



**HAL**  
open science

# Combinatoire de l'ASEP, arbres non-ambigus et polyominos parallélogrammes périodiques

Patxi Laborde-Zubieta

► **To cite this version:**

Patxi Laborde-Zubieta. Combinatoire de l'ASEP, arbres non-ambigus et polyominos parallélogrammes périodiques. Autre [cs.OH]. Université de Bordeaux, 2017. Français. NNT : 2017BORD0709 . tel-01679732

**HAL Id: tel-01679732**

**<https://theses.hal.science/tel-01679732>**

Submitted on 10 Jan 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE

par **Patxi Laborde-Zubieta**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

**DOCTEUR**SPÉCIALITÉ : **Informatique**

---

**Combinatoire de l'ASEP, arbres non-ambigus et polyominos parallélogrammes périodiques**

---

Soutenue publiquement le 8 Décembre 2017

**après avis des rapporteurs :**

Sylvie Corteel	Directrice de recherche CNRS, LIAFA Université Paris Diderot
Christian Krattenthaler	Professeur, Faculté de Mathématiques Université de Vienne

**devant la commission d'examen composée de :**

Jean-Christophe Aval	Chargé de recherche CNRS, LaBRI Université de Bordeaux	Directeur
Mireille Bousquet-Mélou	Directrice de recherche CNRS, LaBRI Université de Bordeaux	Examinatrice
Adrien Boussicault	Maître de conférence, LaBRI Université de Bordeaux	Directeur
Florent Hivert	Professeur, LRI Université Paris Sud	Président du jury
Christian Krattenthaler	Professeur, Faculté de Mathématiques Université de Vienne	Rapporteur
Philippe Nadeau	Chargé de recherche CNRS, ICJ Université Claude Bernard Lyon 1	Examineur



---

**Résumé.** Cette thèse porte sur l'interprétation combinatoire des probabilités de l'état stationnaire de l'ASEP par les tableaux escaliers, sur les arbres non-ambigus et sur les polyominos parallélogrammes périodiques.

Dans une première partie, nous étudions l'*ansatz* matriciel de Derrida, Evans, Hakim et Pasquier. Toute solution de ce système d'équation permet de calculer les probabilités stationnaires de l'ASEP. Nos travaux définissent de nouvelles récurrences équivalentes à celles de l'*ansatz* matriciel. En définissant un algorithme d'insertion sur les tableaux escaliers, nous montrons combinatoirement et simplement qu'ils les satisfont. Nous faisons de même pour l'ASEP à deux particules. Enfin, nous énumérons les coins dans les tableaux associés à l'ASEP, nous permettant ainsi de donner le nombre moyen de transitions possibles depuis un état de l'ASEP.

Dans une deuxième partie, nous calculons de jolies formules pour les séries génératrices des arbres non-ambigus, desquelles nous déduisons des formules d'énumérations. Puis, nous interprétons bijectivement certains de ces résultats. Enfin, nous généralisons les arbres non-ambigus à toutes les dimensions finies.

Dans la dernière partie, nous construisons une structure arborescente sur les polyominos parallélogrammes périodiques, inspirée des travaux de Bousicault, Rinaldi et Socci. Cela nous permet de calculer facilement leur série génératrice selon la hauteur et la largeur ainsi que deux nouvelles statistiques : la largeur intrinsèque et la hauteur de recollement intrinsèque. Enfin, nous étudions l'ultime périodicité de leur série génératrice selon l'aire.

**Mots-clés.** ASEP, tableaux escaliers, tableaux boisés, arbres non-ambigus, polyominos parallélogrammes périodiques



---

**Abstract.** This thesis deals with a combinatorial interpretation of the stationary distribution of the ASEP given by staircase tableaux and studies two combinatorial objects : non-ambiguous trees and periodic parallelogram polyominoes.

In the first part, we study the matrix ansatz introduced by Derrida, Evans, Hakim and Pasquier. Any solution of this equation system can be used to compute the stationary probabilities of the ASEP. Our work defines new recurrences equivalent to the matrix ansatz. By defining an insertion algorithm for staircase tableaux, we prove combinatorially and easily that they satisfy our new recurrences. We do the same for the ASEP with two types of particles. Finally, we enumerate the corners of the tableaux related to the ASEP, which gives the average number of transitions from a state of the ASEP.

In the second part, we compute nice formulas for the generating functions of non-ambiguous trees, from which we deduce enumeration formulas. Then, we give a combinatorial interpretation of some of our results. Lastly, we generalise non-ambiguous trees to every finite dimension.

In the last part, we define a tree structure in periodic parallelogram polyominoes, motivated by the work of Boussicault, Rinaldi and Socci. It allows us to compute easily the generating function with respect to the height and the width as well as two new statistics : the intrinsic width and the intrinsic gluing height. Finally, we investigate the ultimate periodicity of the generating function with respect to the area.

**Keywords.** ASEP, staircase tableaux, tree-like tableaux, non-ambiguous trees, periodic parallelogram polyominoes



# REMERCIEMENTS

---

Je remercie en premier lieu mes directeurs de thèse Jean-Christophe et Adrien. Depuis le mémoire de master, j'ai apprécié de découvrir la combinatoire sous leur direction. Par leurs conseils et leurs encouragements, chacun à leur manière, ils m'ont fait grandir en tant que chercheur et en tant que personne. Les réunions de travail se sont toujours déroulées dans la bonne humeur. Et si l'ambiance devenait trop sérieuse, il était toujours temps d'évoquer les arbres ensoleillés à racine virtuelle sur lesquels poussent des coings.

Je remercie mes rapporteurs, Sylvie Corteel et Christian Krattenthaler, d'avoir accepté de lire mon manuscrit. D'autant plus qu'ils ne pensaient sûrement pas avoir signé pour presque 300 pages. Je remercie également mon jury Mireille Bousquet-Mélou, Florent Hivert et Philippe Nadeau de me faire l'honneur d'assister à ma soutenance.

Cette thèse aura été l'occasion pour moi d'échanger avec d'autres collègues combinatoriciens. J'ai pris beaucoup de plaisir à collaborer avec Olya, Bérénice, Arthur, Jean-Christophe. Une mention particulière à Mathias qui, en plus d'avoir été un compagnon de travail sur les PPP durant un an, m'aura initié au vin de façon méthodique.

Je remercie le GDR-IM qui m'a permis de séjourner à Marne-la-vallée et son équipe de combinatoire de m'avoir accueilli durant cette semaine. Effectuer cet échange avec Grégory fut très enrichissant. Je remercie également le LIRCO et le LaCIM de m'avoir permis de séjourner à Montréal. Plus particulièrement, je suis reconnaissant envers Srecko pour son accueil chaleureux.

Enfin, je remercie les membres du LaBRI que j'ai côtoyés durant ces trois ans. Notamment, Hervé, mon khôlleur le plus sympa ; Vincent, mon cobureau le temps de quelques mois ; Ludo, pour son aide et les discussions intéressantes que nous avons eues ; l'administration, qui m'aura été d'une aide précieuse et que j'ai eu plaisir à saluer le matin ; tous ceux qui m'ont aidé dans le cadre des enseignements et enfin le groupe de combinatoire Bordelais pour m'avoir



---

accueilli en son sein, je remercie notamment Philippe, Olivier et Nicolas de m'avoir aidé à préparer ma soutenance.

Cette thèse n'aurait peut-être jamais eu lieu sans les personnes qui m'ont formé. Je tiens notamment à remercier Michel Matignon, Karim Belabas, Jean Fresnel, Valentin Féray et Robert Deville.

Depuis la licence, mes compagnons de jeu de rôle, notamment Clément, César, Andrea, Mathieu, Gaëtan et Pierre, m'ont permis de m'évader du quotidien en parcourant l'univers, en refaçonnant le monde, en échappant au Masque et en se perdant dans les couloirs de Poudlard. Je garderai en mémoire ces moments passés ensemble et j'espère que nous continuerons nos aventures.

Une autre personne qui m'a suivi toutes ces années est mon kiné (et maintenant ostéo !) Jonathan. Il m'a aidé à garder un esprit sain dans un corps sain et pour cela, je l'en remercie.

Bien que je ne les aie que peu vus durant ces trois ans, je tiens à remercier les Italiens Pietro et Dino qui ont largement contribué à rendre inoubliable ma dernière année de master.

Enfin, ces trois ans ont également été synonymes de déménagements et de colocations. Clara, Morgane, je chéris l'année que nous avons passée ensemble entourés de tous ces êtres à quatre pattes. Je remercie Flouss pour toutes ces choses qu'il m'aura apprises durant l'année où j'ai vécu à Cenon. Je garderai un souvenir impérissable de cette soirée célébrant la transition entre les deux colocations. Elle a commencé par un repas festif Chez Vincent et elle s'est terminée par la recherche des clefs de la maison au clair de lune dans le parc du Cypressat. Plus généralement, je remercie toutes les personnes qui m'ont aidé durant mes sept déménagements.

Mon quotidien de doctorant à l'université n'aura pas compté beaucoup de personnes, mais elles me sont toutes chères. Bien qu'elle soit partie un an au Japon, les deux années restantes m'ont permis d'apprendre à connaître Marine. Aujourd'hui, plus qu'une cobureau, c'est une amie. Je remercie également mes deux collègues de l'IMB qui ont accepté de continuer à égayer mes pauses du midi, malgré que je sois parti au LaBRI compter des pigeons. Ce sont les personnes avec qui j'ai eu le plus de fous rires et sans qui cette thèse n'aurait pas été la même. Roberto nous aura fait rire par son humour subtil ainsi que ses phrases que je comprends de façon aléatoire (c'était sûrement dû à la barrière de la langue...). Philippe a également participé à cette bonne humeur par ses imitations et, de façon paradoxale, par ses râleries.

Je remercie sincèrement ma famille d'être présente le jour de ma soutenance et de m'avoir aidé à préparer mon pot. Plus particulièrement, je remercie Aita, Ama ainsi que ma grande sœur, Maika, de m'avoir toujours soutenu et encouragé.

## *Remerciements*

---

Ces quelques lignes sont également l'occasion pour moi d'avoir une pensée émue pour celles pour qui ces trois ans auront duré toute une vie. Je leur dois une partie de qui je suis : Noxe et Volt'Ombre m'auront appris avec rigueur et persévérance à être moins matérialiste.

J'ai certainement oublié des personnes dans ces remerciements, mais je n'oublierai jamais le soutien essentiel qu'aura été Audrey. Cela fait maintenant deux ans et demi qu'elle partage ma vie. Quelles que soient les difficultés que j'ai pu rencontrer, elle aura toujours su me rasséréner et m'apporter les conseils dont j'avais besoin. Je ne la remercierai jamais assez pour tout ce qu'elle m'a apporté. L'année prochaine, à son tour elle écrira son manuscrit et soutiendra sa thèse. J'espère qu'elle trouvera auprès de moi tout ce que j'ai trouvé auprès d'elle.



# TABLE DES MATIÈRES

---

Notations	1
Introduction	3
Chapitre 1. Généralités	13
1. Séries génératrices	13
2. Permutations	20
3. Arbres	23
4. Chemins	27
5. Diagrammes de Ferrers	29
6. Cartes combinatoires	31
7. Polyominos parallélogrammes	33
8. Chaînes de Markov	34
<b>Partie 1. Interprétation combinatoire de l'état stationnaire de l'ASEP</b>	<b>39</b>
Chapitre 2. L'ASEP à une particule	41
1. Présentation du modèle et de l' <i>ansatz</i> matriciel associé	45
2. Tableaux escaliers	55
2.1. Définitions	55
2.2. Algorithme d'insertion sur les tableaux escaliers	60
2.3. Bijection entre les tableaux escaliers et des tables d'inversions colorées	69
2.4. Bijection entre les tableaux escaliers et des permutations colorées	72
3. Tableaux escaliers de type $B$	75
3.1. Involutions sur les tableaux escaliers et définitions des tableaux escalier de type $B$	75
3.2. Algorithme d'insertion sur les tableaux escaliers de type $B$	80
3.3. Ansatz matriciel de type $B$	89

---

Chapitre 3. L'ASEP à deux particules	97
1. Présentation du modèle et de l' <i>ansatz</i> matriciel associé	98
2. Tableaux escaliers rhombiques	104
3. Algorithme d'insertion sur les tableaux escaliers rhombiques	110
4. Bijection entre des tableaux escaliers rhombiques et les assemblées de permutations	119
Chapitre 4. Étude des coins dans les tableaux correspondant à l'ASEP	123
1. Définitions des tableaux	124
1.1. Tableaux de permutation	124
1.2. Tableaux alternatifs	125
1.3. Tableaux boisés	126
1.4. Bijections entre tableaux de permutation, alternatifs et boisés.	129
2. Interprétation des coins sur l'ASEP	131
3. Énumération des coins occupés et analogues polynomiaux	132
3.1. Étude des tableaux boisés	132
3.2. Étude des tableaux boisés symétriques	136
4. Énumération des coins et analogues polynomiaux	138
4.1. Énumérations des coins	139
4.2. Analogues polynomiaux	145
4.3. Bijection entre les coins et les <i>run</i> de taille 1	151
<b>Partie 2. Arbres non-ambigus</b>	<b>155</b>
Chapitre 5. Autour de l'énumération et de la série génératrice des arbres non-ambigus	157
1. Définition des arbres non-ambigus	160
2. Série génératrice, formules des équerres et énumérations des arbres non-ambigus	165
2.1. La version sans raffinement	166
2.2. Les $(\alpha, \beta)$ -analogues de la série génératrice et de l'énumération à dimension géométrique fixée	174
2.3. Le $q$ -analogue de la formule des équerres	178
3. Interprétations combinatoire de la série génératrice et de l'énumération des arbres non-ambigus	184
3.1. Les équerres des arbres binaires	184
3.2. Interprétation par la bijection zigzag de Burstein	185
3.3. Interprétation par la structure arborescente des équerres	192
4. Comparaison avec la statistique de Clark et Ehrenborg	196
5. Une nouvelle statistique sur les arbres binaires : le nombre d'équerres	199
Chapitre 6. Généralisation des arbres non-ambigus en dimension supérieure	203
1. Définition des arbres non-ambigus généralisés	204
2. Équations différentielles	206

---

3. Définition géométrique	216
<b>Partie 3. Polyominos parallélogrammes périodiques</b>	<b>221</b>
Chapitre 7. Polyominos Parallélogrammes périodiques	223
1. Définitions	225
1.1. Polyominos parallélogrammes périodiques	225
1.2. Bandes	228
1.3. Polyominos parallélogrammes périodiques marqués	229
2. Structures arborescentes sous-jacentes	232
2.1. Bijection entre les arbres ordonnés et les polyominos parallélogrammes périodiques	233
2.2. Structure arborescente des bandes	234
3. Séries génératrices et énumération	240
3.1. Séries génératrices	241
3.2. Énumération	243
4. Ultime périodicité par rapport à l'aire	250
4.1. Étude de l'aire en supprimant une cellule par colonne	251
4.2. Étude de l'aire en diminuant la hauteur de recollement intrinsèque	253
Perspectives	259
Bibliographie	265
Index	273



# NOTATIONS

---

$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels $\{0, 1, 2, \dots\}$ .
$\mathbb{Q}$	Corps des nombres rationnels.
$\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$	Anneau des polynômes multivariés à coefficients dans $\mathbb{Q}$ .
$\mathbb{Q}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$	Anneau non commutatif des polynômes multivariés à coefficients dans $\mathbb{Q}$ .
$\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$	Corps des fractions rationnelles multivariées à coefficients dans $\mathbb{Q}$ .
$E^{\mathbb{N}}$	Ensemble des suites indexées par $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $E$ .
$\mathbb{1}$	Fonction booléenne qui vaut 1 si l'assertion est vraie et 0 sinon.
$ E $	Cardinal de l'ensemble $E$ .
$\llbracket i, j \rrbracket$	Ensemble des entiers $\{i, \dots, j\}$ .
$[n]_q$	$q$ -analogue de l'entier $n : 1 + q + \dots + q^{n-1}$ .
$[n]_{q,u}$	$(q, u)$ -analogue de l'entier $n : u^{n-1} + qu^{n-2} + \dots + q^{n-1}$ .
$[n]_q!$	$q$ -analogue de la factorielle $n! : [1]_q \cdots [n]_q$ .
$(q)_n$	Factorielle montante $q (q + 1) \cdots (q + n - 1)$ .
$(a; q)_n$	$q$ -symbole de Pochhammer $(1 - a) (1 - aq) \cdots (1 - aq^{n-1})$ .
$\binom{n}{k}_q$	$q$ -analogue du coefficient binomial $\binom{n}{k} : \frac{[n]_q!}{[n-k]_q! [k]_q!}$ .

Autant que possible, chaque notation contient les lettres de son nom de sorte à faciliter la lecture du document.



---

Dans la définition de certaines notations l'objet  $O$  duquel elles dépendent est symbolisé par «  $(O)$  ». S'il n'y a pas d'ambiguïté la notation «  $(O)$  » est souvent omise.

Dans un but pédagogique nous utilisons des couleurs pour faciliter certaines explications. Néanmoins, les couleurs ne sont pas nécessaires à la compréhension. Ainsi, les entiers, les arêtes ainsi que les parenthèses colorées sont également étiquetés par la première lettre correspondant au nom de leur couleur. Par exemple,  $(1_r)_b$  est l'entier 1 coloré en rouge entouré de parenthèses bleues (seule la parenthèse fermante contient l'indice).

# INTRODUCTION

---

Le travail de recherche effectué au cours de cette thèse relève de la combinatoire énumérative. Trois problèmes ont été abordés. D'une part, nous proposons une nouvelle approche pour étudier l'interprétation combinatoire, par les tableaux, de l'état stationnaire de l'ASEP débutée par Corteel et Williams. D'autre part, nous étudions les structures arborescentes sous-jacentes à cette interprétation, en les généralisant notamment à toutes les dimensions. Enfin, nous donnons une interprétation des polyominos parallélogrammes périodiques par des structures arborescentes.

## Contexte du travail

Nous commençons par décrire sommairement la combinatoire énumérative, puis nous présentons le contexte physique dans lequel se placent les deux premières parties de ce manuscrit. Enfin, nous présentons l'outil informatique qui nous a assisté durant notre travail de recherche. Les termes mathématiques non définis dans cette introduction le seront par la suite.

## Combinatoire énumérative

La *combinatoire* est la science des structures discrètes et dénombrables. De ce fait, on rencontre des problèmes combinatoires dans de nombreux contextes mathématiques : l'algèbre, la géométrie, la théorie des probabilités, la topologie. . . mais aussi dans d'autres sciences : l'informatique, la physique statistique et la biologie.

La *combinatoire énumérative* étudie plus particulièrement l'énumération, à taille fixée, de ces structures. Une *classe combinatoire* est un ensemble  $\mathcal{C}$  muni d'une application *taille*  $t : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  l'ensemble  $\mathcal{C}_n := \{C \in \mathcal{C}, t(C) = n\}$  est fini. Un élément  $C$  d'une classe combinatoire  $\mathcal{C}$

est appelé un *objet (combinatoire)* et la *taille* de  $C$  correspond à  $t(C)$ . Ainsi, on cherche à trouver une formule satisfaisante pour le nombre d'éléments de  $\mathcal{C}_n$ . La réponse est parfois facile à donner, par exemple le nombre de mots de  $n$  lettres que l'on peut construire avec un alphabet à deux éléments est  $2^n$ . Ici, c'est le nombre de lettres d'un mot qui joue le rôle de la taille. Une autre façon d'y apporter une solution est de mettre en bijection la classe combinatoire que l'on veut énumérer avec une classe combinatoire que l'on sait énumérer. Par exemple, il existe de nombreuses classes combinatoires comptées par les *nombre de Catalan*

$$Cat_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Le nombre d'arbres binaires à  $n$  sommets, d'arbres ordonnés à  $n+1$  sommets, de chemins de Dyck de longueur  $2n$  et de polyominos parallélogrammes de demi-périmètre  $n+1$ , pour ne citer qu'eux, est égal à  $Cat_n$ . On peut montrer par le lemme cyclique (ou lemme de Raney) [Lot83] que les chemins de Dyck de longueur  $2n$  sont comptés par Catalan. Étant donné qu'il existe des bijections entre ces différentes classes combinatoires, elles le sont toutes. Enfin, certaines classes combinatoires peuvent être décomposées récursivement. Par exemple si on veut compter le nombre  $a_n$  de façon d'ordonner totalement  $n$  éléments  $e_1, \dots, e_n$ , il suffit d'abord d'ordonner  $e_1, \dots, e_{n-1}$  puis de choisir l'emplacement de  $e_n$  parmi les  $n$  emplacements disponibles. De ce fait, la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  vérifie la récurrence

$$\begin{cases} a_n = n a_{n-1} & \text{si } n \geq 2, \\ a_1 = 1, \end{cases}$$

ce qui nous permet d'en déduire que  $a_n = n!$ . Il n'est pas toujours possible de trouver une formule directement à partir de la relation de récurrence. Il est donc souvent utile d'associer à une classe combinatoire  $\mathcal{C}$  la série formelle

$$\mathfrak{C}(x) := \sum_{n \geq 0} |\mathcal{C}_n| x^n$$

appelée *série génératrice (ordinaire)*. On peut ainsi convertir la récurrence vérifiée par la suite  $(|\mathcal{C}_n|)_{n \geq 0}$  en une équation vérifiée par  $\mathfrak{C}(x)$ . Si bien que nous avons de cette manière accès à l'outillage mathématique permettant d'étudier des équations fonctionnelles. Pour certaines classes combinatoires, notamment les classes combinatoires dites étiquetées, il peut être intéressant de considérer plutôt la *série génératrice exponentielle*

$$\mathfrak{C}(x) := \sum_{n \geq 0} |\mathcal{C}_n| \frac{x^n}{n!}.$$

Outre la taille, l'étude d'une classe combinatoire nous amène régulièrement à considérer d'autres fonctions de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathbb{N}$  que nous appelons *statistiques*. Soit  $s_1, \dots, s_k : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{N}$  des statistiques sur une classe combinatoire  $\mathcal{C}$ . Naturellement, le problème se pose de raffiner les résultats précédents en prenant en

compte ces statistiques. Par exemple, est-il possible de trouver une formule, à taille fixée, pour le polynôme générateur

$$\mathfrak{C}_n(x_1, \dots, x_k) := \sum_{C \in \mathcal{C}_n} x_1^{s_1(C)} \dots x_k^{s_k(C)} ?$$

Ou encore, soit  $\mathcal{C}'$  une classe combinatoire en bijection avec  $\mathcal{C}$  et  $f$  une bijection correspondante. Existe-t-il des statistiques naturelles  $s'_1, \dots, s'_k : \mathcal{C}' \rightarrow \mathbb{N}$  sur  $\mathcal{C}'$  telles que pour tout élément  $C$  de  $\mathcal{C}_n$  on ait

$$(s_1(C), \dots, s_k(C)) = (s'_1(f(C)), \dots, s'_k(f(C)))?$$

Réciproquement, supposons que nous ayons montré par le calcul que l'on a

$$\mathfrak{C}_n(x_1, \dots, x_k) = \mathfrak{C}'_n(x_1, \dots, x_k).$$

C'est-à-dire que les statistiques  $(s_1, \dots, s_k)$  et  $(s'_1, \dots, s'_k)$  sont *équidistribuées*. Une preuve combinatoire de ce résultat consiste à définir une bijection  $f$  de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{C}'$  telle que

$$(s_1(C), \dots, s_k(C)) = (s'_1(f(C)), \dots, s'_k(f(C))).$$

Un autre aspect de ce domaine est de donner une interprétation combinatoire d'une suite d'entiers, d'un polynôme à coefficients positifs ou d'une série formelle apparaissant dans d'autres contextes. Par exemple, dans le cas d'un polynôme  $P$  il s'agit de définir une classe combinatoire  $\mathcal{C}$  munie de statistiques de sorte que

$$P = \mathfrak{C}_n(x_1, \dots, x_k)$$

pour un certain  $n$ . Porter un regard combinatoire sur des problèmes externes spécifiques est parfois révélateur de liens plus profonds. La physique statistique, et plus précisément le processus d'exclusion simple, en fournit un exemple remarquable.

## Processus d'exclusion simple

Le processus d'exclusion simple (SEP) à une dimension est un modèle de physique statistique introduit de manière indépendante en biologie par MacDonald, Gibbs et Pipkin [MGP68] ainsi qu'en mathématiques par Spitzer [Spi70] dans les années 70. C'est un système de particules en interaction qui peuvent sauter d'un pas vers la droite ou vers la gauche sur un réseau à une dimension ; chaque emplacement du réseau ne peut contenir qu'une particule au maximum. Le SEP est devenu un modèle central de la physique statistique hors équilibre. D'une part, il est simple ce qui permet l'obtention de résultats exacts. D'autre part, il présente des propriétés macroscopiques non triviales que l'on retrouve de manière générique dans les systèmes hors équilibre plus réalistes : transitions de phase [DEHP93, USW04], chocs [ABL88, DJLS93], corrélations à longue distance [DE93, DLS03]. Depuis son introduction, il a fait l'objet de nombreuses applications dans des domaines variés. On peut par exemple citer l'étude de la cinétique de la biopolymérisation [MGP68],

la diffusion de particules à travers un milieu poreux ou des canaux microscopiques [CL99], la dynamique d'un polymère en milieu dense [Sch99] et l'étude du trafic routier [SW98]. Il a également des connexions avec les polynômes orthogonaux [Sas99, USW04] et le modèle XXZ [ER96, SS94].

Le SEP est défini comme une chaîne de Markov à temps continu ou à temps discret. Ces deux versions sont équivalentes dans le sens où la probabilité stationnaire est la même dans les deux cas. De même que dans la littérature combinatoire nous faisons le choix de la version discrète du SEP.

Notons  $q$  et  $u$  les probabilités qu'une particule saute respectivement vers la gauche et vers la droite. Le SEP prend des noms différents suivant les valeurs de  $q$  et  $u$  :

- le processus d'exclusion simple symétrique (SSEP) : les probabilités  $q$  et  $u$  sont égales ;
- le processus d'exclusion simple asymétrique (ASEP) : les probabilités  $q$  et  $u$  sont différentes, sans perte de généralité, supposons que  $u > q$ . Si les sauts ne sont possibles que vers la droite, c'est-à-dire  $q = 0$ , on parle du processus totalement asymétrique (TASEP), sinon on parle du processus partiellement asymétrique (PASEP).

Dans la littérature combinatoire, le terme ASEP est généralement utilisé à la place du terme SEP. De ce fait, dans le but de rester cohérent, nous utilisons également cette terminologie.

Il existe de nombreuses variantes de ce modèle. On peut par exemple jouer sur le nombre de types de particules ou encore sur la forme du réseau qui peut par exemple être :  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{N}$  ou  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Dans ce manuscrit, nous étudions les modèles à un et deux types de particules sur le réseau  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Nous parlons ainsi de l'ASEP à une particule et de l'ASEP à deux particules. Si le nombre de particules n'est pas mentionné il est alors question de l'ASEP à une particule. En plus des paramètres  $q$  et  $u$ , quatre autres paramètres permettent de décrire le système (figure 1) :  $\alpha$  et  $\gamma$  représentent la probabilité qu'une particule respectivement rentre et sorte dans le réseau par la frontière gauche alors que  $\delta$  et  $\beta$  jouent respectivement le même rôle que  $\alpha$  et  $\gamma$  mais à la frontière droite. Sans perte de généralité, autre que le cas dégénéré  $q = u = 0$ , on peut supposer  $u = 1$ .

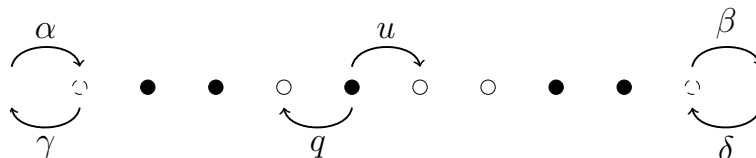


FIGURE 1. Le processus d'exclusion simple asymétrique (ASEP).

Les probabilités stationnaires des états de certains modèles de physique statistique peuvent être calculées à partir d'un produit de matrices. L'outil mathématique associé est l'*ansatz matriciel*. L'idée est d'associer à chaque

état un mot où les lettres correspondent à des matrices. Ces matrices doivent vérifier des contraintes liées au système. Si on arrive à trouver une représentation explicite de ces matrices, le calcul des probabilités stationnaires se réduit à un produit matriciel. Par cette technique, d'autres quantités physiques telles que la fonction de partition, le courant ou encore la fonction de corrélation peuvent également s'exprimer en fonction d'un produit matriciel. La fonction de partition est la quantité sur laquelle nous nous focalisons dans cette thèse. La probabilité stationnaire d'un état est généralement décrite à partir d'une mesure stationnaire qu'on renormalise. Ce terme de renormalisation correspond justement à la *fonction de partition*, c'est-à-dire à la somme des mesures stationnaires de tous les états. Plus d'informations sur cet aspect physique du sujet ainsi que sur les techniques liées à l'*ansatz* matriciel peuvent être trouvées dans le *survey* écrit par Blythe et Evans [BE07]. L'ASEP à une et deux particules font partie des modèles où on peut appliquer ces techniques. Dans le cas à une particule, l'*ansatz* matriciel que nous considérons est celui introduit par Derrida, Evans, Hakim et Pasquier [DEHP93] et plus particulièrement la généralisation plus flexible de Corteel et Williams [CW11]. Dans le cas à deux particules, nous utilisons la généralisation de Corteel, Mandelshtam et Williams [CMW15] qui se base sur l'*ansatz* matriciel introduit par Uchiyama [Uch08]. Dans les deux cas, les contraintes que doivent vérifier les matrices permettent de calculer récursivement les probabilités stationnaires sans avoir besoin de représentation. Ce manuscrit se concentre sur cet aspect de l'*ansatz* matriciel.

Les premières connexions entre la combinatoire et l'ASEP remontent, au moins, à 1982 avec l'article de Shapiro et Zeilberger [SZ82]. Les auteurs calculent la probabilité stationnaire d'un état dans le cas du TASEP avec  $\alpha = \beta = 1$  et  $\gamma = \delta = 0$ . L'aspect combinatoire de leur travail est dû à la présence des nombres de Catalan et des partitions d'entiers. Duchi et Schaeffer [DS05] donnent une explication combinatoire du lien avec les nombres de Catalan en proposant une chaîne de Markov sur les configurations complètes, comptées par Catalan, qui se projette sur le TASEP avec  $\gamma = \delta = 0$ . Brak et Essam [BE07] quant à eux étudient ce même modèle à l'aide de chemins pondérés. Depuis, les liens entre la combinatoire et l'ASEP ont fait l'objet d'une recherche intensive. On peut notamment citer [BCE+06, CW07a, CW07b, Vie08, CW11, Vie13] pour l'ASEP à une particule et [Man16b, MV15, CMW15] pour l'ASEP à deux particules. Les deux types de familles d'objets qui sont le plus étudiés dans ce contexte sont les chemins pondérés et les tableaux. C'est à ces derniers que nous nous intéressons dans cette thèse.

Idéalement, le but est de donner une interprétation combinatoire aux termes apparaissant dans la fonction de partition, c'est-à-dire définir une famille d'objets combinatoires pondérés de sorte que la série génératrice de cette famille corresponde à la fonction de partition de l'ASEP. Il y a principalement deux

méthodes pour y arriver. Soit on montre que nos objets vérifient l'*ansatz* matriciel, soit on définit une chaîne de Markov sur nos objets qui se projette sur l'ASEP. La deuxième solution est plus difficile mais elle donne fondamentalement une meilleure interprétation. Les meilleurs résultats concernant l'ASEP sont dûs à Dasse-Hartaut [DH, Chapter 5] qui définit une chaîne de Markov sur les tableaux escaliers dans les cas  $\delta = 0$  et  $q = 1$ . Quant à l'ASEP à deux particules, Mandelshtam [Man16a, Section 3.4] propose une chaîne de Markov sur les tableaux alternatifs rhombiques répondant ainsi au problème dans le cas  $\gamma = \delta = 0$ . Ces trois chaînes de Markov se basent sur le travail de Corteel et Williams [CW07b] qui ont résolu le problème pour l'ASEP à une particule et  $\gamma = \delta = 0$ . En utilisant la première méthode, Corteel et Williams [CW11] puis Corteel, Mandelshtam et Williams [CMW15] répondent respectivement aux problèmes à une et deux particules avec tous les paramètres généraux.

Dans l'ASEP, certaines quantités peuvent être calculées à partir de la fonction de partition, parmi lesquelles la valeur moyenne de la densité particulaire, sa variance ou encore le courant. Ainsi, outre le fait que la fonction de partition de l'ASEP peut être interprétée comme une série génératrice, en donner une formule close est également intéressant d'un point de vue physique. Dans le cas à une particule Corteel, Stanley, Stanton et Williams [CSSW12] en donnent une formule close en ajoutant même un paramètre supplémentaire  $y$  qui prend en compte le nombre de particules d'un état. Toutefois, il n'est pas clair d'après leur formule que la fonction de partition est un polynôme à coefficients positifs. Si on pose  $y = q = 1$  on obtient une forme factorisée de la fonction de partition [BCE<sup>+</sup>06, USW04, CW11, CDH16]. Sinon, le meilleur résultat a été obtenu par Josuat-Vergès [JV11] pour la spécialisation  $\gamma = \delta = 0$ . Concernant l'ASEP à deux particules, seul le cas  $y = q = 1$  a été résolu par Corteel, Mandelshtam et Williams [CMW15].

Un autre aspect combinatoire de l'ASEP qu'il nous paraît important de développer, même si nous ne le développons pas en détail, est son lien avec les polynômes orthogonaux. L'étude combinatoire de ces polynômes a débuté dans les années 80 [Foa78, Fla80, Vie85]. On a pu ainsi donner des interprétations combinatoires des moments de nombreux polynômes orthogonaux appartenant au schéma d'Askey [KS94]. La première apparition des polynômes orthogonaux dans l'étude de l'ASEP est due à Sasamoto [Sas99]. Celui-ci étudie l'ASEP, dans le cas  $\gamma = \delta = 0$ , à l'aide d'une interprétation d'une représentation de l'*ansatz* matriciel par les polynômes d'Al-Salam-Chihara [ASC76]. Uchyama, Sasamoto et Wadati [USW04] généralisent le travail du deuxième auteur en donnant une représentation de l'*ansatz* matriciel avec tous les paramètres généraux obtenue à partir des polynômes d'Askey-Wilson [AW85]. Cela leur permet notamment de confirmer le diagramme de phase du courant obtenu par Sandow [San94] à l'aide d'approximations. En généralisant l'interprétation combinatoire de l'état stationnaire de l'ASEP, à tous les paramètres,

Corteeel et Williams [CW11] ont par la même occasion donné la première interprétation combinatoire des moments des polynômes d'Askey-Wilson. De plus, le calcul exact de ces moments [CSSW12] a permis d'obtenir une formule close pour la fonction de partition. Lorsque l'on considère deux particules, ce sont les polynômes de Koornwinder [Koo92] qui apparaissent [Can15, CW15b].

## Implémentation informatique

L'exploration assistée par ordinateur et la vérification informatique de nos résultats ont composé une bonne partie de notre travail de recherche. Pour cela, nous nous sommes servi du logiciel *open-source* Sage [S<sup>+</sup>17] et de l'extension développée par la communauté Sage-Combinat [SCc08]. Nous avons notamment implémenté les classes combinatoires des tableaux escaliers, des tableaux boisés et des polyominos parallélogrammes périodiques. Actuellement ce code est expérimental et n'est pas réutilisable en l'état. À terme, le but est d'intégrer ces objets à l'extension de sorte qu'il soit disponible pour la communauté.

## Contenu de la thèse

### Chapitre 1

Ce chapitre introduit les notions combinatoires nécessaires à la compréhension de cette thèse. Il débute par les séries génératrices en illustrant comment des constructions combinatoires s'interprètent en équations sur les séries génératrices. Suite à cela, nous définissons les différents objets combinatoires classiques apparaissant dans cette thèse : les arbres, les chemins, les diagrammes de Ferrers, les permutations, les polyominos parallélogrammes et les cartes. Enfin, nous donnons une introduction sommaire aux chaînes de Markov notamment pour définir les probabilités stationnaires.

### Chapitre 2

Le deuxième chapitre est consacré à une nouvelle approche de l'interprétation combinatoire par les tableaux escaliers de l'état stationnaire de l'ASEP. Nous explicitons tout d'abord une récurrence que toute solution de l'*ansatz* matriciel doit satisfaire. Puis, en définissant un algorithme d'insertion sur les tableaux escaliers, nous montrons qu'ils vérifient cette même récurrence. Cet algorithme d'insertion donne une structure récursive simple aux tableaux escaliers, de sorte que l'on retrouve les formes factorisées, déjà connues, de spécialisations du polynôme générateur des tableaux escaliers. Une autre conséquence de cet algorithme est une bijection entre les tableaux escaliers et des tables



d'inversions colorées qui nous permet de lire le poids d'un tableau ainsi que ses cellules sud-est sur la table d'inversions image. Cela donne une nouvelle construction pour définir des bijections entre les tableaux escaliers et des permutations colorées. Nous retrouvons ainsi une interprétation [CDH16] des paramètres  $\beta, \gamma$  et  $q$  sur les permutations. Dans le cas  $\delta = \gamma = 0$ , nous conjecturons, sous la forme d'une équidistribution de statistiques, une interprétation du bord sud-est ainsi que des paramètres  $\alpha, \beta$  et  $q$  des tableaux escaliers sur les permutations.

Dans la suite du chapitre, nous proposons un algorithme d'insertion analogue pour les tableaux escaliers de type B. De nouveau, la structure récursive simple qui en découle donne une interprétation à des formes factorisées de spécialisations du polynôme générateur. Nous obtenons des généralisations de résultats précédents [CDH16] ainsi que de nouveaux résultats. Enfin, nous définissons un *ansatz* matriciel, avec tous les paramètres généraux, compatible avec notre algorithme d'insertion.

Ce chapitre et le suivant correspondent à un travail de recherche récent dont certaines pistes n'ont pas encore été complètement explorées. Il fera l'objet d'un prochain article.

### Chapitre 3

Dans ce chapitre, nous étendons le premier algorithme d'insertion du chapitre précédent au cas de l'ASEP à deux particules. Nous en déduisons que les tableaux escaliers rhombiques vérifient une récurrence satisfaite par toute solution de l'*ansatz* matriciel. De plus, par cet algorithme d'insertion nous obtenons une nouvelle bijection entre les assemblées de permutations et les tableaux escaliers rhombiques n'ayant que des  $\alpha$  et des  $\beta$ . Nous trouvons ainsi une interprétation des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  analogue à [MV16]. Dans le cas où on remplace  $\beta$  par  $\delta$ , on obtient également une interprétation du paramètre  $q$ .

### Chapitre 4

Ce chapitre se place dans le cadre de l'ASEP à une particule dans le cas  $\gamma = \delta = 0$ . Il existe principalement trois familles de tableaux, combinatoirement équivalentes, associées à ce cas particulier. Après quelques définitions, le chapitre 4 débute par l'interprétation de l'énumération des coins du bord sud-est de ces tableaux en termes d'ASEP. Suite à cela, nous énumérons les coins occupés des tableaux escaliers, en prenant en compte les paramètres  $\alpha, \beta$  et  $q$ . Enfin, nous dénombrons les coins dans le cas  $\alpha = \beta = q = 1$  et proposons un début de preuve pour  $\alpha$  et  $\beta$  généraux. Nous traitons également le type  $B$  en parallèle.

L'essentiel de ce travail de recherche a fait l'objet des publications [LZ15] et [GGLZS16].

## Chapitre 5

Ce chapitre aborde un autre aspect de l'interprétation combinatoire de l'ASEP. Les arbres non-ambigus introduits dans [ABBS14] correspondent aux structures combinatoires arborescentes sous-jacente à l'ASEP. Nous proposons une définition alternative de ces objets en tant qu'arbres binaires étiquetés. Cela nous permet de leur appliquer une méthode développée dans [HNT08] et d'en déduire une équation différentielle vérifiée par leur série génératrice. D'une part, on montre ainsi la formule des équerres, déjà connue, comptant le nombre d'arbres non-ambigus à arbre binaire fixé. D'autre part, la résolution de l'équation différentielle nous permet d'obtenir une forme close de la série génératrice ainsi que pour la formule d'énumération des arbres non-ambigus à taille fixée. Le formalisme algébrique que nous utilisons nous permet de raffiner facilement notre démarche en ajoutant des paramètres supplémentaires à notre étude. Dans un premier temps, nous introduisons les statistiques correspondant aux paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  de l'ASEP. Nous généralisons ainsi les formules closes obtenues précédemment. Dans un deuxième temps, nous prenons en compte le nombre d'inversions ou l'indice majeur inverse des permutations sous-jacentes aux arbres non-ambigus. Il en découle un analogue polynomial de la formule des équerres ainsi qu'un raffinement de l'équation différentielle faisant intervenir des  $q$ -analogues de l'intégrale et de la dérivée.

La seconde partie de ce chapitre est consacré à une interprétation combinatoire des résultats obtenus par le calcul. On y définit notamment une nouvelle statistique sur les arbres binaires : le nombre d'équerres de l'unique décomposition en équerres. De plus, nous relierons notre interprétation combinatoire au travail [CE10] effectué dans le cadre des permutations dont toutes les excédences sont au début.

La plus grande partie du travail présenté dans ce chapitre ainsi que dans le suivant a fait l'objet d'une publication [ABD<sup>+</sup>16] à la conférence FPSAC, la version longue étant en cours de préparation.

## Chapitre 6

Les arbres non-ambigus correspondent à des objets de dimension 1 plongés dans un espace de dimension 2. Le sixième chapitre est consacré à la généralisation des arbres non-ambigus en tant qu'objets de dimension  $k$  plongés dans un espace de dimension  $d \geq k$ . Ils sont tout d'abord définis comme des arbres  $\binom{k}{d}$ -aires étiquetés. Ainsi, nous appliquons les techniques de [HNT08] pour définir, à  $k$  et  $d$  fixés, une équation différentielle vérifiée par la série génératrice de ces objets. Ce chapitre se termine par une définition alternative géométrique, analogue à la première définition des arbres non-ambigus.

## Chapitre 7

Ce chapitre est consacré à l'étude des polyominos parallélogrammes périodiques. Il est indépendant des chapitres précédents. Nous étudions ces objets en utilisant les méthodes de l'article [BRS15] qui donne une interprétation des polyominos parallélogrammes et des polyominos convexes dirigés en termes d'arbres ordonnés. Initialement, les polyominos parallélogrammes périodiques ont été introduits dans le but de traiter le cas des polyominos convexes. Il est à noter que Biagioli, Jouhet et Nadeau [BJN17] ont également introduit, de façon indépendante, ces nouveaux objets dans le cadre des permutations affines évitant 321. En effet, à un marquage près, ils apparaissent naturellement comme la généralisation des polyominos parallélogrammes qui sont en bijection avec les permutations qui évitent 321. En plus de ces nouveaux objets, nous étudions également les polyominos parallélogrammes périodiques marqués, introduits dans [BJN17], et les bandes, qui sont les orbites sous l'action de la rotation des colonnes des polyominos parallélogrammes périodiques. L'adaptation de la construction de [BRS15] permet de calculer les séries génératrices de ces trois classes combinatoires selon la hauteur, la largeur et une nouvelle statistique appelée la hauteur de recollement intrinsèque. De même que dans [BRS15], l'aire est difficilement interprétable par cette méthode. La hauteur de recollement intrinsèque permet de partitionner, pour chaque classe combinatoire, l'ensemble infini des objets de demi-périmètre fixé en ensembles finis de même taille. Dans le cas des bandes, nous obtenons une asymptotique de cette taille. Pour les deux cas restants, nous donnons une formule d'énumération à l'aide d'une interprétation mettant en jeu l'aire triangulaire sous les chemins de Dyck. La dernière partie de ce chapitre est dédiée à l'étude de l'ultime périodicité des séries génératrices selon l'aire, c'est-à-dire à montrer que les coefficients sont périodiques à partir d'un certain rang. Cette question est inspirée des groupes de Coxeter pour lesquels les séries génératrices sont ultimement périodiques [BJN15]. Nous présentons deux constructions qui permettent d'étudier l'ultime périodicité de la série génératrice de chacune des trois classes combinatoires. Elles consistent, lorsque cela est possible, à retirer des cellules dans chaque colonne. Pour chacune des deux, une sous-famille d'objets minimaux de chaque classe apparaît naturellement : les maigres et les intrinsèquement minces. En étudiant ces deux sous-famille, nous montrons que les polyominos parallélogrammes périodiques maigres (resp. intrinsèquement minces) sont en bijection avec les chemins de Dyck bilatères (resp. chemins de Dyck bilatères avec un pic marqué), ce qui nous permet de les énumérer.

Ces travaux de recherche ont fait l'objet de l'article [BLZ17] et de la prépublication [ABLZP16].

# GÉNÉRALITÉS

---

Ce chapitre a pour but d'introduire les notions combinatoires classiques utilisées dans cette thèse. En premier lieu, on précise l'utilisation des séries génératrices. Ensuite, on définit successivement les familles combinatoires des arbres, des chemins, des diagrammes de Ferrers, des cartes, des permutations et des polyominos parallélogrammes. On termine par une brève introduction aux chaînes de Markov.

## 1. Séries génératrices

L'intérêt des séries génératrices est que bien souvent une décomposition récursive d'une classe combinatoire résulte en une équation sur la série génératrice correspondante et inversement. On peut facilement donner une interprétation combinatoire aux opérations sur les séries formelles. Par exemple, la somme de deux séries génératrices ordinaires correspond à l'union disjointe des classes combinatoires associées tandis que le produit correspond au produit cartésien. Dans la section 1.1 nous présentons le cas plus subtil des séries génératrices exponentielles avec l'intention d'apporter une intuition combinatoire. En particulier, nous omettons les preuves et nous nous concentrons sur des exemples. Dans la suite du manuscrit, les constructions combinatoires que nous considérons ne rentrent pas exactement dans le cadre de la section 1.1. En effet, nous allons principalement étudier des objets doublement étiquetés, avec un ordre total sur les étiquettes. En outre, nous donnons parfois une pondération à nos objets. Toutefois, les idées étant les mêmes, nous déduirons de nos constructions combinatoires des identités sur les séries génératrices sans rentrer dans des détails techniques.

Pour une introduction aux séries formelles et aux séries génératrices le lecteur est invité à consulter [Bón15, Section 1.3].

### 1.1. Interprétation des opérations somme, produit et composition sur les séries génératrices exponentielles

Les séries génératrices exponentielles permettent la mise en équation de problèmes de comptage liés à des objets combinatoires étiquetés. Pour donner une interprétation combinatoire des opérations classiques sur les séries formelles : somme, produit et composition, nous utilisons le vocabulaire des espèces, introduit par Joyal, mais sans parler de functorialité. Le lecteur curieux peut se référer au livre [BLL98] de Bergeron, Labelle et Leroux pour découvrir la théorie des espèces.

Une *structure*  $s$  est une construction mathématique  $\gamma$  que l'on effectue sur un ensemble fini donné  $E$ , on écrit  $s = (\gamma, E)$ . On dit que  $s$  est *étiqueté* par  $E$  ou que  $s$  est une structure sur  $E$ . On dit également que  $E$  est l'ensemble *sous-jacent* à  $s$ . Par exemple, une structure de graphe simple et non orienté sur un ensemble  $E$ , correspond à une construction  $\gamma$ , où  $\gamma$  est un ensemble de sous-ensembles de  $E$  à deux éléments. Chaque sous-ensemble représente une arête du graphe. Par exemple, le graphe de la figure 1 est la représentation de la structure  $s = (\gamma, E)$  où  $E = \llbracket 1, 7 \rrbracket$  et  $\gamma = \{\{1, 4\}, \{1, 6\}, \{1, 7\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}, \{4, 7\}\}$ . S'il n'y a pas d'ambiguïté quant à la nature de l'ensemble sous-jacent, on uti-

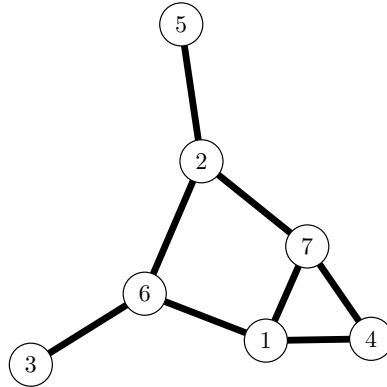


FIGURE 1. Le graphe dont l'ensemble des sommets est  $\llbracket 1, 7 \rrbracket$  et l'ensemble des arêtes est  $\{\{1, 4\}, \{1, 6\}, \{1, 7\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}, \{4, 7\}\}$ .

lisera l'abus de langage et de notation  $s = \gamma$ . Ce n'est pas le cas des graphes, étant donné que les étiquettes des points isolés n'apparaissent pas dans  $\gamma$ . Soit  $\mathcal{F}$  un ensemble de règles définissant les constructions admissibles sur un ensemble donné. Ces règles doivent être indépendantes de la nature des éléments composant l'ensemble, elles dépendent uniquement de la taille de l'ensemble. On dit que  $\mathcal{F}$  est une *espèce*, et une structure  $s = (\gamma, E)$  respectant les règles définies par  $\mathcal{F}$  est une  $\mathcal{F}$ -*structure*. Par exemple, si on considère l'espèce  $\mathcal{E}$  des ensembles,  $(\gamma, E)$  est une  $\mathcal{E}$ -structure si, et seulement si,  $\gamma = E$ . On l'appelle *structure triviale*, car autre que la structure d'ensemble imposée par le modèle,

## 1. Généralités

---

on n'ajoute aucune règle particulière. Soit  $\mathcal{F}$  une espèce et  $n$  un entier naturel, nous notons  $\mathcal{F}[n]$  l'ensemble des  $\mathcal{F}$ -structures dont l'ensemble sous-jacent est  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Dans le but de résoudre des questions d'énumération sur les espèces, nous définissons les séries formelles suivantes.

DÉFINITION 1.1.1. Soit  $\mathcal{F}$  une espèce, la *série génératrice exponentielle* de  $\mathcal{F}$  est la série formelle,

$$\mathfrak{F}(x) = \sum_{n \geq 0} |\mathcal{F}[n]| \frac{x^n}{n!},$$

En particulier, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\mathcal{E}[n]$  est composé d'une seule  $\mathcal{E}$ -structure, donc  $\mathfrak{E}(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = e^x$ . Voici d'autres exemples de séries génératrices exponentielles d'espèces triviales, ils nous permettront d'illustrer notre propos par la suite.

- L'espèce  $1$  de l'ensemble vide :  $1(x) = 1$ .
- L'espèce  $\mathcal{X}$  de l'ensemble à un élément :  $\mathfrak{X}(x) = x$ .
- L'espèce  $\mathcal{E}^*$  des ensembles non vides :  $\mathfrak{E}^*(x) = e^x - 1$ .

Pour accéder au coefficient  $|\mathcal{F}[n]|$  à partir de la série génératrice exponentielle de  $\mathcal{F}$ , on note

$$\left[ \frac{x^n}{n!} \right] \mathfrak{F}(x) = |\mathcal{F}[n]|.$$

Dans la suite, nous donnons une interprétation en termes d'espèces aux opérations somme, produit et composition de deux séries génératrices exponentielles.

DÉFINITION 1.1.2. Soit  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{H}$  trois espèces telles que l'ensemble des  $\mathcal{F}$ -structures est l'union disjointe de l'ensemble de  $\mathcal{G}$ -structures et de l'ensemble  $\mathcal{H}$ -structures, alors,  $\mathcal{F}$  est la *somme* des espèces  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{H}$ , et on note,  $\mathcal{F} = \mathcal{G} + \mathcal{H}$ .

Cette notation provient de la relation vérifiée par les séries génératrices exponentielles.

PROPRIÉTÉ 1.1.3 ([BLL98, p.29]). Soit  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{H}$  deux espèces. La série génératrice exponentielle de l'espèce  $\mathcal{F}$  somme des espèces  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{H}$  est égale à

$$\mathfrak{F}(x) = \mathfrak{G}(x) + \mathfrak{H}(x).$$

Par exemple,  $\mathcal{E} = 1 + \mathcal{E}^*$  et on a bien l'identité  $e^x = 1 + (e^x - 1)$ . De même que pour les séries génératrices ordinaires, la somme correspond à l'union disjointe. L'intérêt des séries génératrices exponentielles apparaît avec la multiplication.

DÉFINITION 1.1.4. Soit  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{H}$  trois espèces. Si toute  $\mathcal{F}$ -structure d'ensemble sous-jacent  $E$  est la donnée de

- une partition ordonnée de  $E$  en deux ensembles disjoints  $E = E_1 \sqcup E_2$ ,
- une  $\mathcal{G}$ -structure d'ensemble sous-jacent  $E_1$ , et,
- une  $\mathcal{H}$ -structure d'ensemble sous-jacent  $E_2$ ,

alors,  $\mathcal{F}$  est le *produit* des espèces  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{H}$ , et on note,  $\mathcal{F} = \mathcal{G} \times \mathcal{H}$ .

La propriété associée au produit de deux espèces est naturellement la suivante.

PROPRIÉTÉ 1.1.5 ([BLL98, p.33]). *Soit  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{H}$  trois espèces. Alors la fonction génératrice exponentielle de l'espèce  $\mathcal{F}$  produit des espèces  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{H}$  est*

$$\mathfrak{F}(x) = \mathfrak{G}(x) \times \mathfrak{H}(x).$$

Par exemple, essayons de calculer le nombre de sous-ensembles d'un ensemble. Choisir un sous-ensemble  $A$  d'un ensemble  $E$  est équivalent à partitionner  $E$  en  $E = A \sqcup A^c$ , où  $A^c$  est le complémentaire de  $A$ . Ainsi, l'espèce des sous-ensembles est le produit  $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ . En particulier, sa série génératrice exponentielle est

$$e^x \cdot e^x = e^{2x} = \sum_{n \geq 0} 2^n \frac{x^n}{n!}.$$

On vient de redémontrer que le nombre de sous-ensembles d'un ensemble à  $n$  éléments est  $2^n$ . Calculons maintenant la série génératrice exponentielle de l'espèce  $\mathcal{P}$  des permutations. On prend le point de vue qu'une permutation est un ordre total sur un ensemble. Soit  $E$  un ensemble non vide, choisir une permutation sur  $E$ , revient à choisir l'élément  $a \in E$  que l'on va considérer être le plus grand, puis choisir une permutation sur  $E \setminus \{a\}$ . Ainsi, une permutation sur  $E$  est la donnée d'une partition ordonnée de  $E$  en deux sous-ensembles disjoints  $E = A_1 \sqcup A_2$ , ainsi que d'une 1-structure sur  $A_1$  et d'une  $\mathcal{P}$ -structure sur  $A_2$ . Pour que cela reste vrai si  $E$  est composé d'un seul élément, par convention on définit qu'il n'y a qu'une permutation sur l'ensemble vide. Ainsi, on a la relation

$$\mathcal{P} = 1 + \mathcal{X} \times \mathcal{P},$$

et donc

$$\mathfrak{P}(x) = 1 + x\mathfrak{P}(x),$$

si bien que

$$\mathfrak{P}(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} n! \frac{x^n}{n!}.$$

Nous retrouvons bien que le nombre de permutation est  $n!$ . On peut facilement généraliser le produit de deux espèces, au produit d'un nombre fini  $k$  d'espèces  $\mathcal{F}_1 \times \dots \times \mathcal{F}_k$ , il suffit pour cela de considérer une partition ordonnée en  $k$  sous-ensembles deux à deux disjoints  $E = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_k$ , et une  $\mathcal{F}_i$ -structure sur  $A_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ , en voici une application. On note  $S_2(n, k)$  le *nombre de Stirling de seconde espèce* qui compte le nombre de partitions d'un ensemble à  $n$  éléments en  $k$  sous-ensembles non vides deux à deux disjoints. Ainsi, le nombre de partitions ordonnées  $E = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_k$  en sous-ensembles non vides et deux à deux disjoints est compté par  $k! S_2(n, k)$ , où  $n$  est la taille de  $E$ , de ce fait,

$$(e^x - 1)^k = \sum_{n \geq 0} k! S_2(n, k) \frac{x^n}{n!}.$$

## 1. Généralités

---

Dans le chapitre 5, nous avons besoin d'un raffinement de ce résultat. Si nous prenons le point de vue des partitions d'ensembles, nous avons

$$\frac{(e^x - 1)^k}{k!} = \sum_{n \geq 1} S_2(n, k) \frac{x^n}{n!}.$$

Prenons en compte la statistique suivante. Soit  $n$  un entier non nul et  $\llbracket 1, n \rrbracket = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_k$  une partition en  $k$  sous-ensembles non vides. Soit  $S$  la statistique comptant le nombre d'entiers différents de  $n$  qui sont dans le même sous-ensemble que  $n$ . Par exemple, considérons la partition

$$P = \{\{10, 6, 3, 2\}, \{9, 8, 4, 1\}, \{12, 11, 5\}, \{7\}\},$$

alors  $S(P) = 2$ . On note

$$S_{2,q}(n, k) := \sum_{\substack{P=\{A_1, \dots, A_k\} \\ A_1 \sqcup \dots \sqcup A_k = \llbracket 1, n \rrbracket}} q^{S(P)}.$$

On peut supposer sans perte de généralité que  $n$  appartient à  $A_1$ . Ainsi, une partition  $P$  en  $k+1$  sous-ensembles non vides de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  est la donnée d'un sous-ensemble  $A'_1$  de  $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$  et d'une partition en  $k$  sous-ensembles non vides de  $\llbracket 1, n-1 \rrbracket \setminus A'_1$ , de plus,  $S(P) = |A'_1|$ . En conséquence

$$(1) \quad \frac{e^{qx} (e^x - 1)^k}{k!} = \sum_{n \geq 1} S_{2,q}(n, k+1) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

La dernière opération que nous allons étudier est la composition.

**DÉFINITION 1.1.6.** Soit  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{H}$  trois espèces telles que le nombre de  $\mathcal{H}$ -structures sur l'ensemble vide est nul. Si toute  $\mathcal{F}$ -structure d'ensemble sous-jacent  $E$  est la donnée d'une  $\mathcal{G}$ -structure sur l'ensemble vide ou de

- un entier naturel non nul  $k$ ,
- une partition de  $E$  en  $k$  sous-ensembles disjoints  $E = E_1 \sqcup \dots \sqcup E_k$ ,
- une  $\mathcal{H}$ -structure sur chacun de ces  $k$  sous-ensembles, et,
- une  $\mathcal{G}$ -structure sur l'ensemble  $\{E_1, \dots, E_k\}$ ,

alors,  $\mathcal{F}$  est le *composé* de  $\mathcal{H}$  par  $\mathcal{G}$ , et on note,  $\mathcal{F} = \mathcal{G} \circ \mathcal{H}$ .

Sans surprise, la composition sur les espèces correspond à la composition sur les séries formelles.

**PROPRIÉTÉ 1.1.7** ([BLL98, p.43]). Soit  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{H}$  deux espèces telles que le nombre de  $\mathcal{H}$ -structures sur l'ensemble vide est nulle. Alors la fonction génératrice exponentielle de l'espèce  $\mathcal{F}$  composée de  $\mathcal{H}$  par  $\mathcal{G}$  est

$$\mathfrak{F}(x) = (\mathfrak{G} \circ \mathfrak{H})(x).$$

Un exemple d'application du principe de composition est le calcul de la série génératrice exponentielle de l'espèce  $\mathcal{C}$  des permutations cycliques, avec la convention qu'il n'y a pas de  $\mathcal{C}$ -structure sur l'ensemble vide. Cette fois-ci, on prend le point de vue qu'une permutation est une bijection d'un ensemble dans lui-même. Il existe une unique décomposition d'une permutation de taille non



nulle, en un produit de cycles disjoints et non vides. Ainsi, une permutation d'un ensemble non vide  $E$ , est la donnée d'une partition de  $E$  en  $k$  sous-ensembles disjoints  $E = E_1 \sqcup \cdots \sqcup E_k$ , une  $\mathcal{C}$ -structure sur chacun des  $E_i$ , où  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ , et une structure triviale sur l'ensemble  $\{E_1, \dots, E_k\}$ . Ainsi, les séries génératrices des permutations et des cycles satisfont la relation

$$\mathfrak{P}(x) = e^{\mathfrak{C}(x)},$$

et étant donné que  $\mathfrak{P}(x) = \frac{1}{1-x}$ , il suit que,

$$\mathfrak{C}(x) = -\ln(1-x) = \sum_{n \geq 0} (n-1)! \frac{x^n}{n!}.$$

C'est bien le résultat attendu étant donné que le nombre de permutations cycliques sur un ensemble de taille  $n$  est  $(n-1)!$ .

## 1.2. Théorie de Pólya pour les cycles

Nous présentons dans cette section un résultat issu de la *théorie de Pólya* [PR87] permettant de calculer la série génératrice de cycles d'objets non étiquetés. Notre explication suit la référence [FS09, Appendix A.4]. Nous donnons uniquement les détails principaux de la preuve du résultat.

Soit  $\mathcal{A}$  une classe combinatoire et  $\mathfrak{C}(x)$  sa série génératrice. Notons  $\mathcal{S}$  la classe combinatoire

$$\bigcup_{k \geq 1} \underbrace{\mathcal{A} \times \cdots \times \mathcal{A}}_k = \bigcup_{k \geq 1} \mathcal{A}^k.$$

Les éléments de  $\mathcal{S}$  sont appelés des *séquences*. De plus, le  $k$ -uplet  $(A_1, \dots, A_k) \in \mathcal{A}^k$  est noté  $A_1 \cdots A_k$ . La taille d'une séquence  $A_1 \cdots A_k \in \mathcal{S}$  est la somme des tailles des objets combinatoires qui la composent. Notons  $\mathfrak{S}(x)$  la série génératrice de  $\mathcal{S}$ . Elle est égale à

$$\mathfrak{A}(x) + \mathfrak{A}^2(x) + \cdots = \frac{\mathfrak{A}(x)}{1 - \mathfrak{A}(x)}.$$

Si l'on ajoute une variable  $u$  dont la puissance correspond au nombre d'éléments d'une séquence, alors

$$(2) \quad \mathfrak{S}(x, u) = u\mathfrak{A}(x) + u^2\mathfrak{A}^2(x) + \cdots = \frac{u\mathfrak{A}(x)}{1 - u\mathfrak{A}(x)}.$$

Une séquence est dite *primitive* si elle n'est pas la répétition d'une autre séquence. La séquence  $CBBC$  est primitive contrairement à  $CBCB = (CB)^2$ . Soit  $\mathcal{SP}$  la classe combinatoire des séquences primitives et  $\mathfrak{SP}(x, u)$  sa série génératrice. Toute séquence s'écrit de manière unique comme une puissance d'une séquence primitive. Les séries génératrices des séquences et des séquences primitives vérifient donc la relation

$$\mathfrak{S}(x, u) = \sum_{k \geq 1} \mathfrak{SP}(x^k, u^k).$$

## 1. Généralités

---

Pour inverser cette équation, nous utilisons la *formule d'inversion de Möbius* [FS09, Equation (3), p.722]. Elle donne l'équivalence

$$a_n = \sum_{d|n} b_d \iff b_n = \sum_{d|n} \mu(d) a_{n/d},$$

où  $\mu$  est la *fonction de Möbius* définie pour tout entier naturel non nul  $k$  par

$$\mu(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est un produit d'un nombre pair de premier distincts} \\ -1 & \text{si } k \text{ est un produit d'un nombre impair de premier distincts} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En utilisant la formule d'inversion de Möbius, on obtient

$$\mathcal{SP}(x, u) = \sum_{k \geq 1} \mu(k) \mathfrak{S}(x^k, u^k) = \sum_{k \geq 1} \mu(k) \frac{u^k \mathfrak{A}(x^k)}{1 - u^k \mathfrak{A}(x^k)}.$$

On définit un *cycle* comme une séquence à permutation circulaire près. Autrement dit, pour entier un naturel  $l$ , les séquences  $A_1 \cdots A_k$  et  $A_l \cdots A_k A_1 \cdots A_{k-1}$  correspondent au même cycle. Le cycle correspondant à une séquence  $A_1 \cdots A_k$  est noté  $(A_1 \cdots A_k)$ . Soit  $\mathcal{C}$  la classe combinatoire des cycles composés d'objets combinatoires de  $\mathcal{A}$ . Un cycle est dit *primitif* si toutes ses séquences sont primitives. Le nombre de séquences associées à un cycle primitif à  $k$  éléments est  $k$ . Si bien que nous devons appliquer la transformation  $u^k \mapsto \frac{u^k}{k}$  à  $\mathcal{SP}(x, u)$  pour obtenir  $\mathfrak{CP}(x, u)$ . La série génératrice  $\mathfrak{CP}(x, u)$  des cycles primitifs est donc égale à

$$\mathfrak{CP}(x, u) = \int_0^u \mathcal{SP}(x, v) \frac{dv}{v}.$$

Si nous remplaçons  $\mathcal{SP}(x, v)$  par sa valeur, en intégrant chaque terme de la somme, nous obtenons

$$(3) \quad \mathfrak{CP}(x, u) = \sum_{k \geq 1} -\frac{\mu(k)}{k} \log(1 - u^k \mathfrak{A}(x^k)).$$

De même que pour les séquences, un cycle s'écrit de manière unique comme la puissance d'un cycle primitif. En découle la relation

$$(4) \quad \mathfrak{C}(x, u) = \sum_{k \geq 1} \mathfrak{CP}(x^k, u^k).$$

Il ne nous reste plus qu'à combiner les équations (3) et (4). Pour cela, nous devons utiliser la relation

$$\frac{\varphi(k)}{k} = \sum_{d|k} \frac{\mu(d)}{d},$$

où  $\varphi$  est l'indicatrice d'Euler, à savoir  $\varphi(k)$  est égal au nombre d'entiers naturels plus petits que  $k$  et premiers avec  $k$ . Finalement, nous obtenons une formule

pour la série génératrice  $\mathfrak{C}(x, u)$  qui ne dépend que de  $\mathfrak{A}(x)$  :

$$(5) \quad \mathfrak{C}(x, u) = \sum_{k \geq 1} -\frac{\varphi(k)}{k} \log(1 - u^k \mathfrak{A}(x^k)).$$

Si la série génératrice  $\mathfrak{A}$  est multivariée, le résultat reste vrai, il suffit de mettre à la puissance  $k$  toutes les variables de  $\mathfrak{A}$ .

## 2. Permutations

Les permutations sont des objets classiques de la combinatoire énumérative. Nous définissons dans cette partie les statistiques classiques qui apparaîtront dans ce manuscrit. Le lecteur intéressé pourra consulter [Bón12] pour une introduction complète aux permutations.

DÉFINITION 1.2.1. Soit  $n$  un entier non nul, une *permutation* de taille  $n$  est une bijection de l'ensemble  $\llbracket 1, n \rrbracket$  dans lui même.

On note  $\mathfrak{S}_n$  l'ensemble des permutations de taille  $n$ . Une permutation correspond également à un réarrangement des valeurs  $1, \dots, n$ . De ce fait, on utilise la notation  $\sigma_i = \sigma(i)$  et on représente une permutation par la séquence  $\sigma_1 \cdots \sigma_n$ . Soit  $m = a_1 \cdots a_n$  une séquence d'entiers quelconques et deux à deux distincts. On appelle *standardisé* de  $m$  la permutation  $\sigma_1 \cdots \sigma_n$  telle que les  $\sigma_i$  soient dans le même ordre relatif que les  $a_i$ , c'est-à-dire que  $\sigma_i < \sigma_j$  si et seulement si  $a_i < a_j$ , et on note  $\sigma = \text{std}(m)$ .

Dans la section suivante, nous définissons les statistiques dont nous avons besoin. Le cas des motifs fait l'objet d'une section à part.

### 2.1. Quelques statistiques classiques sur les permutations

Tout au long des prochaines définitions, nous prenons la permutation

$$\sigma' = 4 \ 2 \ 7 \ 1 \ 3 \ 6 \ 5$$

comme exemple.

Soit  $i$  un entier, la suite  $(\sigma^n(i))_{n \geq 0}$  est nécessairement périodique, si on note  $p$  sa période minimale, le mot parenthésé  $(i \sigma(i) \cdots \sigma^{p-1}(i))$  est appelé un *cycle*. On considère comme égaux le cycle  $(\sigma^k(i), \dots, \sigma^{p-1}(i), i, \sigma(i), \dots, \sigma^{k-1}(i))$  et le cycle  $(i, \sigma(i), \dots, \sigma^{p-1}(i))$  de sorte que tout entier  $i$  apparaisse dans un unique cycle. Si l'on note  $C_1, \dots, C_k$  les cycles de la permutation  $\sigma$ , on dit que  $\sigma$  est le produit de  $C_1, \dots, C_k$  et on écrit  $\sigma = C_1 \cdots C_k$ , on dit aussi que  $\sigma = C_1 \cdots C_k$  est l'écriture de  $\sigma$  en cycles disjoints. Par exemple l'écriture de la permutation  $\sigma'$  est  $\sigma' = (14)(2)(375)(6)$ . Une permutation n'ayant qu'un seul cycle est une *permutation cyclique*. Le nombre de permutations de taille  $n$  ayant  $k$  cycles est appelé le *nombre de Stirling de première espèce*.

Le nombre de maxima/minima de gauche à droite/de droite à gauche sont quatre statistiques qui sont également comptées par les nombres de Stirling de première espèce. Un *maximum de gauche à droite* est un indice  $i$  tel que  $\sigma_i = \max_{1 \leq j < i} \sigma_j$  et un *maximum de droite à gauche* est un indice  $i$  tel que  $\sigma_i = \max_{i \leq j \leq n} \sigma_j$ . Les définitions d'un *minimum de gauche à droite* et d'un *minimum de droite à gauche* s'obtiennent en remplaçant max par min dans les deux définitions précédentes. Les ensembles de chacun de ces quatre types d'éléments sont notés respectivement  $\text{MGD}(\sigma)$ ,  $\text{MDG}(\sigma)$ ,  $\text{mGD}(\sigma)$  et  $\text{mDG}(\sigma)$ . Par exemple, nous avons  $\text{MGD}(\sigma') = \{1, 3\}$ ,  $\text{MDG}(\sigma') = \{3, 6, 7\}$ ,  $\text{mGD}(\sigma') = \{1, 2, 4\}$  et  $\text{mDG}(\sigma') = \{4, 5, 7\}$ . Il est clair que ces quatre statistiques sont équidistribuées, il suffit soit de lire la permutation de droite à gauche soit de prendre le complémentaire à  $n + 1$  de chaque entier. Par contre, pour montrer qu'elles sont effectivement comptées par les nombres de Stirling de première espèce, on utilise la « transformation fondamentale » de Foata et Schützenberger ([Sta12, Proposition 1.3.1] et [FS70, Section 1.3]). Appliquer la « transformation fondamentale » à une permutation  $\sigma$  signifie mettre des parenthèses autour de  $\sigma$  et une parenthèse fermante suivie d'une parenthèse ouvrante avant chaque maximum de gauche à droite. Par exemple à partir de la permutation  $\sigma = 2\ 4\ 1\ 6\ 7\ 5\ 3$  on obtient la permutation  $(2)(4\ 1)(6)(7\ 5\ 3) = \sigma'$ .

Une *excédence* est un entier  $i$  tel que  $\sigma_i \geq i$ , on dit de plus qu'elle est *stricte* si  $\sigma_i \neq i$ . Par exemple les excédences de  $\sigma'$  sont 1, 2, 3 et 6. Une *descente*<sup>1</sup> est un entier  $\sigma_i$  tel que  $\sigma_i > \sigma_{i+1}$ . Inversement, un entier  $\sigma_i$  tel que  $\sigma_i < \sigma_{i+1}$  est appelé une *montée*, par convention  $\sigma_n$  est également une montée. Par exemple les descentes de  $\sigma'$  sont 4, 6 et 7 et ses montées sont 1, 2, 3 et 5. Un *recul* est un entier  $\sigma_i$  tel que  $\sigma_i + 1$  est à sa gauche. Réciproquement, une *avance* est un entier  $\sigma_i$  tel que  $\sigma_i + 1$  est à sa droite. Par exemple les reculs de  $\sigma'$  sont 1, 3, 5 et 6. Les statistiques nombres d'excédences strictes, de descentes et de reculs sont équidistribuées, c'est-à-dire que pour tout  $k$ , les nombres de permutations à  $k$  excédences, à  $k$  descentes strictes et à  $k$  reculs sont égaux. Pour les deux dernières il suffit de considérer la permutation inverse, l'indice d'une descente se transforme ainsi en recul. De plus, on envoie une descente sur une excédence stricte en appliquant la « transformation fondamentale » puis en prenant l'inverse de la permutation obtenue.

Une *inversion* est une paire d'entiers  $(i, j)$  telle que  $i < j$  et  $\sigma_i > \sigma_j$ . Par exemple, les inversions de  $\sigma'$  sont

$$(4, 2), (4, 1), (4, 3), (2, 1), (7, 1), (7, 3), (7, 6), (7, 5), (6, 5).$$

L'indice majeur inverse d'une permutation est la somme de ses reculs. Par exemple l'indice majeur inverse de  $\sigma'$  est  $1 + 3 + 5 + 6 = 15$ . Le nombre d'inversions d'une permutation est noté  $\text{inv}(\sigma)$  et l'indice majeur inverse est noté  $\text{imaj}(\sigma)$ . Ces deux statistiques sont également équidistribuées. Une statistique

---

1. Ce n'est pas la définition usuelle d'une descente étant donné que l'image  $p_i$  est mise en avant plutôt que l'indice  $i$ .

équidistribuée avec le nombre d'inversions est appelée une statistique *mahonienne* en référence à MacMahon qui a prouvé que l'indice majeur en est une [Mac15].

## 2.2. Motifs

Un *motif classique* d'une permutation  $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_n$  est une permutation  $\sigma' = \sigma'_1 \cdots \sigma'_k$  telle qu'il existe un sous-motif  $\sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_k}$  de  $\sigma$  tel que les lettres de  $\sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_k}$  soient dans le même ordre relatif que celles de  $\sigma'$ , *i.e.* pour tout  $u, v \in \llbracket 1, k \rrbracket$  différents,  $\sigma_{i_u} < \sigma_{i_v}$  si, et seulement si,  $\sigma'_u < \sigma'_v$ . Par exemple, la permutation  $\sigma = 6\ 2\ 5\ 4\ 1\ 3$  contient deux fois le motif  $2\ 3\ 1$  à savoir  $2\ 5\ 1$  et  $2\ 4\ 1$ . Cette notion a été généralisée par Babson et Steingrímsson [BS00] de la manière suivante. Le *motif généralisé* qui correspond au motif classique  $\sigma'_1 \cdots \sigma'_k$  est notée  $\sigma'_1 - \sigma'_2 - \cdots - \sigma'_k$ . Ne pas mettre de tiret entre deux entiers d'un motif impose que les entiers correspondants soient consécutifs dans  $\sigma$ . Par exemple, dans la permutation  $\sigma$ ,  $2\ 4\ 1$  est un motif  $2 - 31$  alors que  $2\ 5\ 1$  ne l'est pas. Par contre,  $2\ 5\ 1$  est un motif  $23 - 1$  mais  $2\ 4\ 1$  ne l'est pas. Néanmoins,  $2\ 5\ 1$  et  $2\ 4\ 1$  sont tous deux des motifs  $2 - 3 - 1$ . Certaines statistiques classiques peuvent être décrites en termes de motifs généralisés. Par exemple, une inversion correspond au motif  $2 - 1$  et une descente au motif  $21$ .

## 2.3. Permutations de type $B$

Dans le contexte des permutations de type  $B$  la notation  $\bar{i}$  correspond à  $-i$ .

DÉFINITION 1.2.2. Soit  $n$  un entier naturel non nul, une *permutation de type  $B$*  (ou *signée*) de taille  $n$  est une bijection  $\sigma$  de l'ensemble des entiers signés  $\{1, \bar{1}, 2, \bar{2}, \dots, n, \bar{n}\}$  dans lui-même vérifiant l'identité  $\sigma(\bar{i}) = \overline{\sigma(i)}$ .

Une permutation de type  $B$  est entièrement définie par les images de  $1, \dots, n$ . De même que pour les permutations de taille  $n$ , on représente  $\sigma$  sous forme de mot  $\sigma_1 \cdots \sigma_n$ , où  $\sigma_i = \sigma(i)$ . Par exemple,  $\bar{2}\bar{3}\bar{1}\bar{4}$  est une permutation de type  $B$  de taille 4.

REMARQUE 1.2.3. La terminologie « type  $B$  » provient de la classification des groupes de Coxeter [BB05]. Le groupe des permutations signées de taille  $n$  correspond au groupe  $\mathcal{B}_n$ . Quant au groupe des permutations de taille  $n$ , il correspond au groupe  $\mathcal{A}_{n-1}$ , on parle donc de *type  $A$* .

L'équivalent en type  $B$  des montées et des descentes sont les montées signées et les descentes signées. Soit  $\sigma$  une permutation de type  $B$  et  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Avec la convention  $\sigma_{n+1} = n + 1$ , l'entier  $|\sigma_i|$  est une *montée signée* si  $0 < \sigma_i < |\sigma_{i+1}|$ , sinon c'est une *descente signée* et on a  $\sigma_i < 0$  ou  $\sigma_i > \sigma_{i+1}$ . Soit  $\sigma$  la permutation signée  $3\bar{1}4\bar{2}\bar{6}5\bar{7}$ . L'ensemble de ses montées signées est  $\{2, 5, 7\}$  et l'ensemble de ses descentes signées est  $\{1, 3, 4, 6\}$ .

## 2.4. Permutations affines

Les permutations affines de taille  $n$  sont une généralisation des permutations de taille  $n$ . Elles réalisent le groupe de Coxeter  $\tilde{\mathcal{A}}_{n-1}$  [BB05].

DÉFINITION 1.2.4. Soit  $n$  un entier naturel non nul. Une *permutation affine* de taille  $n$  est une bijection  $\sigma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  telle que  $\sum_{i=1}^n \sigma(i) = \sum_{i=1}^n i$  et telle que pour tout entier relatif  $i$  on ait  $\sigma(i+n) = \sigma(i) + n$ .

Une permutation affine est entièrement déterminée par l'image de  $n$  entiers consécutifs. Pour une permutation affine  $\sigma$  de taille  $n$ , nous utilisons la notation  $\sigma = [\sigma(0), \dots, \sigma(n-1)]$ . Par exemple,  $\sigma' = [5, -2, 0, 2, 7, 10, 3, 4, 12, 6, 8, 9, 14]$  est une permutation affine de taille 13. Pour toute permutation  $\sigma$  de taille  $n$ , il existe une unique permutation affine  $\tilde{\sigma}$  de taille  $n$  telle que  $\tilde{\sigma}(i) = \sigma(i)$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . En ce sens, l'ensemble des permutations de taille  $n$  est un sous-groupe de l'ensemble des permutations affines de taille  $n$ . Nous étendons les notions d'inversions et d'excédences strictes. Une *inversion* d'une permutation affine  $\sigma$  est un couple  $(i, j)$  où  $i < j$ ,  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  et  $\sigma(i) > \sigma(j)$ . Une *excédence stricte* est un entier  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  tel que  $\sigma(i) > i$ . À titre d'exemple, l'ensemble des excédences strictes de  $\sigma'$  est  $\{0, 4, 5, 8, 12\}$  et l'ensemble des inversions est

$$\{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 6), (0, 7), (4, 6), (4, 7), (4, 9), (5, 6), (5, 7), (5, 9), \\ (5, 10), (5, 11), (8, 9), (8, 10), (8, 11), (8, 14), (12, 14), (12, 15)\}.$$

Une *permutation affine évitant 321* est une permutation affine telle qu'il n'existe pas trois entiers  $i, j$  et  $k$  vérifiant les inégalités  $\sigma(i) > \sigma(j) > \sigma(k)$ .

## 3. Arbres

Cette section a pour but d'introduire les différentes notions d'arbres que nous utilisons dans cette thèse. Pour une étude plus complète des arbres le lecteur est invité à consulter [Bón15, Chapter 4].

DÉFINITION 1.3.1. Un *arbre*  $A$  est un ensemble fini et non vide d'éléments, dit *sommets*, tel que

- (1) un sommet de  $A$  est désigné comme étant la *racine* et
- (2) les sommets restants sont partitionnés en  $m \geq 0$  ensembles disjoints  $A_1, \dots, A_m$ , chacun muni d'une structure d'arbre.

Dans le contexte des arbres on utilise communément la terminologie ci-après (voir figure 2). Cette terminologie reste valable pour les autres structures arborescentes que nous définissons dans cette section. Les  $A_i$  sont les *sous-arbres* de  $A$ . Chaque racine des  $A_i$  est un *fils* de la racine de  $A$ , réciproquement, pour chaque racine des  $A_i$  la racine de  $A$  est son *père*. Plus généralement, un sommet  $v$  de  $A$  est l'*ancêtre* d'un sommet  $u$  s'il existe une suite de sommets

$(s_0, \dots, s_k)$  où  $s_0 = u$  avec  $s_k = v$  telle que pour tout  $i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ ,  $s_{i+1}$  est le père de  $s_i$ , inversement,  $u$  est un *descendant* de  $v$ . La suite des sommets  $(s_0, \dots, s_k)$  est le *chemin* de  $u$  à  $v$ . La *hauteur* d'un sommet  $s$  est le nombre de sommets moins 1 du chemin de  $s$  à la racine. Un couple de sommets  $(u, v)$  où  $u$  est le père de  $v$  est une *arête*.

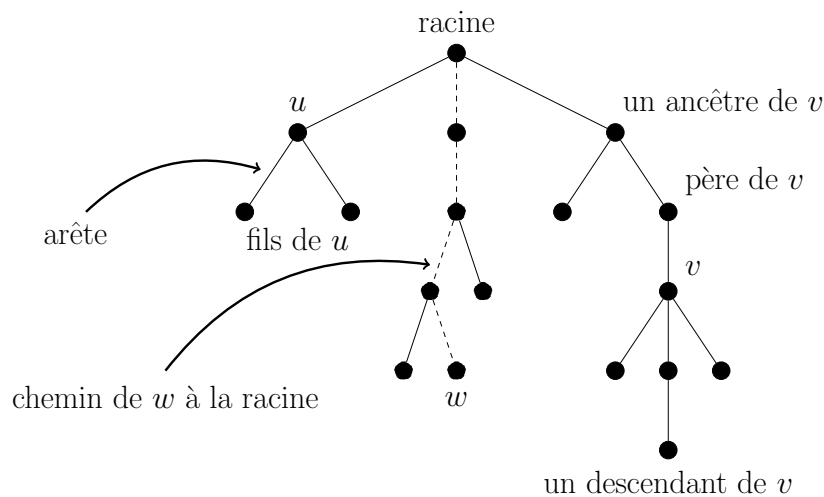


FIGURE 2. Illustration de la terminologie associée aux arbres.

DÉFINITION 1.3.2. Un *arbre ordonné*  $A$  est un arbre dont les fils de chaque sommet sont ordonnés. Récursivement, c'est un ensemble fini et non vide de sommets tel que

- (1) un sommet de  $A$  est désigné comme étant la racine, et,
- (2) les sommets restants sont partitionnés de manière ordonnée en  $m \geq 0$  ensembles non vides et disjoints  $(A_1, \dots, A_m)$ , chacun muni d'une structure d'arbre ordonné.

Quand nous représentons un arbre ordonné, l'ordre des sous-arbres de gauche à droite correspond à l'ordre  $(T_1, \dots, T_m)$ . La différence entre les arbres et les arbres ordonnés est illustrée dans la figure 3. Les deux objets correspondent au même arbre mais à deux arbres ordonnés différents. Les arbres ordonnés à  $n + 1$  sommets font partie des objets combinatoires comptés par  $Cat_n$  [Bón15, Theorem 4.4.3].

DÉFINITION 1.3.3. Soit  $m$  un entier naturel supérieur ou égal à deux. Un *arbre  $m$ -aire*  $A$  est soit l'ensemble vide, soit un ensemble fini et non vide de sommets tel que

- (1) un sommet de  $A$  est désigné comme étant la racine, et,
- (2) les sommets restants sont partitionnés de manière ordonnée en  $m$  ensembles disjoints potentiellement vides  $(A_1, \dots, A_m)$ , chacun muni d'une structure d'arbre  $m$ -aire.

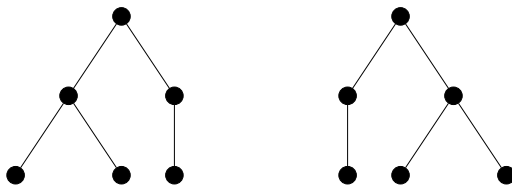


FIGURE 3. Deux représentations du même arbre, mais de deux arbres ordonnés différents.

La figure 4 illustre la différence entre les arbres ordonnés et les arbres  $m$ -aires : les deux objets de la figure correspondent au même arbre ordonné mais à deux arbres 2-aires différents. La *taille* d'un arbre  $m$ -aire est son nombre de

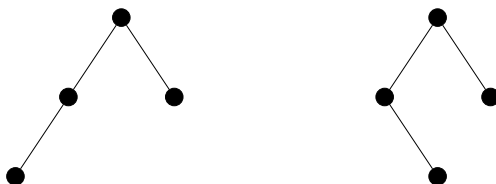


FIGURE 4. Deux représentations du même arbre ordonné, mais de deux arbres 2-aires différents.

sommets. La figure 5 donne un exemple d'un arbre 3-aire et d'un arbre 2-aire.

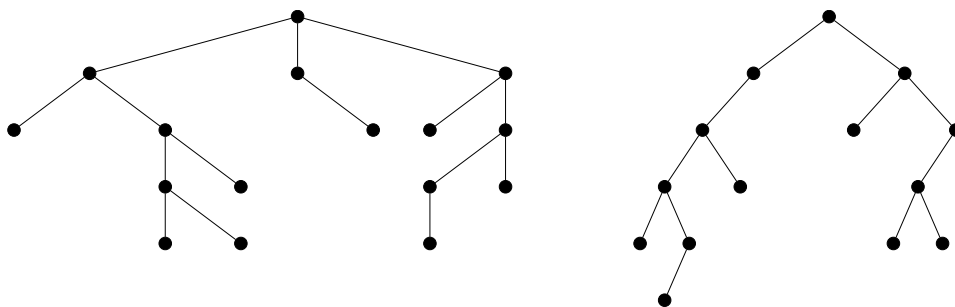


FIGURE 5. Un arbre 3-aire de taille 16 (gauche) et un arbre 2-aire de taille 14 (droite).

DÉFINITION 1.3.4. Les arbres 2-aires sont également appelés *arbres binaires*.

L'arbre  $A_1$  est le *sous-arbre gauche* de  $A$  et  $A_2$  le *sous-arbre droit*. De même, la racine de  $A_1$  est le fils gauche de la racine de  $A$  et celle de  $A_2$  est le fils droit. On note  $\mathcal{AB}$  l'ensemble des arbres binaires. Les arbres binaires à  $n$  sommets donnent un autre exemple de structures arborescentes comptées par  $Cat_n$  [Bón15, Theorem 4.4.1].



Dans ce manuscrit, on considère également des structures arborescentes étiquetées. Les arbres binaires décroissants sont un exemple classique de telles structures.

DÉFINITION 1.3.5. Soit  $n$  un entier naturel. Un *arbre binaire décroissant*  $ABD$  de taille  $n$  est un arbre binaire  $AB$  de taille  $n$  dont on numérote les sommets, de manière distincte, de 1 à  $n$  de sorte que l'étiquette d'un sommet soit plus petit que celle de son père. L'arbre binaire  $AB$  est la *forme* de  $ABD$ .

La figure 6 donne l'exemple d'un arbre binaire décroissant de taille 14. Les

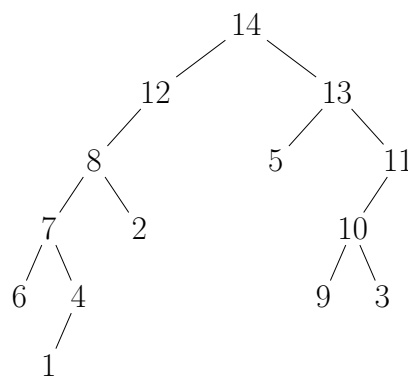


FIGURE 6. Un arbre binaire décroissant de taille 14.

arbres binaires décroissants de taille  $n$  sont comptés par  $n!$ . On peut montrer cette assertion à l'aide des séries génératrices. Notons  $\mathfrak{ABD}$  la série génératrice exponentielle des arbres binaires décroissants

$$\mathfrak{ABD}(x) = \sum_{n \geq 0} |\mathcal{ABD}_n| \frac{x^n}{n!},$$

où  $\mathcal{ABD}_n$  est l'ensemble des arbres binaires décroissants de taille  $n$ . Nous devons donc montrer que  $\mathfrak{ABD}(x) = \frac{1}{1-x}$ . Un arbre binaire décroissant est soit vide soit composé d'une racine, d'un sous-arbre binaire gauche décroissant, d'un sous-arbre binaire droit décroissant et d'une partition ordonnée de  $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$  en deux sous ensembles distincts. Ainsi, on a l'identité

$$(6) \quad \mathfrak{ABD}(x) = 1 + \int_0^x \mathfrak{ABD}(x)^2 dx.$$

La récurrence sur les coefficients induite par l'équation impose qu'il existe une unique série formelle solution de l'équation (6). De plus, il est facile de vérifier que la série formelle  $\frac{1}{1-x}$  est solution. Une explication alternative de ce résultat consiste à donner une bijection entre les arbres binaires décroissants de taille  $n$  et les permutations de taille  $n$ . Soit  $m$  un mot taille  $n$  dont tous les lettres sont des entiers distincts. Il existe une unique décomposition  $m = m_g M m_d$  où  $M$  est le plus grand entier de  $m$ . Récursivement,  $ABD(m)$  est l'arbre binaire dont la racine a pour étiquette  $M$  et dont le sous-arbre gauche (resp. droit) est

$ABD(m_g)$  (resp.  $ABD(m_d)$ ). L'arbre binaire étiqueté associé au mot vide est l'unique arbre binaire décroissant de taille 0. L'application qui à une permutation  $\sigma$  de taille  $n$  associe l'arbre binaire décroissant  $ABD(\sigma)$  est une bijection [Sta12, Proposition 1.5.3]. Par exemple, notons  $ABD$  l'arbre binaire décroissant de la figure 6 et  $\sigma$  la permutation 6 7 1 4 8 2 12 14 5 13 9 10 3 11, alors  $ABD(\sigma) = ABD$ .

Il est également possible d'énumérer les arbres binaires décroissants à forme fixée. Soit  $AB$  un arbre binaire, l'énumération de l'ensemble  $\mathcal{ABD}(AB)$  des arbres binaires décroissants de forme  $AB$  est donnée par la formule [Knu98b, Section 5.1.4 Exercice 20], dite *formule des équerres*,

$$(7) \quad \frac{n!}{\prod_{s \in AB} d(s)},$$

où  $d(s)$  est le nombre de descendants de  $s$ , le sommet  $s$  compris. Par exemple, notons  $AB$  l'arbre binaire de la figure 5. Le nombre d'arbres binaires décroissants de forme  $AB$  est

$$\frac{14!}{14 \times 7 \times 6 \times 6 \times 4 \times 4 \times 3 \times 2} = 257\,400.$$

## 4. Chemins

Soit  $P$  un sous-ensemble de  $\mathbb{Z}^2$  et  $l$  un entier naturel. Un *chemin* dans  $\mathbb{Z}^2$  de longueur  $l$  à pas dans  $P$  est une suite finie de points  $p_0, \dots, p_l$  de  $\mathbb{Z}^2$ , définie à translation près, telle que  $p_{i+1} - p_i$  soit dans  $P$  pour tout  $0 \leq i \leq l - 1$ . On dit que le chemin part de  $p_0$  et arrivent en  $p_l$ . Dans la suite, les *pas nord*, *pas sud*, *pas est*, *pas ouest*, *pas diagonal nord-est* et *pas diagonal sud-est* sont respectivement les pas  $(0, 1)$ ,  $(0, -1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(1, 1)$  et  $(1, -1)$ . Les pas est et ouest (resp. nord et sud) sont également appelés pas *horizontaux* (resp. *verticaux*). Par exemple, la figure 7 représente des chemins de longueur 6 à pas nord et est. Un chemin peut être également défini par la séquence  $(p_1 - p_0) \cdots (p_l - p_{l-1})$  de ses pas.

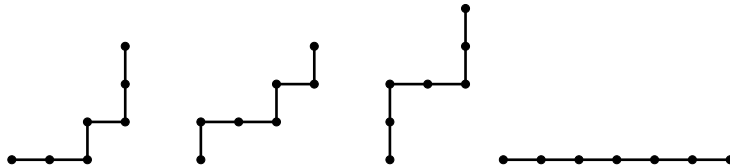


FIGURE 7. Quatre chemins de longueur 6.

Soit  $C = \{p_0, \dots, p_l\}$  et  $C' = \{p'_0, \dots, p'_l\}$  deux chemins composés de pas horizontaux et verticaux tels que  $p_0 = p'_0$  et  $p_l = p'_l$ . On dit que  $C'$  est *inférieur* (resp. *strictement inférieur*) à  $C$  si pour tout  $i \in \llbracket 1, l - 1 \rrbracket$  l'ordonnée de  $p'_i$  est inférieure (resp. strictement inférieure) à l'ordonnée de  $p_i$ . Si l'on représente

les deux chemins à partir du même point de départ cela signifie que  $C'$  est situé sous  $C$  (figure 8).

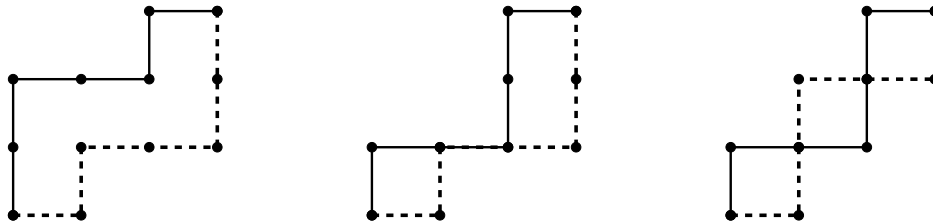


FIGURE 8. Positions relatives de deux chemins  $C$  et  $C'$  (en pointillé). De gauche à droite :  $C'$  est strictement inférieur à  $C$ ,  $C'$  est inférieur à  $C$ ,  $C'$  n'est pas inférieur à  $C$ .

Parmi les différentes familles de chemins, nous avons besoin des chemins de Dyck et des chemins de Dyck bilatères.

DÉFINITION 1.4.1. Un *chemin de Dyck bilatère* de taille  $n$  est un chemin à pas diagonaux sud-est et nord-est partant de  $(0, 0)$  et arrivant en  $(2n, 0)$ . Il est en particulier de longueur  $2n$ .

DÉFINITION 1.4.2. Un *chemin de Dyck* de taille  $n$  est un chemin de Dyck bilatère de taille  $n$  dont tous les points ont une ordonnée positive ou nulle.

La figure 9 donne un exemple de chaque. Il est facile de montrer que les premiers sont comptés par la suite  $\left(\binom{2n}{n}\right)_{n \geq 0}$ . Les deuxièmes, quant à eux, sont comptés par les nombres de Catalan. On peut par exemple prouver cela par lemme cyclique (ou lemme de Raney) [Lot83]. Ils sont donc équiénumérés avec les arbres ordonnés à  $n + 1$  sommets. Une bijection simple entre ces deux familles d'objets est la suivante [DZ80]. Soit  $CD$  un chemin de Dyck de taille  $n$ . Notons  $B$ , comme « bas », le pas diagonal sud-est et  $H$ , comme

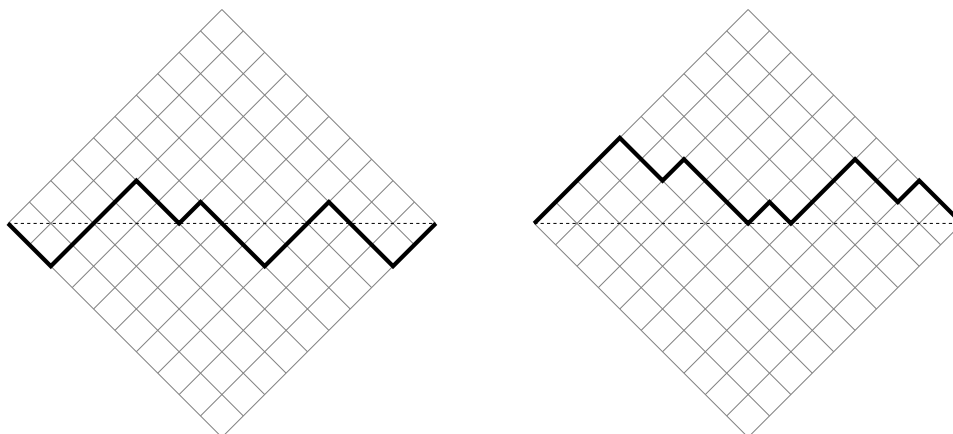


FIGURE 9. Un chemin de Dyck bilatère (gauche) et un chemin de Dyck (droite) de taille 10.

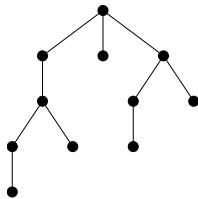


FIGURE 10. L'arbre ordonné correspondant au chemin de Dyck de la figure 9.

« haut », le pas diagonal nord-est. Un *chemin de Dyck primitif* est un chemin de Dyck dont les seuls points ayant une ordonnée nulle sont les points de début et de la fin. Il existe une unique décomposition  $CD = HCD_1B \cdots HCD_kB$  telle que pour tout  $i$  le facteur  $HCD_iB$  est un chemin de Dyck primitif. Nous définissons récursivement l'arbre ordonné  $\text{arbre}(CD)$  comme la racine dont les sous-arbres ordonnés sont  $\text{arbre}(CD_1), \dots, \text{arbre}(CD_k)$ . Ainsi, l'arbre ordonné correspondant au chemin de Dyck de la figure 9 est celui de la figure 10.

REMARQUE 1.4.3. À travers cette bijection, à chaque pas  $H$  de  $CD$  terminant en un point  $(*, k)$  correspond un sommet de  $\text{arbre}(CD)$  de hauteur  $k$ .

Une statistique classique sur ces objets est le nombre de *pics*, c'est-à-dire le nombre d'occurrences d'un pas diagonal nord-est suivi d'un pas diagonal sud-est. Par exemple, le chemin à gauche (resp. à droite) de la figure 9 a 3 (resp. 5) pics. À taille fixée, l'unique chemin de Dyck bilatère sans pic est appelée la *grande vallée*.

## 5. Diagrammes de Ferrers

Cette section est consacrée aux diagrammes de Ferrers. Une partie de la terminologie que nous introduisons n'est pas standard.

Soit  $n$  un entier naturel, un *diagramme de Ferrers* de taille  $n$  est un ensemble de  $n$  cellules de même taille, organisées en lignes alignées à gauche et ordonnées de haut en bas de la plus grande à la plus petite. Le cas des partitions de 4 est représenté dans la figure 11. La *forme* d'un diagramme de Ferrers est la suite des longueurs de ses lignes en commençant par la plus grande. Par exemple, de gauche à droite les formes des diagrammes de Ferrers de la figure 11 sont les partitions de 4 :  $\{(4), (3, 1), (2, 2), (2, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\}$ . Par convention, il existe un unique diagramme de Ferrers de taille 0. Dans ce manuscrit, nous autorisons qu'une colonne ou qu'une ligne puisse être vide, nous les représentons respectivement par des traits horizontaux situés au nord-est et par des traits verticaux situés au sud-ouest. Un exemple est donné en figure 12.

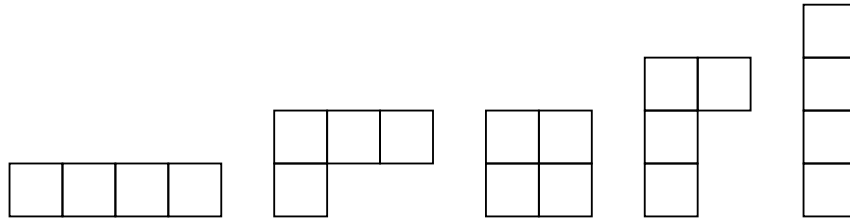


FIGURE 11. Diagrammes de Ferrers correspondant aux partitions de 4

Soit  $F$  un diagramme de Ferrers. On appelle *bord sud-est* de  $F$  le chemin, en bleu pointillé sur la figure 12, qui part du point le plus au sud-ouest, arrive au point le plus au nord-est et, intuitivement, longe le bord sud-est de  $F$  en prenant la convention que chaque colonne (resp. ligne) vide compte pour un pas vertical (resp. horizontal) au début (resp. à la fin). La taille de ce chemin correspond à la *longueur* de  $F$ . C'est également la somme du nombre de lignes et de colonnes que possède  $F$ . Par exemple, le diagramme de Ferrers de la figure 12 est de longueur 16. De plus, il possède 7 lignes ainsi que 9 colonnes et on a bien  $16 = 7 + 9$ . Par convention la longueur de l'unique diagramme de Ferrers vide est 0. On appelle *cellule sud-est* toute cellule de  $F$  dont un côté au moins correspond à un pas du bord sud-est de  $F$ , elles sont en gris dans la figure 12

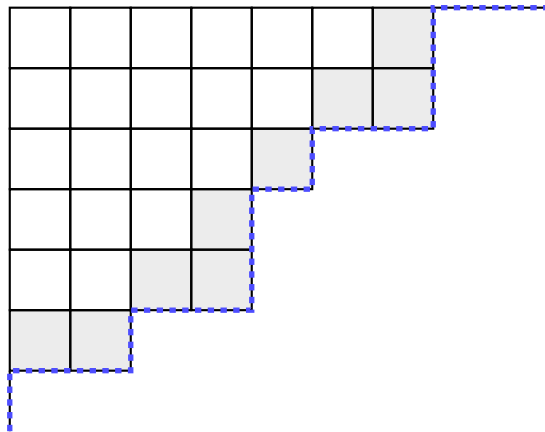


FIGURE 12. Illustration du bord sud-est (bleu pointillé) d'un diagramme de Ferrers.

Nous aurons également besoin de la notion de *diagonale principale*. Elle correspond à la droite passant par le coin nord-ouest d'un diagramme de Ferrers et dont le coefficient directeur est  $-1$ . Un exemple est donné dans la figure 13. Un diagramme de Ferrers invariant par la symétrie axiale d'axe la diagonale principale est *symétrique*.

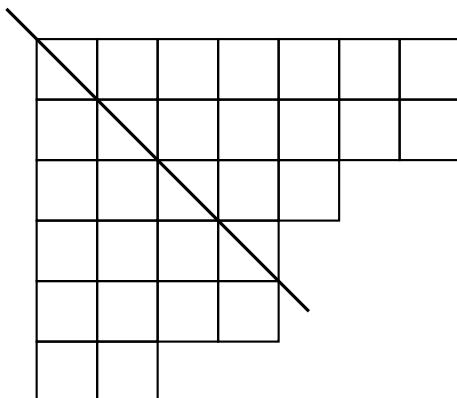


FIGURE 13. La diagonale principale d'un diagramme de Ferrers.

Enfin, la dernière notion dont nous avons besoin est celle des coins. Un *coin* est une cellule dont les côtés sud et est correspondent à des pas du bord sud-est. Un *coin interne* est la succession d'un pas vertical et d'un pas horizontal en lisant le bord sud-est du sud-ouest au nord-est. Par exemple, le diagramme de Ferrers de la figure 13 a quatre coins et cinq coins internes. On note  $c(F)$  et  $ci(F)$  respectivement le nombre de coins et le nombre de coins internes d'un diagramme de Ferrers  $F$ . Si un diagramme de Ferrers n'a ni de ligne vide ni de colonne vide, alors le nombre de coins est égal au nombre de coins internes plus un.

À un diagramme de Ferrers  $F$  ayant  $k$  colonnes, on associe le *diagramme de Ferrers décalé*  $\bar{F}$  obtenu en ajoutant successivement des lignes de taille  $k, k - 1, \dots, 1$  au-dessus de  $F$ . La longueur, le bord sud-est, les coins et les cellules sud-est de  $\bar{F}$  correspondent respectivement à la longueur, au bord sud-est, aux coins et aux cellules sud-est de  $F$ . On appelle *cellule diagonale* les  $k$  cellules qui sont tout à droite des  $k$  lignes du dessus, elles sont en gris dans la figure 14.

Les objets combinatoires au cœur de la partie 1 sont les tableaux.

DÉFINITION 1.5.1. Un *tableau* est un diagramme de Ferrers dont les cellules contiennent des symboles.

On étend aux tableaux toute la terminologie des diagrammes de Ferrers.

## 6. Cartes combinatoires

Dans cette section nous introduisons brièvement les cartes combinatoires. Le lecteur intéressé par ce sujet pour consulter l'ouvrage de Lando et Zvonkin [LZ04].

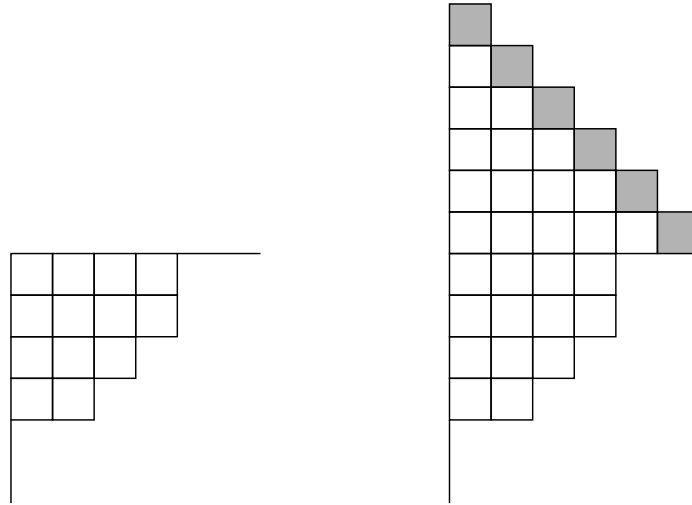


FIGURE 14. Un diagramme de Ferrers (gauche) et son diagramme de Ferrers décalé (droite).

Un *graphe* est la donnée d'un ensemble de *sommets*  $\mathcal{S}$  et d'un ensemble d'*arêtes*  $\mathcal{A} \subset \{\{s, s'\} \mid (s, s') \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \text{ et } s \neq s'\}$ . Les graphes que nous considérons sont donc non orientés et simples (sans boucle ni arête multiple). La *taille* d'un graphe est son nombre de sommets. Pour dessiner un graphe, un sommet est représenté par un point et une arête entre deux sommets par une ligne continue reliant les deux points correspondants. Un graphe est dit *connexe* si pour toute paire de sommets  $(s, s')$  il existe une suite de sommets  $s_0, \dots, s_k$  telle que  $s_0 = s$ ,  $s_k = s'$  et  $\{s_i, s_{i+1}\} \in \mathcal{A}$  pour tout  $i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ . La suite  $s_0, \dots, s_k$  est un *chemin* de  $s$  à  $s'$ . Un *graphe cyclique* est un graphe connexe tel que chaque sommet appartient à exactement deux arêtes. Le seul graphe avec arêtes multiples que nous considérons dans ce manuscrit est le graphe cyclique de taille 2 composé de deux sommets reliés par deux arêtes. Un *sous-graphe* est la donnée d'un sous-ensemble  $\mathcal{S}'$  de  $\mathcal{S}$  et d'un sous-ensemble  $\mathcal{A}'$  de  $\mathcal{A}$  tel que  $\mathcal{A}' \subset \{\{s, s'\} \mid (s, s') \in \mathcal{S}' \times \mathcal{S}' \text{ et } s \neq s'\}$ .

Un *plongement* d'un graphe est un dessin dans lequel les arêtes ne peuvent se croiser qu'en leurs extrémités. Un graphe qui admet un plongement dans le plan est un *graphe planaire* (figure 15). Deux plongements d'une graphe sont considérés équivalents si le premier est obtenu à partir du second par une déformation continue dans laquelle les arêtes ne se croisent pas. Par exemple, les deux dessins de la figure 16 correspondent au même graphe mais à deux plongements différents. Une *carte combinatoire* est une classe d'équivalence de plongements d'un graphe. On peut montrer qu'elle est entièrement déterminée par le graphe sous-jacent dont chaque sommet est munit d'un ordre cyclique sur ses voisins. Une *carte planaire* est une carte combinatoire plongée dans le plan.

Les arbres et les arbres ordonnés, définis dans la section 3, ont une définition en termes de graphes et de cartes. Un arbre est un graphe connexe sans cycle

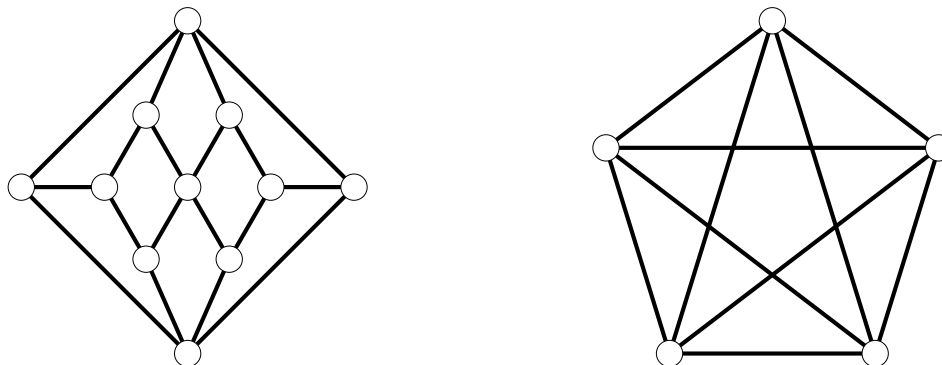


FIGURE 15. Un graphe planaire (gauche) et un graphe non planaire (droite).

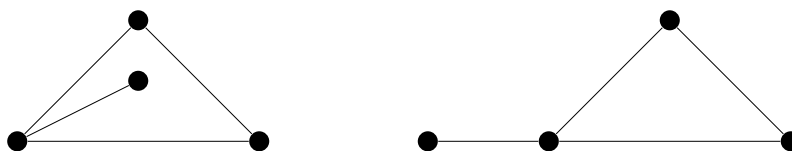


FIGURE 16. Deux plongements différents du même graphe.

dont un sommet est distingué (la racine). Un arbre ordonné est une carte planaire connexe et sans cycle dont un sommet est distingué (la racine) et dont un voisin de ce sommet est désigné comme son fils le plus à gauche.

## 7. Polyominos parallélogrammes

Le terme *polyomino* a été introduit par Golomb en 1954 pour désigner un ensemble connexe de cellules du plan quadrillé par le réseau  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Une *colonne* (resp *ligne*) est un ensemble maximal de cellules ayant une même abscisse (resp. ordonnée). Les quatre paramètres suivants sont souvent étudiés dans ces objets : l'*aire*, le *périmètre*, la *largeur* et la *hauteur*. Ils correspondent respectivement au nombre de cellules, à la longueur du chemin formé par le bord, au nombre de colonnes et au nombre de lignes. Nous nous concentrons dans cette section sur une sous-famille de polyominos.

DÉFINITION 1.7.1. Soit  $n$  un entier naturel non nul. Un *polyomino parallélogramme* de *demi-périmètre*  $n$  est un ensemble maximal de cellules de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , défini à translation près, contenu entre deux chemins de taille  $n$ , composés de pas nord et est, qui se croisent uniquement à l'origine et à la fin.



Le demi-périmètre peut également être calculé comme la somme du nombre de colonnes et du nombre de lignes. La figure 17 donne un exemple de polyomino parallélogramme d'aire 24, de demi-périmètre 15, de largeur 8 et de longueur 7.

