



**HAL**  
open science

# Utilisation des florisations pour les processus de subdivision dans les espaces de Chebyshev

Martine Brilleaud

► **To cite this version:**

Martine Brilleaud. Utilisation des florisations pour les processus de subdivision dans les espaces de Chebyshev. Géométrie algébrique [math.AG]. Université Grenoble Alpes, 2017. Français. NNT : 2017GREAM013 . tel-01681322v2

**HAL Id: tel-01681322**

**<https://theses.hal.science/tel-01681322v2>**

Submitted on 12 Jan 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE LA COMMUNAUTE UNIVERSITE  
GRENOBLE ALPES**

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

**Martine BRILLEAUD**

Thèse dirigée par **Sylvain GRAVIER**, Directeur de recherche  
**CNRS, Université Grenoble-Alpes**, et  
coencadrée par **Martin BUHMANN**, Professeur, **Justus-Liebig-  
Universität Giessen**

préparée au sein de **l'Institut Fourier**  
dans **l'École Doctorale MSTII**

# Utilisation des florisations pour les processus de subdivision dans les espaces de Chebyshev

Thèse soutenue publiquement le **2 mars 2017**  
devant le jury composé de :

**M. Christophe RABUT**

Professeur émérite, INSA de Toulouse, Président

**M. Sylvain GRAVIER**

Directeur de recherche CNRS, Université Grenoble-Alpes, Membre

**M. Khaled MELKEMI**

Professeur, Université de Batna, Algérie, Rapporteur

**M. Jean-Louis MERRIEN**

Maître de conférence, INSA de Rennes, Rapporteur





# Utilisation des floraisons pour les processus de subdivision dans les espaces de Chebyshev

**Résumé :** Les algorithmes utilisés en design géométrique permettent de construire des courbes paramétrées dans l'espace des polynômes. Ces algorithmes se transcrivent élégamment et simplement grâce à l'outil des floraisons (formes à pôles). L'intérêt des floraisons se manifeste également dans la possibilité qu'elles offrent de généraliser les algorithmes de design pour générer des courbes paramétrées dans les espaces de Chebyshev.

Nous utilisons les floraisons dans le cadre des processus de subdivision et nous montrons comment cet outil s'adapte aussi bien aux processus stationnaires, qui permettent d'obtenir des splines polynomiales, qu'aux processus non stationnaires qui aboutissent aux splines de Chebyshev. Enfin cette "modélisation algorithmique" des processus de subdivision par les floraisons rend possible la création d'algorithmes permettant d'engendrer des splines constitués de morceaux en provenances de plusieurs espaces fonctionnels différents.

**Mots Clés :** Floraison, Espaces de Chebyshev, Subdivision

## Chebyshev Blossoming for subdivision schemes

**Summary :** Geometric design algorithms are well suited to derive polynomial or piecewise polynomial parametric curves. These algorithms can be nicely converted to blossoms. Furthermore thanks to blossoms we also can generalize some design algorithms in order to derive parametric curves in Chebyshevian spaces. Blossoms quite naturally lead to subdivision schemes. They can be used to derive parametric polynomial splines. In the non-stationary case they also can derive polynomial splines, and Chebyshevian splines (ie splines in various Chebyshevian spaces) as well. Finally we use blossoms as "algorithmic modeling" subdivision schemes in order to derive algorithms for splines whose pieces are in different Chebyshevian spaces.

**Keywords :** Blossoming, Chebyshevian spaces, subdivision schemes

## Remerciements

*Cette thèse, préparée sur une durée de six ans tout en ayant une activité professionnelle, n'aurait pas pu voir le jour sans le soutien de ceux qui m'ont entourée, tant sur le plan mathématique que sur le plan personnel.*

**En premier lieu je voudrais exprimer ma reconnaissance à ceux qui m'ont encadrée ou ont participé au jury.**

Je tiens à remercier tout particulièrement Martin Buhmann, qui a dirigé la plus grande partie de cette thèse. Merci à lui pour sa disponibilité, son enthousiasme, ses conseils et pour m'avoir fait découvrir ce lieu magique qu'est le Mathematikum de Giessen.

Merci à Sylvain Gravier qui a accepté de co-encadrer ces travaux et permis l'aboutissement de ce projet.

Merci à Marie-Laurence Mazure qui m'a introduit dans « l'univers impitoyable » des espaces de Chebyshev, et qui m'a transmis au passage sa passion pour les floraisons. Ses travaux font référence dans le domaine.

Un énorme merci à Christophe Rabut, qui a présidé le jury, ses conseils m'ont été précieux.

Je remercie aussi Khaled Melkemi qui, en plus d'avoir lu mon manuscrit pour rapporter, a fait le déplacement depuis Batna (Algérie) pour assister à la soutenance.

Je lui devais également ma décision de reprendre mes études et me lancer dans une thèse quinze ans après avoir quitté l'université.

Merci à Jean-Louis Merrien d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Ses conseils de gestion du stress avant une prise de parole en public m'ont-ils été utiles ? En tout cas, la prochaine fois, j'essayerai de les appliquer, c'est promis !

**Ma gratitude va également à tous ceux que j'ai rencontrés pendant ces six ans et qui ont contribué, volontairement ou indirectement, à l'orientation suivie par mes travaux.**

Merci à Bin Han, qui m'a démontré que le battement d'une aile de papillon sur un quai de gare pouvait avoir des répercussions inattendues. Et à tous ceux que j'ai croisés en congrès et qui m'ont fait découvrir le sens du terme « communauté mathématique ».

Merci à Pierre-Jean Laurent pour m'avoir enseigné les rudiments de Matlab et de PlainTex qui m'ont permis de rédiger le manuscrit.

Merci à Jérôme Maisonnasse qui m'a accueillie au sein du FabMSTIC. Une partie de mon inspiration théorique provient des essais de prototypage de véritables surfaces.

**Un grand merci aux laboratoires et communautés mathématiques qui m'ont successivement accueillie.**

D'abord le LJK puis l'institut Fourier. Merci également à toutes ces personnes de l'ombre, toujours disponibles et serviables, qui font en sorte de protéger les chercheurs et les étudiants des agressions administratives, huilant, par leur sourire et leur gentillesse les rouages de cette impressionnante machinerie.

Merci aux collègues (mais néanmoins amis) de l'IREM de Grenoble, où j'avais établi mon QG, pour ces moments d'échanges passionnés sur les questions d'éducatons ou de mathématiques. C'est à votre contact que s'est forgée ma « personnalité pédagogique » et cette volonté de rendre les mathématiques accessibles au plus grand nombre.

Un grand merci à Christine Kazantsev pour son soutien affectif et logistique à tous mes projets. Et pour avoir été un guide dans les méandres de ma vie universitaire.

**À mon entourage immédiat, qui a subi avec patience les effets de ce travail sur ma disponibilité (et parfois mon humeur).**

Je tiens à remercier les copines (mais néanmoins collègues) du lycée Stendhal pour le soutien, les soirées cocktail ou les délires sur ma terrasse. Et pour m'avoir épaulé dans les moments difficiles. Merci de m'avoir fait la surprise d'assister à ma soutenance, sachant ce que les mathématiques représentent pour la plupart d'entre vous.

Merci à Sandrine, qui a toujours été là pour moi, qui a tout partagé, les épreuves et les joies, les repas au resto, les soirées aux ciné, les anniversaires, qui a accompagné mon évolution (y compris vestimentaire), et m'a soutenue jusqu'au bout.

Une pensée pour ma famille toujours présente, pour mon fils qui s'apprête à passer son Bac, pour les étés chez mon père avec ses longues balades dans le bois derrière la maison en papotant des sujets variés : les transformées de Fourier, les raccords de surface, les représentations mentales, les analogies...

Pour ma mère qui a été ma première lectrice...

Je mesure ma chance d'avoir des parents matheux avec qui j'ai pu avoir des discussions sur mes travaux, ma chance d'avoir été élevée par des personnes capables de comprendre à la fois le contenu scientifique et la démarche que j'entreprenais en commençant une thèse à presque 40 ans.

Mes remerciements les plus appuyés, les plus poussés, iront à Gilles qui m'a soutenue à chaque instant. Les moments de découragement furent nombreux pendant les dernières années. Je sais que je n'aurais pas réussi sans toi. Merci.

Enfin, je dédie cette thèse à ma sœur, Annie, décédée accidentellement le 23 mars 2015.

## TABLE DES MATIÈRES

Introduction . . . . .	6
CHAPITRE I - Floraisons et subdivisions . . . . .	15
1.1 - Courbes de Bézier . . . . .	15
<b>1.1.1 - Points de contrôle et floraisons</b> . . . . .	15
1.1.1.1 - Courbes paramétrées . . . . .	16
1.1.1.2 - Formes polaires et floraisons . . . . .	19
1.1.1.3 - Approche algorithmique . . . . .	22
<b>1.1.2 - Algorithmes de construction</b> . . . . .	26
1.1.2.1 - Algorithme de de Casteljaou . . . . .	26
1.1.2.2 - Subdivision . . . . .	30
1.1.2.3 - Élévation de degré . . . . .	33
<b>1.1.3 - Géométrie des courbes de Bézier</b> . . . . .	37
1.1.3.1 - Plans osculateurs à une courbe paramétrée . . . . .	38
1.1.3.2 - Propriétés des courbes de Bézier . . . . .	41
1.1.3.3 - Raccords . . . . .	43
1.1.3.4 - Dérivées . . . . .	45
1.2 - Bases . . . . .	46
<b>1.2.1 - Bases de Bernstein</b> . . . . .	46
<b>1.2.2 - D'autres bases pour le design géométrique</b> . . . . .	50
1.2.2.1 - Courbes paramétrées dans une base de de Boor . . . . .	51
1.2.2.2 - Exemples de courbes cubiques dans une base de de Boor . . . . .	52
1.2.2.3 - Propriétés des courbes paramétrées dans une base de de Boor . . . . .	57
1.2.2.4 - Propriétés des bases de de Boor . . . . .	58
1.3 - Splines polynomiales . . . . .	59
<b>1.3.1. Une Définition classique</b> . . . . .	60
<b>1.3.2. Splines et floraisons</b> . . . . .	61
1.3.2.1 - Construction . . . . .	61

1.3.2.2 - Floraison associée à une courbe spline . . . . .	63
1.3.2.3 - Diagrammes d'évaluation . . . . .	64
<b>1.3.3 - Bases de splines . . . . .</b>	<b>66</b>
1.3.3.1 - Spline uniforme sans multiplicité . . . . .	67
1.3.3.2 - Spline non uniforme . . . . .	72
1.4 - Subdivision . . . . .	75
<b>1.4.1 - Principe . . . . .</b>	<b>76</b>
<b>1.4.2 - Floraisons et subdivision . . . . .</b>	<b>80</b>
1.4.2.1 - Spline polynomiale de degrés 2 . . . . .	81
1.4.2.2 - Spline polynomiale cubique . . . . .	83
1.4.2.3 - Théorème d'intégration . . . . .	87
<b>1.4.3 - Les processus <math>m</math>-adiques . . . . .</b>	<b>89</b>
1.4.3.1 - Cas 3-adique . . . . .	90
1.4.3.2 - Cas $m$ -adique . . . . .	93
1.4.3.3 - Le théorème d'intégration . . . . .	96
<b>1.4.4 - Vecteurs nodaux non uniformes . . . . .</b>	<b>97</b>
CHAPITRE II -Floraisons dans les espaces circulaires . . . . .	100
2.1- Contexte théorique . . . . .	101
<b>2.1.1 - Espaces de Chebyshev généralisés . . . . .</b>	<b>101</b>
<b>2.1.2 - Deux critères pour le design géométrique . . . . .</b>	<b>102</b>
2.1.2.1 - Totale positivité . . . . .	103
2.1.2.2 - Floraisons . . . . .	104
<b>2.1.3 - Floraisons et intersections d'hyperplans . . . . .</b>	<b>106</b>
2.2 - Calcul de floraisons pour les espaces circulaires . . . . .	108
<b>2.2.1 - Espaces circulaires . . . . .</b>	<b>109</b>
2.2.1.1 - Une écriture globale . . . . .	109
2.2.1.2 - Propriétés . . . . .	110
2.2.1.3 - Polynômes de Chebyshev . . . . .	110
<b>2.2.2 - Calculs de floraisons . . . . .</b>	<b>111</b>



2.2.2.1 - Dimension 3 . . . . .	111
2.2.2.2 - Autres dimensions . . . . .	112
2.3 - Design dans les espaces circulaires . . . . .	114
2.3.1- Floraison dans les espaces de Chebyshev . . . . .	116
2.3.2 - Application aux espaces circulaires de dimension 3 . . . . .	117
2.3.2.1 - Algorithme de de Casteljaou . . . . .	119
2.3.2.2 - Base de Bernstein . . . . .	121
2.3.2.3 - Algorithme de de Boor . . . . .	122
2.3.3 - Application aux espaces circulaires de dimension 4 . . . . .	123
2.4 - Subdivisions non stationnaires . . . . .	125
2.4.1 - Cas dyadique . . . . .	125
2.4.1.1 - Spline paramétrée par un espace circulaire de dimension 3 . . . . .	126
2.4.1.2 - Spline paramétrée par un espace circulaire de dimension 4 . . . . .	129
2.4.1.3 - Extension à la dimension n . . . . .	134
2.4.2 - Cas $m$ -adique . . . . .	135
2.4.2.1 - Processus triadique . . . . .	135
2.4.2.2 - Multiplication des points de contrôle par $m$ . . . . .	139
2.5 - Splines mixtes . . . . .	142
2.5.1 - Algorithme en dimension 3 . . . . .	143
2.5.2 - Algorithme en dimension 4 . . . . .	146
CHAPITRE III - Design et subdivision dans les espaces de Chebyshev . . . . .	151
3.1 - Design avec des matrices de connexions . . . . .	152
3.1.1 - Cadre théorique . . . . .	154
3.1.1.1 - Caractérisation des EC-espaces par les bases de Bernstein . . . . .	154
3.1.1.2 - Caractérisation des EC-espaces par les fonctions poids . . . . .	154
3.1.1.3 - Caractérisation des EC-espaces bons pour le design . . . . .	156
3.1.1.4 - Splines de Chebychev avec matrices de connexion . . . . .	157
3.1.2 - Les espaces de splines de Chebyshev de dimension 5 bons pour le design . . . . .	158

3.2 - Les L - espaces de dimension 5 . . . . .	165
3.3 - Longueur critique des L - espaces de dimension 5 . . . . .	167
<b>3.3.1 - Cadre théorique . . . . .</b>	<b>167</b>
<b>3.3.1.1 - Caractérisation des EC-espaces par les Wronskiens . . . . .</b>	<b>167</b>
<b>3.3.1.2 - Application à la recherche d'un critère pour être un EC-espace . . . . .</b>	<b>168</b>
<b>3.3.2 - Application aux espaces symétriques de dim 4 . . . . .</b>	<b>169</b>
<b>3.3.2.1 - Les cas 9,3,8. . . . .</b>	<b>170</b>
<b>3.3.2.2 - Le cas 5 : <math>\cos(ax), \sin(ax), \cos(bx), \sin(bx)</math> . . . . .</b>	<b>172</b>
<b>3.3.3 - Exemples . . . . .</b>	<b>179</b>
<b>3.3.3.1 - Les cas 5 et 1 . . . . .</b>	<b>179</b>
<b>3.3.3.1 - Les cas 3 et 9 . . . . .</b>	<b>180</b>
3.4 -Les L-splines de dim5 . . . . .	181
3.5 - Subdivision dans les L-espaces de dimension 5 . . . . .	183
<b>3.5.1 - Nomenclature . . . . .</b>	<b>183</b>
<b>3.5.2 - Floraisons associées aux espaces engendrés par <math>(1, u, u', v, v')</math> . . . . .</b>	<b>184</b>
<b>3.5.3 - Masques pour les espaces engendrés par <math>(1, u, u', v, v')</math> . . . . .</b>	<b>185</b>
<b>3.5.4 - Splines mixtes . . . . .</b>	<b>186</b>
CONCLUSION . . . . .	189
BIBLIOGRAPHIE . . . . .	195
ANNEXE 1 . . . . .	199
ANNEXE 2 . . . . .	202
INDEX DES TERMES UTILISÉS . . . . .	208
NOTATIONS LES PLUS UTILISÉES . . . . .	209

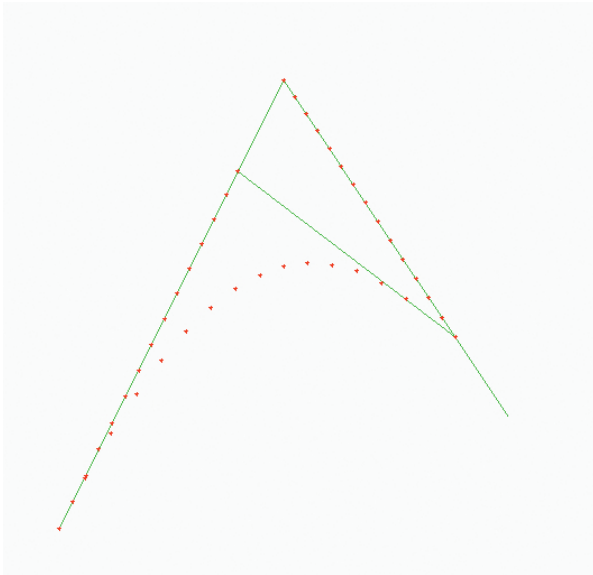
## INTRODUCTION

### I. Algorithmes de construction de courbes

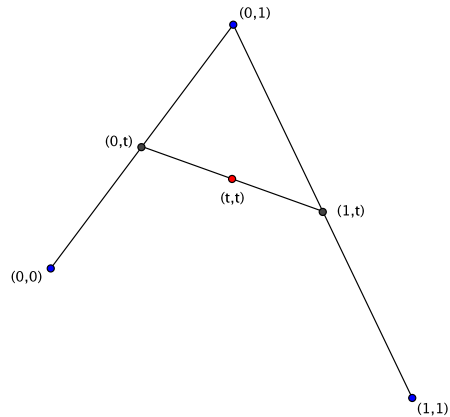
#### *Avec des polynômes*

Pour représenter des formes dans l'espace ou le plan on utilise des courbes paramétrées. Les plus simples sont les courbes polynomiales. Des algorithmes permettent de les générer et de les manipuler facilement à partir d'un petit nombre de points de départ, leurs points de contrôle.

Parmi eux, l'algorithme de de Casteljau permet, uniquement en combinant des opérations sur des droites (combinaisons affines) de retrouver des courbes. Un étiquetage astucieux (fig. B) rend compte des différents coefficients utilisés. La théorie sous-jacente à cet étiquetage est la théorie des floraisons.



*fig. A*



*fig. B*

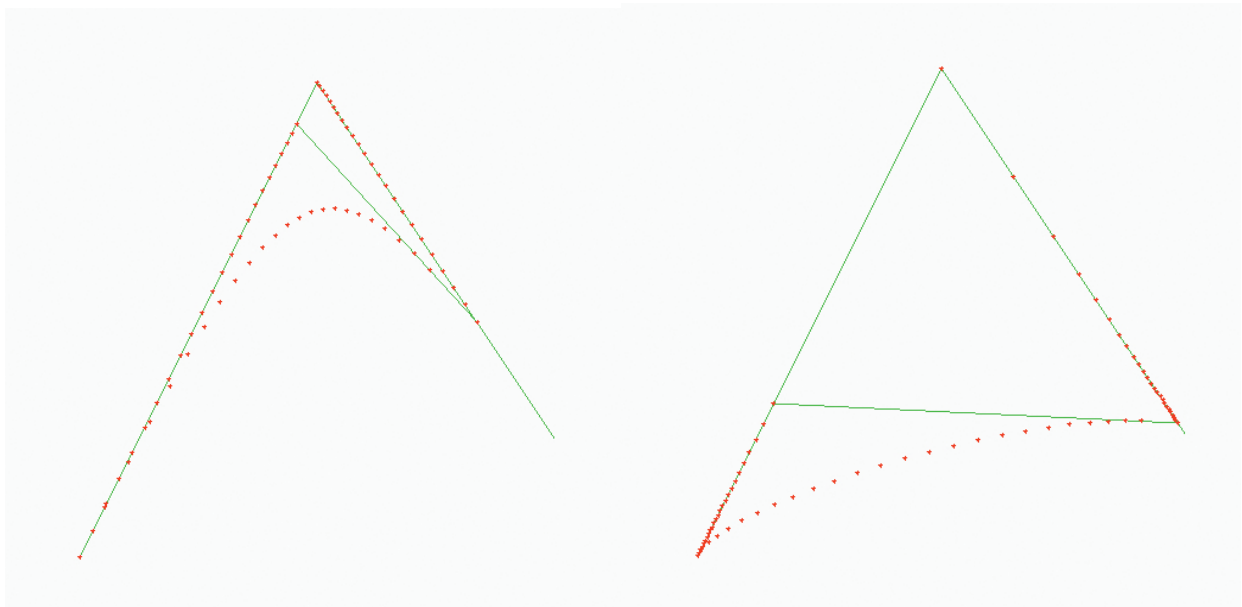
Il s'agit d'associer, de manière unique, un polynôme de degré  $n$  avec une fonction de  $n$  variables affine par rapport à chaque variable.

Lorsque les formes deviennent de plus en plus complexes la solution consiste, plutôt que d'augmenter indéfiniment le degré des polynômes qui les représentent, à utiliser des courbes splines, c'est à dire des courbes polynomiales par morceaux (les morceaux sont généralement des cubiques). Elles présentent, en outre, sur la simple courbe polynomiale l'avantage d'un contrôle local (le déplacement d'un des points de contrôle n'a d'effet que sur une partie limitée de la courbe). Si la complexité des formes augmente encore, il reste

la possibilité d'augmenter le nombre de points de contrôle (et donc le nombre d'opérations dans l'algorithme).

### *Avec des fonctions trigonométriques et/ou hyperboliques*

Une autre méthode consiste à quitter l'univers des polynômes pour celui, beaucoup plus vaste, des espaces de Chebyshev (dont les polynômes font partie). Les espaces de Chebyshev partagent certaines caractéristiques avec les polynômes, dont celle du nombre maximal de zéros (l'équivalent du théorème de d'Alembert pour les polynômes). Sous certaines conditions, on peut même y faire correspondre chaque fonction avec sa floraison et de là développer tous les algorithmes de CAO.



*fig. C*

*fig. D*

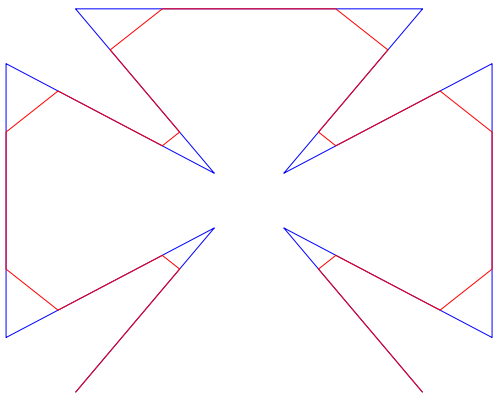
*La version Chebyshev de l'algorithme de de Casteljau produit un arc d'hyperbole (fig. C) ou un arc d'ellipse (fig. D).*

L'avantage ? Alors qu'avec 3 points de contrôle on ne peut construire qu'une unique parabole, les trois mêmes points permettent des possibilités infinies, dont seuls deux exemples sont représentés plus haut. Si les espaces de Chebyshev sont utilisés pour la CAO depuis longtemps déjà, les floraisons sur ces espaces ont été étudiées dans les années 90, suite à la découverte d'une définition géométrique qui en a permis la généralisation aux espaces de Chebyshev.

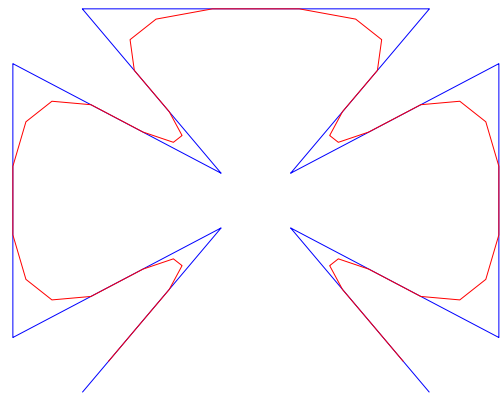
## II. Les floraisons

L'outil des floraisons a été introduit et développé dans le cadre du design géométrique. Mais il s'adapte également très bien aux processus de subdivision. Couplé avec les espaces de Chebyshev il permet d'obtenir des résultats de manière beaucoup plus accessible que par les méthodes classiques.

Les processus de subdivision étudiés dans cette thèse sont des processus de construction de courbe en "coupant les coins" (processus *corner-cutting*) à partir d'un polygone de contrôle. Le polygone obtenu à chaque étape est de plus en plus proche de la courbe limite. Les figures E et F représente le polygone après 1 et 2 itérations respectivement. La courbe de la figure G est obtenue après 5 itérations.

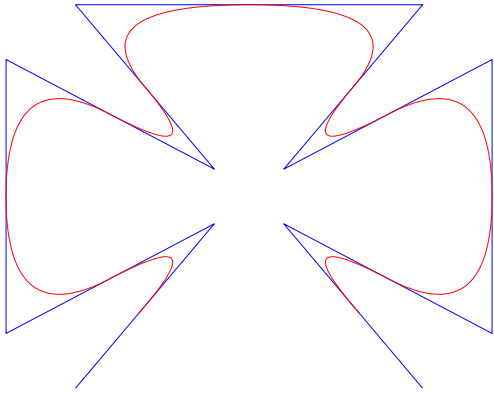


*fig. E*

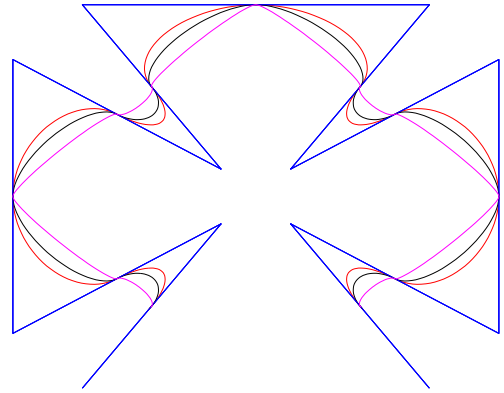


*fig. F*

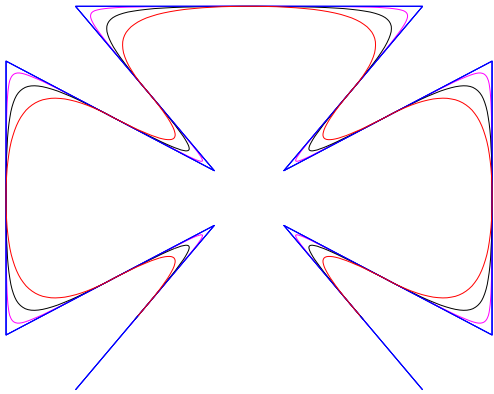
Toutes les courbes suivantes sont des courbes splines de degrés 2 (ou de dimension 3). Elles sont construites à l'aide d'un processus de subdivision (5 itérations ici). La spline de la figure G est constituée d'arc de paraboles, les splines de la figure H utilisent des arcs d'ellipses et les splines de la figure I des arcs d'hyperboles. Les jonctions des arcs se font aux points de tangence. Le polygone de contrôle est en bleu.



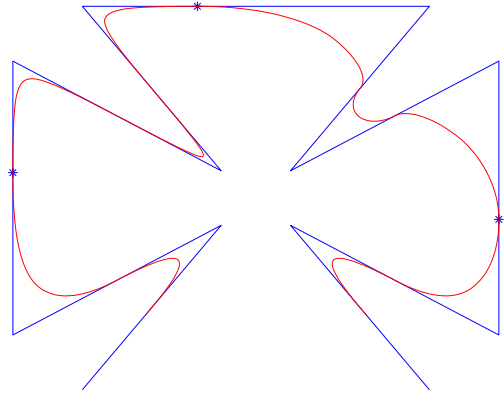
*fig. G*



*fig. H*



*fig. I*



*fig. J*

*La figure J est une courbe spline constituée de 4 splines de types différents (polynomiale, trigonométrique, hyperbolique, polynomiale). Les étoiles matérialisent les jonctions.*

L'emploi des floraisons a, en outre, plusieurs avantages :

- L'étiquetage des points des algorithmes par les floraisons fait apparaître la structure des algorithmes et les relations entre les points de constructions et les coefficients nécessaires (comme on peut le voir sur la figure B).
- la méthode est particulièrement simple à présenter puis à mettre en oeuvre puisqu'elle n'utilise que des combinaisons affines (ou pseudo-affines) de points.

- La traduction dans le langage des floraisons unifie la présentation des divers algorithmes de design géométriques qu'elle englobe dans un même cadre théorique.
- La définition géométrique des floraisons permet leur extension à d'autres espaces que les polynômes. Ainsi, le même algorithme est utilisé pour générer les courbes des figures A, C et D.
- Techniquement les algorithmes sont plus stables puisque, même pour des espaces de grandes tailles, les splines sont calculées directement au lieu de passer par une base de fonctions dont on obtient les éléments par intégrations successives (selon la méthode classique)

Les floraisons sont un outil pas forcément très connu et très peu utilisé actuellement. A notre sens, cette sous-utilisation vient de la complexité de l'écriture algébrique dès que l'espace dépasse la dimension 4, ce qui rend difficile l'utilisation de ces expressions telles quelles dans les calculs. Pourtant la facilité avec laquelle la théorie des floraisons s'intègre à l'algorithmique, ainsi que les nouvelles possibilités de calculs parallèles des machines, en font des outils qui méritent d'être redécouverts. Cela semble être le cas actuellement dans quelques domaines de mathématiques appliquées.

En effet, la définition géométrique des floraisons par intersection de variétés osculatrices produit une expression d'une floraison de dimension  $n$  comme solution d'un système linéaire de dimension  $n$  (donc un quotient de deux déterminants d'ordre  $n$ ) dont les coefficients sont eux-même des déterminants de même ordre. Si l'expression algébrique développée en est assez complexe dans des dimensions supérieures à 4 l'évaluation de ces "déterminants de déterminants" reste largement à la portée, avec une précision suffisante, de nos calculateurs actuels.

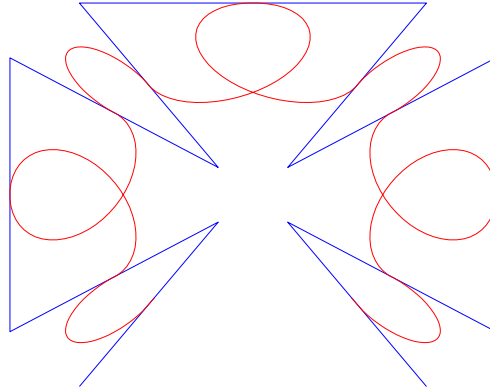
### III. L'objet de la thèse

Les recherches effectuées au cours de cette thèse ont été menées en deux temps.

- La première période a consisté à appliquer de nouveaux résultats obtenus par Marie-Laurence Mazure pour déterminer la longueur critique pour le design de L-espaces de dimension 5 puis de L-splines, toujours en dimension 5. Deux articles, co-signés avec Marie-Laurence Mazure, sont issus de ces travaux.

Ce travail a été l'occasion d'étudier sous quelles conditions les L-espaces pouvaient être assimilés à des espaces de Chebychev, et d'en déduire la construction des courbes splines sur ces espaces. On sait que les L-espaces de dimension 5 sont les espaces de plus petite dimension stables par symétrie et translation et permettant le mélange de deux types de fonctions (à choisir parmi les fonctions trigonométriques, hyperboliques ou polynomiales).

La longueur critique est la fameuse condition sous laquelle ces L-espaces deviennent des espaces de Chebyshev, c'est à dire des espaces qui, à l'instar des espaces de polynômes, présentent les conditions requises pour y pratiquer l'interpolation, le design géométrique ou l'approximation de courbe.



*fig. K*

*Le dépassement de la longueur critique produit des courbes esthétiquement intéressantes mais qui ne suivent plus leur polygone de contrôle...*

- La seconde période a pour point de départ un article de Martin Buhman et Charles Micchelli [Buhmann & Micchelli] sur les processus de subdivision exprimés à l'aide de matrices décalées d'ordre 2 (*2-slanted*). Cette matrice est entièrement déterminée par la donnée d'un nombre fini de coefficients, le masque de la subdivision, qui se répètent, avec un décalage de 2 lignes, sur chacune de ses colonnes.

L'innovation présentée dans cette thèse consiste à traduire ces processus avec l'outil des floraisons. Classiquement, l'étude d'un schéma de subdivision se fait en fixant des conditions sur les coefficients du masque de subdivision et en étudiant ensuite la convergence du processus. Avec les floraisons la démarche est inverse puisque l'étiquetage est produit par la courbe limite connue. On en déduit, dans un second temps, les coefficients de subdivision correspondants. Cela permet de s'affranchir du problème de convergence.

Un autre avantage est de pouvoir ensuite étendre le processus aux espaces de Chebyshev, ce qui a également été étudié ici.

Une fois le processus modélisé à l'aide des floraisons, les masques de subdivision conduisant à des splines paramétrées par des espaces de Chebyshev jusqu'à la dimensions 5 (ce qui correspond au degré 4 pour les polynômes) ont été calculés. Ces calculs ont été menés en



pointant une analogie de structure qui permet de regrouper les 9 espaces de Chebyshev de dimension 5 étudiés en deux grandes catégories, ce qui évite de traiter tous les cas séparément comme dans la démarche classique.

### ***Théorème d'intégration obtenu***

Un procédé permettant de déduire les coefficients du masque de subdivision d'une courbe spline de dimension  $n + 1$  à partir de ceux du masque d'une spline de dimension  $n$  a également permis d'étendre tous ces résultats à des espaces de dimension quelconque.

### ***Un nouvel algorithme de subdivision***

Au passage, les algorithmes de construction de courbes splines par subdivision ont été customisés pour générer des splines mixtes, c'est-à-dire dont les morceaux sont des fonctions appartenant à différents L-espaces. Les algorithmes sont présentés pour les dimensions 3, 4 et 5. On peut voir un exemple pour la dimension 3 sur la figure J.

## **Plan**

Le parti pris pour la présentation de cette thèse a été de suivre la complexité des espaces dans lesquels les résultats ont été obtenus.

### ***Le premier chapitre***

Il se situe dans le cadre le plus simple des polynômes. C'est dans ce cadre que sont rappelés les notions de design géométriques, ainsi que les notations utilisées, en faisant le lien avec leur traduction dans le langage des floraisons. L'outil des floraisons étant suffisamment peu usuel (en particulier il n'existe pas de manuel de référence sur le sujet), il a nécessité un exposé un peu détaillé pour se familiariser avec les méthodes qui lui sont associées. Si certaines notations sont communes avec les articles de Marie-Laurence Mazure, qui présentent l'avantage de rassembler un certain nombre des résultats connus sur les floraisons, d'autres sont propres à cette thèse. Les floraisons étant une théorisation de processus algorithmique, leur représentation, sous la forme "algorithmique" de schémas triangulaires joue un rôle important pour la compréhension. Toutes ces notations et procédés de schématisation sont exposés dans le paragraphe 1.1.

Traditionnellement les courbes utilisées en design sont les courbes de Bézier, qui sont des courbes polynomiales exprimées dans une base de Bernstein.

Cette base est optimale pour le design géométrique mais elle fait partie d'une famille plus large de bases que l'on peut utiliser dans ce domaine. Cette famille, appelée dans cette thèse base de de Boor en référence à l'algorithme de de Boor qui produit les courbes exprimées dans les dites bases, s'exprime aussi dans le langage des floraisons. Ce sont des bases normalisées totalement positives.

C'est en raccordant des morceaux de polynômes constituant ces bases qu'on obtient les bases de B-spline. C'est également par ces bases que se fait la correspondance entre les résultats issus de la totale positivité et ceux issus de la théorie des florisations, deux approches concurrentes ces dernières années pour un même problème : identifier les espaces utilisables pour le design géométrique. La présentation de ces bases sous l'angle des florisations est l'objet du paragraphe 1.2. Elles conduisent naturellement à la création de courbes splines qui sont les objets, en dimension 1, du design géométrique (paragraphe 1.3). Enfin le paragraphe 1.4 présente, toujours dans le cadre des polynômes, l'adaptation des florisations aux processus de subdivision. Un procédé de calcul utilisant les florisations est décrit et appliqué pour obtenir les coefficients conduisant, par subdivision, à une courbe spline de degré 2 ou 3.

Le théorème d'intégration, démontré dans cette thèse permet de retrouver les coefficients pour les splines de degrés supérieurs. Classiquement, la subdivision se fait en doublant le nombre de nœuds du vecteur nodal. Les florisations décrivent également très bien le processus consistant à multiplier le nombre de nœuds par  $m$ . Le théorème d'intégration s'adapte également à ce cas-là. Le paragraphe se termine en adaptant le processus à des splines définies sur un vecteur nodal non uniforme ou à un procédé dans lequel l'insertion d'un nœud ne se fait pas de manière équidistante.

### *Le second chapitre*

Le décor étant planté dans le premier chapitre, le second s'attache à montrer que tout son contenu se généralise, moyennant quelques petites modifications à des espaces présentant les mêmes caractéristiques que les polynômes : les espaces de Chebyshev. Les espaces trigonométriques sur un intervalle borné et les espaces hyperboliques, sont, si l'on exclut le cas polynomial, les exemples les plus simples d'espaces de Chebyshev. C'est pourquoi, leur version en dimensions 3 (dans le plan) et 4 (dans l'espace) serviront d'exemples dans tout le chapitre.

Dans un premier temps (paragraphe 2.1) seront rappelées la notion d'Espace de Chebyshev et la définition des florisations en terme d'intersections de variétés osculatrices. Cette définition est un petit peu plus délicate à manier puisque la floraison pour une courbe de dimension  $n$  (de degré  $n - 1$  dans le cas polynomial) se fait dans un espace de dimension  $n$  par des intersection de sous-espaces affines jusqu'à la dimension  $n - 1$ .

Le paragraphe 2.2 expose le procédé de calcul des florisations dans le cas circulaire (trigonométrique et hyperbolique). La connaissance de ces florisations va permettre la transposition des algorithmes de design et de la notion de spline aux espaces de Chebyshev (paragraphe 2.3).

Ces résultats, même s'ils n'ont pas été jusqu'ici présentés de manière aussi explicite et opérationnelle, sont, en principe, connus. Ce qui l'est moins, en revanche, c'est l'utilisation des floraisons pour calculer le masque de subdivision conduisant à des splines sur des espaces de Chebyshev (paragraphe 2.5). On se trouve alors dans le cadre des processus de subdivision non stationnaires et les coefficients de la matrice de subdivision changent à chaque étape du processus. Ici aussi le théorème d'intégration s'applique et ici aussi les floraisons permettent de calculer les coefficients associés au processus  $m$ -adique qui multiplie par  $m$  le nombre de points à chaque étape.

Les coefficients permettant de converger vers une courbe spline trigonométrique ou hyperbolique de dimension  $n$  étant déterminés, on peut, en les combinant, obtenir un algorithme qui converge vers une courbe spline dont les morceaux sont des arcs de paraboles, d'hyperboles ou d'ellipses. L'algorithme est présenté dans le paragraphe 2.6.

### *Le troisième chapitre*

Il regroupe tous les résultats obtenus sur les L-espaces de dimension 5 et les L-splines associées. Les travaux effectués durant la première partie de cette thèse ont donc été inclus dans ce chapitre.

Le premier paragraphe consiste en une généralisation d'un critère pour décider si un espace de splines polynomiales de dimension 5 avec matrices de connexion est utilisable pour le design géométrique, c'est-à-dire si on peut y développer tous les algorithmes classiques. La même démarche a été reprise ici pour déterminer à quelles conditions un espace de Chebyshev quelconque de dimension 5 était utilisable pour le design.

Le paragraphe 3.2 donne la liste exhaustive des L-espaces de dimension 5, qui sont des espaces stables par dérivation, translation et symétrie. Leur longueur critique est déterminée dans le paragraphe 3.3. Ce sont les résultats publiés dans [Brilleaud & Mazure 1]. Le paragraphe 3.4 reprend le théorème exposé dans [Brilleaud & Mazure 2] qui donne la longueur critique pour un espace de splines paramétrées par un des L-espaces de dimension 5.

La suite du chapitre continue l'exploration des processus de subdivision avec le calcul des floraisons pour les L-espaces (paragraphe 3.5) suivi de son application à la détermination des coefficients du masque de subdivision pour les mêmes espaces (paragraphe 3.6) et la présentation de l'algorithme permettant de construire une courbe spline en raccordant des courbes paramétrés par des espaces différents (paragraphe 3.7).

Les différents algorithmes correspondants aux subdivisions sont reproduits en annexe.

## CHAPITRE I

# Floraisons et subdivisions

Si l'aspect "objet" des floraisons est tentant à étudier, puisqu'il se place au carrefour entre l'algèbre, l'analyse, la géométrie et l'algorithmique, nous avons choisi de ne présenter que son aspect "outil" appliqué à la description des processus de subdivision. Le chapitre 1 introduit donc l'outil des floraisons dans le cadre dans lequel elles ont été créées, c'est-à-dire de la modélisation de courbes polynomiales par morceaux, les *splines*, qui sont utilisées pour la représentation d'objets sur ordinateur. Le choix de présentation a été de laisser délibérément de côté, dans ce premier chapitre, les espaces de Chebyshev dont l'espace des polynômes est un cas particulier pour se concentrer sur la présentation des floraisons et des rapports qu'elles entretiennent avec les subdivisions. Les 3 premiers paragraphes, plutôt didactiques, ont pour objectifs de montrer les possibilités des floraisons pour la modélisation de splines en design géométrique, en particulier leur simplicité à exprimer les différents algorithmes connus ainsi que leur maniabilité. Les résultats, datant de "la grande époque" des floraisons sont regroupés dans [Mazure 7]. L'objet du quatrième paragraphe est de montrer que les floraisons s'adaptent particulièrement bien à la description de processus de subdivision. Les résultats obtenus par ce biais sont connus mais la présentation par les floraisons permet une unification des différents cas.

### 1.1 - Courbes de Bézier

La notion de floraisons ayant vu le jour dans le cadre de la génération des courbes polynomiales en CAGD (computer aided Géométric design), CGAO (conception géométrique assistée par ordinateur), elles seront abordées dans ce même cadre. On présentera, dans ce paragraphe les notions usuelles de *design* géométrique et leur interprétation en terme de floraisons. Le but est de montrer la simplicité et l'élégance de la présentation quand elle utilise les floraisons, ce qui constitue un atout pédagogique. Ce sera également l'occasion d'introduire les notations utilisées dans ce mémoire.

#### 1.1.1 - Points de contrôle et floraisons

Le principe et la force de la notion de floraison est qu'elles permettent d'étiqueter les points utilisés dans les algorithmes de construction de courbe. Ces étiquettes, associées

à chaque point, "contiennent", tels des "codes génétiques", les informations nécessaires au déroulement de l'algorithme de construction. La mise en place de cet étiquetage est exposée dans cette partie.

### 1.1.1.1 - Courbes paramétrées

On donne ici les notations et les définitions utilisées par la suite pour les courbes paramétrées dont la forme la plus utilisée en *design* géométrique sont les courbes de Bézier.

#### Définition 1.1 : Courbe paramétrée par $\mathcal{E}$

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{E}$  un espace vectoriel de dimension  $n + 1$  de fonctions  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $(U_0, \dots, U_n)$  une base de  $\mathcal{E}$ .

Etant donnés  $n + 1$  points  $P_i, i = 0, \dots, n$ , de  $\mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}^*$ , on appelle courbe paramétrée par  $\mathcal{E}$  la fonction  $\mathcal{F}$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}^d$  définie par

$$\forall t \in I \quad \mathcal{F}(t) = \sum_{i=0}^n U_i(t) P_i$$

Les points  $P_i$  sont appelés les *points de contrôle* de  $\mathcal{F}$  relativement à la base  $(U_0, \dots, U_n)$ . Le polygone  $[P_0 \dots P_n]$  reliant les points  $P_i$  est appelé *polygone de contrôle* de  $\mathcal{F}$  (relativement à la base  $(U_0, \dots, U_n)$ ).

L'ensemble  $\Gamma = \text{Im}\mathcal{F} = \{\mathcal{F}(t); t \in I\}$  est une courbe géométrique de  $\mathbb{R}^d$ . Lorsque l'on déplace un des points  $P_i$ , la courbe subit également un déplacement, ce qui motive l'appellation de *point de contrôle*.

On peut également voir une courbe paramétrée par  $\mathcal{E}$  comme une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}^d$  dont les  $d$  composantes  $F_j, (j = 1, \dots, d)$ , sont des éléments de  $\mathcal{E}$  :

$$\forall t \in I \quad F_j(t) = \sum_{i=0}^n P_i^j U_i(t) \quad j = 1, \dots, d$$

On note  $\mathbb{P}^n$  l'espace, de dimension  $n + 1$ , des polynômes de degré  $\leq n$ . On appellera *courbe polynomiale* de degré  $n$  une courbe paramétrée par  $\mathbb{P}^n$ .

Il existe une infinité de systèmes  $(U_0, \dots, U_n)$  qui forment une base de l'espace  $\mathbb{P}^n$ . La base canonique, dont les éléments sont les fonctions définies par  $U_i(t) = t^i$  pour  $i = 0, \dots, n$ , en est un.

Une base jouant un rôle particulier en *design* géométrique est la base formée des polynômes de Bernstein : la base de Bernstein. Les courbes polynomiales paramétrées dans cette base sont appelées les *courbes de Bézier*. Elles ont, entre autres, la propriété particulièrement intéressante en *design* géométrique, de suivre l'allure de leur polygone de contrôle.

**Définition 1.2 : Polynômes de Bernstein relativement à  $[a, b]$** 

Les  $n + 1$  polynômes de Bernstein de degré  $n$  relativement à l'intervalle  $[a, b]$  sont définis par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad B_i^n(t) = \binom{n}{i} \left( \frac{t-a}{b-a} \right)^i \left( \frac{b-t}{b-a} \right)^{n-i}, \quad i = 0, \dots, n$$

Le système  $(B_0^n, \dots, B_n^n)$  forme une base de  $\mathbb{P}^n$  que l'on appelle *base de Bernstein* (relativement à  $[a, b]$ ).

Bien que définis sur tout  $\mathbb{R}$ , ces polynômes sont réputés pour leurs propriétés sur le compact  $[a, b]$  :

- $\forall t \in [a, b] \quad B_i^n(t) \geq 0$
- Chaque fonction  $B_i^n$  s'annule exactement  $i$  fois en  $a$  et  $n - i$  fois en  $b$ .

Les polynômes de la base de Bernstein usuelle sont relatifs à l'intervalle  $[0, 1]$  :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 0, \dots, n$$

**Définition 1.3 : Courbe de Bézier (relativement à  $[a, b]$ )**

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $P_i, (i = 0, \dots, n)$   $n + 1$  points de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \in \mathbb{N}^*$ , et  $(B_0^n, \dots, B_n^n)$  une base de Bernstein relativement à l'intervalle  $[a, b]$ . Une courbe de Bézier est une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}^d$  définie par

$$\forall t \in I \quad \mathcal{F}(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i$$

Les points de contrôle de  $\mathcal{F}$  relativement à  $(B_0^n, \dots, B_n^n)$  se nomment les *points de Bézier* de  $\mathcal{F}$ .

**Remarque :**

Le terme *point de contrôle* est utilisé dans son sens large pour désigner les points qui permettent de définir une courbe paramétrée [Carnicer]. A certaines bases sont associées des points de contrôle qui permettent un *contrôle géométrique* de la courbe. Visuellement, la courbe suit alors grossièrement la forme de son polygone de contrôle, ce qui est le cas des courbes  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{H}$  de la figure ci-dessous. Ce n'est manifestement pas le cas lorsque la courbe est paramétrée dans la base canonique (courbe  $\mathcal{K}$ ). En plus de suivre sa forme, la courbe  $\mathcal{H}$  *interpole* son polygone de contrôle.

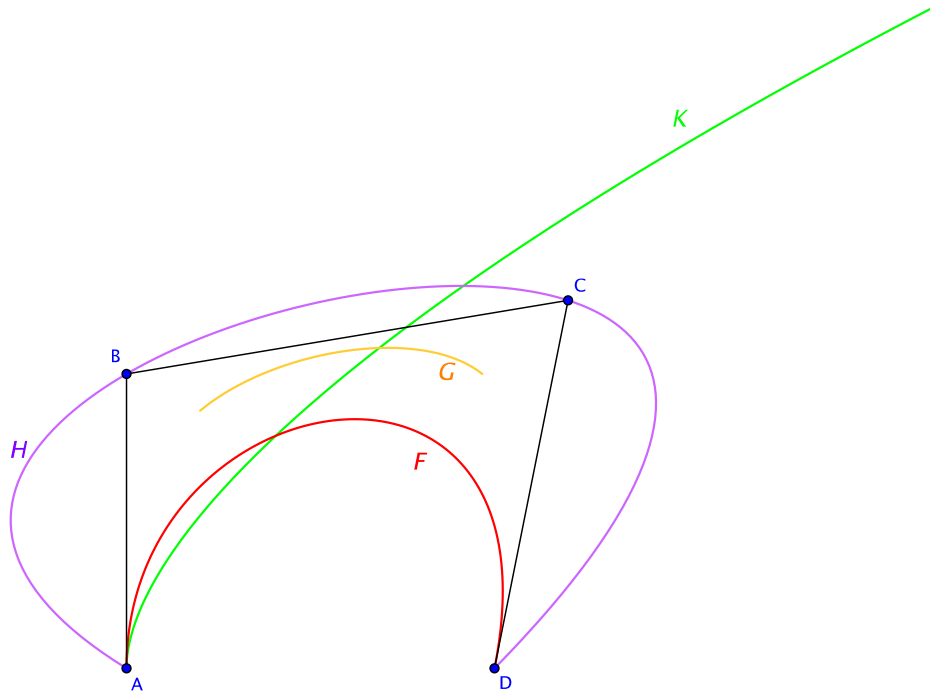


fig. 1-0

Les 4 courbes représentées ci-dessous sont contrôlées sur  $[0, 1]$  par les mêmes points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ .

$\mathcal{F}$  est une courbe paramétrée dans la base de Bernstein :

$$\mathcal{F}(t) = Ab_0(t) + Bb_1(t) + Cb_2(t) + Db_3(t) \quad \text{avec}$$

$$b_0(t) = (1-t)^3, \quad b_1(t) = 3t(1-t)^2, \quad b_2(t) = 3t^2(1-t), \quad b_3(t) = t^3.$$

$\mathcal{G}$  est une courbe paramétrée dans une base qui est la restriction de la base de B-spline cardinale sur  $[0, 1]$  :

$$\mathcal{G}(t) = Ad_0(t) + Bd_1(t) + Cd_2(t) + Dd_3(t) \quad \text{avec}$$

$$d_0(t) = \frac{(1-t)^3}{6}, \quad d_1(t) = \frac{1}{6}[(1-t)^2(t+2) + (2-t)(t+1)(1-t) + (2-t)^2t]$$

$$d_2(t) = \frac{1}{6}[(t+1)^2(1-t) + (t+1)(2-t)t + (3-t)t^2], \quad d_3(t) = \frac{t^3}{6}.$$

$\mathcal{H}$  est une courbe paramétrée dans une base de Lagrange :

$$\mathcal{H}(t) = Al_0(t) + Bl_1(t) + Cl_2(t) + Dl_3(t) \quad \text{avec}$$

$$l_0(t) = \frac{1}{2}(1-3t)(2-3t)(1-t), \quad l_1(t) = \frac{9}{2}t(2-3t)(1-t)$$

$$l_2(t) = \frac{9}{2}t(3t-1)(1-t), \quad l_3(t) = \frac{1}{2}t(3t-1)(3t-2).$$

$\mathcal{K}$  est une courbe paramétrée dans la base de canonique :

$$\mathcal{K}(t) = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$$

### 1.1.1.2 - Formes polaires et floraisons

La notion de *forme polaire* associée à un polynôme n'est pas nouvelle (on connaît d'ailleurs la forme bilinéaire symétrique associée à un polynôme). Elle est reprise par Lyle Ramshaw en 1987 [Ramshaw 1] pour les courbes de CAGD. Il lui donne le nom de *floraison* (*blossom*). Paul de Casteljaou parle de *formes à pôles* [De Casteljaou]. Faut-il y voir un lien avec l'approche géométrique qui définit une courbe à partir de ses points de contrôle, ces derniers étant par ailleurs appelés *pôles* dans le cas d'une fonction spline ? Pour une parabole, les points de contrôle sont l'intersection de deux tangentes. C'est-à-dire... ses pôles. C'est le cas également pour les arcs d'ellipse ou d'hyperbole.

Nous avons choisi ici d'appeler *forme polaire* la notion originale de fonction symétrique de  $n$  variables associée à un polynôme de degré  $n$  et d'utiliser le terme *floraison* pour sa généralisation aux courbes paramétrées polynomiales [Ramshaw] ou non polynomiales qui sera définie plus tard en termes d'intersections de variétés osculatrices [Pottmann].

#### Définition 1.4 : Forme polaire d'un polynôme

Soit  $n$  un entier. On appelle *forme polaire d'ordre  $n$*  d'un polynôme  $F$  de degré inférieur ou égal à  $n$  l'unique fonction  $f$  de  $n$  variables, tel que :

- 1)  $f$  est symétrique ( $f$  est inchangée si on permute ses  $n$  variables),
- 2)  $f$  est multi-affine (affine par rapport à chacune de ses variables),
- 3)  $f(t, \dots, t) = F(t)$ .

L'existence et l'unicité de  $f$  sont montrées dans [Ramshaw 1], c'est ce qui est désigné par *Principe de floraison* (*Blossoming principle*). Selon ce principe il suffit d'exhiber une fonction multiaffine vérifiant les trois conditions de la définition 1.4 pour démontrer que c'est bien l'unique floraison associée à une fonction donnée.

#### Exemple de forme polaire :

La forme polaire associée au polynôme  $F(t) = at^2 + bt + c$  est la fonction de 2 variables  $f(t_1, t_2) = at_1t_2 + b\frac{t_1 + t_2}{2} + c$ .



Tout polynôme de degré  $n$  étant un élément de  $\mathbb{P}^k$  avec  $k \geq n$ , on peut, lui associer une unique forme polaire d'ordre  $k$ , pour tout  $k \geq n$ . C'est-à-dire une forme polaire de  $k$  variables vérifiant les trois conditions de la définition 1.4. Lorsqu'il est différent de  $n$  l'ordre de la forme polaire devra donc être précisé.

**Exemples de formes polaires d'ordre  $k$  :**

1) La forme polaire de la fonction  $F$  définie par  $F(t) = t^2$  est la fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$f(t_1, t_2) = t_1 t_2,$$

sa forme polaire d'ordre 3 est la fonction de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$f(t_1, t_2, t_3) = \frac{t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_1 t_3}{3},$$

sa forme polaire d'ordre  $k$  est la fonction de  $\mathbb{R}^k$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$f(t_1, \dots, t_k) = \frac{1}{\binom{k}{2}} \sum_{i \neq j} t_i t_j$$

2) Les formes polaires d'ordre  $k$  des monômes du type  $t^n$  se déterminent très facilement. Par linéarité, on en déduit ensuite la forme polaire d'ordre  $k$  de n'importe quel polynôme. Ainsi le polynôme  $F(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i$  a pour forme polaire d'ordre  $k$  la fonction de  $k$  variables définie par

$$f(t_1, \dots, t_k) = \sum_{i=0}^n a_i f_i(t_1, \dots, t_k)$$

où  $f_i$  est la forme polaire d'ordre  $k$  de  $t^i$  (en posant  $f_0(t_1, \dots, t_k) = 1$ ).

Nous n'insisterons pas ici sur l'écriture explicite de la forme polaire associée à un polynôme dont on trouve l'expression, par exemple, dans [Laurent & Mazure 1], puisque que, par la suite, nous n'utiliserons pas cette forme explicite. Dans la suite, les formes polaires seront utilisées sous leur forme algorithmique qui a l'avantage de pouvoir être généralisée aux fonctions des espaces de Chebyshev.

La notion de forme polaire d'un polynôme sera étendue à la notion de floraison de deux manières. D'une part pour des fonctions non polynomiales (les espaces de Chebyshev seront le cadre des deux prochains chapitres) et, d'autre part, pour les courbes paramétrées dans  $\mathbb{R}^d$ .

**Définition 1.5 : Floraison d'une fonction**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $\mathcal{E}$  un espace de dimension  $n + 1$  de fonctions  $\mathcal{C}^\infty(I)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  qui contient les constantes. Soit  $F \in \mathcal{E}$ . On lui associe, lorsqu'il y a existence et unicité, une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ , appelée floraison de  $F$ , telle que :

1)  $f$  est symétrique.

2) Pour tout  $[a, b] \subset I$ , si  $t \in [a, b]$ , il existe une fonction monotone  $\beta$  telle que

$$f(t_1, \dots, t_{n-1}, t) = (1 - \beta(t))f(t_1, \dots, t_{n-1}, a) + \beta(t)f(t_1, \dots, t_{n-1}, b)$$

avec  $\beta(a) = 0$  et  $\beta(b) = 1$  (on dit que  $f$  est pseudo-affine par rapport à chaque variable)

3)  $f(t, \dots, t) = F(t)$

**Remarques :**

1) Les floraisons de fonctions non polynomiales seront utilisées aux chapitres 2 et 3.

L'existence et l'unicité de la fonction  $\beta$  sont démontrées, par exemple, dans [Mazure 12].

2) En ce qui concerne les polynômes, il est toujours possible de leur associer une floraison : leur forme polaire. La fonction  $\beta$  est alors une fonction affine.

**Définition 1.6 : Floraison polynomiale dans  $\mathbb{R}^d$** 

Soit  $\mathcal{F}$  une courbe polynomiale de degré  $n$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \in \mathbb{N}^*$ . On appelle floraison de  $\mathcal{F}$  l'unique fonction  $\phi$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^d$  telle que

1)  $\phi$  est symétrique.

2)  $\phi$  est multi-affine.

3)  $\phi(t, \dots, t) = \mathcal{F}(t)$

On notera  $\phi(t_1, t_2, \dots, t_n) = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ .

**Remarques :**

a) La notation  $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  est motivée par la propriété de symétrie. Elle désigne donc un point de  $\mathbb{R}^d$ . La notation  $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  sera nommée *l'étiquette* du point tandis que les réels  $t_i$  seront les *arguments* de l'étiquette. L'ordre des arguments n'a donc aucune importance mais, par souci de clarté, ils seront donnés, la plupart du temps, par ordre croissant.

b) La propriété 3) de la définition 1.6 signifie que les étiquettes notées  $\{t, \dots, t\}$  (que l'on notera également  $\{t^{[n]}\}$ ) sont les étiquettes des points de la courbe.

c)  $\phi$  est une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^d$ , dont les  $d$  composantes  $f_j$ , pour  $j = 1, \dots, d$ , sont les formes polaires des composantes  $F_j$  (pour  $j = 1, \dots, d$ ) de  $\mathcal{F}$ .

d) La fonction  $\phi$  fait correspondre un point de  $\mathbb{R}^d$  à un n-uplet . Il est important de distinguer la notation  $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  qui désigne un point  $P$  de  $\mathbb{R}^d$  de la notation  $(P^1, \dots, P^d)$  qui sont les coordonnées du même point dans la base canonique de  $\mathbb{R}^d$ . Ceci est d'autant plus délicat que la définition géométrique d'une floraison de  $n$  arguments , que nous utiliserons par la suite, se fait dans le cas non dégénéré où  $n = d$ .

e) Par souci de clarté nous ferons la différence entre  $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  qui désigne un élément de  $\mathbb{R}^d$ , la plupart du temps un point dans l'espace ou le plan et  $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$  qui désigne un réel, même si, dans les deux cas, il s'agit de la valeur d'une floraison.

### 1.1.1.3 - Approche algorithmique

Ce paragraphe introduit les schémas, les notations et les démarches qui seront utilisées de manière récurrente par la suite.

En considérant la droite des réels comme un espace affine de dimension 1, tout nombre réel  $t$  peut s'écrire comme combinaison affine de deux nombres  $a$  et  $b$  :

$$t = \frac{b-t}{b-a} \times a + \frac{t-a}{b-a} \times b$$

On notera que  $\frac{b-t}{b-a}$  et  $\frac{t-a}{b-a}$  sont les coordonnées barycentriques de  $t$  dans la base affine de  $\mathbb{R}$  constituée de  $a$  et  $b$ .

Par la suite, les combinaisons affines seront représentées par un schéma triangulaire faisant apparaître les coefficients :

$$\begin{array}{ccc} a & & b \\ 1 - \alpha \searrow & & \swarrow \alpha \\ & t & \end{array} \quad 1 - \alpha = \frac{b-t}{b-a} \quad \alpha = \frac{t-a}{b-a}$$

Pour toute fonction  $F$  de  $\mathbb{P}^n$  et sa forme polaire associée  $f$ , la propriété d'affinité (propriété (2) de la définition 1.4) permet d'écrire la valeur de  $f(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t)$  comme combinaison affine des valeurs de  $f(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, a)$  et  $f(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, b)$  :

$$\begin{aligned} f(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t) &= f(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, \frac{b-t}{b-a} \times a + \frac{t-a}{b-a} \times b) \\ &= \frac{b-t}{b-a} f(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, a) + \frac{t-a}{b-a} f(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, b) \end{aligned}$$

Les mêmes coefficients se retrouveront à partir de la propriété (2) de la définition 1.6 :

$$\{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t\} = \frac{b-t}{b-a} \{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, a\} + \frac{t-a}{b-a} \{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, b\} \quad (1.1)$$

Ou encore, de manière plus condensée :

$$\{\clubsuit, t\} = \frac{b-t}{b-a} \{\clubsuit, a\} + \frac{t-a}{b-a} \{\clubsuit, b\}$$

$\clubsuit$  désignera dans la suite un ensemble quelconque de  $n-1$  arguments.

En notant  $M$ ,  $A$  et  $B$  les points de  $\mathbb{R}^d$  d'étiquettes respectives  $\{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t\}$ ,  $\{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, a\}$  et  $\{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, b\}$ , la relation (1.1) sur les étiquettes se traduit géométriquement dans l'espace  $\mathcal{A}$  par :

$$M = \frac{b-t}{b-a} A + \frac{t-a}{b-a} B \quad (1.2)$$

Ainsi le point  $M$  se trouve sur la droite  $(AB)$ , entre  $A$  et  $B$  lorsque  $a \leq t \leq b$ .

**Remarques :**

1) Dans les schémas des algorithmes, chaque combinaison affine de deux étiquettes (donc de deux points) sera représentée de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc}
 \left\{ \begin{array}{c} t_1 \\ \vdots \\ t_{n-1} \\ a \end{array} \right\} & & \left\{ \begin{array}{c} t_1 \\ \vdots \\ t_{n-1} \\ b \end{array} \right\} \\
 1 - \alpha \searrow & & \swarrow \alpha \\
 t \rightarrow & & \left\{ \begin{array}{c} t_1 \\ \vdots \\ t_{n-1} \\ t \end{array} \right\}
 \end{array}$$

fig. 1-1

Sur les 3 étiquettes représentées,  $n-1$  arguments sont identiques. Les valeurs  $a$ ,  $b$  et  $t$  servent à calculer le coefficient  $\alpha$ .

Les coefficients  $\alpha$  intervenant dans la combinaison affine peuvent s'exprimer en fonction de la forme polaire  $f$  de n'importe quelle fonction  $F$  de  $\mathcal{P}^n$ , le résultat sera toujours identique :

$$1 - \alpha = \frac{f(t_1 \dots, t_{n-1}, b) - f(t_1 \dots, t_{n-1}, t)}{f(t_1 \dots, t_{n-1}, b) - f(t_1 \dots, t_{n-1}, a)} = \frac{b-t}{b-a}$$

$$\text{et } \alpha = \frac{f(t_1 \dots, t_{n-1}, t) - f(t_1 \dots, t_{n-1}, a)}{f(t_1 \dots, t_{n-1}, b) - f(t_1 \dots, t_{n-1}, a)} = \frac{t - a}{b - a}$$

2) Il est important de noter que l'intérêt de la notation (1.1) par rapport à la notation géométrique (1.2) est que les coefficients de la combinaison affine "apparaissent" dans les étiquettes. La seule donnée des étiquettes suffit alors pour le calcul des dits coefficients.

3) Dans la suite un point sera assimilé à son étiquette et l'on fera fréquemment référence, par exemple, au *point*  $\{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n\}$  au lieu d'utiliser une double notation.

**Définition 1.7 : Étiquettes consécutives associées à une suite d'arguments**

Soit  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n < t_{n+1} \leq \dots \leq t_{2n}$  une suite croissante de  $2n$  arguments. Les  $n + 1$  étiquettes de  $n$  arguments associées à cette suite sont :

$$e_i := \{t_{i+1}, \dots, t_{n+i}\} \quad i = 0, \dots, n$$

Les étiquettes  $e_i$  et  $e_{i+1}$  ( $i = 0, \dots, n - 1$ ) possèdent  $n - 1$  arguments en commun. On dira qu'elles sont consécutives.

Le théorème ci-dessous est à la base de l'algorithme d'évaluation d'une floraison.

**Théorème 1.8 : Algorithme d'évaluation d'une forme polaire  $f$**

Soit  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n < t_{n+1} \leq \dots \leq t_{2n}$  une suite croissante de  $2n$  arguments. Soient  $F$  un polynôme de  $\mathbb{P}^n$  et  $f$  sa forme polaire associée. Toute valeur de  $f$  est entièrement déterminée par la donnée des  $n + 1$  valeurs

$$f(t_{i+1}, \dots, t_{n+i}) \quad i = 0, \dots, n$$

La preuve (voir, par exemple, [Laurent & Mazure 1]) consiste à observer qu'en utilisant la propriété d'affinité (définition 1.4) on peut obtenir la valeur de  $f(a_1, \dots, a_n)$  en  $n$  étapes. Dans la première étape les  $n$  étiquettes consécutives  $f(a_1, t_{i+2}, \dots, t_{n+i})$  s'obtiennent chacune par combinaison affine des deux étiquettes consécutives  $f(t_{i+1}, \dots, t_{n+i})$  et  $f(t_{i+2}, \dots, t_{n+i+1})$ ,  $i = 0, \dots, n - 1$ .

Dans la seconde étape, les  $n$  étiquettes consécutives  $f(a_1, t_{i+2}, \dots, t_{n+i})$ ,  $i = 0, \dots, n - 1$ , engendrent, par combinaison affine, les  $n - 1$  étiquettes consécutives  $f(a_1, a_2, t_{i+3}, \dots, t_{n+i})$ ,  $i = 0, \dots, n - 2$ .

Le processus est alors réitéré  $n$  fois jusqu'à l'obtention de l'unique étiquette  $f(a_1, \dots, a_n)$ .

Dans le cas d'une courbe polynomiale de  $\mathbb{R}^d$ , le théorème 1.8 possède une version

géométrique :

**Théorème 1.9 : Algorithme d'évaluation d'une floraison  $\phi$**

Soit  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n < t_{n+1} \leq \dots \leq t_{2n}$  une suite croissante de  $2n$  arguments. Soient  $\mathcal{F}$  une courbe polynomiale de  $\mathbb{R}^d$  et  $\phi$  sa floraison associée. Toute valeur de  $\phi$  peut s'obtenir comme une suite de combinaisons affines des  $n + 1$  points :

$$\{t_{i+1}, \dots, t_{n+i}\} \quad i = 0, \dots, n$$

**Exemple :** Cette propriété est illustrée dans le cas d'une floraison à 3 arguments :

L'étiquette  $\{a, b, c\}$  s'obtient par combinaison affine à partir des 4 étiquettes  $\{t_1, t_2, t_3\}$ ,  $\{t_2, t_3, t_4\}$ ,  $\{t_3, t_4, t_5\}$  et  $\{t_4, t_5, t_6\}$ , associées à la suite  $[t_1, \dots, t_6]$  d'arguments croissants tels que  $t_3 \neq t_4$ .

Ce qu'on peut illustrer par le schéma suivant:

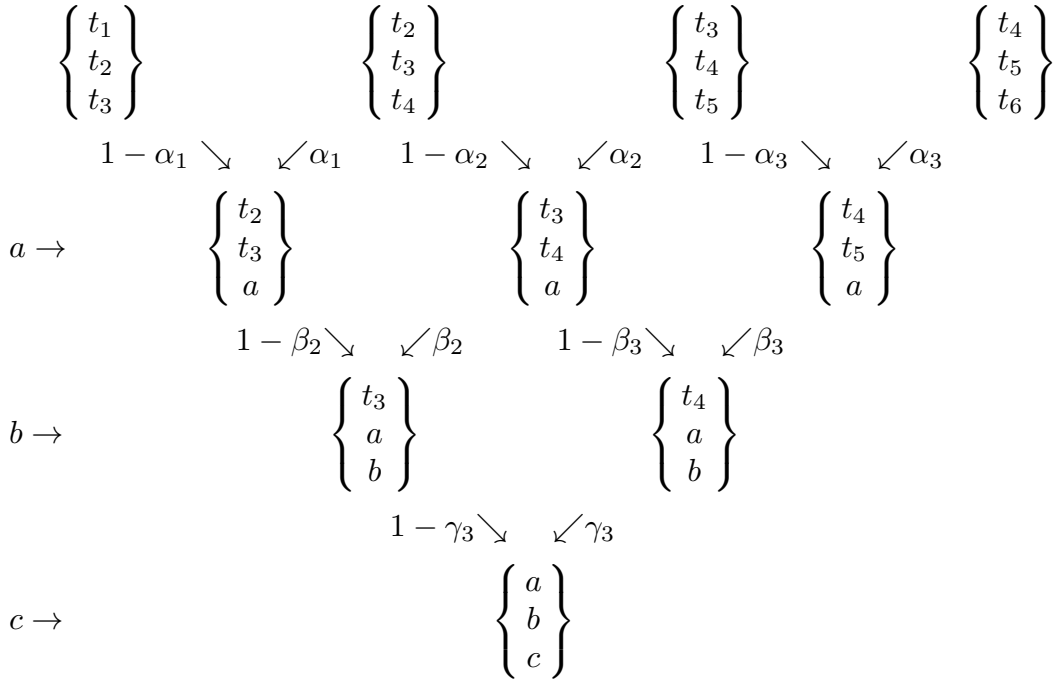


fig. 1-2

Chaque coefficient de l'algorithme se calculant comme sur le schéma de la figure 1-1. C'est-à-dire :

$$\alpha_i = \frac{a - t_i}{t_{i+3} - t_i}, \quad \beta_i = \frac{b - t_i}{t_{i+2} - t_i}, \quad \gamma_i = \frac{c - t_i}{t_{i+1} - t_i}$$

**Remarques :**

- 1) Pour fonctionner, l'algorithme nécessite de partir d'étiquettes se distinguant l'une de l'autre par un unique argument (étiquettes consécutives). L'hypothèse  $(t_1 \leq \dots \leq t_n < t_{n+1} \leq \dots \leq t_{2n})$  en fournit une condition suffisante. La condition  $t_n \neq t_{n+1}$  assure l'existence des coefficients de l'algorithme.
- 2) Il existe d'autres suites d'arguments (non croissantes) qui peuvent également servir à déterminer les valeurs de départ de l'algorithme. Nous ne les explorerons pas ici.
- 3) Dans le schéma de l'algorithme, l'argument introduit à chaque étape est indiqué en début de ligne. L'ordre d'introduction de ces arguments dans l'algorithme n'a pas d'influence sur le résultat final. Par contre, les points intermédiaires et les coefficients  $(\alpha_i, \beta_i \text{ et } \gamma_i)$  seront différents.

**Notation :**

Dans les paragraphes suivants nous noterons, en extension  $[t_1 \dots t_{2n}]$  la suite des  $2n$  arguments utilisés par l'algorithme d'évaluation lorsque nous en connaissons les valeurs.

## 1.1.2 - Algorithmes de construction

Dans la suite, on rappelle les propriétés classiques des courbes de Bézier, que l'on trouve, par exemple dans [Boehm, Farin & Kahmann], [Farin], en les interprétant en termes de floraison. L'objectif est de montrer que la plupart s'interprètent comme des déclinaisons de l'algorithme d'évaluation des floraisons.

### 1.1.2.1 - Algorithme de de Casteljau

**Proposition 1.10 :**

Soit  $\mathcal{F}$  une courbe de Bézier de degré  $n$  relativement à  $[0, 1]$  et  $\phi$  la floraison associée. L'algorithme d'évaluation d'une floraison appliqué à partir des  $n+1$  étiquettes consécutives  $\{0^{[n-i]}, 1^{[i]}\}$  pour  $i = 0, \dots, n$  (associées à la suite de  $2n$  arguments  $[0 \dots 01 \dots 1]$ ) pour obtenir l'étiquette  $\{t^{[n]}\}$  est exactement l'algorithme de de Casteljau permettant de calculer un point  $\mathcal{F}(t)$  de la courbe à partir de ses  $n + 1$  points de contrôle  $P_i, i = 0, \dots, n$ .

**Exemple :**

L'algorithme de la figure 1-3 appliqué à partir des étiquettes  $\{0, 0, 0\}, \{0, 0, 1\}, \{0, 1, 1\}, \{1, 1, 1\}$  (extraites de la suite de 6 arguments  $[000111]$ ) permet d'obtenir le point  $\{t, t, t\}$ .

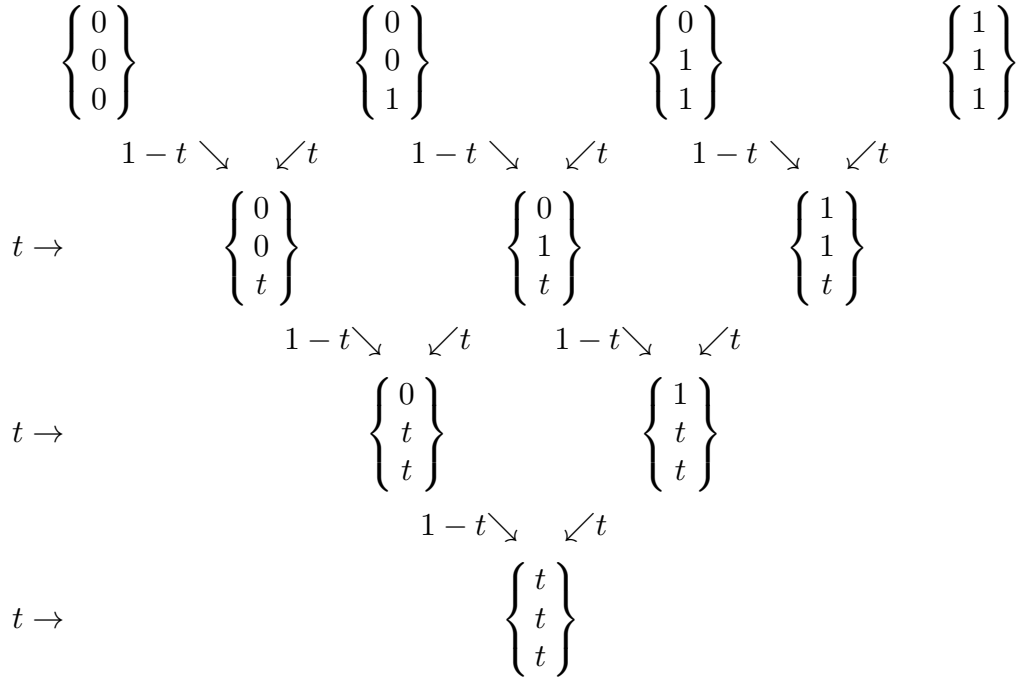


fig. 1-3

En considérant les différents "chemins" représentés sur le schéma, on peut exprimer le point  $\{t, t, t\}$  en fonction des 4 points initiaux.

$$\begin{aligned} \{t, t, t\} &= (1-t)^3\{0, 0, 0\} + 3t(1-t)^2\{0, 0, 1\} + 3t^2(1-t)\{0, 1, 1\} + t^3\{1, 1, 1\} \\ &= \sum_{i=0}^3 \{0^{[3-i]}, 1^{[i]}\} B_i^3(t) \end{aligned}$$

Or  $\{t, t, t\} = F(t) = \sum_{i=0}^3 P_i B_i^3(t)$ . On a donc

$$\sum_{i=0}^3 P_i B_i^3(t) = \sum_{i=0}^3 \{0^{[3-i]}, 1^{[i]}\} B_i^3(t)$$

entraîne l'identification  $P_i = \{0^{[3-i]}, 1^{[i]}\}$  pour  $i = 0, \dots, 3$

On en déduit donc que, dans l'univers des floraisons les 4 points de Bézier  $P_i$  ont pour étiquette  $\{0^{[3-i]}, 1^{[i]}\}$  et que l'algorithme de de Casteljau est précisément le processus d'évaluation de la valeur  $\{t, t, t\}$  de la floraison à partir des points  $\{0^{[3-i]}, 1^{[i]}\}$ .

Une courbe de degré  $n$  est engendrée à partir de  $n+1$  points dont les étiquettes comportent  $n$  arguments.

$$\{t^{[n]}\} = \sum_{i=0}^n \{0^{[n-i]}, 1^{[i]}\} B_i^n(t)$$



Les étiquettes des  $n + 1$  points de Bézier sont donc  $\{0^{[n-i]}, 1^{[i]}\}$ . Les coefficients de l'algorithme calculés à partir des étiquettes extraites de la suite de  $2n$  arguments  $[0 \dots 01 \dots 1]$  conduisent très exactement aux polynômes de Bernstein de degré  $n$ . La suite  $[0 \dots 01 \dots 1]$  sera donc associée à la base de Bernstein de degré  $n$  relativement à  $[0, 1]$ .

