



HAL
open science

Jeux à objectif compétitif sur les graphes

Simon Schmidt

► **To cite this version:**

Simon Schmidt. Jeux à objectif compétitif sur les graphes. Arithmétique des ordinateurs. Université Grenoble Alpes, 2016. Français. NNT : 2016GREAM085 . tel-01681222v1

HAL Id: tel-01681222

<https://theses.hal.science/tel-01681222v1>

Submitted on 11 Jan 2018 (v1), last revised 12 Jan 2018 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Mathématiques-Informatique**

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

Simon Schmidt

Thèse dirigée par **Gravier Sylvain**

préparée au sein de l' **Institut Fourier**
et de l'école doctorale **MSTII**

Jeux à objectif compétitif sur les graphes

Thèse soutenue publiquement le **15 décembre 2016**,
devant le jury composé de :

Me Dominique Duval

Professeur des universités émérite, Université Grenoble Alpes, Présidente

M. Éric Sopena

Professeur, Université de Bordeaux, Rapporteur

M. Olivier Togni

Professeur, Université de Bourgogne, Rapporteur

M. Éric Duchêne

Maître de conférence, Université de Lyon, Examineur

M. Michel Mollard

Chargé de recherche, CNRS-Université Grenoble Alpes, Examineur

M. Sylvain Gravier

Directeur de recherche, CNRS-Université Grenoble Alpes, Directeur de thèse



Remerciements

Sylvain, c'est à toi qu'il revient d'ouvrir le bal pour m'avoir encadré et supporté durant ces trois années de thèse. Tu m'as souvent donné de bons conseils, même si je ne les ai pas toujours suivi ... Tu as su me laisser la liberté dont j'avais besoin, tout en étant disponible pour répondre à mes questions. Je garderai de très bons souvenirs de nos séances de travail, mais aussi de nos discussions qui, de recettes échangées en débats politiques, s'éternisaient souvent !

J'adresse ensuite mes remerciements à Éric S. et Olivier, leur lecture attentive du manuscrit et les corrections suggérées ont grandement amélioré celui-ci. Je remercie également Dominique, Éric D, et Michel d'avoir gentiment accepté de faire partie de mon jury.

J'ai eu la chance de pouvoir travailler six mois à l'université de Ljubljana. La vie là-bas est fantastique et je remercie celles et ceux qui m'y ont accueilli, et avec qui j'ai également pu travailler. Hvala lepa Sandi, Gašper, David, Jernej, Tilen, Veronika.

Je remercie aussi mes autres coauteurs, Gabriel, Victor, Kahina et Souad. Un merci supplémentaire à Souad pour m'avoir régulièrement ravitaillé en pâtisseries algériennes ! Les semaines de travail de l'ANR GAG ont toujours été des moments conviviaux, merci à tous ceux qui y ont participé.

Grâce à Sylvain, j'ai pu durant ces trois ans m'investir dans Maths à Modeler. Cela m'a beaucoup appris et m'a souvent permis de donner plus de sens à mon activité mathématique. Les activités Maths à Modeler font partie de mes meilleurs souvenirs de thèse. Mamiens de Grenoble et d'ailleurs, vous y êtes pour beaucoup. Soyez en ici chaleureusement remerciés !

Quand la motivation n'est plus là, heureusement qu'il y a les copains pour donner envie de se bouger jusqu'au labo. Merci à Binbin, Thibault, Étienne, Julien, Guillaume, Mickaël, Luc, Alejandro, Clément et à tous les autres que j'ai croisé un peu moins souvent. Ça part en gros remerciements pour Clément, compagnon de thèse et de Taluva, fidèle au poste depuis trois ans !

Pour finir, un immense merci à mes parents sans qui toutes ces études n'auraient pas été possibles et à Maiwenn pour partager ma vie chaque jour.

Introduction

I think that it is a relatively good approximation to truth – which is much too complicated to allow anything but approximations – that mathematical ideas originate in empirics, although the genealogy is sometimes long and obscure. But, once they are so conceived, the subject begins to live a peculiar life of its own and is better compared to a creative one, governed by almost entirely aesthetical motivations, than to anything else and, in particular, to an empirical science. [...] As a mathematical discipline travels far from its empirical source [...] it is beset with very grave dangers. It becomes [...] more and more purely l'art pour l'art [...] [It may] develop along the line of least resistance, that the stream, so far from its source, [...] will become a disorganized mass of details and complexities. In other words, at a great distance from its empirical source, [...] a mathematical subject is in danger of degeneration.

J.R. Newman, *The Mathematician*.

Toute philosophie, même et surtout si elle est étayée par des savoirs scientifiques complexes, des oeuvres d'art novatrices, des politiques révolutionnaires, des amours intenses, est une métaphysique du bonheur, ou bien elle ne vaut pas une heure de peine. Car pourquoi imposer à la pensée et à la vie les redoutables épreuves de la démonstration, de la logique générale des pensées, de l'intelligence des formalismes, de la lecture attentive des poèmes récents, de l'engagement risqué dans des manifestations de masse, des amours sans garantie, si ce n'est parce que tout cela est nécessaire pour qu'existe enfin la vraie vie, celle dont Rimbaud dit qu'elle est absente et dont nous soutenons, nous philosophes, que rebutent toutes les formes du scepticisme, du cynisme, du relativisme et de la vaine ironie du non-dupe, qu'absente elle ne peut jamais l'être totalement, la vraie vie ?

A. Badiou, *Métaphysique du bonheur réel*.

“Just the place for a Snark !” the Bellman cried,
 As he landed his crew with care ;
 Supporting each man on the top of the tide
 By a finger entwined in his hair.

“Just the place for a Snark ! I have said it twice :
 That alone should encourage the crew.
 Just the place for a Snark ! I have said it thrice :
 What I tell you three times is true.”

L. Carroll, The hunting of the Snark.

Écrire les prémices de cette introduction n’est pas pour moi un exercice facile. En effet, ces lignes me semblent devoir s’adresser à un public plus large que les seuls spécialistes du domaine, ou même les seuls mathématiciens professionnels. La question de la motivation, du pourquoi, de l’utilité, voire de la légitimité se fait ainsi rapidement lancinante. Comme le rappelle la citation de J.R. Newman, la généalogie d’un problème mathématique l’ancre, même si parfois il faut remonter loin en arrière, dans un réel empirique. Même si ensuite les branches de cet arbre semblent souvent s’envoler vers un ciel platonicien, une justification courante de la pratique mathématique est l’espoir que certains de ces rameaux portent des fruits, qui en retombant au sol finiront par nous nourrir ; attention nous savons tous le risque à croquer dans la pomme... Non pas que je défende une pratique des mathématiques qui soit uniquement l’art pour l’art, ou une activité transcendante, proche de l’expérience mystique comme le suggère Badiou, mais plutôt qu’il me semble que défendre aujourd’hui les mathématiques pour les applications techniques qu’elles engendrent ou encore les points de PIB que nous leurs attribuons, c’est contribuer au bluff technologique que dénonçait Ellul [34] et rajouter trop de lignes à l’hagiographie déjà bien fournie du système technicien, que Latouche [68] nomme la Mégamachine. Mégamachine autonome entraînant une gadgétisation effrénée de nos vies colonisées par les smart-bidules en tout genre, et préférant à toutes solutions politiques ou sociales, l’efficacité quantifiable des réponses techniques (et il faut le dire, étrangement lucratives pour certains). Non, je préfère défendre les mathématiques comme un lieu où nous pouvons encore ménager un espace de créativité, de spontanéité et de liberté ; comme une activité culturelle qui traverse les activités humaines, depuis la prose de Borgès ou de Wallace, jusqu’à la philosophie d’un Tarski, d’un Brouwer ou d’un Wittgenstein. Défendons aussi les mathématiques pour ce qu’elles auront surtout été pour moi, le plaisir un peu enfantin de l’exploration d’un monde étrange, d’une chasse au Snark, que cette thèse tente tant bien que mal de retracer. Recoiffons nous et regardons donc où nous venons de débarquer...

Un graphe est un objet mathématique qui peut s’appréhender de manière simple et visuelle, comme un ensemble de points, les sommets, reliés entre eux par des

traits, les arêtes. Deux sommets reliés par une arête sont alors dits adjacents ou voisins. Malgré, ou grâce à cette simplicité, l'objet graphe permet de modéliser de nombreux problèmes qui proviennent de situations concrètes, réseaux de transports, de communication ou sociaux, graphe du web, interactions entre gènes, et cetera, ou de problématiques internes comme le stockage et la représentation de données en informatique. Nous ne nous appesantirons pas sur le sujet. L'idée de la modélisation est cependant toujours plus ou moins la même ; les sommets du graphes représentent les éléments du réseau (villes, antennes relais, personnes, gènes) et une arête existe entre deux éléments qui sont en interaction (villes reliées par une route, lien entre deux pages web, amitié).

Un premier type de problèmes qui sont devenus centraux en théorie des graphes concernent la coloration, ou de manière équivalente la partition de l'ensemble des sommets selon certaines propriétés. Historiquement, l'une des premières questions concernant la coloration des sommets d'un graphe remonte à la *Conjecture des quatre couleurs*, proposée par Francis Guthrie en 1852. Celle-ci affirme que n'importe quelle carte divisée en zones (des pays par exemple) peut être coloriée avec quatre couleurs, de sorte que deux zones partageant une frontière commune n'aient pas la même couleur. En termes de graphes, le problème de coloration propre des sommets consiste à trouver le plus petit nombre de couleurs tel que les sommets du graphe peuvent être coloriés sans que deux sommets adjacents n'aient la même couleur. Ce nombre est connu sous le nom de nombre chromatique du graphe. La simplicité apparente de l'énoncé de la Conjecture des quatre couleurs cache un problème redoutable, qui n'a été résolu qu'en 1976 par Appel, Haken et Koch. Le désormais *Théorème des quatre couleurs*, qui dans la terminologie moderne affirme que tout graphe planaire est proprement 4-coloriable, est le premier résultat mathématique dont la preuve dépend de nombreuses vérifications par ordinateur. Ce problème aura également été un moteur formidable pour l'étude des graphes en général. Kempe [57], dans une preuve qui s'avérera finalement erronée, introduit le concept de chaîne de Kempe, qui sera maintes fois repris ensuite, en particulier dans la preuve finale d'Appel et al.. Pour un autre exemple de saveur plus algébrique, citons la tentative de preuve de Birkhoff [7] via l'introduction du polynôme chromatique d'un graphe. Le problème se réduit alors à l'étude des racines d'un certain type de polynômes. Cette piste de recherche infructueuse a cependant donné naissance à d'importants travaux de recherches concernant ce nouvel invariant algébrique (voir [82] pour une introduction historique au sujet). Le problème de coloration propre des sommets a connu depuis un grand nombre de variantes, et de nombreux problèmes d'optimisation se sont révélés avoir une traduction en terme de coloration. Nous nous intéresserons dans cette thèse au problème de coloration d -impropre ; chaque sommet peut être adjacent à au plus d sommets ayant la même couleur que lui. En termes de partitions, il s'agit de partitionner le graphe en sous-ensembles qui induisent des sous-graphes de degré au plus d . Il s'agit d'une généralisation naturelle du problème de coloration propre,

qui peut être compris comme l'introduction d'un facteur d'erreur, d'une marge de tolérance.

D'autres problématiques de coloration/partition ne sont pas directement reliées à des propriétés correspondant à l'adjacence entre sommets du graphe. Celle que nous présentons maintenant et qui nous intéressera également dans cette thèse concerne plus des propriétés globales que locales. Lorsque nous dessinons un graphe, le cycle de la Figure 1 (a) ou le graphe de la Figure 1 (b) par exemple, nous ne pouvons pas distinguer les sommets les uns des autres, car nous pouvons bouger ceux-ci sans modifier l'allure du graphe. Pour le cycle, nous pouvons effectuer soit une rotation soit une symétrie axiale. Pour l'autre graphe, nous pouvons par exemple inter-changer le cycle intérieur avec celui à l'extérieur. De tels mouvements, qui déplacent les

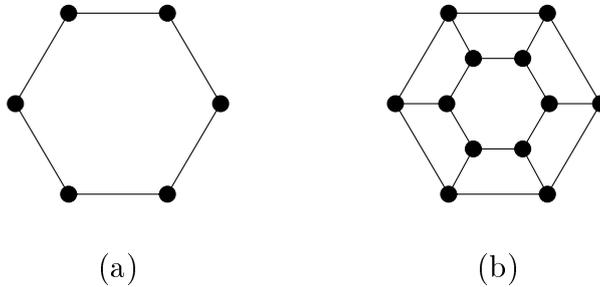


FIGURE 1 – Graphes ayant des automorphismes.

sommets sans impacter le dessin du graphe sont appelés des automorphismes du graphe. La deuxième coloration qui nous intéressera vise à distinguer les sommets d'un graphe malgré ces automorphismes. Le problème original se présente sous la forme d'une énigme mathématique proposée par Rubin en 1979 dans le "Journal of Recreational Mathematics" [76]. Elle s'énonce ainsi : « Un professeur possède un trousseau (circulaire) de n clés qu'il ne peut pas distinguer de visu. Pour pouvoir les reconnaître, il décide de coller une gommette de couleur sur chacune d'elles. De combien de couleurs de gommette a-t-il besoin pour les distinguer toutes ? » La traduction mathématique du problème est la suivante. De combien de couleurs avons nous besoin pour pouvoir colorier les sommets d'un cycle afin que lorsque nous bougeons ceux-ci selon un automorphisme, la coloration change (au moins un sommet d'une certaine couleur est envoyé vers un sommet d'une autre couleur). Ce type de coloration se généralise à tous les graphes et est appelé coloration distinguante. Pour un cycle avec n sommets, le nombre minimal de couleurs pour obtenir une telle coloration vaut 3, si $n = 3, 4, 5$ et vaut seulement 2, si $n \geq 6$. La solution est présentée dans la Figure 2. Le nombre minimal de couleurs requis pour obtenir une coloration distinguante est le nombre distinguant du graphe.

Le dernier problème qui nous intéressera est un problème dit de domination. Il

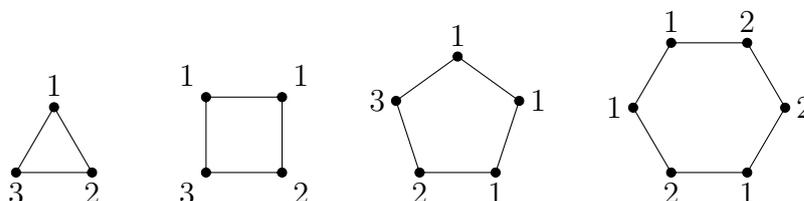


FIGURE 2 – Solution du problème des clés de Rubin.

ne s'agit pas ici de partitionner le graphe en un minimum de sous-graphes ayant telle ou telle propriété, mais plutôt de trouver le plus petit sous-ensemble de sommets vérifiant certaines exigences. Un ensemble de sommets est dit dominant si tous les autres sommets du graphe sont reliés à au moins un des sommets de cet ensemble. Ce problème peut être vu comme un problème de surveillance, ou de dissémination/récupération d'information. Les sommets de l'ensemble dominant sont alors les lieux où placer les dispositifs de surveillance/ de collecte d'informations car tous les autres endroits sont directement reliés à l'un de ceux-ci. Par souci d'efficacité, l'objectif est alors de construire un ensemble dominant de taille aussi petite que possible. Cette taille minimale est appelée le nombre dominant du graphe.

Les trois questions que nous venons d'introduire sont des problèmes d'optimisation discrète. D'optimisation car nous cherchons le minimum de couleurs ou de sommets à sélectionner pour parvenir à un certain objectif; discrète car les objets que nous considérons, les graphes, sont des objets finis. Tous ces problèmes sont donc calculables, un ordinateur peut toujours y répondre si nous lui laissons le temps d'énumérer toutes les possibilités et de choisir la ou les meilleures. Ceci ne peut cependant pas être considéré comme une résolution du problème pour au moins deux raisons. Premièrement, le temps requis pour ces calculs lorsque la taille du graphe augmente explose (supérieur à l'âge de l'univers). Même si nous n'avons pas de preuve formelle que ces calculs ne pourraient pas être drastiquement améliorés, la théorie de la complexité fournit de bons arguments en ce sens. Très grossièrement, un problème est dit NP-complet si pour le résoudre nous ne savons pas mieux faire qu'énumérer un ensemble de possibilités très grand, et si l'existence d'une solution efficace à ce problème permettrait de résoudre tous les autres problèmes de ce type. Il semble alors peu probable (et il y a de vrais arguments derrière cela), qu'une solution efficace existe pour ce type de problème. Transformer cet argumentaire en preuve est l'objet de l'un des problèmes du millénaire parrainés par le Clay Institute, et connu sous le nom de $P = NP$. Les problèmes de coloration propre et de domination sont NP-complets, tandis que pour la coloration distinguante, nous supposons aussi qu'il s'agit d'un problème très difficile, même si les arguments dans ce sens sont un peu moins évidents. Ce problème étant effectivement relié au problème

de l'existence d'un isomorphisme entre deux graphes, qui est le plus emblématique des problèmes dans NP, qui ne semble pas être résoluble efficacement mais dont nous ne savons pas s'il est complet. Deuxièmement, il semble raisonnable d'attendre d'une solution à ce type de problème qu'elle fournisse des explications structurelles sur ce qui fait qu'un graphe va être facilement coloriable/dominable. Critère qu'un algorithme d'énumération ne remplit *a priori* jamais.

Ces trois problèmes constituent donc toujours de vastes champs de recherche, avec de nombreux problèmes ouverts. Dans cette thèse, nous étudions ceux-ci par le biais des jeux combinatoires. Un jeu combinatoire est un jeu à deux joueurs, sans hasard et sans information cachée. Citons par exemple le jeu de Go, le jeu de Hex ou encore le jeu de Nim que nous pouvons retrouver dans le film d'Alain Resnais « L'année dernière à Marienbad ». L'idée consiste à dynamiser ces problèmes d'optimisation en en faisant des jeux combinatoires que nous appellerons jeux à objectif compétitif sur les graphes. Prenons par exemple le problème de domination. Imaginons que le graphe représente un territoire que nous désirons protéger des risques d'incendie. Nous cherchons donc un ensemble où installer les casernes de pompiers. Afin qu'aucune ville ne soit trop éloignée d'une caserne, cet ensemble doit correspondre à un dominant du graphe représentant le territoire. Dans l'idéal le nombre minimal de casernes à installer correspond au nombre dominant du graphe. Mais supposons maintenant que les emplacements des casernes soient décidés à tour de rôle par deux capitaines des soldats du feu. L'un qui veut bien faire son travail cherche à minimiser leur nombre, tandis que l'autre, qui a des accointances avec l'entreprise chargée de les construire, voudrait qu'il y en ait le plus possible. Le nombre de casernes nécessaires dans ce cas correspond à une variante ludique du nombre dominant. C'est ce type de jeux que nous appelons jeu à objectif compétitif sur les graphes et que nous étudions dans cette thèse. Chacun de ces jeux permet de définir un analogue ludique du paramètre d'optimisation à partir duquel il est construit. Le premier jeu de ce type à avoir été introduit est le jeu de coloration, qui se rapporte au problème de coloration propre. L'invariant ludique associé est connu sous le nom de nombre chromatique ludique. Ce jeu avait été introduit par Brams dans les années 1980 dans l'espoir de trouver une preuve alternative du Théorème des quatre couleurs.

Donnons quelques arguments en faveur de l'introduction et de l'étude de ces paramètres ludiques. Il semble illusoire de penser que ces versions ludiques sont de bons modèles pour prendre en compte des survenues d'erreurs, des aléas, qui seraient alors représentés par le joueur ne désirant pas obtenir une valeur du paramètre optimale. Le plus gros obstacle étant l'alternance obligatoire des tours qui est bien loin de correspondre à la survenue aléatoire d'incidents. Cependant, nous pouvons espérer que notre approche ludique, qui dynamise et temporalise la vision portée sur le paramètre, puissent servir de vivier d'idées à ceux désirant étudier réellement ces phénomènes d'erreurs. En se plongeant dans l'étude de ces paramètres ludiques, il

apparaît clairement qu'ils possèdent des propriétés contre-intuitives, qui nous forcent à bouleverser le regard que nous pouvions porter sur les invariants classiques. De plus, la perte de contrôle que génère l'introduction d'un adversaire nous pousse à nous questionner plus profondément sur la structure des colorations/des ensembles dominants que nous connaissions et ceci même pour des graphes pour lesquels la valeur des invariants classiques est bien connue. Ce changement de point de vue radical me semble être l'apport le plus important des jeux à objectif compétitif. Par exemple, Kierstead et Kostochka [58] ont pu proposer un algorithme efficace pour un problème (non-ludique) de "graph packing" grâce au jeu de coloration. De leur côté, Bujtás et Klavžar [19] ont amélioré d'anciennes bornes supérieures sur le nombre dominant des graphes en utilisant un algorithme fortement inspiré de celui proposé par Bujtás pour l'étude du jeu de domination. Pour terminer, notons que des expérimentations sur ordinateur facilitent souvent la formulation de conjecture pour ces problématiques ludiques. Ces problèmes mixent donc facilement études théoriques et implémentation sur machine, ce qui peut en faire un bon réservoir de sujets de recherche pour des étudiants dès les années de licence. Dans une perspective didactique, nous pourrions faire l'hypothèse que la dimension ludique favorise la dévolution, faisant de ces thématiques de bonnes candidates pour l'élaboration de situations-recherches ou de sujets de recherche pour collégiens/lycéens dans un cadre comme Maths en Jeans par exemple.

Dans cette thèse nous étudions donc trois jeux à objectif compétitif sur les graphes. Le premier chapitre présente quelques notions préliminaires ainsi qu'une définition générale de ce que sont les jeux de ce type.

Dans le Chapitre 2, nous nous intéressons à une variante du jeu de coloration, le jeu de coloration d -impropre. Plus particulièrement, nous considérons le cas où d vaut 1, c'est-à-dire que les deux joueurs construisent une coloration où un sommet peut avoir au plus un voisin partageant sa couleur. L'invariant ludique associé est le nombre chromatique ludique 1-impropre, $\chi_g^{(1)}$. Le jeu de coloration d -impropre a été introduit par Chou *et al.* [23] en 2003. Ils ont en particulier montré que pour la classe des forêts, le nombre chromatique ludique 1-impropre peut être borné supérieurement par 4 et que cette borne est serrée. Notre résultat principal consistera à montrer que cette borne reste serrée même si nous considérons une famille plus restreinte de forêts, la famille des chenilles. Nous étudierons également ce jeu sur certains graphes bipartis, ce qui nous permettra de clarifier la relation qui peut exister entre le nombre chromatique ludique 1-impropre et le nombre chromatique ludique classique. Nous proposons également quelques règles de réductions qui facilitent l'étude du jeu pour les graphes ayant plusieurs composantes connexes et rendent plus aisées les preuves inductives ; ce qui nous permettra de calculer facilement la valeur de $\chi_g^{(1)}$ pour les chemins et les cycles. L'ensemble de ces travaux a été mené en collaboration avec Sylvain Gravier et Victor Lage-Pesoa. Un article sur le sujet est en cours de rédaction.

Dans le Chapitre 3, nous nous intéressons au jeu de domination. Introduit aux alentours de 2010 par Brešar et al. [14], il a été énormément étudié depuis. J'ai eu l'occasion d'être initié à cette thématique lors d'un séjour de recherche en Slovénie auprès de Sandi Klavžar. Ce séjour a notamment donné lieu à un travail concernant la caractérisation des graphes ayant de petits nombres dominants ludiques (deux ou trois) et un diamètre extrémal. Ces caractérisations nous ont également permis d'obtenir de meilleurs algorithmes de reconnaissance de ces graphes. Ces travaux réalisés conjointement avec Gašper Košmerlj et Sandi Klavžar ont été publiés dans *Applicable Analysis and Discrete Mathematics* [63] et l'*Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics* [62]. Nous commencerons par présenter ces résultats, puis nous nous consacrerons à l'étude de la plus fameuse conjecture du domaine, la 3/5-conjecture. Notre contribution a consisté à améliorer une approche proposée par Bujtás [17] afin de montrer cette conjecture pour une plus large classe de forêts. Ce travail a été publié dans *Discrete Mathematics* [78].

Finalement, dans le Chapitre 4, nous présentons un nouveau jeu à objectif compétitif, le jeu de coloration distinguante ou simplement jeu distinguant, construit à partir de la problématique de la coloration distinguante présentée plus haut. Les premières études autour de ce jeu se sont révélées prometteuses et plusieurs questions ouvertes intéressantes ont surgi. La première partie de nos travaux se focalise sur les conditions faisant que l'invariant ludique associé ne soit pas infini. Nous montrons que l'absence d'automorphismes d'ordre deux est une condition nécessaire et conjecturons qu'elle est aussi suffisante pour que l'invariant ludique soit fini. Nous avons pu démontrer cette conjecture dans le cas où le groupe d'automorphisme est commutatif. La deuxième partie est consacrée à la définition et l'étude de la classe des graphes involutifs, pour lesquels nous avons pu borner le nombre distinguant ludique en fonction du nombre distinguant classique. Cette classe contient en particulier les cycles pairs et les hypercubes, deux types de graphes pour lesquels nous avons pu calculer la valeur exacte. Une dernière grosse partie de nos travaux sur le sujet concerne les produits cartésiens de graphes. Les deux résultats principaux obtenus sont des conditions suffisantes sur la taille des facteurs pour que le nombre distinguant ludique du produit de graphes complets soit fini, et la valeur exacte de celui-ci dans le cas d'un produit de multiples cycles tous différents. La grande majorité de ces travaux sont le fruit d'une collaboration avec Sylvain Gravier, Kahina Meslem et Souad Slimani. Deux pré-publications sont disponibles en ligne [42, 43]. La première devrait être publiée dans *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science* après quelques corrections.

Chapitre 1

Définitions préliminaires

Todd, trust math. As in Matics, Math E. First-order predicate logic. Never fail you. Quantities and their relation. Rates of change. The vital statistics of God or equivalent. When all else fails. When the boulder's slid all the way back to the bottom. When the headless are blaming. When you do not know your way about. You can fall back and regroup around math. Whose truth is deductive truth. Independent of sense or emotionality. The syllogism. The identity. Modus Tollens. Transitivity. Heaven's theme song. The night light on life's dark wall, late at night. Heaven's recipe book. The hydrogen spiral. The methane, ammonia, H₂O. Nucleic acids. A and G, T and C. The creeping inevitability. Caius is mortal. Math is not mortal. What it is is : listen : it's true.

D.F. Wallace. Infinite Jest.

Dans ce premier chapitre nous introduisons les objets et concepts mathématiques sur lesquels porteront les questionnements développés dans cette thèse. Il s'agit essentiellement de théorie des graphes et de quelques rudiments de théorie des groupes. Nous ne prétendons pas ici à une quelconque exhaustivité. Pour les lecteurs désireux d'en savoir plus nous recommandons la lecture de [28] pour la théorie des graphes et de [56] pour la théorie des groupes. Bien que les jeux sur les graphes que nous étudions dans cette thèse soient des jeux combinatoires, il se trouve que nous n'utiliserons pas ici la machinerie classique de la théorie associée initiée dans [6, 26]. Cependant, nous retrouverons tout au long des chapitres certaines analogies et techniques de preuve développées pour l'étude de ces jeux. Nous ne présenterons pas ces concepts en détails ici, mais consacrons la Partie 1.4 à une présentation générale des jeux à objectif compétitif sur les graphes, qui se trouvent être au cœur de cette thèse. Aux lecteurs non familiarisés de ce domaine des mathématiques, nous conseillons la

lecture du livre de M. Albert et R. Nowakoski [1] pour une première approche et celle du livre exhaustif de A. Siegel [80] pour une étude approfondie.

1.1 Notions de théorie des groupes.

Dans cette partie, nous donnons brièvement les notations et résultats de théorie des groupes qui seront utiles dans la suite de cette thèse, essentiellement dans le Chapitre 4. Nous considérons que le lecteur est familiarisé avec les définitions de base du domaine. Nous noterons l'opération interne multiplicativement.

Sous-groupe engendré. Si Γ est un groupe, nous notons $\langle g_1, \dots, g_n \rangle$ le sous-groupe de Γ engendré par les éléments g_1, \dots, g_n de Γ .

Produit direct. Le produit direct des groupes Γ et K est le groupe $\Gamma \times K$, dont les éléments sont les couples (g, h) , avec $g \in \Gamma$ et $h \in K$, et dont la loi est définie par $(g, h)(g', h') = (gg', hh')$, pour $g, g' \in \Gamma$ et $h, h' \in K$. Nous notons Γ^n pour $\underbrace{\Gamma \times \dots \times \Gamma}_{n \text{ fois}}$.

Produit en couronne avec le groupe symétrique. Le produit en couronne d'un groupe Γ par le groupe symétrique \mathcal{S}_n sera noté $\Gamma \wr \mathcal{S}_n$. Il est défini ainsi. Les éléments du produit sont les $(n+1)$ -uplets de $\Gamma^n \times \mathcal{S}_n$. et l'opération interne est définie par : pour tout $g_1, g'_1, \dots, g_n, g'_n \in \Gamma, \sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$, $(g_1, \dots, g_n, \sigma)(g'_1, \dots, g'_n, \sigma') = (g_{\sigma'^{-1}(1)}g'_1, \dots, g_{\sigma'^{-1}(n)}g'_n, \sigma\sigma')$. Nous verrons que cette construction sur les groupes permet de décrire les groupes d'automorphisme des produits cartésiens de graphes connexes.

Action de groupe. Une action d'un groupe Γ sur un ensemble X et un morphisme $\phi : \Gamma \rightarrow \text{Bij}(X)$, où $\text{Bij}(X)$ est le groupe des bijections de l'ensemble X . De manière plus imagée, les éléments de Γ bougent les points de X , de sorte que, si nous bougeons les points selon $g \in \Gamma$ puis selon $g' \in \Gamma$, cela revient à bouger les points de X selon $g'g$. Si $\phi(g)(x) = y$, nous dirons que g envoie x sur y .

Un point $x \in X$ est fixé par $g \in \Gamma$ si $\phi(g)(x) = x$. Le *stabilisateur* d'un sommet $x \in X$ est le sous-groupe formé des éléments qui fixent x . Nous le notons Stab_x . Nous dirons qu'un sous-ensemble Y de X est *stable* sous l'action de Γ si pour tout $g \in \Gamma$, $\phi(g)(Y) = Y$.

Une action est *fidèle* si le morphisme est injectif. En d'autres termes, l'élément neutre de Γ est le seul à fixer tous les points de X .

L'*orbite* d'un point x est l'ensemble $\mathcal{O}_x = \{y \in X \mid \exists g \in \Gamma \phi(g)(x) = y\}$. L'ensemble des orbites forme une partition de X . Le cardinal de l'orbite d'un élément $x \in X$ et celui de Γ sont reliés par la formule suivante : $|\mathcal{O}_x| |\text{Stab}_x| = |\Gamma|$. Cela implique notamment que le cardinal d'une orbite divise toujours celui du groupe.

Une action est dite *transitive* si elle ne possède qu'une unique orbite.

Système de blocs. Soit Γ un groupe agissant transitivement sur un ensemble X et notons ϕ cette action. Un *système de blocs* B_1, \dots, B_k est alors une partition de X pour laquelle l'affirmation suivante est vraie. Pour tout $g \in \Gamma$, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, il existe $j \in \{1, \dots, k\}$ tel que $\phi(x)(B_i) = B_j$. En particulier, cela définit une action naturelle de Γ sur l'ensemble des blocs. Remarquons que la transitivité de l'action implique que tous les blocs sont de même taille. Dans cette thèse, nous utiliserons le terme de système de blocs même pour une action non transitive. Dans ce cas nous rajoutons la condition que tous les blocs doivent avoir le même cardinal.

L'ensemble X forme à lui seul un système de blocs que nous dirons trivial. Une action est *imprimitive* si elle possède un système de blocs non-trivial. Dans le cas contraire, elle est dite *primitive*. Les actions imprimitives se révéleront plus faciles à étudier dans le cadre du jeu distinguant (voir Chapitre 4).

1.2 Généralités sur les graphes

Un *graphe* G est un couple (V, E) , où E est l'ensemble des sommets et V est un ensemble de paires de sommets appelés *arêtes*. L'*ordre* d'un graphe désigne son nombre de sommets. Un graphe réduit à un sommet est dit *trivial*. Si u et v sont deux sommets du graphe tels que la paire (u, v) appartient à E , nous dirons que u et v sont *adjacents*, ou encore *voisins*. L'arête (u, v) sera parfois notée simplement uv ou vu . Nous dirons aussi que l'arête uv est incidente à u ou couvre u . Deux arêtes uv et $u'v'$ sont dites *sommet-disjointes* si $\{u, v\} \cap \{u', v'\} = \emptyset$. Un graphe est un objet très visuel et peut être facilement représenté par un dessin. À chaque sommet correspond un point et deux points sont reliés entre eux s'ils représentent des sommets adjacents. Nous dirons qu'un graphe est fini si l'ensemble des sommets est fini (ce qui implique bien sûr que l'ensemble des arêtes est fini). Un graphe est sans boucle, s'il n'existe pas d'arête (u, u) , où u est un sommet du graphe. Dans cette thèse, sauf mention explicite du contraire, les graphes considérés seront finis et sans boucle. Ainsi un sommet n'est jamais son propre voisin.

Complémentaire. Le complémentaire d'un graphe G est le graphe \overline{G} défini par : $V(\overline{G}) = V(G)$ et $e \in E(\overline{G})$ si et seulement si $e \notin E(G)$.

Voisinage et degré. Si u est un sommet d'un graphe G , l'ensemble des voisins de u est noté $N_G(u)$, où plus simplement $N(u)$, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le graphe G . L'ensemble $N_G(u)$ est le *voisinage ouvert* de u dans G . Le *voisinage fermé* de u dans G , noté $N_G[u]$ correspond au voisinage ouvert de u auquel nous ajoutons u lui-même. Encore une fois, si le contexte est clair, nous noterons simplement $N[u]$. Si S est un sous-ensemble de $V(G)$, nous notons $N(S) = \bigcup_{u \in S} N(u)$ et $N[S] = \bigcup_{u \in S} N[u]$.

Le *degré* de u dans G , noté $d_G(u)$ (ou simplement $d(u)$) est égal au nombre de voisins de u dans G ; c'est le cardinal de $N_G(u)$. Un sommet de degré 0 est dit isolé, et un sommet de degré 1 est une *feuille* du graphe ou encore un *sommet pendant*. Le *parent* d'une feuille est son unique voisin. Un sommet dont le degré est égal à l'ordre du graphe moins un est dit *universel*. Un graphe dont tous les sommets ont le même degré k est dit *k -régulier*. Nous notons $\Delta(G) = \max\{d_G(u) \mid u \in V(G)\}$, le degré maximum de G .

Jumeaux. Deux sommets u et v d'un graphe G sont dits *jumeaux* si $N_G(u) = N_G(v)$.

Sous-graphe et sous-graphe induit. Si $G = (V, E)$ est un graphe, un *sous-graphe* $G' = (V', E')$ de G est un graphe tel que V' et E' soit respectivement inclus dans E et V . Nous dirons que G' est un *sous-graphe induit* de G si la condition supplémentaire suivante est vérifiée : pour tout $u, v \in V'$, si $(u, v) \in E$ alors $(u, v) \in E'$. Dans ce cas, nous dirons aussi que G' est le sous-graphe induit par V' . Un graphe est *sans H induit* si aucun de ses sous-graphes n'est isomorphe au graphe H .

Joint. Si G' et G'' sont deux sous-graphes disjoints de G , nous dirons qu'il existe un joint entre G' et G'' si pour tout $u \in V(G')$, $V(G'') \subseteq N(u)$.

Couplage. Un couplage d'un graphe G est un sous-ensemble d'arêtes de G sommet-disjointes. Un couplage est *parfait* si tous les sommets de G sont incidents à une arête de celui-ci.

Distance et connexité. Un *chemin de longueur k* entre deux sommets u et v de G est une suite de sommets tous distincts, $u = u_0, \dots, u_k = v$, telle que pour tout $i \in \{0, \dots, k-1\}$, u_i et u_{i+1} sont adjacents. Un graphe est *connexe* s'il existe un chemin entre n'importe quel couple de sommets. Dans un graphe connexe G , la *distance* entre deux sommets u et v , notée $d_G(u, v)$ (ou simplement $d(u, v)$) est la longueur d'un plus court chemin reliant ces deux points. Les *composantes connexes* d'un graphe sont ses sous-graphes connexes maximaux.

L'*excentricité* d'un sommet u de G est la distance maximale entre ce sommet et un autre sommet du graphe : $\text{ecc}_G(u) = \max\{d_G(u, v) \mid v \in V(G)\}$. Le *diamètre* de G est l'excentricité maximale d'un de ses sommets : $\text{diam}(G) = \max\{\text{ecc}_G(u) \mid u \in V(G)\}$. La *boule* de rayon k et de centre u , notée $B_k^G(u)$, est l'ensemble $\{v \in V(G) \mid d_G(u, v) \leq k\}$. Similairement, la *sphère* de rayon k et de centre u , notée $S_k^G(u)$ est l'ensemble $\{v \in V(G) \mid d_G(u, v) = k\}$. S'il n'y a aucune ambiguïté sur le graphe G , nous l'omettrons dans les notations.

Un sommet $u \in V(G)$ est dit *diamétral* si $\text{ecc}_G(u) = \text{diam}(G)$. Un chemin reliant deux sommets diamétraux est un *chemin diamétral*.

Morphisme, isomorphisme et automorphisme. Un *morphisme* entre deux graphes G et H est une application $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$, qui préserve l'adjacence.

C'est-à-dire : pour tout $u, v \in V(G)$, si $uv \in E(G)$ alors $\phi(u)\phi(v) \in E(H)$. Un *isomorphisme* entre G et H est une bijection $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$, qui préserve l'adjacence et la non-adjacence : pour tout $u, v \in V(G)$, $uv \in E(G)$ si et seulement si $\phi(u)\phi(v) \in E(H)$. Dans ce cas, la bijection réciproque ϕ^{-1} est également un isomorphisme (de H dans G). Un *automorphisme* de G est un isomorphisme de G dans lui-même. L'ensemble des automorphismes de G forme un groupe pour la composition des applications. Nous le notons $\text{Aut}(G)$. L'application identité est notée Id_G ou simplement Id . Le groupe $\text{Aut}(G)$ agit naturellement sur $V(G)$, de manière fidèle. Nous dirons qu'un graphe est *sommet transitif* si cette action est transitive.

Coloration. Une k -coloration des sommets de G est une application $c : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$. Les éléments de $\{1, \dots, k\}$ seront appelés des couleurs. Nous dirons aussi que c est une coloration des sommets de G avec k couleurs. Une k -coloration de G est propre si pour tout $uv \in E(G)$, $c(u) \neq c(v)$. Le *nombre chromatique* d'un graphe G est le plus petit entier k tel qu'il existe une k -coloration propre de G . Nous le notons $\chi(G)$. Pour $d \geq 0$, une k -coloration est *d -impropre* (d -defective en anglais), si chaque sommet possède au plus d voisins ayant la même couleur que lui. Un sommet colorié avec la couleur a et possédant exactement d voisins ayant la même couleur sera dit *a -saturé*, ou simplement *saturé*, si la couleur n'a pas d'intérêt. Le nombre chromatique d -impropre de G , noté $\chi^{(d)}(G)$, est alors le plus petit entier k tel que G possède une k -coloration d -impropre.

Nous étudierons aussi dans cette thèse le concept de coloration distinguante. Cette coloration se démarque des autres car elle est reliée au groupe d'automorphisme du graphe plutôt que directement à des propriétés d'adjacence. Cette coloration étant moins largement connue, nous la présentons dans le Chapitre 4, accompagnée d'un bref état de l'art.

Domination. Un ensemble dominant d'un graphe G est un sous-ensemble de sommet D tel que $N[D] = V(G)$. La taille d'un plus petit ensemble dominant de G est appelé le *nombre dominant* de G . Il sera noté $\gamma(G)$. Nous obtenons facilement la borne supérieure suivante si G est sans sommet isolé : $\gamma(G) \leq \lfloor \frac{V(G)}{2} \rfloor$. Le concept de domination est très étudié et a connu une multitude de variantes. Nous renvoyons au livre suivant pour une étude approfondie du sujet [46].

1.3 Familles de graphes

Les chemins. Le *chemin* d'ordre n est le graphe à n sommets, $\{u_1, \dots, u_n\}$, dont les arêtes sont exactement les paires (u_i, u_{i+1}) , où $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Nous le notons P_n . Le groupe $\text{Aut}(P_n)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le seul automorphisme non trivial ϕ est défini par $\phi(u_i) = u_{n-i+1}$, avec $i \in \{1, \dots, n\}$. C'est la symétrie par rapport au centre de la chaîne.

Les cycles. Le *cycle* d'ordre n ($n \geq 3$) est le graphe à n sommets, $\{u_0, \dots, u_{n-1}\}$, dont les arêtes sont exactement les paires (u_i, u_j) , avec $|i - j| \equiv 1[n]$, où $i, j \in \{0, \dots, n - 1\}$. Le cycle d'ordre n est dénoté C_n . Les cycles sont les seuls graphes 2-réguliers connexes. Le groupe $\text{Aut}(C_n)$ est isomorphe au groupe diédral D_{2n} , qui est constitué de n rotations et n symétries (axiales).

Les graphes complets. Le *graphe complet* d'ordre n est le graphe tel que tous les sommets soient voisins deux à deux. Nous notons K_n le graphe complet d'ordre n . Le groupe d'automorphisme de K_n est le groupe symétrique \mathcal{S}_n , qui contient toutes les permutations de sommets possibles. Un sous-graphe induit d'un graphe G qui est isomorphe à un graphe complet est appelé une *clique* de G . Un sous graphe induit de G isomorphe au complémentaire d'un graphe complet est un *ensemble indépendant* ou encore un *stable* de G .

Les graphes bipartis. Un graphe G est *biparti* s'il existe une partition de $V(G)$ en deux ensembles disjoints et non vides, S et R , telle que toute arête de G ait l'une de ses extrémités dans S et l'autre dans R . Les ensembles S et R induisent donc des stables, qui sont maximaux s'il n'y a pas de sommets isolés. Nous dirons que G est biparti complet s'il y a de plus un joint entre S et R . Nous noterons $K_{n,m}$ le graphe biparti complet dont les stables sont respectivement de taille n et m . De manière équivalente, un graphe G connexe non trivial est biparti s'il est proprement 2-coloriable ou s'il ne possède pas de cycles impairs comme sous-graphes.

Les arbres et les forêts. Un *arbre* est un graphe connexe dont aucun des sous-graphes n'est un cycle. Un graphe d'ordre n est un arbre si et seulement s'il est connexe et possède exactement $n - 1$ arêtes. Les arbres non triviaux sont des graphes bipartis et donc proprement 2-coloriables.

Une *forêt* est un graphe dont toutes les composantes connexes sont des arbres.

Les chenilles. Une *chenille* est un arbre tel que tous les sommets soient à distance au plus 1 d'un unique chemin. Un tel chemin d'ordre maximum est appelé la *colonne* de la chenille (voir Figure 1.1). Alternativement, une chenille est un arbre à partir duquel nous obtenons un chemin en supprimant toutes les feuilles. Attention, dans ce cas le chemin obtenu n'est pas une colonne, il faut lui ajouter une feuille à chaque extrémité.

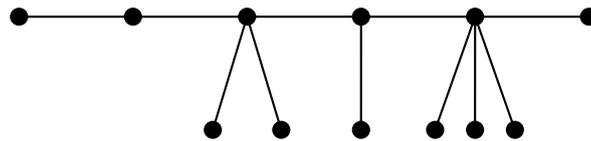


FIGURE 1.1 – Une chenille avec une colonne d'ordre 6.

Les étoiles. Une *étoile* est un graphe biparti complet dont l'un des stables est réduit à un unique sommet.



FIGURE 1.2 – Le graphe biparti complet $K_{3,3}$ et l'étoile $K_{1,3}$.

Graphes planaires et planaires extérieurs. Les deux dessins de la Figure 1.3 correspondent à deux manières de dessiner le même graphe dans le plan. La première avec des croisements d'arêtes, la seconde sans. Un graphe est dit *planaire* s'il peut

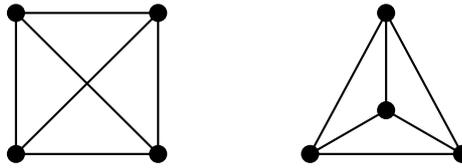


FIGURE 1.3 – Deux dessins de K_4 dans le plan.

être dessiné dans le plan sans croisement d'arêtes. Le graphe K_4 est donc, d'après le deuxième dessin, planaire. Comme mentionné dans l'introduction, la classe des graphes planaires est très étudiée dans les problèmes de coloration. Ce qui ne sera pas le cas dans cette thèse. Nous nous contentons donc de cette définition sommaire. Définissons aussi succinctement la classe des graphes planaires extérieurs. Un graphe est *planaire extérieur* s'il peut être dessiné dans le plan sans croisement d'arêtes et de sorte que tous les sommets appartiennent à la face extérieure. Informellement la face extérieure est la région infinie du plan que nous obtenons lorsque nous dessinons un graphe sur celui-ci. Une forêt est un graphe planaire extérieur. Le graphe de la Figure 1.4 en est également un. Par contre K_4 est planaire sans être planaire extérieur.

Produit cartésien de graphes. Le *produit cartésien* de deux graphes G et H est le graphe noté $G \square H$ défini comme suit. L'ensemble des sommets de $G \square H$ est le produit cartésien $V(G) \times V(H)$. Un sommet est donc un couple (u, v) , où $u \in V(G)$ et $v \in V(H)$. Une arête existe entre deux sommets (u, v) et (u', v') si $u = u'$ et $vv' \in E(H)$ ou si $v = v'$ et $uu' \in E(G)$. Les graphes $G \square H$ et $H \square G$ sont isomorphes. Le produit cartésien est donc une opération commutative. Il est également associatif, ce qui permet d'écrire sans ambiguïté le produit cartésien de k

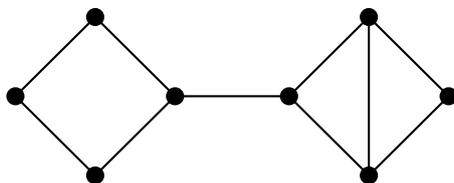


FIGURE 1.4 – Un exemple de graphe planaire extérieur.

graphes, $G_1, \dots, G_k : G_1 \square \dots \square G_k$. La k^e puissance cartésienne de G , $\underbrace{G \square \dots \square G}_{k \text{ fois}}$, sera notée $\square^k G$.

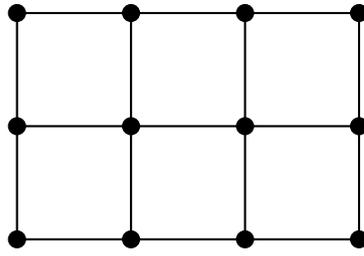
Un graphe G est dit *premier* s'il n'existe pas de graphes non-triviaux H et F , tels que $G = H \square F$. Tout graphe G connexe s'écrit de manière unique comme produit de graphes premiers (qui sont alors connexes). Si le graphe n'est pas connexe, la factorisation n'est pas forcément unique. Deux graphes G et H connexes sont *relativement premiers* si leurs factorisations respectives ne partagent aucun facteur. Dans ce cas le groupe d'automorphisme de $G \square H$ est isomorphe à $\text{Aut}(G) \times \text{Aut}(H)$. Le groupe d'automorphisme de $\square^k G$ est lui isomorphe au produit en couronne $\text{Aut}(G) \wr \mathcal{S}_k$. Plus généralement, si la décomposition en graphes premiers d'un graphe connexe G s'écrit $(\square_1^k G_1) \square \dots \square (\square_n^k G_n)$, alors $\text{Aut}(G)$ est isomorphe à $(\text{Aut}(G_1) \wr \mathcal{S}_{k_1}) \times \dots \times (\text{Aut}(G_n) \wr \mathcal{S}_{k_n})$.

Dans le produit de deux graphes $G \square H$, le sous-graphe induit par $\{(u, v) \mid u \in V(G)\}$, où $v \in V(H)$ est fixé, est isomorphe à G . Nous le notons G^v . De tels sous-graphes sont appelés les *G-fibres* de G . Nous définissons similairement les *H-fibres* H^u , où $u \in V(G)$. Si G et H sont connexes et relativement premiers, les G -fibres et les H -fibres constituent respectivement un système de blocs pour l'action de $\text{Aut}(G \square H)$. Plus précisément, pour un automorphisme de $G \square H$, $\sigma = (\psi, \phi)$ avec $\psi \in \text{Aut}(G)$, $\phi \in \text{Aut}(H)$, nous avons $\sigma(G^v) = G^{\phi(v)}$ et $\sigma(H^u) = H^{\psi(u)}$, pour tout $u \in V(G)$, $v \in V(H)$. Il s'agit là de la remarque la plus importante pour appréhender l'étude du nombre distinguant sur les produits cartésiens.

Pour une présentation complète des produits de graphes (cartésien ou non), nous renvoyons au très bon livre d'Imrich et Klavžar [55].

Grilles et grilles toriques. Nous appelons *grille* un graphe qui est le produit cartésien de deux chemins non-triviaux. Le produit de deux cycles sera lui appelé *grille torique*.

Hypercubes. Pour $n \geq 1$, l'*hypercube de dimension n* , \mathcal{H}_n , est le graphe dont l'ensemble des sommets est $\{0, 1\}^n$ et deux sommets sont adjacents s'ils ne diffèrent qu'en une seule coordonnée. L'hypercube de dimension n possède 2^n sommets. Il peut être également construit comme la n^e puissance cartésienne du graphe $K_2 : \square^n K_2$. Le groupe d'automorphisme de l'hypercube \mathcal{H}_n est isomorphe au produit

FIGURE 1.5 – La grille $P_4 \square P_3$.

en couronne $\mathcal{S}_2 \wr \mathcal{S}^n$. Un automorphisme consiste donc en une permutation des n coordonnées d'un sommet, associée, pour chacune d'elles, à un changement ou non de valeur.

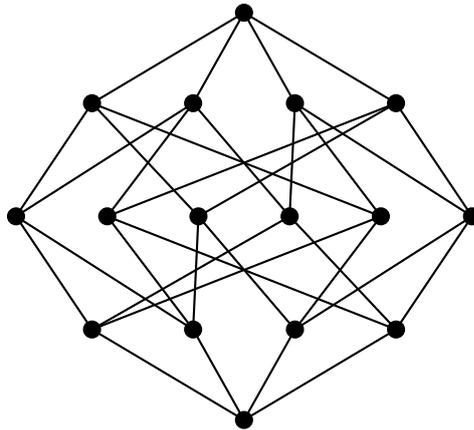


FIGURE 1.6 – L'hypercube de dimension 4.

1.4 Jeux à objectif compétitif sur les graphes

Nous définissons maintenant un cadre général qui englobe les différents jeux sur les graphes que nous étudierons dans les chapitres à venir. Nous commençons d'abord par rappeler ce que sont les jeux combinatoires. Notre présentation sera un peu laminaire et nous renvoyons à [1] pour une très bonne introduction au sujet et à [80] pour une étude approfondie et exhaustive.

Un *jeu combinatoire* est un jeu à deux joueurs, généralement appelés *Droite* et *Gauche*, fini, sans intervention de la chance et sans informations cachées. Les joueurs jouent chacun leur tour et en convention normale, le premier qui ne peut plus jouer

perd la partie. Cette condition de victoire peut sembler quelque peu restrictive. Il n'en est rien. Imaginons en effet un jeu où les joueurs remplissent un plateau avec des jetons à leur couleur. L'un des joueurs gagne si, lorsque le plateau est entièrement rempli, il a créé une certaine forme. L'autre, s'il l'en a empêché. Cette condition de victoire se transforme facilement en le-premier-qui-ne-peut-pas-plus-jouer-a-perdu. Il suffit de rajouter un coup supplémentaire inutile (taper dans ses mains, crier hurra) à chaque joueur en fonction de l'état du jeu au moment où le plateau est rempli. En général, toute condition de victoire n'impliquant pas le hasard peut se traduire sous la forme le-premier-qui-ne-peut-pas-plus-jouer-a-perdu.

Jeux combinatoires. Donnons maintenant une définition plus formelle de jeu combinatoire. Un *jeu combinatoire* est défini inductivement de la manière suivante :

- Le jeu où personne ne peut jouer est un jeu combinatoire noté $\{.\mid.\}$.
- Si $\mathcal{G}_1^D, \dots, \mathcal{G}_k^D$ et $\mathcal{G}_1^G, \dots, \mathcal{G}_l^G$ sont des jeux combinatoires, alors $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_1^D, \dots, \mathcal{G}_k^D \mid \mathcal{G}_1^G, \dots, \mathcal{G}_l^G\}$ est le jeu combinatoire, où les \mathcal{G}_i^D et \mathcal{G}_i^G représentent respectivement les positions que Droite et Gauche peuvent atteindre en un coup.

Une autre définition plus visuelle peut être donnée à partir de l'arbre du jeu. Un jeu combinatoire est alors un arbre avec un sommet remarquable, la racine, et des arêtes toutes orientées depuis la racine en direction des feuilles. Chaque arête possède une étiquette Droite ou Gauche. Le jeu consiste alors à déplacer un jeton depuis la racine en suivant les arêtes et leur orientation. Droite n'emprunte que des arêtes étiquetées Droite et similairement pour Gauche.

Un joueur possède une *stratégie gagnante* pour un jeu s'il peut s'assurer la victoire quels que soient les coups joués par son adversaire. Nous dirons que le jeu est *gagnant* pour un joueur si celui-ci possède une stratégie gagnante pour ce jeu. Dans le cas contraire le jeu est *perdant* pour ce joueur. Chaque jeu peut alors se classer dans une des quatre catégories ci-dessous.

- Le jeu est gagnant pour Droite, peu importe qui commence.
- Le jeu est gagnant pour le joueur qui commence.
- Le jeu est gagnant pour le joueur qui joue en second.
- Le jeu est gagnant pour Gauche, peu importe qui commence.

Pour les lecteurs qui trouveraient un peu floue la définition de stratégie gagnante ci-dessus, nous renvoyons à [80]. La définition est faite dans le sens inverse. Définir les quatre catégories inductivement ; le jeu vide est gagnant pour le second, un jeu est gagnant pour un joueur s'il existe un coup qui mène à une position perdante pour son adversaire, perdant sinon. Ensuite, nous pouvons dire qu'un joueur a une stratégie gagnante pour un jeu si celui-ci se trouve dans l'une ou l'autre des précédentes catégories. Il ne reste plus qu'à se convaincre que la définition de stratégie ainsi obtenue correspond bien à celle intuitive que nous avons énoncée plus haut.

Jeux à objectif compétitif sur les graphes.

Un *jeu à objectif compétitif sur un graphe* G est un jeu combinatoire dont les règles et les conditions de victoire sont reliées à un problème d'optimisation/un invariant du graphe. Pour ces jeux, nous renommons les joueurs le *Gentil* et le *Méchant*. Les raisons justifiant cette terminologie apparaîtront clairement d'ici quelques lignes. Dans cette thèse nous étudions deux types de jeux à objectif compétitif sur les graphes, qui correspondent à deux grandes classes de problèmes d'optimisation.

Jeu de partition. Pour un ensemble X (les sommets d'un graphe G par exemple), un *problème de partition* consiste à trouver le plus petit entier k tel que X se partitionne en k ensembles ayant une certaine propriété. Les problèmes de partition peuvent s'exprimer de manière plus parlante en termes de coloration : trouver le plus petit entier k tel qu'une k -coloration de X possède telle ou telle propriété.