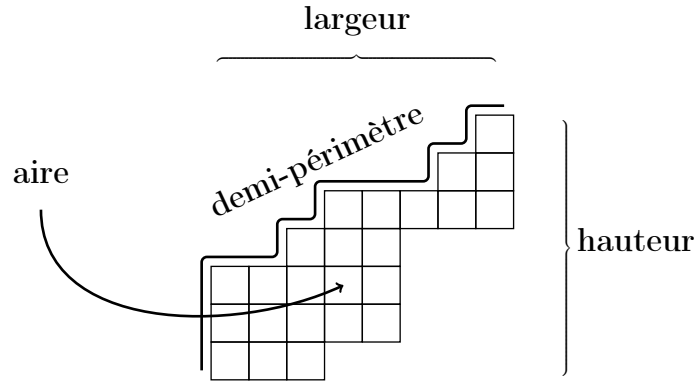


FIGURE 17. Un polyomino parallélogramme.

Il est connu depuis longtemps [DV84, GV85] que les polyominos parallélogrammes de demi-périmètre  $n + 1$  sont comptés par  $Cat_n$ . Nous présentons maintenant une bijection de Cheng, Eu et Fu [CEF07] entre les permutations de taille  $n$  qui évitent le motif  $3 - 2 - 1$  et les polyominos parallélogrammes de demi-périmètre  $n + 1$ . Soit  $P$  un polyomino parallélogramme de demi-périmètre  $n + 1$ . La première étape consiste à retirer la cellule la plus basse de chaque colonne. Si une colonne n'est composée que d'une cellule, on conserve le bord nord de la cellule après suppression. Notons  $\bar{P}$  l'objet ainsi obtenu. Le demi-périmètre de  $\bar{P}$  est  $n$ . Notons  $S$  et  $I$  les chemins respectivement supérieur et inférieur qui forment le bord de  $\bar{P}$ . La deuxième étape consiste à numéroter  $S$  et  $I$  de 1 à  $n$  en commençant par le pas le plus au sud-ouest. Enfin, notons  $\sigma$  la permutation associée à  $P$ , alors  $\sigma_i$  correspond au numéro du pas horizontal (resp. vertical) de  $I$  associé au pas horizontal (resp. vertical) de  $S$  numéroté par  $i$ , qui se trouve dans la même colonne (resp. ligne). Un intérêt de cette bijection est notamment que le nombre d'inversions de  $\sigma$  correspond à l'aire de  $\bar{P}$ . De plus, la hauteur est égal au nombre d'excédences strictes  $k$  plus 1 et la largeur à  $n - k$ . Si  $P$  désigne le polyomino parallélogramme de la figure 17 alors la permutation associée est  $\sigma = 4\ 7\ 1\ 2\ 8\ 3\ 9\ 5\ 6\ 10\ 13\ 11\ 14\ 12$ , tel qu'illustré dans la figure 18. De plus,  $\text{inv}(\sigma) = \text{aire}(\bar{P}) = \text{aire}(P) - \text{hauteur}(P) = 24 - 8 = 16$ .

## 8. Chaînes de Markov

Cette partie a vocation à expliquer sommairement ce qu'est une chaîne de Markov et à donner des conditions suffisantes pour qu'elle admette un unique

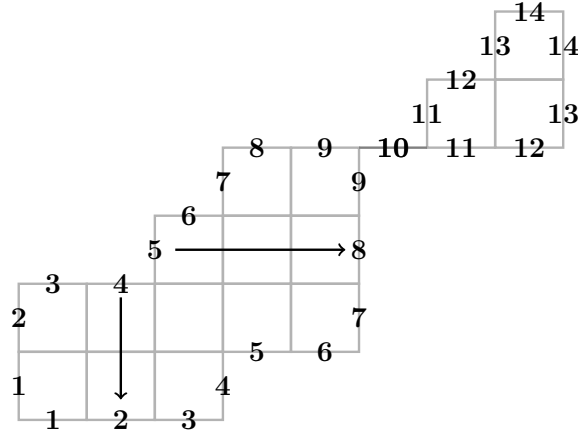


FIGURE 18. Illustration de la bijection entre les polyominos parallélogrammes et les permutations évitant le motif 3 – 2 – 1.

état stationnaire. On suppose connue la théorie de la mesure et la théorie des probabilités. Plus de détails sur ces théories ainsi que sur les chaînes de Markov pourront être trouvés dans le livre de Billingsley [Bil95]. Cette partie est largement inspiré des notes de cours de Marie-Line Chabanol et Jean-Jacques Ruch [CR13].

Soit  $E$  un ensemble fini ou dénombrable, on munit  $E$  de la tribu  $\mathcal{P}(E)$ . Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une suite de variables aléatoires à valeurs dans  $E$ , la loi de cette suite est une loi sur  $E^{\mathbb{N}}$  muni de la tribu engendrée par les cylindres. D'après le théorème de prolongement de Carathéodory, la loi de la suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  est caractérisée par la loi des vecteurs aléatoires  $(X_0, \dots, X_n)$ , où  $n \in \mathbb{N}$ . De plus, étant donné que  $E$  est au plus dénombrable, la loi  $(X_0, \dots, X_n)$  est caractérisée par la donnée de  $\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n)$  où  $x_0, \dots, x_n \in E$ .

DÉFINITION 1.8.1. Une suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  de variables aléatoires à valeurs dans  $E$  est une *chaîne de Markov d'espace d'états  $E$*  si, et seulement si pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et pour tout  $x_0, \dots, x_{k+1} \in E$  tels que  $\mathbb{P}(X_k = x_k, \dots, X_0 = x_0) > 0$ ,

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = x_{k+1} \mid X_k = x_k, \dots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{k+1} = x_{k+1} \mid X_k = x_k).$$

On dit de plus qu'elle est *homogène* si pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et  $x, y \in E$ ,

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = y \mid X_k = x) = \mathbb{P}(X_1 = y \mid X_0 = x).$$

L'indice  $n$  est à interpréter comme le temps. La particularité des chaînes de Markov est que la probabilité d'être sur un état donné au temps  $n + 1$ , dépend uniquement de l'état au temps  $n$ . Dans la suite toutes les chaînes de Markov que nous considérons sont homogènes.

DÉFINITION 1.8.2. On appelle *matrice de transition* la matrice  $M = (p_{x,y})_{x,y \in E}$  où

$$p_{x,y} = \mathbb{P}(X_1 = y \mid X_0 = x).$$

Cette probabilité est appelée la *probabilité de transition* pour aller de l'état  $x$  à l'état  $y$ .

Les entrées de la matrice de transition étant des probabilités elles sont inférieures ou égales à 1. De plus, la somme d'une ligne est évidemment égale à 1. Autrement dit, le vecteur colonne  $(1, \dots, 1)$  est un vecteur propre de valeur propre 1 pour la multiplication par la droite.

Une chaîne de Markov est entièrement déterminée par son état initial  $X_0$  et sa matrice de transition. Dans la suite on identifie une loi de probabilité  $\mu$  sur  $E$  avec le vecteur ligne  $(\mu(x))_{x \in E}$ .

PROPOSITION 1.8.3. Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une chaîne de Markov de matrice de transition  $M$ , et soit  $\mu_n$  la loi de  $X_n$ , pour tout entier naturel  $n$ . Alors,

$$\mu_n = \mu_0 M^n.$$

Lorsque nous définissons une chaîne de Markov, généralement seul la matrice de transition est spécifiée.

La matrice de transition peut être vue comme la matrice d'adjacence d'un graphe orienté pondéré. En effet, à toute matrice de transition on associe le graphe orienté pondéré  $G$  dont l'ensemble des sommets est  $E$ , l'ensemble des arêtes orientées est  $\{(x, y), p_{x,y} > 0\}$  et le poids d'une arête  $(x, y)$  est la probabilité  $p_{x,y}$ . Par exemple, soit  $p, q \in [0, 1]$ , la chaîne de Markov à deux états a pour matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix},$$

et le graphe correspondant est représenté dans la figure 19. On définit main-

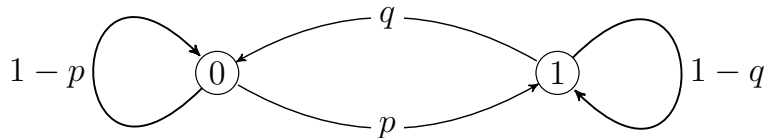


FIGURE 19. Chaîne de Markov à deux états.

tenant une notion d'accessibilité entre des états d'une chaîne de Markov.

DÉFINITION 1.8.4. Soit  $x, y \in E$  deux états, on dit que *l'état  $y$  est accessible depuis l'état  $x$*  si  $x = y$  ou s'il existe un chemin orienté sur  $G$  de l'état  $x$  vers l'état  $y$ . S'il existe également un chemin orienté de l'état  $y$  vers l'état  $x$ , on dit que *les états  $x$  et  $y$  communiquent*. Une chaîne de Markov dont tous les états

communiquent entre eux, *i.e.* dont le graphe est fortement connexe, est dite *irréductible*.

La chaîne de Markov de la figure 19 est irréductible contrairement à celle de la figure 20. Il nous reste une dernière notion à introduire, les probabilités

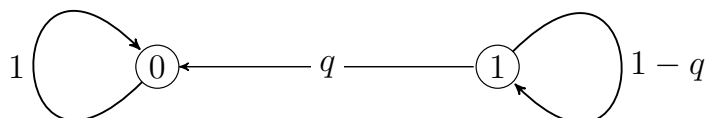


FIGURE 20. Une chaîne de Markov qui n'est pas irréductible.

stationnaires.

DÉFINITION 1.8.5. Soit  $\mu$  une loi de probabilité sur  $E$ . Elle est dite *stationnaire*, si  $\mu = \mu M$ , c'est-à-dire si pour tout état  $y$

$$\mu(y) = \sum_{x \in E} \mu(x) p_{x,y}.$$

Dans le cas dénombrable, il n'existe pas nécessairement de probabilité stationnaire ou au contraire il peut y en avoir une infinité. Toutefois, les chaînes de Markov que nous considérons dans ce manuscrit ont des espaces d'états finis, cadre dans lequel le comportement des probabilités stationnaires est mieux maîtrisé.

THÉORÈME 1.8.6. Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une chaîne de Markov dont l'espace des états est fini. Alors elle admet une loi de probabilité stationnaire, si de plus  $(X_n)_{n \geq 0}$  est irréductible, la loi est unique, en outre, la probabilité de chaque état est strictement positive.



## Partie 1

# Interprétation combinatoire de l'état stationnaire de l'ASEP



# L'ASEP À UNE PARTICULE

---

Les travaux de Corteel et Williams [CW07a] sur une interprétation combinatoire de l'état stationnaire de l'ASEP, dans le cas  $\delta = \gamma = 0$ , par les tableaux de permutation (définition 4.1.1), sont à l'origine d'une compréhension plus profonde de la combinatoire de l'ASEP. L'argument principal repose sur l'*ansatz* matriciel de Derrida, Evans, Hakim et Pasquier [DEHP93]. Ce théorème énonce que si des matrices  $D$  et  $E$  ainsi que des vecteurs  $V$  et  $W$  vérifient le système

$$\begin{cases} uDE = qED + D + E \\ \alpha WE = \gamma WD + W \\ \beta DV = \delta EV + V \\ WV \neq 0, \end{cases}$$

alors la probabilité stationnaire d'un état s'obtient par un produit de matrices de la forme  $WXV$ , où  $X$  est un produit de matrices  $D$  et  $E$ . La preuve de Corteel et Williams consiste à exhiber des matrices solutions, puis à interpréter un produit de matrices comme une série génératrice de tableaux de permutation. L'état, ou de manière équivalente le produit, auquel un tableau de permutation contribue se lit sur son bord sud-est. En appliquant la même idée au cas général, Corteel et Williams [CW11] obtiennent une interprétation combinatoire de l'état stationnaire du ASEP par les tableaux escaliers. Contrairement au cas précédent, la preuve est cette fois-ci longue et calculatoire.

Si  $\gamma = \delta = 0$ , on peut facilement calculer un produit  $WXV$  à partir des équations du système. Il suffit d'utiliser la première équation tant que le facteur  $DE$  est présent. On obtient ainsi une combinaison linéaire de termes de la forme  $E^k D^l$ . Le calcul se termine en appliquant la deuxième et la troisième équations à ces termes. La théorie de l'*ansatz* cellulaire [Vie13] de Viennot aborde le problème de ce point de vue là. Les produits de matrices  $D$  et  $E$  sont vus comme des mots d'alphabet  $\{D, E\}$ . La première équation du



Le système est considéré comme une règle de réécriture sur les mots en  $D$  et  $E$ . Nous présentons brièvement cette théorie pour décrire l'esprit dans lequel nos travaux ont été effectués, les preuves seront donc omises. L'idée de la théorie est d'encoder la première étape dans un tableau. Soit  $E$  et  $J$  deux ensembles quelconques et  $\mathbb{K}$  un corps commutatif. Notons  $\mathcal{A}$  l'algèbre non commutative des polynômes  $\mathbb{K}\langle \mathcal{X} \cup \mathcal{Y} \rangle$  avec  $\mathcal{X} = \{X_e, e \in E\}$  et  $\mathcal{Y} = \{Y_j, j \in J\}$  les deux familles d'indéterminées. Soit  $c = (c_{e,i}^{f,j})_{(e,i,f,j) \in E \times J \times E \times J}$  une famille d'éléments de  $\mathbb{K}$ . Notons  $I_c$  l'idéal bilatère engendré par les polynômes

$$(8) \quad Y_i X_e - \sum_{(f,j) \in E \times J} c_{e,i}^{f,j} X_f Y_j.$$

Soit  $\mathcal{Q}$  l'algèbre obtenue en quotientant  $\mathcal{A}$  par  $I_c$ . Elle est quadratique car l'idéal  $I_c$  est engendré par des polynômes homogènes de degré deux. Pour tout élément  $m \in \mathcal{A}$ , on note  $\bar{m}$  sa projection dans  $\mathcal{Q}$ . En analogie aux mots, on note  $\mathcal{Z}^*$  l'ensemble des monômes de  $\mathcal{A}$  dont les indéterminées sont dans  $\mathcal{Z}$ . Pour tout  $m \in (\mathcal{X} \cup \mathcal{Y})^*$  il existe une unique façon d'écrire

$$(9) \quad \bar{m} = \sum_{(u,v) \in \mathcal{X}^* \times \mathcal{Y}^*} c(u,v;m) \bar{u} \bar{v},$$

où  $c(u,v;m) \in \mathbb{K}$ . En particulier, le calcul de la décomposition de  $\bar{m}$  ne dépend pas de l'ordre dans lequel on utilise les équations (8). L'*ansatz* cellulaire consiste à encoder ce calcul dans des tableaux. Un *Q-tableau complet* est un diagramme de Ferrers dont les cellules sont étiquetées comme il suit

$$\begin{array}{|c|} \hline f \\ \hline j \quad i \\ \hline e \\ \hline \end{array}$$

où  $(e, i, f, j) \in E \times J \times E \times J$ . De plus, l'étiquetage doit respecter la condition que les deux indices de part et d'autre d'une arête sont les mêmes. Le poids d'une case est égal au coefficient  $c_{e,i}^{j,f}$  correspondant et le poids d'un tableau est le produit des poids de toutes ses cases. Soit  $m$  le monôme  $m_1 \cdots m_n$ , où  $m_i \in \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Notons  $F(m)$  le diagramme de Ferrers dont le bord sud-est est égal à  $b_1 \cdots b_n$ , où  $b_i$  est un pas vertical si  $m_i \in \mathcal{Y}$  et un pas horizontal si  $m_i \in \mathcal{X}$ . La Figure 1 illustre cette correspondance. Ainsi, chaque terme de la somme

$$\bar{m} = \sum_{(u,v) \in \mathcal{X}^* \times \mathcal{Y}^*} c(u,v;m) \bar{u} \bar{v}$$

correspond à *Q-tableau complet* de forme  $F(m)$ . En outre, le coefficient du terme est égal au poids de ce tableau.

Étant donné que le polynôme  $uDE - qED - D - E$  n'est pas homogène de degré 2, pour pouvoir appliquer cette théorie à l'*ansatz* matriciel de l'ASEP, il faut introduire des opérateurs  $I_{\mathcal{X}} \in \mathcal{X}$  et  $I_{\mathcal{Y}} \in \mathcal{Y}$  pour homogénéiser le polynôme. Nous considérons donc les polynômes  $uDE - qED - I_{\mathcal{X}}D - EI_{\mathcal{Y}}$ ,  $DI_{\mathcal{X}} - I_{\mathcal{X}}D$ ,  $I_{\mathcal{Y}}E - EI_{\mathcal{Y}}$  et  $I_{\mathcal{Y}}I_{\mathcal{X}} - I_{\mathcal{Y}}I_{\mathcal{X}}$ . Pour traiter la partie du calcul impliquant  $W$  et  $V$ , nous supposons que  $WI_{\mathcal{X}} = W$  et  $I_{\mathcal{Y}}V = V$ . Dans le cas

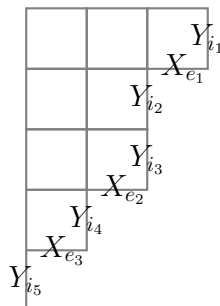


FIGURE 1. Le diagramme de Ferrers associé au monôme  $Y_{i_1} X_{e_1} Y_{i_2} Y_{i_3} X_{e_2} Y_{i_4} X_{e_3} Y_{i_5}$

$\gamma = \delta = 0$ , pour prendre en compte les conditions de bords  $WE = \alpha^{-1}W$  et  $DV = \beta^{-1}V$ , il suffit d'ajouter un poids  $\alpha^{-k}\beta^{-l}WV$  à tout  $\mathcal{Q}$ -tableau complet associé au monôme  $\bar{u}\bar{v}$ , où  $k$  (resp.  $l$ ) est le nombre de  $E$  (resp.  $D$ ) dans  $u$  (resp.  $D$ ). Les tableaux alternatifs (définition 4.1.3) ainsi que les tableaux boisés (définition 4.1.5), qui sont des familles de tableaux équivalentes aux tableaux de permutation, peuvent être définis comme des  $\mathcal{Q}$ -tableaux complets. De plus, leurs poids correspond au poids que l'on vient de définir.

Dans le cas général, cette démarche ne s'applique pas à cause des équations du bord

$$\begin{cases} \alpha WE &= \gamma WD + W \\ \beta DV &= \delta EV + V. \end{cases}$$

Elles ne permettent plus de réduire les termes  $E^k D^l$  à des scalaires. Dans ce chapitre nous proposons une approche valable dans le cas général. Dans la section 1, nous exhibons une récurrence qui permet de calculer le poids d'un mot de taille  $n$  à partir du poids de mots de taille  $n - 1$ . Puis, nous montrons que le poids des tableaux escaliers vérifie la même récurrence. La preuve repose sur un algorithme d'insertion (section 2.2) qui construit bijectivement  $4n$  tableaux escaliers de taille  $n$  à partir d'un tableau escalier de taille  $n - 1$ . Nous montrons ainsi que les tableaux escaliers encodent ces calculs de l'ansatz matriciel. D'une part, cette méthode offre une nouvelle perspective pour une preuve combinatoire de l'interprétation de l'ASEP par les tableaux escaliers. D'autre part, l'algorithme d'insertion permet d'obtenir facilement plusieurs formules closes factorisées du polynôme générateur des tableaux escaliers.

L'intérêt de la méthode de l'ansatz matriciel en physique statistique n'est plus à démontrer, comme en témoigne le *survey* de Blythe et Evans [BE07]. Elle est également à l'origine de l'interprétation combinatoire actuelle de l'état stationnaire de l'ASEP. Les travaux de Corteel, Josuat-Vergès et Williams

---

[CJW11] montrent également son utilité dans certains problèmes combinatoires. Ainsi, nous proposons dans la section 3.3 un *ansatz* matriciel correspondant aux tableaux escaliers de type  $B$ . Il repose sur un algorithme d'insertion (section 3.2) analogue à celui des tableaux escaliers. Nous généralisons ainsi l'*ansatz* matriciel des tableaux de permutation de type  $B$  [CJW11, Proposition 3].

Au-delà de leurs liens avec l'ASEP, les tableaux impliqués dans l'interprétation combinatoire de l'état stationnaire de l'ASEP possèdent des caractéristiques combinatoires intéressantes. En effet, dans le cas  $\gamma = \delta = 0$  ils sont comptés par  $n!$ . Il existe de nombreuses bijections entre ces tableaux et les permutations [SW07, Bur07, Vie08, CN09, ABN13, CDH16]. Un corollaire de l'algorithme d'insertion que nous proposons sur les tableaux escaliers est une bijection avec des tables d'inversions colorées. Nous discutons dans la section 2.4 de ses conséquences en matière de bijections avec les permutations. Notamment, les tableaux escaliers sont comptés par la suite  $(4^n n!)_{n \geq 0}$  mais il reste à trouver une bijection avec des permutations colorées nous permettant d'interpréter tous les paramètres sur ces permutations colorées.

Ce chapitre est organisé comme suit. Nous commençons (section 1) par donner plus de détails sur l'ASEP et l'*ansatz* matriciel associé. En particulier, nous exhibons une récurrence permettant de calculer la probabilité stationnaire d'un état. La section 2 est consacrée aux tableaux escaliers. Après avoir donné leur définition, nous présentons notre algorithme d'insertion ainsi que ses conséquences concernant le polynôme générateur des tableaux escaliers. Suite à cela, nous définissons une bijection entre les tableaux escaliers et des tables d'inversions colorées. Une table d'inversions colorée représente l'historique des insertions à effectuer pour obtenir un tableau escalier. L'intérêt majeur de cette bijection est qu'il est possible d'interpréter tous les paramètres de l'ASEP ainsi que le type des tableaux escaliers sur les tables d'inversions colorées. Cela nous amène au dernier paragraphe de cette section qui traite de bijections entre des tableaux escaliers et des permutations. Enfin, dans la section 3, nous commençons par définir des involutions sur les tableaux escaliers provenant de symétries de l'ASEP. Deux familles de tableaux escaliers de type  $B$  en ressortent. En étendant notre algorithme d'insertion au cas des tableaux escaliers de type  $B$ , nous obtenons des formes factorisées de spécialisations des polynômes générateurs des deux familles. Enfin, nous proposons un *ansatz* matriciel pour chacune des deux familles.

Les résultats de ce chapitre et du suivant sont récents. Ils n'ont donc pas encore fait l'objet d'un article.

## 1. Présentation du modèle et de l'ansatz matriciel associé

L'ASEP est un modèle de mécanique statistique défini comme une chaîne de Markov. Soit  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, u \in [0, 1]$  et  $n$  un entier naturel non nul, les états sont les mots de taille  $n$  d'alphabet  $\{\bullet, \circ\}$ , où  $\circ$  représente un site vide et  $\bullet$  un site occupé par une particule. On parle aussi de particule respectivement blanche et noire. Les transitions possibles depuis un état sont schématisées dans la figure 2. Plus formellement, la probabilité de transition  $p(s_1, s_2)$  entre deux états  $s_1$  et  $s_2$  est définie de la façon suivante ( $U$  et  $V$  représentent des mots en  $\circ$  et  $\bullet$ ) :

- si  $s_1 = U\bullet\circ V$  et  $s_2 = U\circ\bullet V$ , alors  $p(s_1, s_2) = \frac{u}{n+1}$  et  $p(s_2, s_1) = \frac{q}{n+1}$  ;
- si  $s_1 = U\bullet$  et  $s_2 = U\circ$ , alors  $p(s_1, s_2) = \frac{\beta}{n+1}$  et  $p(s_2, s_1) = \frac{\delta}{n+1}$  ;
- si  $s_1 = \circ V$  et  $s_2 = \bullet V$ , alors  $p(s_1, s_2) = \frac{\alpha}{n+1}$  et  $p(s_2, s_1) = \frac{\gamma}{n+1}$  ;
- si l'on n'est dans aucun des cas précédents et que  $s_1 \neq s_2$ , alors on pose  $p(s_1, s_2) = 0$  ;
- enfin  $p(s_1, s_1) = 1 - \sum_{s_2 \neq s_1} p(s_1, s_2)$ .

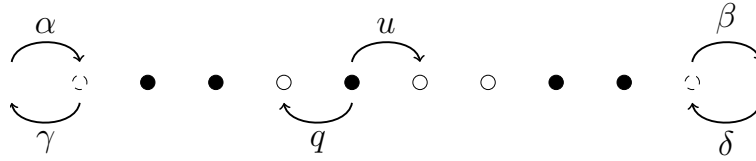


FIGURE 2. Transitions possibles dans l'ASEP.

On note  $M_n$  sa matrice de transition. Si  $n = 3$ , elle est égale à

$$\begin{array}{cccccccc}
 & \circ\circ\circ & \circ\circ\bullet & \circ\bullet\circ & \circ\bullet\bullet & \bullet\circ\circ & \bullet\circ\bullet & \bullet\bullet\circ & \bullet\bullet\bullet \\
 \circ\circ\circ & \left( \begin{array}{cccccccc}
 1 - * & \delta & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\
 \beta & 1 - * & u & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\
 0 & q & 1 - * & \delta & u & 0 & \alpha & 0 \\
 0 & 0 & \beta & 1 - * & 0 & u & 0 & \alpha \\
 \gamma & 0 & q & 0 & 1 - * & \delta & 0 & 0 \\
 0 & \gamma & 0 & q & \beta & 1 - * & u & 0 \\
 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & q & 1 - * & \delta \\
 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & \beta & 1 - *
 \end{array} \right) , \\
 \bullet\circ\bullet & & & & & & & & \\
 \bullet\bullet\circ & & & & & & & & \\
 \bullet\bullet\bullet & & & & & & & & 
 \end{array}$$

où est  $*$  est la somme des autres coefficients apparaissant dans la même ligne. Son graphe étant fortement connexe, elle est irréductible<sup>1</sup>. De plus, étant donné que son nombre d'états est fini, elle admet une unique loi de probabilité stationnaire  $\mu_n$  et pour tout  $m \in \{\bullet, \circ\}^n$  on a  $\mu_n(m) > 0$ . Ainsi, d'après la définition 1.8.5, l'espace vectoriel  $\mathbb{R}\mu_n$  a pour équation

$$(10) \quad v = vM_n.$$

Ainsi, si une fonction non nulle  $f_n : \{\bullet, \circ\}^n \rightarrow \mathbb{R}$  vérifie l'équation (10), c'est-à-dire que le vecteur  $v = (f_n(w)_{w \in \{\bullet, \circ\}^n})$  la vérifie, alors pour  $m \in \{\bullet, \circ\}^n$  on a

$$\mu_n(m) = \frac{f_n(m)}{Z_{f_n}},$$

où  $Z_{f_n}$  est la fonction de partition de  $f_n$ , i.e.

$$Z_{f_n}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; q, u) = \sum_{m' \in \{\bullet, \circ\}^n} f_n(m').$$

Le modèle possède les trois symétries<sup>2</sup> suivantes.

- (C) La *symétrie C* consiste à remplacer  $p(s_1, s_2)$  par  $p(s_2, s_1)$ . On obtient le même modèle hormis l'échange des paramètres  $\alpha$  et  $\gamma$  d'une part,  $\beta$  et  $\delta$  d'autre part et  $q$  et  $u$  pour finir.
- (P) La *symétrie P* consiste à remplacer  $p(s_1, s_2)$  par  $p(\overline{s_1}, \overline{s_2})$ , où  $\overline{m_n \cdots m_1} = m_1 \cdots m_n$ . On obtient le même modèle hormis l'échange des paramètres  $\alpha$  et  $\delta$  d'une part,  $\beta$  et  $\gamma$  d'autre part et  $q$  et  $u$  pour finir.
- (CP) la *symétrie CP* consiste à combiner les deux précédentes. On obtient le même modèle hormis l'échange des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  d'une part et  $\gamma$  et  $\delta$  d'autre part.

OBSERVATION 2.1.1. *La probabilité stationnaire possède les symétries*

$$\begin{aligned} (C) \quad \mu_n(m_n \cdots m_1) &= \mu_n(\widetilde{m}_n \cdots \widetilde{m}_1) \Big|_{\alpha \leftrightarrow \gamma, \beta \leftrightarrow \delta, q \leftrightarrow u} \\ (P) \quad \mu_n(m_n \cdots m_1) &= \mu_n(m_1 \cdots m_n) \Big|_{\alpha \leftrightarrow \delta, \beta \leftrightarrow \gamma, q \leftrightarrow u} \\ (CP) \quad \mu_n(m_n \cdots m_1) &= \mu_n(\widetilde{m}_1 \cdots \widetilde{m}_n) \Big|_{\alpha \leftrightarrow \beta, \gamma \leftrightarrow \delta} \end{aligned}$$

où la notation  $\leftrightarrow$  signifie que les paramètres aux bouts des deux flèches sont échangés et  $\widetilde{\circ} = \bullet$  et  $\widetilde{\bullet} = \circ$ . Pour toute fonction  $f_n$  solution de l'équation (10), sa fonction de partition admet donc les symétries

1. Si on étudie les mouvements possibles des particules en fonction de la nullité de certains paramètres, on se rend compte que si  $n \geq 2$ , le graphe est fortement connexe si et seulement si la quantité suivante est non nulle

$$(q+u)(\gamma+\beta)(\alpha+\delta)(\alpha+q)(\beta+q)(\gamma+u)(\delta+u).$$

Si elle l'est, alors il est possible que l'ASEP admette plusieurs probabilités stationnaires. L'exemple le plus trivial est lorsque tous les paramètres sont nuls, dans ce cas,  $M_n$  est la matrice identité et toute loi de probabilité sur  $\{\bullet, \circ\}^n$  est stationnaire.

2. En physique des particules, la symétrie C(harge) est une conjugaison de charge, elle échange particules et antiparticules, la symétrie P(arité) correspond à une inversion de l'espace et la symétrie CP à la composition des deux précédentes. Le livre [GP76] de Gibson et Pollard permettra au lecteur curieux d'approfondir ces notions.

## 2. L'ASEP à une particule

---

$$\begin{aligned}
(C) \quad & Z_{f_n}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; q, u) = Z_{f_n}(\gamma, \delta, \alpha, \beta; u, q); \\
(P) \quad & Z_{f_n}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; q, u) = Z_{f_n}(\delta, \gamma, \beta, \alpha; u, q); \\
(CP) \quad & Z_{f_n}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; q, u) = Z_{f_n}(\beta, \alpha, \delta, \gamma; q, u).
\end{aligned}$$

L'ansatz matriciel de [DEHP93] est un outil grâce auquel on peut calculer la probabilité stationnaire des états de l'ASEP. Supposons qu'il existe des matrices  $D$  et  $E$  ainsi que des vecteurs  $W$  et  $V$ , respectivement ligne et colonne, vérifiant,

$$(11) \quad \begin{cases} uDE = qED + D + E \\ \alpha WE = \gamma WD + W \\ \beta DV = \delta EV + V \\ WV \neq 0. \end{cases}$$

Alors on peut calculer la probabilité stationnaire d'un état à partir de  $D, E, V$  et  $W$ .

**THÉORÈME 2.1.2.** *Soit  $m = m_n \cdots m_1 \in \{\bullet, \circ\}^n$ , on note  $X(m) = X_n \cdots X_1$  le mot en  $D$  et  $E$  tel que  $X_i = D$  (resp.  $X_i = E$ ) si  $m_i = \bullet$  (resp.  $m_i = \circ$ ). Alors, la fonction  $m \mapsto WX(m)V$  est solution de l'équation (10). De sorte que*

$$\mu_n(m) = \frac{WX(m)V}{\sum_{m \in \{\bullet, \circ\}^n} WX(m)V}.$$

**DÉMONSTRATION.** Soit  $m = m_n \cdots m_1 \in \{\bullet, \circ\}^n$  un état de l'ASEP. Notons  $f$  la fonction  $m \mapsto WX(m)V$ . Montrer que  $f$  vérifie l'équation (10) est équivalent à prouver la nullité de la quantité

$$\begin{aligned}
& \mathbb{1}(m_n = \circ)(-\alpha f(\circ m_{n-1} \cdots m_1) + \gamma f(\bullet m_{n-1} \cdots m_1)) \\
& + \mathbb{1}(m_n = \bullet)(\alpha f(\circ m_{n-1} \cdots m_1) - \gamma f(\bullet m_{n-1} \cdots m_1)) \\
& + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{1}(m_{i+1} m_i = \bullet \circ)(-u f(\cdots m_{i+2} \bullet \circ m_{i-1} \cdots) + q f(\cdots m_{i+2} \circ \bullet m_{i-1} \cdots)) \\
& + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{1}(m_{i+1} m_i = \circ \bullet)(u f(\cdots m_{i+2} \circ \bullet m_{i-1} \cdots) - q f(\cdots m_{i+2} \circ \bullet m_{i-1} \cdots)) \\
& + \mathbb{1}(m_1 = \circ)(\beta f(m_n \cdots m_2 \bullet) - \delta f(m_n \cdots m_2 \circ)) \\
& + \mathbb{1}(m_1 = \bullet)(-\beta f(m_n \cdots m_2 \bullet) + \delta f(m_n \cdots m_2 \circ)).
\end{aligned}$$

En utilisant les relations vérifiées par les matrices, on obtient

$$\begin{aligned}
& - \mathbb{1}(m_n = \circ) f(m_{n-1} \cdots m_1) \\
& + \mathbb{1}(m_n = \bullet) f(m_{n-1} \cdots m_1) \\
& + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{1}(m_{i+1} m_i = \bullet \circ)(-f(\cdots m_{i+2} \bullet m_{i-1} \cdots) - f(\cdots m_{i+2} \circ m_{i-1} \cdots))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{1}(m_{i+1}m_i = \circ\bullet)(f(\cdots m_{i+2}\bullet m_i \cdots) + f(\cdots m_{i+2}\circ m_i \cdots)) \\
& + \mathbb{1}(m_1 = \circ)f(m_n \cdots m_2) \\
& - \mathbb{1}(m_1 = \bullet)f(m_n \cdots m_2).
\end{aligned}$$

On se convainc que pour tout  $m$  les termes s'annulent deux à deux.  $\square$

L'intérêt de cette représentation matricielle est que le calcul de la probabilité stationnaire d'un état de l'ASEP se réduit à un produit matriciel. Néanmoins, il a fallu attendre dix ans pour qu'une représentation valable pour tous les paramètres soit trouvée. Uchiyama, Sasamoto et Wadati [USW04] propose une représentation des matrices  $D$  et  $E$  liée aux polynômes Askey-Wilson dont la seule restriction est  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, u > 0$ . Il est à noter que  $D, E, V$  et  $W$  sont nécessairement de dimension infinie hormis si

$$(u - q)(\alpha + \delta)(\beta + \gamma) = (\alpha + \beta + \gamma + \delta)(\alpha\beta - \gamma\delta),$$

auquel cas des matrices de dimension 1 sont suffisantes ([DEHP93]).

Il apparaît clairement dans la preuve que ce sont les relations que vérifient  $D, E, W$  et  $V$  dont on a besoin et non pas leur caractère matriciel. De ce fait, pour étudier la combinatoire du système nous utilisons la reformulation suivante. Soit  $f : \{\bullet, \circ\}^* \rightarrow \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, u)$  une fonction vérifiant

$$(12) \quad \begin{cases} uf(X\bullet\circ Y) = qf(X\circ\bullet Y) + f(X\bullet Y) + f(X\circ Y) \\ \alpha f(\circ X) = \gamma f(\bullet X) + f(X) \\ \beta f(X\bullet) = \delta f(X\circ) + f(X) \\ f(\varepsilon) = 1, \end{cases}$$

où  $\varepsilon$  est le mot vide. Soit  $n$  un entier naturel, la preuve du théorème 2.1.2 montre également que la fonction  $f|_{\{\bullet, \circ\}^n}$  est solution de l'équation (10). Cette formulation du problème a également été utilisée par Brak, Corteel, Essam, Parviainen et Rechnitzer dans [BCE<sup>+</sup>06]. Toutefois, le système de récurrence qu'ils étudient est différent de celui que nous introduisons dans ce chapitre.

Corteel et Williams généralisent dans [CW11] l'ansatz matriciel de Derrida *et al.* en introduisant un degré de liberté. Soit  $\lambda = (\lambda_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, u)^{\mathbb{N}}$  et  $g^\lambda : \{\bullet, \circ\}^* \rightarrow \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, u)$  une fonction vérifiant

$$(13) \quad \begin{cases} ug^\lambda(X\bullet\circ Y) = qg^\lambda(X\circ\bullet Y) + \lambda_{|X|+|Y|+2}(g^\lambda(X\bullet Y) + g^\lambda(X\circ Y)) & (I) \\ \alpha g^\lambda(\circ X) = \gamma g^\lambda(\bullet X) + \lambda_{|X|+1}g^\lambda(X) & (II) \\ \beta g^\lambda(X\bullet) = \delta g^\lambda(X\circ) + \lambda_{|X|+1}g^\lambda(X) & (III) \\ g^\lambda(\varepsilon) = \lambda_0, \end{cases}$$

où  $|m|$  correspond à la taille de  $m$ . Alors, la fonction  $g^\lambda|_{\{\bullet, \circ\}^n}$  est également solution de l'équation (10). Le seul changement à effectuer dans la preuve du

théorème 2.1.2 est de multiplier par  $\lambda_n$  la deuxième quantité que l'on considère, ce qui ne change pas sa nullité. Pour être plus précis, l'*ansatz* matriciel qu'elles définissent est une reformulation du système (13) en termes de matrices. Dans leurs travaux, la suite  $\lambda$  qu'elles considèrent est  $(u^n \alpha \beta - q^n \gamma \delta)_{n \geq 0}$ . De ce fait, le nombre d'équations à vérifier est infini contrairement au système (12) où il n'y en a que trois. Ce nouveau système leur permet de définir une représentation sans restriction au niveau des paramètres. De plus, le produit des matrices qu'elles exhibent peut s'interpréter comme un polynôme générateur de tableaux escaliers. Ainsi, prouver que ces matrices vérifient le nouvel *ansatz* matriciel montre également que les tableaux escaliers donnent une interprétation combinatoire de l'état stationnaire de l'ASEP. Toutefois, leurs « matrices » et leurs « vecteurs » ne sont pas des matrices et des vecteurs usuels. En effet, ils ont respectivement quatre et deux dimensions à la différence des deux et une dimensions habituelles. Dans nos travaux, nous n'utilisons pas la formulation en termes matriciels car nous nous intéressons directement à la combinatoire des équations du système (13). Dans la suite du chapitre, les paramètres  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, q$  et  $u$  sont des indéterminées.

Il n'est pas nécessaire d'avoir une représentation matricielle pour calculer  $g^\lambda(m)$ , le calcul peut être fait récursivement en utilisant les équations vérifiées par  $g^\lambda$ . Notons  $\circ(m)$  l'ensemble des indices des particules blanches de  $m$  et  $\bullet(m)$  celui des particules noires. L'idée est d'écrire un mot comme une combinaison linéaire de lui-même, avec un coefficient différent de 1, et de mots de tailles inférieures. Pour cela, nous faisons faire un aller-retour à la particule la plus à gauche. Dans un premier temps, nous caractérisons le coefficient avec lequel nous retrouvons le mot initial. Les calculs seront détaillés par la suite. On traite tout d'abord le cas des mots dont la particule la plus à gauche est noire. Soit  $X$  un mot de taille  $n$ . En utilisant plusieurs fois l'équation (I) du système (13), on commence par déplacer vers la droite la particule  $\bullet$ . Soit

$$g^\lambda(\bullet X) = \left(\frac{q}{u}\right)^{|\circ(X)|} g^\lambda(X\bullet) + \lambda_{n+1}(\dots).$$

Le symbole  $\dots$  représente une combinaison linéaire de  $g^\lambda(m')$  à coefficients dans  $\mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, u)$ , où les  $m'$  sont des mots de taille  $n$ . Puis, on transforme la particule  $\bullet$  en  $\circ$  avec l'équation (III). Nous obtenons ainsi

$$g^\lambda(\bullet X) = \left(\frac{q}{u}\right)^{|\circ(X)|} \frac{\delta}{\beta} g^\lambda(X\circ) + \lambda_{n+1}(\dots).$$

De nouveau, l'application successive de l'équation (I) nous permet de déplacer la particule  $\circ$  vers la gauche. On obtient donc,

$$g^\lambda(\bullet X) = \left(\frac{q}{u}\right)^n \frac{\delta}{\beta} g^\lambda(\circ X) + \lambda_{n+1}(\dots).$$



Enfin, en utilisant l'équation (II) nous retrouvons notre mot de départ. Ainsi, en remarquant que  $\circ(X) + \bullet(X) = |X| = n$ , on a

$$g^\lambda(\bullet X) = \left(\frac{q}{u}\right)^n \frac{\gamma\delta}{\alpha\beta} g^\lambda(\bullet X) + \lambda_{n+1}(\dots),$$

De ce fait,

$$g^\lambda(\bullet X) = \frac{\lambda_{n+1}}{u^n \alpha \beta - q^n \gamma \delta}(\dots).$$

De même, pour les mots dont la première particule est blanche, on obtient

$$\begin{aligned} g^\lambda(\circ X) &= \frac{\gamma}{\alpha} g^\lambda(\bullet X) + \lambda_{n+1}(\dots) \\ &= \left(\frac{q}{u}\right)^{|\circ(X)|} \frac{\gamma}{\alpha} g^\lambda(X\bullet) + \lambda_{n+1}(\dots) \\ &= \left(\frac{q}{u}\right)^{|\circ(X)|} \frac{\gamma\delta}{\alpha\beta} g^\lambda(X\circ) + \lambda_{n+1}(\dots) \\ &= \left(\frac{q}{u}\right)^n \frac{\gamma\delta}{\alpha\beta} g^\lambda(\circ X) + \lambda_{n+1}(\dots). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$g^\lambda(\circ X) = \frac{\lambda_{n+1}}{u^n \alpha \beta - q^n \gamma \delta}(\dots).$$

Nous caractérisons maintenant les mots de taille  $n - 1$  qui apparaissent ainsi que leurs coefficients. Dans la suite, dans le but d'alléger les notations nous écrivons parfois  $m$  à la place de  $g^\lambda(m)$  s'il n'y a pas d'ambiguïté. En gardant les mêmes notations, supposons d'abord que  $m = \bullet X$ . Le même parcours de gauche à droite de la particule la plus à gauche donne

$m = \bullet X$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{q}{u}\right)^{|\circ(X)|} X\bullet + \sum_{X=U\circ V} \frac{\lambda_{n+1}}{u} \left(\frac{q}{u}\right)^{|\circ(U)|} (U\bullet V + U\circ V) \\ &= \left(\frac{q}{u}\right)^{|\circ(X)|} \frac{\delta}{\beta} X\circ + \left(\frac{q}{u}\right)^{|\circ(X)|} \frac{\lambda_{n+1}}{\beta} X + \sum_{X=U\circ V} \frac{\lambda_{n+1}}{u} \left(\frac{q}{u}\right)^{|\circ(U)|} (U\bullet V + U\circ V) \\ &= \left(\frac{q}{u}\right)^n \frac{\delta}{\beta} \circ X + \frac{\delta}{\beta} \sum_{X=U\bullet V} \frac{\lambda_{n+1}}{u} \left(\frac{q}{u}\right)^{|\circ(U)|+|V|} (U\bullet V + U\circ V) + \\ &\quad \left(\frac{q}{u}\right)^{|\circ(X)|} \frac{\lambda_{n+1}}{\beta} X + \sum_{X=U\circ V} \frac{\lambda_{n+1}}{u} \left(\frac{q}{u}\right)^{|\circ(U)|} (U\bullet V + U\circ V) \\ &= \left(\frac{q}{u}\right)^n \frac{\gamma\delta}{\alpha\beta} m + \left(\frac{q}{u}\right)^n \frac{\delta}{\alpha\beta} \lambda_{n+1} X + \frac{\delta}{\beta} \sum_{X=U\bullet V} \frac{\lambda_{n+1}}{u} \left(\frac{q}{u}\right)^{|\circ(U)|+|V|} (U\bullet V + U\circ V) + \\ &\quad \left(\frac{q}{u}\right)^{|\circ(X)|} \frac{\lambda_{n+1}}{\beta} X + \sum_{X=U\circ V} \frac{\lambda_{n+1}}{u} \left(\frac{q}{u}\right)^{|\circ(U)|} (U\bullet V + U\circ V). \end{aligned}$$

Soit

$$(14) \quad m = \frac{\lambda_{n+1}}{u^n \alpha \beta - q^n \gamma \delta} \left[ \alpha \delta \sum_{X=U \bullet V} u^{n-1-|\circ(U)|-|V|} q^{|\circ(U)|+|V|} (U \bullet V + U \circ V) + \right. \\ \left. q^n \delta X + u^{n-|\circ(X)|} q^{|\circ(X)|} \alpha X + \alpha \beta \sum_{X=U \circ V} u^{n-1-|\circ(U)|} q^{|\circ(U)|} (U \bullet V + U \circ V) \right].$$

Si  $m = \circ X$ , on obtient

$$(15) \quad m = \frac{\lambda_{n+1}}{u^n \alpha \beta - q^n \gamma \delta} \left[ \delta \gamma \sum_{X=U \bullet V} u^{n-1-|\circ(U)|-|V|} q^{|\circ(U)|+|V|} (U \bullet V + U \circ V) + \right. \\ \left. u^{n-|\circ(X)|} q^{|\circ(X)|} \gamma X + \gamma \beta \sum_{X=U \circ V} u^{n-1-|\circ(U)|} q^{|\circ(U)|} (U \bullet V + U \circ V) + u^n \beta X \right].$$

En appliquant cette récurrence à tous les états de taille 3 nous obtenons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \circ \circ \circ &= \frac{\lambda_3}{\alpha \beta - q^2 \gamma \delta} (\beta \circ \circ + \beta \gamma (\circ \circ + \bullet \circ) + q \beta \gamma (\circ \circ + \circ \bullet) + q^2 \gamma \circ \circ), \\ \bullet \circ \circ &= \frac{\lambda_3}{\alpha \beta - q^2 \gamma \delta} (\alpha \beta (\circ \circ + \bullet \circ) + q \alpha \beta (\circ \circ + \circ \bullet) + q^2 \alpha \circ \circ + q^2 \delta \circ \circ), \\ \circ \bullet \circ &= \frac{\lambda_3}{\alpha \beta - q^2 \gamma \delta} (\beta \bullet \circ + \beta \gamma (\bullet \circ + \bullet \bullet) + q \gamma \bullet \circ + q \gamma \delta (\circ \circ + \bullet \circ)), \\ \bullet \bullet \circ &= \frac{\lambda_3}{\alpha \beta - q^2 \gamma \delta} (\alpha \beta (\bullet \circ + \bullet \bullet) + q \alpha \bullet \circ + q \alpha \delta (\circ \circ + \bullet \circ) + q^2 \delta \bullet \circ), \\ \circ \circ \bullet &= \frac{\lambda_3}{\alpha \beta - q^2 \gamma \delta} (\beta \bullet \bullet + \gamma \bullet \bullet + \gamma \delta (\bullet \circ + \bullet \bullet) + q \gamma \delta (\circ \bullet + \bullet \bullet)), \\ \bullet \bullet \bullet &= \frac{\lambda_3}{\alpha \beta - q^2 \gamma \delta} (\alpha \bullet \bullet + \alpha \delta (\bullet \circ + \bullet \bullet) + q \alpha \delta (\circ \bullet + \bullet \bullet) + q^2 \delta \bullet \bullet), \\ \circ \circ \bullet &= \frac{\lambda_3}{\alpha \beta - q^2 \gamma \delta} (\beta \circ \bullet + \beta \gamma (\circ \bullet + \bullet \bullet) + q \gamma \circ \bullet + q \gamma \delta (\circ \circ + \circ \bullet)), \\ \bullet \circ \bullet &= \frac{\lambda_3}{\alpha \beta - q^2 \gamma \delta} (\alpha \beta (\circ \bullet + \bullet \bullet) + q \alpha \circ \bullet + q \alpha \delta (\circ \circ + \circ \bullet) + q^2 \delta \circ \bullet). \end{aligned}$$

Si les  $\lambda_n$  sont tous non nuls, alors  $g^\lambda$  est entièrement déterminé par  $g^\lambda(\varepsilon) = \lambda_0$  et les équations (14) et (15). Ainsi, le système (13) admet au plus une solution. Il reste à montrer qu'une fonction définie à partir de ces récurrences est bien solution du système (13).

**THÉORÈME 2.1.3.** *Soit  $\lambda = (\lambda_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, u)^\mathbb{N}$  une suite. La fonction  $h^\lambda : \{\bullet, \circ\}^* \rightarrow \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, u)$  définie par les équations  $h^\lambda(\varepsilon) = \lambda_0$ ,*

$$h^\lambda(\bullet X) = \frac{\lambda_{n+1}}{u^n \alpha \beta - q^n \gamma \delta} \left[ \alpha \delta \sum_{X=U \bullet V} u^{n-1-|\circ(U)|-|V|} q^{|\circ(U)|+|V|} (h^\lambda(U \bullet V) + h^\lambda(U \circ V)) + \right.$$

$$\left. q^n \delta h^\lambda(X) + u^{n-|\circ(X)|} q^{|\circ(X)|} \alpha h^\lambda(X) + \alpha \beta \sum_{X=U \circ V} u^{n-1-|\circ(U)|} q^{|\circ(U)|} (h^\lambda(U \bullet V) + h^\lambda(U \circ V)) \right],$$

et

$$h^\lambda(\circ X) = \frac{\lambda_{n+1}}{u^n \alpha \beta - q^n \gamma \delta} \left[ \delta \gamma \sum_{X=U \bullet V} u^{n-1-|\circ(U)|-|V|} q^{|\circ(U)|+|V|} (h^\lambda(U \bullet V) + h^\lambda(U \circ V)) + \right. \\ \left. u^{n-|\circ(X)|} q^{|\circ(X)|} \gamma h^\lambda(X) + \gamma \beta \sum_{X=U \circ V} u^{n-1-|\circ(U)|} q^{|\circ(U)|} (h^\lambda(U \bullet V) + h^\lambda(U \circ V)) + u^n \beta h^\lambda(X) \right]$$

satisfait le système (13).

DÉMONSTRATION. Nous n'avons pas besoin de montrer que la fonction  $h^\lambda$  vérifie le système (13). D'après ce qui précède, si le système admet une solution  $g^\lambda$  alors elle est égale à  $h^\lambda$ . De ce fait, il suffit de montrer qu'il existe effectivement une solution. En outre, supposons qu'il existe une suite  $\lambda'$ , dont tous les termes sont non nuls, pour laquelle le système (13) admet une solution  $g^{\lambda'}$ . Soit  $m$  un état de taille  $n$ . Posons

$$g^\lambda(m) = \frac{\lambda_n \cdots \lambda_0}{\lambda'_n \cdots \lambda'_0} g^{\lambda'}(m).$$

Alors, en multipliant les équations (I), (II) et (III) du système (13) par

$$\frac{\lambda_n \cdots \lambda_0}{\lambda'_n \cdots \lambda'_0},$$

où  $n$  vaut respectivement  $|X| + |Y| + 2$ ,  $|X| + 1$  et  $|X| + 1$ , nous montrons que  $g^\lambda$  est solution du système (13). Enfin, dans le cas où  $\lambda_n = u^{n-1} \alpha \beta - q^{n-1} \gamma \delta$  pour  $n \geq 1$  et  $\lambda_0 = 1$ , Corteel et Williams [CW11, Section 6] exhibent une solution en termes de tableaux escaliers. Cela conclut notre preuve.  $\square$

REMARQUE 2.1.4. L'objectif de notre démarche est de proposer une preuve combinatoire de l'interprétation de l'état stationnaire de l'ASEP par les tableaux escaliers. La preuve actuelle de Corteel et Williams est longue et calculatoire. Par l'intermédiaire d'un algorithme d'insertion sur les tableaux escaliers, nous montrons dans le théorème 2.2.2 que la valeur en  $m$  de la fonction  $h^\lambda$ , du théorème précédant, peut s'interpréter comme un polynôme générateur de tableaux escaliers. Ainsi, les théorèmes 2.1.3 et 2.2.2 fournissent l'interprétation combinatoire désirée. Toutefois, la preuve du théorème 2.1.3 que nous proposons utilise le résultat que nous voulons redémontrer. Ainsi, pour finaliser notre approche, il reste à trouver une autre preuve du théorème 2.1.3.

Une preuve reposant uniquement sur les relations de récurrence semble possible. L'équation (II) du système (13) se prouve facilement. L'équation (III) demande un peu plus de travail. Quant à la dernière équation nous n'avons pour le moment pas trouvé de preuve. Nous rencontrons des difficultés pour les mêmes équations que [CW11]. Une démonstration alternative pourrait être de considérer le système (13) comme un système linéaire et de prouver l'existence d'une solution en échelonnant la matrice associée.

## 2. L'ASEP à une particule

---

En l'état, le théorème 2.1.3 fournit néanmoins un nouvel outil pour montrer qu'une classe combinatoire donne une interprétation de l'état stationnaire de l'ASEP.

Notons  $p$  la fonction  $h^\lambda$  où  $\lambda_n = u^{n-1}\alpha\beta - q^{n-1}\gamma\delta$  pour tout  $n \geq 1$  et  $\lambda_0 = 1$ . Nous notons  $p_n$  la restriction  $p|_{\{\bullet, \circ\}^n}$ . L'intérêt de ce choix  $\lambda$  est que  $p$  est à valeur dans  $\mathbb{Q}[\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, u]$ , plus précisément, si  $m$  est de taille  $n$ , alors  $p(m)$  est une somme positive de  $2^n n!$  monômes de degré  $\frac{n(n+1)}{2}$ . Il suffit de remarquer que  $p(m)$  est une combinaison linéaire positive de  $2n$  mots de taille  $n - 1$ , dont les coefficients sont des monômes de degré  $n$ . En particulier, en sommant sur  $\{\bullet, \circ\}^n$  on trouve que  $Z_{p_n}(1, 1, 1, 1; 1, 1) = 4^n n!$ . Expérimentalement,  $Z_{p_n}$  n'admet pas de factorisation non triviale au moins jusqu'à  $n = 8$ . Ainsi, une classe combinatoire donnant une interprétation des monômes apparaissant dans les probabilités de l'état stationnaire de l'ASEP devrait être énumérée par la suite  $(4^n n!)_{n \geq 0}$ . Dans la suite on peut supposer que  $u = 1$  sans perte de généralité étant donné que le degré des monômes intervenant dans le poids d'un mot de taille  $n$  est constant égal à  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

Avant de nous intéresser aux tableaux escaliers, nous donnons des précisions sur la récurrence vérifiée par  $p$ . Soit  $m \in \{\bullet, \circ\}^n$ , la table 1 décrit les mots de taille  $n + 1$  dont le poids fait apparaître  $p(m)$  et le coefficient avec lequel il apparaît. Les flèches sous les mots de la première colonne illustrent le parcours de la particule avant d'obtenir  $m$ .

Si l'on spécialise  $q$  à 1, la table 1 se simplifie. De sorte que si l'on applique une fois la récurrence aux termes

$$Z_{p_{n+1}}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1, 1) = \sum_{m' \in \{\bullet, \circ\}^{n+1}} p_{n+1}(m')|_{q=1},$$

alors pour tout  $m \in \{\bullet, \circ\}^n$  le terme  $p_n(m)|_{q=1}$  apparaît avec le coefficient

$$(\alpha + \beta + \gamma + \delta + n(\alpha + \delta)(\beta + \gamma)).$$

Ainsi, on a la relation de récurrence

$$Z_{p_{n+1}}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1, 1) = (\alpha + \beta + \gamma + \delta + n(\alpha + \delta)(\beta + \gamma))Z_{p_n}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1, 1).$$

On obtient donc la formule

$$(16) \quad Z_{p_n}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1, 1) = \prod_{i=0}^{n-1} (\alpha + \beta + \gamma + \delta + i(\alpha + \delta)(\beta + \gamma)).$$

Elle admet de multiples preuves [CSSW12, ABDH13, CDH16], mais elles utilisent toutes des objets combinatoires intermédiaires, contrairement à la nôtre qui se déduit directement du système (13). Dans le cas original où  $\lambda$  est la fonction constante égale à 1, la formule correspondante a été démontrée dans [USW04, BCE+06].

REMARQUE 2.1.5. Considérons le  $\mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, u)$ -espace vectoriel  $E$  engendré par les mots  $\{\bullet, \circ\}^*$ . On étend  $p$  en une forme linéaire de  $E$  et on note  $t$  l'application linéaire qui à un mot  $m = m_n \cdots m_1$  associe le mot

Mot	Coefficient
$\bullet m \xrightarrow{\quad}$	$q^{ \circ(m) } \alpha$
$\bullet m \xleftarrow{\quad}$	$q^n \delta$
$\circ m \xrightarrow{\quad}$	$q^{ \circ(m) } \gamma$
$\circ m \xleftarrow{\quad}$	$\beta$
Pour toute décomposition $m = U \bullet V$ ou $m = U \circ V$	
$\bullet U \bullet V \xleftarrow{\quad}$	$q^{ \circ(U) + V } \alpha \delta$
$\bullet U \circ V \xrightarrow{\quad}$	$q^{ \circ(U) } \alpha \beta$
$\circ U \bullet V \xleftarrow{\quad}$	$q^{ \circ(U) + V } \gamma \delta$
$\circ U \circ V \xrightarrow{\quad}$	$q^{ \circ(U) } \gamma \beta$

TABLE 1. Antécédents de  $m \in \{\bullet, \circ\}^n$ .

$t(m) = \widetilde{m}_1 \cdots \widetilde{m}_n$ . En particulier,  $t$  est une involution. Par la symétrie CP, on sait de plus que  $t$  vérifie  $p \circ t = p|_{\alpha \leftrightarrow \beta, \gamma \leftrightarrow \delta}$  et laisse donc invariant  $q$  et  $u$ , même si cela ne se voit pas sur les relations de récurrence vérifiées par  $p$ . Par exemple,

$$p(\bullet \circ \circ) = (q^2 \alpha + q \alpha \beta + q^2 \delta + a \beta) \circ \circ + q \alpha \beta \circ \bullet + \alpha \beta \bullet \circ$$

et

$$p(\bullet \bullet \circ) = q \alpha \delta \circ \circ + (q^2 \delta + q \alpha \delta + q \alpha + \alpha \beta) \bullet \circ + \gamma \beta \bullet \bullet.$$

Soit maintenant  $g$  l'application linéaire qui à un mot  $m$  de taille  $n$  associe la combinaison linéaire des mots de taille  $n-1$ , donnée dans les équations (14) ou (15). Par définition, on a l'identité  $p(m) = p(g(m))$ . Ainsi, si  $m$  est de taille  $n$  et que l'on identifie  $\mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, u) \varepsilon$  à  $\mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, u)$ , alors  $p(m) = g^n(m)$ . Pour obtenir les récurrences vérifiées par  $p$ , en un sens on fait faire un aller-retour à la particule la plus à gauche. On a donc cassé la symétrie du modèle, en particulier  $t \circ g \neq g \circ t$ . D'ailleurs, comme on va le voir par la suite, le poids en  $q$  et  $u$  des tableaux escaliers est compatible avec la récurrence définie par  $g$  (lemme 2.2.11), mais il ne l'est pas avec l'involution naïve correspondante à  $t$  (définition 2.3.3). En considérant plutôt la particule la plus à droite, on aurait obtenu une autre récurrence pour  $p$ , soit  $d$  l'application linéaire correspondante.

On peut définir  $d$  à partir de  $g$  et  $t$  par la formule  $d = t \circ g \circ t$ . On remarque expérimentalement jusqu'à  $n = 9$  que  $d \circ g = g \circ d$ . Si on suppose que la relation est vraie, alors

$$t \circ (d \circ g) = g \circ t \circ g = g \circ d \circ t = (d \circ g) \circ t.$$

De ce fait, si on considère la récurrence  $p(m) = p((d \circ g)(m))$ , on peut espérer trouver un nouveau poids, voire des nouveaux objets vérifiant la même récurrence dont le poids en  $q$  et  $u$  serait invariant par une involution naïve correspondante à  $t$ . Un tel poids permettrait sûrement de montrer facilement que la série génératrice de ces nouveaux objets satisfait l'*ansatz* matriciel.

## 2. Tableaux escaliers

Les tableaux escaliers ont été introduits par Corteel et Williams dans [CW11]. Elles prouvent en particulier ([CW11, Section 6]) qu'ils donnent une interprétation combinatoire des monômes de  $Z_{p_n}$ . La section 2.1 introduit les tableaux escaliers ainsi que la terminologie permettant d'énoncer le théorème 2.2.2 qui interprète le poids  $p(m)$  d'un mot  $m$  comme un polynôme générateur de tableaux escaliers. Grâce au théorème, nous résolvons également le problème [CSSW12, Problem 5.1]. Dans la section 2.2, nous prouvons le théorème 2.2.2 à l'aide d'un algorithme d'insertion sur les tableaux escaliers. Cet algorithme donne une interprétation combinatoire aux récurrences vérifiées par  $p$ . De plus, il explique simplement les formes factorisées du polynôme générateur  $Z_n$  des tableaux escaliers de taille  $n$  dans les cas  $q = 1$ ,  $\beta = \gamma = 0$  et  $\alpha = \delta = 0$ . Une autre conséquence de notre construction est une bijection (section 2.3) entre les tableaux escaliers et des tables d'inversions colorées, qui codent l'historique d'insertion. Nous terminons par la section 2.4 dans laquelle nous discutons des conséquences de cette dernière bijection en matière de permutations.

### 2.1. Définitions

Commençons par définir les tableaux escaliers.

DÉFINITION 2.2.1. Soit  $n$  un entier naturel non nul, un *tableau escalier* de taille  $n$  est un diagramme de Ferrers de forme  $(n, n - 1, \dots, 1)$  dont certaines cellules sont remplies par un symbole parmi  $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$  en respectant les règles suivantes :

- les cellules du bord sud-est sont remplies ;
- les cellules au-dessus de  $\alpha/\gamma$ , c'est-à-dire  $\alpha$  ou  $\gamma$ , sont vides ;
- les cellules à gauche de  $\beta/\delta$  sont vides.

Un exemple est donné dans la figure 3. On note  $\mathcal{TE}$  l'ensemble des tableaux escaliers et  $\mathcal{TE}_n$  l'ensemble des tableaux escaliers de taille  $n$ .

	1	2	3	4	5	6	7	8
8		$\beta$						$\alpha$
7		$\delta$	$\gamma$			$\alpha$	$\gamma$	
6						$\delta$		
5			$\beta$		$\alpha$			
4			$\beta$	$\gamma$				
3			$\delta$					
2		$\delta$						
1	$\beta$							

FIGURE 3. Un tableau escalier de taille 8.

On associe à chaque tableau escalier  $TE$  un poids  $p(TE)$  de la façon suivante. On commence par remplir les cellules vides avec  $q$  et  $u$  selon les règles, mutuellement exclusives, décrites par la figure 4. Par exemple, la troisième signifie qu'une case vide reçoit un  $q$  si le premier symbole à sa droite dans la même ligne est  $\alpha/\gamma$  et si le premier symbole en dessous dans la même colonne est  $\beta/\gamma$ . Puis, pour obtenir  $p(TE)$ , on fait le produit des symboles. Le remplis-

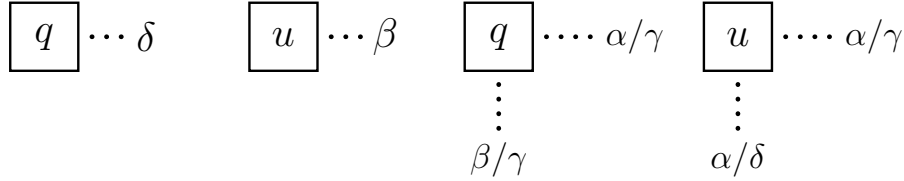


FIGURE 4. Règles de remplissage des cellules vides d'un tableau escalier par des  $q$  et des  $u$ .

sage du tableau escalier de la figure 3 est donné dans la figure 5, son poids est  $p(TE) = u^8 q^{14} \alpha^3 \beta^4 \gamma^3 \delta^4$ . Le degré du poids d'un tableau escalier de taille  $n$  est toujours égal à  $\frac{n(n+1)}{2}$ , c'est pourquoi dans la suite on suppose que  $u = 1$  sans perte de généralité. On note

$$Z_n(\alpha, \beta, \gamma, \delta; q, u) = \sum_{TE \in \mathcal{TE}_n} p(TE).$$

Cette fonction génératrice admet de multiples spécialisations intéressantes dont la plupart sont résumées dans [CSSW12, Table 1].

Soit  $TE$  un tableau escalier de taille  $n$ , on numérote de 1 à  $n$ , les lignes de bas en haut et les colonnes de gauche à droite (figure 3). Ainsi, on peut identifier une cellule par un couple  $(i, j)$  où  $i$  est le numéro de sa ligne et  $j$  celui de sa colonne, en particulier, les cellules sud-est correspondent aux cellules de coordonnées  $(i, i)$ . On note  $L_i(TE)$  la ligne numéro  $i$ ,  $C_i(TE)$  la colonne numéro  $i$ ,  $c_{i,j}(TE)$  la cellule de coordonnée  $(i, j)$  et  $c_i(TE)$  la cellule sud-est  $c_{i,i}(TE)$ . On dit que  $L_i$  est de type  $\alpha/\gamma$  si  $c_i = \alpha$  ou  $c_i = \gamma$ , et de type  $\beta/\delta$  sinon.

u	β	q	q	u	u	q	α
q	δ	γ	q	u	α	γ	
q	q	q	q	q	δ		
u	u	β	q	α			
u	u	β	γ				
q	q	δ					
q	δ						
β							

FIGURE 5. Remplissage par des  $q$  et des  $u$  du tableau de la figure 3.

Pour énoncer le théorème liant les tableaux escaliers à l'ASEP, nous allons définir une projection des tableaux escaliers de taille  $n$  vers les mots  $\{\bullet, \circ\}^n$ . Soit  $TE$  un tableau escaler de taille  $n$  et  $m = m_n \cdots m_1$  le mot tel que  $m_i = \bullet$  si  $c_i = \alpha/\delta$  et  $m_i = \circ$  si  $c_i = \beta/\gamma$ , on note  $\text{type}$  la projection qui envoie  $TE$  sur  $m$ , on dit que  $m$  est le *type* de  $TE$ . Par exemple, si on note  $TE$  le tableau escaler de la figure 3, alors  $\text{type}(TE) = \bullet\circ\bullet\bullet\circ\bullet\bullet\circ$ .

**THÉORÈME 2.2.2.** *Soit  $n$  un entier naturel non nul, soit  $m \in \{\bullet, \circ\}^n$ , on a la relation*

$$p(m) = \sum_{\substack{TE \in \mathcal{TE}_n \\ \text{type}(TE)=m}} p(TE).$$

Nous prouvons ce théorème dans la prochaine section, après avoir défini et étudié l'algorithme d'insertion sur les tableaux escaliers.

**COROLLAIRE 2.2.3** ([CW11, Theorem 3.5]). *Soit  $m$  un état du ASEP de taille  $n$ . Alors, la probabilité stationnaire de  $m$  est*

$$\frac{\sum_{\substack{TE \in \mathcal{TE}_n \\ \text{type}(TE)=m}} p(TE)}{Z_n(\alpha, \beta, \gamma, \delta; q, u)}.$$

**DÉMONSTRATION.** C'est une conséquence des théorèmes 2.1.2, 2.1.3 et 2.2.2. □

**REMARQUE 2.2.4.** Le corollaire 2.2.3 correspond à [CW11, Theorem 3.5]. Ce même théorème est utilisé dans la preuve du théorème 2.1.3 qui sert à prouver le corollaire 2.2.3. Le corollaire 2.2.3 prendra tout son sens quand une preuve alternative du théorème 2.1.3 sera trouvée.

Avant d'introduire l'algorithme d'insertion, nous allons prouver des formules de deux spécialisations de la série génératrice  $Z_n$ . Pour cela, nous devons introduire la fonction de partition de fugacité,

$$Z_{p_n}(y; \alpha, \beta, \gamma, \delta; q, u) = \sum_{m \in \{\bullet, \circ\}^n} y^{|\bullet(m)|} p(m).$$



Corteel, Stanley, Stanton et Williams prouvent par récurrence dans [CSSW12] les relations

$$Z_n(1; \alpha, \beta, \gamma, -\beta; q, u) = \prod_{j=0}^{n-1} (u^j \alpha + q^j \gamma), \text{ et}$$

$$Z_n(-1; \alpha, \beta, \gamma, \beta; q, u) = (-1)^n \prod_{j=0}^{n-1} (u^j \alpha - q^j \gamma),$$

à partir du système (13). Nous proposons une preuve alternative utilisant une involution sur les tableaux escaliers et nous répondons ainsi aux deux premières suggestions de [CSSW12, Problem 5.1]. Pour cela, nous allons prouver une version équivalente de ces deux formules. La symétrie CP de l'ASEP données dans l'observation 2.1.1 implique que

$$Z_{p_n}(y; \alpha, \beta, \gamma, \delta; q, u) = y^n Z_{p_n}(1/y; \beta, \alpha, \delta, \gamma; q, u).$$

et donc, par le théorème 2.2.2,

$$Z_n(y; \alpha, \beta, \gamma, \delta; q, u) = y^n Z_n(1/y; \beta, \alpha, \delta, \gamma; q, u).$$

PROPOSITION 2.2.5. *Soit  $n$  un entier non nul, alors*

$$Z_n(1; \alpha, \beta, -\alpha, \delta; q, u) = \prod_{j=0}^{n-1} (u^j \beta + q^j \delta), \text{ et}$$

$$Z_n(-1; \alpha, \beta, \alpha, \delta; q, u) = \prod_{j=0}^{n-1} (u^j \beta - q^j \delta).$$

DÉMONSTRATION. Pour prouver la proposition 2.2.5, nous allons introduire une involution sur les tableaux escaliers, pour montrer que dans les deux cas, il ne reste plus que les tableaux escaliers n'ayant ni  $\alpha$  ni  $\gamma$ . Soit  $TE$  un tableau escalier de taille  $n$  ayant au moins  $\alpha$  ou  $\gamma$ . Nécessairement une des cellules sud-est de  $TE$  contient un  $\alpha/\gamma$ . Si ce n'était pas le cas, les seules cellules non vides seraient les cellules sud-est et  $TE$  n'aurait pas  $\alpha$  ou  $\gamma$ . Soit  $c_i(TE)$  la plus haute cellule sud-est contenant  $\alpha/\gamma$ . Alors toutes les lignes au-dessus de  $L_i$  ne contiennent pas de  $\alpha/\gamma$ . Considérons l'involution  $inv$  qui envoie  $TE$  sur le tableau escalier où  $c_i$  vaut  $\alpha$  si  $c_i(TE) = \gamma$ , et  $\gamma$  sinon. Alors dans  $Z_n(1; \alpha, \beta, -\alpha, \delta; q)$  comme dans  $Z_n(-1; \alpha, \beta, \alpha, \delta; q)$ ,  $p(TE) = -p(inv(TE))$ , car remplacer  $\alpha$  par  $\gamma$ , ou vice versa, dans  $c_i$  ne modifie pas le poids en  $q$ . Enfin, les tableaux escaliers ne contenant que des  $\beta$  et des  $\delta$  ont des symboles uniquement sur le bord sud-est. Leur série génératrice est donc

$$Z_n(y; 0, \beta, 0, \delta; q, u) = \prod_{j=0}^{n-1} (u^j \beta + yq^j \delta),$$

d'où le résultat. □

## 2. L'ASEP à une particule

---

REMARQUE 2.2.6. Dans le cadre de l'ASEP sur une demi-droite, l'espace des états est l'ensemble des suites  $\{\bullet, \circ\}^{\mathbb{N}}$ . Soit  $m \in \{\bullet, \circ\}^n$ , Sasamoto et Williams [SW14, Corollary 1.8] montrent que la probabilité stationnaire de l'ensemble des états dont les  $n$  premiers termes correspondent à  $m$ , est

$$\frac{\sum_{\text{type}(TE)=m} p(TE)|_{\delta=-\beta, u=1}}{Z_n(\alpha, \beta, \gamma, -\beta; q, 1)}.$$

Les auteurs font la remarque qu'il est intéressant de constater qu'une spécialisation de l'ASEP n'ayant a priori pas de sens car  $-\beta$  est une probabilité négative, peut être interprétée comme l'ASEP sur une demi-droite. Ils posent la question naturelle d'une compréhension plus globale de ce phénomène.

Le dernier problème évoqué dans [CSSW12, Problem 5.1] est une preuve involutive de la nullité de  $Z_n(y; \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, -1, 1)$ , la preuve donnée dans l'article est un calcul à partir de l'expression explicite de  $Z_n$  [CSSW12, theorem 1.13]. Nous allons prouver un résultat plus général en utilisant la récurrence vérifiée par  $p$ . Soit  $m \in \{\bullet, \circ\}^*$ , notons  $Z_m(\alpha, \beta, \gamma, \delta; q, u) = p(m)$ .

PROPOSITION 2.2.7. *Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à trois et  $m \in \{\bullet, \circ\}^n$ , alors*

$$Z_m(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha; -1, 1) = 0.$$

DÉMONSTRATION. Les équations (14) et (15) nous disent que le poids d'un mot de taille  $n$  est une combinaison linéaire de poids de mots de taille  $n - 1$ . Ainsi, pour prouver la proposition 2.2.7, il suffit de montrer que la quantité  $Z_m(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha; -1, 1)$  est nulle si  $m \in \{\bullet, \circ\}^3$ . Calculons les poids des mots de taille 2. Les tableaux escaliers associés aux mot  $\bullet\circ$  sont

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \alpha & \alpha \\ \hline \beta & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \beta & \alpha \\ \hline \beta & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \gamma & \alpha \\ \hline \beta & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \delta & \alpha \\ \hline \beta & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline q & \alpha \\ \hline \beta & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline q & \delta \\ \hline \beta & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline q & \alpha \\ \hline \gamma & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline q & \delta \\ \hline \gamma & \\ \hline \end{array},$$

on a donc l'égalité

$$Z_{\bullet\circ}(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha; -1) = 4\alpha^3 - 4\alpha^2.$$

Dans les trois autres cas on a

$$Z_{\bullet\bullet}(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha; -1) = 4\alpha^3,$$

$$Z_{\circ\bullet}(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha; -1) = 4\alpha^3 + 4\alpha^2,$$

$$Z_{\circ\circ}(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha; -1) = 4\alpha^3.$$

Il nous suffit donc d'écrire la relation de récurrence correspondante à chaque mot de taille 3 et de montrer que l'on obtient bien 0 après spécialisation. Voici la liste des relations de récurrence obtenues à partir des équations (14) et (15) :

$$\circ\circ\circ = \beta\circ\circ + \beta\gamma(\circ\circ + \bullet\circ) + q\beta\gamma(\circ\circ + \circ\bullet) + q^2\gamma\circ\circ,$$

$$\bullet\circ\circ = \alpha\beta(\circ\circ + \bullet\circ) + q\alpha\beta(\circ\circ + \circ\bullet) + q^2\alpha\circ\circ + q^2\delta\circ\circ,$$

$$\begin{aligned}
\circ\bullet\circ &= \beta\bullet\circ + \beta\gamma(\bullet\circ + \bullet\bullet) + q\gamma\bullet\circ + q\gamma\delta(\circ\circ + \bullet\circ), \\
\bullet\bullet\circ &= \alpha\beta(\bullet\circ + \bullet\bullet) + q\alpha\bullet\circ + q\alpha\delta(\circ\circ + \bullet\circ) + q^2\delta\bullet\circ, \\
\circ\bullet\bullet &= \beta\bullet\bullet + \gamma\bullet\bullet + \gamma\delta(\bullet\circ + \bullet\bullet) + q\gamma\delta(\circ\bullet + \bullet\bullet), \\
\bullet\bullet\bullet &= \alpha\bullet\bullet + \alpha\delta(\bullet\circ + \bullet\bullet) + q\alpha\delta(\circ\bullet + \bullet\bullet) + q^2\delta\bullet\bullet, \\
\circ\circ\bullet &= \beta\circ\bullet + \beta\gamma(\circ\bullet + \bullet\bullet) + q\gamma\circ\bullet + q\gamma\delta(\circ\circ + \circ\bullet), \\
\bullet\circ\bullet &= \alpha\beta(\circ\bullet + \bullet\bullet) + q\alpha\circ\bullet + q\alpha\delta(\circ\circ + \circ\bullet) + q^2\delta\circ\bullet.
\end{aligned}$$

et pour chacune d'elles, la spécialisation vaut bien 0.  $\square$

## 2.2. Algorithme d'insertion sur les tableaux escaliers

Pour prouver le théorème 2.2.2, nous présentons un algorithme d'insertion sur les tableaux escaliers. À partir d'un tableau escalier de taille  $n$ , il montre comment construire  $4(n+1)$  tableaux escaliers de taille  $n+1$ , en insérant en particulier une ligne de taille  $n+1$  au dessus du tableau. En étudiant l'évolution du poids d'un tableau escalier suite à une insertion, nous montrons qu'il donne une interprétation combinatoire de la table 1.

Nous avons besoin pour cela d'introduire quelques opérations sur les tableaux escaliers, elles sont illustrées dans la figure 6. Soit  $i_1 < i_2$  deux entiers tels que la ligne  $L_{i_2}$  ait toutes ses cellules (resp. cellules non sud-est) vides. L'opération  $L_{i_1} \rightarrow L_{i_2}$  (resp.  $L_{i_1}^* \rightarrow L_{i_2}$ ) consiste à copier la valeur de la cellule  $c_{i_1,k}$  dans  $c_{i_2,k}$  pour  $1 \leq k \leq i_1$  (resp.  $1 \leq k < i_1$ ), puis à vider les cellules (resp. cellules non sud-est) de  $L_{i_1}$ . De manière similaire, on définit les deux opérations inverses. Soit  $i_1 < i_2$  deux entiers tels que  $L_{i_1}$  ait toutes ses cellules (resp. cellules non sud-est) vides et tels que les cellules  $c_{i_2,k}$ , pour  $i_1 < k < i_2$  (resp.  $i_1 \leq k < i_2$ ), soient vides. L'opération  $L_{i_2} \rightarrow L_{i_1}$  (resp.  $L_{i_2}^* \rightarrow L_{i_1}$ ) consiste à copier la valeur de la cellule  $c_{i_2,k}$  dans  $c_{i_1,k}$  pour  $1 \leq k \leq i_1$  (resp.  $1 \leq k < i_1$ ), puis à vider les cellules (resp. cellules non sud-est) de  $L_{i_2}$ . Ainsi, l'opération  $L_{i_1} \rightarrow L_{i_2}$  est l'inverse de  $L_{i_2} \rightarrow L_{i_1}$ , et il en est de même pour  $L_{i_1}^* \rightarrow L_{i_2}$  et  $L_{i_2}^* \rightarrow L_{i_1}$ . Enfin, l'opération  $TE + L_{n+1}(x)$ , signifie que l'on ajoute une ligne de taille  $n+1$  au-dessus de  $TE$ , dont toutes les cellules sont vides, sauf la cellule sud-est qui contient  $x$ .

DÉFINITION 2.2.8 ( Algorithme d'insertion ). Soit  $TE$  un tableau escalier de taille  $n$ , on définit les  $4(n+1)$  choix d'insertion suivants.

- Premier cas. On insère une ligne avec  $\beta$  ou  $\delta$  :

$$TE + L_{n+1}(y) \text{ avec } y \in \{\beta, \delta\}.$$

On note  $insertion(TE, y)$  le tableau obtenu.

- Deuxième cas. On commence par insérer une ligne avec  $\alpha$  ou  $\gamma$  :

$$TE + L_{n+1}(x) \text{ avec } x \in \{\alpha, \gamma\}.$$

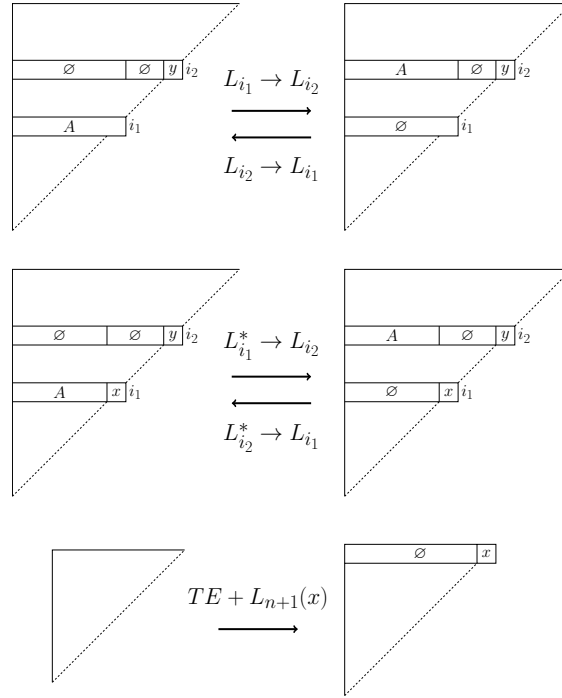


FIGURE 6. Les opérations  $L_{i_1} \rightarrow L_{i_2}$ ,  $L_{i_2} \rightarrow L_{i_1}$ ,  $L_{i_1}^* \rightarrow L_{i_2}$ ,  $L_{i_2}^* \rightarrow L_{i_1}$  et  $TE + L_{n+1}(x)$ .

Puis on décale le contenu des lignes de type  $\alpha/\gamma$  vers le haut de la façon suivante : soit  $i_1 < \dots < i_k = n + 1$  les indices des lignes de type  $\alpha/\gamma$  de  $TE + L_{n+1}(x)$ , alors

$$L_{i_{k-1}}^* \rightarrow L_{i_k}, \dots, L_{i_1}^* \rightarrow L_{i_2}.$$

On note  $insertion(TE, x)$  le tableau obtenu.

- Troisième cas. On commence par insérer une ligne avec  $\alpha$  ou  $\gamma$  :

$$TE + L_{n+1}(x) \text{ avec } x \in \{\alpha, \gamma\}.$$

Puis on choisit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et on décale vers le haut le contenu des lignes de type  $\alpha/\gamma$  de numéro strictement supérieur à  $i$ . Soit  $i < i_l < \dots < i_k = n + 1$  les indices des lignes de type  $\alpha/\gamma$  de  $TE + L_{n+1}(x)$  plus hautes que  $L_i$ , alors

$$L_{i_{k-1}}^* \rightarrow L_{i_k}, \dots, L_{i_l}^* \rightarrow L_{i_{l+1}}$$

Enfin, on déplace entièrement  $L_i$  dans  $L_{i_l}$  et on affecte  $y \in \{\beta, \gamma\}$  à la cellule  $c_i$  :

$$L_i \rightarrow L_{i_l} \text{ et } c_i = y$$

On note  $insertion(TE, (x, y, i))$  le tableau obtenu.

On note  $[TE]$  l'ensemble des tableaux escaliers obtenus à partir de  $TE$  par l'algorithme d'insertion.

Les différentes insertions sont représentées schématiquement dans la figure 7, tandis que la figure 8 donne un exemple des trois types d'insertion appliqués au tableau escalier de la figure 3.

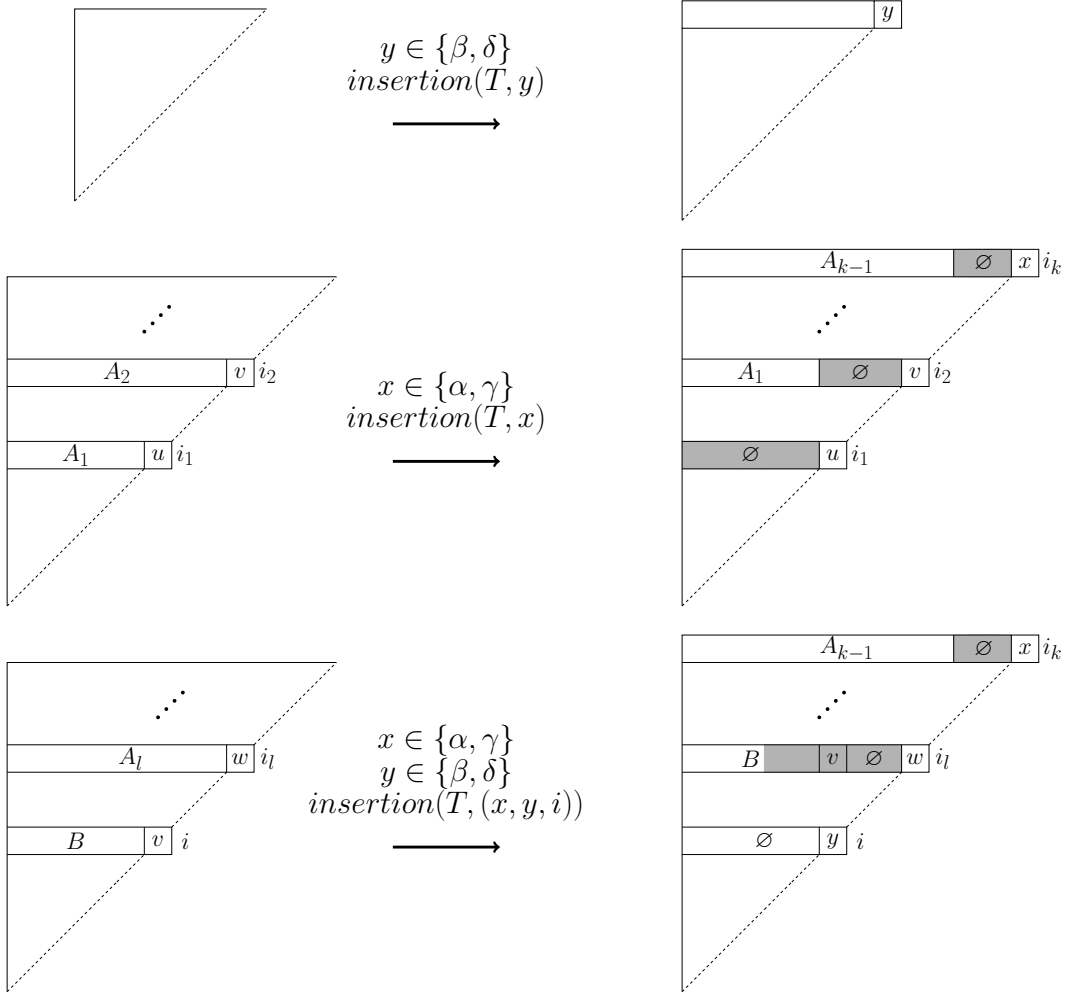


FIGURE 7. Schématisation des différentes insertions d'un tableau escalier. Les cellules grises correspondent aux cellules spéciales définies dans la preuve du théorème 2.2.9.

THÉORÈME 2.2.9. Soit  $n$  un entier naturel, la fonction insertion de la définition 2.2.8 est une bijection entre

- l'ensemble des couples  $(TE, e)$  où  $TE$  est un tableau escalier de taille  $n$  et  $e$  est un élément parmi

$$\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \cup \{(x, y, i) \mid x \in \{\alpha, \gamma\}, y \in \{\beta, \delta\} \text{ et } i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$$

et

- l'ensemble des tableaux escaliers de taille  $n + 1$ .

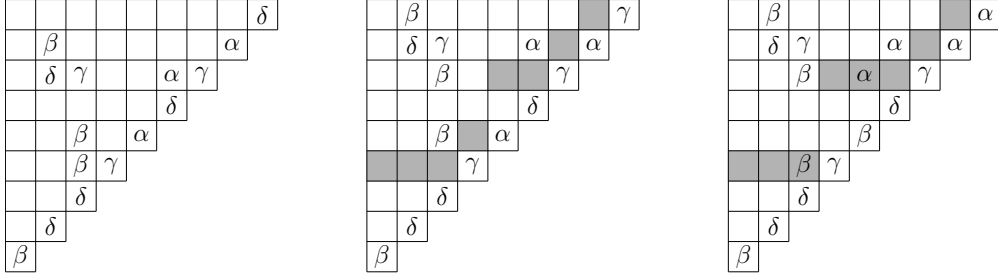


FIGURE 8. De gauche à droite on a  $insertion(TE, \delta)$ ,  $insertion(TE, \gamma)$  et  $insertion(TE, (\alpha, \beta, 5))$ , où  $TE$  est le tableau escaler de la figure 3.

Autrement dit  $\mathcal{TE}_{n+1} = \bigsqcup_{TE \in \mathcal{TE}_n} [TE]$  est une partition.

DÉMONSTRATION. Soit  $n$  un entier naturel non nul. Tout d'abord, les tableaux obtenus à l'aide de l'algorithme d'insertion vérifient la définition 2.2.1, car il n'y a ni élément à gauche de  $\beta/\delta$ , ni au-dessus de  $\alpha/\gamma$ , et les cellules sud-est ne sont pas vides. Ensuite, il est clair que la fonction  $insertion$  donne une bijection entre

- les couples  $(TE, y)$  où  $TE$  est un tableau escaler de taille  $n$  et  $y$  est égal à  $\beta$  ou  $\delta$ , et
- les tableaux escaliers de taille  $n + 1$  dont la ligne la plus haute est de type  $\beta/\delta$ .

Soit maintenant  $TE'$  un tableau escaler de taille  $n + 1$ , dont la ligne la plus haute est de type  $\alpha/\gamma$ . On note  $i_1 < \dots < i_k = n + 1$  les indices de ses lignes de type  $\alpha/\gamma$ . On appelle *cellules spéciales* de  $TE'$  les cellules  $\{c_{i_p, j} \mid p \in \llbracket 2, k \rrbracket, i_{p-1} \leq j < i_p\} \cup \{c_{i_1, j} \mid j \in \llbracket 1, i_1 - 1 \rrbracket\}$ , on note cet ensemble  $cs(TE')$ . Elles sont représentées en gris dans la figure 9. Elles sont également en gris dans les figures 7 et 8 représentant l'algorithme d'insertion. Soit  $TE$  un tableau escaler de taille  $n$ ,  $x \in \{\alpha, \gamma\}$ ,  $y \in \{\beta, \delta\}$  et  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Une première observation est que les cellules de  $cs(insertion(TE, x))$  sont vides, contrairement à celles de  $cs(insertion(TE, (x, y, i)))$ , comme on peut le voir dans la figure 7. Pour ce dernier, si on les parcourt du nord-est au sud-ouest, la première cellule non vide est sur la colonne  $C_i$  et elle contient le contenu de  $c_i(TE)$ , comme illustré par la figure 7. On va donc construire l'antécédent de  $TE'$  en fonction de la vacuité de ses cellules spéciales.

Si les cellules spéciales sont toutes vides, on peut appliquer les opérations

$$L_{i_2}^* \rightarrow L_{i_1}, \dots, L_{i_k}^* \rightarrow L_{i_{k-1}}.$$

Après les avoir appliquées,  $L_{n+1}$  est vide sauf sur sa cellule sud-est qui contient  $\alpha/\gamma$  que l'on note  $x$ . Soit  $TE$  le tableau obtenu, après suppression de  $L_{n+1}(TE')$ , alors  $TE' = insertion(TE, x)$ . Ainsi, la fonction  $insertion$  donne une bijection entre

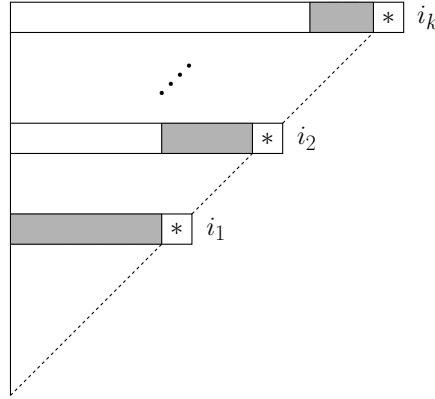


FIGURE 9. Cellules spéciales (gris) d'un tableau escalier dont la ligne la plus haute est de type  $\alpha/\gamma$ . Le symbole  $*$  correspond au choix à  $\alpha$  ou  $\gamma$ .

- les couples  $(TE, x)$  où  $TE$  est un tableau escalier de taille  $n$  et  $x$  est égal à  $\alpha$  ou  $\gamma$ , et
- les tableaux escaliers de taille  $n + 1$  dont la ligne la plus haute est de type  $\alpha/\gamma$  et tels que leurs cellules spéciales sont toutes vides.

Si les cellules de  $cs(TE')$  ne sont pas toutes vides, on les parcourt du nord-est au sud-ouest et on note  $i$  l'entier tel que la première cellule spéciale non vide soit dans la colonne  $C_i$ . Notons  $l$  l'entier  $\min(p, i < i_p)$ . On note  $y$  le symbole dans la cellule  $c_i$ . Par définition des tableaux escaliers,  $y$  est nécessairement égal à  $\beta$  ou  $\delta$  car  $c_i$  n'est pas vide. Après avoir supprimé le symbole de  $c_i$ , les cellules spéciales à l'est de  $C_i$  sont vides, ainsi que  $L_i$ , on peut donc appliquer les opérations

$$L_{i_l} \rightarrow L_i \text{ et } L_{i_{l+1}}^* \rightarrow L_{i_l}, \dots, L_{i_k}^* \rightarrow L_{i_{k-1}}.$$

Il ne reste plus qu'à poser  $x = c_{n+1}(TE')$  et à supprimer  $L_{n+1}(TE')$ . Si on note  $TE$  le tableau escalier ainsi obtenu, alors  $TE' = \text{insertion}(TE, (x, y, i))$ . Ainsi, la fonction *insertion* donne une bijection entre

- les quadruplets  $(TE, x, y, i)$  où  $TE$  est un tableau escalier de taille  $n$ ,  $x$  est dans  $\{\alpha, \gamma\}$ ,  $y$  est dans  $\{\beta, \delta\}$  et  $i$  est dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , et
- les tableaux escaliers de taille  $n + 1$  dont la ligne la plus haute est de type  $\alpha/\gamma$  et tels que leurs cellules spéciales ne sont pas toutes vides.  $\square$

Étant donné les tableaux escaliers vérifient la même récurrence que  $p : \{\bullet, \circ\}^* \rightarrow \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, u)$  (lemme 2.2.11), on retrouve la formule de l'équation (16).

COROLLAIRE 2.2.10. Soit  $n$  un entier naturel, alors

$$Z_n(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1, 1) = \prod_{i=0}^{n-1} (\alpha + \beta + \gamma + \delta + i(\alpha + \delta)(\beta + \gamma)).$$

## 2. L'ASEP à une particule

---

Pour pouvoir prouver le théorème 2.2.2, on a besoin du lemme suivant.

LEMME 2.2.11. *Soit  $TE$  un tableau escalier de taille  $n$ , soit  $w = p(TE)$  et  $m = \text{type}(TE)$ . Dans ce lemme,  $m'$  désigne, pour chacun des cas suivant, le type du tableau obtenu après insertion. Alors on a*

- $p(\text{insertion}(TE, \alpha)) = q^{|\circ(m)|} \alpha w$  et  $m' = \bullet m$ ,
- $p(\text{insertion}(TE, \beta)) = \beta w$  et  $m' = \circ m$ ,
- $p(\text{insertion}(TE, \gamma)) = q^{|\circ(m)|} \gamma w$  et  $m' = \circ m$ ,
- $p(\text{insertion}(TE, \delta)) = q^n \delta w$  et  $m' = \bullet m$ .

Pour toute décomposition  $m = U \overset{i}{\circ} V$  on a,

- $p(\text{insertion}(TE, (\alpha, \beta, i))) = q^{|\circ(U)|} \alpha \beta w$  et  $m' = \bullet U \circ V$ ,
- $p(\text{insertion}(TE, (\gamma, \beta, i))) = q^{|\circ(U)|} \gamma \beta w$  et  $m' = \circ U \circ V$ ,
- $p(\text{insertion}(TE, (\alpha, \delta, i))) = q^{|\circ(U)| + |V|} \alpha \delta w$ , et  $m' = \bullet U \bullet V$ ,
- $p(\text{insertion}(TE, (\gamma, \delta, i))) = q^{|\circ(U)| + |V|} \gamma \delta w$ , et  $m' = \circ U \bullet V$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $n$  un entier naturel non nul. Soit  $m = \text{type}(TE)$  et  $m' = \text{type}(TE')$ , pour prouver le lemme, nous étudions chacun des trois cas de l'algorithme d'insertion, séparément.

Premièrement, si  $TE' = \text{insertion}(TE, y)$  avec  $y = \beta$  (resp.  $y = \delta$ ), alors  $TE'$  est obtenu uniquement en ajoutant une ligne. La seule cellule non vide de cette nouvelle ligne est  $c_{n+1}(TE')$  et elle contient  $y$ . Ainsi, les lignes de 1 à  $n$  correspondent exactement à  $TE$ . De plus, le poids de la ligne  $n + 1$  de  $TE'$  est  $\beta$  (resp.  $q^n \delta$ ). On a donc bien  $p(\text{insertion}(TE, \beta)) = \beta w$  (resp.  $p(\text{insertion}(TE, \delta)) = q^n \delta w$ ) ainsi que  $m' = \circ m$  (resp.  $\bullet m$ ).

Deuxièmement, si  $TE' = \text{insertion}(TE, x)$  avec  $x = \alpha$  (resp.  $\gamma$ ), alors  $m' = \bullet m$  (resp.  $\circ m$ ). Dans la suite on considérera avoir rempli  $TE$  et  $TE'$  avec des  $q$  et des 1 correspondant aux  $u$ . Les cellules sud-est de  $TE$  ne sont pas modifiées par l'algorithme, si ce n'est que l'on ajoute une nouvelle cellule sud-est de valeur  $x$ . De plus, les cellules des lignes de type  $\beta/\delta$  sont inchangées. En ce qui concerne les lignes de  $TE'$  de type  $\alpha/\gamma$ , notons  $i_1 < \dots < i_k = n + 1$  leurs indices. Alors, pour  $p \in \llbracket 2, k \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1, i_{p-1} - 1 \rrbracket$ , on a  $c_{i_p, j}(TE') = c_{i_{p-1}, j}(TE)$ . Ainsi, nous avons traité toutes les cellules de  $TE$  et toutes celles de  $TE'$  sauf  $c_s(TE')$ . Étant donné qu'elles sont vides, à leur droite il y a nécessairement une cellule sud-est contenant  $\alpha$  ou  $\gamma$ . Soit  $c_{k, j}$  une cellule non sud-est en dessous une cellule spéciale  $c_{i_l, j}$ . Alors on a  $i_{l-1} \leq k < j < i_l$ , avec la convention que  $i_0 = 0$ . De ce fait, la cellule  $c_{k, j}$  appartient à une ligne de type  $\beta/\gamma$ , elle est donc vide. La première cellule non vide sous une cellule spéciale est donc une cellule sud-est. Ainsi, étant donné qu'il y a une cellule spéciale par colonne, sauf dans  $C_{n+1}$ , il y a autant de  $q$  dans les cellules spéciales de  $TE'$  qu'il y a de  $\beta/\gamma$  dans  $c_1(TE'), \dots, c_n(TE')$ . Autrement dit  $|\circ(m)|$  car le bord sud-est n'a pas été modifiée par l'algorithme d'insertion. Ainsi,  $p(\text{insertion}(TE, x)) = q^{|\circ(m)|} x w$ .

Troisièmement, si  $TE' = \text{insertion}(TE, (x, y, i))$  avec  $(x, y, i) \in \{\alpha, \gamma\} \times \{\beta, \delta\} \times \llbracket 1, n \rrbracket$ . Nous supposons que  $x = \alpha$  et  $y = \delta$ , la preuve des trois autres cas est similaire. La seule cellule sud-est modifiée par l'algorithme d'insertion



est  $c_i$  qui vaut maintenant  $\delta$ , ainsi  $m' = \bullet m_n \cdots m_{i+1} \bullet m_{i-1} \cdots m_1$ . Dans la suite de la preuve, nous travaillons avec des tableaux complètement remplis avec  $q$  et  $u = 1$ . On note  $i < i_l < \cdots < i_k = n + 1$  les lignes de  $TE'$  de type  $\alpha/\gamma$  qui sont au-dessus de  $L_i$ . Les lignes en dessous de  $L_i$  ne sont pas modifiées par l'algorithme d'insertion car le poids d'une cellule ne dépend pas des cellules situées au-dessus. Les lignes de type  $\beta/\delta$  au-dessus de  $L_i$  ne sont pas modifiées non plus car à gauche de  $\beta$  (resp.  $\delta$ ) il y a nécessairement 1 (resp.  $q$ ). Soit maintenant  $p \in \llbracket l+1, k \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1, i_{p-1} - 1 \rrbracket$ . Dans le cas où  $c_{i_{p-1},j}(TE)$  n'est pas vide, par définition de l'algorithme d'insertion, on a  $c_{i_p,j}(TE') = c_{i_{p-1},j}(TE)$ . Si la cellule est vide, il suffit de remarquer que les symboles à droite et en dessous de  $c_{i_p,j}(TE')$  sont les mêmes que pour  $c_{i_{p-1},j}(TE)$ , ainsi, on a également  $c_{i_p,j}(TE') = c_{i_{p-1},j}(TE)$ . Pour  $1 \leq j \leq i$  on a  $c_{i,j}(TE') = c_{i,j}(TE)$ . Ensuite, pour  $1 \leq j < i$ , les cellules  $c_{i,j}(TE')$  valent  $q$  car  $c_i(TE') = \delta$ . Enfin, il ne reste plus qu'à étudier la cellule spéciale de chacune des colonnes  $C_{i+1}, \dots, C_n$ . Les mêmes arguments que dans le cas précédent, nous disent que dans ces cellules, le nombre de  $q$  est  $|\circ(m_n \cdots m_{i+1})|$ . En résumé, on trouve bien que  $p(\text{insertion}(TE, (x, \delta, i))) = q^{|\circ(m_n \cdots m_{i+1})| + i - 1} x \delta w$ .  $\square$

**DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.2.2.** La preuve peut se faire par récurrence sur  $n$ . Le cas  $n = 1$  est vrai car un calcul rapide utilisant les équations (14) et (15) sur les mots  $\circ$  et  $\bullet$  nous montre que  $p(\bullet) = \alpha + \delta$  et  $p(\circ) = \beta + \gamma$ . La suite de la preuve repose sur le fait que le poids des états de l'ASEP et des tableaux escaliers suivent la même récurrence comme on peut le voir en comparant le lemme 2.2.11 et la table 1. Soit  $m \in \{\bullet, \circ\}^n$ , nous allons traiter le cas des mot de taille  $n + 1$  de la forme  $\bullet m$ , le cas  $\circ m$  est analogue. Par définition de  $p$ , on a

$$\begin{aligned} p(\bullet m) &= q^n \delta p(m) + \alpha \delta \sum_{m=U \bullet V} q^{|\circ(U)| + |V|} (p(U \bullet V) + p(U \circ V)) + q^{|\circ(m)|} \alpha p(m) \\ &\quad + \alpha \beta \sum_{m=U \circ V} q^{|\circ(U)|} (p(U \bullet V) + p(U \circ V)). \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} p(\bullet m) &= q^n \delta \sum_{\text{type}(TE)=m} p(TE) \\ &\quad + \alpha \delta \sum_{m=U \bullet V} q^{|\circ(U)| + |V|} \left( \sum_{\text{type}(TE)=U \bullet V} p(TE) + \sum_{\text{type}(TE)=U \circ V} p(TE) \right) \\ &\quad + q^{|\circ(m)|} \alpha \sum_{\text{type}(TE)=m} p(TE) \\ &\quad + \alpha \beta \sum_{m=U \circ V} q^{|\circ(U)|} \left( \sum_{\text{type}(TE)=U \bullet V} p(TE) + \sum_{\text{type}(TE)=U \circ V} p(TE) \right). \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.2.11,

$$\begin{aligned}
 p(\bullet m) &= \sum_{\text{type}(TE)=m} p(\text{insertion}(TE, \delta)) \\
 &+ \sum_{m=U \bullet V} \sum_{\text{type}(TE)=U \overset{i}{\circ} V} p(\text{insertion}(TE, \alpha, \delta, i)) \\
 &+ \sum_{\text{type}(TE)=m} p(\text{insertion}(TE, \alpha)) \\
 &+ \sum_{m=U \circ V} \sum_{\text{type}(TE)=U \overset{i}{\circ} V} p(\text{insertion}(TE, (\alpha, \beta, i))).
 \end{aligned}$$

En définitive,

$$p(\bullet m) = \sum_{\text{type}(TE)=\bullet m} p(TE).$$

Par récurrence, le théorème 2.2.2 est bien démontré.  $\square$

REMARQUE 2.2.12. Si on considère plutôt la récurrence définie par l'application  $d$  de la remarque 2.1.5, la définition du poids en  $q$  et  $u$  à considérer est donnée par la figure 10. On l'obtient en appliquant l'involution notée  $\psi_{\alpha\beta}$  cor-

$$\begin{array}{cccc}
 q & q \cdots \alpha/\delta & u & u \cdots \beta/\gamma \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \gamma & \beta/\delta & \alpha & \beta/\delta
 \end{array}$$

FIGURE 10. Règles alternatives de remplissage des cellules vides d'un tableau escalier par  $q$  et  $u$ . Elles sont obtenues en transposant les règles de la figure 4 puis en échangeant  $\alpha$  et  $\beta$  ainsi que  $\gamma$  et  $\delta$ .

respondante à  $t$  (définition 2.3.3), aux règles initiales. L'algorithme d'insertion correspondant consiste cette fois-ci à ajouter une colonne à gauche du tableau, plus précisément,

$$\text{insertion}'(TE, e) = \psi_{\alpha\beta}(\text{insertion}(\psi_{\alpha\beta}(TE), e|_{\alpha \leftrightarrow \beta, \gamma \leftrightarrow \delta})).$$

Dans le cas où le type d'un tableau escalier est composé uniquement de  $\bullet$  ou de  $\circ$ , le lemme 2.2.11 se simplifie. Nous étudions donc les  $\alpha/\delta$ -tableaux escaliers et les  $\beta/\gamma$ -tableaux escaliers, qui sont respectivement les tableaux escaliers n'ayant que  $\alpha/\delta$  et les tableaux escaliers n'ayant que  $\beta/\gamma$ . La description du poids en  $q$  de tels tableaux est plus simple que dans le cas général, les cases ayant un poids  $q$  sont respectivement les cellules à gauche de  $\delta$  et les cellules à

gauche d'un  $\gamma$ . Si on considère les insertions impliquant uniquement des  $\alpha/\delta$  et les insertions impliquant uniquement des  $\beta/\gamma$ , on obtient respectivement des algorithmes d'insertion pour les  $\alpha/\delta$ -tableaux escaliers et les  $\beta/\gamma$ -tableaux escaliers.

LEMME 2.2.13. *Soit  $TE$  un  $(\alpha/\delta)$ -tableau escalier de taille  $n$ , soit  $w = p(TE)$  alors*

- $p(\text{insertion}(TE, \alpha)) = u^n \alpha w$  ;
- $p(\text{insertion}(TE, \delta)) = q^n \delta w$  ;
- $p(\text{insertion}(TE, (\alpha, \delta, i))) = u^{i-1} q^{n-i} \alpha \delta w$ .

*Soit  $TE$  un  $(\beta/\gamma)$ -tableau escalier de taille  $n$ , soit  $w = p(TE)$  alors*

- $p(\text{insertion}(TE, \beta)) = u^n \beta w$  ;
- $p(\text{insertion}(TE, \gamma)) = q^n \gamma w$  ;
- $p(\text{insertion}(TE, (\gamma, \beta, i))) = u^{i-1} q^{n-i} \beta \gamma w$ .

DÉMONSTRATION. On obtient ce lemme à partir du lemme 2.2.11, en se rappelant que le type d'un  $\alpha/\delta$ -tableau escalier est de la forme  $\bullet \cdots \bullet$  et celui d'un  $\beta/\gamma$ -tableau escalier est  $\circ \cdots \circ$ .  $\square$

De ce lemme on déduit facilement une forme factorisée des fonctions génératrices de ces tableaux.

PROPOSITION 2.2.14. *La série génératrice des  $\alpha/\delta$ -tableaux escaliers de taille  $n$  est*

$$Z_n(\alpha, 0, 0, \delta; q, u) = \prod_{i=0}^{n-1} (u^i \alpha + \alpha \delta [i]_{q,u} + q^i \delta).$$

*La série génératrice des  $(\beta/\gamma)$ -tableaux escaliers de taille  $n$  est*

$$Z_n(0, \beta, \gamma, 0; q, u) = \prod_{i=0}^{n-1} (u^i \beta + \beta \gamma [i]_{q,u} + q^i \gamma).$$

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence immédiate du lemme 2.2.13.  $\square$

Le cas des  $\beta/\gamma$ -tableaux escaliers a déjà été traité par Corteel et Dasse-Hartaut dans [CDH16, proposition 1.6]. Les auteurs traitent pour cela le cas intermédiaire des  $\beta/\gamma$ -tableaux escaliers de taille  $n$  ayant  $n \gamma$  ([CDH16, proposition 3.5]). On déduit facilement ce résultat du lemme 2.2.13 en interdisant l'insertion  $\text{insertion}(TE, \beta)$ . Il y a également le résultat analogue pour les  $\alpha/\delta$ -tableaux escaliers.

PROPOSITION 2.2.15. *La série génératrice des  $\alpha/\delta$ -tableaux escaliers de taille  $n$  ayant  $n \delta$  est*

$$Z_n(\alpha, 0, 0, \delta; q, u) = \delta^n \prod_{i=0}^{n-1} (\alpha [i]_{q,u} + q^i).$$

La série génératrice des  $\beta/\gamma$ -tableaux escaliers de taille  $n$  ayant  $n$   $\gamma$  est

$$Z_n(0, \beta, \gamma, 0; q, u) = \gamma^n \prod_{i=0}^{n-1} (\beta[i]_{q,u} + q^i).$$

### 2.3. Bijection entre les tableaux escaliers et des tables d'inversions colorées

On déduit facilement de l'algorithme d'insertion une bijection entre les tableaux escaliers et des tables d'inversions colorées.

**DÉFINITION 2.2.16.** Soit  $n$  un entier naturel non nul. Une *table d'inversions*  $I$  de taille  $n + 1$  est un  $n$ -uplet  $(I[1], \dots, I[n])$  tel que pour tout  $1 \leq i \leq n$  on ait  $I[i] \in \llbracket 0, i \rrbracket$ . Une *table d'inversions colorée* est une table d'inversions  $I$  telle que

- si  $I[i] = 0$  on le colore par  $x = \alpha$  ou  $\gamma$  et on note  $I[i] = 0_x$  ;
- si  $I[i] = i$  on le colore par  $y = \beta$  ou  $\delta$  et on note  $I[i] = i_y$  ;
- sinon on colore  $I[i]$  par  $x$  et  $y$  où on a les choix  $(x, y) \in \{\alpha, \gamma\} \times \{\beta, \delta\}$  et on note  $I[i]_{x,y}$ .

On note  $I[< k]$  la table d'inversions de taille  $k$   $(I[1], \dots, I[k - 1])$ .

Pour définir le poids d'une table d'inversions colorée, nous avons besoin des statistiques suivantes. Même si  $I[i]$  et  $I[j]$  ont des couleurs différentes, s'ils correspondent aux mêmes entiers on écrit  $I[i] = I[j]$ .

**DÉFINITION 2.2.17.** Soit  $I$  une table d'inversions colorée de taille  $n + 1$ , alors

- $\text{DIST}(I) = \{I[i] \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket, I[j] \neq I[i] \forall j \in \llbracket i + 1, n \rrbracket \text{ et } I[i] \neq 0\}$ ;
- $\circ(I) = \{I[i] \in \text{DIST}(I) \mid I[i] \text{ colorée par } \beta\} \cup \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \text{DIST}(I) \mid I[i] \text{ colorée par } \gamma\}$
- $\delta_q(I) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ I[i] \text{ colorée par } \delta}} (I[i] - 1)$  ;
- $\alpha\gamma_q(I) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ I[i] \text{ colorée par } \alpha \text{ ou } \gamma}} |\{j \in \circ(I[< i]) \mid j > I[i]\}|$

Enfin, le poids  $p(I)$  d'une table d'inversions colorée est le produit de ses couleurs multiplié par  $q$  à la puissance  $\delta_q(I) + \alpha\gamma_q(I)$ .