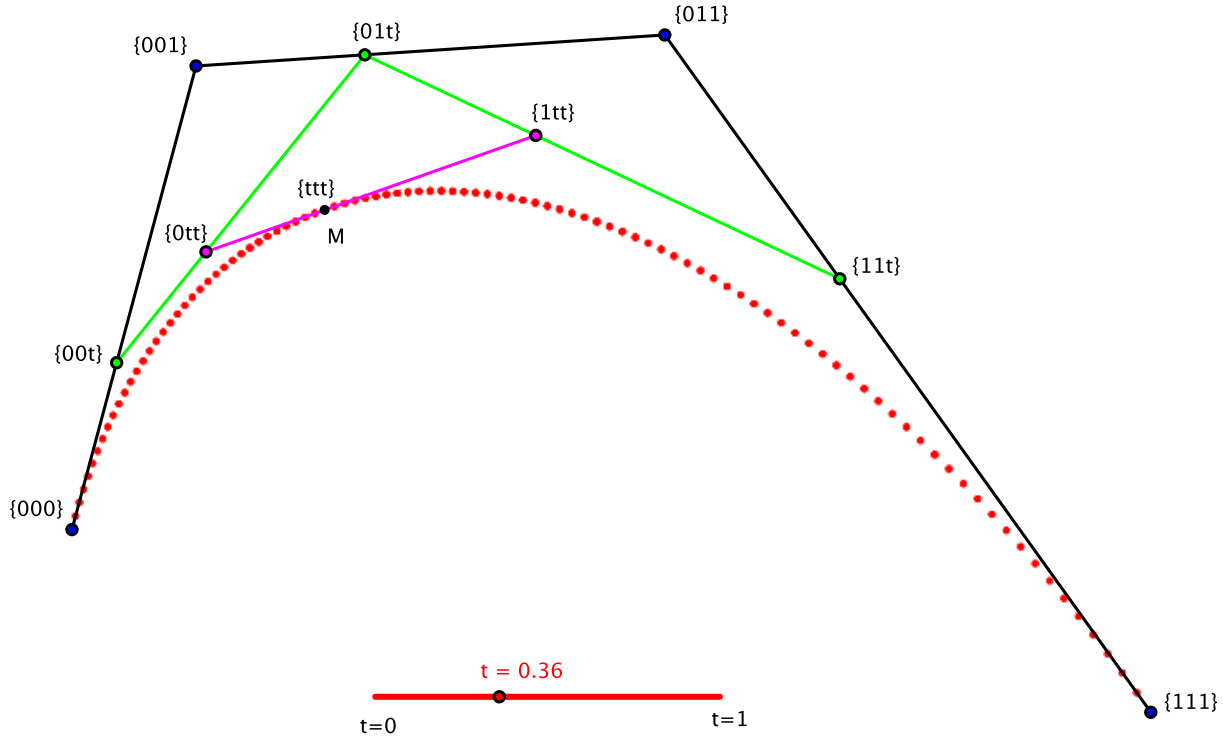


fig. 1-4

La courbe est engendrée point par point en appliquant l'algorithme de de Casteljau pour des valeurs de  $t$  dans l'intervalle  $[0; 1]$ . Ici avec un pas de  $0,01$ .

**Définition 1.11 : Algorithme de de Casteljau relativement à  $[a,b]$**

Soit  $\mathcal{F}$  une courbe de Bézier de degré  $n$  relativement à  $[a, b]$  et  $\phi$  la floraison associée. L'algorithme de calcul d'une floraison appliqué à partir des  $n + 1$  étiquettes consécutives  $\{a^{[n-i]}, b^{[i]}\}$  pour  $i = 0, \dots, n$  (extraites de la suite de  $2n$  arguments  $[a \dots ab \dots b]$ ) pour obtenir l'étiquette  $\{t^{[n]}\}$  est l'algorithme de de Casteljau relativement à  $[a, b]$ .

Toutes les combinaisons affines intervenant dans l'algorithme sont identiques. Elles sont du type :

$$\{\clubsuit, t\} = (1 - \alpha)\{\clubsuit, a\} + \alpha\{\clubsuit, b\}, \quad \text{avec } \alpha = \frac{t - a}{b - a} \text{ et } 1 - \alpha = \frac{b - t}{b - a},$$

♣ représentant un ensemble quelconque de  $n - 1$  arguments (ici il s'agit de répétitions des arguments  $a$  et  $b$ )

L'algorithme s'illustre dans le cas d'une cubique par :

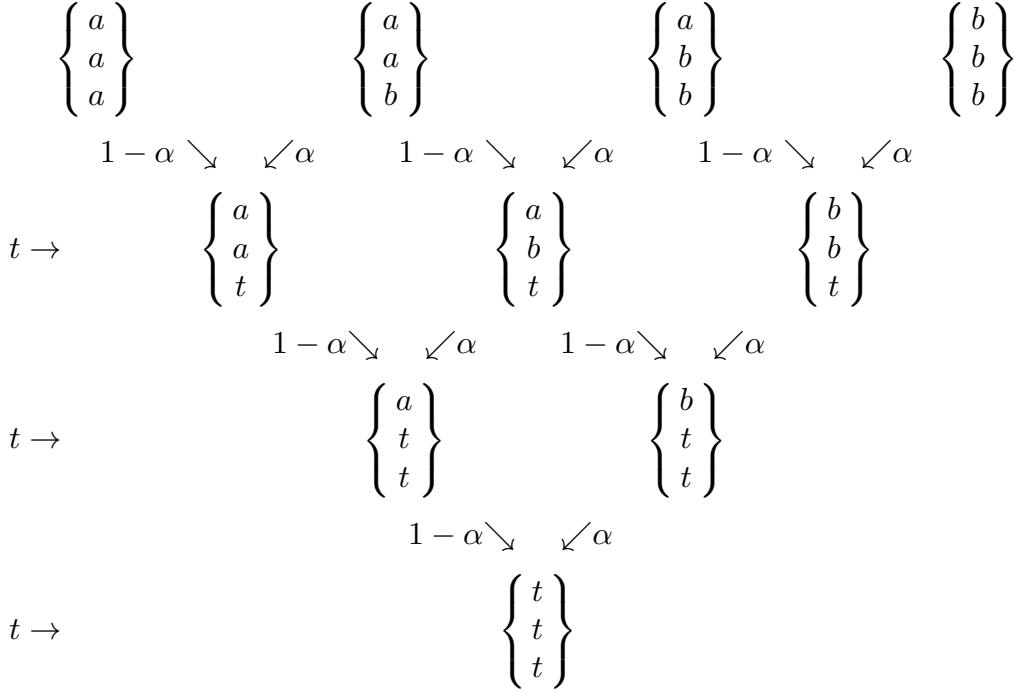


fig. 1-5

En considérant les "chemins" possibles sur le schéma de l'algorithme triangulaire on peut donc écrire

$$\{t, t, t, \} = \sum_{i=0}^3 \{a^{[3-i]}, b^{[i]}\} \binom{3}{i} \alpha^i (1 - \alpha)^{3-i}$$

En degré  $n$  cela se s'écrit :

$$\{t^n\} = \sum_{i=0}^n \{a^{[n-i]}, b^{[i]}\} \binom{n}{i} \alpha^i (1 - \alpha)^{n-i}$$

C'est-à-dire

$$\mathcal{F}(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n \left( \frac{t - a}{b - a} \right)$$

La suite  $[a \dots ab \dots b]$  de laquelle sont extraites les étiquettes  $\{a^{[n-i]}, b^{[i]}\}$  pour  $i = 0, \dots, n$  sera donc associée à la base de Bernstein de degrés  $n$  relativement à  $[a, b]$

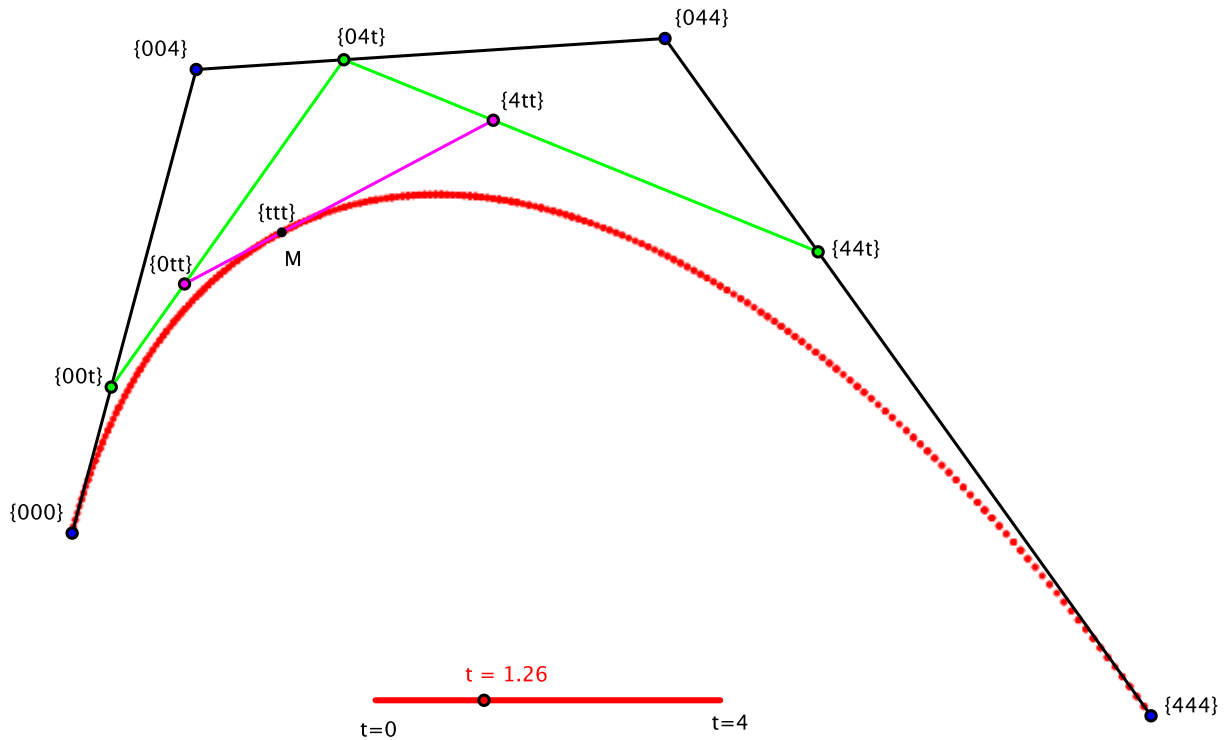


fig. 1-6

Ici le paramétrage est sur  $[0, 4]$  avec un pas de 0,01. La suite associée à la base de Bernstein correspondante est  $[000444]$

### 1.1.2.2 - Subdivision

#### Théorème de subdivision 1.12 :

Soit  $[a, c]$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $\mathcal{F}$  une courbe de Bézier de degré  $n$  relativement à  $[a, c]$  et  $\phi$  sa floraison associée.

Soit  $b$  un point quelconque de  $]a, c[$ . L'algorithme d'évaluation de  $\phi(b^{[n]})$  contient également les  $n + 1$  points de contrôle de  $\mathcal{F}$  relativement à  $[a, b]$  et les  $n + 1$  points de contrôle de  $\mathcal{F}$  relativement à  $[b, c]$ .

#### Preuve:

Les  $n + 1$  points de contrôle de  $\mathcal{F}$  relativement à  $[a, b]$  sont les étiquettes  $\phi(a^{[n-i]}, b^{[i]})$  (que l'on notera  $\{a^{[n-i]}, b^{[i]}\}$ ) pour  $i = 0, \dots, n$ .

Les  $n + 1$  points de contrôle de  $\mathcal{F}$  relativement à  $[b, c]$  sont les étiquettes  $\phi(b^{[n-i]}, c^{[i]})$  (que l'on notera  $\{b^{[n-i]}, c^{[i]}\}$ ) pour  $i = 0, \dots, n$ . ■

Le schéma ci-dessous illustre cette propriété pour une courbe de Bézier cubique (de degré 3).

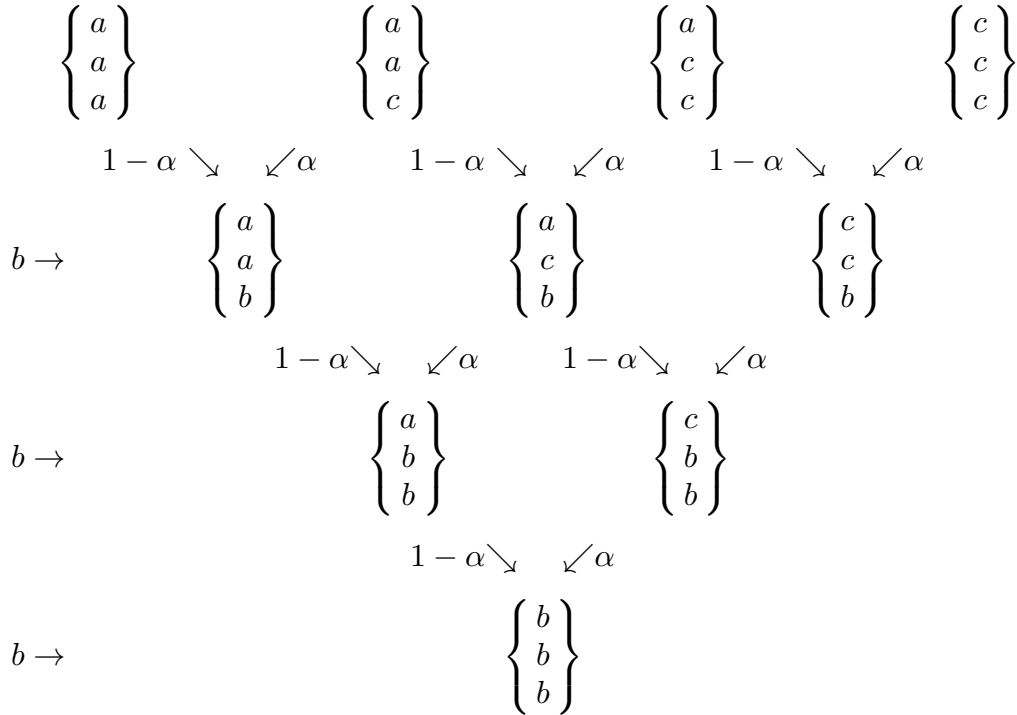


fig. 1-7

*Evaluation de  $\{b^{[3]}\}$  : les 4 points de contrôle de  $\mathcal{F}$  relativement à  $[a, c]$  se trouvent sur la première ligne. Les points de contrôle de  $\mathcal{F}$  relativement à  $[a, b]$  et  $[b, c]$  se trouvent sur les bords du schéma triangulaire.*

Toutes les combinaisons affines, identiques, sont du type :

$$\{\clubsuit, b\} = (1 - \alpha)\{\clubsuit, a\} + \alpha\{\clubsuit, c\}, \quad \text{avec } \alpha = \frac{b - a}{c - a} \text{ et } 1 - \alpha = \frac{c - b}{c - a},$$

**Exemple :**

Dans l'algorithme de la figure 1-7, le polygone de contrôle étiqueté à partir de la suite  $[aaacc]$  donne naissance aux deux polygones dont les points de contrôle sont extraits respectivement des suites  $[aaabbb]$  et  $[bbbccc]$  produisant deux arcs de courbe paramétrés respectivement sur  $[ab]$  et  $[bc]$ .

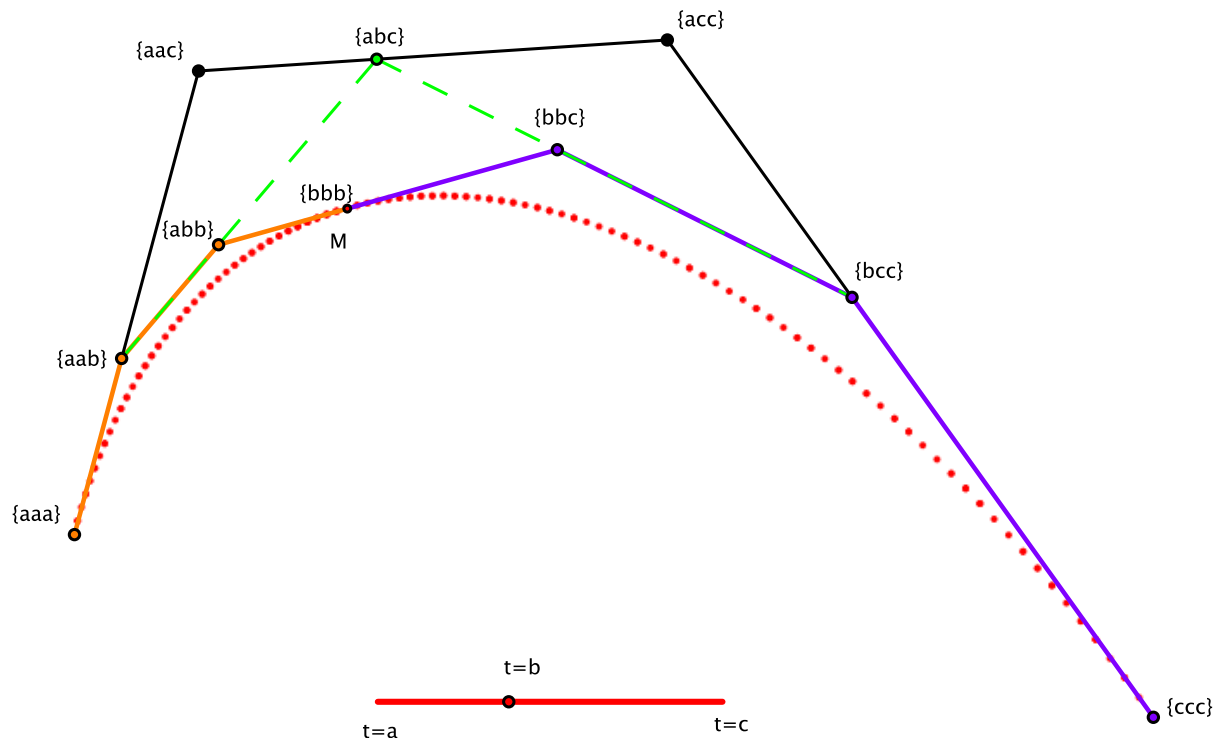


fig. 1-8

Après subdivision, deux nouveaux polygones de contrôle correspondant au paramétrage sur  $[a,b]$  (en orange) et sur  $[b,c]$  (en violet)

### Construction de la courbe par subdivision

Pour reconstruire la courbe  $\mathcal{F}$  sur  $I$ , une implémentation de l'algorithme de de Casteljau consiste en un calcul point par point en faisant varier le paramètre  $t$  dans  $[a,b]$  à chaque répétition de l'algorithme.

Une autre méthode, utilisant l'algorithme de subdivision, consiste à reconstituer la courbe point par point en construisant les points milieux. Ainsi, ce sont les points de contrôle qui sont mis à jour à chaque répétition de l'algorithme. Le coefficient  $\alpha$  restant fixé à  $\frac{1}{2}$

*Explication :*

Lorsque  $b$  se trouve au centre de  $[a,c]$ , c'est-à-dire  $b = \frac{a+c}{2}$ , les coefficients dans l'algorithme ci-dessus sont alors  $\alpha = \frac{\frac{a+c}{2} - a}{c - a} = \frac{1}{2}$ .

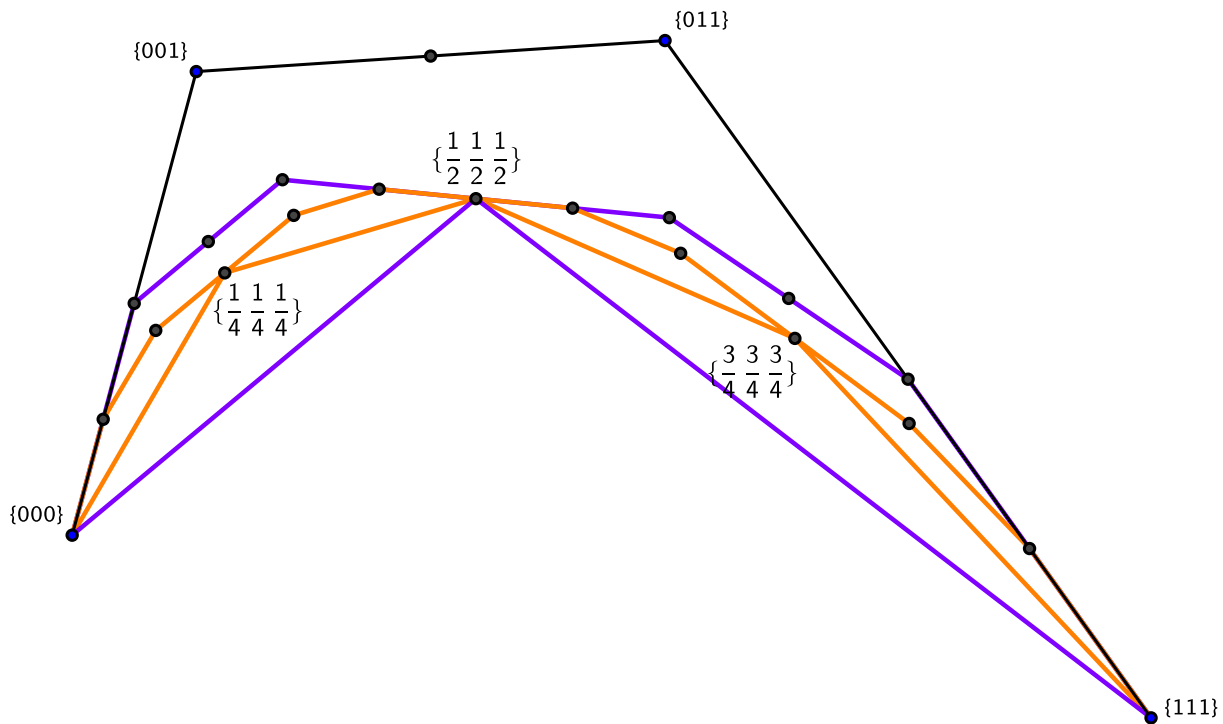


fig. 1-9

Le nombre de polygones de contrôle double à chaque étape. Ici les 4 polygones obtenus après deux étapes (en orange)

La méthode par subdivision a plusieurs avantages : le premier est de pouvoir régler la profondeur de l'algorithme en fonction des besoins. Lorsqu'on estime que le nombre de points obtenus est suffisant, on place une condition d'arrêt dans l'algorithme. Un second avantage est de pouvoir disposer, à chaque étape de l'algorithme, d'un polygone de contrôle toujours plus proche de la courbe et qui finit par en constituer une bonne approximation. Le polygone ainsi obtenu est interpolant : après l'étape  $n$ , il est tangent à la courbe pour chaque point d'abscisse  $t = \frac{i}{2^n}$  pour  $i = 0, \dots, 2^n$ .

### 1.1.2.3 - Élévation de degré

Le processus d'élévation de degré consiste à augmenter le nombre de points de contrôle d'une courbe. Cela peut être nécessaire pour la contrôler plus finement, ou parce que le polygone de contrôle ainsi obtenu est plus proche de la courbe. Cela peut également s'avérer nécessaire pour harmoniser les degrés de plusieurs arcs de courbe que l'on veut raccorder pour obtenir une courbe spline.

Une courbe polynomiale de degré  $n$  possède  $n + 1$  points de contrôle  $P_i$ , ( $i = 0, \dots, n$ ). Or elle peut également être considérée comme un élément de  $\mathbb{P}^{n+1}$  et, à ce titre, posséder

$n + 2$  points de contrôle  $\tilde{P}_i$ , ( $i = 0, \dots, n + 1$ ). La relation qui permet d'exprimer les points  $\tilde{P}_i$  en fonction des points  $P_i$  est bien connue depuis longtemps est un classique de CAO. La recherche de cette relation en utilisant l'outil des floraisons est une occasion de montrer la simplicité de cet outil :

**Notation :** Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  un  $n$ -uplet et  $f$  une forme polaire d'ordre  $n - 1$ . On notera  $f_{x_k}(x_1, \dots, x_n)$  la forme polaire d'ordre  $n - 1$  obtenue, à partir du  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n)$  en enlevant l'argument  $x_k$ .

**Propriété 1.13 :**

Soit  $F$  un polynôme de degré  $n$  et  $f$  sa forme polaire associée. Alors, la fonction  $\tilde{f}$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\tilde{f}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{n + 1} \sum_{i=1}^{n+1} f_{x_i}(x_1, \dots, x_{n+1}) \quad (1.3)$$

est la forme polaire d'ordre  $n + 1$  associée à  $F$ .

**Preuve :**

On montre que  $\tilde{f}$  vérifie les 3 propriétés caractéristiques des floraisons. La correspondance univoque entre un polynôme de degré  $n$  et sa floraison d'ordre  $n$  (*Blossoming Principle*) suffit alors pour affirmer que  $\tilde{f}$  est bien la  $n + 1$  floraison de  $F$ .

- La symétrie de  $\tilde{f}$  découle de celle de  $f$ .
- L'affinité se montre en écrivant, pour  $x_k = (1 - \alpha)a + \alpha b$ ,

$$f_{x_i}(x_1, \dots, x_{n+1}, x_k) = (1 - \alpha)f_{x_i}(x_1, \dots, x_{n+1}, a) + \alpha f_{x_i}(x_1, \dots, x_{n+1}, b) \text{ pour } i \neq k$$

$$\text{et } f_{x_k}(x_1, \dots, x_{n+1}) = (1 - \alpha)f_{x_k}(x_1, \dots, x_{n+1}) + \alpha f_{x_k}(x_1, \dots, x_{n+1})$$

- $\tilde{f}(t^{[n+1]}) = \frac{1}{n + 1} \sum_{i=1}^{n+1} f_{x_i}(t^{[n]}) = \frac{1}{n + 1} \sum_{i=1}^{n+1} F(t) = F(t)$



**Exemple :**

Soit  $f$  la forme polaire (d'ordre 3) associée à une fonction polynomiale  $F$  de degré 3. On lui associe, de manière unique, la forme polaire  $\tilde{f}$  d'ordre 4 définie par

$$\tilde{f}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{4} [f(x_1, x_2, x_3) + f(x_1, x_2, x_4) + f(x_1, x_3, x_4) + f(x_2, x_3, x_4)] \quad (1.4)$$

Soit  $\mathcal{F}$  une courbe de Bézier de degré 3 (relativement à  $[0, 1]$ ) et  $\phi$  sa floraison associée. On note  $P_i$  ( $i = 0, \dots, 3$ ) ses 4 points de contrôle. On cherche à déterminer les 5 points  $\tilde{P}_i$  qui contrôlent  $\mathcal{F}$  lorsqu'on la considère comme une courbe de Bézier de degré 4.

On note  $\tilde{\phi}$  sa floraison d'ordre 4 obtenue à partir de la relation (1.4) appliquée à chacune de ses composantes.

$$\tilde{\phi}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{4} [\phi(x_1, x_2, x_3) + \phi(x_1, x_2, x_4) + \phi(x_1, x_3, x_4) + \phi(x_2, x_3, x_4)] \quad (1.5)$$

Ses 4 points de Bézier se notent :

$$P_0 = \phi(0, 0, 0), P_1 = \phi(0, 0, 1), P_2 = \phi(0, 1, 1) \text{ et } P_3 = \phi(1, 1, 1),$$

Si l'on considère que cette cubique est un élément de  $\mathbb{P}^4$  les 5 nouveaux points de Bézier s'écrivent :

$$\tilde{P}_0 = \tilde{\phi}(0, 0, 0, 0), \tilde{P}_1 = \tilde{\phi}(0, 0, 0, 1), \tilde{P}_2 = \tilde{\phi}(0, 0, 1, 1), \tilde{P}_3 = \tilde{\phi}(0, 1, 1, 1), \tilde{P}_4 = \tilde{\phi}(1, 1, 1, 1).$$

La relation (1.5) donne :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_0 &= \tilde{\phi}(0, 0, 0, 0) = \frac{1}{4} \times 4\phi(0, 0, 0) = \phi(0, 0, 0) = P_0 \\ \tilde{P}_1 &= \tilde{\phi}(0, 0, 0, 1) = \frac{1}{4} \times [\phi(0, 0, 0) + 3\phi(0, 0, 1)] = \frac{1}{4}P_0 + \frac{3}{4}P_1 \\ \tilde{P}_2 &= \tilde{\phi}(0, 0, 1, 1) = \frac{1}{4} \times [2\phi(0, 0, 1) + 2\phi(0, 1, 1)] = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2 \\ \tilde{P}_3 &= \tilde{\phi}(0, 1, 1, 1) = \frac{1}{4} \times [3\phi(0, 1, 1) + \phi(1, 1, 1)] = \frac{3}{4}P_2 + \frac{1}{4}P_3 \\ \tilde{P}_4 &= \tilde{\phi}(1, 1, 1, 1) = \frac{1}{4} \times 4\phi(1, 1, 1) = \phi(1, 1, 1) = P_3 \end{aligned}$$



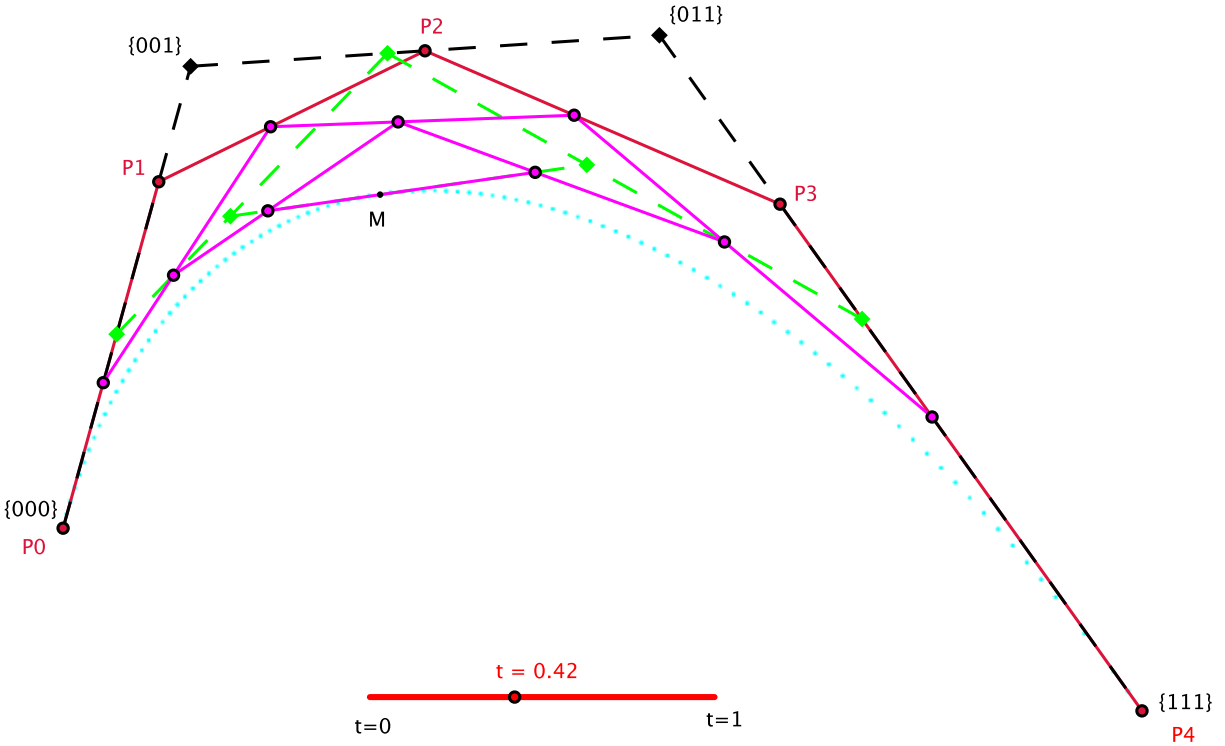


fig. 1-10

Le nouveau polygone de contrôle (en rouge) et les étapes de construction du point M (en violet)

**Propriété 1.14 :**

Si  $\mathcal{F}$  une courbe de Bézier de degré  $n$  relativement à  $[a, b]$  contrôlée par ses  $n + 1$  points de Bézier  $P_i$  alors  $\mathcal{F}$  est également contrôlée par les  $n + 2$  points de Bézier donnés par :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_0 &= P_0 \\ \tilde{P}_i &= \frac{n+1-i}{n+1}P_i + \frac{i}{n+1}P_{i-1} \quad i = 1, \dots, n \\ \tilde{P}_{n+1} &= P_n \end{aligned}$$

**Preuve :**

Soit  $\phi$  la floraison d'ordre  $n$  associée à  $\mathcal{F}$  et  $\tilde{\phi}$  sa floraison d'ordre  $n + 1$ . Les  $n + 1$  points de Bézier de  $\mathcal{F}$ , considérée comme une courbe polynomiale de degré  $n$ , s'écrivent :

$$P_i = \phi(a^{[n-i]}, b^{[i]}) = \{a^{[n-i]}, b^{[i]}\}; \quad i = 0, \dots, n$$

Les  $n + 2$  points de Bézier de  $\mathcal{F}$ , considérée comme une courbe polynomiale de degré  $n + 1$ , s'écrivent :

$$\tilde{P}_i = \tilde{\phi}(a^{[n+1-i]}, b^{[i]}) = \{a^{[n+1-i]}, b^{[i]}\}; \quad i = 0, \dots, n + 1$$

La relation (1.3) appliquée aux  $d$  composantes de  $\mathcal{F}$  permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_0 &= \tilde{\phi}(a^{[n+1]}) = \frac{1}{n+1}[(n+1)\phi(a^{[n]})] = \phi(a^{[n]}) = P_0 \\ \tilde{P}_i &= \tilde{\phi}(a^{[n+1-i]}, b^{[i]}) = \frac{1}{n+1}[(n+1-i)\phi(a^{[n-i]}, b^{[i]}) + i\phi(a^{[n+1-i]}, b^{[i-1]})] \\ &= \frac{n+1-i}{n+1}P_i + \frac{i}{n+1}P_{i-1} \quad i = 1, \dots, n \\ \tilde{P}_{n+1} &= \tilde{\phi}(b^{[n+1]}) = \frac{1}{n+1}[(n+1)\phi(b^{[n]})] = \phi(b^{[n]}) = P_n \end{aligned}$$

■

Le nouveau polygone, obtenu par un procédé *corner-cutting* est plus proche de la courbe lorsque  $t \in [a, b]$ . La méthode d'élévation de degré est un des procédés permettant l'approximation d'une courbe par son polygone de contrôle.

### 1.1.3 - Géométrie des courbes de Bézier

Les courbes de Bézier ont des propriétés géométriques qui les rendent très agréables à utiliser pour faire du *design* géométrique. En particulier la courbe "suit" la forme de son polygone de contrôle. Cela se traduit par des propriétés mathématiquement quantifiables comme le nombre d'intersections de la courbe avec une droite (ou un plan) qui est majoré par le nombre d'intersections de son polygone de contrôle avec cette même droite (ou plan). Ou encore la propriété de variation de la longueur qui énonce que la longueur de la courbe est inférieure à la longueur de son polygone de contrôle [Laurent & Mazure 2].

Le paragraphe suivant montre le lien entre l'écriture des étiquettes et les propriétés géométriques des courbes de Bézier. Un concept important dans la théorie des florisations est celui de *plan osculateur* à une courbe et, plus généralement de *variété osculatrice*. C'est par ce biais que pourront être définies les florisations associées à des courbes paramétrées non polynomiales.

### 1.1.3.1 - Plans osculateurs à une courbe paramétrée

#### Définition 1.15 : Courbe non dégénérée

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{E}$  un espace vectoriel de dimension  $n + 1$  de fonctions  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $\mathcal{F}$  une courbe paramétrée par  $\mathcal{E}$  définie sur  $I$ . On dit que  $\mathcal{F}$  est non dégénérée si  $\dim\{\mathcal{F}(t); t \in I\} = n$ .

#### Remarque 1.16 :

- 1) Lorsque  $\mathcal{E}$  est de dimension  $n + 1$ , une courbe paramétrée par  $\mathcal{E}$  non dégénérée est à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ .
- 2) Une courbe de Bézier  $\mathcal{F}$  de degré  $n$  est non dégénérée si et seulement si ses  $n + 1$  points de contrôle sont affinement indépendants ou si et seulement si les vecteurs  $\mathcal{F}'(a), \dots, \mathcal{F}^{(n)}(a)$  sont linéairement indépendants pour tout  $a \in I$ .

#### Définition 1.17 : Variété osculatrice

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{E}$  un espace vectoriel de dimension  $n + 1$  de fonctions  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $\mathcal{F}$  une courbe paramétrée par  $\mathcal{E}$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}^d$ . On note  $\Gamma = \{\mathcal{F}(t); t \in I\}$ . La variété osculatrice d'ordre  $k$  à  $\Gamma$  en  $\mathcal{F}(a)$  est définie par :

$$T^k(a) = \left\{ \mathcal{F}(a) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathcal{F}^{(i)}(a); \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}, \quad k = 1, \dots, d - 1$$

En particulier :

$$T^0(a) = \mathcal{F}(a)$$

$$T^1(a) = \{ \mathcal{F}(a) + \lambda \mathcal{F}'(a); \lambda \in \mathbb{R} \} \text{ est la tangente à } \Gamma \text{ en } \mathcal{F}(a)$$

$$T^2(a) = \{ \mathcal{F}(a) + \lambda_1 \mathcal{F}'(a) + \lambda_2 \mathcal{F}''(a); \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \} \text{ est le plan osculateur à } \Gamma \text{ en } \mathcal{F}(a)$$

$$T^{n-1}(a) \text{ est l'hyperplan osculateur à } \Gamma \text{ en } \mathcal{F}(a).$$

#### Propriété 1.18 :

Avec les notations de la définition 1.17, si  $\mathcal{F}$  est non dégénérée alors  $T^n(a)$  est un sous-espace affine de dimension  $n$ .

Une courbe polynomiale  $\mathcal{F}$  de degré  $n$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}^d$  munie de sa floraison  $\phi$  induit un étiquetage des points de  $\mathbb{R}^d$ .

#### Proposition 1.19 :

Avec les notations ci-dessus, lorsque  $\mathcal{F}$  est non dégénérée alors  $\phi$  est injective.

La conséquence de la proposition 1.19 est que l'étiquetage des points de  $Im\phi$  est unique.

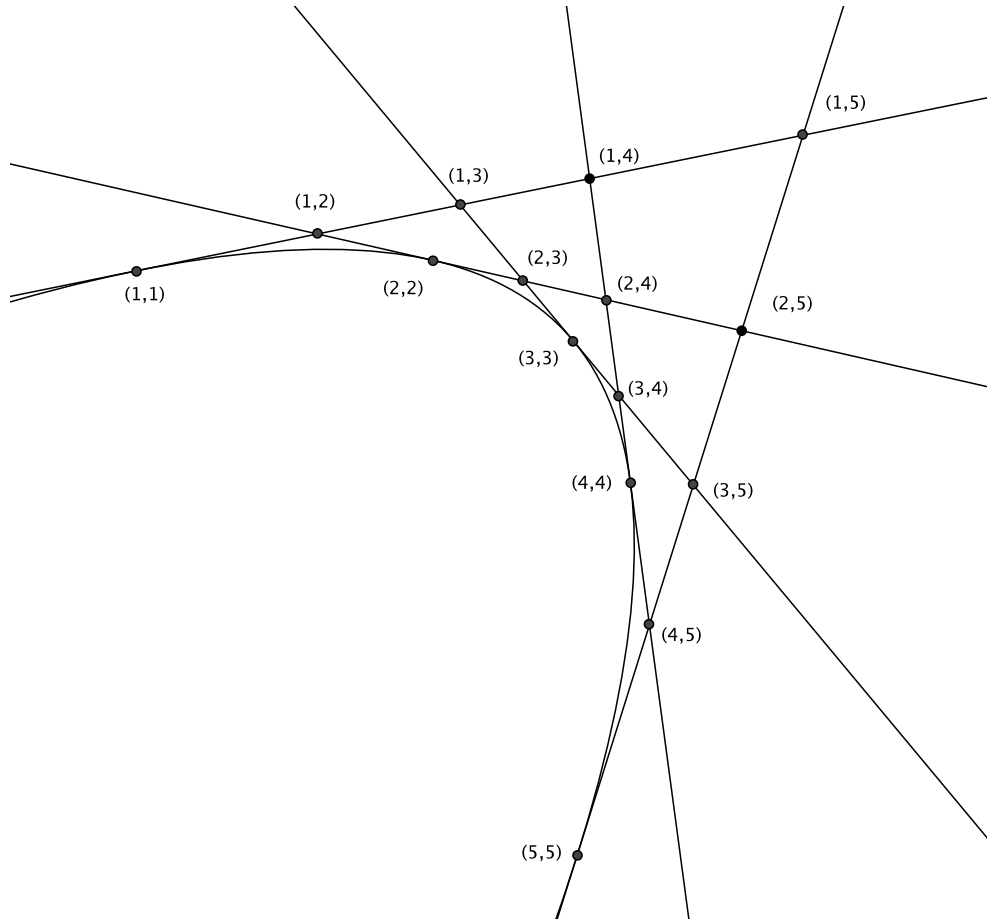


fig. 1-11

Une parabole dans  $\mathbb{R}^2$  sépare le plan en deux parties. Seuls les points de l'enveloppe de la parabole possèdent une étiquette.

Les variétés osculatrices se définissent alors, avec les notations des florissons, par :

- $T^0(a) = \mathcal{F}(a) = \{a^{[n]}\}$
- $T^1(a) = \{\{a^{[n-1]}, t\}, t \in \mathbb{R}\}$ .
- $T^k(a) = \{\{a^{[n-k]}, t_1, \dots, t_k\}, t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}\}; \quad k = 2, \dots, n-1$  (1.6)

### Conséquences 1.20 :

Lorsque  $\mathcal{F}$  est une courbe polynomiale de degré  $n$  dégénérée, cela entraîne plusieurs propriétés sur ses plans osculateurs :

- 1) L'intersection de  $n$  hyperplans osculateurs est un sous espace affine de dimension 0.

$\bigcap_{i=1}^n T^{n-1}(a_i)$  est donc un point. C'est le point  $\{a_1, \dots, a_n\}$ .

Plus généralement, l'intersection d'hyperplans osculateurs dont la somme des dimensions vaut  $n$  est toujours un sous-espace affine de dimension 0, c'est-à-dire un point de  $\mathbb{R}^n$ .

2) Tout point étiqueté par  $\phi$  est défini en terme d'intersection de variété osculatrice à  $\mathcal{F}$ . En particulier, les points de Bézier sont définis par  $\{a^{[n]}, b^{[n-i]}\} = T^{[n]}(a) \cap T^{[n-i]}(b)$  pour  $i = 0, \dots, n$ .

**Propriété 1.21 :**

Soit  $\mathcal{F}$  une courbe polynomiale de degré  $n$  non dégénérée et  $\phi$  sa forme polaire associée.

1) L'ensemble des points d'étiquette  $\{a_1, \dots, a_{n-k}, t_1, \dots, t_k\}, t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$ , est le sous-espace affine de dimension  $k$  intersection des  $n - k$  hyperplans osculateurs

$$T^{n-1}(a_1), \dots, T^{n-1}(a_{n-k}).$$

2) L'ensemble des points d'étiquette  $\{a_1^{[\mu_1]}, \dots, a_m^{[\mu_m]}, t_1, \dots, t_k\}, t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$

avec  $\sum_{i=1}^m \mu_i = n - k$  est le sous-espace affine de dimension  $k$  intersection des  $m$  variétés osculatrices  $T^{n-\mu_1}(a_1), \dots, T^{n-\mu_m}(a_m)$

**Propriété 1.22 :**

Soit  $\mathcal{F}$  une courbe de Bézier de degré  $n$  non dégénérée relativement à  $[a, b]$  et  $\phi$  sa floraison associée. On note  $P_i, i = 0, \dots, n$  ses points de Bézier.

Pour tout  $1 \leq k \leq n$ ,  $T^k(a)$  (resp.  $T^k(b)$ ) est le sous-espace affine engendré par les points  $P_0, \dots, P_k$  (resp.  $P_{n-k}, \dots, P_n$ )

**Preuve :** Les points de Bézier de  $\mathcal{F}$  s'écrivent  $P_i = \{a^{[n]}, b^{[n-i]}\}$  ( $i = 0, \dots, n$ ).

D'après (1.6),  $P_i \in T^k(a)$  pour  $0 \leq i \leq k$ . Donc  $T^k(a)$ , de dimension  $k$  est bien engendré par les  $k + 1$  points, affinement indépendants,  $P_0, \dots, P_k$ . ■

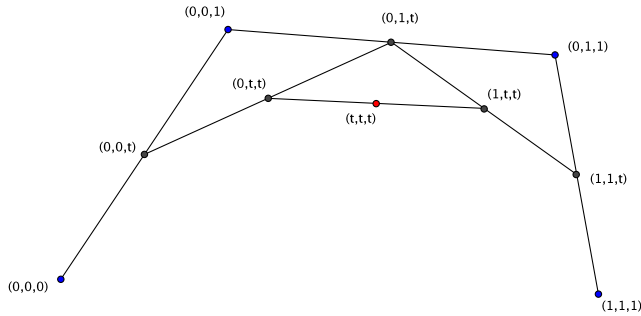


fig. 1-12

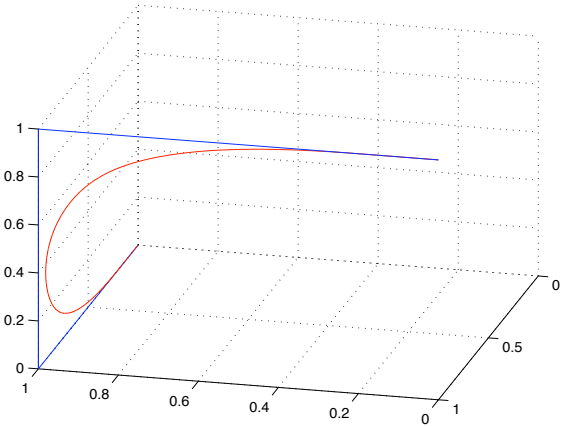


fig. 1-13

Une cubique peut se représenter dans  $\mathbb{R}^2$  (fig. 1-12) ou dans  $\mathbb{R}^3$  (fig. 1-13). Dans le premier cas la cubique est dégénérée. L'étiquetage des points de contrôle montre clairement qu'ils ne sont, dans le cas non dégénéré, pas coplanaires :

En reprenant les notations  $P_0 = \{0,0,0\}$ ,  $P_1 = \{0,0,1\}$ ,  $P_2 = \{0,1,1\}$ ,  $P_3 = \{1,1,1\}$ .

On constate que :

- $P_0, P_1, P_2$  (resp.  $P_1, P_2, P_3$ ) sont sur le plan tangent à  $\Gamma$  en  $P_0$  (resp.  $P_3$ ).
- $P_0, P_1$  (resp.  $P_2, P_3$ ) sont sur la tangente à  $\Gamma$  en  $P_0$  (resp.  $P_3$ ).
- les droites  $(P_0P_1)$  et  $(P_2, P_3)$  ne sont pas sécantes dans  $\mathbb{R}^3$ . Car s'il existait un point d'intersection il devrait avoir un étiquetage de la forme  $\{0,0,a\}$  et  $\{1,1,b\}$ , ce qui est impossible.

### 1.1.3.2 - Propriétés des courbes de Bézier

#### Définition 1.23 : Enveloppe convexe de $\mathbb{R}^d$

Soit  $\mathcal{A}$  un espace affine de dimension  $d$ . Soit  $\{P_i\}_{i=0,\dots,n}$  un ensemble de points de  $\mathcal{A}$ .

L'enveloppe convexe de  $\{P_i\}_{i=0,\dots,n}$  est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes de points  $P_i$ .

#### Propriété 1.24 :

Soit  $\mathcal{F}$  une courbe de Bézier de degré  $n$  dans  $\mathbb{R}^d$  relativement à  $[a,b]$  et  $\{P_i\}_{i=0,\dots,n}$  ses points de Bézier.

1) Enveloppe convexe :

$\forall t \in [a,b]$ , la courbe est entièrement contenue dans l'enveloppe convexe de son polygone de contrôle.

2) Tangence aux extrémités

- $\mathcal{F}(a) = P_0$  et  $\mathcal{F}(b) = P_n$
- pour  $k = 1, \dots, n - 1$ ,  $\mathcal{F}$  est tangente en  $a$  (resp.  $b$ ) au sous-espace affine de dimension  $k$  engendré par les points  $P_0, \dots, P_k$  (resp.  $P_{n-k}, \dots, P_n$ ). On suppose ici que les  $n + 1$  points de Bézier de la courbe sont affinement indépendants.

3) Symétrie

La courbe de Bézier  $\mathcal{F}$  de degré  $n$  dans  $\mathbb{R}^d$  relativement à  $[a, b]$ . est la même que la courbe de Bézier  $\tilde{\mathcal{F}}$  de degré  $n$  dans  $\mathbb{R}^d$  relativement à  $[b, a]$  mais parcourue dans l'autre sens.

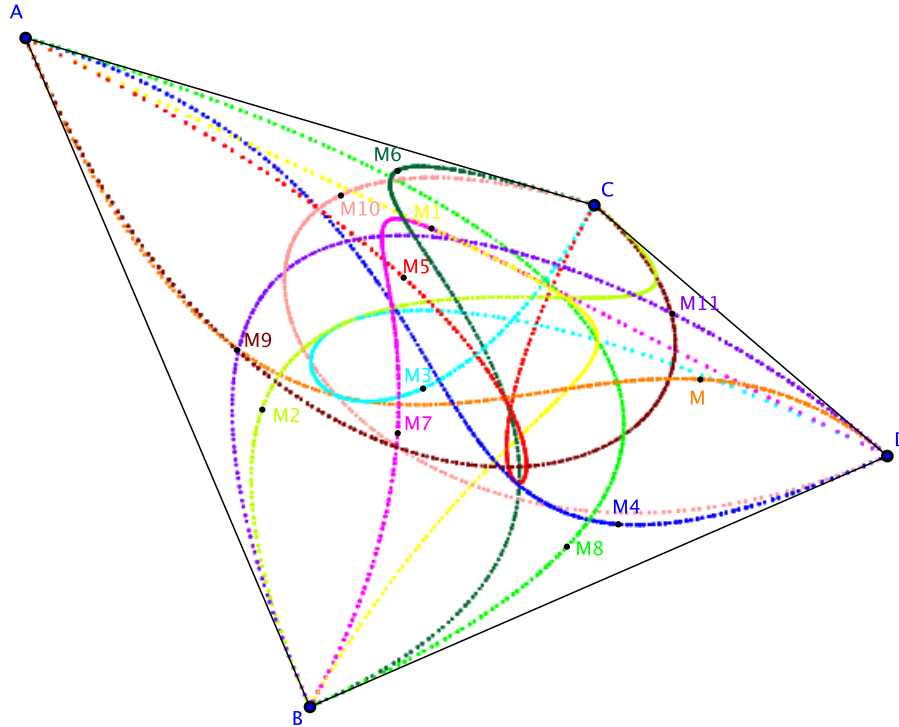


fig. 1-14

La figure ci-dessus illustre la propriété de l'enveloppe convexe : Les courbes représentées sont les 12 possibilités de courbes cubiques contrôlés, dans la base de Bernstein, par les points  $A, B, C$  et  $D$ .

$M = [A B C D]$ ;  $M1 = [B C D A]$ ;  $M2 = [C D A B]$ ;  $M3 = [D A B C]$ ;  $M4 = [A C B D]$ ;  
 $M5 = [C B D A]$ ;  $M6 = [B D A C]$ ;  $M7 = [D A C B]$ ;  $M8 = [A C D B]$ ;  $M9 = [C D B A]$ ;  
 $M10 = [D B A C]$ ;  $M11 = [B A C D]$

Pour se représenter la propriété de l'enveloppe convexe dans  $\mathbb{R}^3$ , on considère que  $ABCD$  représente un tétraèdre de  $\mathbb{R}^3$ .

**Preuve de la propriété 1.24 :**

- 1) On considère la floraison  $\phi$  associée à  $\mathcal{F}$ . D'après la définition 1-11, chaque point  $\{t^{[n]}\}$  de la courbe est obtenu par combinaisons affines des points de Bézier  $\{a^{[n-i]}, b^{[i]}\}$  pour  $i = 0, \dots, n$  avec les coefficients  $\alpha = \frac{t-a}{b-a}$ . Or lorsque  $a \leq t \leq b$  on a  $0 \leq \frac{t-a}{b-a} \leq 1$ . Donc  $\{t^{[n]}\}$  est une combinaison convexe des points de Bézier  $\{a^{[n-i]}, b^{[i]}\}$ .
- 2) • on a bien  $\mathcal{F}(a) = \{a^{[n]}\} = P_0$  et  $\mathcal{F}(b) = \{b^{[n]}\} = P_n$ 
  - les points  $P_0, \dots, P_k$  (resp.  $P_{n-k}, \dots, P_n$ ) engendrent le sous-espace  $T^k(a)$  (resp.  $T^k(b)$ ) (Propriété 1.22)
- 3) On pose  $\tilde{\mathcal{F}}(t) = \mathcal{F}(a+b-t)$ . En remplaçant  $t$  par  $a+b-t$  dans l'algorithme d'évaluation (illustré fig. 1-E), on obtient  $\alpha(a+b-t) = 1 - \alpha(t)$  et le polynôme  $[P_0, \dots, P_n]$  devient  $[P_n, \dots, P_0]$ . ■

### 1.1.3.3 - Raccords

**Proposition 1.25 :**

Soient  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  deux courbes polynomiales de degré  $n$  définies respectivement sur  $[a, b]$  et  $[b, c]$ . On note  $\phi$  et  $\psi$  leurs floraisons associées. Les deux courbes possèdent un raccord  $\mathcal{C}^k$  si et seulement si

$$\phi(b^{[n-k]}, t_1, \dots, t_k) = \psi(b^{[n-k]}, t_1, \dots, t_k) \quad t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$$

Cette relation se traduit de deux façons :

- 1) Géométriquement, cela signifie que les variétés osculatrices pour le paramètre  $t = b$  des courbes  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont les mêmes sous-espaces jusqu'à l'ordre  $k$ .
- 2) Algorithmiquement, les étiquetages des points de  $\mathbb{R}^n$  induits respectivement par les courbes  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  coïncident sur ces variétés osculatrices.

**Application au raccord de deux cubiques de  $\mathbb{R}^3$**

Soit  $\mathcal{F}$  (resp.  $\mathcal{G}$ ) une courbe de Bézier de degré 3 relativement à  $[a, b]$  (resp.  $[b, c]$ ). On note  $\phi$  (resp.  $\psi$ ) sa floraison associée et  $P_0, P_1, P_2, P_3$  (resp.  $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3$ ) ses points de contrôle. La traduction géométrique des niveaux de raccord est la suivante :

- raccord  $\mathcal{C}^0$ :  $\psi(b, b, b) = \phi(b, b, b)$
- raccord  $\mathcal{C}^1$ :  $\psi(b, b, t) = \phi(b, b, t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$

En particulier pour  $t = b$  on retrouve la condition  $P_3 = Q_0$  et pour  $t = c$ , le point  $Q_1$  se calcule à partir de  $P_3$  et  $P_2$  grâce à l'algorithme de la figure 1-15.



$$\begin{array}{ccc}
P_2 & & P_3 \\
\left\{ \begin{array}{c} a \\ b \\ b \end{array} \right\} & & \left\{ \begin{array}{c} b \\ b \\ b \end{array} \right\} \\
& \frac{b-c}{b-a} \searrow \quad \swarrow \frac{c-a}{b-a} & \\
c \rightarrow & \left\{ \begin{array}{c} b \\ b \\ c \end{array} \right\} = Q_1 &
\end{array}$$

fig. 1-15

$$\begin{aligned}
\psi(b, b, c) &= \frac{c-a}{b-a} \phi(b, b, b) + \frac{b-c}{b-a} \phi(b, b, a) \\
\iff Q_1 &= \frac{c-a}{b-a} P_3 + \frac{b-c}{b-a} P_2
\end{aligned}$$

• raccord  $\mathcal{C}^2$ :  $\psi(b, t_1, t_2) = \phi(b, t_1, t_2)$  pour tout  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

En particulier pour  $t_1 = t_2 = b$  on retrouve la condition  $\mathcal{C}^0$ ; pour  $t_1 = b$  et  $t_2 = c$  on retrouve la condition  $\mathcal{C}^1$ , pour  $t_1 = t_2 = c$  le point  $Q_2$  se calcule à partir de  $P_3, P_2$  et  $P_1$  grâce à l'algorithme :

$$\begin{array}{ccc}
P_1 & P_2 & P_3 \\
\left\{ \begin{array}{c} a \\ a \\ b \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} a \\ b \\ b \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} b \\ b \\ b \end{array} \right\} \\
& \frac{b-c}{b-a} \searrow \quad \swarrow \frac{c-a}{b-a} & \frac{b-c}{b-a} \searrow \quad \swarrow \frac{c-a}{b-a} \\
c \rightarrow & \left\{ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} b \\ b \\ c \end{array} \right\} \\
& \frac{b-c}{b-a} \searrow \quad \swarrow \frac{c-a}{b-a} & \\
c \rightarrow & \left\{ \begin{array}{c} b \\ c \\ c \end{array} \right\} = Q_2 &
\end{array}$$

fig. 1-16

$$\psi(b, c, c) = \frac{(c-a)^2}{(b-a)^2} \phi(b, b, b) + 2 \frac{(c-a)(b-c)}{(b-a)^2} \phi(a, b, b) + \frac{(b-c)^2}{(b-a)^2} \phi(b, a, a)$$

$$\iff Q_2 = \frac{(c-a)^2}{(b-a)^2}P_3 + 2\frac{(c-a)(b-c)}{(b-a)^2}P_2 + \frac{(b-c)^2}{(b-a)^2}P_1$$

### 1.1.3.4 - Dérivées

Les manipulations de floraisons produisent des relations entre l'écriture des arguments dans les étiquettes et les propriétés géométriques des courbes (raccords, variétés osculatrices, ...). En analyse ces propriétés sont liées à la notion de dérivée. Cette notion se traduit elle-aussi en terme de floraisons.

#### Proposition 1.26 : Forme polaire de fonctions dérivées

Soit  $F$  une fonction polynomiale de degré  $n$  et soit  $f$  sa forme polaire associée. La fonction dérivée  $F'$  de  $F$  est une fonction polynomiale de degré  $n-1$  et sa forme polaire  $f^{[1]}$  est donnée par :

$$f^{[1]}(t_1, \dots, t_{n-1}) = \frac{n}{b-a} [f(t_1, \dots, t_{n-1}, b) - f(t_1, \dots, t_{n-1}, a)], \text{ pour tout } a, b, a \neq b$$

#### Floraison d'une courbe dérivée

En appliquant la relation de la proposition 1.26 aux  $d$  composantes d'une courbe polynomiale de degré  $n$ , elle devient

$$\phi^{[1]}(t_1, \dots, t_{n-1}) = \frac{n}{b-a} [\phi(t_1, \dots, t_{n-1}, b) - \phi(t_1, \dots, t_{n-1}, a)], \text{ pour tout } a, b, a \neq b \quad (1.7)$$

#### Application aux cubiques de $\mathbb{R}^3$

La relation (1.7) permet d'exprimer la dérivée d'une courbe de Bézier en fonction des points de Bézier

$$\mathcal{F}'(t) = \phi^{[1]}(t, t) = \frac{3}{b-a} [\phi(t, t, b) - \phi(t, t, a)] \quad (1.8)$$

Et donc

$$\mathcal{F}'(a) = \phi^{[1]}(a, a) = \frac{3}{b-a} [\phi(a, a, b) - \phi(a, a, a)] = \frac{3}{b-a} (P_1 - P_0),$$

$$\text{et } \mathcal{F}'(b) = \frac{3}{b-a} [\phi(b, b, b) - \phi(b, b, a)] = \frac{3}{b-a} (P_3 - P_2),$$

Puis, en appliquant (1.8) à (1.7) :

$$\mathcal{F}''(t) = \phi^{[2]}(t) = \frac{6}{(b-a)^2} [\phi(t, b, b) - 2\phi(t, a, b) + \phi(t, a, a)] \quad (1.9)$$

Et donc

$$\mathcal{F}''(a) = \frac{6}{(b-a)^2} [\phi(a, b, b) - 2\phi(a, a, b) + \phi(a, a, a)] = \frac{6}{(b-a)^2} (P_2 - 2P_1 + P_0)$$

$$\mathcal{F}''(b) = \frac{6}{(b-a)^2} [\phi(a, b, b) - 2\phi(a, a, b) + \phi(a, a, a)] = \frac{6}{(b-a)^2} (P_2 - 2P_1 + P_0)$$

## 1.2 - Bases

L'algorithme d'évaluation d'une floraison (théorème 1.9) appliqué à une suite de  $2n$  arguments  $[a, \dots, a, b, \dots, b]$ , ( $a \neq b$ ) pour calculer la valeur  $\{t^{[n]}\}$  est exactement l'algorithme de de Casteljau (Propriété 1.10). C'est-à-dire le calcul d'une valeur d'un polynôme exprimé dans la base de Bernstein (ou le calcul des coordonnées d'un point d'une courbe de Bézier lorsqu'on se place dans  $\mathbb{R}^d$ ).

Le cas plus général de l'algorithme d'évaluation appliqué à une suite croissante  $[t_1, \dots, t_{2n}]$  (avec  $t_n \neq t_{n+1}$ ) pour calculer la valeur  $\{t^{[n]}\}$  a également un équivalent algorithmique : c'est l'algorithme de de Boor. Il s'agit du calcul d'une valeur d'un polynôme exprimé dans une base normalisée totalement positive. Ces bases, que nous noterons par l'ensemble ordonné  $[t_1, \dots, t_{2n}]$  ( $t_n \neq t_{n+1}$ ) des arguments qui les caractérisent et dont sont extraites les étiquettes de l'algorithme seront désignées ici sous le terme de *base de de Boor*.

Nous verrons que ce que nous appelons *base de de Boor* sont en fait des restrictions à l'intervalle  $[t_k, t_{k+1}]$  de base B-spline.

### 1.2.1 - Bases de Bernstein

On rappelle ici comment se calculent les polynômes de Bernstein à l'aide des floraisons. Et l'on présente l'avantage que cela représente pour la démonstration de ses propriétés qui s'écrit alors très simplement.

Soit  $(B_0^n, \dots, B_n^n)$  une base de Bernstein de degré  $n$  relativement à  $[a, b]$ . Un polynôme  $F$  exprimé dans cette base aura pour écriture :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad F(t) = \sum_{i=0}^n a_i B_i^n(t)$$

Pour une base donnée, la suite  $[a_0 \dots a_n]$  de réels est donc caractéristique de  $F$ .

Dans cette base,  $B_k^n(t) = \sum_{i=0}^n \delta_{ik} B_i^n(t)$  donc  $B_k^n$  se note  $[0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$  (1 à la  $k+1$ -ième place).

**Exemple 1 :**

Les polynômes de Bernstein relativement à  $[0, 1]$  s'écrivent

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

On note  $b_i^n$  la floraison associée.

L'algorithme d'évaluation des polynômes de Bernstein de degré 2 est représenté par le schéma triangulaire ci-dessous. Il permet de retrouver l'écriture algébrique des trois polynômes.

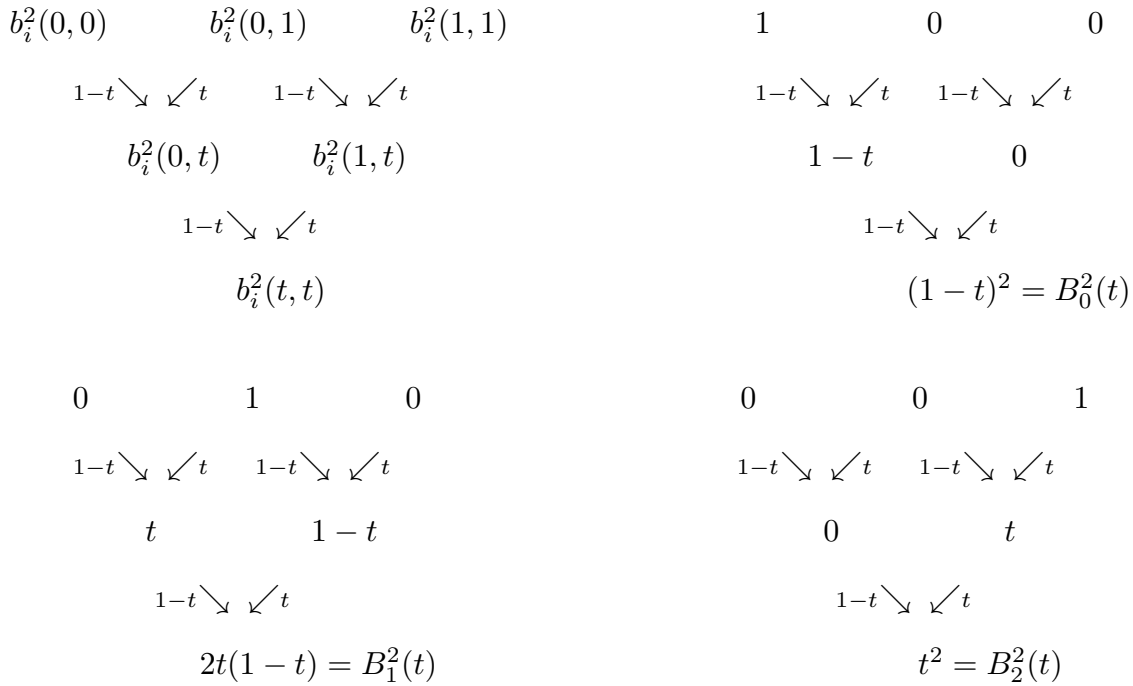


fig. 1-17

Le schéma en haut à gauche donne la floraison qui illustre la construction de l'algorithme. Les 3 autres schémas montrent un fonctionnement de l'algorithme : en affectant les valeurs d'entrée, on obtient les polynômes de base.

Dans les schémas de la figure 1-17, les polynômes de Bernstein sont notés par la suite de leurs valeurs d'entrée dans l'algorithme d'évaluation :

$$B_0^2 = [100], \quad B_1^2 = [010], \quad B_2^2 = [001]$$

On rappelle que la suite des  $2n$  arguments dont sont extraites les  $n + 1$  étiquettes consécutives est caractéristique de la base utilisée pour définir le polynôme. Dans l'exemple

1 il s'agit de la base de Bernstein de degré 2 relativement à  $[0, 1]$  (notée  $[0011]$ ), dans l'exemple 2 il s'agit de la base de Bernstein de degré 2 relativement à  $[a, b]$  (notée  $[aabb]$ ).

**Exemple 2 :**

L'exemple suivant donne la représentation algorithmique des polynômes de Bernstein de degrés 2 relativement à  $[a, b]$ .

L'algorithme d'évaluation se schématise de la façon suivante :

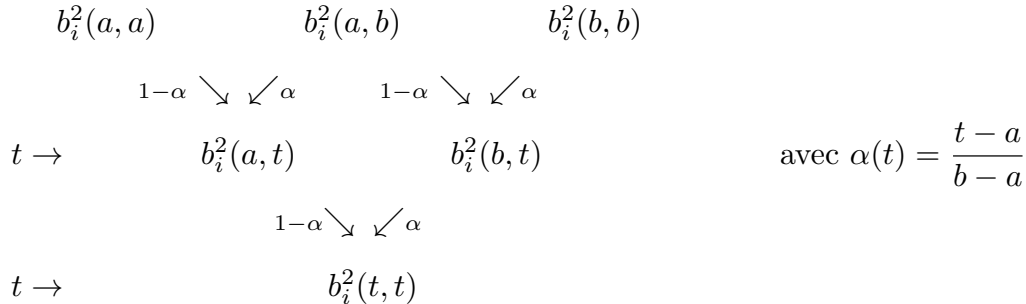


fig. 1-18

On a donc :

$$B_0^2(t) = [100] = (1-\alpha(t))^2, \quad B_1^2(t) = [010] = 2\alpha(t)(1-\alpha(t)), \quad B_2^2(t) = [001] = \alpha^2(t)$$

**Propriété 1.27 :**

Les fonctions  $B_i^n$ ,  $i = 0, \dots, n$  sont les polynômes de Bernstein de degré  $n$ . Ils vérifient les propriétés suivantes :

1) Positivité sur  $[a, b]$

$$\forall t \in [a, b] \quad 0 \leq B_i^n(t) \leq 1 \quad i = 0, \dots, n$$

En particulier,

pour  $t = a$ , on a  $B_0^n(a) = 1$  et  $B_i^n(a) = 0$  pour  $i = 1, \dots, n$ .

pour  $t = b$ , on a  $B_n^n(b) = 1$  et  $B_i^n(b) = 0$  pour  $i = 0, \dots, n-1$

2) Normalisation

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$$

3) Récurrence

$$B_0^n(t) = (1 - \alpha(t))B_0^{n-1}(t)$$

$$B_i^n(t) = (1 - \alpha(t))B_i^{n-1}(t) + \alpha(t)B_{i-1}^{n-1}(t) \quad i = 0, \dots, n - 1$$

$$B_n^n(t) = \alpha(t)B_{n-1}^{n-1}(t)$$

4) Symétrie

$$B_i^n(a + b - t) = B_{n-i}^n(t)$$

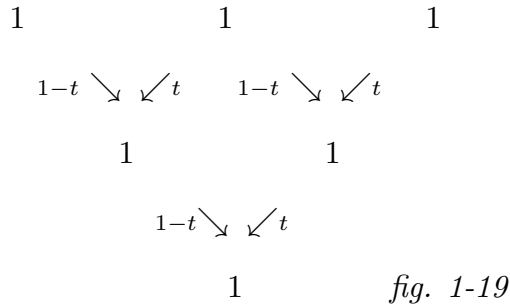
5) Précision linéaire

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \sum_{i=0}^n \frac{i}{n} B_i^n(t) = t$$

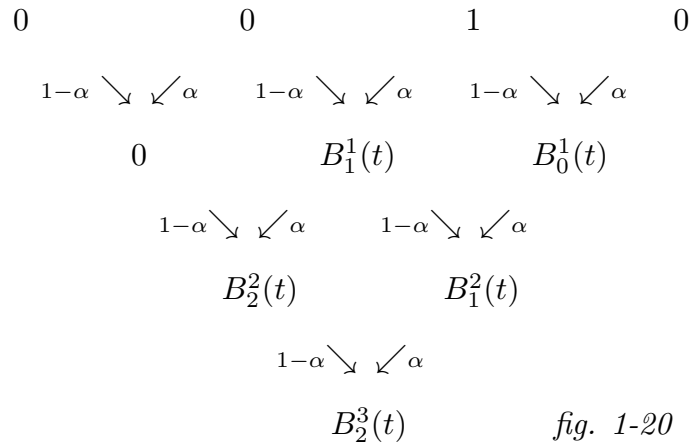
**Preuve :**

1) Chaque fonction  $B_i^n(t)$  est obtenue par une suite de combinaisons convexes (lorsque  $a \leq t \leq b$ ) de 0 et de 1.

2) Cette propriété est caractéristique du fait que l'algorithme utilise une suite de combinaisons affines.  $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = [1, \dots, 1]$  dans la base de Bernstein. Le schéma triangulaire d'évaluation donne le résultat. Ci dessous une illustration pour  $n = 2$  :



3) Immédiat en regardant le schéma triangulaire. Ci-dessous une illustration avec  $B_2^3(t)$



4) En remplaçant  $t$  par  $a + b - t$  dans l'algorithme d'évaluation, on obtient  $\alpha(a + b - t) = 1 - \alpha(t)$  et le polynôme  $[0, \dots, 1, \dots, 0]$  (1 en  $i+1$ -ième position) s'inverse pour devenir  $[0, \dots, 1, \dots, 0]$  (1 en  $n - i + 1$ -ième position).

5) La démonstration consiste à évaluer le polynôme  $[0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1]$  correspondant à la somme  $\sum_{i=0}^n \frac{i}{n} B_i^n(t)$

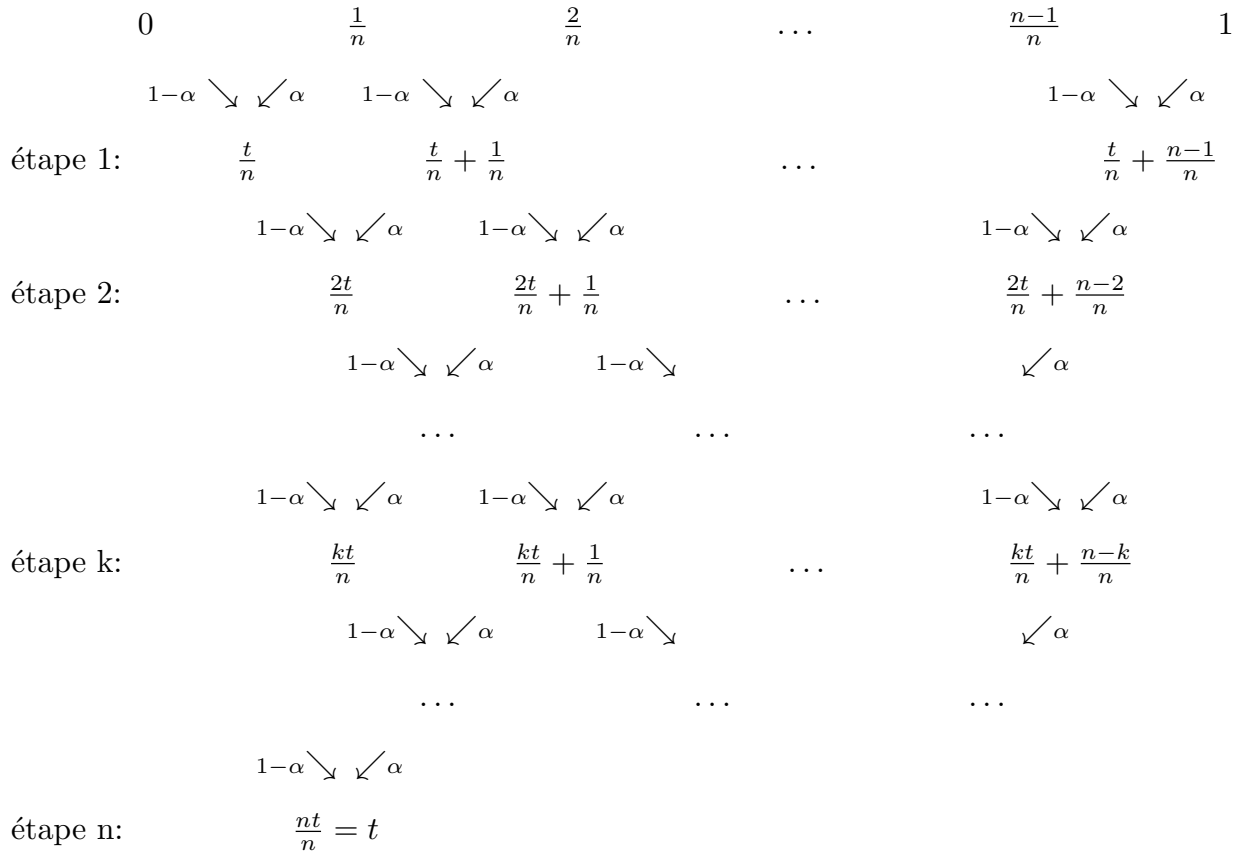


fig. 1-21



### 1.2.2 - D'autres bases pour le design géométrique

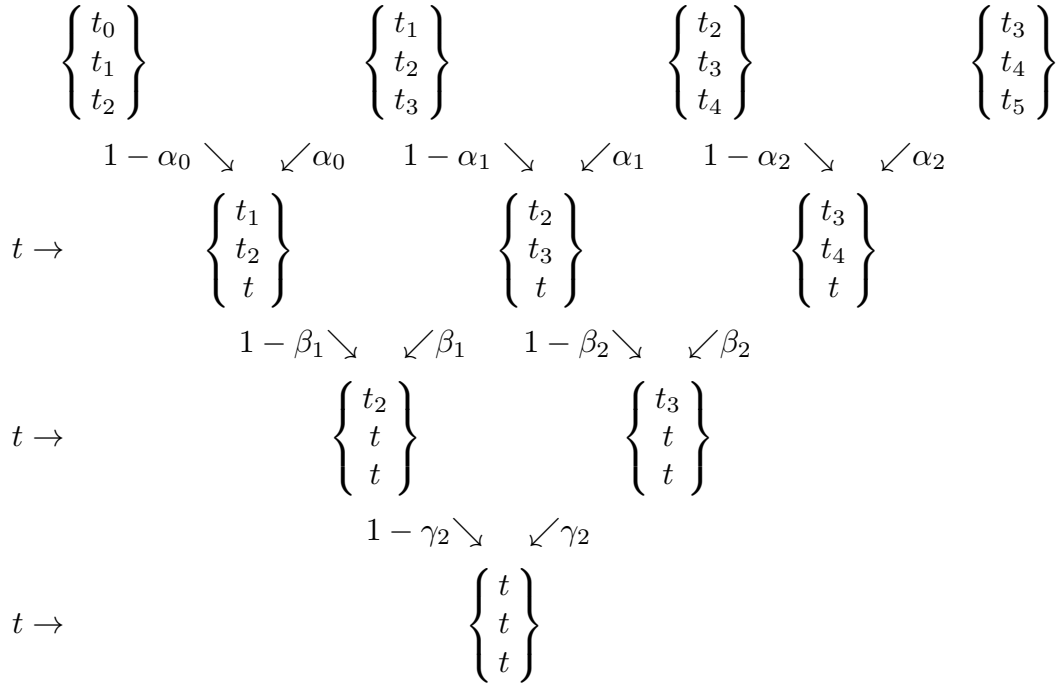
Dans le cas général d'une suite d'arguments ordonnés  $[t_1, \dots, t_{2n}]$  avec  $t_n \neq t_{n+1}$ , le même algorithme génère toute une famille de courbes polynomiales de degré  $n$  dans  $\mathbb{R}^d$  à partir des mêmes points de contrôle  $[P_0 \dots P_n]$  (avec  $P_i \in \mathbb{R}^d$ ).