Dans un jeu de partition concernant une propriété \mathcal{P} , nous fixons à l'avance un entier k , qui correspond au nombre de couleurs autorisées durant la partie. Le jeu se joue sur un ensemble X et les deux joueurs, Gentil et Méchant, colorient chacun leur tour les sommets de X , en respectant certaines règles additionnelles (typiquement la coloration partielle doit respecter \mathcal{P}). Le jeu s'arrête lorsqu'un des joueurs ne peut plus jouer (l'ensemble X peut alors être entièrement colorié ou non). Le Gentil est déclaré vainqueur si X est totalement colorié et si la coloration obtenue possède la propriété \mathcal{P} .

Nous pouvons alors définir deux invariants qui sont les versions ludiques de l'invariant correspondant au problème de minimisation lié à \mathcal{P} . Le premier invariant correspond au nombre minimal de couleurs à fournir pour que Gentil possède une stratégie gagnante avec ces k couleurs lorsqu'il commence. Nous définissons un second invariant de manière identique, mais en considérant que Gentil joue cette fois en second.

Les exemples les plus connus de jeux de partition sont le jeu de coloration et ses variantes, que nous définirons et étudierons dans le Chapitre 2. Dans le Chapitre 4, nous introduirons un nouveau jeu de partition, le jeu de coloration distinguante.

Notons que les études concernant le jeu de coloration s'intéressent essentiellement à l'invariant ludique obtenu lorsque le Gentil commence. Remarquons que pour ce jeu l'écart entre les deux paramètres peut être aussi grand que souhaité. Ce qui ne sera par exemple pas le cas pour le jeu de domination.

Jeu de construction.

Pour un ensemble X un *problème de construction* consiste à trouver un sous-ensemble S de X vérifiant une certaine propriété. Il peut s'agir alors d'un problème de maximisation : couplage, stable, ou clique maximum d'un graphe par exemple, ou d'un problème de minimisation : ensemble dominant ou code identifiant minimum.

Dans un jeu de construction concernant un problème de construction maximisant et une propriété \mathcal{P} , nous fixons à l'avance un entier k , qui correspond à l'objectif à

atteindre pour le Gentil. Le jeu se joue sur un ensemble X et les deux joueurs, Gentil et Méchant, construisent un sous-ensemble S en y ajoutant chacun leur tour un sommet de X . Ils doivent respecter certaines règles supplémentaires. Typiquement l'ensemble doit à tout moment respecter la propriété \mathcal{P} . Le jeu s'arrête lorsqu'un des joueurs ne peut plus jouer. L'ensemble S construit durant le jeu est alors maximal par rapport à \mathcal{P} et le Gentil est déclaré vainqueur si la taille de S est au moins k .

Pour un problème de construction minimisant, le jeu associé est défini similairement mais l'entier fixé k correspond au nombre de tours maximum de la partie. Les règles du jeu imposent généralement que le sommet rajouté dans S par un joueur "rapproche" cet ensemble de la propriété \mathcal{P} . Le jeu s'arrête lorsqu'un des joueurs ne peut plus jouer (les k tours autorisés peuvent alors avoir été tous joués ou non, en effet si S a acquis la propriété \mathcal{P} , les joueurs ne peuvent plus jouer car ils ne peuvent pas "rapprocher" S de \mathcal{P}). Le Gentil gagne si l'ensemble S construit au cours du jeu vérifie \mathcal{P} .

Nous pouvons alors définir deux invariants qui sont les versions ludiques de l'invariant correspondant au problème de maximisation/minimisation lié à \mathcal{P} . Le premier invariant correspond au nombre maximal/minimal k pour que le Gentil possède une stratégie gagnante lorsqu'il commence. Nous définissons le second invariant de manière identique, mais en considérant que le Gentil joue cette fois en second.

Le jeu de construction maximisant, où la propriété \mathcal{P} correspondante est l'indépendance, est étudié par Phillips et Slater dans [74]. D'autres jeux de ce type pourraient être intéressants à étudier. Qu'en est-il par exemple du jeu où les joueurs construisent ensemble un couplage ?

Dans notre thèse nous ne nous sommes pas intéressés aux jeux maximisants, mais au jeu de construction minimisant le plus célèbre, le jeu de domination. Nous renvoyons au Chapitre 3, pour une présentation détaillée de ce jeu.

Chapitre 2

Jeu de coloration 1-impropre

L'univers (que d'autres appellent la Bibliothèque) se compose d'un nombre indéfini, et peut-être infini, de galeries hexagonales [...]

Chacun des murs de chaque hexagone porte cinq étagères ; chaque étagère comprend trente-deux livres, tous de même format ; chaque livre a quatre cent dix pages ; chaque page, quarante lignes, et chaque ligne, environ quatre-vingts caractères noirs. Il y a aussi des lettres sur le dos de chaque livre ; ces lettres n'indiquent ni ne préfigurent ce que diront les pages : incohérence qui, je le sais, a parfois paru mystérieuse. Avant de résumer la solution (dont la découverte, malgré ses tragiques projections, est peut-être le fait capital de l'histoire) je veux rappeler quelques axiomes.

Premier axiome : la Bibliothèque existe *ad aeterno*. De cette vérité dont le corollaire immédiat est l'éternité future du monde, aucun esprit raisonnable ne peut douter. Il se peut que l'homme, que l'imparfait Bibliothécaire, soit l'œuvre du hasard ou de démiurges malveillants ; l'univers, avec son élégante provision d'étagères, de tomes énigmatiques, d'infatigables escaliers pour le voyageur et de latrines pour le bibliothécaire assis, ne peut être que l'œuvre d'un dieu. Pour mesurer la distance qui sépare le divin de l'humain, il suffit de comparer ces symboles frustes et vacillants que ma faillible main va griffonnant sur la couverture d'un livre, avec les lettres organiques de l'intérieur, ponctuelles, délicates, d'un noir profond, inimitablement symétriques.

Deuxième axiome : le nombre des symboles orthographiques est vingt-cinq. Ce fut cette observation qui permit, il y a quelque trois cents ans, de formuler une théorie générale de la Bibliothèque, et de résoudre de façon satisfaisante le problème que nulle conjecture n'avait pu déchiffrer : la nature informe et chaotique de presque tous les livres. L'un de ceux-ci, que mon père découvrit dans un hexagone du circuit quinze quatre-vingt-quatorze, comprenait les seules lettres M C V perversement répétées de la première ligne à la dernière. Un autre (très consulté dans ma zone) est un pur labyrinthe de lettres, mais à l'avant-dernière page on trouve cette phrase : O temps tes pyramides. Il n'est plus permis de l'ignorer : pour une ligne raisonnable, pour un renseignement exact, il y a des lieues et des lieues de cacophonies insensées, de galimatias et d'incohérences.

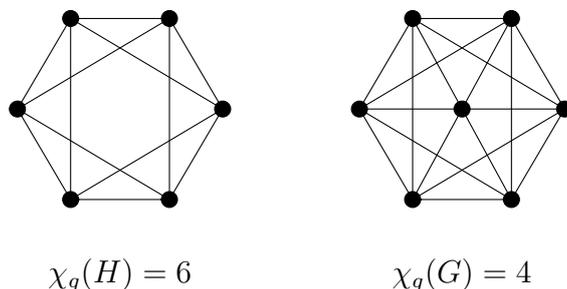
Le *jeu de coloration* est le plus ancien jeu à objectif compétitif sur les graphes. Il s'agit d'un jeu de partition qui a été introduit par Brams vers 1980, comme approche alternative pour une preuve du Théorème des quatre couleurs qui ne fasse pas appel aux ordinateurs. Ce jeu fut publié pour la première fois par Gardner [40], mais resta majoritairement ignoré par la communauté jusqu'à ce qu'il soit redécouvert par Bodlaender en 1991 [8]. Le Gentil et le Méchant prennent ici les noms d'Alice et Bob. Ils s'affrontent sur un graphe G en coloriant tour à tour les sommets du graphe avec une palette de k couleurs fixée au préalable. La coloration qu'ils construisent au cours du jeu doit être une coloration propre. Le jeu s'arrête quand un joueur ne peut plus colorier de sommets. Si le graphe est alors entièrement colorié, Alice est déclarée gagnante, sinon c'est Bob qui l'emporte. Le *nombre chromatique ludique* de G est le plus petit nombre de couleurs à fournir à Alice et Bob pour qu'elle ait une stratégie gagnante sur G lorsqu'elle commence à jouer. Nous notons cet invariant $\chi_g(G)$. Nous obtenons immédiatement l'encadrement suivant : $\chi(G) \leq \chi_g(G) \leq \Delta(G) + 1$. Remarquons que contrairement aux deux jeux que nous étudierons par la suite, le jeu de domination et le jeu distinguant, la communauté ne s'est que rarement intéressée en tant que tel à l'invariant que nous pourrions définir similairement lorsque c'est Bob qui entame la partie. L'étude de cette situation apparaît en fait souvent si nous désirons faire des preuves inductives.

Le nombre chromatique ludique défie l'intuition sur plusieurs points. Citons d'abord la conjecture la plus fameuse du domaine, qui semble à première vue être un truisme, mais qui reste totalement ouverte.

Conjecture. *Pour tout graphe G et tout entier $k \geq \chi_g(G)$, Alice gagne le jeu de coloration sur G avec k couleurs lorsqu'elle commence.*

Le fait que le nombre chromatique ludique ne soit pas héréditaire peut également surprendre. Il existe effectivement des graphes qui possèdent un nombre chromatique ludique plus faible que certains de leurs sous-graphes induits (voir la Figure 2.1 pour un exemple qui se généralise facilement). Cela a directement à voir avec le fait que sur certains graphes il n'est pas avantageux pour Alice de commencer.

Afin d'étudier le jeu de coloration, Zhu [85] a plus tard introduit le *k -jeu de marquage* qui se révèle plus facile à appréhender, notamment car les problèmes cités plus haut n'apparaissent pas pour ce jeu. Dans ce jeu, Alice et Bob marquent chacun leur tour les sommets d'un graphe G . Ils ne peuvent marquer un sommet que s'il possède au plus k voisins déjà marqués. Le jeu s'arrête quand l'un des joueurs ne peut plus marquer de sommets. Alice gagne alors si tous les sommets sont marqués. Le *nombre de marquage ludique* d'un graphe G (en anglais game coloring number), noté $\text{col}_g(G)$, est égal à $1 + k_{\min}$, où k_{\min} est le plus petit entier k tel qu'Alice possède une stratégie gagnante pour le k -jeu de marquage. Nous vérifions facilement que pour tout graphe G , $\chi_g(G) \leq \text{col}_g(G)$. Cette inégalité peut être stricte. Pire, il n'existe pas de fonction F telle que : $\text{col}_g(G) \leq F(\chi_g(G))$, pour tout graphe G . Pour

FIGURE 2.1 – χ_g n'est pas héréditaire.

s'en convaincre, il suffit de remarquer que $\chi_g(K_{n,n}) = 3$ et $\text{col}_g(K_{n,n}) = n + 1$, pour tout $n \geq 2$. Le nombre de marquage a le bon goût d'être héréditaire : si H est un sous-graphe d'un graphe G , alors $\text{col}_g(H) \leq \text{col}_g(G)$. Cette propriété démontrée par Sidorowicz [79] rend cet invariant plus facile à étudier que le nombre chromatique ludique.

Une direction de recherche privilégiée dans l'étude de χ_g est le calcul, pour une classe de graphes \mathcal{C} , de la valeur maximale que peut prendre χ_g parmi les graphes de cette classe. Nous noterons $\chi_g(\mathcal{C})$ pour $\max\{\chi_g(G) \mid G \in \mathcal{C}\}$ et $\text{col}_g(\mathcal{C})$ pour $\max\{\text{col}_g(G) \mid G \in \mathcal{C}\}$. La majeure partie des bornes supérieures obtenues le sont alors en utilisant le jeu de marquage et un ensemble de stratégies souvent regroupées sous le nom de stratégie d'activation. La première stratégie d'activation ayant été introduite par Zhu [85]. Citons quelques uns de ces résultats :

- $\chi_g(\mathcal{F}) = \text{col}_g(\mathcal{F}) = 4$, où \mathcal{F} désigne la classe des forêts (obtenue par Faigle et al. [36]).
- $7 \leq \chi_g(\mathcal{P}) \leq \text{col}_g(\mathcal{P}) \leq 17$, où \mathcal{P} est la classe des graphes planaires (la borne supérieure est due à Zhu [86] et l'inférieure à Kierstead et Trotter [59]).
- $6 \leq \chi_g(\mathcal{PE}) \leq \text{col}_g(\mathcal{PE}) \leq 7$, où \mathcal{PE} est la classe des graphes planaires extérieurs (due à Guan et Zhu [45]).
- $\chi_g(\mathcal{GT}) = \text{col}_g(\mathcal{GT}) = 5$, où \mathcal{GT} désigne les grilles toroïdales (obtenue par Raspaud et Wu [75]).

Attention, même lorsque la valeur exacte est connue pour une classe de graphes, cela n'implique pas que nous soyons capables de calculer exactement χ_g pour chaque membre de cette classe. Par exemple, la valeur exacte de $\chi_g(C_n \square C_m)$ reste inconnue lorsque n et m sont tous deux impairs.

Une autre manière d'attaquer le problème de la coloration ludique est de relier le nombre chromatique ludique à d'autres invariants non-ludiques. Une bonne borne supérieure peut ainsi être obtenue en considérant le *nombre chromatique acyclique*,

χ_a . Il s'agit du plus petit entier k tel qu'il existe une coloration propre n'induisant pas de cycles bichromatiques.

Théorème 2.1. [Dinski et Zhu [29] (1998).] *Pour tout graphe G ,*
 $\chi_g(G) \leq \chi_a(G)(\chi_a(G) + 1)$.

De nombreuses variantes du nombre chromatique ludique ont été proposées et étudiées depuis. Citons entre autres le jeu de coloration d'arêtes (introduit par Lam et al. [67]) et le jeu de coloration d'incidences (proposé par Andres [3]). Ces jeux sont considérés comme des jeux à part entière même s'ils peuvent respectivement être vus comme des restrictions du jeu de coloration aux graphes de ligne et aux graphes d'incidence. Au cours de cette thèse, nous nous sommes intéressés à une variante que nous nommons jeu de coloration 1-impropre et qui autorise la coloration construite au cours du jeu à être 1-impropre. Nous avons longtemps pensé qu'il s'agissait d'une nouvelle variante, jusqu'à ce que nous prenions connaissance des travaux de Chu et al. [23]. Dans cet article, les auteurs introduisent le jeu de coloration d -impropre et quelques-uns de leurs résultats recoupent les nôtres. Dans la première partie de ce chapitre, nous définissons le jeu de coloration d -impropre, puis étudions le rapport entre le jeu de coloration et le jeu de coloration 1-impropre. Nous entrons ici dans les détails de certaines remarques énoncées rapidement dans [23]. Dans cette partie, nous calculons également la valeur du nombre chromatique 1-impropre pour les chemins et les cycles. Dans la deuxième partie, nous nous intéressons aux arbres. Chu et al. ont montré, toujours dans [23], que trois couleurs suffisent à Alice pour gagner le jeu de coloration 1-impropre sur les arbres. Ils ont également démontré que pour certains arbres, ces trois couleurs lui sont réellement nécessaires. Notre résultat principal sera de montrer que cela reste vrai si nous nous restreignons aux chenilles. Ces résultats sont les fruits d'une collaboration avec Sylvain Gravier et Victor Lage-Pesoa. Un article sur le sujet est en cours de rédaction.

2.1 Nombre chromatique ludique 1-impropre

2.1.1 Définition

Le *jeu de coloration d -impropre* est une variante du jeu de coloration, pour laquelle nous relâchons la contrainte de propreté de la coloration. Ce jeu a été introduit pour la première fois en 2003, par Chu *et al.* [23] (sous le nom de Relaxed coloring game). Deux joueurs, Alice et Bob, colorient tour à tour les sommets d'un graphe G avec une palette de k couleurs fixée à l'avance. Ils doivent respecter la contrainte que la coloration partielle construite au cours du jeu est d -impropre. Le plus petit entier k tel qu'Alice ait une stratégie gagnante avec k couleurs lorsqu'elle commence est appelé le *nombre chromatique ludique d -impropre* de G . Nous le noterons $\chi_g^{(d)}(G)$. Pour

tout graphe G , l'encadrement suivant est évident : $\chi^{(d)}(G) \leq \chi_g^{(d)}(G) \leq \Delta(G) + 1$. Comme pour le jeu de coloration, il n'est pas clair qu'Alice puisse toujours gagner avec k couleurs sur le graphe G , dès lors que $k \geq \chi_g^{(d)}(G)$. Les mêmes problématiques concernant qui commence apparaissent aussi. En d'autres termes, si Alice peut gagner avec k couleurs en commençant, elle ne peut pas forcément le faire si elle joue en second. De même, si H est un sous-graphe induit de G , $\chi_g^{(d)}(H)$ n'est pas toujours plus petit que $\chi_g^{(d)}(G)$.

La plupart des études concernant le jeu de coloration d -impropre s'intéresse pour des classes données, comme celles des arbres, des graphes planaires ou des graphes planaires extérieurs, à trouver la plus petite valeur de d qui permette d'obtenir une bonne borne supérieure (constante) pour le nombre chromatique ludique d -impropre des graphes de cette classe. Nous renvoyons le lecteur intéressé à [23, 31, 32, 47, 84]. Quant à nous, à partir de maintenant nous ne nous intéresserons plus qu'au jeu 1-impropre et à l'invariant correspondant $\chi_g^{(1)}$.

Afin d'analyser le jeu correctement, il sera utile de considérer que celui-ci peut être joué sur un graphe G déjà partiellement colorié, que nous noterons $G|c$, où c désigne la coloration partielle. Nous demanderons toujours que ces colorations partielles soient 1-impropres.

Nous introduisons également les définitions suivantes, où A désigne Alice et B désigne Bob. Nous dirons que le graphe partiellement colorié $G|c$ est :

- une k - X -position si $X \in \{A, B\}$ possède une stratégie gagnante avec k couleurs, quel que soit le joueur qui commence,
- une k - X_f -position si $X \in \{A, B\}$ possède une stratégie gagnante avec k couleurs quand il commence,
- une k - X_s -position si $X \in \{A, B\}$ possède une stratégie gagnante avec k couleurs quand il joue en second.

Le nombre chromatique ludique 1-impropre de G est alors défini alternativement comme le plus petit k tel que G est une k - A_f -position pour le jeu de coloration impropre.

2.1.2 Relation entre χ_g et $\chi_g^{(1)}$

Dans cette sous-partie, nous donnons nos premiers résultats concernant le jeu de coloration 1-impropre. En particulier, nous étudions les relations qui peuvent exister entre le nombre chromatique ludique et son pendant 1-impropre. Une première intuition serait de penser que le jeu de coloration 1-impropre est plus facile pour Alice. De manière surprenante, ce n'est pas le cas. Des contre-exemples simples sont donnés par les graphes bipartis complets, comme le montre le Théorème 2.3 ci-dessous. Cette remarque avait déjà été faite brièvement dans [23], où il était annoncé sans preuve que $\chi_g^{(1)}(K_{n,n}) = n$.

Afin d'étudier le jeu sur les graphes bipartis, nous introduisons le lemme technique suivant.

Lemme 2.2. *Soit $G|c$ un graphe biparti partiellement k -colorié, avec $k \geq 2$, et soient X et Y les deux ensembles partitionnant ses sommets, avec $|X| = n$. Supposons que c soit telle que p sommets de X aient la couleur 1, q autres sommets de X soient coloriés, aucun sommet de Y ne soit colorié avec 1, et chaque sommet non-colorié de Y ait deux voisins coloriés avec la couleur 1, où $q \geq 0$, $n \geq p \geq 2$. Si $k \geq \lceil \frac{n-(q+p)}{2} \rceil + q + 2$, alors $G|c$ est une k -A-position.*

Démonstration. Puisqu'un sommet non-colorié dans Y possède au moins deux voisins coloriés 1, il ne peut pas être lui-même colorié avec 1 au cours du jeu. La couleur 1 n'apparaîtra donc jamais dans Y et sera donc toujours jouable dans X . La stratégie d'Alice consiste à colorier les sommets de X avec la couleur 1, aussi longtemps qu'il y a des sommets non-coloriés dans cet ensemble. Cette stratégie assure que Bob joue au plus $\lceil \frac{n-p-q}{2} \rceil$ fois dans X . Ainsi, n'importe quel sommet v dans Y possède au plus $\lceil \frac{n-(q+p)}{2} \rceil + q + 1$ couleurs distinctes dans son voisinage. Par hypothèse, $k \geq \lceil \frac{n-(q+p)}{2} \rceil + q + 2$, donc de tels sommets pourront toujours être coloriés. Cette stratégie ne dépendant pas de qui commence, nous en déduisons que $G|c$ est une k -A-position. \square

Théorème 2.3. *Pour $n, m \geq 1$, vérifiant $n \leq m$, nous avons :*

$$\chi_g^{(1)}(K_{n,m}) = \begin{cases} n & \text{si } n = m, \\ n + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Nous notons X et Y les deux stables de $K_{n,m}$, d'ordre respectif n et m . Procédons par induction sur n . Si $n = 1, 2$, le théorème est trivialement vrai. Supposons donc que $n \geq 3$. Nous commençons par montrer qu'Alice a une stratégie gagnante avec le nombre de couleurs annoncé. Elle commence par colorier un sommet dans X avec la couleur 1. Si Bob ne joue pas la couleur 1 sur un sommet de Y , Alice rétorque en coloriant un autre sommet de X avec 1. Ceci est possible car $n \geq 3$. Puisque $n \geq 3$, $n \geq \lceil \frac{n-3}{2} \rceil + 3$. Ainsi, d'après le Lemme 2.2, le graphe partiellement colorié qu'elle obtient est une n -A-position. Si maintenant Bob colorie un sommet de Y avec 1, cette couleur devient interdite pour le restant de la partie. Le jeu est donc maintenant équivalent au jeu sur $K_{n-1, m-1}$. Par hypothèse d'induction, Alice peut gagner ce jeu avec $n - 1$ (resp. n) couleurs si $n = m$ (resp. si $n < m$). Pour conclure, elle peut gagner le jeu sur $K_{n,m}$ avec n couleurs (resp. $n + 1$).

Il reste à montrer qu'avec moins de couleurs, c'est Bob qui gagne. Sa stratégie est de jouer de telle sorte qu'après son premier coup, exactement un sommet de X et un sommet de Y soient coloriés avec 1. Après cela le jeu est équivalent au jeu sur

$K_{n-1,m-1}$, et nous concluons par induction qu'Alice a réellement besoin de n (resp. $n+1$) couleurs pour gagner sur $K_{n,m}$. \square

Il est bien connu et facile de vérifier que $\chi_g(K_{n,m}) = 3$, dès que $n, m \geq 2$. Ainsi, le Théorème 2.3 implique que le nombre chromatique ludique peut être arbitrairement plus petit que celui 1-impropre. Pire, il n'existe pas de fonction F telle que $\chi_g^{(1)}(G) \leq F(\chi_g(G))$ soit vrai pour tout graphe G . Bien que $\chi_g^{(1)}$ ne soit pas borné supérieurement par χ_g , il est clair que $\chi_g^{(1)}(G) \leq \text{col}_g(G)$. Ainsi, toutes les bornes supérieures obtenues pour χ_g en utilisant le jeu de marquage restent vraies pour $\chi_g^{(1)}$. Par exemple $\chi_g^{(1)}(G) \leq \text{col}_g(G) \leq 17$, pour tout graphe planaire G . (voir [86]).

Nous cherchons maintenant des graphes pour lesquels le fait que la coloration requise ne soit que 1-impropre aide réellement Alice à gagner avec moins de couleurs. Nous laissons nos lecteurs vérifier que $\chi_g(K_n) = n$, alors que $\chi_g^{(1)}(K_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Mais ces exemples ne nous convainquent pas vraiment car nous avons déjà que $\chi(K_n) = n$ alors que $\chi^{(1)}(K_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Pour $n, m \geq 1$, nous dénotons par $K_{n,m}^-$ un graphe biparti complet $K_{n,m}$, duquel un couplage maximum a été retiré. Il est facile de voir que $\chi_g(K_{n,n}^-) = n$. D'un autre côté, le théorème à venir énonce que $\chi_g^{(1)}(K_{n,n}^-) \leq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$. Pour de tels graphes, Alice a donc besoin de significativement moins de couleurs pour gagner lorsqu'elle joue la version 1-impropre du jeu de coloration, et ce même si $\chi(K_{n,n}^-) = \chi^{(1)}(K_{n,n}^-)$.

Théorème 2.4. *Pour $n \geq 1$, nous avons $\chi_g^{(1)}(K_{n,n}^-) \leq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$.*

Ce théorème est une application directe du résultat plus fort ci-dessous.

Proposition 2.5. *Soit $n \geq 1$.*

- *Pour $k \geq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$, $K_{n,n}^-$ est une k - A_f -position.*
- *Pour $k \geq \lceil \frac{2n+1}{3} \rceil$, $K_{n,n+1}^-$ est une k - A_s -position.*

Démonstration. Nous notons X et Y les deux stables de $K_{n,n+l}^-$, où X est de taille n et Y de taille $n+l$, avec $l \in \{0, 1\}$. Nous écrivons x_i , avec $i \in \{1, \dots, n\}$, pour les sommets dans X et y_j , avec $j \in \{1, \dots, n+l\}$ pour ceux dans Y . Nous supposons alors que les arêtes du couplage retiré sont les $x_i y_i$, avec $i \in \{1, \dots, n\}$.

Nous raisonnons par induction. Clairement, pour $n \leq 2$, la Proposition 2.5 est vraie. Soient $n \geq 3$ et $k \geq 1$.

Nous commençons par $K_{n,n}^-$ et supposons que $k \geq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$. Le premier coup d'Alice est de colorier x_1 avec la couleur 1. Soit z le sommet que Bob colorie ensuite. Nous pouvons supposer que $z \neq x_2$.

Cas 1 : Bob colorie z avec 1. Alors, Alice peut soit colorier y_1 avec 1, soit x_2 avec 1. Dans les deux cas, nous pouvons supposer sans perte de généralité que x_1, x_2 et y_1 sont maintenant coloriés avec la couleur 1. La couleur 1 ne peut alors plus être jouée que sur y_2 . Considérons trois sous-cas.

Cas 1.1 : Bob colorie y_2 avec la couleur 1. Le jeu est maintenant équivalent au jeu sur $K_{n-2,n-2}^-$ avec $k-1$ couleurs et Alice qui commence. Comme $k-1 \geq \lceil \frac{2(n-2)}{3} \rceil$, nous pouvons conclure par induction que cette position est gagnante pour Alice.

Cas 1.2 : Bob colorie y_2 avec une couleur différente de 1. Le jeu est alors équivalent au jeu sur $K_{n-2,n-1}^-$, avec $k-1$ couleurs et Bob qui vient de faire un premier coup. Comme $k-1 \geq \lceil \frac{2(n-2)+1}{3} \rceil$, nous concluons par induction que le jeu est dans une position gagnante pour Alice.

Cas 1.3 : Bob ne colorie pas y_2 , mais un autre sommet z' . Alice répond alors en coloriant y_2 avec la couleur 1. Le jeu est maintenant équivalent au jeu sur $K_{n-2,n-2}^-$ avec $k-1$ couleurs, dans lequel Alice aurait joué z' comme premier coup. Par induction, $K_{n-2,n-2}^-$ est une $(k-1)$ - A_f -position. De plus, $K_{n-2,n-2}^-$ étant sommet-transitif, tous les premiers coups sont équivalents. Jouer z' est donc un coup gagnant pour Alice, ce qui nous permet de conclure.

Cas 2 : Bob colorie z avec 2. Alice répond en coloriant x_2 avec 1. Premièrement, supposons que Bob ne réponde pas en coloriant soit y_1 soit y_2 avec 1. Si X est alors complètement colorié, c'est que $n \leq 4$. Dans ce cas, il est aisé de vérifier qu'Alice peut gagner, puisque x_1 et x_2 ont la même couleur. Si $n \geq 5$, nous pouvons supposer que x_3 n'est pas colorié. Alice colorie ce sommet avec la couleur 1. Soit q le nombre de sommets de X coloriés jusqu'à présent par Bob ; nous avons $q \leq 2$. Par hypothèse, $k \geq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$. Dès que $n \geq 5$ et $n \neq 6$, cela implique que $k \geq \lceil \frac{n-(q+3)}{2} \rceil + q + 2$. En appliquant le Lemme 2.2, nous obtenons dans ce cas qu'Alice gagne. Si $n = 6$ et $q < 2$, l'inégalité ci-dessus reste vraie. Nous n'avons donc à traiter à part que le cas où $n = 6$ et $q = 2$, c'est-à-dire le cas où Bob joue ses deux premiers coups dans X . Si pour ces deux coups Bob a choisi la même couleur, Alice conserve sa stratégie. Sinon, son troisième coup est de répéter dans X la couleur que Bob vient juste de jouer. Le seul cas problématique est si Bob répond en jouant la quatrième couleur dans X . Tous les sommets de X sont alors coloriés et aucun sommet de Y ne l'est. Nous pouvons supposer que x_1, x_2 sont coloriés 1, x_3, x_4 sont coloriés 2, x_5 est colorié 3 et x_6 est colorié 4. La stratégie d'Alice est la suivante : si Bob colorie y_1 ou y_2 , elle répond en coloriant l'autre sommet avec 1, de même s'il colorie y_3 ou y_4 , elle colorie l'autre sommet avec 2, et s'il colorie y_5 (resp. y_6), elle répond en coloriant y_6 avec la couleur 4 (resp. y_5 avec la couleur 3).

Deuxièmement, supposons que Bob choisisse de colorier y_1 ou y_2 avec 1. Si z est respectivement égal à y_2 ou y_1 , alors nous retombons sur le Cas 1.2. Sinon Alice colorie respectivement y_2 ou y_1 avec la couleur 1, ce qui nous ramène au Cas 1.3.

Nous considérons maintenant $K_{n,n+1}^-$ et supposons que $k \geq \lceil \frac{2n+1}{3} \rceil$. Remarquons que y_{n+1} est le seul sommet de Y qui est adjacent à tous ceux de X . Soit z le premier sommet colorié par Bob. Disons que z est colorié avec la couleur 1.

Cas 1 : $z \in Y$. Alice colorie un sommet de Y de sorte que nous puissions maintenant supposer que les sommets y_1 et y_{n+1} sont tous deux coloriés avec la couleur 1. Si

Bob ne colorie pas ensuite x_1 , Alice colorie alors celui-ci avec la couleur 1 si cela est possible. La couleur 1 étant maintenant interdite partout, le jeu devient équivalent au jeu sur $K_{n-1, n-1}^-$ avec $k - 1$ couleurs dans lequel un coup a déjà été joué. Nous sommes ainsi ramenés au Cas 1.3 de la première partie de la preuve. Si Alice n'a pas pu jouer la couleur 1, c'est que Bob a joué celle-ci dans Y . Dans ce cas, comme pour $n \geq 3$, $k \geq \lceil \frac{n+1-3}{2} \rceil + 2$, nous obtenons qu'Alice gagne en appliquant le Lemme 2.2. Si Bob colorie x_1 avec 1, le jeu devient équivalent au jeu sur $K_{n-1, n-1}^-$ avec $k - 1$ couleurs. Par induction, il s'agit d'une $(k-1)$ - A_f -position. Finalement, si Bob colorie x_1 avec une couleur différente de 1, alors Alice colorie un sommet y_i avec 1. Cela est toujours possible car $n + 1 \geq 3$ et la couleur 1 n'apparaît pas dans X . Comme $k \geq \lceil \frac{n+1-3}{2} \rceil + 2$, nous obtenons, d'après le Lemme 2.2, qu'Alice a une stratégie gagnante avec k couleurs.

Cas 2 : $z \notin Y$. Supposons même que $z = x_1$. Alice colorie x_2 avec 1. Si Bob ne répond pas en coloriant y_1 ou y_2 avec 1, alors Alice colorie l'un des x_i avec 1 (si ce n'est pas possible c'est que $n = 3$ et Alice gagne facilement par tout l'ensemble Y peut être colorié avec la troisième couleur). Notons q le nombre de sommets de X coloriés avec une couleur autre que 1 ; nous avons $q \leq 1$. Comme $n \geq 4$, $k \geq \lceil \frac{n-(q+3)}{2} \rceil + q + 2$, et d'après le Lemme 2.2, Alice possède une stratégie gagnante avec k couleurs. Si Bob colorie y_1 ou y_2 avec 1, Alice répond de manière à ce que y_1 et y_2 soient tous deux coloriés avec la couleur 1. Le jeu devient équivalent au jeu sur $K_{n-2, n-1}^-$ avec $k - 1$ couleurs. Par induction, il s'agit d'une $(k-1)$ - A_s -position. \square

Nous n'avons pas trouvé de graphes pour lesquels le gain apporté à Alice par l'impropreté est meilleur que linéaire. Rappelons que pour la coloration 1-impropre non-ludique, nous avons que $\chi(G) \leq 2\chi^{(1)}(G)$, pour tout graphe G . Existe-t-il une telle borne linéaire dans le cas ludique, ou même, de manière moins ambitieuse, existe-t-il une fonction F telle que pour tout graphe G , $\chi_g(G) \leq F(\chi_g^{(1)}(G))$?

2.1.3 Chemins et cycles

Dans cette partie, nous calculons le nombre chromatique ludique 1-impropre des chemins, puis nous appliquons ce résultat pour obtenir celui des cycles. Rappelons que $\chi_g(P_n) = 3$, dès que $n \geq 4$, et $\chi_g(C_n) = 3$, pour $n \geq 3$. Pour commencer, nous introduisons une version légèrement modifiée du jeu de coloration 1-impropre, ainsi que quelques règles de réduction. Le *jeu de coloration 1-impropre fort* est défini de manière analogue au jeu de coloration 1-impropre, exception faite que nous autorisons Bob à passer son tour aussi souvent qu'il le désire. Il est facile mais important de remarquer que si Alice peut gagner avec k couleurs quand Bob peut passer, alors elle peut aussi gagner avec k couleurs dans le jeu de coloration 1-impropre original. Nous introduisons cette version forte du jeu car elle se comporte bien lorsque nous considérons des graphes avec de multiples composantes connexes. Combiné avec les résultats de réduction que nous énoncerons ensuite, ceci nous sera

bien utile pour obtenir des résultats par induction.

Proposition 2.6. *Soient $k \geq 1$ et $G|c$ un graphe partiellement colorié, possédant n composantes connexes, G_1, \dots, G_n , telles que chacune est une k -A-position pour le jeu de coloration 1-impropre fort. Alors $G|c$ est lui aussi une k -A-position pour ce jeu fort.*

Démonstration. Quand Bob joue dans une des composantes, Alice réplique par un coup gagnant dans cette composante si elle n'est pas entièrement coloriée. Sinon, elle joue dans n'importe quelle autre composante en faisant comme si Bob venait tout juste de passer son tour dans celle-ci. \square

Les règles de réduction suivantes vont nous permettre de diviser le graphe de base en composantes plus petites. Elles sont valables à la fois pour le jeu de coloration 1-impropre et pour sa version forte.

Proposition 2.7. *Soient $k \geq 2$, $G|c$ un graphe partiellement colorié et G' le graphe obtenu à partir de G en supprimant l'arête uv , où $u, v \in V(G)$. Si c est telle que $c(u) \neq c(v)$, alors Alice gagne avec k couleurs sur $G|c$ si et seulement si elle gagne avec k couleurs sur $G'|c$.*

Proposition 2.8. *Soient $k \geq 2$, $G|c$ un graphe partiellement colorié et u un sommet de G de degré 2. Soient v_1 et v_2 les deux voisins de u et G' le graphe obtenu en retirant à G les arêtes uv_1, uv_2 . Si c est telle que $c(v_1) = c(v_2)$, alors Alice gagne avec k couleurs sur $G|c$ si et seulement si elle gagne avec k couleurs sur $G'|c$.*

Démonstration. Le sommet u devra forcément être colorié avec une couleur différente de $c(v_1)$. Ainsi, v_1 et v_2 ne pourront pas être saturés en coloriant u , et nous pouvons donc supprimer les arêtes uv_1 et uv_2 sans affecter le comportement du jeu. \square

Proposition 2.9. *Soient $k \geq 1$, $G|c$ un graphe partiellement colorié et G' le graphe obtenu en enlevant une arête uv à G , où $u, v \in V(G)$, et en ajoutant un sommet pendant à u et v . Ces sommets sont respectivement dénotés par u' et v' . Si c est telle que $c(u) = c(v) = a$, alors Alice gagne avec k couleurs sur $G|c$ si et seulement si elle gagne avec k couleurs sur $G'|c'$, avec $c' = c$ pour les sommets de G , $c'(u') = c'(u)$ et $c'(v') = c'(v)$.*

Nous pouvons maintenant calculer $\chi_g^{(1)}$ pour une union disjointe de chemins. Nous allons montrer qu'en fait deux couleurs suffisent à Alice. Ainsi, jusqu'à la fin de cette partie, nous ne considérerons que des 2-colorations avec les couleurs 1 et 2. Si $a \in \{1, 2\}$, alors \bar{a} correspond à l'autre couleur. Nous notons $P_{n,a}$, le chemin d'ordre n dont l'une des extrémités est coloriée avec la couleur a (et aucun autre sommet n'est colorié). Similairement, $P_{n,a,b}$ renvoie au chemin d'ordre n dont les deux extrémités sont respectivement coloriées avec la couleur a et la couleur b .

Lemme 2.10. *Pour $n \geq 2$, $P_{n,a}$ et $P_{n,a,b}$ sont tous les deux des 2-A-positions pour le jeu de coloration 1-impropre fort.*

Démonstration. Nous notons v_1 l'extrémité du chemin coloriée avec la couleur a , et v_n celle qui est potentiellement coloriée avec b .

Procédons par induction sur n . Pour $n = 2$, la proposition est trivialement vraie. Supposons donc que $n \geq 3$. Si Alice commence, elle colorie le sommet adjacent à v_1 avec la couleur \bar{a} . D'après la réduction de la Proposition 2.7, le jeu est maintenant équivalent au jeu sur $P_{n-1,\bar{a}}$ (resp. sur $P_{n-1,\bar{a},b}$) plus un sommet isolé déjà colorié, que nous pouvons donc ignorer. Par hypothèse d'induction, ce sont des 2-A-positions.

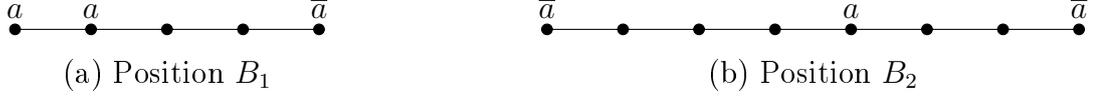
Traisons maintenant le cas où Bob commence. S'il passe son tour, Alice joue comme précédemment et gagne. Sinon, soient u le sommet colorié par Bob et c la couleur qu'il a choisie. Si u est adjacent à la fois à v_1 et v_n , alors $n = 3$ et Alice gagne, soit parce que le chemin est totalement colorié, soit en terminant le jeu en coloriant v_n . Sinon, Alice colorie l'un des voisins non-coloriés de u avec \bar{c} . Le jeu est maintenant équivalent au jeu sur deux composantes qui sont des chemins plus petits et dont seuls la ou les extrémités sont coloriées. Par induction, ces deux chemins sont des 2-A-positions pour le jeu de coloration 1-impropre fort. En appliquant la Proposition 2.6, nous concluons que $P_{n,a}$ (resp. $P_{n,a,b}$) est une 2-A-position pour le jeu de coloration 1-impropre fort. \square

Puisque $\chi^{(1)}(P_n) = 1$ si et seulement si $n = 1, 2$, nous obtenons directement le théorème suivant.

Théorème 2.11. *Si $n \geq 3$, alors $\chi_g^{(1)}(P_n) = 2$.*

Démonstration. Alice commence en coloriant une extrémité. D'après le Lemme 2.10, elle peut gagner le jeu de coloration 1-impropre avec 2 couleurs sur le chemin obtenu, même si c'est au tour de Bob. Nous en déduisons que deux couleurs suffisent à Alice pour gagner sur P_n . \square

Nous nous intéressons maintenant au jeu sur les cycles. À partir des règles de réduction définies précédemment, nous allons pouvoir réduire le jeu sur les cycles au jeu sur des chemins partiellement coloriés comme ceux que nous introduisons maintenant. Pour $n \geq 3$, nous écrivons $P_{n,a,b,c}$ pour un chemin d'ordre n , avec exactement trois sommets coloriés, parmi lesquels les deux extrémités, coloriées respectivement a et c . Le troisième étant colorié avec la couleur b . Rappelons que nous demandons que les colorations partielles soient 1-impropres. Ici, cela veut dire que si $n = 3$, a , b , et c ne sont pas tous les trois de la même couleur. Sauf pour les deux exceptions décrites dans la Figure 2.2, Alice peut gagner le jeu fort sur ces chemins avec seulement 2 couleurs, quel que soit le premier joueur. Pour B_1 et B_2 , avec 2 couleurs, c'est le joueur qui commence qui gagne. Sur B_2 , un coup optimal d'Alice est de colorier le voisin de l'extrémité de droite avec a , tandis que celui de Bob est de choisir \bar{a} pour le quatrième sommet en partant de la gauche.

FIGURE 2.2 – $2-B_f$ -positions pour $P_{n,a,b,c}$

Lemme 2.12. *Pour $n \geq 3$, si $P_{n,a,b,c} \neq B_1, B_2$, alors $P_{n,a,b,c}$ est une 2-A-position pour le jeu de coloration 1-impropre fort.*

Démonstration. Nous écrivons v_1, \dots, v_n pour les sommets de P_n , de sorte que v_1 est colorié a , v_n est colorié c , et un autre sommet, disons v_{i_0} est colorié b . Procédons par induction sur n . Si $n = 3$, il n'y a rien à prouver. Pour $n \geq 4$, nous allons réduire le jeu à plusieurs composantes connexes de plus petites tailles. D'après la Proposition 2.6, nous aurons seulement besoin de nous assurer que toutes ces composantes sont des 2-A-positions pour le jeu fort. Supposons donc que $n \geq 4$ et $P_{n,a,b,c} \neq B_1, B_2$.

Traitons d'abord le cas où Alice commence. Il y a au moins un sommet non-colorié qui est adjacent à v_{i_0} . Sans perte de généralité, supposons que ce sommet est v_{i_0-1} . Alice colorie v_{i_0-1} avec \bar{b} . En appliquant la Proposition 2.7, elle laisse deux composantes de la forme, $P_{i_0-1,a,\bar{b}}$ et $P_{n-i_0+1,b,c}$. D'après le Lemme 2.10, les deux sont des 2-A-positions pour le jeu fort.

Considérons maintenant le cas où Bob commence. S'il passe son tour, Alice joue comme ci-dessus et gagne. Sinon, soit u le sommet joué par Bob et d la couleur qu'il utilise. Sans perte de généralité, nous supposons que u est entre v_1 et v_{i_0} . Nous distinguons les cas suivants.

Cas 1 : $u = v_{i_0-1}$. Prenons en compte la couleur choisie pour u .

Cas 1.1 : $d = \bar{b}$. Le jeu est équivalent au jeu sur les deux composantes connexes $P_{i_0-1,a,\bar{b}}$ et $P_{n-i_0+1,b,c}$. Ces deux composantes sont, d'après le Lemme 2.10, des 2-A-positions pour le jeu fort.

Cas 1.2 : $d = b$. D'après la Proposition 2.9, le jeu est équivalent au jeu sur les deux composantes de la forme $P_{i_0,a,b,b}$ et $P_{n-i_0+2,b,b,c}$. Ces positions ne sont pas isomorphes à B_2 . Si aucune d'elles n'est isomorphe à B_1 , nous concluons par induction que les deux sont des 2-A-positions pour le jeu fort. Sinon, puisque le chemin original $P_{n,a,b,c}$ n'est pas égal à B_2 , au plus l'une de ces composantes, disons $P_{i_0,a,b,b}$ est isomorphe à B_1 . Dans ce cas, Alice joue dans cette composante et colorie avec \bar{a} le voisin de l'extrémité colorié a . Elle laisse deux composantes de la forme, $P_{4,\bar{a},b,b}$ et $P_{n-i_0+2,b,b,c}$, qui sont, par induction pour la seconde, des 2-A-positions.

Cas 2 : u n'est pas adjacent à v_{i_0} . Nous prenons maintenant en compte la distance entre u et v_{i_0} .

Cas 2.1 : $d(u, v_{i_0}) \neq 3, 4$. Premièrement, si $v_{i_0+1} \neq v_n$, Alice colorie ce sommet avec \bar{b} . Le jeu est maintenant équivalent au jeu sur deux composantes de la forme,

$P_{i_0,a,d,b}$ et $P_{n-i_0,\bar{b},c}$. Puisque $d(u, v_{i_0}) \neq 3, 4$, nous avons que $P_{i_0,a,d,b} \neq B_1, B_2$. En utilisant l'hypothèse d'induction pour la première composante et le Lemme 2.10 pour la seconde, nous obtenons que toutes deux sont des 2-A-positions pour le jeu fort. Deuxièmement, si $v_{i_0+1} = v_n$, nous considérons deux possibilités. Si $d(u, v_{i_0}) \neq 2$, Alice peut colorier avec la couleur \bar{d} , le sommet adjacent à u qui est entre u et v_{i_0} . Le jeu est maintenant équivalent au jeu sur les deux composantes $P(d(v_1, u) + 1, a, d)$ et $P(d(u, v_{i_0}) + 1, \bar{d}, b, c)$. Comme dans cette dernière composante les sommets coloriés b et c sont adjacents et que $d(u, v_{i_0}) + 1 \neq 5$, celle-ci est différente de B_1 et B_2 . Nous concluons comme avant. Si $d(u, v_{i_0}) = 2$, Alice choisit de colorier le sommet adjacent à u qui est entre v_1 et u avec la couleur \bar{d} (si un tel sommet n'existe pas, c'est que $n = 5$ et Alice termine alors le jeu en jouant entre u et v_{i_0}). Le jeu est maintenant équivalent au jeu sur les composantes $P(d(v_1, u), a, \bar{d})$ et $P(4, d, b, c)$, ce qui nous permet de conclure.

Cas 2.2 : $d(u, v_{i_0}) = 4$. Alice colorie v_{i_0-2} avec la couleur b . D'après la Proposition 2.8 et la Proposition 2.9, le jeu est maintenant équivalent au jeu sur trois composantes de la forme, $P_{i_0-2,a,d,b}$, $P_{n-i_0+1,b,c}$ et un sommet isolé v_{i_0-1} . Puisque $d(u, v_{i_0-2}) = 2$, nous avons que $P_{i_0-2,a,d,b} \neq B_1, B_2$. Par induction, cette composante est une 2-A-position. Le sommet isolé est bien sûr une 2-A-position, et d'après le Lemme 2.10, c'est aussi le cas de $P_{n-i_0+1,b,c}$.

Case 2.3 : $d(u, v_{i_0}) = 3$. Alice répond en coloriant v_{i_0-1} avec \bar{b} . Le jeu est alors équivalent au jeu sur deux composantes de la forme $P_{i_0-1,a,d,\bar{b}}$ et $P_{n-i_0+1,b,c}$. Puisque $d(u, v_{i_0-1}) = 2$, nous avons que $P_{i_0-1,a,d,\bar{b}} \neq B_1, B_2$. Par induction, cette composante est une 2-A-position. D'après le Lemme 2.10, $P_{n-i_0+1,b,c}$ est aussi une telle position pour le jeu fort. \square

Nous sommes prêts à démontrer notre résultat concernant les cycles.

Théorème 2.13. *Si $n \geq 3$, alors $\chi_g^{(1)}(C_n) = 2$.*

Démonstration. Pour $n = 3, 4, 5$, une simple analyse de cas donne une stratégie gagnante pour Alice avec deux couleurs, lorsqu'elle commence. Supposons que $n \geq 6$. Alice commence en coloriant un sommet v avec la couleur 1. Soit u le sommet choisi par Bob et b la couleur qu'il utilise. Nous distinguons deux cas.

Cas 1 : u est adjacent à v . Considérons alors la couleur de u .

Cas 1.1 : $b \neq 1$. Le jeu est donc équivalent au jeu sur un chemin de type $P_{n,1,2}$, qui est, d'après le Lemme 2.10, une 2-A-position.

Cas 1.2 : $b = 1$. Alice colorie le voisin non-colorié de u , notons le w , avec la couleur 2. Le jeu est alors équivalent au jeu sur $P_{n,1,1,2}$, qui n'est ni B_1 ni B_2 . En effet, $d(u, w) \geq 4$ et $d(u, v) = 1$. D'après le Lemme 2.12, c'est une 2-A-position.

Cas 2 : u n'est pas adjacent à v . Alice répond en coloriant avec 2 un sommet adjacent à v et non-adjacent à u , de sorte que le jeu est maintenant équivalent au jeu sur $P_{n,2,b,1}$. Cette dernière configuration est différente de B_1 et B_2 , puisque les

deux extrémités ont des couleurs différentes. D'après le Lemme 2.12, nous concluons que nous avons une 2-A-position. \square

2.2 Le jeu sur les forêts

Dans cette partie, nous étudions le jeu de coloration 1-impropre sur les arbres. Dans la première sous-partie, nous utilisons la stratégie d'activation de Faigle pour donner une borne supérieure générale valant 3. Puis, nous montrons que cette borne est serrée en exhibant une famille de chenilles de degré maximum 3 pour lesquelles $\chi_g^{(1)} = 3$.

2.2.1 Pour les forêts trois couleurs suffisent

Rappelons que dans [36], Faigle *et al.* ont montré que $\text{col}_g(F) \leq 4$ et donc que $\chi_g(F) \leq 4$, pour n'importe quelle forêt F . De plus certaines forêts nécessitent vraiment 4 couleurs et ce même si nous ne considérons que des forêts de degré maximum 3 [33]. Nous prouvons maintenant, que dans le cas du jeu de coloration 1-impropre, la stratégie d'activation utilisée pour obtenir ce résultat conduit à une borne supérieure de 3, pour les forêts en général. Le même résultat est déjà démontré dans [23], pour le jeu de coloration d -impropre, avec $d \geq 1$. Nous donnons ici notre version de la preuve étendue à la variante forte du jeu de coloration 1-impropre. Ce sera également l'occasion d'explicitier un exemple de stratégie d'activation.

Théorème 2.14. *Tout arbre T est une 3-A-position pour le jeu de coloration 1-impropre fort.*

Démonstration. Supposons d'abord qu'Alice commence. Elle colorie un sommet arbitraire r que nous appelons la *racine*. Chaque autre sommet v de T possède exactement un voisin à distance plus petite que lui de la racine. Comme d'habitude, ce voisin sera appelé le parent de v .

Voici un algorithme définissant la stratégie d'Alice. Nous y définissons récursivement l'ensemble des sommets activés Ac et initialisons tout de suite $Ac := \{r\}$. Lorsque Bob colorie un sommet $u \in V(T)$ durant la partie, Alice considère l'unique chemin P entre r et u et considère w le sommet de P le plus proche de r qui n'est pas activé. L'algorithme procède ensuite comme suit.

- i) Alice met à jour Ac , $Ac := Ac \cup P$.
- ii) Si w n'est pas colorié, Alice le colorie avec une couleur disponible pour ce sommet.
- iii) Si w est colorié et qu'il existe au moins un sommet activé non colorié, elle en colorie un.

- iv) Si w est colorié ainsi que tous les autres sommets de Ac , Alice colorie un sommet x adjacent à un sommet de Ac et met à jour $Ac := Ac \cup \{x\}$.

Si Bob passe son tour, Alice joue selon l'item *iii*) ou *iv*) selon s'il y a ou non des sommets non coloriés dans Ac .

Soient v_1, \dots, v_k tous les voisins de $v \in V(T)$, sauf son parent. Soient $T_1(v), \dots, T_k(v)$ les sous-arbres maximaux contenant respectivement v_i mais pas v . Nous pouvons vérifier simplement les affirmations suivantes par induction sur le nombre de tours.

- a) Pour tout sommet v non activé (et donc non colorié), aucun des $T_i(v)$ ne contient un sommet colorié.
- b) Pour n'importe quel sommet v activé et non colorié, au plus un des sous-arbres $T_1(v), \dots, T_k(v)$ contient des sommets coloriés.

L'affirmation a) implique que tant que des sommets non activés existent, le jeu peut continuer. L'affirmation b) implique alors que tant que l'arbre n'est pas totalement colorié, Bob peut jouer. En suivant cette stratégie pour Alice, le jeu ne peut donc s'arrêter qu'au tour de celle-ci, lorsqu'elle a à colorier un sommet de Ac . L'affirmation b) implique qu'au tour d'Alice un sommet non colorié v possède au plus trois voisins coloriés. De plus, au plus deux de ses voisins peuvent être saturés. En effet, si trois voisins de v sont coloriés, cela veut dire que Bob vient de jouer un voisin u dans un des sous-arbres $T_i(v)$ qui ne possédait jusqu'alors aucun sommet colorié. Ce sommet u ne peut donc être saturé. Finalement, avec trois couleurs Alice peut toujours suivre sa stratégie qui est donc gagnante.

Pour finir considérons le cas où Bob commence. Nous avons vu précédemment que tous les premiers coups sont optimaux pour Alice lorsqu'elle commence. Elle n'a donc qu'à prétendre que c'est elle qui a fait le premier coup, puis que Bob a passé. Elle peut maintenant suivre la même stratégie que précédemment. \square

D'après la Proposition 2.6, nous en déduisons directement un résultat sur les forêts.

Théorème 2.15. *Si F est une forêt, alors $\chi_g^{(1)}(F) \leq 3$.*

He et al. ont montré dans [47] que pour le jeu de coloration 2-impropre, 2 couleurs suffisent pour les forêts.

Théorème 2.16. [He et al. [47] (2003).] *Pour toute forêt F , $\chi_g^{(2)}(F) \leq 2$.*

2.2.2 Les chenilles requièrent trois couleurs

Dans cette sous-partie, nous exhibons une famille de chenilles de degré maximum 3 qui atteignent la borne supérieure du Théorème 2.15. Nous définissons la classe Cat_3 comme étant la classe des chenilles dont tous les sommets sont soit de degré 1 soit de degré 3. Pour une telle chenille, nous dénotons par $\{v_1, \dots, v_n\}$ l'ensemble des sommets de la colonne (v_2, \dots, v_{n-1} sont les sommets de degré 3) et par

$\{u_2, \dots, u_{n-1}\}$ l'ensemble des autres sommets (tous de degré 1). Nous considérons de plus que pour $i \in \{2, \dots, n-2\}$, u_i est adjacent à v_i . Pour n fixé, il existe une unique chenille de Cat_3 dont la colonne possède n sommets, nous la notons $cat_3(n)$. Notre objectif est de démontrer le résultat principal ci-dessous, qui énonce que la borne du Théorème 2.15 est serrée, même si nous nous restreignons à la classe Cat_3 .

Théorème 2.17. *Si $n \geq 86$, la chenille $cat_3(n)$ est une 2- B_f position.*

Avant de démontrer ce résultat, nous devons introduire plusieurs concepts. Dans cette sous-partie, nous considérerons uniquement des 2-colorations. Si $a \in \{1, 2\}$, \bar{a} désigne l'autre couleur. Si $G|c$ est une chenille partiellement coloriée et H est un sous-chenille de G , nous dirons qu'un sommet de H est colorié a_s , avec $a \in \{1, 2\}$, s'il est colorié a et possède un voisin colorié a en dehors de H . Un sommet colorié a_s correspond donc à un sommet a -saturé. Nous dirons qu'une chenille partiellement coloriée $G \in Cat_3$ possède une $Cat_3(n, x, y)$ induite si elle possède une sous-chenille (induite) qui est isomorphe à $cat_3(n)$, et dont les sommets v_1 et v_n sont respectivement coloriés x et y , avec $x, y \in \{1, 2, 1_s, 2_s\}$, et de plus tous les autres sommets de la sous-chenille ne sont pas coloriés. Similairement, G a une $Cat_3(n, x, [y, z])$ induite si elle a une $Cat_3(n, x, z)$ induite, avec la condition additionnelle que u_{n-1} est colorié y . Notons bien que dans ces définitions, v_i et u_i renvoient aux sommets de la sous-chenille et non à ceux de la chenille de base (voir Figure 2.3).

