ , un compact  $V_i$  et un ouvert trivialisé  $W_i$  tels que  $U_i \subset V_i \subset W_i$  et  $f(W_i) \subset W'_i$ , ouvert trivialisé de  $Y$ . Comme  $X$  est compacte, on peut choisir  $I$  fini.

Notons  $n = \dim(Y)$ . Soit  $x \in V_i \subset W_i$  l'application tangente est surjective s'il existe un mineur  $n \times n$  extrait de la matrice jacobienne  $J_{V_i}(f)(x)$  non nul. Donc un point est critique si tous les mineurs  $n \times n$  extraits de  $J_{V_i}(f)(x)$  sont nuls et cela ne dépend pas de la carte  $W_i$  choisie. Sur le compact  $V_i$  trivialisant on peut écrire  $\Delta_{V_i,1}(x), \dots, \Delta_{V_i,k}(x)$  tous les mineurs  $n \times n$  extraits de  $J_{V_i}(f)(x)$ . Comme  $f$  est supposée lisse, chaque mineur  $\Delta_{V_i,k}$  est continu en  $x$  et par conséquent,  $\Delta_{V_i,k}^{-1}(\{0\})$  est un fermé dans  $V_i$  compact, donc est compact. L'ensemble  $\bigcap_k \Delta_{V_i,k}^{-1}(\{0\})$  est donc une intersection de compacts donc est compact, et correspond à l'ensemble des points critiques de  $f$  sur le compact  $V_i$ . Par conséquent  $K = \bigcup_i \bigcap_k \Delta_{V_i,k}^{-1}(\{0\})$  est un compact de  $X$  et correspond à l'ensemble des points critiques de  $f$ . Par conséquent, l'ensemble  $f(K)$  des valeurs critiques est compact car c'est l'image continue d'un compact. Finalement, l'ensemble des valeurs régulières étant le complémentaire de l'ensemble des valeurs critiques, cet ensemble est donc ouvert.

□

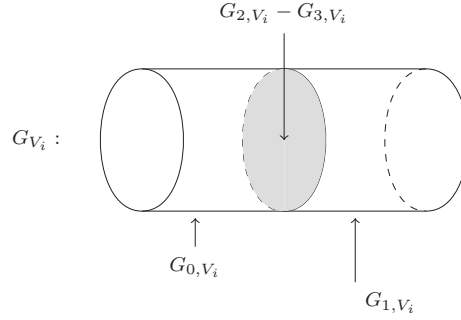
### Etape 1 : Rappel des chaînes et définition des applications

Commençons par rappeler que (on oublie volontairement la dépendance en  $t_i$  fixé dans  $[0, 1]$ )

$$G_{V_i} = G_{0,V_i} + G_{2,V_i} - G_{3,V_i} + G_{1,V_i}$$

avec :

$$\begin{aligned} G_{0,V_i} &= [0, t_i] \times B^3 \times \{V_i\} \\ G_{1,V_i} &= \{(t, m, \rho_m(V_i)); t \in [t_i, 1], m \in B^3\} \\ G_{2,V_i} &= \{(t_i, p(m), H_{V_i}(u, m)); u \in [0, 1], m \in Bl(B^3, C_{V_i})\} \\ G_{3,V_i} &= \{t_i\} \times D_{V_i} \times \mathbb{S}^2. \end{aligned}$$



Et on a  $\partial G_{V_i} = \partial_{V_i} = -0 \times B^3 \times V_i - [0, 1] \times \mathbb{S}^2 \times V_i + \{(1, m, \rho_m(V_i)), m \in B^3\}$ . On rappelle enfin que

$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_9 < 1.$$

Notons  $\mathcal{S} := \{O, B, C, D, E, F\}$  et  $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}$  l'ensemble des paires ordonnées de  $\mathcal{S}$ . Une arête  $e$  d'un graphe numéroté  $\Gamma$  peut être considérée comme un élément de  $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}$ . On note  $\underline{k} := \{1, \dots, k\}$ . La donnée des 9 arêtes de  $(\Gamma, n_{\Gamma})$  peut être traduite par une application  $f : \underline{9} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{S}}$  telle que  $f(i) = e(\Gamma, i)$ . On alternera dans cette section les deux points de vue. Rappelons qu'une arête  $e$  fournit une application  $\pi_e : C^{14} \rightarrow \mathbb{S}^2$ . On introduit alors les deux applications suivantes :

$$\pi_e^1 : \begin{cases} B^3 \times C^{14} & \longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ (m, c) & \longmapsto \rho_m^{-1}(\pi_e(c)) \end{cases} \quad \pi_e^0 : \begin{cases} B^3 \times C^{14} & \longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ (m, c) & \longmapsto \pi_e(c) \end{cases}.$$

De manière générale, pour  $f : \underline{k} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{S}}$  on pose

$$\pi_f : \begin{cases} C^{14} & \longrightarrow (\mathbb{S}^2)^{\underline{k}} \\ c & \longmapsto (\pi_{f(i)}(c))_{i \in \underline{k}} \end{cases}.$$

Etape 2a : Pas d'intersection au dessus du bord de  $[0, 1] \times B^3$ .

**Lemme 5.4** *Il existe un ensemble  $\mathfrak{A}_{2a}$  ouvert et dense de  $(\mathbb{S}^2)^{\underline{9}}$  tel que pour tout  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}_{2a}$ , pour tout  $\{i_1, \dots, i_8\} \subset \underline{9}$  et pour tout  $(\Gamma, n_{\Gamma})$ , on a*

$$\pi_{e(\Gamma, i_1)}^{-1}(G_{V_{i_1}}) \cap \dots \cap \pi_{e(\Gamma, i_8)}^{-1}(G_{V_{i_8}}) \cap (\partial([0, 1] \times B^3) \times C^{14}) = \emptyset.$$

PREUVE: Soit  $f : \underline{9} \setminus \underline{1} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{S}}$ , alors  $\pi_f$  est une application lisse, avec  $\dim(C^{14}) < \dim((\mathbb{S}^2)^{\underline{9} \setminus \underline{1}})$ . D'après le lemme 5.3 le complémentaire de l'image de cette application est un ensemble ouvert et dense, qu'on note  $\tilde{\mathcal{U}}_{1,f}^{2a}$ . On pose ensuite

$$\mathcal{U}_1^{2a} := \mathbb{S}^2 \times \bigcap_f \tilde{\mathcal{U}}_{1,f}^{2a}.$$

On définit ensuite  $\sigma_{1i}$  la permutation de  $(\mathbb{S}^2)^9$  qui échange le facteur 1 et le facteur  $i$  dans le 9-uplet  $(u_1, \dots, u_9)$ . On pose alors  $\mathcal{U}_i^{2a} := \sigma_{1i}(\mathcal{U}_1^{2a})$  et

$$\mathfrak{A}_{2a} = \mathcal{U}_1^{2a} \bigcap \dots \bigcap \mathcal{U}_9^{2a}.$$

Par construction,  $\mathfrak{A}_{2a}$  est un ensemble ouvert et dense, car c'est une intersection finie d'ensembles ouverts et denses. On montre qu'il n'y a pas d'intersection au dessus du bord de  $[0, 1] \times B^3$ . Supposons par l'absurde que  $(t, m, c) \in \pi_{e(\Gamma, i_1)}^{-1}(G_{V_{i_1}}) \cap \dots \cap \pi_{e(\Gamma, i_8)}^{-1}(G_{V_{i_8}}) \cap (\partial([0, 1] \times B^3) \times C^{14})$ . Alors pour tout  $j \in \underline{8}$ ,  $\pi_{e(\Gamma, i_j)}(t, m, c) \in G_{V_{i_j}}$  et  $(t, m) \in \partial([0, 1] \times B^3)$ .

Si  $t = 0$  ou  $m \in \partial B^3 = \mathbb{S}^2$  alors pour tout  $j \in \underline{8}$  on a

$$V_{i_j} = p_{S^2} \circ \pi_{e(\Gamma, i_j)}(t, m, c) = \pi_{e(\Gamma, i_j)}(c) = \pi_{f(i_j)}(c).$$

Donc  $(V_{i_1}, \dots, V_{i_8}) \in \text{Im}(\pi_f)$ , ce qui contredit l'hypothèse.

Si  $t = 1$  alors pour tout  $j \in \underline{8}$  on a  $\pi_{e(\Gamma, i_j)}(t, m, c) = \pi_{e(\Gamma, i_j)}(c) = \rho_m(V_{i_j})$ . Donc  $V_{i_j} = \pi_{e(\Gamma, i_j)}(\rho_m^{-1}(c))$ . Alors  $(V_{i_1}, \dots, V_{i_8}) \in \text{Im}(\pi_f)$ , ce qui contredit l'hypothèse.

□

Etape 2b : Pas d'intersection en dehors des temps d'homotopie.

Soient deux applications  $f : \underline{k} \rightarrow \mathcal{P}_S$  et  $g : \underline{k} \rightarrow \{0, 1\}$ , on pose

$$F_{\underline{k}}(f, g) : \begin{cases} B^3 \times C^{14} & \longrightarrow & (\mathbb{S}^2)^{\underline{k}} \\ (m, c) & \longmapsto & (\pi_{f(i)}^{g(i)}(m, c))_{i \in \underline{k}} = (\rho_m^{-g(i)}(\pi_{f(i)}(c)))_{i \in \underline{k}} \end{cases}.$$

Le lemme suivant montre que les fonctions  $F_{\underline{k}}(f, g)$  paramètrent les intersections des chaînes  $\pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(G_{V_i})$ .

**Lemme 5.5** *Soient  $\Gamma \in D_{or}^3$  et  $t \in ]0, 1[ \setminus \{t_1, \dots, t_9\}$ . On choisit l'application  $f : \underline{9} \rightarrow \mathcal{P}_S$  correspondant à  $\Gamma$ . On définit  $g : \underline{k} \rightarrow \underline{2}$  par  $g(i) = 1$  si  $t_i < t$  et  $g(i) = 0$  sinon. Alors pour tout  $k \in \underline{9}$  et  $(V_1, \dots, V_9) \in (\mathbb{S}^2)^{\underline{9}}$  on a :*

$$\{t\} \times F_{\underline{k}}^{-1}(f_{\underline{k}}, g_{\underline{k}})(V_1, \dots, V_9) = \bigcap_{i \in \underline{k}} \pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(G_{V_i}) \cap \{t\} \times B^3 \times C^{14}.$$

PREUVE: Soit  $(m, c) \in F_{\underline{k}}^{-1}(f_{\underline{k}}, g_{\underline{k}})(V_1, \dots, V_9)$ . Pour tout  $i \in \underline{k}$ , si  $t_i < t$  alors

$$\begin{aligned} \pi_{f(i)}^{g(i)}(m, c) &= \pi_{e(\Gamma, i)}^1(m, c) = \rho_m^{-1}(\pi_{e(\Gamma, i)}(c)) = V_i \\ \iff \pi_{e(\Gamma, i)}(c) &= \rho_m(V_i) \iff (t, m, c) \in \pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(G_{1, V_i}). \end{aligned}$$

De la même manière, si  $t_i > t$  alors

$$\pi_{f(i)}^{g(i)}(m, c) = \pi_{e(\Gamma, i)}^0(m, c) = \pi_{e(\Gamma, i)}(c) = V_i \iff (t, m, c) \in \pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(G_{0, V_i}).$$

□

On choisit  $k = 9$ , alors  $F_{\underline{9}}(f, g) : B^3 \times C^{14} \rightarrow (\mathbb{S}^2)^{\underline{9}}$  est une application  $C^\infty$  avec  $\dim(B^3 \times C^{14}) < \dim((\mathbb{S}^2)^{\underline{9}})$ . D'après le lemme 5.3, le complémentaire  $\mathcal{O}_{f,g}^1$  de l'image de  $F_{\underline{9}}(f, g)$  est alors ouvert et dense. Alors  $\mathfrak{A}_{2b} := \bigcap_{f,g} \mathcal{O}_{f,g}^1$  est une intersection finie d'ouverts denses, donc est un ouvert dense de  $(\mathbb{S}^2)^{\underline{9}}$ . On a alors le lemme suivant :

**Lemme 5.6** *Soit  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}_{2b}$ , alors pour tout  $t \notin \{t_i\}_{i \in \underline{9}}$  et pour tout graphe  $\Gamma$ , on a  $\bigcap_{i=1}^9 \pi_{e(\Gamma,i)}^{-1}(GV_i)_{|\{t\}} = \emptyset$ .*

PREUVE: En effet, si  $(t, m, c) \in \bigcap_{i=1}^9 \pi_{e(\Gamma,i)}^{-1}(GV_i)$  alors, pour tout  $i \in \underline{9}$  on a  $\pi_{e(\Gamma,i)}(t, m, c) \in GV_i \setminus (G_{2,V_i} \cup G_{3,V_i})$ . Ce qu'on peut écrire :

Pour  $t_i < t$  alors  $\pi_{e(\Gamma,i)}(t, m, c) = \rho_m(V_i) \Leftrightarrow V_i = \rho_m^{-1}(\pi_{e(\Gamma,i)}(t, m, c))$ .

Pour  $t_i > t$  alors  $\pi_{e(\Gamma,i)}(t, m, c) = V_i \Leftrightarrow V_i = \pi_{e(\Gamma,i)}(t, m, c)$ . On définit  $g_0(i) = 1$  si  $t_i < t$  et  $g_0(i) = 0$  sinon. Si  $f_0$  représente  $\Gamma$ , alors  $(V_1, \dots, V_9) \in \text{Im} F_{\underline{9}}(f_0, g_0)$ , donc  $(V_1, \dots, V_9) \notin \mathfrak{A}_{2b}$  ce qui contredit l'hypothèse.

□

Etape 3 : au temps de l'homotopie, transversalité sur les sous-graphes.

Soient  $k \leq 8$  et  $t = t_p$ . Soit  $E_k$  un sous-ensemble de  $\underline{9}$  à  $k$  éléments. Pour  $f : E_k \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{S}}$  et  $g : E_k \rightarrow \{0, 1\}$ , on définit l'application

$$F_{E_k}(f, g) : \begin{cases} B^3 \times C^{14} & \longrightarrow & (\mathbb{S}^2)^{E_k} \\ (m, c) & \longmapsto & (\pi_{f(i)}^{g(i)}(m, c))_{i \in E_k} \end{cases}$$

et  $\tilde{F}_{E_k}(f, g) : B^3 \times C^{14} \times (\mathbb{S}^2)^{\underline{9} \setminus E_k} \rightarrow (\mathbb{S}^2)^{E_k} \times (\mathbb{S}^2)^{\underline{9} \setminus E_k}$  par  $\tilde{F}_{E_k}(f, g) = F_{E_k}(f, g) \times id$ . Les valeurs régulières de  $\tilde{F}_{E_k}(f, g)$  forment un ensemble ouvert et dense de  $(\mathbb{S}^2)^{\underline{9}}$  et  $\mathcal{O}_{E_k}^3 = \bigcap_{f,g} \text{Reg}(\tilde{F}_{E_k}(f, g))$  est alors un ensemble ouvert et dense de  $(\mathbb{S}^2)^{\underline{9}}$ . On pose enfin

$$\mathcal{U}_k^3 = \bigcap_{E_k} \mathcal{O}_{E_k}^3.$$

**Lemme 5.7** *On fixe  $k \leq 8$ . Soient  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathcal{U}_k^3$  et  $\Gamma \in D_{or}^3$ . Pour  $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \underline{9}$  et pour tout  $p \in \underline{9} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$  les chaînes  $\pi_{\Gamma, i_1}^{-1}(GV_{i_1}), \dots, \pi_{\Gamma, i_k}^{-1}(GV_{i_k})$  s'intersectent transversalement sur  $\{t_p\} \times B^3 \times C^{14}$ .*

PREUVE: Le lemme découle directement de la construction de  $\mathcal{U}_k^3$  en posant  $E_k = \{i_1, \dots, i_k\}$  et  $(f_0, g_0)$  qui correspond au couple  $(\Gamma, t_p)$  (d'après le lemme 5.5).

□

Enfin, on pose

$$\mathfrak{A}_3 = \bigcap_{k=1}^9 \mathcal{U}_k^3.$$

**Lemme 5.8** *Soient  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}_3$  et  $\Gamma \in D_{or}^3$ . Alors pour tout  $k \leq 8$ , pour tout  $k$ -uplet  $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \underline{9}$  et pour tout  $p \in \underline{9} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$  les chaînes  $\pi_{\Gamma, i_1}^{-1}(G_{V_{i_1}}), \dots, \pi_{\Gamma, i_k}^{-1}(G_{V_{i_k}})$  s'intersectent transversalement sur  $\{t_p\} \times B^3 \times C^{14}$ .*

□

Etape 4 : Première partie de l'homotopie.

**Proposition 5.9** *Il existe deux ensembles  $\mathfrak{A}_{4a}$  et  $\mathfrak{A}_{4b}$  ouverts et denses de  $(\mathbb{S}^2)^{\underline{9}}$  tels que pour tout  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}_{4a}$  et pour tout  $j \in \underline{9}$*

$$\bigcap_{i \neq j} \pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(G_{V_i}) \cap \pi_{e(\Gamma, j)}^{-1}(\partial G_{3, V_j}) = \emptyset$$

*et pour tout  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}_{4a} \cap \mathfrak{A}_{4b}$  l'intersection  $\bigcap_{i \neq j} \pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(G_{V_i}) \cap \pi_{e(\Gamma, j)}^{-1}(G_{3, V_j})$  est transverse.*

PREUVE: Rappelons que  $G_{3, V_j} = \{t_j\} \times D_{V_j} \times \mathbb{S}^2$  et  $C_{V_i} = \partial D_{V_i} = \{m \in B^3; \rho_m(V_i) = -V_i\}$ . On commence par trouver un ensemble  $\mathfrak{A}_{4a}$  de vecteurs de  $(\mathbb{S}^2)^{\underline{9}}$  pour lesquels il n'y a pas d'intersection avec le bord  $\partial G_{3, V_j} = \{t_j\} \times C_{V_j} \times \mathbb{S}^2$ . Fixons  $j = 1$  et soit  $V_1 \in \mathbb{S}^2$ , on note

$$F_{\underline{9} \setminus \underline{1}}^{(1)}(f, g, V_1) : \begin{cases} C_{V_1} \times C^{14} & \longrightarrow (\mathbb{S}^2)^{\underline{9} \setminus \underline{1}} \\ (m, c) & \longmapsto F_{\underline{9} \setminus \underline{1}}(f, g)(m, c) \end{cases}$$

Le complémentaire de l'image est un ouvert dense, noté  $\mathcal{O}^4(f, g)(V_1)$ . On pose

$$\mathcal{U}_1^4(f, g) = \bigcup_{V_1 \in \mathbb{S}^2} \{V_1\} \times \mathcal{O}^4(f, g)(V_1).$$

**Lemme 5.10**  *$\mathcal{U}_1^4(f, g)$  est un ensemble ouvert et dense de  $(\mathbb{S}^2)^{\underline{9}}$ .*

PREUVE: On commence par montrer la densité : On montre que pour tout  $(W_1, \dots, W_9) \in (\mathbb{S}^2)^{\underline{9}}$  et  $\epsilon > 0$  il existe  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathcal{U}_1^4(f, g) \cap B_\epsilon(W_1, \dots, W_9)$ . On choisit  $V_1 = W_1$ . Comme  $\mathcal{O}^4(f, g)(V_1)$  est dense dans  $(\mathbb{S}^2)^{\underline{9} \setminus \underline{1}}$ , il existe  $(V_2, \dots, V_9) \in \mathcal{O}^4(f, g)(V_1) \cap B_\epsilon(W_2, \dots, W_9)$  et  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathcal{U}_1^4(f, g) \cap B_\epsilon(W_1, \dots, W_9)$ . Pour montrer que  $\mathcal{U}_1^4(f, g)$  est ouvert, on va trouver



un voisinage ouvert de  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathcal{U}_1^4(f, g)$ . Soient un paramétrage  $\varphi : \mathbb{S}^1 \rightarrow C_{V_1}; \theta \mapsto \varphi(\theta)$  et  $N_{V_1}$  un voisinage compact de  $V_1$  dans  $\mathbb{S}^2$ . Pour tout  $V \in N_{V_1}$ , on peut paramétrer  $C_V$  par l'application suivante :

$$h_V : \begin{cases} \mathbb{S}^1 & \longrightarrow C_V \\ \theta & \longmapsto \rho_{\pi \frac{V+V_1}{\|V+V_1\|}}(\varphi(\theta)) \end{cases}$$

ce qui nous permet de définir l'application :

$$F_{\underline{9}\setminus\underline{1}}^{(2)}(f, g) : \begin{cases} N_{V_1} \times \mathbb{S}^1 \times C^{14} & \longrightarrow N_{V_1} \times (\mathbb{S}^2)^{\underline{9}\setminus\underline{1}} \\ (V, \theta, c) & \longmapsto (V, F_{\underline{9}\setminus\underline{1}}^{(1)}(f, g, V)(h_V(\theta), c)) \end{cases}$$

D'autre part, comme  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathcal{U}_1^4(f, g)$  alors  $(V_2, \dots, V_9) \in \mathcal{O}^4(f, g)(V_1)$  donc  $(V_1, \dots, V_9)$  appartient au complémentaire  $\tilde{\mathcal{O}}^4(f, g)$  de l'image de  $F_{\underline{9}\setminus\underline{1}}^{(2)}(f, g)$  qui est ouvert. De plus, on a l'inclusion

$$\tilde{\mathcal{O}}^4(f, g) \cap N_{V_1} \times (\mathbb{S}^2)^{\underline{9}\setminus\underline{1}} \subset \mathcal{U}_1^4(f, g) \cap N_{V_1} \times (\mathbb{S}^2)^{\underline{9}\setminus\underline{1}}$$

en effet, si  $(W_2, \dots, W_9) \in \text{Im}(F_{\underline{9}\setminus\underline{1}}^{(1)}(f, g, W_1))$  alors  $(W_1, \dots, W_9) \in \text{Im}(F_{\underline{9}\setminus\underline{1}}^{(2)}(f, g))$ . En passant aux complémentaires, on obtient l'inclusion affirmée. Finalement,  $\tilde{\mathcal{O}}^4(f, g) \cap N_{V_1} \times (\mathbb{S}^2)^{\underline{9}\setminus\underline{1}}$  fournit le voisinage ouvert de  $(V_1, \dots, V_9)$  dans  $\mathcal{U}_1^4(f, g)$ .

□

On pose alors

$$\mathfrak{A}_{4a} := \bigcap_{i=1}^9 \sigma_{1i} \left( \bigcap_{f, g} \mathcal{U}_1^4(f, g) \right).$$

On a un ensemble  $\mathfrak{A}_{4a}$  de vecteurs  $(V_1, \dots, V_9)$  pour lesquels pour tout  $j \in \underline{9}$  on a

$$\bigcap_{i \neq j} \pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(G_{V_i}) \cap \pi_{e(\Gamma, j)}^{-1}(\partial G_{3, V_j}) = \emptyset.$$

Il reste à trouver un ensemble  $\mathfrak{A}_{4b}$  ouvert et dense tel que pour tout  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}_{4a} \cap \mathfrak{A}_{4b}$ , l'intersection  $\bigcap_{i \neq j} \pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(G_{V_i}) \cap \pi_{e(\Gamma, j)}^{-1}(G_{3, V_j})$  est transverse. Fixons encore  $j = 1$  et posons

$$F_{\underline{9}\setminus\underline{1}}^{(3)}(f, g, V_1) : \begin{cases} B^3 \times C^{14} & \longrightarrow (\mathbb{S}^2)^{\underline{9}\setminus\underline{1}} \times \mathbb{R} \\ (m, c) & \longmapsto (F_{\underline{9}\setminus\underline{1}}(f, g)(m, c), \langle m, V_1 \rangle) \end{cases}$$

Si on a  $(V_2, \dots, V_9, 0) \in \text{Reg}(F_{\underline{9}\setminus\underline{1}}^{(3)}(f, g, V_1))$  et  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}_{4a}$  alors l'intersection  $\bigcap_{i \neq 1} \pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(G_{V_i}) \cap \pi_{e(\Gamma, 1)}^{-1}(G_{3, V_1})$  est transverse. On pose donc

$$\mathcal{U}_2^4(f, g) = \{(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}_{4a}; (V_2, \dots, V_9, 0) \in \text{Reg}(F_{\underline{9}\setminus\underline{1}}^{(3)}(f, g, V_1))\}.$$

**Lemme 5.11** *L'ensemble  $\mathcal{U}_2^4(f, g)$  est un ouvert de  $(\mathbb{S}^2)^{\mathfrak{g}}$ .*

PREUVE: Soit  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathcal{U}_2^4(f, g)$ . On pose

$$F_{\underline{9}\setminus\underline{1}}^{(4)}(f, g) : \begin{cases} \mathbb{S}^2 \times B^3 \times C^{14} & \longrightarrow \mathbb{S}^2 \times (\mathbb{S}^2)^{\mathfrak{g}\setminus\underline{1}} \times \mathbb{R} \\ (V_1, m, c) & \longmapsto (V_1, F_{\underline{9}\setminus\underline{1}}^{(3)}(f, g, V_1)) \end{cases}$$

L'application  $F_{\underline{9}\setminus\underline{1}}^{(4)}(f, g)$  est différentiable, et dans une base adaptée, la matrice jacobienne de  $F_{\underline{9}\setminus\underline{1}}^{(4)}(f, g)$  s'écrit :

$$\begin{bmatrix} I_2 & 0 & \dots & 0 \\ \times & & & \\ \vdots & & M & \\ \times & & & \end{bmatrix}$$

Par conséquent, comme  $(V_2, \dots, V_9, 0) \in \text{Reg}(F_{\underline{9}\setminus\underline{1}}^{(3)}(f, g, V_1))$  alors  $(V_1, \dots, V_9, 0) \in \text{Reg}(F_{\underline{9}\setminus\underline{1}}^{(4)}(f, g))$ . Or  $\text{Reg}(F_{\underline{9}\setminus\underline{1}}^{(4)}(f, g))$  est un ensemble ouvert de  $(\mathbb{S}^2)^{\mathfrak{g}} \times \mathbb{R}$  d'après le lemme 5.3, donc il existe un ouvert  $U \subset (\mathbb{S}^2)^{\mathfrak{g}}$  et un ouvert  $V \subset \mathbb{R}$  tels que  $(V_1, \dots, V_9, 0) \in U \times V \subset \text{Reg}(F_{\underline{9}\setminus\underline{1}}^{(4)}(f, g))$ . Ainsi  $U \cap \mathfrak{A}_{4a}$  est un voisinage de  $(V_1, \dots, V_9)$  dans  $\mathcal{U}_2^4(f, g)$ . □

Pour montrer que  $\mathcal{U}_2^4(f, g)$  est dense dans  $(\mathbb{S}^2)^{\mathfrak{g}}$ , on commence par le lemme suivant :

**Lemme 5.12** *On note*

$$\psi_{V_1} : B^3 \rightarrow \mathbb{R}; \quad m \mapsto \langle m, V_1 \rangle .$$

*Pour tout  $V_1 \in \mathbb{S}^2$ , l'ensemble  $\text{Reg}(\psi_{V_1})$  contient 0.*

PREUVE: Soit  $m \in \psi_{V_1}^{-1}(0)$ . On a  $d\psi_{V_1}(m).h = \langle h, V_1 \rangle$  et  $d\psi_{V_1}(m)$  est clairement surjective. □

**Lemme 5.13** *L'ensemble  $\mathcal{U}_2^4(f, g)$  est dense dans  $(\mathbb{S}^2)^{\mathfrak{g}}$ .*

PREUVE: On montre que pour tout  $(W_1, \dots, W_9) \in (\mathbb{S}^2)^{\mathfrak{g}}$  et pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathcal{U}_2^4(f, g) \cap B_\epsilon(W_1, \dots, W_9)$ . Notons  $F_{\underline{9}\setminus\underline{1}}^{(5)}(f, g, V_1) := F_{\underline{9}\setminus\underline{1}}(f, g)|_{D_{V_1} \times C^{14}}$ . Alors  $F_{\underline{9}\setminus\underline{1}}^{(5)}(f, g, V_1)$  est une application différentiable, et le lemme de Sard affirme que  $\text{Reg}(F_{\underline{9}\setminus\underline{1}}^{(5)}(f, g, V_1))$  est un ensemble dense de  $(\mathbb{S}^2)^{\mathfrak{g}\setminus\underline{1}}$ . Soient  $(W_1, \dots, W_9) \in (\mathbb{S}^2)^{\mathfrak{g}}$  et  $\epsilon > 0$ . On pose  $V_1 = W_1$ . Comme  $\text{Reg}(F_{\underline{9}\setminus\underline{1}}^{(5)}(f, g, V_1))$  est un ensemble dense de  $(\mathbb{S}^2)^{\mathfrak{g}\setminus\underline{1}}$ , on choisit  $(V_2, \dots, V_9) \in \text{Reg}(F_{\underline{9}\setminus\underline{1}}^{(5)}(f, g, V_1))$  avec  $(V_2, \dots, V_9) \in B_\epsilon(W_2, \dots, W_9)$ . Alors  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathcal{U}_2^4(f, g)$ . En effet, soit  $(m, c)$  un point régulier associé à  $(V_2, \dots, V_9)$ . Comme  $m \in D_{V_1}$ , alors  $F_{\underline{9}\setminus\underline{1}}^{(3)}(f, g, V_1)(m, c) = (V_2, \dots, V_9, 0)$ . De plus, en écrivant  $T_m B^3 \times T_c C^{14} = \mathbb{R}V_1 \times T_m D_{V_1} \times T_c C^{14}$ , la matrice jacobienne de  $F_{\underline{9}\setminus\underline{1}}^{(3)}(f, g, V_1)$  s'écrit dans une base adaptée :

$$\begin{bmatrix} \times & & & & \\ \vdots & & M & & \\ \times & & & & \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \end{bmatrix}$$

où  $M$  désigne la matrice jacobienne de  $F_{\underline{9}\setminus\underline{1}}^{(5)}(f, g, V_1)$  en  $(m, c)$ . Son déterminant est non nul car  $(m, c)$  est un point régulier pour  $F_{\underline{9}\setminus\underline{1}}^{(5)}(f, g, V_1)$ . Par conséquent, le jacobien de  $F_{\underline{9}\setminus\underline{1}}^{(3)}(f, g, V_1)$  est non nul, et le point  $(m, c)$  est régulier pour  $F^{(3)}(f, g, V_1)$ . Donc  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathcal{U}_2^4(f, g)$ .

□

On pose alors

$$\mathfrak{A}_{4b} = \bigcap_{i=1}^9 \sigma_{1i} \left( \bigcap_{f,g} \mathcal{U}_2^4(f, g) \right)$$

qui est un ouvert dense.

□

On sait depuis le lemme 5.4 que pour tout  $j \in \underline{9}$  et tout graphe  $\Gamma \in D_3^{or}$ , on a

$$\bigcap_{i \in \underline{9} \setminus \{j\}} \pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(G_{V_i}) \cap ([0, 1] \times \mathbb{S}^2 \times C^{14}) = \emptyset.$$

On n'aura donc jamais de point d'intersection  $(t, m, c)$  avec  $m \in \mathbb{S}^2$ . On va remplacer, jusqu'à la fin de cette section,  $B^3$  par  $S^3 := B^3/\partial B^3$ , qui est le revêtement double de  $SO(3)$ .

Etape 5 : deuxième partie de l'homotopie.

**Proposition 5.14** *Il existe un sous-ensemble  $\mathfrak{A}_5$  ouvert et dense de vecteurs de  $(\mathbb{S}^2)^{\underline{9}}$  tel que, pour tout  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}_5$ , pour tout  $j \in \underline{9}$ , pour tout  $\Gamma$ , l'intersection  $\bigcap_{p \neq j} \pi_{e(\Gamma, p)}^{-1}(G_{V_p}) \cap \pi_{e(\Gamma, j)}^{-1}(G_{2, V_j})$  soit transverse.*

PREUVE: On rappelle que

$$G_{2, V_j} = \{(t_j, p(m), H_{V_j}(u, m)); u \in [0, 1], m \in Bl(B^3, C_{V_j})\}.$$

Fixons  $j = 1$ . Si  $(t, m, c) \in \pi_{e(\Gamma, 1)}^{-1}(G_{2, V_1})$  alors  $\pi_{e(\Gamma, 1)}(m, c) \in [V_1, \rho_m(V_1)]$ , donc

$$\langle \pi_{e(\Gamma, 1)}(m, c), V_1 \wedge \rho_m(V_1) \rangle = 0.$$

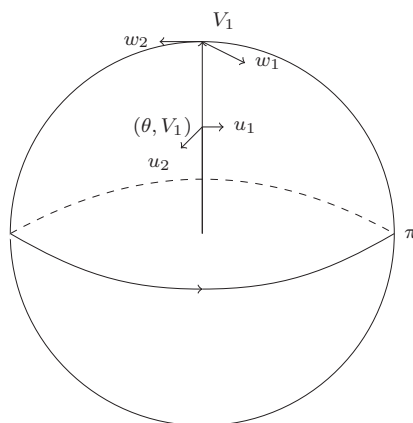
On note  $\tilde{C}_V := \{m \in S^3 = B^3/\partial B^3; \rho_m(V) = V\}$ , qu'on co-oriente par  $\psi_V$ , comme pré-image de  $V$  par  $\psi_V$ .

**Lemme 5.15** Soit  $V_1 \in \mathbb{S}^2$ . L'application

$$\phi_1(V_1) : \begin{cases} S^3 \setminus (C_{V_1} \cup \tilde{C}_{V_1}) & \longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ m & \longmapsto \frac{V_1 \wedge \rho_m(V_1)}{\|V_1 \wedge \rho_m(V_1)\|} \end{cases}$$

se prolonge différemment à  $Bl(S^3, C_{V_1} \cup \tilde{C}_{V_1})$ .

PREUVE: Rappelons la notation :  $\phi_{V_1} : S^3 \rightarrow \mathbb{S}^2; m \mapsto \rho_m(V_1)$ , introduite avant le lemme 4.3. Montrons que  $V_1$  et  $-V_1$  sont des valeurs régulières de  $\phi_{V_1}$ . D'après la preuve du lemme 4.3, on sait que  $-V_1$  est valeur régulière de  $\phi_{V_1}$ . Montrons que  $V_1$  est une valeur régulière de  $\phi_{V_1}$ . Soit  $m = (\theta, V_1) \in \tilde{C}_{V_1}$  avec  $\theta \in ]0, 2\pi[$ . Soit une base  $(u_1, u_2)$  de l'espace normal à  $\tilde{C}_{V_1}$  en  $m$ . L'image de cette base par l'application  $d\phi_{V_1}(m)$  est notée  $(w_1, w_2)$  et est dessinée sur la figure ci-dessous.



Par conséquent l'application  $d\phi_{V_1}(m)$  est surjective, donc tout point  $m = (\theta, V_1)$  avec  $\theta \in ]0, 2\pi[$  est régulier pour  $\phi_{V_1}$ . Le dernier cas à considérer est le cas de l'identité, qui correspond à  $\theta = 0$  ou  $\theta = 2\pi$ . Pour cela, on montre que  $id$  est un point régulier de l'application  $\psi'_{V_1} : SO(3) \rightarrow \mathbb{S}^2; \rho \mapsto \rho(V_1)$ , c'est à dire que l'application  $d\psi'_{V_1} : T_{id}SO(3) \rightarrow T_{V_1}\mathbb{S}^2$  est une application surjective. Commençons par décrire  $T_{id}SO(3)$ . Lorsque  $M \in SO(3)$ ,  $M^t M = I_3$  et  $T_{id}SO(3) = \{H; H + {}^t H = 0\}$ , on identifie donc  $T_{id}SO(3)$  avec l'espace vectoriel des matrices antisymétriques. Soit une base  $(V_1, V_1^2, V_1^3)$  une base de  $\mathbb{R}^3$ , alors dans cette base les images des matrices antisymétriques suivantes :

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

engendrent  $T_{V_1}\mathbb{S}^2$ .

Montrons maintenant que  $\phi_1(V_1)(m) = \frac{V_1 \wedge \rho_m(V_1)}{\|V_1 \wedge \rho_m(V_1)\|}$  s'étend en une application différentiable sur  $Bl(S^3, C_{V_1} \cup \tilde{C}_{V_1})$ . Pour  $m \in S^3 \setminus (C_{V_1} \cup \tilde{C}_{V_1})$ ,  $\phi_1(V_1)(m)$  désigne le vecteur unitaire orthogonal au plan engendré par  $V_1$  et  $\rho_m(V_1)$  qui complète  $(V_1, \rho_m(V_1))$  en une base directe de  $\mathbb{R}^3$ . Pour que  $\phi_1(V_1)$  s'étende à  $SN_{S^3}(C_{V_1})$  et  $SN_{S^3}(\tilde{C}_{V_1})$ , il suffit que cette définition garde différentiablement un sens pour  $m \in SN_{S^3}(C_{V_1}) \cup SN_{S^3}(\tilde{C}_{V_1})$ . On traite d'abord le cas  $C_{V_1}$ . Une carte de  $Bl(S^3, C_{V_1})$  au voisinage de  $SN_{S^3}(C_{V_1})$  est donnée par  $[0, \epsilon] \times \mathbb{S}^1 \times C_{V_1}$  (donnée juste après la démonstration du lemme 4.3). Soit donc  $m = (t, \theta, c) \in [0, \epsilon] \times \mathbb{S}^1 \times C_{V_1}$ . Pour  $t > 0$ ,  $\phi_1(V_1)(m)$  est bien défini et ne dépend que de l'angle  $\theta$ . On peut donc prolonger différentiablement la définition de  $\phi_1(V_1)(m)$  à  $t = 0$ . On procède de la même façon pour  $\tilde{C}_{V_1}$ .

□

Avec un abus de notation qu'on se permet grâce au lemme 5.15, on définit alors l'application

$$\phi_2(f(1), V_1) : \left| \begin{array}{l} Bl(S^3, C_{V_1} \cup \tilde{C}_{V_1}) \times C^{14} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (m, c) \longmapsto \langle \pi_{f(1)}(c), \frac{V_1 \wedge \rho_m(V_1)}{\|V_1 \wedge \rho_m(V_1)\|} \rangle \end{array} \right. .$$

Soit  $k \leq 8$  et  $E_k$  un sous-ensemble de  $\underline{9} \setminus \{1\}$  à  $k$  éléments. On pose

$$F_{E_k}^{(6)}(f, g, V_1) : \left| \begin{array}{l} Bl(S^3, C_{V_1} \cup \tilde{C}_{V_1}) \times C^{14} \times (\mathbb{S}^2)^{\underline{9} \setminus \{1 \cup E_k\}} \longrightarrow (\mathbb{S}^2)^{E_k} \times (\mathbb{S}^2)^{\underline{9} \setminus \{1 \cup E_k\}} \times \mathbb{R} \\ (m, c, (V_i)) \longmapsto (F_{E_k}(f, g)(m, c), (V_i), \phi_2(f(1), V_1)(m, c)) \end{array} \right. .$$

**Lemme 5.16** *On suppose  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}_{2b} \cap \mathfrak{A}_{4b} \cap \mathfrak{A}_{4a}$ , alors pour tout  $j \in \underline{9}$  et tout graphe  $\Gamma$  on a*

$$\bigcap_{i \in \underline{9} \setminus \{j\}} \pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(G_{V_i}) \cap \pi_{e(\Gamma, j)}^{-1}(\partial G_{2, V_j}) = \emptyset.$$

PREUVE: On rappelle qu'on a démontré dans la démonstration de la proposition 4.7 que

$$\begin{aligned} \partial G_{2, V_j} = & t_j \times C_{V_j} \times \mathbb{S}^2 \\ & + \{(t_j, m, \rho_m(V_j)); m \in B^3\} \\ & - t_j \times B^3 \times V_j \end{aligned}$$

Supposons par l'absurde que l'intersection du lemme ne soit pas vide et soit  $(t_j, m, c) \in \bigcap_{i \in \underline{9} \setminus \{j\}} \pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(G_{V_i}) \cap \pi_{e(\Gamma, j)}^{-1}(\partial G_{2, V_j})$ . Si  $m \notin C_{V_j}$ , alors  $\pi_{e(\Gamma, j)}(t_j, m, c) \in \{V_j, \rho_m(V_j)\}$ , ce qui n'est pas possible car  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}_{2b}$  et à cause de la démonstration du lemme 5.6. Et si  $m \in C_{V_j}$ , alors par définition, on a  $\rho_m(V_j) = -V_j$ , ce qui n'est pas possible car  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}_{4a} \cap \mathfrak{A}_{4b}$  et grâce à la proposition 5.9. L'intersection est donc vide.