Soit  $I = (0_\gamma, 1_{\gamma,\delta}, 0_\gamma, 2_{\gamma,\delta}, 1_{\alpha,\beta}, 4_{\gamma,\delta}, 2_{\alpha,\delta})$  une table d'inversions colorée de taille 8, alors  $\text{DIST}(I) = \{1_{\alpha,\beta}, 2_{\alpha,\delta}, 4_{\gamma,\delta}\}$ ,  $\circ(I) = \{1, 3, 6\}$ ,  $\delta_q(I) = 0 + 1 + 3 + 1$  et  $\alpha\gamma_q(I) = 0 + 0 + 1 + 1 + 2 + 0 + 2$ , ainsi,  $p(I) = q^{11}\alpha^2\beta\gamma^5\delta^4$ . On peut maintenant énoncer le théorème.

**THÉORÈME 2.2.18.** Soit  $n$  un entier naturel non nul, il existe une bijection  $\psi$  entre les tableaux escaliers de taille  $n$  et les tables d'inversions de taille  $n + 1$ , vérifiant, pour tout tableau escalier  $TE$ ,

- (1)  $c_i = y \in \{\beta, \delta\}$  si, et seulement si,  $i \in \text{DIST}(\psi(TE))$  et a pour couleur  $y$  ;
- (2)  $c_i = x \in \{\alpha, \gamma\}$  si, et seulement si,  $i \notin \text{DIST}(\psi(TE))$  et  $I[i]$  a pour couleur  $x$  ;
- (3)  $p(\psi(TE)) = p(TE)$  ;

DÉMONSTRATION. Soit  $TE$  un tableau escalier de taille  $n$ . On dénote par  $TE_1, \dots, TE_n = TE$  la suite des tableaux escaliers menant à  $TE$  par insertions successives,  $e_1$  la valeur de l'unique cellule de  $TE_1$  et  $e_2, \dots, e_n$  les éléments tels que  $TE_i = \text{insertion}(TE_{i-1}, e_i)$  pour  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ . Soit  $\psi(TE)$  la table d'inversions colorée de taille  $n + 1$  telle que pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on ait,

- $\psi(TE)[i] = 0_{e_i}$ , si  $e_i \in \alpha, \gamma$  ;
- $\psi(TE)[i] = i_{e_i}$ , si  $e_i \in \beta, \delta$  ;
- $\psi(TE)[i] = j_{x,y}$ , si  $e_i = (x, y, j) \in \{\alpha, \gamma\} \times \{\beta, \delta\} \times \llbracket 1, i - 1 \rrbracket$ .

L'algorithme d'insertion étant bijectif, il est clair que  $\psi$  est une bijection. De plus, en ce qui concerne l'égalité au niveau des poids, seule la puissance en  $q$  présente une difficulté. Nous allons prouver les trois propriétés vérifiées par  $\psi$  par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 1$ , la preuve est immédiate. Supposons maintenant les trois propriétés vraies pour un  $n$  fixé. Soit  $TE$  un tableau escalier, et soit  $TE' \in [TE]$ , on va prouver que  $\psi(TE')$  vérifie les propriétés que l'on veut montrer. Il suffit de faire une disjonction de cas suivant le type d'insertion dont est issu  $TE'$ . On note  $I = \psi(TE)$ ,  $I' = \psi(TE')$ ,  $m = \text{type}(TE)$  et  $m' = \text{type}(TE')$  et soit  $(x, y, j) \in \{\alpha, \gamma\} \times \{\beta, \delta\} \times \llbracket 1, n \rrbracket$ , il est à noter que  $I'[\leq n + 1] = I$ . Une propriété dont on aura besoin est que si 2.2.18.(1) et 2.2.18.(2) sont vérifiés, alors  $\circ(I)$  correspond aux indices des particules blanches de  $m$ ,  $\circ(I) = |\circ(m)|$ .

Premièrement, si  $TE' = \text{insertion}(TE, x)$ , alors  $c_j(TE) = c_j(TE')$  pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $c_{n+1}(TE') = x$ . Or, comme  $I'[n + 1] = 0_x$  alors  $\text{DIST}(I') = \text{DIST}(I)$  et  $n + 1 \notin \text{DIST}(I')$ , donc 2.2.18.(1) et 2.2.18.(2) sont vérifiés. De plus, la puissance en  $q$  de  $p(TE')$  augmente de  $|\circ(m)|$  par rapport à celle de  $p(TE)$ , or,  $I'[n + 1]$  n'est pas colorée par  $\delta$  donc seule la statistique  $\alpha\gamma_q$  a pu changer entre  $I$  et  $I'$ , et elle augmente de

$$\{j \in \circ(I'[\leq n + 1]) \mid j > I'[n + 1]\} = \circ(I'[\leq n + 1]) = \circ(I) = |\circ(m)|.$$

Deuxièmement, si  $TE' = \text{insertion}(TE, y)$ , alors  $c_j(TE) = c_j(TE')$  pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $c_{n+1}(TE') = y$ . Or étant donné que  $I'[n + 1] = (n + 1)_y$ ,  $\text{DIST}(I') = \text{DIST}(I) \cup \{(n + 1)_y\}$ , donc 2.2.18.(1) et 2.2.18.(2) sont vérifiés. De plus, la puissance en  $q$  de  $p(TE')$  augmente de  $n$  si  $y = \delta$  et de 0 si  $y = \beta$ , par rapport à celle de  $p(TE)$ , or,  $I'[n + 1]$  n'est pas colorée par  $\alpha$  ou  $\gamma$  donc seul la statistique  $\delta_q$  a pu changer entre  $I$  et  $I'$ , et en effet, elle augmente de  $n$  si  $y = \delta$  et elle n'augmente pas si  $y = \beta$ .

Troisièmement, si  $TE' = \text{insertion}(TE, (x, y, i))$ , alors  $c_j(TE) = c_j(TE')$  pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}$ ,  $c_{n+1}(TE') = x$  et  $c_i(TE') = y$ . Comme  $n + 1 \notin \text{DIST}(I')$ , 2.2.18.(2) est vrai pour  $c_{n+1}(TE')$ . En ce qui concerne  $c_i(TE')$ , il y a deux cas. Si  $c_i(TE) = u \in \{\beta, \delta\}$  alors  $\text{DIST}(I') = \{i_y\} \cup (\text{DIST}(I) \setminus \{i_u\})$ . Sinon,  $c_i(TE) \in \{\alpha, \gamma\}$ ,  $\text{DIST}(I') = \text{DIST}(I) \cup \{i_y\}$ . Dans les deux cas 2.2.18.(1) et

2.2.18.(2) sont vérifiés. En ce qui concerne la puissance de  $q$  de  $p(TE')$  par rapport à  $p(TE)$ , elle a augmenté de  $i - 1$  si  $y = \delta$  et de 0 si  $y = \beta$ , ce qui est également le cas de  $\delta_q(I')$ . De plus, elle a aussi augmenté de  $|\circ(m_n \cdots m_{i+1})|$ , et entre  $I$  et  $I'$ ,  $\alpha\gamma_q$  a augmenté de  $|\{j \in \circ(I'[\leq n+1]) \mid j > I'[n+1] = i\}|$ , qui est égal à  $|\circ(I) \cap \llbracket i+1, n \rrbracket|$  et donc à  $|\circ(m_n \cdots m_{i+1})|$ .

On vient de montrer que 2.2.18.(1), 2.2.18.(2) et 2.2.18.(3) sont vérifiés par les tableaux escaliers de taille  $n + 1$ , donc par récurrence, le théorème 2.2.18 est vrai pour tout entier naturel non nul.  $\square$

Par exemple la table d'inversion  $I = (0_\gamma, 1_{\gamma,\delta}, 0_\gamma, 2_{\gamma,\delta}, 1_{\alpha,\beta}, 4_{\gamma,\delta}, 2_{\alpha,\delta})$  et le tableau escaler de taille 7 de la figure 11 ont tous deux pour poids  $q^{11}\alpha^2\beta\gamma^5\delta^4$

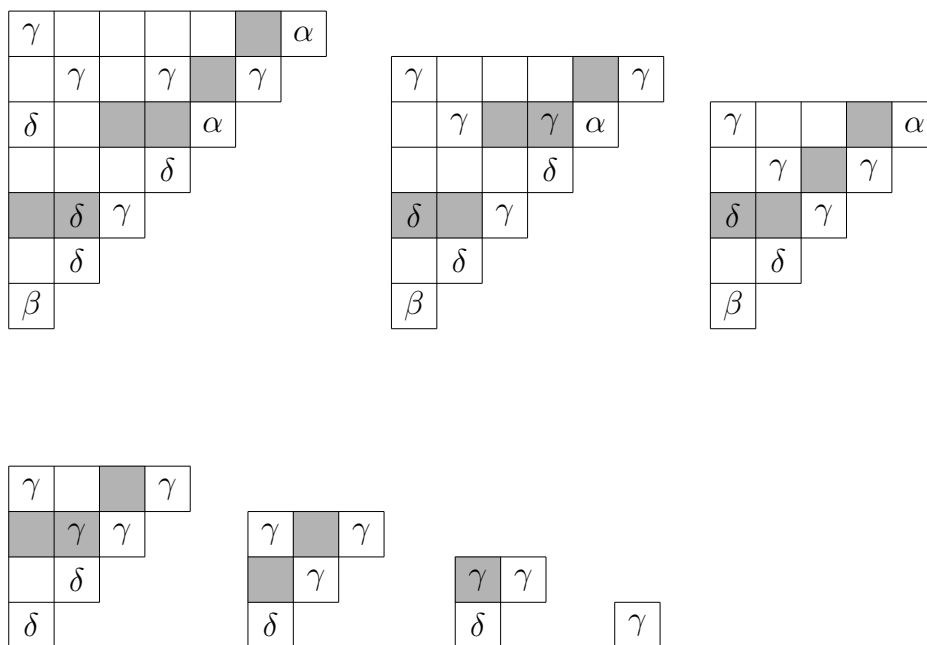


FIGURE 11. La suite des tableaux escaliers correspondant à la table d'inversion  $I = (0_\gamma, 1_{\gamma,\delta}, 0_\gamma, 2_{\gamma,\delta}, 1_{\alpha,\beta}, 4_{\gamma,\delta}, 2_{\alpha,\delta})$ .

Une bijection entre les tableaux escaliers et des tables d'inversions colorées a également été définie par Corteel et Dasse-Hartaut dans [CDH16]. Les auteurs ne considèrent pas tout à fait les mêmes tables d'inversions colorées. Une bijection simple des nôtres aux leurs consiste à envoyer  $I[i] = i_y$  sur  $I[i] = 0_y$ , mais les deux bijections restent tout de même différentes. Leur bijection se lit directement sur le tableau escaler, elle décrit la disposition des symboles, contrairement à celle donnée par l'algorithme d'insertion, qui demande de dérouler l'algorithme. Toutefois, avec cette nouvelle bijection on est capable de décrire entièrement le poids d'un tableau escaler à partir de la table d'inversions colorée correspondante, en particulier le poids  $q$  était manquant dans leur

cas. Un autre avantage de la bijection par l'algorithme d'insertion est de pouvoir lire les symboles des cellules sud-est directement sur la table d'inversions correspondante.

## 2.4. Bijection entre les tableaux escaliers et des permutations colorées

Si on substitue par 0 deux des quatre symboles  $\alpha, \beta, \gamma$  ou  $\delta$  alors  $Z_n$  est une somme de  $n!$  monômes. Dans le cas  $\gamma = \delta = 0$ , il existe de nombreuses bijections entre les différents tableaux associés au modèle ASEP et les permutations. Une des raisons étant qu'il serait intéressant de décrire  $Z_n(\alpha, \beta, 0, 0; q, u)$  comme une somme sur les permutations dont le poids est défini par des statistiques connues. En effet, en utilisant la bijection de Steingrímsson et Williams [SW07] entre les tableaux de permutation et les permutations, Corteel et Williams [CW07b] montrent que

$$Z_n(y; \alpha, \beta, 0, 0; q, 1) = (\alpha\beta)^n \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}} y^{\text{ex}(\sigma)-1} q^{\text{cr}(\sigma)} \alpha^{-\text{mdgs}(\sigma)} \beta^{-\text{Mgds}(\sigma)}$$

où

- $\text{ex}(\sigma)$  est le nombre d'excédences ;
- $\text{cr}(\sigma)$  est le nombre de croisements, *i.e.* de couples  $(i, j)$  tels que  $i < j \leq \sigma(i) < \sigma(j)$  ou  $\sigma(i) < \sigma(j) < i < j$  ;
- $\text{mdgs}(\sigma)$  est le nombre de minima de droite à gauche spéciaux, *i.e.* d'entiers  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tels que  $\sigma(j) = \min_{j \leq i \leq n} \sigma(i)$  et  $\sigma(j) < \sigma(1)$  ;
- $\text{Mgds}(\sigma)$  est le nombre de maxima de gauche à droite spéciaux, *i.e.* d'entiers  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tels que  $\sigma(j) = \max_{1 \leq i \leq j} \sigma(i)$  et  $\sigma(j) > \sigma(1)$ .

Et plus précisément, si on numérote du nord-est au sud-ouest le bord sud-est d'un tableau de permutation, alors le pas  $i$  est vertical, si et seulement si  $i$  est une excédence dans la permutation image. Josuat-Vergès [JV11] montre à travers les histoires de Laguerre que l'on a également

$$Z_n(y; \alpha, \beta, 0, 0; q, 1) = (\alpha\beta)^n \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}} y^{\text{mon}(\sigma)-1} q^{31-2(\sigma)} \alpha^{-\text{Mdg}(\sigma)+1} \beta^{-\text{mdg}(\sigma)+1},$$

où

- $31-2(\sigma)$  est le nombre de motifs 31-2 ;
- $\text{mon}(\sigma)$  est le nombre de montées ;
- $\text{Mdg}(\sigma)$  est le nombre de maxima de droite à gauche ;
- $\text{mdg}(\sigma)$  est le nombre de minima de droite à gauche.

Cette fois-ci, ce sont les montées qui encodent les pas verticaux du bord sud-est. Toutefois, pour obtenir ce résultat il est nécessaire de composer plusieurs bijection, à notre connaissance il n'existe pas de bijection entre des tableaux et des permutations montrant ce résultat. Il existe néanmoins des résultats partiels dans lesquels la puissance de  $q$  correspond à un motif dans les permutations. Dans la deuxième bijection de Corteel et Nadeau [CN09] la puissance

de  $q$  concorde avec le nombre de motif  $31 - 2$  dans les permutations, mais il manque la puissance de  $\alpha$ . L'algorithme d'insertion sur les tableaux boisés d'Aval, Boussicault et Nadeau [ABN13] donne la plus simple interprétation de  $q$  en tant que motif, ce motif étant  $2 - 31$ . Toutefois il ne dit pas comment les pas verticaux et horizontaux sont encodés dans la permutation.

Reprenons la définition 2.2.17 donnant le poids des tables d'inversions compatible avec le poids des tableaux escaliers, dans le cas  $\gamma = \delta = 0$ . Soit  $n$  un entier naturel non nul et soit  $I$  une table d'inversions de taille  $n + 1$ , alors en oubliant la coloration qui n'est plus nécessaire, on a

- $\circ(I) = \text{DIST}(I) = \{I[i] \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket\} \setminus \{0\}$ ;
- $\alpha_q(I) := \alpha \gamma_q(I) = \sum_{1 \leq i \leq n} |\{j \in \text{DIST}(I[< i]) \mid j > I[i]\}|$ .

Étant donné que nous avons supprimé la coloration, nous avons besoin des statistiques supplémentaires suivantes

- $\text{zéros}(I) = |\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid I[i] = 0\}|$
- $\text{imax}(I) = |\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid I[i] = i\}|$

Le poids d'une table d'inversions  $I$  est donc

$$p(I) = (\alpha\beta)^n \beta^{-\text{zéros}(I)} \alpha^{-\text{imax}(I)} q^{\alpha_q(I)} y^{|\text{DIST}(I)|}.$$

Nous n'avons pas réussi à trouver une bijection entre les tables d'inversions et les permutations permettant une bonne interprétation. Toutefois, des expérimentations jusqu'à  $n = 10$  nous suggèrent de considérer les statistiques suivantes

- $\text{mgd}(\sigma)$  est le nombre de minima de gauche à droite;
- $\text{mdg}(\sigma)$  est le nombre de minima de droite à gauche;
- $\text{AVA}(\sigma)$  est l'ensemble des entier  $i$  tels que  $\sigma(i)$  est une avance;
- $2-1-2^+(\sigma)$  est le nombre de motifs 2-13 de  $\sigma^{-1}$ .

CONJECTURE 2.2.19. *Soit  $n$  un entier naturel non nul. Il existe une bijection entre les tables d'inversions de taille  $n$  et les permutations de taille  $n$  qui envoie les statistiques*

$$(\text{zéros}, \text{imax}, \text{DIST}, \alpha_q)$$

sur

$$(\text{mgd} - 1, \text{mdg} - 1, \text{AVA}, 2-1-2^+).$$

Trouver une telle bijection semble être la première étape pour trouver un poids sur des permutations colorées compatible avec le poids des tables d'inversions colorées.

Le cas  $\alpha = \delta = 0$  a été traité uniquement dans le papier de Corteel et Dasse-Hartaut. Les auteurs montrent que

$$Z_n(0, \beta, \gamma, 0; q, 1) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left( q^{\binom{n}{2} - M(\sigma)} \prod_{i \in \text{mDG}(\sigma)} \left( \frac{\beta}{q^{i-1}} + \gamma \right) \prod_{i \notin \text{mDG}(\sigma)} (\beta\gamma) \right),$$



où  $M(\sigma)$  est la somme des  $M(\sigma, i)$  tel que  $M(\sigma, i)$  est égal au premier entier à droite de  $i$  et plus petit que  $i$ , ou 0 s'il n'existe pas. De plus dans le cas où on considère uniquement les tableaux escaliers de taille  $n$  ayant  $n$   $\gamma$ , les auteurs montrent que l'emplacement des  $\beta$  sur la diagonale s'interprète comme les  $\sigma(j)$  tels que  $\sigma(j-1) > \sigma(j)$ . Si nous appliquons la définition 2.2.17 au cas  $\alpha = \delta = 0$ , pour  $n$  un entier naturel non nul et  $I$  un table d'inversions de taille  $n+1$ , alors en oubliant la coloration qui n'est plus nécessaire, on a

- $\text{DIST}(I) = \{I[i] \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket\} \setminus \{0\}$  ;
- $\circ(I) = \llbracket 1, n \rrbracket$
- $\gamma_q(I) := \alpha\gamma_q(I) = \sum_{1 \leq i \leq n} \max(i-1 - I[i], 0)$ .

Le poids d'une table d'inversions  $I$  est donc

$$p(I) = \gamma^{\text{zéros}(I)} \beta^{\text{imax}(I)} q^{\gamma_q(I)},$$

la puissance en  $y$  étant égale à  $n$  on pose  $y = 1$ .

PROPOSITION 2.2.20. *Soit  $n$  un entier naturel non nul alors,*

$$Z_n(0, \beta, \gamma, 0; q, 1) = (\beta\gamma)^n \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}} q^{\text{inv}(\sigma) - n + \text{mdg}(\sigma) - 1} \beta^{-\text{mdg}(\sigma) + 1} \gamma^{-\text{mgd}(\sigma) + 1}.$$

DÉMONSTRATION. À un changement près, il suffit d'utiliser une bijection classique entre les tables d'inversions et les permutations. Soit  $I$  une table d'inversions de taille  $n$ , construisons  $\sigma$  à partir de  $I$  par récurrence. Supposons avoir construit  $\sigma^{(i)}$  à partir de  $I[< i]$  pour  $i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$ . La permutation  $\sigma^{(i+1)}$  s'obtient en insérant  $i+1$  tout à gauche de  $\sigma^{(i)}$  si  $I[i] = 0$ , et à droite de  $\sigma_{I[i]}^{(i)}$  sinon. La condition initiale étant donné que  $\sigma(1)$  est l'unique permutation de taille 1. On pose  $\sigma = \sigma^{(n)}$ , il est clair que  $\text{zéros}(I) = \text{mgd}(\sigma) - 1$  et  $\text{imax}(I) = \text{mdg}(\sigma) - 1$ . Concernant la puissance de  $q$ , lorsque l'on insère  $i+1$  on crée  $i - I[i]$  inversions. Or, si  $I[i] \neq i$  (resp.  $I[i] = i$ ) alors  $i - I[i] = \max(i-1 - I[i], 0) + 1$  (resp.  $i - I[i] = \max(i-1 - I[i], 0)$ ). De ce fait, la puissance de  $q$  est égale à  $\text{inv}(\sigma)$  moins un pour chacune des  $n$  insertions sauf quand  $I[i] = i$ . Ainsi,  $\gamma_q(I) = \text{inv}(\sigma) - n + \text{mdg}(\sigma) + 1$   $\square$

Dans leur papier Corteel et Dasse-Hartaut ont montré cette correspondance des statistiques dans le cas où le tableau  $\beta/\gamma$  possède  $n$   $\gamma$ . Cette proposition n'est pas compatible avec la conjecture 2.2.19, dans le sens où elles ne peuvent pas correspondre à la spécialisation d'une même bijection entre les tables d'inversions colorées et des permutations colorées.

REMARQUE 2.2.21. Nous ne traitons pas le cas  $\beta = \gamma = 0$  mais nous obtiendrions les mêmes résultats que pour le cas  $\alpha = \delta = 0$ .

### 3. Tableaux escaliers de type $B$

Plusieurs tableaux ont été définis dans le but de donner une interprétation combinatoire de l'ASEP : les tableaux de permutation, les tableaux alternatifs et les tableaux boisés dans le cas  $\gamma = \delta = 0$ , et les tableaux escaliers qui généralisent les trois précédents. Outre leurs liens avec l'ASEP, ces tableaux intéressent les chercheurs pour leurs propriétés combinatoires. En particulier, ils possèdent des symétries qui ont donné naissance à des analogues en type  $B$  des tableaux précédents, ils ont été introduit respectivement dans les papiers [LW08], [Nad11], [ABN13] et [CDH16], et ils ont également été l'objet d'études de plusieurs autres chercheurs [CJVK13, CJVW11, CK11]. Nous nous concentrons sur les tableaux escaliers de type  $B$ . L'ASEP possède plusieurs symétries (observation 2.1.1), elles peuvent plus ou moins être interprétées par des involutions sur les tableaux escaliers. Pour chaque involution  $i$ , on définit les tableaux escaliers de type  $B$  associés à  $i$  comme les points fixes de  $i$ . On obtient ainsi que deux définitions de tableaux escaliers de type  $B$ , car l'involution associée à la symétrie  $C$ , ne possède pas de point fixe. De même que pour les tableaux escaliers nous définissons un algorithme d'insertion compatible avec les différents tableaux escaliers de type  $B$ , nous en déduisons des formules closes pour des spécialisations des séries génératrices de ces tableaux. Enfin, nous présentons des *ansatz* matriciels dont les tableaux de type  $B$  peuvent être une interprétation.

#### 3.1. Involutions sur les tableaux escaliers et définitions des tableaux escalier de type $B$

Nous commençons par définir les trois involutions associées aux symétries  $C$ ,  $P$  et  $CP$  de l'ASEP.

DÉFINITION 2.3.1. On note  $\psi_{\alpha\gamma}$  l'involution qui consiste à échanger  $\alpha$  et  $\gamma$ , et  $\beta$  et  $\delta$ .

L'involution  $\psi_{\alpha\gamma}$  interprète effectivement la symétrie  $C$

$$\mu_n(m_1 \cdots m_n) = \mu_n(\overline{m}_1 \cdots \overline{m}_n)|_{\alpha \leftrightarrow \gamma, \beta \leftrightarrow \delta, q \leftrightarrow u},$$

étant donné que

$$p(\psi_{\alpha\gamma}(TE)) = p(TE)|_{\alpha \leftrightarrow \gamma, \beta \leftrightarrow \delta, q \leftrightarrow u},$$

comme on peut le voir dans l'exemple donné par la figure 12. C'est immédiat à partir de la définition de  $\psi_{\alpha\gamma}$  et la définition du poids en  $q$  et  $u$  (figure 4). Contrairement à la symétrie  $C$ , les involutions que nous définissons pour interpréter les deux autres symétries ne sont pas compatibles avec les poids  $q$  et  $u$ .

		$\alpha$	$q$	$\gamma$
			$\gamma$	
$q$	$q$	$\delta$		
	$\alpha$			
$\alpha$				

$q$	$q$	$\gamma$		$\alpha$
$q$	$q$	$q$	$\alpha$	
		$\beta$		
$q$	$\gamma$			
$\gamma$				

FIGURE 12. Un tableau escalier  $TE$  et  $\psi_{\alpha\gamma}(TE)$ .

DÉFINITION 2.3.2. On note  $\psi_{\alpha\delta}$  l'involution qui consiste à effectuer une symétrie axiale par rapport à la diagonale principale et échanger :  $\alpha$  et  $\delta$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ .

L'involution  $\psi_{\alpha\delta}$  se projette sur le cas particulier  $q = u = 1$  de la symétrie P,

$$\mu_n(m_1 \cdots m_n) = \mu_n(m_n \cdots m_1)|_{\alpha \leftrightarrow \delta, \beta \leftrightarrow \gamma, q \leftrightarrow u},$$

en effet

$$p(\psi_{\alpha\delta}(TE))|_{q=u=1} = p(TE)|_{\alpha \leftrightarrow \delta, \beta \leftrightarrow \gamma, q=u=1}.$$

La figure 13 donne un exemple de l'incompatibilité de  $\psi_{\alpha\delta}$  avec les poids  $q$  et  $u$ .

		$\alpha$	$q$	$\gamma$
			$\gamma$	
$q$	$q$	$\delta$		
	$\alpha$			
$\alpha$				

$q$	$q$	$q$	$q$	$\delta$
$q$	$q$	$q$	$\delta$	
$\delta$	$q$	$\alpha$		
	$\beta$			
$\beta$				

FIGURE 13. Un tableau escalier  $TE$  et  $\psi_{\alpha\delta}(TE)$ .

DÉFINITION 2.3.3. On note  $\psi_{\alpha\beta}$  l'involution qui consiste à effectuer une symétrie axiale par rapport à la diagonale principale et échanger :  $\alpha$  et  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$ .  $\psi_{\alpha\beta}$  est la composé de  $\psi_{\alpha\delta}$  et  $\psi_{\alpha\gamma}$ .

Enfin, l'involution  $\psi_{\alpha\beta}$  se projette sur le cas particulier  $q = u = 1$  de la symétrie CP

$$\mu_n(m_1 \cdots m_n) = \mu_n(\overline{m_n} \cdots \overline{m_1})|_{\alpha \leftrightarrow \beta, \delta \leftrightarrow \gamma},$$

soit

$$p(\psi_{\alpha\beta}(TE))|_{q=u=1} = p(TE)|_{\alpha \leftrightarrow \beta, \gamma \leftrightarrow \delta, q=u=1}.$$

La figure 14 nous montre que d'une part les  $q$  changent de place, et d'autre part qu'il n'y en a pas le même nombre. Déterminer une involution compatible avec la symétrie P ou la symétrie CP est équivalent étant donné que  $\psi_{\alpha\beta} =$

		$\alpha$	$q$	$\gamma$
			$\gamma$	
$q$	$q$	$\delta$		
	$\alpha$			
$\alpha$				

				$\beta$
			$\beta$	
$\beta$		$\gamma$		
$q$	$\delta$			
$\delta$				

FIGURE 14. Un tableau escalier  $TE$  et  $\psi_{\alpha\beta}(TE)$ .

$\psi_{\alpha\delta} \circ \psi_{\alpha\gamma}$ . On pourrait penser qu'une involution associée à la symétrie CP effectue l'involution  $\psi_{\alpha\beta}$  au moins sur les cellules sud-est, mais ce n'est pas le cas. En effet, notons de gauche à droite  $TE$ ,  $TE_1$  et  $TE_2$  les tableaux escaliers de la figure 15, alors les cellules sud-est de  $TE_1$  et  $TE_2$  sont obtenues à partir de celles de  $TE$  par l'involution  $\psi_{\alpha\beta}$ , de plus,  $p(TE)|_{q=u=1} = p(TE_i)|_{\alpha \leftrightarrow \beta, \gamma \leftrightarrow \delta, q=u=1}$  pour  $i = 1$  ou  $2$ . Les tableaux escaliers  $TE_1$  et  $TE_2$  sont les seuls satisfaisant ces deux conditions. Or, si on regarde le poids en  $q$ , aucun des deux n'a le même poids que  $T$ . Cette difficulté avait déjà été évoquée dans la remarque 2.1.5.

			$\beta$
$\gamma$	$\alpha$	$\alpha$	
	$\beta$		
$\beta$			

$q$	$\delta$		$\alpha$
	$\beta$	$\alpha$	
	$\beta$		
$\alpha$			

	$\beta$		$\alpha$
$q$	$\delta$	$\alpha$	
	$\beta$		
$\alpha$			

FIGURE 15. Incompatibilité entre les poids  $q$  et  $u$ , et la symétrie CP.

REMARQUE 2.3.4. Dans le cas particulier où  $\gamma = \delta = 0$ , l'involution  $\psi_{\alpha\beta}$  interprète bien la symétrie CP, car la définition du poids en  $q$  est invariante sous l'action de cette involution. Si on considère les tableaux alternatifs ou les tableaux boisés, cette involution correspond à la symétrie axiale d'axe la diagonale principale. La définition du poids en  $q$  de ces deux tableaux est invariante sous cette involution, ainsi, la symétrie de l'ASEP est encodée dans ces objets. En ce qui concerne les tableaux de permutation, cette symétrie n'est pas claire mais Corteel et Williams définissent dans [CW07b, section 7] une involution sur les tableaux de permutation correspondant à la symétrie CP.

On définit deux familles de tableaux escaliers de type  $B$ , ceux associés à  $\psi_{\alpha\beta}$  et ceux associés à  $\psi_{\alpha\delta}$ .

DÉFINITION 2.3.5. Soit  $n$  un entier naturel non nul, un *tableau escalier de type  $B_{\alpha\beta}$*  de taille  $n$  est un tableau escalier de taille  $2n$  invariant par l'involution  $\psi_{\alpha\beta}$ . On note  $\mathcal{TE}^{B_{\alpha\beta}}$  l'ensemble de ces tableaux.

DÉFINITION 2.3.6 ([CDH16, section 6]). Soit  $n$  un entier naturel non nul, un *tableau escalier de type  $B_{\alpha\delta}$*  de taille  $n$  est un tableau escalier de taille  $2n$  invariant par l'involution  $\psi_{\alpha\delta}$ . On note  $\mathcal{TE}^{B_{\alpha\delta}}$  l'ensemble de ces tableaux.

La figure 16 donne un exemple d'un tableau escalier de type  $B_{\alpha\beta}$  et d'un tableau escalier de type  $B_{\alpha\delta}$ . Ces deux exemples illustrent également le fait

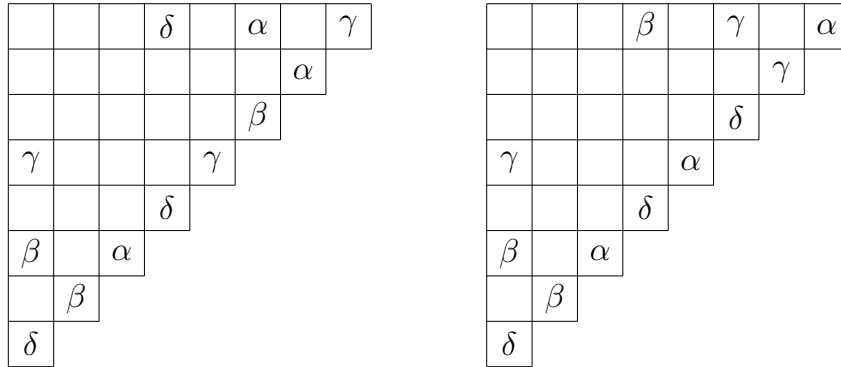


FIGURE 16. Un tableau escalier de type  $B_{\alpha\beta}$  de taille 3 (gauche) et un tableau escalier de type  $B_{\alpha\delta}$  de taille 3 (droite)

que les cellules de la diagonale principale sont nécessairement vides.

OBSERVATION 2.3.7. Une première observation est que ces deux familles sont stables sous l'action de  $\psi_{\alpha\gamma}$ .

Pour les deux familles un tableau est entièrement déterminé par sa partie sous la diagonale principale, dans la suite, nous considérons donc des demi-tableaux. On peut donc représenter les deux familles par le même objet, toutefois, les poids en  $q$  et  $u$  changent, comme l'illustre la figure 17. Dans la suite,

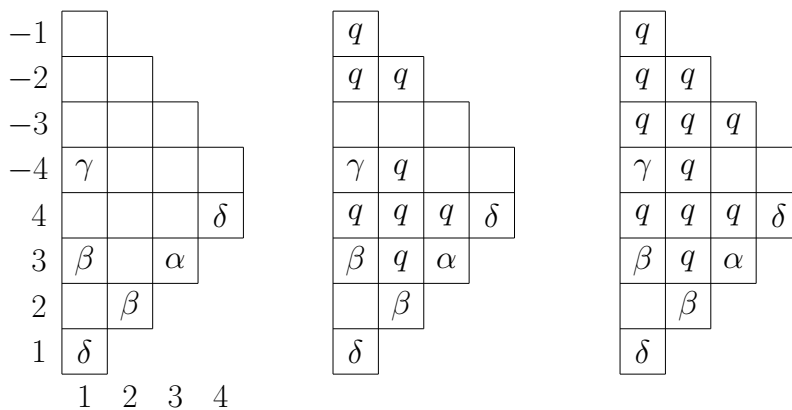


FIGURE 17. De gauche à droite : le demi-tableau correspondant aux tableaux de la figure 16 et le poids en  $q$  dans le cas  $B_{\alpha\beta}$  (milieu) et  $B_{\alpha\delta}$  (droite).

pour éviter d'énoncer à deux reprises un résultat vérifié par les deux familles, « les tableaux escaliers de type  $B$  » se réfère indistinctement aux tableaux escaliers de type  $B_{\alpha\beta}$  ou  $B_{\alpha\delta}$ , l'ensemble  $\mathcal{TE}^B$  correspond à  $\mathcal{TE}^{B_{\alpha\beta}}$  ou à  $\mathcal{TE}^{B_{\alpha\delta}}$  et l'ensemble  $\mathcal{TE}_n^B$  correspond à  $\mathcal{TE}_n^{B_{\alpha\beta}}$  ou à  $\mathcal{TE}_n^{B_{\alpha\delta}}$ .

Il est à noter que l'ensemble des tableaux escaliers de taille  $n$  s'injecte dans les tableaux boisés escaliers de type  $B$ . Soit  $TE$  un tableau escalier de taille  $n$ , on lui associe le tableau escalier de type  $B$  dont le demi-tableau est obtenu après ajout successif de lignes vides de tailles  $n, n-1, \dots, 1$  au-dessus de  $TE$  (figure 18).

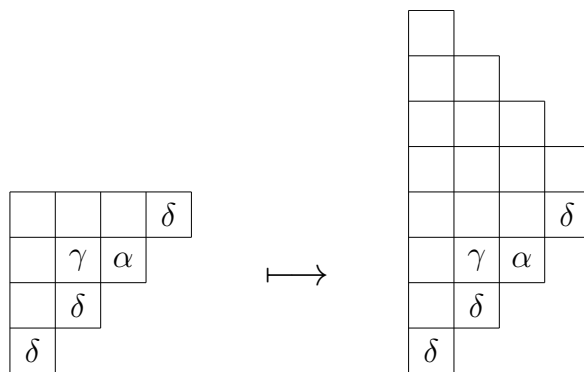


FIGURE 18. Injection des tableaux escaliers dans les tableaux escaliers de type  $B$ .

Concernant le poids d'un tableau, on va considérer le poids du demi-tableau correspondant, car contrairement au poids du tableau en entier, il est compatible avec l'algorithme d'insertion que nous introduisons (section 3.2), c'est-à-dire que l'on peut décrire l'évolution du poids suite à une insertion. Il peut être également intéressant de considérer la statistique du nombre de  $q$  dans les cellules du bord nord-est, on l'encode par la variable  $z$ . On note  $p_{\alpha\beta}(TE)$  le poids d'un tableau escalier de type  $B_{\alpha\beta}$  et  $p_{\alpha\delta}(TE)$  celui d'un type  $B_{\alpha\delta}$ . De plus, on note également

$$Z_n^{B_{\alpha\beta}}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; q, u, z) = \sum_{TE \in \mathcal{TE}^{B_{\alpha\beta}}} p_{\alpha\beta}(TE),$$

et

$$Z_n^{B_{\alpha\delta}}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; q, u, z) = \sum_{TE \in \mathcal{TE}^{B_{\alpha\delta}}} p_{\alpha\delta}(TE).$$

Si  $z = 1$ , le poids d'un tableau escalier de type  $B$  de taille  $n$  a toujours pour degré  $n(n+1)$ . Ainsi, on peut supposer sans perte de généralité que  $u = 1$ .

### 3.2. Algorithme d'insertion sur les tableaux escaliers de type $B$

Nous proposons dans cette section un algorithme d'insertion sur les tableaux escaliers de type  $B$ .

Pour pouvoir décrire l'algorithme, nous introduisons quelques notations. Soit  $TE$  un tableau escalier de type  $B$  de taille  $n$ , on numérote de 1 à  $n$  les  $n$  premières lignes de bas en haut et les colonnes de gauche à droite. Puis, on numérote de  $-1$  à  $-n$  les  $n$  premières lignes de haut en bas, comme sur la figure 17. Pour les cellules, on garde les mêmes notations que pour les tableaux escaliers, en particulier, les *cellules sud-est* sont les cellules de coordonnées  $(i, i)$  pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Concernant les opérations  $L_{i_1}^* \rightarrow L_{i_2}$  et  $L_{i_1} \rightarrow L_{i_2}$  on garde les mêmes définitions. Par contre, à la place de l'opération  $TE + L_{n+1}(x)$ , on définit  $TE + L_{n+1}(x) + L_{-n-1}$  qui consiste à ajouter deux lignes de taille  $n+1$ , entre les lignes  $L_n(TE)$  et  $L_{-n}(TE)$ , et à insérer le symbole  $x$  dans la cellule la plus à droite de  $L_{n+1}$ . Un exemple de cette dernière opération est donné dans la figure 19.

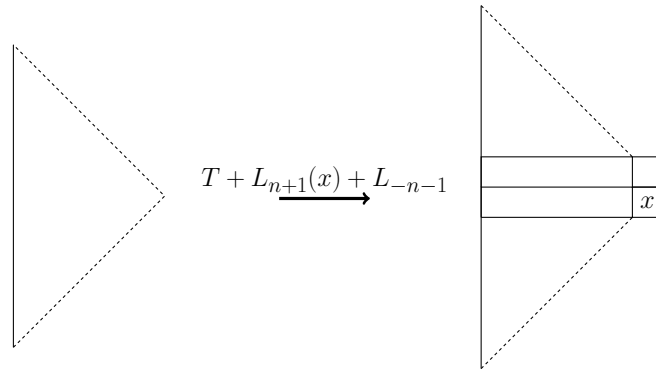


FIGURE 19. Illustration de l'opération  $TE + L_{n+1}(x) + L_{-n-1}$ .

DÉFINITION 2.3.8 ( Algorithme d'insertion ). Soit  $TE$  un tableau escalier de type  $B$  de taille  $n$ , on définit les  $4(2n+1)$  choix d'insertion suivants.

- Premier cas. On commence par insérer une ligne avec  $\alpha$  ou un  $\gamma$  :

$$TE + L_{n+1}(x) + L_{-n-1} \text{ avec } x \in \{\alpha, \gamma\}.$$

Puis on décale vers le haut le contenu des lignes de type  $\alpha/\gamma$ . Soit  $i_1 < \dots < i_k = n+1$  les indices des lignes de type  $\alpha/\gamma$ , alors

$$L_{i_{k-1}}^* \rightarrow L_{i_k}, \dots, L_{i_1}^* \rightarrow L_{i_2}.$$

On note  $insertion_{Sym}(TE, x)$  le tableau obtenu.

- Deuxième cas. On commence par insérer une ligne avec  $\alpha$  ou un  $\gamma$  :

$$TE + L_{n+1}(x) + L_{-n-1} \text{ avec } x \in \{\alpha, \gamma\}.$$

Puis on choisit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et on décale vers le haut le contenu des lignes de type  $\alpha/\gamma$  de numéro strictement supérieur à  $i$ . Soit  $i < i_l < \dots < i_k = n + 1$  les indices des lignes de type  $\alpha/\gamma$  plus hautes que  $L_i$ , alors

$$L_{i_{k-1}}^* \rightarrow L_{i_k}, \dots, L_{i_l}^* \rightarrow L_{i_{l+1}}$$

Enfin, on déplace entièrement  $L_i$  dans  $L_{i_l}$  et on affecte  $y \in \{\beta, \gamma\}$  à la cellule  $c_i$  :

$$L_i \rightarrow L_{i_l} \text{ et } c_i = y$$

On note  $\text{insertion}_{\text{Sym}}(TE, (x, y, i))$  le tableau obtenu.

- Troisième cas. On commence par insérer une ligne avec  $\beta$  ou  $\delta$  :

$$TE + L_{n+1}(x) + L_{-n-1} \text{ avec } x \in \{\beta, \delta\}.$$

Puis on décale vers le haut le contenu des lignes de type  $\alpha/\gamma$  Soit  $0 < i_1 < \dots < i_{k-1}$  les indices des lignes de type  $\alpha/\gamma$  et  $i_k = -n - 1$ , alors

$$L_{i_{k-1}}^* \rightarrow L_{i_k}, \dots, L_{i_1}^* \rightarrow L_{i_2}.$$

On note  $\text{insertion}_{\text{Sym}}(TE, x)$  le tableau obtenu.

- Quatrième cas. On commence par insérer une ligne avec  $\beta$  ou  $\delta$  :

$$TE + L_{n+1}(x) + L_{-n-1} \text{ avec } x \in \{\beta, \delta\}.$$

Puis, on choisit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et on décale vers le haut le contenu des lignes de type  $\alpha/\gamma$  de numéro strictement supérieur à  $i$ . Soit  $i < i_l < \dots < i_{k-1}$  et  $i_k = -n - 1$  les indices des lignes de type  $\alpha/\gamma$  plus hautes que  $L_i$ , alors

$$L_{i_{k-1}}^* \rightarrow L_{i_k}, \dots, L_{i_l}^* \rightarrow L_{i_{l+1}}$$

Enfin, on déplace entièrement  $L_i$  dans  $L_{i_l}$  et on affecte  $y \in \{\beta, \gamma\}$  à la cellule  $c_i$  :

$$L_i \rightarrow L_{i_l} \text{ et } c_i = y$$

On note  $\text{insertion}_{\text{Sym}}(TE, (x, y, i))$  le tableau obtenu.

On note  $[TE]$  l'ensemble des tableaux escaliers de type  $B$  obtenus à partir de  $TE$  par l'algorithme d'insertion.

Les différentes insertions sont représentées schématiquement dans la figure 20, tandis que la figure 21 donne un exemple des quatre types d'insertions appliqués au tableau escalier de type  $B$  de la figure 17.

**THÉORÈME 2.3.9.** *Soit  $n$  un entier naturel, la fonction  $\text{insertion}_{\text{Sym}}$  de la définition 2.3.8 est une bijection entre*

- l'ensemble des couples  $(TE, e)$  où  $TE$  est un tableau escalier de type  $B$  taille  $n$  et  $e$  est un élément parmi

$$\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \cup \{(x, y, i), x \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}, y \in \{\beta, \delta\} \text{ et } i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$$

et

- l'ensemble des tableaux escaliers de type  $B$  de taille  $n + 1$ .



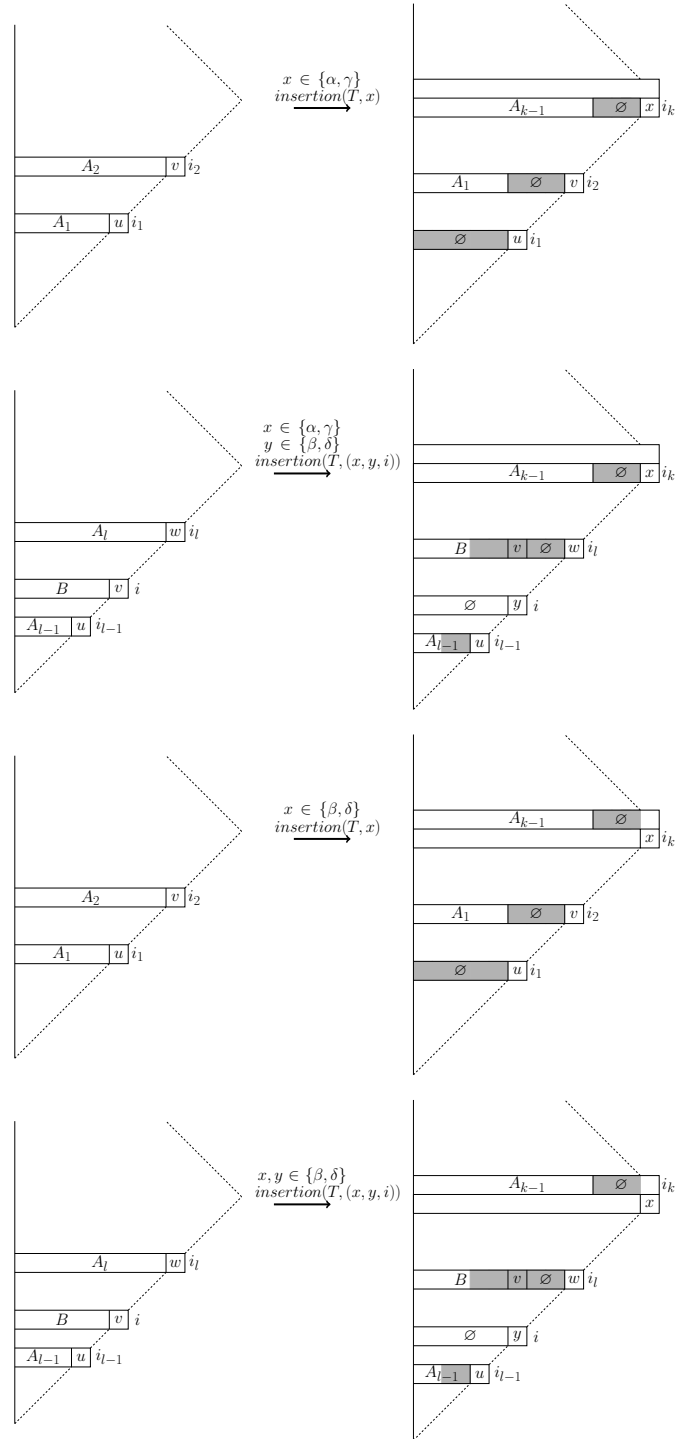


FIGURE 20. Schématisation des différentes insertions d'un tableau escalier de type B.

Autrement dit  $\mathcal{TE}_{n+1}^B = \bigsqcup_{TE \in \mathcal{TE}_n^B} [TE]$  est une partition.

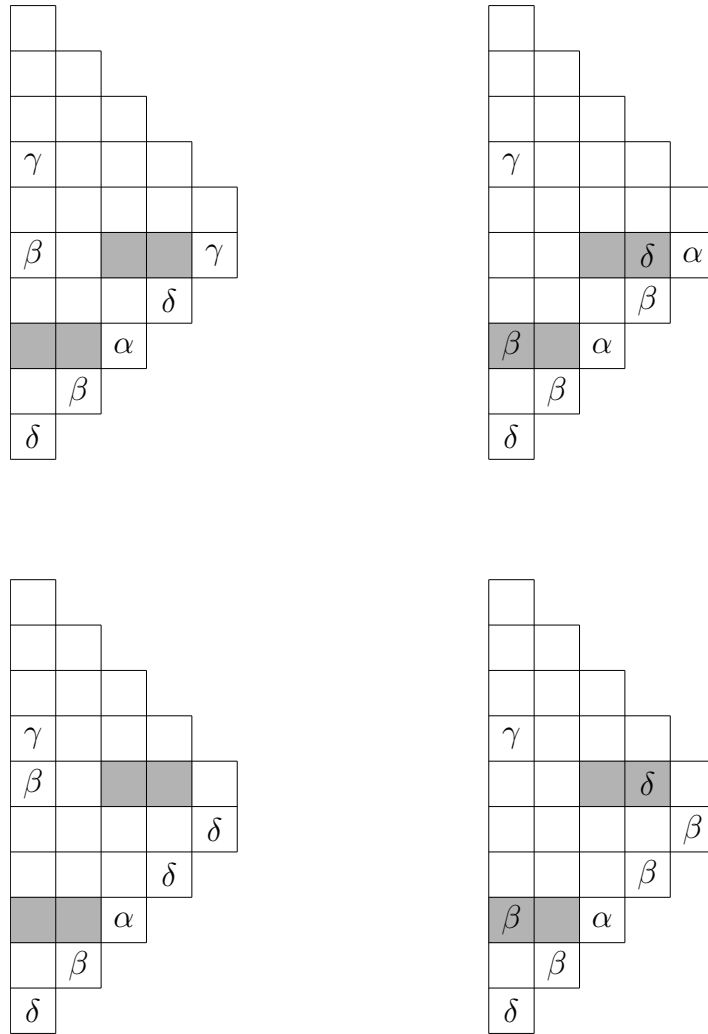


FIGURE 21. De gauche à droite (haut) puis de gauche à droite (bas) on a  $insertion_{Sym}(TE, \gamma)$ ,  $insertion_{Sym}(TE, (\alpha, \beta, 4))$ ,  $insertion_{Sym}(TE, \delta)$  et  $insertion_{Sym}(TE, (\beta, \beta, 4))$ , où  $TE$  est le tableau escaler de type  $B$  de la figure 17.

DÉMONSTRATION. Soit  $n$  un entier naturel non nul. Avant toute chose, les tableaux obtenus après insertion sont bien des demi-tableaux correspondant à des tableaux escaliers de type  $B$ . En effet, les conditions qui doivent être vérifiées sont

- pas de symbole à gauche de  $\alpha/\gamma$ ,
- pas de symbole au-dessus de  $\beta/\delta$ ,
- les cellules sud-est ne doivent pas être vides et
- les cellules diagonales doivent être vides,

et les quatre types d'insertions respectent ces conditions.

La preuve de la bijection est similaire à celle des tableaux escaliers. Si on considère uniquement les  $n$  premières lignes des tableaux escaliers de type  $B$  de taille  $n$ , les insertions  $insertion_{sym}(TE, (x, y, i))$  et  $insertion_{sym}(TE, x)$  correspondent exactement aux insertions  $insertion(TE, x)$  et  $insertion(TE, (x, y, i))$ , où  $(x, y, i) \in \{\alpha, \gamma\} \times \{\beta, \delta\} \times \llbracket 1, n \rrbracket$ . Ainsi,  $insertion_{sym}$  donne une bijection entre

- l'ensemble des couples  $(TE, e)$  où  $TE$  est un tableau escalier de type  $B$  taille  $n$  et  $e$  est un élément parmi

$$\{\alpha, \gamma\} \cup \{(x, y, i), x \in \{\alpha, \gamma\}, y \in \{\beta, \delta\} \text{ et } i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$$

et

- l'ensemble des tableaux escaliers de type  $B$  de taille  $n + 1$  tel que  $c_{n+1} \in \{\alpha, \gamma\}$ .

Dans ce cas-là, la définition des cellules spéciales est la même. Elles sont en gris dans les figure 20 et figure 21.

Soit  $TE$  un tableau escalier de type  $B$  de taille  $n$ . La seule différence algorithmique entre

$$insertion_{sym}(TE, x) \text{ et } insertion_{sym}(TE, x'),$$

ou, entre

$$insertion_{sym}(TE, (x, y, i)) \text{ et } insertion_{sym}(TE, (x', y, i)),$$

où  $x' \in \{\alpha, \gamma\}$  et  $x \in \{\beta, \delta\}$ , est la substitution de l'opération  $L_{i_{k-1}}^* \rightarrow L_{n+1}$  par l'opération  $L_{i_{k-1}}^* \rightarrow L_{-n-1}$ . Il suffit donc de changer la définition des cellules spéciales qui se trouvent originellement sur  $L_{n+1}$ . Soit  $TE'$  un tableau escalier de type  $B$  de taille  $n + 1$ , tel que  $c_{n+1} \in \{\beta, \delta\}$ . On note  $i_1 < \dots < i_{k-1}$  les indices de ses lignes de type  $\alpha/\gamma$ , alors ses cellules spéciales sont les cellules  $\{c_{-n-1, j}, i_{k-1} \leq j < n + 1\} \cup \{c_{i_p, j}, p \in \llbracket 2, k - 1 \rrbracket, i_{p-1} \leq j < i_p\} \cup \{c_{i_1, j}, j \in \llbracket 1, i_1 - 1 \rrbracket\}$ . Ainsi, au lieu de considérer les cellules,  $\{c_{n+1, j}, i_{k-1} \leq j < n + 1\}$  on regarde les cellules  $\{c_{-n-1, j}, i_{k-1} \leq j < n + 1\}$ . À ce détail près, la preuve est la même que pour le cas  $c_{n+1} \in \{\alpha, \gamma\}$ .  $\square$

On en déduit immédiatement le résultat suivant.

**COROLLAIRE 2.3.10.** *Soit  $n$  un entier naturel non nul, alors les séries génératrices  $Z_n^{B_{\alpha\beta}}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1, 1, 1)$  et  $Z_n^{B_{\alpha\delta}}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1, 1, 1)$  sont égales à*

$$(\alpha + \beta + \gamma + \delta)^n \prod_{i=1}^{n-1} (1 + i(\beta + \delta)).$$

*En particulier, les tableaux escaliers de type  $B$  de taille  $n$  sont comptés par  $4^n(2n - 1)!!$ , où  $(2n - 1)!! := (2n - 1)(2n - 3) \dots 3 \cdot 1$ .*

Ce résultat est déjà prouvé dans [CDH16], à l'aide d'une bijection entre des tables d'inversions et les tableaux escaliers de type  $B_{\alpha\delta}$  n'ayant que des  $\beta$

## 2. L'ASEP à une particule

---

et des  $\gamma$ , les auteurs calculent la série génératrice  $Z_n^{B_{\alpha\delta}}(0, \beta, \gamma, 0; 1, 1)$ , puis, ils utilisent la relation

$$Z_n^{B_{\alpha\delta}}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1, 1, 1) = Z_n^{B_{\alpha\delta}}(0, \beta + \delta, \alpha + \gamma, 0; 1, 1, 1)$$

pour conclure. Cette identité repose sur l'argument que si on ne prend pas en compte le poids en  $q$  et  $u$ , alors  $\alpha$  et  $\gamma$ , et  $\beta$  et  $\delta$ , jouent le même rôle.

De même que pour l'algorithme d'insertion sur les tableaux escaliers, il est possible de décrire l'évolution du poids en  $q$  et  $u$  pour les deux familles de tableaux escaliers de type  $B$ . Pour cela, nous étendons la définition de la projection type aux tableaux escaliers de type  $B$ . Par exemple, du nord-est au sud-ouest, les symboles des cellules sud-est du tableau escalier de type  $B$   $TE$  de la figure 15 sont  $\delta, \alpha, \beta, \delta$ , donc  $\text{type}(TE) = \bullet\bullet\circ\bullet$ .

LEMME 2.3.11. *Soit  $TE$  un tableau escalier de type  $B_{\alpha\beta}$  de taille  $n$ , soit  $w = p_{\alpha\beta}(TE)$  et  $m = \text{type}(TE)$ . Dans ce lemme,  $m'$  désigne pour chaque point l'image par type du tableau obtenu après insertion. Alors on a,*

- $p_{\alpha\beta}(\text{insertion}(TE, \alpha)) = q^{|\circ(m)|} \alpha w$  et  $m' = \bullet m$ ,
- $p_{\alpha\beta}(\text{insertion}(TE, \beta)) = zq^{|\circ(m)|+1} \beta w$  et  $m' = \circ m$ ,
- $p_{\alpha\beta}(\text{insertion}(TE, \gamma)) = zq^{|\circ(m)|+n+1} \gamma w$  et  $m' = \circ m$ ,
- $p_{\alpha\beta}(\text{insertion}(TE, \delta)) = q^{|\circ(m)|+n} \delta w$  et  $m' = \bullet m$ .

Pour toute décomposition  $m = U \overset{i}{\circ} V$  on a

- $p_{\alpha\beta}(\text{insertion}(TE, (\alpha, \beta, i))) = q^{|\circ(U)|} \alpha\beta w$  et  $m' = \bullet U \circ V$ ,
- $p_{\alpha\beta}(\text{insertion}(TE, (\beta, \beta, i))) = zq^{|\circ(U)|+1} \beta\beta w$  et  $m' = \circ U \circ V$ ,
- $p_{\alpha\beta}(\text{insertion}(TE, (\gamma, \beta, i))) = zq^{|\circ(U)|+n+1} \gamma\beta w$  et  $m' = \circ U \circ V$ ,
- $p_{\alpha\beta}(\text{insertion}(TE, (\delta, \beta, i))) = q^{|\circ(U)|+n} \delta\beta w$  et  $m' = \bullet U \circ V$ ,
- $p_{\alpha\beta}(\text{insertion}(TE, (\alpha, \delta, i))) = q^{|\circ(U)|+|V|} \alpha\delta w$  et  $m' = \bullet U \bullet V$ ,
- $p_{\alpha\beta}(\text{insertion}(TE, (\beta, \delta, i))) = zq^{|\circ(U)|+|V|+1} \beta\delta w$  et  $m' = \circ U \bullet V$ ,
- $p_{\alpha\beta}(\text{insertion}(TE, (\gamma, \delta, i))) = zq^{|\circ(U)|+|V|+n+1} \gamma\delta w$  et  $m' = \circ U \bullet V$ ,
- $p_{\alpha\beta}(\text{insertion}(TE, (\delta, \delta, i))) = q^{|\circ(U)|+|V|+n} \delta\delta w$  et  $m' = \bullet U \bullet V$ .

Soit  $TE$  un tableau escalier de type  $B_{\alpha\delta}$  de taille  $n$ , soit  $w = p_{\alpha\delta}(TE)$  et  $m = \text{type}(TE)$ , il suit que

- $p_{\alpha\delta}(\text{insertion}(TE, \alpha)) = zq^{|\circ(m)|+n+1} \alpha w$  et  $m' = \bullet m$ ,
- $p_{\alpha\delta}(\text{insertion}(TE, \beta)) = zq^{|\circ(m)|+1} \beta w$  et  $m' = \circ m$ ,
- $p_{\alpha\delta}(\text{insertion}(TE, \gamma)) = q^{|\circ(m)|} \gamma w$  et  $m' = \circ m$ ,
- $p_{\alpha\delta}(\text{insertion}(TE, \delta)) = q^{|\circ(m)|+n} \delta w$  et  $m' = \bullet m$ .

Pour toute décomposition  $m = U \overset{i}{\circ} V$  on a

- $p_{\alpha\delta}(\text{insertion}(TE, (\alpha, \beta, i))) = zq^{|\circ(U)|+n+1} \alpha\beta w$  et  $m' = \bullet U \circ V$ ,
- $p_{\alpha\delta}(\text{insertion}(TE, (\beta, \beta, i))) = zq^{|\circ(U)|+1} \beta\beta w$  et  $m' = \circ U \circ V$ ,
- $p_{\alpha\delta}(\text{insertion}(TE, (\gamma, \beta, i))) = q^{|\circ(U)|} \gamma\beta w$  et  $m' = \circ U \circ V$ ,
- $p_{\alpha\delta}(\text{insertion}(TE, (\delta, \beta, i))) = q^{|\circ(U)|+n} \delta\beta w$  et  $m' = \bullet U \circ V$ ,
- $p_{\alpha\delta}(\text{insertion}(TE, (\alpha, \delta, i))) = zq^{|\circ(U)|+|V|+n+1} \alpha\delta w$  et  $m' = \bullet U \bullet V$ ,
- $p_{\alpha\delta}(\text{insertion}(TE, (\beta, \delta, i))) = zq^{|\circ(U)|+|V|+1} \beta\delta w$  et  $m' = \circ U \bullet V$ ,

- $p_{\alpha\delta}(\text{insertion}(TE, (\gamma, \delta, i))) = q^{|\circ(U)|+|V|}\gamma\delta w$  et  $m' = \circ U \bullet V$ ,
- $p_{\alpha\delta}(\text{insertion}(TE, (\delta, \delta, i))) = q^{|\circ(U)|+|V|+n}\delta\delta w$  et  $m' = \bullet U \bullet V$ .

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, si on note  $TE'$  l'image de  $TE$  par une insertion, alors même si on ajoute le remplissage avec des  $q$  et des  $u$ , pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on a  $L_{-i}(TE) = L_{-i}(TE')$ . La ligne  $L_{-i}$  n'étant pas modifiée, il suffit d'étudier les cellules vides. Notons  $c$  une cellule vide de  $L_{-i}$ , alors le remplissage de  $c$  est donné par le symbole à sa droite et en dessous d'elle. Or, suite à une insertion, le symbole le plus haut en dessous de  $c$  reste le même. De plus, si  $c$  a un symbole  $x$  à sa droite dans la ligne  $L_{-i}$ , étant donné que  $L_{-i}$  n'est pas modifiée, c'est toujours le symbole  $x$  qui se trouve à sa droite. Enfin, si  $c$  n'a pas de symbole  $x$  à sa droite dans le demi tableau, alors  $x$  correspond à l'image par l'involution du symbole  $y$  le plus haut de la colonne  $C_i$ , suite à une insertion, et c'est toujours  $y$  qui est le symbole le plus haut de  $C_i$ , ainsi le symbole contenu par  $c$  reste le même. Ensuite, les mêmes arguments que la preuve du lemme 2.2.11, expliquent les exposants  $|\circ(U)|$  et  $|V|$  de  $q$ . Il ne reste plus qu'à étudier la ligne  $L_{-n-1}$  si  $c_{n+1} \in \{\alpha, \gamma\}$ , et la ligne  $L_{n+1}$  ainsi que la cellule  $c_{-n-1, n+1}$  sinon. Une distinction de cas suivant la valeur de  $c_{n+1}$  et du type  $B_{\alpha\beta}$  ou  $B_{\alpha\delta}$  nous donne le résultat. Concernant la puissance de  $z$ , dans le cas  $B_{\alpha\beta}$  la cellule  $c_{-n-1, n+1}$  possède un  $q$  si et seulement si  $c_{n+1}$  contient  $\beta$  ou  $\gamma$ , et dans le cas  $B_{\alpha\delta}$  elle un contient un  $q$  si et seulement si  $c_{n+1}$  contient  $\alpha$  ou  $\beta$ . Quant à la puissance en  $q$ , si on considère par exemple le cas  $B_{\alpha\delta}$ , si  $c_{n+1} = \alpha$  alors la ligne  $L_{-n-1}$  est vide, et le symbole à sa droite est  $\delta$ , d'où l'exposant  $n + 1$  de  $q$  dans les égalités

$$\begin{aligned} p_{\alpha\delta}(\text{insertion}(TE, \alpha)) &= zq^{|\circ(m)|+n+1} \alpha w, \\ p_{\alpha\delta}(\text{insertion}(TE, (\alpha, \beta, i))) &= zq^{|\circ(U)|+n+1} \alpha\beta w, \text{ et} \\ p_{\alpha\delta}(\text{insertion}(TE, (\alpha, \beta, i))) &= zq^{|\circ(U)|+n+1+i-1} \alpha\delta w. \end{aligned}$$

Concernant les mots  $m'$ , l'algorithme d'insertion ne modifie que très peu les cellules sud-est. Il suffit donc d'appliquer type au tableau obtenu après insertion.  $\square$

On peut maintenant ajouter  $z$  au corollaire 2.3.10.

COROLLAIRE 2.3.12. *Soit  $n$  un entier naturel non nul, alors la série génératrice  $Z_n^{B_{\alpha\beta}}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1, 1, z)$  est égale à*

$$(\alpha + \delta + z(\beta + \gamma))^n \prod_{i=1}^{n-1} (1 + i(\beta + \delta)).$$

et  $Z_n^{B_{\alpha\delta}}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1, 1, z)$  est égale à

$$(z(\alpha + \beta) + \gamma + \delta)^n \prod_{i=1}^{n-1} (1 + i(\beta + \delta)).$$

Dans le cas  $B_{\alpha\beta}$ , si on pose  $\gamma = \delta = 0$ , que l'on substitue  $\alpha$  et  $\beta$  par  $\alpha\beta$  pour avoir le poids du tableau complet, puis que l'on divise par  $(\alpha\beta)^{n(n-1)}$  et qu'on

## 2. L'ASEP à une particule

---

pose  $x = \frac{1}{\alpha\beta}$ , on obtient la formule de Corteel et Kim [CK11, theorem 4.4] dans le cas  $y = 1$

$$(1+z)^n(x+1)\cdots(x+n-1).$$

REMARQUE 2.3.13. Pour obtenir la formule de Corteel et Kim avec le  $y$  également, la statistique à considérer est la suivante. Soit  $TB$  un tableau escalier de type  $B$ , considérons le tableau en entier. Du fait de la symétrie, il existe au moins une ligne dont le symbole le plus à gauche n'est ni  $\beta$  ni  $\delta$ . Encodons avec la variable  $y$  le nombre de symboles moins un de la plus haute de ces lignes. Ainsi, si on prend cette statistique en compte les résultats que nous devrions obtenir sont

$$(\alpha + \delta + z(\beta + \gamma))^n \prod_{i=0}^{n-2} (1 + (y+i)(\beta + \delta)),$$

et

$$(z(\alpha + \beta) + \gamma + \delta)^n \prod_{i=0}^{n-2} (1 + (y+i)(\beta + \delta)).$$

La preuve est en cours d'écriture. Elle repose sur le fait que seule l'insertion en cette ligne fait varier cette statistique et qu'elle l'augmente de 1.

De même que pour les tableaux escaliers, les spécialisations  $\alpha = \delta = 0$  et  $\beta = \gamma = 0$  donnent des formes factorisées pour la fonction de partition. En effet, dans le premier cas, le mot sous-jacent d'un tableau est uniquement composé de  $\bullet$ , et dans le deuxième cas il est uniquement composé de  $\circ$ . Ainsi, le lemme 2.3.11 se simplifie grandement.

Nous devons d'abord définir les tableaux correspondant à ces deux spécialisations.

DÉFINITION 2.3.14. Les  $\beta/\gamma$ -tableaux escaliers de type  $B$  sont les tableaux escaliers de type  $B$  contenant uniquement des  $\beta$  et des  $\gamma$ . De même, nous définissons également les  $\alpha/\delta$  tableaux escaliers de type  $B$  comme les tableaux escaliers de type  $B$  ne contenant ni  $\beta$  ni  $\gamma$ .

Le lemme 2.3.11 devient.

LEMME 2.3.15. Soit  $n$  un entier naturel non nul. Soit  $TE$  un  $\beta/\gamma$ -tableau escalier de type  $B_{\alpha\beta}$  de taille  $n$ , et soit  $w = p_{\alpha\beta}(TE)$ , alors

- $p_{\alpha\beta}(\text{insertion}_{Sym}(TE, \beta)) = zq^{n+1}u^n\beta$
- $p_{\alpha\beta}(\text{insertion}_{Sym}(TE, \gamma)) = zq^{2n+1}\gamma$
- $p_{\alpha\beta}(\text{insertion}_{Sym}(TE, (\beta, \beta, i))) = zq^{n-i+1}u^{n+i-1}\beta^2$
- $p_{\alpha\beta}(\text{insertion}_{Sym}(TE, (\gamma, \beta, i))) = zq^{2n-i+1}u^{i-1}\gamma\beta$

Soit  $TE$  un  $\beta/\gamma$ -tableau escalier de type  $B_{\alpha\delta}$  de taille  $n$ , et soit  $w = p_{\alpha\delta}(TE)$ , alors

- $p_{\alpha\delta}(\text{insertion}_{Sym}(TE, \beta)) = zq^{n+1}u^n\beta$
- $p_{\alpha\delta}(\text{insertion}_{Sym}(TE, \gamma)) = q^n u^{n+1}\gamma$
- $p_{\alpha\delta}(\text{insertion}_{Sym}(TE, (\beta, \beta, i))) = zq^{n-i+1}u^{n+i-1}\beta^2$

$$- p_{\alpha\delta}(\text{insertion}_{\text{Sym}}(TE, (\gamma, \beta, i))) = q^{n-i}u^{n+i}\gamma\beta$$

Soit  $TE$  un  $\alpha/\delta$ -tableau escalier de type  $B_{\alpha\beta}$  de taille  $n$ , et soit  $w = p_{\alpha\beta}(TE)$ , alors

$$\begin{aligned} - p_{\alpha\beta}(\text{insertion}_{\text{Sym}}(TE, \alpha)) &= u^{2n+1}\alpha \\ - p_{\alpha\beta}(\text{insertion}_{\text{Sym}}(TE, \delta)) &= q^n u^{n+1}\delta \\ - p_{\alpha\beta}(\text{insertion}_{\text{Sym}}(TE, (\alpha, \delta, i))) &= q^{i-1}u^{2n-i+1}\alpha\delta \\ - p_{\alpha\beta}(\text{insertion}_{\text{Sym}}(TE, (\delta, \delta, i))) &= q^{n+i-1}u^{n-i+1}\delta^2 \end{aligned}$$

Soit  $TE$  un  $\alpha/\delta$ -tableau escalier de type  $B_{\alpha\delta}$  de taille  $n$ , et soit  $w = p_{\alpha\delta}(TE)$ , alors

$$\begin{aligned} - p_{\alpha\delta}(\text{insertion}_{\text{Sym}}(TE, \alpha)) &= zq^{n+1}u^n\alpha \\ - p_{\alpha\delta}(\text{insertion}_{\text{Sym}}(TE, \delta)) &= q^n u^{n+1}\delta \\ - p_{\alpha\delta}(\text{insertion}_{\text{Sym}}(TE, (\alpha, \delta, i))) &= zq^{n+i}u^{n-i}\alpha\delta \\ - p_{\alpha\delta}(\text{insertion}_{\text{Sym}}(TE, (\delta, \delta, i))) &= q^{n+i-1}u^{n-i+1}\delta^2 \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, dans le cas  $\beta/\gamma$ , il faut uniquement prendre en compte les équations qui ne comportent ni  $\alpha$  et ni  $\delta$ . Puis on remplace  $|V|$  par  $i - 1$  et  $|\circ(U)|$  par  $n - i - 1$  étant donné que  $U$  est composé uniquement de  $\circ$ . À l'inverse, dans le cas  $\alpha/\delta$ , il faut uniquement prendre en compte les équations qui ne comportent ni  $\beta$  et ni  $\gamma$ . Puis on remplace  $|V|$  par  $i - 1$ , et  $|\circ(U)|$  par  $0$  étant donné que  $U$  est composé uniquement de  $\bullet$ .  $\square$

On obtient ainsi les formules factorisées suivantes.

THÉORÈME 2.3.16. Soit  $n$  un entier naturel non nul, les fonctions de partition des tableaux escaliers de type B admettent les spécialisations suivantes.

$$Z_n^{B_{\alpha\beta}}(0, \beta, \gamma, 0; q, u, z) = (zq)^n \prod_{k=0}^{n-1} (u^k\beta + q^k\gamma)(q^k + [k]_{q,u}\beta)$$

$$Z_n^{B_{\alpha\delta}}(0, \beta, \gamma, 0; q, u, z) = (zq\beta + u\gamma)^n \prod_{k=0}^{n-1} (q^k u^k + q^k [k]_{q,u}\beta)$$

$$Z_n^{B_{\alpha\beta}}(\alpha, 0, 0, \delta; q, u, z) = u^n \prod_{k=0}^{n-1} (u^k\alpha + q^k\delta)(u^k + [k]_{q,u}\delta)$$

$$Z_n^{B_{\alpha\delta}}(\alpha, 0, 0, \delta; q, u, z) = (zq\alpha + u\delta)^n \prod_{k=0}^{n-1} (q^k u^k + u^k [k]_{q,u}\delta)$$

DÉMONSTRATION. Le lemme 2.3.15 induit les récurrences suivantes, soit  $n$  un entier naturel non nul, alors

$$Z_{n+1}^{B_{\alpha\beta}}(0, \beta, \gamma, 0; q, u, z) = (u^n\beta + q^n\gamma)(zq^{n+1} + zq[n]_{q,u}\beta)Z_n^{B_{\alpha\beta}}(0, \beta, \gamma, 0; q, u, z)$$

$$Z_{n+1}^{B_{\alpha\delta}}(0, \beta, \gamma, 0; q, u, z) = (zq\beta + u\gamma)(q^n u^n + q^n [n]_{q,u}\beta)Z_n^{B_{\alpha\delta}}(0, \beta, \gamma, 0; q, u, z)$$

$$Z_{n+1}^{B_{\alpha\beta}}(\alpha, 0, 0, \delta; q, u, z) = (u^n\alpha + q^n\delta)(u^{n+1} + u[n]_{q,u}\delta)Z_n^{B_{\alpha\beta}}(\alpha, 0, 0, \delta; q, u, z)$$

$$Z_{n+1}^{B_{\alpha\delta}}(\alpha, 0, 0, \delta; q, u, z) = (zq\alpha + u\delta)(q^n u^n + u^n [n]_{q,u}\delta)Z_n^{B_{\alpha\delta}}(\alpha, 0, 0, \delta; q, u, z)$$

Si on passe en revue les tableaux de taille 1, on a

$$\begin{aligned} Z_1^{B_{\alpha\beta}}(0, \beta, \gamma, 0; q, u, z) &= (\beta + \gamma)qz \\ Z_1^{B_{\alpha\delta}}(0, \beta, \gamma, ; q, u, z) &= zq\beta + u\gamma \\ Z_1^{B_{\alpha\beta}}(\alpha, 0, 0, \delta; q, u, z) &= (\alpha + \delta)u \\ Z_1^{B_{\alpha\delta}}(\alpha, 0, 0, \delta; q, u, z) &= zq\alpha + u\delta \end{aligned}$$

Il suffit donc de faire une récurrence sur  $n$  pour trouver le résultat.  $\square$

La formule factorisée de la série génératrice  $Z_n^{B_{\alpha\delta}}(0, \beta, \gamma, 0; q, u, 1)$  a également été prouvée par Corteel et Dasse-Hartaut [CDH16, proposition 6.3].

### 3.3. Ansatz matriciel de type $B$

On peut faire le chemin inverse des tableaux escaliers. Maintenant que nous avons une relation de récurrence sur les poids des tableaux escaliers qui ne dépend que du mot en  $\bullet$  et  $\circ$  sous-jacent, il serait intéressant de définir un système d'équations de même nature que l'*ansatz* matriciel dont une solution satisfait la même récurrence. Dans le cas particulier des tableaux de permutation de type  $B$ , Corteel, Josuat-Vergès et Williams [CJVW11] ont défini un *ansatz* matriciel dont une solution est donnée par des séries génératrices de tableaux de permutation de type  $B$ . Il est défini avec la formulation en termes de matrices

$$(17) \quad \begin{cases} DE &= qED + D + E \\ WE &= W \\ DV &= zEV \end{cases}$$

Les tableaux de permutation de type  $B$  correspondent au cas  $\gamma = \delta = 0$ . De même que dans le type  $A$  on montre facilement qu'ils donnent une solution du système (17). Définir des matrices  $D$  et  $E$  ainsi que des vecteurs  $V$  et  $W$  satisfaisant un *ansatz* matriciel peut être intéressant même dans le domaine de la combinatoire. En effet, beaucoup de problèmes d'énumération peuvent être définis en tant que produit de matrices satisfaisant un *ansatz* matriciel. Ainsi, trouver des matrices explicites solutions permet de donner une formule répondant au problème, trouver un objet combinatoire satisfaisant l'*ansatz* matriciel donne une interprétation combinatoire au problème, ou encore trouver deux objets combinatoires satisfaisant l'*ansatz* matriciel nous donne une preuve de l'égalité de leurs séries génératrices. Ces différentes situations sont illustrées dans [CJVW11]. Nous proposons dans cette section un nouvel *ansatz* matriciel avec tous les paramètres généraux généralisant ainsi l'*ansatz* matriciel (17).



Soit  $\lambda = (\lambda_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, u, z)^{\mathbb{N}}$  et  $g_\lambda : \{\bullet, \circ\}^* \rightarrow \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, u, z)$  une fonction vérifiant le système suivant,

$$(18) \quad \begin{cases} ug^\lambda(X \bullet \circ Y) & = qg^\lambda(X \circ \bullet Y) + \lambda_n(g^\lambda(X \bullet Y) + g^\lambda(X \circ Y)) \\ (u^n \alpha + uq^{n-1} \delta)g^\lambda(\circ X) & = z(qu^{n-1} \beta + q^n \gamma)g^\lambda(\bullet X) \\ \beta g^\lambda(X \bullet) & = \delta g^\lambda(X \circ) + \lambda_n g^\lambda(X) \\ g^\lambda(\varepsilon) & = \lambda_0 \end{cases}$$

où dans chaque équation  $n$  désigne la taille du plus grand mot intervenant dans l'équation.

REMARQUE 2.3.17. Si on pose  $\lambda = (1)_{n \geq 0}$ ,  $\alpha = \beta = 1$ ,  $\gamma = \delta = 0$ ,  $u = 1$  et  $z = z/q$  on retrouve presque le système (17). Les équations correspondant au comportement aux bords sont inversées, car dans la définition des tableaux de permutation de type  $B$  considérée par les auteurs, ils prennent en compte le demi-tableau nord-est contrairement à nous. La substitution  $z = z/q$  vient du fait que dans leur cas les  $q$  des cellules diagonales ne sont compté que par  $z$ .

De même que le système d'équations correspondant à l'ASEP, on peut calculer la valeur de  $g_\lambda(m)$  récursivement. Pour cela, nous faisons faire un aller-retour à la particule la plus à gauche. Soit  $X$  un mot de taille  $n$ . On a,

$$\begin{aligned} g^\lambda(\bullet X) &= \left(\frac{q}{u}\right)^{|\circ(X)|} g^\lambda(X \bullet) + \lambda_{n+1}(\dots) \\ &= \left(\frac{q}{u}\right)^{|\circ(X)|} \frac{\delta}{\beta} g^\lambda(X \circ) + \lambda_{n+1}(\dots) \\ &= \left(\frac{q}{u}\right)^n \frac{\delta}{\beta} g^\lambda(\circ X) + \lambda_{n+1}(\dots) \\ &= \left(\frac{q}{u}\right)^n \frac{zq(u^n \beta + q^n \gamma) \delta}{u(u^n \alpha + q^n \delta) \beta} g^\lambda(\bullet X) + \lambda_{n+1}(\dots). \end{aligned}$$

Le symbole  $\dots$  désigne une combinaison linéaire de  $g^\lambda(m')$  où les  $m'$  sont des mots de taille  $n$ , et les coefficients sont dans  $\mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, u, z)$ . Ainsi

$$g^\lambda(\bullet X) = \frac{\lambda_{n+1}}{u^{n+1}(u^n \alpha + q^n \delta) \beta - zq^{n+1}(u^n \beta + q^n \gamma) \delta} (\dots).$$

De même,

$$\begin{aligned} g^\lambda(\circ X) &= \frac{zq(u^n \beta + q^n \gamma)}{u(u^n \alpha + q^n \delta)} g^\lambda(\bullet X) + \lambda_{n+1}(\dots) \\ &= \left(\frac{q}{u}\right)^{|\circ(X)|} \frac{zq(u^n \beta + q^n \gamma)}{u(u^n \alpha + q^n \delta)} g^\lambda(X \bullet) + \lambda_{n+1}(\dots) \\ &= \left(\frac{q}{u}\right)^{|\circ(X)|} \frac{zq(u^n \beta + q^n \gamma) \beta}{u(u^n \alpha + q^n \delta) \delta} g^\lambda(X \circ) + \lambda_{n+1}(\dots) \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{q}{u}\right)^n \frac{zq(u^n\beta + q^n\gamma)\beta}{u(u^n\alpha + q^n\delta)\delta} g^\lambda(X\circ) + \lambda_{n+1}(\dots).$$

Ainsi,

$$g^\lambda(\circ X) = \frac{\lambda_{n+1}}{u^{n+1}(u^n\alpha + q^n\delta)\beta - zq^{n+1}(u^n\beta + q^n\gamma)\delta}(\dots).$$

Dans la suite, dans le but d'alléger les notations, on pourra écrire  $m$  à la place de  $g^\lambda(m)$  s'il n'y a pas d'ambiguïté. Soit  $m \in \{\bullet, \circ\}^n$ , supposons d'abord que  $m = \bullet X$ , alors

$$\begin{aligned} m &= \bullet X \\ &= \left(\frac{q}{u}\right)^{|\circ(X)|} X\bullet + \sum_{X=U\circ V} \frac{\lambda_{n+1}}{u} \left(\frac{q}{u}\right)^{|\circ(U)|} (U\bullet V + U\circ V) \\ &= \left(\frac{q}{u}\right)^{|\circ(X)|} \frac{\delta}{\beta} X\circ + \left(\frac{q}{u}\right)^{|\circ(X)|} \frac{\lambda_{n+1}}{\beta} X\circ \\ &+ \sum_{X=U\circ V} \frac{\lambda_{n+1}}{u} \left(\frac{q}{u}\right)^{|\circ(U)|} (U\bullet V + U\circ V) \\ &= \left(\frac{q}{u}\right)^n \frac{\delta}{\beta} \circ X + \frac{\delta}{\beta} \sum_{X=U\bullet V} \frac{\lambda_{n+1}}{u} \left(\frac{q}{u}\right)^{|\circ(U)|+|V|} (U\bullet V + U\circ V) \\ &+ \left(\frac{q}{u}\right)^{|\circ(X)|} \frac{\lambda_{n+1}}{\beta} X\circ + \sum_{X=U\circ V} \frac{\lambda_{n+1}}{u} \left(\frac{q}{u}\right)^{|\circ(U)|} (U\bullet V + U\circ V) \\ &= \left(\frac{q}{u}\right)^n \frac{zq(u^n\beta + q^n\gamma)\delta}{u(u^n\alpha + q^n\delta)\beta} m + \frac{\delta}{\beta} \sum_{X=U\bullet V} \frac{\lambda_{n+1}}{u} \left(\frac{q}{u}\right)^{|\circ(U)|+|V|} (U\bullet V + U\circ V) \\ &+ \left(\frac{q}{u}\right)^{|\circ(X)|} \frac{\lambda_{n+1}}{\beta} X\circ + \sum_{X=U\circ V} \frac{\lambda_{n+1}}{u} \left(\frac{q}{u}\right)^{|\circ(U)|} (U\bullet V + U\circ V). \end{aligned}$$

Soit

$$(19) \quad m = \frac{\lambda_{n+1}}{u^{n+1}(u^n\alpha + q^n\delta)\beta - zq^n(u^n\beta + q^n\gamma)\delta} \left[ \begin{aligned} &(u^n\alpha + q^n\delta)\delta \sum_{X=U\bullet V} u^{n-|\circ(U)|-|V|} q^{|\circ(U)|+|V|} (U\bullet V + U\circ V) \\ &+ u^{n-|\circ(X)|} q^{|\circ(X)|} u(u^n\alpha + q^n\delta) X\circ \\ &+ (u^n\alpha + q^n\delta)\beta \sum_{X=U\circ V} u^{n-|\circ(U)|} q^{|\circ(U)|} (U\bullet V + U\circ V) \end{aligned} \right].$$

Si  $m = \circ X$ , on obtient

$$(20) \quad m = \frac{\lambda_{n+1}}{u^{n+1}(u^n\alpha + q^n\delta)\beta - zq^{n+1}(u^n\beta + q^n\gamma)\delta}$$

$$\left[ \begin{aligned} & zq(u^n\beta + q^n\gamma)\delta \sum_{X=U\bullet V} u^{n-1-|\circ(U)|-|V|} q^{|\circ(U)|+|V|} (U\bullet V + U\circ V) \\ & + zu^{n-|\circ(X)|} q^{|\circ(X)|} q(u^n\beta + q^n\gamma)X\circ \\ & + zq(u^n\beta + q^n\gamma)\beta \sum_{X=U\circ V} u^{n-1-|\circ(U)|} q^{|\circ(U)|} (U\bullet V + U\circ V) \end{aligned} \right].$$

Si les  $\lambda_n$  sont tous non nuls,  $g^\lambda$  est entièrement déterminé par  $g^\lambda(\varepsilon) = \lambda_0$  et les équations (19) et (20). Ainsi le système (13) admet au plus une solution. Il reste à montrer qu'une fonction définie récursivement à l'aide des équations (19) et (20) satisfait le système (13).

CONJECTURE 2.3.18. Soit  $\lambda = (\lambda_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, u, z)^\mathbb{N}$  une suite. La fonction  $h^\lambda : \{\bullet, \circ\}^* \rightarrow \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, u, z)$  définie par les équations  $h^\lambda(\varepsilon) = \lambda_0$ ,

$$\begin{aligned} h^\lambda(\bullet X) &= \frac{\lambda_{n+1}}{u^{n+1}(u^n\alpha + q^n\delta)\beta - zq^n(u^n\beta + q^n\gamma)\delta} \\ &\left[ \begin{aligned} & (u^n\alpha + q^n\delta)\delta \sum_{X=U\bullet V} u^{n-|\circ(U)|-|V|} q^{|\circ(U)|+|V|} (h^\lambda(U\bullet V) + h^\lambda(U\circ V)) \\ & + u^{n-|\circ(X)|} q^{|\circ(X)|} u(u^n\alpha + q^n\delta)h^\lambda(X\circ) \\ & + (u^n\alpha + q^n\delta)\beta \sum_{X=U\circ V} u^{n-|\circ(U)|} q^{|\circ(U)|} (h^\lambda(U\bullet V) + h^\lambda(U\circ V)) \end{aligned} \right]. \end{aligned}$$

Si  $m = \circ X$ , on obtient

$$\begin{aligned} h^\lambda(\circ X) &= \frac{\lambda_{n+1}}{u^{n+1}(u^n\alpha + q^n\delta)\beta - zq^{n+1}(u^n\beta + q^n\gamma)\delta} \\ &\left[ \begin{aligned} & zq(u^n\beta + q^n\gamma)\delta \sum_{X=U\bullet V} u^{n-1-|\circ(U)|-|V|} q^{|\circ(U)|+|V|} (h^\lambda(U\bullet V) + h^\lambda(U\circ V)) \\ & + zu^{n-|\circ(X)|} q^{|\circ(X)|} q(u^n\beta + q^n\gamma)h^\lambda(X\circ) \\ & + zq(u^n\beta + q^n\gamma)\beta \sum_{X=U\circ V} u^{n-1-|\circ(U)|} q^{|\circ(U)|} (h^\lambda(U\bullet V) + h^\lambda(U\circ V)) \end{aligned} \right]. \end{aligned}$$

Posons  $\lambda_0 = 1$  et pour tout entier non nul  $n$ ,

$$\lambda_n = u^n(u^{n-1}\alpha + q^{n-1}\delta)\beta - zq^n(u^{n-1}\beta + q^{n-1}\gamma)\delta,$$

notons  $p_{\alpha\beta}$  la fonction  $h^\lambda$  pour ce choix de  $\lambda$ . L'intérêt de ce choix est que  $p_{\alpha\beta}$  est à valeur dans  $\mathbb{Q}[\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, u, z]$ , plus précisément, si  $m$  est de taille  $n$ , alors  $p(m)$  est une somme positive de  $2^n(2n-1)!!$  monômes de degré  $n(n+1)$ . Pour le prouver, il suffit de remarquer que  $p(m)$  est une combinaison linéaire positive de  $2(2n-1)$  mots de taille  $n-1$  dont les coefficients sont des monômes de degré  $2n$ . En particulier, en sommant sur  $\{\bullet, \circ\}^n$  on trouve que  $Z_{p_{\alpha\beta,n}}(1, 1, 1, 1; 1, 1) = 4^n(2n-1)!!$ . Dans la suite on peut supposer que  $u = 1$  sans perte de généralité

étant donné que le degré des monômes intervenant dans le poids d'un mot de taille  $n$  est constant égal à  $n(n+1)$  si on pose  $z = 1$ . Regardons plus en détails les équations (19) et (20). Pour chaque mot  $m$  de taille  $n$ , la première colonne de la table 2 donne les mots de taille  $n+1$  dans lesquels  $m$  apparaît et la deuxième colonne spécifie le coefficient associé. Les flèches sous les mots de la première colonne illustre le parcours de la particule avant d'obtenir  $m$ .

Mot	Coefficient
$\bullet m$ $\longrightarrow$	$q^{ \circ(m) }(\alpha + q^n \delta)$
$\circ m$ $\longleftarrow$	$zq^{ \circ(m) +1}(\beta + q^n \gamma)$
Pour toute décomposition $m = U \bullet V$ ou $m = U \circ V$	
$\bullet U \circ V$ $\longrightarrow$	$q^{ \circ(U) }(\alpha + q^n \delta)\beta$
$\bullet U \bullet V$ $\longleftarrow$	$q^{ \circ(U) + V }(\alpha + q^n \delta)\delta$
$\circ U \circ V$ $\longleftarrow$	$zq^{ \circ(U) +1}(\beta + q^n \gamma)\beta$
$\circ U \bullet V$ $\longleftarrow$	$zq^{ \circ(U) + V +1}(\beta + q^n \gamma)\delta$

TABLE 2. Antécédents de  $m \in \{\bullet, \circ\}^n$ .

On en déduit l'analogie du théorème 2.2.2.

**THÉORÈME 2.3.19.** *Soit  $n$  un entier naturel non nul, soit  $m \in \{\bullet, \circ\}^n$ , le poids de  $m$  vérifie*

$$p_{\alpha\beta}(m) = \sum_{\substack{TE \in \mathcal{TE}_n^{B\alpha\beta} \\ \text{type}(TE)=m}} p_{\alpha\beta}(TE).$$

**DÉMONSTRATION.** La preuve est similaire à celle du théorème 2.2.2. On vérifie d'abord que le cas  $n = 1$  est vrai. Puis, étant donné que le lemme 2.3.11 est compatible avec la table 2, on démontre par récurrence que le théorème est vrai pour tout entier non nul  $n$ . Pour  $n = 1$  on a bien  $p_{\alpha\beta}(\bullet) = u(\alpha + \delta)$  et  $p_{\alpha\beta}(\circ) = zq(\beta + \gamma)$ .  $\square$

On remarque que pour

$$\lambda_n = u^n(u^{n-1}\alpha + q^{n-1}\delta)\beta - zq^n(u^{n-1}\beta + q^{n-1}\gamma)\delta,$$

le système (18) est stable sous l'opération consistant à substituer  $z$  par  $1/z$  et échanger  $\alpha$  et  $\gamma$ ,  $\beta$  et  $\delta$ ,  $q$  et  $u$ , et  $\bullet$  et  $\circ$ , on retrouve l'observation 2.3.7.

Pour traiter le cas  $B_{\alpha\delta}$ , au vu du lemme 2.3.11, il suffit de faire les échanges  $u^n\alpha \leftrightarrow zq^n\alpha$  et  $zq^n\gamma \leftrightarrow u^n\gamma$ . Ainsi, le système que l'on considère est le suivant.

$$(21) \quad \begin{cases} ug^\lambda(X \circ \bullet Y) & = qq^\lambda(X \circ \bullet Y) + \lambda_n(g^\lambda(X \bullet Y) + g^\lambda(X \circ Y)) \\ q^{n-1}(zq\alpha + u\delta)g^\lambda(\circ X) & = u^{n-1}(zq\beta + u\gamma)g^\lambda(\bullet X) \\ \beta g^\lambda(X \bullet) & = \delta g^\lambda(X \circ) + \lambda_n g^\lambda(X) \\ g^\lambda(\varepsilon) & = \lambda_0 \end{cases}$$

Soit  $X$  un mot de taille  $n$ .

$$\begin{aligned} g^\lambda(\bullet X) &= \left(\frac{q}{u}\right)^{|\circ(X)|} g^\lambda(X \bullet) + \lambda_{n+1}(\dots) \\ &= \left(\frac{q}{u}\right)^{|\circ(X)|} \frac{\delta}{\beta} g^\lambda(X \circ) + \lambda_{n+1}(\dots) \\ &= \left(\frac{q}{u}\right)^n \frac{\delta}{\beta} g^\lambda(\circ X) + \lambda_{n+1}(\dots) \\ &= \left(\frac{q}{u}\right)^n \frac{u^n(zq\beta + u\gamma)\delta}{q^n(zq\alpha + u\delta)\beta} g^\lambda(\bullet X) + \lambda_{n+1}(\dots). \end{aligned}$$

Le symbole  $\dots$  désigne une combinaison linéaire de  $g^\lambda(m')$  où les  $m'$  sont des mots de taille  $n$  et les coefficients sont dans  $\mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, u, z)$ . Ainsi,

$$(22) \quad g^\lambda(\bullet X) = \frac{\lambda_{n+1}}{u^n q^n (zq\alpha + u\delta)\beta - u^n q^n (zq\beta + u\gamma)\delta} (\dots).$$

De même,

$$\begin{aligned} g^\lambda(\circ X) &= \frac{u^n(zq\beta + u\gamma)}{q^n(zq\alpha + u\delta)} g^\lambda(\bullet X) + \lambda_{n+1}(\dots), \\ &= \left(\frac{q}{u}\right)^{|\circ(X)|} \frac{u^n(zq\beta + u\gamma)}{q^n(zq\alpha + u\delta)} g^\lambda(X \bullet) + \lambda_{n+1}(\dots), \\ &= \left(\frac{q}{u}\right)^{|\circ(X)|} \frac{u^n(zq\beta + u\gamma)}{q^n(zq\alpha + u\delta)} g^\lambda(X \circ) + \lambda_{n+1}(\dots), \\ &= \left(\frac{q}{u}\right)^n \frac{u^n(zq\beta + u\gamma)}{q^n(zq\alpha + u\delta)} g^\lambda(X \circ) + \lambda_{n+1}(\dots). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(23) \quad g^\lambda(\circ X) = \frac{\lambda_{n+1}}{u^n q^n (zq\alpha + u\delta)\beta - u^n q^n (zq\beta + u\gamma)\delta} (\dots).$$

Les calculs étant analogues au cas  $B_{\alpha\beta}$ , nous ne les détaillons pas.

CONJECTURE 2.3.20. Soit  $\lambda = (\lambda_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, u, z)^{\mathbb{N}}$  une suite. La fonction  $h^\lambda : \{\bullet, \circ\}^* \rightarrow \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, u, z)$  définie par les équations  $h^\lambda(\varepsilon) = \lambda_0$ ,

$$h^\lambda(\bullet X) = \frac{\lambda_{n+1}}{u^n q^n (zq\alpha + u\delta)\beta - u^n q^n (zq\beta + u\gamma)\delta}$$

$$\left[ \begin{aligned} & q^n(zq\alpha + u\delta)\delta \sum_{X=U\bullet V} u^{n-|\circ(U)|-|V|} q^{|\circ(U)|+|V|} (h^\lambda(U\bullet V) + h^\lambda(U\circ V)) \\ & + u^{n-|\circ(X)|} q^{|\circ(X)|+n} (zq\alpha + u\delta) h^\lambda(X\circ) \\ & + q^n(qz\alpha + u\delta)\beta \sum_{X=U\circ V} u^{n-|\circ(U)|} q^{|\circ(U)|} (h^\lambda(U\bullet V) + h^\lambda(U\circ V)) \end{aligned} \right].$$

Si  $m = \circ X$ , on obtient

$$h^\lambda(\bullet X) = \frac{\lambda_{n+1}}{u^n q^n (zq\alpha + u\delta)\beta - u^n q^n (zq\beta + u\gamma)\delta}$$

$$\left[ \begin{aligned} & u^n(zq\alpha + u\delta)\delta \sum_{X=U\bullet V} u^{n-|\circ(U)|-|V|} q^{|\circ(U)|+|V|} (h^\lambda(U\bullet V) + h^\lambda(U\circ V)) \\ & + u^{2n-|\circ(X)|} q^{|\circ(X)|} (zq\alpha + u\delta) h^\lambda(X\circ) \\ & + u^n(qz\alpha + u\delta)\beta \sum_{X=U\circ V} u^{n-|\circ(U)|} q^{|\circ(U)|} (h^\lambda(U\bullet V) + h^\lambda(U\circ V)) \end{aligned} \right].$$

Posons  $\lambda_0 = 1$  et pour tout entier non nul  $n$ ,

$$\lambda_n = u^{n-1} q^{n-1} [(zq\alpha + u\delta)\beta - (zq\beta + u\gamma)\delta],$$

notons  $p_{\alpha\delta}$  la fonction définie par les équations (22) et (23). On obtient les mêmes résultats que pour le cas  $B_{\alpha\beta}$  et on peut également supposer que  $u = 1$ . Pour chaque mot  $m$  de taille  $n$ , la première colonne de la table 2 donne les mots de taille  $n + 1$  dans lesquels  $m$  apparaît, et la deuxième colonne spécifie le coefficient associé. Les flèches sous les mots de la première colonne illustre le parcours de la particule avant d'obtenir  $m$ .

Mot	Coefficient
$\bullet m$ $\xrightarrow{\quad}$	$q^{ \circ(m) +n} (zq\alpha + \delta)$
$\circ m$ $\xleftarrow{\quad}$	$q^{ \circ(m) } (zq\beta + \gamma)$
Pour toute décomposition $m = U\bullet V$ ou $m = U\circ V$	
$\bullet U\circ V$ $\xrightarrow{\quad}$	$q^{ \circ(U) +n} (zq\alpha + \delta)\beta$
$\bullet U\bullet V$ $\xleftarrow{\quad}$	$q^{ \circ(U) + V +n} (zq\alpha + \delta)\delta$
$\circ U\circ V$ $\xrightarrow{\quad}$	$q^{ \circ(U) } (zq\beta + \gamma)\beta$
$\circ U\bullet V$ $\xleftarrow{\quad}$	$q^{ \circ(U) + V } (zq\beta + \gamma)\delta$

TABLE 3. Antécédents de  $m \in \{\bullet, \circ\}^n$ .

THÉORÈME 2.3.21. Soit  $n$  un entier naturel non nul, soit  $m \in \{\bullet, \circ\}^n$ , le poids de  $m$  vérifie

$$p_{\alpha\delta}(m) = \sum_{\substack{TE \in TE_n^{B\alpha\delta} \\ \text{type}(TE)=m}} p_{\alpha\delta}(TE).$$

DÉMONSTRATION. La preuve est similaire à celle du théorème 2.2.2. On vérifie que le cas  $n = 1$  est vrai, puis étant donné que le lemme 2.3.11 est compatible avec la table 3 on démontre par récurrence que le théorème est vrai pour tout entier non nul  $n$ . Pour  $n = 1$  on a bien  $p_{\alpha\beta}(\bullet) = u\alpha + q\delta$  et  $p_{\alpha\delta}(\circ) = q\beta + u\gamma$ .  $\square$

On remarque que pour

$$\lambda_n = u^{n-1}q^{n-1} [(zq\alpha + u\delta)\beta - (zq\beta + u\gamma)\delta],$$

le système (21) est stable sous l'opération consistant à substituer  $z$  par  $1/z$  et échanger  $\alpha$  et  $\gamma$ ,  $\beta$  et  $\delta$ ,  $q$  et  $u$ , et  $\bullet$  et  $\circ$ , on retrouve l'observation 2.3.7.

# L'ASEP À DEUX PARTICULES

---

L'ASEP à deux particules que nous étudions, dans ce chapitre, est une généralisation de l'ASEP à une particule. Dans ce modèle, le nombre  $r$  de particules du deuxième type est fixé. Ainsi, en spécialisant à  $r = 0$  on retrouve l'ASEP à une particule initial. De même que pour l'ASEP à une particule, le cas  $\gamma = \delta = 0$  a d'abord été étudié. Mandelshtam et Viennot [MV15] proposent une interprétation combinatoire de l'état stationnaire de l'ASEP à deux particules, dans le cas  $\gamma = \delta = 0$ , par les tableaux alternatifs rhombiques. Ces objets généralisent les tableaux alternatifs (définition 4.1.3). Leurs travaux s'appuient sur l'*ansatz* matriciel introduit par Uchiyama [Uch08]. En plus des pas horizontaux et verticaux, correspondant respectivement aux particules blanches et noires, le bord sud-est de leur tableau possède des pas diagonaux qui correspondent aux particules grises. On peut adapter la théorie de l'*ansatz* cellulaire de Viennot [Vie13] pour montrer que les tableaux alternatifs rhombiques vérifient l'*ansatz* matriciel de Uchiyama dans le cas  $\gamma = \delta = 0$ . Une interprétation de l'ASEP à deux particules dans le cas général est donné par Corteel, Mandelshtam et Williams [CMW15]. Les objets combinatoires au cœur de cette interprétation sont les tableaux escaliers rhombiques (définition 3.2.3). Ils généralisent les tableaux alternatifs rhombique ainsi que les tableaux escaliers. De même que dans l'article [CW11], les auteurs proposent une généralisation de l'*ansatz* matriciel de Uchiyama, puis montrent que leurs objets combinatoires vérifient ce nouvel *ansatz* matriciel. De nouveau, leur preuve est longue et calculatoire.

Le but de ce chapitre est de généraliser la démarche du chapitre précédent au cas de l'ASEP à deux particules. Nous espérons ainsi fournir une preuve combinatoire du résultat de [CMW15]. Tout d'abord, nous présentons (section 1) l'*ansatz* matriciel de Corteel, Mandelshtam et Williams puis nous donnons une récurrence vérifiée par toute solution de leur système. Dans la section 3 nous définissons les tableaux escaliers rhombiques et nous présentons le théorème 3.2.4 interprétant le poids d'un état du ASEP à deux particules comme un polynôme générateur de tableaux escaliers rhombiques. La preuve



de ce théorème repose sur un algorithme d'insertion que nous définissons dans la section 3. Grâce à cet algorithme d'insertion, nous retrouvons la forme factorisée du polynôme générateur dans le cas  $q = u = 1$  et nous obtenons une nouvelle forme factorisée pour les spécialisations  $\alpha = \delta = 0$  et  $\beta = \gamma = 0$ . Dans la dernière section, nous retrouvons un résultat de Mandelshtam et Viennot [MV16] montrant que les tableaux alternatifs rhombiques sont en bijection avec les assemblées de permutations. Nous traitons également les cas  $\alpha = \delta = 0$  et  $\beta = \gamma = 0$ .

## 1. Présentation du modèle et de l'ansatz matriciel associé

De même que le modèle à une particule, l'ASEP à deux particules est une chaîne de Markov. Soit  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, u \in [0, 1]$  et  $n$  un entier naturel non nul, les états sont les mots de taille  $n$  d'alphabet  $\{\bullet, \circ, \bullet\}$ , où  $\circ$  représente un site vide,  $\bullet$  un site occupé par une particule légère et  $\bullet$  un site occupé par une particule lourde. On parlera également de particule blanche, grise et noire. Comme illustré par la figure 1, on définit la probabilité de transition  $p(s_1, s_2)$  entre deux états  $s_1$  et  $s_2$  de la façon suivante ( $U$  et  $V$  représentent des mots en  $\circ$  et  $\bullet$ ) :

- si  $s_1 = A\circ\bullet B$  et  $s_2 = A\circ\bullet B$ , alors  $p(s_1, s_2) = \frac{q}{n+1}$  et  $p(s_2, s_1) = \frac{u}{n+1}$  ;
- si  $s_1 = A\bullet\bullet B$  et  $s_2 = A\bullet\bullet B$ , alors  $p(s_1, s_2) = \frac{q}{n+1}$  et  $p(s_2, s_1) = \frac{u}{n+1}$  ;
- si  $s_1 = A\bullet\circ B$  et  $s_2 = A\circ\bullet B$ , alors  $p(s_1, s_2) = \frac{q}{n+1}$  et  $p(s_2, s_1) = \frac{u}{n+1}$  ;
- si  $s_1 = A\bullet$  et  $s_2 = A\circ$ , alors  $p(s_1, s_2) = \frac{\beta}{n+1}$  et  $p(s_2, s_1) = \frac{\delta}{n+1}$  ;
- si  $s_1 = \circ B$  et  $s_2 = \bullet B$ , alors  $p(s_1, s_2) = \frac{\alpha}{n+1}$  et  $p(s_2, s_1) = \frac{\gamma}{n+1}$  ;
- si  $s_1 \neq s_2$ , ne correspond à aucun des cas précédents, alors  $p(s_1, s_2) = 0$  ;
- enfin  $p(s_1, s_1) = 1 - \sum_{s_2 \neq s_1} p(s_1, s_2)$ .

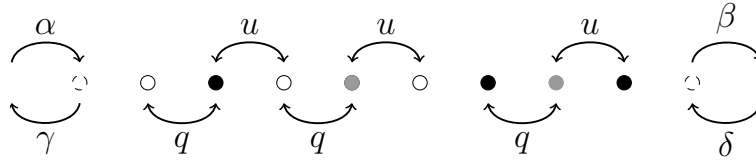


FIGURE 1. Transitions possibles dans l'ASEP à deux particules.

On remarque que depuis un mot on peut effectuer une transition uniquement vers des mots ayant le même nombre de particules grises. Ainsi, la chaîne de Markov possède  $n + 1$  composantes connexes. Désormais on fixe le nombre de particules grises que l'on note  $r$ . On note  $\{\bullet, \circ, \bullet\}_r^{n+r}$  l'ensemble des mots à  $n + r$  particules dont  $r$  sont grises. De ce fait, le sous-graphe que l'on considère

### 3. L'ASEP à deux particules

---

est fortement connexe et donc la chaîne de Markov associée à ce graphe est, par définition, *irréductible*<sup>1</sup>. On note  $M_{n,r}$  la matrice de transition de cette chaîne de Markov. Étant donné que son nombre d'états est fini, elle admet une unique loi de probabilité stationnaire  $\mu_{n,r}$ . La probabilité stationnaire de chaque état est non nulle. En outre, l'espace vectoriel  $\mathbb{R}\mu_{n,r}$  a pour équation

$$(24) \quad v = vM_{n,r}.$$

Ainsi, si une fonction non nulle  $f_{n,r} : \{\bullet, \bullet, \circ\}_r^{n+r} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifie l'équation (10), c'est-à-dire que le vecteur  $v = (f_{n,r}(w))_{w \in \{\bullet, \bullet, \circ\}_r^{n+r}}$  la vérifie, alors pour  $m \in \{\bullet, \bullet, \circ\}_r^{n+r}$  on a

$$\mu_{n,r}(m) = \frac{f_{n,r}(m)}{Z_{f_{n,r}}} \text{ où } Z_{f_{n,r}}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, u) = \sum_{m' \in \{\bullet, \bullet, \circ\}_r^{n+r}} f_{n,r}(m').$$

Un *ansatz matriciel* pour ce modèle a été introduit par Uchiyama [Uch08]. Supposons qu'il existe des matrices  $A, D$  et  $E$  ainsi que des vecteurs  $W$  et  $V$  respectivement ligne et colonne, tels que

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} uDE = qED + D + E \\ uDA = qAD + A \\ uAE = qEA + A \\ \alpha WE = \gamma WD + W \\ \beta DV = \delta EV + V \\ WA \cdots AV \neq 0 \end{array} \right.$$

Alors, on peut calculer la probabilité stationnaire d'un état à partir des matrices  $A, D, E, V$  et  $W$ .

**THÉORÈME 3.1.1.** *Soit  $m = m_1 \cdots m_n \in \{\bullet, \bullet, \circ\}_r^{n+r}$  un état du ASEP. Nous notons  $X(m) = X_1 \cdots X_{n+r}$  le mot en  $D, A$  et  $E$  tel que  $X_i = D$  (resp.  $X_i = A$ , resp.  $X_i = E$ ) si  $m_i = \bullet$  (resp.  $m_i = \bullet$ , resp.  $m_i = \circ$ ). Alors, la fonction  $m \mapsto WX(m)V$  l'équation (25). De sorte que*

$$\mu_{n,r}(m) = \frac{WX(m)V}{\sum_{m \in \{\bullet, \bullet, \circ\}_r^{n+r}} WX(m)V}.$$

---

1. Si on étudie les mouvements possibles des particules en fonction de la nullité de certains paramètres, on se rend compte que si  $n > \max(r, 1)$ , le graphe est fortement connexe si et seulement si la quantité suivante est non nulle  $(q+u)(\gamma+\beta)(\alpha+\delta)(\alpha+q)(\beta+q)(\gamma+u)(\delta+u)$ . Si elle est nulle, alors il est possible que l'ASEP à deux particules admette plusieurs probabilités stationnaires. L'exemple le plus trivial est lorsque tous les paramètres sont nuls, dans ce cas,  $M_{n,r}$  est la matrice identité et toute loi de probabilité sur  $\{\bullet, \bullet, \circ\}_r^{n+r}$  est stationnaire.