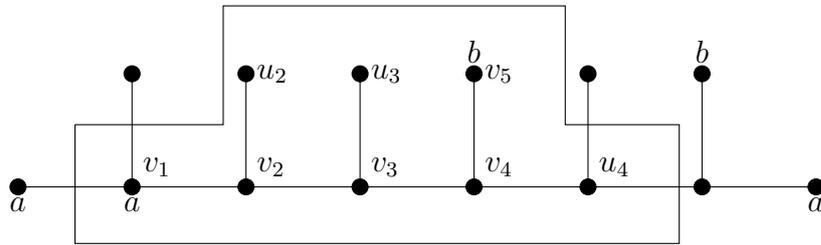


FIGURE 2.3 – $Cat_3(5, a_s, b)$ induit.

Remarquons que toutes les feuilles u_i de la sous-chenille sont aussi des feuilles de la chenille de base, exception faite de u_2 et u_{n-1} qui peuvent potentiellement appartenir à la colonne. De plus, si une extrémité, disons v_1 , est saturée, alors u_2 sera forcément une feuille dans la chenille d'origine. Cette remarque est importante pour deux raisons. Premièrement, nous savons que les seuls sommets de la sous-chenille qui ont potentiellement des voisins coloriés en dehors de celle-ci sont v_1 , v_n , u_2 et u_{n-1} . Deuxièmement, quand nous prendrons en compte les coups joués à l'extérieur de la sous-chenille, nous saurons qu'ils ne pourront affecter que ces mêmes quatre sommets.

Dans la remarque suivante, nous introduisons une stratégie que Bob peut utiliser dans une chenille Cat_3 pour forcer Alice à saturer un sommet de la colonne. Nous définissons \mathcal{F} comme étant le graphe partiellement colorié de la Figure 2.4.

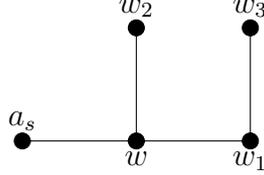


FIGURE 2.4 – Le sous-graphe \mathcal{F}

Proposition 2.18. *Soit $G|c$ un graphe partiellement colorié ayant un sous-graphe induit isomorphe à \mathcal{F} , de sorte que w_1, w_2, w_3 n'aient pas de voisins coloriés \bar{a} . Alors, en coloriant w_1 avec \bar{a} , Bob force Alice à répondre immédiatement en coloriant w avec \bar{a} .*

Démonstration. Si Alice ne répond pas de la sorte, Bob gagne immédiatement en coloriant w_2 ou w_3 (au moins l'un des deux n'est pas colorié) avec \bar{a} . Notons que l'hypothèse que w_1, w_2 et w_3 n'ont pas de voisins coloriés sert à assurer que les coups de Bob sont bien valides. \square

Maintenant, nous énonçons plusieurs lemmes, exposant certaines colorations de chenilles Cat_3 qui sont en faveur de Bob.

Lemme 2.19. *Une chenille partiellement coloriée $G \in Cat_3$ qui a une $Cat_3(4, a_s, a_s)$ induite est une 2-B-position.*

Démonstration. Soit G' une $Cat_3(4, a_s, a_s)$ induite de G . Puisque v_1 et v_4 sont saturés, u_2 et u_3 n'ont pas de voisins en dehors de G' . Ainsi, quel que soit le joueur qui commence, Bob peut s'assurer que soit u_2 soit u_3 reçoivent la couleur \bar{a} , avant que v_2 et v_3 ne soient tous deux coloriés. Puisque ces deux derniers sommets doivent être coloriés avec \bar{a} , Bob gagne. \square

Lemme 2.20. *Une chenille partiellement coloriée $G \in Cat_3$ qui possède une $Cat_3(5, a_s, \bar{a}_s)$ induite est une 2-B-position.*

Démonstration. Soit G' une $Cat_3(5, a_s, \bar{a}_s)$ induite de G . Premièrement, supposons que Bob commence. Il colorie u_2 avec \bar{a} . Maintenant Alice doit répondre en jouant v_2 ou v_3 . Autrement, Bob coloriera v_3 avec \bar{a} et v_2 ne pourra plus être colorié. Si elle choisit v_2 , elle doit le colorier avec \bar{a} et nous avons maintenant une $Cat_3(4, a_s, a_s)$ induite. D'après le Lemme 2.19 Bob gagne. Si elle colorie v_3 avec \bar{a} , v_2 ne pourra plus être colorié. Ainsi, le seul choix qui lui reste est de colorier v_3 avec a . Bob répond en coloriant u_3 avec a et gagne, car v_4 est maintenant incolore.

Deuxièmement, Alice commence. Puisque v_1 et v_5 sont saturés, u_2 et u_4 n'ont pas de voisins hors de G' . Donc, si elle joue en dehors de G' , cela n'affecte pas les sommets de G' et comme nous venons de le voir Bob gagne. Si elle joue sur v_2 ou v_4 , elle doit respectivement utiliser la couleur \bar{a} et a . Bob répond en coloriant la feuille attachée avec la même couleur. Cela laisse soit une $Cat_3(4, \bar{a}_s, \bar{a}_s)$ induite soit une $Cat_3(4, a_s, a_s)$ induite. Une fois de plus, Bob gagne d'après le Lemme 2.19. Si au contraire Alice décide de jouer sur v_3 , Bob joue la même couleur sur u_3 et soit v_2 soit v_4 devient incolore. Similairement, quand Alice joue sur u_3 , Bob colorie v_3 avec la même couleur. Le dernier cas à considérer est quand elle colorie u_2 ou u_4 , disons u_2 . Elle doit choisir la couleur a , car sinon Bob gagne en coloriant v_3 avec \bar{a} . La réponse de Bob est alors de colorier u_3 avec \bar{a} . Si Alice ne répond pas en jouant v_2 ou v_3 , Bob coloriera v_3 avec \bar{a} et v_2 sera incolore. Pour v_3 , elle peut utiliser la couleur a , mais dans ce cas Bob coloriera u_4 avec a et v_4 deviendra incolore. Pour v_2 , elle peut seulement utiliser la couleur \bar{a} . Bob coloriera alors u_4 avec a . Dans cette situation, v_3 et v_4 doivent tous deux être coloriés avec a , ce qui est impossible. \square

Lemme 2.21. *Si $n \geq 5$, une chenille partiellement coloriée $G \in Cat_3$ qui possède une $Cat_3(n, a_s, b_s)$ induite est une 2- B_f -position.*

Démonstration. Soit G' une $Cat_3(n, a_s, b_s)$ induite de G . Nous procédons par induction sur n . Considérons le premier cas de base, $n = 5$. Si $a \neq b$, nous concluons directement avec le Lemme 2.20. Si $a = b$, le premier coup de Bob consiste à colorier v_3 avec \bar{a} . Les sommets v_2 et v_4 doivent tous deux être coloriés \bar{a} , ce qui est maintenant impossible.

Considérons maintenant que $n = 6$. Si $a \neq b$, Bob colorie v_3 avec \bar{a} . Cela force Alice à jouer \bar{a} sur v_2 , laissant une $Cat_3(4, \bar{a}_s, \bar{a}_s)$ induite. Bob gagne alors d'après le Lemme 2.19. Si $a = b$, Bob colorie u_2 avec \bar{a} et Alice a maintenant deux options pour empêcher Bob de gagner au coup d'après. La première est de colorier v_2 avec \bar{a} , ce qui laisse une $Cat_3(5, \bar{a}_s, a_s)$ induite. Dans ce cas, elle perd d'après le Lemme 2.20. La seconde est de colorier v_3 avec a . Dans ce cas, Bob colorie u_3 avec a et laisse une $Cat_3(4, a_s, a_s)$ induite, ce qui est gagnant pour lui quel que soit le joueur qui commence (Lemme 2.19).

Supposons donc que $n \geq 7$. Bob commence en coloriant v_3 avec \bar{a} . D'après la Proposition 2.18, Alice doit colorier v_2 avec \bar{a} , laissant ainsi une $Cat_3(n-2, \bar{a}_s, b_s)$ induite. Par hypothèse d'induction cela implique que G est une 2- B_f -position. \square

Lemme 2.22. *Si $n \geq 4$, une chenille partiellement coloriée $G \in Cat_3$ qui a une $Cat_3(n, a_s, [\bar{a}, a])$ induite est une 2- B_f -position.*

Démonstration. Soit G' une $Cat_3(n, a_s, [\bar{a}, a])$ induite de G . La preuve est par induction sur n . Si $n = 4$, Bob colorie v_3 avec \bar{a} , rendant v_2 incolore. Si $n = 5$, Bob colorie v_4 avec a et laisse une $Cat_3(4, a_s, a_s)$ induite. D'après le Lemme 2.19, il gagne. Si $n \geq 6$, Bob colorie v_3 avec \bar{a} . D'après la Proposition 2.18, Alice doit

colorier v_2 avec \bar{a} , laissant une $Cat_3(n-2, \bar{a}_s, [\bar{a}, a])$ induite. Nous concluons par induction que G est une 2- B_f -position. \square

Lemme 2.23. *Si $n \geq 6$, une chenille partiellement coloriée $G \in Cat_3$ qui a une $Cat_3(n, a_s, b)$ induite est une 2- B_f -position.*

Démonstration. Soit G' une $Cat_3(n, a_s, b)$ induite de G . Nous procédons par induction sur n . Commençons avec $n = 6$. Si $a \neq b$, Bob colorie v_5 avec \bar{a} et laisse une $Cat_3(5, a_s, \bar{a}_s)$ induite. D'après le Lemme 2.20, il gagne. Si $a = b$, Bob colorie v_3 avec \bar{a} , ce qui force Alice à colorier v_2 avec \bar{a} . Bob répond en coloriant v_5 avec a , rendant v_4 incolore.

Considérons maintenant que $n = 7$. Si $a \neq b$, Bob colorie v_3 avec \bar{a} et force Alice à jouer la couleur \bar{a} sur v_2 . Bob répond en coloriant v_6 avec \bar{a} , laissant une $Cat_3(4, \bar{a}_s, \bar{a}_s)$ induite. Il gagne alors d'après le Lemme 2.19. Quand $a = b$, le voisin potentiellement colorié de u_6 a une influence sur la stratégie de Bob. Nous considérons d'abord que u_6 n'a pas de voisins a -saturés en dehors de G' . Bob colorie v_5 avec \bar{a} . Si Alice colorie u_5 ou v_6 avec \bar{a} , elle laisse une $Cat_3(5, a_s, \bar{a}_s)$ induite, ce qui induit, d'après le Lemme 2.20, que le jeu est maintenant une 2-B-position. Supposons donc qu'elle joue un autre coup. Si ce coup est de colorier v_4 avec \bar{a} , alors Bob gagne en coloriant u_6 avec a (ce qui est possible car nous avons supposé que u_6 n'a pas de voisins a -saturés). Supposons donc qu'elle ne joue pas non plus ce coup. Dans ce cas, Bob peut colorier soit u_5 soit v_6 avec \bar{a} et ainsi créer une $Cat_3(5, a_s, \bar{a}_s)$ induite, dans laquelle au plus un coup a été fait par Alice. Il y a alors deux cas à traiter.

Cas 1 : Le premier coup d'Alice était à l'intérieur de $Cat_3(5, a_s, \bar{a}_s)$. Cela implique que v_6 n'est pas colorié. Elle doit jouer soit v_6 soit u_6 , car sinon Bob peut gagner en coloriant u_6 (qui n'a pas de voisins a -saturés) avec a . Ainsi, au tour de Bob, nous avons une $Cat_3(5, a_s, \bar{a}_s)$ induite dans laquelle un coup a été joué précédemment. Puisqu'une $Cat_3(5, a_s, \bar{a}_s)$ induite implique d'être une 2-B-position (voir Lemme 2.20), Bob gagne.

Cas 2 : Le premier coup d'Alice était en dehors de $Cat_3(5, a_s, \bar{a}_s)$. Nous avons donc une $Cat_3(5, a_s, \bar{a}_s)$ induite. Le jeu est donc dans une 2-B-position, et Bob gagne même si c'est actuellement le tour d'Alice.

Il reste à analyser le jeu quand u_6 a un voisin a -saturé. Le premier coup de Bob est maintenant de colorier v_6 avec \bar{a} . Alice doit empêcher que u_6 ne devienne incolore après le prochain coup de Bob. Pour ce faire, soit elle colorie u_6 avec \bar{a} , ce qui ne l'empêche pas de perdre car elle laisse une $Cat_3(6, a_s, \bar{a}_s)$ induite (voir Lemme 2.21), soit elle empêche Bob de colorier v_5 avec \bar{a} au prochain tour. Pour cela elle doit absolument choisir l'une des réponses suivantes.

Cas 1 : Alice colorie v_5 . Si elle choisit la couleur \bar{a} , elle laisse une $Cat_3(5, a_s, \bar{a}_s)$ induite, et perd d'après le Lemme 2.20. Si elle choisit la couleur a , Bob répond en coloriant v_4 avec a et gagne d'après le Lemme 2.19.

Cas 2 : Alice colorie v_4 avec \bar{a} . Bob gagne alors en coloriant v_3 avec la même couleur.

Cas 3 : Alice colorie u_5 avec \bar{a} . Bob répond en coloriant v_4 avec la couleur a . Alice doit répondre en coloriant v_5 avec a , sinon Bob peut rendre ce sommet incolore en jouant la couleur a soit sur u_4 soit sur v_3 . Mais en faisant cela, elle laisse une $Cat_3(4, a_s, a_s)$ induite, ce qui est perdant pour elle d'après le Lemme 2.19.

Supposons maintenant que $n \geq 8$. Bob colorie v_3 avec \bar{a} . D'après la Proposition 2.18, Alice est obligée de colorier v_2 avec \bar{a} . Cela laisse une $Cat_3(n-2, \bar{a}_s, b)$ induite et nous concluons par induction. \square

Lemme 2.24. *Soient $x, y, z \in \{1, 1_s, 2, 2_s\}$ tels que sans l'indice s , y et z correspondent à la même couleur. Si $n \geq 8$, une chenille partiellement coloriée $G \in Cat_3$ qui possède une $Cat_3(n, x, [y, z])$ induite est une 2- B_f -position.*

Démonstration. Soit G' une $Cat_3(n, x, [y, z])$ induite de G , où x, y et z sont comme dans l'énoncé. Bob commence en coloriant v_{n-2} avec l'autre couleur que celle correspondant à y et z , disons $a \in \{1, 2\}$. Alice doit ensuite colorier v_{n-1} avec a , car autrement Bob peut colorier u_{n-2} ou v_{n-3} avec a et rendre v_{n-1} incolore. Mais en coloriant v_{n-1} avec a , Alice laisse une $Cat_3(n-2, x, a_s)$ induite avec $n-2 \geq 6$. D'après le Lemme 2.23 (si $x \in \{1, 2\}$) ou le Lemme 2.21 (si $x \in \{1_s, 2_s\}$), le jeu est maintenant dans une 2- B_f -position. \square

Lemme 2.25. *Si $n \geq 8$, une chenille partiellement coloriée $G \in Cat_3$ qui possède une $Cat_3(n, a_s, b)$ induite, avec exactement une feuille $u_i \notin \{u_{n-6}, \dots, u_{n-1}\}$ coloriée, est une 2- B_f -position.*

Démonstration. Soit G' une $Cat_3(n, a_s, b)$ induite de G , ayant exactement une feuille $u_i \notin \{u_{n-6}, \dots, u_{n-1}\}$ qui est coloriée. Nous procédons par induction sur n . Pour $n = 8$, il n'y a pas de feuille supplémentaire coloriée et nous concluons donc directement avec le Lemme 2.23. Si $n \geq 9$, le premier coup de Bob est de colorier v_3 avec \bar{a} . Si u_2 ou u_3 est colorié avec \bar{a} , il gagne immédiatement. Sinon Alice doit répondre en coloriant v_2 avec \bar{a} . En effet, quelle que soit la feuille supplémentaire coloriée, si elle ne joue pas ainsi, au moins l'un des sommets u_2, u_3, v_4 pourra être colorié \bar{a} par Bob et v_2 deviendra incolore. Si $u_i \in \{u_2, u_3\}$, elle laisse ainsi une $Cat_3(n-2, \bar{a}_s, b)$ induite sans feuille supplémentaire coloriée. Nous concluons grâce au Lemme 2.23. Sinon, elle laisse une $Cat_3(n-2, \bar{a}_s, b)$ induite vérifiant la condition additionnelle sur la feuille coloriée supplémentaire. Notons que dans ce cas $n \geq 10$ et nous pouvons conclure par induction. \square

Lemme 2.26. *Si $n \geq 19$, une chenille partiellement coloriée $G \in Cat_3$ qui possède une $Cat_3(n, a, b)$ induite est une 2- B_f -position.*

Démonstration. Soit G' une $Cat_3(n, a, b)$ induite de G . Le premier coup de Bob est de colorier une feuille u_i , où $i \in \{10, \dots, n-9\}$, avec une couleur arbitraire c . Supposons d'abord qu'Alice réponde en dehors de G' . Alors Bob colorie v_i avec c . Si le coup d'Alice n'a pas saturé l'une des extrémités de G' , nous avons maintenant

une $Cat_3(i, a, c_s)$ et une $Cat_3(n - i + 1, c_s, b)$ induites. L'un ou l'autre implique que le jeu est dans une 2- B_f -position (voir Lemme 2.23). Quel que soit le prochain coup d'Alice, l'une de ces sous-chenilles restera inchangée. Ainsi Bob gagne même si c'est actuellement le tour d'Alice. Si l'une des extrémités de G' , disons celle coloriée a , a été saturée par le coup d'Alice, nous avons une $Cat_3(i, a_s, c_s)$ induite et une $Cat_3(n - i + 1, c_s, b)$ induite. La première implique aussi que le jeu est une 2- B_f -position (voir Lemme 2.21), et nous concluons comme avant.

Supposons donc qu'Alice joue son premier coup dans $Cat_3(n, a, b)$ en coloriant avec d un sommet w . Par symétrie, nous pouvons considérer que w appartient à $\{u_2, v_2, \dots, u_{i-1}, v_{i-1}, v_i\}$.

Cas 1 : $w \in \{u_6, v_6, \dots, u_{i-1}, v_{i-1}, v_i\}$. Si $w \neq v_i$, Bob répond en créant une arête $u_j v_j$ ayant ses deux extrémités d -saturées, où j est la position où Alice a joué. Cela laisse une $Cat_3(m, a, d_s)$ induite, avec $m \geq 6$. D'après le Lemme 2.23 cela implique que le jeu est dans une 2- B_f -position. Cela laisse aussi une $Cat_3(l, d_s, b)$ induite, avec $l \geq 8$ et exactement une feuille coloriée respectant la condition du Lemme 2.25. Ceci implique aussi que le jeu est dans une 2- B_f -position (voir Lemme 2.25). Comme le prochain coup d'Alice ne pourra pas affecter ces deux sous-chenilles à la fois, Bob gagne même si c'est maintenant au tour de celle-ci.

Supposons maintenant que $w = v_i$. Si $d = c$, nous sommes dans une situation identique à celle obtenue après la réponse de Bob quand Alice a joué en dehors de G' . Si $d \neq c$, Bob colorie un voisin de w avec d et nous concluons comme précédemment.

Cas 2 : $w \in \{u_3, v_3, u_4, v_4, u_5, v_5\}$. Dans ce cas, le coup de Bob consiste à colorier v_i avec c . Maintenant, nous avons une $Cat_3(l, c_s, d)$ induite, avec $l \geq 6$, et une $Cat_3(m, c_s, b)$ induite, avec $m \geq 6$. Les deux impliquent que le jeu est dans une 2- B_f -position (voir Lemme 2.23).

Cas 3 : $w \in \{u_2, v_2\}$. Premièrement, considérons que $w = u_2$. Si $d = a$, nous avons une $Cat_3(i+1, c, [a, a])$ induite, ce qui implique que le jeu est dans une 2- B_f -position, d'après le Lemme 2.24. Puisque c'est au tour de Bob, il gagne. Si $d = \bar{a}$, Bob colorie v_i avec c , ce qui laisse une $Cat_3(i, c_s, [a, \bar{a}])$ induite et une $Cat_3(n-i+1, c_s, b)$ induite. Les deux impliquent que le jeu est dans une 2- B_f -position, d'après les Lemme 2.22 et 2.23. Alice perd donc dans ce cas aussi. Finalement, considérons que $w = v_2$. Si $d = a$, elle laisse une $Cat_3(i, a_s, c)$ induite, donc elle perd (voir Lemme 2.23). D'un autre côté, si $d = \bar{a}$, Bob colorie v_i avec c et nous avons maintenant une $Cat_3(i-1, c_s, \bar{a})$ induite et une $Cat_3(n-i+1, c_s, b)$ induite. Une fois encore, le Lemme 2.23 affirme que c'est suffisant pour que Bob gagne. \square

Lemme 2.27. *Si $n \geq 23$, une chenille partiellement coloriée $G \in Cat_3$ qui possède une $Cat_3(n, a_s, b)$ induite est une 2- B -position.*

Démonstration. Soit G' une $Cat_3(n, a_s, b)$ induite de G . D'après le Lemme 2.23, G est une 2- B_f -position; nous n'avons donc qu'à considérer le cas où Alice commence. Alice ne peut pas jouer un coup en dehors de G' qui n'affecterait pas les sommets

de G' . En effet, sinon comme rappelé au dessus, Bob gagne. Ainsi, si elle joue en dehors de G' , elle doit jouer un voisin de v_n , afin de saturer ce sommet. Dans ce cas, elle laisse une $Cat_3(n, a_s, b_s)$ induite, qui implique que le jeu est dans une 2- B_f position, par le Lemme 2.21.

Supposons donc que son premier coup est bien dans $Cat_3(n, a_s, b)$. Nous notons w le sommet qu'elle choisit et c la couleur qu'elle utilise.

Cas 1 : $w \in \{u_3, v_3, \dots, u_{n-2}, v_{n-2}\}$. Elle va laisser soit une $Cat_3(l, a_s, c)$ induite, avec $l \geq 6$, soit une $Cat_3(k, c, b)$ induite, avec $k \geq 19$. D'après le Lemme 2.23 et 2.26, les deux impliquent que le jeu est dans une 2- B_f -position au début du tour de Bob.

Cas 2 : $w = v_2$. Dans ce cas $c = \bar{a}$, car v_1 est a -saturé. La chenille G a donc maintenant une $Cat_3(n-1, \bar{a}, b)$ induite, il s'agit donc d'une 2- B_f -position (voir Lemme 2.26).

Cas 3 : $w = u_2$. Si $c = \bar{a}$, alors Bob colorie v_3 avec \bar{a} et rend v_2 incolorable. Si $c = a$, nous avons une $Cat_3(n, b, [a, a_s])$ induite, ce qui prouve que le jeu est dans une 2- B_f -position, par le Lemme 2.24.

Cas 4 : $w = v_{n-1}$. Si $c = b$, Alice perd car elle vient de laisser une $Cat_3(n-1, a_s, b_s)$ induite (Lemme 2.21). Si $c = \bar{b}$, Alice perd aussi car nous avons une $Cat_3(n-1, a_s, \bar{b})$ induite (Lemme 2.23).

Cas 5 : $w = u_{n-1}$. Si $c = \bar{b}$, nous appliquons le Lemme 2.22. Sinon nous utilisons le Lemme 2.24.

□

Nous pouvons maintenant démontrer le Théorème 2.17.

Démonstration du Théorème 2.17. Soit v le premier sommet colorié par Alice et a la couleur utilisée. Bob peut toujours trouver un sommet u pour lequel $d(v, u) = 43$. Il colorie ce sommet avec une couleur arbitraire b , laissant une $Cat_3(44, a, b)$ induite, G' .

Supposons d'abord qu'Alice ne réponde pas dans G' ou dans son voisinage. Dans ce cas elle perd par le Lemme 2.26. Si elle colorie un sommet dans le voisinage de G' , la seule manière d'interférer avec G' est de saturer l'une des extrémités, disons v . Dans ce cas, G possède maintenant une $Cat_3(44, a_s, b)$ induite. D'après le Lemme 2.23, Bob gagne.

Supposons donc qu'Alice réponde dans G' . Si elle colorie u_2 avec a ou u_{n-1} avec b , elle laisse respectivement une $Cat_3(44, b, [a, a])$ induite ou une $Cat_3(44, a, [b, b])$ induite. Les deux impliquent que le jeu est dans une 2- B_f -position. Si Alice colorie u_2 avec \bar{a} ou u_{n-1} avec \bar{b} , Bob colorie respectivement v_2 avec \bar{a} et v_{n-1} avec \bar{b} , laissant ainsi une $Cat_3(43, a_s, b)$ induite ou une $Cat_3(43, b_s, a)$ induite. D'après le Lemme 2.27, les deux impliquent que Bob gagne. Pour n'importe quel autre coup d'Alice dans G' , disons v_i ou u_i colorié avec c , Bob répond de sorte que l'arête $u_i v_i$ ait ses deux extrémités c -saturées. Maintenant G possède une $Cat_3(i, c_s, a)$ induite et une $Cat_3(44 - i + 1, c_s, b)$ induite. Soit $i \geq 23$, soit $44 - i + 1 \geq 23$, et à chaque

fois le Lemme 2.27 permet de conclure que le jeu est dans une 2-B-position.

En conclusion, Bob peut dans tous les cas obtenir la victoire sur G si seules deux couleurs sont autorisées. \square

2.3 Conclusion et perspectives du chapitre

Dans ce chapitre nous avons étudié une variante du nombre chromatique ludique, le nombre chromatique ludique 1-impropre, défini de manière analogue excepté que la coloration construite au cours du jeu ne doit être qu'1-impropre.

Nous avons commencé par étudier le lien entre χ_g et $\chi_g^{(1)}$. Il se trouve que de manière contre-intuitive, $\chi_g^{(1)}$ ne peut être borné supérieurement par aucune fonction de χ_g . En particulier, pour les graphes bipartis $K_{n,n}$ ($n \geq 2$), $\chi_g(K_{n,n}) = 3$, tandis que $\chi_g^{(1)}(K_{n,n}) = n$. De la même manière, nous pourrions montrer que $\chi_g^{(d)}(K_{n,n}) = \lceil \frac{2n}{d} \rceil$, pour tout $d \geq 1$. Il serait intéressant d'étudier le lien entre $\chi_g^{(1)}$ et $\chi_g^{(d)}$, pour des valeurs de d strictement plus grandes que 1. Nous ne voyons *a priori* aucune raison pour que $\chi_g^{(d)}$ soit toujours inférieur à $\chi_g^{(1)}$. Nous posons en particulier la question suivante.

Question ouverte. *Pouvons-nous trouver des graphes G pour lesquels $\chi_g^{(2)}(G)$ est significativement plus grand que $\chi_g^{(1)}(G)$?*

Il serait intéressant de chercher de manière réciproque, s'il existe une fonction F telle que $\chi_g(G) \leq F(\chi_g^{(1)}(G))$, pour tout graphe G . Cette question est motivée par le résultat suivant, issu du folklore : $\chi(G) \leq 2\chi^{(1)}(G)$ et par le fait que nous n'avons pas d'exemples de graphes pour lesquels $\chi_g(G)$ n'est pas du même ordre que $\chi_g^{(1)}(G)$.

Ensuite nous avons montré que $\chi_g^{(1)}(P_n) = \chi_g^{(1)}(C_n) = 2$, pour $n \geq 3$. Le nombre chromatique ludique des grilles en général est encore inconnu, tandis que pour les grilles toroïdales, nous savons que $\chi_g(C_{2n} \square C_m) = 5$, pour $n \geq 3$ et $m \geq 7$ (voir les travaux de Raspaud et Wu [75]). Il serait intéressant de voir ce qu'il en est pour le jeu de coloration 1-impropre. Peut-être est-ce plus facile d'obtenir la valeur exacte ?

Pour finir nous nous sommes consacrés aux forêts. Il était déjà connu que $\chi_g(F) \leq 3$, pour toute forêts F et que cette borne est serrée. Notre travail a consisté à montrer que la borne reste optimale même si nous nous restreignons aux chenilles de degré maximum 3. Rappelons que pour une forêt F , $\chi_g(F) = 3, 4$, sauf si F ne contient que des composantes d'ordre inférieur ou égal à 3 et dans ce cas $\chi_g(F) \leq 2$. Dunn et al. proposent dans [33] un algorithme polynomial pour déterminer si le nombre chromatique ludique d'une forêt n'ayant pas de sommets de degré 3 est égal à 3 ou 4. Cependant la complexité du problème sur les arbres reste ouverte lorsque des sommets de degré 3 sont autorisés. De la même manière, nous savons que pour une

forêt F , $\chi_g^{(1)}(F) = 2, 3$, sauf si toutes les composantes de F sont de taille inférieure ou égale à 2 et dans ce cas $\chi_g^{(1)}(F) = 1$. Nous posons donc la question suivante, qui sous-entend une caractérisation des forêts pour lesquelles $\chi_g^{(1)} = 2$.

Question ouverte. *Existe-t-il un algorithme polynomial pour le calcul du nombre chromatique ludique 1-impropre d'une forêt ?*

Pour les forêts, la stratégie d'activation utilisée pour le nombre chromatique ludique s'adapte immédiatement au jeu 1-impropre et donne une meilleure borne supérieure. De manière similaire, Chu et al. [23] démontrent que $\chi_g^{(1)}(G) \leq 6$, dès lors que G est un graphe planaire extérieur (alors que pour cette classe la meilleure borne supérieure connue sur χ_g est 7). Pour d'autres classes de graphes où de telles stratégies sont utilisées, nous pourrions peut-être obtenir de meilleurs résultats pour le jeu de coloration 1-impropre. Par exemple, la borne supérieure de 17 pour les graphes planaires peut-elle être descendue si nous considérons la version 1-impropre ?

Pour terminer, nous soulevons une question qui nous semble pouvoir servir de fil rouge dans l'étude de ce jeu. Remarquons que pour tout graphe G , $\chi^{(1)}(G) \leq \Delta(G)$. Nous ne pouvons donc pas trouver trivialement d'exemple de graphes pour lesquels $\chi_g^{(1)} = \Delta + 1$. Par exemple, il n'est pas difficile de se convaincre que $\chi_g^{(1)}(K_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Question ouverte. *Existe-t-il des graphes G pour lesquels $\chi_g^{(1)}(G) = \Delta(G) + 1$?*

Pour répondre à cette question, il serait intéressant de regarder des exemples non-triviaux de graphes pour lesquels $\chi_g = \Delta + 1$. Par exemple, les grilles toroïdales $\chi_g(C_{2n} \square C_m)$, pour $n \geq 3$ et $m \geq 7$, que nous avons déjà citées, ou encore les hypercubes, pour lesquels il est conjecturé que $\chi_g(\mathcal{H}_n) = n + 1$, conjecture qui est vérifiée pour $n \leq 4$ [5].

Chapitre 3

Jeu de domination

Il est vain de débâter contre le capitalisme : ce n'est pas lui qui crée ce monde, c'est la machine.

J. Ellul. La technique ou l'enjeu du siècle.

Tout refus de travail, tout refus de participer à la technique dans notre société est un acte de déviance notoire. L'un des plus graves sans doute !

J. Ellul. Déviance et déviants (dans notre société intolérante).

Dans ce chapitre, nous apportons notre contribution à l'étude du jeu de domination, introduit par Brešar *et al.* [14]. Le jeu de domination est probablement le jeu à objectif compétitif sur les graphes le plus étudié après le jeu de coloration. Si ce dernier a été introduit pour tenter de trouver une preuve alternative du théorème des quatre couleurs, le jeu de domination a lui probablement été inventé pour apporter un nouveau regard sur des problèmes anciens concernant la domination et notamment la célèbre conjecture de Vizing qui postule que $\gamma(G \square H) \geq \gamma(G)\gamma(H)$, pour tous graphes G et H . Le jeu de domination est un jeu de construction minimisant comme défini dans la Partie 1.4. Dans la littérature concernant le sujet, les deux joueurs sont appelés Dominator et Staller, au lieu de Gentil et Méchant. Pour les différencier plus facilement dans la rédaction des preuves, nous considérons que Dominator est un homme et Staller une femme. Les deux joueurs s'affrontent sur un graphe G , et ils ont k coups pour construire un ensemble D d'un graphe G en sélectionnant chacun leur tour un sommet de G . Ils ne peuvent ajouter un sommet dans D que si l'ensemble des sommets dominés par D augmente strictement. Un tel coup sera appelé légal. Cette restriction supplémentaire empêche Staller de

jouer de manière trop défavorable pour Dominator¹. Le jeu se termine lorsque l'un des joueurs ne peut plus jouer. C'est-à-dire que k coups ont été joués ou que l'ensemble du graphe est dominé. Dominator gagne alors si G est entièrement dominé et Staller dans le cas contraire. Le *D-jeu* désigne le jeu dans lequel Dominator commence et le *S-jeu* celui pour lequel Staller joue le premier coup. Le *D-nombre dominant ludique* de G , noté $\gamma_g(G)$, désigne le plus petit entier k tel que Dominator possède une stratégie gagnante pour le D-jeu sur G . Le *S-nombre dominant ludique* de G , $\gamma'_g(G)$, est défini similairement en considérant le S-jeu. Les lecteurs avertis remarqueront que la présentation du jeu proposée ici diffère quelque peu de celle habituelle. Nous pensons que cette manière de faire met en avant le fait (parfois nié) que le jeu de domination est bien un jeu combinatoire, et harmonise la définition de ce jeu avec celle d'autres jeux à objectif compétitif, comme le jeu distinguant ou le jeu de coloration.

Pour tout graphe G , nous obtenons facilement que $\gamma(G) \leq \gamma_g(G) \leq 2\gamma(G) - 1$ et que $\gamma(G) \leq \gamma'_g(G) \leq 2\gamma(G)$. En effet, informellement, dans le D-jeu (resp. S-jeu) avec $2\gamma(G) - 1$ coups (resp. $2\gamma(G)$), Dominator va pouvoir jouer $\gamma(G)$ coups et donc construire un ensemble dominant de taille $\gamma(G)$. Il a été démontré que ces bornes sont serrées et que toutes les valeurs des deux intervalles sont atteintes [14]. Les graphes pour lesquels $\gamma(G)$ est égal à $\gamma_g(G)$ ou $\gamma'_g(G)$ peuvent être considérés comme ayant des ensembles dominants minimaux particulièrement robustes puisqu'ils peuvent être obtenus même dans un contexte compétitif. Une caractérisation des forêts possédant cette robustesse est connue [73].

Après s'être questionné sur le rapport entre le nombre dominant classique et les deux invariants ludiques γ_g et γ'_g , il est naturel d'étudier la relation que ceux-ci entretiennent. Afin d'étudier entre autre cette question, il est intéressant de s'autoriser à jouer sur un graphe G partiellement dominé par un sous-ensemble de sommets A , que nous désignerons par $G|A$. Le jeu est alors le même, hormis que les sommets de A n'ont pas besoin d'être dominés. Ils peuvent cependant être joués, si cela correspond à un coup légal. Le résultat intuitif suivant possède de nombreuses applications et est connu sous le nom de *Principe de continuation*.

Proposition 3.1. [Kinnerlsey et al. [61] (2013).] *Soient G un graphe et A et B deux sous-ensembles de sommets de G . Si $A \subseteq B$, alors $\gamma_g(G|B) \leq \gamma_g(G|A)$ et $\gamma'_g(G|B) \leq \gamma'_g(G|A)$.*

Le principe de continuation permet de montrer notamment que l'écart entre γ_g et γ'_g est au plus de 1.

1. Cependant, il n'a à notre connaissance jamais été étudié à quel point relâcher cette règle serait défavorable à celui-ci.

Théorème 3.2. [Brešar *et al.* [14] (2010), Kinnersley *et al.* [61] (2013).] *Pour tout graphe G , l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$|\gamma_g(G) - \gamma'_g(G)| \leq 1.$$

Nous dirons qu'un graphe G réalise la paire (k, l) , ou est un (k, l) -graphe si $\gamma_g(G) = k$ et $\gamma'_g(G) = l$. D'après le théorème précédent les seules paires réalisables sont de la forme (k, k) , $(k + 1, k)$, ou $(k, k + 1)$ (avec $k \geq 1$). Un graphe réalisant (k, k) sera qualifié de *ÉGAL graphe*, et ceux réalisant respectivement $(k, k + 1)$ et $(k, k - 1)$ seront appelés *PLUS graphes* et *MINUS graphes*. Ils se trouvent que pour n'importe quelle valeur de k , ces trois possibilités sont réalisables. Plus précisément, Košmerlj montre dans [66] que ces paires peuvent être réalisées par des familles de graphes r -connexes, avec r arbitrairement grand.

Notons que l'existence de MINUS graphes semble à première vue contre-intuitive, puisque sur de tels graphes Dominator n'a pas intérêt à commencer. La Figure 3.1 ci-dessous illustre ce résultat avec quelques exemples simples. Nous savons par contre

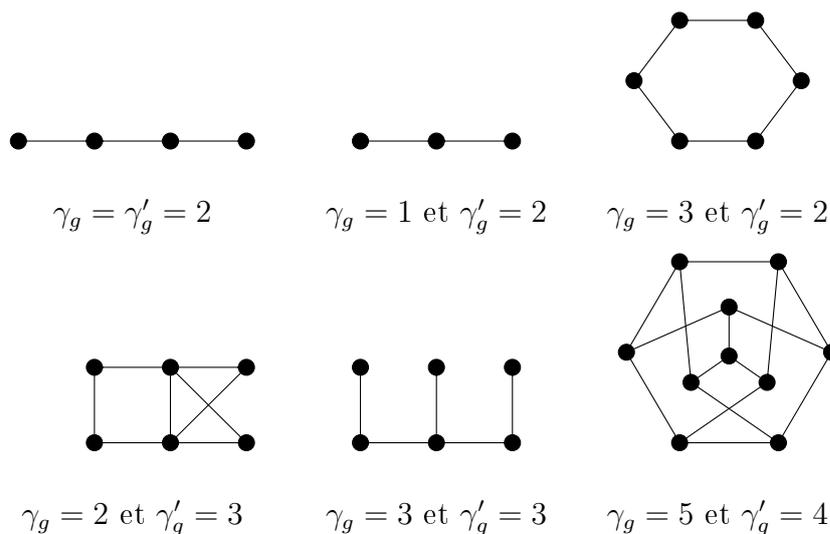


FIGURE 3.1 – Quelques exemples.

que si nous nous restreignons aux arbres, seules les paires $(k, k + 1)$ et (k, k) sont réalisables. En d'autres termes, il n'existe pas d'arbres MINUS.

Calculer la valeur exacte de γ_g et γ'_g est un problème difficile en général ; Brešar *et al.* [10] ont montré qu'il était effectivement PSPACE-Complet. Ce résultat surprend non par sa nature, les jeux combinatoires sont de bons candidats pour cette classe de complexité, mais parce que dans le cas du jeu plus ancien de coloration, aucun résultat de complexité n'est connu.

Même sur des classes de graphes particulières peu de résultats sur la valeur exacte de γ_g et γ'_g sont connus et leurs preuves sont loin d'être triviales. Nous en proposons quelques-uns ici. Commençons par les chemins.

Proposition 3.3. *Si $n \geq 1$, alors*

$$(i) \quad \gamma_g(P_n) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1; & \text{si } n \equiv 3 \pmod{4}, \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil; & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$(ii) \quad \gamma'_g(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil.$$

La N^e puissance du cycle C_n , notée C_n^N , est le graphe obtenu à partir de C_n en ajoutant une arête entre les sommets à distance inférieure ou égale à N dans C_n . Bujtás *et al.* [20] donnent la valeur exacte de γ_g et γ'_g pour ces graphes, étendant par là-même un résultat non publié de Kinnersley *et al.* [60] pour les cycles.

Proposition 3.4. *Si $n \geq 3$ et $N \geq 1$, alors :*

$$\gamma_g(C_n^N) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{N+1} \rceil; & \text{si } n \pmod{2N+2} \in \{0, \dots, N+1\}, \\ \lceil \frac{n}{N+1} \rceil - 1; & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $n \geq 3$ et $n \geq 2N+1$, alors :

$$\gamma'_g(C_n^N) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{N+1} \rceil; & \text{si } n \pmod{2N+2} \in \{0\} \\ \lceil \frac{n}{N+1} \rceil - 1; & \text{si } n \pmod{2N+2} \in \{1, \dots, N+1, 2N+1\}, \\ \lceil \frac{n}{N+1} \rceil - 2; & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si la condition $n \geq 2N+1$ n'est pas respectée, C_n^N est un graphe complet et nous obtenons $\gamma'_g(C_n^N) = 1$.

Le *peigne* P'_k est le graphe obtenu en ajoutant à chaque sommet du graphe P_k , un voisin de degré 1. La valeur exacte pour les peignes est également connue [66]. Une anecdote concernant ce résultat illustre bien la difficulté du calcul de ces invariants ludiques. Nous pouvons en effet lire une première fois dans [14] que « it is straightforward to show that $\gamma_g(P'_k) = \gamma'_g(P'_k) = k$ », avant que ces mêmes auteurs préviennent Košmerlj que ce résultat n'est en fait pas vrai déjà pour P'_3 . Celui-ci obtient alors le résultat suivant.

Proposition 3.5. *Pour $k \geq 1$, nous avons $\gamma_g(P'_k) = k + \lceil \frac{k-7}{10} \rceil$ et $\gamma'_g(P'_k) = k + \lceil \frac{k-2}{10} \rceil$.*

Le calcul de ces invariants ludiques pour des classes même simples s'avérant compliqué, de nombreuses études se focalisent autour de propriétés structurales. Citons par exemple [30] pour des résultats concernant l'union disjointe de graphes, et l'introduction de la classe des graphes NO-MINUS pour lesquels le calcul des D- et S-nombres dominants ludiques de $G \cup H$ à partir de ceux de G et H est plus facile. Citons aussi [11] pour l'impact de la suppression d'un sommet ou d'une arête sur γ_g et γ'_g , ou encore [12] où sont étudiés les graphes bluffs, des graphes dans lesquels n'importe quel sommet est un premier coup optimal pour le D-jeu et le

S-jeu. Dans ce dernier papier, la classe des graphes réalisant $(3, 2)$ est caractérisée. C'est en partie ce résultat qui motive les résultats de notre thèse présentés dans la Partie 3.1. Dans celle-ci, nous donnons des caractérisations des graphes ayant de petits nombres dominants ludiques et un diamètre extrémal vis-à-vis de ceux-ci. Ces caractérisations permettent de construire des algorithmes de reconnaissance plus efficaces pour ces classes de graphes. Il s'agit d'un travail en collaboration avec Sandi Klavžar et Gašper Košmerlj [62, 63].

Une autre direction de recherche très active sur le jeu de domination concerne la résolution de la $3/5$ -conjecture qui postule que Dominator a besoin d'au plus $3/5^e$ des sommets du graphe pour gagner. Ce résultat serait l'analogue de la borne supérieure, plus facile à obtenir, concernant le nombre dominant classique : $\gamma(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, pour tout graphe G d'ordre n sans sommet isolé. Beaucoup d'intérêt est porté à cette conjecture, à la fois pour elle-même mais aussi parce que les techniques de preuve utilisées pour attaquer celle-ci ont permis de faire des progrès sur des problèmes concernant le nombre dominant classique. Bujtás et Klavžar ont en effet utilisé des stratégies analogues pour améliorer des bornes supérieures sur γ en fonction du degré minimum du graphe [19]. Il s'agit d'une belle illustration de l'intérêt que peut avoir l'introduction d'une version ludique d'un invariant pour étudier celui-ci. La partie 3.2 présente nos travaux de thèse concernant cette fameuse conjecture. Plus précisément, nous étendons un résultat de Bujtás concernant la $3/5$ -conjecture pour la classe des forêts. Ce travail a été publié dans [78].

3.1 Graphes avec un petit nombre dominant ludique

Le résultat suivant, caractérisant les graphes réalisants $(3, 2)$, a été démontré dans [12].

Théorème 3.6. *Un graphe G réalise $(3, 2)$ si et seulement si chaque sommet est non-adjacent à deux sommets qui ne sont pas jumeaux, $\gamma(G) = 2$ et chaque sommet appartient à un ensemble dominant de taille $\gamma(G)$.*

Inspiré par ce résultat, nous avons étudié les graphes ayant de petits nombres dominants ludiques. Afin d'obtenir de belles caractérisations, nous avons dû nous restreindre aux graphes extrémaux par rapport au diamètre. Ce que nous entendons par là, ainsi que le lien entre γ_g , γ'_g et le diamètre du graphe, sera rendu clair dans la sous-partie 3.1.1. Puis nous caractériserons les graphes ayant $\gamma_g = 2$ ou $\gamma'_g = 2$. Ensuite, nous passons aux graphes extrémaux (vis-à-vis du diamètre) pour lesquels $\gamma_g = 3$ ou $\gamma'_g = 3$. Enfin nous terminons en expliquant comment ces caractérisations permettent d'améliorer l'algorithme de « brute force » de reconnaissance de ces graphes.

3.1.1 Lien entre le nombre dominant ludique et le diamètre d'un graphe

Un sous-graphe H d'un graphe G est *gardé* dans G si pour tout sommet u de G , il existe un sommet $v \in V(H)$ tel que $N[u] \cap V(H) \subseteq N[v] \cap V(H)$. Le sommet v est un *gardien* de u dans H . Si $u \in V(H)$, alors u est son propre gardien. Ce concept de sous-graphe gardé a été introduit dans [13] où le résultat suivant a été prouvé.

Théorème 3.7. *Si H est gardé dans G , alors $\gamma_g(H) \leq \gamma_g(G)$ et $\gamma'_g(H) \leq \gamma'_g(G)$.*

Afin de borner le diamètre d'un graphe à l'aide de son nombre dominant ludique, nous rappelons que pour un chemin d'ordre n nous avons :

$$(i) \quad \gamma_g(P_n) = \begin{cases} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1; & \text{si } n \equiv 3 \pmod{4}, \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor; & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$(ii) \quad \gamma'_g(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil.$$

Nous sommes maintenant prêts pour énoncer la borne attendue. La preuve de ce résultat, faisant plus ou moins partie du folklore, apparaît pour la première fois explicitement dans notre article [63].

Proposition 3.8. *Si G est un graphe, alors*

$$(i) \quad \text{diam}(G) \leq \begin{cases} 2\gamma_g(G); & \gamma_g(G) \text{ impair,} \\ 2\gamma_g(G) - 1; & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$(ii) \quad \text{diam}(G) \leq 2\gamma'_g(G) - 1.$$

De plus, ces bornes sont serrées.

Démonstration. Soit G un graphe et P un chemin diamétral de G . Ce chemin P est un plus court chemin isomorphe à $P_{\text{diam}(G)+1}$ et d'après la preuve de [13, Corollaire 4.1], P est gardé dans G . Ainsi d'après le Théorème 3.7, $\gamma_g(G) \geq \gamma_g(P)$ et $\gamma'_g(G) \geq \gamma'_g(P)$. En utilisant la dernière inégalité ainsi que la Proposition 3.3, nous obtenons

$$\gamma'_g(G) \geq \gamma'_g(P_{\text{diam}(G)+1}) = \left\lceil \frac{\text{diam}(G) + 1}{2} \right\rceil \geq \frac{\text{diam}(G) + 1}{2},$$

ce qui prouve (ii).

Supposons que $\gamma_g(G)$ soit impair. Par l'absurde, supposons que $\text{diam}(G) \geq 2\gamma_g(G) + 1$. Alors G contient un plus court chemin P' d'ordre $2\gamma_g(G) + 2$ et ainsi $\gamma_g(G) \geq \gamma_g(P') = \lceil (2\gamma_g(G) + 2)/2 \rceil = \gamma_g(G) + 1$, une contradiction. Donc nous avons $\text{diam}(G) \leq 2\gamma_g(G)$, quand $\gamma_g(G)$ est impair.

Supposons maintenant que $\gamma_g(G)$ est pair et que $\text{diam}(G) \geq 2\gamma_g(G)$ est vrai. Alors G contient un plus court chemin P'' d'ordre $2\gamma_g(G) + 1$. Puisque $\gamma_g(G)$ est pair,

$2\gamma_g(G) + 1 \equiv 1 \pmod{4}$, et donc, $\gamma_g(G) \geq \gamma_g(P'') = \lceil (2\gamma_g(G) + 1)/2 \rceil = \gamma_g(G) + 1$, une contradiction. Nous en concluons que $\text{diam}(G) \leq 2\gamma_g(G) - 1$ est vrai, quand $\gamma_g(G)$ est pair.

Pour démontrer que les bornes sont serrées, considérons les chemins. Plus précisément, pour tout $k \geq 1$, nous avons :

- $\gamma_g(P_{4k}) = 2k$ et $\text{diam}(P_{4k}) = 4k - 1 = 2\gamma_g(P_{4k}) - 1$,
- $\gamma_g(P_{4k+3}) = 2k + 1$ et $\text{diam}(P_{4k+3}) = 4k + 2 = 2\gamma_g(P_{4k+3})$, et
- $\gamma'_g(P_{2k}) = k$ et $\text{diam}(P_{2k}) = 2k - 1 = 2\gamma'_g(P_{2k}) - 1$.

□

Pour γ_g ou γ'_g fixé, les graphes ayant un diamètre maximum seront appelés *extrémaux*. Pour $k \geq 1$, il s'agit des graphes vérifiant : $\gamma_g = k$ et $\text{diam} = 2k - 1$, si k est pair, $\gamma_g = k$ et $\text{diam} = 2k$, si k est impair, ou $\gamma'_g = k$ et $\text{diam} = 2k - 1$, quelle que soit la parité de k .

3.1.2 Graphes G pour lesquels $\gamma_g(G) = 2$ ou $\gamma'_g(G) = 2$

Dans cette partie nous étudions la structure des graphes G pour lesquels $\gamma_g(G) = 2$ ou $\gamma'_g(G) = 2$. Avant cela, nous observons que

- $\gamma_g(G) = 1$ si et seulement si $\Delta(G) = n - 1$, et
- $\gamma'_g(G) = 1$ si et seulement si G est un graphe complet.

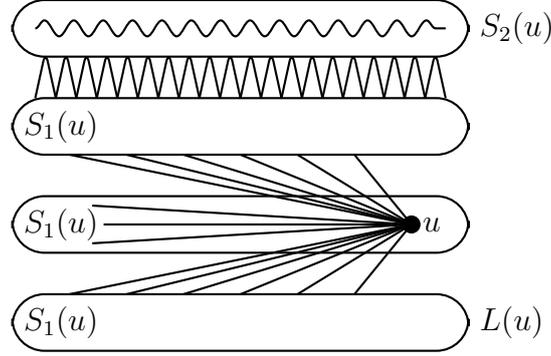
Remarquons aussi que si $\gamma_g(G) = 2$ et G n'est pas connexe, alors G possède exactement deux composantes connexes, l'une contenant un sommet universel, l'autre étant un graphe complet. De plus, si $\gamma'_g(G) = 2$ et G n'est pas connexe, alors G est l'union disjointe de deux graphes complets. Afin de caractériser les graphes connexes avec $\gamma_g(G) = 2$, nous introduisons le concept suivant. Nous disons qu'un sommet u d'un graphe G (connexe) est *2-dense*, si

- $\text{ecc}(u) = 2$,
- il y a un joint entre $S_2(u)$ et le voisinage de $S_2(u)$ dans $S_1(u)$, et
- $S_2(u)$ induit une clique.

Soit u un sommet 2-dense de G et soit $L(u)$ la partie du voisinage de u qui est à distance 3 de $S_2(u)$, voir Fig. 3.2. Remarquons que $L(u)$ est potentiellement vide.

Proposition 3.9. *Si G est un graphe connexe, alors les équivalences suivantes sont vraies.*

- (i) $\gamma_g(G) = 2$ si et seulement si G contient un sommet 2-dense u et $\gamma(G) \neq 1$.
- (ii) $\gamma'_g(G) = 2$ si et seulement si G n'est pas complet et tout sommet appartient à un ensemble dominant de taille 2.

FIGURE 3.2 – Un exemple de sommet u 2-dense.

Démonstration. (i) Supposons d'abord que $\gamma_g(G) = 2$ et soit u un premier coup gagnant de Dominator. Alors $\text{ecc}(u) \geq 2$, car sinon Dominator pourrait terminer le jeu en un coup seulement. Puisque Staller, en jouant un sommet dans $S_1(u) \setminus L(u)$, ne domine aucun sommet de $S_3(u)$, il s'ensuit que $\text{ecc}(u) = 2$. S'il existe deux sommets non-adjacents dans $S_2(u)$, alors Staller pourrait jouer l'un d'eux sans finir immédiatement le jeu. Ainsi $S_2(u)$ doit induire une clique. Pour finir, supposons qu'il existe un sommet $x \in S_1(u)$ qui est adjacent à $y \in S_2(u)$ et non-adjacent à $z \in S_2(u)$. Alors Staller peut jouer x dans l'optique de prolonger la partie d'un coup. Il n'y a donc pas de tel sommet z , c'est-à-dire qu'il y a un joint entre $S_2(u)$ et le voisinage de $S_2(u)$ dans $S_1(u)$. Nous en concluons que u est un sommet 2-dense.

Réciproquement, supposons que G contienne un sommet 2-dense u . Alors il est immédiat de voir que Dominator force Staller à finir le jeu au coup suivant, lorsqu'il joue u . Ainsi $\gamma_g(G) \leq 2$. Comme $\gamma(G) \neq 1$, nous avons en fait égalité.

(ii) Supposons que $\gamma'_g(G) = 2$. Alors G n'est clairement pas un graphe complet. Soit u un sommet arbitraire de G . Il n'y a rien à prouver si u est un sommet universel (n'importe quel sommet ajouté à u forme un ensemble dominant de taille 2). Si u n'est pas universel, alors si Staller joue u comme premier coup, Dominator a une réponse v telle que le jeu se termine après ce coup. Ainsi $\{u, v\}$ est un ensemble dominant de taille 2.

Réciproquement, supposons que G n'est pas complet et que tout sommet appartient à un ensemble dominant de taille 2. Alors $\gamma'_g(G) \geq 2$ car G n'est pas complet. De plus, $\gamma'_g(G) \leq 2$ car après n'importe quel premier coup u de Staller, Dominator peut finir la partie en jouant v , où $\{u, v\}$ est un ensemble dominant. \square

Si $\gamma_g(G) = 2$ ou $\gamma'_g(G) = 2$, alors G réalise l'une des paires (1, 2), (2, 2), (3, 2), ou (2, 3). Parmi les graphes sans jumeaux, les classes de graphes qui réalisent les trois premières paires peuvent être simplement décrites comme suit.

Observation 3.10. *Soit G un graphe d'ordre n , connexe, sans jumeaux et avec $\gamma'_g(G) = 2$. Alors*

- (i) G réalise $(1, 2)$ si et seulement si $\Delta(G) = n - 1$.
- (ii) G réalise $(2, 2)$ si et seulement si $\Delta(G) = n - 2$.
- (iii) G réalise $(3, 2)$ si et seulement si $\Delta(G) \leq n - 3$.

Démonstration. L'affirmation (i) est claire, (iii) provient de [12, Corollaire 3.2], et (ii) caractérise donc les graphes connexes, sans jumeaux et avec $\gamma'_g(G) = 2$, restants. \square

La dernière paire à considérer est $(2, 3)$. Nous constatons immédiatement que G réalise la paire $(2, 3)$ si et seulement si $\gamma_g(G) = 2$ et G contient un sommet qui n'est dans aucun ensemble dominant minimum.