□

L'intersection  $\bigcap_{i \in E_k} \pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(G_{V_i}) \cap \pi_{e(\Gamma, 1)}^{-1}(G_{2, V_1})$  est transverse si  $(V_2, \dots, V_9, 0) \in \text{Reg}(F_{\underline{9 \setminus 1}}^{(6)}(f, g, V_1))$ .  
On définit :

$$\mathcal{U}_1^5(f, g, E_k) := \{(V_1, \dots, V_9) \in (\mathbb{S}^2)^{\underline{9}}; (V_2, \dots, V_9, 0) \in \text{Reg}(F_{E_k}^{(6)}(f, g, V_1))\}.$$

**Lemme 5.17** *L'ensemble  $\mathcal{U}_1^5(f, g, E_8)$  est un ensemble ouvert de  $(\mathbb{S}^2)^{\underline{9}}$ .*

PREUVE: Soit  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathcal{U}_1^5(f, g, E_8)$  et montrons qu'il existe un voisinage de  $(V_1, \dots, V_9)$  dans  $\mathcal{U}_1^5(f, g, E_8)$ . Soit  $N_{V_1}$  un petit voisinage compact de  $V_1$  dans  $\mathbb{S}^2$ . Pour  $V \in N_{V_1}$ , on définit l'application

$$f_V : \begin{cases} B^3 / \partial B^3 & \longrightarrow & B^3 / \partial B^3 \\ [m] & \longmapsto & [\rho_{\pi, \frac{V_1+V}{\|V_1+V\|}}(m)] \end{cases}$$

de telle sorte que  $f_V(C_{V_1}) = C_V$  et  $f_V(\tilde{C}_{V_1}) = \tilde{C}_V$ . Comme  $f_V$  est un difféomorphisme de  $S^3$ , il induit un difféomorphisme

$$\tilde{f}_V : \text{Bl}(S^3, C_{V_1} \cup \tilde{C}_{V_1}) \rightarrow \text{Bl}(S^3, C_V \cup \tilde{C}_V)$$

Par conséquent, l'application suivante est bien définie :

$$F_{E_8}^{(7)}(f, g, V_1) : \begin{cases} N_{V_1} \times \text{Bl}(S^3, C_{V_1} \cup \tilde{C}_{V_1}) \times C^{14} & \longrightarrow & N_{V_1} \times (\mathbb{S}^2)^{E_8} \times \mathbb{R} \\ (V, m, c) & \longmapsto & (V, F_{E_8}^{(6)}(f, g, V)(\tilde{f}_V(m), c)) \end{cases}.$$

Cette application est différentiable, et dans une base adaptée la matrice jacobienne en  $(V, m, c)$  s'écrit :

$$\begin{bmatrix} I_2 & 0 \dots 0 \\ \times & \\ \vdots & M \\ \times & \end{bmatrix}$$

où  $M$  est la matrice jacobienne de l'application  $(m, c) \mapsto F_{E_8}^{(6)}(f, g, V)(\tilde{f}_V(m), c)$ . On sait que  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathcal{U}_1^5(f, g, E_8)$  si et seulement si  $(V_2, \dots, V_9, 0) \in \text{Reg}(F_{E_8}^{(6)}(f, g, V_1))$  et en cette valeur, le déterminant de  $M$  est non nul car  $\tilde{f}_{V_1}$  est un difféomorphisme. Ainsi,  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathcal{U}_1^5(f, g, E_8)$  si et seulement si  $(V_1, \dots, V_9, 0) \in \text{Reg}(F_{E_k}^{(7)}(f, g, V_1))$ . D'autre part, si  $(W_1, \dots, W_9, \alpha) \in \text{Reg}(F_{E_8}^{(7)}(f, g, V_1))$  alors  $(W_2, \dots, W_9, \alpha) \in \text{Reg}(F_{E_8}^{(6)}(f, g, W_1))$ . De plus, le lemme 5.3 assure que  $\text{Reg}(F_{E_8}^{(7)}(f, g, V_1))$  est un ensemble ouvert,  $\text{Reg}(F_{E_8}^{(7)}(f, g, V_1))$  contient donc un ouvert de la forme  $U \times I \subset (N_{V_1} \times (\mathbb{S}^2)^{\underline{9 \setminus 1}}) \times \mathbb{R}$ . Alors  $U$  est un ouvert et fournit un voisinage ouvert de  $(V_1, \dots, V_9)$  dans  $\mathcal{U}_1^5(f, g, E_8)$ .

□

Pour montrer que  $\mathcal{U}_1^5(f, g, E_8)$  est dense, on commence par le lemme suivant :

**Lemme 5.18** *On rappelle que*

$$\phi_2(f, V_1) : \left| \begin{array}{l} Bl(\mathbb{S}^3, C_{V_1} \cup \tilde{C}_{V_1}) \times C^{14} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (m, c) \longmapsto \langle \pi_{f(1)}(c), \frac{V_1 \wedge \rho_m(V_1)}{\|V_1 \wedge \rho_m(V_1)\|} \rangle > \end{array} \right.$$

Alors

$$0 \in \text{Reg}(\phi_2(f, V_1)).$$

PREUVE: Comme pour la démonstration du lemme 5.12, comme  $\frac{V_1 \wedge \rho_m(V_1)}{\|V_1 \wedge \rho_m(V_1)\|} \neq 0$  il suffit de bouger  $\pi_{f(1)}(c)$  dans la direction de  $\frac{V_1 \wedge \rho_m(V_1)}{\|V_1 \wedge \rho_m(V_1)\|}$  pour avoir la surjectivité de la différentielle.  $\square$

**Lemme 5.19** *L'ensemble  $\mathcal{U}_1^5(f, g, E_8)$  est dense dans  $(\mathbb{S}^2)^9$ .*

PREUVE: On montre que pour tout  $(W_1, \dots, W_9) \in (\mathbb{S}^2)^9$  et tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathcal{U}_1^5(f, g, E_8) \cap B_\epsilon(W_1, \dots, W_9)$ . Soient  $(W_1, \dots, W_9) \in (\mathbb{S}^2)^9$  et  $\epsilon > 0$ . On pose  $V_1 = W_1$ . D'après le lemme 5.18,  $\phi_2(f, V_1)^{-1}(0)$  est une sous-variété de codimension 1 et  $T\phi_2(f, V_1)$  induit un isomorphisme entre les fibres  $N_{(m,c)}\phi_2(f, V_1)^{-1}(0)$  et  $T_0\mathbb{R}$ . On pose

$$F_{E_8}^{(8)}(f, g, V_1) : \left| \begin{array}{l} \phi_2(f, V_1)^{-1}(0) \times (\mathbb{S}^2)^{9 \setminus \{1, E_8\}} \longrightarrow (\mathbb{S}^2)^{9 \setminus 1} \times \{0\} = (\mathbb{S}^2)^{9 \setminus 1} \\ (m, c, (V_i)) \longmapsto F_{E_8}^{(6)}(f, g, V_1)(m, c, (V_i)) \end{array} \right.$$

$\text{Reg}(F_{E_8}^{(8)}(f, g, V_1))$  est un ensemble dense de  $(\mathbb{S}^2)^{9 \setminus 1}$  : il existe donc  $(V_2, \dots, V_9) \in \text{Reg}(F_{E_8}^{(8)}(f, g, V_1)) \cap B_\epsilon(W_2, \dots, W_9)$ . On montre enfin que  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathcal{U}_1^5(f, g, E_8)$ . Soit  $(m, c, (V_i))$  un point de la pré-image de  $(V_2, \dots, V_9, 0)$  par  $F_{E_8}^{(6)}(f, g, V_1)$ . Alors  $(m, c, (V_i)) \in \phi_2(f, V_1)^{-1}(0) \times (\mathbb{S}^2)^{9 \setminus \{1 \cup E_8\}}$  et on peut écrire :

$$T_{(m,c,(V_i))}(Bl(B^3, C_{V_1} \cup \tilde{C}_{V_1}) \times C^{14} \times (\mathbb{S}^2)^{9 \setminus \{1 \cup E_8\}}) = T_{(m,c)}\phi_2(f, V_1)^{-1}(0) \oplus N_{(m,c)}\phi_2(f, V_1)^{-1}(0) \oplus T(\mathbb{S}^2)^{9 \setminus \{1, E_8\}}$$

et dans une base adaptée, la matrice jacobienne de  $F_{E_8}^{(6)}(f, g, V_1)$  au point  $(m, c, (V_i))$  s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} JF_{E_k}^{(8)}(f, g, V_1) & \times \\ 0 & N \end{bmatrix}$$

où  $N$  est la matrice de la restriction  $T\phi_2(f, V_1) : N_{(m,c)}\phi_2(f, V_1)^{-1}(0) \rightarrow T_0\mathbb{R}$ , qui est un isomorphisme. Par conséquent, le point  $(m, c, (V_i))$  est bien régulier. Donc  $(V_2, \dots, V_9, 0) \in \text{Reg}(F_{E_8}^{(6)}(f, g, V_1))$  donc  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathcal{U}_1^5(f, g, E_8)$ .  $\square$

On pose alors

$$\mathfrak{A}_5 := \bigcap_{i=1}^9 \sigma_{1i} \left( \bigcap_{E_8 \subset \mathfrak{g}, |E_8|=8} \bigcap_{f \in ((\mathfrak{g})^2 \setminus \text{diag})^{E_8}} \bigcap_{g \in \{0,1\}^{E_8}} \mathcal{U}_1^5(f, g, E_8) \right).$$

Étape 6 : hypothèses supplémentaires.

Soit  $E_5 \subset \mathfrak{g}$ , avec  $|E_5| = 5$ . On note

$$\varphi_{E_5} : \begin{cases} (\mathbb{S}^2)^{E_5} \times (\mathbb{S}^2)^{\mathfrak{g} \setminus E_5} & \longrightarrow \mathbb{R} \times (\mathbb{S}^2)^{\mathfrak{g} \setminus E_5} \\ (V_i, V_j, V_b, V_c, V_k), (V_p)_{p \in \mathfrak{g} \setminus E_5} & \longmapsto \langle V_k, (V_b \wedge V_c) \wedge ((V_i \wedge V_j) \wedge (V_b \wedge V_c)) \rangle, (V_p)_{p \in \mathfrak{g} \setminus E_5} \end{cases}.$$

L'ensemble

$$\mathcal{U}_{E_5} = (\mathbb{S}^2)^{\mathfrak{g}} \setminus \varphi_{E_5}^{-1}(\{0\})$$

est alors un ensemble ouvert et dense de  $(\mathbb{S}^2)^{\mathfrak{g}}$ . On pose alors

$$\mathfrak{A}_6 = \bigcap_{E_5 \subset \mathfrak{g}, |E_5|=5} \mathcal{U}_{E_5}.$$

**Lemme 5.20** *Soit  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}_6$ , alors pour tout  $\{i, j, b, c, k\} \subset \mathfrak{g}$ ,*

$$\langle V_k, (V_b \wedge V_c) \wedge ((V_i \wedge V_j) \wedge (V_b \wedge V_c)) \rangle \neq 0.$$

□

PREUVE DE LA PROPOSITION 5.2 : On pose

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{2a} \cap \mathfrak{A}_{2b} \cap \mathfrak{A}_3 \cap \mathfrak{A}_{4a} \cap \mathfrak{A}_{4b} \cap \mathfrak{A}_5 \cap \mathfrak{A}_6$$

et toutes les conditions pour que les chaînes soient transverses sur les intersections sont réunies dès que  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}$ .

□

### 5.3 Indépendance en $G$

On présente dans cette section une esquisse de preuve que  $I(G_{V_1}, \dots, G_{V_9})$  ne dépend pas des chaînes  $G_{V_i}$  choisies, mais seulement du bord  $\partial_{V_i}$  fixé. On rappelle la définition du bord introduite au début de la section 4.

$$\partial_V = -\{0\} \times B^3 \times \{V\} + \{(1, m, \rho_m(V)); m \in B^3\} - [0, 1] \times \mathbb{S}^2 \times \{V\}$$



**Définition 5.21** Soit  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}$ . On dit que des chaînes  $(G'_{V_1}, \dots, G'_{V_9})$  sont admissibles si pour tout  $i \in \underline{9}$ , on a  $\partial G'_{V_i} = \partial_{V_i}$  et si pour tout ensemble  $E_k \subset \underline{9}$  à  $k$  éléments, pour tout graphe  $\Gamma \in D_{or}^3$  et toute numérotation  $n_\Gamma$ , les intersections  $\bigcap_{i \in E_k} \pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(G'_{V_i})$  sont transverses.

On a détaillé dans la partie précédente le cas particulier des chaînes  $(G_{V_1}, \dots, G_{V_9})$ .

**Proposition 5.22** Soient  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}$  et deux familles  $(G'_{V_1}, \dots, G'_{V_9})$  et  $(G''_{V_1}, \dots, G''_{V_9})$  de chaînes admissibles, alors

$$I(G'_{V_1}, \dots, G'_{V_9}) = I(G''_{V_1}, \dots, G''_{V_9})$$

La proposition découle du lemme suivant :

**Lemme 5.23** Soient  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}$  et une famille  $(G'_{V_1}, \dots, G'_{V_9})$  de chaînes admissibles. Soit  $G''_{V_1}$  une autre 4-chaîne tel que  $\partial G''_{V_1} = \partial_{V_1}$ . Alors il existe une petite déformation de  $G''_{V_1}$ , que l'on note  $\overline{G''_{V_1}}$ , telle que

$$I(G'_{V_1}, \dots, G'_{V_9}) = I(\overline{G''_{V_1}}, G'_{V_2}, \dots, G'_{V_9})$$

PREUVE: Par des arguments similaires à ceux détaillés dans la section 5.2, il existe une petite déformation de  $G''_{V_1}$ , que l'on note  $\overline{G''_{V_1}}$ , telle que la famille  $(\overline{G''_{V_1}}, G'_{V_2}, \dots, G'_{V_9})$  soit une famille de chaînes admissibles. Dans ce cas,  $I(\overline{G''_{V_1}}, G'_{V_2}, \dots, G'_{V_9})$  est bien défini.

On a  $[G'_{V_1}] - [\overline{G''_{V_1}}] = 0$  dans  $H_4([0, 1] \times B^3 \times \mathbb{S}^2) = H_4(\mathbb{S}^2) = 0$ . Il existe donc une 5-chaîne  $W$  telle que  $\partial W = G'_{V_1} - \overline{G''_{V_1}}$ . Fixons un graphe  $\Gamma \in D_{or}^3$  un graphe numéroté et notons

$$L_\Gamma = \pi_{e(\Gamma, 1)}^{-1}(W) \bigcap_{i=2}^{i=9} \pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(G'_{V_i})$$

Quitte à modifier  $W$ , on peut supposer que les intersections sont transverses pour tout graphe  $\Gamma \in D_{or}^3$ . Donc  $L_\Gamma$  est une variété compacte orientée de dimension 1 de  $[0, 1] \times B^3 \times C_{14}$ . Donc  $\partial L_\Gamma$  est une succession de points, comptés successivement avec un signe positif et négatif. Comme

$$\partial L_\Gamma = \pi_{e(\Gamma, 1)}^{-1}(G'_{V_1}) \bigcap_{i=2}^{i=9} \pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(G'_{V_i}) - \pi_{e(\Gamma, 1)}^{-1}(\overline{G''_{V_1}}) \bigcap_{i=2}^{i=9} \pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(G'_{V_i}) + L_\Gamma \cap \partial([0, 1] \times B^3 \times C_{14})$$

si on fait la somme algébrique des points comptés avec leur orientation, on trouve alors :

$$0 = I_\Gamma(G'_{V_1}, \dots, G'_{V_9}) - I_\Gamma(\overline{G''_{V_1}}, G'_{V_2}, \dots, G'_{V_9}) + L_\Gamma \cap \partial([0, 1] \times B^3 \times C_{14})$$

**Lemme 5.24** On a  $L_\Gamma \cap \partial([0, 1] \times B^3) \times C_{14} = \emptyset$

PREUVE: C'est une application directe du lemme 5.4.

□

Ainsi on obtient la relation suivante :

$$I(G'_{V_1}, \dots, G'_{V_9}) - I(\overline{G''_{V_1}}, G'_{V_2}, \dots, G'_{V_9}) = - \sum_{\Gamma \in D_{or}^3} \frac{1}{9!2^9} L_\Gamma \cap [0, 1] \times B^3 \times \partial C^{14}[\Gamma] \quad (E)$$

$L_\Gamma$  est une chaîne de dimension 1, quitte changer la chaîne  $W$ , on peut supposer que  $L_\Gamma$  rencontre génériquement  $[0, 1] \times B^3 \times \partial(C_{14})$  sur des faces de  $C_{14}$  de codimension 1. D'après l'étude faite par D. Sinha [Sin04, théorème 3.4], on sait que les faces  $F^{13}$  de codimension 1 de  $C^{14}$  sont en bijection avec les sous-ensembles  $S \subset V(\Gamma)$  avec  $1 < |S| < 9$ . La face  $F_S^{13}$  correspondant à  $S$  contient les configurations où tous les points de  $S$  sont confondus à l'échelle de  $(\mathbb{R}^3)^{V(\Gamma)}$  et la restriction à  $S$  de cette configuration est une configuration connue à homothétie positive et translation près. En notant  $\tilde{C}_S = \{(x_i)_{i \in S} \in (\mathbb{R}^3)^S; \forall i \neq j, x_i \neq x_j\} / \sim$ , où  $\sim$  désigne la relation d'équivalence " coïncide à homothétie de rapport positif et translation près", on peut écrire

$$F_S^{13} = \tilde{C}_{V(\Gamma)/S} \times \tilde{C}_S$$

**Lemme 5.25** *Si  $|S| > 1$  alors*

$$\dim(\tilde{C}_S) = 3|S| - 4$$

**Notation 5.26** *On note  $\Gamma_S$  le sous graphe extrait de  $\Gamma$  constitué des sommets de  $\Gamma$  qui appartiennent à  $S$  et des arêtes reliant deux éléments de  $S$ .*

La relation (E) peut alors se mettre sous la forme suivante :

$$I(G'_{V_1}, \dots, G'_{V_9}) - I(G''_{V_1}, \dots, G'_{V_9}) = - \sum_{\Gamma \in D_{or}^3, S \subset V(\Gamma), 1 < |S| < 6} \frac{1}{9!2^9} I(\Gamma, S)[\Gamma] \quad (E)$$

où  $I(\Gamma, S) = \langle L_\Gamma, F_S^{13} \rangle$  désigne la somme des intersection algébrique de l'intersection entre  $L_\Gamma$  et  $F_S^{13}$ . On montre que la somme de droite est nulle en distinguant 4 cas :

- Cas 1 :  $\Gamma_S$  non connexe
- Cas 2 :  $\Gamma_S = \bullet \text{---} \bullet$
- Cas 3 :  $\Gamma_S$  est connexe,  $\Gamma_S$  contient un sommet univalent et  $\#S > 2$ .
- Cas 4 :  $\Gamma_S$  est connexe et ne contient aucun sommet univalent mais contient un sommet bivalent.

On a bien exhibé tous les cas, puisque si  $\Gamma_S$  ne contient aucun sommet univalent ou bivalent et est connexe, alors  $\Gamma_S$  est un sous graphe trivalent de  $\Gamma$  connexe, donc c'est  $\Gamma$ , ce qui est exclu.

Cas 1 : Supposons par exemple que l'on puisse écrire  $\Gamma_S = \Gamma_H \sqcup \{P\}$  avec  $|H| \geq 2$ . Alors

clairement, on peut factoriser les applications  $(\pi_{e(\Gamma,i)})$  :

$$\begin{array}{ccc} F_S^{13} & \longrightarrow & \tilde{C}_{V(\Gamma)/S} \times \tilde{C}_{S \setminus \{P\}} \\ (\pi_{e(\Gamma,i)}) \downarrow & & \swarrow \\ (\mathbb{S}^2)^{\underline{9}} & & \end{array}$$

Or

$$\begin{aligned} \dim(\tilde{C}_{\Gamma/S} \times \tilde{C}_{S \setminus P}) &= \dim(\tilde{C}_{V(\Gamma)/S}) + \dim(\tilde{C}_{S \setminus P}) \\ &= 3(6 - |S| + 1) - 4 + 3(|S| - 1) - 4 \\ &= 21 - 11 \\ &= 21 - 11 \\ &= 10 \end{aligned}$$

donc si on avait une intersection, en modifiant arbitrairement la position de  $P$ , on aurait une famille à 3 paramètres d'intersection, ce qui contredirait la transversalité. En général, si  $\Gamma_S$  s'écrit de la forme  $\Gamma_S = \Gamma_H \sqcup \Gamma_G$  alors on peut factoriser cette fois-ci par :

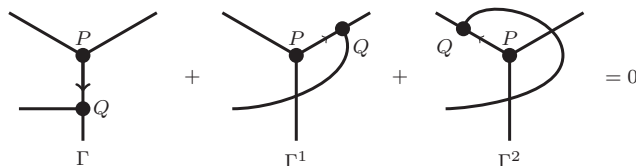
$$\begin{array}{ccc} \tilde{C}_{V(\Gamma)/S} \times \tilde{C}_S & \longrightarrow & \tilde{C}_{V(\Gamma)/S} \times \tilde{C}_{\Gamma_H} \times \tilde{C}_{\Gamma_G} \\ (\pi_{e(\Gamma,i)}) \downarrow & & \swarrow \\ (\mathbb{S}^2)^{\underline{9}} & & \end{array}$$

où  $\tilde{C}_{\Gamma_G}$  est un point si  $|G| = 1$ . On a alors factorisé par un espace de codimension strictement plus grande. L'argument du cas précédent s'applique, on a donc montré que si  $\Gamma_S$  était non connexe, alors  $I(\Gamma, S) = 0$ .

Cas 2 : On suppose que

$$\Gamma_S : \bullet \xrightarrow{i} \bullet$$

Donc sur la face  $F_S^{13}$ , on a  $P = Q$ . Notons les graphes  $\Gamma^1$  et  $\Gamma^2$  les graphes qui interviennent dans la relation IHX sur  $\Gamma$  sur l'arête  $i$  :



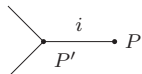
Supposons qu'on ait un point d'intersection  $(t, m, O, \dots, F) \in L_\Gamma \cap [0, 1] \times B^3 \times F_S^{13}$ , alors

$$(t, m, O, \dots, F) \in L_{\Gamma^1} \cap [0, 1] \times B^3 \times F_S^{13}$$

$$(t, m, O, \dots, F) \in L_{\Gamma^2} \cap [0, 1] \times B^3 \times F_S^{13}$$

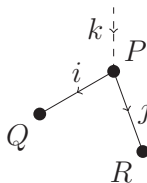
Ces points sont comptés avec le même signe [Les04a, lemme 2.21]. Donc  $I(\Gamma, S) = I(\Gamma^1, S) = I(\Gamma^2, S)$  et grâce à la relation IHX on obtient  $I(\Gamma, S)[\Gamma] + I(\Gamma^1, S)[\Gamma^1] + I(\Gamma^2, S)[\Gamma^2] = 0$  donc les contributions s'annulent.

Cas 3 : On suppose que  $\Gamma_S$  contient un sommet univalent. Notons  $P$  ce sommet. Soit  $c \in F_S^{13} = \tilde{C}_{\Gamma/S} \times \tilde{C}_S$  et supposons que  $(t, m, c) \in L_\Gamma \cap [0, 1] \times B^3 \times F_S^{13}$ . On note  $c = (c_0, c_S)$  où  $c_0 \in \tilde{C}_{\Gamma/S}$  et  $c_S \in \tilde{C}_S$ . Comme  $P$  est un sommet univalent de  $\Gamma_S$ , on peut dessiner  $\Gamma_S$  de la manière suivante, où  $i$  est l'arête de  $\Gamma_S$  contenant  $P$  :

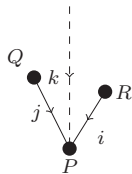


Il existe  $\epsilon \in \{-1, 1\}$  tel que  $U_i = \pi_{e(\Gamma_S, i)}(m, c_S) = \epsilon \frac{c_P - c_{P'}}{\|c_P - c_{P'}\|}$ . On note  $c_S = (c_M, \dots, c_P, \dots, c_N)$ . Pour  $\lambda > 0$ , on pose  $c'_S(\lambda) = (c_M, \dots, c_P + \lambda U_i, \dots, c_N)$ , où on a changé seulement la coordonnée  $c_P$ . Alors  $(t, m, (c_0, c'_S(\lambda))) \in L_\Gamma \cap [0, 1] \times B^3 \times F_S^{13}$  pour tout  $\lambda > 0$ . Dans ce cas, l'intersection contiendrait une famille à 1 paramètre (paramétrée par  $\lambda$ ), ce qui contredirait l'hypothèse de transversalité. Ainsi  $I(\Gamma, S) = 0$ .

Cas 4 : Supposons que  $\Gamma_S$  ne contient pas de sommet univalent mais au moins un sommet bivalent. Parmi tous les sommets bivalents de  $\Gamma_S$ , choisissons  $P$  le plus petit (pour l'ordre lexicographique). Alors  $\Gamma_S$  contient un sous graphe de la forme :



Notons  $\Gamma'$  le graphe obtenu à partir de  $\Gamma$  où on a échangé les deux arêtes de  $\Gamma_S$  qui contiennent  $P$  et changé leur orientation, sans changer  $\Gamma$  sinon. On a donc remplacé le sous graphe précédent par



et on n'a rien changé à l'extérieur de cette figure. On note  $V(\Gamma_S)$  l'ensemble des sommets de  $\Gamma_S$  et on définit l'application  $s : \tilde{C}_S \rightarrow \tilde{C}_S$  par  $s(c_M) = c_M$  si  $M \in V(\Gamma_S) \setminus P$ , et  $s(c_P) = c_Q + c_R - c_P$ . Cette application renverse l'orientation de  $\tilde{C}_S$ . On note  $E(\Gamma_S)$  l'ensemble des arêtes de  $\Gamma_S$ . Soit  $g : \underline{9} \rightarrow \{0, 1\}$  et, on montre que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} B^3 \times \tilde{C}_S & \xrightarrow{(\pi_{e(\Gamma_S, \ell)}^{g(\ell)})_{\ell \in E(\Gamma_S)}} & (\mathbb{S}^2)^{E(\Gamma_S)} \\ \downarrow s & & \downarrow id \\ B^3 \times \tilde{C}_S & \xrightarrow{(\pi_{e(\Gamma'_S, \ell)}^{g(\ell)})_{\ell \in E(\Gamma'_S)}} & (\mathbb{S}^2)^{E(\Gamma'_S)} \end{array}$$

En effet, soit  $\ell \in E(\Gamma_S) \setminus \{i, j\}$ , alors  $\pi_{e(\Gamma_S, \ell)}^{g(\ell)}(s(c_S)) = \pi_{e(\Gamma_S, \ell)}^{g(\ell)}(c_S)$ . Puis on calcule

$$\begin{aligned} \pi_{e(\Gamma'_S, i)}^{g(i)}(s(c_S)) &= \rho^{-g(i)}\left(\frac{s(c_P) - s(c_R)}{\|s(c_P) - s(c_R)\|}\right) \\ &= \rho^{-g(i)}\left(\frac{c_Q + c_R - c_P - c_R}{\|c_Q + c_R - c_P - c_R\|}\right) \\ &= \rho^{-g(i)}\left(\frac{c_Q - c_P}{\|c_Q - c_P\|}\right) \\ &= \pi_{e(\Gamma_S, i)}^{g(i)}(c_S) \end{aligned}$$

On note abusivement  $s : [0, 1] \times B^3 \times F_S^{13} \rightarrow [0, 1] \times B^3 \times F_S^{13}$  l'application définie par  $s(t, m, (c_0, c_S)) = (t, m, (c_0, s(c_S)))$ . C'est encore une application qui renverse l'orientation et le carré suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] \times B^3 \times F_S^{13} & \xrightarrow{(\pi_{e(\Gamma_S, \ell)}^{g(\ell)})_{\ell \in \underline{9}}} & (\mathbb{S}^2)^{\underline{9}} \\ \downarrow s & & \downarrow id \\ [0, 1] \times B^3 \times F_S^{13} & \xrightarrow{(\pi_{e(\Gamma'_S, \ell)}^{g(\ell)})_{\ell \in \underline{9}}} & (\mathbb{S}^2)^{\underline{9}} \end{array}$$

Par conséquent, si  $(t, m, c) \in L_\Gamma \cap [0, 1] \times B^3 \times F_S^{13}$  alors  $s(t, m, c) \in L_{\Gamma'} \cap [0, 1] \times B^3 \times F_S^{13}$ . De plus, comme  $s$  est une application qui renverse l'orientation, ces points sont comptés avec un signe différent. Si elles ne sont pas nulles, les contributions  $I(\Gamma, S)[\Gamma]$  s'annulent dans la somme de la relation (E). Donc  $I(G'_{V_1}, \dots, G'_{V_9}) - I(\overline{G''_{V_1}}, G'_{V_2}, \dots, G'_{V_9}) = 0$ .

□

On finit la démonstration de la proposition 5.22. On sait que

$$I(G'_{V_1}, \dots, G'_{V_9}) = I(\overline{G''_{V_1}}, G'_{V_2}, \dots, G'_{V_9}) = 0.$$

En itérant ce procédé, on trouve que

$$I(G'_{V_1}, \dots, G'_{V_9}) = I(\overline{G''_{V_1}}, \dots, \overline{G''_{V_9}})$$

où pour tout  $i \in \{1, \dots, 9\}$ ,  $\overline{G''_{V_i}}$  est une petite perturbation de la chaîne  $G''_{V_i}$ . Or si on a une famille admissible, en bougeant peu les chaînes, la famille reste définie et les nombres d'intersections restent inchangés. Par conséquent on peut écrire que

$$I(G''_{V_1}, \dots, G''_{V_9}) = I(\overline{G''_{V_1}}, \dots, \overline{G''_{V_9}})$$

et donc que

$$I(G'_{V_1}, \dots, G'_{V_9}) = I(G''_{V_1}, \dots, G''_{V_9}).$$

□

## 5.4 Indépendance en $(V_i)$

**Proposition 5.27** *Soient  $(V_1, \dots, V_9)$  et  $(V'_1, \dots, V'_9)$  deux 9-uplets de vecteurs admissibles. Alors*

$$I(G_{V_1}, \dots, G_{V_9}) = I(G_{V'_1}, \dots, G_{V'_9})$$

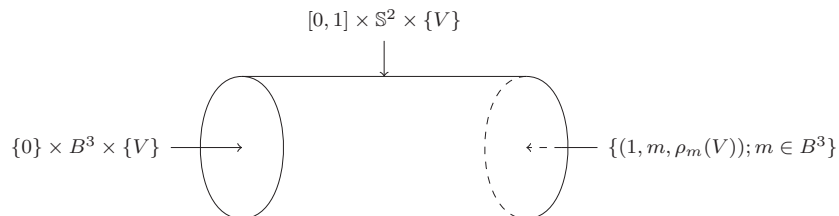
Pour montrer cette proposition, il suffit comme dans la section 5.3 de montrer le lemme suivant :

**Lemme 5.28** *Soient  $(V_1, \dots, V_9)$  et  $(V_1, \dots, V_{i-1}, V'_i, V_{i+1}, \dots, V_9)$  deux 9-uplets de vecteurs admissibles, et  $i \in \underline{9}$ . Alors*

$$I(G_{V_1}, \dots, G_{V_i}, \dots, G_{V_9}) = I(G_{V_1}, \dots, G_{V'_i}, \dots, G_{V_9}).$$

PREUVE: Rappelons que l'on a défini les chaînes  $G_{V_i}$  de telle manière que  $\partial G_{V_i} = \partial_{V_i}$  avec

$$\partial_{V_i} = -\{0\} \times B^3 \times \{V_i\} + \{(1, m, \rho_m(V))\}; \quad m \in B^3 - [0, 1] \times \mathbb{S}^2 \times \{V_i\}.$$



On montre le lemme pour  $i = 1$  et la démonstration s'étend à  $i \in \underline{9}$  quelconque. On définit un cobordisme  $C$  entre  $\partial_{V_1}$  et  $\partial_{V'_1}$  de la manière suivante : on choisit un chemin  $\gamma$  de  $V_1$  à  $V'_1$  et on pose :

$$C = 0 \times B^3 \times \gamma([0, 1]) + [0, 1] \times \mathbb{S}^2 \times \gamma([0, 1]) - \{(1, m, \rho_m(\gamma([0, 1])); m \in B^3\}$$

Alors

$$\begin{aligned} \partial C &= 0 \times \mathbb{S}^2 \times \gamma([0, 1]) - 0 \times B^3 \times V'_1 + 0 \times B^3 \times V_1 \\ &\quad + 1 \times \mathbb{S}^2 \times \gamma([0, 1]) - 0 \times \mathbb{S}^2 \times \gamma([0, 1]) - [0, 1] \times \mathbb{S}^2 \times V'_1 + [0, 1] \times \mathbb{S}^2 \times V_1 \\ &\quad + \{(1, m, \rho_m(\gamma([0, 1])); m \in \mathbb{S}^2\} + \{(1, m, \rho_m(V'_1)); m \in B^3\} - \{(1, m, \rho_m(V_1)); m \in B^3\} \\ &= 0 \times B^3 \times V_1 + [0, 1] \times \mathbb{S}^2 \times V_1 - \{(1, m, \rho_m(V_1)); m \in B^3\} \\ &\quad - 0 \times B^3 \times V'_1 - [0, 1] \times \mathbb{S}^2 \times V'_1 + \{(1, m, \rho_m(V'_1)); m \in B^3\} \\ &= \partial_{V'_1} - \partial_{V_1} \end{aligned}$$

Par conséquent,  $\partial(G_{V'_1} - G_{V_1} - C) = 0$  dans  $H_4([0, 1] \times B^3 \times \mathbb{S}^2) = H_4(\mathbb{S}^2) = 0$ . Il existe alors une 5 chaîne  $W$  telle que  $\partial W = G_{V'_1} - G_{V_1} - C$ . On peut conclure comme dans la section 5.3 que

$$0 = I(G_{V_1}, \dots, G_{V_9}) - I(G_{V'_1}, \dots, G_{V_9}) - I(C, \dots, G_{V_9})$$

Montrons que  $I(C, \dots, G_{V_9}) = 0$ . Il suffit de montrer qu'on a  $I_\Gamma(C, \dots, G_{V_9}) = 0$  pour tout graphe  $\Gamma$  orienté. Supposons qu'il existe un point d'intersection  $(t, m, c) \in \pi_{e(\Gamma, 1)}^{-1}(C) \cap \bigcap_{i=2}^9 \pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(G_{V_i})$ . Or  $C \subset \partial([0, 1] \times B^3 \times \mathbb{S}^2) = \partial([0, 1] \times B^3) \times \mathbb{S}^2$  donc  $(t, m, c) \in \partial([0, 1] \times B^3) \times C^{14}$  ce qui est impossible d'après le lemme 5.4.

□

## 5.5 Numérotation des sommets

On montre dans cette courte sous-section que le lemme suivant :

**Lemme 5.29** *Le produit  $I_{\Gamma, n_\Gamma}(V_1, \dots, V_9) \in (n_\Gamma, o_\Gamma)$  est indépendant de la numérotation  $n_\Gamma$  choisie.*

C'est une conséquence du lemme suivant :

**Lemme 5.30** *Soit  $\tau = (MN)$  la transposition de  $V(\Gamma)$  qui échange les lettres  $M$  et  $N$ . On a  $I_{\Gamma,h,\tau(n_\Gamma)}(V_1, \dots, V_9)\epsilon(\tau(n_\Gamma), o_\Gamma) = I_{\Gamma,h,n_\Gamma}(V_1, \dots, V_9)\epsilon(n_\Gamma, o_\Gamma)$*

PREUVE: Comme  $\tau$  est une transposition, on a  $\epsilon(\tau(n_\Gamma), o_\Gamma) = -\epsilon(n_\Gamma, o_\Gamma)$ . Par un abus de notation, on note encore  $\tau : C^{14} \rightarrow C^{14}$  la transposition des coordonnées de  $c \in C^{14}$ . On pose alors  $f : [0, 1] \times SO(3) \times C^{14} \rightarrow [0, 1] \times SO(3) \times C^{14}$  définie par  $f(u, \rho, c) = (u, \rho, \tau(c))$ . Comme  $\tau$  est une transposition, l'application  $f$  renverse l'orientation de  $[0, 1] \times SO(3) \times C^{14}$ . De plus, le carré suivant est clairement commutatif :

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] \times SO(3) \times C^{14} & \xrightarrow{F_{\Gamma,h,n_\Gamma}} & (\mathbb{S}^2)^9 \\ \downarrow f & & \downarrow id \\ [0, 1] \times SO(3) \times C^{14} & \xrightarrow{F_{\Gamma,h,\tau(n_\Gamma)}} & (\mathbb{S}^2)^9 \end{array}$$

Ce qui fait que les points  $(\rho, c)$  et  $(\rho, \tau(c))$  sont comptés avec un signe différent dans  $I_{\Gamma,h,n_\Gamma}$  et  $I_{\Gamma,h,\tau(n_\Gamma)}$ .

□

□



## 6 Simplification

Ce chapitre est consacré à la démonstration du théorème 2.15. On montre successivement que l'on peut se restreindre aux points d'intersection qui se trouvent sur la face  $G_{2,V_h}$  (lemme 6.2), puis que ces points d'intersection ne dépendent que de la rotation  $\rho_m$  et non de  $m$  (lemme 6.3). On montrera ensuite qu'il suffit de déterminer les points d'intersection associés au graphe  $\Gamma_T$  (lemme 6.6). Enfin, on proposera une décomposition de  $\beta_3$  (lemme 6.8)

### 6.1 Réduction à un type d'intersection

Soit  $\Gamma \in D_{or}^3$  un graphe numéroté. On a défini  $I_\Gamma(G_{V_1}, \dots, G_{V_9})$  comme la somme algébrique des points d'intersection de  $\pi_{e(\Gamma,1)}^{-1}(G_{V_1}) \cap \dots \cap \pi_{e(\Gamma,9)}^{-1}(G_{V_9}) \subset [0, 1] \times B^3 \times C^{14}$ . D'après le lemme 5.6, si  $(t, m, c)$  est un point d'intersection, alors il existe  $h \in \underline{9}$  tel que  $t = t_h$ . Par conséquent,  $\pi_{e(\Gamma,h)}(t, m, c) \in G_{2,V_h}$  ou  $\pi_{e(\Gamma,h)}(t, m, c) \in G_{3,V_h}$ .