Pour une base donnée, identifiée par la suite  $[t_1, \dots, t_{2n}]$ , la suite  $[P_0 \dots P_n]$  de points de contrôle sera donc caractéristique de la courbe  $\mathcal{F}$ .

### 1.2.2.1 - Courbes paramétrées dans une base de de Boor

#### Propriété 1.28 : Algorithme de de Boor

Soit  $\mathcal{F}$  une courbe paramétrée polynomiale de degré  $n$  et  $\phi$  sa floraison associée. L'algorithme d'évaluation d'une floraison appliqué à partir des  $n + 1$  étiquettes consécutives  $\{t_{1+i}, \dots, t_{n+i}\}$  pour  $i = 0, \dots, n$  (issues de la suite ordonnée de  $2n$  arguments  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n < t_{n+1} \leq \dots \leq t_{2n}$ ) pour obtenir l'étiquette  $\{t^{[n]}\}$  est exactement l'algorithme de de Boor permettant de calculer un point  $\mathcal{F}(t)$  de la courbe à partir de ses  $n + 1$  points de de Boor  $P_i, i = 0, \dots, n$ .



$$\alpha_i = \frac{t - t_i}{t_{i+3} - t_i}, \quad \beta_i = \frac{t - t_i}{t_{i+2} - t_i}, \quad \gamma_i = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}$$

fig. 1-22

#### Définition 1.29 : Base de de Boor

Soit  $\mathcal{F}$  une courbe polynomiale de degré  $n$  évaluée par l'algorithme de de Boor à partir de la suite  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n < t_{n+1} \leq \dots \leq t_{2n}$ . On note  $\phi$  sa floraison associée. Les polynômes  $D_i^n(t) (i = 0, \dots, n)$  apparaissant dans l'écriture

$$\mathcal{F}(t) = \sum_{i=0}^n \phi(t_{1+i}, \dots, t_{n+i}) D_i^n(t)$$



forment la base de de Boor relative à la suite  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n < t_{n+1} \leq \dots \leq t_{2n}$ .

La base  $(D_0^n, \dots, D_n^n)$  sera notée  $[t_1, \dots, t_{2n}]$ . Les points étiquetés  $\phi(t_{1+i}, \dots, t_{n+i})$  pour  $i = 0, \dots, n$  sont les *points de de Boor* de  $\mathcal{F}$ .

On continuera d'utiliser la notation  $\phi(t_{1+i}, \dots, t_{n+i}) = \{t_{1+i}, \dots, t_{n+i}\}$  pour désigner les points de de Boor et, plus généralement toutes les valeurs de floraisons dès lors que ce sont des éléments de  $\mathbb{R}^d$  avec  $d > 1$ .

**Remarques :**

1) L'expression de la base  $(D_0^n, \dots, D_n^n)$  à l'aide des floraisons permet un accès immédiat à son écriture algébrique. Par exemple, sur le schéma de la figure 1-22, on observe que :

$$\begin{aligned} D_0^3 &= [1000] = (1 - \alpha_0)(1 - \beta_1)(1 - \gamma_2) \\ D_1^3 &= [0100] = \alpha_0(1 - \beta_1)(1 - \gamma_2) + \beta_1(1 - \alpha_1)(1 - \gamma_2) + (1 - \alpha_1)(1 - \beta_2)\gamma_2 \\ D_2^3 &= [0010] = \alpha_1\beta_1(1 - \gamma_2) + \alpha_1(1 - \beta_2)\gamma_2 + \beta_2(1 - \alpha_2)\gamma_2 \\ D_3^3 &= [0001] = \alpha_2\beta_2\gamma_2 \end{aligned}$$

2) Toute base de de Boor relative à la suite  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n < t_{n+1} \leq \dots \leq t_{2n}$  engendre, par un algorithme *corner-cutting* une base de Bernstein relative à  $[t_n, t_{n+1}]$ .

En effet, cela signifie que, pour une même courbe paramétrée, les points de Bézier se déduisent des points de de Boor par un algorithme *corner-cutting*.

En partant des  $n + 1$  points de de Boor  $(\{t_{1+i}, \dots, t_{n+i}\}, i = 0, \dots, n)$  dans l'algorithme d'évaluation, on obtient chacun des  $n + 1$  points de Bézier  $(\{t_n^{[n-i]}, t_{n+1}^{[i]}\} i = 0, \dots, n)$  en  $n - 1$  étapes. De plus chaque coefficient de l'algorithme est positif. Les points de Bézier se déduisent donc bien des points de de Boor par une suite de combinaisons convexes et donc par un algorithme *corner-cutting*.

3) Toutes les bases de  $\mathcal{P}^n$  ne forment pas un système pouvant s'écrire sous la forme  $[t_0 \dots t_{2n-1}]$ ,  $t_{n-1} \neq t_n$ , ainsi, la base canonique ne possède pas d'écriture algorithmique de ce type et ne peut donc pas être considérée comme une base de de Boor.

**1.2.2.2 - Exemples de courbes cubiques paramétrées dans une base de de Boor**

Soient  $P_0, P_1, P_2, P_3$  4 points donnés de  $\mathbb{R}^2$ . Tous les exemples suivants sont des courbes polynomiales cubiques définies par :

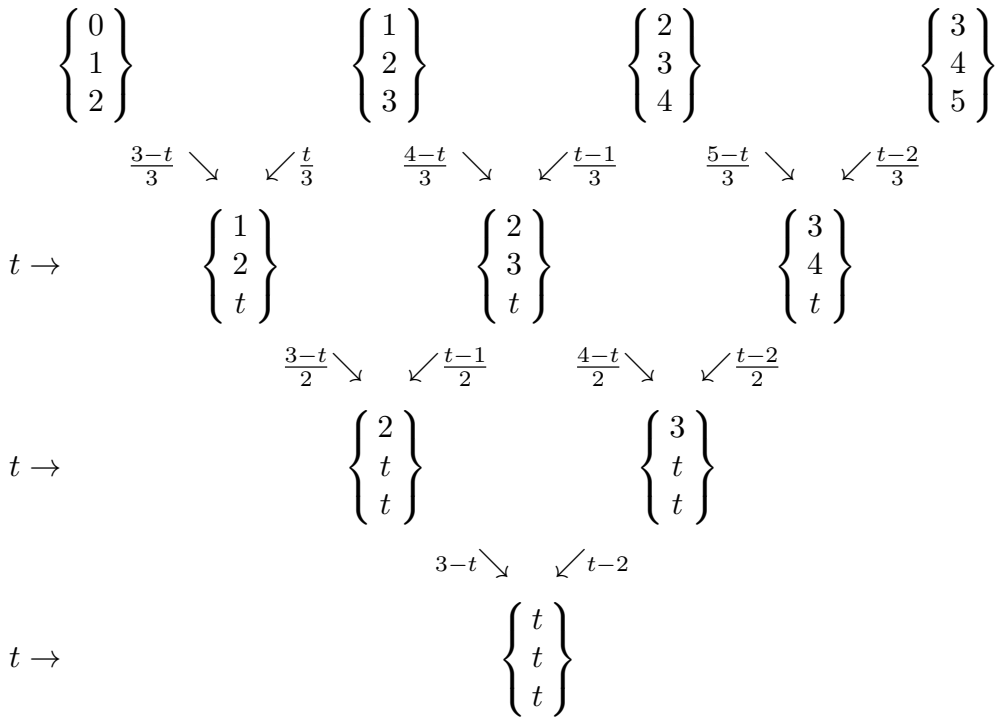
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \mathcal{F}(t) = \sum_{i=0}^3 P_i D_i^3(t)$$

où  $(D_0^3, D_1^3, D_2^3, D_3^3)$  est la base de de Boor construite à partir de la suite ordonnée d'arguments  $[t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6]$  avec  $t_3 \neq t_4$ .

La suite  $[t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6]$  d'arguments caractérisant la base utilisée induit l'étiquetage des points  $P_i$  et permet le calcul des coefficient de l'algorithme d'évaluation.

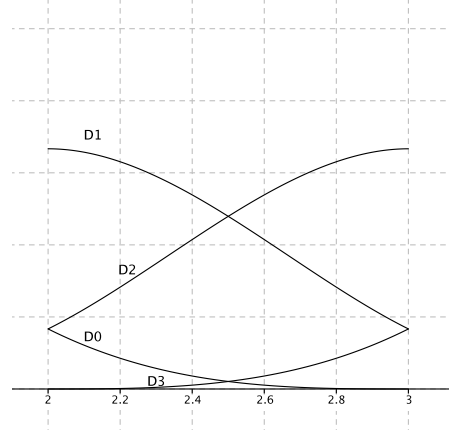
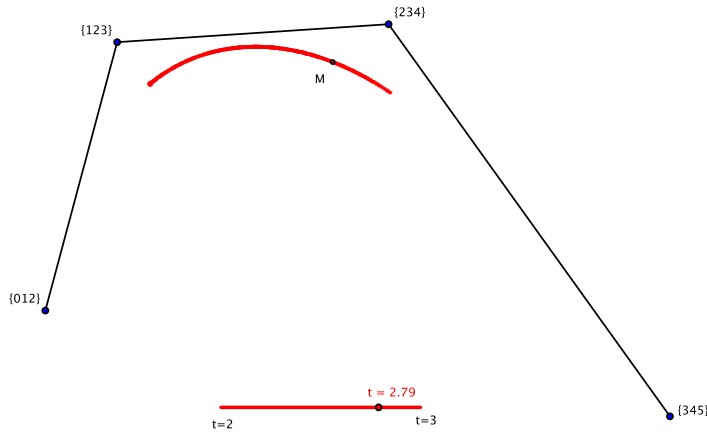
Pour chaque exemple, on donne la représentation algorithmique de la courbe ainsi que sa représentation graphique pour  $t \in [t_3, t_4]$  (qui est l'ensemble des valeurs du paramètre pour lesquelles tous les coefficients de l'algorithme d'évaluation sont positifs). Sont donnés également l'écriture algébrique des polynômes de base  $D_i^3$  obtenue à partir de l'algorithme triangulaire d'évaluation en utilisant la suite des réels caractérisant chaque polynôme, ainsi que leur représentation graphique sur  $[t_3, t_4]$ .

**Exemple 1:** Base [012345]



La base de de Boor issue de cette suite est la restriction à  $[2; 3]$  de la base de B-splines uniforme. Les polynômes qui la composent se lisent sur le schéma triangulaire :

$$\begin{aligned}
 D_0^3 &= [1000] = \frac{1}{6}(3-t)^3 \\
 D_1^3 &= [0100] = \frac{1}{6}[t(3-t)^2 + (4-t)(t-1)(3-t) + (4-t)^2(t-2)] \\
 D_2^3 &= [0010] = \frac{1}{6}[(t-1)^2(3-t) + (t-1)(4-t)(t-2) + (5-t)(t-2)^2] \\
 D_3^3 &= [0001] = \frac{1}{6}(t-2)^3
 \end{aligned}$$



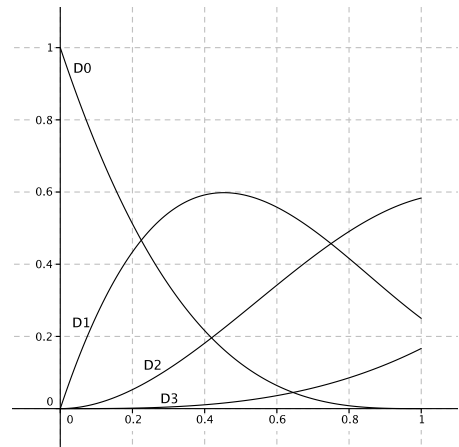
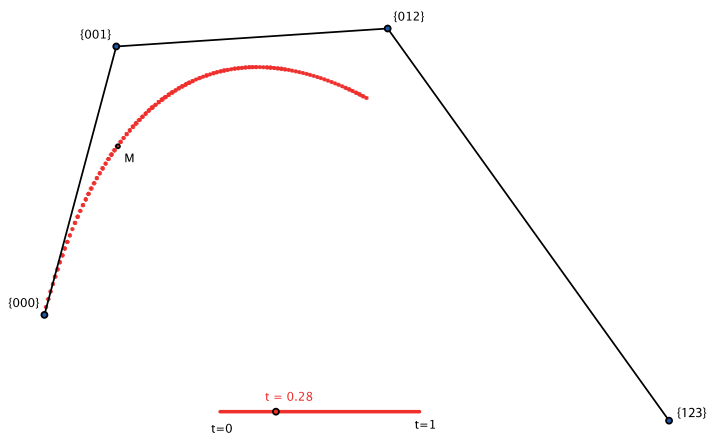
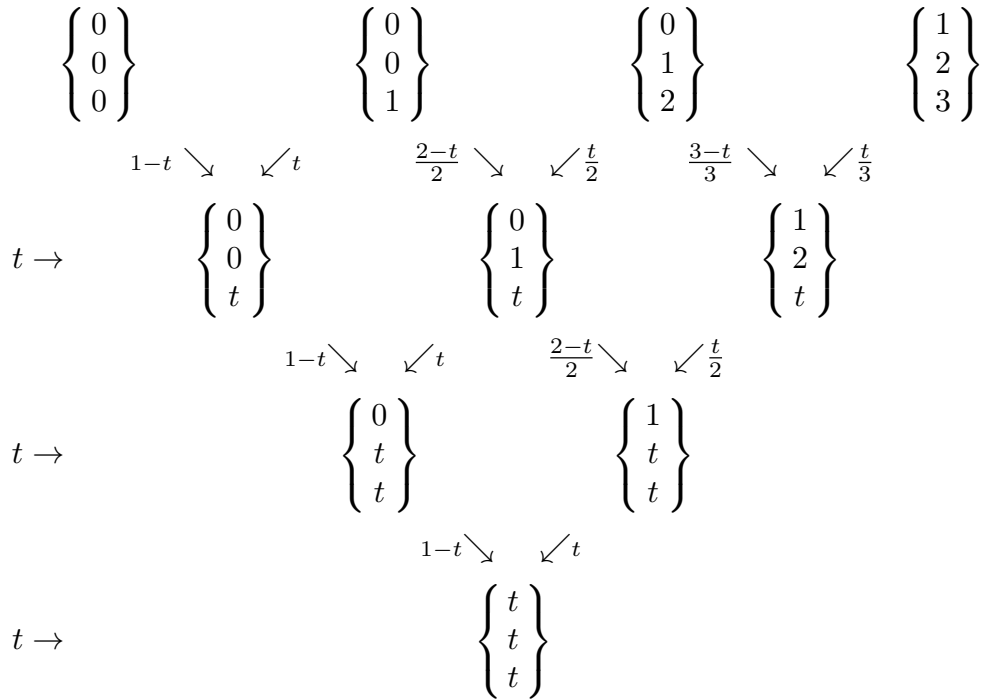
Dans le cas général, la restriction à  $[k; k + 1]$  de la base B-splines uniforme est la base de Boor  $[k - 2; k - 1; k; k + 1; k + 2; k + 3]$ . Ce qui donne :

$$\begin{array}{cccc}
 \left\{ \begin{array}{c} k-2 \\ k-1 \\ k \end{array} \right\} & & \left\{ \begin{array}{c} k-1 \\ k \\ k+1 \end{array} \right\} & & \left\{ \begin{array}{c} k \\ k+1 \\ k+2 \end{array} \right\} & & \left\{ \begin{array}{c} k+1 \\ k+2 \\ k+3 \end{array} \right\} \\
 \frac{k+1-t}{3} \searrow & \swarrow \frac{t-k+2}{3} & \frac{k+2-t}{3} \searrow & \swarrow \frac{t-k+1}{3} & \frac{k+3-t}{3} \searrow & \swarrow \frac{t-k}{3} & \\
 t \rightarrow & \left\{ \begin{array}{c} k-1 \\ k \\ t \end{array} \right\} & & \left\{ \begin{array}{c} k \\ k+1 \\ t \end{array} \right\} & & \left\{ \begin{array}{c} k+1 \\ k+2 \\ t \end{array} \right\} & \\
 & \frac{k+1-t}{2} \searrow & \swarrow \frac{t-k+1}{2} & \frac{k+2-t}{2} \searrow & \swarrow \frac{t-k}{2} & & \\
 t \rightarrow & & \left\{ \begin{array}{c} k \\ t \\ t \end{array} \right\} & & \left\{ \begin{array}{c} k+1 \\ t \\ t \end{array} \right\} & & \\
 & & & & \frac{k+1-t}{2} \searrow & \swarrow \frac{t-k}{2} & \\
 t \rightarrow & & & & \left\{ \begin{array}{c} t \\ t \\ t \end{array} \right\} & & 
 \end{array}$$

avec les polynômes :

$$\begin{aligned}
 D_0^3 &= [1000] = \frac{1}{6}(k+1-t)^3 \\
 D_1^3 &= [0100] = \frac{1}{6}[(t-k+2)(k+1-t)^2 + (k+2-t)(t-k+1)(k+1-t) + (k+2-t)^2(t-k)] \\
 D_2^3 &= [0010] = \frac{1}{6}[(t-k+1)^2(k+1-t) + (t-k+1)(k+2-t)(t-k) + (k+3-t)(t-k)^2] \\
 D_3^3 &= [0001] = \frac{1}{6}(t-k)^3
 \end{aligned}$$

**Exemple 2 :** Base [000123]



L'expression des polynômes de base représentés sur le graphique ci-dessus se lit sur le schéma triangulaire

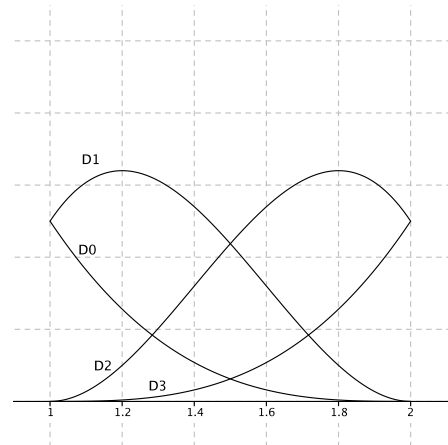
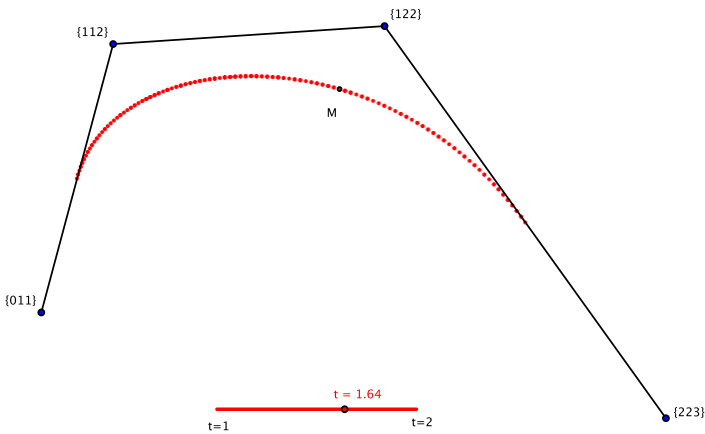
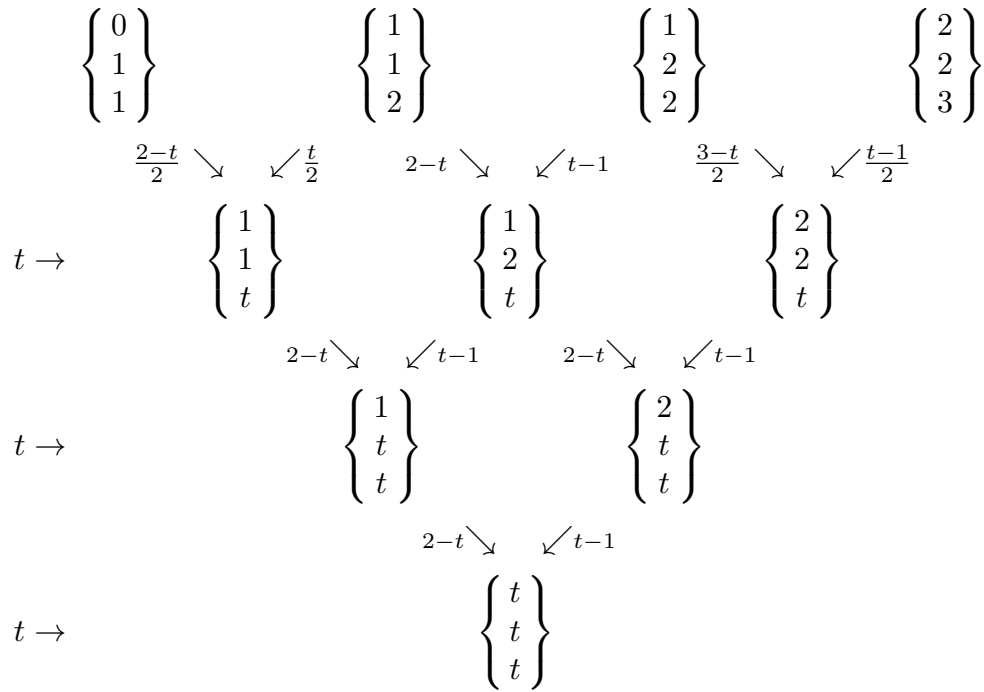
$$D_0^3 = [1000] = (1-t)^3$$

$$D_1^3 = [0100] = t(1-t)^2 + \frac{(2-t)t(1-t)}{2} + \frac{(2-t)^2t}{4}$$

$$D_2^3 = [0010] = \frac{t^2(1-t)}{2} + \frac{t^2(2-t)}{4} + \frac{(3-t)t^2}{6}$$

$$D_3^3 = [0001] = \frac{t^3}{6}$$

**Exemple 3 :** Base [011223]



$$\begin{aligned}
 D_0^3 &= [1000] = \frac{(2-t)^3}{2} \\
 D_1^3 &= [0100] = \frac{t(2-t)^2}{2} + 2(2-t)^2(t-1) \\
 D_2^3 &= [0010] = 2(t-1)^2(2-t) + \frac{(3-t)(t-1)^2}{2} \\
 D_3^3 &= [0001] = \frac{(t-1)^3}{2}
 \end{aligned}$$

### 1.2.2.3 - Propriétés de courbes paramétrées dans une base de de Boor

#### Propriété 1.30 :

Soit  $\mathcal{F}$  une courbe polynomiale de degré  $n$  non dégénérée paramétrée dans la base de de Boor  $[t_1, \dots, t_{2n}]$ . On notera  $P_i = \{t_{1+i}, \dots, t_{n+i}\}$ , ( $i = 0, \dots, n$ ) ses points de de Boor.

1) *Enveloppe convexe*

Lorsque  $t \in [t_n, t_{n+1}]$  la courbe est contenue dans l'enveloppe convexe de ses points de de Boor.

2) *Extrémités de la courbe*

- la courbe a son extrémité en  $P_0$  lorsque  $t_1 = \dots = t_n$
- Si  $t_2 = \dots = t_n = a$  alors  $(P_0P_1)$  est tangente à la courbe en  $\mathcal{F}(a)$
- Si  $t_k = \dots = t_n = a$  alors son extrémité  $\mathcal{F}(a)$  se situe dans le plan osculateur  $T^k(a)$  engendré par les points  $P_0, \dots, P_k$

#### *Preuve :*

1) D'après la propriété 1.28, chaque point  $\{t^{[n]}\}$  de la courbe est obtenu par combinaisons affines des points de de Boor  $\{t_{1+i}, \dots, t_{n+i}\}$  (pour  $i = 0, \dots, n$ ). Lorsque  $t \in [t_n, t_{n+1}]$  tous les coefficients de l'algorithme d'évaluation sont positifs. Donc  $\{t^{[n]}\}$  est une combinaison convexe des points de de Boor.

2) • Lorsque  $t_1 = \dots = t_n$ ,  $P_0 = \{t_1, \dots, t_n\} = \{t^{[n]}\} = \mathcal{F}(a)$ .

• On sait que  $T^1(a) = \{\{a^{[n-1]}, t\}, t \in \mathbb{R}\}$  (1.6). Lorsque  $t_2 = \dots = t_n = a$   
 $P_0 = \{t_1, \dots, t_n\} = \{t_1, a^{[n-1]}\}$  donc  $P_0 \in T^1(a)$

et  $P_1 = \{t_2, \dots, t_{n+1}\} = \{a^{[n-1]}, t_{n+1}\}$  donc  $P_1 \in T^1(a)$

• On sait que  $T^k(a) = \{\{a^{[n-k]}, t_1, \dots, t_k\}, t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}\}$  (1.6). Lorsque  $t_{k+1} = \dots = t_n = a$ , les points  $P_0 = \{t_1, \dots, t_k, a^{[n-k]}\}, \dots, P_k = \{a^{[n-k]}, t_{n+1}, \dots, t_{n+k}\}$  sont dans  $T^k(a)$ . ■

### *Raccord de courbes paramétrées dans une base de de Boor*

#### Proposition 1.31 :

On considère une suite de réels  $t_0 \leq \dots \leq t_{n-1} < t_n < t_{n+1} \leq \dots \leq t_{2n}$ .  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont deux courbes polynomiales de degré  $n$  non dégénérées paramétrées respectivement dans les bases de de Boor  $[t_0, \dots, t_{2n-1}]$  et  $[t_1, \dots, t_{2n}]$ . On note  $\phi$  (resp.  $\psi$ ) la floraison associée à  $\mathcal{F}$  (resp.  $\mathcal{G}$ ) et  $P_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  (resp.  $Q_i$ ) ses points de de Boor.

$\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont raccordées  $\mathcal{C}^n$  en  $t = t_n$  si et seulement si  $Q_0 = P_1, \dots, Q_{n-1} = P_n$ .

**Preuve :**

D'après la propriété 1.25,  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont raccordées  $\mathcal{C}^n$  en  $t = t_n$  si et seulement si

$$\phi(t_n, a_1, \dots, a_{n-1}) = \psi(t_n, a_1, \dots, a_{n-1}) \quad a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$$

Donc  $Q_i = \psi(t_{1+i}, \dots, t_{2n+i}) = \psi(t_{1+i}, \dots, t_{2n+i}) = P_{i+1}$  pour  $i = 0, \dots, n_1$

■

### 1.2.2.4 - Propriétés des bases de de Boor

**Propriété 1.32 :**

On note  $(D_0^n, \dots, D_n^n)$  la base de de Boor relative à la suite  $[t_1, \dots, t_{2n}]$ .

1) Positivité :

$$\forall t \in [t_n, t_{n+1}] \quad 0 \leq D_i^n(t) \leq 1 \quad i = 0, \dots, n$$

En particulier,

pour  $t = t_n$ , on a  $D_0^n(t_n) = 1$  et  $D_n^n(t_n) = 0$

pour  $t = t_{n+1}$ , on a  $D_0^n(t_{n+1}) = 0$  et  $D_n^n(t_{n+1}) = 1$

2) Normalisation

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \sum_{i=0}^n D_i^n(t) = 1$$

3) Récurrence

$$D_0^n = \frac{t_n - t}{t_n - t_0} D_0^{n-1}$$

$$D_i^n = \frac{t - t_{i-1}}{t_{i+n-1} - t_{i-1}} D_{i-1}^{n-1} + \frac{t_{i+n} - t}{t_{i+n} - t_i} D_i^{n-1} \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$D_n^n = \frac{t - t_{n-1}}{t_{2n-1} - t_{n-1}} D_{n-1}^{n-1}$$

**Preuve :**

1) Dans le schéma triangulaire d'évaluation, les valeurs d'une ligne étant des combinaisons convexes des valeurs de la ligne précédente, on voit immédiatement que  $0 \leq D_i^n(t) \leq 1$  pour  $t \in [t_n, t_{n+1}]$  (cf. fig. 1-22)

2) De la même façon que pour la base de Bernstein on a immédiatement :

$$\sum_{i=0}^n D_i^n(t) = [1 \dots 1] = 1$$

pour tout  $t$  dans  $\mathbb{R}$

3) La présentation par un schéma triangulaire permet d'observer les récurrences dans les bases de de Boor :

Soit, par exemple, la base  $[t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 t_5]$  de degré 3 (fig.1-22). On considère la base de degré 2  $[t_1 t_2 t_3 t_4]$  (voir le schéma ci-dessous):

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \left\{ \begin{array}{c} t_1 \\ t_2 \end{array} \right\} & & \left\{ \begin{array}{c} t_2 \\ t_3 \end{array} \right\} & & \left\{ \begin{array}{c} t_3 \\ t_4 \end{array} \right\} \\
 1 - \beta_1 \searrow & \swarrow \beta_1 & 1 - \beta_2 \searrow & \swarrow \beta_2 & \\
 t \rightarrow & \left\{ \begin{array}{c} t_2 \\ t \end{array} \right\} & & \left\{ \begin{array}{c} t_3 \\ t \end{array} \right\} & \\
 & 1 - \gamma_2 \searrow & \swarrow \gamma_2 & & \\
 t \rightarrow & & \left\{ \begin{array}{c} t \\ t \end{array} \right\} & & \text{avec } \beta_i = \frac{t - t_i}{t_{i+2} - t_i} \text{ et } \gamma_i = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}.
 \end{array}
 \end{array}$$

fig. 1-23

On observe immédiatement que

$$\begin{aligned}
 D_0^3 &= [1000] = (1 - \alpha_0)[100] = (1 - \alpha_0)D_0^2 \\
 D_1^3 &= [0100] = \alpha_0[100] + (1 - \alpha_1)[010] = \alpha_0 D_0^2 + (1 - \alpha_1)D_1^2 \\
 D_2^3 &= [0010] = \alpha_1[010] + (1 - \alpha_2)[001] = \alpha_1 D_1^2 + (1 - \alpha_2)D_2^2 \\
 D_3^3 &= [0001] = \alpha_2[001] = \alpha_2[001]D_2^2
 \end{aligned}$$

En d'autres termes,

$$\begin{aligned}
 D_0^3 &= \frac{t_3 - t}{t_3 - t_0} D_0^2 \\
 D_i^3 &= \frac{t - t_{i-1}}{t_{i+2} - t_{i-1}} D_{i-1}^2 + \frac{t_{i+3} - t}{t_{i+3} - t_i} D_i^2 \quad i = 1, 2 \\
 D_3^3 &= \frac{t - t_2}{t_5 - t_2} D_2^2
 \end{aligned}$$



### 1.3 - Splines polynomiales

Les courbes de Bézier présentent deux types d'inconvénients. D'une part elles ont un comportement global, c'est-à-dire que la modification d'un des points de contrôle modifie toute la courbe et, d'autre part, les polynômes de haut degré s'éloignent, en général, de leur polygone de contrôle. Pour améliorer cette situation on utilise des courbes splines. Ce sont des fonctions définies par morceaux avec conditions de raccord, chaque morceau étant un élément de  $\mathcal{P}^n$ .



Une des façons de les définir est de les construire avec un algorithme de de Casteljaou généralisé : l'algorithme de de Boor. C'est dans ce cadre que sont définies les formes polaires associées à une fonction spline. Une autre méthode utilise des subdivisions. L'outil des formes polaires peut alors s'adapter facilement aux méthodes de subdivision. Ce sera l'objet du paragraphe suivant

### 1.3.1 - Une définition classique

#### Définition 1.33 : Spline polynomiale

Soit  $(t_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ , une suite croissante de réels. On appelle fonction spline polynomiale de degré  $n$  et de nœuds  $(t_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  une fonction  $S$  continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que :

- $S|_{[t_k, t_{k+1}]}$  coïncide avec un élément de  $\mathbb{P}^n$  sur  $[t_k, t_{k+1}]$ .
- les raccords sont  $\mathcal{C}^{n-1}$  en  $t_k$ .

C'est-à-dire, en notant  $S_k = S|_{[t_k, t_{k+1}]}$ ,  $S_k^{(i)}(t_k) = S_{k-1}^{(i)}(t_k)$ , pour  $i = 0, \dots, n-1$ .

La suite  $(t_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  est le vecteur nodal de  $S$ . L'ensemble des splines définies sur le même vecteur nodal forme un espace vectoriel sur lequel on définit une base  $N_k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) de B-splines.

Les fonctions B-splines  $N_k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) définies sur  $\mathbb{R}$  sont telles que :

- (i)  $N_k > 0$  sur  $]t_k, t_{k+n+1}[$  et  $N_k$  est nulle partout ailleurs.
- (ii)  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} N_k(t) = 1$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

#### Définition 1.34: Courbe spline dans $\mathbb{R}^d$

Soit  $(P_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  une suite d'éléments de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \in \mathbb{N}^*$ . On appelle courbe spline  $\mathcal{S}$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^d$  qui s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{S}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} P_k N_k(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Les coefficients  $P_k$  sont appelés les pôles de  $\mathcal{S}$ .

Sur chaque intervalle  $[t_k, t_{k+1}]$ ,  $S_k$  est une combinaison des  $(n+1)$  B-splines  $N_{k-n}, \dots, N_k$ ,

d'où  $S_k(t) = \sum_{i=k-n}^k P_i N_i(t)$ , pour tout  $t \in [t_k, t_{k+1}]$ .

Cette égalité montre qu'un même pôle n'intervient dans la composition que d'un nombre limité de fonctions  $N_k$  ( $n+1$  fonctions). Ainsi la modification d'un pôle n'aura qu'un effet local sur la courbe.

### *Splines avec multiplicité*

On peut définir des splines avec un raccord  $\mathcal{C}^{n-j}$  en  $t_k$  ( $j \leq n$ ). On dit alors que le nœud  $t_k$  est de multiplicité  $j$ . La condition de raccord de la définition 1.32 s'écrit alors :

$$S_k^{(i)}(t_k) = S_{k-1}^{(i)}(t_k), \quad i = 0, \dots, n - j$$

La spline classique possède des nœuds de multiplicité 1.

En pratique cela consistera à envisager des vecteurs nœuds avec des abscisses  $t_k$  répétées  $j$  fois.

### **1.3.2 - Splines et floraisons**

La théorie des floraisons offre un point de vue unifié sur l'algorithme de de Boor utilisé pour l'implémentation de la spline et sa définition en terme de raccords.

#### **1.3.2.1 - Construction**

Le calcul des points d'une courbe spline de degré  $n$  à  $p$  pôles ( $p \geq n + 1$ ) se fait à l'aide des floraisons selon le principe suivant :

- les  $p$  pôles sont étiquetés par des  $n$ -uplets consécutifs. La spline est donc associée à un vecteur nodal de  $p + n - 1$  nœuds.
- l'algorithme d'évaluation (théorème 1.9) est ensuite appliqué sur chaque groupement de  $n + 1$  pôles. Donc sur  $p - n$  segments.

#### **Notation**

On note  $A_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , les pôles de la spline.

Chaque pôle  $A_k$  porte l'étiquetage  $\{t_{k+1}, \dots, t_{k+n}\}$ .

#### **Exemple**

Ci-dessous une courbe spline de degré 2, associée aux nœuds [012345], constituée de 3 arcs de parabole sur [1, 2], [2, 3] et [3, 4] accompagnée de son algorithme de construction. Ici  $n = 2$  et  $p = 5$ .

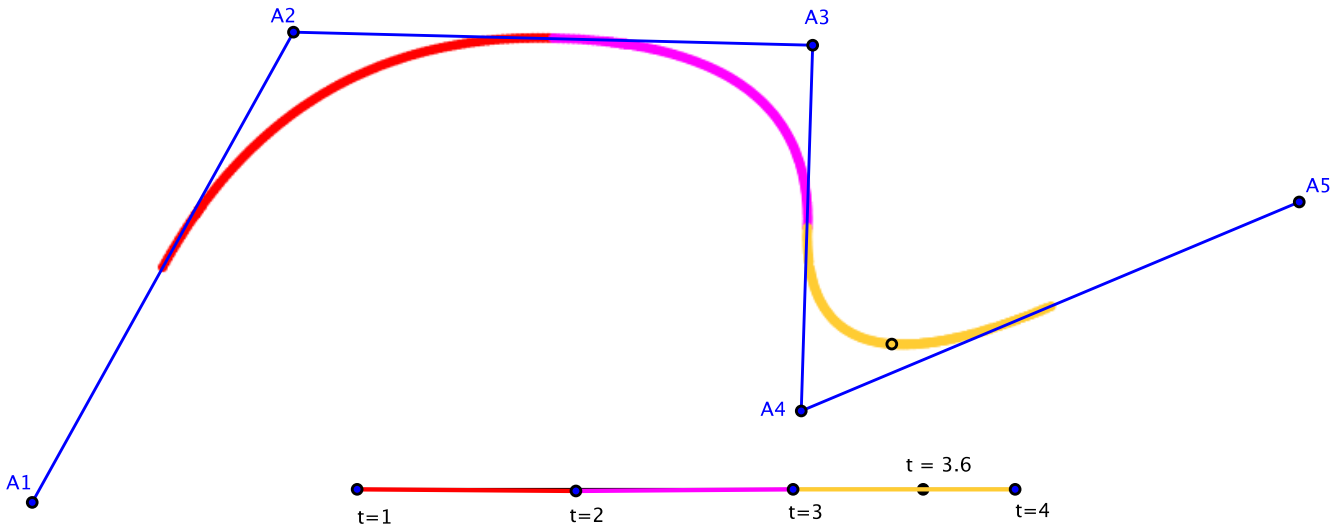


fig. 1-24

Les différents arcs de parabole qui composent la spline sont en couleur. En rouge, une courbe paramétrée dans la base de de Boor [0123] et dont les 3 points de de Boor sont  $A_1, A_2$  et  $A_3$

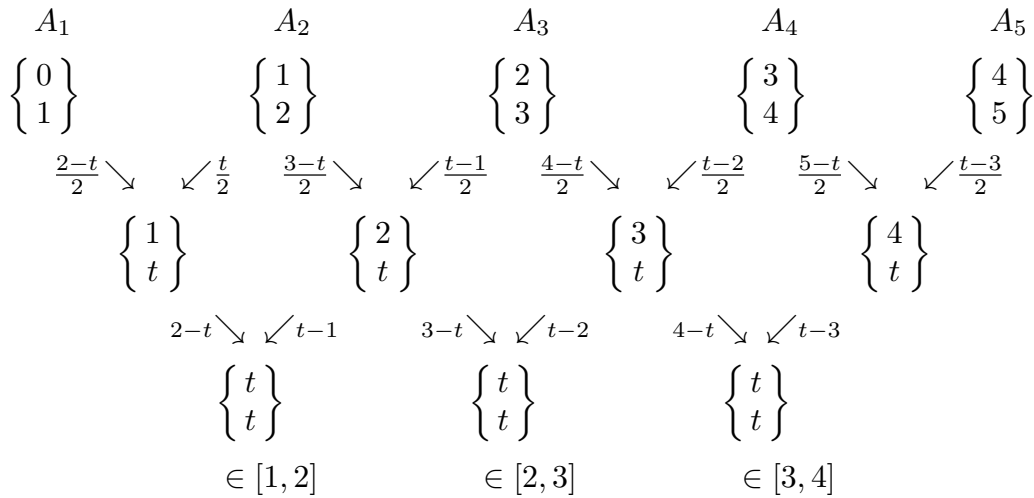


fig. 1-25

Cet algorithme a permis de construire la figure 1-24. Les coefficients sont calculés à partir des étiquettes puis sont appliqués aux coordonnées des pôles de la spline.

Cette construction consiste à raccorder  $C^{n-1}$  des arcs définis sur  $[t_k, t_{k+1}]$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). La propriété 1.31 assure que les raccords sont bien  $C^{n-1}$ .

Dans l'exemple de la figure 1-24, l'arc rouge paramétré sur  $[t_1, t_2]$  et dont les points de de Boor sont  $A_1, A_2$  et  $A_3$  est raccordé  $C^1$  avec l'arc rose paramétré sur  $[t_2, t_3]$  et dont les points de de Boor sont  $A_2, A_3$  et  $A_4$

**Propriétés de contrôle local de la spline :**

Pour une spline de degré  $n$  :

- Chaque pôle  $A_k$ , étiqueté  $\{t_{k+1}, \dots, t_{k+n}\}$ , contrôle la courbe sur  $[t_k, t_{k+n+1}]$ , c'est-à-dire  $n + 1$  segments.
- Un arc de courbe paramétré sur  $[t_k, t_{k+1}]$  correspond à la base de de Boor de  $2n$  argument  $[t_{k-n+1}, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_{k+n}]$ . Il est donc contrôlé par les  $n + 1$  pôles  $A_{k-n}, \dots, A_k$ .

**Exemple**

Dans l'exemple, le schéma triangulaire 1-25 montre que :

- d'une part un arc de courbe ne dépend que de la position de 3 points. Ici, par exemple, les points  $A_1, A_2$  et  $A_3$  étiquetés respectivement  $\{0, 1\}$ ,  $\{1, 2\}$  et  $\{2, 3\}$  interviennent dans la construction de l'arc de courbe paramétrée sur  $[1, 2]$ .
- d'autre part, un même point influe localement sur la courbe. Ici, par exemple, le point  $A_3$ , étiqueté  $\{2, 3\}$  influe sur 3 segments, ce qui est le maximum pour une courbe spline de degré 2.

**1.3.2.2 - Floraison associée à une courbe spline**

La spline  $[A_1A_2A_3A_4A_5]$  représentée sur la figure 1-24 coïncide sur l'intervalle  $[1, 2]$  (resp.  $[2, 3]$ ,  $[3, 4]$ ) avec la parabole  $[A_1A_2A_3]$  (resp.  $[A_2A_3A_4]$ ,  $[A_3A_4A_5]$ ) paramétrée dans la base de de Boor  $[0123]$  (resp.  $[1234]$ ,  $[2345]$ ). Cette parabole est une courbe polynomiale  $\mathcal{F}_1$  (resp.  $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ ) de degré 2 paramétrée sur  $[1, 2]$  (resp.  $[2, 3]$ ,  $[3, 4]$ ). A cette courbe  $\mathcal{F}_1$  (resp.  $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ ) est associée, de façon unique, sa floraison  $\phi_1 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  (resp.  $\phi_2, \phi_3$ ) qui, à un couple d'argument  $(x_1, x_2)$  fait correspondre sa floraison, notée  $\phi_1(x_1, x_2)$  (resp.  $\phi_2, \phi_3$ ).

On définit la floraison  $s$  associée à la spline  $[A_1A_2A_3A_4A_5]$  de degré 2 muni du vecteur nœud  $[012345]$  à partir des floraisons  $\phi_1, \phi_2$  et  $\phi_3$  des courbes qui la composent de la manière suivante :

$$s(x_1, x_2) = \{x_1, x_2\} = \begin{cases} f_1(x_1, x_2), & \text{si } x_1, x_2 \in ]-\infty, 2] \\ f_2(x_1, x_2), & \text{si } x_1, x_2 \in [2, 3] \\ f_3(x_1, x_2), & \text{si } x_1, x_2 \in [3, +\infty[ \end{cases}$$

**Remarque : une conséquence géométrique**

La traduction par les floraisons permet de démontrer des propriétés géométriques des courbes utilisées, par exemple, dans le cas, comme ci-dessus d'une courbe spline de degré 2, les conditions de raccord induisent des conséquences sur les positions respectives des courbes qui composent la spline.

Les raccords  $\mathcal{C}^1$  en  $t = 2$  et  $t = 3$  se traduisent, d'après (1.6) par  $\phi_1(2, x) = \phi_2(2, x)$  et  $\phi_2(3, x) = \phi_3(3, x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Considérons maintenant que la notation  $\mathcal{F}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) désigne la parabole entière, c'est-à-dire paramétrée sur  $\mathbb{R}$ .  $\phi_i$  est sa floraison associée.

En notant  $T(2)$  la tangente commune en  $t = 2$  aux deux paraboles  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$ , la condition  $\phi_1(2, x) = \phi_2(2, x)$  signifie, géométriquement, que les deux tangentes  $T_{\mathcal{F}_1}(x)$  et  $T_{\mathcal{F}_2}(x)$ , se coupent sur  $T(2)$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . (On rappelle que  $\phi_i(a, b)$  désigne l'intersection des tangentes en  $a$  et en  $b$  à la parabole  $\mathcal{F}_i$ ).

De la même façon, en notant  $T(3)$  la tangente commune en  $t = 3$  aux deux paraboles  $\mathcal{F}_2$  et  $\mathcal{F}_3$ , la condition  $\phi_2(3, x) = \phi_3(3, x)$  signifie géométriquement, que les deux tangentes  $T_{\mathcal{F}_2}(x)$  et  $T_{\mathcal{F}_3}(x)$ , se coupent sur  $T(3)$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Par conséquent, les raccords  $\mathcal{C}^1$  en  $t = 2$  et  $t = 3$  des trois paraboles impliquent la concours des 4 tangentes  $T_{\mathcal{F}_3}(2)$ ,  $T_{\mathcal{F}_1}(2) = T_{\mathcal{F}_2}(2) = T(2)$ ,  $T_{\mathcal{F}_2}(3) = T_{\mathcal{F}_3}(3) = T(3)$  et  $T_{\mathcal{F}_1}(3)$  au point  $A_3$  d'étiquette  $\{2, 3\} = \phi_1(2, 3) = \phi_2(2, 3) = \phi_3(2, 3)$

**1.3.2.3 - Diagrammes d'évaluation**

**Remarque :**

Une courbe spline de degré  $n$  est constituée d'arcs de courbe  $\mathcal{F}_i$  raccordés. A chacune des courbes  $\mathcal{F}_i$  est associée sa floraison  $\phi_i$ . La définition de la floraison associée à une fonction ou une courbe spline (voir, par exemple, [Mazure 7]) associe, à un  $n$ -uplet donné, une (ou plusieurs) des floraisons  $\phi_i$  qui sont utilisables pour l'évaluer et conduit à la formalisation de la notion de  $n$ -uplet *admissible*. Lyle Ramshaw [Ramshaw 1] indique que les arguments doivent être *suffisamment proches* les uns des autres, en particulier aucun nœud ne doit être "sauté" dans la liste des arguments d'une étiquette.

Par exemple, dans le schéma 1-25, si l'on note  $\phi_i$ ,  $i=1,2,3$  la floraison associée à la paraboles paramètre sur  $[i, i + 1]$ , le point  $\left\{ \begin{matrix} 2 \\ t \end{matrix} \right\}$  se calcule à partir des points  $\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\}$  et  $\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right\}$  soit à l'aide de  $\phi_1$  soit à l'aide de  $\phi_2$ . En vertu de la proposition 1.25, le raccord  $\mathcal{C}^1$  en  $t = 2$  entraîne  $\phi_1(2, t) = \phi_2(2, t) = \{2, t\}$  et les résultats seront donc identiques. Tous les points de la deuxième ligne du schéma peuvent donc se calculer de deux façons différentes.

Les schémas descriptifs (on utilise la procédure de la figure 1-1) respectent, de par leur structure, la contrainte de n'utiliser que des étiquettes *admissibles*. C'est pourquoi toutes les étiquettes des diagrammes d'évaluation sont notées  $\{.\}$  sans préciser de quelle floraison il s'agit.

Les diagrammes suivants représentent les algorithmes de construction des splines de degré 2 et 3 dont tous les nœuds sont de multiplicité 1.

On considère le vecteur nodal

$$\dots, t_{k-3}, t_{k-2}, t_{k-1}, t_k, t_{k+1}, t_{k+2}, t_{k+3}, \dots$$

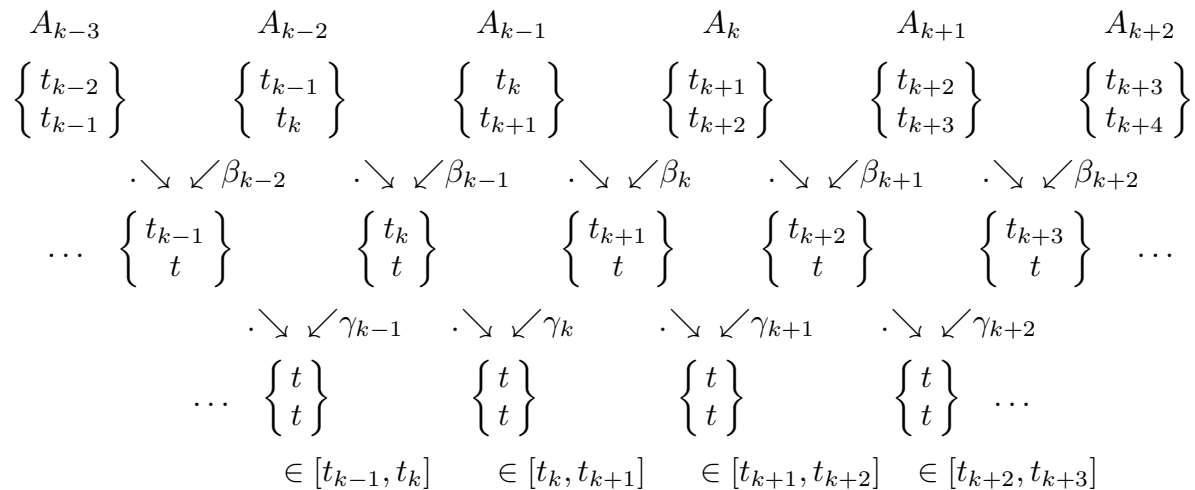
où les nœuds  $t_i$  sont des réels strictement croissants.

### ***Splines de degré 2***

Le vecteur nodal induit un étiquetage des points de contrôle de la forme :

$$\dots \left\{ \begin{matrix} t_{k-3} \\ t_{k-2} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} t_{k-2} \\ t_{k-1} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} t_{k-1} \\ t_k \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} t_k \\ t_{k+1} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} t_{k+1} \\ t_{k+2} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} t_{k+2} \\ t_{k+3} \end{matrix} \right\} \dots$$

La schématisation de son algorithme de reconstruction est donnée ci-dessous :



avec  $\beta_i = \frac{t - t_i}{t_{i+2} - t_i}$  et  $\gamma_i = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}$

fig.1-27



### 1.3.3.1 - Spline uniforme sans multiplicité

Le cas le plus simple est celui d'un espace de splines uniformes sans multiplicité. Il est associé à un vecteur nodal du type :

$$\dots, k-3, k-2, k-1, k, k+1, k+2, k+3, \dots$$

La distance inter-nœuds n'ayant pas d'impact, dans le cas polynomial, sur la forme de la spline on considère ici des intervalles de longueur unité.

#### Exemple de splines de degré 2

Le vecteur nodal induit un étiquetage des points de contrôle du type :

$$\dots \left\{ \begin{matrix} k-3 \\ k-2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k-2 \\ k-1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k-1 \\ k \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k \\ k+1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k+1 \\ k+2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k+2 \\ k+3 \end{matrix} \right\} \dots$$

La schématisation de l'algorithme de reconstruction de la spline est donnée ci-dessous :

$$\begin{array}{cccccc}
 0 & & 0 & & 0 & & 1 & & 0 & & 0 \\
 \left\{ \begin{matrix} k-2 \\ k-1 \end{matrix} \right\} & & \left\{ \begin{matrix} k-1 \\ k \end{matrix} \right\} & & \left\{ \begin{matrix} k \\ k+1 \end{matrix} \right\} & & \left\{ \begin{matrix} k+1 \\ k+2 \end{matrix} \right\} & & \left\{ \begin{matrix} k+2 \\ k+3 \end{matrix} \right\} & & \left\{ \begin{matrix} k+3 \\ k+4 \end{matrix} \right\} \\
 \cdot \searrow \swarrow \beta_{k-2} & & \cdot \searrow \swarrow \beta_{k-1} & & \cdot \searrow \swarrow \beta_k & & \cdot \searrow \swarrow \beta_{k+1} & & \cdot \searrow \swarrow \beta_{k+2} & & \\
 \left\{ \begin{matrix} k-1 \\ t \end{matrix} \right\} & & \left\{ \begin{matrix} k \\ t \end{matrix} \right\} & & \left\{ \begin{matrix} k+1 \\ t \end{matrix} \right\} & & \left\{ \begin{matrix} k+2 \\ t \end{matrix} \right\} & & \left\{ \begin{matrix} k+3 \\ t \end{matrix} \right\} & & \\
 \cdot \searrow \swarrow \gamma_{k-1} & & \cdot \searrow \swarrow \gamma_k & & \cdot \searrow \swarrow \gamma_{k+1} & & \cdot \searrow \swarrow \gamma_{k+2} & & & & \\
 \left\{ \begin{matrix} t \\ t \end{matrix} \right\} & & \left\{ \begin{matrix} t \\ t \end{matrix} \right\} & & \left\{ \begin{matrix} t \\ t \end{matrix} \right\} & & \left\{ \begin{matrix} t \\ t \end{matrix} \right\} & & & & \\
 & & \in [k-1, k] & & \in [k, k+1] & & \in [k+1, k+2] & & \in [k+2, k+3] & & 
 \end{array}$$

avec  $\beta_i = \frac{t-i}{2}$  et  $\gamma_i = t-i$

fig.1-29

La B-spline  $N_k$  est positive sur  $[k, k+3]$  et nulle partout ailleurs. Elle est obtenue en affectant la valeur 1 à l'étiquette  $\{k+1, k+2\}$  et 0 à toutes les autres.

Le schéma donne immédiatement :

$$N_k^2(t) = \begin{cases} \beta_k \gamma_k, & \text{si } t \in [k, k+1] \\ \beta_k(1-\gamma_{k+1}) + (1-\beta_{k+1})\gamma_{k+1}, & \text{si } t \in [k+1, k+2] \\ (1-\beta_{k+1})(1-\gamma_{k+2}), & \text{si } t \in [k+2, k+3] \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$



C'est-à-dire

$$N_k^2(t) = \begin{cases} \frac{(t-k)^2}{2}, & \text{si } t \in [k, k+1] \\ \frac{t-k}{2}(k+2-t) + \frac{k+3-t}{2}(t-k-1), & \text{si } t \in [k+1, k+2] \\ \frac{(k+3-t)^2}{2}, & \text{si } t \in [k+2, k+3] \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce qui donne, par exemple :

$$N_0^2(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2}, & \text{si } t \in [0, 1] \\ \frac{1}{2}[t(2-t) + (3-t)(t-1)], & \text{si } t \in [1, 2] \\ \frac{(3-t)^2}{2}, & \text{si } t \in [2, 3] \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Et  $N_k(t) = N_0^2(t-k)$

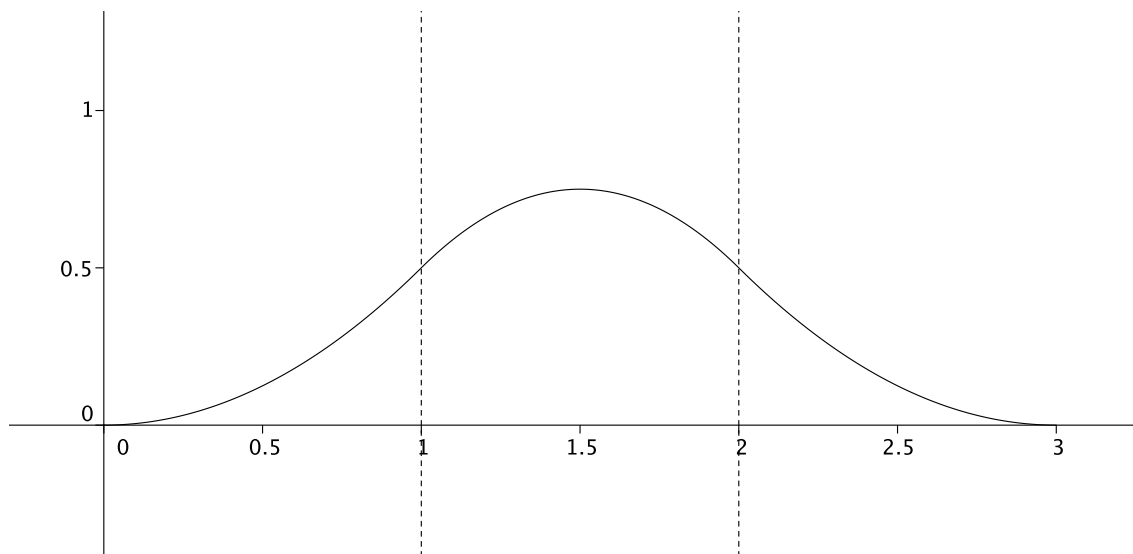


fig.1-30

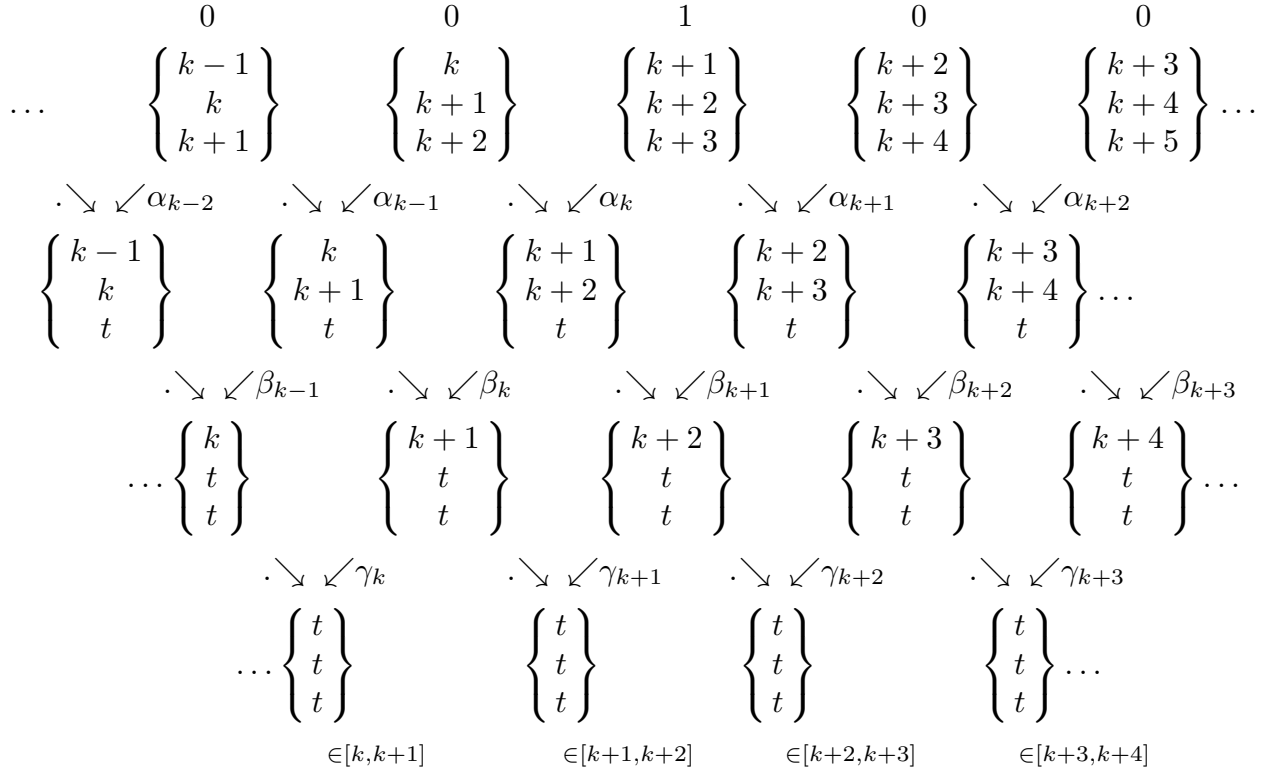
La B-spline de degré 2 représentée sur  $[0, 3]$ .

### ***Splines cubiques***

Le vecteur nodal induit un étiquetage des points de contrôle du type :

$$\dots \left\{ \begin{matrix} k-3 \\ k-2 \\ k-1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k-2 \\ k-1 \\ k \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k-1 \\ k \\ k+1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k \\ k+1 \\ k+2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k+1 \\ k+2 \\ k+3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k+2 \\ k+3 \\ k+4 \end{matrix} \right\} \dots$$

La schématisation de l'algorithme de reconstruction de la spline est donnée ci-dessous :



avec  $\alpha_i = \frac{t-i}{3}$ ,  $\beta_i = \frac{t-i}{2}$  et  $\gamma_i = t-i$

fig.1-31

La B-spline  $N_k^3$  est positive sur  $[k, k+4]$  et nulle partout ailleurs. Elle est obtenue en affectant la valeur 1 à l'étiquette  $\{k+1, k+2, k+3\}$  et 0 à toute les autres.

Le schéma donne immédiatement :

$$N_k^3(t) = \begin{cases} \alpha_k \beta_k \gamma_k, & \text{si } t \in [k, k+1] \\ \alpha_k [\beta_k (1 - \gamma_{k+1}) + (1 - \beta_{k+1}) \gamma_{k+1}] \\ \quad + (1 - \alpha_{k+1}) \beta_{k+1} \gamma_{k+1}, & \text{si } t \in [k+1, k+2] \\ \alpha_k (1 - \beta_{k+1}) (1 - \gamma_{k+2}) + (1 - \alpha_{k+1}) [\beta_{k+1} (1 - \gamma_{k+2}) \\ \quad + (1 - \beta_{k+2}) \gamma_{k+2}], & \text{si } t \in [k+2, k+3] \\ (1 - \alpha_{k+1}) (1 - \beta_{k+2}) (1 - \gamma_{k+3}), & \text{si } t \in [k+3, k+4] \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut lire alors la récurrence :

$$N_k^3(t) = \alpha_k N_k^2(t) + (1 - \alpha_{k+1}) N_{k+1}^2(t)$$

Ci-dessous la B-spline  $N_k^3(t)$  (figure 1-33) et son algorithme de construction (figure 1-32)

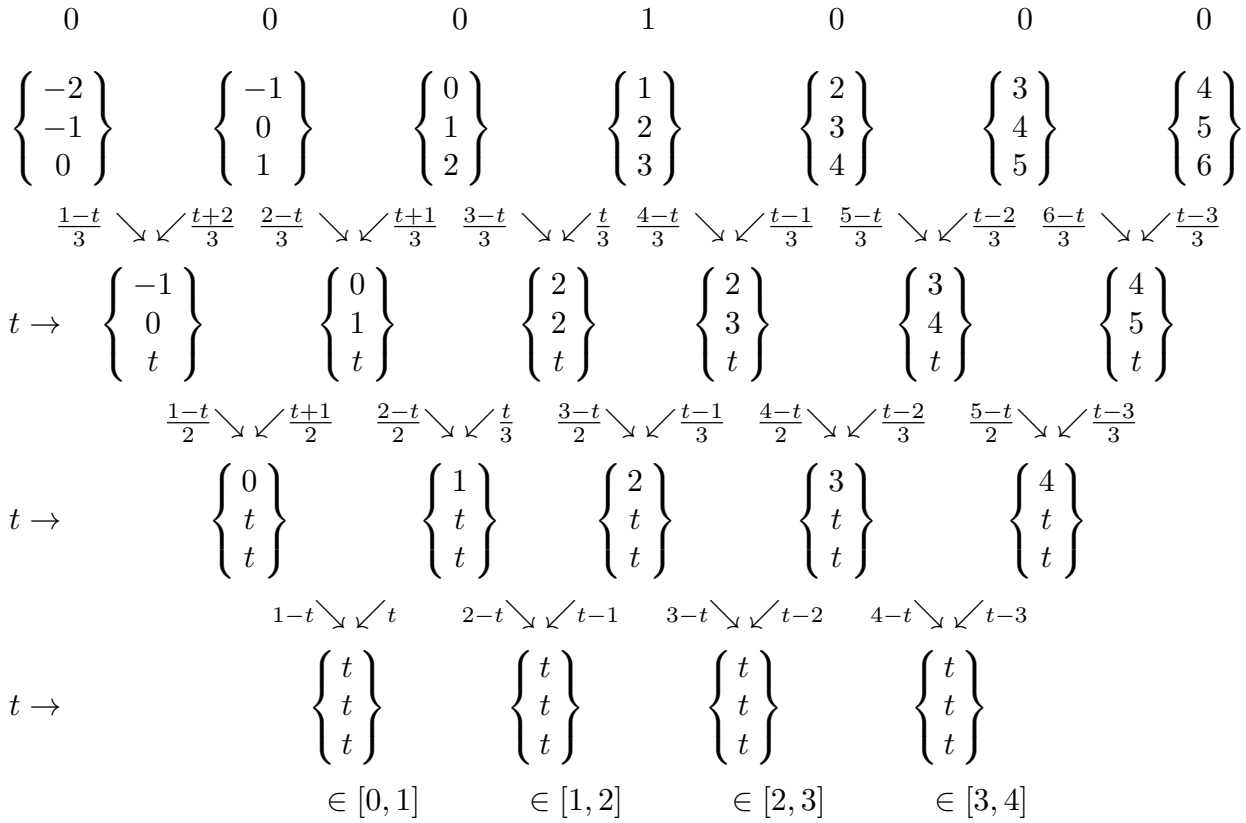


fig.1-32

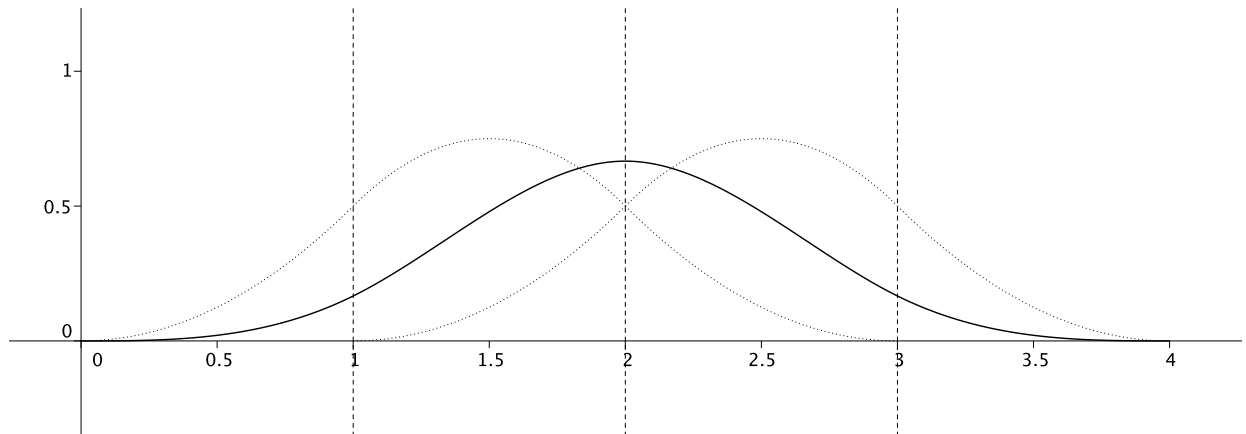


fig.1-33

La B-spline cubique sur  $[0, 4]$  est une combinaison de 2 B-splines quadratiques.

$$N_0^3(t) = \begin{cases} \frac{t^3}{6}, & \text{si } t \in [0, 1] \\ \frac{1}{6}[t^2(2-t) + t(3-t)(t-1) + (4-t)(t-1)^2], & \text{si } t \in [1, 2] \\ \frac{1}{6}[t(3-t)^2 + (4-t)(3-t)(t-1) + (4-t)^2(t-2)], & \text{si } t \in [2, 3] \\ \frac{(4-t)^3}{6}, & \text{si } t \in [3, 4] \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Et l'on a  $N_0^3(t) = \frac{t}{3}N_0^2(t) + \frac{4-t}{3}N_1^2(t)$  avec

$$N_0^2(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2}, & \text{si } t \in [0, 1] \\ \frac{1}{2}[t(2-t) + (3-t)(t-1)], & \text{si } t \in [1, 2] \\ \frac{(3-t)^2}{2}, & \text{si } t \in [2, 3] \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

et

$$N_1^2(t) = \begin{cases} \frac{(t-1)^2}{2}, & \text{si } t \in [1, 2] \\ \frac{1}{2}[(t-1)(3-t) + (4-t)(t-2)], & \text{si } t \in [2, 3] \\ \frac{(4-t)^2}{2}, & \text{si } t \in [3, 4] \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La représentation par les floraisons permet une démonstration rapide des principales propriétés de la base B-splines.

### Propriété 1.35 :

On considère des B-splines  $N_k^n$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  de degré  $n$  définies sur un vecteur nodal uniforme.

#### 1) Positivité

La B-spline  $N_k^n$  est positive sur  $[k, k+n+1]$  et nulle partout ailleurs.

#### 2) Normalisation

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} N_k(t) = 1$$

#### 3) Récurrence

$$N_k^n(t) = \frac{t-k}{n}N_k^{n-1}(t) + \frac{k+n+1-t}{n}N_{k+1}^{n-1}(t)$$

### Preuve :

1) Chaque valeur calculée dans l'algorithme d'évaluation est combinaison convexe de valeurs comprises entre 0 et 1 (voir, par exemple, sur la figure 1-32).

2) Dans la représentation algorithmique  $N_k^n$  est obtenue en affectant la valeur 1 à l'étiquette  $\{k+1, \dots, k+n\}$ . En affectant 1 à toutes les étiquettes, on obtient la fonction identité 1 sur  $\mathbb{R}$ .

3) La relation de récurrence découle de la représentation algorithmique ■

### 1.3.3.2 - Spline non uniforme

Le traitement du cas non uniforme se fait exactement de la même façon que pour le cas où les nœuds sont uniformément répartis. Il permet également de prendre en compte la multiplicité. Ainsi, dans le cas d'un nœud de multiplicité  $\mu$ , le nœud est répété  $\mu$  fois sur le vecteur nodal.

Le vecteur nodal associé est du type :

$$\dots, t_{k-3}, t_{k-2}, t_{k-1}, t_k, t_{k+1}, t_{k+2}, t_{k+3}, \dots$$

#### *Exemple d'un espace de splines de degrés 2*

Le vecteur nodal induit un étiquetage des points de contrôle de la forme :

$$\dots \begin{Bmatrix} t_{k-3} \\ t_{k-2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} t_{k-2} \\ t_{k-1} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} t_{k-1} \\ t_k \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} t_k \\ t_{k+1} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} t_{k+1} \\ t_{k+2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} t_{k+2} \\ t_{k+3} \end{Bmatrix} \dots$$

La schématisation de l'algorithme de reconstruction de la spline est donnée ci-dessous :

$$\begin{array}{cccccc} 0 & & 0 & & 0 & & 1 & & 0 & & 0 \\ \begin{Bmatrix} t_{k-2} \\ t_{k-1} \end{Bmatrix} & & \begin{Bmatrix} t_{k-1} \\ t_k \end{Bmatrix} & & \begin{Bmatrix} t_k \\ t_{k+1} \end{Bmatrix} & & \begin{Bmatrix} t_{k+1} \\ t_{k+2} \end{Bmatrix} & & \begin{Bmatrix} t_{k+2} \\ t_{k+3} \end{Bmatrix} & & \begin{Bmatrix} t_{k+3} \\ t_{k+4} \end{Bmatrix} \\ \cdot \searrow \swarrow \beta_{k-2} & & \cdot \searrow \swarrow \beta_{k-1} & & \cdot \searrow \swarrow \beta_k & & \cdot \searrow \swarrow \beta_{k+1} & & \cdot \searrow \swarrow \beta_{k+2} & & \\ \dots \begin{Bmatrix} t_{k-1} \\ t \end{Bmatrix} & & \begin{Bmatrix} t_k \\ t \end{Bmatrix} & & \begin{Bmatrix} t_{k+1} \\ t \end{Bmatrix} & & \begin{Bmatrix} t_{k+2} \\ t \end{Bmatrix} & & \begin{Bmatrix} t_{k+3} \\ t \end{Bmatrix} & & \dots \\ \cdot \searrow \swarrow \gamma_{k-1} & & \cdot \searrow \swarrow \gamma_k & & \cdot \searrow \swarrow \gamma_{k+1} & & \cdot \searrow \swarrow \gamma_{k+2} & & & & \\ \dots \begin{Bmatrix} t \\ t \end{Bmatrix} & & \begin{Bmatrix} t \\ t \end{Bmatrix} & & \begin{Bmatrix} t \\ t \end{Bmatrix} & & \begin{Bmatrix} t \\ t \end{Bmatrix} & & \dots & & \\ \in [t_{k-1}, t_k] & & \in [t_k, t_{k+1}] & & \in [t_{k+1}, t_{k+2}] & & \in [t_{k+2}, t_{k+3}] & & & & \end{array}$$

avec  $\beta_i = \frac{t - t_i}{t_{i+2} - t_i}$  et  $\gamma_i = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}$

fig.1-34

La B-spline  $N_k$  est positive sur  $[t_k, t_{k+3}]$  et nulle partout ailleurs. Elle est obtenue en affectant la valeur 1 à l'étiquette  $\{t_{k+1}, t_{k+2}\}$  et 0 à toutes les autres.

Le schéma donne immédiatement :

$$N_k(t) = \begin{cases} \beta_k \gamma_k, & \text{si } t \in [t_k, t_{k+1}] \\ \beta_k(1 - \gamma_{k+1}) + (1 - \beta_{k+1})\gamma_{k+1}, & \text{si } t \in [t_{k+1}, t_{k+2}] \\ (1 - \beta_{k+1})(1 - \gamma_{k+2}), & \text{si } t \in [t_{k+2}, t_{k+3}] \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La notation algorithmique demeure malgré tout assez simple pour les splines non uniformes.