Uchiyama donne dans son article [Uch08] des matrices  $A, D$  et  $E$  ainsi que des vecteurs  $V$  et  $W$ , de dimension infinie, solutions du système (25) pour  $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ . Toutefois, ils ne sont pas définis pour toutes valeurs de  $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0, q$  et  $u$ , le calcul des probabilités pour les valeurs restantes s'obtient par prolongement analytique. Dans [CMW15], Corteel, Mandelshtam et Williams définissent un *ansatz* matriciel généralisant celui de Uchiyama en ajoutant un degré de liberté. Le paramètre qu'elles choisissent dépend ici aussi de la taille des mots, ainsi le nombre d'équations à vérifier est infini. Les auteurs trouvent une représentation sans restriction au niveau des paramètres. Elles énumèrent également une généralisation des tableaux escaliers. Ainsi, en prouvant que leurs matrices et vecteurs vérifient l'*ansatz* matriciel, elles prouvent également que leurs nouveaux tableaux donnent une interprétation combinatoire de l'état stationnaire de l'ASEP à deux particules. De même que pour le cas à une particule, au lieu des matrices habituelles à deux dimensions et des vecteurs à une dimension, la représentation est définie sous la forme de « matrices » à quatre dimensions et de « vecteurs » à deux dimensions. Nous n'utilisons pas ces représentations car nous nous intéressons directement à la combinatoire de l'*ansatz* matriciel introduit par Corteel, Williams et Mandelshtam. Dans ce contexte  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, q$  et  $u$  sont des indéterminées. Soit  $\lambda = (\lambda_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, u)^{\mathbb{N}}$ , et  $g^\lambda : \{\bullet, \circ\}_r^* \rightarrow \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, u)$  une fonction vérifiant

$$(26) \quad \begin{cases} ug^\lambda(X \circ \bullet Y) = qg^\lambda(X \circ \bullet Y) + \lambda_{\|X\| + \|Y\| + 2} (g^\lambda(X \bullet Y) + g^\lambda(X \circ Y)) \\ ug^\lambda(X \bullet \bullet Y) = qg^\lambda(X \bullet \bullet Y) + \lambda_{\|X\| + \|Y\| + 3} g^\lambda(X \bullet Y) \\ ug^\lambda(X \circ \circ Y) = qg^\lambda(X \circ \circ Y) + \lambda_{\|X\| + \|Y\| + 3} g^\lambda(X \bullet Y) \\ \alpha g^\lambda(\circ X) = \gamma g^\lambda(\bullet X) + \lambda_{\|X\| + 1} g^\lambda(X) \\ \beta g^\lambda(X \bullet) = \delta g^\lambda(X \circ) + \lambda_{\|X\| + 1} g^\lambda(X) \\ g^\lambda(\bullet \cdots \bullet) = \lambda_0 \end{cases},$$

où  $\|X\| = |\bullet(X)| + |\circ(X)| + 2|\bullet(X)|$ . Alors, la fonction  $g^\lambda|_{\{\bullet, \circ\}_r^{n+r}}$  est solution de l'équation (24). Pour calculer  $g^\lambda(m)$  nous allons utiliser la même idée que dans le cas à une particule en se rappelant qu'une particule grise compte deux fois : une fois à l'aller et une fois au retour. On note  $\bullet(m)$  l'ensemble des indices des particules  $\bullet$  de  $m$ . Soit  $m \in \{\bullet, \circ\}_r^{n+1+r}$ ,  $m$  s'écrit de manière unique  $Y \bullet X$  ou  $Y \circ X$ , avec  $Y = \bullet \cdots \bullet$  ou  $Y = \varepsilon$ . Supposons que  $m = Y \bullet X$ , alors

$$\begin{aligned} g^\lambda(Y \bullet X) &= \left(\frac{q}{u}\right)^{|\circ(X)| + |\bullet(X)|} g^\lambda(Y X \bullet) + \lambda_{n+1+2r}(\cdots) \\ &= \left(\frac{q}{u}\right)^{|\circ(X)| + |\bullet(X)|} \frac{\delta}{\beta} g^\lambda(X \circ) + \lambda_{n+1+2r}(\cdots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{q}{u}\right)^{n+r+|Y|} \frac{\delta}{\beta} g^\lambda(\circ Y X) + \lambda_{n+1+2r}(\cdots) \\
&= \left(\frac{q}{u}\right)^{n+r+|Y|} \frac{\gamma\delta}{\alpha\beta} g^\lambda(\bullet Y X) + \lambda_{n+1+2r}(\cdots) \\
&= \left(\frac{q}{u}\right)^{n+2r} \frac{\gamma\delta}{\alpha\beta} g^\lambda(Y \bullet X) + \lambda_{n+1+2r}(\cdots),
\end{aligned}$$

où  $\cdots$  désigne une combinaison linéaire de  $g^\lambda(m')$  où les  $m'$  sont des mots de taille  $n+r$  à coefficients dans  $\mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, u)$ . Ainsi,

$$(27) \quad g^\lambda(Y \bullet X) = \frac{\lambda_{n+1+2r}}{u^{n+2r}\alpha\beta - q^{n+2r}\gamma\delta}(\cdots).$$

De même,

$$\begin{aligned}
g^\lambda(Y \circ X) &= \left(\frac{q}{u}\right)^{|Y|} g^\lambda(\circ Y X) + \lambda_{n+1+2r}(\cdots) \\
&= \left(\frac{q}{u}\right)^{|Y|} \frac{\gamma}{\alpha} g^\lambda(\bullet Y X) + \lambda_{n+1+2r}(\cdots) \\
&= \left(\frac{q}{u}\right)^{r+|Y|+|\circ(X)|} \frac{\gamma}{\alpha} g^\lambda(X \bullet) + \lambda_{n+1+2r}(\cdots) \\
&= \left(\frac{q}{u}\right)^{r+|Y|+|\circ(X)|} \frac{\gamma\delta}{\alpha\beta} g^\lambda(Y X \circ) + \lambda_{n+1+2r}(\cdots) \\
&= \left(\frac{q}{u}\right)^{n+2r} \frac{\gamma\delta}{\alpha\beta} g^\lambda(\circ X) + \lambda_{n+1+2r}(\cdots),
\end{aligned}$$

Donc,

$$(28) \quad g^\lambda(Y \circ X) = \frac{\lambda_{n+1+2r}}{u^{n+2r}\alpha\beta - q^{n+2r}\gamma\delta}(\cdots).$$

Nous n'avons pas besoin des détails des calculs dès lors qu'on se convainc que la Table 1 est juste. Si nous définissons proprement les récurrences vérifiées par  $g^\lambda$ , nous obtenons un théorème analogue au théorème 2.1.3 avec un analogue de la remarque 2.1.4.

Considérons la suite  $\lambda$  telle que  $\lambda_n = u^{n-1}\alpha\beta - q^{n-1}\gamma\delta$  pour tout  $n \geq 1$  et  $\lambda_0 = 1$ . Notons  $p$  la fonction définie à partir des équations (27) et (28) et  $p_{n,r}$  sa restriction à  $\{\bullet, \circ\}_r^{n+r}$ . L'intérêt de ce choix est que  $p$  est à valeur dans  $\mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, u)$ . Plus précisément, si  $m$  est de taille  $n+r$ , alors  $p(m)$  est une somme positive de  $2^n \frac{(n+r)!}{r!}$  monômes de degré  $\frac{n(n+4r+1)}{2}$ . Il suffit de remarquer que  $p(m)$  est une combinaison linéaire positive de  $2(n+r)$  mots de taille  $n+r-1$  dont les coefficients sont des monômes de degré  $n+2r$ . En particulier, en sommant sur  $\{\bullet, \circ\}_r^{n+r}$  on trouve que

$$\begin{aligned}
Z_{p_{n,r}}(1, 1, 1, 1; 1, 1) &= 2^n \binom{n+r}{r} \times 2^n \frac{(n+r)!}{r!} \\
&= 4^n \binom{n+r}{r} \frac{(n+r)!}{r!}.
\end{aligned}$$

Ainsi, un objet combinatoire donnant une interprétation des monômes apparaissant dans les probabilités de l'état stationnaire est nécessairement énuméré par la suite  $(4^n \binom{n+r}{r} \frac{(n+r)!}{r!})_{n \geq 1}$ . Si on pose  $r = 0$  on retombe bien sur les résultats de l'ASEP à une particule. Ce choix semble optimal car pour  $r = 1, 2$  et  $3$   $Z_{p_{n,r}}$  n'admet pas de factorisation non triviale jusqu'à  $n = 5$ . Dans la suite on peut supposer que  $u = 1$  sans perte de généralité étant donné le degré des monômes intervenant dans le poids d'un mot de taille  $n$  est constant égal à  $\frac{n(n+4r+1)}{2}$ . Corteel, Mandelshtam et Williams définissent dans [CMW15] une fonction solution du système (26) pour cette même suite  $\lambda$ , où le poids d'un mot s'interprète comme une série génératrice de tableaux escaliers rhombiques ([CMW15, theorem 3.11]). D'après ce qui précède, cette fonction est donc nécessairement égale à  $p$ . En particulier, elle admet les récurrences définies par les équations (27) et (28). Nous donnons dans la section 3 une interprétation combinatoire de cette récurrence à l'aide d'un algorithme d'insertion sur les tableaux escaliers rhombiques. Dans la suite nous supposons avoir montré que  $p$  vérifie le système (26) en ne prenant pas en compte que la preuve actuelle utilise les tableaux escaliers rhombiques.

Avant de nous intéresser aux tableaux escaliers rhombiques, nous donnons des précisions sur la récurrence vérifiée par  $p$ . Soit  $m \in \{\bullet, \circ\}_r^{n+r}$ , le nombre de mots dans lesquels  $m$  apparaît dépend du nombre de particules grises qu'il y a à sa gauche. Pour contourner ce problème, comme suggéré par la formule de  $Z_{p_{n,r}}(1, 1, 1, 1; 1, 1)$  nous fixons l'emplacement des particules grises. Soit  $I = \{i_1 < \dots < i_n\}$  un sous-ensemble à  $n$  éléments de  $\llbracket 1, n+r \rrbracket$  et  $k$  un entier naturel. On note  $\{\bullet, \circ\}_I^{k+r}$  l'ensemble des mots  $m = m_{k+r} \dots m_1 \in \{\bullet, \circ\}_r^{k+r}$  dont les indices des particules noires et blanches sont  $i_1, \dots, i_k$ . Ainsi le nombre de mots de  $\{\bullet, \circ\}_I^{k+r}$  dans lesquels un mot de  $\{\bullet, \circ\}_I^{k+r}$  apparaît est constant égal à  $4(k+r+1)$ . La table 1 décrit plus précisément les mots de taille  $k+1+r$  dont le poids fait apparaître  $p(m)$  et le coefficient avec lequel il apparaît. Les flèches sous les mots de la première colonne illustre le parcours de la particule avant d'obtenir  $m$ . Notons  $Z_{p_{n,r},I}$  la série génératrice

$$Z_{p_{n,r},I}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; q, u) = \sum_{m \in \{\bullet, \circ\}_I^{n+r}} p_{n,r}(m).$$

La table 1 dans le cas  $q = 1$  nous dit que

$$Z_{p_{n+1,r},I}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1, 1) = (\alpha + \beta + \gamma + \delta + (n+r)(\alpha + \delta)(\beta + \gamma)) Z_{p_{n,r},I}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1, 1).$$

De ce fait

$$Z_{p_{n,r},I}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1, 1) = \prod_{i=0}^{n-1} (\alpha + \beta + \gamma + \delta + (i+r)(\alpha + \delta)(\beta + \gamma)).$$

Et donc

$$(29) \quad Z_{p_{n,r}}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1, 1) = \binom{n+r}{r} \prod_{i=0}^{n-1} (\alpha + \beta + \gamma + \delta + (i+r)(\alpha + \delta)(\beta + \gamma)).$$

3. L'ASEP à deux particules

Mot	Coefficient
	$q^{ \circ(m') + \bullet(m') }\alpha$
	$q^{\ m'\ +a}\delta$
	$q^a\beta$
	$q^{2a+ \circ(m') + \bullet(m') }\gamma$
Pour toute décomposition $m' = U \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\circ}} V$ .	
	$q^{ \circ(U) + \bullet(U) }\alpha\beta$
	$q^{ \circ(U) + \bullet(U) +\ V\ +1(m'_j=\bullet)}\alpha\delta$
	$q^{2a+ \circ(U) + \bullet(U) }\gamma\beta$
	$q^{2a+ \circ(U) + \bullet(U) +\ V\ +1(m'_j=\bullet)}\gamma\delta$
Pour tout $b \in \llbracket 1, a \rrbracket$ .	
	$q^{\ m'\ +b-1}\alpha\delta$
	$q^{\ m'\ +2a-b}\gamma\delta$
	$q^{b-1}\alpha\beta$
	$q^{2a-b}\beta\gamma$

TABLE 1. Antécédents de  $m \in \{\bullet, \circ, \circ\}_I^{k+r}$  avec  $m = \dots \overset{i_{k+1}}{\bullet} m'$ .

Dans le cas  $r = 0$  on retombe bien sur l'équation (16). Dans [CMW15] les auteurs démontrent également cette formule par l'intermédiaire des tableaux escaliers rhombiques.

## 2. Tableaux escaliers rhombiques

Les tableaux escaliers rhombiques ont été introduit par Corteel, Mandelshtam et Williams [CMW15] comme généralisation des tableaux escaliers et des tableaux alternatifs rhombiques de Mandelshtam et Viennot [MV15]. Pour pouvoir les définir, nous avons besoin de quelques préliminaires.

Les diagrammes sous-jacent aux tableaux escaliers rhombiques ne sont pas des diagrammes de Ferrers.

DÉFINITION 3.2.1. Soit  $n$  un entier naturel et  $m = m_{n+r} \cdots m_1 \in \{\bullet, \circ, \circ\}_r^{n+r}$ , on définit le chemin  $X(m) = X_1 \cdots X_{n+r}$  tel que  $X_i$  est un *coin*, c'est-à-dire un pas horizontal suivi d'un pas vertical, si  $m_i = \circ$  et si  $m_i = \bullet$  alors  $X_i$  est un pas diagonal nord-est. Le *diagramme rhombique*  $DR(m)$  associé à  $m$  est la forme définie par son bord sud-est égal à  $X(m)$  et son bord nord-est constitué de  $n$  pas verticaux,  $r$  pas diagonaux nord-est et  $n$  pas horizontaux. Les deux chemins sont lus du sud-ouest au nord-est. On dit que  $m$  est le *type* du diagramme rhombique  $DR(m)$ .

Le diagramme rhombique associé au mot  $\bullet\bullet\circ\bullet\circ$  est donné dans la figure 2. Un diagramme de Ferrers est le pavage par des *tuiles* carrés de l'aire délimitée

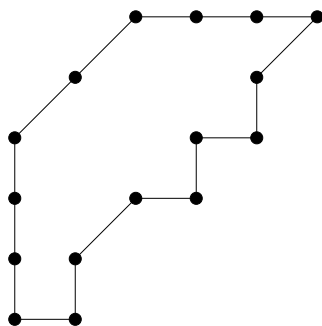


FIGURE 2. Le diagramme rhombique  $DR(m)$  associé au mot  $m = \bullet\bullet\circ\bullet\circ$ .

par ses bords sud-est et nord-ouest. Dans le cas des diagrammes rhombiques il y a trois types de tuiles : les *carrés*, les *rhombes horizontaux* et les *rhombes verticaux*. Ils sont représentés respectivement de gauche à droite dans la figure 3. De plus, il y a plusieurs façons de paver un diagramme rhombique. Dans la suite, nous considérons toujours le *pavage maximal* (figure 4), il est défini comme suit. Soit  $C$  un coin du bord sud-est et  $c_{NE}$  le nombre de coins à

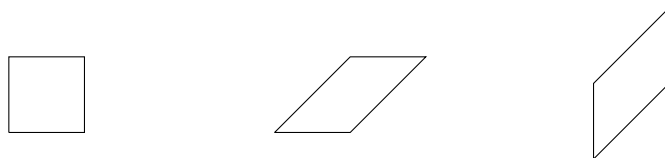


FIGURE 3. Les tuiles pavant un diagramme rhombique. De gauche à droite, un carré, un rhombe horizontal et un rhombe vertical.

son nord-est. On ajoute une colonne de  $c_{NE} + 1$  carrés au niveau de  $C$  de sorte que le carré le plus bas épouse  $C$ . Soit  $D$  un pas diagonal du bord sud-est,  $c_{NE}$  le nombre de coins à son nord-est et  $c_{SO}$  le nombre de coins à son sud-ouest. On ajoute une colonne de  $c_{NE}$  rhombes verticaux au niveau de  $D$  de sorte que le rhombe vertical le plus bas épouse  $D$ . Puis, on ajoute une ligne de  $c_{NE}$  rhombes horizontaux dont le rhombe extrémal droit épouse le haut de la colonne. Ce pavage est dit maximal car si on se le représente en trois dimensions on ne peut pas ajouter de pavé droit sans modifier le bord sud-est.

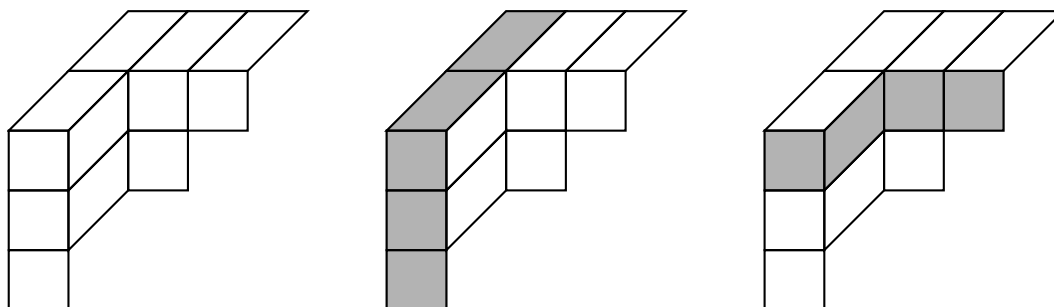


FIGURE 4. De gauche à droite : le pavage maximal du diagramme rhombique  $DR$  de la figure 4, une colonne de  $DR$  (en gris) et une ligne de  $DR$  (en gris).

REMARQUE 3.2.2. Soit  $TER$  un tableau escalier rhombique, alors le nombre de tuiles carrées qui le composent est égal à  $\binom{n+1}{2}$  quant au nombre de tuiles rhombiques il est égal à  $rn$ .

Nous définissons également les lignes et les colonnes d'un pavage maximal (figure 4). Deux tuiles sont horizontalement (resp. verticalement, resp. diagonalement) adjacentes si elles partagent un bord vertical (resp. horizontal, resp. diagonal). Une *ligne* (resp. *colonne*, resp. *diagonale*) est un ensemble connexe maximal par rapport à la relation d'adjacence horizontale (resp. verticale, resp. diagonale). Soit  $m \in \{\bullet, \circ\}_r^{n+r}$ , il y a une bijection évidente entre les lignes (resp. colonnes) et les coins du pavage maximal de  $DR(m)$ , si bien que le nombre de colonnes et de lignes est égal à  $n$ .



DÉFINITION 3.2.3 ([CMW15, definition 3.7]). Soit  $n$  un entier naturel et  $m$  un état de  $\{\bullet, \circ\}_r^{n+r}$ . Un *tableau escalier rhombique*  $TER$  de forme  $DR(m)$  est un remplissage des tuiles du pavage maximal de  $DR(m)$  vérifiant :

- un carré est soit vide soit contient un symbole parmi  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  ;
- un rhombe vertical est soit vide soit contient un symbole parmi  $\beta$  et  $\delta$  ;
- un rhombe horizontal est soit vide soit contient un symbole parmi  $\alpha$  et  $\gamma$  ;
- les coins ne sont pas vides ;
- toute tuile au-dessus dans la même colonne qu'une tuile contenant  $\alpha$  ou  $\gamma$  est vide ;
- toute tuile à droite dans la même ligne qu'une tuile contenant  $\beta$  ou  $\delta$  est vide.

On dit que  $TER$  est de *taille*  $(n+r, r)$ .

Un exemple est donné dans la figure 5. Il existe un unique  $TER$  de taille  $(r, r)$ , il est composé uniquement de  $r$  pas diagonaux. On note  $TER$  l'ensemble des tableaux escaliers rhombiques et  $TER_{(n+r, r)}$  l'ensemble des tableaux escaliers rhombiques de taille  $(n+r, r)$ . On étend la terminologie des diagrammes rhombique aux tableaux escaliers rhombiques.

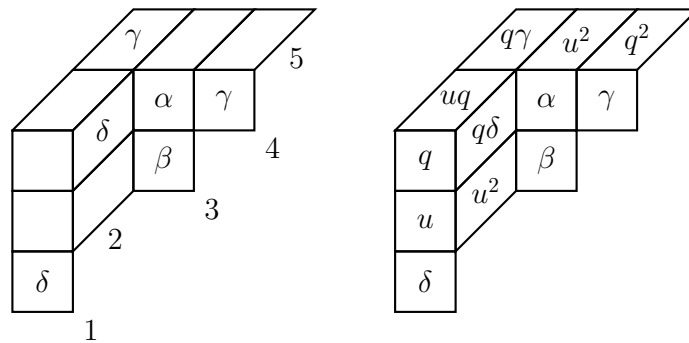


FIGURE 5. Un tableau escalier rhombique de taille  $(5, 2)$  et son remplissage en  $q$  et  $u$ .

On associe à chaque tableau escalier rhombique  $TER$  un poids  $p(TER)$  de la façon suivante. On commence par remplir les tuiles vides avec des  $q$  et des  $u$  selon les règles représentées dans la figure 6 :

- on affecte un  $q$  (resp.  $u$ ) à tout carré vide dont la première tuile non vide à sa droite dans la même ligne contient  $\delta$  (resp.  $\beta$ ) ;
- on affecte un  $q$  (resp.  $u$ ) à tout carré vide dont la première tuile non vide à sa droite dans la même ligne contient  $\alpha$  ou un  $\gamma$  et dont la première tuile non vide en dessous dans la même colonne contient  $\beta$  ou  $\gamma$  (resp.  $\alpha$  ou un  $\delta$ ) ;

### 3. L'ASEP à deux particules

- on affecte un  $q^2$  (resp.  $uq$ , resp.  $u^2$ ) à tout rhombe vertical dont la première tuile à sa droite dans la même ligne contient un  $\delta$  (resp.  $\alpha$  ou  $\gamma$ , resp.  $\beta$ );
- on affecte un  $q^2$  (resp.  $uq$ , resp.  $u^2$ ) à tout rhombe horizontal dont la première tuile en dessous dans la même colonne contient un  $\gamma$  (resp.  $\beta$  ou  $\delta$ , resp.  $\alpha$ );
- on affecte un  $u$  (resp.  $q$ ) à tout rhombe vertical contenant un  $\beta$  (resp.  $\delta$ );
- on affecte un  $u$  (resp.  $q$ ) à tout rhombe horizontal contenant un  $\alpha$  (resp.  $\gamma$ ).

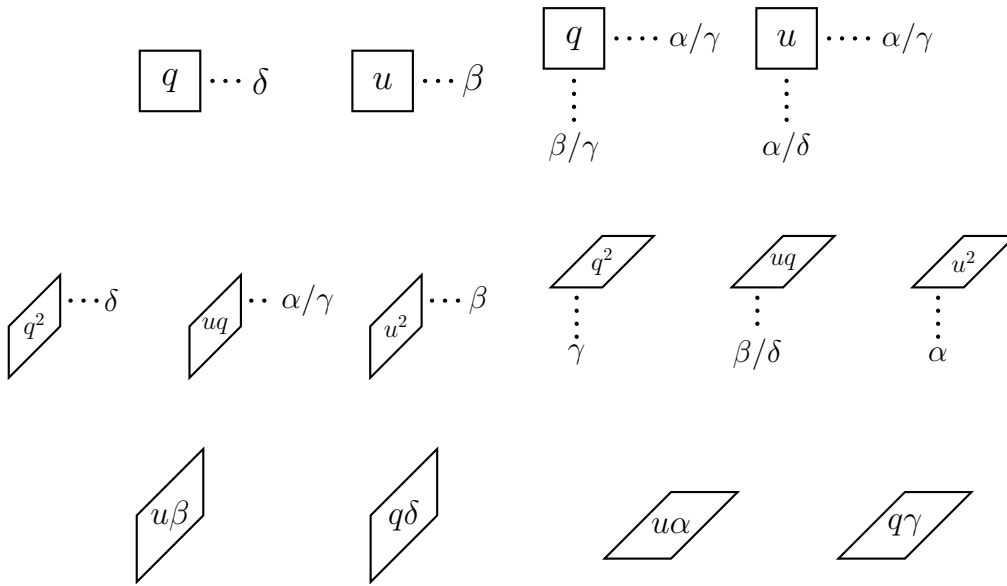


FIGURE 6. Les règles de remplissage, par des  $q$  et des  $u$ , des tuiles vides d'un tableau escaler rhombique.

Le poids  $p(TER)$  est le produit de tous les symboles dans  $TER$  après remplissage par des  $q$  et des  $u$ . En particulier, l'unique tableau escaler rhombique de taille  $(r, r)$  a poids 1. Le poids du tableau escaler rhombique de la figure 5 est  $u^6 q^6 \alpha \beta \gamma^2 \delta^2$ . D'après la remarque 3.2.2, le poids d'un tableau escaler rhombique de taille  $(n+r, r)$  est  $\binom{n+1}{2} + 2rn$ . C'est pourquoi dans la suite on suppose parfois  $u = 1$  sans perte de généralité. On note  $Z_{(n+r,r)}$  la série génératrice

$$Z_{(n+r,r)}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; q, u) = \sum_{TER \in \mathcal{TER}_{(n+r,r)}} p(TER).$$

Contrairement au cas de l'ASEP à une particule, on ne connaît pas de formule close pour  $Z_{(n+r,r)}$ , la spécialisation la plus générale que l'on ait est

$$Z_{(n+r,r)}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1, 1) = \binom{n+r}{r} \prod_{i=0}^{n-1} (\alpha + \beta + \gamma + \delta + (i+r)(\alpha + \delta)(\beta + \gamma)).$$

Mandelstam et Viennot [MV15, MV16] montrent, dans le cadre des tableaux alternatifs rhombiques, la spécialisation suivante

$$Z_{(n+r,r)}(\alpha, \beta, 0, 0; 1, 1) = \binom{n+r}{r} \prod_{i=0}^{n-1} (\alpha + \beta + (i+r)\alpha\beta).$$

Puis,  $\alpha$  et  $\gamma$  ainsi que  $\beta$  et  $\delta$  jouant le même rôle on substitue  $\alpha$  par  $\alpha + \gamma$  et  $\beta$  par  $\beta + \delta$ . Dans la section 3 une nouvelle preuve bijective à l'aide d'un algorithme d'insertion est proposée. Soit  $m$  un mot appartenant à  $\{\bullet, \circ\}_r^{n+r}$ . Une autre conséquence de cet algorithme d'insertion est l'interprétation, par les tableaux escaliers rhombiques, des poids apparaissant dans  $p(m)$ .

**THÉORÈME 3.2.4.** *Soit  $n$  un entier naturel et  $m$  un mot de  $\{\bullet, \circ\}_r^{n+r}$ . Alors on a,*

$$p(m) = \sum_{\substack{TER \in \mathcal{TER}_{(n+r,r)} \\ TER \text{ de forme } DR(m)}} p(TER).$$

Soit  $TER$  un tableau escalier rhombique de taille  $(n+r, r)$ . On numérote de 1 à  $n+r$  les coins et le pas diagonaux du bord sud-est de  $TER$  en commençant depuis le sud-ouest (voir la figure 5). Soit  $i_1 < \dots < i_n$  les numéros des coins. On note  $t_{i_k}$  la tuile carrée correspondante au coin numéroté  $i_k$ . De plus, on note  $L_{i_k}$  et  $C_{i_k}$  respectivement la ligne et la colonne contenant  $t_{i_k}$ . De même, on note  $D_{j_1}, \dots, D_{j_d}$  les diagonales correspondant aux pas diagonaux numérotés  $j_1 < \dots < j_d$ . On peut maintenant caractériser une tuile par des coordonnées, on note  $t_{i,j}(TER)$  la tuile à l'intersection de la ligne  $L_i$  et la colonne  $C_j$  ou la diagonale  $D_j$ . Par exemple, notons  $TER$  le tableau escalier rhombique de la figure 5. Alors, les tuiles  $t_{4,2}$  et  $t_{4,3}$  contiennent respectivement les symboles  $\delta$  et  $\alpha$ . Enfin, la ligne  $L_{i_k}$  est de *type*  $\alpha/\gamma$  si  $t_{i_k}$  contient  $\alpha/\gamma$  sinon elle est de *type*  $\beta/\delta$ .

Avant de terminer cette section, nous proposons une généralisation de la proposition 2.2.7. On note  $Z_m(\alpha, \beta, \gamma, \delta; q, u)$  la quantité  $p(m)$ .

**PROPOSITION 3.2.5.** *Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $m$  un mot appartenant à  $\{\bullet, \circ\}_r^{n+r}$ . Si  $r$  est pair, alors la quantité  $Z_m(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha; -1, 1)$  est nulle.*

**DÉMONSTRATION.** Il suffit de montrer que c'est vrai pour  $n = 1$  étant donné que le poids d'un mot de taille  $n + r + 1$  est une combinaison linéaire des poids de mots de taille  $n + r$ . Supposons que

$$m = \underbrace{\bullet \dots \bullet}_{a} \bullet \underbrace{\dots \bullet}_{b}$$

avec  $a + b$  impair. Si on parcourt le bord sud-est du diagramme rhombique associé à  $m$  il est composé de  $b$  rhombes verticaux, d'un carré, puis de  $a$  rhombes horizontaux. La tuile carrée ne peut contenir que  $\alpha$  ou  $\delta$ . Si c'est  $\alpha$  (resp.  $\delta$ ), il peut y avoir un autre symbole dans un des rhombes verticaux (resp. horizontaux) :  $\beta$  ou  $\delta$  (resp.  $\alpha$  ou  $\gamma$ ). Il suffit de regrouper les tableaux

### 3. L'ASEP à deux particules

deux par deux comme dans la figure 7. L'imparité de  $a + b$  sert uniquement pour l'appariement représenté en haut de la figure. Le cas

$$m = \bullet \cdots \bullet \circ \bullet \cdots \bullet$$

est similaire □

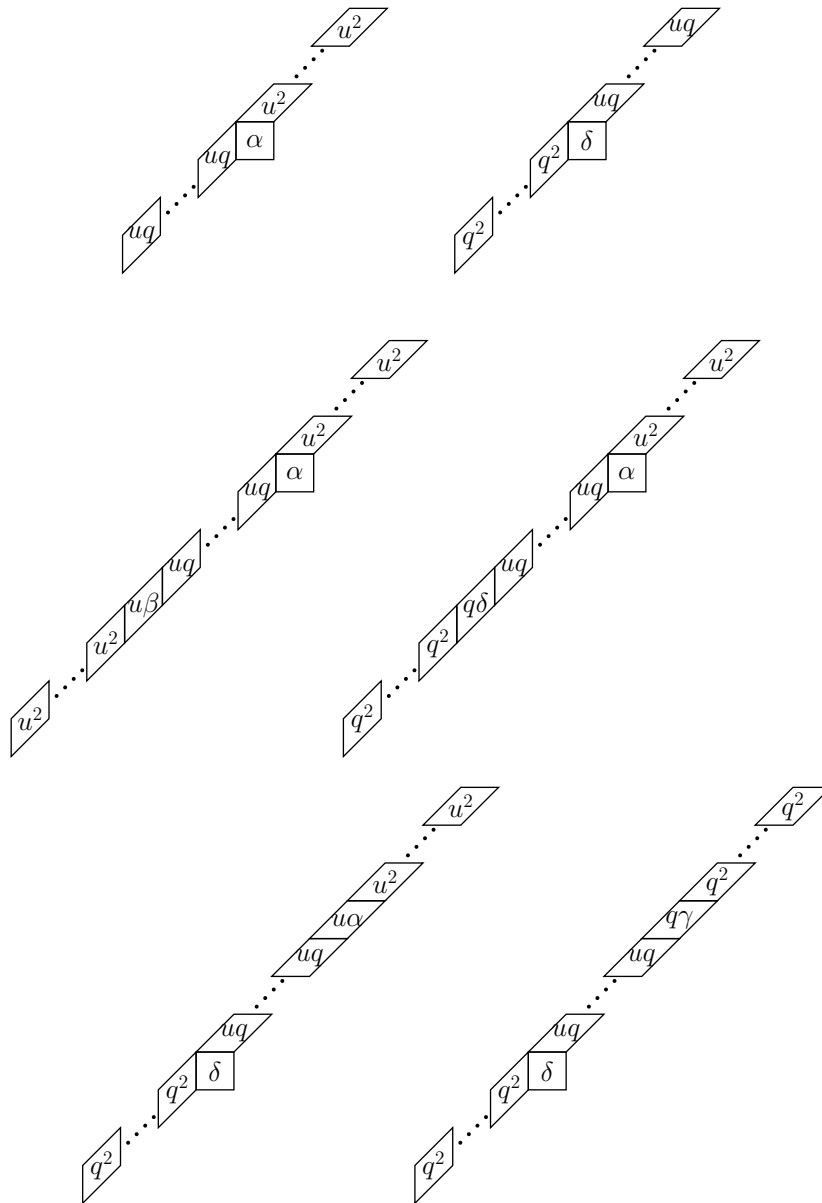


FIGURE 7. Preuve de  $Z_m(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha; -1, 1) = 0$  pour  $r$  pair et  $m \in \{\bullet, \circ, \bullet\}_r^{1+r+r}$ .

CONJECTURE 3.2.6. Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $m$  un mot appartenant à  $\{\bullet, \circ, \bullet\}_r^{n+r}$ . Si  $r$  est pair et  $n$  supérieur ou égal à 3, alors la quantité  $Z_m(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha; -1, 1)$  est nulle.

Pour prouver la conjecture 3.2.6 il suffit de montrer qu'elle est vérifiée pour  $n = 3$ . Expérimentalement, c'est vrai jusqu'à  $r = 6$ .

### 3. Algorithme d'insertion sur les tableaux escaliers rhombiques

Nous introduisons dans cette partie l'analogie pour les tableaux escaliers rhombiques de l'algorithme d'insertion sur les tableaux escaliers de la section 2.2. Il donne notamment une preuve du théorème 3.2.4.

On garde les mêmes définitions pour les opérations  $L_{i_1} \rightarrow L_{i_2}$  et  $L_{i_1}^* \rightarrow L_{i_2}$  en remplaçant  $c_{i,j}$  par  $t_{i,j}$ . Par contre, on modifie l'opération  $TE + L_{n+1}(x)$ . Si  $n = r = 0$ ,  $TER + L_1(x)$  est un carré auquel on affecte le symbole  $x$ . Si  $n = 0$  et  $r > 0$  alors  $TER$  est un chemin de  $r$  pas diagonaux. Soit  $i \in \llbracket 1, r+1 \rrbracket$ , alors  $TER + L_i(x)$  est composé d'une ligne de  $i-1$  rhombes verticaux avec un carré contenant  $x$  à l'extrémité droite puis d'une colonne de  $r+1-i$  rhombes horizontaux, qui démarre au niveau du côté nord du carré. Supposons maintenant  $n, r > 0$ , soit  $TER$  un tableau escalier rhombique de taille  $(n+r, r)$  et  $i_n$  le numéro de son coin le plus au nord-est. Soit  $i$  un entier appartenant à  $\llbracket i_n+1, n+r+1 \rrbracket$ . L'opération  $TER + L_i(x)$  consiste tout d'abord à insérer un carré (resp. rhombe vertical) en haut de chacune des  $n$  colonnes (resp. des  $r$  diagonales) de carrés (resp. rhombes verticaux). Puis, à partir du bord est du coin numéroté  $i_n$ , on insère une ligne de  $i - i_n - 1$  rhombes verticaux que l'on termine par un carré contenant le symbole  $x$ . Enfin, à partir du bord nord de ce nouveau carré on insère une colonne de  $n+r+1-i$  rhombes horizontaux. Ces trois opérations sont illustrées dans la figure 8.

DÉFINITION 3.3.1 ( Algorithme d'insertion ). Soit  $n$  un entier naturel,  $TER$  un tableau escalier rhombique de taille  $(n+r, r)$ ,  $i'_1 < \dots < i'_r$  les numéros des pas diagonaux de son bord sud-est,  $i_1 < \dots < i_n$  les numéros de ses coins et  $i$  un entier appartenant à l'ensemble  $\llbracket i_n+1, n+r+1 \rrbracket$ .

- Premier cas. On insère une ligne avec  $\beta$  ou  $\delta$  en position  $i$  :

$$TER + L_i(y) \text{ avec } y \in \{\beta, \delta\}.$$

On note  $insertion(TER, (y, i))$  le tableau obtenu.

- Deuxième cas. On commence par insérer une ligne avec  $\beta$  ou  $\delta$  en position  $i$  :

$$TER + L_i(x) \text{ avec } y \in \{\beta, \delta\}.$$

Puis on choisit  $j \in \llbracket i+1, n+r+1 \rrbracket$  et on affecte à la tuile  $t_{i,j}$  le symbole  $x \in \{\alpha, \gamma\}$ . On note  $insertion(TER, (x, y, i, j))$  le tableau obtenu.

### 3. L'ASEP à deux particules

---

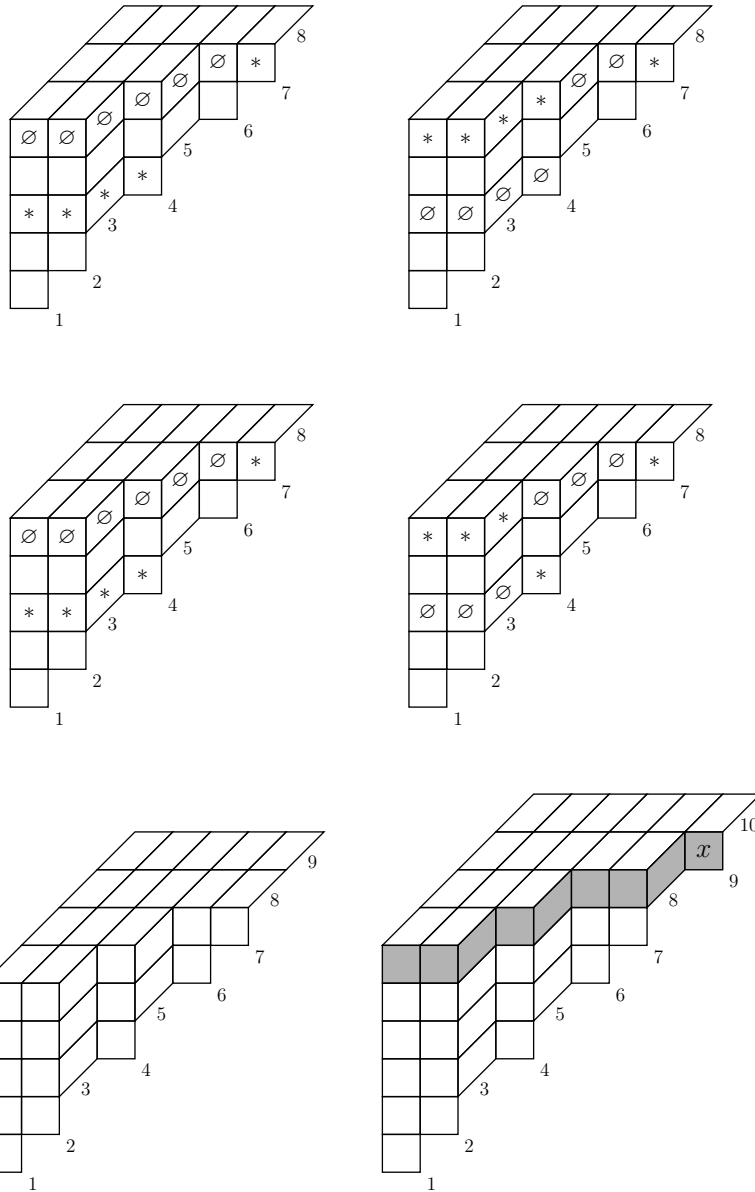


FIGURE 8. De haut en bas les opérations  $L_4 \rightarrow L_7$ ,  $L_4^* \rightarrow L_7$  et  $TER + L_9(x)$ .

- Troisième cas. On commence par insérer une ligne avec  $\alpha$  ou  $\gamma$  en position  $i$  :

$$TER + L_i(x) \text{ avec } x \in \{\alpha, \gamma\}.$$

Puis on décale vers le haut le contenu des lignes de type  $\alpha/\gamma$ . Soit  $i'_1 < \dots < i'_k = i$  les indices des lignes de type  $\alpha/\gamma$  de  $TER + L_i(x)$ , alors

$$L_{i'_{k-1}}^* \rightarrow L_{i'_k}, \dots, L_{i'_1}^* \rightarrow L_{i'_2}.$$

### 3. Algorithme d'insertion sur les tableaux escaliers rhombiques

---

On note  $insertion(TER, (x, i))$  le tableau obtenu.

- Quatrième cas. On commence par insérer une ligne avec  $\alpha$  ou  $\gamma$  en position  $i$  :

$$TER + L_i(x) \text{ avec } x \in \{\alpha, \gamma\}.$$

Puis on choisit  $j$  dans  $\{i_1, \dots, i_n\}$  et on décale vers le haut le contenu des lignes de type  $\alpha/\gamma$  de numéro strictement supérieur à  $j$ . Soit  $j < j_l < \dots < j_k = i$  les indices des lignes de type  $\alpha/\gamma$  de  $TER + L_i(x)$  plus hautes que  $L_j$ , alors

$$L_{j_{k-1}}^* \rightarrow L_{j_k}, \dots, L_{j_l}^* \rightarrow L_{j_{l+1}}.$$

Enfin, on déplace entièrement  $L_j$  dans  $L_{j_l}$  et on affecte  $y \in \{\beta, \gamma\}$  à la tuile  $t_j$  :

$$L_j \rightarrow L_{j_l} \text{ et } t_j = y$$

On note  $insertion(TER, (x, y, i, j))$  le tableau obtenu.

- Cinquième cas. On commence par insérer une ligne avec  $\alpha$  ou  $\gamma$  en position  $i$  :

$$TER + L_i(x) \text{ avec } x \in \{\alpha, \gamma\}.$$

Puis on choisit  $j'$  dans  $\{i'_1, \dots, i'_r\}$  et on décale vers le haut le contenu des lignes de type  $\alpha/\gamma$  de numéro strictement supérieur à  $j'$ . Soit  $j' < j_l < \dots < j_k = i$  les indices des lignes de type  $\alpha/\gamma$  de  $TER + L_i(x)$  dont le l'indice est plus grand que  $j'$ , alors

$$L_{j_{k-1}}^* \rightarrow L_{j_k}, \dots, L_{j_l}^* \rightarrow L_{j_{l+1}}.$$

Enfin, on affecte  $y \in \{\beta, \gamma\}$  à la tuile  $t_{j_l, j'}$  :

$$t_{j_l, j'} = y.$$

On note  $insertion(TER, (x, y, i, j))$  le tableau obtenu.

Les différentes insertions sont représentées dans la figure 9. Si  $r = 0$ , les deuxième et cinquième cas de l'algorithme d'insertion disparaissent et on retombe sur l'algorithme d'insertion sur les tableaux escaliers.

Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $I = \{i_1, \dots, i_n\}$  un sous-ensemble à  $n$  éléments de  $\llbracket 1, n+r \rrbracket$ . Soit  $k \leq n$  un entier naturel, on note  $TER_{(k+r, r), I}$  le sous-ensemble de  $TER_{(k+r, r)}$  dont l'ensemble des numéros des coins des tableaux escaliers rhombiques est  $\{i_1, \dots, i_k\}$ . En particulier,  $TER_{(r, r), I} = TER_{(r, r)}$

**THÉORÈME 3.3.2.** *Soit  $0 \leq k < n$  deux entiers naturels non nuls et  $I = \{i_1, \dots, i_n\}$  un sous-ensemble à  $n$  éléments de  $\llbracket 1, n+r \rrbracket$ . L'application insertion de la définition 3.3.1 est une bijection entre :*

- l'ensemble des couples  $(TER, e)$  où  $TER \in TER_{(k+r, r), I}$  et  $e$  est un élément de

$$\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \times \{i_{k+1}\}$$

ou de

$$\{(x, y, i_{k+1}, j) \mid x \in \{\alpha, \gamma\}, y \in \{\beta, \delta\} \text{ et } j \in \llbracket 1, k+r+1 \rrbracket \setminus \{i_{k+1}\}\}$$

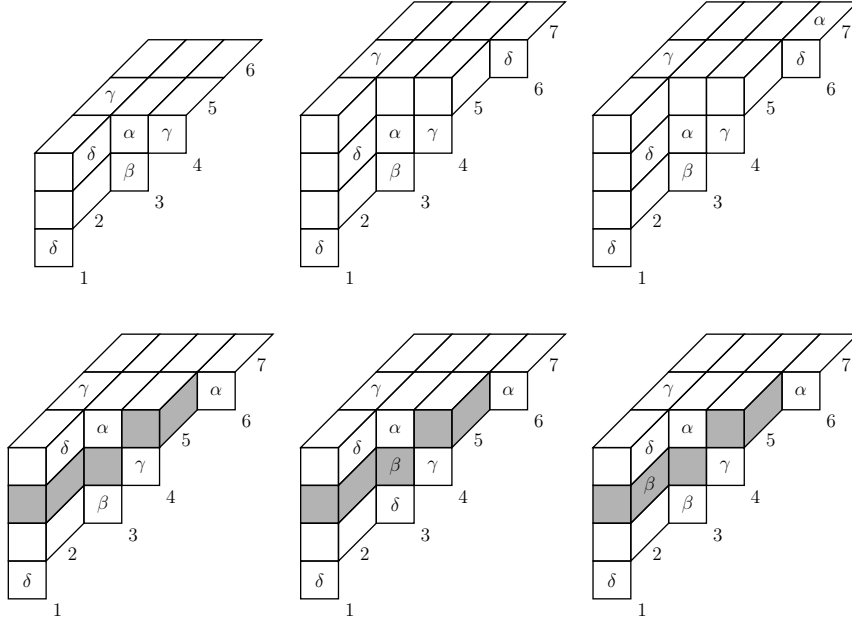


FIGURE 9. De gauche à droite haut puis de gauche à droite bas :  
 un tableau escalier rhombique  $TER$ ,  $insertion(TER, (\delta, 6))$ ,  
 $insertion(TER, (\alpha, \delta, 6, 7))$ ,  $insertion(TER, (\alpha, 6))$ ,  
 $insertion(TER, (\alpha, \beta, 6, 3))$ ,  $insertion(TER, (\alpha, \beta, 6, 2))$ .

et

- l'ensemble  $TER_{(k+1+r, r), I}$ .

DÉMONSTRATION. Les détails de la preuve sont les mêmes que pour l'algorithme d'insertion sur les tableaux escaliers. Ainsi, nous nous contentons de caractériser les tableaux escaliers rhombiques obtenus suivant le type d'insertion effectuée.

Tout d'abord, un tableau obtenu par l'algorithme d'insertion est bien un tableau escalier rhombique de la bonne taille. Ensuite, si on se donne  $y$  égal à  $\beta$  ou  $\delta$  il est clair que la fonction  $insertion$  donne une bijection entre :

- les couples  $(TER, (y, i_{k+1}))$  où  $TER \in TER_{(k+r, r), I}$  et
- les tableaux escaliers rhombiques de  $TER_{(k+1+r, r), I}$  tels que la tuile  $t_{i_{k+1}}$  contient  $y$  et les tuiles  $t_{i_{k+1}, j}$  sont vides pour  $i_{k+1} < j \leq n+r+1$ .

Si de plus on se donne  $x$  égal à  $\alpha$  ou  $\gamma$  et un entier  $j$  vérifiant  $i_{k+1} < j \leq n+r+1$  c'est également une bijection entre :

- les couples  $(TER, (x, y, i_{k+1}, j))$  où  $TER \in TER_{(k+r, r), I}$  et
- les tableaux escaliers rhombiques de  $TER_{(k+1+r, r), I}$  tels que la tuile  $t_{i_{k+1}}$  contient  $y$  et la tuile  $t_{i_{k+1}, j}$  contient  $x$ .

Il nous reste donc à traiter le cas des tableaux escaliers rhombiques  $TER'$  dont la tuile  $t_{i_{k+1}}$  contient  $\alpha$  ou  $\gamma$ . Soit  $i'_1 < \dots < i'_{k'} = i_{k+1}$  les numéros des lignes



de type  $\alpha/\gamma$ . On appelle *tuiles spéciales* les tuiles

$$\{t_{i_p,j} \mid p \in \llbracket 2, k' \rrbracket, i_{p-1} \leq j < i_p\} \cup \{t_{i_1,j} \mid j \in \llbracket 1, i_1 - 1 \rrbracket\}.$$

Elles sont en grises dans la figure 9. Soit  $x \in \{\alpha, \gamma\}$ , l'application insertion est une bijection entre :

- les couples  $(TER, (x, i_{k+1}))$  où  $TER \in \mathcal{TER}_{(k+r,r),I}$  et
- les tableaux escaliers rhombiques de  $\mathcal{TER}_{(k+1+r,r),I}$  tels que la tuile  $t_{i_{k+1}}$  contient  $x$  et dont les tuiles spéciales sont toutes vides.

Soit  $TER'$  un tableau rhombique dont les tuiles spéciales ne sont pas toutes vides. On note  $tsp(TER')$  la tuile spéciale non vide la plus au nord-est. L'algorithme d'insertion est une bijection entre :

- les couples  $(TER, (x, y, i_{k+1}, j))$  où  $TER \in \mathcal{TER}_{(k+r,r),I}$  et  $(x, y, j)$  est un élément de

$$\{\alpha, \gamma\} \times \{\beta, \delta\} \times \llbracket 1, i_{k+1} - 1 \rrbracket$$

et

- les tableaux escaliers rhombiques  $TER'$  de  $\mathcal{TER}_{(k+1+r,r),I}$  tels que  $t_{i_{k+1}}$  contient  $x$ , dont les tuiles spéciales ne sont pas toutes vides, tels que  $tsp(TER')$  est sur la colonne (resp. diagonale) numérotée  $j$  et tels que  $t_j$  (resp.  $tsp(TER')$ ) contient  $y$ .  $\square$

On note  $Z_{(n+r,r),I}$  la série génératrice

$$Z_{(n+r,r),I}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; q, u) = \sum_{TER \in \mathcal{TER}_{(n+r,r),I}} p(TER).$$

COROLLAIRE 3.3.3. *Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $I$  un sous-ensemble de taille  $n$  de l'ensemble  $\llbracket 1, n+r \rrbracket$ . Alors on a*

$$Z_{(n+r,r),I}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1, 1) = \prod_{i=0}^{n-1} (\alpha + \beta + \gamma + \delta + (i+r)(\alpha + \delta)(\beta + \gamma))$$

et donc

$$Z_{(n+r,r)}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1, 1) = \binom{n+r}{r} \prod_{i=0}^{n-1} (\alpha + \beta + \gamma + \delta + (i+r)(\alpha + \delta)(\beta + \gamma)).$$

Corteel, Mandelshtam et Williams avaient déjà montré la forme factorisée de  $Z_{(n+r,r)}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1, 1)$  en se basant sur la forme factorisée de la série génératrice  $Z_{(n+r,r)}(\alpha, \beta, 0, 0; 1, 1)$  trouvée par Mandelshtam et Viennot dans [MV15] dans le cadre des tableaux alternatifs rhombiques. Mandelshtam et Viennot démontrent leur résultat par une récurrence suivant la nature du pas le plus au sud-ouest. Ils proposent une deuxième preuve, cette fois-ci bijective, à travers les assemblées de permutations dans [MV16]. Ainsi, la preuve par l'algorithme d'insertion est la première preuve bijective de ce résultat utilisant uniquement les tableaux eux-mêmes.

### 3. L'ASEP à deux particules

---

LEMME 3.3.4. Soit  $TER$  un tableau escalier rhombique de taille  $(k+r, r)$ ,  $p = p(TER)$  et  $m = \underbrace{\bullet \cdots \bullet}_{a} m'$  le type de  $TER$ . Dans ce lemme,  $m''$  désigne, pour chacun des cas suivant, le type du tableau obtenu après insertion dans  $TER$ . Alors on a

- $p(\text{insertion}(TER, \alpha)) = q^{|\circ(m)|+|\bullet(m)|} \alpha p$  et  $m'' = \bullet \cdots \bullet \bullet^{i_{k+1}} m'$ ,
- $p(\text{insertion}(TER, \gamma)) = q^{|\circ(m)|+|\bullet(m)|+2a} \gamma p$  et  $m'' = \bullet \cdots \bullet \circ^{i_{k+1}} m'$ ,
- $p(\text{insertion}(TER, \beta)) = q^a \beta p$  et  $m'' = \bullet \cdots \bullet \circ^{i_{k+1}} m'$ ,
- $p(\text{insertion}(TER, \delta)) = q^{\|m\|+a} \delta p$  et  $m'' = \bullet \cdots \bullet \bullet^{i_{k+1}} m'$ .

Soit  $j \in \llbracket 1, i_{k+1} - 1 \rrbracket$  tel que  $j$  est le numéro d'un coin. Alors  $m' = U \overset{j}{\circ} V$  et on a

- $p(\text{insertion}(TER, (\alpha, \beta, i_{k+1}, j))) = q^{|\circ(U)|+|\bullet(U)|} \alpha \beta p$   
et  $m'' = \bullet \cdots \bullet \bullet^{i_{k+1}} U \overset{j}{\circ} V$ ,
- $p(\text{insertion}(TER, (\alpha, \delta, i_{k+1}, j))) = q^{|\circ(U)|+|\bullet(U)|+\|V\|} \alpha \delta p$   
et  $m'' = \bullet \cdots \bullet \bullet^{i_{k+1}} U \bullet^j V$ ,
- $p(\text{insertion}(TER, (\gamma, \beta, i_{k+1}, j))) = q^{|\circ(U)|+|\bullet(U)|+2a} \gamma \beta p$   
et  $m'' = \bullet \cdots \bullet \circ^{i_{k+1}} U \overset{j}{\circ} V$ ,
- $p(\text{insertion}(TER, (\gamma, \delta, i_{k+1}, j))) = q^{|\circ(U)|+|\bullet(U)|+\|V\|+2a} \gamma \delta p$   
et  $m'' = \bullet \cdots \bullet \circ^{i_{k+1}} U \bullet^j V$ .

Soit  $j \in \llbracket 1, i_{k+1} - 1 \rrbracket$  tel que  $j$  est le numéro d'un pas digonal. Alors  $m' = U \overset{j}{\bullet} V$  et on a

- $p(\text{insertion}(TER, (\alpha, \beta, i_{k+1}, j))) = q^{|\circ(U)|+|\bullet(U)|} \alpha \beta p$   
et  $m'' = \bullet \cdots \bullet \bullet^{i_{k+1}} m'$ ,
- $p(\text{insertion}(TER, (\alpha, \delta, i_{k+1}, j))) = q^{|\circ(U)|+|\bullet(U)|+\|V\|+1} \alpha \delta p$   
et  $m'' = \bullet \cdots \bullet \bullet^{i_{k+1}} m'$ ,
- $p(\text{insertion}(TER, (\gamma, \beta, i_{k+1}, j))) = q^{|\circ(U)|+|\bullet(U)|+2a} \gamma \beta p$   
et  $m'' = \bullet \cdots \bullet \circ^{i_{k+1}} m'$ ,
- $p(\text{insertion}(TER, (\gamma, \delta, i_{k+1}, j))) = q^{|\circ(U)|+|\bullet(U)|+\|V\|+2a+1} \gamma \delta p$   
et  $m'' = \bullet \cdots \bullet \circ^{i_{k+1}} m'$ .

Soit  $j \in \llbracket i_{k+1} + 1, k + 1 + r \rrbracket$ . Notons  $b = j - i_{k+1}$ , alors on a

- $p(\text{insertion}(TER, (\alpha, \beta, i_{k+1}, j))) = q^{b-1} \alpha \beta p$   
et  $m'' = \bullet \cdots \bullet \circ^{i_{k+1}} m'$ ,
- $p(\text{insertion}(TER, (\alpha, \delta, i_{k+1}, j))) = q^{\|m\|+b-1} \alpha \delta p$   
et  $m'' = \bullet \cdots \bullet \bullet^{i_{k+1}} m'$ ,
- $p(\text{insertion}(TER, (\gamma, \beta, i_{k+1}, j))) = q^{2a-b} \gamma \beta p$   
et  $m'' = \bullet \cdots \bullet \circ^{i_{k+1}} m'$ ,

$$\begin{aligned}
 & - p(\text{insertion}(TER, (\gamma, \delta, i_{k+1}, j))) = q^{\|m'\|+2a-b} \gamma \delta p \\
 & \text{et } m'' = \bullet \cdots \bullet \cdots \bullet \overset{i_{k+1}}{\bullet} m'.
 \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Même après remplissage par  $q$  et  $u$ , les symboles initiaux sont toujours présents après une insertion, mais certains peuvent avoir changé de ligne. Ainsi, après justification, nous étudions l'ensemble des tuiles contenant les nouveaux symboles suite à une insertion pour prouver les relations du lemme 3.3.4.

Soit  $TER$  un tableau escalier rhombique de taille  $(k+r, r)$ . Notons  $m = m_{k+r} \cdots m_1$  son type. Au cours de la preuve,  $m'$  désigne le type du tableau escalier rhombique  $TER'$  obtenu par l'insertion que nous sommes en train d'étudier. Nous considérons avoir affecté aux tuiles leurs poids en  $q$  et  $u$ . Premièrement, les lettres grecques des rhombes horizontaux des colonnes  $C_1, \dots, C_k$  ne sont pas modifiées par une insertion. De plus, la lettre grecque la plus haute de chacune des  $k$  premières colonnes de carrés reste la même après une insertion, même si elle a pu changer de ligne. Ainsi, les rhombes horizontaux des colonnes  $C_1, \dots, C_k$  conserve le même poids suite à une insertion. Deuxièmement, les poids des tuiles d'une ligne de type  $\beta/\delta$  restent également les mêmes. Enfin, les nouvelles tuiles  $t_{l, i_{k+1}}$ , pour  $l \in \llbracket i_{k+1} + 1, k + r + 1 \rrbracket$ , contiennent toujours de nouveaux symboles. Dans la suite de la preuve nous ne ferons plus mention de ces nouveaux symboles, mais ils doivent bien entendu être pris en compte pour calculer l'évolution du poids suite à une insertion.

Soit  $j \in \llbracket i_{k+1} + 1, k + 1 + r \rrbracket$ , au cours des insertions suivantes :

- $\text{insertion}(TER, \beta)$ ,
- $\text{insertion}(TER, \delta)$ ,
- $\text{insertion}(TER, (\alpha, \beta, i_{k+1}, j))$ ,
- $\text{insertion}(TER, (\alpha, \delta, i_{k+1}, j))$ ,
- $\text{insertion}(TER, (\gamma, \beta, i_{k+1}, j))$ ,
- $\text{insertion}(TER, (\gamma, \delta, i_{k+1}, j))$ ,

les symboles présents dans  $TER$  ne sont ni modifiés ni déplacés. Il suffit donc d'étudier les tuiles de  $TER'$  composant la nouvelle ligne  $L_{i_{k+1}}$ . Il suffit d'appliquer les règles de remplissage par  $q$  et  $u$  à cette ligne pour trouver le résultat.

Concernant les insertions :

- $\text{insertion}(TER, \alpha)$ ,
- $\text{insertion}(TER, \gamma)$ ,

pour les mêmes raisons que dans le lemme 2.2.11, il suffit de regarder les tuiles spéciales car on ne modifie pas la disposition relative des lettres grecques des lignes de type  $\alpha/\gamma$ . Or, le poids d'une tuile spéciale dont la colonne ou la diagonale est numéroté  $j$  est déterminé par la couleur de la particule  $m'_j = m_j$ . Il vaut  $q$  si la particule est grise ou blanche et 1 sinon.

Enfin, soit  $j \in \llbracket 1, i_{k+1} + 1 \rrbracket$  le numéro d'un coin (resp. pas diagonal, notons  $i_u$  l'indice de la première ligne de type  $\alpha/\gamma$  telle que  $j < i_u$ ). Au cours des insertions suivantes :

- $\text{insertion}(TER, (\alpha, \beta, i_{k+1}, j))$ ,

### 3. L'ASEP à deux particules

---

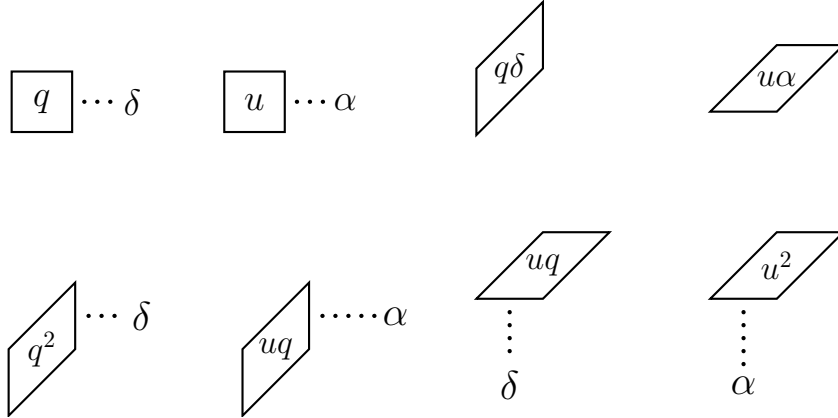
- $\text{insertion}(TER, (\alpha, \delta, i_{k+1}, j))$ ,
- $\text{insertion}(TER, (\gamma, \beta, i_{k+1}, j))$ ,
- $\text{insertion}(TER, (\gamma, \delta, i_{k+1}, j))$ ,

pour les mêmes raisons que dans le lemme 2.2.11 il suffit de regarder les tuiles spéciales qui se trouve dans les colonnes à droite de la colonne  $C_j$  ainsi que les tuiles  $t_{j,l}$  (resp.  $t_{i_u,l}$ ) pour  $l \in \llbracket 1, j \rrbracket$ .

Concernant les mots  $m'$ , l'algorithme d'insertion ne modifie que très peu le bord sud-est. La preuve est donc laissée au lecteur.  $\square$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.2.4. La preuve est une récurrence sur  $n$ . Si  $n = 0$ ,  $\{\bullet, \circ\}_r^{n+r}$  est composé uniquement du mot  $m = \bullet \cdots \bullet$  de taille  $r$  et son poids est égal à 1. De même, il existe un unique tableau escalier rhombique de taille  $(r, r)$ , il est bien de type  $m$  et son poids est égal à 1. Comme dans les cas précédents, la suite de la preuve réside sur la compatibilité entre le lemme 3.3.4 et la table 1.  $\square$

Dans le cas où le type d'un tableau escalier rhombique est composé uniquement de  $\bullet$  (resp.  $\circ$ ) ou  $\bullet$ , le lemme 3.3.4 ne se simplifie pas aussi bien que dans le cas des tableaux escaliers. En effet, appelons  $\alpha/\delta$ -tableaux escaliers rhombiques les tableaux n'ayant que  $\alpha/\delta$ . La description du poids en  $q$  de tels tableaux est plus simple que dans le cas général.



Toutefois, on ne peut pas donner de règle générale comme c'est le cas dans le lemme 2.2.13. Il en est de même avec les  $\beta/\gamma$ -tableaux escaliers rhombiques qui sont les tableaux n'ayant que  $\beta/\gamma$ . On obtient tout de même de jolies formules factorisées.

PROPOSITION 3.3.5. *La série génératrice des  $\alpha/\delta$ -tableaux escaliers rhombiques de taille  $(n+r, r)$  est*

$$Z_{(n+r,r)}(\alpha, 0, 0, \delta; q, 1) = \binom{n+r}{r}_q \prod_{i=r}^{n-1+r} (\alpha + \alpha\delta[i]_q + q^i\delta).$$

### 3. Algorithme d'insertion sur les tableaux escaliers rhombiques

La série génératrice des  $\beta/\gamma$ -tableaux escaliers rhombiques de taille  $(n+r, r)$  est

$$Z_{(n+r,r)}(0, \beta, \gamma, 0; q, 1) = \binom{n+r}{r}_q \prod_{i=r}^{n-1+r} (\beta + \beta\gamma[i]_q + q^i\gamma).$$

DÉMONSTRATION. Diminuons de 1 le poids des rhombes verticaux dans le cadre des  $\alpha/\delta$ -tableaux escaliers rhombiques. Supposons désormais qu'un rhombe vertical à gauche de  $\delta$  (resp.  $\alpha$ ) a pour poids  $q$  (resp. 1) et qu'un rhombe vertical contenant  $\delta$  a un poids en  $q$  égal à 1. Soit  $I = \{i_1 < \dots < i_n\}$  un sous ensemble à  $n$  éléments de  $\llbracket 1, n+r \rrbracket$ . Dans ces conditions, le lemme 3.3.4 se simplifie. Soit  $0 \leq k < n$ ,  $TER$  un  $\alpha/\delta$ -tableau escalier rhombique de taille  $(k+r, r)$ ,  $p = p(TER)$  et  $m = \underbrace{\bullet \dots \bullet}_{\alpha} m'$  le type de  $TER$ . Soit  $j \in \llbracket 1, i_{k+1} - 1 \rrbracket$

et  $j' \in \llbracket i_{k+1} + 1, k + 1 + r \rrbracket$  alors on a

- $p(\text{insertion}(TER, \alpha)) = \alpha p$ ,
- $p(\text{insertion}(TER, \delta)) = q^{k+r} \delta p$ .
- $p(\text{insertion}(TER, (\alpha, \delta, i_{k+1}, j))) = q^{j-1} \alpha \delta p$ .
- $p(\text{insertion}(TER, (\alpha, \delta, i_{k+1}, j'))) = q^{j'-2} \alpha \delta p$ .

Ainsi,

$$Z_{(k+r+1,r),I}(\alpha, 0, 0, \delta; q, 1) = (\alpha + \alpha\delta[k+r]_q + q^{n+r}\delta) \cdot Z_{(k+r,r),I}(\alpha, 0, 0, \delta; q, 1)$$

Et donc

$$Z_{(n+r,r),I}(\alpha, 0, 0, \delta; q, 1) = \prod_{i=r}^{n-1+r} (\alpha + \alpha\delta[i]_q + q^i\delta).$$

Il nous suffit maintenant de compter le nombre de rhombes verticaux en fonction de  $I$ . Soit  $TER$  un tableau escalier rhombique de taille  $(k+r, r)$ . Si on retire les tuiles carrées ainsi que les tuiles rhombiques horizontales, il ne reste que des colonnes de rhombes horizontaux de tailles faiblement décroissantes. Si on colle ces colonnes en alignant leurs plus hautes tuiles, on obtient un diagramme de Ferrers. Par cette construction, on obtient exactement une fois tous les diagrammes de Ferrers inclus dans le rectangle à  $r$  colonnes et  $k$  lignes. Or, la série génératrice des diagrammes de Ferrers inclus dans le rectangle à  $r$  colonnes et  $k$  lignes, où  $q$  compte le nombre de carrés, est

$$\binom{k+r}{r}_q.$$

Ainsi,

$$Z_{(n+r,r)}(\alpha, 0, 0, \delta; q, 1) = \binom{k+r}{r}_q \prod_{i=r}^{n-1+r} (\alpha + \alpha\delta[i]_q + q^i\delta).$$

De même, on trouve que

$$Z_{(n+r,r)}(0, \beta, \gamma, 0; q, 1) = \binom{k+r}{r}_q \prod_{i=r}^{n-1+r} (\beta + \beta\gamma[i]_q + q^i\gamma). \quad \square$$

## 4. Bijection entre des tableaux escaliers rhombiques et les assemblées de permutations

Les tableaux alternatifs rhombiques [MV15] correspondent aux tableaux escaliers rhombiques uniquement composés d' $\alpha$  et  $\beta$ . D'après le corollaire 3.3.3, ils sont énumérés par les *nombres de Lah*, en effet

$$Z_{(n+r,n)}(\alpha, \beta, 0, 0; 1, 1) = \binom{n+r}{r} \frac{(n+r+1)!}{(r+1)!}.$$

Ces nombres énumèrent également la généralisation suivante des permutations.

**DÉFINITION 3.4.1.** Soit  $n$  et  $r$  deux entiers naturels non nuls. Une *assemblée de permutations* de taille  $(n+r, r)$  est une permutation  $\sigma$  de taille  $n+r$  dont une sous-suite décroissante de taille  $r$   $\sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_r}$ , avec  $i_r = n+r$ , est distinguée.

Par exemple, la permutation  $6 \ 7 \ 1 \ 4 \ 2 \ 12 \ 14 \ 8 \ \underline{10} \ 13 \ \underline{9} \ 11 \ 3 \ \underline{5}$ , où la sous-suite décroissante  $10 \ 9 \ 5$  est distinguée, est une assemblée de permutations de taille  $(11+3, 3)$ . Le terme assemblée de permutations provient d'une définition alternative de ces objets. En effet, une assemblée de permutations de taille  $(n+r, r)$  peut être vue comme une partition de l'ensemble  $\llbracket 1, n \rrbracket$  en  $r$  sous-ensembles dont on ordonne les éléments de chaque sous-ensemble. Mandelshtam et Viennot [MV16] proposent une bijection entre les assemblées de permutations de taille  $(n+r+1, r+1)$  et les tableaux alternatifs rhombiques de taille  $(n+r, r)$ . Elle est inspirée de la bijection *fusion-échange* de Viennot [Vie08] entre les permutations et les tableaux alternatifs. À travers leur bijection, ils donnent une interprétation des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sur les assemblées de permutations. Soit  $\sigma$  une assemblée de permutations et  $\sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_r}$  sa sous-suite décroissante distinguée. Notons  $\sigma\{> j\}$  (resp.  $\sigma\{< j\}$ ) la sous-suite de  $\sigma$  composée des valeurs strictement plus grandes (resp. petites) que  $j$ . Les statistiques correspondantes à  $\alpha$  et  $\beta$  sont respectivement  $\text{Mdg}(\sigma\{> \sigma_{i_1}\})$  et  $\text{Mgd}(\sigma\{< \sigma_{i_r}\})$ , où on rappelle que  $\text{Mdg}$  (resp.  $\text{Mgd}$ ) est le nombre de maxima de gauche à droite (resp. de droite à gauche). Leur bijection permet également d'encoder la nature, verticale ou horizontale, des pas du bord sud-est des tableaux alternatifs rhombiques en fonction des avances et des reculs des assemblées de permutations.

Si on considère plutôt la spécialisation  $\beta = \gamma = 0$ , on obtient les mêmes tableaux mais avec un poids  $q$  différents. Nous avons montré dans la proposition 3.3.5 que le polynôme générateur de ces tableaux est

$$Z_{(n+r,r)}(\alpha, 0, 0, \delta; q, 1) = \binom{n+r}{r}_q \prod_{i=r}^{n-1+r} (\alpha + \alpha\delta[i]_q + q^i\delta).$$

Pour donner une interprétation de  $Z_{(n+r,r)}(\alpha, 0, 0, \delta; q, 1)$  en termes d'assemblées de permutations nous construisons la bijection suivante. Un  $\alpha/\delta$ -tableau escalier rhombique *TER* de taille  $(n+r, r)$  est entièrement déterminé par un

4. Bijection entre des tableaux escaliers rhombiques et les assemblées de permutations

sous-ensemble  $J$  de  $\llbracket 1, n+r \rrbracket$  de taille  $r$ , qui correspond aux indices des pas diagonaux de  $TER$ , et son historique d'insertion que l'on peut représenter par un  $n$ -uplet  $H = (a_1, \dots, a_n)$ , où  $0 \leq a_i \leq r+i$ . Pour définir  $H$ , nous changeons la notation des insertions. Pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  et  $TER'$  un  $\alpha/\delta$ -tableau escalier rhombique de taille  $(k+r, r)$ , nous posons

$$\begin{aligned} - \text{insertion}'(TER', (\alpha, \delta, i_{k+1}, 0)) &= \text{insertion}(TER', \alpha), \\ - \text{insertion}'(TER', (\alpha, \delta, i_{k+1}, k+r+1)) &= \text{insertion}(TER', \delta), \end{aligned}$$

pour  $j \in \llbracket 1, i_{k+1}-1 \rrbracket$

$$- \text{insertion}'(TER', (\alpha, \delta, i_{k+1}, j)) = \text{insertion}(TER', (\alpha, \delta, i_{k+1}, j)),$$

et pour  $j' \in \llbracket i_{k+1}+1, k+1+r \rrbracket$

$$- \text{insertion}'(TER', (\alpha, \delta, i_{k+1}, j'-1)) = \text{insertion}(TER', (\alpha, \delta, i_{k+1}, j')).$$

Ainsi, en reprenant les égalités de la démonstration de la proposition 3.3.5, pour  $j \in \llbracket 1, k+r \rrbracket$  nous avons

$$\begin{aligned} - p(\text{insertion}'(TER', (\alpha, \delta, i_{k+1}, 0))) &= \alpha p, \\ - p(\text{insertion}'(TER', (\alpha, \delta, i_{k+1}, j))) &= q^{j-1} \alpha \delta p, \\ - p(\text{insertion}'(TER', (\alpha, \delta, i_{k+1}, k+1+r))) &= q^{k+r} \delta p. \end{aligned}$$

Le  $n$ -uplet  $H$  est la séquence des  $n$  entiers décrivant les insertions à effectuer pour obtenir  $TER$ .

Nous montrons que le poids de  $TER$  se calcule facilement à partir de  $J$  et  $H$ . Pour cela, nous nous inspirons de la preuve de la proposition 3.3.5. Nous donnons un poids  $q^k$  à chaque indice  $j_e$  de  $J$ , où  $k$  est le nombre de rhombes verticaux au-dessus du pas diagonal numéroté  $j_e$ . Le poids de  $J = \{j_1 < \dots < j_r\}$  est donc égal à

$$p(J) = \prod_{e=1}^r q^{n+r-j_e-(r-l)}.$$

Concernant  $H$ , nous définissons le poids suivant

$$p(H) = \sum_{l=1}^n f(H, l), \text{ où } f(H, l) = \begin{cases} \alpha & \text{si } a_l = 0, \\ q^{a_l-1} \alpha \delta & \text{si } 0 < a_l < r+l, \\ q^{a_l-1} \delta & \text{si } a_l = r+l. \end{cases}$$

Nous avons la relation  $p(TER) = p(J)p(H)$ . Construisons maintenant l'assemblée de permutations  $\sigma = \Upsilon(TER)$  associée à  $TER$ . Posons tout d'abord,  $\sigma(j_e) = r+1 - (e-1)$  et  $\sigma(n+r+1) = 1$ . À la fin de la construction, nous distinguerons cette sous-suite décroissante. Nous insérons de droite à gauche les  $n$  éléments restants. Notons  $I = \llbracket 1, n+r \rrbracket \setminus J$ . Supposons avoir déjà effectué les insertions aux indices  $i_n, \dots, i_{n-(l-1)+1}$ , où  $I = \{i_1 < \dots < i_n\}$ . L'image  $\sigma(i_{n-(l-1)})$  se calcule à partir de  $a_l$ . À ce stade  $\sigma$  contient les  $r+1+(l-1) = r+l$  valeurs  $\llbracket 1, r+l \rrbracket$ . Nous commençons par ajouter 1 à toutes les valeurs supérieures ou égales à  $a_l+1$  puis nous posons  $\sigma(i_{n-(l-1)}) = a_l+1$ . Par exemple, si  $J = \{2, 4, 8\}$  et  $H = (3, 5, 0, 2, 8, 0)$ , alors l'assemblée obtenue est

$$1 \ 8 \ 10 \ 6 \ 4 \ 2 \ 9 \ 5 \ 7 \ 3.$$

### 3. L'ASEP à deux particules

---

Considérons le poids  $p(\sigma)$  suivant pour une assemblée de permutations  $\sigma$  :

$$(\alpha\delta)^n \alpha^{-\text{Mdg}(\sigma\{\>\sigma_{i_1}\})} \delta^{-(\text{mdg}(\sigma)-1)} q^{(\underline{2}-1)(\sigma)+2(\underline{1}-2)(\sigma)+(2-\underline{1})(\sigma)+(2-1)(\sigma)-n+\text{mdg}(\sigma)-1},$$

où  $(\pi)(\sigma)$  est le nombre de motif  $\pi$  de  $\sigma$  et où un entier souligné dans  $\pi$  signifie qu'il doit être distingué dans  $\sigma$ .

**PROPOSITION 3.4.2.** *Soit  $n$  et  $r$  deux entiers naturels avec  $n$  non nul. L'application  $\Upsilon$  est une bijection entre les  $\alpha/\delta$ -tableaux escaliers de taille  $(n+r, r)$  et les assemblées de permutations de taille  $(n+r+1, r+1)$ , telle que  $p(TER) = p(\Upsilon(\sigma))$ .*

**DÉMONSTRATION.** Le fait que  $\Upsilon$  est une bijection est clair. Pour le poids en  $\alpha$  et  $\delta$ , on a bien  $\text{Mdg}(\sigma\{\>\sigma_{i_1}\}) = |\{a_i = r+i\}|$  et  $\text{mdg}(\sigma) - 1 = |\{a_i = 0\}|$ . Concernant le poids en  $q$ , on a tout d'abord que  $p(J) = q^{(\underline{2}-1)(\sigma)+(\underline{1}-2)(\sigma)}$ , en effet, pour chaque entier distingué  $(\underline{2}-1)(\sigma) + (\underline{1}-2)(\sigma)$  compte le nombre d'entiers non distingués à sa droite, ce qui correspond bien à la somme  $\sum_{l=1}^r n+r-j_l - (r-l)$ . Enfin, suite à l'insertion de l'entier correspondant à  $a_l$ , on crée  $a_l$  motifs  $2-1, 2-\underline{1}$  ou  $\underline{1}-2$ . Or, le poids en  $q$  est  $q^{a_l-1}$ , donc pour chaque insertion il faut diminuer la puissance de  $q$  de 1 sauf pour les  $a_l = 0$ , ce qui explique le terme  $-n + (\text{mdg}(\sigma) - 1)$ .  $\square$





# ÉTUDE DES COINS DANS LES TABLEAUX CORRESPONDANT À L'ASEP

---

Ce chapitre se concentre sur l'ASEP dans le cas particulier  $\gamma = \delta = 0$ . C'est le premier cadre dans lequel les probabilités de l'état stationnaire de l'ASEP ont été interprétées comme une somme de poids de tableaux [CW07a]. Dans cette interprétation, le bord sud-est du diagramme de Ferrers sous-jacent à un tableau joue un rôle important : il encode l'état de l'ASEP auquel le tableau correspond. C'est pourquoi, dans ce chapitre nous étudions les coins et les coins internes de ces tableaux. Ils s'interprètent dans l'ASEP comme les endroits où un saut de particule est possible.

Nous débutons (section 1) en présentant les tableaux de permutation, les tableaux alternatifs et les tableaux boisés. Suite à cela, nous montrons dans la section 2 que l'énumération pondérée des coins permet de calculer l'espérance du nombre de transitions possibles depuis un état de l'ASEP. Dans la section 3, nous montrons par une bijection simple que les coins occupés dans les tableaux boisés de taille  $n$ , c'est-à-dire les coins contenant un point, sont en bijection avec les tableaux boisés de taille  $n$ . De plus, elle nous permet de calculer leur polynôme générateur en prenant en compte les paramètres  $\alpha, \beta$  et  $q$ . Dans la section 4.1, nous énumérons les coins à l'aide d'une bijection de Corteel et Nadeau [CN09] entre les tableaux de permutations et les permutations. Yan et Zhou [YZ17] donnent un analogue polynomial de notre résultat en prenant également en compte les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ . Ils utilisent pour cela une correspondance entre les tableaux alternatifs et les partitions liés [Dyk07, CWY08]. Nous proposons dans la section 4.2 un début de preuve reposant uniquement sur les tableaux. La construction que nous utilisons est similaire à celle permettant de traiter le cas des coins occupés. Toutefois, elle fonctionne uniquement pour une partie des coins. Enfin, dans la section 4.3, nous montrons que les coins dans les tableaux boisés sont en bijection avec les *run* de taille

1 dans les permutations. La preuve repose sur une décomposition d'un coin en un triplet constitué de deux tableaux boisés et d'un arbre non-ambigu (définition 5.1.1). En parallèle nous traitons également le cas du type  $B$ .

Sauf mention du contraire, dans ce chapitre le terme ASEP fait référence à l'ASEP général avec  $\gamma = \delta = 0$ .

## 1. Définitions des tableaux

Les tableaux que nous définissons dans cette section correspondent au cas  $\gamma = \delta = 0$  de l'ASEP, ils sont en bijection avec les tableaux escaliers sans  $\gamma$  ni  $\delta$ . Le poids en  $\alpha, \beta$  et  $q$  d'un tableau que nous définissons correspond au poids du  $\alpha/\beta$ -tableau escalier de taille  $n$  divisé par  $(\alpha\beta)^n$ . Cela revient à considérer l'ansatz matriciel initial de Derrida *et al.* Pour simplifier l'écriture des expressions en  $\alpha$  et  $\beta$ , on pose  $\underline{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$  et  $\underline{\beta} = \frac{1}{\beta}$ . Nous définirons uniquement le poids d'un tableau boisé, mais la section 1.4 met en correspondance les statistiques mis en jeu des trois types de tableaux. Nous introduisons également leurs types  $B$  respectifs, ils correspondent aux tableaux escaliers de type  $B_{\alpha\beta}$  sans  $\gamma$  ni  $\delta$ .

### 1.1. Tableaux de permutation

Les tableaux de permutation sont apparus dans l'étude de la combinatoire de la partie totalement positive de la Grassmannienne mené par Postnikov [Pos06]. L'introduction formelle de ces objets par Steingrímsson et Williams [SW07] a marqué le début d'une recherche intensive autour de ce thème [Bur07, CW07a, CW07b, CN09, CLW13, CW15a] pour ne citer que des papiers traitant spécifiquement des tableaux de permutation.

DÉFINITION 4.1.1 ([SW07, section 1]). Soit  $n$  un entier naturel non nul. Un *tableau de permutation* de longueur  $n$  est un diagramme de Ferrers de longueur  $n$  dont chaque cellule est remplie par un 1 ou un 0 de telle sorte que

- chaque colonne contient au moins un 1 ;
- toute cellule ayant un 1 au-dessus dans la même colonne et à sa gauche dans la même ligne, contient un 1.

La figure 1 donne un exemple d'un tableau de permutation. On note  $\mathcal{TP}_n$  l'ensemble des tableaux de permutation de longueur  $n$ . Nous introduisons maintenant différentes statistiques sur les tableaux de permutation liées à l'ASEP. Un 0 est *restreint* s'il y a un 1 au-dessus dans la même colonne, on dit de plus qu'il est *droit* si c'est le 0 restreint le plus à droite dans la ligne. Une *ligne non restreinte* est une ligne ne contenant pas de 0 restreint. Un *haut* est un 1 qui est le plus haut dans sa colonne. Un *1 superflu* est un 1 ayant un 1 au-dessus de lui dans la même colonne.

La version en type  $B$  de ces tableaux ont été introduits par Lam et Williams [LW08], ils ont également fait l'objet de plusieurs papiers [CK11, CJVW11, CJVK13, CP15, CZ17].

DÉFINITION 4.1.2 ([LW08, section 10.2.1]). Soit  $n$  un entier naturel non nul, un *tableau de permutation de type  $B$*  de longueur  $n$  est un diagramme de Ferrers décalé de longueur  $n$  dont chaque cellule est remplie par un 1 ou un 0 de telle sorte que

- chaque colonne contient au moins un 1 ;
- toute cellule ayant un 1 au-dessus dans la même colonne et à sa gauche dans la même ligne, contient un 1.
- si une cellule diagonale contient un 0, alors toutes les cellules à sa gauche dans la même ligne contiennent des 0.

Un exemple de tableau de permutation de type  $B$  est donné figure 1. On note  $\mathcal{TP}_n^{Sym}$  l'ensemble des tableaux de permutation symétriques de longueur  $n$ . On garde les mêmes définitions pour les 0 restreints droits, les lignes non

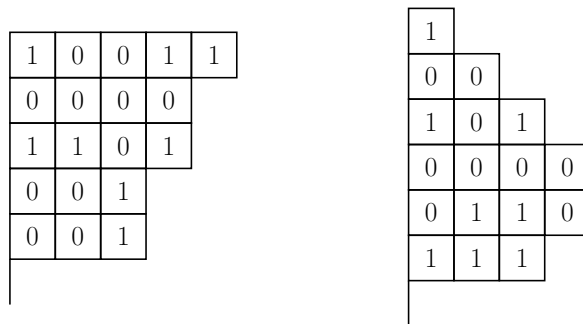


FIGURE 1. Un tableau de permutation de longueur 11 (gauche) et un tableau de permutation de type  $B$  de longueur 7 (droite).

restreintes et les 1 superflus.

## 1.2. Tableaux alternatifs

Les tableaux alternatifs ont été introduit par Viennot [Vie08] postérieurement aux tableaux de permutation. Un des avantages de ces nouveaux tableaux est que l'involution correspondante à la symétrie CP est simple, elle se résume à une réflexion d'axe la diagonale principale.

DÉFINITION 4.1.3 ([Vie08]). Soit  $n$  un entier naturel. Un *tableau alternatif* de longueur  $n$  est un diagramme de Ferrers de longueur  $n$  dont certaines cellules sont remplies par une flèche gauche  $\leftarrow$  ou une flèche montante  $\uparrow$  de telle sorte que

- les cellules à gauche dans la même ligne que  $\leftarrow$  sont vides ;
- les cellules au-dessus dans la même colonne que  $\uparrow$  sont vides.

La figure 2 donne un exemple de tableau alternatif. On note  $\mathcal{TA}_n$  l'ensemble des tableaux alternatifs de longueur  $n$ . Les statistiques analogues à celles des tableaux de permutation sont les suivantes. Une *ligne libre* est une ligne sans  $\leftarrow$  et une *colonne libre* est une colonne sans  $\uparrow$ . Une *cellule libre* est une cellule vide n'ayant ni  $\leftarrow$  à sa droite dans la même ligne ni  $\uparrow$  en dessous dans la même colonne.

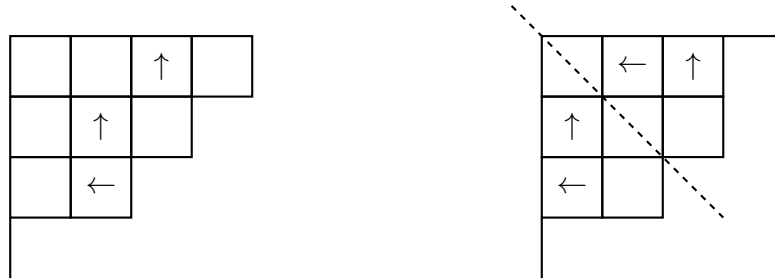


FIGURE 2. Un tableau alternatif de longueur 8 (gauche) et un tableau de alternatif de type  $B$  de longueur 8 (droite).

Les tableaux alternatifs symétriques correspondent à la version en type  $B$  des tableaux alternatifs, ils ont été introduit par Nadeau [Nad11].

DÉFINITION 4.1.4 ([Nad11, section 3.5]). Un *tableau alternatif symétrique* est un tableau alternatif invariant sous la symétrie axiale d'axe la diagonale principale.

La figure 2 donne également un exemple de tableau alternatif symétrique. L'ensemble des tableaux alternatifs symétriques de longueur  $2n$  est noté  $\mathcal{TA}_{2n}^{Sym}$ .

### 1.3. Tableaux boisés

Le dernier type de tableau que nous considérons sont les tableaux boisés, ils ont été introduit par Aval, Boussicault et Nadeau [ABN13]. Ils possèdent une structure récursive donnée par un algorithme d'insertion qui a simplifié la preuve de certains résultats importants. De plus, ils mettent en évidence la structure arborescente sous-jacente à ces tableaux.

DÉFINITION 4.1.5 ([ABN13, section 1.2]). Un *tableau boisé* est un diagramme de Ferrers dont chaque cellule peut être soit vide, soit occupée d'un point, en respectant les contraintes suivantes :

- (1) la cellule en haut à gauche possède nécessairement un point, on l'appelle le *point racine* ;
- (2) tous les autres points ont un point à leur gauche sur la même ligne, ou au-dessus d'eux sur la même colonne, mais pas les deux simultanément ;
- (3) chaque ligne et chaque colonne possède au moins une cellule pointée.

#### 4. Étude des coins dans les tableaux correspondant à l'ASEP

On qualifie de *non racine* les points différents du point racine. La *taille* d'un tableau boisé correspond à son nombre de points.

Un exemple de tableau boisé est donné dans la figure 3.

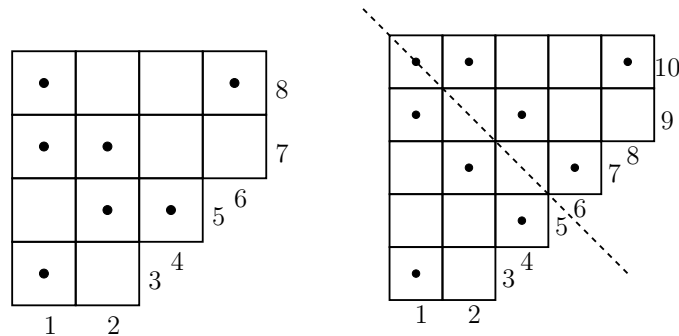


FIGURE 3. Un tableau boisé de taille 7 (gauche) et un tableau boisé symétrique de taille 4 (droite).

REMARQUE 4.1.6. La contrainte 4.1.5.(2) associe à tout point non racine un unique autre point, son *père*, qui est le point directement à sa gauche ou directement au-dessus de lui. De plus, la condition 4.1.5.(3) nous permet d'associer à chaque pas du bord sud-est, le point le plus proche dans la ligne ou la colonne correspondante; on le qualifie également de *père*. Si on trace une arête entre tout point non racine et son père, et entre tout pas du bord sud-est et son père, on voit apparaître un arbre binaire complet, en prenant la convention qu'une arête verticale (resp. horizontale) dans le tableau boisé correspond à une arête descendant vers la gauche (resp. droite) dans l'arbre binaire, où les nœuds sont les points et les feuilles sont les pas du bord sud-est; d'où le nom de tableau boisé. Un exemple d'un tableau boisé et de son arbre binaire sous-jacent est donné dans la figure 4.

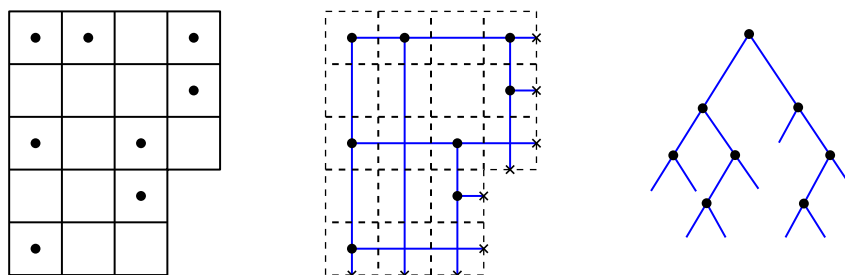


FIGURE 4. Un tableau boisé et son arbre binaire sous-jacent.

On note  $\mathcal{TB}$  l'ensemble des tableaux boisés et  $\mathcal{TB}_n$  l'ensemble des tableaux boisés de taille  $n$ . Le bord sud-est d'un tableau boisé de taille  $n$  est composé de  $n + 1$  pas, on les numérote de 1 à  $n + 1$  du sud-ouest au nord-est, comme

dans la figure 3. Un *point haut* d'un tableau boisé  $TB$  correspond à un point non racine de la ligne la plus haute de  $TB$ . Un *point gauche* correspond à un point non racine de la colonne la plus à gauche de  $TB$ . Enfin un *croisement*, correspond à une cellule ayant un point au-dessus dans la même colonne et à sa gauche dans la même ligne. On note  $\text{pg}(TB)$ ,  $\text{ph}(TB)$  et  $\text{cr}(TB)$ , respectivement le nombre de points gauches, de points hauts et de croisements de  $TB$ . Ainsi, le poids d'un tableau boisé  $TB$  est

$$p(TB) := q^{\text{cr}(TB)} \underline{\alpha}^{\text{ph}(TB)} \underline{\beta}^{\text{pg}(TB)}.$$

Soit  $n$  un entier naturel non nul, on note  $\mathfrak{TB}_n$  la série génératrice

$$\mathfrak{TB}_n(\alpha, \beta, q) = \sum_{TB \in \mathfrak{TB}_n} p(TB).$$

Comme expliqué précédemment,  $\mathfrak{TB}_n$  correspond à une fonction de partition associée à l'ASEP. Josuat-Vergès [JV11] en donne une formule close dans laquelle il ajoute également le paramètre  $y$  qui compte le nombre de lignes moins une. Dans le cas  $y = q = 1$ , la fonction génératrice  $\mathfrak{TB}_n$  est simplement

$$\mathfrak{TB}_n(\alpha, \beta, 1) = \prod_{i=0}^{n-2} (\underline{\alpha} + \underline{\beta} + i).$$

Pour le prouver, il suffit par exemple de spécialiser à  $\gamma = \delta = 0$  le corollaire 2.2.10 et de diviser par  $(\alpha\beta)^n$  comme expliqué au début de la section 1.

Les tableaux boisés symétriques ont été introduit par Aval, Boussicault et Nadeau [ABN13].

DÉFINITION 4.1.7 ([ABN13, section 2.2]). Soit  $n$  un entier naturel non nul, un *tableau boisé symétrique* de taille  $n$  est un tableau boisé de taille  $2n + 1$  invariant par la réflexion d'axe la diagonale principale de son diagramme de Ferrers.

Notons qu'il existe un unique tableau boisé de taille 0, il correspond à l'unique tableau boisé de taille 1. La figure 3 donne un exemple de tableau boisé symétrique de taille 4. On note  $\mathfrak{TB}^{\text{Sym}}$  l'ensemble des tableaux boisés symétriques et  $\mathfrak{TB}_n^{\text{Sym}}$  l'ensemble des tableaux boisés de taille  $n$ . Le bord sud-est d'un tableau boisé symétrique de taille  $n$  est composé de  $2(n + 1)$  pas, on les numérote de 1 à  $2(n + 1)$  du sud-ouest au nord-est, comme dans la figure 3.

Dans le cas des tableaux boisés symétriques, on considère également deux autres statistiques. Soit  $\text{crd}(TB)$  le nombre de croisements présents dans les cellules composant la diagonale principale de  $TB$ . Soit  $p$  non racine de la colonne la plus à gauche, alors on note  $\text{ph}^{\text{sym}}(TB)$  le nombre de points différents de  $p$  présents dans la même ligne que  $p$ . Un tableau boisé symétrique a autant de points hauts que de points gauches, de plus il a toujours au moins un point gauche, ainsi le poids d'un tableau boisé symétrique  $TB$  est

$$p(TB) := q^{\text{cr}(TB)} z^{\text{crd}(TB)} u^{\text{pg}(TB)-1} v^{\text{ph}^{\text{sym}}(TB)}.$$

#### 4. Étude des coins dans les tableaux correspondant à l'ASEP

---

Soit  $n$  un entier naturel non nul, on note  $\mathfrak{TB}_n^{Sym}$  la série génératrice

$$\mathfrak{TB}_n^{Sym}(u, v; z, q) = \sum_{TB \in \mathcal{TB}_n^{Sym}} p(TB).$$

Dans le cas  $q = 1$ , Aval, Boussicault et Nadeau [ABN13] ont montré que la fonction génératrice  $\mathfrak{TB}_n^{Sym}$  est simplement

$$\mathfrak{TB}_n^{Sym}(u, v; z, 1) = (1 + z)^n \prod_{i=0}^{n-2} (u + v + i).$$

C'est également un cas particulier de la formule conjecturée dans le cadre des tableaux escaliers de type  $B$  (remarque 2.3.13).

#### 1.4. Bijections entre tableaux de permutation, alternatifs et boisés.

Les trois types de tableaux que nous venons de définir sont combinatoirement équivalents. Cette section a pour but d'énoncer les correspondances bijectives entre les formes et certaines statistiques de ces tableaux. Nous ne décrirons toutefois pas les bijections elles-mêmes, plus de détails pourront être trouvés dans [GGLZS16] et de même pour le type  $B$ .

Soit  $F$  un diagramme de Ferrers. On note  $F'$  le diagramme de Ferrers obtenu en supprimant les cellules de la colonne la plus à gauche ainsi que le pas le plus au sud-ouest du bord sud-est. Et, on note  $F''$  le diagramme de Ferrers obtenu en supprimant les cellules de la colonne la plus à gauche et de la ligne la plus haute ainsi que le pas le plus au sud-ouest et le pas le plus au nord-est du bord sud-est (voir figure 5)

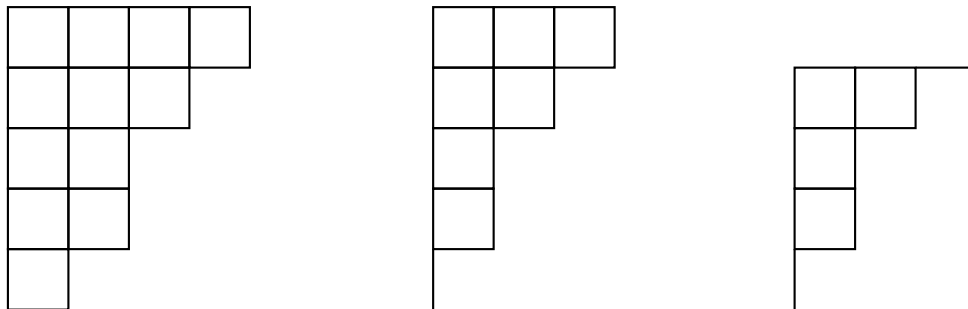


FIGURE 5. De gauche à droite, un diagramme de Ferrers  $F$  et les diagrammes de Ferrers  $F'$  et  $F''$ .

PROPOSITION 4.1.8. *Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $i, j, k, l$  des entiers naturels. Il existe une bijection entre*

- les tableaux de permutation de longueur  $n$ , avec  $i + 1$  lignes non restreintes,  $k$  lignes,  $l$  uns superflus et de forme  $F'$  ;



- les tableaux alternatifs de longueur  $n-1$ , avec  $i$  lignes libres,  $j$  colonne libres,  $k-1$  lignes,  $l$  cellules libres et de forme  $F''$  :
- les tableaux boisés de taille  $n$ , avec  $i$  points gauches,  $j$  points hauts,  $k$  lignes,  $l$  croisements et de forme  $F$ .

Soit maintenant  $F$  un diagramme de Ferrers symétrique. On garde la même définition pour  $F''$  et on note  $F''_{demi}$  le diagramme de Ferrers décalé obtenu en prenant la moitié inférieure, les cellules coupées par la diagonale principale inclus, de  $F''$  (voir figure 6).

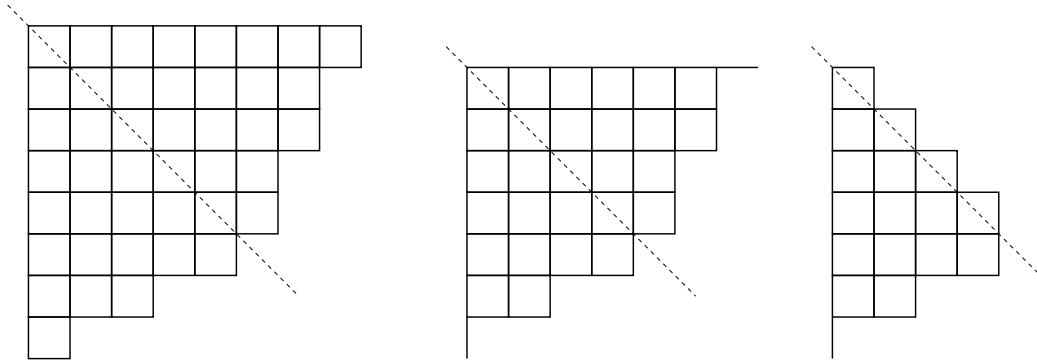


FIGURE 6. De gauche à droite, un diagramme de Ferrers symétrique  $F$ , le diagramme de Ferrers symétrique  $F''$  et le diagramme de Ferrers décalé  $F''_{demi}$ .

PROPOSITION 4.1.9. Soit  $n, i, j, k, l$  des entiers naturels. Il existe une bijection entre

- les tableaux de permutation de type  $B$  de longueur  $n$ , avec  $i+1$  lignes non restreintes,  $\frac{k-l}{2}+1$  superflus,  $l+1$  dans la diagonale principale et de forme  $F''_{demi}$  ;
- les tableaux alternatifs symétriques de longueur  $2n$ , avec  $i$  lignes libres,  $k$  cellules libres,  $l$  cellules libres dans la diagonale principale et de forme  $F''$  ;
- les tableaux boisés symétriques de taille  $n$ , avec  $i$  points gauches,  $k$  croisements,  $l$  croisements dans la diagonale principale et de forme  $F$ .

On ne donne pas la correspondance de  $\text{ph}^{\text{sym}}$  car, la définition est essentiellement la même dans le cas des tableaux alternatifs, et dans le cas des tableaux de permutation de type  $B$ , elle a été défini en utilisant la représentation en terme de tableaux alternatifs symétriques [CK11].

## 2. Interprétation des coins sur l'ASEP

L'état correspondant de l'ASEP d'un tableau se lit sur son bord sud-est, que l'on lit du nord-est au sud-ouest. Par exemple, dans le cas des tableaux boisés un pas vertical correspond à  $\bullet$  et un pas horizontal à  $\circ$ , mais on ne prend pas en compte le premier et le dernier pas, comme illustré dans la figure 7, notons type cette projection. On remarque que les coins et les coins internes d'un

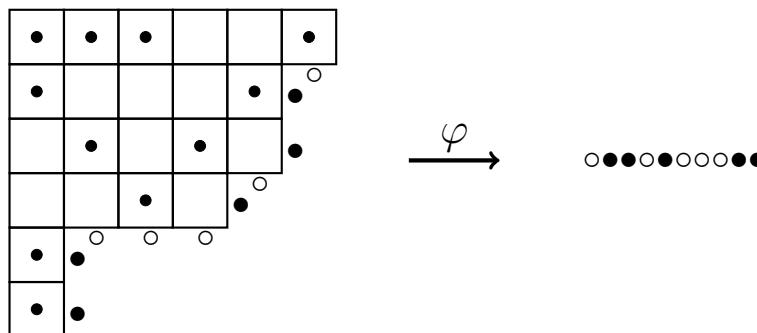


FIGURE 7. Projection des tableaux boisés sur les états de l'ASEP.

tableau boisé correspondent aux endroits où un saut de particule est possible dans l'état correspondant. Or les tableaux boisés permettent de décrire les probabilités stationnaires des états de l'ASEP. Soit  $n$  un entier non nul, alors la probabilité stationnaire d'un état  $m$  de l'ASEP est

$$\frac{\sum_{\substack{TB \in \mathcal{TB}_{n+1} \\ \text{type}(TB) = m}} p(TB)}{Z_n(\alpha, \beta, q)},$$

où  $Z_n(\alpha, \beta, q) = \mathfrak{TB}_{n+1}(\alpha, \beta, q)$ . Ce résultat a été démontré pour la première fois par Corteel et Williams [CW07a], on peut également le voir comme un cas particulier de l'ASEP. De ce fait, si nous connaissons l'espérance du nombre de coins dans les tableaux boisés de taille  $n + 1$ , nous pouvons en déduire l'espérance du nombre d'endroits où un saut de particule est possible, ou de manière équivalente, l'espérance du degré sortant du graphe dirigé correspondant à l'ASEP. Plus précisément, soit  $X(m)$  la variable aléatoire comptant le nombre d'endroits de  $m$  où un saut de particule est possible, de ce fait on a  $X(\text{type}(TB)) = c(TB) + ci(TB)$ . Étant donné que dans un tableau boisé  $ci(TB) = c(TB) - 1$ , on obtient  $X(\text{type}(TB)) = 2c(TB) - 1$ . Finalement

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{m \in \{\circ, \bullet\}^n} \mathbb{P}(m) \cdot X(m) \\ &= \frac{1}{Z_n} \sum_{m \in \{\bullet, \circ\}^n} \sum_{\substack{TB \in \mathcal{TB}_{n+1} \\ \text{type}(TB) = m}} w(TB)(2c(TB) - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{Z_n} \sum_{TB \in \mathcal{TB}_{n+1}} w(TB)(2c(TB) - 1) \\
 &= \frac{2 \sum_{TB \in \mathcal{TB}_{n+1}} w(TB)c(TB)}{Z_n} - 1
 \end{aligned}$$

### 3. Énumération des coins occupés et analogues polynomiaux

Avant d'étudier les coins des tableaux boisés de manière générale, nous nous attardons sur ceux contenant un point. Cette section se base sur l'article [LZ15].

#### 3.1. Étude des tableaux boisés

DÉFINITION 4.3.1. Soit  $TB$  un tableau boisé, un *coin occupé* est un coin contenant un point. À contrario, un coin ne contenant pas de point est un *coin vide*.

La figure 8 représente un tableau boisé ayant deux coins occupés. Soit  $TB$

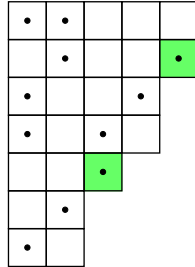


FIGURE 8. Un tableau boisé ayant deux coins occupés (en vert).

un tableau boisé, on note  $\mathcal{CO}(TB)$  l'ensemble des coins occupés de  $TB$ . On étend cette notation au cas des ensembles de tableaux boisés. Soit  $X$  un sous-ensemble de  $\mathcal{TB}$ , on note  $\mathcal{CO}(X)$  l'union des  $\mathcal{CO}(TB)$  pour  $TB \in X$ . Enfin, on note  $co(TB)$  le nombre de coins occupés de  $TB$ . On définit le *poids*  $p(CO)$  d'un coin occupé  $CO$  d'un tableau boisé  $TB$ , comme étant le poids de  $TB$ . Soit  $n$  un entier naturel non nul, on note  $\mathfrak{CO}_n$  la fonction génératrice

$$\mathfrak{CO}_n(\alpha, \beta, q) := \sum_{CO \in \mathcal{CO}(\mathcal{TB}_n)} p(CO) = \sum_{TB \in \mathcal{TB}_n} co(TB)p(TB).$$

PROPOSITION 4.3.2. Soit  $n$  un entier naturel non nul, si  $n = 1$  alors  $\mathfrak{CO}_n(\alpha, \beta, q) = 1$ , sinon

$$\mathfrak{CO}_n(\alpha, \beta, q) = (\underline{\alpha} + \underline{\beta} + n - 2)\mathfrak{TB}_{n-1}(\alpha, \beta, q).$$

#### 4. Étude des coins dans les tableaux correspondant à l'ASEP

---

En particulier, il y a  $n!$  coins occupés dans les tableaux boisés de taille  $n$ .

DÉMONSTRATION. Si  $n = 1$  il existe un unique tableau de taille  $n$ , son poids est égal à 1 et il possède un unique coin occupé, supposons maintenant  $n \geq 2$ . La preuve consiste à mettre en bijection l'ensemble  $\mathcal{CO}(\mathcal{TB}_n)$  avec les couples constitués d'un tableau boisé de taille  $n - 1$  et d'un entier entre 1 et  $n$ . Soit  $CO$  un coin occupé de  $\mathcal{CO}(\mathcal{TB}_n)$ , on note  $TB$  le tableau boisé correspondant. Le bord sud de  $CO$  est un pas horizontal du bord sud-est de  $TB$ , on note  $i$  son numéro,  $i$  peut prendre toutes les valeurs de 1 à  $n$ , et celles-là uniquement. Parmi la colonne et la ligne contenant  $CO$ , une des deux ne contient pas d'autre point. Si on la supprime, on obtient un tableau boisé  $TB'$  de taille  $n - 1$ . Si c'est une ligne que l'on a supprimée, alors  $i$  correspond à un pas horizontale dans  $TB'$ , sinon il correspond à un pas vertical. On peut reconstruire facilement  $CO$  à partir de  $TB'$  et  $i$ . Concernant le poids, les cellules que l'on supprime de  $TB$  ne possèdent pas de croisement, de plus, on supprime un point haut uniquement si  $i = n$  et un point gauche uniquement si  $n = 0$ , d'où le résultat.  $\square$

Si on pose  $q = 1$  on remarque que

$$\mathfrak{CO}_n(\alpha, \beta, 1) = \mathfrak{TB}_n(\alpha, \beta, 1).$$

Cette identité sera prouvée bijectivement dans la suite.

Si on pose  $\alpha = \beta = 1$ , on peut mettre en équation l'évolution du nombre de coins occupés par tableau. Notons

$$\mathfrak{TB}_n(x, q) = \sum_{TB \in \mathcal{TB}_n} x^{co(TB)} p(TB)|_{\alpha=1, \beta=1}$$

de sorte que

$$(\partial_x \mathfrak{TB}_n)(1, q) = \mathfrak{CO}_n(1, 1, q).$$

Dans la suite on pose

$$(\partial_x \mathfrak{TB}_n)(x, q) = \mathfrak{TB}'_n(x, q).$$

PROPOSITION 4.3.3. Les séries génératrices  $(\mathfrak{TB}_n(x, q))_{n \geq 1}$  vérifient le système

$$\begin{cases} \mathfrak{TB}'_n(x, q) = n\mathfrak{TB}_{n-1}(x, q) + 2(1-x)\mathfrak{TB}'_{n-1}(x, q), \\ \mathfrak{TB}_1(x, q) = x. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Si on regarde de plus près l'évolution du nombre de coins dans la preuve de la proposition 4.3.2, en reprenant les notations de la preuve,  $co(TB) = co(TB') + 1$  si le pas  $i$  n'est pas le bord d'un coin occupé de  $TB'$ , sinon  $co(TB) = co(TB')$ . De ce fait, si on pose  $p(TB) = q^{cr(TB)} x^{co(TB)}$ , en conséquence

$$\sum_{TB \in \mathcal{TB}_n} co(TB)p(TB) = \sum_{TB' \in \mathcal{TB}_{n-1}} ((n - 2co(TB'))x + 2co(TB'))p(TB'),$$

ce qui nous donne l'équation attendue à une division par  $x$  près.  $\square$

Si on pose  $x = 1$ , on retombe bien sur le résultat de la proposition 4.3.2 dans le cas  $\alpha = \beta = 1$ . Étant donné que l'on connaît  $\mathfrak{TB}_n(1, q)$  pour tout  $n \geq 1$ , on peut calculer récursivement  $\mathfrak{TB}_n(x, q)$ . Dans le cas  $q = 1$ , Hitzenko et Lohss [HL16b] ont étudié ce type d'équations et en ont déduit que lorsque  $n$  tend vers l'infini, la distribution limite du nombre de coins occupés dans un tableau boisé de taille  $n$  pris uniformément au hasard, suit la loi Poisson de paramètre 1  $Pois(1)$ . Un indice de ce résultat étant que l'on vient de montrer que l'espérance est égale à 1 et que l'on peut montrer que la variance  $\sigma_n^2$  tend vers 1 quand  $n$  tend vers l'infini. En effet

$$\sigma_n^2 = \frac{\sum_{TB \in \mathcal{TB}_n} oc(TB)^2}{n!} - 1,$$

de ce fait

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{n!} (\mathfrak{TB}_n''(1, 1) + \mathfrak{TB}_n'(1, 1)) - 1 \\ &= \frac{1}{n!} ((n-2)\mathfrak{TB}_{n-1}'(1, 1) + \mathfrak{TB}_n'(1, 1)) - 1 \\ &= \frac{1}{n!} ((n-2)(n-1)! + n!) - 1 \\ &= \frac{n-2}{n}, \end{aligned}$$

et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-2}{n} = 1$ .

REMARQUE 4.3.4. Le nombre de tableaux boisés de taille  $n$  ayant 0 coin occupé est donné par  $\mathfrak{TB}_n(0, 1)$ . Une expérimentation assistée par ordinateur nous dit que les premiers termes de la suite  $(\mathfrak{TB}_n(0, 1))_{n \geq 1}$  sont égaux à ceux de la suite [Slo, A184185] qui compte le nombre de permutations de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  sans cycle de la forme

$$(i, i+1, \dots, i+j-1)$$

où  $j \geq 1$ . Les bijections usuelles entre les tableaux boisés et les permutations n'ont pas l'aire de marcher et nous n'en n'avons pas trouvée d'autre.

Nous avons montré qu'il y avait autant de coins occupés dans  $\mathcal{TB}_n$  que de tableaux boisés de taille  $n$ , et plus précisément que

$$\mathfrak{CO}_n(\alpha, \beta, 1) = \mathfrak{TB}_n(\alpha, \beta, 1).$$

Nous généralisons bijectivement ce résultat au cas des classes non-ambigües. Deux tableaux boisés appartiennent à la même *classe non-ambigüe* si on obtient le même tableau boisé après avoir complété avec des cases vides leurs diagrammes de Ferrers respectifs de sorte à obtenir un rectangle. Les classes non-ambigües sont liées aux arbres non-ambigus (chapitre 5), deux tableaux appartiennent à la même classe non-ambigüe s'ils ont le même arbre non-ambigu sous-jacent.

#### 4. Étude des coins dans les tableaux correspondant à l'ASEP

PROPOSITION 4.3.5. Soit  $\mathcal{CNA}$  une classe non-ambigüe, alors

$$\sum_{CO \in \mathcal{CO}(\mathcal{CNA})} p(CO)|_{q=1} = \sum_{TB \in \mathcal{CNA}} p(TB)|_{q=1}.$$

La figure 9 donne un exemple de la proposition 4.3.5.

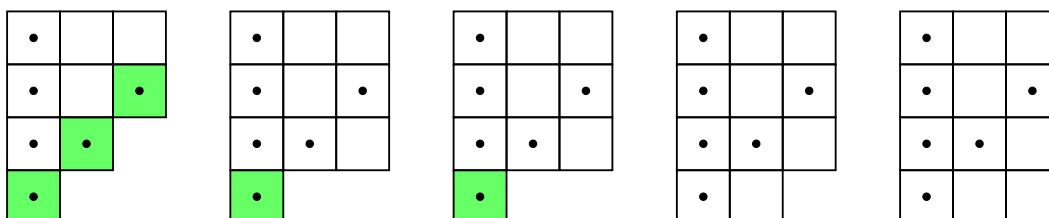


FIGURE 9. Une classe non-ambigüe composée de cinq tableaux boisés et d'autant de coins occupés.