**Définition 6.1** On définit  $I_\Gamma^{(1)}(G_{V_1}, \dots, G_{V_9})$  (resp.  $I_\Gamma^{(2)}(G_{V_1}, \dots, G_{V_9})$ ) comme la sous-somme de  $I_\Gamma(G_{V_1}, \dots, G_{V_9})$  restreinte aux points d'intersection  $(t, m, c)$  tels que si  $t = t_h$ , alors  $\pi_{e(\Gamma,h)}(t, m, c) \in G_{2,V_h}$  (resp.  $\pi_{e(\Gamma,h)}(t, m, c) \in G_{3,V_h}$ ). On pose ensuite

$$I^{(1)}(G_{V_1}, \dots, G_{V_9}) = \sum_{\Gamma \in D_{or}^3} \frac{I_\Gamma^{(1)}(G_{V_1}, \dots, G_{V_9})}{9!2^9} [\Gamma]$$

$$I^{(2)}(G_{V_1}, \dots, G_{V_9}) = \sum_{\Gamma \in D_{or}^3} \frac{I_\Gamma^{(2)}(G_{V_1}, \dots, G_{V_9})}{9!2^9} [\Gamma]$$

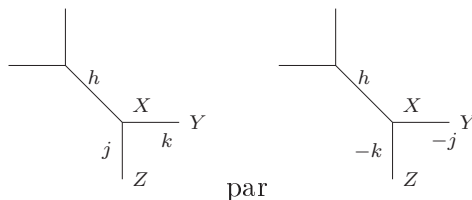
On a alors

$$I(G_{V_1}, \dots, G_{V_9}) = I^{(1)}(G_{V_1}, \dots, G_{V_9}) + I^{(2)}(G_{V_1}, \dots, G_{V_9})$$

**Lemme 6.2** On a

$$I^{(2)}(G_{V_1}, \dots, G_{V_9}) = 0$$

PREUVE: Rappelons que  $G_{3,V_h} = \{t_h\} \times D_{V_h} \times \mathbb{S}^2$ . Par conséquent,  $(t, m, c) \in \pi_{e(\Gamma,h)}^{-1}(G_{3,V_h})$  si et seulement si  $t = t_h$  et  $m \in D_{V_h}$ . Il n'y a aucune contrainte à vérifier sur  $\pi_{e(\Gamma,h)}(c)$  car la condition  $\pi_{e(\Gamma,h)}(c) \in \mathbb{S}^2$  est toujours vérifiée. Soit  $(\Gamma, n_\Gamma)$  un graphe numéroté et supposons qu'il existe un point d'intersection  $(t_h, m, c) \in [0, 1] \times B^3 \times C^{14}$ , avec  $m \in D_{V_h}$ . On note  $X$  le sommet de  $e(\Gamma, h)$  d'où part l'arête de plus grand indice, différent de  $h$ . On définit, avec la même numérotation des sommets  $n_\Gamma$  le graphe  $(\Gamma', n_\Gamma)$  obtenu à partir de  $\Gamma$  en remplaçant le sous-graphe



et on ne modifie pas le graphe  $\Gamma$  en dehors du dessin. Autrement dit, on échange les deux arêtes de issues de  $X$  et distinctes de  $e(\Gamma, h)$  et on change leur direction par rapport à  $X$ . Par convention, l'arête portant l'indice  $-j$  correspond à l'arête  $j$  avec l'orientation contraire. Soit  $\Gamma \in D_{or}^3$  et  $n_\Gamma$  une numérotation de ses sommets. On note  $I_{\Gamma, n_\Gamma, h}^{(2)}(V_1, \dots, V_9)$  la sous-somme de  $I^{(2)}(V_1, \dots, V_9)$  restreinte au graphe  $\Gamma$  muni de la numérotation  $n_\Gamma$  et aux points d'intersection  $(t_h, m, c)$ . On va montrer que  $I_{\Gamma, n_\Gamma, h}^{(2)}(V_1, \dots, V_9) + I_{\Gamma', n_{\Gamma'}, h}^{(2)}(V_1, \dots, V_9) = 0$ . On définit l'application  $s : C^{14} \rightarrow C^{14}$  par

$$\begin{cases} s_{\{c_O, c_B, c_Z, c_Y, c_X, c_F\} \setminus c_X} = id \\ s(c_X) = c'_X = -c_X + c_Y + c_Z \end{cases}$$

L'application  $s$  est une application qui renverse l'orientation. On définit aussi abusivement  $s : [0, 1] \times D_{V_h} \times C^{14} \rightarrow [0, 1] \times D_{V_h} \times C^{14}$  définie par  $s(t, m, c) = (t, m, s(c))$ . C'est donc une application qui renverse l'orientation. On montre que le carré suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] \times D_{V_h} \times C^{14} & \xrightarrow{\pi_\Gamma} & (\mathbb{S}^2)^{\mathfrak{g} \setminus h} \\ \downarrow s & & \downarrow id \\ [0, 1] \times D_{V_h} \times C^{14} & \xrightarrow{\pi_{\Gamma'}} & (\mathbb{S}^2)^{\mathfrak{g} \setminus h} \end{array}$$

On rappelle que  $E(\Gamma)$  (resp.  $E(\Gamma')$ ) désigne l'ensemble des arêtes de  $\Gamma$  (resp. de  $\Gamma'$ ). Soit  $i \in E(\Gamma) \setminus \{j, k\}$ , alors on a clairement  $\pi_{e(\Gamma', i)}(s(t, m, c)) = \pi_{e(\Gamma, i)}(t, m, c)$ . De plus, il existe  $\epsilon \in \{-1, 1\}$  tel que

$$\begin{aligned} \pi_{e(\Gamma', j)}(s(t, m, c)) &= \epsilon \frac{s(c_X) - s(c_Y)}{\|s(c_X) - s(c_Y)\|} \\ &= \epsilon \frac{-c_X + c_Y + c_Z - c_Y}{\|-c_X + c_Y + c_Z - c_Y\|} \\ &= \epsilon \frac{c_Z - c_X}{\|c_Z - c_X\|} \\ &= \pi_{e(\Gamma, j)}(t, m, c) \end{aligned}$$

De la même manière, on a  $\pi_{e(\Gamma', k)}(s(t, m, c)) = \pi_{e(\Gamma, k)}(t, m, c)$  et le diagramme est bien commutatif. Par conséquent,  $(t_h, m, c)$  est un point d'intersection pour  $(\Gamma, n_\Gamma)$  si et seulement si

$s(t_h, m, c)$  est aussi un point d'intersection pour  $(\Gamma', n_{\Gamma'})$ . De plus, comme  $s$  est un difféomorphisme qui renverse l'orientation, alors les points d'intersection de  $(\Gamma, n_{\Gamma})$  et de  $(\Gamma', n_{\Gamma'})$  sont en bijection et comptés avec des signes différents. On a alors montré que pour tout  $h \in \underline{9}$  on a

$$I_{\Gamma, n_{\Gamma}, h}^{(2)}(V_1, \dots, V_9) + I_{\Gamma', n_{\Gamma'}, h}^{(2)}(V_1, \dots, V_9) = 0$$

Ainsi

$$I^{(2)}(V_1, \dots, V_9) = 0$$

□

## 6.2 Rotation

On montre dans cette section que tous nos points d'intersection dépendent de la rotation  $\rho_m$ , et non de  $m$ . Plus précisément, on note

$$\begin{aligned} \overline{G_{0, V_i}} &= [0, t_i] \times SO(3) \times \{V_i\} \\ \overline{G_{2, V_i}} &= -\{t_i\} \times \overline{\bigcup_{\rho \in SO(3), \rho(V_i) \neq -V_i} \{\rho\} \times [V_i, \rho(V_i)]} \\ \overline{G_{1, V_i}} &= [t_i, 1] \times \{(\rho, \rho(V_i)), \rho \in SO(3)\} \end{aligned}$$

et avec encore un abus de notation

$$\pi_{e(\Gamma, i)} : [0, 1] \times SO(3) \times C^{14} \rightarrow [0, 1] \times SO(3) \times \mathbb{S}^2$$

l'application définie par

$$\pi_{e(\Gamma, i)} = id_{[0, 1] \times SO(3)} \times \pi_{e(\Gamma, i)}.$$

**Lemme 6.3** *On a*

$$\beta_3 = \frac{2}{2^9 9!} \sum_{\Gamma \in D_{or}^3} \sum_{h=1}^9 \epsilon(n_{\Gamma}, o_{\Gamma}) \langle \cap_{i=1}^{h-1} \pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(\overline{G_{1, V_i}}), \pi_{e(\Gamma, h)}^{-1}(\overline{G_{2, V_h}}), \cap_{i=h+1}^9 \pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(\overline{G_{0, V_i}}) \rangle [\Gamma, o_{\Gamma}].$$

Ce lemme découle des deux lemmes suivants :

**Lemme 6.4** *Soit  $(t_h, m_0, c_0) \in \cap_{i=1}^{i=9} \pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(G_{V_i})$ , alors  $\rho_{m_0} \neq id$ .*

PREUVE: C'est une conséquence du lemme 5.4.

□

**Lemme 6.5** *Soit  $h \in \underline{9}$ , alors*

$$I_{\Gamma, n_{\Gamma}, h}(V_1, \dots, V_9) = 2\epsilon(n_{\Gamma}, o_{\Gamma}) \langle \cap_{i=1}^{h-1} \pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(\overline{G_{1, V_i}}), \pi_{e(\Gamma, h)}^{-1}(\overline{G_{2, V_h}}), \cap_{i=h+1}^9 \pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(\overline{G_{0, V_i}}) \rangle.$$

PREUVE: Soit  $h \in \underline{9}$ . On note

$$\phi : \begin{cases} B^3 & \longrightarrow SO(3) \\ m & \longmapsto \rho_m \end{cases}$$

Le degré de  $\phi$  est égal à 2 sur  $SO(3) \setminus \{id\}$ . On note de façon abusive

$$\phi : \begin{cases} [0, 1] \times B^3 \times \mathbb{S}^2 & \longrightarrow [0, 1] \times SO(3) \times \mathbb{S}^2 \\ (t, m, V) & \longmapsto (t, \rho_m, V) \end{cases}$$

et on vérifie que  $\overline{G_{0, V_i}} = \phi(G_{0, V_i})$ ,  $\overline{G_{2, V_i}} = \phi(G_{2, V_i})$  et que  $\overline{G_{1, V_i}} = \phi(G_{1, V_i})$ . On note encore de manière abusive

$$\phi : \begin{cases} [0, 1] \times B^3 \times C^{14} & \longrightarrow [0, 1] \times SO(3) \times C^{14} \\ (t, m, c) & \longmapsto (t, \rho_m, c) \end{cases}.$$

Soit  $g : \underline{9} \setminus h \rightarrow \{0, 1\}$  Alors pour tout  $i \in \underline{9} \setminus h$ , le diagramme suivant est clairement commutatif :

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] \times B^3 \times C^{14} & \xrightarrow{\pi_{e(\Gamma, i)}} & [0, 1] \times B^3 \times \mathbb{S}^2 \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ [0, 1] \times SO(3) \times C^{14} & \xrightarrow{\pi_{e(\Gamma, i)}} & [0, 1] \times SO(3) \times \mathbb{S}^2 \end{array}$$

On sait que par définition on a

$$I_{\Gamma, n_{\Gamma}, h}(V_1, \dots, V_9) = \epsilon(n_{\Gamma}, o_{\Gamma}) \langle \cap_{i=1}^{h-1} \pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(G_{1, V_i}), \pi_{e(\Gamma, h)}^{-1}(G_{2, V_h}), \cap_{i=h+1}^9 \pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(G_{0, V_i}) \rangle.$$

D'après le diagramme, si  $(t, m, c) \in \cap_{i=1}^{h-1} \pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(G_{1, V_i}) \cap \pi_{e(\Gamma, h)}^{-1}(G_{2, V_h}) \cap \cap_{i=h+1}^9 \pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(G_{0, V_i})$ , alors  $\phi(t, m, c) \in \cap_{i=1}^{h-1} \pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(\overline{G_{1, V_i}}) \cap \pi_{e(\Gamma, h)}^{-1}(\overline{G_{2, V_h}}) \cap \cap_{i=h+1}^9 \pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(\overline{G_{0, V_i}})$ . Réciproquement, si  $(t, \rho, c) \in \cap_{i=1}^{h-1} \pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(\overline{G_{1, V_i}}) \cap \pi_{e(\Gamma, h)}^{-1}(\overline{G_{2, V_h}}) \cap \cap_{i=h+1}^9 \pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(\overline{G_{0, V_i}})$ , comme  $\rho \neq id$  alors  $\phi^{-1}(\rho) = \{m_1, m_2\}$  et on a clairement  $(t, m_1, c) \in \cap_{i=1}^{h-1} \pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(G_{1, V_i}) \cap \pi_{e(\Gamma, h)}^{-1}(G_{2, V_h}) \cap \cap_{i=h+1}^9 \pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(G_{0, V_i})$  et  $(t, m_2, c) \in \cap_{i=1}^{h-1} \pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(G_{1, V_i}) \cap \pi_{e(\Gamma, h)}^{-1}(G_{2, V_h}) \cap \cap_{i=h+1}^9 \pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(G_{0, V_i})$ . De plus, comme  $\phi$  préserve l'orientation, les points  $(t, m_1, c)$  et  $(t, m_2, c)$  sont comptés avec le même signe que  $(t, \rho, c)$ . Par conséquent

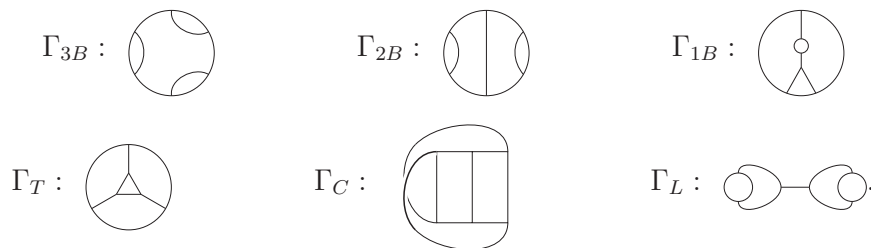
$$I_{\Gamma, n_{\Gamma}, h}(V_1, \dots, V_9) = 2\epsilon(n_{\Gamma}, o_{\Gamma}) \langle \cap_{i=1}^{h-1} \pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(\overline{G_{1, V_i}}), \pi_{e(\Gamma, h)}^{-1}(\overline{G_{2, V_h}}), \cap_{i=h+1}^9 \pi_{e(\Gamma, i)}^{-1}(\overline{G_{0, V_i}}) \rangle.$$

□

□

### 6.3 Réduction à un seul graphe

On montre dans cette section que l'on peut restreindre la somme qui définit  $\beta_3$  au graphe  $\Gamma_T$ . On a montré au lemme 2.2 qu'il y a 6 types de graphes trivalents connexes sans boucles internes à 6 sommets et à isomorphisme près possible :



On a aussi montré à la proposition 2.3 que

$$[\Gamma_L] = [\Gamma_C] = 0.$$

Notons  $D_{or}^3(\Gamma)$  le sous-ensemble de  $D_{or}^3$  composé des graphes trivalents connexes à 6 sommets sans boucles internes muni d'une orientation et isomorphes à  $\Gamma$ . On munit désormais chacun des graphes  $\Gamma$  de l'orientation  $\sigma_\Gamma$  du dessin, qu'on ne précise plus par la suite. On peut donc écrire que pour  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}$  on a

$$\beta_3 = \beta_3(\Gamma_{3B})(V_1, \dots, V_9) + \beta_3(\Gamma_{2B})(V_1, \dots, V_9) + \beta_3(\Gamma_{1B})(V_1, \dots, V_9) + \beta_3(\Gamma_T)(V_1, \dots, V_9)$$

où

$$\beta_3(\Gamma)(V_1, \dots, V_9) = \sum_{\Gamma \in D_{or}^3(\Gamma)} \frac{I_{\Gamma, n_\Gamma}(G_{V_1}, \dots, G_{V_9}) \epsilon(n_\Gamma)}{9!2^9} [\Gamma]$$

avec

$$\Gamma \in \{\Gamma_{3B}, \Gamma_{2B}, \Gamma_{1B}, \Gamma_T\}.$$

L'objectif de cette sous-section est de montrer le lemme suivant :

**Lemme 6.6** *Pour tout  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}$ , on a*

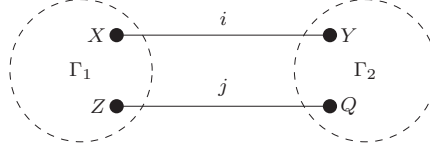
$$\beta_3(\Gamma_{3B})(V_1, \dots, V_9) = \beta_3(\Gamma_{2B})(V_1, \dots, V_9) = \beta_3(\Gamma_{1B})(V_1, \dots, V_9) = 0$$

et donc

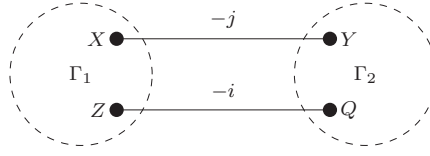
$$\beta_3 = \beta_3(\Gamma_T)(V_1, \dots, V_9) = \beta_3(\Gamma_T).$$

On montre pour cela un lemme préliminaire :

**Lemme 6.7** *Soit un graphe  $(\Gamma, n_\Gamma)$  pouvant se représenter sous la forme suivante, où chaque arête de  $\Gamma$  non dessinée est dans un des deux disques délimités par les pointillés :*



On note  $\Gamma_1$  (resp.  $\Gamma_2$ ) le sous-graphe de  $\Gamma$  qui contient les arêtes et les sommets de  $\Gamma$  contenus dans le disque de gauche (resp. de droite). On définit le graphe  $(\Gamma', n_\Gamma)$  de la façon suivante : on échange les arêtes  $i$  et  $j$  ainsi que leur orientation (de  $\Gamma_1$  vers  $\Gamma_2$  ou vice-versa). On ne change pas les arêtes non représentées de  $\Gamma$ .



Alors, pour  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}$ , on a

$$I_{\Gamma, n_\Gamma}(V_1, \dots, V_9) + I_{\Gamma', n_\Gamma}(V_1, \dots, V_9) = 0.$$

PREUVE: On note  $V(\Gamma_1)$  (resp.  $V(\Gamma_2)$ ) l'ensemble des sommets de  $\Gamma_1$  (resp.  $\Gamma_2$ ). On définit l'involution  $s : C^{14} \rightarrow C^{14}$  telle que pour  $M \in V(\Gamma_1)$ ,  $s(c_M) = c_M$  et pour  $M \in V(\Gamma_2)$ ,  $s(c_M) = c_M + c_X + c_Z - c_Q - c_Y$ . On note abusivement  $s : [0, 1] \times SO(3) \times C^{14} \rightarrow [0, 1] \times SO(3) \times C^{14}$  par  $s(t, \rho, c) = (t, \rho, s(c))$ . On montre que le graphe suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] \times SO(3) \times C^{14} & \xrightarrow{(\pi_{e(\Gamma, p)})} & (\mathbb{S}^2)^{\mathfrak{g}} \\ \downarrow s & & \downarrow id \\ [0, 1] \times SO(3) \times C^{14} & \xrightarrow{(\pi_{e(\Gamma', p)})} & (\mathbb{S}^2)^{\mathfrak{g}} \end{array}$$

Soit  $p \in \mathfrak{g}$ , on note  $M$  et  $N$  (resp.  $M'$  et  $N'$ ) la source et le but de  $e(\Gamma, p)$  (resp.  $e(\Gamma', p)$ ). Supposons que  $p \in \mathfrak{g} \setminus \{i, j\}$ , dans ce cas  $M = M'$  et  $N = N'$ . Alors soit  $(M, N) \in V(\Gamma_1)^2$  ou soit  $(M, N) \in V(\Gamma_2)^2$  et on vérifie facilement que dans les deux cas  $s(c_M) - s(c_N) = c_M - c_N$ . Donc on a  $\pi_{e(\Gamma', p)}(s(c)) = \pi_{e(\Gamma, p)}(c)$ . De plus, il existe  $\epsilon \in \{-1, 1\}$  tel que

$$\begin{aligned} \pi_{e(\Gamma', i)}(s(c)) &= \epsilon \frac{s(c_Z) - s(c_Q)}{\|s(c_Z) - s(c_Q)\|} \\ &= \epsilon \frac{c_Z - (c_Q + c_X + c_Z - c_Q - c_Y)}{\|c_Z - (c_Q + c_X + c_Z - c_Q - c_Y)\|} \\ &= \epsilon \frac{c_Y - c_X}{\|c_Y - c_X\|} \\ &= \pi_{e(\Gamma, i)}(c). \end{aligned}$$

Donc le carré est bien commutatif. De plus,  $s$  est un difféomorphisme qui renverse l'orientation. En effet, il suffit de voir qu'on peut écrire la définition de  $s$  sous la forme suivante :

- Pour  $M \in V(\Gamma_1)$  on a  $s(c_M) = c_M$ .
- Puis  $s(c_Y) = -c_Q + c_X + c_Z$  et  $s(c_Q) = -c_Y + c_X + c_Z$
- Enfin, pour  $M \in V(\Gamma_2) \setminus \{Y, Q\}$  on a  $s(c_M) = c_M + c_X + c_Z - c_Q - c_Y$ .

D'après le carré commutatif,  $(t, \rho, c)$  est un point d'intersection pour  $(\Gamma, n_\Gamma)$  si et seulement si c'est un point d'intersection pour  $(\Gamma', n_{\Gamma'})$ . De plus, ces points sont comptés avec un signe différent. Par conséquent,  $I_{\Gamma, n_\Gamma}(V_1, \dots, V_9) + I_{\Gamma', n_{\Gamma'}}(V_1, \dots, V_9) = 0$ .

□

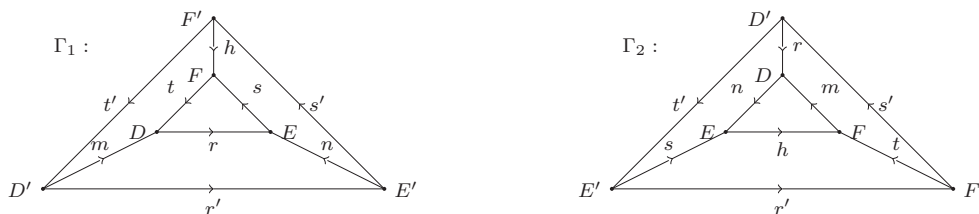
PREUVE DU LEMME 6.6 : Soit  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}$ . Les graphes  $\Gamma_{3B}$ ,  $\Gamma_{2B}$  et  $\Gamma_{1B}$  ont tous la propriété du lemme 6.7 : il suffit de fixer  $\Gamma_2$  comme une bulle de ces graphes. Par conséquent en regroupant deux par deux les sommes  $I_{\Gamma, n_\Gamma, h}$  et  $I_{\Gamma', n_{\Gamma'}, h}$ , on trouve alors que pour tout  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}$ , on a

$$\beta_3(\Gamma_{3B})(V_1, \dots, V_9) = \beta_3(\Gamma_{2B})(V_1, \dots, V_9) = \beta_3(\Gamma_{1B})(V_1, \dots, V_9) = 0.$$

□

## 6.4 Enumération des intersections à calculer

Le but de cette section est de démontrer le lemme 6.8. On sait désormais qu'il suffit de calculer les signes de points d'intersections associés aux graphes isomorphes à  $\Gamma_T$ . Soit  $h \in \{2, \dots, 8\}$ . On définit les graphes  $(\Gamma_1, n_{\Gamma_1})$  et  $(\Gamma_2, n_{\Gamma_2})$  dont les arêtes sont orientées et annotées, et les sommets sont annotés de la façon suivante, et où  $\{D', E', F'\} = \{O, B, C\}$  avec le même ordre cyclique :



On note  $\eta = (r', s', t', r, s, t, m, n)$  l'ensemble ordonné par les dessins ci-dessus des indices différents de  $h$  des arêtes de  $\Gamma_1$  ou  $\Gamma_2$ . On notera donc  $(\Gamma_1, h, \eta)$  (resp.  $(\Gamma_2, h, \eta)$ ) le graphe  $(\Gamma_1, n_{\Gamma_1})$  (resp.  $(\Gamma_2, n_{\Gamma_2})$ ) muni de la numérotation  $(h, \eta)$ . On note

$$I_{\Gamma_1, h, \eta}(W_1, \dots, W_9) = \left\langle \prod_{i=1}^{h-1} \pi_{e(\Gamma_1, i)}^{-1}(\overline{G_{1, W_i}}), \pi_{e(\Gamma_1, h)}^{-1}(\overline{G_{2, W_h}}), \prod_{i=h+1}^9 \pi_{e(\Gamma_1, i)}^{-1}(\overline{G_{0, W_i}}) \right\rangle$$

$$I_{\Gamma_2, h, \eta}(W_1, \dots, W_9) = \left\langle \prod_{i=1}^{h-1} \pi_{e(\Gamma_2, i)}^{-1}(\overline{G_{1, W_i}}), \pi_{e(\Gamma_2, h)}^{-1}(\overline{G_{2, W_h}}), \prod_{i=h+1}^9 \pi_{e(\Gamma_2, i)}^{-1}(\overline{G_{0, W_i}}) \right\rangle.$$

On définit la fonction  $\chi_h : \underline{9} \rightarrow \{0, 1\}$  avec  $\chi_h(i) = 1$  si  $i < h$ ,  $\chi_h(h) = 1/2$  et  $\chi_h(i) = 0$  si  $i > h$ .

**Lemme 6.8** *Soit  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}$ . On a*

$$\beta_3 = (\beta_{1,1} + \beta'_{1,1} + \beta_{1,2} + \beta_2 + \beta'_2) [\Gamma_T]$$

avec

$$\begin{aligned} \beta_{1,1} &= \frac{1}{2^8 9!} \sum_{h=3}^{h=5} \sum_{\eta \in \mathcal{D}_{1,1}^h, (\epsilon_p) \in \{-1, 1\}^{\underline{9}}} I_{\Gamma_1, h, \eta}(\epsilon_1 V_1, \dots, \epsilon_9 V_9) \\ \beta'_{1,1} &= \frac{1}{2^8 9!} \sum_{h=3}^{h=5} \sum_{\eta \in \mathcal{D}_{1,1}^h, (\epsilon_p) \in \{-1, 1\}^{\underline{9}}} I_{\Gamma_1, h, \eta}(\epsilon_9 V_9, \dots, \epsilon_1 V_1) \\ \beta_{1,2} &= \frac{1}{2^8 9!} \sum_{h=4}^{h=6} \sum_{\eta \in \mathcal{D}_{1,2}^h, (\epsilon_p) \in \{-1, 1\}^{\underline{9}}} I_{\Gamma_1, h, \eta}(\epsilon_1 V_1, \dots, \epsilon_9 V_9) \\ \beta_2 &= \frac{1}{2^8 9!} \sum_{h=2}^{h=7} \sum_{\eta \in \mathcal{D}_2^h, (\epsilon_p) \in \{-1, 1\}^{\underline{9}}} I_{\Gamma_2, h, \eta}(\epsilon_1 V_1, \dots, \epsilon_9 V_9) \\ \beta'_2 &= \frac{1}{2^8 9!} \sum_{h=2}^{h=7} \sum_{\eta \in \mathcal{D}_2^h, (\epsilon_p) \in \{-1, 1\}^{\underline{9}}} I_{\Gamma_2, h, \eta}(\epsilon_9 V_9, \dots, \epsilon_1 V_1) \end{aligned}$$

où, si on note  $\odot_{r', s', t'}$  la condition suivante : l'ordre total sur  $r', s', t'$  induit l'ordre cyclique  $(r', s', t')$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{1,1}^h &= \{\eta / \chi_h(r') + \chi_h(s') + \chi_h(t') = 1 \quad \chi_h(r) + \chi_h(s) + \chi_h(t) = 1, \\ &\quad \min(r', s', t') < \min(r, s, t), \quad \odot_{r', s', t'}\} \\ \mathcal{D}_{1,2}^h &= \{\eta / \chi_h(r') + \chi_h(s') + \chi_h(t') = 1 \quad \chi_h(r) + \chi_h(s) + \chi_h(t) = 2, \\ &\quad \odot_{r', s', t'}\} \\ \mathcal{D}_2^h &= \{\eta / \chi_h(r') + \chi_h(s') + \chi_h(t') = 1, \quad \odot_{r', s', t'}\}. \end{aligned}$$

Pour montrer ce lemme, on commence par prouver une série de lemmes préliminaires.

**Lemme 6.9** *On a*

$$\epsilon(n_{\Gamma_1}, o_{\Gamma_1}) = \epsilon(n_{\Gamma_2}, o_{\Gamma_2}) = 1.$$



PREUVE: On considère l'exemple 2.10. On a montré sur cet exemple que  $\epsilon(n_\Gamma, o_\Gamma) = 1$ . Or toutes les numérotations utilisées  $n_\Gamma$  diffèrent par une permutation circulaire de  $(O, B, C)$  qui ne change pas la signature de la permutation.

□

**Notation 6.10** *On note*

$$\mathcal{E}_{\Gamma,h}(V_1, \dots, V_9) = \bigcap_{i=1}^{h-1} \pi_{e(\Gamma,i)}^{-1}(\overline{G_{1,V_i}}) \cap \pi_{e(\Gamma,h)}^{-1}(\overline{G_{2,V_h}}) \bigcap_{i=h+1}^9 \pi_{e(\Gamma,i)}^{-1}(\overline{G_{0,V_i}})$$

*l'ensemble des points d'intersection au temps d'homotopie  $t_h$  restants à calculer, et*

$$I_{\Gamma,h}(V_1, \dots, V_9) = \left\langle \bigcap_{i=1}^{h-1} \pi_{e(\Gamma,i)}^{-1}(\overline{G_{1,V_i}}), \pi_{e(\Gamma,h)}^{-1}(\overline{G_{2,V_h}}), \bigcap_{i=h+1}^9 \pi_{e(\Gamma,i)}^{-1}(\overline{G_{0,V_i}}) \right\rangle.$$

**Lemme 6.11** *Soit  $\Gamma$  un graphe aux sommets orientés dont les arêtes sont numérotées et orientées et soit  $\epsilon = (\epsilon_i) \in \{\pm 1\}^9$ . On définit un nouveau graphe  $\Gamma_\epsilon$  de la façon suivante :  $\Gamma_\epsilon$  est le même graphe que  $\Gamma$ , mais l'orientation de l'arête  $i$  est inversée si et seulement si  $\epsilon_i = -1$ . On a*

$$I_{\Gamma,h}(\epsilon_1 V_1, \dots, \epsilon_9 V_9) = I_{\Gamma_\epsilon,h}(V_1, \dots, V_9)$$

PREUVE: On munit  $\Gamma$  et  $\Gamma_\epsilon$  d'une même numérotation  $n_\Gamma$  de leurs sommets. Changer l'orientation d'une arête induit une permutation de deux demi-arêtes, on a donc  $\epsilon(n_{\Gamma_\epsilon}) = \epsilon(n_\Gamma) \prod \epsilon_i$ . On a de plus  $\pi_{e(\Gamma_\epsilon,i)}^{\chi_h(i)}(c) = \epsilon_i \pi_{e(\Gamma,i)}^{\chi_h(i)}(c)$ . Par conséquent le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} SO(3) \times C^{14} & \xrightarrow{F_{\Gamma,n_\Gamma,h,V_h}^{(6)}} & (\mathbb{S}^2)^{\underline{9} \setminus h} \times \mathbb{R} \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow g \\ SO(3) \times C^{14} & \xrightarrow{F_{\Gamma_\epsilon,n_\Gamma,h,\epsilon V_h}^{(6)}} & (\mathbb{S}^2)^{\underline{9} \setminus h} \times \mathbb{R} \end{array}$$

avec

$$F_{\Gamma,n_\Gamma,h,V_h}^{(6)}(\rho, c) = ((\pi_{e(\Gamma,i)}^{\chi_h(i)}(\rho, c))_{i \in \underline{9} \setminus h}, \langle \pi_{e(\Gamma,h)}(c), V_h \wedge \rho(V_h) \rangle)$$

et

$$g(V_1, \dots, \hat{V}_h, \dots, V_9, x) = (\epsilon_1 V_1, \dots, \hat{V}_h, \dots, \epsilon_9 V_9, \epsilon_h x)$$

(on utilise l'écriture  $(V_1, \dots, \hat{V}_h, \dots, V_9) = (V_1, \dots, V_{h-1}, V_{h+1}, \dots, V_9)$ ). De plus, on a

$$\begin{aligned} \pi_{e(\Gamma,h)}(c) \in [\epsilon_h V_h, \rho(\epsilon_h V_h)] &\Leftrightarrow \epsilon_h \pi_{e(\Gamma,h)}(c) \in [V_h, \rho(V_h)] \\ &\Leftrightarrow \pi_{e(\Gamma_\epsilon,h)}(c) \in [V_h, \rho(V_h)]. \end{aligned}$$

Donc si  $(\rho, c) \in \mathcal{E}_{\Gamma,h}(\epsilon_1 V_1, \dots, \epsilon_9 V_9)$  alors  $(\rho, c) \in \mathcal{E}_{\Gamma_\epsilon,h}(V_1, \dots, V_9)$ . Les signes de ces points diffèrent de  $\sigma(Jac_g) = \prod \epsilon_i$  et le lemme en découle.

□

**Lemme 6.12** Soient  $\Gamma$  un graphe dont les arêtes sont numérotées et orientées et  $h \in \{2, \dots, 8\}$ .  
On a

$$I_{\Gamma,h}(V_1, \dots, V_9) = I_{\Gamma,h}(-V_1, \dots, -V_9).$$

PREUVE: En effet, on vérifie que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} SO(3) \times C^{14} & \xrightarrow{F_{\Gamma, n_{\Gamma}, h, V_h}^{(6)}} & (\mathbb{S}^2)^{\mathcal{G} \setminus h} \times \mathbb{R} \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ SO(3) \times C^{14} & \xrightarrow{F_{\Gamma, n_{\Gamma}, h, \epsilon V_h}^{(6)}} & (\mathbb{S}^2)^{\mathcal{G} \setminus h} \times \mathbb{R} \end{array}$$

où  $f(\rho, c) = (\rho, -c)$  et  $g(V_1, \dots, \hat{V}_h, \dots, V_9, x) = (-V_1, \dots, \hat{V}_h, \dots, -V_9, -x)$ . De plus, on a  $\pi_{e(\Gamma, h)}(c) \in [V_h, \rho(V_h)] \Leftrightarrow -\pi_{e(\Gamma, h)}(c) \in [-V_h, \rho(-V_h)]$  donc si  $(\rho, c) \in \mathcal{E}_{\Gamma, h}(V_1, \dots, V_9)$  alors  $(\rho, -c) \in \mathcal{E}_{\Gamma, h}(-V_1, \dots, -V_9)$ . Comme  $f$  et  $g$  sont des applications qui renversent l'orientation, ces points sont comptés avec le même signe.

□

**Lemme 6.13** Soit  $\Gamma \in D_{or}^3$ , on définit le graphe  $\bar{\Gamma} \in D_{or}^3$  comme le graphe  $\Gamma$  où chaque arête  $i$  est remplacée par  $10 - i$  en conservant son orientation. Si on munit  $\Gamma$  d'une numérotation  $n_{\Gamma}$  de ses sommets, alors  $\bar{\Gamma}$  hérite de la même numérotation  $n_{\Gamma}$  de ses sommets. On a

$$I_{\Gamma, h}(V_1, \dots, V_9) = I_{\bar{\Gamma}, 10-h}(V_9, \dots, V_1).$$

PREUVE: On va montrer que  $\pi_{e(\bar{\Gamma}, 10-i)}^{\chi_{10-h}(10-i)}(\rho^{-1}, \rho^{-1}(c)) = \pi_{e(\Gamma, i)}^{\chi_h(i)}(\rho, c)$ . On a clairement que  $\pi_{e(\bar{\Gamma}, 10-i)} = \pi_{e(\Gamma, i)}$  et que  $\chi_{10-h}(10-i) = 1 - \chi_h(i)$ . Si l'arête  $i$  est orientée du point  $M$  au point  $N$  alors par définition on a  $\pi_{e(\Gamma, i)}^{\chi_h(i)}(\rho, c) = \rho^{-\chi_h(i)}\left(\frac{\overrightarrow{MN}}{\|\overrightarrow{MN}\|}\right)$ . Donc

$$\begin{aligned} \pi_{e(\bar{\Gamma}, 10-i)}^{\chi_{10-h}(10-i)}(\rho^{-1}, \rho^{-1}(c)) &= \pi_{e(\Gamma, i)}^{1-\chi_h(i)}(\rho^{-1}, \rho^{-1}(c)) \\ &= \rho^{-\chi_h(i)+1} \left( \rho^{-1} \left( \frac{\overrightarrow{MN}}{\|\overrightarrow{MN}\|} \right) \right) \\ &= \rho^{-\chi_h(i)} \left( \frac{\overrightarrow{MN}}{\|\overrightarrow{MN}\|} \right). \end{aligned}$$

Par conséquent, on a  $\pi_{e(\bar{\Gamma}, i)}^{\chi_{10-h}(i)}(\rho^{-1}, \rho^{-1}(c)) = \pi_{e(\Gamma, 10-i)}^{\chi_h(10-i)}(\rho, c)$  et montrons que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
SO(3) \times C^{14} & \xrightarrow{F_{\Gamma, n_{\Gamma}, h, V_h}^{(6)}} & (\mathbb{S}^2)^{\mathcal{Q} \setminus h} \times \mathbb{R} \\
\downarrow f & & \downarrow g \\
SO(3) \times C^{14} & \xrightarrow{F_{\Gamma_\epsilon, n_{\Gamma}, h, \epsilon V_h}^{(6)}} & (\mathbb{S}^2)^{\mathcal{Q} \setminus 10-h} \times \mathbb{R}
\end{array}$$

avec  $f(\rho, c) = (\rho^{-1}, \rho^{-1}(c))$  et  $g(V_1, \dots, V_9, x) = (V_9, \dots, V_1, -x)$ . Notons  $(V'_1, \dots, V'_9, -x) = g(V_1, \dots, V_9, x)$ . Il reste donc à calculer :

$$\begin{aligned}
\langle \pi_{e(\Gamma, h)}(c), V_h \wedge \rho(V_h) \rangle &= \langle \pi_{e(\Gamma, h)}(\rho^{-1}(c)), \rho^{-1}(V_h) \wedge V_h \rangle \\
&= \langle \pi_{e(\bar{\Gamma}, 10-h)}(\rho^{-1}(c)), \rho^{-1}(V'_{10-h}) \wedge V'_{10-h} \rangle \\
&= -\langle \pi_{e(\bar{\Gamma}, 10-h)}(\rho^{-1}(c)), V'_{10-h} \wedge \rho^{-1}(V'_{10-h}) \rangle.
\end{aligned}$$

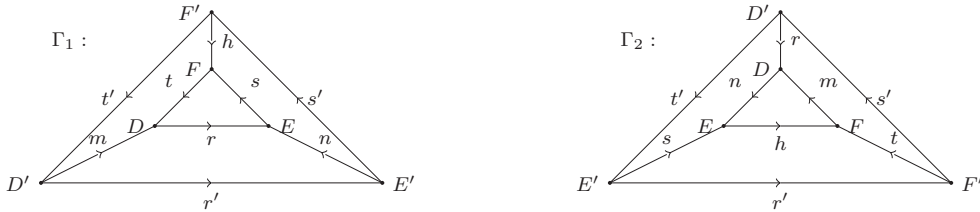
On a donc bien la commutativité du diagramme. On a de plus

$$\begin{aligned}
\pi_{e(\Gamma, h)}(c) \in [V_h, \rho(V_h)] &\Leftrightarrow \rho^{-1}(\pi_{e(\Gamma, h)}(c)) \in \rho^{-1}([V_h, \rho(V_h)]) \\
&\Leftrightarrow \pi_{e(\Gamma, h)}(\rho^{-1}(c)) \in [\rho^{-1}(V_h), V_h] \\
&\Leftrightarrow \pi_{e(\bar{\Gamma}, 10-h)}(\rho^{-1}(c)) \in [\rho^{-1}(V'_{10-h}), V'_{10-h}].
\end{aligned}$$

Par conséquent  $(\rho, c) \in \mathcal{E}_{\Gamma, h}(V_1, \dots, V_9)$  si et seulement si  $(\rho^{-1}, \rho^{-1}(c)) \in \mathcal{E}_{\bar{\Gamma}, 10-h}(V'_1, \dots, V'_9) = \mathcal{E}_{\bar{\Gamma}, 10-h}(V_9, \dots, V_1)$ . De plus,  $f$  et  $g$  sont deux applications qui renversent l'orientation donc les points d'intersections sont comptés avec le même signe.