Ci dessous la spline de base  $N_0^2$  définie sur l'intervalle  $[0, 8]$  pour l'espace de splines de degré 2 associé au vecteur nodal

$$\dots, t_{k-3}, t_{k-2}, t_{k-1}, 0, 2, 3, 8, t_{k+4} \dots$$

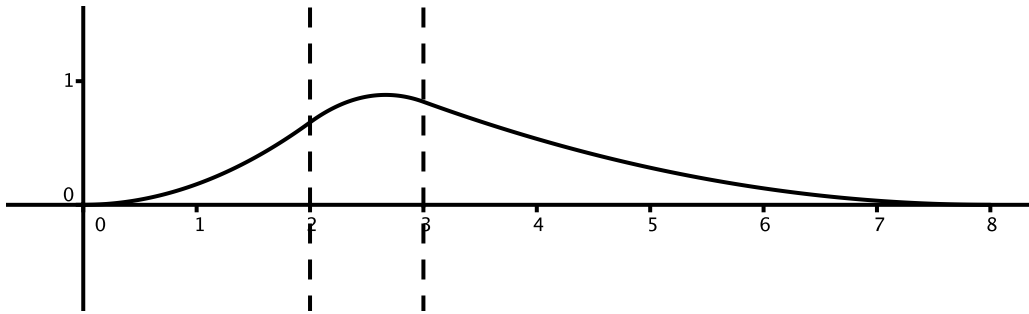


fig.1-35

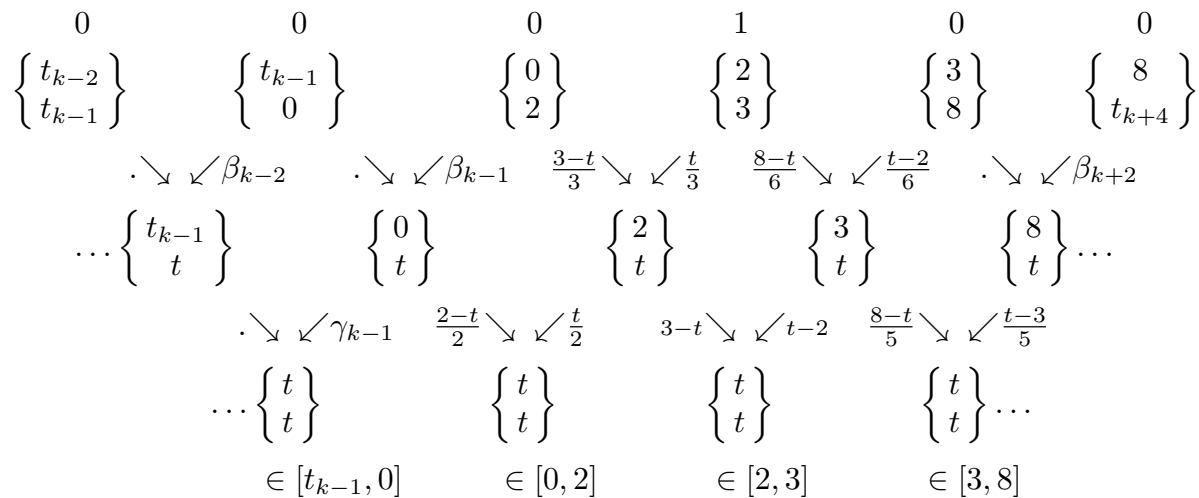


fig.1-36

$$N_0(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{6}, & \text{si } t \in [0, 2] \\ \frac{t(3-t)}{3} + \frac{(8-t)(t-2)}{6}, & \text{si } t \in [2, 3] \\ \frac{(8-t)^2}{30}, & \text{si } t \in [3, 8] \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

### *Splines cubiques*

Le vecteur nodal induit un étiquetage des points de contrôle du type :

$$\dots \quad \begin{Bmatrix} t_{k-3} \\ t_{k-2} \\ t_{k-1} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} t_{k-2} \\ t_{k-1} \\ t_k \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} t_{k-1} \\ t_k \\ t_{k+1} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} t_k \\ t_{k+1} \\ t_{k+2} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} t_{k+1} \\ t_{k+2} \\ t_{k+3} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} t_{k+2} \\ t_{k+3} \\ t_{k+4} \end{Bmatrix} \quad \dots$$

La schématisation de l'algorithme de reconstruction de la spline est donnée ci-dessous :

$$\begin{array}{cccccc} 0 & & 0 & & 0 & & 1 & & 0 & & 0 \\ \begin{Bmatrix} t_{k-2} \\ t_{k-1} \\ t_k \end{Bmatrix} & & \begin{Bmatrix} t_{k-1} \\ t_k \\ t_{k+1} \end{Bmatrix} & & \begin{Bmatrix} t_k \\ t_{k+1} \\ t_{k+2} \end{Bmatrix} & & \begin{Bmatrix} t_{k+1} \\ t_{k+2} \\ t_{k+3} \end{Bmatrix} & & \begin{Bmatrix} t_{k+2} \\ t_{k+3} \\ t_{k+4} \end{Bmatrix} & & \begin{Bmatrix} t_{k+3} \\ t_{k+4} \\ t_{k+5} \end{Bmatrix} \\ \cdot \searrow \swarrow \alpha_{k-2} & & \cdot \searrow \swarrow \alpha_{k-1} & & \cdot \searrow \swarrow \alpha_k & & \cdot \searrow \swarrow \alpha_{k+1} & & \cdot \searrow \swarrow \alpha_{k+2} & & \\ \dots \begin{Bmatrix} t_{k-1} \\ t_k \\ t \end{Bmatrix} & & \begin{Bmatrix} t_k \\ t_{k+1} \\ t \end{Bmatrix} & & \begin{Bmatrix} t_{k+1} \\ t_{k+2} \\ t \end{Bmatrix} & & \begin{Bmatrix} t_{k+2} \\ t_{k+3} \\ t \end{Bmatrix} & & \begin{Bmatrix} t_{k+3} \\ t_{k+4} \\ t \end{Bmatrix} & & \dots \\ \cdot \searrow \swarrow \beta_{k-1} & & \cdot \searrow \swarrow \beta_k & & \cdot \searrow \swarrow \beta_{k+1} & & \cdot \searrow \swarrow \beta_{k+2} & & & & \\ \dots \begin{Bmatrix} t_k \\ t \\ t \end{Bmatrix} & & \begin{Bmatrix} t_{k+1} \\ t \\ t \end{Bmatrix} & & \begin{Bmatrix} t_{k+2} \\ t \\ t \end{Bmatrix} & & \begin{Bmatrix} t_{k+3} \\ t \\ t \end{Bmatrix} & & \dots & & \\ & & \cdot \searrow \swarrow \gamma_k & & \cdot \searrow \swarrow \gamma_{k+1} & & \cdot \searrow \swarrow \gamma_{k+2} & & \cdot \searrow \swarrow \gamma_{k+3} & & \\ & & \dots \begin{Bmatrix} t \\ t \\ t \end{Bmatrix} & & \begin{Bmatrix} t \\ t \\ t \end{Bmatrix} & & \begin{Bmatrix} t \\ t \\ t \end{Bmatrix} & & \begin{Bmatrix} t \\ t \\ t \end{Bmatrix} & & \dots \\ & & \in [t_k, t_{k+1}] & & \in [t_{k+1}, t_{k+2}] & & \in [t_{k+2}, t_{k+3}] & & \in [t_{k+3}, t_{k+4}] & & \end{array}$$

avec  $\alpha_i = \frac{t - t_i}{t_{i+3} - t_i}$ ,  $\beta_i = \frac{t - t_i}{t_{i+2} - t_i}$  et  $\gamma_i = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}$

fig.1-37

La spline de base  $N_k^3$  est positive sur  $[t_k, t_{k+4}]$  et nulle partout ailleurs. Elle est obtenue en affectant la valeur 1 à l'étiquette  $\{t_{k+1}, t_{k+2}, t_{k+3}\}$  et 0 à toutes les autres.

Le schéma donne immédiatement :

$$N_k^3(t) = \begin{cases} \alpha_k \beta_k \gamma_k, & \text{si } t \in [t_k, t_{k+1}] \\ \alpha_k [\beta_k (1 - \gamma_{k+1}) + (1 - \beta_{k+1}) \gamma_{k+1}] + (1 - \alpha_{k+1}) \beta_{k+1} \gamma_{k+1}, & \text{si } t \in [t_{k+1}, t_{k+2}] \\ \alpha_k (1 - \beta_{k+1}) (1 - \gamma_{k+2}) + (1 - \alpha_{k+1}) [\beta_{k+1} (1 - \gamma_{k+2}) \\ \quad + (1 - \beta_{k+2}) \gamma_{k+2}], & \text{si } t \in [t_{k+2}, t_{k+3}] \\ (1 - \alpha_{k+1}) (1 - \beta_{k+2}) (1 - \gamma_{k+3}), & \text{si } t \in [t_{k+3}, t_{k+4}] \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi que la récurrence :

$$N_k^3(t) = \alpha_k N_k^2(t) + (1 - \alpha_{k+1}) N_{k+1}^2(t)$$

C'est-à-dire

$$N_k^3(t) = \frac{t - t_k}{t_{k+3} - t_k} N_k^2(t) + \frac{t_{k+4} - t}{t_{k+4} - t_{k+1}} N_{k+1}^2(t)$$

### ***Généralisation***

La spline de base  $N_k^n$  est positive sur  $[t_k, t_{k+n+1}]$  et nulle partout ailleurs. Elle est obtenue en affectant la valeur 1 à l'étiquette  $\{t_{k+1}, \dots, t_{k+n}\}$

Elle vérifie la relation de récurrence :

$$N_k^n(t) = \frac{t - t_k}{t_{k+n} - t_k} N_k^{n-1}(t) + \frac{t_{k+n+1} - t}{t_{k+n+1} - t_{k+1}} N_{k+1}^{n-1}(t)$$

## 1.4 - Subdivision

Une méthode de reconstruction de courbe spline à l'aide de son polygone de contrôle utilisée en design géométrique est basée sur un principe de subdivision. Elle est évoquée au paragraphe 1.1.2.2. A l'étape  $r$  l'algorithme donne la construction du point  $\mathcal{F}(t)$  correspondant au paramètre  $t = \frac{i}{2^r}$  pour  $i = 0, \dots, 2^r$ . L'algorithme de construction fournit, en même temps, les sommets d'un nouveau polygone de contrôle qui approche un peu plus la courbe. Dans l'espace des paramètres la création d'un nouveau point se couple avec l'insertion d'un nouveau nœud.

Le même principe de *raffinement* du polygone de contrôle se retrouve dans l'algorithme d'augmentation du degré présenté au paragraphe 1.1.2.3.



En 1956 Georges de Rham [De Rham] exprime le principe d'obtention d'une courbe par un algorithme de *corner cutting* qui consiste à "tailler les coins" d'un polynôme pour obtenir une courbe par morceaux se rapprochant de plus en plus d'une courbe lisse. Si le processus *corner cutting* produit toujours un résultat, il existe une relation entre les caractéristiques de la courbe limite obtenue et les proportions des découpes utilisées dans le processus. Ainsi, l'algorithme de Chaikin [Chaikin], qui "découpe les coins" dans les proportions 1/4 et 3/4 produit une courbe spline de degré 2. C'est-à-dire des arcs de parabole raccordés  $\mathcal{C}^1$ .

### 1.4.1 - Principe

Un *schéma de subdivision* est l'ensemble de toutes les étapes, matérialisées par les polygones successifs, qui conduisent à la fonction limite. Dans les schémas examinés ici, chaque sommet d'un nouveau polygone d'approximation s'obtient comme combinaison affine d'un nombre fini de sommets de l'ancien polygone.

#### Définition 1.36 : Matrice décalée d'ordre k

Une matrice décalée d'ordre  $k$  est une matrice bi-infinie  $A = \{A_{ij}\}$  avec  $A_{ij} = a_{i-kj}$  et  $A_{ij} = 0$  sauf si  $0 \leq i - kj \leq m$ .

Considérons un processus qui consiste à doubler le nombre de sommets du polygone d'approximation (cas dyadique). Les notations et explications suivantes sont extraites de [Cavaretta, Dahmen & Micchelli].

Le point de départ du processus est un ensemble de points de contrôle  $\lambda = \{\lambda_i^0, i \in \mathbb{Z}\}$ . Ces points constituent un polygone d'approximation qui a pour écriture paramétrique :

$$f_\lambda^0(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \lambda_i^0 \phi(t-i)$$

avec

$$\phi(t) = \begin{cases} t, & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t, & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

À l'étape 1 les points de l'ensemble  $\lambda$  donnent naissance à un second ensemble  $\lambda^1 = \{\lambda_i^1, i \in \mathbb{Z}\}$  grâce à une combinaison

$$\begin{aligned} \lambda_{2i}^1 &= \dots + a_{-2}\lambda_{i+1}^0 + a_0\lambda_i^0 + a_2\lambda_{i-1}^0 + \dots \\ \lambda_{2i+1}^1 &= \dots + a_{-1}\lambda_{i+1}^0 + a_1\lambda_i^0 + a_3\lambda_{i-1}^0 + \dots \end{aligned}$$

Ce qui s'exprime, à l'aide de l'opérateur  $S$ , par

$$\lambda^1 = S\lambda$$

Le nombre de points, qui a doublé, correspond maintenant à une grille  $2^{-1}\mathbb{Z}$ . Le polygone correspondant s'écrit :

$$f_\lambda^1(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \lambda_i^1 \phi(2t - i)$$

À l'étape  $m$  le nouveau polygone d'approximation s'écrit

$$f_\lambda^m(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \lambda_i^m \phi(2^m t - i)$$

avec

$$\lambda^m = S^m \lambda$$

La matrice  $S$  qui exprime, pour une étape donnée, les nouveaux points en fonction des anciens, est la *matrice de raffinement*. Chaque colonne de cette matrice exprime la contribution d'un ancien point dans le calcul d'un certain nombre de nouveaux points. Lorsque le processus est invariant par translation (similaire pour tous les sommets) toutes les colonnes comportent les mêmes coefficients et la matrice de raffinement est alors une matrice décalée d'ordre 2.

$$S\lambda = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{i-2j} \lambda_j \quad i \in \mathbb{Z}$$

Dans un schéma de subdivision invariant par translation où l'on multiplie, à chaque étape, le nombre de points par un entier  $k$ , la matrice de raffinement devient une matrice décalée d'ordre  $k$ .

La suite  $\{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  de coefficients apparaissant dans chaque colonne et qui caractérise donc le schéma de subdivision est le *masque de subdivision*. Tous ses coefficients sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux que l'on notera  $[a_0, \dots, a_m]$ .

On dit que le processus de subdivision  $S$  converge si, pour toute suite  $\lambda$ , il existe une fonction  $f_\lambda$  continue telle que :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| f_\lambda\left(\frac{i}{2^m}\right) - f_\lambda^m\left(\frac{i}{2^m}\right) \right\|_\infty = 0 \quad i = 0, \dots, 2^m$$

La problématique sera donc ici :

- de déterminer les conditions sur le masque (qui caractérise  $S$ ) pour que le processus converge.

- de déterminer la nature de la fonction limite  $f_\lambda$  lorsque cette dernière existe.

Lorsqu'il y a convergence, il existe une unique fonction  $\psi$  associée à  $S$ , la *fonction de raffinement* de  $S$ , qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$\psi(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i \psi(2t - i) \quad t \in \mathbb{R}$$

La fonction limite du processus s'écrit alors

$$f_\lambda(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \lambda_i \psi(t - i)$$

### *De l'avantage d'utiliser les floraisons*

Dans le processus de subdivision, la production d'un nouveau sommet est couplée avec l'insertion d'un nouveau nœud dans l'espace des paramètres. Les floraisons font naturellement le lien entre les nœuds (qui sont également les arguments de la floraison) et les coefficients de la matrice de subdivision qui traduisent les combinaisons entre les sommets des polygones d'approximation (ce sont les mêmes coefficients que l'on retrouve dans la description des algorithmes sous forme de schémas triangulaires).

Ainsi les coefficients qui expriment les relations entre les points se calculent grâce aux arguments des étiquettes de ces points.

Le principe est exposé ci-après dans l'exemple d'une courbe spline uniforme de degré 2.

Les points de contrôle d'une spline uniforme de degré 2 ont un étiquetage du type

$$\cdots \quad \left\{ \begin{array}{c} t_{k-3} \\ t_{k-2} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} t_{k-2} \\ t_{k-1} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} t_{k-1} \\ t_k \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} t_k \\ t_{k+1} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} t_{k+1} \\ t_{k+2} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} t_{k+2} \\ t_{k+3} \end{array} \right\} \quad \cdots$$

qui est induit par le vecteur nodal

$$\cdots, t_{k-3}, t_{k-2}, t_{k-1}, t_k, t_{k+1}, t_{k+2}, t_{k+3}, \cdots$$

En doublant uniformément le nombre de nœuds (c'est-à-dire en insérant, au centre de chaque segment  $[t_k, t_{k+1}]$  le nœud  $\frac{t_k+t_{k+1}}{2}$ ) l'étiquetage des sommets du nouveau polygone de contrôle devient :

$$\cdots \quad \left\{ \begin{array}{c} t_{k-1} \\ \frac{t_{k-1}+t_k}{2} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} \frac{t_{k-1}+t_k}{2} \\ t_k \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} t_k \\ \frac{t_k+t_{k+1}}{2} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} \frac{t_k+t_{k+1}}{2} \\ t_{k+1} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} t_{k+1} \\ \frac{t_{k+1}+t_{k+2}}{2} \end{array} \right\} \quad \cdots$$

Le théorème d'évaluation d'une floraison (théorème 1.9) permet alors de calculer les coefficients permettant d'obtenir la seconde suite d'étiquettes à partir de la première. Ce sont en fait les coefficients de la matrice de raffinement associée au schéma de subdivision dont la limite est une courbe spline uniforme de degré 2.

Contrairement à ce qui se passe dans la théorie classique où la question est de déterminer les conditions s'appliquant sur les coefficients du masque subdivision pour que la fonction limite vérifie certaines conditions de dérivabilité, l'approche par les floraisons part de cette fonction limite pour en déterminer les coefficients du schéma de subdivision dont elle est limite.

Dans ce paragraphe, les coefficients du masque de subdivision pour une courbe spline de degré  $k$  sont retrouvés à l'aide des floraisons. Une approche classique exposée, par exemple, dans [Dyn & Levin] consiste à utiliser les séries de Laurent, transformées de Fourier et produits de convolution.

Les résultats obtenus à l'aide de la démarche présentée ici, c'est-à-dire les coefficients des masques de subdivision caractérisant les schémas dont la limite est une courbe spline de degré  $n$ , sont tous connus. Ce qui l'est moins, en revanche, c'est la simplicité des outils mathématiques utilisés, via les floraisons, pour les retrouver (des suites de combinaisons affines).

Dans un premier temps, nous exposons la méthode qui permet de traduire les processus de subdivision sous forme de floraison et nous retrouvons les coefficients conduisant à la construction de courbes splines polynomiales de degré  $n$ . Cette méthode sera généralisée, au chapitre suivant, aux espaces de Chebyshev.

La relation entre les coefficients des masques pour les courbes splines de degré  $n$  et les splines de degré  $n+1$  sera l'objet du théorème d'intégration présenté à la fin du paragraphe 1.4.2. L'intérêt de ce théorème réside dans le fait qu'il est également valide dans le cas plus général des espaces de Chebyshev.

Dans [Ayari], l'auteur indique que les processus de subdivision se font classiquement en doublant le nombre de points à chaque étape (processus dyadique). Il s'en affranchit en présentant des processus b-adiques. L'outil des floraisons s'adapte parfaitement à cette généralisation. Ce sera l'objet du paragraphe 1.4.3. Le théorème d'intégration sera également généralisé aux processus b-adiques.

L'outil des floraisons se prête également parfaitement à la caractérisation des processus non uniformes. C'est ce que nous montrerons brièvement au paragraphe 1.4.4.

## 1.4.2 - Floraisons et subdivisions

Une spline est obtenue, par un algorithme de de Boor à partir de ses points de contrôle. Définir une floraison associée à la spline revient à étiqueter, de manière unique, chacun de ses pôles. L'étiquetage contient alors implicitement l'algorithme de de Boor de reconstruction de la spline. La suite ordonnée des arguments utilisés pour l'étiquetage forme le vecteur nodal de la spline. L'algorithme de subdivision consiste à augmenter le nombre de pôles par un algorithme *corner-cutting*. Le nouveau polygone de contrôle, plus proche de la courbe cherchée, devient alors une meilleure approximation de celle-ci. En pratique, augmenter le nombre de pôles revient donc à augmenter le nombre de nœuds.

Dans ce paragraphe, on se limitera, pour exposer le principe, au cas le plus simple des subdivisions dyadiques sur un vecteur nodal uniforme.

### 1.4.2.1 - Spline polynomiale de degré 2

On considère des nœuds réguliers  $t_k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). A chaque étape de raffinement, le nombre de nœuds est multiplié par 2, ce qui diminue de moitié l'intervalle entre chaque nœud du nouveau vecteur nodal.

On notera  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  les sommets du polygone de contrôle pour une étape donnée et  $\{B_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  les sommets qui composent le polygone de contrôle après une étape de raffinage.

#### **Proposition 1.36 :**

*On considère un processus de subdivision dyadique qui conduit à une courbe spline de degré 2. Les éléments des suites  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  et  $\{B_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  sont liés par les relations :*

$$\begin{aligned} B_{2k} &= \frac{3}{4}A_k + \frac{1}{4}A_{k+1} \\ B_{2k+1} &= \frac{1}{4}A_k + \frac{3}{4}A_{k+1} \end{aligned}$$

#### **Preuve :**

On considère des nœuds réguliers

$$\dots, k-4, k-2, k, k+2, k+4, \dots$$

Les nouveaux pôles correspondent au nouveau vecteur nodal :

$$\dots, k-4, k-3, k-2, k-1, k, k+1, k+2, k+3, k+4, \dots$$

Deux points contigus  $\{k-2, k\}$  et  $\{k, k+2\}$  permettent d'en engendrer deux autres par combinaison affine :  $\{k-1, k\}$  et  $\{k, k+1\}$ . On double ainsi le nombre de pôles.

Ce qu'on peut illustrer par le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \left\{ \begin{smallmatrix} k-2 \\ k \end{smallmatrix} \right\} & & \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ k+2 \end{smallmatrix} \right\} & & \left\{ \begin{smallmatrix} k-2 \\ k \end{smallmatrix} \right\} & & \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ k+2 \end{smallmatrix} \right\} \\
 1 - \alpha_1 \searrow \swarrow \alpha_1 & & & & 1 - \alpha_2 \searrow \swarrow \alpha_2 & & \\
 \left\{ \begin{smallmatrix} k-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} & & & & \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ k+1 \end{smallmatrix} \right\} & & 
 \end{array}$$

Les fonctions  $\alpha_i$  s'expriment à l'aide des combinaisons affines:

$$\alpha_1 = \frac{(k-1) - (k-2)}{(k+2) - (k-2)} = \frac{1}{4} \quad \alpha_2 = \frac{(k+1) - (k-2)}{(k+2) - (k-2)} = \frac{3}{4}$$

Les coefficients ne dépendent pas de la distance inter-nœuds. Et on a

$$\begin{array}{ccc}
 \left\{ \begin{smallmatrix} k-h \\ k \end{smallmatrix} \right\} & & \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ k+h \end{smallmatrix} \right\} & & \left\{ \begin{smallmatrix} k-h \\ k \end{smallmatrix} \right\} & & \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ k+h \end{smallmatrix} \right\} \\
 1 - \alpha_1 \searrow \swarrow \alpha_1 & & & & 1 - \alpha_2 \searrow \swarrow \alpha_2 & & \\
 \left\{ \begin{smallmatrix} k-h/2 \\ k \end{smallmatrix} \right\} & & & & \left\{ \begin{smallmatrix} k+h/2 \\ k \end{smallmatrix} \right\} & & \\
 \alpha_1 = \frac{(k - \frac{h}{2}) - (k-h)}{(k+h) - (k-h)} = \frac{1}{4} & & \alpha_2 = \frac{(k + \frac{h}{2}) - (k-h)}{(k+h) - (k-h)} = \frac{3}{4} & & & & 
 \end{array}$$

On obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{smallmatrix} k-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} &= \frac{3}{4} \left\{ \begin{smallmatrix} k-2 \\ k \end{smallmatrix} \right\} + \frac{1}{4} \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ k+2 \end{smallmatrix} \right\} \\
 \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ k+1 \end{smallmatrix} \right\} &= \frac{1}{4} \left\{ \begin{smallmatrix} k-2 \\ k \end{smallmatrix} \right\} + \frac{3}{4} \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ k+2 \end{smallmatrix} \right\}
 \end{aligned}$$

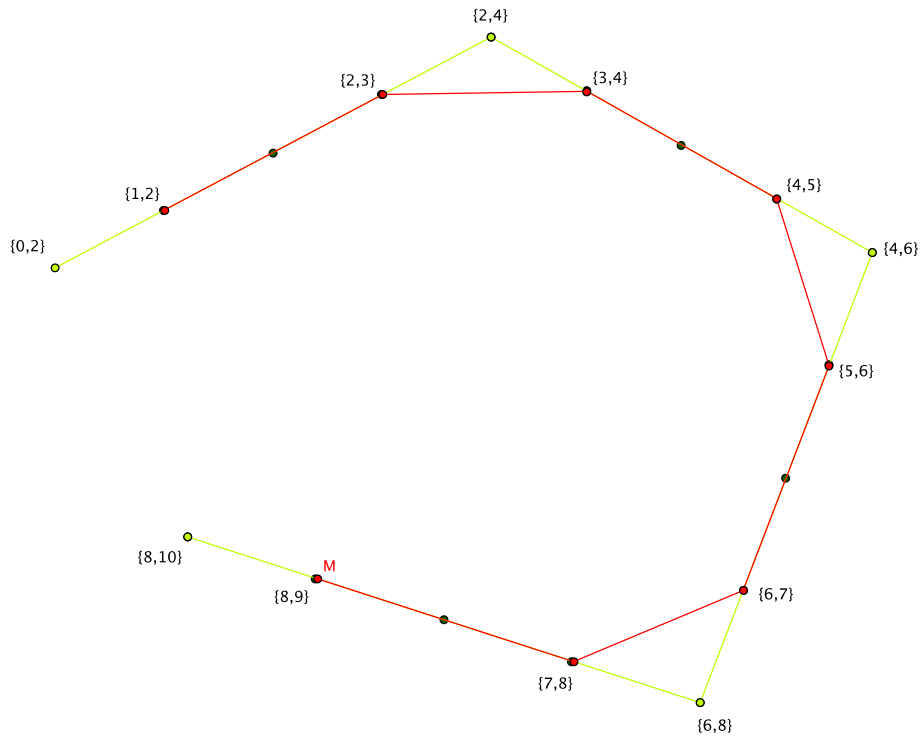
■

**Remarque 1 :**

Les relations de la proposition 1.36 s'expriment par la matrice de raffinement:

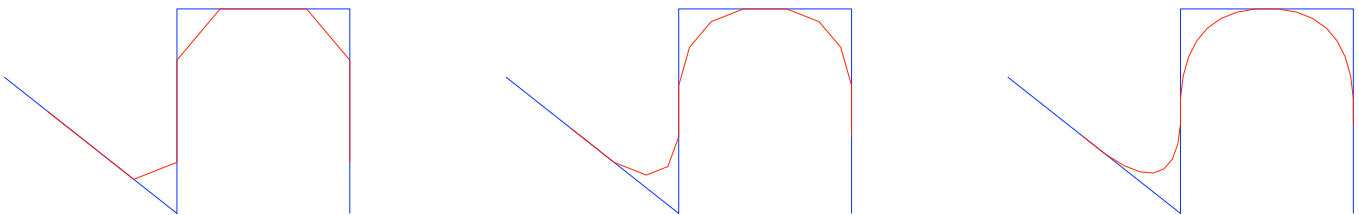
$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \dots & 3 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 1 & 3 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 3 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 3 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 3 & 1 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \end{pmatrix}$$

Avec le masque de subdivision  $\frac{1}{4}[1 \ 3 \ 3 \ 1]$



*fig. 1-38*

*Une étape du processus de subdivision dyadique dont la limite est une courbe spline de degré 2*

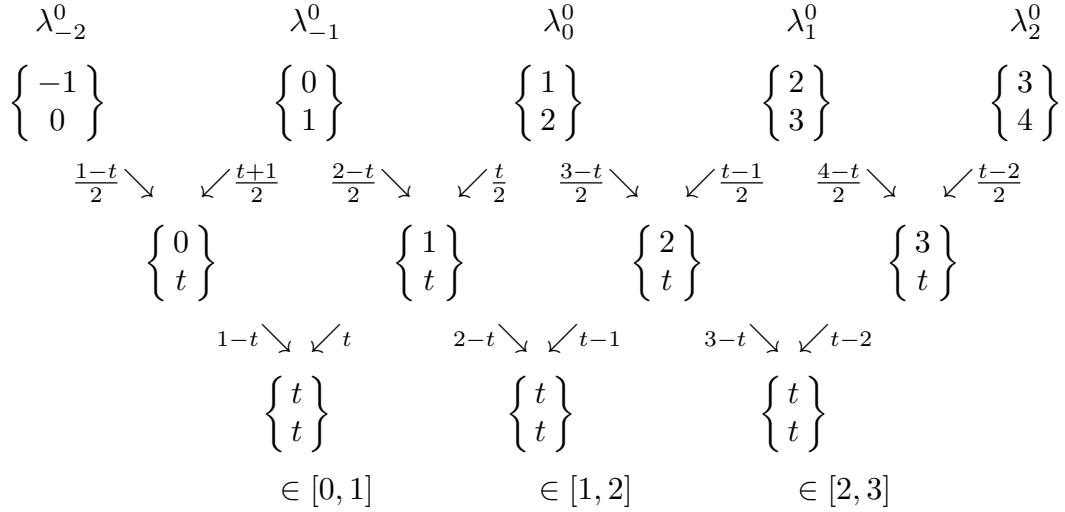


*fig. 1-39*

*Le processus dont une étape est représenté sur la figure 1-38 est appliqué ici. Au bout de 3 itérations on obtient déjà une assez bonne approximation de la courbe limite.*

**Remarque 2 :**

En reprenant la figure 1-25 avec les notations du paragraphe 1.4.1 on constate que la fonction de raffinement associée au processus se lit sur la représentation algorithmique de la fonction limite (ici la spline quadratique).



Ainsi,

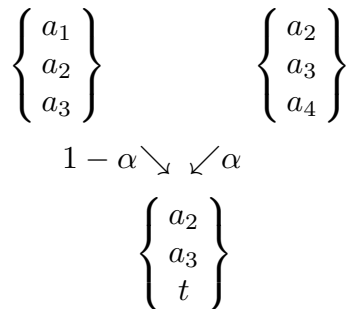
$$f_\lambda(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \lambda_i^0 \psi(t - i)$$

avec

$$\psi(t) = \begin{cases} t^2/2, & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ [t(2-t) + (3-t)(t-1)]/2, & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \\ (3-t)^2/2, & \text{si } 2 \leq t \leq 3 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

**1.4.2.2 - Spline polynomiale cubique**

Dans le cas cubique, les points du polygone de contrôle sont étiquetés par des triplets. On rappelle que deux triplets consécutifs engendrent alors un nouveau point par combinaison affine selon le schéma suivant :





où  $t$  est une combinaison affine de  $a_1$  et  $a_4$  et  $\alpha = \frac{t - a_1}{a_4 - a_1}$  et  $1 - \alpha = \frac{a_4 - t}{a_4 - a_1}$

Dans le cas d'un paramétrage uniforme dans un espace de polynômes les coefficients de raffinement ne dépendant ni de la position du nœud  $t_k$  ni de la longueur de l'intervalle inter-nœuds (divisé à chaque étape), le processus sera donc présenté dans le cas le plus simple du passage de sections de longueur 2 à des sections de longueur 1.

**Proposition 1.37 :**

On considère un processus de subdivision dyadique qui conduit à une courbe spline de degré 3. Les éléments des suites  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  et  $\{B_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  sont liés par les relations :

$$B_{2k} = \frac{1}{8}A_{k-1} + \frac{3}{4}A_k + \frac{1}{8}A_{k+1}$$

$$B_{2k+1} = \frac{1}{2}A_k + \frac{1}{2}A_{k+1}$$

*Preuve :*

Dans une étape du processus de subdivision, la suite  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  de points de contrôle

$$\dots \quad \begin{Bmatrix} k-4 \\ k-2 \\ k \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} k-2 \\ k \\ k+2 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} k \\ k+2 \\ k+4 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} k+2 \\ k+4 \\ k+6 \end{Bmatrix} \quad \dots$$

correspondant au vecteur nodal

$$\dots, k-4, k-2, k, k+2, k+4, \dots$$

engendre une nouvelle suite  $\{B_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  de points de contrôle.

$$\dots \quad \begin{Bmatrix} k-3 \\ k-2 \\ k-1 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} k-2 \\ k-1 \\ k \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} k-1 \\ k \\ k+1 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} k \\ k+1 \\ k+2 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} k+1 \\ k+2 \\ k+3 \end{Bmatrix} \quad \dots$$

correspondant au nouveau vecteur nodal

$$\dots, k-4, k-3, k-2, k-1, k, k+1, k+2, k+3, k+4, \dots$$

Il y a deux types de points  $B_k$  :

- ceux dont l'étiquette contient 2 arguments provenant de l'ancien vecteur nodal (type 1),
- et ceux dont l'étiquette contient un seul argument provenant de l'ancien vecteur nodal (type 2),

Type 1 :

Lorsque deux des arguments du nouveau point  $B_k$  proviennent de l'ancien vecteur nodal, le nouveau point de type  $\begin{Bmatrix} k \\ k+1 \\ k+2 \end{Bmatrix}$  s'obtient alors par combinaison affine des deux anciens points dont les étiquettes contiennent les arguments  $k$  et  $k+2$  simultanément.

$$\begin{Bmatrix} k-2 \\ k \\ k+2 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} k \\ k+2 \\ k+4 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \searrow \swarrow \frac{1}{2}$$

$$\begin{Bmatrix} k \\ k+1 \\ k+2 \end{Bmatrix}$$

fig. 1-40

Type 2 :

Lorsque l'étiquette du nouveau point  $B_k$  contient un seul argument de l'ancien vecteur nodal, le nouveau point de type  $\begin{Bmatrix} k-1 \\ k \\ k+1 \end{Bmatrix}$  peut s'obtenir, de deux façons différentes par combinaison affine des trois anciens points dont les étiquettes contiennent les arguments  $k$ .

$$\begin{Bmatrix} k-4 \\ k-2 \\ k \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} k-2 \\ k \\ k+2 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} k \\ k+2 \\ k+4 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} k-4 \\ k-2 \\ k \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} k-2 \\ k \\ k+2 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} k \\ k+2 \\ k+4 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \searrow \swarrow \frac{1}{2} \quad \frac{5}{6} \searrow \swarrow \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \searrow \swarrow \frac{5}{6} \quad \frac{1}{2} \searrow \swarrow \frac{1}{2}$$

$$k-1 \rightarrow \begin{Bmatrix} k-2 \\ k-1 \\ k \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} k-1 \\ k \\ k+2 \end{Bmatrix} \quad k+1 \rightarrow \begin{Bmatrix} k-2 \\ k \\ k+1 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} k \\ k+1 \\ k+2 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{1}{4} \searrow \swarrow \frac{3}{4} \quad \frac{3}{4} \searrow \swarrow \frac{1}{4}$$

$$k+1 \rightarrow \begin{Bmatrix} k-1 \\ k \\ k+1 \end{Bmatrix} \quad k-1 \rightarrow \begin{Bmatrix} k-1 \\ k \\ k+1 \end{Bmatrix}$$

fig. 1-41

Géométriquement, l'existence de deux schémas (fig. 1-41) permettant de construire le point  $\begin{Bmatrix} k-1 \\ k \\ k+1 \end{Bmatrix}$  à partir du triplet  $\begin{Bmatrix} k-4 \\ k-2 \\ k \end{Bmatrix}$ ,  $\begin{Bmatrix} k-2 \\ k \\ k+2 \end{Bmatrix}$ ,  $\begin{Bmatrix} k \\ k+2 \\ k+4 \end{Bmatrix}$  signifie que le point

$\begin{Bmatrix} k-1 \\ k \\ k+1 \end{Bmatrix}$  se situe à l'intersection de deux segments.

Ce sont les segments  $\left[ \begin{Bmatrix} k-2 \\ k-1 \\ k \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k-1 \\ k \\ k+2 \end{Bmatrix} \right]$  et  $\left[ \begin{Bmatrix} k-2 \\ k \\ k+1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k \\ k+1 \\ k+2 \end{Bmatrix} \right]$ .

On a donc les relations suivantes :

$$\begin{Bmatrix} k-1 \\ k \\ k+1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2^3} \left[ \begin{Bmatrix} k-4 \\ k-2 \\ k \end{Bmatrix} + 6 \begin{Bmatrix} k-2 \\ k \\ k+2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} k \\ k+2 \\ k+4 \end{Bmatrix} \right] \text{ à partir de la figure 1-41.}$$

$$\begin{Bmatrix} k \\ k+1 \\ k+2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2^3} \left[ 4 \begin{Bmatrix} k-2 \\ k \\ k+2 \end{Bmatrix} + 4 \begin{Bmatrix} k \\ k+2 \\ k+4 \end{Bmatrix} \right] \text{ à partir de la figure 1-40.} \quad \blacksquare$$

**Remarque :**

La matrice de raffinement qui exprime les points du nouveau polygone de contrôle en fonction des points de l'ancien est une matrice décalée d'ordre 2 du type :

$$\frac{1}{2^3} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \dots & 6 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 4 & 4 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 1 & 6 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 4 & 4 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 6 & 1 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 4 & 4 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 6 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \end{pmatrix}$$

Ce qui donne le masque de subdivision  $\frac{1}{2^3}[1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1]$

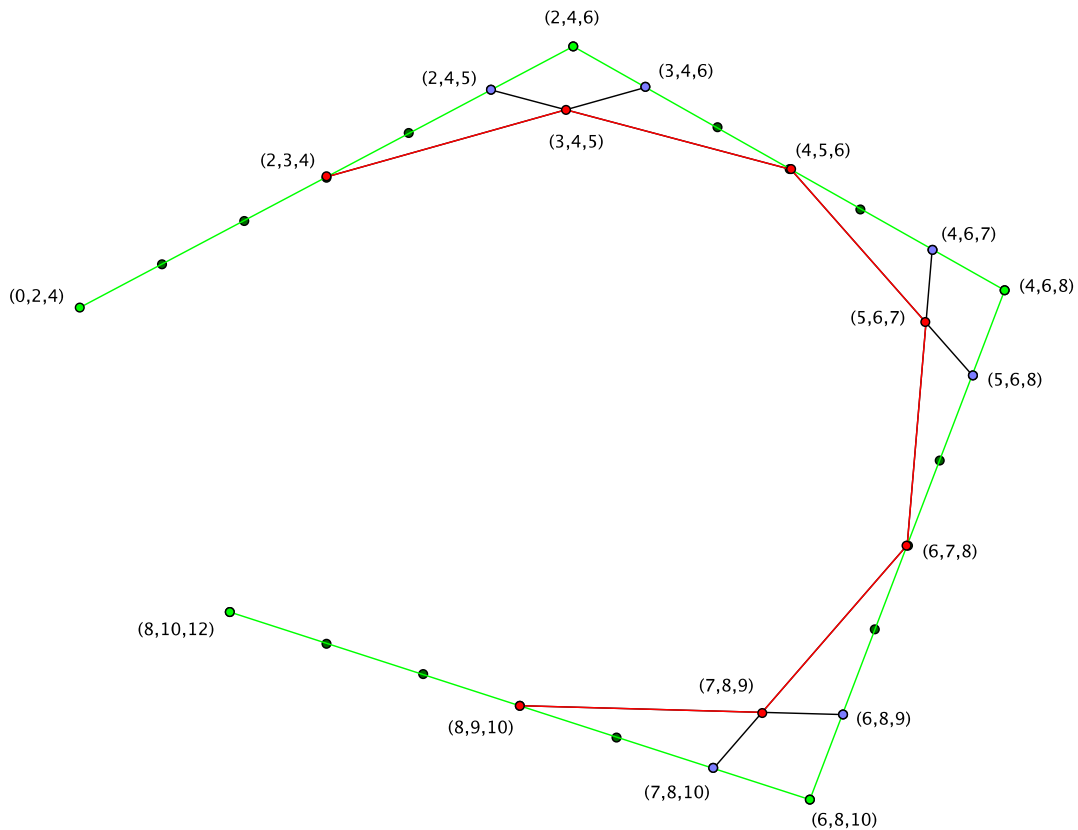


fig. 1-42

Sur le schéma ci-dessous, illustrant une étape du processus de subdivision conduisant à une courbe spline de degré 3, le point étiqueté  $\{3, 4, 5\}$  est engendré à partir du triplet  $\{0, 2, 4\}$ ,  $\{2, 4, 6\}$ ,  $\{4, 6, 8\}$ . Il se trouve à l'intersection du segment  $[\{2, 3, 4\}, \{3, 4, 6\}]$  et du segment  $[\{2, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}]$

### 1.4.2.3 - Théorème d'intégration

**Notation :**

Soit  $\mathcal{E}$  un espace de dimension  $n + 1$  engendré par un système du type  $(1, F_1, \dots, F_n)$ . On note  $D\mathcal{E}$  l'espace, de dimension  $n$ , engendré par  $(F_1, \dots, F_n)$  et  $\int \mathcal{E}$  l'espace dimension  $n + 2$  engendré par  $(1, t, \int F_1, \dots, \int F_n)$

Les coefficients des masques pour les schémas conduisant à des courbes splines polynomiales sont les coefficients du binôme. Ce qui nous a paru important est la relation de récurrence

implicite que cela traduit entre les coefficients du masque associé au schéma de subdivision pour un espace  $D\mathcal{E}$  et ceux du masque associé au schéma de l'espace  $\mathcal{E}$ .

Le théorème d'intégration, présenté ici dans le cadre des espaces de polynômes sera étendu, dans le chapitre suivant aux espaces de Chebyshev.

**Définition 1.38 :**

*On dira qu'un masque de subdivision est associé à un espace  $\mathcal{E}$  lorsque l'application de ce masque à un ensemble de points initiaux produit une courbe spline paramétrée par  $\mathcal{E}$*

Les exemples des paragraphes 1.4.2.1 et 1.4.2.2 ont montré comment calculer, à l'aide des floraisons, les masques associés aux espaces  $\mathbb{P}^2$ ,  $\mathbb{P}^3$ .

**Théorème 1.39 :**

*On considère des schémas de subdivision stationnaires dyadiques. Soit  $\mathcal{E}$  un espace de fonctions polynomiales associé au masque  $\{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ . Le masque  $\{b_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  associé à  $\int \mathcal{E}$  est tel que  $b_k = \frac{1}{2}(a_k + a_{k-1})$*

**Preuve :**

On note  $\phi$  (resp.  $\psi$ ) la fonction de raffinement associée au schéma de subdivision dont le masque est  $\{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  (resp.  $\{b_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ ). On sait que

$$\psi(t) = \int_0^1 \phi(t-x)dx$$

Les équations de raffinement de  $\phi$  et  $\psi$  sont

$$\phi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2t-k) \quad \text{et} \quad \psi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \psi(2t-k)$$

d'où  $\psi(t) = \int_0^1 \phi(t-x)dx = \int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2t-2x-k)dx$

En posant  $2x = y$ , on a

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \int_0^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2t-y-k) \frac{dy}{2} \\ &= \int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2t-y-k) \frac{dy}{2} + \int_1^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2t-y-k) \frac{dy}{2} \\ &= \int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2t-y-k) \frac{dy}{2} + \int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2t-y-1-k) \frac{dy}{2} \\ &= \int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2t-y-k) \frac{dy}{2} + \int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{k-1} \phi(2t-y-k) \frac{dy}{2} \end{aligned}$$

En notant  $b_k = \frac{1}{2}(a_k + a_{k-1})$ , on retrouve bien l'équation de raffinement de  $\psi$

$$\psi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \int_0^1 \phi(2t - y - k) dy \iff \psi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \psi(2t - k)$$



### 1.4.3 - Les processus $m$ -adiques

Dans les processus décrits précédemment le nombre de points du polygone approximant la courbe est doublé à chaque étape. On peut augmenter la vitesse de convergence en triplant, quadruplant,  $m$ -uplant le nombre de points à chaque étape. On peut également imaginer de mixer les processus et d'augmenter le nombre de points de façon différente suivant les endroits de la courbe.

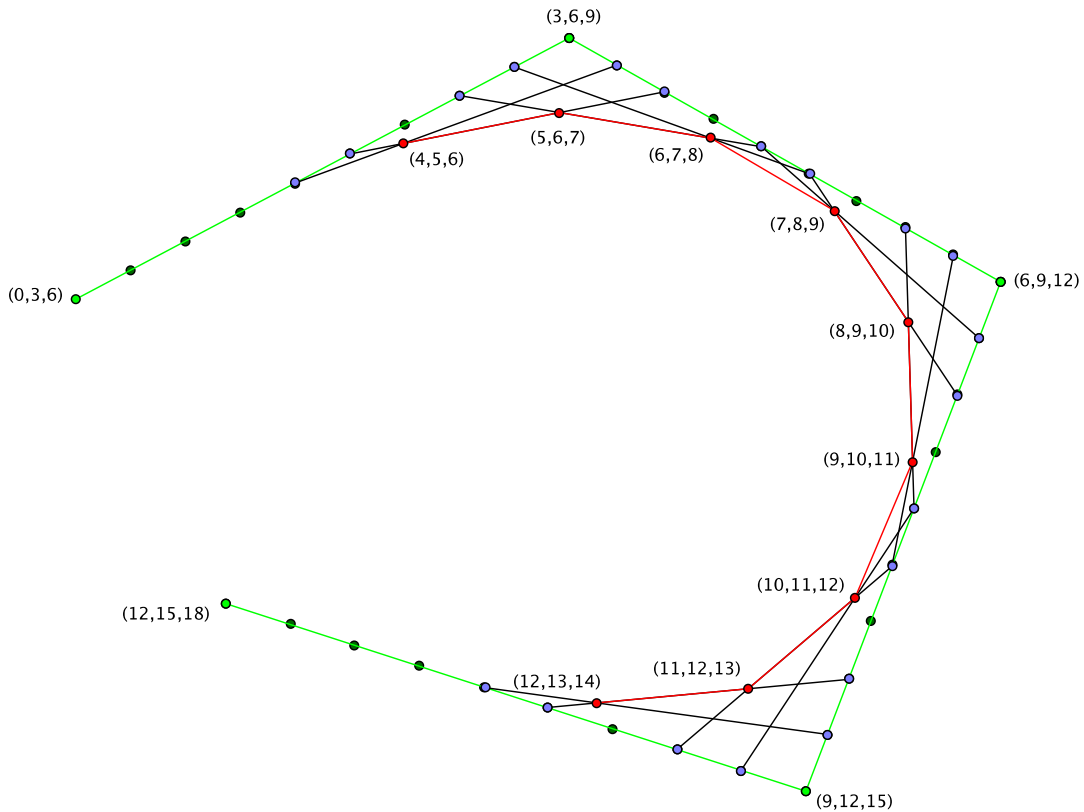


fig. 1-43

Une étape du processus de subdivision dont la limite est une courbe spline de degré 3. Le cas triadique ci-dessus est à comparer avec le processus dyadique de la figure 1-42

Dans la suite de ce paragraphe on cherche, à l'aide des floraisons, à déterminer les coefficients du masque de subdivision pour un processus conduisant à une spline de degré 2 dans les cas  $m$ -adiques. Une généralisation du théorème d'intégration permet ensuite de calculer le masque des processus ayant pour limite des splines de degré  $d > 2$  (il s'agit de la moyenne glissante de  $m$  coefficients du masque de la spline de degré  $d - 1$ ).

### 1.4.3.1 - Cas 3-adique

On considère des nœuds réguliers  $t_k$ , ( $k \in \mathbb{Z}$ ). A chaque étape de raffinement, le nombre de nœuds est multiplié par 3.

La même méthode que précédemment est utilisée pour insérer 2 nœuds à chaque itération. La traduction géométrique de l'algorithme se déduit ensuite des propriétés des floraisons. Comme la taille de l'intervalle de paramétrage ne joue pas, le processus est présenté dans le cas des intervalles de départ de longueur 3.

#### Proposition 1.40 :

On considère un processus de subdivision triadique qui conduit à une courbe spline de degré 2. Les éléments des suites  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  et  $\{B_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  sont liés par les relations :

$$\begin{aligned} B_{3k} &= \frac{6}{9}A_k + \frac{3}{9}A_{k+1} \\ B_{3k+1} &= \frac{3}{9}A_k + \frac{6}{9}A_{k+1} \\ B_{3k+2} &= \frac{1}{9}A_k + \frac{7}{9}A_{k+1} + \frac{1}{9}A_{k+2} \end{aligned}$$

#### Preuve :

Les nœuds de départ sont du type :

$$\dots, k - 6, k - 3, k, k + 3, k + 6, \dots$$

Ce sont les arguments des étiquettes des points initiaux de  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  :

$$\dots \quad \left\{ \begin{array}{c} k - 3 \\ k \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} k \\ k + 3 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} k + 3 \\ k + 6 \end{array} \right\} \quad \dots$$

tandis que les couples associés aux points de  $\{B_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  obtenus sont

$$\dots \quad \left\{ \begin{array}{c} k - 2 \\ k - 1 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} k - 1 \\ k \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} k \\ k + 1 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} k + 1 \\ k + 2 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} k + 2 \\ k + 3 \end{array} \right\} \dots$$

Ce qui correspond aux nœuds :

$$\dots, k-4, k-3, k-2, k-1, k, k+1, k+2, k+3, k+4, \dots$$

Il y a deux types de point  $B_k$  :

- ceux dont l'étiquette contiennent un argument de l'ancien vecteur nodal (type 1),
- et ceux dont l'étiquette ne contient aucun argument de l'ancien vecteur nodal (type 2).

Type 1 :

Lorsque l'un des arguments du nouveau point  $B_k$  est un des anciens nœuds, le point  $B_k$  correspondant est obtenu par combinaison affine de deux points de la suite  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  contenant cet argument.

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \{k-3\} \\ \{ \mathbf{k} \} \end{array} & \begin{array}{c} \{ \mathbf{k} \} \\ \{k+3\} \end{array} & \begin{array}{c} \{k-3\} \\ \{ \mathbf{k} \} \end{array} & \begin{array}{c} \{ \mathbf{k} \} \\ \{k+3\} \end{array} \\ & \frac{2}{3} \searrow \swarrow \frac{1}{3} & & \frac{1}{3} \searrow \swarrow \frac{2}{3} \\ & \begin{array}{c} \{k-1\} \\ \{ \mathbf{k} \} \end{array} & & \begin{array}{c} \{ \mathbf{k} \} \\ \{k+1\} \end{array} \end{array}$$

*fig. 1-44*

Géométriquement cela s'interprète par le fait que les deux points  $\left\{ \begin{smallmatrix} k-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\}$  et  $\left\{ \begin{smallmatrix} k \\ k+1 \end{smallmatrix} \right\}$  se trouvent sur le segment  $\left[ \left\{ \begin{smallmatrix} k-3 \\ k \end{smallmatrix} \right\}, \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ k+3 \end{smallmatrix} \right\} \right]$ .

Type 2 :

Lorsque aucun des arguments de  $B_k$  n'est un ancien nœud, le point est obtenu par combinaison affine de 3 points contigus de la suite  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ .

Ainsi les points du type  $\left\{ \begin{smallmatrix} k+1 \\ k+2 \end{smallmatrix} \right\}$  peuvent être obtenus de deux façons différentes à partir des 3 points dont les étiquettes contiennent les arguments  $k$  et  $k+3$ . Géométriquement cela s'interprète par le fait que le point  $\left\{ \begin{smallmatrix} k+1 \\ k+2 \end{smallmatrix} \right\}$  se trouve à l'intersection des segments  $\left[ \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ k+2 \end{smallmatrix} \right\}, \left\{ \begin{smallmatrix} k+2 \\ k+3 \end{smallmatrix} \right\} \right]$  et  $\left[ \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ k+1 \end{smallmatrix} \right\}, \left\{ \begin{smallmatrix} k+1 \\ k+3 \end{smallmatrix} \right\} \right]$ .

$$\begin{array}{ccccccc} \begin{array}{c} \{k-3\} \\ \{ \mathbf{k} \} \end{array} & \begin{array}{c} \{ \mathbf{k} \} \\ \{k+3\} \end{array} & \begin{array}{c} \{k+3\} \\ \{k+6\} \end{array} & \begin{array}{c} \{k-3\} \\ \{ \mathbf{k} \} \end{array} & \begin{array}{c} \{ \mathbf{k} \} \\ \{k+3\} \end{array} & \begin{array}{c} \{k+3\} \\ \{k+6\} \end{array} & \\ & \frac{1}{6} \searrow \swarrow \frac{5}{6} & \frac{2}{3} \searrow \swarrow \frac{1}{3} & & \frac{1}{3} \searrow \swarrow \frac{2}{3} & \frac{5}{6} \searrow \swarrow \frac{1}{6} & \\ k+2 \rightarrow & \begin{array}{c} \{ \mathbf{k} \} \\ \{k+2\} \end{array} & \begin{array}{c} \{k+2\} \\ \{k+3\} \end{array} & k+1 \rightarrow & \begin{array}{c} \{ \mathbf{k} \} \\ \{k+1\} \end{array} & \begin{array}{c} \{k+1\} \\ \{k+3\} \end{array} & \\ & \frac{2}{3} \searrow \swarrow \frac{1}{3} & & & \frac{1}{3} \searrow \swarrow \frac{2}{3} & & \\ k+1 \rightarrow & \begin{array}{c} \{k+1\} \\ \{k+2\} \end{array} & & k+2 \rightarrow & \begin{array}{c} \{k+1\} \\ \{k+2\} \end{array} & & \end{array}$$

*fig. 1-45*



On a donc les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{matrix} k-1 \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{6}{9} \left\{ \begin{matrix} k-3 \\ k \end{matrix} \right\} + \frac{3}{9} \left\{ \begin{matrix} k \\ k+3 \end{matrix} \right\}$$

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ k+1 \end{matrix} \right\} = \frac{3}{9} \left\{ \begin{matrix} k-3 \\ k \end{matrix} \right\} + \frac{6}{9} \left\{ \begin{matrix} k \\ k+3 \end{matrix} \right\}$$

$$\left\{ \begin{matrix} k+1 \\ k+2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{9} \left\{ \begin{matrix} k-3 \\ k \end{matrix} \right\} + \frac{7}{9} \left\{ \begin{matrix} k \\ k+3 \end{matrix} \right\} + \frac{1}{9} \left\{ \begin{matrix} k+3 \\ k+6 \end{matrix} \right\}$$

■

*Remarque :* La matrice de subdivision correspondant aux relations de la proposition 1.40 est une matrice décalée d'ordre 3

$$\frac{1}{3^2} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ \dots & 6 & 3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 3 & 6 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 1 & 7 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 6 & 3 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 3 & 6 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 7 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 6 & 3 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 3 & 6 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 7 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \end{pmatrix}$$

et le masque est  $\frac{1}{9}[1 \ 3 \ 6 \ 7 \ 6 \ 3 \ 1]$ .

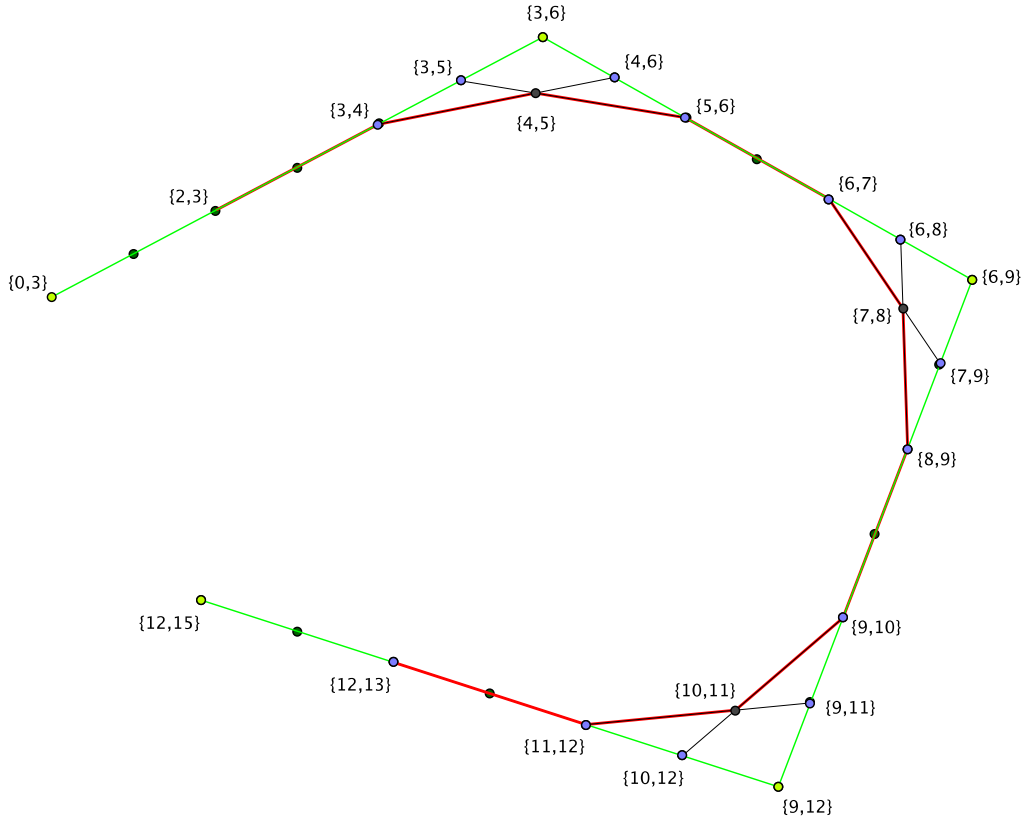


fig. 1-46

Une étape du processus de subdivision triadique dont la limite est une courbe spline de degré 2.

### 1.4.3.2 - Cas $m$ -adique

#### Proposition 1.41 :

On considère un processus de subdivision  $m$ -adique qui conduit à une courbe spline de degré 2. Les éléments des suites  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  et  $\{B_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  sont liés par les relations :

$$\begin{aligned}
 B_{3k} &= \frac{1}{m^2} \left[ \frac{m(m+1)}{2} A_k + \frac{m(m-1)}{2} A_{k+1} \right] \\
 B_{3k+1} &= \frac{1}{m^2} \left[ \frac{m(m-1)}{2} A_k + \frac{m(m+1)}{2} A_{k+1} \right] \\
 B_{3k+i+1} &= \frac{1}{m^2} \left[ \frac{(m-i)(m-i-1)}{2} A_k + \frac{2i(m-1-i) + m(m+1)}{2} A_{k+1} + \frac{i(i+1)}{2} A_{k+2} \right]
 \end{aligned}$$

pour  $i = 1 \dots m - 2$

**Preuve :**

On calcule les coefficients nécessaires à la création de  $m$  points par la même démarche que pour la proposition 1.40. Sur  $m$  points nouveaux de  $\{B_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , 2 points sont de type 1 (obtenus par combinaison de deux points de  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ) et  $m - 2$  sont de type 2 (obtenus par combinaison de 3 points de  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ).

Les schémas des floraisons permettent de visualiser le calcul des coefficients nécessaires à leur obtention:

$$\begin{array}{ccc}
 \left\{ \begin{matrix} k-m \\ \mathbf{k} \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} \mathbf{k} \\ k+m \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} k-m \\ \mathbf{k} \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} \mathbf{k} \\ k+m \end{matrix} \right\} \\
 \frac{m+1}{2m} \searrow & \swarrow \frac{m-1}{2m} & \frac{m-1}{2m} \searrow & \swarrow \frac{m+1}{2m} \\
 & \left\{ \begin{matrix} k-1 \\ \mathbf{k} \end{matrix} \right\} & & \left\{ \begin{matrix} \mathbf{k} \\ k+1 \end{matrix} \right\}
 \end{array}$$

fig. 1-47

Géométriquement, on voit que les points étiquetés  $\left\{ \begin{matrix} k-1 \\ \mathbf{k} \end{matrix} \right\}$  et  $\left\{ \begin{matrix} \mathbf{k} \\ k+1 \end{matrix} \right\}$  se trouvent sur le segment  $[\left\{ \begin{matrix} k-m \\ k \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} k \\ k+m \end{matrix} \right\}]$

Pour  $i = 1 \dots m - 2$  on utilise un des deux schémas suivants:

$$\begin{array}{ccc}
 \left\{ \begin{matrix} k-m \\ k \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} k \\ k+m \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} k+m \\ k+2m \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} k-m \\ k \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} k \\ k+m \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} k+m \\ k+2m \end{matrix} \right\} \\
 \frac{m-i}{2m} \searrow & \swarrow \frac{m+i}{2m} & \frac{2m-i}{2m} \searrow & \swarrow \frac{i}{2m} & \frac{m-i-1}{2m} \searrow & \swarrow \frac{m+i+1}{2m} & \frac{2m-i-1}{2m} \searrow & \swarrow \frac{i+1}{2m} \\
 k+i \rightarrow & \left\{ \begin{matrix} k \\ k+i \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} k+i \\ k+m \end{matrix} \right\} & & k+i+1 \rightarrow & \left\{ \begin{matrix} k \\ k+i+1 \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} k+i+1 \\ k+m \end{matrix} \right\} \\
 & \frac{m-i-1}{m} \searrow & \swarrow \frac{i+1}{m} & & & \frac{m-i}{m} \searrow & \swarrow \frac{i}{m} \\
 k+i+1 \rightarrow & \left\{ \begin{matrix} k+i \\ k+i+1 \end{matrix} \right\} & & & k+i \rightarrow & \left\{ \begin{matrix} k+i \\ k+i+1 \end{matrix} \right\}
 \end{array}$$

fig. 1-48

Géométriquement le point  $\left\{ \begin{matrix} k+i \\ k+i+1 \end{matrix} \right\}$  se trouve à l'intersection des segments  $[\left\{ \begin{matrix} k \\ k+i \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} k+i \\ k+m \end{matrix} \right\}]$  et  $[\left\{ \begin{matrix} k \\ k+i+1 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} k+i+1 \\ k+m \end{matrix} \right\}]$ .

On obtient les relations:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{matrix} k-1 \\ k \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{m^2} \left[ \frac{m(m+1)}{2} \left\{ \begin{matrix} k-m \\ k \end{matrix} \right\} + \frac{m(m-1)}{2} \left\{ \begin{matrix} k \\ k+m \end{matrix} \right\} \right] \\
 \left\{ \begin{matrix} k \\ k+1 \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{m^2} \left[ \frac{m(m-1)}{2} \left\{ \begin{matrix} k-m \\ k \end{matrix} \right\} + \frac{m(m+1)}{2} \left\{ \begin{matrix} k \\ k+m \end{matrix} \right\} \right] \\
 \left\{ \begin{matrix} k+i \\ k+i+1 \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{m^2} \left[ \frac{(m-i)(m-i-1)}{2} \left\{ \begin{matrix} k-m \\ k \end{matrix} \right\} + \frac{2i(m-1-i)+m(m+1)}{2} \left\{ \begin{matrix} k \\ k+m \end{matrix} \right\} + \frac{i(i+1)}{2} \left\{ \begin{matrix} k+m \\ k+2m \end{matrix} \right\} \right]
 \end{aligned}$$

pour  $i = 1 \dots m - 2$

Ce qu'on peut exprimer de façon condensée par :

$$\left\{ \begin{matrix} k+i \\ k+i+1 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{m^2} \left[ \frac{(m-i)(m-i-1)}{2} \left\{ \begin{matrix} k-m \\ k \end{matrix} \right\} + \frac{2i(m-1-i)+m(m+1)}{2} \left\{ \begin{matrix} k \\ k+m \end{matrix} \right\} + \frac{i(i+1)}{2} \left\{ \begin{matrix} k+m \\ k+2m \end{matrix} \right\} \right]$$

pour  $i = 0 \dots m - 1$

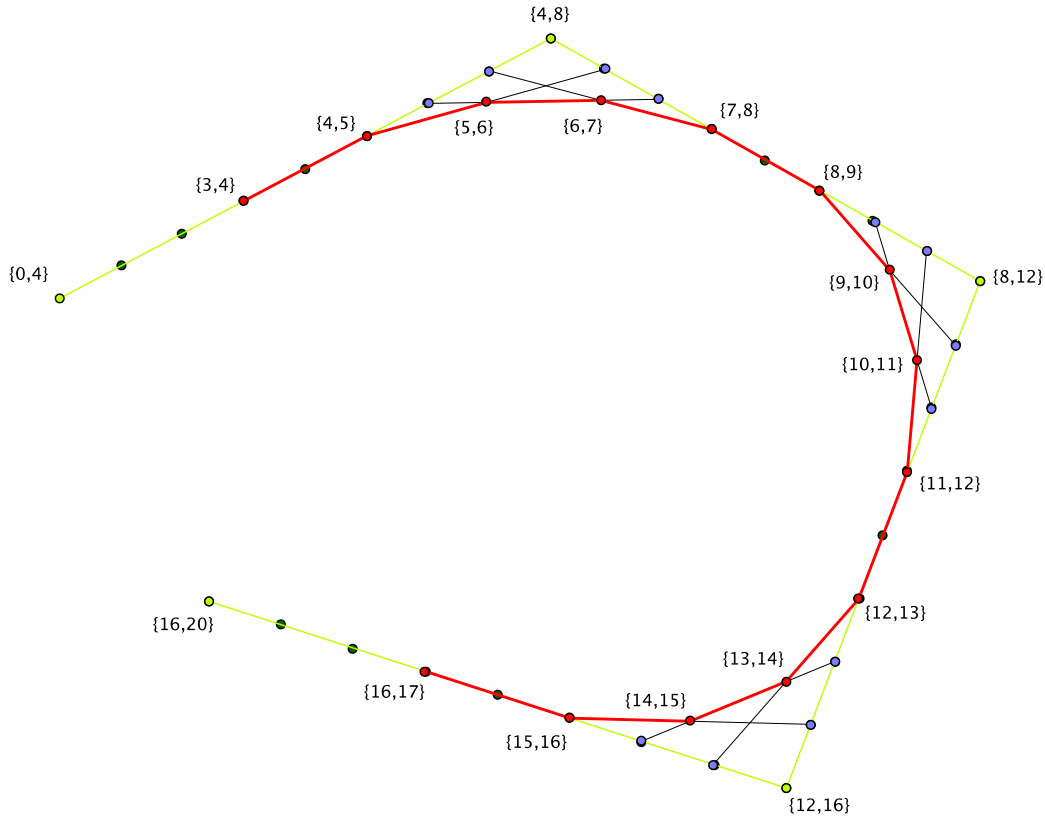


fig. 1-49

Une étape du processus de subdivision 4-adique dont la limite est une courbe spline de degré 2.

Il est intéressant d'observer la suite de figures (1-38, 1-46 et 1-49 ) pour avoir une idée de l'évolution de la construction géométrique lorsqu'on augmente la vitesse de convergence de l'algorithme.

Par exemple, pour le cas 4-adique, on obtient les relations :

$$\begin{aligned}\{k-1\}_k &= \frac{10}{16} \{k-4\}_k + \frac{6}{16} \{k\}_{k+4} \\ \{k\}_{k+1} &= \frac{6}{16} \{k-4\}_k + \frac{10}{16} \{k\}_{k+4} \\ \{k+1\}_{k+2} &= \frac{3}{16} \{k-4\}_k + \frac{12}{16} \{k\}_{k+4} + \frac{1}{16} \{k+4\}_{k+8} \\ \{k+2\}_{k+3} &= \frac{1}{16} \{k-4\}_k + \frac{12}{16} \{k\}_{k+4} + \frac{3}{16} \{k+4\}_{k+8}\end{aligned}$$

et le masque est  $\frac{1}{16}[1 \ 3 \ 6 \ 10 \ 12 \ 12 \ 10 \ 6 \ 3 \ 1]$  dans une matrice décalée d'ordre 4.

### 1.4.3.3 Le théorème d'intégration

#### **Théorème 1.42 :**

On considère des schémas de subdivision stationnaires  $m$ -adiques. Soit  $\mathcal{E}$  un espace de fonctions polynomiales associé au masque  $\{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ . Le masque  $\{b_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  associé à  $\int \mathcal{E}$  est tel que  $b_k = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} a_{k-i}$ .

*Preuve :*

On note  $\phi$  (resp.  $\psi$ ) la fonction de raffinement associée au schéma de subdivision dont le masque est  $\{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  (resp.  $\{b_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ ). On sait que

$$\psi(t) = \int_0^1 \phi(t-x) dx$$

Les équations de raffinement de  $\phi$  et  $\psi$  sont

$$\phi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(mt - k) \quad \text{et} \quad \psi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \psi(mt - k)$$

En posant  $mx = y$ , on a

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \int_0^m \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(mt - y - k) \frac{dy}{m} \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \int_i^{i+1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(mt - y - k) \frac{dy}{m} \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(mt - y - i - k) \frac{dy}{m} \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{k-i} \phi(mt - y - k) \frac{dy}{m}\end{aligned}$$

En notant  $b_k = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} a_{k-i}$ , on retrouve bien l'équation de raffinement de  $\psi$

$$\psi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \int_0^1 \phi(mt - y - k) dy \iff \psi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \psi(mt - k)$$

■

### 1.4.4 - Vecteurs nodaux non uniformes

L'utilisation d'un vecteur nodal uniforme conduit à l'obtention d'un paramétrage uniforme de la spline. Les floraisons permettent de déterminer, par un procédé identique, les coefficients à utiliser dans le cas où les nœuds ne sont pas espacés de manière uniforme. Le processus sera présenté ici dans le cas d'une spline de degré 2.

On passe alors du vecteur nodal

$$\dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots$$

au nouveau vecteur nodal :

$$\dots, b_{2k-1}, b_{2k}, b_{2k+1}, b_{2k+2}, \dots$$

**Premier cas : paramétrage uniforme sur chacune des sections**  $[a_k, a_{k+1}]$

Le raffinage se fait en utilisant la relation :

$$\begin{aligned} b_{2k} &= a_k \\ b_{2k-1} &= \frac{1}{2}[a_{k-1} + a_k] \\ b_{2k+1} &= \frac{1}{2}[a_k + a_{k+1}] \end{aligned}$$

ce qu'on peut illustrer par le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} a_{k-1} \\ a_k \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} a_k \\ a_{k+1} \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} a_{k-1} \\ a_k \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} a_k \\ a_{k+1} \end{array} \right\} \\ 1 - \alpha_1^k \searrow & \swarrow \alpha_1^k & 1 - \alpha_2^k \searrow & \swarrow \alpha_2^k \\ & \left\{ \begin{array}{c} b_{2k-1} \\ b_{2k} = a_k \end{array} \right\} & & \left\{ \begin{array}{c} b_{2k} = a_k \\ b_{2k+1} \end{array} \right\} \end{array}$$

fig. 1-50

Les fonctions  $\alpha_i$  s'expriment à l'aide des combinaisons affines:

$$\alpha_1^k = \frac{b_{2k-1} - a_{k-1}}{a_{k+1} - a_{k-1}} = \frac{1}{2} \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k+1} - a_{k-1}} \quad \alpha_2^k = \frac{b_{2k+1} - a_{k-1}}{a_{k+1} - a_{k-1}} = \frac{1}{2} \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k+1} - a_{k-1}} + \frac{1}{2}$$

**Remarque 1 :**

Dans le cas uniforme,  $a_k = \frac{1}{2}[a_{k-1} + a_{k+1}]$  et donc  $\frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k+1} - a_{k-1}} = \frac{1}{2}$ . Ainsi sur chaque section, les coefficients seront à nouveau  $\alpha_1 = \frac{1}{4}$  et  $\alpha_2 = \frac{3}{4}$ . Ils ne seront différents qu'au passage d'une section à l'autre.

**Remarque 2 :**

Les coefficients de raffinement  $\alpha_i^k$  dépendent de la position de  $a_k$  par rapport à ses deux voisins dans le vecteur nodal de l'étape précédente.

Il existe donc  $\gamma^k$  tel que  $a_k = (1 - \gamma^k)a_{k-1} + \gamma^k a_{k+1}$

$$\begin{array}{ccc} a_{k-1} & & a_{k+1} \\ & \searrow^{1-\gamma^k} & \swarrow_{\gamma^k} \\ & a_k & \end{array} \quad \gamma^k = \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k+1} - a_{k-1}}$$

Avec ces notations les coefficients de raffinement s'écrivent :

$$\alpha_1^k = \frac{1}{2}\gamma^k \quad \alpha_2^k = \frac{1}{2}\gamma^k + \frac{1}{2}$$

**Deuxième cas : paramétrage complètement non uniforme**

$$\begin{aligned} b_{2k} &= a_k \\ b_{2k-1} &= (1 - \beta_1^k)a_{k-1} + \beta_1^k a_k \\ b_{2k+1} &= (1 - \beta_2^k)a_k + \beta_2^k a_{k+1} \end{aligned}$$

Ce qu'on peut illustrer par le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} a_{k-1} \\ a_k \end{array} \right\} & & \left\{ \begin{array}{c} a_k \\ a_{k+1} \end{array} \right\} \\ & \searrow^{1-\alpha_1^k} & \swarrow_{\alpha_1^k} \\ & \left\{ \begin{array}{c} b_{2k-1} \\ b_{2k}=a_k \end{array} \right\} & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} a_{k-1} \\ a_k \end{array} \right\} & & \left\{ \begin{array}{c} a_k \\ a_{k+1} \end{array} \right\} \\ & \searrow^{1-\alpha_2^k} & \swarrow_{\alpha_2^k} \\ & \left\{ \begin{array}{c} b_{2k}=a_k \\ b_{2k+1} \end{array} \right\} & \end{array}$$

fig. 1-51

Les fonctions  $\alpha_i$  s'expriment à l'aide des combinaisons affines:

$$\alpha_1^k = \frac{b_{2k-1} - a_{k-1}}{a_{k+1} - a_{k-1}} = \beta_1^k \gamma^k \quad \alpha_2^k = \frac{b_{2k+1} - a_{k-1}}{a_{k+1} - a_{k-1}} = \beta_2^k + \gamma^k - \beta_2^k \gamma^k$$

### ***En conclusion***

Nous avons montré sur quelques exemples que l'outil des florisations se prêtait particulièrement bien à la traduction des algorithmes de *design* géométrique et plus encore aux constructions par subdivision. Son application à la traduction des processus de subdivision permet de s'affranchir des problèmes de convergence et de retrouver les coefficients associés au degré de la fonction limite que l'on cherche à obtenir. Toutes ces démarches ont essentiellement un intérêt didactique dans le cadre polynomial, déjà bien circonscrit à l'époque de leur introduction par Lyle Ramshaw dans la fin des années 80. Mais elles permettent également une vision globale des différents algorithmes et de leurs liens les uns avec les autres en mettant en évidence leur structure. De plus, on sait que les florisations ont été adaptées à des espaces non polynomiaux dans le cadre du *design* géométrique au début des années 90. Les démarches exposées dans ce chapitre pour les processus de subdivision vont pouvoir être adaptées à ces espaces.



## CHAPITRE II

# Floraisons pour le design et la subdivision dans les espaces circulaires

Les espaces de Chebyshev sont des espaces de fonctions dans lesquels tout problème d'interpolation de Hermite possède une solution unique. Les caractéristiques de ces espaces, similaires à celles des espaces de polynômes, en font des candidats intéressants pour la généralisation des problèmes d'approximation et de *design* géométrique. L'utilisation de ces nouveaux espaces pour généraliser la notion de spline permet, en particulier, de plus nombreux effets de forme sans avoir besoin de modifier les algorithmes déjà connus.

Les espaces de Chebyshev les plus simples sont les espaces trigonométriques et hyperboliques, c'est-à-dire des espaces engendrés respectivement par  $(1, t, \dots, t^{n-2}, \sin(t), \cos(t))$  ou  $(1, t, \dots, t^{n-2}, \sinh(t), \cosh(t))$ . Dans ce chapitre, nous les regroupons sous le terme *d'espaces circulaires*.

Une difficulté, toutefois, avec les espaces trigonométriques est que, contrairement, aux espaces de polynômes, ils ne possèdent les propriétés caractéristiques des espaces de Chebyshev que sur des intervalles dont la longueur est inférieure à un certain nombre. Ce nombre, caractéristique de l'espace, est sa *longueur critique*. Cette restriction imposera quelques précautions dans la définition des splines trigonométriques.

Dans les espaces de Chebyshev, l'outil des floraisons existe mais sa définition se fait de manière géométrique par intersection de plans osculateurs. La propriété d'affinité est alors remplacée par une propriété plus générale de pseudo-affinité mais les algorithmes restent les mêmes.

Le paragraphe 2.1 rappelle le contexte théorique des espaces de Chebyshev, et, en particulier celui des espaces circulaires (trigonométriques et hyperboliques), ainsi que la définition des fonctions et courbes splines engendrées à partir de ces espaces.

Dans le paragraphe 2.2, on verra comment définir les floraisons associées à ces espaces et les calculer. Ces floraisons seront utilisées pour la définition des algorithmes de *design* géométrique dans les espaces circulaires et l'extension de la notion de splines (paragraphe 2.3). Les processus de subdivision conduisant à des fonctions non polynomiales sont des processus non-stationnaires. Les coefficients de subdivision dépendent alors de l'itération en cours. Les floraisons peuvent, là aussi, être utilisées pour calculer les masques de subdivision plus simplement (paragraphe 2.4). Enfin, le paragraphe 2.5 exposera un algorithme de subdivision permettant de construire des splines dont les arcs sont de natures différentes.

*Avertissement : Pafnouti L'vovitch Tchebychiou (1821 - 1894) est un mathématicien russe. Son nom possède donc plusieurs orthographes suivant la langue dans laquelle il est cité. Par souci de cohérence, nous avons choisi d'utiliser l'orthographe anglo-saxonne (Chebyshev), plutôt que l'orthographe française (Tchebychev), comme il est d'usage dans les textes en français, parce que nos textes de références, d'où sont reprises de nombreuses abréviations, sont en anglais.*

## 2.1 - Contexte théorique

### 2.1.1 - Espaces de Chebyshev généralisés

Les espaces que nous utiliserons par la suite sont, plus exactement, des espaces de Chebyshev généralisés, appellation qui sera raccourcie, dans la suite du texte, en EC-espaces (qui est la francisation d'une notation en anglais : *EC-space* pour *Extended Chebyshev Spaces*).

#### Définition 2.1 : Espaces de Chebyshev

*Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Un sous espace  $\mathcal{E} \subset C^n(I)$  de dimension  $n + 1$  est un espace de Chebyshev sur  $I$  si et seulement si tous les problèmes d'interpolation de Lagrange à  $n + 1$  données possèdent une unique solution dans  $\mathcal{E}$ , c'est-à-dire, pour tous réels distincts  $a_1, \dots, a_{n+1} \in I$ , et tous réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ , il existe une unique fonction  $F \in \mathcal{E}$  telle que*

$$F(a_i) = \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq n + 1.$$

#### Définition 2.2 : Espaces de Chebyshev généralisés (EC-espaces)

*Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Un sous espace  $\mathcal{E} \subset C^n(I)$  de dimension  $n + 1$  est un espace de Chebyshev généralisé si et seulement si tous les problèmes d'interpolation de Hermite à  $n + 1$  données possèdent une unique solution dans  $\mathcal{E}$ , i.e., pour tout  $r \geq 1$ , pour tous entiers positifs  $\mu_1, \dots, \mu_r$  dont la somme vaut  $(n + 1)$ , et tous points  $a_1, \dots, a_r \in I$  deux à deux distincts, il existe une unique fonction  $F \in \mathcal{E}$  telle que*

$$F^{(j)}(a_i) = \alpha_{i,j}, \quad 1 \leq i \leq r, \quad 0 \leq j \leq \mu_i - 1,$$

*quels que soient les réels  $\alpha_{i,j}$ ,  $1 \leq i \leq r$ ,  $0 \leq j \leq \mu_i - 1$ .*

Ce qui revient à dire que toute fonction de cet espace est déterminée de manière unique par la donnée de  $n + 1$  informations (valeurs de la fonction et de ses dérivées en un certain nombre de points).

La caractérisation suivante est également utilisée :

**Propriété 2.3 :**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . L'espace  $\mathcal{E}$  est un EC-espace de dimension  $n + 1$  sur  $I$  si et seulement si toute fonction  $F$  de  $\mathcal{E}$  possède au plus  $n$  zéros, en comptant la multiplicité, sur  $I$ .

On remarque que cette propriété est exactement le théorème de d'Alembert pour l'espace  $\mathbb{P}^n$  des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ .

Certains espaces sont donc des EC-espaces sur  $\mathbb{R}$  tout entier. Alors que d'autres ne sont des EC-espaces que sur des intervalles de longueur bornée.

Par exemple, un espace trigonométrique engendré par  $(\sin t, \cos t)$  est un EC-espace sur  $[k; k + l]$  dès lors que  $l < \pi$ .