DÉMONSTRATION. Dans cette démonstration, on lit les bords sud-est des tableaux boisés du sud-ouest au nord-est, un pas horizontal est noté  $H$  et un pas vertical est noté  $V$ . Soit  $TB$  l'unique représentant de  $\mathcal{CNA}$  dont tous les coins sont occupés, on note  $B$  son bord sud-est. Les autres tableaux boisés de la classe sont entièrement caractérisés par la donnée de  $TB$  et de leurs bords sud-est. Soit  $CO$  un coins occupé de  $\mathcal{CO}(\mathcal{CNA})$ , on note  $B'$  le bord sud-est du tableau boisé auquel il appartient. Le chemin  $B'$  se décompose de manière unique comme  $u'H_{CO}V_{CO}v'$ , où  $H_{CO}$  et  $V_{CO}$  correspondent respectivement aux bords sud et est de  $CO$ . Étant donné que  $CO$  est également un coin occupé de  $TB$ ,  $B$  se décompose de manière unique comme  $uH_{CO}V_{CO}v$ , en outre  $u'$  est inférieur à  $u$  et  $v'$  est inférieur à  $v$ . On associe à  $CO$  le tableau boisé  $B''$  dont le bord sud-est est  $B'' = u'H_{CO}v'V_{CO}$ , il appartient bien à la même classe non-ambigüe que  $TB'$ . On peut caractériser le pas  $H_{CO}$  du chemin  $B''$  comme le dernier pas horizontal commun à  $B$  et  $B''$ , si  $v'$  n'est composé que de pas verticaux c'est évident, et sinon  $V_{CO}v'$  est strictement inférieur à  $V_{CO}v$  donc c'est vrai aussi. Réciproquement, tout bord sud-est  $B'$  d'un tableau boisé  $TB'$  de la même classe non-ambigüe que  $TB$  possède un pas horizontal en commun avec  $B$ , car tout deux commencent par un pas horizontal. Ainsi, il suffit de considérer le dernier pas horizontal commun à  $B$  et  $B'$ , puis d'effectuer la construction inverse pour construire le coin occupé associé à  $TB'$ . Concernant le poids en  $\alpha$  et  $\beta$ , il est clairement préservé par cette construction étant donné que l'on ne touche pas aux points.

La figure 10 donne une illustration de la construction utilisée dans la preuve de la proposition 4.3.5. Seuls les points correspondant aux coins occupés de  $TB$  ont été dessinés, de plus la partie horizontale initiale et la partie verticale initiale des bords sud-est ne sont pas représentées car elles n'interviennent pas dans la construction. Le chemin pointillé correspond à  $TB$ , le chemin bleu de la figure du dessus correspond à  $TB'$ , les coins  $CO_1, CO_2$  et  $CO_3$  sont les coins occupés de  $TB'$ , de gauche à droite les trois chemins bleus des figures du dessous

correspondent aux tableaux boisés  $TB''$  associés au coins occupés  $CO_1, CO_2$  et  $CO_3$ , et enfin les pas noirs indiqués par un flèche, des trois tableaux du dessous correspondent au dernier pas horizontal commun avec  $B$ .  $\square$

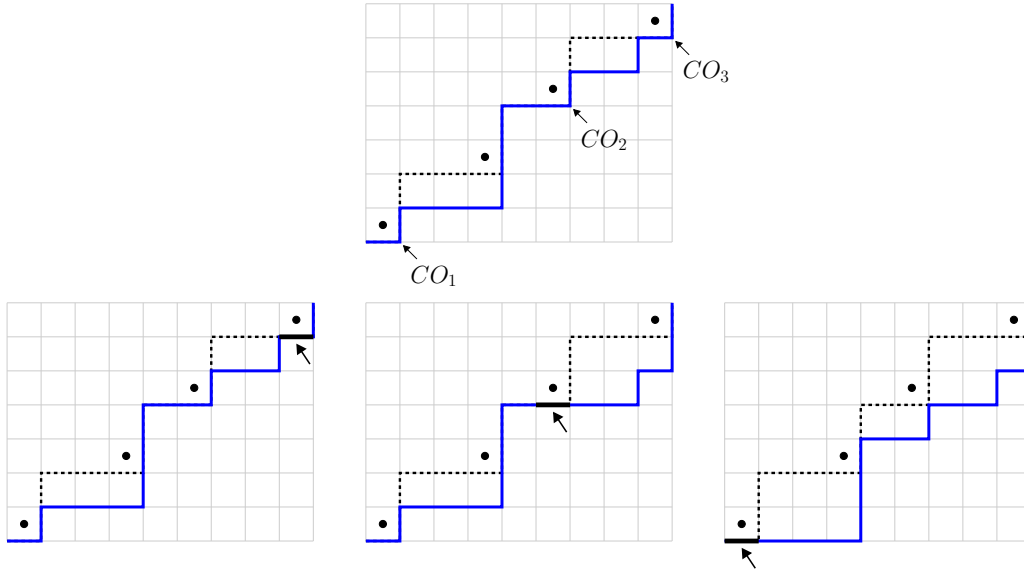


FIGURE 10. Bijection entre les coins occupés et les tableaux boisés.

La proposition 4.3.5 n'utilise pas la structure de tableaux boisés, elle pourrait directement être formulée comme une proposition sur les diagrammes des Ferrers.

### 3.2. Étude des tableaux boisés symétriques

Un tableau boisé symétrique étant un tableau boisé, on garde la même définition pour les coins occupés ainsi que les mêmes notations. Soit  $n$  un entier naturel, on note  $\mathfrak{CO}_n^{sym}$  la fonction génératrice

$$\mathfrak{CO}_n^{sym}(u, v; z, q) := \sum_{CO \in \mathfrak{CO}(TB_n^{Sym})} p(CO) = \sum_{TB \in TB_n^{Sym}} co(TB)p(TB).$$

PROPOSITION 4.3.6. Soit  $n$  un entier naturel, si  $n = 1$  alors

$$\mathfrak{CO}_1^{sym}(u, v; z, q) = 2$$

sinon

$$\mathfrak{CO}_n^{sym}(u, v; z, q) = 2(u + v + n - 2)\mathfrak{TB}_n^{Sym}(u, v; z, q).$$

En particulier, il y a  $2^n n!$  coins occupés dans les tableaux boisés symétriques de taille  $n$ .

DÉMONSTRATION. Nous montrons que les coins occupés dans les tableaux boisés symétriques de taille  $n$  sont en bijection avec les couples constitués d'un

#### 4. Étude des coins dans les tableaux correspondant à l'ASEP

---

tableau boisé symétrique de taille  $n - 1$  et d'un entier  $i$  entre 1 et  $2n$ . La preuve est essentiellement la même que dans le cas des tableaux boisés. À la différence près que pour les opérations de suppression/ajout de ligne/colonne, il faut également effectuer l'opération symétrique. Concernant les statistiques pris en compte par le poids, le nombre de points gauches est modifié uniquement si  $i = 0$  ou  $n$ , de même la statistique  $\text{ph}^{\text{sym}}$  est modifiée si  $i = k$  ou  $n - k$  où  $k$  et le numéro correspondant à la ligne du plus haut point non racine de la colonne la plus à gauche, enfin le nombre de croisements n'est pas modifié et de même pour le nombre de croisements dans la diagonale.  $\square$

Si on pose  $z = q = 1$  on trouve que

$$\mathfrak{CO}_n^{\text{Sym}}(u, v; 1, 1) = \mathfrak{TB}_n(u, v; 1, 1).$$

Si on pose  $u = v = 1$ , on peut mettre en équation l'évolution du nombre de coins occupés par tableau. Notons

$$\mathfrak{TB}_n^{\text{Sym}}(x, q, z) = \sum_{TB \in \mathcal{TB}_n^{\text{Sym}}} x^{\text{co}(TB)} p(TB)|_{u=1, v=1}$$

de sorte que

$$(\partial_x \mathfrak{TB}_n^{\text{Sym}})(1, q, z) = \mathfrak{CO}_n(1, 1; q, z).$$

PROPOSITION 4.3.7. *Les séries génératrices  $(\mathfrak{TB}_n^{\text{Sym}}(x, q, z))_{n \geq 1}$  vérifient le système<sup>1</sup>*

$$\begin{cases} \partial_x(\mathfrak{TB}_n^{\text{Sym}})(x, q, z) &= 2nx\mathfrak{TB}_{n-1}^{\text{Sym}}(x, q, z) + 2(1-x)^2\partial_x(\mathfrak{TB}_{n-1}^{\text{Sym}})(x, q, z), \\ \mathfrak{TB}_1(x, q, z) &= x^2 + zq. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Posons  $p(TB) = x^{\text{co}(TB)}q^{\text{cr}(TB)}z^{\text{crd}(TB)}$ , pour les mêmes raisons que dans le cas des tableaux boisés, on a

$$\sum_{TB \in \mathcal{TB}_n^{\text{Sym}}} \text{co}(TB)p(TB) = \sum_{TB' \in \mathcal{TB}_{n-1}^{\text{Sym}}} ((2n - 2\text{co}(TB'))x^2 + 2\text{co}(TB'))p(TB'),$$

ce qui nous donne l'équation attendue à une division par  $x$  près.  $\square$

Si on pose  $x = 1$  on retombe bien sur le résultat de la proposition 4.3.6 dans le cas  $u = v = 1$ . Corteel, Josuat-Vergès et Kim [CJVK13] donnent une formule close pour la série génératrice des tableaux de permutation de type  $B$  en prenant en compte le paramètre  $q$ , toutefois étant donné qu'ils considèrent des demi-tableaux et que leur formule est valable pour  $z = 1$ , a priori on ne peut en déduire une formule pour  $\mathfrak{TB}_n^{\text{Sym}}(1, q, z)$ , voire même pour  $\mathfrak{TB}_n^{\text{Sym}}(1, q, 1)$ . Par contre, on sait que  $\mathfrak{TB}_n^{\text{Sym}}(1, 1, 1) = 2^n n!$ . Le travail d'Hitczenko et Lohss [HL16b] peut également s'appliquer au système de la proposition 4.3.6 dans le cas  $z = q = 1$ . Lorsque  $n$  tend vers l'infini, la distribution limite du nombre

---

1. Dans l'article [LZ15], le système commence à  $n = 0$ . Toutefois la valeur nécessaire à l'initiation est  $\mathfrak{TB}_0(x, q, z) = 1$ . Contrairement à ce qui est implicitement dit dans l'article, l'unique tableau boisé symétrique de taille 0 a un coin.



de coins dans un tableau boisé symétrique de taille  $n$  pris uniformément au hasard, suit la loi  $2 \times Pois(1/2)$ .

De même que pour les tableaux boisés, nous généralisons bijectivement l'identité

$$\mathfrak{CO}_n^{Sym}(u, v; 1, 1) = \mathfrak{TB}_n(u, v; 1, 1).$$

au cas des classes non-ambigües symétriques. Deux tableaux boisés symétriques appartiennent à la même *classe non-ambigüe symétrique* si on obtient le même tableau boisé symétrique après avoir complété par des cases vides leurs diagrammes de Ferrers respectifs de sorte à obtenir un carré.

PROPOSITION 4.3.8. *Soit  $\mathcal{CNAS}$  une classe non-ambigüe symétrique, alors*

$$\sum_{CO \in \mathcal{CO}(\mathcal{CNAS})} p(CO)|_{q=1} = \sum_{TB \in \mathcal{CNAS}} p(TB)|_{q=1}.$$

DÉMONSTRATION. La bijection s'inspire du cas des tableaux boisés. Elle est illustrée dans la figure 11. Soit  $TB$  un tableau boisé symétrique de taille  $n$ , si  $TB$  possède un coin dans la diagonale principale, il est nécessairement vide et on le supprime. À partir de l'interstice entre les pas  $n+1$  et  $n+2$ , on découpe  $TB$  horizontalement vers la gauche et verticalement vers le haut (en zigzag rouge dans l'image). Puis on applique la construction de la proposition 4.3.5 à la partie du bas et symétriquement à la partie de droite. Si  $TB$  n'avait pas de coin sur la diagonale principale on lui associe le coin occupé du bas, sinon on lui associe le coin occupé de droite. Réciproquement, étant donné que l'on n'a pas modifié la partie du milieu, on peut inverser la construction.  $\square$

## 4. Énumération des coins et analogues polynomiaux

Comme expliqué dans la section 2, connaître le nombre moyen de coins par tableau boisé peut donner une information sur l'ASEP. Dans le cas  $\alpha = \beta = q = 1$ , une formule conjecturale énumérant les coins a été énoncée dans [LZ15], puis prouvée par Gao, Gao, L.-Z. et Sun [GGLZS16] et indépendamment par Lohss et Hitczenko [HL16a]. Notre preuve consiste à interpréter les coins dans les permutations (de type  $B$ ) où l'énumération est plus facile. Quant à Lohss et Hitczenko, ils abordent la question en utilisant l'approche probabiliste développée par Corteel et Hitczenko [CH07]. Le cas  $q = 1$  donne également une forme factorisée simple, un analogue polynomial de l'énumération des coins dans les tableaux boisés et un analogue polynomial du type  $B$  ont été conjecturés dans [GGLZS16] puis prouvé par Yan et Zhou [YZ17] en interprétant cette conjecture sur les partitions liées [Dyk07, CWY08].

Dans un premier temps nous énumérons les coins dans les tableaux de permutation (de type  $B$ ) en les interprétant sur les permutations (de type

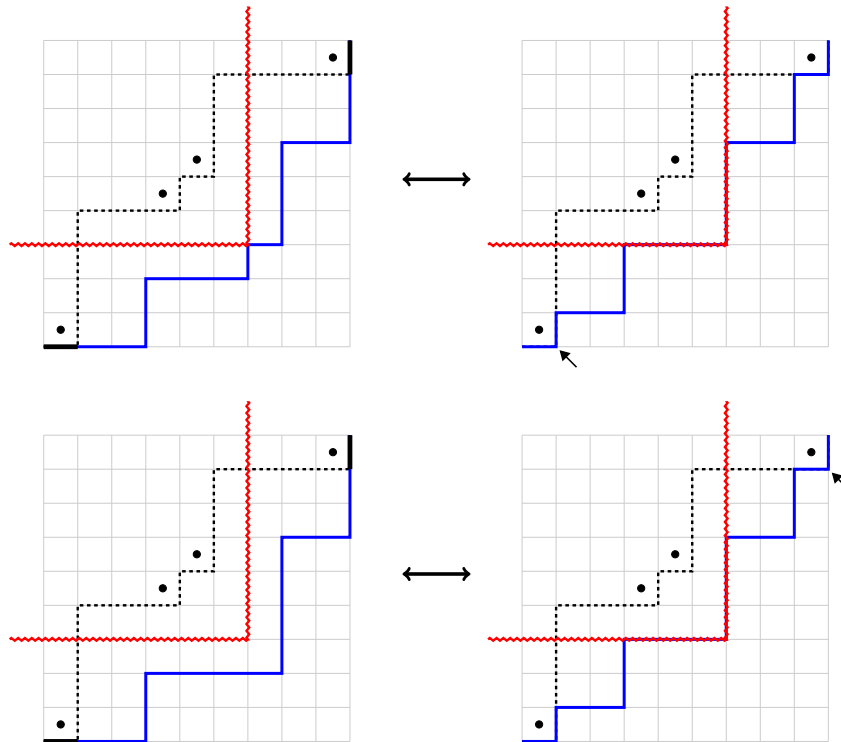


FIGURE 11. Bijection entre les coins occupés et les tableaux boisés symétriques.

$B$ ), de ce fait nous déduisons le nombre de coins des tableaux alternatifs (symétriques) et des tableaux boisés (symétriques). Dans un deuxième temps à travers une décomposition d'un tableau boisé en un triplet composé de deux tableaux boisés et d'un arbre non-ambigu, nous montrons que les coins sont en bijection avec les *run* de taille 1 dans les permutations. Enfin, nous présentons les analogues polynomiaux de l'énumération des coins en proposant une idée de preuve.

La majorité des résultats de cette section ont fait l'objet de la publication [GGLZS16].

#### 4.1. Énumérations des coins

En premier lieu, nous établissons des relations entre les nombres de coins des tableaux de permutation, des tableaux alternatifs et des tableaux boisés. Pour cela, soit  $X$  un ensemble de tableaux, on note  $c(X) := \sum_{T \in X} c(T)$ .

PROPOSITION 4.4.1. *Soit  $n$  un entier naturel non nul. Alors*

$$c(\mathcal{TB}_n) = c(\mathcal{TP}_n) + (n-1)! \text{ et } c(\mathcal{TP}_n) = c(\mathcal{TA}_{n-1}) + (n-1)!.$$

DÉMONSTRATION. Les deux égalités sont vraies pour  $n = 1$ , supposons maintenant que  $n$  est au moins égal à deux. Étudions l'évolution des coins

dans la correspondance bijective de la proposition 4.1.8. Soit  $F$  un diagramme de Ferrers, en reprenant les notations précédant la proposition 4.1.8, alors  $c(F) = c(F')$  si  $F$  ne possède pas de coin dans la colonne la plus à gauche, sinon  $c(F) = c(F') + 1$ . Les coins qui sont dans la colonne la plus à gauche dans les tableaux boisés de taille  $n$ , sont en bijection avec les tableaux boisés de taille  $n - 1$ , la bijection consistant à supprimer le coin. Étant donné qu'il y a  $(n - 1)!$  tableaux boisés de taille  $n - 1$  il suit que

$$c(\mathcal{TB}_n) = c(\mathcal{TP}_n) + (n - 1)!$$

Un raisonnement analogue nous amène à compter le nombre de coins des tableaux de permutation de taille  $n$  qui sont dans la ligne la plus haute. Étant donné qu'ils sont en bijection avec les tableaux de permutation de longueur  $n - 1$ , il y en a également  $(n - 1)!$ , d'où la deuxième égalité

$$c(\mathcal{TP}_n) = c(\mathcal{TA}_{n-1}) + (n - 1)! \quad \square$$

Ainsi, il nous suffit de compter le nombre de coins pour un des trois types de tableaux. Pour cela, nous utilisons la bijection de Corteel et Nadeau [CN09]. Dans le cadre de la proposition 4.4.2, le bord sud-est est numéroté du nord-est au sud-ouest.

PROPOSITION 4.4.2 ([CN09, Theorem 1.(1)]). *Soit  $n$  un entier non nul. Les tableaux de permutation de longueur  $n$  sont en bijection avec les permutations de taille  $n$ , de plus, le pas numéro  $i$  du bord sud-est d'un tableau de permutation est horizontal (resp. vertical) si  $i$  est une descente (resp. montée) dans la permutation correspondante.*

Ainsi, le problème d'énumération des coins revient à un comptage sur les permutations.

REMARQUE 4.4.3. Étant donné que les montées et les descentes ne sont pas définies de manière usuelle, un coin ne correspond pas à un pic.

PROPOSITION 4.4.4. *À taille fixée, les nombres de coins dans les différents tableaux sont*

$$c(\mathcal{TP}_n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 1, \\ (n - 1)! \times \frac{n^2 + 4n - 6}{6}, & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

$$c(\mathcal{TA}_{n-1}) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 1, \\ (n - 1)! \times \frac{n^2 + 4n - 12}{6}, & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

$$c(\mathcal{TB}_n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 1, \\ n! \times \frac{n+4}{6}, & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

#### 4. Étude des coins dans les tableaux correspondant à l'ASEP

---

DÉMONSTRATION. Si  $n = 1$  il y a un unique tableau de chaque type, et seul le tableau boisé de taille 1 possède un coin. Supposons maintenant  $n \geq 2$ .

D'après la proposition 4.4.2, il nous suffit de compter pour chaque  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  le nombre de permutation telle que  $i$  est une montée et  $i + 1$  est une descente. Soit  $\sigma$  une permutation de taille  $n$ , on rappelle que par convention  $\sigma_{n+1} = n + 1$ . Notons  $t_i$  et  $t_{i+1}$  respectivement les antécédents de  $i$  et  $i + 1$ . Supposons  $i$  est une montée et que  $i + 1$  est une descente, c'est-à-dire que  $\sigma_{t_i} < \sigma_{t_i+1}$  et  $\sigma_{t_{i+1}} > \sigma_{t_{i+1}+1}$ . L'énumération se décompose en trois cas.

- Supposons  $t_{i+1} = t_i + 1$ , alors on a  $i - 1$  choix pour  $\sigma_{t_{i+1}+1}$ ,  $n - 2$  choix pour l'emplacement de la sous-suite  $\sigma_{t_i}\sigma_{t_{i+1}}\sigma_{t_{i+1}+1}$  et  $(n - 3)!$  choix pour le reste de la permutation, soit  $(i - 1)(n - 2)!$ .
- Supposons  $t_i = t_{i+1} + 1$ , il y a deux cas.
  - Si  $t_i = n$  il y a  $(n - 2)!$  choix pour le reste de la permutation,
  - Sinon on a  $n - i - 1$  choix pour  $\sigma_{t_{i+1}}$ ,  $n - 2$  choix pour l'emplacement de la sous-suite  $\sigma_{t_{i+1}}\sigma_{t_i}\sigma_{t_{i+1}}$  et  $(n - 3)!$  choix pour le reste de la permutation, soit  $(n - i - 1)(n - 2)!$  choix.

Au total, il y en a  $(n - i)(n - 2)!$ .

- Supposons  $|t_i - t_{i+1}| > 1$ , il y a également les mêmes deux cas.
  - Si  $t_i = n$ , il y a  $i - 1$  choix pour  $\sigma_{t_{i+1}+1}$ ,  $n - 2$  choix pour l'emplacement de  $\sigma_{t_{i+1}}\sigma_{t_{i+1}+1}$  et  $(n - 3)!$  pour le reste de la permutation, soit  $(i - 1)(n - 2)!$  choix.
  - Sinon, il y a  $i - 1$  choix pour  $\sigma_{t_{i+1}+1}$ ,  $n - i - 1$  choix pour  $\sigma_{t_{i+1}}$ ,  $(n - 3)(n - 2)$  choix pour l'emplacement de  $\sigma_{t_i}\sigma_{t_{i+1}}$  et  $\sigma_{t_{i+1}}\sigma_{t_{i+1}+1}$ , et  $(n - 4)!$  choix pour le reste de la permutation, c'est à dire  $(n - i - 1)(i - 1)(n - 2)!$  choix.

Au total il y en a  $(n - i)(i - 1)(n - 2)!$ .

Il ne reste plus qu'à tout sommer.

$$\begin{aligned}
c(\mathcal{TP}_n) &= \sum_{i=1}^{n-1} [(i - 1)(n - 2)! + (n - i)(n - 2)! + (n - i)(i - 1)(n - 2)!] \\
&= (n - 2)! \sum_{i=1}^{n-1} [(i - 1) + (n - i) + (n - i)(i - 1)] \\
&= (n - 2)! \sum_{i=1}^{n-1} [(n + 1)i - i^2 - 1] \\
&= (n - 2)! \left\{ \frac{(n - 1)n(n + 1)}{2} - \frac{(n - 1)n(2n - 1)}{6} - 1 \right\} \\
&= (n - 1)! \times \frac{n^2 + 4n - 6}{6}.
\end{aligned}$$

Enfin, en utilisant la proposition 4.4.1, on calcule facilement  $c(\mathcal{TA}_{n-1})$  et  $c(\mathcal{TB}_n)$ .  $\square$

La proposition 4.4.4 et la section 2 nous permettent de calculer le nombre moyen de transition possible dans l'ASEP.

COROLLAIRE 4.4.5. *Soit  $n$  un entier non nul, en utilisant les notations de la section 2 le nombre moyen d'endroits où un saut de particule est possible est*

$$\mathbb{E}(X) = 2 \frac{(n+1) + 4}{6} - 1 = \frac{n+2}{3}.$$

En utilisant la proposition 4.3.2 et la proposition 4.4.4, on en déduit le nombre de coins vides des tableaux boisés.

COROLLAIRE 4.4.6. *Soit  $n$  un entier non nul, le nombre de coins vides dans les tableaux boisés de taille  $n$  est*

$$n! \cdot \frac{n-2}{6}.$$

Concernant le type  $B$ , les nombres de coins vérifient les égalités suivantes.

PROPOSITION 4.4.7. *Soit  $n$  un entier naturel non nul. Alors*

$$c(\mathcal{TB}_n^{Sym}) = c(\mathcal{TP}_n^{Sym}) + 2^n(n-1)! \text{ et } c(\mathcal{TA}_{2n}) = 2c(\mathcal{TP}_n^{Sym}) + 2^{n-1}n!.$$

DÉMONSTRATION. Les deux égalités sont vraies pour  $n = 1$ , supposons maintenant que  $n$  est au moins égal à deux. Étudions l'évolution des coins dans la correspondance bijective de la proposition 4.1.9. Soit  $F$  un diagramme de Ferrers symétrique, en reprenant les notations précédant la proposition 4.1.9, alors  $c(F) = c(F'')$  si  $F$  ne possède pas de coin dans la colonne la plus à gauche, sinon  $c(F) = c(F'') + 2$ . Et les coins qui sont dans la colonne la plus à gauche dans les tableaux boisés symétriques de taille  $n$ , sont en bijection avec les tableaux boisés symétriques de taille  $n - 1$ , la bijection consistant à supprimer le coin et son symétrique. Étant donné qu'il y a  $2^{n-1}(n-1)!$  tableaux boisés de taille  $n - 1$  il suit que

$$c(\mathcal{TB}_n) = c(\mathcal{TP}_n) + 2 \times 2^{n-1}(n-1)!.$$

Traitons maintenant le cas de  $F''_{demi}$ , si  $F''$  n'a pas de coin dans la diagonale principale, alors  $c(F'') = 2c(F''_{demi})$  sinon  $c(F'') = 2c(F''_{demi}) + 1$ . Or le nombre de tableaux alternatifs symétriques ayant un coin dans la diagonale principale est égal au nombre de tableaux alternatifs n'ayant pas de coin dans la diagonale, la bijection consiste à supprimer ou à ajouter ce coin. Ainsi ils sont tous deux égaux à  $2^{n-1}n!$ . De ce fait

$$c(\mathcal{TA}_{2n}^{Sym}) = 2c(\mathcal{TP}_n^{Sym}) + 2^{n-1}n!. \quad \square$$

Pour interpréter les coins des tableaux de permutation de type  $B$  sur les permutations de type  $B$ , nous recourons à la bijection de Corteel et Kim [CK11]. Dans le cadre de la proposition 4.4.8, le bord sud-est est numéroté du nord-est au sud-ouest.

PROPOSITION 4.4.8 ([CK11, Proposition 4.1]). *Soit  $n$  un entier non nul. Les tableaux de permutation de type  $B$  de longueur  $n$  sont en bijection avec*

#### 4. Étude des coins dans les tableaux correspondant à l'ASEP

---

les permutations de type  $B$  de taille  $n$ , de plus, le pas numéro  $i$  du bord sud-est d'un tableau de permutation de type  $B$  est horizontal (resp. vertical) si  $i$  est une descente signée (resp. montée signée) dans la permutation signée correspondante.

De la même manière que dans le type  $A$ , on peut maintenant calculer le nombre de coins dans chacune des trois familles de tableaux de type  $B$ .

PROPOSITION 4.4.9. À taille fixée, les nombres de coins dans les différents tableaux de type  $B$  sont

$$c(\mathcal{PT}_n^B) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 1, \\ 2^{n-1}(n-1)! \times \frac{4n^2+7n-12}{12}, & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

$$c(\mathcal{AT}_{2n}^{Sym}) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 1, \\ 2^n(n-1)! \times \frac{4n^2+13n-12}{12}, & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

$$c(\mathcal{T}_{2n+1}^{Sym}) = \begin{cases} 3, & \text{si } n = 1, \\ 2^n n! \times \frac{4n+13}{12}, & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Si  $n = 1$ , il y a deux tableaux pour chaque famille. Les deux tableaux de permutation de type  $B$  n'ont pas de coin, un des deux tableaux alternatifs symétriques a un coin et les deux tableaux boisés symétriques ont respectivement un et deux coins. Supposons maintenant  $n$  au moins égal à 2.

D'après la proposition 4.4.8, il nous suffit de compter pour chaque  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  le nombre de permutations de type  $B$  dont  $i$  est une montée signée et  $i+1$  est une descente signée. Soit  $\sigma$  une permutation signée de taille  $n$ , on rappelle que par convention  $\sigma_{n+1} = n+1$ . Soient  $t_i$  et  $t_{i+1}$  tels que  $|\sigma_{t_i}| = i$  et  $|\sigma_{t_{i+1}}| = i+1$ . Supposons que  $i$  est une montée signée et que  $i+1$  est une descente signée, c'est-à-dire que  $0 < \sigma_{t_i} < |\sigma_{t_{i+1}}|$  et  $\sigma_{t_{i+1}} > \sigma_{t_{i+1}+1}$  ou  $\sigma_{t_{i+1}} < 0$ , il vient que  $\sigma_{t_i} = i$ . On peut décomposer l'énumération suivant le signe de  $\sigma_{t_{i+1}}$ .

- Supposons  $\sigma_{t_{i+1}} = -i-1$ .
    - Si  $t_{i+1} = t_i + 1$ , on a  $n-1$  choix pour placer  $\sigma_{t_i}\sigma_{t_{i+1}}$ , ainsi que  $2^{n-2}(n-2)!$  choix pour le reste de la permutation signée, soit  $2^{n-2}(n-1)!$ .
    - Si  $t_{i+1} \neq t_i + 1$ , il y a deux cas à considérer.
      - \* Si  $t_i = n$ , on a  $2^{n-2}(n-1)!$  choix pour le reste de la permutation signée.
      - \* Sinon, on a  $2(n-i-1)$  choix pour la valeur de  $\sigma_{t_{i+1}}$ ,  $n-1$  choix pour l'emplacement de  $\sigma_{t_i}\sigma_{t_{i+1}}$  et  $2^{n-3}(n-2)!$  choix pour le reste de la permutation signée, ce qui nous donne  $2^{n-2}(n-i-1)(n-1)!$ .
- On a donc un total de  $2^{n-2}(n-i)(n-1)!$  permutations signées.

- Supposons  $\sigma_{t_{i+1}} = i + 1 > |\sigma_{t_{i+1}+1}|$ .
  - Si  $t_{i+1} = t_i + 1$ , on a  $2(i-1)$  choix pour  $\sigma_{t_{i+1}+1}$ ,  $n-2$  choix pour l'emplacement de  $\sigma_{t_i}\sigma_{t_{i+1}}\sigma_{t_{i+1}+1}$  et  $2^{n-3}(n-3)!$  pour le reste de la permutation signée, soit  $2^{n-2}(i-1)(n-2)!$  choix.
  - Si  $t_i = t_{i+1} + 1$ , il y a deux cas.
    - \* Si  $t_i = n$ , il y a  $2^{n-2}(n-2)!$  choix.
    - \* Sinon, il y a  $2(n-i-1)$  choix pour  $\sigma_{t_{i+1}}$ ,  $n-2$  choix pour l'emplacement  $\sigma_{t_{i+1}}\sigma_{t_i}\sigma_{t_{i+1}}$  et  $2^{n-3}(n-3)!$  pour le reste de la permutation signée, soit  $2^{n-2}(n-i-1)(n-2)!$  choix.
 Ce qui nous fait  $2^{n-2}(n-i)(n-2)!$  permutations signées.
  - Si  $|t_i - t_{i+1}| > 1$ , il y a deux cas.
    - \* Si  $t_i = n$ , il y a  $2(i-1)$  choix pour  $\sigma_{t_{i+1}+1}$ ,  $(n-2)$  choix pour l'emplacement de  $\sigma_{t_{i+1}}\sigma_{t_{i+1}+1}$  et  $2^{n-3}(n-3)!$  choix pour le reste de la permutation signée, soit  $2^{n-2}(i-1)(n-2)!$  choix.
    - \* Sinon, il y en a  $2(i-1)$  choix pour  $\sigma_{t_{i+1}+1}$ ,  $2(n-i-1)$  choix pour  $\sigma_{t_{i+1}}$ ,  $(n-3)(n-2)$  pour l'emplacement de  $\sigma_{t_i}\sigma_{t_{i+1}}$  et  $\sigma_{t_{i+1}}\sigma_{t_{i+1}+1}$ , et  $2^{n-4}(n-4)!$  pour le reste de la permutation signée, à savoir  $2^{n-2}(n-i-1)(i-1)(n-2)!$ .
 Soit un total de  $2^{n-2}(n-i)(i-1)(n-2)!$ .

Il ne reste plus qu'à tout sommer,  $c(\mathcal{TP}_n^{Sym})$  est égal à

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{n-1} 2^{n-2} \{(n-1)! [1 + (n-i)] + (n-2)! [(i-1) + (n-i) + (n-i)(i-1)]\} \\
 &= 2^{n-2}(n-1)! \sum_{i=1}^{n-1} (1 + (n-i)) + 2^{n-2}(n-1)! \frac{n^2 + 4n - 6}{6} \\
 &= 2^{n-2}(n-1)! \left( \frac{n^2 + n}{2} - 1 \right) + 2^{n-2}(n-1)! \frac{n^2 + 4n - 6}{6} \\
 &= 2^{n-1}(n-1)! \frac{4n^2 + 7n - 12}{12}.
 \end{aligned}$$

Enfin, en utilisant la proposition 4.4.1, on calcule facilement  $c(\mathcal{TA}_{2n}^{Sym})$  et  $c(\mathcal{TB}_n^{Sym})$ .  $\square$

En utilisant la proposition 4.3.6 et la proposition 4.4.9, on en déduit le nombre de coins vides des tableaux boisés symétriques.

**COROLLAIRE 4.4.10.** *Soit  $n \geq 2$ , le nombre de coins vides dans les tableaux boisés symétriques de taille  $n$  est*

$$2^n n! \frac{4n+1}{12}.$$

## 4.2. Analogues polynomiaux

Dans la section 4.1 nous avons énuméré les coins dans les tableaux boisés, ainsi nous avons pu calculer l'espérance du nombre de transitions possibles depuis un état de l'ASEP dans le cas  $\alpha = \beta = q = 1$ . Nous présentons ici le cas  $q = 1$ , il a été conjecturé dans [GGLZS16] et résolu par Yan et Zhou [YZ17]. Les auteurs adaptent une bijection de Chen, Liou et Wang [CLW13] entre les tableaux de permutation et les partitions liées [Dyk07, CWY08], au cas des tableaux alternatifs. Ainsi, ils traduisent le problème d'énumération des coins sur les partitions liées puis le résolvent. Ils font de même pour le type  $B$ .

Étant donné que l'on connaît la série génératrice des coins occupés dans le cas  $q = 1$  (voir proposition 4.3.2) il nous suffit de calculer la série génératrice des coins vides. On note  $\mathfrak{C}\mathfrak{B}_n(\alpha, \beta)$  la série génératrice

$$\mathfrak{C}\mathfrak{B}_n(\alpha, \beta) = \sum_{TB \in \mathcal{TB}_n} cv(TB) p(TB)|_{q=1},$$

où  $cv(TB)$  est le nombre de coins vides du tableau boisé  $TB$ .

PROPOSITION 4.4.11 ([YZ17, Section 4]). *Soit  $n \geq 3$ , le  $(\alpha, \beta)$ -analogue de l'énumération des coins vides est*

$$\mathfrak{C}\mathfrak{B}_n(\alpha, \beta) = \left( (n-2)\underline{\alpha}\underline{\beta} + \binom{n-2}{2}(\underline{\alpha} + \underline{\beta}) + \binom{n-2}{3} \right) \cdot \mathfrak{TB}_{n-2}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}, 1).$$

Si on pose  $\alpha = \beta = 1$ , on retrouve le fait que

$$\mathfrak{C}\mathfrak{B}_n(1, 1) = n! \cdot \frac{n-2}{6}.$$

En reprenant les notations de la section 2, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \frac{2}{\mathfrak{TB}_{n+1}(\underline{\alpha}, \underline{\beta})} \left( \sum_{TB \in \mathcal{TB}_{n+1}} p(TB)c(TB) \right) - 1. \\ &= \frac{2}{\mathfrak{TB}_{n+1}(\underline{\alpha}, \underline{\beta})} \left( \sum_{TB \in \mathcal{TB}_{n+1}} p(TB)(cv(TB) + co(TB)) \right) - 1. \\ &= \frac{2((n-1)\underline{\alpha}\underline{\beta} + \binom{n-1}{2}(\underline{\alpha} + \underline{\beta}) + \binom{n-1}{3})}{(\underline{\alpha} + \underline{\beta} + n - 1)(\underline{\alpha} + \underline{\beta} + n - 2)} + 1 \\ &= \frac{6(n-1)\underline{\alpha}\underline{\beta} + 3(n-1)(n-2)(\underline{\alpha} + \underline{\beta}) + (n-1)(n-2)(n-3)}{3(\underline{\alpha} + \underline{\beta} + n - 1)(\underline{\alpha} + \underline{\beta} + n - 2)} + 1 \\ &= \frac{3(\underline{\alpha}^2 + \underline{\beta}^2) + 6n\underline{\alpha}\underline{\beta} + 3(n^2 - n - 1)(\underline{\alpha} + \underline{\beta}) + n(n-1)(n-2)}{3(\underline{\alpha} + \underline{\beta} + n - 1)(\underline{\alpha} + \underline{\beta} + n - 2)}. \end{aligned}$$

REMARQUE 4.4.12. Dans le cas  $q = u = 1$ , on peut déduire la série génératrice des tableaux escaliers à partir de celle des tableaux boisés

$$Z_n(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1, 1) = (\alpha + \gamma)^n (\beta + \delta)^n \mathfrak{TB}(\alpha + \gamma, \beta + \delta, 1)$$



car  $\alpha$  et  $\gamma$ , et  $\beta$  et  $\delta$  jouent des rôles symétriques, toutefois cela ne s'applique pas aux coins. En effet, un coin représente une particule noire suivie d'une particule blanche, au niveau des cellules sud-est d'un tableau escalier cela correspond à un symbole  $x \in \{\alpha, \delta\}$  suivie d'un symbole  $y \in \{\beta, \gamma\}$ .

À notre connaissance il n'existe pas de preuve de la proposition 4.4.11 directement sur les tableaux. Nous donnons néanmoins quelques élément de preuve en donnant une interprétation des termes

$$(n-2)\underline{\alpha}\underline{\beta} \cdot \mathfrak{TB}_{n-2}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}, 1)$$

et

$$\binom{n-2}{2}(\underline{\alpha} + \underline{\beta}) \cdot \mathfrak{TB}_{n-2}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}, 1).$$

De même que pour les coins occupés, soit  $CV$  un coin vide d'un tableau boisé  $TB$ , on définit le *poids* d'un coin vide comme étant

$$p(CV) := p(TB)|_{q=1}.$$

On note  $\mathcal{CV}_{\alpha,\beta}(\mathcal{TB}_n)$  l'ensemble des coins vides de  $\mathcal{TB}_n$  dont le seul point au-dessus dans la même colonne est un point haut, et dont le seul point à gauche dans la même ligne est un point gauche. L'ensemble des coins vides  $\mathcal{TB}_n$  dont le seul point au-dessus et dans la même colonne, est un point haut, ou dont le seul point à gauche dans la même ligne est un point gauche, mais pas les deux en même temps sont respectivement noté  $\mathcal{CV}_{\alpha,1}(\mathcal{TB}_n)$  et  $\mathcal{CV}_{1,\beta}(\mathcal{TB}_n)$ . Enfin, on note  $\mathcal{CV}_{1,1}(\mathcal{TB}_n)$  l'ensemble des coins vides de  $\mathcal{TB}_n$  restant. Les différentes variétés de coins vides sont représentées dans la figure 12.

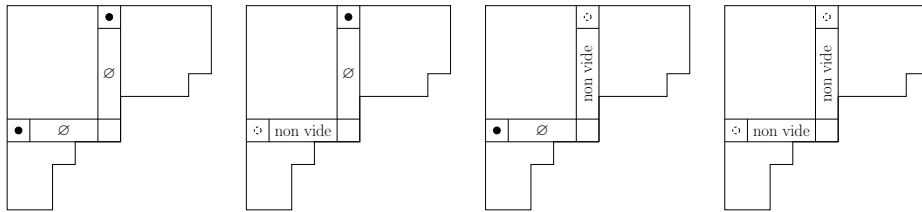


FIGURE 12. De gauche à droite, illustration de  $\mathcal{CV}_{\alpha,\beta}$ ,  $\mathcal{CV}_{\alpha,1}$ ,  $\mathcal{CV}_{1,\beta}$  et  $\mathcal{CV}_{1,1}$  (le symbole  $\diamond$  signifie que la cellule peut être indifféremment occupée ou vide.).

PROPOSITION 4.4.13. Soit  $n \geq 3$ , le  $(\alpha, \beta)$ -analogue de l'énumération de  $\mathcal{CV}_{\alpha,\beta}(\mathcal{TB}_n)$  est

$$\sum_{CV \in \mathcal{CV}_{\alpha,\beta}(\mathcal{TB}_n)} p(CV) = (n-2)\underline{\alpha}\underline{\beta} \cdot \mathfrak{TB}_{n-2}(\alpha, \beta).$$

DÉMONSTRATION. Pour prouver ce résultat, nous mettons en bijection  $\mathcal{CV}_{\alpha,\beta}(\mathcal{TB}_n)$  avec l'ensemble des couples  $(i, TB')$  où  $TB$  est un tableau boisé de taille  $n-2$  et  $i$  est un interstice entre deux pas consécutifs du bord sud-est

#### 4. Étude des coins dans les tableaux correspondant à l'ASEP

de  $TB'$ . Soit  $CV \in \mathcal{CV}_{\alpha,\beta}(\mathcal{TB}_n)$ , on note  $TB$  le tableau boisé auquel  $CV$  appartient. Le bord sud de  $CV$  correspond à un pas horizontal du bord sud-est de  $TB$ , on note  $j$  son numéro. Soit  $TB'$  le tableau boisé obtenu en supprimant la colonne correspondant au pas horizontal  $j$  et la ligne correspondant au pas vertical  $j+1$ . Le coin nord-ouest de  $CV$  correspond à un interstice  $i$  dans  $TB'$ . Réciproquement, on peut reconstruire un coin vide à partir de  $TB'$  et  $i$ . Cette construction est illustrée dans la figure 13. Enfin, au niveau du poids en  $\alpha$  et  $\beta$ , il est clair que  $p(CV) = \underline{\alpha}\underline{\beta} p(TB')$ , en outre, le bord sud-est d'un tableau boisé de taille  $n-2$  contient  $n-1$  pas, il y a donc  $n-2$  interstices, d'où le résultat.  $\square$

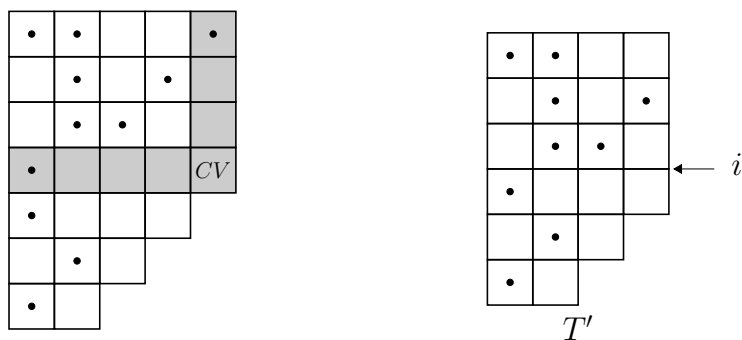


FIGURE 13. Illustration de la bijection entre les coins vides  $\mathcal{CV}_{\alpha,\beta}(\mathcal{TB}_n)$  et les tableaux boisés de taille  $n-2$  avec un interstice du bord sud-est marqué.

La deuxième quantité s'interprète quant à elle avec  $\mathcal{CV}_{\alpha,1}$  et  $\mathcal{CV}_{1,\beta}$ .

PROPOSITION 4.4.14. *Soit  $n \geq 3$ , le  $(\alpha, \beta)$ -analogue de l'énumération de  $\mathcal{CV}_{\alpha,1}(\mathcal{TB}_n)$  est*

$$\sum_{CV \in \mathcal{CV}_{\alpha,1}(\mathcal{TB}_n)} p(CV) = \underline{\alpha} \binom{n-2}{2} \mathfrak{TB}_{n-2}(\alpha, \beta),$$

et celui de  $\mathcal{CV}_{1,\beta}(\mathcal{TB}_n)$  est

$$\sum_{CV \in \mathcal{CV}_{1,\beta}(\mathcal{TB}_n)} p(CV) = \underline{\beta} \binom{n-2}{2} \mathfrak{TB}_{n-2}(\alpha, \beta).$$

Malheureusement, la preuve de ce résultat que nous proposons n'est pas une bijection entre ces coins vides et des couples  $(TB, i)$  où  $TB$  est un tableau boisé de taille  $n-2$  et  $i$  est compté par  $\binom{n-2}{2}$ . Nous aurons besoin du lemme 4.4.15. Notons  $A_{n,k}(\alpha, \beta)$  l'ensemble des tableaux boisés de taille  $n$  ayant  $k$  lignes. D'après [ABN13, Proposition 3.4], on sait déjà que  $A_{n,k}(1, 1)$  correspond aux nombres Eulériens et vérifie l'équation

$$A_{n+1,k}(1, 1) = kA_{n,k}(1, 1) + (n+2-k)A_{n,k-1}(1, 1).$$

Dans le cas général, on peut facilement adapter la preuve pour montrer que la récurrence linéaire vérifiée par  $A_{n,k}(\alpha, \beta)$  est

$$(30) \quad A_{n+1,k}(\alpha, \beta) = (\underline{\alpha} + k - 1)A_{n,k}(\alpha, \beta) + (\underline{\beta} + n + 1 - k)A_{n,k-1}(\alpha, \beta),$$

De même que dans [ABN13], nous considérons le polynôme Eulérien

$$\mathfrak{A}_n(t) := \sum_{k=1}^n A_{n,k}(\alpha, \beta)t^k.$$

Dans la suite,  $\mathfrak{A}'_n(t)$  désignera  $\partial_t \mathfrak{A}_n(t)$ .

LEMME 4.4.15. *Soit  $n \geq 2$ , alors*

$$\mathfrak{A}_n(1) = \mathfrak{TB}_n(\alpha, \beta)$$

et

$$\mathfrak{A}'_n(1) = (\underline{\alpha} + \underline{\beta}n + \binom{n}{2} - 1)\mathfrak{TB}_{n-1}(\alpha, \beta).$$

DÉMONSTRATION. La première identité est une conséquence de la définition de  $\mathfrak{A}_n(t)$ . En ce qui concerne la seconde, l'équation (30) induit la relation

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_n(t) &= (\underline{\alpha} - 1)\mathfrak{A}_{n-1}(t) + t\mathfrak{A}'_{n-1}(t) + (\underline{\beta} + n - 1)t\mathfrak{A}_{n-1}(t) - t^2\mathfrak{A}'_{n-1}(t) \\ &= (\underline{\alpha} - 1)\mathfrak{A}_{n-1}(t) + (\underline{\beta} + n - 1)t\mathfrak{A}_{n-1}(t) + t(1 - t)\mathfrak{A}'_{n-1}(t), \end{aligned}$$

avec comme condition initiale,  $\mathfrak{A}_1(t) = t$ . De ce fait, en dérivant et en évaluant en  $t = 1$  on obtient la récurrence suivante pour  $\mathfrak{A}'_n(1)$

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}'_n(1) &= (\underline{\alpha} - 1)\mathfrak{A}'_{n-1}(1) + (\underline{\beta} + n - 1)(\mathfrak{A}'_{n-1}(1) + \mathfrak{A}_{n-1}(1)) - \mathfrak{A}'_{n-1}(1) \\ &= (\underline{\alpha} + \underline{\beta} + n - 3)\mathfrak{A}'_{n-1}(1) + (\underline{\beta} + n - 1)\mathfrak{A}_{n-1}(1). \end{aligned}$$

Supposons  $n \geq 3$ , en divisant par  $\mathfrak{TB}_{n-1}(\alpha, \beta)$ , on obtient

$$\frac{\mathfrak{A}'_n(1)}{\mathfrak{TB}_{n-1}(\alpha, \beta)} = \frac{\mathfrak{A}'_{n-1}(1)}{\mathfrak{TB}_{n-2}(\alpha, \beta)} + (\underline{\beta} + n - 1).$$

Il suit que

$$\frac{\mathfrak{A}'_n(1)}{\mathfrak{TB}_{n-1}(\alpha, \beta)} = \frac{\mathfrak{A}'_2(1)}{\mathfrak{TB}_1(\alpha, \beta)} + (\underline{\beta} + n - 1) + \dots + (\underline{\beta} + 2).$$

Or  $\mathfrak{A}_2(1) = \underline{\alpha}t + \underline{\beta}t^2$  et  $\mathfrak{TB}_1(\alpha, \beta) = 1$ , ainsi

$$\mathfrak{A}'_n(1) = (\underline{\alpha} + \underline{\beta}n + \binom{n}{2} - 1)\mathfrak{TB}_{n-1}(\alpha, \beta) \quad \square$$

Si on pose  $\alpha = \beta = 1$  on retrouve bien  $A'_n(1) = \frac{(n+1)!}{2}$ . On peut maintenant prouver la proposition 4.4.14.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 4.4.14. Notons

$$f_n(\alpha, \beta) := \sum_{CV \in \mathcal{CV}_{\alpha,1}(\mathcal{TB}_n)} p(CV)$$

#### 4. Étude des coins dans les tableaux correspondant à l'ASEP

---

et

$$g_n(\alpha, \beta) := \sum_{CV \in \mathcal{CV}_{1,\beta}(\mathfrak{TB}_n)} p(CV).$$

La symétrie axiale d'axe la diagonale principale est une involution de  $\mathfrak{TB}_n$  et met en bijection  $\mathcal{CV}_{\alpha,1}$  et  $\mathcal{CV}_{1,\beta}$  en échangeant  $\alpha$  et  $\beta$ . De ce fait  $g_n(\alpha, \beta) = f_n(\beta, \alpha)$ , donc nous avons uniquement besoin de calculer  $f_n(\alpha, \beta)$ . Pour cela, nous mettons en bijection les coins vides  $\mathcal{CV}_{\alpha,\beta}(\mathfrak{TB}_n) \cup \mathcal{CV}_{\alpha,1}(\mathfrak{TB}_n)$  avec l'ensemble des couple  $(TB', l)$  où  $TB'$  est un tableau boisé de taille  $n-1$  et  $l$  est une ligne de  $TB'$  qui n'est pas la plus haute. Soit  $CV \in \mathcal{CV}_{\alpha,\beta}(\mathfrak{TB}_n) \cup \mathcal{CV}_{\alpha,1}(\mathfrak{TB}_n)$ , on note  $TB$  le tableau boisé de taille  $n$  auquel il appartient. Le bord sud de  $CV$  est un pas horizontal du bord sud-est de  $TB$ , on note  $j$  son numéro. Soit  $TB'$  le tableau boisé obtenu en supprimant la colonne de  $TB$  correspondant au pas  $j$ . Le pas numéro  $j$  du bord sud-est de  $TB'$  est un pas vertical qui correspond au bord ouest de  $CV$  dans  $TB$ . On note  $l$  la ligne de  $TB'$  correspondant à ce pas  $j$ ,  $l$  est nécessairement différente de la ligne la plus haute. Il est clair que cette opération est bijective, elle est illustrée dans la figure 14. Concernant le poids, on a la relation  $p(CV) = \underline{\alpha} p(TB')$ . On peut maintenant calculer  $f_n(\alpha, \beta)$ .

$$\begin{aligned} f_n(\alpha, \beta) &= \sum_{\substack{TB \in \mathfrak{TB}_{n-1} \\ l \text{ une ligne de } TB \\ \text{mais pas la plus haute}}} \underline{\alpha} w(T) - \sum_{CV \in \mathcal{CV}_{\alpha,\beta}(\mathfrak{TB}_n)} p(CV) \\ &= \underline{\alpha} \sum_{k=1}^{n-1} (k-1) A_{n-1,k}(\alpha, \beta) - (n-2) \underline{\alpha} \underline{\beta} \mathfrak{TB}_{n-2}(\alpha, \beta) \\ &= \underline{\alpha} (\mathfrak{A}'_{n-1}(1) - \mathfrak{A}_{n-1}(1)) - (n-2) \underline{\alpha} \underline{\beta} \mathfrak{TB}_{n-2}(\alpha, \beta) \\ &= \underline{\alpha} \left[ (\underline{\alpha} + (n-1) \underline{\beta} + \binom{n-1}{2} - 1) - (\underline{\alpha} + \underline{\beta} + n - 3) - (n-2) \underline{\beta} \right] \\ &\quad \times \mathfrak{TB}_{n-2}(\alpha, \beta) \\ &= \underline{\alpha} \binom{n-2}{2} \mathfrak{TB}_{n-2}(\alpha, \beta) \quad \square \end{aligned}$$

Pour donner une preuve de la proposition 4.4.11 il reste à traiter le cas de  $\mathcal{CV}_{1,1}(\mathfrak{TB}_n)$ . Réciproquement, étant donné que nous savons que le résultat est vrai, à partir des propositions 4.4.11 et 4.4.14 on peut en déduire le cas de  $\mathcal{CV}_{1,1}(\mathfrak{TB}_n)$ .

PROPOSITION 4.4.16. *Soit  $n \geq 3$ , le  $(\alpha, \beta)$ -analogue de l'énumération de  $\mathcal{CV}_{1,1}(\mathfrak{TB}_n)$  est*

$$\sum_{CV \in \mathcal{CV}_{1,1}(\mathfrak{TB}_n)} p(CV) = \binom{n-2}{3} \mathfrak{TB}_{n-2}(\alpha, \beta),$$

Dans le cas des tableaux boisés symétriques, on va également se concentrer sur les coins vides. La statistique que nous considérons pour obtenir un

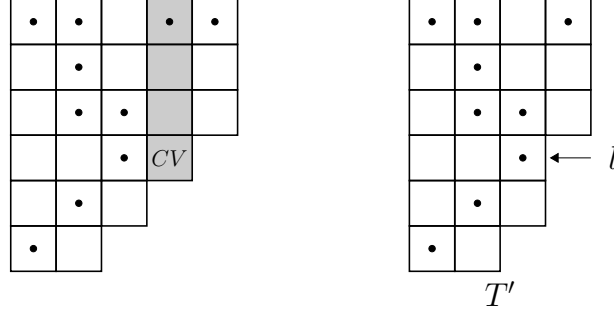


FIGURE 14. Illustration de la bijection entre les coins vides  $\mathcal{CV}_{\alpha,\beta}(\mathcal{TB}_n) \cup \mathcal{CV}_{\alpha,1}(\mathcal{TB}_n)$  et les tableaux boisés de taille  $n - 1$  avec une ligne marquée.

analogue polynomial de l'énumération des coins vides est le nombre de points gauches moins 1. Notons  $\mathfrak{TB}_n^{\text{Sym}}(u) = \mathfrak{TB}_n^{\text{Sym}}(u, 1; 1, 1)$  et  $\mathfrak{CV}_n^{\text{Sym}}(u)$  la série génératrice

$$\mathfrak{CV}_n^{\text{Sym}}(u) := \sum_{TB \in \mathcal{TB}_n^{\text{Sym}}} cv(TB) p(TB)|_{v=1, q=1, z=1}.$$

PROPOSITION 4.4.17 ([YZ17, Section 6]). *Soit  $n \geq 3$ , le  $u$ -analogue de l'énumération des coins vides dans les tableaux boisés symétriques de taille  $n$  est*

$$\mathfrak{CV}_n^{\text{Sym}}(u) = \left[ 2nu^2 + 2(2n^2 - 4n + 1)u + \frac{(n-2)(n-1)(4n-3)}{3} \right] \mathfrak{TB}_{n-2}^{\text{Sym}}(u).$$

De même que pour les tableaux boisés, on peut calculer la série génératrice de certains types de coins vides. Par exemple, si on considère les coins vides  $\mathcal{CV}_{\alpha,\beta}(\mathcal{TB}_n^{\text{Sym}})$  qui ne sont pas sur la diagonale principale, ils vont par deux, et si on applique symétriquement la construction de la preuve de la proposition 4.4.11 on obtient

$$2(n-1)u^2 \mathfrak{TB}_{n-2}^{\text{Sym}}(u).$$

Les coins vides  $\mathcal{CV}_{\alpha,1}(\mathcal{TB}_n^{\text{Sym}})$  et  $\mathcal{CV}_{1,\beta}(\mathcal{TB}_n^{\text{Sym}})$  sont plus faciles à gérer dans le cas symétrique car le nombre de lignes d'un tableau boisé symétrique de taille  $n$  est toujours égal à  $n+1$ . De plus, le symétrique d'un coin vide de  $\mathcal{CV}_{\alpha,1}(\mathcal{TB}_n^{\text{Sym}})$  est dans  $\mathcal{CV}_{1,\beta}(\mathcal{TB}_n^{\text{Sym}})$ . On les compte donc par paires, en appliquant le même raisonnement que pour les tableaux, boisés la série génératrice que l'on trouve est

$$2u(n-1)\mathfrak{TB}_{n-1}^{\text{Sym}}(u) - 2(n-1)u^2 \mathfrak{TB}_{n-2}^{\text{Sym}}(u).$$

soit

$$2u(n-1)^2 \mathfrak{TB}_{n-2}^{\text{Sym}}(u).$$

Enfin, la série génératrice des coins qui sont sur la diagonale principale est

$$\frac{1}{2} \mathfrak{TB}_n^{\text{Sym}}(u) = 2(u+n-1)(u+n-2) \mathfrak{TB}_{n-2}^{\text{Sym}}(u).$$

En résumé, on obtient

$$[2nu^2 + 2(n^2 - 2)u + (n - 1)(n - 2)] \mathfrak{TB}_{n-2}^{Sym}(u).$$

La série génératrice des coins restants est donc,

$$\left[ 2(n - 1)(n - 3)u + \frac{4n(n - 1)(n - 2)}{3} \right] \mathfrak{TB}_{n-2}^{Sym}(u).$$

### 4.3. Bijection entre les coins et les *run* de taille 1

Si on rentre les premiers termes de la suite du nombre de coins dans les tableaux boisés de taille  $n$  dans le moteur de recherche de [Slo], on tombe sur la suite [Slo, A097900]. Elle énumère le nombre de *run* de taille 1 dans les permutations de taille  $n$ . De manière général, Knuth [Knu98a, Section 3.3.2] montre que pour  $0 < r < n$  le nombre de *run* de taille  $r$  dans les permutations de taille  $n$  est

$$\frac{n(r(r + 1) - 1) - r(r - 2)(r + 2) + 1}{(r + 2)!} \cdot n!,$$

en particulier pour  $r = 1$  on retrouve bien la formule d'énumération de la proposition 4.4.4.

Un *run* de taille  $r$  d'une permutation  $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_n$  est un bloc  $\sigma_m \cdots \sigma_{m+r-1}$  telle que

$$\sigma_{m-1} > \sigma_m < \cdots < \sigma_{m+r-1} > \sigma_{m+r},$$

avec les conventions  $\sigma_0 = n + 1$  et  $\sigma_{n+1} = 0$ . En particulier,  $\sigma_i$  est un *run* de taille 1 si  $\sigma_{i-1} > \sigma_i > \sigma_{i+1}$ . Il est à noter que les *run* de taille 1 ne correspondent pas exactement aux doubles descentes à cause des conditions au bords.

La bijection entre les coins et les *run* de taille 1 se fait en deux étapes, le lemme 4.4.18 et le lemme 4.4.20. On rappelle qu'un arbre non-ambigu (définition 5.1.1) de dimension géométrique  $i \times j$  est un tableau boisé de forme rectangulaire à  $i$  lignes et  $j$  colonnes.

LEMME 4.4.18. *Soit  $n \geq 1$ , les coins de  $\mathcal{TB}_n$  sont en bijection avec les triplets  $(TB_G, TB_D, ANA)$  où*

- $TB_G$  est un tableau boisé de taille  $n_G$ ,
- $TB_D$  est un tableau boisé de taille  $n_D$
- $n_G + n_r + 1 = n$ ,
- $ANA$  est un arbre non-ambigu de dimension géométrique

$$(\text{pg}(TB_D) + 2) \times (\text{ph}(TB_G) + 2).$$

DÉMONSTRATION. La preuve s'inspire de la construction *l-cut procedure* définie par Aval, Boussicault, Bouvel et Silimbani [ABBS14]. Soit  $C$  un coin d'un tableau boisé  $TB$  de taille  $n$ . On commence par découper  $TB$  le long des lignes correspondant au bord sud et au bord est de  $C$ , comme illustré dans la partie gauche de la figure 15. On appelle  $G$  la partie du bas,  $M$  la partie du milieu et  $D$  la partie de droite. Pour obtenir  $TB_G$  à partir de  $G$ , on ajoute

une ligne au dessus de  $G$  dont la taille est égale au nombre de colonne de  $M$  moins un. Il y a une unique manière d'ajouter des points à cette ligne pour que  $TB_G$  soit un tableau boisé, on les ajoute dans les cellules correspondant aux colonnes non vides de  $M$ . De façon analogue, on construit  $TB_D$  à partir de  $D$  en ajoutant une colonne avec des points à sa gauche.  $TB_G$  et  $TB_D$  sont deux tableaux boisés dont la somme des tailles des bord sud-est est égal à celle de  $TB$ , de ce fait  $n_G + n_D + 1 = n$ . Enfin, en supprimant les lignes vides et les colonnes vides de  $M$  on obtient un arbre non-ambigu  $ANA$ . C'est trois constructions sont représentées dans la partie droite de la figure 15. Cette application est bien bijective et le triplet obtenu vérifie bien les conditions demandées.  $\square$

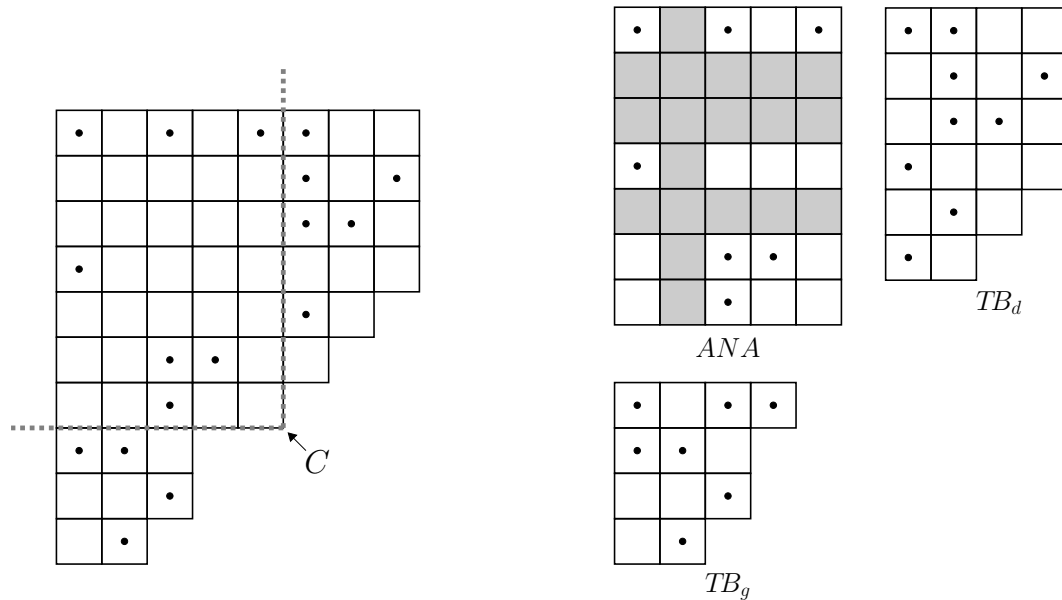


FIGURE 15. Illustration de la bijection entre les coins et les triplets  $(TB_G, TB_D, ANA)$  composés de deux tableaux boisés et d'un arbre non-ambigu (pour obtenir  $ANA$  les cellules grises doivent être supprimées).

Pour la prochaine étape de la bijection nous avons besoin d'un résultat du chapitre 5 et de sa reformulation avec des entiers rouges et bleus.

PROPOSITION 4.4.19 (Corollaire 5.3.7). *Soit  $l$  et  $h$  deux entiers naturels, les arbres non-ambigus à  $h + 1$  lignes et  $l + 1$  colonnes sont en bijection avec les permutations de*

$$\{1_b, 2_b, \dots, l_b, 0_r, 1_r, \dots, h_r\},$$

*dont le dernier élément est rouge et telles que deux éléments consécutifs de la même couleur sont dans l'ordre croissant.*

#### 4. Étude des coins dans les tableaux correspondant à l'ASEP

---

DÉMONSTRATION. Ce n'est pas exactement le résultat du chapitre 5. Au niveau des notations, on a  $h + 1 = dg_G$  et  $l + 1 = dg_D$ . Les transformations à effectuer pour obtenir la proposition 4.4.19 sont :

- lire la permutation de droite à gauche de sorte que les blocs d'une même couleur soit croissant au lieu d'être décroissant,
- mettre le  $1_b$  en première position à gauche, puis supprimer les parenthèses et  $1_b$ .
- enlever un à tous les entier. □

LEMME 4.4.20. *Les triplets  $(TB_G, TB_D, ANA)$  qui vérifient les conditions du lemme 4.4.18 sont en bijection avec les run de taille 1.*

DÉMONSTRATION. L'idée de la preuve est de construire une permutation  $\sigma$  de taille  $n$  à partir d'un triplet  $(TB_G, TB_D, ANA)$  de sorte que  $\sigma$  est un run de taille 1 en  $n_G + 1$ .  $TB_G$  encode la permutation des valeurs plus petites que  $n_G + 1$ ,  $TB_D$  encode la permutation des valeurs plus grandes que  $n_G + 1$  et  $ANA$  encode l'entrelacement de ces deux permutations et de  $n_G + 1$ .

Burstein [Bur07] montre par l'intermédiaire des *bare tableaux* que les tableaux boisés de taille  $n$  avec  $k$  points dans la première colonne sont en bijection avec les permutations de taille  $n$ . Une description de cette bijection est donnée dans le chapitre 5 section 3.2. En utilisant la symétrie axiale d'axe la diagonale principale, ce résultat est encore vrai si on considère plutôt les points sur la première ligne. On note  $l$  le nombre de colonnes de  $ANA$  moins une et  $h$  son nombre de lignes moins une, de sorte que  $l = \text{ph}(TB_G) + 1$  et  $l = \text{pg}(TB_D) + 1$ . On note  $\sigma^G$  la permutation associée à  $TB_G$  et  $\sigma^D$  celle associée à  $TB_D$ . Soit  $G_1, \dots, G_l$  les cycles disjoints de  $\sigma^G$  tels que pour  $i < j$ , l'entier maximal de  $G_i$  soit plus petit que l'entier maximal de  $G_j$ . De même, on définit  $D_1, \dots, D_h$  comme étant les cycles disjoints de  $\sigma^D$  en gardant la même condition de croissance. De plus, on ajoute  $n_G + 1$  aux entiers composant les cycles  $D_1, \dots, D_h$ . On représente un cycle sans ses parenthèses et avec son plus grand élément en première position. Par exemple, supposons que  $\sigma_G = (6)(7523)(9184)$  alors  $G_1 = 6$ ,  $G_2 = 7523$  et  $G_3 = 9184$ . Soit  $m$  la permutation qui correspond à  $ANA$  par la proposition 4.4.19. Si  $0_r$  n'est pas la dernière lettre de  $m$  et si la lettre après  $0_r$  n'est pas rouge, alors  $m$  s'écrit de manière unique

$$m = u0_r b_{1b} r_{1r} b_{2b} r_{2r} \cdots b_{pb} r_{pr},$$

où  $u$  peut être le mot vide, et les blocs  $r_{ir}$  (resp.  $b_{ib}$ ) sont des blocs non vides croissants d'entiers rouges (resp. bleu), Et dans ce cas on remplace  $m$  par le mot  $m^*$  obtenu en échangeant les blocs  $b_{ib}$  et  $r_{ir}$  pour tout  $i$  ( $1 \leq i \leq p$ ), soit

$$m^* = u0_r r_{1r} b_{1b} r_{2r} b_{2b} \cdots r_{pr} b_{pb}.$$

Cette opération est bien entendu bijective.

On termine la construction de  $\sigma$  en substituant  $n_l + 1$  à  $0_r$ ,  $L_i$  à  $i_r$  et  $R_i$  à  $i_b$ . Par exemple, si

$$m = 2_b 3_b 2_r 3_r 1_b 4_b 0_r 1_r$$



on obtient le *run* de taille 1

$$15\ 17\ 11\ 16\ 7\ 5\ 2\ 3\ 9\ 1\ 8\ 4\ 14\ 12\ 13\ 19\ 18\ \underline{10}\ 6.$$

Un autre exemple, si

$$m = 1_r 4_b 0_r 12_b 2_r 3_b 3_r$$

alors

$$m^* = 1_r 4_b 0_r 2_r 12_b 3_r 3_b$$

ce qui nous donne

$$6\ 19\ 18\ \underline{10}\ 7\ 5\ 2\ 3\ 14\ 12\ 13\ 15\ 9\ 1\ 8\ 4\ 17\ 11\ 16.$$

Soit  $\sigma_i$  un *run* de taille 1 d'une permutation  $\sigma$ , la bijection inverse consiste à utiliser la « transformation fondamentale » de Foata et Schützenberger sur chaque bloc maximal d'entiers plus petit (resp. grand) que  $\sigma_i$ . De cette manière, on peut identifier les  $G_i$  (resp.  $D_i$ ) et donc reconstruire  $\sigma^G$  (resp.  $\sigma^D$ ) et ANA. Par exemple, si on considère le *run*

$$4\ 2\ 6\ 11\ 9\ 12\ \underline{8}\ 3\ 7\ 1\ 5\ 10,$$

on obtient

$$\underbrace{4\ 2}_{L_{2_r}} \underbrace{6}_{L_{3_r}} \underbrace{11\ 9}_{R_{2_b}} \underbrace{12}_{R_{3_b}} \underbrace{8}_{0_r} \underbrace{3}_{L_{1_r}} \underbrace{7\ 1\ 5}_{L_{4_r}} \underbrace{10}_{R_{1_b}},$$

ainsi

$$\sigma^G = (3)(4\ 2)(6)(7\ 1\ 5), \quad \sigma^D = (2)(3\ 1)(4),$$

$$m^* = 2_r 3_r 2_b 3_b 0_r 1_r 4_r 1_b, \quad m = 2_r 3_r 2_b 3_b 0_r 1_b 1_r 4_r$$

□

Comme annoncé, on déduit des lemmes 4.4.18 et 4.4.20 la proposition suivante.

PROPOSITION 4.4.21. *Soit  $n$  un entier naturel non nul, les coins des tableaux boisés de taille  $n$  sont en bijection avec les *run* de taille 1 dans les permutations de taille  $n$ .*

On vient de montrer que les statistiques du nombre de coins et de *run* sont équiénumérées. Cependant, elles ne sont pas équidistribuées. Par exemple, le nombre de *run* de taille 1 de la permutation 321 est 3 mais aucun tableau boisé de taille 3 ne contient 3 coins.

## Partie 2

# Arbres non-ambigus



# AUTOUR DE L'ÉNUMÉRATION ET DE LA SÉRIE GÉNÉRATRICE DES ARBRES NON-AMBIGUS

---

L'*ansatz* matriciel de Derrida, Evans, Hakim et Pasquier [DEHP93] nous fournit un outil pour montrer que certains objets combinatoires donnent une interprétation des probabilités stationnaires des états de l'ASEP. Les tableaux de permutation (définition 4.1.1), les tableaux alternatifs (définition 4.1.3), les tableaux boisés (définition 4.1.5) et les tableaux escaliers (définition 2.2.1) que nous avons vus dans la partie précédente en sont des exemples. On remarque que tous ces tableaux ont une structure arborescente sous-jacente. Dans le cas des tableaux de permutation, elle n'est pas immédiatement apparente. Burstein [Bur07] la met en évidence en supprimant les 0 ainsi que les 1 superflus des tableaux de permutation, il nomme d'ailleurs les tableaux obtenus les *bare tableaux*. Puis, il met en bijection ces tableaux avec des forêts d'arbres binaires étiquetés dont les étiquettes suivent des conditions de croissance et de décroissance. Il utilise cette correspondance pour définir une nouvelle bijection entre les tableaux de permutation et les permutations. Nadeau [Nad11] approfondit cette construction à travers les tableaux alternatifs qui sont plus faciles à manipuler. Enfin, en introduisant les tableaux boisés [ABN13], Aval, Boussicault et Nadeau mettent en avant cette structure arborescente, c'est d'ailleurs pour cela qu'ils ont été nommés ainsi. Les auteurs définissent un algorithme d'insertion qui construit un tableau boisé de taille  $n + 1$  à partir d'un tableau boisé de taille  $n$  et du choix d'une de ses  $n + 1$  arêtes du bord sud-est. D'une part, cette bijection donne une correspondance simple entre le paramètre  $q$  de l'ASEP et les motifs 2 – 31 des permutations. D'autre part, en découle également une bijection simple entre les tableaux boisés et les arbres binaires décroissants, conservant la structure d'arbre binaire sous-jacente aux deux objets. Contrairement aux cas précédents, la condition de décroissance est cette fois-ci simple. Dans le cas général, Corteel, Stanley,

---

Stanton et Williams [CSSW12] signalent que l'on peut adapter les techniques de Nadeau aux structures arborescentes sous-jacentes des tableaux escaliers. Enfin, Aval, Boussicault et Dasse-Hartaut [ABDH13] mettent en évidence que les structures arborescentes des tableaux escaliers correspondent à celles déjà présentes dans le cas  $\gamma = \delta = 0$ . Les auteurs mettent en bijection les tableaux escaliers avec des tableaux boisés étiquetés et généralisent l'algorithme d'insertion des tableaux boisés. Toutefois, le poids en  $q$  des tableaux escaliers s'interprète difficilement dans les tableaux boisés étiquetés, limitant ainsi les conséquences positives de la généralisation de l'algorithme d'insertion.

On peut expliquer ce phénomène à l'aide de la théorie du *ansatz* cellulaire développée par Viennot [Vie13]. Elle est brièvement expliquée dans l'introduction du chapitre 2. Si on se donne des équations au plus quadratiques vérifiant certaines propriétés, cette théorie permet de construire automatiquement une famille de tableaux satisfaisant ces équations. Dans le cas  $\gamma = \delta = 0$ , l'*ansatz* matriciel de Derrida *et al.* rentre dans le cadre de cette théorie. En particulier, les tableaux alternatifs et les tableaux boisés peuvent être obtenus de cette manière. La structure arborescente des tableaux que l'on obtient est due à l'équation  $DE = qED + D + E$  et plus précisément à la partie  $DE = \dots + D + E$ . Si bien que si l'on pose  $q = 0$  les tableaux que l'on obtient sont en bijection simple avec les arbres binaires. Dans le cas général, il est possible d'adapter l'*ansatz* matriciel pour pouvoir lui appliquer la construction de Viennot. Toutefois, il faut pour cela poser  $q = 1$ . Les tableaux boisés étiquetés peuvent être obtenus ainsi.

Les arbres non-ambigus ont été introduits par Aval, Boussicault, Bouvel et Silimbani [ABBS14]. Ils correspondent aux tableaux boisés de forme rectangulaire, ils incarnent donc les structures arborescentes résultant de l'ASEP. Ils correspondent également aux façons de dessiner un arbre binaire sur une grille en respectant des règles de « non ambiguïté ». Ces règles expliquent comment dessiner des arbres binaires sur la grille de façon à ne pas perdre d'information sur la structure arborescente de l'arbre. Nous présentons dans ce chapitre une suite à l'étude de ces objets. Nous proposons notamment une nouvelle vision des arbres non-ambigus en tant qu'arbres binaires étiquetés. Cette nouvelle définition est plus facile à manipuler que la définition géométrique originelle. Elle nous permet d'utiliser des techniques de Hivert, Novelli et Thibon [HNT08]. Ainsi, nous redémontrons la formule des équerres permettant de compter les arbres non-ambigus à arbre binaire fixé et nous définissons des équations différentielles satisfaites par leur série génératrice. En les résolvant, nous obtenons des formules closes de la série génératrice ainsi que de la formule d'énumération des arbres non-ambigus à rectangle fixé. Le formalisme algébrique de [HNT08] nous permet de formuler facilement un raffinement de notre démarche consistant à prendre en compte des paramètres supplémentaires. Dans un premier temps, nous étudions les statistiques correspondant aux paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  de l'ASEP. Nous obtenons ainsi des  $(\alpha, \beta)$ -analogues intéressants des formules

closets obtenues précédemment. Dans un deuxième temps, nous prenons en compte le nombre d'inversions ou l'indice majeur inverse de permutations sous-jacentes aux arbres non-ambigus. Il en découle un analogue polynomial de la formule des équerres ainsi qu'un raffinement de l'équation différentielle faisant intervenir des  $q$ -analogues de l'intégrale et de la dérivée. Pour pouvoir donner une interprétation combinatoire aux termes composant les  $(\alpha, \beta)$ -analogues que nous trouvons, nous définissons une nouvelle notion sur les arbres binaires : les équerres. Une équerre est composée d'un sommet, de sa branche gauche et de sa branche droite, si bien qu'il n'existe qu'une seule façon de partitionner un arbre binaire en équerres. Cette décomposition appliquée aux arbres non-ambigus donne une interprétation combinatoire élégante du raffinement avec  $\alpha$  et  $\beta$ .

La formule d'énumération comptant les arbres non-ambigus à rectangle fixé dans le cas  $\alpha = \beta = 1$  peut être déduite du travail de Clark et Ehrenborg [CE10]. Ils en donnent une interprétation combinatoire en étudiant les permutations dont toutes les excédences sont au début. Une bijection entre ces deux familles d'objets est donnée par Burstein dans [Bur07], nous la décrivons dans la section 3. Elle peut également s'interpréter comme une bijection entre les arbres non-ambigus et les cycles bicolores et bidécroissants (définition 5.3.8). Cette interprétation nous permet notamment de définir une bijection entre notre statistique du nombre d'équerres, de l'unique décomposition en équerres, et la  $CE$ -statistique (définition 5.4.1) sur les permutations apparaissant dans [CE10].

Ce chapitre est organisé en cinq sections. Nous commençons par la section 1 en présentant les arbres non-ambigus vus comme des arbres binaires. Puis, dans la section 2 nous adaptons les méthodes de l'article [HNT08] au cas des arbres non-ambigus. Une fois en prenant en compte uniquement la taille des objets, puis deux autres fois en considérant des statistiques supplémentaires, de sorte à raffiner les résultats initiaux. En section 3, nous exposons des bijections impliquant les arbres non-ambigus, les arbres bicolores et bidécroissants, les cycles bicolores et bidécroissants ainsi que les permutations dont toutes les excédences sont au début. Elles permettent de prouver combinatoirement certains résultats de la section 2. Ensuite, nous relierons notre travail à celui de Clark et Ehrenborg (section 4) en montrant l'équidistribution de la statistique du nombre d'équerres et de la  $CE$ -statistique. Enfin, dans la section 5, nous mettons en bijection la nouvelle statistique sur les arbres binaires avec le nombre de sommets dans les arbres ordonnés dont au moins un fils est une feuille.

La plupart des résultats contenus dans ce chapitre ont été obtenus en collaboration avec Aval, Boussicault, Delcroix-Oger et Hivert. Ils ont fait l'objet de l'article [ABD<sup>+</sup>16].

## 1. Définition des arbres non-ambigus

Initialement, les arbres non-ambigus ont été définis de manière géométrique ([ABBS14]) de la façon suivante.

DÉFINITION 5.1.1. Soit  $n$  un entier naturel non nul. Un *arbre non-ambigu géométrique ANA* de taille  $n$  est un ensemble fini de  $n$  points  $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  vérifiant les conditions suivantes :

- (1)  $(0, 0) \in ANA$ , on appelle ce point la *racine*.
- (2) Soit  $(x, y) \in ANA$  un point différent de la racine, alors il existe un point  $(x', y') \in ANA$  tel que  $x = x'$  et  $y > y'$ , ou il existe un point  $(x'', y'') \in ANA$  tel que  $x > x''$  et  $y = y''$ , mais pas les deux à la fois.
- (3) Les ensembles  $\{x, (x, y) \in ANA\}$  et  $\{y, (x, y) \in ANA\}$  sont des intervalles d'entiers commençant en 0.

Pour simplifier la description d'objets combinatoires intervenant dans l'étude des arbres non-ambigus en section 2.3, nous utiliserons plutôt la définition équivalente 5.1.2.

DÉFINITION 5.1.2. Soit  $dg_G$  et  $dg_D$  des entiers naturels non nuls. Un *arbre non-ambigu géométrique ANA* de *dimension géométrique*  $dg_G \times dg_D$  est un ensemble de points  $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  vérifiant les conditions suivantes.

- (1)  $(dg_G, dg_D) \in ANA$ , on appelle ce point la *racine*.
- (2) Soit  $(x, y) \in ANA$  un point différent de la racine, alors il existe un point  $(x', y') \in ANA$  tel que  $x = x'$  et  $y < y'$ , ou il existe un point  $(x'', y'') \in ANA$  tel que  $x < x''$  et  $y = y''$ , mais pas les deux à la fois.
- (3) Les ensembles  $\{x, (x, y) \in ANA\}$  et  $\{y, (x, y) \in ANA\}$  sont respectivement égaux à  $\llbracket 1, dg_G \rrbracket$  et  $\llbracket 1, dg_D \rrbracket$ .

La *taille* d'un arbre non-ambigu géométrique est égal à son nombre de points.

Les deux définitions sont équivalentes. Pour passer de l'une à l'autre, il suffit d'appliquer le changement de variable  $x \mapsto dg_G - x$  et  $y \mapsto dg_D - y$ . Contrairement à la convention habituelle, l'axe des abscisses sera l'axe vertical et celui des ordonnées sera l'axe horizontal. La figure 1 donne des exemples et des contre-exemples d'arbres non-ambigus géométriques. En effet, notons  $E_1, E_2, E_3$  et  $E_4$  les quatre ensembles de points apparaissant dans la figure, en les parcourant de gauche à droite et de haut en bas. Tout d'abord,  $E_1$  ne vérifie pas la condition 5.1.2.(3). En ce qui concerne  $E_2$  et  $E_3$ , c'est la condition 5.1.2.(2) qui n'est pas vérifiée. Enfin, le dessin de  $E_4$  suppose que l'on veuille un arbre non-ambigu géométrique de dimension géométrique  $3 \times 2$ , donc  $E_4$  ne vérifie pas les conditions 5.1.2.(1) et 5.1.2.(2). Il existe une relation simple entre la taille et la dimension géométrique d'un arbre non-ambigu géométrique. Notons  $dg_G(ANA)$  et  $dg_D(ANA)$  les dimensions géométriques gauche et droite d'un arbre non-ambigu géométrique  $ANA$ .

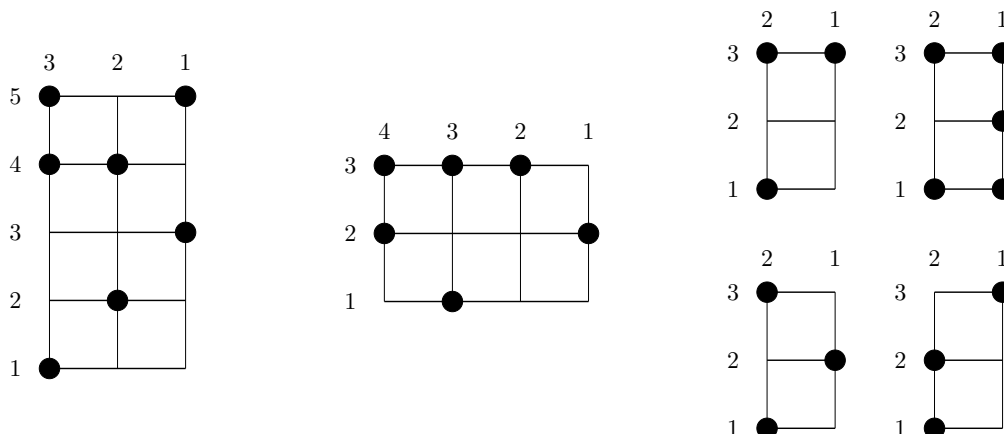


FIGURE 1. De gauche à droite : un arbre non-ambigu géométrique de taille 7 et de dimension géométrique  $5 \times 3$ , un arbre non-ambigu géométrique de taille 6 et de dimension géométrique  $3 \times 4$ , puis quatre contre-exemples d'arbres non-ambigus géométriques.

PROPOSITION 5.1.3. Soit  $n$  un entier naturel non nul, soit  $ANA$  un arbre non-ambigu géométrique de taille  $n$ , alors

$$n = dg_G(ANA) + dg_D(ANA) - 1.$$

DÉMONSTRATION. La condition 5.1.2.(3) nous dit que l'ensemble des abscisses des points de  $ANA$  est  $\llbracket 1, dg_G(ANA) \rrbracket$  et l'ensemble de leurs coordonnées est  $\llbracket 1, dg_D(ANA) \rrbracket$ . À tout abscisse  $x \in \llbracket 1, dg_G(ANA) \rrbracket$  on associe le point d'abscisse  $x$  et d'ordonnée maximale. De même, à toute ordonnée  $y \in \llbracket 1, dg_D(ANA) \rrbracket$ , on associe le point d'ordonnée  $y$  et d'abscisse maximale. La condition 5.1.2.(2) implique que tout point est associé à une abscisse ou à une ordonnée, mais que seule la racine est associée à une abscisse et à une ordonnée à la fois. Par conséquent

$$n + 1 = dg_G(ANA) + dg_D(ANA). \quad \square$$

Soit  $ANA$  un arbre non-ambigu géométrique, les conditions 5.1.2.(1) et 5.1.2.(2) nous permettent de définir une structure d'arbre binaire sur  $ANA$ , que l'on appelle *forme* de  $ANA$ . En effet, on définit la racine comment étant le point racine, puis, pour chaque point non racine, on définit le point donné par la condition 5.1.2.(2) comme étant son père. Par exemple, la figure 2 représente les deux arbres non-ambigus géométriques de la figure 1 auxquels on a ajouté des arêtes entre chaque point et son père. Dorénavant nous dessinerons toujours les arêtes de la structure arborescente sous-jacente.

REMARQUE 5.1.4. Les conditions 5.1.2.(1), 5.1.2.(2) et 5.1.2.(3) correspondent exactement aux conditions 4.1.5.(1), 4.1.5.(2) et 4.1.5.(3) de la définition des tableaux boisés. Ainsi, les arbres non-ambigus géométriques correspondent aux structures arborescentes apparaissant dans les tableaux boisés.



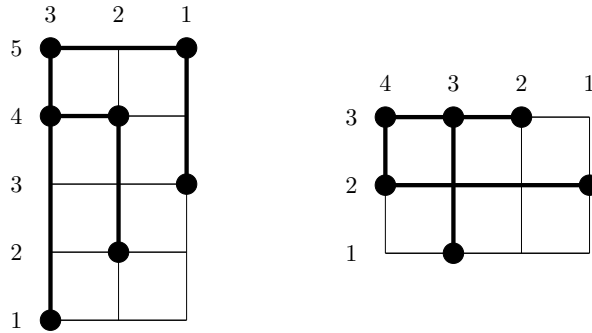


FIGURE 2. Illustration de la structure arborescente des arbres non-ambigus géométriques de la figure 1.

Dans la suite, nous utiliserons également un autre objet équivalent aux arbres non-ambigus géométriques, il est donné par la définition 5.1.5 que nous avons introduite dans [ABD<sup>+</sup>16]. Dans cette nouvelle vision, on s'extrait de la représentation géométrique, en étiquetant les sommets de l'arbre binaire sous-jacent, par leurs coordonnées respectives. Pour pouvoir l'énoncer, on a besoin de définir qu'un sommet qui est un fils gauche (resp. droit), est un *sommet gauche* (resp. *sommet droit*), et on dit qu'il est de type *gauche* (resp. *droit*). Sauf mention du contraire, le type de la racine n'est pas défini. On note  $s_G(AB)$  (resp.  $s_D(AB)$ ) le nombre de sommets gauches (resp. droits) de  $AB$ .

DÉFINITION 5.1.5. Soit  $n$  un entier naturel. Un *arbre non-ambigu ANA* de taille  $n$  est un arbre binaire  $AB$  de taille  $n$  muni d'un étiquetage, tel que :

- (1) les sommets gauches sont numérotés de manière distincte, de 1 à  $s_G(AB)$  ;
- (2) les sommets droits sont numérotés de manière distincte, de 1 à  $s_D(AB)$  ;
- (3) soit  $s$  et  $s'$  deux sommets de même type de  $ANA$ , si  $s'$  est l'ancêtre de  $s$ , alors l'étiquette de  $s'$  est strictement plus grande que celle de  $s$ .

On appelle *forme* de  $ANA$  l'arbre binaire  $AB$ . Pour éviter de devoir faire référence à chaque fois à l'arbre binaire sous-jacent d'un arbre non-ambigu, on étend la terminologie et les notations des arbres binaires, aux arbres non-ambigus. Il sera parfois utile de considérer la racine comme un sommet gauche et un sommet droit. Toutefois, elle ne comptera pas dans le nombre de sommets gauches ou de sommets droits d'un arbre binaire. Enfin, si on choisit d'étiqueter la racine, elle le sera par  $(s_G(ANA) + 1, s_D(ANA) + 1)$ . Au niveau de la représentation d'un arbre non-ambigu, pour faciliter la lecture des figures, les étiquettes des sommets gauches seront rouges et celles des sommets droits seront bleues. L'objet présent dans la partie droite de la figure 3 donne un exemple d'arbre non-ambigu.

Les définitions 5.1.2 et 5.1.5 ne sont pas strictement équivalentes car elles ne définissent pas exactement le même objet. Toutefois, ils sont en bijection et les statistiques que nous étudierons sont lisibles dans les deux cas. C'est

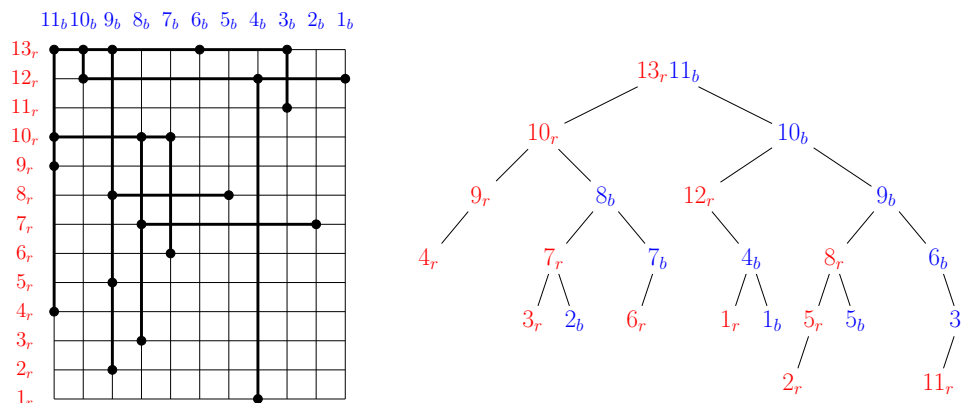


FIGURE 3. Correspondance entre les définitions 5.1.2 et 5.1.5 des arbres non-ambigus.

pourquoi, après la proposition qui suit, les arbres non-ambigus géométriques seront appelés des arbres non-ambigus, et nous considérerons à chaque fois les deux versions.

PROPOSITION 5.1.6. Soit  $dg_G$  et  $dg_D$  deux entiers naturels non nuls. Les arbres non-ambigus géométriques de dimension géométrique  $dg_G \times dg_D$  sont en bijection avec les arbres non-ambigus ayant  $dg_G - 1$  sommets gauches et  $dg_D - 1$  sommets droits.

DÉMONSTRATION. Nous donnons d'abord une application des objets de la définition 5.1.2 vers ceux de la définition 5.1.5, puis nous construisons son inverse.

Soit  $ANA$  un arbre non-ambigu géométrique de taille  $n$ , et soit  $AB$  la forme de  $ANA$ . Chaque sommet  $s$  de  $AB$  correspond à un point  $p_s$  de  $ANA$ . Réciproquement, on note  $s_p$  le sommet correspondant à un point  $p$ . Soit  $s$  un sommet gauche. Si on note  $(x, y)$  les coordonnées de  $s_p$ , alors on étiquette  $s$  par  $x$ . Réciproquement, si  $s$  est un sommet droit, on l'étiquette par  $y$ . Nous devons maintenant montrer que cet étiquetage vérifie les conditions de la définition 5.1.5.

- 5.1.5.(1) Si  $s$  est un sommet gauche de  $AB$ , alors  $p_s$  n'a pas de point à sa gauche. Il en est de même pour la racine. Ainsi, il y a une bijection entre les sommets gauches plus la racine, et l'ensemble  $\{x, (x, y) \in ANA\}$ , qui par la condition 5.1.2.(3) est égal à  $\llbracket 1, dg_G(ANA) \rrbracket$ . En particulier,  $s_G(AB) = dg_G(ANA) - 1$ .
- 5.1.5.(2) La preuve est la même et on a  $s_D(AB) = dg_D - 1$ .
- 5.1.5.(3) Soit  $s$  et  $s'$  deux sommets de même type tels que  $s'$  est l'ancêtre de  $s$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $s'$  est le plus proche ancêtre de  $s$  de même type que  $s$ . Dans la suite nous allons supposer que  $s$  et  $s'$  sont des sommets gauches, la preuve est similaire dans l'autre cas. Soit  $s''$  l'ancêtre de  $s$  dont le père est  $s'$ . On note  $(x, y)$ ,

$(x', y')$  et  $(x'', y'')$  les coordonnées de  $p_s$ ,  $p_{s'}$  et  $p_{s''}$  respectivement. En particulier,  $x$  est l'étiquette de  $s$  et  $x'$  celle de  $s'$ . Si  $s'' = s$ , alors  $s'$  est le père de  $s$ , donc par la condition 5.1.2.(2), on a l'inégalité  $x < x'$ . Sinon, par définition de  $s'$  tous les sommets entre  $s$  et  $s''$ ,  $s''$  compris, sont des sommets droits, ainsi  $x = x''$ . Enfin, par le même argument que dans le cas  $s = s''$ , on a l'inégalité  $x = x'' < x'$ .

Ainsi, l'arbre binaire étiqueté  $AB$  est bien un arbre non-ambigu.

Soit maintenant un arbre non-ambigu  $ANA$  de taille  $n$ . Nous allons associer à chaque sommet  $s$  de  $ANA$  un point  $p_s$  défini par une paire de coordonnées. On commence par associer à la racine le point de coordonnées  $(s_G(ANA) + 1, s_D(ANA) + 1)$ , pour les autres sommets on le fait récursivement. On associe à un sommet gauche  $s$  d'étiquette  $x$ , le point de coordonnées  $(x, y)$ , où  $y$  est la deuxième coordonnée de  $p_{s'}$  et  $s'$  est le père de  $s$ . De manière analogue, on associe à un sommet droit  $s$  d'étiquette  $y$ , le point de coordonnées  $(x, y)$ , où  $x$  est la première coordonnée  $p_{s'}$  et  $s'$  est le père de  $s$ . Soit  $E$  l'ensemble  $\{p_s, s \in ANA\}$ . Nous allons montrer tout d'abord que  $E$  est de cardinal  $n$ , c'est-à-dire qu'il n'existe pas deux sommets  $s_1$  et  $s_2$  tels que  $p_{s_1} = p_{s_2}$ . Supposons qu'il en existe, notons  $(x, y)$  les coordonnées du point correspondant. Les sommets  $s_1$  et  $s_2$  sont nécessairement de type différent, sinon ils auraient la même étiquette, ce qui n'est pas possible. Sans perte de généralité on peut supposer que  $s_1$  est un sommet gauche et  $s_2$  un sommet droit, ainsi leurs étiquettes sont respectivement  $x$  et  $y$ . Soit  $s'_1$  le premier ancêtre droit de  $s_1$ , notons  $(x'_1, y'_1)$  les coordonnées de  $p_{s'_1}$ . Alors, au vu de la construction des coordonnées,  $y = y'_1$ . Ainsi, comme  $s_2$  et  $s'_1$  sont des sommets droits ayant la même étiquette, ils correspondent donc au même sommet. On en déduit que  $s_2$  est un ancêtre de  $s_1$ . De la même manière, on peut montrer que  $s_1$  est un ancêtre de  $s_2$ , et ainsi que  $s_1 = s_2$  ce qui contredit la supposition de départ. On note  $s_p$  le sommet dont provient le point  $p$ . Nous allons maintenant montrer que  $E$  est un arbre non-ambigu de dimension géométrique  $(s_G(ANA) + 1) \times (s_G(ANA) + 1)$  selon la définition 5.1.2.

5.1.2.(1) On a bien  $(s_G(ANA) + 1, s_D(ANA) + 1) \in E$ .

5.1.2.(2) Soit  $p \in E$ . On suppose que  $s_p$  est un sommet gauche, la preuve dans l'autre cas est analogue. On note  $s'$  le père de  $s_p$ , alors  $p_{s'}$  vérifie les conditions de 5.1.2.(2). En effet, soit  $s''$  le premier sommet gauche ancêtre de  $s$ . On note  $(x, y)$ ,  $(x', y')$  et  $(x'', y'')$  les coordonnées de  $p$ ,  $p_{s'}$  et  $p_{s''}$  respectivement. Alors, par construction des coordonnées,  $y = y'$  et  $x' = x''$ . De plus, par la condition 5.1.5.(3), on sait que  $x < x''$ , ce qui prouve le résultat. Il nous reste à montrer que  $E$  ne contient pas de point  $q$  de coordonnées  $(a, b)$  vérifiant  $a = x$  et  $b > y$ . Supposons que ce soit le cas, le point correspondant au premier ancêtre de  $s_q$  qui est un sommet gauche vérifie les mêmes conditions. Donc quitte à remplacer  $q$  par ce point là, on peut supposer que  $s_q$  est un sommet gauche. Ainsi, comme l'étiquette de  $s_q$  est égale à celle de  $s_p$  et que tout deux sont des sommets gauches,  $s_q = s_p$  ce qui n'est pas possible.

5.1.1.(3) C'est une conséquence de 5.1.5.(1), 5.1.5.(2) et du fait que  $(s_G(ANA) + 1, s_D(ANA) + 1) \in E$ .  $\square$

REMARQUE 5.1.7. Comme expliqué dans la preuve précédente, pour un arbre non-ambigu  $ANA$  on a les relations :

$$(31) \quad dg_G(ANA) = s_G(ANA) + 1 \text{ et } dg_D(ANA) = s_D(ANA) + 1.$$

En particulier, la dimension géométrique ne dépend que de la forme de l'arbre non-ambigu. Nous étendons donc la définition de dimension géométrique aux arbres binaires, en gardant les mêmes notations.

On note  $\mathcal{ANA}(AB)$  l'ensemble des arbres non-ambigus de forme  $AB$ , un exemple est donné en figure 4

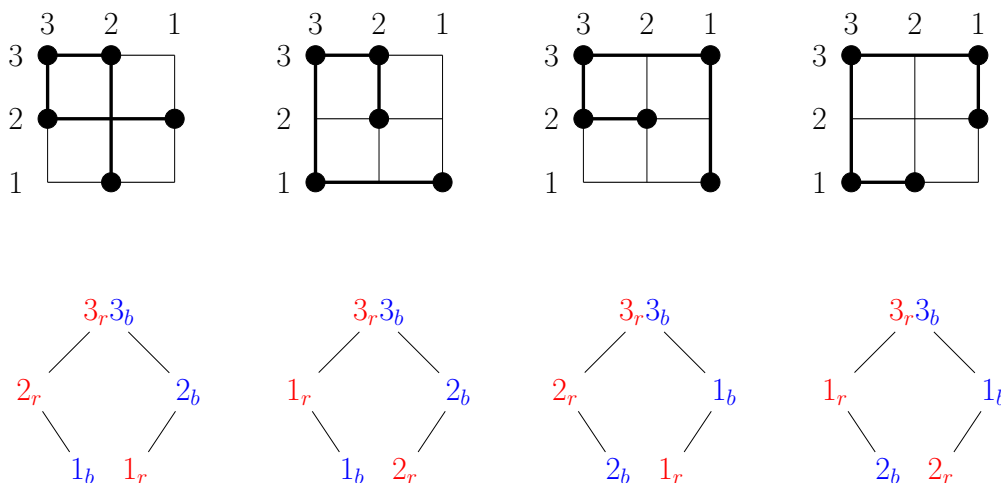


FIGURE 4. Un exemple de l'ensemble des arbres non-ambigus associés à un arbre binaire.

La section 2 nécessite de la zérologie. Par convention, il y a deux arbres non-ambigus de taille zéro : l'arbre non-ambigu vide gauche que nous notons  $\emptyset_G$  et l'arbre non-ambigu vide droit que nous notons  $\emptyset_D$ . Ils ont pour formes respectives l'arbre binaire vide gauche que nous notons  $\emptyset_G$  et l'arbre binaire vide droit que nous notons  $\emptyset_D$ . De plus, ils ont pour dimensions géométriques respectives,  $0 \times 1$  et  $1 \times 0$ .

## 2. Série génératrice, formules des équerres et énumérations des arbres non-ambigus

Dans cette section, nous commençons par déterminer l'équation vérifiée par la série génératrice des arbres non-ambigus. Nous en déduisons une démonstration alternative d'une identité de l'article [ABBS14], dite *formule des*

équerres, comptant les arbres non-ambigus à forme fixée. Finalement, la résolution de l'équation nous donne une forme close pour la série génératrice. Il en découle une formule d'énumération. Nous répétons deux fois cette démarche en modifiant le poids associé à chaque arbre non-ambigu, de façon à obtenir des raffinements des résultats précédents. L'approche utilisée s'inspire de l'article [HNT08]. Les auteurs partent du constat que l'équation (chapitre 1 équation (6)) vérifiée par la série génératrice exponentielle  $\mathfrak{ABD}$  des arbres binaires décroissants fait apparaître la formule des équerres (chapitre 1 équation (7)). Nous rappelons qu'à tout arbre binaire décroissant on peut associer une permutation (chapitre 1 section 3). Ils commencent par décrire la structure récursive des permutations induite par la décomposition d'un arbre binaire en sous-arbre gauche et sous-arbre droit. Ils définissent pour cela une application bilinéaire sur les permutations que nous notons  $\mathbb{B}$ . Puis ils définissent un poids  $p$  et une application bilinéaire  $B$  sur les séries formelles vérifiant  $B(p(\sigma_1), p(\sigma_2)) = p(\mathbb{B}(\sigma_1, \sigma_2))$ . D'une part, on retrouve l'équation vérifiée par  $\mathfrak{ABD}$

$$(32) \quad \mathfrak{ABD} = p(\emptyset) + B(\mathfrak{ABD}, \mathfrak{ABD}).$$

D'autre part, en appliquant récursivement  $B$  au sous-arbre gauche et au sous-arbre droit d'un arbre binaire  $AB$ , on retrouve la formule des équerres de  $AB$ . L'intérêt de cette approche algébrique réside dans la suite de leur article. Ils définissent un nouveau poids  $p_q$ , qui prend en compte au choix le nombre d'inversions ou l'indice majeur inverse, et une nouvelle application bilinéaire  $B_q$  compatible avec  $p_q$ . Ainsi, ils obtiennent un  $q$ -analogue de l'équation (32) et redémontrent le  $q$ -analogue de la formule des équerres de [BW89].

## 2.1. La version sans raffinement

Les arbres non-ambigus ont une structure récursive, induite par celle des arbres binaires. En effet, un arbre binaire  $AB$  non vide est la donnée d'une racine et deux arbres binaires qui correspondent au sous arbre gauche  $AB_G$  et au sous arbre droit  $AB_D$ , avec la convention que si  $AB_G$  (resp.  $AB_D$ ) est de taille zéro, alors  $AB_G = \emptyset_G$  (resp.  $AB_D = \emptyset_D$ ). Soit maintenant  $ANA$  un arbre non-ambigu de forme  $AB$ . L'étiquetage de  $ANA$  induit un étiquetage de  $AB_G$  et de  $AB_D$  qui vérifient la condition 5.1.5.(3). Ainsi, si on les renumérote à partir de 1 en respectant les deux ordres totaux déjà présents, celui des sommets gauches et celui des sommets droits, on obtient deux arbres non-ambigus  $ANA_G$  et  $ANA_D$ , avec la convention que si  $ANA_G$  (resp.  $ANA_D$ ) est de taille zéro, alors  $ANA_G = \emptyset_G$  (resp.  $ANA_D = \emptyset_D$ ). Un exemple est donné en figure 5. Contrairement au cas des arbres binaires, la décomposition n'est pas bijective. Pour pouvoir reconstruire  $ANA$  à partir de  $ANA_G$  et  $ANA_D$  il faut décider comment répartir les étiquettes  $\llbracket 1, dg_G(ANA) - 1 \rrbracket$  et  $\llbracket 1, dg_D(ANA) - 1 \rrbracket$ , en se rappelant que la racine de  $ANA_G$  va compter comme un sommet gauche dans  $ANA$  et que celle de  $ANA_D$  va compter comme un sommet droit. Étant donné que l'on veut respecter l'étiquetage de  $ANA_G$  et  $ANA_D$ , il suffit de

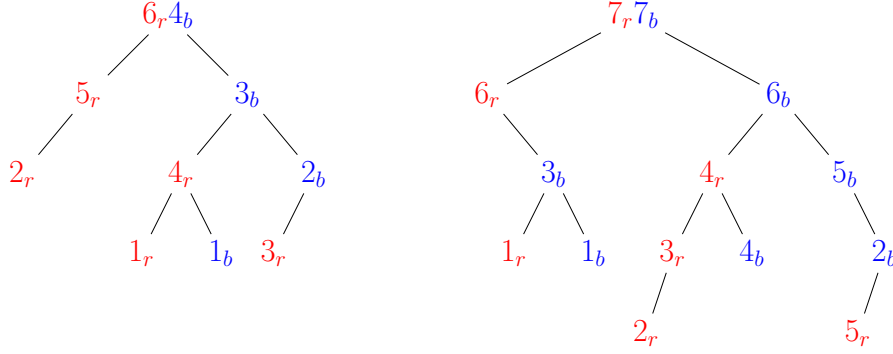


FIGURE 5.  $ANA_G$  (à gauche) et  $ANA_D$  (à droite) où  $ANA$  est l'arbre non-ambigu de la figure 3.

partitionner les ensembles  $\llbracket 1, dg_G(ANA) - 1 \rrbracket$  et  $\llbracket 1, dg_D(ANA) - 1 \rrbracket$  en deux. Ainsi, si on fixe  $ANA_1$  et  $ANA_2$  deux arbres non-ambigus, le nombre d'arbres non-ambigus  $ANA$  tels que  $ANA_G = ANA_1$  et  $ANA_D = ANA_2$  est :

$$(33) \quad \binom{dg_G(ANA_1) + dg_G(ANA_2) - 1}{dg_G(ANA_1)} \binom{dg_D(ANA_1) - 1 + dg_D(ANA_2)}{dg_D(ANA_2)}.$$

De plus, tous ces arbres non-ambigus ont la même forme que l'on notera  $AB$ . Donc en utilisant les relations  $dg_G(AB) = dg_G(ANA_1) + dg_G(ANA_2)$  et  $dg_D(AB) = dg_D(ANA_1) + dg_D(ANA_2)$ , on obtient

$$(34) \quad \binom{dg_G(AB) - 1}{dg_G(ANA_1)} \binom{dg_D(AB) - 1}{dg_D(ANA_2)}.$$

Les formules précédentes restent vraies, même si  $ANA_1$  et/ou  $ANA_2$  sont de taille 0.

Nous allons maintenant introduire le formalisme algébrique sur lequel se base la section 2. Soit  $\mathbb{Q}\mathcal{ANA}$  le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel engendré par les arbres non-ambigus, on note  $\mathbb{Q}\mathcal{ANA}(AB)$  la somme des éléments de  $\mathcal{ANA}(AB)$ . On définit également  $\mathbb{Q}\mathcal{ANA}_G$  et  $\mathbb{Q}\mathcal{ANA}_D$ , les  $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels engendrés respectivement par  $\mathcal{ANA} \setminus \{\emptyset_D\}$  et  $\mathcal{ANA} \setminus \{\emptyset_G\}$ . Soit maintenant l'application bilinéaire  $\mathbb{B} : \mathbb{Q}\mathcal{ANA}_G \times \mathbb{Q}\mathcal{ANA}_D \rightarrow \mathbb{Q}\mathcal{ANA}$  qui à un couple  $(ANA_1, ANA_2)$  d'arbres non-ambigus associe la somme des arbres non-ambigus  $ANA$  tels que  $ANA_G = ANA_1$  et  $ANA_D = ANA_2$ . Cette application permet d'engendrer récursivement l'ensemble des arbres non-ambigus de forme fixée.

$$\mathbb{B} \left( \begin{array}{c} 2_r 3_b \\ 1_r \quad 1_b \\ \quad 2_b \end{array}, 1_r 1_b \right) = \begin{array}{c} 3_r 4_b \\ 2_r \quad 1_b \\ 1_r \quad 2_b \\ \quad 3_b \end{array} + \begin{array}{c} 3_r 4_b \\ 2_r \quad 2_b \\ 1_r \quad 1_b \\ \quad 3_b \end{array} + \begin{array}{c} 3_r 4_b \\ 2_r \quad 3_b \\ 1_r \quad 1_b \\ \quad 2_b \end{array}.$$

2. Série génératrice, formules des équerres et énumérations des arbres  
non-ambigus

LEMME 5.2.1. Soit  $AB$  un arbre binaire. Si  $AB = \emptyset_G$  (resp.  $AB = \emptyset_D$ ) alors  $\mathbb{Q}\mathcal{ANA}(AB) = \emptyset_G$  (resp.  $\mathbb{Q}\mathcal{ANA}(AB) = \emptyset_D$ ), sinon

$$\mathbb{Q}\mathcal{ANA}(AB) = \mathbb{B}(\mathbb{Q}\mathcal{ANA}(AB_G), \mathbb{Q}\mathcal{ANA}(AB_D)).$$

DÉMONSTRATION. Soit  $ANA_1$  et  $ANA_2$  deux arbres non-ambigus tels que  $ANA_1$  a pour forme  $AB_G$  et  $ANA_2$  a pour forme  $AB_D$ . Alors, un arbre non-ambigu  $ANA$  de forme  $AB$  apparaît dans la somme  $\mathbb{B}(ANA_1, ANA_2)$  si, et seulement si,  $ANA_1 = ANA_G$  et  $ANA_2 = ANA_D$ . Par conséquent

$$\mathbb{Q}\mathcal{ANA}(AB) = \sum_{\substack{ANA_1 \in \mathcal{ANA}(AB_G) \\ ANA_2 \in \mathcal{ANA}(AB_D)}} \mathbb{B}(ANA_1, ANA_2),$$

qui par bilinéarité de  $\mathbb{B}$  vaut

$$\mathbb{B}(\mathbb{Q}\mathcal{ANA}(AB_G), \mathbb{Q}\mathcal{ANA}(AB_D)). \quad \square$$

Le lemme 5.2.1 a pour conséquence immédiate que pour tout arbre binaire non vide  $AB$ , on a l'égalité :

$$(35) \quad |\mathcal{ANA}(AB)| = \binom{dg_G(AB) - 1}{dg_G(AB_G)} \binom{dg_D(AB) - 1}{dg_D(AB_D)} |\mathcal{ANA}(AB_G)| |\mathcal{ANA}(AB_D)|.$$

La suite consiste à projeter et à interpréter ces observations dans le monde des séries génératrices. Les arbres non-ambigus sont des objets combinatoires étiquetés, cela explique la présence de binomiaux dans l'équation (34). C'est pourquoi nous allons considérer des séries génératrices exponentielles. Pour cela, nous associons à chaque arbre non-ambigu  $ANA$  le poids

$$p(ANA) = \frac{x^{dg_G(ANA)} y^{dg_D(ANA)}}{dg_G(ANA)! dg_D(ANA)!}.$$

En particulier,  $p(\emptyset_G) = y$  et  $p(\emptyset_D) = x$ . Par linéarité, on étend  $p$  en une application linéaire  $\mathbb{Q}\mathcal{ANA} \rightarrow \mathbb{Q}[[x, y]]$ . Ainsi, pour tout arbre binaire  $AB$ ,  $p(\mathbb{Q}\mathcal{ANA}(AB))$  est la série génératrice des arbres non-ambigus de forme  $AB$ . Il ne nous reste plus qu'à définir l'image de  $\mathbb{B}$  par  $p$ .