□

PREUVE DU LEMME 6.8 : On considère les deux graphes suivants :



On rappelle que  $\eta = (r', s', t', r, s, t, m, n)$ , que  $\mathcal{D}_{or}^3$  désigne l'ensemble des classes d'isotopies des graphes trivalents dont les arêtes sont orientées et numérotées, à 6 sommets. On a montré que

$$\beta_3 = \frac{1}{2^{89}!} \sum_{h \in \{2, \dots, 8\}} \sum_{\Gamma \in \mathcal{D}_{or}^3(\Gamma_T)} I_{\Gamma, h}(V_1, \dots, V_9)[\Gamma_T].$$

Soit  $h \in \{2, \dots, 8\}$ . On décompose  $D_{or}^3(\Gamma_T) = \mathcal{D}_{or,1}^3(h) \cup \mathcal{D}_{or,2}^3(h)$  où  $\mathcal{D}_{or,1}^3(h)$  désigne le sous-ensemble de  $D_{or}^3(\Gamma_T)$  composé des graphes dont l'arête  $h$  n'est pas sur un triangle, et  $\mathcal{D}_{or,2}^3(h)$  désigne le sous-ensemble de  $D_{or}^3(\Gamma_T)$  composé des graphes dont l'arête  $h$  se trouve sur un triangle. Soit  $\Gamma \in \mathcal{D}_{or,1}^3(h)$ , il existe  $\eta$  et  $(\epsilon_p) \in \{-1, 1\}^9$  tel que  $\Gamma = (\Gamma_1, (\epsilon_p), h, \eta)$ . On voit donc un graphe de  $\mathcal{D}_{or,1}^3(h)$  comme un couple  $(\eta, (\epsilon_p))$ . Pour que cette écriture soit unique, il faut distinguer le triangle  $(r', s', t')$  du triangle  $(r, s, t)$  (que l'on peut a priori interchanger par une symétrie de  $\Gamma_1$ ) et fixer un ordre cyclique sur les arêtes de  $(r', s', t')$  (que l'on peut a priori changer par une symétrie de  $\Gamma_1$  qui fixe l'arête  $h$ ). On distingue les deux triangles soit par une condition  $\chi_h(r') + \chi_h(s') + \chi_h(t') < \chi_h(r) + \chi_h(s) + \chi_h(t)$  soit, en cas d'égalité, par une condition du type  $\min(r', s', t') < \min(r, s, t)$ . On note  $\odot_{r',s',t'}$  la condition suivante : l'ordre total sur  $r', s', t'$  induit l'ordre cyclique  $(r', s', r')$ . En conclusion, on peut écrire la bijection suivante :

$$(\mathcal{D}_{1,1}^h \cup \bar{\mathcal{D}}_{1,1}^h \cup \mathcal{D}_{1,2}^h \cup \mathcal{R}) \times \{-1, 1\}^9 \rightarrow \mathcal{D}_{or,1}^3(h)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{1,1}^h &= \{\eta / \chi_h(r') + \chi_h(s') + \chi_h(t') = 1 \quad \chi_h(r) + \chi_h(s) + \chi_h(t) = 1, \\ &\quad \min(r', s', t') < \min(r, s, t), \quad \odot_{r',s',t'}\} \\ \bar{\mathcal{D}}_{1,1}^h &= \{\eta / \chi_h(r') + \chi_h(s') + \chi_h(t') = 2 \quad \chi_h(r) + \chi_h(s) + \chi_h(t) = 2, \\ &\quad \max(r', s', t') > \max(r, s, t), \quad \odot_{r',t',s'}\} \\ \mathcal{D}_{1,2}^h &= \{\eta / \chi_h(r') + \chi_h(s') + \chi_h(t') = 1 \quad \chi_h(r) + \chi_h(s) + \chi_h(t) = 2, \\ &\quad \odot_{r',s',t'}\}, \end{aligned}$$

et  $\mathcal{R}$  désigne le complémentaire. Or, on sait que les vecteurs  $(V_1, \dots, V_9)$  sont admissibles, en particulier, pour chaque triplet  $(V_{r'}, V_{s'}, V_{t'})$ , les vecteurs  $V_{r'}, V_{s'}$  et  $V_{t'}$  ne sont pas coplanaires, donc si  $\chi_h(r') + \chi_h(s') + \chi_h(t') \in \{0, 3\}$  ou  $\chi_h(r) + \chi_h(s) + \chi_h(t) \in \{0, 3\}$  il n'y a pas de points d'intersections, donc  $\mathcal{R}$  n'intervient pas dans  $\beta_3$ . On a une bijection entre  $\mathcal{D}_{1,1}^{10-h}$  et  $\bar{\mathcal{D}}_{1,1}^h$  : Soit  $\eta \in \bar{\mathcal{D}}_{1,1}^h$ , montrons que  $10 - \eta \in \mathcal{D}_{1,1}^h$ . En effet, on a

$$\begin{aligned} \chi_{10-h}(10 - r') + \chi_{10-h}(10 - s') + \chi_{10-h}(10 - t') &= 1 - \chi_h(r') + 1 - \chi_h(s') + 1 - \chi_h(t') \\ &= 3 - (\chi_h(r') + \chi_h(s') + \chi_h(t')) \\ &= 3 - 2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

De la même manière on trouve

$$\chi_{10-h}(10 - r) + \chi_{10-h}(10 - s) + \chi_{10-h}(10 - t) = 1.$$

On a aussi facilement que  $\max(10 - r', 10 - s', 10 - t') > \max(10 - r, 10 - s, 10 - t) \Leftrightarrow \min(r', s', t') < \min(r, s, t)$  et que l'ordre cyclique sur  $(10 - r', 10 - t', 10 - s')$  correspond à

un ordre cyclique sur  $(r', s', t')$ . Par conséquent, on peut écrire, en posant  $\eta' = 10 - \eta$  puis  $h' = 10 - h$ , que

$$\begin{aligned}
\sum_{h=2}^{h=8} \sum_{\eta \in \bar{\mathcal{D}}_{1,1}^h(\epsilon_p)} I_{\Gamma_1, (\epsilon_p), h, \eta}(V_1, \dots, V_9) &= \sum_{h=2}^{h=8} \sum_{\eta \in \bar{\mathcal{D}}_{1,1}^h(\epsilon_p)} I_{\Gamma_1, (\epsilon_p), 10-h, 10-\eta}(V_9, \dots, V_1) \\
&= \sum_{h'=2}^{h'=8} \sum_{\eta' \in \mathcal{D}_{1,1}^{h'}(\epsilon_p)} I_{\Gamma_1, (\epsilon_p), h', \eta'}(V_9, \dots, V_1) \\
&= \sum_{h=2}^{h=8} \sum_{\eta \in \mathcal{D}_{1,1}^h(\epsilon_p)} I_{\Gamma_1, (\epsilon_p), h, \eta}(V_9, \dots, V_1).
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\sum_{h=2}^{h=8} \sum_{\Gamma \in \mathcal{D}_{or,1}^3(h)} I_{\Gamma, h}(V_1, \dots, V_9) &= \sum_{h=2}^{h=8} \sum_{\eta \in \mathcal{D}_{1,1}^h \cup \bar{\mathcal{D}}_{1,1}^h \cup \mathcal{D}_{1,2}^h(\epsilon_p)} I_{\Gamma_1, (\epsilon_p), h, \eta}(V_1, \dots, V_9) \\
&= \sum_{h=2}^{h=8} \sum_{\eta \in \mathcal{D}_{1,1}^h(\epsilon_p)} (I_{\Gamma_1, (\epsilon_p), h, \eta}(V_1, \dots, V_9) + I_{\Gamma_1, (\epsilon_p), h, \eta}(V_9, \dots, V_1)) \\
&\quad + \sum_{h=2}^{h=8} \sum_{\eta \in \mathcal{D}_{1,2}^h(\epsilon_p)} I_{\Gamma_1, (\epsilon_p), h, \eta}(V_1, \dots, V_9) \\
&= \sum_{h=2}^{h=8} \sum_{\eta \in \mathcal{D}_{1,1}^h(\epsilon_p)} (I_{\Gamma_1, h, \eta}(\epsilon_1 V_1, \dots, \epsilon_9 V_9) + I_{\Gamma_1, h, \eta}(\epsilon_9 V_9, \dots, \epsilon_1 V_1)) \\
&\quad + \sum_{h=2}^{h=8} \sum_{\eta \in \mathcal{D}_{1,2}^h(\epsilon_p)} I_{\Gamma_1, h, \eta}(\epsilon_1 V_1, \dots, \epsilon_9 V_9).
\end{aligned}$$

On suit le même raisonnement pour  $\mathcal{D}_{or,2}^3(h)$ . Soit  $\Gamma \in \mathcal{D}_{or,2}^3(h)$ , il existe  $\eta$  et  $(\epsilon_p)$  tel que  $(\Gamma, h) = (\Gamma_2, (\epsilon_p), h, \eta)$  et cette écriture est unique si on fixe un ordre cyclique sur les arêtes du triangle  $(r', s', t')$ . Donc on a une bijection  $(\mathcal{D}_2^h \cup \bar{\mathcal{D}}_2^h \cup \mathcal{R}') \times \{-1, 1\}^9 \rightarrow \mathcal{D}_{or,2}^3(h)$  avec

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_2^h &= \{\eta / \chi(r') + \chi(s') + \chi(t') = 1, \quad \odot_{r', s', t'}\} \\
\bar{\mathcal{D}}_2^h &= \{\eta / \chi(r') + \chi(s') + \chi(t') = 2, \quad \odot_{r', t', s'}\}
\end{aligned}$$

et  $\mathcal{R}'$  désigne le complémentaire, qui ne comptent pas dans  $\beta_3$ . On a aussi, comme pour le cas précédent, une bijection  $\bar{\mathcal{D}}_2^h \rightarrow \mathcal{D}_2^{10-h}; \eta \mapsto 10 - \eta$ . Et on peut directement (comme pour le cas

précédent), écrire que

$$\begin{aligned} \sum_{h=2}^{h=8} \sum_{\Gamma \in \mathcal{D}_{or,2}^3(h)} I_{\Gamma,h}(V_1, \dots, V_9) &= \sum_{h=2}^{h=8} \sum_{\eta \in \mathcal{D}_2^h, (\epsilon_p)} (I_{\Gamma_2, h, \eta}(\epsilon_1 V_1, \dots, \epsilon_9 V_9) + I_{\Gamma_2, h, \eta}(\epsilon_9 V_9, \dots, \epsilon_1 V_1)) \\ &= \tilde{\beta}_2 + \tilde{\beta}'_2. \end{aligned}$$

En conclusion, on a

$$\beta_3 = \left( \tilde{\beta}_{1,1} + \tilde{\beta}'_{1,1} + \tilde{\beta}_{1,2} + \tilde{\beta}_2 + \tilde{\beta}'_2 \right) [\Gamma_T]$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{1,1} &= \frac{1}{2^{89}!} \sum_{h=1}^{h=9} \sum_{\eta \in \mathcal{D}_{1,1}^h, (\epsilon_p)} I_{\Gamma_1, h, \eta}(\epsilon_1 V_1, \dots, \epsilon_9 V_9) \\ \tilde{\beta}'_{1,1} &= \frac{1}{2^{89}!} \sum_{h=1}^{h=9} \sum_{\eta \in \mathcal{D}_{1,1}^h, (\epsilon_p)} I_{\Gamma_1, h, \eta}(\epsilon_9 V_9, \dots, \epsilon_1 V_1) \\ \tilde{\beta}_{1,2} &= \frac{1}{2^{89}!} \sum_{h=1}^{h=9} \sum_{\eta \in \mathcal{D}_{1,2}^h, (\epsilon_p)} I_{\Gamma_1, h, \eta}(\epsilon_1 V_1, \dots, \epsilon_9 V_9) \\ \tilde{\beta}_2 &= \frac{1}{2^{89}!} \sum_{h=1}^{h=9} \sum_{\eta \in \mathcal{D}_2^h, (\epsilon_p)} I_{\Gamma_2, h, \eta}(\epsilon_1 V_1, \dots, \epsilon_9 V_9) \\ \tilde{\beta}'_2 &= \frac{1}{2^{89}!} \sum_{h=1}^{h=9} \sum_{\eta \in \mathcal{D}_2^h, (\epsilon_p)} I_{\Gamma_2, h, \eta}(\epsilon_9 V_9, \dots, \epsilon_1 V_1). \end{aligned}$$

Pour vérifier  $\eta \in \mathcal{D}_{1,1}^h$ , il est nécessaire d'avoir  $3 \leq h \leq 5$  : en effet, on doit avoir au moins deux indices  $k$  et  $a$  tels que  $k < h$  et  $a < h$ , donc  $3 \leq h$ . On doit avoir au moins 4 indices  $i, j, b$  et  $c$  plus grands que  $h$ , donc  $h \leq 5$ . Par des arguments similaires, on trouve que pour vérifier  $\eta \in \mathcal{D}_{1,2}^h$  on doit avoir  $4 \leq h \leq 6$  et pour vérifier  $\eta \in \mathcal{D}_2^h$  on doit avoir  $2 \leq h \leq 7$ . Ceci nous donne la formule du lemme, à savoir

$$\beta_3 = \left( \beta_{1,1} + \beta'_{1,1} + \beta_{1,2} + \beta_2 + \beta'_2 \right) [\Gamma_T]$$

avec

$$\begin{aligned}
\beta_{1,1} &= \frac{1}{2^{89}!} \sum_{h=3}^{h=5} \sum_{\eta \in \mathcal{D}_{1,1}^h(\epsilon_p)} I_{\Gamma_1, h, \eta}(\epsilon_1 V_1, \dots, \epsilon_9 V_9) \\
\beta'_{1,1} &= \frac{1}{2^{89}!} \sum_{h=3}^{h=5} \sum_{\eta \in \mathcal{D}_{1,1}^h(\epsilon_p)} I_{\Gamma_1, h, \eta}(\epsilon_9 V_9, \dots, \epsilon_1 V_1) \\
\beta_{1,2} &= \frac{1}{2^{89}!} \sum_{h=4}^{h=6} \sum_{\eta \in \mathcal{D}_{1,2}^h(\epsilon_p)} I_{\Gamma_1, h, \eta}(\epsilon_1 V_1, \dots, \epsilon_9 V_9) \\
\beta_2 &= \frac{1}{2^{89}!} \sum_{h=2}^{h=7} \sum_{\eta \in \mathcal{D}_2^h(\epsilon_p)} I_{\Gamma_2, h, \eta}(\epsilon_1 V_1, \dots, \epsilon_9 V_9) \\
\beta'_2 &= \frac{1}{2^{89}!} \sum_{h=2}^{h=7} \sum_{\eta \in \mathcal{D}_2^h(\epsilon_p)} I_{\Gamma_2, h, \eta}(\epsilon_9 V_9, \dots, \epsilon_1 V_1).
\end{aligned}$$

□

## 7 Mise en équation des anomalies

Ce chapitre propose un algorithme implémentable pour la détermination de  $\beta_3$ .

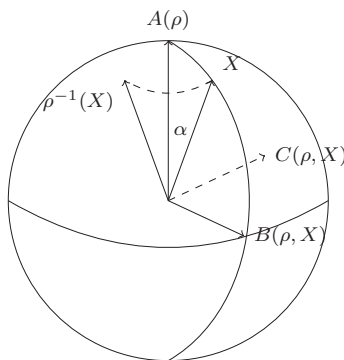
On commence dans la section 7.1 à démontrer que les intersections peuvent être calculées comme des degrés d'une application (lemme 7.3), puis on décrit le calcul de  $\beta_{1,1}$  dans les sections 7.2 et 7.3. Enfin, on décrit les calculs de  $\beta_{1,2}$  dans la section 7.4 et de  $\beta_2$  dans la section 7.5.

### 7.1 Degré

On montre dans cette sous-section que l'on peut considérer l'anomalie comme un degré. Le lemme principal est le lemme 7.3.

**Lemme 7.1** *Soient  $X \in \mathbb{S}^2$  et  $\rho \in SO(3) \setminus \{id\}$ . On note  $\theta = \theta(\rho)$  l'angle de la rotation qu'on suppose dans  $]0, \pi[$ . On note  $\tilde{\phi}_{X,\rho}(V) = \langle X, V \wedge \rho(V) \rangle$ . Supposons  $\rho(X) \neq X$ , alors il existe un plongement  $\psi_{X,\rho} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^2$  tel que  $\psi_{X,\rho}([0, 1]) = \{V \in \mathbb{S}^2, X \in [V, \rho(V)]\}$ . De plus, on a  $\psi_{X,\rho}(0) = \rho^{-1}(X)$ ,  $\psi_{X,\rho}(1) = X$  et pour tout  $t \in ]0, 1[$ ,  $(\nabla_{\psi_{X,\rho}(t)} \tilde{\phi}_{X,\rho}, \frac{\partial}{\partial t} \psi_{X,\rho})$  est une base orientée de  $T_{\psi_{X,\rho}(t)} \mathbb{S}^2$ . Si  $\rho(X) = X$ , alors  $\{V \in \mathbb{S}^2, X \in [V, \rho(V)]\} = \{X\}$ .*

PREUVE: Soient  $X \in \mathbb{S}^2$  et  $\rho \in SO(3)$ . On note  $A(\rho)$  l'axe de la rotation. Le résultat est évident si  $\rho(X) = X$ . On suppose donc  $\rho(X) \neq X$ , donc que  $A(\rho) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{\pm X\}$ . On complète  $A(\rho)$  en une base orthonormée  $(A(\rho), B(\rho, X), C(\rho, X))$  telle que  $B(\rho, X) \in Vect(A(\rho), X)$  et  $\langle B(\rho, X), X \rangle \geq 0$ . On écrit  $X = \cos(\phi)A(\rho) + \sin(\phi)B(\rho, X)$ , avec  $\phi = \phi(\rho, X) \in ]0, \pi[$ . Cherchons les  $V \in \mathbb{S}^2$  tels que  $X \in [V, \rho(V)]$ . Un tel vecteur  $V$  est dans  $\mathbb{S}^2 \setminus \{\pm A(\rho)\}$ .



On exprime  $V$  et  $\rho(V)$  dans la base  $(A, B, C) = (A(\rho), B(\rho, X), C(\rho, X))$  :

$$V = \cos(\alpha)A + \sin(\alpha)(\cos(\beta)B + \sin(\beta)C)$$

$$\rho(V) = \cos(\alpha)A + \sin(\alpha)(\cos(\beta + \theta)B + \sin(\beta + \theta)C)$$

avec  $\alpha \in ]0, \pi[$ .



Si  $X \in [V, \rho(V)]$ , alors modulo  $2\pi$ ,

$$\begin{aligned} \beta &\leq 0 \leq \beta + \theta [2\pi] \\ \Leftrightarrow 0 &\leq -\beta \leq \theta [2\pi] \\ \Leftrightarrow \beta &\in [-\theta, 0]. \end{aligned}$$

Posons  $\beta = (t - 1)\theta$  avec  $t \in [0, 1]$ . On doit avoir

$$\begin{aligned} \det \left( \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \cos(\alpha) & \cos(\alpha) \\ \sin(\phi) & \sin(\alpha)\cos(\beta) & \sin(\alpha)\cos(\beta + \theta) \\ 0 & \sin(\alpha)\sin(\beta) & \sin(\alpha)\sin(\beta + \theta) \end{bmatrix} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos(\phi)\sin^2(\alpha)(\cos(\beta)\sin(\beta + \theta) - \sin(\beta)\cos(\beta + \theta)) &= \sin(\phi)\cos(\alpha)\sin(\alpha)(\sin(\beta + \theta) - \sin(\beta)) \\ \Leftrightarrow \cos(\phi)\sin(\alpha)\sin(\theta) &= \sin(\phi)\cos(\alpha)(\sin(\beta + \theta) - \sin(\beta)) \\ \Leftrightarrow \cot(\alpha) &= \cot(\phi) \frac{\sin(\theta)}{\sin(\beta + \theta) - \sin(\beta)} \\ \Leftrightarrow \alpha &= \operatorname{arccot} \left( \cot(\phi) \frac{\sin(\theta)}{\sin(t\theta) - \sin(t-1)\theta} \right). \end{aligned}$$

Par conséquent, on définit l'application  $\alpha_{\rho, X} : [0, 1] \rightarrow ]0, \pi[$  par  $\alpha_{\rho, X}(t) = \operatorname{arccot} \left( \frac{\cot(\phi)\sin(\theta)}{\sin(t\theta) - \sin((t-1)\theta)} \right)$  et l'application  $\psi_{\rho, X} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^2$  par

$$\begin{aligned} \psi_{\rho, X}(t) &= \cos(\alpha_{\rho, X}(t))A(\rho) + \sin(\alpha_{\rho, X}(t))\cos((t-1)\theta)B(\rho, X) \\ &\quad + \sin(\alpha_{\rho, X}(t))\sin((t-1)\theta)C(\rho, X). \end{aligned}$$

On a montré que

$$\psi_{\rho, X}([0, 1]) = \{V \in \mathbb{S}^2, X \in [V, \rho(V)]\}.$$

Il n'est pas difficile de voir que  $\alpha_{\rho, X}(0) = \alpha_{\rho, X}(1) = \phi$  et donc que  $\psi_{\rho, X}(0) = \rho^{-1}(X)$  et  $\psi_{\rho, X}(1) = X$ .

Il reste à déterminer une base orientée de  $T_{\psi_{X, \rho}(t)}\mathbb{S}^2$ . On note

$$\alpha_0 = \operatorname{arccot} \left( \cot(\phi) \frac{\sin(\theta)}{\sin(t\theta) - \sin(t-1)\theta} \right).$$

En suivant les inégalités dans les calculs de  $\alpha$  en fonction de  $\beta$ , on a  $\det(X, V, \rho(V)) > 0$  si et seulement si  $\alpha > \alpha_0$ . Donc  $\nabla_{\psi_{X, \rho}(t)}\tilde{\phi}_{X, \rho}$  est donc dirigé vers les  $\alpha$  croissants. Et, en suivant le schéma ci-dessus, on constate bien que  $(\nabla_{\psi_{X, \rho}(t)}\tilde{\phi}_{X, \rho}, \frac{\partial}{\partial t}\psi_{X, \rho})$  est une base orientée de  $T_{\psi_{X, \rho}(t)}\mathbb{S}^2$ .  $\square$

Soient  $\Gamma \in D_3^{or}$ ,  $i \in \underline{9}$  et une numérotation  $n_\Gamma$  des sommets, on rappelle que si l'arête  $i$  est dirigée de  $M$  vers  $N$  alors la définition de  $\pi_{e(\Gamma, i)}^{\chi_h(i)} : SO(3) \times C^{14} \rightarrow \mathbb{S}^2$  est donnée par

$$\pi_{e(\Gamma, i)}^{\chi_h(i)}(\rho, c) = \rho^{-\chi_h(i)} \left( \frac{N - M}{\|N - M\|} \right).$$

On définit les applications

$$\phi_{V_h, \rho} : \begin{cases} \mathbb{S}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ X & \longmapsto \langle X, V_h \wedge \rho(V_h) \rangle \end{cases}$$

et

$$F_{\Gamma, h, n_\Gamma, V_h}^{(6)} : \begin{cases} SO(3) \times C^{14} & \longrightarrow (\mathbb{S}^2)^{\mathfrak{g} \setminus h} \times \mathbb{R} \\ (\rho, c) & \longmapsto ((\pi_{e(\Gamma, i)}^{\chi_h(i)}(\rho, c))_{i \in \mathfrak{g} \setminus \{h\}}, \phi_{V_h, \rho}(\pi_{e(\Gamma, h)}^0(c))) \end{cases}.$$

**Remarque 7.2** On a défini après la démonstration du lemme 5.15 l'application

$$\phi_2(f(1), V_1) : \begin{cases} Bl(S^3, C_{V_1} \cup \tilde{C}_{V_1}) \times C^{14} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (m, c) & \longmapsto \langle \pi_{f(1)}(c), \frac{V_1 \wedge \rho_m(V_1)}{\|V_1 \wedge \rho_m(V_1)\|} \rangle \end{cases}.$$

Avec un abus de notation justifié par les résultats de la section 6.2, si on définit

$$\phi_2(f(1), V_1) : \begin{cases} Bl(SO(3), p_{SO(3)}(C_{V_1} \cup \tilde{C}_{V_1})) \times C^{14} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\rho, c) & \longmapsto \langle \pi_{f(1)}(c), \frac{V_1 \wedge \rho(V_1)}{\|V_1 \wedge \rho(V_1)\|} \rangle \end{cases}$$

on a

$$\phi_{V_h, \rho}(\pi_{e(\Gamma, h)}(c)) = \phi_2(e(\Gamma, h), V_h)(\rho, \pi_{e(\Gamma, h)}(c)) \times \|V_h \wedge \rho(V_h)\|.$$

De la même manière, on a défini après la démonstration du lemme 5.15 l'application

$$F_{E_8}^{(6)}(f, g, V_1) : \begin{cases} Bl(S^3, C_{V_1} \cup \tilde{C}_{V_1}) \times C^{14} & \longrightarrow (\mathbb{S}^2)^{E_8} \times \mathbb{R} \\ (m, c) & \longmapsto (F_{E_8}(f, g)(m, c), \phi_2(f(1), V_1)(m, c)) \end{cases}.$$

Par un abus de notation justifié par les résultats de la section 6.2, les deux définitions de  $F^{(6)}$  coïncident (en remplaçant  $V_1$  par  $V_h$  et en choisissant  $E_8 = \mathfrak{g} \setminus \{h\}$ ).

**Lemme 7.3** Soient  $\Gamma \in \mathcal{D}_{or}^3$  et  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}$ . Avec les notations de 6.10, soit  $(t, \rho, c)$  un point d'intersection, alors  $(\rho, c) \in (F_{\Gamma, h, n_\Gamma, V_h}^{(6)})^{-1}(V_1, \dots, \hat{V}_h, \dots, V_9, 0)$  et le signe de  $(\rho, c)$  est l'opposé du signe du jacobien de  $F_{\Gamma, h, n_\Gamma, V_h}^{(6)}$  en  $(\rho, c)$ .

On rappelle que l'on a défini

$$I_{\Gamma, h, \eta}(W_1, \dots, W_9) = \left\langle \prod_{i=1}^{h-1} \pi_{e(\Gamma_1, i)}^{-1}(\overline{G_{1, W_i}}), \pi_{e(\Gamma_1, h)}^{-1}(\overline{G_{2, W_h}}), \prod_{i=h+1}^9 \pi_{e(\Gamma_1, i)}^{-1}(\overline{G_{0, W_i}}) \right\rangle$$

où

$$\begin{aligned} \overline{G_{0, V_i}} &= [0, t_i] \times SO(3) \times \{V_i\} \\ \overline{G_{2, V_i}} &= -\{t_i\} \times \overline{\bigcup_{\rho \in SO(3), \rho(V_i) \neq -V_i} \{\rho\} \times [V_i, \rho(V_i)]} \end{aligned}$$

$$\overline{G_{1,V_i}} = [t_i, 1] \times \{(\rho, \rho(V_i)), \rho \in SO(3)\}.$$

On montre que si  $(\rho, c)$  est un point d'intersection alors  $(\rho, c) \in (F_{\Gamma,h,n_{\Gamma},V_h}^{(6)})^{-1}(V_1, \dots, \hat{V}_h, \dots, V_9, 0)$ . Soit  $(t, \rho, c)$  un point d'intersection. On a vu que nécessairement il existe  $h \in \{2, \dots, 8\}$  tel que  $t = t_h$ . De plus, pour  $i < h$ , on a  $(t_h, \rho, c) \in \overline{G_{1,V_i}}$  et donc  $\pi_{e(\Gamma,i)}(t_h, \rho, c) = \pi_{e(\Gamma,i)}(c) = \rho(V_i)$ . Donc  $V_i = \rho^{-1}(\pi_{e(\Gamma,i)}(c))$ . D'autre part, si  $i > h$  alors  $t_i > t_h$  et  $(t_h, \rho, c) \in \overline{G_{0,V_i}}$ . Donc  $\pi_{e(\Gamma,i)}(t_h, \rho, c) = \pi_{e(\Gamma,i)}(c) = V_i$ . Enfin,  $(t_h, \rho, c) \in \overline{G_{2,V_i}}$  donc  $\pi_{e(\Gamma,i)}(t_h, \rho, c) = \pi_{e(\Gamma,i)}(c) \in [V_h, \rho(V_h)]$  donc  $\phi_{V_h, \rho}(\pi_{e(\Gamma,i)}(c)) = 0$ .

On calcule maintenant de deux manières le signe d'un point d'intersection  $(t, \rho, c) = (t_h, \rho, c)$ . On commence par calculer son signe par la définition. On sait que

$$(t_h, \rho, c) \in \bigcap_{i=1}^{h-1} \pi_{e(\Gamma,i)}^{-1}(\overline{G_{1,W_i}}) \bigcap \pi_{e(\Gamma,h)}^{-1}(\overline{G_{2,W_h}}) \bigcap_{i=h+1}^9 \pi_{e(\Gamma,i)}^{-1}(\overline{G_{0,W_i}}).$$

Pour  $i \in \underline{9}$ , on note  $(V_i, V_i^1, V_i^2)$  une base orthonormée directe de  $\mathbb{R}^3$ . Par construction des chaînes,  $\overline{G_{0,V_i}}$  est co-orientée par  $(V_i^1, V_i^2)$  et  $\overline{G_{1,V_i}}$  est aussi co-orientée par  $(V_i^1, V_i^2)$ . Pour déterminer la co-orientation de  $\overline{G_{2,V_h}}$ , on écrit :

$$\begin{aligned} T_{(t_h, \rho, V_h)}([0, 1] \times SO(3) \times \mathbb{S}^2) &= T_{t_h}[0, 1] \oplus T_{\rho}SO(3) \oplus T_{V_h}\mathbb{S}^2 \\ &= T_{t_h}[0, 1] \oplus T_{\rho}SO(3) \oplus \mathbb{R}(-V_h \wedge \rho(V_h)) \oplus T_{V_h}[V_h, \rho(V_h)] \\ &= -T_{t_h}[0, 1] \oplus \mathbb{R}(V_h \wedge \rho(V_h)) \oplus (-T_{\rho}SO(3) \oplus T_{V_h}[V_h, \rho(V_h)]) \\ &= T(\overline{G_{2,V_h}})^{\perp} \oplus T(\overline{G_{2,V_h}}) \end{aligned}$$

et donc la co-orientation de  $G_{2,V_h}$  est donnée par  $(-\frac{\partial}{\partial t}, V_h \wedge \rho(V_h))$ .

Pour tout  $i < h$ , on choisit des bases de vecteurs  $(\tilde{V}_i^1, \tilde{V}_i^2)$  de  $T_{(t_h, \rho, c)}\left(\pi_{e(\Gamma,i)}^{-1}(\overline{G_{1,V_i}})\right)^{\perp}$  telles que

$$\begin{cases} d\rho^{-1} \circ \pi_{e(\Gamma,i)}(t_h, \rho, c) \cdot \tilde{V}_i^1 = V_i^1 \\ d\rho^{-1} \circ \pi_{e(\Gamma,i)}(t_h, \rho, c) \cdot \tilde{V}_i^2 = V_i^2 \end{cases}$$

Pour tout  $i > h$ , on choisit des bases de vecteurs  $(\tilde{V}_i^1, \tilde{V}_i^2)$  de  $T_{(t_h, \rho, c)}\left(\pi_{e(\Gamma,i)}^{-1}(\overline{G_{0,V_i}})\right)^{\perp}$  telles que

$$\begin{cases} d\pi_{e(\Gamma,i)}(t_h, \rho, c) \cdot \tilde{V}_i^1 = V_i^1 \\ d\pi_{e(\Gamma,i)}(t_h, \rho, c) \cdot \tilde{V}_i^2 = V_i^2 \end{cases}$$

Puis on choisit un vecteur  $\tilde{V}_h$  de  $T_{(t_h, \rho, c)}\left(\pi_{e(\Gamma,i)}^{-1}(\overline{G_{2,V_h}})\right)^{\perp}$  tel que  $(-\frac{\partial}{\partial t}, \tilde{V}_h)$  soit une base directe de  $T_{(t_h, \rho, c)}\left(\pi_{e(\Gamma,i)}^{-1}(\overline{G_{2,V_h}})\right)^{\perp}$  et tel que

$$d\pi_{e(\Gamma,h)}(t_h, \rho, c) \cdot \tilde{V}_h = V_h \wedge \rho(V_h).$$

Ainsi, par définition, le signe de  $(t_h, \rho, c)$  est celui de la famille

$$\left(\tilde{V}_1^1, \tilde{V}_1^2, \dots, \tilde{V}_{h-1}^2, \frac{-\partial}{\partial t}, \tilde{V}_h, \tilde{V}_{h+1}^1, \dots, \tilde{V}_9^2\right)$$

qui est le même que celui de la famille

$$\left( \frac{-\partial}{\partial t}, \tilde{V}_1^1, \tilde{V}_1^2, \dots, \tilde{V}_{h-1}^2, \tilde{V}_{h+1}^1, \dots, \tilde{V}_9^2, \tilde{V}_h \right).$$

On exprime maintenant le signe de  $(\rho, c)$  comme signe du jacobien de l'application  $F_{\Gamma, h, n_\Gamma, V_h}^{(6)}$ . On a

$$dF_{\Gamma, h, n_\Gamma, V_h}^{(6)}(\rho, c) : T_\rho SO(3) \oplus T_c C^{14} \rightarrow T_{(V_1, \dots, \tilde{V}_h, \dots, V_9)} \mathbb{S}^2 \oplus T_0 \mathbb{R}$$

D'autre part,  $(\tilde{V}_1^1, \tilde{V}_1^2, \dots, \tilde{V}_{h-1}^2, \tilde{V}_{h+1}^1, \dots, \tilde{V}_9^2, \tilde{V}_h)$  est aussi une base de  $T_\rho SO(3) \oplus T_c C^{14}$ . Par construction de l'application  $F_{\Gamma, h, n_\Gamma, V_h}^{(6)}$ , on a

$$dF_{\Gamma, h, n_\Gamma, V_h}^{(6)} = \left( (d\pi_{e(\Gamma, i)}^{\chi_h(i)})_{i \in \mathfrak{g} \setminus \{h\}}, d(\phi_{V_h, \rho} \circ \pi_{e(\Gamma, h)}) \right).$$

On exprime plus simplement : pour  $i > h$ , on a  $\chi_h(i) = 0$ , donc

$$d\pi_{e(\Gamma, i)}^{\chi_h(i)} = d\pi_{e(\Gamma, i)}^0 = d\pi_{e(\Gamma, i)}$$

et

$$\begin{cases} d\pi_{e(\Gamma, i)}^{\chi_h(i)}(\rho, c) \cdot \tilde{V}_i^1 = V_i^1 \\ d\pi_{e(\Gamma, i)}^{\chi_h(i)}(\rho, c) \cdot \tilde{V}_i^2 = V_i^2. \end{cases}$$

Pour  $i < h$ , on a  $\chi_h(i) = 1$ , donc

$$d\pi_{e(\Gamma, i)}^{\chi_h(i)} = d\pi_{e(\Gamma, i)}^1 = d(\rho^{-1} \circ \pi_{e(\Gamma, i)}).$$

On a donc encore

$$\begin{cases} d\pi_{e(\Gamma, i)}^{\chi_h(i)}(\rho, c) \cdot \tilde{V}_i^1 = V_i^1 \\ d\pi_{e(\Gamma, i)}^{\chi_h(i)}(\rho, c) \cdot \tilde{V}_i^2 = V_i^2. \end{cases}$$

Enfin, on sait que  $\phi_{V_h, \rho}(X) = \langle X, V_h \wedge \rho(V_h) \rangle$ , donc  $\nabla \phi_{V_h, \rho} = V_h \wedge \rho(V_h)$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} d(\phi_{V_h, \rho} \circ \pi_{e(\Gamma, h)})(\rho, c) \cdot \tilde{V}_h &= d(\phi_{V_h, \rho})(\pi_{e(\Gamma, h)}(\rho, c)) \cdot d\pi_{e(\Gamma, h)}(\rho, c) \cdot \tilde{V}_h \\ &= \langle V_h \wedge \rho(V_h), d\pi_{e(\Gamma, h)}(\rho, c) \cdot \tilde{V}_h \rangle \\ &= \langle V_h \wedge \rho(V_h), V_h \wedge \rho(V_h) \rangle \\ &= \|V_h \wedge \rho(V_h)\|^2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, le signe de la famille  $\left( \frac{\partial}{\partial t}, \tilde{V}_1^1, \tilde{V}_1^2, \dots, \tilde{V}_{h-1}^2, \tilde{V}_{h+1}^1, \dots, \tilde{V}_9^2, \tilde{V}_h \right)$  est donc le même que celui du jacobien de  $F_{\Gamma, h, n_\Gamma, V_h}^{(6)}$ , donc le signe de  $(t_h, \rho, c)$  est égale à l'opposé du signe du jacobien de  $F_{\Gamma, h, n_\Gamma, V_h}^{(6)}$ .

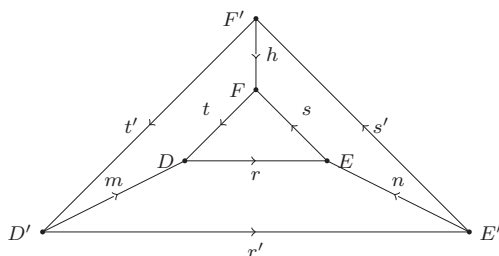
□

## 7.2 Recherche des points d'intersection de $\beta_{1,1}$

L'ensemble des points d'intersection contribuant à  $\beta_{1,1}$  est décrit au lemme 7.6. Leur signe est obtenu dans la proposition 7.14. On rappelle les notations des sections précédentes. On désigne par  $\mathfrak{A}$  l'ensemble des 9-uplets de vecteurs admissibles  $(V_1, \dots, V_9) \in (\mathbb{S}^2)^{\underline{9}}$ , c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs pour lesquels l'anomalie  $\beta_3$  est définie par la formule du théorème 2.15. Pour  $h \in \{3, 4, 5\}$  on note

$$\mathcal{D}_{1,1}^h = \{ \eta = (r', s', t', r, s, t, m, n) / \begin{array}{l} \chi_h(r') + \chi_h(s') + \chi_h(t') = 1, \\ \chi_h(r) + \chi_h(s) + \chi_h(t) = 1, \quad \min(r', s', t') < \min(r, s, t), \quad \odot_{r', s', t'} \end{array} \}$$

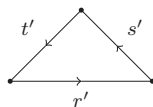
Pour  $\eta \in \mathcal{D}_{1,1}^h$ , on désigne par  $(\Gamma_1, h, \eta)$  le graphe dont les arêtes sont orientées et numérotées de la façon suivante :



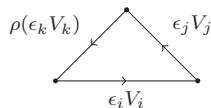
Fixons  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}$ . Pour  $(\epsilon_i)_{i \in \underline{9}} \in \{-1, 1\}^{\underline{9}}$ , on rappelle enfin que  $\mathcal{E}_{\Gamma_1, h, \eta}(\epsilon_1 V_1, \dots, \epsilon_9 V_9)$  désigne l'ensemble des points d'intersection correspondant au graphe  $(\Gamma_1, h, \eta)$  et à  $(\epsilon_i)_{i \in \underline{9}}$ , c'est-à-dire l'ensemble des couples  $(\rho, c) \in SO(3) \times C^{14}$  tels que

$$\begin{cases} \forall i \in \underline{9} \setminus \{h\}, & \pi_{e(\Gamma_1, i)}(c) = \rho^{\chi_h(i)}(\epsilon_i V_i) \\ & \pi_{e(\Gamma_1, h)}(c) \in [\epsilon_h V_h, \rho(\epsilon_h V_h)]. \end{cases}$$

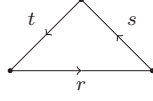
Comme  $\eta \in \mathcal{D}_{1,1}^h$ , il existe une permutation cyclique des arêtes du triangle



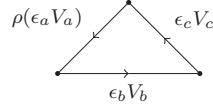
telle que les arêtes correspondant à une configuration aient les directions indiquées suivantes :



De la même manière il existe une permutation cyclique des arêtes du triangle



telle que les arêtes correspondant à une configuration aient les directions indiquées suivantes :



**Remarque 7.4** Selon les circonstances, on utilise les indices  $(r, s, t)$  (resp.  $(r', s', t')$ ) ou  $(a, b, c)$  (resp.  $(i, j, k)$ ) pour numérotter les arêtes de ce triangle.

**Lemme 7.5** Soient  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}$ ,  $h \in \{3, 4, 5\}$ ,  $\eta \in \mathcal{D}_{1,1}^h$ . On pose

$$W = \frac{(V_i \wedge V_j) \wedge (V_b \wedge V_c)}{\|(V_i \wedge V_j) \wedge (V_b \wedge V_c)\|} \quad Y_{ij} = \frac{V_i \wedge V_j}{\|V_i \wedge V_j\|} \wedge W \quad Y_{bc} = \frac{V_b \wedge V_c}{\|V_b \wedge V_c\|} \wedge W.$$

On a

$$\langle Y_{ij}, Y_{bc} \rangle = \left\langle \frac{V_i \wedge V_j}{\|V_i \wedge V_j\|}, \frac{V_b \wedge V_c}{\|V_b \wedge V_c\|} \right\rangle.$$

On définit

$$\Delta : \begin{cases} \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha & \longmapsto \frac{\cos^2(\alpha) + \langle Y_{ij}, Y_{bc} \rangle^2 \sin^2(\alpha) - \langle V_k, V_a \rangle^2}{1 - \langle Y_{ij}, Y_{bc} \rangle^2} = \frac{1 - \langle V_k, V_a \rangle^2}{1 - \langle Y_{ij}, Y_{bc} \rangle^2} - \sin^2 \alpha \end{cases}$$

et on pose, pour  $(\alpha_k, \xi) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \{-1, 1\}$ ,

$$\begin{cases} \cos \alpha_a(\alpha_k, \xi) = \frac{\langle V_k, V_a \rangle \cos(\alpha_k) + \xi \langle Y_{ij}, Y_{bc} \rangle \sin(\alpha_k) \sqrt{(1 - \langle Y_{ij}, Y_{bc} \rangle^2) \Delta(\alpha_k)}}{\langle Y_{ij}, Y_{bc} \rangle^2 \sin^2(\alpha_k) + \cos^2(\alpha_k)} \\ \sin \alpha_a(\alpha_k, \xi) = \frac{\langle V_k, V_a \rangle \langle Y_{ij}, Y_{bc} \rangle \sin(\alpha_k) - \xi \cos(\alpha_k) \sqrt{(1 - \langle Y_{ij}, Y_{bc} \rangle^2) \Delta(\alpha_k)}}{\langle Y_{ij}, Y_{bc} \rangle^2 \sin^2(\alpha_k) + \cos^2(\alpha_k)} \end{cases}$$

Pour tout  $(\rho, c) \in SO(3) \times C^{14}$  compatible avec les deux triangles extérieur et intérieur du graphe  $(\Gamma_1, h, \eta)$ , il existe un unique couple  $(\alpha_k, \xi) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \{-1, 1\}$  tel que

$$\begin{cases} \Delta(\alpha_k) \geq 0 \\ \rho(V_k) = \cos(\alpha_k)W + \sin(\alpha_k)Y_{ij} \\ \rho(V_a) = \cos \alpha_a(\alpha_k, \xi)W + \sin \alpha_a(\alpha_k, \xi)Y_{bc} \end{cases}$$

On note alors

$$\rho = \rho(\alpha_k, \xi)$$

la rotation ainsi définie (d'après la remarque 7.12).

Le lemme suivant donne des conditions nécessaires et suffisantes sur  $(\alpha_k, \xi)$  pour qu'il existe une configuration  $c(\alpha_k, \xi)$  telle que

$$(c(\alpha_k, \xi), \rho(\alpha_k, \xi)) \in \bigcup_{(\epsilon_i)_{i \in \mathfrak{g}} \in \{-1, 1\}^{\mathfrak{g}}} \mathcal{E}_{\Gamma_1, h, \eta}(\epsilon_1 V_1, \dots, \epsilon_9 V_9).$$

La *longueur algébrique* d'une arête  $e(\Gamma, i) = \overrightarrow{MN}$  est définie comme le nombre réel  $\lambda_i$  tel que  $\overrightarrow{MN} = \lambda_i \rho^{\chi_h(i)}(V_i)$  où  $M$  et  $N$  désignent respectivement la source et le but de l'arête  $i$  ( cf la notation avant la proposition 5.2) et on notera  $\epsilon_i$  son signe ( $\epsilon_i = \sigma(\lambda_i)$ ).