En effet, toute fonction de l'espace  $\mathcal{E}$  engendré par  $(\cos t, \sin t)$  se note  $F(t) = a \sin t + b \cos t$ ,  $a$  et  $b$  étant des réels.

Si  $a = 0$  alors  $F(t) = b \cos t$  et  $F$  s'annule au plus une fois sur tout intervalle du type  $[k; k + l]$  avec  $l < \pi$ .

Si  $a \neq 0$  alors  $F(t) = 0 \iff \tan t = -\frac{b}{a}$ . La fonction  $\tan$  étant périodique de période  $\pi$ ,  $F$  s'annule au plus une fois sur tout intervalle du type  $[k; k + l]$  avec  $l < \pi$ .

**Notation :**

Soit  $\mathcal{E}$  un espace de dimension  $n$  contenant les constantes. On note  $D\mathcal{E}$  l'espace de dimension  $n - 1$  défini par :

$$D\mathcal{E} = \{DF, F \in \mathcal{E}\}$$

**2.1.2 - Deux critères pour le design géométrique**

Dans la suite  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{E}$  est un espace vectoriel de dimension  $n + 1$  de fonctions  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $(U_0, \dots, U_n)$  une base de  $\mathcal{E}$ .  $\mathcal{A}$  est un espace affine de dimension  $d$ .

On rappelle ici les notations utilisées dans la définition d'une courbe paramétrée par  $\mathcal{E}$  (définition 1.1) :

Etant donnés  $n + 1$  points  $P_i, i=0, \dots, n$ , de  $\mathcal{A}$ , une courbe paramétrée par  $\mathcal{E}$  est une fonction  $\mathcal{F}$  de  $I$  dans  $\mathcal{A}$  définie par

$$\forall t \in I \quad \mathcal{F}(t) = \sum_{i=0}^n U_i(t)P_i$$

On dira qu'un espace est *bon pour le design* si tous les algorithmes de design géométrique peuvent être développés dans le dit espace. C'est notamment le cas lorsque chaque fonction peut être exprimée dans une base permettant son contrôle géométrique (l'équivalent de la base de Bernstein pour l'espace des polynômes). Deux approches sont rappelées ici. L'une d'elle utilise la totale positivité [Carnicer, Mainar & Pena] tandis que la seconde se rencontre dans le cadre des floraisons [Mazure 8]. Les deux se basent sur le théorème suivant.

**Théorème 2.4 :**

*Un espace  $\mathcal{E}$ , contenant les constantes, est bon pour le design sur un intervalle  $I$  si et seulement si l'espace  $D\mathcal{E}$  est un EC-espace sur  $I$ .*

**2.1.2.1 - Totale positivité**

On trouvera plus de détails sur l'approche utilisant la totale positivité dans [Karlin].

**Définition 2.5 : Système totalement positif**

*Soit  $[a, b]$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Le système  $(U_0, \dots, U_n)$  est dit totalement positif sur  $[a, b]$  si, pour toute suite  $a \leq t_0 < \dots < t_n \leq b$ , tous les mineurs de la matrice  $(U_i(t_j))_{0 \leq i, j < n}$  sont positifs.*

Ce qui implique, en particulier,  $\forall t \in [a, b], U_i(t) \geq 0$  pour  $i = 0, \dots, n$ .

**Définition 2.6: Système normalisé**

*Soit  $[a, b]$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Le système  $(U_0, \dots, U_n)$  est dit normalisé sur  $[a, b]$  si*

$$\forall t \in [a, b] \quad \sum_{i=0}^n U_i(t) = 1$$

**Propriété 2.7 [Goodman]**

*Avec les notations précédentes, la courbe  $\Gamma$  préserve les propriétés de forme de son polygone de contrôle si le système  $(U_0, \dots, U_n)$  est normalisé totalement positif*

Classiquement, on dit qu'une courbe *préserve les propriétés de forme* de son polygone de contrôle si certaines propriétés du polygone de contrôle (enveloppe convexe, diminution de la variation et de la longueur, intersections avec droites et plans...) se retrouvent sur la courbe.

Si un espace possède des bases normalisées totalement positives (relativement à  $[a, b]$ ), il en existe une (unique), parmi celles-ci, qui présente des propriétés optimales de contrôle de forme : la B-base normalisée ([Carnicer & Pena 1] et [Pena 1]). Dans l'espace des polynômes c'est le cas de la base de Bernstein (relativement à  $[a, b]$ ) [Carnicer & Pena 2]. L'existence de bases normalisées totalement positives sur un espace donné garantit donc qu'on puisse y mettre en oeuvre les algorithmes de *design* géométrique. On remplace alors la base de Bernstein par la B-base normalisée. C'est pourquoi on dira dans ce cas que l'espace est *utilisable en design* ou *bon pour le design*.

### **Théorème 2.8 [Carnicer, Mainar & Pena]**

*Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a$  et  $b$  deux réels de  $I$ . Un espace  $\mathcal{E}$ , contenant les constantes, possède des bases normalisées totalement positives (relativement à  $[a, b]$ ) pour tout  $[a, b] \subset I$  si et seulement si l'espace  $D\mathcal{E}$  est un EC-espace sur  $I$ .*

Cela soulève néanmoins deux problèmes : d'une part il faut trouver un moyen, pour un espace donné, de déterminer la B-base normalisée (dans [Carnicer & Pena 1] on montre, par exemple, comment obtenir une B-base à partir d'une base totalement positive) et, d'autre part, contrairement à ce qui se passe pour les polynômes, l'existence de bases normalisées totalement positives n'est pas garantie sur n'importe quel compact  $[a, b]$ .

Il a été montré dans [Pena 2] que l'espace  $(1, \sin(t), \cos(t))$  est *bon pour le design* sur tout intervalle compact de longueur strictement inférieure à  $\pi$ . Cette limite passe à  $2\pi$  dans le cas de l'espace  $(1, t, \sin(t), \cos(t))$  [Mainar, Pena & Sanchez-Reyes] ainsi que pour l'espace engendré par  $(1, t, t^2, \sin(t), \cos(t))$ .

Une méthode générale pour déterminer la longueur critique des espaces du type  $(1, t, t^2, \dots, t^{n-2}, \sin(t), \cos(t))$  est développée dans [Carnicer, Mainar & Pena].

#### **2.1.2.2 - Floraisons**

Une autre approche utilise la notion de floraison. Dans le chapitre 1, nous avons montré la transposition de certains algorithmes de *design* géométrique en terme de floraisons. Pour que ces algorithmes soient utilisables dans d'autres espaces que les polynômes il suffit que l'on puisse y définir des floraisons.

La définition d'une floraison d'une fonction d'un espace de fonctions  $\mathcal{E}$  a été donnée au chapitre 1 (définition 1.5). Il en résulte la définition d'une floraison associée à une courbe paramétrée par  $\mathcal{E}$  :

**Définition 2.9 : Floraison d'une courbe paramétrée par  $\mathcal{E}$** 

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{A}$  un espace affine de dimension  $d$  et  $\mathcal{E}$  un espace de dimension  $n + 1$  de fonctions  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $\mathcal{F}$  une courbe paramétrée par  $\mathcal{E}$  de  $I$  dans  $\mathcal{A}$ . Lorsqu'elle existe, on appelle floraison de  $\mathcal{F}$  l'unique fonction  $\phi$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathcal{A}$  telle que

1)  $\phi$  est symétrique.

2) Pour tout  $[a, b] \subset I$ , il existe une fonction monotone  $\beta$  telle que

$$\forall t \in [a, b] \quad \phi(t_1, \dots, t_{n-1}, t) = (1 - \beta(t))\phi(t_1, \dots, t_{n-1}, a) + \beta(t)\phi(t_1, \dots, t_{n-1}, b)$$

avec  $\beta(a) = 0$  et  $\beta(b) = 1$  (on dit que  $\phi$  est pseudo-affine par rapport à chaque variable)

3)  $\phi(t, \dots, t) = \mathcal{F}(t)$

On notera  $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  le point de  $\mathcal{A}$  désigné par  $\phi(t_1, t_2, \dots, t_n)$ .

Le théorème 2.4 possède sa traduction en terme de floraisons [Mazure 8] et [Mazure 11]:

**Théorème 2.10 :**

Si  $D\mathcal{E}$  est un EC-espace sur  $I$  alors toute fonction de  $\mathcal{E}$  possède une floraison.

Dans la définition de la floraison d'une courbe paramétrée polynomiale (définition 1.6) la condition d'affinité par rapport à chaque variable faisait intervenir une fonction affine notée  $\alpha$ . C'est cette fonction qui permettait de calculer les coefficients intervenant dans les algorithmes de design.

Le point clé est ici de remplacer la fonction affine  $\alpha$  par une fonction pseudo-affine  $\beta$  caractéristique de l'espace  $\mathcal{E}$ . Les algorithmes décrits pour les polynômes restent les mêmes. Pour déterminer la fonction  $\beta$ , la floraison d'une courbe paramétrée par  $\mathcal{E}$  est définie géométriquement à partir des plans osculateurs à la courbe. Ce sera l'objet du paragraphe suivant

**Définition 2.11 : Espace fleuri**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $\mathcal{E}$  un espace de de fonctions  $\mathcal{C}^\infty(I)$  qui contient les constantes. On dira que  $\mathcal{E}$  est fleuri si, à chacune de ses fonctions on peut associer une unique floraison (au sens de la définition 1.5).

D'après le théorème 2.10, l'espace  $\mathcal{E}$  de la définition 2.11 est fleuri si et seulement si  $D\mathcal{E}$  est un EC-espace sur  $I$ . Il possède alors des bases normalisées totalement positives relativement à tout intervalle  $[a, b]$  de  $I$  (théorème 2.8) et, en particulier une B-base normalisée.

Dans la suite nous y ferons référence comme à la *base de Bernstein relativement* à  $[a, b]$  quel que soit le type de l'espace  $\mathcal{E}$ . Nous utiliserons ces espaces fleuris pour la création d'algorithmes de subdivision (paragraphe 2.5).

### 2.1.3 - Floraisons et intersection d'hyperplans

Les propriétés géométriques des points de contrôle, qui se situent sur les plans osculateurs à la courbe avaient déjà été remarquées dans [Ramshaw 2] dans le cas des courbes polynomi-ales. En 1993 Potmann renverse ce point de vue en adoptant cette propriété géométrique comme définition des points de contrôle. Cela lui permet de définir les points de contrôle de courbes non polynomiales [Pottmann 1]. Cette approche est également utilisée par Seidel en 1992 pour associer des floraisons à des courbes splines géométriquement continues [Seidel 3].

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $\mathcal{E}$  un espace de dimension  $n + 1$  de fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  qui contient les constantes (cette hypothèse garantit l'existence d'une base  $(U_0, \dots, U_n)$  de  $\mathcal{E}$  telle que  $\sum_{i=0}^n U_i(t) = 1$ ).

La démarche permettant d'associer une unique floraison d'ordre  $n$  à toute courbe paramétrée par  $\mathcal{E}$  est exposée ci-dessous :

On note  $(1, F_1, \dots, F_n)$  une base de  $\mathcal{E}$ . On considère la fonction  $\mathcal{F}$  de  $I$  dans  $\mathcal{A}$  définie par

$$\mathcal{F} : t \mapsto \mathcal{F}(t) = \begin{pmatrix} F_1 \\ \cdot \\ F_n \end{pmatrix}$$

Pour tout  $a \in I$ , on note  $T_{\mathcal{F}}^i(a)$  l'espace osculateur d'ordre  $i$  de  $\mathcal{F}$  en  $a$  (définition 1.17).

**Proposition 2.12 :** [Mazure 1]

Avec les notations précédentes, si l'espace  $D\mathcal{E}$  engendré par  $(F'_1, \dots, F'_n)$  est un EC - espace de dimension  $n$  sur  $I$  alors :

- $\forall a \in I, \quad T_{\mathcal{F}}^i(a)$  est un sous-espace affine de dimension  $i$
- L'intersection de  $n$  hyperplans  $\bigcap_{j=1}^n T_{\mathcal{F}}^{n-1}(t_j)$  ( $t_1, \dots, t_n \in I$ ) est un point de  $\mathcal{A}$ .

On notera  $\{t_1, \dots, t_n\}$  ce point.

**Définition 2.13 :**

Avec les notations précédentes, l'application  $\phi$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathcal{A}$

$$\phi : (t_1, \dots, t_n) \mapsto \{t_1, \dots, t_n\}$$

qui, à tout  $n$ -uplet associe le point de l'espace affine  $\mathcal{A}$  défini par l'intersection de  $n$  hyperplans osculateurs est la floraison de  $\mathcal{F}$ .

**Remarque 1 :** Lorsque les réels  $t_j$  ne sont pas tous différents.

Si l'argument  $t_j$  est de multiplicité  $\mu_j$  (répété  $\mu_j$  fois) l'espace osculateur correspondant est  $T_{\mathcal{F}}^{n-\mu_j}(t_j)$  qui est de dimension  $n - \mu_j$ .

Le sous-espace affine  $T_{\mathcal{F}}^{n-\mu_1}(t_1) \cap \dots \cap T_{\mathcal{F}}^{n-\mu_j}(t_j)$  est alors réduit à un point lorsque  $\sum \mu_j = n$ . On le note  $\{t_1^{[\mu_1]}, \dots, t_j^{[\mu_j]}\}$

Lorsque tous les  $t_j$  sont identiques (par exemple  $t_j = a$ ) alors  $\{a^{[n]}\} = T_{\mathcal{F}}^0(a) = \mathcal{F}(a)$

**Remarque 2 :** La définition ci-dessus indique comment définir la floraison associée à une courbe  $\mathcal{F} = (F_1, \dots, F_n)$  non dégénérée de  $\mathcal{A}$ , paramétrée par  $\mathcal{E}$ , c'est-à-dire telle que  $\dim(\text{Im}\mathcal{F}) = n$  ou, ce qui est équivalent, telle que  $(1, F_1, \dots, F_n)$  soit une base de  $\mathcal{E}$ .

Si  $\mathcal{G}$  est une courbe paramétrée par  $\mathcal{E}$  alors il existe une fonction affine  $h$  définie sur  $\mathcal{A}$  telle que  $\mathcal{G} = h \circ \mathcal{F}$ . La floraison  $\psi$  de  $\mathcal{G}$  est alors obtenue à partir de celle de  $\mathcal{F}$  par  $\psi = h \circ \phi$ .

**Remarque 3 :** Obtention des points de contrôle.

• D'après la remarque 1, lorsque  $\mathcal{F}$  est non dégénérée, ses  $n + 1$  points de de Boor  $P_i := \{t_{1+i}, \dots, t_{n+i}\}$ ,  $i = 0, \dots, n$ , sont définis géométriquement par l'intersection de  $n$  hyperplans osculateurs :

$$P_i := \bigcap_{j=1+i}^{n+1} T_{\mathcal{F}}^{n-1}(t_j), \quad i = 0, \dots, n$$

D'après la remarque 2, les points de de Boor  $Q_i$  d'une courbe  $\mathcal{G}$  dégénérée telle que  $\mathcal{G} = h \circ \mathcal{F}$  sont définis par  $Q_i = h(P_i)$ .

• Les points de Bézier d'une courbe  $\mathcal{F}$  non dégénérée sont définis géométriquement par

$$\{a^{[n-i]}, b^{[i]}\} := T_{\mathcal{F}}^i(a) \cap T_{\mathcal{F}}^{n-i}(b), \quad i = 0, \dots, n$$



**Remarque 4 :** La fonction  $\phi$  associée à  $\mathcal{F}$  possède les trois propriétés caractéristiques des floraisons [Mazure 15].

- L'ordre des arguments  $t_j$  n'a pas d'importance (évident pour une intersection géométrique).
- $\phi(a^{[n]})$  est le point  $\mathcal{F}(a)$  de la courbe.
- En notant  $\clubsuit$  un ensemble de  $n - 1$  réels, lorsque  $t \in [a, b]$  il existe une unique fonction  $\beta$  monotone, dépendant de  $\clubsuit, a, b$  telle que

$$\{t, \clubsuit\} = (1 - \beta(t))\{a, \clubsuit\} + \beta(t)\{b, \clubsuit\}$$

**Remarque 5 :** À chaque fonction  $F$  de  $\mathcal{E}$  on associe sa floraison  $f$ . La fonction  $\beta$  est caractéristique de l'espace  $\mathcal{E}$ .

Ce qui signifie que  $\beta_{a,b,\clubsuit}(t) = \frac{f_i(t, \clubsuit) - f_i(a, \clubsuit)}{f_i(b, \clubsuit) - f_i(a, \clubsuit)}$  est la même quelle que soit la floraison  $f_i$  utilisée pour son calcul.

Clairement, pour  $t = a$ , on a bien  $\beta_{a,b,\clubsuit}(a) = 0$  et,  $t = b$ , on a bien  $\beta_{a,b,\clubsuit}(b) = 1$

**Exemple :**

La fonction ci-dessous est la floraison d'ordre 3 associée à la fonction  $F(t) = t$  dans l'espace engendré par  $(1, t, \sin(t), \cos(t))$ . Les détails du calcul sont donnés dans la démonstration de la proposition 2.17.

$$f(A, B, C) = \frac{A \sin(B - C) + B \sin(C - A) + C \sin(A - B)}{\sin(B - C) + \sin(C - A) + \sin(A - B)}$$

On constate immédiatement les caractéristiques 1) et 3) de la définition 1.5.

Cette expression est à comparer avec la floraison d'ordre 3 de la fonction  $F(t) = t$  dans l'espace engendré par  $(1, t, t^2, t^3)$  :

$$f(A, B, C) = \frac{A + B + C}{3}$$

## 2.2. Calculs de floraisons pour les espaces circulaires

Le principe décrit plus haut permet, en calculant des intersections de variétés osculatrices à une courbe donnée de  $\mathbb{R}^n$ , d'associer, à une courbe paramétrée de  $\mathbb{R}^n$  (donc avec  $n$

composantes) une floration de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  (donc également avec  $n$  composantes). On associe ainsi, composante par composante, une floration à chaque fonction de  $\mathcal{E}$ .

Une autre façon de l'exprimer est de dire que la floration associée à une fonction  $G$  donnée de  $\mathcal{E}$  se calcule par le processus décrit plus haut à partir d'un ensemble de fonctions  $(1, G, F_1, \dots, F_{n-1})$  constituant une base de  $\mathcal{E}$ .

## 2.2.1 Espaces circulaires

### 2.2.1.1 Une écriture globale

Les noyaux d'opérateurs différentiels à coefficients constants dont le polynôme caractéristique est pair ou impair sont des espaces stables par translation, symétrie et dérivation. En dimension 2, ce sont les solutions de l'équation différentielle :

$$F'' + a_0 F = 0$$

Les différents cas dépendent du signe de la constante  $a_0$  :

- si  $a_0 = 0$  on obtient l'espace engendré par  $(1, t)$
- si  $a_0 < 0$  on obtient l'espace engendré par  $(\cosh(at), \sinh(at)), a \in \mathbb{R}^{+*}$
- si  $a_0 > 0$  on obtient l'espace engendré par  $(\cos(bt), \sin(bt)), b \in \mathbb{R}^{+*}$

Par intégration on obtient une famille d'espaces possédant les mêmes propriétés engendrées par des bases du type

$$(1, t, \dots, t^{n-2}, u(t), u'(t)) \quad \text{avec} \quad u(t) \in \left\{ \frac{\sin(bt)}{b}; \frac{\sinh(at)}{a} \right\}.$$

Le traitement simultané des cas trigonométriques et hyperboliques a plusieurs avantages. D'une part il permet un gain de temps et, d'autre part, il met en évidence une analogie de structure.

Dans la suite, ces espaces seront nommés *espaces circulaires* en référence à la propriété de la fonction  $u$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  :

$$u^{(n)} = \alpha u^{(n-2)}$$

Dans certains papiers, ces espaces sont désignés sous le terme "espaces exponentiels". Or les noyaux d'opérateurs différentiels à coefficients constants sont des "espaces exponentiels". Or c'est également le cas des espaces de dimension 4 étudiés au chapitre 3. C'est donc

pour les distinguer de ces derniers que nous avons gardé l'appellation *espaces circulaires* pour la famille  $(1, t, \dots, t^{n-2}, u(t), u'(t))$  étudiée dans ce chapitre.

### 2.2.1.2 - Propriétés

Les propriétés des fonctions hyperboliques et trigonométriques sont, pour les besoins des calculs dans cette section, synthétisées avec la même écriture.

- La fonction  $u$  vérifie

$$u'' = \alpha u$$

Si  $\alpha < 0$ ,  $u$  est une fonction trigonométrique et  $\alpha = -b^2$

Si  $\alpha > 0$ ,  $u$  est une fonction hyperbolique et  $\alpha = a^2$

(Si  $\alpha = 0$ ,  $u$  est une fonction affine )

- lien entre  $u$  et  $u'$

$$(u')^2 - \alpha u^2 = 1$$

- Addition

$$u(x - y) = u(x)u'(y) - u'(x)u(y)$$

$u(x + y) = u(x)u'(y) + u'(x)u(y)$  ( $u$  est impaire)

$u'(x + y) = u'(x)u'(y) + \alpha u(x)u(y)$  (en dérivant par rapport à  $x$ )

$u'(x - y) = u'(x)u'(y) - \alpha u(x)u(y)$

- Duplication

$$u(2x) = 2u(x)u'(x)$$

$$u'(2x) = u'^2 + \alpha u^2 = 1 + 2\alpha u^2 = 2u'^2 - 1$$

### 2.2.1.3 - Polynômes de Chebyshev

Les polynômes de Chebyshev apparaissant dans les calculs de floraison, nous en donnons également une écriture condensée.

Les polynômes de Chebyshev de premier et second ordre sont

$$P_k(x) = \frac{u(kx)}{u(x)} \text{ et } D_k(x) = u'(kx)$$

Ils sont liés par la relation de récurrence :

$$\begin{pmatrix} D_k(x) \\ P_k(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' & u'^2 - 1 \\ 1 & u' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{k-1}(x) \\ P_{k-1}(x) \end{pmatrix}$$

## 2.2.2 - Calculs de floraisons

### 2.2.2.1 - Dimension 3

On considère un espace  $\mathcal{E}$  de dimension 3 engendré par  $(1, F_1, F_2)$  avec  $F_i : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ . La fonction  $\mathcal{F} = (F_1, F_2) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$  est une fonction non dégénérée de  $\mathbb{R}^2$ .

La valeur de la floraison  $\phi(A, B)$  est l'intersection des tangentes à la courbe en  $\mathcal{F}(A)$  et  $\mathcal{F}(B)$ . Les deux composantes  $(f_1(A, B), f_2(A, B))$  de  $\phi$  sont les coordonnées de ce point d'intersection.  $f_1$  et  $f_2$  sont les floraisons associées aux fonctions  $F_1$  et  $F_2$ .

$\mathcal{F}'$  est le vecteur  $\mathcal{F}' = (F'_1, F'_2)$ . La procédure de calcul d'une floraison associée à une fonction d'un espace de dimension 3 est exposée ci-dessous :

1) On détermine l'équation de la tangente  $T$  à la courbe en  $\mathcal{F}(t)$ .

On note  $\vec{n}(n_1, n_2)$  le vecteur orthogonal à  $T$ . On a  $n_i = \det(e_i, \mathcal{F}')$

L'équation de  $T$  est alors  $xn_1 + yn_2 = W$  où  $W = \det(\mathcal{F}, \mathcal{F}') = n_1F_1 + n_2F_2$

2) On détermine les coordonnées du point d'intersection des tangentes à la courbe en  $\mathcal{F}(A)$  et  $\mathcal{F}(B)$ .

Ce sont les solutions du système

$$\begin{pmatrix} n_1(A) & n_2(A) \\ n_1(B) & n_2(B) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W(A) \\ W(B) \end{pmatrix}$$

Et on a  $x = f_1(A, B)$  et  $y = f_2(A, B)$

**Application au calcul des floraisons pour l'espace engendré par  $(1, u, u')$**

#### Proposition 2.14:

On considère l'espace de dimension 3 engendré par  $(1, u, u')$  où  $u$  est une fonction circulaire.

La floraison associée à  $u(t)$  est  $f_1(A, B) = \frac{u'(A) - u'(B)}{\alpha u(A - B)}$

La floraison associée à  $u'(t)$  est  $f_2(A, B) = \frac{u(A) - u(B)}{u(A - B)}$

**Preuve :**

On applique le processus décrit ci-dessus à la fonction  $\mathcal{F}(t) = (u(t), u'(t))$ .

On a  $\mathcal{F}'(t) = (u'(t), \alpha u(t))$  d'où

$$W = \det(\mathcal{F}, \mathcal{F}') = \begin{vmatrix} u & u' \\ u' & \alpha u \end{vmatrix} = -1; \quad n_1 = \begin{vmatrix} 1 & u' \\ 0 & \alpha u \end{vmatrix} = \alpha u; \quad n_2 = \begin{vmatrix} 0 & u' \\ 1 & \alpha u \end{vmatrix} = -u'$$

L'équation de la tangente à  $\Gamma$  en  $\mathcal{F}(A)$  est donc :

$$xn_1(A) + yn_2(A) = W(A) \iff x\alpha u(A) - yu'(A) = -1$$

et le système floral s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \alpha u(A) & -u'(A) \\ \alpha u(B) & -u'(B) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = -\alpha u(A - B) \quad \Delta_x = u'(B) - u'(A) \quad \Delta_y = -\alpha(u(A) - u(B))$$

$$x = f_1(A, B) = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{u'(A) - u'(B)}{\alpha u(A - B)} \quad y = f_2(A, B) = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{u(A) - u(B)}{u(A - B)}$$

■

**Remarque:**

On retrouve bien  $f_1(A, A) = u(A)$  et  $f_2(A, A) = u'(A)$ , ce qui correspond à l'item 3 de la définition 2.10.

$$f_1(A, B) = \frac{u'(A) - u'(B)}{A - B} \frac{A - B}{\alpha u(A - B)} \text{ donc } f_1(A, A) = \lim_{B \rightarrow A} f_1(A, B) = u''(A) \times \frac{1}{\alpha} = u(A)$$

$$f_2(A, B) = \frac{u(A) - u(B)}{A - B} \frac{A - B}{u(A - B)} \text{ donc } f_2(A, A) = \lim_{B \rightarrow A} f_2(A, B) = u'(A)$$

car  $u(x) = x + o(x)$ , en fait  $u(x) = x + O(x^3)$  quand  $x \rightarrow 0$ .

**2.2.2.2 - Autres dimensions**

**Proposition 2.16 :**

Soit  $I \subset \mathbb{R}$ .  $\mathcal{E}$  est un espace de dimension  $n + 1$  de fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  engendré par  $(1, F_1, \dots, F_n)$  et tel que  $D\mathcal{E}$  est un EC-espace sur  $I$ . La floraison associée à  $F_i$  est une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  qui est la solution  $x_i$  du système :

$$\begin{pmatrix} N_1(A_1) & \dots & N_n(A_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_1(A_n) & \dots & N_n(A_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W(A_1) \\ \vdots \\ W(A_n) \end{pmatrix}$$

où  $N_i = \det(e_i, \mathcal{F}', \dots, \mathcal{F}^{(n-1)})$  et  $W = \det(\mathcal{F}, \mathcal{F}', \dots, \mathcal{F}^{(n-1)})$ , en notant  $\mathcal{F}$  le vecteur à  $n$  composantes  $(F_1, \dots, F_n)$  et  $A_i \in I$  pour  $i = 1, \dots, n$ .

**Preuve :**

- Calcul de l'équation de l'hyperplan osculateur  $T^{n-1}$  à la courbe en  $\mathcal{F}(t)$ .

On note  $\vec{N}(N_1, \dots, N_n)$  le vecteur orthogonal à  $T^{n-1}$ . On a  $N_i = \det(e_i, \mathcal{F}', \dots, \mathcal{F}^{(n-1)})$

L'équation de  $T^{n-1}$  est alors  $\sum_{i=1}^n x_i N_i = W$  où  $W = \det(\mathcal{F}, \mathcal{F}', \dots, \mathcal{F}^{(n-1)})$

- Calcul de la floraison  $f_i$  associée à  $F_i$  pour  $i = 1, \dots, n$

$\phi(A_1, \dots, A_n)$  est la floraison associée à la courbe  $\mathcal{F} = (F_1, \dots, F_n)$ , d'après la définition 2.13 sa valeur est l'unique point de  $\mathbb{R}^n$  intersection des  $n$  hyperplans tangents  $T^{n-1}(A_i)$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Les coordonnées  $(x_1, \dots, x_n) = (f_1, \dots, f_n)$  de  $\phi(A_1, \dots, A_n)$  sont donc les solutions du système :

$$\begin{pmatrix} N_1(A_1) & \dots & N_n(A_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_1(A_n) & \dots & N_n(A_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W(A_1) \\ \vdots \\ W(A_n) \end{pmatrix}$$

on a donc  $x_i = f_i(A_1, \dots, A_n)$  pour  $i = 1, \dots, n$  ■

La proposition 2.16 est utilisée pour calculer les floraisons de fonctions d'espaces circulaires de dimension 4 qui serviront par la suite à déterminer des masques de subdivision.

**Proposition 2.17 :**

On considère l'espace de dimension 4 engendré par  $(1, t, u, u')$  où  $u$  est une fonction circulaire.

Les floraisons associées respectivement aux fonctions  $t, u$  et  $u'$  sont :

$$f_1(A, B, C) = \frac{\sum x_1 u(x_2 - x_3)}{\sum u(x_2 - x_3)}; \quad f_2(A, B, C) = \frac{\sum x_1 [u(x_3) - u(x_2)]}{\sum u(x_2 - x_3)};$$

$$f_3(A, B, C) = \frac{\sum x_1 [u'(x_2) - u'(x_3)]}{\sum u(x_2 - x_3)}; \quad \text{avec } x_1, x_2, x_3 \in \left\{ \begin{array}{l} ABC \\ BCA \\ CAB \end{array} \right\}$$

**Remarque :**

La notation de la proposition 2.17 signifie que les variables  $x_1, x_2$  et  $x_3$  doivent être remplacées à 3 reprises par  $A, B$  et  $C$  dans l'ordre indiqué. Ainsi  $f_1(A, B, C)$  s'écrit en réalité :

$$f_1(A, B, C) = \frac{Au(B - C) + Bu(C - A) + Cu(A - B)}{u(B - C) + u(C - A) + u(A - B)}$$

**Preuve :**

En reprenant les notations de la proposition 2.16 on note :

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} t \\ u \\ u' \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}' = \begin{pmatrix} 1 \\ u' \\ \alpha u \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}'' = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha u \\ \alpha u' \end{pmatrix}. \quad \text{D'où } W = \begin{vmatrix} t & 1 & 0 \\ u & u' & \alpha u \\ u' & \alpha u & \alpha u' \end{vmatrix} = t\alpha$$

$$N_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & u' & \alpha u \\ 0 & \alpha u & \alpha u' \end{vmatrix} = \alpha \quad N_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & u' & \alpha u \\ 0 & \alpha u & \alpha u' \end{vmatrix} = -\alpha u' \quad N_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & u' & \alpha u \\ 1 & \alpha u & \alpha u' \end{vmatrix} = \alpha u$$

Le système floral s'écrit alors, après simplifications :

$$\begin{pmatrix} 1 & -u'(A) & u(A) \\ 1 & -u'(B) & u(B) \\ 1 & -u'(C) & u(C) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \sum u(x_2 - x_3); \quad \Delta_x = \sum x_1 u(x_2 - x_3);$$

$$\Delta_y = \sum x_1 [u(x_3) - u(x_2)]; \quad \Delta_z = \sum x_1 [u'(x_2) - u'(x_3)]$$

$$f_1(A, B, C) = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\sum x_1 u(x_2 - x_3)}{\sum u(x_2 - x_3)}; \quad f_2(A, B, C) = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\sum x_1 [u(x_3) - u(x_2)]}{\sum u(x_2 - x_3)}$$

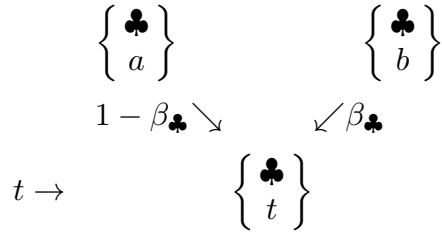
$$f_3(A, B, C) = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{\sum x_1 [u'(x_2) - u'(x_3)]}{\sum u(x_2 - x_3)}; \quad \text{avec } x_1, x_2, x_3 \in \left\{ \begin{array}{l} ABC \\ BCA \\ CAB \end{array} \right\}$$

■

### 2.3 - Design dans les espaces circulaires

Dans ce paragraphe, on montre sur quelques exemples en dimension 3 et 4 (l'équivalent des cubiques) la façon dont s'adaptent les algorithmes, propriétés et définitions du chapitre 1 pour passer du cas polynomial au cas circulaire.

Les algorithmes de design géométriques se représentent en utilisant les même schémas triangulaires que dans le chapitre 1. Seuls les coefficients  $\alpha$  sont différents.



$$1 - \beta_{\clubsuit} = \frac{f(\clubsuit, b) - f(\clubsuit, t)}{f(\clubsuit, b) - f(\clubsuit, a)} \quad \beta_{\clubsuit} = \frac{f(\clubsuit, t) - f(\clubsuit, a)}{f(\clubsuit, b) - f(\clubsuit, a)}$$

fig. 2-1

Le symbole  $\clubsuit$  désigne la même suite de  $n - 1$  arguments et  $f$  est la floraison de n'importe quelle fonction  $F$  de  $\mathcal{E}$ . Le coefficient  $\beta_{\clubsuit}$  dépend des valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $t$  mais aussi des arguments de  $\clubsuit$ .

Ainsi, dans les schémas des algorithmes, chaque combinaison pseudo-affine de deux points sera représentée de la même façon que sur la figure 1.1.

Si les algorithmes restent les mêmes que dans le cas polynomial, il est néanmoins nécessaire de se placer dans le cadre d'espaces fleuris. Les espaces hyperboliques, engendrés par des bases de type  $(1, t, \dots, t^{n-2}, \cosh(t), \sinh(t))$  sont fleuris sur  $\mathbb{R}$ . Les espaces trigonométriques de dimension  $n + 1$ , engendrés par des bases de type  $(1, t, \dots, t^{n-2}, \cos(t), \sin(t))$  sont fleuris sur un intervalle de longueur maximale. Cette longueur est de  $2\pi$  pour  $n = 2$  et pour  $n = 3$ . Et, d'après [Carnicer, Mainar & Peña ],  $l \approx 8.98$  quand  $n = 4$ .

Ces restrictions ont une incidence sur la définition des splines dans les espaces non polynomiaux. Lorsqu'on définit un espace de courbes splines paramétrées par  $\mathcal{E}$ , il est nécessaire que  $\mathcal{E}$  soit fleuri.

Considérons un vecteur nodal uniforme  $\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ . On note  $h$  la longueur inter nœuds.

- Dans le cas d'un espace de splines classique associé à ce vecteur nodal, la restriction de la spline à  $[t_k, t_{k+1}]$  coïncide sur cet intervalle avec une courbe  $\mathcal{F}_k$  paramétrée par  $\mathcal{E}$ . Si  $\mathcal{E}$  est fleuri sur tout  $\mathbb{R}$ , comme c'est le cas pour les espaces hyperboliques, l'extension de la notion de spline polynomiale à cet espace se fait naturellement. Si  $\mathcal{E}$  n'est fleuri que sur un intervalle  $I$  borné, comme c'est le cas pour les espaces trigonométriques, il est nécessaire d'inclure le vecteur nodal dans  $I$ , ce qui est d'un intérêt limité puisque lorsque  $h$  tend vers zéro la courbe obtenue tend vers une courbe polynomiale (pour  $h = 1$ , elle est déjà visuellement très proche).

- Dans le cas d'un espace de splines *par morceaux* (c'est l'espace qui est "par morceaux"), sur chaque intervalle  $[t_k, t_{k+1}]$  la courbe est paramétrée par un espace  $\mathcal{E}_k$ , (ici translaté d'un



espace fleuri sur  $[0, h]$ ). C'est dans ce cadre que nous nous placerons pour la construction des courbes splines dans ce chapitre et le suivant. Pour que l'espace de splines ainsi défini soit utilisable en *design géométrique* il est alors nécessaire que chaque espace  $\mathcal{E}_k$  soit fleuri sur  $[0, h]$ , ce n'est toutefois pas suffisant [Carnicer, Mainar & Peña ] :

**Théorème 2.18 :**

Soit  $\mathcal{E}$  un espace trigonométrique de dimension  $n + 1$ , c'est-à-dire engendré par une base du type  $(1, t, \dots, t^{n-2}, \cos(bt), \sin(bt))$ ,  $b \in \mathbb{R}^{+*}$ . On considère un espace de splines uniforme  $\mathcal{S}(h)$  (associé à un vecteur nodal uniforme dont la longueur inter noeuds est  $h$ ).

Une condition suffisante pour que  $\mathcal{S}(h)$  soit utilisable en design géométrique est

$$h < \frac{\pi}{b}$$

### 2.3.1 - Floraison dans les espaces de Chebyshev

Le théorème 1.8 d'évaluation d'une forme polaire doit être modifié pour les floraisons associées aux fonctions d'un espace de Chebyshev fleuri quelconque.

**Théorème 2.19 : Algorithme d'évaluation de la floraison  $f$  d'une fonction:**

Soit  $\mathcal{E}$  un espace de Chebyshev fleuri sur  $I \subset \mathbb{R}$  et soit  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n < t_{n+1} \leq \dots \leq t_{2n}$  une suite croissante de  $2n$  réels de  $I$ . On considère une fonction  $F$  de  $\mathcal{E}$  et  $f$  sa floraison associée.

Toute valeur de  $f$  est entièrement déterminée par la donnée des  $n + 1$  valeurs

$$f(t_{i+1}, \dots, t_{n+i}) \quad i = 0, \dots, n$$

avec sa version géométrique :

**Théorème 2.20 : Algorithme d'évaluation de la floraison  $\phi$  d'une courbe**

Soit  $\mathcal{E}$  un espace de Chebyshev fleuri sur  $I \subset \mathbb{R}$  et soit  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n < t_{n+1} \leq \dots \leq t_{2n}$  une suite croissante de  $2n$  réels de  $I$ . Soient  $\mathcal{F}$  une courbe paramétrée par  $\mathcal{E}$  de  $\mathbb{R}^d$  et  $\phi$  sa floraison associée.

Toute valeur de  $\phi$  peut s'obtenir comme une suite de combinaisons pseudo-affines des  $n + 1$  points :

$$\{t_{i+1}, \dots, t_{n+i}\} \quad i = 0, \dots, n$$

Géométriquement, les propriétés de la fonction  $\beta$  (monotonie et  $0 \leq \beta \leq 1$  lorsque  $a \leq t \leq b$ ) se traduisent par le fait que lorsque

$$\{\clubsuit, t\} = (1 - \beta(t))\{\clubsuit, a\} + \beta(t)\{\clubsuit, b\}$$

Si  $a \leq t_1 < t_2 \leq b$  alors les points étiquetés  $\{\clubsuit, t_1\}$  et  $\{\clubsuit, t_2\}$  se trouvent entre  $\{\clubsuit, a\}$  et  $\{\clubsuit, b\}$  et dans le même ordre.

### 2.3.2 - Application aux espaces circulaires de dimension 3

On considère un espace  $\mathcal{E}$  circulaire de dimension 3, c'est-à-dire engendré par  $(1, u, u')$ . On se place sur un intervalle compact  $[0; h]$  sur lequel l'espace est fleuri.

**Lemme 2.21 :**

On note  $X_h = \frac{u'(h) - 1}{u(h)}$

1)  $X_h(0) = 0$       2)  $X_{-h} = -X_h$

3)  $\frac{X_h}{X_{2h}} = \frac{u'(h)}{u'(h) + 1}$       4)  $\frac{X_h}{X_{3h}} = \frac{2u'(h) - 1}{2u'(h) + 1}$       5)  $\frac{X_{2h}}{X_{3h}} = \frac{(2u'(h) - 1)(u'(h) + 1)}{u'(h)(2u'(h) + 1)}$

**Preuve :**

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} X_h = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u'(h) - 1}{u(h)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u'(h) - 1}{h} \times \frac{h}{u(h)} = 0$

2)  $u'$  est impaire et  $u$  est paire d'où le résultat.

3)  $X_{2h} = \frac{u'(2h) - 1}{u(2h)} = \frac{2u'^2(h) - 2}{2u(h)u'(h)} = \frac{u'^2(h) - 1}{u(h)u'(h)}$

d'où  $\frac{X_h}{X_{2h}} = \frac{u'(h) - 1}{u(h)} \times \frac{u(h)u'(h)}{u'^2(h) - 1} = \frac{u'(h)}{u'(h) + 1}$

4)  $\frac{X_h}{X_{3h}} = \frac{u'(h) - 1}{u(h)} \times \frac{u(3h)}{u'(3h) - 1} = \frac{u(3h)}{u(h)} \times \frac{u'(h) - 1}{u'(3h) - 1} = P_3(h) \times \frac{u'(h) - 1}{D_3(h) - 1}$

avec  $P_3(h) = 4x^2 - 1$  et  $D_3(h) = 4x^3 - 3x$ , en posant  $x = u'(h)$ .

( $P_3$  et  $D_3$  sont les troisièmes polynômes de Chebyshev d'ordre 1 et 2 respectivement dont l'expression est rappelée au paragraphe 2.2.1.3)

D'où,  $\frac{X_h}{X_{3h}} = (4x^2 - 1) \times \frac{x - 1}{4x^3 - 3x - 1} = \frac{2x - 1}{2x + 1}$

5) On note  $x = u'(h)$

$$\begin{aligned} \frac{X_{2h}}{X_{3h}} &= \frac{u'(2h) - 1}{u(2h)} \times \frac{u(3h)}{u'(3h) - 1} = \frac{u(3h)}{u(2h)} \times \frac{u'(2h) - 1}{u'(3h) - 1} = \frac{P_3(h)}{P_2(h)} \times \frac{D_2(h) - 1}{D_3(h) - 1} \\ &= \frac{4x^2 - 1}{2x} \times \frac{2x^2 - 2}{4x^3 - 3x - 1} = \frac{(2x - 1)(x + 1)}{x(2x + 1)} \end{aligned}$$

**Lemme 2.22:**

Soit  $f$  la floraison associée à  $u'$ , c'est-à-dire  $f(A, B) = \frac{u(A) - u(B)}{u(A - B)}$ .

Elle vérifie également

$$f(k, k + h) = u(k)X_h + u'(k)$$

**Preuve :**

$$\begin{aligned} f(k, k + h) &= \frac{u(k + h) - u(k)}{u(h)} = \frac{u(k)u'(h) + u'(k)u(h) - u(k)}{u(h)} \\ &= u(k) \frac{u'(h)}{u(h)} + u'(k) - \frac{u(k)}{u(h)} = u(k) \frac{u'(h) - 1}{u(h)} + u'(k) \end{aligned}$$

**Remarque :** Le lemme 2.22 s'énonce également sous la forme

$$f(a, b) = u(a)X_{b-a} + u'(a)$$

**Lemme 2.23:**

Soit  $\phi$  la floraison associée à une courbe paramétrée par  $\mathcal{E}$ . Il existe une fonction  $\alpha_i$  monotone telle que

$$\phi(i, t) = (1 - \alpha_i(t))\phi(i, a) + \alpha_i(t)\phi(i, b)$$

Ce qu'on représente par :

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} i \\ a \end{array} \right\} & & \left\{ \begin{array}{c} i \\ b \end{array} \right\} \\ & \swarrow 1 - \alpha_i & \searrow \alpha_i \\ t \rightarrow & & \left\{ \begin{array}{c} i \\ t \end{array} \right\} \end{array}$$

avec

$$1 - \alpha_i(t) = \frac{X_{b-i} - X_{t-i}}{X_{b-i} - X_{a-i}} \quad \alpha_i(t) = \frac{X_{t-i} - X_{a-i}}{X_{b-i} - X_{a-i}}$$

**Preuve :**

D'après la remarque 5 du théorème 2.13, le coefficient  $\alpha_i$  peut se calculer avec la floraison de n'importe quelle fonction de  $\mathcal{E}$ .

On choisit  $f(A, B) = \frac{u(A) - u(B)}{u(A - B)}$ . On a alors

$$\alpha_i(t) = \frac{f(\mathbf{t}, i) - f(\mathbf{a}, i)}{f(\mathbf{b}, i) - f(\mathbf{a}, i)} = \frac{[u(i)X_{t-i} + u'(i)] - [u(i)X_{a-i} + u'(i)]}{[u(i)X_{b-i} + u'(i)] - [u(i)X_{a-i} + u'(i)]} = \frac{X_{t-i} - X_{a-i}}{X_{b-i} - X_{a-i}} \quad \blacksquare$$

### 2.3.2.1 - Algorithme de de Casteljaou

L'algorithme de de Casteljaou (Définition 1.11) permet la construction d'un point d'une courbe de "Bézier" relativement à  $[a, b]$  paramétrée par un espace de Chebyshev  $\mathcal{E}$  fleuri sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ . Il est alors nécessaire de vérifier la condition  $[a, b] \subset I$ .

De plus, contrairement à ce qui se passe dans le cas polynomial, les coefficients de l'algorithme, dépendant de l'ensemble des arguments des étiquettes impliquées, ne sont pas identiques.

On considère un espace  $\mathcal{E}$  circulaire de dimension 3, c'est-à-dire engendré par  $(1, u, u')$ . On se place sur un intervalle compact  $[0, h]$  sur lequel l'espace est fleuri.

Les algorithmes de de Casteljaou sont illustrés figure 2-2 dans le cas d'un espace circulaire de dimension 3 et figure 2.9 dans le cas d'un espace circulaire de dimension 4.

$$\begin{array}{c}
 \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\} \qquad \qquad \qquad \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ h \end{array} \right\} \qquad \qquad \qquad \left\{ \begin{array}{c} h \\ h \end{array} \right\} \\
 1 - \alpha_0 \searrow \swarrow \alpha_0 \qquad 1 - \alpha_h \searrow \swarrow \alpha_h \\
 t \rightarrow \qquad \qquad \qquad \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ t \end{array} \right\} \qquad \qquad \qquad \left\{ \begin{array}{c} t \\ h \end{array} \right\} \\
 \qquad \qquad \qquad 1 - \alpha_t \searrow \swarrow \alpha_t \\
 t \rightarrow \qquad \qquad \qquad \left\{ \begin{array}{c} t \\ t \end{array} \right\}
 \end{array}$$

fig. 2-2

Les fonctions  $\alpha_i$  s'expriment à l'aide des floraisons ( $f$  désigne la floraison de n'importe quelle fonction de  $\mathcal{E}$ ) :

$$\alpha_0 = \frac{f(\mathbf{t}, 0) - f(\mathbf{0}, 0)}{f(\mathbf{h}, 0) - f(\mathbf{0}, 0)} \qquad \alpha_h = \frac{f(\mathbf{t}, h) - f(\mathbf{0}, h)}{f(\mathbf{h}, h) - f(\mathbf{0}, h)} \qquad \alpha_t = \frac{f(\mathbf{t}, t) - f(\mathbf{0}, t)}{f(\mathbf{h}, t) - f(\mathbf{0}, t)}$$

Soit, en posant

$$\alpha_i(t) = \frac{f(\mathbf{t}, i) - f(\mathbf{0}, i)}{f(\mathbf{h}, i) - f(\mathbf{0}, i)}, \quad i \in \{0, h, t\}, \quad t \in [0, h]$$

On remarque que les fonctions  $\alpha_i$  vérifient bien les propriétés  $\alpha_i(0) = 0$  et  $\alpha_i(h) = 1$ .

**Proposition 2.24 :**

Avec les notations précédentes les coefficients  $\alpha_i(t)$  s'écrivent

$$\alpha_0(t) = \frac{X_t}{X_h}, \quad \alpha_h(t) = \frac{X_{t-h} + X_h}{X_h} \quad \alpha_t(t) = \frac{X_t}{X_{h-t} + X_t}$$

On rappelle que  $X_h = \frac{u'(h) - 1}{u(h)}$

*Preuve :*

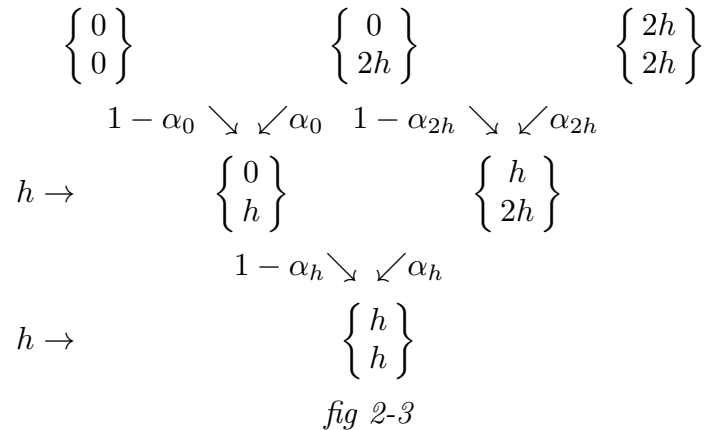
D'après le lemme 2.23, on a :

$$\begin{aligned} \alpha_0(t) &= \frac{X_t + X_0}{X_h + X_0} = \frac{X_t}{X_h} \\ \alpha_h(t) &= \frac{X_{t-h} + X_h}{X_0 + X_h} = \frac{X_{t-h} + X_h}{X_h} \\ \alpha_t(t) &= \frac{X_0 + X_t}{X_{h-t} + X_t} = \frac{X_t}{X_{h-t} + X_t} \end{aligned}$$

■

**Evaluation par subdivision**

L'évaluation par subdivision à pas constant utilise des coefficients qui s'expriment de manière plus simple ( $2h$  est l'intervalle inter nœuds au début de l'algorithme).



**Proposition 2.25 :**

Avec les notations précédentes, les coefficients  $\alpha_i(t)$  s'écrivent

$$\alpha_0(h) = 1 - \alpha_{2h}(h) = \frac{u'(h)}{u'(h) + 1}, \quad \alpha_{2h}(h) = 1 - \alpha_0(h) = \frac{1}{u'(h) + 1}, \quad \alpha_h(h) = \frac{1}{2}$$

**Preuve :**

D'après le lemme 2.23, on a

$$\alpha_0(h) = \frac{X_h}{X_{2h}} = \frac{u'(h)}{u'(h) + 1} \text{ (lemme 2.21)}$$

$$\alpha_{2h}(h) = \frac{X_{h-2h} + X_{2h}}{X_0 + X_{2h}} = \frac{-X_h + X_{2h}}{X_{2h}} = 1 - \alpha_0(h)$$

$$\alpha_h(h) = \frac{X_0 + X_h}{X_{2h-h} + X_h} = \frac{X_h}{X_h + X_h} = \frac{1}{2} \quad \blacksquare$$

### 2.3.2.2 - Base de Bernstein

Le schéma de la figure 2-2 permet de retrouver la base de Bernstein de cet espace relative à l'intervalle  $[0, h]$ . En effet, on peut écrire :

$$\left\{ \begin{matrix} t \\ t \end{matrix} \right\} = (1 - \alpha_0)(1 - \alpha_t) \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} + [\alpha_0(1 - \alpha_t) + \alpha_t(1 - \alpha_h)] \left\{ \begin{matrix} 0 \\ h \end{matrix} \right\} + \alpha_h \alpha_t \left\{ \begin{matrix} h \\ h \end{matrix} \right\}$$

$$\text{Or } \left\{ \begin{matrix} t \\ t \end{matrix} \right\} = B_0^2(t) \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} + B_1^2(t) \left\{ \begin{matrix} 0 \\ h \end{matrix} \right\} + B_2^2(t) \left\{ \begin{matrix} h \\ h \end{matrix} \right\}$$

On a donc :

$$B_0^2(t) = (1 - \alpha_0(t))(1 - \alpha_t(t))$$

$$B_1^2(t) = [\alpha_0(1 - \alpha_t) + \alpha_t(1 - \alpha_h)](t)$$

$$B_2^2(t) = \alpha_h(t)\alpha_t(t)$$

De l'écriture algorithmique on déduit immédiatement les propriétés

- Extrémités

$$B_0^2(0) = 1 \quad B_1^2(0) = 0 \quad B_2^2(0) = 0$$

$$B_0^2(h) = 0 \quad B_1^2(h) = 0 \quad B_2^2(h) = 1$$

- Positivité

$$\forall t \in [0, h], \quad 0 \leq B_i^2(t) \leq 1 \quad i = 0, 1, 2$$

- Normalisation

$$\forall t \in [0, h], \sum_{i=0}^2 B_i^2(t) = 1$$

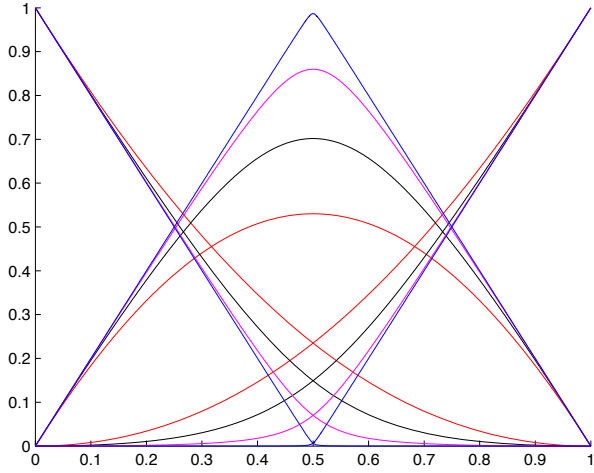


fig. 2-4

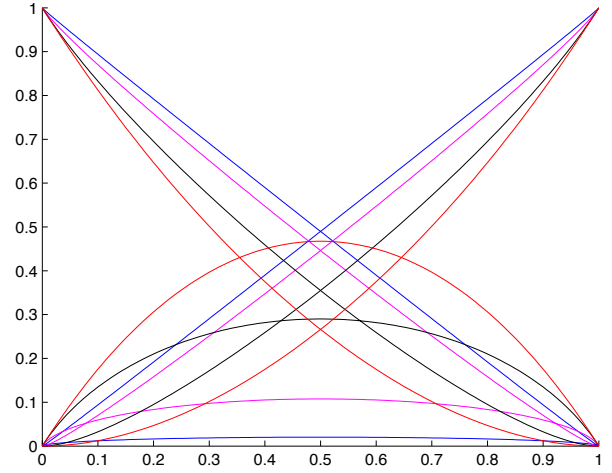


fig. 2-5

Représentation des fonctions constituant une base de Bernstein de dimension 3 hyperbolique (figure 2-4) et trigonométrique (figure 2-5) relative à l'intervalle  $[0, 1]$ . Pour le cas hyperbolique,  $u(h) = \frac{\sinh(ah)}{a}$  avec  $a=10$  (bleu), 5 (rose), 3 (noir), 1 (rouge). Pour le cas trigonométrique  $u(h) = \frac{\sin(bh)}{b}$  avec  $b=3.1$  (bleu), 2.9 (rose), 2.3 (noir), 1 (rouge)

### 2.3.2.3 - Algorithme de de Boor

On considère un espace circulaire de dimension 3 contenant les constantes (engendré par  $(1, u, u')$ ) et un vecteur nodal uniforme dont la longueur inter-nœuds est  $h$ .

L'algorithme de de Boor pour les fonctions circulaires se schématise de la façon suivante :

$$\begin{array}{c}
 \left\{ \begin{array}{c} k-h \\ k \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} k \\ k+h \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} k+h \\ k+2h \end{array} \right\} \\
 1 - \alpha_k \searrow \swarrow \alpha_k \quad 1 - \alpha_{k+h} \searrow \swarrow \alpha_{k+h} \\
 t \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} k \\ t \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} t \\ k+h \end{array} \right\} \\
 1 - \alpha_t \searrow \swarrow \alpha_t \\
 t \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} t \\ t \end{array} \right\}
 \end{array}$$

fig. 2-6

**Proposition 2.26 :**

Avec les notations précédentes, les coefficients de l'algorithme s'expriment :

$$\alpha_k = \frac{X_{t-k} + X_h}{2X_h} \quad \alpha_{k+h} = \frac{X_{t-k-h} + X_h}{2X_h} \quad \alpha_t = \frac{X_{t-k}}{X_{k+h-t} + X_{t-k}}$$

**Preuve :**

D'après la lemme 2.23,

$$\alpha_k = \frac{f(t, k) - f(k - h, k)}{f(k + h, k) - f(k - h, k)} = \frac{X_{t-k} - X_{-h}}{X_h - X_{-h}} = \frac{X_{t-k} + X_h}{2X_h}$$

$$\alpha_{k+h} = \frac{f(t, k + h) - f(k, k + h)}{f(k + 2h, k + h) - f(k, k + h)} = \frac{X_{t-k-h} - X_{-h}}{X_h - X_{-h}} = \frac{X_{t-k-h} + X_h}{2X_h}$$

$$\alpha_t = \frac{f(t, t) - f(t, k)}{f(k + h, t) - f(t, k)} = \frac{X_0 - X_{k-t}}{X_{k+h-t} - X_{k-t}} = \frac{X_{t-k}}{X_{k+h-t} + X_{t-k}} \quad \blacksquare$$

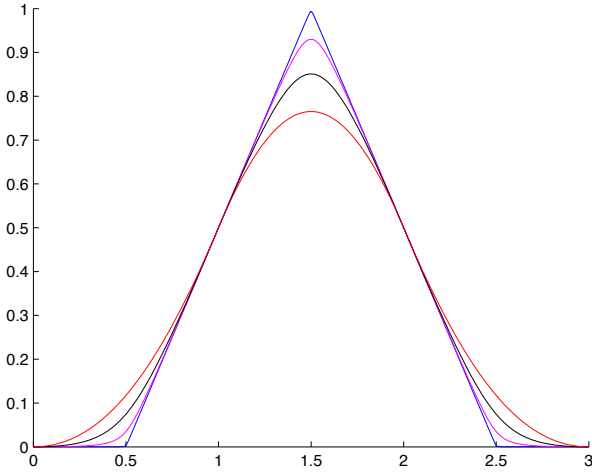


fig. 2-7

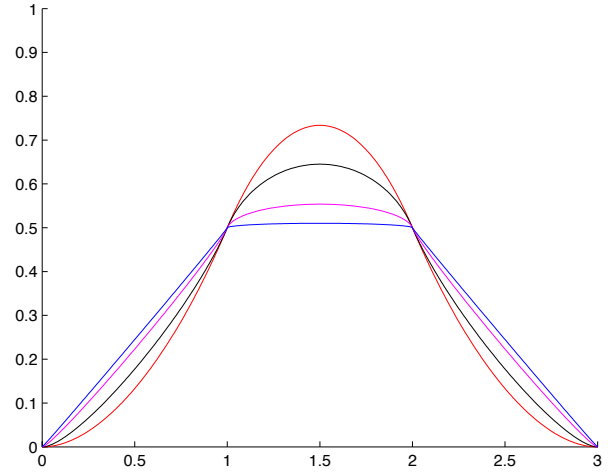


fig. 2-8

Représentation de la B-spline de dimension 3 dans les cas hyperbolique (fig. 2-7) et trigonométrique (fig. 2-8) sur  $[0, 3]$ . Pour le cas hyperbolique,  $u(h) = \frac{\sinh(ah)}{a}$  avec  $a=10$  (bleu), 5 (rose), 3 (noir), 1 (rouge). Pour le cas trigonométrique  $u(h) = \frac{\sin(bh)}{b}$  avec  $b=3.1$  (bleu), 2.9 (rose), 2.3 (noir), 1 (rouge)

### 2.3.3 - Application aux espaces circulaires en dimension 4

On considère un espace circulaire de dimension 4 contenant les constantes engendré par une base du type  $(1, t, u, u')$ . On se place sur un intervalle compact  $[0, h]$ .



L'algorithme de de Castel'jau pour les fonctions circulaires se schématise de la façon suivante :

$$\begin{array}{cccc}
\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} & & \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{Bmatrix} & & \begin{Bmatrix} 0 \\ h \\ h \end{Bmatrix} & & \begin{Bmatrix} h \\ h \\ h \end{Bmatrix} \\
& & 1 - \alpha_{00} \searrow \swarrow \alpha_{00} & & 1 - \alpha_{0h} \searrow \swarrow \alpha_{0h} & & 1 - \alpha_{hh} \searrow \swarrow \alpha_{hh} \\
t \rightarrow & & \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{Bmatrix} & & \begin{Bmatrix} 0 \\ h \\ t \end{Bmatrix} & & \begin{Bmatrix} h \\ h \\ t \end{Bmatrix} \\
& & 1 - \alpha_{0t} \searrow \swarrow \alpha_{0t} & & 1 - \alpha_{ht} \searrow \swarrow \alpha_{ht} & & \\
t \rightarrow & & \begin{Bmatrix} 0 \\ t \\ t \end{Bmatrix} & & \begin{Bmatrix} h \\ t \\ t \end{Bmatrix} & & \\
& & & & 1 - \alpha_{tt} \searrow \swarrow \alpha_{tt} & & \\
t \rightarrow & & & & \begin{Bmatrix} t \\ t \\ t \end{Bmatrix} & & 
\end{array}$$

fig. 2-9

Les fonctions  $\alpha_{ij}$  dépendent de  $t$  et sont données par

$$\alpha_{ij}(t) = \frac{f(\mathbf{t}, i, j) - f(\mathbf{0}, i, j)}{f(\mathbf{h}, i, j) - f(\mathbf{0}, i, j)}$$

$f(A, B, C)$  étant la floraison d'une fonction quelconque de l'espace  $\mathcal{E}$ , d'après la remarque 5 de la définition 2.13.

On remarque que  $\alpha_{ij}$  vérifie bien  $\alpha_{ij}(0) = 0$  et  $\alpha_{ij}(h) = 1$

Le schéma triangulaire nous permet d'obtenir les bases de Bernstein

$$B_0^3 = (1 - \alpha_{00})(1 - \alpha_{0t})(1 - \alpha_{tt})$$

$$B_1^3 = \alpha_{00}(1 - \alpha_{0t})(1 - \alpha_{tt}) + (1 - \alpha_{0h})[\alpha_{0t}(1 - \alpha_{tt}) + \alpha_{tt}(1 - \alpha_{ht})]$$

$$B_2^3 = \alpha_{0h}[\alpha_{0t}(1 - \alpha_{tt}) + \alpha_{tt}(1 - \alpha_{ht})] + (1 - \alpha_{hh})\alpha_{ht}\alpha_{tt}$$

$$B_3^3 = \alpha_{hh}\alpha_{ht}\alpha_{tt}$$

de l'écriture desquelles on peut tirer les relations

$$B_0^3 = (1 - \alpha_{00})\tilde{B}_0^2$$

$$B_1^3 = \alpha_{00}\tilde{B}_0^2 + (1 - \alpha_{0h})\tilde{B}_1^2$$

$$B_2^3 = \alpha_{0h}\tilde{B}_1^2 + (1 - \alpha_{hh})\tilde{B}_2^2$$

$$B_3^3 = \alpha_{hh}\tilde{B}_2^2$$

avec  $\tilde{B}_i^2 = B_{it}^2$

## 2.4 - Subdivisions non stationnaires

Dans le cas polynomial nous avons décrit un processus de subdivision dont nous avons étiqueté les points à l'aide de la floraison associée à la courbe limite (paragraphe 1.4). Cet étiquetage nous a permis de retrouver les coefficients de l'algorithme de subdivision conduisant à des splines polynomiales de degré  $n$  pour  $n = 2$  et  $n = 3$ . La démarche reste abordable pour un faible degré. Lorsqu'on augmente le degré on utilise le théorème d'intégration qui exprime les coefficients du masque associé à  $\mathbb{P}^{n+1}$  en fonction de ceux du masque associé à  $\mathbb{P}^n$ .

La démarche et les résultats sont transposables, via l'utilisation des floraisons, à des espaces de Chebyshev fleuris. Dans ce cas, les coefficients de la matrice de raffinement ne sont plus des constantes puisqu'ils dépendent de la longueur de l'intervalle inter-nœuds à chaque étape du processus de subdivision (on se place dans le cas d'un vecteur nodal uniforme). On parle alors de subdivision non stationnaire.

Dans ce paragraphe nous déterminons, via les floraisons, les coefficients des masques de subdivision associés à des espaces circulaires.

### 2.4.1 - Cas dyadique

Dans le cas d'un processus dyadique, le nombre de nœuds est doublé à chaque étape de l'algorithme. Lorsque l'on s'intéresse à des nœuds uniformément répartis, le doublement se fait en insérant un nouveau nœud au centre de l'intervalle constitué de deux anciens nœuds consécutifs. Les matrices de raffinement associées à ce type de processus sont des matrices décalées d'ordre 2.

### 2.4.1.1- Spline paramétrée par un espace circulaire de dimension 3

Dans tout ce paragraphe, on utilisera les notations suivantes :

$t_k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) est une suite croissante de nœuds. La longueur de l'intervalle inter-nœuds, notée  $h$  est constante. À chaque étape de raffinement, le nombre de nœuds est multiplié par 2, ce qui diminue de moitié la distance entre chaque nœud du nouveau vecteur nodal.

On notera  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  les sommets du polygone d'approximation pour une étape donnée et  $\{B_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  les sommets qui composent le polygone d'approximation après une étape de raffinage.

Soit  $\mathcal{E}$  un espace circulaire de dimension 3 contenant les constantes. C'est-à-dire un espace de fonctions définies sur  $[0, h]$  ( $h > 0$ ) à valeurs dans  $\mathbb{R}$  engendré par une base du type  $(1, u, u')$  où  $u \in \left\{ \frac{\sinh(at)}{a}, \frac{\sin(bt)}{b} \right\}$  pour  $a$  et  $b$  deux réels positifs.

On note  $f$  la floraison de la fonction  $u' \in \mathcal{E}$ . C'est-à-dire  $f(A, B) = \frac{u(A) - u(B)}{u(A - B)}$ .

Pour une courbe  $\mathcal{F}$ , paramétrée par  $\mathcal{E}$  sur  $[0, h]$ , la floraison de  $\mathcal{F}$  est une fonction de  $[0, h]^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  qui, à un couple de nœuds, associe un point du plan. Elle sera notée  $\{.\} : (t_1, t_2) \mapsto \{t_1, t_2\}$ .

#### Proposition 2.27:

On considère un processus de subdivision dyadique non stationnaire qui conduit à une courbe spline paramétrée par un espace  $\mathcal{E}$  engendré par  $(1, u, u')$ . Les éléments des suites  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  et  $\{B_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  sont liés par les relations :

$$\begin{aligned} B_{2k} &= \frac{2u'(h) + 1}{2(u'(h) + 1)} A_k + \frac{1}{2(u'(h) + 1)} A_{k+1} \\ B_{2k+1} &= \frac{1}{2(u'(h) + 1)} A_k + \frac{2u'(h) + 1}{2(u'(h) + 1)} A_{k+1} \end{aligned}$$

en notant  $h$  la longueur inter-nœuds correspondant à la suite  $\{B_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$

#### Preuve :

Une étape du processus de subdivision correspond au passage d'un vecteur nodal uniforme de longueur  $2h$  à un vecteur nodal uniforme de longueur  $h$ .

On considère les nœuds réguliers

$$\dots, k - 4h, k - 2h, k, k + 2h, k + 4h, \dots$$

qui correspondent à la suite  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  de points de contrôle étiquetés :

$$\cdots \quad \left\{ \begin{array}{c} k-2h \\ k \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} k \\ k+2h \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} k+2h \\ k+4h \end{array} \right\} \quad \cdots$$

Le nouveau vecteur nodal

$$\dots, k-4h, k-3h, k-2h, k-h, k, k+h, k+2h, k+3h, k+4h, \dots$$

correspond à la nouvelle suite  $\{B_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  de points de contrôle étiquetés :

$$\cdots \quad \left\{ \begin{array}{c} k-2h \\ k-h \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} k-h \\ k \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} k \\ k+h \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} k+h \\ k+2h \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} k+2h \\ k+3h \end{array} \right\} \cdots$$

Le principe des floraisons indique que deux points contigus  $\{k-2h, k\}$  et  $\{k, k+2h\}$  permettent d'en engendrer deux autres  $\{k-h, k\}$  et  $\{k, k+h\}$  par combinaison pseudo affine. On double ainsi le nombre de points de contrôle.

Cette construction est illustrée par le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} k-2h \\ k \end{array} \right\} & & \left\{ \begin{array}{c} k \\ k+2h \end{array} \right\} & & \left\{ \begin{array}{c} k-2h \\ k \end{array} \right\} & & \left\{ \begin{array}{c} k \\ k+2h \end{array} \right\} \\ 1 - \alpha_1 \searrow & & \swarrow \alpha_1 & & 1 - \alpha_2 \searrow & & \swarrow \alpha_2 \\ & & \left\{ \begin{array}{c} k-h \\ k \end{array} \right\} & & & & \left\{ \begin{array}{c} k \\ k+h \end{array} \right\} \end{array}$$

D'après le lemme 2.23,

$$\alpha_1 = \frac{f(k-h, k) - f(k-2h, k)}{f(k, k+2h) - f(k-2h, k)} = \frac{X_{-h} - X_{-2h}}{X_{2h} - X_{-2h}} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{X_h}{X_{2h}} \right] = \frac{1}{2(u'(h) + 1)}$$

$$\alpha_2 = \frac{f(k, k+h) - f(k-2h, k)}{f(k, k+2h) - f(k-2h, k)} = \frac{X_h - X_{-2h}}{X_{2h} - X_{-2h}} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{X_h}{X_{2h}} \right] = \frac{2u'(h) + 1}{2(u'(h) + 1)}$$

On obtient donc les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{c} k-h \\ k \end{array} \right\} = \frac{2u'(h) + 1}{2(u'(h) + 1)} \left\{ \begin{array}{c} k-2h \\ k \end{array} \right\} + \frac{1}{2(u'(h) + 1)} \left\{ \begin{array}{c} k \\ k+2h \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} k \\ k+h \end{array} \right\} = \frac{1}{2(u'(h) + 1)} \left\{ \begin{array}{c} k-2h \\ k \end{array} \right\} + \frac{2u'(h) + 1}{2(u'(h) + 1)} \left\{ \begin{array}{c} k \\ k+2h \end{array} \right\} \quad \blacksquare$$

**Remarques :**

1) L'absence de la variable  $k$  dans les coefficients  $\alpha_i$  montre que ces derniers ne dépendent que de la longueur inter nœuds et non de la position du nœud pour lequel ils sont calculés (ce qui n'est pas le cas pour un vecteur nodal non uniforme).

2) Lorsque  $h \mapsto 0$ ,  $u'(h) \mapsto 1$  et on retrouve le cas polynomial, à savoir  $\alpha_1 = \frac{1}{4}$  et  $\alpha_2 = \frac{3}{4}$  (Proposition 1.36)

3) Les relations de la proposition 2.27 s'expriment dans la matrice de raffinement :

$$\frac{1}{2(u'(h) + 1)} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & 2u'(h) + 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 1 & 2u'(h) + 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 2u'(h) + 1 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 2u'(h) + 1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 2u'(h) + 1 & 1 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 2u'(h) + 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

avec le masque de subdivision  $\frac{1}{2(u'(h) + 1)} [1 \quad 2u'(h) + 1 \quad 2u'(h) + 1 \quad 1]$

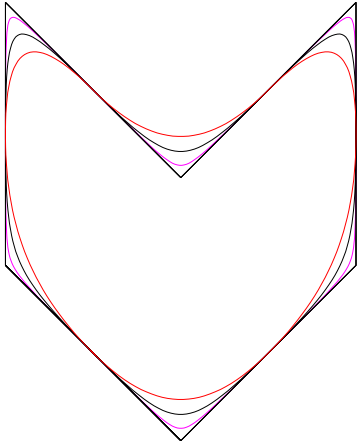


fig. 2-10

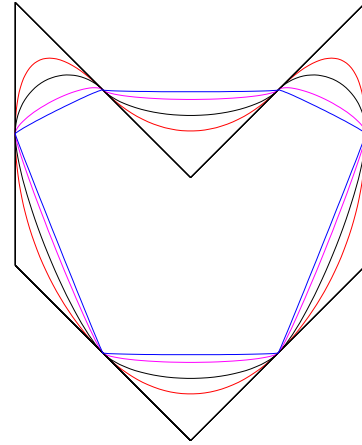


fig. 2-11

Représentation d'une courbe spline fermée paramétrée par un espace de dimension 3 hyperbolique (fig. 2-10) et trigonométrique (fig. 2-11).  $u(h) = \frac{\sinh(ah)}{a}$  pour le cas hyperbolique, avec  $a=5$  (rose), 3 (noir), 1 (rouge). Pour le cas trigonométrique  $u(h) = \frac{\sin(bh)}{b}$  avec  $b=3.1$  (bleu), 2.9 (rose), 2.3 (noir), 1 (rouge). Le polygone de contrôle est en noir.

### 2.4.1.2 - Spline paramétrée par un espace circulaire de dimension 4

Le paragraphe suivant expose un procédé de calcul des coefficients du masque de subdivision utilisant les floraisons dans le cas des espaces de Chebyshev de dimension 4 possédant une base du type  $(1, t, u, u')$ . Bien qu'on puisse également obtenir ces résultats à partir du masque de l'espace de dimension 3 engendré par  $(1, u, u')$  (voir paragraphe 2.4.1.3), cet exposé permet néanmoins de montrer la démarche de calcul par les floraisons dans un cas plus complexe que précédemment et surtout plus représentatif.

L'application du processus conduit ici à l'obtention d'une "cubique" non polynomiale (hyperbolique ou trigonométrique).

#### Proposition 2.28 :

On considère un processus de subdivision dyadique non stationnaire qui conduit à une courbe spline paramétrée par l'espace  $\mathcal{E}$  engendré par  $(1, t, u, u')$ . Les éléments des suites  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  et  $\{B_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  sont liés par les relations :

$$B_{2k} = \frac{1}{4[u'(h) + 1]} A_{k-1} + \frac{2u'(h) + 1}{2[u'(h) + 1]} A_k + \frac{1}{4[u'(h) + 1]} A_{k+1}$$

$$B_{2k+1} = \frac{u'(h) + 1}{2[u'(h) + 1]} A_k + \frac{u'(h) + 1}{2[u'(h) + 1]} A_{k+1}$$

en notant  $h$  la longueur inter-nœuds correspondant à la suite  $\{B_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$

#### Preuve :

On rappelle que dans le cas d'un espace  $\mathcal{E}$  de dimension 4, les sommets du polygone de contrôle sont étiquetés par des triplets. Deux triplets consécutifs engendrent alors un nouveau point par combinaison pseudo-affine selon le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \right\} & & \left\{ \begin{array}{c} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \right\} \\ & 1 - \alpha \searrow \quad \swarrow \alpha & \\ & \left\{ \begin{array}{c} a_2 \\ a_3 \\ t \end{array} \right\} & \end{array}$$

où  $t$  est une combinaison pseudo-affine de  $a_1$  et  $a_4$  avec  $\alpha = \frac{f(a_2, a_3, \mathbf{t}) - f(\mathbf{a}_1, a_2, a_3)}{f(a_2, a_3, \mathbf{a}_4) - f(\mathbf{a}_1, a_2, a_3)}$  et

$$1 - \alpha = \frac{f(a_2, a_3, \mathbf{a}_4) - f(a_2, a_3, \mathbf{t})}{f(a_2, a_3, \mathbf{a}_4) - f(\mathbf{a}_1, a_2, a_3)}$$

Dans le cas d'un paramétrage uniforme les coefficients de raffinement ne dépendant pas de la position du nœud  $t_k$ . Une étape du processus de subdivision correspond au passage d'un vecteur nodal uniforme de longueur  $2h$  à un vecteur nodal uniforme de longueur  $h$ .

Dans une étape du processus de subdivision, la suite  $\{A_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$  de points de contrôle

$$\dots \quad \begin{Bmatrix} -4h \\ -2h \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} -2h \\ 0 \\ 2h \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ 2h \\ 4h \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 2h \\ 4h \\ 6h \end{Bmatrix} \quad \dots$$

correspondant au vecteur nodal

$$\dots, -4h, -2h, 0, 2h, 4h, \dots$$

engendre une nouvelle suite  $\{B_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$  de points de contrôle.

$$\dots \quad \begin{Bmatrix} -3h \\ -2h \\ -h \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} -2h \\ -h \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} -h \\ 0 \\ h \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ h \\ 2h \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} h \\ 2h \\ 3h \end{Bmatrix} \quad \dots$$

correspondant au nouveau vecteur nodal

$$\dots, -4h, -3h, -2h, -h, 0, h, 2h, 3h, 4h, \dots$$

Il y a deux types de points  $B_k$  :

- ceux dont l'étiquette contient 2 arguments provenant de l'ancien vecteur nodal (type 1),
- et ceux dont l'étiquette contient un seul argument provenant de l'ancien vecteur nodal (type 2).