D'après la Proposition 3.8, si $\gamma_g(G) = 2$ ou $\gamma'_g(G) = 2$, alors $\text{diam}(G) \leq 3$. Nous donnons maintenant une caractérisation explicite des graphes extrémaux pour lesquels $\gamma_g = 2$ ou $\gamma'_g = 2$, c'est-à-dire ceux de diamètre 3. Pour γ_g , la Proposition 3.9 implique immédiatement le résultat ci-dessous.

Corollaire 3.11. *Soit G un graphe connexe. Alors, $\gamma_g(G) = 2$ et $\text{diam}(G) = 3$ si et seulement si G contient un sommet 2-dense u tel que $L(u) \neq \emptyset$.*

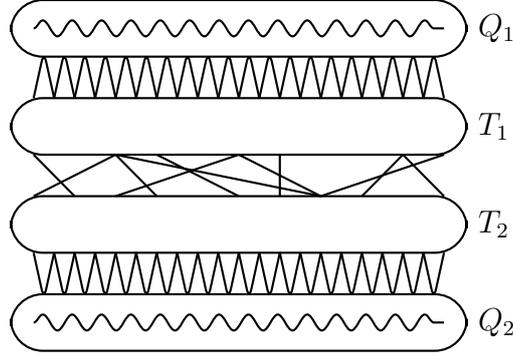
Pour donner une caractérisation des graphes G avec $\gamma'_g(G) = 2$ et $\text{diam}(G) = 3$, nous devons introduire le concept suivant. Nous disons qu'un graphe connexe G est un *gamburger avec une structure de gamburger* (Q_1, T_1, T_2, Q_2) , si G se décompose en quatre sous-graphes disjoints non-vides Q_1, T_1, T_2 , et Q_2 , où Q_1 et Q_2 induisent des cliques sans arêtes entre elles, et de plus les assertions suivantes sont vérifiées pour tout $i \in \{1, 2\}$ (voir la Figure 3.3).

- Il y a un joint entre Q_i et T_i et pas d'arêtes entre Q_i et T_{3-i} .
- Pour tout sommet $x \in T_i$, il existe un sommet $x' \in T_{3-i} \cup Q_{3-i}$ tel que $T_1 \cup T_2 \subseteq N[x] \cup N[x']$.

Nous montrons premièrement que tout gamburger possède une forme canonique.

Lemme 3.12. *Si G est un gamburger ayant pour structure de gamburger (Q_1, T_1, T_2, Q_2) , alors il existe une structure de gamburger (Q'_1, T'_1, T'_2, Q'_2) pour G telle que tout sommet de T'_i , avec $i \in \{1, 2\}$, possède au moins un voisin dans T'_{3-i} .*

Démonstration. Soit (Q_1, Q_2, T_1, T_2) une structure de gamburger pour G . Pour $i \in \{1, 2\}$, nous définissons W_i comme le sous-ensemble de sommets de T_i dont le voisinage est contenu dans $T_i \cup Q_i$. Posons aussi $Q'_i = Q_i \cup W_i$ et $T'_i = T_i \setminus W_i$. Remarquons que, puisque G est connexe, $W_i \neq T_i$ et ainsi T'_i n'est pas vide. Pour démontrer que cela définit une nouvelle structure de gamburger pour G , nous avons juste besoin de montrer que $N[w] = Q_i \cup T_i$ est vrai pour tout $w \in W_i$. Supposons que ce ne soit pas le cas. Puisqu'il y a un joint entre Q_i et T_i , cela veut dire qu'il

FIGURE 3.3 – Un Gamburger ayant comme cliques Q_1 et Q_2 .

existe $x \in T_i$, qui n'est pas un voisin de w . Puisque G est un gamburger, il existe par définition, un sommet $x' \in G \setminus (T_i \cup Q_i)$ pour lequel w appartient à $N(x')$. Cela est en contradiction avec la définition de W_i . En conclusion, $N[w] = Q_i \cup T_i$ et Q'_i induit une clique. \square

Lemme 3.13. *Un gamburger a un diamètre égal à 3.*

Démonstration. Puisque Q_1 et Q_2 ne sont pas vides, $\text{diam}(G) \geq 3$. D'après le Lemme 3.12, nous pouvons supposer que tout sommet dans T_1 (resp. T_2) possède un voisin dans T_2 (resp. T_1). Ceci implique clairement que $\text{diam}(G) \leq 3$. \square

Nous sommes maintenant prêts à montrer que les gamburgers sont précisément les graphes G extrémaux, pour lesquels $\gamma'_g(G) = 2$.

Théorème 3.14. *Un graphe G vérifie $\gamma'_g(G) = 2$ et $\text{diam}(G) = 3$ si et seulement si G est un gamburger.*

Démonstration. Supposons d'abord que G est un gamburger. D'après le Lemme 3.13, $\text{diam}(G) = 3$. Nous allons voir que $\gamma'_g(G)$ vaut 2. Puisque $\text{diam}(G) = 3$, $\gamma'_g(G)$ est clairement supérieur ou égal à 2. Premièrement, supposons que Staller choisisse de jouer son premier coup dans l'une des deux cliques, disons Q_1 . Dominator termine alors le jeu à son tour en jouant n'importe quel sommet de Q_2 . Supposons ensuite que Staller ne joue pas dans l'une des cliques, mais disons qu'elle choisisse $x \in T_1$. Il existe un sommet $x' \in T_2 \cup Q_2$ tel que $N[x] \cup N[x']$ contienne $T_1 \cup T_2$. Puisque aucun des sommets de Q_2 n'est encore dominé, jouer x' est un coup légal, qui permet à Dominator de terminer le jeu.

Réciproquement, supposons que $\gamma'_g(G) = 2$ et $\text{diam}(G) = 3$. Soit u un sommet diamétral de G . Posons $Q_1 = \{u\}$, $T_1 = S_1(u)$, $T_2 = S_2(u)$ et $Q_2 = S_3(u)$. Ces quatre ensembles forment clairement une partition de $V(G)$. Nous affirmons que (Q_1, T_1, T_2, Q_2) est une structure de gamburger pour G . Il est clair qu'il n'existe pas d'arêtes

qui violeraient les conditions pour être une structure de gamburger. C'est-à-dire, qu'il n'y a pas d'arêtes entre Q_1 et Q_2 , ni entre Q_i et T_{3-i} , pour $1 \leq i \leq 2$. Il est aussi clair que Q_1 induit une clique (réduite à un sommet), et qu'ainsi il y a un joint entre Q_1 et T_1 . Quel que soit le premier coup joué par Staller, Dominator doit être capable de finir le jeu au tour suivant. Si Staller joue dans Q_2 , Dominator ne pourra pas à son tour dominer simultanément des sommets dans Q_1 et dans Q_2 . Tous les sommets de Q_2 doivent donc être dominés par le premier sommet choisi par Staller. Il s'ensuit que Q_2 doit induire une clique. Supposons ensuite que Staller joue un sommet $y \in T_2$. Afin de dominer le sommet dans Q_1 , Dominator doit répondre en jouant dans $T_1 \cup Q_1$. Tous les sommets de Q_2 sont donc adjacents à y . Puisque y est arbitraire dans T_2 , nous devons avoir un joint entre Q_2 et T_2 . Considérons maintenant un coup optimal y' de Dominator. Comme nous l'avons déjà observé, y' appartient à $T_1 \cup Q_1$. Puisque le jeu se termine avec ce coup, cela implique que $T_1 \cup T_2 \subseteq N[y] \cup N[y']$. Similairement, pour tout $x \in T_1$, il y a un sommet $x' \in T_2 \cup Q_2$ tel que $T_1 \cup T_2 \subseteq N[x] \cup N[x']$. En conclusion, G est un gamburger et (Q_1, T_1, T_2, Q_2) est une structure de gamburger pour G . \square

Si un gamburger G , ayant une structure de gamburger (Q_1, T_1, T_2, Q_2) , contient un sommet $x \in T_1$ tel que $T_1 \cup T_2 \subseteq N[x]$, alors nous disons que G est un *gamburger garni*. Nous dirons aussi de x qu'il s'agit d'un *sommet garni* de G .

Munis de cette définition, nous pouvons raffiner le Théorème 3.14 lorsque nous avons affaire à des $(2, 2)$ -graphes.

Corollaire 3.15. *Un graphe G est un $(2, 2)$ -graphe, avec $\text{diam}(G) = 3$, si et seulement si G est un gamburger garni.*

Démonstration. Supposons d'abord que G est un gamburger garni. D'après le Théorème 3.14, $\gamma'_g(G) = 2$ et $\text{diam}(G) = 3$. Remarquons qu'un sommet garni x dans T_1 est 2-dense. Ainsi, $\gamma_g(G)$ est égal à 2 d'après la Proposition 3.9.

Réciproquement, supposons que G est un $(2, 2)$ -graphe de diamètre 3. D'après le Théorème 3.14, G possède une structure de gamburger (Q_1, T_1, T_2, Q_2) . De plus, par le Lemme 3.12, nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que tout sommet de T_i a un voisin dans T_{3-i} , où $i \in \{1, 2\}$. Soit x un premier coup optimal pour Dominator dans le D-jeu. Alors x appartient à $T_1 \cup T_2$, car si x appartenait à Q_i , Staller pourrait jouer dans T_i sans terminer le jeu. Sans perte de généralité, supposons que $x \in T_1$. Par l'absurde, supposons aussi que $N[x]$ ne contient pas $T_1 \cup T_2$. Soit y un sommet de $T_1 \cup T_2$ qui n'est pas dans $N[x]$. Si y appartient à T_1 , Staller peut jouer y sans terminer la partie. Si y est dans T_2 , nous savons que y a un voisin dans T_1 , disons y' . Ce sommet y' est clairement différent de x , et jouer y' est donc un coup légal (car y devient nouvellement dominé). Dans les deux cas, nous obtenons une contradiction avec le fait que $\gamma_g(G) = 2$. Nous en concluons que $T_1 \cup T_2 \subseteq N[x]$, et que x est un sommet garni du gamburger garni G . \square

3.1.3 À propos des graphes ayant un nombre dominant ludique de 3

La classe des graphes G vérifiant $\gamma_g(G) = 3$ semble trop riche pour admettre une jolie caractérisation. Dans [12], la sous-classe des graphes ayant la propriété additionnelle que $\gamma'_g(G) = 2$ a été caractérisée. Les cycles C_5 et C_6 appartiennent par exemple tous deux à cette sous-classe. De notre côté, nous avons pris le parti de caractériser la sous-classe des graphes vérifiant $\gamma_g = 3$ et qui sont extrémaux vis-à-vis du diamètre. C'est-à-dire les graphes pour lesquels $\gamma_g(G) = 3$ et $\text{diam}(G) = 6$. Par exemple, cette sous-classe contient P_7 . Elle est disjointe de la sous-classe précédente, des graphes réalisant $(3, 2)$. Cela provient du fait que les graphes G de la première classe vérifient $\gamma(G) = 2$, tandis que $\gamma(G) \geq 3$ pour tous ceux de la seconde. La situation est résumée par la Figure 3.4.

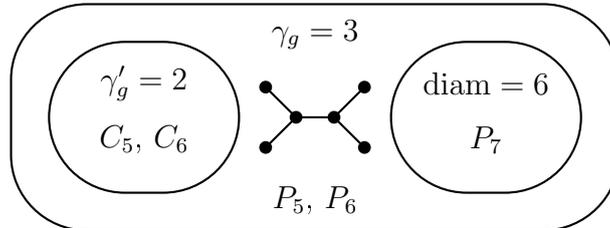


FIGURE 3.4 – Sous-classes des graphes vérifiant $\gamma_g = 3$.

Ensuite nous donnerons une caractérisation des graphes G vérifiant $\gamma'_g(G) = 3$ et $\text{diam}(G) = 5$. Ceux-ci sont donc également extrémaux.

3.1.4 Graphes vérifiant $\gamma_g = 3$ et $\text{diam} = 6$

Les gamburgers garnis se révèlent également utiles pour énoncer le premier résultat de cette partie. En plus de ce concept, nous introduisons également celui de sommet goûteux. Si G est un graphe connexe, alors un sommet u de G est dit *goûteux* si les conditions suivantes sont remplies.

- Il existe $v_1 \in S_1(u)$ tel que $N[v_1] = B_2(u)$.
- Il y a un joint entre $N(S_3(u)) \cap S_2(u)$ et $S_3(u)$.
- $(S_3(u), S_4(u), S_5(u), S_6(u))$ est une structure de gamburger garni avec un sommet garni dans $S_5(u)$.
- $S_7(u) = \emptyset$.

Avec ces définitions, la caractérisation annoncée s'énonce ainsi.

Théorème 3.16. *Si G est un graphe connexe, alors les affirmations suivantes sont équivalentes.*

- (i) $\gamma_g(G) = 3$ et $\text{diam}(G) = 6$.
- (ii) Toute paire de sommets diamétraux contient au moins un sommet goûteux.
- (iii) Il existe un sommet goûteux diamétral.

Démonstration. Nous commençons par démontrer que (i) implique (ii). Soient u_1 et u_2 des sommets de G vérifiant $d(u_1, u_2) = 6$. Soit P un plus court chemin entre u_1 et u_2 . Nous savons que $\gamma_g(G) = 3 = \gamma_g(P_7)$, et que les deux voisins des extrémités de P_7 sont les seuls premiers coups gagnants de Dominator pour le D-jeu sur P_7 . Nous en déduisons que le premier coup de Dominator dans G doit être soit dans $S_1(u_1)$, soit dans $S_1(u_2)$. Sinon Staller pourrait garantir (en considérant le jeu restreint à P) que la partie dure au moins quatre coups. Soit $i \in \{1, 2\}$ tel qu'il existe un coup gagnant pour Dominator dans $S_1(u_i)$. Par souci de clarté, nous écrirons S_j , $0 \leq j \leq 6$, au lieu de $S_j(u_i)$, et poserons $u = u_i$.

Puisque le diamètre du graphe est 6, les sphères S_j sont non-vides et forment une partition de $V(G)$. Nous allons montrer plusieurs affirmations qui établiront la structure décrite dans le point (ii). Soit $x \in S_1$ un premier coup gagnant de Dominator.

Affirmation 1. Il existe un sommet $v_1 \in S_1$ tel que $N[v_1] = B_2(u)$.

Staller peut répondre dans S_4 . Pour finir le jeu en trois tours, Dominator doit jouer son second coup dans $S_5 \cup S_6$. Ainsi, son premier coup x doit dominer entièrement $B_2(u)$. En posant $v_1 = x$, v_1 remplit les conditions annoncées.

Affirmation 2. Il y a un joint entre $N(S_3) \cap S_2$ et S_3 .

Staller peut jouer son premier coup n'importe où dans $N(S_3) \cap S_2$. De tels coups sont en effet légaux car ils dominent au moins un nouveau sommet dans S_3 . Dans ce cas, la réponse de Dominator doit être dans S_5 . Tous les sommets de S_3 doivent donc avoir été dominés par le coup de Staller. Puisque le coup de Staller dans $N(S_3) \cap S_2$ était arbitraire, il doit y avoir un joint entre $N(S_3) \cap S_2$ et S_3 .

Il reste à s'assurer que S_3, S_4, S_5, S_6 forment une structure de gamburger garni ayant un sommet garni dans S_5 .

Affirmation 3. S_3 et S_6 sont des cliques.

Supposons que Staller joue son premier coup dans S_3 (resp. S_6). Dominator doit répondre dans $S_5 \cup S_6$ (resp. $S_3 \cup S_4$). Puisque ce coup de Dominator termine le jeu, tous les sommets de S_3 (resp. S_6) doivent avoir été dominés par le coup de Staller. Ce coup peut être arbitraire dans la sphère S_3 (resp. S_6), car x ne domine aucun sommet de S_3 . Il s'ensuit que S_3 (resp. S_6) induit une clique.

Affirmation 4. Il y a un joint entre S_3 et S_4 ainsi qu'entre S_5 et S_6 . De plus, pour tout sommet y dans S_4 (resp. dans S_5) il existe un sommet y' dans $S_5 \cup S_6$ (resp. dans $S_3 \cup S_4$) tel que $N[y] \cup N[y']$ contienne $S_4 \cup S_5$.

Supposons que Staller joue un sommet y dans S_4 . Dominator doit ensuite jouer dans

$S_5 \cup S_6$. Tous les sommets de S_3 doivent donc avoir été dominés par le coup de Staller. Puisque y est arbitraire dans S_4 , nous devons avoir un joint entre S_3 et S_4 . Soit maintenant $y' \in S_5 \cup S_6$ une réponse gagnante de Dominator. Les sommets de $S_4 \cup S_5$ ne peuvent être dominés que par les deux derniers coups de la partie, c'est-à-dire par y et y' . Ainsi, ces deux sphères sont contenues dans $N[y] \cup N[y']$. Similairement, quand Staller joue comme premier coup un sommet y de S_5 , Dominator réplique en jouant un sommet $y' \in S_3 \cup S_4$, et nous obtenons la même conclusion.

Nous savons maintenant que S_3, S_4, S_5, S_6 définissent une structure de gamburger. Il reste donc uniquement à prouver ce qui suit.

Affirmation 5. Le gamburger défini par S_3, S_4, S_5, S_6 possède un sommet garni dans S_5 .

Comme pour l'Affirmation 2, supposons que Staller joue dans S_2 . Dominator doit répondre dans S_5 , et doit dominer tous les sommets de S_4, S_5 et S_6 avec ce coup. Une telle réponse de Dominator dans S_5 correspond donc au choix d'un sommet garni du gamburger ayant pour structure de gamburger (S_3, S_4, S_5, S_6) .

En conclusion, nous avons montré que u est un sommet goûteux.

Puisque (ii) implique trivialement (iii), il reste à démontrer que (iii) implique (i). Supposons donc qu'il existe un sommet diamétral goûteux u . Comme plus haut, nous écrivons simplement S_i à la place de $S_i(u)$, pour tout $i \in \{0, \dots, 6\}$. Soit v_1 un sommet de S_1 vérifiant $N[v_1] = B_2(u)$.

Pour commencer, nous montrons que $\text{diam}(G) = 6$. Puisque S_3, S_4, S_5, S_6 induisent une structure de gamburger, aucune de ces sphères n'est vide. Ainsi $\text{ecc}(u) = 6$ et $\text{diam}(G) \geq 6$. D'après le Lemme 3.13, le sous-graphe induit par S_3, S_4, S_5, S_6 est de diamètre 3. De plus, en utilisant le sommet $v_1 \in S_1$, il est facile de voir que tous les sommets de $B_2(u)$ sont à distance au plus 3 de n'importe quel sommet de S_3 . Nous en déduisons que G a pour diamètre 6.

Puisque $\text{diam}(G) = 6$, nous savons que $\gamma_g(G) \geq 3$. Pour conclure la preuve, nous avons juste à montrer que Dominator peut assurer que le jeu se termine en trois tours. Sa stratégie est de jouer v_1 comme premier coup. Après ça, tous les sommets de $B_2(u)$ sont dominés et les coups légaux restant pour Staller sont dans $G \setminus B_1(u)$. Premièrement, supposons que Staller réponde dans $G \setminus B_2(u)$. Puisque ces sommets induisent un gamburger, le Théorème 3.14 implique que Dominator a un coup dans $G \setminus B_2(u)$, tel que tous les sommets de ce sous-graphe soient dominés après celui-ci. Ceci termine clairement le jeu. Deuxièmement, si Staller joue dans S_2 , alors, pour être légal, ce coup doit appartenir à $N(S_3)$. À cause du joint entre $N(S_3) \cap S_2$ et S_3 , tous les sommets de S_3 sont dominés. Dominator peut donc finir le jeu en jouant un sommet garni de S_5 . \square

Ces deux caractérisations des graphes vérifiant $\gamma_g(G) = 3$ et $\text{diam}(G) = 6$ seront utiles pour concevoir un algorithme efficace de reconnaissance pour ces graphes. En

effet, nous aurons juste besoin de sélectionner une paire de sommets diamétraux et de vérifier si l'un d'eux conduit à la structure décrite dans le point (iii). Si ce n'est pas le cas, nous saurons, d'après (ii), qu'aucun autre sommet diamétral ne pourra donner la structure attendue. Cet algorithme sera décrit plus en détails dans la Partie 3.1.6.

3.1.5 Graphes vérifiant $\gamma'_g = 3$ et $\text{diam} = 5$

Pour caractériser les graphes annoncés dans le titre, nous introduisons encore une structure supplémentaire. Nous disons qu'un graphe connexe G est un *double-gamburger*, si G est l'union disjointe de sous-graphes non-vides, $Q_1, R_1, T_1, T_2, R_2, Q_2$, vérifiant, pour $i \in \{1, 2\}$, les conditions ci-dessous.

- Q_i et T_i induisent des cliques.
- Il y a un joint entre Q_i et R_i , ainsi qu'entre R_i et T_i .
- R_i induit une clique privée d'un couplage M_i .
- Si M_i est un couplage parfait de R_i , alors M_{3-i} est vide et il y a un joint entre T_1 et T_2 .
- Il existe un sommet $x_i \in T_i$, tel que $T_{3-i} \subseteq N(x_i)$.
- Il n'y a pas d'arêtes entre Q_i et $G \setminus R_i$ ni entre R_i et $G \setminus (Q_i \cup T_i)$.

Un double-gamburger est représenté dans la Figure 3.5. Nous disons également que $(Q_1, R_1, T_1, T_2, R_2, Q_2)$ est une *structure de double-gamburger* pour G .

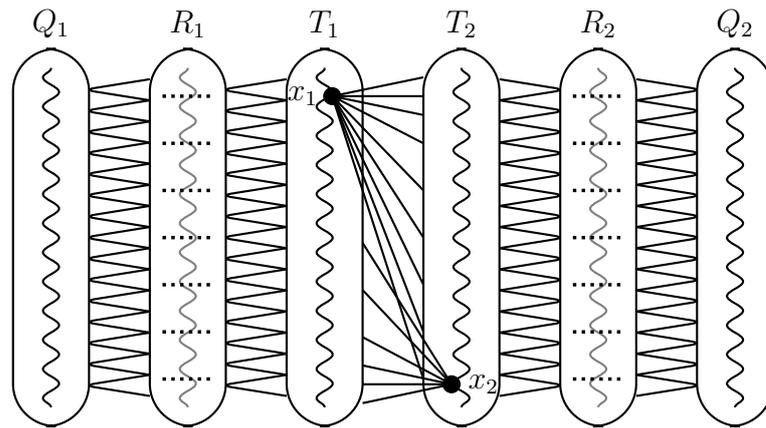


FIGURE 3.5 – Double-gamburger

Lemme 3.17. *Un double-gamburger a pour diamètre 5.*

Démonstration. Les graphes H_1 et H_2 , respectivement induits par Q_1, R_1, T_1 et T_2, R_2, Q_2 , ont comme diamètre 2. Pour tout $i \in \{1, 2\}$, nous disposons d'un sommet $x \in T_i$, tel que $T_{3-i} \subseteq N(x)$. En utilisant ces sommets, il est immédiat de voir que la distance entre un sommet de H_i et le sous-graphe H_{3-i} est de 3. Nous en concluons que le diamètre d'un double-gamburger est 5. \square

Théorème 3.18. *Si G est un graphe connexe, alors les énoncés suivants sont équivalents.*

- (i) $\gamma'_g(G) = 3$ et $\text{diam}(G) = 5$.
- (ii) *Pour n'importe quel sommet diamétral u , nous obtenons une structure de double-gamburger pour G en posant : $Q_1 = \{u\} \cup W_1$, $R_1 = S_1(u) \setminus W_1$, $T_1 = S_2(u)$, $T_2 = S_3(u)$, $R_2 = S_4(u)$ et $Q_2 = S_5(u)$, où $W_1 = S_1(u) \setminus N(S_2(u))$.*
- (iii) *G est un double-gamburger.*

Démonstration. Nous montrons d'abord que (i) implique (ii). Soit u un sommet de G vérifiant $\text{ecc}(u) = 5$. Les quatre affirmations suivantes établiront toutes ensemble que les sous-graphes $Q_1, R_1, T_1, T_2, R_2, Q_2$, définis dans (ii), forment une structure de double-gamburger pour G . Remarquons premièrement que ces sous-graphes ne sont pas vides et qu'il n'y a pas d'arêtes entre Q_i et $G \setminus R_i$, tout comme entre R_i et $G \setminus (Q_i \cup T_i)$, où $i \in \{1, 2\}$.

Affirmation 1. Pour $i \in \{1, 2\}$, Q_i induit une clique, il y a un joint entre Q_i et R_i , et il existe $u \in T_{3-i}$ tel que $N(u)$ contienne T_i .

Supposons que $x \in Q_i$ soit le premier coup de Staller. Si Dominator joue dans $R_i \cup T_i$, Staller aura la possibilité de jouer son second coup dans T_{3-i} . Dans ce cas, Q_{3-i} restera non-dominé à la fin du troisième tour. S'il joue dans Q_{3-i} , elle pourra répondre dans R_{3-i} , et T_i ne sera pas dominé. Ainsi, une réponse gagnante de Dominator est soit dans T_{3-i} , soit dans R_{3-i} . Dans les deux cas, il y a toujours un coup légal pour Staller dans $T_{3-i} \cup R_{3-i}$. Puisque le jeu se termine en trois coups, cela implique que $Q_i \cup R_i$ a été entièrement dominé par x . Nous avons donc que Q_i induit une clique et qu'il y a un joint entre Q_i et R_i . Supposons maintenant que la réponse de Dominator soit dans T_{3-i} . Staller peut jouer son dernier coup dans R_{3-i} . Le jeu ne peut alors se terminer en trois tours que si le coup de Dominator domine tout T_i . D'un autre côté, si Dominator joue dans R_{3-i} , Staller peut jouer son dernier coup dans T_{3-i} . Une fois de plus, ce coup doit dominer tout T_i . En conclusion, nous avons au moins un sommet de T_{3-i} dont le voisinage contient T_i .

Affirmation 2. Pour $i \in \{1, 2\}$, T_i induit une clique et il y a un joint entre T_i et R_i .

Par l'absurde, supposons qu'il existe $x \in T_i$, tel que $N[x]$ ne contienne pas $T_i \cup R_i$. Soit alors y un sommet de $(T_i \cup R_i) \setminus N[x]$. Staller peut commencer en jouant le sommet x . Si Dominator joue dans $Q_i \cup R_i \cup T_i$, Staller pourra jouer son second coup

dans T_{3-i} . Si il joue dans T_{3-i} , elle pourra répondre dans Q_i . Dans les deux cas, les sommets de Q_{3-i} ne seront pas dominés à la fin du troisième tour. Dominator doit ainsi jouer dans $R_{3-i} \cup Q_{3-i}$. Maintenant, si $y \in T_i$, jouer y est un coup légal pour Staller et après ce coup aucun des sommets de Q_i ne sera dominé. Si au contraire y est dans R_i , alors vu comment nous avons défini Q_1 , T_i et R_i , y possède un voisin y' dans T_i . Puisque jouer y' dominera nouvellement y , c'est un coup légal. En jouant celui-ci, Staller s'assure qu'aucun sommet de Q_i n'est dominé. Dans les deux cas, la partie n'est pas achevée à la fin des trois tours. Ce qui est en contradiction avec le fait que $\gamma'_g(G) = 3$.

Affirmation 3. Pour $i \in \{1, 2\}$, R_i induit une clique de laquelle un couplage M_i a été soustrait.

Si $|R_i| \leq 2$, l'affirmation est trivialement vraie. Plaçons-nous donc dans le cas où $|R_i| \geq 3$. Par l'absurde, supposons que R_i n'induit pas une clique privée d'un couplage. En d'autres termes, il existe des sommets distincts y, y' et x dans R_i tels que x n'est ni adjacent à y , ni à y' . Si Staller commence par jouer y , la réponse gagnante de Dominator est dans $T_{3-i} \cup R_{3-i} \cup Q_{3-i}$. Car sinon Staller pourrait jouer son second coup dans T_{3-i} , et Q_{3-i} resterait non dominé. Après le coup de Dominator, y' n'est toujours pas dominé. Staller peut jouer ce sommet comme second coup et alors x ne sera pas dominé à la fin du troisième tour. Cela contredit l'égalité $\gamma'_g(G) = 3$.

Affirmation 4. Pour $i \in \{1, 2\}$, si le couplage M_i est parfait, alors M_{3-i} est vide et il y a un joint entre T_1 et T_2 .

Supposons d'abord qu'il n'y ait pas de joint entre T_1 et T_2 . Alors, Staller peut choisir un sommet de T_{3-i} ne dominant pas tout T_i . Comme pour l'Affirmation 2, Dominator doit jouer dans $R_i \cup Q_i$. Puisque T_i n'est pas complètement dominé après le premier coup de Staller, Dominator n'a d'autre choix que de jouer dans R_i . De plus, Staller peut jouer son deuxième coup dans $Q_{3-i} \cup R_{3-i}$. Tous les sommets de $T_i \cup R_i \cup Q_i$ doivent donc être dominés par le coup de Dominator. Il existe donc au moins un sommet de R_i dont le voisinage fermé contient R_i . Le couplage M_i n'est donc pas parfait.

Supposons ensuite que M_{3-i} n'est pas vide (i.e. R_{3-i} n'induit pas une clique). Staller peut sélectionner un sommet de R_{3-i} dont le voisinage fermé ne contient pas tout R_{3-i} . Comme dans l'Affirmation 3, Dominator doit répondre dans $T_i \cup R_i \cup Q_i$. Mais dans tous les cas, Staller aura la possibilité de jouer le coup suivant dans R_{3-i} . Ainsi, la partie ne peut se clore en trois tours que si Dominator peut dominer tout $T_i \cup R_i \cup Q_i$ en un coup. Comme plus haut, cela implique que le couplage M_i n'est pas parfait.

Le point (ii) implique évidemment (iii). Il reste donc à démontrer que (iii) implique (i). Supposons que G ait une structure de double-gamburger. D'après le

Lemme 3.17, $\text{diam}(G) = 5$, ce qui entraîne que $\gamma'_g(G) \geq 3$. Nous avons donc seulement à proposer une stratégie pour Dominator, qui assure que le jeu se termine en trois coups au plus. Par symétrie, nous avons seulement trois cas à traiter.

Cas 1. Le premier coup de Staller est dans Q_1 . Dominator choisit alors de jouer un sommet de T_2 donc le voisinage contient T_1 . Clairement, après un tel coup, tous les sommets de $G \setminus Q_2$ sont dominés. De plus, les seuls coups légaux restants pour Staller sont dans $R_2 \cup Q_2$. Puisqu'il y a un joint entre ces deux ensembles et que Q_2 induit une clique, quoi que joue Staller, tous les sommets Q_2 seront dominés après son second coup.

Cas 2. Le premier coup de Staller appartient à R_1 . Il y a deux possibilités. Premièrement, le couplage M_2 , retiré de la clique pour obtenir R_2 , est parfait. Dans ce cas R_1 induit une clique. Dominator sélectionne un sommet de R_2 . Tous les sommets de G , sauf un dans R_2 , sont dominés après ce coup. Staller n'a pas d'autre choix que de terminer le jeu en choisissant un sommet dans le voisinage fermé de ce dernier sommet non-dominé. Deuxièmement, le couplage M_2 n'est pas parfait. Ainsi, il existe un sommet $x \in R_2$ dont le voisinage contient R_2 . Dominator choisit ce sommet. Maintenant, il y a au plus un sommet non-dominé dans G , qui est en fait dans R_1 . Staller doit dominer ce sommet et le jeu se termine après son coup.

Cas 3. Staller joue son premier coup dans T_1 . Supposons d'abord que nous ayons un joint entre T_1 et T_2 . Dominator choisit n'importe quel sommet de Q_2 . D'un autre côté, s'il n'y a pas de joint entre ces deux ensembles, alors M_2 n'est pas un couplage parfait, et il y a donc un sommet $x \in R_2$ tel que $N[x]$ contienne $T_2 \cup R_2 \cup Q_2$. Dominator joue ce sommet. Dans les deux situations, tous les sommets de $G \setminus Q_1$ sont maintenant dominés. Les coups légaux pour Staller sont seulement dans $Q_1 \cup R_1$. Puisqu'il existe un joint entre ces deux ensembles et que Q_1 induit une clique, quel que soit le coup de Staller la partie se terminera après son coup. \square

Comme pour le Théorème 3.16, les deux caractérisations des graphes G vérifiant $\gamma'_g(G) = 3$ et $\text{diam}(G) = 5$ seront utiles pour développer un algorithme de reconnaissance efficace. L'étude de la structure de ces graphes nous permet de montrer qu'un double-gamburger vérifie également $\gamma_g(G) = 3$. Ceci implique, de manière *a priori* surprenante, qu'il n'existe pas de $(4, 3)$ -graphe de diamètre 5.

Corollaire 3.19. *Un graphe G est un $(3, 3)$ -graphe de diamètre 5 si et seulement si G est un double-gamburger. En particulier, il n'existe pas de $(4, 3)$ -graphe ayant un diamètre égal à 5.*

Démonstration. D'après le Théorème 3.18, nous devons seulement prouver que si G est un double-gamburger, alors $\gamma_g(G) = 3$. Puisque $\text{diam}(G) = 5$, nous avons que $\gamma_g(G) \geq 3$. Il reste donc à montrer que Dominator peut conclure la partie en au plus trois coups.

Soient M_1 et M_2 les deux couplages définis par la structure de double-gamburger de G . Supposons en premier qu'aucun des deux n'est parfait. Alors Dominator peut commencer en jouant dans R_1 un sommet qui domine tout R_1 . Comme second coup, il choisit un sommet dans R_2 dominant tout R_2 . Un tel sommet est toujours disponible, car Staller joue optimalement et ne sélectionne donc pas un tel sommet. En jouant comme cela, tous les sommets de G seront bien dominés à la fin du troisième tour. D'un autre côté, si l'un des couplages, disons M_1 , est parfait, alors R_2 doit induire une clique et nous avons un joint entre T_1 et T_2 . Dominator commence en jouant n'importe quel sommet de Q_1 . Si Staller répond dans $R_1 \cup T_1 \cup T_2$, Dominator joue son second coup dans R_2 . Si Staller joue dans $R_2 \cup Q_2$, alors il joue dans T_2 . Notons que ces deux cas sont exhaustifs, car les sommets de Q_1 ne sont pas des coups légaux pour Staller. Finalement, nous concluons immédiatement que tous les sommets se retrouvent dominés à la fin du troisième tour. \square

3.1.6 Conséquences algorithmiques

Dans cette partie nous nous intéressons au jeu de domination du point de vue de la complexité du calcul des paramètres associés. Rappelons que dans [10], il a été démontré que vérifier si le nombre dominant ludique d'un graphe est borné supérieurement par k , est un problème PSPACE-complet. D'un autre côté, nous allons voir que ce problème peut être résolu pour un graphe G en temps $\mathcal{O}(\Delta(G) \cdot |V(G)|^k)$. Le problème devient donc polynomial quand k ne fait pas partie des entrées. En utilisant les caractérisations des Théorèmes 3.16 et 3.18, nous allons montrer que la complexité générale, en temps $\mathcal{O}(\Delta(G) \cdot |V(G)|^3)$, peut être améliorée en $\mathcal{O}(|V(G)| \cdot |E(G)| + \Delta(G)^3)$ dans le cas de γ_g et des graphes de diamètre 6, et en $\mathcal{O}(|V(G)| \cdot |E(G)|)$ dans celui de γ'_g et des graphes de diamètre 5.

Les problèmes du D-jeu de domination et du S-jeu de domination s'énoncent précisément ainsi.

PROBLÈME DU D-JEU DE DOMINATION

Entrées : Un graphe G et un entier k .

Question : Est-ce que $\gamma_g(G) \leq k$?

PROBLÈME DU S-JEU DE DOMINATION

Entrées : Un graphe G et un entier k .

Question : Est-ce que $\gamma'_g(G) \leq k$?

Nous avons déjà mentionné que ces deux problèmes sont complets dans PSPACE. Du point de vue de la complexité en temps, lorsque nous fixons k plutôt que de le laisser en entrée, nous obtenons le théorème ci-dessous.

Théorème 3.20. *Si G est un graphe d'ordre n et k un entier fixé, alors les problèmes du D-jeu et du S-jeu de domination peuvent être résolus en temps $\mathcal{O}(\Delta(G)n^k)$.*

Démonstration. Nous définissons conjointement deux algorithmes récursifs, A et A' , respectivement pour le D-jeu et le S-jeu.

Algorithme $A(G, S, k)$

Entrées : Un graphe G , un ensemble de sommets dominés $S \subseteq V(G)$, un entier k

Sortie : VRAI si $\gamma_g(G|S) \leq k$, FAUX sinon

si $S = V(G)$ alors

retourner VRAI et STOP

sinon si $k = 0$ alors

retourner FAUX et STOP

sinon

pour $v \in V(G)$ faire

si v est un coup légal alors

si $A'(G, S \cup N[v], k - 1)$ alors

retourner VRAI et STOP

retourner FAUX et STOP

Algorithme $A'(G, S, k)$

Entrées : Un graphe G , un ensemble de sommets dominés $S \subseteq V(G)$, un entier k

Sortie : VRAI si $\gamma'_g(G|S) \leq k$, FAUX sinon

si $S = V(G)$ alors

retourner VRAI et STOP

sinon si $k = 0$ alors

retourner VRAI et STOP

sinon

pour $v \in V(G)$ faire

si v est un coup légal alors

si non $A(G, S \cup N[v], k - 1)$ alors

retourner FAUX et STOP

retourner VRAI et STOP

Prouvons en premier lieu la correction de ces algorithmes par induction sur k . Si $k = 0$, c'est clair, puisque $\gamma_g(G|S) = 0$ ou $\gamma'_g(G|S) = 0$ si et seulement si $S = V(G)$. Supposons maintenant que les algorithmes soient corrects pour une certaine valeur de k . L'algorithme $A(G, S, k + 1)$ retourne VRAI dans deux situations. Pour la première quand $S = V(G)$, et dans ce cas nous avons $\gamma_g(G|S) = 0 < k + 1$. Dans la seconde situation, il existe un coup légal $v \in V(G)$ tel que $A'(G, S \cup N[v], k)$

renvoie VRAI. Par hypothèse d'induction, il s'ensuit que $\gamma'_g(G|(S \cup N[v])) \leq k$. Puisque par définition $\gamma_g(G|S) \leq \gamma'_g(G|(S \cup N[v])) + 1$, nous obtenons que $\gamma_g(G|S) \leq k + 1$. Réciproquement, si $A(G, S, k + 1)$ retourne FAUX, alors pour tout coup légal $v \in V(G)$, l'algorithme $A'(G, S \cup N[v], k)$ retourne FAUX. Par induction, $\gamma'_g(G|(S \cup N[v])) > k$ pour tout coup légal $v \in V(G)$. Cela montre que $\gamma_g(G|S) > k + 1$. L'algorithme $A(\cdot, \cdot, k + 1)$ est donc correct. De manière similaire, nous obtenons la correction de l'algorithme $A'(\cdot, \cdot, k + 1)$.

Nous démontrons maintenant que ces algorithmes s'exécutent selon la complexité en temps annoncée. La structure de données utilisée pour un graphe partiellement dominé $G|S$ est une liste d'adjacence pour graphes sommet-pondérés, où un sommet de G est de poids 1 s'il nécessite toujours d'être dominé, de poids 0 sinon. Les sommets de S sont donc initialisés avec un poids de 0.

Nous montrons par induction sur k que pour un graphe G d'ordre n , les algorithmes $A(\cdot, \cdot, k)$ et $A'(\cdot, \cdot, k)$ s'exécutent tous deux en temps $\mathcal{O}(\Delta n^k)$. Si $k = 1$, alors pour l'algorithme A nous devons vérifier au plus n fois qu'un coup v est légal et que $N[v] \cup S = V(G)$. Pour ce faire, nous calculons d'abord S et $|S|$, ce qui prend un temps d'ordre $\mathcal{O}(n)$. Après cela, quand l'algorithme exécute la boucle avec le sommet v , nous calculons $|N[v] \setminus S|$. Cela prend au plus un temps d'ordre $\mathcal{O}(\Delta)$. Puisque v est un coup légal si et seulement si $|N[v] \setminus S| > 0$, calculer si ce coup est légal et si $N[v] \cup S = V(G)$ peut être fait en temps constant. En conclusion, nous avons besoin d'un temps au plus d'ordre $\mathcal{O}(n\Delta)$. La même conclusion peut être obtenue pour l'algorithme A' .

Si $k > 0$, alors pour l'algorithme A , nous devons vérifier au plus n fois si $v \in V(G)$ est un coup légal. Nous avons vu plus haut que cela peut se faire en temps $\mathcal{O}(n\Delta)$. L'algorithme $A'(G, S \cup N[v], k - 1)$ sera également exécuté, et cela au plus n fois. Nous avons besoin d'un temps d'ordre $\mathcal{O}(n)$ pour construire $G|(S \cup N[v])$, et par induction, d'un temps d'ordre $\mathcal{O}(\Delta n^{k-1})$ pour exécuter $A'(G, S \cup N[v], k - 1)$. Le temps total nécessaire est donc finalement d'ordre $\mathcal{O}(n\Delta + n \cdot (n + \mathcal{O}(\Delta n^{k-1}))) = \mathcal{O}(\Delta n^k)$.

De manière identique, nous obtenons la même complexité pour l'algorithme A' . \square

Pour une réelle implémentation de ces algorithmes, il serait plus efficace d'utiliser un appel récursif sur $(G - v, S \cup N(v), k - 1)$. Cela n'améliorerait cependant pas la complexité théorique obtenue.

Dans certains cas, la complexité théorique des algorithmes A et A' peut bien sûr être améliorée. Ici nous considérerons les classes de graphes étudiées dans la Partie 3.1.4 et la Partie 3.1.5. Afin de s'y référer plus clairement nous les nommerons ainsi : $E_3^6 = \{G \mid \gamma_g(G) = 3, \text{diam}(G) = 6\}$ et $E_3^5 = \{G \mid \gamma'_g(G) = 3, \text{diam}(G) = 5\}$. Rappelons que les diamètres ne sont pas ici choisis au hasard, mais qu'ils correspondent aux diamètres maximaux que peuvent avoir des graphes vérifiant respectivement $\gamma_g = 3$ et $\gamma'_g = 3$.

Pour la première de ces classes, nous obtenons l'amélioration suivante.

Théorème 3.21. *Reconnaître si un graphe G appartient à E_3^6 peut se faire en temps $\mathcal{O}(|V(G)| \cdot |E(G)| + \Delta^3)$.*

Démonstration. Nous allons démontrer que l'algorithme ci-dessous reconnaît les graphes de E_3^6 selon le temps annoncé.

Algorithme Rec- $E_3^6(G)$

Entrées : Un graphe G

Sortie : VRAI si $G \in E_3^6$, FAUX sinon

pour $v \in V(G)$ **faire**

 déterminer $S_0(v), \dots, S_{\text{ecc}(v)}(v)$ et $s_i(v) = |S_i(v)|$, $0 \leq i \leq \text{ecc}(v)$

si non $\text{diam}(G) = 6$ **alors**

retourner FAUX

sinon

 sélectionner un sommet u vérifiant $\text{ecc}(u) = 6$ et un sommet u' dans $S_6(u)$

si u est goûteux ou si u' l'est **alors**

retourner VRAI

sinon

retourner FAUX

Nous affirmons premièrement que l'algorithme Rec- $E_3^6(G)$ est correcte. S'il retourne VRAI, alors G a pour diamètre 6 et contient un sommet diamétral goûteux. Ainsi d'après le Théorème 3.16(iii), G appartient à E_3^6 . D'un autre côté, quand Rec- $E_3^6(G)$ retourne FAUX, il y a deux possibilités. Premièrement, $\text{diam}(G) \neq 6$, ce qui implique bien sûr que G n'appartient pas à E_3^6 . Deuxièmement, il existe une paire de sommets diamétraux dont aucun n'est goûteux. Alors d'après le Théorème 3.16(ii), nous déduisons que G n'appartient pas à E_3^6 . Cela prouve la correction de l'algorithme.

Nous considérons maintenant la complexité en temps de l'algorithme Rec- $E_3^6(G)$. Pour simplifier la notation, nous posons $n = |V(G)|$ et $m = |E(G)|$. En utilisant une procédure standard de parcours en largeur, les sphères autour de chaque sommet peuvent être déterminées en temps $\mathcal{O}(m)$. Ainsi, la première boucle de l'algorithme peut être réalisée en temps $\mathcal{O}(nm)$. Si $\text{diam}(G) = 6$, alors l'algorithme vérifie si l'un des sommets de la paire sélectionnée (u, u') est goûteux.

Pour simplifier par la suite les notations, nous écrirons S_i pour nous référer soit à $S_i(u)$ soit à $S_i(u')$. Pour vérifier qu'un sommet v d'excentricité 6 est goûteux nous devons nous assurer qu'il vérifie les conditions suivantes (il ne s'agit ici que de reformuler la définition de sommet goûteux sans parler de hamburger garni).

1. Il existe $v_1 \in S_1(v)$ tel que $N[v_1] = B_2(v)$.

2. Il y a un joint entre $N(S_3(v)) \cap S_2(v)$ et $S_3(v)$, ainsi qu'entre $S_3(v)$ et $S_4(v)$, et qu'entre $S_5(v)$ et $S_6(v)$.
3. Les sphères $S_3(v)$ et $S_6(v)$ induisent des cliques.
4. Il existe $v_5 \in S_5(v)$ tel que $S_4(v) \cup S_5(v) \subseteq N[v_5]$.
5. Pour tout $x \in S_4(v)$ (resp. $S_5(v)$), il existe $x' \in S_5(v) \cup S_6(v)$ (resp. $S_3(v) \cup S_4(v)$) tel que $S_4(v) \cup S_5(v) \subseteq N[x] \cup N[x']$.

Ces cinq conditions vont être vérifiées séquentiellement.

Condition 1 : Pour tout sommet $v \in S_1$, $N[v] = S_0 \cup S_1 \cup S_2$ si et seulement si $\deg(v) = s_0 + s_1 + s_2$. Ainsi la Condition 1 peut être vérifiée en temps $\mathcal{O}(s_1\Delta)$.

Condition 2 : Il y a un joint entre $N(S_3) \cap S_2$ et S_3 si et seulement si pour tout sommet $v \in N(S_3) \cap S_2$, $|N(v) \cap S_3| = s_3$. Nous pouvons donc vérifier qu'il existe un tel joint en temps $\mathcal{O}(s_2\Delta)$. Les deux autres joints requis par la Condition 2 peuvent être vérifiés de la même manière. Pour finir, vérifier la Condition 2 peut être réalisé en temps $\mathcal{O}((s_2 + s_3 + s_6)\Delta)$.

Condition 3 : Nous avons besoin d'un temps d'ordre $\mathcal{O}((s_3 + s_6)\Delta)$ pour cette condition.

Condition 4 : Cette condition requiert un temps d'ordre $\mathcal{O}(s_5\Delta)$.

Condition 5 : Pour chaque sommet x dans S_4 (resp. S_5), nous devons trouver un sommet x' dans $S_5 \cup S_6$ (resp. $S_3 \cup S_4$) qui vérifie $S_4 \cup S_5 \subseteq N[x] \cup N[x']$. Le temps requis est alors d'ordre $\mathcal{O}(s_4(s_5 + s_6)\Delta + s_5(s_3 + s_4)\Delta)$, pour chaque sommet x .

D'après ce que nous venons de voir, les quatre premières conditions peuvent être vérifiées en temps $\mathcal{O}(nm)$. Pour la dernière, il faut faire un peu plus attention. En effet, si nous bornions simplement s_3 , s_4 , s_5 , et s_6 par n , nous n'obtiendrions qu'une complexité d'ordre $\mathcal{O}(n^2\Delta)$. Cependant, remarquons que la Condition 5 n'est testée que si la Condition 2 a été vérifiée positivement en amont. Cela assure que s_3 , s_4 , s_5 , et s_6 sont bornés supérieurement par Δ . Ainsi, la complexité du test de la Condition 5 est en fait d'ordre $\mathcal{O}(\Delta^3)$. Nous en concluons que l'algorithme $\text{Rec-}E_3^6(G)$ s'exécute en temps $\mathcal{O}(nm + \Delta^3)$. \square

Pour la seconde classe, le gain en temps est encore meilleur.

Théorème 3.22. *Reconnaître si un graphe G appartient à $E_3'^5$ peut se faire en temps $\mathcal{O}(|V(G)| \cdot |E(G)|)$.*

Démonstration. Nous allons démontrer que l'algorithme proposé ci-dessous reconnaît les graphes de $E_3'^5$ en accord avec la complexité annoncée.

Premièrement, montrons la correction de cet algorithme. Si l'algorithme retourne FAUX, alors soit le diamètre du graphe G n'est pas égal à 5 et G n'appartient pas à $E_3'^5$, soit il existe un sommet diamétral mettant en échec le deuxième point du

Théorème 3.18 et G n'appartient pas non plus à $E_3'^5$. Réciproquement si l'algorithme retourne VRAI, alors il existe un sommet diamétral permettant de définir une structure de double-gamburger pour G et d'après le troisième point du Théorème 3.18, le graphe G appartient bien à $E_3'^5$.

Algorithme Rec- $E_3'^5(G)$

Entrées : Un graphe G

Sortie : VRAI si $G \in E_3'^5$, FAUX sinon

pour $v \in V(G)$ **faire**

déterminer $S_0(v), \dots, S_{\text{ecc}(v)}(v)$ et $s_i(v) = |S_i(v)|$, $0 \leq i \leq \text{ecc}(v)$

si non $\text{diam}(G) = 5$ **alors**

retourner FAUX

sinon

sélectionner un sommet u vérifiant $\text{ecc}(u) = 5$

si la structure définie par $Q_1 = \{u\} \cup W_1$, $R_1 = S_1(u) \setminus W_1$, $T_1 = S_2(u)$, $T_2 = S_3(u)$, $R_2 = S_4(u)$ et $Q_2 = S_5(u)$, où $W_1 = S_1(u) \setminus N(S_2(u))$ est une structure de double-gamburger pour G **alors**

retourner VRAI

sinon

retourner FAUX

Comme pour l'algorithme précédent la première étape s'effectue en temps $\mathcal{O}(n \cdot m)$. Supposons donc que l'algorithme ait sélectionné un sommet diamétral u . Connaissant S_1 , S_2 et leurs cardinaux, nous pouvons déterminer Q_1 , R_1 , ainsi que leurs cardinaux en temps $\mathcal{O}(s_1 \cdot m)$. Les autres ensembles de la structure sont connus car respectivement égaux à S_3, \dots, S_5 . Il reste à analyser la vérification des quatre conditions pour que la structure soit une structure de double-gamburger. L'indice i appartient à $\{1, 2\}$.

Condition 1. Q_i et T_i induisent des cliques. Il suffit de vérifier que pour tout u dans Q_i (resp. T_i), $\deg(u) = |Q_i|$ (resp. $\deg(u) = |T_i|$). Ce qui demande un temps d'ordre au plus $\mathcal{O}(n \cdot m)$.

Condition 2. Il y a un joint entre Q_i et R_i ainsi qu'entre R_i et T_i . Pour tout u dans R_i , nous devons nous assurer que $|N(u) \cap Q_i| = |Q_i|$ et $|N(u) \cap T_i| = |T_i|$. Ceci peut être réalisé en temps $\mathcal{O}(n \cdot m)$.

Condition 3. R_i induit une clique privée d'un couplage M_i . Pour tout $u \in R_i$, nous vérifions que $|N(u) \cap R_i| \geq |R_i| - 2$. Nous en profitons également pour calculer m_i , le cardinal du couplage M_i . Ce nombre correspond au nombre de sommets pour lesquels $|N(u) \cap R_i| = |R_i| - 2$. Cela nous sera utile pour la prochaine condition. Tout ceci s'effectue en temps $\mathcal{O}(n \cdot m)$.

Condition 4. Si M_i est un couplage parfait de R_i , alors M_{3-i} est vide et il y a un joint entre T_1 et T_2 . Si l'un des m_i est tel que $m_i = |R_i|$, alors nous vérifions que $m_{3-i} = 0$, ainsi que l'existence d'un joint entre T_1 et T_2 . Il nous faut au plus un temps d'ordre $\mathcal{O}(n \cdot m)$.

Condition 5. Il existe un sommet $x_i \in T_i$, tel que $T_{3-i} \subseteq N(x_i)$. Nous devons chercher un sommet de T_i tel que $|N(x_i) \cap T_{3-i}| = |T_{3-i}|$. Ce qui demande un temps d'ordre $\mathcal{O}(n \cdot m)$.

Condition 6. Il n'y a pas d'arêtes entre Q_i et $G \setminus R_i$ et entre R_i et $G \setminus (Q_i \cup T_i)$. Cette condition est vérifiée automatiquement.

Toutes les conditions pouvant être vérifiées en temps $\mathcal{O}(n \cdot m)$, l'algorithme s'exécute lui aussi avec cette complexité en temps. \square

3.2 Vers la 3/5-conjecture pour les forêts

La conjecture la plus remarquable concernant le jeu de domination est probablement celle connue sous le nom de 3/5-conjecture.

Conjecture. [Kinnnersley, West, Zamani [61] (2013)] *Si G est un graphe sans sommet isolé et d'ordre n , alors*

$$\gamma_g(G) \leq \frac{3n}{5} \text{ et } \gamma'_g(G) \leq \frac{3n+2}{5}.$$

Si la conjecture se révèle vraie, nous savons déjà que les bornes seront serrées, et ce même en se restreignant aux forêts. La structure des graphes atteignant cette borne à été étudiée dans [15].

L'outil principal pour attaquer cette conjecture a été introduit par Bujtás dans [16]. Il s'agit d'un algorithme d'inspiration gloutonne, qui lui a permis de démontrer la conjecture pour une large sous-classe de forêts [16, 17]. Pour cette sous-classe, la borne supérieure pour le S-jeu s'avère un peu meilleure.

Théorème 3.23. [Bujtás [17] (2015)] *Si F est une forêt d'ordre n , sans sommet isolé et sans feuilles à distance exactement 4, alors*

$$\gamma_g(F) \leq \frac{3n}{5} \text{ et } \gamma'_g(F) \leq \frac{3n+1}{5}.$$

Cette stratégie quasi-gloutonne peut aussi être appliquée pour les graphes de degré minimum 3. Dans [18], la conjecture est démontrée pour cette classe de graphes. En raffinant cet algorithme, Henning et Kinnnersley [48] ont établi la véracité de la conjecture pour les graphes de degré minimum 2. La 3/5-conjecture reste donc ouverte seulement pour les graphes possédant des sommets pendants. Dans ce chapitre,

nous prouvons la $3/5$ -conjecture pour une classe de forêts plus large, qui contient les forêts sans feuilles à distance exactement 4. Bien que les forêts méritent bien sûr que nous nous y intéressions pour elles-mêmes, précisons que la conjecture générale ne saurait s'y réduire. Il existe en effet des graphes qui possèdent un nombre dominant ludique plus grand que celui de n'importe lequel de leurs arbres couvrants (voir [15]).

Soit $S(K_{1,3})$ le graphe obtenu en subdivisant une fois chaque arête de l'étoile $K_{1,3}$ (voir Figure 3.6). Une forêt F est *faiblement sans* $S(K_{1,3})$ si elle ne contient ni sommet isolé, ni copie induite de $S(K_{1,3})$ dont les feuilles sont aussi des feuilles de F .

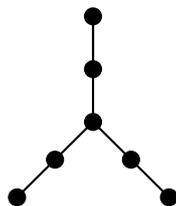


FIGURE 3.6 – $S(K_{1,3})$

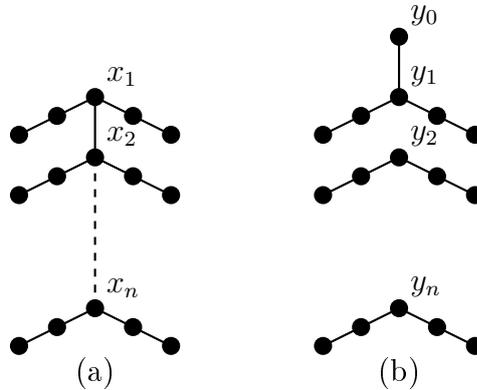
La classe des forêts faiblement sans $S(K_{1,3})$ contient évidemment celle des forêts sans sommet isolé et sans feuilles à distance exactement 4. Nous allons exposer dans la suite comment étendre la stratégie quasi-gloutonne de Bujtás pour établir la conjecture pour cette classe élargie de forêts. Voici le résultat principal de cette partie.