**Lemme 7.6** Soient  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}$ ,  $h \in \{3, 4, 5\}$ ,  $\eta \in \mathcal{D}_{1,1}^h$ . Pour  $(\alpha_k, \xi) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \{-1, 1\}$ . On pose

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \lambda_i(\alpha_k, \xi) = \langle Y_{ij}, V_j \rangle \cos(\alpha_k) - \langle W, V_j \rangle \sin(\alpha_k) \\ \lambda_j &= \lambda_j(\alpha_k, \xi) = \sin(\alpha_k) \langle W, V_i \rangle - \cos(\alpha_k) \langle Y_{ij}, V_i \rangle \\ \lambda_k &= \lambda_k(\alpha_k, \xi) = \langle Y_{ij}, V_i \rangle \langle W, V_j \rangle - \langle W, V_i \rangle \langle Y_{ij}, V_j \rangle \\ \mu_a &= \mu_a(\alpha_k, \xi) = \langle Y_{bc}, V_b \rangle \langle W, V_c \rangle - \langle W, V_b \rangle \langle Y_{bc}, V_c \rangle \\ \mu_b &= \mu_b(\alpha_k, \xi) = \langle Y_{bc}, V_c \rangle \cos \alpha_a(\alpha_k, \xi) - \langle W, V_c \rangle \sin(\alpha_a(\alpha_k, \xi)) \\ \mu_c &= \mu_c(\alpha_k, \xi) = \sin \alpha_a(\alpha_k, \xi) \langle W, V_b \rangle - \cos(\alpha_a(\alpha_k, \xi)) \langle Y_{bc}, V_b \rangle \end{aligned}$$

On considère la rotation  $\rho = \rho(\alpha_k, \xi)$  définie au lemme 7.5. Pour  $\{x, y, z\} \subset \mathfrak{g}$ , on note

$$\delta_{xyz} = \delta_{xyz}(\alpha_k, \xi) = \det(\rho^{\chi_h(x)}(V_x), \rho^{\chi_h(y)}(V_y), \rho^{\chi_h(z)}(V_z)).$$

On note l'application  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$  qui associe à  $x \in \mathbb{R}$  son signe, éventuellement nul si  $x = 0$ . On pose alors

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= \epsilon_i(\alpha_k, \xi) = \sigma(\lambda_i) & \epsilon_j &= \epsilon_j(\alpha_k, \xi) = \sigma(\lambda_j) & \epsilon_k &= \epsilon_k(\alpha_k, \xi) = \sigma(\lambda_k) \\ \epsilon_m &= \epsilon_m(\alpha_k, \xi) = \sigma(\lambda_{r'} \delta_{r'rn} \delta_{mrn}) & \epsilon_n &= \epsilon_n(\alpha_k, \xi) = -\sigma(\lambda_{r'} \delta_{r'rm} \delta_{nrm}) & \epsilon_r &= \epsilon_r(\alpha_k, \xi) = \sigma(\lambda_{r'} \delta_{r'mn} \delta_{rnm}) \\ \epsilon_s &= \epsilon_s(\alpha_k, \xi) = \sigma(\mu_s \lambda_r \mu_r) & \epsilon_t &= \epsilon_t(\alpha_k, \xi) = \sigma(\mu_t \lambda_r \mu_r) \end{aligned}$$

Enfin, on pose

$$Y = Y(\alpha_k, \xi) = \lambda_{t'} \delta_{mrn} \mu_r \rho^{\chi_h(t')} (V_{t'}) + \lambda_{r'} \delta_{r'rn} \mu_r \rho^{\chi_h(m)} (V_m) + \mu_t \lambda_{r'} \delta_{r'mn} \rho^{\chi_h(t)} (V_t).$$

On définit  $\Omega_{1,1}^h(\eta) \subset [0, 2\pi] \times \{-1, 1\}$  par

$$(\alpha_k, \xi) \in \Omega_{1,1}^h(\eta) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta(\alpha_k) \geq 0 \\ \det(Y(\alpha_k, \xi), V_h, \rho(V_h)) = 0 \\ \epsilon_h := \sigma(\delta_{mrn}) \sigma(\mu_r) \frac{\sigma(\langle V_h \wedge Y(\alpha_k, \xi), V_h \wedge \rho(V_h) \rangle) + \sigma(\langle \rho(V_h) \wedge Y(\alpha_k, \xi), \rho(V_h) \wedge V_h \rangle)}{2} \neq 0 \end{cases}$$

Alors on a une bijection entre  $\Omega_{1,1}^h(\eta)$  et  $\bigcup_{(\epsilon_i)_{i \in \mathfrak{Q}} \in \{-1,1\}^{\mathfrak{Q}}} \mathcal{E}_{\Gamma_1, h, \eta}(\epsilon_1 V_1, \dots, \epsilon_9 V_9)$  où les  $(\epsilon_i)$  sont définis par les formules ci-dessus.

On commence par prouver le lemme 7.5. On démontrera ensuite une série de lemmes intermédiaires. Le lemme 7.9 montre que  $\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k, \mu_a, \mu_b, \mu_c$  sont les longueurs relatives des triangles extérieur et intérieur, à une homothétie globale près. Enfin, le lemme 7.11 montre que les coefficients  $\epsilon_x$  sont les signes des longueurs algébriques des arêtes d'une configuration compatible avec le couple  $(\rho, c)$  et montre que  $Y(\alpha_k, \xi)$  est, à un coefficient près, la direction  $\overrightarrow{F'F}$  de l'arête étiquetée  $h$ .

PREUVE DU LEMME 7.5 : Soit  $(\rho, c) \in SO(3) \times C^{14}$  et supposons que le couple est compatible avec les deux triangles intérieur et extérieur. Alors les deux triplets de vecteurs  $(\rho(V_k), V_i, V_j)$  et  $(\rho(V_a), V_b, V_c)$  sont coplanaires :

$$\rho(V_k) \in S(V_i, V_j) \quad \rho(V_a) \in S(V_b, V_c)$$

Comme  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}$ ,  $(V_i \wedge V_j) \wedge (V_b \wedge V_c) \neq 0$  et  $(W, Y_{ij}, \frac{V_i \wedge V_j}{\|V_i \wedge V_j\|})$  et  $(W, Y_{bc}, \frac{V_b \wedge V_c}{\|V_b \wedge V_c\|})$  sont des bases orthonormées directes de  $\mathbb{R}^3$  telles qu'il existe  $(\alpha_k, \alpha_a) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}^2$  tel que

$$\begin{cases} \rho(V_k) &= \cos(\alpha_k)W + \sin(\alpha_k)Y_{ij} \\ \rho(V_a) &= \cos(\alpha_a)W + \sin(\alpha_a)Y_{bc} \end{cases}$$

On pose

$$u = \sin(\alpha_k)\langle Y_{ij}, Y_{bc} \rangle \quad v = \cos(\alpha_k) \quad w = \langle V_k, V_a \rangle.$$

On a

$$\begin{aligned} &\langle \rho(V_k), \rho(V_a) \rangle = \langle V_k, V_a \rangle \\ \Leftrightarrow &\langle \cos(\alpha_k)W + \sin(\alpha_k)Y_{ij}, \cos(\alpha_a)W + \sin(\alpha_a)Y_{bc} \rangle = \langle V_k, V_a \rangle \\ \Leftrightarrow &\langle \cos(\alpha_k)W + \sin(\alpha_k)Y_{ij}, W \rangle \cos(\alpha_a) + \langle \cos(\alpha_k)W + \sin(\alpha_k)Y_{ij}, Y_{bc} \rangle \sin(\alpha_a) = \langle V_k, V_a \rangle \\ \Leftrightarrow &u \sin(\alpha_a) + v \cos(\alpha_a) = w \\ \Rightarrow &v^2(1 - \sin(\alpha_a)^2) = (w - u \sin(\alpha_a))^2 \\ \Leftrightarrow &(u^2 + v^2) \sin(\alpha_a)^2 - 2w u \sin(\alpha_a) + w^2 - v^2 = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

L'équation (1) en  $\sin(\alpha_a)$  admet des solutions si et seulement si

$$v^2(u^2 + v^2 - w^2) \geq 0$$

donc si et seulement si  $v = 0$  ou

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 - w^2 \geq 0 &\Leftrightarrow \langle Y_{ij}, Y_{bc} \rangle^2 \sin^2(\alpha_k) + \cos^2(\alpha_k) - \langle V_k, V_a \rangle^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (1 - \langle Y_{ij}, Y_{bc} \rangle^2) \Delta(\alpha_k) \geq 0 \end{aligned}$$



Montrons que si  $v = 0$  alors  $\Delta(\alpha_k) \geq 0$ . En effet, si  $v = 0$  alors  $\cos(\alpha_k) = 0$  et

$$\begin{aligned} u \sin(\alpha_a) + v \cos(\alpha_a) = w &\Leftrightarrow u \sin(\alpha_a) = w \\ &\Leftrightarrow \pm \langle Y_{ij}, Y_{bc} \rangle \sin(\alpha_a) = \langle V_k, V_a \rangle \\ &\Leftrightarrow \sin(\alpha_a) = \frac{\pm \langle V_k, V_a \rangle}{\langle Y_{ij}, Y_{bc} \rangle} \end{aligned}$$

Donc  $\langle V_k, V_a \rangle^2 \leq \langle Y_{ij}, Y_{bc} \rangle^2$ . Or dans ce cas  $\Delta(\alpha_k) = \frac{1 - \langle V_k, V_a \rangle^2}{1 - \langle Y_{ij}, Y_{bc} \rangle^2} - 1 \geq 0$ .

Lorsque  $\Delta(\alpha_k) \geq 0$  il existe  $\xi \in \{-1, 1\}$  tel que

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_a) &= \frac{uw - \xi v \sqrt{u^2 + v^2 - w^2}}{u^2 + v^2} \\ &= \frac{\langle V_k, V_a \rangle \langle Y_{ij}, Y_{bc} \rangle \sin(\alpha_k) - \xi \cos(\alpha_k) \sqrt{(1 - \langle Y_{ij}, Y_{bc} \rangle^2) \Delta(\alpha_k)}}{\langle Y_{ij}, Y_{bc} \rangle^2 \sin^2(\alpha_k) + \cos^2(\alpha_k)}. \end{aligned}$$

Posons

$$\cos(\alpha_a) = \frac{\langle V_k, V_a \rangle \cos(\alpha_k) + \xi \langle Y_{ij}, Y_{bc} \rangle \sin(\alpha_k) \sqrt{(1 - \langle Y_{ij}, Y_{bc} \rangle^2) \Delta(\alpha_k)}}{\langle Y_{ij}, Y_{bc} \rangle^2 \sin^2(\alpha_k) + \cos^2(\alpha_k)}.$$

On vérifie alors facilement que

$$\sin^2(\alpha_a) + \cos^2(\alpha_a) = 1$$

et

$$u \sin(\alpha_a) + v \cos(\alpha_a) = w.$$

□

**Lemme 7.7** Si  $\langle Y_{ij}, Y_{bc} \rangle^2 \geq \langle V_k, V_a \rangle^2$  alors pour tout  $\alpha$ , on a  $\Delta(\alpha) \geq 0$ . Sinon

$$\Delta(\alpha_k) \geq 0 \Leftrightarrow \alpha_k \in \left\{ \begin{array}{l} [-\arcsin\left(\sqrt{\frac{1 - \langle V_k, V_a \rangle^2}{1 - \langle Y_{ij}, Y_{bc} \rangle^2}}\right), \arcsin\left(\sqrt{\frac{1 - \langle V_k, V_a \rangle^2}{1 - \langle Y_{ij}, Y_{bc} \rangle^2}}\right)] \bmod(2\pi) \\ [\pi - \arcsin\left(\sqrt{\frac{1 - \langle V_k, V_a \rangle^2}{1 - \langle Y_{ij}, Y_{bc} \rangle^2}}\right), \pi + \arcsin\left(\sqrt{\frac{1 - \langle V_k, V_a \rangle^2}{1 - \langle Y_{ij}, Y_{bc} \rangle^2}}\right)] \bmod(2\pi) \end{array} \right.$$

□

**Remarque 7.8** On peut interpréter géométriquement le lemme précédent. Ce lemme donne une condition pour que  $\rho(V_k)$  (resp.  $\rho(V_a)$ ) soit sur le cercle  $S(V_i, V_j)$  (resp.  $S(V_b, V_c)$ ). Si l'angle entre les cercles  $S(V_i, V_j)$  et  $S(V_b, V_c)$  est plus petit que l'angle entre  $V_k$  et  $V_a$ , alors pour tout  $\rho(V_k) \in S(V_i, V_j)$  il existe deux images  $\rho(V_a)$  possibles sur  $S(V_b, V_c)$  (éventuellement confondues). Sinon, cela reste vrai localement autour de l'intersection des deux cercles.

On paramètre désormais  $\rho$  par  $(\alpha_k, \xi)$ . On pose alors  $\rho = \rho(\alpha_k, \xi)$  et on va déterminer les autres paramètres de la configuration en fonction du couple  $(\alpha_k, \xi)$ .

**Lemme 7.9** *Sous les hypothèses du lemme 7.6 on a*

$$\lambda_i V_i + \lambda_j V_j + \lambda_k \rho(V_k) = 0$$

et

$$\mu_a \rho(V_a) + \mu_b V_b + \mu_c V_c = 0.$$

PREUVE: Par définition, on a

$$V_i = \langle V_i, W \rangle W + \langle V_i, Y_{ij} \rangle Y_{ij}$$

$$V_j = \langle V_j, W \rangle W + \langle V_j, Y_{ij} \rangle Y_{ij}$$

$$\rho(V_k) = \cos(\alpha_k) W + \sin(\alpha_k) Y_{ij}.$$

Avec les notations de l'énoncé on a alors :

$$\lambda_i V_i = (\langle V_j, Y_{ij} \rangle \cos(\alpha_k) - \langle W, V_j \rangle \sin(\alpha_k)) (\langle V_i, W \rangle W + \langle V_i, Y_{ij} \rangle Y_{ij})$$

$$\lambda_j V_j = (\langle W, V_i \rangle \sin(\alpha_k) - \langle Y_{ij}, V_i \rangle \cos(\alpha_k)) (\langle V_j, W \rangle W + \langle V_j, Y_{ij} \rangle Y_{ij})$$

$$\lambda_k \rho(V_k) = (\langle Y_{ij}, V_i \rangle \langle W, V_j \rangle - \langle W, V_i \rangle \langle Y_{ij}, V_j \rangle) (\cos(\alpha_k) W + \sin(\alpha_k) Y_{ij})$$

et la relation  $\lambda_i V_i + \lambda_j V_j + \lambda_k \rho(V_k) = 0$  se vérifie facilement. On procède de la même manière pour montrer la seconde relation.

□

**Remarque 7.10** *On peut définir  $(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_b, \alpha_c) \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^4$  par*

$$V_i = \cos(\alpha_i) W + \sin(\alpha_i) Y_{ij} \quad V_j = \cos(\alpha_j) W + \sin(\alpha_j) Y_{ij}$$

$$V_b = \cos(\alpha_b) W + \sin(\alpha_b) Y_{bc} \quad V_c = \cos(\alpha_c) W + \sin(\alpha_c) Y_{bc}$$

avec

$$\cos(\alpha_i) = \langle W, V_i \rangle \quad \sin(\alpha_i) = \langle Y_{ij}, V_i \rangle \quad \cos(\alpha_j) = \langle W, V_j \rangle \quad \sin(\alpha_j) = \langle Y_{ij}, V_j \rangle$$

$$\cos(\alpha_b) = \langle W, V_b \rangle \quad \sin(\alpha_b) = \langle Y_{bc}, V_b \rangle \quad \cos(\alpha_c) = \langle W, V_c \rangle \quad \sin(\alpha_c) = \langle Y_{bc}, V_c \rangle.$$

On a alors

$$\lambda_i = \sin(\alpha_j - \alpha_k) \quad \lambda_j = \sin(\alpha_k - \alpha_i) \quad \lambda_k = \sin(\alpha_i - \alpha_j)$$

$$\lambda_a = \sin(\alpha_b - \alpha_c) \quad \lambda_b = \sin(\alpha_c - \alpha_a) \quad \lambda_c = \sin(\alpha_a - \alpha_b).$$

Les lemmes 7.5 et 7.9 déterminent les triangles intérieur et extérieur de  $\Gamma_1$  à une homothétie globale près.

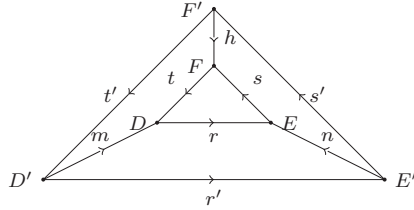
**Lemme 7.11** *On reprend les notations du lemme 7.6. Soient  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}$ ,  $h \in \{3, 4, 5\}$ ,  $\eta \in \mathcal{D}_{1,1}^h$  et  $(\epsilon_p) \in \{-1, 1\}^9$  et soit  $(\rho, c)$  un point d'intersection. On note  $\lambda_x$  la longueur algébrique de l'arête  $x$  de la configuration  $c$ . On suppose  $\mu_r \neq 0$  et  $\delta_{mrn} \neq 0$ . On a alors*

$$\begin{aligned} \lambda_m &= \lambda_{r'} \frac{\delta_{r'rn}}{\delta_{mrn}} & \lambda_n &= -\lambda_{r'} \frac{\delta_{r'rm}}{\delta_{nrn}} & \lambda_r &= \lambda_{r'} \frac{\delta_{r'mn}}{\delta_{rnm}} \\ \lambda_s &= \mu_s \frac{\lambda_r}{\mu_r} & \lambda_t &= \mu_t \frac{\lambda_r}{\mu_r} \end{aligned}$$

En particulier, on a bien, pour tout  $p \in \underline{9} \setminus \{h\}$ ,  $\epsilon_p = \sigma(\lambda_p)$ . De plus, on a

$$Y(\alpha_k, \xi) = \mu_r \delta_{mrn} \overrightarrow{F'F}.$$

PREUVE: On rappelle le graphe  $\Gamma_1$  :



Les relations définissant  $\lambda_r$ ,  $\lambda_m$  et  $\lambda_n$  viennent de l'égalité vectorielle suivante :

$$\lambda_{r'} \rho^{\chi_h(r')} (V_{r'}) = \lambda_m \rho^{\chi_h(m)} (V_m) + \lambda_r \rho^{\chi_h(r)} (V_r) - \lambda_n \rho^{\chi_h(n)} (V_n)$$

On sait en outre (lemme 7.9) que

$$\mu_r \rho^{\chi_h(r)} (V_r) + \mu_s \rho^{\chi_h(s)} (V_s) + \mu_t \rho^{\chi_h(t)} (V_t) = 0$$

Donc, comme  $\mu_r \neq 0$ , on a

$$\lambda_r \rho^{\chi_h(r)} (V_r) + \lambda_r \frac{\mu_s}{\mu_r} \rho^{\chi_h(s)} (V_s) + \lambda_r \frac{\mu_t}{\mu_r} \rho^{\chi_h(t)} (V_t) = 0$$

d'où les longueurs

$$\lambda_s = \lambda_r \frac{\mu_s}{\mu_r} \quad \lambda_t = \lambda_r \frac{\mu_t}{\mu_r}.$$

On montre alors que pour  $p \neq h$ , on a  $\epsilon_p = \sigma(\lambda_p)$ . Par définition, on le sait déjà pour  $p \in \{i, j, k\}$ . Puis, on exprime

$$\sigma(\lambda_m) = \sigma \left( \lambda_{r'} \frac{\delta_{r'rn}}{\delta_{mrn}} \right) = \sigma(\lambda_{r'} \delta_{r'rn} \delta_{mrn}) = \epsilon_m$$

$$\sigma(\lambda_n) = -\sigma \left( \lambda_{r'} \frac{\delta_{r'rm}}{\delta_{nrn}} \right) = -\sigma(\lambda_{r'} \delta_{r'rm} \delta_{nrn})$$

$$\sigma(\lambda_r) = \sigma\left(\lambda_{r'} \frac{\delta_{r'mn}}{\delta_{r mn}}\right) = \sigma(\lambda_{r'} \delta_{r'mn} \delta_{r mn})$$

$$\sigma(\lambda_s) = \sigma\left(\mu_s \frac{\lambda_r}{\mu_r}\right) = \sigma(\mu_s \lambda_r \mu_r)$$

$$\sigma(\lambda_t) = \sigma(\mu_t \lambda_r \mu_r).$$

De plus, on calcule

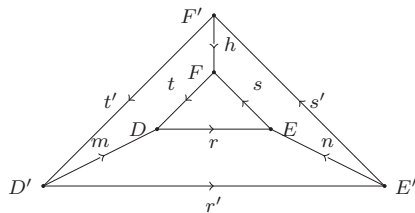
$$\begin{aligned} \mu_r \delta_{mrn} \overrightarrow{F'F} &= \mu_r \delta_{mrn} (\lambda_{t'} \rho^{\chi_h(t')}(V_{t'}) + \lambda_m \rho^{\chi_h(m)}(V_m) - \lambda_t \rho^{\chi_h(t)}(V_t)) \\ &= \mu_r \delta_{mrn} \lambda_{t'} \rho^{\chi_h(t')}(V_{t'}) + \mu_r \lambda_{r'} \delta_{r'r n} \rho^{\chi_h(m)}(V_m) + \mu_t \lambda_{r'} \delta_{r'mn} \rho^{\chi_h(t)}(V_t) \\ &= Y(\alpha_k, \xi). \end{aligned}$$

□

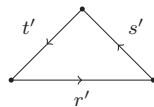
PREUVE DU LEMME 7.6 : Soit  $(\alpha_k, \xi) \in \Omega_{1,1}^h(\eta)$ . On pose

$$\epsilon_h := \sigma(\delta_{mrn}) \sigma(\mu_r) \frac{\sigma(\langle V_h \wedge Y(\alpha_k, \xi), V_h \wedge \rho(V_h) \rangle) + \sigma(\langle \rho(V_h) \wedge Y(\alpha_k, \xi), \rho(V_h) \wedge V_h \rangle)}{2}$$

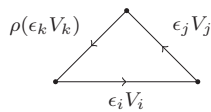
On rappelle le graphe :



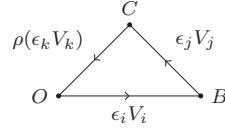
On rappelle aussi que comme  $\eta \in \mathcal{D}_{1,1}^h$ , il existe une permutation cyclique des arêtes du triangle



telle que les arêtes correspondant à une configuration aient les directions indiquées suivantes :



On note les sommets du triangle précédent par



et on définit

$$c_B = \lambda_i V_i \quad c_C = \lambda_i V_i + \lambda_j V_j$$

que l'on complète pour définir la configuration suivante :

$$c_D = c_{D'} + \lambda_m \rho^{X_h(m)}(V_m) \quad c_E = c_{E'} + \lambda_n \rho^{X_h(n)}(V_n) \quad c_F = c_D - \lambda_t \rho^{X_h(t)}(V_t).$$

Cette configuration vérifie

$$\forall p \in \underline{9} \setminus \{h\}, \quad \pi_{e(\Gamma, p)}^{X_h(p)}(\rho, c) = \epsilon_p V_p.$$

En effet, comme  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}$ , des conditions dégénérées comme  $\mu_r = 0$  ou  $\delta_{mrn} = 0$  n'arrivent pas et ainsi le lemme 7.11 affirme que  $\epsilon_p = \sigma(\lambda_p)$  pour  $p \neq h$ .

De plus, on a  $\frac{\overrightarrow{F'F}}{\|\overrightarrow{F'F}\|} \in [\epsilon_h V_h, \epsilon_h \rho(V_h)]$  si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} \det(\overrightarrow{F'F}, V_h, \rho(V_h)) = 0 \\ \epsilon_h \langle V_h \wedge \overrightarrow{F'F}, V_h \wedge \rho(V_h) \rangle \geq 0 \\ \epsilon_h \langle \rho(V_h) \wedge \overrightarrow{F'F}, \rho(V_h) \wedge V_h \rangle \geq 0 \end{array} \right.$$

Or

$$\frac{\overrightarrow{F'F}}{\|\overrightarrow{F'F}\|} = \sigma(\mu_r) \sigma(\delta_{mrn}) \frac{Y(\alpha_k, \xi)}{\|Y(\alpha_k, \xi)\|}$$

Donc  $\frac{\overrightarrow{F'F}}{\|\overrightarrow{F'F}\|} \in [\epsilon_h V_h, \epsilon_h \rho(V_h)]$  si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} \det(Y(\alpha_k, \xi), V_h, \rho(V_h)) = 0 \\ \epsilon_h \sigma(\mu_r) \sigma(\delta_{mrn}) \langle V_h \wedge Y(\alpha_k, \xi), V_h \wedge \rho(V_h) \rangle \geq 0 \\ \epsilon_h \sigma(\mu_r) \sigma(\delta_{mrn}) \langle \rho(V_h) \wedge Y(\alpha_k, \xi), \rho(V_h) \wedge V_h \rangle \geq 0 \end{array} \right.$$

Or  $\epsilon_h := \frac{\sigma(\delta_{mrn}) \sigma(\mu_r) (\sigma(\langle V_h \wedge Y(\alpha_k, \xi), V_h \wedge \rho(V_h) \rangle) + \sigma(\langle \rho(V_h) \wedge Y(\alpha_k, \xi), \rho(V_h) \wedge V_h \rangle))}{2} \neq 0$ , donc  $\epsilon_h$  est du signe commun de  $\sigma(\delta_{mrn}) \sigma(\mu_r) \langle V_h \wedge Y(\alpha_k, \xi), V_h \wedge \rho(V_h) \rangle$  et de  $\sigma(\delta_{mrn}) \sigma(\mu_r) \langle \rho(V_h) \wedge Y(\alpha_k, \xi), \rho(V_h) \wedge V_h \rangle$ .

Par conséquent, comme  $(\alpha_k, \xi) \in \Omega_{1,1}^h(\eta)$  alors  $\frac{\overrightarrow{F'F}}{\|\overrightarrow{F'F}\|} \in [\epsilon_h V_h, \epsilon_h \rho(V_h)]$ . Donc, si on note  $\rho(\alpha_k, \xi)$  et  $c(\alpha_k, \xi)$  la rotation et la configuration ainsi construite, on a  $(\rho(\alpha_k, \xi), c(\alpha_k, \xi)) \in \mathcal{E}_{\Gamma_1, h, \eta}(\epsilon_1 V_1, \dots, \epsilon_h V_h)$ . Réciproquement, si  $(\rho, c) \in \mathcal{E}_{\Gamma_1, h, \eta}(\epsilon_1 V_1, \dots, \epsilon_9 V_9)$ , il vérifie la construction établie dans cette preuve.

□

**Remarque 7.12** Une rotation est entièrement déterminée par l'image de deux vecteurs non colinéaires. Dans notre problème, une rotation est donc entièrement déterminée par l'image des vecteurs  $V_k$  et  $V_a$  (qui ne sont pas colinéaires car  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}$ ). En effet, pour  $W_p \in \mathbb{S}^2$ , on décompose  $W_p = \alpha_p V_k + \beta_p V_a + \gamma_p V_k \wedge V_a$  avec

$$\alpha_p = \frac{\det(W_p, V_a, V_k \wedge V_a)}{\det(V_k, V_a, V_k \wedge V_a)} \quad \beta_p = \frac{\det(W_p, V_k, V_k \wedge V_a)}{\det(V_a, V_k, V_k \wedge V_a)} \quad \gamma_p = \frac{\det(W_p, V_k, V_a)}{\det(V_k \wedge V_a, V_k, V_a)}$$

et dans ce cas

$$\rho(W_p) = \alpha_p \rho(V_k) + \beta_p \rho(V_a) + \gamma_p \rho(V_k) \wedge \rho(V_a).$$

**Remarque 7.13** Avec les notations et sous les hypothèses du lemme 7.5, on peut exprimer en fonction du couple  $(\alpha_k, \xi)$  la rotation  $\rho = \rho(\alpha_k, \xi)$ . Si on reprend les notations de la remarque 7.12, on a alors

$$\begin{aligned} \rho(W_p) &= (\alpha_p \cos(\alpha_k) + \beta_p \cos(\alpha_a(\alpha_k, \xi)))W + \alpha_p \sin(\alpha_k) Y_{ij} + \beta_p \sin(\alpha_a(\alpha_k, \xi)) Y_{bc} \\ &+ \gamma_p \cos(\alpha_k) \sin(\alpha_a(\alpha_k, \xi)) W \wedge Y_{bc} + \gamma_p \sin(\alpha_k) \cos(\alpha_a(\alpha_k, \xi)) Y_{ij} \wedge W \\ &+ \gamma_p \sin(\alpha_k) \sin(\alpha_a(\alpha_k, \xi)) Y_{ij} \wedge Y_{bc}. \end{aligned}$$

### 7.3 Signe d'un point d'intersection

**Proposition 7.14** Soient  $h \in \{3, 4, 5\}$  et  $\eta \in \mathcal{D}_{1,1}^h$ . On reprend les notations des lemmes 7.5 et 7.6. Soit  $(\alpha_k, \xi) \in \Omega_{1,1}^h(\eta)$ . On pose

$$\begin{aligned} X_1 &= (\chi_h(r) - \chi_h(t)) \mu_s \rho^{\frac{\chi_h(r) - \chi_h(t) + 1}{2}}(V_k) \wedge \rho^{\chi_h(r) - \chi_h(t)}(V_r) \\ &+ (\chi_h(s) - \chi_h(t)) \mu_r \rho^{\frac{\chi_h(s) - \chi_h(t) + 1}{2}}(V_k) \wedge \rho^{\chi_h(s) - \chi_h(t)}(V_s) \end{aligned}$$

On note  $pr_1$  la projection de  $\Omega_{1,1}^h(\eta)$  sur  $\alpha_k$  et on convient de la notation, pour  $\alpha_k \in pr_1(\Omega_{1,1}^h(\eta))$ , que  $\iota(\alpha_k)$  désigne l'élément de  $pr_1(\Omega_{1,1}^h(\eta)) \cup \delta_{mrn}^{-1}(0) \cup \mu_r^{-1}(0) \cup \Delta^{-1}(0)$  qui lui succède, dans l'ordre sur  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ . On a alors

$$\begin{aligned} \beta_{1,1} &= \frac{-1}{2^{89}!} \sum_{h=3}^5 \sum_{\eta \in \mathcal{D}_{1,1}^h} \sum_{(\alpha_k, \xi) \in \Omega_{1,1}^h(\eta)} \left( \prod_{p \neq h, r} \epsilon_p \right) \sigma(\det(V_t, \rho^{\chi_h(s) - \chi_h(t)}(V_s), X_1)) \\ &\times \sigma \left( \det \left( Y \left( \frac{\alpha_k + \iota(\alpha_k)}{2}, \xi \right), V_h, \rho(V_h) \right) \right) \end{aligned}$$

où  $\frac{\alpha_k + \iota(\alpha_k)}{2}$  désigne le milieu de l'arc orienté de  $\alpha_k$  à  $\iota(\alpha_k)$  sur le cercle  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ .

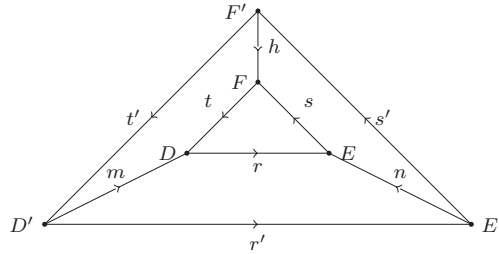
Pour démontrer cette proposition, rappelons du lemme 7.3 que le signe d'un point d'intersection est égal à l'opposé du signe du jacobien de l'application

$$F_{\Gamma, h, n_\Gamma, V_h}^{(6)} : \begin{cases} SO(3) \times C^{14} & \longrightarrow (\mathbb{S}^2)^{\mathfrak{A} \setminus h} \times \mathbb{R} \\ (\rho, c) & \longmapsto ((\pi_{e(\Gamma, i)}^{\chi_h(i)}(\rho, c))_{i \in \mathfrak{A} \setminus \{h\}}, \phi_{V_h, \rho}(\pi_{e(\Gamma, h)}^0(c))) \end{cases}$$

où

$$\phi_{V_h, \rho} : \begin{cases} \mathbb{S}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ X & \longmapsto \langle X, V_h \wedge \rho(V_h) \rangle \end{cases}$$

d'après le lemme 7.3. Le schéma suivant montre alors les étapes de la factorisation de l'inverse local de l'application  $F_{\Gamma, h, n_{\Gamma}, V_h}^{(6)}$  au point d'image  $(W_1, \dots, \hat{V}_h, \dots, W_9, 0) = (\epsilon_1 V_1, \dots, \hat{V}_h, \dots, \epsilon_9 V_9, 0)$ , avec un court commentaire et la référence du lemme où l'on détermine le signe du jacobien du facteur. On rappelle aussi le graphe  $\Gamma$  étudié :



Le schéma récapitulatif est alors le suivant :

$$\begin{array}{c}
SO(3) \times C^{14} \\
\uparrow F_0, \text{ paramétrage d'une rotation et d'une configuration} \\
\mathbb{S}_A^2 \times [0, \pi] \times (\mathbb{R}^3)^{\{C,D,E,F\}} \\
\uparrow F_1, \text{ construction de } B \text{ et } C, \text{ lemme 7.16} \\
\mathbb{S}_A^2 \times [0, \pi] \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}^3)^{\{D,E,F\}} \\
\uparrow F_2, \text{ paramétrage de l'axe et l'angle de la rotation, lemme 7.19} \\
\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}_k^2 \times (\mathbb{R}^3)^{\{D,E,F\}} \\
\uparrow F_3, \text{ construction des points } D \text{ et } E, \text{ lemme 7.21} \\
\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}_k^2 \times \mathbb{S}_m^2 \times \mathbb{S}_n^2 \times \mathbb{R}_m^+ \times \mathbb{R}_n^+ \times (\mathbb{R}^3)^{\{F\}} \\
\uparrow F_4, \text{ paramétrage des longueurs } \lambda_m \text{ et } \lambda_n, \text{ lemme 7.22} \\
\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}_k^2 \times \mathbb{S}_m^2 \times \mathbb{S}_n^2 \times \mathbb{S}_r^2 \times (\mathbb{R}^3)^{\{F\}} \\
\uparrow F_5, \text{ construction du point } F, \text{ lemme 7.24} \\
\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}_k^2 \times \mathbb{S}_m^2 \times \mathbb{S}_n^2 \times \mathbb{S}_r^2 \times \mathbb{S}_s^2 \times \mathbb{R}_s^+ \\
\uparrow F_6, \text{ paramétrage de l'arête } t, \text{ lemme 7.26} \\
\mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}_k^2 \times \mathbb{S}_m^2 \times \mathbb{S}_n^2 \times \mathbb{S}_r^2 \times \mathbb{S}_s^2 \times \mathbb{S}_t^2 \\
\uparrow F_7, \text{ paramétrage de l'arête } h, \text{ lemme 7.29} \\
\mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{S}_k^2 \times \mathbb{S}_m^2 \times \mathbb{S}_n^2 \times \mathbb{S}_r^2 \times \mathbb{S}_s^2 \times \mathbb{S}_t^2 \times \mathbb{R}
\end{array}$$

On rappelle que pour distinguer chaque facteur  $\mathbb{S}^2$ , on note en indice l'arête qui lui est affectée. On commence par un lemme préliminaire, qui permet d'introduire une notation utile pour la suite :

**Lemme 7.15** *Soit  $F : M \times N_1 \rightarrow M \times N_2$  une application différentiable. On note  $F_m^r : N_1 \rightarrow N_2; F_m^r(n) = F(m, n)$ . On suppose de plus que la fonction  $F$  est de la forme  $F(m, n) = (m, F_m^r(n))$ . Alors*

$$Jac_F(m, n) = Jac_{F_m^r}(n)$$

PREUVE: La matrice jacobienne  $J_F(m, n)$  de  $F$  au point  $(m, n)$  s'écrit sous la forme

$$\begin{array}{c}
M \quad N_1 \\
M \begin{pmatrix} I_M & 0 \\ \times & J_{F_m^r}(n) \end{pmatrix} \\
N_2
\end{array}$$

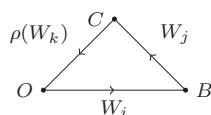
□



Rappelons que l'on paramètre  $SO(3)$  par l'application suivante :  $\mathbb{S}_A^2 \times [0, \pi] \rightarrow SO(3); (V, \theta) \mapsto \rho_{V, \theta}$ , qui à  $(V, \theta)$  associe la rotation d'axe  $V$  et d'angle  $\theta$  et où  $\mathbb{S}_A^2$  est une copie de  $\mathbb{S}^2$ . On rappelle aussi que l'on choisit de paramétrer l'espace  $C^{14}$  par  $\mathbb{S}_B^2 \times (\mathbb{R}^3)^{\{C, D, E, F\}}$  où  $\mathbb{S}_B^2$  est une copie de  $\mathbb{S}^2$  qui contient la direction de l'arête  $\frac{\vec{OB}}{\|\vec{OB}\|}$  et  $\mathbb{R}_X^3 := (\mathbb{R}^3)^{\{X\}}$  est une copie de  $\mathbb{R}^3$  contenant les coordonnées de  $X$ . On définit alors l'application suivante, qui préserve l'orientation :

$$F_0 : \left| \begin{array}{l} \mathbb{S}_A^2 \times [0, \pi] \times \mathbb{S}^2 \times (\mathbb{R}^3)^{\{C, D, E, F\}} \longrightarrow SO(3) \times C^{14} \\ (A, \theta, c) \longmapsto (\rho_{A, \theta}, c) \end{array} \right.$$

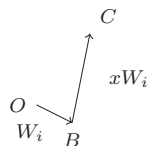
Commençons par déterminer les signes associés à la construction des points  $B$  et  $C$  :



On définit l'application

$$F_1^r : \left| \begin{array}{l} \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{S}_B^2 \times \mathbb{R}_C^3 \\ (W_i, W_j, x) \longmapsto (W_i, W_i + xW_j) \end{array} \right.$$

Qui paramètre la construction de  $B = W_i$  et de  $C = B + xW_j$ .



On définit alors  $F_1$  de

$$\mathbb{S}_A^2 \times [0, \pi] \times (\mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+) \times (\mathbb{R}^3)^{\{D, E, F\}}$$

dans

$$\mathbb{S}_A^2 \times [0, \pi] \times (\mathbb{S}_B^2 \times \mathbb{R}_C^3) \times (\mathbb{R}^3)^{\{D, E, F\}}$$

par

$$F_1(\omega_1, W_i, W_j, x, \omega_2) = (\omega_1, F_1^r(W_i, W_j, x), \omega_2).$$

**Lemme 7.16** *On a :*

$$Jac_{F_1} > 0$$

PREUVE: On applique le lemme 7.15 : On a  $M = \mathbb{S}^2 \times [0, \pi] \times (\mathbb{R}^3)^{\{D, E, F\}}$  et  $F_{1,m}^r : \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{S}_B^2 \times \mathbb{R}_C^3; (W_i, W_j, x) \mapsto (W_i, W_i + xW_j)$ . On a alors  $Jac_{F_1} = Jac_{F_1^r} > 0$ .

□

On fixe  $U(x) = \frac{-W_i - xW_j}{\| -W_i - xW_j \|}$  et on note  $C(W_k, U(x)) := \{\rho \in SO(3), \rho(W_k) = U(x)\}$ . Comme  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}$ , on sait qu'en particulier les vecteurs du triplet  $(V_i, V_j, V_k)$  ne sont pas coplanaires donc  $W_k \neq \pm U(x)$ . Le lemme suivant caractérise l'axe  $A$  et l'angle  $\theta$  de ces rotations.

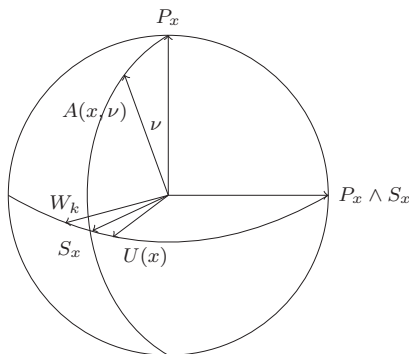
**Lemme 7.17** *On pose  $P_x = \frac{W_k \wedge U(x)}{\|W_k \wedge U(x)\|}$  et  $S_x = \frac{W_k + U(x)}{\|W_k + U(x)\|}$ . Soit  $\rho \in C(W_k, U(x))$ . On paramètre la rotation par un couple  $(A, \theta)$ , où  $\theta$  désigne l'angle de la rotation avec  $\theta \in [0, \pi]$ , et  $A \in \mathbb{S}^2$  est un axe correspondant. Il existe  $\nu \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  tel que l'axe  $A$  de  $\rho$  s'écrit*

$$A(\nu, W_k) = \cos(\nu)P_x + \sin(\nu)S_x.$$

Posons  $\theta_x = \frac{(W_k, U(x))}{2}$ . L'angle  $\theta$  de la rotation vérifie les équations suivantes

$$\cos(\theta) = \frac{\cos^2(\theta_x)\cos^2(\nu) - \sin^2(\theta_x)}{\cos^2(\theta_x)\cos^2(\nu) + \sin^2(\theta_x)} \quad \sin(\theta) = \frac{\sin(2\theta_x)\cos(\nu)}{\cos^2(\theta_x)\cos^2(\nu) + \sin^2(\theta_x)}.$$

PREUVE: On sait que l'axe  $A$  de la rotation  $\rho \in C(W_k, U(x))$  est équidistant de  $W_k$  et  $U(x)$ , par conséquent  $A$  se trouve sur le cercle médiateur de  $[W_k, U(x)]$  et s'exprime par  $A(\nu, W_k) = \cos(\nu)P_x + \sin(\nu)S_x$ , où  $\nu \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  car  $\theta \in [0, \pi]$ .