**Étape 1** : Construction des points de type 1

Lorsque l'étiquette du nouveau point,  $\begin{Bmatrix} 0 \\ h \\ 2h \end{Bmatrix}$  contient 2 arguments 0 et  $2h$  de l'ancien vecteur nodal, il s'obtient par combinaison affine des deux anciens points dont les étiquettes contiennent les arguments 0 et  $2h$  simultanément.

$$\begin{array}{ccc}
\begin{pmatrix} -2h \\ 0 \\ 2h \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 0 \\ 2h \\ 4h \end{pmatrix} \\
\cdot \searrow \swarrow \alpha_1 & & \text{avec } \alpha_1 = \frac{1}{2} \\
\begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 2h \end{pmatrix} & & 
\end{array}$$

fig. 2-12

Calcul du coefficient  $\alpha_1$  :

Le coefficient  $\alpha_1$  se calcule à l'aide des floraisons par  $\alpha_1 = \frac{f(0, \mathbf{h}, 2h) - f(-2\mathbf{h}, 0, 2h)}{f(0, 2h, 4\mathbf{h}) - f(-2\mathbf{h}, 0, 2h)}$

On utilise, par exemple (proposition 2.17),

$$f(A, B, C) = \frac{Au(B - C) + Bu(C - A) + Cu(A - B)}{u(B - C) + u(C - A) + u(A - B)}$$

• Pour tout  $h$ ,  $f(0, h, 2h) = \frac{hu(2h) + 2hu(-h)}{u(-h) + u(2h) + u(-h)} = \frac{2hu(h)[u'(h) - 1]}{2u(h)[u'(h) - 1]} = h$

• Pour tout  $h$ ,  $f(-h, 0, h) = \frac{-hu(-h) + hu(-h)}{u(-h) + u(2h) + u(-h)} = 0$

D'où  $\alpha_1 = \frac{h - 0}{2h - 0} = \frac{1}{2}$

**Étape 2 :** Construction des points de type 2

Lorsque l'étiquette du nouveau point  $\{-h, 0, h\}$  contient un seul argument 0 de l'ancien vecteur nodal, il peut s'obtenir, de deux façons différentes par combinaison pseudo affine des trois anciens points dont les étiquettes contiennent l'argument 0.

$$\begin{array}{ccc}
\begin{pmatrix} -4h \\ -2h \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2h \\ 0 \\ 2h \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 2h \\ 4h \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -4h \\ -2h \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2h \\ 0 \\ 2h \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 2h \\ 4h \end{pmatrix} \\
\cdot \searrow \swarrow \alpha_3 & \cdot \searrow \swarrow \alpha_4 & & \cdot \searrow \swarrow \alpha_2 & \cdot \searrow \swarrow \alpha_1 & \\
-h \rightarrow & \begin{pmatrix} -2h \\ -h \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -h \\ 0 \\ 2h \end{pmatrix} & h \rightarrow & \begin{pmatrix} -2h \\ 0 \\ h \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 2h \end{pmatrix} \\
& \cdot \searrow \swarrow \beta_2 & & & \cdot \searrow \swarrow \beta_1 & \\
h \rightarrow & \begin{pmatrix} -h \\ 0 \\ h \end{pmatrix} & & -h \rightarrow & \begin{pmatrix} -h \\ 0 \\ h \end{pmatrix} & 
\end{array}$$



fig. 2-13 (a)

fig. 2-13 (b)

$$\text{On a } \alpha_1 = \alpha_3 = \frac{1}{2}; \quad \alpha_2 = \frac{4u'(h) + 1}{2[2u'(h) + 1]}; \quad \alpha_4 = 1 - \alpha_2 = \frac{1}{2[2u'(h) + 1]};$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2[u'(h) + 1]}; \quad \beta_2 = 1 - \beta_1 = \frac{2u'(h) + 1}{2[u'(h) + 1]}$$

Calcul des coefficients  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2$

On utilise les coefficients donnés par la figure 2-13 en prenant

$$f(A, B, C) = \frac{Au(B - C) + Bu(C - A) + Cu(A - B)}{u(B - C) + u(C - A) + u(A - B)}$$

Nous aurons donc besoin de calculer préalablement les valeurs des floraisons aux points intermédiaires de l'algorithme de la figure 2-13.

$$\bullet f(-A, -B, -C) = -f(A, B, C)$$

$$\bullet f(-h, 0, 2h) = \frac{-hu(-2h) + 2hu(-h)}{u(-2h) + u(3h) + u(-h)}$$

Or  $-hu(-2h) + 2hu(-h) = 2hu(h)[u'(h) - 1]$  (en utilisant la formule de duplication du paragraphe 2.2.1.2)

$$\text{et } u(-2h) + u(3h) + u(-h) = u(h)[-P_2(h) + P_3(h) - 1]$$

$= u(h)[4u'^2(h) - 2u'(h) - 2] = 2u(h)[2u'(h) + 1][u'(h) - 1]$  ( $P_2$  et  $P_3$  sont les polynômes de Chebyshev de premier ordre dont la construction est rappelée dans le paragraphe 2.2.1.3)

$$\text{D'où } f(-h, 0, 2h) = \frac{h}{2u'(h) + 1} \text{ et } f(-2h, 0, h) = -f(-h, 0, 2h) = -\frac{h}{2u'(h) + 1}$$

• En rajoutant toutes les valeurs calculées plus haut pour l'obtention du coefficient  $\alpha_1$ , nous disposons finalement de

$$f(-4h, -2h, 0) = -2h; \quad f(-2h, 0, 2h) = 0; \quad f(0, 2h, 4h) = 2h;$$

$$f(-2h, -h, 0) = -h; \quad f(-h, 0, 2h) = \frac{h}{2u'(h) + 1}; \quad f(-2h, 0, h) = -\frac{h}{2u'(h) + 1};$$

$$f(0, h, 2h) = h \text{ et } f(-h, 0, h) = 0$$

Ce qui nous donne donc:

$$\alpha_1 = \frac{f(0, \mathbf{h}, 2h) - f(-2\mathbf{h}, 0, 2h)}{f(0, 2h, 4h) - f(-2\mathbf{h}, 0, 2h)} = \frac{h}{2h} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_2 = \frac{f(-2h, 0, \mathbf{h}) - f(-4\mathbf{h}, -2h, 0)}{f(-2h, 0, 2\mathbf{h}) - f(-4\mathbf{h}, -2h, 0)} = \frac{1}{2h} \left[ -\frac{h}{2u'(h) + 1} + 2h \right] = 1 - \frac{1}{2[2u'(h) + 1]}$$

$$\alpha_3 = \frac{f(-2h, -\mathbf{h}, 0) - f(-4\mathbf{h}, -2h, 0)}{f(-2h, 0, 2\mathbf{h}) - f(-4\mathbf{h}, -2h, 0)} = \frac{-h + 2h}{2h} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_4 = \frac{f(-\mathbf{h}, 0, 2h) - f(-2\mathbf{h}, 0, 2h)}{f(0, 2h, 4\mathbf{h}) - f(-2\mathbf{h}, 0, 2h)} = \frac{1}{2h} \times \frac{h}{2u'(h) + 1} = \frac{1}{2[2u'(h) + 1]}$$

$$\beta_1 = \frac{f(-\mathbf{h}, 0, h) - f(-2\mathbf{h}, 0, h)}{f(0, h, 2\mathbf{h}) - f(-2\mathbf{h}, 0, h)} = \frac{h}{2u'(h) + 1} \times \frac{1}{h + \frac{h}{2u'(h)+1}} = \frac{1}{2[u'(h) + 1]}$$

$$\beta_2 = \frac{f(-h, 0, \mathbf{h}) - f(-2\mathbf{h}, -h, 0)}{f(-h, 0, 2\mathbf{h}) - f(-2\mathbf{h}, -h, 0)} = \frac{h}{\frac{h}{2u'(h)+1} + h} = \frac{2u'(h) + 1}{2[u'(h) + 1]}$$

*Remarque* : Géométriquement, le fait de pouvoir obtenir le point  $\begin{pmatrix} -h \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$  de deux manières

différentes à partir du triplet  $\begin{pmatrix} -4h \\ -2h \\ h \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} -2h \\ 0 \\ 2h \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2h \\ 4h \end{pmatrix}$  signifie qu'il se situe à l'intersection de deux segments.

Ce sont les segments notés  $\left[ \begin{pmatrix} -2h \\ -h \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -h \\ 0 \\ 2h \end{pmatrix} \right]$  et  $\left[ \begin{pmatrix} -2h \\ 0 \\ h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 2h \end{pmatrix} \right]$ .

**Étape 3** : Relation entre les nouveaux pôles  $\{B_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  et les anciens pôles  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$

$$\begin{pmatrix} -h \\ 0 \\ h \end{pmatrix} = \frac{1}{4[u'(h) + 1]} \left[ \begin{pmatrix} -4h \\ -2h \\ 0 \end{pmatrix} + (4u'(h) + 2) \begin{pmatrix} -2h \\ 0 \\ 2h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2h \\ 4h \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 2h \end{pmatrix} = \frac{1}{4[u'(h) + 1]} \left[ (2u'(h) + 2) \begin{pmatrix} -2h \\ 0 \\ 2h \end{pmatrix} + (2u'(h) + 2) \begin{pmatrix} 0 \\ 2h \\ 4h \end{pmatrix} \right]$$

La seconde relation correspond aux points de type 1 (fig. 2-12), tandis que la première, pour les points de type 2, s'obtient à partir d'un des schémas triangulaires de la figure 2-13 (les deux conduisent au même résultat).

$$\begin{pmatrix} -h \\ 0 \\ h \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} -4h \\ -2h \\ 0 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} -2h \\ 0 \\ 2h \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 0 \\ 2h \\ 4h \end{pmatrix}$$

On lit, par exemple, sur le schéma de la figure 2-13 (b) :

$$A = (1 - \alpha_2)(1 - \beta_1) = \alpha_4\beta_2 = \frac{1}{2[2u'(h) + 1]} \times \frac{2u'(h) + 1}{2[u'(h) + 1]} = \frac{1}{4[u'(h) + 1]}$$

$$B = \alpha_2(1 - \beta_1) + (1 - \alpha_1)\beta_1 = \frac{4u'(h) + 1}{2[2u'(h) + 1]} \times \frac{2u'(h) + 1}{2[u'(h) + 1]} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2[u'(h) + 1]} = \frac{4u'(h) + 2}{4[u'(h) + 1]}$$

$$C = \alpha_1\beta_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2[u'(h) + 1]} = \frac{1}{4[u'(h) + 1]}$$

■

**Remarques :**

- 1) Lorsque  $h \rightarrow 0$ , on a  $u'(h) \rightarrow 1$  et on retrouve bien le masque du cas polynomial.
- 2) On aurait pu utiliser la floraison  $f(A, B, C)$  associée à n'importe quelle fonction de l'espace engendré par  $(1, t, u, u')$  pour le calcul des coefficients des algorithmes.
- 3) Les relations de la proposition 2.28 s'expriment dans la matrice de raffinement :

$$\frac{1}{4[u'(h) + 1]} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & 4u'(h) + 2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 2u'(h) + 2 & 2u'(h) + 2 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 1 & 4u'(h) + 2 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 2u'(h) + 2 & 2u'(h) + 2 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 4u'(h) + 2 & 1 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 2u'(h) + 2 & 2u'(h) + 2 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 4u'(h) + 2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

avec le masque de subdivision

$$\frac{1}{4[u'(h) + 1]} [1 \quad 2u'(h) + 2 \quad 4u'(h) + 2 \quad 2u'(h) + 2 \quad 1]$$

**2.4.1.3 - Extension à la dimension n**

Nous reprenons ici les notations du paragraphe 1.4.1.

Dans le cas d'un processus non-stationnaire, l'opérateur dépend de l'étape du processus et l'on doit écrire

$$\lambda^m = S_m S_{m-1} \dots S_0 \lambda$$

avec

$$S_m \lambda = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{i-2j} \left(\frac{h}{2^m}\right) \lambda_j \quad i \in \mathbb{Z}$$

( $h$  est ici la longueur de l'intervalle interneuds du vecteur nodal de la spline limite du processus).

Les coefficients du masque de subdivision associé au processus ne sont plus des constantes. Les équations de raffinement deviennent alors

$$\psi(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i \left(\frac{h}{2^m}\right) \psi(2t - i) \quad t \in \mathbb{R} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Le théorème d'intégration du chapitre 1 (théorème 1.39), prend alors la forme suivante :

On considère des schémas de subdivision non stationnaires dyadiques. Soit  $\mathcal{E}$  un espace de Chebyshev associé au masque  $\{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ . Le masque  $\{b_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  associé à  $\int \mathcal{E}$  est tel que  $b_k(h) = \frac{1}{2}(a_k(h) + a_{k-1}(h))$  pour tout  $h \in \mathbb{R}^+$

Ce qui s'applique ici pour déterminer les coefficients du masque de subdivision dans le cas d'espaces circulaires de dimension supérieure, c'est-à-dire engendrés par une base du type  $(1, t, \dots, t^{n-2}, u, u')$ .

On obtient ainsi (pour plus de lisibilité, on a posé  $x = u'(h)$ ) :

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{2(x+1)} & \frac{2x+1}{2(x+1)} & \frac{2x+1}{2(x+1)} & \frac{1}{2(x+1)} & & \\ \frac{1}{4(x+1)} & \frac{2x+2}{4(x+1)} & \frac{4x+2}{4(x+1)} & \frac{2x+2}{4(x+1)} & \frac{1}{4(x+1)} & \\ \frac{1}{8(x+1)} & \frac{2x+3}{8(x+1)} & \frac{6x+4}{8(x+1)} & \frac{6x+4}{8(x+1)} & \frac{2x+3}{8(x+1)} & \frac{1}{8(x+1)} \\ \dots & & & & & \end{array}$$

## 2.4.2 - Cas $m$ -adique

On détermine ici les masques de subdivision pour les processus  $m$ -adiques conduisant à des courbes splines paramétrées par des espaces circulaires de dimension 3. Les masques pour les espaces circulaires de dimensions supérieures s'en déduisent par le théorème d'intégration.

### 2.4.2.1 Processus triadique

#### Proposition 2.29:

On considère un processus de subdivision triadique non stationnaire qui conduit à une courbe spline paramétrée par un espace  $\mathcal{E}$  engendré par  $(1, u, u')$ . Les éléments des suites  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  et  $\{B_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  sont liés par les relations :

$$\begin{aligned} B_{3k} &= \frac{2u'(h)}{2u'(h)+1} A_k + \frac{1}{2u'(h)+1} A_{k+1} \\ B_{3k+1} &= \frac{1}{2u'(h)+1} A_k + \frac{2u'(h)}{2u'(h)+1} A_{k+1} \\ B_{3k+2} &= \frac{1}{(2u'(h)+1)^2} A_k + \frac{4u'(h)^2 + 4u'(h) - 1}{(2u'(h)+1)^2} A_{k+1} + \frac{1}{(2u'(h)+1)^2} A_{k+2} \end{aligned}$$

en notant  $h$  la longueur inter-nœuds correspondant à la suite  $\{B_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$

**Preuve :**

Une étape du processus est décrite lors du passage d'un vecteur nodal uniforme de longueur  $3h$  à un vecteur nodal uniforme de longueur  $h$ .

On considère des nœuds réguliers

$$\dots, k - 6h, k - 3h, k, k + 3h, k + 6h, \dots$$

Ce sont les arguments des étiquettes des sommets  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  du polygone de contrôle

$$\dots \quad \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{k} - 3\mathbf{h} \\ \mathbf{k} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{k} \\ \mathbf{k} + 3\mathbf{h} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{k} + 3\mathbf{h} \\ \mathbf{k} + 6\mathbf{h} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{k} + 6\mathbf{h} \\ \mathbf{k} + 9\mathbf{h} \end{array} \right\} \quad \dots$$

Après une étape de subdivision les nœuds sont 3 fois plus nombreux et se notent

$$\dots, k - 4h, \mathbf{k} - 3\mathbf{h}, k - 2h, k - h, \mathbf{k}, k + h, k + 2h, \mathbf{k} + 3\mathbf{h}, k + 4h, \dots$$

Ce sont les arguments des étiquettes des sommets  $\{B_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  du nouveau polygone de contrôle

$$\dots \quad \left\{ \begin{array}{c} k - h \\ \mathbf{k} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{k} \\ k + h \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} k + h \\ k + 2h \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} k + 2h \\ \mathbf{k} + 3\mathbf{h} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{k} + 3\mathbf{h} \\ k + 4h \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} k + 4h \\ k + 5h \end{array} \right\} \quad \dots$$

Il y a deux types de point  $B_k$  :

- ceux dont l'étiquette contient un argument de l'ancien vecteur nodal (type 1),
- et ceux dont l'étiquette ne contient aucun argument de l'ancien vecteur nodal (type 2).

**Étape 1** : Construction des points de type 1

Lorsque l'un des arguments du nouveau point  $B_k$  est un des anciens nœuds (en gras sur les schémas), le point  $B_k$  correspondant est obtenu par combinaison pseudo-affine de deux points de la suite  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  contenant cet argument.

Chaque couple de deux points consécutifs de la suite  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  donne ainsi naissance à deux points de  $\{B_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ .

Les algorithmes sont représentés ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} k-3h \\ \mathbf{k} \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{k} \\ k+3h \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} k-3h \\ \mathbf{k} \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{k} \\ k+3h \end{array} \right\} \\ 1 - \alpha_1 \searrow & \swarrow \alpha_1 & 1 - \alpha_2 \searrow & \swarrow \alpha_2 \\ & \left\{ \begin{array}{c} k-h \\ \mathbf{k} \end{array} \right\} & & \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{k} \\ k+h \end{array} \right\} \end{array}$$

fig. 2-14 (a)

fig. 2-14 (b)

Calcul des coefficients  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  de la figure 2-14

$$\alpha_1 = \frac{f(k-h, k) - f(k-3h, k)}{f(k, k+3h) - f(k-3h, k)} = \frac{X_{-h} - X_{-3h}}{X_{3h} - X_{-3h}} \quad (\text{lemme 2.23})$$

$$\text{d'où } \alpha_1 = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{X_h}{X_{3h}} \right] = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{2u'(h) - 1}{2u'(h) + 1} \right] = \frac{1}{2u'(h) + 1} \quad (\text{lemme 2.21})$$

$$\alpha_2 = \frac{f(k, k+h) - f(k-3h, k)}{f(k, k+3h) - f(k-3h, k)} = \frac{X_h - X_{-3h}}{X_{3h} - X_{-3h}}$$

$$\text{d'où } \alpha_2 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{X_h}{X_{3h}} \right] = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{2u'(h) - 1}{2u'(h) + 1} \right] = \frac{2u'(h)}{2u'(h) + 1}$$

**Étape 2** : Construction des points de type 2

Lorsque aucun des arguments du point  $B_k$  n'est un ancien nœud, le point est obtenu par combinaison affine de 3 points contigus de la suite  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ .

Les deux algorithmes décrits ci-dessous conduisent au point  $\left\{ \begin{smallmatrix} k+h \\ k+2h \end{smallmatrix} \right\}$ . Les points intermédiaires étant différents pour les deux algorithmes, les coefficients impliqués sont différents également.

Géométriquement cela signifie que le point  $\left\{ \begin{smallmatrix} k+h \\ k+2h \end{smallmatrix} \right\}$  se trouve à l'intersection des segments  $\left[ \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ k+h \end{smallmatrix} \right\}, \left\{ \begin{smallmatrix} k+h \\ k+3h \end{smallmatrix} \right\} \right]$  et  $\left[ \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ k+2h \end{smallmatrix} \right\}, \left\{ \begin{smallmatrix} k+2h \\ k+3h \end{smallmatrix} \right\} \right]$ .

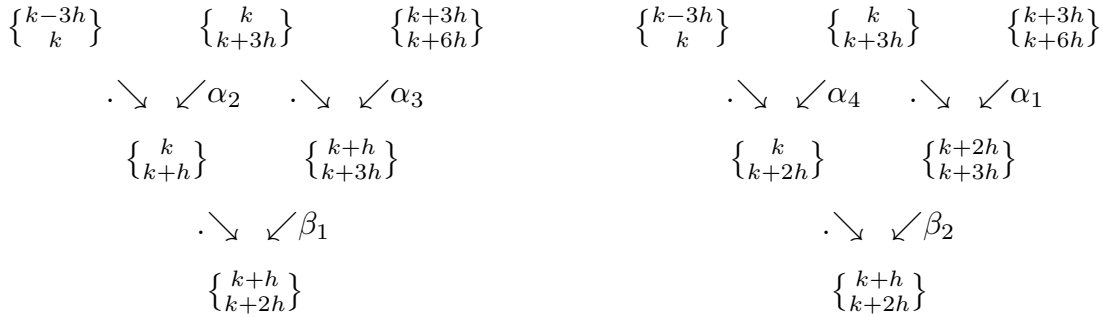


fig. 2-15 (a)

fig. 2-15 (b)

Calcul des coefficients  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2$  de la figure 2-15

$\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont les coefficients calculés plus haut.

$$\alpha_3 = \frac{f(k+h, k+3h) - f(k, k+3h)}{f(k+3h, k+6h) - f(k, k+3h)} = \frac{X_{-2h} - X_{-3h}}{X_{3h} - X_{-3h}} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{X_{2h}}{X_{3h}} \right] = \frac{1}{2x(2x+1)}$$

$$\alpha_4 = \frac{f(k, k+2h) - f(k-3h, k)}{f(k, k+3h) - f(k-3h, k)} = \frac{X_{2h} - X_{-3h}}{X_{3h} - X_{-3h}} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{X_{2h}}{X_{3h}} \right] = \frac{4x^2 + 2x - 1}{2x(2x+1)}$$

$$\beta_1 = \frac{f(k+h, k+2h) - f(k, k+h)}{f(k+h, k+3h) - f(k, k+h)} = \frac{X_h - X_{-h}}{X_{2h} - X_{-h}} = \frac{2X_h}{X_{2h} + X_h} = \frac{2x}{2x+1}$$

$$\text{car } \frac{1}{\beta_1} = \frac{X_{2h} + X_h}{2X_h} = \frac{1}{2} \left[ \frac{X_{2h}}{X_h} + 1 \right] = \frac{2u'(h) + 1}{2u'(h)} \text{ (lemme 2.21)}$$

$$\beta_2 = \frac{f(k+h, k+2h) - f(k, k+2h)}{f(k+2h, k+3h) - f(k, k+2h)} = \frac{X_{-h} - X_{-2h}}{X_{2h} - X_{-h}} = \frac{X_{2h} - X_h}{X_{2h} + X_h} = \frac{1}{2x+1}$$

**Étape 3** : Relation entre les nouveaux pôles  $\{B_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  et les anciens pôles  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$

Toujours avec la notation  $x = u'(h)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} 2h \\ 3h \end{Bmatrix} &= \frac{2x}{2x+1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 3h \end{Bmatrix} + \frac{1}{2x+1} \begin{Bmatrix} 3h \\ 6h \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} 3h \\ 4h \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2x+1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 3h \end{Bmatrix} + \frac{2x}{2x+1} \begin{Bmatrix} 3h \\ 6h \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} 4h \\ 5h \end{Bmatrix} &= \frac{1}{(2x+1)^2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 3h \end{Bmatrix} + \frac{4x^2 + 4x - 1}{(2x+1)^2} \begin{Bmatrix} 3h \\ 6h \end{Bmatrix} + \frac{1}{(2x+1)^2} \begin{Bmatrix} 6h \\ 9h \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Les deux premières relations correspondent aux points de type 1 (fig. 2-14), tandis que la troisième, pour les points de type 2, s'obtient à partir des schémas triangulaires de la figure 2-15 :

$$\begin{Bmatrix} k+h \\ k+2h \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} k-3h \\ k \end{Bmatrix} + B \begin{Bmatrix} k \\ k+3h \end{Bmatrix} + C \begin{Bmatrix} k+3h \\ k+6h \end{Bmatrix}$$

D'après le schéma 2-15 (a),  $A = (1 - \alpha_2)(1 - \beta_1) = \alpha_1\beta_2$

D'après le schéma 2-15 (b),  $C = \alpha_1\beta_2$

$$\text{donc } A = C = \frac{1}{[2u'(h) + 1]^2}$$

$$\text{et } B = \alpha_4\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = \frac{4x^2 + 4x - 1}{[2x + 1]^2} \quad \blacksquare$$

**Remarques :**

En posant  $x = u'(h)$

1) Les relations de la proposition 2.29 s'expriment dans la matrice de raffinement (matrice décalée d'ordre 3):

$$\frac{1}{(2x+1)^2} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ \dots & 2x(2x+1) & (2x+1) & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & (2x+1) & 2x(2x+1) & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 1 & 4x^2+4x-1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 2x(2x+1) & (2x+1) & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & (2x+1) & 2x(2x+1) & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 4x^2+4x-1 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 2x(2x+1) & (2x+1) & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & (2x+1) & 2x(2x+1) & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 4x^2+4x-1 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \end{pmatrix}$$

avec le masque de subdivision

$$\frac{1}{(2x+1)^2} [1 \quad (2x+1) \quad 2x(2x+1) \quad 4x^2+4x-1 \quad 2x(2x+1) \quad (2x+1) \quad 1]$$

2) Le théorème d'intégration du chapitre 1 (théorème 1.42) adapté aux processus non stationnaires (voir 2.4.1.3) permet de déterminer les coefficients du masque de subdivision dans le cas d'espaces circulaires (engendrés par une base du type  $(1, t, \dots, t^{n-2}, u, u')$ ).

Les coefficients seront donc :

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{(2x+1)^2} & \frac{2x+1}{(2x+1)^2} & \frac{2x(2x+1)}{(2x+1)^2} & \frac{4x^2+4x-1}{(2x+1)^2} & \frac{2x(2x+1)}{(2x+1)^2} & \dots \\ \frac{1}{3(2x+1)^2} & \frac{2x+2}{3(2x+1)^2} & \frac{4x^2+4x+2}{3(2x+1)^2} & \frac{8x^2+8x}{3(2x+1)^2} & \frac{12x^2+8x-1}{3(2x+1)^2} & \frac{8x^2+8x}{3(2x+1)^2} \dots \\ \dots & & & & & \end{array}$$

Attention, les deux lignes doivent être complétées par symétrie. La première correspond aux coefficients associés à l'espace engendré par  $(1, u, u')$ , la seconde ligne correspond aux coefficients associés à l'espace obtenu par intégration, c'est-à-dire engendré par  $(1, t, u, u')$ . Et ainsi de suite...

### 2.4.2.2 - Multiplication du nombre de points de contrôle par $m$

La démarche exposée ci-après permet de retrouver les coefficients du masque de subdivision dans le cas  $m$ -adique pour un espace circulaire de dimension 3.

Pour une étape du processus on passe d'un vecteur nodal uniforme de longueur  $mh$  à un vecteur nodal uniforme de longueur  $h$ .



On considère des nœuds réguliers

$$\dots, k - 2mh, k - mh, k, k + mh, k + 2mh, \dots$$

Ce sont les arguments des étiquettes des sommets  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  du polygone de contrôle :

$$\dots \quad \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{k} - \mathbf{mh} \\ \mathbf{k} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{k} \\ \mathbf{k} + \mathbf{mh} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{k} + \mathbf{mh} \\ \mathbf{k} + 2\mathbf{mh} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{k} + 2\mathbf{mh} \\ \mathbf{k} + 3\mathbf{mh} \end{array} \right\} \quad \dots$$

Après le raffinement, les nœuds sont  $m$  fois plus nombreux et se notent :

$$\dots, \mathbf{k} - \mathbf{mh}, \dots, k - h, \mathbf{k}, k + h, \dots, k + (m - 1)h, \mathbf{k} + \mathbf{mh}, \dots$$

Les sommets  $\{B_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  du nouveau polygone de contrôle se notent :

$$\dots \quad \left\{ \begin{array}{c} k - h \\ \mathbf{k} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{k} \\ k + h \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} k + h \\ k + 2h \end{array} \right\} \quad \dots \quad \left\{ \begin{array}{c} k + (m - 1)h \\ \mathbf{k} + \mathbf{mh} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{k} + \mathbf{mh} \\ k + (m + 1)h \end{array} \right\} \quad \dots$$

Il y a deux types de point  $B_k$  :

- ceux dont l'étiquette contient un argument de l'ancien vecteur nodal (type 1),
- et ceux dont l'étiquette ne contient aucun argument de l'ancien vecteur nodal (type 2).

### Étape 1 : Construction des points de type 1

Lorsque l'un des arguments du nouveau point  $B_k$  est un des anciens nœuds (en gras sur les schémas), le point  $B_k$  correspondant est obtenu par combinaison pseudo-affine de deux points de la suite  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  contenant cet argument.

Chaque couple de deux points consécutifs de la suite  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  donne ainsi naissance à deux points de  $\{B_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ .

Les algorithmes sont représentés ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} k - mh \\ \mathbf{k} \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{k} \\ k + mh \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} k - mh \\ \mathbf{k} \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{k} \\ k + mh \end{array} \right\} \\ 1 - \alpha_1 \searrow & \swarrow \alpha_1 & 1 - \alpha_2 \searrow & \swarrow \alpha_2 \\ & \left\{ \begin{array}{c} k - h \\ \mathbf{k} \end{array} \right\} & & \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{k} \\ k + h \end{array} \right\} \\ \text{fig. 2-16 (a)} & & \text{fig. 2-16 (b)} & \end{array}$$

Avec

$$\alpha_1 = \frac{f(k - h, k) - f(k - mh, k)}{f(k, k + mh) - f(k - mh, k)} = \frac{X_{-h} - X_{-mh}}{X_{mh} - X_{-mh}} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{X_h}{X_{mh}} \right] \quad (\text{lemme 2.23})$$

$$\alpha_2 = \frac{f(k, k+h) - f(k-mh, k)}{f(k, k+mh) - f(k-mh, k)} = \frac{X_h - X_{-mh}}{X_{mh} - X_{-mh}} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{X_h}{X_{mh}} \right] = 1 - \alpha_1$$

**Étape 2** : Construction des points de type 2

Lorsque aucun des arguments de  $B_k$  n'est un ancien nœud, le point est obtenu par combinaison affine de 3 points contigus de la suite  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ .

Les deux algorithmes décrits ci-dessous conduisent au point  $\left\{ \begin{smallmatrix} k+ih \\ k+(i+1)h \end{smallmatrix} \right\}$ .

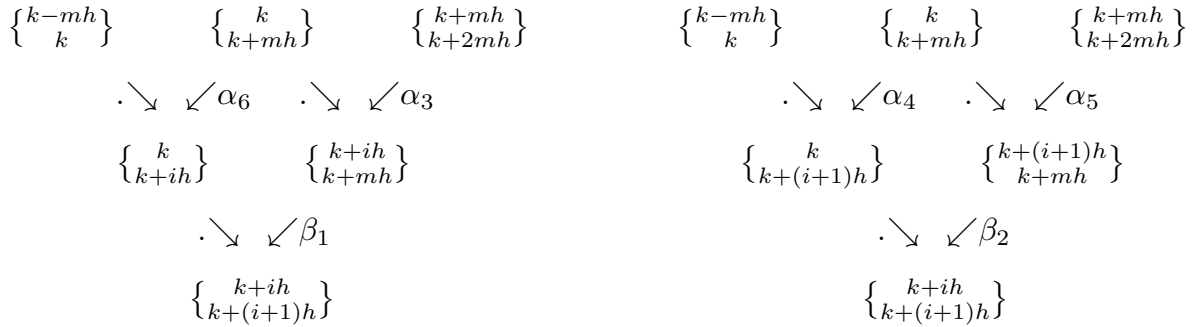


fig. 2-17 (a)

fig. 2-17 (b)

En posant  $X_h = \frac{u'(h) - 1}{u(h)}$ , les coefficients de l'algorithme d'évaluation de  $\left\{ \begin{smallmatrix} k+ih \\ k+(i+1)h \end{smallmatrix} \right\}$ , pour  $i = 1, \dots, m-2$ , donné ci-dessus sont :

$$\begin{aligned} \alpha_5 &= \frac{f(k+(i+1)h, k+mh) - f(k, k+mh)}{f(k+mh, k+2mh) - f(k, k+mh)} = \frac{X_{(i+1-m)h} - X_{-mh}}{X_{mh} - X_{-mh}} \\ &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{X_{(m-i-1)h}}{X_{mh}} \right] \end{aligned}$$

$$\alpha_6 = \frac{f(k, k+ih) - f(k-mh, k)}{f(k, k+mh) - f(k, k-mh)} = \frac{X_{ih} - X_{-mh}}{X_{mh} - X_{-mh}} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{X_{ih}}{X_{mh}} \right]$$

$$\alpha_3 = \frac{f(k+ih, k+mh) - f(k, k+mh)}{f(k+mh, k+2mh) - f(k, k+mh)} = \frac{X_{i-m} - X_{-mh}}{X_{mh} - X_{-mh}} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{X_{(m-i)h}}{X_{mh}} \right]$$

$$\alpha_4 = \frac{f(k, k+(i+1)h) - f(k-mh, k)}{f(k, k+mh) - f(k, k-mh)} = \frac{X_{(i+1)h} - X_{-mh}}{X_{mh} - X_{-mh}} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{X_{(i+1)h}}{X_{mh}} \right]$$

$$\beta_1 = \frac{f(k+ih, k+(i+1)h) - f(k, k+ih)}{f(k+ih, k+mh) - f(k, k+ih)} = \frac{X_h - X_{-ih}}{X_{(m-i)h} - X_{-ih}} = \frac{X_h + X_{ih}}{X_{(m-i)h} + X_{ih}}$$

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \frac{f(k+ih, k+(i+1)h) - f(k, k+(i+1)h)}{f(k+(i+1)h, k+mh) - f(k, k+(i+1)h)} = \frac{X_{-h} - X_{-ih-h}}{X_{(m-i-1)h} - X_{-(i+1)h}} \\ &= \frac{-X_h + X_{(i+1)h}}{X_{(m-i-1)h} + X_{(i+1)h}} \end{aligned}$$

## 2.5 - Splines mixtes

Nous avons, à présent, suivant le type de courbe que nous voulons générer à l'aide du processus de subdivision, plusieurs masques, chacun étant associé à l'un des espaces fleuris étudiés plus haut. Ainsi, à partir d'un même ensemble de points de de Boor, l'application d'un masque pourra engendrer une spline polynomiale ou plusieurs types de splines trigonométriques et hyperboliques.

Nous nous intéressons à présent à un processus de subdivision faisant intervenir successivement les différents coefficients sur une même suite de nœuds. La courbe limite obtenue sera une spline dont les différentes parties seront des éléments des différents espaces  $\mathcal{E}_i$  utilisés.

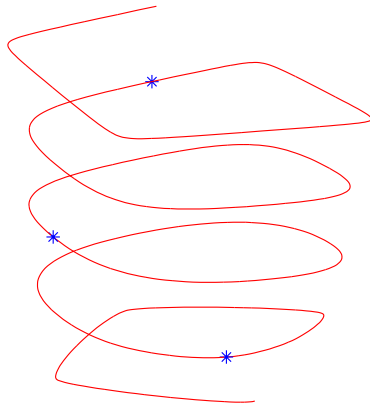


fig. 2-18 (a)

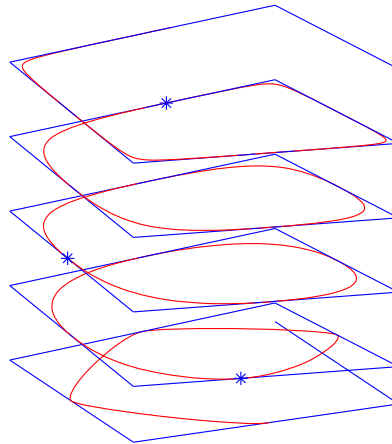


fig. 2-18 (b)

*Dans l'espace, cette spline est constituée de 4 morceaux paramétrés par des espaces de dimension 3 de types différents. De bas en haut :  $u(h) = \cos(2.8h)$ ,  $u(h) = 1$  (cas polynomial),  $u(h) = \cosh(2h)$  et  $u(h) = \cosh(5h)$ . A droite, la même avec son polygone de contrôle.*

### **Remarque sur la longueur critique :**

D'après [Menar & Peña 1] la longueur inter-nœuds  $h$  pour les splines uniformes paramétrées par les espaces engendrés par des bases du type  $(1, t, t^2, \dots, t^{n-2}, \sin(bt), \cos(bt))$  doit

vérifier

$$h < \frac{\pi}{b}$$

Pour générer des splines uniformes avec des morceaux dans différents espaces, nous ferons donc varier le paramètre  $b$  qui devra vérifier

$$b < \frac{\pi}{h}$$

Il y a deux manières d'approcher le cas polynomial :

- Lorsque la longueur  $h$  de l'intervalle inter-nœuds tend vers 0, les coefficients du masque tendent vers les coefficients polynomiaux.
- Pour une longueur  $h$  fixée, lorsque les coefficients  $a$  ou  $b$  des expressions  $\sinh(at)$  ou  $\sin(bt)$  tendent vers 0, la courbe tend vers la courbe polynomiale.

### 2.5.1 - Algorithme en dimension 3

On considère deux espaces de Chebyshev fleuris  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$ .

On se donne une suite de points de contrôle. Pour une première partie d'entre eux on utilise les coefficients du masque associé à l'espace  $\mathcal{E}_1$  tandis que pour la seconde partie on utilise les coefficients du masque associé à l'espace  $\mathcal{E}_2$ . On obtient ainsi un nouveau polygone d'approximation pour lequel on procède de la même façon.

La courbe limite obtenue est une courbe hybride qui se divise en trois parties : une partie de type  $\mathcal{E}_1$ , une partie dont la nature est étudiée ci-dessous, une partie de type  $\mathcal{E}_2$ .

#### *Description de l'algorithme*

On considère une suite de nœuds

$$\dots, k - 4h, k - 3h, k - 2h, k - h, k, k + h, k + 2h, k + 3h, k + 4h, \dots$$

Ils étiquettent la suite de points de contrôle

$$\dots \left\{ \begin{matrix} k - 2h \\ k - h \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k - h \\ k \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k \\ k + h \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k + h \\ k + 2h \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k + 2h \\ k + 3h \end{matrix} \right\} \dots$$

On considère 2 ensembles de points :

- les points jusqu'à  $\left\{ \begin{matrix} k \\ k+h \end{matrix} \right\}$  inclus contrôlent la courbe limite sur  $] - \infty, k]$ . On note  $\{P_0\}$  cet ensemble.

- les points après  $\left\{ \begin{matrix} k-h \\ k \end{matrix} \right\}$  inclus contrôlent la courbe limite sur  $[k, \infty[$ . On note  $\{Q_0\}$  cet ensemble.

On note  $\mathcal{P}_r$  le polygone d'approximation à l'étape  $r$ .

Par la suite, on notera  $\{P_r\}$  les sommets de  $\mathcal{P}_r$  qui contrôlent la courbe limite sur  $] - \infty, k]$ . C'est-à-dire les points jusqu'à  $\left\{ \begin{smallmatrix} k \\ k+h/2^r \end{smallmatrix} \right\}$  inclus.

Et  $\{Q_r\}$  les sommets de  $\mathcal{P}_r$  qui contrôlent la courbe limite sur  $[k, \infty[$ . C'est-à-dire les points après  $\left\{ \begin{smallmatrix} k-h/2^r \\ k \end{smallmatrix} \right\}$  inclus.

On a  $\mathcal{P}_r = \{P_r\} \cup \{Q_r\}$  (mais  $\{P_r\} \cap \{Q_r\} \neq \emptyset$ , en fait  $\{P_r\} \cap \{Q_r\} = \left\{ \left\{ \begin{smallmatrix} k-h/2^r \\ k \end{smallmatrix} \right\}, \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ k+h/2^r \end{smallmatrix} \right\} \right\}$ ).

Soit  $P$  un point de  $\mathbb{R}^d$ , on note  $\max P$  (resp.  $\min P$ ) l'argument de valeur maximale (resp. minimale), dans l'étiquette de  $P$ .

L'algorithme pour calculer les sommets du nouveau polygone d'approximation est le suivant :

Pour chaque sommet  $P$  du nouveau polygone d'approximation,

- si  $\max P \leq k$  alors on calcule  $P$  avec les coefficients de  $\mathcal{E}_1$
- si  $\min P \geq k$  alors on calcule  $P$  avec les coefficients de  $\mathcal{E}_2$

On désignera par  $\{P_r^\alpha\}$  (resp.  $\{Q_r^\beta\}$ ) l'ensemble des sommets de  $\mathcal{P}_r$  calculés (à partir des sommets de  $\mathcal{P}_{r-1}$ ) avec les coefficients de  $\mathcal{E}_1$  (resp.  $\mathcal{E}_2$ ).

On a donc  $\{P_r^\alpha\} \subset \{P_r\}$  et  $\{Q_r^\beta\} \subset \{Q_r\}$ .

### **Commentaires**

On note  $\mathcal{F}_r$  (resp.  $\mathcal{G}_r$ ) la courbe spline obtenue par l'algorithme de subdivision à partir des points de  $\{P_r\}$  (resp.  $\{Q_r\}$ ) en utilisant les coefficients associés à  $\mathcal{E}_1$  (resp.  $\mathcal{E}_2$ ).  $\mathcal{F}_r$  (resp.  $\mathcal{G}_r$ ) est donc une courbe spline paramétrée sur  $] - \infty, k]$  (resp.  $[k, \infty[$ ) par  $\mathcal{E}_1$  (resp.  $\mathcal{E}_2$ ).

À chaque étape, l'algorithme de subdivision est appliqué à un ensemble de points  $\{P_r\}$ , calculés eux-même à partir de l'ensemble  $\{P_{r-1}\}$  à l'aide des coefficients associés à  $\mathcal{E}_1$ . Sauf le dernier point de l'ensemble  $\{P_r\}$ , c'est-à-dire  $\left\{ \begin{smallmatrix} k \\ k+h/2 \end{smallmatrix} \right\}$ , qui lui se calcule à l'aide des coefficients associés à  $\mathcal{E}_2$ .

On peut décrire ce processus à l'aide d'une famille de courbes limites  $\mathcal{F}_r$ .

Étape 1 :  $\max\{P_1^\alpha\} = \left\{ \begin{smallmatrix} k-h/2 \\ k \end{smallmatrix} \right\}$  donc  $\mathcal{F}_1$  coïncide avec  $\mathcal{F}_0$  sur  $] - \infty, k - h/2]$ .

$\min\{Q_1^\beta\} = \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ k+h/2 \end{smallmatrix} \right\}$  donc  $\mathcal{G}_1$  coïncide avec  $\mathcal{G}_0$  sur  $[k + h/2; \infty[$

On sait donc que sur  $] - \infty, k - h/2]$ , la courbe limite est du type  $\mathcal{E}_1$ , tandis que sur  $[k + h/2; \infty[$  elle est du type  $\mathcal{E}_2$ .

Étape  $r$  :  $\max\{P_r^\alpha\} = \left\{ \begin{smallmatrix} k-h/2^r \\ k \end{smallmatrix} \right\}$  donc  $\mathcal{F}_r$  coïncide avec  $\mathcal{F}_{r-1}$  sur  $] - \infty, k - h/2^r]$ .

$\min\{Q_r^\beta\} = \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ k+h/2^r \end{smallmatrix} \right\}$  donc  $\mathcal{G}_r$  coïncide avec  $\mathcal{G}_{r-1}$  sur  $[k + h/2^r; \infty[$

Tout se passe donc comme si, à chaque étape  $k$ , la courbe limite se réajuste sur  $[k - h/2^r, k]$  avec des coefficients correspondant à  $u(h/2^r)$ .

Lorsque  $r \rightarrow \infty$ ,  $u(h/2^r) \rightarrow 0$  et  $u'(h/2^r) \rightarrow 1$  et on se retrouve dans le cas polynomial. Sur  $[k - h/2^r, k + h/2^r]$ , la courbe peut donc, pour  $r \rightarrow \infty$ , être assimilée localement à une courbe polynomiale.

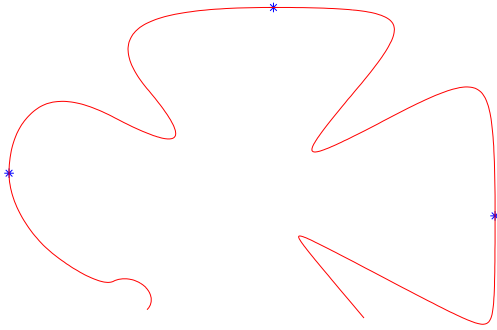


fig. 2-19 (a)

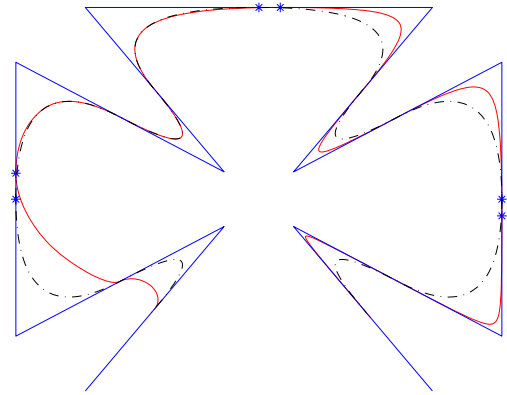


fig. 2-19 (b)

La spline ci-dessus est constituée de 4 morceaux paramétrés par des espaces de dimension 3 de types différents. De gauche à droite :  $u(h) = \cos(2.8h)$ ,  $u(h) = 1$  (cas polynomial),  $u(h) = \cosh(3h)$  et  $u(h) = \cosh(5h)$ . A droite, la même avec son polygone de contrôle (en bleu) et la spline polynomiale de degré 2 correspondante (en pointillés).

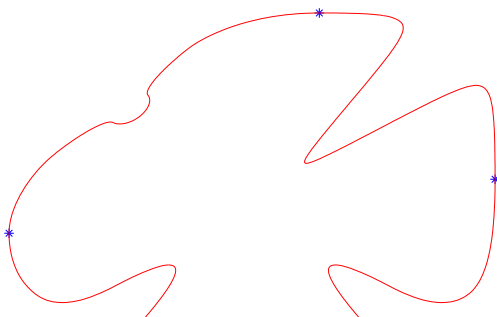


fig. 2-20 (a)

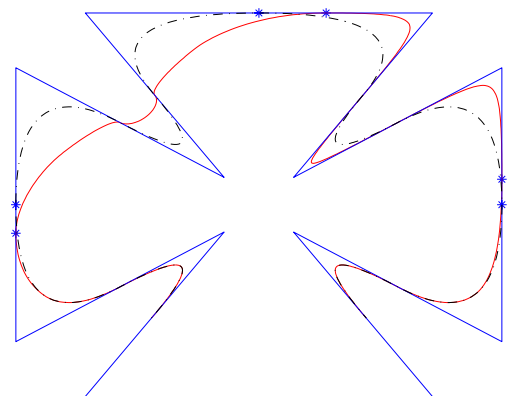


fig. 2-20 (b)

La spline est constituée de 4 morceaux paramétrés par des espaces de dimension 3 de types différents. De gauche à droite :  $u(h) = 1$  (cas polynomial),  $u(h) = \cos(2.9h)$ ,  $u(h) = \cosh(4h)$  et  $u(h) = 1$ . A droite, la même avec son polygone de contrôle et la spline polynomiale de degré 2 correspondante.

### 2.5.2 - Algorithme en dimension 4

On se place dans un espace engendré par une base de type  $(1, t, u(t), u'(t))$  où  $u(t) \in \left\{ \frac{\sinh(at)}{a}, \frac{\sin(bt)}{b} \right\}$  et  $a$  et  $b$  sont des réels positifs.

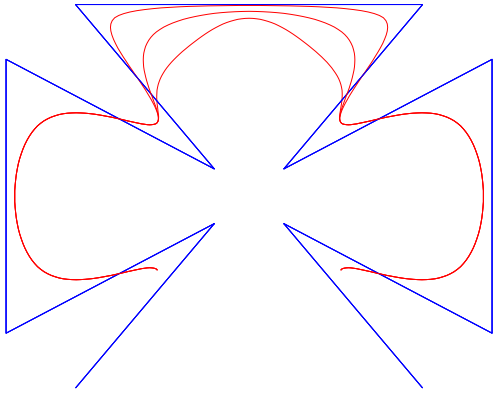


fig. 2-21 (a)

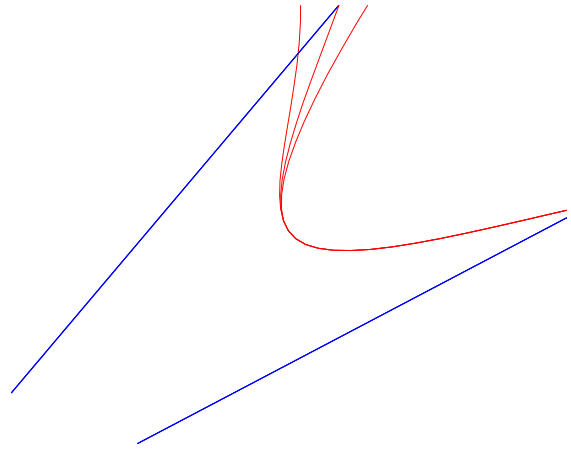


fig. 2-21 (b)

3 splines uniformes paramétrées sur 9 intervalles ( $h = 1$ ). Sur tous les intervalles les splines sont polynomiales sauf sur les intervalles 4 et 5 où elles sont respectivement trigonométriques ( $u(t) = \frac{\sin(3t)}{3}$ ), polynomiales, hyperboliques ( $u(t) = \frac{\sinh(6t)}{6}$ ). A droite un zoom sur les raccords de la figure 2-21 (a).

#### Description de l'algorithme

On considère une suite de nœuds

$$\dots, k - 4h, k - 3h, k - 2h, k - h, k, k + h, k + 2h, k + 3h, k + 4h, \dots$$

Ils étiquettent la suite de points de contrôle

$$\dots \left\{ \begin{array}{c} k - 3h \\ k - 2h \\ k - h \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} k - 2h \\ k - h \\ k \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} k - h \\ k \\ k + h \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} k \\ k + h \\ k + 2h \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} k + h \\ k + 2h \\ k + 3h \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} k + 2h \\ k + 3h \\ k + 4h \end{array} \right\} \dots$$

Soient  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  deux espaces de Chebyshev fleuris.

On considère 2 ensembles de points :

- les points jusqu'à  $\begin{pmatrix} k \\ k+h \\ k+2h \end{pmatrix}$  inclus contrôlent la courbe limite sur  $] -\infty, k]$ . On note  $\{P_0\}$  cet ensemble.

- les points après  $\begin{pmatrix} k-2h \\ k-h \\ k \end{pmatrix}$  inclus contrôlent la courbe limite sur  $[k, \infty[$ . On note  $\{Q_0\}$  cet ensemble.

$\mathcal{P}_r$  est le polygone d'approximation à l'étape  $r$ .

Par la suite, on notera  $\{P_r\}$  les points de  $\mathcal{P}_r$  qui contrôlent la courbe limite sur  $] -\infty, k]$ .

C'est-à-dire les points jusqu'à  $\begin{pmatrix} k \\ k+h/2^r \\ k+2h/2^r \end{pmatrix}$  inclus.

Et  $\{Q_r\}$  les points de  $\mathcal{P}_r$  qui contrôlent la courbe limite sur  $[k, \infty[$ . C'est-à-dire les points

après  $\begin{pmatrix} k-2h/2^r \\ k-h/2^r \\ k \end{pmatrix}$  inclus.

On a  $\mathcal{P}_r = \{P_r\} \cup \{Q_r\}$  mais  $\{P_r\} \cap \{Q_r\} \neq \emptyset$ ,

en fait  $\{P_r\} \cap \{Q_r\} = \left\{ \begin{pmatrix} k-2h/2^r \\ k-h/2^r \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k-h/2^r \\ k \\ k+h/2^r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ k+h/2^r \\ k+2h/2^r \end{pmatrix} \right\}$ .

Soit  $P$  un point de  $\mathbb{R}^d$ , on note  $\max P$  (resp.  $\min P$ ) l'argument de valeur maximale (resp. minimale), dans l'étiquette de  $P$ .

L'algorithme pour calculer les points du nouveau polygone d'approximation est le suivant :

Pour chaque point  $P$  du nouveau polygone d'approximation de l'étape  $r$ ,

- si  $\max P \leq k + h/2^r$  alors on calcule  $P$  avec les coefficients de  $\mathcal{E}_1$

- si  $\min P \geq k$  alors on calcule  $P$  avec les coefficients de  $\mathcal{E}_2$

On désignera par  $\{P_r^\alpha\}$  (resp.  $\{Q_r^\beta\}$ ) l'ensemble des points de  $\mathcal{P}_r$  calculés avec les coefficients de  $\mathcal{E}_1$  (resp.  $\mathcal{E}_2$ ).

On a donc  $\{P_r^\alpha\} \subset \{P_r\}$  et  $\{Q_r^\beta\} \subset \{Q_r\}$ .

### **Commentaires**

Contrairement à ce qui se passe dans l'algorithme pour les courbes de dimension 3 décrit plus haut, le procédé n'est pas symétrique.



On note  $\mathcal{F}_r$  (resp.  $\mathcal{G}_r$ ) la courbe spline obtenue par l'algorithme de subdivision à partir des points de  $\{P_r\}$  (resp.  $\{Q_r\}$ ) en utilisant les coefficients associés à  $\mathcal{E}_1$  (resp.  $\mathcal{E}_2$ ).  $\mathcal{F}_r$  (resp.  $\mathcal{G}_r$ ) est donc une courbe spline paramétrée sur  $] - \infty, k]$  (resp.  $[k, \infty[$ ) par  $\mathcal{E}_1$  (resp.  $\mathcal{E}_2$ ).

Rappel : Les nouveaux points dont l'étiquette ne possèdent qu'un seul nouvel argument se calculent en une seule étape. De plus,

$$\left\{ \begin{array}{c} k \\ k + h/2^r \\ k + 2h/2^r \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \left[ \left\{ \begin{array}{c} k - h/2^{r-1} \\ k \\ k + h/2^{r-1} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} k \\ k + h/2^{r-1} \\ k + 2h/2^{r-1} \end{array} \right\} \right] \text{ (d'après la preuve de la proposition 2.28).}$$

Ce qui signifie qu'un point de ce type se calcule exactement de la même façon, qu'on utilise les coefficients associés à  $\mathcal{E}_1$  ou les coefficients associés à  $\mathcal{E}_2$ .

$$\text{Etape 1 : } \max\{P_1^\alpha\} = \min\{Q_1^\beta\} = \left\{ \begin{array}{c} k \\ k + h/2 \\ k + h \end{array} \right\} \text{ donc } \mathcal{F}_1 \text{ coïncide avec } \mathcal{F}_0 \text{ sur } ] - \infty, k].$$

Et  $\mathcal{G}_1$  coïncide avec  $\mathcal{G}_0$  sur  $[k + h; \infty[$

On sait donc que sur  $] - \infty, k]$ , la courbe limite est du type  $\mathcal{E}_1$ , tandis que sur  $[k + h; \infty[$  elle est du type  $\mathcal{E}_2$ .

$$\text{Etape } r : \max\{P_r^\alpha\} = \min\{Q_r^\beta\} = \left\{ \begin{array}{c} k \\ k + h/2^r \\ k + 2h/2^r \end{array} \right\} \text{ donc } \mathcal{F}_r \text{ coïncide avec } \mathcal{F}_{r-1} \text{ sur } ] - \infty, k].$$

Et  $\mathcal{G}_r$  coïncide avec  $\mathcal{G}_{r-1}$  sur  $[k + 2h/2^r; \infty[$

Lorsque  $r \rightarrow \infty$  les coefficients du processus de subdivision se rapprochent des coefficients du cas polynomial et la spline tend localement vers une courbe polynomiale sur  $[k, k + 2h/2^r]$ .

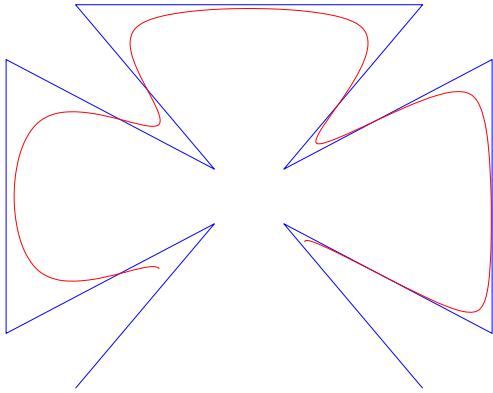


fig. 2-22

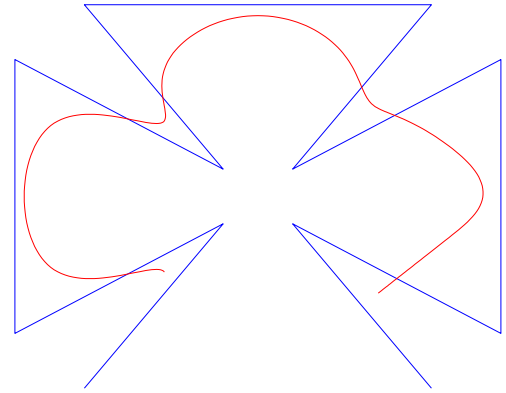


fig. 2-23

Splines uniformes paramétrées sur 9 intervalles ( $h = 1$ ). Fig 2-22 :  $u(t) = \sinh(t)$  (3 intervalles),  $u(t) = \frac{\sinh(3t)}{3}$  (2 int.),  $u(t) = \frac{\sinh(5t)}{5}$  (2 int.),  $u(t) = \frac{\sinh(8t)}{8}$  (2 int.). Fig 2-23 :  $u(t) = \sin(t)$  (3 intervalles),  $u(t) = \frac{\sin(2.5t)}{2.5}$  (2 int.),  $u(t) = \frac{\sin(2.9t)}{2.9}$  (2 int.),  $u(t) = \frac{\sin(3.14t)}{3.14}$  (2 int.).

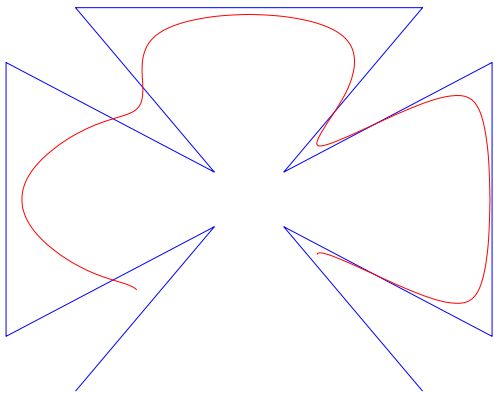


fig. 2-24

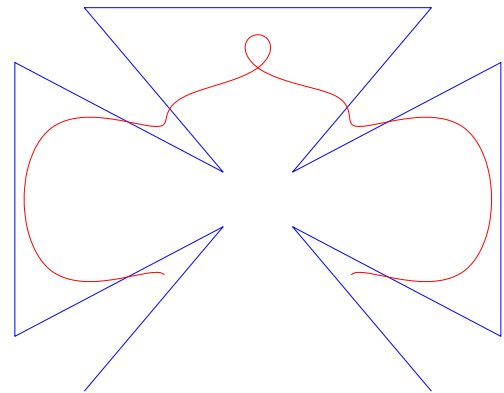


fig. 2-25

Splines uniformes paramétrées sur 9 intervalles ( $h = 1$ ). Fig 2-24 :  $u(t) = \frac{\sin(2.8t)}{2.8}$  (3 int.), cubique (2 int.),  $u(t) = \frac{\sinh(4.8t)}{4.8}$  (4 int.). Fig 2-25 :  $u(t) = \sin(t)$  (3 intervalles),  $u(t) = \frac{\sin(4t)}{4}$  (2 int.), on dépasse ici la longueur critique,  $u(t) = \sin(t)$  (4 int.).

### *En conclusion*

La définition des floraisons associées aux fonctions non polynomiales a nécessité un peu plus de technicité que dans le cas polynomial en faisant intervenir la notion de variétés osculatrices. Une des difficultés est que la dimension des espaces dans lesquels sont définies ces variétés osculatrices est bien plus élevée que la dimension 3 des espaces usuels dans lesquels sont représentées les courbes. Une autre difficulté est la condition limitative sur la taille de l'intervalle de paramétrage qui impose de travailler dans le cas plus délicat d'espaces de splines par morceaux (*piecewise*).

Passés ces obstacles, ces floraisons non polynomiales s'adaptent aux processus de subdivision et permettent de calculer des coefficients associés à de nouvelles familles de courbes. En particulier, le théorème d'intégration établi pour le cas polynomial s'adapte également ici et permet de traiter les cas de tous les espaces obtenus par intégration. Les coefficients des différents espaces ont été combinés dans un même algorithme pour construire des splines mixtes constituées de morceaux de splines de différentes natures.

## CHAPITRE III

### Design et subdivision dans les espaces de Chebyshev

Les espaces utilisés le plus fréquemment en *design* géométrique sont des espaces de cubiques (espaces polynomiaux de dimension 4 contenant les constantes). Les espaces de Chebyshev permettent de nombreux effets de forme. C'est le cas des espaces engendrés par  $(1, t, \sin t, \cos t)$  ou  $(1, t, \sinh t, \cosh t)$  qui rajoutent à la panoplie la possibilité de paramétrer facilement des arcs d'ellipses ou d'hyperboles. Dans ce chapitre, nous étudions les espaces de dimension 5, qui sont les plus petits permettant de mélanger des fonctions hyperboliques et trigonométriques.

Une des façons de généraliser la construction de splines polynomiales consiste à utiliser des espaces sections qui sont des espaces de Chebyshev *bons pour le design*. La détermination des espaces de Chebyshev utilisables en *design* géométrique, de dimension 5 invariants par réflexion a été faite dans [Menar & Pena 1] avec les outils de la totale positivité, c'est-à-dire par une méthode constructive qui fournit une condition suffisante. Le paragraphe 3.3 expose brièvement d'autres outils utilisés pour aboutir à des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de ces espaces [Brilleaud & Mazure 1]. La liste exhaustive des espaces de dimension 5 invariants par réflexion est rappelée dans le paragraphe 3.2.

Pour construire des courbes splines à partir de ces espaces, la nécessité d'obtenir des bases de B-spline impose toutefois des conditions supplémentaires sur les espaces de Chebyshev employés. Ces résultats ont été publiés dans [Brilleaud & Mazure 2]. Ils seront rappelés et illustrés au paragraphe 3.4.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace de splines uniforme puisse être utilisé en *design* géométrique porte sur la longueur inter-nœuds du vecteur nodal. Les procédés utilisés au chapitre II seront réinvestis dans ce chapitre pour calculer les flo-raisons associées aux fonctions des L-espaces de dimension 5. Cela permettra d'obtenir les coefficients des masques de subdivision des processus dont la limite est une spline paramétrée par l'un de ces espaces (L-spline de dimension 5). Comme dans le cas des espaces circulaires, le théorème d'intégration conduit aux masques de subdivision associés à tous les espaces obtenus par intégration (paragraphe 3.5).

Comme précédemment, le présent chapitre se termine par la présentation d'un algorithme permettant la construction de splines "mixtes", c'est-à-dire composées de morceaux de L-splines de différentes natures.

Pour débiter, le paragraphe 3.1, est la reprise d'un travail effectué dans [Mazure 1] et qui établit les conditions théoriques d'existence d'espaces de splines polynomiales à raccords géométriques. Les conditions obtenues dans [Mazure 1] sont généralisées ici aux espaces de Chebyshev quelconques de dimension 5. C'est également l'occasion de rappeler quelques outils concernant les espaces de Chebyshev.

### 3.1 - Design avec des matrices de connexions

On peut généraliser la notion de spline polynomiale en utilisant d'autres types de continuités aux nœuds que la continuité paramétrique qui impose l'égalité de toutes les dérivées en chaque nœud. C'est-à-dire, en reprenant les notations du chapitre 1,  $F_k^{(i)} = F_{k-1}^{(i)}$  pour  $i = 1 \dots n - 1$ .

Les dérivées en chaque nœud  $t_k$  peuvent être liées par une matrice de connexion  $M_k$  triangulaire inférieure à diagonale positive :

$$\left(F_k'(t_k), \dots, F_k^{(n-1)}(t_k)\right)^T = M_k \left(F_{k-1}'(t_k), \dots, F_{k-1}^{(n-1)}(t_k)\right)^T$$

On parle alors de *continuité géométrique* ou *raccords géométriques*. Lorsque les matrices  $M_k$  sont des matrices identités, on se retrouve dans le cas usuel de raccords paramétriques. Les différents types de continuités possibles suivant la structure de la matrice de connexion sont rappelés dans [Mazure 1].

Le type de continuité peut également se combiner avec la contrainte d'une multiplicité au nœud concerné. La taille de la matrice de connexion varie alors en conséquence.

Un espace de splines est utilisable en *design* géométrique s'il possède une base normalisée totalement positive. On montre, d'une part, qu'il est alors possible d'implémenter tous les algorithmes classiques de CAO de construction et de manipulation des courbes et, d'autre part, qu'il existe une unique base associée à l'espace, présentant des propriétés optimales pour le *design*. Dans le cas de la définition classique de l'espace de splines polynomiales, il s'agit de la base de B-splines associée.

Si l'existence de cette base est avérée dans le cas classique de définition des splines polynomiales, ce n'est cependant pas toujours le cas lorsque la définition de l'espace est étendue

aux raccords par matrices. Les coefficients des matrices de connexion doivent alors vérifier certaines relations pour que l'espace soit *bon pour le design*.

Les rapports de distances entre les nœuds constituent également des conditions limitatives, ce qui n'est pas le cas pour les espaces classiques avec continuité paramétrique. Dans la suite, tous les espaces de splines avec matrice de connexion seront définis sur des ensembles de nœuds uniformes.

En se plaçant dans le cadre des espaces de splines de Chebyshev à matrices de connexions on augmente encore la généralisation. Les espaces de fonctions polynomiales, trigonométriques ou hyperboliques sont des exemples d'espaces de Chebyshev. Il existe toutefois une triple condition restrictive pour pouvoir les utiliser dans la fabrication d'espaces de splines *bons pour le design* :

- Contrairement aux espaces de polynômes, qui sont des espaces de Chebyshev sur  $\mathbb{R}$ , la plupart des espaces ne possèdent les propriétés qui caractérisent les espaces de Chebyshev que sur un intervalle de longueur déterminé. La longueur maximale de cet intervalle (la longueur critique) a été étudiée, dans le cas des familles d'espaces trigonométriques. Les résultats ont été rappelés dans le chapitre II.

- Pour être utilisables en *design* géométrique les espaces de Chebyshev doivent, de plus, être fleuris (définition 2.11). On cherchera alors la longueur critique *pour le design*, inférieure à la précédente.

- Lorsque l'on fabrique des espaces de splines de Chebyshev à partir d'EC-espaces fleuris, il reste encore à s'assurer que tout l'espace de splines est fleuri. Il peut donc y avoir encore des conditions restrictives sur les longueurs entre les nœuds associés à l'espace de splines.

Lorsque l'espace n'est un EC-espace que sur un intervalle  $I$ , on peut définir un espace de splines de Chebyshev sur  $I$  en incluant le vecteur nodal associé dans  $I$ .

On peut toutefois utiliser ces espaces pour définir un espace de splines sur un ensemble non borné  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_k$ . On parle alors de splines *piecewise* de Chebyshev. Le cadre *piecewise* permet, non seulement de raccorder des fonctions d'un même espace définies sur  $I$  (les espaces utilisés sont alors les dupliqués du même espace de base), mais également de raccorder des fonctions d'espaces différents.

Les exemples les plus simples d'espaces de Chebyshev sont les noyaux d'opérateurs différentiels à coefficients constants et dont le polynôme caractéristique est pair ou impair. Ces espaces sont stables à la fois par translation et par symétrie. Les conditions de raccord en sont alors grandement simplifiées.

Quand toutes les racines du polynôme caractéristique sont réelles, les noyaux forment des espaces de splines de Chebyshev. Mais quand au moins une racine est complexe, on se

retrouve dans le cadre des espaces de splines *piecewise* de Chebyshev.

### 3.1.1 - Cadre théorique

La définition des espaces de Chebyshev généralisés a été rappelée au chapitre II. Nous rappelons ici deux autres caractérisations (par les bases de Bernstein et par les fonctions poids) qui seront utilisées dans ce paragraphe.

#### 3.1.1.1 - Caractérisation des EC-espaces par les bases de Bernstein

Une propriété caractéristique des EC-espaces sur un intervalle  $I$  est de posséder une base de type Bernstein sur tout intervalle  $[a, b]$  de  $I$ . Dans la suite,  $\mathcal{E}$  désigne un espace de dimension  $n + 1$  de fonctions de  $C^\infty(I)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

##### Définition 3.1 : base de type Bernstein

Soient  $a$  et  $b$  deux réels distincts de  $I$ . On dira qu'une suite  $(B_0, \dots, B_n)$  de fonctions de  $\mathcal{E}$  forme une base de type Bernstein relativement à  $[a, b]$  (BL-base pour Bernstein-Like basis) si chaque fonction  $B_i$  est positive sur  $]a, b[$  et s'annule exactement  $i$  fois en  $a$  et  $n - i$  fois en  $b$ .

Si, de plus, la base  $(B_0, \dots, B_n)$  vérifie la condition de normalisation  $\sum_{i=0}^n B_i = \mathbb{1}$  alors elle est unique. C'est la base de Bernstein de  $\mathcal{E}$  relativement à  $[a, b]$ .

##### Propriété 3.2 :

L'espace  $\mathcal{E}$  est un EC-espace sur  $I$  si et seulement si  $\mathcal{E}$  possède une base de type Bernstein relativement à chaque intervalle  $[a, b]$  de  $I$ .

*Remarque :* cette condition ne suffit pas à faire de  $\mathcal{E}$  un espace de Chebyshev bon pour le design puisqu'il faudrait, en plus la condition de normalisation.

#### 3.1.1.2 - Caractérisation des EC-espaces par les fonctions poids

##### Définition 3.3 : fonctions poids

Une suite de  $n + 1$  fonctions  $w_0, \dots, w_n$ , tel que  $w_i \in C^{n-i}(I)$  et ne s'annulant pas sur  $I$ , est appelé système de fonctions-poids sur  $I$ . On peut leur associer les opérateurs linéaires  $L_0, \dots, L_n$  définis par les formules ci-dessus (qui sont en fait les dérivées généralisées).

$$L_0 F = \frac{F}{w_0}, \quad L_i F = \frac{DL_{i-1}F}{w_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

On notera l'importance de la stricte positivité de la fonction poids.

**Propriété 3.4 :**

L'ensemble  $\mathcal{E}$  des fonctions  $F \in \mathcal{C}^n(I)$  telles que  $DL_n F = 0$  est un EC-espace de dimension  $n + 1$  sur  $I$ . On dit que  $\mathcal{E}$  est le EC-espace associé au système  $(w_0, \dots, w_n)$  et on note  $\mathcal{E} = EC(w_0, \dots, w_n)$ .

Inversement, on sait que, pour tout EC-espace sur un intervalle **fermé borné**  $[a, b]$ , on peut trouver un système de fonctions poids tel que  $\mathcal{E} = EC(w_0, \dots, w_n)$ . En fait il existe une infinité de systèmes de fonctions poids caractérisant un EC-espace donné (sur  $[a, b]$ ).

Il est nécessaire ici de rappeler la méthode utilisée pour les obtenir tous. Elle a été donnée dans [Mazure 3] et est basée sur la propriété suivante :

**Proposition 3.5 :**

On considère un EC-espace  $\mathcal{E}$  de dimension  $n + 1$  sur  $[a, b]$ . Une fonction  $w_0 \in \mathcal{E}$  étant donnée, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i)  $w_0$  est strictement positive sur  $[a, b]$  et  $DL_0 \mathcal{E}$  est un EC-espace sur  $[a, b]$ ,  
où  $L_0 F := F/w_0$ ,

(ii)  $w_0$  a des coordonnées strictement positives dans une BL-base relativement à  $[a, b]$ .

En pratique, on choisit donc une fonction  $w_0$  dans  $\mathcal{E}$  telle que  $w_0 = \sum_{i=0}^n \alpha_i V_i$  avec des coordonnées  $\alpha_i$  positives.  $(V_0, \dots, V_n)$  étant une BL-base de  $\mathcal{E}$  relativement à  $[a, b]$ .

*Itération :* Il ne reste plus qu'à itérer le processus avec une fonction  $w_1$  choisie dans  $DL_0 \mathcal{E}$  avec des coordonnées positives dans une BL-base de  $DL_0 \mathcal{E}$  par rapport à  $[a, b]$ , etc...

En pratique, la construction d'une BL-base de  $DL_0 \mathcal{E}$  peut se faire à partir de la base  $(V_0, \dots, V_n)$  de la manière suivante :

Comme  $w_0 = \sum_{i=0}^n \alpha_i V_i$  on a  $1 = \sum_{i=0}^n \frac{\alpha_i V_i}{w_0}$  et donc, en posant  $B_i = \frac{\alpha_i V_i}{w_0}$  pour  $i = 0, \dots, n$ , on a défini une base de Bernstein  $(B_0, \dots, B_n)$  de  $L_0 \mathcal{E}$  par rapport à  $[a, b]$ .

On note  $\bar{V}_i = B'_{i+1} + \dots + B'_n = -B'_0 - \dots - B'_i$ , pour  $i = 0, \dots, n - 1$ .

On sait que  $B_i$  s'annule exactement  $i$  fois en  $a$  et  $n - i$  fois en  $b$  donc  $B'_i$  s'annule exactement  $i - 1$  fois en  $a$  et  $n - 1 - i$  fois en  $b$ . Par conséquent  $\bar{V}_i = B'_{i+1} + \dots + B'_n$  s'annule  $i$  fois en  $a$  et  $\bar{V}_i = -B'_0 - \dots - B'_i$  s'annule  $n - 1 - i$  fois en  $b$ . Comme  $DL_0 \mathcal{E}$  est un EC sur  $[a, b]$ , les  $\bar{V}_i$  ne s'annulent pas sur  $]a, b[$ . De plus  $\bar{V}_i^{(i)}(a) = B_{i+1}^{(i+1)}(a) > 0$  donc  $\bar{V}_i > 0$  sur  $]a, b[$ . La base  $(\bar{V}_0, \dots, \bar{V}_{n-1})$  est donc bien une BL-base de  $DL_0 \mathcal{E}$  sur  $[a, b]$ .



### 3.1.1.3 - Caractérisation des EC-espaces bons pour le design

Le processus permettant d'associer une floraison à une courbe paramétrée par un espace  $\mathcal{E}$  a été décrit au chapitre II. Les floraisons sont alors définies de façon géométrique en utilisant des hyperplans osculateurs à la courbe. Les algorithmes de *design* géométrique s'exprimant en terme de floraisons, on rappelle que les espaces *utilisables en design* sont ceux auxquels on peut, à chacune de leur fonction, associer une floraison.

*Rappel* : Lorsque  $\mathcal{E}$  est un EC-espace de dimension  $n + 1$  qui contient les constantes, on notera  $D\mathcal{E}$  l'espace de dimension  $n$  défini par  $D\mathcal{E} = \{DF/F \in \mathcal{E}\}$

Le théorème suivant, démontré dans [Mazure 11] caractérise les EC-espaces *bons pour le design*, c'est-à-dire les EC-espaces fleuris.

#### **Théorème 3.6 :**

Soit  $\mathcal{E}$  un EC-espace de dimension  $n + 1$  sur  $I$  qui contient les constantes. On a les équivalences suivantes :

- (1)  $\mathcal{E}$  possède une base de Bernstein relativement à tout  $[c, d] \in I$
- (2)  $D\mathcal{E}$  est un EC-espace de dim  $n$  sur  $I$
- (3)  $\mathcal{E}$  est fleuri

La traduction de ce théorème en utilisant la caractérisation des espaces de Chebyshev par les fonctions poids donne :

#### **Proposition 3.7 :**

Un EC-espace de dimension  $n + 1$  sur  $[a, b]$  est fleuri si et seulement si il existe un système de fonctions poids tels que  $\mathcal{E} = EC(1, w_1, \dots, w_n)$ .

Il sera utilisé sous la forme :

#### **Proposition 3.8 :**

$\mathcal{E}$  est fleuri si et seulement si il existe un système  $(w_1, \dots, w_n)$  de fonctions poids tel que  $D\mathcal{E} = EC(w_1, \dots, w_n)$

Le but est d'obtenir un critère pour qu'un espace de splines de Chebyshev soit fleuri. Une condition nécessaire est d'utiliser des espace-section  $\mathcal{E}_k$  fleuris (la définition des espaces-section sera rappelée dans le paragraphe 3.1.1.4.)

Le critère, établi dans [Mazure 4] et qui sera rappelé plus loin utilise des égalités de fonctions poids. En fait, les relations de connexion seront définies via les fonctions poids,

et, plus précisément, par des relations entre les coefficients utilisés pour exprimer ces fonctions poids dans les BL-bases relatives à chaque espace section. Nous verrons que ces coefficients doivent rester positifs.

### 3.1.1.4 - Splines de Chebyshev avec matrices de connexion

Un espace de splines de Chebyshev  $\mathcal{S}_{n+1}$  est défini de la façon suivante :

**Définition 3.9 :** On se donne:

- une suite bi-infinie strictement croissante de nœuds  $t_k, k \in \mathbb{Z}$ ,
- une suite bi-infinie d'espaces sections  $\mathcal{E}_k, k \in \mathbb{Z}$  de dimension  $(n + 1)$  qui sont *bon pour le design* (i.e., chaque espace  $D\mathcal{E}_k$  est un EC-espace sur  $[t_k, t_{k+1}]$ ),
- une suite bi-infinie  $M_k, k \in \mathbb{Z}$ , de matrices de connexion triangulaires inférieures d'ordre  $(n - 1)$  dont les éléments diagonaux sont strictement positifs.