DÉFINITION 5.2.2. Soit  $B$  l'application bilinéaire  $\mathbb{Q}[[x, y]] \times \mathbb{Q}[[x, y]] \rightarrow \mathbb{Q}[[x, y]]$  telle que

$$B(u, v) = \int_0^x \int_0^y \partial_y(u) \partial_x(v) dx dy.$$

Soit  $AB$  un arbre binaire, on définit également  $B(AB)$ . Si  $AB = \emptyset_G$  (resp.  $AB = \emptyset_D$ ) alors  $B(AB) = y$  (resp.  $B(AB) = x$ ), sinon

$$B(AB) = B(B(AB_G), B(AB_D)).$$

La figure 6 donne un exemple de calcul de  $B$  sur un arbre binaire. Le monôme de chaque sommet  $s$  correspond à la valeur de  $B$  appliqué au sous-arbre de racine  $s$ , sachant que les sous-arbres binaires au bout des arêtes pointillées sont des arbres binaires vides. L'application bilinéaire  $B$  correspond bien à l'image de  $\mathbb{B}$  par  $p$ , comme le prouve la proposition suivante.

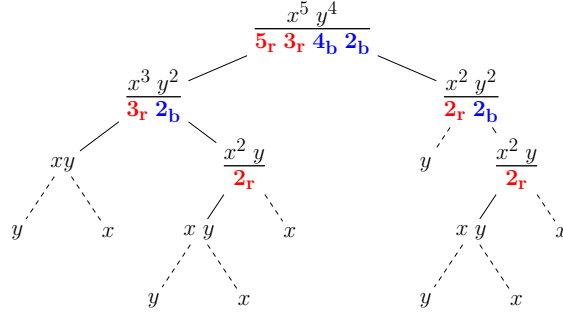


FIGURE 6. Exemple de calcul de  $B(AB)$ , où  $AB$  est l'arbre binaire défini par les arêtes pleines.

PROPOSITION 5.2.3. Soit  $ANA_1, ANA_2 \in \mathbb{Q}ANA_G \times \mathbb{Q}ANA_D$ , alors

$$p(\mathbb{B}(ANA_1, ANA_2)) = B(p(ANA_1), p(ANA_2)).$$

En particulier, pour tout arbre binaire  $AB$ ,

$$B(AB) = p(\mathbb{Q}ANA(AB)).$$

DÉMONSTRATION. Par linéarité de  $p$  et bilinéarité de  $B$  et  $\mathbb{B}$ , on peut supposer que les combinaisons linéaires  $ANA_1$  et  $ANA_2$  sont réduites à un élément. Elles correspondent donc chacune à un arbre non-ambigu que l'on notera également  $ANA_1$  et  $ANA_2$ . Soit  $AB$  l'arbre binaire dont le sous-arbre gauche est la forme de  $ANA_1$ , et le sous-arbre droit est la forme de  $ANA_2$ . L'équation (34) nous dit que

$$p(\mathbb{B}(ANA_1, ANA_2)) = \binom{dg_G(AB) - 1}{dg_G(ANA_1)} \binom{dg_D(AB) - 1}{dg_D(ANA_2)} \frac{x^{dg_G(AB)} y^{dg_D(AB)}}{dg_G(AB)! dg_D(AB)!}.$$

Il ne reste plus qu'à calculer  $B(p(ANA_1), p(ANA_2))$  pour finir la preuve de la première identité. Posons  $u = p(ANA_1)$  et  $v = p(ANA_2)$ . Alors,  $B(u, v)$  est égal à

$$\begin{aligned} &= \int_0^x \int_0^y \partial_y(u) \partial_x(v) dx dy \\ &= \int_0^x \int_0^y \frac{x^{dg_G(ANA_1)+dg_G(ANA_2)-1} y^{dg_D(ANA_1)-1+dg_D(ANA_2)} dx dy}{dg_G(ANA_1)! (dg_G(ANA_2) - 1)! (dg_D(ANA_1) - 1)! dg_D(ANA_2)!} \\ &= \binom{dg_G(ANA_1) + dg_G(ANA_2) - 1}{dg_G(ANA_2) - 1} \binom{dg_D(ANA_1) - 1 + dg_D(ANA_2)}{dg_D(ANA_1) - 1} \times \\ &\quad \int_0^x \int_0^y \frac{x^{dg_G(ANA_1)+dg_G(ANA_2)-1} y^{dg_D(ANA_1)-1+dg_D(ANA_2)} dx dy}{(dg_G(ANA_1) + dg_G(ANA_2) - 1)! (dg_D(ANA_1) - 1 + dg_D(ANA_2))!} \\ &= \binom{dg_G(ANA_1) + dg_G(ANA_2) - 1}{dg_G(ANA_2) - 1} \binom{dg_D(ANA_1) - 1 + dg_D(ANA_2)}{dg_D(ANA_1) - 1} \times \\ &\quad \frac{x^{dg_G(ANA_1)+dg_G(ANA_2)} y^{dg_D(ANA_1)+dg_D(ANA_2)}}{(dg_G(ANA_1) + dg_G(ANA_2))! (dg_D(ANA_1) + dg_D(ANA_2))!}. \end{aligned}$$



Or, on a les relations

$$dg_G(ANA_G) + dg_G(ANA_D) = dg_G(AB)$$

et

$$dg_D(ANA_G) + dg_D(ANA_D) = dg_D(AB),$$

de sorte que

$$\mathbb{B}(p(ANA_1), p(ANA_2)) = p(\mathbb{B}(ANA_1, ANA_2)).$$

La deuxième identité se prouve par récurrence. Par définition, l'égalité est vraie si  $AB = \emptyset_G$  ou  $AB = \emptyset_D$ . Sinon, par récurrence on a :

$$\begin{aligned} p(\mathbb{Q}\mathcal{ANA}(AB)) &= p(\mathbb{B}(\mathbb{Q}\mathcal{ANA}(AB_G), \mathbb{Q}\mathcal{ANA}(AB_D))) \\ &= \mathbb{B}(p(\mathbb{Q}\mathcal{ANA}(AB_G)), p(\mathbb{Q}\mathcal{ANA}(AB_D))) \\ &= \mathbb{B}(\mathbb{B}(AB_G), \mathbb{B}(AB_D)) \\ &= \mathbb{B}(AB). \end{aligned} \quad \square$$

Il en découle la formule des équerres comptant le nombre d'arbres non-ambigus de forme fixée. Pour pouvoir l'énoncer, nous avons besoin d'introduire une notation. Soit  $AB$  un arbre binaire, pour tout sommet gauche (resp. droit)  $s$  de  $AB$ , on définit  $dg_G(s)$  (resp.  $dg_D(s)$ ) comme étant le nombre de sommets gauches (resp. droits),  $s$  inclus, du sous-arbre de  $AB$  dont  $s$  est la racine. Dans ce contexte, la racine de  $AB$  compte à la fois comme un sommet gauche et un sommet droit.

PROPOSITION 5.2.4. *Soit  $AB$  un arbre binaire, alors*

$$|\mathcal{ANA}(AB)| = \frac{dg_G(AB)! dg_D(AB)!}{\prod_{s \text{ sommet gauche}} dg_G(s) \prod_{s \text{ sommet droit}} dg_D(s)}.$$

DÉMONSTRATION. Par définition

$$p(\mathbb{Q}\mathcal{ANA}(AB)) = |\mathcal{ANA}(AB)| \frac{x^{dg_G(AB)} y^{dg_D(AB)}}{dg_G(AB)! dg_D(AB)!}.$$

Or, d'après la proposition 5.2.3,  $p(\mathbb{Q}\mathcal{ANA}(AB)) = \mathbb{B}(AB)$ . Par définition, on peut calculer  $\mathbb{B}(AB)$  de manière récursive :

$$\begin{aligned} \mathbb{B}(AB) &= \mathbb{B}(\mathbb{B}(AB_G), \mathbb{B}(AB_D)) \\ &= \int_0^x \int_0^y \partial_y(\mathbb{B}(AB_G)) \partial_x(\mathbb{B}(AB_D)) dx dy \\ &= \frac{dg_D(AB_G) dg_G(AB_D)}{dg_G(AB) dg_D(AB)} \mathbb{B}(AB_G) \mathbb{B}(AB_D). \end{aligned}$$

5. Autour de l'énumération et de la série génératrice des arbres non-ambigus

---

Par récurrence,  $B(AB_G)$  et  $B(AB_D)$  valent

$$B(AB_G) = \frac{x^{dg_G(AB_G)} y^{dg_D(AB_G)}}{\prod_{\substack{s \text{ sommet gauche} \\ \text{de } AB_G}} dg_G(s) \prod_{\substack{s \text{ sommet droit} \\ \text{de } AB_G}} dg_D(s)},$$

et

$$B(AB_D) = \frac{x^{dg_G(AB_D)} y^{dg_D(AB_D)}}{\prod_{\substack{s \text{ sommet gauche} \\ \text{de } AB_D}} dg_G(s) \prod_{\substack{s \text{ sommet droit} \\ \text{de } AB_D}} dg_D(s)}.$$

Or, le type des sommets de  $AB_G$  et  $AB_D$  restent les mêmes dans  $AB$ , excepté pour les deux racines, qui deviennent respectivement un sommet gauche et un sommet droit. De plus, si on note  $r_G$  (resp.  $r_D$ ) la racine de  $AB_G$  (resp.  $AB_D$ ), alors,  $dg_D(r_G) = dg_D(AB_G)$  (resp.  $dg_G(r_D) = dg_G(AB_D)$ ), de sorte qu'ils se simplifient. De même, si on note  $r$  la racine de  $AB$ , on a  $dg_G(AB) = dg_G(r)$  et  $dg_D(AB) = dg_D(r)$ . En résumé

$$\frac{1}{\prod_{\substack{s \text{ sommet gauche} \\ \text{de } AB}} dg_G(s)} = \frac{dg_G(AB_D)}{dg_G(AB) \prod_{\substack{s \text{ sommet gauche} \\ \text{de } AB_G}} dg_G(s) \prod_{\substack{s \text{ sommet gauche} \\ \text{de } AB_D}} dg_G(s)},$$

et

$$\frac{1}{\prod_{\substack{s \text{ sommet droit} \\ \text{de } AB}} dg_D(s)} = \frac{dg_D(AB_G)}{dg_D(AB) \prod_{\substack{s \text{ sommet droit} \\ \text{de } AB_D}} dg_D(s) \prod_{\substack{s \text{ sommet droit} \\ \text{de } AB_G}} dg_D(s)},$$

ce qui conclut la preuve.  $\square$

Si on reprend l'exemple de la figure 6, le monôme de la racine nous donne la formule des équerres de l'arbre binaire pris en exemple. On considère maintenant la série génératrice exponentielle des arbres non-ambigus :

$$\mathfrak{G}(x, y) = \sum_{ANA \in \mathcal{ANA}} p(ANA).$$

On aura également besoin de la série génératrice

$$\mathfrak{N}(x, y) = \partial_x \partial_y \mathfrak{G}.$$

Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté nous omettrons parfois les variables  $x$  et  $y$ . Les deux séries génératrices sont liées par la relation

$$(36) \quad \mathfrak{G} = y + x + \int_0^x \int_0^y \mathfrak{N} dx dy.$$

PROPOSITION 5.2.5. *Les fonctions génératrices  $\mathfrak{G}$  et  $\mathfrak{N}$  satisfont les relations suivantes.*

$$\mathfrak{G} = y + x + \int_0^x \int_0^y \partial_y \mathfrak{G} \partial_x \mathfrak{G} dx dy \quad \text{et} \quad \mathfrak{N} = \left(1 + \int_0^x \mathfrak{N} dx\right) \left(1 + \int_0^y \mathfrak{N} dy\right).$$

2. Série génératrice, formules des équerres et énumérations des arbres  
non-ambigus

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 5.2.3, si on partitionne les arbres non-ambigus selon leurs formes, on obtient

$$\mathfrak{G} = \sum_{AB \in \mathcal{AB}} B(AB).$$

Ainsi, par définition on a

$$\mathfrak{G} = y + x + \sum_{(AB_G, AB_D) \in (\mathcal{AB} \setminus \{\emptyset_D\}) \times (\mathcal{AB} \setminus \{\emptyset_G\})} B(B(AB_G), B(AB_D)).$$

Enfin, B étant bilinéaire on obtient bien que

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} &= y + x + B\left(\sum_{AB_G \in \mathcal{AB} \setminus \{\emptyset_D\}} B(AB_G), \sum_{AB_D \in \mathcal{AB} \setminus \{\emptyset_G\}} B(AB_D)\right) \\ &= y + x + B(\mathfrak{G} - x, \mathfrak{G} - y). \end{aligned}$$

Or, les applications  $v \mapsto B(x, v)$  et  $u \mapsto B(u, y)$  sont nulles, donc

$$\mathfrak{G} = y + x + B(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}).$$

La deuxième identité s'obtient en dérivant selon  $x$  et  $y$  la première identité, puis en utilisant l'équation (36).  $\square$

REMARQUE 5.2.6. Nous aurions pu prouver la proposition 5.2.4 à partir de l'équation (35). Toutefois, le formalisme que nous avons introduit, nous permet dans la section 2.3 de définir un  $q$ -analogue de la dérivée et de l'intégrale, qui vont nous permettre de donner un  $q$ -analogue de  $B$ , et d'obtenir un  $q$ -analogue des relations de la proposition 5.2.5.

La proposition 5.2.5 nous permet maintenant d'utiliser des méthodes des équations différentielles pour trouver une formule close pour  $\mathfrak{G}$  et  $\mathfrak{N}$ .

PROPOSITION 5.2.7. *Les séries génératrices des arbres non-ambigus sont égales à*

$$\mathfrak{G} = y + x - \ln(1 - (e^x - 1)(e^y - 1)) \quad \text{et} \quad \mathfrak{N} = \frac{e^{x+y}}{(1 - (e^x - 1)(e^y - 1))^2}.$$

DÉMONSTRATION. La fonction génératrice  $\mathfrak{G}$  vérifie le système

$$(37) \quad \begin{cases} \partial_x \partial_y f = \partial_y f \times \partial_x f, \\ f(x, y) = f(y, x). \end{cases}$$

La deuxième équation provient de la stabilité de l'ensemble des arbres non-ambigus par l'opération qui consiste à échanger le sous-arbre droit et le sous-arbre gauche récursivement. Le système possède les deux propriétés suivantes.

- (1) Si  $s$  est une solution, alors pour toute série génératrice  $\varphi$  à terme constant nul,  $(x, y) \mapsto s(\varphi(x), \varphi(y))$  est également solution.
- (2) Si on fixe la condition initiale  $x \mapsto f(x, 0)$  alors il existe une unique série formelle solution du Système (37).

La deuxième propriété provient de la relation au niveau des coefficients qu'implique le système. Si on note  $f = \sum_{i,j \geq 0} f_{i,j} \frac{x^i y^j}{i! j!}$  une solution, alors pour  $i$  et  $j$  deux entiers naturels non nuls, on a

$$f_{i,j} = \sum_{\substack{i_1+i_2=i \\ j_1+j_2=j}} \binom{i-1}{i_2-1} \binom{j-1}{j_1-1} f_{i_1,j_1} f_{i_2,j_2}.$$

Ainsi, si on fixe  $(f_{i,0})_{i \geq 0}$ , par symétrie on connaît également la suite  $(f_{0,j})_{j \geq 0}$ , et on peut donc calculer tous les termes de la suite  $(f_{i,j})_{i,j \geq 0}$  grâce à la relation que nous venons d'exhiber.

Soit  $f$  une solution particulière. On note  $f_x = \partial_x f$  et  $f_y = \partial_y f$ . Ainsi, en multipliant l'équation différentielle vérifiée par  $f$  par elle-même, on obtient

$$\partial_y f_x \partial_x f_y = f_x^2 f_y^2.$$

Supposons que  $\partial_y f_x = f_x^2$  et  $\partial_x f_y = f_y^2$ , alors

$$f_x = \frac{-1}{y + c_1(x)} \quad \text{et} \quad f_y = \frac{-1}{x + c_2(y)}.$$

Puisque  $f_x^2 = \partial_y f_x = f_x f_y$ , après simplification par  $f_x$  on a  $f_y = f_x$ , et donc

$$y + c_1(x) = x + c_2(y).$$

Ainsi, si on regarde en  $x = 0$  puis  $y = 0$ , on trouve que  $c_1$  et  $c_2$  correspondent à la même application  $z \mapsto z + c$ , où  $c$  est un réel. Finalement

$$f(x, y) = -\ln(x + y + c).$$

Réciproquement,  $(x, y) \mapsto -\ln(x + y + c)$  est bien une solution du Système (37). Il ne nous reste plus qu'à trouver une série formelle  $\varphi$  et un réel  $c$  tels que  $\mathfrak{G}(x, 0) = -\ln(\varphi(x) + c)$ . Alors, par unicité de la solution, on prouvera que  $\mathfrak{G}(x, y) = -\ln(\varphi(x) + \varphi(y) + c)$ . On sait que  $\mathfrak{G}(x, 0) = x$ , on en déduit que  $\varphi(x) = e^{-x} - c$ . Or, on veut que  $\varphi(0) = 0$ , donc  $c = 1$ . On vient de prouver que

$$\mathfrak{G}(x, y) = -\ln(e^{-x} + e^{-y} - 1),$$

que l'on peut réécrire

$$\mathfrak{G}(x, y) = y + x - \ln(1 - (e^x - 1)(e^y - 1)).$$

La formule close de  $\mathfrak{N}$  se trouve en dérivant par rapport à  $x$  et à  $y$  celle de  $\mathfrak{G}$ . □

En développant la formule que l'on vient de trouver pour  $\mathfrak{G}$ , on en déduit la formule d'énumération suivante.

PROPOSITION 5.2.8. *Soit  $i$  et  $j$  deux entiers non nuls. Le nombre d'arbres non-ambigus ANA de dimension géométrique  $i \times j$  est*

$$\left[ \frac{x^i y^j}{i! j!} \right] \mathfrak{G}(x, y) = \sum_{p \geq 1} (p-1)! p! S_2(i, p) S_2(j, p).$$

DÉMONSTRATION. On sait que

$$\mathfrak{G} = x + y - \ln(1 - (e^x - 1)(e^y - 1)),$$

ainsi il nous suffit de développer  $\ln(1 - (e^x - 1)(e^y - 1))$ .

$$\ln(1 - (e^x - 1)(e^y - 1)) = \sum_{p \geq 1} \frac{(e^x - 1)^p (e^y - 1)^p}{p}.$$

Or, dans les préliminaires sur les séries génératrices exponentielles on a vu que

$$(e^x - 1)^k = \sum_{n \geq 1} k! S_2(n, k) \frac{x^n}{n!}.$$

D'où le résultat.  $\square$

La formule close pour  $\mathfrak{N}$  et la formule d'énumération de la proposition 5.2.8 ont déjà été prouvées par [CE10]. Les auteurs ont obtenu ces résultats dans le contexte des permutations ayant toutes leurs excédences strictes au début. Dans la section 3.2 nous présenterons une bijection entre ces permutations et les arbres non-ambigus. Dans la suite nous raffinerons cette formule close en prenant en compte des statistiques supplémentaires.

REMARQUE 5.2.9. Une formule d'énumération des permutations dont toutes les excédences sont au début ou des arbres non-ambigus à rectangle fixé avait déjà été proposée respectivement dans [ES00] puis dans [ABBS14].

$$\left[ \frac{x^i y^j}{i! j!} \right] \mathfrak{G}(x, y) = \sum_{k=1}^i (-1)^{i-k} S_2(i, k) k! k^{j-1}.$$

La formule de la proposition 5.2.8 a l'avantage d'être une somme à termes positifs et d'être symétrique en  $i$ .

## 2.2. Les $(\alpha, \beta)$ -analogues de la série génératrice et de l'énumération à dimension géométrique fixée

Dans la partie précédente, nous avons vu que considérer le nombre de sommets non racine dans la colonne la plus à gauche et dans la ligne la plus haute d'un tableau boisé pouvait mener à des formules factorisées de séries génératrices. Dans le cadre des arbres non-ambigus en tant qu'arbres binaires étiquetés, cela revient à compter le nombre de sommets non racine dans la branche gauche et dans la branche droite de la racine. On note respectivement  $sb_G$  et  $sb_D$  ces deux statistiques. Par exemple, si on note  $AB$  l'arbre binaire de la figure 7, alors  $sb_G(AB) = 4$  et  $sb_D(AB) = 2$ . En ce qui concerne les deux arbres binaires de taille 0, on prend comme convention que  $sb_G(\emptyset_G) = sb_D(\emptyset_D) = -1$  et  $sb_G(\emptyset_D) = sb_D(\emptyset_G) = 0$ . Nous étendons les statistiques  $sb_G$  et  $sb_D$  aux arbres non-ambigus. Nous allons suivre les mêmes étapes qui nous ont permis d'obtenir l'équation différentielle vérifiée par  $\mathfrak{G}$  en partant du nouveau poids

$$p_{\alpha, \beta}(ANA) = \alpha^{sb_G(ANA)} \beta^{sb_D(ANA)} p(ANA),$$

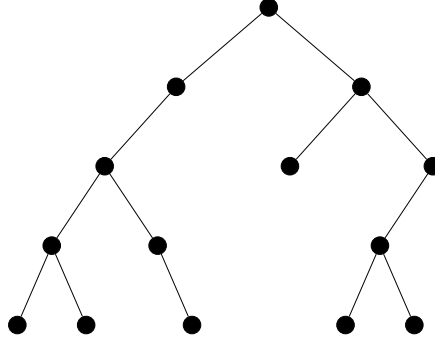


FIGURE 7. Un arbre binaire  $AB$  tel que  $sb_G(AB) = 4$  et  $sb_D(AB) = 2$ .

que l'on étend par linéarité à  $\mathbb{Q}\mathcal{ANA}$ . En particulier  $p_{\alpha,\beta}(\emptyset_G) = \frac{y}{\alpha}$  et  $p_{\alpha,\beta}(\emptyset_D) = \frac{x}{\beta}$ . On commence par étudier le comportement de  $sb_G$  et  $sb_D$  vis à vis de la décomposition en sous-arbre gauche et sous-arbre droit d'un arbre binaire  $AB$ . On a les relations suivantes

$$sb_G(AB) = sb_G(AB_G) + 1 \quad \text{et} \quad sb_D(AB) = sb_D(AB_D) + 1.$$

DÉFINITION 5.2.10. Soit  $B_{\alpha,\beta}$  l'application bilinéaire

$$B_{\alpha,\beta} : \mathbb{Q}(\alpha, \beta)[[x, y]] \times \mathbb{Q}(\alpha, \beta)[[x, y]] \rightarrow \mathbb{Q}(\alpha, \beta)[[x, y]]$$

telle que

$$B_{\alpha,\beta}(u, v) = \alpha\beta B(u|_{\beta=1}, v|_{\alpha=1}),$$

où  $B$  est l'application bilinéaire de la définition 5.2.2, étendue à  $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)[[x, y]]$ . Soit  $AB$  un arbre binaire, on définit également  $B_{\alpha,\beta}(AB)$ . Si  $AB = \emptyset_G$  (resp.  $AB = \emptyset_D$ ) alors  $B_{\alpha,\beta}(AB) = \frac{y}{\alpha}$  (resp.  $B_{\alpha,\beta}(AB) = \frac{x}{\beta}$ ), sinon

$$B_{\alpha,\beta}(AB) = B_{\alpha,\beta}(B_{\alpha,1}(AB_G), B_{1,\beta}(AB_D)).$$

On a l'équivalent de la proposition 5.2.3 :

PROPOSITION 5.2.11. Soit  $ANA_1, ANA_2 \in \mathbb{Q}\mathcal{ANA}$ , alors

$$p_{\alpha,\beta}(\mathbb{B}(ANA_1, ANA_2)) = B_{\alpha,\beta}(p_{\alpha,1}(ANA_1), p_{1,\beta}(ANA_2)).$$

En particulier pour tout arbre binaire  $AB$ ,

$$B_{\alpha,\beta}(AB) = p_{\alpha,\beta}(\mathbb{Q}\mathcal{ANA}(AB)).$$

DÉMONSTRATION. Par linéarité de  $p_{\alpha,\beta}$  et bilinéarité de  $B_{\alpha,\beta}$  et  $\mathbb{B}$ , on peut supposer que les combinaisons linéaires  $ANA_1$  et  $ANA_2$  sont réduites à un élément. Elles correspondent donc chacune à un arbre non-ambigu que l'on notera également  $ANA_1$  et  $ANA_2$ . Les statistiques  $sb_G$  et  $sb_D$  sont constantes sur  $\mathbb{B}(ANA_1, ANA_2)$  car tous ces arbres non-ambigus non vides ont la même forme  $AB$ . Ainsi

$$p_{\alpha,\beta}(\mathbb{B}(ANA_1, ANA_2)) = \alpha^{sb_G(AB)} \beta^{sb_D(AB)} p(\mathbb{B}(ANA_1, ANA_2)).$$

2. Série génératrice, formules des équerres et énumérations des arbres  
non-ambigus

De plus,  $sb_G(AB) = sb_G(ANA_1) + 1$  et  $sb_D(AB) = sb_D(ANA_2) + 1$ , donc

$$p_{\alpha,\beta}(\mathbb{B}(ANA_1, ANA_2)) = \alpha\beta p(\mathbb{B}(\alpha^{sb_G(ANA_1)} ANA_1, \beta^{sb_D(ANA_1)} ANA_2)).$$

Ensuite, par la proposition 5.2.3 et la linéarité de  $p$ , on a

$$p_{\alpha,\beta}(\mathbb{B}(ANA_1, ANA_2)) = \alpha\beta B(\alpha^{sb_G(ANA_1)} p(ANA_1), \beta^{sb_D(ANA_1)} p(ANA_2)),$$

ce qui prouve la première identité. La deuxième identité se prouve par récurrence en utilisant la première. Par définition de  $p_{\alpha,\beta}$  et  $B_{\alpha,\beta}$ , l'égalité est vraie si  $AB = \emptyset_G$  ou  $AB = \emptyset_D$ . Sinon, par récurrence on a :

$$\begin{aligned} p_{\alpha,\beta}(\mathbb{QANA}(AB)) &= p_{\alpha,\beta}(\mathbb{B}(\mathbb{QANA}(AB_G), \mathbb{QANA}(AB_D))) \\ &= B_{\alpha,\beta}(p_{\alpha,1}(\mathbb{QANA}(AB_G)), p_{1,\beta}(\mathbb{QANA}(AB_D))) \\ &= B_{\alpha,\beta}(B_{\alpha,1}(AB_G), B_{1,\beta}(AB_G)) \\ &= B_{\alpha,\beta}(AB). \quad \square \end{aligned}$$

Les statistiques  $sb_G$  et  $sb_D$  n'induisent pas de  $(\alpha, \beta)$ -analogue intéressant de la formule des équerres, car elles dépendent uniquement de la structure de l'arbre binaire sous-jacent, alors que la formule des équerres compte le nombre d'étiquetages valides à arbre binaire fixé. Considérons maintenant les séries génératrices

$$\mathfrak{G}(x, y; \alpha, \beta) = \sum_{ANA \in \mathcal{ANA}} p_{\alpha,\beta}(ANA) \quad \text{et} \quad \mathfrak{N}(x, y; \alpha, \beta) = \partial_x \partial_y \mathfrak{G}(x, y; \alpha, \beta),$$

Elles vérifient les équations suivantes.

PROPOSITION 5.2.12. *Les fonctions génératrices  $\mathfrak{G}(\alpha, \beta)$  et  $\mathfrak{N}(\alpha, \beta)$  satisfont les relations suivantes :*

$$\mathfrak{G}(\alpha, \beta) = \frac{y}{\alpha} + \frac{x}{\beta} + \alpha\beta \int_0^x \int_0^y \partial_y \mathfrak{G}(\alpha, 1) \partial_x \mathfrak{G}(1, \beta) dx dy,$$

et

$$\mathfrak{N}(\alpha, \beta) = \left(1 + \alpha \int_0^x \mathfrak{N}(\alpha, 1) dx\right) \left(1 + \beta \int_0^y \mathfrak{N}(1, \beta) dy\right).$$

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence de la bilinéarité de  $B_{\alpha,\beta}$  et de la proposition 5.2.11. La preuve est analogue à celle de la proposition 5.2.5.  $\square$

Aucune formule close n'a été trouvée pour  $\mathfrak{G}(\alpha, \beta)$ , contrairement à  $\mathfrak{N}(\alpha, \beta)$ .

PROPOSITION 5.2.13. *Le série génératrice des arbres non-ambigus  $\mathfrak{N}(\alpha, \beta)$  est égale à*

$$\mathfrak{N}(x, y; \alpha, \beta) = \frac{e^{\alpha x + \beta y}}{(1 - (e^x - 1)(e^y - 1))^{\alpha + \beta}}.$$

DÉMONSTRATION. Nous allons commencer par calculer la quantité

$$1 + \int_0^x \mathfrak{N}(x, y; \alpha, 1) dx,$$

puis nous allons en déduire la valeur de  $\mathfrak{N}(x, y; \alpha, \beta)$ . La série génératrice  $\mathfrak{N}(x, y; \alpha, 1)$  vérifie l'identité

$$\mathfrak{N}(\alpha, 1) = \left(1 + \alpha \int_0^x \mathfrak{N}(\alpha, 1) dx\right) \left(1 + \int_0^y \mathfrak{N}(1, 1) dy\right).$$

Or,

$$(38) \quad \mathfrak{N}(1, 1) = \partial_y \partial_x - \ln(1 - (e^x - 1)(e^y - 1))$$

et

$$\partial_x - \ln(1 - (e^x - 1)(e^y - 1))|_{y=0} = 0,$$

donc

$$\int_0^y \mathfrak{N}(1, 1) dy = \partial_x - \ln(1 - (e^x - 1)(e^y - 1)).$$

On note

$$f(x, y; \alpha) = \int_0^x \mathfrak{N}(\alpha, 1) dx.$$

L'Équation (38) devient

$$\partial_x f(\alpha) = (1 + \alpha f(\alpha)) (1 - \partial_x \ln(1 - (e^x - 1)(e^y - 1))).$$

Ainsi

$$\frac{\partial_x f(\alpha)}{(1 + \alpha f(\alpha))} = (1 - \partial_x \ln(1 - (e^x - 1)(e^y - 1))).$$

Ce qui implique que

$$\frac{1}{\alpha} \ln(1 + \alpha f(\alpha)) = x - \ln(1 - (e^x - 1)(e^y - 1)),$$

car  $f(0) = 0$ . Finalement, on obtient

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{e^{\alpha x}}{(1 - (e^x - 1)(e^y - 1))^\alpha} - 1 \right).$$

De plus, étant donné que l'on a la relation  $\mathfrak{N}(x, y, \alpha, \beta) = \mathfrak{N}(y, x, \beta, \alpha)$ , alors

$$\int_0^y \mathfrak{N}(x, y; 1, \beta) = \int_0^y \mathfrak{N}(y, x; \beta, 1) = f(y, x; \beta).$$

Il ne reste plus qu'à calculer la formule close à partir de l'identité de la proposition 5.2.12.

$$\mathfrak{N}(x, y; \alpha, \beta) = (1 + \alpha f(x, y; \alpha))(1 + \beta f(y, x; \beta)). \quad \square$$

On en déduit un  $(\alpha, \beta)$ -analogue de la proposition 5.2.8.

PROPOSITION 5.2.14. *Soit  $i$  et  $j$  deux entiers non nuls. Le  $(\alpha, \beta)$ -analogue du nombre d'arbres non-ambigus ANA de dimension géométrique  $i \times j$  est*

$$\left[ \frac{x^{i-1} y^{j-1}}{(i-1)!(j-1)!} \right] \mathfrak{N}(x, y; \alpha, \beta) = \sum_{p \geq 1} (p-1)! (\alpha + \beta)_{p-1} S_{2,\alpha}(i, p) S_{2,\beta}(j, p).$$



DÉMONSTRATION. On rappelle tout d'abord que

$$\frac{1}{(1-u)^z} = \sum_{p \geq 0} \frac{z(z+1) \cdots (z+(p-1))}{p!} u^p.$$

Ainsi, en développant la formule close de  $\mathfrak{N}(x, y; \alpha, \beta)$ , on trouve

$$\mathfrak{N}(x, y; \alpha, \beta) = \sum_{p \geq 0} \frac{(\alpha + \beta)_p}{p!} e^{\alpha x} (e^x - 1)^p e^{\beta y} (e^y - 1)^p.$$

Or, d'après l'équation (1) de la section 1.1 on a l'égalité

$$e^{qx} (e^x - 1)^k = \sum_{n \geq 1} k! S_{2,q}(n, k+1) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

D'où le résultat. □

Nous venons de démontrer les propositions 5.2.13 et 5.2.14 par le calcul, dans la section 3 nous proposerons une interprétation de ces formules, en les prouvant de manière combinatoire.

### 2.3. Le $q$ -analogue de la formule des équerres

Cette fois-ci, les statistiques que nous allons considérer dépendent de l'étiquetage qui a été choisi. Nous définissons tout d'abord deux parcours des étiquettes d'un arbre binaire.

DÉFINITION 5.2.15. Soit  $AB$  un arbre binaire non vide étiqueté. On appelle *parcours postfixe gauche des sommets gauches* de  $AB$ , la liste obtenue par concaténation du parcours de  $AB_G$ , du parcours de  $AB_D$  et de l'étiquette de la racine de  $AB$  si c'est un sommet gauche. De même, on appelle *parcours postfixe droit des sommets droits* de  $AB$ , la liste obtenue par concaténation du parcours de  $AB_D$ , du parcours de  $AB_G$  et de l'étiquette de la racine de  $AB$  si c'est un sommet droit. Dans ce contexte la racine initiale ne compte ni comme un sommet gauche, ni comme un sommet droit.

Par exemple, le parcours postfixe gauche des sommets gauche de l'arbre binaire étiqueté de la figure 8 est  $c b e g$ , et le parcours postfixe droit des sommets droits est  $i h f d$ . Pour encoder l'étiquetage d'un arbre binaire, on lui associe les deux permutations suivantes.

DÉFINITION 5.2.16. Soit  $ANA$  un arbre non-ambigu non vide. On note  $\sigma_G(ANA)$  la permutation obtenue par un parcours postfixe gauche des sommets gauches de  $ANA$ . De même, on note  $\sigma_D(ANA)$  la permutation obtenue par un parcours postfixe droit des sommets droits. Si  $ANA$  est de taille zéro, alors  $\sigma_G(ANA) = \emptyset$  et  $\sigma_D(ANA) = \emptyset$ , où  $\emptyset$  est la permutation vide.

Un exemple est donné dans la figure 9.

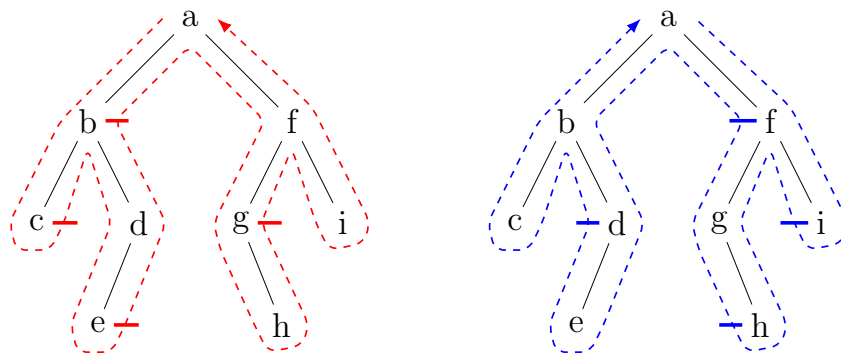


FIGURE 8. Illustration des parcours de la définition 5.2.15.

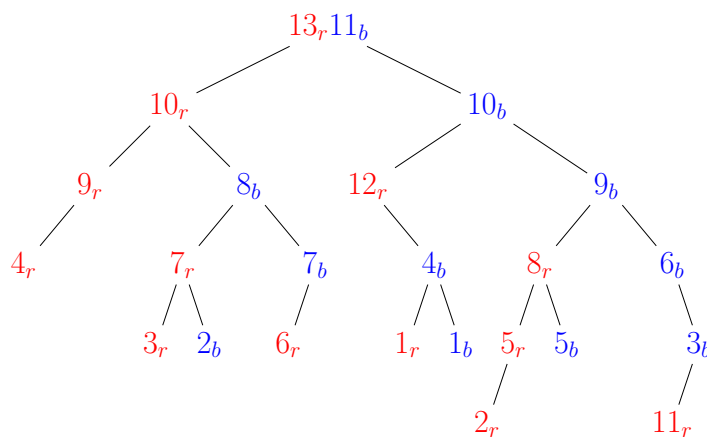


FIGURE 9. Un arbre non-ambigu ANA tel que  $\sigma_G(ANA) = 4_r 9_r 3_r 7_r 6_r 10_r 1_r 12_r 2_r 5_r 8_r 11_r$  et  $\sigma_D(ANA) = 3_b 6_b 5_b 9_b 1_b 4_b 10_b 7_b 2_b 8_b$ .

Soit  $s$  une statistique parmi  $\text{inv}$  et  $\text{imaj}$ , avec la convention que  $s(\emptyset) = 0$ . Le nouveau poids que l'on va considérer est

$$p_{q,S}(ANA) = q_G^{s(\sigma_G(ANA))} q_D^{s(\sigma_D(ANA))} \frac{x^{dg_G(ANA)} y^{dg_D(ANA)}}{[dg_G(ANA)]_{q_G}! [dg_D(ANA)]_{q_D}!},$$

on l'étend par linéarité à  $\mathbb{Q}ANA$ . En particulier,  $p_{q,S}(\emptyset_G) = y$  et  $p_{q,S}(\emptyset_D) = x$ . Pour déterminer l'image de  $\mathbb{B}$  par  $p_{q,S}$ , nous devons étudier le comportement de  $p_{q,S}$  vis à vis de la décomposition en sous-arbre gauche et sous-arbre droit d'un arbre non-ambigu. Pour cela, nous commençons par décrire la structure récursive des paires de permutations associées aux arbres non-ambigus. De même que pour les arbres non-ambigus, on considère le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel  $\mathbb{Q}\mathfrak{S}$  engendré par les permutations. On étend les applications  $\sigma_G$  et  $\sigma_D$  à  $\mathbb{Q}ANA$  par linéarité. Soit  $\sigma$  une permutation de taille  $n$ , on note  $\int \sigma$  la permutation de taille  $n + 1$  telle que  $\int \sigma(i) = \sigma(i)$  pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $\int \sigma(n + 1) = n + 1$ .

2. Série génératrice, formules des équerres et énumérations des arbres  
non-ambigus

DÉFINITION 5.2.17. Soit  $\mathbb{B}\mathfrak{S}$  l'application bilinéaire  $\mathbb{Q}\mathfrak{S} \times \mathbb{Q}\mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{Q}\mathfrak{S}$  telle que si on choisit deux permutations  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  de tailles respectives  $n_1$  et  $n_2$ , alors

$$\mathbb{B}\mathfrak{S}(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{\substack{uv \in \mathfrak{S}_{n_1+n_2+1} \\ \text{std}(u) = \int \sigma_1 \\ \text{std}(v) = \sigma_2}} uv.$$

Par exemple, soit  $\sigma_1 = 1$  et  $\sigma_2 = 12$ , alors

$$\mathbb{B}\mathfrak{S}(\sigma_1, \sigma_2) = 1243 + 1342 + 1432 + 2341 + 2431 + 3421.$$

Étant données deux permutations  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  correspondant au parcours postfixe gauche (resp. droit) de deux arbres non-ambigus  $ANA_1$  et  $ANA_2$ , l'application  $\mathbb{B}\mathfrak{S}$  nous permet de déterminer le parcours postfixe gauche (resp. droit) des arbres non-ambigus de  $\mathbb{B}(ANA_1, ANA_2)$ , à partir de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , comme nous le montre la proposition suivante.

PROPOSITION 5.2.18. Soit  $ANA_1$  et  $ANA_2$  deux arbres non-ambigus non vides, alors

$$\sigma_G(\mathbb{B}(ANA_1, ANA_2)) = \mathbb{B}\mathfrak{S}(\sigma_G(ANA_1), \sigma_G(ANA_2)),$$

et

$$\sigma_D(\mathbb{B}(ANA_1, ANA_2)) = \mathbb{B}\mathfrak{S}(\sigma_D(ANA_2), \sigma_D(ANA_1)).$$

DÉMONSTRATION. Soit  $ANA$  un arbre non-ambigu de  $\mathbb{B}(ANA_1, ANA_2)$ , on note  $AB$  la forme de  $ANA$ . On peut écrire  $\sigma_G(ANA) = uv$  où  $u$  est le parcours postfixe gauche des sommets gauches du sous-arbre gauche de  $ANA$  et  $v$  est celui du sous-arbre droit. Par définition on a  $\text{std}(u) = \int \sigma_G(ANA_1)$  et  $\text{std}(v) = \sigma_G(ANA_2)$ , le signe  $\int$  dans la première égalité provient du fait que la racine de  $ANA_1$  devient un sommet gauche dans  $ANA$ . De plus, choisir un  $v$  tel que le standardisé vaut  $\sigma_G(ANA_2)$  est équivalent à choisir un étiquetage des sommets gauche de  $AB_D$  respectant l'ordre total présent dans  $ANA_2$ , et de même pour  $u$  à la racine de  $ANA_1$  près. Cela prouve la première égalité. La preuve de la deuxième est essentiellement la même, mise à part que le parcours postfixe droit lit d'abord le sous-arbre droit, et que c'est la racine de  $ANA_2$  qui devient un sommet droit. L'ordre de  $ANA_1$  et  $ANA_2$  est donc échangé dans  $\mathbb{B}\mathfrak{S}$ .  $\square$

Vis à vis de  $\mathbb{B}\mathfrak{S}$  les statistiques  $\text{inv}$  et  $\text{imaj}$  se comportent de la façon suivante.

PROPOSITION 5.2.19. Soit  $n_1$  et  $n_2$  deux entiers naturels, soit  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  deux permutations de tailles respectives  $n_1$  et  $n_2$ , et soit  $s \in \{\text{inv}, \text{imaj}\}$ . Alors

$$\sum_{\substack{uv \in \mathfrak{S}_{n_1+n_2+1} \\ \text{std}(u) = \int \sigma_1 \\ \text{std}(v) = \sigma_2}} q^{s(uv)} = q^{s(\sigma_1) + s(\sigma_2)} \binom{n_1 + n_2 + 1}{n_1 + 1}_q.$$

DÉMONSTRATION. Commençons par le cas où  $s = \text{inv}$ . Le  $q$ -binomial consiste à choisir une permutation  $\tau$  telle que  $\tau(1) < \dots < \tau(n_1 + 1)$  et  $\tau(n_1 + 2) < \dots < \tau(n_1 + n_2 + 1)$ . Le terme  $q^{s(\sigma_1)}$  provient du fait que pour  $i \in \llbracket 1, n_1 + 1 \rrbracket$ ,  $u_i = \tau(\sigma_1(i))$ . Et de même, le terme  $q^{s(\sigma_2)}$  provient du fait que pour  $i \in \llbracket 1, n_2 \rrbracket$ ,  $v_i = \tau(\sigma_2(i) + n_1 + 1)$ .

Supposons maintenant que  $s = \text{imaj}$ . On commence par prouver les deux égalités suivantes,

$$(39) \quad \sum_{\substack{uv \in \mathfrak{S}_{n_1+n_2+1} \\ n_1+n_2+1 \in u \\ \text{std}(u) = f \sigma_1 \\ \text{std}(v) = \sigma_2}} q^{s(uv)} = q^{s(\sigma_1)+s(\sigma_2)+n_2} \binom{n_1+n_2}{n_2}_q,$$

et

$$(40) \quad \sum_{\substack{uv \in \mathfrak{S}_{n_1+n_2+1} \\ n_1+n_2+1 \in v \\ \text{std}(u) = f \sigma_1 \\ \text{std}(v) = \sigma_2}} q^{s(uv)} = q^{s(\sigma_1)+s(\sigma_2)} \binom{n_1+n_2}{n_2-1}_q.$$

Puis l'identité

$$\binom{a+b+1}{a}_q = q^a \binom{a+b}{a}_q + \binom{a+b}{a-1}_q$$

nous permettra de conclure. L'équation (39) est une conséquence de [HNT08, Equation 36]. On prouve l'équation (40) par récurrence sur  $n_1 + n_2$  en distinguant deux cas, soit  $n_1 + n_2 \in u$ , soit  $n_1 + n_2 \in v$ . Dans le premier cas, en utilisant l'équation (39) on a

$$\sum_{\substack{uv \in \mathfrak{S}_{n_1+n_2+1} \\ n_1+n_2+1 \in v \\ n_1+n_2 \in u \\ \text{std}(u) = f \sigma_1 \\ \text{std}(v) = \sigma_2}} q^{s(uv)} = \sum_{\substack{uv' \in \mathfrak{S}_{n_1+n_2} \\ n_1+n_2 \in u \\ \text{std}(u) = f \sigma_1 \\ \text{std}(v') = \sigma'_2}} q^{s(uv')} = q^{s(\sigma_1)+s(\sigma'_2)+n_2-1} \binom{n_1+n_2-1}{n_2-1}_q,$$

où  $\sigma'_2$  est obtenu à partir de  $\sigma_2$  en supprimant  $n_2$ . Soit  $\epsilon$  égal à 1 si  $n_2$  est à gauche de  $n_2 - 1$  dans  $\sigma_2$  et 0 sinon. Alors  $s(\sigma_2) = s(\sigma'_2) + \epsilon(n_2 - 1)$ , et donc

$$\sum_{\substack{uv \in \mathfrak{S}_{n_1+n_2+1} \\ n_1+n_2+1 \in v \\ n_1+n_2 \in u \\ \text{std}(u) = f \sigma_1 \\ \text{std}(v) = \sigma_2}} q^{s(uv)} = q^{s(\sigma_1)+s(\sigma_2)+(1-\epsilon)(n_2-1)} \binom{n_1+n_2-1}{n_2-1}_q.$$

Dans le deuxième cas, en utilisant par récurrence l'équation (40),

$$\sum_{\substack{uv \in \mathfrak{S}_{n_1+n_2+1} \\ n_1+n_2+1 \in v \\ n_1+n_2 \in v \\ \text{std}(u) = f \sigma_1 \\ \text{std}(v) = \sigma_2}} q^{s(uv)} = q^{\epsilon(n_2+n_1)} \sum_{\substack{uv' \in \mathfrak{S}_{n_1+n_2} \\ n_1+n_2 \in v \\ \text{std}(u) = f \sigma_1 \\ \text{std}(v') = \sigma'_2}} q^{s(uv')}$$

$$\begin{aligned}
 &= q^{s(\sigma_1)+s(\sigma'_2)+\epsilon(n_2+n_1)} \binom{n_2+n_1-1}{n_2-2}_q \\
 &= q^{s(\sigma_1)+s(\sigma_2)+\epsilon(n_1+1)} \binom{n_2+n_1-1}{n_2-2}_q.
 \end{aligned}$$

Or, quelle que soit la valeur de  $\epsilon$ , on a

$$q^{\epsilon(n_1+1)} \binom{n_2+n_1-1}{n_2-2}_q + q^{(1-\epsilon)(n_2-1)} \binom{n_1+n_2-1}{n_2-1}_q = \binom{n_1+n_2}{n_2-1}_q.$$

Il ne nous manque plus que la condition initiale, c'est-à-dire que l'équation (40) doit être vraie si  $v$  est l'unique permutation de taille 1, ce qui est trivialement le cas.  $\square$

On peut maintenant définir l'image de  $\mathbb{B}$  par  $p_{q,S}$ . Mais pour cela, on a besoin d'introduire d'abord un  $q$ -analogue de l'intégrale

$$\int_0^x x^n d_q x = \frac{x^{n+1}}{[n+1]_q},$$

et un  $q$ -analogue de la dérivée

$$\partial_{x,q} x^n = [n]_q x^{n-1}.$$

DÉFINITION 5.2.20. Soit  $B_q$  l'application bilinéaire

$$B_q : \mathbb{Q}(q_G, q_D)[[x, y]] \times \mathbb{Q}(q_G, q_D)[[x, y]] \rightarrow \mathbb{Q}(q_G, q_D)[[x, y]]$$

telle que

$$B_q(u, v) = \int_0^x \int_0^y \partial_{y,q_G}(u) \partial_{x,q_D}(v) d_{q_G} x d_{q_D} y.$$

Soit  $AB$  un arbre binaire, on définit également  $B_q(AB)$ . Si  $AB = \emptyset_G$  (resp.  $AB = \emptyset_D$ ) alors  $B_q(AB) = y$  (resp.  $B_q(\emptyset_D) = x$ ), sinon

$$B_q(AB) = B_q(B_q(AB_G), B_q(AB_D)).$$

On a de nouveau l'équivalent de la proposition 5.2.3.

PROPOSITION 5.2.21. Soit  $ANA_1, ANA_2 \in \mathbb{Q}\mathcal{ANA}$ , et soit  $s \in \{\text{inv}, \text{imaj}\}$ , alors

$$p_{q,S}(\mathbb{B}(ANA_1, ANA_2)) = B_q(p_{q,S}(ANA_1), p_{q,S}(ANA_2)).$$

En particulier, pour tout arbre binaire  $AB$ ,

$$B_q(AB) = p_{q,S}(\mathbb{Q}\mathcal{ANA}(AB)).$$

DÉMONSTRATION. Soit  $u = p_{q,S}(ANA_1)$  et  $v = p_{q,S}(ANA_2)$ . Au vu de la proposition 5.2.19 et puisque la taille de  $\sigma_G(ANA)$  est égale à  $dg_G(ANA) - 1$  et celle de  $\sigma_D(ANA)$  à  $dg_D(ANA) - 1$ , il suffit de montrer que

$$B_q(u, v) = q_G^{s(\sigma_G(ANA_1))+s(\sigma_G(ANA_2))} \binom{dg_G(ANA_1) + dg_G(ANA_2) - 1}{dg_G(ANA_1)}_{q_G}$$

$$\begin{aligned} & \times q_D^{s(\sigma_D(ANA_1))+s(\sigma_D(ANA_2))} \binom{dg_D(ANA_1) + dg_D(ANA_2) - 1}{dg_D(ANA_2)}_{q_D} \\ & \quad x^{dg_G(ANA_1)+dg_G(ANA_2)} y^{dg_D(ANA_1)+dg_D(ANA_2)} \\ & \times \frac{1}{[dg_G(ANA_1) + dg_G(ANA_2)]_{q_G}! [dg_D(ANA_1) + dg_D(ANA_2)]_{q_D}!}, \end{aligned}$$

avec la convention que  $s(\sigma_G(\emptyset_G)) = s(\sigma_D(\emptyset_G)) = s(\sigma_G(\emptyset_D)) = s(\sigma_D(\emptyset_D)) = 0$ . La preuve est exactement la même que celle de la première identité de la proposition 5.2.3. La deuxième identité se prouve de la même manière que celle de la proposition 5.2.3, il suffit de remplacer  $B$  par  $B_q$  et  $p$  par  $p_{q,S}$ .  $\square$

Il en découle un analogue de la formule des équerres. Pour l'énoncer, on définit

$$p_s(ANA) = q_G^{s(\sigma_G(ANA))} q_D^{s(\sigma_D(ANA))},$$

que l'on étend à  $\mathbb{Q}\mathcal{ANA}$  par linéarité.

PROPOSITION 5.2.22. *Soit  $s \in \{\text{inv}, \text{imaj}\}$ . Soit  $AB$  un arbre binaire, alors*

$$p_s(\mathbb{Q}\mathcal{ANA}(AB)) = \frac{[dg_G(AB)]_{q_G}! [dg_D(AB)]_{q_D}!}{\prod_{s \text{ sommet gauche}} [dg_G(s)]_{q_G} \prod_{s \text{ sommet droit}} [dg_D(s)]_{q_D}}.$$

DÉMONSTRATION. Par définition

$$p_{q,S}(\mathbb{Q}\mathcal{ANA}(AB)) = p_s(\mathbb{Q}\mathcal{ANA}(AB)) \frac{x^{dg_G(AB)} y^{dg_D(AB)}}{dg_G(AB)! dg_D(AB)!}.$$

D'après la proposition 5.2.21,  $p_{q,S}(\mathbb{Q}\mathcal{ANA}(AB)) = B_q(AB)$ . Et par définition, on peut calculer  $B_q(AB)$  de manière récursive. Supposons que ni  $AB_G$  ni  $AB_D$  ne sont vides, alors :

$$\begin{aligned} B_q(AB) &= B_q(B_q(AB_G), B_q(AB_D)) \\ &= \int_0^x \int_0^y \partial_{y,q_G}(B_q(AB_G)) \partial_{x,q_D}(B_q(AB_D)) d_{q_G}x d_{q_D}y \\ &= \frac{[dg_D(AB_G)]_{q_G} [dg_G(AB_D)]_{q_D}}{[dg_G(AB)]_{q_G} [dg_D(AB)]_{q_D}} B_q(AB_G) B_q(AB_D). \end{aligned}$$

En déroulant la récurrence comme dans la preuve de la proposition 5.2.4, on obtient

$$\frac{p_s(\mathbb{Q}\mathcal{ANA}(AB))}{[dg_G(AB)]_{q_G}! [dg_D(AB)]_{q_D}!} = \frac{1}{\prod_{s \text{ sommet gauche}} [dg_G(s)]_{q_G} \prod_{s \text{ sommet droit}} [dg_D(s)]_{q_D}},$$

ce qui implique le résultat.  $\square$

Soit  $s \in \{\text{inv}, \text{imaj}\}$ . Considérons maintenant les séries génératrices

$$\mathfrak{G}(x, y; q_G, q_D) = \sum_{ANA \in \mathcal{ANA}} p_{q,S}(ANA)$$

et

$$\mathfrak{N}(x, y; q_G, q_D) = \partial_{x,q_G} \partial_{y,q_D} \mathfrak{G}(x, y; q_G, q_D).$$

### 3. Interprétations combinatoire de la série génératrice et de l'énumération des arbres non-ambigus

Elles vérifient des  $q$ -analogues des relations précédentes.

PROPOSITION 5.2.23. *Les fonctions génératrices  $\mathfrak{G}(q_G, q_D)$  et  $\mathfrak{N}(q_G, q_D)$  satisfont les relations suivantes.*

$$\mathfrak{G}(q_G, q_D) = y + x + \int_0^x \int_0^y \partial_{y, q_G} \mathfrak{G}(q_G, q_D) \partial_{x, q_D} \mathfrak{G}(q_G, q_D) d_{q_G} x d_{q_D} y,$$

et

$$\mathfrak{N}(q_G, q_D) = \left(1 + \int_0^x \mathfrak{N}(q_G, q_D) d_{q_G} x\right) \left(1 + \int_0^y \mathfrak{N}(q_G, q_D) d_{q_D} y\right).$$

DÉMONSTRATION. Comme précédemment, la première relation est une conséquence directe de la deuxième identité de la proposition 5.2.21. Quant à la deuxième elle provient de la première, et de l'identité

$$\mathfrak{G}(q_G, q_D) = y + x + \int_0^x \int_0^y \mathfrak{N}(q_G, q_D) d_{q_G} x d_{q_D} y. \quad \square$$

## 3. Interprétations combinatoire de la série génératrice et de l'énumération des arbres non-ambigus

Dans la section 2 nous avons démontré par le calcul des formules closes pour les séries génératrices (proposition 5.2.7 et 5.2.13), desquelles nous avons déduit une formule d'énumération à dimension géométrique fixée (proposition 5.2.8 et 5.2.14). Nous allons en donner deux interprétations combinatoires. La première utilise la bijection de [Bur07] entre les arbres non-ambigus et les permutations dont toutes les excédences strictes sont au début, tandis que la deuxième met en évidence la structure arborescente des *équerres* d'un arbre binaire. Dans les deux cas, la statistique partitionnant les arbres non-ambigus de sorte à expliquer la somme de la formule d'énumération est le nombre d'équerres, nous le définissons dans la section 3.1. Enfin, [CE10] ont également donné une interprétation combinatoire du cas  $\alpha = \beta = 1$  dans le contexte des permutations dont toutes les excédences strictes sont au début. Dans la section 4, nous donnerons une preuve combinatoire de l'équidistribution entre la statistique du nombre d'équerres et leur statistique expliquant la somme de la formule d'énumération.

### 3.1. Les équerres des arbres binaires

Avant d'introduire la statistique qui nous intéresse, nous devons définir l'équerre associée à un sommet d'un arbre binaire. Pour cela, nous avons besoin de la notion de *branche gauche* et de *branche droite* d'un sommet. La





3. *Interprétations combinatoire de la série génératrice et de l'énumération des arbres non-ambigus*

celle de [Bur07, Theorem 4.2] dans laquelle le bord d'un *bare tableau* décrit les emplacements des excédences de la permutation correspondante. Nous utilisons une version légèrement modifiée de cette bijection (remarque 5.3.3) que nous décrivons en termes de tableaux boisés, nous la notons  $\varphi$ . Sachant qu'une bijection simple entre les tableaux boisés et les *bare tableaux* consiste à supprimer la colonne la plus à gauche dans les tableaux boisés.

Soit  $TB$  un tableau boisé de taille  $n$ . On note  $TB'$  le tableau obtenu à partir de  $TB$  en supprimant la colonne la plus à gauche. On numérote le bord de  $TB'$  de 1 à  $n$  du sud-ouest au nord-est. On rappelle que les points de  $TB$  forment un arbre binaire. On ajoute  $n + 1$  feuilles à cet arbre binaire de la façon suivante. Si un point n'a pas de point sous lui dans la même colonne, alors on définit son fils gauche comme étant l'arête du bord associée à sa colonne. De même, s'il n'a pas de point à sa droite dans la même ligne, alors on définit son fils droit comme étant l'arête du bord associée à sa ligne. Les feuilles de l'arbre binaire complet ainsi obtenu, correspondent exactement au bord de  $TB$ . Cela induit une structure de forêt d'arbres binaires complets sur  $TB'$ , où les feuilles sont numérotées de 1 à  $n$ . Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Nous allons définir l'image de  $i$  par  $\sigma = \varphi(TB)$ . Si  $i$  correspond à un pas horizontal, on remonte jusqu'au sommet le plus haut de la colonne correspondante. Puis on descend dans l'arbre binaire en zigzaguant : fils droit, fils gauche, fils droit... jusqu'à arriver sur une feuille. Le numéro de cette feuille définit  $\sigma(i)$ . Si  $i$  correspond à un pas vertical, il y a deux situations, soit la ligne correspondante est vide et dans ce cas là,  $\sigma(i) = i$ , soit elle ne l'est pas et on fait l'analogie du cas précédent. L'image de  $i$  est le numéro de la feuille obtenue en zigzaguant à partir du sommet le plus à gauche de la ligne correspondante, en commençant par le fils gauche. Un exemple est donné dans la figure 11. Si on note  $\sigma$  l'image par  $\varphi$  du tableau boisé de la figure, alors  $\sigma = (13\ 1\ 6\ 20\ 12\ 5\ 22\ 10\ 2\ 23)\ (21)\ (18\ 3\ 7\ 17\ 15\ 4\ 19)\ (14\ 9\ 8\ 16)\ (11)$ . En particulier,  $\sigma(23) = 13$  et  $\sigma(3) = 7$ .

REMARQUE 5.3.3. La bijection originale de Burstein numérote le bord en commençant par le nord-est, et ce sont les nœuds internes qui sont numérotés. Le numéro d'un sommet gauche correspond au numéro de sa ligne, et celui d'un sommet droit à celui de sa colonne.

PROPOSITION 5.3.4. *Soit  $n$  un entier naturel non nul. L'application  $\varphi$  est une bijection entre les tableaux boisés de taille  $n$  et les permutations de taille  $n$ , telle que les indices des colonnes, excepté la plus à gauche, d'un tableau boisé  $TB$  correspondent exactement aux indices des excédences strictes de  $\varphi(TB)$ .*

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence du théorème 4.2 de [Bur07] en prenant en compte que  $\varphi$  numérote le bord dans l'autre sens. Ainsi, contrairement à la bijection de Burstein où les lignes correspondent aux excédences faibles, elles correspondent aux déficiences faibles. Par conséquent, les colonnes correspondent aux excédences strictes.  $\square$

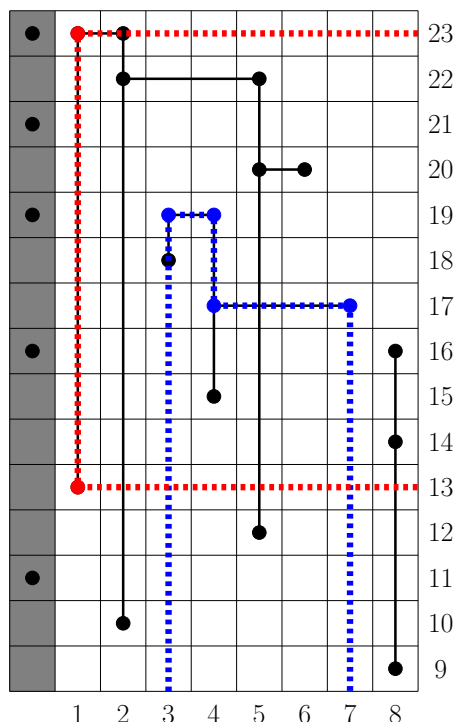


FIGURE 11. Exemple de la bijection  $\varphi$ .

Si on utilise la même idée de zigzag mais en conservant la colonne la plus à gauche, que l'on numérote par 0, on obtient cette fois-ci un cycle, soit  $\psi$  cette application.

PROPOSITION 5.3.5. *Soit  $n$  un entier naturel non nul. L'application  $\psi$  est une bijection entre les tableaux boisés de taille  $n$  et les cycles de  $\llbracket 0, n \rrbracket$ , telle que les indices des colonnes d'un tableau boisé  $TB$  correspondent exactement aux indices des excédences strictes de  $\psi(TB)$ .*

C'est une conséquence de la proposition 5.3.4 du fait que les applications  $\varphi$  et  $\psi$  sont liées par la proposition suivante.

LEMME 5.3.6. *Soit  $TB$  un tableau boisé, et soit  $c_1 \cdots c_k$  la décomposition en cycle de  $\varphi(TB)$  telle que le plus grand élément de  $c_i$  soit plus grand que celui de  $c_{i+1}$ . Alors, un représentant de  $\psi(TB)$  est le mot  $0m_1 \cdots m_k$  où  $m_i$  est le représentant de  $c_i$  tel que le plus grand élément de  $c_i$  est à droite.*

DÉMONSTRATION. Commençons la preuve par une observation. Soit  $TB$  un tableau boisé, la bijection  $\varphi$  nous dit également que le nombre de cycles de  $\varphi(TB)$  correspond exactement au nombre d'arbres binaires et de lignes vides du tableau obtenu en supprimant la colonne la plus à gauche de  $TB$ . Ce qui correspond exactement au nombre de points dans la colonne la plus à gauche de  $TB$ . De plus, chaque indice de la ligne d'un point de la colonne la plus à gauche de  $TB$  correspond au plus grand élément du cycle correspondant.

3. Interprétations combinatoire de la série génératrice et de l'énumération des arbres non-ambigus

Notons  $\sigma = \varphi(TB)$  et  $c = \psi(TB)$ . Il est clair que seules les images des numéros des lignes ayant un point dans la colonne la plus à gauche de  $TB$  sont modifiées. Notons  $i_1 < \dots < i_k$  les numéros de ces lignes. Au vu de la construction,  $c(i_j) = \sigma(i_{j-1})$  pour  $j \in \llbracket 2, k \rrbracket$ ,  $c(i_1) = 0$  et  $c(0) = \sigma(i_j)$ . D'où le résultat.  $\square$

Par exemple, si on note  $ANA$  l'arbre non-ambigu de la figure 12, qui est exactement l'arbre non-ambigu de la figure 11, on a bien

$$\psi(ANA) = (0 \ 13 \ 1 \ 6 \ 20 \ 12 \ 5 \ 22 \ 10 \ 2 \ 23 \ 21 \ 18 \ 3 \ 7 \ 17 \ 15 \ 4 \ 19 \ 14 \ 9 \ 8 \ 16 \ 11).$$

En particulier,  $\psi(19) = 14 = \varphi(16)$ . On en déduit le corollaire suivant sur les

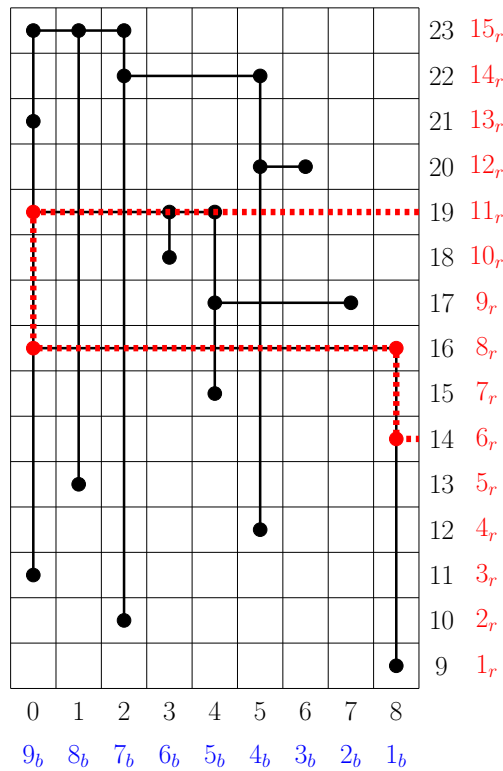


FIGURE 12. Exemple de la bijection  $\psi$ .

arbres non-ambigus.

**COROLLAIRE 5.3.7.** Soit  $dg_G$  et  $dg_D$  deux entiers naturels non nuls. L'application  $\psi$  est une bijection entre les arbres non-ambigus de dimension géométrique  $dg_G \times dg_D$ , et les cycles de  $\llbracket 0, dg_G + dg_D - 1 \rrbracket$  dont les indices des excédences strictes sont exactement  $\llbracket 0, dg_G - 1 \rrbracket$ .

Pour simplifier les prochaines explications, on va numéroter indépendamment les lignes et les colonnes de la . Pour ce faire, on va remplacer les entiers  $\llbracket 0, dg_G - 1 \rrbracket$  par  $\llbracket 1_b, dg_{Gb} \rrbracket$  en utilisant l'application  $i \mapsto (dg_G - i)_b$ , et les entiers  $\llbracket dg_G, dg_G + dg_D - 1 \rrbracket$  par  $\llbracket 1_r, dg_{Dr} \rrbracket$  en utilisant l'application  $i \mapsto (i - dg_G + 1)_r$ ,

comme illustré dans la figure 12. Si on note  $ANA$  l'arbre non-ambigu de cette figure, alors,  $\psi(ANA)$  est égal à

$$(9_b 5_r 8_b 3_b 12_r 4_r 4_b 14_r 2_r 7_b 15_r 13_r 10_r 6_b 2_b 9_r 7_r 5_b 11_r 6_r 1_r 1_b 8_r 3_r).$$

Les cycles que l'on obtient par l'application  $\psi$  sont les suivants.

DÉFINITION 5.3.8. Soit  $i$  et  $j$  deux entiers naturels non nuls. On appelle *cycle bicolore et bidécroissant* de taille  $i \times j$ , les cycles de l'ensemble  $[[1_r, i_r]] \cup [[1_b, j_b]]$  tels que, si l'image d'un entier rouge  $a$  (resp. bleu) est un entier rouge  $b$  (resp. bleu) alors,  $a > b$ .

Nous pouvons interpréter le nombre de blocs bleus des cycles bicolores et bidécroissants directement sur les arbres non-ambigus.

LEMME 5.3.9. *Soit  $ANA$  un arbre non-ambigu, alors le nombre d'équerres de  $ANA$  est égal au nombre de blocs bleus du cycle  $\psi(ANA)$ .*

DÉMONSTRATION. Nous allons montrer que les entiers rouges à droites des branches droites des équerres sont exactement les entiers rouges dont la préimage est un entier bleu. Pour ce faire, il suffit de remarquer que dans le cas d'un zigzag provenant d'un entier bleu (resp. rouge), un pas horizontal arrive sur un sommet non racine de la branche droite (resp. la racine) d'une équerre ou sur le bord, et qu'un pas vertical arrive sur la racine (resp. un sommet non racine de la branche gauche) d'une équerre ou sur le bord. Nous prouvons uniquement le cas des entiers bleus, la preuve du cas des entiers rouges étant analogue. Le premier sommet d'un zigzag partant d'un entier bleu est nécessairement sur la branche droite d'une équerre car il se trouve tout en haut d'une colonne. Le premier pas est horizontal et arrive donc bien sur un sommet non racine d'une branche droite. De manière générale, à droite du sommet racine d'une équerre, il y a soit le bord, soit un sommet de sa branche droite, et en dessous d'un sommet non racine d'une branche droite, il y a soit le bord, soit la racine d'une équerre, d'où l'assertion. En particulier, un pas horizontal d'un zigzag provenant d'un entier bleu part d'un sommet sur une branche droite, alors qu'un pas horizontal d'un zigzag provenant d'un entier rouge, part d'un sommet non racine d'une branche gauche, ce qui prouve le résultat.  $\square$

Par exemple, si on note  $ANA$  l'arbre non-ambigu de la figure 12, sa forme est l'arbre binaire de la figure 10, son nombre d'équerres est donc de 7, ce qui est également le nombre de blocs bleus de  $\psi(ANA)$ . Il est facile d'énumérer les cycles bicolores et bidécroissants à taille et nombre de blocs bleus fixés.

LEMME 5.3.10. *Soit  $i, j$  et  $p$  des entiers naturels non nuls, le nombre de cycles bicolores et bidécroissants de taille  $i \times j$  ayant  $p$  blocs bleus est*

$$(p-1)! p! S_2(dg_G, p) S_2(dg_D, p).$$

DÉMONSTRATION. La seule contrainte qu'il y a pour former un tel cycle est qu'après un entier rouge, il y a un entier rouge plus petit ou un entier bleu,

3. *Interprétations combinatoire de la série génératrice et de l'énumération des arbres non-ambigus*

et après un entier bleu, il y a un entier bleu plus petit ou un entier rouge. Ainsi, si on note  $p$  le nombre de blocs bleus, un tel cycle est déterminé par :

- une partition en  $p$  sous-ensembles non vides de  $\llbracket 1_r, dg_{G_r} \rrbracket$ ,
- une partition en  $p$  sous-ensembles non vides de  $\llbracket 1_b, dg_{D_b} \rrbracket$ ,
- un appariement entre les ensembles rouges et les ensembles bleus,
- le choix d'un cycle de taille  $p$ .

D'où la formule d'énumération. □

Par conséquent, on obtient le théorème suivant.

**THÉORÈME 5.3.11.** *Soit  $i, j$  et  $p$  trois entiers naturels non nuls, alors le nombre d'arbres non-ambigus ANA de dimension géométrique  $i \times j$  et tels que  $eq(ANA) = p$  est égal à*

$$(p-1)! p! S_2(i, p) S_2(j, p).$$

*De plus, la série génératrice des arbres non-ambigus non vides, où le poids d'un arbre non-ambigu ANA est*

$$z^{eq(ANA)} \frac{x^{dg_G(ANA)} y^{dg_D(ANA)}}{dg_G(ANA)! dg_D(ANA)!},$$

*est*

$$-\ln(1 - z(e^x - 1)(e^y - 1)).$$

**DÉMONSTRATION.** La formule d'énumération est une conséquence directe des lemmes 5.3.10 et 5.3.9. La formule close de la série génératrice provient du fait que les arbres non-ambigus sont en bijection avec des cycles dont les éléments sont des paires composées d'un ensemble non vide d'entiers rouges, qui correspondent aux étiquettes des sommets gauches, et d'un ensemble non vide d'entiers bleus qui correspondent aux étiquettes des sommets droits. Et, comme expliqué dans la section 1.1, la série génératrice des cycles comptés selon leur taille est  $-\ln(1 - u)$  et celle des ensembles non vides comptés selon leur nombre d'éléments est  $e^u - 1$ , d'où la formule. □

On en déduit directement le  $(\alpha, \beta)$ -analogue du théorème précédent, où  $\alpha$  compte le nombre de sommets non racines dans la branche gauche de la racine et  $\beta$  compte ceux dans la branche droite.

**THÉORÈME 5.3.12.** *Soit  $i, j$  et  $p$  trois entiers non nuls, alors le nombre d'arbres non-ambigus de dimension géométrique  $i \times j$  et ayant  $p$  équerres est*

$$(p-1)! (\alpha + \beta)_{p-1} S_{2,\alpha}(i, p) S_{2,\beta}(j, p).$$

*De plus, la série génératrice des arbres non-ambigus non vides, où le poids d'un arbre non-ambigu ANA est*

$$\alpha^{sb_G(ANA)} \beta^{sb_D(ANA)} z^{eq(ANA)} \frac{x^{dg_G(ANA)-1} y^{dg_D(ANA)-1}}{(dg_G(ANA) - 1)! (dg_D(ANA) - 1)!},$$

*est*

$$\frac{ze^{\alpha x + \beta y}}{(1 - z(e^x - 1)(e^y - 1))^{\alpha + \beta}}.$$

DÉMONSTRATION. On peut décomposer un arbre non-ambigu en trois objets :

- l'équerre racine dont on a retiré les sommets ayant un fils qui n'est pas sur l'équerre, on peut le représenter par l'ensemble des étiquettes gauches et l'ensemble des étiquettes droites des sommets restants,
- l'ensemble des sous-arbres non-ambigus attachés à la branche gauche et
- l'ensemble des sous-arbres non-ambigus attachés à la branche droite.

La seule condition étant que la plus grande étiquette rouge (resp. bleue) de l'équerre racine doit être la plus grande. De plus, concernant la puissance de  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ), elle est égale au nombre de sommets non racine restants dans la branche gauche (resp. droite) de l'équerre racine, plus le nombre de sous-arbres non-ambigus attachés à la branche gauche (resp. droite) de l'équerre racine. Ainsi, la série génératrice de l'équerre est

$$ze^{\alpha x} e^{\beta y}$$

(on ne compte pas les étiquettes de la racine), celle de l'ensemble des sous-arbres non-ambigus attachés à la branche gauche est

$$e^{-\alpha \ln(1-z(e^x-1)(e^y-1))},$$

et celle des sous-arbres non-ambigus attachés à la branche droite est

$$e^{-\beta \ln(1-z(e^x-1)(e^y-1))}.$$

La formule close que l'on cherche s'obtient en multipliant les trois que l'ont vient de calculer.

En ce qui concerne la formule d'énumération, donnons nous un arbre non-ambigu que l'on notera  $ANA$ . On utilise la même idée de décomposition. Cela revient à supprimer la plus haute ligne et la colonne la plus à gauche puis à utiliser l'application zigzag. Par exemple, pour l'arbre non-ambigu de la figure 12 on obtient

$$(3_r)_r (13_r)_r (6_b 2_b 9_r 7_r 5_b 11_r 10_r)_r (1_b 8_r 6_r 1_r)_r (8_b 5_r)_b (7_b 3_b 12_r 4_r 4_b 14_r 2_r)_b.$$

Des parenthèses rouges (resp. bleues) signifient que le sous-arbre non-ambigu correspondant est attaché à la branche gauche (resp. droite). On regroupe les points fixes rouges en y ajoutant l'étiquette rouge de la racine, on fait de même pour les points fixes bleus. On obtient ainsi une partition des étiquettes rouges (resp. bleues) en  $p = eq(ANA)$  sous-ensembles non vides. En effet le nombre d'équerres de  $ANA$  est égal à la somme des équerres de ses sous-arbres non-ambigus plus 1 pour l'équerre racine. De plus, il y a autant de sommets non racine et sans fils droit (resp. gauche), sur la branche gauche (resp. droite), que d'éléments dans le sous-ensemble contenant la plus grande étiquette rouge (resp. droite) moins un. Cela explique le  $\alpha$ -analogue (resp.  $\beta$ -analogue) de  $S_2$ . Ordonnons et numérotions les blocs bleus suivant leurs plus grands éléments, et apparions un bloc rouge avec le bloc bleu à sa gauche. En toute généralité, il y a  $(p-1)!$  possibilités d'appariement. On peut ainsi remplacer chaque paire

### 3. Interprétations combinatoire de la série génératrice et de l'énumération des arbres non-ambigus

par le numéro correspondant. Au final, en plus des deux partitions, on a une permutation de taille  $p-1$  décomposée en cycles et dont les cycles sont coloriés en rouge ou en bleu. En continuant avec le même exemple, pour les partitions on obtient

$$\begin{array}{ccccccc} & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \{9_b\} & \{8_b\} & \{7_b 3_b\} & \{6_b 2_b\} & \{5_b\} & \{4_b\} & \{1_b\} \\ \{15_r 13_r 3_r\} & \{5_r\} & \{12_r 4_r\} & \{9_r 7_r\} & \{11_r 10_r\} & \{14_r 2_r\} & \{8_r 6_r 1_r\} \end{array} .$$

Et pour le cycle, on obtient

$$(6)_b (5 2)_b (4 3)_r (1)_r.$$

Si on donne un poids  $\alpha$  aux cycles rouges et un poids  $\beta$  aux cycles bleus, la série génératrice de telles permutations de taille  $p-1$  est  $(\alpha + \beta)_{p-1}$ . En effet, à partir d'une taille  $p-1$ , on peut construire  $p+1$  permutations : soit on ajoute un nouveau cycle rouge composé d'uniquement  $p$ , soit on fait de même mais avec un cycle bleu ou soit on choisit un entier dans  $\llbracket 1, p-1 \rrbracket$  et on ajoute  $p$  à droite de cet entier. En résumé, si on note  $i \times j$  la dimension géométrique, on obtient bien la formule

$$(p-1)! (\alpha + \beta)_{p-1} S_{2,\alpha}(i, p) S_{2,\beta}(j, p). \quad \square$$

### 3.3. Interprétation par la structure arborescente des équerres

Dans cette section, nous allons itérer la décomposition utilisée dans la preuve du théorème 5.3.12, pour donner une interprétation plus naturelle du théorème 5.3.12. En effet, le début de la preuve consistait à associer à l'équerre racine l'ensemble des sommets de sa branche gauche n'ayant pas de fils droit, et l'ensemble des sommets de sa branche droite n'ayant pas de fils gauche. Ainsi, en itérant cette décomposition, nous encodons un arbre non-ambigu en un arbre ordonné où chaque sommet est étiqueté par deux ensembles et correspond à une équerre. L'objet combinatoire qui encode la structure arborescente des équerres est le suivant.

**DÉFINITION 5.3.13.** Un *arbre bicolore et bidécroissant*, est un arbre dont les arêtes sont rouges ou bleues et dont on étiquette les sommets de manière décroissante une fois avec des entiers rouges de  $1_r$  à  $p_r$  et une fois avec des entiers bleus  $1_b$  à  $p_b$ , où  $p$  est le nombre de sommets.

Un exemple d'arbre bicolore et bidécroissant est donné dans la figure 13.

**THÉORÈME 5.3.14.** Soit  $i, j$  et  $p$  trois entiers naturels non nuls. Les arbres non-ambigus de dimension géométrique  $i \times j$  et ayant  $p$  équerres sont en bijection avec les triplets composés de

- un arbre bicolore et bidécroissant à  $p$  sommets,
- une partition en  $p$  sous-ensembles non vides de  $\llbracket 1_r, i_r \rrbracket$ , et

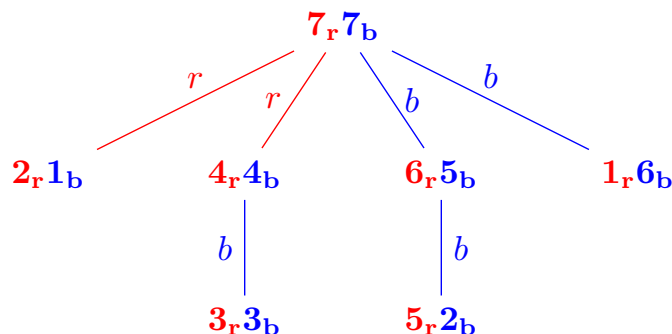


FIGURE 13. Un arbre bicolore et bidécroissant.

- une partition en  $p$  sous-ensembles non vides de  $\llbracket 1_b, j_b \rrbracket$ .

DÉMONSTRATION. Donnons nous un arbre non-ambigu de dimension géométrique  $i \times j$  et ayant  $p$  équerres. On peut décomposer la bijection en trois étapes réversibles. Pour illustrer la preuve on appliquera la bijection à l'arbre non-ambigu de la figure 12 dont on a donné la représentation en terme d'arbre binaire étiqueté dans la figure 14.

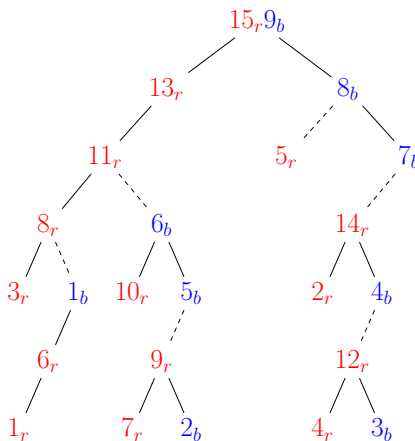


FIGURE 14. L'arbre non-ambigu pris pour exemple pour illustrer la preuve du théorème 5.3.14.

*La première étape* (figure 15) consiste à homogénéiser les étiquetages des équerres. Ainsi, pour chaque racine des  $p$  équerres, on leur ajoute l'étiquette de leur père et on supprime l'étiquette de leur père. Ainsi, les racines des équerres se retrouvent avec une étiquette rouge et une étiquette bleue.

Cette étape est réversible car le fait que l'équerre soit attachée à la branche gauche, ou à la branche droite, nous dit quelle était l'étiquette originelle du père de la racine de l'équerre.

*La deuxième étape* (figure 16) est d'encoder chaque équerre par un sommet contenant l'ensemble des étiquettes rouges restantes dans la branche gauche,



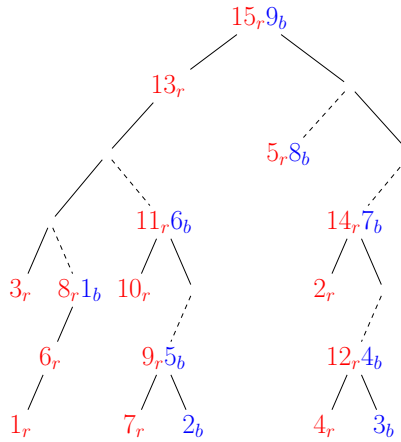


FIGURE 15. Illustration de la première étape de la preuve du théorème 5.3.14.

et l'ensemble des étiquettes bleues restantes dans la branche droite. Puis pour toute équerre non racine, on ajoute une arête entre le sommet correspondant à cette équerre et celui correspondant à l'équerre à laquelle elle est attachée. L'arête est rouge si elle était attachée à la branche gauche et bleue sinon. On obtient ainsi un arbre bicolore de taille  $p$  dont les sommets sont étiquetés par un ensemble d'entiers rouges et un ensemble d'entiers bleus. De plus, on a également une propriété de décroissance, car pour chaque sommet de l'arbre ordonné, le plus grand entier rouge et le plus grand entier bleu correspondent aux deux étiquettes de la racine de l'équerre correspondante, après la première étape. En particulier, elles sont plus grandes que les étiquettes de leurs descendants.

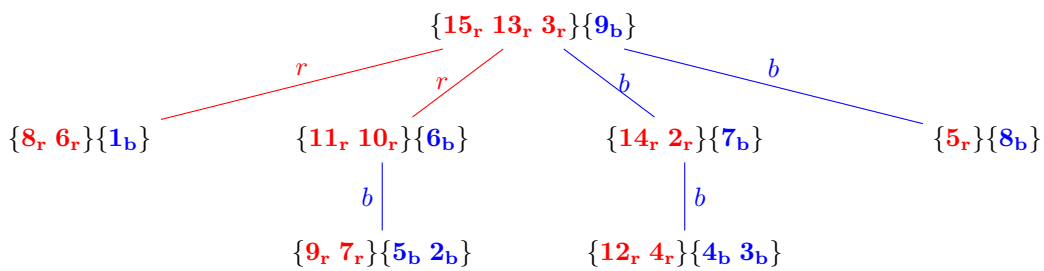


FIGURE 16. Illustration de la seconde étape de la preuve du théorème 5.3.14.

Cette étape est également réversible, on peut déplier chaque sommet en une équerre en ajoutant autant de sommets dans la branche gauche qu'il y a d'étiquettes rouges dans l'ensemble rouge, et de même pour la branche droite, sans oublier que la racine de l'équerre compte pour un sommet dans la branche gauche et la branche droite. Puis on étiquette de manière décroissante chaque

branche. Enfin, pour chaque équerre non racine, on ajoute un sommet à la branche, indiquée par la couleur de l'arête, de l'équerre à laquelle elle est attachée. L'emplacement du sommet sur la branche est indiqué par l'étiquette qu'elle recevra à la première étape.

La troisième étape (figure 17) consiste à extraire la partition des étiquettes rouges et celle des étiquettes bleues. Pour chaque partition, on ordonne les sous-ensembles suivant leurs plus grands éléments. Puis, on les numérote du plus petit au plus grand, de 1 à  $p$ . Enfin, on remplace chaque ensemble par son numéro que l'on colorie en rouge si c'était un ensemble d'étiquettes rouges et en bleu sinon. On obtient bien le triplet désiré. La réversibilité de cette étape est immédiate.  $\square$

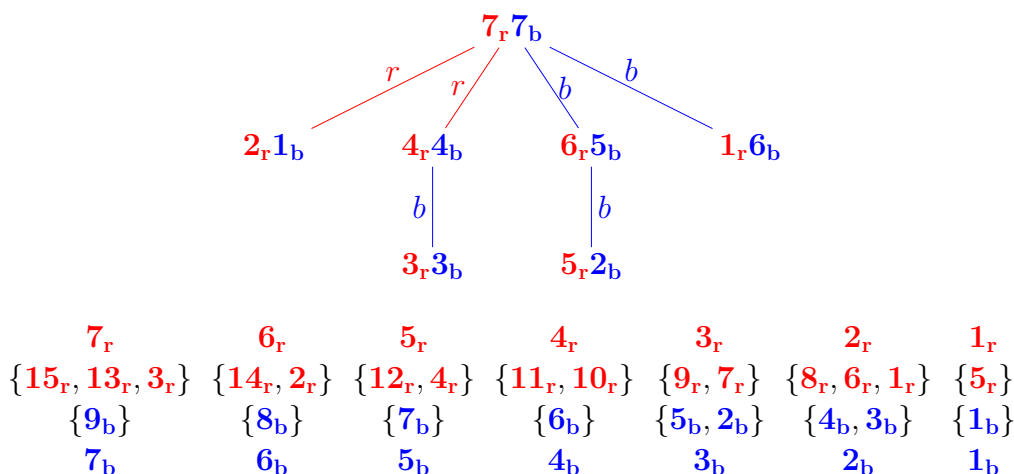


FIGURE 17. Illustration de la troisième étape de la preuve du théorème 5.3.14.

Cette bijection fait apparaître les termes  $S_{2,\alpha}(i, p)$  et  $S_{2,\beta}(j, p)$  de la formule d'énumération des arbres non-ambigus (théorème 5.3.12). Ainsi, il ne nous reste plus qu'à prouver le résultat suivant.

PROPOSITION 5.3.15. Soit  $p$  un entier naturel non nul. La série génératrice des arbres bicolores et bidécroissants à  $p$  sommets, où  $\alpha$  compte le nombre de fils rouges de la racine et  $\beta$  le nombre de fils bleus de la racine est

$$(p-1)! (\alpha + \beta)_{p-1}.$$

DÉMONSTRATION. On note  $f_p(\alpha, \beta)$  la série génératrice des arbres bicolores et bidécroissants à  $p$  sommets. Nous allons montrer que  $(f_p(\alpha, \beta))_{p \geq 1}$  vérifie la récurrence  $f_{p+1}(\alpha, \beta) = p(p-1 + \alpha + \beta) f_p(\alpha, \beta)$ . Pour cela, nous allons mettre en bijection, les triplets formés d'un arbre bicolore et bidécroissant à  $p$  sommets, un couple  $(i, j)$  d'entiers naturels où  $i < j < p+1$ , et le choix d'une couleur  $c$ , bleu ou rouge, avec les arbres bicolores et bidécroissants à  $p+1$  sommets. On commence par ajouter 1 à toutes les étiquettes rouges supérieures

où égales à  $i$  et à toutes les étiquettes bleues. Puis on ajoute au sommet ayant l'étiquette  $j_r$ , un fils avec les étiquettes  $i_r$  et  $1_b$ , et une arête de couleur  $c$ . Ainsi,  $f_{p+1}(1, 1) = p(p+1)f_p(1, 1)$ . En ce qui concerne le poids en  $\alpha$  et  $\beta$ , il évolue uniquement si  $j = p$ , plus précisément, la puissance de  $\alpha$  augmente de 1 si l'arête est rouge, sinon elle est bleue et c'est la puissance de  $\beta$  qui est augmentée de 1. Ainsi, on trouve bien que  $f_{p+1}(\alpha, \beta) = p(p-1+\alpha+\beta)f_p(\alpha, \beta)$ . La condition initiale  $f_1(\alpha, \beta) = 1$  conclue la preuve.  $\square$

Ainsi, on obtient une nouvelle interprétation du  $(\alpha, \beta)$ -analogue de la formule d'énumération des arbres non-ambigus de dimension géométrique fixée. Concernant la série génératrice des arbres non-ambigus, maintenant que l'on connaît la formule d'énumération des arbres bicolores et bidécroissants de taille fixée, on sait que leur série génératrice exponentielle est égale à

$$\sum_{p \geq 1} p!(p-1)! \frac{(xy)^p}{p!p!} = -\ln(1-xy).$$

Étant donné qu'à chaque sommet on associe une paire d'ensembles non vides dont les éléments correspondent respectivement aux étiquettes rouges et bleues de l'arbre non-ambigu associé, on a

$$\mathfrak{G}(x, y) = -\ln(1 - (e^x - 1)(e^y - 1)).$$

Pour trouver la version avec  $\alpha$  et  $\beta$ , il suffit de remarquer qu'un arbre bicolore et bidécroissant est la donnée d'une racine, d'un ensemble de fils rouges et d'un ensemble de fils bleus, qui sont eux-même, à réétiquetage près, des arbres bicolores et bidécroissants. Ainsi, si on ne compte pas le sommet racine dans la taille, on obtient que la série génératrice des arbres bicolores et décroissants est

$$e^{-\alpha \ln(1-xy)} e^{-\beta \ln(1-xy)} = \frac{1}{(1-xy)^{\alpha+\beta}}.$$

Pour obtenir celle des arbres non-ambigus, il ne nous reste plus qu'à ajouter une paire d'ensembles à chaque sommet, sans oublier que l'on doit également associer à la racine une paire d'ensembles mais où on ne compte pas les étiquettes les plus grandes. Ainsi

$$\mathfrak{N}(\alpha, \beta) = \frac{e^{\alpha x + \beta y}}{(1 - (e^x - 1)(e^y - 1))^{\alpha + \beta}}.$$

## 4. Comparaison avec la statistique de Clark et Ehrenborg

Comme mentionné précédemment, Clark et Ehrenborg [CE10] ont prouvé les proposition 5.2.7 et 5.2.8 à l'aide des permutations dont les excédences

strictes sont au début. Nous venons de voir que dans le cas des arbres non-ambigus, les équerres des arbres binaires expliquent la forme sommatoire de la formule d'énumération. Ils ont également une statistique qui explique cette forme sommatoire. Le but de cette section est d'exhiber une bijection entre les deux. Commençons par définir leur statistique.

DÉFINITION 5.4.1. Soit  $i$  et  $j$  deux entiers naturels non nuls, on note  $n = i + j - 1$ . Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}$  une permutation telle que ses excédences strictes sont aux positions  $\llbracket 1, j - 1 \rrbracket$ . On appelle *CE-statistique* de  $\sigma$ , l'entier

$$CE(\sigma) = |\{u \in \llbracket 1, j - 1 \rrbracket, \sigma(u) > i\}| + 1^1.$$

D'après le lemme 5.3.9, nous savons que la statistique des équerres dans les arbres non-ambigus est équidistribuée avec la statistique du nombre de blocs bleus dans les cycles bicolores et bidécroissants. La prochaine étape est donc de décrire à l'aide de la proposition 5.3.6 la relation liant la statistique du nombre de blocs bleus et la CE-statistique. Pour cela, nous devons introduire la bijection  $\theta = \psi^{-1} \circ \varphi$  entre les cycles bicolores et bidécroissants, et les permutations dont toutes les excédences strictes sont au début.

LEMME 5.4.2. Soit  $i$  et  $j$  deux entiers naturels non nuls, et soit  $c$  un cycle bicolore et bidécroissant de taille  $i \times j$ . Alors le nombre de blocs bleus de  $c$  est égal à la CE-statistique de  $\theta(c)$

- moins 1, si  $j_b$  a un entier bleu à sa droite, et
- plus 1, si  $1_r$  a un entier bleu différent de  $j_b$ , à sa gauche.

DÉMONSTRATION. Soit  $\sigma$  une permutation de taille  $n = i + j - 1$  telle que ses excédences strictes soient aux positions  $\llbracket 1, j - 1 \rrbracket$ . Si on garde l'interprétation avec les entiers rouges et bleus, la CE-statistique devient

$$|\{u_b \in \llbracket 1_b, (j - 1)_b \rrbracket, \sigma(u_b) \in \llbracket 2_r, i_r \rrbracket\}| + 1.$$

Ainsi, la CE-statistique est le nombre de blocs bleus de  $\sigma$  n'ayant pas de  $1_r$  directement à sa droite. Nous devons donc étudier comment se comportent les blocs bleus vis à vis de  $\theta$ . La première étape de la preuve est de remarquer que dans l'écriture en cycles d'une permutation dont toutes les excédences strictes sont au début, il y a au moins une déficience par cycle, et en particulier, le plus grand entier de chaque cycle est une déficience. Soit  $c$  un cycle bicolore et bidécroissant de taille  $i \times j$ , on note  $m$  son représentant tel que  $j_b$  est tout à gauche. On appelle maxima rouges de droite à gauche, l'ensemble des entiers rouges de  $m$  qui sont plus grands que tous les entiers rouges à leur droite. Ainsi, d'après le lemme 5.3.6, la bijection  $\theta$  revient à supprimer  $j_b$  et à couper juste à droite des maxima rouges de droite à gauche. En particulier, à la suppression de  $j_b$  près, les blocs composés d'un bloc bleu et de l'entier rouge à sa droite ne

---

1. Le décalage de 1 n'apparaît pas dans l'article de Clark et Ehrenborg, nous l'avons introduit car il y en a un entre la statistique des équerres et la leur.

sont pas modifiés. Il ne reste plus qu'à regarder chacun des cas mis en avant par le lemme. On note  $\sigma$  l'image de  $c$  par  $\theta$ .

- Commençons par les cycles où  $j_b$  a un entier bleu à sa droite. Étant donné que la suppression de  $j_b$  ne diminue pas le nombre de blocs bleus, il est égal à

$$|\{u_b \in \llbracket 1_b, (j-1)_b \rrbracket, \sigma(u_b) \in \llbracket 2_r, i_r \rrbracket\} \cup \{u_b \in \llbracket 1_b, (j-1)_b \rrbracket, \sigma(u_b) = 1_r\}|.$$

- Supposons maintenant que l'élément à droite de  $j_b$  est rouge. Alors, le nombre de blocs bleus de  $c$  est égal à

$$|\{u_b \in \llbracket 1_b, (j-1)_b \rrbracket, \sigma(u_b) \in \llbracket 2_r, i_r \rrbracket\} \cup \{u_b \in \llbracket 1_b, (j-1)_b \rrbracket, \sigma(u_b) = 1_r\}| + 1.$$

Il ne reste plus qu'à différencier selon l'antécédent de  $1_r$  pour conclure.  $\square$

D'après le lemme précédent,  $\theta$  n'est pas suffisant pour montrer l'équidistribution des deux statistiques, mais on n'est pas loin. Soit  $m$  le représentant d'un cycle bicolore et bidécroissant de taille  $i \times j$  tel que  $j_b$  est tout à gauche. On peut écrire  $m = j_b b_1 \cdots b_k 1_r m'$  où les  $b_i$  sont des blocs maximaux de même couleur. Soit  $\omega$  l'involution telle que si  $k$  est pair, alors  $\omega(c)$  est le cycle dont un représentant est  $m = j_b b_2 b_1 \cdots b_k b_{k-1} 1_r m'$ , et si  $k$  est impair,  $\omega(c) = c$ .

**PROPOSITION 5.4.3.** *Soit  $c$  un cycle bicolore et bidécroissant, alors, le nombre de blocs bleus de  $c$  est égal à la CE-statistique de  $\theta(\omega(c))$ .*

**DÉMONSTRATION.** Les cycles  $c$  constants sous l'action de  $\omega$  sont exactement les cycles dont le nombre de blocs bleus est égal à  $CE(\theta(c))$ . En effet, en se basant sur le lemme 5.4.2, soit  $k$  est impair et les blocs  $b_1$  et  $b_k$  sont bleus, auquel cas, le plus 1 et le moins 1 se compensent, soit  $k$  est impair et les blocs  $b_1$  et  $b_k$  sont rouges, auquel cas, on a directement l'égalité, ou soit  $k = 0$ , et on a de nouveau l'égalité. En ce qui concerne les cycles pour lesquels  $k$  est pair et non nul, soit  $b_1$  est bleu et  $b_k$  est rouge, et dans ce cas, le nombre de blocs bleus de  $c$  est égal à  $CE(\theta(c)) - 1$ , soit c'est l'inverse et il est égal à  $CE(\theta(c)) + 1$ . On vient même de montrer que les cycles pour lesquels le nombre de blocs bleus est égal à  $CE(\theta(c)) - 1$  sont envoyés sur ceux pour lesquels il est égal à  $CE(\theta(c)) + 1$ , tout en augmentant le nombre de blocs bleus par un, ce qui prouve le résultat.  $\square$

**COROLLAIRE 5.4.4.** *Le nombre d'équerres sur les arbres non-ambigus et la CE-statistique sur les permutations ayant toutes leurs excédences strictes au début sont équidistribués.*

**DÉMONSTRATION.** Comme évoqué au début de cette section, c'est une conséquence du lemme 5.3.9 et de la proposition 5.4.3.  $\square$

## 5. Une nouvelle statistique sur les arbres binaires : le nombre d'équerres

Le partitionnement des arbres binaires en équerres est apparu naturellement dans l'étude des arbres non-ambigus. Si on raffine l'énumération des arbres binaires en prenant en compte le nombre d'équerres, on retrouve les premiers termes de la suite dans [Slo, A127158]. Nous allons présenter une nouvelle bijection  $\zeta$  entre les arbres binaires et les arbres ordonnés, qui envoie le nombre d'équerres sur le nombre de *sommets feuillés*, *i.e.* dont au moins un fils est une feuille.

Nous définissons  $\zeta$  de manière récursive. Dans ce contexte, il y a un unique arbre binaire de taille zéro qu'on appelle *arbre binaire vide*. L'image par  $\zeta$  de l'arbre binaire vide  $\emptyset$  est l'arbre ordonné composé d'un seul sommet. Soit maintenant un arbre binaire  $AB$  non vide, si on décompose  $AB$  suivant son équerre racine, on obtient une liste d'arbres binaires  $AB_{1,g}, \dots, AB_{i,g}$  attachés à la branche gauche et une liste d'arbres binaires  $AB_{1,d}, \dots, AB_{j,d}$  attachés à la branche droite, elles sont ordonnées de manière croissante suivant la distance à la racine. On commence par construire une chaîne de sommets  $a_1, \dots, a_{i+2}$ , où  $a_u$  est le père de  $a_{u+1}$ , pour tout  $u \in \llbracket 1, i+1 \rrbracket$ . Puis, pour tout  $u \in \llbracket 1, i \rrbracket$ , on enracine  $\zeta(AB_{u,g})$  en  $a_i$  et à droite de  $a_i + 1$ . Enfin, on attache par une arête  $\zeta(AB_{1,d}), \dots, \zeta(AB_{j,d})$  à  $a_{i+1}$  de telle sorte que de gauche à droite, les fils de  $a_{i+1}$  sont  $a_{i+2}, \zeta(AB_{1,d}), \dots, \zeta(AB_{j,d})$ . L'application  $\zeta$  est illustrée dans la figure 18.

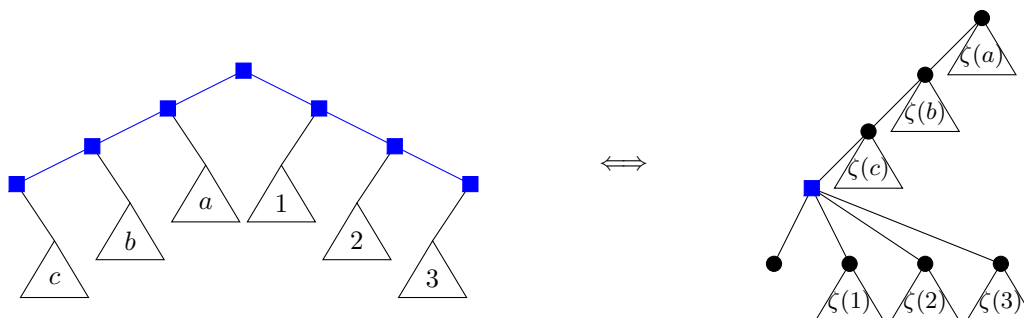


FIGURE 18. Description schématique de  $\zeta$ .

**PROPOSITION 5.5.1.** *L'application  $\zeta$  est une bijection entre les arbres binaires à  $n$  sommets et dont le nombre d'équerres est  $p$ , et les arbres ordonnés à  $n$  arêtes et dont  $p$  sommets sont feuillés.*

**DÉMONSTRATION.** Étant donné que  $\zeta$  est défini récursivement, la preuve sera également. La proposition est trivialement vraie pour  $n = 0$ . Soit maintenant  $AB$  un arbre binaire non vide. Le nombre de sommets de  $AB$  est égal à

$$1 + i + j + |AB_{1,g}| + \dots + |AB_{i,g}| + |AB_{1,d}| + \dots + |AB_{j,d}|.$$

De même, le nombre d'arêtes de  $\zeta(AB)$  est

$$1 + i + j + |\zeta(AB_{1,g})| + \dots + |\zeta(AB_{i,g})| + |\zeta(AB_{1,d})| + \dots + |\zeta(AB_{j,d})|.$$

En ce qui concerne le nombre d'équerres de  $AB$ , il est égal à

$$1 + eq(AB_{1,g}) + \dots + eq(AB_{i,g}) + eq(AB_{1,d}) + \dots + eq(AB_{j,d}).$$

On note  $s_f(AO)$  le nombre de sommets feuillés d'un arbre ordonné  $AO$ . Par construction, les sommets de  $\zeta(AB)$  sont  $a_{i+1}$  et  $a_{i+2}$  auxquels on ajoute les sommets de  $\zeta(AB_{1,g}), \dots, \zeta(AB_{i,g})$  et  $\zeta(AB_{1,d}), \dots, \zeta(AB_{j,d})$ . De plus, le caractère feuillé ou pas des racines des  $\zeta(AB_{u,g})$ , pour  $u \in \llbracket 1, i \rrbracket$ , n'est pas modifié par l'ajout du sommet  $a_{u+1}$  en tant que fils, car ce n'est pas une feuille. Le seul sommet feuillé que l'on crée est  $a_{i+1}$ . Ainsi, le nombre de sommets feuillés de  $\zeta(AB)$  est

$$1 + s_f(\zeta(AB_{1,g})) + \dots + s_f(\zeta(AB_{i,g})) + s_f(\zeta(AB_{1,d})) + \dots + s_f(\zeta(AB_{j,d})).$$

Le caractère bijectif de  $\zeta$  vient du fait que  $a_{i+2}$  est la feuille la plus à gauche de  $\zeta(AB)$ , c'est-à-dire que l'on l'obtient en visitant récursivement le fils gauche, à partir de la racine. Au même titre que la décomposition des arbres binaires selon l'équerre racine existe et est unique, la décomposition des arbres ordonnés selon la feuille la plus à gauche existe et est unique.  $\square$

Les premiers termes de la bijection sont donnés dans le Tableau 1. La

Arbres binaires	
Arbres ordonnés	

TABLE 1. Les premiers termes de la bijection  $\zeta$  (la coloration et la forme de sommets montrent la correspondance entre les équerres et les sommets feuillés).

décomposition que l'on vient de présenter nous permet d'en déduire une équation vérifiée par la série génératrice  $\mathfrak{B}(x, t)$  des arbres binaires, où  $x$  compte le nombre de sommets et  $t$  le nombre d'équerres :

$$\mathfrak{B} = 1 + xt \left( \frac{1}{1 - x\mathfrak{B}} \right)^2.$$

En effet, le terme

$$\left( \frac{1}{1 - x\mathfrak{B}} \right)$$

## 5. *Autour de l'énumération et de la série génératrice des arbres non-ambigus*

---

correspond à une liste d'arbres binaires auxquels on ajoute le sommet de la branche à laquelle ils sont attachés, et  $xt$  correspond à la racine de l'équerre.

Une méthode pour énumérer les arbres binaires à nombre d'équerres fixé pourrait être d'utiliser la décomposition à l'aide des arbres bidécroissants et bicolores. Mais nous n'avons pas trouvé d'étiquetage canonique des sommets dont la description en partition d'ensemble ne dépend pas de l'arbre bidécroissant et bicolore.





# GÉNÉRALISATION DES ARBRES NON-AMBIGUS EN DIMENSION SUPÉRIEURE

---

Ce chapitre est consacré à la généralisation des arbres non-ambigus à toute dimension finie. D'un point de vue géométrique, les arbres non-ambigus sont des arbres binaires dont les sommets sont plongés dans  $\mathbb{Z}^2$  et les arêtes sont de dimension 1. On dit qu'ils sont de dimension  $(2, 1)$ . Soit  $d \geq k \geq 1$  deux entiers naturels. Un arbre non-ambigu de dimension  $(d, k)$  a ses sommets plongés dans  $\mathbb{Z}^d$  et ses arêtes sont de dimension  $k$ . En outre, la structure arborescente sous-jacente est un arbre  $\binom{d}{k}$ -aire. Pour définir ces nouveaux objets, nous nous basons sur la définition en tant qu'arbre binaire étiqueté des arbres non-ambigus, de sorte que nous pouvons de nouveau appliquer la démarche de [HNT08]. Et ainsi, pour chaque couple  $(d, k)$  nous obtenons une équation différentielle satisfaite par la série génératrice des arbres non-ambigus de dimension  $(d, k)$ . Toutefois, nous n'avons pas réussi à les résoudre. Nous proposons néanmoins des résultats partiels. La formule des équerres par contre se généralise sans grande difficulté. Le dernier résultat de ce chapitre est une définition géométrique des arbres non-ambigus généralisés. Similairement aux arbres non-ambigus initiaux, la version géométrique est un ensemble de points de  $\mathbb{N}^d$  soumis à des contraintes. L'intérêt de cette définition géométrique est qu'initialement les arbres non-ambigus à plusieurs dimensions ont été introduits avec l'idée de définir une généralisation de l'ASEP à plusieurs dimensions dont l'état stationnaire serait décrit par des tableaux boisés à plusieurs dimensions. Ce travail reste cependant à faire. Pour le moment, la version géométrique a le mérite de produire de jolies figures.

Le chapitre est organisé comme suit. Les arbres non-ambigus généralisés sont tout d'abord définis en tant que structures arborescentes étiquetées (section 1). Puis, en utilisant la méthode de la section 2 du chapitre précédent, nous déduisons une formule des équerres les comptant à structure arborescente fixée,

ainsi qu'une équation vérifiée par leur série génératrice exponentielle. Enfin, nous présentons (section 3) une définition géométrique des arbres non-ambigus, en tant qu'ensemble de points de  $\mathbb{N}^d$  vérifiant des contraintes spatiales.

## 1. Définition des arbres non-ambigus généralisés

Dans le but de donner la définition des arbres non-ambigus de dimension  $(d, k)$ , nous avons besoin d'introduire quelques terminologies. Les structures arborescentes sous-jacentes aux arbres non-ambigus de dimension  $(d, k)$  sont des arbres  $\binom{d}{k}$ -aire. On note  $\mathcal{A}_{\binom{d}{k}}$  l'ensemble de ces arbres. Nous indexons les fils d'un sommet par les sous-ensembles de  $\llbracket 1, d \rrbracket$  ayant  $k$  éléments. Nous les appelons des  $(d, k)$ -directions, et on note  $\Pi_{d,k}$  l'ensemble des  $(d, k)$ -directions. Un sommet indexé par une  $(d, k)$ -direction  $\pi$  est appelé un *sommet de type*  $\pi$ . On note  $s_\pi(A)$  le nombre de sommets de type  $\pi$  d'un arbre  $\binom{d}{k}$ -aire  $A$ . De plus, soit

$$dg_i(A) := 1 + \sum_{\substack{\pi \in \Pi_{d,k} \\ i \in \pi}} s_\pi(A).$$

On appelle  $dg_1(A) \times \dots \times dg_d(A)$  la *dimension géométrique* de  $A$ . Par exemple, si on note de haut en bas  $A_1$  et  $A_2$  les deux arbres de la figure 1, alors  $A_1$  vérifie

$$s_{\{1\}}(A_1) = 4, \quad s_{\{2\}}(A_1) = 6, \quad s_{\{3\}}(A_1) = 5.$$

Ainsi, il est de dimension géométrique  $5 \times 7 \times 6$ . De même,  $A_2$  vérifie

$$s_{\{1,2\}}(A_2) = 3, \quad s_{\{1,3\}}(A_2) = 2, \quad s_{\{2,3\}}(A_2) = 1,$$

sa dimension géométrique est donc  $6 \times 5 \times 4$ . Il ne nous reste plus qu'à définir l'étiquetage. On appelle  $(d, k)$ -uplets les  $d$ -uplets de  $(\mathbb{N}^* \cup \{\bullet\})^d$  tels qu'exactly  $d - k$  éléments du  $d$ -uplet sont égaux à  $\bullet$ . Soit  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ . Dans la suite, la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée d'un sommet fait référence à l'élément d'indice  $i$  de son étiquette. Enfin, la direction d'un  $(d, k)$ -uplet est la  $(d, k)$ -direction composée des indices différents de  $\bullet$ . Par exemple,  $(\bullet, 1, \bullet, 5, 2, \bullet, \bullet, 3, \bullet)$  est un  $(9, 4)$ -uplet de direction  $\{8, 5, 4, 2\}$ . Nous pouvons maintenant définir la généralisation des arbres non-ambigus.