Soit  $B(\nu, W_k) \in \mathbb{S}^2$  tel que  $(A(\nu, W_k), B(\nu, W_k), P_x \wedge S_x)$  soit une base orthonormée directe de  $\mathbb{R}^3$ . On note plus simplement  $B = B(\nu, W_k)$  et  $A = A(\nu, W_k)$ . On écrit

$$\begin{aligned} U(x) &= \cos(\theta_x)S_x + \sin(\theta_x)P_x \wedge S_x \\ &= \cos(\theta_x)(\cos(\nu)B + \sin(\nu)A) + \sin(\theta_x)P_x \wedge S_x \\ &= +\cos(\theta_x)\sin(\nu)A + \cos(\theta_x)\cos(\nu)B + \sin(\theta_x)P_x \wedge S_x. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} W_k &= \cos(\theta_x)S_x - \sin(\theta_x)P_x \wedge S_x \\ &= +\cos(\theta_x)\sin(\nu)A + \cos(\theta_x)\cos(\nu)B - \sin(\theta_x)P_x \wedge S_x. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \rho(W_k) = & \cos(\theta_x)\sin(\nu)A + (\cos(\theta_x)\cos(\nu)\cos(\theta) + \sin(\theta)\sin(\theta_x))B \\ & + (\cos(\theta_x)\cos(\nu)\sin(\theta) - \sin(\theta_x)\cos(\theta))P_x \wedge S_x. \end{aligned}$$

La condition  $\rho(W_k) = U(x)$  équivaut à

$$\begin{cases} \cos(\theta_x)\cos(\theta)\cos(\nu) + \sin(\theta_x)\sin(\theta) & = \cos(\theta_x)\cos(\nu) \\ \sin(\theta)\cos(\nu)\cos(\theta_x) - \sin(\theta_x)\cos(\theta) & = \sin(\theta_x). \end{cases}$$

En multipliant la première ligne par  $\sin(\theta_x)$  et la seconde par  $\cos(\nu)\cos(\theta_x)$  et en les additionnant, on trouve

$$\sin(\theta) = \frac{2\cos(\theta_x)\sin(\theta_x)\cos(\nu)}{\cos(\theta_x)^2\cos^2(\nu) + \sin^2(\theta_x)}.$$

En multipliant la première ligne par  $\cos(\theta_x)\cos(\nu)$  et la seconde par  $-\sin(\theta_x)$  et en les additionnant on trouve

$$\cos(\theta) = \frac{\cos(\theta_x)^2\cos^2(\nu) - \sin^2(\theta_x)}{\cos(\theta_x)^2\cos^2(\nu) + \sin^2(\theta_x)}.$$

□

On définit alors

$$F_2^r : \begin{cases} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times (\mathbb{S}_k^2 \setminus \{\pm U(x)\}) & \longrightarrow (\mathbb{S}_A^2 \setminus \{\pm U(x)\}) \times [0, \pi] \\ (\nu, W_k) & \longmapsto (A(\nu, W_k), \theta(\nu, W_k)) \end{cases}$$

et l'application  $F_2$  de

$$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}_k^2 \times (\mathbb{R}^3)^{\{D,E,F\}}$$

dans

$$\mathbb{S}_A^2 \times [0, \pi] \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}^3)^{\{D,E,F\}}$$

par

$$F_2(\nu, \omega_2, W_k, \omega_3) = (A(\nu, W_k), \theta(\nu, W_k), \omega_2, \omega_3).$$

**Remarque 7.18** *L'application  $F_2^r$  n'est bien définie que sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times (\mathbb{S}_k^2 \setminus \{\pm U(x)\})$ . On oublie volontairement d'enlever  $\pm U(x)$  dans l'écriture de  $F_2$  car on travaille localement au voisinage de points génériques.*

**Lemme 7.19** *Partout où la fonction  $F_2$  est bien définie (cf remarque précédente), on a*

$$Jac_{F_2} > 0.$$

PREUVE: L'application

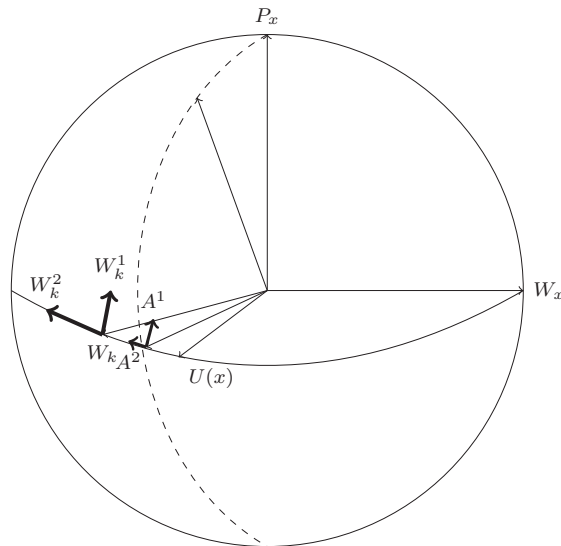
$$F_2^r : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times (\mathbb{S}_k^2 \setminus \{\pm U(x)\}) \rightarrow ((\mathbb{S}_A^2 \setminus \{\pm U(x)\}) \times ]0, \pi]) \setminus (U(x)^\perp \times \{\pi\})$$

est un difféomorphisme global. L'application inverse est donnée par  $(F_2^r)^{-1}(A, \theta) = (\nu, \rho_{A, \theta}^{-1}(U(x)))$

où  $\nu$  est l'angle entre  $A$  et  $\frac{\rho_{A, \theta}^{-1}(U(x)) \wedge U(x)}{\|\rho_{A, \theta}^{-1}(U(x)) \wedge U(x)\|}$ , sur le cercle de base directe

$$\left( \frac{\rho_{A, \theta}^{-1}(U(x)) \wedge U(x)}{\|\rho_{A, \theta}^{-1}(U(x)) \wedge U(x)\|}, \frac{U(x) + \rho_{A, \theta}^{-1}(U(x))}{\|U(x) + \rho_{A, \theta}^{-1}(U(x))\|} \right).$$

Par conséquent le signe du jacobien de  $F_2^r$  est constant. On le détermine au voisinage de  $(\pi/2, W_k)$ . Bien que  $(\pi/2, W_k)$  appartienne au bord du domaine de définition de  $F_2^r$ , on peut le calculer en restant dans le domaine de définition (cf dessin ci-dessous). Comme le jacobien est de signe constant, le signe trouvé correspond au signe de  $Jac_{F_2^r}$ .



On choisit comme base de  $T_{W_k} \mathbb{S}_k^2$  le couple  $(W_k^1, W_k^2)$  dessiné sur la figure, de telle manière que  $W_k^1$  soit tangent au cercle centré en  $U(x)$  passant par  $W_k$ . Alors les images  $(A^1, A^2)$  des vecteurs tangents par  $dF_2^r$  sont dessinés sur la figure et forment une base directe de  $T_A \mathbb{S}_A^2$ . La matrice jacobienne au point  $(\pi/2, W_k)$  s'écrit alors

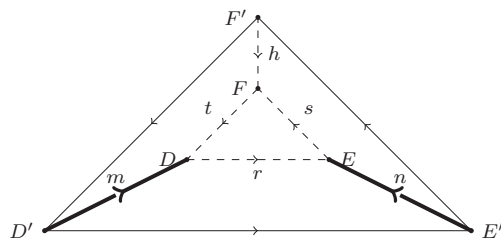
$$\begin{array}{c} \nu \\ A^1 \\ A^2 \\ \theta \end{array} \begin{pmatrix} \times & 1 & 0 \\ \times & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et par conséquent  $J_{F_2^r}(\pi/2, W_k) > 0$ .

□

On construit ensuite les points  $D$  et  $E$ . On définit la fonction

$$F_3^r : \begin{cases} \mathbb{S}_m^2 \times \mathbb{S}_n^2 \times \mathbb{R}_m^+ \times \mathbb{R}_n^+ & \longrightarrow (\mathbb{R}^3)^{\{D,E\}} \\ (W_m, W_n, \lambda'_m, \lambda'_n) & \longmapsto (D' + \lambda'_m \rho^{\chi_h(m)}(W_m), E' + \lambda'_n \rho^{\chi_h(n)}(W_n)) \end{cases}$$



On illustre la démonstration en dessinant le graphe de la manière suivante : les arêtes en pointillés ne sont pas encore traitées, on a dessiné en gras celles qui nous intéressent et en trait normal celles qu'on a déjà traitées. On définit la fonction  $F_3$  de

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}_k^2 \times \mathbb{S}_m^2 \times \mathbb{S}_n^2 \times \mathbb{R}_m^+ \times \mathbb{R}_n^+ \times (\mathbb{R}^3)^{\{F\}}$$

dans

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}_k^2 \times (\mathbb{R}^3)^{\{D,E,F\}}$$

par

$$F_3(\omega_1, W_m, W_n, \lambda'_m, \lambda'_n, \omega_2) = (\omega_1, F_3^r(W_m, W_n, \lambda'_m, \lambda'_n), \omega_2).$$

**Remarque 7.20** Avec les notations du lemme 7.11, on a

$$\lambda'_m = |\lambda_m| \quad \lambda'_n = |\lambda_n|.$$

**Lemme 7.21** On a

$$Jac_{F_3} > 0.$$

PREUVE: Il s'agit de la même preuve que pour montrer que  $Jac_{F_1} > 0$ .

□

On pose alors

$$F_4^r : \begin{cases} \mathbb{S}_r^2 & \longrightarrow \mathbb{R}_m^+ \times \mathbb{R}_n^+ \\ (W_r) & \longmapsto (\lambda'_m(W_r), \lambda'_n(W_r)) \end{cases}$$

La fonction  $F_4^r$  détermine les longueurs  $\lambda'_m$  et  $\lambda'_n$  pour que  $\overrightarrow{DE}$  soit porté par la direction  $\rho^{\chi_h(r)}(W_r)$ . On définit  $F_4$  de

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}_k^2 \times \mathbb{S}_m^2 \times \mathbb{S}_n^2 \times \mathbb{S}_r^2 \times (\mathbb{R}^3)^{\{F\}}$$

dans

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}_k^2 \times \mathbb{S}_m^2 \times \mathbb{S}_n^2 \times \mathbb{R}_m^+ \times \mathbb{R}_n^+ \times (\mathbb{R}^3)^{\{F\}}$$

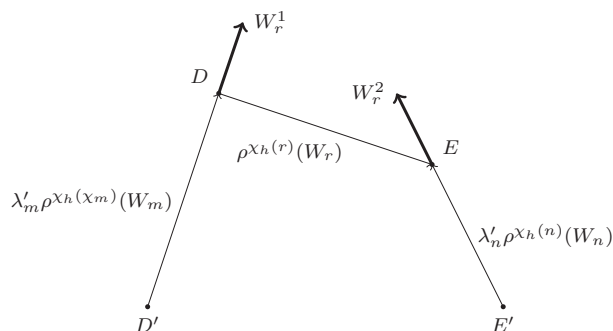
par

$$F_4(\omega_1, W_r, \omega_2) = (\omega_1, F_4^r(W_r), \omega_2).$$

**Lemme 7.22** *On a*

$$\begin{aligned} \text{Jac}_{F_4} &= \det(\rho^{\chi_h(r)}(W_r), \rho^{\chi_h(n)}(W_n), \rho^{\chi_h(m)}(W_m)) \\ &= \epsilon_r \epsilon_n \epsilon_m \det(\rho^{\chi_h(r)}(V_r), \rho^{\chi_h(n)}(V_n), \rho^{\chi_h(m)}(V_m)) \\ \sigma(\text{Jac}_{F_4}) &= \epsilon_n \epsilon_m \epsilon_r \sigma(\det(\rho^{\chi_h(r)}(V_r), \rho^{\chi_h(n)}(V_n), \rho^{\chi_h(m)}(V_m))) \\ &= \epsilon_n \epsilon_m \epsilon_r \sigma(\delta_{rnm}). \end{aligned}$$

PREUVE: Il suffit d'étudier le jacobien de l'application inverse restreinte :  $(F_4^r)^{-1} : (\lambda'_m, \lambda'_n) \mapsto W_r$ . Cette application est en fait construite sur le schéma suivant :

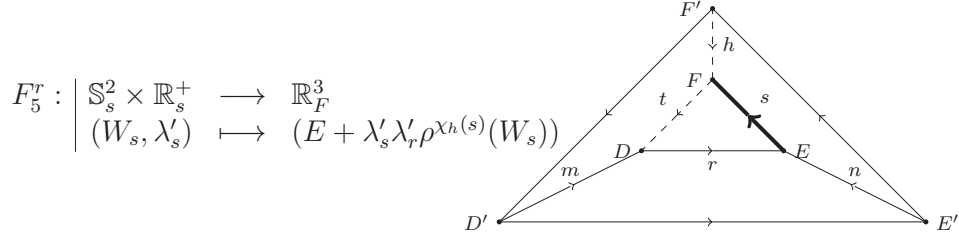


On note  $W_r^1$  (respectivement  $W_r^2$ ) le vecteur tangent à  $T_{W_r}\mathbb{S}^2$  image par l'application tangente du vecteur  $\lambda'_m$  (respectivement  $\lambda'_n$ ). Ces vecteurs tangents sont dessinés sur la figure précédente. Le signe du jacobien est alors celui de

$$\det(\rho^{\chi_h(r)}(W_r), -\lambda'_m \rho^{\chi_h(m)}(W_m), \lambda'_n \rho^{\chi_h(n)}(W_n)) = \det(\rho^{\chi_h(r)}(W_r), \lambda'_n \rho^{\chi_h(n)}(W_n), \lambda'_m \rho^{\chi_h(m)}(W_m)).$$

□

On pose  $\lambda'_r = \|\overrightarrow{DE}\|$  et on définit



La fonction  $F_5^r$  détermine la position de  $F = E + \lambda'_s \lambda'_r \rho^{\chi_h(s)}(W_s)$ . Les points  $O, \dots, E$  sont considérés comme fixes.

$$E \xrightarrow{\lambda'_s \lambda'_r \rho^{\chi_h(s)}(W_s)} F$$

**Remarque 7.23** *Le paramètre  $\lambda'_s$  ne désigne pas la longueur de l'arête  $s$ . Il ne doit pas être confondu avec le paramètre  $\lambda_s$  de la sous-section précédente. On a en fait  $\lambda'_s = \left| \frac{\lambda_s}{\lambda_r} \right| = \left| \frac{\mu_s}{\mu_r} \right|$ .*

On définit la fonction  $F_5$  de

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}_k^2 \times \mathbb{S}_m^2 \times \mathbb{S}_n^2 \times \mathbb{S}_r^2 \times \mathbb{S}_s^2 \times \mathbb{R}^+$$

dans

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}_k^2 \times \mathbb{S}_m^2 \times \mathbb{S}_n^2 \times \mathbb{S}_r^2 \times (\mathbb{R}^3)^{\{F\}}$$

par

$$F_5(\omega_1, W_s, \lambda'_s) = (\omega_1, F_5^r(W_s, \lambda'_s)).$$

**Lemme 7.24**

$$Jac_{F_5} > 0.$$

□

Avant de définir les deux dernières fonctions, on prouve un lemme préliminaire. On fixe les vecteurs  $U(x) = \frac{-W_i - xW_j}{\|W_i + xW_j\|}$  et  $W_k \in \mathbb{S}^2 \setminus \{\pm U(x)\}$ . On pose  $\theta_x = \frac{(W_k, U(x))}{2}$ ,  $P_x = \frac{W_k \wedge U(x)}{\|W_k \wedge U(x)\|}$  et  $S_x = \frac{W_k + U(x)}{\|W_k + U(x)\|}$ . Rappelons que  $C(W_k, U(x)) = \{\rho \in SO(3), \rho(W_k) = U(x)\}$ . D'après le lemme 7.17, on paramètre  $C(W_k, U(x))$  par l'application  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] / -\frac{\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{2} \rightarrow SO(3); \nu \mapsto \rho_{A(\nu), \theta(\nu)}$  où

$$A(\nu, W_k) = \cos(\nu)P_x + \sin(\nu)S_x$$

$$\cos(\theta) = \frac{\cos^2(\theta_x)\cos^2(\nu) - \sin^2(\theta_x)}{\cos^2(\theta_x)\cos^2(\nu) + \sin^2(\theta_x)} \quad \sin(\theta) = \frac{\sin(2\theta_x)\cos(\nu)}{\cos^2(\theta_x)\cos^2(\nu) + \sin^2(\theta_x)}.$$

**Lemme 7.25** Soient  $V \in \mathbb{S}^2$  et  $p \in \{-1, 0, 1\}$ . On note la fonction évaluation

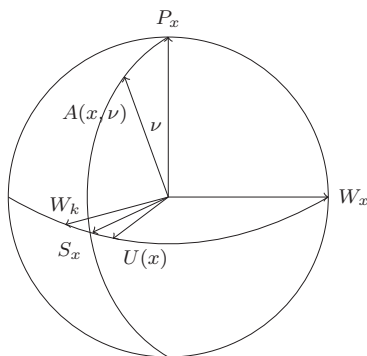
$$\psi_{V,p} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] / -\frac{\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{2} \rightarrow \mathbb{S}^2; \nu \mapsto \rho_{A(\nu), \theta(\nu)}^p(V)$$

Alors

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \psi_{V,p} = p \omega_{k,x} \rho^{\frac{p+1}{2}}(W_k) \wedge \rho^p(V)$$

où  $\omega_{k,x} = \frac{2 \sin(\theta_x)}{\cos^2(\theta_x) \cos^2(\nu) + \sin^2(\theta_x)}$ . De plus,  $\theta_x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  donc  $\omega_{k,x} > 0$ .

PREUVE: On rappelle le schéma de construction de la rotation  $\rho_{A(\nu), \theta(\nu)}$  :



Le cas  $p = 0$  est évident. On commence par prouver le lemme pour le cas  $p = 1$ . On note pour plus de souplesse  $\alpha = \cos(\theta_x)$  et  $\beta = \sin(\theta_x)$ , et donc

$$\cos(\theta) = \frac{\alpha^2 \cos^2(\nu) - \beta^2}{\alpha^2 \cos^2(\nu) + \beta^2} = 1 - \frac{2\beta^2}{\alpha^2 \cos^2(\nu) + \beta^2} \quad \sin(\theta) = \frac{2\alpha\beta \cos(\nu)}{\alpha^2 \cos^2(\nu) + \beta^2}.$$

On calcule :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \cos(\theta)}{\partial \nu} &= \frac{-2\beta^2 \times 2\alpha^2 \cos(\nu) \sin(\nu)}{(\alpha^2 \cos^2(\nu) + \beta^2)^2} \\ &= \frac{-\sin(\nu)}{\cos(\nu)} \times \frac{4\beta^2 \alpha^2 \cos^2(\nu)}{(\alpha^2 \cos^2(\nu) + \beta^2)^2} \\ &= -\tan(\nu) \sin^2(\theta) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sin(\theta)}{\partial \nu} &= 2\alpha\beta \frac{-\sin(\nu)(\alpha^2 \cos^2(\nu) + \beta^2) + 2\alpha^2 \cos^2(\nu) \sin(\nu)}{(\alpha^2 \cos^2(\nu) + \beta^2)^2} \\ &= 2\alpha\beta \sin(\nu) \frac{\alpha^2 \cos^2(\nu) - \beta^2}{(\alpha^2 \cos^2(\nu) + \beta^2)^2} \\ &= \frac{\sin(\nu)}{\cos(\nu)} \times \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 \cos^2(\nu) + \beta^2} \times \frac{\alpha^2 \cos^2(\nu) - \beta^2}{\alpha^2 \cos^2(\nu) + \beta^2} \\ &= \tan(\nu) \cos(\theta) \sin(\theta). \end{aligned}$$

On définit  $B = W_x \wedge A$  de telle sorte que  $(A, B, W_x)$  soit une base orthonormée directe de  $\mathbb{R}^3$ . Partant d'une décomposition de  $V$  dans la base  $(P_x, S_x, W_x)$ , on écrit ses coordonnées dans  $(A, B, W_x)$ , plus adaptée pour écrire la rotation  $\rho(V)$  :

$$\begin{aligned} V &= aP_x + bS_x + cW_x \\ &= a(\cos(\nu)A - \sin(\nu)B) + b(\sin(\nu)A + \cos(\nu)B) + cW_x \\ &= (a\cos(\nu) + b\sin(\nu))A + (b\cos(\nu) - a\sin(\nu))B + cW_x. \end{aligned}$$



Donc

$$\begin{aligned} \rho(V) &= (a\cos(\nu) + b\sin(\nu))A + ((b\cos(\nu) - a\sin(\nu))\cos(\theta) - c\sin(\theta))B \\ &\quad + ((b\cos(\nu) - a\sin(\nu))\sin(\theta) + c\cos(\theta))W_x. \end{aligned}$$

Comme  $A = \cos(\nu)P_x + \sin(\nu)S_x$  alors  $\frac{\partial A}{\partial \nu} = -\sin(\nu)P_x + \cos(\nu)S_x = B = W_x \wedge A$ . De même  $B = -\sin(\nu)P_x + \cos(\nu)S_x$  donc  $\frac{\partial B}{\partial \nu} = -\cos(\nu)P_x - \sin(\nu)S_x = -A = W_x \wedge B$ . On calcule donc en regroupant les membres (les matrices sont écrites dans la base  $(A, B, W_x)$ ) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(V)}{\partial \nu} &= (a\cos(\nu) + b\sin(\nu))B - ((b\cos(\nu) - a\sin(\nu))\cos(\theta) - c\sin(\theta))A \\ &\quad + (-a\sin(\nu) + b\cos(\nu))A - (b\sin(\nu) + a\cos(\nu))\cos(\theta)B - (b\sin(\nu) + a\cos(\nu))\sin(\theta)W_x \\ &\quad + ((b\cos(\nu) - a\sin(\nu))\frac{\partial \cos(\theta)}{\partial \nu} - c\frac{\partial \sin(\theta)}{\partial \nu})B + ((b\cos(\nu) - a\sin(\nu))\frac{\partial \sin(\theta)}{\partial \nu} + c\frac{\partial \cos(\theta)}{\partial \nu})W_x \\ &= W_x \wedge \rho(V) - \begin{bmatrix} a\sin(\nu) - b\cos(\nu) \\ (b\sin(\nu) + a\cos(\nu))\cos(\theta) \\ (b\sin(\nu) + a\cos(\nu))\sin(\theta) \end{bmatrix} \\ &\quad - \tan(\nu)\sin(\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ (b\cos(\nu) - a\sin(\nu))\sin(\theta) + c\cos(\theta) \\ (-b\cos(\nu) + a\sin(\nu))\cos(\theta) + c\sin(\theta) \end{bmatrix} \\ &= W_x \wedge \rho(V) + \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) \end{bmatrix} \wedge \rho(V) + \tan(\nu)\sin(\theta)A \wedge \rho(V) \\ &= \begin{bmatrix} \tan(\nu)\sin(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 1 - \cos(\theta) \end{bmatrix} \wedge \rho(V). \end{aligned}$$

On montre alors facilement que  $\begin{bmatrix} \tan(\nu)\sin(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 1 - \cos(\theta) \end{bmatrix} = \frac{2\beta}{\alpha^2\cos^2(\nu) + \beta^2} \begin{bmatrix} \alpha\sin(\nu) \\ \alpha\cos(\nu) \\ \beta \end{bmatrix}$ . Mais comme  $\rho(W_k) = U_x = \alpha S_x + \beta W_x = \alpha\sin(\nu)A + \alpha\cos(\nu)B + \beta W_x$ , on obtient l'égalité voulue.

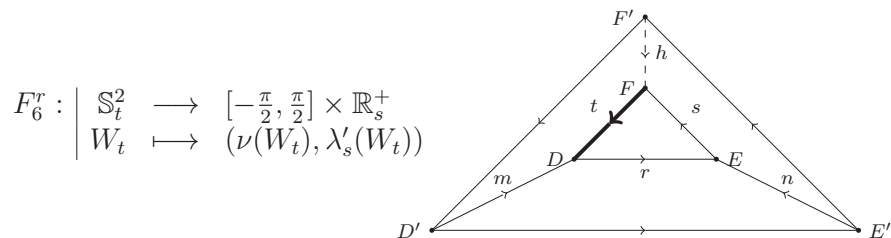
Traitons le cas  $p = -1$ . On se ramène au cas précédent car  $\rho_{A,\theta}^{-1} = \rho_{A,-\theta}$ . Cela revient à changer  $\theta$  en  $-\theta$ . Donc

$$\frac{\partial \psi_{V,-1}}{\partial \nu} = \frac{-2\beta}{\alpha^2\cos^2(\nu) + \beta^2} \begin{bmatrix} \alpha\sin(\nu) \\ \alpha\cos(\nu) \\ -\beta \end{bmatrix} \wedge \rho^{-1}(V).$$

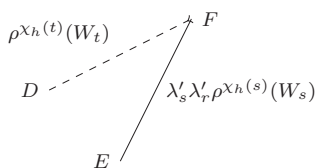
Comme  $W_k = \alpha S_x - \beta W_x$  le résultat en découle.

□

On définit



L'application  $F_6^r$  associe à  $W_t$  le couple  $(\nu, \lambda'_s)$  tel que  $\rho_{A(\nu), \theta(\nu)}^{\chi_h(r)}(W_r)$ ,  $\rho_{A(\nu), \theta(\nu)}^{\chi_h(t)}(W_t)$  et  $\rho_{A(\nu), \theta(\nu)}^{\chi_h(s)}(W_s)$  soient coplanaires, et que  $\overrightarrow{FD}$  soit dirigé par  $\rho_{A(\nu), \theta(\nu)}^{\chi_h(t)}(W_t)$



On définit ensuite la fonction  $F_6$  de

$$\mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}_k^2 \times \mathbb{S}_m^2 \times \mathbb{S}_n^2 \times \mathbb{S}_r^2 \times \mathbb{S}_s^2 \times \mathbb{S}_t^2$$

dans

$$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}_k^2 \times \mathbb{S}_m^2 \times \mathbb{S}_n^2 \times \mathbb{S}_r^2 \times \mathbb{S}_s^2 \times \mathbb{R}_s^+$$

par

$$F_6(\omega_1, \omega_2, W_t) = (\omega_1, \nu(W_t), \omega_2, \lambda'_s(W_t)).$$

**Lemme 7.26** *On pose*

$$\begin{aligned} X_1 = & (\chi_h(r) - \chi_h(t)) \mu_r \rho^{\frac{\chi_h(r) - \chi_h(t) + 1}{2}}(V_k) \wedge \rho^{\chi_h(r) - \chi_h(t)}(V_r) \\ & + (\chi_h(s) - \chi_h(t)) \mu_s \rho^{\frac{\chi_h(s) - \chi_h(t) + 1}{2}}(V_k) \wedge \rho^{\chi_h(s) - \chi_h(t)}(V_s). \end{aligned}$$

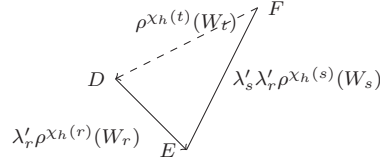
Alors

$$\sigma(\text{Jac}_{F_6}) = \epsilon_t \epsilon_s \epsilon_k \epsilon_r \sigma(\mu_r) \sigma(\det(V_t, \rho^{\chi_h(s) - \chi_h(t)}(V_s), X_1)).$$

PREUVE: La définition de  $F_6$  fait intervenir une permutation de facteurs telle que  $\text{Jac}_{F_6}$  et  $\text{Jac}_{F_6^r}$  ont des jacobiens opposés. On a donc

$$\sigma(\text{Jac}_{F_6}) = -\sigma\left(\det\left(W_t, \frac{\partial}{\partial \nu}((F_6^r)^{-1}), \frac{\partial}{\partial \lambda'_s}((F_6^r)^{-1})\right)\right).$$

On a d'après le schéma



que

$$\frac{\partial}{\partial \lambda'_s} (F_6^r)^{-1} = -\rho^{\chi_h(s) - \chi_h(t)}(W_s).$$

Donc

$$\sigma(\text{Jac}_{F_6}) = \sigma \left( \det \left( W_t, \frac{\partial}{\partial \nu} ((F_6^r)^{-1}), \rho^{\chi_h(s) - \chi_h(t)}(W_s) \right) \right).$$

On peut écrire

$$\rho^{\chi_h(t)}(W_t) = \frac{-\lambda'_r \rho^{\chi_h(r)}(W_r) - \lambda'_s \lambda'_r \rho^{\chi_h(s)}(W_s)}{\|-\lambda'_r \rho^{\chi_h(r)}(W_r) - \lambda'_s \lambda'_r \rho^{\chi_h(s)}(W_s)\|}$$

donc

$$W_t = \frac{-\rho^{\chi_h(r) - \chi_h(t)}(W_r) - \lambda'_s \rho^{\chi_h(s) - \chi_h(t)}(W_s)}{\|\rho^{\chi_h(r)}(W_r) + \lambda'_s \rho^{\chi_h(s)}(W_s)\|}$$

car  $\lambda'_r > 0$ . On pose  $X = -\rho^{\chi_h(r) - \chi_h(t)}(W_r) - \lambda'_s \rho^{\chi_h(s) - \chi_h(t)}(W_s)$ . Alors  $W_t = \frac{X}{\|X\|}$  et  $\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{X}{\|X\|} = \frac{1}{\|X\|} \frac{\partial}{\partial \nu} X + X \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{\|X\|}$ . Comme  $\det(W_t, X, -\rho^{\chi_h(s) - \chi_h(t)}(W_s)) = 0$  alors

$$\sigma(\text{Jac}_{F_6}) = \sigma \left( \det(W_t, \frac{\partial X}{\partial \nu}, \rho^{\chi_h(s) - \chi_h(t)}(W_s)) \right).$$

On applique le lemme 7.25

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \nu} &= -\omega_{k,x}(\chi_h(r) - \chi_h(t)) \rho^{\frac{\chi_h(r) - \chi_h(t) + 1}{2}}(W_k) \wedge \rho^{\chi_h(r) - \chi_h(t)}(W_r) \\ &\quad - \omega_{k,x}(\chi_h(s) - \chi_h(t)) \lambda'_s \rho^{\frac{\chi_h(s) - \chi_h(t) + 1}{2}}(W_k) \wedge \rho^{\chi_h(s) - \chi_h(t)}(W_s) \\ &= -\omega_{k,x} \epsilon_k \epsilon_r (\chi_h(r) - \chi_h(t)) \rho^{\frac{\chi_h(r) - \chi_h(t) + 1}{2}}(V_k) \wedge \rho^{\chi_h(r) - \chi_h(t)}(V_r) \\ &\quad - \omega_{k,x} \epsilon_k \epsilon_s (\chi_h(s) - \chi_h(t)) \lambda'_s \rho^{\frac{\chi_h(s) - \chi_h(t) + 1}{2}}(V_k) \wedge \rho^{\chi_h(s) - \chi_h(t)}(V_s) \end{aligned}$$

Or  $\epsilon_s \lambda'_s = \epsilon_s \left| \frac{\mu_s}{\mu_r} \right| = \epsilon_r \left( \frac{\mu_s}{\mu_r} \right)$  donc

$$\mu_r \frac{\partial X}{\partial \nu} = -\omega_{k,x} \epsilon_k \epsilon_r X_1.$$

Donc

$$\begin{aligned} \sigma(\text{Jac}_{F_6}) &= \epsilon_k \epsilon_r \sigma(\mu_r) \sigma \left( \det(W_t, \rho^{\chi_h(s) - \chi_h(t)}(W_s), X_1) \right) \\ &= \epsilon_k \epsilon_r \epsilon_t \epsilon_s \sigma(\mu_r) \sigma \left( \det(V_t, \rho^{\chi_h(s) - \chi_h(t)}(V_s), X_1) \right). \end{aligned}$$

□

À ce stade, le couple  $(\rho, c)$  est paramétré par  $x \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\rho(W_k) = \frac{-(W_i + xW_j)}{\|W_i + xW_j\|}$ . On définit localement la fonction

$$F_7^r : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ u & \longmapsto x(u) \end{cases}$$

comme l'inverse local de la fonction  $(F_7^r)^{-1}$  telle que

$$(F_7^r)^{-1}(x) = \langle \overrightarrow{F'F}, V_h \wedge \rho(V_h) \rangle = \det(\overrightarrow{F'F}, V_h, \rho(V_h)).$$

On définit la dernière fonction  $F_7$  par

$$\mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{S}_k^2 \times \mathbb{S}_m^2 \times \mathbb{S}_n^2 \times \mathbb{S}_r^2 \times \mathbb{S}_s^2 \times \mathbb{S}_t^2 \times \mathbb{R}$$

dans

$$\mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}_k^2 \times \mathbb{S}_m^2 \times \mathbb{S}_n^2 \times \mathbb{S}_r^2 \times \mathbb{S}_s^2 \times \mathbb{S}_t^2$$

par  $F_7(\omega_1, \omega_2, u) = (\omega_1, x(u), \omega_2)$

**Lemme 7.27**  $Jac_{F_7}$  est du signe de  $\sigma(\mu_r)\sigma(\delta_{mrn})\frac{\partial}{\partial x}\det(Y(x), W_h, \rho(W_h))$ .

PREUVE: Par définition,  $Jac_{F_7}$  est du signe de  $Jac_{(F_7^r)^{-1}}$  où

$$(F_7^r)^{-1}(x) = \det(\overrightarrow{F'F}, V_h, \rho(V_h)).$$

D'autre part, on sait par le lemme 7.11 que

$$Y(x) = \mu_r \delta_{mrn} \overrightarrow{F'F}$$

donc le signe du  $Jac_{F_7}$  au point d'image 0 est donné par

$$\sigma(Jac_{F_7}) = \sigma(\mu_r)\sigma(\delta_{mrn})\sigma\left(\frac{\partial}{\partial x}\det(Y(x), V_h, \rho(V_h))\right).$$

□

**Lemme 7.28**  $Jac_{F_7^r}$  est du signe de  $\epsilon_i \epsilon_j \sigma(\mu_r)\sigma(\delta_{mrn})\frac{\partial}{\partial \alpha_k}\det(Y(\alpha_k), W_h, \rho(W_h))$ .

PREUVE: On revient sur le paramétrage initial, défini dans la sous-section consacrée à la recherche des points d'intersection. Rappelons que  $\alpha_k$  paramètre  $S(V_i, V_j)$  de la manière suivante :  $\rho(V_k) = \cos(\alpha_k)W + \sin(\alpha_k)Y_{ij}$  et que  $x$  paramètre l'arc  $[-\epsilon_i V_i, -\epsilon_j V_j]$ . La co-orientation de  $S(V_i, V_j)$  par le paramètre  $\alpha_k$  est donnée par le vecteur  $\frac{V_i \wedge V_j}{\|V_i \wedge V_j\|}$  (par construction des vecteurs  $W$  et  $Y_{ij}$ ), alors que la co-orientation de  $[-\epsilon_i V_i, -\epsilon_j V_j]$  est donnée par  $(-\epsilon_i V_i) \wedge (-\epsilon_j V_j) = \epsilon_i \epsilon_j V_i \wedge V_j$ . Par conséquent

$$\sigma(\text{Jac}_{F_r^7}) = \epsilon_i \epsilon_j \sigma(\mu_r) \sigma(\delta_{mrn}) \sigma \left( \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \det(Y(\alpha_k), W_h, \rho(W_h)) \right).$$

□

**Lemme 7.29** Soit  $(\alpha_k, \xi) \in \Omega_{1,1}^h(\eta)$  un point d'intersection. On note  $\iota(\alpha)$  l'élément de  $\Omega_{1,1}^h(\eta) \cup \delta_{mrn}^{-1}(0) \cup \mu_r^{-1}(0)$  qui succède à  $\alpha_k$  dans l'ordre sur  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ . Alors

$$\sigma(\text{Jac}_{F_7}) = \epsilon_i \epsilon_j \sigma(\mu_r) \sigma(\delta_{mrn}) \sigma \left( \det(Y(\frac{\alpha_k + \iota(\alpha_k)}{2}, \xi), V_h, \rho(V_h)) \right).$$

PREUVE: Comme  $(\alpha_k, \xi) \in \Omega_{1,1}^h(\eta)$ , la fonction  $\alpha \mapsto \det(Y(\alpha, \xi), V_h, \rho(V_h))$  s'annule en  $\alpha_k$ . Le signe de sa dérivée en  $\alpha_k$  est celui de la fonction sur un voisinage à droite de  $\alpha_k$ . De plus,  $\delta_{mrn}^{-1}(0) \cup \mu_r^{-1}(0)$  désigne l'ensemble des points de discontinuité de  $\det(Y(\alpha, \xi), V_h, \rho(V_h))$  en lesquels elle change éventuellement de signe. On peut supposer que le choix des vecteurs  $(V_i)$  est fait de telle sorte qu'en chaque point de  $\Omega_{1,1}^h(\eta)$ , la fonction  $\det(Y(\alpha, \xi), V_h, \rho(V_h))$  (s'annule et) change de signe. Par conséquent, la fonction  $\det(Y(\alpha, \xi), V_h, \rho(V_h))$  est de signe constant sur chaque intervalle de la forme  $[\alpha_k, \iota(\alpha_k)]$ , et son signe est par exemple celui de  $\det(Y(\frac{\alpha_k + \iota(\alpha_k)}{2}, \xi), V_h, \rho(V_h))$ .

□

On a alors, par construction de ces fonctions :

**Lemme 7.30** L'application

$$F_0 \circ F_1 \circ \dots \circ F_7 : \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{S}_k^2 \times \mathbb{S}_r^2 \times \mathbb{S}_s^2 \times \mathbb{S}_t^2 \times \mathbb{S}_m^2 \times \mathbb{S}_n^2 \times \mathbb{S}_h^2 \rightarrow [0, 1] \times SO(3) \times C^{14}$$

fournit une section locale de l'application  $F_{\Gamma, h, n_\Gamma}$ .