Théorème 3.24. *Si F est une forêt faiblement sans $S(K_{1,3})$ d'ordre n , alors*

$$\gamma_g(F) \leq \frac{3n}{5} \text{ et } \gamma'_g(F) \leq \frac{3n+2}{5}.$$

Les deux bornes sont serrées. Par exemple, d'après [15, Theorem 3.7], les arbres de la Figure 3.7 (a) atteignent la borne pour le D-jeu. Pour le S-jeu, il est facile de s'assurer que les forêts de la Figure 3.7 (b) remplissent le même rôle.

La première partie expose la stratégie quasi-gloutonne de Bujtás et introduit un raffinement de celle-ci que nous appelons stratégie de destruction des P_5 . La deuxième partie est elle consacrée à la preuve du Théorème 3.24 pour le D-jeu. Finalement, nous terminons en expliquant comment modifier légèrement la preuve obtenue pour établir le théorème dans le cas du S-jeu.

FIGURE 3.7 – Forêts faiblement sans $S(K_{1,3})$ atteignant les bornes du Théorème 3.24.

3.2.1 La stratégie quasi-gloutonne et celle de destruction des P_5

Nous présentons, pour commencer, la stratégie quasi-gloutonne de Dominator définie par Bujtás, et nous exposons les définitions et les prérequis nécessaires à sa compréhension. La nouvelle stratégie que nous introduirons sera compatible avec cette stratégie quasi-gloutonne. Il ne s'agira en fin de compte que d'un raffinement de la première phase de cette dernière. Chaque sommet va être colorié avec l'une des trois couleurs suivantes : blanc (W), bleu (B) et rouge (R). En plus des couleurs, chaque sommet possède également une valeur. C'est cette valeur qui permet de définir une stratégie d'inspiration gloutonne. La couleur et la valeur des sommets vont changer tout au long de la partie. Les tours du jeu seront toujours indexés par k , où $k \geq 0$. Nous dirons que le tour courant est le tour k si, à la fin de ce tour, le nombre total de coups joués par Dominator et Staller est égal à k . À la fin du tour k , les couleurs et les valeurs sont définies comme suit.

- Un sommet est blanc et sa valeur est 3 s'il n'est pas encore dominé.
- Un sommet est bleu et sa valeur est 2 s'il est dominé, mais qu'au moins un de ses voisins ne l'est pas.
- Un sommet est rouge et sa valeur est 0 si $N[v]$ est entièrement dominé.

Remarquons qu'un sommet choisi par l'un des joueurs devient toujours rouge durant le tour courant. Soit F une forêt d'ordre n sans sommet isolé. Nous notons respectivement $W_k(F)$, $B_k(F)$ et $R_k(F)$, l'ensemble des sommets blancs, bleus et rouges dans F à la fin du tour k . S'il n'y a aucune ambiguïté sur F , nous l'omettrons dans les notations. À fin du tour k , nous définissons la *forêt résiduelle* F_k comme la forêt obtenue à partir de F en supprimant tous les sommets rouges et toutes les arêtes joignant deux sommets bleus (remarquons que $F_0 = F$). Puisque tous les coups

légaux sont soit des sommets bleus soit des sommets blancs et que les sommets bleus sont déjà dominés, le jeu après k coups est le même joué sur la forêt F ou sur la forêt résiduelle F_k . Le résultat suivant, démontré dans [17] s'avère particulièrement utile. Le premier point assure que n'importe quelle feuille blanche d'une forêt résiduelle est aussi une feuille dans la forêt d'origine. C'est-à-dire qu'aucune nouvelle feuille blanche n'apparaît au cours du jeu.

Lemme 3.25. *Soient F une forêt sans sommet isolé et $k \geq 0$.*

1. *Si v appartient à W_k , alors v a le même voisinage dans F_k et dans F .*
2. *Si F n'a pas de sommet isolé, alors F_k non plus.*

La valeur de la forêt résiduelle F_k est la somme des valeurs de ses sommets. Nous notons cette somme $p(F_k)$. Par définition $p(F) = 3n$. À chaque tour la valeur de la forêt résiduelle décroît. Nous disons qu'un joueur *marque* s points au cours du tour k , avec $k \geq 1$, quand $p(F_{k-1}) - p(F_k) = s$. Dans la stratégie quasi-gloutonne, la partie est divisée en quatre phases, décrites plus bas. Dominator commencera toujours par appliquer, si possible, les directives de la Phase 1. Pour $i \in \{2, 3, 4\}$, la Phase i est appliquée par Dominator au début de son tour, seulement si la Phase $i-1$ ne peut plus être suivie. Si à ce moment du jeu, la stratégie de la Phase i ne peut pas être suivie, alors cette phase est sautée. Quand Dominator commence à jouer selon une nouvelle phase, il ne reviendra jamais à une des phases précédentes, même si un changement dans la forêt résiduelle rendait cette ancienne phase de nouveau possible. Les phases s'enchaînent donc les unes à la suite des autres. D'abord la Phase 1, puis la 2, puis la 3 et finalement la 4, avec la possibilité qu'une ou plusieurs de ces phases soient sautées.

Stratégie quasi-gloutonne.

- **Phase 1.** À son tour Dominator marque au moins 7 points, et au moins deux sommets deviennent rouges.
- **Phase 2.** À son tour Dominator marque au moins 7 points.
- **Phase 3.** À son tour Dominator marque au moins 6 points. De plus, il applique les deux règles suivantes.
 - Il sélectionne un sommet qui lui permet de marquer le nombre de points le plus élevé durant ce tour.
 - Sous la contrainte précédente, Dominator joue toujours un sommet blanc ayant pour voisin une feuille blanche, si un tel sommet est disponible.
- **Phase 4.** À son tour Dominator marque au moins 3 points.

Grossièrement, la démonstration de Bujtás montre qu'au cours de la partie, la valeur de la forêt résiduelle décroît en moyenne de 10 points lors d'un tour de Dominator et du tour de Staller qui suit. Cela implique directement qu'après au plus $3n/5$ coups,

la valeur du graphe est réduite à 0, ce qui signifie que la partie est terminée. Cela ne fonctionne que si nous ne rencontrons pas ce que Bujtás appelle un P_5 critique. Un P_5 critique dans F_k est un chemin de longueur 4 ayant les propriétés suivantes.

- Tous les sommets sont dans W_k sauf le centre qui est dans B_k .
- Les deux extrémités du chemin sont des feuilles de F_k .

Le centre bleu du P_5 critique est appelé un *centre critique*. Il a été démontré dans [17] que ces centres critiques ne peuvent apparaître que durant la Phase 1. Puisque aucune nouvelle feuille blanche n'est créée au cours du jeu, l'observation ci-dessous est facile à vérifier.

Observation 3.26. *Si un sommet dans B_k n'est pas un centre critique à la fin du tour k , avec $k \geq 1$, alors ce ne sera un centre critique à la fin d'aucun des tours suivants.*

Afin de pouvoir énoncer précisément les résultats obtenus par Bujtás, nous avons encore besoin de quelques définitions relatives à la première phase. Nous notons k^* le numéro du tour à la fin duquel la première phase s'arrête. Si la Phase 1 est sautée, alors la 3/5-conjecture est facile à vérifier (la forêt concernée est alors une union disjointes d'arêtes). Nous supposons donc à partir de maintenant que $k^* \geq 1$. Le nombre de centres critiques à la fin du tour k^* sera noté c^* . Pour chaque tour de la Phase 1, quand Dominator diminue la valeur du graphe de plus de 7, il fait mieux que ce qui est attendu de lui durant cette phase. Quand Staller fait baisser la valeur de plus de 3 points, c'est également mieux pour Dominator. Ces *points bonus* sont définis de la manière suivante. Pour $k \in \{1, \dots, k^*\}$, nous posons :

$$e_k = \begin{cases} p(F_{k-1}) - p(F_k) - 7 & \text{si le tour } k \text{ est un tour de Dominator,} \\ p(F_{k-1}) - p(F_k) - 3 & \text{si le tour } k \text{ est un tour de Staller.} \end{cases}$$

La somme de ces points bonus gagnés durant la première phase est notée e^* ; c'est-à-dire $e^* = e_1 + \dots + e_{k^*}$. Dans [17, Théorème 2], Bujtás a démontré un résultat important qui donne une borne supérieure sur γ_g en fonction des points bonus et du nombre de centres critiques.

Proposition 3.27. *Soit F une forêt d'ordre n sans sommet isolé. Si Dominator joue le D-jeu en suivant la stratégie quasi-gloutonne, alors la partie durera au plus $\frac{3n - e^* + c^*}{5}$ tours.*

Par le Lemme 3.25, aucune feuille blanche n'est créée au cours du jeu. Il s'ensuit que pour une forêt sans sommets isolés ni feuilles à distance exactement 4, le nombre de centres critiques c^* est égal à 0. Ainsi, la proposition ci-dessus établit la 3/5-conjecture restreinte à cette classe de forêts. Pour le S-jeu, des arguments similaires

montrent que pour cette classe restreinte la borne supérieure sur γ'_g est légèrement meilleure : $\gamma'_g(F) \leq \frac{3|V(F)|+1}{2}$.

Nous allons maintenant proposer une amélioration de la stratégie quasi-gloutonne afin de pouvoir appliquer celle-ci efficacement aux forêts faiblement sans $S(K_{1,3})$. Pour l'instant, la stratégie quasi-gloutonne ne permet en effet pas à elle seule de contrôler suffisamment l'apparition des centres critiques, lorsque la forêt de départ possède des chemins de longueur 4 joignant deux feuilles. Soit F une forêt d'ordre n sans sommet isolé. À partir de maintenant, nous faisons l'hypothèse que F est enracinée de manière arbitraire. Plus précisément, si F est une forêt avec m composantes connexes T_1, \dots, T_m , alors, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, nous sélectionnons un sommet $r_i \in V(T_i)$ qui fera office de racine pour l'arbre T_i . Pour chaque sommet $v \in V(T_i)$, la *hauteur* de v , notée $h(v)$, est définie par $h(v) = d(r_i, v)$.

Nous définissons aussi $\mathcal{P}(F)$ comme étant l'ensemble des chemins de longueur 4 joignant deux feuilles de F . Nous disons qu'un sommet $d \in V(F)$ est un *centre dangereux après k coups*, si nous sommes dans la situation suivante.

- Le sommet d est le centre d'un chemin P de $\mathcal{P}(F)$.
- Tous les sommets de P sont dans W_k .

L'ensemble des centres dangereux après k coups est noté $D_k(F)$. Si le contexte est suffisamment clair, nous écrirons seulement D_k . Puisque aucune feuille blanche n'apparaît durant la partie (voir Lemme 3.25), ces deux lemmes techniques sont clairement vrais.

Lemme 3.28. *Si $k' \geq k \geq 0$, alors $D_{k'} \subseteq D_k$; c'est-à-dire qu'aucun centre dangereux n'est créé durant le jeu.*

Lemme 3.29. *Si un sommet de W_k n'appartient pas à D_k , alors il ne pourra pas devenir un centre critique lors d'un des tours à venir.*

Le lemme suivant est important car il permet de donner une définition alternative de la classe des forêts faiblement sans $S(K_{1,3})$.

Lemme 3.30. *Si F est une forêt faiblement sans $S(K_{1,3})$ et d est un centre dangereux dans $D_0(F)$, alors il existe exactement deux sommets $a_1, a_2 \in N(d)$ tels que tout chemin de $\mathcal{P}(F)$, dont le centre est d , contient a_1 et a_2 .*

Démonstration. Soient $l_1 a_1 d a_2 l_2$ un chemin de $\mathcal{P}(F)$ dont le centre est le centre dangereux d . Soit f une feuille d'un chemin P dans $\mathcal{P}(F)$ dont le centre est aussi d . Nous devons montrer que l'unique voisin u de f est soit a_1 soit a_2 . Si P ne contient ni l'un ni l'autre, alors f est différente de l_1 et de l_2 . Le sous-arbre induit par $\{l_1, l_2, f, a_1, a_2, u, d\}$ est alors clairement une copie de $S(K_{1,3})$. Puisque l_1, l_2 et f sont des feuilles de F , cette forêt n'est pas faiblement sans $S(K_{1,3})$, une contradiction. \square

À partir de maintenant, les notations a_1 et a_2 référeront toujours aux deux sommets définis par le Lemme 3.30. Au moins l'un de ces deux sommets possède une hauteur strictement plus grande que celle de d . Sans perte de généralité, nous ferons toujours l'hypothèse que $h(a_2) > h(d)$, et nous dirons que a_2 est le P_5 -enfant de d . Nous dirons aussi que a_1 est le sommet *relatif* au centre dangereux d .

Stratégie de destruction des P_5 .

- **Phase 1.0** : si D_{k-1} n'est pas vide à son tour k , Dominator sélectionne un sommet $d \in D_{k-1}$ ayant une hauteur maximum et joue le sommet a_1 relatif à d . Pour souligner le fait que d n'est pas le sommet joué durant le tour, nous dirons que d est *élu*.
- **Phase 1.1** : à son tour, Dominator marque au moins 7 points, et au moins deux sommets deviennent rouges.
- **Phases 2 à 4** : ces phases sont exactement les mêmes que pour la stratégie quasi-gloutonne.

Les phases s'enchaînent l'une après l'autre de la même manière que pour la stratégie quasi-gloutonne. Nous écrivons k^{**} pour le nombre de tours de la Phase 1.0, c^{**} pour le nombre de centres critiques à la fin du tour k^{**} , et e^{**} pour la somme $e_1 + \dots + e_{k^{**}}$. Si $k^{**} = 0$, nous sommes alors dans le cadre du résultat obtenu par Bujtás. Nous ferons donc l'hypothèse que $k^{**} \geq 1$. Comme nous allons le voir dans la proposition à venir, la stratégie de destruction des P_5 est aussi une stratégie quasi-gloutonne, et nous avons donc un résultat similaire à la Proposition 3.27.

Proposition 3.31. *Soit F une forêt d'ordre n sans sommet isolé. Si Dominator joue le D-jeu en suivant la stratégie de destruction des P_5 , alors la partie durera au plus $\frac{3n - e^{**} + c^{**}}{5}$ tours.*

Démonstration. Soit d un centre dangereux élu par Dominator en accord avec les règles de la Phase 1.0. Soit a_1 le sommet relatif à d . Puisque Dominator joue selon la stratégie de destruction des P_5 , il joue a_1 . Ce sommet et au moins l'une des feuilles blanches qui lui sont voisines passent de blanc à rouge. De plus, le sommet élu d passe de blanc à bleu. Ainsi Dominator marque au moins 7 points. Cela implique que la stratégie de destruction des P_5 est bien un raffinement de la stratégie quasi-gloutonne. En appliquant la Proposition 3.27, nous obtenons que le D-jeu va se terminer en au plus $\frac{3n - e^* + c^*}{5}$ tours. De plus, un centre critique créé durant le tour k , avec $k > k^{**}$, doit appartenir à D_{k-1} . Pour tout $k \geq k^{**}$, nous avons $D_k = \emptyset$. Ainsi, d'après le Lemme 3.29, nous avons l'égalité $c^* = c^{**}$. Il est aussi clair que $e^* \geq e^{**}$. Finalement, si Dominator suit une stratégie de destruction des P_5 , le D-jeu se termine en au plus $\frac{3n - e^{**} + c^{**}}{5}$ tours. \square

3.2.2 La démonstration dans le cas du D-jeu

Nous allons démontrer que si F est une forêt d'ordre n , faiblement sans $S(K_{1,3})$, alors $\gamma_g(F) \leq \frac{3n}{5}$. Pour ce faire, nous introduisons deux nouveaux procédés, qui s'appliqueront à chaque tour k du jeu, où $k \geq 1$. Ces procédés s'ajoutent à la coloration et aux valeurs définies pour la stratégie quasi-gloutonne et ne concernent que les sommets bleus. Ils vont nous permettre de borner efficacement le nombre de sommets critiques, créés au cours de la Phase 1.0, par le nombre de points bonus gagnés durant cette phase. L'idée intuitive cachée derrière est de garder une trace des points bonus marqués en les répartissant sous forme de poids affectés aux sommets bleus. Nous procéderons de telle sorte que tout au long du jeu les sommets critiques aient un poids valant 1. Cela assurera qu'un point bonus a bien été payé, à un moment ou à un autre, pour la création de chacun d'eux.

Nous définissons maintenant ces deux procédés de manière précise. Lorsqu'ils deviennent bleus, certains sommets sont aussi *soulignés*. Nous notons H_k l'ensemble des sommets soulignés à la fin du tour k . Ce procédé de soulignage ne sera appliqué qu'aux tours de Dominator. Tous les sommets bleus ont un *poids*, dont la valeur est soit 0 soit 1. Nous noterons $w_k : B_k \rightarrow \{0, 1\}$ la fonction de poids à la fin du tour k . Pour $v \in V(F)$ et $X, Y \in \{B, R, W\}$, nous écrivons $v : X \rightsquigarrow Y$ pour indiquer que la couleur de v passe de X à Y durant le tour courant.

Procédé de soulignage.

- Au tour k , quand Dominator élit le centre dangereux $d \in D_{k-1}$, ce sommet d devient souligné. Un sommet qui devient rouge cesse instantanément d'être souligné.

Notons que $H_k \subseteq B_k$. En effet, le centre dangereux souligné au tour k devient bleu durant ce même tour.

Procédé de pondération.

- Si le tour k est celui de Dominator, tous les nouveaux sommets bleus non soulignés reçoivent un poids de 1. Le nouveau sommet souligné d reçoit un poids de 0.
- Si le tour k est celui de Staller, soit v le sommet qu'elle joue.
 - (A) $v : W \rightsquigarrow R$ et v n'est pas le P_5 -enfant d'un sommet $d \in H_{k-1}$. Tous les nouveaux sommets bleus reçoivent un poids de 1.
 - (B) $v : W \rightsquigarrow R$ et v est le P_5 -enfant d'un sommet $d \in H_{k-1}$. Tous les nouveaux sommets bleus se voient attribuer un poids de 0, tandis que le sommet d reçoit un poids de 1.
 - (C) $v : B \rightsquigarrow R$, $v \notin H_{k-1}$ et v n'est pas le P_5 -enfant d'un sommet $d \in H_{k-1}$. Tous les nouveaux sommets bleus reçoivent un poids égal au poids de v .

- (D) $v : B \rightsquigarrow R$, $v \notin H_{k-1}$ et v est le P_5 -enfant d'un sommet $d \in H_{k-1}$. Nous attribuons un poids de 0 à tous les nouveaux sommets bleus et un poids de 1 au sommet d .
- (E) $v : B \rightsquigarrow R$ et $v \in H_{k-1}$. En particulier v est dans D_0 . Soit a_2 le P_5 -enfant de v .
- Si $a_2 \in W_{k-1}$, tous les nouveaux sommets bleus sauf a_2 acquièrent un poids de 1, et a_2 reçoit un poids de 0.
 - Si $a_2 \in B_{k-1}$, tous les nouveaux sommets bleus reçoivent un poids de 1, et a_2 acquiert un nouveau poids de 0.
 - Si $a_2 \in R_{k-1}$, tous les nouveaux sommets bleus acquièrent un poids de 1.
- Procédé additionnel pour la fin du tour k . Ce procédé est mis en œuvre à la fin du tour. Si le P_5 -enfant d'un sommet $d \in H_{k-1}$ passe de bleu à rouge sans avoir été joué par l'un des joueurs, alors d se voit attribuer un poids de 1.

Avant de pouvoir entamer la démonstration du théorème principal, nous avons besoin de quelques définitions et lemmes techniques. Jusqu'à la fin de cette partie, nous ferons l'hypothèse que Dominator joue toujours en suivant la stratégie de destruction des P_5 . Soit u un sommet d'une forêt enracinée F . Pour chaque tour k , nous définissons les sous-arbres suivants de $F \setminus R_k$.

- $C_k(u)$ est le plus grand sous-arbre, $F \setminus R_k$ qui contient u .
- $C_k^+(u)$ est le plus grand sous-arbre, $F \setminus R_k$, qui contient u , et dont les sommets ont une hauteur supérieure ou égale à $h(u)$.
- $C_k^-(u) = C_k(u) \setminus C_k^+(u)$.

Nous remarquons qu'aucune de ces trois séquences ne croît vis-à-vis de l'inclusion. Le résultat suivant est une conséquence directe de la définition.

Lemme 3.32. *Soit F une forêt enracinée. Pour tout $k \geq 0$ et tous $u, v \in V(F)$, si v est dans $C_k^+(u)$ (resp. dans $C_k^-(u)$), alors $C_k^+(v) \subseteq C_k^+(u)$ (resp. $C_k^-(v) \subseteq C_k^-(u)$).*

Lemme 3.33. *Soient F une forêt enracinée et d un sommet de $D_0(F)$, qui est souligné au tour k . Pour tout $k' \geq k$, nous avons $C_{k'}^+(d) \cap D_{k'} = \emptyset$.*

Démonstration. En accord avec la stratégie suivie par Dominator, un centre dangereux n'est souligné au tour k que s'il a une hauteur maximale parmi tous les centres dangereux de D_{k-1} . En d'autres termes, $C_{k-1}^+(d) \cap D_{k-1} = \{d\}$. De plus, $C_{k'}^+(d) \subseteq C_{k-1}^+(d)$ et $D_{k'} \subseteq D_{k-1}$, pour tout $k' \geq k$. Ainsi, $C_{k'}^+(d) \cap D_{k'} \subseteq \{d\}$. Finalement, puisque d appartient à B_k , il n'est pas dans $D_{k'}$. Nous en concluons que $C_{k'}^+(d) \cap D_{k'} = \emptyset$. \square

Lemme 3.34. *Soit F une forêt enracinée. Soient d et d' deux sommets de $D_0(F)$, qui sont respectivement soulignés au tour k et k' . Les propriétés suivantes sont vraies.*

- (i) Le P_5 -enfant a_2 du sommet d appartient à W_k . De plus, si a_2 devient rouge ou bleu durant la Phase 1.0, cela ne peut avoir lieu que durant un tour de Staller.
- (ii) Le sommet d n'est pas le P_5 -enfant de d' .

Démonstration. Nous commençons par le point (i). Soit d un centre dangereux souligné au tour k . Le sommet d doit appartenir à D_{k-1} . Par définition de l'ensemble des centres dangereux, cela implique que son P_5 -enfant a_2 est dans W_{k-1} . Puisque d est souligné au tour k , ce tour est celui de Dominator, et durant celui-ci il joue le sommet a_1 relatif à d . Ce sommet n'est pas adjacent au sommet blanc a_2 . Ainsi a_2 reste blanc à la fin du tour k . De plus, d'après Lemme 3.33, nous avons $C_k^+(d) \cap D_k = \emptyset$. Cela implique que Dominator ne jouera plus dans $C_k^+(d)$ jusqu'à la fin de la Phase 1.0. En d'autres termes, Dominator va jouer tous les coups de la Phase 1.0 à venir dans $C_k^-(d)$. Puisque $a_2 \in W_k$ n'est adjacent à aucun des sommets de $C_k^-(d)$, les prochains coups de Dominator lors de la Phase 1.0 n'affecteront pas la couleur de a_2 .

Nous montrons maintenant (ii). Supposons d'abord que $k' > k$. D'après (i), le P_5 -enfant de d' appartient à $W_{k'}$. Puisque d est devenu bleu au tour k , d ne peut pas être le P_5 -enfant de d' . Supposons maintenant que $k' < k$. D'après le Lemme 3.33, $C_{k-1}^+(d') \cap D_{k-1}$ est vide. Ainsi, le P_5 -enfant de d' n'appartient pas à D_{k-1} . Puisque d doit appartenir à D_{k-1} pour être souligné au tour k , nous concluons comme précédemment. \square

Nous sommes maintenant prêts à énoncer la proposition suivante, qui impliquera directement notre théorème principal concernant le D-jeu.

Proposition 3.35. *Soit F une forêt faiblement sans $S(K_{1,3})$. Pour tout $k \in \{0, \dots, k^{**}\}$,*

*nous posons $S_k = \sum_{i=1}^k e_i$ et $K_k = \sum_{v \in B_k} w_k(v)$. Les affirmations suivantes sont vraies pour tout $k \in \{0, \dots, k^{**}\}$.*

- I_k : $K_k \leq S_k$.
- II_k : Pour tout $v \in B_k \setminus H_k$, si $w_k(v) = 0$, alors $C_k^-(v) = \emptyset$ et $C_k^+(v) \cap D_k = \emptyset$.
- III_k : Pour tout $v \in B_k$, si $w_k(v) = 0$, alors v n'est pas un centre critique à la fin du tour k .

Démonstration. Nous procédons par induction sur k . Puisque B_0 est vide et $K_0 = S_0 = 0$, les trois énoncés sont trivialement vrais si $k = 0$. Supposons que I_k , II_k et III_k soient vrais pour un $k \in \{0, \dots, k^{**} - 1\}$. Nous notons b_{k+1} le nombre de sommets devenant bleus au cours du tour $k + 1$. Nous ferons d'abord comme si le procédé additionnel n'était pas mis en œuvre et nous le traiterons à la toute fin de cette preuve.

Nous commençons en supposant que le tour $k + 1$ est un tour de Dominator. Montrons d'abord que I_{k+1} est vrai. Au moins deux sommets passent de blanc à rouge et Dominator marque 6 points avec ces deux sommets. Ainsi, $e_{k+1} \geq b_{k+1} - 1$, ce qui implique $S_{k+1} \geq S_k + b_{k+1} - 1$. Durant ce tour les poids des sommets dans B_k ne changent pas et seulement $b_{k+1} - 1$ nouveaux sommets bleus acquièrent un poids de 1 (le sommet souligné ne recevant qu'un poids de 0). Nous avons donc $K_{k+1} \leq K_k + b_{k+1} - 1$. En utilisant l'hypothèse d'induction, il s'ensuit que $K_{k+1} \leq S_{k+1}$ et donc que I_{k+1} est vrai.

Montrons maintenant l'énoncé II_{k+1} . Soit w un sommet dans B_k tel que $w_k(w) = 0$. Puisque $C_{k+1}^+(w) \cap D_{k+1} \subseteq C_k^+(w) \cap D_k$ et $C_{k+1}^-(w) \subseteq C_k^-(w)$, la véracité de l'énoncé II_{k+1} se déduit immédiatement de l'hypothèse d'induction II_k , lorsque nous considérons des sommets de B_k dont le poids reste égal à 0 durant le tour $k + 1$. En d'autres termes, nous avons seulement à nous occuper des sommets qui reçoivent un nouveau poids égal à 0 durant ce tour. Ici, les poids des anciens sommets bleus ne changent pas au cours du tour, et tous les nouveaux sommets bleus qui ne sont pas dans H_{k+1} ont reçu un poids valant 1. L'énoncé II_{k+1} est donc clairement vérifié.

Nous démontrons maintenant III_{k+1} . D'après l'Observation 3.26, nous avons seulement à traiter les sommets dont le poids devient 0 durant le tour $k + 1$. Ici, c'est le cas pour un unique sommet, le centre dangereux $d \in D_k$, qui vient d'être élu par Dominator et souligné durant le tour $k + 1$. Nous attirons l'attention sur le fait que c'est maintenant l'unique moment de la démonstration où la condition d'être faiblement sans $S(K_{1,3})$ est utilisée. Puisque Dominator suit une stratégie de destruction des P_5 , il joue donc le sommet a_1 (défini par le Lemme 3.30). Ainsi a_1 appartient à R_{k+1} . Soit maintenant P un chemin dans $\mathcal{P}(F)$, dont le centre est d . D'après le Lemme 3.30, P passe par a_1 , qui est dans R_{k+1} . Le chemin P ne peut donc pas être un P_5 critique dans la forêt résiduelle F_{k+1} , ce qui implique que d n'est pas un centre critique à la fin du tour $k + 1$. Pour conclure, III_{k+1} est vérifié.

Nous supposons ensuite que le tour $k + 1$ est joué par Staller. Nous notons v le sommet qu'elle joue durant ce tour. Nous démontrons I_{k+1} en premier. Nous devons traiter les cinq cas du procédé de pondération. Pour les deux premiers, Staller marque 3 points avec le sommet v , qui passe de blanc à rouge. Ainsi $e_{k+1} \geq b_{k+1}$ et $S_{k+1} \geq S_k + b_{k+1}$.

Cas (A). Puisque tous les nouveaux sommets bleus reçoivent un poids de 1 et que les poids des anciens sommets bleus ne bougent pas, nous avons $K_{k+1} \leq K_k + b_{k+1}$. Par hypothèse d'induction, $K_k \leq S_k$, et nous concluons alors que $K_{k+1} \leq S_{k+1}$.

Cas (B). Puisque v est le P_5 -enfant d'un sommet $d \in H_k$, il est adjacent à une feuille l de F . Puisque v appartient à W_k , cette feuille aussi est dans W_k . Ainsi, au moins deux sommets, v et l , passent de blanc à rouge au tour $k + 1$. Cela implique que $e_{k+1} \geq 3$ et $S_{k+1} \geq S_k + 3$. Puisque tous les nouveaux sommets bleus reçoivent

un poids de 0 et que d est le seul ancien sommet bleu dont le poids est augmenté à 1, nous obtenons $K_{k+1} \leq K_k + 1 \leq S_k + 1 < S_{k+1}$.

Pour les trois derniers cas, le sommet v joué par Staller passe de bleu à rouge, et Staller marque 2 points seulement avec ce sommet. Ainsi, $e_{k+1} \geq b_{k+1} - 1$ et $S_{k+1} \geq S_k + b_{k+1} - 1$.

Cas (C). Si $w_k(v) = 0$, alors tous les nouveaux sommets bleus acquièrent un poids de 0 et donc $K_{k+1} \leq K_k$. Par induction, nous obtenons $K_{k+1} \leq K_k \leq S_k \leq S_{k+1}$. Au contraire, si $w_k(v) = 1$, les nouveaux sommets bleus se voient attribuer un poids de 1. Mais v n'appartient pas à B_{k+1} . Ainsi son poids de 1 ne compte pas pour la somme K_{k+1} . Nous en déduisons que $K_{k+1} \leq K_k + b_{k+1} - 1 \leq S_{k+1}$.

Cas (D). Comme ci-dessus, le poids de v n'est pas pris en compte dans K_{k+1} . Ainsi $K_{k+1} \leq K_k + 1 - w_k(v)$. Puisque v est le P_5 -enfant d'un sommet $d \in H_k$, $C_k^-(v)$ contient au moins d . D'après le Lemme 3.34 (ii), v n'est pas dans H_k . L'hypothèse d'induction II_k s'applique donc à v et donne $w_k(v) = 1$. Finalement, $K_{k+1} \leq K_k + 1 - w_k(v) \leq K_k \leq S_k \leq S_{k+1}$.

Case (E). Soit a_2 le P_5 -enfant de v .

- (a) Si $a_2 \in W_k$, alors $K_{k+1} \leq K_k + b_{k+1} - 1$, car a_2 reçoit un poids de 0. Par induction, $K_{k+1} \leq S_k + b_{k+1} - 1 \leq S_{k+1}$.
- (b) Si $a_2 \in B_k$, a_2 acquiert un nouveau poids de 0. Ainsi, $K_{k+1} \leq K_k + b_{k+1} - w_k(a_2)$. Puisque $v \in H_k$, $C_k^-(a_2)$ contient v . D'après le Lemme 3.34, a_2 n'est pas dans H_k . Finalement II_k implique que $w_k(a_2) = 1$, ce qui conduit à $K_{k+1} \leq K_k + b_{k+1} - 1 \leq S_{k+1}$.
- (c) Si $a_2 \in R_k$, nous avons $K_{k+1} \leq K_k + b_{k+1} - w_k(v)$, car v n'appartient pas à B_{k+1} . D'après le Lemme 3.34, nous savons que a_2 est devenu rouge durant un tour précédant le moment où v a été souligné. De plus, il est devenu rouge durant l'un des tours de Staller. Il y a deux possibilités. Premièrement, a_2 est devenu rouge car il a été joué par Staller au tour k' , avec $k' < k + 1$. Le Cas (B) ou le Cas (D) du procédé de pondération pour les tours de Staller a été appliqué. Ainsi, durant le tour k' , le sommet v a reçu un poids de 1. Deuxièmement, a_2 a pu devenir rouge sans avoir été joué par Staller. Le procédé additionnel assure que dans ce cas aussi v a reçu un poids de 1. De plus, le seul cas du procédé de pondération qui peut diminuer le poids d'un sommet bleu de 1 à 0 est celui correspondant au second item du Cas (E) pour les tours de Staller. Mais ce cas n'est mis en œuvre que si v est le P_5 -enfant d'un autre sommet souligné. Puisque v est lui-même souligné, le Lemme 3.34 affirme que c'est impossible. Dans les deux cas nous obtenons que $w_k(v) = w_{k'}(v) = 1$. Nous concluons alors comme dans (b).

Nous démontrons maintenant II_{k+1} et III_{k+1} . Comme pour le tour de Dominator, nous pouvons juste nous intéresser aux sommets bleus dont le poids est devenu 0 durant le tour $k + 1$.

Cas (A). Aucun des nouveaux sommets bleus ne reçoit un poids valant 0. De plus, aucun des anciens poids valant 1 n'est réduit à 0. Ainsi les énoncés II_{k+1} et III_{k+1} sont trivialement vrais.

Cas (B). Les seuls nouveaux sommets bleus dont le poids est fixé à 0 durant le tour sont dans $N(v)$. Soit u un tel sommet. Le sommet v est le P_5 -enfant d'un sommet $d \in H_k$. Puisque d était déjà bleu au début du tour $k + 1$, nous avons $d \neq u$. Le sommet d est le seul voisin de v dont la hauteur est strictement plus petite que celle de v . Ainsi $h(u) > h(v) > h(d)$. Puisque v est devenu rouge, $C_{k+1}^-(u)$ est vide. Le sommet d a été souligné durant l'un des tours précédents de Dominator, disons le tour k' , avec $k' < k + 1$. Puisque v et u sont dans $W_{k'}$, u appartient à $C_{k'}^+(d)$. D'après le Lemme 3.32, $C_{k+1}^+(u) \cap D_{k+1} \subseteq C_{k'}^+(u) \cap D_{k'} \subseteq C_{k'}^+(d) \cap D_{k'}$. D'après le Lemme 3.33, le dernier ensemble de cette liste d'inclusion est vide, et donc $C_{k+1}^+(u) \cap D_{k+1}$ est vide. Ceci démontre II_{k+1} . De plus, nous avons $C_{k'}^+(d) \cap D_{k'} = \emptyset$ et $u \in C_{k'}^+(d)$. Ainsi u n'est pas dans $D_{k'}$, mais il est dans $W_{k'}$. En appliquant le Lemme 3.29, nous obtenons que u n'est pas un centre critique à la fin du tour $k + 1$. Nous en concluons que III_{k+1} est vrai.

Cas (C). Nous supposons d'abord que $w_k(v) = 1$. Il n'y a pas de sommets dans B_k dont le poids devient 0. De plus, tous les nouveaux sommets bleus reçoivent un poids de 1. Il est donc clair que dans ce cas II_{k+1} et III_{k+1} sont vrais. Supposons ensuite que $w_k(v) = 0$. Soit $u \in N(v)$ un nouveau sommet bleu. Le sommet v n'est pas dans H_k . Par hypothèse d'induction II_k , $C_k^-(v) = \emptyset$ et $C_k^+(v) \cap D_k = \emptyset$. Ainsi, u doit appartenir à $C_k^+(v) \setminus D_k$. Par le Lemme 3.29, u ne peut pas être un centre critique à la fin du tour $k + 1$. Cela montre III_{k+1} . D'après le Lemme 3.32, $C_{k+1}^+(u) \subseteq C_{k+1}^+(v)$. Donc $C_{k+1}^+(u) \cap D_{k+1} = \emptyset$. Finalement $C_{k+1}^-(u) = \emptyset$, car v est rouge à la fin du tour $k + 1$. Nous en déduisons que II_{k+1} est vrai.

Cas (D). La démonstration est la même que dans le Cas (B).

Cas (E). Soit a_2 le P_5 -enfant de v . Pour les sous-cas (a) et (b), ce sommet est le seul sommet bleu à obtenir un poids de 0 durant ce tour. Ce sommet a_2 appartient à $C_k^+(v)$. Cela implique que $C_{k+1}^+(a_2) \subseteq C_k^+(a_2) \subseteq C_k^+(v)$ et que $C_{k+1}^+(a_2) \cap D_{k+1} \subseteq C_k^+(v) \cap D_k$. Puisque v est un sommet souligné, $C_k^+(v) \cap D_k$ est vide (par le Lemme 3.33). Ainsi c'est aussi le cas pour $C_{k+1}^+(a_2) \cap D_{k+1}$. De plus, comme v est rouge à la fin du tour $k + 1$, nous obtenons que $C_{k+1}^-(a_2) = \emptyset$. Cela démontre II_{k+1} . Puisque $v \in H_k$, ce sommet a été souligné au cours d'un tour de Dominator, disons le tour k' , avec $k' \leq k$. Nous savons que $C_{k'}^+(v) \cap D_{k'} = \emptyset$. Ainsi a_2 n'est pas un élément de $D_{k'}$. D'après le Lemme 3.34, a_2 appartient à $W_{k'}$. En appliquant le Lemme 3.29, nous en déduisons alors que le sommet a_2 n'est pas un centre critique

à la fin du tour $k + 1$. Il s'ensuit que III_{k+1} est vrai. Finalement, pour le sous-cas (c), aucun des sommets bleus ne reçoit un poids de 0 durant le tour $k + 1$, il n'y a donc rien à démontrer.

Pour terminer la preuve, nous devons prendre en compte le procédé additionnel. Nous montrons qu'appliquer ce procédé à la fin du tour $k + 1$ ne change pas la véracité de nos trois énoncés, I_{k+1} , II_{k+1} et III_{k+1} . Puisque aucun sommet bleu ne reçoit un poids de 0 grâce à ce procédé, les énoncés II_{k+1} et III_{k+1} restent trivialement vrais. Soient x_1, \dots, x_m des sommets qui deviennent rouges sans avoir été joués par l'un des joueurs et qui sont les P_5 -enfants de certains sommets de H_k . Après application du procédé additionnel, la nouvelle valeur de K_{k+1} sera inférieure ou égale à $K_{k+1} + m - w_k(x_1) - \dots - w_k(x_m)$. D'après la définition d'un P_5 -enfant, $C_k^-(x_i) \cap H_k$ est non-vide, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$. De plus, d'après le Lemme 3.34, nous avons $x_i \notin H_k$. En utilisant l'hypothèse d'induction II_k , nous obtenons que $w_k(x_i) = 1$. Cela montre que la valeur de K_{k+1} n'est pas augmentée par l'utilisation du procédé additionnel. Nous en concluons que I_{k+1} reste vrai. \square

Et voici enfin notre théorème établissant la 3/5-conjecture pour la classe des forêts faiblement sans $S(K_{1,3})$, dans le cadre du D-jeu.

Théorème 3.36. *Si F est une forêt d'ordre n , faiblement sans $S(K_{1,3})$, alors*

$$\gamma_g(F) \leq \frac{3n}{5}.$$

Démonstration. D'après la Proposition 3.31, il suffit de montrer que $c^{**} \leq e^{**}$. Soient $K_{k^{**}}$ et $S_{k^{**}}$ comme définis dans la Proposition 3.35. Notons que $S_{k^{**}} = e^{**}$. L'énoncé $III_{k^{**}}$, vrai d'après la Proposition 3.35, implique que $c^{**} \leq K_{k^{**}}$. De plus, l'énoncé $I_{k^{**}}$ entraîne $K_{k^{**}} \leq S_{k^{**}}$. Nous en concluons que $c^{**} \leq e^{**}$. \square

3.2.3 La démonstration pour le S-jeu

La démonstration dans le cadre du S-jeu se présente de la même manière que pour le D-jeu, sauf que nous introduisons une nouvelle phase, la Phase 0 qui correspond au premier coup de Staller. Ainsi, la Phase 1.0 commencera maintenant au tour 2. Nous notons toujours k^{**} pour le dernier tour de la Phase 1.0 et c^{**} pour le nombre de centres critiques à la fin du tour k^{**} . Nous posons $e_1 = p(F_0) - p(F_1) - 5$. Pour $k \geq 2$, e_i est défini comme pour le D-jeu et nous posons aussi $e^{**} = e_2 + \dots + e_{k^{**}}$.

Dans la démonstration du [17, Théorème 2], il est montré qu'en suivant la stratégie quasi-gloutonne pour le S-jeu sur une forêt d'ordre n sans sommet isolé, Dominator peut forcer le jeu à se finir en au plus $\frac{3n - e_1 - e^* + c^*}{5}$ tours. Ici, e^* est le nombre de points bonus gagnés durant la Phase 1 et c^* est le nombre de centres critiques à la fin de cette même phase. Comme pour le D-jeu, ce résultat implique directement la proposition suivante.

Proposition 3.37. *Soit F une forêt d'ordre n sans sommet isolé. Si Dominator joue le S -jeu en suivant une stratégie de destruction des P_5 , alors le nombre de tours sera d'au plus $\frac{3n - e_1 - e^{**} + c^{**}}{5}$.*

Nous pouvons définir les procédés de soulignage et de pondération exactement comme pour le D -jeu. Ceci nous permet d'énoncer une proposition très similaire à la Proposition 3.35. Seul le point I_k va changer. Dans cette nouvelle proposition, nous affirmerons que $K_k \leq S_k + 2$, pour tout $k \geq 0$. En effet, e_1 est égal au nombre de sommets bleus moins 2. Puisque tous ces sommets bleus vont recevoir un poids de 1, nous avons seulement que $K_1 \leq S_1 + 2$. Finalement, cette proposition entraînera que $c^{**} \leq e_1 + e^{**} + 2$. Cela implique clairement le théorème ci-dessous.

Théorème 3.38. *Si F est une forêt faiblement sans $S(K_{1,3})$ d'ordre n , alors $\gamma'_g(F) \leq \frac{3n + 2}{5}$.*

3.3 Conclusion et perspectives du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons apporté notre contribution à l'étude du jeu de domination. Premièrement, nous avons proposé une caractérisation des graphes ayant de petits nombres dominants ludiques, c'est-à-dire valant 2 ou 3, et extrémaux vis-à-vis du diamètre. Les jolies caractérisations obtenues ont démontré la pertinence de s'intéresser à ces familles de graphes extrémales. Intuitivement, cela provient du fait que pour de tels graphes, le déroulement d'une partie optimale se déduit directement de celui sur les chemins. Nous n'avons malheureusement pas été capable de formellement exploiter ces observations, et les preuves des résultats restent très terre-à-terre. Elles sont en l'état inadaptes pour caractériser les classes extrémales pour des valeurs de γ_g et γ'_g plus grandes que 3. En particulier, nous aimerions répondre positivement à la question ci-dessous. Pour $k \geq 1$, E_k désigne ici la classe des graphes extrémaux pour lesquels $\gamma_g = k$, et E'_k désigne celle pour lesquels $\gamma'_g = k$.

Question ouverte. *Existe-t-il une fonction f et une constante c (resp. une fonction g et une constante c'), telles que les graphes de la classe E_k (resp. E'_k) puissent être reconnus en temps $\mathcal{O}(f(k) \cdot n^c)$ (resp. $\mathcal{O}(g(k) \cdot n^{c'})$) ?*

La fonction de k correspondrait en un sens à l'énumération des parties optimales sur un chemin de longueur $2k$ (ou $2k-1$), et le facteur n^c (resp. $n^{c'}$) à des vérifications locales sur des sphères adjacentes.

Secondement, nous avons montré que l'algorithme quasi-glouton de Bujtás pouvait être amélioré pour montrer qu'une fameuse conjecture du domaine, la 3/5-conjecture, était vraie pour une large classe de forêts, les forêts faiblement sans $S(K_{1,3})$. Bien qu'il s'agisse d'un résultat très incrémental, les techniques de preuve

utilisées pourraient être réemployées pour étudier d'autres cas ouverts de la conjecture, essentiellement celui des graphes avec des sommets de degré 1. Il serait également intéressant de voir ce que ces techniques peuvent apporter dans la résolution d'une conjecture très similaire, la 3/4-conjecture pour le jeu de domination totale, proposée par Henning *et al.* [49]. Nous l'énonçons ici pour conclure et renvoyons les lecteurs intéressés à [49, 50]. L'analogie du D-nombre dominant ludique est noté γ_{gt} .

Conjecture. [3/4-conjecture, Henning *et al.* (2015).] *Pour tout graphe G d'ordre n , sans composante connexe ayant moins de trois sommets, $\gamma_{gt}(G) \leq \frac{3n}{4}$.*

Chapitre 4

Jeu de coloration distinguante

In dreams begins responsibility.

W.B. Yeats. Responsabilities.

Dans cette partie, nous introduisons un nouvel invariant ludique de graphes, le nombre distinguant ludique. La coloration distinguante est loin d'être le problème de coloration le plus connu. Il se distingue de la majorité des autres problèmes de coloration par le fait que la propriété requise est liée au groupe d'automorphismes et pas directement à des notions de voisinage ou d'incidence. Nous commençons donc ici par un bref état de l'art concernant ce problème.

Considérons une k -coloration c des sommets d'un graphe G . Si ϕ est un automorphisme de G , nous disons que ϕ *préserve la coloration* c si pour tout $u \in V(G)$, $c(u) = c(\phi(u))$. En termes plus imagés, l'automorphisme ϕ envoie chaque sommet vers un sommet qui a la même couleur que lui. Cela est équivalent à dire que les orbites sous l'action du sous-groupe $\langle \phi \rangle$ sont toutes monochromatiques. Si ϕ ne préserve pas la coloration c , nous disons que c casse cet automorphisme. Une k -coloration de G est *distinguante* si elle casse tous les automorphismes non triviaux de G . Ou encore, si le sous-groupe des automorphismes préservant c est réduit à l'identité. Le *nombre distinguant* de G , $D(G)$, est le plus petit entier k tel qu'il existe une k -coloration distinguante de G . Seuls les graphes dont le groupe d'automorphisme est trivial ont un nombre distinguant égal à 1. De tels graphes sont dits *asymétriques*. Erdős et Rényi [35] ont démontré en 1963 que presque tous les graphes sont asymétriques. D'un autre côté, il existe des graphes ayant un nombre distinguant arbitrairement grand, par exemple $D(K_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Gravier, Meslem et Slimani [44] ont même montré que pour tout entier k non nul, il existe une famille infinie de graphes ayant k pour nombre distinguant.

Il est clair que $D(G) = D(\overline{G})$, mais attention, plus généralement, deux graphes peuvent avoir le même groupe d'automorphisme mais des nombres distinguants dif-

férents. Considérons par exemple K_n^* , le graphe obtenu en ajoutant un sommet pendant à chaque sommet du graphe complet K_n , alors $\text{Aut}(K_n) \approx \text{Aut}(K_n^*)$ et pourtant $D(K_n) = n$ et $D(K_n^*) = \lceil \sqrt{n} \rceil$. Le nombre distinguant est donc plus qu'une mesure de la quantité de symétries du graphe, il est profondément relié à la manière dont celles-ci agissent sur ses sommets. Une question est alors de déterminer pour un groupe (fini et non trivial) Γ , la composition de l'ensemble $D(\Gamma) = \{D(G) \mid \text{Aut}(G) \approx \Gamma\}$, où G désigne un graphe. Nous savons par exemple que si Γ est abélien alors $D(\Gamma) = \{2\}$ ou encore que pour le groupe diédral \mathcal{D}_n , $D(\mathcal{D}_n) = \{2\}$, sauf si $n = 3, 4, 5, 6, 10$ et dans ce cas $D(\mathcal{D}_n) = \{2, 3\}$ (voir [2]). Pour le groupe symétrique, toujours dans [2], il est démontré que $D(S_4) = \{2, 4\}$, mais la nature de $D(S_n)$ pour $n \geq 5$ reste ouverte. Cette problématique a de manière naturelle été étendue aux actions de groupe en général par Tymoczko [83]. Si Γ est un groupe agissant fidèlement sur un ensemble X , $D(\Gamma, X)$ est le plus petit nombre de couleurs nécessaire pour obtenir une coloration de X qui n'est préservée par aucun élément non-trivial de Γ . Elle montre en particulier que pour n'importe quelle action fidèle de S_4 , le nombre distinguant associé est soit 2, 3 ou 4. Ce concept est donc strictement plus général que dans le cas des graphes.

Quelques bornes supérieures sont connues pour le nombre distinguant. Pour tout graphe G , nous avons facilement la borne supérieure suivante : $D(G) \leq n$, où n est l'ordre de G . En effet, colorier tous les sommets de G avec des couleurs différentes conduit trivialement à une coloration distinguante de G . Nous avons en fait beaucoup mieux puisqu'un analogue du théorème de Brooks pour la coloration classique, démontré par Collins *et al.* [24, 64], assure que $D(G) \leq \Delta(G) + 1$. De plus, l'égalité n'est atteinte que si G est égal à K_n , $K_{n,n}$ ou C_5 . Pour la plupart des arbres cette borne supérieure peut être descendue à $\Delta - 1$ [24].

La complexité du problème de décision associé DIST est difficile à appréhender. Ce qui n'est pas étonnant étant donné son lien étroit avec le problème d'isomorphisme de graphes.

DIST

Entrées : Un graphe G et un entier k .

Question : Est-ce que $D(G) \leq k$?

Russel et Sundaram [77] ont montré que DIST appartient à la classe AM (Arthur Merlin game), et qu'il serait surprenant que DIST soit co-NP-Dur puisque cela entraînerait l'effondrement de la hiérarchie polynomiale à son deuxième niveau. Nous n'avons par contre aucun indice pour dire si DIST est NP-dur ou même seulement pour savoir s'il est dans NP. D'un autre côté, Cheng *et al.* ont proposé des algorithmes polynomiaux pour résoudre DIST pour les graphes planaires [4] et plus tard pour les graphes d'intervalles [22]. Plus précisément, pour les arbres un algorithme en temps $\mathcal{O}(n \log n)$ a été proposé par Cheng[21], puis amélioré en $\mathcal{O}(n)$ par Lozano,

Mora et Seara [72] (n désignant ici l'ordre du graphe). Pour les graphes planaires la complexité est d'ordre $\mathcal{O}(n^5 \log^3(n))$ et d'ordre $\mathcal{O}(n^3 \log^3(n))$ pour les graphes d'intervalles.

La valeur exacte du paramètre est connue pour quelques classes de graphes. De nombreux résultats ont notamment été obtenus pour les produits cartésiens de graphes. Ils sont rappelés dans la Partie 4.3, consacrée à l'étude de la version ludique du nombre distinguant pour ces mêmes produits. Le tableau ci-dessous reprend les résultats connus.

Graphe G	$D(G)$
K_n	n
$K_{n_1^{k_1}, \dots, n_l^{k_l}}$	$\min\{p \mid C_{n_i}^p \geq k_i, \text{ pour tout } i\}$ [24]
P_n	2
$C_n, n \geq 6$	2 [2]
$C_n, n = 3, 4, 5$	3 [2]
$L(K_n), n \geq 6$	2 [2]
$L(K_4)$	2 [2]
$L(K_5)$ (complémentaire de Petersen)	3 [2]
$\mathcal{H}_n, n \geq 4$	2 [9]
$K_n \square K_m$	voir Théorème 4.28
G^k, G connexe	voir Théorème 4.27
$C_{n_1} \square \dots \square C_{n_k} \neq C_3 \square C_3$	2 (Prop. 4.32)
$C_3 \square C_3$	3 (Prop. 4.32)
$P_{n_1} \square \dots \square P_{n_k} \neq P_2^2, P_2^3$	2 (Prop. 4.33)
P_2^2, P_2^3	3 (Prop. 4.33)

Russel *et al.* [77] ont introduit la notion de *mouvement* d'un automorphisme. Le *mouvement* d'un automorphisme σ d'un graphe G est défini par :

$$m(\sigma) = |\{v \in V(G) \mid \sigma(v) \neq v\}|.$$

Nous définissons alors le mouvement du graphe G par :

$$m(G) = \min\{m(\sigma) \mid \sigma \in \text{Aut}(G) \setminus \{Id\}\}.$$

Le résultat suivant, qui s'obtient par des méthodes élémentaires, relie mouvement et nombre distinguant.

Théorème 4.1. [Lemme du mouvement, Russel *et al.* [77] (1998).] *Pour tout graphe G , si $d^{m(G)/2} \geq \log_d(|\text{Aut}(G)|)$ alors $D(G) \leq d$.*

L'analogie de ce résultat pour l'action d'un groupe en général possède de nombreuses applications. Il a notamment été utilisé par Conder et Tucker [25, 81] pour prouver que lorsque nous considérons des espaces vectoriels, des groupes ou des plongements de graphes sur des surfaces fermées (et en considérant les groupes d'automorphismes correspondant à ces structures), le nombre distinguant vaut 2 sauf dans un nombre fini de cas. Pour les graphes, ce résultat a conduit à la conjecture de Tucker, qui est l'une des plus fascinantes du domaine et qui place le problème dans le contexte des graphes infinis. Aux lecteurs intéressés, nous recommandons la thèse de Florian Lehner et les publications associées [27, 69, 70, 71].

Conjecture. [Conjecture du mouvement infini de Tucker (2011-2012).]

Soit G un graphe connexe infini, mais localement fini. Si tous les automorphismes non-triviaux de G possèdent un mouvement infini, alors $D(G) \leq 2$.

Pour finir cette introduction aux problématiques liées à la distinction de l'action du groupe d'automorphisme d'un graphe, citons quelques variantes introduites récemment et qui attestent de la vivacité du domaine. Dans [53], les auteurs cherchent des colorations qui cassent tous les endomorphismes d'un graphe. Dans [24], ils s'intéressent à des colorations distinguantes qui sont également propres. Et dans [37], c'est une problématique de coloration distinguante par liste qui est abordée. Dans cette thèse nous nous sommes quant à nous intéressé à une version ludique de cet invariant.

La première partie de ce chapitre est dédiée à la définition du jeu de coloration distinguante et à celle des deux nombres distinguants ludiques associés, qui correspondent au nombre minimal de couleurs à fournir au joueur désirant obtenir une coloration distinguante, pour que celui-ci puisse toujours y parvenir. Même sur des exemples simples, ces invariants peuvent être infinis. Une des questions centrales sera donc, avant même de chercher une valeur exacte ou un bon encadrement, de déterminer si les invariants sont finis ou non. Toujours dans cette première partie, nous énonçons des conditions suffisantes pour que l'un ou les deux invariants soient infinis. Nous montrons ensuite que si le groupe d'automorphisme est abélien d'ordre impair alors les deux invariants valent exactement 2. Pour finir cette section, nous montrons que, pour la classe des forêts, nous pouvons efficacement déterminer si les invariants sont finis ou non.

La deuxième partie concerne l'étude d'une large classe de graphes, les graphes involutifs, pour lesquels nous pouvons donner une borne supérieure quadratique en le nombre distinguant classique. Nous suivons une présentation proche du déroulé de nos recherches. Nous commençons par calculer la valeur exacte des invariants pour les cycles. Puis nous définissons la classe des graphes involutifs, qui contient les cycles pairs et pour laquelle nous pouvons généraliser les idées utilisées pour étudier ces derniers. Après avoir énoncé notre résultat principal concernant cette classe, nous montrons comment l'appliquer au calcul des nombres distinguants ludiques

des hypercubes. Sauf pour un cas exceptionnel, nous serons en mesure de donner une valeur exacte.