L'espace de splines de Chebyshev  $\mathcal{S}_{n+1}$  est l'ensemble de toutes les fonctions continues  $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  telles que :

- sur chaque intervalle  $[t_k, t_{k+1}]$ ,  $S$  coïncide avec un élément de  $\mathcal{E}_k$
- en chaque nœud  $t_k$ ,  $S$  satisfait les conditions de raccord :

$$(S'_k(t_k), \dots, S_k^{(n-1)}(t_k))^T = M_k(S'_{k-1}(t_k), \dots, S_{k-1}^{(n-1)}(t_k))^T.$$

**Remarque :**

Les nœuds considérés ici sont des nœuds simples. Lorsque le nœud  $t_k$  est de multiplicité  $n_k$  les conditions s'expriment par :

$$(S'_k(t_k), \dots, S_k^{(n-n_k)}(t_k))^T = M_k(S'_{k-1}(t_k), \dots, S_{k-1}^{(n-n_k)}(t_k))^T.$$

et la matrice  $M_k$  est d'ordre  $n - n_k$

Un espace de splines de Chebyshev est *bon pour le design* s'il permet de développer les mêmes algorithmes de design que dans l'espace des polynômes et, en particulier, il doit posséder une base  $N_{k,k \in \mathbb{Z}}$  de B-spline totalement positive ayant les propriétés classiques (support, positivité, normalisation, propriétés des points extrêmes).

Une spline  $S$  exprimée cette base  $N_k(x), k \in \mathbb{Z}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad S(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} N_k(x) P_k$$

pourra alors être contrôlée par ses pôles  $P_k \in \mathbb{R}^d$ .

Le critère suivant, exposé dans [Mazure 4] permet de déterminer tous les espaces de splines *bons pour le design*.

**Théorème 3.10 :**

L'espace  $\mathcal{S}_{n+1}$  défini ci-dessus est bon pour le design si et seulement si pour chaque espace section  $\mathcal{E}_k$  on peut trouver un système de poids  $(w_1^k, \dots, w_n^k)$  sur  $[t_k, t_{k+1}]$  tel que:

- (i)  $D\mathcal{E}_k = EC(w_1^k, \dots, w_n^k)$ ,
- (ii) en chaque nœud  $t_k$ ,  $S$  satisfait les conditions :

$$(L_1^k S_k(t_k), \dots, L_n^k S_k(t_k))^T = (L_1^{k-1} S_{k-1}(t_k), \dots, L_n^{k-1} S_{k-1}(t_k))^T$$

en notant  $L_1^k, \dots, L_n^k$  les dérivées généralisées associées aux poids  $w_1^k, \dots, w_n^k$ .

Le critère énoncé ci-dessus a été utilisé dans [Mazure 1] pour déterminer tous les espaces de splines polynomiales avec matrice de connexion *bons pour le design* en dimension 4 et 5 et montrer ainsi que l'on pouvait dépasser les conditions suffisantes données par la totale positivité des matrices de connexion [Barry]. La démonstration donnée plus bas est une généralisation de celle de [Mazure 1] aux espaces *piecewise* de Chebyshev.

**3.1.2 - Les espaces de splines de Chebyshev de dimension 5 bons pour le design**

Soit  $\mathcal{S}_5$ , un espace de splines de Chebyshev par morceaux (définition 3.9), dont chaque espace section est un EC-espace fleuri  $\mathcal{E}_k$  de dimension 5. Il existe donc un système de fonctions poids  $(w_1^k, w_2^k, w_2^k, w_4^k)$  tel que  $D\mathcal{E}_k = EC(w_1^k, w_2^k, w_2^k, w_4^k)$  (proposition 3.8).

De plus chaque espace  $D\mathcal{E}_k$  possède une BL-base  $(V_0^k, V_1^k, V_2^k, V_3^k)$  dont les valeurs des dérivées aux extrémités de l'intervalle  $[t_k, t_{k+1}]$  sont donnés dans les tableaux suivants:

$$\text{En } t_k : \begin{matrix} V \\ V' \\ V'' \end{matrix} \begin{pmatrix} V_0^k & V_1^k & V_2^k & V_3^k \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -A_k^+ & 1 & 0 & 0 \\ B_k^+ & D_k^+ & C_k^+ & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Et en } t_{k+1} : \begin{matrix} V \\ V' \\ V'' \end{matrix} \begin{pmatrix} V_0^k & V_1^k & V_2^k & V_3^k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & A_{k+1}^- \\ 0 & C_{k+1}^- & D_{k+1}^- & B_{k+1}^- \end{pmatrix}$$

où les coefficients  $A_k^+, B_k^+, C_k^+, D_k^+, A_{k+1}^-, B_{k+1}^-, C_{k+1}^-, D_{k+1}^-$  sont des réels.

Enfin, en chaque nœud  $t_k$ ,  $S \in \mathcal{S}_5$  satisfait les conditions de raccord:

$$\begin{pmatrix} S'_k(t_k) \\ S_k^{(2)}(t_k) \\ S_k^{(3)}(t_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k & 0 & 0 \\ b_k & c_k & 0 \\ d_k & e_k & f_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S'_{k-1}(t_k) \\ S_{k-1}^{(2)}(t_k) \\ S_{k-1}^{(3)}(t_k) \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

**Théorème 3.11 :**

L'espace de splines  $\mathcal{S}_5$  est bon pour le design si et seulement si les matrices de connexion vérifient les propriétés suivantes :

$$\tilde{B}_k > 0, \quad \tilde{D}_k > 0, \quad C_{k-1}^+ C_k^- \tilde{B}_{k-1} \tilde{B}_k f_k < \tilde{D}_{k-1} (\tilde{B}_k \tilde{E}_k - c_k \tilde{D}_k) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z},$$

où, pour chaque  $k \in \mathbb{Z}$ , les nombres  $\tilde{B}_k, \tilde{E}_k, \tilde{D}_k$  sont définis par

$$\begin{aligned} \tilde{B}_k &:= b_k + a_k A_k^+ + c_k A_k^-, & \tilde{E}_k &:= e_k - f_k D_k^- - c_k D_k^+, \\ \tilde{D}_k &:= d_k + e_k A_k^- - b_k D_k^+ + a_k (-B_k^+ - D_k^+ A_k^+) - c_k D_k^+ A_k^- + f_k B_k^-. \end{aligned}$$

**Preuve :**

Pour chaque espace  $\mathcal{E}_k$  les dérivées  $S'_k, S_k^{(2)}, S_k^{(3)}$  et les dérivées généralisées

$$L_1^k S, L_2^k S, L_3^k S,$$

sont liées par la relation

$$\begin{pmatrix} S'_k(t) \\ S_k^{(2)}(t) \\ S_k^{(3)}(t) \end{pmatrix} = \Gamma^k(t) \begin{pmatrix} L_1^k S(t) \\ L_2^k S(t) \\ L_3^k S(t) \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \Gamma^k(t) = \begin{pmatrix} w_1^k & 0 & 0 \\ w_1^{k'} & w_1^k w_2^k & 0 \\ w_1^{k''} & 2w_1^{k'} w_2^k + w_1^k w_2^{k'} & w_1^k w_2^k w_3^k \end{pmatrix}$$

En utilisant (3.1) la relation (ii) du théorème 3.10 devient

$$\Gamma^k(t_k) = \begin{pmatrix} a_k & 0 & 0 \\ b_k & c_k & 0 \\ d_k & e_k & f_k \end{pmatrix} \Gamma^{(k-1)}(t_k) \quad (3.2)$$

**Première étape: détermination de  $\Gamma^k(t_k)$  et  $\Gamma^{(k-1)}(t_k)$**

- On considère un espace section  $\mathcal{E}$  défini sur  $[t_k, t_{k+1}]$ . Par soucis de clarté, l'indice  $k$  sera omis dans cette partie.

On commence par caractériser les fonctions  $w_1, w_2, w_3$  qui apparaissent dans la matrice

$$\Gamma(t) = \begin{pmatrix} w_1 & 0 & 0 \\ w_1' & w_1 w_2 & 0 \\ w_1'' & 2w_1' w_2 + w_1 w_2' & w_1 w_2 w_3 \end{pmatrix}$$

par les 9 coefficients positifs  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \gamma_0, \gamma_1$ , en utilisant la méthode exposée précédemment (après la proposition 3.5):

Dans la BL-base  $(V_0, V_1, V_2, V_3)$  de  $DL_0\mathcal{E}$ , on a

$$w_1 = \alpha_0 V_0 + \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3.$$

Dans la BL-base  $(\bar{V}_0, \bar{V}_1, \bar{V}_2)$  de l'espace  $DL_1\mathcal{E}$ , obtenue en posant

$$\bar{V}_i = \sum_{j=i+1}^3 B'_j = -\sum_{j=0}^i B'_j \quad (i = 0, 1, 2), \text{ avec } B_i = \alpha_i \frac{V_i}{w_1} \quad (i = 0, 1, 2, 3), \text{ on a}$$

$$w_2 = \beta_0 \bar{V}_0 + \beta_1 \bar{V}_1 + \beta_2 \bar{V}_2.$$

Dans la BL-base  $(\bar{\bar{V}}_0, \bar{\bar{V}}_1)$  de  $DL_2\mathcal{E}$  obtenue en posant

$$\bar{\bar{V}}_i = \sum_{j=i+1}^2 \bar{B}'_j = -\sum_{j=0}^i \bar{B}'_j \quad (i = 0, 1) \text{ avec } \bar{B}_i = \alpha_i \frac{\bar{V}_i}{w_2} \quad (i = 0, 1, 2), \text{ on a}$$

$$w_3 = \gamma_0 \bar{\bar{V}}_0 + \gamma_1 \bar{\bar{V}}_1.$$

Les valeurs de  $w_i$  aux nœuds qui apparaissent dans le critère s'expriment en fonction des coefficients  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \gamma_0, \gamma_1$ , et des valeurs des fonctions  $V_i$  aux extrémités des intervalles  $[t_k, t_{k+1}]$ .

- En utilisant les valeurs des fonctions  $V_i$  de  $\mathcal{E}_k$  au nœud  $t_k$  on obtient

$$\begin{aligned} w_1^k(t_k) &= \alpha_0^k, \\ [w_1^k]'(t_k) &= -A_k^+ \alpha_0^k + \alpha_1^k, \\ [w_1^k]''(t_k) &= B_k^+ \alpha_0^k + D_k^+ \alpha_1^k + C_k^+ \alpha_2^k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2^k(t_k) &= \beta_0^k \frac{\alpha_1^k}{\alpha_0^k}, \\ [w_2^k]'(t_k) &= -\beta_0^k \frac{\alpha_1^k}{\alpha_0^k} \left[ 2 \frac{\alpha_1^k}{\alpha_0^k} - C_k^+ \frac{\alpha_2^k}{\alpha_1^k} - (2A_k^+ + D_k^+) \right] + \beta_1^k C_k^+ \frac{\alpha_2^k}{\alpha_0^k}, \end{aligned}$$

$$w_3^k(t_k) = \gamma_0^k \frac{\beta_1^k}{\beta_0^k} \frac{\alpha_2^k}{\alpha_1^k} C_k^+.$$

Et finalement

$$\Gamma^k(t_k) = \begin{pmatrix} \alpha_0^k & 0 & 0 \\ -A_k^+ \alpha_0^k + \alpha_1^k & \alpha_1^k \beta_0^k & 0 \\ B_k^+ \alpha_0^k + D_k^+ \alpha_1^k + C_k^+ \alpha_2^k & \beta_0^k (C_k^+ \alpha_2^k + D_k^+ \alpha_1^k) + C_k^+ \beta_1^k \alpha_2^k & C_k^+ \alpha_2^k \beta_1^k \gamma_0^k \end{pmatrix}$$

- La même procédure appliquée sur les bases de  $\mathcal{E}_{k-1}$  pour le nœud  $t_k$  nous donne :

$$\begin{aligned}
w_1^{k-1}(t_k) &= \alpha_3^{k-1} \\
[w_1^{k-1}]'(t_k) &= -\alpha_2^{k-1} + A_k^- \alpha_3^{k-1} \\
[w_1^{k-1}]''(t_k) &= C_k^- \alpha_1^{k-1} + D_k^- \alpha_2^{k-1} + B_k^- \alpha_3^{k-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_2^{k-1}(t_k) &= \beta_2^{k-1} \frac{\alpha_2^{k-1}}{\alpha_3^{k-1}} \\
[w_2^{k-1}]'(t_k) &= \beta_2^{k-1} \frac{\alpha_2^{k-1}}{\alpha_3^{k-1}} \left[ 2 \frac{\alpha_2^{k-1}}{\alpha_3^{k-1}} - C_k^- \frac{\alpha_1^{k-1}}{\alpha_2^{k-1}} - (2A_k^- + D_k^-) \right] - \beta_1^{k-1} C_k^- \frac{\alpha_1^{k-1}}{\alpha_3^{k-1}}
\end{aligned}$$

$$w_3^{k-1}(t_k) = \gamma_1^{k-1} \frac{\beta_1^{k-1}}{\beta_2^{k-1}} \frac{\alpha_1^{k-1}}{\alpha_2^{k-1}} C_k^-$$

et la matrice  $\Gamma^{(k-1)}(t_k) =$

$$\begin{pmatrix}
\alpha_3^{k-1} & 0 & 0 \\
-\alpha_2^{k-1} + A_k^- \alpha_3^{k-1} & \alpha_2^{k-1} \beta_2^{k-1} & 0 \\
C_k^- \alpha_1^{k-1} + D_k^- \alpha_2^{k-1} + B_k^- \alpha_3^{k-1} & \beta_2^{k-1} (-C_k^- \alpha_1^{k-1} - D_k^- \alpha_2^{k-1}) - C_k^- \beta_1^{k-1} \alpha_1^{k-1} & C_k^- \alpha_1^{k-1} \beta_1^{k-1} \gamma_1^{k-1}
\end{pmatrix}.$$

## Deuxième étape: application du critère

Le reste de la preuve consiste à trouver des relations sur les valeurs des BL-bases aux extrémités des intervalles  $[t_k, t_{k+1}]$  qui garantissent la transmission du caractère de positivité pour les coefficients  $\alpha_0^k, \alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_3^k, \beta_0^k, \beta_1^k, \beta_2^k, \gamma_0^k, \gamma_1^k$

Cela prouvera l'existence de fonctions poids adéquates  $(w_1^k, w_2^k, w_3^k)$  pour chaque espace  $\mathcal{E}_k$ .

On suppose donc que les coefficients  $\alpha_0^{k-1}, \alpha_1^{k-1}, \alpha_2^{k-1}, \alpha_3^{k-1}, \beta_0^{k-1}, \beta_1^{k-1}, \beta_2^{k-1}, \gamma_0^{k-1}, \gamma_1^{k-1}$  sont tous positifs. Nous cherchons alors des conditions sur les matrices  $M_k$  qui permettent d'obtenir des coefficients positifs  $\alpha_0^k, \alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_3^k, \beta_0^k, \beta_1^k, \beta_2^k$ , et  $\gamma_0^k, \gamma_1^k$  vérifiant le système (3.2).

- le système (3.2) nous donne les égalités

$$\alpha_0^k = a_k \alpha_3^{k-1} \tag{3.3}$$

$$\alpha_1^k \beta_0^k = c_k \alpha_2^{k-1} \beta_2^{k-1} \tag{3.4}$$

$$C_k^+ \alpha_2^k \beta_1^k \gamma_0^k = f_k C_k^- \alpha_1^{k-1} \beta_1^{k-1} \gamma_1^{k-1} \tag{3.5}$$

$$\alpha_1^k - A_k^+ \alpha_0^k = b_k \alpha_3^{k-1} + c_k (A_k^- \alpha_3^{k-1} - \alpha_2^{k-1}) \tag{3.6}$$

$$B_k^+ \alpha_0^k + D_k^+ \alpha_1^k + C_k^+ \alpha_2^k = d_k \alpha_3^{k-1} + e_k (A_k^- \alpha_3^{k-1} - \alpha_2^{k-1}) + f_k (B_k^- \alpha_3^{k-1} + D_k^- \alpha_2^{k-1} + C_k^- \alpha_1^{k-1}) \tag{3.7}$$

$$\beta_0^k (C_k^+ \alpha_2^k + D_k^+ \alpha_1^k) + C_k^+ \beta_1^k \alpha_2^k = e_k \alpha_2^{k-1} \beta_2^{k-1} + f_k \left[ \beta_2^{k-1} (-D_k^- \alpha_2^{k-1} - C_k^- \alpha_1^{k-1}) - C_k^- \beta_1^{k-1} \alpha_1^{k-1} \right] \quad (3.8)$$

• Par hypothèses sur les matrices de connexion, les éléments diagonaux  $a_k, c_k$  et  $f_k$  sont positifs. Et par construction des bases de Bernstein des espaces section, les valeurs  $C_k^+$  et  $C_k^-$  sont également positives.

Il s'ensuit que les égalités (3.3), (3.4) et (3.5) sont toujours réalisables et que les coefficients  $\alpha_0^k, \beta_0^k$  et  $\gamma_0^k$  sont positifs dès que les coefficients  $\alpha_1^k, \alpha_2^k, \beta_1^k$  le sont. Le problème se réduit donc à trouver les conditions qui rendent les égalités (3.6), (3.7), (3.8) possibles et les coefficients  $\alpha_1^k, \alpha_2^k, \beta_1^k$  positifs. On remarque que les valeurs  $\alpha_3^k, \beta_2^k$  et  $\gamma_1^k$  ne sont pas déterminées par le système (3.2). On peut donc les choisir librement.

• En utilisant (3.3) et (3.4) pour exprimer  $\alpha_1^k$  et  $\alpha_2^k$  en fonction de  $\alpha_3^{k-1}, \alpha_2^{k-1}, \alpha_1^{k-1}$ , nous pouvons maintenant remplacer (3.6), (3.7) et (3.8) par

$$\alpha_1^k = \alpha_3^{k-1} \tilde{B}_k - c_k \alpha_2^{k-1} \quad (3.9)$$

$$C_k^+ \alpha_2^k = \alpha_3^{k-1} \tilde{D}_k - \alpha_2^{k-1} \tilde{E}_k + C_k^- f_k \alpha_1^{k-1} \quad (3.10)$$

$$C_k^+ \alpha_2^k \beta_1^k = \beta_2^{k-1} (\alpha_2^{k-1} \tilde{E}_k - C_k^- f_k \alpha_1^{k-1}) - C_k^- f_k \alpha_1^{k-1} \beta_1^{k-1} - C_k^+ \alpha_2^k \beta_0^k \quad (3.11)$$

avec  $\tilde{B}_k, \tilde{D}_k, \tilde{E}_k$  définis comme dans le théorème 3.11.

En se servant de (3.3), (3.9) et (3.10) pour exprimer  $\beta_1^k$  en fonction de  $\beta_1^{k-1}$  et  $\beta_2^{k-1}$ , l'égalité (3.11) peut également s'écrire

$$\begin{aligned} C_k^+ \alpha_1^k \alpha_2^k \beta_1^k &= \alpha_2^{k-1} \beta_2^{k-1} (\alpha_1^k \tilde{E}_k - C_k^+ c_k \alpha_2^k) - C_k^- f_k \alpha_1^{k-1} \alpha_1^k (\beta_1^{k-1} + \beta_2^{k-1}) \\ &= \alpha_3^{k-1} \beta_2^{k-1} \left[ \alpha_2^{k-1} (\tilde{B}_k \tilde{E}_k - c_k \tilde{D}_k) - C_k^- \tilde{B}_k f_k \alpha_1^{k-1} \right] - C_k^- f_k \alpha_1^{k-1} \beta_1^{k-1} [\tilde{B}_k \alpha_3^{k-1} - c_k \alpha_2^{k-1}] \end{aligned} \quad (3.12)$$

• Supposons maintenant que  $\alpha_1^k, \alpha_2^k, \beta_1^k$  soient positifs.

*Egalité (3.9)*

(3.9)  $\iff \alpha_1^k + c_k \alpha_2^{k-1} = \alpha_3^{k-1} \tilde{B}_k$  ce qui implique  $\tilde{B}_k > 0$ . La positivité de  $\alpha_1^k$  dans (3.9) se traduit également par  $\alpha_3^{k-1} \tilde{B}_k - c_k \alpha_2^{k-1} > 0$  et donc  $\alpha_3^{k-1} > \frac{c_k \alpha_2^{k-1}}{\tilde{B}_k}$ .

*Egalité (3.10)*

(3.11)  $\iff C_k^+ \alpha_2^k \beta_1^k + C_k^- f_k \alpha_1^{k-1} \beta_1^{k-1} + C_k^+ \alpha_2^k \beta_0^k = \beta_2^{k-1} (\alpha_2^{k-1} \tilde{E}_k - C_k^- f_k \alpha_1^{k-1})$ . Ce qui implique  $\alpha_2^{k-1} \tilde{E}_k - C_k^- f_k \alpha_1^{k-1} > 0$ .

Or (3.10)  $\iff C_k^+ \alpha_2^k + \alpha_2^{k-1} \tilde{E}_k - C_k^- f_k \alpha_1^{k-1} = \alpha_3^{k-1} \tilde{D}_k$  ce qui implique  $\tilde{D}_k > 0$ . La positivité de  $\alpha_2^k$  dans (10) se traduit également par  $\alpha_3^{k-1} \tilde{D}_k - \alpha_2^{k-1} \tilde{E}_k + C_k^- f_k \alpha_1^{k-1} > 0$ .

Et donc  $\alpha_3^{k-1} > \frac{\alpha_2^{k-1} \tilde{E}_k - C_k^- f_k \alpha_1^{k-1}}{\tilde{D}_k}$ .

*Egalité (3.12)*

De (3.12), par la positivité de  $\tilde{B}_k \alpha_3^{k-1} - c_k \alpha_2^{k-1} (= \alpha_1^k)$ , on tire  $\tilde{B}_k \tilde{E}_k - c_k \tilde{D}_k > 0$  et  $\alpha_2^{k-1} (\tilde{B}_k \tilde{E}_k - c_k \tilde{D}_k) - C_k^- \tilde{B}_k f_k \alpha_1^{k-1} > 0$ . Et donc  $\alpha_2^{k-1} > \frac{C_k^- \tilde{B}_k f_k \alpha_1^{k-1}}{\tilde{B}_k \tilde{E}_k - c_k \tilde{D}_k}$ .

La positivité de  $\alpha_1^k, \alpha_2^k, \beta_1^k$  dans (3.12) se traduit également par

$$\beta_2^{k-1} > \frac{C_k^- f_k \alpha_1^{k-1} \beta_1^{k-1} [\tilde{B}_k \alpha_3^{k-1} - c_k \alpha_2^{k-1}]}{\alpha_3^{k-1} [\alpha_2^{k-1} (\tilde{B}_k \tilde{E}_k - c_k \tilde{D}_k) - C_k^- \tilde{B}_k f_k \alpha_1^{k-1}]}.$$

• Inversement, en supposant que les inégalités suivantes sont vérifiées, les égalités (3.9), (3.10) et (3.12) nous permettent d'en déduire la positivité des coefficients  $\alpha_1^k, \alpha_2^k, \beta_1^k$ :

$$\tilde{B}_k > 0 \quad \tilde{D}_k > 0 \quad \tilde{B}_k \tilde{E}_k - c_k \tilde{D}_k > 0, \quad (3.13)$$

$$\alpha_3^{k-1} > \frac{c_k \alpha_2^{k-1}}{\tilde{B}_k}, \quad (3.14)$$

$$\alpha_3^{k-1} > \frac{\alpha_2^{k-1} \tilde{E}_k - C_k^- f_k \alpha_1^{k-1}}{\tilde{D}_k}, \quad (3.15)$$

$$\alpha_2^{k-1} > \frac{C_k^- \tilde{B}_k f_k \alpha_1^{k-1}}{\tilde{B}_k \tilde{E}_k - c_k \tilde{D}_k}, \quad (3.16)$$

$$\beta_2^{k-1} > \frac{C_k^- f_k \alpha_1^{k-1} \beta_1^{k-1} [\tilde{B}_k \alpha_3^{k-1} - c_k \alpha_2^{k-1}]}{\alpha_3^{k-1} [\alpha_2^{k-1} (\tilde{B}_k \tilde{E}_k - c_k \tilde{D}_k) - C_k^- \tilde{B}_k f_k \alpha_1^{k-1}]}.$$

• *Inégalité (3.14)*

Les conditions de positivité (3.13) nous permettent d'écrire

$$(3.16) \iff \alpha_2^{k-1} (\tilde{B}_k \tilde{E}_k - c_k \tilde{D}_k) > C_k^- \tilde{B}_k f_k \alpha_1^{k-1} \iff \frac{\alpha_2^{k-1} \tilde{E}_k - C_k^- f_k \alpha_1^{k-1}}{\tilde{D}_k} > \frac{c_k \alpha_2^{k-1}}{\tilde{B}_k}.$$

Donc (3.15) implique (3.14).

*Inégalité (3.15) et (3.17)*

Les inégalités (3.15) et (3.17) sont toujours possibles à satisfaire puisque  $\alpha_3^{k-1}$  et  $\beta_2^{k-1}$  ne sont pas impliqués dans les raccords au niveau  $t_{k-1}$ .

*Inégalité (3.16)*

Pour respecter la condition (16) il faut montrer que cette condition peut être remplie pour tout  $k$ . Pour cela on l'écrit  $\alpha_2^{k-1} > \mu_{k-1} \alpha_1^{k-1}$  en posant  $\mu_{k-1} = \frac{C_k^- \tilde{B}_k f_k}{\tilde{B}_k \tilde{E}_k - c_k \tilde{D}_k}$ . Ce qui implique, en vertu de (3.2) que la même propriété doit être vérifiée pour les coefficients suivants, c'est-à-dire  $\alpha_2^k$  et  $\alpha_1^k$ .

Considérons donc que  $\alpha_2^k$  et  $\alpha_1^k$  satisfont (3.2) et l'inégalité



$\alpha_2^k > \mu_k \alpha_1^k$  où  $\mu_k$  est une constante positive. En remplaçant dans cette inégalité  $\alpha_2^k$  et  $\alpha_1^k$  par leurs valeurs dans (3.9) et (3.10) on obtient

$$C_k^- f_k \alpha_1^{k-1} > (C_k^+ \mu_k \tilde{B}_k - \tilde{D}_k) \alpha_3^{k-1} + (\tilde{E}_k - C_k^+ \mu_k c_k) \alpha_2^{k-1}.$$

En multipliant les deux membres par  $\tilde{B}_k$  positif,

$$\tilde{B}_k C_k^- f_k \alpha_1^{k-1} > \tilde{B}_k (C_k^+ \mu_k \tilde{B}_k - \tilde{D}_k) \alpha_3^{k-1} + \tilde{B}_k (\tilde{E}_k - C_k^+ \mu_k c_k) \alpha_2^{k-1}.$$

$C_k^- \tilde{B}_k f_k \alpha_1^{k-1}$  est alors compris entre  $\alpha_2^{k-1} (\tilde{B}_k \tilde{E}_k - c_k \tilde{D}_k)$  et  $\tilde{B}_k (C_k^+ \mu_k \tilde{B}_k - \tilde{D}_k) \alpha_3^{k-1} + \tilde{B}_k (\tilde{E}_k - C_k^+ \mu_k c_k) \alpha_2^{k-1}$ .

Et on a

$$\alpha_2^{k-1} (\tilde{B}_k \tilde{E}_k - c_k \tilde{D}_k) > \tilde{B}_k (C_k^+ \mu_k \tilde{B}_k - \tilde{D}_k) \alpha_3^{k-1} + \tilde{B}_k (\tilde{E}_k - C_k^+ \mu_k c_k) \alpha_2^{k-1}$$

qui se simplifie en

$$(\tilde{D}_k - C_k^+ \mu_k \tilde{B}_k) \tilde{B}_k \alpha_3^{k-1} > (\tilde{D}_k - C_k^+ \mu_k \tilde{B}_k) c_k \alpha_2^{k-1}.$$

La condition (3.16) qui peut s'écrire  $\alpha_2^{k-1} (\tilde{B}_k \tilde{E}_k - c_k \tilde{D}_k) > C_k^- \tilde{B}_k f_k \alpha_1^{k-1}$  implique alors, via un encadrement de  $C_k^- \tilde{B}_k f_k \alpha_1^{k-1}$ , l'inégalité

$$(\tilde{D}_k - C_k^+ \mu_k \tilde{B}_k) \tilde{B}_k \alpha_3^{k-1} > (\tilde{D}_k - C_k^+ \mu_k \tilde{B}_k) c_k \alpha_2^{k-1}.$$

La condition (3.14) et la positivité de  $\tilde{B}_k$  imposent alors

$$\tilde{D}_k - C_k^+ \mu_k \tilde{B}_k > 0 \iff \mu_k < \frac{\tilde{D}_k}{C_k^+ \tilde{B}_k}. \quad (3.18)$$

La fraction  $\frac{\alpha_2^k}{\alpha_1^k}$  est donc supérieure à la constante  $\mu_k$  dès qu'elle satisfait (3.18). Donc au niveau  $k - 1$  pour avoir (3.16), il faut vérifier

$$\frac{C_k^- \tilde{B}_k f_k}{\tilde{B}_k \tilde{E}_k - c_k \tilde{D}_k} < \frac{\tilde{D}_{k-1}}{C_{k-1}^+ \tilde{B}_{k-1}} \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Ce que l'on peut écrire, via les conditions de positivité (3.13) pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  :

$$C_{k-1}^+ C_k^- \tilde{B}_{k-1} \tilde{B}_k f_k < \tilde{D}_{k-1} (\tilde{B}_k \tilde{E}_k - c_k \tilde{D}_k). \quad (3.19)$$

*Inégalité (3.13)*

On remarque que la positivité des  $\tilde{B}_k$  et  $\tilde{D}_k$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  implique, via (3.19), la positivité de  $\tilde{B}_k \tilde{E}_k - c_k \tilde{D}_k$  pour tout  $k$ . On pourra donc ne garder que les deux premières inégalités de (3.13). ■

### 3.2 - Les L - espaces de dimension 5

Les espaces de Chebyshev de dimension 5 utilisés ici pour le *design géométrique* sont des espaces contenant les constantes obtenus à partir d'espaces de dimension 4 qui sont les noyaux d'opérateurs différentiels linéaires à coefficients constants et dont le polynôme caractéristique est pair. Ils ont alors la caractéristique d'être stables par translation et par symétrie.

On considère ici les espaces correspondant à l'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle

$$F^{(4)} + a_2 F^{(2)} + a_0 F = 0. \quad (3.20)$$

Il est en premier lieu indispensable de dresser le catalogue exhaustif des espaces  $\mathcal{E}_i$  en question, fourni par les solutions de l'équation bicarrée

$$t^4 + a_2 t^2 + a_0 = 0. \quad (3.21)$$

Il est présenté ci-dessous suivant le discriminant  $\Delta$  de l'équation  $X^2 + a_2 X + a_0 = 0$  dont on note  $X_1$  et  $X_2$  les solutions.

**1-  $\Delta > 0$  : on suppose  $X_1 < X_2$ .**

- Cas 1 :  $0 < X_1 < X_2$ . Si  $X_1 = a^2$ ,  $X_2 = b^2$ ,  $0 < a < b$ , les solutions de l'équation (3.21) sont  $a, -a, b, -b$ . Par conséquent :

$\mathcal{E}_1$  est engendré par les fonctions  $\cosh(at), \sinh(at), \cosh(bt), \sinh(bt)$ .

- Cas 2 :  $0 = X_1 < X_2$ . Si  $X_2 = a^2$ ,  $a > 0$ , les solutions de (3.21) sont  $0, 0, a, -a$ , donc

$\mathcal{E}_2$  est engendré par les fonctions  $1, t, \cosh(at), \sinh(at)$ .

- Cas 3 :  $X_1 < 0 < X_2$ . Si  $X_1 = -b^2$ ,  $X_2 = a^2$ ,  $a, b > 0$ , les solutions de (3.21) sont  $ib, -ib, a, -a$ , donc

$\mathcal{E}_3$  est engendré par les fonctions  $\cosh(at), \sinh(at), \cos(bt), \sin(bt)$ .

- Cas 4 :  $X_1 < X_2 = 0$ . Si  $X_1 = -b^2$ ,  $b > 0$ , les solutions de (3.21) sont  $ib, -ib, 0, 0$ , donc

$\mathcal{E}_4$  est engendré par les fonctions  $1, t, \cos(bt), \sin(bt)$ .

- Cas 5 :  $X_1 < X_2 < 0$ . Si  $X_1 = -a^2$ ,  $X_2 = -b^2$ ,  $0 < b < a$ , les solutions de (3.21) sont  $ia, -ia, ib, -ib$ , donc

$\mathcal{E}_5$  est engendré par les fonctions  $\cos(at), \sin(at), \cos(bt), \sin(bt)$ .

**2-  $\Delta = 0$ .**

- Cas 6 :  $0 < X_1 = X_2$ . Si  $X_1 = a^2$ ,  $a > 0$ , les solutions de l'équation (3.21) sont  $a, a, -a, -a$ , donc

$\mathcal{E}_6$  est engendré par les fonctions  $\cosh(at), \sinh(at), t \cosh(at), t \sinh(at)$ .

- Cas 7 :  $0 = X_1 = X_2$ . Les solutions de l'équation (3.21) sont  $0, 0, 0, 0$ , donc

$\mathcal{E}_7$  est engendré par les fonctions  $1, t, t^2, t^3$ .

- Cas 8 :  $X_1 = X_2 < 0$ . Si  $X_1 = -b^2$ ,  $b > 0$ , les solutions de l'équation (3.21) sont  $ib, ib, -ib, -ib$ , donc

$\mathcal{E}_8$  est engendré par les fonctions  $\cos(bt), \sin(bt), t \cos(bt), t \sin(bt)$ .

**3-  $\Delta < 0$ .** Dans ce cas les solutions de l'équation (3.21) sont toujours de la forme  $a + ib, a - ib, -a + ib, -a - ib$ , où  $a, b > 0$ . L'équation correspondante est

$$t^4 + 2(b^2 - a^2)t^2 + (a^2 + b^2)^2 = 0 \quad (3.22)$$

et son discriminant vaut  $\Delta = -4a^2b^2$ .

- Cas 9 :

$\mathcal{E}_9$  est engendré par les fonctions

$\cosh(at) \cos(bt), \cosh(at) \sin(bt), \sinh(at) \cos(bt), \sinh(at) \sin(bt)$ .

### 3.3 - Longueur critique des L-espaces de dim 5

L'objectif de cette partie est d'étudier la longueur critique associée aux espaces de dimension 4 listés au paragraphe 3.2. Cette longueur critique obtenue, nous pourrons, en vertu du théorème 3.6, en déduire la longueur critique *pour le design* des espaces de dimension 5 obtenus par intégration.

Les résultats présentés dans cette partie ont été publiés dans [Brilleaud & Mazure 1]. Ils vérifient et complètent ceux qui ont été obtenus dans [Menar & Pena 1] en utilisant la totale positivité des Bases de Bernstein. L'espace  $\mathcal{E}_9$  n'est, en effet pas étudié dans [Menar & Pena 1]

#### 3.3.1 - Cadre théorique

On utilisera ici un résultat de [Mazure 2] et la caractérisation des espaces de Chebyshev par les Wronskiens.

##### 3.3.1.1 - Caractérisation des EC-espaces par les Wronskiens

###### Définition 3.12 : Wronskien

Soit  $U(t)$  le vecteur  $(U_0(t), \dots, U_k(t))$ . On appelle wronskien  $W(U_0, \dots, U_k)(t)$  du système  $(U_0, \dots, U_k)$  le déterminant de la matrice  $(U(t), \dots, U^{(k)}(t))$ .

###### Définition 3.13 : CW-système

Une suite  $(U_0, \dots, U_n)$  est un CW-système (pour Complete W-system) sur  $I$  si elle vérifie  $W(U_0, \dots, U_k)(t) \neq 0$  pour tout  $t$  de  $I$  et tout  $k = 1, \dots, n$ .

###### Exemple :

Les fonctions  $1, t, t^2, t^3$  forment un CW-système sur  $\mathbb{R}$  car, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$W(1) = 1, \quad W(1, t) = 1, \quad W(1, t, t^2) = 2, \quad W(1, t, t^2, t^3) = 6.$$

Au contraire les mêmes fonctions prisent dans un ordre différent  $t^3, t^2, t, 1$  ne forment pas un CW-système sur  $\mathbb{R}$  car :

$$W(t^3) = t^3, \quad W(t^3, t^2) = -t^4, \quad W(t^3, t^2, t) = -2t^3, \quad W(t^3, t^2, t, 1) = 6.$$

###### Propriété 3.15 :

Soit  $I$  un intervalle fermé borné de  $\mathbb{R}$ , l'espace  $\mathcal{E}$  est un EC-espace sur  $I$  si et seulement si  $\mathcal{E}$  est engendré par un CW-système sur  $I$ .

**Remarque :**

Cette caractérisation n'est valable que lorsque l'intervalle  $I$  est fermé et borné. Lorsque l'intervalle  $I$  n'est pas fermé borné, seule la condition suffisante est vraie : si  $\mathcal{E}$  possède une base qui est un CW-système sur  $I$ , alors  $\mathcal{E}$  est un EC-espace sur  $I$ . La démonstration de ce résultat se trouve dans [Karlin & Studden]. Par contre la démonstration de la condition suffisante est beaucoup plus récente [Mazure 6].

**3.3.1.2 - Application à la recherche d'un critère pour être un EC-espace**

On cherche sur quels intervalles un espace donné  $\mathcal{E}$  est un EC-espace. Pour cela, on se donne une base  $(U_0, \dots, U_n)$  de  $\mathcal{E}$  et on se place (condition nécessaire) sur un intervalle  $I$  sur lequel

$$W(U_0, \dots, U_n)(t) \neq 0, \quad \text{pour tout } t \in I.$$

Pour tout  $a \in I$  et pour tout entier  $k = 0, \dots, n$ , on peut alors choisir une fonction  $\Psi_i^a$  dans  $\mathcal{E}$  qui s'annule exactement  $k$  fois en  $a$ . On a alors la caractérisation suivante :

**Théorème 3.16 :**

*Soit  $I$  un intervalle sur lequel le Wronskien d'une base de  $\mathcal{E}$  ne s'annule pas. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) *l'espace  $\mathcal{E}$  est un EC-espace sur  $I$ ,*
- (ii) *pour tout  $a \in I$  et tout  $k = 1, \dots, n$ ,*

$$\forall t \in I - \{a\} \quad W(\Psi_n^a, \dots, \Psi_{n-k+1}^a)(t) \neq 0.$$

**Application :**

On suppose que  $\mathcal{E}$  est le noyau d'un opérateur différentiel linéaire de dimension 4 à coefficients constants. On sait que le wonskien de n'importe quelle base de  $\mathcal{E}$  ne s'annule en aucun point de  $\mathbb{R}$ . On cherche sur quels intervalles  $\mathcal{E}$  un EC-espace. Comme  $\mathcal{E}$  est invariant par translation il suffit de se limiter à  $a = 0$  et de déterminer le plus grand réel strictement positif  $h$  tel que  $\mathcal{E}$  est un EC-espace sur  $[0, h]$ . Ainsi  $\mathcal{E}$  est un EC-espace sur  $[0, h]$  si et seulement si  $W(\Psi_3^0)(t) \neq 0, \quad W(\Psi_3^0, \Psi_2^0)(t) \neq 0, \quad W(\Psi_3^0, \Psi_2^0, \Psi_1^0)(t) \neq 0,$  pour tout  $x \in ]0, h]$ .

On sait aussi que  $\mathcal{E}$  est stable par dérivation donc en utilisant la fonction  $S$  de  $\mathcal{E}$  telle que  $S(0) = S'(0) = S^{(2)}(0) = 0$  et  $S^{(3)}(0) = 1$  et en posant  $\Psi_i^0 = S^{(3-i)}$  on obtient le critère :

**Corollaire 3.17 :**

Avec les hypothèses précédentes  $\mathcal{E}$  est un EC-espace de dimension 4 sur  $[0, h]$  si et seulement si :

$$W(S)(t) \neq 0, \quad W(S, S')(t) \neq 0, \quad W(S, S', S^{(2)})(t) \neq 0, \quad \text{pour tout } t \in ]0, h].$$

Si, de plus,  $\mathcal{E}$  est invariant par symétrie, le critère devient

**Corollaire 3.18 :**

L'espace  $\mathcal{E}$  est un EC-espace de dimension 4 sur  $[0, h]$  si et seulement si :

$$W(S)(t) \neq 0, \quad W(S, S')(t) \neq 0, \quad \text{pour tout } t \in ]0, h].$$

Plus de précisions sont données dans [Carnicer, Mainar & Pena] et [Mazure 5].

**3.3.2 - Application aux espaces symétriques de dim 4**

On cherche à présent les intervalles sur lesquels les espaces définis dans le paragraphe précédent sont des EC-espaces. Pour cela, nous devons calculer la *longueur critique*, définie comme

$$\ell_i := \sup\{h > 0 \mid \mathcal{E}_i \text{ est un EC-espace sur } [0, h]\}. \quad (3.23)$$

On note  $S_i$  la fonction de  $\mathcal{E}_i$  définie par  $S_i(0) = S'_i(0) = S_i^{(2)}(0) = 0$  et  $S_i^{(3)}(0) = 1$ , et  $H_i$  est la fonction définie par

$$H_i := W(S, S') = S_i S_i^{(2)} - [S_i']^2.$$

D'après le corollaire 3.18, nous savons que

$$\ell_i = \min(Z_{S_i}, Z_{H_i}),$$

où  $Z_{S_i}$  (resp.  $Z_{H_i}$ ) désigne le premier zéro positif de  $S_i$  (resp.  $H_i$ ), avec la convention  $Z_{S_i} = +\infty$  si  $S_i$  ne s'annule pas sur  $]0, +\infty[$ .

Nous écartérons d'emblée dans cette étude les cas où l'équation (3.21) n'a que des solutions réelles, car il est bien connu que les espaces  $\mathcal{E}_i$  correspondants sont des EC-espace sur  $\mathbb{R}$  tout entier : il s'agit des cas 1, 2, 6, 7. Bien entendu dans ce cas nous trouverions  $Z_{S_i} = Z_{H_i} = +\infty$ . Il est également inutile de considérer le cas 4 déjà largement étudié

pour lequel on sait que l'espace  $\mathcal{E}_4$  et un EC-espace sur  $[0, h]$  si et seulement si  $h < \frac{2\pi}{b}$ . Il nous reste donc les cas 3,5,8,9, que nous examinons ci-dessous.

### 3.3.2.1 - Les cas 9,3,8.

#### Proposition 3.19 :

La longueur critique  $\ell_9$  de l'espace  $\mathcal{E}_9$  engendré par les fonctions

$$\cosh(ax) \cos(bx), \cosh(ax) \sin(bx), \sinh(ax) \cos(bx), \sinh(ax) \sin(bx),$$

$a, b > 0$ , égale à  $Z_{S_9}$ , appartient à l'intervalle  $] \frac{\pi}{b}, \frac{3\pi}{2b} [$ .

#### Preuve :

Dans ce cas, la fonction  $S_9$  est donnée par

$$S_9(x) = \frac{1}{2(a^2 + b^2)ab} [a \cosh(ax) \sin(bx) - b \sinh(ax) \cos(bx)],$$

et sa dérivée vaut

$$S_9'(x) = \frac{1}{2ab} \sinh(ax) \sin(bx).$$

L'étude du signe de  $S_9'$  sur  $[0, \frac{2\pi}{b}]$  nous permet de conclure que  $Z_{S_9} \in ] \frac{\pi}{b}, \frac{3\pi}{2b} [$  et que c'est l'unique zéro de  $S_9$  dans cet intervalle. Par ailleurs, on obtient

$$\begin{aligned} H_9(x) &= \frac{1}{4(b^2 + a^2)} \left[ \frac{\sin^2(bx)}{b^2} - \frac{\sinh^2(ax)}{a^2} \right] \\ &= \frac{1}{4(b^2 + a^2)} \left[ \frac{\sin(bx)}{b} - \frac{\sinh(ax)}{a} \right] \left[ \frac{\sin(bx)}{b} + \frac{\sinh(ax)}{a} \right], \end{aligned}$$

ce qui permet facilement de conclure que  $Z_{H_9} = +\infty$ . ■

#### Proposition 3.20 :

La longueur critique  $\ell_3$  de l'espace  $\mathcal{E}_3$  engendré par les fonctions  $\cosh(ax), \sinh(ax), \cos(bx), \sin(bx)$ ,  $a, b > 0$ , égale à  $Z_{H_3}$ , appartient à  $]Z_{S_9}, \frac{2\pi}{b} [$ .

#### Preuve :

Pour cet espace, on trouve

$$S_3(x) = \frac{1}{a^2 + b^2} \left[ \frac{\sinh(ax)}{a} - \frac{\sin(bx)}{b} \right],$$

dont la dérivée vérifie

$$(a^2 + b^2)S_3'(x) = [\cosh(ax) - 1] + [1 - \cos(bx)] \geq 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent,  $Z_{S_3} = +\infty$ . Par ailleurs, le calcul de la fonction  $H_3$  montre que

$$H_3(x) = \frac{1}{(a^2 + b^2)^2} [(b^2 - a^2) \sinh(ax) \sin(bx) + 2ab(\cosh(ax) \cos(bx) - 1)].$$

On vérifie que

$$H_3' = -2S_9.$$

A partir des variations de la fonction  $S_9$ , on voit donc que  $H_3'$  est strictement décroissante sur  $[0, \frac{\pi}{b}]$ , puis strictement croissante sur  $[\frac{\pi}{b}, \frac{2\pi}{b}]$ , strictement décroissante sur  $[\frac{2\pi}{b}, \frac{3\pi}{b}]$ ,  $\dots$ , avec

$$H_3' \left( \frac{(2k+1)\pi}{b} \right) = -b \sinh((2k+1)a\pi), \quad H_3' \left( \frac{2k\pi}{b} \right) = b \sinh(2ka\pi).$$

D'où le résultat annoncé. ■

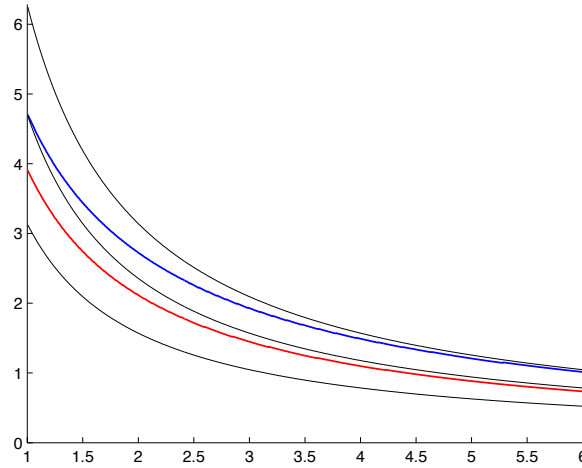


fig. 3-1

Le graphe ci-dessus représente la longueur critique  $l$  en fonction de  $b$  pour les cas 3 (en bleu) et 9 (en rouge) avec les trois hyperboles  $\frac{\pi}{b}$ ,  $\frac{3\pi}{2b}$  et  $\frac{2\pi}{b}$ .

**Proposition 3.21 :**

La longueur critique  $\ell_8$  de l'espace  $\mathcal{E}_8$  engendré par les fonctions  $\cos(bx)$ ,  $\sin(bx)$ ,  $x \cos(bx)$ ,  $x \sin(bx)$ , égale à  $Z_{S_8}$ , appartient à  $] \frac{\pi}{b}, \frac{3\pi}{2b} [$ ,  $b\ell_8$  étant l'unique solution de l'équation  $\tan(x) = x$  dans l'intervalle  $] \pi, \frac{3\pi}{2} [$ .

**Preuve :**



Dans ce cas, on obtient la fonction

$$S_8(x) = \frac{1}{2b^3} [\sin(bx) - bx \cos(bx)],$$

Donc  $bZ_{S_8}$  est l'unique solution de l'équation  $\tan(x) = x$  située dans l'intervalle  $]\pi, \frac{3\pi}{2}[$ .  
De l'égalité

$$H_8(x) = \frac{1}{4b^4} [\sin(bx) - bx] [\sin(bx) + bx] < 0 \text{ pour tout } x > 0.$$

on déduit que  $Z_{H_8} = +\infty$ . ■

### 3.3.2.2 - Le cas 5 : $\cos(ax), \sin(ax), \cos(bx), \sin(bx)$

Nous supposons une fois pour toutes  $0 < a < b$ . Nous nous intéresserons successivement aux deux quantités  $Z_{S_5}$  et  $H_{S_5}$ . D'une façon systématique, le cas général se déduira par homothétie de rapport  $a$  du cas  $a = 1, b > 1$ .

#### Proposition 3.22 :

Le premier zéro positif de la fonction  $S_5$  se trouve dans l'intervalle  $[\frac{\pi}{b}E(\frac{b}{a}), \frac{\pi}{b}(E(\frac{b}{a}) + 1)[$ .

Plus précisément,

- \*  $Z_{S_5} = \pi/a$  si  $b/a$  est entier ;
- \*  $Z_{S_5} \in [\frac{\pi}{b}E(\frac{b}{a}), \frac{\pi}{a}]$  si  $E(b/a)$  est pair ;
- \*  $Z_{S_5} \in [\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{b}(E(\frac{b}{a}) + 1)[$  si  $E(b/a)$  est impair.

Nous utiliserons notamment le lemme suivant :

#### Lemme 3.23:

Pour tout  $b > 1$ , la fonction  $\phi_b(x) := b \sin(x) - \sin(bx)$  est strictement positive sur l'intervalle  $]0, \pi - \frac{\pi}{2b}[$ .

**Preuve :** On a  $\phi'_b(x) = b(\cos(x) - \cos(bx))$ . Or la fonction  $\cos$  est décroissante sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , donc  $\cos(x) > \cos(bx)$  pour  $x < bx < \frac{\pi}{2}$ . Par conséquent  $\phi'_b(x) > 0$  pour tout  $x \in ]0, \frac{\pi}{2b}[$  et donc  $\phi_b$  est croissante sur  $]0, \frac{\pi}{2b}[$ . Comme  $\phi_b(0) = 0$ , on a

$$\phi_b(x) > 0 \text{ pour tout } x \in ]0, \frac{\pi}{2b}[. \quad (3.24)$$

On sait donc en particulier que  $b \sin(\frac{\pi}{2b}) > \sin(b \times \frac{\pi}{2b})$ , donc  $b \sin(\frac{\pi}{2b}) > 1$ . Or la fonction  $b \sin$  est croissante sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , donc  $b \sin(x) > 1$  pour tout  $x \in [\frac{\pi}{2b}, \frac{\pi}{2}]$  et, par symétrie, sur tout l'intervalle  $]\frac{\pi}{2b}, \pi - \frac{\pi}{2b}[$ . Par suite,  $\sin(bx)$  étant majorée par 1, on en déduit que

$$\phi_b(x) > 0 \text{ pour tout } x \in ]\frac{\pi}{2b}, \pi - \frac{\pi}{2b}[.$$

D'où le résultat annoncé. ■

**Preuve de la Proposition 3.22 :**

Dans cet espace  $S_5$  est définie par  $S_5(x) = S_{a,b}(x) = \frac{1}{b^2 - a^2} \left[ \frac{\sin(ax)}{a} - \frac{\sin(bx)}{b} \right]$ . On se placera désormais dans le cas  $a = 1, b > 1$ , auquel cas

$$S_{1,b} = \frac{1}{b(b^2 - 1)} \phi_b(x),$$

la fonction  $\phi_b$  étant définie par  $\phi_b(x) := b \sin(x) - \sin(bx)$ .

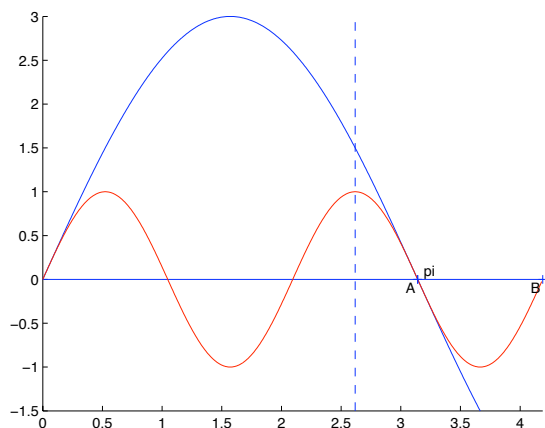
a) Cas  $b$  entier. Puisque  $\phi_b(\pi) = 0$ , pour obtenir le résultat annoncé il suffit de vérifier que  $\phi_b(x) \neq 0$  pour tout  $x \in ]0, \pi[$ . Or, d'après le lemme 1, nous savons que  $\phi_b(x) > 0$  pour tout  $x \in ]0, \pi - \frac{\pi}{2b}[$ .

– Supposons  $b$  impair (*fig. 3-2*) : dans ce cas,  $\phi_b$  est symétrique par rapport à la droite  $x = \frac{\pi}{2}$ , donc  $\phi_b(x) > 0$  pour  $x \in ]0, \pi[$ .

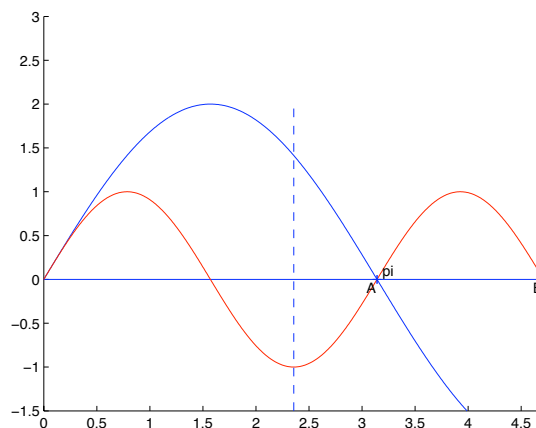
– Supposons  $b$  pair (*fig. 3-3*) : dans ce cas  $\sin(bx) < 0$  pour tout  $x \in [\pi - \frac{\pi}{2b}, \pi[$ , et, puisque  $\sin x > 0$  sur cet intervalle, on a bien  $\phi_b(x) > 0$  pour tout  $x \in [\pi - \frac{\pi}{2b}, \pi[$ .

En conclusion :

$$Z_{S_{1,b}} = \pi \quad \text{si } b \text{ est entier.}$$



*fig. 3-2* ( $b = 3$ )



*fig. 3-3* ( $b = 2$ )

*En bleu* :  $b \sin(x)$ ; *en rouge* :  $\sin(bx)$ ; *en pointillés* :  $\pi - \frac{\pi}{2b}$ .

b) Cas  $b$  non entier. La fonction  $b \sin x$  a son premier zéro en  $\pi$ . Et  $\sin(bx)$  s'annule pour  $x = \frac{k\pi}{b}$   $k \in \mathbb{Z}$ . En encadrant  $\pi$  par deux zéros de  $\sin(bx)$ , on obtient

$$k \frac{\pi}{b} < \pi < (k + 1) \frac{\pi}{b} \quad \text{avec } k = E(b).$$

Nous montrons dans la suite que les courbes des deux fonctions  $b \sin x$  et  $\sin(bx)$  se coupent pour la première fois dans  $[k\frac{\pi}{b}, (k+1)\frac{\pi}{b}]$ . Ce qui revient à dire que  $\phi_b$  a son premier zéro dans cet intervalle.

*Existence* : Les nombres  $k\frac{\pi}{b}$  et  $(k+1)\frac{\pi}{b}$  sont des zéros de  $\sin(bx)$ . Par conséquent

$$\star \phi_b(k\frac{\pi}{b}) = b \sin(k\frac{\pi}{b}) > 0 \text{ car } k\frac{\pi}{b} \in ]0, \pi[ ;$$

$$\star \phi_b((k+1)\frac{\pi}{b}) = b \sin((k+1)\frac{\pi}{b}) < 0 \text{ car } (k+1)\frac{\pi}{b} \in ]\pi, 2\pi[.$$

En utilisant la continuité de  $\phi_b$  sur  $[k\frac{\pi}{b}, (k+1)\frac{\pi}{b}]$  et le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit l'existence d'un zéro de  $\phi_b$  à l'intérieur de cet intervalle.

*Primalité* : On montre ici que  $\phi_b(x) \neq 0$  pour tout  $x \in ]0, k\frac{\pi}{b}]$ . On sait, par le lemme 1, que  $\phi_b(x) > 0$  pour tout  $x \in ]0, \pi - \frac{\pi}{2b}]$ . Il n'y a aucun problème lorsque  $\pi - \frac{\pi}{2b} > k\frac{\pi}{b}$  (voir fig. 3 et 5). Il reste à montrer que  $\phi_b$  est également strictement positive sur l'intervalle  $[\pi - \frac{\pi}{2b}, k\frac{\pi}{b}]$  lorsque  $\pi - \frac{\pi}{2b} < k\frac{\pi}{b}$  (fig. 3-5 et 3-7). On raisonnera différemment selon la parité de  $k$ .

– Supposons  $k$  pair (fig. 3-5) : dans ce cas  $\sin(bx) < 0$  pour tout  $x \in [(k-1)\frac{\pi}{b}, k\frac{\pi}{b}]$  et, puisque  $\sin x > 0$  sur cet intervalle on a bien  $\phi_b(x) > 0$  pour tout  $x \in [(k-1)\frac{\pi}{b}, k\frac{\pi}{b}]$ . Or  $(k-1)\frac{\pi}{b} < \pi - \frac{\pi}{2b}$  d'où le résultat.

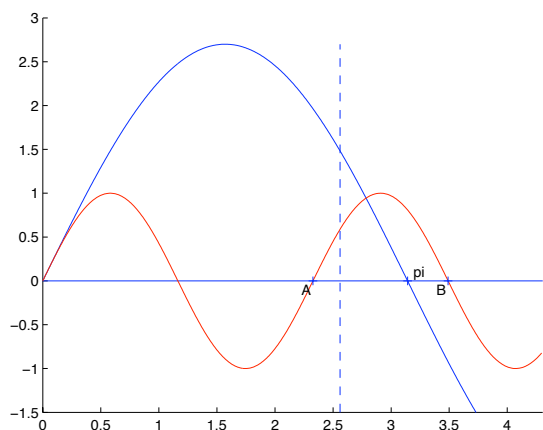


fig. 3-4 ( $b = 2.7$ )

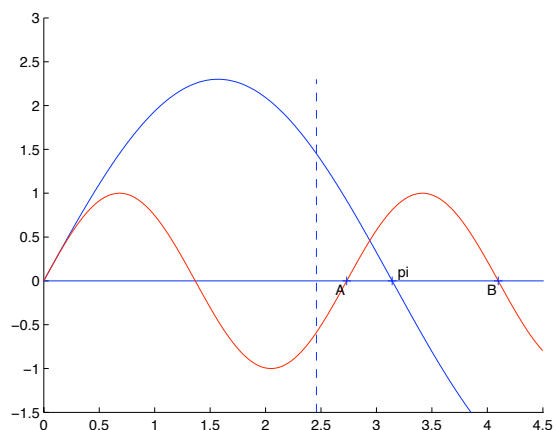


fig. 3-5 ( $b = 2.3$ )

*En bleu* :  $b \sin(x)$ ; *en rouge* :  $\sin(bx)$ ; *en pointillés* :  $\pi - \frac{\pi}{2b}$ .

L'intervalle  $[AB]$  est l'intervalle  $[k\frac{\pi}{b}, (k+1)\frac{\pi}{b}]$ .

– Supposons  $k$  impair (fig. 3-7) : on introduit la fonction  $\sin(b(\pi - x))$  symétrique de  $\sin(bx)$ .

La relation (3.24) nous indique que  $\sin(bx) < b \sin x$  pour tout  $x \in ]0, \frac{\pi}{2b}]$  et donc, par symétrie,  $\sin(b(\pi - x)) < b \sin(\pi - x)$  pour tout  $x \in [\pi - \frac{\pi}{2b}, \pi[$  d'où

$$\sin(b(\pi - x)) < b \sin(x), \quad \text{pour tout } x \in [\pi - \frac{\pi}{2b}, \pi[. \quad (3.25)$$

La courbe de la fonction  $\sin(bx)$  est l'image de celle de  $\sin(b(\pi - x))$  par une translation de vecteur  $-\alpha\vec{i}$  avec  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2b}$ . Or comme  $\sin(b(\pi - x))$  est décroissante sur  $[\pi - \frac{\pi}{2b}, \pi + \frac{\pi}{2b}]$ , on a bien

$$\sin(b(\pi - x)) > \sin(bx), \quad \text{pour tout } x \in [\pi - \frac{\pi}{2b}, \pi[. \quad (3.26)$$

Les relations (3.25) et (3.26) nous permettent d'écrire que  $\sin(bx) < b \sin x$  pour tout  $x \in [\pi - \frac{\pi}{2b}, \pi[$  et, par suite,  $\phi_b(x) > 0$  pour tout  $x \in ]0, \pi]$ .

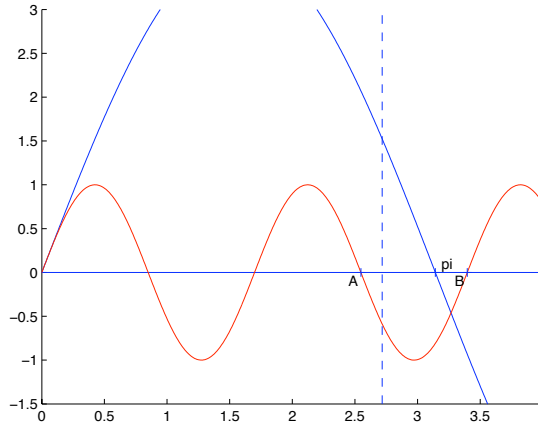


fig. 3-6 ( $b = 3.7$ )

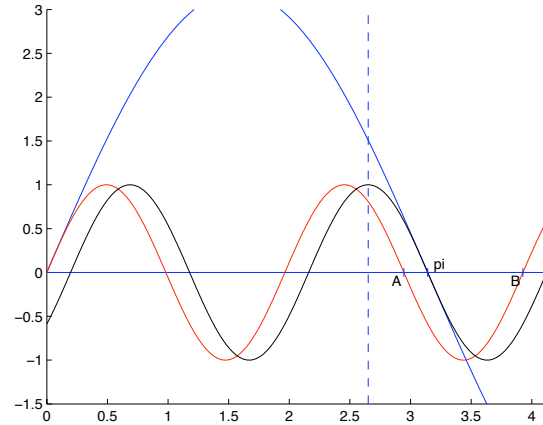


fig. 3-7 ( $b = 3.2$ )

En bleu :  $b \sin(x)$ ; en rouge :  $\sin(bx)$ ; en noir :  $\sin(b(\pi - x))$  en pointillés :  $\pi - \frac{\pi}{2b}$ .  
L'intervalle  $[AB]$  est l'intervalle  $[k\frac{\pi}{b}, (k+1)\frac{\pi}{b}]$ .

On remarque que les graphes des fonctions  $b \sin x$  et  $\sin(bx)$  ne se coupent que lorsque les fonctions sont de même signe. Ceci se produit, dans l'intervalle  $[\frac{\pi}{b}E(b), \frac{\pi}{b}(E(b)+1)]$ , avant  $\pi$  quand  $b$  est pair et après  $\pi$  quand  $b$  est impair. En conclusion :

$$Z_{S_{1,b}} \in [\frac{\pi}{b}E(b), \pi] \quad \text{si } E(b) \text{ est pair;}$$

$$Z_{S_{1,b}} \in [\pi, \frac{\pi}{b}(E(b)+1)[ \quad \text{si } E(b) \text{ est impair.}$$

■

### Proposition 3.24 :

La fonction  $H_5$  étant définie par  $H_5 = S_5 S_5^{(2)} - [S_5']^2$ , son premier zéro positif  $Z_{H_5}$  se trouve dans l'intervalle  $]\frac{2\pi}{b}, \frac{2\pi}{b-a}[$  pour tout  $b/a > 3$ .

**Preuve :**

Nous utiliserons la relation

$$H'_{a,b} = -2S_{b-a,b+a}. \quad (3.27)$$

On supposera à nouveau  $a = 1$ ,  $b > 1$ . Nous montrerons donc que, pour tout  $b > 3$ ,  $Z_{H_{1,b}} \in ]\frac{2\pi}{b}, \frac{2\pi}{b-1}[$ . Dans la suite, nous serons amenés à nous servir des fonctions  $S_{1,b}$ ,  $S'_{1,b}$  et  $S_{1,b}^{(2)}$  dont les expressions sont rappelées ci-dessous :

$$S_{1,b}(x) = \frac{1}{b^2 - 1} \left[ \sin(x) - \frac{\sin(bx)}{b} \right], \quad S'_{1,b}(x) = \frac{1}{b^2 - 1} \left[ \cos(x) - \cos(bx) \right],$$

$$S_{1,b}^{(2)}(x) = \frac{1}{b^2 - 1} \left[ -\sin(x) + b \sin(bx) \right].$$

*Existence* : On compare les signes des valeurs de  $H_{1,b}$  aux extrémités de l'intervalle  $[\frac{2\pi}{b}, \frac{2\pi}{b-1}]$ . On rappelle que la fonction  $H_{1,b}$  est définie par  $H_{1,b} = W(S_{1,b}, S'_{1,b}) = S_{1,b}S_{1,b}^{(2)} - [S'_{1,b}]^2$ .

★  $H_{1,b}(\frac{2\pi}{b}) < 0$  car, pour tout  $b > 2$ ,  $S_{1,b}(\frac{2\pi}{b}) > 0$  et  $S_{1,b}^{(2)}(\frac{2\pi}{b}) < 0$ .

★  $H_{1,b}(\frac{2\pi}{b-1}) > 0$  car, pour tout  $b > 3$ ,  $S_{1,b}(\frac{2\pi}{b-1}) > 0$ ,  $S_{1,b}^{(2)}(\frac{2\pi}{b-1}) > 0$  et  $S'_{1,b}(\frac{2\pi}{b-1}) = 0$ .

En utilisant la continuité de  $H_{1,b}$  sur  $[\frac{2\pi}{b}, \frac{2\pi}{b-1}]$  et le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit l'existence d'un zéro de  $H_{1,b}$  à l'intérieur de cet intervalle.

*Primalité* : On montre ici que  $H_{1,b}(x) \neq 0$  pour tout  $x \in ]0, \frac{2\pi}{b}[$ .

La fonction  $\sin(bx)$  est strictement négative sur l'intervalle  $]\frac{\pi}{b}, \frac{2\pi}{b}[$ . De plus, lorsque  $b > 2$ ,  $]\frac{\pi}{b}, \frac{2\pi}{b}[ \subset ]0, \pi[$  et  $\sin(x)$  est strictement positive. Par suite,  $S_{1,b} > 0$  et  $S_{1,b}^{(2)} < 0$  sur  $]\frac{\pi}{b}, \frac{2\pi}{b}[$ . On en déduit

$$H_{1,b}(x) < 0, \quad \text{pour tout } x \in ]\frac{\pi}{b}, \frac{2\pi}{b}[.$$

Le calcul de la dérivée de  $S_{a,b}$  nous indique que  $S'_{a,b} > 0$  pour tout  $x \in ]0, \frac{2\pi}{b+a}[$ . Nous en déduisons, puisque  $S_{a,b}(0) = 0$ , que  $S_{a,b}(x) > 0$  pour tout  $x \in ]0, \frac{2\pi}{b+a}[$ . Par conséquent

$$S_{b-1,b+1}(x) > 0, \quad \text{pour tout } x \in ]0, \frac{\pi}{b}[.$$

Cette relation et la formule (3.27), laquelle s'écrit  $H'_{1,b} = -2S_{b-1,b+1}$  dans le cas étudié ici, nous indiquent que  $H'_{1,b} < 0$  sur  $]0, \frac{\pi}{b}[$ . Or, comme  $H_{1,b}(0) = 0$ , on en déduit que :

$$H_{1,b}(x) < 0 \quad \text{pour tout } x \in ]0, \frac{\pi}{b}[.$$

D'où le résultat annoncé. ■

### **Théorème 3.25 :**

Pour  $0 < a < b$ , la longueur critique  $\ell_5$  de l'espace  $\mathcal{E}_5$  engendré par les fonctions  $\cos(ax)$ ,  $\sin(ax)$ ,  $\cos(bx)$ ,  $\sin(bx)$ ,

- ★ est égale à  $Z_{S_5}$  et appartient à l'intervalle  $[\frac{\pi}{b}E(\frac{b}{a}), \frac{\pi}{b}(E(\frac{b}{a}) + 1)[$  lorsque  $1 < b/a \leq 3$ ,
- ★ est égale à  $Z_{H_5}$  et appartient à l'intervalle  $]\frac{2\pi}{b}, \frac{2\pi}{b-a}[$  lorsque  $b/a > 3$ .

**Preuve :**

Nous supposons, à nouveau,  $a = 1$  et  $b > 1$ .

a) cas  $b > 3$  : dans ce cas, la propriété 3.24 nous fournit un majorant pour  $Z_{H_{1,b}}$ . On a donc  $Z_{H_{1,b}} < \frac{2\pi}{b-1}$ .

La minoration  $Z_{S_{1,b}} > \frac{\pi}{b}E(b)$  donnée par la proposition 3.22 ne nous permettant pas de conclure dans tous les cas où  $b > 3$ , nous devons envisager les deux sous-cas ci-dessous :

– Supposons  $b \geq 4$ . Les deux inégalités précédentes nous permettent d'écrire

$$Z_{H_{1,b}} < \frac{2\pi}{b-1} < \frac{\pi}{b} \times (b-1) < \frac{\pi}{b}E(b) < Z_{S_{1,b}}.$$

– Supposons  $3 < b < 4$ . Le nombre  $E(b) = 3$  étant impair, la proposition 3.22 nous fournit, dans ce cas particulier, la minoration  $Z_{S_{1,b}} > \pi$ . On a alors

$$Z_{H_{1,b}} < \frac{2\pi}{b-1} < \pi < Z_{S_{1,b}}.$$

En conclusion, lorsque  $b > 3$ , la longueur critique, égale à  $\min(Z_{S_{1,b}}, Z_{H_{1,b}})$ , est donc égale à  $Z_{H_{1,b}}$ .

b) cas  $1 < b \leq 3$  : la formule (3.27), qui s'écrit  $H'_{1,b} = -2S_{b-1,b+1}$  dans le cas étudié ici, nous fournit, à l'aide de la proposition 3.22, une minoration de  $Z_{H'_{1,b}}$ .

En effet  $Z_{S_{a,b}} > \frac{\pi}{b}E(\frac{b}{a})$ , d'où  $Z'_{H_{1,b}} > \frac{\pi}{b+1}E(\frac{b+1}{b-1})$ . Comme  $H_{1,b}(0) = 0$  on a  $Z'_{H_{1,b}} < Z_{H_{1,b}}$ . Ce qui nous donne

$$Z_{H_{1,b}} > \frac{\pi}{b+1}E\left(\frac{b+1}{b-1}\right). \quad (3.28)$$

Si  $E(\frac{b+1}{b-1})$  est impair, la minoration (3.28) pourra être affinée par

$$Z_{H_{1,b}} > \frac{\pi}{b-1}. \quad (3.29)$$

L'utilisation des inégalités (3.28) et (3.29) nécessitera de pouvoir remplacer  $E(\frac{b+1}{b-1})$  par un entier suivant les valeurs de  $b$ . On a  $E(\frac{b+1}{b-1}) = E(1 + \frac{2}{b-1})$ . L'égalité  $E(1 + \frac{2}{b-1}) = k$  est vérifiée pour  $k-1 \leq \frac{2}{b-1} < k$ . Et donc, pour une valeur de  $k$  donnée,

$$E\left(\frac{b+1}{b-1}\right) = k, \quad \text{pour} \quad \frac{2}{k} + 1 < b \leq \frac{2}{k-1} + 1. \quad (3.30)$$

Nous devons envisager plusieurs sous-cas selon les valeurs de  $k$ .

– Supposons  $k \geq 4$  (ce qui correspond, d'après (3.30), à l'encadrement  $1 < b \leq 5/3$ ). L'inégalité (3.28) nous fournit la minoration  $Z_{H_{1,b}} > \frac{4\pi}{b+1}$ . La proposition 3-4 nous donne la majoration  $Z_{S_{1,b}} < \frac{2\pi}{b}$ . On a donc

$$Z_{S_{1,b}} < \frac{2\pi}{b} < \frac{4\pi}{b+1} < Z_{H_{1,b}}.$$

– Supposons  $k = 3$  (ce qui correspond, d'après (3.30), à l'encadrement  $5/3 < b \leq 2$ ). L'inégalité (3.29) nous fournit la minoration  $Z_{H_{1,b}} > \frac{\pi}{b-1}$  puisque  $k$  est impair. La proposition 3.22 nous donne la majoration  $Z_{S_{1,b}} \leq \frac{2\pi}{b}$ . On a donc

$$Z_{S_{1,b}} \leq \frac{2\pi}{b} \leq \frac{\pi}{b-1} < Z_{H_{1,b}}.$$

– Supposons  $k = 2$  (ce qui correspond, d'après (3.30), à l'encadrement  $2 < b \leq 3$ ). La proposition 3-4 nous fournit la majoration  $Z_{S_{1,b}} \leq \pi$ . De plus, l'étude de la fonction  $S_{b-1,b+1}$ , pour  $2 < b \leq 3$ , nous donne, en utilisant la formule (3.27),  $Z_{H_{1,b}} \geq \pi$ . On a donc

$$Z_{S_{1,b}} \leq \pi \leq Z_{H_{1,b}}.$$

En conclusion, pour  $1 < b \leq 3$ , la longueur critique, égale à  $\min(Z_{S_{1,b}}, Z_{H_{1,b}})$ , est donc égale à  $Z_{S_{1,b}}$ . ■

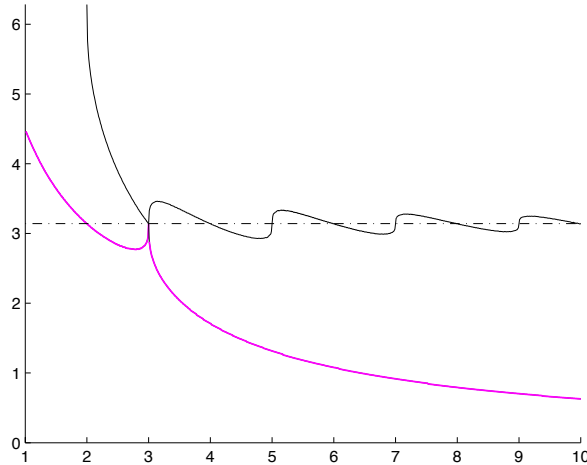


fig. 3-8

Le graphique ci-dessus représente la longueur critique  $l$  en fonction de la valeur de  $b$  pour le cas 5.

### 3.3.3 - Exemples

L'intérêt de la dimension 5 (dimension 4 de l'espace dérivé) réside dans le fait que c'est la dimension minimum permettant de mélanger, à l'intérieur d'un même espace, les fonctions trigonométriques et les fonctions hyperboliques. On sait en effet que ces fonctions, prises dans des espaces séparés présentent des effets de forme complémentaires très utiles en pratique.

Il y a deux manières de faire varier la courbe :

- en jouant sur l'intervalle inter-nœuds  $h$  du vecteur nodal uniforme associé à l'espace de splines considéré. On notera que lorsque  $h$  tend vers 0, la courbe tend vers la courbe polynomiale.
- en jouant sur les paramètres des fonctions. C'est-à-dire en faisant varier le nombre  $a/b$

Les figures ci-dessous présentent divers effets obtenus en faisant varier les paramètres jusqu'à la longueur critique. Le cas polynomial est représenté en pointillés noirs.