□

FIN DE LA PREUVE DE LA PROPOSITION 7.14 : Soient  $h \in \{3, 4, 5\}$  et  $\eta \in \mathcal{D}_{1,1}^h$ . Soit  $(\alpha_k, \xi) \in \Omega_{1,1}^h(\eta)$ . On note  $(t_h, \rho(\alpha_k, \xi), c(\alpha_k, \xi)) \in [0, 1] \times SO(3) \times C^{14}$  le point d'intersection défini au lemme 7.6. D'après le lemme 7.3, on sait que le signe du point d'intersection est égal à l'opposé du signe du jacobien de l'application  $F_{\Gamma, h, n_\Gamma, V_h}^{(6)}$ . On rappelle le schéma récapitulatif donnant une

factorisation de l'inverse local de  $F_{\Gamma,h,n_{\Gamma},V_h}^{(6)}$  :

$$\begin{array}{c}
SO(3) \times C^{14} \\
\uparrow F_0 \\
\mathbb{S}_A^2 \times [0, \pi] \times (\mathbb{R}^3)\{C,D,E,F\} \\
\uparrow F_1, Jac_{F_1} > 0, \text{ lemme 7.16} \\
\mathbb{S}^2 \times [0, \pi] \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}^3)\{D,E,F\} \\
\uparrow F_2, Jac_{F_2} > 0, \text{ lemme 7.19} \\
[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}_k^2 \times (\mathbb{R}^3)\{D,E,F\} \\
\uparrow F_3, Jac_{F_3} > 0, \text{ lemme 7.21} \\
[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}_k^2 \times \mathbb{S}_m^2 \times \mathbb{S}_n^2 \times \mathbb{R}_m^+ \times \mathbb{R}_n^+ \times (\mathbb{R}^3)\{F\} \\
\uparrow F_4, \sigma(Jac_{F_4}) = \epsilon_n \epsilon_m \epsilon_r \sigma(\delta_{rnm}), \text{ lemme 7.22} \\
[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}_k^2 \times \mathbb{S}_m^2 \times \mathbb{S}_n^2 \times \mathbb{S}_r^2 \times (\mathbb{R}^3)\{F\} \\
\uparrow F_5, Jac_{F_5} > 0, \text{ lemme 7.24} \\
[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}_k^2 \times \mathbb{S}_m^2 \times \mathbb{S}_n^2 \times \mathbb{S}_r^2 \times \mathbb{S}_s^2 \times \mathbb{R}_s^+ \\
\uparrow F_6, \sigma(Jac_{F_6}) = \epsilon_t \epsilon_s \epsilon_r \epsilon_k \sigma(\mu_r) \sigma(\det(V_t, \rho^{\chi_h(s) - \chi_h(t)}(V_s), X_1))), \text{ lemme 7.26} \\
\mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}_k^2 \times \mathbb{S}_m^2 \times \mathbb{S}_n^2 \times \mathbb{S}_r^2 \times \mathbb{S}_s^2 \times \mathbb{S}_t^2 \\
\uparrow F_7, \sigma(Jac_{F_7}) = \epsilon_i \epsilon_j \sigma(\mu_r) \sigma(\delta_{mrn}) \sigma(\det(Y(\frac{\alpha_k + \iota(\alpha_k)}{2}, \xi), V_h, \rho(V_h))), \text{ lemme 7.29} \\
\mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{S}_k^2 \times \mathbb{S}_m^2 \times \mathbb{S}_n^2 \times \mathbb{S}_r^2 \times \mathbb{S}_s^2 \times \mathbb{S}_t^2 \times \mathbb{R}
\end{array}$$

Ainsi, le signe d'un point d'intersection, noté  $\sigma(t_h, \rho(\alpha_k, \xi), c(\alpha_k, \xi))$  est donné par

$$\begin{aligned}
\sigma(t_h, \rho(\alpha_k, \xi), c(\alpha_k, \xi)) = & - \left( \prod_{p \neq h,r} \epsilon_p \right) \sigma(\det(V_t, \rho^{\chi_h(s) - \chi_h(t)}(V_s), X_1)) \\
& \times \sigma\left(\det\left(Y\left(\frac{\alpha_k + \iota(\alpha_k)}{2}, \xi\right), V_h, \rho(V_h)\right)\right).
\end{aligned}$$

Ainsi on peut écrire

$$\begin{aligned}
\beta_{1,1} &= \frac{1}{2^{89}!} \sum_{h=3}^5 \sum_{\eta \in \mathcal{D}_{1,1}^h} \sum_{(\epsilon_p) \in \{-1,1\}^{\mathbb{Z}}} I_{\Gamma_{1,h,\eta}}(\epsilon_1 V_1, \dots, \epsilon_9 V_9) \\
&= \frac{1}{2^{89}!} \sum_{h=3}^5 \sum_{\eta \in \mathcal{D}_{1,1}^h} \sum_{(\epsilon_p) \in \{-1,1\}^{\mathbb{Z}}} \sum_{(t_h, \rho, c) \in \mathcal{E}_{\Gamma_{1,h,\eta}}(\epsilon_1 V_1, \dots, \epsilon_9 V_9)} \sigma(t_h, \rho, c) \\
&= \frac{1}{2^{89}!} \sum_{h=3}^5 \sum_{\eta \in \mathcal{D}_{1,1}^h} \sum_{(\alpha_k, \xi) \in \Omega_{1,1}^h(\eta)} \sigma(t_h, \rho(\alpha_k, \xi), c(\alpha_k, \xi)) \\
&= \frac{-1}{2^{89}!} \sum_{h=3}^5 \sum_{\eta \in \mathcal{D}_{1,1}^h} \sum_{(\alpha_k, \xi) \in \Omega_{1,1}^h(\eta)} \left( \prod_{p \neq h, r} \epsilon_p \right) \sigma \left( \det(V_t, \rho^{\chi_h(s) - \chi_h(t)}(V_s), X_1) \right) \\
&\quad \times \sigma \left( \det \left( Y \left( \frac{\alpha_k + \iota(\alpha_k)}{2}, \xi \right), V_h, \rho(V_h) \right) \right)
\end{aligned}$$

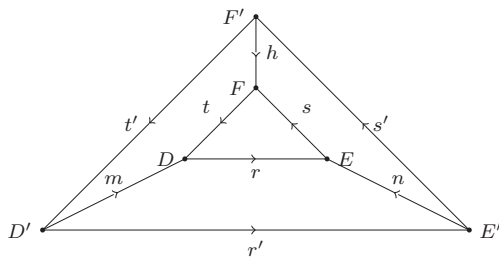
□

## 7.4 Calcul de $\beta_{1,2}$

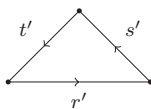
Le but de cette sous-section est de démontrer les lemmes 7.31 et 7.32 et la proposition 7.33. La démarche est identique à celle du calcul de  $\beta_{1,1}$ . Soit  $h \in \{4, 5, 6\}$ , on rappelle que

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{1,2}^h &= \{ \eta / \chi_h(r') + \chi_h(s') + \chi_h(t') = 1 \quad \chi_h(r) + \chi_h(s) + \chi_h(t) = 2, \\
&\quad \min(r', s', t') < \min(r, s, t), \quad \odot_{r', s', t'} \}
\end{aligned}$$

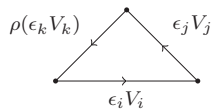
Soit  $\eta \in \mathcal{D}_{1,2}^h$ , on rappelle que l'on désigne par  $(\Gamma_1, h, \eta)$  le graphe dont les arêtes sont numérotées et orientées de la manière suivante :



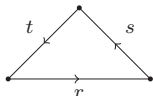
Comme  $\eta \in \mathcal{D}_{1,2}^h$ , il existe une permutation cyclique des arêtes du triangle



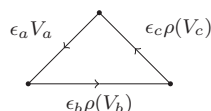
telle que les arêtes correspondant à une configuration aient les directions indiquées suivantes :



De la même manière il existe une permutation cyclique des arêtes du triangle



telle que les arêtes correspondant à une configuration aient les directions indiquées suivantes :



**Lemme 7.31** Soient  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathcal{A}$ ,  $h \in \{4, 5, 6\}$  et  $\eta \in \mathcal{D}_{1,2}^h$ . On pose

$$W = \frac{(V_i \wedge V_j) \wedge (V_b \wedge V_c)}{\|(V_i \wedge V_j) \wedge (V_b \wedge V_c)\|} \quad Y_{ij} = \frac{V_i \wedge V_j}{\|V_i \wedge V_j\|} \wedge W \quad Y_{bc} = \frac{V_b \wedge V_c}{\|V_b \wedge V_c\|} \wedge W$$

On suppose que  $\langle Y_{bc}, V_k \rangle \neq 0$ . On définit l'application

$$\Delta : \begin{cases} \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha & \longmapsto \langle W, V_a \rangle \cos(\alpha) + \langle Y_{ij}, V_a \rangle \sin(\alpha) \end{cases}$$

On pose où

$$\begin{cases} \cos \alpha_a(\alpha_k, \xi) = \frac{\langle W, V_k \rangle \Delta(\alpha_k) + \xi \langle Y_{bc}, V_k \rangle \sqrt{\langle Y_{bc}, V_k \rangle^2 + \langle W, V_k \rangle^2 - \Delta(\alpha_k)^2}}{\langle Y_{bc}, V_k \rangle^2 + \langle W, V_k \rangle^2} \\ \sin \alpha_a(\alpha_k, \xi) = \frac{\langle Y_{bc}, V_k \rangle \Delta(\alpha_k) - \xi \langle W, V_k \rangle \sqrt{\langle Y_{bc}, V_k \rangle^2 + \langle W, V_k \rangle^2 - \Delta(\alpha_k)^2}}{\langle Y_{bc}, V_k \rangle^2 + \langle W, V_k \rangle^2} \end{cases}$$

Pour tout  $(\rho, c) \in SO(3) \times C^{14}$  compatible avec les deux triangles extérieur et intérieur du graphe  $(\Gamma_1, h, \eta)$ , il existe un unique couple  $(\alpha_k, \xi) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \{-1, 1\}$  tel que

$$\begin{cases} \Delta(\alpha_k)^2 \leq \langle W, V_k \rangle^2 + \langle Y_{bc}, V_k \rangle^2 \\ \rho(V_k) = \cos(\alpha_k)W + \sin(\alpha_k)Y_{ij} \\ \rho^{-1}(V_a) = \cos \alpha_a(\alpha_k, \xi)W + \sin \alpha_a(\alpha_k, \xi)Y_{bc} \end{cases}$$

On note alors

$$\rho = \rho(\alpha_k, \xi)$$

la rotation ainsi définie.



Le lemme suivant donne des conditions nécessaires et suffisantes sur  $(\alpha_k, \xi)$  pour qu'il existe une configuration  $c(\alpha_k, \xi)$  telle que

$$(c(\alpha_k, \xi), \rho(\alpha_k, \xi)) \in \bigcup_{(\epsilon_i)_{i \in \mathfrak{g}} \in \{-1, 1\}^{\mathfrak{g}}} \mathcal{E}_{\Gamma_1, h, \eta}(\epsilon_1 V_1, \dots, \epsilon_9 V_9)$$

où les signes  $\epsilon_i$  sont les signes des longueurs algébriques  $\lambda_i$  des arêtes de la configuration compatible  $c(\alpha_k, \xi)$ .

**Lemme 7.32** *Soient  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathcal{A}$ ,  $h \in \{4, 5, 6\}$  et  $\eta \in \mathcal{D}_{1,2}^h$ . On pose*

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \lambda_i(\alpha_k, \xi) = \langle Y_{ij}, V_j \rangle \cos(\alpha_k) - \langle W, V_j \rangle \sin(\alpha_k) \\ \lambda_j &= \lambda_j(\alpha_k, \xi) = \sin(\alpha_k) \langle W, V_i \rangle - \cos(\alpha_k) \langle Y_{ij}, V_i \rangle \\ \lambda_k &= \langle Y_{ij}, V_i \rangle \langle W, V_j \rangle - \langle W, V_i \rangle \langle Y_{ij}, V_j \rangle \\ \mu_a &= \langle Y_{bc}, V_b \rangle \langle W, V_c \rangle - \langle W, V_b \rangle \langle Y_{bc}, V_c \rangle \\ \mu_b &= \mu_b(\alpha_k, \xi) = \langle Y_{bc}, V_c \rangle \cos \alpha_a(\alpha_k, \xi) - \langle W, V_c \rangle \sin \alpha_a(\alpha_k, \xi) \\ \mu_c &= \mu_c(\alpha_k, \xi) = \sin \alpha_a(\alpha_k, \xi) \langle W, V_b \rangle - \cos \alpha_a(\alpha_k, \xi) \langle Y_{bc}, V_b \rangle. \end{aligned}$$

Pour  $(\alpha_k, \xi) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \{-1, 1\}$ , on considère la rotation  $\rho = \rho(\alpha_k, \xi)$  définie au lemme 7.31. On pose ensuite

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= \epsilon_i(\alpha_k, \xi) = \sigma(\lambda_i) & \epsilon_j &= \epsilon_j(\alpha_k, \xi) = \sigma(\lambda_j) & \epsilon_k &= \epsilon_k(\alpha_k, \xi) = \sigma(\lambda_k) \\ \epsilon_m &= \epsilon_m(\alpha_k, \xi) = \epsilon_{r'} \sigma(\delta_{r'rn}) \sigma(\delta_{mrn}) & \epsilon_n &= \epsilon_n(\alpha_k, \xi) = -\epsilon_{r'} \sigma(\delta_{r'rm}) \sigma(\delta_{rnm}) \\ \epsilon_r &= \epsilon_r(\alpha_k, \xi) = \epsilon_{r'} \sigma(\delta_{r'mn}) \sigma(\delta_{rnm}) & \epsilon_s &= \epsilon_s(\alpha_k, \xi) = \sigma(\mu_s) \epsilon_r \sigma(\mu_r) \\ \epsilon_t &= \epsilon_t(\alpha_k, \xi) = \sigma(\mu_t) \epsilon_r \sigma(\mu_r) \end{aligned}$$

où les  $\delta$  sont définis au lemme 7.6. Enfin, on pose

$$Y = Y(\alpha_k, \xi) = \lambda_{t'} \delta_{mrn} \mu_r \rho^{\chi_h(t')}(V_{t'}) + \lambda_{r'} \delta_{r'rn} \mu_r \rho^{\chi_h(m)}(V_m) + \mu_t \lambda_r \delta_{mrn} \rho^{\chi_h(t)}(V_t)$$

et on définit  $\Omega_{1,2}^h(\eta) \subset [0, 2\pi] \times \{-1, 1\}$  par

$$(\alpha_k, \xi) \in \Omega_{1,2}^h(\eta) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta(\alpha_k)^2 \leq \langle W, V_k \rangle^2 + \langle Y_{bc}, V_k \rangle^2 \\ \det(Y(\alpha_k, \xi), V_h, \rho(V_h)) = 0 \\ \epsilon_h := \frac{\sigma(\delta_{mrn}) \sigma(\mu_r) (\sigma(\langle V_h \wedge Y(\alpha_k, \xi), V_h \wedge \rho(V_h) \rangle) + \sigma(\langle \rho(V_h) \wedge Y(\alpha_k, \xi), \rho(V_h) \wedge V_h \rangle))}{2} \neq 0. \end{cases}$$

Alors on a une bijection entre  $\Omega_{1,2}^h(\eta)$  et  $\bigcup_{(\epsilon_i)_{i \in \mathfrak{g}} \in \{-1, 1\}^{\mathfrak{g}}} \mathcal{E}_{\Gamma_1, h, \eta}(\epsilon_1 V_1, \dots, \epsilon_9 V_9)$ .

La proposition suivante donne le calcul de  $\beta_{1,2}$  :

**Proposition 7.33** Soient  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathcal{A}$ ,  $h \in \{3, 4, 5\}$  et  $\eta \in \mathcal{D}_{1,2}^h$ . On reprend les notations du lemme 7.32. Soit  $(\alpha_k, \xi) \in \Omega_{1,2}^h(\eta)$ . On pose,

$$\begin{aligned} X_1 = & (\chi_h(r) - \chi_h(t))\mu_r \rho^{\frac{\chi_h(r) - \chi_h(t) + 1}{2}}(V_k) \wedge \rho^{\chi_h(r) - \chi_h(t)}(V_r) \\ & + (\chi_h(s) - \chi_h(t))\mu_s \rho^{\frac{\chi_h(s) - \chi_h(t) + 1}{2}}(V_k) \wedge \rho^{\chi_h(s) - \chi_h(t)}(V_s) \end{aligned}$$

On note  $pr_1$  la projection de  $\Omega_{1,2}^h(\eta)$  sur  $\alpha_k$  et on convient de la notation, pour  $\alpha_k \in pr_1(\Omega_{1,2}^h)$ , que  $\iota(\alpha_k)$  désigne l'élément de  $pr_1(\Omega_{1,2}^h) \cup \delta_{mrn}^{-1}(0) \cup \mu_r^{-1}(0)$  qui lui succède, dans l'ordre sur  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ . On a alors

$$\begin{aligned} \beta_{1,2} = & \frac{-1}{2^8 9!} \sum_{h=4}^6 \sum_{\eta \in \mathcal{D}_{1,2}^h} \sum_{(\alpha_k, \xi) \in \Omega_{1,2}^h(\eta)} \left( \prod_{p \neq h, r} \epsilon_p \right) \sigma \left( \det(V_t, \rho^{\chi_h(s) - \chi_h(t)}(V_s), X_1) \right) \\ & \times \sigma \left( \det\left(Y\left(\frac{\alpha_k + \iota(\alpha_k)}{2}, \xi\right), V_h, \rho(V_h)\right) \right) \end{aligned}$$

PREUVE DU LEMME 7.31 : Soit  $(\rho, c) \in SO(3) \times C^{14}$  et supposons que ce couple est compatible avec les deux triangles intérieur et extérieur. Alors les deux triplets de vecteurs  $(V_i, V_j, \rho(V_k))$  et  $(V_a, \rho(V_b), \rho(V_c))$  sont coplanaires. Donc les deux triplets de vecteurs  $(V_i, V_j, \rho(V_k))$  et  $(\rho^{-1}(V_a), V_b, V_c)$  sont coplanaires. Par construction de  $W, Y_{ij}$  et  $Y_{bc}$ , il existe  $(\alpha_k, \alpha_a) \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$  tel que

$$\begin{cases} \rho(V_k) = \cos(\alpha_k)W + \sin(\alpha_k)Y_{ij} \\ \rho^{-1}(V_a) = \cos(\alpha_a)W + \sin(\alpha_a)Y_{bc} \end{cases}$$

On sait de plus que

$$\begin{aligned} \langle \rho^{-1}(V_a), V_k \rangle &= \langle \rho(V_k), V_a \rangle \\ \Leftrightarrow \langle W, V_k \rangle \cos(\alpha_a) + \langle Y_{bc}, V_k \rangle \sin(\alpha_a) &= \langle W, V_a \rangle \cos(\alpha_k) + \langle Y_{ij}, V_a \rangle \sin(\alpha_k) \\ \Leftrightarrow \langle Y_{bc}, V_k \rangle \sin(\alpha_a) &= -\langle W, V_k \rangle \cos(\alpha_a) + \Delta(\alpha_k) \\ \Rightarrow \langle Y_{bc}, V_k \rangle^2 (1 - \cos^2(\alpha_a)) &= \langle W, V_k \rangle^2 \cos^2(\alpha_a) - 2\langle W, V_k \rangle \Delta(\alpha_k) \cos(\alpha_a) + \Delta(\alpha_k)^2 \\ \Leftrightarrow (\langle Y_{bc}, V_k \rangle^2 + \langle W, V_k \rangle^2) \cos^2(\alpha_a) &- 2\langle W, V_k \rangle \Delta(\alpha_k) \cos(\alpha_a) + \Delta(\alpha_k)^2 - \langle Y_{bc}, V_k \rangle^2 = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

L'équation (1) admet des solutions en  $\cos(\alpha_a)$  si et seulement si

$$\begin{aligned} \langle W, V_k \rangle^2 \Delta(\alpha_k)^2 - (\langle Y_{bc}, V_k \rangle^2 + \langle W, V_k \rangle^2) (\Delta(\alpha_k)^2 - \langle Y_{bc}, V_k \rangle^2) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \langle Y_{bc}, V_k \rangle^4 + \langle Y_{bc}, V_k \rangle^2 \langle W, V_k \rangle^2 - \langle Y_{bc}, V_k \rangle^2 \Delta(\alpha_k)^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \Delta(\alpha_k)^2 \leq \langle Y_{bc}, V_k \rangle^2 + \langle W, V_k \rangle^2 \text{ ou } \langle Y_{bc}, V_k \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Comme  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}$ , alors  $\langle Y_{bc}, V_k \rangle \neq 0$  d'après le lemme 5.20. Ainsi, lorsque  $\Delta(\alpha_k)^2 \leq \langle Y_{bc}, V_k \rangle^2 + \langle W, V_k \rangle^2$  il existe  $\xi \in \{-1, 1\}$  tel que

$$\cos \alpha_a(\alpha_k, \xi) = \frac{\langle W, V_k \rangle \Delta(\alpha_k) + \xi \langle Y_{bc}, V_k \rangle \sqrt{\langle Y_{bc}, V_k \rangle^2 + \langle W, V_k \rangle^2 - \Delta(\alpha_k)^2}}{\langle Y_{bc}, V_k \rangle^2 + \langle W, V_k \rangle^2}.$$

Si l'on pose

$$\sin\alpha_a(\alpha_k, \xi) = \frac{\langle Y_{bc}, V_k \rangle \Delta(\alpha_k) - \xi \langle W, V_k \rangle \sqrt{\langle Y_{bc}, V_k \rangle^2 + \langle W, V_k \rangle^2 - \Delta(\alpha_k)^2}}{\langle Y_{bc}, V_k \rangle^2 + \langle W, V_k \rangle^2}$$

on vérifie facilement que

$$\cos^2\alpha_a(\alpha_k, \xi) + \sin^2\alpha_a(\alpha_k, \xi) = 1$$

et

$$\langle W, V_k \rangle \cos\alpha_a(\alpha_k, \xi) + \langle Y_{bc}, V_k \rangle \sin\alpha_a(\alpha_k, \xi) = \langle W, V_a \rangle \cos(\alpha_k) + \langle Y_{ij}, V_a \rangle \sin(\alpha_k).$$

□

**Lemme 7.34** Si  $\frac{\langle Y_{bc}, V_k \rangle^2 + \langle W, V_k \rangle^2}{\langle Y_{ij}, V_a \rangle^2 + \langle W, V_a \rangle^2} > 1$  alors pour tout  $\alpha_k \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ,

$$\Delta(\alpha_k)^2 \leq \langle Y_{bc}, V_k \rangle^2 + \langle W, V_k \rangle^2.$$

Si non

$$\Delta(\alpha_k)^2 \leq \langle Y_{bc}, V_k \rangle^2 + \langle W, V_k \rangle^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha_k \in \begin{cases} [-\arcsin\left(\sqrt{\frac{\langle Y_{bc}, V_k \rangle^2 + \langle W, V_k \rangle^2}{\langle Y_{ij}, V_a \rangle^2 + \langle W, V_a \rangle^2}}\right) - \varphi, \arcsin\left(\sqrt{\frac{\langle Y_{bc}, V_k \rangle^2 + \langle W, V_k \rangle^2}{\langle Y_{ij}, V_a \rangle^2 + \langle W, V_a \rangle^2}}\right) - \varphi] \bmod(2\pi) \\ [\pi - \arcsin\left(\sqrt{\frac{\langle Y_{bc}, V_k \rangle^2 + \langle W, V_k \rangle^2}{\langle Y_{ij}, V_a \rangle^2 + \langle W, V_a \rangle^2}}\right) - \varphi, \pi + \arcsin\left(\sqrt{\frac{\langle Y_{bc}, V_k \rangle^2 + \langle W, V_k \rangle^2}{\langle Y_{ij}, V_a \rangle^2 + \langle W, V_a \rangle^2}}\right) - \varphi] \bmod(2\pi) \end{cases}$$

où

$$\varphi = \operatorname{atn}\left(\frac{\langle W, V_a \rangle}{\langle Y_{ij}, V_a \rangle}\right) + \frac{\pi}{2}(1 - \sigma(\langle Y_{ij}, V_a \rangle)).$$

PREUVE: Par définition,

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha_k) &= \langle W, V_a \rangle \cos(\alpha_k) + \langle Y_{ij}, V_a \rangle \sin(\alpha_k) \\ &= \sqrt{\langle Y_{ij}, V_a \rangle^2 + \langle W, V_a \rangle^2} \left( \frac{\langle W, V_a \rangle}{\sqrt{\langle Y_{ij}, V_a \rangle^2 + \langle W, V_a \rangle^2}} \cos(\alpha_k) + \frac{\langle Y_{ij}, V_a \rangle}{\sqrt{\langle Y_{ij}, V_a \rangle^2 + \langle W, V_a \rangle^2}} \sin(\alpha_k) \right) \\ &= \sqrt{\langle Y_{ij}, V_a \rangle^2 + \langle W, V_a \rangle^2} \sin(\alpha_k + \varphi) \end{aligned}$$

car  $\varphi$  est défini de telle sorte que  $\cos(\varphi)$  ait le même signe que  $\langle Y_{ij}, V_a \rangle$ . Donc

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha_k)^2 &\leq \langle Y_{bc}, V_k \rangle^2 + \langle W, V_k \rangle^2 \\ \Leftrightarrow \sin^2(\alpha_k + \varphi) &\leq \frac{\langle Y_{bc}, V_k \rangle^2 + \langle W, V_k \rangle^2}{\langle Y_{ij}, V_a \rangle^2 + \langle W, V_a \rangle^2}. \end{aligned}$$

Si  $\frac{\langle Y_{bc}, V_k \rangle^2 + \langle W, V_k \rangle^2}{\langle Y_{ij}, V_a \rangle^2 + \langle W, V_a \rangle^2} > 1$  l'inéquation est toujours vérifiée. Sinon on obtient l'équivalence annoncée.

□

**Lemme 7.35** Avec les hypothèses du lemme 7.32, on a :

$$\lambda_i V_i + \lambda_j V_j + \lambda_k \rho(V_k) = 0$$

et

$$\mu_a V_a + \mu_b \rho(V_b) + \mu_c \rho(V_c) = 0.$$

PREUVE: La formule

$$\lambda_i V_i + \lambda_j V_j + \lambda_k \rho(V_k) = 0$$

se démontre exactement de la même façon que celle du lemme 7.9. On raisonne de la même manière pour démontrer que

$$\mu_a \rho^{-1}(V_a) + \mu_b V_b + \mu_c V_c = 0$$

et donc que

$$\mu_a V_a + \mu_b \rho(V_b) + \mu_c \rho(V_c) = 0.$$

□

**Lemme 7.36** Soient  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathcal{A}$ ,  $h \in \{3, 4, 5\}$ ,  $\eta \in \mathcal{D}_{1,2}^h$  et  $(\epsilon_p) \in \{-1, 1\}^9$  et soit  $(\rho, c)$  un point d'intersection. On note  $\lambda_x$  la longueur algébrique de l'arête  $x$  de la configuration  $c$ . On suppose de plus que  $\lambda_r \neq 0$  et  $\delta_{mrn} \neq 0$ . Alors on a :

$$\lambda_m = \lambda_{r'} \frac{\delta_{r'rn}}{\delta_{mrn}} \quad \lambda_n = -\lambda_{r'} \frac{\delta_{r'rm}}{\delta_{nrm}} \quad \lambda_r = \lambda_{r'} \frac{\delta_{r'mn}}{\delta_{rnm}}$$

$$\lambda_s = \mu_s \frac{\lambda_r}{\mu_r} \quad \lambda_t = \mu_t \frac{\lambda_r}{\mu_r}.$$

En particulier, on a bien, pour tout  $p \in \underline{9} \setminus \{h\}$ ,  $\epsilon_p = \sigma(\lambda_p)$ . De plus, on a

$$Y(\alpha_k, \xi) = \mu_r \delta_{mrn} \overrightarrow{F'F}.$$

PREUVE: Il s'agit de la même preuve que pour le lemme 7.11.

□

PREUVE DU LEMME 7.32 : Là encore, il s'agit de la même fin de preuve que pour le lemme 7.6. En effet, le reste de la construction des points d'intersection est identique au cas  $\beta_{1,1}$ . On a donc le résultat annoncé.

□

PREUVE DE LA PROPOSITION 7.33 : Il s'agit de la même démonstration que pour la proposition 7.14. En effet, dans cette démonstration, on a montré que le signe d'un point d'intersection, noté  $\sigma(t_h, \rho(\alpha_k, \xi), c(\alpha_k, \xi))$  est donné par

$$\begin{aligned} \sigma(t_h, \rho(\alpha_k, \xi), c(\alpha_k, \xi)) = & - \left( \prod_{p \neq h, r} \epsilon_p \right) \sigma \left( \det(V_t, \rho^{\chi_h(s) - \chi_h(t)}(V_s), X_1) \right) \\ & \times \sigma \left( \det(Y \left( \frac{\alpha_k + \iota(\alpha_k)}{2}, \xi \right), V_h, \rho(V_h)) \right) \end{aligned}$$

et la démonstration ne dépend pas des valeurs des indices des arêtes, mais seulement de la localisation de l'arête  $h$ . Ainsi, le signe d'un point d'intersection est alors donné par la même formule, et donc le résultat annoncé s'ensuit. □

**Remarque 7.37** *On calcule  $\rho(W_p)$  de la façon suivante : on décompose  $W_p = \alpha_p V_k + \beta_p \rho^{-1}(V_a) + \gamma_p V_k \wedge \rho^{-1}(V_a)$  avec*

$$\begin{aligned} \alpha_p &= \frac{\det(W_p, \rho^{-1}(V_a), V_k \wedge \rho^{-1}(V_a))}{\det(V_k, \rho^{-1}(V_a), V_k \wedge \rho^{-1}(V_a))} \\ \beta_p &= \frac{\det(W_p, V_k, V_k \wedge \rho^{-1}(V_a))}{\det(\rho^{-1}(V_a), V_k, V_k \wedge \rho^{-1}(V_a))} \\ \gamma_p &= \frac{\det(W_p, V_k, \rho^{-1}(V_a))}{\det(V_k \wedge \rho^{-1}(V_a), V_k, \rho^{-1}(V_a))} \end{aligned}$$

où

$$\rho^{-1}(V_a) = \cos(\alpha_a)W + \sin(\alpha_a)Y_{bc}.$$

Dans ce cas

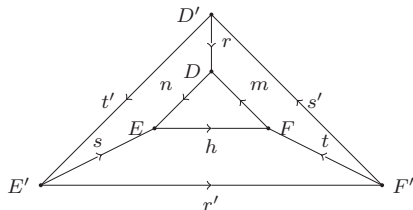
$$\begin{aligned} \rho(W_p) &= \alpha_p (\cos(\alpha_k)W + \sin(\alpha_k)Y_{ij}) + \beta_p V_a \\ &\quad + \gamma_p (\cos(\alpha_k)W + \sin(\alpha_k)Y_{ij}) \wedge V_a. \end{aligned}$$

## 7.5 Calcul de $\beta_2$

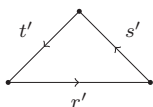
On raisonne de manière analogue aux trois sous-sections précédentes. Soient  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathcal{A}$  et  $h \in \{2, \dots, 7\}$ . On rappelle que

$$\mathcal{D}_2^h = \{\eta / \chi(r') + \chi(s') + \chi(t') = 1, \quad \odot_{r', s', t'}\}.$$

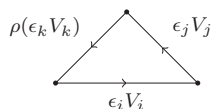
Soit  $\eta \in \mathcal{D}_2^h$ , on désigne par  $(\Gamma_2, h, \eta)$  le graphe dont les arêtes sont numérotées et orientées de la façon suivante :



Comme  $\eta \in \mathcal{D}_2^h$ , il existe une permutation cyclique des arêtes du triangle



telle que les arêtes correspondant à une configuration aient les directions indiquées suivantes :



On a alors :

**Lemme 7.38** Soient  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}$ ,  $h \in \{2, \dots, 7\}$  et  $\eta \in \mathcal{D}_2^h$ . On note  $Y_{ij} = \frac{V_i \wedge V_j}{\|V_i \wedge V_j\|} \wedge V_i$ . Fixons  $Y_k \in \mathbb{S}^2$  un vecteur orthogonal à  $V_k$ . Pour tout  $(\rho, c) \in SO(3) \times C^{14}$  compatible avec le graphe  $(\Gamma_2, h, \eta)$ , il existe un unique couple  $(\alpha_k, \beta_k) \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$  tel que

$$\begin{cases} \rho(V_k) = \cos(\alpha_k)V_i + \sin(\alpha_k)Y_{ij} \\ \rho(Y_k) = -\cos(\beta_k)\sin(\alpha_k)V_i + \cos(\beta_k)\cos(\alpha_k)Y_{ij} + \sin(\beta_k)\frac{V_i \wedge V_j}{\|V_i \wedge V_j\|}. \end{cases}$$

On note

$$\rho = \rho(\alpha_k, \beta_k)$$

la rotation obtenue (cf remarque 7.48).

Le lemme suivant donne des conditions nécessaires et suffisantes sur  $(\alpha_k, \beta_k)$  pour qu'il existe une configuration  $c(\alpha_k, \beta_k) \in C^{14}$  telle que

$$(c(\alpha_k, \beta_k), \rho(\alpha_k, \beta_k)) \in \bigcup_{(\epsilon_i)_{i \in \mathfrak{g}} \in \{-1, 1\}^{\mathfrak{g}}} \mathcal{E}_{\Gamma_2, \eta, h}(\epsilon_1 V_1, \dots, \epsilon_9 V_9).$$

La configuration  $c(\alpha_k, \beta_k)$  est représentée par un plongement de  $\Gamma$  où le vecteur correspondant à l'arête  $e(\Gamma, i)$  est  $\lambda_i(\alpha_k, \beta_k)\rho^{\chi_h(i)}(V_i)$ .

**Lemme 7.39** Soient  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}$ ,  $h \in \{2, \dots, 7\}$  et  $\eta \in \mathcal{D}_2^h$ . Pour  $(\alpha_k, \beta_k) \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$ , on note  $\rho = \rho(\alpha_k, \beta_k)$  la rotation définie au lemme 7.38 et on définit

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \lambda_i(\alpha_k, \beta_k) = \langle Y_{ij}, V_j \rangle \cos(\alpha_k) - \langle V_i, V_j \rangle \sin(\alpha_k) \\ \lambda_j &= \lambda_j(\alpha_k, \beta_k) = \sin(\alpha_k) & \lambda_k &= \lambda_k(\alpha_k, \beta_k) = -\langle Y_{ij}, V_j \rangle \\ \epsilon_i &= \epsilon_i(\alpha_k, \beta_k) = \sigma(\lambda_i) & \epsilon_j &= \epsilon_j(\alpha_k, \beta_k) = \sigma(\lambda_j) & \epsilon_k &= \epsilon_k(\alpha_k, \beta_k) = \sigma(\lambda_k) \\ \epsilon_s &= \epsilon_s(\alpha_k, \beta_k) = -\epsilon_{t'} \sigma(\delta_{t'rn}) \sigma(\delta_{srn}) & \epsilon_n &= \epsilon_n(\alpha_k, \beta_k) = \epsilon_{t'} \sigma(\delta_{t'rs}) \sigma(\delta_{nrs}) \\ \epsilon_t &= \epsilon_t(\alpha_k, \beta_k) = \epsilon_{s'} \sigma(\delta_{s'mr}) \sigma(\delta_{tmr}) & \epsilon_m &= \epsilon_m(\alpha_k, \beta_k) = \epsilon_{s'} \sigma(\delta_{s'tr}) \sigma(\delta_{mtr}) \\ \epsilon_r &= \epsilon_r(\alpha_k, \beta_k) = \epsilon_{t'} \sigma(\delta_{t'ns}) \sigma(\delta_{rns}) \end{aligned}$$

où les  $\delta$  sont définis au lemme 7.6. On pose enfin

$$Y = Y(\alpha_k, \beta_k) = -\lambda_{t'} \delta_{t'rs} \delta_{mrt} \rho^{\chi_h(n)}(V_n) - \lambda_{s'} \delta_{s'tr} \delta_{nrs} \rho^{\chi_h(m)}(V_m).$$

On définit  $\Omega_2^h(\eta) \subset (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$  par :  $(\alpha_k, \beta_k) \in \Omega_2^h(\eta) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_{t'} \delta_{t'ns} \delta_{rtm} + \lambda_{s'} \delta_{s'tm} \delta_{rns} = 0 \\ \det(Y(\alpha_k, \beta_k), V_h, \rho(V_h)) = 0 \\ \epsilon_h = \sigma(\delta_{nrs}) \sigma(\delta_{mrt}) (\sigma(\langle V_h \wedge Y(\alpha_k, \beta_k), V_h \wedge \rho(V_h) \rangle) + \sigma(\langle \rho(V_h) \wedge Y(\alpha_k, \beta_k), \rho(V_h) \wedge V_h \rangle)) \neq 0. \end{cases}$$

Alors on a une bijection entre  $\Omega_2^h(\eta)$  et  $\bigcup_{(\epsilon_i)_{i \in \mathfrak{g}} \in \{-1, 1\}^{\mathfrak{g}}} \mathcal{E}_{\Gamma_2, \eta, h}(\epsilon_1 V_1, \dots, \epsilon_9 V_9)$ , où les  $(\epsilon_i)$  sont déterminés par les formules ci-dessus.

Puis on a la proposition principale de cette section :

**Proposition 7.40** Soit  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}$ . On conserve les mêmes notations que celles du lemme 7.39. On pose

$$\begin{aligned} X_m &= -\epsilon_t \delta_{s'mr} (\chi_h(t) - \chi_h(m)) \rho^{\frac{\chi_h(t) - \chi_h(m) + 1}{2}}(V_k) \wedge \rho^{\chi_h(t) - \chi_h(m)}(V_t) \\ &\quad + \delta_{rtm} (\chi_h(s') - \chi_h(m)) \rho^{\frac{\chi_h(s') - \chi_h(m) + 1}{2}}(V_k) \wedge \rho^{\chi_h(s') - \chi_h(m)}(V_{s'}) \\ &\quad - \epsilon_r \delta_{s'tm} (\chi_h(r) - \chi_h(m)) \rho^{\frac{\chi_h(r) - \chi_h(m) + 1}{2}}(V_k) \wedge \rho^{\chi_h(r) - \chi_h(m)}(V_r) \\ &\quad + \frac{\varphi}{\delta_{rtm}} \rho^{\chi_h(r) - \chi_h(m)}(V_r) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \varphi &= \delta_{rtm} \chi_h(s') \det \left( \rho^{\frac{\chi_h(s') + 1}{2}}(V_k) \wedge \rho^{\chi_h(s')}(V_{s'}), \rho^{\chi_h(t)}(V_t), \rho^{\chi_h(m)}(V_m) \right) \\ &\quad + \delta_{rtm} \chi_h(t) \det \left( \rho^{\chi_h(s')}(V_{s'}), \rho^{\frac{\chi_h(t) + 1}{2}}(V_k) \wedge \rho^{\chi_h(t)}(V_t), \rho^{\chi_h(m)}(V_m) \right) \\ &\quad + \delta_{rtm} \chi_h(m) \det \left( \rho^{\chi_h(s')}(V_{s'}), \rho^{\chi_h(t)}(V_t), \rho^{\frac{\chi_h(m) + 1}{2}}(V_k) \wedge \rho^{\chi_h(m)}(V_m) \right) \\ &\quad - \delta_{s'tm} \chi_h(r) \det \left( \rho^{\frac{\chi_h(r) + 1}{2}}(V_k) \wedge \rho^{\chi_h(r)}(V_r), \rho^{\chi_h(t)}(V_t), \rho^{\chi_h(m)}(V_m) \right) \\ &\quad - \delta_{s'tm} \chi_h(t) \det \left( \rho^{\chi_h(r)}(V_r), \rho^{\frac{\chi_h(t) + 1}{2}}(V_k) \wedge \rho^{\chi_h(t)}(V_t), \rho^{\chi_h(m)}(V_m) \right) \\ &\quad - \delta_{s'tm} \chi_h(m) \det \left( \rho^{\chi_h(r)}(V_r), \rho^{\chi_h(t)}(V_t), \rho^{\frac{\chi_h(m) + 1}{2}}(V_k) \wedge \rho^{\chi_h(m)}(V_m) \right). \end{aligned}$$

On a

$$\beta_2 = \frac{-1}{2^8 9!} \sum_{h=2}^7 \sum_{\eta \in \mathcal{D}_2^h} \sum_{(\alpha_k, \beta_k) \in \Omega_2^h(\eta)} \prod_{p \neq h, s'} \epsilon_p \sigma \left( \det(V_m, X_m, \rho^{\chi_h(t) - \chi_h(m)}(V_t)) \right) \\ \times \sigma \left( \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \det(Y(\alpha_k, \beta_k(\alpha_k)), V_h, \rho(V_h)) \right)$$

où  $(c(\alpha_k, \beta_k(\alpha_k)), \rho(\alpha_k, \beta_k(\alpha_k)))$  est un couple tel que, pour tout  $i$  différent de  $h$ , la direction de l'arête  $e(\Gamma, i)$  de la configuration  $c(\alpha_k, \beta_k(\alpha_k))$  est  $\epsilon_i \rho(\alpha_k, \beta_k(\alpha_k))^{\chi_h(i)}(V_i)$ .