Nous terminons ce chapitre par une section consacrée à l'étude des produits cartésiens. Cette opération sur les graphes a déjà été bien étudiée dans le cadre du nombre distinguant classique et l'action des groupes d'automorphismes associés possède une structure bien comprise. Il était donc naturel d'étudier également ces produits dans le contexte ludique. Nous nous restreindrons à des facteurs connexes et relativement premiers. Nous donnons alors des conditions suffisantes sur l'ordre des facteurs pour qu'un des nombres distinguants ludiques soit fini. Nous nous intéressons ensuite au cas où l'un des facteurs est un graphe involutif et démontrons que sous certaines hypothèses faibles le nombre distinguant ludique du produit peut être borné supérieurement par celui du facteur involutif. Nous terminons en appliquant en partie ces résultats au calcul de la valeur exacte de ces invariants pour les grilles toroïdales multidimensionnelles, $C_{n_1} \square \cdots \square C_{n_k}$, où les n_i sont tous différents.

Hormis pour la Section 4.1.2, il s'agit d'un travail en collaboration avec Sylvain Gravier, Kahina Meslem et Souad Slimani. L'ensemble des résultats obtenus, excepté ceux de la Section 4.1.2 et 4.1.3, sont regroupés dans deux prépublications [42, 43].

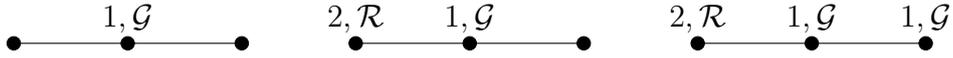
4.1 Nombres distinguants ludiques

4.1.1 Définitions et premiers résultats

Le jeu de coloration distinguante est un jeu de partition comme défini dans la Partie 1.4. Pour des raisons qui nous échappent maintenant, le Gentil et le Méchant y sont renommés Gentle et Rascal. Gentle est une femme, Rascal un homme. Ce jeu se joue sur un graphe G avec k couleurs fixées au préalable. Les joueurs choisissent alternativement un sommet de G qu'ils colorient avec l'une des k couleurs. Il est important de noter que le nombre de couleurs est fixé au début du jeu. Le jeu s'arrête quand tous les sommets du graphe ont été coloriés par les joueurs. Gentle gagne alors si la coloration construite au cours du jeu est distinguante. Si ce n'est pas le cas Rascal gagne. Ainsi, Gentle cherche à construire une coloration qui casse tous les automorphismes non triviaux alors que Rascal cherche à en préserver au moins un. Nous appelons k - \mathcal{G} -jeu distinguant, le jeu à k couleurs dans lequel Gentle commence. Similairement, le k - \mathcal{R} -jeu distinguant désigne le jeu à k couleurs dans lequel Rascal commence.

Chacun de ces deux jeux définit un invariant ludique de graphe. Le \mathcal{G} -nombre distinguant ludique d'un graphe G est le plus petit nombre de couleurs k tel qu'il existe une stratégie gagnante de Gentle, pour le k - \mathcal{G} -jeu distinguant sur G . Nous le notons $D_{\mathcal{G}}(G)$. Si un tel nombre k n'existe pas, nous dirons que $D_{\mathcal{G}}(G)$ est infini : $D_{\mathcal{G}}(G) = \infty$. De même, le \mathcal{R} -nombre distinguant ludique, $D_{\mathcal{R}}(G)$ est le plus petit

nombre de couleurs k tel qu'il existe une stratégie gagnante de Gentle, pour le k - \mathcal{R} -jeu distinguant sur G . Remarquons que ces deux invariants sont égaux à 1 seulement si le graphe est asymétrique. De plus, comme une coloration construite au cours d'une partie gagnante pour Gentle est une coloration distinguante, nous en déduisons directement que pour tout graphe G , $D(G) \leq D_{\mathcal{G}}(G)$ et $D(G) \leq D_{\mathcal{R}}(G)$. Il est également facile de remarquer que $D_{\mathcal{G}}(G) = D_{\mathcal{G}}(\overline{G})$ et $D_{\mathcal{R}}(G) = D_{\mathcal{R}}(\overline{G})$. Lorsque le jeu se déroule sur \overline{G} , le joueur qui a une stratégie gagnante n'a qu'à prétendre que la partie se déroule en fait sur G . Ceci est tout à fait possible car contrairement à ce qui peut se passer pour d'autres jeux (jeu de coloration ou jeu de domination), la structure du graphe n'interdit aucun coup. Tous les coups possibles sur G le sont aussi sur \overline{G} et inversement. Comme une k -coloration de \overline{G} est distinguante si et seulement si elle est distinguante pour G , il est clair qu'un joueur possède une stratégie gagnante sur \overline{G} si et seulement s'il en a une sur G (de plus, c'est la même).

FIGURE 4.1 – 2- \mathcal{G} -jeu sur P_3 FIGURE 4.2 – k - \mathcal{R} -jeu sur P_3

Examinons un premier exemple simple. Commençons avec le 2- \mathcal{G} -jeu sur P_3 . Gentle commence par colorier le sommet central avec la couleur 1. Rascal doit colorier l'une des extrémités avec une des deux couleurs. Quoi qu'il choisisse, Gentle gagnera la partie en coloriant l'autre extrémité avec l'autre couleur. En effet, puisque le seul automorphisme non trivial de P_3 échange les deux extrémités, il est cassé par la coloration finale. Gentle a donc une stratégie gagnante pour le 2- \mathcal{G} -jeu sur P_3 . Donc, $D_{\mathcal{G}}(P_3) \leq 2$. Clairement $D_{\mathcal{G}}(P_3)$ ne peut être égal à 1, donc $D_{\mathcal{G}}(P_3) = 2$. Maintenant, si Rascal commence à jouer, il va lui aussi choisir de colorier le sommet central. Gentle doit colorier l'une des extrémités et Rascal va répondre en coloriant l'extrémité restante avec la couleur utilisée par Gentle. Quel que soit le nombre de couleurs fixé au départ, les deux extrémités du P_3 sont à la fin du jeu de la même couleur. L'automorphisme non trivial de P_3 est donc préservé. Rascal a ainsi une stratégie gagnante pour le k - \mathcal{R} -jeu sur P_3 quelle que soit la valeur de k , avec $k \geq 2$. Nous en déduisons que $D_{\mathcal{R}}(P_3) = \infty$. Cet exemple met en avant l'importance revêtue par le choix de qui sera premier joueur. Cette analyse peut s'étendre facilement aux chemins d'ordre quelconque. Elle peut même se généraliser aux graphes ayant

un automorphisme d'ordre 2. Rascal utilise alors cet automorphisme pour copier les coups de Gentle. Nous avons le théorème suivant.

Théorème 4.2. *Si le groupe d'automorphisme d'un graphe G contient un automorphisme d'ordre 2 alors :*

- i) $D_{\mathcal{G}}(G) = \infty$, si l'ordre de G est pair,
- ii) $D_{\mathcal{R}}(G) = \infty$, si l'ordre de G est impair.

Démonstration. Soit σ un automorphisme d'ordre 2 et A l'ensemble de ses points fixes. Les cardinaux $|A|$ et $|V(G)|$ ont la même parité.

Supposons d'abord que $|A|$ est pair et que Gentle commence. La stratégie gagnante de Rascal est la suivante. Si Gentle joue un sommet dans A alors Rascal répond par un sommet dans A ; la couleur qu'il choisit est sans importance. Si Gentle joue un sommet u en dehors de A , alors Rascal colorie $\sigma(u)$ avec la même couleur que celle que vient de recevoir u . La parité de $|A|$ assure que c'est Gentle qui jouera en premier en dehors de A , donc quand Gentle joue un sommet u en dehors de A , le sommet $\sigma(u)$ n'est jamais déjà colorié. La stratégie de Rascal est donc bien définie. Elle est clairement gagnante, puisque la coloration finale sera toujours préservée par l'automorphisme σ .

Si maintenant $|A|$ est impair et que Rascal commence, il décide de colorier un sommet de A . Nous sommes alors dans la situation où Gentle commence et $|A|$ est pair. Rascal gagne en appliquant la même stratégie que ci-dessus.

Dans les deux cas, Rascal gagne quel que soit le nombre de couleurs allouées en début de partie. Ce qui montre que $D_{\mathcal{G}}$ (resp. $D_{\mathcal{R}}$) est infini. \square

Remarquons que tout groupe d'ordre pair contient un automorphisme d'ordre 2. Ainsi, un graphe dont le groupe d'automorphisme est de cardinal pair aura au moins l'un de ses deux nombres distinguants ludiques qui sera infini. De nombreux exemples classiques de graphes sont couverts par ce résultat. Les chemins, les cycles, les grilles et les grilles toroïdales ont un \mathcal{G} -nombre distinguant ludique infini lorsqu'ils sont d'ordre pair et un \mathcal{R} -nombre distinguant ludique infini s'ils sont d'ordre impair. L'hypercube, quelle que soit sa dimension, a un \mathcal{G} -nombre distinguant ludique infini. Par contre, le Théorème 4.2 ne dit rien sur le \mathcal{R} -nombre distinguant ludique (resp. \mathcal{G} -) des précédents exemples d'ordre pair (resp. impair). Pour les chemins, il est facile de voir que $D_{\mathcal{R}}(P_{2n}) = 2$ et $D_{\mathcal{G}}(P_{2n+1}) = 2$. Nous avons donc des exemples de graphes pour lesquels le couple $(D_{\mathcal{G}}, D_{\mathcal{R}})$ réalise (fini, ∞) et (∞, fini) .

Jouons maintenant sur le graphe complet K_n , avec $n \geq 3$. Si Gentle commence Rascal gagne en copiant la couleur utilisée par Gentle pour colorier n'importe quel autre sommet. En effet, l'automorphisme qui transpose ces deux sommets et laisse les autres fixes sera préservé à la fin du jeu, quoi qu'il advienne par la suite. Ici encore, le nombre de couleurs allouées au départ est sans importance. Nous avons donc

$D_G(K_n) = \infty$. Maintenant supposons que Rascal commence. Il colorie un sommet u . Gentle joue, puis, puisque $n \geq 3$, Rascal a encore au moins un coup à jouer. Il sélectionne un sommet v qu'il colorie avec la même couleur que u . L'automorphisme qui transpose u et v sera préservé à la fin du jeu. Rascal a donc également une stratégie gagnante lorsqu'il commence, ce qui montre que $D_{\mathcal{R}}(G)$ est également infini. Trouver des exemples de graphes dont les deux nombres distinguants ludiques sont finis (et non égaux à 1) est un peu moins évident. Il faut pour cela considérer des graphes dont le groupe d'automorphisme est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, où p est un nombre premier distinct de 2. Dans ce cas, D_G et $D_{\mathcal{R}}$ sont tous deux égaux à 2. Avant de démontrer ce résultat, nous rappelons que des graphes ayant de tels groupes d'automorphismes existent. De manière plus générale, Frucht [39] a prouvé que pour tout groupe fini Γ , il existe une infinité de graphes (finis) non isomorphes, dont le groupe d'automorphisme est isomorphe à Γ .

Théorème 4.3. *Si G est un graphe tel que $\text{Aut}(G)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, avec p premier et $p \geq 3$, alors $D_G(G) = D_{\mathcal{R}}(G) = 2$.*

Démonstration. Puisque $\text{Aut}(G)$ est d'ordre premier p , toutes les orbites sous l'action de ce groupe ont pour cardinal soit 1 soit p . Les orbites non triviales sont de taille supérieure ou égale à trois. Ainsi, quel que soit le joueur commençant la partie, Gentle peut s'assurer que l'une de ces orbites au moins n'est pas monochromatique (puisque 2 couleurs sont disponibles).

Montrons que cela suffit à Gentle pour gagner. Soit σ un automorphisme non trivial. Cet automorphisme est donc d'ordre p et $\langle \sigma \rangle$ est égale à $\text{Aut}(G)$. Les orbites sous l'action de $\langle \sigma \rangle$ et sous celle de $\text{Aut}(G)$ sont donc les mêmes. Il y a donc une orbite non triviale sous l'action de $\langle \sigma \rangle$ qui n'est pas monochromatique. Cet automorphisme ne préserve donc pas la coloration. Ceci montre que la 2-coloration obtenue est distinguante. Nous avons donc $D_G(G) = D_{\mathcal{R}}(G) = 2$. \square

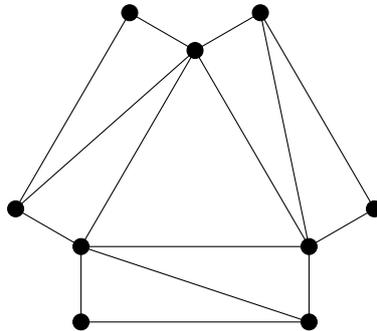


FIGURE 4.3 – Exemple de graphe dont le groupe d'automorphisme est $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Ce résultat peut se généraliser aux graphes ayant un groupe d'automorphisme abélien, de cardinal impair. C'est ce que nous allons démontrer dans la partie suivante.

Pour conclure cette première approche de nos nouveaux invariants ludiques, nous allons démontrer que si Gentle peut gagner avec k couleurs, alors il peut aussi gagner avec $k+1$ couleurs. Ce qui semble un truisme à première vue, n'est l'est plus une fois éclairé par une comparaison avec le nombre chromatique ludique. En effet, savoir si Alice a une stratégie gagnante pour le jeu chromatique avec $k+1$ couleurs dès lors qu'elle en a une avec seulement k couleurs reste une conjecture très largement ouverte.

Théorème 4.4. *Soit G un graphe tel que $D_{\mathcal{G}}(G)$ (resp. $D_{\mathcal{R}}(G)$) est fini. Alors, pour tout $k \geq D_{\mathcal{G}}(G)$ (resp. $k \geq D_{\mathcal{R}}(G)$), Gentle a une stratégie gagnante pour le k - \mathcal{G} -jeu distinguant sur G (resp. k - \mathcal{R} -jeu distinguant).*

Démonstration. Afin de gagner avec k couleurs, Gentle va suivre la même stratégie gagnante qu'il aurait jouée si seulement $D_{\mathcal{G}}(G)$ couleurs (resp. $D_{\mathcal{R}}(G)$) étaient disponibles, sauf quand Rascal choisira une couleur strictement plus grande que $D_{\mathcal{G}}(G)$ (resp. $D_{\mathcal{R}}(G)$). Dans ce cas, Gentle jouera le coup gagnant qu'il aurait joué si Rascal avait choisi la couleur 1. Soit c la coloration finale ainsi obtenue. Nous définissons une autre coloration \tilde{c} de la manière suivante :

$$\forall u \in V(G) \quad \tilde{c}(u) = \begin{cases} c(u) & \text{si } c(u) \leq D_{\mathcal{G}}(G) \text{ (resp. } c(u) \leq D_{\mathcal{R}}(G)) \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Cette coloration est une coloration distinguante puisqu'elle est obtenue en suivant une stratégie gagnante de Gentle pour le jeu avec seulement $D_{\mathcal{G}}(G)$ couleurs (resp. $D_{\mathcal{R}}(G)$). Soit σ un automorphisme préservant c . Clairement σ préserve également \tilde{c} et doit donc être trivial. Cela montre que c est une coloration distinguante et que Gentle a une stratégie gagnante avec k couleurs. \square

4.1.2 Graphes abéliens

Un graphe G est dit *abélien* si le groupe $\text{Aut}(G)$ est lui-même abélien et non trivial. L'objectif de cette partie est de démontrer le résultat suivant.

Théorème 4.5. *Si G est un graphe abélien dont le groupe d'automorphisme est de cardinal impair, alors $D_{\mathcal{G}}(G) = D_{\mathcal{R}}(G) = 2$.*

Dans ce but nous introduisons différents concepts. Si X est un ensemble, une *fleur de centre* $h \in X$ est une famille finie de sous-ensembles de X , P_1, \dots, P_k telle que pour tout $i, j \in \{1, \dots, k\}$, si $i \neq j$ alors $P_i \cap P_j = \{h\}$. Les ensembles P_i sont appelés *pétales*. Si Γ est un groupe agissant sur X et $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ est un

sous-ensemble d'éléments de Γ , un *bouquet* relativement à Σ est une famille finie de fleurs disjointes d'éléments de X , F_1, \dots, F_l , telle que : pour tout $\sigma \in \Sigma$, il existe une fleur F_i dont l'un des pétales est l'orbite non triviale d'un élément de X sous l'action de $\langle \sigma \rangle$.

Lemme 4.6. *Si Γ est un groupe abélien agissant sur un ensemble X , alors pour tous $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma$ d'ordre premier et tout $x \in X$, $\mathcal{O}_x^{\sigma_1} \cap \mathcal{O}_x^{\sigma_2} = \{x\}$ ou $\mathcal{O}_x^{\sigma_1} = \mathcal{O}_x^{\sigma_2}$.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{O}_x^{\sigma_1} \cap \mathcal{O}_x^{\sigma_2} \setminus \{x\}$ soit non vide. Nous avons donc $n, m \in \mathbb{N}^*$, tels que $\sigma_1^n(x) = \sigma_2^m(x)$. Soit $y' \in \mathcal{O}_x^{\sigma_1}$. Il existe $l \in \mathbb{N}$, tel que $y' = \sigma_1^l(x)$. Comme Γ est abélien, $\sigma_2^m(y') = \sigma_1^{l+m}(x)$. Nous avons donc $\sigma_2^m(\mathcal{O}_x^{\sigma_1}) = \mathcal{O}_x^{\sigma_1}$. Nous en déduisons que $\mathcal{O}_x^{\sigma_2^m} \subseteq \mathcal{O}_x^{\sigma_1}$. Puisque σ_2 est d'ordre premier, $\mathcal{O}_x^{\sigma_2} = \mathcal{O}_x^{\sigma_2^m}$ et donc $\mathcal{O}_x^{\sigma_2} \subseteq \mathcal{O}_x^{\sigma_1}$. De même, nous obtenons que $\mathcal{O}_x^{\sigma_1} \subseteq \mathcal{O}_x^{\sigma_2}$. \square

Lemme 4.7. *Si Γ est un groupe abélien agissant fidèlement sur un ensemble X , alors pour tout sous-ensemble $\Sigma \subset \Gamma$ d'éléments d'ordre premier, il existe un bouquet relativement à Σ .*

Démonstration. Posons $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$. Nous procédons par induction sur le nombre d'éléments dans Σ . Soit $x_1 \in X$, tel que $\sigma_1(x_1) \neq x_1$. Nous posons $\Sigma' = \{\sigma \in \Sigma \mid \sigma(x_1) \neq x_1\}$. D'après, le Lemme 4.6, l'ensemble $F_1 = \{\mathcal{O}_x^\sigma \mid \sigma \in \Sigma'\}$ est une fleur de centre x_1 . Si $\Sigma \setminus \Sigma'$ est vide, c'est fini. Sinon, posons $\Gamma' = \langle \Sigma \setminus \Sigma' \rangle$. Le sommet x_1 est fixé par tous les éléments de Γ' . Comme Γ est abélien, tous les sommets appartenant à des pétales de F_1 sont aussi fixés par Γ' . Nous avons donc une action de Γ' sur $X \setminus F_1$. Par hypothèse d'induction, nous avons un bouquet F_2, \dots, F_m relativement à $\Sigma \setminus \Sigma'$. Finalement, F_1, F_2, \dots, F_m est un bouquet relativement à Σ . \square

Nous pouvons maintenant nous lancer dans la démonstration du Théorème 4.5.

Démonstration. Soit $\Sigma \subseteq \text{Aut}(G)$, un ensemble d'éléments d'ordre premier tel que : pour $\sigma \in \text{Aut}(G) \setminus \{Id\}$, il existe $\sigma' \in \Sigma$ vérifiant $\langle \sigma' \rangle \subseteq \langle \sigma \rangle$. D'après le Lemme 4.7, il existe un bouquet F_1, \dots, F_m relativement à Σ .

La stratégie gagnante pour Gentle avec 2 couleurs va être de maintenir l'invariant suivant tout au long du jeu.

Invariant : Au début du tour de Rascal, la coloration partielle est telle que :

1. si un pétale possède un sommet colorié alors son centre est colorié,
2. les pétales ayant au moins deux sommets coloriés sont bichromatiques.

Soit u le sommet que Rascal vient juste de jouer. Premièrement, supposons que ce coup ait laissé l'invariant vrai. Si le centre d'une des fleurs n'est pas colorié alors Gentle colorie ce centre. D'après l'invariant, ce sommet est maintenant le seul sommet colorié de cette fleur. L'invariant est donc toujours vrai au début du nouveau tour de Rascal. Si tous les centres sont coloriés, alors Gentle choisit un sommet

d'un pétale et le colorie avec la couleur différente de celle du centre. L'invariant est maintenu, car même si Gentle vient de créer un pétale avec au moins deux sommets coloriés, ce pétale est bien bichromatique. Si tous les pétales sont entièrement coloriés, soit le jeu est fini, soit Gentle peut colorier un sommet qui n'appartient à aucun pétale. Dans ce cas, l'invariant reste trivialement vrai. Deuxièmement, supposons que le coup de Rascal ait rendu l'invariant faux. Dans ce cas, u appartient à un pétale P_u . Comme l'invariant était vrai au début du tour de Rascal, il n'y a que deux cas possibles.

Cas 1 : Le centre de P_u n'est pas colorié et u est le seul sommet colorié de P_u . Dans ce cas Gentle colorie le centre de P_u avec la couleur opposée à celle de u . P_u devient bichromatique et l'invariant est rétabli.

Cas 2 : Le pétale P_u possède exactement deux sommets coloriés et ils sont de la même couleur. De plus, l'un de ces sommets est le centre. Comme tous les pétales possèdent au moins trois sommets, Gentle peut répondre en coloriant un sommet de P_u avec la couleur différente de celle utilisée pour les deux sommets précédemment coloriés. Comme ce sommet n'est pas le centre, ce coup ne modifie pas le statut des autres pétales. L'invariant est clairement rétabli.

L'invariant est donc vrai tout au long du jeu, ce qui montre que la coloration finale est telle que tous les pétales soient bichromatiques. Montrons qu'elle est distinguante. Soit $\sigma \in \text{Aut}(G) \setminus \{Id\}$. Il existe $\sigma' \in \Sigma \cap \langle \sigma \rangle$ et un pétale P du bouquet qui est l'orbite non triviale d'un sommet sous l'action de $\langle \sigma' \rangle$. Ce pétale est bichromatique donc σ' ne préserve pas la coloration. Cela implique que σ ne la préserve également pas. En conclusion, la coloration obtenue est distinguante et Gentle a une stratégie gagnante avec 2 couleurs, peu importe qui commence. Nous avons donc montré que $D_{\mathcal{G}}(G) = D_{\mathcal{R}}(G) = 2$. \square

4.1.3 Forêts

Dans cette partie, nous étudions les forêts, une autre famille de graphes pour laquelle il va être possible de déterminer efficacement si le \mathcal{G} -nombre et/ou le \mathcal{R} -nombre distinguant ludique sont finis. Une première remarque est que toute forêt F qui n'est pas asymétrique possède au moins un automorphisme d'ordre 2. Pour s'en convaincre, considérons un automorphisme non trivial σ et un sommet u qui n'est pas fixé par σ . Soit P le chemin reliant u et $\sigma(u)$, s'il existe. Sinon P est l'ensemble vide. Désignons par T_u (resp. $T_{\sigma(u)}$), le sous-arbre maximal de F qui contient u (resp. $\sigma(u)$), mais aucun autre sommet de P . Les deux sous-arbres T_u et $T_{\sigma(u)}$ sont alors isomorphes et il existe un automorphisme de F d'ordre 2, qui consiste à permuter ces deux sous-arbres, sans affecter le reste de la forêt. En invoquant le Théorème 4.2, nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 4.8. *Si F est une forêt non asymétrique d'ordre pair (resp. impair),*

alors $D_{\mathcal{G}}(F)$ (resp. $D_{\mathcal{R}}(F)$) est infini.

Une deuxième remarque importante concerne les feuilles. Si une forêt possède trois feuilles partageant le même parent alors clairement le \mathcal{G} -nombre et le \mathcal{R} -nombre distinguant de cette forêt sont infinis. De telles feuilles seront dites de *type 3*. Nous dirons qu'une feuille est de *type 1* si elle ne partage son parent avec aucune autre feuille et que son parent n'est pas une feuille. Une feuille sera de *type 2* si elle partage son parent avec exactement une autre feuille et de *type 2'* si son parent est une feuille. Nous allons montrer que ne pas avoir de feuilles de type 3 est en fait suffisant pour que l'un des deux nombres distinguants ludiques soit fini. Nous notons respectivement T_1 , T_2 et T_2' , l'ensemble des feuilles de type 1, 2 et 2' d'une forêt.

Toujours à propos des feuilles, remarquons qu'un automorphisme qui fixe celles-ci est forcément trivial. En effet, si les feuilles sont fixées, alors les parents des feuilles sont fixés. En supprimant les feuilles de la forêt d'origine, nous obtenons une forêt dont les feuilles sont les parents des feuilles de la forêt d'origine. Elles sont donc fixées. Par induction, nous obtenons que toute la forêt est fixée.

Nous sommes prêts à énoncer notre résultat principal concernant les forêts.

Théorème 4.9. *Si F est une forêt d'ordre impair (resp. pair) sans feuille de type 3, alors $D_{\mathcal{G}}(F) \leq \max\{|T_1|, |T_2|/2 + 1, |T_2'|/2 + 1\}$ (resp. $D_{\mathcal{R}}(F)$).*

Démonstration. Notons P_1 l'ensemble des parents des feuilles de T_1 . Nous partitionnons $P_1 \cup T_1$ en sous-ensembles de taille 2 de la manière suivante. Chacun des sous-ensembles est constitué d'une feuille de T_1 et de son parent (qui est dans P_1). Nous notons \mathcal{P}_1 cette partition. Les ensembles T_2 et T_2' sont également partitionnés en sous-ensembles de taille 2. Les sous-ensembles partitionnant T_2 sont constitués des deux feuilles partageant le même parent. Ceux de T_2' sont constitués des deux feuilles qui sont parentes l'une de l'autre. Nous notons \mathcal{P}_2 et \mathcal{P}_2' les partitions correspondantes. La situation est représentée dans la figure ci-dessous.

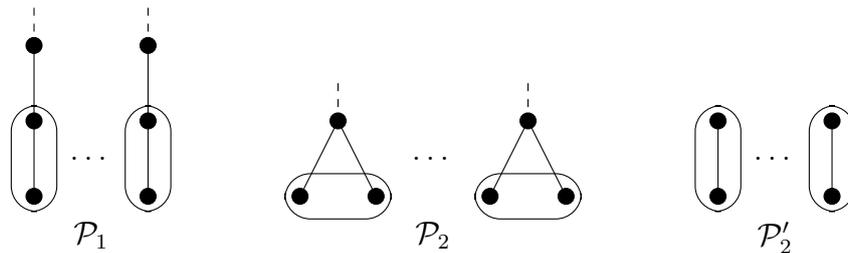


FIGURE 4.4 – Partitions suivant le type des feuilles.

Supposons que F est d'ordre pair et que Rascal commence. L'ensemble $H = V(F) \setminus (P_1 \cup T_1 \cup T_2 \cup T_2')$ est pair également. La stratégie suivante est donc valide pour Gentle. Lorsque Rascal joue le sommet u alors :

- si $u \in H$, elle répond par un sommet dans H ,
- si $u \in P_1 \cup T_1$, elle choisit l'unique sommet v tel que $\{u, v\} \in \mathcal{P}_1$,
- si $u \in T_2$ (resp. $T_{2'}$), elle choisit l'unique sommet v tel que $\{u, v\} \in \mathcal{P}_2$. (resp. $\mathcal{P}_{2'}$).

Elle choisit les couleurs de telle sorte que deux sous-ensembles dans la même partition n'aient jamais le même couple de couleurs. Elle s'assure également qu'aucune des paires de \mathcal{P}_2 et $\mathcal{P}_{2'}$ n'est monochromatique. Si elle dispose de $\max\{|T_1|, |T_2|/2 + 1, |T_{2'}|/2 + 1\}$ couleurs, cela est clairement possible.

Montrons que tout automorphisme préservant la coloration obtenue fixe toutes les feuilles de la forêt. Soit $\sigma \in \text{Aut}(F)$ qui préserve la coloration. Soit v une feuille de F . Son image $\sigma(v)$ est également une feuille. De plus, v et $\sigma(v)$ sont du même type. Soit v' et v'' les deux sommets tels que $\{v, v'\}$ et $\{\sigma(v), v''\}$ appartiennent à l'une des partitions \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 ou $\mathcal{P}_{2'}$, en fonction du type de v . Remarquons que $v'' = \sigma(v')$ ou encore $\sigma(\{v, v'\}) = \{\sigma(v), v''\}$. Les ensembles $\{v, v'\}$ et $\{\sigma(v), v''\}$ sont donc coloriés avec le même couple de couleurs. Ils doivent donc être égaux. En d'autres termes, soit $\sigma(v) = v$, soit $\sigma(v) = v'$. Si v est de type 1, v' n'est pas une feuille et donc $\sigma(v) \neq v'$. Si v est de type 2 ou $2'$, alors l'ensemble $\{v, v'\}$ n'est pas monochromatique. Là encore $\sigma(v) \neq v'$. Nous en déduisons que σ fixe toutes les feuilles de F . Comme nous l'avons fait remarquer au préalable, cela suffit à conclure que σ est trivial.

En conclusion, Gentle a une stratégie gagnante avec $\max\{|T_1|, |T_2|/2+1, |T_{2'}|/2+1\}$ couleurs et donc $D_{\mathcal{R}}(F) \leq \max\{|T_1|, |T_2|/2+1, |T_{2'}|/2+1\}$. Lorsque F est d'ordre impair et que Gentle commence, elle joue son premier coup dans $V(F) \setminus (P_1 \cup T_1 \cup T_2 \cup T_{2'})$. La situation est alors identique à celle traitée juste avant. Nous en déduisons que $D_{\mathcal{G}}(F) \leq \max\{|T_1|, |T_2|/2 + 1, |T_{2'}|/2 + 1\}$. \square

La borne obtenue est trivialement serrée : il suffit de considérer des forêts dont les arbres sont isomorphes à P_2 ou P_3 .

4.2 Graphes involutifs

4.2.1 Cycles

Les cycles forment une famille de graphes très simples. Nous nous attelons dans cette partie au problème du calcul du \mathcal{G} -nombre et du \mathcal{R} -nombre distinguant ludique pour ces graphes. Rappelons que l'énigme mathématique originale, posée par F. Rubin [76], et qui a conduit à l'introduction du nombre distinguant concernait les cycles. Bien que ces graphes soient simples, nous verrons que dans le cas où l'ordre est premier, la question n'est pas totalement résolue. L'étude des cycles d'ordre pair

par laquelle nous commençons est une bonne introduction à la partie suivante sur les graphes involutifs.

Rappelons d'abord que d'après le Théorème 4.2, si le cycle C_n est d'ordre pair (resp. impair) alors $D_{\mathcal{G}}(C_n)$ (resp. $D_{\mathcal{R}}(C_n)$) est infini. Pour les cycles d'ordre pair nous nous intéressons donc ici au cas où Rascal commence et pour les cycles d'ordre impair au jeu où Gentle commence.

Si u est un sommet d'un cycle pair C_n , alors il existe un unique sommet à distance maximale de u . Ce sommet sera appelé l'*opposé de u* et noté \bar{u} . Puisque cette distance maximale réalise le diamètre du graphe, il est clair que $\overline{\bar{u}} = u$. Nous pouvons donc partitionner les sommets d'un cycle pair en sous-ensembles de taille 2 du type $\{u, \bar{u}\}$. Ces sous-ensembles sont les *diamètres* du cycle. Puisque un automorphisme $\sigma \in \text{Aut}(C_n)$ préserve les distances, nous avons que $\sigma(u) = \sigma(\bar{u})$. L'image d'un diamètre du cycle par σ est donc également un diamètre : $\sigma(\{u, \bar{u}\}) = \{\sigma(u), \sigma(\bar{u})\}$. Lorsque l'ordre du cycle est supérieur ou égal à 12, Gentle peut se servir de cette décomposition en diamètres pour gagner avec 2 couleurs.

Proposition 4.10. *Si $n \geq 6$, alors $D_{\mathcal{R}}(C_{2n}) = 2$.*

Démonstration. Soient u, v, w des sommets distincts de C_{2n} tels que $d(u, v) = 1$, $d(u, w) = 3$ et $d(v, w) = 2$. Puisque $2n \geq 6$, les trois diamètres $D_1 = \{u, \bar{u}\}$, $D_2 = \{v, \bar{v}\}$ et $D_3 = \{w, \bar{w}\}$ sont distincts. La stratégie de Gentle avec deux couleurs est la suivante. Lorsque Rascal colorie un sommet z , Gentle répond en coloriant \bar{z} . Ceci est toujours possible puisque Rascal commence. Si z appartient à D_1 , D_2 ou D_3 , elle colorie \bar{z} de sorte que z et \bar{z} n'aient pas la même couleur. Si z est dans un autre diamètre, elle copie la couleur utilisée pour z .

Montrons que la coloration obtenue est distinguante. Soit $\sigma \in \text{Aut}(C_{2n})$ qui préserve la coloration. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, $\sigma(D_i) = D_j$, où $j \in \{1, 2, 3\}$. En effet, tous les diamètres sont monochromatiques excepté D_1 , D_2 et D_3 . L'un de ces trois diamètres est donc stable par rapport à σ . Puisqu'il n'est pas monochromatique, les deux sommets de ce diamètre sont en fait fixés par σ . Nous avons, $d(u, v) = 1$, $d(u, w) = 3$, $d(u, \bar{v}) = n - 1$ et $d(u, \bar{w}) = n - 3$. Comme $n \geq 6$, nous obtenons que v est le seul sommet de $D_2 \cup D_3$ à être à distance 1 de u . Donc si D_1 est fixé, v est fixé. Nous avons donc que σ fixe au moins trois sommets, c'est donc l'identité. De même, si D_2 est fixé, le sommet u sera fixé en tant que seul sommet de $D_1 \cup D_3$ à distance 1 de v . Et si c'est D_3 , qui est fixé, le sommet v sera fixé comme étant le seul sommet à distance 2 de w . Dans tous les cas, σ est trivial et la coloration obtenue est donc distinguante. \square

La preuve ci-dessus ne marche pas pour les cycles pairs plus petits. Elle conduit même Gentle à la défaite. Et en effet, pour C_6 , trois couleurs sont bien nécessaires à Gentle pour gagner. Par contre, pour C_8 et C_{10} une stratégie alternative lui permet de gagner avec deux couleurs. Le \mathcal{R} -nombre distinguant ludique est donc identique

au nombre distinguant pour les cycles pairs, sauf pour un cas exceptionnel C_6 , où $D(C_6) = 2$ et $D_{\mathcal{R}}(C_6) = 3$.

Proposition 4.11. *Nous avons $D_{\mathcal{R}}(C_6) = 3$.*

Démonstration. Commençons par montrer que Rascal peut gagner si seulement deux couleurs sont disponibles. La Figure 4.5 montre, à automorphisme près, la seule 2-coloration distinguante de C_6 . Dans une telle coloration, il n'y a pas de P_3 monochromatique. Soit (u_1, \dots, u_6) le cycle de taille 6. Rascal commence en coloriant u_1 avec la couleur 1. Afin d'éviter un potentiel P_3 monochromatique, Gentle n'a pas d'autre choix que de répondre en coloriant u_2 ou u_6 , disons u_2 , avec la couleur 2. Le second coup de Rascal est de colorier u_5 avec 1. Une fois de plus, pour prévenir l'apparition d'un P_3 monochromatique (u_1, u_6, u_5) , Gentle doit colorier u_6 avec 2. Le troisième coup de Rascal consiste à colorier avec 1 le sommet u_3 . Finalement, soit Gentle termine en coloriant u_4 avec 1 et alors Rascal gagne car un P_3 monochromatique est apparu, soit Gentle choisit la couleur 2 et Rascal gagne aussi car la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ préserve la coloration obtenue.

Donnons maintenant une stratégie gagnante pour Gentle lorsque trois couleurs sont à disposition. Lorsque Rascal va colorier un sommet u_i , Gentle répondra en coloriant le sommet \bar{u}_i . Gentle peut choisir les couleurs qu'elle va utiliser de telle sorte que la coloration finale c soit telle que les trois ensembles $\{c(x_i), c(\bar{x}_i)\}$, avec $i \in \{1, 2, 3\}$, soient distincts et qu'un seul d'entre eux soit un singleton. Supposons que σ soit un automorphisme préservant c . Puisque un diamètre doit être envoyé par σ sur un autre diamètre et qu'ils ont tous des couples de couleurs différents, les diamètres sont stables par σ . Deux d'entre eux ne sont pas monochromatiques et les quatre sommets correspondants sont donc fixés par σ . Finalement, cela montre que σ est trivial. \square

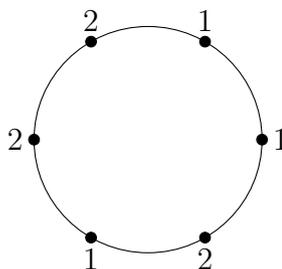


FIGURE 4.5 – L'unique coloration 2-distinguante de C_6

Proposition 4.12. *Nous avons $D_{\mathcal{R}}(C_8) = 2$.*

Démonstration. Soit (u_1, \dots, u_8) le cycle d'ordre 8. Soit c une 2-coloration telle qu'exactly trois sommets soient coloriés 2. Remarquons que si ces trois sommets n'induisent pas un stable ou un P_3 , alors c est distinguante. Rascal commence et colorie u_1 avec 1. Gentle répond en coloriant $\overline{u_1}$ également avec 1. À partir de maintenant Gentle va toujours choisir la couleur différente de celle que Rascal aura joué au coup d'avant. De cette manière, il y aura exactement trois sommets coloriés 2 à la fin de la partie. Pour s'assurer que la coloration obtenue est distinguante, Gentle doit trouver un moyen d'éviter que ces trois sommets n'induisent un stable ou un P_3 . À cette fin, elle couple les six sommets restant comme dans la Figure 4.6 : $V_1 = \{u_2, u_4\}$, $V_2 = \{u_6, u_8\}$ et $V_3 = \{u_3, u_7\}$. Quand Rascal colorie un sommet dans V_i , avec $i \in \{1, 2, 3\}$, Gentle répond en coloriant l'autre sommet de V_i . Ainsi la coloration obtenue à la fin du jeu est telle que V_1 , V_2 et V_3 sont bichromatiques. Les seuls P_3 de couleur 2 possibles seraient induits par $\{u_2, u_3, u_4\}$ ou $\{u_6, u_7, u_8\}$. Ceci est donc impossible. Les stables coloriés 2 potentiels devraient contenir soit V_1 soit V_2 . Ceci est aussi impossible. Nous en concluons que la 2-coloration obtenue est distinguante. \square

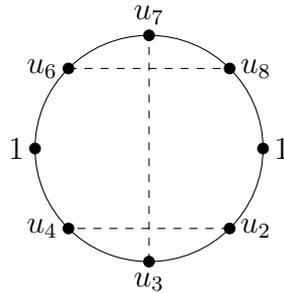


FIGURE 4.6 – Le couplage suivi par Gentle sur C_8

Proposition 4.13. *Nous avons $D_{\mathcal{R}}(C_{10}) = 2$.*

Démonstration. Notons (u_1, \dots, u_{10}) le cycle d'ordre 10. Rascal commence en coloriant u_1 avec la couleur 1. Gentle répond en coloriant $\overline{u_1}$ avec la même couleur. Il y a maintenant deux cas à considérer.

Cas 1 : Rascal utilise la couleur 1 pour son deuxième coup. Par symétrie, il n'y a que deux sous-cas à prendre en compte. Dans chacun d'eux, Gentle répondra avec la couleur 1, puis utilisera toujours la couleur différente de celle utilisée par Rascal au coup précédent.

Sous-cas 1.1 : Rascal colorie u_2 avec 1. Gentle colorie u_7 avec 1. Ensuite, elle joue en suivant le couplage $\{u_3, u_5\}$, $\{u_8, u_{10}\}$ et $\{u_4, u_9\}$. À la fin de la partie, la coloration obtenue a la particularité qu'il y a exactement deux sommets adjacents

coloriés 2 et un troisième sommet colorié 2 dont les voisins sont coloriés 1. La coloration obtenue est alors clairement 2-distinguante.

Sous-cas 1.2 : Rascal colorie u_3 avec 1. Gentle répond en coloriant u_4 avec 1. Ensuite elle joue en accord avec le couplage $\{u_2, u_5\}$, $\{u_7, u_9\}$ et $\{u_8, u_{10}\}$. À la fin du jeu, il y a deux possibilités. Soit la coloration partage les mêmes propriétés que celle obtenue dans le sous-cas 1.1, soit u_7 et u_{10} sont coloriés 2 et u_8 et u_9 sont coloriés 1. Dans ce cas, nous pouvons supposer par symétrie que u_2 est colorié avec 1 et u_5 est colorié avec 2. Il est alors facile de vérifier que les distances entre les trois sommets coloriés 2 ne sont compatibles avec aucun automorphisme non trivial.

Cas 2 : Rascal utilise la couleur 2 pour son deuxième coup. Gentle répond de sorte que, par symétrie, nous puissions supposer maintenant que u_2 et u_3 sont coloriés avec la couleur 2. Gentle joue ensuite en suivant le couplage $S_1 = \{u_4, u_5\}$, $S_2 = \{u_9, u_{10}\}$ et $D = \{u_7, u_8\}$. Si Rascal joue dans S_1 ou S_2 , Gentle copie la couleur qu'il a utilisé, tandis que s'il joue dans D , elle sélectionne l'autre couleur. Nous laissons au lecteur le plaisir de vérifier que toutes les colorations obtenues ainsi (voir Figure 4.7) sont distinguantes. \square

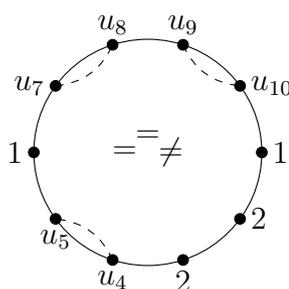


FIGURE 4.7 – Le couplage suivi par Gentle sur C_{10}

Nous nous intéressons maintenant aux cycles d'ordre impair. Nous devons distinguer le cas où l'ordre est premier et le cas où il ne l'est pas. Commençons par les cycles d'ordre impair non premier. Soit $C_n = (u_1, \dots, u_n)$ un tel cycle. Soit k un diviseur propre de n et $l = \frac{n}{k}$. Nous pouvons partitionner l'ensemble des sommets en l sous-ensembles de taille k définis par : $B_i = \{u_{i+jk} \mid j \in \{0, \dots, k-1\}\}$, où $i \in \{1, \dots, l\}$. Ces sous-ensembles seront appelés les *blocs* du cycle. Une remarque importante est que l'image d'un bloc par un automorphisme est également un bloc. De manière plus précise, si Δ_i , avec $i \in \{0, \dots, k-1\}$ désigne la symétrie axiale dont le point fixe est u_{1+il} , alors nous avons :

- $\Delta_i(B_1) = B_1$,
- $\Delta_i(B_j) = B_{l+2-j}$, pour tout $j \in \{2, \dots, l\}$. Comme l est impair, nous avons toujours $\Delta_i(B_j) \neq B_j$.

Ces blocs vont permettre à Gentle de mettre en place une stratégie pour gagner avec deux couleurs. Nous en décrivons une partie ici afin d'alléger la preuve du résultat à venir. Nous dirons que Gentle suit la stratégie des blocs pour C_n , si elle joue de la manière suivante. Rappelons qu'elle commence.

Stratégie des blocs.

- Son premier coup est dans B_1 ,
- Si Rascal joue dans B_1 alors elle répond dans B_1 ,
- Si Rascal joue dans B_j , avec $j \in \{2, \dots, l\}$, elle répond dans B_{l+2-j} , sauf si Rascal vient de colorier le pénultième sommet de B_j . Dans ce cas, elle colorie le dernier sommet de B_j .

Il n'est pas difficile de se convaincre que la stratégie suivante est valide et que, et c'est important, elle permet à Gentle de colorier le dernier sommet de tous les blocs. Nous sommes maintenant prêts à démontrer notre résultat.

Proposition 4.14. *Si n est impair, non premier et strictement plus grand que 9, alors $D_G(C_n) = 2$.*

Démonstration. Soit k le plus petit diviseur premier de n . Comme $n \geq 15$, nous avons $n = lk$, où $l \geq 5$. Nous considérons la partition des sommets en l blocs de taille k comme décrit précédemment. Nous adoptons également la même notation pour les symétries axiales. Gentle va suivre une stratégie des blocs et en particulier son premier coup est de colorier le sommet u_1 , c'est-à-dire le point fixe de Δ_1 , avec la couleur 1. La stratégie de Gentle est ensuite définie comme suit.

- Si Rascal vient de jouer un sommet v dans B_1 , alors Gentle colorie $\Delta_1(v)$ avec l'autre couleur. Puisque Gentle a commencé en jouant le point fixe de Δ_1 , ce coup est toujours possible.
- Si Rascal vient de jouer un sommet v dans B_j , avec $j \neq 1$, alors Gentle joue dans B_{l+2-j} , sauf si Rascal a colorié l'avant-dernier sommet de B_j . Dans ce cas, elle joue dans B_j de telle sorte que la parité du nombre de sommets coloriés 1 est différente de celle de $1 + \frac{k-1}{2}$. Dans le cas où elle doit jouer dans B_{l+2-j} , le sommet qu'elle choisit est déterminé de la manière suivante. Si au moins une symétrie Δ_i , avec $i \in \{2, \dots, k\}$, n'est pas encore cassée par la coloration, alors elle choisit l'une d'entre elles, disons Δ_{i_0} . Soit B'_j l'ensemble des sommets de B_j qui sont déjà coloriés. D'après la stratégie, il y a exactement un sommet colorié de plus dans B_j que dans B_{l+2-j} . Ainsi, le sous-ensemble de B_{l+2-j} , $\Delta_{i_0}(B'_j)$, possède au moins un sommet non colorié. Gentle colorie ce sommet avec la couleur différente de celle utilisée par Rascal pour le sommet v . Notons qu'elle casse ainsi la symétrie Δ_{i_0} . Si aucune des symétries ne préserve encore la coloration, elle joue comme elle veut dans B_{l+2-j} .

Montrons que cette stratégie conduit à une 2-coloration distinguante. Cette stratégie est clairement une stratégie des blocs. Gentle va donc jouer le dernier coup dans chaque bloc B_i , avec $i \neq 1$, et donc tous ces blocs ont un nombre de sommets coloriés avec 1 dont la parité est différente de celle de $1 + \frac{k-1}{2}$. Or dans le bloc B_1 , il y a exactement $1 + \frac{k-1}{2}$ sommets coloriés 1. Les seuls automorphismes qui peuvent donc potentiellement préserver la coloration obtenue sont ceux qui laissent le bloc B_1 stable. Il s'agit de l'identité, des k symétries Δ_i , avec $i \in \{1, \dots, k\}$ et des rotations laissant B_1 stable. Gentle a joué $\frac{(l-1)k}{2}$ coups en dehors de B_1 . Seulement $l-1$ de ces coups ont été utilisés pour contrôler la parité du nombre de 1 dans les blocs. Elle a donc eu $\frac{(l-1)(k-2)}{2}$ coups pour briser les $k-1$ symétries, $\Delta_2, \dots, \Delta_k$. Puisque $l \geq k$ et $k \geq 5$, ce nombre de coups est supérieur à $k-1$ et donc toutes ces symétries sont cassées par la coloration. La symétrie Δ_1 est aussi cassée par la coloration, d'après le premier point de la stratégie. Il nous reste donc à considérer les rotations non triviales qui laissent B_1 stable. Comme B_1 est de cardinal premier, ces rotations agissent transitivement sur B_1 . Comme B_1 n'est pas monochromatique, elles ne peuvent pas préserver la coloration. Pour conclure, la 2-coloration obtenue est distinguante et $D_{\mathcal{G}}(C_n) = 2$. \square

Le seul cycle d'ordre impair non premier qui n'est pas couvert par le résultat ci-dessus est C_9 . Nous traitons ce cas dans la proposition suivante.

Proposition 4.15. *Nous avons $D_{\mathcal{G}}(C_9) = 2$.*

Démonstration. Soit (u_1, \dots, u_9) le cycle d'ordre 9. Nous partitionnons les sommets de la manière suivante : $V_j = \{u_{j+3l} : 0 \leq l \leq 2\}$, pour $j = 1, 2, 3$. Gentle commence en coloriant u_1 avec 1. Puis, pour répondre au premier coup de Rascal r_1 , elle utilise l'autre couleur que celle qu'il aura choisie, et sélectionne un sommet g_2 tel que pour $u, v \in \{u_1, r_1, g_2\}$, avec $c(u) = c(v)$, il existe une symétrie axiale δ pour laquelle $\delta(u) = v$, $\delta(v) = u$ et δ fixe le sommet restant dans $\{u_1, r_1, g_2\}$. Quitte à changer les noms des sommets et des couleurs, nous pouvons supposer que nous sommes dans l'un des quatre cas suivants.

Cas 1 : $c(u_1) = c(u_4) = 1$ et $c(u_7) = 2$. Gentle applique la même stratégie que pour les cycles impairs non premiers d'ordre supérieur (voir Proposition 4.14). Cette stratégie étant possible car le sous-ensemble V_1 est totalement colorié. Il reste donc une unique symétrie de V_1 à casser. Si Rascal joue dans V_2 , Gentle répond dans V_3 en cassant cette symétrie. Puis, lorsqu'elle coloriera le dernier sommet de V_2 et V_3 , elle s'assurera que pour ces ensembles l'ensemble des couleurs associées est différent de $c(V_1)$.

Pour les trois autres cas, Gentle définit trois couples S, O, O' de sommets non coloriés et elle jouera selon ce couplage. Plus précisément, si Rascal vient de jouer dans S , elle répond dans S avec la même couleur, et si Rascal vient de jouer dans O ou O' , elle répond avec l'autre couleur.

Cas 2 : $c(u_1) = c(u_2) = 1$ et $c(x_6) = 2$. Gentle choisit les couples $O = \{u_3, u_9\}$, $O' = \{u_5, u_7\}$ et $S = \{u_4, u_8\}$.

Cas 3 : $c(u_1) = c(u_3) = 1$ et $c(x_2) = 2$. Elle définit $O = \{u_5, u_8\}$, $O' = \{u_7, u_9\}$ et $S = \{u_4, u_6\}$.

Cas 4 : $c(u_1) = c(u_5) = 1$ et $c(x_3) = 2$. Elle choisit $O = \{u_6, u_9\}$ et $O' = \{u_7, u_8\}$.

Prouvons maintenant que la coloration obtenue est dans les trois cas distinguante. En considérant les sommets dans S , nous vérifions symétrie par symétrie que celles-ci sont toutes cassées par la coloration. Soit maintenant σ une rotation non triviale de C_9 . Soit $\sigma(V_j) \neq V_j$, pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$, soit $\sigma(V_j) = V_j$, pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$. Dans les trois cas, les ensembles V_j sont coloriés $\{2, 2, 1\}$, $\{1, y, 1\}$ et $\{1, y, 2\}$, où $y \in \{1, 2\}$. Ainsi, au plus l'un des V_j peut être monochromatique (si $y = 1$). De plus, $\{1, y, 1\}$ et $\{1, y, 2\}$ sont toujours différents. Nous en concluons qu'aucune rotation non triviale ne préserve la coloration. \square

Il nous reste à étudier les cycles d'ordre premier.

Proposition 4.16. *Si $n > 5$ et n est premier, alors $D_G(C_n) \leq 3$.*

Démonstration. Supposons que trois couleurs sont disponibles durant le jeu. Nous commençons par montrer que Rascal ne peut pas gagner s'il ne copie pas toujours la couleur utilisée par Gentle au coup précédent. Notons respectivement c_1 , c_2 et c_3 le nombre de sommets coloriés 1, 2 et 3 au cours du jeu. Tant que Rascal copie la couleur employée par Gentle juste avant, c_1 , c_2 et c_3 sont tous pairs au début du tour de Gentle. La première fois que Rascal ne copie pas la couleur, exactement deux des trois nombres, disons c_1 et c_2 , sont impairs au début du tour de Gentle. À ce moment là, Gentle colorie un sommet avec la couleur 3. Les trois nombres sont maintenant impairs. Jusqu'à la fin du jeu, Gentle va dorénavant copier les couleurs jouées par Rascal. De cette manière, à la fin du jeu, c_1 , c_2 et c_3 seront impairs. Montrons que dans ce cas, la 3-coloration est distinguante. Soit $\sigma \in \text{Aut}(C_n)$ préservant la coloration. Le cardinal d'une orbite sous l'action de $\langle \sigma \rangle$ doit diviser $|\langle \sigma \rangle|$, qui est égal soit à 1, 2 ou n , puisque n est premier. Ces orbites ont donc un cardinal égal à 1, 2 ou n . Comme aucun des c_i n'est nul, la coloration n'est pas monochromatique. Ce cardinal ne peut donc être égal à n . L'automorphisme σ n'est donc pas une rotation, celles-ci agissant transitivement quand n est premier. Si σ est une symétrie, alors exactement une orbite, correspondant au point fixe, a une taille de 1. Disons que ce point fixe est colorié avec la couleur 1. Alors tous les sommets coloriés avec 2, appartiennent à des orbites de taille 2. Ceci implique que n_2 est pair, une contradiction. Finalement, σ ne peut être que l'identité.

Nous avons donc montré que si à un moment du jeu Rascal arrête de copier la couleur utilisée par Gentle au coup précédent, alors Gentle gagne avec trois couleurs et ce quels que soient les coups qu'elle a joués auparavant. Nous pouvons donc supposer que Rascal copie toujours la couleur précédente. La stratégie gagnante de

Gentle est la suivante. Pour son premier coup, elle colorie un sommet avec la couleur 1 et pour son second coup un sommet avec la couleur 2. Le second coup de Rascal est aussi de colorier un sommet avec 2. Soit Δ_2 la symétrie qui échange ces deux sommets et v_2 son point fixe. Si v_2 n'est pas encore colorié, Gentle le colorie avec 1. Sinon elle joue la couleur 1 où elle veut. Ensuite, elle ne joue que des 1, sauf pour son dernier coup où elle introduit la couleur 3. Comme $n > 5$, elle aura bien assez de coups pour jouer ce 3. À la fin du jeu, la coloration est telle qu'exactly deux sommets sont coloriés 2 et un seul est colorié 3. Un automorphisme préservant cette coloration doit donc fixer le sommet colorié 3. Si cet automorphisme n'est pas trivial, il ne peut s'agir que de Δ_2 . Or le point fixe de cette symétrie a pour couleur 1. La 3-coloration obtenue est donc distinguante. Nous avons donc que $D_{\mathcal{G}}(C_n) = 3$. \square

Pour C_3 , rappelons que les deux invariants ludiques sont infinis. Pour C_5 , une rapide analyse de cas montre que $D_{\mathcal{G}}(C_5) = 3$. Par ordinateur, nous avons calculé que $D_{\mathcal{G}}(C_7) = 3$, puis que $D_{\mathcal{G}}(C_{11}) = D_{\mathcal{G}}(C_{13}) = D_{\mathcal{G}}(C_{17}) = D_{\mathcal{G}}(C_{19}) = 2$. Le fait que les \mathcal{G} -nombres distinguants ludiques de C_5 et C_7 soient égaux à 3, nous semble donc plus en lien avec leur petit nombre de sommets qu'avec la primalité de leur ordre. Nous terminons cette partie en résumant dans le théorème suivant les résultats obtenus sur les cycles.