**DÉFINITION 6.1.1.** Soit  $n$  un entier naturel non nul, et soit  $1 \geq k \geq d$  deux entiers. Un *arbre non-ambigu de dimension*  $(d, k)$  ANA de taille  $n$  est un arbre  $A$   $\binom{d}{k}$ -aire de taille  $n$  étiqueté vérifiant les conditions suivantes :

- (1) Soit  $\pi$  une  $(d, k)$ -direction. Les sommets de type  $\pi$  sont étiquetés par des  $(d, k)$ -uplets de direction  $\pi$ . Quant à la racine, elle est étiquetée par un  $(d, d)$ -uplet.
- (2) Soit  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ , et soit  $s$  et  $s'$  deux sommets de ANA dont les étiquettes ont une  $i^{\text{ème}}$  coordonnée différente de  $\bullet$ . Alors, si  $s'$  est l'ancêtre de  $s$ , la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée de  $s'$  est strictement supérieure à celle de  $s$ .

6. Généralisation des arbres non-ambigus en dimension supérieure

---

- (3) Soit  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ . Deux sommets ont la même  $i^{\text{ème}}$  coordonnée si et seulement si elle est égale à  $\bullet$ .
- (4) Soit  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ . La réunion des  $i^{\text{èmes}}$  coordonnées différentes de  $\bullet$  de tous les sommets est l'intervalle d'entier  $\llbracket 1, dg_i(A) \rrbracket$ .

On appelle *forme* de ANA l'arbre  $\binom{d}{k}$ -aire  $A$ , et on note  $\mathcal{ANA}_{d,k}(A)$  l'ensemble des arbres non-ambigus de forme  $A$ . Il est à noter que l'étiquette de la racine correspond exactement à la dimension géométrique de  $A$ . Dans les représentations graphiques des arbres non-ambigus que nous donnons, les fils d'un sommet sont ordonnés de gauche à droite, de la plus petite  $(d, k)$ -direction à la plus grande. La relation d'ordre totale sur les  $(d, k)$ -directions étant la suivante. Soit  $\pi$  et  $\pi'$  deux  $(d, k)$ -directions différentes. Alors  $\pi = \{i_1 > \dots > i_k\}$  est supérieure à  $\pi' = \{j_1 > \dots > j_k\}$  si, et seulement si, il existe un entier  $u \in \llbracket 1, k \rrbracket$  tel que pour tout  $v \in \llbracket 1, u-1 \rrbracket$ ,  $i_v = j_v$  et  $i_u > j_u$ . La figure 1 donne l'exemple d'un arbre non-ambigu de dimension  $(3, 1)$  et d'un de dimension  $(3, 2)$ .

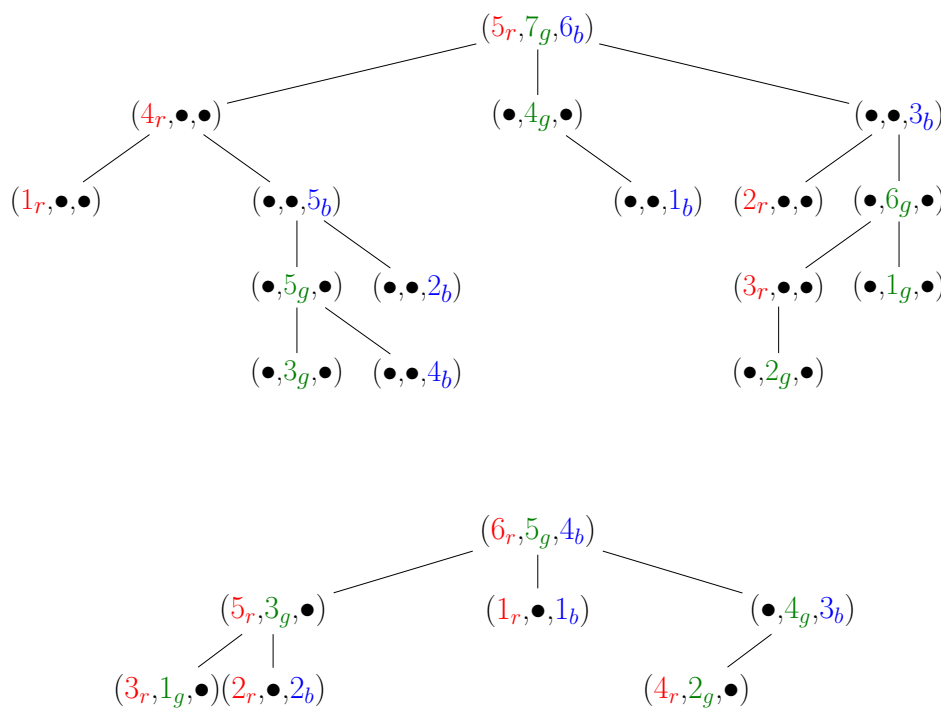


FIGURE 1. Deux arbres non-ambigus de dimensions respectives  $(3, 1)$  (haut) et  $(3, 2)$  (bas).

REMARQUE 6.1.2. Les arbres non-ambigus initiaux correspondent aux arbres non-ambigus de dimension  $(2, 1)$ . Il suffit d'appliquer les transformations  $(i, \bullet) \mapsto i_r$  et  $(\bullet, i) \mapsto i_b$ .

De même que précédemment, nous avons besoin de faire de la zérologie. Soit  $d \geq k \geq 1$  deux entiers. Pour chaque  $(d, k)$ -direction  $\pi$ , on définit l'arbre non-ambigu vide de type  $\pi$  que nous notons  $\emptyset_\pi$ . Il a pour forme l'arbre  $\binom{d}{k}$ -aire vide de type  $\pi$  que nous notons également  $\emptyset_\pi$ . Enfin, pour tout  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ , on pose

$$dg_i(\emptyset_\pi) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in \pi, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

## 2. Équations différentielles

Nous suivons la même démarche que dans la section 2. La structure récursive des arbres  $\binom{d}{k}$ -aires induit une application  $\binom{d}{k}$ -linéaire  $\mathbb{M}$  sur les arbres non-ambigus de dimension  $(d, k)$ . Après avoir attribué un poids  $p_{d,k}$  pour chaque arbre non-ambigu, on définit une application  $\binom{d}{k}$ -linéaire  $M$  telle que «  $p_{d,k} \circ \mathbb{M} = M \circ p_{d,k}$  ». Nous en dégageons une formule des équerres comptant les arbres non-ambigus de dimension  $(d, k)$  à forme fixée. De plus, on obtient également une équation vérifiée par leur série génératrice exponentielle. Nous n'avons pas réussi à la résoudre, mais nous avons des résultats partiels.

Un arbre  $\binom{d}{k}$ -aire  $A$  est la donnée d'une racine  $r$  et d'une liste  $(A_\pi)_{\pi \in \Pi_{d,k}}$  d'arbres  $\binom{d}{k}$ -aires, où la racine de  $A_\pi$  est le fils d'index  $\pi$  de la racine  $r$ , avec la convention que si  $A_\pi$  est vide, alors  $A_\pi = \emptyset_\pi$ . Soit maintenant un arbre non-ambigu de dimension  $(d, k)$   $ANA$ , de forme  $A$ . L'étiquetage de  $ANA$  induit un étiquetage sur chaque  $A_\pi$  qui vérifie les conditions 6.1.1.(1), excepté la racine, 6.1.1.(2) et 6.1.1.(3). Ainsi, il nous suffit d'étiqueter la racine de  $A_\pi$  par  $(dg_1(A_\pi), \dots, dg_d(A_\pi))$ , et pour chaque  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ , d'étiqueter de 1 à  $dg_i(A_\pi) - 1$  les  $i^{\text{èmes}}$  coordonnées différentes de  $\bullet$ . On note  $ANA_\pi$  l'arbre non-ambigu de dimension  $(d, k)$  obtenu. Si  $A_\pi = \emptyset_\pi$ , alors  $ANA_\pi = \emptyset_\pi$ . La décomposition des arbres non-ambigus de la figure 1 est donnée dans la figure 2. Pour pouvoir reconstruire  $ANA$  à partir des  $ANA_\pi$ , pour chaque  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ , il faut décider comment répartir les étiquettes  $\llbracket 1, dg_i(A) - 1 \rrbracket$  parmi les sommets de type  $\pi$  où  $i \in \pi$ , en se rappelant que les racines des  $ANA_\pi$  vont devenir des sommets de type  $\pi$ . Étant donné que l'on veut respecter les étiquetages des  $ANA_\pi$ , pour chaque  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ , il suffit de partitionner l'ensemble  $\llbracket 1, dg_i(A) \rrbracket$  en  $\binom{d}{k}$  sous-ensembles de tailles

$$(dg_i(A_\pi) - \mathbb{1}(i \notin \pi))_{\pi \in \Pi_{d,k}},$$

où  $\mathbb{1}$  est l'application qui vaut 1 si l'assertion est vraie et 0 sinon. En particulier, pour tout  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ , on a l'égalité

$$dg_i(A) - 1 = \sum_{\pi \in \Pi_{d,k}} (dg_i(A_\pi) - \mathbb{1}(i \notin \pi)).$$

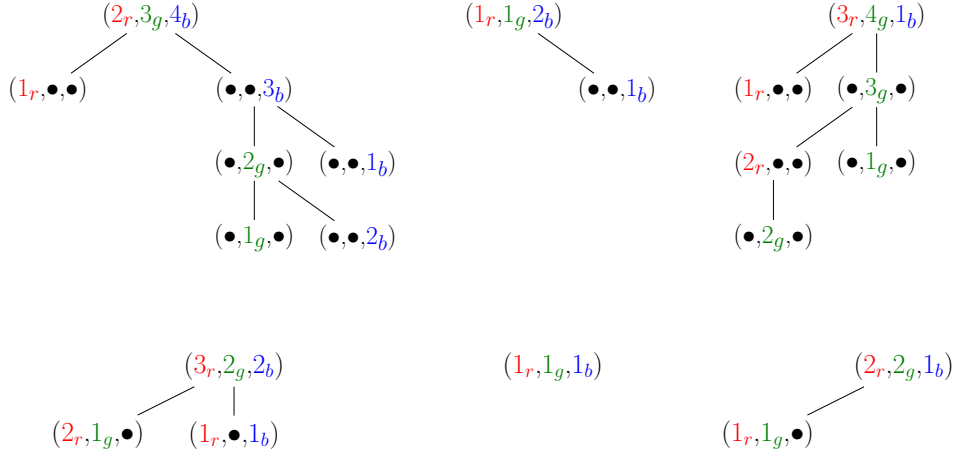


FIGURE 2. De gauche à droite (haut), puis de gauche à droite (bas) :  $ANA_{\{1\}}$ ,  $ANA_{\{2\}}$  et  $ANA_{\{3\}}$ ,  $ANA'_{\{1,2\}}$ ,  $ANA'_{\{1,3\}}$  et  $ANA'_{\{2,3\}}$ , où  $ANA$  et  $ANA'$  sont les arbres non-ambigus de dimensions respectives  $(3, 1)$  et  $(3, 2)$  de la figure 1.

Ainsi, si on fixe une liste  $(ANA'_\pi)_{\pi \in \Pi_{d,k}}$  d'arbres non-ambigus, le nombre d'arbres non-ambigus  $ANA$  tels que pour toute  $(d, k)$ -direction  $\pi$ ,  $ANA_\pi = ANA'_\pi$  est

$$(41) \quad \prod_{i \in [1, d]} \binom{dg_i(A) - 1}{(dg_i(ANA_\pi) - \mathbb{1}(i \notin \pi))_{\pi \in \Pi_{d,k}}},$$

où  $A$  est la forme commune à tout les arbres non-ambigus que l'on obtient. L'équation (41) reste vraie même si au moins un des fils de la racine de  $A$  est vide.

Nous introduisons maintenant un formalisme algébrique analogue au cas de la dimension  $(2, 1)$ . Soit  $\mathbb{Q}\mathcal{ANA}_{d,k}$  le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel engendré par les arbres non-ambigus de dimension  $(d, k)$ . On note  $\mathbb{Q}\mathcal{ANA}_{d,k}(A)$  la somme des éléments de  $\mathcal{ANA}_{d,k}(A)$ . On définit également  $\mathbb{Q}\mathcal{ANA}_{d,k,\pi}$ , le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel engendré par

$$\mathcal{ANA}_{d,k} \setminus \left( \bigcup_{\pi' \in (\Pi_{d,k} \setminus \{\pi\})} ANA_{\pi'} \right).$$

Nous notons  $\mathbb{M}$  l'application multilinéaire

$$\mathbb{M} : \prod_{\pi \in \Pi_{d,k}} \mathbb{Q}\mathcal{ANA}_{d,k,\pi} \mapsto \mathbb{Q}\mathcal{ANA}_{d,k},$$

qui à un uplet  $(ANA'_\pi)_{\pi \in \Pi_{d,k}}$  associe la somme des arbres non-ambigus  $ANA$  tels que  $ANA_\pi = ANA'_\pi$  pour toute  $(d, k)$ -direction  $\pi$ . Cette application permet d'engendrer récursivement l'ensemble des arbres non-ambigus de forme fixée.

LEMME 6.2.1. Soit  $d \geq k \geq 1$  deux entiers, et soit  $A$  un arbre  $\binom{d}{k}$ -aire. S'il existe une  $(d, k)$ -direction  $\pi$  pour laquelle  $A = \emptyset_\pi$ , alors  $\mathbb{Q}\mathcal{ANA}_{d,k}(A) = \emptyset_\pi$ . Sinon

$$\mathbb{Q}\mathcal{ANA}_{d,k}(A) = \mathbb{M}((\mathbb{Q}\mathcal{ANA}_{d,k}(A_\pi))_{\pi \in \Pi_{d,k}}).$$

DÉMONSTRATION. Soit  $(ANA'_\pi)_{\pi \in \Pi_{d,k}}$  un uplet d'arbre non-ambigus de dimension  $(d, k)$ , tel que pour toute  $(d, k)$ -direction  $\pi$ ,  $ANA'_\pi$  a pour forme  $A_\pi$ . Alors un arbre non-ambigu de dimension  $(d, k)$  de forme  $A$  apparaît dans la somme  $\mathbb{M}((ANA_\pi)_{\pi \in \Pi_{d,k}})$  si, et seulement si,  $ANA_\pi = ANA'_\pi$  pour tout  $\pi \in \Pi_{d,k}$ . Par conséquent

$$\mathbb{Q}\mathcal{ANA}_{d,k}(A) = \sum_{(ANA'_\pi)_{\pi \in \Pi_{d,k}} \in \prod_{\pi \in \Pi_{d,k}} \mathcal{ANA}_{d,k}(A_\pi)} \mathbb{M}((ANA'_\pi)_{\pi \in \Pi_{d,k}}).$$

La multilinéarité de  $\mathbb{M}$  nous permet de conclure.  $\square$

Le lemme 6.2.1 a pour conséquence immédiate que pour tout arbre  $\binom{d}{k}$ -aire  $A$ , on a l'égalité :

$$|\mathcal{ANA}_{d,k}(A)| = \prod_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket} \binom{dg_i(A) - 1}{(dg_i(A_\pi) - \mathbb{1}(i \notin \pi))_{\pi \in \Pi_{d,k}}} \prod_{\pi \in \Pi_{d,k}} |\mathcal{ANA}_{d,k}(A_\pi)|.$$

La suite consiste à projeter et à interpréter ces observations dans le monde des séries génératrices. Les arbres non-ambigus de dimension  $(d, k)$  sont des objets combinatoires étiquetés, cela explique la présence des multinomiaux dans l'équation (41). C'est pourquoi, nous allons considérer des séries génératrices exponentielles. Pour cela, nous associons à chaque arbre non-ambigu de dimension  $(d, k)$  le poids

$$p_{d,k}(ANA) = \prod_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket} \frac{x_i^{dg_i(ANA)}}{dg_i(ANA)!}.$$

En particulier,  $p_{d,k}(\emptyset_\pi) = p_{d,k}(ANA) = \prod_{i \notin \pi} x_i$ . Par linéarité, on étend  $p_{d,k}$  en une application linéaire  $\mathbb{Q}\mathcal{ANA}_{d,k} \mapsto \mathbb{Q}\llbracket x_1, \dots, x_d \rrbracket$ . Ainsi, pour tout arbre  $\binom{d}{k}$ -aire,  $p_{d,k}(\mathbb{Q}\mathcal{ANA}_{d,k}(A))$  est la série génératrice des arbres non-ambigus de forme  $A$ . Il ne nous reste plus qu'à définir l'image de  $\mathbb{M}$  par  $p_{d,k}$ . Pour cela, pour toute  $(d, k)$ -direction  $\pi = \{i_1, \dots, i_k\}$ , on introduit les notations

$$\partial_\pi := \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k}, \quad \int_\pi := \int_0^{x_{i_1}} \cdots \int_0^{x_{i_k}} \quad \text{et} \quad dx_\pi := dx_{i_1} \cdots dx_{i_k}.$$

DÉFINITION 6.2.2. Soit  $d \geq k \geq 1$  deux entiers, soit  $M$  l'application  $\binom{d}{k}$ -linéaire  $\mathbb{Q}\llbracket x_1, \dots, x_d \rrbracket^{\Pi_{d,k}} \mapsto \mathbb{Q}\llbracket x_1, \dots, x_d \rrbracket$  telle que

$$M((u_\pi)_{\pi \in \Pi_{d,k}}) = \int_{\llbracket 1, d \rrbracket} \left( \prod_{\pi \in \Pi_{d,k}} \partial_{\llbracket 1, d \rrbracket \setminus \pi}(u_\pi) \right) dx_{\llbracket 1, d \rrbracket}.$$

## 6. Généralisation des arbres non-ambigus en dimension supérieure

Soit  $A$  un arbre  $\binom{d}{k}$ -aire, on définit également  $M(A)$ . S'il existe une  $(d, k)$ -direction  $\pi$  telle que  $A = \emptyset_\pi$ , alors  $M(A) = p_{d,k}(\emptyset_\pi)$ . Sinon

$$M(A) = M((M(A_\pi))_{\pi \in \Pi_{d,k}}).$$

La figure 3 donne un exemple de calcul de  $M$  pour les dimensions  $(3, 1)$  et  $(3, 2)$ . Le monôme de chaque sommet  $s$  correspond à la valeur de  $M$  appliqué au sous-arbre de racine  $s$ , sachant que les sous-arbres au bout des arêtes pointillées sont des arbres vides. L'application  $M$  correspond bien à l'image de  $\mathbb{M}$  par  $p_{d,k}$ .

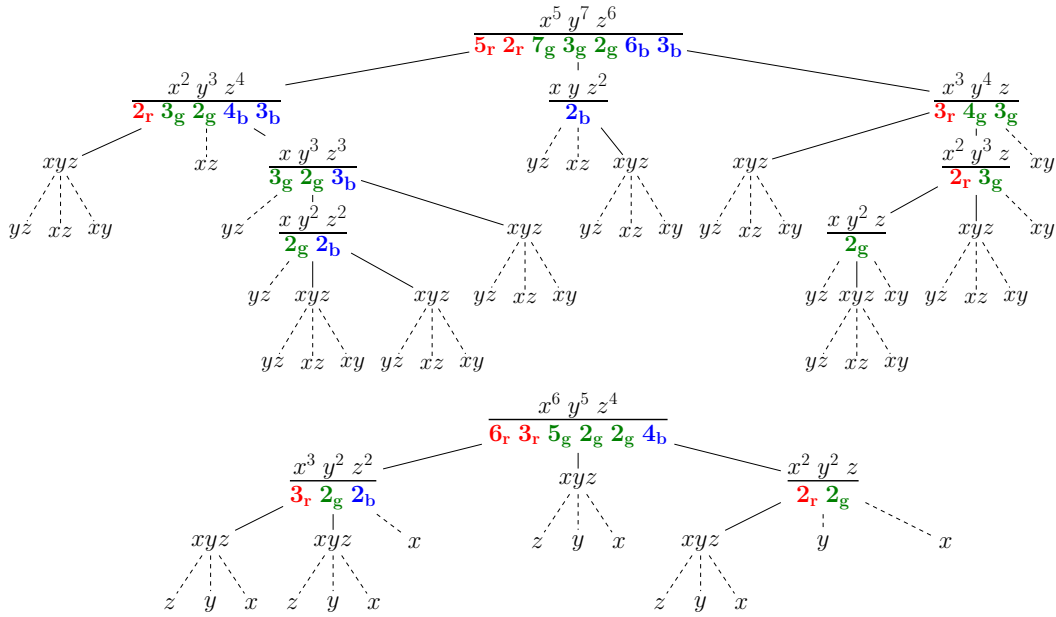


FIGURE 3. Exemples de calcul de  $M(A)$ , où  $A$  correspond aux deux formes des arbres non-ambigus de la figure 1.

PROPOSITION 6.2.3. Soit  $1 \leq k \leq d$  deux entiers, et soit

$$(ANA_\pi)_{\pi \in \Pi_{d,k}} \in \prod_{\pi \in \Pi_{d,k}} \mathbb{Q} \mathcal{A} \mathcal{N} \mathcal{A}_{d,k,\pi}.$$

Alors

$$p_{d,k}(\mathbb{M}((ANA_\pi)_{\pi \in \Pi_{d,k}})) = M((p_{d,k}(ANA_\pi))_{\pi \in \Pi_{d,k}}).$$

En particulier, pour tout arbre  $\binom{d}{k}$ -aire  $A$ ,

$$M(A) = p_{d,k}(\mathbb{Q} \mathcal{A} \mathcal{N} \mathcal{A}_{d,k}(A)).$$

DÉMONSTRATION. Par linéarité de  $p_{d,k}$  et multilinéarité de  $\mathbb{M}$  et  $M$ , pour  $\pi \in \Pi_{d,k}$ , on peut supposer que la combinaison linéaire  $ANA_\pi$  est réduite à un élément, que l'on notera  $ANA_\pi$ . Soit  $A$  l'arbre  $\binom{d}{k}$ -aire tel que pour chaque



$(d, k)$ -direction  $\pi$ ,  $A_\pi$  est la forme de  $ANA_\pi$ . L'équation (41) nous dit que

$$\mathfrak{p}_{d,k}(\mathbb{M}((ANA_\pi)_{\pi \in \Pi_{d,k}})) = \prod_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket} \left( \begin{array}{c} dg_i(A) - 1 \\ (dg_i(ANA_\pi) - \mathbb{1}(i \notin \pi))_{\pi \in \Pi_{d,k}} \end{array} \right) \frac{x_i^{dg_i(A)}}{dg_i(A)!}.$$

Il ne nous reste plus qu'à calculer  $D = M((\mathfrak{p}_{d,k}(ANA_\pi))_{\pi \in \Pi_{d,k}})$  pour finir la preuve de la première identité.

$$\begin{aligned} D &= \int_{\llbracket 1, d \rrbracket} \prod_{\pi \in \Pi_{d,k}} \partial_{\llbracket 1, d \rrbracket \setminus \pi}((\mathfrak{p}_{d,k}(ANA_\pi)) \, dx_{\llbracket 1, d \rrbracket}) \\ &= \int_{\llbracket 1, d \rrbracket} \prod_{\pi \in \Pi_{d,k}} \prod_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket} \frac{x_i^{dg_i(ANA_\pi) - \mathbb{1}(i \notin \pi)}}{(dg_i(ANA_\pi) - \mathbb{1}(i \notin \pi))!} \, dx_{\llbracket 1, d \rrbracket}. \end{aligned}$$

Étant donné qu'on a la relation  $dg_i(A) - 1 = \sum_{\pi \in \Pi_{d,k}} dg_i(ANA_\pi) - \mathbb{1}(i \notin \pi)$ , on obtient

$$\begin{aligned} D &= \int_{\llbracket 1, d \rrbracket} \prod_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket} \left( \begin{array}{c} dg_i(A) - 1 \\ (dg_i(ANA_\pi) - \mathbb{1}(i \notin \pi))_{\pi \in \Pi_{d,k}} \end{array} \right) \frac{x_i^{dg_i(A) - 1}}{(dg_i(A) - 1)!} \, dx_{\llbracket 1, d \rrbracket} \\ &= \prod_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket} \left( \begin{array}{c} dg_i(A) - 1 \\ (dg_i(ANA_\pi) - \mathbb{1}(i \notin \pi))_{\pi \in \Pi_{d,k}} \end{array} \right) \frac{x_i^{dg_i(A)}}{dg_i(A)!}, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\mathfrak{p}_{d,k}(\mathbb{M}((ANA_\pi)_{\pi \in \Pi_{d,k}})) = M((\mathfrak{p}_{d,k}(ANA_\pi))_{\pi \in \Pi_{d,k}}).$$

La deuxième se prouve par récurrence. Par définition, l'égalité est vraie pour les arbres de taille 0. Sinon, par récurrence,

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_{d,k}(\mathbb{QAN}\mathcal{A}_{d,k}(A)) &= \mathfrak{p}_{d,k}(\mathbb{M}((\mathbb{QAN}\mathcal{A}_{d,k}(A_\pi))_{\pi \in \Pi_{d,k}})) \\ &= M((\mathfrak{p}_{d,k}(\mathbb{QAN}\mathcal{A}_{d,k}(A_\pi))_{\pi \in \Pi_{d,k}})) \\ &= M((M(A_\pi))_{\pi \in \Pi_{d,k}}) \\ &= M(A). \end{aligned} \quad \square$$

Il en découle la formule des équerres comptant le nombre d'arbres non-ambigus de dimension  $(d, k)$  de forme fixée. Pour l'énoncer, nous devons introduire la notation suivante. Soit  $A$  un arbre  $\binom{d}{k}$ -aire, et soit  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ . Pour tout sommet  $s$  dont le type contient  $i$ , on définit  $dg_i(s)$  comme le nombre de sommets dont le type contient  $i$ ,  $s$  inclus, du sous-arbre de  $A$  dont  $s$  est la racine. Dans ce contexte, pour toute  $(d, k)$ -direction  $\pi$ , la racine est de type  $\pi$ .

## 6. Généralisation des arbres non-ambigus en dimension supérieure

---

PROPOSITION 6.2.4. Soit  $d \geq k \geq 1$  deux entiers, et soit  $A$  un arbre  $\binom{d}{k}$ -aire. Alors

$$|\mathcal{AN}\mathcal{A}_{d,k}(A)| = \prod_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket} \frac{dg_i(A)!}{\prod_{\substack{s : \text{sommet dont le type} \\ \text{contient } i}} dg_i(s)}.$$

DÉMONSTRATION. Soit  $A$  un arbre  $\binom{d}{k}$ -aire de taille non nulle. Par définition

$$p_{d,k}(\mathbb{Q}\mathcal{AN}\mathcal{A}_{d,k}(A)) = |\mathcal{AN}\mathcal{A}_{d,k}(A)| \prod_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket} \frac{x_i^{dg_i(A)}}{dg_i(A)!}.$$

Or, d'après la proposition 6.2.3,  $p_{d,k}(\mathbb{Q}\mathcal{AN}\mathcal{A}_{d,k}(A)) = M(A)$ . Par définition, on peut calculer  $M(A)$  de manière récursive :

$$\begin{aligned} M(A) &= M((M(A_\pi))_{\pi \in \Pi_{d,k}}) \\ &= \int_{\llbracket 1, d \rrbracket} \prod_{\pi \in \Pi_{d,k}} \partial_{\llbracket 1, d \rrbracket \setminus \pi} (M(A_\pi)) \, dx_{\llbracket 1, d \rrbracket} \\ &= \int_{\llbracket 1, d \rrbracket} \prod_{\pi \in \Pi_{d,k}} \left( M(A_\pi) \prod_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket \setminus \pi} \frac{dg_i(A_\pi)}{x_i} \right) dx_{\llbracket 1, d \rrbracket}. \end{aligned}$$

Étant donné que pour tout  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ ,

$$dg_i(ANA) = 1 + \sum_{\pi \in \Pi_{d,k}} dg_i(ANA_\pi) - \mathbb{1}(i \notin \pi),$$

la puissance de  $x_i$  de

$$\prod_{\pi \in \Pi_{d,k}} \left( M(A_\pi) \prod_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket \setminus \pi} \frac{dg_i(A_\pi)}{x_i} \right),$$

est  $dg_i(A) - 1$ . On obtient donc

$$M(A) = \left( \prod_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket} \frac{x_i}{dg_i(A)} \right) \left( \prod_{\pi \in \Pi_{d,k}} \left( M(A_\pi) \prod_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket \setminus \pi} \frac{dg_i(A_\pi)}{x_i} \right) \right).$$

Par récurrence, pour une  $(d, k)$ -direction  $\pi$ , on a

$$M(A_\pi) = \prod_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket} \frac{x_i^{dg_i(A_\pi)}}{\prod_{\substack{s : \text{sommet de } A_\pi \\ \text{dont le type contient } i}} dg_i(s)}.$$

Ainsi,  $M(A)$  est égal à

$$\begin{aligned}
 & \left( \prod_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket} \frac{x_i}{dg_i(A)} \right) \left( \prod_{\pi \in \Pi_{d,k}} \left( \prod_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket} \frac{x_i^{dg_i(A_\pi)}}{\prod_{\substack{s : \text{sommet de } A_\pi \\ \text{dont le type contient } i}} dg_i(s)} \right) \left( \prod_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket \setminus \pi} \frac{dg_i(A_\pi)}{x_i} \right) \right) \\
 &= \left( \prod_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket} \frac{x_i}{dg_i(A)} \right) \left( \prod_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket} \left( \prod_{\pi \in \Pi_{d,k}} \frac{x_i^{dg_i(A_\pi)}}{\prod_{\substack{s : \text{sommet de } A_\pi \\ \text{dont le type contient } i}} dg_i(s)} \right) \left( \prod_{\substack{\pi \in \Pi_{d,k} \\ i \in \llbracket 1, d \rrbracket \setminus \pi}} \frac{dg_i(A_\pi)}{x_i} \right) \right) \\
 &= \prod_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket} \frac{x_i}{dg_i(A)} \left( \prod_{\pi \in \Pi_{d,k}} \frac{x_i^{dg_i(A_\pi)}}{\prod_{\substack{s : \text{sommet de } A_\pi \\ \text{dont le type contient } i}} dg_i(s)} \right) \left( \prod_{\substack{\pi \in \Pi_{d,k} \\ i \in \llbracket 1, d \rrbracket \setminus \pi}} \frac{dg_i(A_\pi)}{x_i} \right) \\
 &= \prod_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket} \frac{x_i^{dg_i(A)}}{dg_i(A)} \prod_{\pi \in \Pi_{d,k}} \frac{\prod_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket \setminus \pi} dg_i(A_\pi)}{\prod_{\substack{s : \text{sommet de } A_\pi \\ \text{dont le type contient } i}} dg_i(s)}.
 \end{aligned}$$

Or, si on prend une  $(d, k)$ -direction  $\pi$ , les types des sommets de  $A_\pi$  sont les mêmes que dans  $A$ , excepté pour la racine de  $A_\pi$  qui devient un sommet de type  $\pi$ . Notons  $r_\pi$  la racine de  $A_\pi$  et  $r'_\pi$  le sommet correspondant dans  $A$ . Alors, pour  $i \in \pi$ ,  $dg_i(r_\pi) = dg_i(r'_\pi)$ , et pour  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket \setminus \pi$ ,  $dg_i(r_\pi) = dg_i(A_\pi)$ . Enfin, si on note  $r$  la racine de  $A$ , alors, pour tout  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ , on a  $dg_i(r) = dg_i(A_\pi)$ . En résumé, si on se donne  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ , alors

$$\frac{1}{\prod_{\substack{s : \text{sommet de } A \\ \text{dont le type contient } i}} dg_i(s)} = \frac{1}{dg_i(A)} \prod_{\pi \in \Pi_{d,k}} \frac{\prod_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket \setminus \pi} dg_i(A_\pi)}{\prod_{\substack{s : \text{sommet de } A_\pi \\ \text{dont le type contient } i}} dg_i(s)}$$

De ce fait

$$M(A) = \prod_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket} \frac{x_i^{dg_i(A)}}{\prod_{\substack{s : \text{sommet dont le type} \\ \text{contient } i}} dg_i(s)},$$

ce qui implique le résultat.  $\square$

Si on reprend l'exemple de la figure 3, le monôme de la racine de chacun des deux arbres nous donne leurs formules des équerres. On considère maintenant la série génératrice exponentielle des arbres non-ambigus de dimension  $(d, k)$  :

$$\mathfrak{G}_{d,k}(x_1, \dots, x_d) = \sum_{ANA \in \mathcal{ANA}_{d,k}} p_{d,k}(ANA).$$

On aura également besoin de la série génératrice

$$\mathfrak{N}_{d,k}(x_1, \dots, x_d) = \partial_{[[1,d]]} \mathfrak{G}_{d,k}(x_1, \dots, x_d).$$

Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, on omettra parfois les variables  $x_1, \dots, x_d$ . Les deux séries génératrices sont liées par la relation

$$(42) \quad \mathfrak{G}_{d,k} = \sum_{\pi \in \Pi_{d,k}} x_\pi + \int_{[[1,d]]} \mathfrak{N}_{d,k} dx_{[[1,d]]},$$

où  $x_\pi := \prod_{i \in \pi} x_i$ .

PROPOSITION 6.2.5. *Soit  $d \geq k \geq 1$  deux entiers. Les fonctions génératrices  $\mathfrak{G}_{d,k}$  et  $\mathfrak{N}_{d,k}$  satisfont les relations suivantes :*

$$\mathfrak{G}_{d,k} = \sum_{\pi \in \Pi_{d,k}} x_\pi + \int_{[[1,d]]} \prod_{\pi \in \Pi_{d,k}} \partial_{[[1,d]] \setminus \pi} (\mathfrak{G}_{d,k}) dx_\pi,$$

et

$$\mathfrak{N}_{d,k} = \prod_{\pi \in \Pi_{d,k}} \left( 1 + \int_{\pi} \mathfrak{N}_{d,k} dx_\pi \right).$$

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 6.2.3, si on partitionne les arbres non-ambigus de dimension  $(d, k)$  suivant leurs formes, on obtient

$$\mathfrak{G}_{d,k} = \sum_{A \in \mathcal{A}_{(d,k)}} M(A).$$

Notons  $\mathcal{A}_{(d,k),\pi}$  l'ensemble

$$\mathcal{A}_{(d,k)} \setminus \left( \bigcup_{\pi' \in (\Pi_{d,k} \setminus \{\pi\})} \emptyset_{\pi'} \right).$$

Par définition on a

$$\mathfrak{G}_{d,k} = \sum_{\pi \in \Pi_{d,k}} x_\pi + \sum_{(A_\pi)_{\pi \in \Pi_{d,k}} \in \prod_{\pi \in \Pi_{d,k}} \mathcal{A}_{(d,k),\pi}} M((A_\pi)_{\pi \in \Pi_{d,k}}).$$

De plus, par multilinéarité de  $M$ , on obtient

$$\mathfrak{G}_{d,k} = \sum_{\pi \in \Pi_{d,k}} x_\pi + M\left(\mathfrak{G}_{d,k} - \sum_{\pi' \in (\Pi_{d,k} \setminus \pi)} x_{\pi'}\right).$$

Or, pour  $(u_\pi)_{\pi \in \Pi_{d,k}} \in \mathbb{Q}[[x_1, \dots, x_d]]^{\Pi_{d,k}}$ , s'il existe  $\pi$  et  $\pi'$  deux  $(d, k)$ -directions différentes telles que  $u_\pi = x_{\pi'}$  alors  $\partial_\pi(u_\pi) = 0$ . Ainsi,  $Mx((u_\pi)_{\pi \in \Pi_{d,k}}) = 0$ , tant et si bien que

$$\mathfrak{G}_{d,k} = \sum_{\pi \in \Pi_{d,k}} x_\pi + M((\mathfrak{G}_{d,k})_{\pi \in \Pi_{d,k}}).$$

La deuxième identité s'obtient en dérivant la première par  $\partial_{[1,d]}$ , puis en utilisant l'équation (42).  $\square$

Les seuls cas pour lesquels nous avons une formule close sont  $(d, k) = (2, 1)$  et  $k = d$ . Le premier correspond aux arbres non-ambigus originaux, pour lesquels nous avons exhibé une formule close. Le deuxième est un cas dégénéré dans lequel, pour chaque entier naturel  $n$ , il y a un unique arbre non-ambigu de taille  $n$  et sa dimension géométrique est  $n \times \dots \times n$ , si bien que

$$\mathfrak{G}_{d,d} = \sum_{n \geq 0} \frac{x_1^n \cdots x_d^n}{(n!)^d}.$$

Toutefois, nous avons le résultat partiel suivant.

PROPOSITION 6.2.6. *Soit  $d > k \geq 1$  deux entiers, alors*

$$\mathfrak{N}_{d,k}|_{x_d=0} = \mathfrak{N}_{d-1,k}.$$

DÉMONSTRATION. L'application  $\varphi : \mathbb{Q}[[x_1, \dots, x_d]] \longrightarrow \mathbb{Q}[[x_1, \dots, x_{d-1}]]$  telle que  $\varphi(f) = f|_{x_d=0}$  est un morphisme d'algèbres. De plus, pour toute  $(d, k)$ -direction  $\pi$  ne contenant pas  $d$ ,

$$\varphi \left( \int_\pi f \, dx_\pi \right) = \int_\pi \varphi(f) \, dx_\pi,$$

et au contraire, pour toute  $(d, k)$ -direction  $\pi$  contenant  $d$ ,

$$\varphi \left( \int_\pi f \, dx_\pi \right) = 0.$$

Ainsi,  $\varphi(\mathfrak{N}_{d,k})$  et  $\mathfrak{N}_{d-1,k}$  satisfont la même équation. Par unicité de la solution de cette équation,  $\varphi(\mathfrak{N}_{d,k}) = \mathfrak{N}_{d-1,k}$ .  $\square$

Concernant la méthode utilisée dans la preuve de la proposition 5.2.7, nous ne pouvons l'utiliser qu'en dimension  $(2, 1)$ , car c'est une conjonction des deux propositions qui suivent, sachant qu'une équation différentielle vérifiée par  $\mathfrak{G}_{d,k}$  est

$$\partial_{[1,d]} \mathfrak{G}_{d,k} = \prod_{\pi \in \Pi_{d,k}} \partial_{[1,d] \setminus \pi} \mathfrak{G}_{d,k}.$$

PROPOSITION 6.2.7 (Cas  $k = d - 1$ ). *Soit  $d \geq 2$  un entier. Si on connaît une série formelle  $f$  satisfaisant l'équation*

$$\partial_{[1,d]} f = \partial_{x_1} f \times \cdots \times \partial_{x_d} f,$$

## 6. Généralisation des arbres non-ambigus en dimension supérieure

---

alors, pour tout  $d$ -uplet de séries formelles  $(s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{Q}[[x]]^d$  tel que  $s_i(0) = 0$  pour tout  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ ,  $(x_1, \dots, x_d) \mapsto f(s_1(x_1), \dots, s_d(x_d))$  vérifie la même équation.

DÉMONSTRATION. Il suffit d'effectuer un changement de variable et de simplifier le facteur  $s'_1(x_1) \cdots s'_d(x_d)$  qui apparaît dans les deux membres de l'égalité.  $\square$

PROPOSITION 6.2.8 (Cas  $k = 1$ ). Soit  $d \geq 2$  un entier, l'équation

$$\partial_{\llbracket 1, d \rrbracket} f = \prod_{\pi \in \Pi_{d, d-1}} \partial_{\pi} f.$$

admet une solution non triviale.

DÉMONSTRATION. De même qu'en dimension  $(2, 1)$ , étant donné que les coordonnées jouent des rôles symétriques, on a la condition que pour toute permutation  $\sigma$  de taille  $d$ ,

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(d)}) = f(x_1, \dots, x_d).$$

Notons  $f_{x_i} = \partial_{\llbracket 1, d \rrbracket \setminus \{i\}} f$ . Alors en multipliant  $d$  fois l'équation vérifiée par  $f$  par elle-même, on obtient

$$\prod_{1 \leq i \leq d} \partial_{x_i} f_{x_i} = \prod_{1 \leq i \leq d} f_{x_i}^d.$$

Supposons que pour tout  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ ,  $\partial_{x_i} f_{x_i} = f_{x_i}^d$ . Alors

$$f_{x_i}^{d-1} = \frac{1}{(1-d)(x_i + c_i)},$$

où  $c_i \in \mathbb{Q}[[x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d]]$ . Pour garder une certaine symétrie, supposons que pour tout  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ ,  $c_i = x_1 + \dots + x_{i-1} + x_{i+1} + \dots + x_d + c$ , où  $c \in \mathbb{Q}$ . Par conséquent, à une racine  $d^{\text{ième}}$  de l'unité près,

$$f_{x_i} = \left( \frac{1}{(1-d)(x_1 + \dots + x_d + c)} \right)^{\frac{1}{d-1}}.$$

De plus, étant donné que les  $f_{x_i}$  sont égaux deux à deux, en primitivant successivement, on produit facilement une solution particulière,

$$f = \frac{(x_1 + \dots + x_d)^{d-1-\frac{1}{d-1}}}{(1-d)^{\frac{1}{d-1}} \left(1 - \frac{1}{d-1}\right) \cdots \left(d-1 - \frac{1}{d-1}\right)}.$$

Par construction,  $f$  est bien solution.  $\square$

De même que pour les arbres binaires, on peut définir la branche d'un sommet pour une direction donnée. Si on considère de nouveau qu'une équerre correspond à un sommet munit de ses branches, utiliser la structure arborescente des équerres ne marche pas en dimension  $d \geq 3$ . En effet, le nombre d'équerres attachées à un sommet est égal à  $\binom{d}{k} - 1 \geq 2$ . Or, l'argument principal de cette méthode est que l'on donne un étiquetage homogène des équerres

en attribuant l'étiquette d'un sommet d'une branche à son fils qui est une racine d'équerre. Or en dimension supérieure ou égale à 3, il y en a plusieurs.

### 3. Définition géométrique

De même que pour la dimension (2, 1), nous pouvons donner une représentation géométrique des arbres non-ambigus de dimension  $(d, k)$  en tant qu'ensemble de points de  $\mathbb{Z}^d$  vérifiant certaines contraintes. Pour cela, nous notons  $(e_1, \dots, e_d)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^d$ , et  $(X_1, \dots, X_d)$  sa base duale, c'est-à-dire

$$X_i(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit  $P$  un point de  $\mathbb{R}^d$ , et  $\pi = \{i_1, \dots, i_k\}$  une  $(d, k)$ -direction. On appelle *cône d'origine  $P$  et de direction  $\pi$*  l'ensemble de points

$$\mathcal{C}(P, \pi) := \{P + a_1 e_{i_1} + \dots + a_k e_{i_k}, (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^k\}.$$

DÉFINITION 6.3.1. Soit  $d \geq k \geq 1$  deux entiers, et  $dg_1, \dots, dg_d$   $d$  entiers naturels non nuls. Un *arbre non-ambigu géométrique* de dimension  $(d, k)$  et de dimension géométrique  $dg_1 \times \dots \times dg_d$ , est un ensemble de points de  $\mathbb{N}^d$ , noté  $E$ , tel que :

- (1)  $E$  est inclus dans  $\llbracket 1, dg_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket 1, dg_d \rrbracket$  ;
- (2)  $E$  contient le point  $(dg_1, \dots, dg_d)$ , nous l'appelons le *point racine* ;
- (3) pour tout point non racine  $P$  de  $E$ , il existe une unique  $(d, k)$ -direction  $\pi$  telle que  $\mathcal{C}(P, \pi)$  contient un point de  $E$  différent de  $P$ , on dit que  $P$  est de type  $\pi$  ;
- (4) pour tout  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$  et pour tout  $l \in \llbracket 1, dg_i - 1 \rrbracket$ , l'hyperplan d'équation  $x_i = l$  contient exactement un point de  $E$  dont le type contient  $i$  ;
- (5) soit  $P$  et  $P'$  deux points de  $E$ , appartenant à un même espace affine de direction  $\text{Vect}(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$ . Alors, soit pour tout  $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ ,  $X_{i_j}(P) > X_{i_j}(P')$ , soit pour tout  $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ ,  $X_{i_j}(P) < X_{i_j}(P')$ .

La *taille* est donnée par la cardinalité de  $E$ .

Comparons les contraintes en dimension 2 et en dimension supérieure. L'existence d'un point dit racine est commun aux deux définitions : 5.1.1.(1) et 6.3.1.(2). Ensuite, l'existence d'une unique  $(d, k)$ -direction pour laquelle nous pouvons définir le père d'un point non racine est donnée par les conditions 5.1.1.(2) et 6.3.1.(3). Toutefois, pour que le père soit unique, en dimension supérieure à 2 on a besoin de la condition 6.3.1.(5). Enfin, la compacité de l'objet est donnée par les conditions 5.1.1.(3), 6.3.1.(1) et 6.3.1.(4).

PROPOSITION 6.3.2. Soit  $d \geq k \geq 1$  deux entiers, et  $dg_1, \dots, dg_d$   $d$  entiers naturels non nuls. Les arbres non-ambigus géométriques de dimension  $(d, k)$

et de dimension géométrique  $dg_1 \times \cdots \times dg_d$  sont en bijection avec les arbres non-ambigus de dimension  $(d, k)$  et de dimension géométrique  $dg_1 \times \cdots \times dg_d$ .

DÉMONSTRATION. Si  $d = k$  alors, un arbre non-ambigu géométrique est de la forme  $\{(dg, \dots, dg), (dg - 1, \dots, dg - 1), \dots, (1, \dots, 1)\}$ , où  $dg$  est un entier non nul. Or, les arbres non-ambigus de dimension  $(d, d)$  sont des arbres unaires décroissant selon chaque coordonnée et dont les étiquettes sont de la forme  $(i, \dots, i)$ . Ils sont clairement en bijection.

Supposons maintenant que  $d > k$ . Nous allons tout d'abord donner un application des arbres non-ambigus vers les arbres non-ambigus géométriques, puis nous expliciterons son inverse.

**6.1.1**  $\Rightarrow$  **6.3.1**. Soit  $T$  un arbre non-ambigu de dimension  $(d, k)$  et de dimension géométrique  $dg_1 \times \cdots \times dg_d$ . La première étape est de définir récursivement l'étiquette complétée d'un sommet  $s$  en remplaçant les  $\bullet$  par des entiers. Soit  $s$  un sommet non racine de  $T$  tel que sa  $i^{\text{ème}}$  coordonnée est égale à  $\bullet$ , et soit  $s'$  son père. La  $i^{\text{ème}}$  coordonnée de l'étiquette complétée de  $s$  est égale à la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée de l'étiquette complétée de  $s'$ . C'est équivalent à dire que la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée de l'étiquette complétée de  $s$  est égale à la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée du premier ancêtre de  $s$  dont la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée est différente de  $\bullet$ . On note  $\alpha_i(s)$  cet ancêtre. Un tel ancêtre existe, car l'étiquette de la racine ne possède pas de  $\bullet$ . On note  $(s_1, \dots, s_d)$  l'étiquette complétée d'un sommet  $s$ . Soit  $\pi$  le type de  $s$ . En utilisant la condition **6.1.1.(2)** on a  $s'_i > s_i$  pour  $i \in \pi$  et  $s'_i = s_i$  pour  $i \notin \pi$ . En particulier, le long d'un chemin partant de la racine, pour tout  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ , la suite des  $i^{\text{ème}}$  coordonnées des sommets qu'on parcourt décroît faiblement. Enfin, soit  $u$  et  $v$  deux sommets tels qu'il existe  $i$  tel que  $u_i = v_i$ . Alors par définition de l'étiquette complétée,  $\alpha_i(u) = \alpha_i(v)$ . Avant toute chose, montrons que deux sommets n'ont pas la même étiquette complétée. Supposons que ce soit le cas pour deux sommets  $u$  et  $v$ , notons  $\pi$  et  $\pi'$  leurs types respectifs. En raison de la condition **6.1.1.(3)**,  $\pi \cap \pi' = \emptyset$ . Soit  $i \in \pi$  et  $i' \in \pi'$ . Étant donné que  $u_i = v_i$ , par définition  $\alpha_i(v) = u$ . De même,  $\alpha_{i'}(u) = v$ , de sorte que  $u = v$ .

Soit  $s$  un sommet de  $T$ . On note  $p_s$  le point de  $\mathbb{N}^d$  dont les coordonnées correspondent à l'étiquette complétée de  $s$ . Soit  $E$  l'ensemble  $\{p_s, s \text{ sommet de } T\}$ , montrons que  $E$  satisfait les conditions de la définition **6.1.1**.

**6.3.1.(1)** C'est un conséquence de **6.1.1.(4)**.

**6.3.1.(2)** L'étiquette de la racine  $r$  de  $T$  est  $(dg_1, \dots, dg_d)$ , donc  $p_r$  correspond au point racine de  $E$ .

**6.3.1.(3)** Soit  $s$  un sommet de  $T$  différent de la racine. On note  $\pi$  son type et  $s'$  son père. Ainsi, si  $i \notin \pi$ , alors  $X_i(p_s) = X_i(p_{s'})$ . Sinon,  $X_i(p_s) < X_i(p_{s'})$ . En particulier,  $p_{s'}$  est dans le cône d'origine  $p_s$  et de direction  $\pi$ . Prouvons l'unicité par l'absurde. Supposons qu'il existe une  $(d, k)$ -direction  $\pi'$  différente de  $\pi$  telle que le cône d'origine  $p_s$  et de direction  $\pi'$  contient un point  $p_u$  de  $E$  différent de  $p_s$ . Soit  $i \in \pi \setminus \pi'$ . Par définition d'un cône,  $X_i(p_u) = X_i(p_s)$ . De plus,  $\alpha_i(s) = s'$ , de sorte que  $\alpha_i(u) = s'$ . Soit  $i' \in \pi' \setminus \pi$ . Alors  $X_{i'}(u) > X_{i'}(s) = X_{i'}(s')$ , ce



qui n'est pas possible, car  $s'$  est un ancêtre de  $u$ . En particulier, le type de  $p_s$  correspond au type de  $s$ .

- 6.3.1.(4) Soit  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$  et  $l \in \llbracket 1, dg_i - 1 \rrbracket$ . Par la condition 6.1.1.(4), il existe un sommet  $s$  tel que sa  $i^{\text{ème}}$  coordonnée est égale à  $l$ , on note  $\pi$  son type, par définition  $i \in \pi$ . D'où l'existence d'un point vérifiant 6.3.1.(4). Supposons qu'il existe un point  $p_u$  satisfaisant les conditions. Donc  $u$  a également sa  $i^{\text{ème}}$  coordonnée égale à  $l$ , si bien que par la condition 6.1.1.(3),  $s = u$ .
- 6.3.1.(5) Soit  $\mathcal{F}$  un espace affine de direction  $\text{Vect}(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$  contenant un point  $p_s$  de  $E$ . On note  $\pi$  l'ensemble  $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\}$ . Étant donné que l'on va considérer deux points de  $\mathcal{F}$ , on peut supposer que  $s$  n'est pas la racine. Soit  $(s^0, \dots, s^m)$  la suite des ancêtres de  $s$ , i.e.  $s^0 = s$ , pour tout  $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$ ,  $s^j$  est le père de  $s^{j-1}$ , et  $s^m$  est la racine de  $T$ . Soit  $l$  le plus petit entier tel que  $s^l$  n'est pas de type  $\pi$ . On note  $\pi'$  son type. Si  $s^l$  est la racine, alors  $\pi' = \llbracket 1, d \rrbracket$ . Par suite, les points  $s^0, \dots, s^l$  appartiennent à  $\mathcal{F}$ . Soit  $i' \in \pi' \setminus \pi$ . Considérons un autre point  $p_u$  de  $\mathcal{F}$ . Puisque  $i' \notin \pi$ ,  $u_{i'} = s_{i'} = s_{i'}^l$ . En conséquence, par définition de  $s^l$ ,  $\alpha_{i'}(u) = \alpha_{i'}(s) = s^l$ . Étant donné que pour tout  $j \in \pi$ ,  $u_j = s_j^l$ , le chemin du sommet  $u$  au sommet  $s^l$  ne contient que des sommets de types  $\pi$ . Ainsi,  $u$  est un ancêtre de  $s$  ou le contraire, ce qui prouve le résultat.

6.3.1  $\Rightarrow$  6.1.1. Soit  $E$  un arbre non-ambigu géométrique de dimension  $(d, k)$  et dimension géométrique  $dg_1 \times \dots \times dg_d$ . On commence par définir l'arbre  $\binom{d}{k}$ -aire sous-jacent  $A$  à  $E$ . Les sommets de  $A$  sont les points de  $E$ , en particulier, le point racine correspond à la racine de  $A$ . Soit  $p$  un point de  $E$ . On note  $s_p$  le sommet de  $A$  correspondant. Soit  $p$  un point différent du point racine. On note  $\pi = \{i_1, \dots, i_k\}$  la  $(d, k)$ -direction définie comme le type de  $p$  par la condition 6.3.1.(3), et soit  $\mathcal{F}$  l'espace affine  $p + \text{Vect}(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$ . Par la condition 6.3.1.(5), on définit le père de  $s_p$  comme étant  $s_{p'}$ , où  $p'$  est le point le plus proche de  $p$  appartenant au cône  $\mathcal{C}(p, \pi)$ . De plus, on indexe  $s_p$  par  $\pi$ . En particulier, pour  $i \in \pi$ ,  $X_i(s_{p'}) > X_i(s_p)$ , et pour  $i \notin \pi$ ,  $X_i(s_{p'}) = X_i(s_p)$ . Un sommet  $s_p$  ne peut pas avoir deux fils  $s_u$  et  $s_v$  indexés par la même  $(d, k)$ -direction  $\{i_1, \dots, i_k\}$ , si c'était le cas, les trois points  $p$ ,  $u$  et  $v$  appartiendraient au même espace affine  $p + \text{Vect}(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$ . De ce fait, par la condition 6.3.1.(5),  $p$  ne pourrait pas être le point le plus proche de  $u$  et de  $v$  à la fois. On commence par étiqueter chaque sommet  $s_p$  de  $A$  par les coordonnées du point  $p$ . Puis, pour tout sommet non racine  $s_p$ , on remplace la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée par  $\bullet$ , si  $i \notin \pi$ , où  $\pi$  est le type de  $s_p$ . Montrons que les conditions de la définition 6.1.1 sont satisfaites par  $A$ .

- 6.1.1.(1) L'étiquetage a été choisi de cette façon.
- 6.1.1.(2) Soit  $s_p$  et  $s_{p''}$  deux sommets dont la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée est différente de  $\bullet$ . En particulier elles sont égales respectivement à  $X_i(p)$  et  $X_i(p'')$ . Supposons que  $s_{p''}$  est l'ancêtre de  $s_p$ . On note  $s_{p'}$  le père de  $s_p$ ,

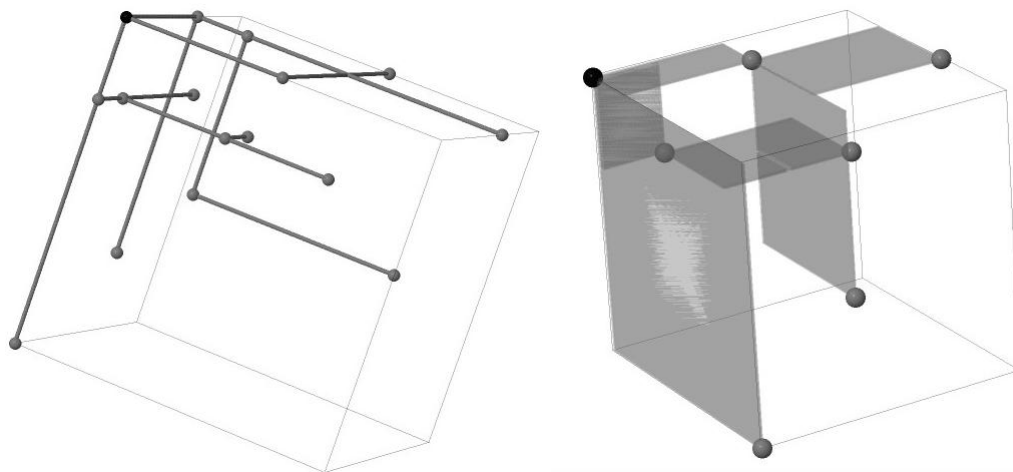


FIGURE 4. Les arbres non-ambigus géométriques correspondant aux arbres non-ambigus de la figure 1.

par définition  $X_i(p) < X_i(p')$ . De plus, étant donné que  $s_{p'}$  est le descendant de  $s_{p''}$ ,  $X_i(p') \leq X_i(p'')$ . D'où le résultat.

- 6.1.1.(3) Soit  $s_p$  un sommet de  $A$  dont la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée est différente  $l$  de  $\bullet$ . Si  $s_p$  est la racine, tout sommet est un descendant de  $s_p$ . Donc par la condition précédente tout autre sommet  $s_u$  a un  $i^{\text{ème}}$  coordonnée différente de  $s_p$ . Si  $s_p$  n'est pas la racine, on note  $\pi$  son type, c'est aussi le type du point  $p$ . En particulier  $i$  appartient à  $\pi$ . En outre,  $l$  est compris entre 1 et  $dg_i - 1$ . Ainsi, par la condition 6.3.1.(4), il y a unicité.
- 6.1.1.(4) La condition 6.3.1.(4) implique que pour tout  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$  et pour tout  $l \in \llbracket 1, dg_i - 1 \rrbracket$ , il existe un point  $p$  de type  $\pi$  tel que  $X_i(p) = l$ . De ce fait, la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée de  $s_p$  est égale à  $l$ . De plus, la racine a pour étiquette  $(dg_1, \dots, dg_d)$  et  $E$  est contenu dans  $\llbracket 1, dg_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket 1, dg_d \rrbracket$ . Ainsi, l'ensemble des  $i^{\text{èmes}}$  coordonnées différentes de  $\bullet$  est  $\llbracket 1, dg_i \rrbracket$ .  $\square$

La figure 4 donne un exemple d'un arbre non-ambigu géométrique de dimension  $(3, 1)$  et d'un autre de dimension  $(3, 2)$ .



## Partie 3

# Polyominos parallélogrammes périodiques



# POLYOMINOS PARALLÉLOGRAMMES PÉRIODIQUES

---

L'énumération ou le calcul de la série génératrice des polyominos est un problème classique de la combinatoire. C'est un problème difficile et encore ouvert. Les statistiques qui sont généralement considérées sont l'aire, le demi-périmètre, la hauteur et la largeur.

Dans le but de mieux comprendre ces objets, des sous-familles de polyominos ont été étudiées. On peut notamment citer les polyominos convexes, les polyominos convexes dirigés et les polyominos parallélogrammes. À demi-périmètre  $n$  fixé, ils sont respectivement comptés par les suites  $((2n+7)4^{n-2} - 4(2n-3)\binom{2(n-2)}{n-2})_n$  [DV84],  $(\binom{2(n-2)}{n-2})_n$  [BM96] et  $(Cat_{n-1})_n$  [DV84]. De nombreuses approches ont été utilisées pour étudier ces objets. Par exemple, Bousquet-Mélou et Viennot ont calculé la série génératrice des polyominos parallélogrammes et des polyominos convexes, à l'aide de la théorie des empilements [Vie86], en prenant en compte les quatre paramètres cités précédemment.

Dans les travaux que nous présentons dans ce chapitre, l'approche qui nous intéresse a été introduite par Aval, Boussicault, Bouvel et Silimbani [ABBS14]. L'idée est de voir un polyomino parallélogramme comme un arbre non-ambigu en ajoutant un point en haut (resp. à droite) de chaque colonne (resp. ligne). On obtient ainsi une bijection entre les arbres binaires et les polyominos parallélogrammes. En considérant plutôt des arbres ordonnés, Boussicault, Rinaldi et Socci [BRS15] ont étendu cette construction aux polyominos convexes dirigés. Ils obtiennent ainsi une bijection simple entre les polyominos convexes dirigés et deux forêts d'arbres ordonnés. Leur méthode permet d'interpréter facilement de nombreuses statistiques sur les arbres ordonnés sous-jacent, entre autres : la hauteur, la largeur, le demi-périmètre, le nombre de coins et la taille de la colonne la plus à droite. La structure récursive des arbres ordonnés permet de calculer facilement les séries génératrices associées. Seule la statistique de l'aire manque à l'appel. Une extension naturelle de leurs

---

travaux consiste à traiter le cas des polyominos convexes. Pour cela, nous avons défini les polyominos parallélogrammes périodiques. L'idée était d'interpréter les polyominos convexes comme un objet obtenu à partir d'une bande sur un cylindre après découpage et recollement. Pour le moment, nous n'avons pas encore fait le lien avec les polyominos convexes.

Indépendamment de nos travaux, Biagioli, Jouhet et Nadeau [BJN17] ont introduit les polyominos parallélogrammes périodiques pour donner une interprétation combinatoire à des résultats de Biagioli, Bousquet-Mélou, Jouhet et Nadeau [BBJN16]. À toute famille  $(\mathcal{W}_n)_n$  de groupes de Coxeter [BB05] finis ou affines, il est naturel d'associer la série génératrice en  $x$  et  $q$ , où  $x$  et  $q$  encodent respectivement la taille et la longueur de Coxeter d'un élément, des éléments pleinement commutatifs. Dans le deuxième article, les auteurs donnent des expressions explicites de ces séries génératrices, par des méthodes récursives. Si  $\mathcal{W} = \tilde{\mathcal{A}}$ , les éléments pleinement commutatifs correspondent aux permutations affines qui évitent le motif 321. Naturellement, en adaptant la bijection (chapitre 1 section 7) entre les permutations qui évitent 321 et les polyominos parallélogrammes, l'article [BJN17] définit les polyominos parallélogrammes périodiques marqués (définition 7.1.8), qui sont en bijection (section 1.3) avec les permutations affines qui évitent 321. La taille et la longueur de Coxeter correspondent respectivement au demi-périmètre et à l'aire. En généralisant la méthode Bousquet-Mélou et Viennot [BMV92], les auteurs calculent la série génératrice des polyominos parallélogrammes périodiques marqués et donnent ainsi une interprétation combinatoire du cas  $\tilde{\mathcal{A}}$ . Dans le même temps, ils obtiennent également la série génératrice des polyominos parallélogrammes périodiques.

Les structures arborescentes induites par les polyominos parallélogrammes périodiques (marqués) est stable par rotation des colonnes. Ainsi, nous définissons une bande (définition 7.1.6) comme une orbite sous l'action de rotation des colonnes. Nous montrons (théorème 7.2.4) qu'une bande est entièrement déterminée par la structure arborescente sous-jacente et sa hauteur de recollement intrinsèque. Pour traiter le cas des polyominos parallélogrammes périodiques (marqués) il suffit d'ajouter un marquage sur la structure arborescente. À notre connaissance, la hauteur de recollement intrinsèque est une nouvelle statistique. Elle permet notamment de partitionner, à taille fixée, les objets que nous étudions en ensembles de même taille. Dans le cas des polyominos parallélogrammes périodiques (marqués), nous obtenons une formule d'énumération simple (corollaires 7.3.9 et 7.3.10). Pour le cas des bandes, seule une asymptotique est calculée (proposition 7.3.11). Pour le moment, aucune interprétation de la hauteur de recollement intrinsèque en termes de permutations affines évitant 321 n'est connue. En utilisant les calculs sur les séries génératrices de la section 1.2, nous obtenons facilement une expression de la série génératrice, prenant en compte la hauteur, la largeur et la hauteur de recollement intrinsèque, pour les trois classes combinatoires. De même que pour

les polyominos parallélogrammes, nous n'avons pas d'interprétation simple de l'aire sur les structures arborescentes.

À taille fixée, Biagioli, Jouhet et Nadeau [BJN15] ont montré que la série génératrice, par rapport à la longueur de Coxeter, des éléments pleinement commutatifs d'un groupe de Coxeter fini ou affine est rationnelle. Les coefficients sont donc périodiques à partir d'un certain rang. La série est dite ultimement périodique. L'ultime périodicité pour le groupe de Coxeter  $\tilde{A}$  avait d'abord été traitée par Hanusa et Jones [HJ10]. Leurs résultats impliquent l'ultime périodicité de la série génératrice des polyominos parallélogrammes périodiques marqués. Nous montrons dans la section 4 que les séries génératrices des polyominos parallélogrammes périodiques et des bandes sont ultimement périodique, en supprimant des cellules dans chaque colonne. Nous n'obtenons pas de résultats aussi précis que [HJ10], toutefois, les objets minimaux pour les deux constructions que nous proposons possèdent une interprétation à l'aide de grand Dyck bilatère (théorème 7.4.5 et corollaire 7.4.12) qui nous permettent de donner une formule d'énumération.

Le chapitre est organisé de la façon suivante. Nous commençons (section 1) par introduire les trois classes combinatoires que nous étudions dans nos travaux. Dans la section 2, nous appliquons la méthode de [BRS15] pour construire les structures arborescentes sous-jacentes à ces classes combinatoires. Nous montrons qu'à la hauteur de recollement intrinsèque près, elles caractérisent entièrement nos objets. La section 3 est consacrée aux conséquences énumératives de cette interprétation. Enfin, nous étudions dans la section 4 l'ultime périodicité des séries génératrices de nos objets. En découle pour chaque classe deux sous-familles que nous étudions.

Les résultats contenus dans ce chapitre ont été obtenus en collaboration avec Aval, Boussicault et Pétréolle. Ils ont fait l'objet de l'article [BLZ17] et de la prépublication [ABLZP16].

## 1. Définitions

Dans cette première section, nous introduisons les trois classes combinatoires que nous étudions dans nos travaux. Pour simplifier certaines explications, nous proposons également une interprétation de ces objets en tant que bande périodique infinie.

### 1.1. Polyominos parallélogrammes périodiques

La *première colonne* (resp. *dernière colonne*) d'un polyomino parallélogramme correspond à la colonne la plus à gauche (resp. droite).



DÉFINITION 7.1.1. Un *polyomino parallélogramme périodique* est un polyomino parallélogramme dont on singularise une cellule admissible de la première colonne. Une cellule est dite admissible (figure 1) si sa hauteur est plus petite ou égale à la taille de la dernière colonne.

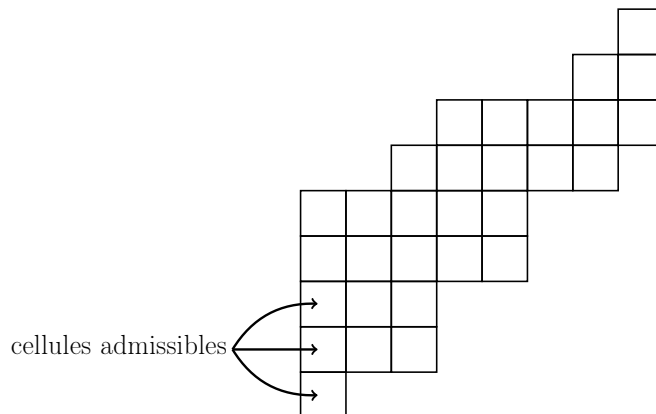


FIGURE 1. Les cellules admissibles d'un polyomino parallélogramme.

REMARQUE 7.1.2. Usuellement, le verbe « marquer » est préféré au verbe « singulariser ». Cette terminologie a été choisie pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté avec le marquage introduit dans la définition des polyominos parallélogrammes périodiques marqués (définition 7.1.8).

Soit  $P$  un polyomino parallélogramme périodique. La cellule singularisée de  $P$  lui confère un caractère périodique car il indique l'endroit où l'on recolle la dernière colonne et la première colonne. Plus précisément, translatons une copie de  $P$  de sorte que la cellule la plus haute de la dernière colonne, de cette copie, partage son côté est avec la cellule singularisée de  $P$ . En répétant cette construction vers la gauche ainsi que vers la droite, nous obtenons une bande périodique infinie (figure 2). La hauteur de la cellule singularisée dans la première colonne est appelée la *hauteur de recollement*. Par exemple, la hauteur de recollement du polyomino parallélogramme périodique de la figure 2 est 2. Nous notons  $\mathcal{P}$  l'ensemble des polyominos parallélogrammes périodiques. Nous étendons la notion de colonne, de largeur et d'aire des polyominos parallélogrammes aux polyominos parallélogrammes périodiques. Par contre, les définitions de ligne et de hauteur changent. Nous définissons deux notions de lignes : les lignes sans recollement et les lignes (avec recollement). Les *lignes sans recollements* sont les lignes du polyomino parallélogramme sous-jacent. En engendrant la bande périodique infinie d'un polyomino parallélogramme périodique, nous observons que l'image périodique de plusieurs lignes sans recollement peuvent correspondre à une même ligne de la bande infinie périodique. Ainsi, nous appelons *ligne* un ensemble maximal de lignes sans recollement dont les images périodiques forment une ligne. Le côté gauche (resp. droit) de cette ligne est le côté gauche (resp. droit) de la ligne sans recollement la plus

haute (resp. basse) qui la compose. Par exemple, dans la figure 2 les lignes sans recollement qui sont rayées forment une ligne. En respectant cette convention, nous définissons la *hauteur* comme le nombre de lignes. Le *demi-périmètre* correspond à la somme de cette nouvelle hauteur et de la largeur. La hauteur est également le nombre de lignes sans recollement qui sont strictement au-dessus de la cellule singularisée. Le polyomino de la figure 2 est un polyomino parallélogramme périodique de largeur 8, de hauteur 5, de demi-périmètre 13 et d'aire 26.

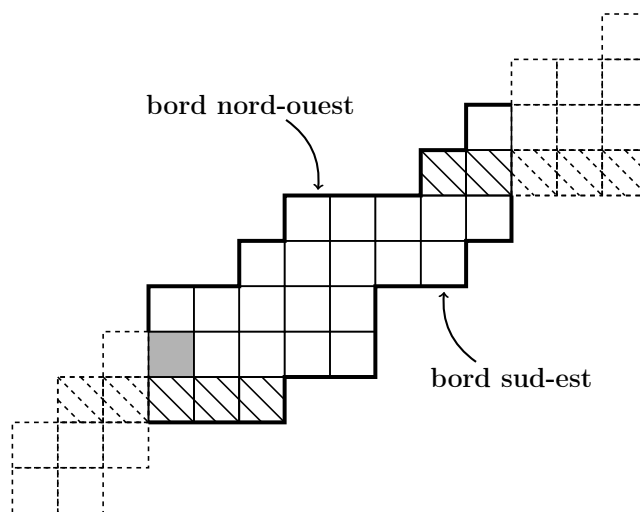


FIGURE 2. Un polyomino parallélogramme périodique. Les lignes sans recollement qui sont rayées forment une ligne.

Le *bord nord-ouest* (resp. *bord sud-est*) d'un polyomino parallélogramme périodique est le chemin composé des pas correspondant aux côtés gauches (resp. droit) des lignes et aux côtés supérieurs (resp. inférieurs) des colonnes. Un polyomino parallélogramme périodique est entièrement déterminé par la hauteur de recollement, le *bord nord-ouest* et le *bord sud-est*.

DÉFINITION 7.1.3. Un *polyomino parallélogramme périodique dégénéré* est un polyomino parallélogramme rectangulaire dont la cellule la plus haute de la première colonne est singularisée.

De manière équivalente, on peut les définir comme les polyominos parallélogrammes périodiques dont les bords nord-ouest et sud-est sont composés uniquement de pas horizontaux. Un exemple est donné en figure 3. Dans la suite, nous supposons que les polyominos parallélogrammes périodiques ne sont pas dégénérés. En effet, la structure arborescente (section 2) sur laquelle se base nos travaux n'est pas définie pour les polyominos parallélogrammes périodiques dégénérés.

Il est possible de définir rigoureusement les bandes périodiques infinies.

DÉFINITION 7.1.4. Soit  $n \geq 2$  un entier naturel. Une *bande périodique infinie* de période  $n$  est une paire de chemins infinis (dans les deux sens),



FIGURE 3. De gauche à droite : un polyomino parallélogramme périodique dégénéré et un polyomino parallélogramme périodique non dégénéré.

composés de pas nord et est,  $n$ -périodiques et qui ne se croisent pas. La position relative des deux chemins est importante, mais la paire est définie à translation près. Les paires de chemins composées de deux lignes verticales ou horizontales sont interdites.

Il est à noter que deux bandes qui sont géométriquement les mêmes mais dont la période choisie n'est pas la même sont différentes. Dans la suite, nous utilisons également la terminologie de bande  $n$ -périodique infinie. Le bord infini supérieur (resp. inférieur) est appelé *bord nord-ouest infini* (resp. *bord sud-est infini*). Le non croisement des chemins composant une paire se traduit par le fait que les facteurs de taille  $n$  du bord nord-est infini ont le même nombre de pas est (resp. nord) que les facteurs de taille  $n$  du bord sud-est infini. En quadrillant l'aire entre les deux chemins par des cellules unitaires, nous étendons les notions de ligne et de colonne à ces objets.

PROPOSITION 7.1.5. *Les polyominos parallélogrammes périodiques de demi-périmètre  $n$  sont en bijection avec les bandes  $n$ -périodiques infinies dont une colonne ainsi que ses images périodiques sont distinguées.*

DÉMONSTRATION. À partir d'un polyomino parallélogramme périodique, il suffit d'engendrer sa bande périodique infinie puis de marquer la première colonne et ses images périodiques. Par définition, la paire de chemin ne peut pas être composée de chemins infinis verticaux. De plus, le cas des chemins horizontaux correspond au polyominos parallélogrammes périodiques dégénérés.

Inversement, il suffit de couper périodiquement, par des droites verticales, une bande  $n$ -périodique infinie au niveau du côté de gauche de la colonne distinguée  $C$ . Il ne reste qu'à singulariser la cellule de  $C$  qui se trouve au niveau de la cellule la plus haute de la colonne à gauche de  $C$ .  $\square$

## 1.2. Bandes

Deux polyominos parallélogrammes périodiques différents peuvent engendrer la même bande périodique infinie. Nous formalisons cette notion en définissant une bande comme une classe d'équivalence définie par une rotation (figure 4) sur les colonnes.

Soit  $P$  un polyomino parallélogramme périodique de largeur au moins 2. Si l'on singularise la deuxième colonne au niveau de la cellule la plus haute de la première colonne, puis que l'on déplace la première colonne en dernière

position, de sorte que l'ancienne cellule singularisé soit à droite de la cellule la plus haute de l'ancienne dernière colonne, nous obtenons un polyomino parallélogramme périodique noté  $r(P)$ . Si  $P$  est de largeur 1, nous posons  $r(P) = P$ . Cette construction nous définit un automorphisme  $r$ , appelé *rotation*, sur l'ensemble des polyominos parallélogrammes périodiques  $\mathcal{P}$ . Notons  $G$  le groupe

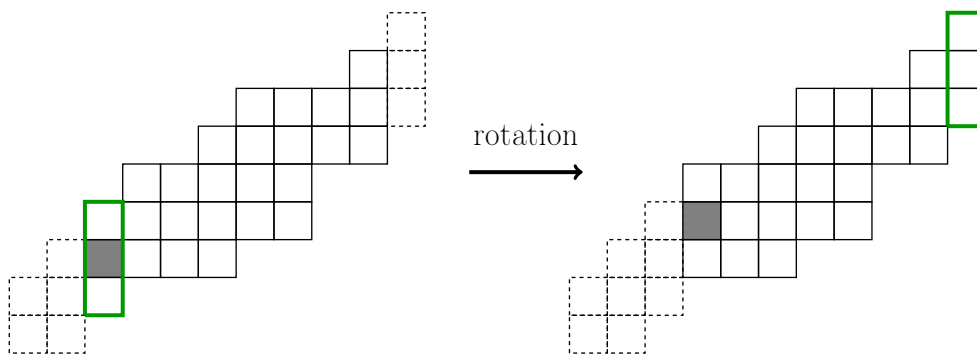


FIGURE 4. Application de l'automorphisme rotation à un polyomino parallélogramme périodique.

engendré par  $r$ .

DÉFINITION 7.1.6. La rotation induit une action du groupe  $G$  sur l'ensemble des polyominos parallélogrammes périodiques. Les orbites de cette action sont appelées des *bandes*.

La figure 5 donne les trois représentants d'une même orbite. Étant donné que l'action laisse invariant la hauteur, la largeur, le demi-périmètre et l'aire, ces notions sont étendues aux bandes. Nous notons  $\mathcal{B}$  l'ensemble des bandes.

PROPOSITION 7.1.7. *Les bandes de demi-périmètre  $n$  sont en bijection avec les bandes  $n$ -périodiques infinies.*

DÉMONSTRATION. Appliquer la rotation  $r$  à une bande  $n$ -périodique infinie revient à distinguer les colonnes juste à droite des colonnes distinguées. Prendre la classe d'équivalence définie par cette action revient à oublier quelle est la colonne distinguée.  $\square$

### 1.3. Polyominos parallélogrammes périodiques marqués

DÉFINITION 7.1.8. Un *polyomino parallélogramme périodique marqué* est un polyomino parallélogramme périodique dont on marque le pas horizontal du bas de la dernière colonne ou un des pas verticaux sous le recollement de la dernière colonne.

La figure 6 donne les marquages possibles du polyomino parallélogramme périodique sous-jacent. Nous étendons la définition de la hauteur, de la largeur, du demi-périmètre et de l'aire, aux polyominos parallélogrammes périodiques marqués.

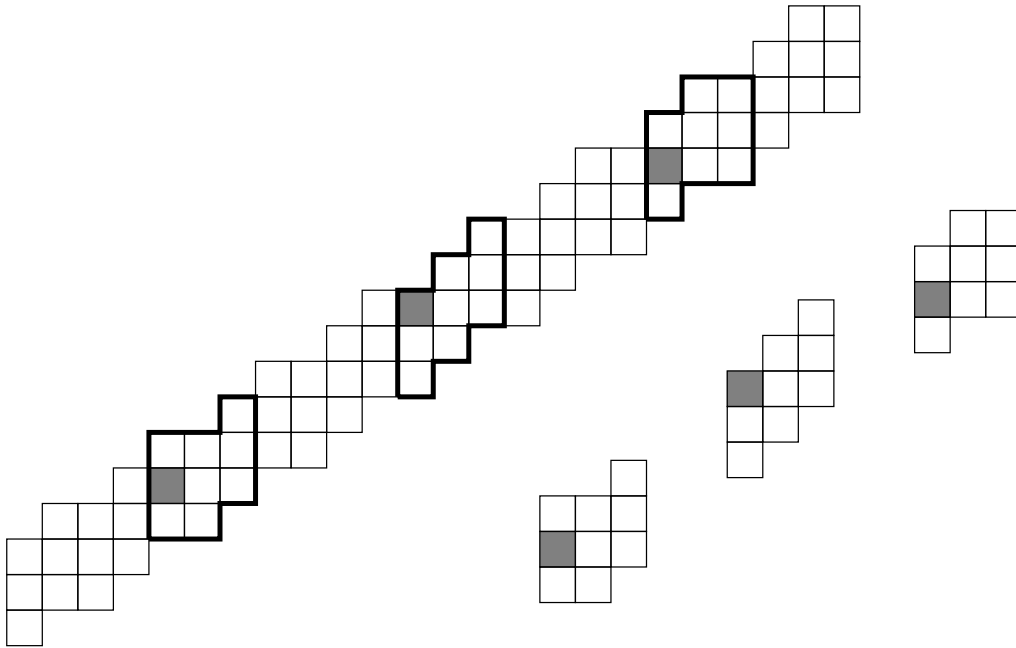


FIGURE 5. Les trois polyominos parallélogrammes périodiques d'une même bande.

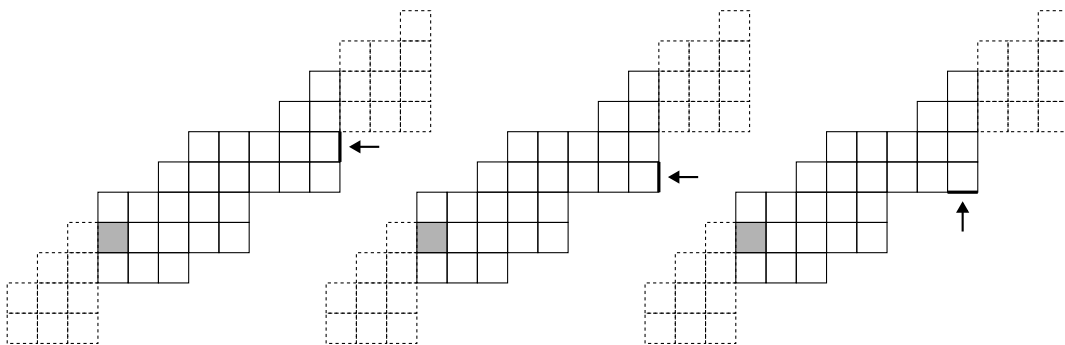


FIGURE 6. Les trois marquages possibles du polyomino parallélogramme périodique sous-jacent.

REMARQUE 7.1.9. Dans la définition initiale des polyominos parallélogrammes périodiques marqués [BJN17, Section 5.3], le marquage est effectué dans la première colonne. Un simple rotation d'angle  $\pi$  nous donne l'équivalence entre les deux définitions.

PROPOSITION 7.1.10. *Les polyominos parallélogrammes périodiques marqués de demi-périmètre  $n$  sont en bijection avec les bandes  $n$ -périodiques infinies dont une colonne ou une ligne ainsi que ses images périodiques sont distinguées.*

DÉMONSTRATION. Il est clair qu'un polyomino parallélogramme périodique marqué de demi-périmètre  $n$  engendre une bande  $n$ -périodique infinie dont une colonne ou une ligne ainsi que ses images périodiques sont distingués.

Inversement, si une colonne d'une bande  $n$ -périodique infinie est marquée, en distinguant cette même colonne, nous obtenons un polyomino parallélogramme périodique dont on marque le pas horizontal du bas de la dernière colonne. Par contre, si c'est une ligne  $L$  qui est marquée, alors nous distinguons la colonne, ainsi que ses images périodiques, contenant la cellule la plus à droite de  $L$ . Nous définissons ainsi un polyomino parallélogramme périodique dont un pas vertical sous le recollement de la dernière colonne est marqué.  $\square$

REMARQUE 7.1.11. Les propositions 7.1.5 et 7.1.10 impliquent que le nombre de polyominos parallélogrammes périodiques marqués de demi-périmètre  $n$  est égal à deux fois le nombre de polyominos parallélogrammes périodiques de demi-périmètre  $n$ . En effet, à toute bande  $n$ -périodique infinie marquée dans une colonne nous lui associons : elle même ainsi que la bande obtenue par une symétrie axiale d'axe la droite d'équation  $y = x$ . La symétrie axiale laisse l'aire constante et échange la hauteur et la largeur. Nous obtenons ainsi une équation simple liant les séries génératrices de ces deux objets (section 3.1).

Biagoli, Jouhet et Nadeau [BJN17] ont montré que les polyominos parallélogrammes périodiques marqués de demi-périmètre  $n$  sont en bijection avec les permutations affines évitant 321 de taille  $n$ . Nous présentons leur bijection, illustrée dans la figure 7, pour faire le lien entre les statistiques des permutations affines évitant 321 et les statistiques des polyominos parallélogrammes périodiques marqués. C'est une généralisation de la bijection présentée dans la section 7 du chapitre 1. Soit  $P$  un polyomino parallélogramme périodique marqué. Commençons par appliquer une rotation d'angle  $\pi$  à  $P$ . La cellule singularisée se trouve alors tout à droite et le marquage tout à gauche. La bijection, décrite dans le reste du paragraphe, se décompose en deux étapes : diminuer la taille des colonnes de 1 puis numéroter chacun des deux bords infinis par  $\mathbb{Z}$ , de sorte qu'une ligne ou une colonne apparie un entier (bord nord-ouest) et son image par la permutation affine (bord sud-est). La figure 7 illustre la construction appliquée au polyomino parallélogramme périodique de la figure 6. Suite à la rotation, nous retirons la cellule la plus basse de chaque colonne, notons  $\overline{\pi(P)}$  l'objet ainsi obtenu. Si la cellule singularisée est en bas de la première colonne, le recollement se fait entre le coin inférieur gauche de la première colonne, potentiellement réduite à un pas horizontal, et le coin supérieur droit de la dernière colonne, potentiellement réduite à un pas horizontal. De façon équivalente, on diminue la hauteur de recollement de un tout en gardant les mêmes bords nord-ouest et sud-est. La prochaine étape est de numéroter de façon croissante les bords infinis nord-ouest  $BNO$  et sud-est  $BSE$  de la bande infinie de  $\overline{\pi(P)}$  par  $\mathbb{Z}$ . Le 0 de  $BNO$  se situe au niveau du pas marqué. Pour placer le 0 de  $BSE$ , il faut tracer une droite  $D$  de coefficient directeur -1 qui passe par le milieu du pas marqué de  $BNO$ .

Le pas de  $BSE$  coupé par  $D$  est le pas numéroté par 0. Enfin, notons  $\sigma$  la permutation affine associée à  $P$ , alors  $\sigma_i$  correspond au numéro du pas horizontal (resp. vertical) de  $BSE$  associé au pas horizontal (resp. vertical) de  $BNO$  numéroté par  $i$ , qui se trouve dans la même colonne (resp. ligne). Si  $P$  est le polyomino parallélogramme périodique marqué du milieu de la figure 6, alors, par la construction illustré dans la figure 7, la permutation affine  $\sigma$  est égale à  $[5, -2, 0, 2, 7, 10, 3, 4, 12, 6, 8, 9, 14]$ . De nouveau, l'aire de  $\pi(P)$  correspond au nombre d'inversions, la hauteur au nombre d'excédences strictes  $k$  et la largeur à  $n - k$ .

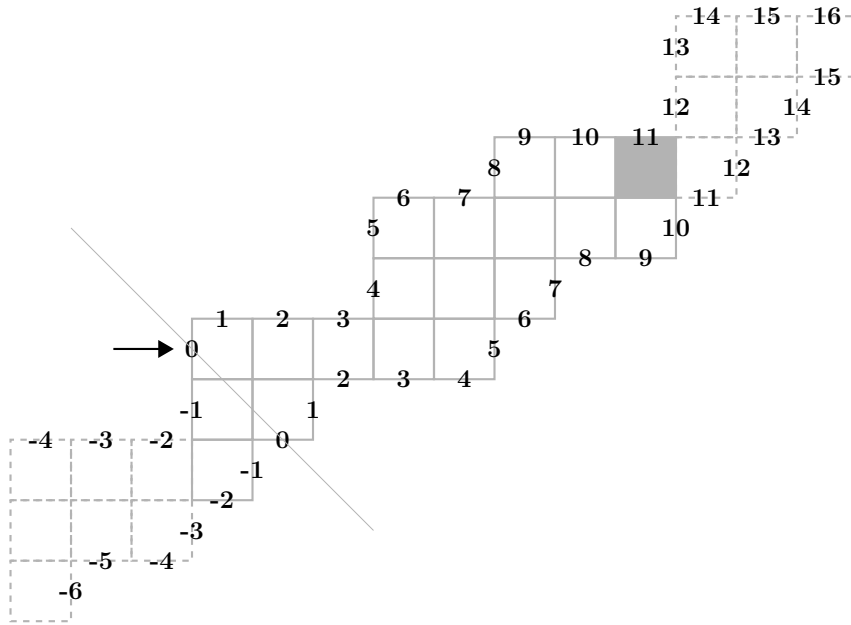


FIGURE 7. Illustration de la bijection entre les polyominos parallélogrammes périodiques marqués et les permutations affines évitant 321. Le polyomino parallélogramme de départ est donné dans la figure 6.

## 2. Structures arborescentes sous-jacentes

Cette section est consacrée à la construction des structures arborescentes des trois objets définis dans la section précédente. Tout d'abord, nous présentons dans la section 2.1 la méthode de [BRS15], inspirée des tableaux boisés, qui fait apparaître un arbre à l'intérieur d'un polyomino parallélogramme. Suite à cela, nous adaptons leur méthode au cas des bandes. Nous obtenons ainsi une structure arborescente cyclique que nous étudions dans la section 2. Il en résulte le théorème 7.2.4 qui caractérise la structure associée à une bande.

Nous en déduisons facilement la caractérisation des structures arborescentes associées aux polyominos parallélogrammes périodiques marqués et aux polyominos parallélogrammes périodiques.

## 2.1. Bijection entre les arbres ordonnés et les polyominos parallélogrammes périodiques

La structure arborescente des polyominos parallélogrammes périodiques que nous introduisons est inspirée de la bijection entre les arbres binaires de taille  $n$  et les polyominos parallélogrammes de demi-périmètre  $n + 1$  introduite par Aval, Boussicault, Bouvel et Silimbani [ABBS14]. Nous prenons toutefois le point de vue de Boussicault, Rinaldi et Socci [BRS15] dont les travaux privilégient plutôt les arbres ordonnés. Soit  $PP$  un polyomino parallélogramme. L'arbre ordonné  $A$  correspondant est construit de la façon suivante.

- Ajouter une cellule dite virtuelle à droite de la cellule la plus au nord-est.
- Mettre un point dans les cellules les plus hautes (resp. à droites) des colonnes (resp. lignes). Chaque point représente un sommet de l'arbre. La racine est le sommet associé à la cellule virtuelle.
- Pour tout sommet non racine, il y a un sommet au-dessus dans la même colonne ou à sa droite dans la même ligne mais pas les deux en même temps. Le père d'un sommet est le sommet le plus haut dans sa colonne ou le plus à droite dans sa ligne.
- Par construction, tous les fils d'un sommet sont soit alignés verticalement soit horizontalement. Les fils sont ordonnés respectivement de haut en bas et de droite à gauche.

La bijection est illustrée dans le figure 8. La cellule virtuelle est en pointillé.

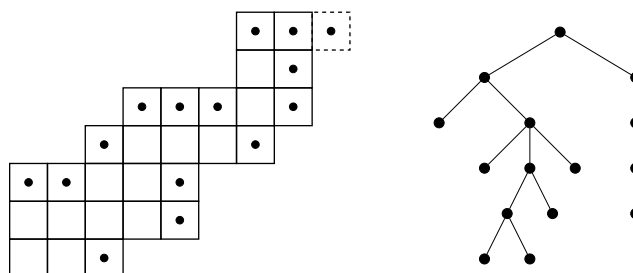


FIGURE 8. Bijection entre les polyominos parallélogrammes et les arbres ordonnés.

À travers cette bijection, la largeur (resp. hauteur) correspond au nombre de sommets de hauteur impaire (resp. paire plus un). Or, ces deux statistiques sont faciles à prendre en compte dans la série génératrice des arbres ordonnés. On obtient ainsi aisément la série génératrice des polyominos parallélogrammes selon le demi-périmètre, la largeur et la hauteur. La structure récursive des



arbres se prêtent bien aux séries génératrices. De ce fait, si une statistique s'interprète facilement sur les arbres ordonnés on peut espérer en déduire la série génératrice la prenant en compte. C'est par exemple le cas des coins qui sont en bijection avec les sommets internes. Malheureusement, la statistique de l'aire est difficile à traduire sur les arbres ordonnés. Bousquet-Mélou et Viennot [BMV92] ont calculé la série génératrice des polyominos parallélogrammes selon la largeur, la hauteur et l'aire, en utilisant la théorie des empilements de pièces introduite par Viennot [Vie86]. Notons  $\mathfrak{PP}(x, y, q)$  la série génératrice des polyominos parallélogrammes, où les variables  $x$ ,  $y$  et  $q$  correspondent respectivement à la largeur, la hauteur et l'aire. Alors  $\mathfrak{PP}$  est égal à

$$\mathfrak{PP}(x, y, q) = y \frac{J_1(x, y, q)}{J_0(x, y, q)},$$

où

$$J_0(x, y, q) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(q; q)_n (yq; q)_n} \quad \text{et} \quad J_1(x, y, q) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(q; q)_{n-1} (yq; q)_n}.$$

Les séries  $J_0$  et  $J_1$  correspondent à des  $q$ -analogues de la fonction de Bessel. À notre connaissance, aucune interprétation de cette formule utilisant la bijection, entre les polyominos parallélogrammes périodiques et les arbres ordonnés, que nous avons décrite n'est connue. Dans le cas plus général des polyominos parallélogrammes périodiques, nos outils ne nous permettent pas non plus d'étudier l'aire.

## 2.2. Structure arborescente des bandes

Dans cette section, nous étendons la structure arborescente des polyominos parallélogrammes aux objets de la section 1. La structure que nous obtenons est cyclique. Nous la décrivons comme un cycle de quadruplets d'arbres, de sorte à pouvoir utiliser la théorie de Pólya. Nous traitons tout d'abord le cas des bandes. Nous en déduirons sans difficulté les structures associées aux polyominos parallélogrammes périodiques et aux polyominos parallélogrammes périodiques marqués.

La construction de la structure arborescente se fait de la même façon. Elle est définie comme une carte. La figure 9 illustre cette construction. Nous commençons par pointer les cellules en haut (resp. à droite) des colonnes (resp. lignes) de la bande. Ces points correspondent aux sommets de la carte. Le père d'un point en haut d'une colonne (resp. à droite d'une ligne) est le point à la droite de sa ligne (resp. en haut de sa colonne). Les arêtes de la carte correspondent aux couples constitués d'une cellule et de son père. Il nous reste à donner un ordre aux arêtes partant d'un sommet. Soit  $p$  un point en haut d'une colonne (resp. à droite d'une ligne). Dans le sens trigonométrique, les voisins de  $p$  sont : son père puis ses fils ordonnés de haut en bas (resp. de droite à gauche). La structure est stable sous l'action de la rotation des colonnes, elle

est donc bien définie pour les bandes. Nous notons  $\text{carte}(B)$  la carte associée à une bande  $B$ .

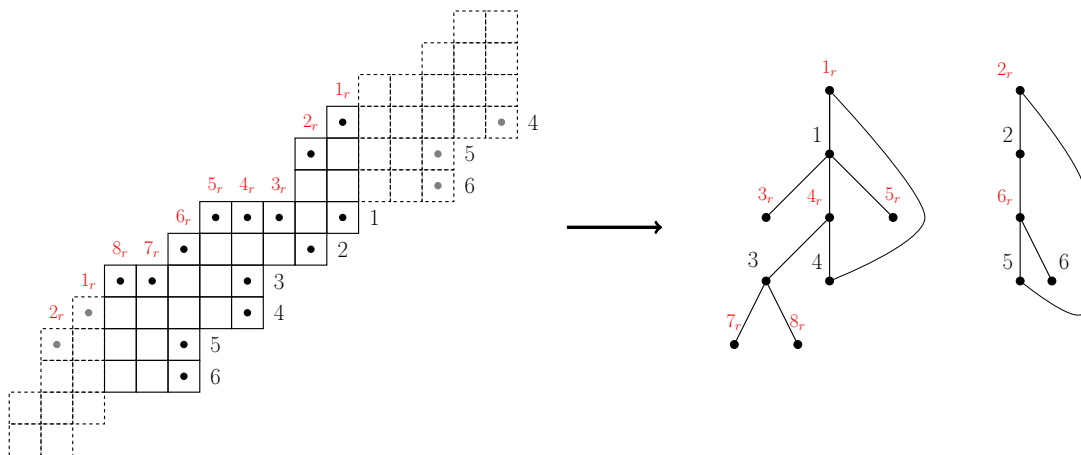


FIGURE 9. Structure arborescente sous-jacente à une bande.

Nous caractérisons tout d'abord les bandes  $B$  telles que  $\text{carte}(B)$  n'a pas de feuilles. Nous utilisons les notations  $N$  et  $E$  respectivement pour les pas nord et est.

**PROPOSITION 7.2.1.** *Soit  $B$  une bande. Pour que la carte  $\text{carte}(B)$  ne contienne pas de feuille il faut et il suffit que  $B$  soit une classe d'équivalence composée d'un unique polyomino parallélogramme périodique dont le bord nord-ouest (resp. sud-est) est de la forme  $(NE)^k$  (resp.  $(EN)^k$ ).*

**DÉMONSTRATION.** Nous rappelons que les chemins sont lus du sud-ouest au nord-est. Supposons qu'il existe un représentant de  $B$  dont le bord nord-ouest (resp. sud-est) contient deux pas  $N$  (resp.  $E$ ) consécutifs. Alors, la cellule pointée à droite (resp. en haut) de la ligne (resp. colonne) du premier  $N$  (resp.  $E$ ) est une feuille de  $\text{carte}(B)$ . Supposons que ce n'est pas le cas pour tous les représentants de  $B$ . Il existe un représentant dont le bord nord-ouest (resp. sud-est) est de la forme  $NE^{s_1} \dots NE^{s_h}$  (resp.  $EN^{i_h} \dots EN^{i_1}$ ) où  $s_1, \dots, s_h \geq 1$  (resp.  $i_1, \dots, i_h \geq 1$ ). Nous en déduisons que  $\text{hauteur}(B) \leq \text{largeur}(B)$  (resp.  $\text{hauteur}(B) \geq \text{largeur}(B)$ ). Nous venons de montrer que  $\text{hauteur}(B) = \text{largeur}(B)$ . De ce fait, le bord nord-est est égal à  $(NE)^k$  et le bord sud-est à  $(EN)^k$  pour un certain  $k$ . Pour finir, un tel polyomino parallélogramme périodique est stable par rotation des colonnes, d'où le résultat.  $\square$

Ces bandes jouent un rôle important dans la suite.

**DÉFINITION 7.2.2.** Une *bande tronç* est une bande dont l'unique représentant a pour bord nord-est  $(NE)^k$  et pour bord sud-est  $(EN)^k$  pour un certain entier naturel  $k$ .

La carte d'une bande tronç est facilement décrite à partir de sa hauteur et de sa largeur.

PROPOSITION 7.2.3. Soit  $B$  une bande tronc de largeur  $l$  et de hauteur de recollement  $h_r$ . La carte de  $B$  est composée de  $\frac{l}{\text{pgcd}(l, h_r)}$  cycles disjoints de taille  $2 \text{pgcd}(l, h_r)$ .

DÉMONSTRATION. Numérotons les coins du bord nord-ouest de 0 à  $l - 1$  en partant du sud-ouest. Soit  $c_i$  le coin numéroté par  $i$ . Le père du père de  $c_i$  est le coin  $c_l$  tel que  $l = i + h_r \pmod{l}$ . Ainsi, la taille d'un cycle est égal à deux fois la taille du sous-groupe de  $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$  engendré par  $h_r$ , soit  $2 \text{pgcd}(l, h_r)$ . Le nombre de cycles est égal au nombre total de sommets divisé par la taille d'un cycle, c'est-à-dire  $\frac{2l}{2 \text{pgcd}(l, h_r)}$ .  $\square$

Pour tout entier naturel  $i$ , nous avons l'égalité  $\text{pgcd}(l, h_r + il) = \text{pgcd}(l, h_r)$ . L'application qui à une bande associe la carte sous-jacente n'est donc pas injective. En effet, si  $B$  est un tronc, le nombre de fois où un cycle traverse le recollement n'est pas encodé dans  $\text{carte}(B)$  d'une. De plus, l'ordre cyclique des sommets des cycles, induit par l'ordre des colonnes, n'apparaît pas entièrement dans  $\text{carte}(B)$ . Il faudrait pour cela définir un ordre cyclique entre les cycles et marquer un sommet par cycle.

Pour mieux comprendre la structure arborescente sous-jacente des bandes, nous introduisons une application  $\text{suppr}$ . Elle prend en paramètre une bande  $B$  ainsi qu'une de ses feuilles, notée  $f$ , et la supprime. Notons  $BPO$  la bande périodique infinie associée à  $B$ . De manière plus précise, si  $f$  correspond à une colonne (resp. ligne) de  $B$ , supprimons les colonnes (resp. lignes) périodiques correspondantes.  $\text{suppr}((B, f))$  est la bande associée à la bande périodique infinie ainsi obtenue. La figure 10 illustre l'application  $\text{suppr}$ . En appliquant

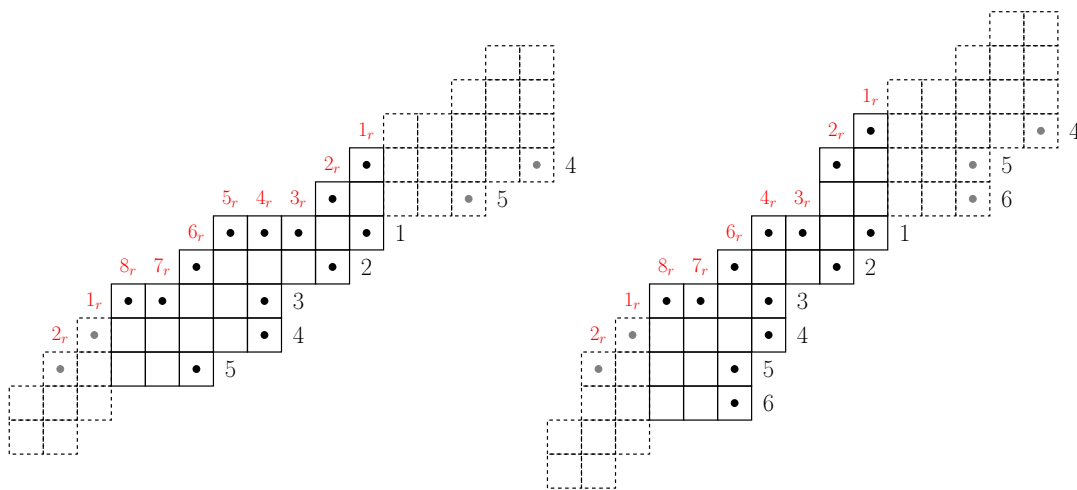


FIGURE 10. Les bandes obtenues en supprimant la colonne 6 (gauche) et la colonne  $5_r$  (droite) de la bande de la figure 9.

récursivement  $\text{suppr}$ , tant qu'il reste des feuilles, nous obtenons une bande tronc. L'ordre avec lequel les feuilles sont supprimées n'a pas d'importance. En

effet, l'opération de suppression d'une ligne/colonne, et de ses images périodiques, est une opération commutative. Nous notons  $\text{tronc}(B)$  la bande tronç obtenue à partir d'une bande  $B$ . La hauteur de recollement et la largeur de  $\text{tronc}(B)$  sont respectivement appelés la *hauteur de recollement intrinsèque* et la *largeur intrinsèque* de  $B$ , elles sont respectivement notées  $\text{hri}(B)$  et  $\text{li}(B)$ . Notons  $(C_1 \cdots C_{\text{li}(T)})$  le cycle des colonnes de  $T = \text{tronc}(B)$ . Soit  $i$  un entier compris entre 1 et  $\text{li}(T)$ . Les sommets  $s_{i,C}$  et  $s_{i,L}$ , associés aux cellules pointées respectivement en haut et en bas de la colonne  $C_i$ , ont pour préimages deux cellules pointées de  $B$  également notés  $s_{i,C}$  et  $s_{i,L}$ . Chacun des deux sommets est la racine d'un arbre à l'extérieur de son cycle et d'un arbre à l'intérieur. Plus précisément, notons  $A_{1,i,C}$  (resp.  $A_{2,i,C}$ ) l'arbre ordonné composé d'une racine, qui correspond à  $s_{i,C}$ , et dont les sous-arbres ont pour racines les sommets au-dessus (resp. en dessous) de  $s_{i,L}$ . De façon analogue, l'arbre  $A_{1,i,L}$  (resp.  $A_{2,i,L}$ ) est l'arbre ordonné enraciné en  $s_{i,L}$  dont les sous-arbres ont pour racines les points à droite (resp. à gauche) du fils  $s_{j,C}$  de  $s_{i,L}$ . Notons  $\zeta(B)$  le cycle

$$\zeta(B) = ((A_{1,1,C}, A_{2,1,C}, A_{1,1,L}, A_{2,1,L}) \cdots (A_{1,\text{li}(T),C}, A_{2,\text{li}(T),C}, A_{1,\text{li}(T),L}, A_{2,\text{li}(T),L})).$$

En particulier, la largeur intrinsèque de  $B$  correspond au nombre de quadruplets du cycle  $\zeta(B)$ . Soit  $B$  la bande de la figure 9. Alors,  $\zeta(B)$  est égal à

$$(43) \quad \left( \left( \cdot, \cdot, \uparrow, \uparrow \right) \left( \cdot, \cdot, \cdot, \cdot \right) \left( \begin{array}{c} \cdot \\ \swarrow \quad \searrow \\ \cdot \quad \cdot \end{array}, \cdot, \cdot, \cdot \right) \left( \cdot, \uparrow, \cdot, \cdot \right) \right).$$

La donnée de  $\text{tronc}(B)$  et  $\zeta(B)$  décrit entièrement la structure arborescente sous-jacente à  $B$ .

**THÉORÈME 7.2.4.** *L'application  $B \mapsto (\text{hri}(B), \zeta(B))$  est une bijection entre les bandes de demi-périmètre  $n$  et les couples composés de*

- un entier non nul;
- un cycle non vide de taille  $k$  de quadruplets d'arbres ordonnés dont le nombre de sommets total est égal à  $n + 2k$ .

Pour montrer ce théorème nous montrons tout d'abord la réversibilité de l'application  $\text{suppr}$ .

**LEMME 7.2.5.** *Soit  $\xi$  l'application qui à une bande  $B$  de demi-périmètre  $n$  avec une feuille  $f$  distinguée associe le couple constitué de  $\text{suppr}((B, f))$  et de  $\zeta(B)$  avec la feuille  $f$  marquée. Alors  $\xi$  est injective.*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $B'$  une bande de demi-périmètre  $n - 1$ . Ajoutons une feuille  $f$  à l'un des arbres ordonnés de  $\zeta(B')$ , notons  $\zeta(B') + f$  ce nouveau cycle de quadruplets d'arbres. Nous devons prouver qu'il existe une unique bande  $B$  telle que  $\zeta(B) = \zeta(B') + f$  et  $\text{suppr}((B, f)) = B'$ . Pour ce faire, nous montrons qu'il existe une unique façon d'insérer la ligne ou la colonne correspondant à  $f$  dans  $B'$ .

Soit  $s$  le père de  $f$  dans  $\zeta(B')$ . Le sommet  $s$  correspond à un point de  $B'$ , noté également  $s$ , qui est en haut (resp. à droite) d'une colonne (resp. ligne). L'ordre de haut en bas (resp. de droite à gauche) des fils de  $s$  dans  $B'$  correspond à l'ordre trigonométrique des fils de  $s$  dans  $\zeta(B')$ . Ainsi, il n'y a qu'une possibilité pour l'emplacement de la partie haute (resp. droite) de la colonne (resp. la ligne) à insérer. Il nous reste à déterminer où s'arrête la colonne (resp. ligne). Pour que  $f$  soit effectivement une feuille, la colonne (resp. ligne) doit nécessairement s'arrêter au niveau de la colonne à sa droite (resp. au-dessus). Nous prouvons ainsi l'unicité de la bande  $B$ .  $\square$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 7.2.4. En appliquant le lemme 7.2.5 récursivement, nous obtenons une correspondance entre une bande  $B$  et le couple constitué de  $\text{tronc}(B)$  ainsi que de  $\zeta(B)$  dont tous les sommets non racines sont totalement ordonnés en respectant qu'un père est plus grand que ses fils. Cet ordre nous donne l'enchaînement des suppressions de feuilles. Il peut être oublié car quelque soit l'ordre dans lequel nous effectuons les suppressions, nous obtenons toujours la bande  $\text{tronc}(B)$  associée à la bande. Pour conclure la preuve, nous rappelons que  $\text{tronc}(B)$  est entièrement déterminé par la hauteur de recollement intrinsèque et la largeur intrinsèque de  $B$ , qui sont indépendantes. Or, la largeur intrinsèque étant déjà encodée dans  $\zeta(B)$ , il nous suffit de garder la connaissance de  $\text{hri}(B)$ . Concernant le nombre total de sommets de  $\zeta(B)$ , chaque sommet correspond à une colonne ou à une ligne de  $B$ . Mais, les quatre racines de chaque quadruplet ne correspondent qu'à deux points dans  $B$ . Le nombre de sommets est donc égal à  $n + 2k$ .  $\square$

Soit  $P_m$  un polyomino parallélogramme périodique marqué et  $B$  sa bande sous-jacente. Nous définissons  $\zeta(P_m)$  comme le cycle  $\zeta(B)$  dans lequel nous marquons au choix, un sommet non racine, les deux racines de gauche à la fois ou les deux racines de droite en à la fois. Nous étendons les notions de hauteur de recollement intrinsèque et de largeur intrinsèque aux polyominos parallélogrammes périodiques marqués.

THÉORÈME 7.2.6. *L'application  $P_m \mapsto (\text{hri}(P_m), \zeta(P_m))$  est une bijection entre les polyominos parallélogrammes périodiques marqués de demi-périmètre  $n$  et les couples composés de*

- un entier non nul ;
- une séquence non vide de taille  $k$  de quadruplets d'arbres ordonnés dont le nombre de sommets total est égal à  $n + 2k$  et telle qu'un sommet, du premier quadruplet, des types de sommets suivants est marqué :
  - sommet non racine,
  - le couple des deux racines des deux premiers arbres ordonnés,
  - le couple des deux racines des deux derniers arbres ordonnés.

DÉMONSTRATION. Les polyominos parallélogrammes périodiques marqués sont en bijection avec les bandes dont une ligne ou une colonne est marquée.

D'après le théorème 7.2.4, il suffit de marquer le sommet correspondant à cette ligne/colonne.  $\square$

Pour énoncer le théorème analogue dans le cas des polyominos parallélogrammes périodiques, nous devons caractériser les sommets de  $\zeta(B)$  qui correspondent à des colonnes.

LEMME 7.2.7. *Soit  $B$  une bande. Les sommets de  $\zeta(B)$  qui correspondent aux colonnes de  $B$  sont les sommets de hauteur paire (resp. impaire) des deux premiers (resp. derniers) arbres ordonnés de chaque quadruplet.*

DÉMONSTRATION. Les racines des deux premiers (resp. derniers) arbres ordonnés de chaque quadruplet correspondent bien à des colonnes (resp. lignes). Pour prouver ce lemme il suffit de remarquer que les fils d'un sommet correspondant à une colonne (resp. ligne) sont associés à des lignes (resp. colonnes).  $\square$

Par exemple, si on remplace les sommets correspondant aux colonnes par des carrés rouges dans l'équation (43), nous obtenons

$$\left( \left( \left( \begin{array}{c} \bullet \\ \square, \square, \square, \square \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \bullet \\ \square, \square, \bullet, \bullet \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \bullet \\ \square, \square, \bullet, \bullet \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \bullet \\ \square, \bullet, \bullet, \bullet \end{array} \right) \right) \right).$$

THÉORÈME 7.2.8. *L'application  $P \mapsto (\text{hri}(P), \zeta(P))$  est une bijection entre les polyominos parallélogrammes périodiques de demi-périmètre  $n$  et les couples composés de*

- un entier non nul ;
- une séquence non vide de taille  $k$  de quadruplets d'arbres ordonnés dont le nombre de sommets total est égal à  $n + 2k$  et telle qu'un sommet, du premier quadruplet, des types de sommets suivants est marqué :
  - sommet non racine de hauteur paire d'un des deux premiers arbres ordonnés,
  - sommet non racine de hauteur impaire d'un des deux derniers arbres ordonnés,
  - le couple des deux racines des deux premiers arbres ordonnés.

DÉMONSTRATION. La preuve est la même que celle du théorème 7.2.6 en ajoutant la condition que le sommet singularisé est nécessairement à haut d'une colonne. Le lemme 7.2.7 nous donne exactement les sommets du premiers quadruplet d'arbres ordonnés qu'il est possible de singulariser.  $\square$

Soit  $P$  un polyomino parallélogramme périodique et  $B$  la bande associée. Notons  $\text{carte}(P)$  la carte de  $B$  dont le sommet correspondant à la colonne de la cellule singularisé est marqué.

PROPOSITION 7.2.9. *L'application  $P \mapsto \text{carte}(P)$  est une bijection des polyominos parallélogrammes périodiques de demi-périmètre  $n$  et de hauteur de*

recollement intrinsèque 1 vers les cartes connexes à  $n$  sommets, dont un marqué, contenant un unique cycle, qui de plus est de taille paire.