PREUVE DU LEMME 7.38 :  $(V_i, Y_{ij}, \frac{V_i \wedge V_j}{\|V_i \wedge V_j\|})$  est une base orthonormée directe de  $\mathbb{R}^3$ . Pour tout  $(\rho, c) \in SO(3) \times C^{14}$  compatible avec le triangle extérieur, les vecteurs  $\rho(V_k)$ ,  $V_i$  et  $V_j$  sont coplanaires, donc  $\rho(V_k) \in S(V_i, V_j)$ . Donc il existe un unique  $\alpha_k \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  tel que

$$\rho(V_k) = \cos(\alpha_k)V_i + \sin(\alpha_k)Y_{ij}.$$

Comme  $Y_k$  est orthogonal à  $V_k$ , alors  $\rho(Y_k)$  est orthogonal à  $\rho(V_k)$ , par conséquent  $\rho(Y_k) \in S(\frac{V_i \wedge V_j}{\|V_i \wedge V_j\|}, \rho(V_k) \wedge \frac{V_i \wedge V_j}{\|V_i \wedge V_j\|})$ . Or  $(\frac{V_i \wedge V_j}{\|V_i \wedge V_j\|}, \rho(V_k), \frac{V_i \wedge V_j}{\|V_i \wedge V_j\|} \wedge \rho(V_k))$  est aussi une base orthonormée directe de  $\mathbb{R}^3$ , donc il existe  $\beta_k \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  tel que

$$\begin{aligned} \rho(Y_k) &= \cos(\beta_k) \frac{V_i \wedge V_j}{\|V_i \wedge V_j\|} \wedge \rho(V_k) + \sin(\beta_k) \frac{V_i \wedge V_j}{\|V_i \wedge V_j\|} \\ &= \cos(\beta_k) \frac{V_i \wedge V_j}{\|V_i \wedge V_j\|} \wedge (\cos(\alpha_k)V_i + \sin(\alpha_k)Y_{ij}) + \sin(\beta_k) \frac{V_i \wedge V_j}{\|V_i \wedge V_j\|} \\ &= \cos(\beta_k)\cos(\alpha_k)Y_{ij} - \cos(\beta_k)\sin(\alpha_k)V_i + \sin(\beta_k) \frac{V_i \wedge V_j}{\|V_i \wedge V_j\|}. \end{aligned}$$

□

**Lemme 7.41** Soient  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}$ ,  $h \in \{2, \dots, 7\}$  et  $\eta \in \mathcal{D}_2^h$ . Soit  $(\alpha_k, \beta_k) \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$ . On suppose que  $\delta_{tmr} \neq 0$  et  $\delta_{srn} \neq 0$ . On pose

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \lambda_i(\alpha_k, \beta_k) = \langle Y_{ij}, V_j \rangle \cos(\alpha_k) - \langle V_i, V_j \rangle \sin(\alpha_k) \\ \lambda_j &= \lambda_j(\alpha_k, \beta_k) = \sin(\alpha_k) & \lambda_k &= \lambda_k(\alpha_k, \beta_k) = -\langle Y_{ij}, V_j \rangle \\ \lambda_s &= \lambda_s(\alpha_k, \beta_k) = -\lambda_{t'} \frac{\delta_{t'rn}}{\delta_{srn}} & \lambda_n &= \lambda_n(\alpha_k, \beta_k) = \lambda_{t'} \frac{\delta_{t'rs}}{\delta_{nrs}} \\ \lambda_t &= \lambda_t(\alpha_k, \beta_k) = \lambda_{s'} \frac{\delta_{s'mr}}{\delta_{tmr}} & \lambda_m &= \lambda_m(\alpha_k, \beta_k) = \lambda_{s'} \frac{\delta_{s'tr}}{\delta_{mtr}} \\ \lambda_r^{(1)} &= \lambda_r^{(1)}(\alpha_k, \beta_k) = \lambda_{t'} \frac{\delta_{t'ns}}{\delta_{rns}} & \lambda_r^{(2)} &= \lambda_r^{(2)}(\alpha_k, \beta_k) = -\lambda_{s'} \frac{\delta_{s'tm}}{\delta_{rtm}}. \end{aligned}$$

Alors on a

$$\begin{cases} \lambda_i V_i + \lambda_j V_j + \lambda_k \rho(V_k) = 0 \\ -\lambda_s \rho^{\chi_h(s)}(V_s) + \lambda_n \rho^{\chi_h(n)}(V_n) + \lambda_r^{(1)} \rho^{\chi_h(r)}(V_r) = \lambda_{t'} \rho^{\chi_h(t')}(V_{t'}) \\ \lambda_t \rho^{\chi_h(t)}(V_t) + \lambda_m \rho^{\chi_h(m)}(V_m) - \lambda_r^{(2)} \rho^{\chi_h(r)}(V_r) = \lambda_{s'} \rho^{\chi_h(s')}(V_{s'}). \end{cases}$$



Par conséquent, on a :

$$\forall p \in \mathfrak{g} \setminus \{h, r\}, \sigma(\lambda_p) = \epsilon_p$$

et

$$\epsilon_r = \sigma(\lambda_r^{(1)}) = \sigma(\lambda_r^{(2)}).$$

□

PREUVE DU LEMME 7.39 : Soit  $(\alpha_k, \beta_k) \in \Omega_2^h(\eta)$ . Comme  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}$ , on peut supposer que  $\delta_{tmr} \neq 0$  et  $\delta_{srn} \neq 0$ . On reprend les notations du lemme 7.41. On a

$$\begin{aligned} & \lambda_{t'} \delta_{t'ns} \delta_{rtm} + \lambda_{s'} \delta_{s'tm} \delta_{rms} = 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda_{t'} \frac{\delta_{t'ns}}{\delta_{rms}} = -\lambda_{s'} \frac{\delta_{s'tm}}{\delta_{rtm}} \\ \Leftrightarrow & \lambda_r^{(1)} = \lambda_r^{(2)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, la configuration  $c = (c_O, c_B, c_C, c_D, c_E, c_F)$  suivante :

$$\begin{aligned} c_O = O & & c_B = \lambda_i V_i & & c_C = \lambda_i V_i + \lambda_j V_j & & c_D = c_{D'} + \lambda_r^{(1)} \rho^{\chi_h(r)}(V_r) \\ c_E = c_{E'} + \lambda_s \rho^{\chi_h(s)}(V_s) & & & & c_F = c_{F'} + \lambda_t \rho^{\chi_h(t)}(V_t) \end{aligned}$$

vérifie :

$$\forall p \neq h, \pi_{e(\Gamma_2, p)}(c) = \epsilon_p \rho^{\chi_h(p)}(V_p)$$

d'après le lemme 7.41. Étudions la condition  $\pi_{e(\Gamma_2, h)}(c) \in [\epsilon_h V_h, \rho(\epsilon_h V_h)]$ . On a

$$\begin{aligned} \delta_{nrs} \delta_{mrt} \overrightarrow{EF} &= \delta_{nrs} \delta_{mrt} \left( -\lambda_n \rho^{\chi_h(n)}(V_n) - \lambda_m \rho^{\chi_h(m)}(V_m) \right) \\ &= \delta_{nrs} \delta_{mrt} \left( -\lambda_{t'} \frac{\delta_{t'rs}}{\delta_{nrs}} \rho^{\chi_h(n)}(V_n) - \lambda_{s'} \frac{\delta_{s'rt}}{\delta_{mrt}} \rho^{\chi_h(m)}(V_m) \right) \\ &= -\lambda_{t'} \delta_{t'rs} \delta_{mrt} \rho^{\chi_h(n)}(V_n) - \lambda_{s'} \delta_{s'rt} \delta_{nrs} \rho^{\chi_h(m)}(V_m) \\ &= Y(\alpha_k, \beta_k). \end{aligned}$$

Donc

$$\pi_{e(\Gamma_2, h)}(c) = \frac{\overrightarrow{EF}}{\|\overrightarrow{EF}\|} = \sigma(\delta_{nrs}) \sigma(\delta_{mrt}) \frac{Y(\alpha_k, \beta_k)}{\|Y(\alpha_k, \beta_k)\|}.$$

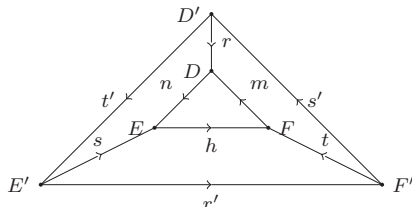
$$\text{Donc } \pi_{e(\Gamma_2, h)}(c) \in [\epsilon_h V_h, \rho(\epsilon_h V_h)] \Leftrightarrow \begin{cases} \det(Y(\alpha_k, \beta_k), V_h, \rho(V_h)) = 0 \\ \epsilon_h \langle V_h \wedge \pi_{e(\Gamma_2, h)}(c), V_h \wedge \rho(V_h) \rangle \geq 0 \\ \epsilon_h \langle \rho(V_h) \wedge \pi_{e(\Gamma_2, h)}(c), \rho(V_h) \wedge V_h \rangle \geq 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \det(Y(\alpha_k, \beta_k), V_h, \rho(V_h)) = 0 \\ \epsilon_h \sigma(\delta_{nrs}) \sigma(\delta_{mrt}) \langle V_h \wedge Y(\alpha_k, \beta_k), V_h \wedge \rho(V_h) \rangle \geq 0 \\ \epsilon_h \sigma(\delta_{nrs}) \sigma(\delta_{mrt}) \langle \rho(V_h) \wedge Y(\alpha_k, \beta_k), \rho(V_h) \wedge V_h \rangle \geq 0. \end{cases}$$

Par construction de  $\epsilon_h$ , les deux dernières conditions sont vérifiées. Réciproquement, un point d'intersection vérifie ces conditions.

□

On commence par déterminer le signe d'un point d'intersection, puis on prouvera la proposition 7.40. On rappelle le graphe  $(\Gamma_2, h, \eta)$  :



**Lemme 7.42** Soient  $(V_1, \dots, V_9) \in \mathfrak{A}$ ,  $h \in \{2, \dots, 8\}$  et  $\eta \in \mathcal{D}_2^h$ . Soit  $(\alpha_k, \beta_k) \in \Omega_2^h(\eta)$ . On note  $\rho(\alpha_k, \beta_k)$  la rotation définie par le lemme 7.38 et  $c(\alpha_k, \beta_k)$  la configuration compatible avec le graphe  $(\Gamma_2, h, \eta)$  d'après le lemme 7.39. Le signe du point d'intersection est donné par

$$\begin{aligned} \sigma(t_h, \rho(\alpha_k, \beta_k), c(\alpha_k, \beta_k)) = & - \prod_{p \neq h, s'} (\epsilon_p) \sigma(\det(V_m, X_m, \rho^{\chi_h(t) - \chi_h(m)}(V_t))) \\ & \times \sigma\left(\frac{\partial}{\partial \alpha_k} \det(Y(\alpha_k, \beta_k(\alpha_k)), V_h, \rho(V_h))\right) \end{aligned}$$

où  $X_m$  est défini au lemme 7.45 et  $(c(\alpha_k, \beta_k(\alpha_k)), \rho(\alpha_k, \beta_k(\alpha_k)))$  est un couple tel que, pour tout  $i$  différent de  $h$ , la direction de l'arête  $e(\Gamma, i)$  de la configuration  $c(\alpha_k, \beta_k(\alpha_k))$  est  $\epsilon_i \rho(\alpha_k, \beta_k(\alpha_k))^{\chi_h(i)}(V_i)$ .

Rappelons que le signe d'un point d'intersection est égal à l'opposé du signe du jacobien de l'application

$$F_{\Gamma, h, n_\Gamma, V_h}^{(6)} : \begin{cases} SO(3) \times C^{14} & \longrightarrow (\mathbb{S}^2)^{\mathfrak{g} \setminus h} \times \mathbb{R} \\ (\rho, c) & \longmapsto ((\pi_{e(\Gamma, i)}^{\chi_h(i)}(\rho, c))_{i \in \mathfrak{g} \setminus \{h\}}, \phi_{V_h, \rho}(\pi_{e(\Gamma, h)}^0(c))) \end{cases}$$

où

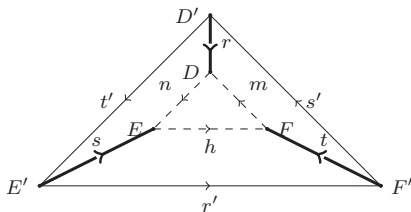
$$\phi_{V_h, \rho} : \begin{cases} \mathbb{S}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ X & \longmapsto \langle X, V_h \wedge \rho(V_h) \rangle \end{cases}$$

d'après le lemme 7.3. Pour prouver ce lemme, on construit pas à pas la factorisation de l'inverse local de  $F_{\Gamma, h, n_\Gamma, V_h}^{(6)}$ . La construction est analogue à celle de la proposition 7.14. Le schéma récapitulatif de la démonstration de ce lemme est le suivant :

$$\begin{array}{c}
SO(3) \times C^{14} \\
\uparrow F_0, \text{ paramétrage d'une rotation et d'une configuration} \\
\mathbb{S}_A^2 \times [0, \pi] \times (\mathbb{R}^3)\{C, D, E, F\} \\
\uparrow F_1, \text{ construction de } B \text{ et } C, \text{ lemme 7.16} \\
\mathbb{S}_A^2 \times [0, \pi] \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}^3)\{D, E, F\} \\
\uparrow F_2, \text{ paramétrage de l'axe et l'angle de la rotation, lemme 7.19} \\
[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}_k^2 \times (\mathbb{R}^3)\{D, E, F\} \\
\uparrow G_3, \text{ construction des points } D, E \text{ et } F, \text{ lemme 7.43} \\
[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}_k^2 \times \mathbb{S}_r^2 \times \mathbb{R}_r^+ \times \mathbb{S}_s^2 \times \mathbb{R}_s^+ \times \mathbb{S}_t^2 \times \mathbb{R}_t^+ \\
\uparrow G_4, \text{ paramétrage de la longueur } \lambda_n, \text{ lemme 7.44} \\
[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}_k^2 \times \mathbb{S}_r^2 \times \mathbb{S}_s^2 \times \mathbb{S}_n^2 \times \mathbb{S}_t^2 \times \mathbb{R}_t^+ \\
\uparrow G_5, \text{ paramétrage de la longueur } \lambda_m, \text{ lemme 7.45} \\
\mathbb{S}_m^2 \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}_k^2 \times \mathbb{S}_r^2 \times \mathbb{S}_s^2 \times \mathbb{S}_n^2 \times \mathbb{S}_t^2 \\
\uparrow G_6, \text{ paramétrage de l'arête } h, \text{ lemme 7.47} \\
\mathbb{S}_m^2 \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{S}_k^2 \times \mathbb{S}_r^2 \times \mathbb{S}_s^2 \times \mathbb{S}_n^2 \times \mathbb{S}_t^2 \times \mathbb{R}
\end{array}$$

La construction du triangle extérieur reste inchangée, donc on conserve les applications  $F_0$ ,  $F_1$  et  $F_2$  définies dans la démonstration de la proposition 7.14 et de jacobien positif (lemmes 7.16 et 7.19). Les points  $D'$ ,  $E'$  et  $F'$  sont donc construits, et on s'occupe maintenant des points  $D$ ,  $E$  et  $F$ . On pose  $\lambda'_{s'} = \|\overrightarrow{D'F'}\|$  et on suppose que  $\lambda'_{s'} \neq 0$ . On définit :

$$G_3 : \begin{array}{l} \mathbb{S}_r^2 \times \mathbb{R}_r^+ \times \mathbb{S}_s^2 \times \mathbb{R}_s^+ \times \mathbb{S}_t^2 \times \mathbb{R}_t^+ \longrightarrow (\mathbb{R}^3)\{D, E, F\} \\ (W_r, \mu_r, W_s, \mu_s, W_t, \mu_t) \longmapsto (c_{D'} + \lambda'_{s'} \mu_r \rho^{X_h(r)}(W_r), c_{E'} + \lambda'_{s'} \mu_s \rho^{X_h(s)}(W_s), c_{F'} + \lambda'_{s'} \mu_t \rho^{X_h(t)}(W_t)) \end{array}$$



Puis on définit la fonction  $G_3$  de

$$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}_k^2 \times \mathbb{S}_r^2 \times \mathbb{R}_r^+ \times \mathbb{S}_s^2 \times \mathbb{R}_s^+ \times \mathbb{S}_t^2 \times \mathbb{R}_t^+$$

dans

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}_k^2 \times (\mathbb{R}^3)^{\{D,E,F\}}$$

par

$$G_3(\omega_1, W_r, \mu_r, W_s, \mu_s, W_t, \mu_t) = (\omega_1, G_3^r(W_r, \mu_r, W_s, \mu_s, W_t, \mu_t)).$$

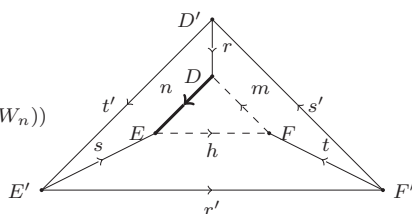
**Lemme 7.43**

$$\sigma(\text{Jac}_{G_3}) = 1.$$

PREUVE: Il s'agit de la même preuve que celle du lemme 7.21.

□

On définit :

$$G_4^r : \begin{cases} \mathbb{S}_n^2 & \longrightarrow \mathbb{R}_r^+ \times \mathbb{R}_s^+ \\ W_n & \longmapsto (\mu_r(W_n), \mu_s(W_n)) \end{cases}$$


Puis on définit l'application  $G_4$  de

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}_k^2 \times \mathbb{S}_r^2 \times \mathbb{S}_s^2 \times \mathbb{S}_n^2 \times \mathbb{S}_t^2 \times \mathbb{R}_t^+$$

dans

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}_k^2 \times \mathbb{S}_r^2 \times \mathbb{R}_r^+ \times \mathbb{S}_s^2 \times \mathbb{R}_s^+ \times \mathbb{S}_t^2 \times \mathbb{R}_t^+$$

par

$$G_4(\omega_1, \omega_2, W_n, \omega_3) = (\omega_1, \mu_r(W_n), \omega_2, \mu_s(W_n), \omega_3).$$

**Lemme 7.44** On a

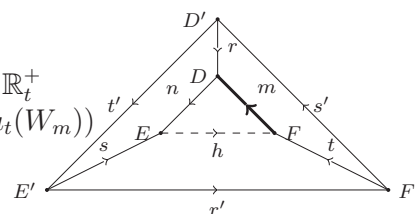
$$\sigma(\text{Jac}_{G_4}) = \epsilon_n \epsilon_r \epsilon_s \delta_{rns}.$$

PREUVE:

Il s'agit de la même preuve que celle du lemme 7.22.

□

On définit

$$G_5^r : \begin{cases} \mathbb{S}_m^2 & \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{R}_t^+ \\ W_n & \longmapsto (\nu(W_m), \mu_t(W_m)) \end{cases}$$


Et on définit l'application  $G_5$  de

$$\mathbb{S}_m^2 \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}_k^2 \times \mathbb{S}_r^2 \times \mathbb{S}_s^2 \times \mathbb{S}_n^2 \times \mathbb{S}_t^2$$

dans

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}_k^2 \times \mathbb{S}_r^2 \times \mathbb{S}_s^2 \times \mathbb{S}_n^2 \times \mathbb{S}_t^2 \times \mathbb{R}^+$$

par

$$G_5(\omega_1, W_m, \omega_2) = (\omega_1, \nu(W_m), \omega_2, \mu_t(W_m)).$$

**Lemme 7.45** *On pose*

$$\begin{aligned} X_m = & -\epsilon_t \delta_{s'tm} (\chi_h(t) - \chi_h(m)) \rho^{\frac{\chi_h(t) - \chi_h(m) + 1}{2}} (V_k) \wedge \rho^{\chi_h(t) - \chi_h(m)} (V_t) \\ & + \delta_{rtm} (\chi_h(s') - \chi_h(m)) \rho^{\frac{\chi_h(s') - \chi_h(m) + 1}{2}} (V_k) \wedge \rho^{\chi_h(s') - \chi_h(m)} (V_{s'}) \\ & - \epsilon_r \delta_{s'tm} (\chi_h(r) - \chi_h(m)) \rho^{\frac{\chi_h(r) - \chi_h(m) + 1}{2}} (V_k) \wedge \rho^{\chi_h(r) - \chi_h(m)} (V_r) \\ & + \frac{\varphi}{\delta_{rtm}} \rho^{\chi_h(r) - \chi_h(m)} (V_r) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \varphi = & \delta_{rtm} \chi_h(s') \det \left( \rho^{\frac{\chi_h(s') + 1}{2}} (V_k) \wedge \rho^{\chi_h(s')} (V_{s'}), \rho^{\chi_h(t)} (V_t), \rho^{\chi_h(m)} (V_m) \right) \\ & + \delta_{rtm} \chi_h(t) \det \left( \rho^{\chi_h(s')} (V_{s'}), \rho^{\frac{\chi_h(t) + 1}{2}} (V_k) \wedge \rho^{\chi_h(t)} (V_t), \rho^{\chi_h(m)} (V_m) \right) \\ & + \delta_{rtm} \chi_h(m) \det \left( \rho^{\chi_h(s')} (V_{s'}), \rho^{\chi_h(t)} (V_t), \rho^{\frac{\chi_h(m) + 1}{2}} (V_k) \wedge \rho^{\chi_h(m)} (V_m) \right) \\ & - \delta_{s'tm} \chi_h(r) \det \left( \rho^{\frac{\chi_h(r) + 1}{2}} (V_k) \wedge \rho^{\chi_h(r)} (V_r), \rho^{\chi_h(t)} (V_t), \rho^{\chi_h(m)} (V_m) \right) \\ & - \delta_{s'tm} \chi_h(t) \det \left( \rho^{\chi_h(r)} (V_r), \rho^{\frac{\chi_h(t) + 1}{2}} (V_k) \wedge \rho^{\chi_h(t)} (V_t), \rho^{\chi_h(m)} (V_m) \right) \\ & - \delta_{s'tm} \chi_h(m) \det \left( \rho^{\chi_h(r)} (V_r), \rho^{\chi_h(t)} (V_t), \rho^{\frac{\chi_h(m) + 1}{2}} (V_k) \wedge \rho^{\chi_h(m)} (V_m) \right) \end{aligned}$$

alors

$$\sigma(\text{Jac}_{F_5}) = \epsilon_m \epsilon_t \epsilon_k \sigma(\delta_{rtm}) \epsilon_{s'} \sigma(\det(V_m, X_m, \rho^{\chi_h(t) - \chi_h(m)} (V_t))).$$

PREUVE: La définition de  $G_5$  fait intervenir une permutation de facteurs telle que  $G_5$  et  $G_5^r$  ont des jacobiens opposés. On a donc

$$\begin{aligned} \sigma(\text{Jac}_{G_5}) &= -\sigma(\text{Jac}_{G_5^r}) \\ &= -\sigma(\text{Jac}_{(G_5^r)^{-1}}) \\ &= -\sigma \left( \det(W_m, \frac{\partial}{\partial \nu} (G_5^r)^{-1}, \frac{\partial}{\partial \mu_t} (G_5^r)^{-1}) \right) \end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned}
\rho^{\chi_h(m)}(W_m) &= \frac{-\lambda'_{s'}\mu_t\rho^{\chi_h(t)}(W_t) + \lambda'_{s'}\rho^{\chi_h(s')}(W_{s'}) + \lambda'_{s'}\mu_r\rho^{\chi_h(r)}(W_r)}{\|-\lambda'_{s'}\mu_t\rho^{\chi_h(t)}(W_t) + \lambda'_{s'}\rho^{\chi_h(s')}(W_{s'}) + \lambda'_{s'}\mu_r\rho^{\chi_h(r)}(W_r)\|} \\
&= \frac{-\mu_t\rho^{\chi_h(t)}(W_t) + \rho^{\chi_h(s')}(W_{s'}) + \mu_r\rho^{\chi_h(r)}(W_r)}{\|-\mu_t\rho^{\chi_h(t)}(W_t) + \rho^{\chi_h(s')}(W_{s'}) + \mu_r\rho^{\chi_h(r)}(W_r)\|} \\
W_m &= \frac{-\mu_t\rho^{\chi_h(t)-\chi_h(m)}(W_t) + \rho^{\chi_h(s')-\chi_h(m)}(W_{s'}) + \mu_r\rho^{\chi_h(r)-\chi_h(m)}(W_r)}{\|-\mu_t\rho^{\chi_h(t)}(W_t) + \rho^{\chi_h(s')}(W_{s'}) + \mu_r\rho^{\chi_h(r)}(W_r)\|}.
\end{aligned}$$

Donc en posant

$$X_1 = -\mu_t\rho^{\chi_h(t)-\chi_h(m)}(W_t) + \rho^{\chi_h(s')-\chi_h(m)}(W_{s'}) + \mu_r\rho^{\chi_h(r)-\chi_h(m)}(W_r)$$

on a (comme pour le lemme 7.26)

$$\sigma(Jac_{G_5}) = -\sigma\left(\det(W_m, \frac{\partial}{\partial \nu} X_1, \frac{\partial}{\partial \mu_t} X_1)\right).$$

Or

$$\frac{\partial}{\partial \mu_t} X_1 = -\rho^{\chi_h(t)-\chi_h(m)}(W_t).$$

Grâce au lemme 7.25, on peut exprimer

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \nu} X_1 &= -\epsilon_t\epsilon_k\omega_{k,x}\mu_t(\chi_h(t) - \chi_h(m))\rho^{\frac{\chi_h(t)-\chi_h(m)+1}{2}}(V_k) \wedge \rho^{\chi_h(t)-\chi_h(m)}(V_t) \\
&+ \epsilon_{s'}\epsilon_k\omega_{k,x}(\chi_h(s') - \chi_h(m))\rho^{\frac{\chi_h(s')-\chi_h(m)+1}{2}}(V_k) \wedge \rho^{\chi_h(s')-\chi_h(m)}(V_{s'}) \\
&+ \epsilon_r\epsilon_k\omega_{k,x}\mu_r(\chi_h(r) - \chi_h(m))\rho^{\frac{\chi_h(r)-\chi_h(m)+1}{2}}(V_k) \wedge \rho^{\chi_h(r)-\chi_h(m)}(V_r) \\
&+ \epsilon_r\frac{\partial\mu_r}{\partial\nu}\rho^{\chi_h(r)-\chi_h(m)}(V_r).
\end{aligned}$$

Comme

$$\epsilon_r\mu_r = \epsilon_{s'}\frac{\delta_{s'tm}}{\delta_{rtm}}$$

alors

$$\begin{aligned}
\epsilon_k \epsilon_r \epsilon_{s'} \frac{\partial \mu_r}{\partial \nu} &= \omega_{k,x} \frac{\delta_{rtm}}{\delta_{rtm}^2} \chi_h(s') \det \left( \rho^{\frac{\chi_h(s')+1}{2}}(V_k) \wedge \rho^{\chi_h(s')}(V_{s'}), \rho^{\chi_h(t)}(V_t), \rho^{\chi_h(m)}(V_m) \right) \\
&+ \omega_{k,x} \frac{\delta_{rtm}}{\delta_{rtm}^2} \chi_h(t) \det \left( \rho^{\chi_h(s')}(V_{s'}), \rho^{\frac{\chi_h(t)+1}{2}}(V_k) \wedge \rho^{\chi_h(t)}(V_t), \rho^{\chi_h(m)}(V_m) \right) \\
&+ \omega_{k,x} \frac{\delta_{rtm}}{\delta_{rtm}^2} \chi_h(m) \det \left( \rho^{\chi_h(s')}(V_{s'}), \rho^{\chi_h(t)}(V_t), \rho^{\frac{\chi_h(m)+1}{2}}(V_k) \wedge \rho^{\chi_h(m)}(V_m) \right) \\
&- \omega_{k,x} \frac{\delta_{s'tm}}{\delta_{rtm}^2} \chi_h(r) \det \left( \rho^{\frac{\chi_h(r)+1}{2}}(V_k) \wedge \rho^{\chi_h(r)}(V_r), \rho^{\chi_h(t)}(V_t), \rho^{\chi_h(m)}(V_m) \right) \\
&- \omega_{k,x} \frac{\delta_{s'tm}}{\delta_{rtm}^2} \chi_h(t) \det \left( \rho^{\chi_h(r)}(V_r), \rho^{\frac{\chi_h(t)+1}{2}}(V_k) \wedge \rho^{\chi_h(t)}(V_t), \rho^{\chi_h(m)}(V_m) \right) \\
&- \omega_{k,x} \frac{\delta_{s'tm}}{\delta_{rtm}^2} \chi_h(m) \det \left( \rho^{\chi_h(r)}(V_r), \rho^{\chi_h(t)}(V_t), \rho^{\frac{\chi_h(m)+1}{2}}(V_k) \wedge \rho^{\chi_h(m)}(V_m) \right) \\
\frac{\partial \mu_r}{\partial \nu} &= \frac{\epsilon_k \epsilon_{s'} \epsilon_r \omega_{k,x} \varphi}{\delta_{rtm}^2}.
\end{aligned}$$

On rappelle que (lemme 7.41)

$$\lambda_t = \lambda_{s'} \frac{\delta_{s'mr}}{\delta_{tmr}} \quad \lambda_r = \lambda_r^{(2)} = -\lambda_{s'} \frac{\delta_{s'tm}}{\delta_{rtm}}$$

et que

$$\lambda'_{s'} \mu_t = \lambda_t \quad \lambda'_{s'} \mu_r = \lambda_r \quad \lambda_{s'} = \epsilon_{s'} \lambda'_{s'}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\lambda'_{s'} \delta_{rtm} \frac{\partial}{\partial \nu} X_1 &= -\epsilon_t \epsilon_k \omega_{k,x} \lambda'_{s'} \delta_{rtm} \mu_t (\chi_h(t) - \chi_h(m)) \rho^{\frac{\chi_h(t)-\chi_h(m)+1}{2}}(V_k) \wedge \rho^{\chi_h(t)-\chi_h(m)}(V_t) \\
&+ \lambda'_{s'} \delta_{rtm} \epsilon_{s'} \epsilon_k \omega_{k,x} (\chi_h(s') - \chi_h(m)) \rho^{\frac{\chi_h(s')-\chi_h(m)+1}{2}}(V_k) \wedge \rho^{\chi_h(s')-\chi_h(m)}(V_{s'}) \\
&+ \epsilon_r \epsilon_k \omega_{k,x} \lambda'_{s'} \delta_{rtm} \mu_r (\chi_h(r) - \chi_h(m)) \rho^{\frac{\chi_h(r)-\chi_h(m)+1}{2}}(V_k) \wedge \rho^{\chi_h(r)-\chi_h(m)}(V_r) \\
&+ \epsilon_r \lambda'_{s'} \delta_{rtm} \frac{\epsilon_k \epsilon_{s'} \epsilon_r \omega_{k,x} \varphi}{\delta_{rtm}^2} \rho^{\chi_h(r)-\chi_h(m)}(V_r) \\
&= -\epsilon_t \epsilon_k \omega_{k,x} \lambda_{s'} \delta_{s'mr} (\chi_h(t) - \chi_h(m)) \rho^{\frac{\chi_h(t)-\chi_h(m)+1}{2}}(V_k) \wedge \rho^{\chi_h(t)-\chi_h(m)}(V_t) \\
&+ \lambda_{s'} \delta_{rtm} \epsilon_k \omega_{k,x} (\chi_h(s') - \chi_h(m)) \rho^{\frac{\chi_h(s')-\chi_h(m)+1}{2}}(V_k) \wedge \rho^{\chi_h(s')-\chi_h(m)}(V_{s'}) \\
&- \epsilon_r \epsilon_k \omega_{k,x} \lambda_{s'} \delta_{s'tm} (\chi_h(r) - \chi_h(m)) \rho^{\frac{\chi_h(r)-\chi_h(m)+1}{2}}(V_k) \wedge \rho^{\chi_h(r)-\chi_h(m)}(V_r) \\
&+ \epsilon_k \lambda_{s'} \frac{\omega_{k,x} \varphi}{\delta_{rtm}} \rho^{\chi_h(r)-\chi_h(m)}(V_r)
\end{aligned}$$

Donc

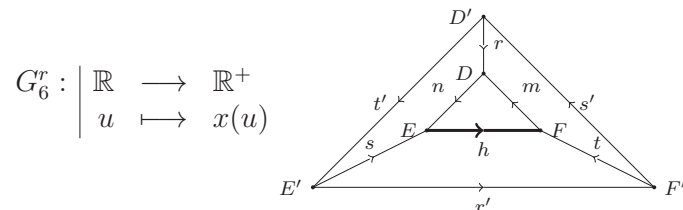
$$\lambda'_{s'} \delta_{rtm} \frac{\partial}{\partial \nu} X_1 = \epsilon_k \lambda_{s'} \omega_{k,x} X_m$$

et

$$\sigma(\text{Jac}_{G_5}) = \epsilon_m \epsilon_t \epsilon_k \epsilon_{s'} \sigma(\delta_{rtm}) \sigma(\det(V_m, X_m, \rho^{\chi_h(t)-\chi_h(m)}(V_t))).$$

□

À ce stade, le couple  $(\rho, c)$  est paramétré par  $x > 0$  tel que  $\rho(W_k) = \frac{-(W_i + xW_j)}{\|W_i + xW_j\|}$ . On définit localement l'application suivante :



où  $G_6$  est l'application qui, localement, associe à  $u$  le réel  $x > 0$  tel que

$$\langle \overrightarrow{F'F}, V_h \wedge \rho(V_h) \rangle = u.$$

On définit alors l'application  $G_6$  de

$$\mathbb{S}_m^2 \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{S}_k^2 \times \mathbb{S}_r^2 \times \mathbb{S}_s^2 \times \mathbb{S}_n^2 \times \mathbb{S}_t^2 \times \mathbb{R}$$

dans

$$\mathbb{S}_m^2 \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}_k^2 \times \mathbb{S}_r^2 \times \mathbb{S}_s^2 \times \mathbb{S}_n^2 \times \mathbb{S}_t^2$$

par

$$G_6(\omega_1, \omega_2, u) = (\omega_1, x(u), \omega_2).$$

On rappelle que

$$Y = -\lambda_{t'}\delta_{t'rs}\delta_{mrt}\rho^{\chi_h(n)}(V_n) - \lambda_{s'}\delta_{s'rt}\delta_{nrs}\rho^{\chi_h(m)}(V_m)$$

et que l'on a démontré dans la preuve du lemme 7.39 que

$$Y = \delta_{nrs}\delta_{mrt}\overrightarrow{EF}.$$

**Lemme 7.46** *On a*

$$\sigma(\text{Jac}_{G_6}) = \sigma(\delta_{nrs})\sigma(\delta_{mrt})\sigma\left(\frac{\partial}{\partial x}\det(Y(x), V_h, \rho(V_h))\right).$$

PREUVE: Il s'agit de la même preuve que celle du lemme 7.27.

□

Le lemme suivant permet de déterminer le jacobien de l'application  $G_6$  en fonction du paramétrage initial. On a paramétré au lemme 7.39 le couple  $(\rho, c)$  par un couple  $(\alpha_k, \beta_k) \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$ . La condition  $\lambda_r^{(1)} = \lambda_r^{(2)}$  permet d'écrire localement  $\beta_k = \beta_k(\alpha_k)$ . Elle permet donc génériquement de paramétrer localement  $(\rho, c)$  par  $\alpha_k \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ .



**Lemme 7.47** *On a*

$$\sigma(Jac_{G_6}) = \epsilon_i \epsilon_j \sigma(\delta_{nrs}) \sigma(\delta_{mrt}) \sigma \left( \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \det(Y(\alpha_k, \beta_k(\alpha_k)), V_h, \rho(V_h)) \right).$$

PREUVE: Il s'agit de la même preuve que celle du lemme 7.28.

□

PREUVE DU LEMME 7.42 : On reprend le schéma récapitulatif suivant :

$$\begin{array}{c}
SO(3) \times C^{14} \\
\uparrow F_0, \sigma(Jac_{F_0}) > 0 \\
\mathbb{S}_A^2 \times [0, \pi] \times (\mathbb{R}^3)^{\{C,D,E,F\}} \\
\uparrow F_1, \sigma(Jac_{F_1}) > 0 \text{ lemme 7.16} \\
\mathbb{S}_A^2 \times [0, \pi] \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}^3)^{\{D,E,F\}} \\
\uparrow F_2, Jac_{F_2} > 0 \text{ lemme 7.19} \\
[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}_k^2 \times (\mathbb{R}^3)^{\{D,E,F\}} \\
\uparrow G_3, Jac_{G_3} > 0 \text{ lemme 7.43} \\
[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}_k^2 \times \mathbb{S}_r^2 \times \mathbb{R}_r^+ \times \mathbb{S}_s^2 \times \mathbb{R}_s^+ \times \mathbb{S}_t^2 \times \mathbb{R}_t^+ \\
\uparrow G_4, \sigma(Jac_{G_4}) = \epsilon_n \epsilon_r \epsilon_s \sigma(\delta_{rns}) \text{ lemme 7.44} \\
[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}_k^2 \times \mathbb{S}_r^2 \times \mathbb{S}_s^2 \times \mathbb{S}_n^2 \times \mathbb{S}_t^2 \times \mathbb{R}_t^+ \\
\uparrow G_5, \sigma(Jac_{G_5}) = \epsilon_m \epsilon_t \epsilon_k \sigma(\delta_{rtm}) \epsilon_{s'} \sigma(\det(V_m, X_m, \rho^{X_h(t) - X_h(m)}(V_t))) \text{ lemme 7.45} \\
\mathbb{S}_m^2 \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}_k^2 \times \mathbb{S}_r^2 \times \mathbb{S}_s^2 \times \mathbb{S}_n^2 \times \mathbb{S}_t^2 \\
\uparrow G_6, \sigma(Jac_{G_6}) = \epsilon_i \epsilon_j \sigma(\delta_{nrs}) \sigma(\delta_{mrt}) \sigma \left( \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \det(Y(\alpha_k, \beta_k(\alpha_k)), V_h, \rho(V_h)) \right) \text{ lemme 7.47} \\
\mathbb{R} \times \mathbb{S}_m^2 \times \mathbb{S}_i^2 \times \mathbb{S}_j^2 \times \mathbb{S}_k^2 \times \mathbb{S}_r^2 \times \mathbb{S}_s^2 \times \mathbb{S}_n^2 \times \mathbb{S}_t^2
\end{array}$$

Par conséquent, on obtient bien que

$$\begin{aligned}
\sigma(t_h, \rho(\alpha_k, \beta_k), c(\alpha_k, \beta_k)) = & - \prod_{p \neq h, s'} (\epsilon_p) \sigma(V_m, X_m, \rho^{X_h(t) - X_h(m)}(V_t)) \\
& \times \sigma \left( \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \det(Y(\alpha_k, \beta_k(\alpha_k)), V_h, \rho(V_h)) \right).
\end{aligned}$$

□

**Remarque 7.48** Rappelons que  $Y_k \in \mathbb{S}^2$  est un vecteur orthogonal à  $V_k$ . Une rotation  $\rho$  est alors complètement déterminée par le couple  $(\alpha_k, \beta_k) \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$  par

$$\begin{cases} \rho(V_k) = \cos(\alpha_k)V_i + \sin(\alpha_k)Y_{ij} \\ \rho(Y_k) = -\cos(\beta_k)\sin(\alpha_k)V_i + \cos(\beta_k)\cos(\alpha_k)Y_{ij} + \sin(\beta_k)\frac{V_i \wedge V_j}{\|V_i \wedge V_j\|}. \end{cases}$$

En effet, pour  $W_p \in \mathbb{S}^2$  que l'on décompose

$$W_p = \alpha_p V_k + \beta_p Y_k + \gamma_p V_k \wedge Y_k$$

avec

$$\alpha_p = \det(W_p, Y_k, V_k \wedge Y_k) \quad \beta_p = \det(V_k, W_p, V_k \wedge Y_k) \quad \gamma_p = \det(V_k, Y_k, W_p)$$

on a

$$\begin{aligned} \rho(W_p) &= \alpha_p \rho(V_k) + \beta_p \rho(Y_k) + \gamma_p \rho(V_k) \wedge \rho(Y_k) \\ &= (\alpha_p \cos(\alpha_k) - \beta_p \cos(\beta_k) \sin(\alpha_k) + \gamma_p \sin(\alpha_k) \sin(\beta_k)) V_i \\ &\quad + (\alpha_p \sin(\alpha_k) + \beta_p \cos(\alpha_k) \cos(\beta_k) - \gamma_p \cos(\alpha_k) \sin(\beta_k)) Y_{ij} \\ &\quad + (\beta_p \sin(\beta_k) + \gamma_p \cos(\beta_k)) \frac{V_i \wedge V_j}{\|V_i \wedge V_j\|}. \end{aligned}$$

## Références

- [AF97] D. ALTSCHÜLER & L. FREIDEL – « Vassiliev knot invariants and Chern-Simons perturbation theory to all orders », *Comm. Math. Phys.* **187** (1997), no. 2, p. 261–287.
- [AS92] S. AXELROD & I. M. SINGER – « Chern-Simons perturbation theory », in *Proceedings of the XXth International Conference on Differential Geometric Methods in Theoretical Physics, Vol. 1, 2 (New York, 1991)*, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992, p. 3–45.
- [AS94] —, « Chern-Simons perturbation theory. II », *J. Differential Geom.* **39** (1994), no. 1, p. 173–213.
- [BN95a] D. BAR-NATAN – « On the Vassiliev knot invariants », *Topology* **34** (1995), no. 2, p. 423–472.
- [BN95b] —, « Perturbative Chern-Simons theory », *J. Knot Theory Ramifications* **4** (1995), no. 4, p. 503–547.
- [BT94] R. BOTT & C. TAUBES – « On the self-linking of knots », *J. Math. Phys.* **35** (1994), no. 10, p. 5247–5287, *Topology and physics*.
- [CD01] S. CHMUTOV & S. DUZHIN – « The Kontsevich integral », *Acta Appl. Math.* **66** (2001), no. 2, p. 155–190.

- [CDM12] S. CHMUTOV, S. DUZHIN & J. MOSTOVOY – *Introduction to Vassiliev knot invariants*, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- [FM94] W. FULTON & R. MACPHERSON – « A compactification of configuration spaces », *Ann. of Math. (2)* **139** (1994), no. 1, p. 183–225.
- [GMM90] E. GUADAGNINI, M. MARTELLINI & M. MINTCHEV – « Wilson lines in Chern-Simons theory and link invariants », *Nuclear Phys. B* **330** (1990), no. 2-3, p. 575–607.
- [Hir94] M. W. HIRSCH – *Differential topology*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 33, Springer-Verlag, New York, 1994, Corrected reprint of the 1976 original.
- [Kon93] M. KONTSEVICH – « Vassiliev’s knot invariants », in *I. M. Gelfand Seminar*, Adv. Soviet Math., vol. 16, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, p. 137–150.
- [Kon94] — , « Feynman diagrams and low-dimensional topology », in *First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992)*, Progr. Math., vol. 120, Birkhäuser, Basel, 1994, p. 97–121.
- [KT99] G. KUPERBERG & D. THURSTON – « Perturbative 3-manifold invariants by cut-and-paste topology », math.GT/9912167, 1999.
- [Les02] C. LESCOPI – « About the uniqueness of the Kontsevich integral », *J. Knot Theory Ramifications* **11** (2002), no. 5, p. 759–780.
- [Les04a] — , « On the Kontsevich-Kuperberg-Thurston construction of a configuration-space invariant for rational homology 3-spheres », math.GT/0411088, 2004.
- [Les05] C. LESCOPI – « Knot invariants and configuration space integrals », in *Geometric and topological methods for quantum field theory*, Lecture Notes in Phys., vol. 668, Springer, Berlin, 2005, p. 1–57.
- [Les13] C. LESCOPI – « An introduction to finite type invariants of knots and 3-manifolds defined by counting graph configurations », arXiv :1312.2566v2, to appear in the Proceedings of the conference "Quantum topology" (Vestnik ChelGU), 2013.
- [LMO98] T. T. Q. LE, J. MURAKAMI & T. OHTSUKI – « On a universal perturbative invariant of 3-manifolds », *Topology* **37** (1998), no. 3, p. 539–574.
- [Mas14] G. MASSUYEAU – « Splitting formulas for the LMO invariant of rational homology three-spheres », *Algebr. Geom. Topol.* **14** (2014), no. 6, p. 3553–3588.
- [Mou12] D. MOUSSARD – « Finite type invariants of rational homology 3-spheres », *Algebr. Geom. Topol.* **12** (2012), p. 2389–2428 (electronic).
- [Oht96] T. OHTSUKI – « Finite type invariants of integral homology 3-spheres », *J. Knot Theory Ramifications* **5** (1996), no. 1, p. 101–115.
- [Poi02] S. POIRIER – « The configuration space integral for links in  $\mathbb{R}^3$  », *Algebr. Geom. Topol.* **2** (2002), p. 1001–1050 (electronic).
- [Sin04] D. P. SINHA – « Manifold-theoretic compactifications of configuration spaces », *Selecta Math. (N.S.)* **10** (2004), no. 3, p. 391–428.

- [Tho54] R. THOM – « Quelques propriétés globales des variétés différentiables », *Comment. Math. Helv.* **28** (1954), p. 17–86.
- [Thu99] D. THURSTON – « Integral expressions for the Vassiliev knot invariants », math.QA/9901110, 1999.
- [Vog11] P. VOGEL – « Algebraic structures on modules of diagrams », *J. Pure Appl. Algebra* **215** (2011), no. 6, p. 1292–1339.
- [Wal92] K. WALKER – *An extension of Casson's invariant*, Annals of Mathematics Studies, vol. 126, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992.
- [Wit89] E. WITTEN – « Quantum field theory and the Jones polynomial », *Comm. Math. Phys.* **121** (1989), no. 3, p. 351–399.