Théorème 4.17. *Soit C_n un cycle d'ordre $n \geq 3$.*

1. *Si n est pair (resp. impair), alors $D_{\mathcal{G}}(C_n)$ (resp. $D_{\mathcal{R}}(C_n)$) est infini.*
2. *Si n est pair et $n \geq 8$, alors $D_{\mathcal{R}}(C_n) = 2$. De plus, $D_{\mathcal{R}}(C_4) = D_{\mathcal{R}}(C_6) = 3$.*
3. *Si n est impair et non premier, alors $D_{\mathcal{G}}(C_n) = 2$.*
4. *Si n est premier et $n \geq 5$, alors $D_{\mathcal{G}}(C_n) \leq 3$. De plus, $D_{\mathcal{G}}(C_3) = \infty$ et $D_{\mathcal{G}}(C_5) = D_{\mathcal{G}}(C_7) = 3$.*

4.2.2 Graphes involutifs

Dans cette partie nous introduisons la classe des graphes dits involutifs et nous montrons que pour ces graphes le \mathcal{R} -nombre distinguant ludique peut être borné supérieurement en utilisant le nombre distinguant classique. Cette borne supérieure est quadratique en l'invariant classique. Après avoir étudié les cycles pairs, nous avons remarqué que les stratégies gagnantes de Gentle faisaient appel à la propriété suivante : tout sommet possède un unique voisin à distance maximale et cette distance réalise le diamètre. Ces graphes ont déjà été étudiés dans [41] sous le nom d'*even graph*. Ce qui est important ici est que si u est un sommet et \bar{u} est l'unique sommet tel que $d(u, \bar{u})$ réalise le diamètre, alors l'ensemble $\{u, \bar{u}\}$ est stable sous l'action de tout élément du groupe d'automorphisme. En d'autres termes, les ensembles $\{u, \bar{u}\}$, où u est un sommet du graphe, forment un système de blocs pour l'action du groupe d'automorphisme. Celui-ci agissant donc de manière imprimitive. Une autre

manière de le dire, qui est celle retenue pour la définition d'un graphe involutif, est que l'involution qui à u associe \bar{u} commute avec tous les automorphismes du graphe.

Un *graphe involutif* G est un graphe tel qu'il existe une bijection involutive sans point fixe $\text{Bar} : V(G) \rightarrow V(G)$, qui commute avec tous les éléments de $\text{Aut}(G)$. L'image $\text{Bar}(u)$ sera noté simplement \bar{u} . Nous dirons que \bar{u} est l'*opposé* de u . Les ensembles $\{u, \bar{u}\}$ seront appelés des *blocs*. L'absence de points fixes impose aux graphes involutifs d'avoir un ordre pair. La classe des graphes involutifs contient les *even graphs*, dont certains sont bien connus comme les cycles pairs, les hypercubes ou encore les grilles toroïdales ayant les deux dimensions paires, mais également les graphes ayant un groupe d'automorphisme dont le centre est de cardinal pair. Pour ces derniers, l'application Bar est l'un des automorphismes d'ordre 2 que contient le centre. Remarquons que l'application Bar n'est pas forcément un automorphisme du graphe. Le graphe de la Figure 4.8 est un *even graph* mais les sommets opposés n'ont pas le même degré. L'involution Bar n'est donc pas un automorphisme. Un premier exemple intéressant de graphes involutifs à considérer concerne les unions disjointes d'arêtes. L'union disjointe de n arêtes est dénoté par nK_2 . Les blocs sont alors exactement les arêtes. Ce sont dans un sens les pires graphes involutifs pour Gentle. Plus précisément, nous avons la proposition suivante.

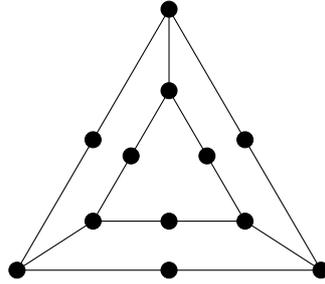


FIGURE 4.8 – Exemple de graphe involutif où l'application Bar n'est pas un automorphisme.

Proposition 4.18. *Si G est un graphe involutif d'ordre n , alors $D(G) \leq D(\frac{n}{2}K_2)$ et $D_{\mathcal{R}}(G) \leq D_{\mathcal{R}}(\frac{n}{2}K_2)$.*

Démonstration. Soit G' le graphe obtenu à partir de G en supprimant toutes les arêtes et en ajoutant une arête entre chaque sommet et son opposé. Le graphe G' est isomorphe à $\frac{n}{2}K_2$. Soit c une coloration distinguante de G' . Pour tout sommet u , nous avons $c(u) \neq c(\bar{u})$. Autrement la transposition qui échange u et \bar{u} préserverait la coloration c . De plus, si v est un sommet n'appartenant pas à $\{u, \bar{u}\}$ alors $c(\{u, \bar{u}\}) \neq c(\{v, \bar{v}\})$. Dans le cas contraire, l'automorphisme de G' qui envoie u (resp. \bar{u}) sur v (resp. \bar{v}) et qui fixe les autres sommets serait un automorphisme préservant la coloration. Montrons que c est aussi distinguante pour

G . Soit $\sigma \in \text{Aut}(G) \setminus \{Id\}$ et $u \in V(G)$ non fixé par σ . Si $\sigma(u) = \bar{u}$ alors σ ne préservera pas la coloration. Si $\sigma(u) \neq u$, alors $\{\sigma(u), \overline{\sigma(u)}\} \neq \{u, \bar{u}\}$. Donc $c(\{(\sigma(u)), \overline{\sigma(u)}\}) \neq c(\{u, \bar{u}\})$. Comme $\sigma(\{u, \bar{u}\}) = \{(\sigma(u)), \overline{\sigma(u)}\}$, dans ce cas aussi σ ne préserve pas la coloration. Toute coloration distinguante de G' est donc aussi une coloration distinguante de G . Nous en concluons que $D(G) \leq D(\frac{n}{2}K_2)$. Lorsque le jeu se déroule sur G , Gentle peut jouer comme s'il se déroulait en fait sur $\frac{n}{2}K_2$. Si elle obtient une coloration distinguante pour $\frac{n}{2}K_2$, nous avons vu que celle-ci sera aussi distinguante pour G . Nous en déduisons que $D_{\mathcal{R}}(G) \leq D_{\mathcal{R}}(\frac{n}{2}K_2)$. \square

Pour les graphes nK_2 , il est facile de voir que $D(nK_2)$ est le plus petit entier k tel que $\frac{k(k-1)}{2} \geq n$. Ou encore, $D(nK_2) = \frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}$. Pour la version ludique, nous montrons que l'invariant est égal à $n+1$. Nous avons donc des exemples de graphes pour lesquels l'écart entre l'invariant ludique et l'invariant classique est quadratique. Nos exemples ne sont pas connexes, mais pour remédier à ce problème il suffit de considérer les complémentaires des graphes nK_2 .

Proposition 4.19. *Pour $n \geq 1$, nous avons $D_G(nK_2) = \infty$ et $D_{\mathcal{R}}(nK_2) = n+1$.*

Démonstration. Le Théorème 4.2 implique directement que $D_G(nK_2) = \infty$. Montrons donc que $D_{\mathcal{R}}(nK_2) = n+1$.

Supposons d'abord que strictement moins de $n+1$ couleurs sont disponibles. La stratégie de Rascal va être de toujours utiliser la couleur 1. De plus, il choisit toujours de colorier un sommet dans une des copies de K_2 dont aucun sommet n'est colorié. Comme il commence, cette stratégie est clairement possible. À la fin de la partie, chaque copie de K_2 possède au moins un sommet colorié avec la couleur 1. Comme strictement moins de $n+1$ couleur sont disponibles, quoi que Gentle ait joué, deux copies de K_2 seront coloriées avec le même couple de couleurs ou au moins une copie sera monochromatique. Dans le premier cas, l'automorphisme qui permute les deux copies coloriées de la même manière préserve la coloration. Dans le deuxième cas, c'est l'automorphisme qui transpose les deux sommets de la copie monochromatique qui n'est pas cassé par celle-ci. Rascal a donc une stratégie gagnante si le nombre de couleurs disponibles est strictement plus petit que $n+1$. Nous en déduisons que $D_{\mathcal{R}}(nK_2) \geq n+1$.

Si maintenant $n+1$ couleurs sont à disposition, nous allons montrer que la stratégie suivante est gagnante pour Gentle. Rappelons que Rascal commence. Gentle peut donc décider de toujours répondre en coloriant le deuxième sommet de la copie de K_2 dans laquelle Rascal a joué juste avant. De plus, il y a suffisamment de couleurs pour que Gentle puisse assurer qu'aucune des copies n'est monochromatique et que chaque copie est colorié avec un couple de couleurs distinct de ceux utilisés pour toutes les autres. Soit $\sigma \in \text{Aut}(nK_2) \setminus \{Id\}$. Soit u un sommet non fixé par σ . Si $\sigma(u)$ et u sont adjacents, alors comme aucune copie de K_2 n'est monochromatique, σ est cassé par la coloration. Si $\sigma(u)$ n'est pas adjacent à u alors la copie de K_2

contenant u est envoyée par σ sur celle contenant $\sigma(u)$. Comme deux copies ne sont jamais coloriées avec le même couple de couleurs, σ est dans ce cas aussi cassé par la coloration. La stratégie décrite est donc bien gagnante pour Gentle. Ce qui montre que $D_{\mathcal{R}}(nK_2) \leq n + 1$. \square

Les deux propositions précédentes entraînent, pour un graphe involutif G d'ordre n , que $D(G) \leq \frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}$ et $D_{\mathcal{R}}(G) \leq \frac{n}{2} + 1$. Les graphes involutifs ont donc un \mathcal{R} -nombre distinguant ludique fini. Cependant la borne obtenue ne dépend pas de l'invariant classique. Le théorème qui suit assure que le \mathcal{R} -nombre distinguant ludique d'un graphe involutif est au plus d'ordre quadratique en l'invariant classique.

Théorème 4.20. *Si G est un graphe involutif avec $D(G) \geq 2$, alors $D_{\mathcal{R}}(G) \leq D(G)^2 + D(G) - 2$.*

Démonstration. Posons $d = D(G)$. Nous allons donner une stratégie gagnante pour Gentle avec $d^2 + d - 2$ couleurs. Puisque Rascal commence, Gentle peut jouer de sorte à n'être jamais la première à colorier un sommet dans un bloc. Si Rascal colorie un sommet u , la stratégie de Gentle va être de répondre en coloriant le sommet opposé \bar{u} .

Avant de décider comment elle choisit les couleurs qu'elle utilise, nous avons besoin d'introduire une coloration distinguante de G . Soit c une telle coloration utilisant d couleurs. Posons $k = d^2 + d - 2$. Pour tout $i, j \in \{1, \dots, d\}$, nous introduisons l'ensemble de sommets suivant : $V_{ij} = \{u \in V(G) \mid c(u) = i \text{ et } c(\bar{u}) = j\}$. Il y a $\frac{d(d-1)}{2}$ ensembles V_{ij} , avec $1 \leq i < j \leq d$, et d ensembles V_{ii} , avec $i \in \{1, \dots, d\}$. À chaque ensemble V_{ij} , avec $1 \leq i < j \leq d$, nous associons un nombre δ_{ij} dans $\{1, \dots, \frac{d(d-1)}{2}\}$. Chaque ensemble reçoit un nombre distinct des autres. Pour chaque V_{ij} , avec $i, j \in \{1, \dots, d\}$, nous définissons r_{ij} de la manière suivante :

$$r_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{si } 1 \leq i < j \leq d \\ k - r_{ji} & \text{si } 1 \leq j < i \leq d \\ \frac{d(d-1)}{2} + i & \text{si } i = j \text{ et } 1 \leq i \leq d - 1 \\ 0 & \text{si } i = j = d. \end{cases}$$

Cela ne définit que d^2 nombre distincts. Cependant nous avons besoin de $d^2 + d - 2$ couleurs, car il nous faut travailler modulo $d^2 + d - 2$ pour que la propriété suivante soit vraie :

$$(*) \forall i, i', j, j' \in \{1, \dots, d\} \quad r_{ij} \equiv r_{i'j'}[k] \text{ si et seulement si } i = i' \text{ and } j = j'.$$

Soit c' la k -coloration construite au cours du jeu. Lorsque Rascal colorie $u \in V_{ij}$, Gentle répond en coloriant \bar{u} de sorte que nous ayons $c'(\bar{u}) - c'(u) \equiv r_{ij}[k]$.

Pour montrer que cette stratégie est gagnante pour Gentle, il suffit de montrer que tout automorphisme σ qui préserve c' laisse les ensembles V_{ij} stables : $\sigma(V_{ij}) =$

V_{ij} . En effet, puisque ces ensembles sont monochromatiques par rapport à la d -coloration distinguante c , cela montre que σ préserve c et donc que c'est l'identité de G . Soient $u \in V(G)$ et $i, j \in \{1, \dots, d\}$. Montrons la propriété suivante :

(**) $u \in V_{ij}$, avec $i \neq j$, si et seulement si $c'(\bar{u}) - c'(u) \equiv r_{ij}[k]$ et $u \in V_{ii}$ si et seulement si $c'(\bar{u}) - c'(u) \equiv \pm r_{ii}[k]$.

Supposons pour commencer que $u \in V_{ij}$, avec $i \neq j$. Si u a été colorié par Rascal alors $c'(\bar{u}) - c'(u) \equiv r_{ij}[k]$. Si \bar{u} a été colorié par Rascal alors u l'a été par Gentle. Comme $\bar{u} \in V_{ji}$, nous avons $c'(u) - c'(\bar{u}) \equiv r_{ji} \equiv -r_{ij}[k]$. Et donc dans ce cas aussi, $c'(\bar{u}) - c'(u) \equiv r_{ij}[k]$. Si $i = j$, nous obtenons seulement, $c'(\bar{u}) - c'(u) \equiv \pm r_{ii}[k]$. Réciproquement, supposons que $c'(\bar{u}) - c'(u) \equiv \pm r_{ij}[k]$. Nous devons montrer que $u \in V_{ij}$. Soit l, m tels que $u \in V_{lm}$. D'après ce qui a été démontré ci-dessus, $c'(\bar{u}) - c'(u) \equiv \pm r_{lm}[k]$. Si $c'(\bar{u}) - c'(u) \equiv r_{lm}[k]$, d'après la propriété (*), nous concluons que $i = l$ et $j = m$, et donc $u \in V_{ij}$. Si $c'(\bar{u}) - c'(u) \equiv -r_{lm}[k]$, alors $l = m$. Nous avons donc $r_{ij} \equiv -r_u[k]$ ou encore $r_{ji} \equiv r_u[k]$. Toujours d'après la propriété (*), nous avons $i = j = l$ et donc $u \in V_{ij}$.

Soit σ un automorphisme préservant la coloration. Pour tout $u \in V_{ij}$, nous avons $c'(\bar{u}) - c'(u) \equiv c'(\bar{\sigma}(u)) - c'(\sigma(u))[k]$. La propriété (**) permet de conclure que $\sigma(u) \in V_{ij}$. Nous avons donc bien $\sigma(V_{ij}) = V_{ij}$. Ceci termine la preuve. \square

Les idées de la preuve ci-dessus peuvent être réutilisées pour améliorer la borne supérieure dans le cas où la coloration distinguante utilisée par Gentle donne lieu à un grand nombre d'ensembles V_{ij} vides. Nous pouvons même relâcher la condition que la coloration soit distinguante et autoriser l'application Bar, lorsqu'elle est un automorphisme, à préserver la coloration. Le résultat suivant s'avère être particulièrement utile. Nous l'appliquerons à l'étude des hypercubes et des grilles toriques involutives.

Théorème 4.21. *Soit G un graphe involutif. S'il existe une d -coloration, avec $d \geq 2$, telle que Bar est le seul automorphisme non trivial qui la préserve, alors $D_{\mathcal{R}}(G) \leq 2d - 2$.*

Démonstration. Nous utilisons les mêmes notations que dans le Théorème 4.20. Notamment, c désigne la coloration préservée uniquement par l'involution Bar et c' celle construite durant la partie. Comme dans la preuve de ce théorème, Gentle utilise la coloration c pour construire sa stratégie. Puisque Bar préserve cette coloration, les ensembles V_{ij} avec $i \neq j$, sont tous vides. Ainsi Gentle n'a besoin que de $2d - 2$ couleurs pour appliquer sa stratégie. En effet, elle joue de sorte que pour tout $u \in V(G)$, $c'(\bar{u}) - c'(u) \equiv \pm i - 1[2d - 2]$ si et seulement si $u \in V_{ii}$, avec $i \in \{1, \dots, d\}$. Tout comme dans la preuve précédente, un automorphisme préservant la coloration c' doit également préserver c . Ainsi, il ne peut s'agir que de Bar. Mais cet

automorphisme est clairement cassé par c' , puisque au moins un diamètre n'est pas monochromatique. \square

Pour illustrer l'intérêt de ces résultats généraux, nous allons dans la partie qui suit, les appliquer à l'étude des hypercubes.

4.2.3 Hypercubes

Les hypercubes font partie des premiers graphes pour lesquels le nombre distinguant a été étudié [9]. Rappelons que Bogstat et Cowen ont montré que $D(\mathcal{H}_n) = 2$ quand $n \geq 4$ et que $D(\mathcal{H}_2) = D(\mathcal{H}_3) = 3$. Dans cette partie, nous calculons la valeur du \mathcal{G} -nombre et du \mathcal{R} -nombre distinguant ludique des hypercubes. Pour ce faire, nous utiliserons les résultats obtenus sur les graphes involutifs. Les hypercubes sont en effet involutifs. L'involution Bar peut être définie comme l'automorphisme qui envoie un sommet u sur un sommet dont toutes les coordonnées diffèrent de celles de u . Une autre manière de le voir est de remarquer que les hypercubes sont des *even graph*. L'application Bar définie plus haut correspond en effet à envoyer un sommet sur l'unique sommet à distance maximale de celui-ci. De plus cette distance est n , qui correspond au diamètre de l'hypercube de dimension n . Comme les hypercubes possèdent un nombre pair de sommets et que l'involution Bar est un automorphisme, le Théorème 4.2 implique directement que $D_G(\mathcal{H}_n)$ est infini, quel que soit $n \geq 2$. Nous nous intéresserons donc exclusivement au \mathcal{R} -nombre distinguant ludique.

Afin de pouvoir appliquer le Théorème 4.21, nous aurons besoin de construire des 2-colorations aux propriétés proches de celles des ensembles déterminants. Un sous-ensemble S de sommets d'un graphe G est dit *déterminant* si l'identité de G est le seul automorphisme dont la restriction à S est l'identité de S . En d'autres termes, le fixateur de S sous l'action de $\text{Aut}(G)$ est trivial. Dans le lemme ci-dessous, nous donnons une condition suffisante pour qu'un sous-ensemble de \mathcal{H}_n soit déterminant.

Lemme 4.22. *Soit S un sous-ensemble de sommets de \mathcal{H}_n , avec $n \geq 2$. Si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe deux sommets de S , u_0^i et u_1^i , ne différant qu'en la i^{e} coordonnée et tels que $u_0^i(i) = 0$ et $u_1^i(i) = 1$, alors S est un ensemble déterminant de \mathcal{H}_n .*

Démonstration. Soit $\sigma \in \text{Aut}(\mathcal{H}_n)$, dont la restriction à S est l'identité. Par l'absurde, supposons qu'il existe $v \in \mathcal{H}_n \setminus S$, tel que $\sigma(v) \neq v$. Il existe donc $k \in \{1, \dots, n\}$ pour lequel $v(k) \neq \sigma(v)(k)$. Sans perte de généralité, supposons que $v(k) = 0$. Les sommets v et u_0^k diffèrent en l coordonnées, avec $l \in \{1, \dots, n-1\}$. En d'autres termes, $d(v, u_0^k) = l$. Nous avons donc aussi $d(\sigma(v), u_0^k) = l$. Tout cela implique que $d(v, u_1^k) = l+1$ et $d(\sigma(v), u_1^k) = l-1$, une contradiction. Pour conclure, S est un ensemble déterminant de \mathcal{H}_n . \square

Énonçons maintenant le résultat principal de cette partie.

Proposition 4.23. *Si $n \geq 5$, alors $D_{\mathcal{R}}(\mathcal{H}_n) = 2$.*

Démonstration. Pour $i \in \{0, \dots, n-1\}$, définissons le sommet u_i comme le sommet dont les i premières coordonnées sont égales à 1 et les $n-i$ autres à 0. Nous définissons aussi les sommets de \mathcal{H}_n suivants : $f = 10010 \dots 0$, $c_1 = 010 \dots 01$ et $c_2 = 110 \dots 01$. Soit également S le sous-graphe induit par l'ensemble de sommets $\{u_i, \bar{u}_i \mid 0 \leq i < n\} \cup \{f, \bar{f}, c_1, \bar{c}_1, c_2, \bar{c}_2\}$ (voir Fig. 4.9) et c la 2-coloration définie par : $c(u) = 1$ si $u \in V(S)$, et $c(u) = 2$ sinon. Nous allons montrer que cette coloration respecte les hypothèses du Théorème 4.21. Cela impliquera que $D_{\mathcal{R}}(\mathcal{H}_n)$ est égal à 2.

L'automorphisme Bar préserve clairement c . Nous allons montrer que c'est le seul. Un automorphisme $\sigma \in \text{Aut}(\mathcal{H}_n)$, qui préserve la coloration c , doit laisser S stable : $\sigma(S) = S$. La restriction de σ à S , notée $\sigma|_S$, est un automorphisme de S . Les sommets u_1, \dots, u_{n-1} et \bar{u}_0 montrent, d'après le Lemme 4.22, que S est un ensemble déterminant. Pour montrer que σ est soit l'identité de \mathcal{H}_n soit l'involution Bar, il suffit donc de montrer que $\sigma|_S$ est l'identité de S ou la restriction de Bar à S . Les deux sommets f et \bar{f} sont les seuls sommets de degré 1 dans S . Ainsi, soit $\sigma(f) = \bar{f}$ et $\sigma(\bar{f}) = f$ ou les deux sont fixés. Dans le premier cas, cela implique que $\sigma(u_1) = \bar{u}_1$ et $\sigma(\bar{u}_1) = u_1$. Dans le second cas, u_1 et \bar{u}_1 sont également fixés par σ . En effet, ces deux sommets sont respectivement le seul voisin de f et de \bar{f} . Les sommets u_0 et u_2 sont respectivement le seul voisin de degré 2 et le seul de degré 3 dans S du sommet u_1 . Dans le premier cas, nous avons donc que $\sigma(u_i) = \bar{u}_i$ et $\sigma(\bar{u}_i) = u_i$, pour $i \in \{0, 2\}$. Dans le second cas, u_0, \bar{u}_0, u_2 et \bar{u}_2 sont fixés par σ . Il y a exactement un chemin de taille $n-2$ entre v_0 et \bar{v}_2 (resp. v_2 et \bar{v}_0). Dans le premier cas, ces deux chemins sont interchangés par σ tandis que dans le second ils sont fixés point à point. Tout cela entraîne ensuite facilement que, dans le premier cas, $\sigma|_S$ correspond à la restriction de Bar, et dans le second à l'identité de S . \square

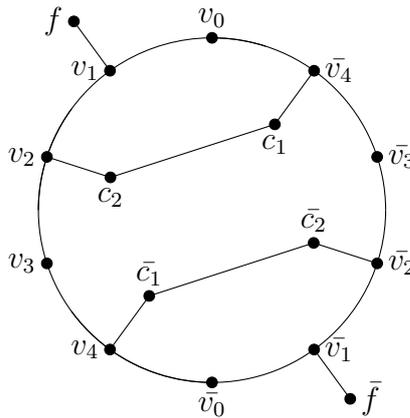
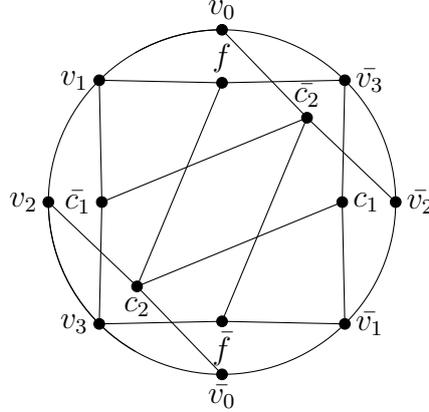


FIGURE 4.9 – Le sous-graphe induit S dans \mathcal{H}_5 .

FIGURE 4.10 – Le sous-graphe induit S dans \mathcal{H}_4 .

Cette preuve ne fonctionne pas pour l'hypercube de dimension 4, car, comme nous pouvons le constater sur la Figure 4.10, le sous-graphe S possède d'autres automorphismes non triviaux que l'involution Bar. Nous avons quand même réussi à descendre la borne de 4 à 3.

Proposition 4.24. *Nous avons $D_{\mathcal{R}}(\mathcal{H}_4) \leq 3$.*

Démonstration. Soient T le sous-graphe induit par les sommets 0000, 1000, 1100 et 1011, et \bar{T} celui induit par les sommets opposés à ceux de T . Remarquons que T et \bar{T} sont disjoints. Lorsque Rascal colorie un sommet u , la stratégie de Gentle est de répondre en coloriant le sommet \bar{u} selon les règles suivantes, où c correspond à la coloration construite au cours du jeu.

- Si $u \in V(T)$, alors $c(\bar{u}) - c(u) \equiv 1[3]$.
- Si $u \in V(\bar{T})$, alors $c(\bar{u}) - c(u) \equiv -1[3]$.
- Si $u \notin T \cup \bar{T}$, alors $c(\bar{u}) - c(u) \equiv 0[3]$.

Soit σ un automorphisme préservant la coloration c . Un sommet u appartient à T si et seulement si $c(\bar{u}) - c(u) \equiv 1[3]$. Donc T est stable sous l'action de σ . Les sommets 0000 et 1110 sont les seuls sommets de degré 1 dans T . Ils sont donc soit fixés soit interchangés par la restriction de σ à T , $\sigma|_T$. Mais dans \mathcal{H}_4 , $d(0000, 1011) \neq d(1110, 1011)$. Comme 1011 est le seul sommet isolé de T , il est fixé par $\sigma|_T$. Comme cette restriction préserve les distances, nous avons finalement que 0000 et 1110 sont fixés par $\sigma|_T$. Il est alors clair que tous les sommets de T sont fixés par σ . Le sommet 1111 est également fixé par σ , car c'est l'opposé de 0000. Nous avons donc que σ est l'identité sur $V(T) \cup \{1111\}$. D'après le Lemme 4.22, cet ensemble est un ensemble déterminant de \mathcal{H}_4 . Nous en déduisons que σ est l'identité sur \mathcal{H}_4 tout entier et que la 3-coloration c est distinguante. \square

Pour l'hypercube de dimension 3, nous sommes capables de calculer la valeur exacte. Pour ce faire nous allons utiliser le fait que \mathcal{H}_3 est isomorphe au produit cartésien $K_4 \square K_2$. Si c est une coloration des sommets, nous dirons que deux K_2 -fibres, K_2^i et K_2^j , avec $i, j \in \{1, \dots, 4\}$, sont *coloriées pareilles* si $c(K_2^i) = c(K_2^j)$.

Proposition 4.25. *Nous avons $D_{\mathcal{R}}(\mathcal{H}_3) = D_{\mathcal{R}}(K_4 \square K_2) = 3$.*

Démonstration. Puisque $D(\mathcal{H}_3) = 3$, il suffit de montrer que Gentle a une stratégie gagnante avec trois couleurs. Disons que Rascal commence en coloriant le sommet $(1, 1)$ avec la couleur 1. Gentle répond en coloriant $(2, 1)$ avec la couleur 2. Il y a maintenant deux cas.

Cas 1 : Rascal colorie le second sommet de K_2^1 ou K_2^2 avec la couleur δ . Sans perte de généralité, disons qu'il colorie le sommet $(1, 2)$. Nous avons deux sous-cas.

1.1 : $\delta \in \{1, 3\}$. Gentle répond en coloriant $(2, 2)$ avec la couleur 2. Sa stratégie est ensuite de jouer à chaque fois dans la même K_2 -fibre que Rascal. Elle choisit les couleurs de sorte qu'il n'y ait pas deux K_2 -fibres coloriées pareilles. Cela est possible car Rascal ne peut pas forcer une des K_4 -fibres à être monochromatique. Elle peut de plus s'assurer que la fibre K_2^3 n'est pas monochromatique. Cela montre qu'un automorphisme σ qui préserve la coloration laisse les K_2 -fibres stables. Ainsi $\sigma(K_2^3) = K_2^3$ et comme cette fibre n'est pas monochromatique, σ stabilise aussi les K_4 -fibres. En conclusion, σ est trivial et la 3-coloration est bien distinguante.

1.2 : $\delta = 2$. Gentle colorie alors $(2, 2)$ avec la couleur 1. Elle répond ensuite dans la même K_2 -fibre que Rascal. Elle peut assurer que les seules K_2 -fibres coloriées pareilles soient K_2^1 et K_2^2 . Elle peut aussi garantir que la fibre K_2^3 ne soit pas monochromatique. Comme K_2^1 et K_2^2 sont les seules à être coloriées pareilles, un automorphisme qui préserve la coloration laisse K_2^3 et K_2^4 stables. La fibre K_2^3 n'étant pas monochromatique, un tel automorphisme ne permute pas les K_4 -fibres. Nous en concluons qu'il laisse aussi K_2^1 et K_2^2 stables et qu'il s'agit donc de l'identité.

Cas 2 : Rascal colorie le sommet $(3, x)$, où $x \in \{1, 2\}$. Gentle répond en coloriant le sommet $(4, x)$. Quitte à permuter les couleurs 1 et 2 et les sommets $(3, x)$ et $(4, x)$, Gentle peut s'assurer que les sommets $(1, 1)$ et $(3, x)$ sont coloriés avec 1, que le sommet $(2, 1)$ est colorié avec 2 et que le sommet $(4, x)$ est colorié avec 3. Nous considérons le cas où $x = 1$. L'autre cas, très similaire, est laissé au lecteur. Quand Rascal colorie l'un des sommets $(1, 2)$, $(3, 2)$, Gentle répond en coloriant l'autre. De même pour le couple de sommets $(2, 2)$, $(4, 2)$. Elle colorie de sorte qu'aucune K_2 -fibre ne soit coloriée pareille qu'une autre et qu'une au moins soit bichromatique. Nous concluons alors comme dans le cas 1.1. \square

Nous résumons les résultats obtenus pour les hypercubes sous forme de théorème.

Théorème 4.26. 1. $D_{\mathcal{R}}(\mathcal{H}_2) = D_{\mathcal{R}}(\mathcal{H}_3) = 3$.

2. $2 \leq D_{\mathcal{R}}(\mathcal{H}_4) \leq 3$.

3. Si $n \geq 5$, alors $D_{\mathcal{R}}(\mathcal{H}_n) = 2$.

Nous avons essayé de calculer la valeur exacte du \mathcal{R} -nombre distinguant ludique de \mathcal{H}_4 par ordinateur. Ce calcul semble hors de portée d'un algorithme de brute force simple. Il serait intéressant de raffiner un tel algorithme pour répondre à la question suivante.

Question ouverte. Décider si $D_{\mathcal{R}}(\mathcal{H}_4)$ vaut 2 ou 3.

4.3 Produits cartésiens

4.3.1 Introduction et présentation de la stratégie des fibres

Dans cette partie, nous nous intéressons aux nombres distinguants ludiques des produits cartésiens de graphes. De nombreux résultats ont été obtenus dans ce cadre pour le nombre distinguant classique. Dans [9], il est montré que $D(\mathcal{H}_n) = 2$, pour $n \geq 4$. Dans [54, 65], Imrich, Klavžar et Zhu étendent ce résultat à toutes les puissances de graphes connexes.

Théorème 4.27. Soit G un graphe connexe non trivial.

1. Si $G \neq K_2, K_3$, alors $D(G^k) = 2$, pour tout $k \geq 2$.
2. $D(K_2^2) = D(K_2^3) = 3$, et $D(K_2^k) = 2$, pour tout $k \geq 4$.
3. $D(K_3^2) = 3$, et $D(K_3^k) = 2$, pour tout $k \geq 3$.

Le nombre distinguant du produit de deux graphes complets a également été obtenu par Imrich, Jerebić et Klavžar [52].

Théorème 4.28. Soient k, n, d des entiers tels que $d \geq 2$ et $(d-1)k < n \leq dk$.

Alors : $D(K_n \square K_k) = \begin{cases} d, & \text{si } n \leq d^k - \lceil \log_d k \rceil - 1; \\ d+1, & \text{si } n \geq d^k - \lceil \log_d k \rceil + 1. \end{cases}$

Si $n = d^k - \lceil \log_d k \rceil$, alors $D(K_n \square K_k)$ est égal à d ou $d+1$, et la valeur peut être calculée récursivement en temps $\mathcal{O}(\log^*(n))$.

D'autres résultats visent à donner une borne sur le nombre distinguant du produit $G \square H$ en utilisant des bornes ou la valeur exacte de $D(G)$ et $D(H)$. De tels résultats sont majoritairement possibles quand les facteurs G et H sont connexes et relativement premiers. Nous avons le résultat suivant.

Proposition 4.29. Soient $k, d \geq 2$ et G et H deux graphes connexes relativement premiers. Si $k \leq |V(G)| \leq |V(H)| \leq d^k - k + 1$, alors $D(G \square H) \leq d$.

Dans le même esprit, nous donnerons dans la première partie de ce chapitre, des conditions suffisantes sur les ordres des facteurs G et H pour que le \mathcal{G} -nombre ou le \mathcal{R} -nombre distinguant ludique du produit $G \square H$ soit fini. Les résultats suivants provenant de [65] permettent de borner ou de calculer la valeur exacte du nombre distinguant du produit $G \square H$.

Proposition 4.30. *Soient G et H deux graphes connexes relativement premiers, tels que $2 \leq D(G) \leq D(H)$. Alors, $D(G \square H) \leq \max\{D(G), D(H) - (2^{D(G)} - D(G) - 1)\}$.*

Si les nombres distinguants sont petits la borne devient exacte.

Corollaire 4.31. *Soient G et H deux graphes connexes relativement premiers, tels que $D(G) = 2$ et $2 \leq D(H) \leq 3$. Alors, $D(G \square H) = 2$.*

Combiné au Théorème 4.27, ce corollaire permet entre autres d'obtenir la valeur exacte du nombre distinguant pour les produits de chemins ou de cycles. Ces résultats bien que faciles n'ont à notre connaissance jamais été explicitement publiés. Nous proposons donc une preuve du premier et laissons la seconde au lecteur.

Proposition 4.32. *Soit G un graphe isomorphe au produit cartésien de k cycles, avec $k \geq 2$. Si $G \neq \square^2 C_3$, alors $D(G) = 2$.*

Démonstration. Montrons d'abord le résultat quand $k = 2$: $G = C_n \square C_m$. Si $n = m$ alors le Théorème 4.27 permet de conclure. Sinon, si $n > 5$, nous appliquons le Corollaire 4.31. Finalement, si $n, m < 6$, il faut appliquer la Proposition 4.29. Lorsque $k > 2$, procédons par induction. Si G est de la forme $\square^k C_n$, alors nous appliquons directement le Théorème 4.27. Sinon, soit $(\square^{p_1} C_{n_1}) \square \dots \square (\square^{p_l} C_{n_l})$ la décomposition en graphes premiers de G , où $n_1 > \dots > n_l$. Comme le cas où G est une puissance a été traité juste avant, nous avons $l \geq 2$. Par induction $D((\square^{p_2} C_{n_2}) \square \dots \square (\square^{p_l} C_{n_l})) = 2$, si ce graphe n'est pas $\square^2 C_3$. Comme $D(\square^{p_1} C_{n_1}) \leq 3$, nous pouvons appliquer le Corollaire 4.31, pour obtenir que $D((\square^{p_1} C_{n_1}) \square \dots \square (\square^{p_l} C_{n_l})) = 2$. Supposons donc que $(\square^{p_2} C_{n_2}) \square \dots \square (\square^{p_l} C_{n_l}) = \square^2 C_3$, dont le nombre distinguant vaut 3. Si $n_1 \geq 6$, alors $D(\square^{p_1} C_{n_1}) = 2$, même si $p_1 = 1$. Nous pouvons donc encore appliquer le Corollaire 4.31. De même, si $p_1 \geq 2$, $D(\square^{p_1} C_{n_1}) = 2$, même si $n = 4, 5$. Il nous reste donc deux exceptions à traiter : $C_5 \square (\square^2 C_3)$ et $C_4 \square (\square^2 C_3)$.

Nous définissons trois 2-colorations de $C_5 = (u_1, \dots, u_5)$ et $C_4 = (v_1, \dots, u_4)$. La coloration c_1 est monochromatique de couleur 1. La coloration c_2 est telle que les sommets u_1 et v_1 soient les seuls coloriés avec la couleur 2. Dans la coloration c_3 , seuls u_1, u_2 et v_1, v_2 sont coloriés avec le 2. Soit maintenant δ une 3-coloration distinguante de $\square^2 C_3$. Nous définissons une 2-coloration c de $C_5 \square (\square^2 C_3)$ (resp. $C_5 \square (\square^2 C_3)$) de la manière suivante. Soit u un sommet de $\square^2 C_3$, la fibre C_5^u (resp. C_4^u) est alors coloriée selon la coloration $c_{\delta(u)}$. Un automorphisme σ qui préserve la coloration c ne peut envoyer une C_5 -fibre (resp. C_4 -fibre) que sur une C_5 -fibre coloriée avec la coloration du même type. Comme δ est distinguante pour $\square^2 C_3$,

cet automorphisme agit trivialement sur les C_5 -fibres (resp C_4 -fibres). En d'autres termes, $\sigma = (Id, \psi)$, où $\psi \in \text{Aut}(C_5)$ (resp. $\text{Aut}(C_4)$). Les fibres coloriées avec c_2 montrent que cet automorphisme ψ est soit l'identité soit la symétrie passant par le sommet u_1 . Cette dernière ne préservant pas la coloration des fibres coloriées avec c_3 , nous en déduisons que ψ est l'identité. En conclusion, la 2-coloration c est distinguante et $D(C_5 \square (\square^2 C_3)) = D(C_4 \square (\square^2 C_3)) = 2$. \square

Proposition 4.33. *Soit G un graphe isomorphe au produit cartésien de k chemins, avec $k \geq 2$. Si $G \neq \square^2 P_2$ et $G \neq \square^3 P_2$, alors $D(G) = 2$.*

Dans la deuxième partie, nous donnons une borne quadratique en $D(H)$ pour le \mathcal{R} -nombre distinguant ludique de $G \square H$, lorsque G et H sont connexes, relativement premiers et que $D(G)$ n'est pas trop gros par rapport à $D(H)$. Ce résultat sert en partie dans la dernière section de ce chapitre, où nous calculons la valeur exacte des invariants ludiques pour les produits de cycles et de chemins, dans le cas restreint où tous les facteurs n'apparaissent qu'à la première puissance.

La grande majorité des résultats de ce chapitre s'appuie sur le même type de stratégie pour Gentle, que nous définissons ici. Pour le jeu sur le produit $G \square H$, avec G non trivial, nous dirons que Gentle suit une *stratégie des G -fibres* si nous sommes dans l'un des cas suivants.

Cas 0 :

- $|V(G)|$ est pair et Rascal commence.
- Quand Rascal joue dans une G -fibre, Gentle répond dans la même G -fibre.

Cas 1 :

- $|V(G)|$ est impair.
- $|V(H)|$ est pair et Rascal commence, ou $|V(H)|$ est impair et Gentle commence.
- Quand Rascal joue dans une G -fibre dont tous les sommets étaient non coloriés, Gentle répond dans une autre G -fibre totalement non coloriée.
- Quand Rascal joue dans une G -fibre qui possédait déjà un sommet colorié, Gentle répond dans la même G -fibre.

La stratégie des G -fibres est toujours valide. Dans le Cas 0, la parité de chaque G -fibre assure que Rascal va toujours être le premier à devoir jouer dans une nouvelle G -fibre entièrement non coloriée. Dans le Cas 1, après un des coups de Gentle, il y a toujours un nombre pair de G -fibres encore entièrement non coloriées. Rascal sera le premier à ne plus pouvoir jouer dans une telle G -fibre. Le deuxième sommet à être colorié dans une G -fibre le sera donc toujours par lui, le troisième par Gentle et ainsi de suite. Il est facile de vérifier que la stratégie des G -fibres a les propriétés suivantes, propriétés que nous utiliserons souvent sans forcément les rappeler explicitement.

- Gentle colorie le dernier sommet de chaque G -fibre.
- Dans le Cas 0, pour chacune des G -fibres, le premier sommet à être colorié l'est par Rascal, le second par Gentle et ainsi de suite.
- Dans le Cas 1, Gentle colorie le premier sommet d'exactly $\lceil \frac{|V(H)|}{2} \rceil$ G -fibres. Dans toutes les fibres le second sommet est colorié par Rascal, le troisième par Gentle, *et cetera*.

Deux exemples sont donnés dans les Figures 4.11 et 4.12, où \mathcal{R}_i et \mathcal{G}_i représentent respectivement le i^{e} coup de Rascal et de Gentle. Dans le Cas 0, les coups des

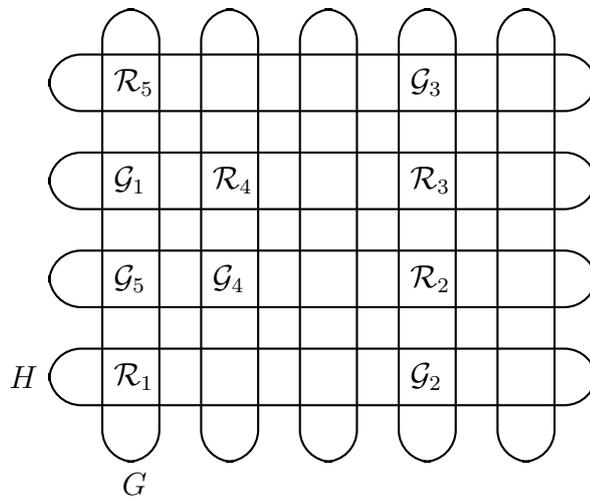


FIGURE 4.11 – Alternance des coups dans le Cas 0 de la stratégie des G -fibres (Rascal commence).

joueurs dans une G -fibre alternent comme si le \mathcal{R} -jeu se déroulait uniquement dans cette fibre. Cette propriété sera souvent utile à Gentle pour jouer dans une G -fibre selon une stratégie gagnante déjà connue pour le seul graphe G . Dans le Cas 1, la situation n'est pas la même dans les G -fibres où Gentle a joué le premier coup et dans les autres. Pour les premières, les coups alternent comme dans le \mathcal{G} -jeu sur G . Pour les secondes, c'est aussi le cas excepté pour le premier coup qui est joué par Rascal à la place de Gentle. Dans ce cas, le lemme ci-dessous s'avère utile. Il affirme que dans le cas des graphes sommet-transitifs, le premier coup n'est pas important. Si en jouant premier l'un des joueurs gagne, alors il peut se permettre de laisser son adversaire choisir ce coup à sa place.

Lemme 4.34. *Si G est un graphe sommet-transitif, alors tous les premiers coups sont gagnants pour le premier joueur ou ils sont tous perdants.*

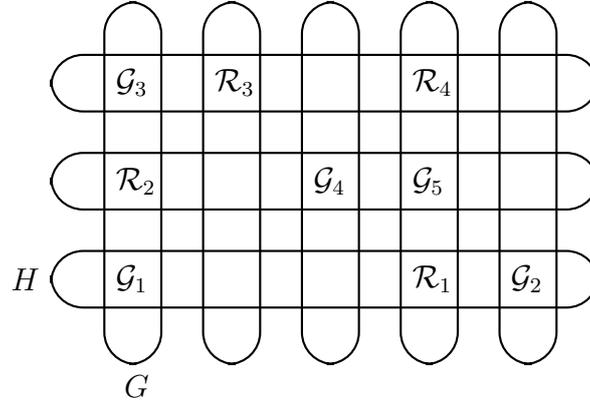


FIGURE 4.12 – Alternance des coups dans le Cas 1 de la stratégie des G -fibres (Gentle commence).

Démonstration. Supposons qu'il existe $u_0 \in V(G)$, tel que colorier u_0 avec 1 est un coup gagnant pour le premier joueur. Nous devons montrer que colorier n'importe quel sommet $v \in V(G)$ avec 1 est aussi un coup gagnant pour ce joueur. Soient J le jeu sur G dans lequel le premier coup à avoir été joué est u_0 et J' le jeu dans lequel le premier coup a été un sommet $v \in V(H)$. Les deux ont été coloriés avec 1. Soient également c et c' les colorations construites respectivement au cours du jeu J et du jeu J' . Puisque G est sommet-transitif, il existe un automorphisme σ tel que $\sigma(u_0) = v$. La stratégie gagnante du premier joueur pour J' est définie à partir de celle pour J de la manière suivante. Quand son opposant colorie un sommet w dans le jeu J' , il imagine que dans J celui-ci a choisi de colorier le sommet $\sigma(w)$ avec la même couleur. Il existe un sommet w' tel que colorier w' est une réponse gagnante du premier joueur dans J . Dans le jeu J' , le premier joueur répond en coloriant $\sigma^{-1}(w')$ de telle sorte que $c(w') = c'(\sigma^{-1}(w'))$. La coloration c est gagnante pour le premier joueur, c'est-à-dire distinguante ou non selon de qui il s'agit. De plus, pour tout $w \in V(G)$, $c(w) = c'(\sigma(w))$. Ainsi un automorphisme ψ préserve la coloration c si et seulement si $\sigma \circ \psi \circ \sigma^{-1}$ préserve c' . Cela montre que c' est aussi une coloration gagnante pour le premier joueur. Pour conclure, s'il existe un coup gagnant pour le premier joueur, alors n'importe quel coup est gagnant pour lui. \square

4.3.2 Produits cartésiens de graphes complets

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 4.35. *Soient G et H deux graphes connexes, relativement premiers et d'ordre respectif n et m , tels que $n, m > 1$.*

1. *Si n est pair et $m \geq n - 1$, alors $D_{\mathcal{R}}(G \square H) \leq m + 1$.*

2. Si n est impair, m pair et $m \geq 2n - 2$, alors $D_{\mathcal{R}}(G \square H) \leq m + 1$.
3. Si n et m sont impairs et $m \geq 2n - 1$, alors $D_{\mathcal{G}}(G \square H) \leq m + 1$.

Le cas où les deux facteurs sont des graphes complets est le pire cas pour Gentle. En effet, nous avons toujours que le \mathcal{G} -nombre et le \mathcal{R} -nombre distinguants ludiques de $G \square H$ sont inférieurs à ceux de $K_n \square K_m$, où n et m désignent l'ordre respectif de G et H . Le Théorème 4.35 sera une conséquence presque directe du résultat suivant sur les produits de graphes complets.

Théorème 4.36. *Soient n et m deux entiers supérieurs ou égaux à 2.*

1. Si $n \times m$ est pair (resp. impair), alors $D_{\mathcal{G}}(K_n \square K_m) = \infty$ (resp. $D_{\mathcal{R}}(K_n \square K_m) = \infty$).
2. Si n est pair, $n \neq m$ et $m \geq n - 1$, alors $D_{\mathcal{R}}(K_n \square K_m) \leq m + 1$.
3. Si n est impair, m pair et $m \geq 2n - 2$, alors $D_{\mathcal{R}}(K_n \square K_m) \leq m + 1$.
4. Si n et m sont impairs et $m \geq 2n - 1$, alors $D_{\mathcal{G}}(K_n \square K_m) \leq m + 1$.

Démonstration. Le premier point découle directement du Théorème 4.2. Pour les trois autres points, notons d'abord que puisque $n \neq m$, les facteurs K_n et K_m sont relativement premiers. Les sommets du graphe $K_n \square K_m$ sont notés (i, j) , avec $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, m\}$. À chaque K_n -fibre est associée une méta-couleur. Cette méta-couleur est une liste (c_1, \dots, c_n) , où c_l , avec $l \in \{1, \dots, n\}$, est le nombre de sommets coloriés avec la couleur l dans cette K_n -fibre. Il est facile, mais important, de remarquer qu'un automorphisme qui préserve la coloration construite au cours du jeu, préserve aussi les méta-couleurs.

Nous commençons par démontrer le deuxième point. Nous devons donner une stratégie gagnante pour Gentle avec $m + 1$ couleurs. Puisque n est pair, il existe une coloration propre des arêtes de K_n avec $n - 1$ couleurs. Il existe donc $n - 1$ couplages parfaits dont l'union couvre toutes les arêtes de K_n . Notons ces couplages M_1, \dots, M_n . Gentle va suivre une stratégie des K_n -fibres ayant les spécificités suivantes. Si Rascal joue le sommet (j, i) dans la fibre K_n^i , où $i \in \{1, \dots, n - 1\}$, Gentle répond en suivant le couplage M_i . C'est-à-dire qu'elle colorie l'unique sommet (k, i) , où k est tel que l'arête kj appartienne au couplage M_i . Autrement, elle joue comme elle veut, tant qu'elle respecte la stratégie des K_n -fibres. Nous illustrons cette stratégie dans la Figure 4.13, où \mathcal{G}_p et \mathcal{R}_p représentent respectivement le p^e coup de Gentle et de Rascal. Pour le choix des couleurs, Gentle procède comme suit. Premièrement, elle choisit toujours une couleur différente de celle utilisée par Rascal au coup précédent. Deuxièmement, si elle doit colorier le dernier sommet d'une K_n -fibre, alors elle choisit sa couleur de sorte que la méta-couleur de cette K_n -fibre soit différente de celles des K_n -fibres déjà totalement coloriées. Pour cela elle doit éviter au plus $m - 1$ méta-couleurs. Comme elle peut choisir parmi les m couleurs non jouées par

Rascal au coup d'avant, et que chaque choix mène à une méta-couleur différente, cela est toujours possible.

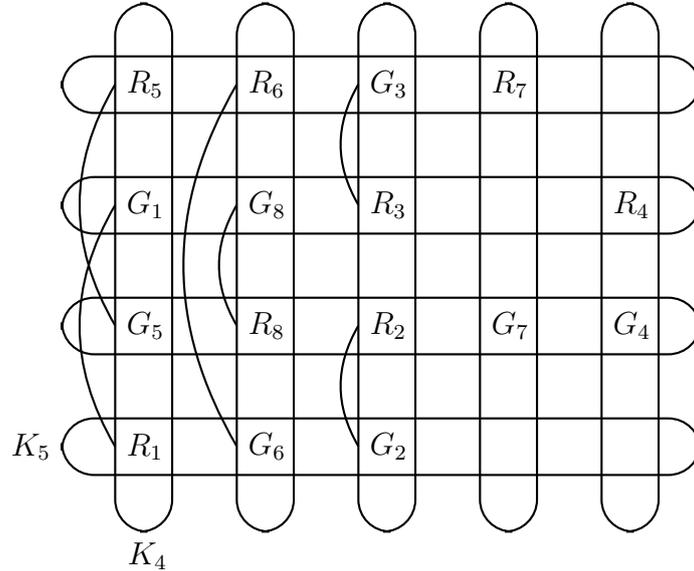


FIGURE 4.13 – Comment jouer en suivant les couplages dans K_4 .

Démontrons maintenant que la $(m + 1)$ -coloration c ainsi obtenue est distinguante. Puisque Gentle suit une stratégie des K_n -fibres, rappelons qu'elle va colorier le dernier sommet de chaque K_n -fibre. Elle contrôle donc la méta-coloration de ces fibres. Les K_n -fibres possèdent ainsi des méta-couleurs deux à deux distinctes. Cela montre qu'un automorphisme σ qui préserve c doit fixer les K_n -fibres. En d'autres termes, $\sigma = (\psi, Id)$, avec $\psi \in \text{Aut}(K_n)$. Supposons que ψ ne soit pas l'identité. Il existe $i \in \{1, \dots, n\}$, tel que $\psi(i) \neq i$. L'arête $i\psi(i)$ appartient à un certain couplage M_j , où $j \in \{1, \dots, n - 1\}$. Puisque Gentle joue en suivant les couplages et qu'elle choisit une couleur différente de celle jouée par Rascal juste avant, les deux sommets (i, j) et $(\psi(i), j)$ n'ont pas la même couleur. Mais $(\psi(i), j) = \sigma((i, j))$. L'automorphisme σ ne peut donc préserver la coloration que si $\psi = Id$, ce qui implique que σ est trivial. En conclusion, c est une $(m + 1)$ -coloration distinguante.

Nous démontrons maintenant le troisième point. La démonstration est très proche de ce qui a été fait ci-dessus. La différence principale est que puisque n est impair, les couplages ne couvrent pas tous les sommets de K_n . Si Rascal est le premier à jouer dans une K_n -fibre, Gentle ne peut donc pas forcément répondre en suivant un couplage. Il existe n couplages dont l'union couvre les arêtes de K_n . De plus, chacun de ces couplages couvre tous les sommets de K_n sauf un, et ce sommet non couvert est distinct pour chacun d'eux. Nous notons M_i , avec $i \in \{1, \dots, n\}$, le couplage qui ne couvre pas le sommet i . Nous pouvons supposer que le premier coup de Rascal

est de colorier le sommet $(1, 1)$. Gentle suit toujours une stratégie des K_n -fibres. Ainsi elle est la première à jouer dans exactement $\frac{m}{2}$ K_n -fibres. Disons, sans perte de généralité, qu'il s'agit de $K_n^2, \dots, K_n^{\frac{m}{2}+1}$. Quand elle colorie un sommet de K_n^j , avec $j \in \{1, \dots, \frac{m}{2}+1\}$, elle choisit le sommet (j, j) si c'est le premier sommet colorié dans cette fibre. Sinon elle joue en suivant le couplage M_j . Lorsque la stratégie des K_n -fibres l'amène à jouer dans d'autres K_n -fibres, elle joue comme elle veut tant qu'elle respecte cette stratégie. Pour le choix des couleurs, elle procède de la même manière que dans la preuve du deuxième point. Montrer que la $(m+1)$ -coloration ainsi obtenue est distinguante se fait de la même manière. Remarquons juste que par hypothèse $\frac{m}{2} + 1 \geq n$. Ainsi Gentle a à sa disposition suffisamment de K_n -fibres pour utiliser les n couplages nécessaires à la couverture des arêtes de K_n .

La preuve du dernier point est en tous points similaire à la précédente. Notons que puisque Gentle commence, elle sera la première à jouer dans $\frac{m+1}{2}$ K_n -fibres. Ce nombre est par hypothèse supérieur où égal à n . \square

Remarquons que lorsque n est pair et $m = n$, la stratégie de Gentle présentée dans la démonstration ci-dessus conduit à une coloration qui n'est préservée par aucun des automorphismes non triviaux du sous-groupe de $\text{Aut}(K_n \square K_m)$ isomorphe à $\text{Aut}(K_n) \times \text{Aut}(K_m)$. Si G et H sont deux graphes connexes, relativement premiers et d'ordre respectif n et m , alors n'importe quelle coloration qui casse tous les automorphismes non triviaux de $\text{Aut}(K_n) \times \text{Aut}(K_m)$ est une coloration distinguante de $G \square H$. Le Théorème 4.35 découle donc immédiatement du Théorème 4.36 et de la remarque précédente.

Lorsque $n = 2$, la borne donnée par le théorème est presque serrée, m couleurs sont nécessaires et suffisantes lorsque $m \geq 5$. Pour les valeurs plus petites de m , nous avons montré dans la partie précédente que $D_{\mathcal{R}}(K_2 \square K_m) = 3$.

Proposition 4.37. *Si $m \geq 5$, alors $D_{\mathcal{R}}(K_2 \square K_m) = m$.*

Démonstration. Nous pouvons remarquer que $m+1$ couleurs sont nécessaires dans la démonstration des trois derniers points du Théorème 4.36, lorsque respectivement $m = n - 1$, $m = 2n - 2$ et $m = 2n - 1$. Sinon m couleurs suffisent. En effet, quitte à jouer selon le couplage M_1 dans deux K_n -fibres, nous pouvons supposer que lorsque Gentle colorie le dernier sommet de la dernière K_n -fibre, elle n'a pas de couplage à suivre. Comme elle a alors $m - 1$ méta-couleurs à éviter et aucune contrainte supplémentaire liée au couplage, il est suffisant qu'elle ait le choix entre seulement m couleurs. Dans le cas de $K_2 \square K_m$, où $m \geq 5$, nous obtenons donc que $D_{\mathcal{R}}(K_2 \square K_m) \leq m$. Il reste donc à donner une stratégie gagnante pour Rascal lorsque seulement $m - 1$ couleurs sont à disposition.