DÉMONSTRATION. Pour prouver cette proposition nous montrons que  $\text{carte}(P)$  est en bijection avec  $\zeta(P)$ . Fixons tout d'abord des notations pour les arbres ordonnés de  $\zeta(P)$  :

$$\left[ (A_{1,1,C}, A_{2,1,C}, A_{1,1,L}, A_{2,1,L}), \dots, (A_{1,\text{li}(P),C}, A_{2,\text{li}(P),C}, A_{1,\text{li}(P),L}, A_{2,\text{li}(P),L}) \right].$$

Pour tout  $i \in \llbracket 1, \text{li}(P) \rrbracket$  fusionnons les racines de  $A_{1,i,C}$  et  $A_{2,i,C}$  (resp.  $A_{1,i,L}$  et  $A_{2,i,L}$ ). Notons  $s_{i,C}$  (resp.  $s_{i,L}$ ) la racine ainsi obtenue. Construisons le cycle  $(s_{1,C}s_{1,L}s_{2,C}s_{2,L} \cdots s_{\text{li}(P),C}s_{\text{li}(P),L})$  en reliant les sommets par des arêtes, de sorte que les arbres ordonnés  $A_{1,i,C/L}$  (resp.  $A_{2,i,C/L}$ ) soit à l'extérieur (resp. intérieur) du cycle. En conservant le marquage, nous obtenons ainsi  $\text{carte}(P)$ . Pour effectuer la construction inverse, il suffit de décrocher les arbres ordonnés du cycle. Il reste à déterminer si le sommet marqué appartient à  $A_{1/2,i,C}$  ou à  $A_{1/2,i,L}$ . Si la hauteur du sommet marqué, dans son arbre ordonné, est paire (resp. impaire), alors il est dans  $A_{1/2,i,C}$  (resp.  $A_{1/2,i,L}$ ).  $\square$

La figure 11 représente le cas  $n = 3$ .

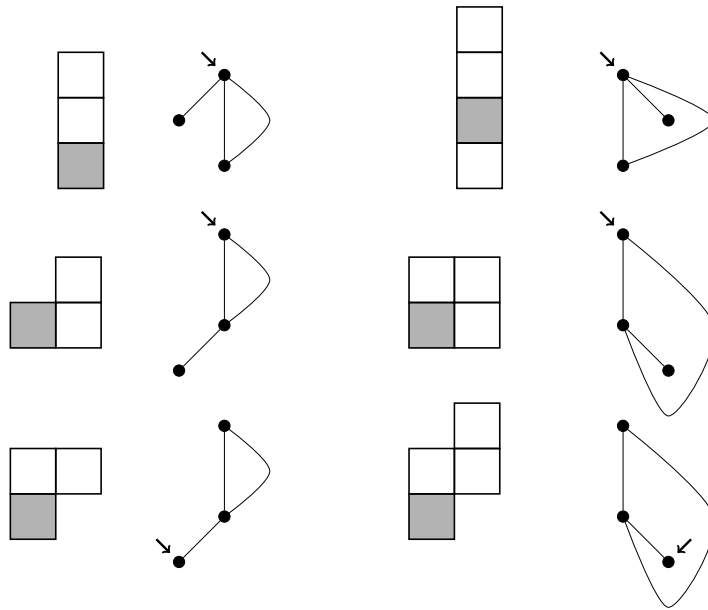


FIGURE 11. Illustration de la proposition 7.2.9 pour  $n = 3$ .

### 3. Séries génératrices et énumération

Dans la section précédente, nous avons obtenu une caractérisation de nos objets à l'aide de structures arborescentes et de la hauteur de recollement

intrinsèque. Cette section est consacrée à la description des conséquences énumératives de cette décomposition.

### 3.1. Séries génératrices

Dans la suite du chapitre, les indéterminées  $x, y, s, t$  et  $q$  correspondent respectivement à la largeur, la hauteur, la largeur intrinsèque, la hauteur de recollement intrinsèque et l'aire.

En s'inspirant de la méthode de Bousquet-Mélou et Viennot [BMV92], les chercheurs Biagioli, Jouhet et Nadeau [BJN17] donnent une formule pour la série génératrice des polyominos parallélogrammes périodiques marqués :

$$(44) \quad \mathfrak{PM}(zx, zy, 1, 1; q) = -z \frac{\partial_z J_0(zx, zy, q)}{J_0(x, y, q)} - \sum_{n \geq 0} \frac{(zy)^n}{1 - q^n},$$

ainsi que pour les polyominos parallélogrammes périodiques :

$$(45) \quad \mathfrak{P}(x, y, 1, 1; q) = -x \frac{\partial_x J_0(x, y, q)}{J_0(x, y, q)} - \sum_{n \geq 0} \frac{y^n}{1 - q^n}.$$

Dans les deux cas, la somme correspond aux polyominos parallélogrammes périodiques dégénérés. Nous rappelons que

$$J_0(x, y, q) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(q; q)_n (yq; q)_n}.$$

Pour  $q$  général, les théorèmes 7.2.4, 7.2.8 et 7.2.6 ne permettent pas d'en déduire des formules pour les séries génératrices. De même que dans le cas des polyominos parallélogrammes (section 2.1), l'aire n'a pas d'interprétation simple sur la structure arborescente. Toutefois, à travers la vision en termes de bande périodique infinie, une symétrie axiale d'axe la droite  $\Delta$  d'équation  $\Delta : y = x$  (remarque 7.1.11) nous donne l'égalité

$$(46) \quad \mathfrak{PM}(x, y, 1, 1; q) = \mathfrak{P}(x, y, 1, 1; q) + \mathfrak{P}(y, x, 1, 1; q).$$

Cette symétrie n'apparaît pas dans les équations (44) et (45). En effet, dans la méthode de Bousquet-Mélou et Viennot [BMV92] les lignes et les colonnes ne jouent pas des rôles symétriques. De ce fait, la symétrie en  $x$  et  $y$  n'est pas apparente.

En plus des paramètres hauteur, largeur et aire, la symétrie axiale d'axe  $\Delta$  préserve également la hauteur de recollement intrinsèque et la largeur intrinsèque. Il est de plus possible de décrire son action sur le cycle de quadruplet d'arbres ordonnés.

PROPOSITION 7.3.1. *Soit  $B$  une bande et  $\zeta(B)$  le cycle*

$$\left( (A_{1,0,C}, A_{2,0,C}, A_{1,0,L}, A_{2,0,L}) \cdots (A_{1,\text{li}(B)-1,C}, A_{2,\text{li}(B)-1,C}, A_{1,\text{li}(B)-1,L}, A_{2,\text{li}(B)-1,L}) \right).$$

*Notons  $s_\Delta$  la symétrie axiale d'axe la droite  $\Delta : y = x$ . Les bandes  $B$  et  $s_\Delta(B)$  ont la même hauteur de recollement intrinsèque. De plus  $\zeta(s_\Delta(B))$  est égal à*



$$\left( (A_{1,0,L}, A_{2,0,L}, A_{1,0-\text{hri}(B)(\text{mod li}(B)),C}, A_{2,0-\text{hri}(B)(\text{mod li}(B)),C}) \cdots \right. \\ \left. (A_{1,\text{li}(B)-1,L}, A_{2,\text{li}(B)-1,L}, A_{1,\text{li}(B)-1-\text{hri}(B)(\text{mod li}(B)),C}, A_{2,\text{li}(B)-1-\text{hri}(B)(\text{mod li}(B)),C}) \right).$$

DÉMONSTRATION. Soit  $s$  un point de  $B$  et  $p$  sont père. Il est clair que  $s_{\Delta}(p)$  est le père de  $s_{\Delta}(s)$ . De plus, l'ordre des fils d'un sommet est également conservé. Ainsi, les deux arbres ordonnés associés à chaque sommet de  $\text{tronc}(B)$  sont les mêmes. Notons  $s_{i,C}$  (resp.  $s_{i,L}$ ) le sommet dont les deux arbres ordonnés sont  $A_{1,i,C}$  et  $A_{2,i,C}$  (resp.  $A_{1,i,L}$  et  $A_{2,i,L}$ ). L'ordre cyclique de  $\zeta(B)$  est donné par l'ordre cyclique  $(s_{0,C} \cdots s_{\text{li}(B)-1,C})$ . L'ordre cyclique de  $\zeta(s_{\Delta}(B))$  est donc donné par  $(s_{0,L} \cdots s_{\text{li}(B)-1,L})$ . Enfin, les deux arbres ordonnés qui appartiennent au même quadruplet que  $A_{1,i,L}$  et  $A_{2,i,L}$  sont ceux associés au fils de  $s_{i,L}$  qui, en passant par  $\text{tronc}(B)$ , n'est autre que  $s_{i-\text{hri}(B)(\text{mod li}(B)),C}$ .  $\square$

Nous obtenons une généralisation de l'identité de l'équation (46).

COROLLAIRE 7.3.2. *Les séries génératrices des polyominos parallélogrammes périodiques et des polyominos parallélogrammes périodiques marqués vérifient l'identité*

$$\mathfrak{PM}(x, y, s, t; q) = \mathfrak{P}(x, y, s, t; q) + \mathfrak{P}(y, x, s, t; q).$$

Il suit que  $\mathfrak{PM}(x, y, s, t; q)$  est symétrique en  $x$  et  $y$ .

Supposons maintenant que  $q = 1$ . Pour calculer les séries génératrices, nous avons besoin de la série génératrice des arbres ordonnés dont les sommets sont partitionnés selon la parité de leur hauteur. Nous la notons  $\mathfrak{A}(u, v)$ , où  $u$  est la variable du nombre de sommets de hauteur paire et  $v$  est celle du nombre de sommets de hauteur impaire. La racine n'est pas prise en compte. Cette série génératrice vérifie l'équation suivante

$$\mathfrak{A}(u, v) = \frac{1}{1 - v\mathfrak{A}(v, u)}.$$

En substituant  $\mathfrak{A}(v, u)$  par son expression, on trouve

$$\mathfrak{A}(u, v) = \frac{u\mathfrak{A}(u, v) - 1}{u\mathfrak{A}(u, v) + v - 1}.$$

La série génératrice  $\mathfrak{A}(u, v)$  est donc solution d'une équation du second degré. Après résolution, on obtient

$$\mathfrak{A}(u, v) = \frac{u - v + 1 - \sqrt{(u - v + 1)^2 - 4u}}{2u},$$

étant donné que l'autre solution de l'équation, à savoir

$$\mathfrak{A}(u, v) = \frac{u - v + 1 + \sqrt{(u - v + 1)^2 - 4u}}{2u},$$

n'est pas une série formelle. Si l'on pose  $z = u = v$ , nous retrouvons la série génératrice  $\mathfrak{C}(z)$  des nombres de Catalan

$$\mathfrak{A}(z, z) = \mathfrak{C}(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z}.$$

Nous pouvons maintenant donner la série génératrice des quadruplets d'arbres apparaissant dans les théorèmes 7.2.4, 7.2.8, 7.2.6. Elle est égale à

$$xy\mathfrak{A}(x, y)^2\mathfrak{A}(y, x)^2.$$

Le terme  $xy$  correspond aux quatre racines qui comptent pour deux sommets.

PROPOSITION 7.3.3. *La série génératrice des bandes est*

$$\mathfrak{B}(x, y, s, t; 1) = -\frac{t}{1-t} \sum_{i \geq 1} \frac{\varphi(i)}{i} \log(1 - s^i x^i y^i \mathfrak{A}(x^i, y^i)^2 \mathfrak{A}(y^i, x^i)^2).$$

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence de l'équation (5) de la section 1.2 et du théorème 7.2.4.  $\square$

PROPOSITION 7.3.4. *La série génératrice des polyominos parallélogrammes périodiques est*

$$\mathfrak{P}(x, y, s, t; 1) = \frac{t}{1-t} \times \frac{sx\partial_x xy\mathfrak{A}(x, y)^2\mathfrak{A}(y, x)^2}{1 - sxy\mathfrak{A}(x, y)^2\mathfrak{A}(y, x)^2}.$$

DÉMONSTRATION. La proposition se déduit du théorème 7.2.8. La série génératrice du premier quadruplet, qui est singularisé, est

$$sx\partial_x xy\mathfrak{A}(x, y)^2\mathfrak{A}(y, x)^2.$$

Une adaptation de l'équation (2) de la section 1.2, qui permet de calculer la série génératrice d'une séquence, nous donne la proposition.  $\square$

PROPOSITION 7.3.5. *La série génératrice des polyominos parallélogrammes périodiques marqués est*

$$\mathfrak{PM}(x, y, s, t; 1) = \frac{t}{1-t} \times \frac{s(x\partial_x + y\partial_y)xy\mathfrak{A}(x, y)^2\mathfrak{A}(y, x)^2}{1 - sxy\mathfrak{A}(x, y)^2\mathfrak{A}(y, x)^2}.$$

DÉMONSTRATION. D'après le corollaire 7.3.2, nous avons l'égalité

$$\mathfrak{PM}(x, y, s, t; 1) = \mathfrak{P}(x, y, s, t; 1) + \mathfrak{P}(y, x, s, t; 1).$$

Ainsi, le résultat découle de la proposition 7.3.4.  $\square$

### 3.2. Énumération

D'après le théorème 7.2.8, le nombre de polyominos parallélogrammes périodiques de demi-périmètre et hauteur de recollement intrinsèque fixée est le même quelque soit la hauteur de recollement intrinsèque que nous fixons. En développant les premiers termes de la série  $[t]\mathfrak{P}(z, z, 1, t; 1)$ , nous observons que les premiers termes de la suite énumérant les polyominos parallélogrammes périodiques à hauteur de recollement intrinsèque fixée coïncident, à un décalage d'indice de 1, avec la suite [Slo, A008549], qui correspond à  $(4^n - \binom{2n+1}{n})_{n \geq 0}$ . Cette suite comptent l'aire triangulaire totale sous les chemins de Dyck de taille  $n$  [MSV96]. Avant de montrer ce résultat nous précisons la définition de l'aire triangulaire.

DÉFINITION 7.3.6. Soit  $CD$  un chemin de Dyck. Notons  $T$  et  $T'$  les triangles définis à translation près respectivement par les points  $\{(0, 0), (1, 1), (2, 0)\}$  et  $\{(0, 0), (1, -1), (2, 0)\}$ . Il existe une unique façon de paver la région délimitée par  $CD$  et l'axe des abscisses avec les triangles  $T$  et  $T'$ . L'aire triangulaire de  $CD$  est le nombre de triangles de cet unique pavage.

Un exemple est donné dans la figure 12.

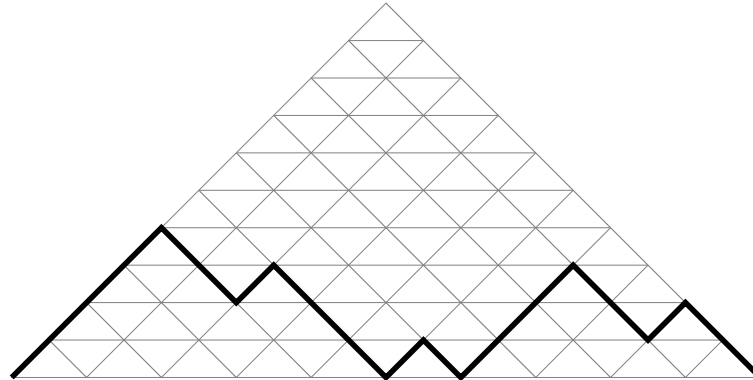


FIGURE 12. Un chemin de Dyck d'aire triangulaire égale à 33.

En utilisant la bijection de la section 4 du chapitre 1 entre les chemins de Dyck et les arbres ordonnés [DZ80], l'aire triangulaire d'un chemin de dyck s'interprète facilement sur l'arbre ordonné correspondant. Soit  $AO$  un arbre ordonné. Nous notons  $s(AO)$  la statistique

$$s(AO) := \sum_{\substack{s \in AO \\ s \text{ non racine}}} (2 \text{ hauteur}(s) - 1).$$

PROPOSITION 7.3.7. Soit  $CD$  un chemin de Dyck. Alors  
aire triangulaire( $CD$ ) =  $s(\text{arbre}(CD))$ .

DÉMONSTRATION. Nous associons à chaque pas  $H$  de  $CD$  l'ensemble des triangles traversés par la médiatrice de  $H$ . Il est clair qu'un pas  $H$  terminant en un point  $(*, k)$  est associé à  $2k - 1$  triangles. De plus, d'après la remarque 1.4.3, ce même pas  $H$  correspond à un sommet de hauteur  $k \geq 1$  dans  $\text{arbre}(CD)$ . Ainsi, l'égalité

$$\text{aire triangulaire}(CD) = s(\text{arbre}(CD)).$$

est bien vérifiée. □

Par exemple, si l'on note  $AO$  l'arbre ordonné de la figure 13, qui est en bijection avec le chemin de Dyck de la figure 12, nous avons bien  $s(AO) = 1 + 1 + 1 + 3 + 3 + 3 + 5 + 5 + 5 + 7 = 33$ . Nous pouvons maintenant énumérer les polyominos parallélogrammes périodiques de demi-périmètre  $n$  et de hauteur de recollement intrinsèque 1 à travers la bijection suivante.

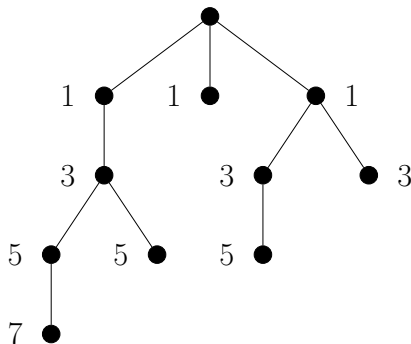


FIGURE 13. L'arbre ordonné  $AO$  correspondant au chemin de Dyck de la figure 12 vérifie  $s(AO) = 33$ .

PROPOSITION 7.3.8. *Les polyominos parallélogrammes périodiques de demi-périmètre  $n$  et de hauteur de recollement intrinsèque 1 sont en bijection avec les couples composés de :*

- un arbre ordonné à  $n$  sommets avec un sommet non racine  $s$  distingué ;
- un entier compris entre 1 et  $2 \text{ hauteur}(s) - 1$ .

DÉMONSTRATION. Rappelons (proposition 7.2.9) que les polyominos parallélogrammes périodiques de demi-périmètre  $n$  et de hauteur de recollement intrinsèque 1 sont en bijection avec les cartes planaires à  $n$  sommets ayant exactement un cycle, qui, de plus, est de taille paire, et dont un sommet est distingué.

Donnons nous tout d'abord un arbre ordonné  $AO$  à  $n$  sommets ayant un sommet non racine  $s$  distingué ainsi qu'un entier  $i$  compris entre 1 et  $2 \text{ hauteur}(s) - 1$ . Nous allons créer un cycle de taille paire en ajoutant une arête  $e$  entre  $s$ , ou son père  $s'$ , et un de leurs ancêtres noté  $a$ . Excepté pour la racine pour qui il n'y a qu'un seul choix, pour chaque ancêtre  $a$  il y a deux choix pour relier l'arête à  $a$  : par la droite (entre le père de  $a$  et le fils le plus à droite de  $a$ ) ou par la gauche (entre le père de  $a$  et le fils le plus à gauche de  $a$ ). Soit un total de  $2 \text{ hauteur}(s) - 1$  choix. Nous numérotions les ancêtres de  $s$  de 1 (resp.  $2 \text{ hauteur}(s) - 1$ ) à  $\text{hauteur}(s) - 1$  (resp.  $\text{hauteur}(s) + 1$ ) en partant de  $s$  et jusqu'au fils de la racine. Ces numéros correspondent à un raccordement se terminant par la droite (resp. gauche). La racine est numérotée par  $\text{hauteur}(s)$ . La figure 14 illustre cette numérotation. Pour obtenir un cycle pair, si  $i$  est impair l'arête part de la droite de  $s$ , sinon l'arête démarre depuis  $s'$  et passe à juste à gauche de  $s$  (entre le père de  $s$  et le fils le plus à droite de  $s$ ). Quelque soit le cas dans lequel nous sommes, l'arête tourne autour de l'arbre dans le sens trigonométrique. La dernière étape de cette construction consiste à couper les sous-arbres de la racine à droite du chemin reliant  $s$  à la racine. Nous leur ajoutons une nouvelle racine que nous enracinons en  $a$ , en conservant leur ordre, et de sorte qu'ils soient avant (resp. après)  $e$  dans le sens trigonométrique si  $i > \text{hauteur}(s)$  (resp.  $i < \text{hauteur}(s)$ ). Enfin, la racine

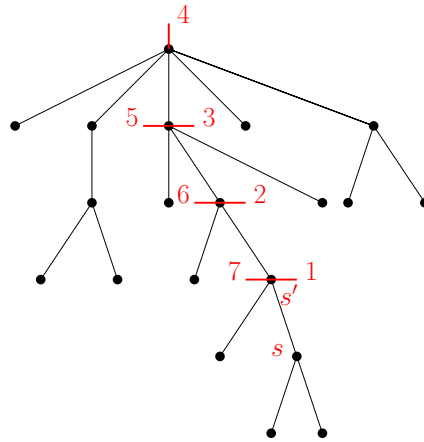


FIGURE 14. Les 2 hauteur( $s$ ) - 1 = 7 choix associés au sommet  $s$ .

de l'arbre  $AO$  correspond au sommet distingué. Nous notons  $\Phi(AO, s, i)$  la carte enracinée obtenue. Les figures 15 et 16 représentent les carte que nous obtenons à partir de la figure 14 respectivement avec les choix  $i = 3$  et  $i = 6$ .

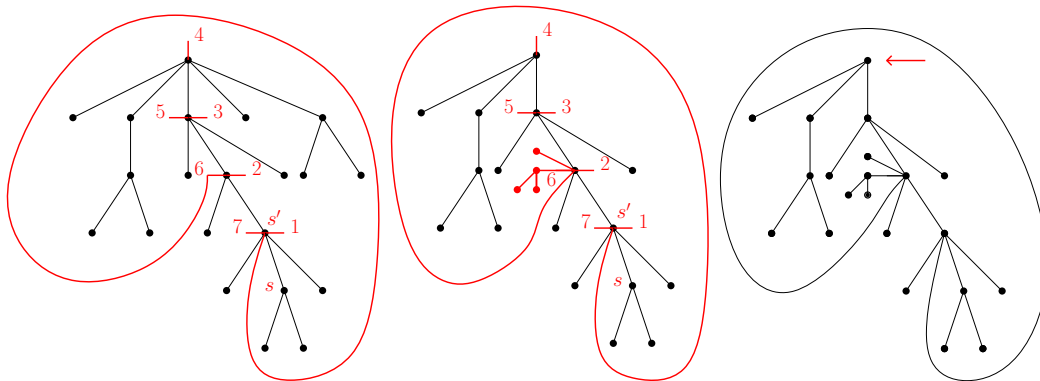


FIGURE 15. Les étapes de la construction de  $\Phi(AO, s, 6)$  où  $AO$  et  $s$  sont donnés dans la figure 14.

Pour montrer que  $\Phi$  est une bijection, nous explicitons la construction inverse. Soit  $C$  une carte enracinée en  $r$  dont l'unique cycle est de taille paire. Soit  $a$  le sommet du cycle le plus proche de  $r$ . Orientons le cycle dans le sens trigonométrique. Soit  $e$  l'arête du cycle arrivant en  $a$ ,  $u$  le sommet dont part  $e$  et  $AO'$  l'arbre ordonné enraciné en  $a$  compris entre  $e$  et le chemin de  $a$  à  $r$ . En supprimant  $e$ , nous obtenons un arbre planaire. Pour avoir un arbre ordonné, nous choisissons que le sous-arbre de  $r$  contenant le chemin de  $r$  à  $a$  est le sous-arbre le plus à droite de  $r$ . Enfin,  $AO$  s'obtient déplaçant  $AO'$  de  $a$  à  $r$  en le plaçant à droite du chemin de  $r$  à  $a$ . Il nous reste à définir  $i$  et  $s$ . Si un sous-arbre de  $u$  était à l'intérieur du cycle alors  $s$  est le premier fils de  $u$ , dans le sens trigonométrique, qui était à l'intérieur du cycle, sinon  $s = u$ . Notons

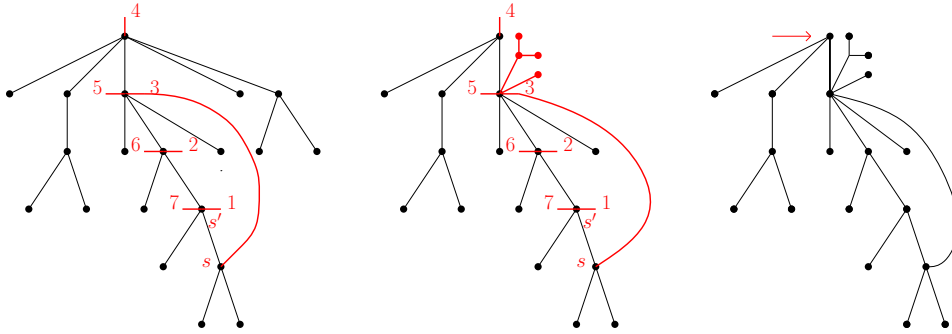


FIGURE 16. Les étapes de la construction de  $\Phi(AO, s, 3)$  où  $AO$  et  $s$  sont donnés dans la figure 14.

$k$  la distance de  $a$  à  $s$ . Si  $r$  était à l'extérieur du cercle, alors  $i = k$ , sinon  $i = 2 \text{ hauteur}(s) - k$ .  $\square$

**COROLLAIRE 7.3.9.** *Le nombre de polyominos parallélogrammes périodiques de demi-périmètre  $n$  et de hauteur de recollement intrinsèque 1 est  $4^{n-1} - \binom{2n-1}{n-1}$ .*

**DÉMONSTRATION.** D'après les propositions 7.3.7 et 7.3.8, le nombre de polyominos parallélogrammes périodiques de demi-périmètre  $n$  et de hauteur de recollement intrinsèque 1 est égal à la somme des aires triangulaires sous tous les chemins de Dyck de taille  $n - 1$ . D'après [MSV96], ils sont donc comptés par  $4^{n-1} - \binom{2n-1}{n-1}$ .  $\square$

**COROLLAIRE 7.3.10.** *Le nombre de polyominos parallélogrammes périodiques marqués de demi-périmètre  $n$  et de hauteur de recollement intrinsèque 1 est  $2 \times (4^{n-1} - \binom{2n-1}{n-1})$ .*

**DÉMONSTRATION.** C'est une conséquence du corollaire 7.3.10 et du corollaire 7.3.2 montrant, qu'à demi-périmètre et hauteur de recollement intrinsèque fixée, le nombre de polyominos parallélogrammes périodiques marqués est deux fois plus important que le nombre de polyominos parallélogrammes périodiques.  $\square$

Dans le cas des bandes, nous n'avons pas réussi à les énumérer. Nous pouvons tout de même donner un équivalent. Pour cela, nous utilisons des méthodes classiques de l'étude asymptotique des séries génératrices. Le lecteur curieux de ces outils est invité à consulter le livre de Flajolet et Sedgewick [FS70]. L'idée fondamentale est que le facteur exponentiel est déterminé par la singularité dominante (qui se trouve sur le bord du disque de convergence) de la fonction génératrice, vue comme une série entière, tandis que le facteur sous-exponentiel se calcule en étudiant la nature de cette singularité.

**PROPOSITION 7.3.11.** *Soit  $b_n := [tz^n] \mathfrak{B}(z, z, 1, t; 1)$  le nombre de bandes de demi-périmètre  $n$  et de hauteur de recollement intrinsèque fixée. Alors,  $b_n$  a*

pour asymptotique

$$b_n = \frac{4^n}{2n} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{4^n}\right) \right].$$

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 7.3.3, nous savons que

$$\mathfrak{B}(z) := [t]\mathfrak{B}(z, z, 1, t; 1) = - \sum_{i \geq 1} \frac{\varphi(i)}{i} \log \left( 1 - \frac{(1 - \sqrt{1 - 4z^i})^4}{16z^{2i}} \right).$$

Pour calculer l'asymptotique de  $b_n$ , nous montrons tout d'abord que la singularité dominante de  $\mathfrak{B}(z)$  est donnée par le premier terme

$$- \log \left( 1 - \frac{(1 - \sqrt{1 - 4z})^4}{16z^2} \right).$$

Étudions la fonction

$$z \mapsto - \log \left( 1 - \frac{(1 - \sqrt{1 - 4z})^4}{16z^2} \right).$$

Elle est développable en série entière à l'origine car c'est la série génératrice des cycles de quadruplets d'arbres avec une multiplicité rationnelle. Calculons son rayon de convergence. Montrons tout d'abord qu'elle est bien définie sur

$$I = \left] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right[.$$

Pour cela, on peut démontrer que la fonction

$$z \mapsto \frac{(1 - \sqrt{1 - 4z})^4}{16z^2}$$

est strictement inférieure à 1 sur  $I$ . Il suffit par exemple de vérifier que la fonction

$$f : x \mapsto \frac{(1 - \sqrt{1 - x})^2}{x}$$

est strictement croissante sur  $] -1, 1[$  et d'observer que  $|f(-1)|, |f(1)| \leq 1$ . Le rayon de convergence de  $z \mapsto \sqrt{1 - 4z}$  étant  $\frac{1}{4}$ , c'est également le rayon de convergence de

$$z \mapsto - \log \left( 1 - \frac{(1 - \sqrt{1 - 4z})^4}{16z^2} \right).$$

Il nous reste maintenant à montrer que

$$- \sum_{i \geq 2} \frac{\varphi(i)}{i} \log \left( 1 - \frac{(1 - \sqrt{1 - 4z^i})^4}{16z^{2i}} \right)$$

converge sur  $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ . Le développement limité en 0 de la fonction  $z \mapsto \sqrt{1 - 4z^i}$  est

$$\sqrt{1 - 4z^i} \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2}4z^i + o(z^i).$$

Nous avons donc l'équivalence

$$\frac{(1 - \sqrt{1 - 4z^i})^4}{16z^{2i}} \underset{0}{\sim} z^{2i}.$$

Ce qui nous donne

$$-\log \left( 1 - \frac{(1 - \sqrt{1 - 4z^i})^4}{16z^{2i}} \right) \underset{0}{\sim} z^{2i}.$$

La série  $\sum_{i \geq 2} z^{2i}$  étant absolument convergente sur  $] -1, 1[$ , la série

$$-\sum_{i \geq 2} \frac{\varphi(i)}{i} \log \left( 1 - \frac{(1 - \sqrt{1 - 4z^i})^4}{16z^{2i}} \right)$$

converge notamment sur  $[-1/4, 1/4]$ . Nous pouvons donc écrire

$$\mathfrak{B}(z) = -\log \left( 1 - \frac{(1 - \sqrt{1 - 4z})^4}{16z^2} \right) + g(z),$$

où  $g$  a un rayon de convergence strictement supérieur à  $1/4$ . Soit  $\varepsilon = 1/4 - z$ . En remplaçant  $\varepsilon$  dans l'équation précédente, nous obtenons

$$\mathfrak{B}(z) = -\log \left( 1 - \frac{(1 - 2\sqrt{\varepsilon})^4}{1 - 8\varepsilon + 16\varepsilon^2} \right) + g(1/4 - \varepsilon).$$

Effectuons le développement limité en  $\varepsilon = 0$ . Pour l'expression à l'intérieur du log, nous avons

$$1 - \frac{(1 - 2\sqrt{\varepsilon})^4}{1 - 8\varepsilon + 16\varepsilon^2} \underset{0}{=} 8\sqrt{\varepsilon}(1 + o(1)).$$

Il suit que

$$\mathfrak{B}(z) \underset{1/4}{=} -\frac{1}{2} \log(1 - 4z) + O(1).$$

Le  $n$ -ième coefficient de  $-\frac{1}{2} \log(1 - 4z)$  est égal à  $\frac{4^n}{2n}$ . En utilisant le [FS70, Theorem VI.3] pour  $\alpha = 0$  et  $\beta = 0$ , nous obtenons que

$$b_n \underset{+\infty}{=} \frac{4^n}{2n} (1 + O(\frac{1}{4^n})). \quad \square$$

Le nombre de polyominos parallélogrammes périodiques marqués de demi-périmètre  $n$  à hauteur de recollement intrinsèque fixée est  $2 \left( 4^{n-1} - \binom{2n-1}{n} \right)$ . Par la formule de Stirling,  $\binom{2n-1}{n}$  est négligeable devant  $4^{n-1}$ . Nous avons donc l'équivalence

$$2 \left( 4^{n-1} - \binom{2n}{n} \right) \underset{+\infty}{\sim} 2 \times 4^{n-1}.$$

Si nous la comparons à l'équivalence

$$b_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2 \times 4^{n-1}}{n}$$

induite par la proposition 7.3.11, nous retrouvons le facteur  $n$  qui correspond au marquage d'une colonne ou d'une ligne.



## 4. Ultime périodicité par rapport à l'aire

À taille fixée, Biagioli, Jouhet et Nadeau [BJN15] ont montré que la série génératrice, par rapport à la longueur de Coxeter, des éléments pleinement commutatifs d'un groupe de Coxeter fini ou affine est rationnelle. Elle est donc ultimement périodique. C'est en particulier le cas des permutations affines, de taille fixée, qui évitent 321. En effet, elles correspondent aux éléments pleinement commutatifs des permutations affines  $\tilde{\mathcal{A}}$  [BJS93, Gre02]. La longueur de Coxeter correspond, dans ce cas là, au nombre d'inversions. L'ultime périodicité pour le groupe de Coxeter  $\tilde{\mathcal{A}}$  avait d'abord été traitée par Hanusa et Jones [HJ10]. Dans la section 1.3, nous avons introduit une bijection entre les permutations affines qui évitent 321 et les polyominos parallélogrammes périodiques marqués où le nombre d'inversions correspond à l'aire, à un décalage près. Naturellement, la question de l'ultime périodicité des séries génératrices des polyominos parallélogrammes périodiques et des bandes se pose.

Notons  $\mathfrak{B}_n$ ,  $\mathfrak{P}_n$  et  $\mathfrak{PM}_n$  les séries génératrices respectivement des bandes, des polyominos parallélogrammes périodiques et des polyominos parallélogrammes périodiques marqués où le demi-périmètre est fixé à  $n$ . Nous étudions dans cette section l'ultime périodicité de  $\mathfrak{B}_n$ ,  $\mathfrak{P}_n$  et  $\mathfrak{PM}_n$  par rapport à l'aire.

**DÉFINITION 7.4.1.** Une série formelle  $\sum_{i \geq 0} a_i x^i$  est *ultimement périodique* s'il existe  $i_0, k \in \mathbb{N}$  tels que pour tout  $i \geq i_0$  on ait  $a_{i+k} = a_i$ .

Soit  $\mathcal{E}_n$  un ensemble parmi  $\mathcal{P}_n$ ,  $\mathcal{PM}_n$  ou  $\mathcal{B}_n$ . L'idée est d'introduire une construction bijective de  $\mathcal{E}_n \setminus \mathcal{X}$  dans  $\mathcal{E}_n$ , où  $\mathcal{X}$  est un ensemble fini, qui à partir d'un objet  $E$  définit un objet  $E'$  ayant même largeur, donc même hauteur également, et dont la différence  $\text{aire}(E) - \text{aire}(E')$  est donnée par une fonction  $f$  positive dépendant uniquement de la largeur. L'ensemble  $\mathcal{X}$  correspond aux objets minimaux selon cette construction. Notons  $\mathfrak{E}_n(x, y; q)$  la série génératrice de  $\mathcal{E}_n$ . Nous prouvons ainsi que  $[x^l y^{n-l}] \mathfrak{E}_n(x, y; q)$  est ultimement périodique de période  $f(l)$ . Plus précisément,

$$[x^l y^{n-l}] \mathfrak{E}_n(x, y; q) = \frac{x^l y^{n-l}}{1 - q^{f(l)}} \sum_{X \in \mathcal{X}} q^{\text{aire}(X)}.$$

Il suit naturellement que  $\mathfrak{E}_n(x, y; q)$  est  $\text{ppcm}_{1 \leq l \leq n-1}(f(l))$ -périodique. Nous proposons deux constructions. Dans la section 4.1, elle consiste à supprimer une case par colonne de sorte que  $f(l) = l$ . Pour la deuxième construction (section 4.2) nous obtenons le résultat moins fort  $f(l) = l(n-l)$ . Néanmoins, la structure arborescente est invariante, seule la hauteur de recollement intrinsèque change.

Sauf mention explicite du contraire, les périodes que nous trouvons ne sont pas minimale.

### 4.1. Étude de l'aire en supprimant une cellule par colonne

La première construction sur  $\mathcal{E}_n \setminus \mathcal{X}$  que nous étudions est la suppression d'une cellule par colonne composée à la diminution de la hauteur de recollement de un. L'ensemble  $\mathcal{X}$  des éléments pour lesquels la construction ne s'applique pas est caractérisé par la définition suivante.

**DÉFINITION 7.4.2.** Une *bande maigre* est une bande dont un représentant a une hauteur de recollement égale à 1. Un *polyomino parallélogramme périodique maigre* est un polyomino parallélogramme dont la bande est maigre. Un *polyomino parallélogramme périodique marqué maigre* est un polyomino parallélogramme périodique marqué dont le polyomino parallélogramme périodique sous-jacent est maigre.

La figure 17 donne deux exemples de polyominos parallélogrammes maigres. Une définition alternative est l'existence d'une colonne dont toutes les cellules

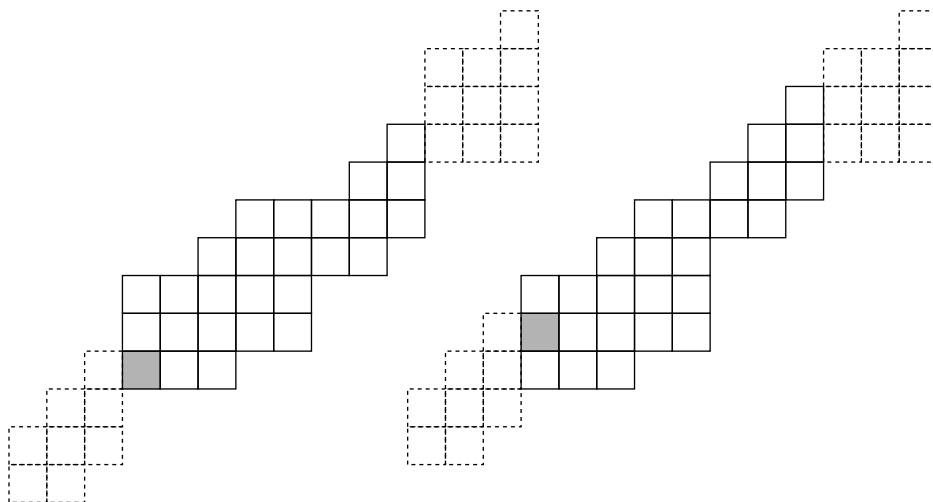


FIGURE 17. Deux polyominos parallélogrammes périodiques maigres.

sont pointées. Il est à noter qu'un objet maigre est nécessairement de hauteur de recollement intrinsèque 1.

**PROPOSITION 7.4.3.** Soit  $n$  un entier naturel et  $\mathcal{E}_n$  un ensemble parmi  $\mathcal{P}_n, \mathcal{PM}_n$  ou  $\mathcal{B}_n$ . Alors, pour tout entier  $1 \leq l \leq n - 1$  nous avons

$$[x^l y^{n-l}] \mathfrak{C}_n(x, y; q) = \frac{x^l y^{n-l}}{1 - q^l} \sum_{\substack{X \in \mathcal{E}_n \\ X \text{ maigre} \\ \text{largeur}(X)=l}} q^{\text{aire}(X)}.$$

**DÉMONSTRATION.** La proposition repose sur l'argument qu'en supprimant récursivement une cellule par colonne nous obtenons un objet maigre. De plus, en ajoutant une cellule à toutes les colonnes l'objet n'est plus maigre.  $\square$

COROLLAIRE 7.4.4. Soit  $n$  un entier naturel et  $\mathcal{E}_n$  un ensemble parmi  $\mathcal{P}_n, \mathcal{PM}_n$  ou  $\mathcal{B}_n$ . Alors, la série génératrice  $\mathfrak{E}_n(x, y; q)$  est ultimement périodique, par rapport à  $q$ , de période  $\text{ppcm}_{1 \leq l \leq n-1}(l)$ .

En énumérant expérimentalement le nombre de polyominos parallélogrammes périodiques maigres selon le demi-périmètre, les premiers termes correspondent, à un décalage d'indice près, à la suite  $\left(\binom{2n}{n} - 1\right)_{n \geq 1}$  ([Slo, A030662]). Pour montrer que ce résultat est vrai pour tout  $n$ , nous les mettons en bijection avec les Dyck bilatères de taille  $n - 1$  sauf un.

Les polyominos parallélogrammes périodiques maigres de demi-périmètre  $n$  sont entièrement déterminés par les bords nord-ouest et sud-est. Il suffit de rapprocher les deux bords autant que possible. De ce fait, ils sont en bijection avec les paires de chemins de taille  $n - 1$  ayant le même nombre de pas verticaux. Le premier (resp. deuxième) chemin  $BNO'$  (resp.  $BSE'$ ) est le bord nord-ouest (resp. sud-est) en oubliant le dernier (resp. premier) pas qui est toujours horizontal. Soit  $P$  un polyomino parallélogramme périodique maigre et  $h$  sa hauteur. Il existe une bijection triviale consistant à concaténer le chemin  $BNO'$  avec le transposé du chemin  $BSE'$ . Toutefois, dans la section 4.2, nous avons besoin de pouvoir interpréter le nombre de lignes par le nombre de pics. Le chemin  $BNO'$  (resp.  $BSE'$ ) s'écrit de manière unique comme  $BNO' = E^{s_0}NE^{s_1} \dots NE^{s_h}$  (resp.  $BSE' = E^{i_h}N \dots NE^{i_1}NE^{i_0}$ ). Soit  $\Psi(P)$  le chemin définie par

$$(47) \quad \Psi(P) = \begin{cases} B^{i_0}H^{s_0}B^{i_1+1}H^{s_1+1}B^{i_2+1}H^{s_2+1} \dots B^{i_h+1}H^{s_h+1} & \text{si } s_0 \neq 0, \\ B^{i_0}H^{s_1+1}B^{i_1+1}H^{s_2+1}B^{i_2+1} \dots H^{s_h+1}B^{i_h+1} & \text{si } s_0 = 0. \end{cases}$$

L'application  $\Psi$  est illustrée dans la figure 18.

THÉORÈME 7.4.5. Soit  $n \geq 2$  un entier naturel et  $h$  un entier naturel non nul. L'application  $\Psi$  est une bijection entre les polyominos parallélogrammes périodiques maigres à  $h$  lignes et les chemins de Dyck bilatères de taille  $n - 1$  à  $h$  pics.

DÉMONSTRATION. Soit  $P$  un polyomino parallélogramme périodique maigre de demi-périmètre  $n$  à  $h$  lignes. Les sommes  $s_0 + (s_1 + 1) + \dots + (s_h + 1)$  et  $i_0 + (i_1 + 1) + \dots + (i_h + 1)$  sont toutes deux égales à  $n - 1$ . Ainsi, le chemin  $\Psi(P)$  est bien un chemin de Dyck bilatère de taille  $n - 1$ . De plus, le nombre de lignes est clairement égal au nombre de pics. La première (resp. deuxième) ligne du système de l'équation 47 correspond à l'unique décomposition d'un chemin de Dyck bilatère à  $h$  pics finissant par un pas  $H$  (resp.  $B$ ). L'application  $\Psi$  est donc injective. Étant donné qu'il n'y a pas de restriction pour les entiers  $s_0, \dots, s_h, i_0, \dots, i_h$  l'application est surjective.  $\square$

COROLLAIRE 7.4.6. Le nombre de polyominos parallélogrammes périodiques maigres de demi-périmètre  $n$  est  $\binom{2n-2}{n-1} - 1$ .

DÉMONSTRATION. L'application  $\Psi$  atteint tous les chemins de Dyck bilatères sauf la grande vallée qui n'a justement pas de pic.  $\square$

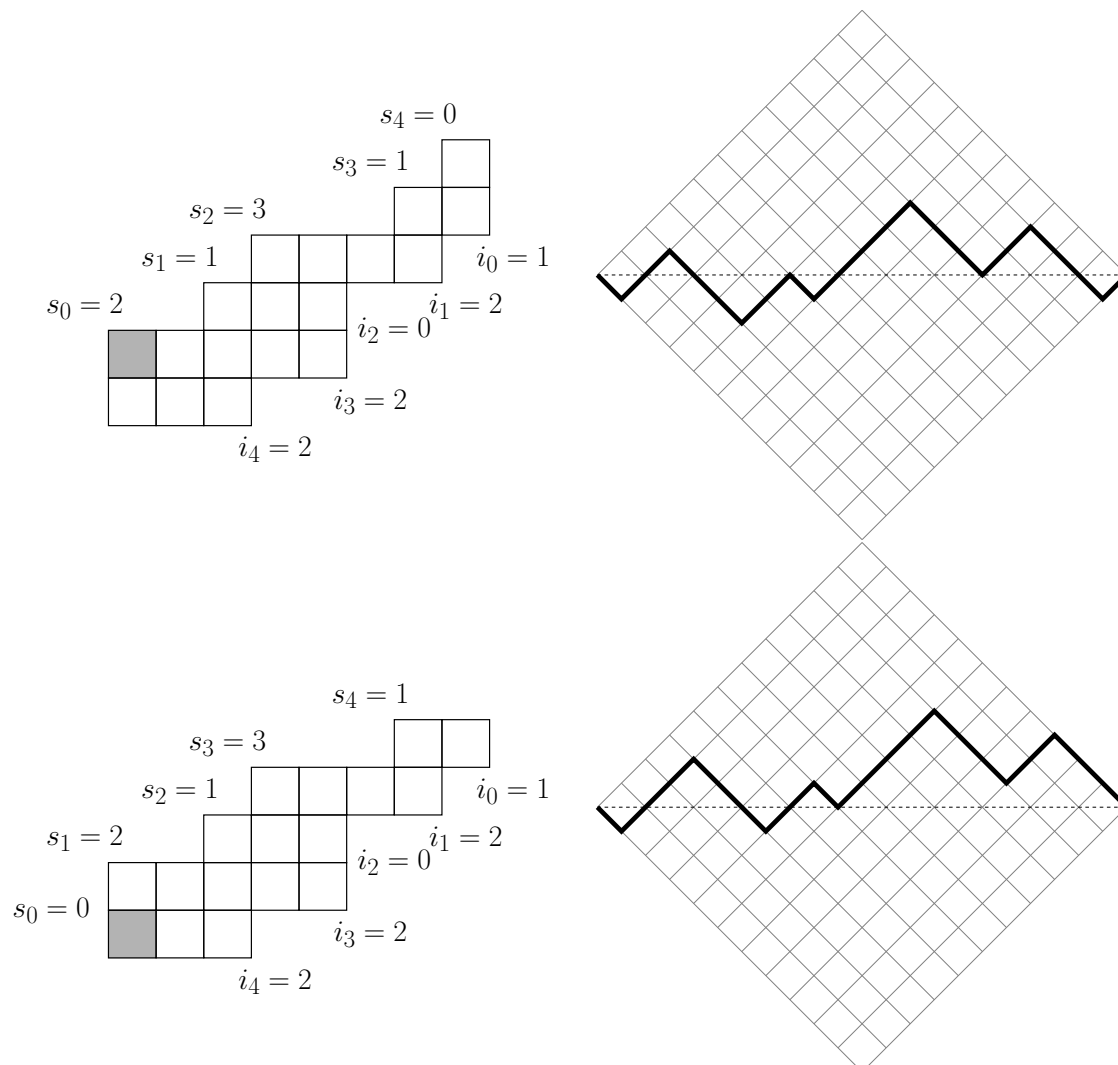


FIGURE 18. Deux polyominos parallélogrammes périodiques maigres (gauche) et leurs images par  $\Psi$  (droite).

Il n'est pas possible de déduire directement le nombre de polyominos parallélogrammes périodiques marqués maigres car l'image d'un tel objet par la symétrie d'axe  $\Delta : y = x$  n'est pas maigre.

#### 4.2. Étude de l'aire en diminuant la hauteur de recollement intrinsèque

La deuxième construction, notée  $\Theta$ , que nous proposons consiste à appliquer  $h$  fois la construction de la section 4.1, où  $h$  est égal à la hauteur de

l'objet. Avant de caractériser l'ensemble  $\mathcal{X}$  des objets minimaux pour  $\Theta$ , étudions son impact sur la hauteur de recollement intrinsèque ainsi que sur la structure arborescente.

PROPOSITION 7.4.7. *Soit  $n$  un entier naturel,  $\mathcal{E}_n$  un ensemble parmi  $\mathcal{P}_n, \mathcal{PM}_n$  ou  $\mathcal{B}_n$  et  $E$  un élément de  $\mathcal{E}_n \setminus \mathcal{X}$ . Alors, nous avons  $\text{hri}(\Theta(E)) = \text{hri}(E) - \text{li}(E)$  et  $\zeta(\Theta(E)) = \zeta(E)$ .*

DÉMONSTRATION. Il est suffisant de montrer la proposition dans le cas  $\mathcal{E}_n = \mathcal{P}_n$ , les deux autres s'en déduisent facilement.

Soit  $P$  un polyomino parallélogramme périodique de hauteur  $h$  qui n'appartient pas à  $\mathcal{X}$ , c'est-à-dire qu'on peut lui appliquer  $\Theta$ . Montrons tout d'abord que  $\zeta(\Theta(P)) = \zeta(P)$ . Étant donné que les bords nord-ouest et sud-est ne sont pas modifiés par  $\Theta$ , nous pouvons identifier les points de  $P$  avec ceux de  $\Theta(P)$ . Ainsi, nous notons  $\Theta(s)$  le sommet de  $\Theta(P)$  correspondant à  $s$ . Soit  $s$  un sommet et  $p$  son père. Si  $s$  est à droite d'une ligne, il est clair que  $\Theta(p)$  est le père de  $\Theta(s)$ . Pour traiter la situation où  $s$  est en haut d'une colonne, numérotions de haut en bas les lignes sans recollement en partant de 0. La numérotation est illustrée dans la figure 19. Notons  $i_u$  le numéro de la ligne sans recollement

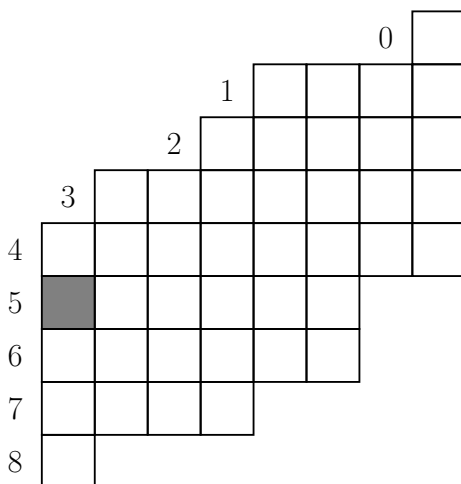


FIGURE 19. Numérotation des lignes sans recollement.

contenant un sommet  $u$ . Nous avons les relations  $i_{\Theta(s)} = i_s$  et  $i_{\Theta(p)} = i_p - h$ . Or, pour que deux lignes sans recollement, numérotées  $i$  et  $j$ , correspondent à la même ligne, il faut et il suffit que  $i = j \pmod{h}$ . De nouveau,  $\Theta(p)$  est le père de  $\Theta(s)$ . Il suit que les deux arbres ordonnés associés à chaque sommet des cycles sont les mêmes pour  $P$  et  $\Theta(P)$ . L'application  $\Theta$  ne modifiant pas l'ordre des sommets en haut des colonnes, il suit que  $\zeta(\Theta(P)) = \zeta(P)$ .

La hauteur de recollement intrinsèque d'un  $P$  est égal au nombre de lignes sans recollement de numéros supérieur ou égal à  $h$  dont la ligne correspond à un sommet de cycle. En effet, cette statistique est invariante par la suppression d'une feuille et elle est vraie pour les troncs. Pour tout  $k$ , les lignes sans

recollement de numéros  $kh, 1 + kh, \dots, h - 1 + kh$  appartiennent à des lignes différentes. Parmi ces  $h$  lignes, le nombre de sommets à droite d'une ligne et appartenant à un cycle est hauteur( $\text{tronc}(P)$ ), qui est égal à largeur( $\text{tronc}(P)$ ), soit  $\text{li}(P)$ . Nous concluons donc que  $\text{hri}(\Theta(P)) = \text{hri}(P) - \text{li}(P)$ .  $\square$

Nous pouvons maintenant donner la caractérisation suivante des polyominos parallélogrammes périodiques minimaux  $\Theta$ .

DÉFINITION 7.4.8. Soit  $O$  une bande, un polyomino parallélogramme périodique ou un polyomino parallélogramme périodique marqué. Si  $\text{hri}(O) \leq \text{li}(O)$ , alors  $O$  est dit *intrinsèquement mince*.

La définition la plus simple pour vérifier qu'un objet est intrinsèquement mince reste tout de même qu'il n'est pas possible de lui appliquer  $\Theta$ . La figure 20 donne un objet intrinsèquement mince et un autre qui ne l'est pas.

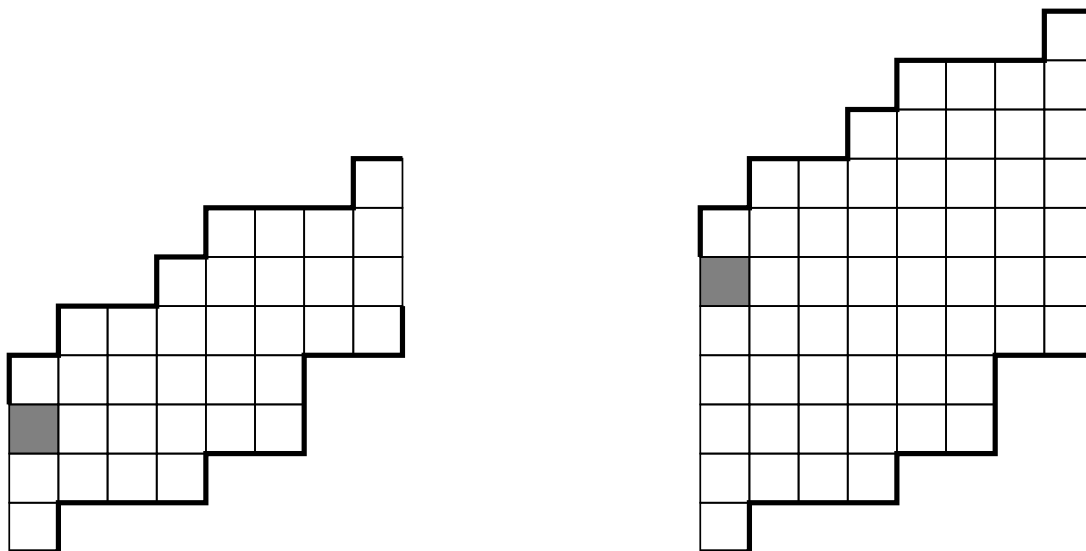


FIGURE 20. Un polyomino parallélogramme périodique qui est intrinsèquement mince et un polyomino parallélogramme périodique qui ne l'est pas.

en déduit l'analogie de la proposition 7.4.7.

PROPOSITION 7.4.9. Soit  $n$  un entier naturel et  $\mathcal{E}_n$  un ensemble parmi  $\mathcal{P}_n, \mathcal{PM}_n$  ou  $\mathcal{B}_n$ . Pour tout entier  $1 \leq l \leq n - 1$  et  $k \geq 1$ , nous avons

$$[x^l y^{n-l} s^k] \mathfrak{E}_n(x, y, s, t; q) = \frac{x^l y^{n-l} s^k}{1 - t^k q^{(n-l)l}} \sum_{\substack{X \in \mathcal{E}_n \\ X \text{ intrinsèquement mince} \\ \text{largeur}(X)=l}} t^{\text{hri}(X)} q^{\text{aire}(X)}.$$

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 7.4.7, les objets minimaux pour  $\Theta$  correspondent aux objets intrinsèquement minces. De plus, appliquer  $\Theta$  induit une diminution de  $l(n - l)$  de l'aire.  $\square$

Au niveau de la périodicité de l'aire, cette proposition est moins précise que la proposition 7.4.7, mais on contrôle le comportement de la hauteur de recollement intrinsèque.

Notons  $\mathfrak{Pim}$ ,  $\mathfrak{PMim}$  et  $\mathfrak{Bim}$  les analogues respectivement des séries génératrices  $\mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{PM}$  et  $\mathfrak{B}$  dans le cas intrinsèquement mince. Rappelons que  $s\partial_{s,t}s^k = [k]_t s^k$ .

PROPOSITION 7.4.10. *Les séries génératrices dans le cas intrinsèquement mince vérifient*

$$\begin{aligned}\mathfrak{Pim}(x, y, s, t; 1) &= s\partial_{s,t}([t]\mathfrak{P}(x, y, s, t; 1)), \\ \mathfrak{PMim}(x, y, s, t; 1) &= s\partial_{s,t}([t]\mathfrak{PM}(x, y, s, t; 1)), \\ \mathfrak{Bim}(x, y, s, t; 1) &= s\partial_{s,t}([t]\mathfrak{B}(x, y, s, t; 1)).\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Soit un objet de hauteur de recollement intrinsèque 1. On peut lui associer  $\text{li}(O)$  objets intrinsèquement mince en fixant  $\zeta(O)$  et en choisissant une hauteur de recollement intrinsèque comprise entre 1 et  $\text{li}(O)$ . Cette opération induit une partition des objets intrinsèquement minces. L'opération  $[t]$  permet de sélectionner les objets de hauteur de recollement intrinsèque 1. La largeur intrinsèque étant encodée par la puissance de  $s$ , l'opérateur  $s\partial_{s,t}$  permet d'ajouter les choix possibles pour la hauteur de recollement intrinsèque.  $\square$

Une définition alternative des objets maigres est qu'il existe une colonne dont toutes les cases ont des sommets. Similairement, les objets intrinsèquement minces sont ceux tels il existe au moins une colonne dont le nombre de cellules sans sommet est strictement inférieur à la hauteur.

PROPOSITION 7.4.11. *Soit  $O$  un objet maigre. Le nombre d'objets intrinsèquement minces ayant les mêmes bords nord-ouest et sud-est que  $O$  est égal à hauteur( $O$ ).*

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence directe des définitions alternatives des objets maigres et intrinsèquement minces.  $\square$

Nous en déduisons une formule d'énumération pour les polyominos parallélogrammes périodiques marqués intrinsèquement minces.

COROLLAIRE 7.4.12. *Le nombre de polyominos parallélogrammes périodiques intrinsèquement minces de demi-périmètre  $n$  est  $\binom{2n-2}{n-1} \frac{n-1}{2}$ .*

DÉMONSTRATION. D'après le théorème 7.4.5 et la proposition 7.4.11, les polyominos parallélogrammes périodiques intrinsèquement mince de demi-périmètre  $n$  sont en bijection avec les chemins de Dyck bilatères de taille  $n - 1$  avec un pic marqué. Ils sont donc également en bijection avec les relations de couverture dans le treillis des chemins de Dyck bilatère de taille  $n - 1$ . Ferrari et Munarini [FM14, Theorem 6] ont montré qu'ils sont énumérés par la formule  $\binom{2n-2}{n-1} \frac{n-1}{2}$ .  $\square$

Une autre interprétation de cette suite proposée dans [Slo, A002457] est qu'elle compte l'aire triangulaire sous les chemins de Dyck de taille  $n - 1$  où un triangle unitaire peut être comptée plusieurs fois. Plus précisément, prolongeons les pics en des triangles isocèles, la multiplicité d'un triangle unitaire est égale au nombre de triangles, provenant d'un pic, le contenant (figure 21). La bijection actuelle entre les polyominos parallélogrammes périodiques de hauteur de recollement intrinsèque 1 et de demi-périmètre  $n$  et l'aire triangulaire sous les chemins de Dyck de taille  $n - 1$  ne permet pas de montrer ce résultat. Une bijection expliquant ces deux résultats reste à trouver.

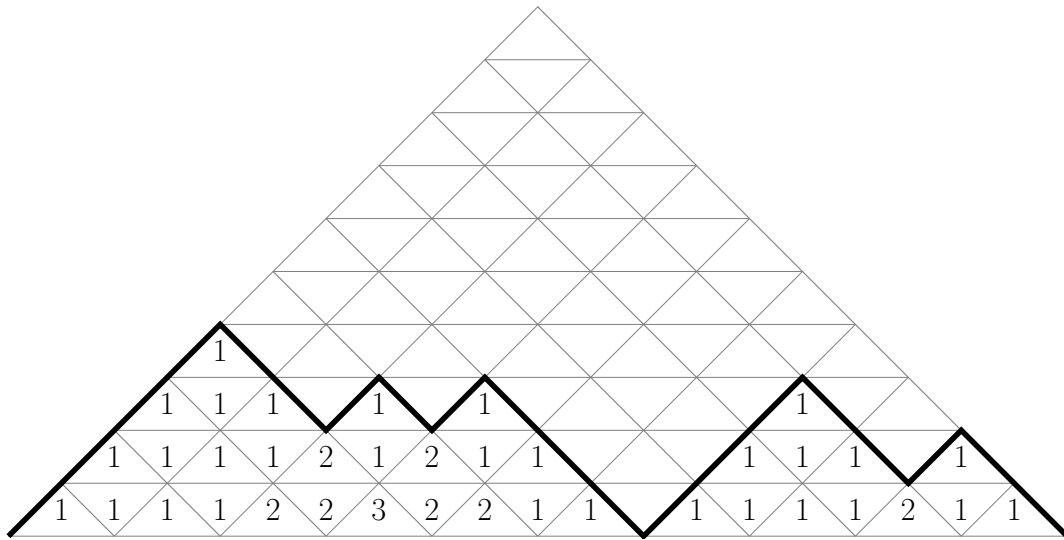


FIGURE 21. Aire triangulaire avec multiplicité d'un chemin de Dyck.

Étant donné que la hauteur de recollement intrinsèque et la largeur intrinsèque sont stable par la symétrie axiale d'axe  $\Delta : y = x$ , l'analogie du corollaire 7.3.2 est vraie dans le cas intrinsèquement mince.

PROPOSITION 7.4.13. *Nous avons l'égalité*

$$\mathfrak{PMim}(x, y, s, t; q) = \mathfrak{Pim}(x, y, s, t; q) + \mathfrak{Pim}(y, x, s, t; q).$$

COROLLAIRE 7.4.14. *Le nombre de polyominos parallélogrammes périodiques marqués intrinsèquement minces de demi-périmètre  $n$  est  $2 \times \frac{(2n+1)!}{n!^2}$ .*

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence de la proposition 7.4.11 et le corollaire 7.4.12.  $\square$





# PERSPECTIVES

---

Le travail de recherche que nous présentons dans ce manuscrit soulève de nombreuses pistes de recherches. Ce dernier chapitre fait un bilan des voies qui nous paraissent intéressantes à explorer.

## Interprétation combinatoire de l'état stationnaire de l'ASEP

Un des outils principal pour étudier les probabilités de l'état stationnaire de l'ASEP est l'*ansatz* matriciel de Derrida, Evans, Hakim et Pasquier [DEHP93]. Dans nos travaux nous utilisons la généralisation, de cette *ansatz* matriciel, introduit par Corteel et Williams [CW11] :

$$(48) \left\{ \begin{array}{ll} ug^\lambda(X \bullet \circ Y) & = qg^\lambda(X \circ \bullet Y) + \lambda_{|X|+|Y|+2} (g^\lambda(X \bullet Y) + g^\lambda(X \circ Y)) \quad (I) \\ \alpha g^\lambda(\circ X) & = \gamma g^\lambda(\bullet X) + \lambda_{|X|+1} g^\lambda(X) \quad (II) \\ \beta g^\lambda(X \bullet) & = \delta g^\lambda(X \circ) + \lambda_{|X|+1} g^\lambda(X) \quad (III) \\ g^\lambda(\varepsilon) & = \lambda_0. \end{array} \right.$$

À partir de ces récurrences locales, nous avons montré que le poids  $g^\lambda(m)$  d'un mot  $m \in \{\circ, \bullet\}^n$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire de poids de mots de taille  $n - 1$  :

$$g^\lambda(m) = \sum_{m' \in \{\circ, \bullet\}^{n-1}} a_{m,m'} g^\lambda(m').$$

Nous obtenons ainsi des récurrences dites globales, qui admettent exactement une solution. Le théorème 2.1.3 montre que cette solution vérifie le système (48). Ainsi, pour montrer qu'une classe combinatoire  $\mathcal{C}$  donne une interprétation des probabilités de l'état stationnaire de l'ASEP, il suffit de définir

une surjection  $\rho : \mathcal{C}_n \longrightarrow \{\circ, \bullet\}^n$  et un poids  $w$ , de sorte que

$$(49) \quad \mathfrak{C}_m = \sum_{m' \in \{\circ, \bullet\}^{n-1}} a_{m, m'} \mathfrak{C}_{m'},$$

où  $\mathfrak{C}_m = \sum_{C \in \rho^{-1}(m)} w(C)$ . À l'image des tableaux escaliers pour lesquels nous montrons combinatoirement, à travers un algorithme d'insertion, qu'ils vérifient l'équation (49). À notre connaissance, la seule autre preuve montrant que ces tableaux donnent une interprétation combinatoire aux probabilités stationnaires de l'ASEP est due à Corteel et Williams [CW11], qui utilisent directement le système 48. Cependant, la démonstration est longue et calculatoire. La preuve actuelle du théorème 2.1.3 repose sur l'existence d'une solution à l'*ansatz* matriciel. À notre connaissance, la seule solution est celle proposée par [CW11] qui correspond justement à la preuve que les tableaux escaliers satisfont l'*ansatz* matriciel. Pour achever notre travail, il faudrait démontrer l'existence d'une solution sans utiliser les tableaux escaliers. Par exemple, en interprétant l'*ansatz* matriciel comme un système linéaire, nous pourrions appliquer les outils de l'algèbre linéaire. Une alternative serait de montrer directement que les récurrences globales impliquent les récurrences du système 48. Nous sommes dans la même situation pour l'ASEP à deux types de particules (chapitre 3).

Concernant les tableaux escaliers de type  $B$ , nous avons défini deux *ansatz* matriciel (équations 18 et 21 du chapitre 2) : un pour le type  $B_{\alpha\beta}$  et un autre pour le type  $B_{\alpha\delta}$ . Pour chacun des deux, nous définissons une récurrence globale dont nous donnons une interprétation par un algorithme d'insertion sur les tableaux escaliers de type  $B$ . Cette fois-ci, il nous manque la preuve de l'existence d'une solution aux *ansatz* matriciels. Les équivalents du théorème 2.1.3 sont les conjectures 2.3.18 et 2.3.20.

Nous avons montré dans le chapitre 3 que notre démarche du chapitre 2 se généralise au cas de l'ASEP à deux particules. Naturellement, la question se pose de la possibilité d'appliquer notre méthode à un ASEP plus complexe. Pour un ASEP donné, la première étape serait de définir un *ansatz* matriciel s'il n'y en a pas. Ensuite, il faudrait en déduire une récurrence globale. Enfin, cette récurrence globale nous imposerait un algorithme d'insertion qu'il faudrait appliquer à une forme de tableau adéquat pour en déduire les objets combinatoires correspondants. L'extension la plus simple devrait être de différencier la probabilité  $q$  suivant les types des deux particules impliquées. Nous obtiendrions les mêmes tableaux mais avec un poids différents pour les rhombes verticaux et horizontaux. Mandelshtam [Man15] étudie un ASEP avec plusieurs types de particules grises avec la spécialisation  $\gamma = \delta = 0$ . Elle y définit un *ansatz* matriciel ainsi que des tableaux le satisfaisant. Pour chaque type de particule grise un pas diagonale différent est associé. Par notre méthode, nous pouvons espérer définir une généralisation à la fois de ces tableaux et des tableaux escaliers rhombiques. Toutefois, pour prouver que ces

nouveaux tableaux donnent une interprétation combinatoire de cet ASEP, il nous manquerait toujours la dernière brique : montrer que les équations globales impliquent les équations locales. Cantini, Garbali, de Gier et Wheeler [CGdGW16] étudient un ASEP avec plusieurs types de particules noires et blanches. Dans leurs travaux, ils n'utilisent pas d'*ansatz* matriciel et il ne définissent pas non plus de tableaux. Même si on devine ce que serait l'*ansatz* matriciel correspondant, plusieurs récurrences globales peuvent être définies et il n'est pas clair que nous puissions l'interpréter en un algorithme d'insertion sur des tableaux.

Il serait également intéressant de voir si notre approche peut être adaptée à l'ASEP sur les autres types de réseaux. Une première étape pourrait être d'étudier l'ASEP à deux particules sur  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . En effet, ce modèle, avec les restrictions  $\gamma = \delta = q = 0$ , a été étudié par Mandelshtam [Man17] qui en s'appuyant sur l'*ansatz* matriciel correspondant, introduit par Derrida, Evans, Hakim et Pasquier [DEHP93], définit des tableaux interprétant l'état stationnaire.

Les types  $B$  des tableaux alternatifs, des tableaux boisés et des tableaux escaliers sont obtenus comme points fixes d'une simple involution : la symétrie axiale d'axe la diagonale principale. Pour le cas  $\gamma = \delta = 0$ , cette involution correspond à un relèvement de la symétrie CP du ASEP (remarque 2.3.4). Quant à la spécialisation  $q = 1$ , les involutions à l'origine des tableaux escaliers de type  $B_{\alpha\beta}$  et  $B_{\alpha\delta}$  sont respectivement les symétries CP et C. L'ASEP à deux particules possède également les symétries P, C et CP. La nature des pavages des diagrammes rhombiques rend plus difficile la définition des involutions. Notamment pour les tableaux escaliers rhombiques pour lesquels la forme du pavage est fixé. On pourrait néanmoins étudier les tableaux alternatifs rhombiques dont le pavage ainsi que le remplissage par  $\alpha$  et  $\beta$  est stable par transposition. D'après [MV15, Figure 11] le poids en  $q$  devrait être stable.

L'interprétation combinatoire de l'ASEP par les tableaux encode l'état associé à un tableau sur le bord sud-est. Dans le chapitre 4, nous avons énuméré les coins permettant ainsi de calculer le nombre moyen de transitions possibles depuis un état pour  $\gamma = \delta = 0$  et  $\alpha = \beta = q = 1$ . Yan et Zhou ont traité le cas  $\alpha$  et  $\beta$  généraux en reformulant le problème en termes de partitions liées. Il reste à interpréter le poids  $q$  directement sur les partitions liées pour traiter le cas  $q$  général. Dans la section 4.2, nous proposons une méthode alternative à celle de Yan et Zhou. Elle est inspirée de la construction qui nous permet de donner le polynôme générateur des coins occupés pour  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $q$  généraux (proposition 4.3.2). Pour traiter le cas des coins, nous partitionnons les coins vides en quatre types de coins vides et nous calculons les polynômes générateurs de trois d'entre eux. Au vu de la forme factorisée du polynôme générateur des coins restants, nous pouvons espérer trouver une preuve combinatoire directe. Prendre en compte le poids en  $q$  semble tout de même compliqué.

Il y a deux façons de généraliser le calcul du nombre moyen de transitions possibles depuis un état. La première est de considérer  $\gamma$  et  $\delta$  généraux. La notion de coin est alors remplacée par la succession de  $\alpha/\delta$  par  $\beta/\gamma$  dans les cellules sud-est des tableaux escaliers. La deuxième est de traiter le cas de l'ASEP à deux particules en commençant par les tableaux alternatifs rhombiques.

Outre les formules factorisées qu'ils engendrent, la motivation principale de l'étude des coins est leur interprétation sur l'ASEP comme les lieux où un saut de particule est possible. Il serait intéressant de développer l'interprétation physique de nos résultats.

## Arbres non-ambigus

Dans le chapitre 5, nous avons trouvé de jolies formules closes pour la série génératrice et pour le polynôme générateur des arbres non-ambigus, en prenant notamment en compte le nombre de sommets dans la première ligne ainsi que le nombre de sommets dans la première colonne. Ces deux statistiques correspondent respectivement aux paramètres  $\beta$  et  $\alpha$ . Nous les avons obtenus de deux façons différentes. D'une part à l'aide d'une équation différentielle vérifiée par la série génératrice et d'autre part grâce à une interprétation combinatoire utilisant la décomposition d'un arbre binaire en équerres. Dans le contexte de l'ASEP avec  $\gamma = \delta = 0$ , des questions naturelles se posent. Peut-on raffiner l'une ou l'autre des méthodes pour introduire également le paramètre  $q$ ? Que peut-on déduire de la décomposition en équerres sur les tableaux boisés?

Les arbres non-ambigus correspondent aux tableaux boisés de forme rectangulaire. Les tableaux qui généralisent les tableaux boisés et qui interprète l'ASEP à deux particules sont les tableaux alternatifs rhombiques. On pourrait définir les *arbres non-ambigus rhombiques* comme les tableaux alternatifs rhombiques dont le bord sud-est est composé de pas horizontaux puis de pas diagonaux et enfin de pas verticaux. Même si elle dépend du pavage, les tableaux alternatifs rhombiques ont également une structure arborescente sous-jacente que l'on pourrait étudier.

Un travail qui n'apparaît pas dans ce manuscrit est la recherche d'une structure d'algèbre de Hopf sur les arbres non-ambigus. Les arbres non-ambigus correspondent à des classes d'équivalence de tableaux boisés. Or, les tableaux boisés sont en bijection avec les permutations. De plus, il existe une surjection naturelle des arbres non-ambigus vers les arbres binaires. Notre idée initiale était donc de construire une algèbre de Hopf qui s'intercale entre **FQSym**, l'algèbre de Hopf des permutations de Malvenuto et Reutenauer [MR95], et **PBT**, l'algèbre de Hopf des arbres binaires de Loday et Ronco [LR98]. Toutefois, en utilisant les relations des algèbres de Hopf, on peut montrer que si une

telle inclusion d'algèbres de Hopf existe, alors le nombre d'arbres non-ambigus de taille 5 devrait être plus grand que 63. Ce qui n'est pas possible étant donné qu'il y en a 62. Suite à cela, nous avons privilégié l'algèbre de Hopf **PBT**. Une propriété de **PBT** est que le produit de deux intervalles du treillis de Tamari [HT72] est également un intervalle. Il paraissait donc naturel de construire un treillis sur les arbres non-ambigus en parallèle de la structure d'algèbre de Hopf. Malheureusement, ce travail n'a pas abouti.

Dans le chapitre 1, nous avons donné une généralisation des arbres non-ambigus en dimension supérieure. Pour l'instant, les seuls résultats que nous avons à propos de ces nouveaux objets sont des équations différentielles vérifiées par leurs séries génératrices. Contrairement à la dimension 2, nous n'avons pas réussi à les résoudre. Pour cela, nous pensons qu'il faudrait mieux comprendre les liens entre les différentes dimensions. Pour le moment nous avons uniquement l'identité  $\mathfrak{N}_{d,k}|_{x_d=0} = \mathfrak{N}_{d-1,k}$ .

Dans l'article [ABBS14], les auteurs étudient les arbres non-ambigus complets. C'est-à-dire, les arbres non-ambigus dont l'arbre binaire sous-jacent est complet. Entre autre, ils montrent que leur série génératrice est égale au logarithme de la fonction de Bessel  $J_0$ . On pourrait peut-être obtenir un résultat similaire en dimension supérieure.

Une dernière piste de recherche est la généralisation des tableaux boisés en dimension supérieure. Ils mèneraient peut-être à un ASEP à plusieurs dimensions.

## Polyomino parallélogrammes périodiques

Nos travaux sur les polyominos parallélogrammes périodiques se basent sur une structure arborescente que l'on fait apparaître en ajoutant un point en haut des colonnes et à droite des lignes. Nous trouvons ainsi la série génératrice de ces objets en prenant en compte la hauteur et la largeur ainsi que deux nouvelles statistiques : la largeur intrinsèque et la hauteur de recollement intrinsèque. Actuellement, la structure arborescente ne permet toutefois pas d'étudier l'aire. La méthode de Bousquet-Mélou et Viennot [BMV92] utilisée par Biagioli, Jouhet et Nadeau [BJN17], permet de calculer la série génératrice en prenant également l'aire en compte. Toutefois, la symétrie  $x \leftrightarrow y$  de l'objet n'apparaît pas dans leurs résultats. Notre approche respectant cette symétrie, il serait intéressant de trouver un encodage de l'aire, simple et symétrique, dans nos structures arborescentes pour obtenir une série génératrice symétrique en  $x$  et  $y$ . Une solution serait de construire une partition des cellules, compatible avec la symétrie, de sorte qu'il y ait exactement une cellule pointée par sous-ensemble. Nous obtiendrions un étiquetage de la structure sous-jacente dont la somme serait égale à l'aire. Par exemple, soit  $\mathcal{E}$  une ensemble maximal de

cellules dont les coins sud-ouest appartiennent à la même droite de pente 1. En lisant  $\mathcal{E}$  du nord-est au sud-ouest, on regroupe une cellule pointée avec les cellules vident qui la suivent. Cette construction est bien stable par la symétrie d'axe  $\Delta : y = x$ .

Un polyomino parallélogramme périodique  $P$  est entièrement déterminé par sa structure arborescente  $\zeta(P)$  et sa hauteur de recollement intrinsèque, qui sont indépendants. En particulier, la hauteur de recollement intrinsèque partitionne l'ensemble infini des polyominos parallélogrammes périodiques de demi-périmètre fixé en sous-ensemble de même taille finie. Toutefois, c'est une statistique qui est difficile à lire directement sur l'objet. Indépendamment de nos travaux, Biagioli, Jouhet et Nadeau [BJN17] ont introduit les polyominos parallélogrammes périodiques en montrant qu'ils sont en bijection avec les permutations affines qui évitent 321. Il serait intéressant de pouvoir interpréter la hauteur de recollement intrinsèque sur ces permutations ou sur d'autres objets combinatoires.

Nous avons interprété les polyominos parallélogrammes périodiques de hauteur intrinsèque 1 comme l'aire triangulaire sous les chemins de Dyck. Or, la formule d'énumération des polyominos parallélogrammes périodiques intrinsèquement minces nous dit que ces derniers peuvent aussi être interprétés comme l'aire triangulaire, avec une multiplicité induite par les pics, sous les chemins de Dyck. Il reste à trouver une bijection interprétant les deux à la fois.

La construction de [ABBS14] mettant en bijection les polyominos parallélogrammes avec les arbres binaires consiste à construire un arbre non-ambigu à partir d'un polyomino parallélogramme en ajoutant des points à droite des lignes et en haut des colonnes. À un facteur de renormalisation près, l'aire correspond ainsi au paramètre  $q$  de l'ASEP. Peut-on étendre ce lien au cas des polyominos parallélogrammes périodiques ?

L'objectif initial qui était d'étudier les polyominos convexes à partir des polyominos parallélogrammes périodiques n'a pas été traité. Maintenant que nous avons une meilleure compréhension de ces nouveaux objets, il pourrait être intéressant de revenir à cette idée.

# BIBLIOGRAPHIE

---

- [ABBS14] J.C. Aval, A. Boussicault, M. Bouvel, and M. Silimbani. Combinatorics of non-ambiguous trees. *Advances in Applied Mathematics*, 56 :78–108, 2014. [11](#), [151](#), [158](#), [160](#), [165](#), [174](#), [223](#), [233](#), [263](#), [264](#)
- [ABD<sup>+</sup>16] J.-C. Aval, A. Boussicault, B. Delcroix-Oger, F. Hivert, and P. Laborde-Zubieta. Non-ambiguous trees : new results and generalisation. In *Proceedings of the 28-th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC 2016)*. 2016. [11](#), [159](#), [162](#)
- [ABDH13] J.-C. Aval, A. Boussicault, and S. Dasse-Hartaut. The tree structure in staircase tableaux. *Sém. Lothar. Combin.*, 70 :Art. B70g, 11, 2013. [53](#), [158](#)
- [ABL88] E. D. Andjel, M. D. Bramson, and T. M. Liggett. Shocks in the asymmetric exclusion process. *Probability Theory and Related Fields*, 78(2) :231–247, Jun 1988. [5](#)
- [ABLZP16] J. C. Aval, A. Boussicault, P. Laborde-Zubieta, and M. Pétréolle. Generating series of Periodic Parallelogram polyominoes. *ArXiv e-prints*, December 2016. [12](#), [225](#)
- [ABN13] J.-C. Aval, A. Boussicault, and P. Nadeau. Tree-like tableaux. *Electron. J. Combin.*, 20(4) :Paper 34, 24, 2013. [44](#), [73](#), [75](#), [126](#), [128](#), [129](#), [147](#), [148](#), [157](#)
- [ASC76] W. A. Al-Salam and T. S. Chihara. Convolutions of orthonormal polynomials. *SIAM J. Math. Anal.*, 7(1) :16–28, 1976. [8](#)
- [AW85] R. Askey and J. Wilson. Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 54(319) :iv+55, 1985. [8](#)
- [BB05] A. Björner and F. Brenti. *Combinatorics of Coxeter groups*, volume 231 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2005. [22](#), [23](#), [224](#)
- [BBJN16] R. Biagioli, M. Bousquet-Mélou, F. Jouhet, and P. Nadeau. Length enumeration of fully commutative elements in finite and affine Coxeter groups. *ArXiv e-prints*, December 2016. [224](#)
- [BCE<sup>+</sup>06] R. Brak, S. Corteel, J. Essam, R. Parviainen, and A. Rechnitzer. A combinatorial derivation of the PASEP stationary state. *Electron. J. Combin.*, 13(1) :Research Paper 108, 23, 2006. [7](#), [8](#), [48](#), [53](#)
- [BE07] R. A. Blythe and M. R. Evans. Nonequilibrium steady states of matrix-product form : a solver’s guide. *J. Phys. A*, 40(46) :R333–R441, 2007. [7](#), [43](#)
- [Bil95] P. Billingsley. *Probability and measure*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons, Inc., New York, third edition, 1995. A Wiley-Interscience Publication. [35](#)



- 
- [BJN15] R. Biagioli, F. Jouhet, and P. Nadeau. Fully commutative elements in finite and affine Coxeter groups. *Monatsh. Math.*, 178(1) :1–37, 2015. [12](#), [225](#), [250](#)
- [BJN17] R. Biagioli, F. Jouhet, and P. Nadeau. 321-avoiding affine permutations, heaps, and periodic parallelogram polyominoes. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 59(Supplement C) :115 – 130, 2017. Random Generation of Combinatorial Structures – GASCom 2016. [12](#), [224](#), [230](#), [231](#), [241](#), [263](#), [264](#)
- [BJS93] S. C. Billey, W. Jockusch, and R. P. Stanley. Some combinatorial properties of Schubert polynomials. *J. Algebraic Combin.*, 2(4) :345–374, 1993. [250](#)
- [BLL98] F. Bergeron, G. Labelle, and P. Leroux. *Combinatorial species and tree-like structures*, volume 67 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. Translated from the 1994 French original by Margaret Readdy, With a foreword by Gian-Carlo Rota. [14](#), [15](#), [16](#), [17](#)
- [BLZ17] A. Boussicault and P. Laborde-Zubieta. Periodic parallelogram polyominoes. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 59(Supplement C) :177 – 188, 2017. Random Generation of Combinatorial Structures – GASCom 2016. [12](#), [225](#)
- [BM96] M. Bousquet-Mélou. A method for the enumeration of various classes of column-convex polygons. *Discrete Math.*, 154(1-3) :1–25, 1996. [223](#)
- [BMV92] M. Bousquet-Mélou and X. G. Viennot. Empilements de segments et  $q$ -énumération de polyominoes convexes dirigés. *J. Combin. Theory Ser. A*, 60(2) :196–224, 1992. [224](#), [234](#), [241](#), [263](#)
- [Bón12] M. Bóna. *Combinatorics of permutations*. Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton). CRC Press, Boca Raton, FL, second edition, 2012. With a foreword by Richard Stanley. [20](#)
- [Bón15] M. Bóna, editor. *Handbook of enumerative combinatorics*. Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton). CRC Press, Boca Raton, FL, 2015. [13](#), [23](#), [24](#), [25](#)
- [BRS15] A. Boussicault, S. Rinaldi, and S. Socci. The number of directed  $k$ -convex polyominoes. In *Proceedings of FPSAC 2015*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., pages 511–522. Assoc. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Nancy, 2015. [12](#), [223](#), [225](#), [232](#), [233](#)
- [BS00] E. Babson and E. Steingrímsson. Generalized permutation patterns and a classification of the Mahonian statistics. *Sém. Lothar. Combin.*, 44 :Art. B44b, 18 pp. (electronic), 2000. [22](#)
- [Bur07] A. Burstein. On some properties of permutation tableaux. *Ann. Comb.*, 11(3-4) :355–368, 2007. [44](#), [124](#), [153](#), [157](#), [159](#), [184](#), [186](#)
- [BW89] A. Björner and M. L. Wachs.  $q$ -hook length formulas for forests. *J. Combin. Theory Ser. A*, 52(2) :165–187, 1989. [166](#)
- [Can15] L. Cantini. Asymmetric Simple Exclusion Process with open boundaries and Koornwinder polynomials. *ArXiv e-prints*, May 2015. [9](#)
- [CDH16] S. Corteel and S. Dasse-Hartaut. A bijection from staircase tableaux to inversion tables, giving some Eulerian and Mahonian statistics. *Ann. Comb.*, 20(4) :737–754, 2016. [8](#), [10](#), [44](#), [53](#), [68](#), [71](#), [75](#), [78](#), [84](#), [89](#)
- [CE10] E. Clark and R. Ehrenborg. Explicit expressions for the extremal excedance set statistics. *European J. Combin.*, 31(1) :270–279, 2010. [11](#), [159](#), [174](#), [184](#), [196](#)
- [CEF07] S.-E. Cheng, S.-P. Eu, and T.-S. Fu. Area of Catalan paths on a checkerboard. *European J. Combin.*, 28(4) :1331–1344, 2007. [34](#)
- [CGdGW16] L. Cantini, A. Garbali, J. de Gier, and M. Wheeler. Koornwinder polynomials and the stationary multi-species asymmetric exclusion process with open boundaries. *J. Phys. A*, 49(44) :444002, 23, 2016. [261](#)
-

- [CH07] S. Corteel and P. Hitczenko. Expected values of statistics on permutation tableaux. In *2007 Conference on Analysis of Algorithms, AofA 07*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., AH, pages 325–339. Assoc. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Nancy, 2007. [138](#)
- [CJVK13] S. Corteel, M. Josuat-Vergès, and J. S. Kim. Crossings of signed permutations and  $q$ -Eulerian numbers of type  $B$ . *J. Comb.*, 4(2) :191–228, 2013. [75](#), [125](#), [137](#)
- [CJVW11] S. Corteel, M. Josuat-Vergès, and L. K. Williams. The matrix ansatz, orthogonal polynomials, and permutations. *Adv. in Appl. Math.*, 46(1-4) :209–225, 2011. [44](#), [75](#), [89](#), [125](#)
- [CK11] S. Corteel and J. S. Kim. Combinatorics on permutation tableaux of type  $A$  and type  $B$ . *European J. Combin.*, 32(4) :563–579, 2011. [75](#), [87](#), [125](#), [130](#), [142](#)
- [CL99] T. Chou and D. Lohse. Entropy-driven pumping in zeolites and biological channels. *Phys. Rev. Lett.*, 82 :3552–3555, Apr 1999. [6](#)
- [CLW13] W. Y. C. Chen, L. H. Liu, and C. J. Wang. Linked partitions and permutation tableaux. *Electron. J. Combin.*, 20(3) :Paper 53, 10, 2013. [124](#), [145](#)
- [CMW15] S. Corteel, O. Mandelshtam, and L. K. Williams. Combinatorics of the two-species ASEP and Koornwinder moments. *ArXiv e-prints*, October 2015. [7](#), [8](#), [97](#), [100](#), [102](#), [104](#), [106](#)
- [CN09] S. Corteel and P. Nadeau. Bijections for permutation tableaux. *European J. Combin.*, 30(1) :295–310, 2009. [44](#), [72](#), [123](#), [124](#), [140](#)
- [CP15] S. Cho and K. Park. Alignments, crossings, cycles, inversions, and weak bruhat order in permutation tableaux of type  $B$ . *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.*, DMTCS Proceedings, 27th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC 2015), 2015. [125](#)
- [CR13] M.-L. Chabanol and J.-J. Ruch. Chaînes de Markov, 2012-2013. Cours proposé dans le cadre de la préparation à l’agrégation. <https://www.math.u-bordeaux.fr/~mchabano/Agreg/ProbaAgreg1314-COURS5-CM.pdf>. [35](#)
- [CSSW12] S. Corteel, R. Stanley, D. Stanton, and L. Williams. Formulae for Askey-Wilson moments and enumeration of staircase tableaux. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 364(11) :6009–6037, 2012. [8](#), [9](#), [53](#), [55](#), [56](#), [58](#), [59](#), [158](#)
- [CW07a] S. Corteel and L. K. Williams. tableaux combinatorics for the asymmetric exclusion process. *Adv. in Appl. Math.*, 39(3) :293–310, 2007. [7](#), [41](#), [123](#), [124](#), [131](#)
- [CW07b] S. Corteel and L. K. Williams. a Markov chain on permutations which projects to the PASEP. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (17) :Art. ID rnm055, 27, 2007. [7](#), [8](#), [72](#), [77](#), [124](#)
- [CW11] S. Corteel and L. K. Williams. Tableaux combinatorics for the asymmetric exclusion process and Askey-Wilson polynomials. *Duke Math. J.*, 159(3) :385–415, 2011. [7](#), [8](#), [9](#), [41](#), [48](#), [52](#), [55](#), [57](#), [97](#), [259](#), [260](#)
- [CW15a] Z. Chen and C. J. Wang. The parity of the number of permutation tableaux in a fixed shape. *Appl. Math. Comput.*, 265 :1090–1097, 2015. [124](#)
- [CW15b] S. Corteel and L. Williams. Macdonald-Koornwinder moments and the two-species exclusion process. *ArXiv e-prints*, May 2015. [9](#)
- [CWY08] W. Y. C. Chen, S. Y. J. Wu, and C. H. Yan. Linked partitions and linked cycles. *European J. Combin.*, 29(6) :1408–1426, 2008. [123](#), [138](#), [145](#)
- [CZ17] J. N. Chen and R. D. P. Zhou. On the sign-imbalance of permutation tableaux. *Adv. in Appl. Math.*, 86 :1–18, 2017. [125](#)
- [DE93] B. Derrida and M. R. Evans. Exact correlation functions in an asymmetric exclusion model with open boundaries. *J. Physique I*, 3(2) :311–322, 1993. [5](#)
- [DEHP93] B. Derrida, M. R. Evans, V. Hakim, and V. Pasquier. Exact solution of a 1D asymmetric exclusion model using a matrix formulation. *J. Phys. A*, 26(7) :1493–1517, 1993. [5](#), [7](#), [41](#), [47](#), [48](#), [157](#), [259](#), [261](#)

- 
- [DH] S. Dasse-Hartaut. *Combinatoire des tableaux escalier*. PhD thesis, Université Paris Diderot-Paris VII. [8](#)
- [DJLS93] B. Derrida, S. A. Janowsky, J. L. Lebowitz, and E. R. Speer. Exact solution of the totally asymmetric simple exclusion process : shock profiles. *J. Statist. Phys.*, 73(5-6) :813–842, 1993. [5](#)
- [DLS03] B. Derrida, J. L. Lebowitz, and E. R. Speer. Exact large deviation functional of a stationary open driven diffusive system : the asymmetric exclusion process. *J. Statist. Phys.*, 110(3-6) :775–810, 2003. Special issue in honor of Michael E. Fisher’s 70th birthday (Piscataway, NJ, 2001). [5](#)
- [DS05] E. Duchi and G. Schaeffer. A combinatorial approach to jumping particles. *J. Combin. Theory Ser. A*, 110(1) :1–29, 2005. [7](#)
- [DV84] M.-P. Delest and X. G. Viennot. Algebraic languages and polyominoes enumeration. *Theoret. Comput. Sci.*, 34(1-2) :169–206, 1984. [34](#), [223](#)
- [Dyk07] K. J. Dykema. Multilinear function series and transforms in free probability theory. *Adv. Math.*, 208(1) :351–407, 2007. [123](#), [138](#), [145](#)
- [DZ80] N. Dershowitz and S. Zaks. Enumerations of ordered trees. *Discrete Math.*, 31(1) :9–28, 1980. [28](#), [244](#)
- [ER96] F. H. L. Essler and V. Rittenberg. Representations of the quadratic algebra and partially asymmetric diffusion with open boundaries. *J. Phys. A*, 29(13) :3375–3407, 1996. [6](#)
- [ES00] R. Ehrenborg and E. Steingrímsson. The exceedance set of a permutation. *Adv. in Appl. Math.*, 24(3) :284–299, 2000. [174](#)
- [Fla80] P. Flajolet. Combinatorial aspects of continued fractions. *Discrete Math.*, 32(2) :125–161, 1980. [8](#)
- [FM14] L. Ferrari and E. Munarini. Enumeration of edges in some lattices of paths. *J. Integer Seq.*, 17(1) :Article 14.1.5, 22, 2014. [256](#)
- [Foa78] D. Foata. A combinatorial proof of the Mehler formula. *J. Combinatorial Theory Ser. A*, 24(3) :367–376, 1978. [8](#)
- [FS70] D. Foata and M.-P. Schützenberger. *Théorie géométrique des polynômes eulériens*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 138. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970. [21](#), [247](#), [249](#)
- [FS09] P. Flajolet and R. Sedgewick. *Analytic combinatorics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009. [18](#), [19](#)
- [GGLZS16] A. L. L. Gao, E. X. L. Gao, P. Laborde-Zubieta, and B. Y. Sun. Enumeration of corners in tree-like tableaux. *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.*, 18(3) :Paper No. 17, 26, 2016. [10](#), [129](#), [138](#), [139](#), [145](#)
- [GP76] W. M. Gibson and B. R. Pollard. *Symmetry principles in elementary particle physics*. Cambridge University Press, Cambridge-New York-Melbourne, 1976. Cambridge Monographs on Physics. [46](#)
- [Gre02] R. M. Green. On 321-avoiding permutations in affine Weyl groups. *J. Algebraic Combin.*, 15(3) :241–252, 2002. [250](#)
- [GV85] I. Gessel and X. G. Viennot. Binomial determinants, paths, and hook length formulae. *Adv. in Math.*, 58(3) :300–321, 1985. [34](#)
- [HJ10] C. R. H. Hanusa and B. C. Jones. The enumeration of fully commutative affine permutations. *European J. Combin.*, 31(5) :1342–1359, 2010. [225](#), [250](#)
- [HL16a] P. Hitczenko and A. Lohss. Corners in tree-like tableaux. *Electron. J. Combin.*, 23(4) :Paper 4.26, 18, 2016. [138](#)
- [HL16b] P. Hitczenko and A. Lohss. Probabilistic Consequences of Some Polynomial Recurrences. *ArXiv e-prints*, April 2016. [134](#), [137](#)
- [HNT08] F. Hivert, J.-C. Novelli, and J.-Y. Thibon. Trees, functional equations, and combinatorial Hopf algebras. *European J. Combin.*, 29(7) :1682–1695, 2008. [11](#), [158](#), [159](#), [166](#), [181](#), [203](#)
-

- [HT72] S. Huang and D. Tamari. Problems of associativity : A simple proof for the lattice property of systems ordered by a semi-associative law. *J. Combinatorial Theory Ser. A*, 13 :7–13, 1972. [263](#)
- [JV11] M. Josuat-Vergès. Combinatorics of the three-parameter PASEP partition function. *Electron. J. Combin.*, 18(1) :Paper 22, 31, 2011. [8](#), [72](#), [128](#)
- [Knu98a] D. E. Knuth. *The art of computer programming. Vol. 2*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1998. Seminumerical algorithms, Third edition [of MR0286318]. [151](#)
- [Knu98b] D. E. Knuth. *The art of computer programming. Vol. 3*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1998. Sorting and searching, Second edition [of MR0445948]. [27](#)
- [Koo92] T. H. Koornwinder. Askey-Wilson polynomials for root systems of type  $BC$ . In *Hypergeometric functions on domains of positivity, Jack polynomials, and applications (Tampa, FL, 1991)*, volume 138 of *Contemp. Math.*, pages 189–204. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992. [9](#)
- [KS94] R. Koekoek and R. F. Swarttouw. *The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its  $q$ -analogue*. Delft University of Technology, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, 1994. [8](#)
- [Lot83] M. Lothaire. *Combinatorics on words*, volume 17 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1983. A collective work by Dominique Perrin, Jean Berstel, Christian Choffrut, Robert Cori, Dominique Foata, Jean Eric Pin, Guisepe Pirillo, Christophe Reutenauer, Marcel-P. Schützenberger, Jacques Sakarovitch and Imre Simon, With a foreword by Roger Lyndon, Edited and with a preface by Perrin. [4](#), [28](#)
- [LR98] J.-L. Loday and M. O. Ronco. Hopf algebra of the planar binary trees. *Adv. Math.*, 139(2) :293–309, 1998. [262](#)
- [LW08] T. Lam and L. K. Williams. Total positivity for cominusule Grassmannians. *New York J. Math.*, 14 :53–99, 2008. [75](#), [125](#)
- [LZ04] S. K. Lando and A. K. Zvonkin. *Graphs on surfaces and their applications*, volume 141 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. With an appendix by Don B. Zagier, Low-Dimensional Topology, II. [31](#)
- [LZ15] P. Laborde-Zubieta. Occupied corners in tree-like tableaux. *Sém. Lothar. Combin.*, 74 :Art. B74b, 14, 2015. [10](#), [132](#), [137](#), [138](#)
- [Mac15] P. A. MacMahon. *Combinatory Analysis*, volume 1 and 2. Cambridge University Press, Cambridge, 1915. [22](#)
- [Man15] O. Mandelshtam. Matrix ansatz and combinatorics of the  $k$ -species PASEP. *ArXiv e-prints*, August 2015. [260](#)
- [Man16a] O. Mandelshtam. *Combinatorics of the Asymmetric Simple Exclusion Process*. PhD thesis, 2016. Thesis (Ph.D.)—University of California, Berkeley. [8](#)
- [Man16b] O. Mandelshtam. Multi-Catalan tableaux and the two-species TASEP. *Ann. Inst. Henri Poincaré D*, 3(3) :321–348, 2016. [7](#)
- [Man17] O. Mandelshtam. Toric tableaux and the inhomogeneous two-species TASEP on a ring. *ArXiv e-prints*, July 2017. [261](#)
- [MGP68] J. MacDonald, J. Gibbs, and A. Pipkin. Kinetics of biopolymerization on nucleic acid templates. *Biopolymers*, 6(1) :1–25, 1968. [5](#)
- [MR95] C. Malvenuto and C. Reutenauer. Duality between quasi-symmetric functions and the Solomon descent algebra. *J. Algebra*, 177(3) :967–982, 1995. [262](#)
- [MSV96] D. Merlini, R. Sprugnoli, and M. C. Verri. The area determined by underdiagonal lattice paths. In *Trees in algebra and programming—CAAP '96 (Linköping, 1996)*, volume 1059 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 59–71. Springer, Berlin, 1996. [243](#), [247](#)
- [MV15] O. Mandelshtam and X. G. Viennot. Tableaux combinatorics of the two-species PASEP. *ArXiv e-prints*, June 2015. [7](#), [97](#), [104](#), [108](#), [114](#), [119](#), [261](#)

- 
- [MV16] O. Mandelshtam and X. G. Viennot. Rhombic alternative tableaux and assemblées of permutations. *ArXiv e-prints*, September 2016. [10](#), [98](#), [108](#), [114](#), [119](#)
- [Nad11] P. Nadeau. The structure of alternative tableaux. *J. Combin. Theory Ser. A*, 118(5) :1638–1660, 2011. [75](#), [126](#), [157](#)
- [Pos06] A. Postnikov. Total positivity, Grassmannians, and networks. *ArXiv Mathematics e-prints*, September 2006. [124](#)
- [PR87] G. Pólya and R. C. Read. *Combinatorial enumeration of groups, graphs, and chemical compounds*. Springer-Verlag, New York, 1987. Pólya’s contribution translated from the German by Dorothee Aepli. [18](#)
- [S<sup>+</sup>17] W. A. Stein et al. *Sage Mathematics Software (Version 8.0)*. The Sage Development Team, 2017. <http://www.sagemath.org>. [9](#)
- [San94] S. Sandow. Partially asymmetric exclusion process with open boundaries. *Physical review E*, 50(4) :2660, 1994. [8](#)
- [Sas99] T. Sasamoto. One-dimensional partially asymmetric simple exclusion process with open boundaries : orthogonal polynomials approach. *J. Phys. A*, 32(41) :7109–7131, 1999. [6](#), [8](#)
- [SCc08] The Sage-Combinat community. Sage-Combinat : enhancing Sage as a toolbox for computer exploration in algebraic combinatorics, 2008. <http://combinat.sagemath.org>. [9](#)
- [Sch99] Schütz, G. M. Non-equilibrium relaxation law for entangled polymers. *Europhys. Lett.*, 48(6) :623–628, 1999. [6](#)
- [Slo] N. J. A. Sloane. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. <http://oeis.org>. [134](#), [151](#), [199](#), [243](#), [252](#), [257](#)
- [Spi70] F. Spitzer. Interaction of Markov processes. *Advances in Math.*, 5 :246–290 (1970), 1970. [5](#)
- [SS94] S. Sandow and G. Schütz. On  $U_q[\text{SU}(2)]$ -symmetric driven diffusion. *Europhys. Lett.*, 26(1) :7–12, 1994. [6](#)
- [Sta12] R. P. Stanley. *Enumerative combinatorics. Volume 1*, volume 49 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2012. [21](#), [27](#)
- [SW98] M. Schreckenberg and D.E. Wolf. *Traffic and granular flow '97 : Gerhard-Mercato-Universität Duisburg, Germany, 6-8 October 1997*. Springer, 1998. [6](#)
- [SW07] E. Steingrímsson and L. K. Williams. Permutation tableaux and permutation patterns. *J. Combin. Theory Ser. A*, 114(2) :211–234, 2007. [44](#), [72](#), [124](#)
- [SW14] T. Sasamoto and L. Williams. Combinatorics of the asymmetric exclusion process on a semi-infinite lattice. *J. Comb.*, 5(4) :419–434, 2014. [59](#)
- [SZ82] L. W. Shapiro and D. Zeilberger. A Markov chain occurring in enzyme kinetics. *J. Math. Biol.*, 15(3) :351–357, 1982. [7](#)
- [Uch08] M. Uchiyama. Two-species asymmetric simple exclusion process with open boundaries. *Chaos Solitons Fractals*, 35(2) :398–407, 2008. [7](#), [97](#), [99](#), [100](#)
- [USW04] M. Uchiyama, T. Sasamoto, and M. Wadati. Asymmetric simple exclusion process with open boundaries and Askey-Wilson polynomials. *J. Phys. A*, 37(18) :4985–5002, 2004. [5](#), [6](#), [8](#), [48](#), [53](#)
- [Vie85] X. G. Viennot. A combinatorial theory for general orthogonal polynomials with extensions and applications. In *Orthogonal polynomials and applications (Bar-le-Duc, 1984)*, volume 1171 of *Lecture Notes in Math.*, pages 139–157. Springer, Berlin, 1985. [8](#)
- [Vie86] X. G. Viennot. Heaps of pieces. I. Basic definitions and combinatorial lemmas. In *Combinatoire énumérative (Montreal, Que., 1985/Quebec, Que., 1985)*, volume 1234 of *Lecture Notes in Math.*, pages 321–350. Springer, Berlin, 1986. [223](#), [234](#)
-

## 7. Bibliographie

---

- [Vie08] X. G. Viennot. Alternative tableaux, permutations and partially asymmetric exclusion process. institut Isaac Newton, vidéo and transparents d'une présentation de l'atelier "Statistical-Mechanics and Quantum-Field Theory Methods in Combinatorial Enumeration", Avril 2008. [7](#), [44](#), [119](#), [125](#)
- [Vie13] X. G. Viennot. Algebraic combinatorics and interactions : the cellular ansatz. Cours donné à l'IIT de Bombay, Janvier et Février 2013. [7](#), [41](#), [97](#), [158](#)
- [YZ17] S. H. F. Yan and R. D. P. Zhou. Refined Enumeration of Corners in Tree-like Tableaux. *ArXiv e-prints*, January 2017. [123](#), [138](#), [145](#), [150](#)



## Index

<i>Symbols</i>	
$(X_1, \dots, X_d)$	216
$(a; q)_n$	1
$(e_1, \dots, e_d)$	216
$(q)_n$	1
$E^{\mathbb{N}}$	1
$Pois$	134
$[[i, j]]$	1
$[n]_q!$	1
$[n]_q$	1
$[n]_{q,u}$	1
$AB$	25
$\mathfrak{B}$	200
$ANA(AB)$	165
$\mathfrak{G}$	171
$\mathfrak{N}$	171
$\mathfrak{N}_{d,k}$	213
$\mathfrak{G}_{d,k}$	213
$\mathcal{A}_{\binom{d}{k}}$	204
$\mathbb{B}$	167
$\mathbb{B}\mathfrak{G}$	180
$B$	168
$B_{\alpha,\beta}$	175
$B_q$	182
$CE$	197
$CO$	132
$CV_{\alpha,\beta}$	146
$CV_{1,\beta}$	146
$CV_{1,1}$	146
$CV_{\alpha,1}$	146
$\mathcal{E}\mathcal{D}_n$	132
$\mathcal{E}\mathfrak{B}_n$	145
$\mathcal{E}\mathfrak{B}_n^{Sym}$	150
$\mathfrak{I}\mathfrak{B}_n$	128
$\mathfrak{I}\mathfrak{B}_n^{Sym}$	129
$M$	207
$M$	208
$\mathfrak{S}_n$	20
$QANA$	167
$QANA(AB)$	167
$QANA_D$	167
$QANA_{d,k}$	207
$QANA_{d,k}(A)$	207
$QANA_{d,k,\pi}$	207
$QANA_G$	167
$Q\mathfrak{S}$	179
$S_2$	16
$S_{2,q}$	17
$\mathcal{TA}_{2n}^{Sym}$	126
$\mathcal{TB}$	127
$\mathcal{TB}^{Sym}$	128
$\mathcal{TB}_n$	127
$\mathcal{TB}_n^{Sym}$	128
$TE^B$	79
$TE^{B_{\alpha\beta}}$	77, 79
$TE^{B_{\alpha\delta}}$	78, 79
$TER$	106
$TER_{(n+r,r)}$	106
$TE_n^B$	79
$TE_n^{B_{\alpha\beta}}$	79
$TE_n^{B_{\alpha\delta}}$	79
$\mathcal{TP}_n$	124
$\mathcal{TP}_n^{Sym}$	125
$\Theta$	254
$Z_{(n+r,r)}$	107
$Z_{f_n}$	46
$Z_{f_{n,r}}$	99
$\emptyset_D$	165
$\emptyset_G$	165
$\alpha/\gamma, \alpha/\delta, \beta/\gamma, \beta/\delta$	55
$\emptyset_\pi$	206
$\zeta$	199
$\varphi$	186
$\theta$	197
$\psi$	187, 189
$\omega$	198
$\binom{n}{k}_q$	1
carte	235
co	132
c	31, 139



$ci$	31
$crd$	128
$cr$	128
$cv$	145
$dx_\pi$	208
$dg_D$	160
$dg_G$	160
$dg_1 \times \cdots \times dg_d$	204
$dg_i$	204
$\Pi_{d,k}$	204
$eq$	185
$hri$	237
$imaj$	21
$\int d_q$	182
$\int \sigma$	179
$\int_\pi$	208
$inv$	21
$\psi_{\alpha\beta}$	76
$\psi_{\alpha\gamma}$	75
$\psi_{\alpha\delta}$	76
$\left[ \begin{smallmatrix} x^n \\ n! \end{smallmatrix} \right]$	15
$li$	237
$\mathbb{1}$	1
$\mathcal{C}(P, \pi)$	216
$\{\bullet, \bullet, \circ\}_r^{n+r}$	98
$\{\bullet, \bullet, \circ\}_I^{n+r}$	102
$P_{\alpha,\beta}$	175
$P_{q,S}$	179
$\partial_\pi$	208
$\partial_{x,q}$	182
$\sigma_D$	178
$P_{d,k}$	208
$\sigma_G$	178
$pg$	128
$ph$	128
$ph^{\text{sym}}$	128
$sb_D$	174
$sb_G$	174
$s_D$	162
$s_\pi$	204
$s_G$	162
$std$	20
$type$	57
$\zeta$	237, 238
$t_{i,j}$	108
$\mathbb{N}$	1
$\mathbb{Q}$	1
$\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$	1
$\mathbb{Q} < x_1, \dots, x_n >$	1
$\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$	1

## A

algorithme d'insertion	
tableau escalier	60
tableau escalier de type $B$	80
tableau escalier rhombique	110
<i>ansatz</i> matriciel	99
arête	24
arbre	23
$m$ -aire	24
chemin	24
hauteur	24
racine	23
sommet	23
ancêtre	23
descendant	24
feuillé	199
fils	23
père	23
sous-arbre	23
arbre $\binom{d}{k}$ -aire	
$(d, k)$ -directions	204
ordre total	205
$(d, k)$ -uplets	204
direction	204
arbre $\binom{d}{k}$ -aire vide de type $\pi$	206
dimension géométrique	204
sommet de type $\pi$	204
arbre bicolore et bidécroissant	192
arbre binaire	25
équerre	185
branche droite	185
branche gauche	185
racine	185
équerre racine	185
branche droite	184
branche gauche	184
formule des équerres	27
parcours postfixe droit des sommets	
droits	178
parcours postfixe gauche des sommets	
gauches	178
sommet	
droit	162
gauche	162
type	162
sous-arbre droit	25
sous-arbre gauche	25
arbre binaire décroissant	26
forme	26
arbre non-ambigu	160, 162
arbre non-ambigu vide droit	165
arbre non-ambigu vide gauche	165





## 7. Index

---

<i>S</i>	
séquence.....	18
série génératrice	
exponentielle.....	4, 15
ordinaire.....	4
sequence	
primitive.....	18
standardisation.....	20
statistique.....	4
structure.....	14
étiquetée.....	14
triviale.....	14
symétrie	
C.....	46
CP.....	46
P.....	46
 <i>T</i>	
table d'inversions.....	69
colorée.....	69
tableau.....	31
tableau alternatif.....	125
cellule libre.....	126
colonne libre.....	126
ligne libre.....	126
symétrique.....	126
tableau boisé.....	126
croisement.....	128
point gauche.....	128
point haut.....	128
symétrique.....	128
taille.....	127
tableau de permutation.....	124
0 restreint droit.....	124
1 haut.....	124
1 superflu.....	124
de type <i>B</i> .....	125
ligne non restreinte.....	124
tableau escalier.....	55
$\alpha/\delta$ .....	67
de type <i>B</i> .....	87
$\beta/\gamma$ .....	67
de type <i>B</i> .....	87
de type <i>B</i> .....	77
$B_{\alpha\beta}$ .....	77
$B_{\alpha\delta}$ .....	78
poids.....	56
type.....	57
tableau escalier rhombique.....	106
$\alpha/\delta$ .....	117
$\beta/\gamma$ .....	117
 <i>U</i>	
ultimement périodique.....	250
ligne de type $\alpha/\gamma$ .....	108
ligne de type $\beta/\delta$ .....	108
taille.....	106
tuile spéciale.....	114
théorie de Pólya.....	18
transformation fondamentale.....	21
type	
<i>A</i> .....	22
<i>B</i> .....	22