#### 3.3.3.1 - Les cas 5 et 1

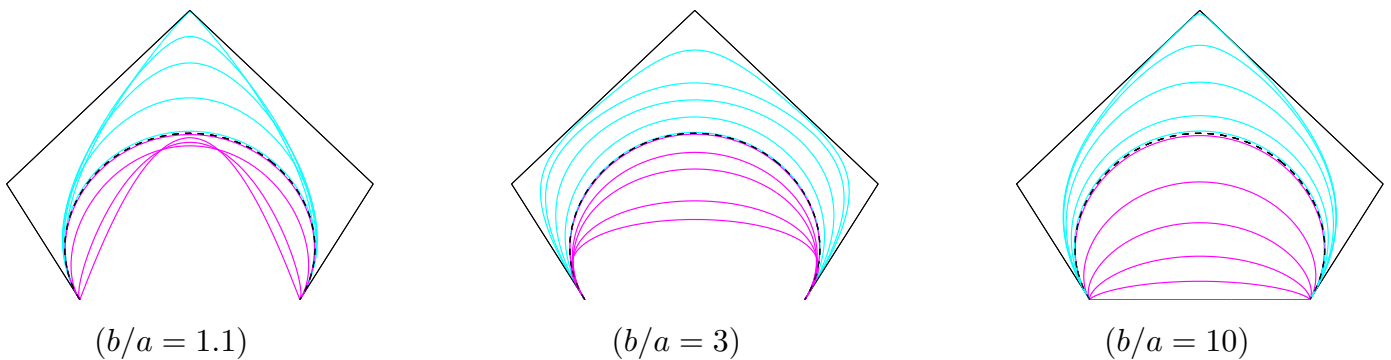
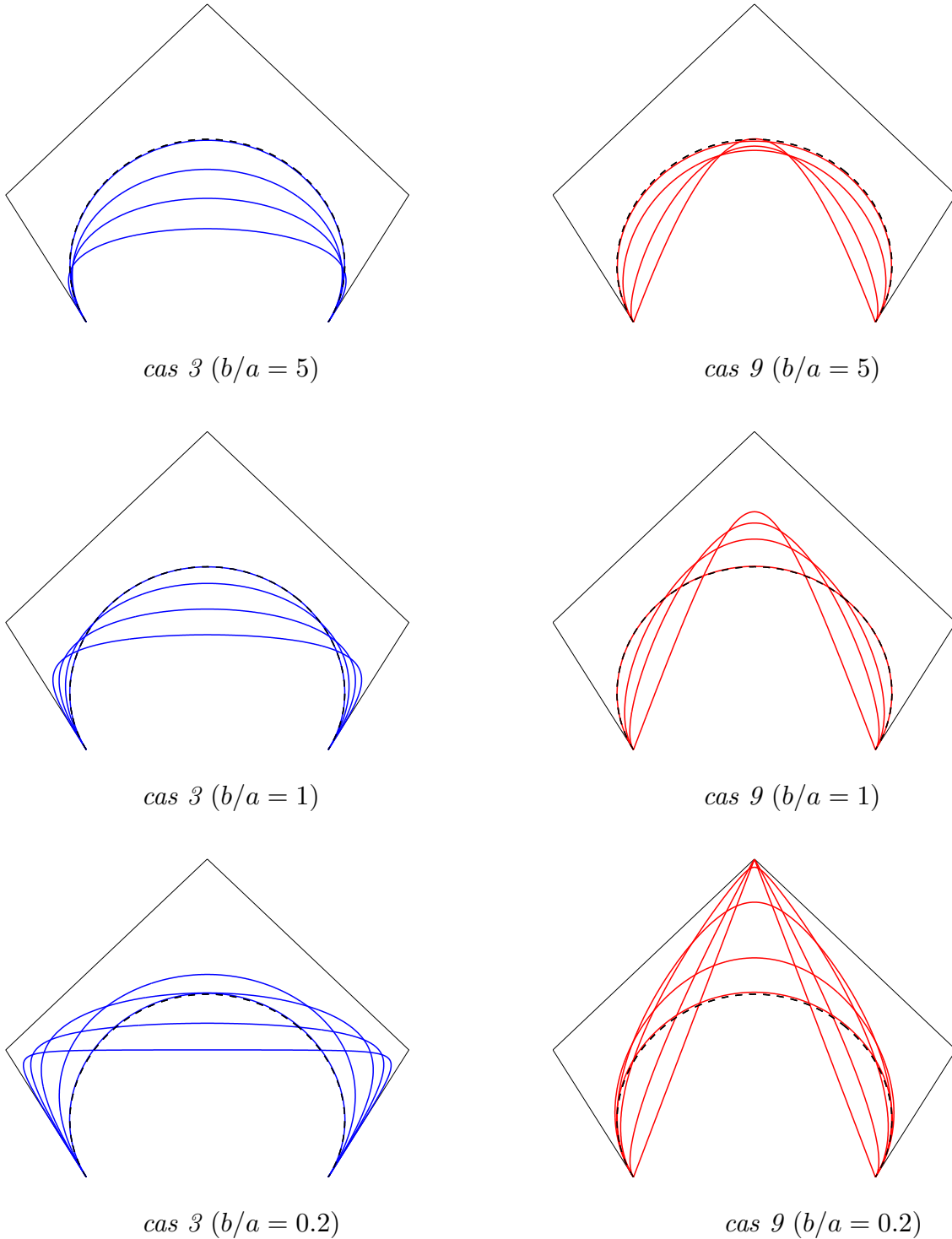


fig. 3-9

Les effets de formes permis par le cas 1 (hyperbolique, en bleu) et le cas 5 (trigonométrique, en rose). La longueur  $h$  varie de  $0^+$  (courbe polynomiale) à  $l^-$  (longueur critique) .



### 3.3.3.2 - Les cas 3 et 9



*cas 3 ( $b/a = 5$ )*

*cas 9 ( $b/a = 5$ )*

*cas 3 ( $b/a = 1$ )*

*cas 9 ( $b/a = 1$ )*

*cas 3 ( $b/a = 0.2$ )*

*cas 9 ( $b/a = 0.2$ )*

*fig. 3.10*

*Les effets de formes permis par le cas 3 (en bleu) et le cas 9 (en rouge). La longueur  $h$  varie de  $0^+$  (courbe polynomiale) à  $l^-$  (longueur critique).*

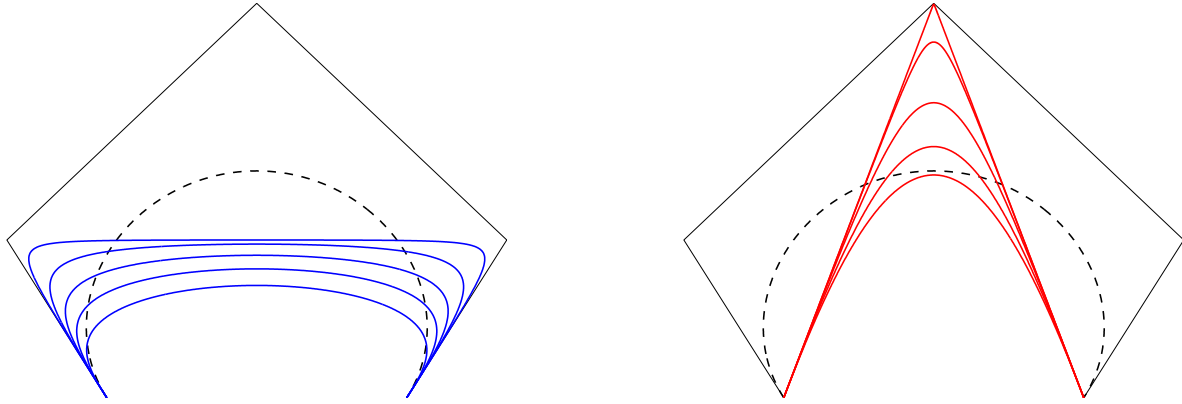


fig. 3-11

Les courbes obtenues pour le cas 3 (en bleu) et le cas 9 (en rouge) lorsque  $h = l^-$  (longueur critique). Le rapport  $b/a$  prend les valeurs 0.2; 0.5; 1; 2; 5; 10 .

En annexe sont présentées les bases de Bernstein pour différents espaces mélangeant les fonctions trigonométriques et hyperboliques, c'est-à-dire issus des cas 3 et 9.

### 3.4 - Les L - splines de dimension 5

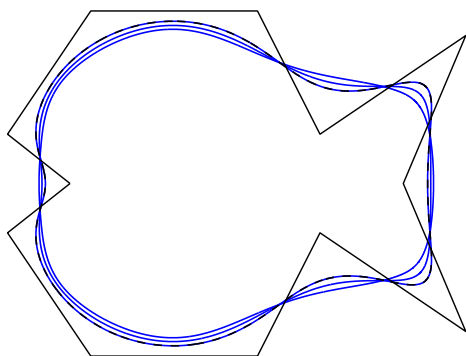
Il s'agissait ici de déterminer la longueur critique pour que les espaces de L-splines de dimension 5 soit *bons pour le design*, ou, ce qui est équivalent, pour qu'ils soient fleuris [Mazure 8 & 9]. Lorsque les espaces-section  $\mathcal{E}_k$  sont fleuris sur tout  $\mathbb{R}$  alors l'espace de splines qu'ils définissent est également fleuri. C'est ce qui se passe lorsque l'équation  $x^4 + a_2x^2 + a_0 = 0$  ne possède que des solutions réelles (cas 1, 2, 6, 7). Dans le cas contraire on se trouve dans le cas *piecewise*.

Le théorème suivant est établi dans [Brilleaud & Mazure 2] :

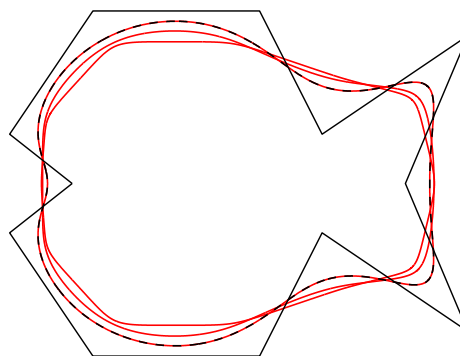
#### **Théorème 3.26 :**

Soit  $\mathcal{S}$  un espace de splines associé à un vecteur nodal uniforme de longueur inter-nœuds  $h$ .  $\mathcal{S}$  est fleuri si et seulement si  $h \leq \frac{\pi}{M}$  où  $M$  est le maximum des parties imaginaires des racines de  $x^4 + a_2x^2 + a_0$

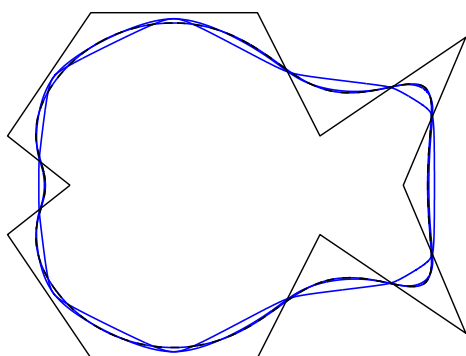
Les espaces principalement étudiés sont ceux qui mélangent les fonctions hyperboliques et trigonométriques, c'est-à-dire les espaces, correspondant aux cas 3 et 9, engendrés par  $(1, \cosh(at), \sinh(at), \cos(bt), \sin(bt))$  et  $(1, \cosh(ax) \cos(bx), \cosh(ax) \sin(bx), \sinh(ax) \cos(bx), \sinh(ax) \sin(bx))$ ,  $a, b > 0$ .



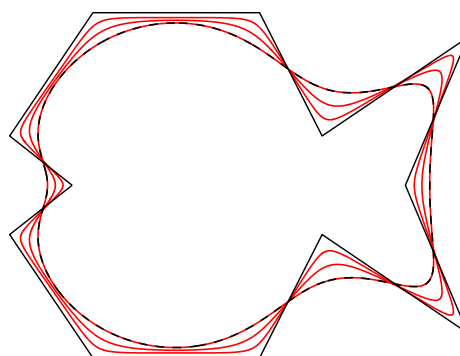
*cas 3 (a = 0.01)*



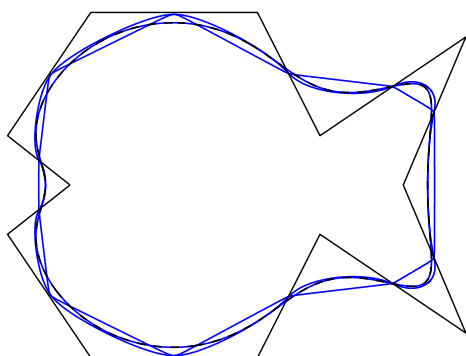
*cas 9 (a = 0.01)*



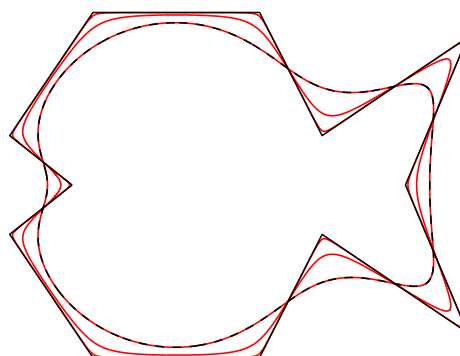
*cas 3 (a = 2)*



*cas 9 (a = 1)*



*cas 3 (a = 4)*



*cas 9 (a = 2)*

*fig. 3-12*

*Courbes splines pour les cas 3 et 9. Partout  $b = 1$  (paramètre des fonctions trigonométriques). Sur chaque figure  $h$  varie de  $0^+$  (courbe polynomiale) à  $\pi^-$  (courbe critique). La spline polynomiale est représentée en pointillée.*

## 3.5 - Subdivision dans les L-espaces de dimension 5

L'objectif de cette partie est de présenter l'algorithme de construction de splines mixtes pour les L-splines de dimension 5. Il est nécessaire, pour ce faire, d'obtenir les coefficients des masques de subdivision associés aux différents espaces. Nous les connaissons déjà dans les cas de l'espace  $\mathcal{E}_7$  (qui est l'espace  $\mathbb{P}^4$ ) et des espaces  $\mathcal{E}_2$  et  $\mathcal{E}_4$  (étudiés au chapitre 2).

### 3.5.1 - Nomenclature

Les 9 espaces décrits plus haut forment la liste exhaustive des espaces de dimension 4 invariants par symétrie. Par intégration on obtient des espaces de dimension 5 contenant les constantes. Les espaces du type  $(1, t, t^2, u, u')$  avec  $u(t) \in \left\{ \frac{\sinh(at)}{a}, \frac{\sin(bt)}{b} \right\}$  ont déjà été étudiés dans le chapitre précédent. Ils correspondent aux cas 2 et 4.

Les autres espaces peuvent également s'écrire de manière synthétique, ce qui permet d'établir des analogies de structure et de mettre en évidence les opérations qui permettent de passer de l'un à l'autre. Ils se répartissent en deux catégories :

- Les espaces du type  $(u, u', v, v')$ 
  - $\mathcal{E}_1$  pour  $u(t) = \frac{\sinh(at)}{a}$  et  $v(t) = \frac{\sinh(bt)}{b}$
  - $\mathcal{E}_2$  pour  $u(t) = \frac{\sinh(at)}{a}$  et  $v(t) = t$
  - $\mathcal{E}_3$  pour  $u(t) = \frac{\sinh(at)}{a}$  et  $v(t) = \frac{\sin(bt)}{b}$
  - $\mathcal{E}_4$  pour  $u(t) = t$  et  $v(t) = \frac{\sin(bt)}{b}$
  - $\mathcal{E}_5$  pour  $u(t) = \frac{\sin(at)}{a}$  et  $v(t) = \frac{\sin(bt)}{b}$
- Les espaces du type  $(uv', u'v, uv, u'v')$ 
  - $\mathcal{E}_6$  avec  $u(t) = \frac{\sinh(at)}{a}$  et  $v(t) = t$
  - $\mathcal{E}_8$  avec  $u(t) = t$  et  $v(t) = \frac{\sin(bt)}{b}$
  - $\mathcal{E}_9$  avec  $u(t) = \frac{\sinh(at)}{a}$  et  $v(t) = \frac{\sin(bt)}{b}$

On peut ainsi associer

les espaces  $\mathcal{E}_2$  et  $\mathcal{E}_6$ ,

les espaces  $\mathcal{E}_4$  et  $\mathcal{E}_8$ ,

les espaces  $\mathcal{E}_3$  et  $\mathcal{E}_9$ .

### 3.5.2 - Floraisons associées aux espaces engendrés par $(1, u, u', v, v')$

**Proposition 3.27 :**

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions circulaires, c'est-à-dire telles que  $u''(t) = \alpha u(t)$  et  $v''(t) = \beta v(t)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ .

Les floraisons associées aux fonctions  $u, u', v$  et  $v'$  dans l'espace de dimension 5 engendré par  $(1, u, u', v, v')$  sont

$$f_1(A, B, C, D) = \frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta} \frac{\sum [u'(x_1) - u'(x_2)]v(x_3 - x_4)}{\sum u(x_1 - x_2)v(x_3 - x_4)}$$

$$f_2(A, B, C, D) = \frac{\beta - \alpha}{\beta} \frac{\sum [u(x_1) - u(x_2)]v(x_3 - x_4)}{\sum u(x_1 - x_2)v(x_3 - x_4)}$$

$$f_3(A, B, C, D) = \frac{\alpha - \beta}{\alpha\beta} \frac{\sum u(x_1 - x_2)[v'(x_3) - v'(x_4)]}{\sum u(x_1 - x_2)v(x_3 - x_4)}$$

$$f_4(A, B, C, D) = \frac{\alpha - \beta}{\alpha} \frac{\sum u(x_1 - x_2)[v(x_3) - v(x_4)]}{\sum u(x_1 - x_2)v(x_3 - x_4)}$$

$$\text{Où } x_1, x_2, x_3, x_4 \in \left\{ \begin{array}{l} ABCD \\ CDAB \\ ADBC \\ BCAD \\ ACDB \\ DBAC \end{array} \right\}$$

(avec la même convention d'écriture que dans la proposition 2.17)

**Preuve :**

En reprenant les notations et la démarche de la proposition 2.16, on note :

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} u \\ u' \\ v \\ v' \end{pmatrix} \quad \mathcal{F}' = \begin{pmatrix} u' \\ \alpha u \\ v' \\ \beta v \end{pmatrix} \quad \mathcal{F}'' = \begin{pmatrix} \alpha u \\ \alpha u' \\ \beta v \\ \beta v' \end{pmatrix} \quad \mathcal{F}^{(3)} = \begin{pmatrix} \alpha u' \\ \alpha^2 u \\ \beta v' \\ \beta^2 v \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} u & u' & \alpha u & \alpha u' \\ u' & \alpha u & \alpha u' & \alpha^2 u \\ v & v' & \beta v & \beta v' \\ v' & \beta v & \beta v' & \beta^2 v \end{vmatrix} = (\alpha - \beta)^2$$

$$n_1 = \begin{vmatrix} 1 & u' & \alpha u & \alpha u' \\ 0 & \alpha u & \alpha u' & \alpha^2 u \\ 0 & v' & \beta v & \beta v' \\ 0 & \beta v & \beta v' & \beta^2 v \end{vmatrix} = \alpha\beta(\alpha - \beta)u \quad n_2 = \begin{vmatrix} 0 & u' & \alpha u & \alpha u' \\ 1 & \alpha u & \alpha u' & \alpha^2 u \\ 0 & v' & \beta v & \beta v' \\ 0 & \beta v & \beta v' & \beta^2 v \end{vmatrix} = -\beta(\alpha - \beta)u'$$

$$n_3 = \begin{vmatrix} 0 & u' & \alpha u & \alpha u' \\ 0 & \alpha u & \alpha u' & \alpha^2 u \\ 1 & v' & \beta v & \beta v' \\ 0 & \beta v & \beta v' & \beta^2 v \end{vmatrix} = -\alpha\beta(\alpha - \beta)v \quad n_4 = \begin{vmatrix} 0 & u' & \alpha u & \alpha u' \\ 0 & \alpha u & \alpha u' & \alpha^2 u \\ 0 & v' & \beta v & \beta v' \\ 1 & \beta v & \beta v' & \beta^2 v \end{vmatrix} = \alpha(\alpha - \beta)v'$$

Le système floral s'écrit, après simplification par  $(\alpha - \beta)$

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta u(A) & -\beta u'(A) & -\alpha\beta v(A) & \alpha v'(A) \\ \alpha\beta u(B) & -\beta u'(B) & -\alpha\beta v(B) & \alpha v'(B) \\ \alpha\beta u(C) & -\beta u'(C) & -\alpha\beta v(C) & \alpha v'(C) \\ \alpha\beta u(D) & -\beta u'(D) & -\alpha\beta v(D) & \alpha v'(D) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha - \beta \\ \alpha - \beta \\ \alpha - \beta \end{pmatrix}$$

Il se résoud en calculant les déterminants :

$$\Delta = \alpha^3\beta^3 \sum u(x_1 - x_2)v(x_3 - x_4)$$

$$\Delta_x = -\alpha^2\beta^2(\alpha - \beta) \sum [u'(x_1) - u'(x_2)]v(x_3 - x_4)$$

$$\Delta_y = -\alpha^3\beta^2(\alpha - \beta) \sum [u(x_1) - u(x_2)]v(x_3 - x_4)$$

$$\Delta_z = \alpha^2\beta^2(\alpha - \beta) \sum u(x_1 - x_2)[v'(x_3) - v'(x_4)]$$

$$\Delta_w = \alpha^2\beta^3(\alpha - \beta) \sum u(x_1 - x_2)[v(x_3) - v(x_4)]$$

d'où le résultat. ■

### 3.5.3 - Masques pour les espaces engendrés par $(1, u, u', v, v')$

Dans ce paragraphe nous donnons les coefficients du masque pour un processus de subdivision dyadique non stationnaire. Ils ont été établis par une méthode calculatoire totalement identique, sur le principe, à celle exposée au chapitre 2 (paragraphe 2.4.1). Elle n'est pas reproduite ici.

Nous faisons l'hypothèse que les coefficients des masques associés aux espaces de dimension  $n + 1$  engendrés par  $(1, t, \dots, t^{n-4}, u, u', v, v')$  peuvent se calculer, à partir de ceux-ci, à l'aide d'une moyenne glissante.

#### Proposition 3.28 :

*On considère un processus de subdivision dyadique non stationnaire qui conduit à une courbe spline paramétrée par un espace  $\mathcal{E}$  engendré par  $(1, u, u', v, v')$ .*

*Le masque de subdivision est*

$$\left[ \frac{1}{4(1+x)(1+y)} \quad \frac{1+2x+2y}{4(1+x)(1+y)} \quad \frac{2+2x+2y+4xy}{4(1+x)(1+y)} \quad \frac{2+2x+2y+4xy}{4(1+x)(1+y)} \quad \frac{1+2x+2y}{4(1+x)(1+y)} \quad \frac{1}{4(1+x)(1+y)} \right]$$

*Avec  $x = u'(h)$ ,  $y = v'(h)$ . En notant  $h$  la longueur inter-nœuds du vecteur nodal obtenu après une étape du processus de subdivision.*

### Conséquence 3.29 :

Avec les notations de la proposition 3.28, les coefficients du masque de subdivision associés à l'espace  $\mathcal{E}$  engendré par  $(1, u, u', v, v')$  peuvent être confondus, pour  $h$  suffisamment petit, avec les coefficients du masque associé à  $\mathbb{P}^4$ .

#### *Preuve :*

D'après 2.2.1.1  $u'$  et  $v'$  sont des fonctions continues telles que  $u'(0) = 1$  et  $v'(0) = 1$ . Lorsque  $h < \frac{\pi}{b}$  alors  $u'(h) \neq -1$  et  $v'(h) \neq -1$ . Les coefficients de la proposition 3.27 sont donc bien définis. Lorsque  $h$  tend vers 0 les coefficients tendent vers

$$\left[ \frac{1}{16} \quad \frac{5}{16} \quad \frac{10}{16} \quad \frac{10}{16} \quad \frac{5}{16} \quad \frac{1}{16} \right]$$

■

Nous pouvons également remarquer que lorsque  $v(t) = t$ , c'est-à-dire  $h = v'(h) = 1$  dans le masque de la proposition 3.28, nous retrouvons les coefficients correspondants aux espaces  $\mathcal{E}_2$  et  $\mathcal{E}_4$  étudiés au chapitre 2 (voir paragraphe 2.4.1.3).

### 3.5.4 - Splines mixtes

Nous disposons à présent d'un assez grand choix de types d'espaces différents pour la construction de splines ainsi que les coefficients des masques de subdivision associés. Les algorithmes de construction de splines peuvent donc être utilisés à condition de respecter la relation  $h < \frac{\pi}{b}$  établie dans le théorème 3.26. ( $h$  est la longueur inter noeuds du vecteur nodal uniforme de la spline limite et  $b$  est la plus grande des parties imaginaires des racines des polynômes caractéristiques définissant les espaces utilisés).

#### *Description de l'algorithme*

On considère une suite de noeuds uniformément répartis tels que  $h < \frac{\pi}{b}$  :

$$\dots, k - 4h, k - 3h, k - 2h, k - h, k, k + h, k + 2h, k + 3h, k + 4h, \dots$$

Ils étiquettent la suite de points de contrôle

$$\dots \left\{ \begin{array}{c} k - 4h \\ k - 3h \\ k - 2h \\ k - h \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} k - 3h \\ k - 2h \\ k - h \\ k \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} k - 2h \\ k - h \\ k \\ k + h \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} k - h \\ k \\ k + h \\ k + 2h \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} k \\ k + h \\ k + 2h \\ k + 3h \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} k + h \\ k + 2h \\ k + 3h \\ k + 4h \end{array} \right\} \dots$$

Soient  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  deux espaces de Chebyshev fleuris.

On considère 2 ensembles de points :

- les points jusqu'à  $\begin{pmatrix} k \\ k+h \\ k+2h \\ k+3h \end{pmatrix}$  inclus contrôlent la courbe limite sur  $] - \infty, k]$ . On note  $\{P_0\}$  cet ensemble.

- les points après  $\begin{pmatrix} k-3h \\ k-2h \\ k-h \\ k \end{pmatrix}$  inclus contrôlent la courbe limite sur  $[k, \infty[$ . On note  $\{Q_0\}$  cet ensemble.

$\mathcal{P}_r$  est le polygone d'approximation à l'étape  $r$ .

Par la suite, on notera  $\{P_r\}$  les points de  $\mathcal{P}_r$  qui contrôlent la courbe limite sur  $] - \infty, k]$ .

C'est-à-dire les points jusqu'à  $\begin{pmatrix} k \\ k+h/2^r \\ k+2h/2^r \\ k+3h/2^r \end{pmatrix}$  inclus.

Et  $\{Q_r\}$  les points de  $\mathcal{P}_r$  qui contrôlent la courbe limite sur  $[k, \infty[$ . C'est-à-dire les points

après  $\begin{pmatrix} k-3h/2^r \\ k-2h/2^r \\ k-h/2^r \\ k \end{pmatrix}$  inclus.

On a  $\mathcal{P}_r = \{P_r\} \cup \{Q_r\}$  mais  $\{P_r\} \cap \{Q_r\} \neq \emptyset$ ,

en fait  $\{P_r\} \cap \{Q_r\} = \left\{ \begin{pmatrix} k-3h/2^r \\ k-2h/2^r \\ k-h/2^r \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k-2h/2^r \\ k-h/2^r \\ k \\ k+h/2^r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k-h/2^r \\ k \\ k+h/2^r \\ k+2h/2^r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ k+h/2^r \\ k+2h/2^r \\ k+3h/2^r \end{pmatrix} \right\}$ .

Soit  $P$  un point de  $\mathbb{R}^d$ , on note  $\max P$  (resp.  $\min P$ ) l'argument de valeur maximale (resp. minimale), dans l'étiquette de  $P$ .

L'algorithme pour calculer les points du nouveau polygone d'approximation est le suivant :

Pour chaque point  $P$  du nouveau polygone d'approximation de l'étape  $r$ ,

- si  $\max P \leq k + h/2^r$  alors on calcule  $P$  avec les coefficients de  $\mathcal{E}_1$

- si  $\min P \geq k - h/2^r$  alors on calcule  $P$  avec les coefficients de  $\mathcal{E}_2$

On désignera par  $\{P_r^\alpha\}$  (resp.  $\{Q_r^\beta\}$ ) l'ensemble des points des points de  $\mathcal{P}_r$  calculés avec les coefficients de  $\mathcal{E}_1$  (resp.  $\mathcal{E}_2$ ).

On a donc  $\{P_r^\alpha\} \subset \{P_r\}$  et  $\{Q_r^\beta\} \subset \{Q_r\}$ .

### Commentaires

On observe le même phénomène d'ajustement que dans l'algorithme exposé au paragraphe 2.5.1. On peut le décrire à l'aide d'une famille de courbes limites.



On note  $\mathcal{F}_r$  (resp.  $\mathcal{G}_r$ ) la courbe limite (spline) obtenue en utilisant l'algorithme de subdivision à partir des points de  $\{P_r\}$  (resp.  $\{Q_r\}$ ) en utilisant les coefficients associés à  $\mathcal{E}_1$  (resp.  $\mathcal{E}_2$ ).  $\mathcal{F}_r$  (resp.  $\mathcal{G}_r$ ) est donc une courbe spline paramétrée sur  $] -\infty, k]$  (resp.  $[k, \infty[$ ) par  $\mathcal{E}_1$  (resp.  $\mathcal{E}_2$ ).

$$\text{Étape 1 : } \max\{P_1^\alpha\} = \begin{Bmatrix} k-h \\ k-h/2 \\ k \\ k+h/2 \end{Bmatrix} \text{ donc } \mathcal{F}_1 \text{ coïncide avec } \mathcal{F}_0 \text{ sur } ] -\infty, k-h].$$

$$\min\{Q_1^\beta\} = \begin{Bmatrix} k-h/2 \\ k \\ k+h/2 \\ k+h \end{Bmatrix} \text{ donc } \mathcal{G}_1 \text{ coïncide avec } \mathcal{G}_0 \text{ sur } [k+h; \infty[$$

On sait donc que sur  $] -\infty, k-h]$ , la courbe limite est du type  $\mathcal{E}_1$ , tandis que sur  $[k+h; \infty[$  elle est du type  $\mathcal{E}_2$ .

$$\text{Étape } r : \max\{P_r^\alpha\} = \begin{Bmatrix} k-2h/2^r \\ k-h/2^r \\ k \\ k+h/2^r \end{Bmatrix} \text{ donc } \mathcal{F}_r \text{ coïncide avec } \mathcal{F}_{r-1} \text{ sur } ] -\infty, k-2h/2^r].$$

$$\min\{Q_r^\beta\} = \begin{Bmatrix} k-h/2^r \\ k \\ k+h/2^r \\ k+2h/2^r \end{Bmatrix} \text{ donc } \mathcal{G}_r \text{ coïncide avec } \mathcal{G}_{r-1} \text{ sur } [k+2h/2^r; \infty[$$

Tout se passe donc comme si, à chaque étape  $k$ , la courbe limite se réajuste sur  $[k-2h/2^r, k]$  avec des coefficients correspondant à  $u(h/2^r)$ .

Lorsque  $r \rightarrow \infty$ ,  $u(h/2^r) \rightarrow 0$  et  $u'(h/2^r) \rightarrow 1$  et on se retrouve dans le cas polynomial. Sur  $[k-2h/2^r, k+2h/2^r]$ , la courbe peut donc, pour  $r \rightarrow \infty$ , être assimilée localement à une courbe polynomiale.

### ***En conclusion***

De récentes recherches ont consisté à déterminer la longueur critique pour le *design* associée à des espaces de Chebyshev de dimension 5. Cette longueur étant connue, il est maintenant possible de l'utiliser dans les processus de subdivision non stationnaires. Le calcul des floraisons a permis de déterminer les coefficients des masques de subdivision associées à certains L-espaces de dimension 5 et à tout espace obtenu par intégration. De la même façon que pour les espaces circulaires du chapitre II, on a pu mettre en oeuvre un algorithme de construction de splines mixtes.

## CONCLUSION

Les travaux de cette thèse sont articulés autour de deux domaines complémentaires :

- La détermination d'espaces de splines de Chebyshev utilisables en *design* géométrique. La démarche a consisté à utiliser des résultats théoriques existants pour les appliquer dans le cas particulier des espaces de L-splines de dimension 5.
- La détermination des masques de subdivision associés à des espaces de L-splines, qui sont ensuite utilisés dans la construction de "splines mixtes". Ces travaux, qui comportent un grand nombre de résultats originaux, ont été menés à l'aide d'un outil habituellement utilisé en *design* : les floraisons.

Les espaces de Chebyshev sont des espaces fonctionnels dans lesquels les problèmes d'interpolation d'Hermite possèdent une solution unique. En intégrant les fonctions de ces espaces de Chebyshev, on obtient des espaces (qui contiennent les constantes) présentant certaines caractéristiques analogues aux espaces de polynômes qui les rendent tout à fait utilisables en *design* géométrique. Les courbes splines paramétrées par ces espaces présentent l'avantage, par rapport aux splines polynomiales, de permettre des effets de forme.

L'utilisation de résultats récents (M-L. Mazure) a permis de (re)déterminer les longueurs critiques des L-espaces de dimension 5. En effet, pour 8 des 9 espaces considérés, ces longueurs avaient déjà été calculées, à l'aide d'une autre méthode, par l'équipe de J-M. Peña. L'intérêt des résultats de M-L. Mazure est qu'ils donnent des conditions nécessaires et suffisantes (en utilisant les fonctions poids) pour ces longueurs alors que, jusqu'à présent, seule la condition suffisante avait fait l'objet d'une démonstration (avec la totale positivité). L'espace manquant, réalisant une combinaison de fonctions composites trigonométriques et hyperboliques, n'avait jamais été étudié.

L'intérêt d'utiliser des L-espaces de dimension 5 est que parmi eux se trouvent les espaces fonctionnels de plus petite dimension qui combinent des fonctions trigonométriques et des fonctions hyperboliques. On peut donc utiliser ces espaces pour construire des L-splines en les paramétrant pour tirer parti des propriétés graphiques de ces deux types de fonctions.

### ***Floraisons***

Une autre façon, plus directe, de caractériser les espaces fonctionnels utilisables en *design* est la notion de floraison. Les floraisons sont un merveilleux outil pédagogique, largement sous-exploité, qui rend compte, de manière analytique, des algorithmes de *design* géométrique.

À chaque fonction d'un espace fonctionnel de dimension  $n + 1$  contenant les constantes, on associe une fonction de  $n$  variables, symétrique et pseudo-affine par rapport à chaque variable. Dans le cas particulier d'un espace polynomial, la fonction de  $n$  variables est affine

par rapport à chaque variable. Grâce à cette identification, toute fonction de l'espace considéré se définit également comme une cascade de combinaisons pseudo-affines. Cette façon de construire une fonction correspond très exactement à la construction géométrique de type corner-cutting que l'on retrouve dans les algorithmes de *design* géométrique. De fait, lorsque, pour un espace fonctionnel donné, on peut, à chacune de ses fonctions, faire correspondre une floraison, on peut y mettre en œuvre les algorithmes de *design* géométrique. Les floraisons caractérisent donc les espaces de Chebyshev qu'on pourrait qualifier de "bons pour le *design*".

**On peut ainsi construire une correspondance entre les éléments usuels de l'univers du *design* géométrique et les éléments de l'univers des floraisons. Un certain nombre de concepts, de propriétés ou d'algorithmes peuvent ainsi être reformulés sous l'angle des floraisons, s'adaptant ainsi à tout espace de Chebyshev utilisable en *design*.**

Le problème est alors de déterminer la floraison associée à une fonction d'un espace fonctionnel donné. Car si les floraisons possèdent une forme algébrique relativement simple dans le cas polynomial, ce n'est, en revanche pas le cas pour les espaces de Chebyshev. Pour les déterminer il est alors nécessaire de les définir en termes d'intersection d'hyperplans osculateurs à une courbe donnée. La difficulté est ici d'opérer dans des dimensions supérieures à 3. En effet, les floraisons associées à des fonctions d'espaces fonctionnels de dimension  $n + 1$  se calculent à partir d'une courbe paramétrée dans  $\mathbb{R}^n$ . Les hyperplans tangents à partir desquels se définissent les floraisons sont donc de dimension  $n - 1$ . En pratique, les seuls calculs à effectuer sont donc des résolutions de systèmes linéaires d'ordre  $n$ . Une piste - non réalisée dans cette thèse - pour améliorer la vitesse de calcul serait alors de "paralléliser" le calcul des déterminants.

### *Application à la subdivision*

Le cœur de ce travail a été effectué dans le domaine de l'approximation, et, plus particulièrement, des subdivisions non interpolantes. Il a consisté à utiliser des floraisons pour traduire les algorithmes corner-cutting de subdivision des espaces de polynômes, comme cela existait pour les algorithmes de *design*. L'idée sous-jacente étant de transposer ensuite ces algorithmes dans les espaces de Chebyshev.

Finalement, il s'avère que l'outil des floraisons s'adapte encore mieux aux subdivisions puisque de nombreuses simplifications s'y opèrent (par rapport au contexte du *design*). Les masques de subdivision s'expriment ainsi assez simplement et acquièrent une régularité de formulation lorsqu'on passe d'une dimension d'espace à la dimension supérieure. Cette régularité est la base du processus permettant l'obtention de tous les masques en dimension

supérieure, qui est formulé dans ce manuscrit par le "théorème d'intégration".

Cette démarche s'adapte également parfaitement aux subdivisions  $m$ -adiques: au lieu d'insérer un nœud dans chaque intervalle inter-nœud, on en insère  $m - 1$  uniformément répartis. La matrice de raffinement correspondante est alors une matrice décalée d'ordre  $m$ , au lieu d'une matrice décalée d'ordre 2. Dans le théorème d'intégration, les moyennes glissantes sur deux éléments sont remplacées par des moyennes glissantes sur  $m$  éléments. Les cas Chebyshev correspondent à des processus de subdivision non stationnaires. Les éléments des masques associés ne sont plus des constantes mais des fonctions dépendant de la taille de l'intervalle inter-nœud.

Au final, nous disposons, via les floraisons et le théorème d'intégration, d'un ensemble de masques associés à un ensemble de processus définis par la vitesse de convergence ( $m$ -adique) et le type d'espace (les L-espaces jusqu'à la dimension 5, ainsi que tous les espaces associés obtenus par intégration).

### ***Construction de splines mixtes***

Ce qu'on trouve dans la littérature comme "splines mixtes" sont des fonctions splines définies sur un espace qui mélange fonctions trigonométriques et hyperboliques, ce qui permet, en jouant sur les paramètres, de tirer parti des deux types de fonctions. Les objets conçus en *design* sont souvent composés de parties ayant des caractéristiques géométriques différentes. C'est pourquoi un des objectifs des travaux de cette thèse dans le cadre du *design* géométrique est la détermination de conditions pour la construction de splines dont les morceaux sont issus de différents espaces fonctionnels. À partir d'une démarche ayant pour cadre les splines polynomiales à matrice de connexion (Mazure), ces conditions sont déterminées dans le cas général des espaces de splines de Chebyshev de dimension 5 avec matrice de connexion. Pour l'adapter au cas des splines paramétriques, il suffit de considérer des matrices de connexion identités. Mais les conditions obtenues restent généralistes et théoriques. Quelques recherches utilisant les fonctions poids et le cadre du *design* géométrique ont été réalisées, sans aboutir.

Un changement de perspective a alors permis d'obtenir ces splines "mixtes". Les coefficients correspondant aux différents L-espaces dans le cadre des processus de subdivision peuvent en effet être associés dans les algorithmes de construction.

### ***Les cas non uniformes***

Une direction intéressante (peu exploitée dans cette thèse, faute de temps) est la construction de splines non uniformes, c'est-à-dire quand les processus ne peuvent pas se traduire par une matrice décalée. Les floraisons permettant l'étiquetage des points (et donc le calcul des coefficients nécessaires à leur détermination) en temps réel, les algorithmes deviennent

adaptables. On peut donc s'affranchir de la contrainte de l'uniformité dans plusieurs directions:

- les splines avec des nœuds de multiplicité supérieure à 1
- les processus non uniformes plus ou moins complexes
- l'adaptabilité de la vitesse de convergence en fonction de la forme de la courbe (par exemple en utilisant des processus  $m$ -adiques dans les "tournants" et des processus diadiques dans les endroits de forme régulière).

### *Quelques prolongements et perspectives*

Des méthodes utilisées dans les travaux portant sur les subdivisions pourraient être réinvesties en *design* géométrique. Par exemple, dans [Brilleaud & Mazure 1] et [Brilleaud & Mazure 2] qui traitent des applications pratiques de résultats théoriques déjà obtenus (Mazure), les raisonnements, calculatoires, se font espace par espace, au niveau de la formulation algébrique explicite. Il est possible d'avoir un calcul unique unifiant les 9 L-espaces, puisque, provenant du même opérateur différentiel, ils sont liés par des changements de paramètres et des passages à la limite. Cette approche vise à éclairer les invariants de structure en jeu dans la détermination de la longueur critique. Toujours à propos de longueur critique, les résultats obtenus sur les masques de subdivision pour les espaces de L-splines devraient permettre d'approfondir les résultats de [Brilleaud & Mazure 2] et apporter quelques éléments de réponses à la question de l'universalité de la majoration proposée dans cet article.

Le lien qui apparaît entre la totale positivité et les bases de de Boor (les bases de de Boor sont normalisées totalement positives) mériterait d'être creusé davantage.

De la même manière, le fait de dépasser la longueur critique n'empêche pas forcément les algorithmes de "tourner" et il pourrait être intéressant d'en étudier les effets. Lorsqu'on dépasse la longueur critique, la condition de positivité des fonctions de base n'est plus respectée, ce qui entraine un dépassement de l'enveloppe convexe. En *design*, par exemple, les courbes paramétrées de l'espace  $(1, \cos(at), \sin(at))$  sont des arcs d'ellipse. Tant qu'on reste en deçà de la longueur critique pour le *design* de l'espace, l'arc reste dans l'enveloppe convexe de ses points de contrôle. Si le paramétrage se fait sur un intervalle de longueur double, on reconstitue l'ellipse entière. Dans le cadre de certains problèmes d'approximation, il pourrait s'avérer pertinent de se permettre de dépasser cette condition de positivité tout en veillant à la stabilité du processus et donc aux conditions sur les coefficients de subdivision pour garantir cette stabilité (Rabut).

La démarche utilisée dans cette thèse (traduction des algorithmes en termes de floraisons

puis transposition aux espaces de Chebyshev) s'est avérée très fructueuse dans le cas des subdivisions non interpolantes.

Cette démarche pourrait être étendue dans la suite de ces travaux aux subdivisions interpolantes ou aux algorithmes de compression (cela n'a pas été fait, faute de temps).

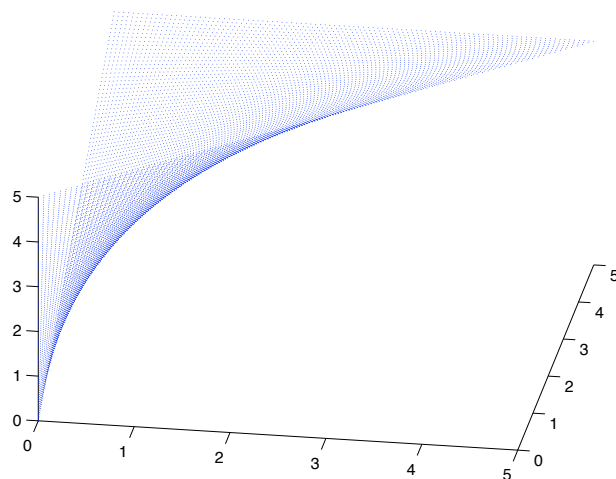
En quittant le domaine du *design* géométrique et de l'approximation, on peut montrer que les floraisons permettent aussi la démonstration de résultats de géométrie euclidienne. Des alignements de barycentres peuvent ainsi, par exemple, se démontrer à l'aide des floraisons. La construction de triangles dont les 3 côtés sont tangents à une courbe donnée se réalise facilement par les floraisons. L'intérêt des raisonnements utilisant les floraisons est qu'ils sont indépendants de la dimension de l'espace considéré. Ainsi, pour une cubique de l'espace, on trouve facilement les coordonnées des sommets d'un tétraèdre dont chacune des 4 faces est tangente à la courbe.

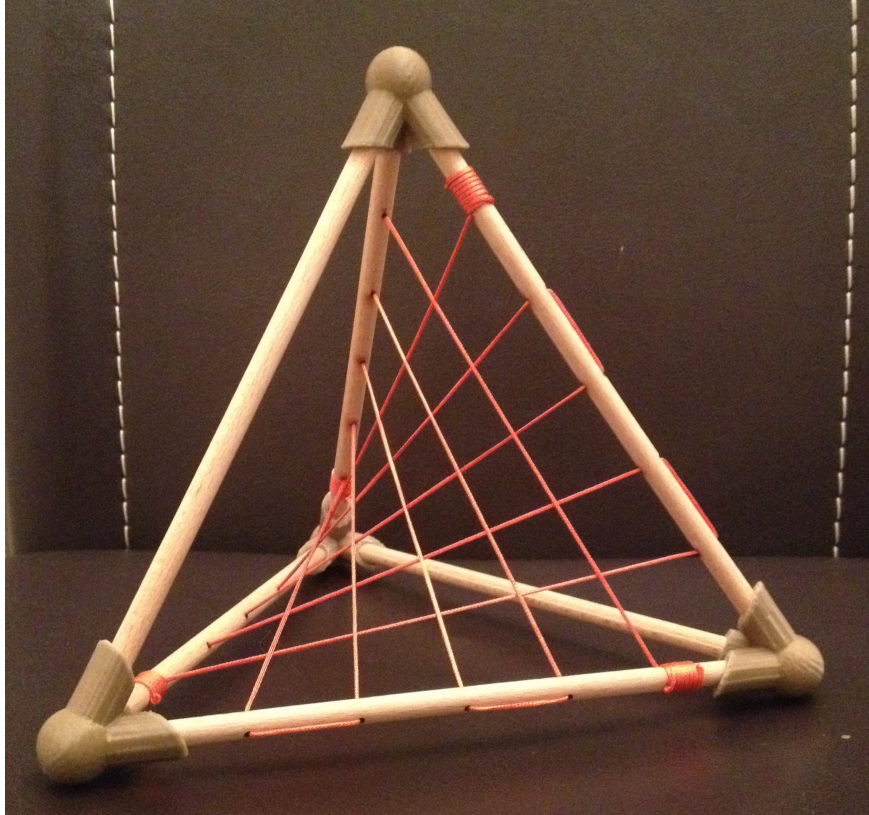
Plusieurs théorèmes usuels de géométries peuvent être démontrés via les floraisons, en remplaçant les arguments réels des étiquettes par des complexes (Ait-Haddou).

Il existe également un lien entre les floraisons et les fractales (Goldman).

Cette thèse s'est attachée à l'étude de courbes, dont on peut ensuite former les surfaces par produit de convolution. On trouve dans la littérature des travaux sur l'utilisation des floraisons pour générer directement des surfaces par raffinement de "tuiles" (Sablonière).

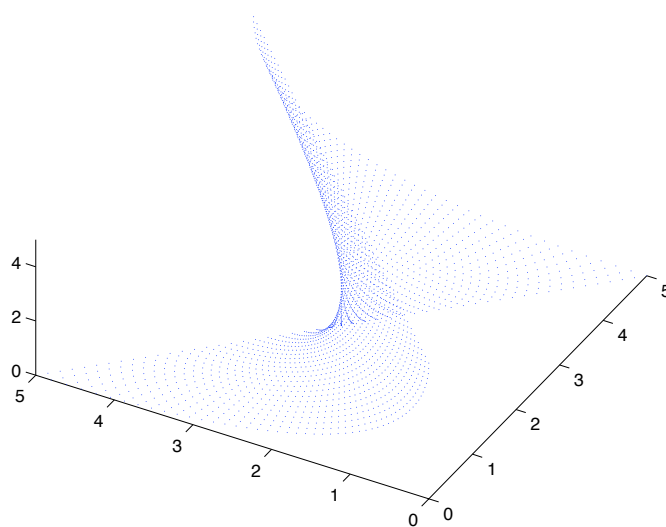
Une utilisation d'étiquettes en dimension 2, conduit à la représentation discrète de surfaces sous forme de grilles de points. Ce qui est, bien évidemment, généralisable aux espaces de Chebyshev.





*Construction réalisée au FabLab MSTIC. Les lacets matérialisent un parabolöide hyperbolique.*

*Les points de contrôle sont les sommets du tétraèdre. Chaque point de la surface se trouve à l'intersection de deux droites, c'est-à-dire qu'il s'obtient par une suite de combinaisons affines à partir des points de contrôle.*



## BIBLIOGRAPHIE

- [Ayari] **Ayari, S.** (1997). *Schémas de subdivision pour la construction de courbes* - Thèse de l'Université de Montréal.
- [Barry] **Barry, P. J.** (1996). De Boor-Fix dual functionals and algorithms for Tchebycheffian B-splines curves. *Constructive Approximation*, 12, 385–408.
- [Boehm, Farin & Kahmann] **Boehm, W., Farin, G., Kahmann, J.** (1984). A survey of curve and surface methods in CAGD. *Computer aided geometric design*, 1(1), 1-60.
- [Brilleaud & Mazure 1] **Brilleaud, M., Mazure, M. L.** (2012). Mixed hyperbolic/trigonometric spaces for design. *Computers & Mathematics with Applications*, 64(8), 2459-2477.
- [Brilleaud & Mazure 2] **Brilleaud, M., Mazure, M. L.** (2014). Design with L-splines. *Numerical Algorithms*, 65(1), 91-124.
- [Buhmann & Micchelli] **Buhmann, M. D., Micchelli, C. A.** (1994). Using two-slanted matrices for subdivision. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(2), 428-448.
- [Carnicer] **Carnicer, J. M.** (1999). Interpolation, shape control and shape properties, in *Shape preserving representations for Computer-Aided Design*, Nova Science Pub., 43.
- [Carnicer, Mainar & Peña ] **Carnicer, J. M., Mainar, E., Peña, J. M.** (2003). Critical length for design purposes and extended Chebyshev spaces. *Constructive Approximation*, 20(1), 55-71.
- [Carnicer & Peña 1] **Carnicer, J. M., Peña, J. M.** (1994). Totally positive bases for shape preserving curve design and optimality of B-splines. *Computer aided geometric design*, 11(6), 633-654.
- [Carnicer & Peña 2] **Carnicer, J. M., Peña, J. M.** (1993). Shape preserving representations and optimality of the Bernstein basis. *Adv. Comput. Math*, 1, 173-196.
- [Cavaretta, Dahmen & Micchelli] **Cavaretta, A. S., Dahmen, W., & Micchelli, C. A.** (1991). *Stationary subdivision* (Vol. 453). American Mathematical Soc..
- [Chaikin] **Chaikin, G. M.** (1974). An algorithm for high-speed curve generation. *Computer graphics and image processing*, 3(4), 346-349.
- [De Boor] **De Boor, C.** (1978). *A Practical Guide to Spline*, Springer.
- [De Casteljaou] **De Casteljaou, P. F.** (1985). *Forme à poles*, Mathématiques et CAO 2, Hermes Publishing.



- [De Rham] **de Rham, G.** (1956). Sur une courbe plane. *J. Math. Pures Appl*, 39, 25-42.
- [Dyn & Levin] **Dyn, N., & Levin, D.** (2002). Subdivision schemes in geometric modelling. *Acta Numerica*, 11, 73-144.
- [Farin] **Farin, G.** (1992). *Courbes et surfaces pour la CGAO*, Masson.
- [Goodman] **Goodmann, T.N.T.** (1999). Shape properties of normalized totally positive bases, in *Shape preserving representations for Computer-Aided Design*, Nova Science Pub., 45-62.
- [Karlin] **Karlin, S.** (1968). *Total positivity (Vol. 1)*. Stanford University Press.
- [Karlin & Studden] **Karlin S.J., Studden W.J.** (1966). *Tchebycheff Systems: with applications in analysis and statistics*, Wiley Interscience, N.Y.
- [Laurent & Mazure 1] **Laurent, P.-J., Mazure, M.-L.** (1993). Affine and non affine Blossom, in *Computational Geometry*, World Scientific, 201-230.
- [Laurent & Mazure 2] **Laurent, P.-J., Mazure, M.-L.** (2001). Contrôle de courbes et paramètres de forme. Proceedings de la journée ENSAM en l'honneur de Pierre Bézier, 31-54.
- [Mazure 1] **Mazure, M. L.** (2012). Polynomial splines as examples of Chebyshevian splines. *Numerical Algorithms*, 60(2), 241-262.
- [Mazure 2] **Mazure, M. L.** (2005). Chebyshev spaces and Bernstein bases. *Constructive approximation*, 22(3), 347-363.
- [Mazure 3] **Mazure, M. L.** (2011). Finding all systems of weight functions associated with a given extended Chebyshev space. *Journal of Approximation Theory*, 163(3), 363-376.
- [Mazure 4 ] **Mazure, M. L.** (2012). On a new criterion to decide whether a spline space can be used for design. *BIT Numerical Mathematics*, 52(4), 1009-1034.
- [Mazure 5] **Mazure, M. L.** (2012). From Taylor interpolation to Hermite interpolation via duality. *Jaén Journal on Approximations*, 4(1), 15-45.
- [Mazure 6] **Mazure, M. L.** (2006). Ready-to-blossom bases in Chebyshev spaces. *Studies in Computational Mathematics*, 12, 109-148.
- [Mazure 7] **Mazure, M. L.** (1999). Blossoming and CAGD algorithms, in *Shape preserving representations for Computer-Aided Design*, Nova Science Pub., 99-117.
- [Mazure 8] **Mazure, M. L.** (2004). Blossoms and optimal bases. *Advances in Computational Mathematics*, 20(1-3), 177-203.

- [Mazure 9] **Mazure, M. L.** (2004). On the equivalence between existence of B-spline bases and existence of blossoms. *Constructive approximation*, 20(4), 603-624.
- [Mazure 10] **Mazure, M. L.** (2011). How to build all Chebyshevian spline spaces good for geometric design?. *Numerische Mathematik*, 119(3), 517-556.
- [Mazure 11] **Mazure, M. L.** (2005). Chebyshev spaces and Bernstein bases. *Constructive approximation*, 22(3), 347-363.
- [Mazure 12] **Mazure, M. L.** (1996). *Chebyshev Blossoming*, RR 953-M IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- [Mazure 13] **Mazure, M. L.** (1998). *Polynomial Chebyshev blossoms*, RR 1001-M IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- [Mazure 14] **Mazure, M. L.** (2002). B-spline bases and osculating flats: One result of H.-P. Seidel revisited. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 36(6), 1177-1186.
- [Mazure 15] **Mazure, M. L.** (1999). Blossoming: a geometrical approach. *Constructive Approximation*, 15(1), 33-68.
- [Menar & Peña 1] **Mainar, E., Peña, J. M.** (2010). Optimal bases for a class of mixed spaces and their associated spline spaces. *Computers & mathematics with applications*, 59(4), 1509-1523.
- [Mainar, Peña & Sanchez-Reyes] **Mainar, E., Peña, J. M., Sanchez-Reyes, J.** (2001). Shape preserving alternatives to the rational Bézier model. *Computer aided geometric design*, 18(1), 37-60.
- [Melkemi] **Melkemi, K.** (1999). *Orthogonalité des B-splines de Chebyshev dans un espace de Sobolev* - Thèse de l'Université Joseph Fourier (Grenoble).
- [Peña 1] **Peña, J. M.** (1999). Bases with optimal shape preserving properties, in *Shape preserving representations for Computer-Aided Design*, Nova Science Pub., 63-84.
- [Peña 2] **Peña, J. M.** (1997). Shape preserving representations for trigonometric polynomial curves. *Computer Aided Geometric Design*, 14(1), 5-11.
- [Pottmann 1] **Pottmann, H.** (1993). The geometry of Tchebycheffian splines. *Computer Aided Geometric Design*, 10(3-4), 181-210.
- [Ramshaw 1] **Ramshaw, L.** (1987). *Blossoming: a connect-the dots approach to splines*, Technical report, Digital Systems Research Center, Palo Alto, CA.

[Ramshaw 2] **Ramshaw, L.** (1989). Blossoms are polar forms. *Computer Aided Geometric Design*, 6(4), 323-358.

[Schumaker] **Schumaker L.L.** (1981). *Spline Functions, Basic Theory*, Wiley Interscience, N.Y.

[Seidel 1] **Seidel, H. P.** (1989). A new multiaffine approach to B-splines. *Computer Aided Geometric Design*, 6(1), 23-32.

[Seidel 2] **Seidel, H. P.** (1993). An introduction to polar forms. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 13(1), 38-46.

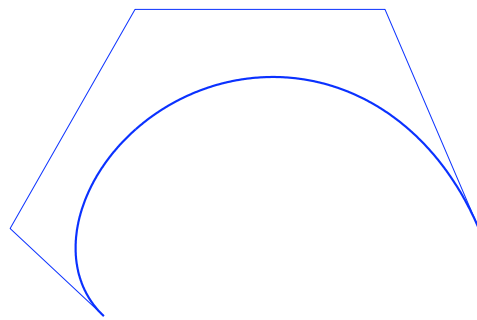
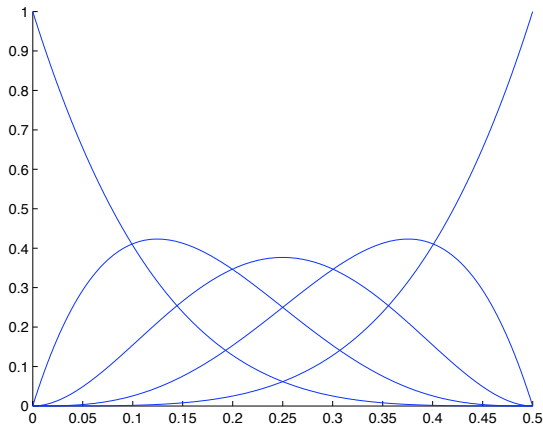
[Seidel 3] **Seidel, H. P.** (1992). New algorithms and techniques for computing with geometrically continuous spline curves of arbitrary degree. *RAIRO-Modélisation mathématique et analyse numérique*, 26(1), 149-176.

## ANNEXE 1

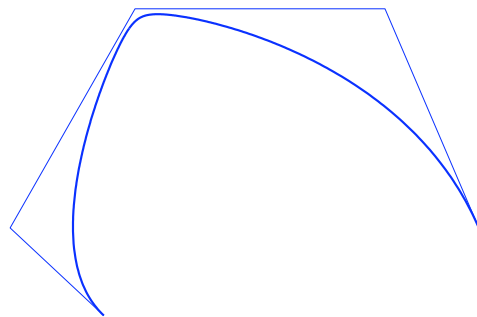
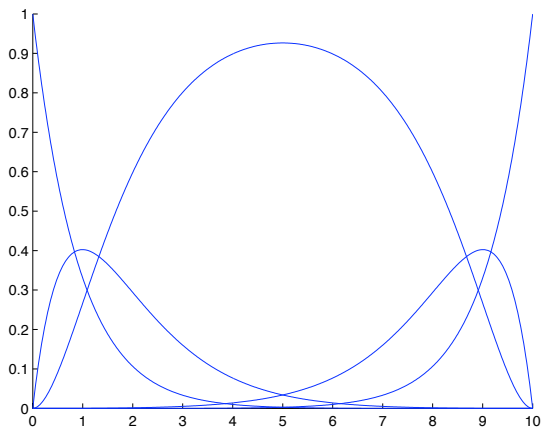
Les figures ci-dessous représentent les bases de Bernstein de différents EC-espaces de dimension 5 *bons pour le design*, ainsi qu'une courbe paramétrique et son polygone de contrôle dans cette base pour des paramètres  $a = 1$  et  $b = 0.1$  et différentes valeurs de  $h$ .

a) Dans le cas 9 : L'espace  $\mathcal{F}_9$  est construit par intégration à partir de  $\mathcal{E}_9$  (engendré par les fonctions  $\cosh(ax) \cos(bx)$ ,  $\cosh(ax) \sin(bx)$ ,  $\sinh(ax) \cos(bx)$ ,  $\sinh(ax) \sin(bx)$ ).

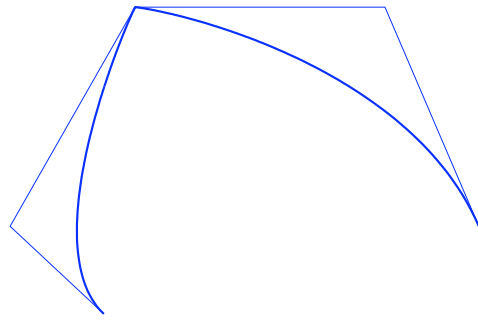
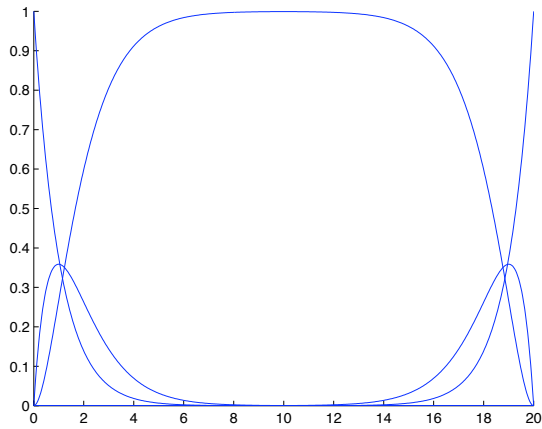
★  $h = 0.5$



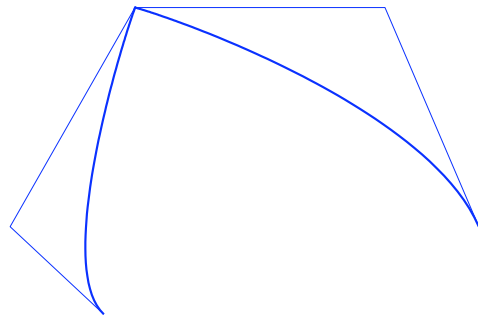
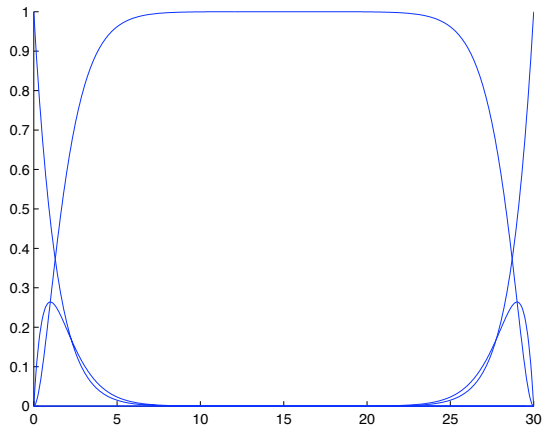
★  $h = 10$



★  $h = 20$

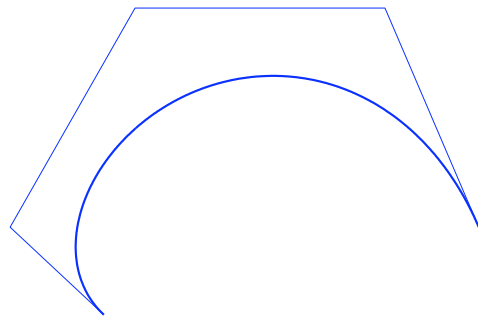
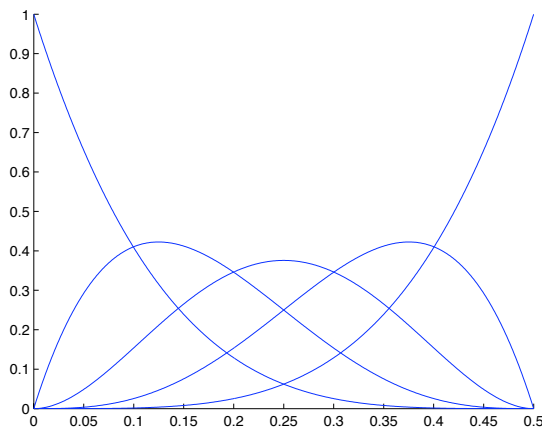


★  $h = 30$

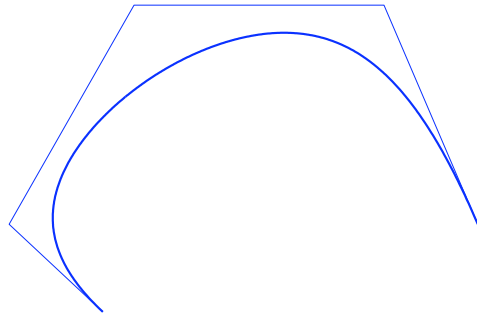
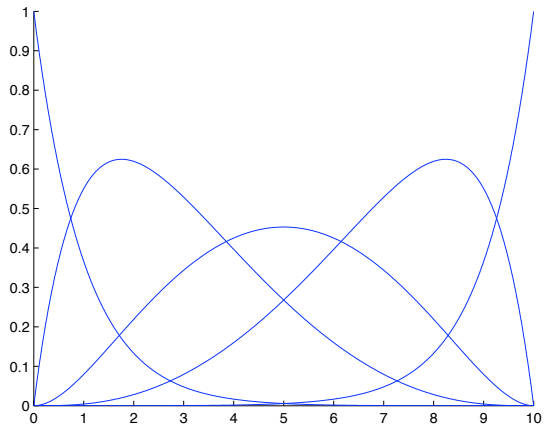


b) Dans le cas 3 : L'espace  $\mathcal{F}_3$  est construit par intégration à partir de  $\mathcal{E}_3$  (engendré par les fonctions  $\cosh(ax)$ ,  $\sinh(ax)$ ,  $\cos(bx)$ ,  $\sin(bx)$ ).

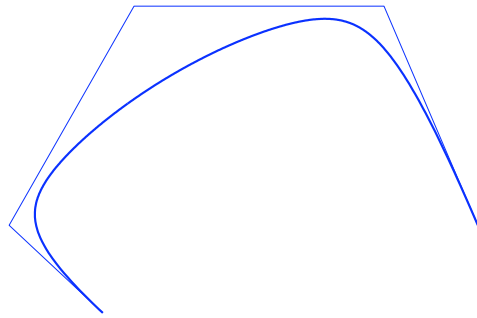
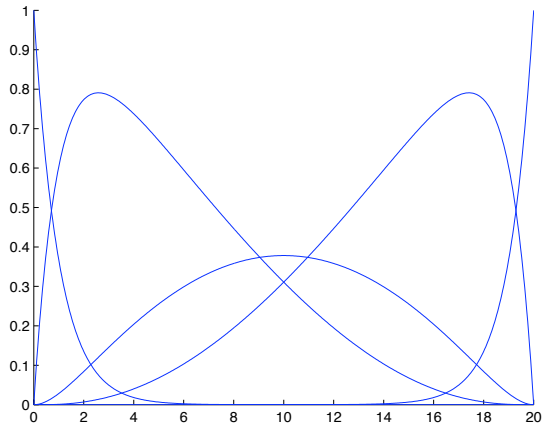
★  $h = 0.5$



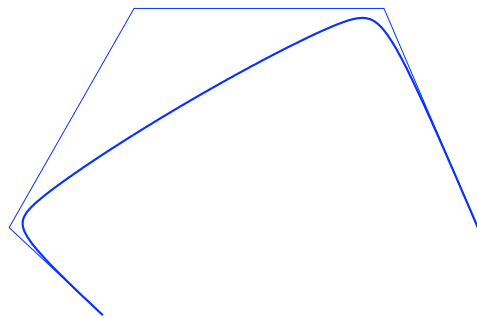
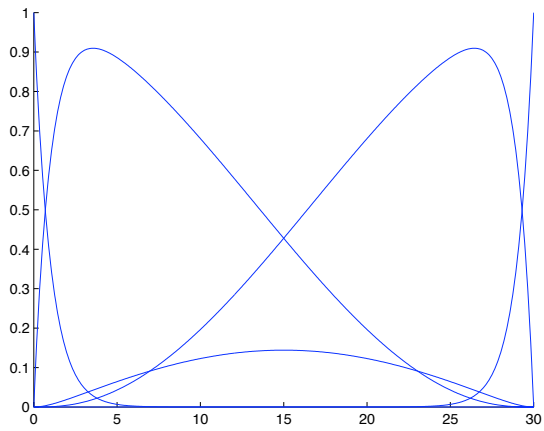
★  $h = 10$



★  $h = 20$



★  $h = 30$



## ANNEXE 2

### Les algorithmes de subdivision pour les splines mixtes

#### *En dimension 3*

L'algorithme ci-dessous (Matlab) construit une spline mixte de 4 morceaux. Il a été utilisé pour construire les figures  $E$  à  $K$  de l'introduction et les figures 2-18 à 2-20.

L'entrée est la matrice des points de contrôle, la sortie la matrice des points de la courbe limite.

Les commentaires sont précédés du symbole %.

```
M=[-5 -5 -1 -7 -7 -1 -5 5 1 7 7 1 5 5
-7 -7 -1 -5 5 1 7 7 1 5 -5 -1 -7 -7];    % polygone de controle
taille=14;    % taille=N1+N2+N3+N4+2 (taille de la matrice M)
h=1;    % intervalle inter-nœuds
it=6;    % Nombre d'itérations
N1=3;    % taille en intervalles de chacune des parties
N2=3;
N3=3;
N4=3;

h=h/2;
for j=1:it
    for i=1:N1
        u=1;    % cas polynomial
        % u=cos(2.8*h);    % cas trigo (coeff < 3.14)
        a=1/(2*u+2);
        N(:,2*i-1)=a*M(:,i)+(1-a)*M(:,i+1);
        N(:,2*i)=(1-a)*M(:,i+1)+a*M(:,i+2);
    end

    for i=1+N1:N1+N2
        % u=1;
        u=cos(2.9*h);    % cas trigo (coeff < 3.14)
        a=1/(2*u+2);
        N(:,2*i-1)=a*M(:,i)+(1-a)*M(:,i+1);
        N(:,2*i)=(1-a)*M(:,i+1)+a*M(:,i+2);
    end
end
```

```

end
for i=1+N1+N2:N1+N2+N3
    % u=1;
    u=cosh(3*h);    % cas hyperbolique
    a=1/(2*u+2);
    N(:,2*i-1)=a*M(:,i)+(1-a)*M(:,i+1);
    N(:,2*i)=(1-a)*M(:,i+1)+a*M(:,i+2);
end
for i=1+N1+N2+N3:N1+N2+N3+N4
    % u=1;
    u=cosh(5*h);    % cas hyperbolique
    a=1/(2*u+2);
    N(:,2*i-1)=a*M(:,i)+(1-a)*M(:,i+1);
    N(:,2*i)=(1-a)*M(:,i+1)+a*M(:,i+2);
end
taille=2*(N1+N2+N3+N4);
for i=1:taille
    M(:,i)=N(:,i);
end
h=h/2;
N1=2*N1-1;
N2=2*N2;
N3=2*N3;
N4=2*N4-1;
end

```

#### ***En dimension 4***

L'algorithme ci-dessous (Matlab) construit une spline mixte de 4 morceaux. Il a été utilisé pour construire les figures 2-21 à 2-25.

L'entrée est la matrice des points de contrôle, la sortie la matrice des points de la courbe limite.

Les commentaires sont précédés du symbole %.



```

M=[-5 -1 -7 -7 -1 -5 5 1 7 7 1 5 -7 -1 -5 5 1 7 7 1 5 -5 -1 -7];
taille=15;      %taille= N1+N2+N3+N4+3 (taille de la matrice M)
h=1;          % intervalle inter-nœuds
it=5;        % Nombre d'itérations
N1=3;        % taille en intervalles de chacune des parties
N2=2;
N3=2;
N4=2;
h=h/2;

for j=1:it

    for i=1:N1+1
        %u=1;      % cas polynomial
        u=cos(2.8*h);    % cas trigonométrique : coeff < pi/h
        b=1/(4*u+4);
        c=(4*u+2)/(4*u+4);
        N(:,2*i-1)=(M(:,i)+M(:,i+1))/2;
        N(:,2*i)=b*M(:,i)+c*M(:,i+1)+b*M(:,i+2);
    end

    for i=2+N1:N1+N2+1
        u=1;
        %u=cos(4*h);
        b=1/(4*u+4);
        c=(4*u+2)/(4*u+4);
        N(:,2*i-1)=(M(:,i)+M(:,i+1))/2;
        N(:,2*i)=b*M(:,i)+c*M(:,i+1)+b*M(:,i+2);
    end

    for i=2+N1+N2:N1+N2+N3+1
        %u=1;
        u=cosh(2*h);    % cas hyperbolique
        b=1/(4*u+4);
        c=(4*u+2)/(4*u+4);
        N(:,2*i-1)=(M(:,i)+M(:,i+1))/2;
        N(:,2*i)=b*M(:,i)+c*M(:,i+1)+b*M(:,i+2);
    end
end

```

```

for i=2+N1+N2+N3:N1+N2+N3+N4+1
    %u=1;
    u=cosh(4.8*h);    % cas hyperbolique
    b=1/(4*u+4);
    c=(4*u+2)/(4*u+4);
    N(:,2*i-1)=(M(:,i)+M(:,i+1))/2;
    N(:,2*i)=b*M(:,i)+c*M(:,i+1)+b*M(:,i+2);
end

taille=2*(N1+N2+N3+N4+1)+1;
N(:,taille)=(M(:,N1+N2+N3+N4+2)+M(:,N1+N2+N3+N4+3))/2;
for i=1:taille
    M(:,i)=N(:,i);
end
h=h/2;
N1=2*N1;
N2=2*N2;
N3=2*N3;
N4=2*N4;
end

```

### ***En dimension 5***

L'algorithme ci-dessous (Matlab) construit une spline mixte de 3 morceaux.

L'entrée est la matrice des points de contrôle, la sortie la matrice des points de la courbe limite.

Les commentaires sont précédés du symbole %.

```

taille=13;    %taille= N1+N2+N3+N4+4 (taille de la matrice M)
h=1;    %intervalle inter-nœuds
it=5;    % Nombre d'itérations
N1=3;    % taille en intervalles de chacune des parties
N2=3;
N3=4;
h=h/2;

for j=1:it

```

```

for i=1:N1+1
    v=1;      % cas polynomial
    u=1;      % cas polynomial
    %u=cosh(3*h);    % cas hyperbolique
    A=(1+2*u+2*v)/(4*(1+u)*(1+v));
    B=(2+2*u+2*v+4*u*v)/(4*(1+u)*(1+v));
    C=1/(4*(1+u)*(1+v));
    N(:,2*i-1)=A*M(:,i)+B*M(:,i+1)+C*M(:,i+2);
    N(:,2*i)=C*M(:,i)+B*M(:,i+1)+A*M(:,i+2);
end

for i=2+N1:N1+N2+1
    v=cosh(6*h);
    %v=1;
    u=cosh(7*h);
    %u=1;
    A=(1+2*u+2*v)/(4*(1+u)*(1+v));
    B=(2+2*u+2*v+4*u*v)/(4*(1+u)*(1+v));
    C=1/(4*(1+u)*(1+v));
    N(:,2*i-1)=A*M(:,i)+B*M(:,i+1)+C*M(:,i+2);
    N(:,2*i)=C*M(:,i)+B*M(:,i+1)+A*M(:,i+2);
end

for i=2+N1+N2:N1+N2+N3+2
    %v=cos(1*h);
    v=1;
    %u=cos(2*h);
    u=1;
    A=(1+2*u+2*v)/(4*(1+u)*(1+v));
    B=(2+2*u+2*v+4*u*v)/(4*(1+u)*(1+v));
    C=1/(4*(1+u)*(1+v));
    N(:,2*i-1)=A*M(:,i)+B*M(:,i+1)+C*M(:,i+2);
    N(:,2*i)=C*M(:,i)+B*M(:,i+1)+A*M(:,i+2);
end

taille=2*(N1+N2+N3+2);
for i=1:taille
    M(:,i)=N(:,i);

```

```
end
h=h/2;
N1=2*N1;
N2=2*N2;
N3=2*N3;
end
```

## INDEX DES TERMES UTILISÉS

Algorithme de de Boor . . . . .	51
Algorithme de de Casteljau relativement à $[a, b]$ . . . . .	28
Argument d'une étiquette . . . . .	21
Base de Bernstein relativement à l'intervalle $[a, b]$ . . . . .	17
Base de Bernstein de $\mathcal{E}$ relativement à l'intervalle $[a, b]$ . . . . .	106
Base de de Boor . . . . .	51
Base de type Bernstein . . . . .	154
Bon pour le design (espace) . . . . .	103
Courbe de Bézier relativement à l'intervalle $[a, b]$ . . . . .	17
Courbe non dégénérée . . . . .	38
Courbe paramétrée par l'espace $\mathcal{E}$ . . . . .	16
Courbe polynomiale de degré $n$ . . . . .	16
Courbe spline dans $\mathbb{R}^d$ . . . . .	167
CW-système . . . . .	38
Enveloppe convexe . . . . .	41
Espaces circulaires . . . . .	100
Espace de Chebyshev . . . . .	101
Espace de Chebyshev généralisés (EC-espaces) . . . . .	101
Espace fleuri . . . . .	105
Étiquettes consécutives associées à une suite d'arguments . . . . .	24
Étiquette d'un point . . . . .	21
Floraison d'une courbe paramétrée par un espace $\mathcal{E}$ . . . . .	105
Floraison d'une courbe polynomiale de degré $n$ . . . . .	21
Floraison d'une fonction . . . . .	21
Fonction de raffinement . . . . .	78
Fonctions poids . . . . .	154
Forme polaire d'un polynôme . . . . .	19
Hyperplan osculateur . . . . .	38
Longueur critique associée à un espace . . . . .	100
Masque de subdivision . . . . .	77
Matrice décalée d'ordre $k$ . . . . .	76
Matrice de raffinement . . . . .	77
Plan osculateur . . . . .	38

Points de Bézier . . . . .	17
Points de contrôle de $\mathcal{F}$ relativement à la base $(U_0, \dots, U_n)$ . . . . .	16
Points de de Boor . . . . .	52
Pôles d'une courbe spline . . . . .	60
Polygone de contrôle de $\mathcal{F}$ relativement à la base $(U_0, \dots, U_n)$ . . . . .	16
Polynômes de Bernstein relativement à l'intervalle $[a, b]$ . . . . .	17
Polynômes de Chebyshev . . . . .	110
Schéma de subdivision . . . . .	76
Spline polynomiale . . . . .	60
Variété osculatrice d'ordre $k$ . . . . .	38
Wronskiens . . . . .	167

## NOTATIONS LES PLUS UTILISÉES

$\mathcal{E}$  est un espace vectoriel de dimension finie de fonctions  $C^\infty(\mathbb{R})$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

$\mathbb{P}^n$  est l'espace, de dimension  $n + 1$ , des polynômes de degré  $\leq n$ .

$F$  est une fonction de  $\mathcal{E}$  définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ,

$f$  est alors sa floraison associée.

$\mathcal{F}$  est une courbe paramétrée par  $\mathcal{E}$ , c'est à dire une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^d$  dont chacune des  $d$  composantes est une fonction appartenant à  $\mathcal{E}$ ,

$\phi$  est alors sa floraison associée.

$\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  ou  $\begin{Bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{Bmatrix}$  est un point de  $\mathbb{R}^d$ .

♣ désigne une suite finie de réels.

$\{0^{[n-i]}, 1^{[i]}\}$  est une écriture qui indique que l'argument 0 est répété  $n - i$  fois et que l'argument 1 est répété  $i$  fois.

$T^k(a)$  est une variété osculatrice la courbe  $\mathcal{F}$  d'ordre  $k$  tangente au point d'abscisse  $a$ .

$[t_1, \dots, t_n]$  est une base définie via les floraisons par les arguments (nombres réels)  $t_1, \dots, t_n$ .