Rascal commence par colorier le sommet $(1, 1)$ avec la couleur 1. Il y a deux cas.

Cas 1 : Gentle colorie le sommet $(1, 2)$.

Rascal répond en coloriant le sommet $(2, 1)$ avec 1. Si Gentle ne répond pas en

coloriant le sommet $(2, 2)$, alors Rascal gagne en coloriant ce sommet avec la même couleur que celle utilisée pour $(1, 2)$. Gentle doit donc colorier le sommet $(2, 2)$. Tour par tour, cela montre que Rascal peut colorier tous les sommets $(1, i)$, où $i \in \{1, \dots, m\}$, avec la couleur 1. Comme seul $m + 1$ couleurs sont disponibles, quoi que fasse Gentle, deux K_2 -fibres seront coloriées exactement pareilles. Gentle perd donc malgré tout.

Cas 2 : Gentle répond en coloriant le sommet $(2, x)$, où $x \in \{1, 2\}$.

Rascal réplique en coloriant le sommet $(3, 1)$ avec 1. Maintenant, si Gentle joue $(1, 2)$ ou $(3, 2)$, Rascal gagne car il répond de telle sorte que les fibres K_2^1 et K_2^3 soient coloriées exactement de la même manière. Supposons donc que Gentle joue un autre sommet. Puisque $m \geq 5$, au moins un sommet dans la fibre K_m^1 n'est pas encore colorié, disons $(5, 1)$. Rascal colorie ce sommet avec 1. Maintenant, Rascal peut jouer de manière à ce que deux des trois fibres K_2^1 , K_2^3 et K_2^5 soient coloriées strictement pareilles. En effet, si Gentle est la première à jouer dans l'une de ces fibres, elle copie sa couleur dans une des deux autres, sinon elle a pu jouer dans deux de ces trois fibres. Gentle perd donc également dans ce second cas. \square

Bien sûr le Théorème 4.36 ne couvre pas toutes les possibilités. Nous n'avons pas réussi à montrer dans les cas restants que les invariants sont finis, mais nous savons que dans ces situations, appliquer la stratégie des K_n -fibres conduit Gentle à la défaite. Plus précisément nous pouvons énoncer la proposition suivante.

Proposition 4.38. *Si Gentle suit une stratégie des K_n -fibres pour le jeu sur $K_n \square K_m$, où $n, m \geq 2$, alors elle perd dans les cas suivants, quel que soit le nombre de couleurs autorisées.*

- Rascal commence, n est impair, m est pair et $m < 2n - 2$.
- Gentle commence, n et m sont impairs et $m < 2n - 1$.

Démonstration. Nous prouvons la proposition dans le premier cas. Le second cas peut être traité exactement de la même manière. La stratégie gagnante de Rascal va être de créer deux K_m -fibres, disons K_m^1 et K_m^n , qui seront coloriées exactement pareilles. Plus précisément, si $u \in K_m^1$ et $v \in K_m^n$ appartiennent à la même K_n -fibre, alors u et v ont la même couleur. Dans ce cas, l'automorphisme qui permute uniquement les deux fibres K_m^1 et K_m^n préserve la coloration.

Pour arriver à ses fins, Rascal procède ainsi. Il joue ses $\frac{m}{2}$ premiers coups dans la même K_m -fibre, K_m^1 . Il joue donc dans une nouvelle K_n -fibre à chaque coup. Puisque Gentle suit une stratégie des K_n -fibres (Cas 1), elle va jouer elle aussi dans une nouvelle K_n -fibre à chaque tour. Ainsi, à la fin du $\frac{m}{2}$ ^e coup de Gentle les m K_n -fibres ont toutes exactement un sommet colorié. Nous nous référerons à ces m premiers tours du jeu comme à la première phase. Soit k le nombre de sommets non coloriés dans K_m^1 à la fin de cette phase. Nous avons : $0 \leq k \leq \frac{m}{2}$ (k vaut 0 si

Gentle aussi n'a joué que dans la fibre K_m^1). Les k coups de Rascal et les k coups de Gentle à venir correspondront à la seconde phase. Dans cette phase, Gentle doit répondre dans la même K_n -fibre que celle où Rascal vient de jouer. Ainsi Rascal peut colorier les k sommets encore non coloriés de K_m^1 . Soit u un tel sommet. Il y a un unique sommet v déjà colorié dans la même K_n -fibre que u (ce sommet a été colorié par Gentle durant la première phase). Rascal utilise pour u la même couleur que celle de v . Durant cette seconde phase du jeu, Gentle a joué dans au plus k différentes K_m -fibres. Puisque $m < 2n - 2$, nous avons $k < n - 1$. Il existe donc une K_m -fibre, disons K_m^n , dans laquelle Gentle n'a pas colorié de sommets durant la seconde phase. Dans cette fibre, il y a au plus un sommet colorié, appelons le w s'il existe. Ce sommet w a été colorié par Gentle durant la première phase, et partage maintenant la même couleur que le sommet de K_m^1 , qui est dans la même K_n -fibre que lui (ce sommet a été colorié par Rascal au cours de la seconde phase). Pour gagner, Rascal n'a plus qu'à colorier tous les sommets de K_m^n de telle sorte que les deux fibres K_m^1 et K_m^n soient coloriées exactement de la même manière. \square

4.3.3 Produits cartésiens avec un facteur involutif

Nous nous intéressons maintenant au cas où l'un des facteurs du produit cartésien est un graphe involutif. Dans ce cas, les blocs vont permettre de définir une métacoloration des fibres plus efficace que pour le cas des graphes complets. Si G est un graphe involutif et c est une coloration de ses sommets, alors le *type* d'un bloc $\{u, \bar{u}\}$ est défini par :

$$t(\{u, \bar{u}\}) = \begin{cases} c(u) - c(\bar{u}) \bmod d & \text{si } c(u) - c(\bar{u}) \bmod d \in \{0, \dots, \lfloor \frac{d}{2} \rfloor\} \\ c(\bar{u}) - c(u) \bmod d & \text{sinon.} \end{cases}$$

La *bloc-liste* de G , notée $L_c(G)$, est la liste $(n_0, \dots, n_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor})$ de longueur $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$, où n_i , avec $i \in \{0, \dots, \lfloor \frac{d}{2} \rfloor\}$, est le nombre de blocs de type i relativement à la coloration c . Il est intéressant de noter que si σ est un automorphisme de G qui préserve la coloration c , alors $t(\sigma(\{u, \bar{u}\})) = t(\{u, \bar{u}\})$.

Si G et H sont deux graphes connexes relativement premiers, tels que G est involutif, nous allons voir que sous certaines conditions, nous pouvons borner supérieurement $D_{\mathcal{R}}(G \square H)$ par $D_{\mathcal{R}}(G)$.

Théorème 4.39. *Soient G et H deux graphes connexes relativement premiers, avec G involutif. Supposons que Gentle a une stratégie gagnante pour le d - \mathcal{R} -jeu distinguant sur G , avec $d \geq D_{\mathcal{R}}(G)$. De plus, cette stratégie doit construire des colorations qui conduisent à des bloc-listes qui appartiennent à un ensemble fixé \mathcal{L} .*

Dans ce cas, si $D(H) \leq \left(\frac{|V(G)|}{2} + \lfloor \frac{d}{2} \rfloor \right) - |\mathcal{L}| + 1$, alors $D_{\mathcal{R}}(G \square H) \leq d$.

Démonstration. Nous devons exhiber une stratégie gagnante pour Gentle avec d couleurs, lorsque Rascal commence. Nous noterons c la coloration construite au cours du jeu.

Gentle va suivre une stratégie des G -fibres. Puisque G est involutif, $|V(G)|$ est pair, et nous sommes dans le Cas 0 de cette stratégie. Notons (u_1, v_1) le premier sommet joué par Rascal. Gentle imagine une coloration distinguante de H , avec $D(H)$ couleurs. Quand Gentle doit jouer dans la G -fibre G^{v_1} , elle joue selon sa stratégie gagnante pour le jeu sur G . Cela est possible car dans les G -fibres les coups de Gentle et Rascal alternent exactement comme dans le \mathcal{R} -jeu sur G . Dans les autres G -fibres, quand Rascal colorie un sommet (u, v) , avec $u \in V(G)$ et $v \in V(H)$, elle répond en coloriant (\bar{u}, v) . De cette manière, elle va pouvoir contrôler la bloc-liste de chaque G -fibre. Plus précisément, elle choisit les couleurs de telle sorte que :

$$(\dagger) \quad \forall v, w \in V(F), L_c(H^v) = L_c(H^w) \text{ si } c'(v) = c'(w).$$

Elle pourra procéder ainsi s'il existe au moins $(D(H) - 1) + |\mathcal{L}|$ bloc-listes. Nous avons besoin de faire dépendre ce nombre de $|\mathcal{L}|$, car Gentle ne contrôle pas la bloc-liste de G^{v_1} , où elle joue la stratégie gagnante sur G . Par hypothèse, nous savons seulement que cette bloc-liste appartient à \mathcal{L} . Ainsi, $|\mathcal{L}|$ bloc-listes sont utilisées pour représenter la couleur imaginaire $c'(v_1)$. Avec $(D(H) - 1) + |\mathcal{L}|$ bloc-listes, Gentle en a donc assez pour associer des bloc-listes distinctes aux G -fibres qui correspondent à des couleurs différentes de c' . Le nombre de bloc-listes que Gentle peut créer est égal au nombre de partitions de $\frac{|V(G)|}{2}$ (le nombre de blocs) en $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$ entiers (le nombre de types de bloc). Il y a donc $\binom{\frac{|V(H)|}{2} + \lfloor \frac{d}{2} \rfloor}{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$ bloc-listes différentes, ce qui est bien, par hypothèse, plus grand ou égal à $(D(F) - 1) + |\mathcal{L}|$.

Prouvons maintenant que la coloration obtenue est distinguante. Supposons que σ soit un automorphisme qui préserve cette coloration. Il est de la forme (ψ, ϕ) , où $\psi \in \text{Aut}(G)$ et $\phi \in \text{Aut}(H)$. Cet automorphisme envoie les blocs d'une G -fibre G^v , où $v \in V(H)$, sur les blocs de la G -fibre $G^{\phi(v)}$. Puisque les couleurs sont préservées, nous obtenons que l'automorphisme ϕ préserve les bloc-listes : $L_c(G^v) = L_c(G^{\phi(v)})$, pour tout $v \in V(H)$. D'après la condition (\dagger) , ϕ préserve donc aussi la coloration c' de H . Celle-ci étant distinguante pour H , nous en déduisons que ϕ est l'identité de $\text{Aut}(H)$. Cela implique en particulier que $\sigma(G^{v_1}) = G^{v_1}$. Comme la coloration de cette G -fibre est obtenue en suivant une stratégie gagnante pour Gentle sur G , elle est distinguante pour G . Nous avons donc que ψ est l'identité de $\text{Aut}(G)$. Finalement, σ est l'identité de $\text{Aut}(G \square H)$. \square

Nous avons vu avec le Théorème 4.20, que pour tout graphe involutif G , nous avons $D_{\mathcal{R}}(G) \leq D(G)^2 - D(G) + 2$. De plus, avec ce nombre de couleurs, la preuve montre que la stratégie gagnante de Gentle conduit à une unique bloc-liste, définie à

l'avance. Dans les termes du Théorème 4.39, l'ensemble \mathcal{L} est réduit à un singleton. Nous obtenons donc directement le corollaire suivant.

Corollaire 4.40. *Soient G et H deux graphes connexes, relativement premiers, avec G involutif, d'ordre n et $D(G) \geq 2$. Si $D(H) \leq \binom{\frac{n+d^2+d}{2}-1}{\frac{d^2+d}{2}-1}$, alors $D_{\mathcal{R}}(G \square H) \leq d^2 + d - 2$, où $d = D(G)$.*

Nous allons appliquer ce résultat à l'étude des produits cartésiens de cycles. Cela nous permettra de traiter rapidement le cas où l'un des facteurs est d'ordre pair.

4.3.4 Grilles toroïdales et grilles multidimensionnelles

Nous étudions, dans cette section, les produits cartésiens de cycles relativement premiers. Notre objectif sera de démontrer le théorème suivant.

Théorème 4.41. *Soient n_1, \dots, n_k , avec $k \geq 2$, des entiers distincts plus grands ou égaux à 3.*

1. Si $\prod_{i=1}^k n_i$ est pair, alors $D_{\mathcal{G}}(C_{n_1} \square \dots \square C_{n_k}) = \infty$ et $D_{\mathcal{R}}(C_{n_1} \square \dots \square C_{n_k}) = 2$.
2. Si $\prod_{i=1}^k n_i$ est impair, alors $D_{\mathcal{R}}(C_{n_1} \square \dots \square C_{n_k}) = \infty$ et $D_{\mathcal{G}}(C_{n_1} \square \dots \square C_{n_k}) = 2$.

Nous commençons par étudier le cas de deux facteurs. Puisque les cycles pairs sont des graphes involutifs, la proposition qui suit est une application directe du Théorème 4.39.

Proposition 4.42. *Soient n et m deux entiers distincts plus grands ou égaux à 3. Si n est pair et $n \geq 8$, alors $D_{\mathcal{R}}(C_n \square C_m) = 2$.*

Démonstration. Dans la preuve de la Proposition 4.10, la stratégie gagnante à deux couleurs qu'applique Gentle conduit à exactement trois blocs bichromatiques. Pour les cas particuliers de C_8 et C_{10} , les stratégies de Gentle décrites dans les Propositions 4.12 et 4.13, mènent à un ou trois blocs bichromatiques dans le premier cas et à un ou quatre tels blocs dans le second. Avec les mêmes notations que pour le Théorème 4.39, cela veut dire que l'ensemble \mathcal{L} contient au plus deux éléments.

Comme $m \geq 3$, $D(C_m) \leq 3$. Nous avons donc que $D(C_m) \leq \binom{\frac{n+2}{2}}{1} - 2 + 1$, et nous pouvons appliquer le Théorème 4.39 pour conclure que $D_{\mathcal{R}}(C_n \square C_m) = 2$. \square

Puisque $D_{\mathcal{R}}(C_4) = D_{\mathcal{R}}(C_6) = 3$, le Théorème 4.39, nous permettrait seulement d'obtenir que $D_{\mathcal{R}}(C_4 \square C_m), D_{\mathcal{R}}(C_6 \square C_m) \leq 3$. Nous énonçons pour ces deux graphes le résultat suivant, qui permet de conclure lorsque le deuxième facteur a un nombre distinguant classique inférieur ou égal à trois.

Proposition 4.43. *Soient n dans $\{4, 6\}$ et H un graphe connexe, ayant au moins trois sommets et relativement premier avec C_n . Si $D(H) \leq 3$, alors $D_{\mathcal{R}}(C_n \square H) = 2$.*

Démonstration. Soit $n \in \{4, 6\}$. Nous noterons c la coloration construite au cours du jeu. Nous devons proposer une stratégie gagnante pour Gentle avec deux couleurs. Gentle va jouer en suivant une stratégie des C_n -fibres et utilisera les bloc-listes comme méta-couleurs. Ici, le problème est que $D_{\mathcal{R}}(C_n) = 3$. Gentle imagine une 3-coloration distinguante de H , notée c' , où les trois couleurs sont réellement utilisées. Comme dans le Théorème 4.39, Gentle peut contrôler la bloc-liste de chaque C_n -fibre de sorte que :

$$\text{pour tout } v \in V(H), L_c(C_n^v) = \begin{cases} (n, 0) & \text{si } c'(v) = 1, \\ (n - 1, 1) & \text{si } c'(v) = 2, \\ (n - 2, 2) & \text{si } c'(v) = 3. \end{cases}$$

De plus, pour $v \in V(H)$, si $L_c(C_n^v)$ doit être égale à $(n - 1, 1)$ ou à $(n - 2, 2)$, elle joue de telle manière que le bloc $\{(1, v), (n/2, v)\}$ soit de type 1.

Prouvons maintenant que la coloration c est distinguante. Soit $\sigma = (\psi, \phi)$, où $\psi \in \text{Aut}(C_n)$ et $\phi \in \text{Aut}(H)$, un automorphisme préservant c . Pour tout $v \in V(H)$, $L_c(C_n^v) = L_c(C_n^{\phi(v)})$. Donc, $c'(v) = c'(\phi(v))$. Puisque c' est une coloration distinguante de H , nous en déduisons que ϕ est trivial. L'automorphisme σ laisse donc les C_n -fibres stables. Puisqu'il y a au moins une C_n -fibre dont la bloc-liste est $(n - 1, 1)$, ψ est soit une symétrie axiale, Δ d'axe $(1, \frac{n}{2})$, soit trivial. Mais Δ ne préserve pas la coloration des C_n -fibres dont la bloc-liste est $(n - 2, 2)$. En effet, dans une telle fibre, un des bloc de type 1 est stable sous l'action de Δ . L'autre bloc de type 1 est envoyé par Δ sur un bloc de type 0 ou alors ses deux sommets sont permutés. Dans les deux cas, cela casse la coloration. Pour conclure, ψ est trivial et σ aussi. \square

Ce résultat implique directement le corollaire ci-dessous.

Corollaire 4.44. *Soit $m \geq 3$.*

1. *Si $m \neq 6$, alors $D_{\mathcal{R}}(C_6 \square C_m) = 2$.*
2. *Si $m \neq 4$, alors $D_{\mathcal{R}}(C_4 \square C_m) = 2$.*

La proposition suivante dépasse le cadre des grilles toroïdales mais permet de résoudre le cas où les deux facteurs de la grille sont impairs, et l'un au moins n'est pas premier.

Proposition 4.45. *Soient G et H deux graphes connexes relativement premiers. Supposons que G est sommet-transitif et que $D(G), D(H) \leq 2$.*

1. *Si $|V(G)|$ et $|V(H)|$ sont impairs, alors $D_{\mathcal{G}}(G \square H) \leq D_{\mathcal{G}}(G)$.*
2. *Si $|V(G)|$ est impair et $|V(H)|$ est pair, alors $D_{\mathcal{R}}(G \square H) \leq D_{\mathcal{G}}(G)$.*
3. *Si $|V(G)|$ est pair, alors $D_{\mathcal{R}}(G \square H) \leq D_{\mathcal{R}}(G)$.*

Démonstration. Nous commençons par le premier point. Appelons c la coloration construite durant la partie. Pour chaque G -fibre G^v , avec $v \in V(H)$, nous définissons :

$$p(G^v) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\{u \in H^v \mid c((u, v)) = 1\}| \text{ est impair} \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous devons définir une stratégie pour Gentle avec $D_{\mathcal{G}}(G)$ couleurs. Gentle va jouer en suivant une stratégie des G -fibres. Remarquons que nous sommes dans le Cas 1 de celle-ci. Dans les G -fibres où Gentle est la première à jouer, les coups alternent exactement comme pour le \mathcal{G} -jeu sur G . Gentle peut donc suivre une stratégie gagnante sur G dans ces fibres. Dans les autres G -fibres, c'est aussi le cas, sauf pour le premier coup qui est joué par Rascal. En d'autres termes, Rascal va jouer deux coups d'affilée dans ces G -fibres. Puisque G est sommet-transitif, Gentle peut, d'après le Lemme 4.34, suivre également une stratégie gagnante pour G dans ces G -fibres. Elle joue ainsi jusqu'à ce que l'une des G -fibres soit totalement coloriée, disons G^{v_0} . Maintenant, elle imagine une coloration distinguante c' de H telle que $c'(v_0) = p(G^{v_0})$. Pour les coups suivants, elle joue de sorte que :

$$\text{pour tout } v \in V(F), \quad c'(v) = p(G^v). \quad (4.1)$$

Puisqu'elle suit une stratégie des G -fibres, rappelons que Gentle va jouer le dernier coup dans chaque G -fibre. Elle peut ainsi dans chacune d'elles décider de la parité du nombre de sommets coloriés avec 1. Démontrons maintenant que la coloration c est distinguante. Soit σ un automorphisme préservant c . Pour tout $v \in V(H)$, nous avons $p(\sigma(G^v)) = p(G^v)$. Puisque c' est une coloration distinguante de H , cela implique, d'après la propriété (4.1), que les G -fibres sont stables sous l'action de σ . Nous avons donc que $\sigma(G^{v_0}) = G^{v_0}$. Mais la coloration de cette G -fibre est obtenue en suivant une stratégie gagnante pour G . La fibre G^{v_0} est donc fixée point à point par σ . En conclusion, σ est l'identité de $\text{Aut}(G \square H)$.

Pour les deux autres points la preuve fonctionne de la même manière. Notons que dans le dernier cas, nous sommes dans le Cas 0 de la stratégie des G -fibres. \square

Corollaire 4.46. *Soient n et m deux entiers impairs distincts, avec $n, m \geq 3$. Si n n'est pas premier et $m \geq 7$, alors $D_{\mathcal{G}}(C_n \square C_m) = 2$.*

Démonstration. Sous les hypothèses du corollaire, nous avons $D_{\mathcal{G}}(C_n) = 2$ et $D(C_m) = 2$. Il s'agit donc d'une application directe de la Proposition 4.45. \square

Les résultats précédents nous ont permis de calculer les nombres distinguants ludiques de $C_n \square C_m$, sauf pour les cas suivants :

- $C_3 \square C_m$, avec $m \neq 3$ et m impair,
- $C_5 \square C_m$, avec $m \neq 5$ et m impair,
- $C_n \square C_m$, avec $n \neq m$ et n, m impairs et premiers.

Attaquons-nous à ces cas restants.

Proposition 4.47. *Soient n et m deux entiers impairs distincts, avec $n, m \geq 3$. Si n est premier et $m \geq 7$, alors $D_{\mathcal{G}}(C_n \square C_m) = 2$.*

Démonstration. Soit c la coloration construite au cours de la partie. Pour chaque C_n -fibre, C_n^j avec $j \in \{1, \dots, m\}$, nous définissons :

$$p(C_n^j) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\{i \in C_n^j | c((i, j)) = 1\}| \text{ est impair} \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soient M_1, M_2 et M_3 trois couplages maximaux de C_n , dont l'union couvre $E(C_n)$. Soient v_1, v_2 et v_3 les sommets de C_n , qui ne sont respectivement pas couverts par M_1, M_2 et M_3 . Soit c' une 2-coloration distinguante de C_m . Une telle coloration existe car $m > 5$.

Voici une stratégie gagnante de Gentle avec deux couleurs. Elle va suivre une stratégie des C_n -fibres. Puisque $m \geq 7$, il y a au moins trois C_n -fibres distinctes, $C_n^{j_1}, C_n^{j_2}, C_n^{j_3}$, avec $j_1, j_2, j_3 \in \{1, \dots, m\}$, dans lesquelles Gentle est la première à jouer. Le premier sommet qu'elle va colorier dans $C_n^{j_k}$, où $k \in \{1, 2, 3\}$, est le sommet (v_k, j_k) . Elle le colorie de sorte que $c((v_k, j_k)) = c'(j_k)$. Dans les autres C_n -fibres, où elle est la première à jouer, le premier sommet et la couleur choisie n'importent pas. Pour les coups suivants dans $C_n^{j_k}$, elle choisira les sommets suivant le couplage M_k . De plus, elle utilise l'autre couleur que celle que Rascal vient d'utiliser au coup précédent. De cette manière, la parité du nombre de sommets coloriés 1 dans $C_n^{j_k}$ dépend seulement de $c((v_k, j_k))$. Ainsi $p(C_n^{j_k}) = c((v_k, j_k)) = c'(j_k)$, pour $k \in \{1, 2, 3\}$. Pour les coups dans C_n^j , avec $j \notin \{j_1, j_2, j_3\}$, Gentle joue n'importe quoi, sauf quand elle doit colorier le dernier sommet de la C_n -fibre. Dans ce cas, elle choisit la couleur de manière à ce que $p(C_n^j) = c'(j)$.

Maintenant, nous montrons que la coloration c ainsi obtenue est bien distinguante. Soit σ un automorphisme préservant les couleurs. Pour chaque C_n -fibre, nous avons $p(C_n^j) = c'(j)$. Puisque c' est une coloration distinguante de C_m , σ laisse les C_n -fibres stables. Nous avons donc que $\sigma = (\psi, Id)$, où $\psi \in \text{Aut}(C_n)$. Puisque n est premier, n'importe quelle rotation non triviale agit transitivement sur C_n . Comme au moins une C_n -fibre n'est pas monochromatique, ψ ne peut pas être une

telle rotation. D'un autre côté, si ψ est une symétrie axiale, il existe, puisque n est impair, une arête $e \in E(C_n)$ telle que $\psi(e) = e$. Cette arête appartient à l'un des trois couplages, disons M_1 . Gentle a joué de sorte que dans $C_n^{j_1}$, l'arête correspondant à e ne soit pas monochromatique. Si ψ n'est pas trivial, il ne peut donc pas préserver la coloration. En conclusion, ψ doit être trivial et σ l'est donc aussi. \square

Nous sommes maintenant prêts à démontrer le résultat principal de cette partie, le Théorème 4.41.

Démonstration du Théorème 4.41. Soient n_1, \dots, n_k , avec $k \geq 2$, des entiers distincts, supérieurs ou égaux à 3. Si $\prod_{i=1}^k n_i$ est pair (resp. impair), nous devons prouver que $D_{\mathcal{R}}(C_{n_1} \square \dots \square C_{n_k}) = 2$ (resp. $D_{\mathcal{G}}(C_{n_1} \square \dots \square C_{n_k}) = 2$). Si $k = 2$, c'est une conséquence des Propositions 4.42 et 4.47 et des Corollaires 4.44 et 4.46, sauf pour $C_3 \square C_5$. Dans ce cas, nous vérifions par un calcul exhaustif sur ordinateur que deux couleurs sont aussi suffisantes. Pour $k \geq 3$, nous procédons par induction. Excepté pour $C_3 \square C_4 \square C_5$, nous pouvons supposer que $n_k \geq 6$. Dans ce cas, $D(C_{n_k}) = 2$ et par induction $D_{\mathcal{R}}(C_{n_1} \square \dots \square C_{n_{k-1}}) = 2$ ou $D_{\mathcal{G}}(C_{n_1} \square \dots \square C_{n_{k-1}}) = 2$, selon la parité. Finalement, nous appliquons la Proposition 4.45, avec $G = C_{n_1} \square \dots \square C_{n_{k-1}}$ et $H = C_{n_k}$, pour obtenir le résultat attendu. Pour $C_3 \square C_4 \square C_5$, nous utilisons la Proposition 4.43 pour montrer que $D_{\mathcal{R}}(C_3 \square C_4 \square C_5) = 2$. \square

Nous obtenons immédiatement le corollaire suivant concernant les grilles multidimensionnelles.

Corollaire 4.48. *Soient n_1, \dots, n_k , des entiers distincts, supérieurs ou égaux à 2.*

1. Si $\prod_{i=1}^k n_i$ est pair, alors $D_{\mathcal{G}}(P_{n_1} \square \dots \square P_{n_k}) = \infty$ et $D_{\mathcal{R}}(P_{n_1} \square \dots \square P_{n_k}) = 2$.
2. Si $\prod_{i=1}^k n_i$ est impair, alors $D_{\mathcal{R}}(P_{n_1} \square \dots \square P_{n_k}) = \infty$ et $D_{\mathcal{G}}(P_{n_1} \square \dots \square P_{n_k}) = 2$.

Démonstration. Si $k = 1$, nous savons bien que $D_{\mathcal{R}}(P_n) = 2$, quand n est pair, et que $D_{\mathcal{G}}(P_n) = 2$, quand n est impair. Si $k \geq 2$ et $n_i \geq 3$, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, alors c'est une application directe du Théorème 4.41. En effet, une coloration distinguante de $C_{n_1} \square \dots \square C_{n_k}$ est aussi une coloration distinguante de $P_{n_1} \square \dots \square P_{n_k}$. Si l'un des facteurs, disons P_{n_1} , est isomorphe à P_2 , alors nous pouvons appliquer la Proposition 4.45, avec $G = P_{n_1}$ et $H = P_{n_2} \square \dots \square P_{n_k}$. Nous savons qu'en effet $D(P_{n_2} \square \dots \square P_{n_k}) = 2$ (les seuls produits cartésiens de chemins pour lesquels ce n'est pas le cas sont $P_2 \square P_2$ et $P_2 \square P_2 \square P_2$, pour lesquels trois couleurs sont nécessaires). \square

4.4 Conclusion et perspectives du chapitre

Dans ce chapitre nous avons introduit deux nouveaux invariants ludiques, définis à partir du nombre distinguant d'un graphe. Nous espérons que cette première étude aura montré l'intérêt de ce problème et aura soulevé quelques questions intéressantes. Tout en revenant sur les résultats du chapitre, nous mettrons en avant celles qui nous semblent les plus pertinentes.

Remarquant que le \mathcal{G} -nombre et \mathcal{R} -nombre distinguants ludiques pouvaient être infinis, nous avons montré que c'est toujours le cas pour l'un des deux, lorsque le groupe d'automorphisme possède un automorphisme d'ordre 2. C'est pour l'instant le seul cas où nous avons été confrontés à ce phénomène. Nous posons donc la question suivante, qui à notre sens peut servir de fil conducteur à de futures études sur le sujet.

Question ouverte. *Si un graphe G est tel que $\text{Aut}(G)$ ne possède pas d'automorphisme d'ordre 2, pouvons-nous affirmer que $D_{\mathcal{G}}(G)$ et $D_{\mathcal{R}}(G)$ sont tous les deux finis ?*

Nous avons partiellement répondu à cette question en montrant que $D_{\mathcal{R}}(G) = 2$, dès lors que $\text{Aut}(G)$ est abélien (non trivial) et sans automorphisme d'ordre 2. L'étude menée sur les graphes abéliens n'est cependant pas complète et il reste en particulier à répondre à la question ci-dessous.

Question ouverte. *Quelle est la valeur de $D_{\mathcal{G}}(G)$ (resp. $D_{\mathcal{R}}(G)$) lorsque $\text{Aut}(G)$ est abélien, de cardinal pair et que l'action a un nombre impair (resp. pair) de points fixes ?*

Nous avons également défini une nouvelle classe de graphes propice à l'étude des nombres distinguants ludiques, les graphes involutifs. Pour un graphe G de cette classe, le \mathcal{R} -nombre distinguant ludique est fini et borné supérieurement par $D(G)^2 - D(G) + 2$. L'étude de cette classe nous a fourni des outils qui nous ont permis de calculer $D_{\mathcal{R}}$ pour les cycles pairs et les hypercubes, hormis \mathcal{H}_4 . Pour ce dernier, il reste à vérifier si $D_{\mathcal{R}}(\mathcal{H}_4)$ vaut 2 ou 3. Cela pourrait peut-être être réalisé à l'aide d'une implémentation astucieuse et efficace.

Nous avons également calculé $D_{\mathcal{G}}$ pour les cycles impairs non premiers. Pour les cycles premiers, nous savons seulement que 3 couleurs suffisent, et des expérimentations sur ordinateur nous conduisent à émettre la conjecture suivante.

Conjecture. *Si C_n est un cycle d'ordre premier $n \geq 11$, alors $D_{\mathcal{G}}(C_n) = 2$.*

Il est intéressant de remarquer que dans le cas des cycles premiers, l'action du groupe d'automorphisme est imprimitive, ce qui n'est pas le cas pour les autres cycles. Dans le cas des cycles pairs (et des graphes involutifs en général), la stratégie gagnante de Gentle s'appuie fortement sur le système de blocs formé par les sommets

diamétralement opposés. Dans le cas où l'ordre impair est égal à pk , avec p premier et $k > 1$, nous utilisons le système formé des blocs de taille p , correspondant aux orbites sous l'action de la rotation d'angle $2\pi/k$, pour définir la stratégie de Gentle. Pour l'étude du produit cartésien de deux graphes connexes relativement premiers, le fait que les fibres associées à chaque facteur forment un système de blocs a également permis de définir une stratégie générale pour Gentle, la stratégie des fibres. Cette stratégie nous a notamment permis de déterminer des conditions suffisantes sur les cardinaux des deux facteurs G et H , pour avoir un nombre distinguant ludique fini. Il reste à étudier les cas suivants, pour lesquels nous avons montré que la stratégie des fibres est inefficace.

Question ouverte. *Si G et H sont deux graphes d'ordre respectif n et m , connexes et relativement premiers, que pouvons-nous dire de :*

- $D_{\mathcal{R}}(G \square H)$, quand n est impair, n est pair et $\frac{m+2}{2} < n < m - 1$,
- $D_{\mathcal{G}}(G \square H)$, quand n et m sont impairs et $\frac{m+1}{2} < n < 2m - 1$.

Enfin, nous avons pu améliorer ces bornes quand l'un des facteurs est un graphe involutif. Cela nous a aidé à déterminer le \mathcal{G} -nombre et le \mathcal{R} -nombre distinguants ludiques d'une grille toroïdale multidimensionnelle, lorsque les cycles sont relativement premiers. Que ce soit pour les produits cartésiens de graphes complets ou de cycles, il serait maintenant très intéressant d'étudier le cas où les facteurs ne sont pas relativement premiers. Pour les graphes complets et les cycles cela est équivalent à dire que les facteurs ont le même ordre.

Question ouverte. *Étudier le \mathcal{G} -nombre et le \mathcal{R} -nombre distinguants ludiques des puissances cartésiennes d'un graphe complet ou d'un cycle.*

Conclusion

They hunted till darkness came on, but they found
Not a button, or feather, or mark,
By which they could tell that they stood on the ground
Where the baker had met with the Snark.

In the midst of the word he was trying to say,
In the midst of his laughter and glee,
He has softly and suddenly vanished away,
For the Snark *was* a Boojum, you see.

L. Carroll. The hunting of the Snark.

7. Whereof one cannot speak, thereof one must be silent.

L. Wittgenstein. Tractatus Logico-philosophicus.

Eternity is really *long*, especially near the end.

W. Allen.

Dans cette thèse, nous avons étudié trois jeux à objectif compétitif sur les graphes. Dans un premier temps, nous avons apporté notre contribution à l'étude du jeu de coloration 1-impropre. Notre résultat principal consiste en un exemple de famille de chenilles pour lesquelles $\chi_g^{(1)}$ vaut 3, ce qui est la valeur maximale pour une forêt. Ce résultat améliore un résultat précédent de Chou *et al.* [23] qui avaient montré que certaines forêts, qui n'étaient pas des chenilles, atteignaient la borne supérieure de 3 qu'ils avaient obtenue pour la classe des forêts. Nous avons également obtenu des résultats concernant le nombre chromatique ludique 1-impropre des graphes bipartis. Résultats qui éclairent la relation qui existe entre cet invariant et le nombre chromatique ludique. En particulier, ces deux valeurs sont en général incomparables. Nous pouvons facilement montrer, en utilisant les mêmes exemples, que c'est également le cas pour χ_g et $\chi_g^{(d)}$, pour tout $d \geq 1$. Il serait intéressant de

montrer que $\chi_g^{(d)}$ et $\chi_g^{(d')}$ sont toujours incomparables dès que $d \neq d'$. En particulier, nous espérons obtenir une réponse positive à la question ci-dessous.

Question ouverte. *Pouvons nous trouver des graphes G pour lesquels $\chi_g^{(2)}(G)$ est significativement plus grand que $\chi_g^{(1)}(G)$?*

Une autre piste de recherche qui nous semble prometteuse concerne l'existence d'une borne supérieure égale au degré maximal du graphe.

Question ouverte. *Pour tout graphe G , avons nous $\chi_g^{(1)}(G) \leq \Delta(G)$?*

Dans un deuxième chapitre, nous nous sommes intéressés au jeu de domination. Nous avons premièrement proposé une caractérisation des graphes pour lesquels $\gamma_g = 3$ ou $\gamma'_g = 3$ et qui ont un diamètre maximal vis-à-vis de ces valeurs. Il serait intéressant de voir si cette caractérisation, qui nous a permis d'améliorer les algorithmes de reconnaissance de ces graphes, peut être étendue à de plus grandes valeurs de γ_g et γ'_g . Nous posons la question suivante.

Question ouverte. *Existe-t-il une fonction f et une constante c (resp. une fonction g et une constante c'), telles que les graphes de la classe E_k (resp. E'_k) puissent être reconnus en temps $\mathcal{O}(f(k) \cdot n^c)$ (resp. $\mathcal{O}(g(k) \cdot n^{c'})$) ?*

Notre deuxième contribution sur ce sujet concerne la fameuse 3/5-conjecture. Améliorant un résultat de Bujtaš, nous montrons que celle-ci est vraie pour une large classe de forêts, celles faiblement sans $S(K_{1,3})$. Bien qu'incrémental, ce résultat repose sur une nouvelle amélioration de la stratégie quasi-gloutonne de Bujtaš et nous espérons qu'elle puisse s'appliquer à d'autres classes de graphe, voire même à l'étude de la 3/4-conjecture pour le jeu de domination totale.

Finalement, nous introduisons dans le dernier chapitre un nouveau jeu à objectif compétitif sur les graphes, le jeu distinguant. Nous avons étudié ce jeu sur des classes de graphes particulières, les forêts, les graphes abéliens, les cycles, les graphes involutifs (dont les hypercubes font partie) et certains produits cartésiens. Ces travaux ont également permis de souligner l'importance de la notion d'action de groupe imprimitive vis-à-vis de la définition de stratégie gagnante. Par exemple, les seuls cycles pour lesquels nous n'avons pas pu obtenir de valeur exacte sont ceux d'ordre premier, c'est-à-dire exactement les cycles dont l'action du groupe d'automorphisme est primitive. Nous espérons donc avoir montré que ce jeu soulève de nombreuses questions intéressantes et permet de renouveler le regard porté sur le nombre distinguant classique. Nous rappelons ici les questions qui nous semblent être les pistes de recherche les plus prometteuses.

Question ouverte. *Si un graphe G est tel que $\text{Aut}(G)$ ne possède pas d'automorphisme d'ordre 2, pouvons-nous affirmer que $D_G(G)$ et $D_{\mathcal{R}}(G)$ sont tous les deux finis ?*

Nous avons répondu positivement à cette question dans le cas où le groupe d'automorphisme est abélien.

Nous avons pu vérifier la conjecture suivante par ordinateur pour de petites valeurs premières de n : 11, 13, 17 et 19.

Conjecture. *Si C_n est un cycle d'ordre premier, $n \geq 11$, alors $D_{\mathcal{G}}(C_n) = 2$.*

Nous n'avons pas étudié la complexité du calcul du \mathcal{G} -nombre et du \mathcal{R} -nombre distinguants ludiques. Même si la complexité du calcul du nombre distinguant classique est difficile à appréhender car reliée au problème de l'isomorphisme de graphes, nous pouvons faire l'hypothèse que la dimension ludique apporte un tel surplus de difficulté qu'il serait possible de montrer que les deux problèmes énoncés ci-dessous soient PSPACE-Durs.

PROBLÈME DU \mathcal{G} -JEU DISTINGUANT

Entrées : Un graphe G et un entier k .

Question : Est-ce que $D_{\mathcal{G}}(G) \leq k$?

PROBLÈME DU \mathcal{R} -JEU DISTINGUANT

Entrées : Un graphe G et un entier k .

Question : Est-ce que $D_{\mathcal{R}}(G) \leq k$?

Question ouverte. *Quelle est la complexité du problème du \mathcal{G} -jeu distinguant et du \mathcal{R} -jeu distinguant ?*

Nous avons obtenu une caractérisation des arbres pour lesquels les invariants ludiques sont finis. Caractérisation qui peut laisser penser qu'un résultat de complexité concernant cette classe serait plus facilement à portée. Les deux problèmes seraient-ils polynomiaux si nous nous restreignons aux arbres ?

Bibliographie

- [1] M. Albert, R. Nowakowski, D. Wolfe, *Lessons in Play* (2007), AK Peters.
- [2] M.O. Albertson, K.L. Collins, Symmetry breaking in graphs, *Electron. J. Combin.*, **3** (1996), #R18.
- [3] S.D. Andres, The incidence game chromatic number, *Discrete. Appl. Math.*, **157** (2009), 1980–1987.
- [4] V. Arvind, C. Cheng, N. Devanur, On computing the distinguishing numbers of planar graphs and beyond: A counting approach, *SIAM J. Discrete Math.*, **22** (2008) 1297-1324.
- [5] T. Bartnicki, B. Brešar, J. Grytczuk, M. Kovše, Z. Miechowicz, I. Peterin, Game chromatic number of Cartesian product graphs, *Electron. J. Combin.*, **15** (2008), #R72.
- [6] E. Berlekamp, J.H. Conway, R.K Guy, *Winning Ways for your Mathematical Plays*, Volume 1 (1982), New York Academic Press.
- [7] G.D. Birkhoff, A determinant formula for the number of ways of coloring a map, *Ann. of Math.*, **14** (1912), 4–46.
- [8] H.L. Bodlaender, On the complexity of some coloring games, *Inter. J. Found. Comput. Sci.*, **2** (1991), 133–147.
- [9] B. Bogstad, L. Cowen, The distinguishing number of hypercubes, *Discrete Math.*, **383** (2004), 29–35.
- [10] B. Brešar, P. Dorbec, S. Klavžar, G. Košmrlj, G. Renault, Complexity of the game domination problem, *Manuscript*, 2014.
- [11] B. Brešar, P. Dorbec, S. Klavžar, G. Košmrlj, Domination game: Effect of edge- and vertex-removal, *Discrete Math.*, **330** (2014), 1–10.
- [12] B. Brešar, P. Dorbec, S. Klavžar, G. Košmrlj, How long one can bluff in the domination game, *Discuss. Math. Graph Theory*, (2016), DOI: 10.7151/dmgt.1899.
- [13] B. Brešar, S. Klavžar, G. Košmrlj, D. F. Rall, Guarded subgraphs and the domination game, *Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.*, **17** (2015), 161–168.
- [14] B. Brešar, S. Klavžar, D. F. Rall, Domination game and an imagination strategy, *SIAM J. Discrete Math.*, **24** (2010), 979–991.

- [15] B. Brešar, S. Klavžar, G. Košmrlj, D. F. Rall, Domination game: Extremal families of graphs for the 3/5-conjectures, *Discrete Appl. Math.*, **161** (2013), 1308–1316.
- [16] Cs. Bujtás, Domination game on trees without leaves at distance four, *Proceedings of the 8th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications* (A. Frank, A. Recski, G. Wiener, eds.), June 4–7, 2013, Veszprém, Hungary, 73–78.
- [17] Cs. Bujtás, Domination game on forests, *Discrete Math.*, **338** (2015), 2220–2228.
- [18] Cs. Bujtás, On the game domination number of graphs with given minimum degree, *Electron. J. Combin.*, **22** (2015), paper #P3.29.
- [19] Cs. Bujtás, S. Klavžar, Improved upper bounds on the domination number of graphs with minimum degree at least five, *Graphs Combin.*, **32** (2016), 511–519.
- [20] Cs. Bujtás, S. Klavžar, G. Košmrlj, Domination game critical graphs, *Discuss. Math. Graph Theory*, **35** (2015), 781–796.
- [21] C. Cheng, On computing the distinguishing numbers of trees and forests, *Electron. J. Combin.*, **13** (2006), #R11.
- [22] C. Cheng, On computing the distinguishing and distinguishing chromatic numbers of interval graphs and other results, *Discrete Math.*, **309** (2009), 516–5182.
- [23] C. Chou, W. Wang, X. Zhu, Relaxed game chromatic number of graphs, *Discrete Math.*, **262** (2003), 89–98.
- [24] K.L. Collins, A.N. Trenk, The distinguishing chromatic number, *Electron. J. Combin.*, **13** (2006), #R16.
- [25] M. Conder, T. Tucker, Motion and distinguishing number two, *Ars Math. Contemp.*, **4** (2011), 63–72.
- [26] J.H Conway, *On Numbers and Games* (1976), Academic Press Inc.
- [27] J. Cuno, W. Imrich, F. Lehner, Distinguishing graphs with infinite motion and nonlinear growth, *Ars Math. Contemp.* **7** (2014), 201–213.
- [28] R. Diestel, *Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics, volume **173**, 3^e ed. (2010), Springer-Verlag.
- [29] T. Dinski, X. Zhu, Game chromatic number of graphs, *Discrete Math.*, **196** (1998), 1–3.
- [30] P. Dorbec, G. Košmrlj, G. Renault, The domination game played on unions of graphs, *Discrete Math.*, **338** (2015), 71–79.
- [31] C. Dunn, H.A. Kierstead, A simple competitive graph coloring algorithm II, *J. Combin. Theory Ser. B*, **90** (2004), 93–106.

- [32] C. Dunn, H.A. Kierstead, A simple competitive graph coloring algorithm III, *J. Combin. Theory Ser. B*, **92** (2004), 137–150.
- [33] C. Dunn, V. Larsen, K. Lindke, T. Retter, D. Toci, The game chromatic number of trees and forests, *Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.*, **17** (2015), 31–48.
- [34] J. Ellul, *Le bluff technologique*, collection La force des idées, Hachette, (1988).
- [35] P. Erdős, A. Rényi, Asymmetric graphs, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **14** (1963), 295–315.
- [36] U. Faigle, U. Kern, H. Kierstead, W.T. Trotter, On the game chromatic number of some classes of graphs, *Ars Combinatoria*, **35** (1993), 143–150.
- [37] M. Ferrara, B. Flesch, E. Gethner, List-Distinguishing Colorings of Graphs, *Electron. J. Combin.*, **18** (2011), #P161.
- [38] M.J. Fisher, G. Isaak, Distinguishing colorings of Cartesian products of complete graphs, *Discrete Math.*, **308** (2008) 2240–2246.
- [39] R. Frucht, Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe, *Compositio Math.*, **6** (1938), 239–250.
- [40] M. Gardner, Mathematical game, *Scientific American*, **23** (1981).
- [41] F. Göbel, H.J. Veldman, Even graphs, *J. Graph Theory*, **10** (1986) 225–239.
- [42] S. Gravier, K. Meslem, S. Schmidt, S. Slimani, A New game invariant of graphs: The game distinguishing number, Preprint arXiv:1410.3359v5 [math.CO] (2015).
- [43] S. Gravier, K. Meslem, S. Schmidt, S. Slimani, Game distinguishing numbers of Cartesian products of graphs, Preprint arXiv:1512.01463 [math.CO] (2015).
- [44] S. Gravier, K. Meslem, S. Slimani, Distinguishing number of some circulant graphs, Proceedings of the 13^e Colloque sur l’optimisation et les systèmes d’information, 30 Mai–1 juin 2016, Université Ferhat Abbas, Setif, Algeria, 84–94.
- [45] D. Guan, X. Zhu, The game chromatic number of outerplanar graphs, *J. Graph Theory*, **30** (1999), 67–70.
- [46] T.W. Haynes, S. Hedetniemi, P. Slater, *Fundamentals of domination in graphs*, Chapman & Hall, CRC Pure and Applied Mathematics (1998).
- [47] W. He, J. Wu, X. Zhu, Relaxed game chromatic number of trees and outerplanar graphs, *Discrete Math.*, **281** (2004), 209–219.
- [48] M.A. Henning, W.B. Kinnersley, Domination game: A proof of the 3/5-conjecture for graphs with minimum degree at least two, *SIAM J. Discrete Math.*, **30** (2016), 20–35.
- [49] M.A. Henning, S. Klavžar, D.F. Rall, Total version of the domination game, *Graphs Combin.*, **31** (2015), 1453–1462.
- [50] M.A. Henning, S. Klavžar, D.F. Rall, The 4/5 upper bound on the game total domination number, *Combinatorica*, DOI: 10.1007/s00493-015-3316-3.

- [51] M. A. Henning, D.F. Rall, Progress towards the total domination game 3/4-conjecture, *Discrete Math.*, **339** (2016), 2620–2627.
- [52] W. Imrich, J. Jerebic, S. Klavžar, The distinguishing number of Cartesian products of complete graphs, *European. J. Combin.*, **45** (2009) 175–188.
- [53] W. Imrich, R. Kalinowski, F. Lehner, M. Pilśniak, Endomorphism Breaking in Graphs, *Electron. J. Combin.*, **21** (2014), #P1.16.
- [54] W. Imrich, S. Klavžar, Distinguishing Cartesian powers of graphs, *J. Graph Theor.*, **53** (2006) 250–260.
- [55] W. Imrich, S. Klavžar, *Product graphs: Structure and recognition*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization (2000).
- [56] M. Isaac, *Finite Group Theory*, Graduate Studies in Mathematics, volume **92** (2008), AMS Press.
- [57] A.B. Kempe, On the geographical problem of the four colours, *Amer. J. Math.*, **3** (1879), 193–200.
- [58] H.A. Kierstead, A.V. Kostochka. Efficient graph packing via game coloring, *Combin. Probab. Comput.*, **18** (2009), 765–774.
- [59] H.A. Kierstead, W.T. Trotter, Planar graph coloring with an uncooperative partner, *J. Graph Theory*, **18** (1994), 569–584.
- [60] W.B. Kinnersley, D.B. West, R. Zamani, Game domination for grid-like graphs, unpublished manuscript, 2012.
- [61] W.B. Kinnersley, D.B. West, R. Zamani, Extremal problems for game domination number, *SIAM J. Discrete Math.*, **27** (2013), 2090–2107.
- [62] S. Klavžar, G. Košmerlj, S. Schmidt, On the Computational Complexity of the Domination Game, *Iran. J. Math. Sci. Inform.*, **10** (2015), 115–122.
- [63] S. Klavžar, G. Košmerlj, S. Schmidt, On graphs with small domination number, *Appl. Anal. and Discrete Math.*, **10** (2016).
- [64] S. Klavžar, T.L. Wong and X. Zhu, Distinguishing labelings of group action on vector spaces and graphs, *J. Algebra*, **15**, Issue 2 (2006), 626–641.
- [65] S. Klavžar and X. Zhu, Cartesian powers of graphs can be distinguished by two labels, *European. J. Combin.*, **28** (2007) 303–310.
- [66] G. Košmerlj, Realizations of the game domination number, *J. Combin. Optim.*, **28** (2014), 447–461.
- [67] P. Lam, W. Shiu, B. Xu, Edge game coloring of graphs, *Graph Theory Notes N.Y.*, **37** (1999), 17–19.
- [68] S. Latouche, *La Mégamachine*, collection Recherches/M.A.U.S.S, La Découverte/M.A.U.S.S., (2004).

- [69] F. Lehner, Symmetry breaking in graphs and groups, Ph.D. Thesis, TU Graz, available at <http://www.florian-lehner.net/pdf/dissertation.pdf>, (2014).
- [70] F. Lehner, R.G. Möller, Local finiteness, distinguishing numbers and Tucker's conjecture, *Electron. J. Combin.*, **22** 2015, #19.
- [71] F. Lehner, Distinguishing graphs with intermediate growth, *Combinatorica*, **36** (2016), 333–347.
- [72] A. Lozano, M. Mora, C. Seara, Distinguishing trees in linear time, *Electron. J. Combin.*, **19** (2012), #P19.
- [73] M.J. Nadjafi-Arani, M. Siggers, H. Soltani, Characterisation of forests with trivial game domination numbers, *J. Combin. Optim.*, **32** (2016)t, 800–811.
- [74] J.B. Phillips, P.J. Slater, An introduction to graph competition independence and enclaveless parameters, *Graph Theory Notes N. Y.*, (2001), 37–41.
- [75] A. Raspaud, J. Wu, Game chromatic number of toroidal grids, *Inform. Process. Letters*, **109** (2009), 1183–1186.
- [76] F. Rubin, Problem 729 *J. Recreational Math.*, **11** (1979), 128.
- [77] A. Russell, R. Sundaram, A note on the asymptotics and computational complexity of graph distinguishability, *Electron. J. Combin.*, **5** (1998), #R23.
- [78] S. Schmidt, The 3/5-conjecture for weakly $S(K_{1,3})$ -free forests, *Discrete Math.*, **339** (2016), 2267–2274.
- [79] E. Sidorowicz, Marking games, *Electron. Notes Discrete Math.*, **24** (2006), 21–214.
- [80] A.N. Siegel, *Combinatorial Game Theory*, Graduate Studies in Mathematics, volume **146** (2013), AMS Press.
- [81] T. Tucker, Distinguishing maps, *Electron. J. Combin.*, **18** (2011), #P50.
- [82] V.I. Voloshin, *Graph coloring: History, results and open problems*, Alabama Journal of Mathematics, (2009).
- [83] J. Tymoczko, Distinguishing numbers for graphs and groups, *Electron. J. Combin.*, **11** (2004), #R63.
- [84] J. Wu, X. Zhu, The 6-relaxed game chromatic number of outerplanar graphs, *Discrete Math.*, **308** (2008), 5974–5980.
- [85] X. Zhu, The game coloring number of planar graphs, *J. Combin. Theory Ser. B*, **75** (1999), 245–258.
- [86] X. Zhu, Refined activation strategy for the marking game, *J. Combin. Theory Ser. B*, **98** (2008), 1–18.

Résumé : Dans cette thèse, nous étudions trois jeux à objectif compétitif sur les graphes. Les jeux à objectif compétitif proposent une approche dynamique des problèmes d'optimisation discrète. L'idée générale consiste à associer à un problème d'optimisation (coloration, domination, etc.) un jeu combinatoire partisan de la façon suivante : deux joueurs construisent tour à tour la structure reliée au problème d'optimisation. L'un d'eux cherche à ce que cette structure soit la plus optimale possible, tandis que l'autre essaye de l'en empêcher. Sous l'hypothèse que les deux joueurs jouent optimalement, la taille de la structure obtenue définit un invariant ludique.

Nous commençons par étudier une variante 1-impropre du jeu de coloration, qui est le premier et le plus étudié des jeux à objectif compétitif. Dans ce jeu, les joueurs colorient les sommets d'un graphe de sorte que deux sommets adjacents ne partagent jamais la même couleur. Dans la version 1-impropre, un sommet peut avoir au plus un voisin ayant la même couleur que lui. Nous considérons ensuite le jeu de domination, dans lequel les deux joueurs doivent construire un ensemble dominant, c'est-à-dire un ensemble de sommets du graphe tel que tout autre sommet est adjacent à l'un des membres de cet ensemble. Finalement, nous définissons un nouveau jeu à objectif compétitif, relié au problème de coloration distinguante. Dans ce jeu, il s'agit de construire une coloration qui n'est préservée par aucun des automorphismes du graphe. Nous soulevons plusieurs interrogations stimulantes concernant ce nouveau jeu, notamment sur la caractérisation des graphes ayant un invariant ludique infini, par l'existence d'automorphismes d'ordre deux.

Mots clés : jeu de coloration et de domination, coloration distinguante, jeu combinatoire

Abstract : In this thesis, we study three competitive optimization graph games. These games allow a dynamic approach to discrete optimization problems, which is an advantageous alternative way to consider these questions. The global idea consists in defining a combinatorial partisan game, associated to the original optimization problem, like coloring, domination, etc. Two players alternatively build the structure related to the optimization problem. One of them tries to obtain a structure as optimal as possible, whereas his opponent wants to prevent him from doing it. Under the hypothesis that both players play optimally, the size of the obtained structure defines a game invariant of the graph.

We start by studying a 1-improper variation of the coloring game, which is the first and the most studied competitive optimization graph game. In this game, the players color the vertices of a graph, such that two adjacent vertices do not share the same color. In the 1-improper version, we allow a vertex to have at most one neighbor with the same color as it. Then, we study the domination game, in which the players have to build a domination set, that is a sub-set of vertices such that any other vertex is adjacent to one of the vertex in this set. Finally, we define a new game, related to the distinguishing coloring problem. This game is about building a vertex-coloring which is preserved by none of the graph automorphisms. We raise some challenging open questions about this new game, especially concerning the characterization of graphs with infinite game invariant, by the existence of order two automorphisms.

Key words : coloring game, domination game, distinguishing coloring, combinatorial game